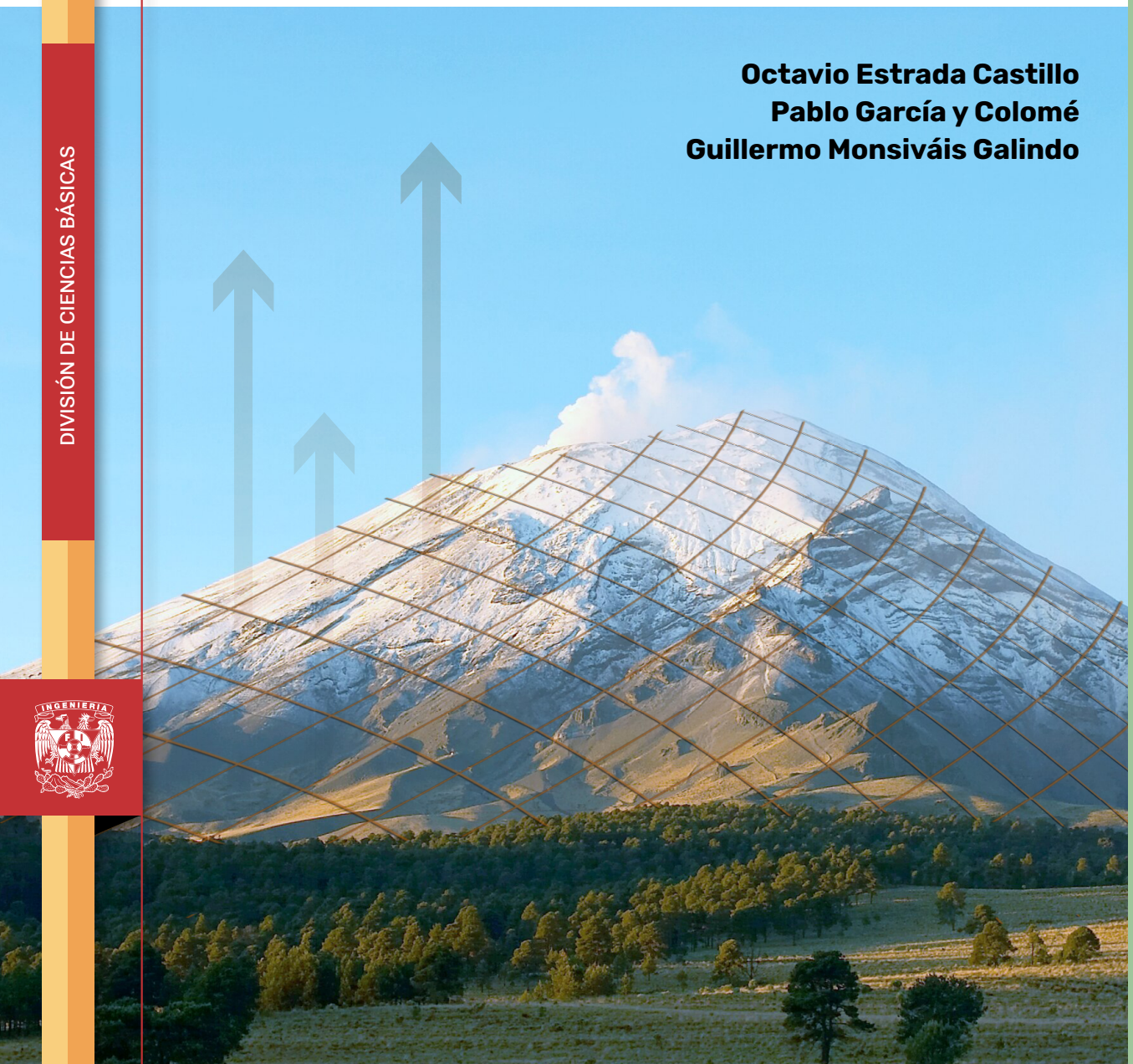
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

# CÁLCULO VECTORIAL Y APLICACIONES

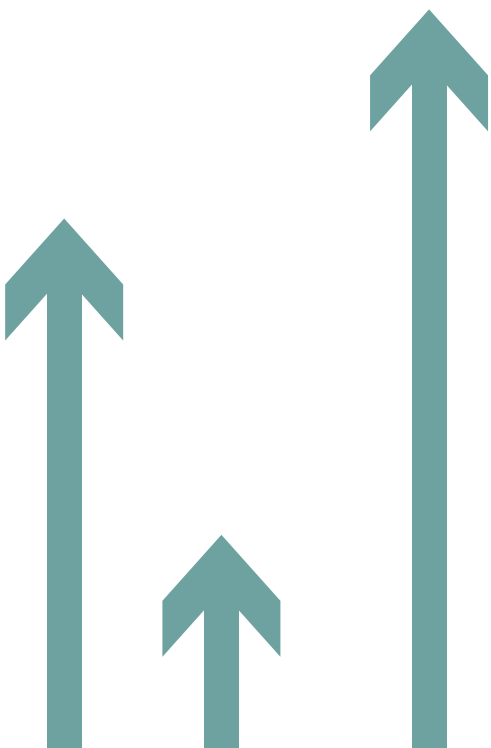
Octavio Estrada Castillo
Pablo García y Colomé
Guillermo Monsiváis Galindo

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS



# CÁLCULO VECTORIAL Y APLICACIONES

**Octavio Estrada Castillo**
**Pablo García y Colomé**
**Guillermo Monsiváis Galindo**



Para visualizar la obra te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

Estrada Castillo, Octavio
García y Colomé, Pablo
Monsiváis Galindo, Guillermo
*Cálculo Vectorial y aplicaciones*
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2025, 841 p.
ISBN: 978-607-587-296-4

## Cálculo Vectorial y aplicaciones

Primera edición electrónica
de un ejemplar (20 MB) en formato PDF
Publicado en línea en marzo de 2025

D.R. © 2025, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

ISBN: 978-607-587-296-4

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad
Nacional Autónoma de México. Prohibida la reproducción
o transmisión total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

Unidad de Apoyo Editorial

Diseño y formación editorial: Nismet Díaz Ferro

Fotografía de portada: Jakub Hejtmánek, Wikipedia

# Prólogo de la primera edición

Nuestra intención al realizar esta obra es la de contribuir a la formación de los futuros ingenieros, presentando un material que sea de utilidad tanto para los estudiantes como para los profesores de ingeniería y que puedan usarlo como libro de texto o de consulta. El libro contempla lo relacionado con las funciones escalares de variable vectorial y con las funciones vectoriales de variable escalar y vectorial. El desarrollo de los temas se presenta de una manera sencilla, ilustrando los conceptos con diversos ejemplos y aplicaciones.

Las funciones escalares que se tratan tienen dos o más variables independientes, mientras que las funciones vectoriales se estudian con una o más variables independientes.

Se recomienda a todo aquél que desee estudiar este material, que tenga conocimientos previos de cálculo diferencial e integral de una sola variable, que esté familiarizado con los conceptos fundamentales de álgebra y geometría analítica (tanto plana como en el espacio) y que posea conocimientos elementales de álgebra vectorial.

El libro consta de seis capítulos en donde la distribución de los temas es como sigue: En el primer capítulo se estudian las funciones escalares de variable vectorial, sus características, su clasificación, su generación y su formulación.

También se ve el tema de superficies. En el segundo se abordan los conceptos de límite, derivada y diferencial de esas funciones y en el tercero se estudia como determinar sus valores extremos. En el cuarto capítulo se presentan las funciones vectoriales incluyendo su derivación y sus aplicaciones. En el quinto se tratan las integrales curvilíneas y se discute ampliamente su relación con el concepto de tra bajo. Por último, en el sexto capítulo se estudia la integración múltiple, principalmente las integrales dobles, triples y las de superficie así como sus aplicaciones. Se discuten también los teoremas de Green, Gauss y Stokes.

Es el deseo de los autores que esta obra sea de lectura accesible y clara para los alumnos y que un buen número de ellos salga beneficiado al recorrer estas páginas.

A lo largo del desarrollo de este libro hemos recibido las opiniones y sugerencias de muchos colegas y estudiantes. A todos ellos deseamos hacerles patente nuestro agradecimiento. En especial a nuestro gran amigo Eduardo Belaunzarán cuyas grandes imaginación y creatividad han quedado plasmadas en varios de los problemas y ejemplos discutidos en estas páginas. También a la señora Irma Orozco García, que capturó el manuscrito original, y a los M. en C. José Manuel Álvarez Tostado y Antonio García Centeno, que con su gran habilidad contribuyeron de manera muy importante en el procesamiento del material, queremos agradecerles su valiosa participación.

G. M. desea agradecer también a J. L. Fernández Chapou el tiempo que dedicó a discutir con él algunos temas del texto.

Octavio Estrada
Pablo García y Colomé
Guillermo Monsiváis

# Prólogo de la edición digital

La primera edición de este libro de Cálculo Vectorial data de 26 años y tiene una singular historia de la cual se hará un efímero relato. Sucede que, después de surgir a la venta, resultó muy difícil y más tarde imposible, contactar al editor. De terceras voces nos enteramos de que, durante un gran período de tiempo, fue vendido en diversas librerías, y por lapsos cortos, de México y de algunos países de América del Sur. Al "desaparecer" la editorial se llevó consigo los documentos relacionados con los derechos de autor, cosa que nos imposibilitó para hacer reimpresiones y una segunda edición.

En ese interludio, seguimos nuestra vocación docente y de investigación en nuestra bella e insigne UNAM, no sin recordar, con pesadumbre e inquietud interior, que debíamos hacer algo para rescatar los derechos de este libro que tanto trabajo nos había costado. Valga decir que reunir a tres universitarios atiborrados de trabajo en esta afamada casa de estudios, sabedores que las reuniones para el libro considerarían —como lo hicieron— horas de cavilación profunda para conceptualizar e ilustrar la teoría en la materia con ejercicios y aplicaciones varias, constituyó una ardua tarea.

Hace tres años, en una coincidencia con sabor a casualidad, en un festejo al cual uno de nosotros asistió, no como invitado sino como acompañante, apareció

el editor —la casa editorial ya no existía— y se logró que días más tarde nos entregara los derechos del libro.

A partir de esa circunstancia fortuita emprendimos la tarea de revisar, de manera exhaustiva todo el libro, incorporando nuevas y novedosas series de ejercicios al final de la mayoría de las secciones con sus respectivas respuestas. Al mismo tiempo ampliamos y/o modificamos varios contenidos con objeto de mejorar su exposición y hacer más asequible su comprensión y aprendizaje.

Se trata de un libro que considera con profundidad y una gran cantidad de ejemplos y ejercicios de aplicación, las funciones escalares de variable vectorial y las funciones vectoriales de variable escalar y vectorial.

El lenguaje del libro es comprensible y cada conocimiento vertido, invariablemente va acompañado por ilustraciones analíticas y gráficas.

Es de los pocos libros de cálculo superior que al hablar de funciones escalares de variable vectorial incluye las superficies, su discusión, análisis y clasificación. Además, contiene problemas relativos al planteamiento o formulación de funciones —modelos matemáticos— lo que en muchas ocasiones constituye el principal obstáculo al configurar situaciones de optimación.

Es una obra que no "se salta" la noción del límite de una función escalar de variable vectorial, sino que la aborda con hondura y formalidad, incluyendo ejercicios diversos y considerando los teoremas de continuidad.

El libro contiene una interpretación geométrica de la diferencial total y trata diversos casos de derivaciones explícita e implícita de las funciones escalares de variable vectorial. Analiza y detalla, de forma clara y entendible, al estudiar aplicaciones de las integrales dobles y triples, los conceptos físicos de trabajo, energías potencial y cinética, la ley de la conservación de la energía, los primeros momentos (estáticos), los momentos de inercia, el cálculo de la masa y del centro de masa y el centroide, tanto en distribuciones planas de materia como en cuerpos sólidos.

Es notorio el número de ejercicios y aplicaciones de las integrales múltiples, sobre todo en aquellos casos en los que su resolución se simplifica notablemente mediante la utilización de un determinado sistema curvilíneo ortogonal como el cilíndrico, el esférico o bien, otro diseñado exprofeso para un problema específico a través de una integral múltiple.

El propósito de los autores es que profesores y estudiantes de Cálculo Vectorial, encuentren en este libro, todo aquello relacionado con el cálculo superior

que se considera necesario para sus estudios de ingeniería, tanto en el tratamiento de los conocimientos que abarca por parte de los docentes como en los estudiantes, que complete lo tratado en el aula y que les permita apropiarse del conocimiento, esto es, hacerlo suyo, reconstruirlo, edificarlo y utilizarlo para transformar y transformarse.

Lo vertido en esta obra es sencillo para que un profesor se adentre en este fascinante mundo del cálculo superior y sea capaz de impartir sus contenidos a los estudiantes y para que estos estudien, practiquen, comprendan y aprendan, y así estar en la plena disposición y posibilidad de adquirir aprendizajes significativos, al hacer suyo lo visto en el aula y poder después aplicarlo en asignaturas propias de la carrera.

**Los autores**

*Queremos agradecer a la Facultad de Ingeniería de la UNAM y en particular al Dr. Leopoldo Adrián González González, Secretario General de la Facultad, por el respaldo que nos brindaron para que esta obra fuera generada en la Unidad de Apoyo Editorial y que pudiera ver la luz en el año 2025.*

*Finalmente deseamos agradecer de manera muy especial al Fis. Miguel Navarro Saad que con sus grandes habilidades y conocimientos procesó y creo los Macros que le dieron forma a todo el material del libro, tanto de la primera edición como de la actual.*

*Agradecemos también a la LDG Nismet Díaz Ferro por su trabajo para que esta obra tomara su forma final.*

**Los autores**

*A mi MADRE SARA por todo lo que hizo para sacar adelante a sus siete hijos, ejemplo de tesón, de integridad y de vida, y por la herencia más valiosa que recibí de su parte: EDUCACIÓN. A mi esposa Carolina, a mis hijas Carolina y Mariana, y a mi adorado nieto César Octavio. A mis hermanos María del Consuelo, Sara Luisa, José Joaquín, Jorge Alberto, Guillermo y Luis Antonio. A todos los demás seres queridos que me rodean y que forman parte de mi felicidad.*

***Octavio.***

*A Rosy, Samari, Ana Paula, Priscila, Bruno y Marco, con toda la magia del amor. A mi madre por hacer que amara las matemáticas. A mi Facultad por su cobijo intelectual. A mis compañeros profesores, por nuestro trabajo noble y cotidiano. A mis alumnos, por su energía, libertad y espíritu.*

***Pablo.***

*A todos mis seres queridos, recordando los momentos de felicidad y el cariño que hemos compartido. En especial a mi Erika, a mi madre, a mis hijos y a la memoria de María y de mi padre.*

***Guillermo.***

# Índice


Prólogo de la edición digital . . . . . IX
Prólogo de la primera edición. . . . . XIV

Capítulo 1
FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL. SUPERFICIES. . . . . 1
**1.1. Funciones escalares. . . . . 2**
1.1.1 Conceptos fundamentales. . . . . 2
1.1.2 Regiones . . . . . 6
1.1.3 Función escalar de variable vectorial (Campo Escalar) . . . . . 11
1.1.4 Representación gráfica de una función $f: R^2 \to R$ . . . . . 16
Ejercicios. . . . . 21
**1.2 Operaciones elementales entre funciones . . . . . 24**
Ejercicios. . . . . 27
**1.3 Clasificación de funciones . . . . . 29**
**1.4 Análisis de la ecuación de una superficie . . . . . 30**
1.4.1 Simetría . . . . . 30
1.4.2 Intersecciones con los ejes coordenados y trazas. . . . . 32
1.4.3 Secciones planas paralelas a los planos coordenados. . . . . 35
1.4.4 Extensión . . . . . 37
Ejercicios. . . . . 43
**1.5 Superficies cuádricas. . . . . 45**
1.5.1 Esfera . . . . . 46
1.5.2 Elipsoide . . . . . 49
1.5.3 Hiperboloide de una hoja . . . . . 51
1.5.4 Hiperboloide de dos hojas . . . . . 54
1.5.5 Cono . . . . . 55
1.5.6 Paraboloide elíptico . . . . . 57
1.5.7 Paraboloide hiperbólico . . . . . 58
1.5.8 Superficies degeneradas . . . . . 60
1.5.9 Clasificación de las superficies cuádricas no rotadas . . . . . 61
1.5.10 Superficies cuádricas rotadas . . . . . 62
Ejercicios. . . . . 70

**1.6 Generación de superficies ..... 75**
1.6.1 Generatriz, directrices y ecuación de condición ..... 79
1.6.2 Superficies regladas ..... 84
1.6.3 Superficies cilíndricas ..... 90
1.6.4 Superficies cónicas ..... 94
1.6.5 Superficies de revolución ..... 98
Ejercicios ..... 102
**1.7 Formulación de funciones ..... 107**
Ejercicios ..... 111

**Capítulo 2**
**DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL ..... 115**
**2.1 Límite de una función escalar de variable vectorial. Continuidad ..... 115**
2.1.1 Límites reiterados ..... 120
2.1.2 Continuidad de una función escalar ..... 127
Ejercicios ..... 137
**2.2 Concepto de derivada direccional ..... 140**
2.2.1 Derivadas parciales ..... 144
2.2.2 Interpretación geométrica ..... 146
2.2.3 Derivadas parciales de órdenes superiores. Teorema de Schwarz ..... 151
2.2.4 Algunas aplicaciones de la derivada parcial ..... 158
2.2.5 Plano tangente y recta normal a una superficie ..... 167
2.2.6 Relación entre la continuidad y las derivadas parciales ..... 172
Ejercicios ..... 174
**2.3 Diferencial total. Funciones diferenciables ..... 181**
2.3.1 Interpretación geométrica ..... 193
2.3.2 Incremento total e incrementos parciales ..... 195
2.3.3 Error absoluto y error relativo ..... 197
2.3.4 Diferenciales sucesivas ..... 203
Ejercicios ..... 206
**2.4 Distintos casos de derivacion explícita y regla de la cadena ..... 210**
2.4.1 Aplicaciones de la derivada total ..... 228
Ejercicios ..... 231
**2.5 Derivación implícita ..... 233**
Ejercicios ..... 256
**2.6 Definición de gradiente y su relación con la derivada direccional ..... 257**
2.6.1 Generalización al espacio $\mathbb{R}^n$ ..... 265

2.6.2 Interpretación geométrica del gradiente y su relación con la derivada direccional . . . 267
2.6.3 Segunda derivada direccional . . . 272
Ejercicios . . . 276
**2.7 Diferencial exacta y su integración . . . 279**
Ejercicios . . . 296

**Capítulo 3**
**EXTREMOS DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL . . . 298**
**3.1 Conceptos fundamentales . . . 298**
**3.2 Criterio de la segunda derivada para determinar máximos y mínimos . . 306**
Ejercicios . . . 323
**3.3 Generalización del criterio para el caso de más de dos variables . . . 328**
**3.4 Optimización de funciones con restricciones . . . 339**
3.4.1 Multiplicadores de Lagrange . . . 353
Ejercicios . . . 367

**Capítulo 4**
**FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR Y DE VARIABLE VECTORIAL . . . 370**
**4.1 Conceptos fundamentales . . . 370**
Ejercicios . . . 376
**4.2 Límites y continuidad de funciones vectoriales . . . 377**
Ejercicios . . . 383
**4.3 Derivadas y diferenciales de funciones vectoriales . . . 386**
4.3.1 Regla de la cadena . . . 401
Ejercicios . . . 408
**4.4 Curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$ y sus ecuaciones vectoriales . . . 413**
4.4.1 Longitud de arco como parámetro de una curva . . . 420
Ejercicios . . . 426
**4.5 Aplicaciones de la derivada de funciones vectoriales de variable escalar . . . 328**
4.5.1 Fórmulas de Frenet–Serret . . . 434
4.5.2 Cinemática de una partícula . . . 448
Ejercicios . . . 454
**4.6 Ecuación vectorial de una superficie . . . 467**
Ejercicios . . . 480

**4.7 Divergencia, rotacional y laplaciano . . . . . 482**
4.7.1 Propiedades e interpretación física de la divergencia . . . . . 485
4.7.2 Propiedades e interpretación física del rotacional . . . . . 493
4.7.3 El laplaciano y otros operadores de segundo orden . . . . . 500
Ejercicios. . . . . 504
**4.8 Coordenadas curvilíneas . . . . . 507**
4.8.1 Sistema coordenado cilíndrico circular . . . . . 541
4.8.2 Sistema coordenado esférico . . . . . 547
4.8.3 Coordenadas cilíndricas elípticas (también llamadas elípticas cilíndricas) . . . . . 554
4.8.4 Coordenadas bipolares . . . . . 555
4.8.5 Coordenadas parabólicas (también llamadas paraboloidales) . . . . . 556
4.8.6 Coordenadas biesféricas . . . . . 557
4.8.7 Coordenadas esferoidales prolatas o alargadas . . . . . 558
4.8.8 Coordenadas esferoidales oblatas o achatadas . . . . . 560
4.8.9 Coordenadas cilíndricas parabólicas . . . . . 561
4.8.10 Coordenadas toroidales . . . . . 563
Ejercicios. . . . . 564

**Capítulo 5**
**INTEGRALES DE LÍNEA . . . . . 568**
**5.1 Integrales de línea . . . . . 569**
**5.2 Condiciones para la existencia de la integral de línea y su evaluación. . . 573**
5.2.1 Propiedades de la integral de línea . . . . . 581
5.2.2 Trayectoria cerrada . . . . . 589
Ejercicios. . . . . 590
**5.3 Independencia de la trayectoria . . . . . 593**
Discusión Complementaria . . . . . 610
Ejercicios. . . . . 616
**5.4 Otro tipo de integrales curvilíneas de funciones vectoriales . . . . . 618**
Ejercicios. . . . . 624
**5.5 La integral curvilínea como trabajo . . . . . 625**
5.5.1 Campo de fuerza conservativo . . . . . 640
5.5.2 El trabajo y la energía cinética . . . . . 642
5.5.3 Ley de la conservación de la energía . . . . . 644
Ejercicios. . . . . 645
**5.6 Campos irrotacionales y campos conservativos. . . . . 648**
Ejercicios. . . . . 654

**5.7 La integral curvilínea en otros sistemas coordenados** . . . . . **655**
Ejercicios. . . . . 662

**Capítulo 6**
**INTEGRACIÓN MULTIPLE** . . . . . **663**
**6.1 La integral doble** . . . . . **664**
6.1.1 Teorema del valor medio para integrales dobles. . . . . 672
6.1.2 Cálculo de la integral doble . . . . . 677
6.1.3 Integrales dobles en otros sistemas coordenados . . . . . 692
Ejercicios. . . . . 699
**6.2 Aplicaciones de la integral doble en la mecánica** . . . . . **702**
6.2.1 Densidad y masa . . . . . 702
6.2.2 Primeros momentos (o momentos estáticos) . . . . . 703
6.2.3 Segundos momentos (o momentos de inercia) . . . . . 705
Ejercicios. . . . . 715
**6.3 Teorema de Green en el plano** . . . . . **716**
6.3.1 Corolarios del teorema de Green (Formas alternativas de expresar el teorema de Green) . . . . . 725
Ejercicios. . . . . 738
**6.4 Integrales de superficie** . . . . . **740**
Ejercicios. . . . . 754
**6.5 La integral triple** . . . . . **755**
6.5.1 Teorema del valor medio para integrales triples. . . . . 760
6.5.2 Cálculo de la integral triple. . . . . 760
6.5.3 Integrales triples en otros sistemas coordenados . . . . . 768
6.5.4 Cálculo del volumen de un cuerpo. . . . . 769
6.5.5 Cálculo de la masa, el centro de masa y los momentos . . . . . 773
Ejercicios. . . . . 781
**6.6 Teorema de Stokes** . . . . . **783**
6.6.1 Corolarios del teorema de Stokes . . . . . 793
Ejercicios. . . . . 798
**6.7 Teorema de la divergencia** . . . . . **799**
6.7.1 Corolarios del teorema de la divergencia. . . . . 812
Ejercicios . . . . . 817
**6.8 Integrales impropias** . . . . . **818**
Ejercicios. . . . . 826

**Fórmulas** . . . . . **827**
**Índice alfabético** . . . . . **834**

## Capítulo 1

# FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL. SUPERFICIES

Existe un sinnúmero de problemas en matemáticas, física e ingeniería en donde una variable depende de otras; así por ejemplo, el voltaje $V$ en una resistencia eléctrica está sujeto a la ley de Ohm: $V = RI$, expresión en la que se observa que dicho voltaje depende, tanto de la resistencia R del resistor, como de la corriente eléctrica I que fluye por él. La expresión $V = RI$ es un ejemplo simple de una función que tiene dos variables independientes (la $R$ y la $I$) y una variable dependiente (la $V$). Por ello se hace necesario el estudio de funciones de varias variables. En este capítulo se tratarán dichas funciones, sus operaciones elementales y cómo generarlas. También se tocarán algunos aspectos sobre superficies. Se analizarán principalmente las funciones con dos variables independientes ya que, por un lado, tienen una representación geométrica muy simple, y por otro son suficientes para ejemplificar las propiedades y conceptos más importantes asociados a las funciones de varias variables. De esta manera, los métodos que aquí se discutirán para funciones con dos variables, serán fácilmente aplicables al caso de funciones con tres o más variables. En este libro sólo se estudiarán los casos en los que tanto las variables dependientes como las variables independientes toman valores reales. Los casos más generales en donde las variables toman valores complejos quedan fuera del alcance de este libro.

# 1.1 Funciones escalares

## 1.1.1 Conceptos fundamentales

Para principiar se dará un repaso muy breve de varios conceptos preliminares y se establecerán algunas convenciones. Cuando se tenga una expresión matemática, por ejemplo el producto matricial $ABC$, y se desee denotarlo abreviadamente con algún símbolo, por ejemplo $D$, se escribirá $D \equiv ABC$ en vez de $D = ABC$. La expresión $D \equiv ABC$ indica que $D$ se ha definido como dicho producto. Esto por supuesto implica la igualdad entre ambos miembros pero esta igualdad es simplemente por definición. El conjunto de los números reales se denotará con el símbolo $\mathbb{R}$ y para indicar que $x$ es un número real se escribirá $x \in \mathbb{R}$, lo cual se lee como: "$x$ es un elemento de los números reales" o bien como: "$x$ pertenece a los reales". A los números reales se les denominará también *escalares*. Se llamará *vector de ene componentes* bien *vector enedimensional* o simplemente *vector*) a un arreglo ordenado de $n$ números reales de la forma

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Al número $x_i$ se le llamará componente $i$-ésima del vector o bien componente número $i$ del vector. Cuando $n$ es igual a 2 o 3 se usarán también los nombres de pareja o terna ordenada de números reales, respectivamente. En estos casos, en vez de usar los símbolos $x_1$, $x_2$ y $x_3$ para las componentes de vector se utilizarán los símbolos $x$, $y$ y $z$. Para denotar abreviadamente a los vectores se usarán letras negrillas, por ejemplo $\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$, etc. Frecuentemente se sigue la convención de utilizar la misma letra para denotar al vector y a sus componentes. Así, el vector anterior se puede denotar como $\mathbf{x}$, es decir,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Sin embargo, esta convención no es una regla absoluta y ocasionalmente encontraremos expresiones de la forma

$$\mathbf{r} = (x, y, z); \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n); \quad \mathbf{a} = (x, y); \quad \text{etc.}$$

El conjunto de todos los vectores con $n$ componentes se denotará como $\mathbb{R}^n$ y se le llamará *espacio euclidiano enedimensional* o simplemente *espacio* $\mathbb{R}^n$ y para indicar que $x$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ se escribirá $x \in \mathbb{R}^n$, lo cual se lee como: «$x$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$» o bien como: «$x$ pertenece a $\mathbb{R}^n$». La multiplicación del número real $\alpha$ por el vector $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y la suma de los vectores $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ se denotan respectivamente como $\alpha\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ y están dadas por

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n).$$

En los casos en los que $n=2$ o $n=3$ se puede tener una imagen gráfica de cada vector. Considérese por ejemplo el caso de $n=2$. Una representación geométrica del vector $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$ se obtiene si sobre un plano con ejes coordenados perpendiculares entre sí se dibuja un segmento de recta dirigido (una flecha) que parte del origen al punto de coordenadas $(v_1, v_2)$. Ver figura 1-1$(i)$. De esta forma cada vector de $\mathbb{R}^2$ tiene asociado al mismo tiempo una flecha y un punto del plano y viceversa. Debido a esto se acostumbra identificar indistintamente al vector $\mathbf{v}$ con su flecha asociada o con el punto de coordenadas $(v_1, v_2)$. Así mismo, se identifica indistintamente a $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de parejas de números reales $\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, o como el plano coordenado. En ocasiones conviene considerar también a cualquier otra flecha que sea paralela a la anterior y que tenga la misma longitud pero que no necesariamente parta del origen como una representación del mismo vector $\mathbf{v}$. De este modo el vector $\mathbf{v}$ puede estar representado por un sinnúmero de flechas. Se asigna el nombre especial de *radio vector* a la flecha que parte del origen. Entonces, la expresión $(v_1, v_2)$ puede identificarse como un vector, un radio vector o un punto. No obstante, cuando se quiera indicar explícitamente que $(x_1, x_2)$ debe considerase como un punto se utilizará una letra mayúscula, por ejemplo, $\mathbf{P}=(x_1, x_2)$. La longitud de la flecha asociada a un vector $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$ está dada por (utilizando el teorema de Pitágoras en la figura 1-1$(i)$): $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ y se le llamará *norma o magnitud* de $\mathbf{v}$. La norma de $\mathbf{v}$ se denota como $|\mathbf{v}|$ o bien, cuando no haya lugar a confusión, simplemente como v. Es decir,

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}\,.$$

A los vectores que tengan norma igual a 1 se les llamará vectores unitarios y para denotarlos se colocará una tilde de la forma ˆ sobre la letra que denota al vector. Es claro que al dividir un vector arbitrario $\mathbf{v}$ entre su norma se obtiene un nuevo vector $\hat{\mathbf{v}}' = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ que es unitario. Es decir,

$$\left|\hat{\mathbf{v}}'\right| = \left|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\,|\mathbf{v}| = 1.$$

A este procedimiento se le denomina *normalización del vector* $\mathbf{v}$. Cuando dos vectores unitarios son ortogonales (o perpendiculares) entre sí se dice que los vectores son ortonormales.

Por otro lado, cuando un vector es perpendicular a un plano se dice que el vector es normal al plano, independientemente de que el vector tenga magnitud igual o diferente de uno. Notar la diferencia entre las frases «vector normalizado» (que significa que el vector se ha construido de manera que tenga magnitud igual a uno) con la frase «vector normal a un plano» (que significa que el vactor es perpendicular al plano).

La representación geométrica de la suma de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ es la bien conocida ley del paralelogramo que se estudia en Geometría Analítica. En la figura 1-1$(ii)$ se ilustra la suma de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. El paralelogramo tiene por lados las flechas de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. La suma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ es la flecha sobre la diagonal que va de la esquina del paralelogramo que está en el origen hacia la esquina opuesta del paralelogramo. La otra diagonal es la resta $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ que es la flecha que va desde el punto final de a hacia punto final de $\mathbf{b}$. En la figura se observa que al sumar las flechas a y $(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ se obtiene $\mathbf{b}$.

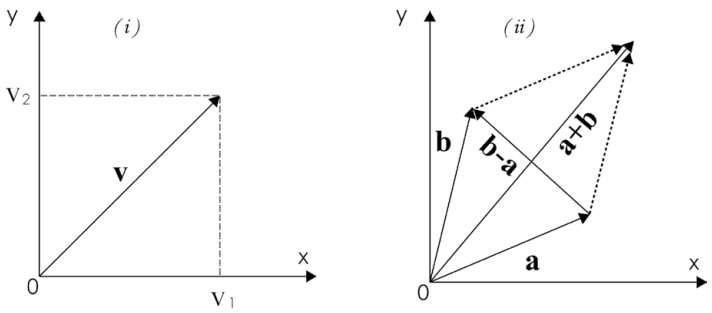



**FIGURA 1.1.** *(i)* Representación geométrica de un vector en el plano. *(ii)* Ley del paralelogramo para la suma de vectores.

Si **A** y **B** son los puntos en donde terminan la flechas de **a** y **b** respectivamente entonces $\mathbf{A}=(a_1,\ a_2)$ y $\mathbf{B}=(b_1,\ b_2)$ y se tiene que el vector que va de **A** a **B** es el vector $\mathbf{b}-\mathbf{a}$. La magnitud de este vector es igual a la distancia que hay entre **A** y **B** y está dada por

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$

Por otro lado, la imagen geométrica de la multiplicación del número $\alpha$ por el vector **v** es una nueva flecha paralela a la flecha asociada a **v** pero cuya magnitud es igual a la norma de **v** multiplicada por $\alpha$. Cuando $\alpha>0$ ambas flechas apuntan en la misma dirección pero cuando $\alpha<0$ la nueva flecha apunta en dirección contraria a la dirección de **v**.

Estas ideas son igualmente aplicables para el caso $n=3$ y en general para $n$ arbitrario aunque nuestra imagen geométrica se pierda para $n>3$. Siempre que en este libro se discuta el sistema tridimensional se considerará que el sistema de ejes es levógiro, el cual es tal que si se apunta con el dedo índice la dirección del eje Z y con el dedo pulgar la dirección del eje Y entonces el dedo medio puede apuntar en la dirección del eje X.

Para finalizar esta parte conviene mencionar que existen muchos otros espacios vectoriales y que son más generales que los espacios $\mathbb{R}^n$. Esos espacios se estudian en los textos de álgebra Lineal. Pero en este libro se considerarán unicamente los espacios $\mathbb{R}^n$, principalmente $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

A continuación se definirán algunos conjuntos particulares de puntos en $\mathbb{R}^n$.

**Definición.** Se llama ***vecindad*** o ***entorno*** del punto $(x_0,\ y_0)\in\mathbb{R}^2$ al conjunto de puntos que se encuentran en el interior de una circunferencia de radio $\delta$ y cuyo centro es $(x_0,\ y_0)$. Esto es, al conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2.$$

A $\delta$ se le llama ***radio de la vecindad***.

Si se excluye al punto $(x_0, y_0)$ se habla entonces de una vecindad (o entorno) reducida o agujerada en $(x_0, y_0)$. Nótese que si se hace $\mathbf{r} = (x, y)$ y $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$, la desigualdad anterior se puede expresar como

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta,$$

lo que permite extender fácilmente la definición al espacio de $n$ dimensiones como sigue.

**Definición.** Al conjunto de puntos $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisface la desigualdad $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta$ se le denomina ***vecindad o entorno del punto*** $\mathbf{r}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, \cdots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$.

### 1.1.2 Regiones

**Definición.** Sean **P** un punto y $S$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

*i)* **P** es un ***punto interior*** de $S$ si todos los puntos de al menos una de sus vecindades están contenidos en $S$.

*ii)* **P** es un ***punto exterior*** a $S$ si todos los puntos de al menos una de sus vecindades no pertenecen a $S$.

*iii)* **P** es un ***punto frontera*** de $S$ si en cualquiera de sus vecindades existen puntos que pertenecen a $S$ y puntos que no pertenecen a $S$.

*iv)* **P** es un ***punto singular*** de $S$ si todos los puntos de al menos una de sus vecindades, están contenidos en $S$ con excepción del mismo punto **P**.

**Definición.** Sea $S$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

*i)* $S$ es ***cerrado*** si contiene puntos interiores y contiene a todos sus puntos frontera.

*ii)* $S$ es ***abierto*** si contiene puntos interiores y no contiene puntos frontera.

*iii)* $S$ es ***semiabierto o semicerrado*** si contiene puntos interiores y algunos puntos frontera.

## Ejemplo 1.

*i)* El conjunto $S=\{(x,\ y)\,|\,x+y\leq 1;\ x\geq 0,\ y\geq 0;\ x,\ y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ es un conjunto cerrado. Ver la figura 1.2. En este ejemplo $S$ es el conjunto de todos los puntos que están en el triángulo sombreado, incluyendo a su perímetro. De acuerdo con la definición de punto frontera dada arriba los puntos del perímetro son precisamente los puntos frontera ya que cualquier vecindad que se construya alrededor de cualquiera de ellos contiene puntos que pertencen a la región sombreada y puntos que no pertenecen a ella. Entonces, como $S$ contiene a sus puntos frontera es un conjunto cerrado.

*ii)* El conjunto $S=\{(x,\ y)\,|\,x+y<1;\ x>0,\ y>0;\ x,\ y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y se ilustra en la figura 1.3. En este ejemplo el perímetro está trazado con líneas punteadas para indicar que no forma parte de $S$ y por lo tanto $S$ es abierto.

*iii)* El conjunto $S=\{(x,\ y)\,|\,x+y<1;\ x\geq 0,\ y\geq 0;\ x,\ y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ es un conjunto semiabierto como se ve en la figura 1.4.

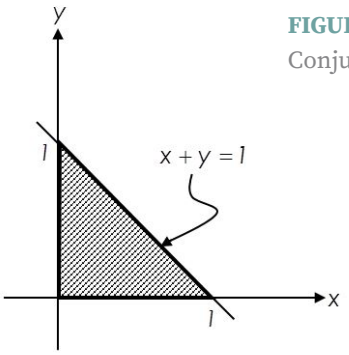



**FIGURA 1.2.**
Conjunto cerrado.

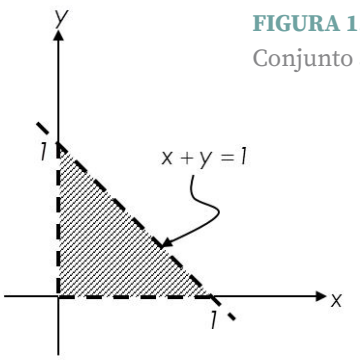



**FIGURA 1.3.**
Conjunto abierto.

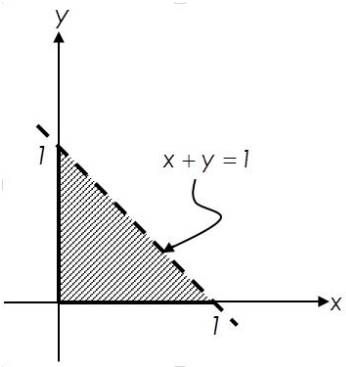



**FIGURA 1.4.** Conjunto semiabierto.

*iv)* El conjunto $S=\{(x,\ y)\,|\,x+y<1;\ x\geq 0,\ y\geq 0;\ x,\ y\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{R}^2$ (donde $\mathbb{Q}$ representa a los racionales) es un conjunto que no satisface ninguna de las definiciones anteriores ya que no contiene puntos interiores y sólo contiene puntos frontera. En efecto, este conjunto consiste de todos los puntos del triángulo considerado en el ejemplo anterior pero cuyas coordenadas son números racionales. Y como cualquier vecindad que se construya alrededor de cualquiera de esos puntos siempre va a contener puntos cuyas coordenadas son racionales y puntos cuyas coordenadas no son racionales entonces todos los puntos son puntos frontera.

**Definición.** Sea $S$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Si cualquier par de puntos **P** y **Q** de $S$ se pueden unir mediante un segmento de curva tal que todos sus puntos pertenezcan a $S$ se dice que $S$ es un ***conjunto conexo***. Si además, dicho segmento es recto, entonces $S$ se denomina ***convexo***.

Aunque el siguiente concepto es posible definirlo en $\mathbb{R}^n$ aquí sólo se definirá en $\mathbb{R}^2$.

**Definición.** Sea $S\subset\mathbb{R}^2$ un conjunto conexo con la propiedad de que todos los puntos encerrados por una curva cerrada cualquiera contenida en $S$, también están contenidos en $S$. Entonces se dice que $S$ es ***simplemente conexo***.

## Ejemplo 2.

*i)* El conjunto $S=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\le 16;\ x^2+y^2\ge 1;\ x^2+(y-2)^2\ge 1/4\}$ es conexo como se ve en la figura 1.5. Sin embargo, $S$ tiene dos hoyos, y por lo tanto cualquier par de puntos de $S$ que se localicen en lados opuestos de alguno de esos hoyos no se podrán unir mediante una recta que quede totalmente contenida en $S$. En consecuencia, $S$ no es convexo. Además, si consideramos una curva $C$ dentro de $S$ que rodee a los hoyos, entonces habrá puntos dentro de $C$ que no pertenezcan a $S$. Así, $S$ tampoco es *simplemente conexo*.

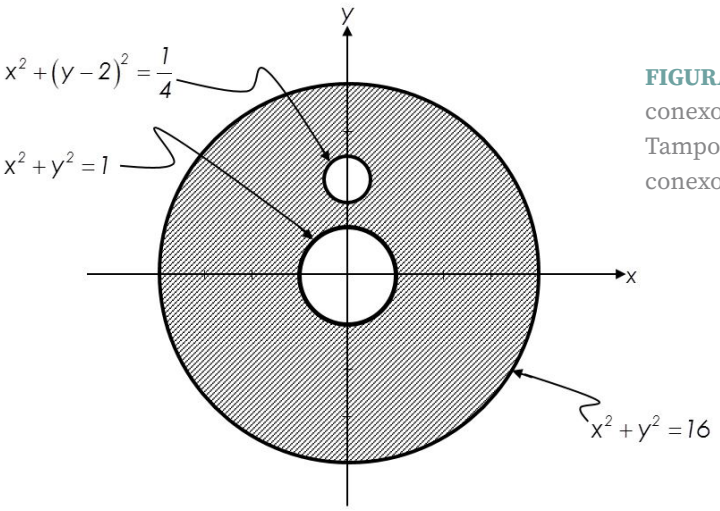



**FIGURA 1.5.** Conjunto conexo pero no convexo. Tampoco es simplemente conexo.

*ii)* El conjunto $S=\{(x,\ y)\,|\,a\le x<b,\ c<y\le d;\ x,\ y\in\mathbb{R}\}$ es convexo y simplemente conexo como se ve en la figura 1.6 izquierda.

*iii)* El conjunto $S=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\le 2;\ (x-2)^2+y^2\ge 1\}$ es simplemente conexo pero no convexo. Ver la figura 1.6 derecha.

***Definición.*** Una ***región*** es un conjunto conexo de puntos que puede ser cerrado, abierto o semicerrado.

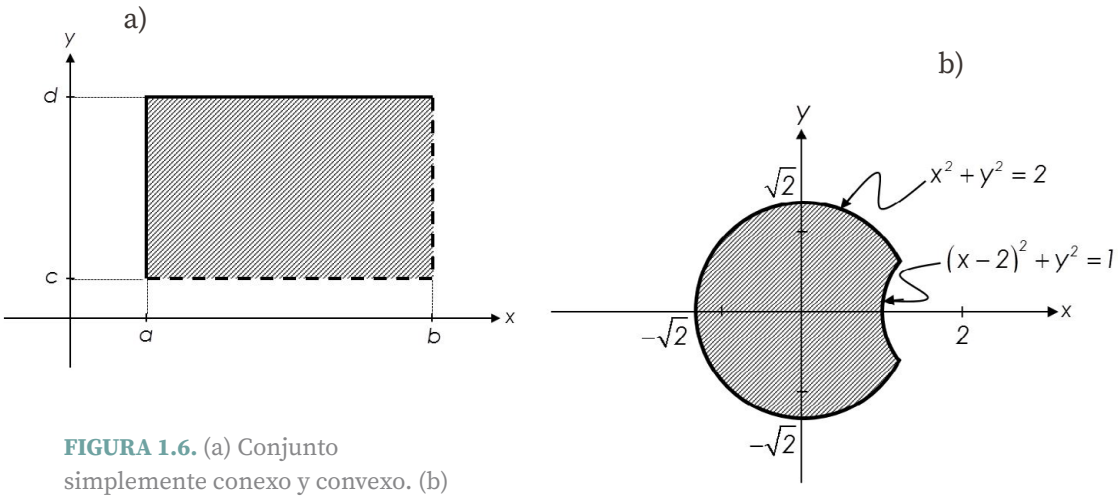



**FIGURA 1.6.** (a) Conjunto simplemente conexo y convexo. (b) Conjunto simplemente conexo pero no convexo

## Ejemplo 3.

Hacer un trazo aproximado del siguiente conjunto e indicar si se trata de una región. $R = \{(x, y) \mid y \geq x^2;\ x^2 + y^2 \leq 4;\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

**Solución:** Si en vez de tomar desigualdades se toman las igualdades, las curvas serían: $y = x^2$, que es una parábola que abre hacia arriba con vértice en el origen, y $x^2 + y^2 = 4$, que es una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. El conjunto se muestra en la figura 1.7. Como se puede apreciar, el conjunto es conexo y consecuentemente se trata de una región. Vemos además que es cerrada y convexa.

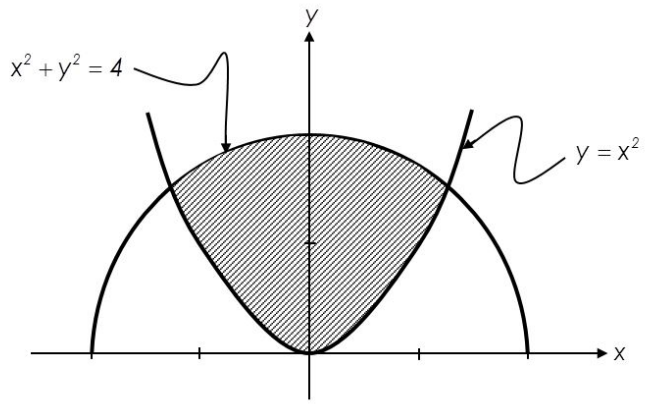



**FIGURA 1.7.**

## Ejemplo 4.

Realizar un croquis del conjunto definido por $R=\{(x,y)\,|\,|x|<y<-x^2+4;\ x,y\in\mathbb{R}\}$ e indicar si se trata de una región.

**Solución:** Si se toman igualdades en vez de desigualdades se obtiene: $y=|x|$, que es la función valor absoluto, y $y=-x^2+4$, que es una parábola vertical con vértice en (0,4) y que abre hacia abajo. El conjunto se muestra en la figura 1.8. Como es conexo se trata de una región, la cual es abierta y convexa.

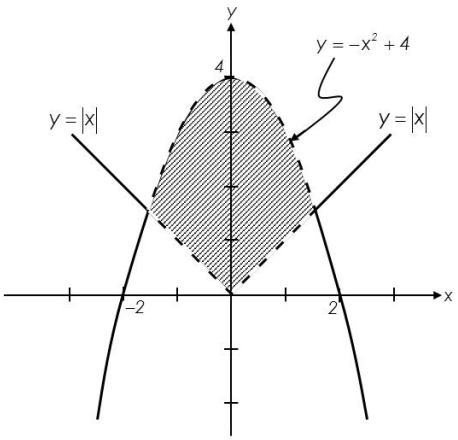



FIGURA 1.8.

### 1.1.3 Función escalar de variable vectorial (Campo Escalar)

Como ya se mencionó, existen conceptos físicos y/o matemáticos representados por expresiones en las que más de uno de los parámetros que intervienen en ellas puede cambiar durante un determinado proceso. A estas expresiones, en las que la variable dependiente está en términos de dos o más variables independientes, se les llama *funciones escalares de variable vectorial*, o bien, *campos escalares*. También se utilizan los nombres de *funciones reales de variable vectorial* o *funciones escalares de varias variables*.

**Definición.** Una función escalar de variable vectorial es una terna formada por un conjunto llamado ***dominio***, $D_f\subset\mathbb{R}^n$, un conjunto llamado ***codominio***,

$C_f = \mathbb{R}$, y una regla de correspondencia $f$ que asocia a cada elemento $\mathbf{r}$ del dominio uno y sólo un elemento del codominio denotado como $f(\mathbf{r})$. Se acostumbra escribir $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para indicar que $f$ es una función que asigna valores en $\mathbb{R}$ a los elementos de $\mathbb{R}^n$.

De acuerdo con esta definición, el símbolo $f(\mathbf{r})$ representa el valor que toma la función $f$ al evaluarla en $\mathbf{r}$. El dominio de $f$ es el conjunto de vectores $\mathbf{r}$ de $\mathbb{R}^n$ a los que se les asocia un valor real del codominio. A las componentes de $\mathbf{r}$ se les acostumbra llamar variables independientes o argumentos de la función y a la variable $z$ definida como $z = f(\mathbf{r})$ se le llama variable dependiente. Así, si $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ las variables independientes son $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, y en vez de escribir $f(\mathbf{r})$ se puede escribir $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$. Al conjunto $R_f$ de valores que toma la variable $z$ se le denomina *recorrido*, *imagen* o *rango* de la función. Así, $R_f \subset C_f = \mathbb{R}$.

En este libro, para indicar que el símbolo $f$ representa a una función, se dirá indistintamente que: "*$f$ es una función*" o bien que "*$f(\mathbf{r})$ es una función*". Pero debemos aclarar que rigurosamente sólo la primera forma es la correcta. La segunda forma es un abuso de la notación porque $f(\mathbf{r})$ es un número (el valor que toma $f$ en $\mathbf{r}$) no una función.

A continuación se ilustra este concepto para el caso que más se estudiará aquí, que es el de las funciones escalares que sólo dependen de dos variables independientes.

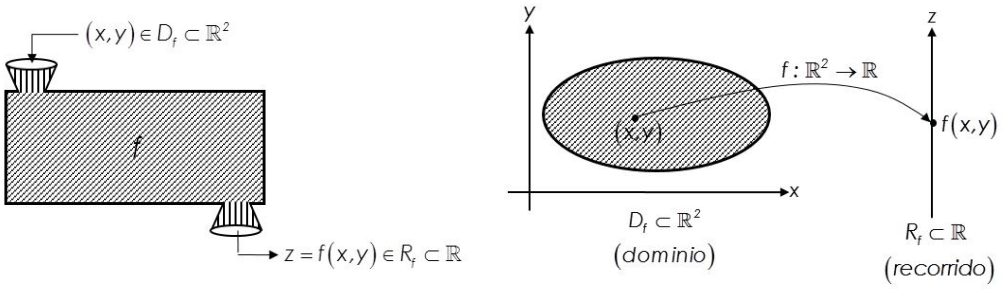



**FIGURA 1.9.** Dos formas de visualizar el concepto de una función escalar de dos variables $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

En la figura 1.9 izquierda se muestra el concepto de función como una *caja negra*. La señal de entrada de esta caja proviene del dominio de la función y la señal de salida va hacia el recorrido de *f*. En la figura 1.9 derecha se observa el concepto de función, presentando el dominio en el plano *XY* y el recorrido en el eje Z donde se ubican las imágenes de los puntos del dominio.

## Ejemplo 5.

Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones y representarlo gráficamente.

*i)* $f(x,y)=\ln\left[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\right]$

*ii)* $f(x,y)=+\sqrt{6-(2x+3y)}$

*iii)* $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$

*iv)* $f(x,y)=\text{ang sen}(x/2)+\sqrt{xy}.$

**Solución:**

*i)* $f(x,y)=\ln\left[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\right]$. Se sabe que el dominio de la función logaritmo son los reales mayores que cero, por lo que

$$(1-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)>0,$$

lo que implica la existencia de dos casos

| **Primer caso** | | **Segundo caso** | |
|---|---|---|---|
| | $16-x^2-y^2>0$ | | $16-x^2-y^2<0$ |
| | $\Rightarrow x^2+y^2<16$ | | $\Rightarrow x^2+y^2>16$ |
| y | $x^2+y^2-4>0$ | y | $x^2+y^2-4<0$ |
| | $\Rightarrow x^2+y^2>4$ | | $\Rightarrow x^2+y^2<4.$ |

Como $x^2+y^2$ no puede ser al mismo tiempo menor que 4 y mayor que 16, el segundo caso no tiene solución. Entonces el dominio está determinado únicamente por el primer caso, del que se obtiene (ver figura 1.10):

$$D_f=\{(x,y)\,|\,4<x^2+y^2<16;\ \ x,y\in\mathbb{R}\}.$$

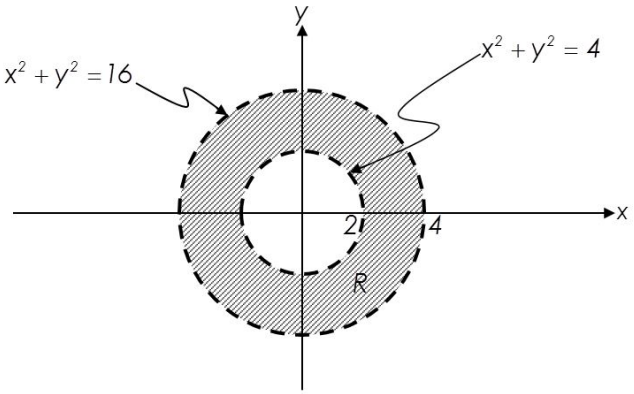



**FIGURA 1.10.** El dominio es una región abierta.

*ii)* $f(x,y)=+\sqrt{6-(2x+3y)}$. Se sabe que el radicando en una raíz cuadrada debe ser positivo, por lo que

$$6-(2x+3y)\geq 0$$

de donde (ver figura 1.11)

$$D_f=\{(x,y)\,|\,2x+3y\leq 6;\ x;\ y\in\mathbb{R}\}.$$

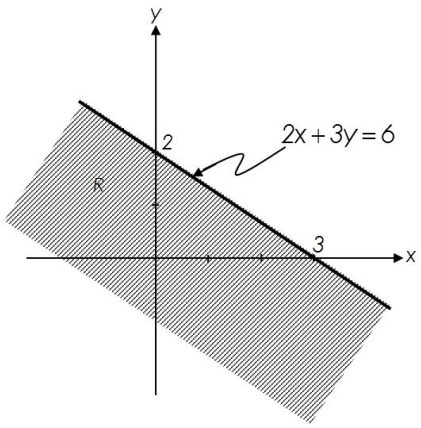



**FIGURA 1.11.** El dominio es una región cuya única frontera es la recta $2x+3y=6$; la cual está incluida dentro del dominio.

*iii)* $f(x, y) = (xy-5)/2(\sqrt{y-x^2})$. Por la misma razón que en el caso anterior, pero tomando en cuenta que el denominador no puede ser igual a cero, se tiene que (ver figura 1.12):

$$y - x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2 \qquad \text{y} \qquad D_f = \{(x, y) \,|\, y > x^2;\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

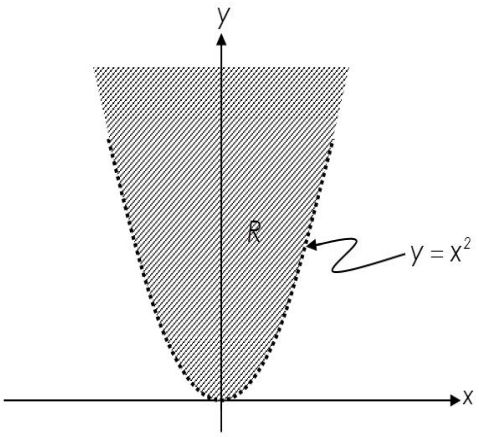



**FIGURA 1.12.**
El dominio es una región abierta.

*iv)* $f(x, y) = \text{ang sen}(x/2) + \sqrt{xy}$. Se sabe que el argumento de la función inversa del seno varía de $-1$ a 1 y que el radicando de una raíz cuadrada debe ser mayor o igual a cero; por lo que

$$-1 \le \frac{x}{2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \le x \le 2$$

y

$$xy > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$$

de donde (ver figura 1.13)

$$D_f = \{(x, y) \,|\, -2 \le x \le 0,\ y \le 0;\ x, y \in \mathbb{R}\} \cup$$

$$\{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 2,\ y \ge 0;\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

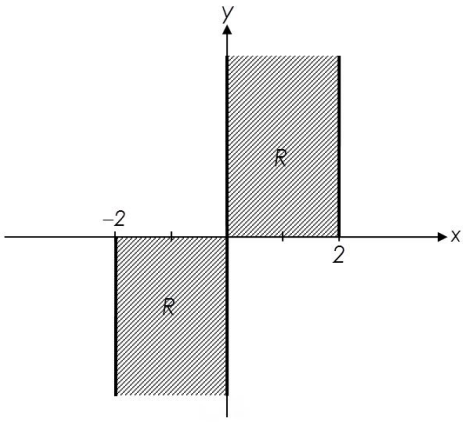



**FIGURA 1.13.** El dominio es la unión de dos regiones cuyas fronteras son respectivamente las rectas $x=-2;\ y=0;\ x=0$ y las rectas $x=0;\ y=0:x=2$.

### 1.1.4 Representación gráfica de una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Una función real de dos variables independientes $f(x,\ y)$ puede representarse gráficamente en dos formas:

1) Por medio de una superficie
2) Utilizando curvas de nivel

**Definición.** Una ***superficie*** es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una ecuación del tipo $F(x,\ y,\ z)=0$, de tal forma que al despejar una de las tres variables sea posible conformar una función escalar de dos variables.

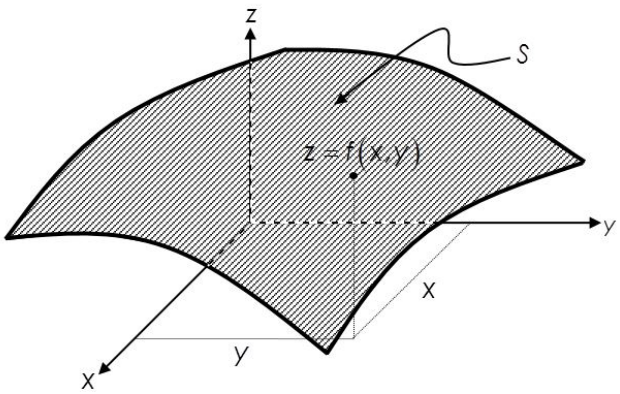



**FIGURA 1.14.**
$S=\{(x,\ y,\ z)\,|\,z=f(x,\ y);\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}\}$.

En la figura 1.14 se representa gráficamente una función escalar $f(x,\ y)$ mediante la superficie $S$ que se construye dando valores a las variables indepen-

dientes $x$ y $y$, calculando el valor de $z=f(x, y)$ y graficando las ternas $(x, y, z)$ en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Este método, que en el pasado era muy laborioso, en la actualidad se ha vuelto más sencillo con el auxilio de las computadoras. En la figura 1.15 se muestra como ejemplo la gráfica de la función $2/(y-x^2)$.

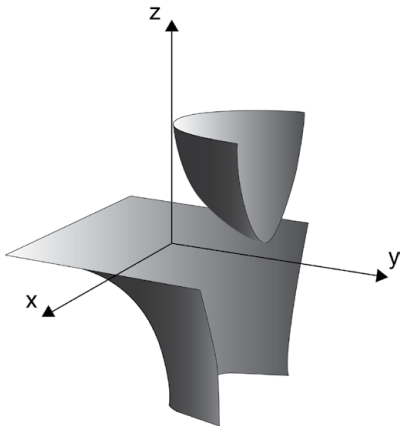



**FIGURA 1.15.** Gráfica de la función $2/(y-x^2)$.

Llamaremos *superficie cerrada* a una superficie que encierra completamente a un volumen. Un ejemplo de una superficie cerrada es aquella que está formada por una superifie superior, descrita por una función escalar $f_s(x, y)$, una superficie inferior descrita por una función escalar $f_i(x, y)$ y una supficie lateral vertical la cual, en algunos casos, puede consistir simplemente en una curva que une a la superificie superior con la inferior.

Por otro lado, el método de las *curvas de nivel* (o *líneas de contorno*) consiste en trazar curvas del tipo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C_1 \\ f(x, y) &= C_2 \\ f(x, y) &= C_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde $C_1, C_2, C_3, \cdots$ son constantes. El conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $f(x, y)=C_i$ es una curva en el plano $XY$ que está asociada al valor de $z$ igual a $C_i$. Al hacer el trazo de curvas para diferentes valores de $z$ se obtiene una familia de curvas como las mostradas en la figura 1.16.

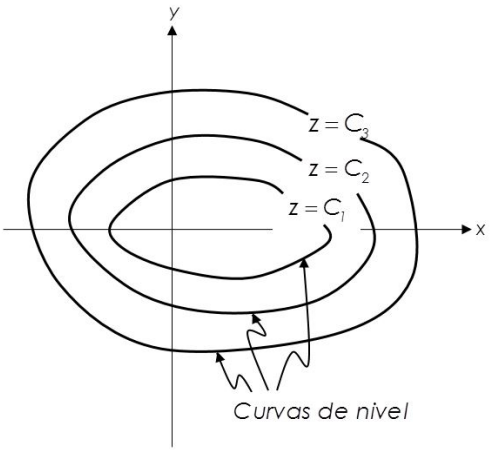



**FIGURA 1.16.** Un ejemplo de curvas de nivel.

## Ejemplo 6.

Sea la superficie de ecuación $z = xy$. Trazar algunas de sus curvas de nivel asociadas y con base en ellas, inferir la forma de la superficie.

**Solución:** Si se dan diferentes valores a $z$ y se grafican las curvas resultantes, se obtienen las curvas mostradas en la figura 1.17, estas son hipérbolas que para valores negativos de $z$ están en los cuadrantes 2 y 4 del plano $XY$ y que para valores positivos de $z$ están en los cuadrantes 1 y 3. Entonces la superficie es tal que al cortarla con planos horizontales que están abajo del plano $XY$ se obtienen las hipérbolas de los cuadrantes 2 y 4, etc. La forma de la superficie aparece en la figura 1.18.

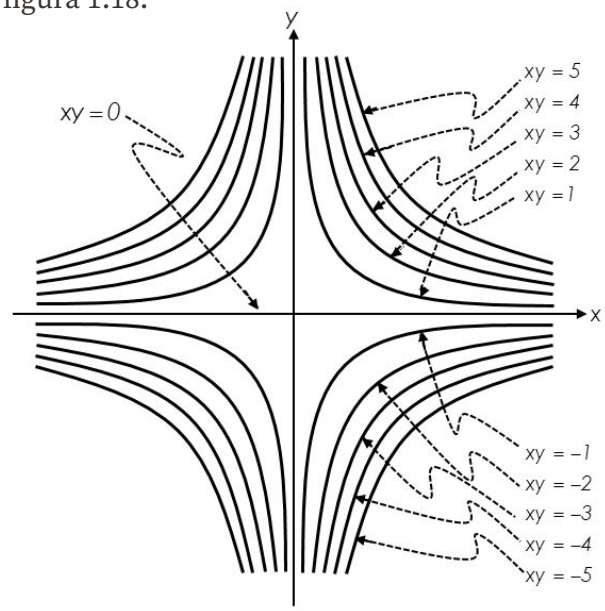



**FIGURA 1.17.** Curvas de nivel de la función $f(x, y) = xy$. La gráfica de esta función se muestra en la figura 1.18.

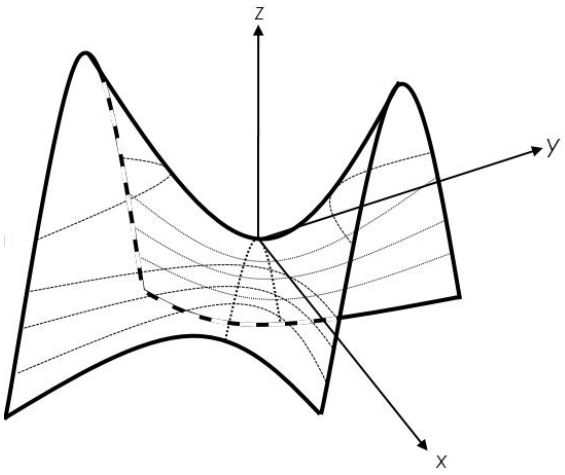



**FIGURA 1.18.** Gráfica de la función $f(x, y) = xy$. Sus curvas de nivel son las mostradas en la figura 1.17. Esta superficie es un ejemplo de un paraboloide hiperbólico.

A continuación se presentará un problema típico de aplicación de este tipo de conocimientos.

## Ejemplo 7.

Dado el conjunto de puntos de la figura 1.19, donde cada uno tiene asociado un número que puede representar, por ejemplo, el valor de un potencial eléctrico, magnético, gravitacional, etc., se desea trazar las *curvas de nivel* de dicho potencial. En estos casos las curvas se llaman *curvas equipotenciales*.

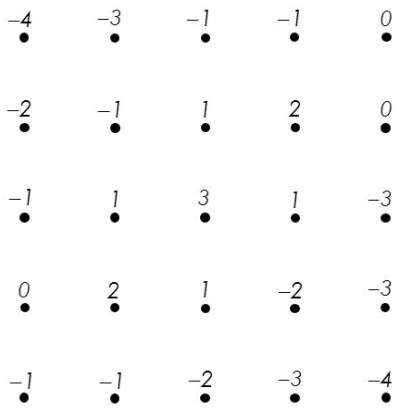



**FIGURA 1.19.** Valores de un potencial en una red de puntos del plano.

**Solución:** Para trazar las curvas de nivel se toman los puntos que tengan el mismo potencial. Y si dicho potencial cae entre dos puntos, se efectúa una inter-

polación para calcular la posición del punto por donde pasa el potencial considerado. El mapa con las curvas equipotenciales quedaría aproximadamente como se muestra en la figura 1.20. Cabe hacer notar que en este tipo de problemas puede resultar muy difícil hallar la expresión matemática de la función escalar $f(x, y)$ que corresponda a las curvas de nivel del potencial tratado, pero el trabajar con dichas líneas de nivel puede simplificar en gran medida los problemas.

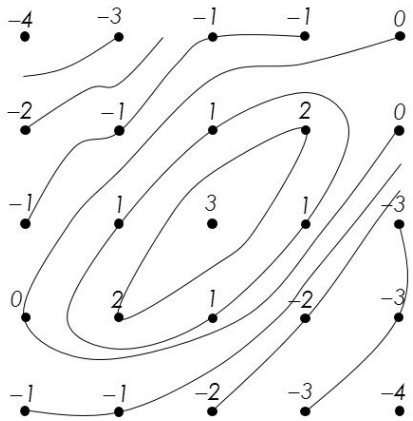



**FIGURA 1.20.** Curvas de nivel construidas con los datos de la figura 1.19.

Existe una generalización de las curvas de nivel que sirve para representar geométricamente una ecuación del tipo $w=f(x, y, z)$ con tres variables independientes. En este caso no es posible dibujar la gráfica de tal función porque se requieren cuatro dimensiones. Sin embargo, tales gráficas se pueden visualizar mediante las *superficies de nivel.* Considérese el siguiente ejemplo.

## Ejemplo 8.

Trazar algunas superficies de nivel de la función escalar cuya ecuación es $w=x+y+z$.

**Solución:** Si se dan diversos valores a $w$ se obtiene una familia de planos paralelos, como se muestra en la figura 1.21, que son las superficies de nivel del campo escalar considerado.

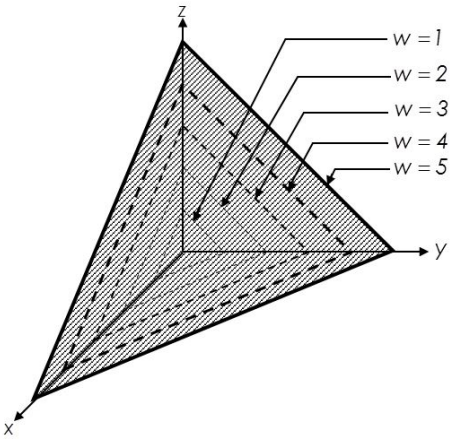



**FIGURA 1.21.** Superficies de nivel de la función $w = x + y + z$.

## Ejercicios

**1.1.** Hacer un trazo aproximado de las siguientes regiones e indicar si son abiertas, cerradas o semicerradas. Indicar también en cada caso cuáles son el interior, el exterior y la frontera de la región.

a) $\{(x, y) \mid a-\xi < x < a+\xi;\ b-\delta < y < b+\delta\}$

b) $\{(x, y) \mid\ |x-a| < \xi;\ -x < y \leq x\}$

c) $\{(x, y) \mid\ |x| \leq \operatorname{sen} \pi/2;\ |y| \leq \operatorname{sen} x\}$

d) $\{(x, y, z) \mid\ |x| < 1;\ |y| < \sqrt{1-x^2};\ |z| \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

e) $\{(x, y) \mid\ |x| < 1;\ |y| \leq |x|\}$.

**Solución:** a) Rectángulo sin fronteras. Conjunto abierto limitado por: $x = a \pm \xi,\ y \in [b-\delta,\ b+\delta]$; $y = b \pm \delta,\ x \in [a-\xi,\ a+\xi]$. b) Trapecio semiabierto con fronteras en $y = \pm x$, $x \in [a-\xi, a+\xi]$; $x = a-\xi$, $y \in [-a+\xi, a-\xi]$; $x = a+\xi$, $y \in [-a-\xi,\ a+\xi]$. Conjunto cerrado limitado por las rectas verticales: $x = \pm 1$, y limitado inferior y superiormente por las funciones: $y = \pm |\operatorname{sin} x|$, respectivamente.

**1.2.** Obtener los valores que toma la función

$$f(x,y)=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$$

en los puntos que satisfacen la ecuación $x^2+y^2=4$.

**Solución:** Hay un solo valor y es igual a: $-216/3$

**1.3.** Definir y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$

b) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2-4}$

c) $f(u,v)=\ln(4-u^2-v^2)+\sqrt{u-v}$

d) $f(x,y)=\ln(y^2-4x)$

e) $\operatorname{arc\,sen}(uv)+\ln(uv)$

f) $\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$

g) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1);\ y-x\le 0;\ y>0.$

**Solución:** a) Dominio: círculo cerrado de radio 4; b) Dominio: círculo abierto de radio 2; c) Dominio: Parte del círculo abierto de radio 2 tal que $v\le u$; d) Dominio: Todo el plano $XY$ excepto la región que está a la derecha de la parábola $x=y^2/4$; e) Dominio: Intersección del primer cuadrante con la parte inferior de la gráfica de $v=1/u$ más la intersección del tercer cuadrante con la parte superior de la gráfica $v=1/u$.

**1.4.** Trazar las curvas de nivel correspondientes a $z=0,\ 1,\ 2,\ 3$ para las siguientes funciones:

a) $f(u,v)=\sqrt{x^2+y^2}$

b) $f(u,v)=\sqrt{16-u^2-v^2}$

c) $(x+y)^{1/3}$.

**Solución:** a) Círculos concéntricos centrados en el origen de radios 0, 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ ; b) Círculos concéntricos centrados en el origen de radios 4, $\sqrt{15}$, $\sqrt{12}$ y $\sqrt{6}$; c) Rectas de ecuación $y=-x+z^3$.

**1.5.** La fórmula $v(x,y)=4/\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ representa el valor del potencial eléctrico $v$ (en volts) en un punto $(x,y)$ del plano $XY$. Trazar las líneas equipotenciales para $v=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 1000$. Describir la superficie.

**Solución:** Las lineas equipotenciales en el plano $XY$ son círculos que van de $r_1$ a $r_6$ con $r_1^2=4-\sqrt{2}$; $r_2^2=3$; $r_3^2=4-\frac{2}{\sqrt{6}}$ ; $r_4^2=4-\sqrt{\frac{1}{2}}$; $r_5^2=4-\sqrt{\frac{2}{5}}$ ; $r_6^2=4-\frac{2}{\sqrt{1000}}$

**1.6.** Trazar las superficies de nivel correspondientes a $w=0,\ 1,\ 2,\ 3$ para la función $w(x,y,z)=4x^2+y^2+4z^2$.

**Solución:** Elipsoides centrados en el origen con ejes principales a) $(0,0,0)$, b) $(½,\ 1,\ ½)$, c) $(1/\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\ )$, d) $(\sqrt{3}/2\ ,\ \sqrt{3},\ \sqrt{3}/2\ )$

**1.7.** La magnitud $F$ de la fuerza de atracción ente dos cuerpos, uno en el origen y el otro en el punto $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, de masas $m$ y $M$, está dada por

$$F=\frac{GmM}{x^2+y^2+z^2}$$

donde $G$ es una constante positiva (La constante de gravitación universal). Describir las superficies de nivel de $F$.

## 1.2 Operaciones elementales entre funciones

**Definición.** Sean las funciones escalares $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, con dominios $D_f\subset\mathbb{R}^n$ y $D_g\subset\mathbb{R}^n$ respectivamente, y sea $\alpha$ un escalar. Entonces:

*i)* Se define la multiplicación de $f$ por el escalar $\alpha$ como
$(\alpha f)(\mathbf{r})=\alpha f(\mathbf{r})$ con $D_{\alpha f}=D_f$ y $\mathbf{r}\in D_f\subset\mathbb{R}^n$

*ii)* Se define la adición de funciones escalares como
$(f+g)(\mathbf{r})=f(\mathbf{r})+g(\mathbf{r})$ con $D_{f+g}=D_f\cap D_g$ y $\mathbf{r}\in D_{f+g}\subset\mathbb{R}^n$

*iii)* Se define la multiplicación de funciones escalares como
$(f\cdot g)(\mathbf{r})=f(\mathbf{r})\cdot g(\mathbf{r})$ con $D_{f.g}=D_f\cap D_g$ y $\mathbf{r}\in D_{f.g}\subset\mathbb{R}^n$

*iv)* Sea $h$ una función real de variable real $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; entonces la composición de $h$ con $f$ se define como

$$(h\circ f)(\mathbf{r})=h(f(\mathbf{r}))$$

y su dominio son los elementos del dominio de $f$ tales que sus imágenes estén en el dominio de $h$.

**Teorema 1.** (Propiedades de la adición y multiplicación de funciones escalares de $n$ variables).

*i)* La adición cumple con la cerradura, asociatividad, conmutatividad, existencia de idéntico (que es la función cero) y la existencia de inversos (dada $f(\mathbf{r})$ su inverso es $-f(\mathbf{r})$).

*ii)* La multiplicación cumple con la cerradura, asociatividad, conmutatividad, existencia de idéntico $\left(f(\mathbf{r})=1\right)$ y la existencia de inversos, excepto si $f=0$ (dada $f(\mathbf{r})$ su inverso es $1/f(\mathbf{r})$ con tal de que $f(\mathbf{r})\neq 0$.

Las demostraciones de estas propiedades se omiten y se dejan como ejercicio para el lector. Nótese que la división de funciones escalares se puede definir como una multiplicación a partir del inverso multiplicativo y la resta como una adición del inverso aditivo.

## Ejemplo 9.

Sean las siguientes funciones definidas por medio de conjuntos de ternas ordenadas, en donde los primeros dos elementos de cada terna representan un punto del dominio y el tercero su imagen:

$$f_1=\{(0,0,-1),(0,1,0),(1,1,-3),(0,-1,5)\}$$

y $$f_2=\{(0,0,2),(0,1,3),(-1,1,4),(1,1,0)\}.$$

**Calcular:** a) $-2f_1$; b) $f_1+f_2$; c) $f_2-f_1$; d) $f_1\cdot f_2$; e) $\dfrac{f_2}{f_1}$.

**Solución:** Los dominios de las funciones son

$$D_{f_1}=\{(0,0),(0,1),(1,1),(0,-1)\}$$

$$D_{f_2}=\{(0,0),(0,1),(1,1),(-1,1)\}$$

luego

$$D_{f_1}\cap D_{f_2}=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$$

por lo que

a) $-2f_1=\{(0,0,2),(0,1,0),(1,1,6),(0,-1,-10)\}$

b) $f_1+f_2=\{(0,0,1),(0,1,3),(1,1-3)\}$

c) $f_2-f_1=\{(0,0,3),(0,1,3),(1,1,3)\}$

d) $f_1\cdot f_2=\{(0,0,-2),(0,1,0),(1,1,0)\}$

e) $f_2/f_1=\{(0,0,-2),(1,1,0)\}$.

## Ejemplo 10.

Sean las funciones $f_1(x,y)=xy$, $f_2(x,y)=x\,\text{sen}(x^2+y^2)$ y $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.
Calcular: a) $3f_1$; b) $3f_1-f_2$; c) $f_2/f_1$; d) $g\circ f_1$.

**Solución:** Como se observa, $D_{f_1}=D_{f_2}=\mathbb{R}^2$; $D_g=[-1,1]$; entonces:

a) $(3f_1)(x,y)=3xy$; $D_{3f_1}=\mathbb{R}^2$.

b) $(3f_1-f_2)(X,Y)=3xy-x\,\text{sen}(x^2+y^2)=x[3y-\text{sen}(x^2+y^2)]$; $D_{3f_1-f_2}=\mathbb{R}^2$

c) $\left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x,y)=\frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{y}$; $D_{f_2/f_1}=\{(x,y)\,|\,y\neq 0;\quad x,y\in\mathbb{R}\}$

d) $(g\circ f_1)(x,y)=g(f_1(x,y))=\sqrt{1-(xy)^2}$;

$D_{g\circ f_1}=\{(x,y)\,|\,-1\leq xy\leq 1;\quad x,y\in\mathbb{R}\}$.

## Ejemplo 11.

Sean las funciones $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas como

$$f = \{(0, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 1, -3), (0, -1, 5), (1, 2, 2)\}$$

$$h = \{(0, 2), (-1, 3), (1, -1), (3, 2), (2, 10)\}.$$

Calcular: $h \circ f$ y su dominio.

**Solución:**

$$D_f = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (0, -1), (1, 2)\};$$

$$R_f = \{-1, 0, -3, 5, 2\}; \qquad D_h = \{0, -1, 1, 3, 2\}.$$

Vemos que el $-3$ y el 5 están en el rango de $f$ pero no están en el dominio de $h$. En consecuencia $h$ no puede evaluarse en esos dos valores. Y como ellos provienen respectivamente de (1,1) y $(0, -1)$ entonces el dominio de $h \circ f$ no puede contener a (1,1) y $(0, -1)$.

Por lo tanto,

$$D_{h \circ f} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2)\}; \qquad h \circ f = \{(0, 0, 3), (0, 1, 2), (1, 2, 10)\}.$$

## Ejercicios

**1.8.** Sean las funciones $f_1(x, y) = x^2 + y^2$; $f_2(x, y) = xy$; $f_3(x, y) = (x + y)/(x - y)$ y $g(u) = 1/\sqrt{u}$. Realizar las siguientes operaciones entre dichas funciones y determinar su dominio.

a) $f_1 - 2f_2$
b) $(f_1 - 2f_2) \circ f_3^2$
c) $(f_1 + 2f_2)/f_3^2$

d) $g \circ f_3$

e) $g \circ (f_1 - 2f_2)$.

**Solución:** a) $(x-y)^2$, dominio $= \mathbb{R}^2$; b) $(g^2 - h)^2$, dominio $= \mathbb{R}$; c) $(x-y)^2$, dominio $= \mathbb{R}^2$ menos las rectas $y = -x$ y $y = x$; d) $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$, dominio $= \mathbb{R}^2$ menos las rectas $y = -x$ y $y = x$; e) $\frac{1}{x+y}$, dominio $= \mathbb{R}^2$ menos la recta $y = x$.

**1.9.** Sean las funciones $f_1, f_2$ y $f_3$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, definidas como

$$f_1 = \{(0,0,0), (-1,-1,2), (1,0,1), (1,2,5), (2,3,13), (-3,0,9), (1,-2,5)\}$$

$$f_2 = \{(0,1,-1), (1,0,1), (1,2,-1), (-3,0,-3), (1,-2,3), (4,5,-1), (3,-2,5)\}$$

$$f_3 = \{(0,1,0), (-1,-1,1), (1,0,0), (2,3,6), (-3,0,0), (1,-2,-2), (3,-2,-6)\}$$

Realizar las siguientes operaciones entre dichas funciones y determinar su dominio.

a) $f_1 - 2f_3$ b) $f_2 \circ f_3$ c) $(f_1 - 2f_3)/f_2^2$.

**1.10.** Sean las funciones $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_1 = \{(0,0,0), (-1,-1,2), (1,0,1), (1,2,5), (2,3,13), (-3,0,9), (1,-2,5)\}$$

$$f_2 = \{(0,1,0), (-1,-1,1), (1,0,0), (2,3,6), (-3,0,0), (1,-2,-2), (3,-2,-6)\}$$

$$g = \{(0,0), (1,1), (2,\sqrt{2}), (3,\sqrt{3}), (4,2)\}.$$

Calcular el resultado de las siguientes operaciones y determinar el dominio.

a) $g \circ f_1$
b) $g \circ f_2$
c) $g \circ (f_1 - 2f_2)$.

**Solución:** a) $g \circ f_1 = \{(0, 0, 0), (-1, -1, 2), (1, 0, 1)\}$; Dominio: $\{(0, 0), (-1, -1), (1, 0)\}$; b) $g \circ f_2 = \{(0, 1, 0), (-1, -1, 1), (1, 0, 0), (-3, 0, 0)\}$ Dominio: $\{(0, 1), (-1, -1), (1, 0), (-3, 0)\}$; c) $g \circ (f_1 - 2f_2) = \{(-1, -1, 0), (1, 0, 1), (2, 3, 1)\}$; Dominio: $\{(-1, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

## 1.3 Clasificación de funciones

Las funciones escalares se pueden clasificar de acuerdo con su expresión matemática, como se muestra a continuación. No se profundizará en el tema porque la clasificación es esencialmente la misma que se estudia en el cálculo de una variable independiente.

Tipos de funciones
- algebráicas
  - polinomiales
  - racionales
  - irracionales
- trascendentes
  - trigonométricas
  - logarítmicas
  - exponenciales
- mixtas

Las funciones algebráicas son aquellas que se obtienen como resultado de un número finito de operaciones elementales entre las variables independientes (adición, multiplicación, potenciación y radicación). Un ejemplo de función algebráica es

$$f(x, y) = x\sqrt{y} + 5x^2y - y^3\sqrt{x}$$

y de una función trascendente es

$$f(x, y) = \text{In}\,\frac{y}{x} + e^{5x} - \text{sen}(x + y).$$

## 1.4 Análisis de la ecuación de una superficie

Así como ocurre cuando se desea graficar una función real de un argumento, para graficar una función de dos variables es conveniente analizar primero algunas características importantes de la función. Las características que se analizarán son las siguientes:

1) Simetría
2) Intersecciones con los ejes coordenados y trazas
3) Secciones planas paralelas a los planos coordenados
4) Extensión de la superficie

Aunque usualmente para hacer un esbozo simple de la gráfica sólo se requiere saber una o dos de estas características, en lo que sigue se discutirán con detalle todas ellas. ¿Cuáles de ellas son más útiles para construir la gráfica? La respuesta depende de la situación específica.

### 1.4.1 Simetría

**Definiciones**

- Dos puntos son simétricos con respecto a un plano si y solamente si el plano bisecta perpendicularmente al segmento de recta que une dichos puntos.

- Una superficie $S$ es simétrica respecto a un plano $T$ si el simétrico de cada punto de la superficie, respecto a $T$ , es también un punto de $S$.
- Dos puntos son simétricos respecto a una recta $L$ si el segmento que une dichos puntos es bisectado perpendicularmente por la recta $L$.
- Una superficie $S$ es simétrica respecto a una recta $L$ si el simétrico de cada punto de la superficie, respecto a $L$, es también un punto de $S$.
- Dos puntos son simétricos respecto a un punto **P** si el segmento que une a los dos primeros es bisectado por el punto **P**.
- Una superficie $S$ es simétrica respecto a un punto **P** si el simétrico de cada punto de $S$, respecto a **P**, es también un punto de $S$.

Para analizar la simetría de una superficie conviene utilizar el siguiente teorema, que se dará sin demostración.

**Teorema 2.**

- Una superficie es simétrica con respecto al origen si su ecuación no se altera cuando sus tres variables cambian de signo.
- Una superficie es simétrica con respecto a uno de los ejes coordenados, si su ecuación no se altera cuando se cambian de signo las dos variables no correspondientes al eje analizado.
- Una superficie es simétrica con respecto a uno de los planos coordenados si su ecuación no se altera cuando se cambia de signo la variable no contenida en dicho plano.

**Ejemplo 12.**

Estudiar la simetría de la superficie de ecuación $z=xy$.

**Solución:**

a) Con respecto al origen: se cambian $x$ por $-x$; $y$ por $-y$ y $z$ por $-z$, con lo que se tiene $-z=(-x)(-y)\Rightarrow -z=xy$.
Como la ecuación sí se alteró, no existe simetría con respecto al origen.

b) Con respecto a los ejes coordenados:
- eje X: se cambian y por $-y$ y $z$ por $-z$ y se tiene que $-z=x(-y)\Rightarrow z=xy$. Como no hay alteración sí existe simetría.
- eje Y : se cambian $x$ por $-x$ y $z$ por $-z$ y se tiene que $-z=(-x)y \Rightarrow z=xy$. Como no hay alteración, hay simetría.
- eje Z: se cambian $x$ por $-x$ y y por $-y$ y se tiene que $z=(-x)(-y)\Rightarrow z=xy \Rightarrow$ sí hay simetría.

c) Con respecto a los planos coordenados:
- plano $XY$ : se cambia $z$ por $-z$ y se tiene $-z=yx \Rightarrow z=-xy$; por lo tanto hay alteración y no existe simetría.
- plano $ZX$: se cambia $y$ por $-y$ y se tiene $z=x(-y) \Rightarrow z=-xy$, luego no hay simetría.
- plano $YZ$: se cambia $x$ por $-x$ y se obtiene $z=(-x)y \Rightarrow z=-xy$; por lo que no hay simetría.

Las otras características de esta superficie se analizarán en los ejemplos de las secciones que siguen y el procedimiento para construir la gráfica se pospone hasta entonces. Por lo pronto conviene señalar que la gráfica de esta función ya fue mostrada en la figura 1.18.

### 1.4.2 Intersecciones con los ejes coordenados y trazas

Dos de las partes más importantes de la *discusión* de una superficie, son la determinación de las intersecciones con los ejes coordenados y la determinación de sus trazas con los planos coordenados.

**Definiciones.**

- La intersección de una superficie con un eje coordenado es el punto en el que se intersecta el eje con la superficie.
- La traza de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

Para poder analizar estas intersecciones se puede utilizar la siguiente tabla

**Intersecciones**

| | | |
|---|---|---|
| Con el eje | X | Se hace $y=z=0$ |
| | Y | Se hace $x=z=0$ |
| | Z | Se hace $x=y=0$ |
| Con el plano (traza) | $XY$ | Se hace $z=0$ |
| | $ZX$ | Se hace $y=0$ |
| | $YZ$ | Se hace $x=0$. |

## Ejemplo 13.

Calcular las intersecciones con los ejes y las trazas con los planos coordenados de la superficie $S$, definida como

$$S=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

**Solución:**

Con los ejes:

- Eje X:

$$y=z=0 \ \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{9}=1 \ \Rightarrow \ (x-3)^2=9$$

$$\Rightarrow \ x=3\pm 3$$

por lo que los puntos de intersección con el eje X son (6, 0, 0) y (0, 0, 0).

- Eje Y:

$$x=z=0 \quad \Rightarrow \frac{(-3)^2}{9}=\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \ 1-\frac{y^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \frac{y^2}{4}=0 \quad \Rightarrow y=0.$$

Como se puede apreciar, el único punto de intersección con el eje Y es el origen.

- Eje Z:

$$x=y=0 \quad \Rightarrow \quad 1=1$$

como esta ecuación se verifica para cualquier valor de $z$, entonces los puntos de intersección con el eje Z son todo el eje Z.

***Con los planos (trazas):***

- Plano $XY$: $z=0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, que es una hipérbola con centro en (3, 0, 0), ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados $X$ y $Y$, semieje conjugado 3, y semieje transverso 2. Vértices en (0, 0, 0) y (6, 0, 0).
- Plano $ZX$: $y=0 \Rightarrow x=3\pm 3$, que son dos rectas paralelas al eje Z y que pasan por los puntos (0, 0, 0) y (6, 0, 0), respectivamente.
- Plano $YZ$:

$$x=0 \quad \Rightarrow \frac{(0-3)^2}{9}=\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \ -\frac{y^2}{4}=0 \quad \Rightarrow y=0.$$

Como estas ecuaciones se verifican para cualquier valor de $z$, entonces la traza es todo el eje $Z$.

La construcción de su gráfica se hará una vez que se hallan analizado sus otras características. No obstante podemos adelantar que la gráfica resultante es la mostrada en la figura 1.22.

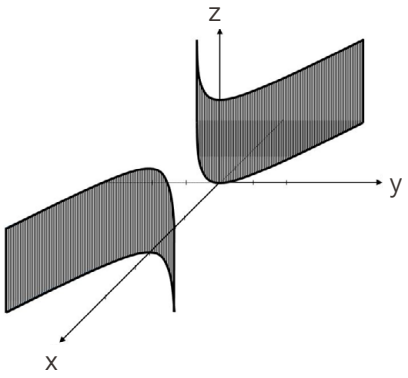



Figura 1.22

Aquí cabe aclarar que la superficie tratada no es la gráfica de ninguna función $f(x, y)$ ya que —como se ve en la figura— para cada par de valores de las variables $x$ y $y$ que satisfagan la ecuación $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ existe un número infinito de valores $z$ y por tanto no cumple con la definición de función dada en la sección 1.1.3. Como se ve en la figura, se trata de una superficie vertical; sin embargo, el método de análisis es válido para todo tipo de superficie, independientemente de que describa o no una función.

### 1.4.3 Secciones planas paralelas a los planos coordenados

Sea la ecuación de una superficie $F(x, y, z) = 0$. Es posible obtener una buena idea de la forma de esta superficie estudiando la naturaleza de sus secciones planas. Tales secciones se determinan al cortar a la superficie por una serie de planos paralelos a los planos coordenados. Así, por ejemplo, los planos paralelos al plano $XY$ pertenecen a la familia cuya ecuación es $z = K$, en donde $K$ es una constante arbitraria (parámetro); de esta forma, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F(x, y, K) &= 0 \\ z &= K \end{aligned}$$

representan a la curva de intersección del plano $z=K$ con la superficie. A cada valor de $K$ corresponde una curva determinada y, como cada curva está en un plano $z=K$, puede estudiarse su naturaleza utilizando los métodos de la geometría analítica plana.

## Ejemplo 14.

Identificar las secciones planas paralelas a los planos coordenados de la superficie del ejemplo anterior.

$$S=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;\quad x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

**Solución:**

- Para el caso de planos paralelos al plano $XY$ , se hace $z=K$:

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$
$$z=K$$

las ecuaciones representan una familia de hipérbolas todas iguales, con eje focal paralelo al eje X y con centros en $(3,\,0,\,K)$.

- Para el caso de planos paralelos al plano $ZX$, se hace $y=K$:

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{K^2}{4}=1\;\Rightarrow\;x=3\pm\frac{3}{2}\sqrt{K^2+4}$$
$$y=K.$$

Las ecuaciones representan dos rectas paralelas al eje Z y que pasan por los puntos $\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{K^2+4}\,,\,K,\,0\right)$ y $\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{K^2+4}\,,\,K,\,0\right)$ respectivamente.

- Para el caso de planos paralelos al plano $YZ$, se hace $x = K$:

$$\frac{(K-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{(K-3)^2-9}$$

$$x = K \quad \text{para toda} \quad K \geq 6 \quad \text{o} \quad K \leq 0$$

las ecuaciones representan dos rectas paralelas al eje Z y que pasan por los puntos

$$\left(K, \frac{2}{3}\sqrt{((K-3)^2-9)}, 0\right) \quad \text{y} \quad \left(K, -\frac{2}{3}\sqrt{((K-3)^2-9)}, 0\right)$$

respectivamente, cuando $K \geq 6$ o $K \leq 0$.

### 1.4.4 Extensión

La extensión de una superficie es el conjunto de valores reales que puede tomar cada una de las variables que intervienen en su ecuación. Para determinar la extensión de cada variable, se despeja una de ellas y se obtiene el dominio de definición de la función resultante.

**Ejemplo 15.**

Determinar la extensión de la superficie del ejemplo anterior.

$$S = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

**Solución:**

- Si se despeja $x$

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow x = 3 \pm \frac{3}{2}\sqrt{y^2+4}\,.$$

Nótese que para cualquier valor de $y$ existe $x$. Por lo tanto, la extensión de $y$ es todos los reales, esto es, $y \in R$.

- Si se despeja $y$

$$\frac{y^2}{4} = \frac{(x-3)^2}{9} - 1 \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^2 - 9}.$$

Para que $y$ exista se requiere que $(x-3)^2 - 9 \geq 0$, es decir, $(x-3)^2 \geq 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 \leq 3 \\ \text{o bien} \\ x - 3 \leq -3 \end{cases}$$

por lo que la extensión de $x$ es $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$.

- Como $z$ no aparece en la ecuación puede tomar cualquier valor real.

Finalmente, la extensión de $S$ queda como

$$\{(x, y, z) \,|\, x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty);\;\; y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Una vez que se ha analizado así una superficie, se puede trazar su gráfica con facilidad.

## Ejemplo 16.

Analizar la superficie del ejemplo anterior y graficarla.

$$S = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;\;\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Solución:** Las intersecciones con los ejes coordenados, las trazas, las secciones planas paralelas a los planos coordenados y la extensión ya fueron discutidas en los ejemplos de las secciones 1.4.2, 1.4.3 y 1.4.4; por lo que únicamente se analizará la simetría.

- Con respecto al origen; se cambia $z$ por $-z$; $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;\ \Rightarrow\ \frac{(x+3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

  por lo tanto la ecuación si se altera y no hay simetría.

- Con respecto al eje X; $y$ por $-y$; $z$ por $-z \Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, por lo tanto la ecuación no se altera y sí hay simetría.

- Con respecto al eje Y ; $x$ por $-x$; $z$ por $-z \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, por lo que la ecuación sí se altera y no hay simetría.

- Con respecto al eje Z; $x$ por $-x$; $y$ por $-y \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, por lo tanto, la ecuación sí se altera y no hay simetría.

- Con respecto al plano $XY$ ; $z$ por $-z \Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$. La ecuación no se modifica, por lo que sí hay simetría.

- Con respecto al plano $ZX$; y por $-y \Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, por lo tanto la ecuación no se modifica, por lo que sí hay simetría.

- Con respecto al plano $YZ$; $x$ por $-x \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$. La ecuación sí se altera, por lo que no hay simetría.

**Gráfica.** Con las características discutidas se procede al trazo de la gráfica (figura 1.22). En particular los resultados del ejemplo de la sección 1.4.3, en donde se determinaron las secciones planas paralelas al plano $XY$, proporcionan información muy valiosa para esta construcción. Aquí cabe aclarar que para facilitar

el dibujo y la comprensión del lector, algunas gráficas no se han trazado completas sino sólo ciertas zonas.

Como se puede apreciar en la figura, para cada pareja $(x, y)$ que satisfagan la ecuación $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, existe una infinidad de valores de $z$, por lo que no se trata de una superficie descrita por una ecuación de la forma $z = f(x, y)$ como ya se había mencionado.

## Ejemplo 17.

Analizar la superficie de ecuación $z = xy$ y hacer un trazo aproximado de su gráfica.

**Solución:**

La simetría ya fue analizada en el inciso 1.4.1 y quedó como sigue:

- Origen → no hay
- Eje X → si hay
- Eje Y → si hay
- Eje Z → si hay
- Plano $XY$ → no hay
- Plano $ZX$ → no hay
- Plano $YZ$ → no hay.

***Intersecciones con los ejes***

- Eje X; $y = z = 0$. Se satisface la ecuación $z = xy$ para cualquier valor de $x$, $y$ por lo tanto, la intersección es todo el eje X.
- Eje Y ; $x = z = 0$. Se satisface para cualquier valor de y, por lo que la intersección es todo el eje Y .
- Eje Z; $x = y = 0 \Rightarrow z = 0$ y la intersección con el eje Z es únicamente el origen (0, 0, 0).

***Trazas***

- Con el plano $XY$; $z=0 \Rightarrow xy=0 \Rightarrow x=0$ o $y=0$, luego la traza con el plano $XY$ son los ejes coordenados X y Y.
- Con el plano $ZX$; $y=0 \Rightarrow z=0$; el eje X.
- Con el plano $YZ$; $x=0 \Rightarrow z=0$; el eje Y.

***Secciones planas paralelas a los planos coordenados***

- Planos paralelos al $XY$. Se toma $z=K \Rightarrow xy=K$, que son hipérbolas equiláteras (para $K=0$ son los ejes coordenados X y Y). Ver figura 1.17. Cuando $K>0$ los valores de $x$ y y deben tener el mismo signo, lo que implica que las hipérbolas están en los cuadrantes 1 y 3. En cambio cuando $K<0$ las hipérbolas están en los cuadrantes 2 y 4.
- Planos paralelos al $ZX$; $y=K \Rightarrow z=Kx$; rectas que cortan al eje Y en $y=K$.
- Planos paralelos al $YZ$; $x=K \Rightarrow z=Ky$; rectas que cortan al eje X en $x=K$.

***Extensión***

- Como la expresión $z=xy$ es polinomial, $x$ y $y$ pueden tomar todos los valores reales y, por otro lado, es evidente que $z$ también abarca todo el eje Z.

**Gráfica.** La representación gráfica de esta función se muestra en la figura 1.18. En este ejemplo las secciones planas paralelas al plano $XY$ son particularmente útiles.

## Ejemplo 18.

Analizar la superficie de ecuación $z=f(x,y)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y. \end{cases}$

**Solución:**

***Simetría.***

- Origen: $x$ por $-x$, $y$ por $-y$ y $z$ por $-z$; la ecuación se altera y por lo tanto no hay simetría.
- Eje X: $y$ por $-y$ y $z$ por $-z$; la ecuación se altera, luego no hay simetría.
- Eje Y : $x$ por $-x$ y $z$ por $-z$; la ecuación se altera, por lo que no hay simetría.

- Eje Z: $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$; la ecuación no se altera, luego sí hay simetría.
- Plano XY : $z$ por $-z$; la ecuación se modifica por lo que no hay simetría.
- Plano ZX; $y$ por $-y$; la ecuación se modifica ya que cambia la forma de $f(x, y)$; luego no hay simetría.
- Plano YZ; $x$ por $-x$; la ecuación se modifica ya que cambia la forma de $f(x, y)$; luego no hay simetría.

***Intersecciones con los ejes***

- Eje X; $y = z = 0 \Rightarrow x = 0$; origen.
- Eje Y ; $x = z = 0 \Rightarrow y = 0$; origen.
- Eje Z; $x = y = 0 \Rightarrow z = 0$; origen.

***Trazas***

- Plano XY ; $z = 0 \Rightarrow y = x$; recta que pasa por el origen.
- Plano ZX; $y = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$

  que es una recta horizontal con una discontinuidad en $x = 0$.
- Plano YZ; $x = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ 2 & \text{si } y \neq 0, \end{cases}$

  que es una recta horizontal con una discontinuidad en $y = 0$.

***Secciones planas***

- Paralelas al plano *XY*: Sólo existen dos secciones planas; en $z = 0$ la recta $x = y$, y en $z = 2$ todos los puntos $(x, y)$ con excepción de $x = y$; es decir, todos los puntos que satisfacen $x \neq y$.
- Paralelas al plano ZX : $y = K \Rightarrow z = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq K \\ 0 & \text{si } x = K. \end{cases}$
- Paralelas al plano YZ : $x = K \Rightarrow z = \begin{cases} 2 & \text{si } y \neq K \\ 0 & \text{si } y = K. \end{cases}$

***Extensión***

- Eje $X \Rightarrow$ extensión infinita; $x \in \mathbb{R}$.
- Eje $Y \Rightarrow$ extensión infinita; $y \in \mathbb{R}$.
- Eje $Z \Rightarrow z = \{0, 2\}$.

**Gráfica.** Con estos datos, principalmente con la forma de las secciones planas paralelas al plano $XY$, se procede al trazo de la gráfica. La figura 1.23 muestra el resultado.

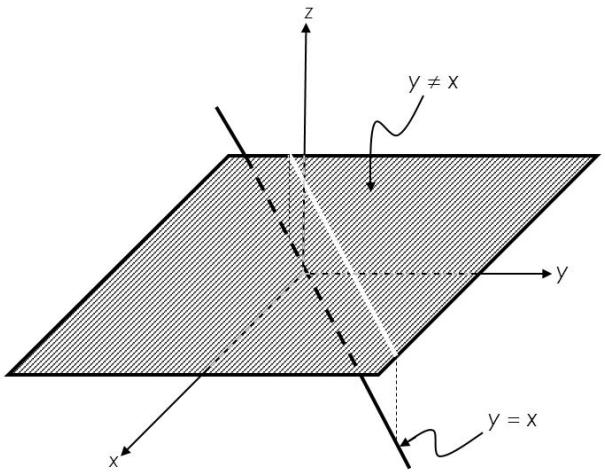



Figura 1.23

## Ejercicios

**1.11.** Analizar la simetría, las intersecciones con los ejes coordenados, las secciones planas paralelas a las planos coordenados y la extensión de las superficies cuyas ecuaciones se muestran a continuación.

a) $2x^2+y^2+3z^2=1$
b) $2x^2+y^2-z^2=1$
c) $x^2=4y$
d) $z=\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$
e) $z=\left[\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right]/(x^2+y^2)$
f) $z=\sqrt{|xy|}$

g) $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

h) $z = \log(x+y)$.

**Solución:** a) Es simétrica con respecto al origen, a los ejes y a los planos. Las intersecciones son $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = \pm 1$, $z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Las intersecciones por planos $XY$: $-2x^2+y^2 = 1-3k^2$ (Hipérbola), $YZ$: $y^2+3z^2 = 1-2k^2$ (Hipérbola), $XZ$: $2x^2+3z^2 = 1-k^2$ (Hipérbola). Extensiones: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $y \in (-1, 1)$, $z \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

**1.12.** El comportamiento de una pieza de acero al calentarse, está regido por la ley de temperaturas

$$T = 5000 - 30\left[z + 4\left(x^2+y^2\right)\right]$$

donde $T$ está en grados Celsius (°C) y $x$, $y$, $z$ están en centímetros (cm). Discutir y dibujar la superficie definida por todos los puntos cuya temperatura es de 3 290 °C, si se sabe que la pieza de acero está limitada por las superficies $x^2+y^2 = 25$, $z = 57$ y $z = -43$.

**Solución:** No hay ningún punto en la barra que alcance esa temperatura.

**1.13.** Determinar e identificar las secciones por planos paralelos a losplanos coordenados del paraboloide elíptico de ecuación

$$3x^2+2y^2-6x+8y-12z = 13.$$

Obtener la ecuación de su eje de simetría y las coordenadas de su vértice.

**1.14.** Tres personas se encuentran sobre una superficie cuya ecuación es

$$\sqrt{y^2+z}-x=0 \qquad \text{(siendo } z \text{ la cota)}$$

y las proyecciones, sobre el plano $XY$, de los puntos donde están situados son (2, −1), (2, 1) y (3, 0). Si dichas personas están unidas por tres cuerdas perfectamente estiradas, indicar cual de las cuerdas corre paralela a la superficie y decir por qué.

## 1.5 Superficies cuádricas

Uno de los temas más importantes de la geometría analítica en tres dimensiones es el análisis de la superficie de ecuación

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz=L \qquad (1)$$

donde por lo menos uno de los coeficientes $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ o $F$ debe ser diferente de cero. A la expresión (1) se le denomina *ecuación general de segundo grado* en tres variables y a la superficie cuya expresión matemática es la ecuación (1) se le llama *superficie cuádrica.*

Si en la ecuación (1) se efectúa una rotación de ejes apropiada (ver sección 1.5.10) es posible eliminar los términos en *xy, xz* y *yz,* obteniéndose

$$A_1(x')^2+B_1(y')^2+C_1(z')^2+D_1x'+E_1y'+F_1z'=G_1 \qquad (2)$$

donde los nuevos coeficientes $A_1$, $B_1, \cdots, G_1$ se obtienen a partir de los coeficientes originales $A$, $B, \cdots, L$, siguiendo el procedimiento que se discutirá en la sección 1.5.10. Cuando la expresión de la cuádrica tiene la forma (2), los ejes principales de la superficie son paralelos a los ejes coordenados X′, Y′ y Z′, como se podrá comprobar en los ejemplos siguientes. En las siguientes nueve secciones se considerará sólo la ecuación (2), dejando para la seción 1.5.10 el análisis de la ecuación (1).

Si en la ecuación (2) se tiene que $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ y $C_1 \neq 0$, y se efectúa una traslación de ejes apropiada (ver ejemplos siguientes) la ecuación se reduce a

$$A_2(x'')^2 + B_2(y'')^2 + C_2(z'')^2 = G_2. \tag{3}$$

Se sugiere al lector obtener la expresión (3) a partir de la (2) mediante una traslación de ejes y considerar también los casos en los que $A_1$, $B_1$ o $C_1$ son iguales a cero. A continuación se analizarán algunas superficies cuádricas que aparecen muy frecuentemente.

### 1.5.1 Esfera

Una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo común **C** llamado centro. Su ecuación es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2, \tag{4}$$

donde a es el radio de la esfera y h, k y l son las coordenadas del centro, es decir, $C = (h, k, l)$. Si se efectúa una traslación de ejes:

$$x' = x - h; \quad y' = y - k; \quad z' = z - l,$$

la expresión (4) se convierte en

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2. \tag{5}$$

que es la ecuación de una esfera con centro en el origen. Su gráfica se muestra en la figura 1.24. Esta superficie es simétrica con respecto a los tres nuevos ejes, simétrica con respecto a cualquier plano que pase por su centro y simétrica con respecto al nuevo origen.

Sus intersecciones con los ejes coordenados son los puntos $(\pm a, 0, 0), (0, \pm a, 0)$ y $(0, 0, \pm a)$. Sus trazas con respecto a los planos coordenados son circun-

ferencias de radio $a$ y sus secciones planas paralelas a cualquier plano coordenado son circunferencias.

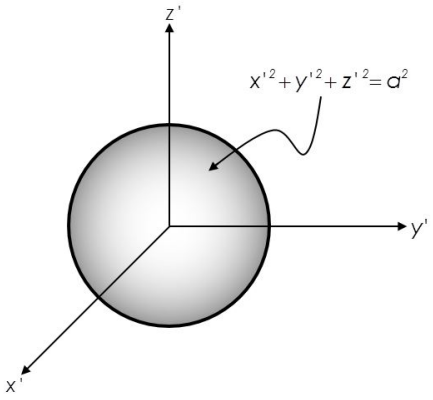



**FIGURA 1.24.** Esfera con centro en el origen.

## Ejemplo 19.

Determinar la ecuación de la esfera con radio igual a 5 y centro en el punto (1, 2,–1).

**Solución:** Si se sustituyen estos datos en la expresión (4) se tiene

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$$

y desarrollando y simplificando queda:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=19$$

que tiene la forma de la ecuación (2).

## Ejemplo 20.

Obtener el radio y las coordenadas del centro de la esfera cuya ecuación es

$$2x^2+2y^2+2z^2-8x-20y+12z-22=0.$$

**Solución:** Si se divide entre dos toda la expresión, se agrupan los términos que contengan las mismas variables y se completan cuadrados perfectos, se tiene

$$(x^2-4x+4)+(y^2-10y+25)+(z^2+6z+9)=11+4+25+9,$$

o bien,

$$(x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=49,$$

por lo que su centro es $(2, 5, -3)$ y el radio 7.

## Ejemplo 21.

Obtener la ecuación de la superficie esférica que pasa por los puntos $(-4, 3, 2)$ y $(2, 6, -1)$ y cuyo centro está sobre el eje Y.

**Solución:** El centro de la esfera es $(0, k, 0)$ y por lo tanto su ecuación es

$$x^2+(y-k)^2+z^2=a^2.$$

Lógicamente los puntos dados satisfacen la ecuación, por lo que se tiene

$$\left.\begin{array}{l}16+(3-k)^2+4=a^2\\ 4+(6-k)^2+1=a^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}k^2-6k+9-a^2=-20\\ k^2-12k+36-a^2=-5.\end{array}\right.$$

Restando una ecuación de la otra se llega a

$$6k-27=-15 \Rightarrow k=2.$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones y despejando $a$

$$a^2=(6-2)^2+5=21$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{21},$$

por lo que la ecuación de la esfera pedida es

$$x^2+(y-2)^2+z^2=21$$

o también,

$$x^2+y^2+z^2-4y=17.$$

### 1.5.2 Elipsoide

La gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1, \tag{6}$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números reales positivos, se conoce como *elipsoide*. El punto **C** de coordenadas $(h, k, l)$ es el centro del elipsoide. Nótese que la esfera es un caso particular del elipsoide, ya que cuando $a=b=c$, la ecuación (7) se convierte en la de una esfera. Cuando sólo dos de las longitudes de los semiejes son iguales, la superficie se denomina *elipsoide de revolución*. Si se trasladan los ejes de manera que el nuevo origen quede en el punto **C**, lo cual se logra mediante el cambio de coordenadas

$$x'=x-h;\quad y'=y-k;\quad z'=z-1,$$

la expresión (6) queda

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \tag{7}$$

y su gráfica se muestra en la figura 1.25.

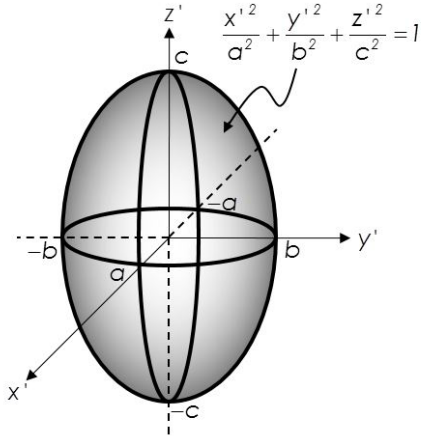



**FIGURA 1.25.** Elipsoide. Cuando $a=b=c$ el elipsoide se convierte en una esfera y esta figura se reduce a la figura 1.24.

La superficie de ecuación (7) es simétrica con respecto al nuevo origen, los nuevos ejes y los nuevos planos coordenados. Sus intersecciones con los nuevos ejes son los puntos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$. Sus secciones planas paralelas a los planos coordenados son elipses. Sus trazas con respecto a los planos coordenados son también elipses. Su extensión es

$$-a \leq x' \leq a; \quad -b \leq y' \leq b; \quad -c \leq z' \leq c.$$

Los ejes principales de un elipsoide son los ejes de simetría y se ve que cuando su ecuación está dada en la forma (7) dichos ejes coinciden con los ejes de coordenadas. A los puntos más alejados del centro en la dirección de estos ejes se les llama *vértices* y, a partir de (7), es fácil ver que están en las intersecciones del elipsoide con los ejes X′, Y′ y Z′, es decir, en $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$. Además, las longitudes de sus semiejes son respectivamente $a$, $b$ y $c$.

## Ejemplo 22.

Obtener las coordenadas del centro y de los vértices, así como las longitudes de los semiejes, del elipsoide de ecuación

$$4x^2+9y^2+36z^2+8x-18y-144z+121=0.$$

**Solución:** Si se agrupan variables y se completan cuadrados perfectos se tiene

$$4\left(x^2+2x+1\right)+9\left(y^2-2y+1\right)+36\left(z^2-4z+4\right)+121-4-9-144=0,$$

de donde

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{y(y-1)^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{1}=1.$$

Luego las coordenadas del centro son $(-1, 1, 2)$ y las longitudes de sus semiejes $a=3$, $b=2$ y $c=1$.

Para obtener las coordenadas de los 6 vértices, que se denotan por $V_i$; $i=1, 2, \cdots, 6$, basta sumar y restar a las coordenadas del centro las longitudes de los tres semiejes. Es decir,

$$V_{1,2}=(h\pm a, k, l); \quad V_{3,4}=(h, k\pm b, l); \quad V_{5,6}=(h, k, l\pm c).$$

Para este caso,

$$V_1=(-4, 1, 2), \qquad V_2=(2, 1, 2), \qquad V_3=(-1,-1, 2)$$

$$V_4=(-1, 3, 2), \qquad V_5=(-1, 1, 1), \qquad V_6=(-1, 1, 3).$$

Conociendo estos vértices se puede hacer fácilmente un trazo aproximado de la superficie elipsoidal.

### 1.5.3 Hiperboloide de una hoja

La gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1. \tag{8}$$

donde $a$, $b$, $c$ son números reales positivos, se llama *hiperboloide de una hoja*, y el punto $(h, k, l)$ es su centro. Si se trasladan los ejes de manera que su centro coincida con el nuevo origen:

$$x' = x - h; \qquad y' = y - k; \qquad z' = z - 1,$$

la ecuación (8) queda como

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1. \tag{9}$$

Su gráfica se muestra en la figura 1.26. La superficie de ecuación (9) es simétrica con respecto al nuevo origen, a los nuevos ejes y a los nuevos planos coordenados. Sus intersecciones con los nuevos ejes coordenados son $(\pm a, 0, 0)$ y $(0, \pm b, 0)$; no hay intersección con el eje Z′. Sus trazas con los planos $Z'X'$ y $Y'Z'$ son hipérbolas y con el plano $X'Y'$ una elipse. Sus secciones planas paralelas a los planos coordenados son elipses e hipérbolas.

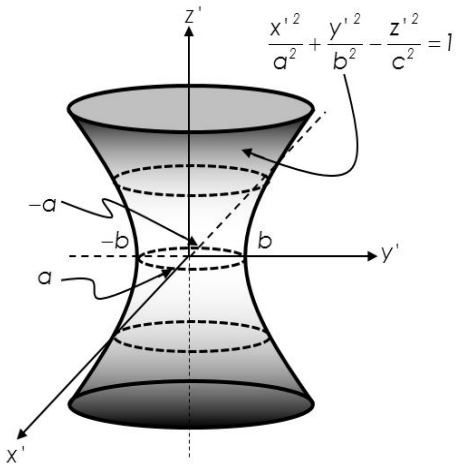



**FIGURA 1.26.** Hiperboloide de una hoja con eje principal paralelo al eje Z′.

En este caso el eje principal del hiperboloide es el eje Z′, pero pueden presentarse también los casos:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1$$

o bien

$$-\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}=1$$

en donde el eje principal de la primera es el eje Y′ y el de la segunda el eje X′.

## Ejemplo 23.

Identificar y trazar la gráfica de la superficie cuya ecuación es

$$36x^2-9y^2-4z^2+16z-16=0.$$

**Solución:** Si se agrupan términos en torno a $x$, $y$ y $z$, se completan cuadrados perfectos y se realizan simplificaciones, la ecuación queda como

$$-\frac{x^2}{1/4}+\frac{(y-1)^2}{1}+\frac{(z-2)^2}{9/4}=1.$$

Como se puede apreciar, se trata de un hiperboloide de una hoja y su gráfica se presenta en la figura 1.27.

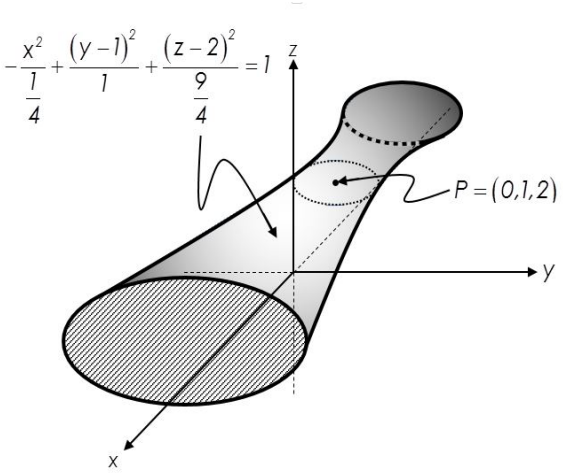



**FIGURA 1.27.**
Hiperboloide de una hoja con eje principal paralelo al eje X′.

### 1.5.4 Hiperboloide de dos hojas

El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \tag{10}$$

se conoce como hiperboloide de dos hojas con centro en $(h, k, l)$. Trasladando los ejes esta ecuación se transforma en

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 1. \tag{11}$$

Su gráfica se muestra en la figura 1.28. La superficie es simétrica con respecto al nuevo origen, los nuevos ejes y los nuevos planos coordenados. Sus intersecciones con el eje X′ son los puntos $(\pm a, 0, 0)$ y con los ejes Y′ y Z′ no tiene. Sus trazas con los planos $X'Y'$ y $Z'X'$ son hipérbolas y con el plano $Y'Z'$ no tiene. Sus secciones planas paralelas al plano $Y'Z'$ son elipses.

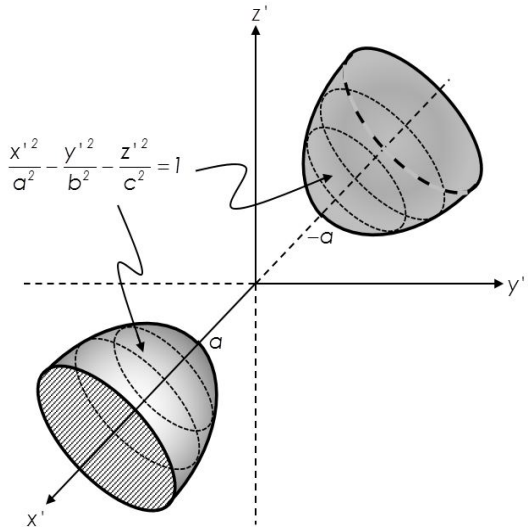



**FIGURA 1.28.** Hiperbolide de dos hojas.

En el caso analizado, el eje del hiperboloide es el eje X′. El eje está dado por la variable a la que le precede el signo positivo. Los vértices de un hiperboloide son los puntos más cercanos al centro de dicha superficie y están sobre su eje principal.

**Ejemplo 24.**

Obtener las coordenadas del centro y de los vértices del hiperboloide de dos hojas dado por la ecuación

$$4x^2-9y^2+16z^2-4x+6y-8z+2=0.$$

**Solución:** Agrupando y completando cuadrados, se llega a

$$-\frac{(x-1/2)^2}{1/2}+\frac{(y-1/3)^2}{1/9}-\frac{(z-1/4)^2}{1/16}=1$$

de donde las coordenadas del centro son $(1/2,\ 1/3,\ 1/4)$. Sus vértices están sobre su eje principal y están dados por $V_{1,2}=(h,\ k\pm b,\ l)$, por lo que

$$V_1=\left(\frac{1}{2},\ 0\ ,\frac{1}{4}\right)\quad \text{y}\quad V_2=\left(\frac{1}{2}\ ,\frac{2}{3}\ ,\frac{1}{4}\right).$$

### 1.5.5 Cono

La gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=0 \tag{12}$$

se conoce como *cono recto de dos hojas* o simplemente *cono*. El punto $\mathbf{C}=(h,\ k,\ l)$ es el centro del cono. Trasladando los ejes, la ecuación es

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=0, \tag{13}$$

en donde ahora su centro está en el origen. Su gráfica se muestra en la figura 1.29. Esta superficie es simétrica con respecto al nuevo origen, los nuevos ejes y los

nuevos planos coordenados. Sus intersecciones con los ejes coordenados ocurren únicamente en el origen. Sus trazas con los planos $Z'X'$ y $Y'Z'$ son rectas que se cortan en el origen. Sus secciones planas paralelas a los planos $Z'X'$ y $Y'Z'$ son hipérbolas y con el plano $X'Y'$ son elipses.

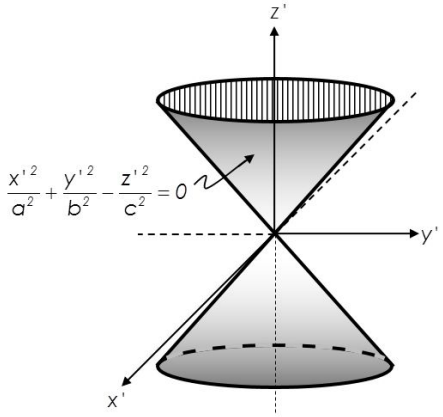



**FIGURA 1.29.** Cono cuyo eje está sobre el eje Z′.

Para este caso el eje del cono es el eje Z′. Dicho eje está definido por la variable a la que le precede un signo diferente al de las otras dos en la ecuación.

## Ejemplo 25.

Identificar la superficie de ecuación

$$4x^2-4y^2+z^2+8x+8y=0.$$

**Solución:** Realizando operaciones como en ejemplos anteriores se tiene

$$(x+1)^2-(y-1)^2+\frac{z^2}{4}=0$$

y se trata entonces de un cono con centro en $(-1, 1, 0)$ y cuyo eje es paralelo al eje Y .

### 1.5.6 Paraboloide elíptico

La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz$ (14)

se conoce como *paraboloide elíptico*. En la figura 1.30 aparece su gráfica. Es simétrico con respecto al eje Z y a los planos $YZ$ y $ZX$. Su única intersección con los ejes coordenados es en el origen. Su traza con el plano $XY$ es el origen y con los planos $XY$ y $ZX$ son parábolas. Sus secciones planas paralelas al plano $XY$ son elipses (si $a=b$, son circunferencias). Cuando $c>0$ el paraboloide abre hacia arriba y lo contrario cuando $c<0$.

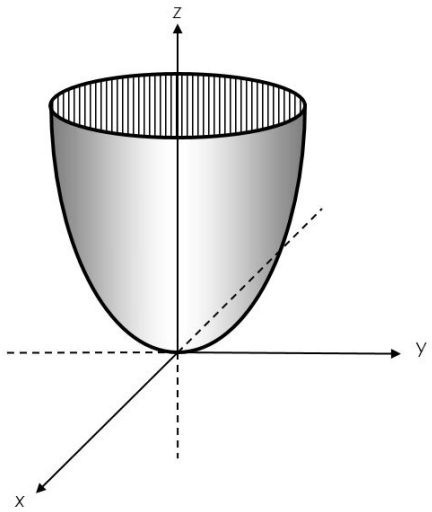



**FIGURA 1.30.**
Paraboloide elíptico de ecuación $cz=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

El eje de este paraboloide es el eje Z. Por otro lado, si el eje fuera el Y o X, la ecuación respectiva sería

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad \text{o} \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx.$$

El vértice del paraboloide de la ecuación (14) es el origen. Pero si dicho vértice estuviera en $V=(h,k,l)$ su ecuación sería

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=c(z-l). \qquad (15)$$

**Ejemplo 26.**

Obtener las coordenadas del vértice y el eje del paraboloide de ecuación

$$16x^2+9y^2-96x-72y-720z+3\,888=0.$$

**Solución:** Si se realizan las operaciones correspondientes se llega a

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=5(z-5).$$

Por lo tanto el vértice de este paraboloide es $(3,4,5)$ y su eje es paralelo al eje Z.

### 1.5.7 Paraboloide hiperbólico

La superficie de ecuación

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=cz \tag{16}$$

se conoce como *paraboloide hiperbólico.* Su gráfica se muestra en la figura 1.31. Su única intersección con los ejes coordenados ocurre en el origen. Es simétrica con respecto al eje Z y a los planos $YZ$ y $ZX$. Sus trazas con los planos $YZ$ y $ZX$ son parábolas y con el plano $XY$ son dos rectas que se cortan en el origen. Sus secciones planas paralelas al plano $XY$ son hipérbolas y las secciones planas paralelas a los planos $YZ$ y $ZX$ son parábolas.

Como se observa, el mínimo de su traza con el plano $YZ$ es el origen pero este punto es el máximo de su traza con el plano $ZX$. Por ello, en ocasiones, a este tipo estos puntos se les denomina *minimáximos,* o *puntos silla* por la forma parecida a una silla de montar que tiene la superficie alrededor de esos puntos. Cuando el punto silla no está en el origen sino en el punto $(h, k, l)$, entonces la ecuación del paraboloide hiperbólico con eje de simetría paralelo al eje Z es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = c(z-l). \qquad (17)$$

Si el eje de simetría fuera paralelo a X o a Y la expresión respectiva sería

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(z-l)^2}{b^2} = c(x-h) \quad \text{o} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(z-l)^2}{b^2} = c(y-k).$$

Es interesante comentar la relación que hay entre las figuras 1.18 y 1.31. Analizando con cuidado ambas gráficas se puede apreciar que para transformar 1.18 en 1.31 habría que girar la primera 45° alrededor del eje Z en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Este giro se logra haciendo en la ecuación de la primera superficie, es decir en $z = xy$, el cambio de variable

$$x = -x' \cos 45° + y' \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x')$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + x')$$

$$z = z',$$

con lo que se obtiene $\frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = z'$, que es la ecuación (16) con $a = b = \sqrt{2}$ y $c = 1$.

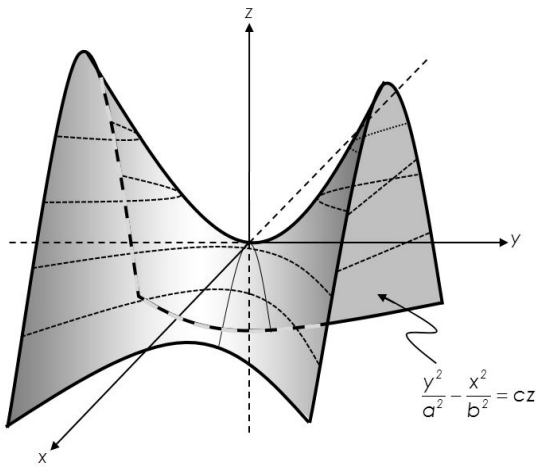



**FIGURA 1.31.** Paraboloide hiperbólico de ecuación $y^2/a^2 - x^2/b^2 = cz$. Esta figura es semejante a la de la figura 1.18 pero sus orientaciones son diferentes. La figura mostrada aquí es simétrica respecto a los planos *YZ* y *ZX*. En cambio la de la figura 1.18 es simétrica respecto a los planos $y = x$ y $y = -x$.

En este ejemplo fue relativamente fácil deducir como se debía girar la figura para lograr que sus ejes de simetría apuntaran en la dirección deseada. Sin embargo, en general es muy dificil saber, con sólo mirar la gráfica, que cambio de coordenadas debe hacerse. Para resolver este problema existe un método muy poderoso que será discutido en la sección 1.5.10. Notar también que matemáticamente el resultado de haber hecho este giro fue que el producto de variables diferentes $xy$, desapareció y fue sustituido por una suma de dos términos con una sola variable.

**Ejemplo 27.**

Identificar la superficie de ecuación

$$4x^2 - 9z^2 - 8x - 72y + 36z + 184 = 0.$$

**Solución:** Si se completan cuadrados y se realizan operaciones se tiene

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(z-2)^2}{4} = 2(y-3)$$

por lo que se trata de un paraboloide hiperbólico con eje de simetría paralelo al eje Y y con punto silla en (1, 2, 3).

### 1.5.8 Superficies degeneradas

Consideremos nuevamente la expresión (2) que por comodidad se reproduce a continuación omitiendo las primas en las variables y redefiniendo a los coeficientes.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0. \qquad (18)$$

Ocurre en ocasiones que el lugar geométrico de los puntos que satisfacen esta expresión se reduce a un solo punto. Puede suceder inclusive que no exista ningún punto que la satisfaga. Se dice entonces que se trata de una *superficie degenerada*. Considérese por ejemplo el caso

$$x^2+y^2+z^2=-1.$$

Se ve que no existen valores de $x$, $y$ y $z$ que la satisfagan ya que el cuadrado de cualquier número real siempre es un número positivo.

### 1.5.9 Clasificación de las superficies cuádricas no rotadas

En lo que sigue se consideraran únicamente superficies no degeneradas. Entonces se puede resumir lo visto hasta ahora diciendo lo siguiente: si $A=B=C$, la expresión (18) representa una esfera. Si $A$, $B$ y $C$ son diferentes pero tienen el mismo signo, se trata de un elipsoide. Si sólo uno de los coeficientes $A$, $B$ o $C$ es cero, se trata de un paraboloide y los signos de los otros dos coeficientes servirán para concluir si es elíptico o hiperbólico. Si dos de los coeficientes $A$, $B$, $C$ son cero la superficie se denomina *cilindro parabólico recto*. Si los tres coeficientes son cero, la superficie ya no es cuádrica y se trata de un plano. En general, para poder hacer un análisis más detallado de la expresión (18), se hace una traslación de los ejes de manera que quede en una de las dos formas siguientes:

I) $Kx^2+Ly^2+Mz^2=N$
II) $Kx^2+Ly^2=Pz \quad (\text{con } P\neq 0)$

la primera forma recibe el nombre de *cuádrica con centro* y la segunda, *cuádrica sin centro*. La segunda no siempre se presenta así, el término no cuadrático puede corresponder a $x$ o a $y$.

En el caso I se presentan a su vez los siguientes subcasos:

1) Si $N=0$ y dos de los otros coeficientes son nulos, el lugar geométrico es alguno de los planos coordenados.

2) Si $N=0$ y alguno de los otros coeficientes es nulo, el lugar geométrico es un plano perpendicular a alguno de los planos coordenados.
3) Si $N=0$ y todos los coeficientes tienen el mismo signo, el lugar geométrico es el origen de coordenadas.
4) Si $N=0$ y dos coeficientes tienen el mismo signo, el lugar geométrico es entonces el *cono elíptico*.
5) Si $N>0$ y dos coeficientes son nulos, el lugar geométrico son dos planos paralelos a los coordenados.
6) Si $N>0$ y un coeficiente es nulo, el lugar geométrico es un cilindro paralelo a algún eje coordenado.
7) Si $N>0$ y todos los coeficientes son positivos, el lugar geométrico es un elipsoide.
8) Si $N>0$ y dos coeficientes son positivos y el otro negativo, el lugar geométrico es un *hiperboloide de una hoja*.
9) Si $N>0$ y dos coeficientes son negativos y el otro positivo, el lugar geométrico es un *hiperboloide de dos hojas.*

Para II, los subcasos son:

1) Si $K$ y $L$ son nulos, el lugar geométrico es el plano $XY$. Siendo rigurosos, en este caso la expresión II no es cuádrica, pero para efectos del análisis se tomará como tal.
2) Si $K$ o $L$ es nulo, el lugar geométrico es un *cilindro parabólico*.
3) Si $K$ y $L$ tienen el mismo signo, el lugar geométrico es un *paraboloide elíptico.*
4) Si $K$ y $L$ tienen diferente signo, el lugar geométrico es un *paraboloide hiperbólico.*

### 1.5.10 Superficies cuádricas rotadas

Para terminar el análisis de las superficies cuádricas se estudiará el caso cuando están rotadas. El procedimiento a seguir será el de hacer una cambio de coordenadas (una rotación) para eliminar los términos que contienen a los productos

$xy$, $xz$ y $yz$. Como hemos visto, la ecuación general de una superficie cuádrica es (ecuación (1))

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz=L. \tag{19}$$

Esta ecuación se puede representar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & H & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = L.$$

Se sugiere al lector que realice las multiplicaciones matriciales aquí indicadas y compruebe que el resultado es la ecuación (19). Si se definen

$$\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}; \qquad M = \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \equiv \begin{bmatrix} G & H & K \end{bmatrix};$$

la ecuación (19) queda escrita en forma matricial compacta como

$$\mathbf{u}M\mathbf{u}^T+\mathbf{n}\mathbf{u}^T=L, \tag{20}$$

donde $\mathbf{u}^T$ es la matriz transpuesta de $\mathbf{u}$. Es importante notar que $M$ es una matriz *simétrica*.

Por otra parte, existe un teorema del álgebra lineal denominado *teorema de los ejes principales*, que establece que dada una matriz simétrica $M$, siempre existe una matriz $P$ tal que el producto $P^TMP$ resulta ser una matriz diagonal $D$ de la forma

$$D \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

siendo $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$ los valores característicos de la matriz $M$. La matriz $P$ se construye colocando en sus columnas los vectores característicos normalizados de $M$ asociados a los valores característicos $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$. La matriz $P$ construida de esta manera resulta ser una matriz ortogonal (una matriz ortogonal es aquella que su inversa es igual a su traspuesta, es decir, $P^{-1} = P^T$, lo que implica que $PP^T$ es igual a la matriz identidad $I$).

Como $P^T M P = D$, entonces $M = PDP^T$. Sustituyendo esto en la ecuación (20) e introduciendo la matriz identidad $I = PP^T$ entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{u}^T$, se tiene

$$\mathbf{u}\left(PDP^T\right)\mathbf{u}^T + \mathbf{n}PP^T\mathbf{u}^T = \left(\mathbf{u}P\right)D\left(\mathbf{u}P\right)^T + \left(\mathbf{n}P\right)\left(\mathbf{u}P\right)^T = L.$$

Si se define $\mathbf{u}' \equiv \mathbf{u}P$, lo cual es en esencia un cambio de coordenadas de $\mathbf{u} = (x, y, z)$ a $\mathbf{u}' = (x', y', z')$, la expresión anterior se puede escribir como

$$\mathbf{u}' D \mathbf{u}'^T + \mathbf{n}'\mathbf{u}'^T = L, \tag{21}$$

donde $\mathbf{n}' = (G', H', K') \equiv \mathbf{n}P$. Entonces,

$$\mathbf{u}' D \mathbf{u}'^T + \mathbf{n}'\mathbf{u}'^T = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} G' & H' & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = L,$$

o sea

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+G'x'+H'y'+K'z'=L. \tag{22}$$

Esta ecuación es en lo que se ha transformado la ecuación original (19) después del cambio de coordenas $(x', y', z')=(x, y, z)P$, en donde se ve que ya no aparecen términos que contengan productos de la forma $x'y'$, $x'z'$ y $y'z'$. A partir de la ecuación (22) ya es muy fácil determinar de qué tipo de superficie se trata; basta trasladar los ejes y utilizar la clasificación vista en la sección 1.5.9. Los ejes principales de la superficie analizada son paralelos a los nuevos ejes de coordenadas y éstos a su vez son paralelos a los vectores característicos de $M$. Además, como $P$ es una matriz ortogonal el cambio de coordenadas es en realidad una rotación en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se sugiere al lector consultar algún libro de álgebra lineal para profundizar en estos temas.

Para ilustrar estas ideas, se resolverán los siguientes dos ejemplos.

## Ejemplo 28.

Identificar la superficie de ecuación $2xy=1$.

**Solución:** La forma matricial de esta ecuación es

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1.$$

Calculando los valores característicos de la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\det\left(M-\lambda I\right)\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}=-\lambda^3+\lambda=\lambda\left(1-\lambda\right)\left(1+\lambda\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1=1; \quad \lambda_2=-1; \quad \lambda_3=0.$$

Por lo tanto, de la expresión (22), se tiene que la ecuación de la superficie rotada es $(x')^2-(y')^2=1$, que corresponde a un cilindro hiperbólico perpendicular al plano $X'Y'$. Para saber su orientación es necesario determinar los vectores característicos asociados a sus valores característicos:

— Para $\lambda_1=1$,

$$\left(M-\lambda_1 I\right)\mathbf{v}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-v_1+v_2=0\\ v_1-v_2=0\\ -v_3=0\end{bmatrix}$$

de donde $v_1=v_2=k$ y $v_3=0$, siendo $k$ una constante arbitraria. En consecuencia el conjunto de todos los vectores característicos asociados a $\lambda_1$ es $\left\{(k,\,k,\,0)\,|\,k\neq 0;\ k\in\mathbb{R}\right\}$ y la norma de estos vectores es

$$\left|\mathbf{v}\right|=\sqrt{k^2+k^2}=\sqrt{2}\,k.$$

Entonces el primer vector característico normalizado es

$$\hat{\mathbf{e}}_{x'}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,\,1,\,0\right).$$

— Para $\lambda_2=-1$

$$\left(M-\lambda_2 I\right)\mathbf{v}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}v_1+v_2=0\\ v_3=0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ v_1=-v_2=k \quad \text{y} \quad v_3=0.$$

Así, el conjunto de todos los vectores característicos asociados a $\lambda_2$ es $\{(k,-k,0)|k\neq 0;\ k\in\mathbb{R}\}$. La norma de estos vectores es

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{k^2+k^2}=\sqrt{2}\,k.$$

Consecuentemente el segundo vector característico normalizado es

$$\hat{\mathbf{e}}_{y'}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0).$$

— Para $\lambda_3=0$,

$$(M-\lambda_3 I)\,\mathbf{v}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}v_2=0\\v_1=0\\v_3=k\end{bmatrix}$$

y, en consecuencia, el conjunto de todos los vectores característicos asociados a $\lambda_3$ es $\{(0,0,k)|k\neq 0;\ k\in\mathbb{R}\}$, cuya norma es

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{k^2}=k$$

y el tercer vector característico normalizado es

$$\hat{\mathbf{e}}_{z'}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=(0,0,1).$$

Estos tres vectores característicos forman la nueva base en el sistema rotado, de modo que si se trazan los nuevos ejes en las direcciones de $\hat{\mathbf{e}}_{x'}$, $\hat{\mathbf{e}}_{y'}$, y $\hat{\mathbf{e}}_{z'}$, se puede construir la gráfica de la superficie rotada. Esta se muestra en la figura 1.32.

Si los valores característicos se hubieran tomado en otro orden, por ejemplo $\lambda_1=0;\ \lambda_2=-1;\ \lambda_3=1$, la expresión matemática sería

$$-(y')^2+(z')^2=1$$

que obviamente también es un cilindro hiperbólico pero con sus ejes principales orientados ahora en las direcciones de los vectores:

$$\hat{\mathbf{e}}'_{x'}=(0,0,1);\quad \hat{\mathbf{e}}'_{y'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0);\quad \hat{\mathbf{e}}'_{z'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

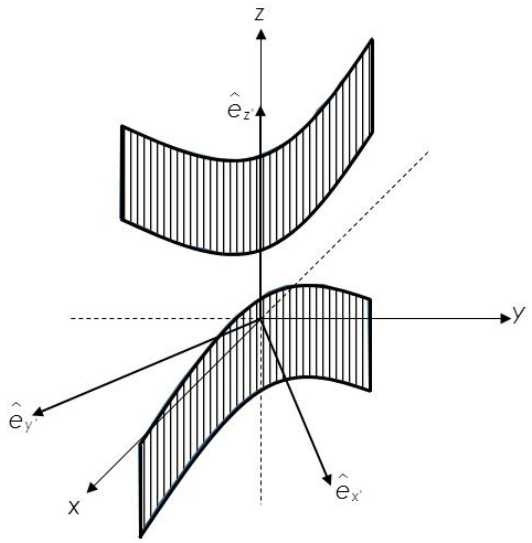



**FIGURA 1.32.** Cilindro hiperbólico rotado perpendicular al plano $X'Y'$. Los nuevos ejes $X'$, $Y'$ y $Z'$ apuntan en las direcciones de los vectores unitarios $\hat{e}_{x'}$, $\hat{e}_{y'}$, y $\hat{e}_{z'}$, respectivamente

## Ejemplo 29.

Identificar la superficie cuya ecuación es

$$5x^2+8xy+5y^2+4xz+4yz+2z^2=100.$$

**Solución:** La forma matricial de esta ecuación es

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=100.$$

Si se calculan los valores característicos de la matriz

$$M=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\det(M-\lambda I)=(1-\lambda)^2(10-\lambda)=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=1;\quad \lambda_3=10$$

luego, la ecuación de la superficie rotada es

$$(x')^2+(y')^2+10(z')^2=100 \Rightarrow \frac{(x')^2}{100}+\frac{(y')^2}{100}+\frac{(z')^2}{10}=1.$$

Como se puede apreciar en esta ecuación, se trata de un *elipsoide de revolución.* Ver figura 1.33. Los vectores característicos, asociados a los valores característicos forman los siguientes conjuntos

$$C_{\lambda_1}=\{(0,-k,k)\,|\,k\neq 0;\quad k\in\mathbb{R}\}$$

$$C_{\lambda_2}=\{(-4k,k,k)\,|\,k\neq 0;\quad k\in\mathbb{R}\}$$

$$C_{\lambda_3}=\{(k,2k,2k)\,|\,k\neq 0;\quad k\in\mathbb{R}\}.$$

Y, en consecuencia, los ejes principales están en las direcciones dadas por

$$\hat{\mathbf{e}}_{x'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1);\quad \hat{\mathbf{e}}_{y'}=\frac{1}{\sqrt{18}}(-4,1,1);\quad \hat{\mathbf{e}}_{z'}=\frac{1}{3}(1,2,2).$$

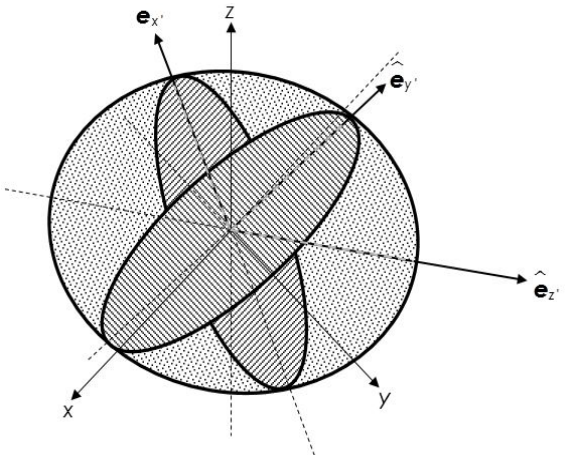



**FIGURA 1.33.** Elipsoide de revolución. El eje de revolución es el eje Z′. Los nuevos ejes X′, Y′ y Z′ apuntan en la dirección de los vectores unitarios $\hat{e}_{x'}$, $\hat{e}_{y'}$, y $\hat{e}_{z'}$, respectivamente.

## Ejercicios

**1.15.** Determinar si la expresión $36x^2+36y^2+36z^2-108x+48y-72z+138=0$ define a una esfera. En caso afirmativo, indicar cuánto mide su radio y dar las coordenadas de su centro.

**Solución:** $(6x-9)^2+(6y+4)^2+(6z-6)^2=-5$, No es esfera pues $\sqrt{-5}\notin\mathbb{R}$.

**1.16.** Dada la ecuación $Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+E=0$, decir que condición deben cumplir los coeficientes *A, B, C, D, E,* para que represente una esfera.

**Solución:** Los coeficientes *A, B, C* y *D* son arbitrarios, pero *E* debe satisfacer: $E\leq\left[B^2+C^2+D^2\right]/4A$.

**1.17.** Obtener, en caso de que exista, la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $\mathbf{P}_1=(1,5,5)$, $\mathbf{P}_2=(0,1,0)$, $\mathbf{P}_3=(3,-1,2)$ y $\mathbf{P}_4=(2,9,10)$.

**Solución:** No existe una esfera que pase por esos puntos.

**1.18.** Si las coordenadas $x$, $y$, $z$ del punto **P** en $\mathbb{R}^3$ están dadas por

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta + x_0$$
$$y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + y_0$$
$$z = r \cos\phi + z_0$$

demostrar que **P** pertenece a la esfera de ecuación $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.

**Solución:** Al calcular $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ se obtiene $r^2$, por lo tanto, dichos puntos están sobre una esfera.

**1.19.** Dada la ecuación de un elipsoide $2x^2+3y^2+z^2-8x-6y-4z-3=0$, obtener las coordenadas de su centro, sus semiejes y las coordenadas de sus vértices.

**Solución:** Centro: $(2, 1, 2)$; Vértices: $v_{1,2}=(2\pm 3, 1, 2)$, $v_{3,4}=(2, 1\pm\sqrt{6}, 2)$, $v_{5,6}=(2, 1, 2\pm\sqrt{18})$; Longitud de los semiejes: $a=3$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{15}$.

**1.20.** Obtener la ecuación del √elipsoide con centro en el origen que pasa por los puntos $(-½-1,\ 3\ /\sqrt{2}\ )$, $(⅓\ ,-4/3,\ 2)$, y que tiene como uno de sus vértices el punto $(0, 0, -3)$.

**Solución:** $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ donde $a=1$, $b=2$ y $c=3$.

**1.21.** Demostrar que si la suma de los cuadrados de las distancias del punto **P** a los ejes X y Z es igual a la constante $k$, entonces **P** pertenece al elipsoide de ecuación

$$x^2+2y^2+z^2=k.$$

**1.22.** Discutir, identificar y trazar la gráfica de la superficie cuya ecuación es $3x^2-2y^2+4z^2-12x-12y-8z-14=0$.

**Solución:** Hiperboloide de una hoja con centro en (2,–3, 1) y cuyo eje es la recta paralela al eje Y que pasa por el centro.

**1.23.** Obtener la ecuación del hiperboloide elíptico de una hoja con centro en el origen y cuya intersección con el plano $z=K$ es la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{2K^2}+\frac{y^2}{K^2}=1+\frac{1}{K^2}.$$

**Solución:** $\dfrac{x^2}{2}+y^2-z^2=1$

**1.24.** Dada la ecuación de la cuádrica rotada

$$-16x^2+9y^2+16z^2-24zx-36y+24z+72=0.$$

a) Escribirla en forma matricial como se muestra abajo de la ecuación (19)
b) Hacer una rotación de ejes de manera que la matríz que se obtuvo en el inciso a) resulte una matríz diagonal.
c) Reescribir la ecuación de la cuádrica en términos de las nuevas coordenadas, como se muestra en la ecuación (22) y comprobar que la nueva ecuación no tiene términos cruzados.
d) Obtener las coordenadas del centro y de los vértices. Hacer un trazo aproximado de su gráfica.

**Solución:** a) La ecuación de la cuádrica en el nuevo sistema de coordenadas es $9(x'-2)^2+20\left(y'+12/5\sqrt{10}\right)^2-2\left(z'+\sqrt{8/125}\right)^2=-25.76$, a partir de la cual se obtienen los valores de los parámetros pedidos.

**1.25.** Sea $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{c^2}=1;\quad a>0\quad \text{y}\quad c>0$

la ecuación de un hiperboloide de dos hojas.

a) Obtener la distancia más corta entre los dos mantos del hiperboloide.
b) Si se sabe que la intersección de dicho hiperboloide con el plano $y=8$ es una circunferencia de radio 3, determínense los valores de $a$ y $c$.

**Solución:** a) Los vértices de los mantos son: $(0,-4,0)$ y $(0,4,0)$ y la distancia entre ellos es 8; b) $a=\sqrt{3}$ y $c=\sqrt{3}$.

**1.26.** Sea $4x^2-16y^2+25z^2+8x+64y+150z-165=0$

la ecuación de un cono elíptico recto. Obtener sus trazas con los planos *XY, YZ, ZX*, y las coordenadas de su vértice.

**1.27.** Un cono elíptico recto tiene como centro el punto $(1,0,-1)$. Sus trazas con el plano *ZX* son las rectas $5x-2z-7=0$ y $5x+2z-3=0$ y sus intersecciones con el plano $x=1$ son las rectas $5y-3z-3=0$ y $5y+3z+3=0$. Obtener la ecuación del cono.

**1.28.** Obtener la ecuación del paraboloide circular recto con eje de simetría el eje Z y cuya traza con el plano *YZ* es la parábola

$$y^2=12(z-1).$$

**1.29.** Discutir, identificar y trazar la superficie de ecuación

$$3x^2-2y^2-6x+8y-12z=13.$$

**1.30.** El paraboloide hiperbólico de ecuación $z=\dfrac{(x-h)^2}{9}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}$ contiene a la recta $R=\begin{cases}2x-3y-8=0\\3z=2x+ey-8.\end{cases}$

Obtener los valores $h$, $k$ y $b$.

**1.31.** Correlacionar los nombres de la columna de la izquierda, con las ecuaciones de superficies que están en la de la derecha:

1) Esfera
2) Elipsoide
3) Hiperboloide de un manto
4) Hiperboloide de dos mantos
5) Cono elíptico
6) Paraboloide elíptico
7) Paraboloide hiperbólico
8) Plano
9) Cilindro elíptico
10) Cilindro hiperbólico
11) Cilindro parabólico

a) $x^2-y^2-z^2=1$
b) $4x^2+8y^2=64$
c) $3x^2-4y^2+3y-2z=0$
d) $x^2+y^2-10z^2=10$
e) $2x^2+3y^2+z^2-8x+12z=0$
f) $3x^2+2y^2-12z-6x=13$
g) $y^2=4(z-1)$
h) $2x^2+2y^2+2z^2-4x-2y=0$
i) $4x^2+8y^2+9z^2=0$
j) $2x+3y-z=5$
k) $-8x^2-4y^2=16$
l) $x^2-4y^2=16$

**1.32.** Mediante una rotación de ejes adecuada determinar el tipo de superficie de que se trata, para las siguientes ecuaciones:

a) $z^2=x^2-2xy+y^2$
b) $x^2-2xy+y^2+z^2=16$
c) $x^2-4xy-y^2+2xz-z^2=0$
d) $x^2+2xy+xz+yz+z^2=4$
e) $x^2-2xy+y^2-4xz+4z^2-4yz=0.$

**1.33.** Mediante rotación y traslación de ejes adecuadas, determinar el tipo de superficie descrita por la siguiente ecuación

$$x^2-2y^2+3z^2-4xy-6xz-12yz+12x-16y+24z-64=0.$$

**1.34.** Considérese la ecuación del cono circular recto $z^2=\alpha\left(x^2+y^2\right)$ y la ecuación del plano P

$$z=1+my.$$

Efectuar una rotación de ejes de modo que el plano P resulte horizontal. Obtener la ecuación del cono en este nuevo sistema y la ecuación de la curva de intersección de ambas superficies. Analizar qué tipo de curvas resultan cuando $m=\alpha$; $m<\alpha$; $m>\alpha$ y $m=0$.

## 1.6 Generación de superficies

En este subtema se estudiará la forma de generar superficies mediante una curva que se mueve en el espacio (denominada *generatriz*). Usualmente, para indicar que trayectoria debe seguir la generatriz se utilizan una o varias curvas auxiliares (llamadas *directrices*). No obstante, en casos muy simples, como se vará más adelante, no es necesaria ninguna *directriz*).

Si se elige arbitrariamente y sin ninguna restricción un punto en el espacio $\mathbb{R}^3$, esa elección implica dar tres valores $x$, $y$, $z$ que son las coordenadas del punto. Como se ha tenido libertad de elegir arbitrariamente cada uno de esos tres números, se dice que un punto en el espacio $\mathbb{R}^3$ tiene tres *grados de libertad*. En cambio, para el caso de una superficie de ecuación $F(x, y, z)=0$, sólo se pueden dar arbitrariamente dos de las coordenadas del punto, ya que la tercera está obligada a satisfacer la ecuación $F(x, y, z)=0$. Así, se ha tenido la libertad de elegir sólo dos de los tres números $x$, $y$, $z$, y por lo tanto se dice que un punto sobre una superficie tiene dos grados de libertad. En el caso de una curva en el

espacio $\mathbb{R}^3$, la expresión matemática consiste en un par de ecuaciones asociadas a dos superficies de la forma

$$G_1(x, y, z) = 0$$

$$G_2(x, y, z) = 0.$$

La curva se determina mediante la intersección de las dos superficies. En este caso sólo se pueden dar valores arbitrarios a una de las variables, ya que al fijarla las otras dos quedan en función de ella mediante el par de ecuaciones anteriores. Por tanto, un punto sobre una curva sólo tiene un grado de libertad.

Siguiendo con el caso de una curva en el espacio $\mathbb{R}^3$, considérese el sistema

$$G: \begin{cases} G_1(x, y, z, \alpha) = 0 \\ G_2(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases}$$

donde $\alpha$ es un parámetro real.

Al dar un valor particular al parámetro $\alpha$ se tendrá una curva asociada a ese valor de $\alpha$ y al ir variando $\alpha$, se tendrán diferentes curvas que se pueden interpretar como una sola curva que se mueve al ir variando $\alpha$. Si las funciones $G_1$ y $G_2$ son continuas con respecto a $\alpha$, la totalidad de las posiciones de esta curva móvil (llamada *generatriz*), constituyen una superficie.

Cuando en el sistema de ecuaciones anterior se elimina el parámetro $\alpha$, se obtiene una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0$$

que es la ecuación cartesiana de la superficie.

## Ejemplo 30.

Obtener la ecuación de la superficie cuya generatriz es

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x+\alpha=5 \\ y+\alpha=5. \end{cases}$$

**Solución:** Se observa que estas dos ecuaciones representan dos planos paralelos a los planos coordenados YZ y ZX, respectivamente. Así, por ejemplo, si $\alpha=0$ se tienen los planos $x=5$ y $y=5$; si $\alpha=2$, los planos tendrán por ecuaciones $x=3$ y $y=3$, etc. Nótese que la intersección de los respectivos planos para cada valor del parámetro $\alpha$, define una recta perpendicular al plano $XY$, o lo que es lo mismo, paralela al eje Z. La totalidad de las posiciones de esta recta representa la superficie buscada, la que —de acuerdo a lo analizado— es un plano de ecuación $y=x$. Efectivamente, si se despeja al parámetro de la primera ecuación se tiene que

$$\alpha=5-x$$

y si se sustituye este valor en la segunda se obtiene

$$y+(5-x)=5.$$

Por tanto, $y=x$, que es la ecuación de la superficie buscada. Ver la figura 1.34.

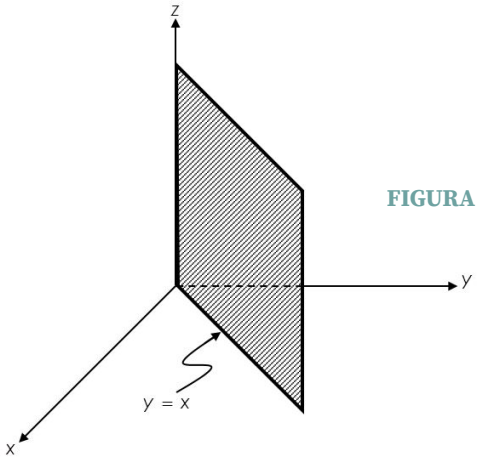



FIGURA 1.34.

## Ejemplo 31.

Obtener la ecuación de la superficie cuya generatriz está dada por

$$\mathcal{G}: \begin{cases} y^2 - 4x\alpha = 0 \\ 3z + 5x\alpha + \alpha y = 0. \end{cases}$$

**Solución:** Se observa que la primera ecuación corresponde a un cilindro parabólico perpendicular al plano $XY$ y la segunda a un plano que pasa por el origen.

Como ocurrió en el ejemplo anterior, para cada valor del parámetro $\alpha$ se tendrá una curva como resultado de la intersección de las dos superficies. La totalidad de las posiciones de esta curva móvil conformará la superficie requerida.

Si se despeja $\alpha$ de la primera ecuación: $\alpha = \dfrac{y^2}{4x}$

y se sustituye en la segunda, se obtiene

$$3z + 5x\left(\frac{y^2}{4x}\right) + \left(\frac{y^2}{4x}\right) y = 0$$

por lo que la superficie pedida tiene por ecuación

$$12xz + 20xy^2 + y^3 = 0.$$

Considérese ahora una generatriz con dos parámetros dada por el siguiente sistema de ecuaciones $\alpha$ y $\beta$.

$$\mathcal{G}: \begin{cases} G_1(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \\ G_2(x, y, z, \alpha, \beta) = 0. \end{cases}$$

Este sistema no da lugar a una superficie ya que con este par de ecuaciones sólo se puede eliminar uno de los parámetros y no es posible obtener una expresión de la forma $F(x, y, z) = 0$. Entonces hace falta una ecuación extra que relacione

$\alpha$ con $\beta$ y que permita eliminar a ambos parámetros. Esta ecuación extra, conocida con el nombre de *ecuación de condición*, será de la forma

$$C(\alpha, \beta) = 0.$$

En la siguiente sección se verá como obtenerla.

Siguiendo con este esquema, si el sistema de ecuaciones cuenta con tres parámetros $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, esto es, si es de la forma

$$\mathcal{G}: \begin{cases} G_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ G_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

entonces, para eliminar los parámetros, harán falta dos ecuaciones de condición

$$C_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad \text{y} \qquad C_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

En general se puede afirmar que para un sistema con $n$ parámetros se necesitarán $n-1$ ecuaciones de condición para eliminarlos y llegar a la ecuación de la superficie buscada

$$F(x, y, z) = 0.$$

De acuerdo con esto se concluye que cuando hay un sólo parámetro $(n=1)$ no se necesita ninguna ecuación de condición (como ocurrió en los dos ejemplos anteriores). Salvo estos casos simples, las ecuaciones de condición juegan un papel de primera importancia en este tipo de problemas y una vez conocidas el problema está prácticamente resuelto.

### 1.6.1 Generatriz, directrices y ecuaciones de condición

Se ha visto que una superficie puede ser generada por el movimiento de una curva generatriz que se apoya en curvas fijas llamadas directrices. Ahora veremos que las ecuaciones de las directrices dan lugar precisamente a las ecuacio-

nes de condición que se requieren para eliminar a los parámetros. Veremos además que el número de directrices necesarias es igual al número de ecuaciones de condición que se requieren, el cual, como ya se dijo, es igual a $n-1$.

Considérese la siguiente generatriz con dos parámetros

$$\mathcal{G}: \begin{cases} G_1(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \\ G_2(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

que se desplaza apoyándose en la directriz

$$\mathcal{D}: \begin{cases} D_1(x, y, z) = 0 \\ D_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Es Claro que cualquier terna de valores $x$, $y$, $z$ que satisfaga la ecuación de la directriz debe satisfacer también las ecuaciones de la generatriz. Es por ello que se pueden resolver simultáneamente las ecuaciones de la generatriz y las de la directriz para eliminar a las variables $x$, $y$ y $z$. De esta manera queda una ecuación en términos únicamente de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ que es precisamente la ecuación de condición buscada. ésta será de la forma

$$C(\alpha, \beta) = 0, \tag{23}$$

donde $C(\alpha, \beta)$ es una función escalar de dos variables. Una vez obtenida se utiliza junto con las ecuaciones de la generatriz para eliminar los parámetros y llegar así a la ecuación de la superficie:

$$F(x, y, z) = 0.$$

## Ejemplo 32.

Hallar la ecuación de la superficie generada por la curva

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=\beta \end{cases}$$

al apoyarse sobre la directriz

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x=4z \\ y=0. \end{cases}$$

**Solución:** Dadas las ecuaciones que aparecen en la generatriz, se ve que se trata de una circunferencia con centro sobre el eje Z, de radio variable y situado en planos paralelos al plano $XY$ con cotas variables. Como la directriz en la que se apoyan estos círculos es una recta situada en el plano $ZX$, que pasa por el origen, se intuye que la superficie que se forma es un cono con vértice en el origen (su gráfica es semejante a la de la figura 1.29, pero los cortes horizontales son elipses en vez de circunferencias). Así que utilizando las expresiones dadas para eliminar a $x$, $y$ y $z$, se tiene que

$$x=\pm\sqrt{\alpha^2-y^2} \qquad \text{y como} \qquad y=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\alpha.$$

Sustituyendo en la ecuación de la directriz se obtiene la ecuación de condición buscada:

$$\mathcal{C}: \quad \pm\alpha=4\beta, \tag{24}$$

en donde se ha logrado eliminar $x$, $y$, $z$. Al sustituirla en la generatriz queda

$$x^2+y^2=16z^2$$

que es la ecuación de la superficie buscada, la cual como se había intuido, es un cono circular recto con su eje sobre el eje Z.

