ESPACIOS METRICOS

Abel Camacho Galván
Profesor de la Sección de Matemáticas
de la D.E.P.F.I., UNAM

2284

CONTENIDO

FIGURAS

1.1 INTRODUCCION

El concepto de métrica es una de las piedras angulares dentro de las matemáticas creado por la necesidad de calcular la distancia que media entre dos "puntos" dados. Pero este problema, en apariencia tan sencillo, no siempre puede resolverse tomando una regla o instrumento topográfico y haciendo las mediciones correspondientes. Así, por ejemplo, más útil nos resulta saber aproximadamente cuánto tiempo nos lleva trasladarnos de nuestro hogar a nuestro lugar de trabajo que conocer, aún cuando fuese con gran exactitud, la distancia en metros y centímetros medida en línea recta sobre las construcciones u otros obstáculos que pudieran presentarse. En este sentido podemos decir que la "distancia" entre dichos puntos es de 30 minutos.

Si por ejemplo, se desea construir una carretera que una la ciudad A con la ciudad B y se tienen en cuenta los recursos económicos, entonces es claro que no interesa tanto conocer la longitud de la carretera como su costo; y así podemos decir con la misma propiedad que la distancia entre A y B es de x millones de pesos. Ahora si estamos interesados en desarrollar por series alguna función matricial y dicha serie es convergente, entonces el número de iteraciones depende de la aproximación deseada. Esta aproximación se puede determinar, desde luego, calculando la "distancia" entre dos matrices. Así podríamos seguir indefinidamente presentando ejemplos que nos mostrasen la necesidad de encontrar los elementos comunes a todos estos problemas, y por medio de ellos, generalizar el concepto de distancia. A Frechet correspondió el honor de haber realizado el primero tal trabajo. En otras palabras, nos avocaremos a enunciar ciertas reglas o normas, las cuales nos permitirán calcular la "distancia" entre dos elementos arbitrarios pertenecientes a un cierto conjunto dado. Como estas reglas serán presentadas en forma axiomática, resulta claro que se podrán encontrar tantas distancias distintas como interpretaciones distintas existan, pero aclaramos que todas estas métricas, mantendrán como común denominador aquellos conceptos básicos con los cuales nos hemos venido familiarizando al trabajar con la recta real, el plano y el espacio tridimensional. Al implementar en un conjunto dado una métrica, se introduce no tan sólo un método que nos permite medir longitudes y ángulos; si no que, además, como se verá, haciendo uso de dichos conceptos, se puede definir lo que es un conjunto abierto, base y fundamento del análisis matemático. Aquí consideramos oportuno señalar que a menudo utilizaremos el concepto de espacio vectorial como un auxiliar para ilustrar ejemplos y hacer más comprensibles los métodos deductivos. Las letras R y C nos representarán, como es usual, los conjuntos de los números reales y complejos respectivamente. R^+ denotará al conjunto de los reales extendidos, es decir $R^+=R\cup\{-\infty,\infty\}$ y R^n denotará a su vez al producto cartesiano cuando se ha tomado a R n veces como factor, pudiendo decirse lo mismo para C^n. Puesto que los conjuntos R^n y C^n forman un espacio vectorial sobre el campo C, a los elementos de dichos conjuntos los llamaremos vectores, si $x\varepsilon R^n$ y $u\varepsilon c^n$, entonces x y u serán vectores y como se acostumbra usaremos la siguiente notación: $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $u=(u_1,\ldots,u_n)$ donde $x_i\varepsilon R$ y $u_i\varepsilon C$ para $i=1,2,\ldots,n$.

A menos que se indique otra cosa, siempre que nos refiramos al producto interior entre vectores, nos estaremos refiriendo al producto interior ordinario definido para $x=(x_1,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,\ldots,y_n)$ donde $x,y\varepsilon R^n$ por

$$x\cdot y=x_1y_1+\ldots+x_ny_n \tag{1.1.1}$$

y para $u=(u_1,\ldots,u_n)$ y $v=(v_1,\ldots,v_n)$ donde $u,v\varepsilon C^n$ por

$$u\cdot v=u_1\cdot\bar{v}_1+u_2\cdot\bar{v}_2+\ldots+u_n\bar{v}_n \tag{1.1.2}$$

Como es de suponerse, las normas serán definidas por las siguientes expresiones:

$$|x|=\sqrt{x\cdot x}\ ;\quad x\varepsilon R^n \tag{1.1.3}$$

$$|u|=\sqrt{u\cdot u}\ ;\quad u\varepsilon C^n \tag{1.1.4}$$

Al enunciar los teoremas, y siempre que los consideremos conveniente, señalaremos la hipótesis por medio de la letra H, y en caso de ser varias, se numerarán progresivamente. En cambio a la conclusión la señalaremos por medio de letra C y en caso de ser varias, también serán numeradas.

1.2 DEFINICION DE ESPACIO METRICO EJEMPLOS Y TEOREMAS

Como se indicó en la sección anterior, procederemos a definir el concepto de distancia o métrica de modo tal que a la vez que se preserva nuestra concepción intuitiva al respecto, nos permite generalizar y extender dicho concepto hacia los más variados campos.

DEFINICION 1.2.1

Sean X un conjunto no vacio y D una función tal que $D:X\cdot X\to R$. Entonces diremos que D es una métrica en X y que la pareja ordenada $U=\langle X,D\rangle$ es un <u>espacio</u> <u>métrico</u> si se satisfacen los siguientes cuatro axiomas:

A1): Para toda $x,y\varepsilon X$, $D(x,y)\geq 0$
A2): Para toda $x,y\varepsilon X$, $D(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$
A3): Para toda $x,y\varepsilon X$, $D(x,y)=D(y,x)$
A4): Para toda $x,y,z\varepsilon X$, $D(x,z)\leq D(x,y)+D(y,z)$

A los elementos del conjunto X se les suele llamar <u>puntos</u>, y así se dice que X constituye nuestra reserva de puntos. Además aclaramos que cuando no exista confusión posible, denotaremos el espacio métrico por medio de la letra X.

Los axiomas A1) y A2) nos señalan que D es semidefinida positiva; el axioma A3) que D es simétrica, y por último el axioma A4), llamado axioma triangular nos indica que rige la desigualdad del triángulo, o equivalentemente, que la distancia más corta entre dos puntos dados queda establecida por medio de la recta que los une.

Obsérvese que esta definición le asigna a cada par de elementos del conjunto X un número real no negativo. Así por ejemplo si $X=R^2$, entonces $D\left[(x_1,y_1),(x_2,y_2)\right]$ será ó bien 0 en cuyo caso se tendrá que $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, ó bien un número positivo y en este caso $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$.

EJEMPLO 1.2.1

Sea X un conjunto arbitrario no vacío y $D_o:X.X\to R$ definida por

$$D_o(x,y) \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

entonces $U_o=<X,D_o>$ es un espacio métrico.

Demostración:

A1)-A3): Es inmediata su verificación.

A4): Subdividiremos la demostración en los siguientes casos:

Caso 1): Sea $x=z$, luego $D_o(x,z)= 0$ según el axioma A2) y $D_o(x,z)\leq D_o(x,y)+D_o(y,z)$ pues la función D_o es semidefinida positiva.

Caso 2): Sea $x\neq z$, luego $x\neq y$ ó $y\neq z$ de donde si $D_o(x,z)= 1$, entonces $D_o(x,y)= 1$ ó $D_o(y,z)= 1$ y por supuesto $D_o(x,z)\leq D_o(x,y)+D_o(y,z)$.

Esta métrica D_o es llamada el espacio de puntos aislados.

Ejemplo 1.2.2

Sea Δ_k un alfabeto compuesto de k símbolos distintos y X el conjunto de eneadas formadas con elementos de Δ_k, es decir $X=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_i\varepsilon\Delta_k, i=1,2,\ldots,n\}$ y sea la función $D:X\cdot X\to R$ definida por $D(x,y)=$

$\sum_{i=1}^{n} D_o(x_i,y_i)$ donde a la función $D_o:\Delta_k\cdot\Delta_k\to R$ se le define según el

ejemplo anterior, luego la pareja ordenada $<X,D>$ es un espacio métrico.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración.

Esta métrica es usada en teoría de la información para cuantificar la <u>distorsión</u> que sufren los mensajes durante el proceso de su transmisión. Así, por ejemplo si n=4 y nuestro alfabeto lo constituye el conjunto $\Delta_2=\{0,1\}$, entonces 1001 y 1011 serán dos palabras de nuestro sistema y la distancia entre ellas será: $D[(1001),(1011)]=D_o(1,1)+D_o(0,0)+D_o(0,1)+D_o(1,1)=0+0+1+1=1$.

DESIGUALDADES DE CAUCHY Y DEL TRIANGULO

Antes de presentar el siguiente ejemplo, haremos una pequeña digresión para comentar y deducir, previa ilustración geométrica, dos desigualdades las cuales usaremos con frecuencia al analizar, para el caso de algunas métricas, el axioma triangular. El lector recordará que en R^2 se demuestra cuando θ es el ángulo formado por los vectores x e y que $x.y=|x|.|y|\cos\theta$ y como $|\cos\theta|\leq 1$ entonces obviamente se tiene se tiene

$$|x\cdot y|\leq|x|\cdot|y| \tag{1.2.1}$$

Si ahora hacemos $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$ entonces, según (1.1.1) y (1.1.3) por (1.2.1) se llega a

$$x_1y_1+x_2y_2\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2} \tag{1.2.2}$$

donde por supuesto rige la igualdad si y sólo si $|\cos\theta|=1$, es decir si los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son paralelos o equivalentemente si y sólo si

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2} \tag{1.2.3}$$

cuando $y_1,y_2\neq 0$.

Análogamente, en R^3 se tiene

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2} \tag{1.2.4}$$

donde rige la igualdad si y sólo si

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3} \tag{1.2.5}$$

cuando $y_1, y_2, y_3 \neq 0$.

Las expresiones (1.2.2) y (1.2.4) son casos particulares de la llamada desigualdad de Cauchy y si hasta aquí hemos hecho depender la validez de dichas proposiciones de las definiciones de producto interior y norma de un vector ha sido con el objeto de proporcionar una interpretación geométrica a las mismas, pero como demostraremos a continuación son de hecho independientes de tales conceptos. La expresión (1.2.1) establecida para R^2 nos siguiere la generalización de las desigualdades (1.2.2) y (1.2.4). Así pues, si en (1.2.1) hacemos $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\bar{y}=(y_1, \ldots, y_n)$, tendremos el siguiente

TEOREMA 1.2.1

H:1) Sean $x_i, y_i \varepsilon R, i=1,2,\ldots,n$.

$$C{:}1)\ \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad (1.2.6)$$

y rige la igualdad si y sólo si

$$x_i y_j = x_j y_i ; i,j=1,2,\ldots,n. \qquad (1.2.7)$$

o sea equivalentemente si y sólo si

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} \qquad (1.2.8)$$

cuando sea el caso de que $y_i \neq 0$; $i=1,2,\ldots,n$.

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ observando que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$ es un término no-negativo; obviamente rige la igualdad si y sólo si $x_i y_j = x_j y_i$.

Empleando la desigualdad de Cauchy nos resulta ahora bastante cómodo efectuar la demostración del siguiente teorema conocido como la "desigualdad del triángulo".

TEOREMA 1.2.2

H:1) Sean $x_i, y_i \varepsilon R$,; $i=1,2,\ldots,n$.

C:1) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad (1.2.9)$$

donde rige la igualdad si y sólo si para alguna k no-negativa e $i=1,2,\ldots,n$. se tiene que $x_i=ky_i$ ó bien $y_i=kx_i$.

Demostración:

Tal vez la forma más sencilla de demostrar el teorema consiste en elevar al cuadrado el término izquierdo de la desigualdad (1.2.9) y desarrollándolo tratar de obtener a partir de él una desigualdad equivalente a la buscada. Según esto se tendrá

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

y de aquí de acuerdo con (1.2.6)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

se tiene finalmente que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 \leq \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right]^2$$

Por supuesto que rige la igualdad en (1.2.9) si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

esto es si y sólo si los términos $x_i y_i$ son no negativos, y además se tiene por el Teorema 1.2.1 que para $i,j=1,2,\ldots,n$.

$$x_i y_j = x_j y_i$$

Por último antes de continuar presentando ejemplos sobre espacios métricos y con el objeto de simplificar la notación, nos permitiremos enunciar la siguiente

DEFINICION 1.2.2

Sean n un número entero positivo y $p \in R^+$ tal que $p \geq 1$, se define a la función $D^n_p : R^n . R^n \to R$ donde $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ por

$$D^n_p(x,y)=\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1\leq p<\infty \\ \max\limits_{1\leq i\leq n} \{|x_i-y_i|\} & \text{si } p=\infty \end{cases}$$

EJEMPLO 1.2.3

Sea $u^n_2=\langle R^n, D^n_2\rangle$, entonces U^n_2 es un espacio métrico.

DEMOSTRACION

A1)-A3) Es inmediata su verificación.

A4) Sean $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_i,y_2,\ldots,y_n)$ y $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ elementos arbitrarios de R^n; si para $i=1,2,\ldots,n$ definimos continuación a a_i y a b_i por

$$a_i = x_i - y_i \qquad (1.2.10)$$

$$b_i = y_i - z_i \qquad (1.2.11)$$

entonces tendremos que

$$a_i+b_i=x_i-z_i \tag{1.2.12}$$

Por otra parte, según (1.2.9) sabemos que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}} \tag{1.2.13}$$

y de aquí aplicando (1.2.10), (1.2.11) y (1.2.12) se llega a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2} \tag{1.2.14}$$

de donde por la Definición (1.2.2) cuando p=2 se obtiene finalmente, como se deseaba,

$$D_2^n(x,z)\leq D_2^n(x,y)+D_2^n(y,z) \tag{1.2.15}$$

observamos que en (1.2.15) rige la igualdad sí y sólo si

$$\frac{x_1-y_1}{y_1-z_1}=\frac{x_2-y_2}{y_2-z_2}=\ldots=\frac{x_n-y_n}{y_n-z_n}=k$$

donde k es no negativa e $y_i-z_i\neq 0$, i=1,2,...,n, es decir, rige la igualdad sí y sólo si los vectores x-y e y-z no tan sólo son paralelos sino que además tienen la misma dirección.

Si hacemos n=1, entonces según la Definición 1.2.2 tendremos

$$D_2^1(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|$$

llegando así a una métrica con la cual nos familiarizamos bastante cuando trabajamos con eje real.

Si hacemos ahora n=2, entonces para $x=(x_1,x_2)$ e $x=(y_1,y_2)$ se tendrá

$$D_2^2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

Es decir, estamos en presencia del espacio R^2, ya conocido por nosotros. Para valores de $n>3$ tendremos espacios los cuales ya no es posible concebirlos por medio de nuestra intuición, pero a pesar de ello hemos demostrado que sus propiedades métricas son análogas a las propiedades métricas de los espacios R^1, R^2 y R^3. Al espacio U_2^n se le suele llamar <u>espacio métrico euclideano n-dimensional.</u>

Ejemplo 1.2.4

Sea $U_\infty^n = \langle R^n, D^n_\infty \rangle$, entonces U_∞^n es un espacio métrico.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración.

Entre las posibles aplicaciones para esta métrica se cuenta su empleo en ciertos tipos de estudios socioeconómicos donde se estima la "distancia social" entre dos personas de acuerdo a sus respectivos ingresos y egresos como se ilustra en las siguientes Figuras (1.2.1 y 1.2.2)

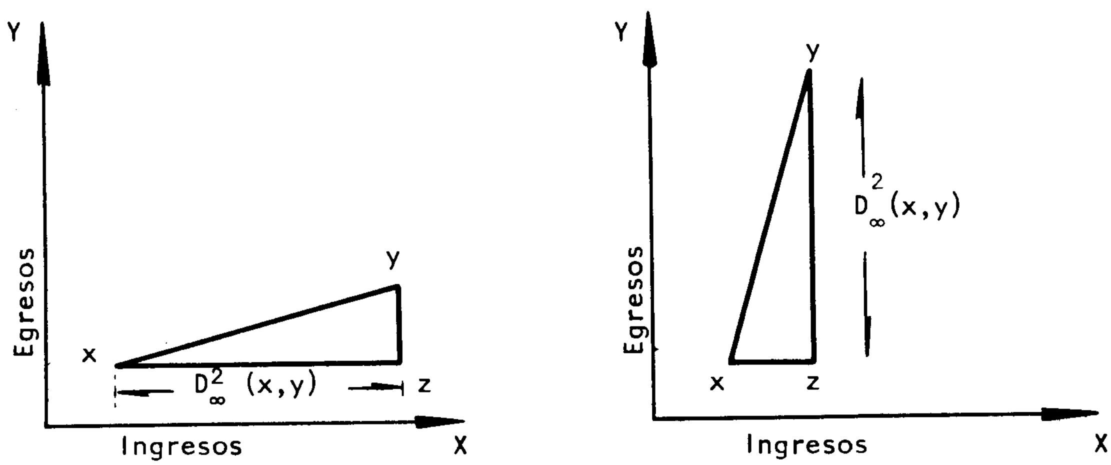


Fig. 1.2.1 Fig. 1.2.2

En la Figura 1.2.1 tenemos representado el caso de dos puntos x e y los cuales corresponden a dos personas, una con bajo ingreso y la otra con ingreso alto. Obsérvese que ambas personas tienen casi los mismos egresos, a pesar de ello, su "distancia social" es grande y está mostrada en la gráfica por medio de la base x z del triángulo. En cambio, en la Figura 1.2.2 se muestra el caso de dos personas, una con bajo egreso a la que corresponde el punto x;y otra con egreso elevado a la que le corresponde el punto y. Obsérvese que ambas personas tienen casi los mismos ingresos, a pesar de ello, su "distancia social" es grande y está mostrada en la gráfica por medio de la altura z y del triángulo.

