

SOBRE LA AUTORA

Idalia Flores De La Mota

Estudió el Doctorado en Investigación de Operaciones en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Obtuvo mención honorífica por su tesis de maestría así como la medalla Gabino Barreda por el mejor promedio de su generación. Ha asistido a varios congresos nacionales e internacionales, y ha sido miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado en memorias de congresos así como apuntes para las materias de Matemáticas Aplicadas y Programación Entera. Ha impartido cursos en universidades del extranjero, en la Facultad de Economía de la Universidad de la Habana, Cuba así como en la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Es profesora de tiempo completo de la Facultad de Ingeniería desde 1990 y actualmente es la Jefa de la Sección de Investigación de Operaciones de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería.



Como parte de las actividades del Departamento de Sistemas de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería UNAM, nos hemos propuesto el desarrollo de una serie de apuntes que sirvan de apoyo a los diferentes cursos que se imparten y, desde luego, como material de referencia o de lectura para quienes así lo deseen.

En dichos apuntes se busca mantener un alto nivel, de manera que contribuyan a una sólida formación teórica del alumno, pero al mismo tiempo se intenta acercarlo a las aplicaciones de tales conocimientos, como es en síntesis el objetivo central del posgrado de ingeniería.

La estructura de estos apuntes consiste de siete capítulos, en los cuales se desarrolla cada uno de los temas con unas notas históricas al final de cada capítulo.

Como autora de estos apuntes quiero expresar mi agradecimiento a mis ayudantes, Ivonne Peña Galeana y Leonardo Niño Ojeda por su colaboración en la elaboración de los mismos, así como a la Lic. Guadalupe Castro por la revisión y comentarios que hicieron mejorar la calidad de este trabajo. Finalmente quiero agradecer al Jefe de la DEPI, Dr. Gabriel de las Nieves Sánchez Guerrero por su interés en la publicación de los mismos y las facilidades prestadas para su impresión.

PRÓLOGO

La Teoría de Redes es una área dentro de la Investigación de Operaciones cuyo origen está vinculado a la Programación Lineal, el gran desarrollo de la computación ha provocado un gran desarrollo de los algoritmos propios de esta teoría lo que ha permitido un gran avance en la teoría algorítmica. Su versatilidad y la representación gráfica de los problemas hace de ésta una de las áreas más usadas en el campo de las aplicaciones, cuyo rango es tan amplio que abarca la química, la física, redes de computadora, muchas ramas de la ingeniería, manufactura, política pública y sistemas sociales, tráfico urbano, telecomunicaciones y transporte por citar solo algunos. El problema central de resolver un problema de flujo a costo mínimo, conlleva a que los problemas de flujo máximo, ruta mas corta, asignación, transporte y circulación se puedan ver ligados y formando parte de este problema central.

Estos apuntes tienen como objetivo tener un apoyo didáctico para la clase, así como un complemento de la bibliografía sugerida para el curso. Y a que por su amplitud no es posible cubrir todos los tópicos de redes que están contenidos en un libro de texto, se da una visión sencilla y general del tema. Los grandes temas que se abordan son flujo máximo y corte mínimo, ruta más corta, árbol de expansión mínima y por último el problema de flujo a costo mínimo. Se exponen diferentes algoritmos de un mismo problema para compararlos y ver su complejidad computacional, así como una variedad de ejemplos desarrollados paso a paso para facilitar su comprensión. Finalmente se expone una serie de notas históricas al final de cada capítulo, con el objetivo de que el lector tenga una visión más amplia sobre cada tema.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE REDES TÍPICOS

1.1 Introducción	1
1.2 Tipos básicos de problemas de redes	7
1.3 Redes de tránsito urbano	7
1.4 Planteamiento de modelo de redes	8
1.5 El problema de la ruta más corta	8
1.6 El problema del flujo máximo	10
1.7 El árbol de expansión mínima	12
1.8 Planteamiento de modelo de redes como problemas de programación lineal	17
1.9 Notas históricas	31

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS BÁSICOS DE REDES

2.1 Introducción	32
2.2 Representación matricial de una red	32
2.3 Redes especiales	34
2.4 Flujo y divergencia en una red	37
2.5 Circulaciones	42
2.6 Potenciales y tensión	44
2.7 Flujos óptimos y potenciales	47
2.8 Notas históricas	48

CAPÍTULO 3

TRAYECTORIAS Y CORTES

3.1 Introducción	49
3.2 El problema de determinar una trayectoria	52
3.3 Algoritmo de enrutamiento	57
3.4 Aplicaciones a conectividad	64
3.5 Notas históricas	66

CAPÍTULO 4

FLUJOS Y CAPACIDADES

4.1 Introducción	67
4.2 Principio fundamental de divergencia	67
4.3 El Problema de flujo máximo de una red	71
4.4 El problema de factibilidad de flujo	79
4.5 Notas históricas	100

CAPÍTULO 5

ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

5.1 Introducción	101
5.2 Árbol de expansión mínima	107
5.3 Algoritmo de Kruskal	108
5.4 Algoritmo de PRIM	112
5.5 Algoritmo de Sollin	115
5.6 Análisis de sensibilidad	119
5.7 Notas históricas	123

CAPÍTULO 6

PROBLEMA DE RUTA MÁS CORTA

6.1 Introducción	124
6.2 Caracterización de una arborescencia	127
6.3 Métodos de solución y justificación	129
6.4 Problema de ruta más corta con programación dinámica	148
6.5 Notas históricas	153

CAPÍTULO 7

PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MÍNIMO

7.1 Introducción	154
7.2 Formulación de programación lineal	155
7.3 Algoritmo simple para redes con capacidades en los arcos	160
7.4 Método basado en la eliminación de circuitos negativos	167
7.5 Método basado en ruta más corta	174
7.6 Notas históricas	180

BIBLIOGRAFÍA

CAPÍTULO 1

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE REDES TÍPICOS

1.1 INTRODUCCIÓN

Cualquier red está formada por tres componentes (1) nodos, (2) arcos y (3) flujo en los arcos como se ilustra en la figura 1.1.