Si el sistema posee tres parámetros se necesitarán dos directrices para obtener dos ecuaciones de condición. En efecto, supóngase la generatriz siguiente

$$\mathcal{G}: \begin{cases} G_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ G_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \end{cases}$$

que se desplaza apoyándose en las directrices $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ cuyas ecuaciones son

$$\mathcal{D}_1: \begin{cases} D_1(x, y, z) = 0 \\ D_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

y

$$\mathcal{D}_2: \begin{cases} D_3(x, y, z) = 0 \\ D_4(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la generatriz y las de la directriz $D_1$ se eliminan las variables $x$, $y$ y $z$ y con ello se obtiene una ecuación en términos únicamente de los parámetros $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, que es la primera ecuación de condición. Haciendo lo mismo con la otra directriz se tienen ya las dos ecuaciones de condición y se pueden eliminar los tres parámetros de la ecuación de la superficie. Obteniéndose

$$F(x, y, z) = 0.$$

## Ejemplo 33.

Hallar la ecuación de la superficie generada por la familia de elipses

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \\ z = \gamma \end{cases}$$

que se apoyan sobre las directrices

$$\mathcal{D}_1:\ \begin{cases} y^2=4pz; & p>0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_2:\ \begin{cases} x^2=4gz; & g>0 \\ y=0. \end{cases}$$

**Solución:**

— Se eliminan $x$, $y$, $z$ de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}_1$:

$$x=0 \ \Rightarrow\ \beta y^2=1 \ \Rightarrow\ y^2=\frac{1}{\beta}=4pz$$

y como $z=\gamma$ se sigue que

$$\mathcal{C}_1:\ \frac{1}{\beta}=4p\gamma \tag{25}$$

que es la primera ecuación de condición.

— Se eliminan $x$, $y$, $z$ de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}_2$:

$$y=0 \ \Rightarrow\ \alpha x^2=1 \ \Rightarrow\ x^2=\frac{1}{\alpha}=4gz$$

y como $z=\gamma$ entonces

$$\mathcal{C}_2:\ \frac{1}{\alpha}=4g\gamma \tag{26}$$

que es la segunda ecuación de condición.

— Ahora se eliminan $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de $\mathcal{G}$, (25) y (26):

$$\beta=\frac{1}{4p\gamma};\quad \alpha=\frac{1}{4g\gamma}\cdot$$

Sustituyendo en $\mathcal{G}$:

$$\frac{x^2}{4qz}+\frac{y^2}{4pz}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{q}+\frac{y^2}{p}=4z$$

que es un paraboloide elíptico con eje de simetría sobre el eje Z.

Tomando como base la forma en que se pueden generar las superficies, éstas se pueden clasificar como sigue:

Tipos de superficies
- regladas
  - cilíndricas
  - cónicas
- de revolución
  - de otro tipo
- de otro tipo

### 1.6.2 Superficies regladas

Una superficie que es generada por una familia de rectas se denomina *superficie reglada.*

**Ejemplo 34.**

Obtener la ecuación de la superficie reglada generada por la familia de rectas.

$$\mathcal{G}: \begin{cases} 4x-2y+\alpha z=0 \\ 2\alpha x+\alpha y-8z=0. \end{cases}$$

**Solución:** Si se despeja $\alpha$ en la primera ecuación y se sustituye en la segunda, se obtiene la ecuación de la superficie reglada buscada. Así,

$$\alpha = \frac{2y-4x}{z} \Rightarrow 2x\left(\frac{2y-4x}{z}\right) + y\left(\frac{2y-4x}{z}\right) - 8z = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4z^2 = y^2,$$

que es un cono con vertice en el origen, y eje de simetría, el eje Y .

## Ejemplo 35.

Demostrar que la ecuación $xz + 2y - 2z = 0$ representa una superficie reglada.

**Solución:** si se hace $z = \alpha$, entonces se tiene una generatriz de la ecuación considerada:

$$\mathcal{G}: \begin{cases} z = \alpha \\ \alpha x + 2y - 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Como se puede apreciar, cada una de estas ecuaciones representa un plano que al intersectarse con el otro produce una recta. Al ir variando $\alpha$ se obtiene una familia de rectas. Por lo tanto se trata de una superficie reglada. Para determinar la dirección de la recta que en su movimiento genera a la superficie, se efectúa el producto vectorial de las normales de los dos planos. El plano $z = \alpha$ es un plano horizontal y por lo tanto un vector normal a él es

$$\mathbf{N}_1 = (0, 0, 1).$$

Por otro lado, la ecuación del segundo plano se puede escribir como $(\alpha, 2, 0) \cdot (x, y, z) = 2\alpha$, lo que implica que un vector normal a él es

$$\mathbf{N}_2 = (\alpha, 2, 0).$$

Entonces,

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 2 & 0 \end{bmatrix} = -2\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}.$$

Por lo tanto, la dirección de la recta generatriz está dada por el vector unitario

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+4}}(-2, \alpha, 0).$$

## Ejemplo 36.

Demostrar que un paraboloide hiperbólico es una superficie reglada.

**Solución:** Por facilidad se tomará la ecuación del paraboloide hiperbólico con punto silla en el origen y con planos de simetría el $YZ$ y el $ZX$. Su ecuación está dada por la expresión (16), que por comodidad se repite aquí

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = cz.$$

Las figuras 1.18, 1.31 y 1.35 muestran tres hiperboloides parabólicos, pero sólo los de las figuras 1.31 y 1.35 tienen la orientación que estamos considerando en este ejemplo. En la figura 1.35 se ha graficado una región más pequeña alrededor del punto silla. Si se factoriza el miembro izquierdo de la ecuación anterior como una diferencia de cuadrados se tiene

$$\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{b}\right)\left(\frac{y}{a} + \frac{x}{b}\right) = cz.$$

Haciendo $\alpha = \frac{y}{a} - \frac{x}{b}$ se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a} - \dfrac{x}{b} = \alpha \\ \dfrac{\alpha}{a} y - \dfrac{\alpha}{b} x = cz, \end{cases}$$

que son las ecuaciones de la generatriz que, como se aprecia, se trata de una familia de rectas que al variar $\alpha$ genera al paraboloide hiperbólico. En consecuencia se trata de una superficie reglada. A la misma conclusión se llega si se hace $\beta = \dfrac{y}{a} + \dfrac{x}{b}$, lo que da lugar a la generatriz

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a} + \dfrac{x}{b} = \beta \\ \dfrac{\beta}{a} y - \dfrac{\beta}{b} x = cz. \end{cases}$$

En la figura 1.35 se han dibujado dos familias de rectas contenidas en la superficie. Una de estas familias está asociada a la primera generatriz y la otra por la segunda. La figura muestra claramente que esta superficie es reglada.

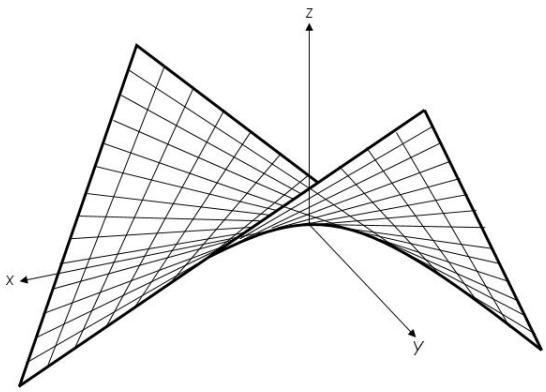



**FIGURA 1.35.** Porción del paraboloide hiperbólico de la figura 1.31.

## Ejemplo 37.

Obtener la ecuación de la superficie reglada generada por rectas perpendiculares al eje Y y que se apoyan en las directrices $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ mostradas en la figura 1.36.

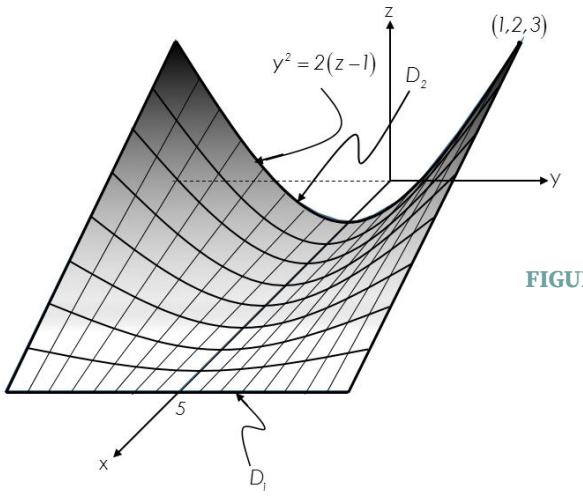



**FIGURA 1.36**

**Solución:** Se ve que las directrices $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ están situadas en planos paralelos al plano *YZ* y que la generatriz está situada sobre planos paralelos al *ZX*. Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la generatriz son

$$\mathcal{G}: \begin{cases} z = \alpha x + \beta \\ y = \gamma, \end{cases}$$

que tiene tres parámetros. Se deducirán ahora las ecuaciones de las dos directrices. Se tiene que $\mathcal{D}_1$ es una recta paralela al eje Y y que pasa por (5, 0, 0). Entonces sus ecuaciones son

$$\mathcal{D}_1: \begin{cases} x = 5 \\ z = 0. \end{cases}$$

$\mathcal{D}_2$ es una parábola sobre un plano paralelo al plano *YZ* con vértice en (1, 0, 1) y que pasa por el punto (1, 2, 3). Por lo tanto la parábola está sobre el plano $x = 1$. Además, sabemos que en general la ecuación de una parábola que está colocada sobre el plano *YZ* y que abre hacia arriba es

$$(y-k)^2 = 4p(z-\ell),$$

siendo $k$ y $\ell$ las coordenadas del vértice en el plano $x=1$. En nuestro caso $k=0$ y $\ell=1$. Entonces

$$\mathcal{D}_2:\ \begin{cases} x=1 \\ y^2=4p(z-1). \end{cases}$$

Como $(1,\,2,\,3)$ es un punto de la parábola se tiene que $2^2=4p(3-1) \Rightarrow p=1/2$ por lo que las ecuaciones de la segunda directriz son

$$\mathcal{D}_2:\ \begin{cases} x=1 \\ y^2=2(z-1). \end{cases}$$

A continuación se obtendrán las ecuaciones de condición. De $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{G}$ se llega a

$$\mathcal{C}_1:\ 5\alpha+\beta=0. \tag{27}$$

Y de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{G}$ resulta

$$\mathcal{C}_2:\ \gamma^2=2(\alpha+\beta-1). \tag{28}$$

Trabajando con estas dos ecuaciones de condición se llega a

$$\begin{matrix} 5\alpha+\beta=0 \\ 2\alpha+2\beta=\gamma^2+2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha=-\frac{y^2+2}{8};\quad \beta=\frac{5}{8}(y^2+2)$$

y sustituyendo en $\mathcal{G}$ se obtiene finalmente la ecuación de la superficie reglada

$$(y^2+2)(5-x)-8z=0.$$

### 1.6.3 Superficies cilíndricas

Una superficie cilíndrica es la generada por una recta generatriz paralela siempre a una dirección dada, que se mueve apoyada en una curva directriz. Así, las superficies cilíndricas son casos particulares de las superficies regladas.

**Ejemplo 38.**

Obtener la ecuación de la superficie reglada que se genera por rectas perpendiculares al eje Z, paralelas a la recta $y=x$ y que se apoyan en la curva directriz $(x-2)^2+(z-2)^2=4;\ y=0$ (Ver la figura 1.37).

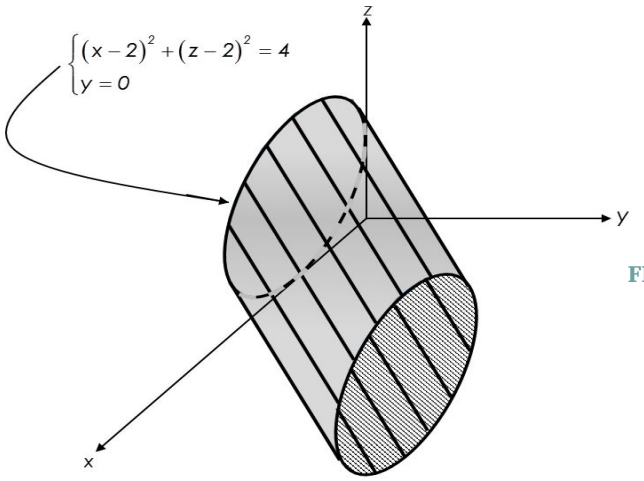



FIGURA 1.37.

**Solución:** Las ecuaciones de una recta perpendicular al eje Z son

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b};\qquad z=z_0,$$

donde a y b son números fijos debido a que la generatriz tiene dirección fija. En cambio $x_0$, $y_0$ y $z_0$ son parámetros variables. Como las rectas son paralelas a la recta $y=x$ se puede tomar $a=b=1$, por lo que las ecuaciones de la generatriz quedan como

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x = y - y_0 + x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

o bien

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x = y + \alpha \\ z = \beta, \end{cases}$$

en donde se han hecho las sustituciones $\beta = z_0$ y $\alpha = -y_0 + x_0$ ya que $x_0 - y_0$ equivale a un solo parámetro. Las ecuaciones de la directriz son

$$\mathcal{D}_1: \begin{cases} (x-2)^2 + (z-2)^2 = 4 \\ y = 0. \end{cases}$$

Combinando $\mathcal{G}$ con $\mathcal{D}$ para eliminar $x$, $y$, $z$ se obtiene la ecuación de condición $(\alpha - 2)^2 + (\beta - 2)^2 = 4$. Al sustituir en ella los valores de $\alpha$ y $\beta$ dados en las ecuaciones de $\mathcal{G}$ se llega a la ecuación buscada:

$$(x - y - 2)^2 + (z-2)^2 = 4.$$

## Ejemplo 39.

Sea la recta generatriz dada por la dirección $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y que se apoya en una curva directriz que está en un plano paralelo al plano $XY$. Entonces las ecuaciones de la generatriz son

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números fijos. Si por comodidad se despejan $x$ y $y$ en términos de $z$, las ecuaciones de esta recta generatriz se pueden escribir como

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c} \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{G}: \begin{cases} x = \dfrac{a}{c} z - \dfrac{a}{c} z_1 + x_1 \\ y = \dfrac{b}{c} z - \dfrac{b}{c} z_1 + y_1. \end{cases}$$

Y si se hace $\alpha = -\frac{a}{c} z_1 + x_1$; $\beta = -\frac{b}{c} z_1 + y_1$, la generatriz queda como

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x = \frac{a}{c} z + \alpha \\ y = \frac{b}{c} z + \beta. \end{cases}$$

Por otro lado, como la directriz es paralela al plano $XY$, sus ecuaciones serán de la forma

$$\mathcal{D}: \begin{cases} f(x; y) = 0 \\ z = k. \end{cases}$$

Con $\mathcal{D}$ y $\mathcal{G}$ se obtiene una ecuación de condición, la que junto con $G$, determinará la ecuación de la superficie.

## Ejemplo 40.

Determinar la ecuación del cilindro cuya generatriz es paralela al vector $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ y cuya directriz está dada por $y^2 = 8x$; $z = 1$.

**Solución:** Las ecuaciones de la generatriz son

$$\frac{x - x_1}{2} = \frac{y - y_1}{-1} = \frac{z - z_1}{-2}.$$

Si se despejan $x$ y $y$ se tiene

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x = -z + z_1 + x_1 \\ y = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z_1 + y_1 \end{cases}$$

y si se hace $\alpha = z_1 + x_1$; $\beta = -\frac{1}{2} z_1 + y_1$, entonces

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x = -z + \alpha \\ y = \dfrac{1}{2} z + \beta \end{cases}$$

Por otro lado

$$\mathcal{D}: \begin{cases} y^2 = 8x \\ z = 1. \end{cases}$$

Relacionando $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$ se obtiene la ecuación de condición

$$C: \left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 = 8(\alpha - 1) \tag{29}$$

y finalmente, sustituyendo en (29) los valores de $\alpha$ y $\beta$ dados en las ecuaciones de $\mathcal{G}$ se llega a

$$\left(y + \frac{1}{2} z + \frac{1}{2}\right)^2 = 8\left(x + z - 1\right),$$

que es la ecuación de la superficie cilíndrica buscada.

## Ejemplo 41.

Obtener la ecuación de la superficie cilíndrica con generatriz paralela al vector $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ y directriz

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

**Solución:** Las ecuaciones de la generatriz son

$$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{1} = \frac{z - z_1}{-2}.$$

Despejando $x$ y $z$:

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x = y - y_1 + x_1 \\ z = -2y - 2y_1 + z_1. \end{cases}$$

Haciendo $\alpha = -y_1 + x_1$; $\beta = -2y_1 + z_1$

$$\Rightarrow \mathcal{G}: \begin{cases} x = y + \alpha \\ z = -2y + \beta. \end{cases}$$

De $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$ se obtiene la ecuación de condición

$$\mathcal{C}: \alpha^2 - \beta^2 = 1. \tag{30}$$

Ahora, con $\mathcal{G}$ y (30) se llega a la ecuación de la superficie cilíndrica:

$$(x-y)^2 - (z+2y)^2 = 1.$$

Aquí cabe hacer notar que cuando la generatriz de una superficie cilíndrica es una recta paralela a alguno de los ejes coordenados y su directriz está alojada en un plano perpendicular a dicha generatriz, la ecuación de la superficie es igual a la ecuación de la curva directriz en el plano coordenado perpendicular a la generatriz. Se deja como ejercicio al lector probar esta afirmación.

### 1.6.4 Superficies cónicas

Las superficies cónicas son las que se generan con un conjunto de rectas que pasan por un punto fijo llamado vértice y se apoyan sobre una directriz. Por lo tanto también son superficies regladas.

## Ejemplo 42.

Supóngase que el vértice de una superficie cónica es el punto $(x_1, y_1, z_1)$ y que la curva directriz está dada por

$$\mathcal{D}: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Las ecuaciones de la generatriz son

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

En este caso $a$, $b$ y $c$ son parámetros variables puesto que cambian al ir variando la orientación de la recta generatriz. En cambio ahora $x_1$, $y_1$ y $z_1$ son fijos. Como la directriz está en el plano $XY$, conviene escribir las ecuaciones anteriores como

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{z - z_1} = \dfrac{a}{c} \\ \dfrac{y - y_1}{z - z_1} = \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

y si se hace $\alpha = a/c$ y $\beta = b/c$ se tiene

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x = \alpha(z - z_1) + x_1 \\ y = \beta(z - z_1) + y_1. \end{cases}$$

Con $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$ se obtiene la ecuación de condición que al combinarla con $\mathcal{G}$ da lugar a la ecuación de la superficie cónica buscada.

## Ejemplo 43.

Determinar la ecuación de la superficie cónica con vértice en $(6, 6, 0)$ y directriz

$$\mathcal{D}_1:\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1\\ x=1.\end{cases}$$

Graficar también la superficie.

**Solución:** Las ecuaciones de la generatriz son

$$\frac{x-6}{a}=\frac{y-6}{b}=\frac{z}{c}$$

y como la directriz está en un plano paralelo al $YZ$ conviene escribir las ecuaciones anteriores como

$$\mathcal{G}:\begin{cases}\dfrac{y-6}{x-6}=\alpha\\ \dfrac{z}{x-6}=\beta\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{G}:\begin{cases}y=\alpha(x-6)+6\\ z=\beta(x-6)\end{cases}$$

donde $\alpha=b/a$ y $\beta=c/a$. Con $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$ se obtiene la ecuación de condición

$$\mathcal{C}:\frac{(-5\alpha+6)^2}{9}+\frac{(-5\beta)^2}{4}=1, \tag{31}$$

que al combinarla con $\mathcal{G}$ se llega a la ecuación de la superficie cónica buscada:

$$\frac{\left[-5\left(\dfrac{y-6}{x-6}\right)+6\right]^2}{9}+\frac{\left[-5\left(\dfrac{z}{x-6}\right)\right]^2}{4}=1,$$

o bien,

$$4(6x-5y-6)^2+225z^2=36(x-6)^2.$$

Su gráfica se muestra en la figura 1.38.

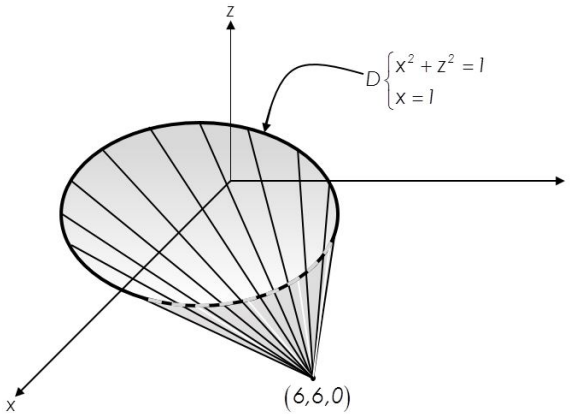



FIGURA 1.38.

## Ejemplo 44.

Obtener la ecuación de la superficie cónica con vértice en $(0, 0, 0)$ y directriz

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=3. \end{cases}$$

**Solución:** Las ecuaciones de la generatriz son

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

donde $a$, $b$ y $c$ son los parámetros. Como la directriz está en un plano paralelo al $ZX$ conviene escribir

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x=\alpha y \\ z=\beta y \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \alpha=\frac{a}{b}; \quad \beta=\frac{c}{b}.$$

Con $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$ se obtiene la ecuación de condición

$$\mathcal{C}: 9\alpha^2+9\beta^2=1, \tag{32}$$

que al combinarla con $G$ se llega a

$$9x^2+9z^2-y^2=0.$$

### 1.6.5 Superficies de revolución

Las superficies de revolución se generan cuando una curva plana gira alrededor de un eje que está contenido en el plano de la curva, y que se le conoce con el nombre de *eje de revolución*. Estas superficies también se pueden generar mediante una circunferencia de diámetro variable cuyo centro está en el eje de revolución y que tiene a la curva plana como directriz. A tal curva se le llama *meridiana*.

Supóngase, como se observa en la figura 1.39, una superficie de revolución que se genera al hacer girar una curva del plano $ZX$ alrededor del eje Z. Esta superficie también se podría generar con una circunferencia paralela al plano $XY$, cuya directriz sea la curva meridiana del plano $ZX$. En este caso las ecuaciones de la generatriz y de la directriz son

$$G:\begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ z=\beta \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}:\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0, \end{cases}$$

siendo $f(x,z)=0$ la ecuación de la meridiana en el plano $ZX$.

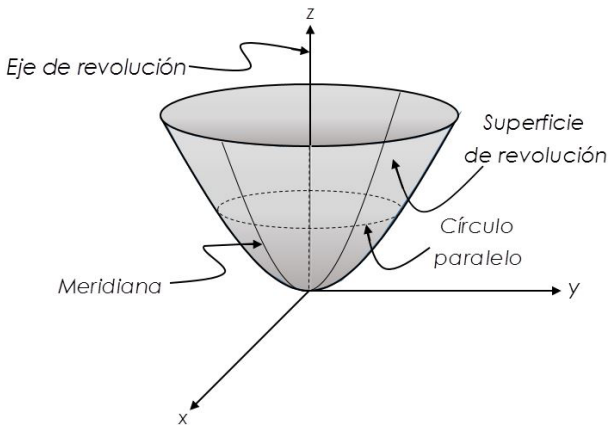



**FIGURA 1.39.** Superficie de revolución. La directriz (meridiana) es la curva del plano $ZX$ cuya ecuación es $f(x,z)=0$.

Con $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$ se obtiene la ecuación de condición

$$\mathcal{C}: \left(\pm\alpha, \beta\right) = 0, \tag{33}$$

que al combinarla con $\mathcal{G}$ se llega a la ecuación de la superficie de revolución. Así,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \beta = z \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0.$$

En la expresión anterior se ve que la ecuación de toda superficie de revolución que tiene como eje uno de los ejes coordenados, con una meridiana alojada en uno de los planos coordenados, se obtiene de la siguiente manera. Se sustituye en la ecuación de la meridiana en dicho plano coordenado, la variable de nombre distinto al eje de revolución, por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las variables distintas a la del eje.

## Ejemplo 45.

Obtener la ecuación de la superficie de revolución cuya directriz (meridiana) es

$$M: \begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$$

y su eje de revolución es el eje Z.

**Solución:** En este caso la ecuación depla meridiana es $y^2 = 2z$. Sustituyendo en ella a la variable $y$ por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ se tiene

$$x^2+y^2 = 2z,$$

que es un paraboloide con vértice en el origen.

## Ejemplo 46.

Obtener la ecuación de la superficie de revolución cuya directriz es

$$M:\begin{cases}\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$$

y cuyo eje de revolución es el eje Y. Graficar la superficie.

**Solución:** Se sustituye en la ecuación de la meridiana $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $x^2/1+y^2/4=1$ la $x$ por

$$\pm\sqrt{x^2+z^2}$$

y se llega a

$$\frac{x^2+z^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1,$$

que es un elipsoide de revolución, con centro en el origen y cuyo eje de revolución es el eje Y como se muestra en la figura 1.40.

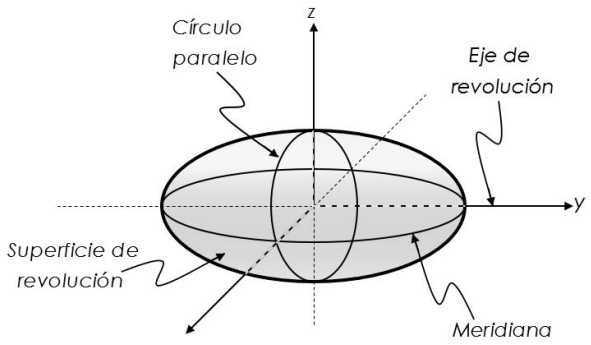



**FIGURA 1.40.** Elipsoide de revolución.

## Ejemplo 47.

Obtener la ecuación de un toroide.

**Solución:** Un toroide es una superficie en forma de dona, como la que se muestra en la figura 1.41. También se le conoce con los nombres de superficie tórica o toro. En la figura se puede apreciar que si se toma una circunferencia de radio $r$ sobre el plano $YZ$, con centro en $(0, R, 0)$, y se la hace girar en torno del eje Z, se genera la superficie en cuestión. Sin embargo, también se puede generar con circunferencias horizontales que se apoyan sobre la circunferencia de radio $r$ tomada como directriz. De esta forma, la directriz es

$$\mathcal{D}: \begin{cases} (y-R)^2+z^2=r^2 \\ x=0 \end{cases}$$

cuyo eje de revolución es el eje Z. Sustituyendo $y$ por

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

en la ecuación de la meridiana se obtiene

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2$$

o bien

$$\left(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2=4R^2\left(x^2+y^2\right),$$

que es la ecuación del toroide.

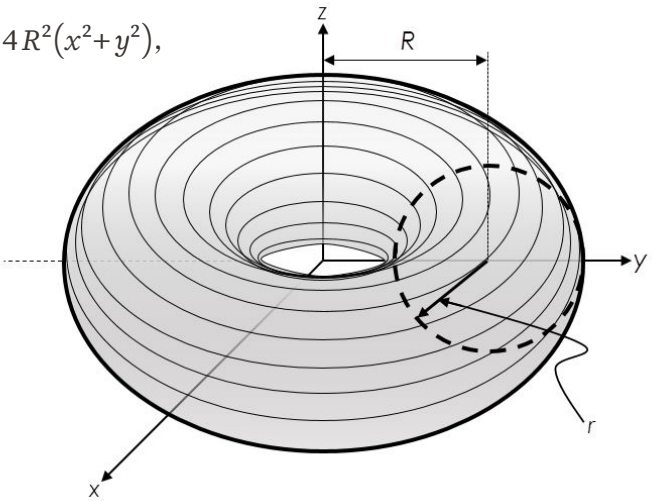



**FIGURA 1.41.**
Toroide o Toro.

## Ejercicios

**1.35.** Hallar la ecuación de la superficie cuya generatriz es la familia de rectas

$$\mathcal{G}: \begin{cases} 2x-2\alpha y-z=0 \\ 2\alpha x+2y-\alpha z=0. \end{cases}$$

Identificar la superficie.

**1.36.** Obtener la ecuación de la superficie cuyas directriz y generatriz tienen las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x^2+4y^2=\alpha^2 \\ z=\beta \end{cases} \qquad \mathcal{D}: \begin{cases} x=z \\ y=0, \end{cases}$$

**1.37.** Determinar la ecuación de la superficie denominada "salto de esquí", que se forma con la generatriz

$$\mathcal{G}: \begin{cases} x^2=4p(z-\alpha) \\ y=\beta \end{cases}$$

y se apoya en la directriz

$$\mathcal{D}: \begin{cases} z=\dfrac{1}{4q}y^2 \\ x=0 \end{cases} \qquad -a\leq y\leq b; \quad a \quad \text{y} \quad b\in\mathbb{R}.$$

Hacer un trazo aproximado de su gráfica.

**1.38.** Dadas la generatriz y las directrices que a continuación se muestran, obtener la ecuación de la superficie que se genera, e identificarla y graficarla.

$$\mathcal{G}:\begin{cases}\alpha x^2+\beta y^2=1\\ z=y\end{cases}\qquad \mathcal{D}_1:\begin{cases}z^2-y^2=1\\ x=0\end{cases}\qquad \mathcal{D}_2:\begin{cases}x^2+z^2=1\\ y=0.\end{cases}$$

**1.39.** Una generatriz de ecuaciones $\alpha x^2+\beta y^2=1$ y $z=\gamma$ se apoya en las directrices

$$\mathcal{D}_1:\begin{cases}z=-\dfrac{x^2}{4}\\ y=0\end{cases}\qquad \mathcal{D}_2:\begin{cases}z=\dfrac{y^2}{9}\\ x=0\end{cases}$$

y genera un paraboloide hiperbólico. Se desea saber cual es la ecuación de la recta sobre el paraboloide hiperbólico que pasa por el punto $(2,\,3,\,0)$ de la superficie.

**1.40.** Demostrar que la ecuación $x^2+z^2-2xz-y+z=0$ representa una superficie reglada.

**1.41.** Obtener la ecuación de la superficie reglada que genera una recta que se mueve de manera que se mantiene siempre paralela al plano $XY$, y se apoya en las curvas

$$\mathcal{D}_1:\begin{cases}y^2=z\\ x=0\end{cases};\qquad \mathcal{D}_2:\begin{cases}z^3=x\\ y=0.\end{cases}$$

**1.42.** Demostrar que un hiperboloide de revolución es una superficie reglada.

**1.43.** Hallar la ecuación de la superficie reglada generada por una recta que se mueve de modo que se mantiene siempre paralela al plano $XY$ y corta a la recta $x+z=1;\ y=0$, y a la parábola $y^2=z;\ x=0$. Graficar la superficie.

**1.44.** En cada uno de los incisos siguientes se da la directriz y un vector paralelo a la generatriz de una superficie cilíndrica. Obtener la ecuación de la superficie y hacer un trazo aproximado de su gráfica.

a) $\mathcal{D}: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ $\hat{\mathbf{u}}_G=(1,-1,1)$

b) $\mathcal{D}: \begin{cases} y=\operatorname{sen} z \\ x=0 \end{cases}$ $0\leq z\leq 2\pi;$ $\hat{\mathbf{u}}_G=(1,0,0)$

c) $\mathcal{D}: \begin{cases} x^{2/3}+z^{2/3}=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\hat{\mathbf{u}}_G=(0,1,0)$

d) $\mathcal{D}: \begin{cases} x^2+2xy+y^2=1 \\ z=-1 \end{cases}$ $\hat{\mathbf{u}}_G=(1,-1,1).$

**1.45.** Demostrar que la ecuación $2xy+xz-1=0$ representa una superficie cilíndrica. Obtener las ecuaciones de su directriz, su generatriz y hacer un trazo aproximado de su gráfica.

**1.46.** Demostrar que la ecuación $Ax^2+By^2+Cz^2=0$ representa una superficie cónica si y sólo si todos sus coeficientes son diferentes de cero y no son todos del mismo signo. En este caso, su eje de simetría está sobre el eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es de signo contrario al de los otros dos coeficientes.

**1.47.** Obtener la ecuación de la superficie cónica con vértice en el punto $(3,\ 1,\ 4)$, que tiene por directriz una elipse paralela al plano $ZX$ con centro en el punto $(0,\ 2,\ 0)$ y que contiene a los puntos $(0,\ 2,\ 1)$ y $(3,\ 2,\ 0)$. Sus semiejes son paralelos a los ejes coordenados. Graficar dicha superficie.

**1.48.** Demostrar que el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera que la suma de sus distancias a los planos coordenados es siempre igual a su distancia al origen, representa un cono circular rotado.

**1.49.** En cada uno de los incisos siguientes se dan las ecuaciones de una curva plana y el eje sobre el cual gira de modo que genera una superficie de revolución. Obtener la ecuación de la superficie generada y hacer un trazo aproximado de su gráfica.

a) $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$ eje Z

b) $\begin{cases} x^2-z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$ eje X

c) $\begin{cases} y=x^3 \\ z=0 \end{cases}$ eje Y

d) $\begin{cases} z=\ell_n y \\ x=0 \end{cases}$ $y>0;$ eje Z

e) $\begin{cases} y^2=4(x-1) \\ z=0 \end{cases}$ $x>1;$ eje X.

**1.50.** Una fábrica de vidrio requiere construir bombillas para quinqué que tengan la forma mostrada en la figura EJ-1-50. Como quiere hacer las bombillas en forma exacta, solicita que se le proporcione la ecuación de la forma de las bombillas. Obtener dicha ecuación.

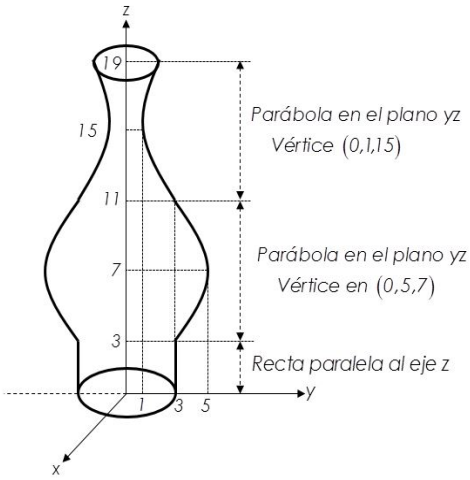



**FIGURA EJ-1-50.**

**1.51.** Demostrar que la ecuación $x^2y^2+x^2z^2=1$ representa a una superficie de revolución. Obtener su eje de revolución y las ecuaciones de la generatriz en uno de los planos coordenados que contenga al eje.

**1.52.** Obtener la ecuación de la superficie que se genera cuando una circunferencia de radio $r$ contenida siempre en un plano vertical que contiene al eje Z se rota alrededor del eje Z. La rotación de dicha circunferencia se hace de tal forma que su centro está siempre en el plano $XY$ y su punto más cercano al origen decribe una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Suponer que $r<a$ y $r<b$.

**1.53.** Hallar la ecuación de la superficie generada por una familia de elipses horizontales con centro sobre el eje Z que se apoyan sobre dos circunferencias verticales de radio $r$. Una contenida en el plano $ZX$ cuyo centro está en $(a+r,\ 0,\ 0)$ y la otra contenida en el plano $YZ$ cuyo dentro está en $(0,\ b+r,\ 0)$. Suponer que $r<a$ y $r<b$.

**1.54.** Demostrar que la ecuación de la curva que describe el extremo $B$ de un segmento de recta de longitud $2r$ contenido en el plano $XY$ y que se desplaza apoyando su extremo $A$ sobre la elipse de ecuación $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ de manera que la dirección $\overline{AB}$ pasa por el origen, no es una elipse. Utilizando este resultado, ¿podría explicar porqué las ecuaciones de las superficies de los ejemplos 1.52 y 1.53 no son iguales?

## 1.7 Formulación de funciones

En la práctica, uno de los pasos más importantes al enfrentar un problema es la representación del sistema en estudio mediante un modelo matemático. Este modelo es útil como simulador del sistema de manera que se pueda conocer su comportamiento variando las condiciones del problema. Las razones de utilizar el modelo matemático en vez de interactuar directamente con el sistema son muy simples: optimación de recursos, tiempo y esfuerzo, así como la posibilidad de hacer pruebas sin perturbar al sistema real.

En este subtema se obtendrán funciones escalares que representan el comportamiento de ciertos sistemas, los cuales —aunque son casos particulares— ilustran la forma en que se debe proceder en general.

### Ejemplo 48.

Obtener la expresión del volumen de un paralelepípedo rectangular que está inscrito en el elipsoide $x^2+9y^2+4z^2=36$ en función de sólo dos de sus lados.

**Solución:** El primer paso será hacer un modelo geométrico del problema. Ver la figura 1.42.

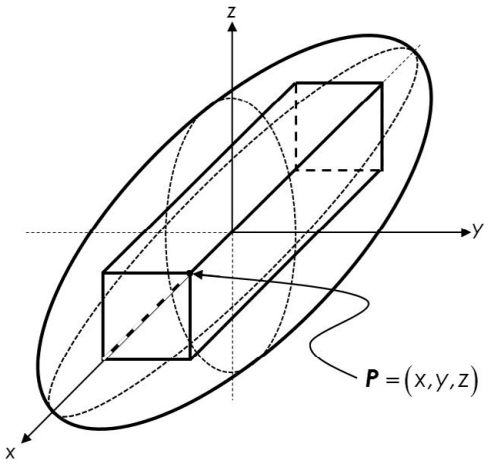



**FIGURA 1.42.**
Paralelepípedo inscrito en un elipsoide.

Como el elipsoide está centrado en el origen el paralelepípedo también lo estará. Las longitudes de los lados del paralelepípedo son $2x$, $2y$ y $2z$, respectivamente. Por lo cual su volumen es igual a

$$V = (2x)(2y)(2z) = 8xyz.$$

Al estar inscrito dentro del elipsoide, las esquinas del paralelepípedo están contenidas en la superficie de dicho elipsoide. Por lo tanto, las coordenadas de las esquinas deben satisfacer la ecuación del elipsoide. Así,

$$x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36.$$

Despejando a $x$

$$x = \pm\sqrt{36 - 9y^2 - 4z^2}$$

y sustituyendo en la expresión del volumen se obtiene

$$V = 8yz\sqrt{36 - 9y^2 - 4z^2},$$

que es lo que se quería obtener.

## Ejemplo 49.

Los cursos de dos ríos están dados aproximadamente por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x - 2$ (ver figura 1.43). Estos ríos se deben unir por medio de un canal rectilíneo. Obtener la expresión matemática de la longitud de dicho canal en función únicamente de dos variables.

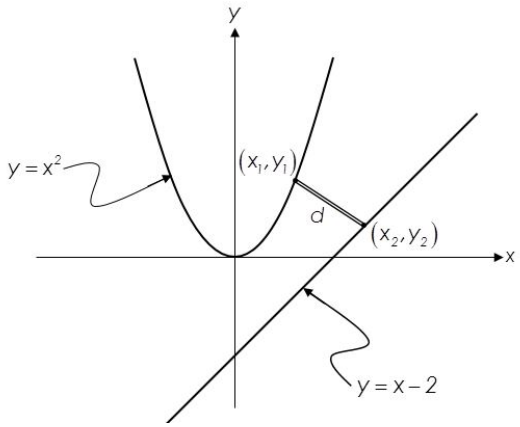



**FIGURA 1.43.** Forma del cauce de dos ríos.

**Solución:** La distancia entre los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$, que en este caso es la longitud del canal, es igual a

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

que está en términos de cuatro variables. Para expresarla en función de sólo dos variables se utilizarán las ecuaciones de los cursos de los ríos. Como $(x_1, y_1)$ pertenece a la parábola se tiene que $y_1 = x_1^2$. Además, $(x_2, y_2)$ pertenece a la recta; por tanto $y_2 = x_2 - 2$. Finalmente la longitud del canal será

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - 2 - x_1^2)^2}.$$

## Ejemplo 50.

El material con el que se construyen los lados de una caja abierta cuesta $k$ pesos por metro cuadrado $(\$/m^2)$, y el de la base cuesta 1.5 veces lo que cuesta el

material de los lados. Si se dispone de una cantidad fija de dinero $C_0$, obtener una expresión para el volumen de la caja, en función únicamente de las longitudes de los lados de la base.

**Solución:** El modelo geométrico del problema se muestra en la figura 1.44.

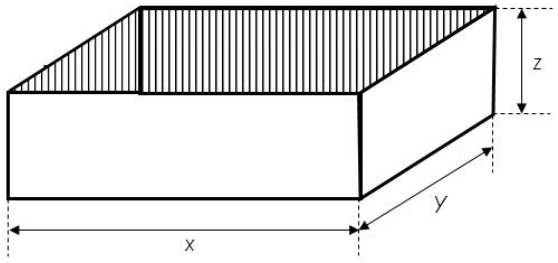



**FIGURA 1.44.**
Caja sin tapa.

El volumen de la caja está dado por

$$V = xyz$$

y para escribirlo en función de sólo $x$ y $y$ se utiliza la ecuación del costo. Así, como el costo de los lados es $k$ \$ $/\mathrm{m}^2$, y el de la base, $1.5k$ \$ $/\mathrm{m}^2$, el costo total es

$$(2xz + 2yz)k + 1.5kxy = C_0.$$

Si de esta ecuación se despeja $z$ y se sustituye en el volumen se obtiene

$$z = \frac{C_0 - 1.5kxy}{2k(x+y)} \qquad \text{y} \qquad V = xy\left[\frac{C_0 - 1.5kxy}{2k(x+y)}\right],$$

que es la función pedida.

Notar que al igual que en los dos ejemplos anteriores el resultado fue una función escalar con dos variables independientes, y una pregunta que podría hacerse ahora es ¿qué valores deben tener dichas variables independientes para lograr que el valor de la función sea máximo o mínimo según se requiera? La respuesta se pospone hasta el capítulo 3.

**1.55.** Expresar el área del triángulo de la figura EJ-1-55 como función de las variables $x$, $\phi$ y $\theta$.

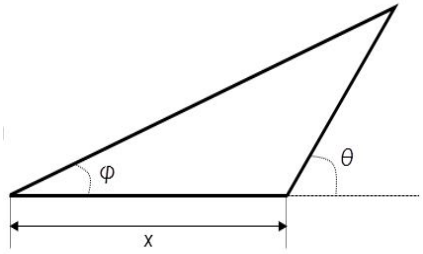



FIGURA EJ-1-55.

**Solución:** Área $= \dfrac{x^2 \tan\theta \tan\phi}{2(\tan\theta - \tan\phi)}$

**1.56.** En la placa de la figura EJ-1-56, la temperatura en un punto es proporcional a la distancia de ese punto al origen. Expresar la temperatura de un punto cualquiera como función de sus coordenadas.

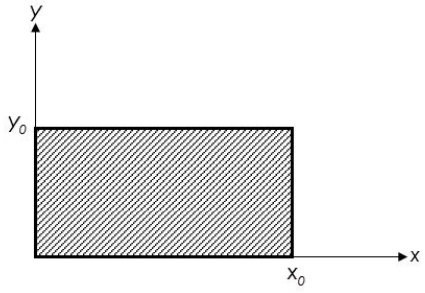



FIGURA EJ-1-56.

**Solución:** $T = K\sqrt{X^2 + Y^2}$.

**1.57.** Una cúpula se construye apoyada en dos parábolas, como se mues tra en la figura EJ-1-57. Si la base de la cúpula, así como cualquier sección horizontal de la misma, deben ser elipses, ¿cuál es la ecuación de la cúpula?

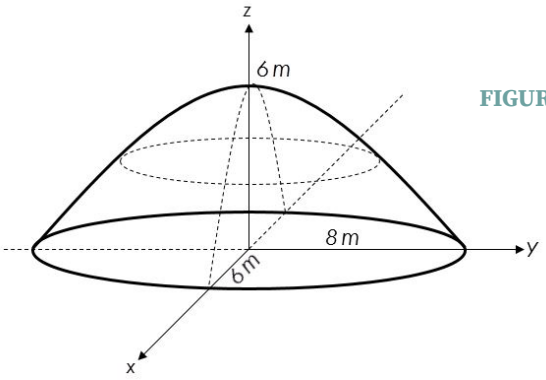



FIGURA EJ-1-57.

**1.58.** En un cuarto de máquinas, el eje de una tubería de agua pasa por los puntos $(3, 2, 0)$ y $(3, 5, 4)$, donde $x$, $y$, $z$ están expresadas en centímetros. Si el diámetro de la tubería es de 40 cm, ¿cuál es la ecuación de la superficie del tubo?

**1.59.** Un alfarero hará una pieza de barro, para lo cual coloca en el torno una tarraja hiperbólica como se muestra en la figura EJ-1-59. Calcular la superficie exterior de la pieza de alfarería con respecto a los ejes indicados en la figura.

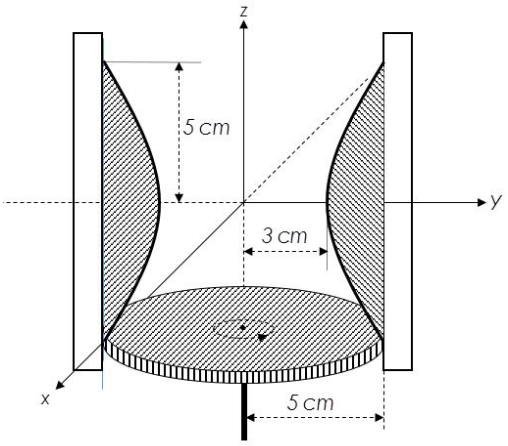



FIGURA EJ-1-59.

**1.60.** A un empleado de seguridad municipal le piden que determine la zona de riesgo de unas sillas voladoras cuya estructura tiene 5 m de altura y 4 m de radio, como muestra la figura EJ-1-60. Para ello solicita que se le proporcione la ecuación de la superficie que generan las cadenas que soportan a las sillas. Estas cadenas tienen una longitud de 4.2 m y al girar forman un ángulo de 45° con la vertical. Obtener la ecuación de esa superficie considerando al eje de la estructura como eje Z y al suelo como plano *XY*.

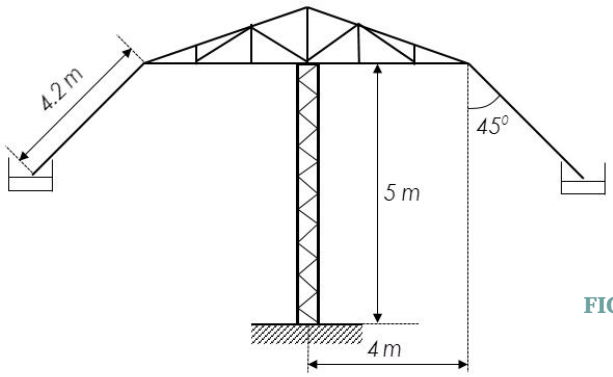



FIGURA EJ-1-60.

**1.61.** Una lámpara se encuentra en el punto $(2, 2, 8)$. Entre ella y la superficie de una mesa colocada en el plano $z = 2$ se coloca un objeto que produce una sombra cuyo contorno tiene por ecuación $y = 2x^2$. Obtener la ecuación de la superficie que se genera con los rayos de luz tangentes al objeto interpuesto.

**1.62.** Cuando el Sol está al SE y a una elevación (ángulo de la visual con el plano horizontal) de 60°, se coloca una placa elíptica en posición horizontal a 4 m del suelo. éste coincide con el plano *XY* que está orientado de manera que el eje Y apunta en la dirección *Norte* y el eje X apunta en la dirección *Este*. El centro de la elipse está en el eje Z, su semieje mayor mide 2 m y es paralelo al eje Y. Su semieje menor es de 1 m. Definir analíticamente la región sombreada en el suelo.

**1.63.** Expresar la altura $h$ del triángulo de la figura EJ-1-63 como función de las variables $\phi$, $\theta$.

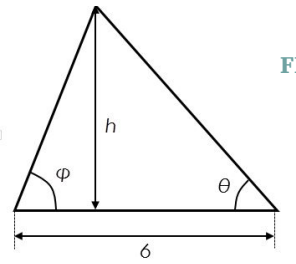



FIGURA EJ-1-63.

**Solución:** $h = \dfrac{6 \tan\phi \tan\theta}{\tan\phi + \tan\theta}$

**1.64.** Expresar la abscisa del punto **P** de la figura EJ-1-64 como función de las variables $u$ y $v$.

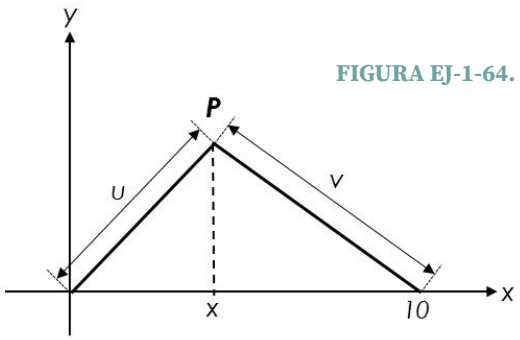



FIGURA EJ-1-64.

**Solución:** $x = \dfrac{u^2 - v^2 + 100}{20}$

**1.65.** Hallar la expresión del radio del arco circular de la figura EJ-1-65 como una función de las variables $x$ y $y$.

**Solución:** $r = \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{y}{2}$

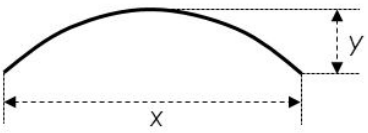



FIGURA EJ-1-65.

Capítulo 2

# DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL

El objetivo de este capítulo es estudiar la derivada y la diferencial de las funciones escalares de variable vectorial, es decir, funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \to R$. Estos conceptos son de máxima importancia en el análisis de estas funciones y son aplicables a funciones con un número arbitrario de variables independientes. Sin embargo, aquí nos enfocaremos principalmente a los casos de dos y tres argumentos, pero las ideas esenciales son fácilmente generalizables a cualquier número de variables.

Para iniciar este estudio se abordará primero un concepto fundamental del cálculo diferencial e integral que es el de límite.

## 2.1 Límite de una función escalar de variable vectorial. Continuidad

En el estudio de las funciones escalares $f(x, y)$ frecuentemente se desea saber si existe algún número $L$ al cual se aproximan los valores de la función $f$ cuando sus variables $x$ y $y$ se aproximan a dos valores dados $x_0$ y $y_0$; y en caso afirmativo,

determinar dicho número. Lo que va a interesar en lo que sigue no es el valor que tiene la función exactamente en $x_0$, $y_0$ (el cual puede inclusive no existir) sino los valores de $f$ en los puntos muy cercanos a $(x_0, y_0)$.

**Definición.** Sea la función $f(x, y)$ definida en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ que no necesariamente contiene al punto $(x_0, y_0)$. Se dice que el **límite doble** de $f(x, y)$ cuando $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$ es igual a $L$, lo cual se escribe como

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L,$$

si para cada número $\epsilon > 0$ tan pequeño como se desee, siempre existe otro número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

para todo $(x, y)$ que este contenido simultáneamente en $D$ y en un entorno reducido de radio $\delta$ alrededor de $(x_0, y_0)$. Esto es, para todo $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en la intersección de $D$ y el interior del círculo centrado en $(x_0, y_0)$ de radio $\delta$.

Por brevedad, con frecuencia al límite doble se le llama simplemente límite.

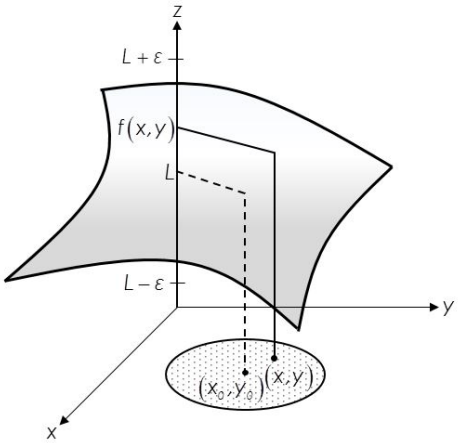



**FIGURA 2.1.** Ilustración del concepto de límite.

Una representación gráfica de este concepto se tiene en la figura 2.1, en donde se ilustra que

$$\left|(x, y)-(x_0, y_0)\right|<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x, y)-L\right|<\epsilon.$$

Si se hace $\mathbf{r}=(x, y)$ y $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0)$ la definición de límite doble también se puede enunciar como

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=L \quad \Leftrightarrow \quad \left|f(\mathbf{r})-L\right|<\epsilon$$

siempre que $0<\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|<\delta$ y $\mathbf{r}\in D$. En lo que sigue se usarán indistintamente ambas notaciones:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=L$$

o

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=L$$

y se lee diciendo que $f$ tiende a $L$ cuando $\mathbf{r}$ tiende a $\mathbf{r}_0$, o bien, en forma simbólica, que $f\to L$ cuando $\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0$.

Ahora se enunciarán algunas de las propiedades de los límites. Como sus demostraciones resultan semejantes a las vistas en el estudio de las funciones con una variable independiente no se incluirán aquí.

**Teorema 1.** Sean las funciones escalares de variable vectorial $f_1(\mathbf{r}), f_2(\mathbf{r}), \cdots, f_n(\mathbf{r})$, definidas en una región $R$ y sea $\mathbf{r}_0$ un punto contenido en $R$. Entonces:

*i)* Si existe el límite doble $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_i(\mathbf{r})$ este es único.

*ii)* El límite doble de toda función constante $f(\mathbf{r}) = c$ es el propio valor de la constante $c$, esto es

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = c.$$

*iii)* Si existen

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}); \qquad \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r}); \ \cdots \ ; \ \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_n(\mathbf{r});$$

se tiene que

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \left[f_1(\mathbf{r}) + f_2(\mathbf{r}) + \cdots + f_n(\mathbf{r})\right] = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}) + \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{v}) + \cdots + \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_n(\mathbf{r}).$$

*iv)* Si existen

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}); \qquad \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r}); \ \cdots \ ; \ \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_n(\mathbf{r});$$

se tiene que

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \left[f_1(\mathbf{r})\, f_2(\mathbf{r}) \cdots f_n(\mathbf{r})\right] = \left[\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r})\right] \left[\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{v}_0} f_2(\mathbf{r})\right] \cdots \left[\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_n(\mathbf{r})\right].$$

*v)* Si existen

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r}) \neq 0$$

se cumple que

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \frac{f_1(\mathbf{r})}{f_2(\mathbf{r})} = \frac{\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r})}{\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r})}.$$

*vi)* Sea $f_1(\mathbf{r}) = f_2(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}$ en $R$ y supóngase que existe el límite doble

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}).$$

Entonces también existe el límite doble

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r})$$

y ambos límites son iguales.

*vii)* Si $f_1(\mathbf{r}) \geq 0$ y $f_2(\mathbf{r}) \leq 0$ para todo $\mathbf{r}$ en $R$, y existen los límites dobles de $f_1(\mathbf{r})$ y $f_2(\mathbf{r})$ cuando $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$, entonces

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}) \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r}) \leq 0.$$

*viii)* Si $f_1(\mathbf{r}) \geq f_2(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}$ en $R$ y existen los límites dobles

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r})$$

se cumple que

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}) \geq \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r}).$$

*ix)* Si $f_1(\mathbf{r}) \leq f_2(\mathbf{r}) \leq f_3(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}$ en $R$, y además los límites dobles de $f_1$ y $f_3$ existen y son iguales a un determinado valor $a$, esto es,

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_1(\mathbf{r}) = a = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_3(\mathbf{r})$$

entonces el límite doble de $f_2$ existe y

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f_2(\mathbf{r}) = a.$$

En el tratamiento de las funciones continuas con una sola variable independiente los límites se evalúan por medio de la sustitución directa de la variable en la función. En este caso el límite siempre existe. Pero si la función es discontinua este método no sirve y se procede en otra forma. Usualmente lo que se hace es analizar el comportamiento de sus límites laterales. Sin embargo, esto no siempre es posible, como ocurre por ejemplo cuando la variable independiente tiende a $\pm\infty$, o bien, cuando tiende a un valor de la frontera del dominio de la función; en ambos casos no es posible definir un entorno $V$ del punto donde se pretende calcular el límite de manera que $V$ pertenezca al dominio. Por otro lado, cuando el límite existe, pero se presentan indeterminaciones, estas se eliminan mediante artificios algebraicos.

Para las funciones escalares de variable vectorial se harán consideraciones parecidas, pero tomando en cuenta que ahora el dominio no es un subconjunto de los números reales sino una región de $\mathbb{R}^n$, siendo $n$ el número de variables. Por ejemplo, si la función tiene dos variables, el dominio será una región del plano $\mathbb{R}^2$, y si tiene tres, una región en el espacio $\mathbb{R}^3$, etc.

### 2.1.1 Límites reiterados

Aunque lo que se trate aquí se puede hacer extensivo a funciones escalares con cualquier número de variables independientes, en lo que sigue (salvo excepciones) sólo se estudiarán funciones con dos argumentos $\left(f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right)$. Para calcular el valor numérico del límite doble de una función de este tipo, frecuentemente se utiliza un procedimiento conocido como "límites reiterados", que consiste en evaluar por separado y reiteradamente el límite de la función para cada una de las variables independientes. No obstante, este procedimiento no siempre es válido. Mas adelante se enunciará un teorema que da las condiciones según las cuales el límite doble es igual a los límites reiterados. Por lo pronto se verá un ejemplo de cómo calcular los límites reiterados.

## Ejemplo 1.

Calcular los límites reiterados de la función $f(x, y) = x + y$ cuando $(x, y) \to (1, 1)$.

**Solución:** Primero se calcula el límite con respecto a una de las variables considerando a la otra como constante. Después se evalúa el límite con respecto a esta otra. Es decir

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1}(x+y)\right].$$

El límite que se encuentra dentro de los paréntesis rectos se obtiene como en el cálculo con una variable independiente. En este caso a la variable $y$ se le toma como constante. Después de evaluar este límite se calcula el límite indicado fuera de los paréntesis rectos. Así,

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1}(x+y)\right]=\lim_{y\to 1}(1+y)=1+1=2.$$

Si se calcula el límite utilizando el orden contrario, es decir, primero con respecto a $y$ tomando a $x$ como constante y después con respecto a $x$:

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}(x+y)\right]=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$$

Como se observa, los dos límites reiterados fueron iguales, sin embargo, en general esto no siempre es así. A continuación, se enunciarán algunos teoremas al respecto que no se demostrarán aquí (El lector interesado puede encontrar demostraciones de ellos en *Análisis Matemático 2*, de N. B. Hauser, J. P. La Salle y J. A. Sullivan).

**Teorema 2.** Si:

*i)* el límite doble $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ existe.

*ii)* $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ existe $\forall y$ de algún entorno reducido de $y_0$:

Entonces se tiene que el límite reiterado $\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x+y)\right]$ existe y

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x+y)\right].$$

Este teorema no implica que si se cumplen *i)* y *ii)* entonces existe $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$. De hecho, más adelante veremos un ejemplo en el que efectivamente $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ no existe (ejemplo 7 de la sección 2.1.2). Obviamente se tiene un teorema análogo al anterior en donde a $x$ hay que sustituirla por $y$, y viceversa.

En los casos en los que tanto $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ como $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ existen se tiene el siguiente corolario.

**Corolario.** Si:

*i)* el límite doble $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ existe,

*ii)* $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ existe $\forall x$ de algún entorno reducido de $x_0$ y

*iii)* $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ existe $\forall y$ de algún entorno reducido de $y_0$.

Entonces los límites reiterados $\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x+y)\right]$ y $\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x+y)\right]$ existen, y

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x+y)\right]$$

$$= \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x+y)\right].$$

En general, la existencia del límite doble

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

no garantiza la existencia de los límites reiterados. Mas adelante se verá un ejemplo. Tampoco la existencia e igualdad de los límites reiterados garantiza la existencia del límite doble $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$. También más adelante se verá un ejemplo de esto.

En el cálculo con una variable independiente, la existencia del límite en el punto $x_0$ se poda probar mediante la igualdad de los límites laterales (derecho e izquierdo). En este caso sólo existan dos caminos por los cuales era posible aproximarse al punto $x_0$. En cambio, para funciones con dos o más variables independientes existe una infinidad de caminos y con formas muy diversas mediante los cuales uno se puede aproximar al punto en cuestión. Para que exista el límite doble de una función $f(x, y)$ cuando $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$, el valor del límite debe ser el mismo independientemente del camino que se escoja para llegar al punto $(x_0, y_0)$. Ver la figura 2.2.

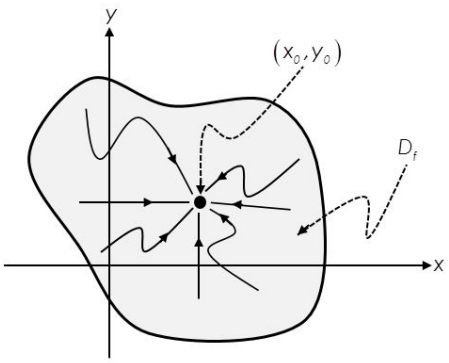



**FIGURA 2.2.** Para que exista el límite éste debe ser independiente de la forma de acercarse al punto $(x_0, y_0)$.

**Teorema 3.** Sea $f(x, y)$ una función escalar definida en un dominio $D$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que el límite doble de $f(x, y)$ cuando $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$ exista, es que el valor del límite asociado a las distintas formas de aproximarse al punto $(x_0, y_0)$ dentro del dominio $D$ sea siempre el mismo.

Como una consecuencia de este teorema se tiene que, si los límites de una función son distintos a lo largo de dos trayectorias diferentes dentro del dominio, el límite doble de la función no existe. Cabe enfatizar aquí que para poder asegurar que el límite doble existe, deben considerarse todas las formas posibles de aproximarse al punto $(x_0, y_0)$ dentro del dominio $D$ y no únicamente mediante líneas rectas. De hecho, hay casos (véase el siguiente ejemplo) en los que al aproximarse mediante cualquier línea recta el límite es el mismo pero que al aproximarse según otras trayectorias, el límite es distinto.

## Ejemplo 2.

Elegir tres trayectorias para verificar que el siguiente límite no existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

**Solución:** Si se calcula primero el límite cuando se aproxima uno por la recta $x=0$ (eje Y ) se tiene

$$\lim_{y\to 0}\left[\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right]\Bigg|_{x=0} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0.$$

Si ahora se calcula aproximándose por la recta $y=0$ (el eje X) se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right]\Bigg|_{y=0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0,$$

de hecho, si la aproximación es por cualquier recta $y=mx$, se obtiene que el límite también vale cero. Y lo mismo sucede para los límites reiterados. Se propone al lector que verifique estas afirmaciones. Sin embargo, como se mencionó, esto no es suficiente para concluir que el límite doble existe, ya que si se escoge por ejemplo la trayectoria $y=x^2$ entonces

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right]\Bigg|_{y=x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

resultado que hace ver que el límite doble no existe y que la igualdad de los límites reiterados no es suficiente para asegurar que exista el límite.

A fin de demostrar la existencia del límite de una función $f(x, y)$ cuando $(x, y)\to(x_0, y_0)$ siguiendo el procedimiento anterior, habrá que hacer tender $(x, y)$ al valor $(x_0, y_0)$ por todos los caminos posibles y obtener en todos los casos el mismo resultado. Sin embargo, en la práctica este tipo de demostraciones son muy laboriosas y frecuentemente se hacen de otra manera recurriendo a los teoremas que se verán más adelante. Otra forma de demostrar su existencia es recurrir a la definición, pero este proceso en general también se complica. No obstante, para ejemplicar, a continuación, se demostrará la existencia de un límite a partir de la definición.

### Ejemplo 3.

Demostrar a partir de la definición que el límite de $f(x, y)=xy/(|x|+|y|)$ cuando $(x, y)\to(0, 0)$, existe y es igual a cero. En este caso el dominio de la función es todo el plano $\mathbb{R}^2$, excepto el origen.

**Solución:** Se tendrá que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{|x|+|y|}=0$$

si para toda $\epsilon > 0$ tan pequeña como se quiera, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{xy}{|x| + |y|} - 0 \right| < \epsilon$$

siempre que

$$0 < \left|(x, y) - (0, 0)\right| < \delta.$$

A continuación, se investigará si efectivamente existe esa $\delta$. Se tiene que

$$\left| \frac{xy}{|x| + |y|} - 0 \right| = \frac{|x|\,|y|}{|x| + |y|}.$$

Además, se sabe que

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \quad \Rightarrow \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

y que

$$|x| + |y| = \sqrt{(|x| + |y|)^2} > \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x| + |y|} < \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Luego

$$\left| \frac{xy}{|x| + |y|} - 0 \right| = \frac{|x|\,|y|}{|x| + |y|} < \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \left|(x, y) - (0, 0)\right|.$$

De esta expresión se sigue que sea cual sea el valor de $\epsilon$, se puede lograr que

$$\left| \frac{xy}{|x| + |y|} - 0 \right| < \epsilon$$

con tal de que $x$ y $y$ sean tales que $\left|(x, y) - (0, 0)\right| < \epsilon$. Por lo tanto, dada cualquier $\epsilon$ existe $\delta$ (en este caso $\delta = \epsilon$) tal que siempre que $0 < \left|(x, y) - (0, 0)\right| =$

$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ se cumple que $\left| xy/(|x| + |y|) - 0 \right| < \epsilon$, lo cual demuestra que el límite existe y es igual a cero.

### 2.1.2 Continuidad de una función escalar

**Definición.** Una función escalar de variable vectorial $f(\mathbf{r})$ es continua en un punto $\mathbf{r}_0$ de su dominio, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

*i)* El valor $f(\mathbf{r}_0)$ existe

*ii)* $\lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})$ existe

*iii)* $f(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})$.

Así, una condición necesaria para que una función sea continua en un punto **P** es que su límite exista en **P**. En consecuencia, si por algún medio se logra saber que una función es continua en un punto, automáticamente se sabrá que en ese punto el límite existe. Una función puede presentar discontinuidades no solamente en puntos aislados. Puede ser discontinua, por ejemplo, a lo largo de curvas o de regiones completas.

Los teoremas sobre continuidad para las funciones escalares de variable vectorial son análogos a los tratados en el cálculo con una variable independiente. Por ello se enunciarán sin demostración.

**Teorema 4.** Si dos funciones escalares de variable vectorial, $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$ son continuas en un punto $\mathbf{r}_0$ de la intersección de sus dominios, entonces su suma, diferencia, producto y cociente (exceptuando el caso $g(\mathbf{r}_0) = 0$) son funciones continuas en dicho punto.

En este punto conviene enfatizar que el cociente $f(\mathbf{r})/g(\mathbf{r})$ de dos funciones continuas en un punto $\mathbf{r}_0$ no necesariamente implica que $f(\mathbf{r})/g(\mathbf{r})$ sea continua en $\mathbf{r}_0$ puesto que si $g(\mathbf{r}_0)=0$ el cociente no existe en $\mathbf{r}_0$ y en consecuencia el cociente no es continuo en el punto $\mathbf{r}_0$.

**Teorema 5.** Las funciones escalares de variable vectorial polinomiales son continuas para todo valor real de sus variables independientes.

**Teorema 6.** Las funciones escalares de variable vectorial algebráicas, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales son continuas en sus respectivos dominios.

**Teorema 7.** Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, sea $\mathbf{r}_0=(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$ un punto de $\mathbb{R}^n$ y sea $g_1$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $g_1(x)=f(x, x_{02}, \cdots, x_{0n})$. Si $f$ es continua en $\mathbf{r}_0$ entonces $g_1$ es continua en $x_{01}$. Un resultado análogo se tiene para la función $g_i$ definida en términos de $f$ manteniendo constantes todas las variables excepto $x_i$.

**Corolario.** Si $f(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0)$ entonces el límite doble $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})$ y los límites $\lim_{x\to x_0} f(x, y)$ y $\lim_{y\to y_0} f(x, y)$ existen y por lo tanto

$$f(\mathbf{r}_0)=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=\lim_{x\to x_0} f(x, y_0)=\lim_{y\to y_0} f(x_0, y).$$

Ya que la continuidad implica necesariamente la existencia del límite, se pueden aprovechar los teoremas anteriores para verificar la existencia de los límites de muchas funciones escalares de variable vectorial. A continuación, se considerarán algunos ejemplos.

## Ejemplo 4.

Calcular el valor del límite

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}} \left(x^2-5xy+6y^2\right).$$

**Solución:** En este caso se trata de una función polinomial por lo que es continua para todos los valores reales de $x$ y $y$. Luego el límite existe en el punto $(1,-2)$ y para saber su valor bastara con evaluar la función polinomial en ese punto o calcular uno de los límites reiterados. Así

$$\lim_{y\to -2}\left[\lim_{x\to 1}\left(x^2-5xy+6y^2\right)\right]=\lim_{y\to -2}\left(1-5y+6y^2\right)=35$$

o bien

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to -2}\left(x^2-5xy+6y^2\right)\right]=\lim_{x\to 1}\left(x^2+10x+24\right)=35$$

por lo que el valor del límite es 35.

## Ejemplo 5.

Calcular el valor del siguiente límite

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \sqrt{4-x+y}$$

**Solución:** Se observa que se trata de una función algebráica cuyo dominio esta dado por (Ver figura 2.3):

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\, y\geq x-4, \quad x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

como el punto (1, 1) está en el dominio de la función, ésta es continua en dicho punto, por lo que su límite existe. Para calcularlo bastará evaluar la función en (1, 1) u obtener alguno de los límites reiterados. Así, se tiene que

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1}\sqrt{4-x+y}\ \right]=\lim_{y\to 1}\sqrt{3+y}=2$$

o bien

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}\sqrt{4-x+y}\ \right]=\lim_{x\to 1}\sqrt{5-x}=2$$

por lo tanto, el valor del límite doble es 2.

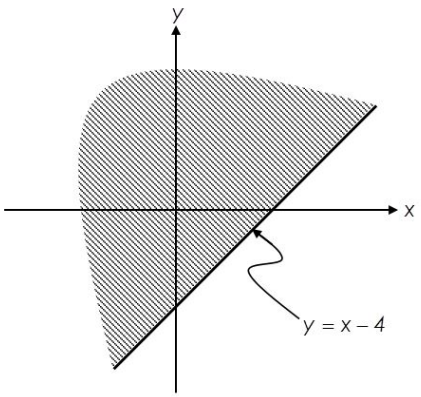



**FIGURA 2.3.**
Dominio de la función $\sqrt{4-x+y}$.

## Ejemplo 6.

Determinar el valor del límite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}.$$

**Solución:** En este caso la función no existe en $\mathbf{r}=(0,\,0)$ y en consecuencia no es continua en ese punto. Si se calculan los límites reiterados se tiene que (aquí conviene recordar el importante límite del cálculo con una variable: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$).

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y^2}{y^2}=1$$

y

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}=1.$$

Sin embargo, como la función no es continua en $r_0$ no se puede garantizar que el límite exista. Habrá que demostrar su existencia a partir de la definición, o bien, demostrar que su valor es independiente de la forma de aproximarse a $(0,0)$. Procediendo en esta última forma y cambiando a coordenadas polares, con $r=\sqrt{x^2+y^2}$, se tiene

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{sen} r^2}{r^2}=1.$$

El hecho de haber cambiado a coordenadas polares y haber obtenido una expresión que depende únicamente de $r$ y no de $\theta$ significa que sea cual sea la forma en que uno se aproxime al origen, la función sólo depende de $r$. Como en este caso el límite existe se sigue la existencia del límite doble y su valor es 1.

Ahora se verá el caso del límite de una función $f(x,y)$ cuando $(x,y)$ tiende a un punto frontera del dominio de la función. Se vera que a pesar de que existe el límite doble, los límites reiterados no son iguales (uno de ellos no existe).

## Ejemplo 7.

Calcular, si existen, el límite doble y los límites reiterados en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\left|x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right| \quad \forall x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\} \quad \text{y} \quad \forall y\in\mathbb{R}^+.$$

**Solución:** Se observa que el punto $(0, 0)$ donde se pretende evaluar el límite, es un punto frontera del dominio $D$ que consiste únicamente del primer cuadrante del plano $XY$ con excepción del eje X. Además $(0, 0) \notin D$. Si se intentan calcular los límites reiterados, se tiene que

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left|x\,\text{sen}\,\frac{1}{y}\right|\right] = \lim_{y\to 0}(0) = 0$$

en cambio

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left|x\,\text{sen}\,\frac{1}{y}\right|\right]$$

no existe, ya que $\lim_{y\to 0}\left|x\,\text{sen}(1/y)\right|$ no existe. Ahora se demostrará la existencia del límite doble a partir de la definición.

Para que exista el límite se debe demostrar que dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\left|x\,\text{sen}\,\frac{1}{y}\right| - 0\right| < \epsilon$$

siempre que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \text{y} \quad (x, y) \in D.$$

Como

$$\left|x\,\text{sen}\,\frac{1}{y}\right| = |x|\left|\text{sen}\,\frac{1}{y}\right|$$

y

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

entonces

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \left| \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right|$$

y como $\left|\operatorname{sen}(1/y)\right| \leq 1$ cuando $y \neq 0$, se puede asegurar que $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (en este caso $\delta = \epsilon$) tal que

$$\left| \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right| - 0 \right| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

siempre que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon \qquad \text{y} \qquad y \neq 0.$$

Esto nos indica que el valor de $f(x, y)$ puede hacerse tan próximo a cero como se desee, con tal de tomar a $(x, y)$ dentro del dominio suficientemente cercano a $(0, 0)$. Por lo tanto la función $f(x, y)$ tiende a cero y su límite doble en $(0, 0)$ existe. Nótese que como $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \left|x \operatorname{sen}(1/y)\right|$ y $\lim_{x\to 0} \left|x \operatorname{sen}(1/y)\right|$ existen, el primer teorema de la sección 2.1.1 asegura que $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}|x \operatorname{sen}(1/y)|\right]$ existe y es igual a $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \left|x \operatorname{sen}(1/y)\right|$, como puede comprobarse con los resultados de arriba.

Por otro lado, el hecho que $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ no exista no significa que haya una trayectoria hacia el punto $(0, 0)$ dentro del dominio para la cual el límite de $f$ no exista. La no existencia de $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ sólo indica que los valores de $f(x, y)$ sobre trayectorias paralelas al eje Y no tienden a un valor definido.

Si en vez de trabajar con la función anterior se trabajara con la función $f(x, y)$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

y cuyo dominio fuera todo $\mathbb{R}^2$, el punto $(0, 0)$ ya no será un punto frontera. Sin embargo, los resultados de los límites serán exactamente los mismos. Se sugiere al lector que compruebe esta afirmación.

## Ejemplo 8.

Investigar si la siguiente función es continua en el punto (1, 3).

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 + 2y & \text{si} \quad (x, y) \neq (1, 3) \\ 5 & \text{si} \quad (x, y) = (1, 3). \end{cases}$$

**Solución:** Se analizan las condiciones de continuidad

*i)* $f(1, 3) = 5$

*ii)* Como $x^3 + 2y$ es una función polinomial para calcular su límite basta sustituir lo valores a los cuales tienden las variables $x$ y $y$.

Así, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 3}} f(x, y) = 7$

*iii)* $f(1, 3) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 3}} f(x, y)$,

por lo tanto, la función no es continua en (1, 3).

Ahora se estudiará el caso de una función que es discontinua a lo largo de toda una recta (no sólo en puntos aislados).

## Ejemplo 9.

Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0.\end{cases}$$

**Solución:** Se analizará primero lo que ocurre sobre la recta $x=0$. Considérese el punto $(0,\,b)$ con $b\in\mathbb{R}$

*i)* $f(0,\,b)=0.$

*ii)* El límite doble $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to b}} f(x,\,y)$ no existe. Esto es así porque el límite $\lim_{y\to b}(y/x)=(b/x)$ existe y si el límite doble existiera se tendrá (por el teorema de la sección 2.1.1) que el límite reiterado

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to b}(y/x)\right]$$

existirá, pero esto es claramente falso porque

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to b}(y/x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[(b/x)\right]$$

no existe.

*iii)* Como no se puede cumplir la igualdad entre $f(0,\,b)$ y el límite doble entonces $f(x,\,y)$ no es continua a lo largo de la recta $x=0$.

Se analizará ahora lo que ocurre fuera de la recta $x=0$. Considérese el punto $(a,b)$ con $a\neq 0$

*i)* $f(a,\,b)=\dfrac{b}{a}$

*ii)* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=\dfrac{b}{a}$

*iii)* $f(a,b)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$, por lo que $f(x,y)$ es continua en $(a,b)$, con $a\neq 0$.

Luego la función sólo es discontinua a lo largo de la recta $x=0$.

## Ejemplo 10.

Demostrar que la siguiente función es discontinua en el punto $(0,0)$ a pesar de que $f(x,b)$ y $f(a,y)$ (con $a\neq 0$ y $b\neq 0$) son continuas en $x=0$ y $y=0$, respectivamente:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

**Solución:** Para $y=b$, $b\neq 0$ se tiene que

$$f(x,b)=\frac{2bx}{x^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad f(0,b)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} f(x,b)=0$$

Por lo tanto la función $f(x,b)$ es continua en $x=0$. De manera semejante, para $x=a$, $a\neq 0$:

$$f(a,y)=\frac{2ay}{a^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad f(a,0)=\lim_{y\to 0} f(a,y)=0$$

es decir, $f(a,y)$ es continua en $y=0$.

Se demostrará ahora que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$. Calculando primero los límites a lo largo de las trayectorias $y=0$ y $x=0$, respectivamente, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = 0.$$

Sin embargo, para la trayectoria $y = x$:

$$\lim_{x\to 0} = \left(\frac{2x^2}{2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1.$$

Por lo tanto el límite de $f(x, y)$ no existe y no es continua en $(0, 0)$.

## Ejercicios

**2.1.** Verificar mediante límites reiterados y la trayectoria $y = 2x$ que el siguiente límite no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{3y^2 - x^2}{x^2 + 3x^2}.$$

**Solución:** $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3y^2-x^2}{x^2+3y^2}\right\} = 1;\ \lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3y^2-x^2}{x^2+3y^2}\right\} = -1;\ \lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{11x^2}{13x^2}\right\} = \dfrac{11}{13}.$

Son tres resultados diferentes. Por lo tanto, el límite no existe.

**2.2.** A partir de la definición de límite demostrar que el siguiente límite no existe en el punto dado:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right).$$

**Solución:** $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right\} = -1;\ \lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right\} = 1.$

Son dos resultados diferentes. Por lo tanto, el límite no existe.

**2.3.** ¿Se puede decir que el siguiente límite existe? Si es así, explicar por qué.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} = \sqrt{(1-x)(2-y)}\,.$$

**Solución:** Nótese que si $x>1$ y $y<2$ la función no existe y tampoco si $x<1$ y $y>2$. Por lo tanto, el límite no existe.

**2.4.** Calcular, si existe, el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} \left(x^2y-2xy+xy^2\right)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{|x-1|\,(y+2)}{(x-1)\,|y+2|}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{y^2-4x^2}{y^3-8x^3}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{8-\sqrt{100-x^2y^2}}{x^2y^2-36}$

**Solución:** a) Si existe y su valor es 32; b) No existe; c) Si existe y su valor es 1/3; d) Si existe y su valor es 1/16.

**2.5.** Determinar los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(x^2+y^2+xy+\ln xy\right).$

b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \left(xy+\dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}+yz\right).$

c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3,2,1)} \left(\tan\dfrac{y}{x}-\ln xy\right).$

**Solución:** a) 3; b) 1; c) $-1.0049$.

**2.6.** Demostrar que

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left[f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r}_0)\right]=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{r}) \text{ es continua en } \mathbf{r}=\mathbf{r}_0.$$

**Solución:** La igualdad de la izquierda implica que el límite existe y que es igual a $f(\mathbf{r}_0)$. Por lo tanto, $f(\mathbf{r})$ es continua. El razonamiento inverso también es válido.

**2.7.** Demostrar el corolario del teorema 7, el cual afirma que si $f(x, y)$ es continua en $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0)$ entonces el límite doble $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})$ y los límites $\lim_{x\to x_0} f(x, y)$ y $\lim_{y\to y_0} f(x, y)$ existen y por lo tanto:

$$f(\mathbf{r}_0)=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=\lim_{x\to x_0} f(x, y_0) = \lim_{y\to y_0} f(x_0, y).$$

**2.8.** Determinar si la función

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{8-\sqrt{100-x^2y^2}}{xy-6} & \text{si} \quad (x, y)\neq(2, 3)\\ 3/4 & \text{si} \quad (x, y)=(2, 3)=6\end{cases}$$

es continua en el punto (2, 3).

**Solución:** Al calcular el límite $\lim_{(x, y)\to(2, 3)}$ de la función se obtiene el valor $3/4$. Por lo tanto, la función es continua.

**2.9.** Obtener los valores de $a$ y $b$ tales que la función

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x+y} & \text{si} \quad x\neq -y\\ ax+by & \text{si} \quad x=-y\end{cases}$$

sea continua en su dominio de definición.

**Solución:** $a=0$ y $b=-2$.

**2.10.** Graficar la región de continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = \ln(x+y+1) + \sqrt{x^2+y^2-4}$

b) $f(x, y) = \text{ang sen}\sqrt{xy}$.

## 2.2 Concepto de derivada direccional

El análisis se realizará para funciones de dos variables, pero la formulación se puede generalizar sin dificultad para el caso de $n$ variables. Supóngase que en la función $f(x, y)$ se efectúa un cambio arbitrario en los valores de sus dos variables independientes de manera que pasen de tener el valor $(x_0, y_0)$ al valor $(x, y)$ y se quiere responder a las preguntas:

a) ¿Qué cambio experimenta la función cuando se efectúa el mencionado cambio en $x$ y $y$?
b) ¿Cuál es el valor del cociente (o razón) que resulta de dividir el cambio en $f(x, y)$ entre la distancia $\mathcal{D}$ que hay entre $(x, y)$ y $(x_0, y_0)$?
c) ¿Cuánto vale el límite de esta razón cuando $\mathcal{D}$ tiende a cero?

A este límite se le conoce como razón de cambio de $f(x, y)$. Físicamente el problema podría ser por ejemplo el de un lago en el cual se conoce la ecuación que describe el lugar geométrico de su fondo y una persona en un bote desea saber cómo varía su distancia al fondo al remar una cierta distancia en una cierta dirección.

Para plantear estas ideas con más precisión considérese la figura 2.4. En ella se muestra un vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ en el plano $XY$ que se apoya en el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$. Se desea determinar cómo varía la altura de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ cuando, partiendo del punto $\mathbf{P}_0$ se efectúa un desplazamiento en la dirección de $\hat{\mathbf{v}}$. Más precisamente, se desea determinar la razón de cambio de $f(x, y)$ en $\mathbf{P}_0$ en la dirección $\hat{\mathbf{v}}$. Si se denota con $\alpha$ al ángulo entre $\hat{\mathbf{v}}$ y el eje X entonces (ver figura 2.5)

$$\hat{\mathbf{v}} = (v_1, v_2) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

y la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\mathbf{P}_0$ y es paralela a $\hat{\mathbf{v}}$ tiene por ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x = x_0 + s\cos\alpha = x_0 + sv_1 \\ y = y_0 + s\operatorname{sen}\alpha = y_0 + sv_2 \end{cases},$$

siendo $s$ el parámetro. El plano vertical definido por la dirección de $\hat{\mathbf{v}}$ corta a la superficie en la curva $C$, la cual es una curva plana.

Al desplazarse $\mathbf{P}_0$ en la dirección de $\hat{\mathbf{v}}$ se va moviendo a lo largo de la recta $\mathcal{L}$ y las coordenadas de su posición $(x, y)$ sufren respectivamente los incrementos $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$. La distancia desplazada $\mathcal{D}$ es igual al parámetro $s$ ya que

$$\mathcal{D} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{s^2\cos^2\alpha + s^2\operatorname{sen}^2\alpha} = s.$$

El incremento de $z = f(x, y)$ debido a los incrementos $\Delta x$ y $\Delta y$ es igual a

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\operatorname{sen}\alpha) - f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

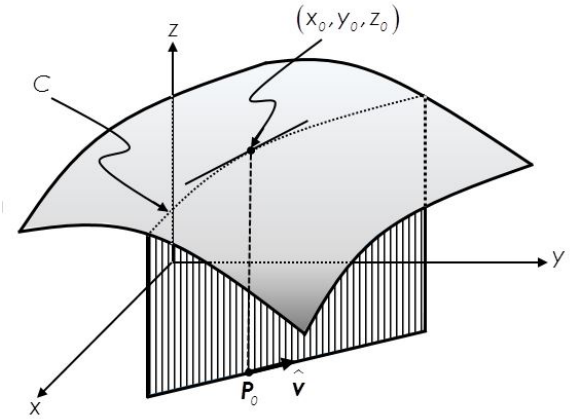



**FIGURA 2.4.** La superficie de ecuación $z = f(x, y)$ es cortada por el plano vertical que pasa por el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ y es paralelo al vector $\hat{\mathbf{v}}$.

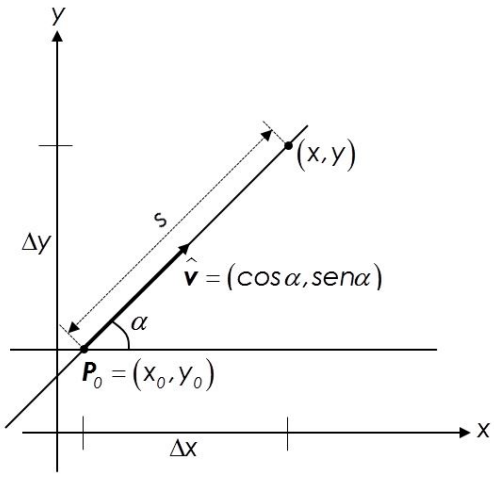



**FIGURA 2.5.** El vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ se apoya en el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ y apunta hacia el punto $(x, y)$.

Ahora se construye el cociente de $\Delta z/s$ y se calcula su límite cuando $s \to 0$. Esto da la razón de cambio de $z$ en el punto $\mathbf{P}_0$ en la dirección del vector $\hat{\mathbf{v}}$. Esta razón de cambio es lo que se llama derivada direccional.

**Definición.** Se llama derivada direccional de la función $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ y en la dirección $\hat{\mathbf{v}}$, denotada como $D_{\hat{\mathbf{v}}} f(x_0, y_0)$, al límite

$$D_{\hat{\mathbf{v}}} f(x_0, y_0) \equiv \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\cos\alpha,\, y_0 + s\,\text{sen}\,\alpha) - f(x_0, y_0)}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv_1,\, y_0 + sv_2) - f(x_0, y_0)}{s}\,.$$

Los siguientes símbolos se utilizan también para denotarla

$$D_{\hat{\mathbf{v}}} f(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}\,; \qquad D_{\hat{\mathbf{v}}}\, z\,; \qquad \frac{dz}{d\hat{\mathbf{v}}}\,; \quad \text{o bien } \frac{dz}{ds}\,.$$

Observando la expresión para $D_{\hat{\mathbf{v}}} f(x_0, y_0)$ se puede apreciar la estrecha semejanza con la definición usual de la derivada ordinaria. La única diferencia es que en vez de que en el numerador aparezca algo de la forma $f(x_0+s)-f(x_0)$ aparece $f(x_0+s\cos\alpha, y_0+s\,\text{sen}\,\alpha)-f(x_0, y_0)$. Esto nos lleva a concluir que para calcular la derivada direccional bastará con:

1) Sustituir las ecuaciones paramétricas $x=x_0+s\cos\alpha$ y $y=y_0+s\,\text{sen}\,\alpha$ en la expresión para $z=f(x, y)$, con lo que se obtiene una expresión de la forma

$$z=G(s)\equiv f(x_0+sv_1, y_0+sv_2)$$

2) Derivar con respecto a $s$, y por último,
3) Evaluar en $s=0$. Así,

$$D_{\hat{\mathbf{v}}} f(x_0, y_0)=\frac{\partial G}{\partial s}\bigg|_{s=0}=\frac{\partial f(x_0+sv_1, y_0+sv_2)}{\partial s}\bigg|_{s=0}$$

## Ejemplo 11.

Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y)=2xy/(x^2+y^2)$ en el punto $\mathbf{P}=(2, 1)$ y en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{v}}=(3/5)\hat{\mathbf{i}}+(4/5)\hat{\mathbf{j}}$.

**Solución:** En este caso las ecuaciones paramétricas son

$$x=2+\frac{3}{5}s \quad \text{y} \quad y=1+\frac{4}{5}s$$

de donde

$$z=G(s)=\frac{2\left(2+\frac{3}{5}s\right)\left(1+\frac{4}{5}s\right)}{2\left(2+\frac{3}{5}s\right)^2+\left(1+\frac{4}{5}s\right)^2}\ .$$

Simplificando,

$$G(s) = \frac{100 + 110\,s + 24\,s^2}{125 + 100\,s + 25\,s^2}$$

derivando con respecto a $s$ se tiene:

$$G'(s) = \frac{(125 + 100\,s + 125\,s^2)(110 + 48\,s) - (100 + 110\,s + 24\,s^2)(100 + 50\,s)}{(125 + 100\,s + 25\,s^2)^2}$$

y finalmente, haciendo $s = 0$,

$$G'(0) = 0.24.$$

Luego

$$\left.\frac{dz}{d\mathbf{v}}\right|_{(2,1)} = 0.24.$$

### 2.2.1. Derivadas parciales

Cuando el vector $\hat{\mathbf{v}}$ apunta en la dirección de alguno de los ejes coordenados, a la derivada direccional se le llama derivada parcial y su cálculo es considerablemente más simple. Se partirá de la definición de derivada direccional:

$$D_{\mathbf{v}}\, z = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\cos\alpha,\, y_0 + s\,\operatorname{sen}\alpha) - f(x_0, y_0)}{s}$$

y se considerarán los casos particulares en los que $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$. Cuando $\alpha = 0$ se tiene que $\Delta x = s\cos 0° = s$ y $\Delta y = s\,\operatorname{sen} 0° = 0$ y por lo tanto la $y$ permanece constante (ver figura 2.6). Entonces, la expresión para la derivada direccional adquiere una forma más simple y se tiene la siguiente definición.

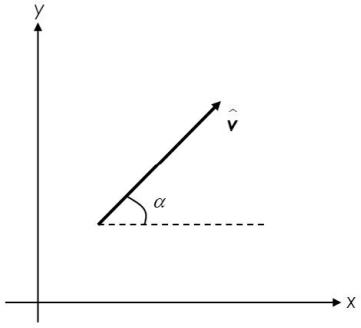



**FIGURA 2.6.** El vector $\hat{\mathbf{v}}$ indica la dirección de la derivada direccional.

**Definición.** Se define la **derivada parcial de $f$ con respecto a $x$** en el punto $(x_0, y_0)$, denotada como $\partial f/\partial x$, mediante la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s, y_0) - f(x_0, y_0)}{s}$$

o bien

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

cuando el límite existe.

Cuando $\alpha = \pi/2$ se tiene $\Delta x = s \cos 90° = 0$ y $\Delta y = s \operatorname{sen} 90° = s$. Por lo tanto, la $x$ permanece constante y se tiene la definición

**Definición.** Se define la **derivada parcial de $f$ con respecto a $y$** en el punto $(x_0, y_0)$, denotada como $\partial f/\partial y$, mediante la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + s) - f(x_0, y_0)}{s}$$

o bien

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

cuando el límite existe.

Estas dos definiciones nos hacen ver que para calcular las derivadas parciales basta mantener constante una variable y derivar en el modo usual con respecto a la otra.

Las derivadas parciales se denotan con cualesquiera de los símbolos siguientes:

a) Para la parcial respecto a $x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\ ;\quad f_x(x,y)\ ;\quad z_x(x,y)\ ;\quad \text{o bien}\quad \partial_x$$

b) Para la parcial respecto a $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial y}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\ ;\quad f_y(x,y)\ ;\quad z_y(x,y)\ ;\quad \text{o bien}\quad \partial_y.$$

### 2.2.2. Interpretación geométrica

Principiaremos recordando del Cálculo Diferencial con una sola variable que si se tiene una curva descrita por la función $f(x)$ entonces la derivada de esta función evaluada en $x_0$ es igual a la tangente trigonométrica del ángulo $\alpha$ entre el eje horizontal y la recta tangente a la curva en el punto $x_0$. Es decir, $df/dx = \tan\alpha$. Además, a dicha tangente trigonométrica se le llama pendiente. Regresemos ahora al caso de una función con dos variables. Como el concepto de derivada parcial es un caso particular de derivada direccional la interpretación geométrica de ambos conceptos es exactamente la misma. Considérese la figura 2.7. La grafica de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ es cortada por un plano $y = y_0$, lo cual da lugar a la curva de intersección mostrada en la figura. La pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0)$ es precisamente el valor de la derivada parcial de $f$ con respecto a $x$.

En la figura 2.8 se muestra la situación correspondiente a la derivada parcial respecto a $y$. En este caso el valor de la derivada parcial de $f$ con respecto a $y$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección del plano ver-

tical de ecuación $x = x_0$ y la superficie. Cuando la dirección del vector $\hat{\mathbf{v}}$ es arbitraria la situación se mostró en la figura 2.4. El valor de la derivada direccional de $f$ en la dirección de $\hat{\mathbf{v}}$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección del plano vertical paralelo al vector $\hat{\mathbf{v}}$ y la superficie.

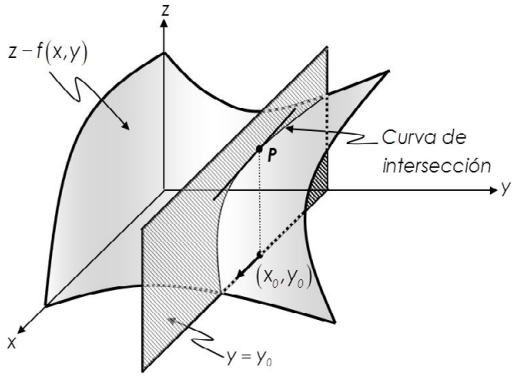



**FIGURA 2.7.** El punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0, z) \in \mathbb{R}^3$ está sobre la curva de intersección entre la superficie de ecuación $z = f(x \cdot y)$ y el plano vertical. La pendiente de dicha curva en el punto **P** es igual al valor de la derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a $x$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

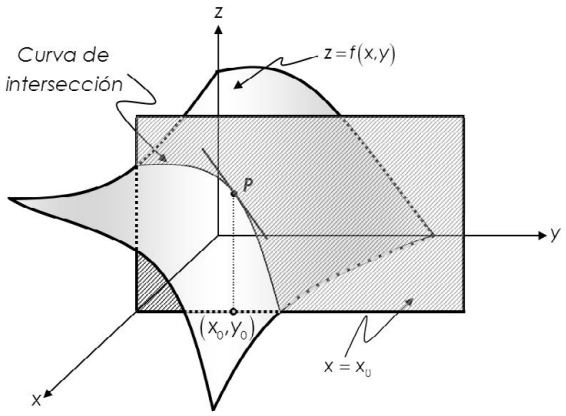



**FIGURA 2.8.** La pendiente en el punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0, z) \in \mathbb{R}^3$ de la curva de intersección entre la superficie de ecuación $z = f(x \cdot y)$ y el plano vertical es igual al valor de la derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a y en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Por lo visto en esta sección podemos concluir que la derivada direccional de una función $f(x, y)$ en la dirección del vector $\hat{\mathbf{u}}$ tiene una doble interpretación. Por un lado es la razón de cambio de $f(x, y)$ en la dirección de $\hat{\mathbf{u}}$ y por otro es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie descrita por $z = f(x, y)$ con el plano vertical paralelo a $\hat{\mathbf{u}}$.

## Ejemplo 12.

Si se tiene la función $f(x, y) = x/(x^2+y)$, calcular e interpretar sus derivadas parciales en el punto $(2, 1)$.

**Solución:**

*i)* Primero se calcula $\partial f/\partial x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y)(1)-x(2x)}{(x^2+y)^2} = \frac{y-x^2}{(x^2+y)^2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = -\frac{3}{25}.$$

Si se corta la gráfica de la función con el plano $y=1$ se tendrá una curva de intersección con dicho plano. La pendiente de la recta tangente a la curva, cuando $x=2$ es igual $a-3/25$ .

*ii)* Ahora se calcula $\partial f/\partial y$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+y)(0)-x(1)}{(x^2+y)^2} = \frac{x}{(x^2+y)^2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = -\frac{2}{25}.$$

Si se corta la gráfica de la función con el plano $x=2$, se tendrá una curva de intersección con dicho plano y la pendiente de la recta tangente a la curva, cuando $y=1$, es igual a $-2/25$.

## Ejemplo 13.

Para el paraboloide de ecuación $z=2x^2+5y^2$ hallar la pendiente de la recta tangente a su curva de intersección con el plano $y=3$ en el punto en el que $x=4$.

**Solución:** Lo que se pide es la derivada parcial de $z$ con respecto a $x$ en el punto (4, 3):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(4,3)}=16.$$

## Ejemplo 14.

Demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$ si $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$.

**Solución:**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}\right)+y\left(\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}\right)$$

$$=\frac{2\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2+xy+y^2}$$

$$=2.$$

## Ejemplo 15.

Si $z=y\,e^{x/y}$ demostrar que

$$xz_x+yz_y=z.$$

**Solución:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = e^{x/y}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = -\frac{x}{y}\, e^{x/y} + e^{x/y}$$

$$\Rightarrow x z_x + y z_y = x\left(e^{x/y}\right) + y\left(-\frac{x}{y}\, e^{x/y} + e^{x/y}\right)$$

$$= y\, e^{x/y}$$

$$= z.$$

## Ejemplo 16.

Sea $z = f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$. Calcular sus derivadas parciales en el punto $(2, 3)$.

**Solución:** El problema se resolverá en dos formas diferentes: Si se calculan las derivadas parciales y después se hacen las sustituciones respectivas, se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2y \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,3)} = 18$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,3)} = 10.$$

Ahora se procederá en otra forma. Para calcular $\partial z/\partial x$ primero se sustituye el valor fijo de $y$ y se deriva respecto a $x$. Y para calcular $\partial z/\partial y$ primero se sustituye el valor fijo de $x$ y se deriva respecto a $y$. Así

$$f(x,3)=x^3+6x+9 \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x,3)}{dx}=3x^2+6$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(2,3)} = 18$$

$$f(2,y)=8+4y+y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{df(2,y)}{dy}=4+2y$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dz}{dy}\right|_{(2,3)} = 10.$$

que son los mismos resultados obtenidos anteriormente. En esta última forma de calcular las derivadas parciales es importante observar que sólo se puede sustituir por adelantado la variable con respecto a la cual no se va a derivar.

### 2.2.3 Derivadas parciales de órdenes superiores. Teorema de Schwarz

Considérese la función $f(x, y)$. Si se calculan las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, se obtendrán a su vez dos funciones de $x$ y $y$, que son susceptibles de ser derivadas nuevamente respecto a $x$ y a $y$, obteniéndose así cuatro segundas derivadas. Estas a su vez pueden derivarse de nueva cuenta y así sucesivamente. Las distintas notaciones que pueden utilizarse para las cuatro segundas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_x=(f_x)_x=f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_x=(f_x)_y=f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_y=(f_y)_x=f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy}.$$

Y algunas de tercer orden son,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_{xx} = f_{xxx}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_{xy} = f_{xyx}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_{yy} = f_{yyx}.$$

A las derivadas parciales de orden superior del tipo $f_{xy}, f_{yx}, f_{xyx}, f_{xxy}$, etc., se les conoce como derivadas *parciales mixtas*.

Bajo ciertas condiciones (ver teorema siguiente), en las derivadas mixtas se puede intercambiar el orden de derivación, lo cual significa por ejemplo que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right).$$

**Teorema 8 (Teorema de Schwarz).** Sea $f$ un campo escalar con dos variables independientes, tal que sus derivadas parciales mixtas existen en una vecindad de $(x_0\ ,\ y_0)$ y son continuas en $(x_0\ ,\ y_0)$, entonces se cumple que

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \qquad (1)$$

**Demostración:** Sean $\Delta x$ y $\Delta y$ suficientemente pequeños y considérese el rectángulo con vértices $(x_0, y_0)$, $(x_0 + \Delta x, y_0)$, $(x_0, y_0 + \Delta y)$, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, ver figura 2.9.

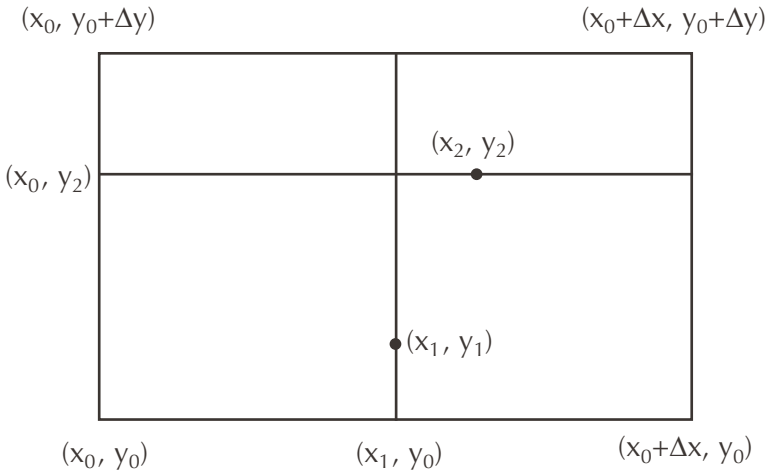



FIGURA 2.9.

Se comenzará partiendo de la siguiente expresión:

$$E \equiv f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \qquad (2)$$
$$- f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

que se puede expresar como

$$E = \left[ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \right] \qquad (3)$$
$$- \left[ f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right].$$

Ahora se define la función de una sola variable (la cual es derivable puesto que $f$ lo es)

$$F(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) \qquad (4)$$

donde $y_0$ y $\Delta y$ se mantienen fijas. De lo que se desprende que

$$F(x_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

y

$$F(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0).$$

Sustituyendo en (3) se tiene que

$$E = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0).$$

A continuación, se aplica a la función $F$ el teorema del valor medio del cálculo diferencial para funciones con una sola variable independiente, el cual asegura que dada cualquier función $g$ derivable en $(a, b)$ siempre existe un valor $c$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{con} \quad c \in (a, b),$$

siendo $g'$ la derivada de $g$. Entonces, existe $x_1, \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ tal que

$$F'(x_1) = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \Delta x F'(x_1) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$$

luego

$$E = \Delta x\, F'(x_1). \tag{5}$$

Derivando respecto a $x$ la expresión (4) y evaluando en $x_1$,

$$F'(x_1) = f_x(x_1, y_0 + \Delta y) - f_x(x_1, y_0).$$

Al sustituir en (5) se obtiene

$$E = \Delta x \left[ f_x(x_1, y_0 + \Delta y) - f_x(x_1, y_0) \right]. \tag{6}$$

Como $f_x(x_1, y)$ (considerada como función únicamente de $y$) es diferenciable, se le puede aplicar nuevamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial y así:

$$f_{xy}(x_1, y_1) = \frac{f_x(x_1, y_0 + \Delta y) - f_x(x_1, y_0)}{\Delta y} \quad \text{con} \quad y_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$$

$$\Rightarrow \Delta y\, f_{xy}(x_1, y_1) = f_x(x_1, y_0 + \Delta y) - f_x(x_1, y_0).$$

Finalmente, si se sustituye este resultado en (6),

$$E = \Delta x\, \Delta y\, f_{xy}(x_1, y_1). \tag{7}$$

De manera semejante se procederá ahora con la función de una variable

$$G(y) \equiv f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) \tag{8}$$

donde $x_0$ y $\Delta x$ se mantienen fijas. Reescribiendo (2) se tiene

$$E = \left[ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta x) \right]$$

$$- \left[ f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \right] \tag{9}$$

y de (8),

$$G(y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$G(y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y).$$

Sustituyendo en (9):

$$E = G(y_0 + \Delta y) - G(y_0).$$

Aplicando el citado teorema,

$$G'(y_2) = \frac{G(y_0 + \Delta y) - G(y_0)}{\Delta y}\,; \quad y_2 \in (y_0,\, y_0 + \Delta y)$$

$$\Rightarrow\ \Delta y\, G'(y_2) = G(y_0 + \Delta y) - G(y_0)$$

luego

$$E = \Delta y\, G'(y_2), \tag{10}$$

que es el análogo a la ecuación (5). Derivando respecto a $y$ la ecuación (8) y evaluando en $y = y_2$

$$G'(y_2) = f_y(x_0 + \Delta x,\, y_2) - f_y(x_0,\, y_2)$$

y, al sustituir en (10),

$$E = \Delta y \left[ f_y(x_0 + \Delta x,\, y_2) - f_y(x_0,\, y_2) \right].$$

Como $f_y(x, y_2)$ (considerada como función de $x$ únicamente) es diferenciable, se puede aplicar de nuevo el teorema y obtener:

$$f_{yx}(x_2, y_2) = \frac{f_y(x_0 + \Delta x,\, y_2) - f_y(x_0,\, y_2)}{\Delta x}\,; \quad x_2 \in (x_0,\, x_0 + \Delta x)$$

$$\Rightarrow\ \Delta x\, f_{yx}(x_2, y_2) = f_y(x_0 + \Delta x,\, y_2) - f_y(x_0,\, y_2).$$

Por lo tanto,

$$E = \Delta y\, \Delta x\, f_{yx}\,(x_2, y_2). \tag{11}$$

Por último, de las expresiones (7) y (11):

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2).$$

Ahora, si se hacen tender a cero $\Delta x$ y $\Delta y$, el rectángulo se contrae hacia el punto $(x_0 , y_0)$, y cuando esto pasa, es claro que $(x_1, y_1)$ y $(x_2 , y_2)$ tienden a $(x_0 , y_0)$, lo que demuestra finalmente que

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

## Ejemplo 17.

Sea la función $f(x, y) = e^{-3x} \cos 3y$.

*i)* Verificar que cumple la hipótesis del teorema de Schwarz para cualquier punto.
*ii)* Mostrar que satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

A esta ecuación se le llama ecuación de Laplace.

**Solución:**

*i)* Se evalúan las derivadas parciales mixtas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3e^{-3x} \cos 3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 9e^{-3x} \operatorname{sen} 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3e^{-3x} \operatorname{sen} 3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 9e^{-3x} \operatorname{sen} 3y.$$

Como estas derivadas son continuas para todo $(x, y)$ se verifican las hipótesis del teorema. Por tanto, se deberá cumplir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

lo cual efectivamente se ve que es cierto.

*ii)* Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 9\,e^{-3x}\,\operatorname{sen} 3y$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9\,e^{-3x}\cos 3y$$

se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9\,e^{-3x}\cos 3y - 9\,e^{-3x}\cos 3y$$

$$= 0.$$

### 2.2.4 Algunas aplicaciones de la derivada parcial

Hemos dicho que, de manera análoga a como ocurre con las funciones de una sola variable independiente, en las funciones escalares de variable vectorial la derivada parcial $f_x(x, y)$ es la razón de cambio de $f$ en la dirección paralela al eje X. En este caso la $y$ permanece constante. De manera similar, $f_y(x, y)$, con $x$ constante, es la razón de cambio de $f$ en la dirección paralela al eje Y .

## Ejemplo 18.

La distribución de temperatura de un plato caliente localizado en el plano $XY$ está dada por la función

$$T(x, y) = \left(\frac{100}{\ln 2}\right) \ln\left(x^2 + y^2\right); \qquad 1 \le x^2 + y^2 \le 4$$

donde $x$ y $y$ están dadas en centímetros y $T(x, y)$ en grados centígrados.

*i)* Mostrar que $T(x, y) = 0$ si $x^2 + y^2 = 1$ y $T(x, y) = 200$ si $x^2 + y^2 = 4$.

*ii)* Hallar la razón de cambio de $T(x, y)$ en una dirección paralela al eje X en el punto (1, 0) y en el punto (0, 1).

*iii)* Hallar la razón de cambio de $T(x, y)$ en una dirección paralela al eje Y en el punto (2, 0) y en el punto (0, 2).

**Solución:**

*i)* Si $x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad T(x, y) = \left(\frac{100}{\ln 2}\right) \ln(1)$$

$$= \left(\frac{100}{\ln 2}\right)(0) = 0.$$

Si $x^2 + y^2 = 4$

$$\Rightarrow \quad T(x, y) = \left(\frac{100}{\ln 2}\right) \ln 4$$

$$= \left(\frac{100}{\ln 2}\right) \ln = 2^2$$

$$= \left(\frac{100}{\ln 2}\right) 2 \ln 2 = 200.$$

*ii)*

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{100}{\ln 2}\right)\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \frac{200}{\ln 2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 0.$$

*iii)*

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{100}{\ln 2}\right)\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(2,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(0,2)} = \frac{100}{\ln 2}.$$

## Ejemplo 19.

Por el punto $\mathbf{M} = (1, 2, 14)$ de la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$ se han hecho pasar planos paralelos a los coordenados, *YZ* y *ZX*. Determinar los ángulos que forman las tangentes a las curvas de intersección así obtenidas con los tres ejes de coordenadas en el punto **M**.

**Solución:** Con $y =$ constante se tiene el plano paralelo al plano *ZX*, que al cortar la superficie define una curva. La recta tangente a esta curva de intersección tiene una pendiente que es igual a la derivada parcial de $z$ respecto a $x$. Luego,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x \quad \Rightarrow \quad \text{pendiente} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 4.$$

Por otro lado, sabemos que la pendiente de una recta es igual a la tangente trigonométrica del ángulo $\alpha$ que forma dicha recta con el eje X. Así,

$$\alpha = \text{ang tan } 4,$$

lo que implica que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ (ver la figura 2.10).

Para calcular el ángulo entre esta recta y los otros dos ejes coordenados observamos que el plano en cuestión es perpendicular al eje Y por lo que el ángulo entre la recta tangente y el eje. Y es $\beta = 90°$. Aplicando la identidad $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, siendo $\gamma$ el ángulo con el eje Z, se tiene que

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$$

$$\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{17} - 0 = \frac{16}{17}$$

$$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

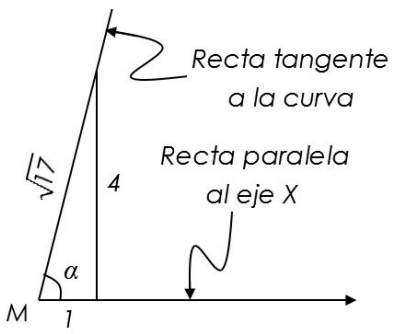



FIGURA 2.10.

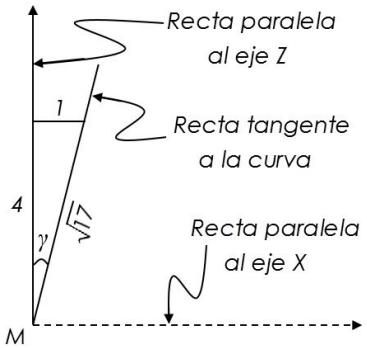



FIGURA 2.11.

Por lo que $\gamma = \text{ang tan}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ (ver la figura 2.11).

De manera semejante, con $x =$ constante se tiene el plano paralelo a *YZ*, el cual define con la superficie una curva de intersección. La tangente a tal curva

tiene una pendiente que es igual a la tangente trigonométrica del ángulo $\beta'$ que forma la recta con el eje Y . Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y \quad \Rightarrow \quad \text{pendiente} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 12 \quad \Rightarrow \quad \beta' = \text{ang tan}\,(12),$$

lo cual implica que $\cos\beta' = \dfrac{1}{\sqrt{145}}$ (ver la figura 2.12).

El plano en cuestión es perpendicular al eje X por lo que $\alpha' = 90°$. Y mediante la identidad $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$ se llega a

$$\cos^2\gamma' = 1 - \cos^2\alpha' - \cos^2\beta'$$

$$= 1 - 0 - \frac{1}{145} = \frac{144}{145}$$

$$\cos\gamma' = \frac{12}{\sqrt{145}}\,.$$

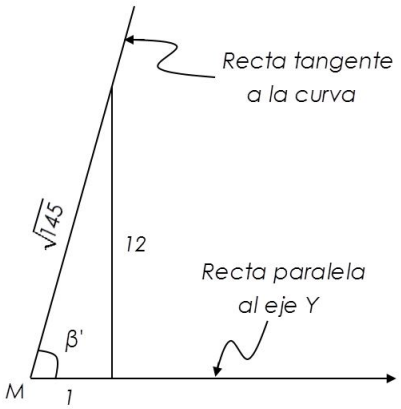



FIGURA 2.12.

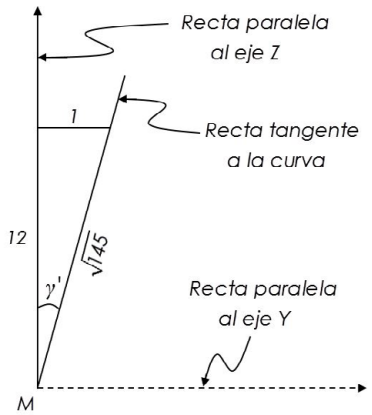



FIGURA 2.13.

Por lo que (ver la figura 2.13)

$$\gamma' = \text{ang tan}\,\frac{1}{12}\,.$$

Los ángulos $\gamma$ y $\gamma'$ se pudieron haber calculado simplemente como complementos de $\alpha$ y $\beta'$, respectivamente, ya que las curvas en cuestión se hallan sobre planos paralelos a los coordenados.

## Ejemplo 20.

Hallar un vector normal a la superficie cuya ecuación es $z = x^2 - 4xy - y^2$, en el punto (3, 2).

**Solución:** Si se calculan las derivadas parciales y se evalúan en el punto, se obtienen las pendientes de dos rectas perpendiculares entre sí y tangentes a la superficie, las que a su vez definen dos vectores tangentes a la superficie. Su producto vectorial dará un vector perpendicular a dichas direcciones, y por lo tanto, a la superficie. Así,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,2)} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x - 2y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,2)} = -16$$

y los vectores tangentes a la superficie son: sobre el plano $y = 2$

$$\mathbf{v}_1 = \left(1, 0, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,2)}\right) = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

y sobre el plano $x = 3$

$$\mathbf{v}_2 = \left(0, 1, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,2)}\right) = \hat{\mathbf{j}} - 16\hat{\mathbf{k}}.$$

Su producto vectorial es

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -16\end{bmatrix}=2\hat{\mathbf{i}}+16\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}},$$

que es el vector normal a la superficie buscado.

En este punto es interesante observar que si en el ejemplo anterior se escribe la ecuación de la superficie como $F=F(x,y,z)=0$, se tendrá que

$$F=-x^2+4xy+y^2+z$$

Al calcular las derivadas parciales de $F$ con respecto a $x$, $y$, $z$ y evaluarlas en el punto se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2x+4y \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(3,2)}=2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4x+2y \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(3,2)}=16$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=1 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(3,2)}=1,$$

que son las componentes del vector **N** normal a la superficie que se obtuvo antes. Cabría la siguiente reflexión: ¿Siempre se cumple que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{16}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial F}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

es un vector normal a la superficie $F(x,y,z)=0$?

La respuesta es afirmativa, Sin embargo, en esta sección sólo se demostrara para cuando $F$ es de la forma $F(x,y,z)=z-f(x,y)$. El caso más general en el que $F$ no es así será demostrado en la sección 2.6.

**Teorema 9.** Sea $f(x, y)$ una función continua con primeras derivadas parciales continuas en una región $R$ del plano $XY$. Si $S$ es la superficie descrita por la ecuación $z=f(x, y)$, entonces un vector normal a dicha superficie en el punto $(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0)\in S$ es

$$\mathbf{N}=-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)}\hat{\mathbf{i}}-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,\,y_0)}\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{16}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial F}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\,,$$

donde $F(x, y, z)=z-f(x, y)$ y sus derivadas deben evaluarse en $(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0)$.

En realidad, como para este tipo de funciones las derivadas parciales de $F$ no dependen de $z$ basta decir que las derivadas de $f$ deben evaluarse en $(x_0\,,\, y_0)$.

**Demostración:** La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a $x$ en el punto $(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la superficie $z=f(x, y)$ y el plano $y=y_0$. La ecuación de la recta es

$$l_1:\begin{cases} z=m_1(x-x_0)+z_0 \\ y=y_0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{z-z_0}{m_1}=\dfrac{x-x_0}{1} \\ y=y_0 \end{cases}$$

con

$$m_1=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)}=f_x(x_0, y_0).$$

Así, la dirección de la recta $l_1$ está dada por el vector

$$\mathbf{u}_1=(1,\,0,\,m_1)=(1,\,0,\,f_x(x_0, y_0)).$$

En la misma forma, la recta tangente a la curva de intersección de la superficie y el plano $x = x_0$ en el punto $(x_0\,,\, y_0)$, tiene por ecuación

$$l_2:\begin{cases} z = m_2(y - y_0) + z_0 \\ x = x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{z - z_0}{m_2} = \dfrac{y - y_0}{1} \\ x = x_0 \end{cases}$$

con

$$m_2 = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,\, y_0)} = f_y(x_0,\, y_0).$$

De este modo, la dirección de la recta $l_2$ está dada por

$$\mathbf{u}_2 = (1,\, 0,\, m_2) = (1,\, 0,\, f_y(x_0,\, y_0)).$$

Como los vectores $\mathbf{u}_1$ , y $\mathbf{u}_2$ son tangentes a la superficie en el punto $(x_0,\, y_0,\, z_0)$. Un vector normal a la superficie se obtiene al calcular el producto vectorial $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$; en consecuencia,

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & f_x(x_0,\, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,\, y_0) \end{bmatrix}$$

$$= -f_x(x_0,\, y_0)\,\hat{\mathbf{i}} - f_y(x_0,\, y_0)\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Por lo tanto, un vector normal a la superficie en el punto $(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0)$ es

$$\mathbf{N} = -\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0\,,\, y_0)} \hat{\mathbf{i}} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0\,,\, y_0)} \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Como $F(x,\, y,\, z) \equiv z - f(x,\, y)$ se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

y la expresión para $\mathbf{N}$ se puede escribir como

$$\mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Para este tipo de superficies, en donde la función $F$ es de la forma $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, siempre se tiene que $\partial F/\partial z = 1$ y la expresión anterior podría escribirse más simplemente. Pero se prefiere escribirla con $\partial F/\partial z$ en vez de 1 porque de esa forma la expresión sigue siendo válida aun para el caso más general en donde la función $F$ ya no tiene esa forma tan simple (esto se demostrará más adelante).

En el caso de curvas en $\mathbb{R}^2$ ocurre algo semejante. Se puede demostrar que si se tiene una curva plana de ecuación $y = g(x)$, siendo $g$ una función real de variable real y $G(x, y) = y - g(x)$, entonces

$$\mathbf{N} = -\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x_0} \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{\partial G}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial G}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}$$

es un vector normal a la curva en el punto de coordenadas $(x_0, y_0) \equiv (x_0, g(x_0))$.

### 2.2.5 Plano tangente y recta normal a una superficie

Sea la superficie $S$ de ecuación $z = f(x, y)$ y $\mathbf{P} = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de ella. Se pretende obtener las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a $S$ en el punto $\mathbf{P}$ (ver la figura 2.14).

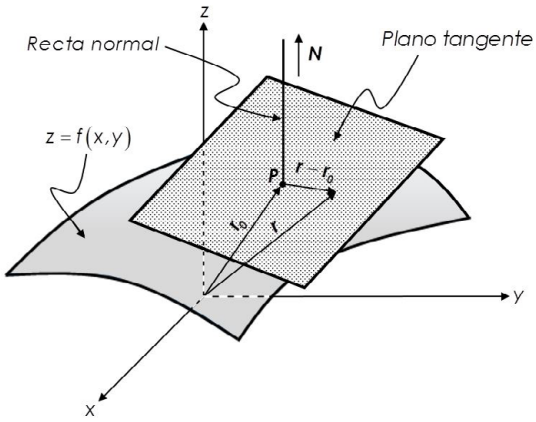



**FIGURA 2.14.** Plano tangente y recta normal a una superficie.

En los cursos de geometría analítica en el espacio se demuestra que la ecuación de un plano que pasa por el punto $\mathbf{r}_1$, y es perpendicular a un vector $N=(a, b, c)$, está dada por

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)=0$$

o, equivalentemente, por

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0.$$

Entonces, como un vector normal a $S$ en **P** es

$$\mathbf{N}=-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{i}}-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}.$$

la ecuación del plano tangente a la superficie en **P** está dada por

$$-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{P}}(x-x_0)-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mathbf{P}}(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

Para el caso en el que $S$ esté dada mediante una expresión de la forma $F(x, y, z)=0$, la ecuación del plano tangente a $S$ en **P** es

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\mathbf{P}}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\mathbf{P}}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\mathbf{P}}(z-z_0)=0$$

o bien

$$\left( \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\mathbf{P}}, \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\mathbf{P}}, \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\mathbf{P}} \right) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0.$$

Por otra parte, una manera de definir una recta es mediante sus ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at\,; \qquad y = y_0 + bt\,; \qquad z = z_0 + ct$$

en donde $t$ es el parámetro, $(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0)$ es un punto de la recta y $(a,\, b,\, c)$ un vector que indica su dirección.

Por lo tanto, como la dirección de la recta normal a la superficie de ecuación $z = f(x,\, y)$ está dada por el vector **N** anteriormente citado, las ecuaciones de la recta normal a $S$ en **P** están dadas por

$$x = x_0 - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{P}} t\,; \quad y = y_0 - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mathbf{P}} t\,; \quad z = z_0 + t.$$

Y para el caso de una superficie de ecuación $F(x,\, y,\, z) = 0$, las ecuaciones de la recta normal a $S$ en **P** son

$$x = x_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\mathbf{P}} t\,; \quad y = y_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\mathbf{P}} t\,; \quad z = z_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\mathbf{P}} t.$$

## Ejemplo 21.

Obtener las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 9$$

en el punto $\mathbf{P} = (1,\, 8,\, -8)$.

**Solución:**

$$F = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = -9$$

Así,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3}x^{-1/3}; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\mathbf{P}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-1/3}; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\mathbf{P}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2}{3}z^{-1/3}; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\mathbf{P}} = -\frac{1}{3}$$

y entonces

$$\mathbf{N} = \frac{2}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente en $(1, 8, -8)$ es

$$\frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-8) - \frac{1}{3}(z+8) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - z - 18 = 0$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal son

$$x = 1 + \frac{2}{3}t; \qquad y = 8 + \frac{1}{3}t; \qquad z = -8 - \frac{1}{3}t;$$

## Ejemplo 22.

Obtener las coordenadas de los puntos de la superficie de ecuación

$$z = e^x \cos y$$

para los cuales el plano tangente a dicha superficie es paralelo al plano de ecuación

$$y+z-\frac{\pi}{2}=0.$$

**Solución:**

$$F=-e^{x}\cos y+z$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}=-e^{x}\cos y\,; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=e^{x}\operatorname{sen} y\,; \quad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{N}=-e^{x}\cos y\,\hat{\mathbf{i}}+e^{x}\operatorname{sen} y\,\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}.$$

Este vector normal $\mathbf{N}$ debe ser paralelo a la normal del plano $y+z-(\pi/2)=0$, que es $\mathbf{N}'=(0,\,1,\,1)$. Ahora bien, si dos vectores son paralelos, uno debe ser proporcional al otro, por lo que

$$\mathbf{N}=\lambda\mathbf{N}' \quad \Rightarrow \quad -e^{x}\cos y\,\hat{\mathbf{i}}+e^{x}\operatorname{sen} y\,\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}=0\,\hat{\mathbf{i}}+\lambda\hat{\mathbf{j}}+\lambda\hat{\mathbf{k}}$$

Por igualdad de vectores se tiene que

$$\left.\begin{aligned} -e^{x}\cos y&=0\\ e^{x}\cos y&=\lambda\\ 1&=\lambda \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} -e^{x}\cos y&=0\\ e^{x}\operatorname{sen} y&=1. \end{aligned}\right.$$

Al resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas resulta

$$x=0 \quad \text{y} \quad y=\frac{(2n-1)\pi}{2}\,; \quad n=0,\,\pm1,\,\pm2,\cdots$$

y sustituyendo en la ecuación de la superficie

$$z=e^{0}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=0.$$

Por lo tanto, los puntos para los cuales el plano tangente a la superficie es paralelo al plano $y+z-(\pi/2)=0$ son:

$$\left\{\left(0,\ \frac{(2n-1)\pi}{2},\ 0\right)\ \middle|\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\right\}.$$

### 2.2.6 Relación entre la continuidad y las derivadas parciales

Cuando se estudió el cálculo diferencial de funciones de una sola variable independiente, la existencia de la derivada en un punto implicaba necesariamente la continuidad de la función en dicho punto. En funciones escalares de variable vectorial esto no es necesariamente cierto, es decir, que la existencia de las derivadas parciales no implica la continuidad. Considérese el siguiente ejemplo de una función con dos variables independientes.

**Ejemplo 23.**

Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Como se vio en el estudio de la continuidad (sección 2.1.2, ejemplo 10), esta función es discontinua en $(0,\ 0)$. Calculemos ahora sus derivadas parciales en el origen. Para calcularlas no es válido en este caso derivar directamente la expresión $2xy/(x^2+y^2)$ porque la función $f(x,\ y)$ no es igual a dicha expresión en $(0,\ 0)$. Lo que debe hacerse es recurrir a la definición de derivada parcial basada en los cuatro pasos usuales, manteniendo constante a la $y$ en un caso y a la $x$ en el otro. Así,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{d}{dx}f(x,0)\right|_{x=0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, 0) - f(x, 0)}{\Delta x}\bigg|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x}$$

y como

$$f(\Delta x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = 0.$$

De manera semejante,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0)} = \frac{d}{dy} f(0, y)\bigg|_{y=0}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, y+\Delta y) - f(0, y)}{\Delta y}\bigg|_{y=0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(\Delta y, 0)}{\Delta y}$$

y como

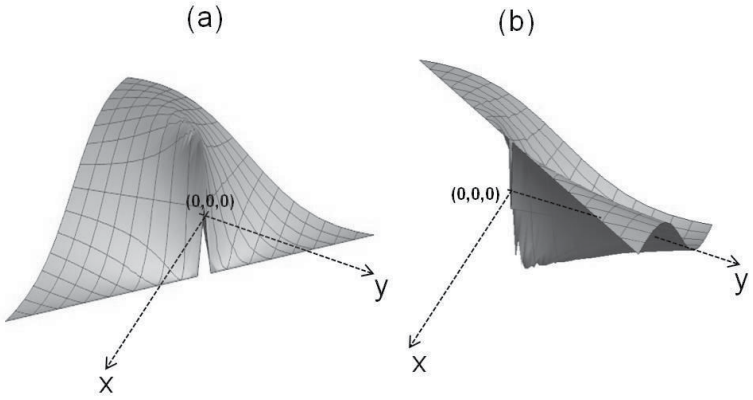
$$f(0, \Delta y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0)} = 0.$$

Como se observa, las derivadas parciales existen a pesar de la discontinuidad de la función en $(0, 0)$. Esta función es un claro ejemplo de algunas de las características que pueden presentar las funciones escalares de variable vectorial. En la figura 2.15 se muestran dos secciones de la gráfica de esta función.

En la siguiente sección se estudiará el concepto de diferencial que es una propiedad más exigente que la simple existencia de las derivadas parciales y la continuidad. La función analizada arriba no es diferenciable. En el ejercicio 2.11 se analiza una función parecida. Dicha función si es continua y tiene derivadas parciales, pero tampoco es diferenciable.

**FIGURA 2.15.** Dos secciones de la gráfica de la función $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

En la figura (a) el dominio de la función se tomó igual al conjunto $\{(x, y) | -1 \le x \le 1;\ -1 \le y \le -x\}$ mientras que en la figura (b) el dominio se tomó igual a $\{(x, y) | -1 \le x \le 1;\ x \le y \le 1\}$. La gráfica completa es simétrica con respecto los planos verticales $y = -x$ y $y = x$. En las dos gráficas la variable dependiente $z = f(x, y)$ varía de –1 a 1.




## Ejercicios

**2.11.** Demostrar que la siguiente función tiene derivadas parciales en (0,0) y es continua en dicho punto.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Solución:** $\left.\dfrac{\partial f(x, 0)}{\partial x}\right|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0;\quad \left.\dfrac{\partial f(0, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{0}{\Delta y} = 0;$

Al calcular el límite de la función se obtiene que vale cero. Por lo tanto $f(x, y)$ es continua.

**2.12.** A partir de la definición, calcular las derivadas direccionales en la dirección del vector $(-1, 2)$, de las siguientes funciones en el punto $(1, -2)$.

a) $f(x, y) = 4 + \dfrac{2y}{x}$

b) $f(x, y) = \sqrt{25 - 4xy^2}$.

**Solución:** a) $D_{(-1,\,2)}\, f(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}=(1,\,-2)} = -4$; b) $D_{(-1,\,2)} f(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}=(1,-2)} = 8$.

**2.13.** Indicar analíticamente las regiones para las cuales las siguientes funciones son continuas y derivables.

a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - y)$ b) $f(x, y) = \ln(x - y)$

c) $f(x, y) = e^{x-y}$ d) $f(x, y) = \cot(x - y)$.

**Solución:** a), c) $\{(x, y) \,|\, -\infty < x < \infty\,;\ -\infty < y < \infty\}$; b) $\{(x, y) \,|\, x - y > 0\}$; d) $\{(x, y) \,|\, x - y \neq N\pi$, siendo $N$ un entero arbitrario$\}$.

**2.14.** A partir de la definición, calcular la derivada direccional de la función

$$f(x, y, z) = 16 - \frac{x}{y} + \sqrt{z^2 - xy}$$

en el punto $(4, 9, 10)$ y en la dirección del vector $(1, 0, 1)$.

**Solución:** $D_{(1,0,1)} f(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}=(4,\,9,\,10)} = \dfrac{83}{144}$.

**2.15.** Calcular todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones. En los incisos donde se indique, evaluarlas en el punto dado.

a) $f(x, y) = \text{ang tan}\left(\frac{y}{x}\right)$

b) $f(x, y) = \sqrt{\frac{\cos x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \cos y}}$

c) $f(x, y) = xye^{-(x/y)}$

d) $f(x, y, z) = xyze^{-(x^2-y^2)/y^2}$

e) $f(x, y) = \operatorname{sen} xy^2$ en $(\pi/2, 1)$

f) $w(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{z}\right)$ en $(1, 0, 1)$.

**Solución:**

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos^2 z$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos^2 z}{x}$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x - 1}{2z(\operatorname{sen} x - \cos y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - \operatorname{sen} x \cos - \operatorname{sen} y \cos x}{2z(\operatorname{sen} x - \cos y)^2}$.

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = xye^{-x/y}(1/x - 1/y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{-x/y}(1 + 1/y)$

d) $\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y, z)(1/x - 2x/z^2)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y, z)(1/y + 2y/z^2)$;

$\frac{\partial f}{\partial z} = f(x, y, z)(1/z + (x^2 - y^2)/2z^2)$

e) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\pi/2,1)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\pi/2,1)} = 0.$

f) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0,1)} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,0,1)} = 1.$

**2.16.** Demostrar que la función $f(r, \theta) = re^{-(r/\theta)}$ satisface la siguiente expresión.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\theta}{r} f = 0.$$

**2.17.** Hallar la derivada direccional de

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

a) en $(0, 0)$ y en la dirección $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$.

b) en $(1, 1)$ y en la dirección $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$.

c) en $(1, 1)$ y en la dirección $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}}$.

**Solución:** a) $D_{(\sqrt{2}/2,\,\sqrt{2}/2)}\, z\big|_{(0,0)} = 0$; b) $D_{(\sqrt{2}/2,\,\sqrt{2}/2)}\, z\big|_{(1,1)} = -\sqrt{2}$; c) $D_{(1,0)}\, z\big|_{(1,1)} = -1/\sqrt{2}$.

**2.18.** Calcular la derivada direccional de la función multivaluada $f(x, y, z) = z\,\text{ang tan}\,(y/x)$ en el punto $(1, 1, 3)$ y en la dirección del vector $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:** $D_{(1,1,-1)}\, f\,\big|_{(1,1,3)} = -(\pi/4 + \pi k)$, siendo $k$ un entero arbitrario.

**2.19.** Demostrar que la derivada en la dirección radial de la "función" multivaluada $f(x, y) = ang\ tan(y/x)$, cuya gráfica es la superficie mostrada en la figura 2.30, es siempre igual a cero y que por lo tanto la superficie en las direcciones radiales es constante.

**Solución:** La derivada direccional en la dirección arbitraria $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es $D_{(u_1,\,u_2)}\, f\,\big|_{(x,y)} = \frac{1}{x^2 - y^2}\,(-yu_1 + xu_2)$, lo que se reduce a cero cuando $\mathbf{u}$ apunta en la dirección radial $(x, y)$.

**2.20.** En un cierto instante el lado de un rectángulo mide 20 m y aumenta con una rapidez de 5 m/s. En el mismo instante el otro lado mide 30 m y dismi-

nuye con una rapidez de 4 m/s. ¿Con qué rapidez variaran el perímetro y el área de dicho rectángulo?

**Solución:** $\frac{dp}{dt} = 2$ m/s; $\frac{dA}{dt} = 70$ m$^2$/s.

**2.21.** Supóngase que un vehículo $A$ se mueve en la dirección *este,* hacia un cruce, con una velocidad de 5 m/s y que un vehículo $B$ también se dirige hacia el cruce en la dirección *sur.* Si en el instante en el que $A$ y $B$ están a 3 m y 4 m, respectivamente, de la intersección, los dos se aproximan entre sí a una velocidad de 10 m/s; ¿a qué velocidad se aproxima al cruce el vehículo $B$?

**Solución:** $\frac{dy}{dt} = \frac{35}{4}$ m/s

**2.22.** Sea una superficie definida por

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

**Solución:** La ecuación del plano tangente es $x + y + \sqrt{2}z = 4$ y la de la recta normal es $\mathbf{r} = t\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

**2.23.** Determinar el punto **P** sobre la superficie

$$z = 3x^2 - 4xy + 2y^2$$

tal que el vector normal a la superficie en **P** tenga componentes iguales a −16 y 2, en $x$ y $z$ respectivamente. Y además, que la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la superficie y el plano $4x - 3y = 5$ sea igual a $8/5$.

**Solución:** En todos los puntos del plano $XY$ que satisfacen $y = 3x/2 - 2$ el vector normal tiene componentes –16 y 2. Por otro lado, la pendiente de la recta tangente es igual a $22x/15$ lo cual debe ser igual a $8/5$. Combinando estos datos se obtiene que el punto es $P = 4/11(3,\ -1,\ 200/11)$.

**2.24.** Sean las superficies $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$, y $S_2 : x + 2y + 2z = 6$.

a) Determinar la curva de intersección entre $S_1$ y $S_2$ y comprobar que el punto $\mathbf{P} = \left(\frac{2}{5}\left[2 \pm \sqrt{24}\right],\ 1,\ \frac{1}{5}\left[8 \pm \sqrt{24}\right]\right)$ pertenece a dicha curva y a ambas superficies.

b) Calcular las dos derivadas parciales de ambas superficies en el punto dado.

**Solución:** Unas ecuaciones paramétricas de la curva son:
$x = \frac{1}{5}\left(6 - 2y \pm 2\sqrt{-9y^2 + 24y + 9}\right);\ y;\ z = \frac{1}{5}\left(12 - 4y \pm \sqrt{-9y^2 + 24y + 9}\right.$.

**2.25.** Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,\ y)$ en el punto de coordenadas $x = a$ y $y = b$.

**2.26.** Hallar las ecuaciones de la recta normal a la superficie

$$z = x^2\, y^3 \quad \text{en} \quad \mathbf{P} = (3,\ 2,\ 72).$$

**2.27.** ¿Qué ángulo agudo forma con el eje z la tangente común a las superficies $S_1 : z = x^2 + y^2$, y $S_2 : x^2 + z^2 = 5$, en el punto $\mathbf{P} = (1,\ 1,\ 2)$?

**2.28.** Sea la superficie $z = y \ln x$ y el punto de coordenadas $x = 3$, $y = 2$. ¿Con qué pendiente sube la curva de intersección de esa superficie con el plano

$3x+y=11$?; ¿con qué plano vertical se debe cortar la superficie para que la curva de intersección en ese punto suba con la máxima pendiente posible?; ¿cuánto vale esa pendiente?; ¿con qué plano vertical se debe cortar la superficie para que la curva de intersección en ese punto:

a) no suba ni baje?
b) suba a razón de 481 mm/m?
c) baje a razón de 1 cm/cm?

**2.29.** Sea el canal de la figura EJ 2-29. Calcular las variaciones del radio hidráulico con respecto a $x$, $y$, $\theta$, respectivamente. El radio hidráulico se define como

$$\frac{R}{2}=\frac{\text{Área hidráulica}}{\text{Perímetro mojado}}=\frac{A}{P}$$

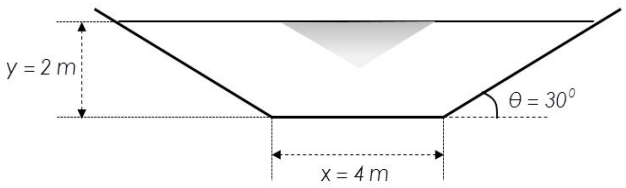



FIGURA EJ-2-29.

**2.30.** Suponga que $z=xy^2$. ¿En qué dirección(es) a partir del punto $(-1,1)$ debemos caminar para que la razón de cambio de $z$ sea igual a 2?

**Solución:** En la dirección $\mathbf{u}=(2+2b)\hat{\mathbf{i}}+b\hat{\mathbf{j}}$

**2.31.** La temperatura en cualquier punto de una bola solida de metal, definida por la expresión

$$x^2+y^2+z^2\leq 1,$$

está dada por

$$T(x, y, z) = 100\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

donde $T$ está medida en grados Kelvin y $x$, $y$ y $z$ en metros.

a) ¿En qué lugar $T$ es mayor y cuál es su valor?
b) ¿En qué lugar $T$ es menor y cuál es su valor?
c) ¿Cuál es la rapidez de cambio de $T$ en el punto $\mathbf{M} = (0.2, 0.2, 0.45)$ en la dirección que va del origen al punto $(0.5, 0.5, 0.7071)$? ¿Aumenta o disminuye la temperatura?
d) ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura a partir del punto $\mathbf{M}$?
e) Dar un vector normal a la esfera en el punto $(0.5, 0.5, 0.7071)$.

**Solución:** a) $T$ es máxima en $x^2+y^2+z^2=0$ y su valor es 100; b) $T$ es mínima en $x^2+y^2+z^2=1$ y su valor es $100/e$; c) $D_{(.5,.5,.7071)}\, T\big|_{(.2,.2,.45)} = -108$ (Disminuye); d) En dirección del gradiente; e) $\big|\nabla F\big|_{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{2}\,\hat{\mathbf{k}}$.

## 2.3 Diferencial total. Funciones diferenciables

Como recordara el lector, en el cálculo diferencial de funciones con una sola variable se estudia la noción de *función diferenciable* que, por conveniencia, se reproduce a continuación.

**Definición.** Sea $f$ una función real de variable real con dominio $D_f$. Se dice que la función es diferenciable en $x_0 \in D_f$ si su derivada $f'$ existe en $x_0$.

Nuestro objetivo es ahora generalizar este concepto para funciones con dos o más variables. Sin embargo, para la generalización es más conveniente tener a la mano una forma diferente de definir a las funciones escalares diferenciables con una sola variable y es la siguiente (esta segunda definición es por supuesto equivalente a la primera y se deja como ejercicio al lector demostrar su equivalencia): se dice que $f$ es diferenciable en $x_0$ si el incremento de la variable dependiente $y=f(x)$, denotado como $\Delta y$, se puede expresar como

$$\Delta y = A\Delta x + \eta\Delta x \tag{12}$$

donde $A$ es independiente de $\Delta x$ y $\eta \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Además, si (12) se cumple se demuestra que $A=f'(x)$. El primer sumando de (12) es la parte del incremento de $y$ que depende linealmente de $\Delta x$. Se le llama *diferencial* de la función $f(x)$ y se denota como $df$ o $dy$, es decir:

$$df = dy \equiv f'(x)\Delta x.$$

Puesto que el incremento $\Delta x$ se puede elegir de manera totalmente independiente del valor de $x$ la diferencial $df$ depende de dos variables independiente: la $x$ y la $\Delta x$. Debe notarse además que $\Delta x$ no tiene por qué ser pequeña. La definición de $df$ es independiente de que $\Delta x$ sea chica o grande.

Pasaremos ahora a analizar la situación para el caso de funciones con dos o más variables. Considérese la siguiente función escalar con dos argumentos

$$f(x, y) = 2x^2 - xy^2.$$

El incremento de la variable dependiente $z=f(x, y)$ está dado por

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Luego

$$\begin{aligned}\Delta z &= \left[2(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2\right] - (2x^2 - xy^2) \\ &= 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2xy\Delta y - x(\Delta y)^2 - y^2\Delta x - 2y\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2.\end{aligned}$$

Si se agrupan los términos en relación con los incrementos se tiene

$$\Delta z = (4x - y^2)\,\Delta x + (-2xy)\,\Delta y$$
$$+ (2\,\Delta x - 2y\,\Delta y)\,\Delta x + (-x\,\Delta y - \Delta x\,\Delta y)\,\Delta y,$$

lo que se puede escribir como

$$\Delta z = (4x - y^2)\,\Delta x + (-2xy)\,\Delta y + \eta_1\,\Delta x + \eta_2\,\Delta y$$

donde $\eta_1 = 2\,\Delta x - 2y\,\Delta y$ y $\eta_2 = -x\,\Delta y - \Delta x\,\Delta y$ y son tales que se aproximan a cero cuando $\Delta x$ y $\Delta y$ tienden a cero. Nótese que los términos que contienen a $\eta_1$ y $\eta_2$ podrían haberse definido de otra manera, por ejemplo:

$$\eta'_1 = 2\,\Delta x; \qquad n'_2 = -x\,\Delta y - 2y\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y$$

y aún hay otras formas posibles. Las expresiones para $\eta_1$ y $\eta_2$ dependen de la elección de la persona que resuelve el ejercicio, pero en cualquier caso son tales que se aproximan a cero cuando $\Delta x$ y $\Delta y$ tienden a cero.

Si se observan los dos primeros coeficientes de $\Delta x$ y $\Delta y$, se verá que son respectivamente las derivadas parciales con respecto a $x$ y con respecto a $y$ de la función original. Luego,

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y + \eta_1\,\Delta x + \eta_2\,\Delta y. \tag{13}$$

De esta manera se ha logrado escribir el incremento de la función dada en una forma que es la generalización de la ecuación (12). En general no cualquier función tiene esa propiedad, pero todas las que la tienen reciben un nombre especial:

**Definición.** Se dice que una función $f(x, y)$ es diferenciable en $(x_0\ ,\ y_0)$ si el incremento $\Delta z$ de la variable dependiente $z = f(x, y)$ se puede escribir como

$$\Delta z = A_1\,\Delta x + A_2\,\Delta y + \eta_1\,\Delta x + \eta_2\,\Delta y$$

donde $\eta_1$ y $\eta_2$ tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $\mathbf{0}=(0, 0)$ y $A_1$ y $A_2$ son independientes de $\Delta x$ y $\Delta y$.

**Lema Fundamental.** Si $f$ es una función continua cuyas derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ existen y son continuas en una vecindad del punto $(x_0, y_0)$, incluyendo a este, entonces $f$ es una función diferenciable con $A_1=f_x(x_0, y_0)$ y $A_2=f_y(x_0, y_0)$. Es decir, el incremento de la variable dependiente $z=f(x, y)$, denotado como $\Delta z$, puede expresarse como

$$\Delta z=f_x(x_0, y_0)\,\Delta x+f_y(x_0, y_0)\,\Delta y+\eta_1\,\Delta x+\eta_2\,\Delta y$$

donde $\eta_1$ y $\eta_2$ tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $\mathbf{0}=(0, 0)$.

**Demostración:** Se analizará el incremento $\Delta z$ en dos etapas, primero incrementando a $x$ y luego a $y$ (ver la figura 2.16).

Si se mantiene fija $y$ en el valor $y_0$ y se va de $(x_0, y_0)$ a $(x_0+\Delta x, y_0)$, entonces $f(x_0, y_0)$ sufre un incremento $\Delta_x f(x_0, y_0)$ igual a

$$\Delta_x f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

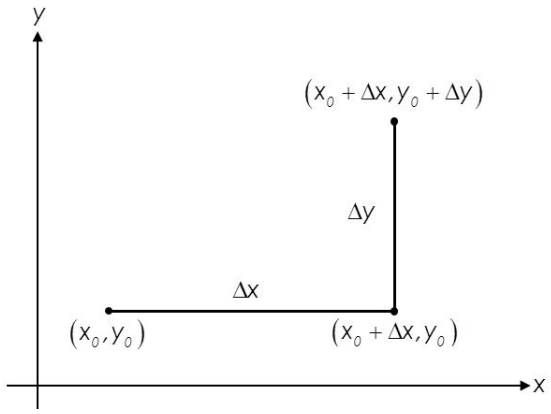



FIGURA 2.16.

y se le llama incremento parcial con respecto a $x$ de $f(x_0, y_0)$. Si se divide entre $\Delta x$ y se obtienen límites cuando $\Delta x \to 0$ se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Pero como $f_x(x, y)$ existe en una vecindad de $(x_0, y_0)$ se cumple que

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Entonces

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

De aquí que la cantidad $\eta_1$ definida como

$$\eta_1 \equiv \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} - fx(x_0, y_0) \quad \text{con} \quad \Delta x \neq 0$$

tiende a cero cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a **0**. Reescribiendo esta expresión se tiene

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + \eta_1 \Delta x.$$

Si ahora se mantiene $x$ fija en el valor $x_0 + \Delta x$, y se incrementa $y$ de $y_0$ a $y_0 + \Delta y$, lo que significa ir de $(x_0 + \Delta x, y_0)$ a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (ver figura 2.16), se tendrá el incremento

$$\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

y se le llama incremento parcial con respecto a $y$ de $f(x_0 + \Delta x, y)$. Dividiendo entre $\Delta y$ y tomando límite cuando $\Delta y \to 0$ se tiene que

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y}$$

Pero como $f_y(x, y)$ existe en una vecindad de $(x_0, y_0)$:

$$f_y(x_0 + \Delta x, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y}.$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y}.$$

Resulta así que la cantidad $\eta_2$ definida como

$$\eta_2 \equiv \frac{\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} - f_y(x_0, y_0)$$

tiende a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to \mathbf{0}$ (Nótese que si $\Delta x \to 0$, y las derivadas parciales son continuas, entonces $f_y(x_0 + \Delta x, y_0)$ es igual a $f_y(x_0, y_0)$). Así, de la definición de $\eta_2$ se tiene que

$$\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta_2 \Delta y.$$

Finalmente, si se suman las expresiones que definen a $\Delta_x f(x_0, y_0)$ y $\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0)$, lo cual es el valor total del incremento $\Delta z$, se tiene

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + \eta_1 \Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta_2 \Delta y$$

$$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y$$

o bien

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y,$$

lo que prueba este lema fundamental.

Se puede generalizar, tanto la definición como el lema anterior, para el caso de $n$ variables: Se dice que una función escalar de $n$ argumentos $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es diferenciable si el incremento $\Delta u$ de $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ puede expresarse como

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Delta x_i$$

donde las $\eta_i \to 0$ cuando $(\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n) \to \mathbf{0}$ y las $A_i$ son independientes de las $\Delta x_i$. Además, se puede demostrar que una función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ con derivadas parciales continuas en una vecindad del punto $(x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0})$ es diferenciable en dicho punto y que $A_i = f_{x_i}(x_{1_0}, x_{2_0}, \cdots, x_{n_0})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$.

## Ejemplo 24.

Investigar si la función de tres variables

$$f(x, y, z) = x^2 + xyz^2$$

es diferenciable.

**Solución:** Si se calcula su incremento

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \left[(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z)^2\right] - (x^2 + xyz^2) \\
&= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + xyz^2 + 2xyz\Delta z + xy(\Delta z)^2 + xz^2\Delta y \\
&+ 2xz\Delta y\Delta z + x\Delta y(\Delta z)^2 + yz^2\Delta x + 2yz\Delta x\Delta z + y\Delta x(\Delta z)^2 \\
&+ z^2\Delta x\Delta y + 2z\Delta x\Delta y\Delta z + \Delta x\Delta y(\Delta z)^2 - x^2 - xyz^2.
\end{aligned}$$

Si se agrupan los términos alrededor de los incrementos de las variables y de sus productos, se llega a

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(2x + yz^2\right)\Delta x + \left(xz^2\right)\Delta y + \left(2xyz\right)\Delta z + \left(\Delta x + 2yz\,\Delta z + 2z\,\Delta y\,\Delta z\right)\Delta x \\ &\quad + \left(2xz\,\Delta z + x\,\Delta^2 z + z^2\Delta x\right)\Delta y + \left(xy\,\Delta z + y\,\Delta x\,\Delta z + \Delta x\,\Delta y\,\Delta z\right)\Delta z \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,\Delta x_i,\end{aligned}$$

donde

$$A_1 = 2x + yz^2 \qquad \eta_1 = \Delta x + 2yz\,\Delta z + 2z\,\Delta y\,\Delta z$$

$$A_2 = xz^2 \qquad \eta_2 = 2xz\,\Delta z + x\,\Delta z^2 + z^2\Delta x$$

$$A_3 = 2xyz \qquad \eta_3 = xy\,\Delta z + y\,\Delta x\,\Delta z + \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

con $\eta_i \to 0$ cuando $\left(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z\right) \to \mathbf{0} = \left(0,\ 0,\ 0\right)$. Entonces, como el incremento de la función se pudo escribir en la forma requerida, la función es diferenciable.

Como se ha mencionado, las $\eta_i$ se pueden formar de diversas maneras, pero la agrupación de las $A_i$ es única y, como se observa, corresponden a las derivadas parciales de la función con respecto a las variables $x$, $y$, $z$ respectivamente. Esto es,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + yz^2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2; \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz.$$

Ahora se verá una función que no es diferenciable.

**Ejemplo 25.**

Demostrar que la función $f\left(x,\ y\right) = \sqrt{|xy|}$ no es diferenciable en el origen.

**Solución:** Sea $z=f(x, y)$. Se tiene que

$$\Delta z=f(0+\Delta x, 0+\Delta y)-f(0, 0)$$

pero como $f(0, 0)=0$ y $f(0+\Delta x, 0+\Delta y)=\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}$ se sigue que $\Delta z=\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}$, que también puede ser escrito como

$$\Delta z=\frac{\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}}{\Delta x}\,\Delta x.$$

Si ahora se define

$$\eta_1 \equiv \frac{\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}}{\Delta x} \qquad \text{y} \qquad \eta_2 \equiv 0$$

se tiene que $\Delta z=\eta_1\,\Delta x+\eta_2\,\Delta y$. Además, como

$$f(x, 0)=0 \qquad \text{y} \qquad f(0, y)=0$$

entonces

$$f_x(0, 0)=0 \qquad \text{y} \qquad f_y(0, 0)=0.$$

Luego el incremento de $z$ queda como

$$\Delta z=f_x(0, 0)\,\Delta x+f_y(0, 0)\,\Delta y+\eta_1\,\Delta x+\eta_2\,\Delta y.$$

Al comparar con la definición de función diferenciable se podría llegar aparentemente a la conclusión de que esta función es diferenciable. Sin embargo, el límite

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \eta_1=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}}{\Delta x}$$

no existe y por tanto la función considerada no es diferenciable en el origen. Se puede ver que efectivamente este límite no existe observando que el límite de $\eta_1$ a lo largo de rectas de la forma $\Delta y = m\ \Delta x$ tiene un valor distinto para cada valor de $m$. En la figura 2.17 se muestra una gráfica de esta función. Las derivadas parciales de $f$ valen cero en el origen, pero, por ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial x}$ no está definida en los puntos del eje X que están en una vecindad reducida del origen.

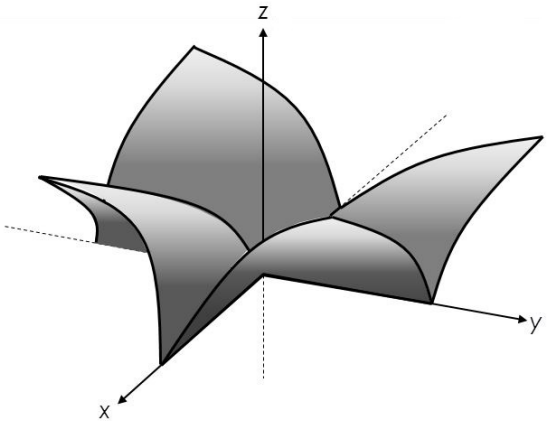



**FIGURA 2.17.** Gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

Si una función $f(x, y)$ es diferenciable, es decir, si

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\ \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\ \Delta y + \eta_1\ \Delta x + \eta_2\ \Delta y,$$

siendo $z = f(x, y)$, los dos primeros sumandos son lineales en $\Delta x$ y $\Delta y$ respectivamente; en cambio, los dos últimos dependen doblemente de los incrementos, como se puede apreciar en los ejemplos anteriores. Por lo tanto, al aproximarse a cero los incrementos, los dos primeros términos son mucho más grandes que los otros dos. Entonces puede decirse que cuando $\Delta x$ y $\Delta y$ son pequeños el incremento $\Delta z$ de la función es aproximadamente igual a

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\ \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\ \Delta y.$$

A esta expresión se le conoce como la *diferencial* de la función escalar $z = f(x, y)$.

**Definición.** Sea la función escalar diferenciable $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y sea $z=f(x,y)$. A la suma de los productos de las derivadas parciales de $f$ por los incrementos de sus respectivos argumentos se denota como $df$, o como $dz$, y se le conoce como **diferencial total**, o simplemente **diferencial** de la función $f$. Así,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y.$$

Puesto que los valores de $\Delta x$ y $\Delta y$ pueden elegirse de manera totalmente independiente de $x$ y $y$, la diferencial $df$ depende de cuatro variables independientes: $x$, $y$, $\Delta x$ y $\Delta y$. Además $\Delta x$ y $\Delta y$ no tienen por qué ser pequeñas. Es decir, la ecuación anterior tiene validez independiente de los valores de $\Delta x$ y $\Delta y$ (esta observación es la generalización de la que se hizo abajo de la ecuación (12)).

Aquí se puede introducir el concepto de *diferenciales parciales* de la función escalar $f(x,y)$. Estas serían:

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x\;;\qquad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y$$

y entonces $dz=d_x z+d_y z$.

Es fácil ver que los incrementos de las variables independientes son iguales a sus diferenciales. Es decir, $\Delta x=dx$ y $\Delta y=dy$. En efecto, si se toma $f(x,y)$ igual a la primera función identidad (o sea $z=x$) entonces

$$dz=dx$$

pero por otro lado

$$\begin{aligned} dz &= d_x z+d_y z\\ &= \Delta x+0\\ &= \Delta x \end{aligned}$$

y así

$$\Delta x = dx.$$

Procediendo en forma semejante pero ahora con $z = y$ se llega a

$$\Delta y = dy.$$

Por lo tanto la diferencial total de $z = f(x, y)$ se puede expresar como

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = \left( \frac{\partial f}{\partial x}\, ,\, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy).$$

Definiendo respectivamente $d\mathbf{r}$ y el nuevo símbolo $\nabla f$ como

$$d\mathbf{r} \equiv (dx, dy),$$

$$\nabla f \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x}\, ,\, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

se tiene que

$$dz = \nabla f \cdot d\mathbf{r}.$$

El símbolo $\nabla f$ no debe confundirse con el símbolo $\Delta f$ que se está utilizando para denotar al incremento de $f$.

La expresión $\nabla f$ se llama *gradiente* de $f$ y para muchas aplicaciones conviene definir por separado también el símbolo $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial x, \partial/\partial x)$ llamado operador *nabla*. Tanto $\nabla f$ como $\nabla$ serían estudiados con detalle en la sección 2.6.

De acuerdo con la discusión previa, $dz$ representa la contribución más importante al valor de $\Delta z$ cuando $\Delta x$ y $\Delta y$ son pequeños. Por lo tanto para el cálculo aproximado del incremento de $z = f(x, y)$ se puede emplear la expresión

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \nabla f \cdot d\mathbf{r}.$$

Si la función $f$ tiene $n$ variables independientes: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se acostumbra definir los símbolos $d\mathbf{r}$ y $\nabla f$ respectivamente como

$$d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, \cdots, dx_n)$$

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

En este caso la diferencial total está dada por

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \nabla f \cdot d\mathbf{r},$$

en donde vemos que sea cual sea el valor de $n$ la expresión $\nabla f \cdot d\mathbf{r}$ tiene la misma forma.

### 2.3.1 Interpretación geométrica

Considérese la figura 2.18 en donde se muestra la gráfica de una cierta función $f(x, y)$ y un plano tangente a ella en el punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0, z_0)$. La curva punteada que va de **P** a **T** es la intersección de la superficie con el plano vertical que pasa por los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ del plano $XY$. La distancia del punto $\mathbf{Q} = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0)$ al punto **T** es igual al incremento $\Delta z$ de la función. La distancia de **Q** al punto **R** perteneciente al plano tangente se ha denotado como $k\Delta z$ para indicar que es una fracción de $\Delta z$.

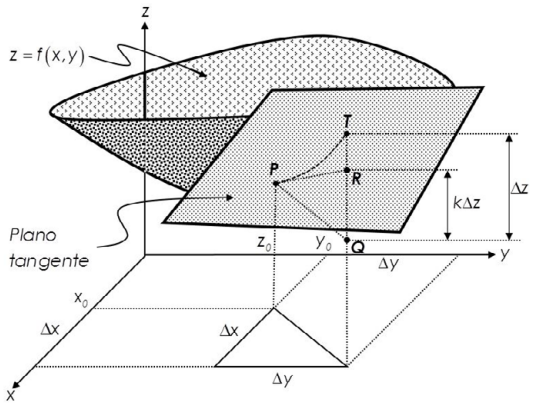



**FIGURA 2.18.** Plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto **P.**

Se demostrara a continuación que $k\Delta z$ es la diferencial $dz$ de la función $f(x, y)$. Para ello se partirá de la ecuación del plano tangente

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

o bien,

$$(N_1, N_2, N_3) \cdot \{(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)\} = 0$$

$$N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0. \qquad (14)$$

Para el caso que nos ocupa se tiene que si definimos $F \equiv z - f(x, y)$, entonces

$$(N_1, N_2, N_3) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f_x(x, y); \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -f_y(x, y); \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 1.$$

Además

$$x - x_0 = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x$$

$$y - y_0 = (y_0 + \Delta y) - y_0 = \Delta y$$

$$z - z_0 = (z_0 + k\Delta z) - z_0 = k\,\Delta z.$$

Por lo tanto, sustituyendo en (14), se obtiene

$$-f_x(x, y)\,\Delta x - f_y(x, y)\,\Delta y + k\,\Delta z = 0.$$

Luego

$$k\,\Delta z = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y$$

y como el segundo miembro es igual a la diferencial de $z$ se sigue que $dz = k\,\Delta z$. En la figura se observa claramente que mientras menores sean los valores de $\Delta x$ y $\Delta y$, el valor de la diferencial $dz$ se aproxima cada vez más al valor del incremento $\Delta z$. En estos casos la diferencial es la fracción mayor del incremento de la función.

### 2.3.2 Incremento total e incrementos parciales

En la demostración del lema fundamental de la sección 2.3 se definieron los incrementos parciales respecto a $x$ y respecto a $y$ de $z = f(x, y)$ mediante las expresiones

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

y

$$\Delta_y z = \Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Si $f(x, y)$ es una función con derivadas parciales continuas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$, entonces las funciones de una sola variable $g(x) = f(x, cte)$ y $h(y) = f(cte, y)$ son funciones derivables y por tanto diferenciables. En consecuencia, se cumple que

$$\Delta_x z = f_x(x, y)\,\Delta x + \mu_1 \Delta x$$

y

$$\Delta_y z = f_y(x, y)\,\Delta y + \mu_2 \Delta y$$

donde $\mu_1$ y $\mu_2$ tienden a cero cuando $\Delta x$ y $\Delta y$ tienden a cero respectivamente.