En los ejemplos 1.2.3 y 1.2.4 hemos visto que cuando $p=2$ ó $p=\infty$, entonces D_p^n es una métrica en R^n, y una vez hecha esta observación no podemos menos que formular la siguiente pregunta ¿existirán otros valores de p dentro del dominio de la Definición 1.2.2 para los cuales D_p^n resulte ser también una métrica en R^n?. Para contestarla, deberemos antes familiarizarnos con dos desigualdades

DESIGUALDADES DE HOLDER Y DE MINKOWSKY

Sea la función $y=x^{p-1}$ donde $p>1$; si $x\geq 0$, entonces $y\geq 0$ y la función $x=y^{\frac{1}{p-1}}$ será bien definida. Si ahora hacemos $\frac{1}{p-1}=q-1$ los números p y q cumplen la condición

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1.2.16}$$

sujeta a $p>1$ y $q>1$. Consideremos a continuación la gráfica de la función $y=x^{p-1}$ como $p-1>o$ la función es **cóncava** tal y como se muestra en la Figura 1.2.3

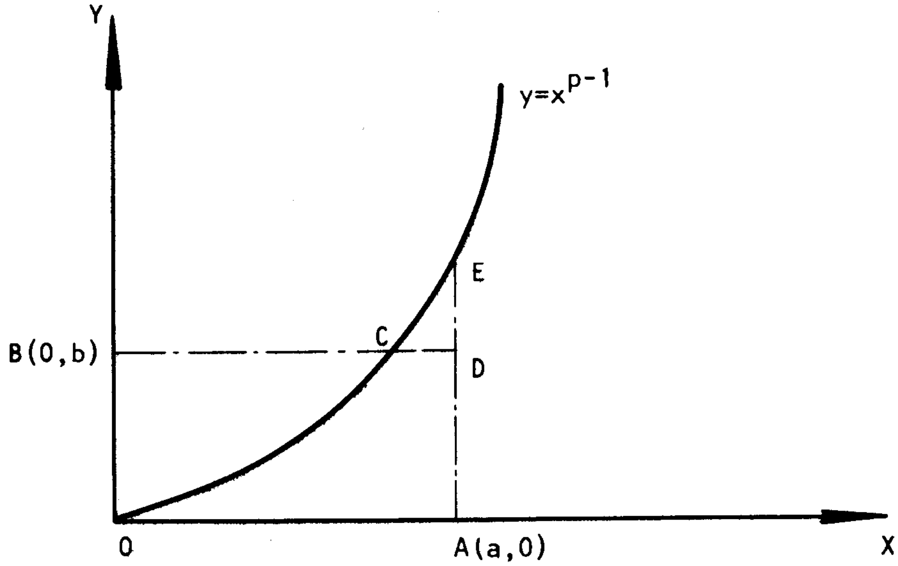


Fig. 1.2.3

Cuando las coordenadas de los puntos A y B son respectivamente (a,0) y (0,b), entonces el área del triángulo curvilíneo OAE es

$$\int_0^a x^{p-1}dx = \frac{a^p}{p}$$

y análogamente el área del triángulo curvilíneo OBC es

$$\int_0^b y^{q-1}dy = \frac{b^q}{q}$$

además, como el área del rectángulo OABD es ab del análisis de la Figura 1.2.3. se hace evidente que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (1.2.17)$$

y rige la igualdad cuando el área del triángulo curvilíneo CDE es nula, es decir cuando $a^p = b^q$

Si definimos ahora para $i=1,2,\ldots,n$

$$a_i=\frac{x_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right]^{1/p}} \qquad b_i=\frac{y_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right]^{1/q}} \tag{1.2.18}$$

y les aplicamos (1.2.17) se tendrá

$$\frac{x_i y_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right]^{1/p} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right]^{1/q}} \leq \frac{x_i^p}{p\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \frac{y_i^q}{q\sum_{i=1}^{n} y_i^q} \tag{1.2.19}$$

de donde al sumar estas desigualdades, se obtiene

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right]^{1/p} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right]^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \frac{1}{q}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q} = 1$$

y de aquí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right]^{1/p} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right]^{1/q} \tag{1.2.20}$$

esta desigualdad se obtuvo como se recordará para $x_i, y_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Luego, para los valores arbitrarios x_i e y_i se tiene en consecuencia el siguiente teorema que lleva el nombre de la desigualdad de Hölder.

TEOREMA 1.2.3

H:1) $x_i, y_i \varepsilon R$, $i=1,2,...,n$

2) Sean $p, q \varepsilon R$ tales que $p,q>1$ y sujetas a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C:1) $$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right]^{1/q} \qquad (1.2.21)$$

donde rige la igualdad si y sólo si

$$\frac{|x_1|^p}{|y_1|^q} = \frac{|x_2|^p}{|y_2|^q} = \cdots = \frac{|x_n|^p}{|y_n|^q} \qquad (1.2.22)$$

cuando $y_i \neq o$, $i=1,2,3,...n$.

Aprovechamos la oportunidad para apuntar que también se cumple la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right]^{1/p} \qquad (1.2.23)$$

cuando se satisfacen las hipótesis del teorema anterior.

Si en el Teorema 1.2.3 hacemos $p=q=2$ se obtiene el Teorema 1.2.1 o sea que la desigualdad de Cauchy es sólo un caso particular de la desigualdad de Hölder.

En este punto conviene recordar como usando la desigualdad de Cauchy obtuvimos la desigualdad del triángulo, y si reflexionamos además un poco sobre el hecho de que la desigualdad de Hölder es una generalización de la desigualdad de Cauchy, entonces no podemos menos que sentirnos retados a intentar generalizar la desigualdad del triángulo. Dicha generalización es conocida como la Desigualdad de Minkowsky y la presentamos en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.4

H:1) Sean $x_i, y_i \varepsilon R$, $i=1,2,\ldots,n$

2) Sea $p \varepsilon R$ tal que $p \geq 1$

$$C:1)\ \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1.2.24)$$

donde rige la igualdad si y sólo si

$$\frac{|x_1|}{|y_1|} = \frac{|x_2|}{|y_2|} = \cdots = \frac{|x_n|}{|y_n|} \qquad (1.2.25)$$

Demostración:

Caso 1) Si $p=1$, el teorema es inmediato a partir del problema 1.2.1 a).

Caso 2) Sea ahora $p>1$, luego puesto que

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} \qquad (1.2.26)$$

y como por otra parte, según Hölder, se tienen las dos desigualdades siguientes

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \qquad (1.2.27)$$

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \qquad (1.2.28)$$

donde se elige a q de modo que $q>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; de aquí, al sustituir (1.2.27) y (1.2.28) en (1.2.26) se desemboca en

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right]^{1/q}$$

y dividiendo ambos términos de la desigualdad entre

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right]^{1/q}$$

se llega finalmente a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

al sustituir 1-q por $\frac{1}{p}$ y (p-1)q por p.

Las condiciones para las cuales rige la igualdad en el teorema son inmediatas a partir de (1.2.22), (1.2.27) y (1.2.28).

Como el lector ya lo habrá sospechado, la desigualdad de Minkowsky nos permitirá abordar la discusión del axioma triangular en el caso de la métrica D_p^n donde p toma ahora todos los valores posibles dentro del dominio de la Definición 1.2.2

Ejemplo 1.2.5

Sea $U_p^n = \langle R^n, D_p^n \rangle$, donde p se mantiene dentro del dominio de la Definición 1.2.2, entonces U_p^n es un espacio métrico.

Demostración:

A1)-A3) Su verificación es inmediata

A4) Caso 1). Si $p=\infty$, entonces según el ejemplo 1.2.4 U_∞^n es un espacio métrico .

Caso 2), Para $1 \le p < \infty$ la demostración es análoga a la presentada en el Ejemplo 1.2.3 donde en lugar de la desigualdad (1.2.13) usamos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |p_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1.2.29)$$

y de aquí según las ecuaciones (1.2.10) y (1.2.11) se llega finalmente a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^p\right)^{1/p} \tag{1.2.30}$$

Cuando p=1 se suele llamar a la función D_p^n, la métrica de la ciudad y el porqué de ello se hace evidente si hacemos n=2, $\bar{x}=(x_1,x_2)$ e $\bar{y}=(y_i,y_2)$; pues la distancia de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ será

$$D_1^2\left[(x_1,x_2),(y_1,y_2)\right] = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

Por supuesto que esta fórmula nos sirve para calcular la distancia existente entre dos cruceros de una ciudad formada por cuadros rectangulares cuando nos trasladamos por sus calles, cuando se tienden redes telefónicas, redes de agua potable, etc. etc.

Más adelante, al tratar el concepto de límite, demostraremos que si consideramos a la función D_p^n como una función de parámetro p, entonces

$$\lim_{p\to\infty} D_p^n(x,y)=D_\infty^n(x,y)$$

A la luz del ejemplo anterior, hemos visto que para todos los valores posibles de p dentro del dominio de la Definición 1.2.2, la función D_p^n es una métrica en R^n, y de aquí, por supuesto, resulta comprensible que se tenga curiosidad por averiguar si es posible extender el dominio de dicha definición para valores de p menores que 1, naturalmente con la restricción de seguir manteniendo a la función D_p^n como una métrica en R^n. No deseando privar al lector del placer de investigarlo por sí mismo le dejamos tal trabajo como ejercicio.

EJEMPLO 1.2.6

Sea C el conjunto de las funciones reales y contínuas en el intervalo $[a,b]$ y sea la función D_c:C.C->R definida por $D_c(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|: x\in[a,b]\}$, entonces $U_c=\langle C,D_c\rangle$ es un espacio métrico.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración.

Entre las posibles aplicaciones para esta métrica podemos mencionar la siguiente. Sean f y g dos funciones, las cuales nos indican las variaciones al través del tiempo de las intensidades de dos corrientes eléctricas en un cierto circuito, entonces la función D_c nos capacita para calcular la máxima diferencia entre ellos y así podremos tomar las medidas de seguridad pertinentes para proteger al circuito. (ver Fig. 1.2.4)

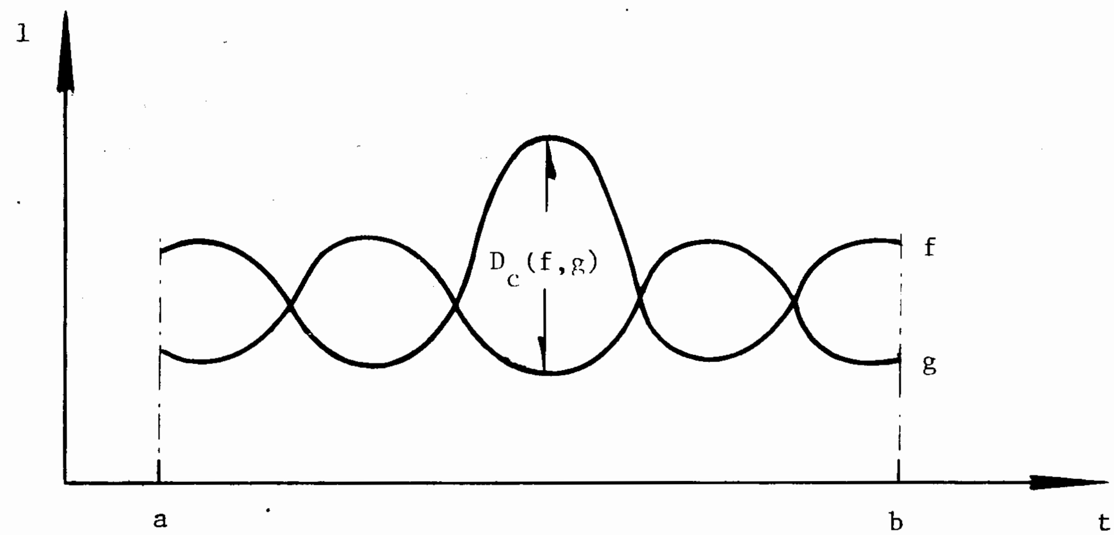


Fig. 1.2.4

EJEMPLO 1.2.7

Sea C de nuevo el conjunto de las funciones reales y contínuas en el intervalo $[a,b]$ y sea la función D_s:C.C->R definida por

$$D_s(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx,$$

entonces $U_s= <C,D_s>$ es un espacio métrico.

Demostración:

Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración.

Si en el ejemplo anterior la distancia entre los "puntos" f y g la calculamos determinando la máxima separación entre las funciones f y g en el intervalo $[a,b]$, en cambio en el presente ejemplo la distancia entre dichos "puntos" se conoce determinando al área comprendida entre las funciones f y g, cuando dichas funciones nos dicen cómo varían al través del tiempo dos voltajes en un circuito eléctrico. (ver Fig. 1.2.5)

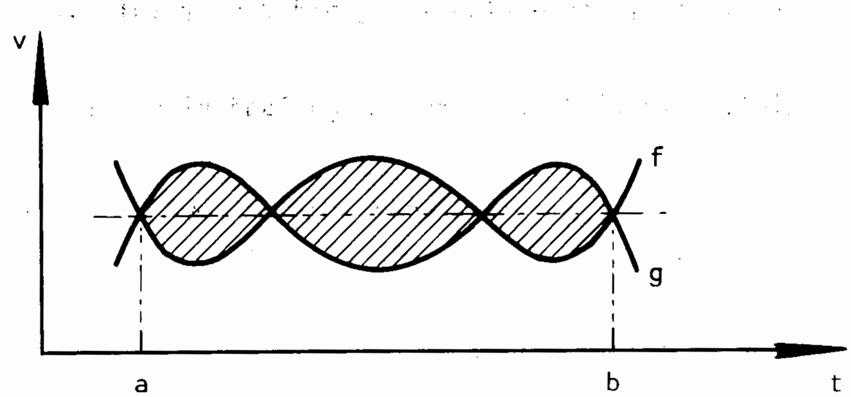


Fig. 1.2.5

DEFINICION 1.2.3

Sean U= <X,D> un espacio métrico y $X' \subseteq X$ y $D'=D|X'$, es decir D' es la restricción de la función D respecto al conjunto X'; entonces se dice que la pareja ordenada $U' = \langle X', D' \rangle$ es un subespacio métrico.

Con el auxilio de esta Definición es posible generar nuevos espacios métricos pues, como se puede demostrar fácilmente, un subespacio métrico es a su vez un espacio métrico.

EJEMPLO 1.2.8

Sean el espacio métrico $U_2^3 = \langle R^3, D_2^3 \rangle$ y el conjunto $X' = \{(x_1, x_2, o) : x_1 x_2 \varepsilon R\}$, entonces puesto que $X' \subseteq R^3$ se tiene en consecuencia $\langle X', D_2^3 \rangle$ es un subespacio métrico de $\langle R^3, D_2^3 \rangle$.

Como los conjuntos X' y R^2 son isomorfos, podemos decir también, en este sentido, que R^2 es un subespacio de R^3.

PROBLEMAS DE LA SECCION 1.2

1.2.1 Demuestre que para toda $x,y\varepsilon R$ se tiene

a) $|x+y|\leq|x|+|y|$ donde rige la igualdad si y sólo si $xy\geq 0$.

b) $||x|-|y||\leq|x-y|$ donde rige la igualdad si y sólo si $xy\geq 0$.

1.2.2 Desarrollando las fórmulas dadas en la demostración del Teorema 1.2.1 verifique que

a) Para toda $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\ \varepsilon\ R$

$$x_1y_1+x_2y_2\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

donde rige la igualdad si y sólo si

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}\quad \text{cuando } y_1,y_2\neq 0$$

b) Para toda $x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3\ \varepsilon\ R$

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

donde rige la igualdad si y sólo si

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}\quad \text{cuando } y_1,y_2,y_3\neq 0$$

1.2.3 Demuestre que para toda $x_i,y_i\varepsilon R$, $i=1,2,\ldots,n$ se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

1.2.4 Efectúe la demostración pedida en el Ejemplo 1.2.2

1.2.5 Efectúe la demostración pedida en el Ejemplo 1.2.4

1.2.6 Efectúe la demostración pedida en el Ejemplo 1.2.6

1.2.7 Efectúe la demostración pedida en el Ejemplo 1.2.7

1.2.8 Demuestre que para toda $x_i, y_i \varepsilon R, i=1,2,\ldots n$ cuando $p,q>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q)^{1/q}$$

si y sólo si

$$\frac{|x_1|^p}{|y_1|^q}=\frac{|x_2|^p}{|y_2|^q}=\cdots=\frac{|x_n|^p}{|y_n|^q}$$ cuando $y_i \neq 0$, $i=1,2,\ldots n$.

1.2.9 Demuestre que para toda $x_i, y_i \varepsilon R$, $i=1,2,\ldots,n$, cuando $p\geq 1$

$$(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p)^{1/p} = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}$$

si y sólo si

$$\frac{|x_1|}{|y_i|}=\frac{|x_2|}{|y_2|}=\cdots=\frac{|x_n|}{|y_n|}$$

cuando $yi \neq 0$, $i=1,2,\ldots,n$.