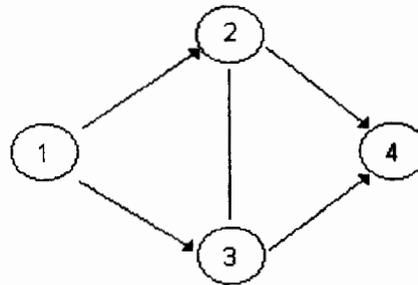


Figura 1.1

Los círculos son los nodos y están unidos por arcos, observe que en la figura hay dos tipos de arcos, dirigidos y no dirigidos. Un arco dirigido es aquel sobre el cual puede moverse el flujo en una sola dirección, y uno no dirigido es aquel sobre el cual puede moverse el flujo en cualquier sentido. En la figura 1.1, el arco que une los nodos 1 y 2 es un arco dirigido y el que une los nodos 2 y 3 es no dirigido.

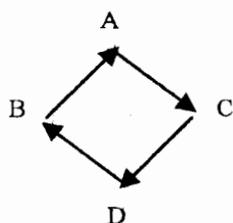
Por lo general los nodos se enumeran, tal como se ha mostrado en la figura 1.1 y los arcos se denotan por los nodos que unen. Por ejemplo, el arco que une los nodos 1 y 2 se identifica como el arco $j_1 \sim (1,2)$.

El flujo que pasa de un nodo a otro a través de un arco es un factor desconocido en la red y se le denota como X_{ij} para el flujo entre los nodos i y j .

El flujo de una red puede constar de muchos bienes o productos distintos. Unos cuantos ejemplos serían: gas natural en un gasoducto, distribución de artículos de mayoristas a detallistas o entre fábricas y almacenes. El costo unitario del flujo para cada arco se denota como C_{ij} para los nodos i y j . En el caso de una red carretera, las ciudades son los nodos y las rutas de transporte entre las ciudades son los arcos. El costo por automóvil para cada ruta es el costo del flujo. En algunos problemas pueden existir capacidades para cada arco que limiten la cantidad de flujo.

Puede entonces definirse una red como un conjunto de nodos, arcos y flujos que pasan de un nodo a otro a través de los arcos.

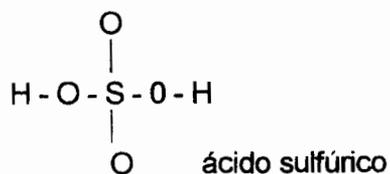
Un buen dibujo es mejor que una larga lectura (o una imagen dice más que mil palabras). El lenguaje de las gráficas trata de poner ésta idea a tal efecto. De hecho, muy a menudo es un reflejo natural que nos hace abstraer una situación dada, dibujando en una hoja de papel puntos que pueden representar individuos.



Lugares

	A C	
	B D	
	E F	
	G H	

componentes químicos:



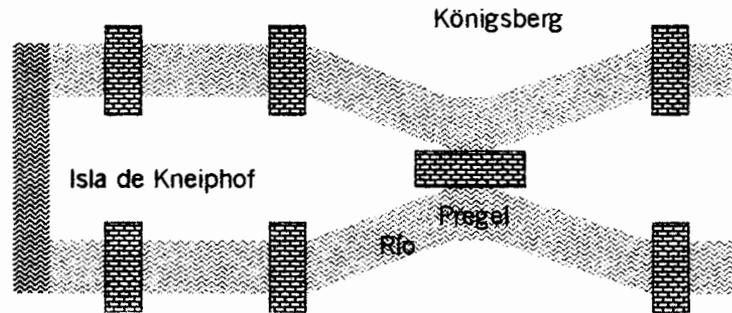
y así conectando con líneas o flechas que simbolizan una cierta relación.

Esta representación de la realidad por figuras tiene las siguientes ventajas:

1. De esta forma podemos expresar la estructura profunda de una situación dada.

2. Desde un punto de vista práctico, presenta una visión completa del problema, lo que representa una valiosa guía para la intuición y el razonamiento.

El primer documento en gráficas "*solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*", lo escribió Euler en 1736. Comenzó con una curiosidad matemática: cómo puede uno caminar una y sólo una vez a través de cada uno de los siete puentes de Königsberg. Dichos puentes se muestran en la figura siguiente:



Desde 1946 la teoría de las gráficas ha sido ampliamente desarrollada, bajo la inspiración de muchos especialistas en investigación de operaciones, motivados por problemas actuales. En forma paralela, un esfuerzo importante de síntesis ha prevalecido.

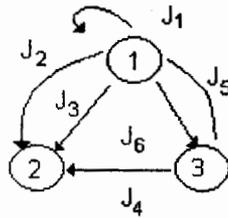
Es a partir de 1960, que ayudados por la aparición de las primeras computadoras electrónicas, hemos visto una explosión real de investigación y de aplicaciones.

Una red G consiste de 3 componentes:

Un conjunto N de nodos (vértices o puntos) que se representan con círculos pequeños, un conjunto A de arcos (líneas, flechas o cadenas) que se representan con flechas, la dirección de éstas da una orientación al arco.

Y una función $\rho : A \rightarrow N \times N$ que asigna a cada $J \in A$ una pareja $(i, i') \in N \times N$ tal que $i \neq i'$, se supone $N \neq \emptyset$. Si $i = i'$ se trata de un rizo.

EJEMPLO 1.1



$$\begin{aligned} N &= \{1,2,3\} \\ A &= \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\} \\ \rho : A &\rightarrow N \times N \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \rho(J_1) &= (1,1) \\ \rho(J_2) &= (1,2) \\ \rho(J_3) &= (1,2) \\ \rho(J_4) &= (3,2) \\ \rho(J_5) &= (1,3) \\ \rho(J_6) &= (1,3) \end{aligned}$$

los arcos j tal que $\rho(j) = (i,i)$ como ya se ha dicho anteriormente se denominarán rizos.

Si no existen arcos paralelos es normal hacer

$$j \sim (i_1, i_2)$$

o bien

$$(i_1, i_2)$$

y se dice que i_1 es el nodo inicial de j , e i_2 es el nodo final. También se dice que i_1, i_2 son nodos adyacentes y que j incide en i_1, i_2 .