Ahora se verá la relación entre $\Delta z$ con $\Delta_x z$ y $\Delta_y z$. Por definición

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Si se resta y se suma $f(x + \Delta x, y)$, se tiene que

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

pero

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)=\Delta_y f(x+\Delta x, y)$$

y

$$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)=\Delta_x f(x, y).$$

Por lo tanto,

$$\Delta z=\Delta_x f(x, y)+\Delta_y f(x+\Delta x, y).$$

De manera análoga, $\Delta z$ también puede ser escrito como

$$\Delta z=\Delta_x f(x, y+\Delta y)+\ \Delta_y f(x, y).$$

Como puede apreciarse,

$$\Delta z \neq \Delta_x f(x, y)+\Delta_y f(x, y)$$

o lo que es lo mismo

$$\Delta z=\Delta f(x, y) \neq \Delta_x z+\Delta_y z. \tag{15}$$

Además, la diferencia entre $\Delta z$ y $\Delta_x z+\Delta_y z$ es en general distinta para cada función.

Considérese por ejemplo la función $f(x, y)=xy$, cuyo dominio se ha graficado parcialmente en la figura 2.19. El incremento total $\Delta z$ de la variable dependiente $z=f(x, y)$ difiere de la suma $\Delta_x z+\Delta_y z$ en la magnitud $\Delta x\,\Delta y$. En efecto.

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy$$

$$=\ y\,\Delta x+x\,\Delta y+\Delta x\,\Delta y.$$

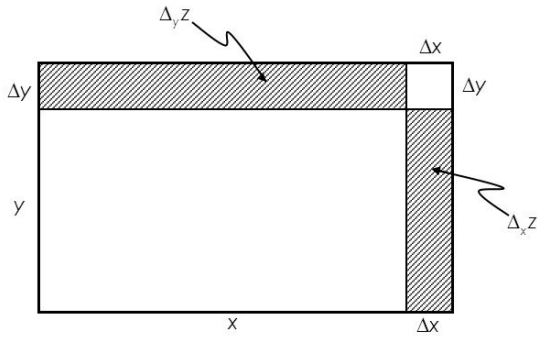



**FIGURA 2.19.** Porción del dominio de la función $f(x, y) = xy$. En este ejemplo $\Delta_x z = y\,\Delta x$, $\Delta_y z = x\,\Delta y$ y $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta x\,\Delta y$.

Por otro lado

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\,\Delta x$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\,\Delta y.$$

En consecuencia, se sigue que

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta x\,\Delta y,$$

lo que comprueba la expresión (15). Ver figura 2.19.

### 2.3.3 Error absoluto y error relativo

El *error absoluto* $E_a$ establece la diferencia, en valor absoluto, entre el incremento de la función y el valor que se obtiene por medio de la diferencial. Esto es,

$$E_a = |\Delta f - df|.$$

El *error relativo* (en porcentaje) $E_r$ se obtiene dividiendo el error absoluto entre el incremento de la función y luego multiplicando por 100. Es decir,

$$E_r = \frac{E_a}{\Delta f} \times 100.$$

En ocasiones es más conveniente definir el "error relativo" en otra forma (para no confundirlo con el anterior se denotará aquí con minúscula):

$$e_r = \left| \frac{df}{f} \right| \times 100,$$

el cual es útil principalmente cuando no se conoce $\Delta f$.

## Ejemplo 26.

Calcular los valores exacto y aproximado del volumen del material necesario para fabricar un vaso cilíndrico cuyo radio interior es de 5 cm, altura interior 16 cm, y espesor del fondo y paredes de 0.1 cm. Calcular también los errores absoluto $E_a$ y relativo $E_r$ que se cometen al utilizar la diferencial en lugar del incremento exacto.

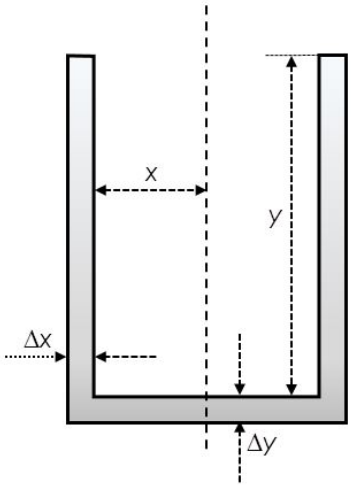



**FIGURA 2.20.** Corte lateral de un baso cilíndrico.

**Solución:** Una sección del vaso se ilustra en la figura 2.20. El volumen exacto del material requerido, que se denotará por $\Delta V$, es igual a la diferencia entre el volumen exterior y el volumen interior $V$. Si $x$ representa el radio interior y $y$ la altura interior, se tiene para el volumen interno que $V = \pi x^2 y$. Por lo tanto

$$\Delta V = \pi(x+\Delta x)^2\,(y+\Delta y) - \pi x^2 y$$

$$= \pi(5.1)^2\,(16.1) - \pi(5)^2\,(16)$$

$$= 58.94\,\text{cm}^3.$$

Para calcular $\Delta V$ en forma aproximada se evalúa la diferencial total de la función volumen. Así,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy$$

$$= 2\pi xy\,dx + \pi x^2\,dy$$

$$= 2\pi(5)(16)(0.1) + \pi(5)^2\,(0.1)$$

$$= 58.12\,\text{cm}^3.$$

Finalmente se obtienen los errores absoluto $E_a$ y relativo $E_r$ que se cometen al utilizar la diferencial en lugar del incremento exacto:

$$E_a = \left|\Delta V - dV\right|$$

$$= \left|58.94 - 58.12\right|$$

$$= 0.82\,\text{cm}^3$$

$$E_r = \frac{E_a}{\Delta V} \times 100$$

$$= \frac{0.82}{58.94} \times 100$$

$$\doteq 1.4\ \%.$$

## Ejemplo 27.

Calcular un valor aproximado de $1.02^{3.01}$ utilizando el concepto de diferencial.

**Solución:** Considérese la expresión $z = x^y$ con los siguientes valores

$$x = 1; \qquad y = 3; \qquad \Delta x = 0.02; \qquad \Delta y = 0.01.$$

El valor de $z$ en $(x, y) = (1, 3)$ es $z = 1^3 = 1$, y a este valor se le sumara la diferencial como una aproximación del incremento. Luego

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \\ &= yx^{y-1}\, dx + x^y \ln x\, dy \\ &= 3(1)^2\,(0.02) + (1)^3 \ln 1(0.01) \\ &= 0.06 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$1.02^{3.01} \approx 1 + 0.06 = 1.06.$$

Por otro lado, si se utiliza una calculadora se puede obtener un resultado más exacto expresado hasta cuatro cifras decimales. El resultado es 1.0614. Por lo tanto, con la diferencial se obtuvo un resultado bastante cercano. ¡14 diezmilésimas de diferencia!

## Ejemplo 28.

Calcular un valor aproximado de

$$\text{sen } 32° \cos 59°$$

utilizando el concepto de diferencial.

**Solución:** Considérese la expresión $z = \operatorname{sen} x \cos y$, con los siguientes valores:

$$x = 30° = \frac{\pi}{6}\ \text{rad} \qquad y = 60° = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

$$dx = 2° = 0.035\ \text{rad} \qquad dy = -1° = -0.017\ \text{rad}.$$

El valor de $z$ en $(x, y) = (30°, 60°)$ es

$$z = \operatorname{sen} 30° \cdot \cos 60°$$
$$z = (0.5)(0.5)$$
$$z = 0.25$$

y el valor de la diferencial de la función es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

$$= \cos x \cos y\, dx + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} y)\, dy$$

$$= \cos 30° \cdot \cos 60°(0.035) + \operatorname{sen} 30°(-\operatorname{sen} 60°)(-0.017)$$

$$= 0.0152 + 0.0074$$

$$= 0.023.$$

Sumándole este valor a $z$

$$z + dz = 0.273.$$

Luego,

$$\operatorname{sen} 32° \cos 59° \doteq 0.273.$$

## Ejemplo 29.

La aceleración de la gravedad, $g$, se puede determinar por medio de la fórmula $s=(1/2)gt^2$, donde $s$ es la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre y $t$ es el tiempo de recorrido. Determinar el error relativo, $e_r$, al calcular $g$, si al medir $s$ y $t$ se han cometido pequeños errores.

**Solución:** Como $g=\dfrac{2s}{t^2}$

$$dg=\frac{\partial g}{\partial s}\,ds+\frac{\partial g}{\partial t}\,dt=\frac{2}{t^2}\,ds-\frac{4s}{t^3}\,dt$$

entonces

$$e_r=\left|\frac{\dfrac{2}{t^2}\,ds-\dfrac{4s}{t^3}\,dt}{\dfrac{2s}{t^2}}\right|\times 100=\left|\frac{ds}{s}-\frac{2\,dt}{t}\right|\times 100\,.$$

## Ejemplo 30.

El calor $H$ dado por un calentador eléctrico está determinado por la fórmula

$$H=\frac{KV^2}{R},$$

donde $V$ es voltaje aplicado; $R$, la resistencia eléctrica y $K$ una constante. Si en cierto momento se tenía $V=110$ volts y $R=12$ ohms, y repentinamente el voltaje decrece a 103 volts, ¿cuánto deberá decrecer la resistencia para que se mantenga el mismo valor de $H$?

**Solución:** La diferencial de la función calor está dada por

$$dH = \frac{\partial H}{\partial V}\,dV + \frac{\partial H}{\partial R}\,dR = \frac{2KV}{R}\,dV - \frac{KV^2}{R^2}\,dR.$$

Como el voltaje cambia de 110 a 103 volts se tiene que $dV = -7$ volts y $dH = 0$, ya que se pretende mantener constante la cantidad de calor. Luego

$$0 = \frac{2K(110)}{12}(-7) - \frac{K(110)^2}{(12)^2}\,dR$$

de donde

$$dR \doteq -1.53 \text{ ohms.}$$

### 2.3.4 Diferenciales sucesivas

Sea $f(x, y)$ una función escalar y sea $z = f(x, y)$. Su diferencial total está dada por la expresión

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Si se considera a su vez a $dz$ como una función diferenciable, tomando a los incrementos $dx$ y $dy$ como constantes (ya que son variables independientes de $x$ y $y$ como se comentó abajo de la definición de la diferencial $df$), su diferencial total $d(dz)$ estará dada por (la cual se denota también como $d^2z$)

$$d(dz) = d^2z = \frac{\partial(dz)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}\,dy$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{dx}\,dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{dy}\,dy$$

como $dx$ y $dy$ son independientes de $x$ y $y$, al efectuar las derivadas de la expresión anterior se toman como constantes. Así,

$$d^2z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy$$

y finalmente

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy\;+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2,$$

lo que se conoce como la *segunda diferencial* de la función $z=f(x,\,y)$. Si esta es a su vez otra función diferenciable se podría calcular la *tercera diferencial* de $z$, obteniéndose

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}(dx)^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3.$$

Al observar estos resultados se nota que los coeficientes, los órdenes de derivación y los exponentes de las diferenciales son análogos a los coeficientes y exponentes del desarrollo del binomio de Newton. Se puede demostrar que esto siempre es cierto para diferenciales de cualquier orden (la demostración, aunque sencilla, no se dará aquí). Entonces, las expresiones para las diferenciales de órdenes $1,\,2,\cdots,\,n$ se pueden escribir como

$$dz=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx\;+\;\frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^1 z=\left[(dx,\,dy)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^1 z=(d\mathbf{r}\cdot\nabla)^1 z$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx\;+\;\frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z=(d\mathbf{r}\cdot\nabla)^2 z$$

$$\vdots$$

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx\;+\;\frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z=(d\mathbf{r}\cdot\nabla)^n z.$$

## Ejemplo 31.

Comprobar que las dos expresiones para $dz$ dadas arriba son equivalentes.

**Solución:**

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(dx\frac{\partial}{\partial x}dx\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(dx\frac{\partial}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(dy\frac{\partial}{\partial x}dx\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(dy\frac{\partial}{\partial y}dy\right)\right]z$$

pero como los incrementos $dx$ y $dy$ se toman como constantes

$$d^2z = \left[(dx)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + dx\,dy\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + dy\,dx\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} + (dy)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]z$$

$$= (dx)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,dx\,dy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (dy)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2,$$

cómo se quería comprobar.

En general, para $n$ arbitraria se tiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}(dx)^{n-k}(dy)^k.$$

## Ejemplo 32.

Calcular las tres primeras diferenciales totales sucesivas de

$$z = 2x^3y^2 - 3x^2y^4.$$

**Solución:**

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(6x^2y^2 - 6xy^4\right)dx + \left(4x^3y - 12x^2y^3\right)dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$= \left(12xy^2 - 6y^4\right)(dx)^2 + \left(24x^2y - 48xy^3\right)dx\,dy + \left(4x^3 - 36x^2y^2\right)(dy)^2$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}(dx)^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$

$$= 24y^2(dx)^3 + \left(72xy - 72y^3\right)(dx)^2\,dy + \left(36x^2 - 216xy^2\right)dx(dy)^2 - 72x^2y(dy)^3.$$

## Ejercicios

**2.32.** Se desea construir un tanque cilíndrico que tenga 2 m de radio interior y 6 m de altura interior, el espesor del material es, en la tapa y la base, de 6 cm y en la superficie lateral de 4 cm. Utilizando el concepto de diferencial calcular el costo aproximado del material empleado si el precio por metro cúbico es de 1250.00 pesos/$m^3$

**Solución:** El precio aproximado es $ 5 654.86.

**2.33.** Obtener la diferencial total de las funciones:

a) $f(x, y) = \ln(y/x)$
b) $f(x, y) = e^{x}\cos y + e^{-x}\operatorname{sen} y.$

**Solución:**
(a) $df = -\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$ ; (b) $df = \left(e^{x}\cos y - e^{-x}\operatorname{sen} y\right)dx + \left(-e^{x}\operatorname{sen} y + e^{-x}\cos y\right)dy.$

**2.34.** Estimar el incremento en área de un triángulo si su base es incrementada de 2.0 a 2.05 cm y su altura se mantiene constante en el valor de 3 cm.

**Solución:** $dA = \dfrac{3}{40}$ .

**2.35.** El "peso específico" de un objeto se define como $\rho = a/(a-w)$, donde $a$ es el peso del objeto en aire y $w$ es el peso en el agua. Si $a$ es igual a 6 lb, con un error posible de 1 %, y $w$ es igual a 5 lb con un posible de error de 2 %, ¿Cuál es el máximo error en dicho "peso específico"?

**Solución:** $dp_{esp} = \dfrac{(-5)(\pm 0.06) + (6)(\pm 0.1)}{(6-5)^2}$ ; $\Rightarrow$ Error máximo $= \dfrac{9}{10}$ .

**2.36.** Un tanque, como el mostrado en la figura EJ.2-36 fue medido, dando un radio de 5 m y una longitud de 14 m. Sin embargo, el dispositivo usado para medir presenta un error de 1 % ¿Cuál es el máximo error en el volumen del tanque?

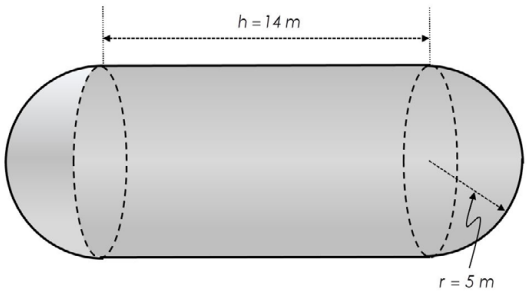



FIGURA EJ-2-36.

**Solución:** $dV = 48.6946.$

**2.37.** Dada la función $f(x, y)$, demostrar que si sus derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ son continuas en el punto $(a, b)$, entonces $f(x, y)$ es diferenciable en ese punto.

**2.38.** Para medir el ancho $x$ de un río se miden los ángulos $\varphi$, $\theta$ y la distancia $u$ (ver figura EJ-2-38), obteniéndose los siguientes resultados y precisiones

$$\varphi = 15° \pm 1'$$
$$\theta = 75° \pm 1'$$
$$u = 20\,\text{m} \pm 0.2\,\text{m}$$

Calcular aproximadamente el máximo ancho posible del río.

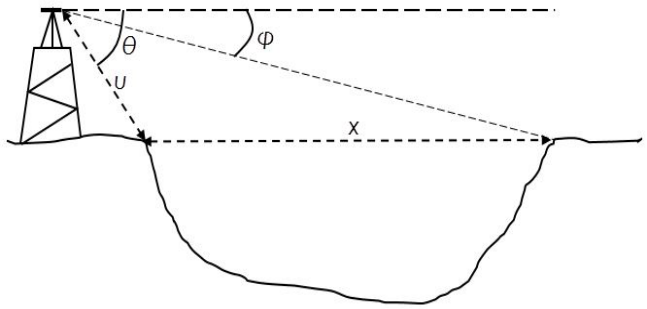



FIGURA EJ-2-38.

**2.39.** En un banco se funden lingotes de oro como el que se muestra en la figura EJ-2-39. Si el precio del oro es \$20, 000.00/cm$^3$ y las dimensiones de los lingotes son

$$H = 6.05\,\text{cm}$$
$$B_1 = 5.01\,\text{cm}$$
$$B_2 = 7.98\,\text{cm}$$
$$L = 20.02\,\text{cm}$$

hallar aproximadamente cuánto se gana o se pierde al comprar un lingote si el volumen se calcula con medidas aproximadas al centímetro.

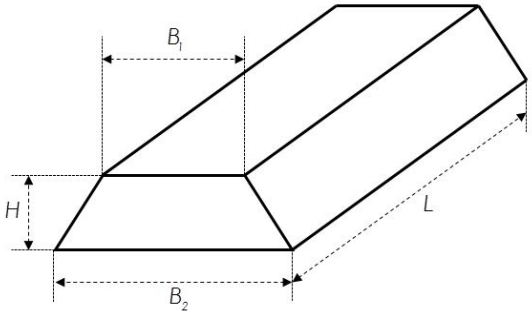



FIGURA EJ-2-39.

**2.40.** Se vende un terreno en una avenida a \$60, 000.00/m$^2$, con las dimensiones aproximadas de la figura EJ-2-40. Para concretar el precio total, debe hacerse un levantamiento. Un topógrafo cobra \$50, 000 por hacerlo con teodolito y cinta, garantizando un error no mayor de 10 cm en las longitudes, y no mayor de $1'$ en los ángulos; o bien, cobra \$10, 000 por hacerlo con estadía, garantizando un error no mayor de 1 m en las longitudes y no mayor de $1'$ en los ángulos ¿Qué conviene más?

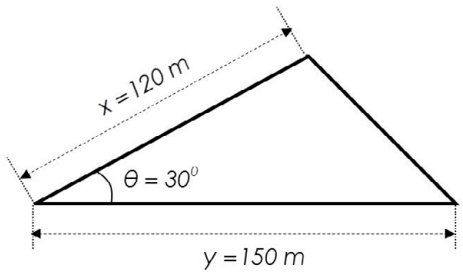



FIGURA EJ-2-40.

**2.41.** Se desea saber la cota aproximada de la superficie $2x + y^2 + z^3 - xz^2 = 8$ en el punto en que $x = 2.96$, $y = 2.05$, si se sabe que el punto (3, 2, 1) está en la superficie.

**2.42.** Calcular la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = xy + \cos xy$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

d) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^1+z^2}}$

e) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$.

**2.43.** Calcular las derivadas parciales de primero y segundo orden de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}$

c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

d) $f(x, y) = \ln(x/y)$

## 2.4 Distintos casos de derivacion explícita y regla de la cadena

En esta sección y en la siguiente lo que se ha venido llamando simplemente *derivación* se le llamará, cuando sea necesario, *derivación explícita* para distinguirla de la *derivación implícita* que se estudiara más adelante. En estas dos secciones se verán respectivamente las distintas posibilidades de la derivación explícita y la derivación implícita con ejemplos. Los casos que se verán en esta sección incluyen la derivada de funciones escalares de variable escalar $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, la derivada de funciones escalares de variable vectorial $(f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$ y la derivada de la composición de funciones. En este último caso, como es de esperarse, hará su aparición la *regla de la cadena*. Se verán conceptos tales como derivada ordinaria, derivada parcial, derivada total y diferencial total.

Para comenzar se dará un breve repaso sobre la regla de la cadena para funciones de una sola variable. Cuando se tiene que la variable $z$ es función de la variable $x$, y a su vez la variable $x$ es función de la variable $s$, es decir,

$$z=f(x) \qquad \text{y} \qquad x=g(s),$$

entonces,

$$z=f(g(s)).$$

Esta expresión define una nueva función, llamada composición de las funciones $f$ y $g$ y denotada como $f\circ g$, que al evaluarla en $s$ nos da el valor de $z$. Esto es,

$$z=(f\circ g)(s)\equiv f(g(s)).$$

En estos casos se tiene que la derivada respecto a $s$ de la función compuesta $h(s)=(f\circ g)(s)$ se puede calcular de dos formas distintas: (1) determinando explícitamente $h(s)$ y derivando respecto a $s$, o bien, (2) aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dh(s)}{ds}=\frac{df(g(s))}{ds}=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=g(s)}\cdot\frac{dg(s)}{ds}, \tag{16}$$

lo que frecuentemente se escribe en forma abreviada como (omitiendo los argumentos de las funciones)

$$\frac{df\circ g}{ds}=\frac{df}{dx}\,\frac{dg}{ds} \quad \text{o bien} \quad \frac{dh}{ds}=\frac{df}{dx}\,\frac{dg}{ds}. \tag{17}$$

Si en lugar de las funciones $f$, $g$ y $h$ se escriben las variables dependientes que representan sus valores se tiene

$$\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{ds}. \tag{18}$$

Las expresiones (17) y (18) son muy útiles, pero para usarlas correctamente siempre hay que tener en mente que su significado preciso es el indicado en la expresión (16). En estas tres expresiones se ve que la derivada de la función compuesta es igual al producto de las derivadas de las funciones que la forman.

Ahora bien, existe un resultado análogo para funciones escalares de variable vectorial llamado también *regla de la cadena* y que se discutirá a continuación. Para este tipo de funciones existen varias combinaciones de las funciones involucradas ya que en general una función $f$ puede depender de $n$ variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ las cuales, a su vez, pueden depender de $m$ variables $u_1, u_2, \cdots, u_m$. En este capítulo sólo se considerarán las combinaciones más simples, dejando para el capítulo 4 otros casos. El siguiente Teorema considera sólo el caso de una función con dos variables las cuales, a su vez, dependen de otras dos variables. Posteriormente se resolverán algunos ejemplos que incluyen otras combinaciones simples cuyo tratamiento se puede hacer sin dificultad.

**Teorema 10.** Sea la función escalar $f(x, y)$ en donde $x = g_1(s, t)$, $y = g_2(s, t)$. Sea $h$ la composición de $f$ con $(g_1, g_2)$ (que se denota como $h = f \circ (g_1, g_2)$); es decir $h(s, t) = [f \circ (g_1, g_2)](s, t) = f(g_1(s, t), g_2(s, t))$. Si las derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ son continuas, entonces se cumple que

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial s} \tag{19}$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial t} \tag{20}$$

o, en notación de variables dependientes,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \tag{21}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{22}$$

siendo $z = f(x, y)$.

Puesto que en todo lo que sigue usaremos preferentemente la notación abreviada antes de dar la demostración del teorema conviene insistir un poco más sobre su significado. En todas estas expresiones el lado izquierdo representa la derivada de una función compuesta. Por ejemplo, $\partial z/\partial s$ es una abreviación de $\partial h(s,t)/\partial s = \partial f(g_1(s,t), g_2(s,t))/\partial s$. En cambio, en el lado derecho sólo aparecen derivadas de funciones respecto a sus propias variables. Por ejemplo, $\partial z/\partial x$ es una abreviación de $\partial f(x,y)/\partial x$ y si se desea que el resultado final este todo en términos de $(s,t)$, esta expresión debe evaluarse en $x = g_1(s,t)$ y $y = g_2(s,t)$. Es decir,

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y)=(g_1(s,t),\, g_2(s,t))}$$

En la mayoría de los casos la notación abreviada es suficientemente clara. Sin embargo, cuando haya lugar a dudas (ver por ejemplo el caso 7 discutido más adelante y los ejercicios 2.43 – 2.47) conviene escribir la regla de la cadena con las funciones en vez de con las variables dependientes.

**Demostración:** Tenemos que

$$z = f(x,y)$$

con

$$x = g_1(s,t) \qquad \text{y} \qquad y = g_2(s,t).$$

Si $t$ permanece fija y $s$ cambia a un valor $s + \Delta s$ entonces las variables $x$ y $y$ sufren un incremento $\Delta x$ y $\Delta y$ respectivamente, por lo que $z$ cambia a $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Entonces se puede escribir,

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta s}.$$

Si se suma y resta $f(x, y+\Delta y)$ en el numerador, se tiene

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta s}$$

que también puede escribirse como

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta s} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta s}.$$

En el segundo miembro se observa que, en los numeradores de los dos sumandos, cambia una sola variable; en el primero la $x$, y en el segundo la $y$. Por ello se puede aplicar en ambos el teorema del valor medio del cálculo diferencial para funciones de una sola variable. Entonces, para el primer sumando se tiene que hay al menos un valor $x_1$ dentro del intervalo $[x, x+\Delta x]$ tal que

$$\left.\frac{df(x, y+\Delta y)}{dx}\right|_{x=x_1} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}$$

lo que también se expresa como

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x(x_1, y+\Delta y)\,\Delta x\,; \quad x_1 \in (x, x+\Delta x).$$

Análogamente

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y_1)\,\Delta y\,; \quad y_1 \in (y, y+\Delta y).$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = f_x(x_1, y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta s} + f_y(x, y_1)\frac{\Delta y}{\Delta s}.$$

Cuando $\Delta s$ se aproxima a cero, $\Delta x$ y $\Delta y$ se aproximan a cero y como $f_x$ y $f_y$ son continuas, entonces $f_x(x_1, y+\Delta y)$ se aproxima a $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y_1)$ se aproxima a $f_y(x, y)$. Por lo tanto

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} = f_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + f_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Igualmente se puede demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Finalmente, ambas expresiones pueden escribirse como

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

quedando demostrado el teorema de la regla de la cadena para este caso. El mismo tipo de argumentación se utiliza para demostrar las distintas variaciones de dicha regla. Más adelante se verán algunos ejemplos.

Las propiedades de la diferencial de una función compuesta están descritas en el siguiente teorema.

**Teorema 11.** La forma de la diferencial de una función escalar de variable vectorial compuesta se conserva. Es decir, dada la función

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

en donde

$$x_1 = g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$
$$x_2 = g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$
$$\vdots$$
$$x_n = g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$

y en donde en general $m$ es diferente de $n$, su diferencial está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$$

o bien por

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\, du_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\, du_m.$$

En este punto es importante hacer notar que, al contrario de lo que pasaba cuando las variables $x_i$ eran independientes y se tenía que $\Delta x_i = dx_i$ , ahora se tiene que $\Delta x_i \neq dx_i$ y son precisamente las $dx_i$ las que deben aparecer en la expresión anterior.

**Demostración:** La demostración se hará sólo para el caso particular en el que $f$ depende de dos variables $x$, $y$ y a su vez estas dependen de otras dos variables $u$, $v$. Sea $z = f(x, y)$ con $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$. Entonces

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

pero como

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

y

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

se sigue que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right)$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv$$

$$= \frac{\partial z}{du}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv.$$

Como se quería demostrar.

Habiendo visto los aspectos formales de la derivación y diferenciación de las funciones compuestas se pasarán a ver un resumen de los casos de derivación explícita más frecuentes.

1) Se comenzará por la situación más simple. Sea $y = f(x)$; entonces su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

y su diferencial, $dy = f'(x)\,dx$.

**Ejemplo 33.**

Si $y = e^x \operatorname{sen} x$ obtener su derivada $\dfrac{dy}{dx}$ y su diferencial $dy$.

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$dy = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)\,dx.$$

2) Sea $z = f(x, y)$; entonces sus derivadas parciales son

$$\frac{dz}{dx}\,;\,\frac{dz}{dy}$$

y la diferencial total es

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy.$$

## Ejemplo 34.

Si $z = 2x^2y - xy^3$ calcular sus derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ así como su diferencial total $dz$.

**Solución:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy - y^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 3xy^2$$

$$dz = \left(4xy - y^3\right)dx + \left(2x^2 - 3xy^2\right)dy.$$

3) Sea $z = f(x, y, u)$ entonces sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y}\,;\quad \frac{\partial z}{\partial u}$$

y la diferencial total es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy + \frac{\partial z}{\partial u}\,du\,.$$

## Ejemplo 35.

Si $z = x^{1/2} + y^{1/2} + u^{1/2}$ calcular sus derivadas parciales $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ y $\partial z/\partial u$ así como su diferencial total $dz$.

**Solución:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\, x^{-1/2}\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\, y^{-1/2}\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2}\, u^{-1/2}$$

$$dz = \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \frac{dy}{2\sqrt{y}} + \frac{du}{2\sqrt{u}}\,.$$

4) Sea $z = f(x, y)$ con $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$. Entonces las derivadas parciales $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ se evalúan mediante

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}$$

y la diferencial a partir de

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

o bien de

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv.$$

## Ejemplo 36.

Si $z = x^2 - xy + y^2$ con $x = uv$ y $y = u^2 + v^2$, calcular las derivadas parciales $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ y la diferencial $dz$.

**Solución:** Utilizando las expresiones anteriores:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2x - y)v + 2(-x + 2y)u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (2x - y)u + 2(-x + 2y)v$$

$$dz = (2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy$$

o bien

$$dz = \left[(2x - y)v + 2(-x + 2y)u\right]du + \left[(2x - y)u + 2(-x + 2y)v\right]dv.$$

Sustituyendo los valores de $x$, $y$, $dx$ y $dy$, se obtiene todo en términos de $u$, $v$, $du$ y $dv$.

5) Sea $z = f(x)$ y $x = g(s, t)$. Entonces, las derivadas parciales $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ se obtienen a partir de las expresiones

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}\ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial t}$$

y su diferencial, por $dz = \dfrac{dz}{dx}\,dx$.

## Ejemplo 37.

Si $z = 5x - 6$ y $x = s\tan t + s\cot t$, calcular las derivadas parciales $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ y la diferencial $dz$.

**Solución:** Utilizando las expresiones correspondientes se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 5(\tan t + \cot t); \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = 5s(\sec^2 t - \csc^2 t)$$

$$dz = 5\,dx$$

$$= 5\left[\left(\tan t + \cos t\right) ds + s\left(\sec^2 t - \csc^2 t\right) dt\right].$$

6) Sea $z = f(x, y, u)$ con $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ y $u = k(r, s)$. Entonces las derivadas parciales $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$ se determinan con las expresiones

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}$$

además

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial u}du$$

$$= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial s}ds.$$

## Ejemplo 38.

Si $z = x^2 + 2xy + 3u$, y además $x = 2r + s$, $y = r^2 + s^2$ y $u = 3r + 5s^2$, calcular las derivadas parciales $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$.

**Solución:** Al aplicar las ecuaciones anteriores se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 4x + 4y + 4xr + 9\ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = 2x + 2y + 4xs + 30s$$

$$dz = 2\left(x + y\right) dx + 2x\,dy + 3\,du$$

Sustituyendo a $x$, $y$, $u$, $dx$, $dy$ y $du$ por sus expresiones en términos de $r$ y $s$, queda todo únicamente en función de $r$ y $s$.

7) Sea $w=f(x, y, z)$ y $z=g(x, y)$. Se va a demostrar que las derivadas parciales $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$ se determinan con las expresiones

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial x} \tag{23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial g}{\partial y} \tag{24}$$

y la diferencial como

$$dw=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}\,dz, \tag{25}$$

o bien como,

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}\,dx+\frac{\partial w}{\partial y}\,dy. \tag{26}$$

Este caso es muy interesante porque la variable $w$ depende de las variables $x$ y $y$ en una forma complicada: $x$ y $y$ entran directamente como variables de $f$ pero también indirectamente a través de $g$. En estos casos es muy útil introducir elementos adicionales para hacer más clara la formulación. Así, el problema es equivalente a suponer que se tiene la expresión $w=f(r, s, t)$, donde $r=g_1(x, y)=x$, $s=g_2(x, y)=y$ y $z=g(x, y)$.

Ahora se procede con la demostración. Sea $h$ la función compuesta definida como

$$h\equiv f\circ(g_1, g_2, g),$$

o, lo que es lo mismo,

$$h(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y), g(x, y))$$

$$= f(x, y, g(x, y))$$

y por la regla de la cadena (ecuación (19) adaptada al caso en el que $f$ tiene tres variables)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Pero $\partial g_1/\partial x = 1$ y $\partial g_2/\partial x = 0$. Por lo que $\partial h/\partial x = (\partial f/\partial x) + (\partial f/\partial z)(\partial g/\partial x)$. Como $w = h(x, y) = f(x, y, g(x, y))$ se puede utilizar la notación $\partial w/\partial x$ para denotar la derivada parcial con respecto a $x$ de $h(x, y)$. Entonces,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}$$

que es la ecuación (23) que se deseaba obtener. Obsérvese que en este desarrollo $\partial f/\partial x$ es la derivada parcial con respecto a $x$ de la función simple $f$. De la misma forma se demuestran las expresiones (24)-(26).

Si se usara la notación de variables dependientes. La regla de la cadena quedaría (ecuación (21) adaptada al caso en el que $f$ tiene tres variables)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

que se reduce a

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

En esta expresión el símbolo $\partial w/\partial x$ aparece tanto en el primer miembro como en el segundo, pero tiene significados diferentes. En el lado izquierdo representa la derivada de una función compuesta y en el derecho la derivada de una función simple. Esta situación fue contemplada en el acuerdo que se tomó al principio de esta sección. Recordando dicho acuerdo este doble significado no debería causar confusiones. No obstante, para evitar ambigüedades, en general no es conveniente usar el mismo símbolo para conceptos diferentes. Por lo tanto, en este tipo de problemas, no es recomendable usar la notación de variables dependientes.

### Ejemplo 39.

Si $w=2x^2+3y^2+4z^2-12$ y $z=x^2+y^2$ calcular $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ y $dw$.

**Solución:** De las ecuaciones (23), (24) y (26) se tiene que

$$\frac{\partial w}{\partial x}=4x+(8z)(2x)=4x+16xz$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=6y+(8z)(2y)=6y+16yz$$

$$dw=(4x+16xz)\,dx+(6y+16yz)\,dy.$$

Esta expresión para $dw$ también se puede obtener usando (25). En efecto, de (25) se sigue que

$$\begin{aligned} dw &= 4x\,dx+6y\,dy+8z\,dz \\ &= 4x\,dx+6y\,dy+8(x^2+y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) \\ &= 4x\,dx+6y\,dy+8(x^2+y^2)(2x\,dx+2y\,dy) \\ &= (4x+16xz)\,dx+(6y+16yz)\,dy. \end{aligned}$$

8) Sean $z = g_1(x, y)$, $x = g_1(t)$ y $y = g_2(t)$. En este caso la derivada de $z$ con respecto a $t$ no es parcial, sino ordinaria, ya que se trata de una sola variable independiente. Por lo tanto, debe escribirse $dz/dt$ en vez de $\partial z/\partial x$ y se le denomina *derivada total.* Está dada por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

y la diferencial total es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt = \frac{dz}{dt}\,dt.$$

## Ejemplo 40.

Si $z = 4x^2 - y^2$ y además $x = \sqrt{t}$ y $y = t^2 - t + 1$, calcular la derivada total $dz/dt$ y la diferencial total $dz$.

**Solución:** Se mencionó al principio de esta sección que una forma de calcular derivadas que involucran funciones compuestas sin utilizar la regla de la cadena es obtener explícitamente la función compuesta y derivarla. Este ejemplo se resolverá en las dos formas. Sustituyendo primero $x = \sqrt{t}$ y $y = t^2 - t + 1$ en la expresión para $z$ y derivando directamente respecto a $t$, se tiene

$$z = 4x^2 - y^2 = 4t - (t^2 - t + 1)^2$$

$$\frac{dz}{dt} = 4 - 2(t^2 - t + 1)(2t - 1)$$

$$= 6 - 6t + 6t^2 - 4t^3.$$

Apliquemos ahora la regla de la cadena. En muchas ocasiones este método es más conveniente que el anterior. Esto ocurre por ejemplo cuando la relación entre las variables intermedias $x$ y $y$ con la variable independiente $t$ es implícita.

Procediendo se tiene

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

de manera que

$$\frac{dz}{dt}=8x\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)-2y(2t-1)$$

$$=8\sqrt{t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)-2\left(t^2-t+1\right)(2t-1)$$

$$=6-6t+6t^2-4t^3$$

que es lo mismo de antes. Además, la diferencial estará dada por

$$dz=8xdx-2ydy,$$

o en términos de $t$,

$$dz=\left(6-6t+6t^2-4t^3\right)dt.$$

9) Sean $z=f(x,\,y,\,u)$, $x=f(t)$, $y=g(t)$, $u=h(t)$. También en este caso la derivada de $z$ respecto a $t$ es total y está dada por

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}. \qquad (27)$$

La diferencial total es

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial u}du,$$

o bien,

$$dz = \frac{dz}{dt}\, dt,$$

ya que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy + \frac{\partial z}{\partial u}\, du = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}\, dt + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}\, dt + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{du}{dt}\, dt$$

$$= \left( \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{du}{dt} \right) dt$$

$$= \frac{dz}{dt}\, dt.$$

## Ejemplo 41.

Si $z = xy + yu + xu$ y además $x = e^t$; $y = \operatorname{sen} t$ y $u = \cos t$, calcular la derivada total $(dz/dt)$, así como la diferencial total $dz$.

**Solución:** De la regla de la cadena (ecuación (27))

$$\frac{dz}{dt} = (y+u)\, e^t + (x+u)\cos t - (x+y)\operatorname{sen} t$$

$$= 2e^t \cos t + \cos 2t$$

y la diferencial total es

$$dz = (y+u)\, dx + (x+u)\, dy + (x+y)\, du,$$

o bien, en términos de $t$,

$$dz = (2e^t \cos t + \cos 2t)\, dt.$$

### 2.4.1 Aplicaciones de la derivada total

Se ha visto que la derivada es la razón de cambio (o de variación) de la variable dependiente con respecto a la independiente. Esto por supuesto sigue siendo válido para el caso de la derivada de una composición de funciones. Por ejemplo, si se tiene una función $z = f(x, y)$, en donde $x = g(r)$ y $y = h(r)$, su derivada total

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dr}$$

es la razón de cambio de $z$ con respecto a $r$. En este caso dicha razón depende a su vez de la razón de variación de $x$ y de $y$ con respecto al mismo argumento $r$. Cuando la variable independiente es el tiempo se usan más frecuentemente los nombres de *rapidez de variación, rapidez de cambio o velocidad*. A continuación, se presentan algunos ejemplos.

**Ejemplo 42.**

La presión $P$, el volumen $V$ y la temperatura absoluta $T$ de un gas perfecto en un sistema cerrado están relacionados por la ecuación $PV = KT$, donde $K$ es una constante. En un cierto instante, cuando $P = 25\,\text{kgf}/\text{cm}^2$, $V = 40\,\text{cm}^3$ y $T = 250$ grados absolutos, el gas se está comprimiendo de tal forma que el volumen decrece un $\text{cm}^3$ por minuto y la presión aumenta a razón de $3\,\text{kgf/cm}^2$ por minuto. ¿Cuál es la rapidez de cambio de la temperatura en ese instante?

**Solución:** De la ecuación que relaciona a las variables se tiene que

$$T = \frac{1}{K}PV$$

luego, la rapidez de cambio de la temperatura es igual a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{V}{K}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{K}\frac{dV}{dt}. \qquad (28)$$

En esta ecuación vemos que efectivamente la razón de cambio de $T$ depende a su vez de la razón de cambio de $P$ y de $V$ respecto a $t$. Con los datos del problema se tiene que $K$ es igual a 4, ya que

$$K = \frac{PV}{T} = \frac{25 \times 40}{250} = 4$$

y además $\frac{dP}{dt} = 3$ y $\frac{dV}{dt} = -1$. Sustituyendo en (28) se llega a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{40}{4}(3) + \frac{25}{4}(-1)$$

$$= 23.75$$

lo que quiere decir que la temperatura aumenta a razón de 23.75 grados absolutos por minuto.

## Ejemplo 43.

Las ecuaciones del movimiento de una partícula son

$$x = t\,; \qquad y = t^2\,; \qquad z = t^3.$$

¿Con qué velocidad aumentara la distancia del punto $(x, y, z)$ al origen de coordenadas?

**Solución:** La distancia del punto al origen está dada por la expresión

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Aplicando la derivada total se tendrá la velocidad con la que aumenta dicha distancia. Así,

$$\frac{dD}{dt}=\frac{\partial D}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial D}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial D}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(1)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2t)+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(3t^2)$$

$$=\frac{t(1)+t^2(2t)+t^3(3t^2)}{\sqrt{t^2+t^4+t^6}}.$$

Por lo tanto, la rapidez con la que aumenta dicha distancia es

$$\frac{dD}{dt}=\frac{1+2t^2+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

## Ejemplo 44.

En un instante dado, la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de 8 cm y crece a razón de 2 cm/min, y la longitud del otro cateto es de 10 cm y decrece a razón de 3 cm/min. Calcular la razón de cambio del ángulo agudo opuesto al cateto de 10 cm en el instante dado (ver la figura 2.21).

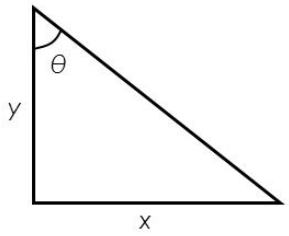



**FIGURA 2.21.** Triángulo cuyo cateto horizontal en un cierto instante tiene una longitud de 10 cm y el cateto vertical de 8 cm.

**Solución:** La relación del ángulo con los catetos está dada por

$$\theta=\text{ang tan}\ \frac{x}{y}$$

de donde la derivada total será

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

por lo que

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{dx}{dt}-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{dy}{dt}\,.$$

En el instante considerado $x=10\,\text{cm}$, $y=8\,\text{cm}$, $(dx/dt)=-3$ $y\,(dy/dt)=2$, de modo que la razón con la que decrece el ángulo considerado es

$$\frac{d\theta}{dt}\doteq -0.268\ \text{rad/min}.$$

## Ejercicios

**2.44.** Si $z=y/x$ donde $x=rs$ y $y=r/s$, calcular $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$.

**Solución:** $\dfrac{\partial z}{\partial r}=-\left(\dfrac{y}{x^2}\right)s+\left(\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{s}$; $\dfrac{\partial z}{\partial s}=-\left(\dfrac{y}{x^2}\right)r-\left(\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{r}{s^2}$.

**2.45.** Si $\beta=x^3-2y^4+xyz$, con $x=uvw$, $y=u^2+v^2+w^2$ y $z=u$, calcular las derivadas parciales $(\partial\beta/\partial u)$, $(\partial\beta/\partial v)$, $(\partial\beta/\partial w)$ y la diferencial $d\beta$.

**Solución:** $\dfrac{\partial\beta}{\partial u}=(3x^2+yz)(vw)+(-8y^3+x^2)(2u)+xy$;

$$\frac{\partial\beta}{\partial v}=(3x^2+yz)(uw)+(-8y^3+x^2)(2v);$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial w}=(3x^2+yz)(uv)+(-8y^3+x^2)(2w);$$

$$d\beta=\frac{\partial\beta}{\partial u}du+\frac{\partial\beta}{\partial v}dv+\frac{\partial\beta}{\partial w}dw.$$

**2.46.** Si $z = 2x^2 - 3y^3$, con $x = u + v + w$ y $y = u^2 v^2 w^2$, calcular las derivadas parciales $(\partial z/\partial u)$, $(\partial z/\partial v)$, $(\partial z/\partial w)$ y la diferencial $dz$.

**Solución:** $\frac{\partial z}{\partial u} = 4x - 18y^2 uv^2 w^2$ ; $\frac{\partial z}{\partial v} = 8xuv^2 w^2 - 18y^2 u^2 vw^2$;

$\frac{\partial z}{\partial w} = 4x - 18y^2 u^2 v^2 w$; $dz = \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, \partial v + \frac{\partial z}{\partial w}\, dw$.

**2.47.** Si $m = x^2 y$ con $x = t$ y $y = t^2 + t^3$, calcular la derivadas $dm/dt$ y la diferencial $dm$.

**Solución:** $\frac{dm}{dt} = 4t^3 + 5t^4$; $dm = \left(4t^3 + 5t^4\right) dt$.

**2.48.** Suponiendo que $y = x^2 e^x$ y que $x = 2s + t^2$, calcular las derivadas parciales $(\partial y/\partial s)$, $(\partial y/\partial t)$ y la diferencial $dy$.

**Solución:**

$\frac{\partial y}{\partial s} = 2\left(2 + 2s + t^2\right)\left(2s + t^2\right) e^{2s+t^2}$; $\frac{\partial y}{\partial t} = 2t\left(2 + 2s + t^2\right)\left(2s + t^2\right) e^{2s+t^2}$;

$dy = \frac{\partial y}{\partial s}\, ds + \frac{\partial y}{\partial t}\, dt$.

**2.49.** Si $m = x^2 + y^3 z^2$ con $x = 2z$ y $y = z^2 + 2$, calcular la derivada $(dm/dz)$, la derivada parcial $(\partial m/\partial z)$ y la diferencial $dm$.

**2.50.** Sea $r = (xy/zw)$ con $x = z + w$ y $y = z^3 w^4$. Evaluar las derivadas parciales respecto a $w$ y $z$ de la función compuesta $r\left(x(z, w), y(z, w), z, w\right)$, y de la función simple $r(x, y, z, w)$. Determinar también $dr$.

**2.51.** Si $r = \cos xz^2 + \text{sen}\, yzw$, con $z = x + y$ y $w = xy$, calcular las derivadas parciales respecto a $x$ y $y$ de la función compuesta $r\left(x, y, z(x, y), w(x, y)\right)$, y de la función simple $r(x, y, z, w)$. Calcular también la diferencial $dr$.

**2.52.** Sea $s=2x^2y^3+xt$ con $x=\cos t$ y $y=\operatorname{sen} t$; calcular la derivada total $(ds/dt)$, la derivada parcial $(\partial s/\partial t)$ y la diferencial $ds$.

**2.53.** Si $s=xyt$, con $x=\sqrt{t}$ y $y=\cos t$, calcular la derivada parcial $(\partial s/\partial t)$, la derivada total $(ds/dt)$ y la diferencial $ds$.

**2.54.** Sea $m=x^2+y^2+z^2+w^2$ con $x=z+w$ y $y=z^2w$. Determinar las derivadas parciales respecto a $z$ y $w$ de la función compuesta $m(x(z,w),y(z,w),z,w)$ y de la función simple $m(x,y,z,w)$. Calcular también la diferencial $dm$.

## 2.5 Derivación implícita

Cuando se tiene una expresión de la forma $F(x,y,z)=0$, siendo $F(x,y,z)$ una función de $x$, $y$ y $z$, a veces ocurre que esta ecuación define una o varias funciones de $x$ y de $y$. Así por ejemplo, si se tiene la expresión

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

al despejar a $z$ se obtiene

$$z=+\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{o bien} \quad z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

y si $x$ y $y$ son tales que $x^2+y^2\leq 1$ entonces estas dos expresiones definen dos funciones de $x$ y $y$. Se dice entonces que estas funciones esta implícitamente definida por la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Como se observa, se trata de la ecuación de una esfera y las dos funciones implícitas expresadas definen sus dos hemisferios, norte y sur. Sin embargo, no toda ecuación $F(x, y, z)=0$ define una función implícita de la forma $f(x, y)$. Considérese la ecuación anterior pero ahora con un signo + en el 1: $x^2+y^2+z^2+1=0$. Como el cuadrado de todo número real es siempre un número real positivo esta ecuación no tiene solución. En todos los ejemplos que se discutirán abajo se supondrá que las ecuaciones analizadas si definen funciones implícitas.

Un problema de interés es evaluar $(\partial z/\partial x)$ y $(\partial z/\partial y)$ sin necesidad de despejar a $z$ de la expresión $F(x, y, z)=0$ y utilizar únicamente las derivadas parciales de $F$. En esta sección se estudiará cómo resolver este tipo de problemas. En general, hay varias combinaciones posibles que dependen del número de variables y del número de funciones igualadas a cero que se tengan. En lo que sigue se verán unos cuantos casos que nos permitirán tener una idea de cómo proceder en general.

1) Se principiará considerando el caso más simple: una ecuación con dos incógnitas

$$F(x, y)=0,$$

en donde se supone que existe una función $f(x)$ definida implícitamente tal que $F(x, f(x))=0$. Se va a demostrar de dos formas diferentes que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y},$$

donde $y=f(x)$.

**Primera demostración:** Calculando la diferencial de $F(x, y)=0$ se tiene

$$F_x\,dx+F_y\,dy=0 \quad \Rightarrow \quad dy=-\frac{F_x}{F_y}\,dx.$$

Comparando esto con la expresión que define la diferencial de $y=f(x)$:

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx$$

se ve que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

**Segunda demostración:** Calculando mediante la regla de la cadena la derivada respecto a $x$ de $h(x) = F(x, y(x)) = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

de lo cual resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

## Ejemplo 45.

Sea $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$.

**Solución:** El problema se resolverá de dos formas. La primera es utilizando la fórmula obtenida arriba:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}.$$

La segunda es utilizando uno de los casos más simples del método de derivación implícita que consiste en derivar directamente la ecuación $x^2 + y(x)^2 - 1 = 0$, en

donde la derivada de la función $y(x)$ sólo se deja indicada (ya que la forma explícita de $y(x)$ puede no conocerse). Por ejemplo, la derivada de $y^2(x)$ se escribe como $\frac{dy^2(x)}{dx} = 2y(x)\frac{dy(x)}{dx}$.

De esta manera se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

que al despejar $\frac{dy}{dx}$ se obtiene lo mismo que antes. Este método es en esencia la aplicación de la regla de la cadena. En efecto, consideremos nuevamente la función $y^2(x)$. esta es la composición de la función $f(u) = u^2$ con la función $y(x)$ y al aplicar la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{df \circ y}{dx} = \frac{du^2}{du}\frac{dy}{dx} = 2u\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

## Ejemplo 46.

Sea $e^x \ln y - \frac{y}{x} = 0$. Calcular $\frac{dy}{dx}$.

**Solución:** Utilizando la fórmula.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x \ln y + \frac{y}{x^2}}{\frac{e^x}{y} - \frac{1}{x}}.$$

A continuación, se van a deducir fórmulas para las derivadas implícitas de casos mucho más generales. Todas ellas se pueden demostrar utilizando la regla de la cadena, pero aquí se seguirá otro camino.

2) Considérese el caso de la expresión $F(x, y, z)=0$, la cual se supondrá que define una función $z=f(x, y)$ en una región del plano $XY$. Si se calcula la diferencial de la igualdad anterior se tiene

$$dF = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = 0$$

$$\Rightarrow dz = -\frac{F_x}{F_z}\, dx - \frac{F_y}{F_z}\, dy \tag{29}$$

donde $F_x=(\partial F/\partial x)$, $F_y=(\partial F/\partial y)$ y $F_z=(\partial F/\partial z)$. Se ve además que para que exista $dz$ se debe cumplir que $F_z \neq 0$.

Por otro lado, comparando (29) con la expresión que define la diferencial total de $z=f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \tag{30}$$

se ve que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

que son las expresiones que se querían obtener.

## Ejemplo 47.

Si se tiene $x^2yz + xy^2z + xyz^2 - 1 = 0$ calcular $\frac{\partial y}{\partial x}$ y $\frac{\partial y}{\partial z}$.

**Solución:**

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xyz + y^2z + yz^2}{x^2z + 2xyz + xz^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y} = -\frac{x^2y + xy^2 + 2xyz}{x^2z + 2xyz + xz^2}.$$

## Ejemplo 48.

Sea la función $u$ definida mediante la expresión

$$\operatorname{sen}\frac{x}{y} + x^2y^3zu - \operatorname{ang\,tan}(zy) = 1.$$

Obtener las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$.

**Solución:** Aquí, en vez de utilizar directamente las fórmulas obtenidas arriba, se aplicara la derivación implícita (o equivalentemente la regla de la cadena) a la ecuación $\operatorname{sen}\frac{x}{y} + x^2y^3zu(x, y, z) - \operatorname{ang\,tan}(zy) = 1$. Así, derivando implícitamente respecto a $x$

$$\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} + x^2y^3z\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy^3zu = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\cos\frac{x}{y}}{x^2y^4z} - \frac{2u}{x}.$$

Derivando implícitamente respecto a $y$

$$-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+x^2y^3z\frac{\partial u}{\partial y}+3x^2y^2zu-\frac{z}{1+y^2z^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^2y^3\left(1+y^2z^2\right)}+\frac{\cos\frac{x}{y}}{xy^5z}-\frac{3u}{y}$$

y derivando implícitamente respecto a $z$

$$x^2y^3z\frac{\partial u}{\partial z}+x^2y^3u-\frac{y}{1+y^2z^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x^2y^2z\left(1+y^2z^2\right)}-\frac{u}{z}.$$

3) Sean ahora $F(x, y, u, v)=0$ y $G(x, y, u, v)=0$ dos ecuaciones tomadas como simultáneas. Si el sistema formado por $F$ y $G$ define dos funciones implícitas de manera que $x$ y $y$ queden expresadas en términos de $u$ y $v$, es decir,

$$x=f(u, v) \qquad \text{y} \qquad y=g(u, v),$$

un problema de interés es evaluar las derivadas $(\partial x/\partial u)$, $(\partial x/\partial v)$, $(\partial y/\partial u)$ y $(\partial y/\partial v)$ a partir de las derivadas de $F$ y $G$. Si se determinan las diferenciales de $F$ y G se tendrá

$$F_x\,dx+F_y\,dy+F_u\,du+F_v\,dv=0 \tag{31}$$

$$G_x\,dx+G_y\,dy+G_u\,du+G_v\,dv=0 \tag{32}$$

que son dos ecuaciones con cuatro incógnitas: $dx$, $dy$, $du$, $dv$. Si se considera a $u$ y $v$ como independientes, se puede expresar $dx$ y $dy$ en términos de $du$ y $dv$. Así,

$$F_x\,dx + F_y\,dy = -F_u\,du - F_v\,dv$$

$$G_x\,dx + G_y\,dy = -G_u\,du - G_v\,dv.$$

Si se resuelve este sistema por la regla de Cramer:

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} -F_u\,du - F_v\,dv & F_y \\ -G_u\,du - G_v\,dv & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$$

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} F_x & -F_u\,du - F_v\,dv \\ G_x & -G_u\,du - G_v\,dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}.$$

Por propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} -F_u\,du - F_v\,dv & F_y \\ -G_u\,du - G_v\,dv & G_y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} F_v & F_y \\ G_v & G_y \end{vmatrix} dv$$

$$\begin{vmatrix} F_x & -F_u\,du - F_v\,dv \\ G_x & -G_u\,du - G_v\,dv \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} F_x & F_u \\ G_x & G_u \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} dv.$$

Por lo tanto,

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} du - \frac{\begin{vmatrix} F_v & F_y \\ G_v & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} dv$$

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_u \\ G_x & G_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} du - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} dv$$

donde para que existan $dx$ y $dy$ se debe cumplir que

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Los determinantes que se tienen aquí están formados de un modo especial. Son las derivadas parciales de las funciones $F$ y $G$ con respecto a dos de sus variables. Tales determinantes se conocen como *determinantes jacobianos*, o simplemente *jacobianos*, y se denotan como sigue:

Para el denominador de los segundos miembros de $dx$ y $dy$ se utiliza

$$J\left(\frac{FG}{xy}\right) = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

y se le llama jacobiano de $F$ y $G$ con respecto a $x$ y $y$. En ocasiones también se usan las notaciones

$$J\left(\frac{F, G}{x, y}\right) \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}.$$

Asimismo, se definen los siguientes cuatro jacobianos

$$J\left(\frac{FG}{uy}\right) = \begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}; \qquad J\left(\frac{FG}{vy}\right) = \begin{vmatrix} F_v & F_y \\ G_v & G_y \end{vmatrix}$$

$$J\left(\frac{FG}{xu}\right) = \begin{vmatrix} F_x & F_u \\ G_x & G_u \end{vmatrix}; \qquad J\left(\frac{FG}{xv}\right) = \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}.$$

Continuando: utilizando esta notación se puede escribir

$$dx = -\frac{J\left(\frac{FG}{uy}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}du - \frac{J\left(\frac{FG}{vy}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}dv \tag{33}$$

$$dy = -\frac{J\left(\frac{FG}{xu}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}du - \frac{J\left(\frac{FG}{xv}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}dv. \tag{34}$$

Por otra parte, comparando (33) y (34) con las expresiones que definen a las diferenciales totales de $x = f(u, v)$ y $y = g(u, v)$:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

se tiene que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{FG}{uy}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{FG}{vy}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{FG}{xu}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{FG}{xv}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)},$$

que son las cuatro derivadas parciales de interés cuando $u$ y $v$ son las variables independientes. Nótese que en el denominador siempre va el jacobiano de las funciones con respecto a las variables dependientes y en el numerador única-

mente se sustituye la variable que se deriva por la variable con respecto a la cual se deriva.

Análogamente se tiene que, si el sistema formado por $F$ y $G$ se puede resolver de tal forma que $u$ y $v$ queden en función de $x$ y $y$, o sea

$$u = h(x, y) \qquad \text{y} \qquad v = p(x, y),$$

un problema de interés es calcular las derivadas $(\partial u/\partial x)$, $(\partial u/\partial y)$, $(\partial v/\partial x)$ y $(\partial v/\partial y)$ a partir de las derivadas de $F$ y $G$. Partiendo nuevamente de las ecuaciones (31) y (32):

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_u\,du + F_v\,dv = 0$$

$$G_x\,dx + G_y\,dy + G_u\,du + G_v\,dv = 0.$$

Al considerar a $x$ y a $y$ como variables independientes se expresan $du$ y $dv$ en términos de $dx$ y $dy$ Así,

$$F_u\,du + F_v\,dv = -F_x\,dx - F_y\,dy$$

$$G_u\,du + G_v\,dv = -G_x\,dx - G_y\,dy$$

y otra vez, utilizando la regla de Cramer, las propiedades de los determinantes y la definición de jacobianos se obtiene

$$du = -\frac{J\left(\frac{FG}{xv}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}dx - \frac{J\left(\frac{FG}{yv}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}dy$$

$$dv = -\frac{J\left(\frac{FG}{ux}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}dx - \frac{J\left(\frac{FG}{uy}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}dy.$$

Comparando con las diferenciales totales de $u = h(x, y)$ y $v = p(x, y)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{FG}{xv}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{J\left(\frac{FG}{yv}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{FG}{ux}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{J\left(\frac{FG}{uy}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}$$

en donde, para que existan estas derivadas parciales, se debe cumplir que

$$J\left(\frac{FG}{uv}\right) \neq 0.$$

Nótese por ejemplo que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{FG}{uy}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{FG}{xv}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}$$

por lo que en general

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}}.$$

## Ejemplo 49.

Sean $F = u^2 - v^2 - x^3 + 3y = 0$

$G = u + v - y^2 - 2x = 0$

Determinar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

**Solución:** Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{FG}{xv}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}$$

se calculan los jacobianos

$$J\left(\frac{FG}{uv}\right) = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2u + 2v$$

y

$$J\left(\frac{FG}{xv}\right) = \begin{vmatrix} -3x^2 & -2v \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3x^2 - 4v.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{-3x^2 - 4v}{2u + 2v} = \frac{3x^2 + 4v}{2(u + v)}.$$

Se puede comprobar este resultado derivando implícitamente respecto a $x$ las ecuaciones para $F$ y $G$. Esto da

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} - 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}-2=0$$

que al resolverlas para $\frac{\partial u}{\partial x}$ se obtiene el resultado mostrado arriba.

Continuando se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{J\left(\frac{FG}{yv}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}3 & -2v\\ -2y & 1\end{vmatrix}}{2(u+v)}=\frac{4yv-3}{2(u+v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{J\left(\frac{FG}{ux}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}2u & -3x^2\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{2(u+v)}=\frac{4u-3x^2}{2(u+v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{J\left(\frac{FG}{uy}\right)}{J\left(\frac{FG}{uv}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}2u & 3\\ 1 & -2y\end{vmatrix}}{2(u+v)}=\frac{4uy+3}{2(u+v)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{J\left(\frac{FG}{uy}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}2u & 3\\ 1 & -2y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3x^2 & 3\\ -2 & -2y\end{vmatrix}}=\frac{4uy+3}{6x^2y+6}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{J\left(\frac{FG}{vy}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}-2v & 3\\ 1 & -2y\end{vmatrix}}{6(x^2y+1)}=\frac{3-4vy}{6(1+x^2y)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{FG}{xu}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} -3x^2 & 2u \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{6\left(1+x^2y+1\right)} = \frac{3x^2-4u}{6\left(1+x^2y\right)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{FG}{xv}\right)}{J\left(\frac{FG}{xy}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} -3x^2 & -2v \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{6\left(1+x^2y\right)} = \frac{3x^2+4v}{6\left(1+x^2y\right)} .$$

4) Considérese ahora el caso de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$F\left(x, y, z\right) = 0$$

$$G\left(x, y, z\right) = 0.$$

En este caso sólo una variable puede tomarse como independiente.

Tómese por ejemplo a $x$. Entonces,

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = 0$$

$$G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_y\,dy + F_z\,dz = -F_x\,dx \\ G_y\,dy + G_z\,dz = -G_x\,dx. \end{cases}$$

Resolviendo por la regla de Cramer

$$dy = \frac{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)}\left(-dx\right) \qquad \text{y} \qquad dz = \frac{J\left(\frac{F, G}{y, x}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)}\left(-dx\right)$$

de donde

$$\frac{\partial y}{dx} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{dx} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{y, x}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)}.$$

De manera semejante se llega a (tomando a $z$ o a $y$ como independientes)

$$\frac{\partial x}{dy} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{z, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{dz} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)}$$

o bien

$$\frac{\partial x}{dy} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{dy} = -\frac{J\left(\frac{F, G}{x, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}.$$

## Ejemplo 50.

Sean las ecuaciones

$$F = xyz - 1 = 0$$

$$G = xy + yz + xz - 3 = 0.$$

Determinar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$.

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{J\left(\frac{F, G}{x, z}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} yz & xy \\ y+z & y+x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} xz & xy \\ x+z & y+x \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-y^2z - xyz + xy^2 + xyz}{xyz + x^2z - x^2y - xyz} = \frac{y^2(x-z)}{x^2(z-y)}$$

y

$$\frac{dz}{dx} = \frac{J\left(\frac{F, G}{y, x}\right)}{J\left(\frac{F, G}{y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} xz & yz \\ x+z & y+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} xz & xy \\ x+z & y+x \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-xyz - xz^2 + xyz + yz^2}{xyz + x^2z - x^2y - xyz} = \frac{z^2(y-x)}{x^2(z-y)}.$$

5) Se verá ahora el caso de tres ecuaciones con cinco incógnitas:

$$F(x, y, z, u, v) = 0; \quad G(x, y, z, u, v) = 0; \quad H(x, y, z, u, v) = 0.$$

En este sistema sólo se pueden tomar dos variables independientes y las otras tres como dependientes. Tomando diferenciales en ambos miembros de las tres ecuaciones consideradas:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + F_u\,du + F_v\,dv = 0$$

$$G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dz + G_u\,du + G_v\,dv = 0$$

$$H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz + H_u\,du + H_v\,dv = 0.$$

Si se consideran $u$ y $v$ como variables independientes, el sistema anterior se puede resolver para las incógnitas $dx$, $dy$ y $dz$ en términos de $du$ y $dv$. Así,

$$\begin{aligned} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz &= -F_u\,du - F_v\,dv \\ G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dz &= -G_u\,du - G_v\,dv \\ H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz &= -H_u\,du - H_v\,dv \end{aligned}$$

de donde, si se resuelve por la regla de Cramer, se aplican las propiedades de los determinantes y se comparan los resultados con las diferenciales de $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ y $z=h(u,v)$. Se obtiene que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{F,G,H}{u,y,z}\right)}{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,z}\right)}; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{F,G,H}{v,y,z}\right)}{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,z}\right)}$$

y del mismo modo

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{F,G,H}{x,u,z}\right)}{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,z}\right)}; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{F,G,H}{x,v,z}\right)}{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,z}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,u}\right)}{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,z}\right)}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,v}\right)}{J\left(\frac{F,G,H}{x,y,z}\right)}.$$

## Ejemplo 51.

Evaluar $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ para

$$F = x^2 + y^2 + z - uv = 0$$
$$G = x^2 - y^2 + \frac{u}{v} = 0$$
$$H = xyz + u + v = 0.$$

**Solución:**

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{u, y, z}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} -v & 2y & 1 \\ 1/v & -2y & 0 \\ 1 & xz & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y & 1 \\ 2x & -2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\left[2xy^2v + \frac{xz}{v} + 2y - \frac{2xy^2}{v}\right]}{\left[-4x^2y^2 + 2x^2z + 2y^2z - 4x^2y^2\right]} = \frac{2xy^2v + \frac{xz}{v} + 2y - \frac{2xy^2}{v}}{8x^2y^2 - 2z\left(x^2+y^2\right)}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, v}\right)}{J\left(\frac{F, G, H}{x, y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & 2y & -u \\ 2x & -2y & -u/v^2 \\ yz & xz & 1 \end{vmatrix}}{-8x^2y^2+2z\left(x^2+y^2\right)}$$

$$= \frac{4xy + \frac{2y^2zu}{v^2} + 2x^2zu + 2y^2zu - \frac{2x^2zu}{v^2} + 4xy}{-8x^2y^2+2z\left(x^2+y^2\right)}$$

$$= \frac{8xy + \frac{2zu}{v^2}\left(y^2-x^2\right) + 2zu\left(x^2+y^2\right)}{-8x^2y^2+2z\left(x^2+y^2\right)}.$$

6) El mismo tipo de desarrollo se puede hacer para un sistema de tres ecuaciones con seis incógnitas.

$$F(x, y, z, u, v, w) = 0$$

$$G(x, y, z, u, v, w) = 0$$

$$H(x, y, z, u, v, w) = 0.$$

Si se considera que $x$, $y$ y $z$ son las variables independientes, se puede resolver el sistema formado por $F$, $G$, $H$ de tal forma que $u$, $v$, $w$ queden en función de $x$, $y$, $z$, es decir,

$$u = p(x, y, z)\ ; \qquad v = q(x, y, z)\ ; \qquad w = r(x, y, z).$$

Al calcular las diferenciales de $F$, $G$ y $H$ se tiene

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + F_u\,du + F_v\,dv + F_w\,dw = 0$$

$$dG = G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dz + G_u\,du + G_v\,dv + G_w\,dw = 0$$

$$dH = H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz + H_u\,du + H_v\,dv + H_w\,dw = 0$$

que es un sistema de tres ecuaciones con seis incógnitas, del cual —al despejar $du$, $dv$ y $dw$ en términos de $dx$, $dy$ y $dz$—, se obtiene

$$F_u\,du + F_v\,dv + F_w\,dw = -F_x\,dx - F_y\,dy - F_z\,dz$$

$$G_u\,du + G_v\,dv + G_w\,dw = -G_x\,dx - G_y\,dy - G_z\,dz$$

$$H_u\,du + H_v\,dv + H_w\,dw = -H_x\,dx - H_y\,dy - H_z\,dz.$$

Si se resuelve este sistema por regla de Cramer, se aplican las propiedades de los determinantes y se utiliza la definición de jacobianos se obtiene que

$$du = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{x\ v\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\,dx = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{y\ v\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\,dy = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{z\ v\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\,dz.$$

Al comparar esta expresión con la diferencial de la función $u = p(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

se desprende que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{x\ v\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\ ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{y\ v\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\ ; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{z\ v\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\ .$$

De la misma forma,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ x\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\ ; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ y\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\ ; \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ z\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}\ .$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}; \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ y}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}; \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ z}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ v\ w}\right)}.$$

Por otra parte, si se hace el mismo análisis, pero ahora tomando

como variables independientes a $u$, $v$ y $w$ se obtiene

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{u\ y\ z}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{x\ y\ z}\right)}; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{J\left(\frac{F\ G\ H}{v\ y\ z}\right)}{J\left(\frac{F\ G\ H}{x\ y\ z}\right)}; \qquad \text{etc., } \cdots$$

Con esto se termina nuestra lista de casos de derivación implícita, aunque es claro que existe un sinnúmero de otras situaciones posibles. Se espera, sin embargo,

que se haya logrado dar una idea general de cómo proceder en cualquier otro caso. Nuevamente vale la pena hacer notar que en el denominador siempre va el jacobiano de las funciones con respecto a las variables dependientes y en el numerador únicamente se sustituye la variable que se deriva por la variable con respecto a la cual se deriva.

Para finalizar esta sección se presentará un ejemplo en donde se aplica la regla de la cadena y la derivación implícita.

## Ejemplo 52.

Dos barcos que salieron al mismo tiempo de un cierto lugar, uno va hacia el norte y el otro hacia el noreste con velocidades de 20 km/h y 40 km/h, respectivamente (ver la figura 2.22). ¿Con qué velocidad aumentará la distancia entre ellos en el instante en el que han pasado 2 horas de viaje?

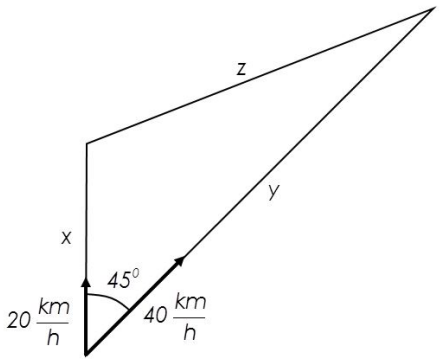



**FIGURA 2.22.** Trayectorias rectas de dos Barcos. La distancia entre ellos está dada por la variable $z$.

**Solución:** De acuerdo con la ley de los cosenos tenemos que

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45°$$

y una forma de resolver el problema sería: expresar a $x$ y $y$ en términos del tiempo $t$, sustituir en la ecuación anterior, sacar raíz cuadrada para obtener $z$ y derivar respecto a $t$. Aquí sin embargo se seguirá otro camino que evitará hacer esas operaciones. Por la regla de la cadena tenemos que la derivada total de $z$ respecto a $t$ es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

en donde, para obtener $(\partial z/\partial x)$ y $(\partial z/\partial y)$, se deriva implícitamente la ley de los cosenos respecto a $x$ y respecto a $y$, obteniéndose respectivamente

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x}{z} - \frac{\sqrt{2}y}{2z}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y}{z} - \frac{\sqrt{2}x}{2z}\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{x}{z} - \frac{\sqrt{2}y}{2z}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{y}{z} - \frac{\sqrt{2}x}{2z}\right)\frac{dy}{dt}.$$

Para evaluar estas expresiones hay que determinar los valores de $x$, $y$ y $z$ cuando han transcurrido 2 horas de viaje. Se tiene que $x = 40$ km, $y = 80$ km y

$$z = \sqrt{40^2 + 80^2 - 2(40)(80)\frac{\sqrt{2}}{2}} \doteq 58.95 \text{ km}.$$

Luego

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{40}{58.95} - \frac{80\sqrt{2}}{117.9}\right)(20) + \left(\frac{80}{58.95} - \frac{40\sqrt{2}}{117.9}\right)40 \doteq 29.4 \text{ km/h},$$

que es la rapidez con que se alejan uno del otro.

**2.55.** Dadas las ecuaciones

$$u+2v-x^2+y^2=0$$
$$2u-v-2xy=0,$$

calcular $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

**Solución:** $\dfrac{\partial y}{\partial u}=-\dfrac{x+y}{2x^2+2y^2}$ ; $\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{-2x+y}{2x^2+2y^2}$ .

**2.56.** Este ejercicio consiste en completar la formulación que se desarrolló en el caso 6 de la subsección 2.5 dedicada a la derivación implícita. En ese caso se discutió el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x,y,z,u,v,w)&=0\\ G(x,y,z,u,v,w)&=0\\ H(x,y,z,u,v,w)&=0 \end{aligned} \qquad (S)$$

las cuales definían implícitamente a las funciones:

$$u=p(x,y,z)\,; \qquad v=q(x,y,z)\,; \qquad w=r(x,y,z).$$

y se obtuvieron las expresiones para $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$, etc. El problema consiste ahora en considerar nuevamente el sistema $(S)$ pero tomando a las variables $u$, $v$ y $w$ como independientes y a $x$, $y$ y $z$ como dependientes de manera que se tengan las funciones implícitas

$$x=\phi(u,v,w); \qquad y=\psi(u,v,w); \qquad z=\xi(u,v,w)$$

y hay que obtener con detalle las expresiones para $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial x/\partial w$, etc.

## 2.6 Definición de gradiente y su relación con la derivada direccional

En este subtema se definirá una de las operaciones vectoriales más importantes: el concepto de gradiente que ya fue mencionado brevemente en la sección 2.3. Se principiará considerando el caso de tres variables independientes.

**Definición.** Sea $\phi(x, y, z)$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas en una región $R$ del espacio $\mathbb{R}^3$. Se llama **gradiente** de $\phi$, y se denota como grad($\phi$), a la expresión vectorial

$$\text{grad}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

o lo que es lo mismo

$$\text{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right).$$

Nótese que el gradiente es una operación que involucra a la derivación respecto a las tres componentes del vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Nótese también que la operación gradiente se aplica a una función escalar de variable vectorial $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y da como resultado un conjunto de tres funciones escalares de variable vectorial: $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$, las cuales aparecen formado el arreglo vectorial de tres componentes $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$. Este arreglo vectorial es un ejemplo de una función vectorial de variable vectorial de la forma $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (que serán estudiadas con detalle en el Capítulo 4).

Ahora, definimos el operador vectorial

$$\hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

al cual se le llama operador nabla y se representa mediante el símbolo $\nabla$ o bien $\frac{d}{d\mathbf{r}}$. Es decir,

$$\nabla=\frac{d}{d\mathbf{r}}=\hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Entonces, el gradiente de $\phi$ también se puede expresar en las siguientes formas:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\phi)&=\nabla\phi\\&=\frac{d\phi}{d\mathbf{r}}=\frac{d}{d\mathbf{r}}\phi\\&=\left(\hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi.\end{aligned}$$

El símbolo $\nabla$ no debe confundirse con el símbolo $\Delta$ que se utilizó para denotar incrementos. Tampoco debe confundirse el símbolo $\frac{d}{d\mathbf{r}}$ con $\frac{d}{dr}$.

## Ejemplo 53.

Calcular el gradiente de la función escalar

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) = \ln(xyz).$$

**Solución:**

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{yz}{xyz} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{xz}{xyz} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{xy}{xyz} = \frac{1}{z}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla\phi = \frac{1}{x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{z}\hat{\mathbf{k}} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right).$$

Al final de la sección 2.2.4 se demostró que si la función $F(x, y, z)$ tiene la forma particular $z - f(x, y)$ entonces un vector normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ es

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right),$$

el cual ahora vemos que es precisamente el gradiente de $F$. A continuación, se dará un teorema que considera el caso más general en donde $F$ no tiene necesariamente esa forma particular.

**Teorema 12.** Sea $F(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie $S$ con primeras derivadas parciales $F_x$, $F_y$, $F_z$ continuas en un entorno del punto **P**. Entonces el gradiente de $F(x, y, z)$ valuado en **P**, es un vector normal a la superficie en el punto **P**. Simbólicamente

$$\nabla F\big|_{\mathbf{P}} \perp S \quad \text{en} \quad \mathbf{P}.$$

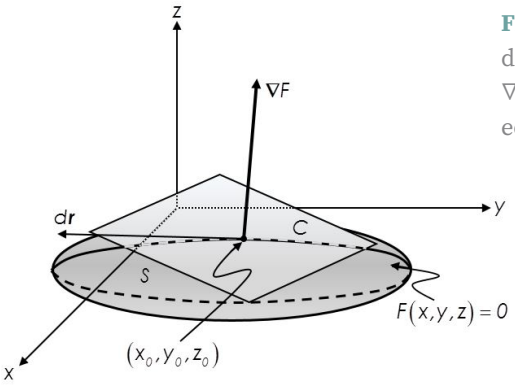



**FIGURA 2.23.** Significado geométrico del gradiente en tres dimensiones: ∇F es ortogonal a la superficie $S$ de ecuación $F(x, y, z) = 0$ en $(x_0, y_0, z_0)$.

**Demostración:** Si a partir del punto **P** se efectúa un desplazamiento $\mathcal{D}$ sobre la superficie $S$ las variables $x$, $y$ y $z$ sufren incrementos $dx$, $dy$ y $dz$, tales que $F(x + dx, y + dy, z + dz) = 0$, lo que implica que el incremento de $F$ es cero:

$$\Delta F = 0$$

(nuevamente recomendamos no confundir $\nabla F$ con $\Delta F$). Si el desplazamiento $\mathcal{D}$ sobre $S$ es infinitesimal, pero de dirección arbitraria, el vector $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$ tiene también dirección arbitraria, pero es tangente a $S$ (ver figura 2.23). Además, como $F$ tiene primeras derivadas parciales continuas en **P**, se tiene que

$$\Delta F = dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{dz} \partial z \right] = 0$$

en donde las derivadas de $F$ están evaluadas en **P**. Esta expresión se puede escribir en las siguientes formas

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) = 0$$

$$= \frac{dF}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \nabla F \cdot d\mathbf{r}$$

$$= 0.$$

Por lo tanto $\nabla F$ y $d\mathbf{r}$ son ortogonales en el punto $\mathbf{P}$. Ahora bien, como $d\mathbf{r}$ es arbitrario y es tangente a $S$, se sigue que el vector $\mathbf{N}$ definido como

$$\mathbf{N} \equiv \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \tag{35}$$

es normal a $S$. Además, cuando la superficie está dada como $z = f(x, y)$ la función $F$ es de la forma $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ y la ecuación (35) se reduce a

$$\mathbf{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \tag{35'}$$

Un resultado semejante se tiene para curvas en $\mathbb{R}^2$. En efecto, se puede demostrar que si $h(x, y) = 0$ es la ecuación de una curva plana $C$, entonces el vector

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial h}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}$$

evaluado en el punto $\mathbf{P} = (x, y)$ es perpendicular a la curva $C$ en ese punto (ver la figura 2.24).

Se continuará ahora con el caso de una superficie. Se vio en la definición de la sección 2.2, que la derivada direccional de una función $f(x, y)$ en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ y en el punto $(x_0, y_0)$ se podía calcular sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a $\hat{\mathbf{u}}$: $x = x_0 + s\cos\alpha$ y $y = y_0 + s\,\text{sen}\,\alpha$,

en la función $f(x, y)$ y derivar respecto a $s$. Sin embargo, en la práctica las derivadas direccionales se acostumbran a calcular con el procedimiento que se discutirá a continuación.

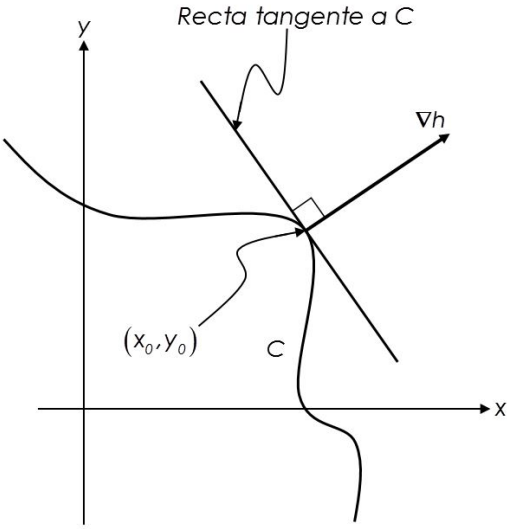



**FIGURA 2.24.** Significado geométrico del gradiente en dos dimensiones: $\nabla h$ es ortogonal a la curva $C$ de ecuación $h(x, y) = 0$ en $(x_0, y_0)$.

**Teorema 13.** Sea $f(x, y)$ una función diferenciable y sea el vector unitario $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Entonces la derivada direccional de $f$ en la dirección de $\hat{\mathbf{u}}$ en el punto $(x, y)$ está dada por

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

**Demostración:** De acuerdo con lo tratado anteriormente, se construye la función

$$G(s) \equiv f(x + s\cos\alpha, y + s\operatorname{sen}\alpha)$$

$$= f(\varphi, \Psi)$$

en donde $\varphi = x + s\cos\alpha$ y $\Psi = y + s\operatorname{sen}\alpha$. Entonces la derivada direccional de $f$ está dada por

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f = G'(s)\big|_{s=0}$$

Usando la regla de la cadena se obtiene

$$G'(s)=\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{d\varphi}\frac{\partial \varphi}{ds}+\frac{\partial f}{d\Psi}\frac{\partial \Psi}{ds}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial \Psi}\operatorname{sen}\alpha$$

y como $\varphi=x$ y $\Psi=y$ cuando $s=0$, se sigue que

$$D_{\hat{\mathbf{u}}}f=G'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha=\nabla f\cdot\hat{\mathbf{u}},$$

como se quería probar.

En este punto vale la pena comentar la relación que hay entre esta expresión y la de la diferencial total de $f(x,y)$, que escrita en términos del gradiente es (ver secciones 2.3 y 2.3.4) $df=\nabla f\cdot d\mathbf{r}$. Si la derivada direccional se calcula en la dirección de $d\mathbf{r}$ entonces el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ es paralelo a $d\mathbf{r}$ y se tiene que $d\mathbf{r}=dr\,\hat{\mathbf{u}}$, donde $dr=\left|d\mathbf{r}\right|$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} df &= d\mathbf{r}\cdot\nabla f \\ &= dr\,\mathbf{u}\cdot\nabla f \qquad \text{donde } \hat{\mathbf{u}} \text{ es paralelo a } d\mathbf{r} \\ &= dr\left[\mathbf{u}\cdot\nabla\right]^1 f \\ &= dr\,D_{\hat{\mathbf{u}}}f. \end{aligned} \tag{36}$$

## Ejemplo 54.

Sea la función $f(x,y)=x^2y^4-12xy$ y $\hat{\mathbf{u}}$ un vector unitario con $\alpha=(\pi/6)$. Hallar $D_{\hat{\mathbf{u}}}f(x,y)$ y comentar el significado de $D_{\hat{\mathbf{u}}}f(-2,1)$.

**Solución:** De la función se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 - 12y\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3 - 12x$$

y además

$$\hat{\mathbf{u}} = (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Luego, por el teorema anterior,

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x}\operatorname{sen}\alpha$$

$$= (2xy^4 - 12y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (4x^2y^3 - 12x)\frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3}\,xy^4 - 6\sqrt{3}\,y + 2x^2y^3 - 6x$$

y evaluando en el punto (−2, 1) se tiene que

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f(-2, 1) = \sqrt{3}\,(-2)(1)^4 - 6\sqrt{3}\,(1) + 2(-2)^2\,(1)^3 - 6(-2)$$

$$\doteq 6.14.$$

Este valor es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la gráfica de $f$ y el plano vertical que tiene la dirección $\hat{\mathbf{u}}$ en el punto (−2, 1). Ese resultado expresa que la función crece a razón de 6.14 unidades por unidad de longitud sobre la dirección dada.

### 2.6.1 Generalización al espacio $\mathbb{R}^n$

El gradiente de una función escalar $f$ con $n$ variables independientes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (denotado indistintamente con grad $f$, $(df/d\mathbf{r})$, $(d/d\mathbf{r})f$ o $\nabla f$), está dado por

$$\frac{df(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = \nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

en donde los vectores $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{e}}_n$ son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes $X_1, X_2, \cdots, X_n$ del espacio $\mathbb{R}^n$, respectivamente, y $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$. En este caso el operador $(d/d\mathbf{r}) = \nabla$ tiene la forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{\mathbf{e}}_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Además, dada la ecuación $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ de una *hipersuperficie* en el espacio $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\nabla\phi$ es un vector normal a dicha hipersuperficie.

Por otro lado, la derivada direccional de $f$ en la dirección $\hat{\mathbf{w}}$ queda expresada como

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot (w_1, w_2, \cdots, w_n)$$

$$= \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{w}}$$

o bien

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} w_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} w_n$$

en donde $w_1$ , $w_2$ ,$\cdots$, $w_n$ son las componentes del vector unitario $\hat{\mathbf{w}}$ que especifica la dirección sobre la que se pretende determinar la derivada direccional.

## Ejemplo 55.

Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = 2x^2y + yz^3 - 3xz$ en el punto $\mathbf{P} = (1, -1, 2)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:** El gradiente es

$$\nabla f = (4xy - 3z)\,\hat{\mathbf{i}} + (2x^2 + z^3)\,\hat{\mathbf{j}} + (3yz^2 - 3x)\,\hat{\mathbf{k}}$$

y calculado en **P**:

$$\nabla f(1, -1, 2) = -10\,\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}} - 15\hat{\mathbf{k}}.$$

Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ entonces el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\mathbf{a}$ es

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{2}{3}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{2}{3}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{3}\,\hat{\mathbf{k}}$$

por lo que

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f = \nabla f(1, -1, 2) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

$$= (-10, 10, -15) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$= 5.$$

### 2.6.2 Interpretación geométrica del gradiente y su relación con la derivada direccional

Partiremos de la expresión para la derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ y en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{w}}$:

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{w}}.$$

Como el producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman, se tiene

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f = \left|\nabla f\right| \left|\hat{\mathbf{w}}\right| \cos\theta$$

y como el módulo de $\hat{\mathbf{w}}$ es igual a 1,

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f = \left|\nabla f\right| \cos\theta,$$

lo cual nos indica que la derivada direccional es la proyección del gradiente en la dirección del vector $\hat{\mathbf{w}}$. Ver figura 2.25.

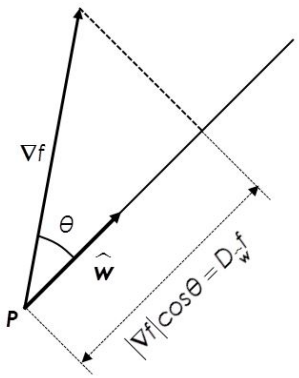



**FIGURA 2.25.** La derivada direccional en la dirección del vector $\hat{\mathbf{w}}$ es la proyección del gradiente en esa dirección.

Existen dos casos de mucho interés:

*i)* Cuando el ángulo es cero. Aquí la dirección de $\hat{\mathbf{w}}$ es la del gradiente, el coseno toma su máximo valor y en consecuencia la derivada direccional es máxima e igual a $\left|\nabla f\right|$ (ver la figura 2.26).

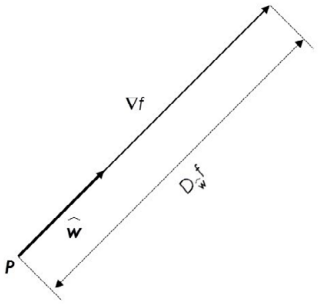



**FIGURA 2.26.** En este caso la dirección de la derivada direccional es paralela a la dirección del gradiente.

*ii)* Cuando el ángulo es de 90° (ver la figura 2.27). Aquí la dirección de $\hat{\mathbf{w}}$ es ortogonal a la del gradiente y la proyección de $\nabla f$ sobre $\hat{\mathbf{w}}$ vale cero, por lo que la derivada direccional es nula. En esta dirección la función no aumenta ni disminuye y por lo tanto es la dirección de la curva de nivel en ese punto.

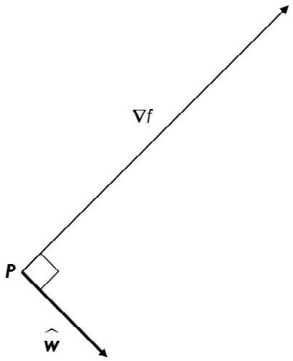



**FIGURA 2.27.** En este caso la dirección de la derivada direccional es perpendicular a la dirección del gradiente.

En resumen, se puede decir que el gradiente es un vector cuya dirección es la de la máxima derivada direccional de $f$, es decir, la de la máxima razón de cambio de la función y es ortogonal a la curva de nivel de $f$ en el punto en estudio. Además, su magnitud es la de ese valor máximo. En la figura 2.28 se muestra una situación intermedia en donde la dirección de $\hat{\mathbf{w}}$ y la dirección del gradiente (que es perpendicular a la curva de nivel) forman un ángulo $\theta$ cuyo valor está entre 0 y $\pi/2$.

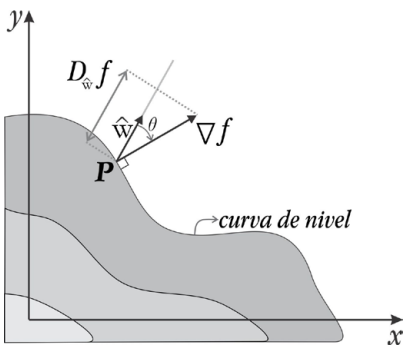



**FIGURA 2.28.** El gradiente $\nabla f$ es perpendicular a la curva de nivel en cada punto. La proyección del gradiente sobre el vector unitario $\hat{\mathbf{w}}$ es la derivada direccional de $f$ en la dirección de $\hat{\mathbf{w}}$.

## Ejemplo 56.

Hallar la derivada direccional de la función $u(x, y, z) = x^2 - 3yz + 5$ en el punto $\mathbf{M} = (1, 2, -1)$ en la dirección que forma ángulos iguales con todos lo ejes coordenados. ¿En qué dirección y qué valor tiene la máxima derivada direccional?

**Solución:** El gradiente de la función $u(x, y, z) = x^2 - 3yz + 5$ es

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$= 2x\hat{\mathbf{i}} - 3z\hat{\mathbf{j}} - 3y\hat{\mathbf{k}}$$

y evaluado en el punto $\mathbf{M}$,

$$\nabla u\big|_{\mathbf{M}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}} = (2, 3, -6).$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{w}}$, que forma ángulos iguales con los ejes coordenados, tiene cosenos directores tales que $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ ya que $\alpha = \beta = \gamma$. Por otro lado, se sabe que debe cumplirse la igualdad

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Por lo tanto

$$3\cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

por lo que $\hat{\mathbf{w}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Aplicando la fórmula de la derivada direccional,

$$D_{\hat{\mathbf{w}}}u = \nabla u \cdot \hat{\mathbf{w}}$$

$$= (2, 3, -6) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La dirección de la máxima derivada direccional es la del gradiente evaluado en **M**, es decir, $(2, 3, -6)$ y su valor es igual al módulo del gradiente:

$$D_{\hat{\mathbf{w}}\ \max} u = \left| \nabla u \right| = 7.$$

## Ejemplo 57.

La superficie de una montaña está dada por la ecuación $z = 1\,550 - 0.03\,x^2 - 0.02\,y^2$, en donde el eje Y apunta al *norte* y el eje X apunta al *este*. Todas las distancias están en metros. Supóngase que un montañista se encuentra en el punto **A** de coordenadas $(45.9, -60.5, 1413.6)$. Entonces:

*i)* ¿Asciende o desciende cuando se mueve en dirección *noroeste*?
*ii)* ¿Con qué razón de cambio desciende si se mueve en la dirección $\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}}$?
*iii)* ¿En qué dirección se debe mover para ascender más rápidamente y cuál es el valor de esa máxima rapidez de ascenso?
*iv)* ¿En qué dirección se debe mover para no variar su altura?

**Solución:** Primero se calcula el gradiente en el punto considerado.

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\nabla z = -0.06\,x\,\hat{\mathbf{i}} - 0.04\,y\,\hat{\mathbf{j}}$$

y en el punto **A**:

$$\nabla z\big|_{\mathbf{A}} = -2.754\,\hat{\mathbf{i}} + 2.42\,\hat{\mathbf{j}}.$$

*i)* La dirección *noroeste* está dada por el vector $\mathbf{a} = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$; luego el vector unitario en esa dirección será

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{j}}$$

por lo que

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} z = \nabla z\big|_{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{w}} = (-2.754,\, 2.42) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\doteq 3.66 > 0.$$

Por lo tanto, el montañista asciende

*ii)* Si la dirección es $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}}$, entonces el vector unitario en esa dirección es

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{\sqrt{10}}\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Luego

$$D_{\hat{\mathbf{v}}} z = \nabla z\big|_{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = (-2.754,\, 2.42) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\doteq -3.17.$$

En este caso el montañista desciende a razón de 3.17 metros por cada metro en la dirección considerada.

*iii)* La máxima rapidez de ascenso se presenta en la dirección del gradiente, es decir,

$$-2.754\,\hat{\mathbf{i}} + 2.42\,\hat{\mathbf{j}}$$

y su valor será el módulo del gradiente, esto es,

$$\sqrt{(-2.754)^2 + (2.42)^2} \doteq 3.67 \text{ metros por cada metro.}$$

*iv)* Para que su altura no varíe se debe mover en dirección perpendicular a la del gradiente, es decir, en la dirección de los vectores

$$2.42\,\hat{\mathbf{i}} + 2.754\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \text{o bien} \qquad -2.42\,\hat{\mathbf{i}} - 2.754\,\hat{\mathbf{j}}$$

ya que

$$(-2.754,\ 2.42) \cdot (2.42,\ 2.754) = 0$$

y

$$(-2.754,\ 2.42) \cdot (-2.42,\ -2.754) = 0.$$

### 2.6.3 Segunda derivada direccional

Considérese la derivada direccional de la función escalar de dos variables $f(x, y)$ en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{w}} = (w_1, w_2)$:

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \hat{\mathbf{w}}$$

o bien

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f(x, y) = f_x\, w_1 + f_y\, w_2.$$

Como esta expresión es también una función escalar de dos variables se puede calcular nuevamente su derivada direccional, obteniéndose así la segunda derivada direccional de $f$:

$$D^2_{\hat{\mathbf{w}}} f(x, y) = D_{\hat{\mathbf{w}}} \left[ D_{\hat{\mathbf{w}}} f \right]$$

$$= D_{\hat{\mathbf{w}}} \left( \frac{\partial f}{\partial x} w_1 + \frac{\partial f}{\partial y} w_2 \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} w_1 + \frac{\partial f}{\partial y} w_2 \right) w_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} w_1 + \frac{\partial f}{\partial y} w_2 \right) w_2$$

$$= f_{xx} w_1^2 + 2 f_{xy} w_1 w_2 + f_{yy} w_2^2$$

lo que se puede escribir como el producto de matrices

$$D^2_{\hat{\mathbf{w}}} f(x, y) = \begin{bmatrix} w_1 , w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

En la ecuación (36) se estableció la relación que hay entre la diferencial y la derivada direccional. Ahora veremos que existe una relación parecida entre la segunda derivada direccional y la segunda diferencial que se estudió en la sección 2.3.4 y que por comodidad se reescribe aquí:

$$df^2 = \left[ d\mathbf{r} \cdot \nabla \right]^2 f$$

$$= (dx)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\, dx\, dy \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + (dy)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Si la dirección de la segunda derivada direccional se toma igual a la dirección de $d\mathbf{r}$ entonces $\hat{\mathbf{w}}$ es paralelo a $d\mathbf{r}$ y se tiene que $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{w}}\, dr = (w_1, w_2, w_3)\, dr$, donde $dr = \left| d\mathbf{r} \right|$. Entonces

$$d^2 f = (dr)^2 \left[\hat{\mathbf{w}} \cdot \nabla\right]^2 f$$

$$= (dr)^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} w_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} w_1 w_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w_2^2 \right].$$

Comparando la expresión dentro del paréntesis cuadrado con la expresión para segunda derivada direccional dada arriba se concluye que

$$df^2 = \left[d\mathbf{r} \cdot \nabla\right]^2 f$$

$$= (dr)^2 \left[\hat{\mathbf{w}} \cdot \nabla\right]^2 f \qquad \text{donde } \hat{\mathbf{w}} \text{ es paralelo a } d\mathbf{r} \qquad (37)$$

$$= (dr)^2 D_{\hat{\mathbf{w}}}^2 f(x, y).$$

En forma semejante existe una relación entre la emé-sima derivada direccional y la emé-sima diferencial. Esta es

$$df^m = \left[d\mathbf{r} \cdot \nabla\right]^m f$$

$$= (dr)^m \left[\hat{\mathbf{w}} \cdot \nabla\right]^m f \qquad \text{donde } \hat{\mathbf{w}} \text{ es paralelo a } d\mathbf{r} \qquad (38)$$

$$= (dr)^m D_{\hat{\mathbf{w}}}^m f(x, y).$$

Estos conceptos se pueden generalizar para el caso de funciones con más de dos variables. Así, para la función escalar de variable vectorial $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, la derivada direccional en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ es

$$D_{\hat{\mathbf{w}}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \hat{\mathbf{w}}$$

$$= f_{x_1} w_1 + f_{x_2} w_2 + \cdots + f_{x_n} w_n$$

y la segunda derivada direccional será

$$D_{\hat{\mathbf{w}}}^2 f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = D_{\hat{\mathbf{w}}} \left(D_{\hat{\mathbf{w}}} f\right) = D_{\hat{\mathbf{w}}} \left[\nabla f \cdot \hat{\mathbf{w}}\right]$$

$$= D_w\left(f_{x_1}w_1 + f_{x_2}w_2 + \cdots + f_{x_n}w_n\right)$$

$$= \left(f_{x_1x_1}w_1 + f_{x_2x_1}w_2 + \cdots + f_{x_nx_1}w_n\right)w_1$$

$$+ \left(f_{x_1x_2}w_1 + f_{x_2x_2}w_2 + \cdots + f_{x_nx_2}w_n\right)w_2 + \cdots$$

$$+ \left(f_{x_1x_n}w_1 + f_{x_2x_n}w_2 + \cdots + f_{x_nx_n}w_n\right)w_n$$

$$= f_{x_1x_1}w_1^2 + 2f_{x_1x_2}w_1w_2 + \cdots + f_{x_nx_n}w_n^2 .$$

Esta expresión en forma condensada se puede escribir como

$$D^2_{\hat{\mathbf{w}}} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)w_i\, w_j,$$

o en forma matricial,

$$D^2_{\hat{\mathbf{w}}} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \begin{bmatrix} w_1, & w_2, & \cdots, & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

Se sugiere al lector que compruebe esta expresión.

## Ejemplo 58.

Calcular la segunda derivada direccional de la función $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ en el punto $\mathbf{P} = (1, 2)$ y en la dirección del vector $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$.

**Solución:** La expresión que define a la segunda derivada direccional es

$$D^2_{\hat{\mathbf{w}}} f(x, y) = f_{xx}w_1^2 + 2f_{xy}w_1w_2 + f_{yy}w_2^2.$$

Como

$$f_x = 3x^2 - 4xy + y^2$$

$$f_y = -2x^2 + 2xy$$

$$f_{xy} = -4x + 2y; \qquad f_{xy}\big|_{\mathbf{P}} = 0$$

$$f_{xx} = 6x - 4y; \qquad f_{xx}\big|_{\mathbf{P}} = -2$$

$$f_{yy} = 2x; \qquad f_{yy}\big|_{\mathbf{P}} = 2$$

y como el vector unitario en la dirección de $\mathbf{a} = 3\,\hat{\mathbf{i}} + 4\,\hat{\mathbf{j}}$ es

$$\hat{\mathbf{w}} = (w_1, w_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

se tiene

$$D^2_{\hat{\mathbf{w}}} f(x, y) = (-2)\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2(0)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 0.56.$$

## Ejercicios

**2.57.** Calcular cuando sea posible $\nabla f$ y $df$ para cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en $\mathbf{x} = (1, 1)$ y $d\mathbf{x} = (0.1, 0.2)$

b) $f(x, y, z) = \sqrt{xy}$ en $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ y $d\mathbf{x} = (0.1, 0.2, 0.1)$

c) $f(x, y, z) = \operatorname{ang\,sen}(xyz)$ en $\mathbf{x} = (1, 1, \pi/2)$ y $d\mathbf{x} = (0.1, 0.1, 0.1)$

d) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{xyz}$ *en* $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ y $d\mathbf{x} = (0.1, -0.1, -0.1)$

e) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{xyz}$ *en* $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ y $d\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

**2.58.** La presión en el punto de coordenadas $x$, $y$ y $z$ de un yacimiento está dada por la función $P = x^3 - 3xz + 2yz$. Para un entorno del punto $\mathbf{Q} = (1, 3, -5)$ definir el conjunto de puntos que tienen mayor presión que **Q**.

**2.59.** El potencial eléctrico en una placa está dado por la función $V = x^2 - xy + 3y^2$, donde V está en volts, y $x$ y $y$ en cm. Si se sabe que las partículas de carga negativa son atraídas hacia la dirección de máximo crecimiento del potencial, determinar en qué dirección se moverá un electrón que está situado en el punto (1, 2). ¿Con qué razón de cambio aumentara el voltaje en esa dirección? Si se considera un protón (cuya carga es opuesta a la del electrón) en el punto (2, 3), ¿en qué dirección se moverá?

**2.60.** Una placa metálica plana está situada en un sistema coordenado que tiene una fuente de calor en el origen. En cierto momento la temperatura en el punto **P** de coordenadas $(x, y)$, está dada por $T = 100/(x^2 + y^2 + 1)$. ¿En qué dirección a partir del punto $\mathbf{P}_0 = (4, 3)$ se presenta el máximo cambio de temperatura? ¿Cuál es el máximo cambio de temperatura en este punto?

**Solución:** La dirección de máximo cambio es $-4\,\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}}$;
Máximo cambio $= 1000/26^2$ .

**2.61.** El potencial eléctrico $V$ en el punto de coordenadas $(x, y, z)$ respecto a un sistema coordenado rectangular, está dado por

$$V = x^2 + 4y^2 + 9z^2.$$

a) Hallar la rapidez de variación del potencial en el punto **P** de coordenadas $(2, -1, 3)$ en la dirección del vector que va de **P** al origen.

b) Hallar la dirección que produce la máxima rapidez de variación del potencial en **P**.

c) ¿Cuál es la máxima rapidez de variación del potencial en **P**?

d) ¿En qué dirección no hay variación del potencial en **P**?

e) Si la rapidez de variación del potencial en **P** en una cierta dirección es igual a 40, ¿cuál es el valor del ángulo entre el vector normal a la superficie $V = cte$ en **P** y la dirección en la cual se cálculo dicha rapidez de variación?

**Solución:** a) $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = 178$; b) $\nabla V = 4\hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{j}} + 54\hat{\mathbf{k}}$; c) $\left|\nabla V\right| = 432.018$;
d) En cualquier dirección perpendicular al gradiente.

**2.62.** Demuestre que el gradiente de $F_1(x, y, z) = e^{ax+by+cz}$ es siempre paralelo al gradiente de $F_2(x, y, z) = ax + by + cz$ y, por consiguiente, siempre apunta en la dirección del vector constante $a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:** Como $\nabla F_1 = e^{ax+by+cz}\left(a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}\right)$ y $\nabla F_2 = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}$ es claro que son paralelos.

**2.63.** Determinar la relación que deben guardar entre sí las coordenadas $x$, $y$, $z$ de los puntos para los cuales el gradiente de $F(x, y, z) = x^2 + xy - z^2 + 4x - 3z$ forma el mismo ángulo con cada uno de los tres ejes coordenados.

**Solución:** $x + y = -4$; $x + 2z = -3$.

## 2.7 Diferencial exacta y su integración

Si se tiene una expresión de la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$, cabría preguntarse si existirá una función tal que esta expresión sea su diferencial total. Es decir, si existirá una función $f(x, y)$ tal que

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

y que en consecuencia se tenga que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

y

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

La respuesta es que no siempre existe tal función. El objetivo de esta sección es estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que exista dicha función y cómo proceder para obtenerla cuando exista. Se principiará dando una definición.

**Definición.** La expresión

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \tag{39}$$

se llama **diferencial exacta** sobre un conjunto abierto $\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ si existe una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$(M, N) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$\forall(x, y) \in \varepsilon$. En estos casos la diferencial total de $f$ es igual a la diferencial exacta (39). Es decir,

$$df = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy.$$

Aquí es conveniente enfatizar que $f(x, y)$ debe ser una función tal y como se definieron en la sección 1.1.3. Es decir, que asigne un y sólo un valor a cada pareja de valores de $x$ y $y$. Una expresión de la forma ang $\tan(y/x)$ no es una función ya que es multivaluada.

A continuación se dará un teorema que hace referencia sólo a regiones rectangulares en $\mathbb{R}^2$. Posteriormente se verán teoremas más generales que se aplican a otro tipo de regiones.

**Teorema 14.** Sean las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tales que tienen primeras derivadas parciales continuas en un rectángulo abierto $R \subset \mathbb{R}^2$ con lados paralelos a los ejes coordenados. Entonces

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

es una diferencial exacta en $R$ si y sólo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{40}$$

en todos los puntos de $R$.

En otras palabras, este teorema nos dice que dadas las funciones $M$ y $N$ existe una función $f$ tal que $M\,dx + ndy$ es su diferencial total en el rectángulo $R$ si y sólo si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ en todo $R$.

**Demostración:**

*i)* Primero se demostrará que si $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta entonces $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$.

Si la expresión es una diferencial exacta existe una función $f$ tal que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = M\,dx + N\,dy$$

consecuentemente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

y al calcular las derivadas mixtas se tendrá que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Pero por el Teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

*ii)* Ahora se partirá de suponer que se cumple (40):

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

en $R$ y se debe demostrar que existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{(41a)}$$

y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{41b}$$

Integrando (40) con respecto a $x$ de $x_0$ a $x$, manteniendo constante a $y$, se tiene que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,dx$$

$$= N(x,y) - N(x_0,y). \tag{42}$$

Como la región es rectangular, entonces, para cualquier valor de $y$ dentro de los límites de $R$, se puede ir de $x_0$ a $x$ sin salir de $R$. Por lo tanto, la igualdad anterior se verifica para todo par de puntos dentro de $R$. Integrando ahora respecto a $y$ de $y_0$ a $y$ se tiene

$$\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy - \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy.$$

Intercambiando el orden de integración en la integral del miembro izquierdo (en el Capítulo 6 se verá que en estos casos es válido hacer dicho intercambio):

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy - \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy. \tag{43}$$

Efectuando la integral sobre $y$ en el primer miembro:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx - \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx = \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy - \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy. \tag{44}$$

Reagrupando términos se obtiene la igualdad siguiente, la cual, a su vez, nos permite definir una función $f(x,y)$ como

$$f(x,y) \equiv \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy. \qquad (45)$$

Sólo falta verificar que esta función satisface $(41a)$ y $(41b)$. En efecto, derivando respecto a $x$ los miembros primero y segundo de $(45)$ se obtiene $(41a)$, y derivando respecto a $y$ los miembros primero y tercero de $(45)$ resulta $(41b)$, lo cual prueba el teorema.

A continuación se enunciarán sin demostración dos generalizaciones del teorema anterior para regiones planas más generales que rectángulos Para este fin es necesario recordar que en el Capítulo 1 se definió un conjunto convexo $R \subset \mathbb{R}^n$ como aquél en donde cualquier par de puntos de $R$ se pueden unir mediante un segmento de recta totalmente contenido en $R$, y un conjunto simplemente conexo $E \subset \mathbb{R}^2$ como aquél en el que todos los puntos del interior de cualquier curva cerrada de $E$ están también contenidos en $E$ (ver la figura 2.29). Nótese que en $\mathbb{R}^2$ los rectángulos abiertos son casos particulares de conjuntos abiertos convexos y que estos a su vez son casos particulares de conjuntos abiertos simplemente conexos.

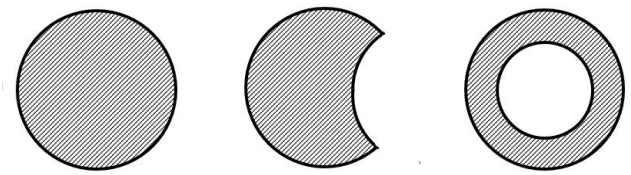


**FIGURA 2.29.** (a) Convexo y simplemente conexo. (b) No convexo, pero simplemente conexo. (c) No convexo y no simplemente conexo

**Teorema 15.** Sean las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tales que tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto convexo $R \subset \mathbb{R}^2$. Entonces $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ es una diferencial exacta en $R$ si sólo si:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

en todos los puntos de $R$.

**Teorema 16.** Sean las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ que tienen prime ras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto simplemente conexo $E \subset R^2$. Entonces $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es una diferencial exacta en $E$ si sólo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in E.$$

Las demostraciones de estos dos teoremas pueden verse en *Análisis Matemático 2*, de N. B. Hauser, J. P. La Salle y J. A. Sullivan, y en *Cálculo Avanzado*, de W. Fulks.

Basados en estos teoremas vemos que si se desea investigar si existe una función $f(x, y)$ definida en un conjunto abierto $R$, ya sea simplemente conexo o bien convexo, para la cual la expresión (39) sea su diferencial total, se debe investigar si la igualdad (40) se cumple en todo $R$.

Además, para hallar dicha función, cuando existe, se puede utilizar la ecuación (45), o bien, hacer lo siguiente. Como

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

entonces, integrando una de las dos, se obtiene la función $f$ indeterminada hasta una "constante" que depende de la variable no integrada. Derivando e igualando a la otra expresión, se obtiene finalmente la función buscada (ver ejemplos siguientes).

Notar que si $R_1$ y $R_2$ son dos regiones simplemente conexas su unión $R_1 \cup R_2$ no necesariamente es una región simplemente conexa. Por ejemplo, Si $R_1$ es la parte superior de la figura 2.29 c y $R_2$ es la parte inferior de dicha figura entonces $R_1$ y $R_2$ son simplemente conexas pero la figura completa no es simplemente conexa. Como consecuencia de esto y del teorema anterior tenemos que si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ satisfacen lo que exige el teorema en las regiones simplemente conexas $R_1$ y $R_2$ entonces $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta en $R_1$ y en $R_2$ por separado, pero si la unión $R_1 \cup R_2$ no es simplemente conexa puede suceder que $M(x, y)dx + N(x, y)\,dy$ no sea una diferencial exacta en $R_1 \cup R_2$. Más adelante, en uno de los ejemplos que siguen y en la sección 5.3 del capítulo 5, se discutirá con más detalle esto.

Si el conjunto $R$ sobre el que están definidas las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ no satisface las condiciones pedidas en ninguno de los tres teoremas anteriores no significa necesariamente que $M\,dx + N\,dy$ no es una diferencial exacta en $R$. Lo único que se puede concluir en este caso es que los teoremas no dan información al respecto y habrá que recurrir a otro método para determinarlo (ver los dos últimos ejemplos de este capítulo).

## Ejemplo 59.

Investigar si las siguientes expresiones son diferenciales exactas sobre algún conjunto abierto simplemente conexo $R$ y en caso afirmativo hallar las funciones de las que son su diferencial total.

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

b) $x\,dx + \operatorname{sen} xy\,dy.$

c) $\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}\right)dz.$

**Solución:**

a) Tenemos que

$$M = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{y} \qquad N = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

la expresión dada es una diferencial exacta en cualquier conjunto abierto simplemente conexo que no contenga al origen. Por tanto debe existir una

función $f$ de la cual $\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$ es su diferencial total. Esta función debe ser tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Para determinarla se integra $M$ con respecto a $x$:

$$f(x,y)=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+C_1(y)$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+C_1(y)$$

donde $C_1(y)$ es una "constante" de integración respecto a $x$ que puede depender de $y$. Nótese que para que se cumpla la igualdad $(\partial f/\partial x)=M$, la "constante" $C_1(y)$ debe ser tal que al derivarla respecto a $x$ se obtenga cero, lo cual es claramente cierto porque $C_1(y)$ no depende de $x$. Derivando con respecto a $y$ e igualando a $N$ se tiene

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{dC_1(y)}{dy}$$

$$=N=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dC_1(y)}{dy}=0$$

$$\Rightarrow C_1(y)=C.$$

siendo $C$ una constante independiente de $x$ y $y$. Por lo tanto,

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+C$$

b) En este caso $M(x, y) = x$ y $N(x, y) = \operatorname{sen} xy$. Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial N}{\partial y} = y \cos xy$$

Por lo tanto, no es una diferencial exacta y no existe una función $f$ tal que

$$df = x\, dx + \operatorname{sen} xy\, dy.$$

c) Para resolver este ejemplo se necesita una generalización para el caso de $n$ dimensiones de los teoremas anteriores. Como la definición del concepto de conjunto simplemente conexo en $\mathbb{R}^n$ es complicada, aquí únicamente se dará la generalización del teorema que hace referencia a conjuntos convexos. Sea la expresión

$$M_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 + M_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_2 + \cdots$$

$$+ M_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_n$$

la cual será una diferencial exacta en un conjunto abierto y convexo $R \subset \mathbb{R}^n$ si las funciones escalares

$$M_1(x_1, x_2, \cdots, x_n); \quad M_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \cdots; \quad M_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

cumplen, para todas sus parejas posibles, la tesis del teorema de Schwarz en $R$. Es decir,

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_j} = \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

El número total de parejas posibles es, de acuerdo con el análisis combinatorio, $(n!/2(n-2)!) = (n(n-1)/2)$.

Ahora se continuará con la solución del problema. Se tiene que

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$$

En este caso hay $\frac{3(2)}{2} = 3$ parejas posibles y son

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}; \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial P}{\partial x}; \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Estas igualdades se cumplen en cualquier conjunto abierto y convexo que no se intercecte con los ejes coordenados. Se trata entonces de una diferencial exacta en dichos conjuntos. Luego, existe una función $f$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z} = P = \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right).$$

Integrando $M$ respecto a $x$ se tiene:

$$f(x, y) = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + C_1(y, z) = \frac{x}{y} - \frac{z}{x} + C_1(y, z)$$

donde $C_1(y, z)$ es una constante de integración respecto a $x$ que puede depender de $y$ y de $z$. Derivando con respecto a $y$ e igualando a $N$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = N = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = \frac{1}{z} \Rightarrow C_1(y,z) = \int \frac{1}{z}\, dy + C_2(z)$$

$$= \frac{y}{x} + C_2(z),$$

donde $C_2(z)$ es una constante de integración respecto a $y$. Luego

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + C_2(z).$$

Derivando con respecto a $z$ e igualando a $P$ resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} + \frac{dC_2(z)}{dz} = P = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dC_2(z)}{dz} = 0 \qquad \Rightarrow C_2(z) = C,$$

siendo $C$ una constante independiente de $x$, $y$ y $z$. Por lo tanto, la función es

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + C$$

que está definida en cualquier conjunto abierto y convexo que no intersecte a los ejes coordenados.

Una diferencial exacta también puede ser escrita en términos del gradiente de la función escalar $f$. Consideremos el caso de tres variables independientes. Si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

es una diferencial exacta, entonces existe $f$ tal que

$$M=\frac{\partial f}{\partial x};\qquad N=\frac{\partial f}{\partial y};\qquad P=\frac{\partial f}{\partial z}$$

es decir

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

que puede ser escrita como

$$df=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\right)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(dx\,\hat{\mathbf{i}}+dy\,\hat{\mathbf{j}}+dz\,\hat{\mathbf{k}}\right)}_{d\mathbf{r}}$$

$$=\nabla f\cdot d\mathbf{r}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r}.$$

Partiendo de esto se puede decir que la expresión $\mathbf{F}=M\hat{\mathbf{i}}+N\hat{\mathbf{j}}+P\hat{\mathbf{k}}$ es el gradiente de una función escalar $f$ definida en un rectángulo abierto tridimensional $R$, si y sólo si $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta en $R$. Es decir, si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x};\quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x};\quad \frac{\partial N}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial y}\qquad \forall(x,y,z)\in R.$$

## Ejemplo 60.

Sea la expresión

$$\mathbf{F}=2x\,\hat{\mathbf{i}}-3z\,\hat{\mathbf{j}}-3y\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Si se sabe que la dirección de $\mathbf{F}$ representa la dirección de máxima variación de una función $\phi(x, y, z)$ y que $|\mathbf{F}|$ es el valor de dicha máxima variación en cada punto del dominio de $\phi(x, y, z)$, obtener la expresión general que representa a $\phi$.

**Solución:** De acuerdo con el enunciado del problema $\mathbf{F}$ es el gradiente de $\phi$, pero conviene comprobar que efectivamente $\mathbf{F}$ proviene de un gradiente. En este caso

$$M = 2x; \qquad N = -3z; \qquad P = -3y$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}; \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = -3 = \frac{\partial P}{\partial y}$$

en todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, efectivamente $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función $\phi$ definida en $\mathbb{R}^3$. Es decir,

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = F$$

y en consecuencia $(\partial\phi/\partial x) = M = 2x$, $(\partial\phi/\partial y) = N = -3z$ y $(\partial\phi/\partial z) = P = -3y$. Al integrar $M$ con respecto a $x$

$$\phi(x, y, z) = \int M\,dx = \int 2x\,dx$$

$$= x^2 + C_1(y, z),$$

donde $C_1(y, z)$ es una constante de integración en términos de las variables $y$ y $z$ únicamente. Derivando esto respecto a $y$ se obtendrá $N$; por lo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + C_1(y, z)\right) = N \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = -3z.$$

Si se integra con respecto a $y$,

$$\int \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y}\, dy = C_1(y,z) = -3yz + C_2(z)$$

donde $C_2(z)$ es también una constante de integración en términos de la variable $z$ únicamente. Si se sustituye en la expresión de $\phi$ obtenida antes

$$\phi(x,y,z) = x^2 - 3yz + C_2(z).$$

Pero $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = P$, por lo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 - 3yz + C_2(z)\right) = P \qquad \Rightarrow \qquad -3y + \frac{dC_2(z)}{dz} = -3y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dC_2}{dz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = C$$

siendo $C$ una constante independiente de $x$, $y$ y $z$. Por lo tanto,

$$\phi(x,y,z) = x^2 - 3yz + C.$$

Antes de finalizar el capítulo es conveniente llamar la atención del lector sobre un punto muy importante. Si las funciones $M$ y $N$ que aparecen en la forma diferencial $M\,dx + N\,dy$ satisfacen la igualdad (40) en todos los puntos de un conjunto abierto simplemente conexo $R$, excepto en el punto $\mathbf{x}_0 \in R$ (es decir, si (40) se cumple sólo en el conjunto agujerado $R' = R - \{\mathbf{x}_0\}$) entonces no necesariamente existe una función $f$ definida en todo $R'$ tal que $(M, N) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ para todo $(x, y) \in R'$. La posibilidad de que exista o no una tal función $f$ dependerá de cada caso particular. En los dos ejemplos que siguen veremos un caso en el que no existe $f$ y otro en el que sí existe.

En algunos casos puede ocurrir que, aunque se puedan integrar las expresiones para $M$ y $N$ en todo $R'$, lo que resulta no es una función propiamente dicha, como se verá en el siguiente ejemplo.

## Ejemplo 61.

Investigar si la siguiente expresión es una diferencial exacta en algún rectángulo agujerado en el origen:

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

**Solución:** En este ejemplo

$$M=\frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad N=\frac{x}{x^2+y^2}$$

Entonces,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

en todo el plano $XY$ excepto el origen. Esto implica obviamente que $M\,dx+N\,dy$ no es una diferencial exacta en dicho punto. Analicemos, sin embargo, si $M\,dx+N\,dy$ es una diferencial exacta en algún rectángulo $R'$ al que se le ha extraído el origen, es decir, en un rectángulo agujerado en el origen ($R'$ ya no es ni simplemente conexo ni convexo y por lo tanto no son aplicables los teoremas anteriores). Si se integran $M$ y $N$ se obtiene la expresión $f(x,y)=\text{ang tan}(y/x)$ y es tal que $\nabla f(x,y)=(M,N)\ \forall (x,y)\neq(0,0)$. Esto aparentemente nos lleva a concluir que sí existe la función buscada y que por lo tanto $M\,dx+N\,dy$ sí es una dife-

rencial exacta en $R'$. Pero esto no es así, ya que ang tan$(y/x)$ no es una función propiamente dicha; en realidad es una función multivaluada y este simple hecho hace toda la diferencia. Una gráfica de ang tan$(y/x)$ se muestra en la figura 2.30, en donde se ve que es semejante a una resbaladilla de caracol y que para cada par de valores de $x$ y $y$ existe una infinidad de valores de ang tan$(y/x)$. Por lo tanto $M\,dx + N\,dy$ no es una diferencial exacta en $R'$. Si se restringe el codominio al intervalo $[0, 2\pi)$ para tener una función univaluada, la función tiene una discontinuidad sobre el eje X. Por lo tanto, no existe su gradiente para todo $(x, y) \in R'$, y nuevamente concluimos que $M\,dx + N\,dy$ no es diferencial exacta en $R'$.

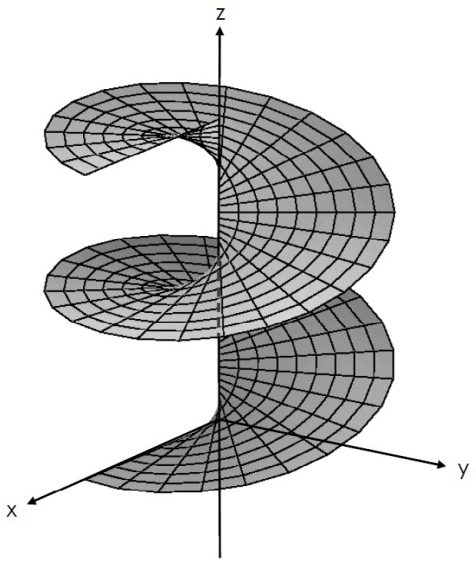



FIGURA 2.30.

Más adelante, en el Capítulo 5, se verán las implicaciones que tiene el que ang tan$(y/x)$ sea multivaluada. Por lo pronto bastara decir que en cualquier otro rectángulo (incluyendo subrectángulos del rectángulo anterior) que no rodee al origen es posible trabajar con una sola rama de $f(x, y)$, y de esta manera convertirla en una función univaluada y continua en dicho rectángulo.

## Ejemplo 62.

Investigar si la siguiente expresión es una diferencial exacta en algún rectángulo agujerado en el origen:

$$\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\,dx+\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\,dy.$$

**Solución:** Se tiene que

$$M=\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \qquad \text{y} \qquad N=\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$$

Entonces,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-3\,\frac{yx}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-3\,\frac{yx}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

en todo el plano $XY$ excepto el origen. Así, $M\,dx+N\,dy$ no es una diferencial exacta en el origen. Analicemos sin embargo su comportamiento en los rectángulos agujerados en el origen. Si se integran $M$ y $N$ se obtiene $f(x,y)=-\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right)$, que es una función bien definida y tal que $\nabla f(x,y)=(M,N)\;\forall(x,y)\neq(0,0)$. Por lo tanto, $M\,dx+N\,dy$ si es una diferencial exacta en cualquier rectángulo agujerado en el origen.

## Ejercicios

**2.64.** Obtener la diferencial total de las siguientes expresiones.

a) $x^3+y^3+z^3+xy^2+yz^2+x^2z+c.$

b) $xy+c.$

c) $x+\ln\dfrac{c}{e^{x+y}+1}.$

d) $\dfrac{z}{xy}+\ln(xy)+e^{yz}+c.$

e) $\dfrac{xy^3}{3}+\dfrac{yz^3}{3}+\dfrac{yx^3}{3}+c.$

f) $\operatorname{sen}(x+y)-\cos(x-y)+c.$

g) $\operatorname{sen} xy+\cos xy+c.$

h) $3x^2-\ln(xy)+e^{yz}-z+c.$

**2.65.** Probar que la siguiente expresión es una diferencial exacta, obteniendo la función de la cual es su diferencial total.

$$(2x+e^y)\,dx+x\,e^y\,dy.$$

**Solución:**

$f(x,y)=xe^y+x^2+cte.$

**2.66.** Investigar si la siguiente expresión es una diferencial exacta y, en caso de serlo, encontrar la función de la cual es diferencial total.

$$\left(4x^3y^3+\frac{1}{x}\right)dx+\left(3x^4y^2-\frac{1}{y}\right)dy.$$

**Solución:** Si es una diferencial exacta y proviene de la función $f(x,y)=x^4y^3+\ln(x)-\ln y+cte$.

Capítulo 3

# EXTREMOS DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL

En numerosas aplicaciones se presentan problemas de optimización en los que se pretende determinar valores extremos de funciones con dos o más argumentos. Este tipo de problemas aparecen, por ejemplo, cuando se quieren determinar utilidades máximas, volúmenes máximos, áreas mínimas, costos mínimos, distancias mínimas, etc. En este capítulo se estudiará como determinar los extremos de estas funciones y se darán diversos ejemplos.

## 3.1 Conceptos fundamentales

**Definición.** Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Entonces:

*i)* Se dice que $f$ tiene un **máximo relativo** (o local) en un punto $(x_0, y_0) \in D$ si existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $(x_0, y_0)$, tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{V} \cap D$.

*ii)* Se dice que $f$ tiene un **mínimo relativo** (o **local**) en un punto $(x_0, y_0) \in D$ si existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $(x_0, y_0)$, tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{V} \cap D$.

Si alguna de las dos desigualdades anteriores se cumple para cualquier $(x, y) \in D$, entonces $f$ tendrá respectivamente un **máximo absoluto** (o **global**) o un **mínimo absoluto** (o **global**) en $(x_0, y_0)$. Si $f$ tiene un máximo o un mínimo en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se dice que $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ es un punto máximo o mínimo, respectivamente, de la gráfica de $f$. También se dice que $f(x_0, y_0)$ es el valor máximo o mínimo de $f$, respectivamente. A los máximos y mínimos de $f$ en $D$ se les denomina **extremos** de $f$ en $D$. Es claro que geométricamente el máximo (mínimo) representa el punto más alto (bajo) de la superficie $z = f(x, y)$. A continuación, se verán algunos ejemplos.

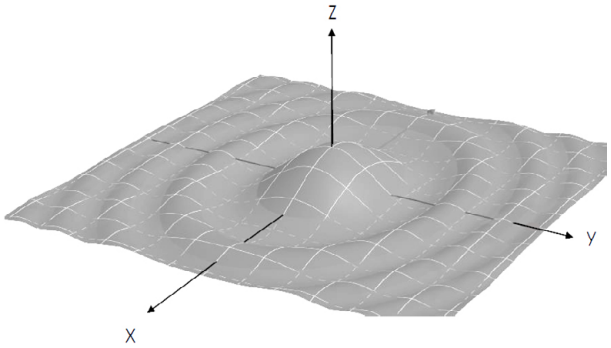



FIGURA 3.1.

## Ejemplo 1.

Sea la función

$$f(x, y) = \frac{\frac{1}{2}\cos(2x^2 + y^2)}{1 + 2x^2 + y^2}.$$

Como se muestra en su gráfica (figura 3.1), esta función tiene un máximo absoluto en el punto $(0, 0)$, ya que en $(0, 0)$ la función vale $\frac{1}{2}$ y es tal que $f(x, y) \leq \frac{1}{2} = f(0, 0)$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En efecto,

$$\cos\left(2x^2+y^2\right)\leq 1$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\cos\left(2x^2+y^2\right)\leq \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tfrac{1}{2}\cos\left(2x^2+y^2\right)}{1+2x^2+y^2} < \tfrac{1}{2} \qquad \forall (x,y)\neq(0,0).$$

## Ejemplo 2.

La función $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$ graficada en la figura 3.2, tiene un mínimo absoluto en el punto $(1,1)$, ya que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que $(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0=f(1,1)$.

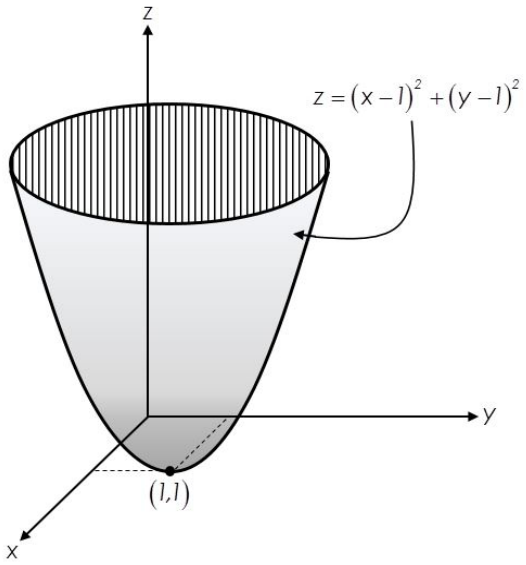



**FIGURA 3.2.** Gráfica de la función $(x-1)^2+(y-1)^2$. Se trata de un paraboloide de revolución cuyo eje de revolución es el eje vertical que pasa por el punto (1,1) del plano *XY*.

En estos dos ejemplos se tenía a la mano la gráfica de la función y fue relativamente fácil identificar sus valores extremos, pero en general el problema no es tan fácil y conviene desarrollar herramientas matemáticas específicas para este fin. En esta y las siguientes dos secciones se considerarían únicamente funciones continuas cuyo dominio de definición sea una región abierta, dejando para el final del capítulo otros casos.

Cuando el dominio es una región abierta puede ocurrir que la función no tenga ningún valor extremo en dicho dominio. Considérese, por ejemplo, la fun-

ción real de variable real $f(x)=x$, definida sobre el intervalo abierto (0, 1). Obviamente, si el intervalo fuera cerrado los valores máximo y mínimo de la función serían respectivamente 0 y 1, pero en el intervalo abierto (0, 1) no existe ni máximo ni mínimo.

En los casos en los que si exista un valor extremo de la función $f$ dentro de una región abierta entonces sus derivadas parciales se comportarían de una manera muy especial como lo indica el siguiente teorema.

**Teorema 1.** Sea $f(x, y)$ una función escalar continua en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(x_0, y_0) \in R$. Si esta función presenta un extremo relativo para $x=x_0$ y $y=y_0$, entonces es condición necesaria que las derivadas parciales de primer orden $f_x$ y $f_y$ se anulen o no existan en $(x_0, y_0)$. Además, cuando estas derivas existen el plano tangente a la superficie $z=f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es horizontal.

**Demostración:** Si se fija el valor de $y=y_0$ la función $f(x, y_0)$ dependería sólo de la variable $x$. Dado que la función tiene un extremo (máximo o mínimo) en $x=x_0$, entonces, de acuerdo con lo estudiado en el cálculo con una variable, la derivada

$$\left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

es igual a cero o no existe. De modo semejante se puede demostrar que

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$$

es cero o no existe. Además, si las derivas existen, un vector normal a la superficie en el punto extremo es (ver ecuación $(35')$ del capítulo 2)

$$\mathbf{N} = \nabla\left(z - f(x, y)\right)\Big|_{(x_0, y_0)} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\Bigg|_{(x_0, y_0)}$$

$$= (0, 0, 1)$$

y por lo tanto el plano tangente es horizontal.

## Ejemplo 3.

Considérense nuevamente las funciones de los dos ejemplos anteriores y comprobar que en los puntos extremos analizados el plano tangente es horizontal. Para la primera función se tiene que un vector normal a la superficie es

$$\mathbf{N} = \nabla\left(z - f(x, y)\right)\Big|_{(0, 0)} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\Bigg|_{(0, 0)}$$

$$= \left(\frac{-2x\,\operatorname{sen}\left(2x^2+y^2\right)\left(1+2x^2+2y^2\right)-2x\cos\left(2x^2+y^2\right)}{\left(1+2x^2+y^2\right)^2},\right.$$

$$\left.\frac{-y\,\operatorname{sen}\left(2x^2+y^2\right)\left(1+2x^2+2y^2\right)-y\cos\left(2x^2+y^2\right)}{\left(1+2x^2+y^2\right)^2}, 1\right)\Bigg|_{(0, 0)}$$

$$= (0, 0, 1),$$

lo que significa que en el punto máximo el plano tangente a la superficie es horizontal. Para la segunda se tiene

$$\mathbf{N} = \nabla\left(z - f(x, y)\right)\Big|_{(1, 1)}$$

$$= \left(-2(x-1), -2(y-1), 1\right)\Big|_{(1, 1)}$$

$$= (0, 0, 1)$$

y por lo tanto el plano tangente es horizontal.

Como consecuencia de este teorema se tiene que los valores extremos de las funciones definidas en regiones abiertas sólo pueden ocurrir en los puntos donde las derivadas parciales valen cero o no existen. Este tipo de puntos reciben un nombre especial.

**Definición.** Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en una región $R$. A los puntos $(x, y) \in R$ en donde el gradiente de $f$ se anula o no existe, se les denomina **puntos críticos** o **puntos estacionarios** de $f$.

## Ejemplo 4

Determinar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1.$$

**Solución:** Se calculan las derivadas parciales y se obtienen los puntos para los cuales ambas se anulan o no existen. Así,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -6xy - 6x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 - 6y \qquad \Rightarrow \begin{cases} -6x(y+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{o bien} \quad y = -1 \\ 3(y^2 - x^2 - 2y) = 0. \end{cases}$$

Si $x = 0$; $y^2 - 2y = y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0$ o $y = 2$. Y si $y = -1$; $3(1 - x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Entonces los puntos donde se hacen cero las derivadas parciales son

$$(0, 0), (0, 2), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, -1).$$

Como se puede apreciar, las derivadas parciales son continuas y siempre existen, por lo tanto, los únicos puntos críticos son

$$(0, 0), (0, 2), (\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, -1).$$

## Ejemplo 5.

Determinar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = (x-1)^{2/3}\,(y^2-4).$$

**Solución:** Si se calculan las derivadas parciales se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(y^2-4)}{3(x-1)^{1/3}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y(x-1)^{2/3}.$$

Como se observa, los únicos puntos que anulan o hacen que no existan ambas derivadas parciales son todos aquellos en donde $x=1$. Nótese que $(\partial z/\partial x)$ no existe para $x=1$. Entonces el conjunto de puntos críticos es

$$\{(1, y)\,|\,y \in \mathbb{R}\}.$$

## Ejemplo 6.

Determinar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = \ln(x^2+y^2).$$

**Solución:** Como se sabe, la función logaritmo es continua en todo su dominio, el cual, en este caso, está constituido por el conjunto de puntos tales que $x^2+y^2>0$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

y como se aprecia, no existen valores de $x$ y $y$ en el dominio que anulen o que hagan que no exista el gradiente de $f(x, y)$; por lo que se concluye que esta función no tiene puntos críticos. Nótese que las derivadas no existen en el origen; sin embargo, este no es un punto crítico porque no pertenece al dominio.

Parafraseando al teorema anterior se puede decir que si una función continua $f$ definida en una región abierta tiene un valor extremo relativo en el punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ entonces es condición necesaria que $\mathbf{P}$ sea un punto crítico. No obstante, esta condición necesaria no es suficiente, ya que puede ocurrir que una superficie tenga un punto crítico en algún lugar (por ejemplo, un punto donde sus derivadas parciales valgan cero) pero que no tenga un valor extremo ahí. Considérese como muestra de esto a la función estudiada a continuación.

## Ejemplo 7.

Analizar el comportamiento de la función $f(x, y) = e^{xy}$ cerca del origen.

**Solución:** Sea $S$ la gráfica de esta función (ver la figura 3.3). La traza de $S$ con el plano $YZ$ $(x = 0)$ es la recta $z = 1$, por lo que no presenta variación en esa dirección. Un resultado similar se obtiene para la traza con el plano $ZX(y = 0)$. La intersección de la superficie $S$ con el plano $y = x$ es la curva $z = e^{x^2}$, que presenta un mínimo en el punto (0, 0, 1). La intersección con el plano $y = -x$ es la curva $z = e^{-x^2}$, que presenta un máximo en (0, 0, 1). En resumen: en el punto (0, 0, 1) hay un máximo en la dirección $y = -x$, un mínimo en la dirección $y = x$, y no hay variación en las direcciones $x = 0$ y $y = 0$. Además, en este punto la superficie $S$ tiene un plano tangente horizontal, ya que un vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \nabla(z - e^{xy})\big|_{(0,0)} \\ &= (-ye^{xy}, -xe^{xy}, 1)\big|_{(0,0)} \\ &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

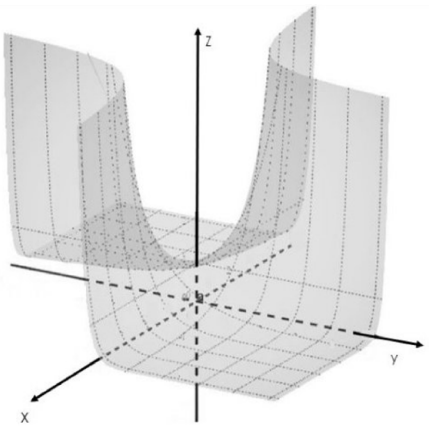



FIGURA 3.3.

El punto (0, 0, 1) de esta superficie es un ejemplo más de los llamados minimáximos o puntos silla parecido al de la figura 1.31 que se discutió en la sección 1.5.7.

Una de las características fundamentales de estos puntos es que, aparte de tener un plano tangente horizontal, el incremento de la función tiene distintos signos en las distintas direcciones. Por lo tanto, la función no tiene un valor extremo en ese punto.

Otro tipo de puntos que también tienen estas características son los puntos de inflexión con primera derivada igual a cero. Por ejemplo, del cálculo diferencial con una sola variable se sabe que la función $x^3$ tiene un punto de inflexión común en el origen con primera derivada igual a cero. Entonces la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x, y) = x^3,$$

(que representa una superficie cilíndrica cuya traza con el plano $ZX$ es la curva $x^3$) tiene puntos de inflexión a lo largo de todo el eje Y (o sea en $x = 0$). Todos estos puntos tienen un plano tangente horizontal y se tiene que el incremento de $f(x, y)$ es positivo en la dirección $\hat{\mathbf{i}}$, negativo hacia $-\hat{\mathbf{i}}$ y nulo hacia $\pm\hat{\mathbf{j}}$.

De acuerdo con el teorema 1 los valores extremos de una función cuyo dominio es una región abierta sólo pueden ocurrir en sus puntos críticos. Por lo tanto, para hallar los puntos en donde ocurren los valores extremos hay que buscarlos sólo entre los puntos críticos. Sin embargo, acabamos de ver que no necesariamente en cada punto crítico hay un valor extremo. Surge entonces la pregunta: ¿Como saber si en un punto crítico dado la función tiene un valor extremo? La respuesta la dan parcialmente los siguientes dos teoremas. (notar que si la función no tiene puntos críticos entonces no tiene valores extremos).

## 3.2 Criterio de la segunda derivada para determinar máximos y mínimos

En la sección anterior se encontraron las condiciones necesarias para la existencia de extremos en regiones abiertas ahora se darán condiciones suficientes. También se darán criterios para distinguir entre máximos, mínimos y puntos silla.

**Teorema 2.** Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función cuyas segundas derivadas parciales existen en una región abierta $R$ del plano $XY$; sean $(x_0, y_0)$ un punto crítico contenido en $R$; $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ un vector unitario en el plano $XY$; y $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ la segunda derivada direccional de $f$ valuada en $(x_0, y_0)$. Entonces:

*i)* $f(x_0, y_0)$ es un valor máximo relativo si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) < 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}$

*ii)* $f(x_0, y_0)$ es un valor mínimo relativo si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) > 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}$

*iii)* $f$ tiene un punto silla en $(x_0, y_0)$ si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ cambia de signo para diferentes direcciones de $\hat{\mathbf{u}}$.

*iv)* El criterio no decide si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ no cambia de signo pero existen vectores $\hat{\mathbf{u}}$ tales que $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = 0$.

**Demostración:** Se partirá del criterio de la segunda derivada del cálculo diferencial con una sola variable independiente. Como se ha visto, la derivada direccional es la razón de variación de la función $f(x, y)$ en la dirección $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$, la cual puede calcularse mediante la expresión

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + u_1 t, y_0 + u_2 t)\Big|_{t=0}$$

que como se observa, si $\hat{\mathbf{u}}$ se mantiene constante, es una derivada ordinaria en términos de $t$. Asimismo, la segunda derivada direccional

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = \frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + u_1 t, y_0 + u_2 t)\Big|_{t=0}$$

es una segunda derivada ordinaria y debe cumplirse que $f(x_0, y_0)$ es un valor máximo relativo de $f$ en la dirección de $\hat{\mathbf{u}}$ si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) < 0$. Por el contrario, $f(x_0, y_0)$ es un valor mínimo relativo de $f$ en la dirección de $\hat{\mathbf{u}}$ si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) > 0$. Y el criterio no decide si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = 0$. Si al variar el vector $\hat{\mathbf{u}}$ en todas las direc-

ciones posibles las desigualdades anteriores se conservan, entonces se cumple lo que establecen los incisos $(i)$ y $(ii)$ del teorema, pero si las desigualdades cambian al cambiar $\hat{\mathbf{u}}$, entonces se trata de un punto silla.

Puesto que en la práctica puede resultar muy laborioso analizar el comportamiento de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ en todas las direcciones posibles este teorema es poco utilizado. En cambio, el siguiente teorema es mucho más útil porque establece condiciones que no dependen explícitamente del vector $\hat{\mathbf{u}}$. La razón de haber dado aquí el teorema 2 es que la demostración del siguiente teorema está basada en la validez del teorema 2.

**Teorema 3.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con segundas derivadas parciales continuas en una región $R$ del plano $XY$; sea $(x_0, y_0)$ un punto crítico en $R$; y sea $g(x_0, y_0)$ definida como

$$g(x_0, y_0) \equiv f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f^{\,2}_{xy}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Entonces:

*i)* Si $g(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (o bien $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) se tiene que $f(x_0, y_0)$ es un valor máximo relativo.

*ii)* Si $g(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (o bien $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) se tiene que $f(x_0, y_0)$ es un valor mínimo relativo.

*iii)* Si $g(x_0, y_0) < 0$ entonces $f$ tiene un punto silla en $(x_0, y_0)$.

*iv)* El criterio no decide si $g(x_0, y_0) = 0$.

**Primera Demostración:** Como las segundas derivadas parciales son continuas se tiene que $f_{xy} = f_{yx}$ y la segunda derivada direccional está dada por

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla (D_{\hat{\mathbf{u}}} f) = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla f)$$

$$= u_1^2 f_{xx} + 2\,u_1 u_2 f_{xy} + u_2^2 f_{yy} \tag{2}$$

Si se hace $A = f_{xx}$ ; $B = f_{xy}$ y $C = f_{yy}$, se puede escribir

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = A u_1^2 + 2 B u_1 u_2 + C u_2^2$$

y también

$$g \equiv g(x_0, y_0) = AC - B^2. \tag{3}$$

Si se completan cuadrados y se factoriza:

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = A\left[u_1^2 + 2\,u_1 u_2 \frac{B}{A} + u_2^2 \frac{B^2}{A^2} + u_2^2 \frac{C}{A} - u_2^2 \frac{B^2}{A^2}\right]$$

$$= A\left[\left(u_1 + u_2 \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{u_2^2}{A^2}\left(AC - B^2\right)\right]$$

$$= A\left[\left(u_1 + u_2 \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{u_2^2}{A^2} g\right]$$

y sustituyendo $A$, $B$ y $C$:

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = f_{xx}\left[\left(u_1 + u_2 \frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + \frac{u_2^2}{f_{xx}^2} g\right]. \tag{4}$$

Esta expresión se cumple siempre y cuando $f_{xx} \neq 0$. Si en lugar de factorizar $A = f_{xx}$, se factoriza $C = f_{yy}$, la expresión adquiere la siguiente forma (suponiendo que $f_{yy} \neq 0$)

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = f_{yy}\left[\left(u_2 + u_1 \frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + \frac{u_1^2}{f_{yy}^2} g\right]. \tag{5}$$

Si se observa detenidamente la expresión (4) se notará que sea cual sea el vector $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ el signo de la segunda derivada direccional depende de los signos de $g$ y $f_{xx}$ (si por el contrario se observa la expresión (5) se notará que el signo depende de los signos de $g$ y $f_{yy}$). Se tiene entonces lo siguiente.

Si $g(x_0, y_0) > 0$, el signo de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ depende directamente de $f_{xx}(x_0, y_0)$ (o de $f_{yy}(x_0, y_0)$ si se utiliza la expresión (5)). Por lo tanto, aplicando el teorema 2 se concluye que:

*i)* Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (o bien $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) $\Rightarrow$ $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) < 0$ y por lo tanto $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo.

*ii)* Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (o bien $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) $\Rightarrow$ $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) > 0$ y por lo tanto $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo.

*iii)* Si $g(x_0, y_0) < 0$ existen direcciones para las que $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) < 0$ (por ejemplo cuando $u_1 + u_2(f_{xy}/f_{xx}) = 0$ y $f_{xx} > 0$) y direcciones para las cuales $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) > 0$ (por ejemplo cuando $u_2 = 0$ y $f_{xx} > 0$) por lo que en $(x_0, y_0)$ existe un punto silla.

*iv)* Si $g(x_0, y_0) = 0$, el signo de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ depende únicamente del signo de $f_{xx}$ o de $f_{yy}$ pero hay cuando menos una dirección en donde se anula el término $u_1 + u_2(f_{xy}/f_{xx})$ de la expresión (4) (o bien $u_2 + u_1(f_{xy}/f_{yy})$ de la expresión (5) ). Esto hace que en esa dirección $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ sea igual a cero y por lo tanto el criterio no decide.

De esta manera el teorema queda demostrado.

Como se puede apreciar, este teorema es útil cuando la segunda derivada direccional es distinta de cero, pero si esta se anula para una o todas las direcciones que pasan por $(x_0, y_0)$, deberá pasarse a derivadas direccionales de órdenes superiores (como se hace en el caso de las funciones con una sola variable). En este sentido es conveniente dar una segunda prueba del teorema anterior ya que al involucrar a la tercera derivada proporciona orientación de que hacer en los casos en los que se anula la segunda derivada direccional.

**Segunda Demostración:** Se partirá de la fórmula de Taylor para analizar el comportamiento del incremento de la función a partir del punto $(x_0, y_0)$. Si el incremento resulta negativo en cualquier dirección el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ será un máximo relativo, y si resulta positivo, el punto será un mínimo relativo. Esta prueba se aplica solamente a funciones que tienen terceras derivadas parciales continuas en una vecindad del punto crítico examinado. Afortunadamente esto incluye a un buen número de funciones de las que se encuentran en la práctica.

La fórmula de Taylor en dos dimensiones para una función que tiene derivadas de orden $N$ alrededor del punto $(x_0, y_0)$ es

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \left[ d\mathbf{r} \cdot \nabla \right]^j f(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=(x_0, y_0)} + \frac{1}{N!} \left[ d\mathbf{r} \cdot \nabla \right]^N f(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=(c_1, c_2)}, \tag{6}$$

siendo $d\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ un punto que se encuentra en la línea que une a $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ con $\mathbf{r} = (x, y)$, o sea

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{r}_0 + t \left| d\mathbf{r} \right| \hat{\mathbf{u}} \qquad\qquad 0 \le t \le 1, \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{u}} = \left| \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0} \right|$ es un vector unitario.

Si $f$ tiene derivadas de orden 3 continuas alrededor de $(x_0, y_0)$ $(\Rightarrow N = 3)$ y se desarrolla la suma indicada en (6) se tiene

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) &+ \frac{1}{1!} \left[ d\mathbf{r} \cdot \nabla \right]^1 f(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=(x_0,\, y_0)} \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ d\mathbf{r} \cdot \nabla \right]^2 f(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=(x_0,\, y_0)} \\ &+ \frac{1}{3!} \left[ d\mathbf{r} \cdot \nabla \right]^3 f(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=(c_1,\, c_2)}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que si $(x_0, y_0)$ es un punto crítico las derivadas $f_x$ y $f_y$ se anulan en $(x_0, y_0)$ y que, en consecuencia, el segundo término del miembro derecho también se anula entonces se tiene que

$$\Delta f \equiv f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}\left[d\mathbf{r}\cdot\nabla\right]^2 f(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \frac{1}{6}\left[d\mathbf{r}\cdot\nabla\right]^3 f(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{c}}.$$

Utilizando las ecuaciones (36) y (37) del capítulo 2 la expresión anterior se puede poner en términos de las derivadas direccionales y escribir

$$\Delta f = \frac{1}{2}(dr)^2 D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{6}(dr)^3 D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{c}).$$

Como las terceras derivadas parciales de $f$ son por hipótesis continuas en una vecindad de $\mathbf{r}_0$, cada una de ellas es finita en esa vecindad y por lo tanto, $D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{c})$ también es finita. En consecuencia $(dr)^3\, D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{c})$ puede hacerse arbitrariamente pequeña y despreciarse en comparación con $(dr)^2 D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$ (ya que $(dr)^3 \ll (dr)^2$). Por lo tanto, existe una vecindad de $\mathbf{r}_0$ en la cual el signo de $\Delta f$ está completamente determinado por el signo de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$. Esta derivada está dada por (ver ecuación (2)).

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = u_1^2 f_{xx} + 2u_1\, u_2 f_{xy} + u_2^2 f_{yy}.$$

El resto de la demostración consistiría en analizar los cambios de signo de esta expresión. Sin embargo, esto ya se hizo en la primera demostración (a partir de la expresión (2)) y no se repetiría aquí. Entonces las conclusiones $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ y $(iv)$ a las que se llegó allá son las mismas aquí y el teorema queda demostrado.

No obstante, esta segunda demostración sugiere que se pueden ampliar las herramientas de análisis utilizando la tercera derivada. De esta manera, existe el criterio de la *tercera derivada* que es totalmente análogo al de la segunda derivada y que se reproduce a continuación en forma abreviada.

Se principiaría haciendo notar que si $g(x_0, y_0)$ vale cero pueden ocurrir dos cosas:

1) $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ es igual cero en algunas direcciones y diferente de cero en otras. Esto ocurre cuando $f_{xx}$ o bien $f_{yy}$ es diferente de cero (ver ecuaciones (4) y (5)), pero hay cuando menos una dirección en donde se anula el término $u_1 + u_2(f_{xy}/f_{xx})$ de la expresión (4) (o bien $u_2 + u_1(f_{xy}/f_{yy})$ de la expresión (5)). En estas direcciones el término que involucra a las terceras derivadas

no es despreciable y proporciona información sobre el comportamiento de $\Delta f$. En el ejemplo (10) se analiza una función que cae dentro de este caso.

2) $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ vale cero en todas las direcciones. Esto ocurre cuando todas las segundas derivadas parciales son cero (ver ecuación (2)). En este caso el signo del incremento $\Delta f$ de $f$ queda determinado siempre por la tercera derivada. En el segundo caso del ejemplo (11) se analiza una función con estas características.

***Criterio de la tercera derivada.***- Si $f$ tiene derivadas continuas de orden 4 alrededor de $(x_0, y_0)$, se desarrolla la suma indicada en (6), se supone que $(x_0, y_0)$ es un punto crítico y que por lo tanto $D_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = 0 \ \ \forall \hat{\mathbf{u}}$ y se supone también que $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = 0$ en alguna o en todas las direcciones $\hat{\mathbf{u}}$, entonces,

$$\Delta f = \frac{1}{6}\left[d\mathbf{r}\cdot\nabla\right]^3 f(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \frac{1}{24}\left[d\mathbf{r}\cdot\nabla\right]^4 f(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{c}}$$

para toda $\hat{\mathbf{u}}$ en donde la segunda derivada vale cero.

Utilizando las ecuaciones (36) y (37) del capítulo 2 la expresión anterior se puede poner en términos de las derivadas direccionales y escribir

$$\Delta f = \frac{1}{6}(dr)^3 D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{24}(dr)^4 D^4_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{c})$$

para toda $\hat{\mathbf{u}}$ en donde la segunda derivada vale cero.

Como las cuartas derivadas parciales de $f$ son por hipótesis continuas en una vecindad de $\mathbf{r}_0$, cada una de ellas es finita en esa vecindad y por lo tanto $D^4_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{c})$ también es finita. En consecuencia $(dr)^4 D^4_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{c})$ puede hacerse arbitrariamente pequeña y despreciarse en comparación de $(dr)^3 D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$ en las direcciones en donde la segunda derivada vale cero. Por lo tanto existe una vecindad de $\mathbf{r}_0$ en la cual el signo de $\Delta f$ está completamente determinado por el signo de $D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$ en dichas direcciones. La tercera derivada está dada por (ver ecuación (37) del capítulo anterior)

$$D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = \left[\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla\right]^3 f$$

$$= u_1^3 f_{xxx} + 3u_1^2 u_2 f_{xxy} + 3 u_1 u_2^2 f_{xyy} + u_2^3 f_{yyy}.$$

Si $D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ cambia de signo en las direcciones mencionadas (pero no se hace cero), inducirá cambios de signo en $\Delta f$, y por lo tanto habrá un punto silla en $(x_0, y_0)$. Si $D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$ no cambia de signo en esas direcciones y su signo es igual al de $\Delta f$ en las otras direcciones habrá un extremo relativo.

## Ejemplo 8.

Determinar si en los puntos críticos de la siguiente función, hay máximos, mínimos o puntos silla:

$$f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1.$$

**Solución:** Los puntos críticos de esta función ya se habían determinado en el ejemplo 4 y son:

$$(0, 0); \quad (0, 2); \quad (-\sqrt{3}, -1) \quad \text{y} \quad (\sqrt{3}, -1).$$

Ahora se calculan las derivadas parciales de segundo orden (incluyendo la mixta):

como $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -6xy - 6x = -6x(y+1) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6(y+1)$

como $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 - 6y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6(y-1);$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6x.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} g &= f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \\ &= \left[-6(y+1)\right]\left[6(y-1)\right] - \left[-6x\right]^2 \\ &= -36\left(y^2-1\right) - 36x^2 \\ &= 36\left(1-x^2-y^2\right). \end{aligned}$$

A continuación se evalúan las segundas derivadas parciales y la $g(x, y)$ en cada punto crítico

— Para (0, 0):

$g(0, 0) = 36 > 0$ y $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$

por lo tanto (0, 0, 1) es un máximo relativo.

— Para (0, 2):

$g(0, 2) = -108 < 0$

por lo tanto $(0, 2, -3)$ es un punto silla.

— Para $(-\sqrt{3}, -1)$:

$g(-\sqrt{3}, -1) = -108 < 0$

por lo tanto $(-\sqrt{3}, -1, -3)$ es un punto silla.

— Para $(\sqrt{3}, -1)$:

$g(\sqrt{3}, -1) = -108 < 0$

y por lo tanto $(\sqrt{3}, -1, -3)$ también es un punto silla.

La gráfica de esta función se muestra en la figura 3.4. Nótese que la función no tiene extremos absolutos debido a que no está acotada. Una condición necesaria pero no suficiente para que una función tenga extremos absolutos es que sea acotada.

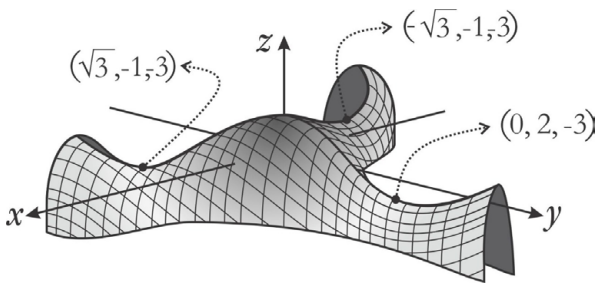



**FIGURA 3.4.** Gráfica de la función $y^3-3yx^2-3y^2-3x^2+1$ del ejemplo 8.La función tiene tres puntos silla y un máximo.

## Ejemplo 9.

Determinar las características de los puntos críticos de la función $f(x, y)=xy-x^3y-xy^3$ definida sobre la región abierta

$$R_A=\{(x, y)\mid 0<x<1;\ 0<y<1;\ x, y\in\mathbb{R}\}.$$

**Solución:** La gráfica de la función se muestra en la figura 3.5. Si se calculan las derivadas parciales, se igualan a cero y se resuelve el sistema, se llega a

$$f_x=y-3x^2y-y^3 \qquad \Rightarrow \qquad y(1-3x^2-y^2)=0$$

$$f_y=x-x^3-3xy^2 \qquad \Rightarrow \qquad x(1-3y^2-x^2)=0.$$

Estas ecuaciones se satisfacen en cualesquiera de los siguientes casos:

Primer caso: $x=y=0.$

Segundo caso:
$$\left.\begin{aligned}1-3x^2-y^2&=0\\ x&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad y=\pm 1.$$

Tercer caso: $\left.\begin{array}{r} 1-3y^2-x^2=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=\pm 1.$

Cuarto caso:

$$\left.\begin{array}{l} 1-3x^2-y^2=0 \\ 1-x^2-3y^2=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ y=\pm\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Así, los puntos que anulan las derivadas son

$(0, 0)$; $(0, -1)$; $(0, 1)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$;

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Si se eliminan todos aquellos que están en la frontera de $R_A$ o que quedan fuera de $R_A$ sólo queda un único punto crítico dentro del dominio, el cual es $(1/2, 1/2)$. Además, el valor de la función en dicho punto es $1/8$. Ahora se aplica el criterio de la segunda derivada:

$$\left.\begin{array}{l} f_x=y-3x^2y-y^3 \\ f_y=x-x^3-3xy^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f_{xx}=-6xy \\ f_{yy}=-6xy \\ f_{xy}=1-3x^2-3y^2 \end{array}\right.$$

de donde

$$g(x, y)=(-6xy)(-6xy)-(1-3x^2-3y^2)^2$$

$$=6(x^2+y^2)-9(x^2-y^2)^2-1.$$

Evaluando en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \qquad \text{y} \qquad f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

por lo que el punto $(½, ½, ⅛)$ es un máximo relativo. Más adelante, en el ejemplo 3.19 de la sección 3.4, se volverá a tratar esta misma función, pero entonces el dominio será una región cerrada.

## Ejemplo 10.

Determinar si el punto (0, 0, 1) es un punto silla de la función $f(x, y) = 3x^2y - 9y^3 - x^2 + 1$.

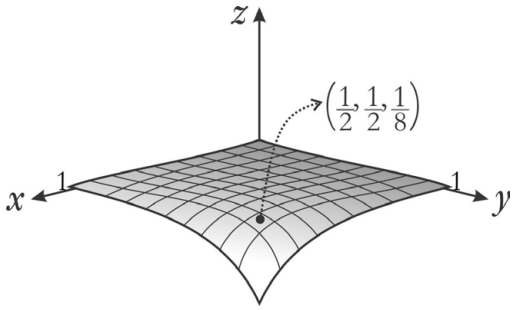



**FIGURA 3.5.** Grafica de la función $xy - x^3y - xy^2$ del ejemplo 9. Hay un máximo relativo en el punto $(½, ½) \in R_A$.

**Solución:** Primero se investiga si (0, 0) es un punto crítico. Para esto se calcula

$$f_x = 6xy - 2x = 2x(3y - 1)$$

$$f_y = 3x^2 - 27y^2 = 3(x^2 - 9y^2).$$

Como $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ se concluye que $(0, 0)$ es un punto crítico.