1.2.10 Demuestre que para toda $x_i, y_i \varepsilon R$ cuando $p<1$, $p\neq 0$ se tiene que

$$(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|^p)^{1/p} \geq (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}$$

1.2.11 Sea la función $D_p^n : R^n . R^n \to R$ donde $p<1$, $p\neq 0$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ definida por

$$D_p^n(x,y) = (\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^p)^{1/p}$$

Diga si la pareja ordenada $U_p^n = \langle R^n, D_p^n \rangle$ es un espacio métrico.

1.2.12 Sean n un número natural mayor que 1 y x_i números reales no negativos para $i=1,2,\ldots n$, luego se sabe que para los valores de x_i la media geométrica es menor o igual que la media aritmética, es decir que

$$\prod_{i=1}^{n} x_1^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

a) A partir de esta desigualdad demuestre que para toda $x,y \geq 0$, cuando $p>1$, $q>1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se tiene que $x^{1/p}.y^{1/q} \leq \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$

b) Haciendo uso del inciso anterior, deduzca la desigualdad de Hölder.

1.2.13 Sean $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$ y $f(t)=|tx-y|^2$, $t\varepsilon R$

a) Encuentre el valor de t para el cual la función f(t) alcanza su valor mínimo.

b) Haciendo uso del inciso anterior, demuestre que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

1.2.14 Sean $x,y,z\varepsilon R^n$ y $c\varepsilon R$ demuestre que se satisfacen para D_2^n las siguientes condiciones llamadas respectivamente de homogeneidad e invarianza bajo la traslación.

a) $D_2^n(cx,cy)=|c|D_2^n(x,y)$

b) $D_2^n(x+z,y+z)=D_2^n(x,y)$

1.2.15 Sea la función $D:R^2.R^2\text{->}R$ definida por $D((x_1,x_2),(y_1,y_2))=D_1^1(x_1,y_1)+D_\circ(x_2,y_2)$

Demuestre que dicha función es una métrica en R^2 cuando las funciones D_1^1, y $D_\circ$ se definen según la Definición 1.2.2 y el Ejemplo 1.2.1 respectivamente.

1.2.16 Sea $U=\langle X,D\rangle$ un espacio métrico; demuestre que $U'=\langle X,D'\rangle$ es también un espacio métrico cuando se define a la función D' por

$$D'(x,y)=\min\{1,D(x,y)\} \text{ para toda } x,y\varepsilon X.$$

1.2.17 Para el Ejemplo 1.2.2 sea el alfabeto $U_2=\{0,1\}$ y $n=4$.

a) Describa por extensión al conjunto $X=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_i\varepsilon U_2, i=1,2,3,4\}$

b) Supóngase que durante el proceso de transmisión de las palabras del conjunto X, sólo es posible que cuando más se distorsione un dígito, y por tanto se decide definir al conjunto de las palabras comprensibles $H\subseteq X$ por la siguiente condición: $x,y\varepsilon H$ si y sólo si $D(x,y)=2$; cuando $x\neq y$

Describa por extensión al conjunto H

c) Enuncie algún algoritmo el cual nos permita detectar una palabra distorsionada durante la transmisión de un mensaje

1.2.18 Sean $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ y $H=\{(x,y):D^2_\infty((x_1,x_2),(x,y))=D^2_\infty((y_1,y_2),(x,y))\}$

Dibuje la gráfica del conjunto H cuando $(x_1,x_2)\neq(y_1,y_2)$

1.2.19 Sea <X,D> un espacio métrico y sean $x_1,x_2x_3,x_4\varepsilon X$. Demuestre la siguiente desigualdad conocida como desigualdad del cuadrilátero y de una interpretación geométrica para la misma

$$|D(x_1,x_2)-D(x_3,x_4)|\leq D(x_1,x_4)+D(x_2,x_3)$$

1.2.20 Sea <X,D> un espacio métrico y se define a la función $D':X.X\to R$ por

$$D'(x,y)=\frac{D(x,y)}{1+D(x,y)}$$

Demuestre que D' es una métrica en X

1.2.21 Sea C el conjunto de las funciones reales y continuas en el intervalo $[a,b]$ y sea la función $D:C.C\to R$ definida por la siguiente expresión

$$D(f;g)=\int_a^b \frac{|f(x)-g(x)\quad|}{1+|f(x)+g(x)|}\,dx$$

Demuestre que D es una métrica en C

1.1.22 Sean X un conjunto no vacío y D una función D:X.X->R la cual verifica los axiomas A2) y A4). Demuestre que D es una métrica en X

1.2.23 Sea $D_1, D_2, \ldots, D_n$ métricas en X, demuestre que la función D:X.X->R es también una métrica en X cuando se le define por

$$D(x,y)=\sum_{i=1}^{n} D_i(x,y),x,y\varepsilon X$$

1.2.24 Sean $<X,D_1>$y $<Y,D_2>$ dos espacios métricos, x, yεX y u, vεY, demuestre que $<X.Y,D>$ es un espacio métrico cuando a la función D:X.Y->R se le define por

a) $D((x,u),(y,v))=\text{máx}\{D_1(x,y),D_2(u,v)\}$

b) $D((x,u),(y,v))=\sqrt{D_1(x,y)^2+D_2(u,v)^2}$

c) $D((x,y),(y,v))=D(x,y)+D(u,v)$

1.3 VECINDADES

Muy frecuentemente sucede que en un cierto espacio métrico estamos interesados en considerar tan solo aquellos puntos situados relativamente cerca de otro punto dado con anterioridad; para establecer esta idea con mayor precisión daremos la siguiente definición.

DEFINICION 1.3.1

Sean $<X,D>$ un espacio métrico, x un punto de X y ε un número real positivo, entonces la vecindad de x con radio ε será

$$V_D(x,\varepsilon)=\{y\varepsilon X:\ D(x,y)<\varepsilon\} \tag{1.3.1}$$

y la vecindad reducida será

$$\mathring{V}_D(x,\varepsilon)=\{y\varepsilon X:0<D(x,y)<\varepsilon\} \tag{1.3.2}$$

Aquí cabe observar que en un cierto espacio métrico una vecindad queda establecida dados un punto x y el número positivo ε, así mismo se tiene que $\mathring{V}_D(x,\varepsilon)=V_D(x,\varepsilon)-\{x\}$; es decir, la vecindad reducida es la vecindad $V_D(x,\varepsilon)$ a la cual se le ha quitado el punto x. Nos permitimos aclarar que cuando no exista posibilidad de confusión respecto a la métrica empleada la vecindad será denotada simplemente por $V(x,\varepsilon)$

EJEMPLO 1.3.1

Sea el espacio métrico $<R^2,D_o>$, entonces la vecindad con centro x=(0,0) y radio ε=1 consta únicamente del punto (0,0) tal y como se ilustra en la siguiente Figura

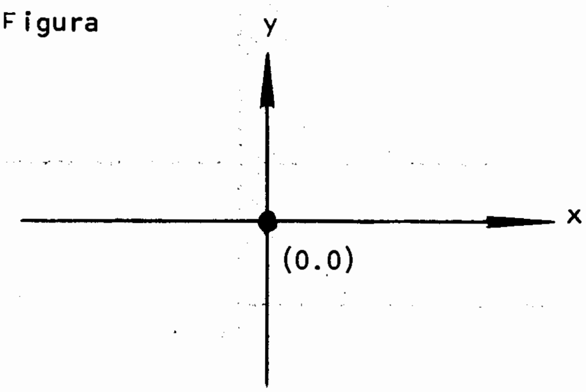


Fig. 1.3.1

en cambio si $\varepsilon>1$ se tiene que $V((0,0)\varepsilon)=R^2$

EJEMPLO 1.3.2.

Sea el espacio métrico $\langle R^2, D^2_1\rangle$, entonces la vecindad de $x=(0,0)$ con $\varepsilon=1$ será $V((0,0),1)=\{(x,y):|x|+|y|<1\}$ y tiene la siguiente gráfica

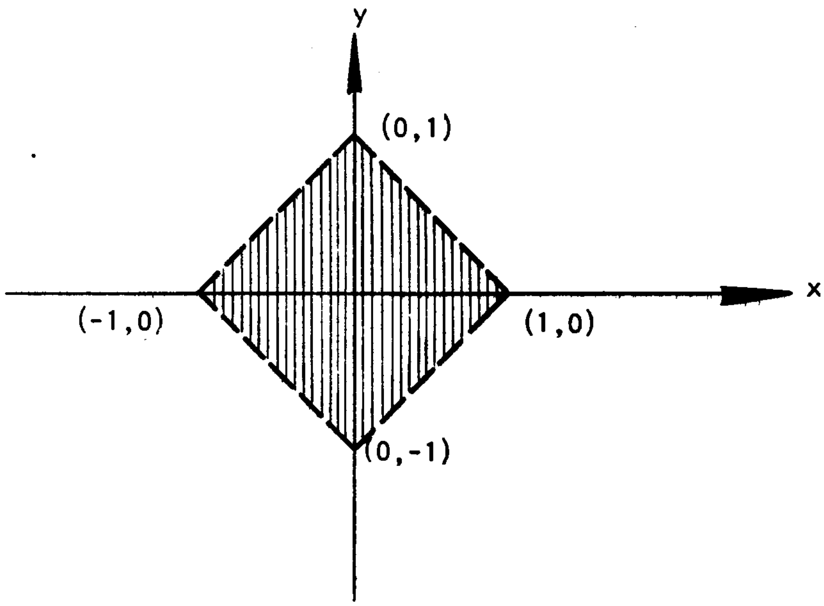


Fig. 1.3.2

EJEMPLO 1.3.3

Sea el espacio métrico $\langle R^2, D^2_\infty\rangle$, luego la vecindad del punto $x=(0,0)$ con radio $\varepsilon=1$ presenta la siguiente gráfica

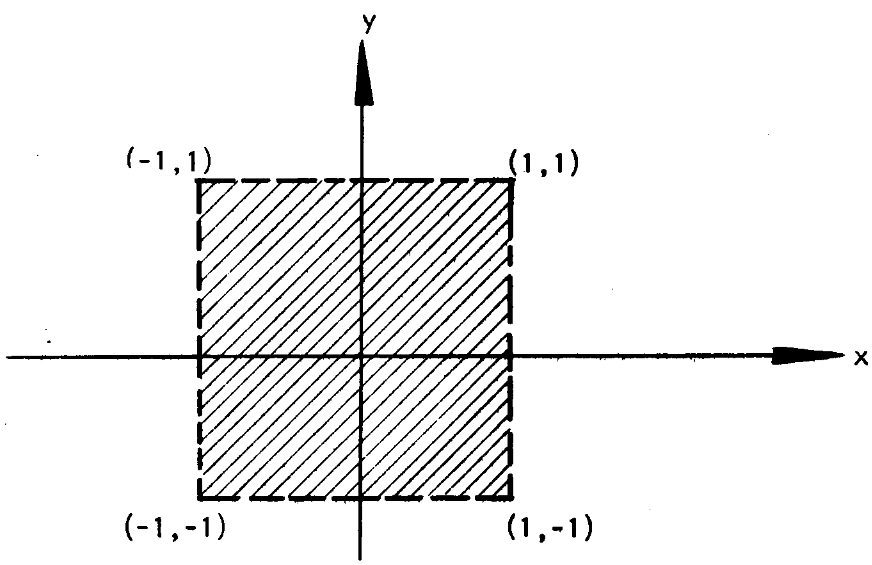


Fig. 1.3.3

EJEMPLO 1.3.4

Sea el espacio métrico $<R^2, D_p^2>$ donde $p \geq 1$. En la siguiente figura presentamos superpuestas las gráficas de las vecindades del punto $x=(0,0)$, con radio $\varepsilon=1$ respecto a las métricas D_1^2, D_2^2, D_3^2 y D_∞^2.

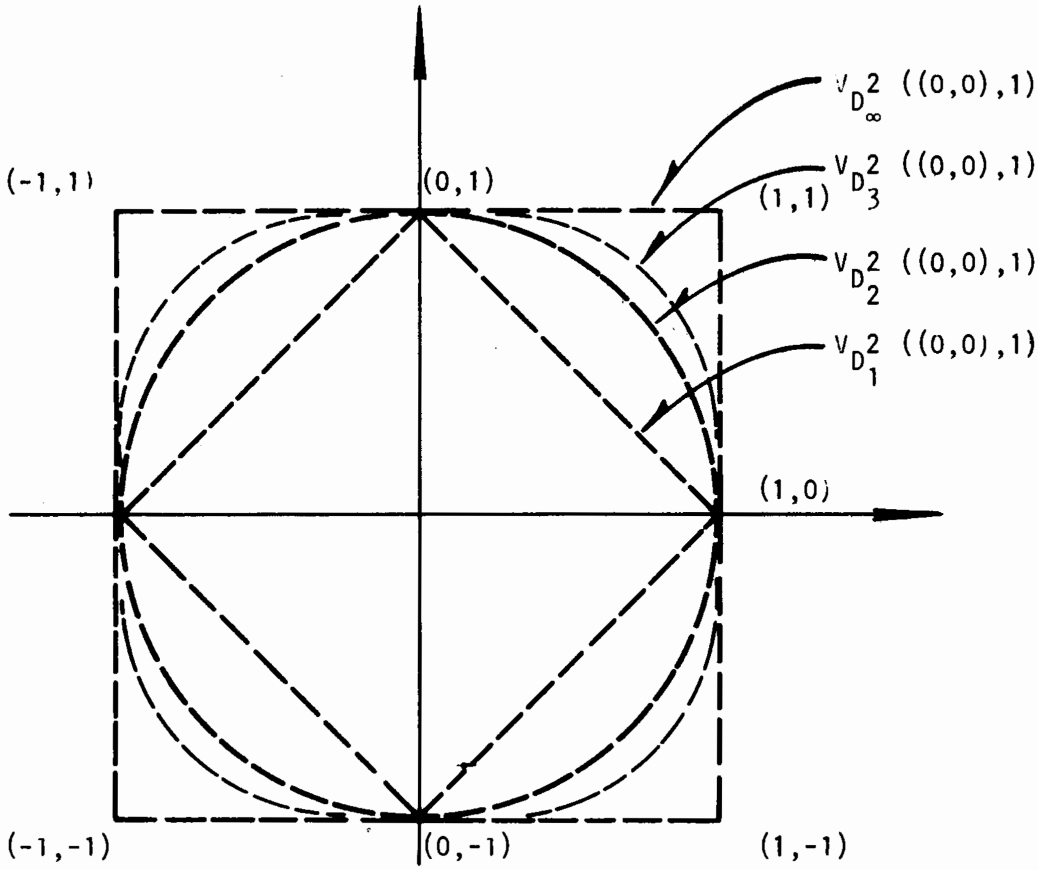


Fig. 1.3.4

EJEMPLO 1.3.5

Sea el espacio métrico U_c definido según el Ejemplo 1.2.6, entonces la vecindad con centro en el punto $f(x)$ donde

$$f(x) = \frac{b-a}{2}$$

y radio $\varepsilon>0$ consiste en todas las funciones contínuas de $[a,b]$ en $[a,b]$ cuyas gráficas quedan ubicadas en la zona assiurada mostrada en la siguiente Figura. A esta zona se le suele llamar ε-collar de f

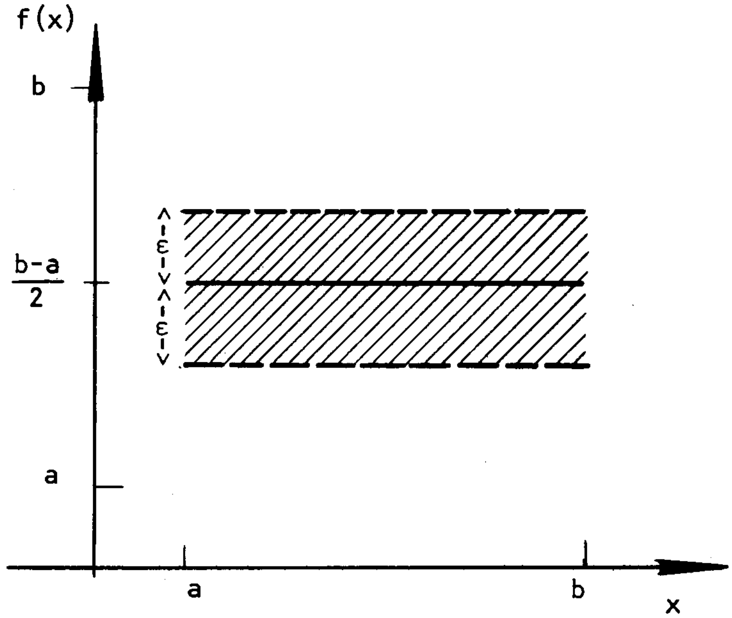


Fig. 1.3.5

EJEMPLO 1.3.6

Sean los espacios métricos $U_1^2=<R^2,D_1^2>$ y $U_2^2=<R^2,D_2^2>$, entonces

$V_{D_1^2}((0,0));1 \subseteq V_{D_2^2}((0,0)),1$ según se ilustra en la siguiente Figura

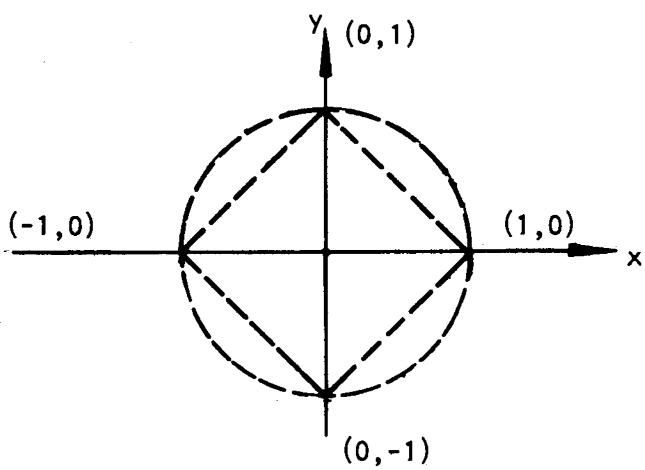


Fig. 1.3.6

Demostración:

Puesto que $|x|^2+|y|^2\leq(|x|+|y|)^2$ se tiene que

$$\sqrt{|x|^2+|y|^2} \leq |x|+|y| \tag{1.3.1}$$

Sea ahora $(x_1,y_1)\varepsilon V_{D_1^2}((0,0),1)$, luego $|x_1|+|y_1|<1$ y de aquí según (1.3.1) $\sqrt{|x_1|^2+|y_1|^2}<1$, ó sea $(x_1,y_1)\varepsilon V_{D_2^2}((0,0),1)$.