Una red donde no existen arcos en paralelo se conoce como una gráfica dirigida o digráfica y el conjunto A se identifica como un subconjunto de $N \times N$. El término gráfico se usa para una estructura similar donde los arcos no están orientados.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

APUNTES TEORÍA DE REDES

Idalia Flores de la Mota

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS

FLORES DE LA MOTA, Idalia. *Apuntes teoría de redes*.
México, UNAM, Facultad de Ingeniería, División de
Estudios de Posgrado, 1999, 181 p.



F-DEPFI
Apuntes
[0000]
ej. 11

Apuntes teoría de redes

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial de esta obra por cualquier medio o sistema electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados.

© 1999, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

ISBN 968-36-9076-9

Primera edición, 1999.

Impreso y hecho en México.

EJEMPLO 1.2

El gerente de programación de la General Motors, de la región oriental de México, está interesado en elaborar un plan semanal para enviar automóviles de su puerto de entrada a diversas distribuidoras regionales. Para elaborar el plan, ha recopilado datos sobre costos de transporte por automóvil en todo el país, necesidades mensuales de automóviles de cada distribuidor y llegadas mensuales de automóviles a cada puerto de entrada. Los automóviles se pueden enviar en forma directa a cada distribuidor o puede enviarse un conjunto de ellos a un distribuidor, descargar algunos, y enviar el resto a algún otro distribuidor. En el mapa de la figura 1.2 se muestran la localización de los distribuidores y de los puertos de entrada.

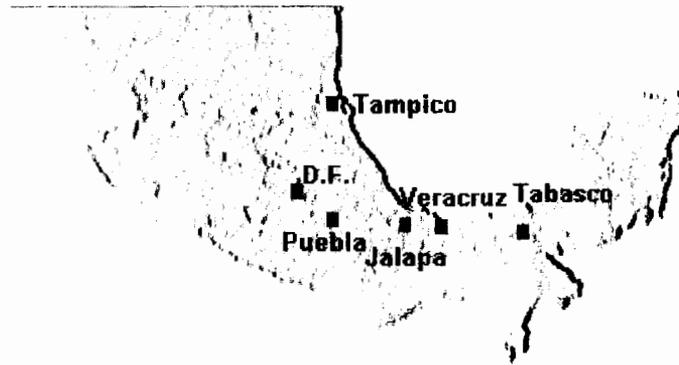


Figura 1.2

En la tabla 1 y en la figura 1.3 se muestran en pesos por automóvil, los costos de transporte entre los puertos de entrada, las ciudades de transbordo y las ciudades que son destinos finales. En los casos en los que no existe relación directa entre un par de ciudades no se muestran los costos.

TABLA 1

DE:CIUDAD	A:CIUDAD			
	México	Villahermosa	Puebla	Jalapa
Tampico	-	\$450	\$500	-
Veracruz	-	-	\$250	\$150
Puebla	\$150	\$400	-	-
Jalapa	\$200	-	\$200	-

USO DE LA REPRESENTACIÓN EN REDES

Este problema consiste en determinar la forma de enviar los automóviles de manera que se minimicen los costos, y al mismo tiempo, que se satisfagan las necesidades de todos los distribuidores.

En la gráfica o red siguiente (figura 1.3) los círculos representan a cada uno de los puertos de entrada y los distribuidores y las flechas, las relaciones entre ellos. Los números que están fuera de los círculos son las disponibilidades y las demandas según sea el caso de cada ciudad.

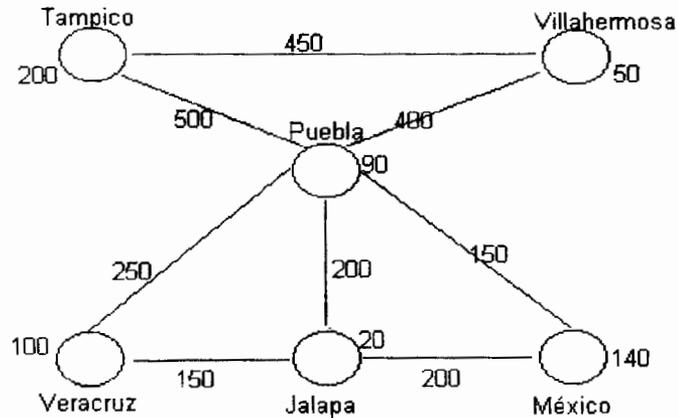


Figura 1.3

El gerente necesita determinar cuantos automóviles se deben enviar de Tampico y Veracruz a cada una de las otras ciudades, para que sean vendidos allí o transferidos a alguna otra ciudad. Se da cuenta de que no es difícil encontrar un plan de envíos que satisfaga las necesidades de todas las ciudades, como se muestra en la figura 1.4, pero... ¿será éste el plan más económico?

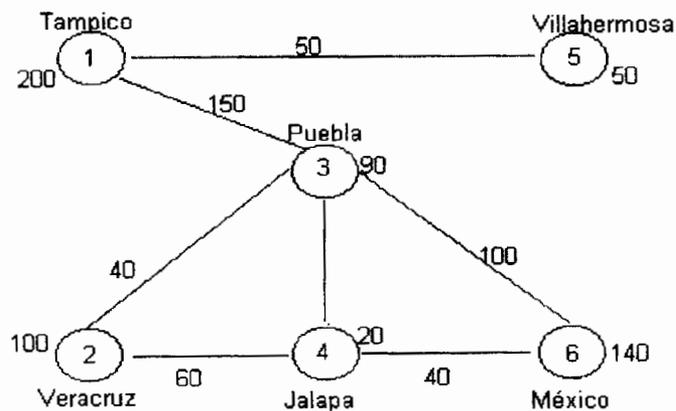


Figura 1.4

1.2 TIPOS BÁSICOS DE PROBLEMAS DE REDES

Consideramos cuatro tipos importantes de problemas de redes:

1. El problema de transbordo
2. El problema de la ruta más corta
3. El problema de flujo máximo
4. El problema de transporte

El problema de la General Motors es un ejemplo típico de problema de transbordo, puesto que se tienen disponibilidades y/o demandas y algunas ciudades al mismo tiempo pueden recibir y enviar automóviles a otras. Los otros tipos de problemas se ilustran más adelante. Algo común a estos es que los cuatro se pueden plantear en forma similar a los que se denominan problemas de flujo de costo mínimo; pero antes, es necesario analizar un poco la terminología de los problemas de redes.