Ahora se aplica el criterio de la segunda derivada:

$$f_{xx} = 2(3y - 1); \qquad f_{xx}(0, 0) = -2$$

$$f_{yy} = -54y; \qquad f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy} = 6x; \qquad f_{xy}(0, 0) = 0$$

y se tiene que

$$g(0, 0) = (-2)(0) - (0)^2 = 0.$$

Como $g(0, 0) = 0$, no es posible concluir nada con el criterio de la segunda derivada y se procede a analizar el comportamiento de la tercera derivada. La segunda derivada direccional es

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f = -2u_1^2,$$

la cual vemos que es distinta de cero excepto cuando $u_1 = 0$, es decir, se anula en las direcciones $\hat{\mathbf{j}}$ y $-\hat{\mathbf{j}}$. Por otro lado, como

$$f_{xxx} = 0; \qquad f_{xyy} = 0; \qquad f_{xxy} = 6; \qquad \text{y} \qquad f_{yyy} = -54$$

la tercera derivada direccional es

$$D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f = 18(u_1)^2(u_2) - 54(u_2)^3 = 18u_2\left[(u_1)^2 - 3(u_2)^2\right],$$

por lo que el incremento queda como

$$\Delta f = \frac{1}{2}(dr)^2 D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f + \frac{1}{6}(dr)^3 D^3_{\hat{\mathbf{u}}} f = (dr)^2\left[-(u_1)^2 + 3u_2\left[(u_1)^2 - 3(u_2)^2\right]dr\right].$$

En las direcciones en las que se anula la segunda derivada se tiene que $u_1 = 0$ y por tanto

$$\begin{cases} \Delta f < 0 & \text{para} \quad dy > 0 \\ \Delta f > 0 & \text{para} \quad dy < 0 \end{cases}$$

y $f$ tiene un punto silla en $(0, 0, 1)$.

## Ejemplo 11.

Calcular los máximos y mínimos relativos de la función

$$z = f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$$

en la región abierta definida por

$$0 < x < 2\pi\,; \qquad 0 < y < 2\pi.$$

**Solución:** Las derivadas parciales igualadas a cero son

$$f_x = \cos x + \cos(x + y) = 0$$

$$f_y = \cos y + \cos(x + y) = 0$$

si se restan las dos ecuaciones se tiene

$$\cos x = \cos y$$

y como $x$ y $y$ están restringidas al intervalo abierto $(0,\ 2\pi)$ se sigue que $y = x$ o bien $y = 2\pi - x$. Sustituyendo $y = x$ en $f_x$ (o en $f_y$):

$$f_x = \cos x + \cos 2x = 0.$$

Aplicando la identidad trigonométrica: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, se llega a

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Y, mediante la fórmula general para la solución de las ecuaciones de segundo grado se obtiene

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} +\frac{1}{2} \\ -1. \end{cases}$$

El primer caso implica

$$\cos x = +\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

y el segundo

$$\cos x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pi.$$

Por otro lado, sustituyendo $y = 2\pi - x$ en $f_x$ (o en $f_y$):

$$f_x = \cos x + \cos(x + 2\pi - x) = \cos x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pi.$$

Entonces los puntos críticos son

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right); \quad (\pi, \pi); \quad \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

y todos quedan en el interior del dominio. Ahora se calculan las segundas derivadas y la $g(x, y)$:

$$f_{xx} = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x + y)$$

$$f_{yy} = -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x + y)$$

$$f_{xy} = -\operatorname{sen}(x + y);$$

$$g(x, y) = [-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x + y)][-\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x + y)] - [-\operatorname{sen}(x + y)]^2$$

$$= \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) \operatorname{sen}(x + y).$$

Al aplicar el criterio de la segunda derivada:

— En $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$;

$$g\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}>0 \quad \text{y} \quad f_{xx}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$$

por lo tanto, el punto $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$ es un máximo relativo.

— En $(\pi, \pi)$;

$$g(\pi, \pi)=0,$$

por lo tanto, el criterio de la segunda derivada no decide en el punto $(\pi, \pi, 0)$ y será necesario aplicar el criterio de la tercera derivada (ver más adelante).

— En $\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$;

$$g\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}>0 \quad \text{y} \quad f_{xx}\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt{3}>0$$

y en consecuencia el punto $\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un mínimo relativo.

Ahora se aplicará el criterio de la tercera derivada en el punto $(\pi, \pi)$. Como $\text{sen}(\pi)=0$ y $\text{sen}(2\pi)=0$ entonces

$$f_{xx}(\pi, \pi)=0$$

$$f_{yy}(\pi, \pi)=0$$

$$f_{xy}(\pi, \pi)=0$$

y por lo tanto la segunda derivada direccional se anula en todas direcciones. Las terceras derivadas en ese punto son

$$f_{xxx}(\pi, \pi)=\left[-\cos(x)-\cos(x+y)\right]\Big|_{(\pi\cdot\pi)}=0$$

$$f_{xxy}(\pi, \pi)=\left[-\cos(x+y)\right]\Big|_{(\pi\cdot\pi)}=-1$$

$$f_{yyy}(\pi, \pi) = \left[-\cos(y) - \cos(x+y)\right]\Big|_{(\pi\cdot\pi)} = 0$$

$$f_{yyx}(\pi, \pi) = \left[-\cos(x+y)\right]\Big|_{(\pi\cdot\pi)} = -1$$

y

$$D^3_{\hat{\mathbf{u}}}(\pi, \pi) = -3\left[u_1^2 u_2 + u_1 u_2^2\right].$$

Esto implica que en una vecindad suficientemente pequeña alrededor de $(\pi, \pi)$ la cuarta diferencial puede despreciarse y que el incremento de la función es igual a

$$\Delta f = -\frac{1}{2}\left[u_1^2 u_2 + u_1 u_2^2\right](dr)^3.$$

Como esta expresión puede cambiar de signo al cambiar los valores de $u_1$ y $u_2$ entonces el punto $(\pi, \pi, 0)$ es un punto silla. La gráfica de esta función se muestra en la figura 3.6.

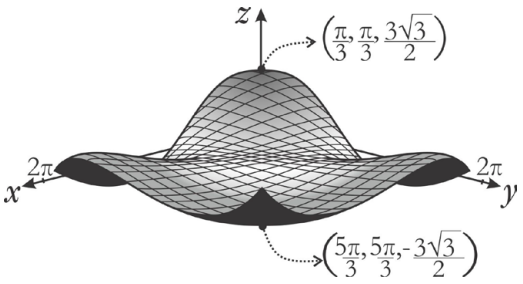



**FIGURA 3.6.** Gráfica de la función $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$ del ejemplo 11. El dominio de la función es la región abierta definida por $0 < x < 2\pi$ y $0 < y < 2\pi$.

## Ejercicios

**3.1.** En una fábrica de cajas cubicas de cartón se desea determinar el número $N$ de cajas y el tamaño de la arista $T$ más apropiados para que el costo por caja $C$ sea mínimo. Se sabe que la relación entre $C$, $T$ y $N$ está dada por

$$(T-2)^2 - 1 + \left(\sqrt{(N-3)^2 + (C-9)^2} - 5\right)^2 = 0.$$

a) Utilizando los métodos vistos en este capítulo, determinar los valores de $T$, $N$ y $C$ que resuelven el problema.
*Sugerencia.* Aunque la variable $N$ sólo toma valores enteros, considérese-sele inicialmente como variable continua, y luego elíjase el valor entero más próximo al valor hallado.

b) ¿Podrían darse algunos argumentos que permitieran resolver el problema sin utilizar los métodos vistos en este capítulo? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

**Solución:** a) $C=3$, $T=2$, $N=3$. b) Al graficar la ecuación se ve que el valor mínimo de $C$ se encuentra en el punto $T=2$, $N=3$.

**3.2.** Considérese nuevamente el problema 1, pero ahora con la restricción de que $T$ debe estar entre los valores 3 y 4. Determinar nuevamente los valores de $T$ y $N$ que hacen mínimo a $C$.

**Solución:** $C=4$, $T=3$, $N=3$.

**3.3.** Considérese el elipsoide dado por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-g)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1.$$

Utilizando la formulación discutida en este capítulo, demostrar que la altura máxima del elipsoide está sobre el punto $x=h$, $y=g$, y vale $z=k+c$.

**3.4.** Sea el plano de ecuación $x+2y+3z-4=0$ y sea el punto $\mathbf{x}_0=(-1,-1,-1)$.

a) Obtener la expresión que da la distancia de $\mathbf{x}_0$ a un punto arbitrario del plano.

b) Determinar la distancia mínima entre $\mathbf{x}_0$ y el plano.

**3.5.** Sea la parábola dada por la ecuación $y = 4x^2$ y sea el punto $\mathbf{x}_0 = (0, 5)$.

a) Obtener la expresión que da la distancia $D$ entre $\mathbf{x}_0$ y un punto arbitrario de la parábola.
b) Determinar la distancia mínima entre $\mathbf{x}_0$ y la parábola.

**Solución:** a) $D^2 = 16x^4 - 39x^2 + 25$. b) $D^2_{min} = 25 - 39^2/64$.

**3.6.** Se desea construir una caja cuyas caras son de forma rectangular. El área de su superficie total tiene un valor fijo $A$. Determinar las dimensiones de los lados de la caja de volumen máximo.

**Solución:** $x = y = \sqrt{A}/2$; $z = 3\sqrt{A}/4$.

**3.7.** Se desea construir una caja sin tapa cuyas caras son de forma rectangular. El volumen tiene un valor fijo $V$. Determinar las dimensiones de los lados de la caja de superficie mínima.

**Solución:** $x = y = z = V^{1/3}$; Área mínima $= 5V^{2/3}$

**3.8.** Obtener los puntos críticos de las siguientes funciones, indicando en cada caso si en ellos ocurre un máximo, un mínimo o un punto silla:

a) $f(x, y) = ax + by + d$.
b) $f(x, y) = (x-2)^2 - (y-3)^2$.
c) $f(x, y) = \cos x + \cos y$.
d) $f(x, y) = \cos x$.

**Solución:** a) La superficie es un plano y no tiene puntos críticos; b) Punto crítico es $(2,3,0)$ en el que hay un punto silla; c) Hay un número infinito de puntos críticos en $(\pi k,\ \pi k,\ 2(-1)^k)$. Si $k$ es impar hay un mínimo y si $k$ es par hay un máximo; d) Hay un número infinito de puntos críticos en $\pi k,\ y, (-1^k)$ con $y$ arbitrario. Si $k$ es impar hay un mínimo y si $k$ es par hay un máximo.

**3.9.** Calcular los máximos, los mínimos y los puntos silla de la función

$$4x^2-12xy+9y^2.$$

**Solución:** No hay puntos silla ni máximos. El origen es un punto mínimo.

**3.10.** Determinar los máximos, los mínimos y los puntos silla de la función

$$(x-y)\,(1-xy).$$

**Solución:** Hay dos puntos silla: el $(-1,1,0)$ y el $(1,1,0)$.

**3.11.** Determinar los máximos y mínimos de la siguiente función

$$\frac{1}{2}\sqrt{\ x\left(2\sqrt{2}-x\right)-y\left(y+2\sqrt{2}\right).}$$

**Solución:** El punto $(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ es un máximo.

**3.12.** Analizar los extremos relativos de la función

$$x^2+y^3-6y.$$

**Solución:** El punto mínimo relativo es $(0,-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$, El punto máximo relativo es $(0,\sqrt{2},4\sqrt{2})$.

**3.13.** Comprobar que la función

$$f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$$

tiene un conjunto infinito de máximos y ningún mínimo.

**Solución:** La función es máxima en $y = 0$ y decae hacia $-\infty$ si $y \to \infty$ y tiende a 1 si $y \to -\infty$, por lo que no tiene mínimo. Entonces los máximos están sobre el eje x (es decir, cuando $y = 0$) y son los puntos en donde $x = 2\pi N$, siendo $N$ un entero arbitrario.

**3.14.** Considérense la parábola $\mathcal{P}$ y la recta $\mathcal{R}$ dadas por las ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x = u \\ y = 2u^2 + 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x = v + 2 \\ y = -v \\ z = v - 8. \end{cases}$$

a) Obtener la expresión que da la distancia $D$ entre un punto arbitrario de $\mathcal{P}$ y un punto arbitrario de $\mathcal{R}$ en términos de los parámetros $u$ y $v$.

b) Demostrar que en el punto de la parábola más cercano a la recta el valor de parámetro $u$ está dado por las raíces de la ecuación

$$16u^3 + 6u^2 + 74u - 9 = 0.$$

**Solución:** a) $D^2 = (u - v - 2)^2 + (2u^2 + 5 + v)^2 + (10 - v)^2$.

**3.15.** Considérense los aros $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dados por las ecuaciones

$$\mathcal{A}_1:\begin{cases} x=5 \\ y=\cos t \\ z=\operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_2:\begin{cases} x=1+\cos s \\ y=4 \\ z=1+\operatorname{sen} s. \end{cases}$$

a) Obtener la expresión que da la distancia $D$ entre un punto arbitrario de $\mathcal{A}_1$ y un punto arbitrario de $\mathcal{A}_2$.

b) Demostrar que los valores de los parámetros $s$ y $t$ en los puntos de distancia mínima satisfacen las ecuaciones
$(4-\cos t)\operatorname{sen} t+(\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} s-1)\cos t=0$
$(4-\cos s)\operatorname{sen} s-(\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} s-1)\cos s=0.$

**Solución:** $D^2=(4-\cos s)^2+(4-\cos t)^2+(\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} s-1)^2$

## 3.3 Generalización del criterio para el caso de más de dos variables

En esta parte se generalizará el criterio de la segunda derivada para el caso de una función escalar con tres o más variables.

**Definición.** Sea $f(\mathbf{r})=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una función escalar con $n$ variables continua en una región $R$ de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $f(\mathbf{r})$ tiene un máximo relativo en $\mathbf{r}_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ si existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $\mathbf{r}_0$, tal que $f(\mathbf{r}_0)\geq f(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}\in\mathcal{V}\cap R$. Si $f(\mathbf{r}_0)\leq f(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}\in\mathcal{V}\cap R$ se dice que hay un mínimo relativo en $\mathbf{r}_0$.

**Teorema 4.** Sea $f(\mathbf{r})$ una función escalar continua en una región abierta $R$ en $\mathbb{R}^n$. La condición necesaria para que exista un valor extremo de $f$ en un punto $\mathbf{r}_0$ de $R$ es que sus derivadas parciales sean cero o no existan en dicho punto, es decir, si en $\mathbf{r}_0$ existe un extremo de $f$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{o no existe} \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

La demostración se omite por ser semejante a la del caso de dos dimensiones.

**Definición.** Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar continua en una región $R$ de $\mathbb{R}^n$. A los puntos $\mathbf{r}_0 \in R$ donde el gradiente $(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \cdots, \partial f/\partial x_n)$ se hace cero o no existe, se les denomina puntos críticos de $f$.

**Teorema 5.** Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función cuyas segundas derivadas parciales existen en una región abierta $R$ del espacio $\mathbb{R}^n$; sean $\mathbf{r}_0$ un punto crítico contenido en $R$; $\hat{\mathbf{u}}$ un vector unitario en el dominio de $f$; y $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$ la segunda derivada direccional evaluada en el punto $\mathbf{r}_0$ y en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$, entonces:

*i)* $f$ tiene un máximo relativo en $\mathbf{r}_0$ si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0) < 0 \ \ \forall \hat{\mathbf{u}}$
*ii)* $f$ tiene un mínimo relativo en $\mathbf{r}_0$ si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0) > 0 \ \ \forall \hat{\mathbf{u}}$
*iii)* $f$ tiene un punto silla en $\mathbf{r}_0$ si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$ cambia de signo para diferentes direcciones $\hat{\mathbf{u}}$
*iv)* Si $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r})$ no cambia de signo, pero existen direcciones $\hat{\mathbf{u}}$ tales que $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}) = 0$ el criterio no decide.

También se omite la demostración de este teorema.

Para mostrar cómo se determina el signo de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$, se considerará nuevamente el caso de dos dimensiones y a partir de allí se extenderá el razonamiento para el caso de $n$ dimensiones. Se vio en la sección 2.6.3 del capítulo anterior que

si $f(x, y)$ es una función con segundas derivadas parciales continuas entonces la segunda derivada direccional de $f(x, y)$ en la dirección del vector $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ evaluada en $\mathbf{r}_0$ es igual a

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = u_1^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2\, u_1 u_2 f_{xy}(x_0, y_0) + u_2^2 f_{yy}(x_0, y_0).$$

El segundo miembro puede expresarse matricialmente como sigue

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}^T H \hat{\mathbf{U}},$$

donde el símbolo $\hat{\mathbf{U}}$ representa al vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ escrito como una matriz columna, es decir,

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ y } \hat{\mathbf{U}}^T \text{ a su traspuesta. Además,}$$

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix},$$

la cual es una matriz simétrica (denominada *matriz hessiana* en honor del matemático alemán Ludwig Otto Hesse, 1811–1874). Como $H$ es simétrica tiene la propiedad de que se puede escribir como un producto de la forma

$$H = P \mathcal{D} P^T,$$

siendo $P$ la matriz ortogonal que se construye poniendo como columnas a los vectores característicos de $H$ normalizados, y $\mathcal{D}$ es la matriz diagonal

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

donde $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son los valores característicos de $H$ (se recomienda al lector que no esté familiarizado con el procedimiento para diagonalizar una matriz y con

los conceptos de valores y vectores característicos, que consulte algún libro de álgebra lineal).

Sustituyendo la ecuación $H = P\mathcal{D}P^T$ en la expresión matricial de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f$ se llega a

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = \hat{\mathbf{U}}^T P\mathcal{D}P^T \hat{\mathbf{U}} = \left(P^T \hat{\mathbf{U}}\right)^T \mathcal{D}\left(P^T \hat{\mathbf{U}}\right).$$

Si se define $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \equiv \mathrm{P}^T \hat{\mathbf{U}}$ entonces

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f = \mathbf{v}^T \mathcal{D}\mathbf{v}$$

o sea,

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2.$$

En esta expresión se ve que el signo de la segunda derivada direccional depende de los signos de los valores característicos $\lambda_1$ y $\lambda_2$. Se tiene así otro método para determinar la naturaleza de los puntos críticos de una función. Para ilustrar su aplicación, considérese el siguiente ejemplo.

## Ejemplo 12.

Determinar los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$.

**Solución:** Se obtienen primero sus puntos críticos:

$$\left.\begin{aligned} f_x = 3x^2 - 3y = 3\left(x^2 - y\right) = 0 \quad &\Rightarrow y = x^2 \\ f_y = -3x + 3y^2 = 3\left(y^2 - x\right) = 0 \quad &\Rightarrow x = y^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow x^4 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{y} \quad y = 0 \\ x = 1 & \text{y} \quad y = 1. \end{cases}$$

En consecuencia, los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

La matriz hessiana es

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 6x \\ f_{yy} &= 6y \\ f_{xy} &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \qquad H = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

Al evaluarla en el primer punto crítico $(0, 0)$ se obtiene

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, para calcular sus valores característicos se debe calcular el determinante de la matriz $H - \lambda I$ e igualarlo a cero, es decir,

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = 3; \qquad \lambda_2 = -3.$$

Por lo tanto,

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(0, 0) = 3v_1^2 - 3v_2^2,$$

en donde se ve que el signo de la segunda derivada direccional varía según los valores que tomen $v_1$ y $v_2$; por lo que el punto (0, 0, 0) es un punto silla.

Al evaluarla en el punto (1, 1) se obtiene

$$H=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H-\lambda I)=\begin{bmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{bmatrix}=(6-\lambda)^2-9=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=9; \qquad \lambda_2=3.$$

Por lo tanto,

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(1,1)=9v_1^2+3v_2^2.$$

Aquí, el signo de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f$ siempre es positivo, por lo que el punto (1, 1, −1) es un mínimo relativo.

La generalización de este método para el caso de $n$ dimensiones se describe en el siguiente teorema.

**Teorema 6.** Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con primeras derivadas parciales continuas en una región $R$ del espacio $n$-dimensional $\mathbb{R}^n$; sea $\mathbf{r}_0 \in R$ un punto crítico tal que $f_{x_i}(\mathbf{r}_0)=0 \ \ \forall i=1, 2, \cdots, n$; y sea $H$ la matriz hessiana definida por

$$H=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

en donde

$$f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}=f_{ji}$$

para $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Entonces:

*i)* $f(\mathbf{r}_0)$ es un máximo relativo si la matriz hessiana valuada en $\mathbf{r}_0$ es una matriz negativa definida, lo cual significa que todos sus valores característicos son negativos, es decir

$$\lambda_i < 0 \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

*ii)* $f(\mathbf{r}_0)$ es un mínimo relativo si la matriz hessiana valuada en $\mathbf{r}_0$ es una matriz positiva definida, lo cual significa que todos sus valores característicos son positivos, es decir,

$$\lambda_i > 0 \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

*iii)* Hay un punto minimáximo, o punto silla, en $\mathbf{r}_0$ si existen valores característicos diferentes de cero de la matriz hessiana valuada en $\mathbf{r}_0$ con signos diferentes.

*iv)* El criterio no decide si todos los valores característicos de la matriz hessiana valuada en $\mathbf{r}_0$ tienen el mismo signo, excepto uno o varios de ellos que son iguales a cero.

**Demostración:** Sea $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^n$. En la sección 2.6.2 se mostró que la segunda derivada direccional de $f$ valuada en $\mathbf{r}_0$ en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$ está dada por

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0) = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \left( \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla f(\mathbf{r}_0) \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{r}_0) u_i u_j$$

o bien

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} u_1 u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}^T H \hat{\mathbf{U}},$$

donde $\hat{\mathbf{U}}$ es la matriz columna cuyas componentes son las del vector $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{U}}^T$ su traspuesta, y $H$ la matriz hessiana:

$$H=\left[f_{ij}\right]=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}.$$

Como $H$ es una matriz simétrica (ya que $f$ tiene segundas derivadas parciales continuas y en consecuencia se cumple el teorema de Schwartz: $f_{ij}=f_{ji}$) se tiene que $H$ es igual a un producto de la forma

$$H=P\mathcal{D}P^T,$$

siendo $P$ la matriz ortogonal que se construye poniendo como columnas a los vectores característicos de $H$ normalizados y $\mathcal{D}$ una matriz diagonal. Así, la segunda derivada direccional queda como

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}}f(\mathbf{r}_0)=\hat{\mathbf{U}}^T P\mathcal{D}P^T\,\hat{\mathbf{U}}=\left(P^T\,\hat{\mathbf{U}}\right)^T D\left(P^T\,\hat{\mathbf{U}}\right).$$

Si se define $\mathbf{v}\equiv P^T\,\hat{\mathbf{U}}$ se tiene que

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}}f(\mathbf{r}_0)=\mathbf{v}^T\mathcal{D}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\nu_1\ \nu_2\cdots\nu_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \vdots\\ \nu_n\end{bmatrix},$$

lo cual es igual a

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}}f(\mathbf{r}_0)=\lambda_1\,\nu_1^2+\lambda_2\,\nu_2^2+\cdots+\lambda_n\,\nu_n^2.$$

Analizando esta expresión se concluye que:

*i)* Si $\lambda_i<0\ \ \forall i=1,2,\cdots,n$, entonces $D^2_{\hat{\mathbf{u}}}f(\mathbf{r}_0)<0\ \forall\hat{\mathbf{u}}$, y se tiene un máximo relativo en $\mathbf{r}_0$.

*ii)* Si $\lambda_i>0\ \ \forall i=1,2,\cdots,n$, entonces $D^2_{\hat{\mathbf{u}}}f(\mathbf{r}_0)>0\ \ \forall\hat{\mathbf{u}}$, y se tiene un mínimo relativo en $\mathbf{r}_0$.

*iii)* Si para alguna $i$ y alguna $j \neq i$, $\lambda_i$ y $\lambda_j$ tienen signos contrarios con $\lambda_i \neq 0$ y $\lambda_j \neq 0$, entonces el signo de $D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f(\mathbf{r}_0)$ cambia al cambiar $\hat{\mathbf{u}}$, y por lo tanto en $\mathbf{r}_0$ hay un punto silla o minimáximo.

*iv)* Si todos los $\lambda_i$ tienen el mismo signo excepto uno o varios que valen cero, no se puede asegurar nada ya que la segunda derivada direccional se anula en al menos una dirección.

Así termina la demostración del teorema.

Si las segundas derivadas parciales se anulan, lo que se hace es (igual que antes) analizar el comportamiento de las derivadas de órdenes superiores. Para ilustrar la aplicación de este teorema se resolverán los siguientes dos ejemplos.

## Ejemplo 13.

Verificar que el campo escalar

$$U = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

tiene un punto crítico en (1, 1, 1) y determinar la naturaleza de dicho punto analizando los valores característicos de la matriz hessiana.

**Solución:** Las derivadas parciales son

$$U_x = 4x^3 - 4yz; \qquad U_y = 4y^3 - 4xz; \qquad U_z = 4z^3 - 4xy$$

y como $U_x(1, 1, 1) = U_y(1, 1, 1) = U_z(1, 1, 1) = 0$ se concluye que (1, 1, 1) es un punto crítico. Se calculan ahora la matriz hessiana y sus valores característicos en el punto (1, 1, 1):

$$U_{xx} = 12x^2 \quad U_{xy} = -4z$$

$$U_{yy} = 12y^2 \quad U_{xz} = -4y$$

$$U_{zz} = 12z^2 \quad U_{yz} = -4x$$

$$\Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = \begin{bmatrix} 12-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 12-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 12-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 36\lambda^2 - 384\lambda + 1024 = 0,$$

de donde los valores característicos son

$$\lambda_1 = 4; \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 16.$$

Como todos son positivos se concluye que el punto (1, 1, 1, −1) es un mínimo relativo.

## Ejemplo 14.

Analizar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$V(x, y, z, w) = 4 - w^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

**Solución:** Calculando las primeras derivadas e igualando a cero se tiene

$$V_x = -2x = 0; \qquad V_y = -2y = 0; \qquad V_z = -2z = 0; \qquad V_w = -2w = 0.$$

Claramente se ve que el único punto crítico es (0, 0, 0, 0). Ahora se calculan la matriz hessiana y sus valores característicos en dicho punto:

$$V_{xx} = -2 \qquad V_{zz} = -2 \qquad V_{xy} = 0 \qquad V_{xw} = 0 \qquad V_{yw} = 0$$

$$V_{yy} = -2 \qquad V_{ww} = -2 \qquad V_{xz} = 0 \qquad V_{yz} = 0 \qquad V_{zw} = 0$$

de donde

$$H=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left(H-\lambda I\right)=\left(\lambda+2\right)^4=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-2<0.$$

Como todos los valores característicos son negativos, el punto (0, 0, 0, 0, 4) es un máximo relativo.

Frecuentemente, en vez de calcular explícitamente los valores característicos de $H$ para determinar sus signos, lo que se hace es recurrir al siguiente criterio desarrollado por James Joseph Sylvester. Sean

$$H_1\equiv f_{11},\ H_2\equiv\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix},\ H_3\equiv\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\end{bmatrix},\cdots,\ H_n\equiv H,$$

las submatrices superiores izquierdas de la matriz hessiana $H$. Entonces, si los determinantes de las submatrices $H_i$ son todos positivos los valores característicos de $H$ son todos positivos y por lo tanto $f$ tiene un mínimo relativo. En cambio, si dichos determinantes van alternando sus signos, empezando con $\det\left(H_1\right)$ que es negativo, entonces los valores característicos de $H$ son todos negativos y $f$ tiene un máximo relativo.

Este criterio tiene la ventaja que es más rápido que el del cálculo de los valores característicos, pero tiene la desventaja de que sólo da información útil cuando todos los terminantes son positivos o cuando van alternado sus signos como se indicó. En los otros casos el criterio no decide.

## 3.4 Optimización de funciones con restricciones

Con el método visto anteriormente se puede resolver en principio cualquier problema de máximos y mínimos relativos en donde las variables independientes puedan variar libremente sobre una región abierta. Sin embargo, todavía no se ha discutido cómo encontrar los valores extremos de funciones en donde sus variables independientes ya no pueden variar libremente, sino que están sujetas a restricciones. Esto incluye, entre otros, los casos en donde las variables varían dentro de regiones cerradas. En la práctica ocurre por ejemplo que se desean minimizar costos, espacio, mano de obra, etc., o maximizar ganancias, estabilidad, durabilidad, etc. pero en donde las variables están sujetas a restricciones. En ciertos casos la expresión matemática de las restricciones es suficientemente sencilla y permite despejar algunas de las variables y ser sustituidas en la función a optimizar, con lo cual se reduce el problema a uno de los ya estudiados. Sin embargo, en otros casos la expresión matemática de las restricciones es complicada y se requiere de un trabajo muy laborioso para aplicar el procedimiento anterior. En otros casos más, dicho procedimiento definitivamente no es aplicable. El objetivo de esta sección es estudiar como proceder cuando hay restricciones.

**Definición.** Sea

$$f(\mathbf{r}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{7}$$

una función escalar con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea el problema de optimizar (maximizar o minimizar) la expresión (7), donde $f(\mathbf{r})$ está sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0 \qquad (\text{o bien } \geq 0; \quad \text{o bien} = 0)\\
&g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0 \qquad (\text{o bien } \geq 0; \quad \text{o bien} = 0)\\
&\vdots\\
&g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0 \qquad (\text{o bien } \geq 0; \quad \text{o bien} = 0).
\end{aligned} \tag{8}$$

**Entonces:**

*i)* En general, al problema representado por las expresiones (7) y (8) se le denomina **problema de optimización con restricciones**.

*ii)* A la expresión matemática que se quiere optimizar, (7), se le llama **función objetivo**.

*iii)* Se denomina **región factible** (o **permisible**) al conjunto $R \subset D$ de todos los puntos que cumplen con las restricciones (8).

*iv)* $f(\mathbf{r})$ tiene un máximo relativo condicionado en $\mathbf{r}_0 \in R$, si existe un entorno $\mathcal{V}$ de $\mathbf{r}_0$ para el cual $f(\mathbf{r}_0) \geq f(\mathbf{r})\ \forall \mathbf{r} \in \mathcal{V} \cap R$. Si $f(\mathbf{r}_0) \geq f(\mathbf{r})$ se cumple $\forall \mathbf{r} \in R$ entonces se dice que $f(\mathbf{r})$ tiene un máximo absoluto condicionado en $\mathbf{r}_0$ .

*v)* $f(\mathbf{r})$ tiene un mínimo relativo condicionado en $\mathbf{r}_0 \in R$, si existe un entorno $\mathcal{V}$ de $\mathbf{r}_0$ para el cual $f(\mathbf{r}_0) \leq f(\mathbf{r})\ \forall \mathbf{r} \in \mathcal{V} \cap R$. Si $f(\mathbf{r}_0) \leq f(\mathbf{r})$ se cumple $\forall \mathbf{r} \in R$ entonces se dice que $f(\mathbf{r})$ tiene un mínimo absoluto condicionado en $\mathbf{r}_0$ .

*vi)* A los máximos o mínimos condicionados (ya sean absolutos o relativos) se les llaman valores extremos condicionados o, por brevedad y cuando no haya lugar a confusión, simplemente valores extremos.

*vii)* En general, si $f(\mathbf{r})$ tiene un mínimo condicionado (ya sea relativo o absoluto) en $\mathbf{r}_0 \in R$, o bien, un máximo condicionado (relativo o absoluto) en $\mathbf{r}_0 \in R$, se dice que $(\mathbf{r}_0, f(\mathbf{r}_0))$ es un punto óptimo. Evidentemente $\mathbf{r}_0$ es la proyección del punto óptimo sobre la región $R$.

Las restricciones que aparecen en (8) incluyen como casos particulares a igualdades exactas de la forma $g_i = 0$ y desigualdades estrictas de la forma $g_i < 0$ o $g_i > 0$. En este caso se les llama alternativamente *inecuaciones.* En general puede haber puntos dentro del dominio de $f$ en donde $f(\mathbf{r})$ sea mayor que el máximo relativo condicionado pero que no satisfagan las restricciones (8), es decir, que no pertenezcan a la región permisible. Estos puntos, por supuesto, no son soluciones del problema. Un comentario semejante puede hacerse para el caso del mínimo.

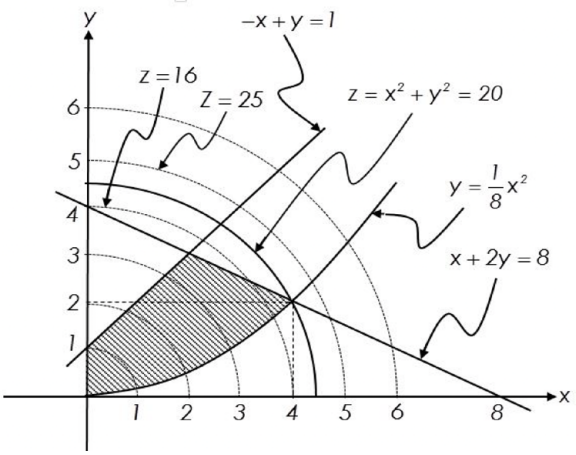



**FIGURA 3.7.**

A continuación, se verán algunos ejemplos sencillos para ilustrar la situación.

## Ejemplo 15.

Obtener el máximo condicionado de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sujeta a las restricciones

$$-x + y \leq 1; \qquad x + 2y \leq 8; \qquad y \geq 1/8\, x^2; \qquad x \geq 0; \qquad y \geq 0.$$

**Solución:** Estas restricciones definen la región cerrada $R$ que se muestra en la figura 3.7 (área sombreada). En ella también se muestran las curvas de nivel de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. La gráfica de esta función es un paraboloide de revolución semejante al de la figura 3.2 pero el de la figura 3.2 tiene su vértice en el punto (1,1) y el que se está considerando aquí tiene su vértice en el punto (0,0).

En este tipo de problemas a las curvas que forman la frontera de $R$ se les llama *parte activa* de las restricciones. Nótese que el punto máximo está en la frontera de la región permisible, (en la curva de nivel $z = 20$). Cualquier otro valor $z_0$ mayor que 20 no puede ser el máximo buscado porque para que $f(x, y)$ fuera igual a $z_0$ se requeriría que $(x, y)$ estuviera fuera de $R$. Por ejemplo, el valor

$z_0 = 25$ se da sólo a lo largo de la curva de nivel $z = 25$ la cual nunca corta a $R$. El punto óptimo, de acuerdo con la figura, es entonces (4, 2, 20). Se puede comprobar, sin embargo, que las derivadas parciales de la función no se anulan en ese punto. Este ejemplo muestra que los valores extremos de las funciones definidas sobre regiones cerradas $R$ no únicamente pueden ocurrir en los puntos críticos interiores a $R$ sino también en la frontera de $R$.

## Ejemplo 16.

Obtener el máximo y el mínimo condicionados de la misma función del ejemplo anterior:

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

pero ahora sujeta a las restricciones

$$-x + y \leq 1; \qquad y^2 + 1 \geq x; \qquad x \geq 0; \qquad y \geq 0.$$

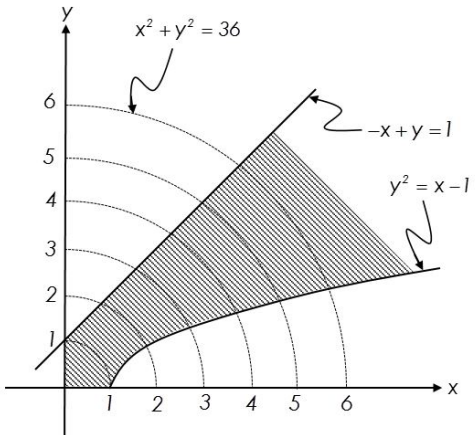



FIGURA 3.8.

**Solución:** En la figura 3.8 se muestran las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y las curvas asociadas a las igualdades de las inecuaciones. Obsérvese que la región permisible $R$ no es cerrada y no está acotada. Entonces los valores de $x^2 + y^2$ tampoco están acotados superiormente, y la función no tiene máximo finito. Por otro lado, el valor mínimo si existe y ocurre en el punto $(0, 0) \in R$. En este caso las derivadas parciales sí se anulan en dicho punto.

## Ejemplo 17.

Considérese nuevamente la función de los dos ejemplos anteriores

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sujeta ahora a las restricciones

$$-x + y \geq 1; \qquad y^2 \leq x - 1; \qquad x \geq 0; \qquad y \geq 0.$$

Obtener el mínimo condicionado.

**Solución:** Los puntos que satisfacen $-x + y \geq 1$ y $x \geq 0$ se muestran en la figura 3.9 mediante la región sombreada adyacente al eje Y, en tanto que los puntos que satisfacen $y^2 \leq x - 1$ y $y \geq 0$ se muestran mediante la región sombreada adyacente al eje X. Se ve que no existen puntos que cumplan las 4 restricciones simultáneamente. Por lo tanto, no existe región permisible y no hay solución.

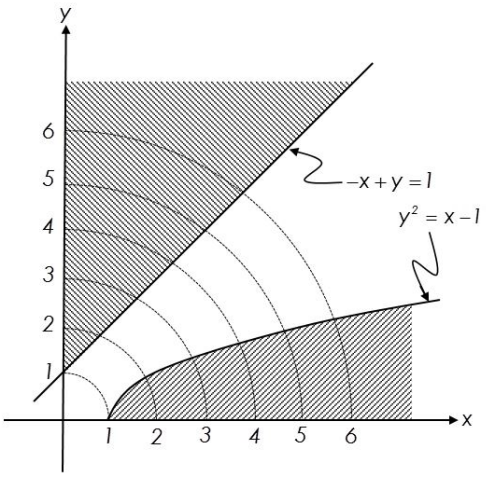



**FIGURA 3.9.**

En estos tres problemas se pudo llevar a cabo con relativa facilidad el análisis de las funciones porque tanto la función objetivo como las restricciones tenían una representación gráfica sencilla; pero cuando las expresiones son complicadas o no tienen representación gráfica como es el caso, por ejemplo, de las funciones

con más de tres variables se requieren métodos especiales para resolver tales problemas, y el objeto de esta sección es presentar un breve panorama de ellos.

En lo que sigue conviene tratar por separado los casos en los que las expresiones (8) son desigualdades de la forma $\leq$ o bien $\geq$, de los casos en los que son igualdades exactas. Se comenzará con el primer caso. Este incluye a las funciones definidas sobre regiones cerradas ya que las expresiones que definen a los límites de las regiones cerradas tienen la forma de desigualdades como las de las expresiones (8). Así, el problema de hallar los valores extremos relativos de una función $f(\mathbf{r})$ sobre una región cerrada es un problema de *optimización con restricciones*.

Para las funciones con dos variables definidas sobre regiones cerradas existe un teorema que, bajo ciertas condiciones, afirma la existencia de máximos y mínimos absolutos. A continuación, se dará este teorema sin demostración.

**Teorema 7.** Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función escalar continua en una región cerrada $R \subset \mathbb{R}^2$ Entonces $f$ tiene un máximo absoluto $f(a, b)$ y un mínimo absoluto $f(c, d)$, con $(a, b)$ y $(c, d) \in R$. Esto significa que

$$m \equiv f(c, d) \leq f(x, y) \leq f(a, b) \equiv M$$

para toda pareja $(x, y)$ en $R$.

En cambio, como se mencionó arriba del teorema 1, si la región no es cerrada la función puede no tener ni máximo ni mínimo. El teorema 7 es la versión en dos dimensiones del Teorema de Weierstrass que se aplica a las funciones con una sola variable.

Cuando los valores extremos relativos ocurren sobre la frontera de $R$, los criterios de las derivadas parciales deben modificarse, porque, como se ha visto, no necesariamente se anulan en esos puntos. Lo que se hace primero es realizar el análisis en el interior de $R$ con el método que se discutió en las secciones anteriores. Después se analiza el comportamiento de $f(\mathbf{r})$ sobre la frontera de la región $R$ (la cual se denotará con el símbolo $\partial R$) mediante la sustitución de la o las ecuaciones de $\partial R$ en $f(\mathbf{r})$ (una frontera a la vez). Las ecuaciones de $\partial R$ se

obtienen tomando el signo $=$ en las inecuaciones (8). De esta manera se obtienen los puntos $\mathbf{r}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \partial R$ sobre los que la función $f(\mathbf{r})$ restringida a la frontera alcanza valores extremos. Finalmente, para determinar si el punto $\mathbf{P} = (\mathbf{r}_0, f(r_0)) = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0))$ también es un extremo relativo sobre la región completa $R$, se analiza el comportamiento del incremento de $f$ en $\mathbf{r}_0$ (por ejemplo, mediante la derivada direccional) en todas las direcciones $\hat{\mathbf{u}}$ tales que partiendo de $\mathbf{r}_0$ van hacia $R$. Si todos estos incrementos resultan ser negativos, el punto $\mathbf{P}$ es un máximo relativo condicionado; si son positivos, un mínimo relativo condicionado, y si hay cambio de signo, $\mathbf{P}$ no es un extremo. El procedimiento se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

Con este procedimiento se pueden determinar todos los extremos relativos condicionados de funciones continuas y acotadas definidas sobre regiones cerradas $R$. Sin embargo, si lo que se desea es únicamente determinar el máximo y el mínimo absolutos condicionados no es necesario recurrir al análisis de las derivadas direccionales. Sólo se requiere valuar la función en los puntos críticos interiores a $R$ y en los puntos de la frontera de $R$ donde $f$ alcanza valores extremos y comparar los valores.

## Ejemplo 18.

Sea

$$z = f(x, y) = \sqrt{16 - y^2 - x^2 - 6x} - 1$$

definida sobre la región cerrada

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -\sqrt{15} \leq y \leq \sqrt{15} \,;\, 0 \leq x \leq \sqrt{24 - y^2} - 3 \right\}. \tag{9}$$

Determinar los valores extremos de $f$ sobre $R$ e indicar los puntos donde ocurren.

**Solución:** Una gráfica de la función se muestra en la figura 3.10, en donde se puede ver que se trata de una porción de la superficie esférica de radio 5 cuyo centro está en (−3, 0, −1). Dicha porción es la parte de la superficie esférica que queda arriba del dominio de $f$ (región $R$ mostrada en la figura 3.11). Por comodidad en la figura 3.11 el eje X se ha dibujado apuntando hacia abajo. La región $R$ está en el primero y cuarto cuadrante del plano $XY$.

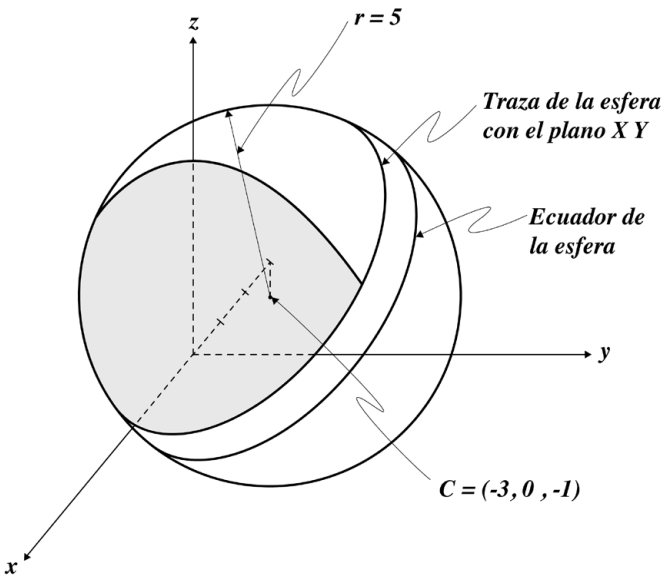



**FIGURA 3.10.** La parte sombreada de la superficie esférica es la gráfica de la función de la que se desean hallar sus valores extremos. La proyección sobre el plano $XY$ de dicha parte sombreada es la región $R$ de la expresión (9) y que se muestra en la figura 3.11.

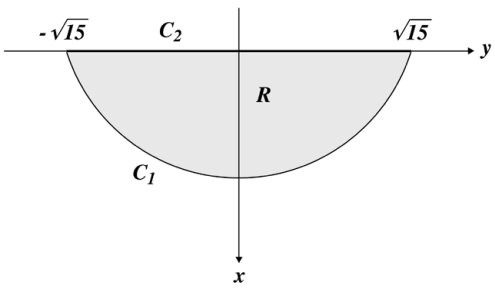



**FIGURA 3.11.**

Los valores extremos de $f$ sólo pueden ocurrir en sus puntos críticos o sobre la frontera de $R$. Se determinarán primero sus puntos críticos:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{16-y^2-x^2-6x}}\left(-x-3,\ -y\right).$$

Se ve que el único punto donde el gradiente se anula es (−3, 0) que cae fuera de $R$. Por otro lado, los puntos donde el gradiente no existe son aquellos que satisfacen la ecuación

$$\sqrt{16-y^2-x^2-6x}=0 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{25-y^2}-3. \tag{10}$$

En la expresión anterior no se ha tomado en cuenta la raíz negativa porque los valores negativos de $x$ caen fuera de $R$. Además, como

$$\sqrt{24-y^2}-3 < \sqrt{25-y^2}-3$$

y como los puntos de $R$ satisfacen $x \leq \sqrt{24-y^2}-3$ entonces todos los puntos de $R$ son tales que $x<\sqrt{25-y^2}-3$ y la ecuación (10) no puede satisfacerse. Por lo tanto, los puntos que satisfacen (10) también caen fuera de $R$. Se concluye entonces que esta función no tiene puntos críticos en $R$. Se analizará ahora el comportamiento de $f$ sobre la frontera de $R$. De acuerdo con la figura 3.11 se ve que dicha frontera es la unión de las curvas $C_1$ y $C_2$ cuyas ecuaciones son, respectivamente, $x=\sqrt{24-y^2}-3$ y $x=0$.

— Sobre $C_1$ la función vale

$$\begin{aligned} f(x,y)\big|_{r\in C_1} &= \sqrt{16-y^2-x^2-6x}-1 \\ &= \sqrt{16-y^2-\left(\sqrt{24-y^2}-3\right)^2-6\left(\sqrt{24-y^2}-3\right)}-1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $f$ es igual a la constante cero sobre toda la curva $C_1$ y como $f$ siempre es mayor o igual que cero sobre $R$, se concluye que todos los puntos de $C_1$ son mínimos absolutos iguales a cero.

— Sobre $C_2$ se tiene que $f(x, y)$ se reduce a una función que depende sólo de $y$, dada por

$$h(y) \equiv f(x=0, y) = \sqrt{16-y^2}-1.$$

Como

$$\frac{dh(y)}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{16-y^2}}$$

los puntos críticos de $h(y)$ son $y=0$ y $y=\pm 4$. Sin embargo, cuando $y=\pm 4$, el punto cae fuera de $R$. Por lo tanto, el único punto de $C_2$ en donde puede haber un extremo de $h(y)$ es $\mathbf{P}=(0,\,0)$ y es fácil ver que corresponde a un máximo de $h(y)$. (Nótese que no es necesario analizar los extremos de $C_2$ porque coinciden con los de $C_1$ que ya fue analizada.) Para saber si $\mathbf{P}$ también es un máximo de $f(x,y)$ sobre $R$, se calcula la derivada direccional de $f$ en $\mathbf{P}$ en todas las direcciones que partiendo de $\mathbf{P}$ van hacia $R$. Se tiene que

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f\,\big|_{\mathbf{P}} = \nabla f\big|_{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

siendo $\hat{\mathbf{u}} = (\cos\theta,\,\operatorname{sen}\theta)$ con $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$ (ver la figura 3.11). Entonces

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f\,\big|_{\mathbf{P}} = -\frac{1}{\sqrt{16-y^2-x^2-6x}}\,(x-3,\,y)\,\Big|_{\mathbf{P}} \cdot (\cos\theta,\,\operatorname{sen}\theta)$$

$$= -\frac{3}{4}\cos\theta.$$

Como en el intervalo $\left[-\pi/2,\,\pi/2\right]$ el coseno siempre es mayor o igual a cero, la derivada direccional es menor que o igual a cero para toda $\hat{\mathbf{u}}$ que va hacia $R$. Por lo tanto el punto $(0,\,0,\,f(0,\,0))$ es un máximo relativo condicionado y vale $z=f(0,\,0)=3$. Además, es también un máximo absoluto condicionado pues no hay otros máximos relativos condicionados mayores. En la figura 3-10 se puede apreciar que el punto $(0,\,0,\,3)$ es en efecto un máximo de la porción de la superficie considerada.

## Ejemplo 19.

Considérese nuevamente la función del ejemplo 9 (figura 3.5):

$$f(x, y) = xy - x^3y - xy^3,$$

pero ahora definida sobre la región *cerrada* $R$ dada por $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Determinar sus valores extremos.

**Solución:** Notar que el interior de la región cerrada $R$ es la región abierta $R_A$ considerada en el ejemplo 9. Como se ha mencionado, los extremos de una función sólo se pueden presentar en los puntos críticos del interior de su dominio o en los puntos de la frontera. En el ejemplo 9 se analizó el comportamiento de esta función en el interior de $R$ y se vio que el único punto crítico era $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ que corresponde a un máximo relativo cuyo valor es $\frac{1}{8}$. De esta forma, sólo resta analizar el comportamiento de $f$ en la frontera de $R$. En la figura 3.12 se muestra la región $R$ en donde se ha dividido a su frontera en los cuatro segmentos de recta $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$ cuyas ecuaciones son respectivamente $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ y $x = 0$.

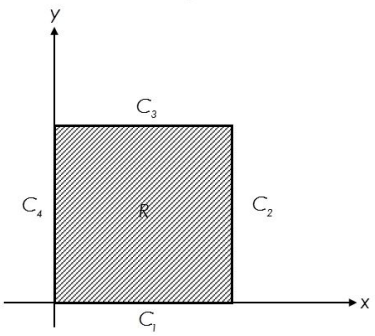



FIGURA 3.12.

— Sobre $C_1$ se tiene que $f(x, y)$ se reduce a la función $h_1(x)$ dada por

$$h_1(x) \equiv f(x, y = 0) = 0.$$

Por lo tanto, $f(x, y)$ es una constante sobre todos los puntos de $C_1$, los cuales a su vez son puntos críticos de $h_1$. Se calcula ahora la derivada direccional $D_{\hat{\mathbf{u}}} f(x, y)$ sobre $C_1$, siendo $\hat{\mathbf{u}} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ un vector unitario que partiendo de $C_1$ apunta hacia $R$. Esto implica que en los puntos extremos (0, 0) y (1, 0) de

$C_1$, $\theta$ varía en los intervalos cerrados $[0,\ \pi/2]$ y $[\pi/2,\ \pi]$, respectivamente, mientras que en sus otros puntos varía de 0 a $\pi$. Se tiene entonces que

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

$$= \left(y - 3x^2 y - y^3,\ x - x^3 - 3xy^2\right) \cdot (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)$$

y evaluando sobre $C_1$,

$$D_{\hat{\mathbf{u}}} f(x, y)\big|_{(x,0)} = \left(x - x^3\right) \operatorname{sen}\theta.$$

Si se excluyen por un momento los extremos de $C_1$ se tiene que si $0 < x < 1$ entonces $0 < x - x^3 < 1$ y la derivada direccional anterior es rigurosamente mayor que cero, excepto en $\theta = 0$ o $\pi$ que vale cero, lo cual era de esperarse puesto que para $\theta = 0$ o $\pi$ se está sobre el eje X y ahí la función es igual a la constante cero. Por lo tanto, el incremento de $f$ hacia adentro de $R$ es positivo, y el segmento de recta abierto $C_1$ es un mínimo relativo. En los extremos (0, 0) y (1, 0) de $C_1$ el gradiente vale cero y, en consecuencia, $D_{\hat{\mathbf{u}}} f = 0\ \ \forall \hat{\mathbf{u}}$ y se necesita recurrir a la segunda derivada direccional que está dada por

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f = u_x^2 f_{xx} + 2\, u_x u_y f_{xy} + u_y^2 f_{yy}$$

$$= u_x^2 \left(-6xy\right) + 2\, u_x u_y \left(1 - 3x^2 - 3y^2\right) + u_y^2 \left(-6xy\right).$$

Al evaluarla:

en (0, 0) se obtiene

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f = 2\, u_x u_y = 2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \qquad \text{donde} \qquad \theta \in [0,\ \pi/2],$$

que es positiva para toda $\theta$ en el intervalo abierto $(0,\ \pi/2)$. Por lo tanto $\Delta f$ es positiva en esas direcciones. Para $\theta = 0$ o $\pi/2$ (que corresponde a direcciones sobre los ejes $x$ y $y$ respectivamente) la función es igual a la constante cero. Se sigue entonces que el origen también es un mínimo relativo y la función vale cero ahí.

en (1, 0) se obtiene

$$D^2_{\hat{\mathbf{u}}} f = -4\,u_x\,u_y = -4\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta \qquad \text{donde} \qquad \theta \in [\pi/2,\ \pi]$$

que es positiva para toda $\theta$ en el intervalo abierto $(\pi/2,\ \pi)$. Por lo tanto $\Delta f$ es positiva en esas direcciones. Para $\theta = \pi$ (que corresponde a la dirección $-x$) la función es igual a la constante cero y $\Delta f = 0$. Sin embargo, para $\theta = \pi/2$ (que corresponde a la dirección sobre $C_2$) la función $f(x, y)$ se reduce a $-y^3$ lo cual implica que en esa dirección $\Delta f < 0$ y, en consecuencia, el punto (1, 0) es un punto silla.

— Sobre $C_2$ $f(x, y)$ se reduce a la función $h_2(y)$ dada por

$$h_2(y) \equiv f(x = 1,\ y) = -y^3$$

$$\Rightarrow \frac{dh_2(y)}{dy} = -3y^2$$

lo cual implica que el punto crítico de $h_2(y)$ es $y = 0$, que corresponde al punto (1, 0) que ya fue analizado. El otro punto de $C_2$ en donde puede haber un máximo o un mínimo es en su otro extremo, es decir, en el punto (1, 1). En este punto la derivada direccional está dada por

$$D\hat{\mathbf{u}} f(x, y)\big|_{(1,\,1)} = \nabla f(x, y)\big|_{(1,\,1)} \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

$$= \left(y - 3x^2y - y^3,\ x - x^3 - 3xy^2\right)\big|_{(1,\,1)} \cdot (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)$$

$$= -3(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

con $\theta \in [\pi, (3/2)\pi]$. Como $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ es menor que cero para todos los valores de $\theta$ en el intervalo cerrado $[\pi, (3/2)\pi]$, esta derivada es positiva para todos los vectores $\hat{\mathbf{u}}$ que partiendo de $(1, 1)$ van hacia $R$. Se sigue entonces que en el punto (1, 1) hay un mínimo relativo cuyo valor es $f(1, 1) = -1$.

— Sobre $C_3$.– Sustituyendo la ecuación de $C_3$ en $f(x, y)$ se obtiene

$$h_3(x) \equiv f(x, y=1) = -x^3$$

que es esencialmente lo mismo que se obtuvo para $C_2$ (basta cambiar $x$ por $y$). Por lo tanto, se concluye que el punto (1, 1) es un mínimo relativo y (0, 1) un punto silla.

— Sobre $C_4$ .– Sustituyendo la ecuación de $C_4$ en $f(x, y)$ se halla que

$$h_4(y) \equiv f(0, y) = 0$$

que es esencialmente lo mismo que se obtuvo para $C_1$.

Se concluye el análisis resumiendo lo siguiente:

1) En el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hay un máximo relativo y vale $\frac{1}{8}$.
2) En el punto (1, 1) hay un mínimo relativo condicionado y vale −1.
3) En los segmentos de rectas $C_1$ y $C_4$ (tomados como intervalos abiertos) hay mínimos relativos condicionados cuyo valor es cero.
4) En el punto (0, 0) hay un mínimo relativo condicionado y vale 0.
5) En los puntos (1, 0) y (0, 1) hay puntos silla y su valor es cero.
6) El punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ es un máximo absoluto condicionado.
7) El punto (1, 1, −1) es un mínimo absoluto condicionado.

### 3.4.1 Multiplicadores de Lagrange

Cuando las restricciones (8), tienen la forma de igualdades del tipo

$$g_k\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = 0\ ; \qquad k = 1, 2, \cdots, m$$

con $m < n$, lo que se acostumbra a hacer es utilizar el *método de los multiplicadores de Lagrange* que se discutirá a continuación. En principio un método alternativo consistiría en resolver el conjunto de las $m$ ecuaciones $g_k\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = 0$ para expresar $m$ variables en términos de las $n-m$ restantes y sustituirlas en $f(\mathbf{r})$, obteniéndose así una función con $n-m$ variables cuyos valores extremos se obtienen con el procedimiento ya visto. Sin embargo, esta segunda opción no siempre es conveniente o posible y es entonces cuando el método de los multiplicadores de Lagrange es sumamente valioso. Los siguientes dos ejemplos desarrollan la formulación de este método basados en argumentos geométricos. Se comenzará con el caso de una función con tres variables y una sola restricción.

**Ejemplo 20.**

Sea $g(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie $S$ que no pasa por el origen. Determinar los puntos de $S$ que están más próximos al origen.

**Solución:** Un punto $(x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ está a una distancia $r$ del origen si y sólo si pertenece a la esfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Esta esfera es una superficie de nivel de la función

$$f(x, y, z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$$

que es la expresión por minimizar (función objetivo).

Si se comienza con $r = 0$ y se va incrementando su valor, el primer punto de contacto entre la esfera y $S$, será el punto más próximo de $S$ al origen. La ecuación $g(x, y, z) = 0$ que representa a la superficie $S$, es la "parte activa" de la restricción. Si $S$ tiene un plano tangente en el punto de contacto, este plano

debe también ser tangente a la superficie de nivel de $f$. Por lo tanto, el vector gradiente de la superficie $g(x, y, z) = 0$, debe ser paralelo al vector gradiente de la superficie de nivel $f(x, y, z) = r$. Entonces $\nabla f$ y $\nabla g$ son proporcionales y existe una constante $\lambda$ tal que $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$. Es decir,

$$\left(f_x \hat{\mathbf{i}} + f_y \hat{\mathbf{j}} + f_z \hat{\mathbf{k}}\right) + \lambda\left(g_x \hat{\mathbf{i}} + g_y \hat{\mathbf{j}} + g_z \hat{\mathbf{k}}\right) = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}},$$

de donde

$$\begin{aligned} f_x + \lambda g_x &= 0 \\ f_y + \lambda g_y &= 0 \\ f_z + \lambda g_z &= 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

con la restricción

$$g(x, y, z) = 0.$$

Si se resuelve este sistema de cuatro ecuaciones para despejar a $x$, $y$, $z$ y $\lambda$ se obtienen los puntos de $S$ cuya distancia al origen es mínima. Nótese que el sistema (11) está constituido por las derivadas parciales respecto a $x$, $y$ y $z$ de la función $L \equiv f + \lambda g$ igualadas a cero. A la función $L$ se le conoce con el nombre de función de Lagrange. Por lo tanto, el sistema (11) se puede abreviar como $\nabla L = \mathbf{0}$. Además, se puede notar que $(\partial L/\partial \lambda) = g$, lo que permite escribir la ecuación de la restricción en la forma $L\lambda \equiv (\partial L/\partial \lambda) = 0$. Entonces, las cuatro ecuaciones anteriores son equivalentes a las siguientes cuatro igualdades:

$$\begin{aligned} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ L_\lambda &= 0 \end{aligned}$$

y al resolver este sistema lo que se está haciendo es determinar los puntos críticos de la función de Lagrange $L$, que por lo discutido arriba son los puntos que minimizan la distancia de $S$ al origen.

Ahora se verá el caso de una función con tres variables y dos ecuaciones de condición.

## Ejemplo 21.

Si $V=f(x, y, z)$ denota el voltaje en el punto $(x, y, z)$, determinar el valor máximo y mínimo de $V$ sobre una curva dada $C$ de $\mathbb{R}^3$ .

**Solución:** Considerando a la curva $C$ como la intersección de dos superficies no paralelas, $g_1(x, y, z)=0$ y $g_2(x, y, z)=0$, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar} && V=f(x, y, z) \\ &\text{sujeto a:} && g_1(x, y, z)=0 \\ &&& g_2(x, y, z)=0. \end{aligned}$$

Nótese que como $C$ está dada por la intersección de dos superficies no paralelas sus normales $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ no pueden ser paralelas.

A continuación, se mostrará que $\nabla f$ es normal a la curva $C$ en un punto extremo. Supóngase que $C$ es una curva continua. Entonces se puede representar en forma paramétrica por medio de una función vectorial $\propto(t)$ definida en un cierto intervalo $[a, b]$. Es decir,

$$C:\ \propto(t)=x(t)\hat{\mathbf{i}}+y(t)\hat{\mathbf{j}}+z(t)\hat{\mathbf{k}} \qquad \forall t\in[a, b].$$

Sobre esta curva $C$, el voltaje $V$ es una función del parámetro $t$. Denotando por $\varphi$ a dicha función se tiene que

$$\varphi(t) \equiv f(x(t), y(t), z(t))=V.$$

Si $f(x, y, z)$ tiene un extremo relativo en $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ con $t_0 \in (a, b)$, se debe cumplir que

$$\frac{d}{dt}\left[f(x(t), y(t), z(t))\right]\Big|_{t=t_0} = 0$$

pero por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}\left[f(x(t), y(t), z(t))\right] = \nabla f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \propto'(t)$$

y en consecuencia

$$\nabla f(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \cdot \propto'(t_0) = 0.$$

Esto implica que $\nabla f$ es perpendicular a $\propto'(t)$ en $t = t_0$, y como $\propto'(t_0)$ es tangente a $C$ en $t_0$, entonces $\nabla f$ es perpendicular a $C$ en $t = t_0$. Es decir, el gradiente de $f$ se encuentra en el plano normal a $C$ en el punto $(x_0, y_0, z_0)$, tal como se muestra en la figura 3.13.

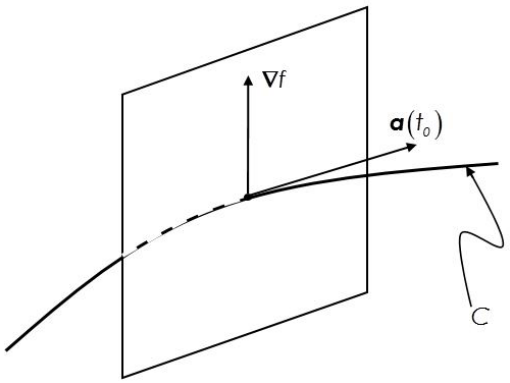



FIGURA 3.13.

Por otra parte, los vectores gradiente $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ son normales respectivamente a las superficies $g_1$ y $g_2$, por lo que son también normales a la curva de intersección $C$ (ver la figura 3.14). Esto significa que en los extremos relativos el gradiente $\nabla f$ está en el plano formado por $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ (recordar que $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ no

son paralelos). Por lo tanto, $\nabla f$, $\nabla g_1$ y $\nabla g_2$ son linealmente dependientes, esto es, existen coeficientes $\lambda_1$ y $\lambda_2$ diferentes de cero tales que

$$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0.$$

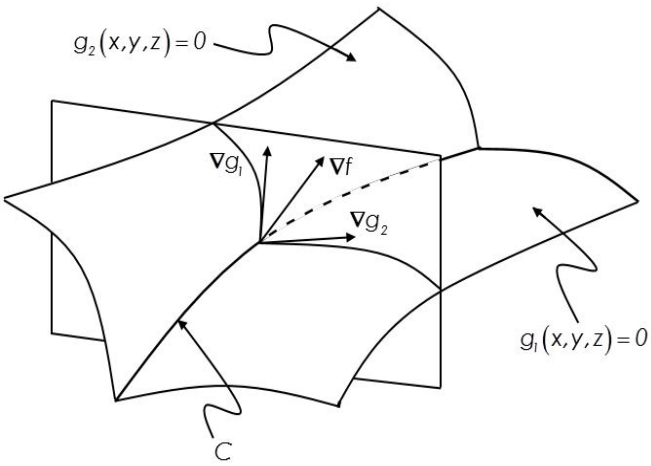



FIGURA 3.14.

Esta ecuación vectorial es equivalente a las tres ecuaciones escalares

$$f_x + \lambda_1 g_{1x} + \lambda_2 g_{2x} = 0$$

$$f_y + \lambda_1 g_{1y} + \lambda_2 g_{2y} = 0 \qquad (12)$$

$$f_z + \lambda_1 g_{1z} + \lambda_2 g_{2z} = 0$$

con las restricciones

$$g_1(x, y, z) = 0$$

$$g_2(x, y, z) = 0.$$

Por lo tanto, para hallar los valores extremos basta resolver el sistema de las cinco ecuaciones anteriores para despejar a $x$, $y$, $z$, $\lambda_1$ y $\lambda_2$. Obsérvese que, en forma semejante a lo que ocurrió en el ejemplo previo, el sistema de ecuaciones (12) está constituido por las derivadas parciales respecto a $x$, $y$ y $z$ de la función

de Lagrange $L \equiv f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$ igualadas a cero, y en consecuencia, (12) se puede abreviar como $\nabla L=0$. La función $L$ de este problema tiene un término más que la función $L$ del ejemplo anterior porque ahora hay una restricción más. Además, es claro que $(\partial L/\partial\lambda_1)=g_1$ y $(\partial L/\partial\lambda_2)=g_2$, lo que permite escribir las ecuaciones de las restricciones en la forma $L\lambda_1 \equiv (\partial L/\partial\lambda_1)=0$ y $L\lambda_2 \equiv (\partial L/\partial\lambda_2)=0$. Entonces, las cinco ecuaciones anteriores quedan así,

$$\begin{aligned} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ L_{\lambda_1} &= 0 \\ L_{\lambda_2} &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema lo que se está haciendo es determinar los puntos críticos de la función de Lagrange $L$, que son los puntos que maximizan o minimizan a la función $f$. Esto es el *método de los multiplicadores de Lagrange*.

En general, dada una función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $m$ ecuaciones de condición $g_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$, se llama *función de Lagrange* (denotada por $L$) a la expresión

$$L=f(x_1, \cdots, x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\, g_k(x_1, \cdots, x_n) \tag{13}$$

que, como se observa, incluye como casos particulares a las expresiones $f+\lambda g$ y $f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$ que aparecieron en los dos ejemplos anteriores. A los escalares $\lambda_k$, con $k=1, \cdots, m$, se les denomina *multiplicadores de Lagrange*. El siguiente teorema formaliza estas ideas y establece un resultado general válido para un número arbitrario de variables y un número arbitrario de restricciones con tal de que $m<n$.

**Teorema 8.** Sea $R\subset\mathbb{R}^n$ la región permisible de una función escalar $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continua y diferenciable en un entorno de $\mathbf{r}_0\in R$, sujeta a las $m$ restricciones $g_k(\mathbf{r})=0$ con $k=1, 2, \cdots, m<n$. Sea $L$ la función de Lagrange definida en (13). Si existe un extremo relativo de $f$ en $\mathbf{r}_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, entonces $\nabla L=\mathbf{0}$, es

decir,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n,$$

y además

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k(\mathbf{r}) = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \cdots, m < n.$$

Estas dos expresiones forman un sistema de $n+m$ ecuaciones, a partir del cual se pueden determinar los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ y de las coordenadas $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ del punto $\mathbf{r}_0$ en donde puede haber un extremo condicionado.

**Demostración:** En realidad, el proceso seguido en la solución de los dos ejemplos anteriores es en esencia una demostración geométrica del teorema. No obstante, a continuación, se da una segunda demostración más formal y menos geométrica. La demostración se hará para casos particulares:

**Caso 1.** Sea $z = f(x, y)$ la función a optimizar, continua y diferenciable en $(x_0, y_0)$; y sea la restricción $g(x, y) = 0$, también continua y diferenciable en $(x_0, y_0)$. Se supondrá también que no todas las derivadas parciales de $g$ se anulan en $(x_0, y_0)$ (en particular se supondrá que $g_y(x_0, y_0) \neq 0$). Entonces

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy$$

$$dg = g_x\, dx + g_y\, dy.$$

Como $g_y \neq 0$ la expresión $g(x, y) = 0$ define una función $\varphi$ tal que $y = \varphi(x)$, por lo que $dy = \varphi'(x)\, dx$. Luego, las expresiones anteriores quedan como

$$dz = f_x\, dx + f_y \varphi'(x)\, dx$$

$$dg = g_x\, dx + g_y \varphi'(x)\, dx = 0,$$

en donde se ha usado el hecho de que $dg = 0$ debido a que $g(x, y) = 0 \ \ \forall (x, y)$. Además, como por hipótesis en $(x_0, y_0)$ existe un extremo relativo, la diferencial

de la función $f(x, \varphi(x))$ también es cero en $x_0$. Así, dividiendo entre $dx$, las dos ecuaciones anteriores quedan como

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) = 0$$

$$g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) = 0.$$

Si se multiplica la segunda ecuación por un escalar arbitrario λ y se suma a la primera, se tiene:

$$\left[ f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) \right] + \lambda \left[ g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) \right] = 0$$

o bien

$$\left[ f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) \right] + \left[ f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) \right] \varphi'(x_0) = 0.$$

Si ahora se escoge λ de tal forma que

$$f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) = 0 \tag{14}$$

entonces

$$f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) = 0. \tag{15}$$

Como

$$L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

las ecuaciones (14) y (15) son equivalentes a

$$L_x \big|_{(x_0, y_0)} = 0 \tag{16}$$

y

$$L_y \big|_{(x_0, y_0)} = 0, \tag{17}$$

que pueden ser escritas en una sola:

$$\nabla L \big|_{(x_0, y_0)} = \mathbf{0}.$$

Nótese además que $(\partial L/\partial \lambda) = g(x, y)$, y como $g(x, y) = 0$ entonces

$$(\partial L/\partial \lambda) = g(x, y) = 0, \tag{18}$$

lo que demuestra el teorema para el caso considerado $(n = 2, k = 1)$. Esta demostración se basó en la hipótesis de que no todas las derivadas parciales de $g$ se anulaban simultáneamente en el punto en estudio.

El hecho de que las derivadas parciales deban ser diferentes en este punto, garantiza que el conjunto de ecuaciones formado por (16), (17) y (18), sea un sistema determinado. Si esto no ocurriera, $\lambda$ podría tomar cualquier valor y la solución del sistema no daría los puntos en donde pueden ocurrir los extremos de $f$.

**Caso 2.** Sea $f(\mathbf{r}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la función a optimizar con cuatro variables, continua y diferenciable en la región permisible $R$ dada por las restricciones $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ y $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, también continuas y diferenciables en $R$. Se supondrá que no todas las derivadas parciales de $g_1$ y $g_2$ se anulan en el punto $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ (en particular supóngase que el jacobiano $\partial(F, G)/\partial(x_1, x_2)$ es diferente de cero). Entonces:

$$df = fx_1\, dx_1 + fx_2\, dx_2 + fx_3\, dx_3 + fx_4\, dx_4$$

$$dg_1 = g_{1x_1}\, dx_1 + g_{1x_1}\, dx_2 + g_{1x_3}\, dx_3 + g_{1x_4}\, dx_4 = 0$$

$$dg_2 = g_{2x_1}\, dx_1 + g_{2x_1}\, dx_2 + g_{2x_3}\, dx_3 + g_{2x_4}\, dx_4 = 0. \tag{19}$$

Como $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$, el sistema de ecuaciones $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ define a dos funciones $\varphi$ y $\psi$ tales que $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ y $x_4 = \psi(x_1, x_2)$, por lo que

$$dx_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx_2$$

y

$$dx_4 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\, dx_2.$$

Luego, las expresiones (19) quedan como

$$df=\left(f_{x_1}+f_{x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+f_{x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(f_{x_2}+f_{x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+f_{x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)dx_2 \tag{20}$$

$$dg_1=\left(g_{1x_1}+g_{1x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+g_{1x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(g_{1x_2}+g_{1x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+g_{1x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)dx_2=0 \tag{21}$$

$$dg_2=\left(g_{2x_1}+g_{2x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+g_{2x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(g_{2x_2}+g_{2x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+g_{2x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)dx_2=0. \tag{22}$$

Además, como por hipótesis en $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ existe un extremo relativo, la diferencial de la función $f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2))$ también es cero en $(x_1^0, x_2^0)$.

Si las expresiones (20), (21) y (22) igualadas a cero se multiplican por las constantes 1, $\lambda_1$ y $\lambda_2$, respectivamente (siendo $\lambda_1$ y $\lambda_2$ arbitrarias), y se suman, se obtiene

$$\begin{aligned}&\left(f_{x_1}+\lambda_1 g_{1x_1}+\lambda_2 g_{2x_1}\right)dx_1+\left(f_{x_2}+\lambda_1 g_{1x_2}+\lambda_2 g_{2x_2}\right)dx_2\\&+\left(f_{x_3}+\lambda_1 g_{1x_3}+\lambda_2 g_{2x_3}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2\right)\\&+\left(f_{x_4}+\lambda_1 g_{1x_4}+\lambda_2 g_{2x_4}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2\right)=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ se eligen de tal forma que

$$f_{x_3}+\lambda_1 g_{1x_3}+\lambda_2 g_{2x_3}=0 \tag{24}$$

y

$$f_{x_4}+\lambda_1 g_{1x_4}+\lambda_2 g_{2x_4}=0 \tag{25}$$

entonces la ecuación (23) se reduce a

$$\left(f_{x_1}+\lambda_1 g_{1x_1}+\lambda_2 g_{2x_1}\right)dx_1+\left(f_{x_2}+\lambda_1 g_{1x_2}+\lambda_2 g_{2x_2}\right)dx_2=0. \tag{26}$$

Como $dx_1$ y $dx_2$ son arbitrarios, se sigue que

$$f_{x_1} + \lambda_1 g_{1x_1} + \lambda_2 g_{2x_1} = 0 \tag{27}$$

y

$$f_{x_2} + \lambda_1 g_{1x_2} + \lambda_2 g_{2x_2} = 0. \tag{28}$$

Las cuatro ecuaciones (24), (25), (27) y (28) se pueden escribir como

$$\nabla L = \mathbf{0},$$

donde $L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. Además, $(\partial L / \partial \lambda_k) = g_k$ con $k = 1, 2$ y como $g_k(\mathbf{r}) = 0$ entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k(\mathbf{r}) = 0, \tag{29}$$

lo que demuestra el teorema para el caso analizado $(n = 4\ k = 2)$.

## Ejemplo 22.

Determinar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

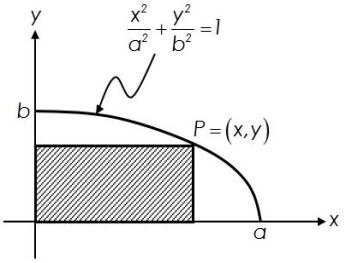



FIGURA 3.15.

**Solución:** Por la simetría del problema, el área total es igual a cuatro veces el área contenida en el primer cuadrante, la cual está dada por el producto $xy$, con $x>0$ y $y>0$ (ver la figura 3.15). Por lo tanto, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && A=4xy \\ &\text{sujeta a:} && \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ & && x>0,\ y>0. \end{aligned}$$

En este caso la función de Lagrange es

$$L=4xy+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

y sus derivadas parciales igualadas a cero son

$$L_x=4y+\frac{2\lambda}{a^2}x=0$$

$$L_y=4x+\frac{2\lambda}{b^2}y=0$$

$$L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Resolviendo el sistema se llega a

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad y=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

que determinan un valor extremo. Para saber si se trata de un mínimo o un máximo, se podría analizar $\left(\partial^2 L/\partial x_i^2\right)$. Sin embargo, en la mayoría de los problemas físicos no es necesario hacer este análisis ya que el mismo problema indica

cual es el caso. Para este ejemplo el punto $\left(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}\right)$ corresponde a un área máxima cuyo valor es $4\left(a/\sqrt{2}\right)\times\left(b/\sqrt{2}\right)=2ab\,u^2$, donde u representa la unidad de longitud. El rectángulo buscado tiene por lados $\left(2a/\sqrt{2}\right)u$ y $\left(2b/\sqrt{2}\right)u$.

## Ejemplo 23.

Hallar tres números positivos cuya suma $S$ sea igual a 12 y cuyo producto $P$ sea máximo.

**Solución:** El problema a resolver se plantea como:

Maximizar $\quad P=xyz$

sujeta a: $\quad x+y+z=12$

$\qquad\qquad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0.$

La función de Lagrange es

$$L=xyz+\lambda\left(x+y+z-12\right)$$

que al derivarla se obtiene el sistema

$$\left.\begin{aligned} L_x&=yz+\lambda=0\\ L_y&=xz+\lambda=0\\ L_z&=xy+\lambda=0 \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\quad yz=xz=xy$$

$$L_\lambda=x+y+z-12=0.$$

Una solución de este sistema es cuando dos de las variables son cero y la otra 12. Otra solución es cuando $x=y=z$. Para la primera solución el producto es un mínimo, ya que vale cero. Por lo tanto, el máximo ocurre cuando $x=y=z$, de donde

$$3x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

y el valor del producto máximo es 64.

## Ejemplo 24.

Calcular la distancia mínima que existe entre el origen y la recta de intersección de los planos $x + 2z = 4$ y $x + y = 8$.

Solución: La función objetivo es la expresión $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que es la distancia del origen al punto $(x, y, z)$. Para facilitar el desarrollo se utilizará el cuadrado de la distancia. El problema a resolver es entonces:

Minimizar $\quad d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

sujeta a: $\quad x + 2z = 4$

$\quad x + y = 8.$

La función de Lagrange es

$$L = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \lambda_1 \left(x + 2z - 4\right) + \lambda_2 \left(x + y - 8\right).$$

Derivando se obtiene el sistema

$$L_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$L_y = 2y + \lambda_2 = 0$$
$$L_z = 2z + 2\lambda_1 = 0$$
$$L_{\lambda_1} = x + 2z - 4 = 0$$
$$L_{\lambda_2} = x + y - 8 = 0.$$

Si se resuelve el sistema se obtiene

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -8$$
$$x = 4$$
$$y = 4$$
$$z = 0,$$

por lo que la distancia es mínima en (4, 4, 0) y vale $\sqrt{32}$. Este valor no puede ser máximo, puesto que la distancia entre un punto y una recta no está acotada superiormente.

## Ejercicios

**3.16.** Obtener los puntos críticos de la función de Lagrange para cada una de las siguientes funciones sujetas a las restricciones indicadas:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ ; $\cos x - y - 5 = 0.$
b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y - 5 = 0.$
c) $f(x, y, z) = \operatorname{sen} xyz$; $x^2 + y^2 - z^2 = 0.$
d) $f(x, y, z) = \operatorname{sen} xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 0.$
e) $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z$; $x^2 + y^2 - z^2 = 0.$

**3.17.** Determinar el máximo valor de $w = xyz$ con la restricción de que el punto $(x, y, z)$ pertenezca a la recta de intersección de los planos $x + y + z = 30$ y $x + y - z = 0$.

**Solución** Punto crítico (7.5, 7.5, 15, 843.75) y es un máximo.

**3.18.** Expresar al número 9 como la suma de tres números tales que su producto sea máximo (usar multiplicadores de Lagrange).

**Solución:** $x=y=z=3$.

**3.19.** Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange determinar la distancia mínima entre el punto (1, 2, 0) y el cilindro elíptico recto con eje de simetría sobre el plano *XY* y paralelo al eje Y. Sus semiejes en las direcciones X y Z son iguales respectivamente a 1 y 2 y contiene a los puntos (2, 0, 0) y (4, 0, 0).

**Observación.-** Este problema se puede resolver por simple inspección de la configuración geométrica. Se sugiere realizar un esbozo geométrico para comprobar la solución.

**Solución:** El punto del cilindro más cercano al punto dado es (2,2,0) y la distancia entre ambos es igual a 1.

**3.20.** Obtener la ecuación del plano que contiene al punto (1, −2, 3) y que junto con los tres planos coordenados forma en el octante al que pertenece dicho punto un tetraedro de volumen mínimo.

**Solución:** $3x-{}^{2}\!/_{3}\,y+z=9$.

**3.21.** Hallar la mínima distancia del origen a la recta de intersección de los planos $x+y+z=8$ y $2x-y+3z=28$.

**Solución:** La mínima es igual a $\sqrt{\frac{331}{3}}$ .

**3.22.** Calcular el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x, y) = 2x - 3y$ en la región $¼x^2 + y^2 \leq 1$.

**Solución:** La función no tiene máximos ni mínimos relativos en ninguna región abierta. Sus extremos absolutos los alcanza en la frontera de la región dada. El punto mínimo absoluto es $(-8/5, 3/5, -5)$ y el punto máximo absoluto es $(8/5, -3/5, 5)$.

**3.23.** Determinar la distancia mínima del origen a la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + 2xy + 2y^2 = 100$. ¿En qué punto o puntos de la superficie ocurre dicha distancia mínima?

**Solución:** Los puntos más cercanos al origen son dos. Sus coordenadas son $\pm\sqrt{10}\sqrt{5-\sqrt{5}}\,(½(\sqrt{5}-1), 1, 0) = \pm(3.2491, 5.2573, 0)$ y su distancia al origen es igual a 6.18027.

**3.24.** Determinar los valores máximos de la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a la restricción $x - y - 5 = 0$.

**Solución:** Hay un punto mínimo en $(5/2, -5/2, 0{,}25/2)$. No existen puntos máximos relativos ni absolutos.

Capítulo 4

# FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR Y DE VARIABLE VECTORIAL

## 4.1 Conceptos fundamentales

En todo este capítulo, excepto en la última sección (sección 4.8), se supondrá que los sistemas de referencia utilizados son sistemas cartesianos rectangulares. Cuando los sistemas de referencia sean bidimensionales serán como los utilizados en las figuras 4.1*(i)* y 4.1*(ii)* y cuando sean tridimensionales serán sistemas derechos como los utilizados en las figuras 4.1*(iii)* y 4.1*(iv)*. Cuando los sistemas sean de dimensiones mayores no tendrán una representación geométrica, pero se seguirá suponiendo que son cartesianos rectangulares.

Supóngase que en un laboratorio se desea llevar el registro de la trayectoria de una nave desde el instante en que inicia su vuelo hasta el momento en que llega a su destino. Su posición se puede describir, por ejemplo, mediante las coordenadas $(x, y, z)$ de la punta de la nave respecto a cierto sistema de referencia. Se tiene entonces que en cada instante de tiempo $t$ existe uno y sólo un vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ que varía al ir transcurriendo el tiempo. Una relación como esta, que asocia a cada valor de $t$ (número real) uno y sólo un vector $\mathbf{r}$, es un ejemplo de las llamadas *funciones vectoriales de variable real (o escalar).*

**Definición.** Una ***función vectorial de variable escalar (o real)*** es una regla que asocia a cada número real $t$ de un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ uno y sólo un vector $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^m$, lo cual se indica como

$$\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m.$$

Al conjunto $D \subset \mathbb{R}$ se le llama dominio de la función $\mathbf{F}$.

Supóngase ahora que se desea estudiar el viento en una región de la Tierra. Para esto se mide la magnitud y la dirección de la velocidad del viento colocando aparatos de medición en diferentes puntos de la región. En general resultará que la velocidad en cada punto es diferente. Nótese que a cada punto $\mathbf{r}$ le corresponde una y sólo una velocidad $\mathbf{v}$, y que tanto $\mathbf{r}$ como $\mathbf{v}$ son cantidades vectoriales puesto que para que estén completamente determinadas se necesitan su magnitud y dirección. Una regla como esta, que asocia a cada vector $\mathbf{r}$ una cantidad vectorial $\mathbf{v}$, es un ejemplo de las llamadas funciones vectoriales de variable vectorial.

**Definición.** Una ***función vectorial de variable vectorial*** es una regla que asocia a cada vector $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de una región $D \subset \mathbb{R}^n$, uno y sólo un vector $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^m$, lo cual se indica como

$$\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Al conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se le llama dominio de la función $\mathbf{F}$.

Se ve que la segunda definición incluye como un caso particular a la primera; basta hacer $n = 1$, que corresponde al caso en el que la variable $\mathbf{r}$ tiene una sola componente, y que por lo tanto la función tiene sólo una variable independiente. Cuando $n = 1$ se usa preferentemente el nombre indicado en la primera definición. Sin embargo, cuando no es importante enfatizar la diferencia se usa simplemente el nombre abreviado de *función vectorial*. En lo que sigue siempre se considerará que $n$ puede tomar cualquier valor entero positivo, incluyendo el 1, a

menos que se indique lo contrario. Al conjunto de valores que toma $\mathbf{F}(t)$ o $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se le llama *recorrido, imagen o rango de* $\mathbf{F}$.

A las funciones vectoriales se les conoce también con el nombre de

a) Campos vectoriales de variable escalar (cuando $n=1$)
b) Campos vectoriales de variable vectorial (cuando $n>1$),

pero cuando no es importante señalar la diferencia se usa simplemente el nombre de *campos vectoriales.*

Así, un campo vectorial de variable escalar $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ es una función vectorial con dominio en los reales y se acostumbra a representarla como un vector renglón de la forma

$$\mathbf{F}(t)=\left(F_1(t), F_2(t), F_3(t), \cdots, F_m(t)\right)$$

o como un vector columna de la forma

$$\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \vdots \\ F_m(t) \end{bmatrix},$$

donde $F_1(t)$, $F_2(t), \cdots$ son las componentes de $\mathbf{F}(t)$. Cada una de estas componentes es una función escalar de una sola variable como las que se estudian en el Cálculo Diferencial e Integral de una sola variable. Por razones de espacio es más común representar a estas funciones como vectores renglón. No obstante, más adelante se verá que en ciertos casos es más conveniente representarlas como vectores columna. En el caso particular en el que $m=2$ se usan también las notaciones

$$\mathbf{F}(t) = F_1(t)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= F_x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + F_y(t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

y cuando $m = 3$

$$\mathbf{F}(t) = F_1(t)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(t)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= F_x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + F_y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + F_z(t)\,\hat{\mathbf{k}},$$

donde $F_1$, $F_2$ y $F_3$ son las componentes de $\mathbf{F}$ en la base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$. Estas componentes se denotan alternativamente como $F_x$, $F_y$ y $F_z$. Algunos ejemplos son

*i)* $\mathbf{F}(t) = t\,\hat{\mathbf{i}} + t^3\,\hat{\mathbf{j}}$.

*ii)* $\mathbf{F}(\theta) = a(\theta + \operatorname{sen}\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + a(1 - \cos\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$.

*iii)* $\mathbf{F}(t) = (x_0 + at)\,\hat{\mathbf{i}} + (y_0 + bt)\,\hat{\mathbf{j}} + (z_0 + ct)\,\hat{\mathbf{k}} = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$.

*iv)* $\mathbf{F}(v) = a\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + bv\,\hat{\mathbf{j}} + a\operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{k}}$.

La gráfica del recorrido de estas funciones se muestra en la figura 4.1.

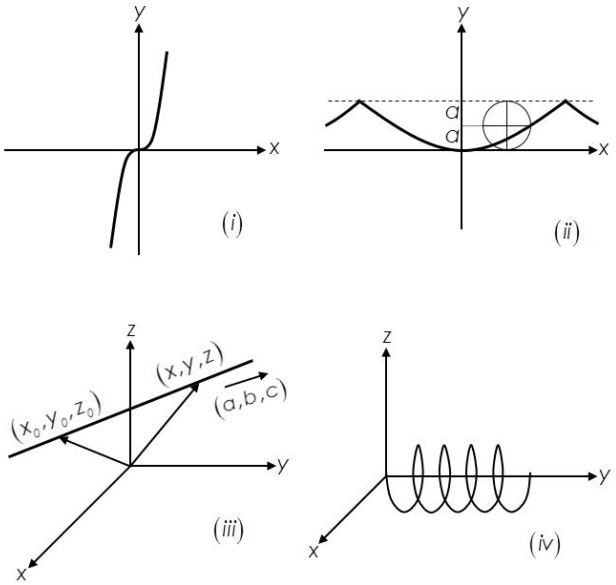



**FIGURA 4.1.**

En forma semejante, un campo vectorial de variable vectorial $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se puede escribir como un vector renglón o como un vector columna:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), F_3(\mathbf{r}), \cdots, F_m(\mathbf{r})),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{r}) \\ F_2(\mathbf{r}) \\ F_3(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{r}) \end{bmatrix},$$

en donde ahora la variable independiente $\mathbf{r}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, es decir, es un conjunto de *ene* variables independientes, y donde $F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), \cdots F_m(\mathbf{r})$ son las $m$ componentes de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Cada una de ellas es una función escalar de $n$ variables $F_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como las que se estudiaron en los primeros tres capítulos de este libro. En el caso particular en el que $m=2$ se usan también las notaciones

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= F_x(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{i}} + F_y(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{j}}$$

y cuando $m=3$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(r)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(r)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(r)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= F_x(r)\,\hat{\mathbf{i}} + F_y(r)\,\hat{\mathbf{j}} + F_z(r)\,\hat{\mathbf{k}},$$

siendo $F_1 \equiv F_x$, $F_2 \equiv F_y$ y $F_3 \equiv F_z$ las componentes de $\mathbf{F}$ en la base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$.

Otro nombre que se utiliza para nombrar a las funciones vectoriales de variable vectorial es el de *transformaciones*. Este nombre es usado principalmente en Álgebra Lineal. Algunos ejemplos son

*i)* $\mathbf{F}(t, s) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$.

*ii)* $\mathbf{F}(u, v) = u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + u\,\text{sen}\, v\,\hat{\mathbf{j}} + u^2\hat{\mathbf{k}}$.

*iii)* $\mathbf{F}(u, v) = \text{sen}\, u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\, u\,\text{sen}\, v\,\hat{\mathbf{j}} + \cos u\,\hat{\mathbf{k}}$.

*iv)* $\mathbf{F}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

La gráfica del recorrido de las funciones de los incisos $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ se muestra en la figura 4.2. La función del inciso $(iv)$ es una función lineal (transformación lineal) ya que satisface las condiciones

$$\mathbf{F}(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = \mathbf{F}(u_1, v_1) + \mathbf{F}(u_2, v_2)$$

y

$$\mathbf{F}(\alpha u, \alpha v) = \alpha\,\mathbf{F}(u, v).$$

Las otras tres funciones (transformaciones) no son lineales.

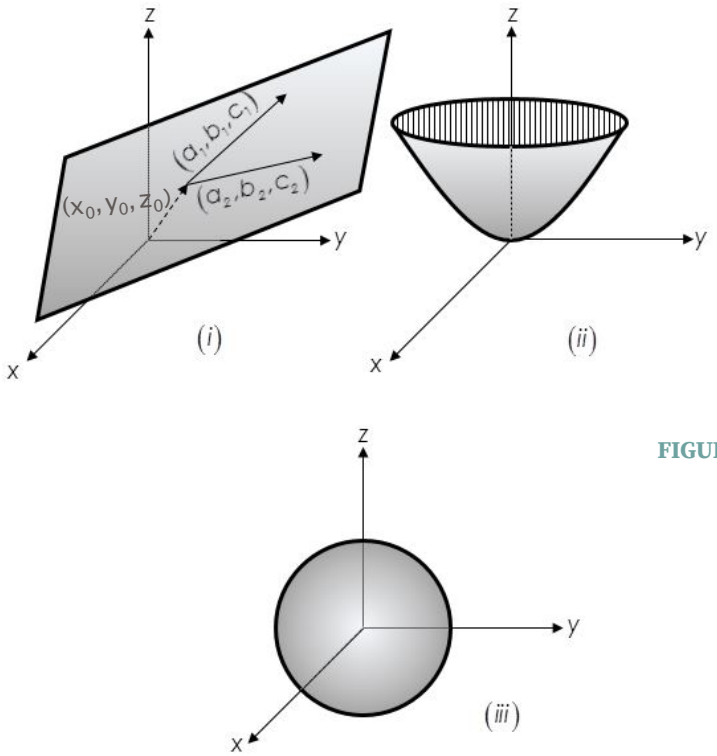



FIGURA 4.2.

## Ejercicios

**4.1.** Cuando dos partículas cargadas eléctricamente se encuentran cercanas, se crea una fuerza $\mathbf{F}$ cuya magnitud $|\mathbf{F}|$ es directamente proporcional al valor de sus cargas, $q_1$, $q_2$, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $d$ que las separa. Expresar la magnitud de la fuerza como función de $q_1$, $q_2$ y $d$.

**Solución:** $|\mathbf{F}| = K\,\frac{q_1\,q_2}{d^2}$.

**4.2.** De los siguientes conceptos físicos indicar los que puedan ser representados por funciones vectoriales, y los que puedan ser representados por funciones escalares.

a) Velocidad de un punto material.
b) Cantidad de movimiento.
c) Intensidad de campo eléctrico.
d) Rapidez de un punto material.
e) Masa.
f) Temperatura.
g) Carga eléctrica.
h) Fuerza centrífuga.
i) Trabajo $T = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$.
j) Volumen.

**4.3.** Representar gráficamente el campo vectorial definido por

$$\mathbf{v} = y\,\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}}.$$

## 4.2 Límites y continuidad de funciones vectoriales

**Definición.** Sea una función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ definida en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\mathbf{L}$ es el vector límite de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ cuando $\mathbf{r}$ tiende a $\mathbf{r}_0$, y se expresa como

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{L},$$

si para cada número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{L}| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta \quad \text{y} \quad \mathbf{r} \in D.$$

**Teorema 1.** Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), F_3(\mathbf{r}), \cdots, F_m(\mathbf{r}))$$

y sea el vector

$$\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3, \cdots, L_m).$$

Entonces:

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{L} \text{ si y sólo si } \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} F_i(\mathbf{r}) = L_i \ \forall i = 1, \cdots, m.$$

**Demostración:** Si $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{L}$, entonces, de acuerdo con la definición anterior, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{L}| < \epsilon$, siempre que $0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta$ y $\mathbf{r} \in D$. Por otra parte, como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{L} = (F_1(\mathbf{r}) - L_1, F_2(\mathbf{r}) - L_2, \cdots, F_m(\mathbf{r}) - L_m)$$

se tiene que

$$\left|F_i(\mathbf{r})-L_i\right| \leq \left|\mathbf{F}(\mathbf{r})-\mathbf{L}\right|<\epsilon; \qquad i=1,\cdots,m$$

siempre que $0<|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|<\delta$ y $\mathbf{r}\in D$. Por lo tanto

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} F_i(\mathbf{r})=L_i; \qquad i=1,\cdots,m.$$

Recíprocamente, si $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} F_i(\mathbf{r})=L_i$; $i=1,\cdots,m$ entonces para cada $\epsilon>0$ existe una $\delta>0$ tal que $\left|F_i(\mathbf{r})-L_i\right|<(\epsilon/m)$ siempre que $0<\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|<\delta$ y $\mathbf{r}\in D$. Utilizando la desigualdad del triángulo se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{F}(\mathbf{r})-\mathbf{L}\right| &= \left|\left(F_1(\mathbf{r})-L_1, F_2(\mathbf{r})-L_2,\cdots,F_m(\mathbf{r})-L_m\right)\right| \\ &\leq \left|F_1(\mathbf{r})-L_1\right|+\left|F_2(\mathbf{r})-L_2\right|+\cdots+\left|F_m(\mathbf{r})-L_m\right| \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{L},$$

con lo que finaliza la demostración.

De acuerdo con este teorema, el límite de una función vectorial (cuando existe) se puede calcular a partir de los límites de sus componentes. Es decir,

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r})=\left(\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} F_1(\mathbf{r}),\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} F_2(\mathbf{r}),\cdots,\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} F_m(\mathbf{r})\right).$$

**Teorema 2.** Propiedades de los límites de funciones vectoriales. Sean $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ y $\mathbf{G}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Entonces, si los límites $\mathbf{A}=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\mathbf{F}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\mathbf{G}(\mathbf{r})$ existen se tiene que

*i)* $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son únicos.

*ii)* $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left[k\mathbf{F}(\mathbf{r})+\mathbf{G}(\mathbf{r})\right]=k\mathbf{A}+\mathbf{B};\quad k\in\mathbb{R}.$

*iii)* $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left[\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r})\right]=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$

*iv)* *Para* $m=3$, $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left[\mathbf{F}(\mathbf{r})\times\mathbf{G}(\mathbf{r})\right]=\mathbf{A}\times\mathbf{B}.$

*v)* $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left|\mathbf{F}(\mathbf{r})\right|=\left|\mathbf{A}\right|.$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio al lector. Considérense ahora los siguientes ejemplos.

## Ejemplo 1.

Calcular el límite, cuando $t$ tiende a 1, de la función vectorial:

$$\boldsymbol{F}(t)=\frac{\operatorname{sen}\left(\pi/2\right)t}{t}\,\hat{\mathbf{i}}-\frac{t^2-1}{1-t}\,\hat{\mathbf{j}}+e^{-\frac{1}{|t-1|}}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** En este caso la variable es escalar (es decir $n=1$) pero, como se mencionó al principio de este capítulo, se pueden utilizar sin restricción los resultados de los dos teoremas anteriores, basta sustituir $\mathbf{r}$ por $t$. Así, calculando los límites de las componentes se tiene

$$\lim_{t\to1}=\frac{\operatorname{sen}\left(\pi/2\right)t}{t}=1$$

$$\lim_{t\to1}=\left(-\frac{t^2-1}{1-t}\right)=2$$

$$\lim_{t\to1}=e^{-\frac{1}{|t-1|}}=0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to 1} = \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\pi/2\right) t}{t}\ \hat{\mathbf{i}} - \frac{t^2-1}{1-t}\ \hat{\mathbf{j}} + e^{-\frac{1}{|t-1|}}\ \hat{\mathbf{k}} \right) = \hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}}.$$

## Ejemplo 2.

Verificar que

$$\lim_{t\to 0} \left[\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)\right] = \left( \lim_{t\to 0} \mathbf{F}(t) \right) \times \left( \lim_{t\to 0} \mathbf{G}(t) \right)$$

cuando $\mathbf{F}(t)$ y $\mathbf{G}(t)$ están dadas por

$$\mathbf{F}(t) = e^{(t+1)}\,\hat{\mathbf{i}} + (t-2)\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\mathbf{G}(t) = \cos t\,\hat{\mathbf{i}} + (t^2 - 5t + 2)\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\ln(t+1)}{t}\,\hat{\mathbf{k}}$$

**Solución:** Se calculan primero los límites de las funciones:

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{F}(t) = \lim_{t\to 0} e^{(t+1)}\,\hat{\mathbf{i}} + \lim_{t\to 0} (t-2)\,\hat{\mathbf{j}} + \lim_{t\to 0} (-1)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= e\,\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{G}(t) = \lim_{t\to 0} \cos t\,\hat{\mathbf{i}} + \lim_{t\to 0} (t^2 - 5t + 2)\,\hat{\mathbf{j}} + \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t}\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

y se realiza su producto vectorial:

$$\left(\lim_{t\to 0}\mathbf{F}(t)\right)\times\left(\lim_{t\to 0}\mathbf{G}(t)\right)=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ e & -2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=-(1+e)\,\hat{\mathbf{j}}+2(e+1)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Por otra parte, $\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)$ es igual a

$$\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ e^{t+1} & t-2 & -1\\ \cos t & t^2-5t+2 & \dfrac{\ln(t+1)}{t}\end{bmatrix}$$

$$=\left((t-2)\frac{\ln(t+1)}{t}+t^2-5t+2\right)\hat{\mathbf{i}}$$

$$-\left(e^{t+1}\frac{\ln(t+1)}{t}+\cos t\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$+\left(e^{t+1}(t^2-5t+2)-(t-2)\cos t\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

El límite de cada una de las componentes es

$$\lim_{t\to 0}\left[(t-2)\frac{\ln(t+1)}{t}+t^2-5t+2\right]=0$$

$$-\lim_{t\to 0}\left[e^{t+1}\frac{\ln(t+1)}{t}+\cos t\right]=-(e+1)$$

$$\lim_{t\to 0}\left[e^{t+1}(t^2-5t+2)-(t-2)\cos t\right]=2(e+1)$$

por lo que

$$\lim_{t\to 0}\left[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)\right]=-(e+1)\,\hat{\mathbf{j}}+2(e+1)\,\hat{\mathbf{k}}$$

y se verifica la igualdad pedida.

## Ejemplo 3.

Calcular $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\mathbf{F}(\mathbf{r})$ si

$$\mathbf{F}(x,y)=x\arctan(xy)\,\hat{\mathbf{i}}+\ln\left(\frac{x}{y}\right)\hat{\mathbf{j}}+\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y-y^3}\,\hat{\mathbf{k}}\quad\text{y}\quad\mathbf{r}_0=(1,1).$$

**Solución:** Se calculan los límites de las componentes

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}x\arctan(xy)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\ln\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y-y^3}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-y}{y(x+y)}=0$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\mathbf{F}(x,y)=\frac{\pi}{4}\,\hat{\mathbf{i}}.$$

**Definición.** Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función vectorial. Se dice que $\mathbf{F}$ es continua en $\mathbf{r}_0\in\mathbb{R}^n$ si se cumplen las siguientes tres condiciones

*i)* El vector $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$ existe

*ii)* El límite $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\mathbf{F}(\mathbf{r})$ existe

*iii)* $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)=\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Es fácil demostrar que si $\mathbf{F}$ es continua en $\mathbf{r}_0$ entonces se debe cumplir la siguiente igualdad en términos de incrementos

$$\lim_{\Delta \mathbf{r} \to 0} \Delta \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

o bien

$$\lim_{|\Delta \mathbf{r}| \to 0} \left| \Delta \mathbf{F} \right| = 0,$$

donde $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$ y $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$.

Como puede observarse, estas expresiones tienen esencialmente la misma forma que las que se dan para la continuidad de las funciones escalares.

## Ejercicios

**4.4.** Determinar los límites de las siguientes funciones cuando $t \to 2$.

a) $\mathbf{f}(t) = 2 \cos t\, \hat{\mathbf{i}} - 3 \tan t\, \hat{\mathbf{j}}$

b) $\mathbf{f}(t) = 3 \tan(t-2)\, \hat{\mathbf{i}} - 4 \cot(t+2)\, \hat{\mathbf{j}} + \ln(t-2)\, \hat{\mathbf{k}}$

c) $\mathbf{f}(t) = \sqrt{4 - t^2}\, \hat{\mathbf{i}} + \sec(t-2)\, \hat{\mathbf{j}}$

d) $\mathbf{f}(t) = 3 \operatorname{sen} t\, \hat{\mathbf{i}} + \dfrac{t-2}{t^2-4}\, \hat{\mathbf{j}} - \ln(t)\, \hat{\mathbf{k}}$

e) $\mathbf{f}(t) = \dfrac{t}{\csc t}\, \hat{\mathbf{i}} - \dfrac{t+2}{\tan(t-2)}\, \hat{\mathbf{j}}$

f) $\mathbf{f}(t) = 4\, \hat{\mathbf{i}} + 3\, \hat{\mathbf{j}} + 8\, \hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:**

a) $\lim_{t \to 2} \mathbf{f}(t) = -0.832\, \hat{\mathbf{i}} + 6.555\, \hat{\mathbf{j}}$, b) No existe, c) $\lim_{t \to 2} \mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{j}}$,
d) $\lim_{t \to 2} \mathbf{f}(t) = 2.727\, \hat{\mathbf{i}} - 0.25\, \hat{\mathbf{j}} - 0.693\, \hat{\mathbf{k}}$, e) No existe,
f) $\lim_{t \to 2} \mathbf{f}(t) = 4\, \hat{\mathbf{i}} + 3\, \hat{\mathbf{j}} + 8\, \hat{\mathbf{k}}$.

**4.5.** Calcular el límite de las siguientes funciones vectoriales.

*i)* $\mathbf{u}(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,\hat{\mathbf{i}}+\cot x\,\hat{\mathbf{j}}-\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\,\hat{\mathbf{k}}$, cuando $x\to 0$.

*ii)* $\mathbf{w}(x,y)=\dfrac{5x^2}{3x^3-2x+3}\,\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{y^3}{3y^3-2y+3}\,\hat{\mathbf{j}}$, cuando $x\to\infty$; $y\to\infty$.

**4.6.** Determinar el límite de la siguiente función cuando $x\to\infty$ y $y\to\infty$.

$$\mathbf{w}(x,y)=\frac{5x^2}{3x^2+2x+3}\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{y^3}{3y^3-2y+3}\,\hat{\mathbf{j}}$$

**4.7.** Calcular el límite de la siguiente función vectorial cuando $t$ tiende al valor 1.

$$\mathbf{f}(t)=\frac{1-\sqrt{t}}{t-1}\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{t^3-1}{t^2+2t-3}\,\hat{\mathbf{j}}+\left(t^2+1\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

**4.8.** Determinar el siguiente límite.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\left|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x})\right|$$

si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{L}_1$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{L}_2$.

**4.9.** Dada $\mathbf{f}(t)=\phi_1(t)\,\hat{\mathbf{i}}+\phi_2(t)\,\hat{\mathbf{j}}+\phi_3(t)\,\hat{\mathbf{k}}$, demostrar que para que sea continua en $t=t_0$, es *necesario* que sus tres componentes sean continuas en el punto considerado.

**4.10.** A continuación, se presenta una lista de funciones vectoriales de variable escalar. Determinar si las funciones son continuas o discontinuas en $t=2$.

1) $\mathbf{f}(t)=\sqrt{4-t^2}\,\hat{\mathbf{i}}+\sec(t-2)\,\hat{\mathbf{j}}$

2) $\mathbf{f}(t)=4\,\hat{\mathbf{i}}+3\,\hat{\mathbf{j}}+8\,\hat{\mathbf{k}}$

3) $\mathbf{f}(t)=3\tan(t-2)\,\hat{\mathbf{i}}+4\cot(t+2)\,\hat{\mathbf{j}}+\ln(t-2)\,\hat{\mathbf{k}}$

4) $\mathbf{f}(t)=3\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{t-2}{t^2-4}\,\hat{\mathbf{j}}-\ln(t)\,\hat{\mathbf{k}}$

5) $\mathbf{f}(t)=\dfrac{t}{\csc t}\,\hat{\mathbf{i}}-\dfrac{t+2}{\tan(t-2)}\,\hat{\mathbf{j}}$

6) $\mathbf{f}(t)=2\cos t\,\hat{\mathbf{i}}-3\tan t\,\hat{\mathbf{j}}$

**4.11.** Demostrar que para que $\mathbf{r}(t)=f(t)\,\hat{\mathbf{i}}+g(t)\,\hat{\mathbf{j}}$ sea continua en el punto $t=t_0$, es *suficiente* que $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\mathbf{r}=0$, donde $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)$.

**4.12.** Analizar la continuidad de las siguientes funciones vectoriales.

*i)* $\mathbf{v}(x,y,z)=\dfrac{3x^2y}{x}\,\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{2yz^3}{y}\,\hat{\mathbf{j}}+\left(\dfrac{xy^4}{z}-2\right)\hat{\mathbf{k}}$.

*ii)* $\mathbf{r}(t)=\sqrt{t+4}\,\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{5}{t}\,\hat{\mathbf{j}}+\dfrac{\sqrt{6-5}}{t}\,\hat{\mathbf{k}}$.

## 4.3 Derivadas y diferenciales de funciones vectoriales

**Definición.**

*i)* Sea $\mathbf{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable escalar $t$. Se define la derivada de $\mathbf{F}$ en $t$ (denotada $d\mathbf{F}(t)/dt$ o $\mathbf{F}'(t)$) como

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}(t+\Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t}$$

cuando el límite existe, en cuyo caso se dice que la función es derivable.

*ii)* Sea $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, es decir $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Se define la derivada parcial de $\mathbf{F}$ con respecto a $x_i$ en $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (denotada $\partial \mathbf{F}(\mathbf{r})/\partial x_i$ o $\mathbf{F}_{x_i}(\mathbf{r})$) como

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\mathbf{F}(x_1, \cdots, x_i + \Delta x_i, \cdots, x_n) - \mathbf{F}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\Delta x_i}$$

cuando el límite existe. Si este límite existe para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, se dice que la función es derivable.

**Teorema 3.**

*i)* Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial derivable de variable escalar definida por $\mathbf{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \cdots, F_m(t))$. Entonces

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = (F_1'(t), F_2'(t), \cdots, F_m'(t)).$$

*ii)* Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial derivable de variable vectorial definida por $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), \cdots, F_m(\mathbf{r}))$. Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \frac{\partial F_2}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \right).$$

**Demostración:** Se demostrará *(i)* mientras que *(ii)* se deja como ejercicio al lector.

*i)* Para $\mathbf{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \cdots, F_m(t))$ se tiene que

$$\mathbf{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(F_1(t+\Delta t), \cdots, F_m(t+\Delta t)) - (F_1(t), \cdots, F_m(t))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(F_1(t+\Delta t) - F_1(t), \cdots, F_m(t+\Delta t) - F_m(t))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{F_1(t+\Delta t) - F_1(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_2(t+\Delta t) - F_2(t)}{\Delta t}, \cdots, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_m(t+\Delta t) - F_m(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= (F_1'(t), F_2'(t), \cdots, F_m'(t)).$$

Este teorema nos dice simplemente que para derivar una función vectorial $\mathbf{F}$ basta derivar cada componente de $\mathbf{F}$ en la forma usual (derivada ordinaria o derivada parcial según sea el caso).

## Ejemplo 4.

Calcular la primera y la segunda derivadas de la función definida por

$$\mathbf{F}(t) = t \ln t \, \hat{\mathbf{i}} + \cos t \, \hat{\mathbf{j}} - \arctan t^2 \, \hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** Si se deriva una vez se obtiene

$$\mathbf{F}'(t) = (1 + \ln t)\,\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{2t}{1+t^4}\,\hat{\mathbf{k}}$$

y si se vuelve a derivar

$$\mathbf{F}''(t) = \frac{1}{t}\,\hat{\mathbf{i}} - \cos t\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{2(3t^4-1)}{(t^4+1)^2}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

## Ejemplo 5.

Calcular $\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x\,\partial y}$ para la función:

$$\mathbf{F}(x, y) = e^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + x \ln y\,\hat{\mathbf{j}} + \operatorname{sen} xy\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** Se calculan las primeras derivadas

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = ye^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + \ln y\,\hat{\mathbf{j}} + y\cos xy\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = xe^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{y}\,\hat{\mathbf{j}} + x\cos xy\,\hat{\mathbf{k}}$$

y se vuelve a derivar

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x\,\partial y} = (xy+1)e^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{y}\,\hat{\mathbf{j}} + (\cos xy - xy\operatorname{sen} xy)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Teorema 4.** Sean $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{G}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos funciones vectoriales derivables con respecto a $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Entonces:

*i)* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k\mathbf{F}+\mathbf{G}\right)=k\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}+\dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}$; $\qquad k \in \mathbb{R}$

*ii)* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\right)=\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}\cdot\mathbf{G}+\mathbf{F}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}$

*iii)* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right)=\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}\times\mathbf{G}+\mathbf{F}\times\dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}$ $\qquad$ para $\quad m=3.$

**Demostración:** Sólo se hará la demostración de *(ii)* dejando las otras para el lector. Por la definición de producto interno:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}=\left(F_1, F_2, \cdots, F_m\right)\cdot\left(G_1, G_2, \cdots, G_m\right)=\sum_{k=1}^{m} F_k G_k$$

por lo que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m} F_k G_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_k G_k}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\,G_k+F_k\,\frac{\partial G_k}{\partial x_i}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\,G_k+\sum_{k=1}^{m}F_k\frac{\partial G_k}{\partial x_i}=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}\cdot\mathbf{G}+\mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}.$$

## Ejemplo 6.

Verificar que se cumple el inciso *(iii)* del teorema anterior para el caso de las funciones

$$\mathbf{F}\left(t\right)=t\ln t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos t\,\hat{\mathbf{j}}-\arctan t^2\,\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\mathbf{G}(t) = t\,\hat{\mathbf{i}} - e^{t^2}\,\hat{\mathbf{j}},$$

las cuales tienen una sola variable, es decir $n = 1$.

**Solución:**

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ t\ln t & \cos t & -\arctan t^2 \\ t & -e^{t^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -e^{t^2} \arctan t^2\,\hat{\mathbf{i}} - t \arctan t^2\,\hat{\mathbf{j}} - \left(te^{t^2} \ln t + t\cos t\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\left[\frac{2te^{t^2}}{1+t^4} + 2te^{t^2} \arctan t^2\right]\hat{\mathbf{i}}$$

$$-\left[\frac{2t^2}{1+t^4} + \arctan t^2\right]\hat{\mathbf{j}}$$

$$-\left[e^{t^2} + e^{t^2} \ln t + 2t^2\, e^{t^2} \ln t - t\,\text{sen}\, t + \cos t\right]\hat{\mathbf{k}}.$$

Por otra parte,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = (1 + \ln t)\,\hat{\mathbf{i}} - \text{sen}\, t\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{2t}{1+t^4}\,\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \hat{\mathbf{i}} - 2te^{t^2}\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Entonces,

$$\mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ t\ln t & \cos t & -\arctan t^2\\ t & -2te^{t^2} & 0\end{bmatrix}$$

$$=-2te^{t^2}\arctan t^2\,\hat{\mathbf{i}}-\arctan t^2\,\hat{\mathbf{j}}-\left(2t^2e^{t^2}\ln t+\cos t\right)\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ (1+\ln t) & -\operatorname{sen} t & \dfrac{-2t}{1+t^4}\\ t & -2e^{t^2} & 0\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{2te^{t^2}}{1+t^4}\,\hat{\mathbf{i}}-\frac{2t^2}{1+t^4}\,\hat{\mathbf{j}}-\left(e^{t^2}+e^{t^2}\ln t-t\operatorname{sen} t\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

Sumando estos dos productos vectoriales

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G}+\mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}=-\left[\frac{2te^{t^2}}{1+t^4}+2te^{t^2}\arctan t^2\right]\hat{\mathbf{i}}$$

$$-\left[\frac{2t^2}{1+t^4}+\arctan t^2\right]\hat{\mathbf{j}}$$

$$-\left[e^{t^2}+e^{t^2}\ln t-t\operatorname{sen} t+2t^2e^{t^2}\ln t+\cos t\right]\hat{\mathbf{k}}.$$

Comparando con el resultado anterior se ve que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right)=\frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G}+\mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

como se quería verificar.

Ahora se definirá el concepto de diferencial de una función vectorial de variable escalar. Se procederá de manera semejante a como se hace para las funciones escalares de variable escalar.

**Definición.** Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ una función definida en un entorno del punto $t=t_0$. Entonces, $\mathbf{F}(t)=\big(F_1(t),\, F_2(t),\cdots,\, F_m(t)\big)$ es diferenciable en $t=t_0$ si su incremento puede escribirse como

$$\Delta\mathbf{F}=\left.\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right|_{t=t_0}\Delta t+\boldsymbol{\eta}\Delta t \tag{1}$$

o en forma desarrollada

$$\Delta\mathbf{F}=\big(F_1'(t_0)\,\Delta t\,+\eta_1\Delta t,\;\; F_2'(t_0)\,\Delta t\,+\,\eta_2\Delta t,\;\cdots,\;\; F_m'(t_0)\,\Delta t+\,\eta_m\Delta t\big),$$

donde $\boldsymbol{\eta}=\big(\eta_1\,,\,\eta_2\,,\cdots,\,\eta_m\big)\to\big(0,\,0,\cdots,\,0\big)$ cuando $\Delta t\to 0$.

Al primer término del miembro derecho de (1):

$$d\mathbf{F}\;\equiv\;\frac{d\mathbf{F}}{dt}\,\Delta t=\big(F_1'(t),\,F_2'(t),\cdots,\,F_m'(t)\big)\Delta t \tag{2}$$

se le llama *diferencial de la función vectorial* $\mathbf{F}$. Puesto que el incremento $\Delta t$ puede elegirse de manera totalmente independiente del valor de $t$ la diferencial $d\mathbf{F}$ depende de dos variables independientes: la $t$ y la $\Delta t$. Además, la definición (2) es independiente de que $\Delta t$ sea chico o grande, es decir, en la definición (2) $\Delta t$ no tiene por que ser pequeño.

Frecuentemente, cuando se desea saber si una función de este tipo es diferenciable o no, en vez de investigar si se cumple la igualdad (1), lo que se hace es utilizar el inciso *(i)* del siguiente teorema que es más fácil de aplicar. Además, el teorema muestra que toda función diferenciable es derivable pero que no toda función derivable es diferenciable: se requiere además que las derivadas sean continuas.

**Teorema 5.** Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Entonces:

*i)* Si $\mathbf{F}$ es diferenciable en un conjunto abierto $E$ entonces $\mathbf{F}$ es derivable en $E$.

*ii)* Si $\mathbf{F}$ es derivable en un conjunto abierto $E$ y las derivadas de todas las componentes de $\mathbf{F}$ son continuas sobre $E$ entonces $\mathbf{F}$ es diferenciable en $E$.

**Demostración:** Sólo se demostrará el inciso *(i)*

De acuerdo con la definición (1), si $\mathbf{F}$ es diferenciable existe $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ y por lo tanto $\mathbf{F}$ es derivable.

Para el caso de las funciones vectoriales de variable vectorial la forma de la diferencial es semejante, pero antes de presentarla es necesario ver los siguientes conceptos.

**Definición.** Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial cuyas derivadas parciales de cada una de sus $m$ componentes con respecto a cada una de las $n$ variables existe en una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$. Se define la derivada de $\mathbf{F}$ con respecto al vector $\mathbf{r}$, y se denota como $\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}$, o bien como $\nabla\mathbf{F}$, a la matriz

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \nabla\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \cdots, F_m)$ y $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

A esta derivada se le conoce como *gradiente generalizado* o *matriz jacobiana de* $F_1, F_2, \cdots, F_m$ *con respecto a* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (o simplemente derivada de **F** con respecto a **r**); para denotarla se usan también los símbolos $d\mathbf{F}/d\mathbf{r}$ o grad $(\mathbf{F})$. Nótese que el renglón número $i$ de esta matriz es el gradiente de la componente $F_i$ de **F**, y que la columna número $j$ es la derivada parcial de **F** con respecto a $x_j$. Nótese también que si en la definición de matriz jacobiana se considera el caso $n = 1$, la expresión se reduce a

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} \equiv \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dx} \\ \frac{dF_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dF_m}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1'(x) \\ F_2'(x) \\ \vdots \\ F_m'(x) \end{pmatrix},$$

lo que indica que en los desarrollos algebraicos en los que estén involucradas matrices jacobianas los vectores $d\mathbf{F}/dx$ y **F** deben tomarse como vectores columna, a diferencia de lo que se utilizó anteriormente (ver por ejemplo el teorema 3). Por otra parte, para el caso $m = 1$, **F** resulta ser una función escalar, que si se denota con $\phi$, la expresión de la matriz jacobiana se reduce a

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{r}} = \nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \right)$$

que es un vector renglón y coincide con lo que se ha usado antes (recuérdese que el operador $\nabla = d/d\mathbf{r}$ se introdujo en el Capítulo 2 mediante la expresión $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \cdots, \partial/\partial x_n)$). La convención que seguiremos es entonces la siguiente: siempre que se utilice la notación matricial, se considerará a los vectores **r**, $d\mathbf{r}$ y **F** como columnas, y a $\nabla$ como renglón a menos que se diga lo contrario.

Al utilizar esta convención debe tomarse también la convención de que el símbolo para la matriz jacobiana $d\mathbf{F}/d\mathbf{r}$ (o bien $\nabla\mathbf{F}$) es un solo símbolo, cuyo significado está indicado en la ecuación (3), y no un producto de la matriz renglón $d/d\mathbf{r}$ por la matriz columna **F** ya que el producto $d/d\mathbf{r}$ por **F** es igual al escalar

$\partial/\partial x_1\, F_1 + \partial/\partial x_2\, F_2 + \cdots + \partial/\partial x_3\, F_n$ y no a la matriz jacobiana de la ecuación (3). Con estas convenciones se tiene la ventaja de que la diferencial y la regla de la cadena para las funciones del tipo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tienen esencialmente la misma forma que la que tienen para otro tipo de funciones. Ver ecuaciones (5)-(9) y ecuaciones (10")-(17).

Como información adicional a continuación se escribe la relación correcta entre las matrices $d\mathbf{F}/d\mathbf{r}$, $d/d\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}\right)^T = \left(\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)^T \mathbf{F}^T.$$

Sin embargo, esta expresión es muy incómoda y no se usará aquí.

## Ejemplo 7.

Obtener la matriz jacobiana de la función

$$\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + \ln(xyz)\,\hat{\mathbf{j}} + \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** Se obtienen las derivadas parciales de $\mathbf{F}$ y se colocan como columnas de la matriz buscada.

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} = yze^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{x}\,\hat{\mathbf{j}} + 2x\cos(x^2+y^2+z^2)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dy} = xze^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{y}\,\hat{\mathbf{j}} + 2y\cos(x^2+y^2+z^2)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dz} = e^{xy}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{z}\,\hat{\mathbf{j}} + 2z\cos(x^2+y^2+z^2)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \operatorname{grad}(\mathbf{F})$$

$$= \begin{bmatrix} yze^{xy} & xze^{xy} & e^{xy} \\ \dfrac{1}{z} & \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z} \\ 2x\cos(x^2+y^2+z^2) & 2y\cos(x^2+y^2+z^2) & 2z\cos(x^2+y^2+z^2) \end{bmatrix}.$$

Para el caso especial en el que $n=m$, la matriz jacobiana es cuadrada y se puede calcular su determinante.

**Definición.** Sea $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), \cdots, F_n(\mathbf{r}))$, donde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. En este caso su matriz jacobiana es una matriz cuadrada y a su determinante se llama ***jacobiano*** de $F_1, F_2, \cdots, F_n$ con respecto a $x_1, x_2, \cdots, x_n$, y se representa por $J\left(\dfrac{F_1, F_2, \cdots, F_n}{x_1, x_2, \cdots, x_n}\right)$. Es decir,

$$J\left(\frac{F_1, F_2, \cdots, F_n}{x_1, x_2, \cdots, x_n}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Cabe recordar que este concepto ya se había utilizado en el caso 3 de la sección 2.5 al estudiar la derivación implícita. Se vio también que otra forma de denotarlo es

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

Los nombres de matriz jacobiana y de jacobiano se han puesto en honor del matemático germano Carl G.J. Jacobi (1804–1851), quien fue el primero en analizar este tipo de determinantes. El siguiente teorema, que se dará sin demostración, establece algunas propiedades de los jacobianos.

**Teorema 6.** Sea $\mathbf{U}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{U}(\mathbf{v}) = (u_1(\mathbf{v}), u_2(\mathbf{v}), \cdots, u_n(\mathbf{v}))$, donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$. Entonces:

*i)* $$J\left(\frac{u_1, u_2, \cdots, u_n}{v_1, v_2, \cdots, v_n}\right) J\left(\frac{v_1, v_2, \cdots, v_n}{u_1, u_2, \cdots, u_n}\right) = 1.$$

*ii)* Si las variables $v_i$ dependen a su vez de las variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, o sea $v_i = V_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces

$$J\left(\frac{u_1, u_2, \cdots, u_n}{x_1, x_2, \cdots, x_n}\right) = J\left(\frac{u_1, u_2, \cdots, u_n}{v_1, v_2, \cdots, v_n}\right) J\left(\frac{v_1, v_2, \cdots, v_n}{x_1, x_2, \cdots, x_n}\right)$$

siempre y cuando los jacobianos sean diferentes de cero.

Cuando el jacobiano $J\left(\frac{u_1, u_2, \cdots, u_n}{v_1, v_2, \cdots, v_n}\right)$ asociado a la función $\mathbf{U}(\mathbf{v})$ (que transforma el vector $\mathbf{v}_0$ en el vector $\mathbf{u}_0 = \mathbf{U}(\mathbf{v}_0)$) evaluado en $\mathbf{v}_0$ es distinto de cero, entonces existe la inversa de la función $\mathbf{U}$, denotada por $\mathbf{U}^{-1}$, la cual transforma el vector $\mathbf{u}_0$ en el vector $\mathbf{v}_0$ mediante la expresión $\mathbf{v}_0 = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{u}_0)$. En el jacobiano $J\left(\frac{u_1, u_2, \cdots, u_n}{v_1, v_2, \cdots, v_n}\right)$ las variables dependientes son $u_1, u_2, \cdots$, pero la propiedad *(i)* permite calcular el jacobiano $J\left(\frac{v_1, v_2, \cdots, v_n}{u_1, u_2, \cdots, u_3}\right)$ en el cual $u_1, u_2, \cdots$, son las variables independientes. Basta calcular el inverso de $J\left(\frac{u_1, u_2, \cdots, u_n}{v_1, v_2, \cdots, v_n}\right)$. Obviamente otra posibilidad sería despejar $u_1, u_2, \cdots, u_n$ en función de $v_1, v_2, \cdots, v_n$ pero esto no siempre es posible o conveniente.

## Ejemplo 8.

Verificar que

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)} \tag{4}$$

para el caso

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\hat{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\hat{\mathbf{j}} = u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + u\,\text{sen}\,v\,\hat{\mathbf{j}}.$$

**Solución:** Primero se obtiene $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$

$$J\left(\frac{u, v}{x, v}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\,\text{sen}\,v \\ \text{sen}\,v & u\cos v \end{vmatrix} = u.$$

Ahora se obtiene $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$, para lo cual hay que despejar antes $u$ y $v$.

De las ecuaciones anteriores se tiene

$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u\,\text{sen}\,v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,v}{\cos v} = \tan v \Rightarrow v = \arctan\frac{y}{x}.$$

Además

$$x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\,\text{sen}^2 v = u^2 \qquad \Rightarrow \qquad u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

por lo que

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ u_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} & \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{u}.$$

Y, como se puede ver,

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)}$$

que es la ecuación (4).

Habiendo visto el concepto de matriz jacobiana se procederá a definir el concepto de función vectorial de variable vectorial diferenciable.

**Definición.** Sea $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial definida en una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al punto $\mathbf{r}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$. Se dice que $\mathbf{F}$ es diferenciable en $\mathbf{r}_0$ si su incremento puede escribirse como

$$\Delta\mathbf{F} = \left.\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \Delta\mathbf{r} + \overleftrightarrow{\eta}\,\Delta\mathbf{r} \tag{5}$$

donde $\Delta\mathbf{F}$ y $\Delta\mathbf{r}$ son los vectores columna

$$\Delta\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \vdots \\ \Delta F_m \end{bmatrix}; \qquad \Delta\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix};$$

$\left(d\mathbf{F}/d\mathbf{r}\right)\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$ es la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ evaluada en $\mathbf{r}_0$ y $\overleftrightarrow{\eta}$ es una matriz de orden $m \times n$ que depende de $\Delta\mathbf{r}$ pero que tiende a la matriz cero cuando $\Delta\mathbf{r} \to \mathbf{0}$.

De esta definición se sigue que el segundo término de la ecuación (5) depende doblemente de $\Delta\mathbf{r}$ y que, en cambio, el primer término sólo depende linealmente de $\Delta\mathbf{r}$. Como $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son variables independientes, $\Delta x_i = dx_i$, y también $\Delta\mathbf{r} = d\mathbf{r}$ (ver el Capítulo 2). Entonces la ecuación (5) se escribe como

$$\Delta\mathbf{F} = \left.\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} d\mathbf{r} + \overleftrightarrow{\eta}\, d\mathbf{r}. \tag{5'}$$

Usando notación más explícita la expresión $(5')$ se escribe como

$$\begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \vdots \\ \Delta F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{m1} & \eta_{m2} & \eta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \tag{5''}$$

El término que depende linealmente de $d\boldsymbol{r}$ se denota como $d\mathbf{F}$ y se le llama diferencial de $\mathbf{F}$, es decir

$$d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}\, d\mathbf{r} = \nabla\mathbf{F}\, d\mathbf{r} \tag{6}$$

(no confundir los símbolos $\Delta\mathbf{F}$ y $\nabla\mathbf{F}$).

También para este tipo de funciones existe un teorema que permite investigar más fácilmente si una función es diferenciable o no.

**Teorema 7.** Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ una función vectorial de variable vectorial $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Entonces:

*i)* Si $\mathbf{F}$ es diferenciable en un conjunto abierto $E$ entonces $\mathbf{F}$ es derivable en $E$.

*ii)* Si $\mathbf{F}$ es derivable en un conjunto abierto $E$ y todas las derivadas parciales de cada una de las componentes de $\mathbf{F}$ son continuas en $E$ (es decir, si la matriz jacobiana es continua sobre $E$), entonces $\mathbf{F}$ es diferenciable en $E$.

A continuación, se presenta un resumen de las definiciones del concepto de diferencial para los distintos tipos de funciones

$$Si \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad df \equiv \frac{df}{dx}\,dx \qquad \text{(Cap. 2 Sec. 2.3)} \qquad (7)$$

$$Si \quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \qquad df \equiv \frac{df}{d\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \nabla f\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{(Cap. 2 Sec. 2.3)} \qquad (8)$$

$$Si \quad \mathbf{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m \qquad d\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dx}\,dx \qquad \text{(Cap. 4 Ec. (2))} \qquad (9)$$

$$Si \quad \mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \qquad d\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} = \nabla\mathbf{F}\,d\mathbf{r} \qquad \text{(Cap. 4 Ec. (6)).} \qquad (6)$$

En ninguna de estas cuatro definiciones hay indicación alguna de que $dx$ o $d\mathbf{r}$ deban ser pequeñas o grandes. Además, las variables $dx$ y $\mathbf{r}$ son totalmente independientes de $x$ y $\mathbf{r}$ respectivamente.

### 4.3.1 Regla de la cadena

Sea la función vectorial de variable vectorial $\mathbf{G}(\mathbf{u}) = (G_1(\mathbf{u}),\ G_2(\mathbf{u}),\cdots,\ G_p(\mathbf{u})) : \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ con $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\cdots,\ u_m)$ y dominio $D_{\mathbf{G}}\subset\mathbb{R}^m$, y supóngase que los valores del vector $\mathbf{u}$ están dados por la función vectorial de variable vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}),\ F_2(\mathbf{r}),\cdots,\ F_m(\mathbf{r})) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, es decir $\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, con $\mathbf{r} = (x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)\in D_{\mathbf{F}}\subset\mathbb{R}^n$, de forma tal que el dominio $D_{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$ contiene a la imagen de $D_{\mathbf{F}}$ bajo $\mathbf{F}$ denotada como $R_{\mathbf{F}}$ (ver figura 4.3). La composición $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ con $\mathbf{F}$, expresada como $\mathbf{H} = \mathbf{G}\circ\mathbf{F}$, es la función vectorial de variable vectorial definida como

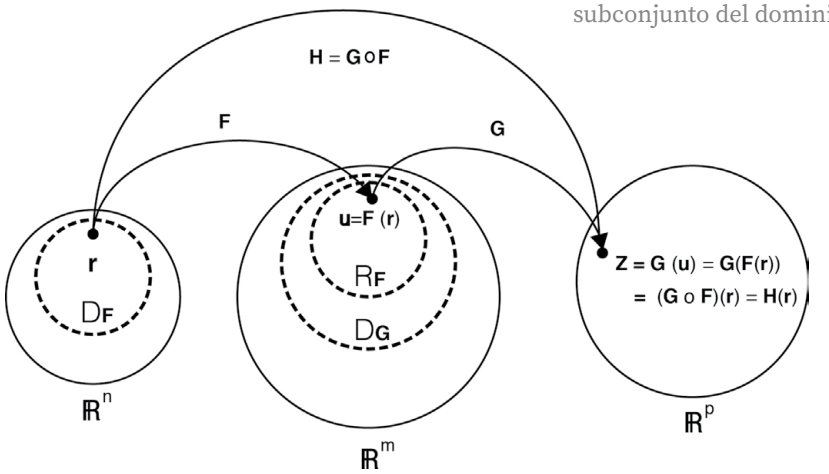
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = (\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{r})) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p.$$

La componente $i$ de $\mathbf{H}$ $(\text{con } i = 1, 2, \cdots, p)$ es la función escalar de variable vectorial

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})_i(\mathbf{r}) \equiv G_i(\mathbf{F}(\mathbf{r})).$$

Supóngase ahora que $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son diferenciables y que se desea calcular la derivada parcial de $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ con respecto a $x_j$. Obviamente una manera de calcular dicha derivada es sustituir $\mathbf{F}$ en $\mathbf{G}$ y derivar, pero lo que nos interesa es ver como hacerlo sin esa sustitución. De acuerdo con los incisos *(ii)* del teorema 3 y el *(i)* del teorema 7 de este capítulo se tiene que si $\mathbf{H}$ es diferenciable, su derivada respecto a $x_j$ es un vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes de $\mathbf{H}$, es decir (usando notación matricial y omitiendo por brevedad el argumento $\mathbf{r}$),

**FIGURA 4.3.** La composición de la función $\mathbf{G}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ con la función $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ da como resultado la función $\mathbf{H}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. El rango $R_\mathbf{F}$ de la función $\mathbf{F}$ debe ser un subconjunto del dominio $D_\mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$.




$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial H_p}{\partial x_j} \end{bmatrix}.$$

Nótese que este vector es la columna número $j$ de la matriz jacobiana $\dfrac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{r}}$.

Esta ecuación es equivalente a $$\frac{\partial \mathbf{G}\circ\mathbf{F}}{\partial x_j}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial G_1\circ\mathbf{F}}{\partial x_j}\\ \dfrac{\partial G_2\circ\mathbf{F}}{\partial x_j}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial G_p\circ\mathbf{F}}{\partial x_j}\end{bmatrix},$$

lo que indica que la componente $i$ de $\partial\mathbf{G}\circ\mathbf{F}/\partial x_j$ es la derivada parcial de $G_i\circ\mathbf{F}$ con respecto a $x_j$. Ahora bien, como $H_i=G_i\circ\mathbf{F}$ es una función escalar de variable vectorial, se puede aplicar el teorema 10 del Capítulo 2 (en realidad lo que se requiere es aplicar una generalización trivial de dicho teorema porque allá el teorema se escribió para el caso en el que las funciones tenían sólo dos variables y aquí lo que se tiene son $n$ variables). De esta manera se concluye que cada componente de $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ es diferenciable en $D_{\mathbf{F}}$ y que por ejemplo la derivada parcial de $H_1=G_1\circ\mathbf{F}$ con respecto a $x_2$ está dada por (ver ecuaciones (19) y (20) del capítulo 2)

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_2}=\frac{\partial G_1\circ\mathbf{F}}{\partial x_2}=\frac{\partial G_1}{\partial u_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\frac{\partial G_1}{\partial u_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial G_1}{\partial u_m}\frac{\partial F_m}{\partial x_2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial G_1}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_2}$$

y que en general la derivada parcial de $H_i=G_i\circ\mathbf{F}$ con respecto a $x_j$ está dada por

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}=\frac{\partial G_i\circ\mathbf{F}}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial G_i}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

Entonces, la derivada parcial de $\mathbf{H}=\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ con respecto a $x_j$ es igual a

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_j}=\frac{\partial \mathbf{G}\circ\mathbf{F}}{\partial x_j}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{m}\dfrac{\partial G_1}{\partial u_k}\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{\partial G_2}{\partial u_k}\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{\partial G_p}{\partial u_k}\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}\end{bmatrix},$$

y como $\partial \mathbf{H}/\partial x_j$ es la columna $j$ de la matriz jacobiana $\left(\mathrm{d}\mathbf{H}/\mathrm{d}\mathbf{r}\right) = \left(d\mathbf{G}\circ\mathbf{F}/d\mathbf{r}\right)$, la matriz completa consistirá en $n$ columnas de este tipo. Es decir,

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{G}\circ\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_1}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_1}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_1}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_n} \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_2}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_2}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_2}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_p}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_p}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_p}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

y es fácil comprobar (ver el caso particular considerado abajo) que esta matriz es igual al producto de la matriz $d\mathbf{G}/d\mathbf{u}$ por la matriz $d\mathbf{F}/d\mathbf{r}$. Es decir,

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{G}\circ\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}\ , \tag{10}$$

que es la regla de la cadena.

Como comprobación de lo afirmado arriba considérese el caso particular en donde $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{G}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $\mathbf{r} = \left(x_1\ ,\ x_2\right) = \left(x,\ y\right)$ y $\mathbf{u} = \left(u_1,\ u_2,\ u_3\right)$. Entonces $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ y la penúltima ecuación se escribe como

$$\frac{d\mathbf{G}\circ\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_1}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x} & \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_1}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial y} \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_2}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x} & \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_2}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial y} \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_3}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x} & \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_3}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial y} \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_4}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial x} & \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_4}{\partial u_k}\frac{\partial F_k}{\partial y} \end{bmatrix}$$

y es fácil comprobar que si se efectúa el producto

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\,\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} & \frac{\partial G_1}{\partial u_2} & \frac{\partial G_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u_1} & \frac{\partial G_2}{\partial u_2} & \frac{\partial G_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial G_3}{\partial u_1} & \frac{\partial G_3}{\partial u_2} & \frac{\partial G_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial G_4}{\partial u_1} & \frac{\partial G_4}{\partial u_2} & \frac{\partial G_4}{\partial u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

se obtiene la matriz anterior. Por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{G}\circ\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\,\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}\ ,$$

que es la ecuación (10).

Como es usual, siempre que una variable $y$ (ya sea escalar o vectorial) es igual al valor de una cierta función $f$ evaluada en algún valor de su argumento, por ejemplo $y=f(x)$, entonces se escribe indistintamente $\frac{df}{dx}$ o $\frac{dy}{dx}$. Entonces la ecuación (10) se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{G}\circ\mathbf{F}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,. \tag{10'}$$

Usando la forma abreviada $d\mathbf{G}/d\mathbf{r}$ en vez de $d\mathbf{G}\circ\mathbf{F}/d\mathbf{r}$ la regla de la cadena queda escrita finalmente como

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\,, \tag{10''}$$

en donde, para una interpretación correcta de la fórmula, hay que enfatizar que la derivada que aparece en el lado izquierdo es la derivada de la función compuesta $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$. En cambio, en el lado derecho aparecen derivadas de las funciones simples $\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}$ respecto a sus propios argumentos.

Nótese que esta expresión tiene la misma forma que la regla de la cadena para funciones escalares de variable escalar, excepto que ahora se trata de matrices. Como referencia, a continuación, se presenta una tabla con 8 casos de regla de la cadena. Se utilizan letras minúsculas para representar a las funciones escalares $f$ y $g$ y letras mayúsculas en negrilla para representar a las funciones vectoriales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$. Además, se utiliza minúsculas para representar a la variables escalares $x$ y $u$ y letras en negrilla para representar a las variables vectoriales $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$. El miembro izquierdo siempre representa a la derivada de una función compuesta. En cambio, el miembro derecho siempre representa derivadas de funciones simples respecto a sus propios argumentos.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ | y | $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ | $\dfrac{dg}{dx}=\dfrac{dg}{du}\dfrac{du}{dx}\ (\text{con } u=f(x))$ | (11) |
| Si $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ | y | $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ | $\dfrac{d\mathbf{G}}{dx}=\dfrac{d\mathbf{G}}{du}\dfrac{du}{dx}\ (\text{con } u=f(x))$ | (12) |
| Si $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ | y | $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ | $\dfrac{dg}{d\mathbf{r}}=\dfrac{dg}{du}\dfrac{du}{d\mathbf{r}}\ (\text{con } u=f(\mathbf{r}))$ | (13) |
| Si $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ | y | $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ | $\dfrac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{r}}=\dfrac{d\mathbf{G}}{du}\dfrac{du}{d\mathbf{r}}\ (\text{con } u=f(\mathbf{r}))$ | (14) |
| Si $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ | y | $g\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ | $\dfrac{dg}{dx}=\dfrac{dg}{d\mathbf{u}}\dfrac{d\mathbf{u}}{dx}\ (\text{con } \mathbf{u}=\mathbf{F}(x))$ | (15) |
| Si $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ | y | $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ | $\dfrac{d\mathbf{G}}{dx}=\dfrac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\dfrac{d\mathbf{u}}{dx}\ (\text{con } \mathbf{u}=\mathbf{F}(x))$ | (16) |
| Si $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ | y | $g\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ | $\dfrac{dg}{d\mathbf{r}}=\dfrac{dg}{d\mathbf{u}}\dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\ (\text{con } \mathbf{u}=\mathbf{F}(\mathbf{r}))$ | (17) |
| Si $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ | y | $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ | $\dfrac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{r}}=\dfrac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\ (\text{con } \mathbf{u}=\mathbf{F}(\mathbf{r})).$ | (10") |

## Ejemplo 9.

Sean las funciones $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $\mathbf{G}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{H}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, definidas como

$$\mathbf{F}(x_1, x_2)=(x_1+x_2, x_2)$$
$$\mathbf{G}(u_1, u_2)=(1, u_1-u_2, u_1)$$
$$\mathbf{H}=\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$$

Calcular $\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{x}}$ por dos métodos distintos. El primero es obteniendo explícitamente la función $\mathbf{H}$ y después derivándola respecto a $\mathbf{x}$. El segundo es utilizando la regla de la cadena.

**Solución:**

**1er método.** Utilizando las notaciones $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ y $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$, las definiciones de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ se pueden escribir como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=(x_1+x_2, x_2)$$
$$\mathbf{G}(\mathbf{u})=(1, u_1-u_2, u_1)$$

y la función $\mathbf{H}=\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ evaluada en $\mathbf{x}$ se obtiene evaluando $\mathbf{G}$ en $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, es decir, haciendo $\mathbf{u}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{G}(\mathbf{u})$. Así,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})=(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(\mathbf{x})=\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$$
$$=\mathbf{G}(x_1+x_2, x_2)=(1, x_1+x_2-x_2, x_1+x_2)=(1, x_1, x_1+x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial H_3}{\partial x_1} & \frac{\partial H_3}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

**2do método.** Por la regla de la cadena se tiene que $\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}}\,\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}$. Así,

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} & \frac{\partial G_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u_1} & \frac{\partial G_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial G_3}{\partial u_1} & \frac{\partial G_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que coincide con el resultado del primer método.

## Ejercicios

**4.13.** Sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, donde las expresiones para estas componentes están dadas abajo. Calcular la razón de cambio de las funciones $F_1$ y $F_3$ cuando varía la variable $x$ y la de las funciones $F_2$ y $F_4$ cuando varía la variable $y$.

*i)* $F_1(x, y) = xy\cos(x+y)$

*ii)* $F_2(x, y) = \frac{x+y}{3x-y}$

*iii)* $F_3(x, y) = \sqrt{\frac{2x^2-y}{y^2-2x}}$

*iv)* $F_4(x, y) = a^{x/y}$, siendo $a$ una constante.

**Solución:**

*i)* $\frac{\partial F_1}{\partial x} = y\cos(x+y) - xy\sin(x+y)$

*ii)* $\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{4x}{(3x-y)^2}$

*iii)* $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{1}{2\left(\sqrt{2x^2-4}\,(y^2-2x)^{3/2}\right)}\left(4xy^2 - 4x^2 - 2y\right)$

*iv)* $\frac{\partial F_4}{\partial y} = -a^{x/y}\,\frac{x\ln a}{y^2}$

**4.14.** Calcular $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ si $\mathbf{r}(t)=\phi(t)\,\mathbf{u}(t)$.

**Solución:** $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{u}(t)\frac{d\phi(t)}{dt}+\phi(t)\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$

**4.15.** Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida como $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(4xy,\ x+y+z)$ calcular su matriz jacobiana $\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{r}}$.

**4.16.** Obtener la diferencial de la función vectorial $\mathbf{u}(x,y)=x^2\operatorname{sen} y\,\hat{\mathbf{i}}+z^2\cos y\,\hat{\mathbf{j}}-xy^2\,\hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:**

$$\begin{bmatrix} 2x\sin y & x^2\cos y & 0 \\ 0 & -z^{\sin y} & 2z\cos y \\ -y^2 & -2xy & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

**4.17.** Sea la función vectorial $\mathbf{f}(u,v)=2u^2v\,\hat{\mathbf{i}}-4uv^3\,\hat{\mathbf{j}}+uv\,\hat{\mathbf{k}}$ Calcular su diferencial.

**Solución:**

$$d\mathbf{f}=\begin{bmatrix} 4\mu v\Delta\mu+2\mu^2\Delta v \\ -4v^3\Delta\mu-12\mu v^2\Delta v \\ v\Delta\mu+\mu\Delta v \end{bmatrix}$$

**4.18.** Dada la función

$$\mathbf{F}(x,y)=xy^3\,\hat{\mathbf{i}}+x^2y^2\,\hat{\mathbf{j}}+x^3y\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $x$ y $y$ están dadas en metros. Determinar, de manera aproximada, el incremento de la función en forma matricial. Tómese como referencia el punto $\mathbf{P}=(10,\ 10)$ y un incremento de un milímetro.

**Solución:** $\Delta\mathbf{F}\big|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

**4.19.** Considere la función

$$\mathbf{G}(x, y) = (x \operatorname{sen}^3 y,\ \operatorname{sen} y,\ \operatorname{sen}^2 x),$$

Obtener el valor aproximado de $\mathbf{G}$ en el punto (1.51, 1.52). Tómese como referencia el punto $\mathbf{P} = (\pi/2,\ \pi/2)$.

**4.20.** Sea $\mathbf{v} = (2x^2y - x^4)\,\hat{\mathbf{i}} + (e^{xy} - y \operatorname{sen} x)\,\hat{\mathbf{j}} + x^2 \cos y\,\hat{\mathbf{k}}$. Hallar $\partial^2\mathbf{v}/\partial x\partial y$ y verificar el teorema de Schwarz.

**Solución:** $\dfrac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial x\partial y} = 4x\,\hat{\mathbf{i}} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\,\hat{\mathbf{j}} - 2x \operatorname{sin} y\,\hat{\mathbf{k}}$

**4.21.** Si $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, calcular cada una de las siguientes derivadas:

a) $\dfrac{d\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}}{dt}$

b) $\dfrac{d^2(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{dt^2}$

c) $\dfrac{d\varphi\mathbf{f}}{dt}$

d) $\dfrac{d(\mathbf{f}\times\mathbf{g})}{dt}$

e) $\dfrac{d(\varphi\mathbf{f}\times\mathbf{g})}{dt}$

f) $\dfrac{d(\varphi\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{dt}$

g) $\dfrac{d(\mathbf{f}\circ\varphi)(t)}{dt}$.

**Solución:**

a) $\mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\frac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\mathbf{g}$

b) $\mathbf{f}\cdot\frac{d^2\mathbf{g}}{dt^2}+2\frac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}\cdot\mathbf{g}$

c) $\varphi\frac{d\mathbf{f}}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{f}$

d) $\mathbf{f}\times\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\frac{d\mathbf{f}}{dt}\times\mathbf{g}$

e) $\varphi\mathbf{f}\times\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\varphi\frac{d\mathbf{f}}{dt}\times\mathbf{g}+\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{f}\times\mathbf{g}$

f) $\varphi\mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}+\varphi\frac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\mathbf{g}+\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$

**4.22.** Si $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(x,\ x,\ xyz)$, y $\mathbf{g}:R^3\to R^3$ está dada por $\mathbf{g}(\mathbf{u})=(u_1,\ u_2u_3,\ u_2u_1)$, obtener

$$\frac{\partial f_1\circ\mathbf{g}}{\partial u_1}\ ;\ \frac{\partial\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}{\partial u_1}\ ;\ \frac{\partial\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}{\partial u_2}$$

a) usando la regla de la cadena.

b) sin usar dicha regla.

**Solución:**

$$\frac{\partial f_1\circ\mathbf{g}}{\partial u_1}=1;\ \frac{\partial\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}{\partial u_1}=(1,\ 1,\ 2u_1u_2^2u_3);\ \frac{\partial\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}{\partial u_2}=(0,\ 0,\ 2u_1^2u_2u_3)$$

**4.23.** Si $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\mathbf{F}(\mathbf{r})=6y\hat{\mathbf{i}}+8x\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{G}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{G}(\mathbf{u})=(u_2,\ u_2,\ u_1u_2)$, obtener

$$\frac{d(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})}{d\mathbf{u}}$$

a) Usando la regla de la cadena

b) Obtener la expresión explícita de $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$

c) Obtener $\frac{d(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})}{d\mathbf{u}}$ sin usar la regla de la cadena.

**4.24.** Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,\ y)=2xy+1$ y $\mathbf{G}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ está dada por $\mathbf{G}(t)=(t,\ t+2)$,

a) Obtener $\dfrac{d(\mathbf{G}\circ f)}{d\mathbf{x}}$ usando la regla de la cadena

b) Obtener la expresión explícita de $\mathbf{G}\circ f$

c) Obtener $\dfrac{d(\mathbf{G}\circ f)}{d\mathbf{x}}$ sin usar la regla de la cadena.

d) Obtener $\dfrac{d(f\circ\mathbf{G})}{dt}$ usando la regla de la cadena

e) Obtener la expresión explícita de $f\circ\mathbf{G}$

f) Obtener $\dfrac{d(f\circ\mathbf{G})}{dt}$ sin usar la regla de la cadena.

**4.25.** Si $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathbf{G}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{H}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, ¿Qué forma tiene la regla de la cadena para la derivada de $\mathbf{H}\circ\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$?

**4.26.** Si $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ¿Qué forma tiene la regla de la cadena para la derivada de $\mathbf{F}\circ\mathbf{F}$?

## 4.4 Curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$ y sus ecuaciones vectoriales

Una curva en el plano $XY$ puede describirse en muchos casos por medio de una expresión de la forma $y=f(x)$. Esta descripción tiene algunas desventajas debido a que no permite representar curvas que tomen dos o más valores de $y$ para un valor dado de $x$, como es el caso por ejemplo de una curva cerrada. Otra forma es mediante una relación implícita como $F(x,\ y)=0$. Sin embargo, una expresión de este tipo no siempre representa a una curva. Por ejemplo, la expresión $x^2+y^2+1=0$ es tal que no existen valores reales de $x$ y $y$ que la satisfagan. En otros casos no se sabe si está representando a toda la curva o a una parte de ella y puede resultar complicado el tratar de especificarlo. En esta sección se estudiará como describir curvas mediante una función vectorial y se verá que con este enfoque se evitan esos problemas. Se tratará principalmente el caso de curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$ aunque el estudio en $\mathbb{R}^2$ es totalmente análogo.

Sea $\mathbf{F}(t)$ una función vectorial de variable escalar $t$ de la forma

$$\mathbf{F}(t)=F_1(t)\,\hat{\mathbf{i}}+F_2(t)\,\hat{\mathbf{j}}+F_3(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $F_1$, $F_2$ y $F_3$ son funciones escalares de $t$. Entonces, para cada valor de $t$, existe un vector de posición

$$\mathbf{r}=\mathbf{F}(t)$$

que especifica un punto $\mathbf{P}$ del espacio. Cuando $t$ varía, $\mathbf{P}$ se mueve siguiendo una cierta trayectoria o curva $C$ (ver figura 4.4). A la expresión anterior se le conoce con el nombre de *ecuación vectorial paramétrica de la curva C*, y equivale a las tres ecuaciones escalares

$$x=F_1(t);\qquad y=F_2(t);\qquad z=F_3(t)$$

que se denominan *ecuaciones escalares paramétricas de la curva C en el espacio* $\mathbb{R}^3$ o simplemente *ecuaciones paramétricas*. En este tipo de ecuaciones a la variable $t$

se le llama parámetro. Para indicar que la curva $C$ se va generando a partir de las ecuaciones escalares paramétricas conforme el parámetro $t$ varía de $a$ a $b$ se utiliza la notación

$$C:\begin{cases} x=F_1(t) \\ y=F_2(t) \\ z=F_3(t) \end{cases} \qquad t\in(a,\,b)$$

o bien

$$C:\mathbf{r}=\mathbf{F}(t); \qquad t\in(a,\,b).$$

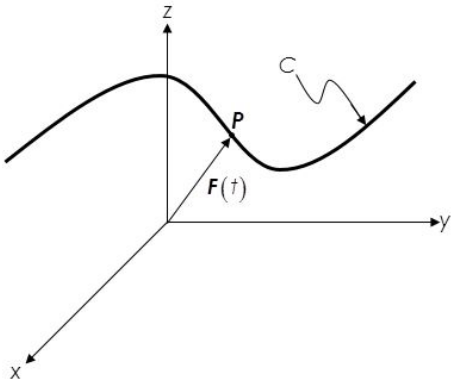



FIGURA 4.4.

## Ejemplo 10.

Trazar la curva en el espacio $\mathbb{R}^3$ representada por la función vectorial $\mathbf{F}(t)=a\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+b\,\text{sen}\,t\,\hat{\mathbf{j}}$ con $0\le t\le 2\pi$, y obtener su ecuación cartesiana.

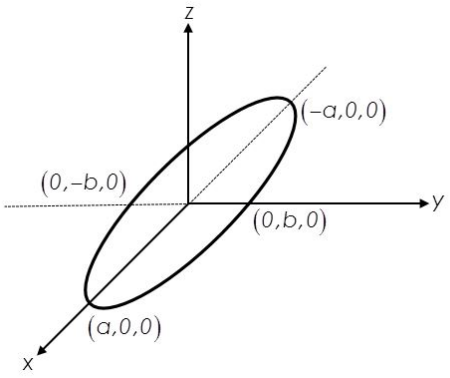



FIGURA 4.5.

**Solución:** Las ecuaciones escalares paramétricas de la curva $C$ son

$$x = a\cos t; \qquad y = b\,\text{sen}\,t; \qquad z = 0.$$

Para obtener la ecuación cartesiana es necesario eliminar al parámetro $t$. Para esto se despejan $\cos t$ y $\text{sen}\,t$, se elevan al cuadrado y se suman, obteniéndose

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$$

que es la ecuación de una elipse en el plano $XY$ con centro en el origen y semiejes $a$ y $b$. Además,

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a; \quad y = 0; \quad z = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 0; \quad y = b; \quad z = 0$$

$$t = \pi \quad \Rightarrow \quad x = -a; \quad y = 0; \quad z = 0$$

$$t = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 0; \quad y = -b; \quad z = 0.$$

Por lo tanto, cuando $t$ cambia de 0 a $2\pi$ la elipse se va trazando comenzando en el punto $(a, 0, 0,)$ y terminando en ese mismo punto. Su grafica se muestra en la figura 4.5.

Cuando las funciones $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ son continuas en un intervalo $[a, b]$ se dice que la curva es continua en dicho intervalo. Para excluir el caso en que la curva degenere en un punto no se admite que simultáneamente las tres funciones anteriores sean constantes.

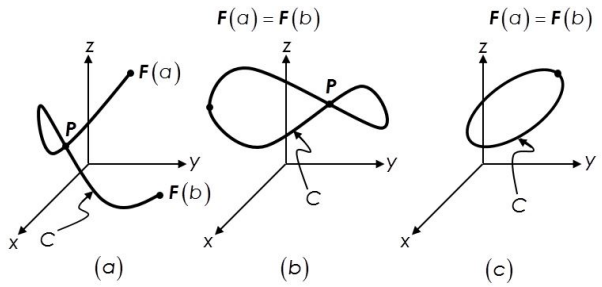



FIGURA 4.6

En la figura 4.6 aparecen las gráficas de tres curvas para las cuales los puntos $\mathbf{F}(a)=(F_1(a), F_2(a), F_3(a))$ y $\mathbf{F}(b)=(F_1(b), F_2(b), F_3(b))$ representan los puntos inicial y final de cada una.

Las curvas ilustradas en las figuras 4.6*a* y *b* se cruzan consigo mismas en el punto **P**. Cuando una curva no se cruza en esa forma, se denomina *curva simple*. Si $\mathbf{F}(a)=\mathbf{F}(b)$ para $a\neq b$, se dice que la curva es *cerrada*, como se muestra en las figuras 4.6*b* y *c*. Si la curva *C* no se toca a sí misma en ningún punto, excepto en sus extremos, o sea $\mathbf{F}(a)=\mathbf{F}(b)$, como se ilustra en la figura 4.6*c*, entonces a *C* se le conoce como *curva cerrada simple*, o bien, *curva de Jordan*.

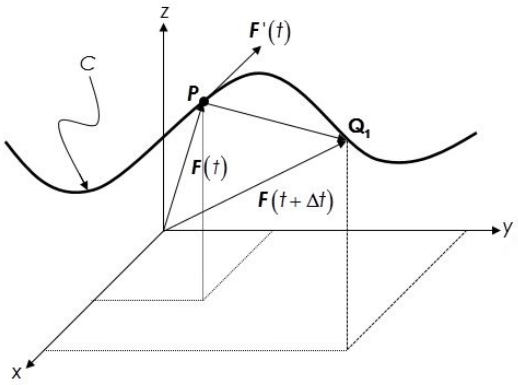



FIGURA 4.7.

Por otra parte, si *C* es la curva mostrada en la figura 4.7 con ecuación vectorial paramétrica $\mathbf{r}=\mathbf{F}(t)$, donde **P** y $\mathbf{Q}_1$ son los puntos que corresponden a $\mathbf{F}(t)$ y $\mathbf{F}(t+\Delta t)$, respectivamente, entonces $(\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t))/\Delta t$ es un vector "secante" a la curva *C* y por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)}{\Delta t} \tag{18}$$

es un vector tangente a la curva *C* en **P**, el cual apunta en el sentido en el que se va trazando la curva al ir aumentando la *t*. Además, el vector

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Delta t \tag{19}$$

con $\Delta t \to 0$, es un vector infinitesimal tangente a la curva. Un punto $\mathbf{P}_0 = \mathbf{F}(t_0) = (F_1(t_0), F_2(t_0), F_3(t_0))$ de una curva se llama *punto singular,* si la derivada $\mathbf{F}'(t_0)$ es igual a cero o no existe; de otro modo, se denomina *punto no singular*. La dirección de la curva $C$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ en un punto no singular $\mathbf{P}$ se tomará como la del vector tangente a $C$ en $\mathbf{P}$.

Sea $t_1$ el valor del parámetro correspondiente a un punto $\mathbf{P}_1$. Se dice que $\mathbf{P}_1$ es un *punto ordinario* de la curva $C$ si $\mathbf{P}_1$ es no singular y las tres derivadas $f'_1(t_1)$, $f'_2(t_1)$ y $f'_3(t_1)$ son continuas en $t_1$. Una curva constituida únicamente por puntos ordinarios se conoce como *curva lisa* o *suave*. Si la curva está formada por una unión de curvas suaves se denomina *curva seccionalmente lisa* o *lisa a trozos.*

Las ecuaciones paramétricas, ya sean escalares o vectorial, de una curva no son únicas, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

## Ejemplo 11.

Obtener algunas representaciones paramétricas de la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{20}$$

**Solución:** Si se hace $x = t$, se sustituye en esta ecuación y se despeja $y$, se obtiene una representación paramétrica de la elipse (en $y$ se toma el signo positivo pues se requiere la mitad superior de la curva):

$$x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2 t^2}{a^2} + y^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2}.$$

Por lo tanto,

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2}. \end{cases} \qquad t \in [-a, a]$$

Otra representación paramétrica de esta elipse se puede obtener mediante el ángulo que forma el vector de posición del punto $\mathbf{P}'$ con el eje X (ver la figura 4.8).

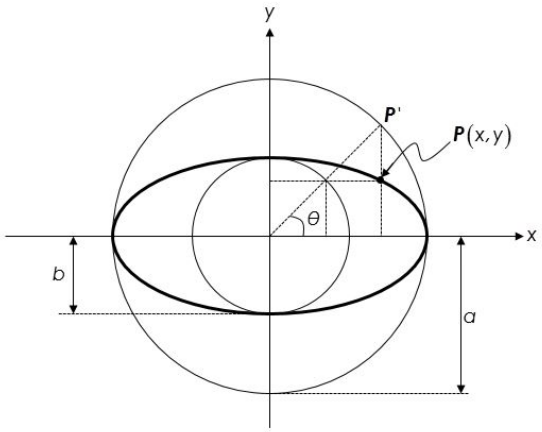



FIGURA 4.8.