El resultado del último ejemplo se puede generalizar conforme lo sugiere la Fig. 1.3.4 obteniéndose así el siguiente

TEOREMA 1.3.1

H:1) Sean $U_r^n=\langle R^n,D_r^n\rangle$ y $U_s^n=\langle R^n,D_s^n\rangle$ dos espacios métricos tales que $1\leq r\leq s\leq\infty$

C:1) $V_{D_r^n}(x,\varepsilon)\subseteq V_{D_s^n}(x,\varepsilon)$

Demostración:

Deberemos probar que si $y\varepsilon V_{D_r^n}(x,\varepsilon)$, entonces $y\varepsilon V_{D_s^n}(x,\varepsilon)$ y para ello es suficiente demostrar $D_s^n(x,y)\leq D_r^n(x,y)$ o equivalentemente que para x_i, $y_i\varepsilon R$, $i=1,2,\ldots,n$ se satisface la siguiente desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^s\right)^{1/s}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r\right)^{1/r} \tag{1.3.3}$$

Subdividiremos la demostración (1.3.3) en los siguientes tres casos:

Caso 1) Sean $1=r\leq s<\infty$ la verificación del teorema para este caso se deja como ejercicio al lector

Caso 2) Sean $1\leq r\leq s=\infty$; la verificación del teorema para este caso se deja como ejercicio al lector, debiendo demostrar-se que $D_\infty^n(x,y)\le D_r^n(x,y)$

Caso 3) Sean $1<r\le s<\infty$; si $r=s$ el teorema es obvio. Supongamos ahora que $1<r<s<\infty$, luego puesto que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^s\le\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.|x_i-y_i|^{s-1} \tag{1.3.4}$$

por el Teorema 1.2.3 se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.|x_i-y_i|^{s-1}\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r)^{1/r}(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^{r\frac{s-1}{r-1}})^{\frac{r-1}{r}} \tag{1.3.5}$$

y como por otra parte se sabe que para $a_i\ge 0$, $i=1,2,\ldots,n,\alpha\ge 1$ rige la desigualdad

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^\alpha)^{1/\alpha}\le\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{1.3.6}$$

de aquí tomando $a_i=|x_i-y_i|^r$ y $\alpha=\frac{s-1}{r-1}$ se tiene

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^{r\frac{s-1}{r-1}})^{\frac{r-1}{s-1}}\le\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r \tag{1.3.7}$$

lo cual equivale a

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^{r\frac{s-1}{r-1}})^{\frac{r-1}{r}}\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r)^{\frac{s-1}{r}} \tag{1.3.8}$$

y de esta última desigualdad, de (1.3.4) y de (1.3.5) se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^s\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r)^{1/r}.(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r)^{\frac{s-1}{r}} \tag{1.3.9}$$

y de aquí, como se buscaba, se llega finalmente a

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^s\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^r)^{s/r} \tag{1.3.10}$$

PROBLEMAS DE LA SECCION 1.3

1.3.1 a) Efectúe la demostración del Caso 1) del Teorema 1.3.1

b) Efectúe la demostración del Caso 2) del Teorema 1.3.1

1.3.2 Demuestre que para $a_i \geq 0$, $\alpha \geq 1$ se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

1.3.3 Encuentre una $\varepsilon>0$ en función de $p>0$ tal que

a) $V_{D_2^n}(x,\varepsilon) \subseteq V_{D_1^n}(x,p)$

b) $V_{D_2^n}(x,\varepsilon) \subseteq V_{D_\infty^n}(x,p)$.

1.3.4 Demuestre que para toda vecindad $V_{D_r^n}(x,\varepsilon_1)$, $r \geq 1$

existe una vecindad $V_{D_s^n}(x,\varepsilon_2)$, $s \geq 1$ tal que $V_{D_s^n}(x,\varepsilon_2) \subseteq V_{D_r^n}(x,\varepsilon_1)$

1.3.5 Sea el espacio métrico U_c definido según el Ejemplo 1.3.5., para cada una de las siguientes funciones dibuje su gráfica y el ε-collar con $\varepsilon = \frac{1}{4}$

a) $f(x) = 1$, $x \varepsilon [0,1]$

b) $f(x) = x$, $x \varepsilon [0,1]$

c) $f(x) = x^2$, $x \varepsilon [-1,1]$

d) $f(x) = x^3$, $x \varepsilon [-1,1]$

1.3.6. Dibuje la gráfica de la "vecindad" $V_D((0,0),1)$ cuando D se calcula según la Definición 1.2.2 para n=2, pero haciendo p=1/2

1.4 CONJUNTOS ABIERTOS

El conjunto abierto es un concepto fundamental en el análisis matemático, pues como el lector recordará es ampliamente usado al trabajar con límites, continuidad, etc. y se encuentra además, estrechamente relacionado con las vecindades pues en muchos aspectos los conjuntos abiertos se comportan como si fuesen vecindades, es por ello que recomendamos a la persona que estudia por vez primera estos temas los maneje con especial cuidado observando cómo el conjunto abierto es un concepto derivado en el sentido de que se define haciendo uso del concepto de vecindad.

DEFINICION 1.4.1

Sean <X,D> un espacio métrico y U un subconjunto de X, entonces diremos que el conjunto U es D-abierto si para toda x en U existe alguna $\varepsilon>0$ tal que $V_D(x,\varepsilon)\subseteq U$.

En caso de no existir posibilidad de confusión respecto a la métrica empleada, sencillamente nos referiremos al conjunto U diciendo que es abierto.

Ejemplo 1.4.1

Sea el espacio métrico $<R,D_2^1>$. entonces el intervalo U=(a,b) es abierto

Demostración:

Sea $x\varepsilon U$, luego definimos a ε por $\varepsilon=\min\{|b-x|,|x-a|\}$, entonces se tiene por supuesto que $x\varepsilon V(x,\varepsilon)\subseteq(a,b)$.

A continuación enunciaremos y demostraremos una serie de teoremas, los cuales nos ayudaran tanto a familiarizarnos como a caracterizar a los conjuntos abiertos.

TEOREMA 1.4.1

H:1) Sea <X,D> un espacio métrico

C1): ϕ es un conjunto abierto

2): X es un conjunto abierto

Demostración:

C1): Demostraremos que ϕ es un conjunto abierto probando que no se puede dar el caso de que no sea abierto: ϕ no será abierto si existe alguna $x\varepsilon\phi$ tal que para toda $\varepsilon>0$ se tenga que $V_D(x,\varepsilon)\nsubseteq\phi$; pero como ϕ no contiene ningún elemento, luego ϕ es abierto.

C2): Sean $x\varepsilon X$ y $\varepsilon>0$, luego como todo elemento de $V_D(x,\varepsilon)$ está en X se tiene que $V_D(x,\varepsilon)\subseteq X$.

TEOREMA 1.4.2

H1): Sea <X,D> un espacio métrico

2): Sea $x\varepsilon X$

C1): Para toda $\varepsilon>0$ se tiene que la vecindad $V_D(x,\varepsilon)$ es un conjunto abierto

Demostración:

Para efectuar la demostración probaremos que para toda $y\varepsilon V_D(x,\varepsilon)$ existe un número real $\varepsilon_1>0$ tal que $V_D(y,\varepsilon_1)\subseteq V_D(x,\varepsilon)$ (Ver Fig. 1.4.1)

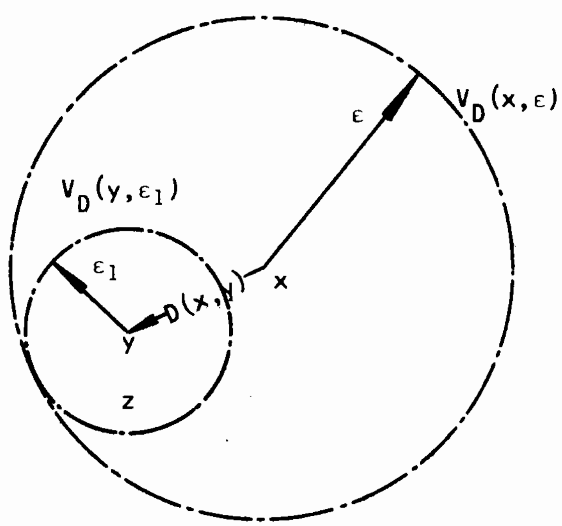


Fig. 1.4.1

Sea $y \varepsilon V_D(x,\varepsilon)$, definimos ahora ε_1 de la siguiente manera: $\varepsilon_1 = \varepsilon - D(x,y)$, como $D(x,y) < \varepsilon$ se tiene $\varepsilon_1 > 0$ y $V_D(y,\varepsilon_1)$ es una vecindad bien definida con centro en y y radio ε_1. Demostraremos a continuación que $V_D(y,\varepsilon_1) \subseteq V_D(x,\varepsilon)$; sea $z \varepsilon V_D(y,\varepsilon_1)$, luego $D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z) < D(x,y) + \varepsilon_1 = D(x,y) + \varepsilon - D(x,y) = \varepsilon$ y de aquí como se quería demostrar se tiene que $z \varepsilon V_D(x,\varepsilon)$.

El resultado del teorema anterior justifica plenamente el hecho de que en muchos textos las vecindades sean llamadas también vecindades abiertas.
El siguiente teormea será de mucha utilidad pues nos permitirá caracterizar a los conjuntos abiertos en términos de vecindades.

TEOREMA 1.4.3

H1): Sea $<X,D>$ un espacio métrico

C1): Un subconjunto U de X es abierto si y sólo si se puede expresar como la unión de vecindades

Demostración:

Sea U un conjunto abierto, subdividiremos la demostración de la condición suficiente del teorema en los dos siguientes casos:

Caso 1) Sea $U = \phi$, luego $U = \cup\{V(x,\varepsilon) : x \varepsilon \phi\}$, o sea U es la unión de una clase vacía de vecindades

Caso 2) Sea $U \neq \phi$, luego para toda $x \varepsilon U$ existe alguna $\varepsilon > 0$ tal que $V(x,\varepsilon) \subseteq U$, de aquí que $U = \cup\{V(x,\varepsilon) : x \varepsilon U\}$

Recíprocamente sean Δ una clase de vecindades en X y $U = \bigcup_{A \varepsilon \Delta} A$ luego si $x \varepsilon U$, entonces existe alguna $A_i \varepsilon \Delta$ tal que $x \varepsilon A_i$ y de aquí según el Teorema 1.4.2 existe alguna $\varepsilon > 0$ tal que $x \varepsilon V(x,\varepsilon) \subseteq A_i$ y puesto que $A_i \subseteq U$ se tiene que $V(x,\varepsilon) \subseteq U$ siendo por lo tanto según la Definición 1.4.1 el conjunto

U un conjunto abierto.

TEOREMA 1.4.4

C1): La unión en una familia cualquiera de conjuntos abiertos es un conjunto abierto

2): La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto

Demostración:

1) Sea $\{U_i\}$, $i\varepsilon I$ una familia de subconjuntos abiertos de X y sea $x\varepsilon \bigcup_{i\varepsilon I} U_i$, luego, para alguna i, $x\varepsilon U_i$ y por hipótesis existe algún número $\varepsilon>0$ tal que $V_D(x,\varepsilon)\subseteq U_i$, luego $V_D(x,\varepsilon)\subseteq \bigcup_{i\varepsilon I} U_i$

2) Sean los conjuntos abiertos $U_1, U_2,\ldots U_n$ y $U=\bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Si $U=\phi$ el teorema es obvio; supongamos que $U\neq\phi$ y que $x\varepsilon U$, luego $x\varepsilon U_i$, $i=1,2,\ldots,n$ y como U_i es abierto existen números $\varepsilon_i>0$ tales que $V_D(x,\varepsilon_i)\subseteq U_i$, $i=1,2,\ldots n$. Definimos ahora $r=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}$, luego $V_D(x,r)\subseteq V_D(x,\varepsilon_i)$ lo cual implica que $V_D(x,r)\subseteq U$.

El teorema anterior nos señala que la unión finita o infinita de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto y que la intersección finita de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto, pero desde luego no se afirma que la intersección infinita de conjuntos abiertos sea también un conjunto abierto.

EJEMPLO 1.4.2

Sea el espacio métrico $\langle R, D_2^1\rangle$, luego la intersección infinita de los siguientes conjuntos abiertos $\bigcap_{i=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$ no es un conjunto abierto.

TEOREMA 1.4.5

Sea el espacio métrico $<R,D_2^2>$, luego todo conjunto abierto U se puede expresar como la unión finita o numerable de intervalos abiertos, ajenos dos a dos.

Demostración:

Observemos que el espacio $<R,D_2^2>$ tiene su representación en el eje real donde la métrica es la usual.

Sea U un conjunto abierto en el eje real y sea $x\varepsilon U$, luego por definición de conjunto abierto existe cuando menos un intevalo abierto el cual teniendo a x como elemento está contenido en U; sea Gx la unión de tales intervalos, así Gx presenta las siguientes características:

a) Gx es un intervalo abierto

Sean $a=\inf Gx$ y $b=\sup Gx$, luego es claro que $Gx\subseteq(a,b)$; para demostrar que $(a,b)\subseteq Gx$ analizaremos las siguientes cuatro alternativas:

1) Sean $a=-\infty$ y $b=\infty$. En este caso $Gx=(-\infty,\infty)$

2) Sean $a\neq-\infty$ y $b=\infty$. Sea $y\varepsilon(a,\infty)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $a< y <x$, luego sabemos que existe un número y' tal que $a< y' < y <x$, hagamos ahora $\varepsilon_1=D_1^2(x,y')$ teniendose así que $y\varepsilon V(x,\varepsilon_1)\subseteq Gx$, o sea, $y\varepsilon Gx$

3) Sean $a=-\infty$ y $b\neq\infty$. Procediendo de manera análoga al caso anterior se demuestra que si $y\varepsilon(-\infty,b)$ entonces $y\varepsilon Gx$

4) Sean $a\neq-\infty$ y $b\neq\infty$. Procediendo de acuerdo a las alternativas 2) y 3) se demuestra que $(a,b)\subseteq Gx$

Así $Gx=(a,b)$ es el mayor intervalo abierto contenido en U y el cual no puede ser contenido a su vez como subconjunto propio en otro intervalo abierto también contenido en U. Al intervalo Gx se le suele llamar componente del conjunto U

b) Para $x_1 \neq x_2$ si las componentes respectivas de U,Gx_1, y Gx_2 tienen un punto en común, entonces éstas coinciden. Sea $y \varepsilon Gx_1 \cap Gx_2$ donde $Gx_1 = (a_1, b_1)$ y $Gx_2 = (a_2, b_2)$; supongamos sin pérdida de generalidad que $b_1 < b_2$, luego $y < b_1 < b_2$ siendo b_1 un elemento de la componente Gx_2, o sea $b_1 \varepsilon U$, lo cual constituye claramente una contradicción

c) La clase formada por los componentes del conunto abierto U, es a lo sumo, numerable. Se sabe que todo intervalo abierto contiene por lo menos un número racional, luego se puede establecer una correspondencia biunívoca entre un subconjunto (finito o numerable) de los números racionales y las componentes de U.

Obviamente el conjunto U se puede expresar como la unión de sus componentes.

Problemas de la Sección 1.4

1.4.1 Demuestre que en espacio métrico $U_0=\langle X,D_0\rangle$ definido según el Ejemplo 1.2.1, todo subconjunto de X es un conjunto abierto

1.4.2 Se dice que las métricas D y D' son equivalentes cuando todo conjunto D-abierto es un conjunto D'- abierto y recíprocamente; para la métrica definida según la Definición 1.2.2, diga para qué pares de valores distintos de p se tienen métricas equivalentes

1.4.3 Sean $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico y x e y elementos distintos de X. Demuestre que existen dos vecindades, V_1 y V_2 tales que $x \varepsilon V_1$, y εV_2 siendo V_1 y V_2 conjuntos ajenos

1.4.4 Sean $\langle X,D\rangle$ y $\langle Y,D\rangle$ dos espacios métricos tales que $Y \subseteq X$; demuestre que un subconjunto M de Y es un conjunto abierto si y sólo si existe un subconjunto M de X abierto tal que $M=N \cap Y$

1.4.5 Sea el espacio métrico $U_2^1=\langle R,D_2^1\rangle$, es decir la recta real con la métrica usual, entonces encuentre una clase no vacía de conjuntos abiertos tales que su intersección no sea un conjunto abierto

1.5 CONJUNTOS CERRADOS

DEFINICION 1.5.1

Sea $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico; diremos que un subconjunto F de X es D- cerrado si su complemento es un conjunto abierto, o equivalentemente si existe un conjunto abierto U tal que $F=X-U$.