1.3 REDES DE TRÁNSITO URBANO

El sistema de transporte consiste de redes que representan los modos disponibles (automóviles, autobuses, etc.) La descripción de la red es una abstracción de lo que actualmente existe en el campo, y como tal, no incluye todas las calles locales o las calles colectoras en el área. Se desarrolla una descripción de la red para representar los viajes en automóvil y camión, con una reseña separada para el transporte público, si se incluye este medio. Estas descripciones pueden abarcar la geometría del sistema de transporte.

La geometría de la red incluye la numeración de las intersecciones (llamadas nodos para propósitos de asignación). La numeración de los nodos permite identificar los segmentos entre ellos (llamados tramos). En las redes de transporte se pueden identificar grupos de tramos por los que pasan rutas específicas (llamadas líneas). Esta descripción geométrica de la red de transporte muestra todas las posibles vías por las que puedan realizarse los viajes entre puntos del área.

En la descripción de la red, se identifican los centroides de zona (centros de actividad); éstos se conectan a los nodos por medio de los tramos imaginarios denominados correctores de centroides. Los centroides se utilizan como los puntos en los cuales se efectúa la "carga" a la red.

Una vez que la red de transporte se ha descrito en términos de la manera como se pueden conectar los puntos, es necesario cuantificar la facilidad con la que se realizan estas conexiones.

Las velocidades de viaje y la capacidad de un tramo en una vía rápida, probablemente serían mayores que en una calle arterial; esta diferencia de nivel de servicio debe cuantificarse e incluirse como parte de la descripción del sistema de transporte.

Para la descripción de la red vehicular, se deben reunir puntos específicos para determinar el nivel de servicio en cada tramo. Estos requerimientos incluyen aspectos físicos tales como la longitud del tramo y el número de carriles, ya sea que el tipo de instalación bajo consideración sea vía rápida, arterial, etc. Así como la localización del tramo en el área urbana.

El costo de recorrido en un tramo específico se conoce como impedancia y tiene implícitas las mediciones de tiempo y costo.

1.4 PLANTEAMIENTO DE MODELOS DE REDES

Problemas de transbordo

Si un problema de redes se refiere a la minimización de los costos del flujo de algún producto entre nodos, en donde cada nodo puede ser un punto de abastecimiento, un punto de demanda, o ambos, entonces se considera que el problema de redes es un problema de transbordo.

El problema de la General Motors es un excelente ejemplo de un problema de transbordo. Existen tres tipos de nodos en un problema de transbordo. Si un nodo actúa al mismo tiempo como receptor y emisor de flujo se le denomina nodo de transbordo. En la figura 1.4 los nodos 3 y 4 son nodos de transbordo. El problema de transbordo es el más general de los problemas de redes, dado que cada nodo puede tener al mismo tiempo oferta y demanda y no existen restricciones sobre los flujos o sobre los tipos de nodos.

1.5 EL PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Si se define una red de manera que los coeficientes de cada arco sean no negativos (tal como medidas de distancia); entonces podríamos estar interesados en encontrar la ruta más corta entre dos nodos de la red. A este problema se le denomina problema de la ruta más corta.

Como ejemplo del problema de ruta más corta considere el siguiente:

EJEMPLO 1.3

La compañía de muebles "El Mueble Moderno" quiere transportar unos comedores de su planta en Naucalpan, Estado de México a una Distribuidora que se encuentra en Tlalpan, en el sur de la ciudad de México, en el menor tiempo posible.

Las rutas que enlazan estas dos instalaciones forman la red que se muestra en la figura 1.5

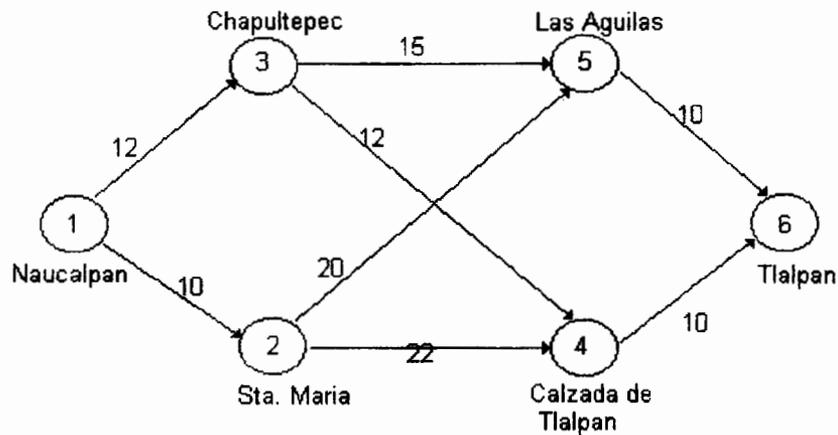


Figura 1.5

En donde las "distancias" son los tiempos de viaje del camión dados en minutos y considerando que se traslada a las 6 de la mañana y por lo tanto el tránsito es rápido, a una velocidad media de 50 kph.

Observe que con el objeto de plantear este problema en forma de problema de costo mínimo, puede elegirse en cualquier nodo sólo el camino a través de un arco. Lo anterior implica que es necesario tener los siguientes flujos en los arcos:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se viaja a través de la ruta entre la instalación } i \text{ y la instalación } j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Si se recorre la ruta (i,j), esto significa que no puede utilizarse ninguna otra ruta que parta de la instalación i.

Por ejemplo, si se viaja por la ruta de Naucalpan a Chapultepec entonces el flujo entre esos puntos será igual a 1 y X_{13} será cero.