De la figura se tiene que $x = a\cos\theta$ y $y = b\,\text{sen}\,\theta$. Para la mitad superior de la elipse: $0 \le \theta \le \pi$. Por lo que la representación paramétrica queda como

$$C: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

o en forma vectorial

$$C: \mathbf{r}(\theta) = a\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + b\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

y se puede comprobar que se satisface la ecuación (20). Esta representación también se hubiera podido obtener haciendo $t = a\cos\theta$ en las ecuaciones de la primera representación paramétrica que se dio.

Otra forma más es a partir de las ecuaciones paramétricas anteriores definiendo $u = \tan(\theta/2)$. En efecto, por identidades trigonométricas se tiene

$$u = \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

y como $x = a\cos\theta$

$$u^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}} = \frac{a-x}{a+x}.$$

$$\Rightarrow au^2 + u^2x = a - x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{a(1-u^2)}{1+u^2}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación (20) y despejando a $y$ se obtiene

$$y = \frac{2bu}{1+u^2},$$

por lo que otras ecuaciones paramétricas escalares de la mitad superior de la elipse son

$$C: \begin{cases} x = \dfrac{a(1-u^2)}{1+u^2} \\ y = \dfrac{2bu}{1+u^2} \end{cases} \qquad u \geq 0.$$

En general hay un número infinito de representaciones paramétricas. Sin embargo, para poder reparametrizar es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones. En el siguiente teorema se verá cuando es posible cambiar de un parámetro a otro.

**Teorema 8.** Sea $C$ una curva lisa representada por las ecuaciones paramétricas escalares.

$$C: \begin{cases} x = F_1(t) \\ y = F_2(t) \\ z = F_3(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b.$$

Esta curva puede ser reparametrizada en términos del parámetro u que varía en el intervalo $[\alpha, \beta]$ definido mediante la expresión $t = \varphi(u)$ si $\varphi$ es una función real de variable real tal que:

*i)* $a=\varphi(\alpha)$ y $b=\varphi(\beta)$.

*ii)* $\varphi'(u)>0$ o bien $\varphi'(u)<0 \quad \forall u\in[\alpha,\beta]$.

*iii)* $\varphi'(u)$ es continua en $\alpha\le u\le\beta$.

**Demostración:** El parámetro $u$ que representara a $C$ debe ser tal que para cada valor de $u$ exista uno y sólo un valor de $t$ y viceversa. Para que esto se cumpla, la relación entre $u$ y $t$ debe ser biunívoca, lo que implica que $\varphi(u)$ debe ser creciente o decreciente y, del cálculo diferencial e integral, se sabe que para que una función sea creciente su primera derivada tiene que ser mayor que cero. Cuando la función es decreciente, su primera derivada es negativa.

Por otra parte, como $C$ es una curva lisa, las tres derivadas $F'_1(t)$, $F'_2(t)$ y $F'_3(t)$ son continuas en el intervalo analizado y como

$$\frac{dF_1}{du}=\frac{dF_1}{dt}\frac{dt}{du}=F'_1(t)\varphi'(u);\quad \frac{dF_2}{du}=F'_2(t)\varphi'(u);\quad \frac{dF_3}{du}=F'_3(t)\varphi'(u)$$

y $\varphi'(u)$ es continua, entonces $dF_1/du$, $dF_2/du$ y $dF_3/du$ también son continuas en $\alpha\le u\le\beta$. Por lo tanto, la curva parametrizada por $u$ resulta ser una curva lisa.

### 4.4.1 Longitud de arco como parámetro de una curva

Con el objeto de simplificar la formulación que se va a desarrollar, en esta subsección y en la sección 4.5, se usará frecuentemente la notación siguiente: para indicar que las variables $\mathbf{r}$, $s$, $x$, $y$ y $z$ son funciones del parámetro $t$ se escribirá $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $s=s(t)$, $x=x(t)$, etc. en vez de $\mathbf{r}=\mathbf{F}(t)$, $s=\varphi(t)$, $x=F_1(t)$, etc., como se había venido haciendo hasta ahora. Desde un punto de vista matemático riguroso la nueva notación que estamos proponiendo no es correcta por la razón que se da a continuación. De acuerdo con la notación que estamos usando en este libro una expresión de la forma $\mathbf{r}=\mathbf{F}(t)$ significa que la función vectorial $\mathbf{F}$ al evaluarla en $t$ se obtiene el vector $\mathbf{r}$. Los tres conceptos que aparecen en esta ecuación son esencialmente diferentes y pertenecen a diferentes conjuntos: $t\in R$, $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{F}\in\mathcal{F}$, siendo $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones vectoriales de variable escalar. Entonces,

al escribir relajadamente $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ se está utilizando el mismo símbolo $\mathbf{r}$ para dos conceptos totalmente distintos. ¡En matemáticas no es correcto que un mismo símbolo tenga dos significados diferentes! No obstante, esta notación es utilizada con frecuencia por muchos otros autores y para nuestros fines resultará muy conveniente y no causará problemas. En la sección 4.6 se hará algo parecido ya que se escribirán expresiones de la forma $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$, etc.

En los textos de Cálculo con una variable independiente se deduce una expresión para calcular la longitud de arco $s$ de una curva lisa plana dada por la gráfica de la ecuación $y=f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. En el plano $XY$, la expresión es

$$s=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{21}$$

Si la ecuación de la curva está dada en forma paramétrico o en coordenadas polares, la expresión anterior no es aplicable. Además, tampoco es aplicable para curvas en $\mathbb{R}^3$. En esta sección se desarrollará una fórmula que puede aplicarse para calcular longitudes de curvas más generales. Se supondrá que las curvas están descritas por funciones en donde el parámetro $t$ varía en forma creciente sobre un intervalo $[t_0, t_F]$ con $t_0<t_F$. Cuando se tengan curvas en donde el parámetro $t$ decrezca sobre el intervalo $[t_0, t_F]$ siempre se podrá hacer la sustitución $\tau=-t$ y entonces $\tau$ variará en forma creciente sobre $[-t_F, -t_0]$ con $-t_F<-t_0$.

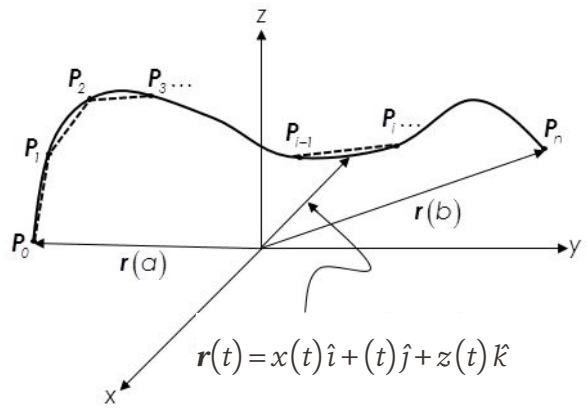



FIGURA 4.9.

Considérese una curva suave $C$ en $\mathbb{R}^3$ sin intersecciones descrita por las ecuaciones escalares paramétricas

$$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \qquad t\in[a,\,b],$$

o, equivalentemente, por la ecuación vectorial paramétrica $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),\,y(t),\,z(t))$ mostrada en la figura 4.9. Al efectuar una partición $P$ de $[a,\,b]$ suficientemente fina dada por $a=t_0<t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_n=b$, se obtiene un conjunto de $n$ arcos de tal manera que la longitud $\Delta s_i$ del $i$-ésimo arco es aproximadamente igual a la distancia $\Delta\mathbf{r}_i$ entre sus puntos extremos. Esta distancia está dada por el módulo de la diferencia de los vectores de posición de dichos puntos, esto es,

$$\Delta\mathbf{r}_i=\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})=(x(t_i)-x(t_{i-1}),\;y(t_i)-y(t_{i-1}),\,z(t_i)-z(t_{i-1}))$$

por lo que

$$\Delta s_i \approx \left|\Delta\mathbf{r}_i\right|$$

$$=\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}.$$

Como $C$ es una curva suave, entonces $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son derivables y por lo tanto, para cada una se cumple el teorema del valo$\mathbb{R}^m$edio del cálculo diferencial, es decir, que existen números $\epsilon_i$, $\rho_i$ y $\eta_i$ en el intervalo abierto $\langle t_{i-1},\,t_i\rangle$ tales que

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\epsilon_i)\,\Delta t_i$$

$$y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\rho_i)\,\Delta t_i$$

$$z(t_i)-z(t_{i-1})=z'(\eta_i)\,\Delta t_i.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en $\Delta s_i$, se tiene

$$\Delta s_i \approx \sqrt{[x'(\epsilon_i)]^2+[y'(\rho_i)]^2+[z'(\eta_i)]^2}\,\Delta t_i$$

y la longitud $s$ de la curva completa está dada por la suma de las longitudes de arco de cada subintervalo. Así,

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[x'(\epsilon_i)\right]^2+\left[y'(\rho_i)\right]^2+\left[z'(\eta_i)\right]^2}\,\Delta t_i\,.$$

La longitud de arco será mejor aproximada por la suma anterior en la medida que cada uno de los subintervalos sea más pequeño. Entonces, para toda partición cuya norma $\|\Delta\|$ tienda a cero se obtiene la longitud de arco exacta, en cuyo caso la suma se convierte en una integral definida. Así,

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[x'(\epsilon_i)\right]^2+\left[y'(\rho_i)\right]^2+\left[z'(\eta_i)\right]^2}\,\Delta t_i \\ &= \int_a^b \sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}\;dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Cuando la curva está contenida en el plano $XY$ la formulación anterior sigue siendo válida, basta hacer $z=0$. Además, si se toma como parámetro a $x$, o sea $x=t$ y $y=f(x)$, la expresión (22) se reduce a la expresión (21).

## Ejemplo 12.

Calcular la longitud de arco de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$C:\begin{cases} x=a(\theta+\operatorname{sen}\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases} \qquad \text{en el intervalo } [0,\,\pi].$$

**Solución:** La gráfica de esta función se muestra en la figura 4.1.$(ii)$. De acuerdo a las ecuaciones paramétricas se tiene que

$$x'(\theta)=a(1+\cos\theta)$$
$$y'(\theta)=a\operatorname{sen}\theta$$

de donde

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\operatorname{sen}^2\theta}\;\,d\theta\;=a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta.$$

Usando la identidad trigonométrica $1+\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ resulta que

$$s=a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=2a\left[\,2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\right]_0^{\pi}$$

$$=4a\ (\text{unidades de longitud}).$$

La expresión para la longitud de arco (ecuación (22)) también puede ser escrita como

$$s=\int_a^b\left|\mathbf{r}'(t)\right|\,dt \tag{23}$$

ya que

$$\left|\mathbf{r}'(t)\right|=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,.$$

Por otro lado, si el extremo final de la curva se deja variable, entonces el límite superior de la integral depende del parámetro $t$ y se tiene que la longitud de arco de una curva es función de la variable escalar $t$, o sea,

$$s(t)=\int_a^t\left|\mathbf{r}'(\tau)\right|\,d\tau.$$

Entonces $s=s(t)$ define un nuevo parámetro para $C$ al que se denomina *parámetro de longitud de arco.* Para ver que $s$ satisface efectivamente los requerimientos para describir una curva nótese que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \left|\mathbf{r}'(t)\right| > 0$$

y que por lo tanto existe una relación biunívoca entre $s$ y $t$. Además, si se considera que $C$ es una curva lisa, $\left|\mathbf{r}(t)'\right|$ es continua en $[a, t]$. En consecuencia, $\frac{ds}{dt}$ también es continua. Cuando $t$ varía de $a$ a $b$ la $s$ varía de 0 a $\ell$, siendo $\ell$ la longitud total de la curva. Por lo tanto, la curva se puede parametrizar con $s$.

Cabe enfatizar que la expresión anterior establece que

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|. \tag{24}$$

Además, vemos que la diferencial de longitud de arco $ds$ es igual a

$$ds = \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt\right| = \left|d\mathbf{r}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}\, dt. \tag{25}$$

## Ejemplo 13.

Parametrizar en función del parámetro de longitud de arco a las curvas definidas por

*i)* $\mathbf{r}(\theta) = a\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + a\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}}$.
*ii)* $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\hat{\mathbf{i}} + bt\,\hat{\mathbf{j}} + a\,\text{sen}\,t\,\hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:**

*i)* La curva que corresponde a esta ecuación vectorial ya fue analizada en el ejemplo (11) cuya gráfica se muestra en la figura 4.8 (haciendo $a = b$). Se vio que corresponde a una circunferencia situada en el plano $XY$ con centro en el origen y radio igual a $a$. El parámetro $\theta$ es igual al ángulo que forma el vec-

tor de posición del punto $(x, y)$ con el eje X como se muestra en la figura 4.8. La longitud de arco $s(\theta)$ se calcula mediante

$$s(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \tau + a^2 \cos^2 \tau} \quad d\tau = a\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \frac{s}{a}$$

por lo que se llega a

$$\mathbf{r}(s) = a \cos \frac{s}{a} \hat{\mathbf{i}} + a \operatorname{sen} \frac{s}{a} \hat{\mathbf{j}}.$$

*ii)* La ecuación vectorial dada representa una curva llamada *hélice circular*. Su gráfica se muestra en la figura 4.1$(iv)$. Se obtiene primero $s(t)$ por medio de

$$s(t) = \int_0^{t} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \tau + b^2 + a^2 \cos^2 \tau} \; d\tau = \sqrt{a^2 + b^2}\; t$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y se llega a

$$\mathbf{r}(s) = a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \hat{\mathbf{i}} + b\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \hat{\mathbf{j}} + a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \hat{\mathbf{k}}.$$

## Ejercicios

**4.27.** Dadas las siguientes aseveraciones, indicar cuáles son verdaderas y cuáles falsas.

1) Unas ecuaciones paramétricas de la curva $25x^2+9x^2-100x-72y+19=0$ son: $x-2=3\cos\theta$, $y-4=5\operatorname{sen}\theta$.
2) Unas ecuaciones paramétricas de la curva $x^2-y^2-16=0$ son: $x=2\operatorname{senh}\theta$, $y=\cosh\theta$.
3) Unas ecuaciones paramétricas de la curva $x^2-4y^2+4=0$ son: $x=2\operatorname{senh}\theta$, $y=\cosh\theta$.
4) Si trasladamos los ejes al punto (2, 4), desaparecen los dos términos en primer grado de la curva $x^2+y^2-4x-8y-5=0$.
5) Si trasladamos los ejes al punto (1, 3), desaparecen los dos términos en primer grado de la curva $2x^2-9y-4x+29=0$.
6) Si giramos los ejes un ángulo de 73° 44, desaparece el término en $xy$ de la curva $16x^2+24xy+9y^2-15x+20y=0$.

**Solución:** 1) V, 2) F, 3) V, 4) V, 5) F, 6) F

**4.28.** Identificar la curva que se forma por la intersección de las superficies

$$S_1 : \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{2} = -1 \qquad \text{y} \qquad S_2 : z = k$$

¿Qué condición debe cumplir necesariamente $k$ para que la curva exista? (Elegir la opción correcta).

a) $|k| > 1/2$
b) $k > 1$
c) $-1 < k < 1$
d) $k > -1$
e) $|k| > \sqrt{2}$.

Indicar también las coordenadas del centro y las dimensiones de los semiejes.

**4.29.** Una partícula se encuentra en el punto (5, 0) cuando $t = 0$ y se mueve sobre una circunferencia con centro en el origen, con una velocidad angular constante de 60 rev/min en sentido *antihorario*. Obtener la expresión del vector de posición de la partícula en cualquier instante.

**Solución:** $\mathbf{r}(t) = 5(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t)$

## 4.5 Aplicaciones de la derivada de funciones vectoriales de variable escalar

Tal y como fue mostrado en la sección anterior (ver ecuación (18)), si $C$ es una curva representada por la ecuación vectorial paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

entonces

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = x'(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y'(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z'(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

representa un vector tangente a la curva $C$ en todos los puntos ordinarios y apunta en la dirección en que crece $t$. Entonces, el vector

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{x'(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y'(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z'(t)\,\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}$$

representa un vector unitario tangente a la curva $C$ en todos los puntos ordinarios y apunta en la dirección en que crece $t$. Por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \qquad (26)$$

y por lo tanto

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{27}$$

## Ejemplo 14.

Obtener el vector tangente unitario y las ecuaciones de la recta tangente a la curva $C$ definida por

$$r(t) = t\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} 2t\,\hat{\mathbf{j}} + \cos 2t\,\hat{\mathbf{k}} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

en el punto donde $t = \dfrac{\pi}{4}$.

**Solución:** Si se deriva y se evalúa la derivada en $t = \dfrac{\pi}{4}$ se obtiene un vector tangente a $C$.

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} + 2\cos 2t\,\hat{\mathbf{j}} - 2\operatorname{sen} 2t\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

$$\left|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{5}$$

por lo que el vector tangente unitario es

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\hat{\mathbf{k}}$$

Para obtener la ecuación de la recta tangente a la curva se necesita conocer su dirección y el punto donde es tangente. Su dirección puede especificarse mediante el vector $\hat{\mathbf{T}}$, o bien mediante el vector $\mathbf{u} = \sqrt{5}\,\hat{\mathbf{T}} = (1, 0, -2)$. El punto de tangencia es $(\pi/4, 1, 0)$ que se obtiene evaluando $\mathbf{r}(t)$ en $t = \pi/4$; por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en su forma simétrica es

$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{z}{2}\,; \qquad y = 1.$$

Antes de continuar con otras aplicaciones se enunciará el siguiente Teorema.

**Teorema 9.**

*i)* La condición necesaria y suficiente para que un vector $\mathbf{u}(t)$ sea de magnitud constante es que:

$$\mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = 0,$$

es decir, que $\mathbf{u}$ y $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ sean ortogonales.

*ii)* La condición necesaria y suficiente para que un vector $\mathbf{u}(t)$ permanezca siempre paralelo a una dirección dada es que

$$\mathbf{u}(t) \times \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathbf{0},$$

es decir, que $\mathbf{u}$ y $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ sean paralelos.

**Demostración:**

*i)* Sea $\mathbf{u}(t)$ de magnitud constante $k$. Luego,

$$|\mathbf{u}(t)| = k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = k^2.$$

Si se deriva esta ecuación se tiene

$$\frac{d(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t))}{dt} = \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \cdot \mathbf{u}(t) = \frac{dk^2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2\mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = 0.$$

De lo anterior se ve también que si $|\mathbf{u}(t)|$ no fuera constante, entonces $\mathbf{u}(t)\cdot(d\mathbf{u}(t)/dt)\neq 0$, lo que comprueba que la condición es necesaria y suficiente.

*ii)* Si $\mathbf{u}(t)$ tiene dirección constante paralela al vector unitario constante $\hat{\mathbf{e}}$, entonces

$$\mathbf{u}(t)=|\mathbf{u}(t)|\,\hat{\mathbf{e}}$$

y al derivar esta expresión resulta

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}=\frac{d(|\mathbf{u}(t)|\hat{\mathbf{e}})}{dt}=\frac{d|\mathbf{u}(t)|}{dt}\hat{\mathbf{e}}+|\mathbf{u}(t)|\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}.$$

Como $\hat{\mathbf{e}}$ es constante, entonces $\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}=0$ por lo cual

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}=\frac{d|\mathbf{u}(t)|}{dt}\,\hat{\mathbf{e}}$$

si se efectúa el producto vectorial $\mathbf{u}(t)\times\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$, se obtiene

$$\mathbf{u}(t)\times\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}=|\mathbf{u}(t)|\hat{\mathbf{e}}\times\frac{d|\mathbf{u}(t)|}{dt}\hat{\mathbf{e}}$$

$$=|\mathbf{u}(t)|\frac{d|\mathbf{u}(t)|}{dt}\hat{\mathbf{e}}\times\hat{\mathbf{e}}=0.$$

Por otra parte, si $\mathbf{u}(t)$ no tuviera dirección constante, entonces

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}=\frac{d|\mathbf{u}(t)|}{dt}\,\hat{\mathbf{e}}(t)+|\mathbf{u}(t)|\frac{d\hat{\mathbf{e}}(t)}{dt}$$

donde ahora $\hat{\mathbf{e}}$ sería un vector unitario, pero no constante y

$$\mathbf{u}(t)\times\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}=\left|\mathbf{u}(t)\right|\hat{\mathbf{e}}\,(t)\times\left[\frac{d\left|\mathbf{u}(t)\right|}{dt}\,\hat{\mathbf{e}}\,(t)+\left|\mathbf{u}(t)\right|\frac{d\hat{\mathbf{e}}(t)}{dt}\right]$$

$$=\left|\mathbf{u}(t)\right|^2\hat{\mathbf{e}}\,(t)\times\frac{d\hat{\mathbf{e}}(t)}{dt}$$

pero como $\hat{\mathbf{e}}(t)$ es de magnitud constante, entonces (por el inciso anterior) $\hat{\mathbf{e}}$ y $d\hat{\mathbf{e}}/dt$ son ortogonales y por lo tanto este producto vectorial sería diferente de cero; es decir, $\mathbf{u}(t)\times\left(\mathbf{u}(t)/dt\right)\neq 0$, lo que comprueba que la condición es necesaria y suficiente.

Si se tiene una curva dada por sus ecuaciones paramétricas escalares $x=x(t)$, $y=y(t)$ y $z=z(t)$, y se desea obtener la ecuación del plano $\Pi$ normal a la curva en el punto $\mathbf{P}_0$ —es decir, el plano perpendicular al vector $\hat{\mathbf{T}}$ (ver figura 4.10)— se hace lo siguiente:

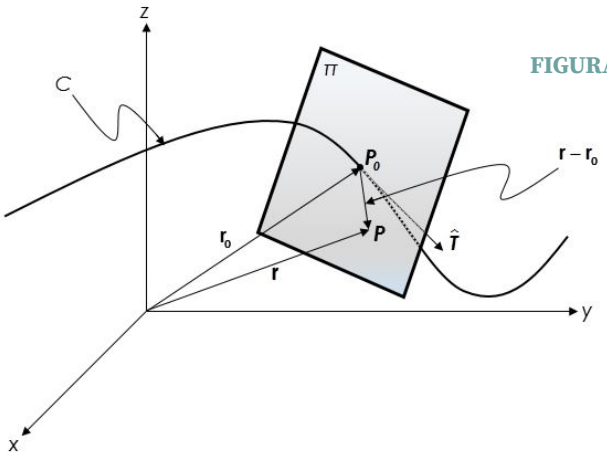



FIGURA 4.10.

Considérese un punto arbitrario $\mathbf{P}$ del plano $\Pi$, con coordenadas $\mathbf{r}=(x, y, z)$ y fórmese el vector $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, donde $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ es el vector de posición del punto $\mathbf{P}_0$ que también pertenece al plano. El vector $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ debe ser perpendicular al vector $\hat{\mathbf{T}}$ tangente a la curva en $\mathbf{P}_0$; por lo tanto, la ecuación del plano normal a $C$ es

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\mathbf{T}}=0.$$

Como $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ y como

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))}{\sqrt{[x'(t_0)]^2+[y'(t_0)]^2+[z'(t_0)]^2}}$$

entonces

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\mathbf{T}} = \frac{x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)}{\sqrt{[x'(t_0)]^2+[y'(t_0)]^2+[z'(t_0)]^2}} = 0$$

lo que implica que

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

que es la ecuación del plano normal Π buscada.

## Ejemplo 15.

Obtener la ecuación del plano normal a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = t-\cos t$$
$$y = 3+\operatorname{sen} 2t$$
$$z = 1+\cos 3t$$

en el punto en que $t=\frac{\pi}{2}$.

**Solución:** El punto en cuestión se obtiene sustituyendo $t=\frac{\pi}{2}$ en las ecuaciones de la curva. Así,

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,\hat{\mathbf{i}}+3\,\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}.$$

Para obtener el vector tangente se derivan las ecuaciones de la curva y se evalúan en $t=\frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{r}'(t) = (1+\operatorname{sen} t)\,\hat{\mathbf{i}}+2\cos 2t\,\hat{\mathbf{j}}-3\operatorname{sen} 3t\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano normal será

$$2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2(y-3)+3(z-1)=0$$

$$2x-2y+3z+(3-\pi)=0.$$

### 4.5.1 Fórmulas de Frenet–Serret

En la primera parte de esta sección (hasta el ejemplo 17) principalmente se utilizará el parámetro $s$. Sea $C$ una curva parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ y sea $s$ el parámetro de longitud de arco. A cada punto de $C$ se asocian tres vectores unitarios muy importantes: el primero es el vector tangente unitario $\hat{\mathbf{T}}$ que ya se introdujo (ver ecuación (27))

$$\hat{\mathbf{T}}=\frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

El segundo es el vector normal unitario $\hat{\mathbf{N}}$ que se definirá a continuación. Como $\hat{\mathbf{T}}$ es unitario, entonces su magnitud es constante y su derivada, como ya se probó, será perpendicular a él, es decir,

$$\hat{\mathbf{T}}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}=0.$$

Esto permite definir un vector unitario $\hat{\mathbf{N}}$ perpendicular al vector $\hat{\mathbf{T}}$ (y por lo tanto perpendicular a $C$), denominado *vector normal,* mediante la expresión

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}=\kappa\hat{\mathbf{N}} \qquad (28)$$

que se conoce con el nombre de *primera fórmula de Frenet–Serret*. Al número

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right| \tag{29}$$

se le llama *curvatura* de $C$ y a su recíproco

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right|} \tag{30}$$

se le denomina *radio de curvatura.*

## Ejemplo 16.

Hallar el radio de curvatura de la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\hat{\mathbf{i}} + a\,\text{sen}\,t\,\hat{\mathbf{j}}; \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

**Solución:** Se ha visto que esta ecuación representa a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y con radio $a$. También se parametrizó en términos del parámetro longitud de arco $s$ como

$$\mathbf{r}(s) = a\cos\frac{s}{a}\,\hat{\mathbf{i}} + a\,\text{sen}\,\frac{s}{a}\,\hat{\mathbf{j}}$$

luego

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\,\text{sen}\,\frac{s}{a}\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\frac{s}{a}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{a}\,\text{sen}\,\frac{s}{a}\,\hat{\mathbf{j}}$$

y la curvatura de $C$ es

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right| = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}^2\frac{s}{a}} = \frac{1}{a}.$$

El radio de curvatura es,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = a.$$

Por lo tanto, para el caso de una circunferencia, lo que se ha llamado "radio de curvatura" coincide precisamente con el valor de su radio geométrico, lo que justifica el nombre asignado a $\rho$.

El tercer vector unitario se define como

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}} \tag{31}$$

y se le llama *vector binomial*. Debido a las propiedades del producto vectorial, $\hat{\mathbf{B}}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$ y a $\hat{\mathbf{N}}$ (ver figura 4.11). Los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ , $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ constituyen un sistema coordenado ortogonal local en cada punto de la curva $C$. Al plano que contiene a los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ se le denomina *plano osculador* y siempre es perpendicular al plano normal a la curva $C$ en cada uno de sus puntos (ya que el plano normal es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$). Nótese que de la ecuación anterior se sigue que $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{B}}$. Al círculo de radio $\rho$ que se encuentra sobre le plano osculador que toca a curva $C$ en el punto $\mathbf{r}$ y cuyo centro se encuentra a una distancia $\rho$ sobre el vector normal $\hat{\mathbf{N}}$ se le denomina *círculo osculador*.

Como $\hat{\mathbf{B}}$ es un vector unitario entonces $d\hat{\mathbf{B}}/ds$, en caso de ser diferente de cero, debe ser perpendicular al vector $\hat{\mathbf{B}}$. Además, si se deriva la ecuación (31) respecto a $s$ se tiene que

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \times \hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}$$

y como

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \times \hat{\mathbf{N}} = 0,$$

entonces,

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}.$$

Por lo tanto, $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ también es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$ y en consecuencia debe ser paralelo a $\hat{\mathbf{N}}$. Luego, se puede escribir

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}} \tag{32}$$

que es la *segunda fórmula de Frenet–Serret,* donde

$$\left|\tau\right| = \left|\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}\right|. \tag{33}$$

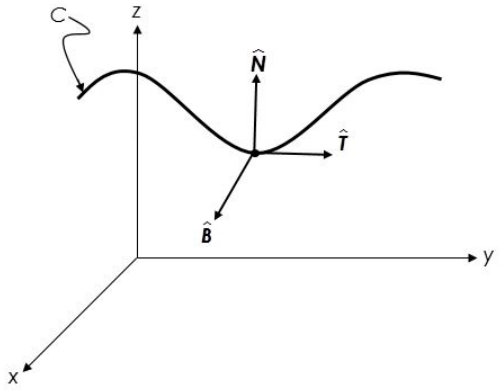



FIGURA 4.11.

Este concepto, $\tau$, recibe el nombre de *coeficiente de torsión o torsión.* Al recíproco de la torsión se le llama *radio de torsión,* y se denota con

$$\sigma = \frac{1}{\tau}. \tag{34}$$

El signo menos en la ecuación (32) tiene el siguiente propósito: en primer lugar se nota que si $\hat{\mathbf{B}}$ sufre algún cambio al irse recorriendo la curva (o sea, si $d\hat{\mathbf{B}}/ds \neq 0$), el cambio sólo puede ser en su dirección (ya que $\left|\hat{\mathbf{B}}\right| = 1$), la cual siempre es ortogonal a $\hat{\mathbf{T}}$. Es decir, $\hat{\mathbf{B}}$ gira alrededor de la curva en un plano perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$. Por otro lado, se observa que si se multiplica vectorialmente la ecuación que define a $\hat{\mathbf{B}}$ por $-\hat{\mathbf{N}}$ se obtiene

$$\hat{\mathbf{B}} \times \left(-\hat{\mathbf{N}}\right) = \hat{\mathbf{T}}$$

que nos indica que si $\hat{\mathbf{B}}$ se girara hacia el vector $-\hat{\mathbf{N}}$ avanzando de acuerdo con un tornillo de rosca derecha, se obtendría el vector $\hat{\mathbf{T}}$. Ahora falta determinar hacia donde gira $\hat{\mathbf{B}}$ conforme va creciendo el parámetro $s$. Supóngase que $\tau > 0$, entonces $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ y $\Delta\hat{\mathbf{B}}$ tienen la misma dirección que $-\hat{\mathbf{N}}$ (ver ecuación (32)) y por lo tanto $\hat{\mathbf{B}}$ va girando alrededor de hacia $-\hat{\mathbf{N}}$, es decir, en el mismo sentido que un tornillo de rosca derecha. Lo contrario ocurre cuando $\tau < 0$.

Si se multiplica vectorialmente la ecuación (31) que define a $\hat{\mathbf{B}}$ por $\hat{\mathbf{T}}$ se obtiene $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}}$. Derivando esta expresión respecto a $s$:

$$\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} \times \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{B}} \times \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}.$$

El uso de la primera y segunda fórmulas de Frenet-Serret en esta ecuación da como resultado

$$\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}} + \kappa\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{N}},$$

pero como $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}} = -\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{N}} = -\hat{\mathbf{T}}$ entonces

$$\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \tau\hat{\mathbf{B}} - \kappa\hat{\mathbf{T}} \tag{35}$$

llamada *tercera fórmula de Frenet–Serret*.

El conjunto de las tres fórmulas de Frenet-Serret:

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}} \tag{28}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}} \tag{32}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}} \tag{35}$$

son fundamentales en una rama de las matemáticas llamada *geometría diferencial*. En todas ellas se está derivando respecto al parámetro longitud de arco.

Como $\kappa = \left| d\hat{\mathbf{T}}/ds \right|$, la curvatura nunca es negativa. Si $\kappa$ es cero, $d\hat{\mathbf{T}}/ds = 0$. Por lo tanto, $\hat{\mathbf{T}}$ es un vector unitario con dirección constante y la curva es una línea recta. Inversamente, para una recta, $\hat{\mathbf{T}}$ es constante y $d\hat{\mathbf{T}}/ds = 0$; luego $\kappa = 0$. Por lo tanto, las únicas curvas con curvatura cero son las líneas rectas.

La torsión $\tau$ puede ser positiva o negativa y —como ya se explicó, dependiendo de su signo—, conforme se va recorriendo la curva en sentido positivo, el vector $\hat{\mathbf{B}}$ (y con él el sistema $\hat{\mathbf{T}}\ \hat{\mathbf{N}}\ \hat{\mathbf{B}}$) va girando alrededor de $\hat{\mathbf{T}}$ en la misma forma que un tornillo de rosca derecha (si $\tau > 0$) o de rosca izquierda (si $\tau < 0$). El signo de $\tau$ es independiente de la elección del sentido positivo en la curva. Si $\tau = 0$, $d\hat{\mathbf{B}}/ds = \mathbf{0}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ es un vector constante lo que implica que los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ permanecen siempre sobre un plano fijo cuya normal es el vector constante $\hat{\mathbf{B}}$. Inversamente, para una curva plana, $\hat{\mathbf{T}}$ sólo puede variar sobre un plano fijo y por lo tanto $\hat{\mathbf{T}}$ y su derivada (que es proporcional a $\hat{\mathbf{N}}$) siempre están en un plano cuyo vector normal unitario $\hat{\mathbf{B}}$ es constante; por lo tanto, $d\hat{\mathbf{B}}/ds = 0$ en todos los puntos para los cuales $\hat{\mathbf{N}}$ está definido $(k \neq 0)$ y, en consecuencia, de (32), se sigue que $\tau = 0$. Esto implica que las únicas curvas que tienen torsión nula son las curvas planas. El plano que contiene a los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ se denomina *plano rectificador*.

## Ejemplo 17.

Calcular $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{N}}$, $\kappa$, $\rho$, $\tau$ y $\sigma$ para la curva definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\hat{\mathbf{i}} + bt\,\hat{\mathbf{j}} + a\,\text{sen}\,t\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** En el ejemplo 13 $(ii)$ se analizó esta curva y se parametrizó en términos del parámetro de longitud de arco. La ecuación quedó como

$$\mathbf{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{j}} + a\,\text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

y por lo tanto

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

Si se deriva con respecto a $s$

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -\frac{a}{a^2+b^2}\,\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{a}{a^2+b^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right|$$

$$= \sqrt{\left[-\frac{a}{a^2+b^2}\,\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]^2 + \left[-\frac{a}{a^2+b^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{a^2+b^2}{a}.$$

Además, de la primera fórmula de Frenet-Serret

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\dfrac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}}{\kappa} = -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

y como $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$, se tiene que

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\left(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ -\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) & 0 & -\operatorname{sen}\left(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\mathbf{j}}$$

$$+ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\frac{b}{a^2+b^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{b}{a^2+b^2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

Como se puede ver

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)\hat{\mathbf{N}}.$$

Comparando esto con la segunda fórmula de Frenet-Serret se concluye que

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

En muchas ocasiones, la parametrización mediante la longitud de arco no es tan fácil, por lo que la determinación de algunas magnitudes como la curvatura puede complicarse mucho con el método anterior. Es por ello que a continuación se deducirán fórmulas para calcular la curvatura y la torsión a partir de las ecuaciones paramétricas de la curva en estudio, cuando $t$ es un parámetro arbitrario.

Sea $C$ una curva descrita por la ecuación vectorial paramétrica $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$. Sustituyendo (27) en la regla de la cadena (26) se obtiene

$$\mathbf{r}' = s'\hat{\mathbf{T}} \tag{36}$$

donde la marca con "prima" indica la derivada con respecto a $t$. Si se deriva esta ecuación se tiene

$$\mathbf{r}'' = \frac{d}{dt}\left(s'\hat{\mathbf{T}}\right) = s''\hat{\mathbf{T}} + s'\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = s''\hat{\mathbf{T}} + s'\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

pero $\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}}$ por lo cual

$$\mathbf{r}'' = s''\hat{\mathbf{T}} + (s')^2\kappa\hat{\mathbf{N}}\,.$$

Si se deriva nuevamente

$$\mathbf{r}''' = s'''\hat{\mathbf{T}} + s''\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} + \frac{d}{dt}\left[(s')^2\kappa\right]\hat{\mathbf{N}} + (s')^2\kappa\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt}$$

$$= s'''\hat{\mathbf{T}} + s''\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\frac{ds}{dt} + 2s's''\kappa\hat{\mathbf{N}} + (s')^2\kappa'\hat{\mathbf{N}} + (s')^2\kappa\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

usando la primera y la tercera fórmulas de Frenet-Serret se sigue que

$$\mathbf{r}''' = s'''\hat{\mathbf{T}} + \kappa s's''\hat{\mathbf{N}} + 2\kappa s's''\hat{\mathbf{N}} + (s')^2\kappa'\hat{\mathbf{N}} - (s')^3\kappa^2\hat{\mathbf{T}} + (s')^3\kappa\tau\hat{\mathbf{B}}$$

$$= \left(s''' - \kappa^2(s')^3\right)\hat{\mathbf{T}} + \left(3\kappa s's'' + (s')^2\kappa'\right)\hat{\mathbf{N}} + (s')^3\kappa\tau\hat{\mathbf{B}}\,.$$

Si se efectúa el producto $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ se tiene

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(s'\hat{\mathbf{T}}\right) \times \left(s''\hat{\mathbf{T}} + (s')^2\kappa\hat{\mathbf{N}}\right) = (s')^3\kappa\hat{\mathbf{B}}\,. \tag{37}$$

Tomado su magnitud y despejando $\kappa$, se llega a

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(s')^3} \ , \tag{38}$$

lo que permite calcular $\kappa$ a partir de $\mathbf{r}(t)$. El valor de $s'$ se obtiene de la ecuación (24) o tomando la magnitud a cada miembro de la ecuación (36), con lo que se obtiene $s' = |\mathbf{r}'|$ .

De la misma forma, si se calcula $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'''$ se obtiene

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''' = (s')^6 \, \kappa^2 \tau$$

y si se sustituye el valor de $\kappa$ se obtiene

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''' = (s')^6 = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}{(s')^6} \ \tau = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2 \, \tau$$

de donde

$$\tau = \frac{\mathbf{r}' \times \ \mathbf{r}'' \cdot \ \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} \ . \tag{39}$$

Si la dirección positiva de la curva es en el sentido en que crece $t$, entonces $s' = ds/dt > 0$ y las ecuaciones (27) y (37) muestran que $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ tienen las direcciones de $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}'' \times \ \mathbf{r}'''$, respectivamente. Por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r}'}{s'} \tag{40}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{r}' \times \ \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \ \mathbf{r}''|} \tag{41}$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{|(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'|} \ . \tag{42}$$

Otra expresión útil para evaluar $\kappa$ se puede obtener a partir de la ecuación

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}=\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\kappa\hat{\mathbf{N}}\,\frac{ds}{dt}$$

que al tomar magnitudes y despejar $\kappa$ se obtiene

$$k=\frac{\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right|}{s'}=\frac{\left|\mathbf{r}''s'-\mathbf{r}'s''\right|}{s'^3}$$

y como $s''=\dfrac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{s'}$ entonces

$$\kappa=\frac{\sqrt{|\mathbf{r}''|^2-\left(\dfrac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{s'}\right)^2}}{s'^2} \tag{43}$$

y es inmediato comprobar que (38) y (43) son equivalentes.

Es interesante observar que para el caso de una curva plana dada por $y=f(x)$ y $z=cte$ las expresiones discutidas arriba se reducen a

$$\mathbf{r}'=(1,f'(x),0)$$

$$\mathbf{r}''=(0,f''(x),0)$$

$$s'=\sqrt{1+f'^2(x)}$$

$$\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|=\left|(0,0,f''(x))\right|=f''(x)$$

lo que implica que

$$\kappa=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Además, como $\mathbf{r}'''=(0,f'''(x),0)$ entonces

$$\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'''=0$$

y por lo tanto la torsión $\tau$ vale cero, lo que era de esperarse ya que la curva es plana.

## Ejemplo 18.

Obtener $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{N}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\kappa$, $\rho$, $\tau$ y $\sigma$ para la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}} + \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** Si se calculan las derivadas se obtiene

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}} + \cos t\,\hat{\mathbf{j}} + \cos t\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}''(t) = -\cos t\,\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}'''(t) = +\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}} - \cos t\,\hat{\mathbf{j}} - \cos t\,\hat{\mathbf{k}}$$

de donde

$$s' = \left|\mathbf{r}'(t)\right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + \cos^2 t}$$

por lo que

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r}'\right|} \tag{40}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Al determinar $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ se obtiene

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & \cos t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\left|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right| = \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{B}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Nótese que $\hat{\mathbf{B}}$ es constante, lo que implica que la curva está situada en un plano fijo cuya normal es $\hat{\mathbf{B}}$. Esto a su vez implica que la torsión es nula, como se verá explícitamente más adelante.

Ahora se calcula la curvatura mediante $\kappa = \dfrac{\left|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right|}{(s')^3}$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + \cos^2 t\right)^{3/2}} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{\left(1 + \cos^2 t\right)^{3/2}}{\sqrt{2}}\,.$$

Para obtener $\hat{\mathbf{N}}$ se calcula

$$\left(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right) \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & -1 & 1 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$= -2\cos t\,\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\left|\left(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right) \times \mathbf{r}'\right| = \sqrt{2}\ \sqrt{1 + \cos^2 t}.$$

Así, de (42), se tiene

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{\left|(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'\right|}$$

$$= -\frac{2\cos t}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 t}}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 t}}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 t}}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Para calcular la torsión se determina $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'''$:

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''' = (0,\ -1,\ 1) \cdot (\operatorname{sen} t,\ -\cos t,\ -\cos t) = 0.$$

Por lo tanto

$$\tau = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'''}{\left|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right|^2} = 0 \quad \Rightarrow \qquad \sigma \to \infty,$$

lo que comprueba que se trata de una curva plana (sin torsión). La grafica de esta curva se muestra en la figura 4.12. Es una elipse situada en un plano perpendicular al vector $\hat{\mathbf{B}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$ y cuyo centro es el origen.

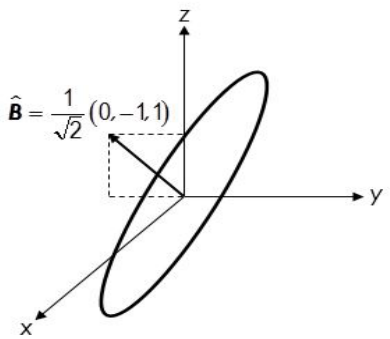



**FIGURA 4.12.**

### 4.5.2 Cinemática de una partícula

Sea $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$ el vector de posición en el tiempo $t$ de una partícula en movimiento con respecto a algún sistema de referencia. La velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula con respecto a dicho sistema se definen como la primera y la segunda derivadas de $\mathbf{r}(t)$ respecto al tiempo, respectivamente. Es decir,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = x'(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y'(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z'(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = x''(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y''(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z''(t)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Ejemplo 19.**

Una partícula se mueve sobre la curva de ecuación $\mathbf{r}(t) = 2t^2\,\hat{\mathbf{i}} - t^3\,\hat{\mathbf{j}} + (t+1)^2\hat{\mathbf{k}}$. Calcular su velocidad y su aceleración cuando pasa por el punto $\mathbf{P} = (2, -1, 4)$.

**Solución:** Primero se comprobará que efectivamente la curva pasa por el punto $\mathbf{P}$. Igualando las primeras componentes de $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{P}$ se tiene $2t^2 = 2$, lo que implica que $t = \pm 1$. Sustituyendo este valor en la segunda y tercera componentes de $\mathbf{r}(t)$se obtiene $\mathbf{r}(\pm 1) = 2\,\hat{\mathbf{i}} \mp \hat{\mathbf{j}} + (\pm 1 + 1)^2\,\hat{\mathbf{k}}$. Vemos que para que esto sea igual a $\mathbf{P}$ se debe tomar el signo positivo de $t$. Por lo tanto, la curva pasa efectivamente por $\mathbf{P}$ cuando $t = 1$. Ahora se deriva $\mathbf{r}(t)$ y se tiene

$$\mathbf{r}'(t) = 4t\,\hat{\mathbf{i}} - 3t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 2(t+1)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 4\hat{\mathbf{i}} - 6t\,\hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Evaluando en $t = 1$

$$\mathbf{v} = 4\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}} + 4\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a} = 4\hat{\mathbf{i}} - 6\,\hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Al módulo de la velocidad $\left|\mathbf{v}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ se le llama *rapidez* y se denota como $v$. Usando la ecuación (24) se obtiene

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Para este ejemplo

$$v = \left|\mathbf{v}\right| = \sqrt{16+9+16} = \sqrt{41}.$$

En ocasiones es útil escribir la velocidad y la aceleración en términos de los vectores $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ como se verá a continuación. Usando (24), (26) y (27) se tiene que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = v\hat{\mathbf{T}}$$

lo que implica que el vector velocidad siempre es tangente a la curva y tiene la dirección del movimiento. Derivando nuevamente,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\left(v\hat{\mathbf{T}}\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + v\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + v\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

pero de acuerdo con la primera fórmula de Frenet-Serret (ecuación (28))

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}} = \frac{\hat{\mathbf{N}}}{\rho}$$

por lo que

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{N}}.$$

Esto nos indica que la aceleración es un vector situado en el plano que contiene a $\hat{\mathbf{T}}$ y a $\hat{\mathbf{N}}$ (plano osculador) con componentes tangencial $a_T$ y normal $a_N$ dadas por $dv/dt$ y $v^2/\rho$, respectivamente. La aceleración será únicamente tangencial

cuando el movimiento sea rectilíneo $(\rho \to \infty)$ y será únicamente normal a la curva cuando la rapidez sea constante $(dv/dt = 0)$. La aceleración tangencial $\mathbf{a}_T$ y la aceleración normal $\mathbf{a}_N$ se definen como $\mathbf{a}_T = a_r \hat{\mathbf{T}}$ y $\mathbf{a}_N = a_N \hat{\mathbf{N}}$

## Ejemplo 20.

Obtener las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo $t = 1$ del ejemplo anterior.

**Solución:** Se tiene que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left|\mathbf{v}\right|$$

$$= \frac{d}{dt}\sqrt{16t^2 + 9t^4 + 4(t+1)^2}$$

$$= \frac{d}{dt}\sqrt{9t^4 + 20t^2 + 8t + 4}$$

$$= \frac{18t^3 + 20t + 4}{\sqrt{9t^4 + 20t^2 + 8t + 4}}$$

$$\Rightarrow a_T = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=1} = \frac{42}{\sqrt{41}} = 6.5593.$$

Además,

$$v = \left|\mathbf{v}\right| = \sqrt{41} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = 41$$

y

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(s')^3}{\left|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right|} = \frac{v^3}{\left|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right|}$$

donde

$$\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 2\end{bmatrix}$$

$$=18\,\hat{\mathbf{i}}+8\,\hat{\mathbf{j}}-12\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\left|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\right|=\sqrt{532}\qquad\Rightarrow\qquad\rho=\frac{\left(\sqrt{41}\right)^3}{\sqrt{532}}.$$

Por lo tanto, la componente normal es $a_N=41\sqrt{532}/\left(\sqrt{41}\right)^3=3.6022$ y en consecuencia

$$\mathbf{a}\approx 6.5593\,\hat{\mathbf{T}}+3.6022\,\hat{\mathbf{N}}.$$

Cabe notar que las fórmulas para la curvatura y la torsión (ecuaciones (38) y (39)) en términos de la velocidad y la aceleración quedan como

$$\kappa=\frac{\left|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\right|}{\left|\mathbf{v}\right|^3}\;;\qquad\tau=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{a}}}{\left|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\right|^2}\qquad\text{donde}\qquad\dot{\mathbf{a}}=\frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

Un caso particular de movimiento es el *movimiento circular* que es cuando la partícula se mueve sobre una circunferencia. A continuación, se hará un breve análisis de él.

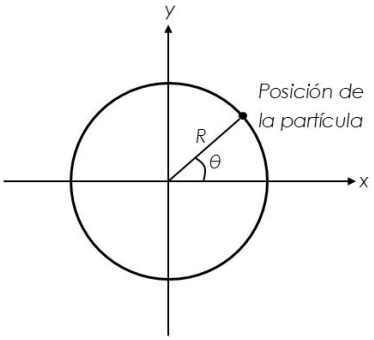



**FIGURA 4.13.**

Sea *C* la curva mostrada en la figura 4.13, y sea θ el ángulo que forma con el eje X el vector de posición de la partícula. La rapidez angular ω y el módulo de la

aceleración angular $\alpha$ de una partícula en movimiento circular, se definen respectivamente como la primera y la segunda derivadas de $\theta$ respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Por otra parte, del ejemplo $13(i)$, se tiene que la relación entre el ángulo $\theta$ y el parámetro de longitud de arco es

$$s = R\theta$$

donde $R$ es el radio de la circunferencia. Derivando en ambos miembros con respecto a $t$,

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

pero $\frac{ds}{dt} = v$ y $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, por lo que

$$v = R\omega.$$

Si se vuelve a derivar con respecto al tiempo,

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}.$$

Como $dv/dt$ es la magnitud de la componente tangencial de la aceleración y $d\omega/dt$ es la magnitud de la aceleración angular, se sigue que

$$a_T = R\alpha.$$

Además, la componente normal de la aceleración está dada por

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2.$$

Luego, la aceleración para este tipo de movimiento es igual a

$$\mathbf{a} = (R\alpha)\,\hat{\mathbf{T}} + (R\omega^2)\,\hat{\mathbf{N}}\,.$$

## Ejemplo 21.

Un niño juega con una pelota que está unida a un hilo. El niño hace girar la pelota con una velocidad constante (velocidad angular) de 3 radianes por segundo y el hilo tiene una longitud de 0.5 m. Considerando que la pelota tiene una masa de 0.3 kg y que tanto la masa del hilo como la aceleración de la gravedad son despreciables, calcular la fuerza ejercida por la pelota sobre el hilo.

**Solución:** La fuerza que actúa sobre la pelota está dada por la segunda ley de Newton: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Se calculará entonces la aceleración de la pelota

$$\mathbf{a} = (R\alpha)\,\hat{\mathbf{T}} + (R\omega^2)\,\hat{\mathbf{N}}$$

con

$$\omega = 3 \text{ rad/s}; \qquad R = 0.5\,\text{m}; \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

por lo que

$$\mathbf{a} = (0.5)(3)^2\,\hat{\mathbf{N}}$$

$$\mathbf{a} = 4.5\,\hat{\mathbf{N}}$$

luego la fuerza que ejerce el hilo sobre la pelota es

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = 1.35\,\hat{\mathbf{N}}.$$

Esto es, el hilo tira de la pelota con una fuerza de 1.35 kg m/s$^2$ en dirección de la normal, o sea hacia el centro del círculo. Ahora bien, se sabe de las leyes de Newton que a toda fuerza de acción corresponde una fuerza de reacción igual en magnitud y de sentido contrario. Por lo tanto, la fuerza ejercida por la pelota sobre el hilo es también 1.35 pero dirigida hacia afuera del círculo.

**4.30.** Calcular la longitud de arco de las siguientes curvas.

a) $x=\cos t;\ y=\operatorname{sen} t;\ 0\le t\le 2\pi$

b) Cardioide $r=a\left(1+\cos\theta\right);\ a>0$

c) $f\left(t\right)=\left(2t-t^2\right)\hat{\mathbf{i}}+\dfrac{8}{3}\,t^{3/2}\,\hat{\mathbf{j}}$ entre $t=1$ y $t=3$.

**Solución:** **a)** $S=2\pi$; **b)** $S=8a$; **c)** $S=12$

**4.31.** **a)** Demostrar que la curva descrita por

$$\mathbf{f}\left(t\right)=\frac{4F}{1-\cos t}\left(1+\cos t,\ \operatorname{sen} t\right)$$

es una parábola que abre hacia el eje x con foco en $\left(F,\ 0\right)$.

b) Sean **P** un punto cualquiera sobre la parábola, $l_1$ una recta que va del foco $F$ a **P** y $l_2$ una recta paralela al eje de la parábola y que pasa por **P** (ver figura EJ-4-31). Demostrar que las rectas $l_1$ y $l_2$ forman el mismo ángulo con la normal a la curva en el punto **P**. Esta propiedad de la parábola es fundamental en los espejos y las antenas parabólicas.

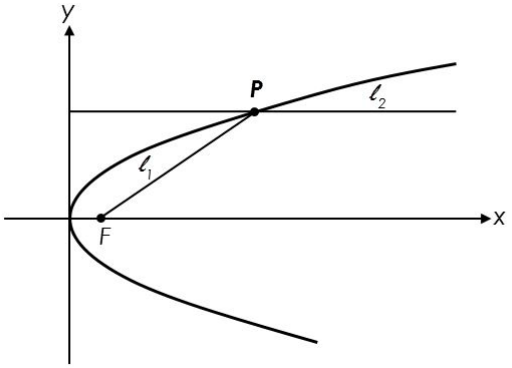



FIGURA EJ-4-31.

**Solución:**

a) $x = \frac{1}{4F} \mathrm{F}\, y^2$ por lo tanto se trata de una parábola que abre hacia el eje x con vértice en el origen y foco en $(F,0)$

b) El ángulo entre $\mathbf{N}$ y $l_2$ está dado por

$$\cos\phi_{l1} = \frac{\mathbf{N}\cdot\hat{\imath}}{|\mathbf{N}|\,|\hat{\imath}|} = \cos\phi_{l2}$$

por lo tanto, $\phi_{l1} = \phi_{l2}$

**4.32.** Determinar la longitud de cada una de las siguientes curvas.

a) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (t, t^2),\ t \in [-1, 1]$

b) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (5\cos t, 5\,\mathrm{sen}\, t),\ t \in [0, 1]$

c) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0),\ t \in [-1, 2]$.

**4.33.** Un avión parte del origen de un sistema coordenado y empieza a acelerar uniformemente a razón de 5 m/s$^2$ en una pista orientada de tal manera que forma $-60°$ con la dirección este. Rueda hasta recorrer una distancia de 1 km y empieza a despegar en la misma dirección, levantándose con un ángulo de 30° y acelerando a razón de 10 m/s$^2$ hasta que alcanza una altura de 5 000 m. Determinar la(s) expresión(es) del vector de posición del avión en cualquier instante considerando que el eje x se dirige al este, y el eje y al norte.

**Solución:**

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2.5,\ -4.33,\ 0)t^2 & \text{si } 0 \le t \le 20 \\ (500, -866, 0) + 5(0.433, -0.75, 0.5)(t-20)^2 & \text{si } t \ge 20 \end{cases}$$

**4.34.** Hallar la ecuación de la curva que pasa por $(0,0)$ y cuya pendiente en cualquier punto está dada por

$$m = \frac{2y^2 - 3x^2y}{x^3 - 4xy + 6y^2}.$$

**Solución:** $y(x^3 - 2xy - 2y^2) = cte$

**4.35.** Si $\mathbf{r} = (t^3 + 2t)\,\hat{\mathbf{i}} - 3e^{-2t}\,\hat{\mathbf{j}} + 2 \operatorname{sen} 5t\,\hat{\mathbf{k}}$, calcular $\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|$ en $t = 0$.

**Solución:** $\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = 12$

**4.36.** Dibujar la curva descrita por cada una de las siguientes funciones.

a) $\mathbf{f}(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 1]$
b) $\mathbf{f}(t) = (t, t^3)$, $t \in [-1, 1]$
c) $\mathbf{f}(t) = (5, t\cos t, 5 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$
d) $\mathbf{f}(t) = (5, 5\cos t, 10 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$
e) $\mathbf{f}(t) = (5, 5, 4) + t(1, 1, 1)$.

**4.37.** El operador de la torre del aeropuerto detecta un avión a una distancia de 80 km en la dirección norte que se acerca con una velocidad de 1 000 km/h. Detecta también otro avión a la misma altura que el primero a 60 km al NE acercándose con una velocidad de 800 km/h. ¿Con qué rapidez disminuye la distancia entre ambos aviones?

**Solución:** La distancia decrece a razón de 713 km/h

**4.38.** Una partícula se mueve con velocidad uniforme igual a 15 m/s en dirección NE, formando 60° con el plano horizontal. Si la partícula está en el origen cuando $t = 0$ escribir la expresión de su vector de posición en cualquier instante. Considérese que el eje x se dirige al este y el eje y al norte.

**4.39.** Dada la función

$$\mathbf{f}(t)=\begin{cases}\sqrt{2}\left(\cos\left(t+9\pi/4\right),\sin\left(t+9\pi/4\right)\right) & \text{si}\quad t\in[-\pi,0]\\ \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\cos\left(t-5\pi/4\right),\sqrt{2}-\sin\left(-t-5\pi/4\right)\right) & \text{si}\quad t\in(0,\pi]\end{cases}$$

determinar los valores de

$$\mathbf{f}(0);\qquad \left.\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right|_{t=0};\qquad \lim_{t=0^-}\mathbf{f}(t);\qquad \lim_{t=0^+}\mathbf{f}(t);\qquad \lim_{t=0^-}\frac{d\mathbf{f}}{dt};\qquad \lim_{t=0^+}\frac{d\mathbf{f}}{dt}$$

y con base en los resultados indicar si $\mathbf{f}$ y $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$ son continuas en el punto en donde $t$ es igual a cero. Hacer una gráfica aproximada de la función.

**4.40.** Cuando $t=0$ la "nariz" de una avioneta de hélice se encuentra en el origen de un sistema coordenado, y su hélice, de 2 m de diámetro, se encuentra en posición vertical. Sea $M$ el punto extremo de la hélice que en ese momento se halla arriba. La avioneta se mueve en dirección del eje y con una velocidad constante de 300 km/h y su hélice gira a razón de 6 000 rev/min. Escribir la expresión del vector de posición de $M$ en cualquier instante. Considérese que $|\mathbf{r}|$ está en metros y que la hélice se mueve en sentido antihorario.

**Solución:**

$$\mathbf{r}(t)=\left(2\sin(200\,\pi t),\ \frac{500}{6}t,\ 2\cos(200\,\pi t)\right),$$

donde $t$ está dado en segundos y $|\mathbf{r}|$ en metros

**4.41.** Con referencia al ejercicio 29, se desea conocer la velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula en $t=7/6$ segundos

**Solución:** $\mathbf{v}=-5\pi\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{i}}+5\pi\,\hat{\mathbf{j}}$; $\quad\mathbf{a}=-10\pi^2\,\hat{\mathbf{i}}-10\pi^2\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}-10\pi^2\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{k}}$

$\mathbf{a}_T=\mathbf{0}$; $\quad\mathbf{a}_N=-10\pi^2\,\hat{\mathbf{i}}-10\pi^2\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}$

**4.42.** Con referencia al problema 40, se desea conocer la velocidad y la aceleración del punto **M** cuando $t = 4/3$ segundos

**4.43.** Con referencia al problema 60 del Capítulo 1, se desea saber cuánto tarda una silla en dar una vuelta completa. Para esto considérese el diagrama de fuerzas de la figura EJ-4-43, donde **T** es la tensión en la cadena que sostiene a la silla, $\mathbf{F}_V$ y $\mathbf{F}_H$ son las componentes vectoriales (vertical y horizontal respectivamente) de la tensión, **W** el peso de la silla (incluido el peso del ocupante), $\mathbf{a}_N$ la aceleración normal de la silla y $g$ la magnitud de la aceleración de la gravedad. De acuerdo con el diagrama, analícense las siguientes aseveraciones.

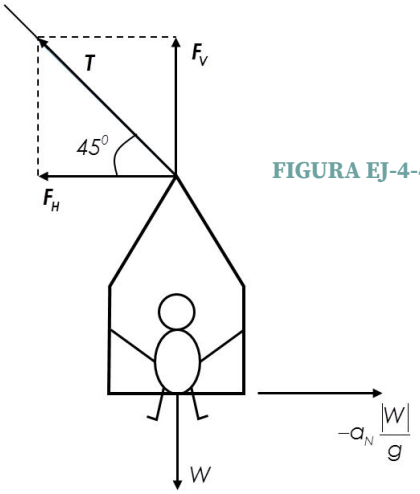



FIGURA EJ-4-43.

*i)* $|\mathbf{F}_H| = |\mathbf{W}|$

*ii)* $|\mathbf{W}| = |\mathbf{a}_N| \dfrac{|W|}{g}$

*iii)* $\mathbf{F}_V = -\mathbf{W}$

y elíjase la(s) opción(es) correcta(s).

a) sólo *(i)* es correcta
b) sólo *(ii)* es correcta
c) sólo *(iii)* es correcta
d) sólo *(i)* y *(ii)* son correctas
e) sólo *(i)* y *(iii)* son correctas
f) sólo *(ii)* y *(iii)* son correctas
g) todas son correctas.

Si se denota con $\omega$ a la velocidad angular y con $\rho$ al radio del círculo osculador, se tendrá que (elíjase la opción correcta):

a) $\left|\mathbf{a}_N\right| = \omega^2 \rho$

b) $\mathbf{a}_N = \dfrac{\omega^2 \rho}{\sqrt{3}} \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right)$

c) $\mathbf{a}_N = \omega^2\, \pi^2 \left(\rho\, \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right)$

d) $\left|\mathbf{a}_N\right| = \omega^2\, \pi^2 \rho$

e) $\mathbf{a}_N = \dfrac{\omega \rho}{\sqrt{3}} \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right)$.

Finalmente, el tiempo pedido en segundos vale (elíjase la opción correcta):

a) 9.8 b) 3 c) 4.2 d) 5.3 e) 7.

**Solución:** Las opciones correctas son $\mathbf{F}_V = -\mathbf{W}$ ; $\left|\mathbf{a}_N\right| = \omega^2 \rho$ ; $t = 5.3$.

**4.44.** Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t$$
$$y = \operatorname{sen} t$$
$$z = t$$

Si el movimiento se inicia en $t = 0$, hallar las coordenadas del primer punto que alcanza el móvil en el cual la dirección de su movimiento forma un ángulo de 45° con el vector $\mathbf{u} = \left(-1,\, 2,\, \sqrt{2}/12\right)$.

**Solución:** $t = 45°$ ; $\Rightarrow x = \sqrt{2}/2$ ; $y = \sqrt{2}/2$, $z = \pi/4$

**4.45.** Un avión de fotografía aérea que lleva su cámara exactamente al frente, tiene una trayectoria dada por

$$\mathbf{r} = (t^2 - 4t)\,\hat{\mathbf{i}} + (t-3)\,\hat{\mathbf{j}} + (t^3 - 5)\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $t$ está en minutos, y $|\mathbf{r}|$ en kilómetros. Se desea saber en qué instante debe ser disparada la cámara para fotografiar de frente un objeto situado en $\mathbf{P}_0 = (-4, 2, 39)$.

**Solución:** $t = 2$

**4.46.** Dado un móvil que se desplaza con velocidad **v** y aceleración **a**, se desea calcular la torsión de su trayectoria. Para esto es conveniente referir **v** y **a** al sistema **TNB**. Correlacionar los cuadros con las letras siguientes.

a) $\kappa \dfrac{ds}{dt}$ b) $\rho \dfrac{d^2s}{dt^2}$ c) $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ d) $0$

e) $\kappa \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ f) $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ g) $\rho \dfrac{ds}{dt}$ h) $\dfrac{ds}{dt}$

$\mathbf{v} = \square\,\hat{\mathbf{T}} + \square\,\hat{\mathbf{N}} + \square\,\hat{\mathbf{B}}$

$\mathbf{a} = \square\,\hat{\mathbf{T}} + \square\,\hat{\mathbf{N}} + \square\,\hat{\mathbf{B}}$.

Obténgase ahora $\mathbf{a}'(t)$ referida al mismo sistema (correlacionar):

a) $0$ b) $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3 \tau - \kappa \dfrac{d^2s}{dt^2}$

c) $3\kappa \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d^2s}{dt^2} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{d\kappa}{dt}$ d) $\dfrac{d^3s}{dt^3} - \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3 \kappa^2$

e) $\dfrac{d^3s}{dt^3}\kappa - \tau\kappa$ f) $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3 \kappa\tau$

$\mathbf{a}' = \square\,\hat{\mathbf{T}} + \square\,\hat{\mathbf{N}} + \square\,\hat{\mathbf{B}}$.

Efectuando $\mathbf{v}\times\mathbf{a}$ se obtiene $\kappa$ que está dada por (elegir la opción correcta):

a) $\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}$ b) $\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{\dfrac{d^3s}{dt^3}}$ c) $\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2}{\dfrac{d^2s}{dt^2}}$

d) $\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{\dfrac{d^3s}{dt^3}}$ e) $\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{\left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)^2}$

Finalmente, $\tau$ está dada por:

a) $(\mathbf{v}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}')|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|$ b) $\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{\mathbf{v}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'}$ c) $\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2}{\mathbf{v}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'}$

d) $\dfrac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2}$ *e)* $(\mathbf{v}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}')|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2$.

**Solución:** $\mathbf{v}=h\hat{\mathbf{T}}+d\hat{\mathbf{N}}+d\hat{\mathbf{B}}$, $\mathbf{a}=f\hat{\mathbf{T}}+e\hat{\mathbf{N}}+d\hat{\mathbf{B}}$, $\mathbf{a}'=d\hat{\mathbf{T}}+c\hat{\mathbf{N}}+f\hat{\mathbf{B}}$,

$\kappa=\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}$, inciso b).

**4.47.** Sea $y=f(x)$ la ecuación de una curva en el plano $XY$. Se desea calcular su curvatura en el punto $x=x_0$: El vector $\mathbf{r}$ está dado por (escoger la opción correcta):

*i)* $\mathbf{r}=\theta\,\hat{\mathbf{i}}+f(\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$
*ii)* $\mathbf{r}=t\,\hat{\mathbf{i}}+f(t)\,\hat{\mathbf{j}}$
*iii)* $\mathbf{r}=x\,\hat{\mathbf{i}}+f(x)\,\hat{\mathbf{j}}$

a) sólo *(i)* es cierta
b) sólo *(ii)* es cierta
c) sólo *(iii)* es cierta
d) sólo *(i)* y *(ii)* son ciertas
e) sólo *(i)* y *(iii)* son ciertas
f) sólo *(ii)* y *(iii)* son ciertas
g) Todas son ciertas.

Sus dos primeras derivadas en el punto son (correlacionar):

a) $f''(x_0)$ b) $f''(t)$ c) $f''(\theta)$ d) 2 e) $f'(\theta)$

f) $f'(t)$ g) 0 h) 1 i) $f'(x_0)$ j) $-3$

$\mathbf{r}'(x_0) = \square\,\hat{\mathbf{i}} + \square\,\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{r}''(x_0) = \square\,\hat{\mathbf{i}} + \square\,\hat{\mathbf{j}}$.

Finalmente, la curvatura pedida es (elegir la opción correcta):

a) $\dfrac{f'(x_0)}{[1+f''(x_0)]^3}$ b) $\dfrac{|f'(x_0)|}{\{1+[f'(x_0)]^2\}^{3/2}}$ c) $\dfrac{|f'(x_0)|}{[1+f''(x_0)]^3}$

d) $\dfrac{f'(t)}{[1+f''(t)]^{3/2}}$ e) $\dfrac{f''(\theta)}{1+f'(\theta)}$.

**Solución:** Las tres expresiones para $\mathbf{r}$ son correctas, por lo tanto el inciso correcto es g); $\mathbf{r}'(x_0) = h\,\hat{\mathbf{i}} + i\,\hat{\mathbf{j}}$; $\mathbf{r}'(x_0) = g\,\hat{\mathbf{i}} + a\,\hat{\mathbf{j}}$;

$\dfrac{|f'(x_0)|}{\{1+[f'(x_0)]^2\}^{3/2}}$, inciso b).

**4.48.** Calcular la curvatura de la elipse $4x^2+9y^2=36$ en $x=0$.

**Solución:** $\dfrac{|f'(x_0)|}{\{1+[f'(x_0)]^2\}^{3/2}} = \dfrac{2}{9}$

**4.49.** Calcular la curvatura de

$$C:\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \mathbf{P}=\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

**Solución:** $\kappa=\sqrt{\frac{17}{43}\frac{250}{129}}$.

**4.50.** Calcular la curvatura y torsión de la curva dada por

$$C:\begin{cases} x=\frac{3}{2}\operatorname{sen}\phi \\ y=\frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\phi \\ z=2\cos\phi. \end{cases} \quad \text{en} \quad \phi=\frac{\pi}{2}$$

**Solución:** $\kappa=\frac{3}{4}$.

**4.51.** Un cañón está apuntando hacia el rumbo N 60° W, formando un ángulo de 45° con el plano horizontal, y sus obuses salen con una velocidad de 400 m/s. Si el eje y apunta al norte, el eje x al este y el eje z hacia arriba, hallar la ecuación vectorial de la trayectoria de los obuses. Nótese que la aceleración está dada por $-g\hat{\mathbf{k}}$ (en donde se ha despreciado la resistencia del aire).

**Solución:** $\mathbf{r}(t)=100\sqrt{2}\left(-\sqrt{3}, 1, 2\right)t-\frac{g}{2}t^2(0, 0, 1)$.

**4.52.** Una partícula se mueve a razón de 30 rev/min sobre la curva

$$C:\begin{cases} 4x^2+9y^2+72z^2=7 \\ 36-2x=0 \end{cases}$$

donde $x$, $y$, $z$ están en metros. Se sabe, además, que $z=0$ y $x>0$ cuando $t=0$, y que a partir de ese momento se mueve hacia arriba. Hallar en qué instantes dentro del intervalo $0<t\leq 1$, son máximas la rapidez y la magnitud de la aceleración. Calcular dichos valores máximos.

**4.53.** Una partícula se mueve en el primer octante sobre la intersección de la esfera $\mathbf{r} = 4\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + 4\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} + 4\cos\phi\,\hat{\mathbf{k}}$, con el cilindro $\mathbf{r} = 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{i}} + 4\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ (donde $|\mathbf{r}|$ está dado en metros). Si su cota desciende a razón de 1 m/s y se sabe que en $t = 0$ seg, $z$ es igual a 4 metros. Calcular la velocidad, la aceleración, la aceleración tangencial y la aceleración normal de la partícula en el instante en que $t = 2$ seg.

**4.54.** Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para cada uno de los vectores de posición siguientes que define el movimiento de una partícula.

a) $\mathbf{r} = (\cos 2t)\,\hat{\mathbf{i}} + (\operatorname{sen} 2t)\,\hat{\mathbf{j}}$

b) $\mathbf{r} = t\,\hat{\mathbf{i}} + t^2\,\hat{\mathbf{j}}$, en $t = 1$

c) $\mathbf{r} = (t^3 - 3t)\,\hat{\mathbf{i}} + (t^2 - 1)\,\hat{\mathbf{j}}$, en $t = 0$

d) $\mathbf{r} = t^2\,\hat{\mathbf{i}} + t^3\,\hat{\mathbf{j}}$, en $t = \sqrt{5}/3$.

**4.55.** Dada la curva: $x = 3\cos t$; $y = 3\operatorname{sen} t$; $z = 4t$, hallar: $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, $\kappa$, $\rho$, $\tau$ y $\sigma$.

**4.56.** Determinar los vectores tangente unitario, normal unitario, binormal y la curvatura, el radio de curvatura, la torsión, el radio de torsión y las ecuaciones de los planos tangente, oscilador y rectificarte de la curva de ecuaciones $x = 3t$; $y = 3\operatorname{sen} t$; $z = 3\cos t$.

**4.57.** Una partícula inicia su movimiento en el origen de acuerdo con la siguiente ley

$$\mathbf{r} = (5^{2t} - 5)\,\hat{\mathbf{i}} + 10\operatorname{sen} 2t\,\hat{\mathbf{j}} + (5t + 4t^2)\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $t$ está en minutos. Determinar, de manera aproximada, su posición al cabo de 1.2 s.

**4.58.** Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración de una partícula que se mueve en la hélice de ecuación

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\,\hat{\mathbf{i}} + (\operatorname{sen} t)\,\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**4.59.** Hallar la fuerza que actúa sobre un objeto de masa $m$ que se mueve en la trayectoria elíptica:

$$\mathbf{r}(t) = (\alpha \cos \omega t)\,\hat{\mathbf{i}} + (\beta \operatorname{sen} \omega t)\,\hat{\mathbf{j}}; \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

**4.60.** La trayectoria de una partícula está dada por la expresión

$$f(t) = t^2\,\hat{\mathbf{i}} - t\,\hat{\mathbf{j}} + t^3\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Calcular su aceleración normal y su aceleración tangencial en el punto correspondiente a $t = 1$.

**4.61.** La trayectoria de una partícula está dada por la ecuación $\mathbf{r}(t) = (2t^2,\ 4t,\ \operatorname{sen} t)$, siendo $t$ el tiempo medido en segundos. Determine su posición, su velocidad y su aceleración en el tiempo $t = 5$ seg.

**4.62** Obtener el vector tangente unitario y la ecuación de la recta tangente para cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $\mathbf{f}(\theta) = (4 \cos \theta, -4 \cos \theta)$ en $\theta$ arbitrario
b) $\mathbf{f}(\theta) = (4 \cos \theta, -4 \operatorname{sen} \theta)$ en $\theta$ arbitrario.

**4.63.** Determinar **T, N, B,** $\kappa$, $\rho$, $\tau$ y $\sigma$ para las siguientes curvas en los puntos indicados.

a) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (t, t^2);$ $t = 1$

b) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (5\cos t, 5\operatorname{sen} t);$ $t = 0$

c) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0);$ $t = 2$

d) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (5\cos t^2, 5\operatorname{sen} t^2);$ $t = 0$

e) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t);$ $t = 1$

f) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (t, t^2, t^3);$ $t = 1$

g) $\mathcal{C}: \mathbf{f}(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$ (hélice cónica), en $t = 1$.

**4.64.** Demostrar que si el movimiento de una partícula es tal que $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$.

**4.65.** Obtener la ecuación que describe la trayectoria de una partícula si se sabe que su velocidad está dada por

$$\mathbf{v}(t) = (2t, -t, \operatorname{sen} t) \quad \text{y que} \quad \mathbf{r}(t) = (1, 1, 1) \quad \text{en} \quad t = 0.$$

**4.66.** Dada $\mathbf{r}(t) = 3t\,\hat{\mathbf{i}} + 3\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}} + 3\cos t\,\hat{\mathbf{k}}$, calcular $\hat{\mathbf{T}}$, $\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}$, $\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right|$, $\hat{\mathbf{B}}$ y $\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}$.

**4.67.** El campo de velocidades de un fluido está dado por $\mathbf{v} = 3x\,\hat{\mathbf{i}} - 2y\,\hat{\mathbf{j}}$, donde $|\mathbf{v}|$ está en metros por segundo y $x$ y $y$ en metros. Calcular $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{T}}$ sobre la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \qquad z = 3.$$

## 4.6 Ecuación vectorial de una superficie

En forma semejante a lo que se vio para el caso de una curva, en esta sección se verá la representación vectorial de una superficie. Se ha visto que bajo ciertas condiciones una superficie en el espacio puede representarse mediante una ecuación explícita de la forma

$$z = f(x, y) \qquad \text{donde} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

o también por una ecuación implícita como $F(x, y, z) = 0$, donde $F$ es una función definida en alguna región del espacio $\mathbb{R}^3$. Estas representaciones tienen, sin embargo, desventajas similares a las que se analizaron para curvas y debido a eso es necesario recurrir a otra forma para representarlas.

Sea $\mathbf{F}(u, v)$ una función vectorial de variable vectorial de la forma

$$\mathbf{F}(u, v) = F_1(u, v)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(u, v)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(u, v)\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $F_1$, $F_2$ y $F_3$ son funciones escalares de $u$ y $v$. Entonces, para cada valor de $u$ y $v$ del dominio de $\mathbf{F}$ (denotado como $D_{\mathbf{F}}$), existe un vector de posición dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(u, v) \tag{44}$$

$$= F_1(u, v)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(u, v)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(u, v)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{44'}$$

que especifica un punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ del espacio. Cuando $u$ y $v$ varían el punto $(x, y, z)$ se mueve de acuerdo con las tres ecuaciones

$$x = F_1(u, v); \quad y = F_2(u, v); \quad z = F_3(u, v) \tag{45}$$

generando una superficie. Las tres ecuaciones (45) son llamadas *ecuaciones escalares paramétricas de la superficie* y la ecuación (44) (o la (44′)) *ecuación vectorial paramétrica de la superficie.* Para indicar que una superficie $S$ está generada

mediante las ecuaciones paramétricas (45) conforme los parámetros $u$ y $v$ varían sobre una cierta región $R_{uv} \subset D_{\mathbf{F}}$ se utiliza la notación

$$S: \begin{cases} x = F_1(u, v) \\ y = F_2(u, v) \\ z = F_3(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in R_{uv}$$

o bien

$$S: \mathbf{r} = F_1(u, v)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(u, v)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(u, v)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (u, v) \in R_{uv}.$$

Si se fija la variable $v$ al valor $C$, las expresiones anteriores tendrán un solo parámetro y describirán una curva en el espacio a lo largo de la cual varía $u$. Esta curva se designa con $v = C$. Así, para cada valor de $C$ existe una curva en el espacio (ver figura 4.14). El conjunto de todas estas curvas forma una superficie en $\mathbb{R}^3$. De modo similar, si se fija $u = K$ y se varía $v$, se obtendrá una curva designada por $u = K$, y para cada valor de $K$ existirá una curva. De esta manera se obtiene también una superficie. Obviamente ambos procedimientos dan lugar a la misma superficie, puesto que, de acuerdo con las tres ecuaciones escalares paramétricas, para cada par de valores de $u$ y $v$ existe un solo punto $(x, y, z)$. Las curvas $v = C$ y $u = K$ se llaman *curvas paramétricas*. Los parámetros $u$ y $v$ se conocen también con el nombre de *coordenadas curvilíneas* del punto $(x, y, z)$ sobre la superficie.

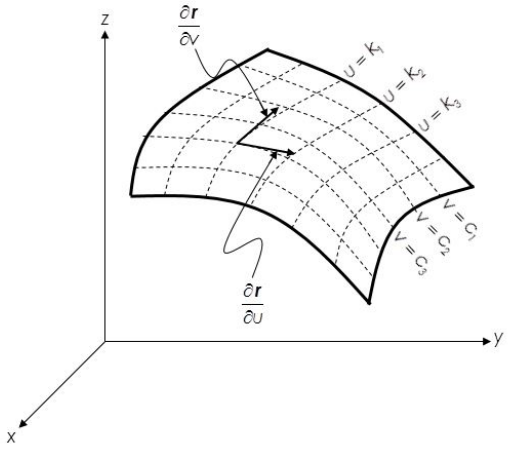



**FIGURA 4.14.** Superficie arbitraria cuya ecuación vectorial paramétrica tiene la forma de la ecuación (44'): $\mathbf{r}(u, v) = \mathrm{F}_1(u, v)\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{F}_2(u, v)\,\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{F}_3(u, v)\,\hat{\mathbf{k}}$.

Como al mantener constante uno de los parámetros en la ecuación vectorial de la superficie (por ejemplo, a $v$), se obtiene la ecuación de una curva, de acuerdo con lo visto en la sección 4.4, $\partial \mathbf{r}/\partial u$ es un vector tangente a la curva $v = C$, y por lo tanto, es tangente también a la superficie. Ver figura 4.14. Y lo mismo puede decirse para $\partial \mathbf{r}/\partial v$. En consecuencia, el producto vectorial de ambos:

$$\mathbf{N}' \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{46}$$

es un vector normal a la superficie. Este vector será utilizado frecuentemente en todo el resto del libro.

Antes de seguir adelante se harán las siguientes dos aclaraciones respecto a la notación utilizada.

1) En todo este libro se denota con $\mathbf{N}'$ al vector normal a una superficie definido en la ecuación (46) y con $\mathbf{N}$ al vector normal a la superficie definido en la ecuación (35) del capítulo 2, que se obtiene a partir de $\mathbf{N} = \nabla F(x, y, z)$, siendo $F(x, y, z) = 0$ la ecuación que describe a la superficie. Estos dos vectores son por supuesto paralelos, pero en general son diferentes. Sólo cuando $F$ tiene la forma $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ y se toma como ecuación paramétrica de la superficie a $r = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + f(x, y)\hat{\mathbf{k}}$ ambos vectores coinciden y son iguales a (ver ecuación (35') del capítulo 2 y ecuación (61) de este capítulo)

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' = \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right).$$

En los demás casos sólo son proporcionales. Además, cuando se requiera normalizar a estos vectores de manera que se obtengan vectores unitarios estos se denotarán como

$$\hat{\mathbf{n}} \equiv \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

$$\hat{\mathbf{n}}' \equiv \frac{\mathbf{N}'}{|\mathbf{N}'|}.$$

Ninguno de estos cuatro símbolos debe confundirse con la notación $\hat{\mathbf{N}}$ utilizada para el vector normal unitario asociado a una curva que se definió en la ecuación (28) en relación con las fórmulas de Frenet-Serret.

2) En forma semejante a lo que se hizo en las secciones 4.4 y 4.5, en vez de escribir por ejemplo $\mathbf{r}=\mathbf{F}(u, v)$, se escribirá en ocasiones $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$. Aunque esta notación no es rigurosamente correcta por las mismas razones que se comentaron en la sección 4.4, para nuestros fines es muy conveniente y no causará ningún problema. Otros ejemplos de esto serán escribir $x=x(u, v)$ en vez de $x=F_1(u, v)$ y $\mathbf{v}=\mathbf{v}(x, y, z)$ en vez de $\mathbf{v}=\mathbf{F}(x, y, z)$, etc.

## Ejemplo 22.

Analizar qué tipo de superficie describen las siguientes funciones vectoriales de variable vectorial.

*i)* $\mathbf{F}(u, v)=a\cos u\,\hat{\mathbf{i}}+b\,\operatorname{sen} u\,\hat{\mathbf{j}}+v\,\hat{\mathbf{k}}$
*ii)* $\mathbf{F}(\rho, \theta)=\rho\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}+\rho\,\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}+3\,\hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:**

*i)* Si se fija $v=C$ se obtiene la función

$$\mathbf{f}(u)\equiv\mathbf{F}(u, C)=a\cos u\,\hat{\mathbf{i}}+b\,\operatorname{sen} u\,\hat{\mathbf{j}}+C\,\hat{\mathbf{k}}$$

que es la ecuación de una elipse con ejes $a$ y $b$, situada en el plano $z=C$, y con centro en el eje Z. Al dar otros valores a $v$ se obtiene exactamente lo mismo, pero a otras alturas. Por lo tanto, para todo valor de $z$ se obtienen elipses idénticas. Se trata entonces de una superficie cilíndrica con eje paralelo al eje Z y cuyas secciones transversales son elipses. Por otro lado, si se fija $u=K$ se obtiene la función

$$\mathbf{g}(v) \equiv \mathbf{F}(K, v) = a\cos K\,\hat{\mathbf{i}} + b\,\operatorname{sen} K\,\hat{\mathbf{j}} + v\hat{\mathbf{k}}$$

$$= K_1\hat{\mathbf{i}} + K_2\hat{\mathbf{j}} + v\hat{\mathbf{k}}$$

siendo $K_1$ y $K_2$ dos constantes. Esta expresión es la ecuación de una recta vertical que pasa por el punto $(K_1, K_2)$ del plano $XY$ y es fácil ver que este punto pertenece a la elipse que está sobre dicho plano. Al dar otros valores a u se obtienen nuevamente rectas verticales pero que pasan por los otros puntos de la elipse mencionada. De esta forma se obtiene de nueva cuenta el cilindro anterior.

*ii)* En este caso $z$ permanece constante y por lo tanto se trata de un plano horizontal cuya cota es $z = 3$. Este plano se puede considerar como generado por la familia de circunferencias concéntricas centradas en el origen y diferentes radios descritas por la función

$$\mathbf{F}_C(\theta) = \mathbf{F}(C, \theta) = C\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + C\,\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

en donde al variar $C$ se obtienen las distintas circunferencias. Se puede considerar también generado por la familia de rectas que parten del origen, pero con distintas orientaciones descritas por la función

$$\mathbf{G}_K(\rho) = \mathbf{F}(\rho, K) = \rho\cos K\,\hat{\mathbf{i}} + \rho\,\operatorname{sen} K\,\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

en donde al variar $K$ se obtienen las distintas rectas.

## Ejemplo 23.

Trazar la gráfica de la superficie definida por la ecuación

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = a\cos u\,\operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{i}} + a\,\operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{j}} + a\cos v\,\hat{\mathbf{k}}$$

para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq \pi/2$, y obtener su ecuación cartesiana.

**Solución:** Si se fija $v$ al valor constante $v_0$, entonces sen $v_0 = \alpha_1$, y cos $v_0 = \alpha_2$, por lo que $\mathbf{r}$ representa a la curva

$$\mathbf{r}(u, v_0) = a\alpha_1 \cos u\,\hat{\mathbf{i}} + a\alpha_1 \operatorname{sen} u\,\hat{\mathbf{j}} + a\alpha_2\hat{\mathbf{k}}$$

que es una circunferencia horizontal situada en el plano $z = a\alpha_2$ de radio $R = a\alpha_1$ y con centro sobre el eje Z. Además, como se cumple que $z^2 + R^2 = a^2$ el radio de estas circunferencias horizontales varía al variar la $z$ de acuerdo con la ecuación de una circunferencia vertical de radio $a$ con centro en $z = 0$. Por lo tanto, la superficie es una esfera centrada en el origen y las curvas $v = v_0$ son los círculos llamados *paralelos*.

Por otro lado, si se fija $u$ al valor constante $u_0$, entonces cos $u_0 = \beta_1$ y sen $u_0 = \beta_2$, y $\mathbf{r}$ representa a la curva

$$\mathbf{r}(u_0, v) = a\beta_1 \operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{i}} + a\beta_2 \operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{j}} + a\cos v\,\hat{\mathbf{k}}$$

que puede escribirse como

$$r(u_0, v) = a\left(\beta_1\,\hat{\mathbf{i}} + \beta_2\,\hat{\mathbf{j}}\right)\operatorname{sen} v + a\cos v\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= a\operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{e}} + a\cos v\,\hat{\mathbf{k}}$$

siendo $\hat{\mathbf{e}} = \beta_1\hat{\mathbf{i}} + \beta_2\,\hat{\mathbf{j}}$ un vector unitario horizontal. Al estar expresada en esta forma se ve de inmediato que se trata de una circunferencia de radio $a$ situada en el plano vertical definido por $\hat{\mathbf{e}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, y con centro en el origen. Al cambiar $u_0$, el vector $\hat{\mathbf{e}}$ gira horizontalmente, pero la curva generada sigue siendo una circunferencia de radio $a$. De esta forma se genera nuevamente la esfera de radio $a$ con centro en el origen. Las curvas $u = u_0$ son los círculos llamados *meridianos*. En realidad, como $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le \pi/2$, la superficie es la mitad de una esfera, como se ve en la figura 4.15

Para obtener la ecuación cartesiana de la superficie se elevan al cuadrado $x$, $y$ y $z$ y se suman

$$x^2+y^2+z^2=a^2\cos^2u\,\operatorname{sen}^2v+a^2\operatorname{sen}^2u\,\operatorname{sen}^2v+a^2\cos^2v$$

$$=a^2\left(\cos^2u+\operatorname{sen}^2u\right)\operatorname{sen}^2v+a^2\cos^2v$$

$$=a^2,$$

lo que prueba que se trata de una esfera.

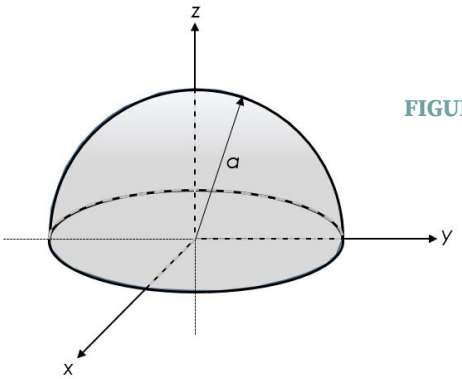



FIGURA 4.15.

Si una superficie $S$ está definida por la ecuación

$$\mathbf{r}(u,v)=F_1(u,v)\,\hat{\mathbf{i}}+F_2(u,v)\,\hat{\mathbf{j}}+F_3(u,v)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{47}$$

donde $u$ y $v$ varían en una región $R_{uv}$ del plano UV, entonces se dice que $S$ es continua en $R_{uv}$ si y sólo si $F_1$, $F_2$ y $F_3$ son continuas en $R_{uv}$. Para excluir el caso en el que la superficie degenera en una curva (o en un punto) no se considerarán los casos en los que las tres funciones $F_1$, $F_2$ y $F_3$ dependan de un solo parámetro. Una manera equivalente de excluir esto es considerar sólo los casos en los que por lo menos uno de los jacobianos $J_1\equiv J\left(\frac{y,z}{u,v}\right)$, $J_2\equiv J\left(\frac{z,x}{u,v}\right)$ o bien $J_3\equiv J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ sea diferente de cero en la región $R_{uv}$. Si en algún punto **P** los tres jacobianos anteriores se hacen cero o no existen, a **P** se le denominará *punto singular.* En caso contrario se le llamará *punto no singular*.

De la ecuación (46) se tiene que

$$\mathbf{N}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) \hat{\mathbf{j}} \tag{48}$$

$$+ \left( \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$= J_1 \hat{\mathbf{i}} + J_2 \hat{\mathbf{j}} + J_3 \hat{\mathbf{k}} = (J_1, J_2, J_3)$$

donde

$$J_1 \equiv J\left(\frac{y,z}{u,v}\right) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$J_2 \equiv J\left(\frac{z,x}{u,v}\right) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \tag{49}$$

$$J_3 \equiv J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\,.$$

La ecuación (48) implica que los puntos singulares son aquellos en los que $\mathbf{N}'$ no existe o vale cero y los no singulares aquellos en los que $\mathbf{N}' \neq 0$. Si $\mathbf{P}$ es un punto no singular en donde las derivadas $\partial \mathbf{r}/\partial u$ y $\partial \mathbf{r}/\partial v$ son continuas, entonces $\mathbf{N}'$ es continuo y a $\mathbf{P}$ se le llama punto ordinario. Cabe notar que como $\mathbf{N}'$ es un vector normal a la superficie, la condición $\mathbf{N}' \neq \mathbf{0}$ significa que existe plano tangente a la superficie. El tener plano tangente en todos sus puntos y el variar

$\mathbf{N}'$ de manera continua, implica que la superficie no tiene esquinas. Así, a una superficie formada únicamente por puntos ordinarios se le conoce como *superficie lisa* (o *suave*).

La diferencial de área sobre una superficie generada por los parámetros $u$ y $v$ mediante la ecuación vectorial paramétrica (47) está íntimamente relacionada con el vector $\mathbf{N}'$ como se verá a continuación. Esta diferencial de área se denota como $d\sigma$ y se le llama *diferencial de área de superficie*. En la figura 4.14 se muestra una sección de una superficie de este tipo. También se muestran algunas curvas $u = constante$ y $v = constante$, así como los vectores no paralelos $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ que son tangentes a las curvas $u = k_1$ y $v = C_1$ respectivamente. Si las curvas están "suficientemente cercanas" entre sí, la porción $\Delta S$ de la superficie limitada por las curvas $u$, $u + \Delta u$, $v$ y $v + \Delta v$, es aproximadamente un paralelogramo donde dos de sus lados son los vectores (ver expresión (19))

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v,$$

los cuales son tangentes a la superficie. Entonces el area $\Delta\sigma$ de $\Delta S$ está dada aproximadamente por el valor absoluto del producto vectorial de ambos vectores. Así,

$$\Delta\sigma \approx \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \right|$$

$$= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u\, \Delta v = \left|\mathbf{N}'\right| \Delta A_{uv},$$

siendo $\Delta A_{uv} = \Delta u\ \Delta v$. En el límite cuando $\Delta u \to 0$ y $\Delta v \to 0$ el area del paralelogramo es igual a $d\sigma$. Es decir,

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv = \left|\mathbf{N}'\right|\ dudv \tag{50}$$

y como

$$\left|\mathbf{N}'\right| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$$

se tiene

$$d\sigma = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, dudv$$

$$= \sqrt{J^2\left(\frac{y,z}{u,v}\right) + J^2\left(\frac{z,x}{u,v}\right) + J^2\left(\frac{x,y}{u,v}\right)}\quad dudv. \tag{51}$$

En general la magnitud del vector normal $\mathbf{N}'$ es distinta de 1 y por lo tanto $d\sigma \neq dudv$. El área de la superficie completa $A(S)$ se obtiene integrando $d\sigma$ con el método que se verá en el capítulo 6. La diferencial $d\sigma$ es una diferencial de segundo orden como las que se discutieron en la sección 2.3.4 del capítulo 2, en cambio las diferenciales de las ecuaciones (6)-(9) son diferenciales de primer orden.

Al igual que para el caso de una curva, las ecuaciones paramétricas de una superficie no son únicas y para poder reparametrizarla se deben satisfacer las condiciones que menciona el siguiente teorema que se enunciará sin demostración.

**Teorema 10.** Sea una superficie suave representada por las ecuaciones paramétricas

$$S: \begin{cases} x = F_1(u, v) \\ y = F_2(u, v) \\ z = F_3(u, v) \end{cases} \qquad \forall (u, v) \in R_{uv} \subset \mathbb{R}^2.$$

Esta superficie puede ser reparametrizada en términos de los parámetros $s$ y $t$, mediante las expresiones $u = \varphi(s, t)$, $v = \psi(s, t)$, siempre y cuando

*i)* $J\left(\frac{\varphi, \psi}{s, t}\right), \neq 0 \quad$ en $\quad R_{st}$

*ii)* $\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial s}$ y $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ sean continuas en $R_{st}$,

siendo $R_{st}$ la región en el plano $ST$, cuya imagen en el plano $UV$ es $R_{uv}$.

## Ejemplo 24.

Obtener una ecuación para el plano tangente a la superficie siguiente en el punto especificado y determinar si dicha superficie es suave.

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 - \cos v)\cos u\,\hat{\mathbf{i}} + (2 - \cos v)\operatorname{sen} u\,\hat{\mathbf{j}} + \operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{k}}$$

para $-\pi \le u \le \pi$; $-\pi \le v \le \pi$; en el punto donde $u = \pi/2$ y $v = 0$.

**Solución:** Como se sabe, $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$ son vectores tangentes a la superficie y $\mathbf{N}' \equiv (\partial\mathbf{r}/\partial u) \times (\partial\mathbf{r}/\partial v)$ es un vector normal. Así,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -(2 - \cos v)\operatorname{sen} u\,\hat{\mathbf{i}} + (2 - \cos v)\cos u\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \operatorname{sen} v \cos u\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u\,\hat{\mathbf{j}} + \cos v\,\hat{\mathbf{k}}$$

y

$$\mathbf{N}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -(2 - \cos v)\operatorname{sen} u & (2 - \cos v)\cos u & 0 \\ \operatorname{sen} v \cos u & \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u & \cos v \end{vmatrix}$$

$$= (2 - \cos v)(\cos u \cos v\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} u \cos v\,\hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen} v\,\hat{\mathbf{k}}).$$

Como se observa, $\mathbf{N}'$ es una función continua y distinta de cero para todos los valores de $u$ y $v$, lo que demuestra que la superficie es suave. Si

$$u = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad v = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{N}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \hat{\mathbf{j}}$$

y

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 1, 0).$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (0, 1, 0) está dada por

$$0(x-0)+1(y-1)+0(z-0)=0 \quad \Rightarrow \quad y-1=0 \quad \Rightarrow \quad y=1.$$

## Ejemplo 25.

Sea la ecuación vectorial del cono

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\hat{\mathbf{i}} + u\,\text{sen}\,v\,\hat{\mathbf{j}} + u\hat{\mathbf{k}} \quad \text{donde} \quad u \geq 0.$$

Determinar los puntos singulares de esta superficie y obtener una reparametrización de ella en la región donde sea suave.

**Solución:** Se determina el vector normal $\mathbf{N}'$ de esta superficie:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\,\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,v\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u\,\text{sen}\,v\,\hat{\mathbf{i}} + u\cos v\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{N}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 1 \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -u \cos v\, \hat{\mathbf{i}} - u \operatorname{sen} v\, \hat{\mathbf{j}} + u\, \hat{\mathbf{k}}.$$

Se ve que $\mathbf{N}' = \mathbf{0}$ cuando $u = 0$, lo que implica que en $u = 0$ existe un punto singular. Para determinar sus coordenadas se sustituye $u = 0$ en $(u, v)$. Así,

$$\mathbf{r}(0, v) = 0\,\hat{\mathbf{i}} + 0\,\hat{\mathbf{j}} + 0\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Este punto es el origen y en la figura 4.16 se ve que es una "esquina" de la superficie.

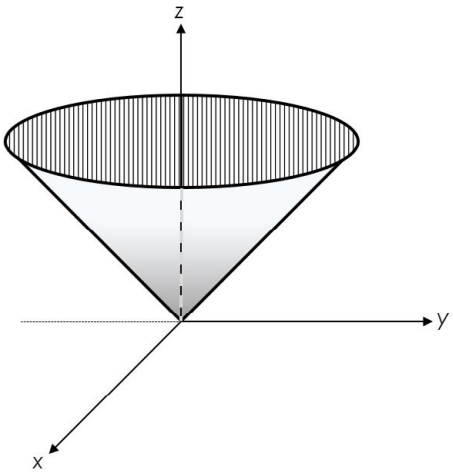



FIGURA 4.16.

Para reparametrizar a la superficie, considérense por ejemplo las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} u &= s \\ v &= \text{ang cos}\, t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \cos v &= t \\ \operatorname{sen} v &= \sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{1 - t^2}. \end{aligned}\right.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 1; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = 0; \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

las derivadas son continuas $\forall |t| < 1$ y se tiene que

$$J\left(\frac{u,v}{s,t}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0 \qquad \forall |t| < 1.$$

Por lo tanto, la superficie puede ser reparametrizada en términos de las variables $s$ y $t$, obteniéndose

$$\mathbf{r}(s,t) = st\,\hat{\mathbf{i}} + s\sqrt{1-t^2}\;\hat{\mathbf{j}} + s\hat{\mathbf{k}}; \qquad \forall |t| < 1.$$

Con base en el teorema anterior se puede asegurar que esta nueva parametrización es correcta en todos los puntos de la superficie excepto en el origen (que es un punto singular). Para este punto el teorema no afirma nada; sin embargo, en este ejemplo la nueva parametrización también describe bien al origen, ya que si $s = 0$ se tiene $\mathbf{r}(0,t) = \mathbf{0}$. Si se calcula $(\partial\mathbf{r}/\partial s) \times (\partial\mathbf{r}/\partial t)$ en el origen se obtendrá cero, ya que es ahí en donde está la "esquina".

## Ejercicios

**4.68.** Sean las superficies

$$S_1 : \mathbf{r}(u,v) = (u+v)\,\hat{\mathbf{i}} + (u-v)\,\hat{\mathbf{j}} + 4uv\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$S_2 : \mathbf{r}(\omega,q) = \omega\,\hat{\mathbf{i}} + q\,\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$$

y sea $C$ su curva de intersección. Identificar las superficies $S_1$ y $S_2$, y determinar las ecuaciones del plano normal y la recta tangente a $C$ en el punto $(3, -1, 8)$.

**4.69.** Sean las superficies $S_1 : \mathbf{r}(s,t) = 4st\,\hat{\mathbf{i}} + (s+t)\,\hat{\mathbf{j}} + (s-t)\,\hat{\mathbf{k}}$, y $S_2 : \mathbf{r}(u,v) = u\,\hat{\mathbf{i}} + v\,\hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}$.

a) Identificar las superficies.

b) Determinar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva de intersección entre $S_1$ y $S_2$ en el punto $\mathbf{P} = (-4, 0, 2)$.

**4.70.** Sea la superficie $S: (2t + s^2)\,\hat{\mathbf{i}} + (2t^2 s^2)\,\hat{\mathbf{j}} + (3t - 2)\,\hat{\mathbf{k}}$. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $S$ en el punto $\mathbf{P} = (3, -2, 1)$.

**4.71.** Considerar la superficie cilíndrica

$$S: \mathbf{f}(u,v) = (u + 2\cos v,\ 2u + 2\,\mathrm{sen}\, v,\ u)$$

con $u \in [-\infty, \infty]$ y $v \in [0, 2\pi]$,

a) ¿Qué tipo de curvas son generadas por $u$ cuando $v = cte$.?

b) ¿Qué tipo de curvas son generadas por $v$ cuando $u = cte$.?

**4.72.** Obtener dos representaciones paramétricas distintas, para cada una de las siguientes superficies:

a) Elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

b) Paraboloide $z = x^2 + y^2$

c) Cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

d) Cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

**4.73.** Calcular $J_1$, $J_2$ y $J_3$ para cada una de las superficies del problema anterior correspondientes a la primera parametrización elegida.

## 4.7 Divergencia, rotacional y laplaciano

En gran parte de las ecuaciones diferenciales que aparecen en la descripción de fenómenos mecánicos, electromagnéticos, dinámica de fluidos, etc., intervienen los operadores diferenciales que a continuación se van a estudiar. Muchos de ellos tienen interpretaciones físicas importantes que se señalarán conforme se presenten.

Sea el campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(x, y, z)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(x, y, z)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(x, y, z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

la matriz jacobiana de este campo es

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Con los elementos de esta matriz se forman dos importantes combinaciones que son la *divergencia* y el *rotacional*, conocidos también como *invariantes de primer orden* de esta matriz. La razón por la que se les llama invariantes es porque el valor de dichas combinaciones no se altera al efectuar un cambio de coordenadas. La demostración de esta propiedad no se dará aquí.

*i)* La *divergencia* de $\mathbf{F}$, denotada por $\operatorname{div}(\mathbf{F})$, se define mediante la expresión

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Se puede ver que es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal; es decir, es igual a la traza de la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$. La divergencia

es un campo escalar ya que al sumar las derivadas se obtiene una única función escalar de la variable vectorial $\mathbf{r}=(x, y, z)$.

*ii)* El *rotacional* de $\mathbf{F}$ denotado como $\text{rot}(\mathbf{F})$ es un campo vectorial y se define como

$$\text{rot}(\mathbf{F})=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

Y se ve que las componentes del rotacional son las diferencias de los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal.

## Ejemplo 26.

Obtener la divergencia y el rotacional de la función vectorial

$$\mathbf{F}=3x^2y\,\hat{\mathbf{i}}+5xz^3\,\hat{\mathbf{j}}-y^2\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** Se evalúa la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$:

$$\begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 & 0 \\ 5z^3 & 0 & 15xz^2 \\ 0 & -2y & 0 \end{bmatrix}$$

y se obtienen la divergencia y el rotacional

$$\text{div}(\mathbf{F})=6xy$$

$$\text{rot}(\mathbf{F})=-(2y+15xz^2)\hat{\mathbf{i}}+(5z^3-3x^2)\hat{\mathbf{k}}.$$

Se ve que efectivamente la divergencia es un campo escalar y el rotacional un campo vectorial.

La definición de la divergencia puede darse también en términos del operador nabla $\nabla$ que se introdujo en el Capítulo 2:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}.$$

En efecto, si $\nabla$ se toma como un vector cualquiera y se "multiplica escalarmente" por el vector $\mathbf{F}$ se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left( F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + F_3\hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

que es la expresión que define a la divergencia y por lo tanto se puede escribir

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div}(\mathbf{F}),$$

notación que permite recordar más fácilmente la definición y ayuda a manipular más cómodamente la operación.

Se debe advertir, sin embargo, que $\nabla \cdot \mathbf{F}$ no es un producto escalar usual ya que $\nabla$ no es un vector de $\mathbb{R}^3$ y que por ejemplo $dF_1/dx$ no es el producto de $d/dx$ por $F_1$, etc. En este sentido, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ no tiene el mismo significado que el producto escalar $\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}$ entre las funciones $\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}$.

También el rotacional puede expresarse en términos del operador nabla como sigue: se vio que el rotacional está definido como

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)\hat{\mathbf{i}} - \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right)\hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)\hat{\mathbf{k}}.$$

en donde $\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + F_3\hat{\mathbf{k}}$. Comparando con el "producto vectorial"

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

se ve que son idénticos, y por lo tanto $\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$. Aunque nuevamente se debe advertir que no es un producto vectorial en el sentido usual.

### 4.7.1 Propiedades e interpretación física de la divergencia

**Teorema 11.** ***(Propiedades de la divergencia).*** Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ funciones vectoriales de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y $\phi$ una función escalar de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tales que son diferenciables en una región $R \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, $\forall (x, y, z) \in R$ se cumple que:

*i)* $\text{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{div}(\mathbf{F}) + \text{div}(\mathbf{G})$

*ii)* $\text{div}(\phi\mathbf{F}) = \phi\,\text{div}(\mathbf{F}) + (\text{grad}\ \phi) \cdot \mathbf{F}$

*iii)* $\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = [\text{rot}(\mathbf{F})] \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot [\text{rot}(\mathbf{G})]$.

**Demostración:** Se probará el inciso $(ii)$ dejando como ejercicio para el lector la demostración de $(i)$ y $(iii)$.

Sean

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$$

y

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(x, y, z)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(x, y, z)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(x, y, z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\phi\mathbf{F}) = \nabla\cdot(\phi\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\phi F_1, \phi F_2, \phi F_3)$$

$$= \frac{\partial(\phi F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi F_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi F_3)}{\partial z}$$

$$= \phi\frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi\frac{\partial F_2}{\partial y} + F_2\frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi\frac{\partial F_3}{\partial z} + F_3\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$= \phi\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\cdot(F_1, F_2, F_3)$$

$$= \phi\ \operatorname{div}(\mathbf{F}) + (\operatorname{grad}\phi)\cdot\mathbf{F}.$$

Se verá ahora como se interpreta el concepto de divergencia en la mecánica de fluidos. Denótese con $\mathbf{v}(x, y, z)$ el campo de velocidades de un fluido en movimiento (por ejemplo un gas). Se va a mostrar que la divergencia de $\mathbf{v}$ es igual a la "cantidad total de fluido que sale de una vecindad del punto $(x, y, z)$ por unidad de volumen y de tiempo"; es decir, que $\nabla\cdot\mathbf{v}$ representa la razón de expansión del fluido por unidad de volumen.

Considérese un elemento de volumen (en forma de paralelepípedo) en un sistema cartesiano ortogonal, con aristas $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, cuyo centro es el punto $\mathbf{P}$ de coordenadas $(x, y, z)$ como se ve en la figura 4.17. El campo de velocidades del fluido en cuestión está dado en forma general, como

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\hat{\mathbf{i}} + v_2(x, y, z)\,\hat{\mathbf{j}} + v_3(x, y, z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

en donde $v_1$, $v_2$ y $v_3$ son funciones escalares continuas.

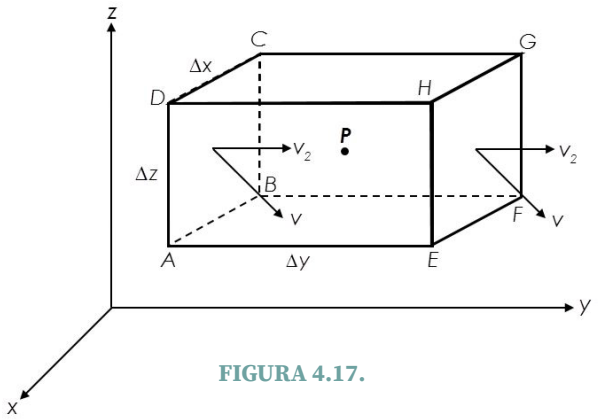



**FIGURA 4.17.**

Se analizará primero el movimiento en la dirección del eje Y y se supondrá que $v_2$ evaluada en el punto $(x, y+(\Delta y/2), z)$ es positiva. Considérese ahora la porción del fluido que se encuentra entre $y$ y $y+\Delta y/2$ y que va a salir en la dirección de **v** por el plano vertical que contiene a la cara $EFGH$. Es fácil ver que el volumen de esa porción de fluido es igual a $\text{Vol} \equiv \Delta x \Delta z (\Delta y/2)$ independientemente de que **v** sea o no paralelo al eje Y (aunque es mucho más simple deducir esta afirmación suponiendo que **v** es paralelo al eje Y). Después de un cierto intervalo de tiempo $\Delta t$ toda esa porción del fluido habrá cruzado el plano. El intervalo $\Delta t$ se puede aproximar mediante la expresión $\Delta t \approx (\Delta y/2)(1/v_2)$, siendo $v_2$ el valor de $v_2$ en el punto $(x, y+(\Delta y/2), z)$. Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial se tiene que

$$v_2\left(x, y+\frac{1}{2}\Delta y, z\right) = v_2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, \eta, z)\left(\frac{1}{2}\Delta y\right)$$

$$\text{con} \quad y < \eta < y + \frac{\Delta y}{2},$$

en donde $\eta$ es el valor de $y$ para el cual se cumple el teorema. Entonces, la porción del fluido que sale de la región que se encuentra entre $y$ y $y+\frac{\Delta y}{2}$ cruzando por dicho plano por unidad de tiempo, es decir $\frac{\text{Vol}}{\Delta t}$, es aproximadamente igual a

$$\left[v_2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, \eta, z)\frac{1}{2}\Delta y\right]\Delta x \Delta z.$$

Procediendo en forma similar se tiene que la porción de fluido que entra a la región que se encuentra entre $y - \frac{\Delta y}{2}$ y $y$ por el plano vertical que contiene a la cara $ABCD$, por unidad de tiempo es aproximadamente igual a

$$\left[ v_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, \eta', z) \frac{1}{2} \Delta y \right] \Delta x \Delta z.$$

La fracción total del fluido que sale por las caras del paralelepípedo perpendiculares al eje Y por unidad de tiempo se obtiene como la diferencia de lo que sale por la cara *EFGH* con lo que entra por la cara *ABCD*, es decir,

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fluido que sale por unidad}\\ \text{de tiempo por caras}\\ \text{perpendiculares al eje Y}\end{array}\right\} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y} v_2(x, \eta, z) + \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, \eta', z)\right] \Delta V$$

donde $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ es el volumen del paralelepípedo. Siguiendo el mismo razonamiento sobre los ejes X y Z se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fluido que sale por unidad}\\ \text{de tiempo por caras}\\ \text{perpendiculares al eje X}\end{array}\right\} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, \xi, z) + \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, \xi', z)\right] \Delta V$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fluido que sale por unidad}\\ \text{de tiempo por caras}\\ \text{perpendiculares al eje z}\end{array}\right\} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z} v_3(x, y, \phi) + \frac{\partial}{\partial z} v_3(x, y, \phi')\right] \Delta V.$$

Por lo tanto, la cantidad total de fluido que sale por las caras del paralelepípedos por unidad de tiempo será

$$\begin{aligned}\left.\begin{array}{r}\text{Fluido que sale por}\\ \text{unidad de tiempo}\end{array}\right\} &\approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} v_1(\xi, y, z) + \frac{\partial}{\partial x} v_1(\xi', y, z)\right] \Delta V \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y} v_2(x, \eta, z) + \frac{\partial}{\partial y} v_2(x, \eta', z)\right] \Delta V \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z} v_3(x, y, \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} v_3(x, y, \varphi')\right] \Delta V.\end{aligned}$$

Al dividir entre $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ y calcular el límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta z \to 0$ se obtiene la cantidad total de fluido que sale por unidad de volumen y por unidad de tiempo en el punto $(x, y, z)$. Hay que notar que si $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, entonces $\xi$ y $\xi'$ tienden a $x$; $\eta$ y $\eta'$ tienden a $y$, y $\varphi$ y $\varphi'$ tienden a $z$. Por lo que queda

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fluido saliente por}\\ \text{unidad de tiempo y}\\ \text{de volumen}\end{array}\right\} = \frac{\partial}{\partial x} v_1(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial y} v_2(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial z} v_3(\mathbf{r})$$

$$= \operatorname{div}(\mathbf{v}).$$

De esta forma, si $\operatorname{div}(\mathbf{v}) > 0$ en un punto **P**, significa que hay flujo neto saliente en **P** y lo inverso si es negativa.

Con base en el concepto de divergencia se van a definir a continuación tres conceptos.

**Definición.** Sea **F** un campo vectorial. Si $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ es positiva en el entorno de un punto **P**, a este punto se le llama ***surgente, fuente*** o ***manantial***. Si $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ es negativa en el entorno de **P**, se le llama ***sumidero***. Si en una región no hay manantiales ni sumideros, entonces $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ es cero y se dice que **F** es un ***campo solenoidal***.

La razón por la cual a los campos vectoriales con divergencia igual a cero se les llama solenoidales es porque el campo de densidad de flujo magnético **B** producido por un solenoide o bobina siempre satisface $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (ver ejemplo 29). Consecuentemente, por extensión, a cualquier campo vectorial **F** que satisfaga $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ se le llama solenoidal.

## Ejemplo 27.

Supóngase que $R$ es el radio de la Tierra, $M$ su masa, **O** su centro y $G$ la constante de gravitación universal. Sea **P** un punto del espacio y **r** el vector de posición

respecto a **O** de **P**. A la longitud $|\mathbf{r}|$ del vector $\mathbf{r}$ se le indica simplemente con $r$. Por la física clásica se sabe que el campo vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ debido a la gravedad (llamado campo de fuerzas gravitacional de la Tierra y que da la fuerza por unidad de masa) está dado para $r > R$ por la expresión

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}.$$

Demostrar que para $r > R$ dicho campo es *solenoidal*.

**Solución:** Para que el campo sea solenoidal debe cumplirse que

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Por propiedades de la divergencia, se tiene (ver inciso $(ii)$ del teorema 11)

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{GM}{r^3}\,\nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla\left(-\frac{GM}{r^3}\right) \cdot \mathbf{r}.$$

Nótese que como $r > R$ entonces $r \neq 0$ y las derivadas anteriores existen.
Si $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ y así

$$\nabla\left(-\frac{GM}{r^3}\right) = -GM\nabla\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\right]$$

$$= -GM\left[\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x\,\hat{\mathbf{i}} + 2y\,\hat{\mathbf{j}} + 2z\,\hat{\mathbf{k}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\right]$$

$$= 3\,\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\left(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= 3\,\frac{GM}{r^5}\,\mathbf{r}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla\left(-\frac{GM}{r^3}\right)\cdot\mathbf{r} = -3\frac{GM}{r^5}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$$

$$= -3\frac{GM}{r^5}r^2$$

$$= -3\frac{GM}{r^3}.$$

Por otra parte, $\nabla\cdot\mathbf{r}=3$ y entonces

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = -3\frac{GM}{r^3} + 3\frac{GM}{r^3} = 0$$

por lo que queda demostrado.

## Ejemplo 28.

En la mecánica de fluidos la divergencia tiene grandes aplicaciones. Considérese, por ejemplo, la ecuación de continuidad de la dinámica de fluidos:

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

donde $\rho$ es la densidad y $\mathbf{v}$ el campo de velocidades. Si el fluido es incompresible, la densidad es constante y, por lo tanto, el campo $\mathbf{v}$ es solenoidal. En efecto, como

$$\rho = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla\rho = 0$$

de donde

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\rho\cdot\mathbf{v} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{v} = 0.$$

## Ejemplo 29.

Cualquier distribución de cargas y corrientes eléctricas dan origen a un *campo electromagnético*. Este campo puede caracterizarse en general por medio de las siguientes cuatro funciones vectoriales.

**E:** Intensidad de campo eléctrico
**H:** Intensidad de campo magnético
**D:** Densidad de flujo eléctrico
**B:** Densidad de flujo magnético

y las leyes que rigen el comportamiento de estos campos son las *ecuaciones de Maxwell*, que escritas en el sistema de unidades MKS son,

1) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

2) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

3) $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

4) $\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$,

siendo ρ y **J** las densidades de carga y corriente, respectivamente. Estas ecuaciones son tan fundamentales en el electromagnetismo clásico como las leyes de Newton en mecánica clásica. Cualquier fenómeno eléctrico, magnético o electromagnético se puede deducir de ellas. Ellas lograron resumir en sólo cuatro ecuaciones los cientos de fenómenos eléctricos, magnéticos y electromagnéticos que se habían observado a lo largo de más de 2000 años sin una compresión satisfactoria. El gran avance se debió al genio de James Clerk Maxwell en (1873) cuyos descubrimientos son comparables a los de Newton y Einstein. Estas ecuaciones son mucho menos conocidas que la famosa ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ debido, en parte, a que son mucho más complicadas por la aparición de divergencias y rotacionales. Sin embargo, con lo estudiado en este capítulo ya se pueden apreciar y entender un poco más.

En las dos primeras aparece una divergencia. La primera expresa que la densidad de flujo magnético siempre es un campo solenoidal. Se puede mostrar que esto implica que las líneas de campo magnético son cerradas y que, por lo tanto, los polos magnéticos aislados no existen. La segunda ecuación expresa que la divergencia de la densidad de flujo eléctrico es igual a la densidad de carga eléctrica. Esta expresión da origen a la conocida ley de Gauss que más adelante se describirá y a la aún más conocida ley de Coulomb.

**Ejemplo 30.**

Determinar la constante $a$ de forma que el vector $\mathbf{v}=(x+3y)\hat{\mathbf{i}}+(y-2z)\hat{\mathbf{j}}+(x+az)\hat{\mathbf{k}}$ sea solenoidal.

**Solución:** Se calcula la divergencia y se iguala a cero

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial x}(x+3y)+\frac{\partial}{\partial y}(y-2z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+az)=0 \quad =2+a\ =0$$

$$\Rightarrow\ a=-2.$$

### 4.7.2 Propiedades e interpretación física del rotacional

**Teorema 12.** ***(Propiedades del rotacional)***. Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ funciones vectoriales de $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ y $\phi$ una función escalar de $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, tales que son diferenciables en una región $R\subset\mathbb{R}^3$. Entonces, $\forall(x,y,z)\in R$ se cumple que:

*i)* $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{rot}(\mathbf{F})+\operatorname{rot}(\mathbf{G})$

*ii)* $\operatorname{rot}(\phi\mathbf{F})=(\operatorname{grad}\phi)\times\mathbf{F}+\phi(\operatorname{rot}\mathbf{F})$

*iii)* $\operatorname{rot}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}-(\operatorname{div}\mathbf{F})\mathbf{G}-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}+(\operatorname{div}\mathbf{G})\mathbf{F}$

donde

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}=G_1\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}+G_2\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}+G_3\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}$$

y

$$(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}=F_1\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial x}+F_2\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial y}+F_3\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial z}.$$

**Demostración:** Se demostrará sólo el inciso $(ii)$ dejando los otros al lector. Sea $\mathbf{F}=F_1\hat{\mathbf{i}}+F_2\hat{\mathbf{j}}+F_3\hat{\mathbf{k}}$; entonces

$$\operatorname{rot}(\phi\mathbf{F})=\operatorname{rot}(\phi F_1\hat{\mathbf{i}}+\phi F_2\hat{\mathbf{j}}+\phi F_3\hat{\mathbf{k}})$$

$$=\left(\frac{\partial(\phi F_3)}{\partial y}-\frac{\partial(\phi F_2)}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(\frac{\partial(\phi F_3)}{\partial x}-\frac{\partial(\phi F_1)}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial(\phi F_2)}{\partial x}-\frac{\partial(\phi F_1)}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$=\left[\phi\frac{\partial F_3}{\partial y}+F_3\frac{\partial\phi}{\partial y}-\phi\frac{\partial F_2}{\partial z}-F_2\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{i}}$$

$$-\left[\phi\frac{\partial F_3}{\partial x}+F_3\frac{\partial\phi}{\partial x}-\phi\frac{\partial F_1}{\partial z}-F_1\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{j}}$$

$$+\left[\phi\frac{\partial F_2}{\partial x}+F_2\frac{\partial\phi}{\partial x}-\phi\frac{\partial F_1}{\partial y}-F_1\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{k}}$$

$$=\left[\left(F_3\frac{\partial\phi}{\partial y}-F_2\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(F_3\frac{\partial\phi}{\partial x}-F_1\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(F_2\frac{\partial\phi}{\partial x}-F_1\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$+\phi\left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$=(\operatorname{grad}\phi)\times\mathbf{F}+\phi(\operatorname{rot}\mathbf{F})$$

y queda demostrado.

En el estudio de los fluidos, además del campo de velocidades, existe otro campo vectorial derivado de él: el *rotacional* de la velocidad que, como se verá a continuación, es una medida de la *rotación* o *vorticidad local* de una partícula dentro del *flujo*. Por esta razón, al *rotacional* se le conoce también como *campo vorticoso*.

Considérese una partícula que se encuentra dentro de un fluido en movimiento. Se supondrá que la partícula es lo suficientemente pequeña para poder considerar que la velocidad del fluido en cada punto es igual a la de la partícula cuando está en ese punto. En general, el movimiento del fluido puede producir rotación local además del movimiento de traslación. La rotación pura se puede estudiar localmente prescindiendo de la traslación, mediante el giro alrededor de un eje instantáneo de rotación que pasa por el centro de gravedad de la partícula. Se analizará el movimiento de las dos rectas perpendiculares, definidas por los puntos $(\mathbf{P}, \mathbf{R})$ y $(\mathbf{Q}, \mathbf{S})$ que giran con la partícula (ver figura 4.18).

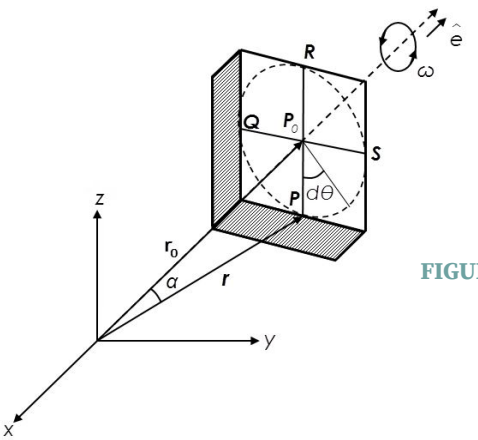



FIGURA 4.18.

El punto $\mathbf{P}_0$ se localiza mediante el vector de posición $\mathbf{r}_0$ referido a un sistema de coordenadas con cualquier orientación, pero cuyo origen, por comodidad, se encuentra en el eje instantáneo de rotación. El punto $\mathbf{P}$ está en una vecindad de $\mathbf{P}_0$ y se localiza mediante el vector de posición $\mathbf{r}$ de manera que el vector que los une es $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \Delta\mathbf{r}$.

La velocidad $\mathbf{v}$, tangencial a la trayectoria circular en el punto $\mathbf{P}$, corresponde a la de traslación propia de ese punto y en general es distinta de la que corresponde a $\mathbf{P}_0$. Se puede demostrar muy fácilmente que el vector $\mathbf{v}$ se puede expresar en términos de la velocidad angular $\omega$ y del vector unitario $\hat{\mathbf{e}}$ paralelo al eje instantáneo de rotación (ver figura 4.18), mediante el producto vectorial

$\mathbf{v} = \omega\hat{\mathbf{e}} \times \Delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{r}$, donde $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}$, y se le conoce como *vector torbellino*. Aplicando el rotacional a esta igualdad,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{r})$$

y utilizando la propiedad $(iii)$ del teorema 12:

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\operatorname{div} \boldsymbol{\omega})\,\Delta\mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\Delta\mathbf{r} + (\operatorname{div} \Delta\mathbf{r})\,\boldsymbol{\omega}.$$

Si se supone que $\boldsymbol{\omega}$ es constante,

$$(\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{\omega} = 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Para el tercer término se tiene que

$$-(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\Delta\mathbf{r} = -\omega_1 \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\mathbf{r}) - \omega_2 \frac{\partial}{\partial y}(\Delta\mathbf{r}) - \omega_3 \frac{\partial}{\partial z}(\Delta\mathbf{r})$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x - x_0)\,\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\,\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\,\hat{\mathbf{k}}\right] = \hat{\mathbf{i}}.$$

Similarmente

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{j}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\Delta\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{k}}.$$

Luego

$$-(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\Delta\mathbf{r} = -\omega_1\,\hat{\mathbf{i}} - \omega_2\,\hat{\mathbf{j}} - \omega_3\,\hat{\mathbf{k}} = -\boldsymbol{\omega}.$$

Finalmente, el cuarto término vale

$$\operatorname{div}(\Delta\mathbf{r}) = \operatorname{div}\left[(x - x_0)\,\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\,\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\,\hat{\mathbf{k}}\right] = 3.$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión para el rotacional de $\mathbf{v}$ se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega} + 3\,\boldsymbol{\omega} = 2\,\boldsymbol{\omega}.$$

De acuerdo con esta igualdad, el rotacional de la velocidad de un flujo es igual a dos veces la velocidad angular con la que gira una partícula diminuta dentro del fluido. Si el movimiento del fluido es tal que $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, se tiene lo que se conoce como *flujo irrotacional*. En general, se define un *campo irrotacional* como aquél que satisface la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Más adelante, en el capítulo 5, se demostrará que si $\mathbf{F}$ es un campo irrotacional arbitrario, existe una función escalar $\phi$ tal que $\mathbf{F}$ es el gradiente de $\phi$, es decir,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, \phi \qquad \text{tal que} \qquad \mathbf{F} = \nabla \phi.$$

También la afirmación inversa es cierta con tal de que la función $\phi$ satisfaga una condición extra sobre sus derivadas. Es decir, si $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar $\phi$ que tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

lo cual nos indica que el rotacional de cualquier gradiente que tenga primeras derivadas parciales continuas es nulo. En efecto, sea $\mathbf{F} = \nabla \phi$, entonces

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \qquad F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \qquad F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

y como por hipótesis $\mathbf{F}$ tiene primeras derivadas continuas se sigue que $\phi$ tiene segundas derivadas continuas. Así,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right)\hat{\mathbf{k}} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

en donde en la última igualdad se ha usado el teorema de Schwarz.

En mecánica clásica las fuerzas irrotacionales desempeñan un papel muy importante. En estos casos se puede demostrar que la energía se conserva y por tal razón a las fuerzas irrotacionales se les llama también fuerzas conservativas. Si $\mathbf{F}$ representa una fuerza conservativa, a la función $\phi$, tal que $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, se le llama *energía potencial* o simplemente *potencial.*

## Ejemplo 31.

La ley de Hooke establece que una fuerza elástica $\mathbf{F}$ es directamente proporcional al vector desplazamiento $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ de la partícula sobre la cual actúa, es decir, $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$. Verificar que esta es una fuerza conservativa.

**Solución:** Si se aplica el rotacional a $\mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (-k\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -kx & -ky & -kz \end{vmatrix} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = 0.$$

Por consiguiente, la fuerza elástica $\mathbf{F}$ es conservativa.

## Ejemplo 32.

Obtener los valores de $a$, $b$ y $c$ de manera que el siguiente campo sea irrotacional.

$$\mathbf{v} = (x + 2y + az)\,\hat{\mathbf{i}} + (bx - 3y - z)\,\hat{\mathbf{j}} + (4x + cy + 2z)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:**

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + az & bx - 3y - z & 4x + cy + 2z \end{vmatrix}$$

$$= (c+1)\hat{\mathbf{i}} - (4-a)\hat{\mathbf{j}} + (b-2)\hat{\mathbf{k}}.$$

Como $\text{rot}(\mathbf{v})$ debe ser cero se sigue que

$$\begin{aligned} c+1=0 \quad &\Rightarrow \quad c=-1 \\ -(4-a)=0 \quad &\Rightarrow \quad a=4 \\ b-2=0 \quad &\Rightarrow \quad b=2. \end{aligned}$$

Después de esta breve discusión sobre el rotacional regresemos a las ecuaciones de Maxwell. Se vio que las dos últimas ecuaciones son

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J},$$

en donde aparecen los rotacionales del campo eléctrico **E** y del flujo magnético **B**. Se ve que cuando la densidad de flujo magnético no varía con el tiempo (es decir, cuando $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$) el campo eléctrico es irrotacional y que por lo tanto existe una función escalar $\phi$ tal que $-\nabla\phi = \mathbf{E}$, a la que se le llama *potencial eléctrico*. En el capítulo 6 se discutirá con más extensión el significado de estas ecuaciones.

Para finalizar esta sección se presenta la siguiente tabla que indica a que tipo de campos se aplican los operadores gradiente, divergencia y rotacional y el tipo de campos a los que dan lugar.

| *Operador* | *Se aplica a*: | *Da por resultado*: |
|---|---|---|
| gradiente | campo escalar | campo vectorial |
| gradiente | campo vectorial | matriz† |
| divergencia | campo vectorial | campo escalar |
| rotacional | campo vectorial | campo vectorial |

† la matriz que resulta en este caso es la matriz jacobiana y es una función matricial de variable vectorial. Se le puede llamar también *campo matricial*.

### 4.7.3 El laplaciano y otros operadores de segundo orden

Así como $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ y $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ son invariantes de primer orden de la matriz jacobiana $d\mathbf{F}/d\mathbf{r}$; existen los llamados *invariantes de segundo orden*:

Divergencia de un gradiente: $\nabla \cdot (\nabla \phi)$ (llamado laplaciano de $\phi$)
Rotacional de un gradiente: $\nabla \times (\nabla \phi)$
Gradiente de una divergencia: $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{F})$
Divergencia de un rotacional: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$
Rotacional de un rotacional: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$.

Entre estos invariantes el más importante es el laplaciano de $\phi$ que se define como la divergencia del gradiente de $\phi$ y que a continuación se estudia con más detalle. Sea $\phi(x, y, z)$ una función escalar con segundas derivadas parciales definidas en una región de $\mathbb{R}^3$. La matriz hessiana de $\phi$ con respecto a $x$, $y$, $z$ está dada por

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{bmatrix}.$$

Se puede ver que su traza es igual al laplaciano de $\phi$. En efecto

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Al operador

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

se le llama *laplaciano* y se representa generalmente con el símbolo $\nabla^2$ y al laplaciano de $\phi$ como $\nabla^2\phi$ o $\text{lap}(\phi)$. Además, cuando está igualado a cero da lugar a la llamada *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

que surge en problemas, por ejemplo, de acústica, determinación de temperaturas, potencial gravitacional, potencial electrostático, mecánica de fluidos, elasticidad, sismología, etc. Si una función satisface la ecuación de Laplace se le llama *función armónica*.

## Ejemplo 33.

Probar que la función $1/|\mathbf{r}|$, siendo $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, es una función armónica para todo valor de $|\mathbf{r}| \neq \mathbf{0}$.

**Solución:** $1/|\mathbf{r}|$ es continua siempre que $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Si se calcula su laplaciano se tendrá que:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \left[\frac{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$$

$$+\left[\frac{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right]$$

$$+\left[\frac{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right]$$

$$=\frac{-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}+3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$=0$$

y por lo tanto, la función $1/|\mathbf{r}|$ es armónica en todos los puntos $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$.

Nótese que cuando las segundas derivadas parciales mixtas de $\phi$ son continuas, los elementos simétricos respecto a la diagonal principal de $H$ son iguales entre sí, debido al teorema de Schwarz.

## Ejemplo 34.

Demostrar que si $\mathbf{F}$ es una función con segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)=0.$$

**Solución:** Sea $\mathbf{F}=F_1\hat{\mathbf{i}}+F_2\hat{\mathbf{j}}+F_3\hat{\mathbf{k}}$, donde $F_1$, $F_2$ y $F_3$ tienen segundas derivadas parciales continuas. Por definición

$$\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Entonces,

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}$$

$$= \left( \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \right)$$

y al aplicar el Teorema de Schwarz:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Por lo tanto, queda demostrado.

Aunque originalmente se ha dado la definición de laplaciano como un operador que actúa sobre una función escalar $\phi$, se puede extender la definición y aplicarlo a un campo vectorial $\mathbf{F}$. En esta breve discusión sólo se extenderá la definición para el caso en el que $\mathbf{F}$ esté expresado en coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{k}},$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$. La definición es

$$\nabla^2 \mathbf{F} \equiv (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3).$$

Los cuatro operadores: grad, rot, div y lap están relacionados entre sí mediante la siguiente identidad

$$\text{rot}(\text{rot}\,\mathbf{F}) = \text{grad}(\text{div}\,\mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}.$$

Su demostración se deja como ejercicio al lector.

## Ejercicios

**4.74.** Dado el campo vectorial $\mathbf{v}(x, y, z) = xy\,\hat{\mathbf{i}} + yz\,\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{k}}$, calcular su gradiente, su divergencia y su rotacional. Calcular asimismo el gradiente de la divergencia, el laplaciano de la divergencia, y la divergencia del rotacional.

**4.75.** Sea $\mathbf{F}(u, v) = P(u, v)\,\hat{\mathbf{i}} + Q(u, v)\,\hat{\mathbf{j}}$ y sea la transformación

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.

**4.76.** Calcular el rotacional del campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad (r = |\mathbf{r}|)$$

**4.77.** Investigar si la siguiente función es armónica

$$A(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2+3y^2+3z^2}}.$$

**4.78.** Comprobar que si $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (4xy,\ 2xz,\ x+yz)$ la divergencia de su rotacional es igual a cero.

**4.79.** Si $A(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $\mathbf{B}(x, y, z) = x^2zy\,\hat{\mathbf{i}} + xy^2z\,\hat{\mathbf{j}} + xyz^2\,\hat{\mathbf{k}}$, determinar:

a) $\nabla A$, $\nabla^2 A$ y $\nabla \cdot \mathbf{B}$
b) $\text{div}(A\mathbf{B})$ y $\text{rot}(A\mathbf{B})$

en el punto $\mathbf{P} = (1, -1, 3)$.

**4.80.** Calcular $\text{rot}(\text{rot}\,\mathbf{v})$ para la función

$$\mathbf{v}(x, y, z) = 3z\,\hat{\mathbf{i}} + 2x^2yz\,\hat{\mathbf{j}} + 3x^2z^3\,\hat{\mathbf{k}}.$$

**4.81.** Si el campo de velocidades de un fluido está dado por

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x^3y^2\,\hat{\mathbf{i}} + y^3z^2\,\hat{\mathbf{j}} + x^2z^3\,\hat{\mathbf{k}}$$

determinar si el fluido es incompresible y si las trayectorias que siguen sus partículas son rectilíneas.

**4.82.** Comprobar si se satisface la ecuación de continuidad para un flujo constante respecto al tiempo e incompresible, cuando las componentes de la velocidad, en cada una de las direcciones $x$, $y$, $z$, están dadas respectivamente por

$$v_x = 2x^2 - xy + z^2; \quad v_y = x^2 - 4xy + y^2; \quad v_z = -2xy - yz + y^2$$

**4.83.** Se desea construir una pila que genere un campo eléctrico dado por

$$\mathbf{E} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 2 + 3z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

a) Demostrar que sí es posible producir tal campo. (Nota, todo campo eléctrico producido por una pila cuyo voltaje no varía con el tiempo debe satisfacer la ecuación $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.)

b) ¿Cuál es la diferencia de potencial en volts, entre los bornes de la pila, si estos se encuentran en los puntos (1, 1, 1) y (2, 2, 2)?

**4.84.** Obtener el laplaciano de $\mathbf{r} = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

**4.85.** Dos campos vectoriales están dados por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 3y^2\,\hat{\mathbf{i}} + z\,\hat{\mathbf{j}} + 2y\,\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \mathbf{G}(x, y, z) = yz\,\hat{\mathbf{i}} + xz\,\hat{\mathbf{j}} + xy\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Determinar si tales campos son los gradientes de campos escalares.

**4.86.** Demostrar que cuando existe una función escalar $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferente de cero y tal que $\lambda\,\mathbf{F}$ sea irrotacional, entonces:

$$\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

**4.87.** El campo de velocidades de un fluido se encuentra definido por $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xyz^2,\ 2xy^3,\ -x^2yz)$. Determinar el punto $\mathbf{P} = (0,\ b,\ 1)$ en el que el fluido es incompresible y el campo de velocidad irrotacional.

**4.88.** Sean $f$ y $g$ dos funciones reales de variable vectorial. Demostrar las siguientes igualdades.

a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

b) $\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$

c) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

d) $\nabla\left[h\left(g(\mathbf{x})\right)\right]=\frac{dh}{dg}\nabla g$, siendo $h$ una función real de variable escalar

e) $\nabla\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right)=2\,\mathbf{x}$.

**4.89.** Sean $\phi$ y $\psi$ dos funciones reales de variable vectorial y sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dos funciones vectoriales de variable vectorial. Demostrar las siguientes igualdades.

a) $\nabla\cdot\left(\phi\mathbf{F}\right)=\left(\nabla\phi\right)\cdot\mathbf{F}+\phi\nabla\cdot\mathbf{F}$

b) $\nabla\times\nabla\phi=\mathbf{0}$

c) $\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

d) $\nabla\times\left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right)=\mathbf{F}\nabla\cdot\mathbf{G}-\mathbf{G}\nabla\cdot\mathbf{F}+\left(\mathbf{G}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}-\left(\mathbf{F}\cdot\nabla\right)\mathbf{G}$

e) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{f}=0$.

## 4.8 Coordenadas curvilíneas

En muchos fenómenos físicos no es conveniente la formulación matemática en términos de los sistemas coordenados cartesianos. Considérese por ejemplo la siguiente situación: se tiene un material isotrópico y homogéneo al cual se le va a inyectar corriente eléctrica mediante una varilla clavada en este (Un material es isotrópico cuando tiene las mismas propiedades en cualquier dirección y es homogéneo cuando todas sus partes están hechas del mismo material y por lo tanto tiene las mismas propiedades en todos sus puntos). En el momento en el que se inyecta la corriente se crea un campo eléctrico como el que se muestra en la figura 4.19.

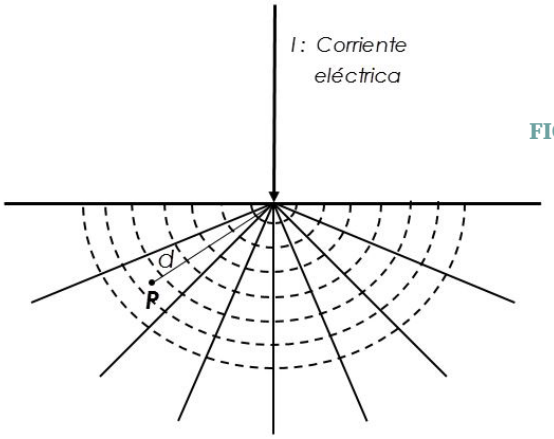



FIGURA 4.19.

Las líneas que salen radialmente del punto donde se aplica la corriente eléctrica son las líneas de campo eléctrico. Las líneas que se muestran como semicircunferencias en la figura son en realidad semiesferas, ya que la figura representa sólo una sección plana del sistema. Estas semiesferas son superficies equipotenciales (con igual potencial eléctrico). En este fenómeno físico el potencial eléctrico $U$ en un punto **P** situado dentro del material es proporcional a la corriente eléctrica inyectada $I$ e inversamente proporcional a la distancia $d$ que hay entre **P** y el punto donde se aplica dicha corriente; matemáticamente se tiene que

$$U = K\frac{I}{d}$$

siendo $K$ una constante de proporcionalidad.

En coordenadas cartesianas, y situando el origen en el punto donde se aplica la corriente, la distancia $d$ estaría dada por

$$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

siendo $(x, y, z)$ las coordenadas de **P**. Entonces el potencial eléctrico en **P** es

$$U(x, y, z) = \frac{KI}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

En cambio, en coordenadas asféricas el potencial eléctrico en el mismo punto **P**, cuyas coordenadas esféricas son $(r, \varphi, \theta)$, es simplemente

$$U(r, \varphi, \theta) = \frac{KI}{r}.$$

Nótese la ventaja de utilizar el sistema esférico.

En esta sección se desea exponer brevemente la forma en que se pueden expresar algunas importantes operaciones diferenciales utilizando sistemas coordenados generales. La teoría se desarrolla para el caso de tres dimensiones, pero los resultados se pueden adaptar fácilmente para el caso de dos dimensiones.

Un cambio de coordenadas es una transformación de las variables $u$, $v$ y $w$ a las variables $x$, $y$ y $z$ de la forma

$$x = F_1(u, v, w); \qquad y = F_2(u, v, w); \qquad z = F_3(u, v, w) \tag{52}$$

donde $u$, $v$ y $w$ son las nuevas coordenadas del punto $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ a las que se les llama *coordenadas curvilíneas.* Se debe tener además que las funciones $F_1$, $F_2$ y $F_3$ sean diferenciables y que la transformación sea invertible. En forma vectorial las ecuaciones $(52)$ se escriben como

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= F_1(u, v, w)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(u, v, w)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(u, v, w)\hat{\mathbf{k}} \\ &= \mathbf{F}(u, v, w),\end{aligned} \tag{52'}$$

donde $\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\,\hat{\mathbf{j}} + F_3\hat{\mathbf{k}}$ y si se denota con $\mathbf{u}$ a la terna $(u, v, w)$ entonces la ecuación $(52')$ se escribe simplemente como

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{u}). \tag{52''}$$

El pedir que la transformación sea invertible significa que existen funciones diferenciables $G_1$, $G_2$ y $G_3$ para las cuales

$$u = G_1(x, y, z); \qquad v = G_2(x, y, z); \qquad w = G_3(x, y, z) \tag{53}$$

y tales que la transformación sea única. Esto implica que para cada terna $(x, y, z)$ debe existir una y sólo una terna $(u, v, w)$ y viceversa. Se puede demostrar que esto es equivalente a exigir que el jacobiano de la transformación de $(u, v, w)$ a $(x, y, z)$ no se anule, es decir, que

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \neq 0.$$

Cuando $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) > 0$ el sistema $(u, v, w)$ es un sistema derecho al igual que el sistema $(x, y, z)$. Las ecuaciones (53) en forma vectorial se escriben como

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}(x, y, z) \tag{53'}$$

o

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \tag{53''}$$

donde $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Puesto que $\mathbf{G}$ está asociada a la transformación inversa se le denota también como $\mathbf{F}^{-1}$.

A pesar de que la introducción del símbolo $\mathbf{u}$ en esta formulación parece muy natural, debemos advertir, sin embargo, que debe utilizarse con restricciones ya que la terna $\mathbf{u} = (u, v, w)$ no es necesariamente un vector en el mismo sentido que el vector $\mathbf{r}$. Por ejemplo, si se tienen las ternas $\mathbf{u}_1 = (r_1, \varphi_1, \theta_1)$ y $\mathbf{u}_2 = (r_2, \varphi_2, \theta_2)$, siendo $r_1$, $\varphi_1$, etc., coordenadas asféricas, no tiene sentido el sumar $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ en la forma usual. En el caso del vector $\mathbf{r}$ se tiene la igualdad $(x, y, z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ pero para el caso de las variables $u$, $y$, $w$ el hecho de escribirlas como $(u, v, w)$ no significa que esto sea igual a $u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$.

## Ejemplo 35.

Determinar si las ecuaciones de transformación siguientes definen un sistema de coordenadas curvilíneas.

$$x = 2u + 3v; \qquad y = 4u^2 + 12uv + 9v^2; \qquad z = w.$$

**Solución:** En primer lugar se observa que las funciones $F_1$, $F_2$ y $F_3$ son diferenciables y para ver si la transformación de $(u, v, w)$ a $(x, y, z)$ es invertible se evalúa el jacobiano $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)$

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 8u+12v & 12u+18v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=0.$$

Como el jacobiano es cero, no es posible definir un sistema de coordenadas curvilíneas con las ecuaciones de transformación dadas.

## Ejemplo 36.

Determinar si las ecuaciones de transformación siguientes definen un sistema de coordenadas curvilíneas.

$$\begin{aligned}x&=r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta\\ y&=r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta\\ z&=r\cos\varphi,\end{aligned}$$

donde $r\geq 0$; $0\leq\theta<2\pi$ y $0\leq\varphi\leq\pi$.

**Solución:** Las funciones $F_1$, $F_2$ y $F_3$ son diferenciables y el jacobiano $J\left(\frac{x,y,z}{r,\varphi,\theta}\right)$ es

$$J\left(\frac{x,y,z}{r,\varphi,\theta}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\\ \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi & r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi & r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\\ \cos\varphi & -r\,\text{sen}\,\varphi & 0\end{bmatrix}=r^2\,\text{sen}\,\varphi.$$

Este jacobiano es distinto de cero en todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ excepto sobre el eje Z. Por lo tanto, si se exige que $r>0$ y $0<\varphi<\pi$ el jacobiano es diferente de cero y las ecuaciones dadas arriba definen un sistema de coordenadas curvilíneas en todo $\mathbb{R}^3$ excepto sobre el eje Z. Este sistema de coordenadas es el sistema de coordenadas esférico y será discutido con detalle en la sección 4.8.2 y en la figura 4.29.

Antes de seguir adelante conviene mencionar algunos conceptos acerca del significado geométrico de los sistemas de coordenadas. Considérense primero las coordenadas cartesianas. En este caso, a cada una de las coordenadas $x$, $y$ y $z$ de un punto se le puede asociar un plano. Por ejemplo, a la coordenada $x$ corresponde un plano paralelo al $YZ$ y que corta al eje X en el valor $x$, etc. De esta manera, al conjunto de coordenadas de todos los puntos del espacio están asociadas tres familias de planos mutuamente perpendiculares: $x=$ constante, $y=$ constante y $z=$ constante. Ahora imagine el lector que se sobreponen en este sistema, otras tres familias de superficies. Las superficies de cualquiera de estas nuevas familias no tienen porque ser paralelas entre sí, ni planas.

Ahora bien, cualquier cambio de coordenadas tiene definidas implícitamente tres familias de superficies de este tipo, ya que si $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v, w)$ es un cambio de coordenadas, al fijar una de las variables $u$, $v$ o $w$ en las expresiones

$$x=F_1(u, v, w); \qquad y=F_2(u, v, w); \qquad z=F_3(u, v, w)$$

se obtienen las ecuaciones paramétricas de una superficie. Por ejemplo, si $w=k_3$, se tiene

$$x=F_1(u, v, k_3); \qquad y=F_2(u, v, k_3); \qquad z=F_3(u, v, k_3), \tag{54}$$

que son las ecuaciones paramétricas de una superficie con parámetros $u$ y $v$. Si a $k_3$ se le dan diferentes valores las ecuaciones anteriores definen una familia de superficies. Cada uno de los miembros de esta familia queda definido a partir de un valor particular de $k_3$. Este valor de $k_3$ puede determinarse conociendo un punto $\mathbf{P}=(x, y, z)$ de dicha superficie mediante la transformación inversa

$$w=G_3(x, y, z)=k_3. \tag{55}$$

Nótese que esta ecuación es otra forma de representar a la superficie $k_3$ cuyas ecuaciones paramétricas son las ecuaciones (54), ya que la ecuación (55) tiene la forma que se utilizó en el capítulo 2 para representar a una superficie.

De la misma forma, otras dos familias de superficies coordenadas son $u=G_1(x,\ y,\ z)=k_1$ y $v=G_2(x,\ y,\ z)=k_2$. A estas familias se les denomina

*superficies coordenadas.* Cualquier punto $\mathbf{P}=(x, y, z)$ se puede describir como la intersección de tres planos (usando coordenadas cartesianas), o bien como la intersección de tres superficies (usando coordenadas curvilíneas). Ver figura 4.20.

Otra forma de interpretar un cambio de coordenadas es como una intersección de curvas en vez de una intersección de superficies. Por ejemplo, en el sistema cartesiano cada punto del espacio puede definirse como la intersección de tres rectas paralelas a los ejes coordenados. Así, el punto de coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$ es la intersección de la recta paralela al eje X de ecuaciones

$$y=y_0 \qquad \text{y} \qquad z=z_0,$$

con la recta paralela al eje Y de ecuaciones

$$x=x_0 \qquad \text{y} \qquad z=z_0$$

y con la recta paralela al eje Z de ecuaciones

$$x=x_0 \qquad \text{y} \qquad y=y_0.$$

Estas rectas se denominan en general curvas coordenadas y como se ve, cada una queda definida fijando dos de las variables. Para el caso de un cambio de coordenadas curvilíneo dado por $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v, w)$, al fijar dos de las variables, por ejemplo, $v=C_2$ y $w=C_3$, se obtiene la curva coordenada de ecuaciones paramétricas

$$x=F_1(u, C_2, C_3); \qquad y=F_2(u, C_2, C_3); \qquad z=F_3(u, C_2, C_3).$$

A esta curva se le llama *curva u*. Si $C_1$ y $C_2$ toman diferentes valores, estas ecuaciones definen una familia de curvas coordenadas $u$. Asimismo, otra familia de curvas coordenadas se obtiene al fijar $u$ y $w$ a las cuales se les llama *curvas v*. La tercera familia se obtiene al fijar $u$ y $v$ dando lugar a las *curvas w*. Entonces, el punto **P** se puede describir como la intersección simultánea de una curva $u$ con una curva $v$ y con una curva $w$. Ver la figura 4.21.

En resumen, se tiene que un punto en $\mathbb{R}^3$ puede quedar definido a partir de la intersección de las tres superficies coordenadas:

$$G_1(x, y, z) = k_1; \qquad G_2(x, y, z) = k_2; \qquad G_3(x, y, z) = k_3$$

o a partir de la intersección de las tres curvas coordenadas:

$$u: \begin{cases} G_2(x, y, z) = C_2 \\ G_3(x, y, z) = C_3 \end{cases}; \quad v: \begin{cases} G_1(x, y, z) = C_1 \\ G_3(x, y, z) = C_3 \end{cases}; \quad w: \begin{cases} G_1(x, y, z) = C_1 \\ G_2(x, y, z) = C_2. \end{cases}$$

Cuando se tiene una función escalar de variable vectorial $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada en coordenadas cartesianas $x$, $y$, $z$, y se desea obtener su expresión en un nuevo sistema $u$, $v$, $w$, bastará sustituir en $\phi(x, y, z)$ las variables $x$, $y$ y $z$ por sus expresiones en términos de las nuevas coordenadas y el problema queda resuelto. Recuérdese por ejemplo el caso de la función escalar $U = K\left(I/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ vista anteriormente, que en coordenadas asféricas quedó simplemente como $U = K(I/r)$. En cambio, cuando se tiene una función vectorial de variable vectorial $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dicha sustitución sólo resuelve el problema a medias porque aunque después la sustitución las funciones $F_1$, $F_2$ y $F_3$ queden en términos de $u$, $v$ y $w$, estas tres funciones siguen siendo las componentes de $\mathbf{F}$ en las direcciones de los vectores $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ del sistema cartesiano original. En general, cuando se efectúa un cambio de coordenadas es más conveniente expresar al vector $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en términos de sus componentes respecto a unos nuevos vectores que están íntimamente relacionados con el cambio de coordenadas y que se discutirán a continuación. En primer lugar, recordemos que en Álgebra Lineal se demuestra que existen muchas posibilidades de descomponer a un vector arbitrario (de hecho, existe un número infinito de posibilidades) y que por supuesto una de esas posibilidades es en términos de la base canónica $B_c = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, que es una base ortonormal. Pero lo que interesa aquí es descomponer a $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en términos de unas bases especiales que, como se dijo, están íntimamente relacionadas con el cambio de coordenadas. Estas bases especiales son dos y están formadas con los siguientes conjuntos de vectores:

a) El conjunto de vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas.
b) El conjunto de vectores unitarios normales a las superficies coordenadas.

Ahora se verá como obtenerlos.

Tres vectores tangentes a las curvas coordenadas $u$, $v$ y $w$ son respectivamente (ver figura 4.21)

$$\mathbf{E}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$$

$$\mathbf{E}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

$$\mathbf{E}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

y debido al hecho de que el jacobiano asociado al cambio de coordenadas es diferente de cero se sigue que los tres vectores anteriores son linealmente independientes. Por lo tanto, el conjunto $\{\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v, \mathbf{E}_w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ a la que se le llama *base covariante*. Entonces, los vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas $u$, $v$ y $w$ son respectivamente

$$\hat{\mathbf{e}}_u = \frac{\mathbf{E}_u}{|\mathbf{E}_u|} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\mathbf{E}_v}{|\mathbf{E}_v|} = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_w = \frac{\mathbf{E}_w}{|\mathbf{E}_w|} = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\,.$$

Así, la base mencionada en el inciso a) de la página anterior es $\{\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w\}$, donde $h_u = \left|\partial \mathbf{r}/\partial u\right|$; $h_v = \left|\partial \mathbf{r}/\partial v\right|$; $h_w = \left|\partial \mathbf{r}/\partial w\right|$ y se les llama *factores de escala*.

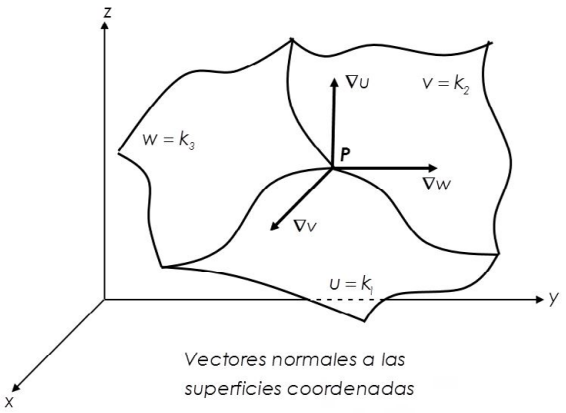
Por otro lado, tres vectores normales a las superficies coordenadas $u = k_1$, $v = k_2$ y $w = k_3$ son respectivamente (ver figura 4.20)

$$\mathbf{E}_U = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_V = \nabla v = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}}$$

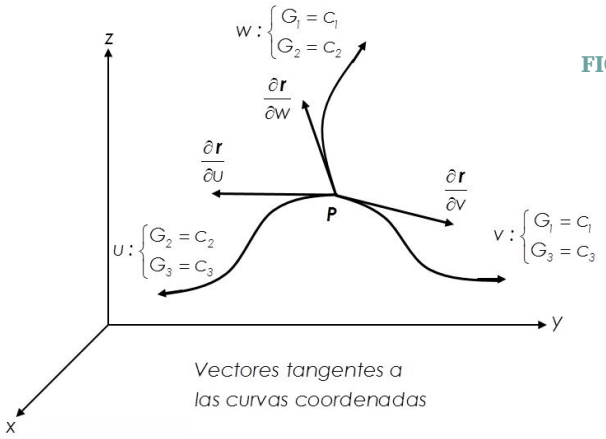
$$\mathbf{E}_W = \nabla w = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}}$$

y nuevamente, debido a que el jacobiano asociado al cambio de coordenadas es diferente de cero, los tres vectores anteriores son linealmente independientes.




Vectores normales a las superficies coordenadas

**FIGURA 4.20.**




Vectores tangentes a las curvas coordenadas

**FIGURA 4.21.**

Por lo tanto, el conjunto $\{\mathbf{E}_U, \mathbf{E}_V, \mathbf{E}_W\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ a la que se le llama *base contravariante*. Entonces, los vectores unitarios normales a las superficies coordenadas $u = k_1$, $v = k_2$ y $w = k_3$ son respectivamente

$$\hat{\mathbf{e}}_U = \frac{\mathbf{E}_U}{|\mathbf{E}_U|} = \frac{1}{h_U}\nabla u = \frac{1}{h_U}\frac{du}{d\mathbf{r}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_V = \frac{\mathbf{E}_V}{|\mathbf{E}_V|} = \frac{1}{h_V}\nabla v = \frac{1}{h_V}\frac{dv}{d\mathbf{r}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_W = \frac{\mathbf{E}_W}{|\mathbf{E}_W|} = \frac{1}{h_W}\nabla w = \frac{1}{h_W}\frac{dw}{d\mathbf{r}},$$

y en consecuencia la base mencionada en el inciso b) de la página 512 es $\{\hat{\mathbf{e}}_U, \hat{\mathbf{e}}_V, \hat{\mathbf{e}}_W\}$, donde $h_U = |\nabla u|$; $h_V = |\nabla v|$; $h_W = |\nabla w|$ y se llaman también *factores de escala*.

Como se puede apreciar, tanto los factores de escala $h_U$, $h_V$, $h_W$, $h_u$, $h_v$ y $h_w$, como los vectores de las bases definidas arriba dependen en general de la variable $\mathbf{r}$ y son diferentes de cero. Esto significa que en cada punto del espacio la base es diferente.

Las bases covariante y contravariante tienen la característica de ser recíprocas entre sí.

**Definición.** Dos conjuntos de vectores: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ son recíprocos o duales entre sí, cuando

$$\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_n = \delta_{mn} \qquad \forall\ m, n = 1, 2, 3,$$

donde el símbolo $\delta_{mn}$ se define como

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n \end{cases}$$

y se le llama delta de Kronecker.

Para conjuntos recíprocos se demuestra además que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\left|\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right]\right|}; \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\left|\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right]\right|}; \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\left|\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right]\right|}$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\left|\left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right]\right|}; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\left|\left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right]\right|}; \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\left|\left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right]\right|}$$

y que

$$\left|\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right]\right| = \frac{1}{\left|\left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right]\right|}$$

donde $\left|\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right]\right| \equiv \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ y $\left|\left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right]\right| \equiv \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3$.

Para demostrar que las bases covariante y contravariante son recíprocas debe demostrarse que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla u = 1; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla v = 1; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \nabla w = 1$$

y que

$$0 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla w$$

$$= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \nabla u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \nabla v.$$

En efecto, como $u = G_1(x, y, z) = G_1\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)$ al derivar con respecto a $u$ por la regla de la cadena se tiene que

$$1 = \frac{\partial u}{\partial u} = \frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

que también se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial G_1}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial G_1}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) = 1.$$

Pero

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \nabla u = \frac{\partial G_1}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial G_1}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial G_1}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

por lo tanto $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla u = 1$. De manera similar se demuestra que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \nabla w = 1.$$

Ahora se deriva $u$ con respecto a $v$ (como $u$ y $v$ son independientes esta derivada vale cero)

$$0=\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial G_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

lo que implica que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\nabla u=0$$

y de manera semejante se demuestra que

$$0=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\nabla v=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\nabla w=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\nabla u=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\nabla w=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\cdot\nabla u=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\cdot\nabla v$$

y por lo tanto las bases $\{\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v, \mathbf{E}_w\}$ y $\{\mathbf{E}_U, \mathbf{E}_V, \mathbf{E}_W\}$ son recíprocas. Además, de las igualdades anteriores de desprender que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ es perpendicular a $\nabla v$ y a $\nabla w$. Esto implica que $\nabla v\times\nabla w$ es paralelo a $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, es decir,

$$\nabla v\times\nabla w=\alpha\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$$

para algún valor de $\alpha$. Para determinar este valor se multiplica escalarmente esta igualdad por $\nabla u$ con lo que se obtiene $\alpha=\nabla u\cdot\nabla v\times\nabla w\equiv\left|\left[\nabla u,\ \nabla v,\ \nabla w\right]\right|$. De esta manera se demuestran las siguientes igualdades.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=\frac{1}{\alpha}\nabla v\times\nabla w;\qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\frac{1}{\alpha}\nabla w\times\nabla u;\qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}=\frac{1}{\alpha}\nabla u\times\nabla v$$

$$\nabla u=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right);\quad \nabla v=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right);\quad \nabla w=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)$$

donde $\beta=(\partial\mathbf{r}/\partial u)\cdot(\partial\mathbf{r}/\partial v)\times(\partial\mathbf{r}/\partial w)=1/\alpha.$

Las bases covariante y contravariante $\{\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v, \mathbf{E}_w\}$, $\{\mathbf{E}_U, \mathbf{E}_V, \mathbf{E}_W\}$ son de primerísima importancia en algunas áreas de las matemáticas como el Cálculo Tenso-

rial y el Análisis Tensorial. No obstante, en todo lo que sigue ya no se discutirían estas bases y sólo estaremos interesados en las bases normalizadas $\{\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w\}$ y $\{\hat{\mathbf{e}}_U, \hat{\mathbf{e}}_V, \hat{\mathbf{e}}_W\}$.