En caso de no existir posibilidad de confusión respecto a la métrica empleada, sencillamente nos referiremos al conjunto F diciendo que es cerrado.

DEFINICION 1.5.2

Sean $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico, x un punto de X y ε un número real positivo, entonces la vecindad cerrada de x con radio ε será

$$V'_D(x,\varepsilon)=\{y\varepsilon X:D(x,y)\leq\varepsilon\}$$

EJEMPLO 1.5.1

H:1) Sea $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico

2) Sea $x\varepsilon X$

C:1) La vecindad cerrada $V'_D(x,\varepsilon)$ es un conjunto cerrado

2) El conjunto $S=\{y\varepsilon X:D(x,y)=\varepsilon\}$ es un conjunto cerrado

Demostración:

C1) Sea $z \notin V'(x,\varepsilon)$ luego para toda $y\varepsilon V'_D$ se tiene por la desigualdad del triángulo que $D(y,z)\geq D(x,z)-D(x,y)\geq D(x,z)-\varepsilon$; hagamos $r=D(x,z)-\varepsilon$, luego $V_D(z,r)$ es una vecindad ubicada en el complemento de V'_D lo cual demuestra que dicho complemento es un conjunto abierto

C2) El complemento del conjunto S es la unión del conjunto $V_D(x,\varepsilon)$ y y del complemento de la vecindad cerrada $V'_D(x,\varepsilon)$, y de aquí, de acuerdo con el Teorema 1.4.3 se tiene que dicha unión es un conjunto abierto, siendo en consecuencia S un conjunto cerrado.

Ejemplo 1.5.2

a) En $<R,D_2^1>$ el intervalo $[a,b]$ es un conjunto cerrado según la primera conclusión del teorema anterior.

b) En $<R,D_2^2>$ el conjunto $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ es también un conjunto cerrado.

TEOREMA 1.5.1

H:1) Sea $<X,D>$ un espacio métrico

C:1) ϕ es un conjunto abierto

2) X es un conjunto abierto

Demostración:

C1) Puesto que $\phi=X-X$ siendo, de conformidad al Teorema 1.4.1 en el conjunto X abierto, se tiene que ϕ es un conjunto cerrado

C2) Puesto que $X=X-\phi$ siendo, de conformidad al Teorema 1.4.1 el conjunto ϕ abierto, se tiene que X es un conjunto cerrado.

En este punto cabe observar que tanto el conjunto ϕ como el conjunto X son a la vez, cerrados y abiertos.

El siguiente teorema nos ayudará a caracterizar a los conjuntos cerrados.

TEOREMA 1.5.2

C 1) La intersección de una familia cualquiera de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado

2) La unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado

Demostración:

C1) Sea $\{F_i\}$, $i\varepsilon I$ una familia de subconjuntos cerrados de X y sea $F=\bigcap_{i\varepsilon I} F_i$, luego $X-F=\bigcup_{i\varepsilon I}(X-F_i)$ y como los conjuntos $X-F_i$, $i\varepsilon I$ son abiertos se tiene que, de conformidad a la conclusión C1) del Teorema 1.4.4, X-F es un conjunto abierto, y de aquí sabemos que F es un conjunto cerrado

C2) Sean los conjuntos cerrados $F_1, F_2, \ldots, F_n$ y $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$, luego $X-F=\bigcap_{i=1}^{n}(X-F_i)$, y como los conjuntos $X-F_i$ son abiertos se tiene en virtud de la conclusión C2) del Teorema 1.4.4 que X-F es un conjunto abierto, y de aquí sabemos que F es un conjunto cerrado.

EJEMPLO 1.5.3

H:1) Sea $<X,D>$ un espacio métrico

2) Sea $x\varepsilon X$

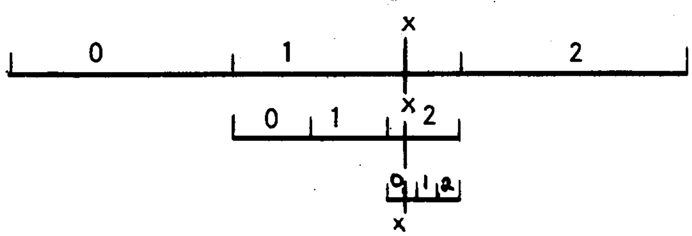
C:1) El singulete $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

Demostración:

Se tiene evidentemente que $\{x\}=X-(X-\{x\})$. Pero el conjunto $X-\{x\}$ es abierto puesto que, si $y\varepsilon X-\{x\}$ y definimos al número real r de la siguiente manera: $r=D(x,y)$, entonces $V_D(y,r)\subseteq X-\{x\}$; luego $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

En el espacio métrico $<R,D_2^1>$ es decir, en el intervalo $(-\infty,\infty)$, el cual como el lector recordará se representa gráficamente por la recta real, los conjuntos cerrados más comunes son los singuletes, los intervalos $[a,b]$ o bien conjuntos obtenidos por uniones finitas de conjuntos de estos tipos; por supuesto, excluyendo del intervalo $(-\infty,\infty)$ un número finito o numerable de intervalos de la forma (a,b) también se obtiene un conjunto cerrado. Como una interesante e ilustrativa ejemplificación de este último caso, consideraremos seguidamente al conjunto de Cantor; pero antes de proceder a presentarlo será conveniente recordar un procedimiento empleado para asignar a cada punto del intervalo $[0,1]$ una fracción ternaria infinita.

Sea x un punto comprendido entre el punto 0 y el punto 1. Luego para poner en correspondencia con dicho punto una fracción infinita, dividamos al intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales y numerémoslas progresivamente de izquierda a derecha comenzando con el número cero. Sea a_1 el número del tercio en el cual queda ubicado el punto x, dividamos a su vez este segmento en tres partes iguales y numerémoslas de nuevo respectivamente con los números 0, 1 y 2, sea ahora a_2 el número del tercio en el cual queda ubicado el punto x, continuando indefinidamente con este proceso habremos encontrado la sucesión buscada. Ver Figura 1.5.1



x<->1,2,0,...

Fig. 1.5.1

Es claro que en la práctica tendremos que detener este proceso en alguna iteración n y así el punto x quedará ubicado con un margen de error el cual no excederá a $\frac{1}{3^n}$ unidades. Obviamente si el punto x queda ubicado en el extremo de alguno de los segmentos se cae en indeterminación la que se resuelve acordando tomar siempre que se presente este caso o bien el segmento ubicado a la izquierda del punto x o bien el segmento ubicado a la derecha. El número $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} \cdots = 0,a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ será el asignado, en el sistema ternario, al punto x.

Para construir el conjunto de Cantor que designaremos por medio de la letra F tomemos de nuevo al segmento $F_0=[0,1]$ y dividámoslo en tres partes iguales; a continuación excluyamos la parte media acordando conservar los puntos extremos, así tenemos que $F_1=[0,1]-(1/3,\ 2/3)$. (v. Fig. 1.5.2)

Fig. 1.5.2

Sea ahora F_2 el conjunto obtenido de F_1 al cual se le quitaron los conjuntos (1/9, 2/9) y (7/9, 8/9). Repitiendo este proceso, el cual consiste en omitir el tercio de la parte media de cada uno de los segmentos, se obtiene una sucesión de intervalos F_i. El conjunto de Cantor será definido por

$$F=\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

Obviamente los extremos de los intervalos, es decir los puntos 0,1,1/3, 2/3,1/9,2/9,... son puntos del Conjunto F. Procedamos ahora a calcular la longitud de los segmentos omitidos; ésta será

$$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\dots$$

Esta suma la podemos calcular por medio de la siguiente fórmula

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-2/3}=1$$

luego, la longitud de los segmentos excluidos es igual a 1, resultado que no deja de ser sorprendente si consideramos que en el conjunto F quedó un conjunto infinito de puntos el cual tiene la potencia del continuo nominalmente el conjunto $0.a_1,a_2,a_3,\dots$ donde $a_i\varepsilon\{0,2\}$; es decir, si en la representación ternaria del punto x no aparece el número 1, entonces este número pertenece al conjunto de Cantor. Tal vez podría uno sentirse inclinado a creer que los únicos puntos que pertenecen al conjunto F son los puntos correspondientes a los extremos de los segmentos; éstos se llaman puntos de primer género, pero si observamos que el punto $1/4\varepsilon F$ convendremos en que F tiene además otros puntos; a éstos se les conoce con el nombre de puntos de segundo género.

Problemas de la Sección 1.5.

1.5.1 Demuestre que el punto $X=1/4$ pertenece al conjunto de Cantor empleando los siguientes procedimientos:

a) Expresándolo como una fracción ternaria infinita

b) Encontrando la razón en la que el punto $x=1/4$ divide a cada uno de los tercios en los cuales se encuentra ubicado.

1.5.2 Demuestre que el conjunto de Cantor tiene la potencia del continuo. Sugestión: establezca la función

$$f(a_i)=\begin{cases} 0 & \text{si } a_i=0 \\ 1 & \text{si } a_i=2 \end{cases}$$ y forme la

sucesión $0.f(a_1)f(a_2)f(a_3)\ldots$ la que nos representa en el sistema binario un número comprendido entre 0 y 1.

1.5.3 Demuestre que en el espacio métrico $\langle R, D_2^2\rangle$ todo conjunto cerrado se puede obtener restándole al conjunto R una clase finita o numerable de conjuntos abiertos

1.5.4 Demuestre que en el espacio métrico $U_o=\langle X,D_o\rangle$ definido según el Ejemplo 1.2.1, todo subconjunto de X es un conjunto cerrado

1.5.5 Sea el espacio métrico $U_2^1=\langle R,D_2^1\rangle$, es decir la recta real con la métrica usual, encuentre una clase no vacía de conjuntos cerrados tales que su unión no sea un conjunto cerrado

1.5.6. Sean $\langle X,D\rangle$ y $\langle Y,D\rangle$ dos espacios métricos tales que $Y \subseteq X$; demuestre que un subconjunto M de Y es un conjunto cerrado si y sólo si existe un subconjunto N de X cerrado tal que $M=N\cap Y$

1.6 CONJUNTOS NOTABLES

Hemos dicho que en un espacio métrico <X,D> un subconjunto M de X es abierto cuando para todo punto $x \varepsilon M$ existe alguna vecindad $V(x,\varepsilon)$ contenida en M y que en cambio M es un conjunto cerrado cuando su complemento en X es abierto; sin embargo, creemos oportuno apuntar que es posible encontrar diversos conjuntos asociados al conjunto M los cuales, a la vez que nos permiten caracterizar adecuadamente tanto a los conjuntos abiertos como a los conjuntos cerrados, también nos capacitan para observarlos bajo un enfoque distinto, mejorando por lo tanto nuestra capacidad de comprensión al respecto.

DEFINICION 1.6.1

Sean <X,D> un espacio métrico y M un subconjunto de X, entonces diremos que el punto $x \varepsilon M$ es un punto interior a M si existe alguna vecindad $V(x,\varepsilon)$ contenida en M; al conjunto formado por todos los puntos interiores lo llamaremos el interior de M y lo denotaremos Int(M).

EJEMPLO 1.6.1

Sea el espacio métrio $U_2^2=<R^2,D_2^2>$, es decir el plano xy con la métrica usual, luego

a) El conjunto interior de $M=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ es M mismo. (v. Fig. 1.6.1)

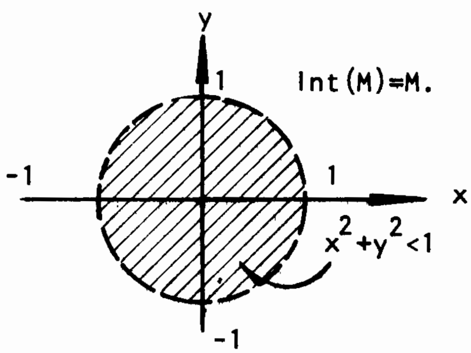


Figura 1.6.1

De conformidad con las definiciones correspondientes es evidente que el conjunto interior es un conjunto abierto.

b) El conjunto interior de $M=\{(x,y):|x|<1$ y $|y|\leq 1\}$ es el conjunto $\{(x,y):|x|<1,|y|<1\}$. (v. Fig. 1.6.2)

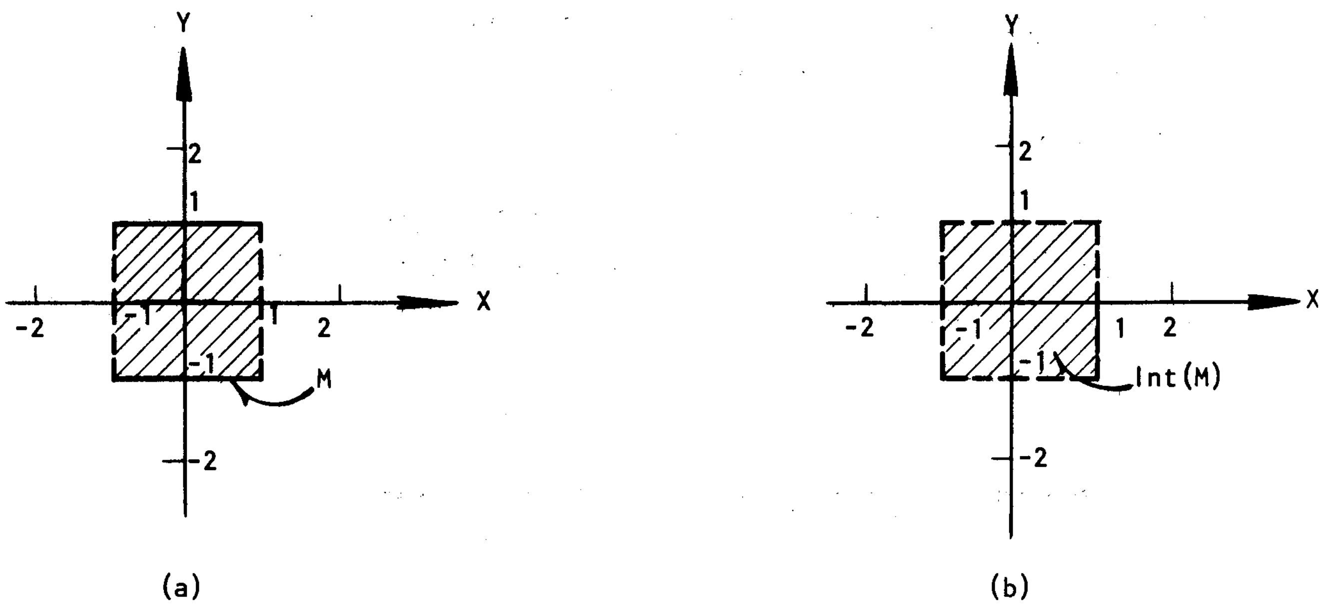


Fig. 1.6.2

EJEMPLO 1.6.2

Sea el espacio métrico $U_2^1=\langle R,D_2^1\rangle$, es decir el eje real con la métrica usual, luego

a) Si $x\varepsilon R$, $Int\{x\}=\phi$ pues no existe vecindad $V(x,\varepsilon)$ contenida en el conjunto $\{x\}$

b) $Int(\phi)=\phi$ y $Int(R)=R$

c) Si Z es el conjunto de los números enteros, luego $Int(Z)=\phi$ por la misma razón expuesta en el inciso a).

Una vez que nos encontramos ubicados en este punto, nada más natural que presentar la siguiente

DEFINICION 1.6.2

Sean <X,D> un espacio métrico y M un subconjunto de X, entonces diremos que el punto $x \varepsilon M$ es un punto exterior a M si es un punto interior del conjunto X-M. Al conjunto de todos los puntos exteriores será el exterior de M y será denotado por Ext(M).