Es posible satisfacer estas condiciones utilizando en la red un flujo imaginario de una unidad. Este flujo parte del nodo de salida u **origen** y llega a un nodo final o **terminal**. En otras palabras, existe un **suministro** de una unidad en el origen y una **demanda** de una unidad en el nodo terminal. En nuestro ejemplo, habría un suministro (u oferta) de una unidad en Naucalpan y una demanda de esa misma unidad en Tlalpan

La última pregunta que permanece pendiente es: ¿ Qué costos deben utilizarse en este problema de costo mínimo? Para responder a ésta pregunta observe que si $X_{ij} = 1$, entonces será necesario viajar de los nodos i a j . Si se denotan estas distancias mediante d_{ij} y se utiliza la ruta entre i y j , entonces el costo para esa ruta se convierte en $d_{ij} X_{ij}$. Dado que X_{ij} es cero o uno, el costo para cualquier ruta será d_{ij} o cero. Por esto, podemos utilizar las distancias, d_{ij} como los costos para el problema de flujo a costo mínimo.

De acuerdo con la figura 1.5, para salir de Naucalpan se puede ir por dos caminos, por Chapultepec o por Santa María, pero no por ambas. Para los puntos Chapultepec, Santa María, Las Águilas y Calzada de Tlalpan se requiere que el flujo que llega a esos nodos sea igual al flujo que sale, puesto que no existe demanda en ninguno de ellos. La restricción para Tlalpan exige llegar a ese punto ya sea por Las Águilas o por Calzada de Tlalpan, obligando a que la suma de los flujos sea igual a 1.

En un problema de ruta más corta puede haber arcos dirigidos y arcos no dirigidos. En nuestro ejemplo, sólo se tienen arcos dirigidos. Para el caso de arcos no dirigidos sería necesario tener una variable de i a j y otra de j a i . No sería difícil modificar el planteamiento para manejar las variables en ambas direcciones.

Finalmente, cabe mencionar que existen diversas variaciones del problema de la ruta más corta, y que el que se ha presentado aquí es sólo una de ellas. Las dos variaciones que existen son:

1. Encontrar la ruta más corta entre algún nodo y cada uno de los otros nodos de la red.
2. Encontrar la ruta más corta entre cualquier par de nodos de la red.

1.6 EL PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

En el problema anterior estábamos interesados en los valores que se generan a través de cierto flujo que pasa por una red. Este valor puede estar dado en términos de dinero, distancia, tiempo o alguna otra medida. Existen problemas en los que el valor del flujo no es tan importante como la **cantidad de flujo** que pasa a través de la red. Los gasoductos, tráfico de automóviles y las líneas de transmisión de electricidad son ejemplos de esta situación. Los problemas en los que interesa

determinar el flujo máximo que pasa a través de una red se denominan **problemas de flujo máximo**.

Para estudiar este tipo de problemas, es necesario suponer que existen **restricciones de capacidad** en los arcos. Si no fuera así, el flujo máximo que pasaría a través de la red sería infinito. Considere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.4

Suponga que la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO) tiene un programa anual de costalera. Esta se compra de dos fábricas, una en Mérida con capacidad de producción máxima de 10 millones de costales al año, y otra en Saltillo con capacidad de producción máxima de 7 millones de costales al año. Los excedentes en la fábrica de Mérida pueden transferirse a la planta de Saltillo.

La disponibilidad de transporte entre las dos fábricas permite un máximo de 8 millones de costales por año. Hay tres centros almacenadores: en la ciudad de México, Guadalajara y Oaxaca. la tabla 2 proporciona la capacidad máxima anual de transporte de las fábricas a los centros almacenadores.

TABLA 2

De: Ciudad	A: Ciudad		
	México	Guadalajara	Oaxaca
Saltillo	4	8	-
Mérida	3	2	3

Los excedentes de Guadalajara y Oaxaca pueden transferirse a la ciudad de México. la capacidad máxima anual es de 3 y 4 millones de costales respectivamente.

Una vez en los centros almacenadores, los costales se entregan a los ejidatarios de la región. La capacidad máxima anual de entrega es de 4 millones en la región almacenadora de Guadalajara, 7 millones en la región del Distrito Federal y 5 millones en la región de Oaxaca.

La pregunta es ¿Cuál es el flujo máximo anual de costales nuevos que pueden circular en este sistema?. El problema se puede representar gráficamente en la red de la figura 1.6

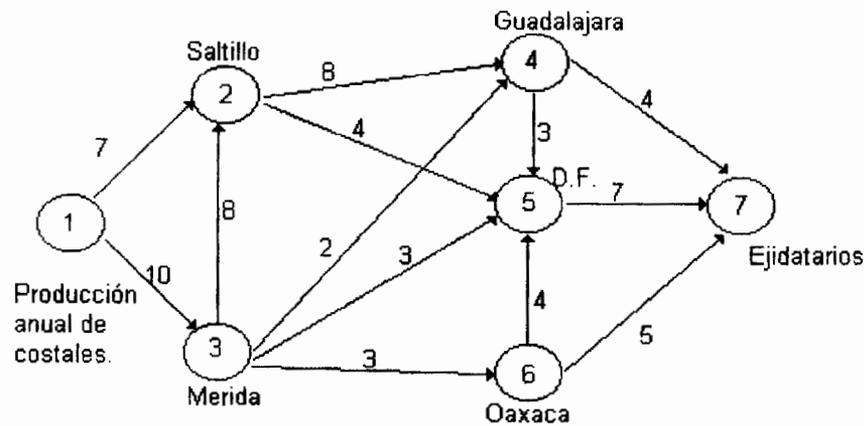


Figura 1.6

Se puede observar en la red que los números en los arcos se refieren a las capacidades máximas de transporte, no se pusieron las capacidades mínimas por ser éstas todas iguales a cero.

1.7 EL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

Antes de especificar en que consiste este problema cabe mencionar lo que en redes se entiende por un árbol. Un **árbol** es un subconjunto de los arcos de la red original que conecta a todos los nodos sin formar ningún circuito.