Se considerará que una función $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ está expresada totalmente en la nuevo sistema de coordenadas si tiene la forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}_u(u, v, w)\hat{\mathbf{e}}_u + \mathcal{F}_v(u, v, w)\hat{\mathbf{e}}_v + \mathcal{F}_w(u, v, w)\hat{\mathbf{e}}_w$$

o bien

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}_U(u, v, w)\hat{\mathbf{e}}_U + \mathcal{F}_V(u, v, w)\hat{\mathbf{e}}_V + \mathcal{F}_W(u, v, w)\hat{\mathbf{e}}_W,$$

donde $\mathcal{F}_u$, $\mathcal{F}_v$, $\mathcal{F}_w$, $\mathcal{F}_U$, $\mathcal{F}_V$ y $\mathcal{F}_W$ son funciones escalares de las nuevas variables $u$, $v$ y $w$. Se les llama componentes de la función $\mathcal{F}$ en la base $\{\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w\}$, o bien, en la base $\{\hat{\mathbf{e}}_U, \hat{\mathbf{e}}_V, \hat{\mathbf{e}}_W\}$ según sea el caso.

Es ilustrativo comparar la estructura de las dos últimas ecuaciones con la de la ecuación $(52')$. En las tres ecuaciones las variables de las componentes son las coordenadas nuevas $u$, $v$ y $w$. Sin embargo, en las dos ecuaciones anteriores las componentes están referidas a las bases nuevas $\{\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w\}$ o bien, $\{\hat{\mathbf{e}}_U, \hat{\mathbf{e}}_V, \hat{\mathbf{e}}_W\}$ mientras que en $(52')$ las componente están referidas a la base original $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$. Esta diferencia debe ser así porque las dos ecuaciones anteriores son las expresiones para una función $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ expresada totalmente en el nuevo sistema de coordenadas y en cambio $(52')$ es la expresión de una función $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ que define un cambio de coordenadas a través de sus componentes cartesianas $F_1$, $F_2$ y $F_3$ que dan los valores de $x$, $y$ y $z$ en función de $u$, $v$ y $w$.

En general, los vectores $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$, $\hat{\mathbf{e}}_w$ pueden no ser mutuamente ortogonales, ni tampoco los $\hat{\mathbf{e}}_U$, $\hat{\mathbf{e}}_V$, $\hat{\mathbf{e}}_W$. Pero cuando sí lo son los desarrollos matemáticos se simplifican considerablemente, como se podrá ver en el teorema que sigue.

**Definición.** Se dice que un sistema coordenado curvilíneo es ortogonal si las curvas coordenadas $u$, $v$ y $w$ son ortogonales en cada punto. En este caso es claro que los tres vectores $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$ y $\hat{\mathbf{e}}_w$ son mutuamente ortogonales en cada punto; esto es,

$$\hat{\mathbf{e}}u \cdot \hat{\mathbf{e}}v = \hat{\mathbf{e}}u \cdot \hat{\mathbf{e}}w = \hat{\mathbf{e}}v \cdot \hat{\mathbf{e}}w = 0.$$

**Teorema 13.** Si un sistema de coordenadas curvilíneas es ortogonal, entonces:

*i)* $h_U = \dfrac{1}{h_u}$ ; $h_V = \dfrac{1}{h_v}$ ; $h_W = \dfrac{1}{h_w}$

*ii)* $\hat{\mathbf{e}}_u = \hat{\mathbf{e}}_U$ ; $\hat{\mathbf{e}}_v = \hat{\mathbf{e}}_V$ ; $\hat{\mathbf{e}}_w = \hat{\mathbf{e}}_W$

*iii)* $\left|\left[\nabla u, \nabla v, \nabla w\right]\right| = \dfrac{1}{h_u\, h_v\, h_w}$

*iv)* $\hat{\mathbf{e}}_u = h_U \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u \nabla u = \hat{\mathrm{e}}_U$

$\hat{\mathbf{e}}_v = h_V \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v \nabla v = \hat{\mathrm{e}}_V$

$\hat{\mathbf{e}}_w = h_W \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_w \nabla w = \hat{\mathrm{e}}_W$ .

**Demostración:**

*i)* y *ii)* Como $\left\{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right\}$ y $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$ son recíprocos, entonces:

$$\nabla u = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|}$$

y como $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$ y $\hat{\mathbf{e}}_w$ son ortogonales se tiene que $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ , $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ y $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$ también son ortogonales. Entonces

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|$$

por lo que

$$\nabla u = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|} \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|} \times \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|}$$

pero

$$h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| ; \quad \hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} ; \quad \hat{\mathbf{e}}_w = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{e}}_U = \frac{1}{h_U} \nabla u$$

por lo tanto

$$\nabla u = \frac{1}{h_u} \hat{\mathbf{e}}_v \times \hat{\mathbf{e}}_w = h_U \hat{\mathbf{e}}_U .$$

Como los vectores $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$ y $\hat{\mathbf{e}}_w$ son ortonormales se tiene que

$$\hat{\mathbf{e}}_v \times \hat{\mathbf{e}}_w = \pm \hat{\mathbf{e}}_u$$

donde el signo depende de si el sistema es derecho o izquierdo. Si se considera que es derecho, el jacobiano de la transformación es mayor que cero y

$$\hat{\mathbf{e}}_u \times \hat{\mathbf{e}}_v = \hat{\mathbf{e}}_w ; \qquad \hat{\mathbf{e}}_w \times \hat{\mathbf{e}}_u = \hat{\mathbf{e}}_v ; \qquad \hat{\mathbf{e}}_v \times \hat{\mathbf{e}}_w = \hat{\mathbf{e}}_u$$

por lo cual

$$\frac{1}{h_u} \hat{\mathbf{e}}_u = h_U \hat{\mathbf{e}}_U \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{e}}_U = \hat{\mathbf{e}}_u \qquad \text{y} \qquad h_u = \frac{1}{h_U}$$

ya que los vectores son unitarios. De la misma forma se demuestra que

$$\hat{\mathbf{e}}_V = \hat{\mathbf{e}}_v ; \hat{\mathbf{e}}_W = \hat{\mathbf{e}}_w ; \qquad h_v = \frac{1}{h_V} ; \qquad h_w = \frac{1}{h_W}$$

y en consecuencia, la base $\{\hat{\mathbf{e}}_U, \hat{\mathbf{e}}_V, \hat{\mathbf{e}}_W\}$ también es ortogonal.

*iii)* Por otra parte, como $\hat{\mathbf{e}}_U$, $\hat{\mathbf{e}}_V$ y $\hat{\mathbf{e}}_W$ son ortogonales, entonces

$$\left| \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla \right| = \left| \nabla u \right| \left| \nabla v \right| \left| \nabla w \right| = h_U \, h_V \, h_W$$

y como

$$h_u = \frac{1}{h_U} ; \qquad h_v = \frac{1}{h_V} ; \qquad h_w = \frac{1}{h_W}$$

se sigue que

$$\left|\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w\right| = \frac{1}{h_U\, h_V\, h_W}.$$

*iv)* El uso de las igualdades $\hat{\mathbf{e}}_U = \hat{\mathbf{e}}_u$ y $h_u = \dfrac{1}{h_U}$ en las definiciones de $\hat{\mathbf{e}}_U$ y $\hat{\mathbf{e}}_u$ conduce a

$$\hat{\mathbf{e}}_u = h_U \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u \nabla u = \hat{\mathbf{e}}_U$$

$$\hat{\mathbf{e}}_v = h_V \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v \nabla v = \hat{\mathbf{e}}_V$$

$$\hat{\mathbf{e}}_w = h_W \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_w \nabla w = \hat{\mathbf{e}}_W.$$

**Teorema 14.** Sea un sistema coordenado curvilíneo ortogonal en $\mathbb{R}^3$ definido por la expresión $(52'): \mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) = F_1(u, v, w)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(u, v, w)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(u, v, w))\,\hat{\mathbf{k}}$. Si $s_u$, $s_v$ y $s_w$ representan longitudes de arco a lo largo de las curvas $u$, $v$ y $w$, respectivamente, y $s$ representa la longitud de arco de una curva arbitraria en $\mathbb{R}^3$, entonces:

*i)* $$ds_u = h_u\, du = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\; du$$

$$ds_v = h_v\, dv = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\; dv$$

$$ds_w = h_w\, dw = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}\; dw.$$

*ii)* $(ds)^2 = (h_u\, du)^2 + (h_v\, dv)^2 + (h_w\, dw)^2$.

*iii)* La diferencial de área sobre una superficie coordenada generada por las curvas $u$ y $v$ está dada por

$$d\sigma = ds_u\, ds_v = h_u h_v\, du dv = \left|\mathbf{N}'\right| du dv$$
$$= \sqrt{J^2\left(\frac{y, z}{u, v}\right) + J^2\left(\frac{z, x}{u, v}\right) + J^2\left(\frac{x, y}{u, v}\right)}\, du dv.$$

siendo $\mathbf{N}' = (\partial \mathbf{r}/\partial u) \times (\partial \mathbf{r}/\partial v)$ el vector ortogonal a la superficie definido en la ecuación (46).

Para el caso de una superficie coordenada generada por las curvas $v$ y $w$ se tienen expresiones semejantes en donde lo único que cambia es la pareja $u$, $v$ por la pareja $v$, $w$. Lo correspondiente puede decirse para una superficie generada por las curvas $w$ y $u$.

*iv)* La diferencial de volumen en una región del espacio $XYZ$ definida por las curvas $u$, $u + du$, $v$, $v + dv$, $w$ y $w + dw$ está dada por

$$dV = ds_u\, ds_v\, ds_w = h_u\, h_v\, h_w\, du dv dw$$
$$= \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)\right| du\, dv\, dw.$$

**Demostración:**

*i)* Como se recordará, la diferencial de longitud de arco de una curva arbitraria descrita por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, siendo $t$ el parámetro, está dada por la ecuación (25). En el caso particular de una curva $u$ se tiene que

$$r = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = F_1(u, v_0, w_0)\hat{\mathbf{i}} + F_2(u, v_0, w_0)\hat{\mathbf{j}} + F_3(u, v_0, w_0)\hat{\mathbf{k}}.$$

Como $v_0$ y $w_0$ son constantes esta expresión tiene un sólo parámetro y se puede aplicar la ecuación (25). Así, la diferencial de longitud de arco sobre la curva $u$, denotada por $ds_u$, está dada por

$$ds_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\, du$$

y como

$$h_u \equiv \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

se demuestra la expresión para $ds_u$. De la misma forma se demuestran las de $ds_v$ y $ds_w$.

*ii)* Se tiene que $ds = \left|d\mathbf{r}\right|$ (ver ecuación (25)) y por la definición de diferencial total

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\, dw$$

$$= h_u\, du\, \hat{\mathbf{e}}_u + h_v\, dv\, \hat{\mathbf{e}}_v + h_w\, dw\, \hat{\mathbf{e}}_w .$$

Esto implica que

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(h_u\, du\, \hat{\mathbf{e}}_u + h_v\, dv\, \hat{\mathbf{e}}_v + h_w\, dw\, \hat{\mathbf{e}}_w\right)$$

$$\cdot \left(h_u\, du\, \hat{\mathbf{e}}_u + h_v\, dv\, \hat{\mathbf{e}}_v + h_w\, dw\, \hat{\mathbf{e}}_w\right)$$

y como $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$ y $\hat{\mathbf{e}}_w$ son ortogonales:

$$ds^2 = \left(h_u\, du\right)^2 + \left(h_v\, dv\right)^2 + \left(h_w\, dw\right)^2 = \left(ds_u\right)^2 + \left(ds_v\right)^2 + \left(ds_w\right)^2$$

como se quería probar

*iii)* En general la diferencial de área de superficie de una superficie arbitraria descrita por la ecuación vectorial paramétrica (47) está dada por la ecuación (50). Para el caso particular de una superficie coordenada generada por los parámetros $u$ y $v$ se tiene que $x$, $y$, $z$ están dadas por las ecuaciones (54) lo que implica que su ecuación vectorial paramétrica es

$$\mathbf{r} = x(u, v, k_3)\, \hat{\mathbf{i}} + y(u, v, k_3)\, \hat{\mathbf{j}} + z(u, v, k_3)\, \hat{\mathbf{k}}, \qquad (56)$$

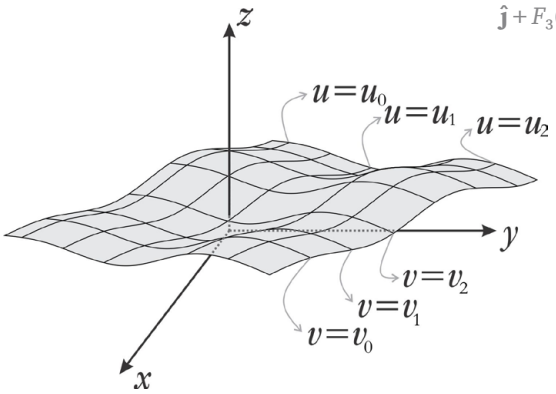
cuya gráfica se muestra en la figura (22). Como $k_3$ es una constante esta ecuación tiene la forma de la ecuación (47) y por lo tanto se puede usar la ecuación (50). Así, la diferencial de área de superficie está dada por

$$d\sigma = \left|\mathbf{N}'\right| \, du\, dv. \tag{57}$$

donde

$$\left|\mathbf{N}'\right| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\,. \tag{58}$$

**FIGURA 4.22.** Superficie coordenada descrita por la ecuación vectorial paramétrica $\mathbf{r} = F_1(u, v, k_3)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(u, v, k_3)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(u, v, k_3)\,\hat{\mathbf{k}}$, siendo $k_3$ una constante.




Como en general, la magnitud del vector normal $\mathbf{N}'$ es distinta de 1 se tiene que $d\sigma \neq du dv$. El uso de las ecuaciones (49) y (58) en (57) da como resultado

$$d\sigma = \sqrt{J^2\left(\frac{y, z}{u, v}\right) + J^2\left(\frac{z, x}{u, v}\right) + J^2\left(\frac{x, y}{u, v}\right)}\;\; du dv. \tag{59}$$

Además, como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| \hat{\mathbf{e}}_u = h_u\, \hat{\mathbf{e}}_u \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \hat{\mathbf{e}}_v = h_v\, \hat{\mathbf{e}}_v$$

entonces

$$d\sigma = \left| h_u \hat{\mathbf{e}}_u \times h_v \hat{\mathbf{e}}_v \right| \, du\, dv$$

$$= h_u h_v \left| \hat{\mathbf{e}}_u \times \hat{\mathbf{e}}_v \right| \, du\, dv = h_u h_v \, du\, dv$$

$$= ds_u \, ds_v, \tag{60}$$

lo que demuestra este caso. Las expresiones correspondientes a los otros dos tipos de superficies coordenadas se demuestran en la misma forma.

*iv)* Así como la diferencial de superficie $d\sigma$ resulta ser un paralelogramo debido a que las curvas $u$ y $u+du$ (y también las $v$ y $v+dv$) están muy cercanas entre sí, el elemento diferencial de volumen $dV$ resulta ser un paralelepípedo, como se puede apreciar en la figura 4.23, donde tres de sus lados son los vectores

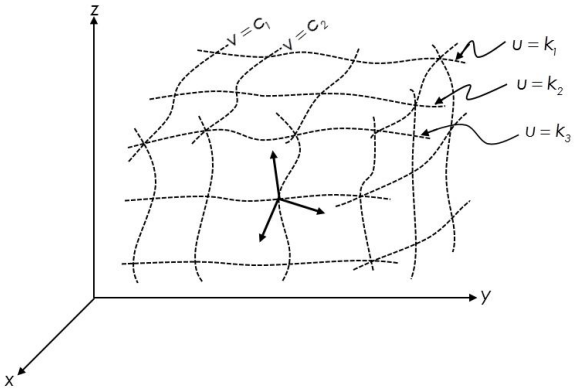



FIGURA 4.23.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\, du = h_u \, du\, \hat{\mathbf{e}}_u$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, dv = h_v \, du\, \hat{\mathbf{e}}_v$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\, dw = h_w \, du\, \hat{\mathbf{e}}_w .$$

Entonces su volumen es igual a

$$dV = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\, du \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, dv \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\, dw \right|$$

$$= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| du\, dv\, dw$$

$$= h_u\, h_v\, h_w \left| \hat{\mathbf{e}}_u \cdot \hat{\mathbf{e}}_v \times \hat{\mathbf{e}}_w \right| du\, dv\, dw$$

por lo que

$$dV = h_u\, h_v\, h_w\ du\, dv\, dw = ds_u\, ds_v\, ds_w.$$

Por otro lado

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Al transponer los renglones y columnas, el determinante no se altera; por lo tanto

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du\, dv\, dw = \left| J\left( \frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \right| du\, dv\, dw$$

y queda demostrado el teorema.

Es fácil comprobar que si una superficie $S$ está dada en la forma $z=f(x, y)$ entonces

$$\mathbf{N}'=-\frac{\partial z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}}-\frac{\partial z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}} \tag{61}$$

$$|\mathbf{N}'|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \tag{61'}$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;dx\,dy. \tag{62}$$

En efecto, si se toman a $x$ y $y$ como parámetros, las ecuaciones paramétricas de la superficie son

$$x=u \qquad y=v \qquad z=f(u, v)$$

y utilizando las expresiones $(49)$ se obtiene que los jacobianos se reducen a

$$J_1=-\frac{\partial z}{\partial x}; \qquad J_2=-\frac{\partial z}{\partial x}; \qquad J_3=1.$$

Al sustituir esto en $(48)$ se demuestran las ecuaciones $(61)$, $(61')$ y $(62)$.

Como se mencionó al principio de esta sección, las propiedades de los sistemas de coordenadas curvilíneas en tres dimensiones se pueden adaptar fácilmente al caso de dos dimensiones. A continuación, se dará sin demostración la versión en dos dimensiones del teorema anterior.

**Teorema 15.** Dado un sistema coordenado curvilíneo ortogonal en $\mathbb{R}^2$ definido por la expresión $\mathbf{r}=\mathbf{F}(u, v)=(F_1(u, v), F_2(u, v))$, si $s_u$, $s_v$ representan longitudes de arco a lo largo de las curvas $u$ y $v$ respectivamente, y $s$ representa la longitud de arco de una curva arbitraria en $\mathbb{R}^2$, entonces:

*i)*

$$ds_u = h_u = du = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}\ du$$

$$ds_v = h_v = du = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}\ dv.$$

*ii)* $(ds)^2 = (h_u\, du)^2 + (h_v\, dv)^2$.

*iii)* La diferencial de área en una región del plano $XY$ definida por las curvas $u$, $u + du$, $v$ y $v + dv$ está dada por

$$dA = ds_u\, ds_v$$

$$= h_u h_v\, du\, dv$$

$$= \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du\, dv.$$

## Ejemplo 37.

Calcular el área de la región $R$ del plano $XY$ limitada por las curvas (ver figura 4.24):

$$y^2 = 8x; \qquad y^2 = x; \qquad x^2 = 8y; \qquad x^2 = y.$$

**Solución:** Para resolver este ejemplo se considerará el cambio de coordenadas al sistema $u$, $v$ definido mediante las ecuaciones

$$y^2 = ux; \qquad x^2 = vy \tag{63}$$

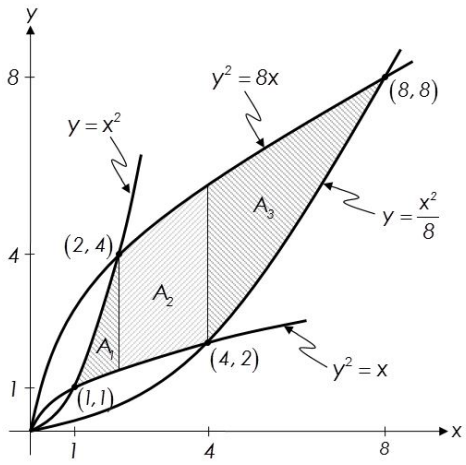



FIGURA 4.24.

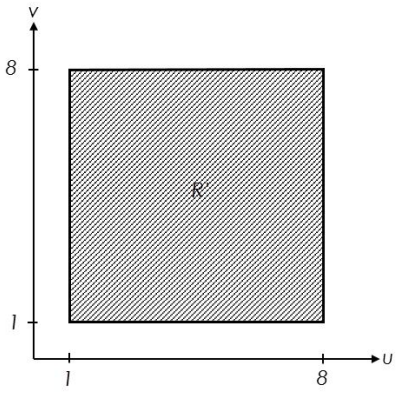



FIGURA 4.25.

en donde se ve que las curvas $y^2 = 8x$ y $y^2 = x$ se transforman en las curvas $u = 8$ y $u = 1$, y que las curvas $x^2 = 8y$ y $x^2 = y$ se transforman en las curvas $v = 8$ y $v = 1$. Por lo tanto, la región $R$ del plano $XY$ se transforma en un simple cuadrado $R'$ en el plano $UV$ (ver figura 4.25).

Ahora se calculará el jacobiano. De las ecuaciones $(63)$ se tiene

$$y = \frac{x^2}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{v^2} = ux \quad \Rightarrow \quad x^3 = v^2 u \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = v^{2/3} u^{1/3} \\ y = v^{1/3} u^{2/3}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} v^{2/3} u^{-2/3} & \frac{2}{3} v^{-1/3} u^{1/3} \\ \frac{2}{3} v^{1/3} u^{-1/3} & \frac{1}{3} v^{-2/3} u^{2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

y $dA = (1/3)\, du\, dv$.

Como el jacobiano resultó ser una constante, las diferenciales de área $dA$ y $du\, dv$ de los planos $XY$ y $UV$, respectivamente, siempre guardan la misma proporción en todas las regiones del plano. Entonces, cualquier región en el plano $XY$ siempre será un tercio menor que su correspondiente imagen en el plano $UV$ y, por lo tanto,

$$A(R) = \frac{1}{3} A(R')$$

siendo $A(R)$ y $A(R')$ las áreas de $R$ y $R'$, respectivamente. Como $A(R') = 49$ se tiene que

$$A(R) = \frac{49}{3} = 16.33.$$

En los casos en los que el jacobiano no es una constante el procedimiento anterior no es válido y lo que debe hacerse es una integral doble como se discutirá en el Capítulo 6.

## Ejemplo 38.

Utilizando coordenadas curvilíneas, determinar el valor del área delimitada por las siguientes rectas y calcular los jacobianos de la transformación inversa y directa.

$$2x = 3(2-y); \quad x = \frac{y+6}{2}; \quad y = \frac{-2x}{3} - 0.5; \quad y = x - 4.$$

**Solución:** Una gráfica de región considerada se muestra en la figura 4.26. Las ecuaciones de las rectas se pueden reescribir como

$$2x + 3y = 6; \quad 2x - y = 6; \quad 2x + 3y = -1.5; \quad x - y = 4$$

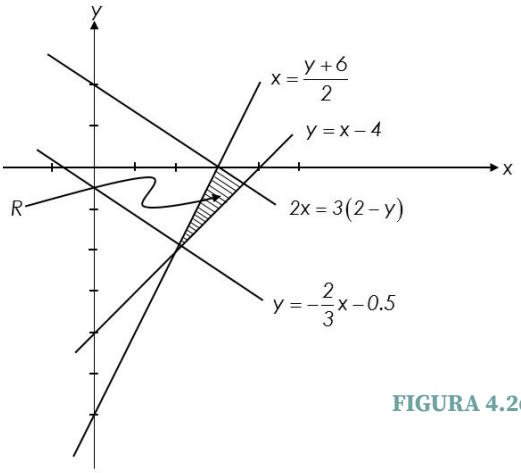



FIGURA 4.26.

lo cual nos sugiere utilizar el siguiente cambio de coordenadas

$$u = 2x + 3y$$
$$v = x - y$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+3v}{5} \\ y = \dfrac{u+3v}{5}. \end{cases}$$

Entonces los límites de la región $R$ en el plano $XY$ se transforman en los siguientes límites en el plano $UV$:

$$u = 6; \qquad u + 8v = 30; \qquad u = -1.5; \qquad v = 4$$

los cuales limitan la región $R'$ mostrada en la figura 4.27.

Los jacobianos $J\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right)$ y $J\left(\dfrac{u, v}{x, y}\right)$ valen

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$$

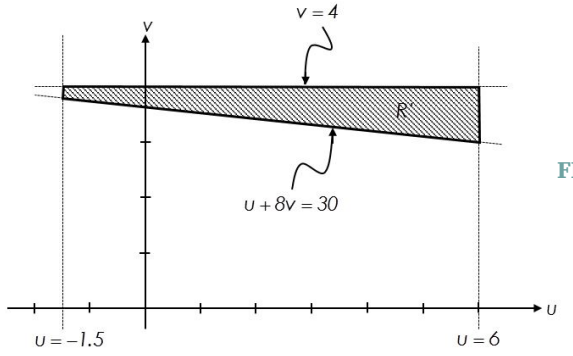



FIGURA 4.27.

y

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5.$$

Entonces $dA=\left(1/5\right)du\,dv$ y se comprueba que $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ es el inverso de $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$. En consecuencia, por la misma razón que en el ejemplo anterior, se tiene que $A(R)=A(R')/5$. El área $A(R')$ se calcula mediante la integral simple (ver figura 4.27)

$$A\left(R'\right)=\int_{1.5}^{6}\left(4-\frac{30-u}{8}\right)du$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-1.5}^{6}\left(2+u\right)du=4-\frac{1}{64}=3.984375$$

por lo tanto

$$A(R)=0.796875.$$

A continuación se obtendrán las expresiones en coordenadas curvilíneas ortogonales de las operaciones vectoriales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano. Se enunciarán como teoremas y serán demostradas utilizando las propiedades que se estudiaron en coordenadas cartesianas. Estas propiedades, sin embargo, no dependen del sistema de coordenadas utilizado.

**Teorema 16.** ***(Gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales)***. Sea $\phi=\phi(u,v,w)$ una función escalar diferenciable definida en un sistema coordenado curvilíneo ortogonal de vectores base $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$ y $\hat{\mathbf{e}}_w$. Entonces, el gradiente de $\phi$ en este sistema está dado por

$$\nabla\phi=\frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\hat{\mathbf{e}}_u+\frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\hat{\mathbf{e}}_v+\frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\hat{\mathbf{e}}_w \qquad (64)$$

**Demostración:** Por definición, el gradiente de $\phi$ en coordenadas cartesianas es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}$$

en donde $\partial\phi/\partial x$ es la razón de cambio de $\phi$ debido a la variación de $x$, y algo semejante puede decirse para los otros términos. Ahora bien, los cambios que induce $x$ sobre $\phi(u, v, w)$ ocurren en forma indirecta a través de los cambios que induce $x$ sobre las variables $u$, $v$, $w$ mediante las ecuaciones de transformación inversa del sistema de coordenadas curvilíneas:

$$u = G_1(x, y, z); \qquad v = G_2(x, y, z); \qquad w = G_3(x, y, z).$$

De esta forma se tiene que $\phi$ depende de $x$, $y$, $z$ de acuerdo con la expresión

$$\phi(u, v, w) = \phi\big(G_1(x, y, z), G_2(x, y, z), G_3(x, y, z)\big).$$

Entonces se pueden calcular las derivadas que aparecen en el gradiente utilizando la regla de la cadena. Así.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

por lo que

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$+ \frac{\partial\phi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial w}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\,\nabla u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\,\nabla v + \frac{\partial\phi}{\partial w}\,\nabla w.$$

Pero si el sistema es ortogonal,

$$\nabla u = \frac{1}{h_u}\,\hat{\mathbf{e}}_u\,; \quad \nabla v = \frac{1}{h_v}\,\hat{\mathbf{e}}_v\,; \quad \nabla w = \frac{1}{h_w}\,\hat{\mathbf{e}}_w$$

por lo tanto

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\,\hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\,\hat{\mathbf{e}}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\,\hat{\mathbf{e}}_w.$$

**Teorema 17.** ***(Divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales)***. Sea

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_u(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_u + \mathcal{F}_v(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_v + \mathcal{F}_w(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_w$$

una función vectorial diferenciable definida en un sistema curvilíneo ortogonal derecho de vectores base $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$ y $\hat{\mathbf{e}}_w$, siendo $\mathcal{F}_u$, $\mathcal{F}_v$ y $\mathcal{F}_w$ las componentes de $\mathcal{F}$ en dicho base. Entonces, la divergencia en este sistema es

$$\nabla\cdot\mathcal{F} = \frac{1}{h_u\,h_v\,h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h_v\,h_w\,\mathcal{F}_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(h_u\,h_w\,\mathcal{F}_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(h_u\,h_v\,\mathcal{F}_w\right)\right] \tag{65}$$

**Demostración:** En esta prueba se va a utilizar el resultado del teorema anterior. Para esto primero se expresará la divergencia de **F** en términos de los gradientes de ciertas funciones. Como el conjunto $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$, $\hat{\mathbf{e}}_w$ forma una base ortogonal derecha, entonces (por el inciso $(iv)$ del teorema 13)

$$\hat{\mathbf{e}}_u = \hat{\mathbf{e}}_v \times \hat{\mathbf{e}}_w = h_v\,h_w\,\nabla v \times \nabla w$$

$$\hat{\mathbf{e}}_v = \hat{\mathbf{e}}_w \times \hat{\mathbf{e}}_u = h_w\,h_u\,\nabla w \times \nabla u$$

$$\hat{\mathbf{e}}_w = \hat{\mathbf{e}}_u \times \hat{\mathbf{e}}_v = h_u\,h_v\,\nabla u \times \nabla v.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{F}} &= \mathcal{F}_u\,\hat{\mathbf{e}}_u + \mathcal{F}_v\,\hat{\mathbf{e}}_v + \mathcal{F}_w\,\hat{\mathbf{e}}_w \\ &= \mathcal{F}_u\,h_v\,h_w\,(\nabla v \times \nabla w) \\ &+ \mathcal{F}_v\,h_u\,h_w\,(\nabla w \times \nabla u) \\ &+ \mathcal{F}_w\,h_u\,h_v\,(\nabla u \times \nabla v)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}} &= \nabla \cdot \left[h_v\,h_w\,\mathcal{F}_u\,\nabla v \times \nabla w\right] \\ &+ \nabla \cdot \left[h_u\,h_w\,\mathcal{F}_v\,\nabla w \times \nabla u\right] \\ &+ \nabla \cdot \left[h_u\,h_v\,\mathcal{F}_w\,\nabla u \times \nabla v\right].\end{aligned} \tag{66}$$

Por propiedades de la divergencia el primer término es igual a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[h_v\,h_w\,\mathcal{F}_u\,\nabla v \times \nabla w\right] &= h_v\,h_w\,\mathcal{F}_u \nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w) \\ &+ (\nabla v \times \nabla w) \cdot \nabla (h_v\,h_w\,\mathcal{F}_u)\end{aligned}$$

y nuevamente por propiedades de la divergencia

$$\nabla \cdot (\nabla u \times \nabla w) = \nabla w \cdot (\nabla \times \nabla v) - \nabla v \cdot (\nabla \times \nabla w) = \mathbf{0}$$

debido a que $\nabla \times \nabla f = 0 \;\; \forall f$. Además,

$$\nabla v \times \nabla w = \frac{1}{h_v}\,\hat{\mathbf{e}}_v \times \frac{1}{h_w}\,\hat{\mathbf{e}}_w = \frac{1}{h_v\,h_w}\,\hat{\mathbf{e}}_v \times \hat{\mathbf{e}}_w = \frac{1}{h_v\,h_w}\,\hat{\mathbf{e}}_u$$

y entonces el primer término de (66) es igual a

$$\nabla \cdot \left[h_v\,h_w\,\mathcal{F}_u\,\nabla v \times \nabla w\right] = \frac{1}{h_v\,h_w}\;\hat{\mathbf{e}}_u \cdot \nabla (h_v\,h_w\,\mathcal{F}_u)$$

lo que ha reducido el problema al cálculo del gradiente de $(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u)$. Utilizando el teorema 16 se tiene:

$$\nabla(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_v$$

$$+ \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_w$$

y como $\hat{\mathbf{e}}_u \cdot \hat{\mathbf{e}}_u = 1$ y $\hat{\mathbf{e}}_u \cdot \hat{\mathbf{e}}_v = \hat{\mathbf{e}}_u \cdot \hat{\mathbf{e}}_w = 0$, el producto punto entre $\hat{\mathbf{e}}_u$ y $\nabla(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u)$ es

$$\hat{\mathbf{e}}_u \cdot \nabla(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u).$$

Por lo tanto, para el primer término de (66) se tiene que

$$\nabla \cdot \left[h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u\, \nabla v \times \nabla w\right] = \frac{1}{h_u\, h_v\, h_w}\frac{\partial}{\partial u}(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u)$$

y de modo similar se llega a

$$\nabla \cdot \left[h_u\, h_w\, \mathcal{F}_v\, \nabla w \times \nabla u\right] = \frac{1}{h_u\, h_v\, h_w}\frac{\partial}{\partial v}(h_u\, h_w\, \mathcal{F}_v)$$

$$\nabla \cdot \left[h_u\, h_v\, \mathcal{F}_w\, \nabla u \times \nabla v\right] = \frac{1}{h_u\, h_v\, h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_u\, h_v\, \mathcal{F}_w).$$

Sumando las tres últimas expresiones se obtiene el resultado buscado:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{h_u\, h_v\, h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v\, h_w\, \mathcal{F}_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u\, h_w\, \mathcal{F}_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u\, h_v\, \mathcal{F}_w)\right].$$

**Teorema 18.** (Rotacional en coordenadas curvilíneos). Sea nuevamente la función considerada en el teorema 17:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_u(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_u + \mathcal{F}_v(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_v + \mathcal{F}_w(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_w.$$

Entonces, el rotacional de $\mathcal{F}$ en este sistema es

$$\nabla \times \mathcal{F} = \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_w \mathcal{F}_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v \mathcal{F}_v)\right]\hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_u \mathcal{F}_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w \mathcal{F}_w)\right]\hat{\mathbf{e}}_v + \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v \mathcal{F}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u \mathcal{F}_u)\right]\hat{\mathbf{e}}_w. \tag{67}$$

**Demostración:**

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_u \hat{\mathbf{e}}_u + \mathcal{F}_v \hat{\mathbf{e}}_v + \mathcal{F}_w \hat{\mathbf{e}}_w = h_u \mathcal{F}_u \nabla u + h_v \mathcal{F}_v \nabla v + h_w \mathcal{F}_w \nabla w.$$

Entonces,

$$\nabla \times \mathcal{F} = \nabla \times (h_u \mathcal{F}_u \nabla u) + \nabla \times (h_v \mathcal{F}_v \nabla v) + \nabla \times (h_w \mathcal{F}_w \nabla w). \tag{68}$$

Por propiedades del rotacional, el primer término es

$$\nabla \times (h_u \mathcal{F}_u \nabla u) = h_u \mathcal{F}_u (\nabla \times \nabla u) + \nabla (h_u \mathcal{F}_u) \times \nabla u$$

$$= \nabla (h_u \mathcal{F}_u) \times \nabla u$$

ya que $\nabla \times \nabla u = \mathbf{0}$. El uso del teorema 16 conduce a

$$\nabla (h_u \mathcal{F}_u) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(h_u \mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(h_u \mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_u \mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_w \tag{69}$$

y como $\nabla u = \left(\frac{1}{h_u}\right)\hat{\mathbf{e}}_u$, se tiene que

$$\nabla(h_u\mathcal{F}_u)\times\nabla u = \frac{1}{h_u^2}\frac{\partial}{\partial u}(h_u\mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_u\times\hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial}{\partial v}(h_u\mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_v\times\hat{\mathbf{e}}_u$$

$$+\frac{1}{h_u h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_u\mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_w\times\hat{\mathbf{e}}_u\,.$$

Finalmente, como

$$\hat{\mathbf{e}}_u\times\hat{\mathbf{e}}_u=\mathbf{0}\,;\qquad \hat{\mathbf{e}}_v\times\hat{\mathbf{e}}_u=-\hat{\mathbf{e}}_w\,;\qquad \hat{\mathbf{e}}_w\times\hat{\mathbf{e}}_u=\hat{\mathbf{e}}_v$$

el primer término de (68) es

$$\nabla\times(h_u\mathcal{F}_u\,\nabla u)=\frac{1}{h_u h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_u\mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_v-\frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial}{\partial v}(h_u\mathcal{F}_u)\,\hat{\mathbf{e}}_w$$

y de modo similar,

$$\nabla\times(h_v\mathcal{F}_v\,\nabla v)=\frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial}{\partial u}(h_v\mathcal{F}_v)\,\hat{\mathbf{e}}_w-\frac{1}{h_v h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_v\mathcal{F}_v)\,\hat{\mathbf{e}}_u$$

$$\nabla\times(h_w\mathcal{F}_w\,\nabla w)=\frac{1}{h_v h_w}\frac{\partial}{\partial v}(h_w\mathcal{F}_w)\,\hat{\mathbf{e}}_u-\frac{1}{h_u h_w}\frac{\partial}{\partial u}(h_w\mathcal{F}_w)\,\hat{\mathbf{e}}_v.$$

Al sumar las tres últimas igualdades se obtiene la expresión (67) que se quería demostrar.

Analizando la forma de la expresión (67) se deduce que el rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales también se puede expresar como

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}=\frac{1}{h_u\,h_v\,h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{\mathbf{e}}_u & h_v\hat{\mathbf{e}}_v & h_w\hat{\mathbf{e}}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u\mathcal{F}_u & h_v\mathcal{F}_v & h_w\mathcal{F}_w \end{vmatrix}. \qquad (70)$$

**Teorema 19.** ***(Laplaciano en coordenadas curvilíneas ortogonales).*** Sea $\phi = \phi(u, v, w)$ una función escalar dos veces diferenciable, definida en un sistema coordenado curvilíneo ortogonal. Entonces el laplaciano de $\phi$ en este sistema está dado por

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_u\, h_v\, h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)\right]. \quad (71)$$

Esta expresión se obtiene del gradiente y de la divergencia, sustituyendo

$$\mathcal{F}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}; \qquad \mathcal{F}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}; \qquad \mathcal{F}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}.$$

Se deja como ejercicio para el lector comprobar esta afirmación.

A continuación, se estudiarán explícitamente varios de los sistemas coordenados ortogonales más frecuentes después del cartesiano. Principiaremos considerando detalladamente los dos más importantes: el sistema coordenado cilíndrico circular y el sistema coordenado esférico.

### 4.8.1 Sistema coordenado cilíndrico circular

El sistema de coordenadas cilíndricas se define por la transformación

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\,\operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Este sistema es invariante respecto a traslaciones a lo largo del eje Z. En cada plano horizontal se tiene el sistema de coordenadas polares bidimensional. La transformación inversa está dada por

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}; \qquad \theta = \operatorname{ang\,tan}\left(\frac{y}{x}\right); \qquad z = z.$$

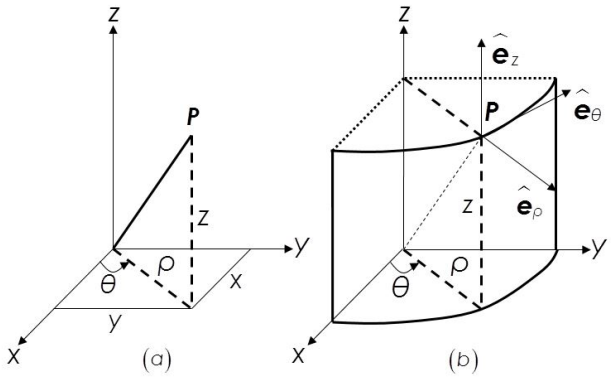



**FIGURA 4.28.** En ambas figuras se muestra el significado de las coordenadas cilíndricas del punto **P**. Las coordenadas cartesianas de **P** son $x$, $y$, $z$ y las coordenadas cilíndricas son $\rho$, $\theta$, $z$. En la figura (b) se ha añadido el primer octante de una porción de cilindro de radio $\rho$ y altura $z$

El significado de $\rho$, $\theta$ y $z$ se muestra en la figura 4.28. Las superficies coordenadas correspondientes a

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \text{constante}$$

son cilindros circulares que tienen a $z$ como eje común. Las superficies coordenadas correspondientes a

$$\theta = \text{ang tan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{constante}$$

son semiplanos verticales que pasan por el eje Z y las correspondientes a

$$z = \text{constante}$$

son planos paralelos al plano $XY$.

Se puede ver en la figura que se trata de un sistema ortogonal. Se sugiere al lector que lo compruebe matemáticamente. El jacobiano de la transformación y los parámetros de escala se obtienen a partir de las derivadas de $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \Rightarrow \qquad h_\rho = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right| = 1$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen}\theta\, \hat{\mathbf{i}} + \rho \cos\theta\, \hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \rho$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1$$

y

$$J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \theta, z}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\rho \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

La diferencial de longitud de arco en este sistema está dada por

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + (dz)^2.$$

La diferencial de área de la superficie generada por las variables $\rho$ y $\theta$ (tomando $z = cte$) es

$$d\sigma = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\; d\rho\, d\theta = \rho\, d\rho\, d\theta$$

donde $J_1 = J\left(\frac{y, z}{\rho, \theta}\right)$; $J_2 = J\left(\frac{z, x}{\rho, \theta}\right)$ y $J_3 = J\left(\frac{x, y}{\rho, \theta}\right)$ (si $z = 0$ se tiene el sistema ortogonal plano denominado *sistema coordenado polar*). Para la superficie generada por las variables $\rho$ y $z$ $(\theta = cte)$ se tiene que

$$d\sigma = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\; d\rho\, dz = d\rho\, dz$$

donde $J_1 = J\left(\frac{y, z}{\rho, z}\right)$; $J_2 = J\left(\frac{z, x}{\rho, z}\right)$; $J_3 = J\left(\frac{x, y}{\rho, z}\right)$, y para la generada por $\theta$ y $z$ $(\rho = cte)$ la expresión para $d\sigma$ es

$$d\sigma = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\; d\theta\, dz = \rho\, dz\, d\theta$$

donde $J_1 = J\left(\frac{y,z}{\theta,z}\right)$; $J_2 = J\left(\frac{z,x}{\theta,z}\right)$ ; $J_3 = J\left(\frac{x,y}{\theta,z}\right)$. La diferencial de volumen está dada por $dV = \rho d\rho d\theta dz$ y los operadores vectoriales son

Gradiente: $$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z$$

Divergencia: $$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\mathcal{F}_\rho) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\mathcal{F}_\theta)\right] + \frac{\partial\mathcal{F}_z}{\partial z}$$

Rotacional: $$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho & \rho\hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{F}_\rho & \rho\mathcal{F}_\theta & \mathcal{F}_z \end{vmatrix}$$

Laplaciano: $$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right] + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

donde $\phi = \phi(\rho, \theta, z)$ y $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + \mathcal{F}_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathcal{F}_z\hat{\mathbf{e}}_z$.

## Ejemplo 39.

Obtener la longitud de arco de la *espiral de Arquímedes* de ecuación polar $\rho = a\theta$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

**Solución:** En general la diferencial de longitud de arco en el sistema polar plano $(z = 0)$, está dada por la expresión

$$(ds)^2 = (h_\rho\, d\rho)^2 + (h_\theta\, d\theta)^2,$$

donde $h_\rho = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\rho}\right| = |(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)| = 1$ y $h_\theta = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = \rho|(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)| = \rho$.

Por lo tanto

$$(ds)^2=(d\rho)^2+\rho^2(d\theta)^2.$$

Para el caso particular de la curva dada $\rho=a\theta$ se tiene

$$d\rho=a\,d\theta \qquad \Rightarrow \qquad (ds)^2=a^2(d\theta)^2+a^2\theta^2(d\theta)^2$$

$$=a^2(1+\theta^2)\,(d\theta)^2 \qquad \Rightarrow \qquad ds=a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

por lo que

$$s=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta \;=\; a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\,\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=a\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\,\right)\right]\approx 21.2563\,a.$$

## Ejemplo 40.

Calcular el gradiente de la siguiente función en coordenadas cilíndricas.

$$\phi(\rho,\theta,z)=\rho^2(\operatorname{sen}^2\theta+9\cos^2\theta)-4z^2.$$

**Solución:** El gradiente está dado por

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta+\frac{\partial\phi}{\partial z}\,\hat{\mathbf{e}}_z$$

por lo que

$$\nabla\phi=2\rho\left(\operatorname{sen}^2\theta+9\cos^2\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho$$

$$+\frac{\rho^2}{\rho}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-18\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta-8z\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$=2\rho\left(\operatorname{sen}^2\theta+9\cos^2\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho-16\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta-8z\hat{\mathbf{e}}_z.$$

## Ejemplo 41.

Demostrar que el siguiente campo dado en coordenadas cilíndricas es un campo conservativo.

$$\mathcal{F}(\rho, \theta, z) = 18\rho\,\hat{\mathbf{e}}_\rho - 8z\,\hat{\mathbf{e}}_z.$$

**Solución:** Un campo $\mathcal{F}$ es conservativo si $\nabla \times \mathcal{F} = \mathbf{0}$, por lo que se determinará el rotacional de $\mathcal{F}$ :

$$\nabla \times \mathcal{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho & \rho\hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 18\rho & 0 & -8_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left(0\hat{\mathbf{e}}_\rho - 0\hat{\mathbf{e}}_\theta + 0\hat{\mathbf{e}}_z\right) = \mathbf{0}$$

y queda demostrado.

## Ejemplo 42.

Sea $\mathcal{F}(\rho,\theta) = \mathcal{F}_\rho\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \mathcal{F}_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$ un campo vectorial dado en coordenadas polares. Determinar las condiciones necesarias que deben satisfacer las derivadas de $\mathcal{F}_\rho$ y $\mathcal{F}_\theta$ para que $\mathcal{F}$ sea un campo gradiente.

**Solución:** $\mathcal{F}$ será un campo gradiente si existe una función escalar tal que su gradiente sea igual a $\mathcal{F}$. Es decir, si existe $\phi$ tal que

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$= \mathcal{F}_\rho\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \mathcal{F}_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Esta igualdad implica que

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = h_\rho\,\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}_\rho$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = h_\theta \mathcal{F}_\theta = \rho \mathcal{F}_\theta$$

y también que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \, \partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathcal{F}_\rho\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \, \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \mathcal{F}_\theta\right).$$

Por otro lado, del teorema de Schwarz sabemos que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \, \partial \theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \, \partial \rho}.$$

Por lo tanto, si existe la función $\phi$ se deberá cumplir que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathcal{F}_\rho\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \mathcal{F}_\theta\right)$$

que es la relación pedida. Este resultado nos dice que una forma de investigar si un campo vectorial en coordenadas polares es un campo gradiente, es verificar si se satisface la ecuación anterior. Otra forma podría ser por ejemplo verificar si su rotacional es igual a cero.

### 4.8.2 Sistema coordenado esférico

El sistema de coordenadas esféricas se define por la transformación

$$x = r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$
$$z = r \cos\varphi$$

con $r \geq 0$; $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$. Estas ecuaciones se deducen de la figura 4.29. Al ángulo $\varphi$ se le llama colatitud y al ángulo $\theta$ azimut o ángulo azimutal (algunos autores usan $\theta$ para denotar a lo que aquí hemos denotado con $\varphi$ y viceversa.

Esta observación es importante tenerla en cuenta cuando se consulten otros textos para las fórmulas del gradiente, divergencia y rotacional). Las ecuaciones de transformación inversa son

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi = \text{ang cos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \text{ang tan}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

$$\theta = \text{ang tan}\left(\frac{y}{x}\right).$$

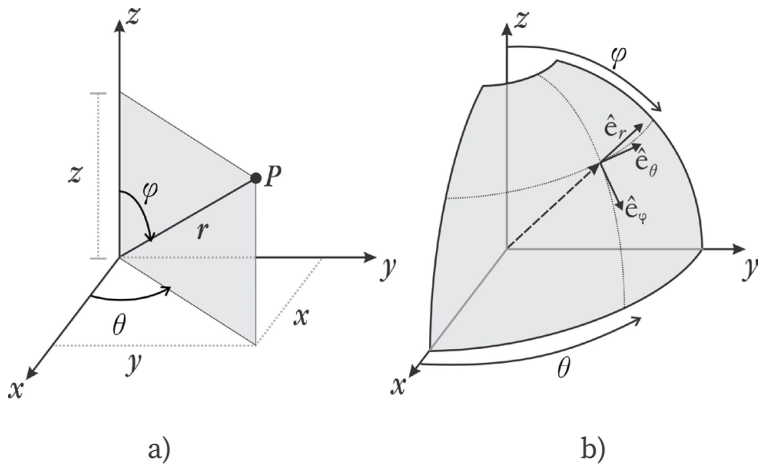



**FIGURA 4.29.** En ambas figuras se muestra el significado de las coordenadas esféricas del punto **P**. Las coordenadas cartesianas de **P** son $x$, $y$, $z$ y las coordenadas esféricas son $r$, $\varphi$, $\theta$. En la figura (b) se ha añadido el primer octante de una porción de esfera de radio $r$.

Las superficies coordenadas correspondientes a

$$r = \text{constante}$$

son esferas concéntricas con centro en el origen. Las superficies coordenadas correspondientes a

$$\varphi = \text{constante}$$

son conos circulares centrados en el eje Z con vértice en el origen, y las correspondientes a

$$\theta = \text{constante}$$

son semiplanos verticales que pasan por el eje Z.

Como en el sistema cartesiano el vector de posición de un punto **P** de coordenadas $(x, y, z)$ es

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

entonces

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + r\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{j}} + r\cos\varphi\,\hat{\mathbf{k}}$$

y sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r\cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + r\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}} - r\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{j}},$$

lo cual nos permite comprobar fácilmente que el sistema coordenado esférico es un sistema ortogonal. Además, los factores de escala son

$$h_r = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right| = \left[(\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi)^2 + (\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2\right]^{1/2} = 1$$

$$h_\varphi = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| = \left[(r\cos\theta\,\cos\varphi)^2 + (r\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi)^2 + (-r\operatorname{sen}\varphi)^2\right]^{1/2} = r$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = \left[(-r\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi)^2 + (r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi)^2\right]^{1/2} = r\operatorname{sen}\varphi.$$

El jacobiano de la transformación es

$$J\left(\frac{x, y, z}{r, \varphi, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi & r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \operatorname{sen}\varphi$$

que es diferente de cero en todos lados, excepto en el eje Z. El orden en el que se presentan $r$, $\varphi$, $\theta$ se debe a que de esta forma el sistema es derecho; si se tomará el orden $(r, \theta, \varphi)$ el jacobiano $J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \rho}\right)$ sería negativo.

La diferencial de longitud de arco en este sistema está dada por

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\varphi\,(d\theta)^2$$

y la diferencial de volumen por

$$dV = r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

Las expresiones para los operadores vectoriales en este sistema son

Gradiente: $$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Divergencia: $$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\varphi}\left[\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mathcal{F}_r\right) + r\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathcal{F}_\varphi\operatorname{sen}\varphi\right) + r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathcal{F}_\theta\right)\right]$$

Rotacional: $$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\varphi}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & r\hat{\mathbf{e}}_\varphi & r\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \mathcal{F}_r & r\mathcal{F}_\varphi & r\mathcal{F}_\theta\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix}$$

Laplaciano: $\nabla^2\phi = \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left[\operatorname{sen}\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\,\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)+\dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\,\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right]$,

donde $\phi = \phi(r, \varphi, \theta)$ y $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_r\,\hat{\mathbf{e}}_r + \mathcal{F}_\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \mathcal{F}_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$.

## Ejemplo 43.

Determinar el gradiente de la función

$$\phi(r, \varphi, \theta) = r^2 \operatorname{sen}\varphi.$$

**Solución:** Utilizando la expresión listada arriba se tiene

$$\nabla\phi = \frac{\partial r^2 \operatorname{sen}\varphi}{\partial r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial r^2 \operatorname{sen}\varphi}{\partial\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\,\frac{\partial r^2 \operatorname{sen}\varphi}{\partial\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$= 2r\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

## Ejemplo 44.

En el ejemplo 27 de este capítulo se demostró que el campo gravitacional de la Tierra es un campo solenoidal en todo el espacio exterior a ella. Su expresión para $r \equiv |\mathbf{r}| > R$ es

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^3}\,\mathbf{r}$$

siendo $R$ y $M$ el radio y la masa de la Tierra, respectivamente; $G$ la constante de gravitación universal y $\mathbf{r}$ el vector de posición respecto al centro de la Tierra, Demostrar nuevamente esa afirmación, pero ahora utilizando coordenadas esféricas.

**Solución:** Como el vector $\mathbf{r}$ en coordenadas esféricas está dado por

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$$

entonces

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^3}(r\hat{\mathbf{e}}_r) = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$$

y por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left\{\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{GM}{r^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-GM) = 0 \qquad \forall r \neq 0$$

y queda demostrado.

## Ejemplo 45.

Demostrar que el campo gravitacional $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ del ejemplo anterior, es un campo conservativo.

**Solución:** Para que sea conservativo su rotacional debe ser igual a cero. Se calcula entonces $\nabla \times \mathbf{V}$.

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & r\hat{\mathbf{e}}_\varphi & r\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{GM}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

lo que confirma que el campo gravitacional es conservativo.

## Ejemplo 46.

En la introducción de esta sección se mencionó que cuando se inyecta una corriente eléctrica en un material isotrópico y homogéneo mediante una varilla introducida en él (ver figura 4.19), el potencial eléctrico en un punto **P** de coordenadas esféricas $(r, \phi, \theta)$ está dado por

$$U = \frac{KI}{r},$$

en donde se está suponiendo que el origen de coordenadas está en el punto en donde se inyecta la corriente y $r$ es la distancia de origen al punto **P**. Demostrar que este potencial es una función armónica $\forall r \neq 0$.

**Solución:** Por definición una función es armónica si satisface la ecuación de Laplace: $\nabla^2 U = 0$. Se calcula entonces el laplaciano del potencial $U$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left[\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right]$$

$$= \frac{KI}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left[\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{KI}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left\{\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]\right\} = \frac{KI}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

y queda demostrado.

A continuación, se presentarán brevemente algunos otros sistemas de coordenadas ortogonales.

### 4.8.3 Coordenadas cilíndricas elípticas (también llamadas elípticas cilíndricas)

Los símbolos que se utilizan son $u$, $v$, $z$ y se toman en ese orden. Las ecuaciones de transformación son

$$x = a \cosh u \cos v$$

$$y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$$

$$z = z.$$

Este sistema es invariante respecto a traslaciones a lo largo del eje Z. En cada plano horizontal se tiene el sistema de coordenadas elípticas bidimensional. En la figura 4.30 se muestran las trazas de las superficies $u = cte$ y $v = cte$ con el plano $z = 0$. Las dos familias de superficies son cilindros paralelos al eje Z. Los cilindros de la primera familia son cilindros elípticos y los de la segunda cilindros hiperbólicos. Los factores de escala son

$$h_u = a\left(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v\right)^{1/2}$$

$$h_v = a\left(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v\right)^{1/2}$$

$$h_z = 1.$$

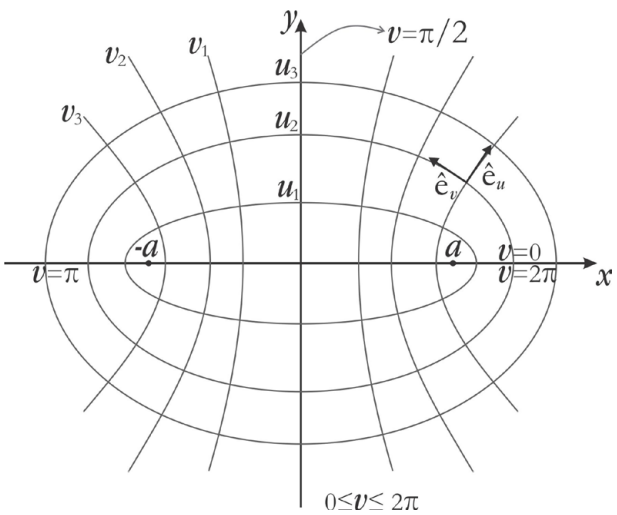



**FIGURA 4.30.** Coordenadas cilíndricas elípticas. $0 \le v \le 2\pi$; $0 \le u < \infty$; $\pi/2 \le v_1 < v_2 < v_3 \le \pi$

### 4.8.4 Coordenadas bipolares

Los símbolos que se utilizan son $\xi$, $\eta$, $z$ y se toman en ese orden. Las ecuaciones de transformación son

$$x = \frac{a \operatorname{senh}\eta}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$y = \frac{a \operatorname{sen}\xi}{\cosh\eta - \cos\xi} \qquad 0 \le \xi \le 2\pi$$

$$z = z.$$

Este sistema es invariante respecto a traslaciones a lo largo del eje Z. En cada plano horizontal se tiene el sistema de coordenadas bipolares bidimensional. La figura 4.31 muestra las trazas de $\xi = cte$ y $\eta = cte$ con el plano $z = 0$. Sus factores de escala son

$$h_\xi = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_\eta = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_z = 1.$$

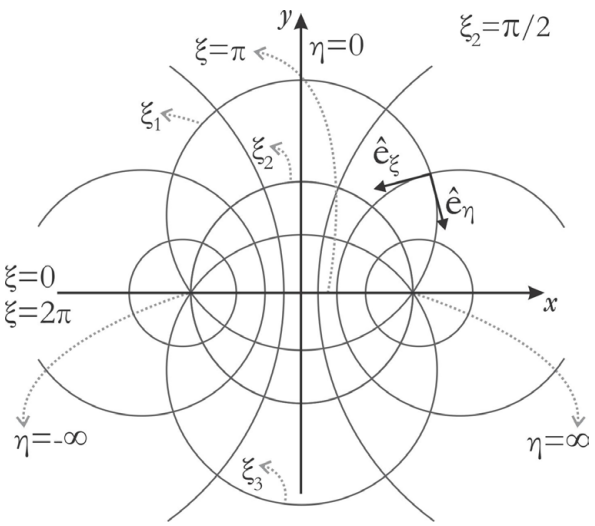



**FIGURA 4.31.** Coordenadas bipolares. Trazas de los cilindros circulares con el plano $z = 0$. Las ecuaciones de estos cilindros circulares son $(x - a\coth\eta)^2 + y^2 = a^2\,\operatorname{csch}^2\eta$ y $x^2 + (y - a\cot\xi)^2 = a^2\csc^2\xi$.

### 4.8.5 Coordenadas parabólicas (también llamadas paraboloidales)

Los símbolos que se utilizan son $\xi$, $\eta$, $\varphi$ y se toman en ese orden. Las ecuaciones de transformación son

$$x = \xi\eta \cos\varphi$$

$$y = \xi\eta \operatorname{sen}\varphi \qquad \xi \geq 0; \quad \eta \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2).$$

La figura 4.32 muestra las trazas de $\xi = cte$ y $\eta = cte$ con el plano $\varphi = \pi/2$. Los factores de escala son

$$h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

$$h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

$$h_\varphi = \xi\eta.$$

La grafica tridimensional correspondiente a este sistema se obtiene rotando al rededor del eje Z la gráfica plana mostrada aquí. Este sistema es izquierdo.

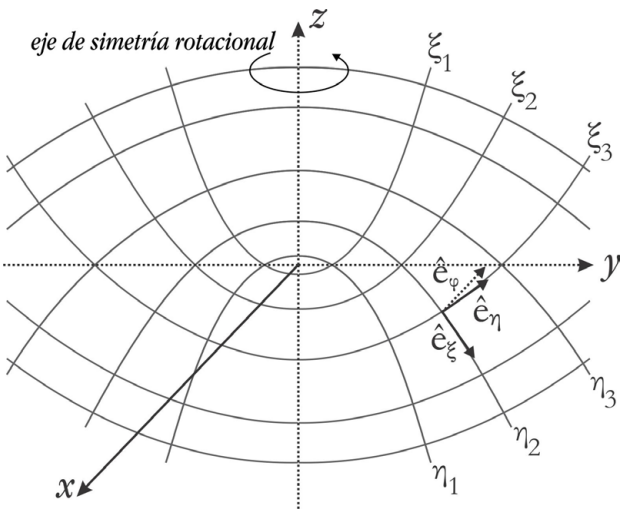



**FIGURA 4.32.** Coordenadas parabólicas. Al hacer $\xi = constante$ se obtienen parábolas que abren hacia $+z$ y al hacer $\eta = constante$ se obtiene parábolas que abren hacia $-z$.

### 4.8.6 Coordenadas biesféricas

Los símbolos que se utilizan son $\xi$, $\eta$, $\varphi$ y se toman en ese orden. Las ecuaciones de transformación son

$$x = \frac{a \operatorname{sen}\xi \cos\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$y = \frac{a \operatorname{sen}\xi \operatorname{sen}\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi} \qquad 0 < \xi < \pi; \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \qquad -\infty < \eta < \infty$$

$$z = \frac{a \operatorname{senh}\eta}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

La figura 4.32 muestra las trazas de $\xi = cte$ y $\eta = cte$ con el plano $\varphi = \pi/2$. Los factores de escala son

$$h_\xi = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_\eta = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_\varphi = \frac{a \operatorname{sen}\xi}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

La gráfica tridimensional correspondiente se obtiene girando alrededor del eje Z la gráfica plana mostrada aquí

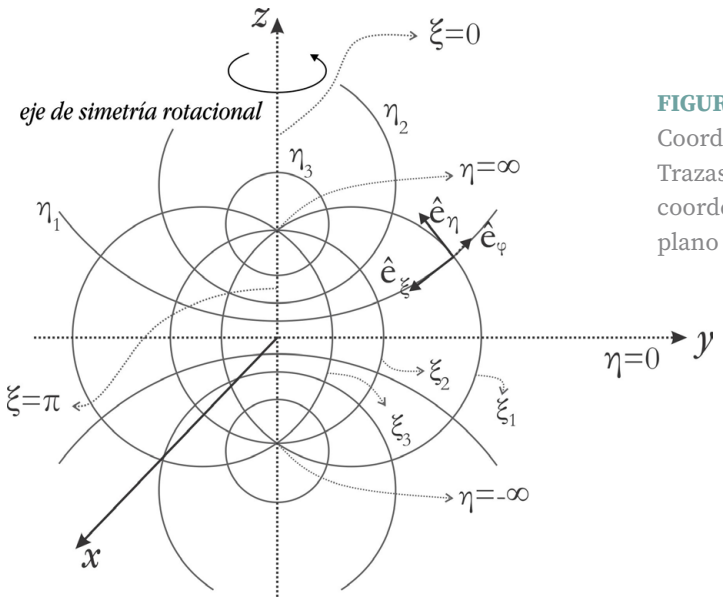



**FIGURA 4.33.**
Coordenadas biesféricas. Trazas de las superficies coordenadas con el plano $\varphi = \pi/2$.

### 4.8.7 Coordenadas esferoidales prolatas o alargadas

Los símbolos que se utilizan son $u$, $v$, $\varphi$ y se toman en ese orden. Las ecuaciones de transformación son

$$x = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \cos\varphi$$
$$y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \operatorname{sen}\varphi$$
$$z = a \cosh u \cos v.$$

Los rangos sobre los que verían las variables son

$$0 \le u < \infty; \qquad 0 \le v \le \pi; \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

La figura 4.34a muestra las trazas de las superficies coordenadas con el plano $\varphi = \pi/2$. La gráfica tridimensional correspondiente se obtiene girando alrededor del eje Z la gráfica plana mostrada en la figura 4.34 a, con lo que se obtiene la figura 4.34 b. Esta figura muestra las superficies $u = cte$, $v = cte$ y $\varphi = cte$

Al tomar $u = cte$ se obtienen elipses verticales.
Al tomar $v = cte$ se obtienen hiperboloides verticales de dos hojas
Al tomar $\varphi = cte$ se obtienen semiplanos verticales que contienen al semi eje Z.

Los factores de escala son

$$h_u = a\left(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v\right)^{1/2} = a\left(\cosh^2 u - \cos^2 v\right)^{1/2}$$

$$h_v = a\left(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v\right)^{1/2}$$

$$h_\varphi = a\,\text{senh}\,u\,\text{sen}\,v.$$

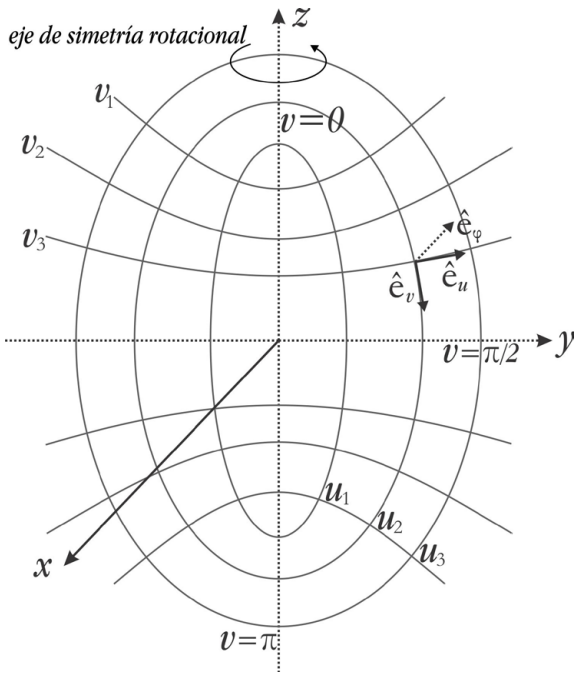



**FIGURA 4.34a.**
Coordenadas esferoidales prolatas o alargadas. Trazas con el plano $\varphi = \pi/2$; $v_1 < v_2 < v_3$.

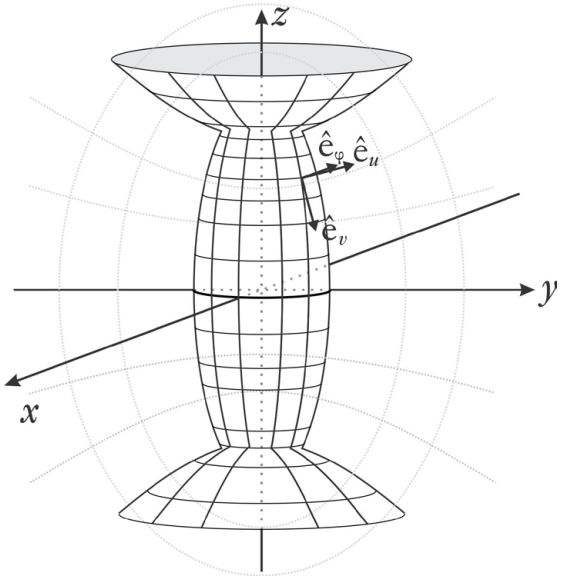



**FIGURA 4.34b.** Coordenadas esferoidales prolatas. Gráfica tridimensional

### 4.8.8 Coordenadas esferoidales oblatas o achatadas

Los símbolos que se utilizan son $u$, $v$, $\varphi$ y se toman en ese orden. Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \cos v \cos\varphi \\ y &= a \cosh u \cos v \operatorname{sen}\varphi \qquad 0 \le u; \qquad -\pi/2 \le v \le \pi/2; \qquad 0 \le \phi \le 2\pi \\ z &= a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v. \end{aligned}$$

La figura 4.35 muestra las trazas de las superficies $u = cte$ y $v = cte$ con el plano $\varphi = \pi/2$. Los factores de escala son

$$h_u = a\left(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v\right)^{1/2} = a\left(\cosh^2 u - \cos^2 v\right)^{1/2}$$

$$h_v = a\left(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v\right)^{1/2}$$

$$h_\varphi = a \cosh u \cos v.$$

La gráfica tridimensional correspondiente se obtiene girando al rededor del eje Z la gráfica plana mostrada aquí. Este sistema es izquierdo, ya que $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, \varphi}\right) < 0$. Un sistema derecho sería $(v, u, \varphi)$.

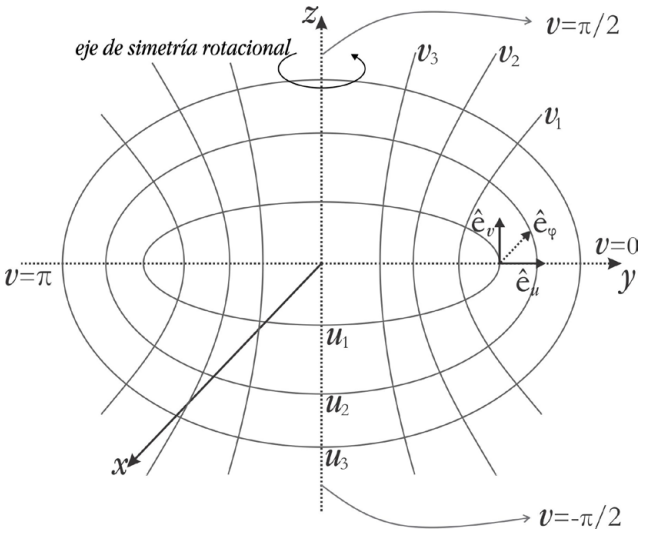



**FIGURA 4.35.** Coordenadas esferoidales oblatas o achatadas. Trazas con el plano $\varphi = \pi/2$ . $0 < v_1 < v_2 < v_3 < \pi/2$.

### 4.8.9 Coordenadas cilíndricas parabólicas

Los símbolos que se utilizan son $\xi$, $\eta$, $z$ y se toman en ese orden. Las ecuaciones de transformación son

$$x = \xi\eta$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\eta^2 - \xi^2\right); \qquad 0 \le \eta$$

$$z = z.$$

Si se toma $\eta \le 0$ se tiene un sistema equivalente.

Este sistema es invariante respecto a traslaciones a lo largo del eje Z. En cada plano horizontal se tiene el sistema de coordenadas parabólicas bidimensional. La figura 4.36a muestra las trazas de las superficies coordenadas $\eta = cte$ y $\xi = cte$ La figura 4.36b es una gráfica tridimensional que muestra las superficies

coordenadas $\eta = cte$ (cilindros parabólicos paralelos al eje Z que abren hacia el eje Y); $\xi = cte$ (cilindros paralelos al eje Z que abren hacia −Y ); y $z = cte$ (planos horizontales). Los factores de escala son:

$$h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

$$h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

$$h_z = 1.$$

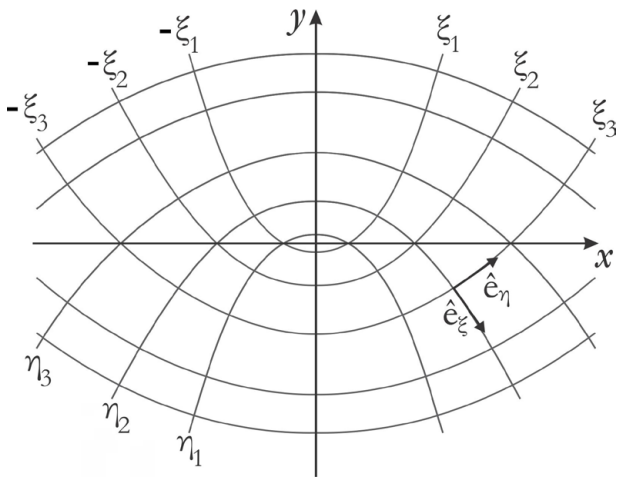



**FIGURA 4.36a.** Coordenadas cilíndricas parabólicas. Las parábolas mostradas son las trazas de las superficies coordenadas con el plano $z = 0$.

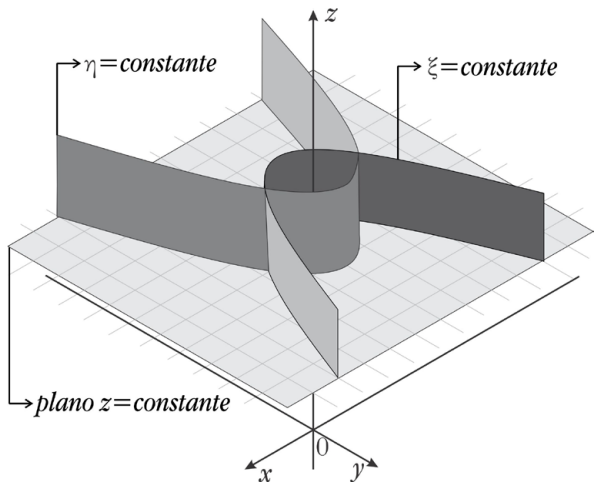



**FIGURA 4.36b.** Coordenadas cilíndricas parabólicas. Gráfica tridimensional

## 4.8.10 Coordenadas toroidales

Los símbolos que se utilizan son $\xi$, $\eta$, $\varphi$ y se toman en ese orden. Este sistema es izquierdo Las ecuaciones de transformación son

$$x = \frac{a\,\operatorname{senh}\eta\,\cos\phi}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$y = \frac{a\,\operatorname{senh}\eta\,\operatorname{sen}\phi}{\cosh\eta - \cos\xi} \qquad 0 \le \xi \le 2\pi; \quad 0 \le \eta < \infty; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$z = \frac{a\,\operatorname{sen}\xi}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

La figura 4.37a muestra las trazas de las superficies coordenadas con el plano $\varphi = \pi/2$ y la figura 4.37b muestra las superficies $\xi = cte$, y $\eta = cte$. Los factores de escala son

$$h_\xi = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_\eta = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_\varphi = \frac{a\,\operatorname{senh}\xi}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

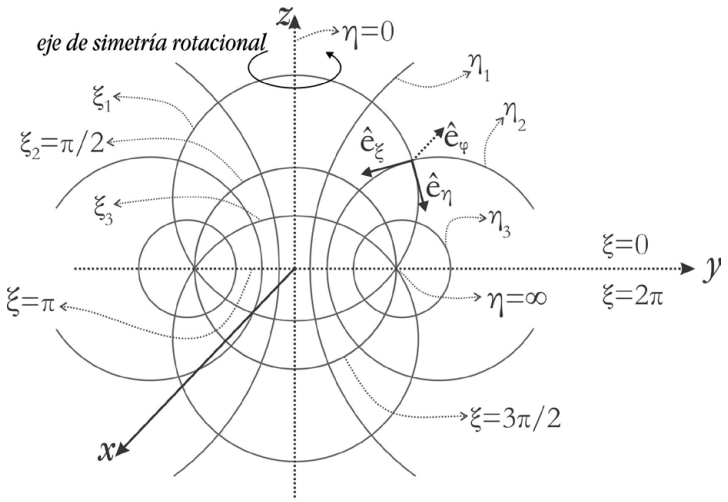



**FIGURA 4.37a.** Coordenadas toroidales. Trazas de las superficies coordenadas con el plano $\varphi = \pi/2$. $0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \infty$; $0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < 2\pi$.

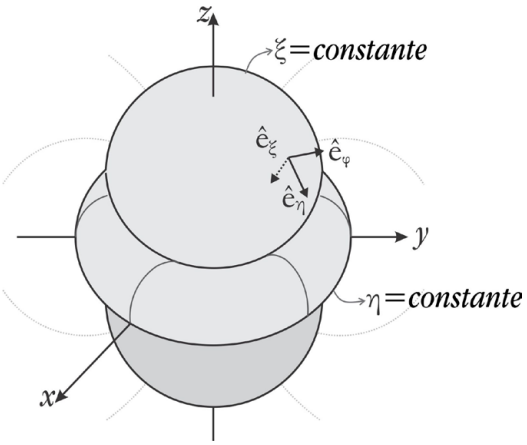



**FIGURA 4.37b.** Coordenadas toroidales. Superficies coordenadas.

## Ejercicios

**4.90.** Dada $\phi = \rho^2\theta$, calcular:

a) $\nabla\phi \equiv \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}$

b) $\nabla^2\phi$

en el punto $\rho = 5$; $\theta = 120°$, si se sabe que

$$\begin{cases} x = \rho\ \cos\theta \\ y = \rho\ \operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

**4.91.** Dada la transformación $x = 2u + v$; $y = u - 3v$:

a) Dibujar la región $R'$ del plano $uv$ en la cual se transforma la región $R$ del plano $xy$ limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

b) Calcular $J\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right)$.

c) Comprobar el resultado de b) con la relación entre las áreas de $R$ y $R'$.

**4.92.** Sea la función $\phi(\rho, \theta) = \rho\theta^2 + \rho$ dada en coordenadas polares. Calcular $\nabla\phi$ y $\nabla^2\phi$, en el punto $\rho = 1$, $\theta = 90°$.

**4.93.** Dada $\phi(u, v)$ y la transformación

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

se desea calcular $\nabla\phi = (\partial\phi/\partial x)\,\hat{\mathbf{i}} + (\partial\phi/\partial y)\,\hat{\mathbf{j}}$. Para calcular estas derivadas se requieren (elegir las opciones correctas):

a) $\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

b) $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

c) $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$

d) $\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

e) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$

f) $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$

g) $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

h) $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$

Sumando (vectorialmente) miembro a miembro las opciones correctas, se obtiene:

a) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \nabla u + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \nabla v$

b) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla u + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla v$

c) $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\,\nabla \cdot u + \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\,\nabla \cdot v$

d) $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\,\nabla u + \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\,\nabla v$

e) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\nabla u + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\nabla v$

**4.94.** Calcular la divergencia y el rotacional para $r \leq a$ del campo de velocidades que se forma al girar un cilindro sólido de radio $a$, alrededor del eje z, con velocidad angular $\omega$.

**4.95.** Dadas las siguientes curvas en el plano $XY$

$$C_1: \quad 2x^2+6x+4y-28=0 \qquad C_2: \quad y=\frac{2-x^2}{2}$$

$$C_3: \quad y=\frac{10-3x-x^2}{2} \qquad C_4: \quad x^2+2y=10$$

a) Graficar la región $R$ limitada por ellas.
b) Definir un sistema coordenado curvilíneo $u=f(x, y)$ y $v=g(x, y)$, y dibujar la nueva región $R'$ en el plano $UV$.
c) Hallar el valor del área entre las curvas a partir de $R'$ y uno de los jacobianos de la transformación.

**4.96.** Dada la transformación

$$u=x^2-y^2$$
$$v=2xy,$$

dar las componentes de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_u$ y $\hat{\mathbf{e}}_v$ referidos al sistema $xy$, en el punto $x=1$, $y=2$.

**4.97.** Sean las ecuaciones de transformación $x=2u+6v$ y $y=-4u+3v$. Obtener la expresión que determine el gradiente de la función $f(u, v)=2u+v^2$, referida al sistema $xy$ en el punto $u=1$, $v=2$.

**4.98.** Sean las ecuaciones de transformación $u=x^2+2y^2$ y $v=y/x^2$, y la función $f(u, v)=2u^2-uv+v^3$.

a) Determinar si el sistema $uv$ es ortogonal.
b) Establecer la expresión que define el gradiente de $f$.
c) Obtener el gradiente de $f$ valuado en el punto $x=-1$; $y=2$.

**4.99.** Para efectuar una transformación de coordenadas ¿será posible utilizar el sistema curvilíneo dado por las siguientes expresiones?

$$u=2x-3y\,; \qquad v=-4x+y-z\,; \qquad w=2x-8y-z$$

**4.100.** Calcular el jacobiano $J\left(\dfrac{x,\,y}{u,\,v}\right)$ asociado a la transformación

$$\begin{cases} u=\sqrt{x^2+y^2} \\ v=\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,. \end{cases}$$

**4.101.** Calcular el jacobiano $J\left(\dfrac{x,\,y}{u,\,v}\right)$ asociado a cada una de las siguientes transformaciones y determinar en cada caso los puntos en los que no existe una transformación uno a uno.

1) $\begin{cases} x=a\log u \\ y=b\log v \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\,\operatorname{sen} v \end{cases}$

3) $\begin{cases} u^2=x^2+y^2 \\ v^2=(x-a)^2+y^2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=au \\ y=av \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=u\cos a\ -\ v\operatorname{sen} a \\ y=u\operatorname{sen} a+v\cos a \end{cases}$

Indicar cuales de estos puntos son puntos singulares de estas transformaciones.

## Capítulo 5

# INTEGRALES DE LÍNEA

En este capítulo se tratará un tipo de integrales muy importantes que tienen un sin número de aplicaciones en matemáticas, ingeniería y física. Se trata de las *integrales de línea* llamadas también *integrales curvilíneas*. Para mencionar sólo uno de sus múltiples usos, citaremos el del cálculo del trabajo realizado por una fuerza cuando actúa sobre una partícula que se desplaza de un punto a otro.

Existen varios tipos de integrales de línea y en este capítulo se estudiarán varios de ellos. La idea fundamental en todos los casos consiste en una generalización de la integral unidimensional común

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

que se estudia en los cursos elementales de Cálculo Integral. Para lo que sigue es útil repasar brevemente una de las formas en que se puede definir la integral anterior. Principalmente conviene resaltar que lo que se utiliza como punto de partida es una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{1}$$

donde $\Delta x_i$ es la longitud de un pequeño intervalo sobre el eje X numerado con el índice $i$ y $f(\xi_i)$ es el valor que toma la función de una variable $f$ en el punto $\xi_i$ perteneciente al intervalo $i$. Pues bien, para definir las integrales de línea que se estudiarán a continuación se parte de sumas semejantes a (1), pero ahora en vez de que aparezca $f(\xi_i)$ aparece $f(\mathbf{r}_i)$ que es el valor de la función de varias variables $f$ evaluada en el punto $\mathbf{r}_i$ de una curva $C$. Además, en vez de que aparezca la longitud $\Delta x_i$ del intervalo $i$ sobre el eje X aparece una longitud $\Delta \ell_i$ que puede ser por ejemplo $\Delta x_i$, o $\Delta y_i$, o la longitud del segmento número $i$ de una curva $C$, o bien la proyección de dicho segmento sobre una dirección particular, etc. En todo este capítulo, cuando se haga referencia a una curva en la que se conoce su punto inicial y su punto final, se usará con frecuencia el nombre de trayectoria como sinónimo de curva.

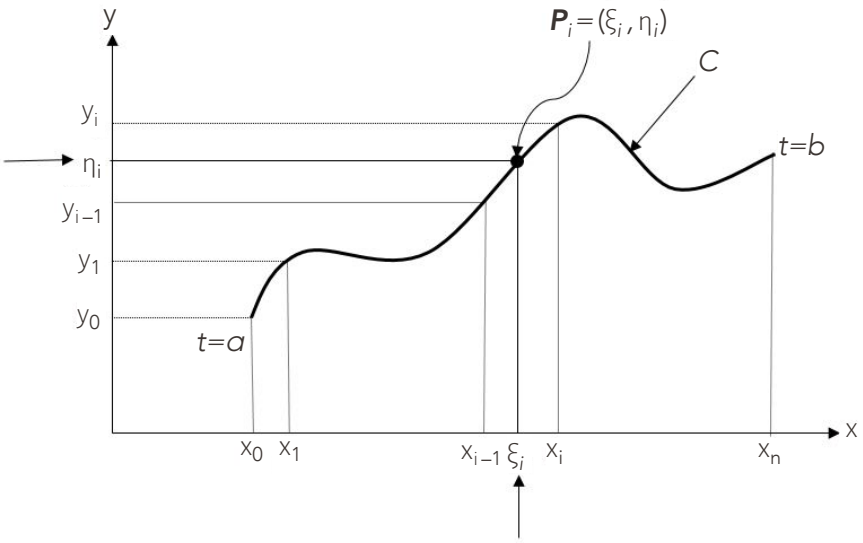



FIGURA 5.1.

## 5.1 Integrales de línea

Se definirá primero el tipo de integrales en donde $\Delta \ell_i$ es igual a $\Delta x_i$. Considérese una curva $C$ en el plano $XY$ con ecuaciones paramétricas

$$x = u(t); \qquad y = v(t); \qquad t \in [a, b].$$

Se define ahora una partición del intervalo $[a, b]$, denotada como $\mathcal{P}$, tal que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b.$$

Esta partición induce dos familias de puntos sobre los ejes X y Y, dadas respectivamente por

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n$$

y

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, y_i, \cdots, y_n,$$

donde $x_i = u(t_i)$ y $y_i = v(t_i)$ $\forall i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Por simplicidad se supondrá que estas dos familias son secuencias montonas crecientes o decrecientes. No obstante, cuando esto no se cumple basta subdividir la curva en secciones en las que la suposición si se cumple. La partición $\mathcal{P}$ también induce una partición sobre la curva $C$ dada por los puntos

$$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \cdots, \mathbf{r}_n,$$

siendo $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ $\forall i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Al intervalo que tiene como extremos a $t_{i-1}$ y $t_i$ se le llamará subintervalo número $i$, y se usarán las siguientes notaciones.

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\Delta r_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$$

$$\Delta s_i = \text{longitud de la curva entre los puntos } \mathbf{r}_{i-1} \text{ y } \mathbf{r}_i.$$

Al máximo valor de $\Delta t_i$ con $i = 1, 2, \cdots, n$ se le llamará *norma de la partición* y se le denotará con el símbolo $\|\Delta\|$. Sea $\tau_i$ un valor arbitrario en el $i$-ésimo subintervalo de la partición $\mathcal{P}$; es decir,

$$t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$$

y defínanse $\xi_i = u(\tau_i)$ y $\eta_i = v(\tau_i)$. Entonces $\tau_i$ define al punto $\mathbf{P}_i = (\xi_i, \eta_i)$ sobre la curva $C$, como se observa en la figura 5.1. Considérese ahora una función escalar de dos variables $f(x, y)$ definida en el plano $XY$ cuyo dominio incluya a la curva $C$. Multiplicando la longitud $\Delta x_i$ por el valor que tiene $f$ en el punto $\mathbf{P}_i$ y sumando sobre todos los valores de $i$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{P}_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i \tag{2}$$

Es claro que conforme se van tomando particiones cada vez más finas de manera que $\|\Delta\|$ tienda a cero se tiene que $n \to \infty$ y que $\mathbf{P}_i$ tiende a $\mathbf{r}_i$.

Bajo estas circunstancias pueden ocurrir dos situaciones excluyentes. La primera es cuando al ir considerando particiones cada vez más finas el valor de la suma (2) no se va acercando a ningún valor fijo. Esto ocurre por ejemplo cuando $f$ es la función de Dirichlet (se invita al lector interesado a consultar las características de esta función). La segunda es cuando el valor de la suma (2) sí se va acercando a un valor fijo $L$ el cual es independiente de la forma en que se elijan los valores de $\tau_i$. En este caso se tiene la siguiente definición.

**Definición.** Se dirá que existe la integral de línea de la función $f$ con respecto a $x$ a lo largo de la curva $C$, denotada como $\int_C f(\mathbf{r})\,dx$, si y sólo si existe un número $L$ con la propiedad de que para todo $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{P}_i)\,\Delta x_i - L \right| < \epsilon \tag{3}$$

para cualquier partición $\mathcal{P}$ con $\|\Delta\| < \delta$ y cualquier elección del conjunto $\{\tau_i\}$ con $\tau_i \in \Delta t_i$. En este caso se dice además que el valor de la integral de línea es $L$, es decir,

$$\int_C f(\mathbf{r})\,dx = L.$$

También se dice que el límite de la suma (2) cuando la norma de las particiones tiende acero es igual a $L$ y se escribe

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{P}_i)\, \Delta x_i,$$

o bien

$$\int_C f(\mathbf{r})\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{P}_i)\, \Delta x_i. \tag{4}$$

Una definición análoga se tiene para el caso en el que $\Delta \ell_i$ se toma igual a $\Delta y_i$. Así, en vez de la expresión (2) se tiene

$$\int_C f(\mathbf{r})\, dy \equiv \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{P}_i)\, \Delta y_i.$$

lo cual da lugar a

$$\int_C f(\mathbf{r})\, dy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{P}_i)\, \Delta y_i. \tag{5}$$

Aunque estas definiciones en términos de límites parecen muy naturales vale la pena señalar que el tipo de límite involucrado aquí es más complejo que el concepto de límite usual: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ en donde la variable $x$ aparece explícitamente en $f(x)$. Ahora la suma no tiene como variable explícita a $\|\Delta\|$.

En muchas aplicaciones de las integrales de línea aparecer los dos tipos de integrales anteriores combinadas en una suma de la forma

$$\int_C M(x, y)\, dx + \int_C N(x, y)\, dy \tag{6}$$

que se puede expresar también como

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \tag{6'}$$

o bien, escribiendo el integrando en forma de producto escalar, como

$$\int_C \big(M(x, y), N(x, y)\big) \cdot (dx, dy). \tag{6''}$$

Si se definen $\mathbf{r} \equiv (x, y)$, $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy)$ y $\mathbf{F} \equiv (M, N)$, la expresión (6") se escribe como

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \tag{6'''}$$

Si se quieren especificar los puntos extremos de la curva, estos pueden indicarse arriba y abajo del símbolo de integral. De esta manera, en vez de usar simplemente el símbolo $\int_C$ se usa

$$\int_C^{(x_n,\ y_n)}_{(x_0,\ y_0)} \quad \text{o también} \quad \int_C^{\mathbf{P}_1}_{\mathbf{P}_2}.$$

## 5.2 Condiciones para la existencia de la integral de línea y su evaluacion

A continuación, se verá un teorema que establece las condiciones bajo las cuales el valor de la suma (2) se va acercando a un valor fijo $L$. Es decir, las condiciones bajo las cuales existe el límite que define a la integral de línea. El teorema proporciona además información de cómo deben evaluarse estas integrales. El teorema sólo se dará para las integrales del tipo $\int_C M\,dx + N\,dy$, pero se hará evidente que también es válido para las integrales del tipo $\int_C M\,dx$ y $\int_C N\,dy$.

**Teorema 1.** Sean $M$ y $N$ funciones continuas cuyos dominios incluyen a la curva suave $C$ descrita por

$$x = u(t); \qquad y = v(t); \qquad t \in [a, b]$$

con las derivadas de $u$ y $v$ continuas en $[a, b]$. Entonces la integral curvilínea

$$\int_C M\,dx + N\,dy$$

existe y su valor está dado por la expresión

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \int_a^b \left[ M\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + N\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt} \right] dt \tag{7}$$

o, usando otra notación,

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left[ M\big(x(t), y(t)\big)\frac{dx}{dt} + N\big(x(t), y(t)\big)\frac{dy}{dt} \right] dt \tag{8}$$

o también

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\, dt. \tag{9}$$

**Demostración:** La demostración se hará sólo para la función $M$, siguiéndose un procedimiento semejante para la función $N$. Considérese la partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = b$$

y defínase la función

$$H(t) \equiv M\big(u(t), v(t)\big),$$

que es continúa puesto que $M$, $u$ y $v$ son continuas. Si se escoge un punto arbitrario $\tau_i$ sobre el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} H(\tau_i)\big[u(t_i) - u(t_{i-1})\big],$$

donde $\xi_i = u(\tau_i)$ y $\eta_i = v(\tau_i)$. De acuerdo con el teorema del valor medio del cálculo diferencial, existe un valor $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ para el que se cumple que

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=c_i} = \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \qquad \text{o bien} \qquad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=c_i} = \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{\Delta t_i}$$

de donde

$$u(t_i) - u(t_{i-1}) = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=c_i} \Delta t_i.$$

Si se sustituye esto en la sumatoria anterior se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} H(\tau_i) \left.\frac{du}{dt}\right|_{t\in c_i} \Delta t_i$$

en donde, si $\|\Delta\| \to 0$, se tiene que $c_i \to t_i$ y $\tau_i \to t_i$.

El miembro derecho tiene esencialmente la misma forma que la expresión que aparece en el Cálculo Integral usual (ver por ejemplo la ecuación (1)), en donde ahora la variable independiente es $t$ y no $x$. Entonces, haciendo uso de las propiedades demostradas en el Cálculo Integral usual, se concluye que como $H$ es continua, y $u$ y $v$ son diferenciables, el límite

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} H(\tau_i) \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=c_i} \Delta t_i$$

existe. Por lo tanto el límite del miembro izquierdo de la igualdad anterior también existe y las integrales $\int_C M(x, y)\,dx$ y $\int_a^b H(t)\frac{du}{dt}(t)\,dt$ existen y son iguales; es decir,

$$\int_C M(x, y)\, dx = \int_a^b H(t)\, \frac{du}{dt} dt$$

$$= \int_a^b M(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t)\, dt.$$

De la misma manera se llega a que

$$\int_C N(x, y)\, dy = \int_a^b N(u(t), v(t))\, \frac{dv}{dt}(t)\, dt.$$

Uniendo ambos resultados:

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \int_a^b \left[ M(u(t), v(t)) \frac{du}{dt} + N(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt} \right] dt.$$

Si en lugar de usar la notación $x = u(t)$ y $y = v(t)$ para las ecuaciones paramétricas de la curva $C$, se usa la notación $x = x(t)$ y $y = y(t)$, la expresión anterior queda como

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \int_a^b \left[ M(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + N(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt,$$

lo cual termina la prueba.

Nótese que en las integrales de línea los valores de $x$ y $y$ no varían de manera independiente, puesto que la pareja $(x, y)$ siempre debe estar sobre la curva $C$. Además, puede suceder que la familia de puntos $\{x_i\}$ sobre el eje X inducida por la partición del parámetro $t$ no sea una secuencia creciente ni decreciente. Inclusive puede ocurrir que los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$ se traslapen. Y lo mismo puede decirse para la familia $\{y_i\}$. Por lo tanto, para evaluar las integrales de línea, en general no es correcto integrar en forma usual respecto a la variable que aparece en el símbolo de la diferencial y considerar a la otra variable como constante.

El procedimiento correcto para evaluarlas está indicado en las ecuaciones (7), (8) o (9) del teorema anterior. Consiste en sustituir a $x$, $y$, $dx$ y $dy$ por sus valores dados por las ecuaciones paramétricas de la curva $C$, y poner como límites de integración a los valores extremos del intervalo sobre el que varía el parámetro $t$. Después de estas sustituciones, la expresión resultante es una integral ordinaria que depende sólo de la variable $t$ y puede evaluarse con los métodos comunes de integración. La posibilidad de usar este método depende por supuesto de que la integral exista.

**Teorema 2.** Considérese la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

y supóngase que se ha evaluado utilizando para la curva $C$ la parametrización

$$C: \begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b].$$

Si se hace una reparametrización de $C$ mediante la expresión $t = \varphi(\tau)$ de manera que

$$C: \begin{cases} x = u(\varphi(\tau)) = U(\tau) \\ y = v(\varphi(\tau)) = V(\tau) \end{cases} \qquad \tau \in [\alpha, \beta].$$

en donde $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$ y las funciones $U$ y $V$ son las composiciones $u \circ \varphi$ y $v \circ \varphi$ respectivamente. Entonces, el valor de $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ no cambia al utilizar la nueva parametrización, Es decir,

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(u(t), v(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(U(\tau), V(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\, d\tau.$$

**Demostración:** Por hipótesis se tiene que

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(u(t), v(t)\big) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt\,.$$

Haciendo el cambio de variable $t = \phi(\tau)$ en el miembro derecho y tomando en cuenta que $dt = \frac{dt}{d\tau}\, d\tau$ y que $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt}$, se tiene

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\big(u(\varphi(\tau)), v(\varphi(\tau))\big) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}\, d\tau$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\big(U(\tau)), V(\tau)\big) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\, d\tau,$$

lo que demuestra el teorema.

## Ejemplo 1.

Evaluar la integral de línea

$$\int_C \frac{y^3}{x}\, dx + e^y\, dy$$

donde $C$ es la curva dada por

$$x = t^3; \qquad y = t; \qquad 2 \le t \le 3.$$

**Solución:** Como las funciones $M$ y $N$ son continuas y la curva $C$ es suave el teorema 1 garantiza que la integral de línea existe y que su valor esta dado por la expresión (9). De las ecuaciones paramétricas se tiene que $dx = 3t^2\, dt$ y $dy = dt$. Sustituyendo esto en (9) se tiene:

$$\int_C \frac{y^3}{x}\, dx + e^y\, dy = \int_2^3 \left(3t^2 + e^t\right) dt.$$

La integral sobre la variable $t$ es una integral común que al evaluarla resulta

$$\left[t^3 + e^t\right]_2^3 \doteq 20.725.$$

La definición de integral curvilínea puede ser generalizada al caso de $n$ dimensiones. Su expresión es la siguiente:

$$\int_C M_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 + \int_C M_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_2 + \cdots$$

$$+ \int_C M_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_n$$

y el procedimiento para evaluarlas es exactamente el mismo que se usó en el ejemplo anterior.

En ocasiones lo que interesa no es la integral del producto de $f$ por $dx$ o $dy$, sino la integral del producto de $f$ por la diferencial de la longitud de arco $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, lo que da lugar a otro de los tipos de integrales de línea. En estos casos la sumatoria de partida es

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i,$$

en donde, si la partición es suficientemente fina, se tiene que $\Delta s_i = |\Delta \mathbf{r}_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Si el límite de esta suma existe cuando $\|\Delta\| \to 0$ se dice que la integral de línea $\int_C f(x, y)\, ds$ existe. Su valor es igual al valor de dicho límite, es decir,

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} = f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i.$$

A este tipo de integral se le llama *integral de línea* (o *integral curvilínea*) de la función $f$ respecto a la longitud de arco.

Para esta clase de integrales se tiene un teorema (semejante al teorema 1) que indica cuando la integral existe y proporciona un método para evaluarla.

Por su semejanza con el teorema 1 solo se enunciará brevemente. El teorema afirma que si la función $f$ es continua y la curva $C$ es lisa entonces la integral de línea $\int_C f\,ds$ existe y que para evaluarla hay que sustituir en $\int_C f(x, y)\,ds$ los valores de $x$, $y$ y $ds$ por sus expresiones en términos de las ecuaciones paramétricas:

$$x = u(t)$$

$$y = v(t)$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

y poner como límites de integración los valores de $a$ y $b$. Es decir,

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(u(t), v(t))\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\,. \tag{10}$$

Este tipo de integrales también se pueden generalizar a $n$ dimensiones. Así, en el espacio $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(u(t), v(t), w(t))\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

## Ejemplo 2.

Evaluar la integral curvilínea

$$\int_C xy\,ds$$

donde la curva $C$ tiene como ecuaciones paramétricas

$$x = 3\cos t; \qquad y = 2\operatorname{sen} t; \qquad 0 \le t \le \pi/2.$$

**Solución:** Como la función $xy$ es continua y la curva es suave, la integral existe y su valor esta dado por la ecuación (10). De acuerdo con las ecuaciones paramétricas

$$\frac{dx}{dt} = -3\operatorname{sen} t \qquad \frac{dy}{dt} = 2\cos t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 9\operatorname{sen}^2 t \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4\cos^2 t$$

y sustituyendo en (10)

$$\int_C xy\, ds = \int_0^{\pi/2} 6\operatorname{sen} t\cos t\sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\; dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 6\operatorname{sen} t\cos t\sqrt{5\operatorname{sen}^2 t + 4}\; dt$$

$$= \frac{2}{5}\left[5\operatorname{sen}^2 t + 4\right]^{3/2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{38}{5}.$$

### 5.2.1 Propiedades de la integral de línea

Al igual que las integrales usuales, las integrales de línea tienen varias propiedades importantes. A continuación, se enunciarán algunas de ellas. Por brevedad sólo se darán las propiedades de las integrales de línea respecto al arco $ds$, pero existe propiedades idénticas para las integrales de línea respecto a $x$ y $y$.

**Teorema 3**

– Si $k$ es una constante, entonces

$$\int_C kF(x, y)\, ds = k\int_C F(x, y)\, ds \tag{11}$$

– Si $F_1$ y $F_2$ son funciones continuas en $C$,

$$\int_C F_1(x, y)\, ds + \int_C F_2(x, y)\, ds = \int_C \left[F_1(x, y) + F_2(x, y)\right] ds \tag{12}$$

– Si $-C$ denota a la curva $C$ recorrida en el sentido opuesto, se cumple que

$$\int_{-C} F(x, y)\, ds = -\int_C F(x, y)\, ds \tag{13}$$

– Si $C$ es la unión de un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \cdots, C_n$, entonces

$$\int_C F(x, y)\, ds = \int_{C_1} F(x, y)\, ds + \int_{C_2} F(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} F(x, y)\, ds. \tag{14}$$

La importancia de la última propiedad radica en que para calcular una integral sobre una curva que no es suave, esta se puede descomponer en segmentos de curvas suaves, integrar por separado sobre cada segmento y al final sumar los resultados parciales. La demostración del teorema 3 es bastante sencilla y se deja como ejercicio al lector.

**Ejemplo 3.**

Evaluar la integral

$$\int_C x^2y^2\, dx + xy\, dy$$

del punto $(-1, 1)$ al punto $(2, 4)$ a lo largo de cada una de las siguientes curvas:

a) La recta que los une.

b) La parábola $y = x^2$.

c) Las rectas que van de $(-1, 1)$ a $(2, 1)$ y de $(2, 1)$ a $(2, 4)$.

Trazar la gráfica de la trayectoria en cada caso.

**Solución:**

a) En este caso la ecuación de $C$ es $y = x + 2$, por lo que (ver fig. 5.2):

$$x = t; \qquad y = t + 2 \qquad \text{con} \qquad a = -1 \qquad \text{y} \qquad b = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = 1.$$

Luego

$$\int_C x^2 y^2\, dx + xy\, dy = \int_{-1}^{2} \left[ t^2 (t+2)^2 (1) + t(t+2)(1) \right] dt$$

$$= \int_{-1}^{2} \left( t^4 + 4t^3 + 5t^2 + 2t \right) dt$$

$$= \left[ \frac{t^5}{5} + t^4 + \frac{5t^3}{3} + t^2 \right] \Bigg|_{-1}^{2}$$

$$\doteq 39.6.$$

b) Para este caso la ecuación de $C$ es $y = x^2$, por lo que (ver fig. 5.3):

$$x = t; \qquad y = t^2 \qquad \text{con} \qquad a = -1 \qquad \text{y} \qquad b = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

Luego

$$\int_C x^2 y^2\, dx + xy\, dy = \int_{-1}^{2} \left[ t^2 (t^2)^2 (1) + t(t^2)(2t) \right] dt$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(t^6 + 2t^4\right) dt$$

$$= \left[ \frac{t^7}{7} + \frac{2t^5}{5} \right] \Bigg|_{-1}^{2}$$

$\doteq 31.6.$

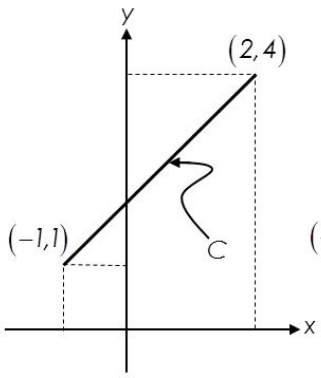



FIGURA 5.2.

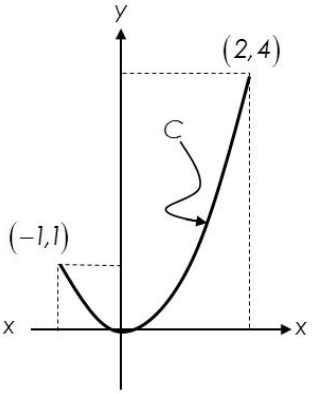



FIGURA 5.3.

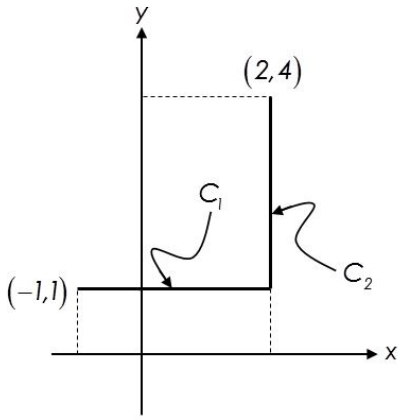



FIGURA 5.4.

c) En este caso la curva completa $C$ no es suave, pero está formada por la unión de dos trayectorias suaves o lisas $C_1$ y $C_2$ (ver fig. 5.4). Para la trayectoria $C_1$ la ecuación es $y = 1$ por lo que

$$x = t; \qquad y = 1 \qquad \text{con} \qquad a = -1 \qquad \text{y} \qquad b = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = 0.$$

De modo que

$$\int_{C_1} x^2\, y^2\, dx + xy\, dy = \int_{-1}^{2} \left[ t^2(1)(1) + t(1)(0) \right] dt$$

$$= \int_{-1}^{2} t^2\, dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{2} = 3.$$

Para la trayectoria $C_2$ la ecuación es $x = 2$, por lo que

$$x = 2; \qquad y = t \qquad \text{con} \qquad a = 1 \qquad \text{y} \qquad b = 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 0; \qquad \frac{dy}{dt} = 1.$$

Luego

$$\int_{C_2} x^2\, y^2\, dx + xy\, dy = \int_{1}^{4} \left[ 4t^2(0) + 2t(1) \right] dt$$

$$= \int_{1}^{4} 2t\, dt = \left[ t^2 \right]_{1}^{4} = 15$$

y finalmente

$$\int_{C} x^2\, y^2\, dx + xy\, dy = \int_{C_1} x^2\, y^2\, dx + xy\, dy + \int_{C_2} x^2\, y^2\, dx + xy\, dy$$

$$= 3 + 15$$

$$= 18$$

Nótese que aunque la función por integrar es la misma en los tres casos, los resultados fueron diferentes. Es decir, al seguir distintas trayectorias de integración entre los dos puntos dados, los resultados fueron distintos. Solamente para funciones muy especiales, que luego se estudiarán, las integrales curvilíneas son independientes de la trayectoria.

## Ejemplo 4.

Evaluar la integral

$$\int_C yz\,dx + zx\,dy + x^2y^2\,dz$$

donde $C$ es la hélice cuyas ecuaciones paramétricas son (ver figura 5.5):

$$x = \cos t; \qquad y = \operatorname{sen} t; \qquad z = \frac{t}{2} \qquad \text{con} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

**Solución:**

$$x = \cos t; \qquad y = \operatorname{sen} t; \qquad z = \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t; \quad \frac{dy}{dt} = \cos t; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \qquad a = 0; \quad b = 2\pi$$

y

$$\int_C yz\,dx + zx\,dy + x^2y^2\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{t}{2}\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + \frac{t}{2}\cos t(\cos t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{t}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{t}{2}\cos t^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t \right) dt.$$

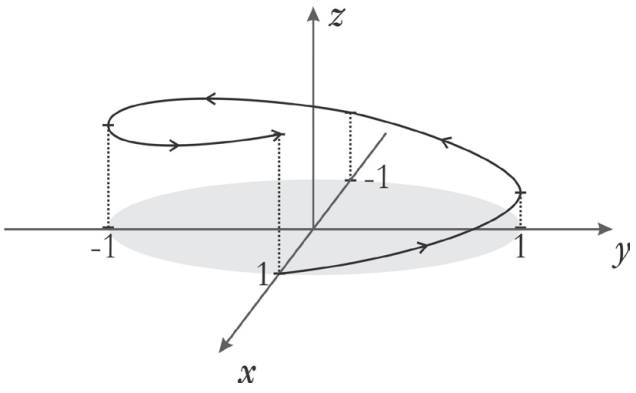



**FIGURA 5.5.** Curva de ecuaciones paramétricas $x = \cos t$; $y = \operatorname{sen} t$; $z = t/2$.

Resolviendo la primera integral por partes y utilizando en la segunda las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t \qquad \text{y} \qquad \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$$

se llega

$$\int_C yz\,dx + zx\,dy + x^2y^2\,dz = \left[\frac{t\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\cos 2t}{4} + \frac{t}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{64}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

## Ejemplo 5.

Evaluar la integral

$$\int_C \frac{\cos z}{x}\,dx + \frac{\operatorname{sen} z}{y}\,dy + z\,dz$$

si las ecuaciones paramétricas de la trayectoria $C$ están dada por (ver figura 5.6)

$$x = \cos^3 t\,; \qquad y = \operatorname{sen}^3 t\,; \qquad z = t\,; \qquad 0 \le t \le \frac{7\pi}{2}.$$

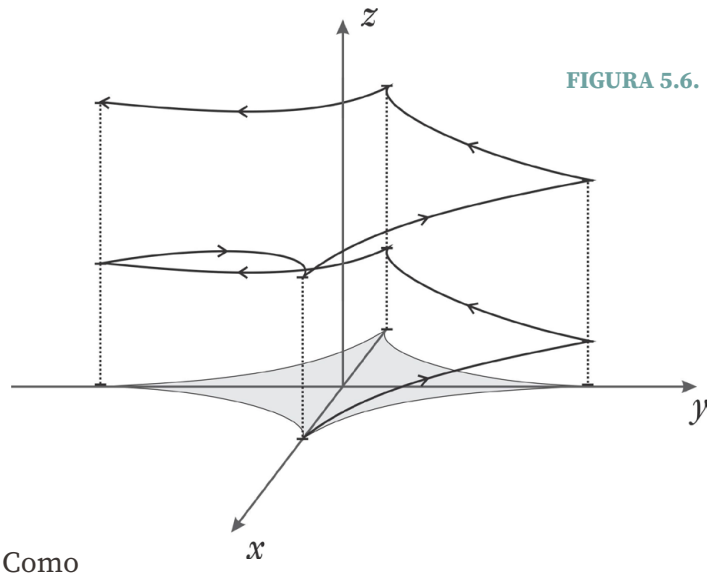



FIGURA 5.6.

**Solución:** Como

$$x=\cos^3 t; \qquad y=\operatorname{sen}^3 t; \qquad z=t$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\,\operatorname{sen} t; \qquad \frac{dx}{dt}=3\operatorname{sen}^2 t\cos t; \qquad \frac{dx}{dt}=1;$$

$$a=0; \qquad b=\frac{7\pi}{2}$$

En este ejemplo la curva $C$ no es una curva suave sino la unión de 7 curvas suaves. Sin embargo, las ecuaciones paramétricas son las mismas en cada tramo y por lo tanto no es necesario separar la integral en 7 integrales como lo indica la ecuación 14 del teorema 3. Entonces,

$$\int_C \frac{\cos z}{x}\,dx+\frac{\operatorname{sen} z}{y}\,dy+z\,dz=\int_0^{7\pi/2}\left[\frac{\cos t\left(-3\cos^2 t\,\operatorname{sen} t\right)}{\cos^3 t}\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sen} t\left(3\operatorname{sen}^2 t\cos t\right)}{\operatorname{sen}^3 t}+t(1)\right]dt$$

$$=\int_0^{7\pi/2}\left(-3\operatorname{sen} t+3\cos t+t\right)dt$$

$$=\left[3\cos t+3\operatorname{sen} t+\frac{t^2}{2}\right]_0^{7\pi/2}\doteq 54.45.$$

### 5.2.2 Trayectoria cerrada

Cuando la trayectoria $C$ es una curva cerrada simple como la mostrada en la figura 5.7, esto se indica con un pequeño círculo a la mitad del signo de integral y en ocasiones sobre dicho círculo se indica el sentido del recorrido mediante una pequeña flecha.

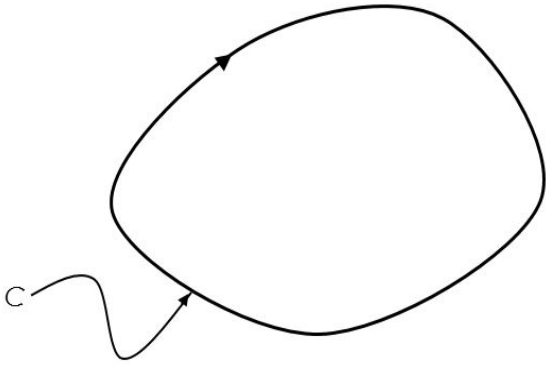



FIGURA 5.7.

Así, se escribe

$$\oint_C M\,dx + N\,dy \tag{15}$$

o

$$\oint_C M\,dx + N\,dy. \tag{16}$$

**Ejemplo 6.**

Evaluar la integral

$$\oint_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2},$$

donde $C$ es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ recorrida en sentido positivo (el contrario al de las manecillas del reloj como lo está indicando la pequeña flecha).

**Solución:** De la ecuación de $C$ se tiene que

$$x = a\cos t; \qquad y = a\,\text{sen}\,t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -a\,\text{sen}\,t; \qquad \frac{dy}{dt} = a\cos t.$$

Al efectuar las sustituciones correspondientes la integral queda como

$$\int_0^{2\pi} \left[ \frac{a\cos t + a\,\text{sen}\,t}{a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2\,t}(-a\,\text{sen}\,t) - \frac{a\cos t + a\,\text{sen}\,t}{a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2\,t}(a\cos t) \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\text{sen}\,t\cos t - \text{sen}^2\,t - \cos^2 t + \text{sen}\,t\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1)\,dt = \left[ -t^2 \right]_0^{2\pi} = -2\pi.$$

## Ejercicios

**5.1.** Evaluar la integral $\int_C xy\,dx + x^2 dy$ a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura.

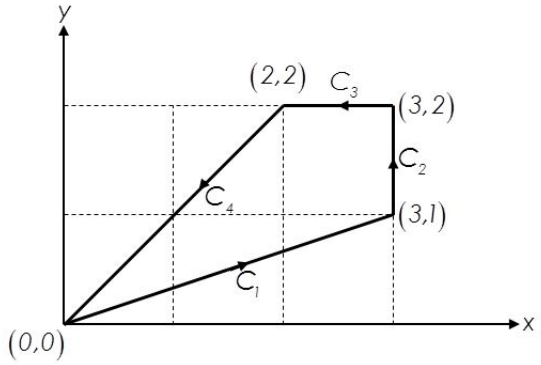



FIGURA EJ-5-1.

**Solución:** $\int_C = \frac{23}{3}$

**5.2.** Evaluar la integral de línea

$$\int_C \left(y\cos x + 2xe^y\right)dx + \left(\operatorname{sen} x + x^2e^y + 4\right)dy$$

del punto $(0, 0)$ al punto $(\pi/2, 1)$ sin utilizar ninguna trayectoria

**Solución:** $\int_C = -11.7$

**5.3.** Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = 2xy^2\hat{\mathbf{i}} + 2\left(x^2y + y\right)\hat{\mathbf{j}}$, desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 4, 0)$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias

*i)* parábola $y = x^2$

*ii)* recta $y = 2x$

*iii)* elipse $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

**Solución:** *i)* $\oint_{C_i} = 80$; *ii)* $\oint_{C_{ii}} = 80$; *iii)* $\oint_{C_{iii}} = 80.$

**5.4.** Si $\hat{\mathbf{T}}$ es el vector unitario tangente a la curva $C$, demostrar que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,ds.$$

**Solución:** La integral de ambos miembros es igual a $\int_C F_1dx + F_2dy + F_3dz$

**5.5.** Evaluar la integral

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

donde $F(r) = (x,\ x,\ x)$ y $C$ es el segmento de recta de ecuaciones $x = 2t$; $y = t + 2$; $z = 2$, que va del punto $(0, 2, 2)$ al punto $(6, 5, 2)$.

**5.6.** Evaluar las siguientes integrales a lo largo de las trayectorias indicadas.

*i)* $\int_C \left[xy^2dx + x^2z\ dy - (y-x)dz\right]$, siendo $C$ la trayectoria de ecuaciones $x=t;\ y=t^2;\ z=t^3;\ 0\le t\le 1$.

*ii)* $\int_C \left(\frac{y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, siendo $C$ la trayectoria de ecuaciones $x=\cos t;\ y=\operatorname{sen} t;\ -\pi\le t\le\pi$.

**Solución:** *i)* $\int_C = \frac{253}{420}$; *ii)* $\int_C = 0$.

**5.7.** Evaluar $\int_C (x^2+y)\,ds$ si $C$ es la recta que une a los puntos $(0,\ 0)$ y $(1,\ 2)$, parametrizada como:

*i)* $x=t;\qquad y=2t$
*ii)* $x=\operatorname{sen} t;\quad y=2\operatorname{sen} t$.

**Solución:** *i)* $\int_C = \frac{4\sqrt{5}}{3}$; *ii)* $\int_C = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

**5.8.** Calcular $\oint_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$ alrededor de una sección de una circunferencia de radio $a$ centrada en el origen que se encuentra en el plano $XY$ y comprendida entre los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$.

**Solución:** $\oint_C = a^2(\theta_2-\theta_1)\hat{\mathbf{k}}$

## 5.3 Independencia de la trayectoria

En esta sección se estudiará la relación que existe entre las integrales de línea y las diferenciales exactas estudiadas en el Capítulo 2. Se verá que la integral de línea de una diferencial exacta no depende de la trayectoria que se utilice para efectuar el recorrido. Esta propiedad es muy importante en las aplicaciones físicas. Para entrar en materia considérese el siguiente ejercicio.

### Ejemplo 7.

Evaluar la integral de línea

$$\int_C e^y \cos x \, dx + e^y \operatorname{sen} x \, dy$$

del punto $(0, 0)$ al punto $(\pi/2, 1)$ sobre cada una de las siguientes tres trayectorias:

a) La recta que une los dos puntos.
b) La trayectoria formada por dos rectas que van de $(0, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ la primera, y de $(\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 1)$ la segunda.

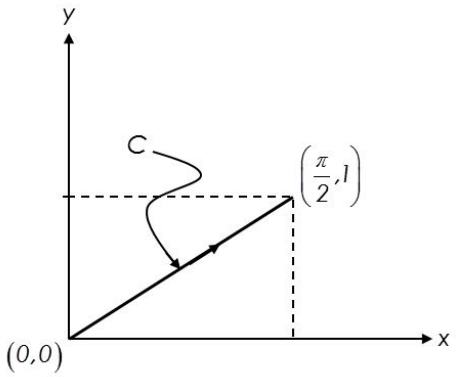



FIGURA 5.8.

c) Sobre la trayectoria $y = \operatorname{sen} x$.

**Solución:**

a) La ecuación de $C$ es $y = \frac{2}{\pi} x$ (ver figura 5.8). Luego

$$x = t; \qquad y = \frac{2}{\pi} t$$

$$\frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{\pi}$$

y los valores inicial y final de $t$ son $a = 0$ y $b = \pi/2$. Entonces

$$\int_C e^y \cos x \, dx + e^y \operatorname{sen} x \, dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[ e^{2t/\pi} \cos t(1) + e^{2t/\pi} \operatorname{sen} t \left( \frac{2}{\pi} \right) \right] dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left( e^{2t/\pi} \cos t + \frac{2}{\pi} e^{2t/\pi} \operatorname{sen} t \right) dt$$

resolviendo por partes ambas integrales se llega a

$$\left[ \frac{2\pi}{4+\pi^2} e^{2t/\pi} \cos t + \frac{\pi^2}{4+\pi^2} e^{2t/\pi} \operatorname{sen} t \right.$$

$$\left. + \frac{4}{4+\pi^2} e^{2t/\pi} \operatorname{sen} t - \frac{2\pi}{4+\pi^2} e^{2t/\pi} \cos t \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[ e^{2t/\pi} \operatorname{sen} t \right]_0^{\pi/2} = e.$$

b) En este caso la trayectoria $C$ está formada por las rectas $C_1$ y $C_2$. La ecuación de la recta $C_1$ es $y = 0$ (ver figura 5.9). Luego

$$x = t; \quad y = 0 \qquad \text{con} \qquad a = 0; \quad b = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt}=1; \qquad \frac{dy}{dt}=0$$

y

$$\int_{C_1} e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy = \int_0^{\pi/2} \left[e^0 \cos t(1) + e^0 \operatorname{sen} t(0)\right] dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \left[sen\ t\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

La ecuación de $C_2$ es $x=\frac{\pi}{2}$. Así que

$$x=\frac{\pi}{2}; \qquad y=t \quad \text{con} \quad a=0; \quad b=1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt}=0; \qquad \frac{dy}{dt}=1$$

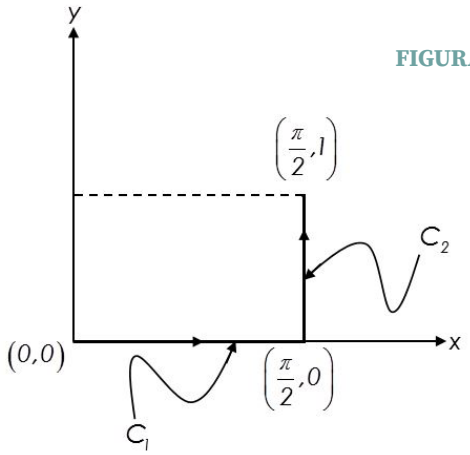



FIGURA 5.9.

y

$$\int_{C_2} e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy = \int_0^1 \left[e^t \cos\frac{\pi}{2}(0) + e^t \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(1)\right] dt$$

$$= \int_0^1 e^t \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\, dt = \left[e^t\right]_0^1 = e-1.$$

Luego, al sumar se obtiene

$$\int_{C_1} e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy + \int_{C_2} e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy = e.$$

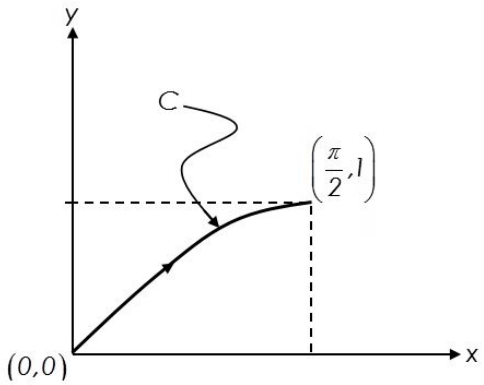



FIGURA 5.10.

c) La ecuación de $C$ es $y = \operatorname{sen} x$ (ver figura 5.10), por lo que

$$x = t; \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad \text{con} \qquad a = 0; \qquad b = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

y

$$\int_C e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy = \int_0^{\pi/2} \left[ e^{\operatorname{sen} t} \cos t + e^{\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t \cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[ e^{\operatorname{sen} t} \cos t + e^{\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t \cos t \right] = dt.$$

Al resolver las dos integrales el resultado es

$$\int_C e^y \cos x\, dx + e^y \operatorname{sen} x\, dy = \left[ e^{\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t \right]_0^{\pi/2} = e.$$

Se observa que en los tres casos se obtuvo el mismo resultado. De hecho, si se evaluara la integral siguiendo cualquier otra trayectoria, siempre se llegaría al mismo resultado. En estos casos es posible utilizar la notación

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

en donde no es necesario indicar la trayectoria $C$ sino únicamente sus puntos extremos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$.

Cabría ahora la pregunta: ¿qué característica tiene el integrando de este ejemplo que hace que el valor de la integral de línea sea el mismo sin importar la curva que se usó en el recorrido? La respuesta está en el siguiente teorema.

**Teorema 4.** Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ dos funciones continuas en una región abierta $R$ del plano $XY$ y sean $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ dos puntos arbitrarios de $R$. Entonces el valor de la integral de línea

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

es independiente de la trayectoria $C \subset R$ que se utilice para unir dichos puntos si y sólo si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta sobre $R$. En este caso la integral de línea es igual a

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1), \tag{17}$$

siendo $\varphi$ la función escalar cuya diferencial total $d\varphi$ es igual a la diferencial exacta, esto es

$$d\varphi = M(x, y)dx + N(x, y)dy \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

**Demostración:** ($\Rightarrow$) Supóngase que la integral

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

es independiente de la trayectoria. Entonces, si se parte de un punto fijo arbitrario $(x_1 , y_1)$, la expresión

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

sólo dependerá del punto final $(x, y)$ y, por lo tanto, la expresión anterior define una función $\varphi(x, y)$ dada por

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \qquad \forall (x, y) \in R$$

donde la integración debe realizarse sobre cualquier curva $C$ con la única restricción de que $C$ sea una curva suave y que sus puntos extremos sean $(x_1 , y_1)$ y $(x, y)$. Ahora se aplicará a esta función la secuencia de pasos de la definición de derivada parcial respecto a $x$. Como

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} M\, dx + N\, dy$$

entonces

$$\varphi(x + \Delta x, y) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x+\Delta x,\, y)} M\, dx + N\, dy$$

y

$$\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x+\Delta x,\, y)} M\, dx + N\, dy - \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} M\, dx + N\, dy$$

pero

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x+\Delta x,\, y)} M\,dx + N\,dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} M\,dx + N\,dy + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\, y)} M\,dx + N\,dy$$

y por lo tanto

$$\varphi(x+\Delta x,\, y) - \varphi(x,\, y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\, y)} M\,dx + N\,dy \qquad \forall (x,\, y) \in R.$$

Como en la integral del miembro derecho la variable $y$ permanece constante, $dy = 0$. Además de acuerdo con el teorema del valor medio del cálculo integral se tiene que

$$\varphi(x+\Delta x,\, y) - \varphi(x,\, y) = \int_{x}^{x+\Delta x} M\,dx = M(c,\, y)\,\Delta x$$

donde $c \in [x,\, x+\Delta x]$. Si se divide entre $\Delta x$ y se toman límites cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x,\, y) - \varphi(x,\, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} M(c,\, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,\, y) \qquad \forall (x,\, y) \in R.$$

En forma semejante se llega a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,\, y) \qquad \forall (x,\, y) \in R.$$

Esto prueba que existe una función escalar $\varphi$ definida en $R$ tal que su diferencial total $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dy$ es igual a $M\,dx + N\,dy$ y que por lo tanto $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta en $R$.

$(\Leftarrow)$

Supóngase que $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta en $R$. Esto implica que existe una función $\varphi$ cuya diferencial total es

$$d\varphi = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

Considérese ahora como trayectoria una curva suave que va del punto $(x_1, y_1)$ al punto $(x_2, y_2)$ y cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad t_1 \le t \le t_2.$$

Luego

$$x_1 = x(t_1); \qquad y_1 = y(t_1); \qquad x_2 = x(t_2); \qquad y_2 = y(t_2).$$

Evaluando la integral de línea

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \left[ M(x, y)\frac{dx}{dt} + N(x, y)\frac{dy}{dt} \right] dt.$$

Como

$$M(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad N(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

entonces

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} \right) dt.$$

Por la regla de la cadena se tiene que el integrando del segundo miembro es la derivada total de la función $\varphi$ con respecto a $t$. Así,

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt}\varphi\,(x(t), y(t)) \right] dt \\ &= \varphi\,(x(t_2), y(t_2)) - \varphi(x(t_1), y(t_1)) \\ &= \varphi\,(x_2, y_2) - \varphi(x_1\,, y_1). \end{aligned}$$

Se ve que el lado derecho depende únicamente de los valores de $\varphi$ en los puntos extremos. Por consiguiente, la integral es independiente de la trayectoria y se puede escribir que

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \varphi(x_2,y_2) - \phi(x_1,y_1).$$

Así concluye la demostración de este importante teorema. Se verán ahora algunas consecuencias.

Sea $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ una diferencial exacta en una región $R$ del plano $XY$, entonces:

*i)* Si $C$ es una trayectoria arbitraria en $R$ seccionalmente lisa o suave, que va del punto $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ al punto $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$

$$\int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \int_{\mathbf{P}_1}^{\mathbf{P}_2} M\,dx + N\,dy$$

$$= \varphi(\mathbf{P}_2) - \varphi(\mathbf{P}_1).$$

*ii)* Si $-C$ es la trayectoria $C$ recorrida en sentido contrario

$$\int_C^{\mathbf{P}_2}{}_{\mathbf{P}_1} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = -\int_{-C}^{\mathbf{P}_1}{}_{\mathbf{P}_2} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

*iii)* Si $C$ es una curva cerrada en $R$ seccionalmente suave

$$\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{18}$$

Vale la pena enfatizar lo que indica esta expresión: la integral de línea de una diferencial exacta a lo largo de una curva cerrada siempre vale cero.

El teorema 4 puede ser generalizado al caso de tres o más dimensiones. Considé-

rense como ilustración los siguientes ejemplos.

## Ejemplo 8.

Sea la integral curvilínea

$$\int_C \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

donde $C$ es una trayectoria que va del punto $(1, 0, 0)$ al punto $(3, 4, 5)$.

a) Verificar que el integrando es una diferencial exacta.
b) Obtener su valor sin utilizar ninguna trayectoria.
c) Calcular la integral utilizando la trayectoria formada por los segmentos de recta $C_1$, $C_2$ y $C_3$ que van respectivamente de $(1, 0, 0)$ a $(3, 0, 0)$, de $(3, 0, 0)$ a $(3, 4, 0)$ y de $(3, 4, 0)$ a $(3, 4, 5)$ (ver figura 5.11).

**Solución:**

a) $$\int_C \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dy$$

$$+ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dz$$

$$= \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

donde

$$M = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$N = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

y

$$P = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Entonces, como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = -\frac{yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

en todo el plano excepto el origen, podemos asegurar (usando el teorema 15 del capítulo 2) que el integrando es una diferencial exacta en cualquier conjunto abierto y convexo que no contenga al origen.

b) Como los puntos extremos $(1, 0, 0)$ y $(3, 4, 5)$ quedan contenidos en un sinnúmero de conjuntos abiertos y convexos, en donde el integrando es una diferencial exacta, se puede evaluar la integral sin utilizar ninguna trayectoria. Para esto se debe determinar primero la función $\varphi$. Se sabe que $\varphi$ es tal que

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

y

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Si se integra $M$ con respecto a $x$:

$$\varphi(x,y,z)=\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+K(y,z)$$

donde $K(y,z)$ es una función que depende sólo de $y$, $z$. Así,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+K_y(y,z)$$

donde $K_y(y,z)$ denota a la derivada de $K(y,z)$ respecto a $y$. Si se iguala a $N$:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+K_y(y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \quad K_y(y,z)=0 \quad \Rightarrow \quad K(y,z)=H(z)$$

siendo $H(z)$ una función que depende sólo de $z$. Luego

$$\varphi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+H(z).$$

Si ahora se deriva con respecto a $z$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+H'(z)$$

y se iguala a $P$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+H'(z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \quad H'(z)=0 \quad \Rightarrow \quad H(z)=cte$$

donde $cte$ es una constante arbitraria. Por lo tanto,

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + cte$$

y el valor de la integral está dado por

$$\left[ \sqrt{x^2+y^2+z^2} + cte \right]_{(1,0,0)}^{(3,4,5)} = 5\sqrt{2} - 1.$$

c) Las ecuaciones de $C_1$ son $y=0$ y $z=0$ (ver figura 5.11); luego

$$x = t; \qquad y = 0; \qquad z = 0; \qquad \text{con} \qquad a = 1; \qquad b = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = 0; \qquad \frac{dz}{dt} = 0$$

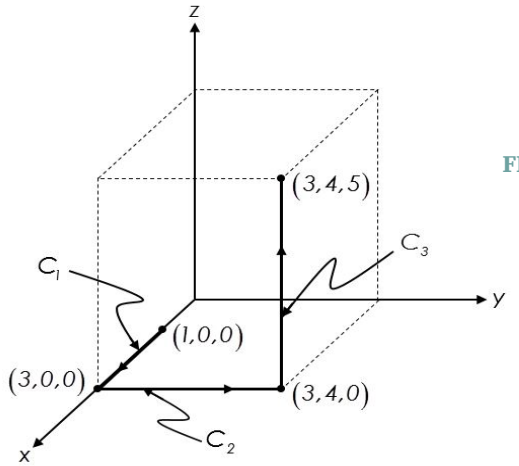



FIGURA 5.11.

y

$$\int_{C_1} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_1^3 \frac{t(1)+0(0)+0(0)}{\sqrt{t^2+0+0}}\,dt$$

$$= \int_1^3 dt = t\Big|_1^3 = 2.$$

Las ecuaciones de $C_2$ son $x=3$, $z=0$. Luego

$$x=3; \qquad y=t; \qquad z=0; \qquad \text{con} \qquad a=0; \qquad b=4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=0; \qquad \frac{dy}{dt}=1; \qquad \frac{dz}{dt}=0$$

y

$$\int_{C_2} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^4 \frac{t\,dt}{\sqrt{9+t^2}} = \left[\sqrt{9+t^2}\right]_0^4 = 2.$$

Las ecuaciones de $C_3$ son $x=3$, $y=4$. Por lo que

$$x=3; \qquad y=4; \qquad z=t; \qquad \text{con} \qquad a=0; \qquad b=5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=0; \qquad \frac{dy}{dt}=0; \qquad \frac{dz}{dt}=1$$

y

$$\int_{C_3} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^5 \frac{t\,dt}{\sqrt{25+t^2}} = \left[\sqrt{25+t^2}\right]_0^5 = 5\sqrt{2}-5.$$

Finalmente,

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 2+2+5\sqrt{2}-5 = 5\sqrt{2}-1$$

en donde se observa que es el mismo resultado que el del inciso b) como debía ser.

## Ejemplo 9.

Dadas las funciones

$$M(x, y) = \sec^2 x \sec y + \cos x \cos y$$

$$N(x, y) = \tan x \sec y \tan y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

y los puntos $\mathbf{P} = \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\mathbf{Q} = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$

a) Evaluar $\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ si $C$ consta de dos segmentos de recta $C_1$ y $C_2$ que van de $(0, \pi/6)$ a $(\pi/3, \pi/6)$, y de $(\pi/3, \pi/4)$ a $(\pi/3, \pi/4)$.
b) Verificar que $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta.
c) Encontrar $\varphi(x, y)$ tal que $d\varphi = M\,dx + N\,dy$.
d) Evaluar $\int_C M\,dx + N\,dy$ mediante la evaluación de $\varphi(\pi/3, \pi/4) - \varphi(0, \pi/6)$.

**Solución:**

a) Para $C_1$:

$$x = t; \qquad y = \frac{\pi}{6}; \qquad \text{con} \qquad a = 0; \qquad b = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 1; \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$

y

$$\int_{C_1} M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_0^{\pi/3} \left[ \left( \sec^2 t \sec \frac{\pi}{6} + \cos t \cos \frac{\pi}{6} \right) \frac{dx}{dt} \right.$$

$$\left. + \left( \tan t \sec \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sec^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right) dt$$

$$= \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \tan t + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} t \right]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{11}{4}.$$

Para $C_2$:

$$x = \frac{\pi}{3}; \qquad y = t; \qquad \text{con} \qquad a = \frac{\pi}{6}; \qquad b = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 0; \qquad \frac{dy}{dt} = 1$$

y

$$\int_{C_2} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left[ \left( \sec^2 \frac{\pi}{3} \sec t + \cos \frac{\pi}{3} \cos t \right) \frac{dx}{dt} \right.$$

$$\left. + \left( \tan \frac{\pi}{3} \sec t \tan t - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} t \right) \frac{dy}{dt} \right] dt$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left( \sqrt{3} \sec t \tan t - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} t \right) dt$$

$$= \left[ \sqrt{3} \sec t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{4} - \frac{11}{4}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \frac{11}{4} + \frac{5\sqrt{6}}{4} - \frac{11}{4} = \frac{5\sqrt{6}}{4}.$$

b) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \sec^2 x \ \sec y \ \tan y - \cos x \ \operatorname{sen} y = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

excepto cuando $x = \pi/2$ o bien $y = \pi/2$. Sin embargo, los puntos **P** y **Q** quedan contenidos en un sin número de conjuntos abiertos simplemente conexos que no se intersectan con las rectas $x = \pi/2$ y $y = \pi/2$. Por lo tanto, utilizando el teorema 16 del capítulo 2, se concluye que trata de una diferencial exacta en cualesquiera de esos conjuntos.

c) Como $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta se deberá tener que existe una $\varphi$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N.$$

Integrando $M$ con respecto a $x$:

$$\varphi(x, y) = \int \left(\sec^2 x \sec y + \cos x \cos y\right) dx$$

$$= \tan x \sec y + \operatorname{sen} x \cos y + K(y)$$

siendo $K(y)$ una función arbitraria de $y$ pero independiente de $x$. Si se deriva con respecto a $y$ y se iguala a $N$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \tan x \sec y \tan y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + K'(y) = N$$

$$= \tan x \sec y \tan y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow \qquad K'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K(y) = cte$$

donde *cte* es una constante arbitraria. Por lo tanto,

$$\varphi(x, y) = \tan x \sec y + \operatorname{sen} x \cos y + cte.$$

d) $$\int_C M\,dx + N\,dy = \varphi\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) - \varphi\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \tan\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$- \tan 0 \sec\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} 0 \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{5\sqrt{6}}{2},$$

que es el mismo resultado que el del inciso a) como debía ser.

## Discusión Complementaria

Dada la expresión $M\,dx + N\,dy$ totalmente arbitraria y de la cual no se conoce de antemano si existe una función $\varphi$ tal que $d\varphi = M\,dx + N\,dy$, no existe ningún método general (excepto la integración) que permita determinar por anticipado si dicha expresión es una diferencial exacta. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones los teoremas 14, 15 o 16 del capítulo 2 son suficientes para determinarlo. Desafortunadamente no siempre son aplicables. Estos teoremas aseguran que existe la función $\varphi$ si se verifica la igualdad $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ en toda una región abierta completa $R$ que tenga al menos una de las características especificadas en esos tres teoremas. En general basta con que la igualdad $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ no se verifique en un sólo punto $x_0$ de $R$, para que los teoremas ya no sean aplicables y que por lo tanto no se pueda asegurar que existe la función $\varphi$ definida en $R$, ni siquiera en la región agujerada $R' = R - \{x_0\}$. En estos

casos todavía es posible que exista $\varphi$ pero es necesario investigarlo de otra forma y su existencia depende de cada caso particular. Como muestra de esto a continuación se discuten dos ejemplos. En ambos ejemplos se cumple la igualdad $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ en todo el plano excepto en el origen y por lo tanto los teoremas mencionados no dan información de si $M\,dx + N\,dy$ es o no una diferencial exacta en regiones agujeradas que rodeen al origen. Sin embargo, recurriendo a la integración explícita se encuentra que en el primer caso $M\,dx + N\,dy$ no es una diferencial exacta en dichas regiones y en el segundo caso que $M\,dx + N\,dy$ si es una diferencial exacta en esas regiones. El ejemplo 10 muestra claramente que cuando se tiene la integral $\int_C M\,dx + N\,dy$ no es suficiente verificar que la igualdad $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ se cumple a lo largo de la curva $C$ para asegurar que el integrando es una diferencial exacta.

**Ejemplo 10.**

Calcular la integral

$$\int_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) Una circunferencia de radio 1 que rodea al origen en sentido positivo.
b) Una media circunferencia de radio 1 que rodea al origen por arriba y que va del punto $\mathbf{P} = (-1, 0)$ al punto $\mathbf{Q} = (1, 0)$.
c) Lo mismo que en b), pero que ahora rodea al origen por abajo.

**Solución:**

a) Antes que nada conviene recordar que en el ejemplo 61 del capítulo 2 se analizó este integrando, y se vio que aunque $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x \;\; \forall (x, y) \neq 0$, la expresión $M\,dx + N\,dy$ no era una diferencial exacta en ningún rectángulo $R$ que contenga al origen y ni tampoco en ningún rectángulo agujerado en el origen $R'$. Por consiguiente, la integral de línea sobre cualquier trayectoria

cerrada que rodee al origen no satisfacerá la ecuación (18). En efecto, unas ecuaciones paramétricas de la circunferencia son

$$x=\cos t; \qquad y=\operatorname{sen} t; \qquad \text{con} \qquad t\in[\,0,\,2\pi]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt}=-\operatorname{sen} t; \qquad \frac{dy}{dt}=\cos t;$$

entonces

$$\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}(-\operatorname{sen} t)+\frac{\cos t}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi} dt=t\Big|_0^{2\pi}=2\pi\neq 0.$$

b) Para la semicircunferencia superior se tiene que

$$x=\cos t; \qquad y=\operatorname{sen} t; \qquad \text{con} \qquad a=\pi \quad \text{y} \quad b=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt}=-\operatorname{sen} t; \qquad \frac{dy}{dt}=\cos t;$$

y

$$\int_\pi^0\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}+\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}\right]dt=\int_\pi^0 dt=t\Big|_\pi^0=-\pi.$$

c) Para la semicircunferencia inferior se tiene

$$x=\cos t; \qquad y=\operatorname{sen} t; \qquad \text{con} \qquad a=\pi; \qquad b=2\pi$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt}=-\operatorname{sen} t; \qquad \frac{dy}{dt}=\cos t;$$

y

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_{\pi}^{2\pi} dt = \pi$$

que es distinto del resultado del inciso b), lo cual era de esperarse porque el integrando no es una diferencial exacta en ninguna región abierta que rodee al origen, a pesar de que en todos los demás puntos se cumpla que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Sin embargo, todas las trayectorias que vayan de **P** a **Q** rodeando al origen por arriba darán como resultado el valor de $-\pi$, y todas las que vayan por abajo, el valor de $\pi$. Esto se debe a que si por ejemplo $C_1$ y $C_2$ son dos trayectorias de **P** a **Q** que rodeen al origen por arriba, siempre existirá una región abierta simplemente conexa $R$ que contenga a $C_1$ y a $C_2$ pero no al origen, y en donde $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Por lo tanto, usando el teorema 16 del capítulo 2, se concluye que $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta en $R$. Por lo tanto, existe una función $\phi$ en $R$ tal que $d\phi = M\,dx + N\,dy$ y la integral $\int_C M\,dx + N\,dy$ es independiente de la trayectoria $\forall C \subset R$. Sobre esta región $R$ se tiene que

$$\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} M\,dx + N\,dy = \phi(\mathbf{Q}) - \phi(\mathbf{P})$$

siendo $\phi = \text{ang tan}(y/x)$ [la expresión ang tan$(y/x)$ definida en todo el plano no es una función propiamente dicha, ya que es multivaluada, como lo muestra la figura 2.30 del capítulo 2, pero al restringir su domino al intervalo $-\pi/2$ a $3\pi/2$ se convierte en una función univaluada]. Como $\phi(\mathbf{Q}) = 0$ y $\phi(\mathbf{P}) = \pi$ (ver figura 2.30 del capítulo 2) el resultado es efectivamente $-\pi$.

En general podemos decir que siempre que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea una diferencial exacta en una región simplemente conexa $R \in \mathbb{R}^2$ y $C_1$ y $C_2$ sean dos trayectorias que van de un punto $\mathbf{P}_1$ a un punto $\mathbf{P}_2$, de tal forma que ambas trayectorias estén dentro de $R$, entonces las integrales

$$\int_{C_1}^{\mathbf{P}_1}_{\mathbf{P}_2} M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad \text{y} \quad \int_{C_2}^{\mathbf{P}_1}_{\mathbf{P}_2} M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

serán iguales. Pero si $C_1$ y $C_2$ están en diferentes regiones simplemente conexas $R_1$ y $R_2$ de manera que $R_1 \cup R_2$ no sea simplemente conexa y de manera que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea una diferencial exacta en cada una de ellas por separado pero no en la unión, entonces las dos integrales anteriores pueden ser diferentes.

## Ejemplo 11.

Evaluar la integral

$$\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

del punto (−1, −1) al punto (1, 1).

**Solución:**

Este integrando fue analizado en el ejemplo 62 del capítulo 2. Se vio que no se podían aplicar los teoremas 14, 15 o 16 para determinar si $M\,dx + N\,dy$ era o no una diferencial exacta, Sin embargo, mediante un simple cálculo, se mostró que existe una función $\phi(x, y)$ dada por

$$\phi(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{r}$$

que está definida en todo el plano excepto el origen y tal que $\nabla\phi = (M, N)\ \forall (x, y) \neq \mathbf{0}$. En consecuencia se puede afirmar que $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta en todo el plano con excepción del origen y que para calcular la integral de línea bastará evaluar la función $\phi(x, y)$ en los extremos dados. O sea que

$$\int_{(-1,-1)}^{(1,1)} M\,dx + N\,dy = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Si se evaluara la integral mediante cualquier trayectoria que no pasara por el origen, el resultado sería nuevamente cero.

Ahora bien, si se toma como trayectoria la recta que une los puntos en cuestión, es decir, la recta $y=x$, se tendrá que (nótese que esta recta sí pasa por el origen):

$$x=t; \qquad y=t \qquad a=-1 \qquad b=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=1; \qquad \frac{dy}{dt}=1$$

y

$$\int_C M\,dx+N\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{t(1)+t(1)}{\left(t^2+t^2\right)^{3/2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2}.$$

Como era de esperarse, esta integral no existe, ya que la función $1/t^2$ diverge en un punto dentro del intervalo de integración $[-1,\,1]$. Por lo tanto, no es válido aplicar las reglas usuales de integración.

### 5.3.1 La integral de línea y el gradiente

Otra forma de expresar una integral de línea cuando su integrando $M\,dx+N\,dy$ es una diferencial exacta, es mediante el concepto de gradiente. En efecto, por un lado, se tiene que la diferencial total de una función diferenciable arbitraria $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se puede escribir como

$$df=\frac{df}{dx}\,dx+\frac{df}{dy}\,dy=\nabla f\cdot d\mathbf{r},$$

donde $d\mathbf{r}=(dx,\,dy)$. Por otro lado, se sabe que si $M\,dx+N\,dy$ es una diferencia exacta existe una función $\varphi$ tal que su diferencial total es $d\varphi=M\,dx+N\,dy$ la cual, por supuesto, se puede escribir como se indicó arriba, es decir como $\nabla\varphi\cdot d\mathbf{r}$. Por lo tanto, la integral de línea de una diferencial exacta se puede expresar como

$$\int_C M\,dx+N\,dy=\int_C \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r}.$$

La generalización al espacio de $n$ dimensiones es

$$\int_C M_1\,dx_1 + M_2\,dx_2 + \cdots + M_n\,dx_n = \int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$$

donde

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad \text{y} \qquad d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, \cdots, dx_n).$$

## Ejercicios

**5.9.** Calcular la integral de línea $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy - y\,dx$ a lo largo de las curvas cerradas mostradas en la figura EJ-5-9. Discutir los resultados obtenidos. ¿Qué se ha calculado en cada caso?

**Solución:** *a)* $\int_{C_a} = \pi$, *b)* $\int_{C_b} = 2$, *c)* $\int_{C_c} = 8$.

**5.10.** Probar que la siguiente integral de línea es independiente de la trayectoria y calcular su valor utilizando el concepto de diferencial exacta.

$$\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy.$$

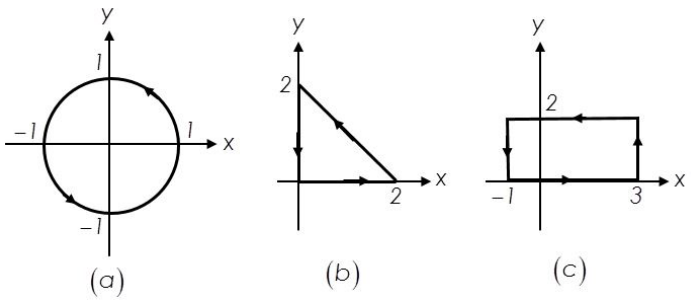



FIGURA EJ-5-9.

**Solución:** $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} = e.$

**5.11.** Sea la integral de línea $\int_{(1,1)}^{(-2,-1)} (4x+y)\,dx+(x-6y)\,dy$

*i)* Demostrar que es independiente de la trayectoria

*ii)* Evaluar la integral por medio de una trayectoria

*iii)* Evaluar la integral utilizando la diferencial exacta.

**Solución:** La integral es independiente de la trayectoria y su valor es 7.

**5.12.** Evaluar la integral $\int_C x^2y\,dx+\frac{x^3}{3}\,dy$:

*i)* A lo largo de la trayectoria mostrada en la figura EJ-5-12

*ii)* Sin utilizar ninguna trayectoria.

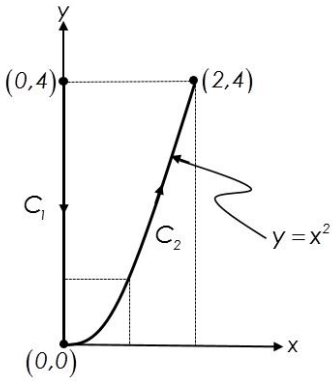



FIGURA EJ-5-12.

**Solución:** *i)* $\int_C = \frac{32}{3}$; *ii)* $\int_C = \frac{32}{3}$.

## 5.4 Otro tipo de integrales curvilíneas de funciones vectoriales

Se principiará definiendo la integral vectorial de una función $\mathbf{v}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$. Considérese la función vectorial de variable escalar

$$\mathbf{v}(t)=v_1(t)\,\hat{\mathbf{i}}+v_2(t)\,\hat{\mathbf{j}}+v_3(t)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Se observa que cada una de sus componentes es una función escalar con una sola variable independiente $t$. Entonces, cuando existen las tres integrales comunes

$$\int_a^b v_1(t)\,dt \qquad \int_a^b v_2(t)\,dt \qquad \int_a^b v_3(t)\,dt,$$

cuyos valores son respectivamente $I_1$, $I_2$ e $I_3$, se define la integral vectorial de $\mathbf{v}(t)$, que se denota con el símbolo

$$\int_a^b \mathbf{v}(t)\,dt,$$

mediante la expresión

$$\int_a^b \mathbf{v}(t)\,dt \equiv \hat{\mathbf{i}}\int_a^b v_1(t)\,dt+\hat{\mathbf{j}}\int_a^b v_2(t)\,dt+\hat{\mathbf{k}}\int_a^b v_3(t)\,dt$$

$$=\hat{\mathbf{i}}\,I_1+\hat{\mathbf{j}}\,I_2+\hat{\mathbf{k}}\,I_3, \tag{19}$$

lo que puede escribirse también como

$$\int_{\mathbf{v}_a}^{\mathbf{v}_b}\mathbf{v}(t)\,dt \equiv \left(\int_a^b v_1(t)\,dt,\int_a^b v_2(t)\,dt,\int_a^b v_3(t)\,dt\right)$$

$$=(I_1,I_2,I_3), \tag{19'}$$

siendo

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}(a) = (v_1(a), v_2(a), v_3(a)) \text{ y } \mathbf{v}_b = \mathbf{v}(b) = (v_1(b), v_2(b), v_3(b)).$$

De acuerdo con esta definición se tiene que si cada una de las componentes de $\mathbf{v}(t)$ es integrable la integral vectorial existe. Ahora bien, de los cursos elementales de Cálculo Integral con una sola variable se sabe que si las funciones $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ son funciones acotadas de $t$ con un número finito de puntos de discontinuidad, entonces su integral definida común existe. Por lo tanto, la integral vectorial de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ también existirá.

Las integrales de funciones vectoriales se pueden generalizar al espacio de $n$ dimensiones. Así, para la función vectorial

$$\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t))$$

se define

$$\int_{\mathbf{v}_a}^{\mathbf{v}_b} \mathbf{v}(t)\, dt \equiv \left( \int_a^b v_1(t)\, dt, \int_a^b v_2(t)\, dt, \cdots, \int_a^b v_n(t)\, dt \right).$$

Considérese ahora el caso en el que $\mathbf{v}$ sea una función vectorial de variable vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$. Las integrales curvilíneas

$$\int_C^{\mathbf{P}_b} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, dx \qquad \int_C^{\mathbf{P}_b} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, dy \qquad \int_C^{\mathbf{P}_b} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, ds$$

de la función $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sobre la trayectoria $C$ que va del punto $\mathbf{P}_a$ al punto $\mathbf{P}_b$, se definen respectivamente como

$$\int_C^{\mathbf{P}_b} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, dx \equiv \int_a^b \mathbf{v}(u(t), v(t), w(t)) \frac{dx}{dt}\, dt$$

$$\int_C^{\mathbf{P}_b}_{\mathbf{P}_a} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, dy \equiv \int_a^b \mathbf{v}\big(u(t), v(t), w(t)\big)\, \frac{dy}{dt}\, dt$$

$$\int_C^{\mathbf{P}_b}_{\mathbf{P}_a} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, ds \equiv \int_a^b \mathbf{v}\big(u(t), v(t), w(t)\big) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt,$$

donde $u$, $v$ y $w$ son las funciones que describen a la trayectoria $C$ mediante las ecuación paramétricas $\mathbf{r}(t) = (u(t),\ v(t),\ w(t))$, con $\mathbf{P}_a = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{P}_b = \mathbf{r}(b)$. Se observa que al hacer la composición de $v(r)$ con las ecuaciones paramétricas de $C$, estas tres integrales se reducen a integrales vectoriales con una sola variable independiente parecidas a la que se definió en la expresión (19).

## Ejemplo 12.

Encontrar la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que define la posición de una partícula, si su velocidad está dada por

$$\mathbf{r}'(t) = e^t\, \hat{\mathbf{i}} - \ln t\, \hat{\mathbf{j}} + 2t\, \hat{\mathbf{k}}$$

y se sabe además que cuando $t = 1$ su posición es

$$\mathbf{r}(1) = \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** De acuerdo con la definición de la integral vectorial (expresión (19)) se tiene que

$$\int_a^b \mathbf{r}'(t)\, dt = \left( \int_a^b x'(t)\, dt, \int_a^b y'(t)\, dt, \int_a^b z'(t)\, dt \right)$$

$$= \big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

$$= \mathbf{r}(t).$$

Por lo tanto, para hallar la posición de la partícula basta integrar $\mathbf{r}'$. Así,

$$r(t)=\int \left(e^t\,\hat{\mathbf{i}}-\ln t\,\hat{\mathbf{j}}+2t\,\hat{\mathbf{k}}\right)dt$$

$$=\hat{\mathbf{i}}\int e^t\,dt\;-\hat{\mathbf{j}}\int \ln t\,dt\;+\;\hat{\mathbf{k}}\int 2t\,dt$$

$$=\left(e^t+C_1\right)\hat{\mathbf{i}}\;-\left(t\ln t\;-t+C_2\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(t^2+C_3\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

Para evaluar las constantes de integración se utiliza la condición dada para $t=1$. Si se sustituye $t=1$ en la expresión de $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{r}(1)=\left(e+C_1\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(C_2-1\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(1+C_3\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

Al igualar a la condición dada

$$\left(e+C_1\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(C_2-1\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(1+C_3\right)\hat{\mathbf{k}}\;=\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$$

se sigue que

$$e+C_1=0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1=-e$$

$$1-C_2=1 \qquad \Rightarrow \qquad C_2=0$$

$$1+C_3=-1 \qquad \Rightarrow \qquad C_3=-2$$

y finalmente

$$\mathbf{r}(t)=\left(e^t-e\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(t\ln t-t\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(t^2-2\right)\hat{\mathbf{k}}.$$

## Ejemplo 13.

Sea el campo vectorial

$$\mathbf{v}(x, y) = y\sqrt{y}\,\hat{\mathbf{i}} + x\sqrt{y}\,\hat{\mathbf{j}}$$

y la trayectoria $C$ dada por

$$x = t; \qquad y = t^{2/3}.$$

Investigar si la integral curvilínea

$$\int_C^{(1,1)}{}^{(8,4)} \mathbf{v}(x, y)\, dx$$

existe, y en caso afirmativo, calcularla.

**Solución:** Se sustituye $x$ y $y$ en términos de $t$,

$$\mathbf{v}(x(t), y(t)) = t^{2/3}\sqrt{t^{2/3}}\,\hat{\mathbf{i}} + t\sqrt{t^{2/3}}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= t\,\hat{\mathbf{i}} + t^{4/3}\hat{\mathbf{j}}.$$

Como las componentes son funciones continuas la integral pedida existe y antes de evaluarla se va a comprobar que efectivamente la curva $C$ pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(8, 4)$. De las ecuaciones paramétricas se tiene que:

$$\text{si} \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \text{y} \quad y = 1;$$

$$\text{si} \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad t = 8 \quad \text{y} \quad y = 4.$$

Por lo tanto, la curva pasa por esos dos puntos y los valores extremos de $t$ son 1 y 8. Así,

$$\int_C^{(8,4)} \mathbf{v}(x, t)\, dt = \hat{\mathbf{i}} \int_1^8 t\, dt + \hat{\mathbf{j}} \int_1^8 t^{4/3}\, dt$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^8 + \hat{\mathbf{j}} \left[ \frac{3t^{7/3}}{7} \right]_1^8$$

$$= \frac{63}{2}\, \hat{\mathbf{i}} + \frac{381}{7}\, \hat{\mathbf{j}}.$$

## Ejemplo 14.

Considérese el campo vectorial

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (y - z)\, \hat{\mathbf{i}} + (z - x)\, \hat{\mathbf{j}} + (x - y)\, \hat{\mathbf{k}}$$

y la trayectoria $C$ definida por

$$x = a \cos t\,; \quad y = a \operatorname{sen} t\,; \quad z = bt,$$

donde $t \in [0,\ 2\pi]$. Investigar si la integral $\int_C \mathbf{u}(\mathbf{r})\, ds$ existe y en caso afirmativo calcularla.

**Solución:** Se expresa $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ en función de $t$ mediante las ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = (a \operatorname{sen} t - bt)\, \hat{\mathbf{i}} + (bt - a \cos t)\, \hat{\mathbf{j}} + (a \cos t - a \operatorname{sen} t)\, \hat{\mathbf{k}}.$$

Se ve que las componentes son funciones continuas. Por lo tanto, la integral existe y es igual a

$$\int_C \mathbf{u}(\mathbf{r})\, ds = \hat{\mathbf{i}} \int_0^{2\pi} (a \operatorname{sen} t - bt)\, ds + \hat{\mathbf{j}} \int_0^{2\pi} (bt - a \cos t)\, ds$$

$$+ \hat{\mathbf{k}} \int_0^{2\pi} (a \cos t - a \operatorname{sen} t)\, ds$$

donde

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, dt.$$

Entonces

$$\int_C \mathbf{u}(\mathbf{r})\, ds = \left( \hat{\mathbf{i}} \left[ -a\cos t - \frac{bt^2}{2} \right]_0^{2\pi} + \hat{\mathbf{j}} \left[ \frac{bt^2}{2} - a \operatorname{sen} t \right]_0^{2\pi} \right.$$

$$\left. + \hat{\mathbf{k}} \left[ a \operatorname{sen} t + a\cos t \right]_0^{2\pi} \right) \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= 2\pi^2 b \sqrt{a^2 + b^2}\, (-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}).$$

## Ejercicios

**5.13.** La velocidad de una partícula está dada por la expresión $\mathbf{v}(t) = 6t^2\,\hat{\mathbf{i}} + 4e^{2t}\,\hat{\mathbf{j}} + 6\cos 3t\,\hat{\mathbf{k}}$ donde $t$ es el tiempo. Determinar la posición $\mathbf{S}(t)$ de la partícula en el instante $t = 1$ si se sabe que la posición en el tiempo $t = 0$ está dada por el vector $2\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\,\hat{\mathbf{k}}$.

**Solución:** $\mathbf{S}(1) = 4\,\hat{\mathbf{i}} + 13.78\,\hat{\mathbf{j}} - 2.72\,\hat{\mathbf{k}}$

**5.14.** Sea el campo $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{i}} + xz\,\hat{\mathbf{j}} + x^2 y\,\hat{\mathbf{k}}$ y la trayectoria dada por $x = 2t^2$; $y = \sqrt{2}\,t$; $z = 4t$. Determinar si existe la integral

$$\int_C^{(1,1,4/\sqrt{2})}_{(0,0,0)} \mathbf{v}\, dt$$

y en caso afirmativo calcularla.

**Solución:** $\frac{1}{5\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\sqrt{2}}{12'}\,\hat{\mathbf{k}}$

**5.15.** Hallar la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que define la posición de una partícula, cuando su velocidad está dada por

$$\mathbf{r}'(t) = t\sqrt{1-t^2}\,\hat{\mathbf{i}} - \ln t\,\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{t+8}\,\hat{\mathbf{k}}$$

y se sabe que cuando $t=1$ su posición está dada por el vector

$$\mathbf{r}(1) = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** $\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{(1-t^3)^{3/2}}{3}+1\right)\hat{\mathbf{i}} - (t\ln t - t)\,\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{2(t+8)^{3/2}}{3} - 19\right)\hat{\mathbf{k}}$

## 5.5 La integral curvilínea como trabajo

Se mencionó al principio de este capítulo que el concepto de trabajo es una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales curvilíneas. Se comenzará esta sección discutiendo la configuración más simple en donde aparece este concepto y progresivamente se irán considerando configuraciones más generales.