EJEMPLO 1.6.3

Sea el espacio métrico $U_2^1 = <R, D_2^1>$, es decir el eje real con la métrica usual; luego si $M=(-1,1]$, entonces $Int(M)=(-1,1)$ y el $Ext(M)=(-\infty,1)$ $U(1,\infty)$. (v. Fig. 1.6.3)

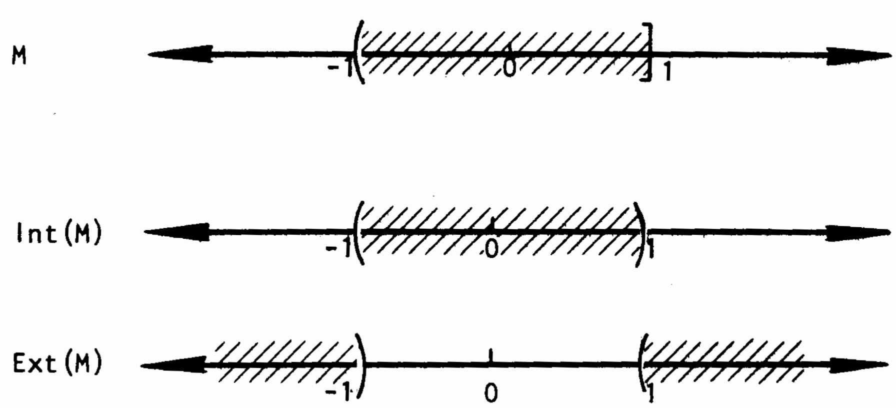


Fig. 1.6.3

EJEMPLO 1.6.4

Sea el espacio métrico $U_2^1 = <R, D_2^1>$, luego

a) Si $x \varepsilon R$, $Ext\{x\}=(-\infty,x)U(x,\infty)$

b) $Ext(\phi)=R$, $Ext(R)=\phi$

c) Si Z es el conjunto de los números enteros, luego $Ext(Z)=R-Z$.

d) Si Q es el conjunto de los números racionales, luego $\mathrm{Ext}(Q)=\phi$ pues toda vecindad $V(x,\varepsilon)$ donde $X-Q$ contiene números racionales

TEOREMA 1.6.1

H:1) Sea $<X,D>$ un espacio métrico

2) Sean M, M_1 y M_2 subconjuntos de X

C:1) $\mathrm{Int}(M)\subseteq M$

2) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M))=\mathrm{Int}(M)$

3) Si $M_1\subseteq M_2$, entonces $\mathrm{Int}(M_1)\subseteq \mathrm{Int}(M_2)$

4) $\mathrm{Int}(M_1\cap M_2)=\mathrm{Int}(M_1)\cap \mathrm{Int}(M_2)$

5) $\mathrm{Int}(M_1)\cup \mathrm{Int}(M_2)\subseteq \mathrm{Int}(M_1\cup M_2)$

Demostración:

C1): Es inmediata partiendo de la Definición 1.6.1

C2): De la conclusión anterior sabemos que $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M))\subseteq \mathrm{Int}(M)$ restándonos demostrar que $\mathrm{Int}(M)\subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M))$. Sea $x\in \mathrm{Int}(M)$, luego sabemos que existe una vecindad tal que $V(x,\varepsilon_1)\subseteq M$; ahora hagamos $U=V(x,\varepsilon_1)\cap \mathrm{Int}(M)$. Obviamente x es un elemento de U siendo éste conjunto abierto de acuerdo con C2) del Teorema 1.4.4, luego existe vecindad $V(x,\varepsilon_2)\subseteq U$, de donde $V(x,\varepsilon_2)\subseteq \mathrm{Int}(M)$, o sea $x\in \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M))$. Si $\mathrm{Int}(M)=\phi$, el resultado es obvio.

C3-C5): Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración de estas conclusiones.

El siguiente teorema relaciona los conjuntos interiores con los conjuntos abiertos.

TEOREMA 1.6.2

H:1) Sea <X,D> un espacio métrico

2) Sea M un subconjunto de X

C1) M es un conjunto abierto sí y sólo si $Int(M)=M$

2) El interior a M es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en M

Demostración:

C1): Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración de esta conclusión

C2): Sea F la clase formada por todos los conjuntos abiertos G contenidos en M, luego no es la clase vacía pues tanto el conjunto vacío como el conjunto interior a M son elementos de la misma, de acuerdo con esto $Int(M)\subseteq \bigcup_{G\in F} G$; por otra parte de C1) del Teorema 1.4.4 se sabe que la unión $\bigcup_{G\in F} G$ es un conjunto abierto, luego como $\bigcup_{G\in F} G\subseteq M$ se tiene según C1) de este teorema y C3) del Teorema 1.6.1 que $\bigcup_{G\in F} G\subseteq Int(M)$.

La conclusión C1) nos permite caractericar a los conjuntos interiores en términos de los conjuntos abiertos y recíprocamente, este resultado es aprovechado por algunos autores los cuales definen a los conjuntos abiertos diciendo que son aquellos cuyos elementos son todos puntos interiores a dichos conjuntos. De la conclusión C2) se hace evidente el siguiente

COROLARIO

El conjunto interior a M es el mayor conjunto abierto contenido en M.

DEFINICION 1.6.3

Sean $<X,D>$ un espacio métrico y M un subconjunto de X. Diremos que el punto $x \in X$ es un punto de acumulación de M si toda vecindad de x contiene otros puntos de M distintos de x, o sea cuando para toda $\varepsilon>0$ se tiene que $\mathring{V}(x,\varepsilon) \cap M \neq \phi$; al conjunto formado por todos los puntos de acumulación lo conoceremos con el nombre de conjunto derivado de M y lo denotaremos por M'. Si $x \in M$ pero x no es un punto de acumulación diremos que x es un punto aislado de M.

Observe que la anterior definición no exige que un punto de acumulación del conjunto M sea un elemento de dicho conjunto .

EJEMPLO 1.6.5

Sea el espacio métrico $U_2^2=<R^2,D_2^2>$; encuentre al conjunto derivado así como los puntos aislados del conjunto M cuando

a) $M=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

b) $M=\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$

c) $M=(-1,1] \cup \{2\}$

d) $M=Q$, siendo Q el conjunto de los números racionales

Solución:

a) Puesto que para $\varepsilon=1/2$, $\mathring{V}(z,\varepsilon) \cap M=\phi$ para toda $z \in M$, sucede que el conjunto M no tiene puntos de acumulación siendo todos los puntos de M puntos aislados, luego $M'=\phi$

b) Como toda vecindad reducida del punto $x=o$ tiene puntos del conjunto M sucede que dicho punto es un punto de acumulación; aquí observamos un caso en el cual el punto de acumulación no pertenece al conjunto M. Para cualquier $x=1/n$, la vecindad $V(1/n,\varepsilon)$ cuando $\varepsilon=\frac{1}{2(n+1)}$ de entre los puntos de M sólo contiene a $x=1/n$; entonces se concluye que todos los elementos de M son puntos aislados; así $M' = \{0\}$

c) Para este caso $M' = [-1, 1]$ siendo $x = 2$ el único punto aislado del conjunto M

d) Como para toda $\varepsilon > 0$, la vecindad $\overset{\circ}{V}(x, \varepsilon)$ contiene números racionales para todo número real x, entonces $M' = R$ no existiendo en consecuencia puntos aislados.

Algunas de las características propias de los conjuntos derivados se presentan en el

TEOREMA 1.6.3

H:1) Sea $<X,D>$ un espacio métrico

2) Sean M, M_1, M_2 subconjuntos de X

C:1) El conjunto M' es un conjunto cerrado

2) Si $M_1 \subseteq M_2$, entonces $M_1' \subseteq M_2'$

3) $(M_1 \cup M_2)' = M_1' \cup M_2'$

4) $(M_1 \cap M_2)' \subseteq M_1' \cap M_2'$

Demostración:

C1): Demostraremos que el complemento de M' respecto a X es un conjunto abierto. Sea $x \varepsilon X - M'$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overset{\circ}{V}(x, \varepsilon) \cap M = \phi$ o sea $\overset{\circ}{V}(x, \varepsilon) \subseteq X - M'$ y como $x \varepsilon X - M'$ se tiene que $V(x, \varepsilon) \subseteq X - M'$

C2): Se deja como ejercicio para el lector efectuar las demostraciones de esta conclusión

C3): Se tiene que $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$ y $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, de donde según C2) $M_1' \subseteq (M_1 \cup M_2)'$

$M_2' \subseteq (M_1 \cup M_2)'$, siendo evidente que $M_1' \cup M_2' \subseteq (M_1 \cup M_2)'$. Recíprocamente, sea $x \in (M_1 \cup M_2)'$, luego para todo $\varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{V}(x,\varepsilon) \cap (M_1 \cup M_2)$, de donde $\overset{\circ}{V}(x,\varepsilon) \cap M_1 \neq \phi$ o bien $\overset{\circ}{V}(x,\varepsilon) \cap M_2 \neq \phi$, luego $x \in M_1' \cup M_2'$, de donde se infiere que $(M_1 \cup M_2)' \subseteq M_1' \cup M_2'$

C4): Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración de esta conclusión.

TEOREMA 1.6.4

H:1) Sea <X,D> un espacio métrico y M un subconjunto de X

2) Sea x un punto de acumulación del conjunto M

C:1) Toda vecindad reducida del punto x contiene un número infinito de puntos del conjunto M

Demostración:

Supongamos que para alguna $\varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{V}(x,\varepsilon) \cap M = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, luego si hacemos

$\varepsilon_1 = \min_{1 \leq i \leq n}\{D(x,x_i)\}$ se tendrá $\overset{\circ}{V}(x,\varepsilon_1) \cap M = \phi$ siendo así que $x \notin M'$.

El teorema que se enuncia a continuación relaciona los conjuntos derivados con los conjuntos cerrados.

TEOREMA 1.6.5

H:1) Sean <X,D> un espacio métrico y M un subcojunto de X

C:1) El conjunto M es un conjunto cerrado si y sólo si $M' \subseteq M$

Demostración:

Necesidad. Supongamos que M es un conjunto cerrado y que $x \notin M$, de aquí sabemos que existe alguna vecindad de x contenida en X-M, nominalmente

$V(x,\varepsilon)\subseteq X-M$, luego $x\notin M'$. Suficiencia. Supongamos que $M'\subseteq M$ y que $x\varepsilon X-M$, luego sabemos que existe alguna $\varepsilon>0$ tal que $V(x,\varepsilon)\cap M=\phi$, de donde se concluye que $V(x,\varepsilon)\subseteq X-M$, siendo por lo tanto X-M un conjunto abierto.

Este teorema nos permite caracterizar los conjuntos cerrados en términos del conjunto derivado, resultado que suele ser aprovechado por algunos autores los cuales definen a los conjuntos cerrados diciendo que son aquellos que contienen a todos sus puntos de acumulación.

Ya hemos mencionado que no necesariamente todos los puntos de acumulación de un cierto conjunto son elementos del mismo, de aquí la conveniencia de ofrecer la siguiente

DEFINICION 1.6.4

Sean $<X,D>$ un espacio métrico y M un subconjunto de X, luego a la unión formada por el conjunto M y su conjunto derivado se le llamará la clausura de M designándosele por CL(M), o sea, $CL(M)=M\cup M'$, y a sus elementos se les conoce con el nombre de puntos de aherencia del conjunto M.

EJEMPLO 1.6.5

Sea el espacio métrico $<R^2,D_2^2>$, encuentre la clausura del conjunto M cuando

a) $M=\{(x,y):x>y\}$

b) $M=\{(m,n):$ m,n son números enteros$\}$

Solución:

a) $CL(M)=\{(x,y):x\geq y\}$. (v. Fig. 1.6.4)

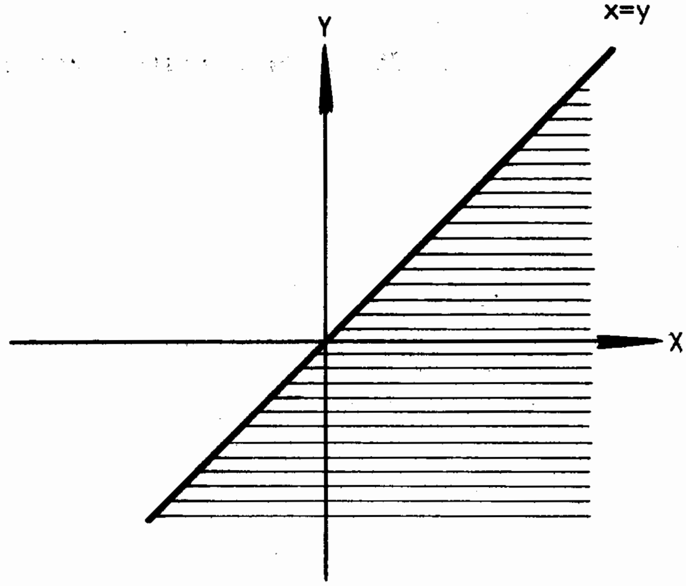


Fig. 1.6.4

b) Como para $\varepsilon=1/2$, $\mathring{V}((m,n),1/2)\cap M=\phi$, en consecuencia se tiene que $M'=\phi$, luego $CL(M)=M$. (v. Fig. 1.6.5)

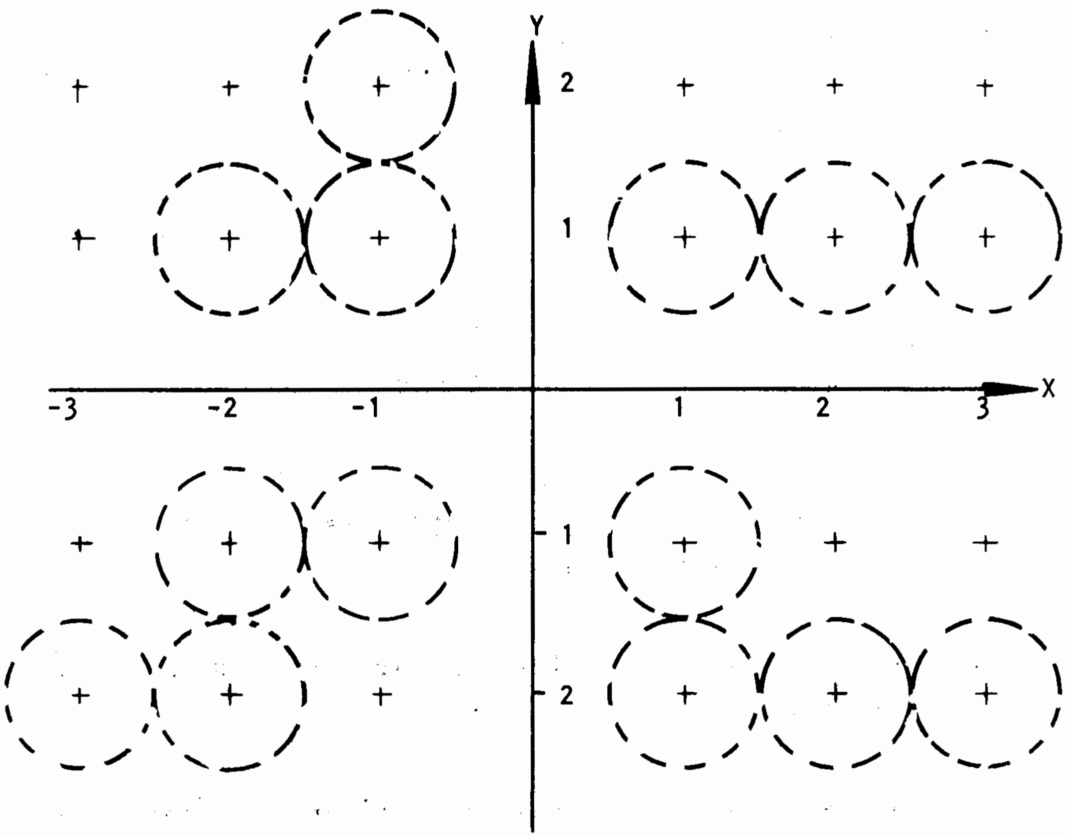


Fig. 1.6.5

cuando $M=M'$ se dice que el conjunto M es un conjunto perfecto, un ejemplo de tal conjunto en el espacio métrico $<R,D_2^1>$ lo es el intervalo cerrado $[a,b]$

A continuación enunciamos algunas de las principales propiedades del conjunto clausura.

TEOREMA 1.6.6

H:1) Sea <X,D> un espacio métrico

2) Sean M, M_1 y M_2 subconjuntos de X

C:1) $CL(M)$ es un conjunto cerrado

2) M es un conjunto cerrado si y sólo si $M=CL(M)$

3) Si $M_1 \subseteq M_2$, entonces $CL(M_1) \subseteq CL(M_2)$

4) $CL(CL(M))=CL(M)$

5) $CL(M_1 \cup M_2)=CL(M_1) \cup CL(M_2)$

6) $CL(M_1 \cap M_2) \subseteq CL(M_1) \cap CL(M_2)$

Demostración:

C1): Demostraremos que $X-CL(M)$ es un conjunto abierto. Sea $x \in X-CL(M)$, luego $x \notin M$ y $x \notin M'$, de donde existe $\varepsilon > o$ tal que $V(x,\varepsilon) \cap M=\phi$, o sea $V(x,\varepsilon) \subseteq X-CL(M)$

C2): M es un conjunto cerrado si y sólo si $M' \subseteq M$ y esto ocurre si y sólo si $M=M \cup M'$, o sea, si y sólo si $M=CL(M)$

C3)-C5): Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración de estas conclusiones.

El corolario del Teorema 1.6.2 nos dice que el conjunto interior a M es el mayor conjunto abierto contenido en M, pero en cambio demostraremos que la clausura del conjunto M es el menor conjunto cerrado el cual contiene a M.

Ejemplo 1.6.6

Sean el espacio métrico <X,D> y M un subconjunto de X, luego la clausura de M es igual a la intersección de todos los conjuntos cerrados los cuales contienen al conjunto M.

Demostración:

Sea F la clase compuesta por todos los conjuntos cerrados H los cuales contienen a M, luego, puesto que $M \subseteq H$ se tiene que $CL(M) \subseteq H$ (pues H es un conjunto cerrado), de donde $CL(M) \subseteq \bigcap_{H \varepsilon F} H$. Por otra parte, como la clausura de M es un conjunto cerrado el cual contiene a M, $\bigcap_{H \varepsilon F} H \subseteq CL(M)$.

El lector recordará que en sus estudios de geometría se define al círculo diciendo que es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto fijo llamado centro y que el círculo es la porción del plano limitada por una circunferencia. De acuerdo con esto, la circunferencia es una línea curva y el círculo un área; pero si en vez de estar considerando a estas definiciones en R^2 las estudiamos en Q^2, donde Q es el conjunto de los números racionales, entonces ya no nos resulta lo suficientemente claro lo que es una circunferencia. Con el objeto de evitar estas dificultades precisaremos los conceptos mediante la siguiente

DEFINICION 1.6.5

Sean <X,D> un espacio métrico y M un subconjunto de X, entonces la frontera de M, designada por $\partial(M)$, será el conjunto $\partial(M)=CL(M) \cap CL(X-M)$; y el borde de M designado por b(m) será la parte de la frontera de M incluida en M, o sea $b(M)=M \cap \partial(M)$.