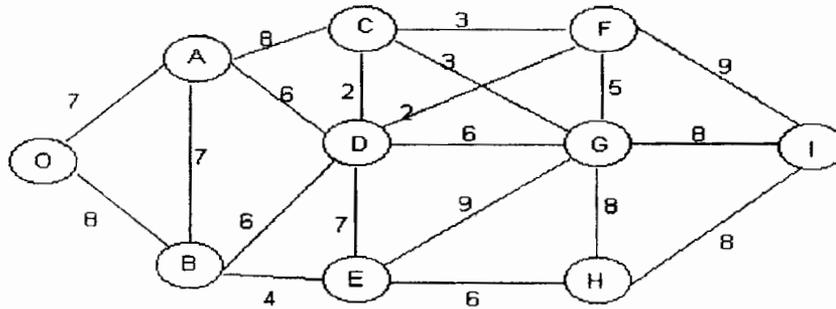
En este problema se conocen los costos o distancias entre diferentes nodos en una red. Sin embargo, los arcos **no** se especifican, y lo que se trata de encontrar es un árbol que comunique a todos los nodos de la red, pero cuyo costo o distancia total sea mínima.

Este tipo de problemas se ubica en las redes de comunicación eléctrica, telefónica, telegráfica, carretera, ferrocarrilera, aérea, marítima, etc., donde los nodos representan, por ejemplo, puntos de consumo eléctrico, teléfonos, telégrafos, terminales de autobuses, trenes, aeropuertos, puertos marítimos, etc., y los arcos podrían ser, las líneas de alta tensión eléctrica, líneas telefónicas y telegráficas, carreteras y vías de ferrocarril, rutas aéreas y marítimas entre otras. A continuación se presenta un ejemplo de este caso.

EJEMPLO 1.5

Suponga que en la red que se muestra en la figura 1.7, los nodos son centros de consumo eléctrico, y los números en los arcos son distancias en kilómetros. Se trata de encontrar el árbol que, con una longitud total mínima, comunica a todos los nodos. Como el costo de tendido de cable eléctrico es proporcional a la distancia, se habrá encontrado, con la distancia mínima, también el costo mínimo.

Figura 1.7



Después de usar algún paquete de cómputo el árbol mínimo de comunicación, que no necesariamente es el único, se muestra en la figura 1.8

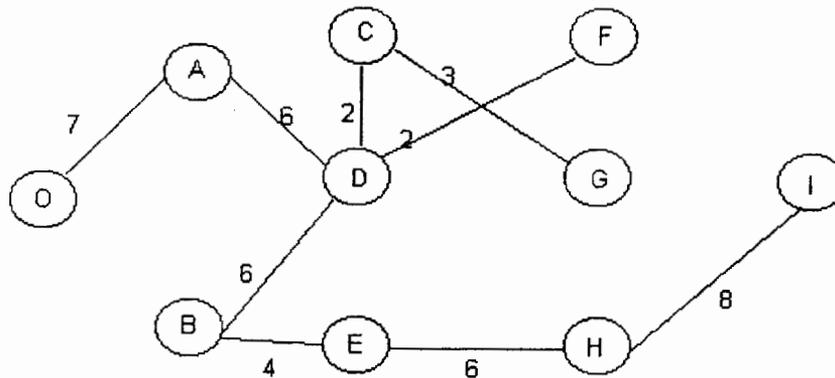


Figura 1.8

El siguiente ejemplo muestra los tres casos de problemas de redes que hemos visto hasta aquí.

EJEMPLO 1.6

En fecha reciente se ha reservado el parque La Marquesa para pasear y acampar. No se permite la entrada de automóviles al parque, pero existe un sistema de caminos angostos para tranvías y jeeps conducidos por los guardabosques.

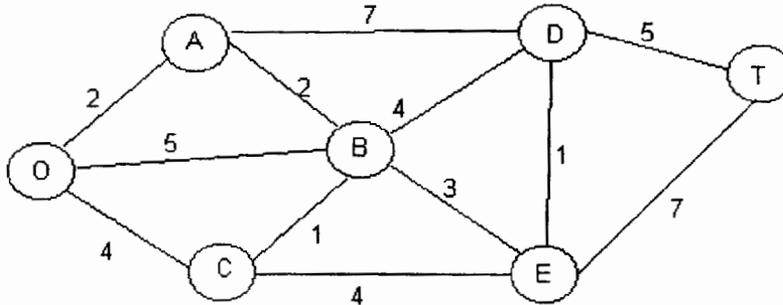


Figura 1.9

En la figura 1.9 se muestra este sistema de caminos (sin las curvas), en donde O es la localización de la entrada al parque; las otras letras designan la localización de estaciones de guardabosques (y otras instalaciones). Los números dan las distancias de estos caminos sinuosos en kilómetros.

El parque contiene un paisaje maravilloso en la estación T. Se usa un número pequeño de tranvías para transportar visitantes de la entrada del parque a la estación T, y de regreso, para quienes desean contemplar este paisaje sin tener que caminar.

La dirección del parque está encarando en este momento tres problemas. Uno es determinar cuál ruta de la entrada del parque a la estación T tiene la menor distancia total, para la operación de los tranvías.

Un segundo problema se refiere a la instalación de líneas telefónicas debajo de los caminos, para establecer comunicación de este tipo entre todas las estaciones, incluyendo la entrada al parque. Puesto que la instalación es cara y, a la vez, perturba el medio ambiente natural, se instalarán las líneas sólo debajo del número suficiente de caminos para proveer cierta conexión entre todo par de estaciones. La cuestión es dónde deben colocarse las líneas para realizar esto con un número total mínimo de kilómetros de línea instalada.

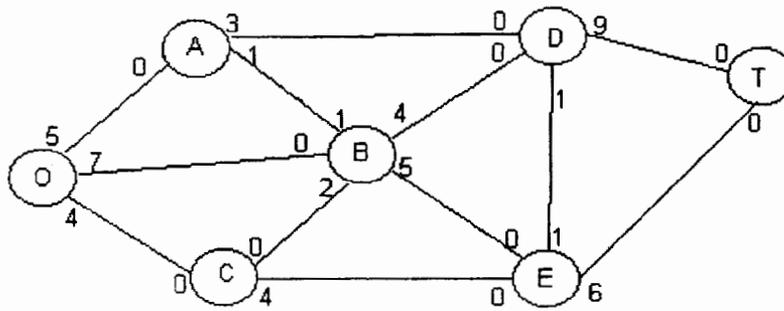


Figura 1.10

El tercer problema es que, durante la temporada pico, mas personas desean el viaje en tranvía desde la entrada del parque a la estación T que las que pueden ser acomodadas. Con el fin de evitar la perturbación indebida de la ecología y la vida salvaje de la región, se han racionado estrictamente el número de viajes al día del tranvía, que pueden llevarse a cabo sobre cada uno de los caminos, estos limites son diferentes para los diferentes caminos como se muestra en la figura 1.10. Por lo tanto durante la temporada pico, podrían seguirse diversas rutas, sin importar la distancia, para incrementar el número de viajes por tranvía que pueden efectuarse diariamente. La cuestión consiste en trazar las rutas de los diversos viajes para maximizar el número de viajes que pueden efectuarse diariamente, sin violar los límites de cada camino. Para resolver el problema de ruta más corta considere la siguiente tabla 3:

TABLA 3

n	Nodos resueltos conectados a nodos no resueltos	Su nodo no resuelto conectado más próximo	Distancia total involucrada	n_ésimo nodo más cercano	Su distancia mínima	Su última conexión
1	O	A	2	A	2	OA
2	O A	C B	4 $2 + 2 = 4$	C B	4 4	OC AB
3	A B C	D E E	$2 + 7 = 9$ $4 + 3 = 7$ $4 + 4 = 8$	E	7	BE
4	A B E	D D D	$2 + 7 = 9$ $4 + 4 = 8$ $7 + 1 = 8$	D D	8 8	BE ED
5	D E	T T	$8 + 5 = 13$ $7 + 7 = 14$	T	13	DT

Ahora puede recorrerse hacia atrás la ruta más corta, del destino al origen, a través de la última columna de la tabla, como a $T \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$ o bien, $T \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$. Por lo tanto, se han identificado las dos alternativas para la ruta más corta del origen al destino como $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ y $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$, con una distancia total de 13 millas sobre cualquiera de las dos.

Como se podrá observar los problemas 1, 2 y 3 son respectivamente problema de ruta más corta, problema de árbol de expansión mínima y problema de flujo máximo, dicho problema se resolverá posteriormente.

EJEMPLO 1.7

En este ejemplo se muestra la forma en que se puede resolver un problema práctico de tránsito. Para concretar más, empezamos con un mapa que muestra una parte del centro de la ciudad de México.

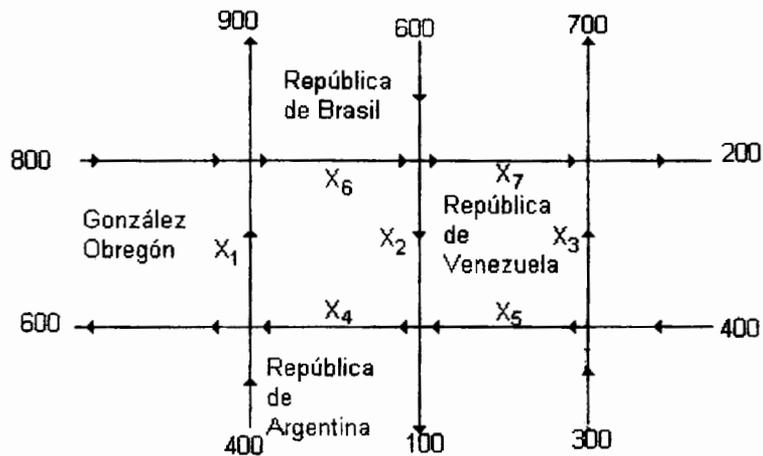


Figura 1.11

En el mapa se indicó el flujo de tránsito que entra o sale a cada calle, en unidades de vehículos por hora (vph). Ya que el flujo de tránsito varía considerablemente durante el día, supondremos que los números mostrados representan el flujo de tránsito promedio a la hora de máximo flujo que se da aproximadamente entre las 3 y las 5 de la tarde.

Suponga ahora que un grupo político está planeando una manifestación en República de Argentina, entre República de Venezuela y González Obregón a las 4 de la tarde del miércoles. La policía puede, hasta cierto punto, controlar el flujo de tránsito reajustando los semáforos, colocando policías en los cruces clave, o cerrando la calle crítica al tránsito de vehículos. Si se disminuye el tránsito por

República de Argentina, aumentará el de las calles adyacentes. La cuestión es minimizar el tránsito por República de Argentina (entre República de Venezuela y González Obregón) sin ocasionar congestionamientos en las otras calles. Para resolver este problema de minimización le agregamos marcas a nuestro mapa, ver figura 1.11.

Aquí se han marcado las seis intersecciones A hasta F y se ha denotado el flujo de tránsito entre las intersecciones adyacentes por las variables x_1 hasta x_7 . El problema consiste ahora en minimizar x_4 sujeta a las restricciones del problema.

Para encontrar estas restricciones veamos, por ejemplo, la intersección B. El tránsito que fluye a la intersección B es, según el mapa, $x_2 + x_5$; mientras que el tránsito que sale de la intersección B es $x_4 + 100$. Suponiendo que el tránsito no se acumula en la intersección B, el tránsito de "entrada" debe ser igual al tránsito de "salida". Así se obtiene la ecuación

$$x_2 + x_5 = x_4 + 100$$

o bien

$$x_2 - x_4 + x_5 = 100$$

A partir de este análisis en cada intersección, se obtiene el siguiente sistema de seis ecuaciones en siete incógnitas:

en A	x_1	$-x_4$		= -200
en B	x_2	$-x_4 + x_5$		= 100
en C	x_3	$+x_5$		= 700
en D	x_1	$-x_6$		= 100
en E	x_2	$-x_6 + x_7$		= 600
en F	x_3	$+x_7$		= 900

1.8 PLANTEAMIENTO DE MODELOS DE REDES COMO PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Consideraremos cuatro tipos de problemas de redes: problemas de transbordo, de ruta más corta, de flujo máximo y de transporte. Analizaremos también el planteamiento de problemas de PERT/CPM y problemas de asignación de personal como problemas de redes. El tema más importante de esta sección es que *todos* estos problemas de flujo pueden plantearse de manera similar como problemas de flujo de costo mínimo y pueden resolverse como problemas de programación lineal. Para varios de estos problemas existen algoritmos especiales que pueden ser más eficientes que el método simplex de programación lineal, pero debido a que se hará hincapié en los planteamientos, aquí no se analizan esos algoritmos.