Cuando un cierto objeto es desplazado a lo largo de un segmento recto de longitud $L$ por una fuerza de magnitud constante $F$ que actúa en el sentido del movimiento, el trabajo $W$ realizado por $\mathbf{F}$ está dado por la expresión

$$W = F\,L.$$

Sin embargo, si dicha fuerza es de magnitud variable a lo largo de la trayectoria como podría ser el caso de un resorte (ver figura 5.12), pero el movimiento sigue siendo sobre una línea recta paralela a la dirección de la fuerza, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ está dado por la integral

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx,$$

donde se ha supuesto que la fuerza es paralela al eje X.

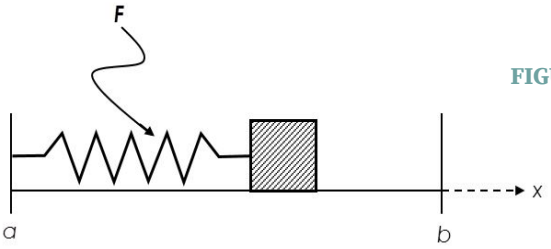



FIGURA 5.12.

Para el caso en el que **F** es constante y la partícula se mueve sobre un segmento de recta $\boldsymbol{l}$ que no necesariamente es paralelo a **F**, el trabajo realizado por **F** es igual al producto de la proyección de **F** en la dirección de $\boldsymbol{l}$ por $|\boldsymbol{l}|$, o sea es igual al producto escalar

$$W = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{l} = |\mathbf{F}||\boldsymbol{l}| \cos\theta,$$

donde $\theta$ es el ángulo que forman las direcciones de **F** y $\boldsymbol{l}$.

En el caso más general, tanto **F** como la dirección de la trayectoria pueden variar de punto a punto y el objetivo de lo que sigue es ver como calcular el trabajo en estas circunstancias. Supóngase que sobre una partícula está actuando una fuerza **F** representada por la función vectorial $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F = M(x, y, z)\,\hat{\mathbf{i}} + N(x, y, z)\,\hat{\mathbf{j}} + O(x, y, z)\,\hat{\mathbf{k}},$$

en donde $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ y $O(x, y, z)$ son funciones escalares continuas en cada punto de la trayectoria. Se considerará que la partícula se mueve de una manera cualquiera del punto **A** al punto **B** siguiendo una curva suave $C$ definida por el vector

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}; \qquad a \leq t \leq b.$$

El movimiento de la partícula puede deberse únicamente a la acción de **F** o a su inercia modificada por la acción de **F** o a la acción de **F** combinada con algunas otras fuerzas, etc. Pero lo que interesa aquí es el trabajo realizado por **F** cuando la partícula efectúa ese movimiento.

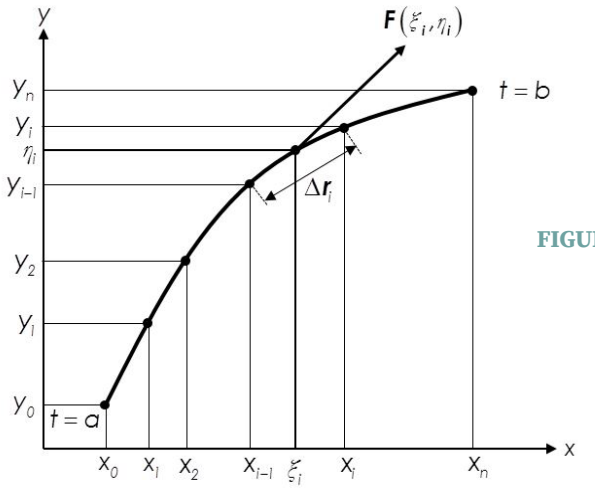



FIGURA 5.13.

Si se divide a la curva $C$ en subarcos de longitudes

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_i, \cdots, \Delta s_n$$

mediante una partición del intervalo $[a, b]$ (ver figura 5.13) de modo que la norma de la partición $\|\Delta\|$ sea suficientemente pequeña, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ cuando actúa sobre la partícula que se mueve a lo largo del subarco $\Delta s_i$, es aproximadamente igual al trabajo realizado por la fuerza constante $\mathbf{F}(\mathbf{P}_i)$ cuando la partícula se mueve a lo largo del segmento recto $\Delta \mathbf{r}_i$, siendo $\mathbf{P}_i$ un punto arbitrario del subarco $\Delta s_i$. Este trabajo es igual a

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i.$$

Así, un valor aproximado del trabajo total realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de $C$ desde $t = a$ hasta $t = b$ es

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{P}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i.$$

Si la partición se hace cada vez más fina la aproximación será cada vez mejor y en el límite, cuando $\|\Delta\| \to 0$, se obtendrá el valor exacto de $W$. Así,

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{P}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i.$$

Ahora bien, por definición el segundo miembro es la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y por lo tanto

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

que al sustituir las ecuaciones paramétricas queda

$$W = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_a^b \mathbf{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \left( \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \left[ M\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dx}{dt} + N\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dy}{dt} \right.$$

$$\left. + O\left(x(t), y(t), z(t)\right) \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

En ocasiones el parámetro que más conviene usar es el asociado a la longitud de arco $s$ medida a partir del punto inicial $\mathbf{r}(a)$ (ver figura 5.14). En este caso

$$W = \int_0^{s_F} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(s)\big) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\, ds$$

siendo $s_F$ la longitud total de la curva. Como se sabe (ver ecuación 27 del Capítulo 4), el vector tangente unitario está dado por

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

por lo que el trabajo también se puede expresar como

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_C \left( \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C \big(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\big)\, ds,$$

en donde se muestra explícitamente que la integral que define al trabajo involucra sólo a la componente tangencial de **F** a lo largo de la curva *C*.

El trabajo realizado por **F** a lo largo de una pequeña sección de la trayectoria puede ser positivo si **F** actúa en la dirección del movimiento, y nulo si dicha fuerza es ortogonal a la dirección del movimiento.

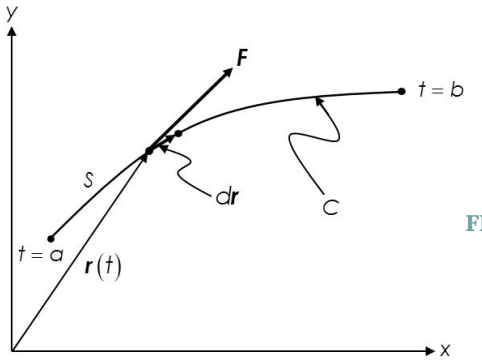



FIGURA 5.14.

## Ejemplo 15.

Utilizando la expresión $\int_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\,ds$ determinar el trabajo que produce una fuerza que actúa sobre una partícula de masa *m* en *contra* de la fuerza de gravedad, cuando la partícula se mueve a lo largo de la curva *C* dada por

$$x=\cos t; \qquad y=\operatorname{sen} t; \qquad z=t$$

del punto $\mathbf{A}=(-1,\ 0,\ \pi)$ al punto $\mathbf{B}=(0,-1,\ \frac{3\pi}{2})$, en donde se está suponiendo que la dirección del eje Z apunta hacia arriba.

**Solución:** Esta curva es prácticamente la de la figura 5.5; la única diferencia es que en la figura los puntos de la curva van creciendo a lo largo del eje Z como $z=\frac{t}{2}$ en cambio en este ejemplo van como $z=t$.

El trabajo está dado por

$$W = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds,$$

siendo $\mathbf{F}$ el negativo de la fuerza de gravedad, porque lo que se quiere es calcular el trabajo hecho por la fuerza que actúa contra la fuerza de gravedad $-mg\hat{\mathbf{k}}$. Así,

$$F = mg\hat{\mathbf{k}}.$$

Por otro lado, recuérdese que $T = \dfrac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|} = \dfrac{\mathbf{r}'}{|r'|}$. Luego, si

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\, \hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} t\, \hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$$

se tiene que

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\, \hat{\mathbf{i}} + \cos t\, \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

y

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{sen} t\, \hat{\mathbf{i}} + \cos t\, \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right).$$

Además,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\, dt.$$

Y para hallar los extremos de integración se ve que

$$\text{si} \qquad x=-1 \quad \Rightarrow \quad t=\pi \qquad \text{y si} \qquad x=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{3\pi}{2}$$

(lo mismo podría hacerse con $y$ y $z$). Sustituyendo en la integral se llega a

$$W=\int_C \left(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\right) ds=\int_{\pi}^{3\pi/2}\left[\left(mg\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos t\,\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right)\right]\sqrt{2}\;dt$$

$$W=\int_{\pi}^{3\pi/2} mg\,dt$$

$$=mg\,\frac{\pi}{2}\,,$$

resultado que indica que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ cuando la partícula se mueve del punto $(-1,\ 0,\ \pi)$ al punto $(0,\ -1,\ 3\pi/2)$ (los cuales difieren en altura la cantidad $h=\pi/2$) es igual a lo que se conoce como *energía potencial*, que vale $mgh=mg(\pi/2)$ y que será discutida con más detalle posteriormente.

## Ejemplo 16.

Se tiene una carga eléctrica $q_1$ situada en el origen de coordenadas. Si sobre el plano $XY$ se coloca una segunda carga $q_2$ en el punto $(x, y, 0)$ la carga $q_1$ ejercerá una fuerza sobre la carga $q_2$ dada por la ley de Coulomb

$$\mathbf{F}=k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{n}}\;=\;k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{r}}{r}$ el vector unitario que apunta desde la posición de $q_1$ (el origen) hacia la posición de $q_2$ (el punto $(x, y, 0)$) y $k$ una constante de proporcionalidad que para nuestros fines no es necesario indicar su valor. Si los valores de las cargas $q_1$ y $q_2$ son iguales respectivamente a $1/\sqrt{k}$ y $2/\sqrt{k}$ entonces

$$\mathbf{F} = 2\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{j}}.$$

a) ¿Qué trabajo será efectuado por la fuerza **F** si la carga $q_2$ se mueve del punto $\mathbf{A} = (3, 1, 0)$ al punto $\mathbf{B} = (4, 6, 0)$, a lo largo de la recta que une a estos puntos?

b) ¿Qué trabajo será realizado por **F** si $q_2$ se mueve a lo largo de la semicircunferencia $x^2+y^2 = 4;\ y \geq 0$ en el sentido de las manecillas del reloj?

**Solución:** a) Se puede comprobar fácilmente que esta fuerza es el gradiente de la función $-2/r$, la cual está definida en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ excepto en el origen, pero este defecto no afecta a la solución de nuestro problema porque los punto **A** y **B** están ambos hacia la derecha del origen. Por lo tanto, se podría evaluar fácilmente la integral de línea sin utilizar ninguna trayectoria; se sugiere al lector que realice esa evaluación. Sin embargo, aquí se evaluará usando la trayectoria indicada en el enunciado. La ecuación de la recta que une a los puntos **A** y **B** es

$$y = 5x - 14\ ; \qquad \text{con} \qquad z = 0.$$

Utilizando como ecuaciones paramétricas a

$$x = t; \qquad y = 5t - 14; \qquad z = 0,$$

se tiene

$$dx = 1\,dt; \qquad dy = 5\,dt; \qquad dz = 0$$

y $d\mathbf{r} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} = (\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}})\,dt$. Por otro lado, al expresar **F** en términos de $t$ se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2t}{\left[t^2+(5t-14)^2\right]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{2(5t-14)}{\left[t^2+(5t-14)^2\right]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{2t}{(26t^2-140t+196)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{10t-28}{(26t^2-140t+196)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Para determinar los extremos de integración se observa que

si $x=3 \Rightarrow t=3$ y si $x=4 \Rightarrow t=4$.

Entonces, como $W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, se tiene que

$$W=\int_3^4 \left[ \frac{2t}{(26t^2-140t+196)^{3/2}}(1)+\frac{10t-28}{(26t^2-140t+196)^{3/2}}(5)\right] dt$$

$$=\int_3^4 \left[ \frac{52t-140}{(26t^2-140t+196)^{3/2}}\right] dt$$

$$=\left[-2(26t^2-140t+196)^{-1/2}\right]_3^4$$

$$=0.355.$$

b) En este caso, conviene calcular primero $\int_{-C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ y al final utilizar en igualdad $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{-C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria $-C$ son (ver figura 5.15):

$$x=2\cos t; \qquad y=2\operatorname{sen} t; \qquad z=0; \qquad 0\le t\le \pi$$

de donde

$$dx=-2\operatorname{sen} t\, dt; \qquad dy=2\cos t\, dt; \qquad dz=0$$

y entonces

$$d\mathbf{r}=(-2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}}+2\cos t\,\hat{\mathbf{j}})\, dt.$$

Por otro lado

$$\mathbf{F}=\frac{2(2\cos t)}{(4\cos^2 t+4\operatorname{sen}^2 t)^{3/2}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{2(2\operatorname{sen} t)}{(4\cos^2 t+4\operatorname{sen}^2 t)^{3/2}}\hat{\mathbf{j}}$$

$$=\frac{\cos t}{2}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\operatorname{sen} t}{2}\hat{\mathbf{j}}$$

de donde, al sustituir en $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, se tiene

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\cos t}{2}\left(-2 \operatorname{sen} t\right) + \frac{\operatorname{sen} t}{2}\left(2 \cos t\right)$$

$$= -\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t$$

$$= 0.$$

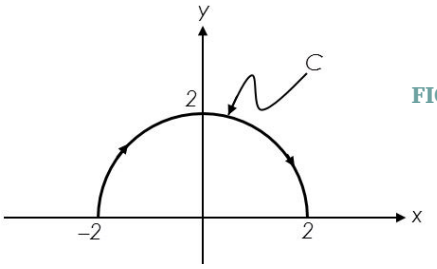



FIGURA 5.15.

Este resultado era de esperarse ya que la fuerza $\mathbf{F}$ y la dirección de la curva $\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, son ortogonales en cada punto y por lo tanto la componente de la fuerza en la dirección del movimiento es cero. Así,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

## Ejemplo 17.

Evaluar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^4\, \hat{\mathbf{i}} + 2xyz^4\, \hat{\mathbf{j}} + 4xy^2 z^3\, \hat{\mathbf{k}}$$

que actúa sobre un objeto que se traslada del punto $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$ al punto $\mathbf{B} = (2, 4, 8)$ por cada una de las siguientes trayectorias:

a) La línea recta que une a los puntos **A** y **B**.
b) La parábola $z = y^2/2$ del punto **A** al punto $(0, 4, 8)$, y de este punto hasta **B**, en línea recta.
c) Del punto **A** en línea recta al punto (2, 4, 0), y de él también en línea recta hasta el punto **B**.

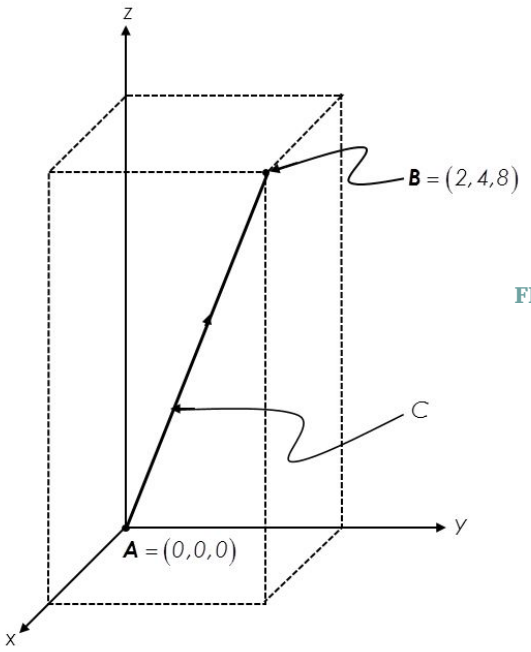



FIGURA 5.16.

**Solución:** Nuevamente se tiene que este campo de fuerzas es el gradiente de una cierta función escalar. En consecuencia, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta y la integral se podría calcular a partir de dicha función escalar. Esta situación será discutida con detalle en la siguiente sección, pero aquí, para ejemplificar, se utilizarán las trayectorias indicadas.

a) La ecuación de la recta que une a los puntos **A** y **B** es (ver figura 5.16)

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$$

por lo que sus ecuaciones paramétricas son

$$x=t; \qquad y=2t; \qquad z=4t$$

$$\Rightarrow \qquad dx=dt; \qquad dy=2\,dt; \qquad dz=4\,dt$$

y

$$d\mathbf{r}=\left(\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}\right)dt.$$

Además

$$\mathbf{F} = (2t)^2 (4t)^4 \,\hat{\mathbf{i}} + 2(t)(2t)(4t)^4 \,\hat{\mathbf{j}} + 4(t)(2t)^2(4t)^3 \,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= 1024t^6 \,\hat{\mathbf{i}} + 1024t^6 \,\hat{\mathbf{j}} + 1024t^6 \,\hat{\mathbf{k}}.$$

Para obtener los extremos de integración se ve que

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{y} \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 2.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^2 \left[1024t^6(1) + 1024t^6(2) + 1024t^6(4)\right] dt$$

$$= \int_0^2 7168t^6 \, dt$$

$$= \left[\frac{7168t^7}{7}\right]_0^2$$

$$= 131072.$$

b) En este caso la trayectoria consta de dos partes que se denotarán por $C_1$ y $C_2$ (ver figura 5.17). Para la trayectoria $C_1$ se tiene que $z = y^2/2$ y se pueden tomar como ecuaciones paramétricas a

$$x = 0; \qquad y = t; \qquad z = \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad dx = 0; \qquad dy = dt; \qquad dz = t\,dt$$

de donde

$$d\mathbf{r} = \left(\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}}\right) dt.$$

Además,

$$\mathbf{F} = (t)^2\left(\frac{t^2}{2}\right)^4 \hat{\mathbf{i}} + 2(0)(t)\left(\frac{t^2}{2}\right)^4 \hat{\mathbf{j}} + 4(0)(t)^2\left(\frac{t^2}{2}\right)^3 \hat{\mathbf{k}}$$

$$= \frac{t^{10}}{16}\,\hat{\mathbf{i}}.$$

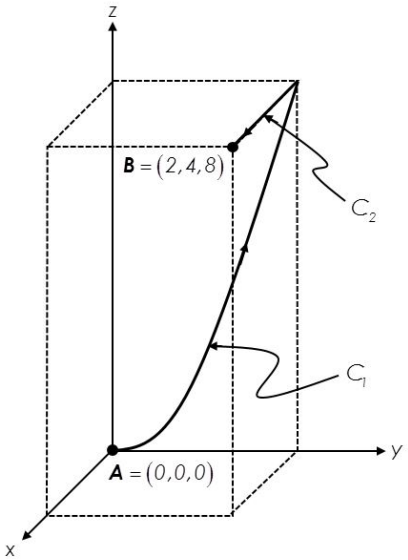



FIGURA 5.17.

Entonces

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Para la trayectoria $C_2$:

$$x = t; \qquad y = 4; \qquad z = 8$$

$$\Rightarrow \qquad dx = dt; \qquad dy = 0; \qquad dz = 0$$

por lo que

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\, dt.$$

Por otro lado,

$$F = (4)^2(8)^4\,\hat{\mathbf{i}} + 2(t)(4)(8)^4\,\hat{\mathbf{j}} + 4(t)(4)^2\,(8)^3\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= 65\,536\,\hat{\mathbf{i}} + 32\,768\,t\,\hat{\mathbf{j}} + 32\,768\,t\,\hat{\mathbf{k}}$$

y el trabajo sobre $C_2$ queda como

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^2 65\,536\, dt$$

$$W = \Big[65\,536\,t\Big]_0^2$$

$$= 131\,072.$$

El trabajo pedido se obtiene de la suma en las dos trayectorias. Así,

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 + 131\,072$$

$$= 131\,072.$$

Nótese que este resultado es igual al del inciso anterior, lo cual era de esperarse ya que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta.

c) Nuevamente en este caso hay dos partes (ver figura 5.18). Para la trayectoria $C_1$: $y = 2x$; $z = 0$ y

$$x = t; \qquad y = 2t; \qquad z = 0$$

$$\Rightarrow \quad dx = dt; \qquad dy = 2\,dt; \qquad dz = 0$$

de donde $d\mathbf{r} = (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})\,dt$ y el campo de fuerza es

$$F = (2t)^2(0)^4\,\hat{\mathbf{i}} + 2(t)(2t)(0)^4\,\hat{\mathbf{j}} + 4(t)(2t)(0)^3\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= \mathbf{0}.$$

Por lo tanto,

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

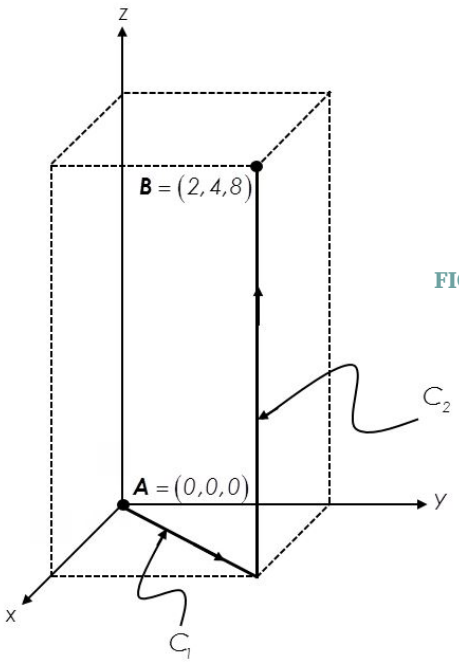



FIGURA 5.18.

Para la trayectoria $C_2$:

$$x = 2; \qquad y = 4; \qquad z = t$$

$$\Rightarrow \quad dx = 0; \qquad dy = 0; \qquad dz = dt$$

por lo que $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{k}}\, dt$ y la fuerza es

$$\mathbf{F} = (4)^2(t)^4\,\hat{\mathbf{i}} + 2(2)(4)(t)^4\,\hat{\mathbf{j}} + 4(2)(4)^2(t)^3\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= 16t^4\,\hat{\mathbf{i}} + 16t^4\,\hat{\mathbf{j}} + 128t^3\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Para determinar los extremos se observa que:

cuando $z = 0 \Rightarrow t = 0$ y cuando $z = 8 \Rightarrow t = 8.$

Por lo que la integral queda como

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^8 128t^3\, dt$$

$$= \left[\frac{128t^4}{4}\right]_0^8$$

$$= 131\,072$$

Finalmente

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 131\,072,$$

que nuevamente es igual al resultado del inciso (a).

### 5.5.1 Campo de fuerza conservativo

El hecho de haber obtenido el mismo valor del trabajo en las tres trayectorias que unen los puntos **A** y **B** del ejemplo anterior se debe, como ya se mencionó, a que el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^4\,\hat{\mathbf{i}} + 2xyz^4\,\hat{\mathbf{j}} + 4xy^2z^3\,\hat{\mathbf{k}}$$

es el gradiente de un cierto campo escalar $\varphi$. En este caso

$$\varphi(x, y, z) = xy^2 z^4.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= y^2z^4\,\hat{\mathbf{i}} + 2xyz^4\,\hat{\mathbf{j}} + 4xy^2z^3\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z)\end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta y la integral de línea es independiente de la trayectoria. Su valor está dado por

$$\begin{aligned}W &= \int_A^B \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} \\ &= \varphi(2, 4, 8) - \varphi(0, 0, 0) \\ &= \left[xy^2\,z^4\right]_{(0,0,0)}^{(2,4,8)} \\ &= 131\,072,\end{aligned}$$

que es el valor antes obtenido.

En los casos en los que la función **F** representa un campo de fuerzas y es igual al gradiente de alguna función escalar $\varphi$, se acostumbra a decir que **F** es un *campo conservativo* (más adelante se verá cómo está relacionado esto con el concepto de conservación de la energía.

En estos casos se cumplen las siguientes tres propiedades

*i)*
$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_A^B d\varphi$$
$$= \varphi(\mathbf{B}) - \varphi(\mathbf{A})$$

siendo **A** y **B** dos puntos arbitrarios a lo largo de *C*.

*ii)*
$$\int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0$$

*iii)* Si *C* es una curva lisa cerrada,

$$\oint_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

### 5.5.2 El trabajo y la energía cinética

Como se ha visto, el trabajo realizado por una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo que se traslada a lo largo de una curva suave *C* descrita por la ecuación paramétrica vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, está dado por

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_a^b \left( \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt$$
$$= \int_a^b \left[ \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) \right] dt.$$

Esta ecuación es válida sea cual sea el parámetro que se utilice para describir a $C$. Sin embargo, en lo que sigue se supondrá que $t$ es el tiempo y que la aceleración de la partícula está producida únicamente por la fuerza $\mathbf{F}$. Entonces, de la segunda ley de Newton sabemos que si $m$ es la masa del cuerpo y $\mathbf{r}''$ su aceleración se tiene que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{r}''(t)$$

independientemente de que la fuerza sea conservativa o no. Luego

$$W = \int_a^b \left[ m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \right] dt$$

y como

$$\frac{d}{dt}\left[ \frac{1}{2} m \left| \mathbf{r}'(t) \right|^2 \right] = m\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$$

$W$ se puede escribir como

$$W = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[ \frac{1}{2} m \left| \mathbf{r}'(t) \right|^2 \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} m \left| \mathbf{r}'(t) \right|^2 \Bigg|_a^b$$

pero $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$ (la velocidad), por lo que finalmente

$$W = \left[ \frac{1}{2} m \left| \mathbf{v}(t) \right|^2 \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2} m \left| \mathbf{v}(b) \right|^2 - \frac{1}{2} m \left| \mathbf{v}(a) \right|^2.$$

Este resultado muestra que el trabajo hecho por la fuerza aceleradora **F** (sea o no conservativa) al mover una partícula sobre una curva suave $C$ de $t=a$ a $t=b$ equivale al cambio en la energía cinética $mv^2/2$ entre los puntos extremos $t=a$ y $t=b$.

### 5.5.3 Ley de la conservación de la energía

Por un lado, en la subsección anterior se acaba de obtener la expresión que da el trabajo efectuado por una fuerza, conservativa o no, en términos de las energías cinéticas final e inicial de la partícula sobre la que actúa la fuerza. Por otro lado, si el campo de fuerza es conservativo, se sabe que existe una función escalar $\varphi(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F}=\nabla\varphi$. No obstante, por conveniencia se acostumbra a trabajar con la función $f$ definida como el negativo de $\varphi$ y escribir

$$\mathbf{F}=-\nabla f.$$

A la función $f$ la llamaremos aquí *energía potencial, función potencial* o simplemente *potencial* (vale la pena aclarar que esta nomenclatura puede diferir por un signo o un factor multiplicativo de la que usan otros autores. Por ejemplo, algunos llaman potencial a la función $\varphi$. Además, en electromagnetismo se le llama potencial eléctrico a la energía potencial por unidad de carga, es decir, a $f/q$ y algo semejante ocurre en mecánica, en donde el potencial está definido como $f/m$). Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= -\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} \\ &= -\big[f(b)-f(a)\big] \\ &= f(a)-(b). \end{aligned}$$

Si ahora se igualan las dos expresiones del trabajo, una en términos de la energía cinética y la otra en términos de la energía potencial, se llega a

$$f(a)-f(b)=\frac{1}{2}\,m\big|\mathbf{v}(b)\big|^2-\frac{1}{2}\,m\big|\mathbf{v}(a)\big|^2.$$

Reordenando,

$$f(a)+\frac{1}{2}\,m\left|\mathbf{v}(a)\right|^2=f(b)+\frac{1}{2}\,m\left|\mathbf{v}(b)\right|^2,$$

igualdad que expresa que la suma de la energía potencial más la energía cinética en uno de los extremos de la trayectoria es igual a la suma correspondiente en el otro extremo de la trayectoria y que, por lo tanto, la energía se conserva. Esto explica por qué a este tipo de campos de fuerza se les llama *conservativos*. ¡No se pierde ni se gana energía!

## Ejercicios

**5.16.** Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x,y)=xy\,\hat{\mathbf{i}}+ye^x\,\hat{\mathbf{j}}$$

que actúa sobre una partícula que se mueve sobre las trayectorias rectas que van de (0, 0) a (2, 0), de (2, 0) a (2, 1), de (2, 1) a (0, 1) y de (0, 1) a (0, 0).

**Solución:** $\int_c \overline{F}\cdot\overline{d}r=1.1945$

**5.17.** Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}=3x^2y^3\,\hat{\mathbf{i}}+3x^3y^2\,\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo de la trayectoria de ecuaciones

$$x=2\cos t;\qquad y=3\,\mathrm{sen}\,t+1;\qquad z=0,$$

y que va del punto (0, 0) al punto (3, 2).

**Solución:** Este cálculo no puede efectuarse porque los puntos no pertenecen a la trayectoria dada: $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ .

**5.18.** La fuerza actuante en el punto $(x, y)$ del plano $XY$ está dada por $\mathbf{F}(x, y) = 4\mathbf{r}/|r|^3$ donde $r = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$. Determinar el trabajo hecho por $\mathbf{F}$ a lo largo de la mitad superior de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{de} \qquad (-a, 0) \qquad \text{a} \qquad (a, 0).$$

**Solución:** $W = -\dfrac{8}{a}$

**5.19.** Sea el campo de fuerzas

$$\mathbf{F} = \left(2x \cos xy^3 - x^2y^3 \operatorname{sen} xy^3\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(3x^3y^2 \operatorname{sen} xy^3\right)\hat{\mathbf{j}},$$

donde $\mathbf{F}$ está medida en newtons y las coordenadas $x$ y $y$ en metros. Calcular el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva que va del punto $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$ al punto $\mathbf{P}_1 = (1, 1)$ y cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t \qquad\qquad y = t^3.$$

**Solución:** $W = 1.46$

**5.20.** Sean las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y $x^2 + z^2 = y$. Si por su intersección se mueve una partícula sobre la que actúa el campo de fuerzas $\mathbf{F} = z\,\hat{\mathbf{i}} + (x + 6z)\,\hat{\mathbf{k}}$, calcular el trabajo desarrollado por $\mathbf{F}$ desde el punto $(1, 1, 0)$ hasta el punto $(0, 1, 1)$.

**Solución:** $W = 3$.

**5.21.** Se sabe que la potencia promedio desarrollada por una fuerza $\mathbf{F}$ es igual al trabajo realizado por $\mathbf{F}$ dividido entre el tiempo invertido para efectuar dicho trabajo. Calcular la potencia promedio desarrollada por un avión al

moverse por la curva $xy = 4$, del punto $(1, 4)$ al punto $(4, 1)$ en 23 segundos. La fuerza que imprime el avión está dada por

$$\mathbf{F} = \left[6x + 4xz + \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right]\hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,\hat{\mathbf{j}} + \left[2x^2 + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right]\hat{\mathbf{k}}.$$

**Solución:** $P \doteq 2$.

**5.22.** Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 2xy^2\,\hat{\mathbf{i}} + 2x^2$ y $\hat{\mathbf{j}}$ cuando actúa sobre una partícula que se mueve del punto $(-2, 1, 0)$ al punto $(0, 4, 0)$ siguiendo la trayectoria de ecuaciones

$$x = 2\cos t; \qquad y = 3\,\text{sen}\,t + 1; \qquad z = 0.$$

**Solución:** $W \doteq -14.67$

**5.23.** Determinar el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\mathbf{F} = (x, y, z)$ al mover una partícula a lo largo de la trayectoria recta que va del punto $(0, 0, 0)$ al punto $(1, 2, 3)$.

**5.24.** La trayectoria de una partícula en función del tiempo $t$ está dada por

$$\mathbf{r}(t) = 64\sqrt{3}\,t\,\hat{\mathbf{i}} + \left(64t - 16t^2\right)\hat{\mathbf{j}},$$

donde $t$ varía de 0 a 4. Si la partícula está bajo los efectos de un campo de fuerza $\mathbf{F}$ cuya magnitud es directamente proporcional a la de la velocidad de la partícula y la dirección de $\mathbf{F}$ es la misma que la de la velocidad, pero de sentido contrario, hallar el trabajo realizado por esta fuerza.

**Solución:** $W = -581.6\,\hat{\mathbf{k}}$

## 5.6 Campos irrotacionales y campos conservativos

Si al campo vectorial del ejemplo 17 que se ha venido discutiendo se le calcula el rotacional se obtiene

$$\text{rot } \mathbf{F} = \Delta \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla f$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^4 & 2xyz^4 & 4xy^2z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial y}\left(4xy^2z^3\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(2xyz^4\right) \right] \hat{\mathbf{i}}$$

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left(4xy^2z^3\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2z^4\right) \right] \hat{\mathbf{j}}$$

$$+ \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left(2xyz^4\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2z^4\right) \right] \hat{\mathbf{k}}$$

$$= 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0},$$

resultado que era de esperarse, ya que $\mathbf{F} = \nabla f$ y en el Capítulo 4 se vio que el rotacional de un gradiente siempre es cero. Por lo tanto, se tiene en general que el rotacional de un campo conservativo es cero. Es decir, que se trata de un campo irrotacional.

A continuación, se presenta un resumen en el que supone que **F** satisface las condiciones requeridas en todos los puntos de un conjunto abierto y convexo. La función **F** no es necesariamente una fuerza a menos que se indique lo contrario.

## Resumen

Las siguientes cinco afirmaciones son equivalentes:

*i)* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria

*ii)* $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta

*iii)* $\mathbf{F}$ es irrotacional $(\nabla \times \mathbf{F} = 0)$

*iv)* Existe $\varphi$ tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ (si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas, $-\varphi$ es la energía potencial)

*v)* $\mathbf{F}$ es un campo conservativo.

### Ejemplo 18.

Dado el campo de fuerza

$$\mathbf{F} = e^x \operatorname{sen} yz\,\hat{\mathbf{i}} + ze^x \cos yz\,\hat{\mathbf{j}} + ye^x \cos yz\,\hat{\mathbf{k}}$$

y los puntos $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$ y $\mathbf{B} = (1, \pi, {}^5/_2)$:

a) Calcular el trabajo que realiza este campo cuando una partícula se transporta de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a lo largo de las rectas $C_1$ y $C_2$, que van de $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, {}^5/_2)$, y de $(0, 0, {}^5/_2)$ a $(1, \pi, {}^5/_2)$, sin investigar si el campo es conservativo.
b) Comprobar que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo a partir de la diferencial exacta.
c) Comprobar que $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria a partir del cálculo del rotacional de $\mathbf{F}$, y evaluar el trabajo mediante la energía potencial.

**Solución:**

a) Para la trayectoria $C_1$ (ver figura 5.19):

$$x = 0; \qquad y = 0; \qquad z = t; \qquad t \in \left[0, \tfrac{5}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad dx = 0; \qquad dy = 0; \qquad dz = dt$$

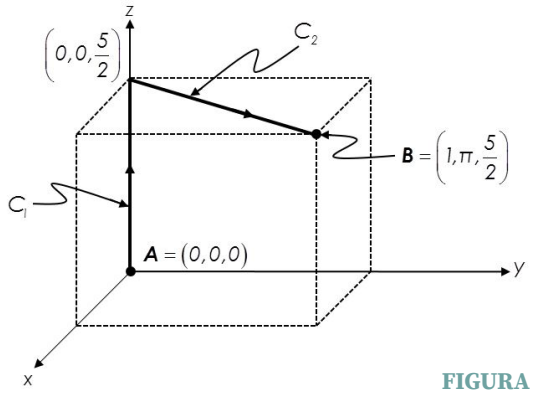



**FIGURA 5.19.**

por lo que $dr = \hat{\mathbf{k}}\, dt$ y

$$\mathbf{F} = e^0 \operatorname{sen}(0)(t)\,\hat{\mathbf{i}} + te^0 \cos(0)(t)\,\hat{\mathbf{j}} + (0)e^0 \cos(0)(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= t\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Por lo tanto,

$$W_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Para la trayectoria $C_2$:

$$x = t; \qquad y = \pi t; \qquad z = \tfrac{5}{2}; \qquad t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \qquad dx = dt; \qquad dy = \pi\, dt; \qquad dz = 0$$

lo que implica que

$$d\mathbf{r} = \left(\hat{\mathbf{i}} + \pi\hat{\mathbf{j}}\right) dt.$$

Además,

$$\mathbf{F} = e^t \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} t\, \hat{\mathbf{i}} + \frac{5}{2} e^t \cos\left(\frac{5\pi t}{2}\right) \hat{\mathbf{j}} + \pi t e^t \cos\left(\frac{5\pi t}{2}\right) \hat{\mathbf{k}}.$$

Entonces el trabajo es

$$W_2 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left( e^t \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} t + \frac{5\pi}{2} e^t \cos \frac{5\pi}{2} t \right) dt.$$

Si se resuelven por partes ambas integrales, se tiene que

$$W_2 = \left[ -\frac{10\pi e^t}{25\pi^2+4} \cos \frac{5\pi}{2} t + \frac{4e^t}{25\pi^2+4} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} t \right]_0^1$$

$$+ \left[ \frac{5\pi}{2} \left( \frac{10\pi e^t}{25\pi^2+4} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} t + \frac{4e^t}{25\pi^2+4} \cos \frac{5\pi}{2} t \right) \right]_0^1$$

$$= \frac{4e}{25\pi^2+4} + \frac{10\pi}{25\pi^2+4} + \frac{5\pi}{2} \left( \frac{10\pi e}{25\pi^2+4} - \frac{4}{25\pi^2+4} \right) = e.$$

Sumando la contribución de ambas trayectorias se obtiene el trabajo total:

$$W = W_1 + W_2 = e.$$

b) Como **F** es un campo conservativo si y sólo si $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta, bastará verificar esto último. Así, de la expresión

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = e^x \operatorname{sen} yz\, dx + ze^x \cos yz\, dy + ye^x \cos yz\, dz$$

se ve que

$$M = e^x \operatorname{sen} yz; \qquad N = ze^x \cos yz; \qquad P = ye^x \cos yz.$$

Si se calculan las respectivas derivadas parciales cruzadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = ze^x \cos yz = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = ye^x \cos yz = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = -yze^x \operatorname{sen} yz + e^x \cos yz = \frac{\partial P}{\partial y} \ .$$

Como estas igualdades se cumplen en todo el espacio $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{F}$ es un campo conservativo.

c) $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\mathbf{F}$ es irrotacional, es decir, si y sólo si

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

Calculando el rotacional se tiene que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x \operatorname{sen}(yz) & ze^x \cos(yz) & ye^x \cos(yz) \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. Para determinar la función $\varphi$ se parte de las funciones $M$, $N$ y $P$ obtenidas arriba

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} yz$$

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = ze^x \cos yz$$

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ye^x \cos yz.$$

Si se integra $M$ con respecto a $x$:

$$\varphi = \int e^x \operatorname{sen} yz \, dx$$

$$= e^x \operatorname{sen} yz + K(y, z).$$

Ahora se deriva con respecto a $y$ y se iguala a $N$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = ze^x \cos yz + K_y(y, z)$$

$$ze^x \cos yz + K_y(y, z) = ze^x \cos yz$$

$$\Rightarrow \qquad K_y(y, z) = 0$$

$$K(y, z) = H(z).$$

Luego, $\varphi = e^x \operatorname{sen} yz + H(z)$. Ahora se deriva con respecto a $z$ y se iguala a $P$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = ye^x \cos yz + H'(z)$$

$$= ye^x \cos yz$$

$$\Rightarrow \qquad H'(z) = 0$$

$$H(z) = cte$$

y finalmente, $\varphi = e^x \operatorname{sen} yz + cte$. Entonces, la función potencial es

$$f(x, y, z) = -e^x \operatorname{sen} yz - cte.$$

Para terminar, se evalúa esta función en los puntos extremos $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$ y $\mathbf{B} = (1, \pi, {}^{5}/_{2})$ y se calcula la diferencia:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(0, 0, 0) - f\left(1, \pi, \frac{5}{2}\right)$$

$$= \left[-e^x \operatorname{sen} yz - C\right]_{(0,0,0)} - \left[-e^x \operatorname{sen} yz - C\right]_{(1,\ \pi,\ 5/2).}$$

$$= e.$$

Resultado que era de esperarse, ya que es el valor que se obtuvo en el primer inciso.

## Ejercicios

**5.25.** Sea el campo de fuerzas $\mathbf{F} = x^2 y\, \hat{\mathbf{i}} + \frac{x^3}{3}\hat{\mathbf{j}}$:

*i)* Hallar el trabajo realizado por **F** cuando actúa sobre una partícula que se mueve sobre una trayectoria *C* que consiste en la unión de los siguientes tres segmentos de recta: el primero va de (0, 0) a (2, 0), el segundo de (2, 0) a (0, 2) y el último de (0, 2) a (0, 0).

*ii)* Mostrar que **F** es un campo conservativo utilizando el concepto de rotacional.

*iii)* Calcular el trabajo realizado cuando la partícula se mueve del punto (0, 0) al punto (3, 3) utilizando la función φ tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.

**Solución:** *i)* W = 0; *iii)* W = −729.

**5.26.** Sea el campo de fuerzas dado por $\mathbf{F} = e^x \operatorname{sen} y\, \hat{\mathbf{i}} + e^x \cos y\, \hat{\mathbf{j}}$:

*i)* Mostrar que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta

*ii)* Calcular el trabajo realizado cuando la partícula se mueve de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y de $(1, 0)$ a $(1, \pi/2)$

*iii)* Calcular el trabajo del inciso anterior a través de la función potencial $f$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla f$.

**Solución:** *ii)* $W = e$; *iii)* $W = -e$.

**5.27.** Sea el campo de fuerza $\mathbf{F} = y\,\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$.

a) Verificar que es conservativo:
   *i)* Mediante el rotacional
   *ii)* Probando que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta
   *iii)* Encontrando la función potencial $f$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla f$.

b) Utilizando la función potencial $f$ calcular el trabajo $W$ realizado por $\mathbf{F}$ al actuar sobre una partícula que se mueve del punto $(1, 1)$ al punto $(2, 2)$.

**Solución:** *ai)* $\mathbf{F}$ es irrotacional; *aii)* $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es diferencial exacta; *aiii)* $\varphi = -xy + C$; *b)* $W = -3$

**5.28.** Mostrar que un vector constante $\mathbf{a}$ tiene una función potencial $f$ dada por

$$f = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}.$$

**Solución:** $f = -a_1 x - a_2 y - a_3 z$

## 5.7 La integral curvilínea en otros sistemas coordenados

A menudo los sistemas bajo estudio tienen simetrías que facilitan sustancialmente su descripción. Por ejemplo, puede ocurrir que se desee calcular una integral curvilínea de una configuración que tenga alguna simetría y que resulte

mucho más fácil calcularla si se utiliza un sistema de coordenadas apropiado distinto del cartesiano original. En esta sección se obtendrá una expresión que permita evaluar integrales curvilíneas en otros sistemas coordenados. El tratamiento se restringirá a sistemas de coordenadas ortogonales.

Sean $u$, $v$, $w$ las coordenadas de un sistema curvilíneo ortogonal cuyas ecuaciones de transformación son

$$u = G_1(x, y, z) \qquad x = F_1(u, v, w)$$

$$v = G_2(x, y, z) \qquad \text{o bien} \qquad y = F_2(u, v, w)$$

$$w = G_3(x, y, z) \qquad z = F_3(u, v, w).$$

La diferencial del vector $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ es

$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Pero como $x$, $y$, $z$ dependen de $u$, $v$, $w$, entonces

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \frac{\partial x}{\partial w}\,dw$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv + \frac{\partial y}{\partial w}\,dw$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv + \frac{\partial z}{\partial w}\,dw.$$

Sustituyendo estas diferenciales en la expresión para $d\mathbf{r}$ y agrupando términos se obtiene que

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\,dw$$

donde (ver sección 4.8 del capítulo 4),

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u \hat{\mathbf{e}}_u; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v \hat{\mathbf{e}}_v; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_w \hat{\mathbf{e}}_w,$$

siendo $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$, $\hat{\mathbf{e}}_w$ los vectores unitarios asociados al nuevo sistema de coordenadas. Si se sustituyen estas igualdades en la expresión para $d\mathbf{r}$ se obtiene

$$d\mathbf{r} = h_u\, du\, \hat{\mathbf{e}}_u + h_v\, dv\, \hat{\mathbf{e}}_v + h_w\, dw\, \hat{\mathbf{e}}_w.$$

Por lo tanto, el producto escalar de

$$\mathcal{F}(u, v, w) = \mathcal{F}_u(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_u + \mathcal{F}_v(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_v + \mathcal{F}_w(u, v, w)\,\hat{\mathbf{e}}_w$$

con $d\mathbf{r}$ es igual a

$$h_u\, \mathcal{F}_u(u, v, w)\, du + h_v\, \mathcal{F}_v(u, v, w)\, dv + h_w\, F_w(u, v, w)\, dw,$$

en donde se ha utilizado el hecho de que el nuevo sistema de coordenadas es ortogonal. Entonces, la integral de línea de $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva $C$ está dada por

$$\int_C \mathcal{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C h_u \mathcal{F}_u(u, v, w)\, du + h_v \mathcal{F}_v(u, v, w)\, dv + h_w \mathcal{F}_w(u, v, w)\, dw. \qquad (20)$$

Para evaluar la integral se deben sustituir las variables $u$, $v$ y $w$ por sus expresiones dadas por las ecuaciones paramétricas de la curva.

La formulación que se ha presentado arriba está desarrollada para el caso de sistemas de coordenadas en el espacio tridimensional, pero los resultados son fácilmente adaptables para el espacio bidimensional. En este caso la ecuación (20) se reduce a

$$\int_C \mathcal{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C h_u\, \mathcal{F}_u(u, v)\, du + h_v\, \mathcal{F}_v(u, v)\, dv, \qquad (21)$$

donde

$$h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|; \qquad h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|.$$

A continuación, se verán con más detalle los tres sistemas de coordenadas curvilíneas más comunes: el sistema de coordenadas polares, el sistema cilíndrico y el sistema esférico.

1) Para el sistema de coordenadas polares se tiene que

$$\begin{array}{ll} x = \rho \cos\theta & h_\rho = 1 \\ & \Rightarrow \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta & h_\theta = \rho. \end{array}$$

Por lo tanto, en este sistema la integral curvilínea se expresa como

$$\int_C \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathcal{F}_\rho(\rho, \theta)\, d\rho + \rho \mathcal{F}_\theta(\rho, \theta)\, d\theta.$$

2) Para el sistema cilíndrico se tiene

$$\begin{array}{lll} x = \rho \cos\theta & & h_\rho = 1 \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta & \Rightarrow & h_\theta = \rho \\ z = z & & h_z = 1. \end{array}$$

Por lo tanto, en este sistema la integral curvilínea se expresa como

$$\int_C \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathcal{F}_\rho(\rho, \theta, z)\, d\rho + \rho \mathcal{F}_\theta(\rho, \theta, z)\, d\theta + \mathcal{F}_z(\rho, \theta, z)\, dz.$$

3) Para el sistema esférico se tiene

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi & & & h_r &= 1 \\ y &= r\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi & \Rightarrow & & h_\varphi &= r \\ z &= r\cos\varphi & & & h_\theta &= r\operatorname{sen}\varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este sistema la integral curvilínea se expresa como

$$\int_C \boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathcal{F}_r(r,\varphi,\theta)\,dr + r\,\mathcal{F}_\varphi(r,\varphi,\theta)\,d\varphi + r\operatorname{sen}\varphi\,\mathcal{F}_\theta(r,\varphi,\theta)\,d\theta.$$

## Ejemplo 19.

Un campo de fuerza bidimensional está dado en coordenadas polares por la ecuación

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\rho,\theta) = \left(-4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(4\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Calcular el trabajo realizado por esta fuerza cuando actúa sobre una partícula que se mueve del punto **A** al punto **B**, de coordenadas polares $(1, 0)$ y $(0, \infty)$ respectivamente, a lo largo de la espiral cuya ecuación polar es $\rho = e^{-\theta}$.

**Solución:** Las componentes de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ son

$$\mathcal{F}_\rho(\rho,\theta) = -4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\mathcal{F}_\theta(\rho,\theta) = 4\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Como la ecuación polar de $C$ es $\rho = e^{-\theta}$ se puede tomar a $\theta$ como parámetro y usar como ecuaciones paramétricas a

$$\rho = e^{-\theta}; \qquad \theta = \theta; \qquad \text{con} \qquad \theta \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow \qquad d\rho = -e^{-\theta}\,d\theta; \qquad d\theta = d\theta.$$

De manera que

$$\int_C \mathcal{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C \mathcal{F}_\rho(\rho,\theta)\,d\rho+\rho\mathcal{F}_\theta(\rho,\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^\infty \left[-4\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta+4\,\mathrm{sen}^2\theta\right]\left(-e^{-\theta}\,d\theta\right)$$

$$+\left(e^{-\theta}\right)\left[4\,\mathrm{sen}^2\theta+4\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\right]d\theta,$$

expresión que al desarrollarse y simplificarse da

$$\int_C \mathcal{F}\cdot d\mathbf{r}\;=\;8\int_0^\infty e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^\infty e^{-\theta}\,\mathrm{sen}\,2\theta\,d\theta$$

$$=\left[-\frac{4}{2}\,e^{-\theta}\left(2\cos 2\theta+\mathrm{sen}\,2\theta\right)\right]_0^\infty=\frac{8}{5}\,.$$

Por lo tanto, el trabajo pedido es $W=\frac{8}{5}$.

## Ejemplo 20.

Supóngase que en una cierta región del espacio existe un campo eléctrico dado por

$$\mathbf{E}=10\,\hat{\mathbf{e}}_r+\,4\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi+\,7\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\quad\text{en}\quad\frac{\text{newtons}}{\text{coulomb}}\cdot$$

Calcular el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre un electrón en *contra* del campo eléctrico, cuando el electrón se mueve desde el punto de coordenadas esféricas $(20,\,0,\,\pi/9)$, hasta el punto $(20,\,2\pi/9,\,\pi/9)$, a lo largo de trayectoria

$$C: \begin{cases} r = 20 \text{ metros} \\ \theta = \dfrac{\pi}{9}. \end{cases}$$

**Solución:** Se sabe que la fuerza que ejerce un campo eléctrico **E** sobre una carga eléctrica de magnitud $q$, es igual a $q\mathbf{E}$. Por lo tanto, el trabajo pedido está dado por

$$W = -q \int_C \boldsymbol{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Aquí las componentes del campo son $E_r(r, \varphi, \theta) = 10$; $E_\varphi(r, \varphi, \theta) = 4$ y $E_\theta(r, \varphi, \theta) = 7$. Además, como $r = 20$ y $\theta = \pi/9$ la única coordenada que varía es la $\varphi$. Así, se pueden tomar como ecuaciones parame éticas de $C$ a

$$\begin{aligned} & r = 20 \\ & \varphi = \varphi \qquad\qquad \varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{9}\right] \\ & \theta = \frac{\pi}{9} \\ \Rightarrow \quad & dr = 0; \qquad d\varphi = d\varphi; \qquad d\theta = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(20,0,\pi/9)}^{(20,2\pi/9,\pi/9)} 10(0) + (20)(4)\, d\varphi + (20)(\operatorname{sen}\varphi)(7)(0)$$

$$= 80 \int_0^{2\pi/9} d\varphi = \frac{160\pi}{9} \ \frac{\text{newtons}}{\text{coulomb}} \text{ metros}.$$

Por otra parte, como la carga eléctrica de un electrón es

$$q = -1.6 \times 10^{-19} \text{ coulombs}$$

entonces

$$W = -q \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\left(-1.6 \times 10^{-19}\right)\left(\frac{160\,\pi}{9}\right) \text{ newton} - \text{metro}$$

$$= 8.93 \times 10^{-18} \text{ joules.}$$

## Ejercicios

**5.29.** Calcular $\oint_C d\mathbf{r}$ a lo largo de la circunferencia representada por

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad z = 0.$$

**Solución:** $\oint_C d\mathbf{r} = -4a\,\hat{\mathbf{i}} + 4a\,\hat{\mathbf{j}}$

**5.30.** Si $\phi = xy$, calcular $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$ desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 0) a lo largo de:

*i)* La curva $y = x^2; z = 0$
*ii)* La recta que une $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

**Solución:** *i)* $\int_C \phi d\mathbf{r} = \frac{1}{4}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{2}{5}\,\hat{\mathbf{j}}$; *ii)* $\int_C \phi d\mathbf{r} = \frac{1}{3}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\,\hat{\mathbf{j}}$

*Capítulo 6*

# INTEGRACIÓN MULTIPLE

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo con una sola variable independiente es el de integral. Este concepto tiene además una gran cantidad de aplicaciones. Basta citar, por ejemplo, el cálculo de áreas de figuras planas, longitudes de arco de curvas planas, volúmenes de solidos de revolución, áreas de superficies de revolución, problemas físicos de trayectorias, trabajo, energía cinética, presión de un líquido, etc. Sin embargo, existen muchos otros problemas en los que aparecen varias variables y que involucran también el concepto de integral pero que no pueden tratarse con la integral de una sola variable.

En el presente capítulo se verá como extender este concepto para funciones con más de un argumento y ampliar así el número de problemas que se pueden resolver con los métodos del cálculo integral: determinación de áreas de superficies no planas, cálculo de volúmenes, evaluación de las llamadas integrales de superficie y, en física, cálculo de masa, densidad, momento estático, momentos de inercia, campo electromagnético, energía electromagnética, etc. Por brevedad el tratamiento se concretará en los casos de dos y tres variables, además de que en la mayoría de las aplicaciones sólo aparece ese número de argumentos. No obstante, la extensión de estos conceptos a dimensiones mayores es directa. También se verán los teoremas integrales de Green, Gauss y de Stokes

con aplicaciones y ejemplos. Para finalizar se tratarán las integrales impropias dobles que son una extensión de las tratadas en el cálculo con una variable.

## 6.1 La integral doble

La forma más sencilla de introducir este tipo de integrales es por medio de un procedimiento similar al visto en el caso de una variable. Se comenzará definiendo cierto tipo de regiones, después se definirá una función sobre una región y se construirá una partición. Finalmente se formará una suma de Riemann y se tomará su límite.

a) Si R es una región plana cuya frontera $C$ es una curva lisa por tramos (o seccionalmente suave) y se puede circunscribir dentro de algún rectángulo de lados finitos se dirá que R es una región acotada. Si además R contiene a todos sus puntos frontera se dirá que R es una región cerrada y acotada (ver pág. 7 del capítulo 1).

b) Se llama región tipo *I* (o región $x$), denotada como $R_x$, a un conjunto de puntos del plano definido como (ver figura 6.1*a*):

$$R_x = \{(x, y) \mid a \le x \le b;\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x);\ \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

donde $a$ y $b$ son números reales y $g_1$ y $g_2$ son dos funciones de la variable $x$. Como puede verse, en este tipo de regiones la variable $x$ varía entre dos números fijos (la $a$ y la $b$) mientras que la variable $y$ varía entre los valores de las funciones $g_1$ y $g_2$ cuyas gráficas están mostradas en la figura 6.1*a*. En este caso toda recta paralela al eje Y corta a $C$ en cuando más dos puntos. Como los límites de las variables están indicados mediante el símbolo $\le$ y no mediante desigualdades estrictas con el símbolo $<$, este tipo de regiones son regiones cerradas.

c) Se llama región tipo *II* (o región $y$), denotada por $R_y$, a un conjunto de puntos de plano definido como (ver figura 6.1*b*):

$$R_y = \{(x, y) \mid c \le y \le d;\ \ h_1(y) \le x \le h_2(y);\ \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

donde $c$ y $d$ son números reales y $h_1$ y $h_2$ son dos funciones de la variable $y$. En este tipo de regiones la variable y varía entre dos números fijos (la $c$ y la $d$) mientras que la variable $x$ varía entre los valores de las funciones $h_1$ y $h_2$ cuyas gráficas están mostradas en la figura 6.1*b*. En este caso toda recta paralela al eje X corta a $C$ en cuando más dos puntos. Este tipo de regiones también son regiones cerradas.

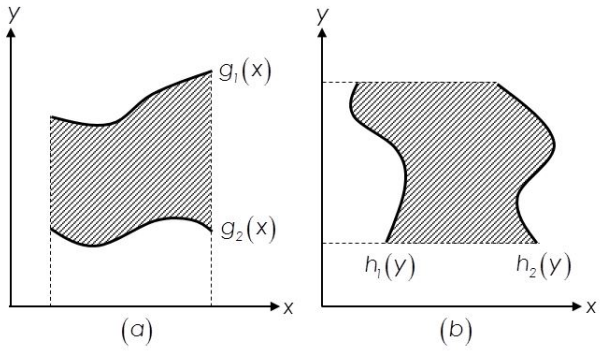



**FIGURA 6.1.** La figura de la izquierda es una región tipo I (región *x*) porque toda recta vertical corta a la frontera de *R* en cuando más dos puntos. La región de la derecha es una región tipo II (región *y*).

En las definiciones (b) y (c) se está suponiendo que las funciones $g_1$, $g_2$, $h_1$ y $h_2$ son funciones reales acotadas (una función real $f$ de una variable es *acotada* sobre un intervalo $I_D$ contenido en su dominio cuando los valores de $f(x)$ siempre están dentro de algún intervalo de longitud finita $I\,\forall x \in I_D$). En consecuencia toda región del tipo *I* o del tipo *II* puede circunscribirse dentro de algún rectángulo de lados finitos y por lo tanto es acotada. Así, toda región del tipo *I* ó *II* es una región cerrada y acotada.

Es importante notar que no toda región cerrada y acotada es del tipo *I* ó *II*. Por ejemplo, la región cerrada y acotada de la figura 6.2*b* no es del tipo *I* ni del *II*. Además, no toda región del tipo *I* es también del tipo *II* y viceversa. Sin embargo, hay regiones que sí son de ambos tipos simultáneamente, por ejemplo, un círculo o la región mostrada en la figura 6.2*a*. La región de la figura 6.1*a* es una región tipo *I* pero no puede ser una región tipo *II* porque hay rectas horizontales que cruzan a su frontera más de dos veces.

A una región que sea simultaneamente del tipo *I* y del tipo *II* se le llamará región regular o región estándar.

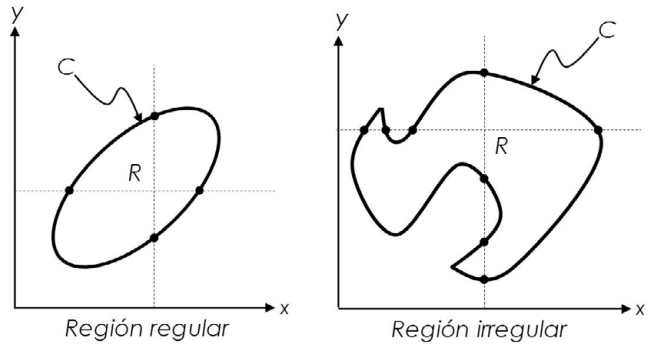



**FIGURA 6.2.** En la figura de la izquierda toda recta paralela al eje X o al eje Y corta a *C* en cuando más dos puntos. En cambio, en la de la derecha existen rectas paralelas a los ejes coordenados que cortan a *C* cuatro veces.

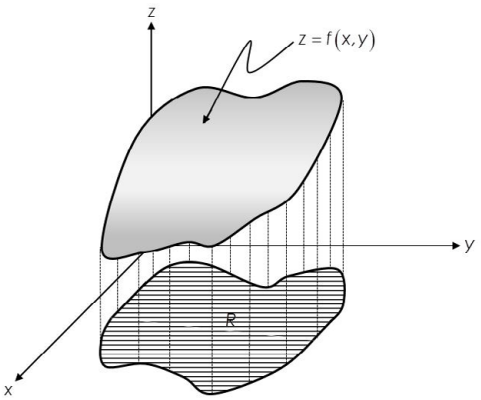



**FIGURA 6.3.** Gráfica de la función $f(x, y)$ definida sobre la región $R$

Considérese ahora una función $f(x, y)$ cuyo dominio contiene a la región cerrada y acotada arbitraria $R$ (por el momento no es necesario pedir además que sea del tipo I ó II). Ver figura 6.3. Supóngase por lo pronto que $f(x, y)$ es positiva en $R$ y que nos interesa calcular el volumen del solido limitado hacia arriba por la superficie $S$ de ecuación $z=f(x, y)$, hacia abajo por la región $R$, y lateralmente por la superficie cilíndrica vertical cuya sección transversal es $R$.

Se puede intentar obtener un valor aproximado de dicho volumen con el siguiente procedimiento. Primero se divide la región $R$ en subregiones no superpuestas de forma arbitraria, lo que definirá una partición $\mathcal{P}$ de $R$. Como resultado de esta división en "rejillas" se obtiene un conjunto de pequeños pedazos acotados por una curva cerrada seccionalmente lisa (ver figura 6.4*a*). Usualmente una de las formas más convenientes de dividir la región es mediante rectas paralelas

a los ejes X y Y (sobre todo cuando se están utilizando coordenadas rectangulares) con lo que se obtienen celdas rectangulares (ver figura 6.4*b*). En este caso puede haber rectángulos que no estén totalmente contenidos en $R$, pero conforme se tomen particiones cada vez más finas el área de dichos rectángulos se hará cada vez más pequeña hasta que llegue a ser despreciable. Se usará el índice $i$ para numerar a las subregiones de la partición y a la subregión número $i$ se le denotará como $R_i$. Al área de $R_i$ se le denotará con $\Delta A_i$. En el caso en el que la subregión sea rectangular se tiene que $\Delta A_i = \Delta x_i \, \Delta y_i$.

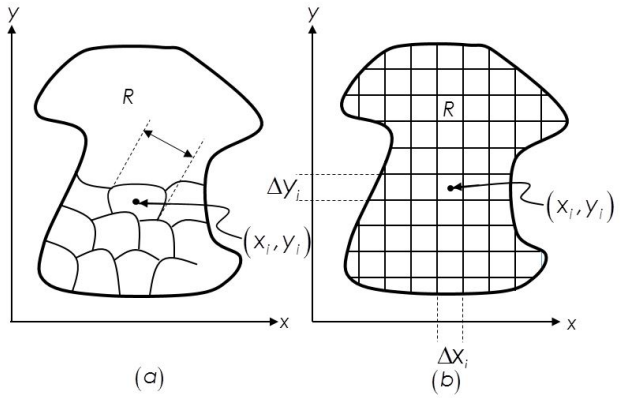



**FIGURA 6.4.**

Ahora sobre cada subregión se escoge un punto arbitrario. Así, para la subregión $R_i$ se tiene el punto $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$ y al evaluar ahí la función $f$ se obtiene el valor $z_i = f(x_i, y_i)$ que es la altura del elemento cilíndrico cuya base es la mencionada subregión $R_i$ y cuya tapa superior es el plano $z = z_i$. En las figuras 6.5*a* y 6.5*b* se muestran ejemplos de dichos cilindros. Existe una infinidad de criterios para escoger a $\mathbf{P}_i$ dentro de $R_i$. Por ejemplo, se puede tomar a $\mathbf{P}_i$ como el punto en donde $f$ alcanza el valor máximo dentro de $R_i$, o el valor mínimo, o bien escoger a $\mathbf{P}_i$ de manera que $x_i$ sea racional o bien o irracional, o bien escogerlo al azar, etc.

El volumen $\Delta V_i$ del $i$-ésimo elemento cilíndrico, está dado por

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \, \Delta A_i$$

o bien, si la partición es rectangular,

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \, \Delta x_i \, \Delta y_i.$$

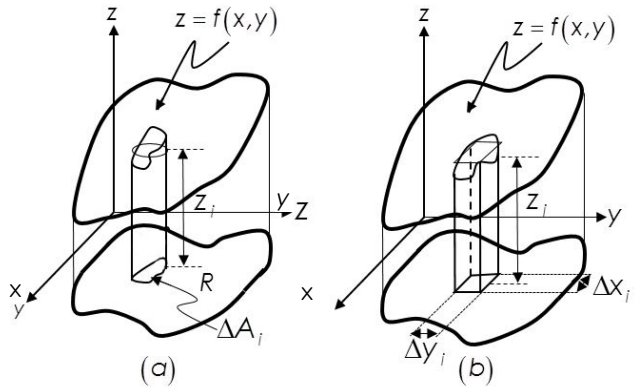



**FIGURA 6.5.**

Como la tapa superior del volumen contenido entre $S$ y la subregión $i$ no es plana, sino que es una porción de la superficie de ecuación $z=f(x, y)$, las expresiones anteriores no determinan con exactitud el volumen entre la superficie $S$ y $R_i$. Sin embargo, conforme se tomen particiones cada vez más finas puede esperarse que la diferencia entre ambos volúmenes se haga despreciable.

Ahora se construye la suma de Riemann asociada a la partición considerada

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i.$$

Se define el diámetro de la subregión $R_i$ como la mayor de las distancias posibles entre dos puntos cualesquiera de $R_i$ y se define además la norma $\|\Delta\|$ de la partición como el mayor de los diámetros de las subregiones inducidas.

En esta discusión se ha supuesto momentáneamente que $f$ es positiva con el objeto de tener una imagen geométrica de las sumas de Riemann como un volumen. Sin embargo, las ideas principales son igualmente válidas para cualquier función acotada, sea negativa, positiva o que cambie de signo dentro de $R$ (una función $f$ de dos variables es acotada sobre un conjunto $R_D$ contenido dentro de su dominio cuando los valores $f(x, y)$ están siempre dentro de algún intervalo $I$ de longitud finita $\forall(x, y) \in R_D$. Notar que esta definición es totalmente análoga a la que se dio previamente para las funciones acotadas con una sola variable).

Ahora es de esperarse que al tomar particiones cada vez más finas el valor de la suma de Riemann se vaya acercando cada vez más al valor exacto del volumen (o bien, en el caso de una función no necesariamente positiva, a un valor

fijo $I$). Sin embargo, esta esperanza no siempre se cumple y pueden ocurrir dos posibilidades excluyentes. La primera es cuando al ir considerando particiones cada vez más finas el valor de la suma de Riemann no se va acercando a ningún valor fijo. Esto ocurre por ejemplo cuando $f$ es la función de Dirichlet que ya fue mencionada en el capítulo 5 arriba de la definición de integral de línea. La segunda posibilidad es cuando el valor de la suma de Riemann sí se va acercando a un valor fijo $I$ (que en el caso de las funciones positivas es el valor exacto del volumen) que es independiente del criterio que se utilice para escoger a los puntos $\mathbf{P}_i$. En este caso la diferencia

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i - I \right|$$

puede hacerse tan pequeña como se desee con tal de que se utilicen particiones suficientemente finas de manera que su norma $\|\Delta\|$ sea menor que un cierto valor $\delta > 0$. Las funciones para las que ocurre esto reciben un nombre especial como lo indica la siguiente definición.

**Definición.** Se dice que la función escalar $f(x, y)$ es doblemente integrable con respecto a las variables $x$ y $y$ en una región $R$, si $f$ es acotada y existe un número real $I$ con la propiedad de que para cualquier $\epsilon > 0$ siempre existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i - I \right| < \epsilon \tag{1}$$

o bien

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta x_i, \Delta y_i - I \right| < \epsilon \tag{2}$$

para cualquier partición $\mathcal{P}$ cuya norma sea menor que $\delta$ y para cualquier elección del conjunto $\{\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)\}$ con $\mathbf{P}_i \in R_i$. Al número $I$ se le llama integral doble de $f(x, y)$ sobre $R$ y se denota como $\iint_R f(x, y)\, dA$ o bien como $\iint_R f(\mathbf{r})\, dA$; es decir,

$$I = \iint_R f(\mathbf{r}) dA = \iint_R f(x, y)\, dA$$

y en forma breve se dice que $f$ es ***integrable en R***. También se dice que el límite de la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$ cuando la norma de las particiones tiende a cero es igual a $I$, lo cual se escribe como

$$I = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i \tag{3}$$

o bien

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(\mathbf{r})\, dA = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i \tag{4}$$

Algunos autores escriben la integral doble con el símbolo $dx\, dy$ en vez de $dA$. Sin embargo, aquí la integral doble siempre se escribirá con $dA$, reservando el símbolo $dx\, dy$ para utilizarse en las integrales reiteradas que se definirán más adelante.

En este punto vale la pena mencionar que la discusión, que se dio en el capítulo 5 (después de la definición de la integral de línea), es igualmente aplicable para los límites involucrados en (3) y (4).

En la práctica, para saber si una función es integrable, no se investiga si el límite anterior existe, sino que se recurre al siguiente teorema que se dará sin demostración.

**Teorema 1.** Si $f(x, y)$ es una función continua en una región cerrada y acotada $R \subset \mathbb{R}^2$, entonces $f(x, y)$ es integrable en $R$.

A continuación, se enuncia un teorema que enlista algunas de las propiedades de estas integrales que, como se puede ver, son semejantes a las de las integrales con una sola variable.

**Teorema 2.** Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones escalares integrables en una región cerrada y acotada $R \subset \mathbb{R}^2$, y $k$ es una constante en $\mathbb{R}$, se cumple que:

*i)* $$\iint_R kf(x, y)\, dA = k \iint_R f(x, y)\, dA \tag{5}$$

*ii)* $$\iint_R \big(f(x, y) + g(x, y)\big)\, dA = \iint_R f(x, y)\, \mathrm{dA} + \iint_R g(x, y)\, dA \tag{6}$$

*iii)* Si $R$ se divide en un número finito de subregiones $R_1, R_2, \cdots, R_n$ que no se traslapan (excepto posiblemente en sus fronteras), entonces

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)\, dA = &\iint_{R_1} f(x, y)\, dA \\ &+ \iint_{R_2} f(x, y)\, dA \\ &+ \cdots \\ &+ \iint_{R_n} f(x, y)\, dA \end{aligned} \tag{7}$$

*iv)* Si $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R$, se tiene que

$$\iint_R f(x, y)\, dA \geq 0 \tag{8}$$

*v)* Si $f(x, y) \geq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in R$,

$$\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA \tag{9}$$

*vi)* Si $f(x, y)$ tiene un máximo absoluto $M$ y un mínimo absoluto $m$ en $R$, entonces

$$m\, A(R) \leq \iint_R f(x, y)\, dA \leq M\, A(R) \tag{10}$$

siendo $A(R)$ el área de $R$.

*vii)* $$\iint_R dA = A(R). \tag{11}$$

### 6.1.1 Teorema del valor medio para integrales dobles

**Teorema 3.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en una región cerrada y acotada $R$ y sea $A(R)$ el área de dicha región. Entonces existe al menos un punto $(\xi, \theta)$ en $R$ tal que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = f(\xi, \theta)\, A(R), \tag{12}$$

el valor $f(\xi, \theta)$ es conocido como valor medio (o valor promedio) de $f$ en $R$ y se acostumbra denotarlo como $\langle f \rangle$. La ecuación (12) se puede escribir como

$$\langle f \rangle = \frac{\iint_R f(x, y)\, dA}{\iint_R dA}. \tag{12'}$$

**Demostración:** Como $f$ es continua en $R$ y ésta es cerrada y acotada, entonces $f$ es acotada en $R$ y existe un valor mínimo $m$ y un valor máximo $M$ de $f$ en R, tales que (ver figura 6.6)

$$m \leq f(x, y) \leq M \qquad \forall (x, y) \in R.$$

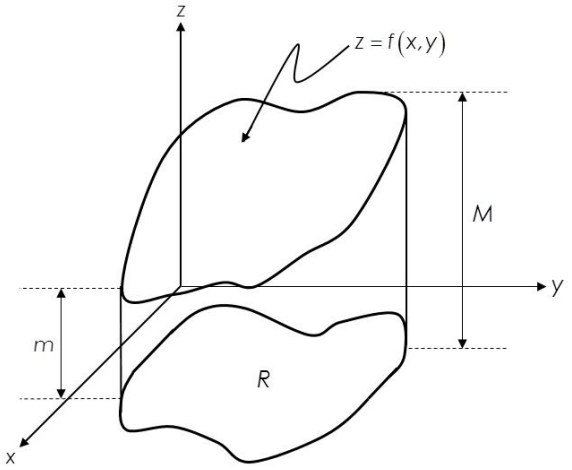



FIGURA 6.6.

Integrando las funciones $m, f(x, y)$ y $M$, y de acuerdo con la ecuación (9) se tiene que

$$\iint_R m\, dA \leq \iint_R f(x, y)\, dA \leq \iint_R M\, dA$$

pero de las ecuaciones (5) y (11) se sigue que

$$\iint_R m\, dA = m \iint_R dA = mA(R)$$

y

$$\iint_R M\,dA = M\iint_R dA = MA(R).$$

Por lo tanto,

$$mA(R) \leq \iint_R f(x, y)\,dA \leq MA(R).$$

Dividiendo entre $A(R)$:

$$m \leq \frac{\iint_R f(x, y)\,dA}{A(R)} \leq M.$$

Como $f(x, y)$ es continua en $R$, $f(x, y)$ debe tomar todos los valores comprendidos entre $m$ y $M$, y como

$$\frac{\iint_R f(x, y)\,dA}{A(R)}$$

es uno de dichos valores, debe existir por lo menos un punto $(\xi, \theta) \in R$ tal que

$$f(\xi, \theta) = \frac{\iint_R f(x, y)\,dA}{A(R)},$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Se ha visto que si $f(x, y)$ es positiva en la región cerrada y acotada $R$ del plano $XY$, el valor de la integral doble nos da el volumen de la región tridimensional comprendida entre la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y $R$. En este caso el teorema 3 dice que dicho volumen es igual al producto del área $A(R)$ de la región $R$ por el valor medio $\langle f \rangle$ de $f(x, y)$. Considérese el siguiente ejemplo como ilustración del Teorema.

## Ejemplo 1.

Determinar el valor promedio de $f(x, y) = 1 - x - y$, en la siguiente región del plano XY

$$R = \{(x, y) \mid y \leq 1 - x;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0;\ \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Indicar en qué puntos de la región se presenta dicho valor promedio.

**Solución:** De acuerdo con la ecuación (12') el valor promedio de $f$ está dado por

$$\langle f \rangle = f(\xi, \theta) = \frac{\iint_R f(x, y)\, dA}{A(R)}\ .$$

Aunque todavía no se estudiado de manera general como calcular una integral doble, en este caso se puede aprovechar el hecho de que $f(x, y)$ es positiva y calcular la integral doble mediante el cálculo del volumen comprendido entre la superficie y la región $R$. En la figura 6.7*a* se muestra una gráfica de $z = f(x, y) = 1 - x - y$ en donde se ve que efectivamente es positiva. En la figura 6.7*b* se muestra la región $R$. Así,

$$\langle f \rangle = \frac{V}{A(R)}\ .$$

Como se observa, el volumen considerado corresponde al de una pirámide de base triangular y está dado por

$$\begin{aligned} V &= A(R) \cdot \frac{1}{3}\,(\text{altura}) \\ &= \frac{1 \times 1}{2} \cdot \frac{1}{3}\,(1) \\ &= \frac{1}{6}\ . \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle f \rangle = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\,.$$

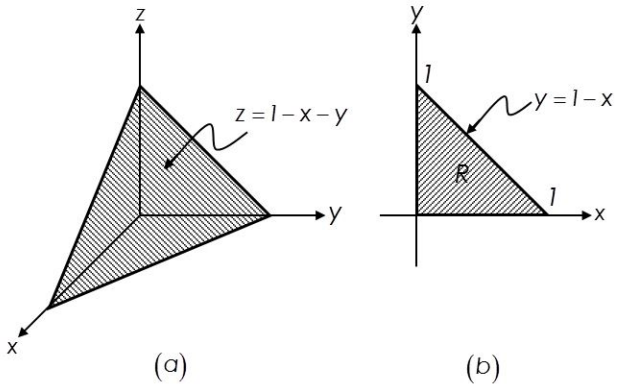



FIGURA 6.7.

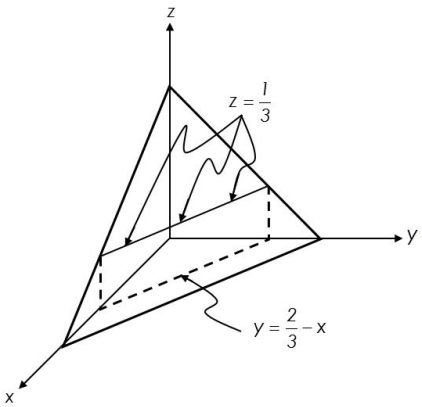



FIGURA 6.8.

Si ahora se desea determinar en qué punto (o puntos) de $R$ se presenta tal valor medio se iguala la expresión de $f(x, y)$ a $\frac{1}{3}$ y se tiene

$$1 - x - y = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{3} - x \quad \forall x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad (\xi, \theta) = \left(x, \frac{2}{3} - x\right) \quad \forall x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\,.$$

Vemos que el conjunto $\{(\xi, \theta)\}$ es un segmento de recta. En la figura 6.8 se muestra dicho segmento. Aunque en general el punto $(\xi, \theta)$ no es único el valor $\langle f \rangle$ siempre es único y está dado por la ecuación (12'). En la figura 6.9 se muestra el volumen que resulta de multiplicar el área de la región $A(R)$ por el valor medio $\langle f \rangle = (\xi, \theta) = \frac{1}{3}$ que, de acuerdo con el teorema 3, es igual al volumen de la pirámide de la figura 6.7.

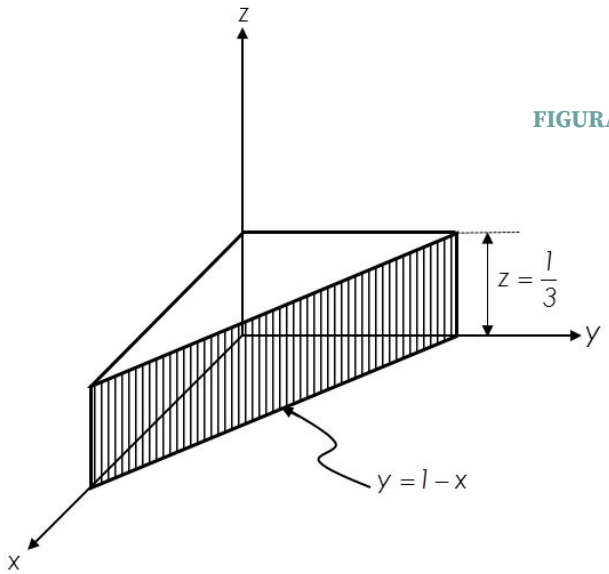



FIGURA 6.9.

## 6.1.2 Cálculo de la integral doble

Se ha visto que la integral doble es el límite de una suma de Riemann, pero en la práctica, si se intenta calcular una integral doble mediante el cálculo de ese límite resulta en general un procedimiento muy complicado y por lo tanto se hace necesario tener un método más eficiente para calcularla. En lo que sigue va a jugar un papel esencial un nuevo concepto que es el de la integral reiterada. Se principiará entonces estudiando este concepto. Para ello considérese el siguiente problema.

**Problema.** Se desea calcular la integral doble de la función $f(x, y) = 2$ definida sobre la región triangular del plano $XY$ comprendida entre los ejes X, Y y la recta $3x + 2y = 6$. Ver figura 6.10

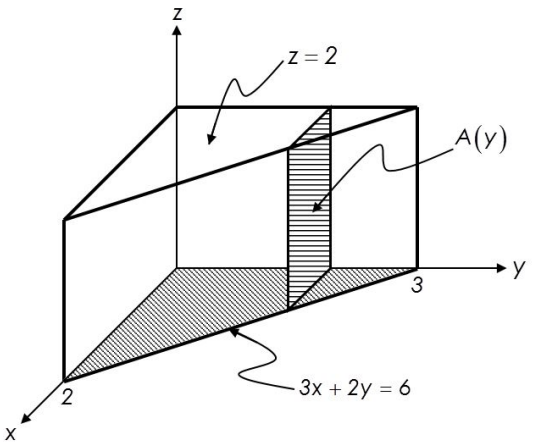



FIGURA 6.10.

**Solución:** Como $f$ es positiva el valor de esta integral es igual al volumen del solido limitado arriba por la superficie $z=2$, y abajo por la región triangular mencionada. Este volumen es simplemente el producto del área de la región plana triangular $\left(\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{2\times 3}{2}=3\right)$ multiplicada por la altura (2). Es decir, el volumen es igual a 6 y se podría decir que el problema ya está resuelto. Pero lo que interesa ahora es calcular dicho volumen mediante un método que involucre el concepto de integral reiterada. Para esto considérese la familia de secciones planas verticales paralelas al plano $ZX$. Una de ellas se muestra en la figura 6.10. Se ve que el área de cada sección depende del valor de $y$, es decir, el área es una función de $y$. Se usará el símbolo $A(y)$ para representar a esta función.

La base de esta sección plana es el intervalo horizontal que va del eje Y a la recta de ecuación $3x+2y=6$. Por lo tanto, la longitud de la base es $(6-2y)/3$ y su área es $A(y)=(2-\frac{2}{3}y)2=4-\frac{4}{3}y$. Alternativamente para calcular $A(y)$ se puede utilizar la integral definida

$$A(y)=\int_0^{(6-2y)/3} 2\,dx,$$

en donde los límites de integración de la variable $x$ van desde cero hasta la recta $x=(6-2y)/3$, es decir, dependen de $y$ en correspondencia con el hecho de que la base de cada sección plana varía al variar la $y$.

Para calcular el volumen pedido se multiplica $A(y)$ por la diferencial $dy$ y se integra con respecto a $y$ desde 0 hasta 3, o sea

$$V = \int_0^3 A(y)\, dy$$

$$= \int_0^3 \left( \int_0^{(6-2y)/3} 2\, dx \right) dy. \tag{13}$$

Este resultado es una expresión que involucra una integración primero respecto a $x$ y luego otra respecto a $y$. A este tipo de integrales se les conoce con el nombre de *integrales reiteradas* (o *iteradas*) *de segundo orden*. Evaluando las integrales se obtiene

$$V = \int_0^3 \left( \int_0^{(6-2y)/3} 2\, dx \right) dy.$$

$$= \int_0^3 \left( 4 - \frac{4y}{3} \right) dy$$

$$= 4y - \frac{4y^2}{6} \Bigg|_0^3$$

$$= 6,$$

como se había anticipado. De la misma forma se hubiera podido trabajar con secciones paralelas al plano $YZ$.

Como conclusión se puede decir que se ha evaluado la integral doble de la función constante $f(x, y) = 2$ mediante el cálculo de una integral iterada. Más adelante (Teorema 6) se verá que este procedimiento sigue siendo válido para integrar funciones más complicadas. En general existen dos tipos de integrales reiteradas en el plano $XY$. En el primer tipo se integra primero respecto a $y$ tomando a $x$ como constante y luego respecto a $x$. Tienen la forma

$$\int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx, \tag{14}$$

siendo $g_1(x)$ y $g_2(x)$ dos funciones de $x$ que indican los límites de integración de la variable $y$. En el segundo tipo se integra en orden inverso y tienen la forma

$$\int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy, \tag{15}$$

donde $h_1(y)$ y $h_2(y)$ son dos funciones de $y$ que indican los límites de integración de la variable $x$.

En la práctica se acostumbra a omitir el paréntesis que encierra a la integral que se evalúa primero y se escribe simplemente

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{14'}$$

o bien

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{15'}$$

según sea el caso. Sin embargo, al usar esta notación, hay que tener cuidado de escribir en el orden correcto las diferenciales $dx$ y $dy$ en correspondencia con el orden en que aparecen los límites de integración. Por ejemplo, en el primer caso los límites de la integral interior son dos funciones de $x$ y los de la exterior dos números reales. Además, el orden de las diferenciales es $dydx$. Se puede ver también que los límites de las integrales reiteradas de la forma (14) (o (14')) definen una región $R_x$ y las de la forma (15) (o (15')) una región $R_y$.

Ahora se enunciarán algunas propiedades de estas integrales que, como se podrá apreciar, son semejantes a las de las integrales dobles. Sólo se enunciarán las propiedades de las integrales reiteradas del primer tipo, siendo semejantes a las del otro tipo.

**Teorema 4.** Si $f(x, y)$ es una función continua en una región $R_x \subset \mathbb{R}^2$ del tipo $I$ limitada por $a \leq x \leq b$; y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, la integral reiterada

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dydx$$

existe.

**Teorema 5.** Sean $f(x,\ y)$ y $h(x,\ y)$ funciones escalares continuas en una región $R_x$ del tipo $I$ y sea $k$ un escalar real. Entonces:

*i)* $$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} kf(x, y)\, dy\, dx = k \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

*ii)* $$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[f(x, y) + h(x, y)\right] dy\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx + \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h(x, y)\, dy\, dx$$

*iii)* Si se efectúa una partición del intervalo $[a,\ b]$ en subintervalos no superpuestos $x_0 = a,\ x_1\ ,\ x_2\ , \cdots ,\ x_n = b$, se cumple que

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = &\int_{x_0}^{x_1} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \\ &+ \cdots \\ &+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dydx\end{aligned}$$

*iv)* La propiedad anterior se puede generalizar para el caso en que la región $R_x$ se divida en $n$ subregiones del tipo $I$ : $\Delta R_{x_1}$, $\Delta R_{x_2}, \cdots, \Delta R_{x_n}$. Ver por ejemplo la figura 6.11. Así,

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x_{1I}}^{x_{1F}} \int_{g_{1I}(x)}^{g_{1F}(x)} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{x_{2I}}^{x_{2F}} \int_{g_{2I}(x)}^{g_{2F}(x)} f(x,y)\,dy\,dx + \cdots + \int_{x_{nI}}^{x_{nF}} \int_{g_{nI}(x)}^{g_{nF}(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

siendo $x_{iI}$, $x_{iF}$, $g_{iI}(x)$ y $g_{iF}(x)$ los límites de la región $\Delta R_{x_i}$, o sea

$$\Delta R_{x_i} = \left\{(x,y) \,\middle|\, x_{iI} \le x \le x_{iF};\ \ g_{iI}(x) \le y \le g_{iF}(x)\right\}$$

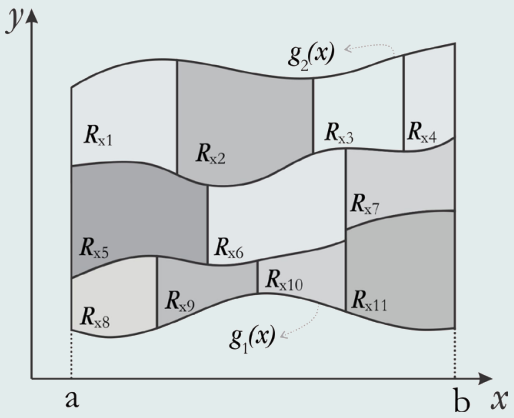



**FIGURA 6.11.** Se muestra una región del tipo I definida por la expresión $\left\{(x,y) \,\middle|\, a \le x \le b;\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$, la cual se ha dividido en las subregiones $R_{x_1}$, $R_{x_2}$, $R_{x_3}$, $\cdots$, también del tipo I

*v)* Si $f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in R_x$,

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx \geq 0$$

*vi)* Si $f(x,y) \geq h(x,y) \quad \forall (x,y) \in R_x$,

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx \geq \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h(x,y)\, dy\, dx$$

*vii)* $\displaystyle\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = A(R_x)$, siendo $A(R_x)$ el área de la región $R_x$.

*viii)* Si $f(x,y)$ tiene un máximo absoluto $M$ y un mínimo absoluto $m$ en $R_x$,

$$m\, A(R_x) \leq \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx \leq M\, A(R_x)$$

*ix)* **Teorema del valor medio para integrales reiteradas.** Bajo las mismas condiciones que las del teorema de valor medio para integrales dobles existe al menos un punto $(\epsilon, \eta) \in R_x$ tal que

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx = f(\epsilon, \eta) \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$$

$$= f(\epsilon, \eta)\, A(R_x).$$

A continuación, se verá un teorema muy importante y útil. Es el teorema que establece la relación precisa entre las integrales dobles y las integrales reiteradas y proporciona el método más común para calcular las integrales dobles.

**Teorema 6.** La integral doble de una función continua $f(x, y)$ en una región tipo *I*, limitada por $x = a$, $x = b$, $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$, es igual a la integral reiterada de segundo orden del primer tipo de la función $f$ sobre dicha región, es decir,

$$\iint_{R_x} f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{16}$$

De la misma forma, si la región de integración es tipo *II* limitada por $y = c$, $y = d$, $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$, entonces

$$\iint_{R_y} f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{17}$$

En los casos en los que la región de integración es regular, es decir indistintamente del tipo *I* o del tipo *II* se puede utilizar (16) o bien (17), siendo el resultado exactamente el mismo.

**Demostración:** Se probará el teorema para el caso de una región del tipo *I*. El caso de una región del tipo *II* es exactamente igual y se deja como ejercicio al lector.

Si se efectúa una partición de $R_x$ de manera que quede dividida en $n$ subregiones del tipo $I$ : $\Delta R_{x_1}, \Delta R_{x_2}, \cdots, \Delta R_{x_n}$ (ver por ejemplo la figura 6.11), al aplicar la propiedad $(iv)$ del teorema 5 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy dx = & \int_{x_{1I}}^{x_{1F}} \int_{g_{1I}(x)}^{g_{1F}(x)} f(x, y)\, dy\, dx \\
& + \int_{x_{2I}}^{x_{2F}} \int_{g_{1I}(x)}^{g_{2F}(x)} f(x, y)\, dy\, dx \\
& + \cdots \\
& + \int_{x_{nI}}^{x_{nF}} \int_{g_{nI}(x)}^{g_{nF}(x)} f(x, y)\, dy\, dx \\
= & \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{iI}}^{x_{iF}} \int_{g_{iI}(x)}^{g_{iF}(x)} f(x, y)\, dy\, dx,
\end{aligned}$$

siendo como antes, $x_{iI}$, $x_{iF}$, $g_{iI}(x)$ y $g_{iF}(x)$ los límites de la región $\Delta R_{x_i}$, o sea,

$$\Delta R_{x_i} = \{(x, y) \mid x_{iI} \leq x \leq x_{iF};\ \ g_{iI}(x) \leq y \leq g_{iF}(x)\}.$$

Usando la propiedad $(ix)$ del teorema 5 (teorema del valor medio para integrales reiteradas):

$$\int_{x_{iI}}^{x_{iF}} \int_{g_{iI}(x)}^{g_{iF}(x)} f(x, y)\, dy\, dx = f(\epsilon_i, \eta_i)\, \Delta A_i \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

donde $(\epsilon_i, \eta_i) \in \Delta R_{x_i}$ y $\Delta A_i$ es el área de $\Delta R_{x_i}$. Por lo que

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i, \eta_i)\, \Delta A_i.$$

A la derecha de esta expresión se tiene la suma de Riemann asociada a la partición considerada. Como $f$ es continua, al tomar particiones cada vez más finas de manera que su norma tienda a cero, el límite de la suma anterior existe y es igual a la integral doble de $f(x, y)$ sobre $R_x$. Además, como la igualdad anterior es válida para toda partición y el miembro izquierdo no depende de ella, al tomar el límite en esa igualdad se obtiene la ecuación (16):

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \iint_{R_x} f(x, y)\, dA,$$

lo que prueba el teorema 6. Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente corolario cuya demostración es inmediata y se deja como ejercicio al lector.

**Corolario.** Sea $f$ una función continua en una región del tipo *I*. Entonces, el valor medio $f(\xi, \theta)$ mencionando en el teorema del valor medio para integrales dobles es igual al valor $f(\epsilon, \eta)$ mencionado en el teorema del valor medio para integrales iteradas del primer tipo. Además, el conjunto $\{(\xi, \theta)\}$ es igual al conjunto $\{(\epsilon, \eta)\}$. Un resultado similar se tiene para el caso de las regiones del tipo *II*.

Aunque el teorema 6 establece la igualdad numérica entre la integral doble y la integral reiterada, conceptualmente no son lo mismo. Una integral doble es un número asociado a una función integrable $f(x, y)$ sobre una región $R$ y este número existe y tiene un significado independientemente del método particular de calcularlo. Por otra parte, una integral reiterada es un proceso que involucra dos integraciones como las que se estudian en el Cálculo con una variable y en donde, al final, se obtiene un valor numérico. Así, toda integral reiterada define una integral doble, pero no toda integral doble puede definir a una integral reiterada (por ejemplo, cuando la región de integración no es una región regular, etc.).

De acuerdo con la propiedad $(vii)$ del teorema 2, cuando el integrando es igual a 1, la integral doble es igual al área de $R$. Es decir,

$$A(R) = \iint_R dA. \tag{18}$$

Por otro lado, del cálculo integral con una sola variable, se sabe que para calcular el área comprendida entre las curvas $g_1(x)$ y $g_2(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se debe evaluar la integral (ver figura 6.2a)

$$\int_a^b \big(g_2(x) - g_1(x)\big)\, dx. \tag{19}$$

Es fácil ver que las expresiones (18) y (19) no son dos métodos diferentes de calcular áreas, en realidad (19) es una consecuencia de (18). En efecto, si la región $R \subset \mathbb{R}^2$ está limitada por las curvas $g_1(x)$ y $g_2(x)$ en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la figura 6.1*a*, entonces $R$ es de la forma

$$R = \big\{(x, y) \;\big|\; a \le x \le b;\;\; g_1(x) \le y \le g_2(x)\big\}$$

y la integral doble (18) es igual a

$$A(R) = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \int_a^b \big(g_2(x) - g_1(x)\big)\, dx$$

que es la expresión (19).

## Ejemplo 2.

Dadas las siguientes regiones del plano, que se pueden expresar indistintamente como regiones del tipo *I* o del tipo *II*, escribir la integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ en términos de sus dos integrales reiteradas asociadas. Graficar las regiones.

*i)* *R*: triángulo con vértices en $\mathbf{A} = (1, 0)$, $\mathbf{B} = (3, 0)$ y $\mathbf{C} = (3, 3)$

*ii)* $R = \{ (x, y) \mid x^2 \leq y \leq 4; \quad x, y \in \mathbb{R} \}$

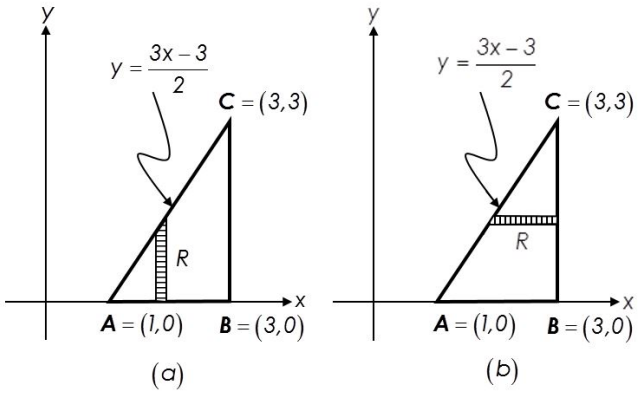



FIGURA 6.12.

La franja vertical sombreada de la figura 6.12*a* representa al intervalo sobre el que toma valores la variable $y$ en la integral interior de la integral iterada del tipo *I*. Claramente se ve que la longitud de ese intervalo cambia al variar la variable $x$. La figura 6.12*b* muestra lo correspondiente para el otro tipo de integral iterada.

**Solución:**

*i)* Primero se expresará la región como una región del tipo *I* (ver figura 6.12*a*). En este caso los límites de integración para la variable $x$ son constantes y están dados por las abscisas de los puntos **A** y **B**, es decir, $x = 1$ y $x = 3$. En cambio, los límites de integración de $y$ son variables y, para obtenerlos, se necesita determinar la ecuación de la recta **AC**. Utilizando la ecuación general de la recta:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

se obtiene $\Rightarrow y = 0 + \dfrac{3-0}{3-1}(x - 1).$

De modo que $y = \dfrac{3x-3}{2}.$

Por lo tanto $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_1^3 \int_0^{(3x-3)/2} f(x, y)\, dy\, dx.$

Ahora se expresa a la región como una región del tipo *II*. Ver figura 6.12*b*. En este caso los límites de integración para $x$ son variables y van desde la recta **AC** hasta la recta **BC.** En el caso anterior la ecuación de **AC** se expresó en función de $x$, en cambio ahora se debe expresar en función de $y$, obteniéndose $x = (2y + 3)/3$. Además, los límites de integración para $y$ son constantes y están dados por las ordenadas de los puntos **A** y **C**, es decir, $y = 0$ y $y = 3$. En consecuencia,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^3 \int_{(2y+3)/3}^3 f(x, y)\, dx dy.$$

Como la integral doble es igual a ambas integrales reiteradas se concluye que el valor de estas debe ser el mismo. Se observa, sin embargo, que sus límites de integración son muy distintos.

*ii)* En las figuras 6.13*a* y 6.13*b* se muestra la región. Se puede apreciar que la región está limitada superiormente por la recta $y = 4$ e inferiormente por la parábola $y = x^2$. Los puntos de intersección entre estas dos curvas son $(-2, 4)$ y $(2, 4)$. Al considerar a la región como tipo *I* se obtiene que los límites de integración para $x$ son $x = -2$ y $x = 2$. Y los de $y$ van desde la parábola $y = x^2$, hasta la recta $y = 4$ (ver figura 6.13*a*) Por lo tanto,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\, dy dx.$$

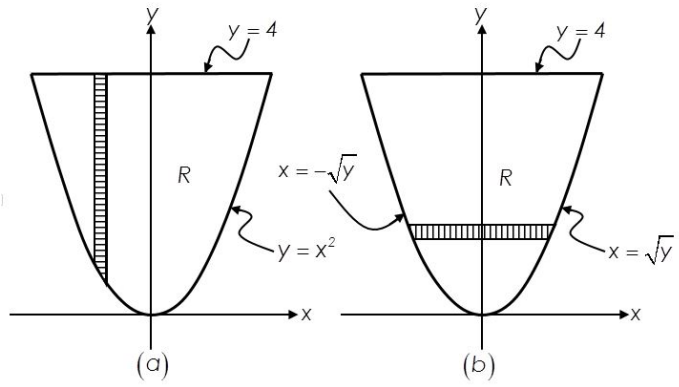



**FIGURA 6.13.** La franja vertical sombreada de la figura 6.13*a* representa al intervalo sobre el que toma valores la variable y en la integral interior de la integral iterada del tipo *I*. La figura 6.13*b* muestra lo correspondiente para el otro tipo de integral iterada.

Al considerar a la región como una del tipo *II* se encuentra que la variable $y$ tiene límites constantes $y=0$ y $y=4$. Y que la variable $x$ varía desde la rama izquierda de la parábola $x=-\sqrt{y}$, hasta la rama derecha de dicha parábola $x=+\sqrt{y}$, tal y como se muestra en la figura 6.13*b*. Así,

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_0^4\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Nuevamente vale la pena observar que, aunque ambas integrales reiteradas tengan el mismo valor, sus límites son muy distintos.

## Ejemplo 3.

Calcular el área de la región limitada por las curvas

$$x^2+y^2=3 \qquad \text{y} \qquad y=\frac{x^2}{2}$$

**Solución:** Esta región es la de la figura 6.14.

Por ser simétrica respecto al eje Y, se puede calcular sólo la mitad del área y después multiplicar por 2. El punto de intersección de las curvas, en el primer cuadrante, corresponde a $x=\sqrt{2}$. De manera que

$$A(R)=\iint_R dA = 2\int_0^{\sqrt{2}}\int_{x^2/2}^{\sqrt{3-x^2}} dy\,dx$$

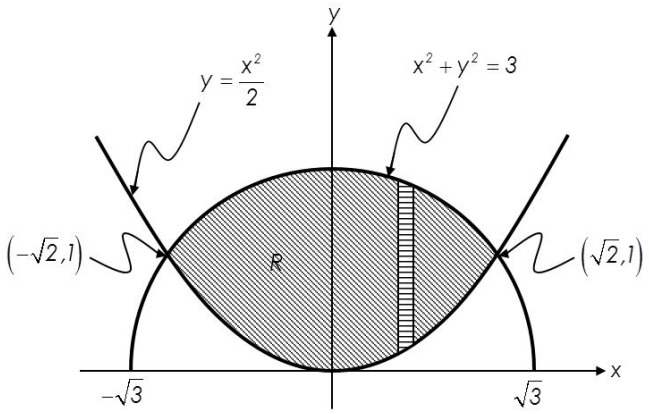



FIGURA 6.14.

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\left[y\right]_{x^2/2}^{\sqrt{3-x^2}} dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3-x^2}-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$=2\left[\frac{3}{2}\,\text{ang sen}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$\doteq 3.3373.$

## Ejemplo 4.

Calcular el volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2+y^2=4$ y $x^2+z^2=4$.

**Solución:** En la figura 6.15 se ha graficado la parte del solido que queda en el primer octante. Su forma en los otros octantes es la misma. Por lo tanto, el volumen pedido es igual a ocho veces el volumen indicado en la figura. Así,

$$V = 8 \iint_R f(x, y)\, dA$$

donde, de acuerdo a la figura 6.16, la función por integrar es

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$$

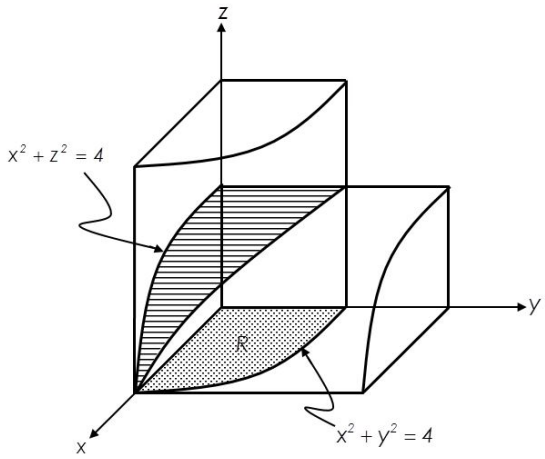



**FIGURA 6.15.**

y la región de integración está limitada, como se observa en la figura 6.16, por un cuarto de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Entonces el volumen total del sólido considerado está dado por:

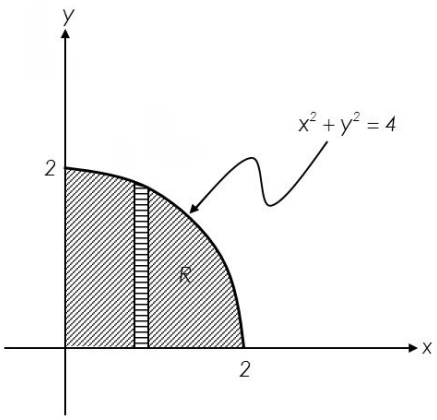



**FIGURA 6.16.**

$$V = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\, dy\, dx$$

$$= 8\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\, dy\, dx$$

$$= 8\int_0^2 \left[ \sqrt{4-x^2}\, y \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = 8\int_0^2 \left(4-x^2\right) dx$$

$$= 8\left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \frac{128}{3}.$$

### 6.1.3 Integrales dobles en otros sistemas coordenados

Las integrales dobles también se pueden expresar en otros sistemas coordenados. En el inciso $(iii)$ del teorema 15 del capítulo 4 se vio que la diferencial de área $dA$ en el plano $XY$, al hacer una transformación de coordenadas al sistema coordenado curvilíneo ortogonal $uv$, está dada por

$$dA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du\, dv,$$

donde $du\, dv$ es la diferencial de área en el plano $UV$ y que denotaremos por $dA_{uv}$. En este caso la integral doble quedará como

$$\iint_{R'} f(u, v) \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| dA_{uv}, \tag{20}$$

siendo $R'$ la transformación de la región original $R$ al plano $UV$. Si $R'$ es una región tipo $R_u$ esta integral doble se puede calcular mediante una integral reiterada como sigue

$$\iint_{R'} f(u,v)\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| dA_{uv} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{\psi_1(u)}^{\psi_2(u)} f(u,v)\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| dv\,du \qquad (21)$$

y si $R'$ es una región tipo $R_v$ la integral doble se puede calcular mediante

$$\iint_{R'} f(u,v)\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| dA_{uv} = \int_{v_1}^{v_2}\int_{\phi_1(v)}^{\phi_2(v)} f(u,v)\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv. \qquad (22)$$

Los límites de dichas integrales son, por supuesto, los límites de $R'$ en cada caso. Por ejemplo, para el sistema polar el jacobiano es igual a $r$ y si $R'$ es una región $R_\theta$ se tiene que

$$\iint_{R'} f(r,\theta) r\, dA_{r\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\psi_1(\theta)}^{\psi_2(\theta)} f(r,\theta) r\, dr\, d\theta. \qquad (23)$$

## Ejemplo 5.

Calcular las integrales reiteradas

*i)* $\displaystyle\int_2^3\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\, dx$

*ii)* $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{a\,\mathrm{sen}\,\theta}^{a} r\, dr\, d\theta$

*iii)* $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx.$

**Solución:**

*i)*
$$\int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\, dx = \int_2^3 \left[ -\frac{1}{x+y} \right]_1^2 dx$$

$$= \int_2^3 \left( -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[ \ln \frac{x+1}{x+2} \right]_2^3$$

$$= \ln \frac{16}{15}.$$

*ii)*
$$\int_0^{2\pi} \int_{a \operatorname{sen} \theta}^{a} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{a \operatorname{sen} \theta}^{a} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}.$$

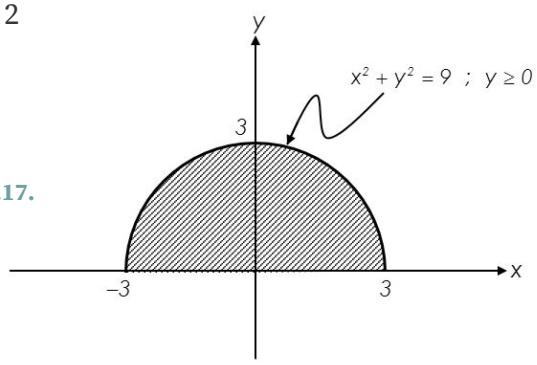



**FIGURA 6.17.**

*iii)* También para esta integral reiterada es conveniente utilizar coordenadas polares. De acuerdo con los límites de integración, la región es la de la figura 6.17. Para cambiar a coordenadas polares, se multiplica el integrando por el factor de cambio $|J(x, y/r, \theta)| = r$. Además, para fijar los nuevos límites de integración, se coloca el polo en el origen y se ve que $r$ varía de 0 a 3, y $\theta$ de 0 a $\pi$. Así se tiene que

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{3} \frac{1+r^2}{r}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi}\left[r+\frac{r^3}{3}\right]_{0}^{3} d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi}\left[3+9\right] d\theta$$

$$= 12\pi.$$

## Ejemplo 6.

Determinar el volumen del sólido que se encuentra abajo de la superficie $z = 3 + \cos\left(x^2+y^2\right)$ y arriba de la región $R$ del plano $XY$ limitada por las circunferencias $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=9$.

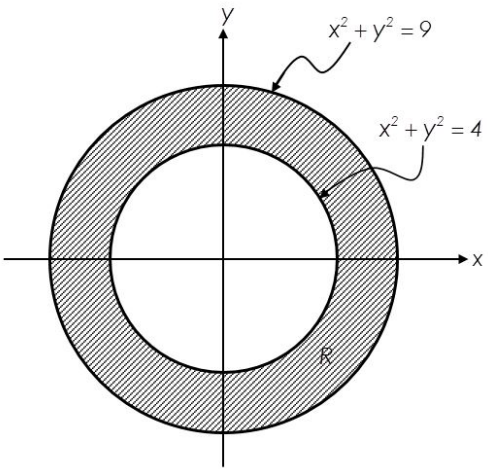



FIGURA 6.18.

**Solución:** La región $R$ considerada se muestra en la figura 6.18. Para evaluar la integral doble que da el volumen buscado, es conveniente hacerlo en coordenadas polares. Además, como la función por integrar es igual en los cuatro cuadrantes, se puede calcular sólo la integral sobre el primer cuadrante y multiplicar por 4. Entonces

$$V = \iint_R \left[3 + \cos\left(x^2 + y^2\right)\right] dA = 4\int_0^{\pi/2}\int_2^3 \left(3 + \cos r^2\right) r\, dr d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\left[\frac{3r^2}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} r^2\right]_2^3 d\theta$$

$$= \left[30 + 2\left(\operatorname{sen} 9 - \operatorname{sen} 4\right)\right]\left[\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi\left(15 + \operatorname{sen} 9 - \operatorname{sen} 4\right).$$

## Ejemplo 7.

Calcular el volumen del sólido limitado arriba por la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$, y abajo por la región $R$ en el plano $XY$ que se encuentra entre las curvas

$$x^2 - y^2 = 1; \quad x^2 - y^2 = 16; \quad xy = 1; \quad xy = 6.$$

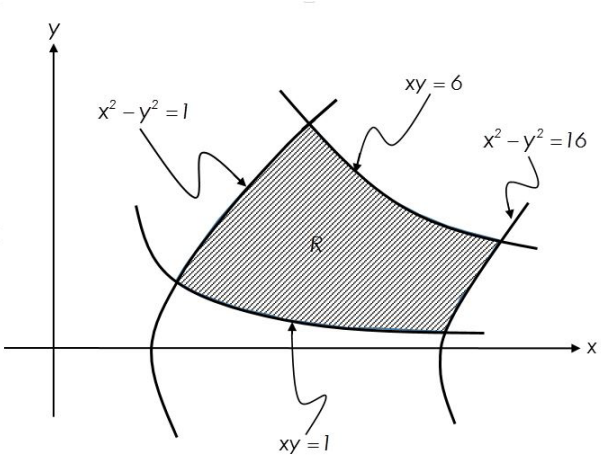



FIGURA 6.19.

**Solución:** La gráfica de $R$ se muestra en la figura 6.19. Para simplificar el problema se acude al sistema coordenado curvilíneo dado por las ecuaciones de transformación $u = x^2 - y^2$ y $v = xy$ ya que entonces las curvas $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 16$ se convierten en las rectas $u = 1$ y $u = 16$, y las curvas $xy = 1$ y $xy = 6$ en las rectas $v = 1$ y $v = 6$, respectivamente. De esta manera la región $R$ se convierte en la región $R'$ del plano UV mostrada en la figura 6.20.

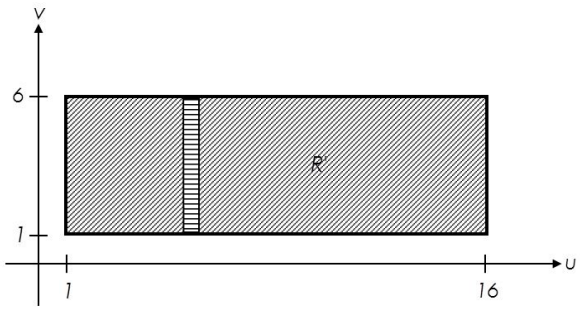



FIGURA 6.20.

Ahora es necesario calcular el jacobiano $J\left(x, y/u, v\right)$. Sin embargo, en este ejemplo es más fácil calcular primero $J\left(u, v/x, y\right)$ y luego utilizar la relación $J\left(x, y/u, v\right) = 1/J\left(u, v/x, y\right)$. Procediendo:

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2\left(x^2 + y^2\right)$$

y entonces,

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)}\ .$$

Este jacobiano debe ser expresado en términos de $u$ y $v$, ya que en la nueva integral las variables son $u$ y $v$. De las ecuaciones de transformación se tiene

$$x = \frac{v}{y} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{v^2}{y^2} - y^2 \quad \Longrightarrow \quad y^4 + uy^2 - v^2 = 0$$

de donde

$$y^2 = -\frac{u}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2+4v^2}$$

y por lo tanto,

$$x^2 = \frac{u}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2+4v^2}$$

entonces

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2(x^2+y^2)} = \frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}.$$

Luego el volumen buscado se obtendrá a partir de

$$V = \iint_R (x^2+y^2)\,dA = \iint_{R'} \sqrt{u^2+4v^2}\; J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) dA_{uv}$$

$$= \int_1^6 \int_1^{16} \sqrt{u^2+4v^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}\right) du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^6 \int_1^{16} du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^6 \Big[u\Big]_1^{16} dv$$

$$= \frac{15}{2}\int_1^6 dv$$

$$= \frac{15}{2}\Big[v\Big]_1^6$$

$$= \frac{75}{2}.$$

## Ejercicios

**6.1.** Calcular la integral doble de la función $f(x,\ y)=10-x$ sobre la región triangular comprendida entre los ejes X, Y y la recta $x+\ y=3$.

**Solución:** $\frac{81}{2}$.

**6.2.** Dadas las siguientes regiones del plano, que se pueden expresar indistintamente como regiones del tipo *I* o *II*, escribir la integral doble

$$\iint_A f(x,y)\,dA$$

en términos de sus dos integrales reiteradas asociadas.

*i)* $R=$ triángulo con vértices en (2, 1), (4, 1) y (4, 5).

*ii)* $R=\{(x,y)\,|\,2x^2+1\le y\le 5;\ \ x,y\in\mathbb{R}\}$.

**Solución:** *i)* $R_I=\{(x,y)\,|\,2\le x\le 4;\ \ 1\le y\le 2x-3\}$;
$R_{II}=\{(x,y)\,|\,1\le y\le 5;\ (y+3)/2\le x\le 4\}$;
*ii)* $R_I=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\sqrt{2};\ 2x^2+1\le y\le 5\}$;
$R_{II}=\{(x,y)\,|\,1\le y\le 5;\ 0\le x\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\}$;

**6.3.** Calcular las integrales reiteradas.

*i)* $\displaystyle\int_3^5\int_1^2 (x+y^2)\,dy\,dx.$

*i)* $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_{\cos\theta}^2 r\,dr\,d\theta.$

**Solución:** *i)* $53/3$; *ii)* $7\pi/4$.

**6.4.** Calcular el área de la región limitada por las curvas $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=3$ y $y=3x^2$

**Solución:** $A(R)=8.224\ u^2$.

**6.5.** Calcular el volumen del solido limitado por los cilindros $z^2+y^2=25$ y $x^2+z^2=25$.

**Solución:** $V=666.67\ u^3$.

**6.6.** Calcular el volumen del solido que se encuentra abajo de la superficie $z=x+20$ y arriba de la región del plano $XY$ limitada por las parábolas $y=-x^2+5$ y $y=x^2-5$.

**Solución:** $V=800\sqrt{5}/3\ u^3$.

**6.7.** Calcular el volumen del solido limitado a la derecha por la superficie de ecuación $y=x^2+z^2$ y a la izquierda por la región $R$ del plano $ZX$, que se encuentra entre las curvas $x^2-z^2=4$ y $x=5$.

**Solución:** $V=2\sqrt{21}\ u^3$.

**6.8.** Evaluar la integral doble $\iint_R (x-y)\,dA$ donde $R$ es la región $\{(x,y)\,|0\le x\le 2;\ \ x^2\le y\le 4\}$. Trazar su gráfica.

**Solución:** $\iint_R (x-y)\,dA=-\frac{44}{5}$

**6.9.** Determinar el área limitada por $x^2+y^2=4;\ \ x^2+y^2-4y=0$ y $x\le 0$.

**Solución:** $4\ \text{ang sen}\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{3}$.

**6.10.** Obtener el área delimitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 9$$
$$xy = 1$$
$$xy = 2$$

Para resolver este problema se sugiere trazar una gráfica semejante a la de la figura 6.19 y hacer un cambio de coordenadas semejante al del ejemplo 7.

**Solución:** $V = 10\ u^3$

**6.11.** Determinar el valor medio de $f(x, y) = 1 - 2x$ en la región $R = \{(x, y) \mid x \leq 1 - y;\ y \geq 0;\ x \geq 0;\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

**Solución:** $\frac{1}{3}$

**6.12.** Evaluar la integral

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \int_{x/\sqrt{3}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

usando coordenadas polares.

**Solución:** $\frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{e^9}\right)$

**6.13.** Calcular el área interior a las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 4x$ en coordenadas polares.

**Solución:** $A(R) = 7.653\ u^2$.

## 6.2 Aplicaciones de la integral doble en la mecánica

En diversos problemas aparecen distribuciones planas de cantidades tales como masa, carga eléctrica, etc., en donde, a partir de ellas, es necesario calcular la masa total, la carga total, los momentos estáticos o los momentos de inercia, etc. Estos conceptos constituyen algunas de las aplicaciones mías comunes de las integrales dobles y serán explicados brevemente en esta sección.

### 6.2.1 Densidad y masa

Si se tiene una placa plana y homogénea, es decir, con densidad constante $\rho$, entonces la masa de dicha placa está dada por:

$$M = \rho A$$

en donde $A$ representa al área de dicha placa.

Sin embargo, si la placa plana no tiene una distribución homogénea de masa, la densidad será diferente en cada punto de la placa y estará expresada por medio de una función $\rho(x, y)$. De esta forma, dado un elemento diferencial de área $dA$, su diferencial de masa $dM$ estará dada por

$$dM = \rho(x, y)\, dA.$$

Si se pretende calcular la masa total de la placa plana, entonces se debe integrar esta ecuación mediante una integral doble, es decir,

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA,$$

donde $R$ es la región definida por la forma de la placa.

### 6.2.2 Primeros momentos (o momentos estáticos)

**Definiciones**

a) Sea $dM$ un elemento diferencial de masa situado en el punto $(x, y)$. Se llama ***primer momento*** (o ***momento estático***) de $dM$ con respecto al eje X, denotado como $d\mathcal{M}_x$, al producto de $dM$ por la coordenada y de su vector de posición, es decir,

$$d\mathcal{M}_x = y\, dM = y\rho(x, y)dA.$$

b) Sea $P$ una placa plana colocada sobre el plano $XY$ y cuya densidad de masa es la función $\rho(x, y)$. Se llama ***primer momento*** (o ***momento estático***) de la placa con respecto al eje X, denotado como $\mathcal{M}_x$, a la expresión.

$$\mathcal{M}_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA.$$

c) De manera semejante, el momento estático de la placa plana con respecto al eje Y, denotado por $\mathcal{M}_y$, es

$$\mathcal{M}_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA.$$

d) Si la masa total $M$ está concentrada en el punto $(x, y)$ los momentos estáticos están dado por

$$\mathcal{M}_x = y\, M$$
$$\mathcal{M}_y = x\, M.$$

También es útil definir el momento estático de una placa plana con respecto a un eje cualquiera que se encuentra en el mismo plano que la placa. Para hacer esta generalización conviene observar que en la integral del inciso $(b)$ que define a $\mathcal{M}_x$ la $y$ puede ser positiva o negativa y que por lo tanto el integrando no se puede definir simplemente como el producto de $\rho(x, y)$ por la distancia (que siempre es una cantidad positiva) entre el punto $(x, y)$ y el eje X. Es necesario tener identificado un "lado del eje". En el caso del eje X se puede utilizar al vector $\hat{\mathbf{j}}$ para identificar uno de sus lados. Entonces, el integrando de la integral que define a $\mathcal{M}_x$ se puede escribir como el producto de $\rho(x, y)$ por el producto punto entre $\hat{\mathbf{j}}$ y $(x, y)$. Es decir, el integrando del inciso $(b)$ se podría haber escrito como $\rho(x, y)\left[\hat{\mathbf{j}} \cdot (x, y)\right]$. Después de esta observación se procede a dar la siguiente definición.

**Definición.** Sean una placa plana localizada en el plano $XY$. Sea $L$ un eje localizado también en el plano $XY$ y cuya orientación es arbitraria y tal que no pasa necesariamente por el origen. El primer momento o momento estático de la placa con respecto al eje $L$, denotado por $\mathcal{M}_L$, se define como

$$\mathcal{M}_L = \iint_R \rho(x, y)\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \big((x, y) - (x_0, y_0)\big)\, dA,$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario perpendicular al eje $L$ y $(x_0, y_0)$ un punto arbitrario de él, de manera que la magnitud de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \big((x, y) - (x_0, y_0)\big)$ es la distancia de punto $(x, y)$ al eje. Notar que de acuerdo con esta definición el signo de $\mathcal{M}_L$ depende de la elección del vector $\hat{\mathbf{n}}$. Si la ecuación del eje es $Ax + By + C = 0$ el vector $\hat{\mathbf{n}}$ se puede tomar como

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}.}$$

Además, como $(x_0, y_0)$ satisface la ecuación del eje se tiene que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \big((x, y) - (x_0, y_0)\big) = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

y

$$\mathcal{M}_L = \iint_R \rho(x, y)\, \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\, dA.$$

### 6.2.3 Segundos momentos (o momentos de inercia)

**Definición.** El ***segundo momento*** (o ***momento de inercia***) de una placa plana con respecto al eje X, denotado por $\mathcal{I}_x$, se define como la integral del producto de la diferencial de masa $\rho(x, y)\, dA$ por el cuadrado de la distancia mínima del punto $(x, y)$ a dicho eje. Esto es,

$$\mathcal{I}_x = \iint_R y^2\, \rho\,(x, y)\, dA$$

y de manera similar

$$\mathcal{I}_y = \iint_R x^2\, \rho\,(x, y)\, dA.$$

**Definición.** El segundo momento (o momento de inercia) de una placa plana con respecto a un eje $L$, denotado por $\mathcal{I}_L$, se define como

$$\mathcal{I}_L = \iint_R d\,(x, y)^2\, \rho\,(x, y)\, dA,$$

en donde $d\,(x, y)^2 = \frac{(Ax + By + C)^2}{A^2 + B^2}$, siendo $Ax + Bx + C = 0$ la ecuación del eje $L$.

En mecánica se demuestra que el momento de inercia de una placa plana con respecto a un eje $L$ es una medida de la capacidad de la placa para oponerse a aceleraciones angulares con respecto a ese eje.

**Definición.** El ***segundo momento polar*** (o momento ***polar de inercia***) se define como la integral del producto de la diferencial de masa $\rho\,(x, y)\,dA$ por el cuadrado de su distancia al origen. Es decir,

$$\mathcal{I}_0 = \iint_R (x^2+y^2)\,\rho\,(x, y)\,dA.$$

Resulta evidente de la comparación entre estos resultados que

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y.$$

Las definiciones anteriores de *momentos* asociados a cuerpos con masa son conceptos físicos. No obstante, existen también los conceptos puramente geométrico de *momentos* asociados a figuras geométricas. Las definiciones de estos momentos son en esencia iguales a las dadas arriba. La única diferencia es que en los conceptos geométricos no aparece nunca la densidad de masa $\rho(x, y)$. A continuación, se presenta un breve resumen de ellos y para diferenciarlos de los anteriores se usará un superíndice $G$ como sigue.

- Primer momento (geométrico) de la diferencial de área $dA$ situada en el punto $(x, y)$ con respecto al eje X

$$d\mathcal{M}_x^G = y\,dA.$$

- Primer momento (geométrico) de la región $R$ con respecto al eje X

$$\mathcal{M}_x^G = \iint_R y\,dA.$$

- Primer momento (geométrico) de la región $R$ con respecto al eje Y

$$\mathcal{M}_y^G = \iint_R x\, dA.$$

- Primer momento (geométrico) de la región $R$ con respecto a un eje arbitrario $L$

$$\mathcal{M}_L^G = \iint_R \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\, dA.$$

- Segundo momento (geométrico) de la región $R$ con respecto al eje X

$$\mathcal{I}_x^G = \iint_R y^2\, dA.$$

- Segundo momento (geométrico) de la región $R$ con respecto al eje Y

$$\mathcal{I}_x^G = \iint_R x^2\, dA.$$

- Segundo momento (geométrico) de la región $R$ con respecto a un eje arbitrario L

$$\mathcal{I}_L^G = \iint_R \frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}\, dA.$$

- Segundo momento polar (geométrico) de la región $R$

$$\mathcal{I}_0^G = \iint_R (x^2+y^2)\, dA.$$

A continuación, se dan las definiciones de centro de masa y centroide. El centro de masa es un concepto físico asociado a un cuerpo masivo, en cambio el centroide es un concepto geométrico asociado a un cuerpo geométrico.

a) El ***centro de masa*** de una distribución plana de materia cuya masa total es M se define como el punto de coordenadas $(\mathbf{x}_{cm}, \mathbf{y}_{cm})$ dadas por

$$\mathbf{x}_{cm} = \frac{\mathcal{M}_y}{M} = \frac{\iint_R x\rho(x,y)\, dA}{\iint_R \rho(x,y)\, dA}$$

y

$$\mathbf{y}_{cm} = \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{\iint_R y\rho(x, y)\, dA}{\iint_R \rho(x, y)\, dA}.$$

b) El ***centroide*** de una figura plana se define como el punto de coordenadas $(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c)$ dadas por

$$\mathbf{x}_c = \frac{\mathcal{M}_y^G}{A} = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA}$$

y

$$\mathbf{y}_c = \frac{\mathcal{M}_x^G}{A} = \frac{\iint_R y\, dA}{\iint_R dA}.$$

Estas expresiones indican que si $\mathbf{x}_{cm}$ o $\mathbf{y}_{cm}$ son cero (lo que significa que el eje X, o el eje Y, pasa por el centro de masa) el momento estático $\mathcal{M}_x$ o $\mathcal{M}_y$ es cero. De hecho, se puede demostrar que el momento estático con respecto a cualquier eje que pase por dicho punto es igual a cero. Nótese que el centro de masa y el centroide son únicos. Además, si la densidad $\rho(x, y)$ de la placa es constante, es decir, si su masa está distribuida uniformemente, se dice que la placa es homogénea. En estos casos la densidad sale de las integrales y las expresiones para el centro de masa se reducen a

$$\mathbf{x}_{cm} = \frac{\mathcal{M}_y}{M} = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y}_{cm} = \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{\iint_R y\, dA}{\iint_R dA},$$

lo que indica que en estos casos el centro de masa coincide con el centroide. En general, sin embargo, están en distintos lugares.

Es interesante observar que la coordenada $\mathbf{x}_c$ del centroide de una región $R$ es el promedio de la coordenada $x$. Es decir, $\mathbf{x}_c$ es el valor promedio de la función $f(x, y) = x$ tal y como se definió en la ecuación (12'). En efecto, haciendo $f(x, y) = x$ en (12') se tiene

$$\langle x\rangle = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA},$$

que es la expresión que define a $\mathbf{x}_c$. Un comentario semejante se tiene para la coordenada $\mathbf{y}_c$.

## Ejemplo 8.

Se tiene una placa plana cuya forma y localización está dada por la región $R$:

$$R = \left\{(x, y)\,\middle|\, y \le x;\quad y \le \frac{-3x+15}{5};\quad y \ge 0;\quad x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si su densidad está dada por la expresión $\rho(x, y) = 2x + 3y$, determinar su masa, el valor de su densidad promedio y los puntos donde se presenta ese valor:

**Solución:** La forma de la placa se muestra en la figura 6.21. Su masa está dada por la integral doble

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA = \iint_R (2x + 3y)\, dA.$$

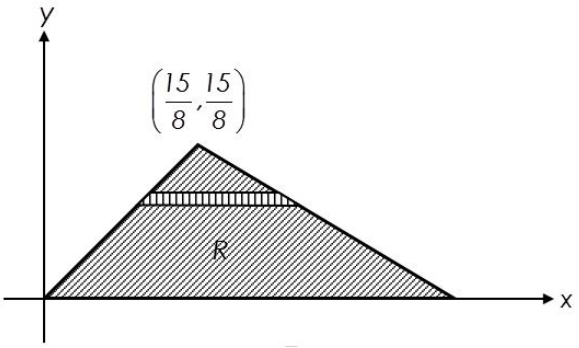



**FIGURA 6.21.** Las ecuaciones de las rectas que limitan a la región son $y = x$ y $y = (-3x + 15)/5$. Al resolverlas simultáneamente se obtiene su punto de intersección: $(x, y) = (15/8, 15/8)$.

Tomando a la región $R$ como una región tipo $II$:

$$M=\int_0^{15/8}\int_y^{(15-5y)/3}(2x+3y)\,dx\,dy$$

$$M=\int_0^{15/8}\left[x^2+3xy\right]_y^{(15-5y)/3}\,dy$$

$$=\int_0^{15/8}\left(-\frac{56}{9}y^2-\frac{5}{3}y+25\right)dy$$

$$=\left[-\frac{56}{27}y^3-\frac{5}{6}y^2+25y\right]_0^{15/8}$$

$$=\frac{3875}{128}.$$

De acuerdo con el teorema del valor medio se sabe que el valor promedio $\langle\rho\rangle$ de la densidad está dado por

$$\iint_R \rho(x,y)\,dA=\langle\rho\rangle\,A(R).$$

Entonces, como

$$A(R)=\frac{5\left(\frac{15}{8}\right)}{2}=\frac{75}{16}$$

se tiene que

$$\frac{3875}{128}=\langle\rho\rangle\left(\frac{75}{16}\right).$$

De donde

$$\langle \rho \rangle = \frac{155}{24}.$$

Finalmente, para saber dónde se presenta este valor medio, se le sustituye en la función densidad:

$$\frac{155}{24} = 2x + 3y,$$

que es la ecuación de una recta. El valor medio se presenta en todos los puntos que la satisfacen dentro de $R$.

## Ejemplo 9.

Una lámina tiene la forma y localización mostrada en la figura 6.22. Su densidad en cualquier punto es igual a la distancia de este al eje X. Hallar los momentos estáticos de la lámina con respecto a los ejes X y Y, así como las coordenadas de su centro de masa.

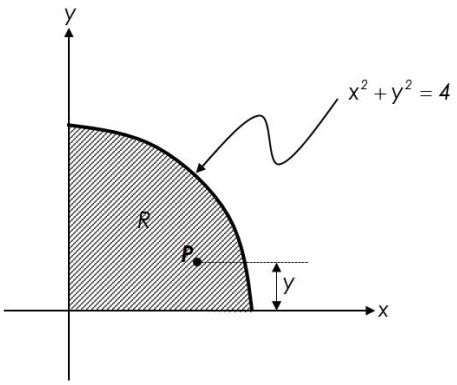



**FIGURA 6.22.** La distancia del punto $\mathbf{P} = (x, y)$ al eje X es $y$.

**Solución:** De acuerdo con el enunciado se tiene que $\rho(x, y) = y$. La masa y los primeros momentos están dados por

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA = \iint_R y\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{4-x^2}{2}\, dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Para $\mathcal{M}_x$ se tiene

$$\mathcal{M}_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA = \iint_R y^2\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y^2\, dA$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 (4-x^2)^{3/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[6 \operatorname{ang\,sen} \frac{x}{2} + 2x\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\,(2-x^2)\right]_0^2 = \pi$$

y

$$\mathcal{M}_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA = \iint_R xy\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x(4-x^2)}{2} dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x - \frac{x^3}{2}\right) dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2.$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de masa son

$$\mathbf{x}_{cm} = \frac{\mathcal{M}_y}{M} = \frac{3}{4}$$

y

$$\mathbf{y}_{cm} = \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{3\pi}{8}.$$

## Ejemplo 10.

Calcular los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen de la lámina homogénea de densidad $\rho(x, y) = 1$, cuya forma y localización es la de la región limitada por la curva $xy = 3$ y la recta $x + y = 6$.

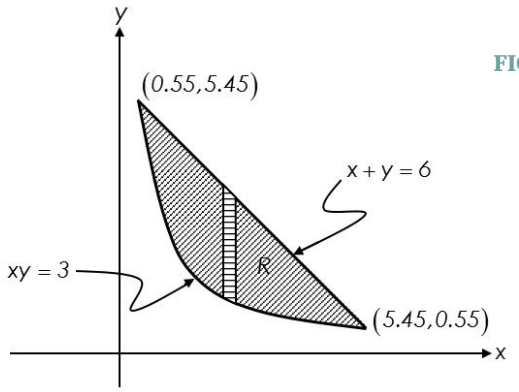



FIGURA 6.23.

**Solución:** En la figura 6.23 se muestra la forma de la lámina. Como se observa, la placa mostrada es simétrica con respecto a la recta $y = x$ lo cual nos induce a pensar que $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y$. A continuación, se verá explícitamente que esto es cierto.

Como la densidad es igual a 1 las integrales requeridas se reducen a lo siguiente:

$$\mathcal{I}_x = \iint_R y^2 \, dA = \int_{0.55}^{5.45} \int_{3/x}^{6-x} y^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_{0.55}^{5.45} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{3/x}^{6-x} dx$$

$$= \int_{0.55}^{5.45} \left[ \frac{(6-x)^3}{3} - \frac{(3/x)^3}{3} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{0.55}^{5.45} \left( 216 - 108x + 18x^2 - x^3 - \frac{27}{x^3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[ 216x - 54x^2 + 6x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{27}{2x^4} \right]_{0.55}^{5.45}$$

$$\doteq 58.8$$

y

$$\mathcal{I}_y = \iint_R x^2\, dA = \int_{0.55}^{5.45} \int_{3/x}^{6-x} x^2\, dy\, dx$$

$$= \int_{0.55}^{5.45} \left[ x^2 y \right]_{3/x}^{6-x} dx$$

$$= \int_{0.55}^{5.45} \left(6x^2 - x^3 - 3x\right) dx$$

$$= \left[ 2x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{0.55}^{5.45}$$

$$\doteq 58.8.$$

Por lo tanto, la conjetura inicial fue verdadera. Finalmente,

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y \approx 117.6.$$

## Ejercicios

**6.14.** Se tiene una placa plana cuya forma está dada por la región $R$ que se indica a continuación. Si su densidad es $\rho(x, y) = 2x + 3y$, determinar su masa y el valor de la densidad promedio.

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, y \le x\,; \quad y \le \frac{-3x + 15}{5}; \quad y \ge 0; \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

**Solución:** Masa $= 31\,\frac{125}{128}$; Densidad promedio $= \frac{155}{24}$

**6.15.** Calcular los momentos de inercia con respecto al origen y los ejes coordenados de una lámina homogénea de densidad $\rho(x, y) = 1$, y cuya forma y localización es la de la región limitada por la curva $x(y-1) = 2$ y la recta $x + y = 8$.

**Solución:** $\mathcal{I}_0 = 484.104$, $\mathcal{I}_x = 242.052$, $\mathcal{I}_y = 242.052$.

**6.16.** Evaluar la masa de una distribución plana de materia cuya forma es la de un círculo unitario, sabiendo que la densidad de masa en un punto arbitrario de coordenadas $(x, y)$ es proporcional al cuadrado de la distancia del punto $(x, y)$ al origen.

**Solución:** $M = \dfrac{k\pi}{2}$

## 6.3 Teorema de Green en el plano

Tres de los teoremas mías importantes del cálculo vectorial son el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de Gauss (también llamado teorema de la divergencia). Estos teoremas tienen un sinnúmero de aplicaciones en diversos campos de la ciencia: matemáticas, ingeniería, física, biología, etc. Por esta razón en este capítulo se ha dedicado una sección especial a cada uno de ellos. Se principiará estudiando el teorema de Green. Este teorema establece una relación fundamental entre una integral doble sobre una región $R$ y la integral de línea sobre la curva que rodea a $R$.

**Teorema 7. (Teorema de Green).** Sea $R$ una región regular (es decir, es indistintamente del tipo $I$ y del tipo $II$), cuya frontera es la curva seccionalmente lisa $C$, recorrida en sentido positivo (o sea en sentido contrario al de las manecillas del reloj). Y sean las funciones escalares $M(x, y)$ y $N(x, y)$ con derivadas parciales continuas en $R$. Entonces se cumple que

$$\oint_C [M\,dx + N\,dy] = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA. \tag{24}$$

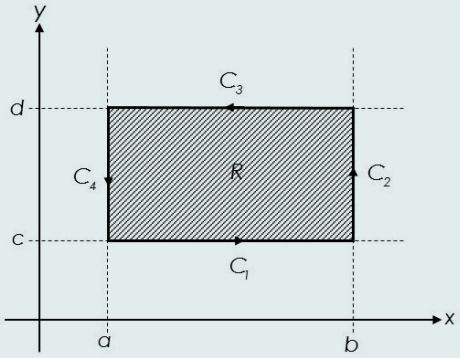



FIGURA 6.24.

**Demostración:** Aunque desde un punto de vista formal basta dar una sola demostración general, por cuestiones didácticas se ha preferido principiar demostrando el teorema para un caso simple y posteriormente considerar el caso general. Así, se comenzará suponiendo que $R$ es simplemente un rectángulo. Por comodidad se denotará a $\frac{\partial N}{\partial x}$ como $N_x$ y a $\frac{\partial M}{\partial y}$ como $M_y$ (No hay que confundir la derivada $M_y$ con el concepto de momento estático respecto al eje Y, que fue denotado por $\mathcal{M}_y$). Se demostrará por separado que

$$\oint_C M\,dx = -\iint_R M_y\,dA \tag{25}$$

y que

$$\oint_C N\,dy = \iint_R N_x\,dA \tag{26}$$

después simplemente bastará sumar ambos resultados. Considérese entonces la región rectangular

$$R = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \quad c \le y \le d; \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

En este caso se tiene que

$$-\iint_R M_y\, dA = -\int_a^b \int_c^d M_y\, dy dx.$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo integral en el miembro derecho:

$$\begin{aligned} -\iint_R M_y\, dA &= -\int_a^b \Big[M(x,y)\Big]_c^d\, dx \\ &= -\int_a^b \big[M(x,d) - M(x,c)\big]\, dx \\ &= \int_a^b M(x,c)\, dx - \int_a^b M(x,d)\, dx \\ &= \int_a^b M(x,c)\, dx + \int_b^a M(x,d)\, dx. \end{aligned} \tag{27}$$

Por otro lado se calcula $\oint_C M(x,y)\, dx$. Para esto se divide a $C$ en los cuatro segmentos de recta $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$ que se muestran en la figura 6.24 (nótese que cada uno es una curva lisa). De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_C M(x,y)\, dx &= \int_{C_1} M(x,y)\, dx + \int_{C_2} M(x,y)\, dx \\ &\quad + \int_{C_3} M(x,y)\, dx + \int_{C_4} M(x,y)\, dx \end{aligned}$$

donde

para $C_1$: $\int_{C_1} M(x,y)\, dx = \int_a^b M(x,c)\, dx$; ya que sobre $C_1$ $y = c$

para $C_2$: $\int_{C_2} M(x,y)\, dx = 0$; ya que sobre $C_2$, $x = cte \Rightarrow dx = 0$

para $C_3$: $\int_{C_3} M(x, y)\, dx = \int_b^a M(x, d)\, dx$; ya que sobre $C_3$ $y = d$

para $C_4$: $\int_{C_4} M(x, y)\, dx = 0$, ya que sobre $C_4$, $x = cte \Rightarrow dx = 0$

por lo que

$$\oint_C M(x, y)\, dx = \int_a^b M(x, c)\, dx + \int_b^a M(x, d)\, dx \tag{28}$$

y por lo tanto, comparando (27) con (28),

$$\oint_C M\, dx = -\iint_R M_y\, dA,$$

que es la ecuación (25) que se deseaba demostrar. Procediendo en forma semejante, pero ahora integrando primero respecto a $x$, se llega a

$$\oint_C N\, dy = \iint_R N_x\, dA. \tag{29}$$

Sumando (25) y (29) se obtiene

$$\oint_C (M\, dx + N\, dy) = \iint_R (N_x - M_y)\, dA,$$

lo que demuestra el teorema para el caso particular de regiones rectangulares.

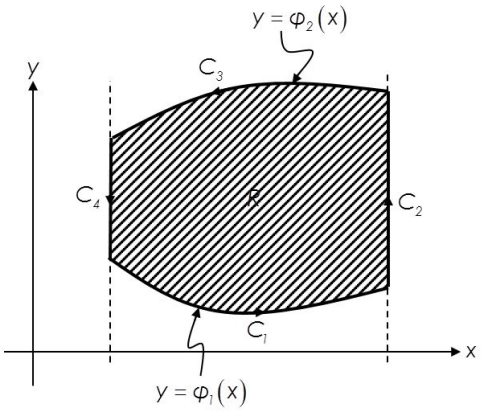



FIGURA 6.25.

A continuación, se considerará una región más general. Se demostrará primero la ecuación (25). Sea $R$ una región regular. Considerándola como del tipo I se puede expresar como (ver figura 6.25):

$$R=\left\{(x,y)\,\middle|\, a\le x\le b;\quad \phi_1(x)\le y\le \phi_2(x);\quad x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

Entonces,

$$-\iint_R M_y\,dA=-\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} M_y\,dydx.$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo integral en el miembro derecho:

$$-\iint_R M_y\,dA=-\int_a^b\Big[M(x,y)\Big]_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}dx$$

$$=-\int_a^b\Big[M\big(x,\phi_2(x)\big)-M\big(x,\phi_1(x)\big)\Big]dx$$

$$=\int_a^b M\big(x,\phi_1(x)\big)\,dx+\int_b^a M\big(x,\phi_2(x)\big)\,dx. \qquad (30)$$

Para calcular $\oint_C M(x,y)\,dx$ se separa nuevamente la integral de línea como sigue

$$\oint_C M(x,y)\,dx=\int_{C_1} M(x,y)\,dx+\int_{C_2} M(x,y)\,dx$$

$$+\int_{C_3} M(x,y)\,dx+\int_{C_4} M(x,y)\,dx$$

para $C_1$: $\int_{C_1} M(x,y)\,dx=\int_a^b M\big(x,\phi_1(x)\big)\,dx$

para $C_2$: $\int_{C_2} M(x,y)\,dx=0$; ya que sobre $C_2$ $dx=0$

para $C_3$: $\int_{C_3} M(x, y)\, dx = \int_b^a M(x, \phi_2(x))\, dx$

para $C_4$: $\int_{C_4} M(x, y)\, dx = 0$; ya que sobre $C_4$ $dx = 0$,

por lo que

$$\oint_C M(x, y)\, dx = \int_a^b M(x, \phi_1(x))\, dx + \int_b^a M(x, \phi_2(x))\, dx \tag{31}$$

y por lo tanto, igualando (30) con (31) nuevamente se llega a la igualdad

$$\oint_C M\, dx = -\iint_R M_y\, dA,$$

que es la ecuación (25).

En forma semejante, pero ahora considerando a $R$ como del tipo *II*, se demuestra que $\oint_C N\, dy = \iint_R N_x\, dA$. Después simplemente se suman ambos resultados y se obtienen la igualdad (24), lo que demuestra el teorema.

Ahora bien, el teorema de Green también es válido en regiones simplemente conexas, aunque no sean regulares; véase, por ejemplo, la de la figura 6.26. Para demostrar la ecuación (25) en este caso se divide la región $R$ en subregiones $R_1$, $R_2, \cdots, R_n$ mediante líneas verticales, de forma que cada subregión sea del tipo *I*, como la de la figura 6.25. Entonces se puede proceder en cada subregión como se hizo en los dos casos anteriores. De modo que se obtiene para cada subregión $R_i$ la igualdad

$$\oint_{C_i} M\, dx = -\iint_{R_i} M_y\, dA, \tag{32}$$

siendo $C_i$ la frontera de $R_i$.

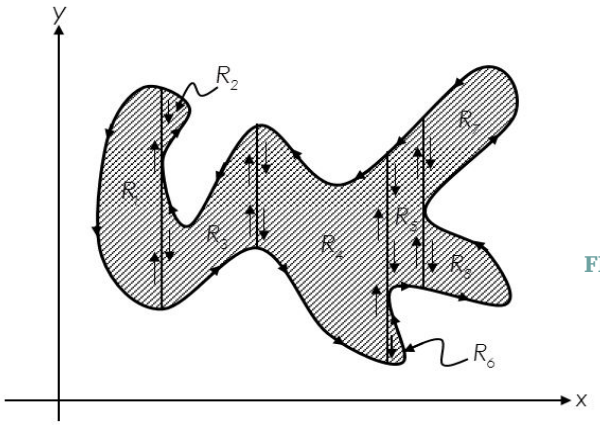



FIGURA 6.26.

Es importante notar aquí que la frontera común entre dos subregiones que se tocan (por ejemplo, las regiones 1 y 2 de la figura 6.26) es un segmento de recta vertical, que considerado como parte de la frontera de la región de la izquierda, se recorre de abajo hacia arriba, mientras que considerado como parte de la región de la derecha se recorre de arriba hacia abajo. Entonces, si se suman las igualdades de la ecuación (32): $\oint_{C_i} M\,dx = -\iint_{R_i} M_y\,dA$ correspondientes a las subregiones $R_1$ y $R_2$, la suma de las integrales de línea sobre ese segmento común se anula y sólo queda una integral de línea sobre la curva $C_{12}$ que rodea a la unión de ambas subregiones. La suma de las integrales dobles da una integral doble sobre la unión de las dos regiones. Se tiene así que

$$\oint_{C_{12}} M\,dx = -\iint_{R_1 \cup R_2} M_y\,dA.$$

Repitiendo este razonamiento para todas las subregiones que forman a $R$, se prueba en general que

$$\oint_{C} M\,dx = -\iint_{R} M_y\,dA,$$

que es la ecuación (25). Si se procede de manera semejante, pero ahora subdividiendo en subregiones a base de líneas horizontales, se prueba que

$$\oint_{C} N\,dy = \iint_{R} Nx\,dA.$$

Finalmente, sumando las dos expresiones anteriores, se demuestra el teorema para regiones simplemente conexas, como la de la figura 6.26.

Considérese ahora una región aún más general. Por ejemplo, la mostrada en la figura 6.27 que tiene hoyos, y que por lo tanto no está limitada por una sola curva cerrada simple, sino por varias de ellas. A este tipo de regiones se les conoce con el nombre de *regiones múltiplemente conexas* (se recomienda al lector recordar la definición de conjunto simplemente conexo dada en la sección 1.1.2).

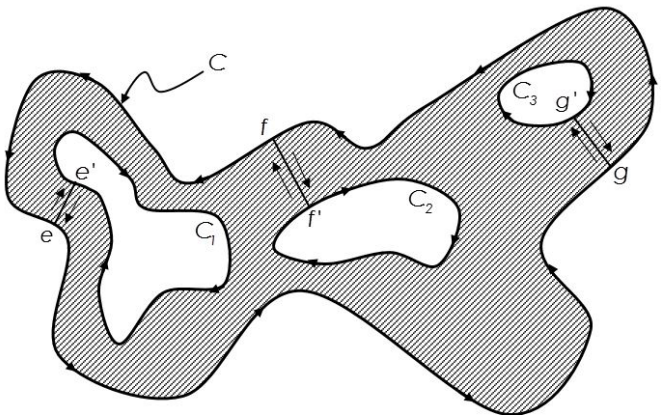



**FIGURA 6.27.**

Dicha región puede separarse en un número finito de regiones regulares si se hacen los cortes $ee'$, $ff'$ y $gg'$, que unen a la curva $C$ con las curvas $C_1$, $C_2$ y $C_3$, respectivamente. Recorriendo la nueva frontera como indican las flechas (pasando por cada corte dos veces) se realiza el trayecto en sentido positivo. Bajo estas condiciones se puede aplicar el teorema de Green para los casos ya demostrados. En el segundo miembro de (24), la integral doble cubre la región interior a $C$ y exterior a $C_1$, $C_2$ y $C_3$. En el primer miembro, la integral de línea está constituida únicamente por las integrales de línea sobre las curvas cerradas $C$, $C_1$, $C_2$ y $C_3$, pero no sobre los cortes $ee'$, $ff'$ y $gg'$, ya que las integrales sobre dichos cortes se cancelan al ser recorridos primero en un sentido y luego en el otro. Por lo tanto nuevamente se cumple la ecuación (24):

$$\oint_C \left[M\,dx + N\,dy\right] = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

en donde $R$ es la región múltiplemente conexa y su frontera la curva que consiste en la unión de la curva $C$ y las curvas que rodean a los hoyos (recorridas como se muestra en la figura).

Se puede demostrar que el teorema también es válido para el caso en el que $M$ y $N$ sean funciones vectoriales de la forma

$$\mathbf{M} = M_1\,\hat{\mathbf{i}} + M_2\,\hat{\mathbf{j}} + M_3\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{N} = N_1\,\hat{\mathbf{i}} + N_2\,\hat{\mathbf{j}} + N_3\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $M_1$, $M_2$, $M_3$, $N_1$, $N_2$ y $N_3$ satisfacen los requisitos pedidos en el teorema.

Es ilustrativo observar la similitud entre el teorema de Green (ecuación (24)) y la expresión del teorema fundamental del cálculo integral (abreviado como TFCI) para funciones de una sola variable independiente:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx,$$

tanto en esta como en (24) el número de integrales en el miembro derecho (abreviado MD) se reduce en 1 en el miembro izquierdo (MI) debido al efecto de las derivadas que están en el integrando. Es decir, en el MD de (24) hay dos integrales y en el MI solo hay una. Similarmente, en el MD del TFCI hay una integral y en el MI no hay ninguna. Además, ambas ecuaciones muestran que al efectuar la derivación y la integración indicadas en los miembros derechos se obtiene como resultado una expresión evaluada en la frontera de la región de integración. En el caso del TFCI en el miembro izquierdo aparece la función evaluada en los puntos a y b que son la frontera del intervalo de integración. En cambio, en la expresión (24) la región de integración es $R$ y su frontera es la curva $C$ que es en donde se realiza la integral de línea.

### 6.3.1 Corolarios del teorema de Green
### (Formas alternativas de expresar el teorema de Green)

**Corolario 1.** Sea $R$ una región regular del plano $XY$ cuya frontera es la curva plana $C$ recorrida en sentido positivo, $\hat{\mathbf{T}}$ el vector unitario tangente a $C$, y $ds$ la diferencial de longitud de arco. Si $\mathbf{F} = F_1(x, y)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(x, y)\,\hat{\mathbf{j}}$ es un campo vectorial continuamente diferenciable definido en $R$ entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \tag{33}$$

y también

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA, \tag{33'}$$

que son dos formas alternativas de expresar el teorema de Green.

La expresión $\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds$ (o equivalentemente, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$) es la integral de la componente del campo en la dirección tangente a la trayectoria $C$ y se le conoce como *circulación de* $\boldsymbol{F}$ *alrededor de* $C$.

**Demostración:** Si en el teorema de Green (ecuación (24)) se hace $M = F_1$ y $N = F_2$ se tiene

$$\oint_C \left[ F_1\, dx + F_2\, dy \right] = \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

El integrando del miembro izquierdo de esta ecuación se puede escribir como

$$F_1\, dx + F_2\, dy = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

lo que demuestra la ecuación (33). Además, como $C$ es plana la tercera componente de $\hat{\mathbf{T}}$ vale cero y está dada por

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{dx}{ds}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{ds}\,\hat{\mathbf{j}}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}\,ds &= dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} \\ &= d\mathbf{r}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,ds.$$

Al sustituir esto en (33) se obtiene la ecuación (33').

**Corolario 2.** Sean $R$, $C$, $\hat{\mathbf{T}}$ y $\mathbf{F}$ como se definen en el corolario 1. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{k}}\,dA \tag{34}$$

y también

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,ds = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{k}}\,dA, \tag{34'}$$

que son otras dos formas de expresar el teorema de Green. En estas expresiones el rotacional de $\mathbf{F}$ se calcula considerando a $\mathbf{F}$ de la forma $F = F_1\,\hat{\mathbf{i}} + F_2\,\hat{\mathbf{j}} + 0\,\hat{\mathbf{k}}$.

**Demostración:** Si se calcula el rotacional de $\mathbf{F}$ se tiene que

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{bmatrix} = 0\,\hat{\mathbf{i}} + 0\,\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

y por lo tanto $\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$. Sustituyendo esto en (33) y (33') se demuestran (34) y (34'). Estas ecuaciones tienen la misma forma que un caso particular de un teorema más general llamado teorema de Stokes y que se verá más adelante.

A partir de la ecuación (34) o (34') se puede derivar una interpretación muy importante del concepto de rotacional de una función. Supóngase que $R$ es una región suficientemente pequeña centrada alrededor del punto $(x, y)$. Entonces el rotacional se puede aproximar por una constante y sacarse de la integral:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{k}} \iint_R dA$$

$$= \left| \nabla \times \mathbf{F} \right| A(R)$$

$$\Rightarrow \qquad \left| \nabla \times \mathbf{F} \right| = \frac{\oint_C (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}})\, ds}{A(R)},$$

lo que muestra que la magnitud del rotacional es una circulación por unidad de área.

**Corolario 3.** Sean $R$, $C$, $\hat{\mathbf{T}}$ y $\mathbf{F}$ como se definen en los corolarios 1 y 2. Y sea $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la curva plana $C$ que apunta hacia el exterior de $R$. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA, \tag{35}$$

que es otra forma de expresar el teorema de Green.

**Demostración:** Si en el teorema de Green (ecuación (24)) se hace $M = -F_2$ y $N = F_1$ se tiene

$$\oint_C \left[-F_2\,dx + F_1\,dy\right] = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA \tag{36}$$

en donde, en este contexto, el operador $\nabla$ sólo tiene dos componentes. No obstante, se puede considerar a $\mathbf{F}$ definido en un espacio tridimensional con tercera componente igual a cero, de la forma

$$\mathbf{F} \equiv F_1\hat{\mathbf{i}} + F_2\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

$$= (F_1, F_2, 0)$$

y entonces

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, 0)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{F}$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Así, en cualquier caso, se tiene que $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{F}$.

Por otro lado, como $C$ está recorrida en sentido positivo el vector $\hat{\mathbf{n}}$ se puede obtener girando −90 grados al vector tangente unitario $\hat{\mathbf{T}} = (\partial x/\partial s)\,\hat{\mathbf{i}} + (\partial y/\partial s)\hat{\mathbf{j}}$, obteniéndose

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{dy}{ds}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{dx}{ds}\,\hat{\mathbf{j}},$$

en donde vemos que efectivamente $\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Entonces el integrando del miembro izquierdo de la ecuación (36) se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
-F_2\,dx + F_1\,dy &= (F_1, F_2)\cdot(dy, -dx) \\
&= (F_1, F_2)\cdot\left(\frac{dy}{ds}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{dx}{ds}\,\hat{\mathbf{j}}\right) ds \\
&= \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,ds
\end{aligned}
$$

(al mismo resultado se llega si se considera que $F = F_1\,\hat{\mathbf{i}} + F_2\,\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$ ya que $\hat{\mathbf{n}}$ es de la forma $\hat{\mathbf{n}} = n_1\,\hat{\mathbf{i}} + n_2\,\hat{\mathbf{j}}$). Sustituyendo esto en (36) se demuestra el corolario. Esta forma de expresar el teorema de Green es un caso particular del teorema de la divergencia que también se verá más adelante.

Como $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ representa la componente de $\mathbf{F}$ en la dirección normal a $C$, a la integral de línea $\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ se le conoce como *flujo del campo a través de C*. Esta magnitud da información acerca de la "cantidad" de campo que "sale" a través de $C$ desde el interior de $R$. Si se considera el caso en el que $R$ es suficientemente pequeña se puede derivar una interpretación muy importante del concepto de divergencia de una función. En este caso la divergencia que aparece en la integral del miembro derecho de la ecuación (35) se puede aproximar por una constante y sacarse de la integral. Entonces, se puede escribir

$$
\begin{aligned}
\oint \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,ds &= \nabla\cdot\mathbf{F}\iint_R dA \\
&= \nabla\cdot\mathbf{F}\,A(R) \\
\Rightarrow\quad \nabla\cdot\mathbf{F} &= \frac{\oint(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,ds}{A(R)}\,,
\end{aligned}
$$

que expresa a la divergencia del campo $\mathbf{F}$ como el flujo del campo por unidad de área.

## Ejemplo 11.

Se va a realizar una comprobación del teorema de Green para el caso en el que $M(x,y) = -xy$ ; $N(x,y) = \frac{x^2}{2}$ y $R$ es la región triangular

$$
R = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2;\quad 0 \le y \le x - 1;\quad x, y \in R\}.
$$

La comprobación consistirá en mostrar explícitamente que el valor de la integral doble $\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$ es igual al valor de la integral de línea $\oint_C M\,dx + N\,dy$.

**Solución.** Para la integral doble se tiene

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_1^2 \int_0^{x-1} (x+x)\,dy\,dx = 2\int_1^2 x(x-1)dx = \frac{5}{3}$$

Para calcular la integral de línea se debe notar que la curva $C$ que rodea a $R$ debe recorrerse en sentido positivo y que consiste en tres segmentos de recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

- Para el cateto horizontal $C_h$: $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$ con $t \in [1, 2]$
- Para el cateto vertical $C_V$: $\mathbf{r}(t) = (2, t)$ con $t \in [0, 1]$
- Para la hipotenusa $H$: $\mathbf{r}(t) = (-t, -t-1)$ con $t \in [-2, -1]$.

Entonces,

$$\int_{C_h} M\,dx + N\,dy = \int_{C_h} \left(-xy\,dx + x^2/2\,dy\right) = \int_1^2 \left(-t\cdot 0\cdot dt + t^2/2\cdot 0\right) = 0$$

$$\int_{C_V} M\,dx + N\,dy = \int_{C_V} \left(-xy\,dx + x^2/2\,dy\right) = \int_1^2 \left(-2t\cdot 0 + 2\,dt\right) = 2$$

$$\int_H M\,dx + N\,dy = \int_H \left(-xy\,dx + x^2/2\,dy\right) = \int_{-2}^{-1} \left(t(-t-1)(-dt) - t^2/\,2\,dt\right) = -\frac{1}{3}$$

La integral de línea $\oint_C M\,dx + N\,dy$ es la suma de las tres integrales de línea anteriores. Así, $\oint_C M\,dx + N\,dy = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, que es igual al valor de la integral doble. Por lo tanto se comprueba el teorema.

## Ejemplo 12.

Utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$F = (y + 2x)\,\hat{\mathbf{i}} + (5y - x)\,\hat{\mathbf{j}}$$

cuando actúa sobre una partícula que se mueve sobre la elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$, en el sentido de las manecillas del reloj.

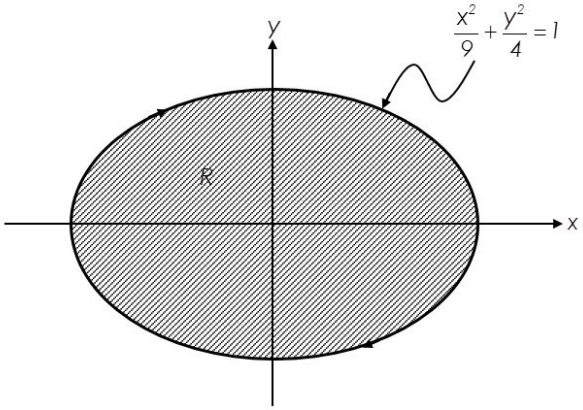



FIGURA 6.28.

**Solución:** La gráfica de la trayectoria $C$ se muestra en la figura 6.28. Como se sabe, el trabajo se obtiene a partir de

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left[M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy\right],$$

donde, de acuerdo con el enunciado del problema, $C$ está recorrida en sentido negativo. Entonces, para poder utilizar el teorema de Green se necesita modificar su expresión para el caso en el que la curva esté recorrida en sentido negativo. Es fácil ver que esto se logra cambiándole el signo a la integral de línea de la ecuación (24) (ver teorema 3 del capítulo 5). Así, se tiene que

$$W = \oint \left[M\,dx + N\,dy\right] = -\iint_R (N_x - M_y)\,dA,$$

donde $R$ es la región cuya frontera es C. Como

$$M = y + 2x; \qquad N = 5y - x$$

$$M_y = 1 \qquad \text{y} \qquad N_x = -1$$

entonces

$$W = -\iint_R (-2)\, dA$$

$$= 2\iint_R dA$$

$$= 2A(R).$$

Además, se sabe que el área de la elipse es $\pi ab = \pi(3)(2) = 6\pi$, y por lo tanto,

$$W = 2(6\pi)$$

$$= 12\pi.$$

## Ejemplo 13.

Evaluar la integral de línea

$$\int_C \left( -xy + \frac{3}{2} y^2 - xy^2 \right) dx + \left(2x^2 + 3xy - x^2 y\right) dy$$

utilizando el teorema de Green cuando $C$ es la trayectoria mostrada en la figura 6.29.