EJEMPLO 1.6.7

Sea el espacio métrico $U_2^2=<R^2,D_2^2>$, encuentre $\partial(M)$ y $b(M)$ para

a) $M=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$

b) $M=\{(x_1,y):|x|<1, |y|\leq|\}$

Solución:

a) $\partial(M)$ corresponde a la circunferencia con radio igual a la unidad y centro en el origen y $b(M)=\phi$

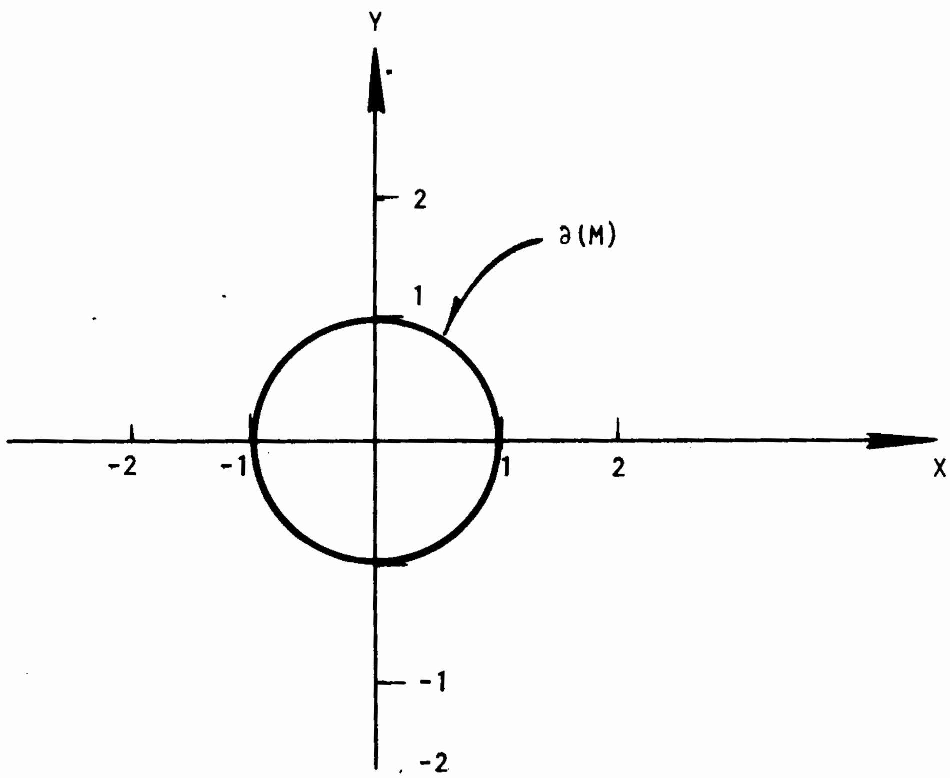


Fig. 1.6.6

b) La frontera y el borde de M se presentan respectivamente en las Figuras 1.6.7 a) y b)

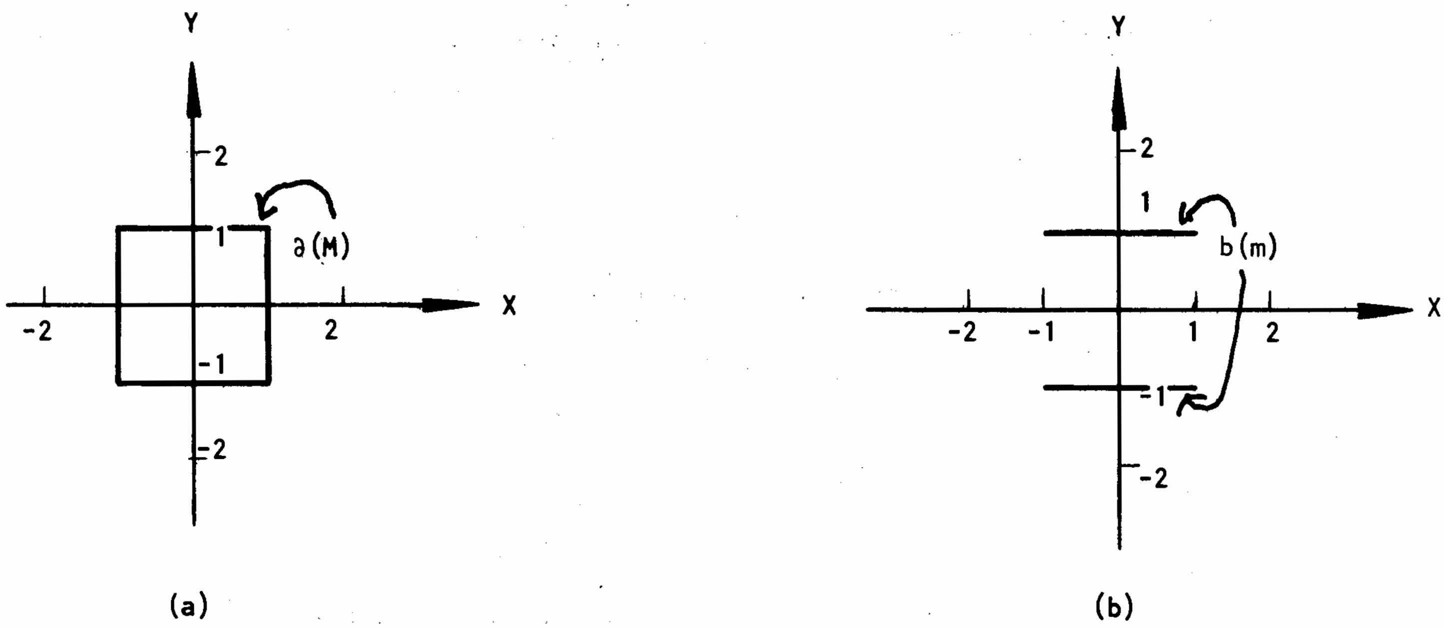


Fig. 1.6.7

EJEMPLO 1.6.8

Sean el espacio métrico $U_o=<X,D_o>$ definido según el Ejemplo 1.2.1 y x un elemento de X. Encuentre la frontera del singulete {x}.

Solución

En la métrica D_o todos los conjuntos son cerrados (y también abiertos), luego $CL(\{x\})=\{x\}$ y $CL(X-\{x\})=X-\{x\}$, y de aquí que $\partial(\{x\})=\phi$

TEOREMA 1.6.7

H:1) Sean $<X,D>$ un espacio métrico y M un subconjunto de X.

2) Sea x un elemento de X

C:1) x pertenece a la frontera del conjunto M sí y sólo si toda vecindad de x contiene puntos de M y de $X-M$

Demostración:

Necesidad; sea $x\varepsilon\partial(M)$, luego existe el siguiente par de posibilidades: $x\varepsilon M$ o bien $x\varepsilon X-M$. Si $x\varepsilon M$, entonces para toda $\varepsilon>0, V(x,\varepsilon)\cap M\neq\phi$; y por otra parte, puesto que $x\varepsilon CL(M)$ se tiene que $x\varepsilon(X-M)'$, luego $\mathring{V}(x,\varepsilon)\cap (X-M)\neq\phi$. Si $x\varepsilon X-M$ se demuestra análogamente que para toda $\varepsilon>0$, $\mathring{V}(x,\varepsilon)\cap M\neq\phi$ y que $V(x,\varepsilon)\cap(X-M)=\phi$.

Suficiencia. Como toda vecindad de x contiene puntos de M y de $X-M$, entonces $x\varepsilon M'$ y $x\varepsilon(X-M')$, luego $x\varepsilon\partial(M)$.

EJEMPLO 1.6.9

Sea el espacio métrico $U_2^1=<R,D_2^1>$, es decir la recta real con la métrica usual. Encuentre $\partial(M)$ y $b(M)$ cuando

a) $M_1=(-1,1]$

b) $M_2=\{x\varepsilon Q: -1\varepsilon x\leq 1\}$

Solución:

a) Es fácil convencerse de que toda vecindad de los puntos -1 y 1 contienen puntos del conjunto M y de su complemento X-M, por lo tanto -1, $1\varepsilon\partial(M)$; asímismo para cualquier otro punto distinto de los señalados se puede encontrar una vecindad que no contenga puntos de M o se su complemento, así pues, $\partial(M_1)=\{-1,1\}$ y $b(M_1)=\{1\}$

b) Para cualquier número real $x\varepsilon[0,1]$ se tiene que $V(x,\varepsilon)$ intersecta tanto al conjunto M_2 como al conjunto $X-M_2$, luego de acuerdo con el Teorema 1.6.7 $\partial(M_2)=[0,1]$, y por supuesto se tiene que $b(M_2)=M_2$.

Obsérvese que $M_2\subseteq M_1$ y que sin embargo $\partial(M_2)\subseteq\partial(M_1)$.

El teorema que procedemos a enunciar nos ayudará a conocer mejor las características del conjunto frontera.

TEOREMA 1.6.8

H:1) Sean <X,D> un espacio métrico y M un subconjunto de X

C:1) $\partial(M)$ es un conjunto cerrado

2) $CL(M)=Int(M)\cup\partial(M)$

3) $\partial(M)=\partial(X-M)$

4) $Int(M)=CL(M)-\partial(M)$

5) M es un conjunto cerrado si y sólo si $\partial(M)\subseteq M$

6) M es un conjunto abierto si y sólo si $M\cap\partial(M)=\phi$

Demostración:

C1) Sabemos por una parte que tanto $CL(M)$ como $CL(X-M)$ son conjuntos cerrados y por otra que las intersecciones de conjuntos cerrados son también conjuntos cerrados; luego $\partial(M)=CL(M)\cap CL(X-M)$ es un conjunto cerrado

C2) Demostraremos que $CL(M)\subseteq Int(M)\cup\partial(M)$. Sea $x\in CL(M)$, si $x\in\partial(M)$, la demostración es obvia. Así pues consideremos el caso $x\notin\partial(M)$: de acuerdo con el Teorema 1.6.7, existe $\varepsilon>0$ tal que $V(x,\varepsilon)\subseteq M$ o bien $V(x,\varepsilon)\subseteq X-M$ pero no se cumplen ambas inclusiones; si $V(x,\varepsilon)\subseteq X-M$, entonces $M\subseteq X-V(x,\varepsilon)$ y como $X-V(x,\varepsilon)$ es un conjunto cerrado, $CL(M)\subseteq X-V(x,\varepsilon)$ teniéndose así que $x\notin CL(M)$ lo cual evidentemente constituye una contradicción; o sea, $x\in Int(M)$. Demostraremos ahora que $Int(M)\cup\partial(M)\subseteq CL(M)$. Sea $x\in Int(M)\cup\partial(M)$, si $x\in Int(M)$, entonces como $Int(M)\subseteq M\subseteq CL(M)$, $x\in CL(M)$; consideremos el caso cuando $x\in\partial(M)$: supongamos que $x\notin CL(M)$, puesto que $x\in\partial(M)$ sabemos que para toda $\varepsilon>0$, $V(x,\varepsilon)\cap M\neq\phi$, y puesto que $x\notin CL(M)$ sabemos que existe alguna $\varepsilon>0$ tal que $V(x,\varepsilon)\cap M=\phi$ lo cual evidentemente constituye una contradicción, así pues $x\varepsilon CL(M)$

C3) $x\varepsilon\partial(X-M)$ si y sólo si para toda $\varepsilon>0$, $V(x,\varepsilon)\cap(X-M)\neq\phi$ y $V(x,\varepsilon)\cap(X-(X-M))\neq\phi$, lo cual ocurre si y sólo si para toda $\varepsilon>0$, $V(x,\varepsilon)\cap M\neq\phi$ y $V(x,\varepsilon)\cap(X-M)=\phi$, esto es si y sólo si $x\varepsilon\partial(M)$

C4) La demostración es inmediata de C2) observando que $Int(M)\cap\partial(M)=\phi$

C5) De conformidad con C2) del Teorema 1.6.6 M es un conjunto cerrado si y sólo si $M=CL(M)$ y esto ocurre si y sólo si $\partial(M)\subseteq M$ pues $\partial(M)\subseteq CL(M)$

C6) De conformidad con C1) del Teorema 1.6.2, M es un conjunto abierto si y sólo si $M=Int(M)$ y de acuerdo con el Teorema 1.6.5. esto ocurre si y sólo si $M\cap\partial(M)=\phi$, pues si $x\varepsilon M\cap\partial(M)$, entonces para toda $\varepsilon>0$, $\overset{\circ}{V}(x,\varepsilon)\cap(X-M)\neq\phi$, de donde $x\notin Int(M)$ teniéndose que M no es un conjunto abierto.

DEFINICION 1.6.6

Sean $<X,D>$ un espacio métrico y M y N subconjuntos de X, entonces diremos que

i) el conjunto M es denso en N si $N \subseteq CL(M)$

ii) el conjunto M es denso si $X=CL(M)$

iii) el conjunto M es nunca denso si no es denso en ninguna vecindad abierta

iv) el conjunto X es separable si X contiene algún subconjunto denso y numerable

Obsérvese que un conjunto M es denso en el conjunto N cuando todo elemento de N pertenece a M o a su conjunto derivado, o sea cuando para toda $x \varepsilon M$ y toda $\varepsilon>0$, $V(x,\varepsilon) \cap N \neq \phi$, M será denso si y sólo si para toda $x \varepsilon X$ y toda $\varepsilon>0$, $V(x,\varepsilon) \cap M \neq \phi$ y finalmente M será un conjunto nunca denso cuando $Int(M)=\phi$. Ilustraremos estos conceptos mediante el siguiente:

EJEMPLO 1.6.10

Sea el espacio métrico $U_2^1=<R,D_2^1>$, es decir la recta real con la métrica usual, luego

a) El conjunto Q de los números racionales es un conjunto denso (en R) pues $CL(Q)=R$

b) El conjunto Q^c de los números irracionales es un conjunto denso (en R) pues $CL(Q^c)=R$

c) El conjunto Z de los números enteros es un conjunto nunca denso pues $Int(Z)=\phi$, o sea, no existe alguna vecindad en R la cual contenga exclusivamente números enteros

d) El conjunto $(-1,1]$ es denso en $[-1,1]$ pues $[-1,1] \subseteq CL(-1,1]$

e) El conjunto R obviamente es denso y el conjunto ϕ obviamente es nunca denso

f) El conjunto R es separable pues como se vió en el inciso a) $Q\subseteq R$ es denso y numerable.

TEOREMA 1.6.9

H:1) Sea $<X,D>$ un espacio métrico

2) Sean M, N y P subconjuntos de X

C:1) Si el conjunto M es denso en N y el conjunto N es denso en P, entonces el conjunto M es denso en P

Demostración:

Si N es denso en P, entonces para toda $z\varepsilon P$ y toda $\varepsilon>0$, $V(z,\varepsilon/2)\cap N\neq\phi$, luego existe $y\varepsilon V(z,\varepsilon/2)\cap N$, de donde $D(y,z)<\varepsilon/2$; si M es denso en N, entonces para $y\varepsilon N$ y toda $\varepsilon>0$, $V(y,\varepsilon/2)\cap M\neq\phi$, luego existe $x\varepsilon V(y,\varepsilon/2)\cap M$, de donde $D(x,z)<\varepsilon/2$ y por la desigualdad de triángulo se tiene que $D(x,z)\leq D(x,y)+D(y,z)<\varepsilon$, para toda $\varepsilon>0$, o sea para $z\varepsilon P$, $V(z,\varepsilon)\cap M\neq\phi$.

PROBLEMAS DE LA SECCION 1.6.

1.6.1 Sean el espacio métrico $U_2^1=\langle R,D_2^1\rangle$ y M un subconjunto de R, demuestre que el conjunto R-Int(M) es un conjunto cerrado

1.6.2 Demuestre las conclusiones C3), C4) y C5) del Teorema 1.6.1

1.6.3 Demuestre la conclusión C1) del Teorema 1.6.2

1.6.4 Demuestre los conclusiones C2) y C4) del Teorema 1.6.3

1.6.5 Dando contraejemplos demuestre la invalidez de las siguientes igualdades

a) $Int(M_1 \cup M_2)=Int(M_1)\cup Int(M_2)$

b) $(M_1 \cap M_2)'=M_1' \cap M_2'$

c) $\partial(M)=CL(M)-M$

1.6.6 Demuestre las conclusiones C3), C4), C5) y C6) del Teorema 1.6.6

1.6.7 Sean <X,D> un espacio métrico y M un subconjunto de X, demuestre que

a) $M=M\cap CL(M)$

b) $CL(X-M)=X-Int(M)$

c) $Int(X-M)=X-CL(M)$

d) $(CL(M))'\subseteq M'$

e) $CL(M)-M\subseteq\partial(M)$

1.6.8 Sean el espacio métrico $U_2^1=\langle R,D_2^1\rangle$, o sea la recta real con la métrica usual y M un subconjunto de R, demuestre que si $x=\sup(M)$, entonces

$x \in CL(M)$

1.6.9 Sean $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico M un subconjunto de X, demuestre que

a) M es un conjunto abierto y cerrado si y sólo si $\partial(M)=\phi$

b) M es un conjunto abierto si y sólo si $b(M)=\phi$

c) M es un conjunto cerrado si y sólo si $b(M)=\partial(M)$

d) $b(M)=M-Int(M)$

d) $b(X-M)=\partial(M)-b(M)$

1.6.10 Sean $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico y M un subconjunto de X nunca denso, demuestre que el conjunto X-M es denso

1.6.11 Sean $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico y M un subconjunto de X, demuestre que

a) el conjunto $(X-CL(M))\cup M$ es denso

b) si M es un conjunto abierto, entonces $M\cup Ext(M)$ es un conjunto denso

1.7. DIAMETRO DE UN CONJUNTO, DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN CONJUNTO Y DISTANCIA ENTRE DOS CONJUNTOS

DEFINICION 1.7.1

Sean $<X,D>$ un espacio métrico y M un subconjunto de X, se define al diámetro de M como $d(M)=\sup\{D(m,n):m,n\varepsilon M\}$ y se dirá que el conjunto M es acotado si su diámetro es finito, en caso contrario se dirá que el conjunto M no es acotado.