**Solución:** De acuerdo con el teorema de Green:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R (N_x - M_y)\,dA$$

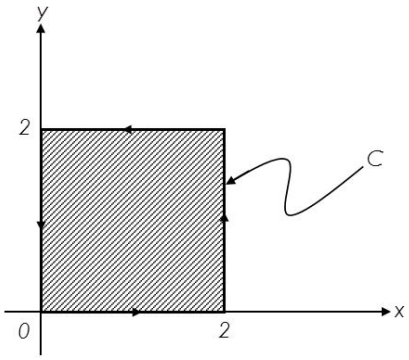



FIGURA 6.29.

donde

$$M = -xy + \frac{3}{2}y^2 - xy^2; \qquad N = 2x^2 + 3xy - x^2y$$

$$M_y = -x + 3y - 2xy; \qquad \text{y} \qquad N_x = 4x + 3y - 2xy$$

por lo que

$$N_x - M_y = 4x + 3y - 2xy + x - 3y + 2xy$$

$$= 5x.$$

Luego

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R 5x\,dA$$

$$= 5\iint_R x\,dA.$$

La integral $\iint_R x\,dA$ es muy fácil de evaluar directamente; sin embargo, aquí se va a evaluará en forma indirecta utilizando el teorema del valor medio. El teorema afirma que

$$\iint_R x\,dA = \langle x \rangle \iint_R dA$$
$$= \langle x \rangle A(R)$$

donde $\langle x \rangle$ es el valor promedio de $x$. Se vio además que este valor es igual a la coordenada $\mathbf{x}_c$ del centroide de la región $R$. Es evidente que para el caso del cuadrado de la figura 6.29 su valor es igual a 1 (se deja como ejercicio al lector la comprobación). Además, como $A(R) = 4$, se llega finalmente a

$$\oint_C N\,dx + N\,dy = 5(1)(4)$$
$$= 20,$$

lo que termina el ejemplo 13.

Como se vio, el área de una región $R$ está dada por

$$A(R) = \iint_R dA,$$

entonces, si en el teorema de Green la expresión $N_x - M_y$ es igual a uno, se tendrá que

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R dA$$
$$= A(R).$$

Ahora bien, para que $N_x - M_y = 1$ se pueden tomar a $M$ y a $N$ como

$$M(x, y) = -\frac{1}{2}y \qquad \text{y} \qquad N(x, y) = \frac{1}{2}x$$

ya que

$$M_y = -\frac{1}{2}, \qquad N_x = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad N_x - M_y = 1$$

Por lo tanto, una expresión para calcular el área de una región en términos de una integral de línea es

$$A(R) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy.$$

## Ejemplo 14.

Verificar que el área encerrada dentro de una circunferencia de radio 2 es igual a $4\pi$.

**Solución:** Sea $R$ el círculo de radio 2 mostrado en la figura 6.30 y sea $C$ su frontera. Se utilizará la expresión recién obtenida. Como en este caso $C$ es una circunferencia de radio 2 se tiene que

$$x = 2\cos\theta; \qquad y = 2\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{con} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \qquad dx = -2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta; \qquad dy = 2\cos\theta\,d\theta.$$

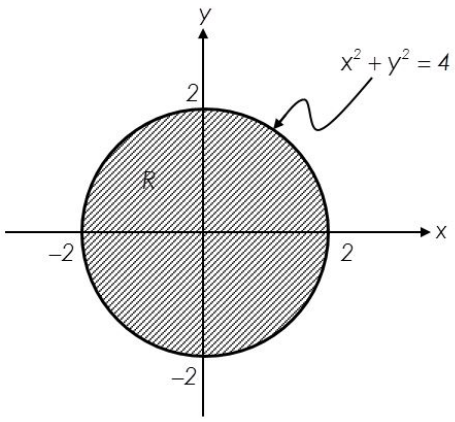



FIGURA 6.30.

Luego

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-2\,\operatorname{sen}\theta)\,(-2\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta) + (2\cos\theta)\,(2\cos\theta\,d\theta)$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta = 2\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi.$$

## Ejemplo 15.

Sea el campo vectorial

$$F = M\,\hat{\mathbf{i}} + N\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{x}{x^2+y^2}\,\hat{\mathbf{j}}.$$

*i)* Probar que $\forall (x, y) \neq \mathbf{0}$, el rotacional de $\mathbf{F}$ es cero.

*ii)* Probar que $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}})\,ds \neq 0$ tomando como trayectoria la circunferencia de radio 1 centrada en el origen y cuyo sentido es el de las manecillas del reloj (ver figura 6.31).

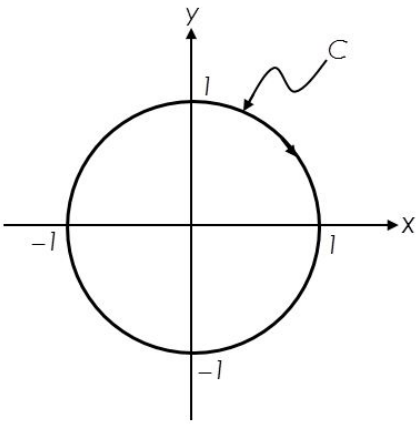



FIGURA 6.31.

*iii)* Explicar por qué los resultados de los incisos *(i)* y *(ii)* no contradicen al teorema de Green expresado en la forma:

$$\oint_C \left(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\right) ds = \iint_R \hat{\mathbf{k}}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{F}\, dA.$$

**Solución:**

*i)* Si se calcula el rotacional de $\mathbf{F}$, se tiene

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & -\dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \forall (x,y)\neq \mathbf{0}$$

lo cual implica evidentemente que $\iint_R \hat{\mathbf{k}}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{F}\, dA = 0$ para toda $R$ que no contenga al origen.

*ii)* Para esta trayectoria:

$$x=\cos\theta \qquad y=\operatorname{sen}\theta$$

$$dx=-\operatorname{sen}\theta\, d\theta \qquad dy=\cos\theta\, d\theta$$

por lo que

$$\oint_C \left(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\right) ds = \oint_C M\, dx + N\, dy$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \left[ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta\right) - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}\left(\cos\theta\right)\right] d\theta$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \left(-1\right) d\theta = 2\left[\theta\right]_{2\pi}^{0}$$

$$= 2\pi.$$

*iii)* Los resultados de los incisos $(i)$ y $(ii)$ indican que

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}})\, ds = 2\pi \neq 0 = \iint_R \mathbf{k} \cdot \text{rot}\, \mathbf{F}\, dA$$

pero esto no contradice al teorema de Green:

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}})\, ds = \iint_R \mathbf{k} \cdot \text{rot}\, \mathbf{F}\, dA$$

porque en este caso no puede aplicarse, ya que $M$, $N$ y sus derivadas no son continuas en el origen. El teorema se estableció sólo para funciones con derivadas parciales continuas en toda la región $R$ que tiene como frontera a la curva $C$. Si se considerara, por ejemplo, la región $R' = R - \Omega$, siendo $\Omega$ un pequeño círculo alrededor del origen, entonces las derivadas de $M$ y $N$ ahora sí serían continuas en $R'$ y el teorema si sería aplicable, pero habría que tomar en cuenta que la frontera de $R'$ ya no sería simplemente $C$, sino que habría que agregar la circunferencia que rodea a $\Omega$. Nótese también que como $\nabla \times \mathbf{F}$ no es cero en toda la región $R$, no se puede asegurar que $M\,dx + N\,dy$ sea una diferencial exacta en $R'$ y, en consecuencia, su integral de línea no tiene por qué ser igual a cero.

## Ejercicios

**6.17.** Utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3y + x)\,\hat{\mathbf{i}} + (y - 2x)\,\hat{\mathbf{j}}$, cuando actúa sobre una partícula que se mueve alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ en dirección de las manecillas del reloj.

**Solución:** Hay que mostrar que el trabajo pedido está dado por la integral doble $-5 \iint_R dA$ y que el valor de esta integral es $180\,\pi$.

**6.18.** Utilizando el teorema de Green verificar que el área de un cuadrado de lado igual a 2 es igual a 4.

**Solución:** El Teorema asegura que el área pedida está dada por la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ siendo $\mathbf{F}$ cualquier función vectorial tal que $\partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 1$. Entonces hay que proponer una función con estas características y evaluar la integral de línea.

**6.19.** Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F} = M\,\hat{\mathbf{i}} + N\,\hat{\mathbf{j}}$$

donde

$$M = 2xy + y^2$$

y

$$N = 2xy + x^2$$

*i)* Probar que el rotacional de $\mathbf{F}$ es cero.

*ii)* Calcular la integral de línea $\oint (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}})\, ds$ tomando como trayectoria al círculo unitario centrado en el origen y cuyo sentido es el de las manecillas del reloj. $\hat{\mathbf{T}}$ es el vector unitario tangente a la trayectoria.

*iii)* ¿Cómo está relacionado el resultado del inciso *(i)* con el del inciso *(ii)*?

*iv)* Comprobar el resultado del inciso *(ii)* mediante el teorema de Green

**Solución:** *ii)* $\oint (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}})\, ds = 0$. *iii)* Utilizando el Corolario 2 del teorema de Green se puede responder el inciso *(iii)*.

**6.20.** Calcular el área de la región limitada por $y = x^2$ y $x = y^2$ utilizando el concepto de integral de línea.

**Solución:** $A = 4\frac{1}{3}\ u^2$

## 6.4 Integrales de superficie

Estas integrales tienen cierta similitud con las integrales curvilíneas analizadas en el Capítulo 5. En las integrales de superficie, como su nombre lo indica, la integración tiene lugar sobre una superficie, mientras que en las integrales de línea la integración tiene lugar a lo largo de una curva.

Para definir este concepto se procederá de la siguiente manera: supóngase que se tiene una función $f(x, y, z)$ definida sobre una región tridimensional $R$ que contiene a una superficie $S$ y que se construye una partición $\mathcal{P}$ sobre $S$ de tal forma que quede dividida en $n$ subsuperficies no superpuestas $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$, cuyas áreas son respectivamente $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$. Se define el diámetro de la subsuperficie $\Delta S_i$ como la mayor de las distancias posibles entre dos puntos cualesquiera de $\Delta S_i$ y se define además la norma $\|\Delta_S\|$ de la partición como el mayor de los diámetros de las subsuperficies. Después se escoge un punto arbitrario $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ de la subsuperficie $\Delta S_i$ y, en forma semejante a lo que se hizo en la integral doble, se forma la sumatoria siguiente

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Si existe el límite

$$\lim_{\|\Delta_S\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i$$

a éste se le llamará *integral de superficie* de $f(x, y, z)$ sobre $S$, y se le denotará con el símbolo $\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma$ o bien $\iint_S f(\mathbf{r})\, d\sigma$. Así,

$$\iint_S f(\mathbf{r})\, d\sigma = \iint_S f(x, y, z)\, d\sigma \equiv \lim_{\|\Delta_S\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{37}$$

En la práctica, para calcular una integral de superficie no se efectúa el cálculo del límite anterior. En lo que sigue se va a desarrollar un método mucho más conveniente. Supóngase que $S$ es una superficie suave en $\mathbb{R}^3$ con ecuación vectorial paramétrica

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}(u, v)\\ &= x(u, v)\,\hat{\mathbf{i}} + y(u, v)\,\hat{\mathbf{j}} + z(u, v)\,\hat{\mathbf{k}},\end{aligned}$$

donde $x$, $y$ y $z$ son funciones escalares de $u$ y $v$, continuas y diferenciables. Supóngase, además, que las variables $u$ y $v$ toman valores sobre una región $R_{uv}$ del plano $UV$. La partición $\mathcal{P}$ de $S$ induce sobre la región $R_{uv}$ una partición $\mathcal{P}_{uv}$. Se denotará con $\Delta R_{i_{uv}}$ a la subregión de $R_{uv}$ que se mapea en la subsuperficie $\Delta S_i$ y se denotará con $\Delta A_{i_{uv}}$ a su área. El área de la subsuperficie $\Delta S_i$ (ver figura 6.32) está dada aproximadamente por (ver ecuación (50) del capítulo 4 y su inmediata anterior)

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_i &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u_i\, \Delta v_i\\ &= \left|\mathbf{N}'\right| \Delta A_{i_{uv}}, \qquad (38)\end{aligned}$$

donde $\mathbf{N}' = (\partial \mathbf{r}/\partial u) \times (\partial \mathbf{r}/\partial v) = (J_1, J_2, J_3)$.

Por otro lado, si se denotan con $u_i$ y $v_i$ los valores de $u$ y $v$ tales que

$$\begin{aligned}x_i &= x(u_i, v_i)\\ y_i &= y(u_i, v_i)\\ z_i &= z(u_i, v_i)\end{aligned}$$

entonces,

$$f(x_i, y_i, z_i) = f\left(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)\right) \qquad (39)$$

y al sustituir (38) y (39) en la definición (37) de la integral de superficie se tiene

$$\iint_S f(\mathbf{r})\, d\sigma = \lim_{\|\Delta_S\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x(u_i, v_i), y\,(u_i, v_i), z\,(u_i, v_i)\right) \left|\mathbf{N}'\right| \Delta A_{i_{uv}}.$$

Es claro que si se toman particiones de $S$ cada vez más finas de manera que la norma de esas particiones tienda a cero, lo cual se escribe como $\|\Delta_S\| \to 0$, entonces la norma de la partición inducida $\mathcal{P}_{uv}$ sobre el plano $UV$ también tenderá a cero, lo cual se escribe como $\|\Delta\| \to 0$, y la expresión anterior se convierte precisamente en la definición de la integral doble en el plano $UV$ de la función

$$f\left(x(u, v), y\,(u, v), z\,(u, v)\right) \left|\mathbf{N}'\right|$$

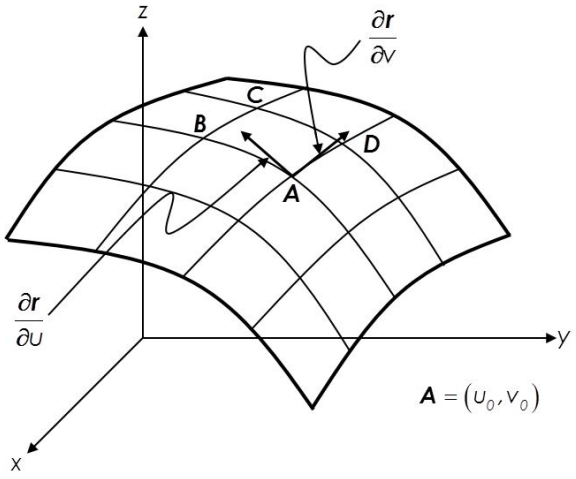



FIGURA 6.32.

Así,

$$\iint_S f(\mathbf{r})\, d\sigma = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left|\mathbf{N}'\right| dA_{uv} \tag{40}$$

$$= \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dA_{uv}.$$

De esta manera el cálculo de las integrales de superficie se efectúa en forma semejante al cálculo de las integrales de línea, es decir, se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la superficie en la expresión para $f(x, y, z)$ y se sustituye la diferencial $d\sigma$ por

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dA_{uv}.$$

En ocasiones conviene expresar el integrando en otra forma. Del álgebra vectorial se sabe que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| \times \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \cos\theta$$

y que

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \operatorname{sen}\theta.$$

Si se elevan al cuadrado ambas expresiones y se suman:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2$$

de donde

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 - \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2}$$

por lo que la integral de la superficie queda como

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma =$$

$$\iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 - \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2}\, dA_{uv} \quad (41)$$

en donde

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

y

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Se pueden obtener expresiones alternativas en términos de los ángulos directores como sigue. Sea $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario normal a la superficie. Si se denota con $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ a sus cosenos directores entonces

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta \text{ y } \cos\gamma) = \pm\frac{\mathbf{N}'}{|\mathbf{N}'|} = \pm\frac{(J_1, J_2, J_3)}{|\mathbf{N}'|}$$

en donde el signo depende de si $\mathbf{N}'$ y $\mathbf{n}$ tienen o no la misma dirección. De esta igualdad se sigue que

$$|\mathbf{N}'| = \pm J_1 \sec\alpha = \pm J_2 \sec\beta = \pm J_3 \sec\gamma$$

y como siempre es mayor o igual que cero se puede escribir:

$$|\mathbf{N}'| = |J_1 \sec\alpha| = |J_2 \sec\beta| = |J_3 \sec\gamma|$$

y por lo tanto, al sustituir en (40) estas tres posibilidades de $|\mathbf{N}'|$, se obtienen las tres siguientes expresiones para la integral de superficie que son igualmente válidas

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\left|J_1 \sec\alpha\right| dA_{uv} \qquad (42)$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{uv}} f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)\big|J_2 \sec\beta\big|\, dA_{uv} \tag{43}$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{uv}} f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)\big|J_3 \sec\gamma\big|\, dA_{uv}. \tag{44}$$

En los casos en los que la ecuación de la superficie es de la forma $z = F(x, y)$ o bien $x = G(y, z)$ o bien $y = H(z, x)$, las expresiones anteriores se simplifican como se verá a continuación.

Se considerará primero el caso $z = F(x, y)$. La superficie $S$ está definida como

$$S = \big\{(x, y, z)\,\big|\, z = F(x, y);\quad x, y \in \mathbb{R}\big\}.$$

Utilizando a $x$ y a $y$ como parámetros la ecuación vectorial de la superficie queda:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= (u, v, F(u, v)) \\ &= u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + F(u, v)\hat{\mathbf{k}},\end{aligned}$$

donde, como se observa, $x = u$ y $y = v$. En este caso se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

lo que implica que $J_3 = 1$ y

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Entonces, al sustituir en la expresión (41) se obtiene

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} f(x, y, F(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2}\; dA_{uv} \qquad (45)$$

Por otro lado, como $J_3 = 1$ se tiene

$$\left|\mathbf{N}'\right| = \left|\sec \gamma\right|$$

y en consecuencia

$$d\sigma = \left|\mathbf{N}'\right| \, dA$$

$$= \left|\sec \gamma\right| \, dA.$$

Entonces, la ecuación (44) se convierte en

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} f(x, y, F(x, y)) \left|\sec \gamma\right| \, dA_{xy}. \qquad (46)$$

La expresión $d\sigma = \left|\sec \gamma\right| dA$, o equivalentemente $dA = \left|\cos \gamma\right| d\sigma$, tiene una interpretación geométrica muy simple: como $d\sigma$ es el área de una porción muy pequeña de superficie, se le puede considerar como el área de una región plana que forma un ángulo $\gamma$ con el plano $XY$ (ya que el vector $\mathbf{n}$, que es normal a $d\sigma$, forma un ángulo $\gamma$ con el vector $\hat{\mathbf{k}}$, que a su vez es normal al plano $XY$; ver, por ejemplo, las figuras 6.48 y 6.54). Entonces, la proyección de $d\sigma$ sobre el plano $XY$ es precisamente $\cos \gamma \, d\sigma$.

Las ecuaciones (45) y (46) son las dos fórmulas simplificadas que se deseaban obtener para el caso $z = F(x, y)$. Las expresiones correspondiente para los otros dos casos se obtienen de manera semejante. El resultado es:

- Si la superficie está dada como $x = G(y, z)$:

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{yz}} f(G(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2}\; dA_{yz}. \qquad (47)$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{yz}} f(G(y, z), y, z) \left|\sec \alpha\right| \, dA_{yz}. \tag{48}$$

- Si la superficie está dada como $y = H(z, x)$:

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{zx}} f(x, H(z, x), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2} \, dA_{zx}. \tag{49}$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{R_{zx}} f(x, H(z, x), z) \left|\sec \beta\right| \, dA_{zx}. \tag{50}$$

Cuando $f(x, y, z) = 1$ la suma de Riemann se reduce a

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$$

y como $\Delta\sigma_i$ es el área de $\Delta S_i$ entonces el límite

$$\lim_{\|\Delta_S\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$$

será el valor exacto del área de $S$, denotada por $A(S)$. Así,

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S d\sigma \\ &= \iint_{R_{uv}} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \, dA_{uv} \\ &= \iint_{R_{uv}} \sqrt{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2} \, dA_{uv} \end{aligned} \tag{51}$$

y si por ejemplo $S$ está dada en la forma $z = F(x, y)$,

$$A(S) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA_{xy} \tag{51'}$$

o bien

$$A(S) = \iint_{R_{xy}} \left|\sec\gamma\right| \, dA_{xy}. \qquad (51'')$$

## Ejemplo 16.

Comprobar que el área de la superficie de una esfera de radio $a$ es igual a $4\pi a^2$.

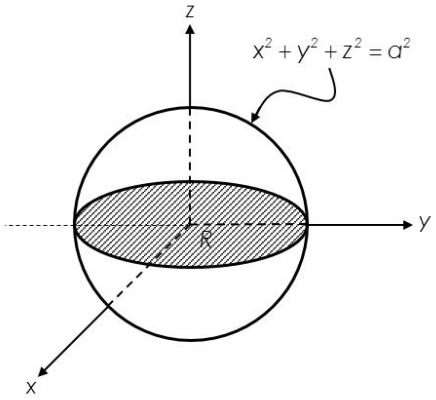



FIGURA 6.33.

**Solución:** Para calcular $A(S)$ se calculará el área del casquete superior de la esfera y se multiplicará por 2. Para el casquete superior se tiene que $z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, lo que implica

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Entonces, usando (51')

$$A(S) = \iint_S d\sigma = 2\iint_R \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, dA$$

$$= 2\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dA$$

siendo $R$ el círculo de radio a sobre el plano $XY$ (ver figura 6.33). Dada la simetría del problema conviene transformar la integral anterior a coordenadas polares, aunque por supuesto también se podría evaluar utilizando coordenadas cartesianas. Se sugiere al lector que lo haga y que compare las ventajas de usar un sistema de coordenadas apropiado. Procediendo en coordenadas polares se tiene que

$$A(S) = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^{a} d\theta$$

$$A(S) = 2a^2\int_0^{2\pi} d\theta = 2a^2\left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi a^2.$$

## Ejemplo 17.

Calcular el área de la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra en el primer octante y que está limitada por los planos $x = 3$ y $2x + 3y = 12$ (ver figura 4.34).

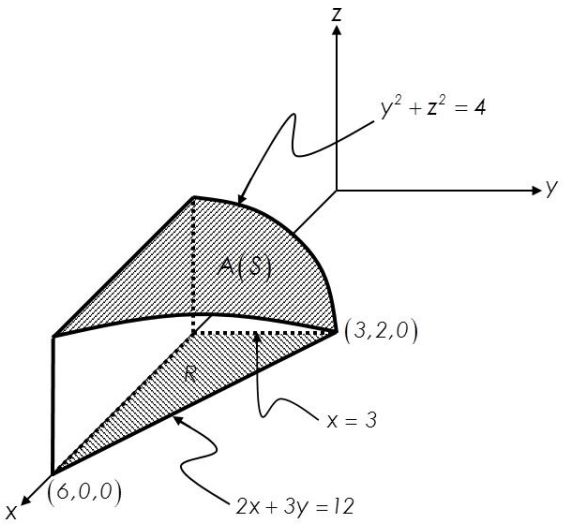



FIGURA 6.34.

**Solución:** Utilizando como parámetros a $x$ y $y$ la ecuación del cilindro se puede escribir como

$$z=\sqrt{4-y^2}$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}.$$

Por tanto,

$$A(S)=\iint_R \sqrt{1+\frac{y^2}{\sqrt{4-y^2}}}\,dA=\int_3^6\int_0^{(12-2x)/3}\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dydx$$

$$=2\int_3^6\left[\text{ang sen}\,\frac{y}{2}\right]_0^{(12-2x)/3}dx$$

$$=-6\left[\frac{6-x}{3}\,\text{ang sen}\,\frac{6-x}{3}+\sqrt{1-\left(\frac{6-x}{3}\right)^2}\right]_3^6$$

$$=3\pi-6.$$

## Ejemplo 18.

Evaluar la integral $\iint_S (x+2y+3z)\,d\sigma$, en donde $S$ es la porción del plano $x+y+z=3$, limitado por los planos coordenados en el primer octante.

**Solución:** Una gráfica de la superficie se muestra en la figura 6.35.

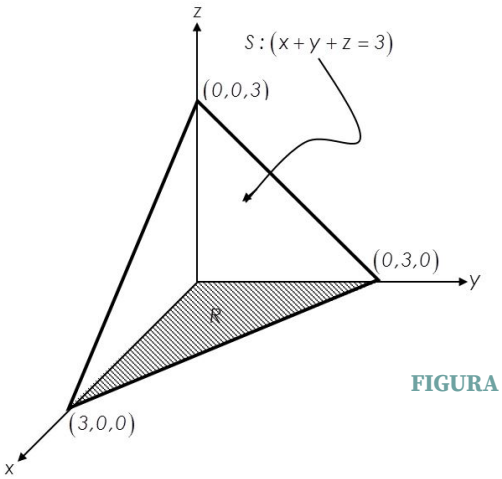



FIGURA 6.35.

Tomando a $x$ y $y$ como parámetros se tiene que

$$z = 3 - x - y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

y

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}\,.$$

La región de variación de $x$ y $y$ se muestra en la figura 6.36. Entonces,

$$\iint_S (x + 2y + 3z)\, d\sigma = \sqrt{3} \int_0^3 \int_0^{3-x} \left[ x + 2y + 3(3 - x - y) \right] dy\, dx$$

$$= \sqrt{3} \int_0^3 \int_0^{3-x} (9 - 2x - y)\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{3} \int_0^3 \left[ 9y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{3-x} dx$$

$$= \sqrt{3} \int_0^3 \left( \frac{3}{2} x^2 - 12x + \frac{45}{2} \right) dx$$

$$= \sqrt{3} \left[ \frac{x^3}{2} - 6x^2 + \frac{45}{2} x \right]_0^3$$

$$= 27\sqrt{3}.$$

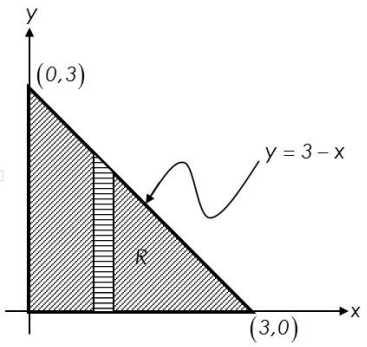



FIGURA 6.36.

## Ejemplo 19.

Se tiene una lámina en forma de superficie crónica $S$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0 \qquad \text{con} \qquad 0 \le z \le 2.$$

Su densidad está dada en términos de las variables $x$ y $y$ mediante la función $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Determinar su masa $M$ si se sabe que esta es igual a la integral de superficie $\iint_S \rho\,(x,y)\,d\sigma$.

**Solución:** Las gráficas de $S$ y de su proyección $R$ sobre el plano $XY$, son las de las figuras 6.37 y 6.38, respectivamente. Si se utilizan como parámetros a $x$ y a $y$ la expresión para la masa es

$$M=\iint_S \rho(x,y)\,d\sigma=\iint_R \rho(x,y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;dA$$

donde

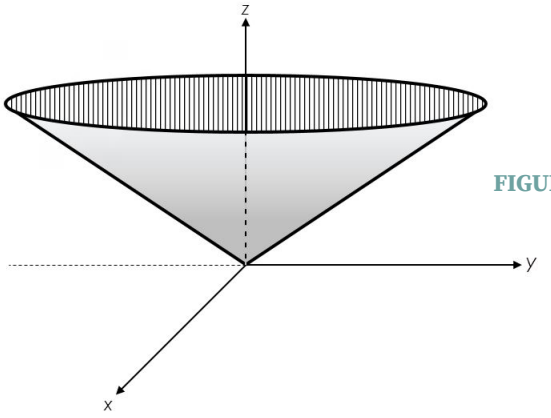



FIGURA 6.37.

$$z = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{3\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Luego

$$M = \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{9(x^2+y^2)}+\frac{4y^2}{9(x^2+y^2)}}\,dA$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{3}\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA.$$

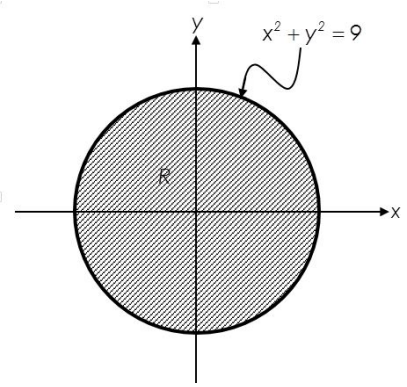



FIGURA 6.39.

Si se cambia a coordenadas polares, en donde la diferencial de área es $dA = r\,dr\,d\theta$, se tiene (nótese que como $0 \le z \le 2$, el radio de $R$ es 3):

$$M = \frac{\sqrt{13}}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3 d\theta$$

$$= 3\frac{\sqrt{13}}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 3\frac{\sqrt{13}}{3}\left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= 6\pi\sqrt{13}.$$

## Ejercicios

**6.21.** Suponga que una esfera de radio igual a 2 colocada en el origen de coordenadas es cortada por el cono $z = 6\sqrt{x^2+y^2}$. Calcular el área de la porción de la superficie esférica que queda dentro del cono.

**6.22.** Calcular el área de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2+y^2=9$ en el primer octante, limitada por los planos $z=50$ y $z=y$.

**6.23.** Evaluar la integral $\iint_S y^2\, d\sigma$ en donde $S$ es el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ limitado por los planos $z=0$ y $z=1$.

**6.24.** Considere una lámina en forma de superficie crónica S de ecuación

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-z^2=0\,; \qquad 0 \le z \le 1$$

y cuya densidad es $\rho(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Si se sabe que su masa $M$ es igual a la integral de superficie $\iint_S \rho(x, y)\, d\sigma$, Calcular $M$.

**6.25.** Hallar el área de la superficie de la parte del paraboloide $z=1-x^2-y^2$ que está sobre el plano $xy$.

**Solución:** $A(s)=5.33\ u^2$.

**6.26.** Evaluar $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, d\sigma$ en donde

$$\mathbf{F}=(x,-y+z,z)$$

y $S$ es la porción del plano $z=y+10$ comprendida entre $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 2$.

**Solución:** 4.

## 6.5 La integral triple

Sea $S$ una superficie cerrada, es decir una superficie que encierra totalmente a una región $R$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ y que es seccionalmente suave. Supóngase además que, al trazar cualquier recta paralela a alguno de los ejes coordenados a través de $R$, se corta a dicha superficie en a lo más dos puntos y tal que la proyección de $R$ sobre el plano perpendicular a ese eje resulta ser una región plana del tipo $I$ o $II$. A este tipo de regiones se les denominará *regiones tridimensionales* proyectables sobre dicho plano.

En la figura 6.39*a*, se muestra una región que al cruzarla con rectas paralelas al eje Z pueden ocurrir cuatro cortes con su superficie, pero que al cruzarla con rectas paralelas al eje Y nunca ocurren más de dos cortes. Por lo tanto, esa región es proyectable sobre el plano $ZX$. Por otro lado, la figura 6.39*b* muestra una región que no es proyectable sobre ningún plano. En el espacio $\mathbb{R}^3$ existen seis tipos de regiones proyectables.

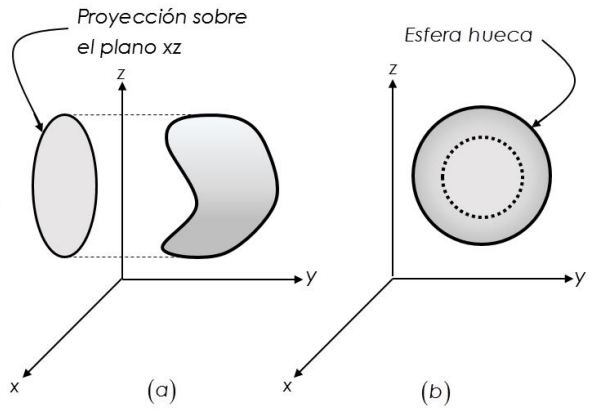



FIGURA 6.39.

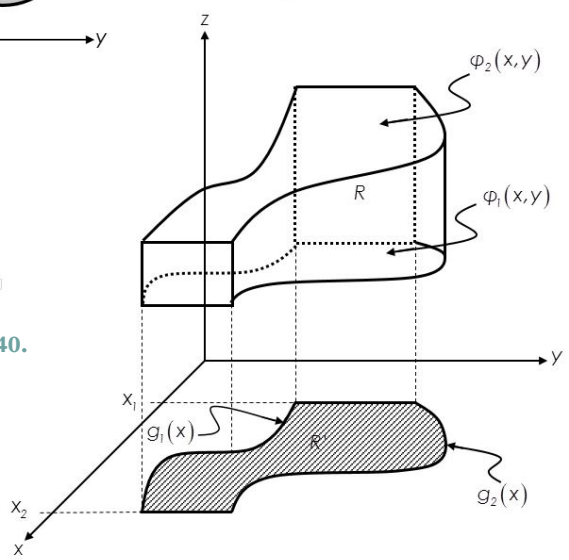



FIGURA 6.40.

Supóngase primero que la región $R \subset \mathbb{R}^3$ es tal que toda recta paralela al eje Z corta a su frontera $S$ en a lo más dos puntos. Por lo tanto, se trata de una región tridimensional proyectable sobre el plano $XY$. Supóngase también que esa proyección sobre dicho plano $XY$ es una región plana $R'$ del tipo $I$ limitada por las curvas (ver figura 6.40)

$$y = g_1(x) \qquad \text{y} \qquad y = g_2(x),$$

donde $x$ varía de $x_1$ a $x_2$. En estos casos se dice que $R$ es del tipo $xy$ y se denota como $R_{xy}$. Entonces, la región se puede expresar como

$$R_{xy} = \{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2;$$

$$g_1(x) \leq y \leq g_2(x); \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y); \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Aquí $\varphi_1(x, y)$ y $\varphi_2(x, y)$ representan los límites para $z$ y son, como se puede ver en la figura, la parte inferior y superior respectivamente de la superficie cerrada $S$. En todo lo que sigue se considerará que las funciones que limitan a las regiones son acotadas. De esta manera las regiones que se considerarán serán siempre cerradas y acotadas.

Por otro lado, si la proyección de la región $R \subset \mathbb{R}^3$ sobre el plano $XY$ es una región plana $R'$ del tipo $II$, limitada por las curvas

$$x = h_1(y); \qquad x = h_2(y); \qquad y = y_1; \qquad y = y_2,$$

se dice que la región $R$ es del tipo $yx$ y se denota por $R_{yx}$. Aquí nuevamente se está proyectando sobre el plano $XY$, pero ahora es la $y$ la que tiene límites fijos. La región quedaría expresada como

$$R_{yx} = \{(x, y, z) \mid y_1 \leq y \leq y_2;$$

$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y); \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y); \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Si en lugar de tener la proyección de $R$ sobre el plano $XY$ se tiene sobre el plano $ZX$, la región puede ser del tipo $xz$ o $zx$. Estas regiones se denotan respectivamente con $R_{xz}$ y $R_{zx}$, y se definen como

$$R_{xz} = \{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2 ;$$

$$s_1(x) \leq z \leq s_2(x); \quad \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z)\}$$

y

$$R_{zx} = \{(x, y, z) \mid z_1 \leq z \leq z_2;$$

$$t_1(z) \leq x \leq t_2(z); \quad \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z)\}.$$

En $R_{xz}$ los límites de la variable z son las curvas $z = s_1(x)$ y $z = s_2(x)$, en cambio en $R_{zx}$ los límites de $x$ son las curvas $x = t_1(z)$ y $x = t_2(z)$.

Para el caso en el que la proyección se hace sobre el plano $YZ$, la región puede ser del tipo $zy$ (denotada por $R_{zy}$) o del tipo $yz$ (denotada por $R_{yz}$), las cuales están definidas como

$$R_{zy} = \{(x, y, z) \mid z_1 \leq z \leq z_2;$$

$$u_1(z) \leq y \leq u_2(z); \quad \xi_1(y, z) \leq x \leq \xi_2(y, z)\}$$

y

$$R_{yz} = \{(x, y, z) \mid y_1 \leq y \leq y_2;$$

$$v_1(y) \leq z \leq v_2(y); \quad \xi_1(y, z) \leq x \leq \xi_2(y, z)\}.$$

Sea ahora $f(x, y, z)$ una función acotada definida en una región cerrada y acotada arbitraria $R \subset \mathbb{R}^3$ e introdúzcase una partición de $R$ dividiéndola con planos paralelos a los planos coordenados. De esta manera se obtienen subregiones que se denotarán con $\Delta R_i$. Cada subregión $\Delta R_i$ tendrá un volumen $\Delta V_i$ y dentro de cada una se tomará un punto arbitrario $(\epsilon_i, \eta_i, \mu_i)$. Nótese que todas las subregiones tendrán forma de paralelepípedo, excepto aquellas que queden en la frontera de $R$ pero mientras más fina sea la partición el volumen de estas subregiones puede despreciarse. Se forma ahora la suma de Riemann $\sum f(\epsilon_i, \eta_i, \mu_i)\Delta V_i$

y se toman particiones cada vez más finas de modo que el máximo de los diámetros $\|\Delta\|$ de todas las $\Delta R_i$ tienda a cero. Entonces, cuando existe el límite

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i, \eta_i, \mu_i)\,\Delta V_i,$$

el cual debe ser independiente del modo de dividir $R$ y de la manera de elegir los puntos $(\epsilon_i, \eta_i, \mu_i)$, se dice que $f$ es integrable en $R$. Este límite se designa por el símbolo

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV$$

y se le llama integral triple. Se tiene entonces que

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i, \eta_i, \mu_i)\,\Delta V_i.$$

En forma semejante a lo que ocurre con las integrales dobles, algunos autores acostumbran denotar las integrales triples sustituyendo el símbolo $dV$ por $dx\,dy\,dz$. Sin embargo, aquí se usará siempre el símbolo $dV$ para las integrales triples y se reservará la notación $dx\,dy\,dz$ para las integrales reiteradas que se verán más adelante.

Como era de esperarse, las integrales triples tienen propiedades semejantes a las de las integrales que se han estudiado previamente. Los siguientes teoremas que se darán sin demostración enuncian algunas de ellas.

**Teorema 8.** Si $f(x, y, z)$ es una función continua en una región cerrada y acotada $R \subset \mathbb{R}^3$, entonces $f(x, y, z)$ es integrable sobre $R$.

**Teorema 9.** Sean $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ funciones escalares integrables en una región cerrada y acotada $R$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $k$ una constante en $\mathbb{R}$. Entonces:

*i)* $$\iiint_R kf(x,y,z)\,dV = k\iiint_R f(x,y,z)\,dV$$

*ii)* $$\iiint_R [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dV = \iiint_R f(x,y,z)\,dV + \iiint_R g(x,y,z)\,dV$$

*iii)* Si $R$ se divide en un número finito de subregiones $R_1, R_2, \cdots, R_n$ que no se traslapan (excepto posiblemente en sus fronteras), entonces se cumple que

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_{R_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{R_2} f(x,y,z)\,dV + \cdots + \iiint_{R_n} f(x,y,z)\,dV$$

*iv)* Si $f(x,y,z) \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in R$, se cumple que

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV \geq 0$$

*v)* Si $f(x,y,z) \geq g(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in R$,

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV \geq \iiint_R g(x,y,z)\,dV$$

*vi)* Si $f(x, y, z)$ tiene un máximo absoluto $M$ y un mínimo absoluto $m$ en $R$, y si el volumen de $R$ es $V(R)$, se cumple que

$$m\, V(R) \leq \iiint_R f(x, y, z)\, dV \leq MV(R)$$

*vii)* $$\iiint_R dV = V(R).$$

### 6.5.1 Teorema del valor medio para integrales triples

**Teorema 10.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua en una región cerrada y acotada $R \subset \mathbb{R}^3$, y sea $V(R)$ el volumen de la región. Entonces, existe al menos un punto $(\xi, \theta, \epsilon)$ en $R$ tal que

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = f(\xi, \theta, \epsilon)\, V(R).$$

Al valor $f(\xi, \theta, \epsilon)$ se le llama valor medio o valor promedio de $f(x, y, z)$ en $R$ y se le denota con $\langle f \rangle$. Así,

$$\langle f \rangle = \frac{\iiint_R f(x, y, z)\, dV}{\iiint_R dV}.$$

La demostración de este teorema es similar a la del caso de las integrales dobles.

### 6.5.2 Cálculo de la integral triple

Para las integrales triples también existe el concepto de integral reiterada (o *iterada*) *de tercer orden*. En este caso existen seis tipos de integrales reiteradas dependiendo del orden en el que aparecen los límites de las variables $x$, $y$ y $z$.

Considérese primero la integral reiterada de tercer orden

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right]dx,$$

que por brevedad se escribe simplemente como

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx,$$

en donde la secuencia $dz\,dy\,dx$ en la que aparecen las diferenciales indica que primero debe integrarse respecto a $z$, luego respecto a $y$, y finalmente respecto a $x$. Además, los límites de integración para $z$ deben ser dos funciones de $x$ y $y$ (los cuales están indicados por las funciones $\varphi_1(x,y)$ y $\varphi_2(x,y)$, los de la integración respecto a y dos funciones de $x$ (los cuales están indicados por las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$), y los de la integración respecto a $x$ dos constantes (la $x_1$ y la $x_2$). Al integrar respecto a $z$ y sustituir los límites $\varphi_1(x,y)$ y $\varphi_2(x,y)$ se obtiene una integral reiterada de segundo orden en las variables $x$ y $y$ como las que se estudiaron anteriormente.

## Ejemplo 20.

Evaluar la integral reiterada

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{(x^2-y^2)/2}}^{1} xyz\;\,dz\,dy\,dx.$$

**Solución:** Se integra primero con respecto a $z$, considerando a $x$ y a $y$ como constantes:

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left[xy\,\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{(x^2-y^2)/2}}^{1}dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{2}\left[1-\frac{x^2-y^2}{2}\right]dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(xy-\frac{x^3y}{2}+\frac{xy^3}{2}\right)dy\,dx.$$

Ahora se integra con respecto a $y$ considerando a $x$ como constante

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{xy^2}{2}-\frac{x^3y}{4}+\frac{xy^4}{8}\right]_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{x(1-x^2)}{2}-\frac{x^3(1-x^2)}{4}+\frac{x(1-x^2)^2}{8}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^5}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^5}{8}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{8}\,x-x^3+\frac{3}{8}\,x^5\right)dx.$$

Finalmente se integra con respecto a $x$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{16}\,x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{48}\,x^6\right]_{-1}^{1}$$

$$=0.$$

Nótese que los límites de integración de una integral reiterada de este tipo definen una región $xy$ como la que se mostró en la figura 6.40. De hecho, los otros cinco tipos de integrales reiteradas tienen asociados los otros cinco tipos de regiones proyectables que se han definido. Así, los límites de la integral reiterada

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

definen una región $R_{yx}$, y los de las integrales

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1(z)}^{t_2(z)} \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{u_1(z)}^{u_2(z)} \int_{\xi_1(y,z)}^{\xi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

y

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{v_1(y)}^{v_2(y)} \int_{\xi_1(y,z)}^{\xi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

definen respectivamente regiones de los tipos $R_{xz}$, $R_{zx}$, $R_{zy}$ y $R_{yz}$. Obsérvese que en cada integral los límites de integración son distintos, así como el orden de las diferenciales $dx$, $dy$ y $dz$. Como ya se indicó, la diferencial que va primero de izquierda a derecha debe ser la de la variable respecto a la que se integra primero y sus límites son los de la integral interna, etc.

Las integrales reiteradas de tercer orden tienen las mismas propiedades que las integrales triples y, como en el caso de dos dimensiones, existe un teorema que establece la relación entre ellas:

**Teorema 11.** La integral triple de una función continua $f(x, y, z)$ en una región $R_{xy}$ limitada por $x = a$; $x = b$; $y = g_1(x)$; $y = g_2(x)$; $z = \varphi_1(x, y)$ y $z = \varphi_2(x, y)$, es igual a la integral reiterada de tercer orden asociada a dicha región, es decir,

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[ \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx.$$

La demostración es igual a la de la integral doble.

En realidad, existen seis versiones de este teorema. Una por cada uno de los seis tipos de regiones proyectables que existen en $\mathbb{R}^3$. Cuando la región es indistintamente una región proyectable de los seis tipos entonces se dice que $R$ es una región tridimensional regular (o estándar) y la integral triple es igual a cualquiera de sus integrales reiteradas asociadas. Esto a su vez implica que los valores de las integrales reiteradas son iguales entre sí.

## Ejemplo 21.

Considérese la integral reiterada

$$\int_0^6 \int_0^{(6-x)/2} \int_0^{(6-x-2y)/3} xyz \;\; dz\, dy\, dx.$$

Mostrar que sus límites de integración definen una región regular y cambiar el orden de integración para obtener las otras cinco formas de integrales reiteradas.

**Solución:** Los límites de integración definen la región $R$ comprendida entre

$$0 \le x \le 6; \qquad 0 \le y \le \frac{6-x}{2}; \qquad 0 \le z \le \frac{6-x-2y}{3}.$$

La forma en que están expresados corresponde a considerar a la región como una región del tipo $xy$. Es decir, la región se está proyectando sobre el plano $XY$ y los límites de $x$ son fijos; además, el orden de las diferenciales es $dz\,dy\,dx$. Con ayuda de estas desigualdades se construye la figura 6.41, en donde se ve que la región $R$ está limitada por los cuatro planos

$$x=0; \qquad y=0; \qquad z=0 \qquad \text{y} \qquad x+2y+3z=6.$$

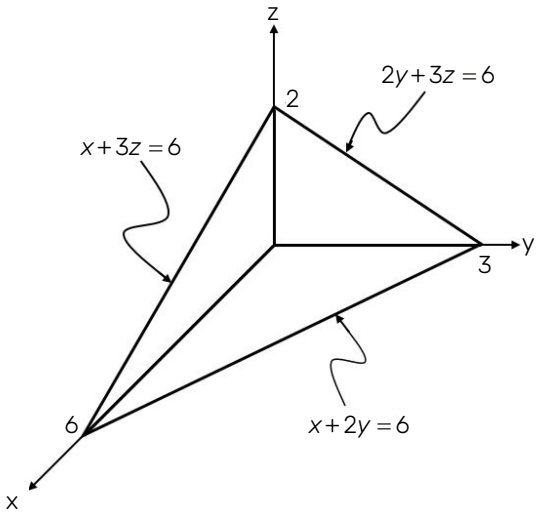



FIGURA 6.41.

Esta región es efectivamente una región regular ya que se puede tomar indistintamente como cualquiera de las seis formas vistas y, por lo tanto, la integral triple se puede expresar en cualquiera de las otras formas de integrales reiteradas.

Para obtenerlas es necesario dar los límites de las variables de manera distinta. Proyectando todavía sobre el plano $XY$, pero ahora dando los límites de y fijos, se obtienen las siguientes expresiones (ver figura 6.41):

$$0 \le y \le 3; \qquad 0 \le x \le 6-2y; \qquad 0 \le z \le \frac{6-x-2y}{3},$$

que corresponde a considerar a $R$ como región tipo $yx$. En este caso el orden de las diferenciales dentro de la integral debe ser $dz\,dx\,dy$. Así, la integral iterada es

$$\int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{(6-x-2y)/3} xyz \;\; dz\,dx\,dy.$$

Proyectando $R$ en las otras cuatro formas posibles se obtiene:

a) Considerándola como región $xz$ los límites son

$$0 \le x \le 6; \qquad 0 \le z \le \frac{6-x}{3}; \qquad 0 \le y \le \frac{6-x-3z}{3},$$

y el orden de las diferenciales es $dy\,dz\,dx$. La integral iterada asociada es

$$\int_0^6 \int_0^{(6-x)/3} \int_0^{(6-x-3z)/3} xyz\,dy\,dz\,dx$$

b) Considerándola como región $zx$ los límites son

$$0 \le z \le 2; \qquad 0 \le x \le 6-3z; \qquad 0 \le y \le \frac{6-x-3z}{2},$$

y el orden de las diferenciales es $dy\,dx\,dz$. La integral iterada asociada es

$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \int_0^{(6-x-3z)/2} xyz\,dy\,dx\,dz$$

c) Considerándola como región $zy$ los límites son

$$0 \le z \le 2; \qquad 0 \le y \le \frac{6-3z}{2}; \qquad 0 \le x \le 6-2y-3z$$

y el orden de las diferenciales es $dx\,dy\,dz$. La integral iterada es

$$\int_0^2 \int_0^{(6-3z)/2} \int_0^{6-2y-3z} xyz\,dx\,dy\,dz$$

d) Considerándola como región $yz$ los límites son

$$0 \le y \le 3; \qquad 0 \le z \le \frac{6-2y}{3}; \qquad 0 \le x \le 6-2y-3z$$

y el orden de las diferenciales es $dx\,dz\,dy$. La integral iterada es

$$\int_0^3 \int_0^{(6-2y)/3} \int_0^{6-2y-3z} xyz\,dx\,dz\,dy.$$

Como se indicó, el resultado de todas estas integrales deberá ser el mismo. Es decir, el resultado no dependerá del orden de integración, con tal que se manejen correctamente los límites de integración. Se propone al lector que compruebe esta afirmación. Aquí sólo se calculará la última integral:

$$I=\int_0^3\int_0^{(6-2y)/3}\int_0^{6-2y-3z} xyz\,dx\,dz\,dy$$

$$=\int_0^3\int_0^{(6-2y)/3}\left[yz\frac{x^2}{2}\right]_0^{6-2y-3z} dz\,dy$$

$$=\int_0^3\int_0^{(6-2y)/3} yz\frac{(6-2y-3z)^2}{2}\,dz\,dy$$

$$=\int_0^3\int_0^{(6-2y)/3}\left(18yz+2y^3z+\frac{9}{2}yz^3-12y^2z-18yz^2+6y^2z^2\right)dz\,dy$$

$$=\int_0^3\int_0^{(6-2y)/3}\left(\left(18y+2y^3-12y^2\right)z+\left(-18y+6y^2\right)z^2+\frac{9}{2}yz^3\right)dz\,dy$$

$$=\int_0^3\left[\left(9y+y^3-6y^2\right)z^2+\left(-6y+2y^2\right)z^3+\frac{9}{8}yz^4\right]_0^{(6-2y)/3} dy$$

$$=\int_0^3\left(9y+y^3-6y^2\right)\frac{(6-2y)^2}{9}+\left(-6y+2y^2\right)\frac{(6-2y)^3}{27}$$

$$+\frac{9}{8}y\frac{(6-2y)^4}{81}\Bigg]dy$$

$$=\frac{9}{5}.$$

En este ejemplo fue posible expresar a la región $R$ en las seis formas estudiadas, pero esto no siempre es posible. Puede ocurrir, por ejemplo, que una región $R$ se pueda expresar como una región $R_{xy}$ pero no como una única región $R_{yx}$, sino como dos o más de ellas, etc. Considérese por ejemplo la región mostrada en la figura 6.42*a*.

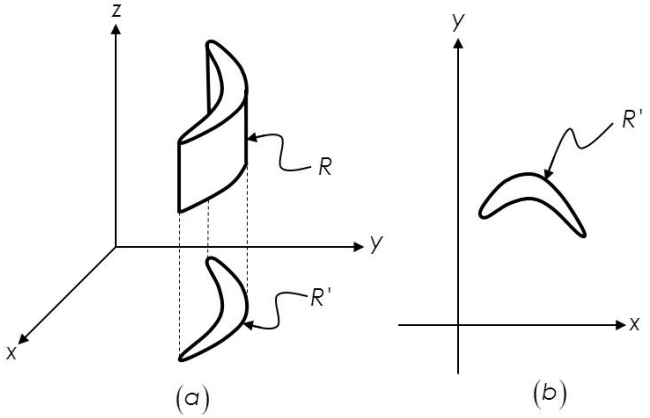



**FIGURA 6.42.**

La proyección de $R$ sobre el plano $XY$ es la región $R'$ que es del tipo $R_x$. Sin embargo, $R'$ no se puede expresar como una única región del tipo $R_y$, o sea

$$R' \neq R_y = \{(x, y) \mid y_1 \leq y \leq y_2; \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

ya que hay rectas paralelas al eje $X$ que cortan a la frontera de $R'$ en más de dos puntos (ver figura 6.42*b*). Sí se puede, sin embargo, expresar como la unión de dos o más regiones del tipo $R_y$.

### 6.5.3 Integrales triples en otros sistemas coordenados

La integral triple también puede expresarse en otros sistemas coordenados. En el inciso $(iv)$ del teorema 14 del capítulo 4 se vio que la diferencial de volumen $dV$ expresada en términos de las coordenadas de un sistema curvilíneo ortogonal $uvw$, está dada por

$$dV = \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| dV_{uvw},$$

donde $dV_{uvw} = du\,dv\,dw$ es la diferencial de volumen en el espacio de las variables $uvw$. En este caso, la integral triple, junto con una de sus integrales reiteradas asociadas, se expresa como

$$\iiint_R f(u, v, w) \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| dV_{uvw}$$

$$= \int_{w_1}^{w_2} \int_{v_1(w)}^{v_2(w)} \int_{u_1(v,w)}^{u_2(v,w)} f(u, v, w) \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| du\,dv\,dw.$$

Por ejemplo, en el sistema cilíndrico circular una posibilidad de integral reiterada es

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1(z)}^{\theta_2(z)} \int_{\rho_1(\theta, z)}^{\rho_2(\theta, z)} f(\rho, \theta, z)\, \rho \; d\rho\, d\theta\, dz$$

y para el sistema esférico:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r, \varphi, \theta)\, r^2 \operatorname{sen} \varphi \; dr\, d\varphi\, d\theta.$$

A continuación, se verán algunas aplicaciones.

### 6.5.4 Cálculo del volumen de un cuerpo

De acuerdo con el inciso $(vii)$ del teorema 9, cuando el integrando de la integral triple es igual a 1 esta es igual al volumen de la región $R \subset \mathbb{R}^3$, o sea

$$V(R) = \iiint_R dV.$$

Se puede comprobar que esta integral da lugar a la expresión que se utiliza para calcular volúmenes por medio de la integral doble que se discutió anteriormente.

En efecto, supóngase por ejemplo que la región tridimensional $R$ está limitada por arriba y por abajo, respectivamente, por las funciones $\phi_2(x, y)$ y $\phi_1(x, y)$ definidas sobre una región plana $R'$ dada por

$$R' = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2; \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}.$$

Esto implica que $R$ es de la forma

$$R = \{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2; \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x); \quad \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

y entonces

$$\begin{aligned} V(R) &= \iiint_R dV \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} dz\, dy\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} z \Big|_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} dy\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \phi_2(x,y)\, dy\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \phi_1(x,y)\, dy\, dx \\ &= \iint_{R'} \phi_2(x, y)\, dA - \iint_{R'} \phi_1(x, y)\, dA, \end{aligned}$$

que es la expresión que se utilizaría para calcular el volumen con la teoría de las integrales dobles, como se quería demostrar. En este desarrollo se supuso que $R$ era del tipo $R_{xy}$, pero es claro que el argumento sigue siendo válido para los otros tipos de regiones.

En los ejemplos que siguen se utilizará la integral triple para calcular algunos volúmenes.

## Ejemplo 22.

Calcular el volumen de la cuña mostrada en la figura 6.43, limitada por el plano vertical $x+y=3$, el paraboloide $x^2+y^2=9-z$ y el plano $z=0$.

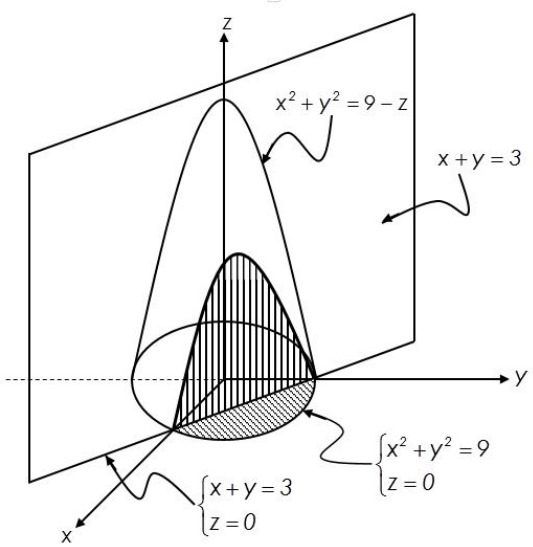



FIGURA 6.43.

**Solución:** Para obtener el volumen pedido, se considerará a la región ocupada por la cuña como una región del tipo $xy$. Entonces la región se puede expresar como

$$R=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ 0\le x\le 3;\qquad 3-x\le y\le\sqrt{9-x^2};\qquad 0\le z\le 9-x^2-y^2\right\}.$$

De modo que

$$V=\int_0^3\int_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^3\int_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}}\left(9-x^2-y^2\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^3\left[\left(9-x^2\right)y-\frac{y^3}{3}\right]_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$=\int_0^3\left[\left(9-x^2\right)\sqrt{9-x^2}-\frac{\left(9-x^2\right)^{3/2}}{3}-\left(9-x^2\right)(3-x)+\frac{(3-x)^3}{3}\right]dx$$

$$= \int_0^3 \left[ \frac{2}{3}\left(9-x^2\right)^{3/2} - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 18 \right] dx$$

$$= \left\{ \frac{2}{3}\left[ \frac{x}{8}\left(45-2x^2\right)\sqrt{9-x^2} + \frac{243}{8}\ \text{ang sen}\left(\frac{x}{3}\right)\right] - \frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 18x \right\}_0^3$$

$$= \frac{81\pi}{8} - 27 \doteq 4.8086.$$

## Ejemplo 23.

Calcular el volumen del sólido limitado superior e inferiormente por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y lateralmente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**Solución:** La gráfica del sólido se muestra en la figura 6.44. Por simetría conviene utilizar coordenadas cilíndricas y considerar sólo la octava parte del volumen pedido. En estas coordenadas la ecuación del cono es $z^2 = \rho^2$ y la de la esfera $\rho^2 + z^2 = a^2$. El camino que seguir será primero obtener el volumen $V_{int}$ que está simultáneamente dentro de la esfera y del cono. Después se restará este volumen al volumen de la esfera.

El valor de $\rho$ en la intersección de cono y la esfera se obtiene resolviendo simultáneamente las ecuaciones $\rho^2 + z^2 = a^2$ y $z^2 = \rho^2$. Así, $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Entonces la región interior al cono y a la esfera es (la octava parte):

$$R = \left\{ (\rho, \theta, z) \,\middle|\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\quad 0 \le \rho \le \frac{a}{\sqrt{2}};\quad \rho \le z \le \sqrt{a^2 - \rho^2} \right\}.$$

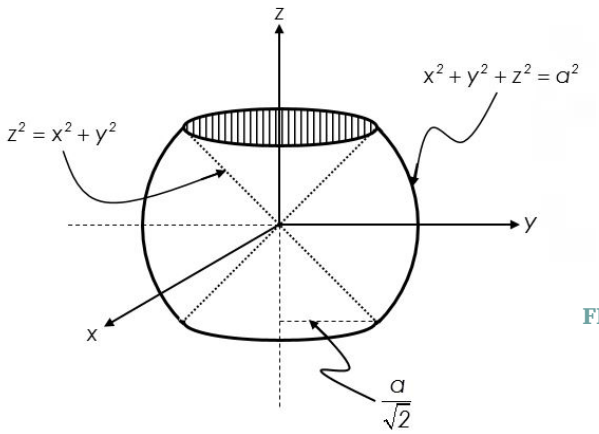



FIGURA 6.44.

Por lo tanto, el volumen $V_{int}$ está dado por la integral reiterada:

$$V_{int} = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{a/\sqrt{2}}\int_{\rho}^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{a/\sqrt{2}} \rho\left[\sqrt{a^2-\rho^2}-\rho\right] d\rho\, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(a^2-\rho^2\right)^{3/2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^{a/\sqrt{2}} d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(a^2-\frac{a^2}{3}\right)^{3/2} - \frac{a^2}{3(2)^{3/2}} + \frac{1}{3}a^3\right] d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

El volumen pedido $V$ se obtiene como

$$V = V_{esfera} - V_{int} = \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}.$$

### 6.5.5 Cálculo de la masa, el centro de masa y los momentos

Una útil aplicación de las integrales triples es la determinación de la masa, el centro de masa y los momentos estáticos y de inercia de un cuerpo tridimensional. Como estos conceptos son semejantes a los tratados en integrales dobles, aquí se estudiarán muy brevemente.

La masa $M$ de un cuerpo tridimensional con densidad volumétrica de masa $\rho = \rho(x, y, z)$ es

$$M = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, dV,$$

donde $R$ es la región del espacio que ocupa el cuerpo y $\mathbf{x} = (x, y, z)$. El primer momento (o momento estático) de dicho cuerpo con respecto a un plano $P$, denotado como $\mathcal{M}_P$, se define como

$$\mathcal{M}_P = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\, dV,$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario perpendicular a la plano $P$ y $\mathbf{x}_0$ un punto arbitrario de él, de manera que la magnitud de $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es la distancia de punto $\mathbf{x}$ al plano. Si la ecuación del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$ se puede tomar a $\hat{\mathbf{n}}$ como $\hat{\mathbf{n}} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ y entonces

$$\mathcal{M}_P = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\, dV.$$

El segundo momento (o momento de inercia) del cuerpo con respecto al plano $P$, se define como

$$\mathcal{I}_P = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, \frac{(Ax + By + Cz + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}\, dV.$$

De estas expresiones se sigue que los momentos estáticos y de inercia del cuerpo respecto a los planos coordenados son

$$\mathcal{M}_{XY} = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, z\, dV; \qquad \mathcal{I}_{XY} = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, z^2\, dV$$

$$\mathcal{M}_{YZ} = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, x\, dV; \qquad \mathcal{I}_{YZ} = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, x^2\, dV$$

$$\mathcal{M}_{ZX} = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, y\, dV; \qquad \mathcal{I}_{ZX} = \iiint_R \rho(\mathbf{x})\, y^2\, dV.$$

El segundo momento (o momento de inercia) del cuerpo con respecto a una recta $L$, denotado como $\mathcal{I}_L$, se define como

$$\mathcal{I}_L = \iiint_L d^2(\mathbf{x})\, \rho(\mathbf{x})\, dV,$$

donde $d(\mathbf{x})$ es la distancia entre el punto $\mathbf{x}$ y la recta $L$. Es fácil demostrar que esta expresión es equivalente a $\mathcal{I}_L = \mathcal{I}_{P_A} + \mathcal{I}_{P_B}$, siendo $P_A$ y $P_B$ dos planos perpendiculares cuya intersección es la recta $L$.

Para cada uno de los conceptos físicos definidos arriba existe su correspondiente concepto geométrico. Sus definiciones son muy parecidas a las dadas arriba. La única diferencia es que en los conceptos geométricos no aparece la densidad de masa $\rho(x, y)$.

- Primer momento (geométrico) de la región tridimensional $R$ con respecto a un plano $P$

$$\mathcal{M}_P^G = \iiint_R \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\, dV.$$

- Segundo momento (geométrico) de la región tridimensional $R$ con respecto al plano $P$

$$\mathcal{I}_P^G = \iiint_R \frac{(Ax + By + Cz + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}\, dV.$$

- Momentos estáticos y de inercia (geométricos) de la región $R$ respecto a los planos coordenados

$$\mathcal{M}_{XY}^{G}=\iiint_R z\,dV; \qquad \mathcal{I}_{XY}^{G}=\iiint_R z^2\,dV$$

$$\mathcal{M}_{YZ}^{G}=\iiint_R x\,dV; \qquad \mathcal{I}_{YZ}^{G}=\iiint_R x^2\,dV$$

$$\mathcal{M}_{ZX}^{G}=\iiint_R y\,dV; \qquad \mathcal{I}_{ZX}^{G}=\iiint_R y^2\,dV.$$

- Segundo momento (geométrico) de la región $R$ con respecto a una recta $L$,

$$\mathcal{I}_{L}^{G}=\iiint_L d^2(\mathbf{x})\,dV=\mathcal{I}_{P_A}^{G}+\mathcal{I}_{P_B}^{G}.$$

El centro de masa del cuerpo es el punto de coordenadas (xcm, ycm, zcm) dadas por

$$\mathbf{x}_{\text{cm}}=\frac{\mathcal{M}_{YZ}}{M}; \qquad \mathbf{y}_{\text{cm}}=\frac{\mathcal{M}_{ZX}}{M}; \qquad \mathbf{z}_{\text{cm}}=\frac{\mathcal{M}_{XY}}{M}$$

y su centroide el punto de coordenadas $(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$ dadas por

$$\mathbf{x}_{\text{c}}=\frac{\mathcal{M}_{YZ}^{G}}{V}; \qquad \mathbf{y}_{\text{c}}=\frac{\mathcal{M}_{ZX}^{G}}{V}; \qquad \mathbf{z}_{\text{c}}=\frac{\mathcal{M}_{XY}^{G}}{V}.$$

Y es fácil ver que cuando $\rho(x, y, z)$ es constante el centro de masa coincide con el centroide. Además, las coordenadas $\mathbf{x}_c$, $\mathbf{y}_c$ y $\mathbf{z}_c$ del centroide de una región tridimensional $R$ son iguales, respectivamente, a los promedios de las coordenadas $x$, $y$ y $z$. Es decir,

$$\mathbf{x}_c=\langle x\rangle; \qquad \mathbf{y}_c=\langle y\rangle; \qquad \mathbf{z}_c=\langle z\rangle,$$

donde el símbolo $\langle\ \rangle$ denota el promedio tal y como se definió en el teorema 10.

## Ejemplo 24.

En el cuerpo semiesférico de ecuación $x^2+y^2+z\,2 \leq a^2;\ z \geq 0$, la densidad en el punto $\mathbf{P}=(x, y, z)$ es proporcional a la distancia desde el punto **P** al centro de la esfera. Obtener el centro de masa de este cuerpo.

**Solución:** Por la simetría del problema se usarán coordenadas esféricas. En este caso la densidad está dada por la expresión $\rho = kr$, donde $k$ es la constante de proporcionalidad. Primero se calculará la masa:

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}(kr)r^2\,\operatorname{sen}\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$=k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{a}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{a^4k}{4}\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi/2}d\theta$$

$$=\frac{a^4k}{4}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{\pi a^4k}{2}.$$

En coordenadas esféricas se tiene que $x=r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi$; $y=r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi$ y $z=r\cos\varphi$. Entonces,

$$\mathcal{M}_{YZ}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}(r\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi)(kr)(r^2\,\operatorname{sen}\phi)\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Para evaluar esta integral iterada conviene integrar primero respecto a θ puesto que es bien conocido que $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0$. Así,

$$\mathcal{M}_{YZ} = \int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi)(kr)(r^2\operatorname{sen}\varphi)\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$= k\int_0^a \int_0^{\pi/2} r^4\operatorname{sen}^2\varphi\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right]d\varphi\,dr$$

$$= k\int_0^a \int_0^{\pi/2} r^4\operatorname{sen}^2\varphi\,[0]\,d\varphi\,dr$$

$$= 0.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}_{cm} = 0$. De la misma forma:

$$\mathcal{M}_{ZX} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi)(kr)(r^2\operatorname{sen}\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 0$$

y $\mathbf{y}_{cm} = 0$. Por lo tanto, el centro de masa está sobre el eje Z, lo cual era de esperarse dada la simetría. Finalmente,

$$\mathbf{z}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r\cos\varphi)(kr)(r^2\operatorname{sen}\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{k}{M}\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^5}{5}\cos\varphi\,\operatorname{sen}\varphi\right]_0^a d\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{ka^5}{5M}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{ka^5}{5M}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\pi ka^5}{5M}$$

$$= \frac{2a}{5}.$$

De esta forma, el centro de masa es $\left(0, 0, \frac{2a}{5}\right)$.

## Ejemplo 25.

Obtener el momento de inercia con respecto al eje Z, del sólido de densidad $\rho(x, y, z) = 1$, situado en el primer cuadrante y limitado por los cuatro cilindros hiperbólicos $x^2 - y^2 = 2$; $x^2 - y^2 = 4$; $xy = 1$; $xy = 2$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$ (ver figura 6.45)

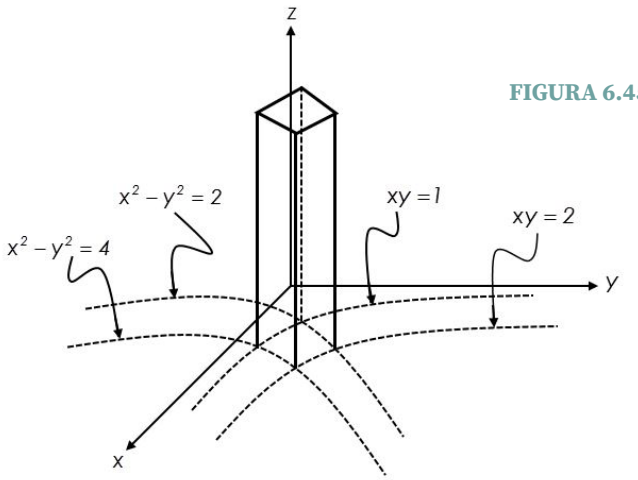



FIGURA 6.45.

**Solución:** Por la forma del sólido es conveniente usar un sistema curvilíneo. El sistema de coordenadas que se utilizará está definido mediante las expresiones

$$u = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right); \qquad v = xy \qquad \text{y} \qquad z = z$$

que, como es fácil demostrar, es ortogonal. Además, las ecuaciones de las superficies que limitan al solido son

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 2 \; u = 2 \quad &\Rightarrow \quad u = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \; u = 4 \quad &\Rightarrow \quad u = 2 \\ xy = v = 1 \\ xy = v = 2 \\ z = 0 \\ z = 3. \end{aligned}$$

La forma de la región $R'$ en el espacio $UVZ$ se muestra en la figura 6.46

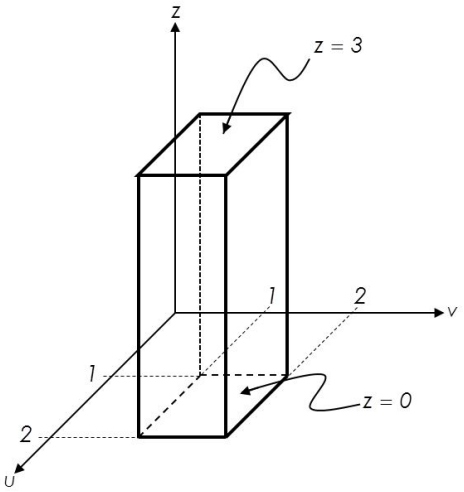



FIGURA 6.46.

Una vez determinada la forma de la región en el nuevo sistema se transformará el integrando. Debido a que el momento de inercia está dado por

$$\mathcal{I}_z = \iiint_R d(x, y, z)^2 \, \rho(x, y, z) \, dV$$

y $\rho(x, y, z)$ es igual a 1, sólo es necesario transformar $d(x, y, z)^2$ y $dV$. Como se pide el momento con respecto al eje Z, la distancia a dicho eje está dada por

$$d(x, y, z) = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Además

$$dV = \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, z}\right) \right| dV_{uvz} = \frac{dV_{uvz}}{\left| J\left(\frac{u, v, z}{x, y, z}\right) \right|}$$

donde

$$J\left(\frac{u, v, z}{x, y, z}\right) = \begin{vmatrix} x & -y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2$$

por lo que $dV = \dfrac{dV_{uvz}}{(x^2+y^2)}$ y

$$d(x, y, z)^2\, dV = (x^2+y^2)\, \frac{dV_{uvz}}{(x^2+y^2)} = dV_{uvz}.$$

Entonces

$$\mathcal{I}_z = \iiint_{R'} dV_{uvz}$$

$$= \int_0^3 \int_1^2 \int_1^2 du\, dv\, dz$$

$$= 3.$$

## Ejercicios

**6.27.** Evaluar la integral reiterada

$$I = \int_{-1}^{1} \int_0^2 \int_1^3 (x + y^2 + xyz)\, dz\, dy\, dx$$

**Solución:** $32/3$.

**6.28.** Cambiar el orden de integración en

$$I = \int_0^{16} \int_0^{8-.5x} \int_0^{4-.25x-.5y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

para obtener las otras cinco formas de las integrales reiteradas.

**6.29.** Calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x+2y+4z=16$

**Solución:** $64/3$.

**6.30.** Utilizando la integral tripe calcular el volumen del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

**Solución:** $\frac{4\pi}{3}abc$.

**6.31.** Suponga que el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x+2y+4z=16$ es un cuerpo cuya densidad de masa en el punto $(x, y, z)$ es igual a $x$. Obtener las coordenadas del centro de masa del cuerpo.

**6.32.** Obtener el momento de inercia con respecto al eje z, del sólido de densidad $\rho(x, y, z)=\pi$ situado en el primer octante y limitado por los cuatro cilindros hiperbólicos $x^2-y^2=4$; $x^2-y^2=18$; $xy=1$; $xy=4$ y los planos $z=5$ y $z=10$. Se sugiere utilizar un cambio de coordenadas semejante al utilizado en el ejemplo 7.

**6.33.** Hallar el volumen del sólido limitado por el plano $z=0$ y los cilindros parabólicos $y=x^2$ y $y=4-z^2$.

**Solución:** $V=4\pi$.

**6.34.** Determinar el volumen limitado por los planos coordenados y por la superficie $x+y+z=1$ por medio de una integral triple.

**Solución:** $V=\frac{1}{6}$.

**6.35.** Calcular el volumen del sólido limitado arriba por el paraboloide $z=x^2+y^2$, y abajo por la región del plano $xy$ limitada por el cuarto de círculo $x^2+y^2\leq 4$ en el primer cuadrante.

**Solución:** $V=2\pi$.

**6.36.** Determinar con integración triple el volumen del sólido limitado por $z=x^2+y^2$; $x^2+y^2=4$ y $z=0$

**Solución:** $V=\dfrac{16}{3}\pi$.

## 6.6 Teorema de Stokes

Este teorema es una extensión directa del teorema de Green en el plano que, como recordará el lector, una de las formas que adquiere el teorema es (corolario 2 ecuación (34))

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\nabla\times\mathbf{F}\right)\cdot\hat{\mathbf{k}}\,dA.$$

En la generalización que se dará a continuación (ecuación (52)) en vez de la región plana $R$ aparece una superficie alabeada en el espacio $\mathbb{R}^3$, en vez de la diferencial de área $dA$ aparece la diferencial de área de superficie $d\sigma$ y en vez del vector constante $\mathbf{k}$ aparece un vector unitario variable $\hat{\mathbf{n}}$ que es perpendicular a la superficie en cada uno de sus puntos.

**Teorema 12** (Teorema de Stokes). Sea $S$ una superficie suave en el espacio $\mathbb{R}^3$ que está limitada por la curva cerrada simple $C$, de manera que la proyección de $S$ sobre los planos $XY$, $ZX$ y $YZ$ sean regiones limitadas por curvas planas

cerradas simples (ver la figura 6.47). Sea $\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + F_2(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + F_3(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma, \tag{52}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a la superficie $S$ en el punto $(x, y, z)$ y $d\sigma$ es la diferencial del área de superficie sobre $S$. En esta expresión la curva $C$ se recorre en sentido positivo respecto a una persona que observa a $C$ desde la dirección positiva de $\hat{\mathbf{n}}$.

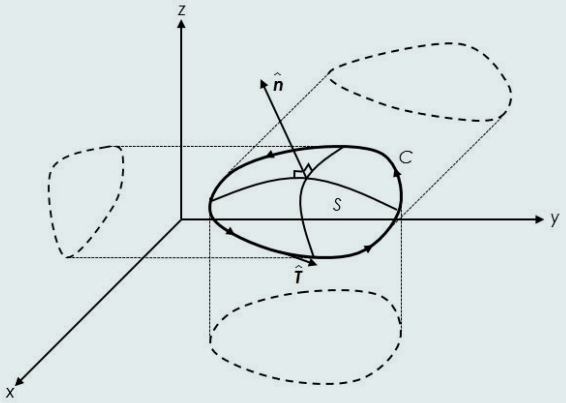



FIGURA 6.47.

**Demostración:** Si se expresa a $\mathbf{F}$ en términos de su componentes la ecuación (52) queda en la forma

$$\oint_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \iint_S \left\{ \left(\nabla \times \left[F_1 \hat{\mathbf{i}}\right]\right) + \left(\nabla \times \left[F_2 \hat{\mathbf{j}}\right]\right) + \left(\nabla \times \left[F_3 \hat{\mathbf{k}}\right]\right) \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma.$$

La demostración se restringirá únicamente a probar que

$$\oint_C F_1\, dx = \iint_S \left(\nabla \times \left[F_1 \hat{\mathbf{i}}\right]\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma \tag{53}$$

ya que con los otros términos se trabaja en forma semejante. Supóngase que la superficie $S$ está dada por $z = f(x, y)$ (ver la figura 6.48).

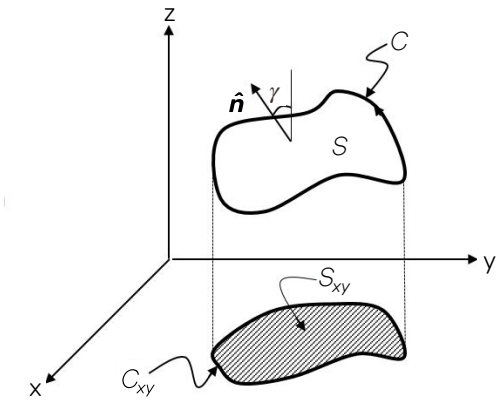



FIGURA 6.48.

Entonces, el vector $\mathbf{N}'$ normal a $S$ es igual a (ver ecuación (61) del capítulo 4)

$$\mathbf{N}' = \frac{\partial z}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial z}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

y el vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ se puede tomar como

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{N}'}{|\mathbf{N}'|}$$

(nótese que $\mathbf{N}'$ y $\hat{\mathbf{n}}$ tienen componente positiva en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$). Además, la diferencial de área de superficie está dada por (ver ecuación (50) del capítulo 4)

$$d\sigma = \left|\mathbf{N}'\right| dA,$$

siendo dA la diferencial de área en el plano de los parámetros. Entonces,

$$\nabla \times \left[F_1 \hat{\mathbf{i}}\right] = \frac{\partial F_1}{\partial z}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\hat{\mathbf{k}}$$

y el integrando de la integral de superficie de la ecuación (53) es

$$\left(\nabla \times \left[F_1\,\hat{\mathbf{i}}\right]\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{N}'}{|\mathbf{N}'|}\right) |\mathbf{N}'|\, dA_{xy}$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \mathbf{N}'\, dA_{xy}$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) dA_{xy}$$

$$= -\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA_{xy}.$$

Ahora se va transforma la integral de superficie en una integral doble. Para esto se debe evaluar la expresión $\left(\nabla \times \left[F_1\,\hat{\mathbf{i}}\right]\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$ en las ecuaciones paramétricas $x = x,\ y = y,\ z = f(x, y)$. Es decir,

$$\left(\nabla \times \left[F_1\,\hat{\mathbf{i}}\right]\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = -\left(\frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y}\right)\Bigg|_{z = f(x, y)} dA_{xy}$$

y de acuerdo con la regla de la cadena se ve que el miembro derecho es la derivada respecto a $y$ de la función $F_1(x, y, f(x, y))$. Denotando con $G(x, y)$ a esta función se tiene que

$$\left(\nabla \times F_1\,\hat{\mathbf{i}}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = -\frac{\partial G}{\partial y}\, dA_{xy},$$

en donde las únicas variables de esta expresión son la $x$ y la $y$. Entonces

$$\iint_S \left(\nabla \times \left[F_1\,\hat{\mathbf{i}}\right]\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = -\iint_{S_{xy}} \frac{\partial G}{\partial y}\, dA_{xy} = -\iint_{S_{xy}} G_y\, dA_{xy},$$

donde $S_{xy}$ es la región de variación de los parámetros $x$ y $y$ y es claramente el resultado de proyectar $S$ sobre el plano $XY$. Como $\hat{\mathbf{n}}$ tiene componente positiva en la dirección de $\hat{\mathbf{k}}$, al recorrer la frontera de $S$ en sentido positivo se induce sobre la frontera de $S_{xy}$ un recorrido también positivo.

Ahora se va a hacer uso del teorema de Green en su forma usual (ecuación (24)):

$$\oint_C \left[M\,dx + N\,dy\right] = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Haciendo $R = S_{xy}$, $C = C_{xy}$, $N = 0$ y $M = G$ se obtiene

$$-\iint_{S_{xy}} G_y\,dA_{xy} = \oint_{C_{xy}} G\,dx$$

y por consiguiente,

$$\iint_S \left(\nabla \times \left[F_1\,\hat{\mathbf{i}}\right]\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \oint_{C_{xy}} G\,dx.$$

Si la curva $C_{xy}$ se parametriza mediante unas ecuaciones de la forma

$$x = \phi(t); \qquad y = \theta(t); \qquad t \in [a, b]$$

la expresión de la integral de línea del miembro derecho en términos del parámetro $t$ es

$$\oint_{C_{xy}} G\,dx = \oint_{C_{xy}} G(x, y)\,dx$$

$$= \int_a^b G\big(\phi(t), \theta(t)\big)\frac{\partial \phi}{\partial t}\,dt$$

$$= \int_a^b F_1\big(\phi(t), \theta(t), f\big(\phi(t), \theta(t)\big)\big)\frac{\partial \phi}{\partial t}\,dt.$$

Por otro lado, se escribirá la expresión para la integral de línea $\oint_C F_1\,dx$ en términos del parámetro de la curva. Como la proyección de $C$ sobre el plano $XY$ es la curva $C_{xy}$, para parametrizar a $C$ se pueden utilizar las ecuaciones

$$x=\phi(t); \qquad y=\theta(t); \qquad z=f(\phi(t),\theta(t)); \qquad t\in[a,b]$$

en donde se ve que las dos primeras ecuaciones son iguales a las de $C_{xy}$. Entonces,

$$\oint_C F_1\,dx=\oint_C F_1(x,y,z)\,dx$$

$$=\int_a^b F_1\Big(\phi(t),\theta(t),f\big(\phi(t),\theta)t\big)\Big)\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dt.$$

Comparando con la integral de línea anterior se ve que

$$\oint_{Cxy} G\,dx=\oint_C F_1\,dx$$

y por lo tanto queda demostrado que

$$\iint_S\Big(\nabla\times\big[F_1\,\hat{\mathbf{i}}\big]\Big)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma=\oint_C F_1\,dx.$$

## Ejemplo 26.

Verificar el teorema de Stokes cuando

$$F=(x+2y)\,\hat{\mathbf{i}}+3z\,\hat{\mathbf{j}}+yz\,\hat{\mathbf{k}}$$

y $S$ es la superficie de la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$. Tómese a $\hat{\mathbf{n}}$ como un vector unitario exterior a la esfera.

**Solución:** La gráfica de la superficie $S$, así como la de su proyección en el plano $XY$, se muestra en las figuras 6.49*a* y 49*b*, respectivamente. Primero se obtendrá la integral de línea sobre la trayectoria que limita a la superficie $S$. En este caso,

la trayectoria es una circunferencia de radio unitario (notar que en este ejemplo la curva $C$ y su proyección $C_{xy}$ sobre el plano $XY$ coinciden). Sus ecuaciones paramétricas son

$$C:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \\ z=0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad t\in[0,2\pi]$$

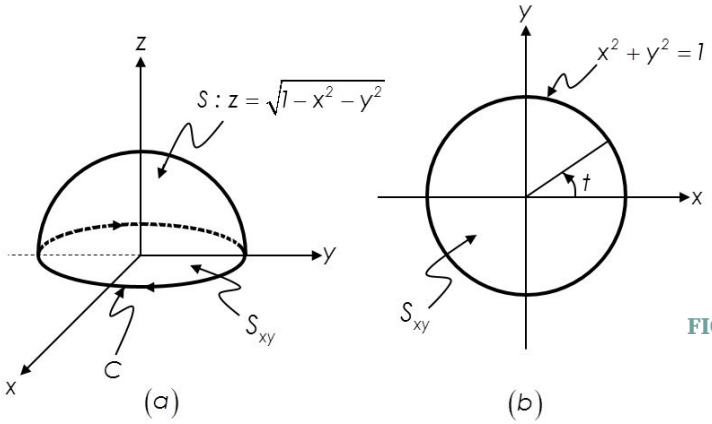



FIGURA 6.49.

$$\Rightarrow \quad \oint_C F\cdot d\mathbf{r}=\oint_C (x+2y)\,dx+3z\,dy+yz\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos t+2\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)\,dt\;+\;3(0)(\cos t)\,dt+\operatorname{sen} t(0)(0)$$

$$=\int_0^{2\pi}-\operatorname{sen} t\cos t\,dt\;-\;2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\,dt$$

$$=-\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}-\left[t-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$=-2\pi.$$

Ahora se calculará la integral de superficie. Se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+2y & 3z & yz \end{vmatrix} = (z-3)\,\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

Además,

$$d\sigma = |\boldsymbol{N}'|\, dA$$

$$\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \frac{\mathbf{N}'}{|\mathbf{N}'|}\, |\boldsymbol{N}'|\, dA$$

$$= \boldsymbol{N}'\, dA.$$

Usando a $x$ y $y$ como parámetros, la ecuación de la superficie se puede escribir como $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y la región de variación de los parámetros es $-1 \le y \le 1; - = \sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$. Entonces,

$$\mathbf{N}' = \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)$$

$$= \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

$$= \left( \frac{x}{z}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z}\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \right),$$

lo cual implica que

$$\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \left( \frac{x}{z}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z}\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \right) dA$$

y

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \left[(z-3)\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}}\right] \cdot \left[\frac{x}{z}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{z}\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right] dA$$

$$= \left[x\left(\frac{z-3}{z}\right) - 2\right] dA$$

$$= \left[(x-2) - \frac{3x}{z}\right] dA.$$

En consecuencia, la integral de superficie queda como

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_R \left[(x-2) - \frac{3x}{z}\right] dA$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x-2)\, dx\, dy$$

$$-3 \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy.$$

Al evaluar las integrales se tiene:

- Para la primera

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x-2)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1-y^2}{2} - 2\sqrt{1-y^2} - \frac{1-y^2}{2} - 2\sqrt{1-y^2}\right] dy$$

$$= -4 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy$$

$$= -2\left[\, y\sqrt{1-y^2} + \operatorname{ang\,sen} y \,\right]_{-1}^{1}$$

$$= -2\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -2\pi.$$

- Para la segunda

$$-3\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

$$= -3\int_{-1}^{1}\left[-\sqrt{1-x^2-y^2}\,\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= 0.$$

Sumando ambas integrales resulta

$$\iint_S \left(\nabla \times \mathbf{F}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = -2\pi.$$

Por lo tanto, se verifica el teorema de Stokes:

$$\iint_S \left(\nabla \times \mathbf{F}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

En el caso del teorema de Green se señaló que existe una cierta similitud entre dicho teorema y el teorema fundamental del cálculo integral. Pues bien, también para el caso del teorema de Stokes se puede observar esa similitud. Tanto en el teorema de Stokes como en el TFCI el número de integrales en el miembro derecho se reduce en 1 en el miembro izquierdo debido al efecto de las derivadas que están en el integrando. Además, ambas ecuaciones muestran que al efectuar la

derivación y la integración indicadas en los miembros derechos se obtiene como resultado una expresión evaluada en la frontera de la región de integración.

### 6.6.1 Corolarios del teorema de Stokes

**Corolario 1.** Sea $\mathbf{F}$ como se define en el teorema de Stokes y sea $S$ una superficie cerrada. Entonces,

$$\oiint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = 0,$$

donde es un vector unitario normal y exterior a la superficie $S$ en el punto $(x, y, z)$ y $d\sigma$ es la diferencial del área de superficie sobre $S$. El símbolo $\oiint_S$ se utiliza para indicar que la integral es sobre una superficie cerrada.

**Corolario 2.** Sean $S$, $C$ y $\mathbf{F}$ como se definen en el Teorema de Stokes. Entonces,

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{F}\, d\sigma,$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a la superficie $S$ en el punto $(x, y, z)$. En esta expresión la curva $C$ se recorre en sentido positivo respecto a una persona que observa a $C$ desde la dirección positiva de $\hat{\mathbf{n}}$.

**Corolario 3.** Sean S y $C$ como se definen en el Teorema de Stokes y sea $\varphi(x, y, z)$ una función escalar. Entonces,

$$\oint_C \phi d\mathbf{r} = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla\phi\, d\sigma.$$

**Corolario 4.** Sean S y $C$ como se definen en el Teorema de Stokes y sean $\varphi(x, y, z)$ y $\psi(x, y, z)$ dos funciones escalares. Entonces,

$$\oint_C \phi \nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\phi \times \nabla\psi) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma.$$

## Ejemplo 27.

Demostrar el corolario 1 del teorema de Stokes.

**Solución:** Supóngase que la superficie mencionada es la de la figura 6.50. Dicha superficie se muestra cortada por el plano arbitrario Π que la divide en dos superficies abiertas $S_1$ y $S_2$. La curva cerrada formada por la intersección del plano Π con $S$, está situada sobre el plano Π y limita simultáneamente a $S_1$ y a $S_2$. Aplicando el teorema de Stokes a ambas superficies se tiene que

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y

$$\iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oint_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

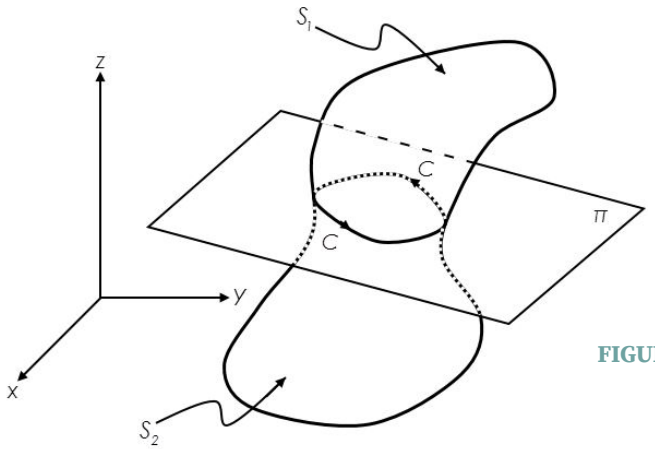



FIGURA 6.50.

Nótese que $C$ tiene distintos signos en las integrales de línea anteriores. Esto se debe a que sobre $S_1$ el vector $\hat{\mathbf{n}}$ exterior a $S$ tiene componente positiva en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$, y por lo tanto $C$ debe recorrerse como lo indica la flecha de la figura 6.51.

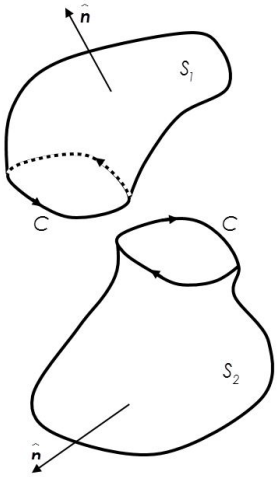



FIGURA 6.51.

En cambio, sobre $S_2$ el vector $\hat{\mathbf{n}}$ apunta hacia abajo y $C$ debe recorrerse en sentido contrario. Sumando las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

$$= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora bien, por las propiedades de las integrales curvilíneos se sabe que

$$\oint_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y por lo tanto,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = 0.$$

## Ejemplo 28.

Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$ donde

$$\mathbf{F} = (x^2+y+2)\hat{\mathbf{i}} + 2xy\,\hat{\mathbf{j}} - (3xyz+z^3)\hat{\mathbf{k}}$$

y $S$ es la superficie de la semiesfera (ver figura 6.52)

$$x^2+y^2+z^2=9; \qquad z \geq 0.$$

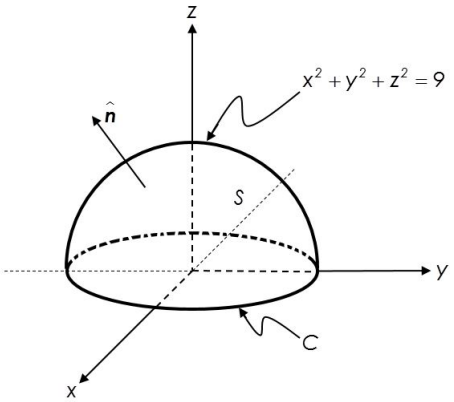



FIGURA 6.52.

**Solución:** Es más fácil obtener $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ que la integral pedida, por lo que se usará el teorema de Stokes. En este caso, la curva $C$ que limita a la superficie $S$ es la circunferencia contenida en el plano $XY$ $(z=0)$ dada por

$$x = 3\cos t; \qquad y = 3\,\text{sen}\, t; \qquad z = 0 \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad dx = -3\,\text{sen}\, t\, dt; \qquad dy = 3\, cost\, dt; \qquad dz = 0.$$

El campo vectorial evaluado sobre $C$ es

$$F = (x^2+y+2)\hat{\mathbf{i}} + 2xy\,\hat{\mathbf{j}} - (3xyz+z^3)\hat{\mathbf{k}}$$

$$= (9\cos^2 t + 3\,\text{sen}\, t + 2)\hat{\mathbf{i}} + 18\,\text{sen}\, t\cos t\,\hat{\mathbf{j}} + 0\,\hat{\mathbf{k}}.$$

Entonces la integral queda como

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ 9\cos^2 t + 3\operatorname{sen} t + 2 \right] (-3\operatorname{sen} t)\, dt \right.$$

$$\left. + \left[ 18 \operatorname{sen} t \cos t \right] (3\cos t)\, dt \right\}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(27\cos^2 t \operatorname{sen} t - 9\operatorname{sen}^2 t - 6\operatorname{sen} t\right) dt$$

$$= \left[ -\frac{27\cos^3 t}{3} - 9\left( \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t \right) + 6\cos t \right]_0^{2\pi}$$

$$= -9\pi.$$

Utilizando el teorema de Stokes en las ecuaciones de Maxwell es posible deducir algunas propiedades importantes del campo electromagnético. En efecto, en el Capítulo 4 se vio que dos de las ecuaciones de Maxwell para el caso de campos estáticos son

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J},$$

donde $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son, respectivamente, los campos eléctrico y magnético, y $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente. Integrando sobre una superficie arbitraria $S$ se tiene:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = 0$$

y

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = I,$$

siendo $I$ la corriente total que atraviesa dicha superficie. Si se aplica el teorema de Stokes a los miembros izquierdos de ambas expresiones, se obtiene:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I.$$

La primera expresión establece que el trabajo realizado por el campo eléctrico estático **E** cuando actúa sobre una carga eléctrica que se mueve sobre una trayectoria cerrada $C$ es cero. La segunda expresión se conoce como *ley de Ampère,* y establece que la integral de línea del campo magnético **H** alrededor de una trayectoria cerrada cualquiera, es igual a la corriente encerrada por esa trayectoria. Por lo tanto, si se miden los valores del campo magnético **H** que rodea a un conductor eléctrico y se integra la cantidad $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una trayectoria cerrada cualquiera que rodee al conductor (por ejemplo, la $a$, la $b$ o la $c$, de la figura 6.53 o cualquier otra mucho más caprichosa) el resultado será siempre igual a la corriente que circula por dicho conductor.

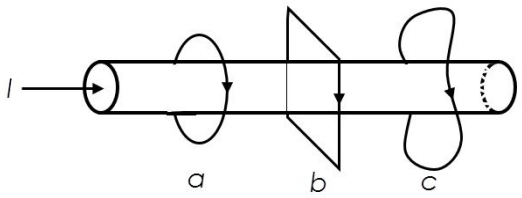



FIGURA 6.53.

## Ejercicios

**6.37.** Comprobar el teorema de Stokes para el caso en el que

$$F = x\,\hat{\mathbf{i}} + (2z - x)\,\hat{\mathbf{j}} + y\,\hat{\mathbf{k}}$$

y $S$ es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tomar a $\hat{\mathbf{n}}$ como el vector exterior a la esfera.

**6.38.** Demostrar la identidad

$$\oiint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = 0$$

donde $\oiint_S$ es una integral sobre la superficie cerrada arbitraria $S$ y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario exterior a $S$.

**6.39.** Calcular la integral $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$ para el caso en el que

$$\mathbf{F} = (y-4)\hat{\mathbf{i}} + 2x\hat{\mathbf{j}} - 3xy\hat{\mathbf{k}}$$

y $S$ es la porción del plano $x+y+z=1$ contenida en el primer octante.

**Solución:** 1/2.

## 6.7 Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia, también conocido como *teorema de Gauss*, es de gran importancia en las matemáticas, la ingeniería y la física. Sin el conocimiento de este teorema el electromagnetismo, la mecánica de fluidos, etc. no estarían tan desarrollado como hasta la fecha. El teorema relaciona una integral de volumen con una integral sobre la superficie que rodea a dicho volumen.

Antes de entrar en detalles conviene advertir que en electromagnetismo existe una propiedad llamada "ley de Gauss" que no debe confundirse con lo que en cálculo vectorial se llama "teorema de Gauss" aunque, como se verá más adelante, se puede establecer una cierta relación entre ambos. Para evitar posibles ambigüedades aquí, para referirse al teorema de Gauss, se usará sólo su primer nombre, es decir, *teorema de la Divergencia*.

A manera de presentación, conviene recordar nuevamente el teorema de Green en el plano. Cuando se vieron sus formas alternativas (corolario 3) se mencionó que podía ser expresado como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

Pues bien, el teorema de la divergencia extiende esta relación a tres dimensiones (ver ecuación (54) abajo). En vez de que aparezca una integral doble sobre una región plana $R$ ahora aparece una integral triple sobre una región tridimensional $R$ y en vez de que aparezca una integral de línea sobre una curva cerrada $C$ ahora aparece una integral de superficie sobre una superficie cerrada $S$.

**Teorema 13.** (***Teorema de la Divergencia***). Si la función vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(x, y, z)\,\hat{\mathbf{j}} + F_3(x, y, z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

tiene primeras derivadas parciales continuas en una región regular $R$ del espacio $\mathbb{R}^3$, rodeada por una superficie cerrada $S$, entonces la integral de volumen de la divergencia de $\mathbf{F}$ es igual a la integral de superficie de la proyección de $\mathbf{F}$ sobre la normal externa de $S$; es decir,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \tag{54}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ la normal unitaria en el punto $(x, y, z)$ de la superficie, que apunta hacia afuera de $R$. Si se expresa a $\hat{\mathbf{n}}$ en términos de sus cosenos directores: $\hat{\mathbf{n}} = \cos\alpha\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\hat{\mathbf{k}}$, el teorema se puede escribir como

$$\iint_S \left(F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma\right) d\sigma = \iiint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV.$$

**Demostración:** En esta prueba se supondrá que $R$ es regular (es decir, que es proyectable sobre los tres planos coordenados). Cuando esto no es así el teorema aún puede seguir siendo válido, pero no se demostrará aquí. Como $R$ es proyectable sobre el plano $XY$ se tiene que al pasar cualquier recta paralela al eje z a través de $R$ se corta a la superficie en sólo dos puntos. Si se denota con $R'$ la proyección de $R$ sobre el plano $XY$, entonces, la integral triple del tercer término de la ecuación anterior:

$$\iiint_R \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV$$

es igual a la integral iterada

$$\iiint_R \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV = \iint_{R'} \left[ \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz \right] dA,$$

siendo $g_1(x, y)$ y $g_2(x, y)$ las funciones asociadas a las superficies $S_1$ y $S_2$, que son las partes de $S$ que limitan por abajo y por arriba respectivamente a la región $R$ (ver figura (6.54)). Utilizando el teorema fundamental del cálculo integral se tiene

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV &= \iint_{R'} \Big[ F_3(x, y, z) \Big]_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dA \\ &= \iint_{R'} F_3(x, y, g_2(x, y))\, dA \\ &\quad - \iint_{R'} F_3(x, y, g_1(x, y))\, dA. \end{aligned} \tag{55}$$

Ahora bien, de la ecuación (46), se tiene que dada una superficie $S$ de ecuación $z = g(x, y)$, donde las variable $x$ y $y$ varían sobre la región plana $R_{xy}$ que es la proyección de $S$ sobre el plano $XY$, la integral de superficie $\iint_S h(x, y, z)\, d\sigma$ de una función arbitraria $h$, es igual a la integral doble $\iint_{R_{xy}} h(x, y, g(x, y)) \left| \sec \gamma \right| dA_{xy}$, siendo $\gamma$ el ángulo entre el eje Z y el vector normal a la superficie $\hat{\mathbf{n}}$. En consecuencia,

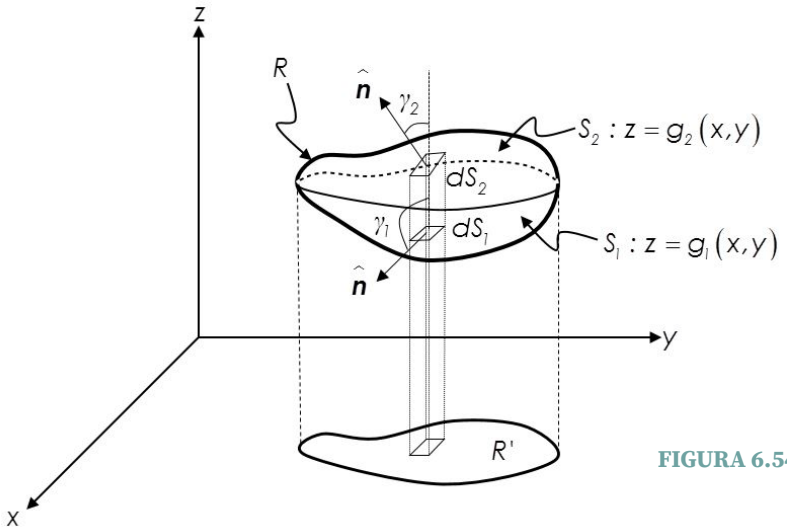



**FIGURA 6.54.**

haciendo

$$h(x,y,z)=\frac{F_3(x,y,z)}{|\sec\gamma|}\ ; \qquad S=S_2; \qquad R_{xy}=R' \qquad \text{y} \qquad dA_{xy}=dA$$

en la ecuación (46), se tiene

$$\iint_{S_2}\frac{F_3(x,y,z)}{|\sec\gamma|}\,d\sigma=\iint_{R'}\frac{F_3(x,y,g_2(x,y))}{|\sec\gamma|}\,|\sec\gamma|\,dA$$

$$=\iint_{R'}F_3(x,y,g_2(x,y))\,dA.$$

Y en forma semejante,

$$\iint_{S_1}\frac{F_3(x,y,z)}{|\sec\gamma|}\,d\sigma=\iint_{R'}\frac{F_3(x,y,g_2(x,y))}{|\sec\gamma|}\,|\sec\gamma|\,dA$$

$$=\iint_{R'}F_3(x,y,g_1(x,y))\,dA.$$

Como en $S_2$ la tercera componente de $\hat{\mathbf{n}}$ es positiva (ver figura 6.54) se tiene que

$$\frac{1}{|\sec\gamma|} = |\cos\gamma| = \cos\gamma = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

En cambio, en $S_1$ la $\hat{\mathbf{n}}$ apunta hacia abajo y en consecuencia su tercera componente es negativa. Por lo tanto

$$\frac{1}{|\sec\gamma|} = |\cos\gamma| = -\cos\gamma = -\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Entonces,

$$\iint_{R'} F_3(x, y, g_2(x, y))\, dA = \iint_{S_2} F_3(x, y, z)\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma \tag{56}$$

y

$$\iint_{R'} F_3(x, y, g_1(x, y))\, dA = -\iint_{S_1} F_3(x, y, z)\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma. \tag{57}$$

Sustituyendo (56) y (57) en (55) se obtiene

$$\iiint_R \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV = \iint_{S_2} F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma + \iint_{S_1} F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

$$= \iint_{S_1 \cup S_2} F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma.$$

Por otra parte, la superficie $S_3$ que limita lateralmente a $R$, tiene un vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ siempre ortogonal a $\hat{\mathbf{k}}$ lo cual implica que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \qquad \text{y que} \qquad \iint_{S_1 \cup S_2} F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = 0.$$

Sumando esto al resultado anterior:

$$\iiint_R \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV = \iint_{S_1 \cup S_2} F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma + \iint_{S_3} F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

$$= \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

$$= \oiint_S F_3\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma \tag{58}$$

ya que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. En forma semejante, si se proyecta $R$ sobre los otros planos coordenados, se obtiene:

$$\iiint_R \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dV = \oiint_S F_1\, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma \tag{59}$$

y

$$\iiint_R \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dV = \oiint_S F_2 \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma. \tag{60}$$

Sumando (58), (59) y (60) se llega a

$$\iiint_R \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \oiint_S \left( F_1\, \hat{\mathbf{i}} + F_2\, \hat{\mathbf{j}} + F_3 \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

o bien

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

y queda demostrado el teorema.

## Ejemplo 29.

Verificar el teorema de la divergencia para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y)\,\hat{\mathbf{i}} - (2y - z)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$$

en la región limitada por los tres planos coordenados y el plano de ecuación $2x + 4y + 2z = 12$.

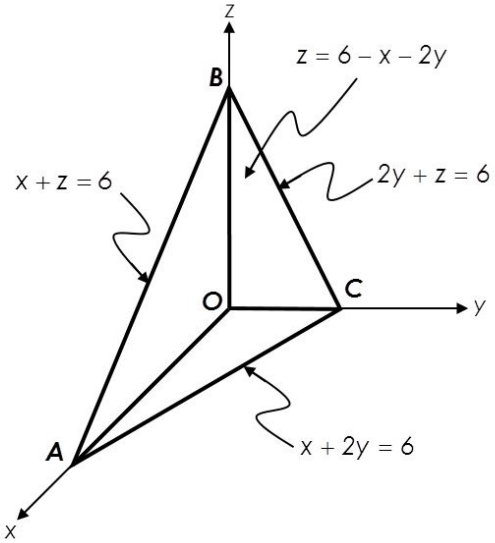



FIGURA 6.55.

**Solución:** La región se muestra en la figura 6.55. Primero se evaluará la integral de volumen

$$\iiint_R (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_0^6 \int_0^{(6-x)/2} \int_0^{6-x-2x} (1)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{(6-x)/2} (6 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^6 \left[ 6y - xy - y^2 \right]_0^{(6-x)/2} dx$$

$$= \int_0^6 \left[ 3(6-x) - x\left(\frac{6-x}{2}\right) - \frac{(6-x)^2}{4} \right] dx$$

$$= \int_0^6 \left( 9 - 3x + \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$= \left[ 9x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{12} \right]_0^6$$

$$= 18.$$

Por otra parte, para calcular la integral de superficie se dividirá la superficie total en sus cuatro caras planas:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{AOC}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma + \iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{AOB}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

$$+ \iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{COB}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma + \iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{ABC}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma.$$

- Para la cara AOC: Se pueden tomar como ecuaciones paramétricas $x = x$; $y = y$ y $z = 0$. Además, $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$. Por lo tanto, $\gamma = 0$ y $d\sigma = dA_{xy}$. Así,

$$\iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{AOC}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint \left[ (2x - y)\,\hat{\mathbf{i}} - (2y)\,\hat{\mathbf{j}} \right] \cdot \left( -\hat{\mathbf{k}} \right) dA_{xy} = 0.$$

- Para la cara AOB: Se toman como ecuaciones paramétricas $x = x$; $y = 0$ y $z = z$. Además, $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{j}}$ y $d\sigma = dA_{zx}$:

$$\iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{AOB}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint \left[ 2x\,\hat{\mathbf{i}} + z\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \right] \cdot \left( -\hat{\mathbf{j}} \right) dA_{zx}$$

$$= \int_0^6 \int_0^{6-z} (-z)\, dx\, dz$$

$$= \int_0^6 (-z)(6-z)\, dz$$

$$= \left[ -3z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^6$$

$$= -36.$$

- Para la cara COB: $x = 0$, $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{i}}$ y $d\sigma = dA_{yz}$:

$$\iint_{\substack{\text{Cara} \\ \text{COB}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint \left[ -y\,\hat{\mathbf{i}} - (2y - z)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \right] \cdot \left( -\hat{\mathbf{i}} \right) dA_{yz}$$

$$= \int_0^6 \int_0^{(6-z)/2} y\, dy\, dz$$

$$= \int_0^6 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{(6-z)/2} dz$$

$$= \int_0^6 \frac{(6-z)^2}{8}\, dz$$

$$= \left[ -\frac{(6-z)^3}{24} \right]_0^6$$

$$= 9.$$

- Para la cara ABC: Se toman como ecuaciones parametrizas $x = x$; $y = y$; $z = 6 - x - 2y$, lo que implica que $\hat{\mathbf{n}} = (1, 2, 1)/\sqrt{6}$ y $d\sigma = \sqrt{6}\, dA_{xy}$. Entonces

$$\iint_{\substack{\text{Cara} \\ \text{ABC}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

$$= \iint (2x-y)\,\hat{\mathbf{i}} - (2y-6+x+2y)\,\hat{\mathbf{j}} + (6-x-2y)\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}\right]\sqrt{6}\; dA_{xy}$$

$$= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\frac{2x-y-2x-8y+12+6-x-2y}{\sqrt{6}}\right)\sqrt{6}\; dx\,dy$$

$$= \int_0^3 \int_0^{6-2y} (-x-11y+18)\; dx\,dy$$

$$= \int_0^3 \left[-\frac{x^2}{2} - 11xy + 18x\right]_0^{6-2y} dy$$

$$= \int_0^3 \left[-18+12y-2y^2-66y+22y^2+108-36y\right] dy$$

$$= \int_0^3 (90-90y+20y^2)\; dy$$

$$= \left[90y - 45y^2 + \frac{20}{3}y^3\right]_0^3$$

$$= 45.$$

De esta forma

$$\oiint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\; d\sigma = 0-36+9+45$$
$$= 18,$$

que es lo que se obtuvo para la integral de volumen y, por lo tanto, el teorema se verifica.

## Ejemplo 30.

Evaluar la integral $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,d\sigma$, donde

$$F=\left(x+y^2\cos z\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(e^{xz}\cos xz-2y\right)\hat{\mathbf{j}}+\text{ang tan}\left(x^2y\right)\hat{\mathbf{k}}$$

y $S$ es la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1;\ z\geq 0$.

**Solución:** La integral de superficie pedida es bastante laboriosa. Sin embargo, si se utiliza el teorema de la divergencia la evaluación es mucho más simple. Como se puede apreciar, $\mathbf{F}$ es diferenciable en el interior de la semiesfera, por lo tanto, se puede aplicar dicho teorema En este caso $\nabla\cdot\mathbf{F}=1+2+0=3$, luego

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma=\iiint_R 3\,dV=3\iiint_R dV=3V,$$

siendo $V$ el volumen de la semiesfera. Por lo tanto,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=3\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2\pi.$$

## Ejemplo 31.

Usar el teorema de la divergencia para calcular el volumen del elipsoide de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

**Solución:** Si en el teorema de la divergencia se hace $\mathbf{F}=x\hat{\mathbf{i}}$ se obtiene

$$\iiint_R \left(\nabla\cdot\left[x\hat{\mathbf{i}}\right]\right)dV=\iiint_R dV=V=\iint_S x\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$$

y como $\hat{\mathbf{n}} = \cos\alpha\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\beta\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\gamma\,\hat{\mathbf{k}}$ se sigue que

$$V = \iint_S x\cos\alpha\, d\sigma.$$

De manera semejante se demuestra que

$$V = \iint_S y\cos\beta\, d\sigma \quad \text{y} \quad V = \iint_S z\cos\gamma\, d\sigma.$$

Sin embargo, para resolver el ejemplo basta usar solo una de dichas integrales. Aquí se usará la última. Además, se calculará únicamente la octava parte de volumen (ver figura 6.56) y el resultado se multiplicará por 8.

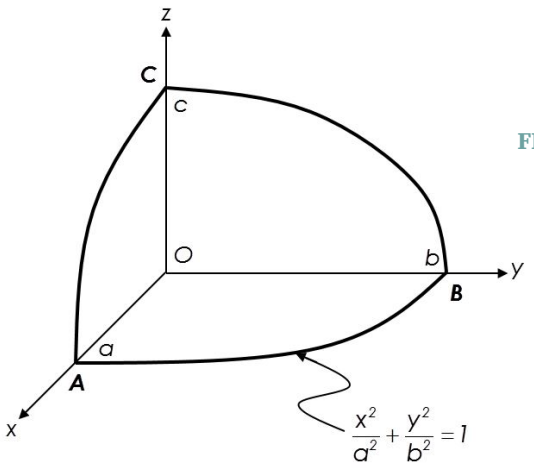



FIGURA 6.56.

Entonces se tiene que

$$V = \iint_S z\cos\gamma\, d\sigma$$

$$= 8\left[\iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{AOC}}} z\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{AOB}}} z\cos\gamma\, d\sigma\right.$$

$$\left. + \iint_{\substack{\text{Cara}\\ \text{BOC}}} z\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\substack{\text{Superficie}\\ \text{elipsoidal}}} z\cos\gamma\, d\sigma\right].$$

Para las caras AOC y BOC; $\cos\gamma = 0$ ya que $\gamma$ es el ángulo entre $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$. Mientras que en la cara AOB el integrando vale cero ya que la coordenada $z$ vale cero. Por lo tanto, sólo sobrevive la integral sobre la superficie elipsoidal. Así,

$$V = 8 \iint_{\substack{\text{Superficie} \\ \text{elipsoidal}}} z \cos\gamma \, d\sigma = 8 \iint_{\text{elipse}} z \, dA_{xy},$$

en donde se ha utilizado la igualdad $d\sigma = \dfrac{dA}{\cos\gamma}$. Entonces,

$$V = 8 \int_0^b \int_0^{a/b\sqrt{b^2-y^2}} z \, dx \, dy$$

$$= 8 \int_0^b \int_0^{a/b\sqrt{b^2-y^2}} = \left( c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx \, dy$$

$$= \frac{4c}{a} \int_0^b = \left[ x\sqrt{a^2 - \frac{y^2a^2}{b^2} - x^2} \right.$$

$$\left. - \left( a^2 - \frac{y^2a^2}{b^2} \right) \text{ang sen} \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - \frac{y^2a^2}{b^2}}}{\sqrt{a^2 - \frac{y^2a^2}{b^2}}} \right]_0^{a/b\sqrt{b^2-y^2}}$$

$$= \frac{4c}{a} \int_0^b \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 - y^2\right) dy$$

$$= \frac{2\pi ac}{b^2} \left[ b^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^b$$

$$= \frac{4}{3} \pi abc.$$

Como es de esperarse, también para el caso del teorema de la divergencia existe una cierta similitud entre dicho teorema y el teorema fundamental de cálculo integral. En ambos teoremas el número de integrales que hay en el miembro derecho se reduce en 1 en el miembro izquierdo debido al efecto de las derivadas que están en el integrando. Además, ambas ecuaciones muestran que al efectuar la derivación y la integración indicadas en los miembros derechos se obtiene como resultado una expresión evaluada en la frontera de la región de integración.

### 6.7.1 Corolarios del teorema de la divergencia

**Corolario 1.** Sean $\psi(x, y, z)$ una función escalar y $\mathbf{F}(x, y, z)$ una función vectorial continuamente diferenciables en una región $R \subset \mathbb{R}^3$ rodeada por una superficie cerrada $S$, entonces

a) $$\iiint_R \nabla \psi \, dV = \oiint_S \psi \, \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

b) $$\iiint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \, dV = \oiint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) \, d\sigma.$$

**Corolario 2.** Sean $R$, $S$ y $\mathbf{F}$ como se definen en el corolario 1. Si la función $\mathbf{F}$ siempre es normal a $S$ entonces

$$\iiint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \, dV = \mathbf{0}.$$

**Corolario 3.** Sean $R$, $S$ y $\mathbf{F}$ como se definen en el corolario 1. Si la función $\mathbf{F}$ es igual al rotacional de alguna función vectorial diferenciable arbitraria $\boldsymbol{\tau}$, es decir, si existe $\boldsymbol{\tau}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \boldsymbol{\tau}$, entonces

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = 0.$$

**Corolario 4.** Sean $R$, $S$ y $\mathbf{F}$ como se definen en el corolario 1. Y sean $\psi$ y $\phi$ dos funciones escalares con segundas derivadas parciales continuas en $R$, entonces

a) $$\iiint_R \left[\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)\right] dV = \iint_S \psi\nabla\varphi\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$$

b) $$\iiint_R \left(\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right) = \iint_S \left(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma.$$

Estas dos igualdades se llaman respectivamente "Primera igualdad de Green" y "segunda igualdad de Green". Haciendo en cualquiera de ellas $\psi$ igual a una constante se obtiene

c) $$\iiint_R \nabla^2\phi\,dV = \iint_S \nabla\phi\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma,$$

y haciendo $\mathbf{F} = \nabla\phi$ en la primera se obtiene

d) $$\iiint_R \psi\nabla\cdot\mathbf{F}\,dV + \iiint_R \mathbf{F}\cdot\nabla\psi\,dV = \iint_S \psi\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma.$$

## Ejemplo 32.

En el ejemplo 28 del Capítulo 4 se mencionó que dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0.$$

La primera establece que la divergencia de la *densidad de flujo eléctrico,* **D**, es igual a la densidad volumétrica de carga $\rho$; y la segunda dice que la *inducción magnética* **B** es un campo solenoidal.

Si a estas expresiones se les aplica el teorema de la divergencia se tiene:

- Para la primera,

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{D})\,dV = \iiint_V \rho\,dV$$

pero como la integral de la densidad de carga es igual a la carga eléctrica total $Q$ contenida en $V$, o sea

$$\iiint_V \rho\,dV = Q$$

entonces

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_V \rho\,dV = Q.$$

A esta igualdad se le llama *ley de Gauss,* y establece que: *"El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada:* $\oiint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$*, es igual a la carga eléctrica Q encerrada por dicha superficie".* Por ejemplo, si se rodea a un electrón aislado mediante una superficie $S$, el valor de $\oiint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ será exactamente igual al valor de la carga del electrón. En cambio, si se rodea a un electrón y a un protón el valor de la integral será igual a cero, ya que el protón y el electrón tienen cargas iguales, pero de signos contrarios por lo tanto la carga total del par es igual a cero.

Esta ley es una de las más importantes de la electrostática y se puede demostrar que es equivalente a la ley de Coulomb. Sin embargo, aquí no se hará esa demostración, sino que únicamente se enfatizará que ambas leyes (la de Coulomb y la de Gauss) se pueden ver como consecuencias del teorema de la divergencia aplicado a la ecuación de Maxwell, $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$.

- Para la segunda

$$\oiint_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_v (\nabla\cdot\mathbf{B})\,dV = \iiint_v (0)\,dV = 0$$

Esta ley establece que: *"El flujo magnético que atraviesa cualquier superficie cerrada:* $\oiint_s \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ *es igual a cero"*. Comparando con el resultado para el campo D: $\oiint_s \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = Q$, vemos que en el caso magnético no existe el análogo de las cargas eléctricas aisladas; es decir, no existen *"cargas magnéticas"* aisladas. Cualquier cuerpo con propiedades magnéticas se comportará de tal manera que su polo positivo (o sea su carga magnética positiva) siempre va acompañado de su polo negativo (su carga magnética negativa), y viceversa. Por lo tanto, la carga magnética total siempre vale cero. En otras palabras, jamás se podrá aislar el polo norte de un imán; si dicho imán se parte en dos pedazos, los pedazos resultantes serán otros dos imanes (bipolares) a su vez, de manera que la *"carga magnética"* total siempre es cero.

## Ejemplo 33.

Supóngase que en un sistema de coordenadas esféricas la densidad volumétrica de carga en una cierta región del espacio está dada por $\rho = \rho_0\, r^{3/2}$. ¿Cuánta carga se encuentra dentro de una esfera de radio $a$?

**Solución:** La carga está dada por

$$Q = \iiint_v \rho\, dV,$$

donde en coordenadas esféricas $dV = r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$. Entonces

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho_0\, r^{3/2}\, r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \int_0^{a} r^{7/2}\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\varphi)\left[\frac{2}{9} r^{9/2}\right]_0^{a} d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{2\rho_0}{9} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^{9/2} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{2\rho_0}{9}\, a^{9/2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{2\rho_0}{9}\, a^{9/2} \int_0^{2\pi} \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{2\rho_0}{9}\, a^{9/2} \int_0^{2\pi} 2\, d\theta$$

$$= \frac{4\rho_0}{9}\, a^{9/2} \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{8\pi}{9}\, \rho_0\, a^{9/2}\,.$$

Además, usando la ley de Gauss: $Q = \oiint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$ se sigue que

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \frac{8\pi}{9}\, \rho_0\, a^{9/2}.$$

lo que indica que el flujo eléctrico que atraviesa la superficie esférica de radio $a$ es $(8\pi/9)\rho_0\, a^{9/2}$.

## Ejercicios

**6.40.** Comprobar el teorema de la divergencia para el caso en el que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, z, z)$$

y $R$ es la región limitada por los tres planos coordenados y el plano $2x + 4y + 2z = 12$.

**6.41.** En el ejercicio 6.30 se pidió utilizar la integral triple para calcular el volumen del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ahora se pide nuevamente calcular este volumen, pero usando el teorema de la divergencia aplicado a la función $\mathbf{F} = (0, y, 0)$. Se sugiere al lector consultar el ejemplo 31 discutido en la sección 6.7.

**6.42.** Supóngase que la densidad de masa $\rho$ de una esfera sólida de radio $a$ está dada por $\rho = Kr$, donde $K$ es una constante y $r = x^2 + y^2 + z^2$. ¿Cuál es la masa $M$ de la esfera? Se sugiere utilizar coordenadas esféricas y la fórmula

$$M = \iiint_V \rho \, dV,$$

siendo $V$ el volumen de la esfera.

## 6.8 Integrales impropias

Para finalizar se estudiará muy brevemente el concepto de integral doble impropia. También existen integrales triples impropias y de dimensiones mayores, pero aquí se restringirá el estudio únicamente al caso de dos dimensiones. Este concepto es semejante al que se estudió en el cálculo integral de funciones de una sola variable. Es decir, son integrales en donde la región de integración $R$ es infinita, o en donde la función por integrar $f$ diverge en uno o más puntos de $R$. Estas integrales se representan igual que las integrales dobles usuales, es decir con los símbolos $\iint_R f(x, y)\, dA$ o bien $\iint_R f(\mathbf{r})\, dA$. Cabe recordar que, tanto en el caso de integrales simples como en el de las dobles, la definición de integral se da a partir de una suma de Riemann que involucra una función *acotada* definida sobre una región *finita*. Si alguna de estas dos condiciones no se cumple, el concepto de integral usual no está definido. En lo que sigue se mostrará como generalizar la definición cuando una o ambas de las condiciones anteriores no se cumple.

El número de casos de integrales dobles impropias es mucho mayor que el de las integrales de una sola variable, pero aquí se estudiarán sólo dos de ellas. Considérese primero un caso en el que la función no está acotada.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada en una región $R$, excepto en el punto $\mathbf{r}_0 \in R$ (ver la figura 6.57*a*).

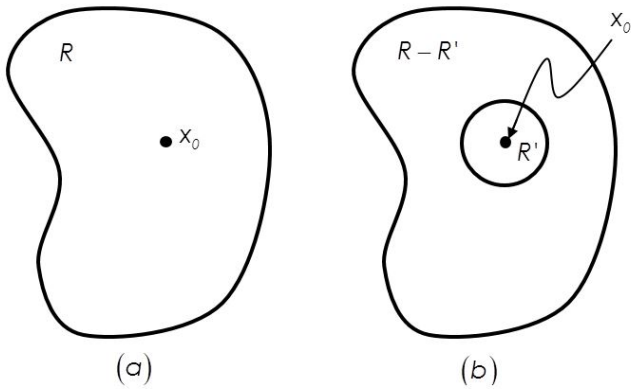



FIGURA 6.57.

Considérese ahora una región $R'$ que también contiene a $x_0$, y cuyo tamaño se hará tender a 0. El tamaño de $R'$ se puede definir mediante el diámetro $D$ dado por

$$D = \sup \left| \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \right|,$$

donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2 \in R'$. Supóngase también que $\iint_R dA$ y $\iint_{R'} dA$ existen en el sentido usual. Entonces, si el límite

$$I = \lim_{D \to 0} \iint_{R - R'} f(\mathbf{r})\, dA$$

existe (siendo $R - R'$ el conjunto diferencia de $R$ y $R'$; ver figura 6.57b), se dice que $f$ es integrable impropiamente sobre $R$, y que el valor de la integral es $I$. También se acostumbra a decir que la integral doble impropia es convergente. En caso contrario se dice que es divergente.

## Ejemplo 34.

Dada la función $f(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, y la región

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -1 \leq x \leq 1;\ -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

investigar si $f$ es integrable impropiamente sobre $R$. En caso afirmativo calcular el valor de la integral.

**Solución:** Se ve que la función $f$ es continua y acotada en todos los puntos del plano excepto en las vecindades del origen, y que éste está contenido en $R$. Conviene entonces tomar como región $R'$ un pequeño cuadrado dado por (ver figura 6.58)

$$R' = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -\epsilon < x < \epsilon;\ -\epsilon < y < \epsilon \right\},$$

donde se ve que $D = 2\sqrt{2}\ \epsilon$ . Además, la región $R - R'$ se puede expresar como la unión de las siguientes cuatro regiones:

$$R - R' = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4,$$

donde

$$R_1 = \{(x, y) \mid \epsilon < x \leq 1; -x < y \leq x\} \qquad \text{(región tipo } R_x\text{)}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y < -\epsilon; y < x \leq -y\} \qquad \text{(región tipo } R_y\text{)}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid -1 \leq x < -\epsilon; x \leq y < -x\} \qquad \text{(región tipo } R_x\text{)}$$

$$R_4 = \{(x, y) \mid \epsilon < y \leq 1; -y \leq x < y\} \qquad \text{(región tipo } R_y\text{)}$$

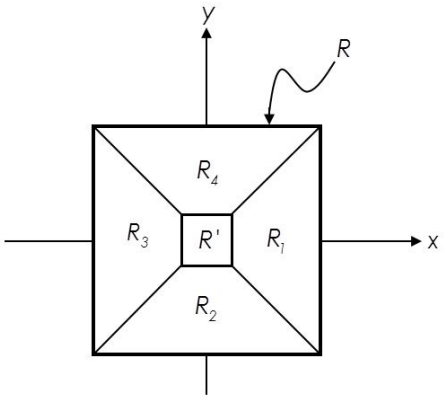



FIGURA 6.58.

Para determinar si la función es integrable impropiamente, se debe investigar si el siguiente límite existe:

$$\lim_{D \to 0} \iint_{R-R'} f(\mathbf{x})\, dA = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \iint_{R_1} f(\mathbf{r})\, dA + \iint_{R_2} f(\mathbf{r})\, dA \right.$$

$$\left. + \iint_{R_3} f(\mathbf{r})\, dA + \iint_{R_4} f(\mathbf{r})\, dA \right\}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{1} \int_{-x}^{x} \frac{dy\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int_{-1}^{-\epsilon} \int_{y}^{-y} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{-\epsilon} \int_{x}^{-x} \frac{dy\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int_{\epsilon}^{1} \int_{-y}^{y} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}.$$

Como la tercera integral es igual a la primera (basta cambiar en la tercera $x$ por $-x$) y la segunda es igual a la cuarta (cambiando en la segunda $y$ por $-y$) se puede escribir que

$$\lim_{D\to 0}\iint_{R-R'} f(\mathbf{x})\,dA = 2\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{\epsilon}^{1}\int_{-x}^{x}\frac{dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int_{\epsilon}^{1}\int_{-y}^{y}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}.$$

Además, si se intercambian las variables $x$ y $y$ en la última integral, se obtiene la primera, que es la que corresponde a $R_1$. Por lo tanto,

$$\lim_{D\to 0}\iint_{R-R'} f(\mathbf{x})\,dA = 4\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\int_{-x}^{x}\frac{dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 4\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\left[\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\Bigg|_{-x}^{x} dx$$

$$= 4\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\left[\ln\left(x+\sqrt{2x^2}\right)-\ln\left(-x+\sqrt{2x^2}\right)\right] dx$$

$$= 4\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\left[\ln\left(x\left(\sqrt{2}+1\right)\right)-\ln\left(x\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right] dx$$

$$= 4\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) dx$$

$$= 4\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1} dx$$

$$= 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2\lim_{\epsilon\to 0}\left(1-\epsilon\right)$$

$$= 8\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Por lo tanto, el límite sí existe y el valor de la integral es

$$\iint_R f(\mathbf{r})\, dA = 8 \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Es ilustrativo evaluar nuevamente la integral sobre la región $R_1$ pero ahora utilizando coordenadas polares.

La región $R_1$ considerada en coordenadas polares como región $R_\theta$, se puede expresar inmediatamente si se observa que el valor máximo de $r$ es tal que $r\cos\theta = 1$, y el valor mínimo es tal que $r\cos\theta = \epsilon$ (ver también la figura 6.58). Así, $r_{max} = \sec\theta$, $r_{min} = \epsilon\sec\theta$, y la región $R_1$ es

$$R_1 = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{\pi}{4};\quad \epsilon\sec\theta \le r < \sec\theta \right\}$$

Entonces

$$\iint_{R_1} f(\mathbf{r})\, dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{\epsilon\sec\theta}^{\sec\theta} \frac{1}{r}\, r\, dr\, d\theta \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r \Big|_{\epsilon\sec\theta}^{\sec\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec\theta(1-\epsilon)\, d\theta$$

$$= (1-\epsilon)\ln\left(\sec\theta+\tan\theta\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= (1-\epsilon)\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$= 2(1-\epsilon)\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

y al tomar el límite $\epsilon \to 0$ y multiplicar por 4, se obtiene el resultado anterior.

Se sugiere al estudiante que resuelva nuevamente este ejercicio, tanto en coordenadas cartesianas como polares, pero ahora considerando como regiones $R$ y $R'$ a los círculos de radios iguales a 1 y $\epsilon$, respectivamente.

Por último, se considerarán las integrales dobles impropias cuando la región de integración no está acotada. Se discutirán únicamente los casos en los que la región se puede expresar como una región del tipo $R_x$ o bien $R_y$ y en donde uno o varios de los límites de las variables $x$ o bien $y$ son infinitos. Para calcular estas integrales lo que se hace es realizar la integral reiterada asociada asignando a los límites de integración valores constantes finitos pero indeterminados. Después se efectúa la integración y se evalúa el resultado en esos valores finitos indeterminados. Finalmente se calcula el límite cuando dichas constantes tienden a infinito. Si el resultado de esto es un valor finito se dice que la integral doble impropia existe o que es convergente, pero si el límite no existe se dice que la integral impropia no existe.

## Ejemplo 35.

Evaluar la integral doble impropia

$$\iint_R \frac{y}{(1+y^2)^2}\, dA$$

donde $R$ es el conjunto $\{(x, y) \mid 0 \leq x < \infty\,;\, x \leq y < \infty\}$.

**Solución:** En vez de escribir $\infty$ en los límites superiores de la integral iterada correspondiente se escriben dos constantes indeterminadas $m$ y $n$ que se consideran como finitas y se escriben los símbolos $\lim_{m\to\infty}$ y $\lim_{n\to\infty}$ para indicar que después de integrar se debe evaluar en dichos límites. Así,

$$\iint_R \frac{y}{(1+y^2)^2}\, dA = \lim_{m\to\infty} \int_0^m \lim_{n\to\infty} \int_x^n \frac{y}{(1+y^2)^2}\, dy\, dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^m \lim_{n\to\infty} \left[ -\frac{1}{2(1+y^2)} \right]_x^n dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^m \lim_{m\to\infty} \left[ -\frac{1}{2(1+n^2)} + \frac{1}{2(1+x^2)} \right] dx,$$

tomando el límite $n \to \infty$

$$\iint_R \frac{y}{(1+y^2)^2}\, dA = \lim_{m\to\infty} \int_0^m \frac{1}{2(1+x^2)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \int_0^m \frac{dx}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \left[ \text{ang tan}\, x \right]_0^m$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \left[ \text{ang tan}\, m - \text{ang tan}\, 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, la integral doble impropia es convergente.

## Ejemplo 36.

Calcular el volumen en el primer octante del solido que está limitado por los planos coordenados y la superficie de ecuación

$$z = \frac{1}{(2+4x+6y)^4}.$$

**Solución:** Esta superficie siempre está por encima del plano $XY$ y por lo tanto nunca lo corta. En consecuencia, la región es infinita y está dada por

$$R = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \le x < \infty\,; \qquad 0 \le y < \infty\,; \qquad x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

La integral doble impropia es

$$V = \iint_R \frac{dA}{(2+4x+6y)^4}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^m \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{(2+4x+6y)^4}\, dy\, dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^m \lim_{n\to\infty} \left[ -\frac{1}{18(2+4x+6y)^3} \right]_0^n dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^m \lim_{n\to\infty} \left[ -\frac{1}{18(2+4x+6n)^3} + \frac{1}{18(2+4x)^3} \right] dx,$$

tomando el límite $n \to \infty$

$$V = \lim_{m\to\infty} \int_0^m \left[ \frac{1}{18(2+4x)^3} \right] dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[ \frac{1}{144(2+4x)^3} \right]_0^m$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[ -\frac{1}{144(2+4m)^3} + \frac{1}{144(2)^2} \right] dx,$$

$$= \frac{1}{144(2)^2}$$

$$= \frac{1}{576}.$$

## Ejercicios

**6.43.** Sea $R$ la zona del primer octante que está limitada superiormente por la superficie de ecuación

$$z = \frac{1}{(x+y+1)^3}.$$

*i)* Identifique la forma de $R$ y escriba su expresión analítica.

*ii)* Escriba la integral impropia que da el volumen de $R$ y calcúlela.

**6.44.** Sea $R$ el conjunto $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \infty\}$. Calcule la integral impropia

$$\iint_R \frac{3y^2}{(2+y^3)^3}\, dA.$$

## IGUALDADES VECTORIALES

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\nabla\cdot\mathbf{a}+\nabla\cdot\mathbf{b}$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\nabla\times\mathbf{a}+\nabla\times\mathbf{b}$$

$$\nabla\times\nabla\psi=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})-\nabla\cdot(\nabla\mathbf{a})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})-\nabla^2\mathbf{a}$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot\mathbf{a}$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{a})=\nabla\psi\times\mathbf{a}+\psi\nabla\times\mathbf{a}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

Si $\mathbf{x}$ representa el vector de coordenadas entonces:

en cartesianas: $\mathbf{x} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$

en esféricas: $\mathbf{x} = r\hat{e}_r$, siendo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

en cilíndricas: $\mathbf{x} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_2$, siendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

Además,

$$\nabla\cdot\mathbf{x} = 3$$

$$\nabla\times\mathbf{x} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{n} = \frac{2}{r}, \quad \text{siendo } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$$

$$\nabla\times\mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{n} = \frac{1}{r}\left[\mathbf{a} - \mathbf{n}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\right] \equiv \frac{\mathbf{a}_\perp}{r}$$

$\mathbf{a}_\perp$ es la componente de $\mathbf{a}$ perpendicular a $\mathbf{n}$.

## ALGUNOS OPERADORES DIFERENCIALES EN LOS TRES SISTEMAS DE COORDENADAS MÁS COMUNES

### A. CARTESIANAS

$$\nabla\psi = \hat{e}_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \hat{e}_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{e}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

### B. CILÍNDRICAS

$$\nabla\psi = \hat{e}_\rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \hat{e}_\rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{e}_\varphi \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} \right) + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} \right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

## C. ESFÉRICAS

### (φ es la colatitud, es decir $z = r\cos\varphi$ y θ, el ángulo azimutal)

$$\nabla\psi = \hat{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{sen}\,\varphi\, A_\varphi\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \hat{e}_r \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{sen}\,\varphi\, A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right]$$

$$+ \hat{e}_\varphi\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\theta\right)\right] + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\psi\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

## TEOREMA DE GREEN

En lo que sigue $A$ es una región en $\Re^2$; $dA$, la diferencial de área; $c$, la curva que rodea a $A$; $d\ell = |d\mathbf{r}|$, diferencial de longitud de arco con $d\mathbf{r} = \hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy$; $\mathbf{n}$, un vector unitario normal a $c$ y exterior a $A$; $P$ y $Q$, dos funciones escalares de variable vectorial: $\Re^2 \to \Re$; y $\hat{N}$ un vector unitario normal a la región $A$.

1a. forma $$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

2a. forma $$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (\text{con } \mathbf{F} = \hat{\imath}P + \hat{\jmath}Q)$$

3a. forma $$\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N}\, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

4a. forma $$\int_A (\nabla \cdot \mathcal{F})\, dA = \int_C \mathcal{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (\text{con } \mathcal{F} = \hat{\imath} Q - \hat{\jmath} P).$$

## TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA

En lo que sigue $V$ representa una región en $\Re^3$; $dV$, la diferencial de volumen; $S$, la superficie que rodea a $V$; $d\sigma$, la diferencial de área superficial; y $\mathbf{n}$ un vector unitario normal a $S$ y exterior a $V$.

Teorema $$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

Corolario $$\int_V \nabla \psi\, dV = \int_S \psi \mathbf{n}\, d\sigma$$

Corolario $$\int_V \nabla \times \mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{F}\, d\sigma.$$

## IDENTIDADES DE GREEN

1a. identidad $$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi)\, dV = \int_S \varphi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi\, d\sigma$$

Corolario $$\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \int_V \mathbf{F}\, \text{div}\, \mathbf{G}\, dV + \int_V (\mathbf{G} \cdot \nabla)\, \mathbf{F}\, dV$$

2a. identidad $$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi)\, dV = \int_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

## TEOREMA DE STOKES

En lo que sigue $S$ representa una superficie abierta en $\Re^3$; $\hat{N}$, un vector unitario normal a $S$; y $c$ la curva que rodea a $S$ recorrida en sentido positivo de acuerdo con un observador que está del mismo lado de la superficie que el vector $\hat{N}$.

Teorema $$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N}\, d\sigma = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Corolario $$\int_S \hat{N} \times \nabla\psi\, d\sigma = \oint_c \psi d\mathbf{r}.$$

## ALGUNOS EJEMPLOS DE INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int_V \nabla \cdot (\psi \mathbf{F})\, dV - \int_V \mathbf{F} \cdot \nabla\psi\, dV$$

$$= \int_S \psi \mathbf{F} \cdot d\sigma - \int_V \mathbf{F} \cdot \nabla\psi\, dV$$

$$\int_V \mathbf{F} \cdot \nabla\psi\, dV = \int_V \nabla \cdot (\psi \mathbf{F})\, dV - \int_V \varphi \nabla \cdot A\, dV$$

$$= \int_S \psi \mathbf{F} \cdot d\sigma - \int_V \psi \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

## TEOREMA DE HELMHOLTZ

Todo campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ suficientemente bien comportado se puede descomponer como la suma de una componente $\mathbf{F}_L(\mathbf{r})$ de rotacional nulo más otra componente $\mathbf{F}_T(\mathbf{r})$ de divergencia nula dadas por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_L(\mathbf{r}) + F_T(\mathbf{r})$$

$$= -\nabla \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

## FÓRMULAS DE DIFERENCIACIÓN DE INTEGRALES DEFINIDAS QUE DEPENDEN DE UN PARÁMETRO

**1** Regla de Leibnitz

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + f(t, b(t)) \frac{db}{dt} - f(t, a(t)) \frac{da}{dt}$$

**2** Si $\mathcal{C}(t)$ es una curva suave a trozos en $\Re^3$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \right] \cdot d\mathbf{r}.$$

**3** Si $S(t)$ es una superficie suave a trozos en $\Re^3$

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{G}(t, \mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \right] \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

**4** Teorema de Reynolds. Si $V(t)$ es una región en $\Re^3$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t, \mathbf{r}) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV.$$

# Índice alfabético



## A

**aceleración**
de una partícula: 448
de la gravedad: 202
normal: 449 y *ss*
tangencial: 449 y *ss*
**Ampère**
ley de: 798
**analítica**
geometría: 4, 36, 45, 168
**angular**
módulo de la aceleración: 451, 452
rapidez: 451, 452
velocidad: 428, 459, 495, 497, 565
**ángulo entre dos vectores:** 267, 268, 626
**aproximación poligonal:**
*véase* longitud de arco
**área**
de un paralelogramo: 475
de una esfera: 748
de una región plana: 530 y *ss*
de una superficie: 523, 524, 543, 747
diferencial de: 523-528
**área de superficie**
de la gráfica de una función: 747 y *ss*
en términos de sumas de Riemann: 742 y *ss*
Arquímedes, espiral de: 544
**asociatividad:** 24-25

## B

**base:** 67
**base canónica** 514 y *ss*
**base contravariante:** 516-520
**base covariante:** 515-520

## C

**campo**
conservativo: 641, 648-649
de fuerza conservativo: 640 y *ss*
de velocidad de un fluido: 486-489
eléctrico: 492 y *ss*
electromagnético: 492, 493, 755
escalar: 11, 20, 151, 336-338
magnético: 492 y *ss*, 798
vectorial o de vectores: 371, 372, 376, 378, 489, 726
vorticoso: 495
irrotacional: 497 y *ss* , 648 y *ss*
solenoidal: 489, 813
**centro de masa:** 707, 708, 773
**centroide:** 708, 773
**cilindro:** 61, 92, 749
elíptico recto: 74, 379
parabólico recto: 61 y *ss*
**cinemática de una partícula:** 448 y *ss*
**circulación:** 725-727
**círculo meridiano:** 472
osculador: 436, 459
paralelo: 472
**circunferencia:** 10, 46, 58, 425, 472, 435, 439, 589, 612, 691, 695
**codominio:** 11
**componente**
de un vector: 2, 265-268
normal: 450
tangencial: 450
**composición de funciones:** 24, 210-227, 236
**conjunto**
abierto: 7, 285-289, 393 y *ss*, 603, 609, 648
agujerado: 292
cerrado: 7
conexo: 8, 283, 609, 722
convexo: 8, 283, 288

de vectores: 514
recíproco: 517
simplemente conexo: 8
**cono:** 55, 62 y *ss*, 80-84
**conservación**
de energía: 641-644
**constante de proporcionalidad:** 508
**constante gravitacional:** 551
**continuidad:** 115, 127 y *ss*, 172, 377 y *ss*
**convexo:** 8, 283, 603
**coordenadas:** *véase también* sistemas de coordenadas biesféricas: 557
bipolares: 555
cartesianas: 507, 508, 821
cilíndricas: 541
cilíndricas elípticas: 554
cilíndricas parabólicas: 561
curvilíneas: 468, 507 y *ss*, 520
esféricas: 508, 509, 547 y *ss*
esferoidales prolatas o alargadas: 558
esferoidales oblatas o achatadas: 560
parabólicas: 556
polares: 131, 749, 822
sistema de, ortogonal: 520 y *ss*
toroidales: 563
**cosenos directores:** 269, 744, 800
**Coulomb**
ley de: 631, 814
**Cramer:** *véase* regla de Cramer
**curva**
de Jordan: 416
lisa: 417, 664
simple: 416, 664
**curvas:** 413-417
arbitraria: 523-526, 529
cerrada simple: 416, 589
coordenadas: 513
de nivel: 16-20, 85, 342
equipotenciales: 19
paramétricas: 468
plana: 98, 140, 167, 261
**curvatura:** 435
radio de: 435

# D

**densidad:** 491 y *ss*, 702
**densidad de flujo eléctrico:** 814
**derivada:** 386 y *ss*
definición de: 386
direccional: 140 y *ss*, 257, 261-272, 307 y *ss*, 332, 344, 348 y *ss*
total: 210 y *ss*
**derivada parcial:** 144-146, 150-158, 164, 172, 210, 222, 280, 301 y *ss*, 329 y *ss*, 354 y *ss*, 386 y *ss*,
mixta: 152, 157
**determinante jacobiano:** 241 y *ss*
*Véase también* jacobiano diferencial: 181 y *ss*, 392 y *ss*, 678 y *ss*, 693, 702, 725, 738, 743, 753, 761 y *ss*, 768, 783 y *ss*
de longitud de arco: 424, 523, 544
exacta: 278, 279
geometría: 439
total: 191
**dimensión:** 311, 329
**directriz:** 75 y *ss*
distancia de un punto a
un paraboloide: 325
un plano: 324
una recta: 366, 367
**divergencia:** 482 y *ss*, 536
**dominio:** 11 y *ss*, 321, 371

# E

**ecuación de continuidad:** 491
**ecuaciones de Maxwell:** 491, 492, 499, 797, 813, 814
**ecuación del plano:** 74
**ecuación vectorial de una superficie:** 467 y ss
**ecuación de una recta vertical:** 471
**electromagnetismo:** 492, 499, 798
**electrostática:** 814
**elipsoide:** 49, 77
**energía**
cinética: 642
potencial: 498, 631
**error**
absoluto: 198
relativo: 199
**escala, factores de:** 515-517
**esfera:** 46, 346, 353
**espacio *n*-dimensional:** 333
**espiral de Arquímedes:** 544
**extremo**
condicionado: 359

local o relativo: 318, 355, 362
máximo: 298 y ss
mínimo: 298 y ss
**extremos:** 298-306, 316, 331, 340 y *ss*
puntos: 301, 349

# F

**factores de escala:** 515, 517
**flujo:** 495 y *ss*, 730
eléctrico: 492, 814, 815
irrotacional: 497
magnético: 492, 814
**fórmulas de Frenet–Serret:** 434 y ss
primera: 434
segunda: 437
tercera: 438
**frontera de un conjunto:** 6-8
**fuerza elástica:** 498, 499
**función**
acotada: 316, 342, 343, 367, 619, 665 y *ss*, 824
armónica: 501
compuesta: 210 y *ss*, *Véase* composición de funciones continua: 120, 127 y *ss*, 301-323, 358-361, 382 y *ss*, 392, 400, 415 y *ss*, 424, 425, 452, 473 y *ss*, 487, 497, 501, 574 y *ss*, 597, 622 y *ss*, 671, 673, 680-686, 738, 739, 758, 760, 764, 784, 800, 812, 813, 818, 819
**derivable:** *Véase* derivada y derivada parcial
**diferenciable:** 173, 181, 182, 203, 262, 358-361, 393, 399-403, 485, 493, 509, 510, 534-536, 541, 725, 809, 812
*Véase también* diferencial.
escalar: 1 y *ss*, 115 y *ss*, 301, 328, 336, 344, 358, 372, 374, 394, 401-403, 482-485, 493, 497, 499, 503, 506, 514, 534, 541, 546, 571, 597 y *ss*, 618, 635, 641, 644, 669 y *ss*, 812
integrable: 619, 670, 686, 758, 759, 819, 820
inversa: 15
objetivo: 340, 343, 353, 366
polinomial: 129
real: 11, 16, 30, 167, 181
vectorial: 257, 355, 370-393, 399-428, 467 y *ss*, 482 y *ss*, 485-499, 509-514, 525, 526, 534, 536, 544-546, 618-626, 642, 648, 716-725, 736-745, 784, 796, 799, 812
funciones: *Véase* función

# G

**Gauss**
ley de: 799, 814
teorema de : 685 (A este teorema también se le llama teorema de la divergencia)
**generatriz:** 75
**geometría diferencial:** 439
**gradiente (grad):** 192, 257-272, 289-294, 303, 304, 329, 347, 350, 354, 356, 394, 497, 499, 534, 538, 541, 544, 550, 615 y *ss*, 632, 641, 648
**gráfica:** 16
de una función: 16, 17, 146, 299, 300, 317, 323, 341
**Green:** 663
identidades de: 697
teorema de: 712, 721-733, 734, 737, 738, 783, 787, 792, 800

# H

**hélice:** 586
circular: 426
cónica: 466
**Hesse, Ludwig Otto:** 330
**hessiano:** 330
**hiperboloide de revolución:** 103
de una hoja: 51-55, 62
de dos hojas: 54, 62
**Hooke, ley de:** 498

# I

**identidad de Green:** *Véase* Green
**imagen:** 12, 372
**inducción magnética:** *Véase* magnético(a)
**incremento:** 141, 182-187, 195-200, 203, 204, 213, 258, 260, 306, 311, 313, 319, 323, 345, 350, 383, 392, 399, 409
**integral**
curvilínea: *Véase* integral de línea
de línea: 568-662, 669, 670, 720, 722, 724, 729-731, 735, 738, 787-791, 795, 798, 800
propiedades: 581
de superficie: 740-744, 752, 785, 790, 791, 799, 801, 806

definida: 619, 678
del campo vectorial: *véase* integral vectorial
doble: 664, 670, 674, 677-679, 684-688, 692, 693, 699, 702, 709, 722, 740, 760, 764, 770, 786, 800, 801, 818, 823, 824
impropia: 783
iterada: (También llamada reiterada) 670, 679, 680, 683-689, 693, 695, 758, 760, 761-765 769, 773, 777, 801, 823
reiterada:*Véase* integral iterada
triple: 754, 758, 763, 765, 768, 770, 801
vectorial: 618-620
**integral de Riemann:** *Véase* Riemann
intensidad: 376, 492
**intervalo:** 214, 294, 349, 355
abierto: 301, 320, 350, 353
cerrado: 350-351
**invariantes:** 482, 500, 541, 554, 555, 561
de primer orden: 482
de segundo orden: 500
**inverso:** 24, 25
aditivo: 24, 25
multiplicativo: 25
**irrotacional:** 497-499, 648, 649
campo: 497
flujo: 497

# J

**jacobiano:** 241-245, 252, 254, 359, 394, 395, 396, 399, 403, 404, 409, 473, 482, 483, 499, 509, 510, 515, 522, 529, 531, 532, 542, 550

# K

**Kronecker, delta de**: 517

# L

**Lagrange**
función de: 354, 355, 358-367
multiplicadores de: 353, 358
**Laplace**
ecuación de: 501, 553
**laplaciano:** 482, 500, 501, 534, 541, 544, 551, 553
**ley de conservación de energía:** 664
**ley de Hooke:** 498
**límite:** 115, 377 y *ss*
definición de: 116 y *ss*
de una función: 378 y *ss*
doble: 116-127, 131 y *ss*
lateral derecho: 123
lateral izquierdo: 123
presentación $\epsilon$–$\delta$: 117
**longitud de arco:** 420-425, 434, 435, 439, 452, 524, 529, 543, 544, 550
parametrización mediante: 441
parámetro de: 424, 434, 439, 452
como parámetro de: 420

# M

**magnético(a)**
campo: 373-476, 764,797
carga: 815
flujo: 492, 493, 512, 815
inducción: 814
**magnitud**
de la aceleración: 452
de la fuerza: 453
de la velocidad: 371
de un vector: 429-432, 434, 475, 522
**manantial**
punto: 489
**masa:** 453, 489, 490, 551, 663, 702-713, 752, 773-779
total: 702, 704
**matriz**
columna: 330, 334, 395
diagonal: 63, 330, 335
hessiana: 330-338, 500
identidad: 64
jacobiana: *Véase* también determinates jacobianos 393, 397, 399
negativa definida: 333
ortogonal: 64, 330
positiva definida: 334
renglón: 394
simétrica: 63, 335
valores característcos de: 64, 65, 67, 69, 330 y *ss*
**máximo:** 298 y *ss*
absoluto: 299 y *ss*
condicionado: 340
finito: 342

local: 298
relativo: 298, 310,338, 339, 351, 352
**Maxwell:** *Véase* ecuaciones de Maxwell
**mecánica de fluidos:** 486
**meridiana:** 98
**mínimo:** 299 y *ss*
absoluto: 299 y *ss*
condicionado: 340
local: 299
relativo: 299, 310, 337, 338, 350, 351
**minimáximo:** 58, 306 *Véase también* punto silla
**momento de inercia:** 705, 774, 775
**momento estático:** 702, 773
**movimiento circular:** 451
**multiplicadores de Lagrange:** *Véase* Lagrange
*n*-dimensional: 333

# N

**nabla:** *véase* operador nabla
**Newton**
leyes de: 453
**norma**
de la partición: 570, 627
**normal**
a la superficie: 259

# O

**operador**
nabla: 258 y *ss*, 484
**optimizar:** 389
**operaciones entre funciones:** 24
**origen:** 366, 603, 611
**ortogonal:** 4, 64, 260, 261, 268, 330, 514 y *ss*, 768
**ortonormal**
base: 514

# P

**paraboloide:** 149
de revolución: 57 y *ss*
elíptico: 57
hiperbólico: 19, 58, 86
**paralelepípedo:** 107, 486, 488, 527
**paralelogramo:** 475, 527
**parametrización:** 413 y *ss*
**parametrización por la longitud del arco:** 420, 434, 441
**parámetros de escala:** 542
**parte activa:** 341
**partición:** 422 y *ss*, 569 y *ss*, 664 y *ss*, 739 y *ss*, 757 y *ss*
**partícula**
cinemática de una: 448
**plano**
normal a una curva: 356
osculador: 436, 449
rectificador: 439
**plano tangente:** 353, 760
a una superficie suave: 167 y *ss*, 193
**plano XY :** 34, 415, 423, 471, 664
**plano ZX o bien, plano XZ:** 34
**plano YZ:** 34
**polinomio cuadrático:** 113
**potencial:** 498, 649
eléctrico: 499
**primer momento:** *Véase* momento estático
**primeras derivadas** parciales: 290 y *ss*, 333 y *ss*
**producto**
escalar (o prodcto punto): 267, 484, 573
vectorial o cruz: 85, 163, 166
**punto**
crítico: 303 y *ss*, 345, 346 y *ss*, 358 y *ss*
de inflexión: 306
entorno del: 5, 6
exterior: 6
frontera: 6, 131, 349
fuente: 489
interior: 6
manantial: 489
no singular: 417, 473
ordinario: 417
silla: 58, 86, 306, 308 y *ss*, 332, 336, 351 y *ss*
singular: 6, 417, 473
surgente: 489

# R

**radio hidráulico:** 180
**rango:** 12, 373
**rapidez:** 228, 449
**recta**
normal: 167 y *ss*
tangente: 146 y *ss*, 160

**rectángulo**
agujerado: 292 y *ss*
**recorrido:** 12, 373
**región:** 7-10
abierta: 9-11, 316, 320, 339
acotada: 666, 673, 756, 758, 823
agujerada: 599 y *ss*
cerrada: 318, 339, 341 y *ss*, 666
factible: 340
multiplemente conexa: 635, 636
permisible: 340 y *ss*, 358
regular: 664, 755
simplemente conexa: 721
**región: *xy, yx, xz, zx, zy, yz*:** 756
**regla de Cramer:** 240 y *ss*, 250 y *ss*
**regla de la cadena:** 210 y *ss*, 356, 395, 401 y *ss*, 428, 518, 535
**reparametrización:** 478
**restricciones:** 339 y *ss*, 353
**Riemann, suma de:** 664, 668 y *ss*, 685, 747, 757, 818
**rotación:** 495
**rotacional:** 482 y *ss*, 493 y *ss*, 539
propiedades: 493 y *ss*
magnitud del: 727

# S

**Schwarz:** *véase* teorema de Schwarz
**segmento de recta:** 349 y *ss*
**segundas derivadas:** 151 y *ss*, 307 y *ss*, 329 y *ss*, 502
**segundo momento:** *Véase* momento de inercia
**silla de montar:** 58, 306
**simetría:** 30 y *ss*
**sistema coordenado**
cilíndrico: 541, 658, 768
esférico: 547, 659, 768
polar: 546, 658, 692
**sistema de coordenadas:** 508 y *ss*, 656
**solenoidal**
campo: 489, 813
**Stokes**
teorema de: 716, 783
suave: *Véase* curva suave subconjunto
abierto: 7
cerrado: 7
semiabierto (semicerrado): 7
**suma de Riemann:** *Véase* Riemann sumidero
punto: 489
**superficies:** 16, 30 y *ss*, 467 y *ss*, 512 y *ss*
cerrada: 17, 755, 756, 793
cilíndrica: 90, 306
cónica: 94
coordenadas: 512
cuádrica: 45 y *ss*
de nivel: 20, 30, 353
de revolución: 98 y *ss*
degeneradas: 60
lisa: 475
reglada: 84 y *ss*
suave: 475
**surgente**
punto: 489

# T

**tangente**
plano: 167 y *ss*, 305, 353
recta: 146, 264, 416, 417, 429
vector: 255, 417, 428 y *ss*,
**Taylor**
fórmula de: 311 y *ss*
**teorema**
de Gauss o de la divergencia: 716, 799 y *ss*, 812
de Green: 716 y *ss*, 787
de la divergencia: *Véase* teorema de Gauss
de Stokes: 716, 783
de Schwarz: 151 y *ss*, 157, 281, 287, 497, 502 y *ss*, 547
de Weierstrass: 344
del gradiente en coordenadas curvilíneas: 534
del gradiente como vector normal: 259, 261
del laplaciano en coordenadas curvilíneas: 541
del rotacional en coordenadas curvilíneas: 539
de la divergencia en coordenadas curvilíneas: 536
**teorema del valor medio para integrales dobles:** 672
para integrales iteradas de segundo orden: 683
para integrales triples: 760

**terceras derivadas parciales:** 312, 313
**torsión:** 437 y *ss*
coeficiente de: 437
radio de: 437
**toro (o toroide):** 101, 563
**trabajo:** 642 y *ss*
**transformación lineal:** 375
**trayectoria:** 569, 587
cerrada: 589 y *ss*, 642, 643

# V

**valor**
máximo relativo: 298 y *ss*
mínimo relativo: 299 y *ss*
**valor máximo:** 299 y *ss*, 306
**valor medio:** 672, 683, 760
**valores característicos** (también llamados valores propios): 64-69, 330-338
**vecindad:** 5, 184, 299 y *ss*, 312, 328
agujerada: 6
radio de la: 6
**vector:** 2
binormal: 436
de posición: 370 y *ss*
gradiente: 257, 354, 356
normal: 4, 85, 163-171, 178, 259, 261, 265, 295, 301, 305, 356, 434-437, 439, 446, 449-454, 458, 469, 474, 479, 514-516, 522, 526, 727, 728, 744, 746, 784 y *ss*, 793, 800 y *ss*, 812
tangente: 147, 165, 515
torbellino: 496
unitario: 143, 261, 266, 268 y *ss*, 307, 329, 334, 349, 628
**vectores característicos (también llamados vectores propios)**: 64-70, 330-338
duales: 517
ortogonales: 430, 520
recíprocos: 517
**vectorial**
campo: 372, 499
ecuación: 413, 466
función: 371
suma: 561
**velocidad:** 371 y *ss*
angular: 493, 495
tangencial: 411, 495
**volumen:** 677 y *ss*, 769 y *ss*
**volumen de un paralelepípedo:** 486
**vorticidad local:** 495

**Cálculo vectorial y aplicaciones**
se publicó digitalmente en el repositorio
de la Facultad de Ingeniería en marzo de 2025.
Primera edición electrónica de un ejemplar
(20 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron
a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la
Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas
utilizadas fueron Source Serif Pro,
Sienna Math Pro y Rubik con
sus respectivas variantes.