EJEMPLO 1.7.1

Sea el espacio métrico $U_2^2=<R^2,D_2^2>$ y M un subconjunto de R^2, encuentre el diámetro de M cuando

a) $M=\{(x,y): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\}$

b) $M=\{(x,y):|x|\leq 1, |y|\leq 1\}$

c) $M=\{(x,y):|x|\leq 1, |y|<\infty\}$

Solución:

a) $d(M)=4$, Ver Figura 1.7.1. (a)

b) $d(M)=2\sqrt{2}$ Ver Figura 1.7.1 (b)

c) $d(M)=\infty$ Ver Figura 1.7.1 (c)

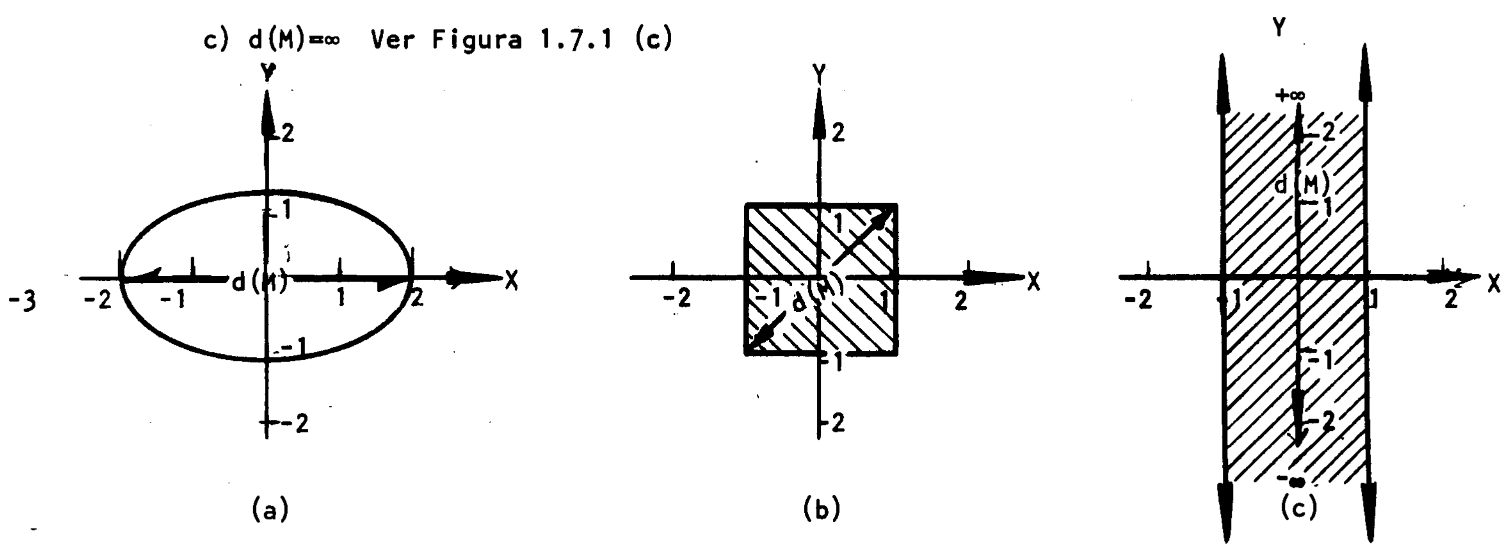


Fig. 1.7.1

DEFINICION 1.7.2

Sean $<X,D>$ un espacio métrico, $x\varepsilon X$ y M un subconjunto de X, entonces la distancia del punto x al conjunto M será de $d(x,M)=\inf\{D(x,m):m\varepsilon M\}$

EJEMPLO 1.7.2

Sea el espacio métrico $U_2^2=<R^2,D_2^2>$, encuentre $d(x,M)$ cuando

a) $x=(0,0)$, $M=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$

b) $x=(0,0)$, $M=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$

c) $x=(1,0)$, $M=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$

Solución:

a) Puesto que $x\varepsilon M$, entonces $d(x,M)=0$. Ver Figura 1.7.2 (a)

b) En este caso $d(x,M)=1$. Ver Figura 1.7.2 (b)

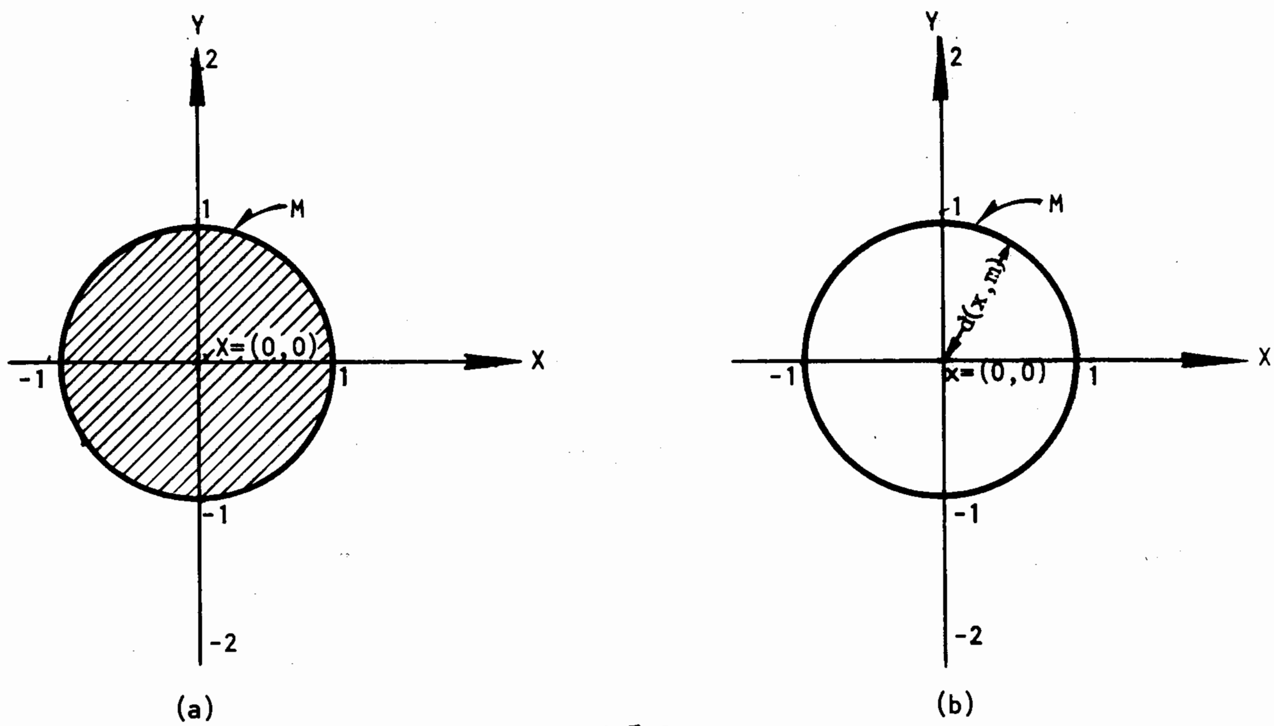


Fig. 1.7.2

c) Se observa que aún cuando $x \notin M$, se tiene $d(x,M)=0$. (v. Fig. 1.7.3)

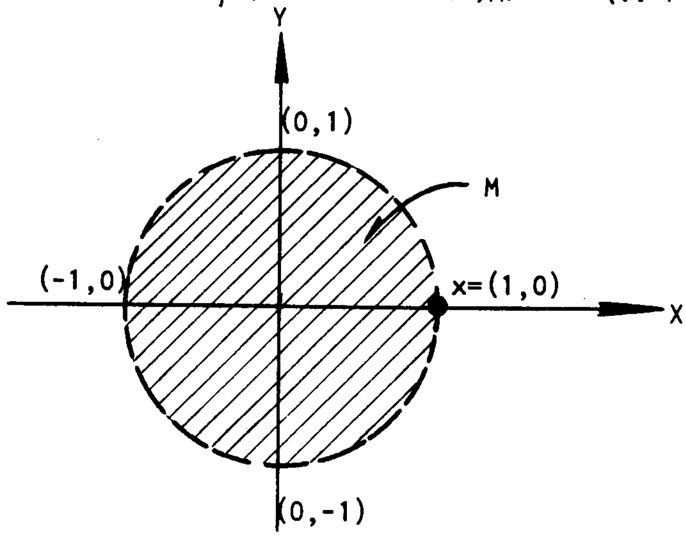


Fig. 1.7.3

TEOREMA 1.7.1

H:1) Sea $\langle X,D \rangle$ un espacio métrico

2) Sean x un elemento de X y M un subconjunto de X

C:1) $d(M)=d(CL(M))$

2) $x \in CL(M)$ si y sólo si $d(x,M)=0$

Demostración:

C1) Puesto que $M \subseteq CL(M)$ se tiene que $d(M) \leq d(CL(M))$. Sean $x, y \in CL(M)$,

luego como para toda $\varepsilon>0$, $V(x,\frac{\varepsilon}{2}) \cap M \neq \phi$ y $V(y,\frac{\varepsilon}{2}) \cap M \neq \phi$, resulta claro que existen elementos $x', y' \in M$ tales que $D(x,x')<\varepsilon/2$ y $D(y,y')<\varepsilon/2$, así pues por la desigualdad del triángulo se tiene $D(x,y) \leq D(x,x')+D(x',y')+D(y',y) < \varepsilon+D(x',y')$. De donde $d(CL(M)) < \varepsilon+d(M)$, o sea, $d(CL(M)) \leq d(M)$

C2) Se deja como ejercicio para el lector efectuar la demostración de esta conclusión.

COROLARIO:

H:1) Sea $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico y M un subconjunto de X

C:1) $\partial(M)=\{x\varepsilon X:D(x,M)=0 \text{ y } D(x,X-M)=0\}$

Demostración:

La demostración es inmediata empleando la conclusión C2) del teorema anterior.

DEFINICION 1.7.3

Sean $\langle X,D\rangle$ un espacio métrico y M y N subconjuntos de X, entonces la distancia del conjunto M al conjunto N será $d(M,N)=\inf\{D(m,n): m\varepsilon M \text{ y } n\varepsilon N\}$

EJEMPLO 1.7.3

Sea el espacio métrico $U_2^2=\langle R^2,D_2^2\rangle$, es decir el plano con la métrica usual, encuentre d(M,N) para los siguientes casos:

a) $A=\{(0,0)\}$, $B=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$

b) $A=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$, $B=\{(x,y):(x-2)^2+y^2<1\}$

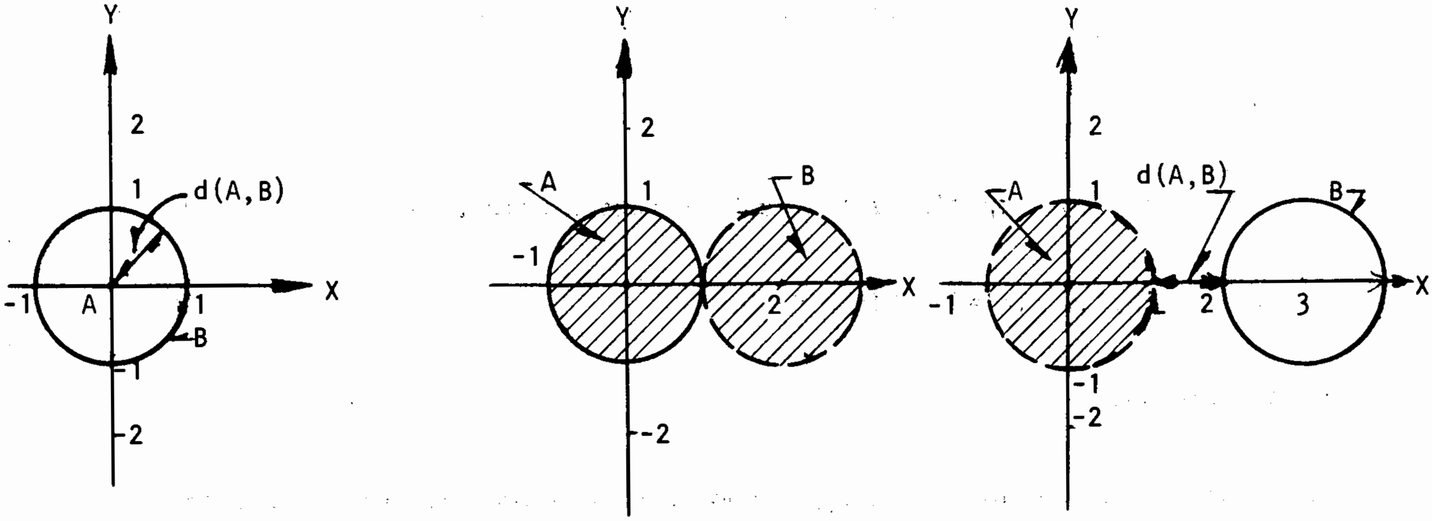
c) $A=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$, $B=\{(x,y):(x-3)^2+y^2=1\}$

Solución:

a) $d(A,B)=1$. Ver Figura 1.7.4 (a)

b) $d(A,B)=0$ Ver Figura 1.7.4 (b)

c) $d(A,B)=1$ Ver Figura 1.7.4(c)



(a) (b) (c)

Fig. 1.7.4

EJEMPLO 1.7.4

Sea el espacio métrico $U_2^1=<R,D_2^1>$, es decir, la recta real con la métrica usual y sean $N=\{0,1,2,3,...\}$ y $M=\{x\varepsilon R:x=1/n, n\neq 1$ y $n=2, 3,..,\}$. Encuentre la distancia entre el conjunto N y el conjunto M.

Solución:

Para calcular la distancia que media entre los conjuntos N y M deberemos evaluar el siguiente número: $\inf\{|0-\frac{1}{n}|\}$ cuando $n\neq 1$, $n=2,3,4,...$, pero como para toda $\varepsilon>0$ existe $n\geq 2$ tal que $\frac{1}{n}<\varepsilon$, se deduce que $d(N,M)=0$. Este ejemplo nos muestra la causa por la cual la distancia entre conjuntos no es una métrica; obsérvese que $M\cap N=\phi$.

El siguiente ejemplo nos ilustrará un caso en el cual la distancia entre conjuntos no satisface la desigualdad del triángulo.

EJEMPLO 1.7.5

Sea el espacio métrico $U_2^1=<R,D_2^1>$, es decir, la recta real con la métrica usual y sean los conjuntos $X=(-1,1]$, $Y=(1,2]$ y $Z=(2,3]$ luego $d(X,Z)>d(X,Y)+d(Y,Z)$ pues $d(X,Z)=1$ mientras que $d(X,Z)=0$ y $d(Y,Z)=0$.

En los dos últimos ejemplos se mostraron conjuntos ajenos entre los cuales mediaba una distancia igual a cero; así pues, cabe considerar las circunstancias bajo las cuales un punto y un conjunto estarán separados por una distancia distinta de cero; el próximo teorema nos auxiliará en esta aspecto.

TEOREMA 1.7.2

H:1) Sea $<X,D>$ un espacio métrico

2) Sean M un conjunto cerrado en X y x un elemento del complemento de M

C:1) La distancia del punto x al conjunto M es distinta de cero

Demostración:

Puesto que M es un conjunto cerrado, entonces según C2) del Teorema 1.6.6 $M=CL(M)$, luego si $x\varepsilon X-M$, entonces $d(x,M)\neq 0$, pues si se diera el caso de que $d(x, M)=0$, entonces de acuerdo con C2) del Teorema 1.7.1 se tendrá que $x\varepsilon M$.

El ejemplo 1.7.4 nos muestra el caso donde siendo M y N conjuntos cerrados y ajenos se tiene que $d(M,N)=0$.

PROBLEMAS DE LA SECCION 1.7.

1.7.1 Demuestre la conclusión C2) del Teorema 1.7.1.

1.7.2 Sean $<X,D>$ un espacio métrico y M un subconjunto de X, demuestre que $d(M,CL(M))=0$.

1.7.3 Sea el espacio métrico $U_2^1=<R,D_2^1>$ y sea Q el conjunto de los números racionales, empleando el Corolario del Teorema 1.7.1 encuentre $\partial(Q)$.

1.7.4 Sean $<X,D>$ un espacio métrico, y M y N subconjuntos acotados de X, demuestre que $d(AUB)\leq d(A,B)+d(A)+d(B)$.

1.7.5 Sean $<X,D>$ un espacio métrico, M un subconjunto cerrado de X y $x\varepsilon X-M$, demuestre que existen dos conjuntos abiertos y ajenos, el primero de los cuales tiene a x como elemento y el segundo contiene a M como subconjunto.

1.7.6 Sean <X,D> un espacio métrico y M y N subconjuntos cerrados de X tales que $M\cap N=\phi$ demuestre que existen dos conjuntos abiertos y ajenos el primero de los cuales contiene a M como subconjunto y el segundo a N.