Enseguida se presentan y analizan cada uno de los problemas de redes y después se plantea cada uno de ellos.

PROBLEMA DE TRANSBORDO

Como segundo ejemplo de un problema de transbordo, considere el siguiente: la Compañía Petrolera Alianza tiene un solo campo petrolero desde donde envía todo el petróleo, a través de un oleoducto, a uno de dos centro de embarque, en donde se almacena en buques tanque para su envío a refinerías de Estados Unidos.

La oferta diaria en el campo es de 2,000 barriles. Deben considerarse los costos del oleoducto, los costos de embarque y las cantidades de petróleo que pueden enviarse a través de los oleoductos. Los costos del oleoducto y las capacidades diarias de éste se muestran en la tabla 4.

TABLA 4

Compañía Petrolera Alianza. Costos y capacidades de los ductos.

Instalación de envío	Costo por barril	Capacidad del oleoducto (en barriles)
1	\$0.20	1000
2	\$0.15	500

En la tabla 5 se presentan los costos de embarque de cada estación de embarque a cada refinería y las demandas diarias de las refinerías. En la figura 1.12 se plantea este problema en forma de red.

TABLA 5

Compañía Petrolera Alianza. Costos de transporte y demandas.

Refinería Número de ubicación	Costo de transporte por barril		Demanda diaria
	Del centro 1	Del centro 2	
1	\$0.10	\$0.15	600
2	\$0.20	\$0.25	800

Estas capacidades resultan ser restricciones de cota superior. Las restricciones de la oferta aparecen como una restricción de menor o igual, en vez de ser una restricción de igualdad, puesto que la demanda total es inferior a la oferta disponible.

PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Si se define una red de manera que los coeficientes de cada arco sean no negativos (tal como medidas de distancia), entonces podríamos estar interesados en encontrar la ruta más corta entre dos nodos de la red. A este problema se le denomina *problema de la ruta más corta*.

Como ejemplo del problema de ruta más corta, consideremos el problema de viajar en automóvil desde Nueva Orleans a Atlanta en el tiempo más corto, dentro de lo legal. Las carreteras que enlazan estas dos ciudades forman la red que se muestra en la figura 1.13 en donde las "distancias" son los tiempos de viaje en automóvil dados en minutos.

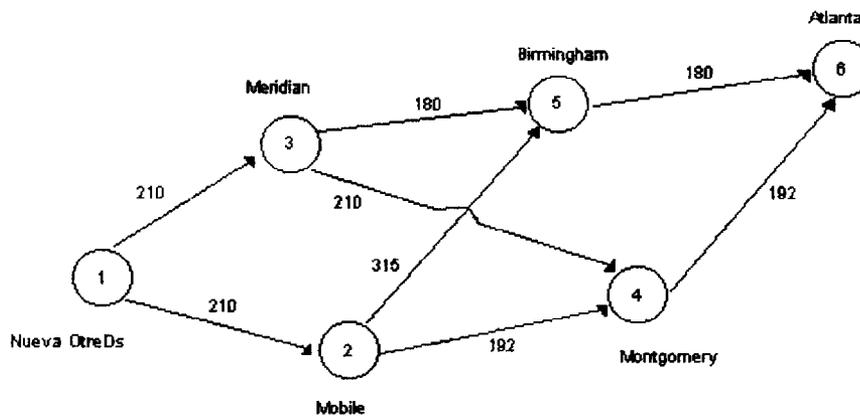


Figura 1.13. Rutas del manejo de Nueva Orleans a Atlanta.

Observe que con el objeto de plantear este problema en forma de problema de costo mínimo, puede elegirse en cualquier nodo sólo el camino a través de un arco.

Lo anterior implica que es necesario tener los siguientes flujos en los arcos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se viaja a través de la carretera entre la ciudad } i \text{ y la ciudad } j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

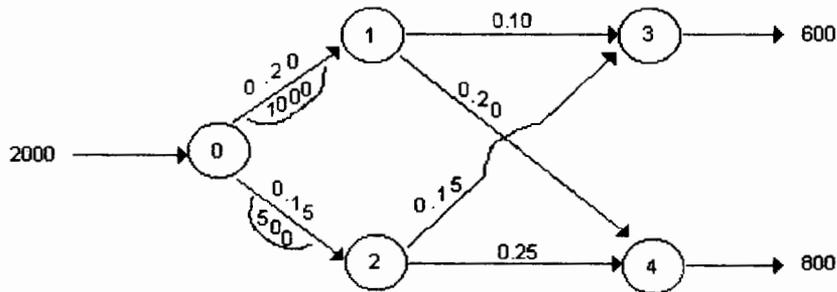


Figura 1.12. Red de la Compañía Petrolera Alianza

En el planteamiento de red, el nodo 0 es el campo petrolero, los nodos 1 y 2 son los nodos de embarque y los nodos 3 y 4 representan las refinerías de Nuevo León e Hidalgo respectivamente. Las capacidades de los oleoductos se muestran en los arcos encerradas en semicírculos y los costos se ilustran encima de los arcos.

Este problema puede plantearse en forma de programación lineal sí

$$x_{ij} = \text{barriles enviados del nodo } i \text{ al nodo } j$$

Entonces, el problema es

$$\text{Min } Z = 0.2x_{01} + 0.15x_{02} + 0.10x_{13} + 0.2x_{14} + 0.15x_{23} + 0.25x_{24}$$

SUJETO A:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_{01} & + & x_{02} & & & & & & \leq 2000 \\
 x_{01} & & & - & x_{13} & - & x_{14} & & = 0 \\
 & & x_{02} & & & & - & x_{23} & - & x_{24} & = 0 \\
 & & & & x_{13} & & & + & x_{23} & & = 600 \\
 & & & & & & x_{14} & & & + & x_{24} & = 800 \\
 x_{01} & & & & & & & & & & \leq 1000 \\
 & & x_{02} & & & & & & & & \leq 500 \\
 & & & & & & & & & & \text{todas las } x_{ij} \geq 0
 \end{array}$$

Este problema difiere un poco del de General Motors ya que existen capacidades en algunos de los arcos.

Atlanta exige llegar a esta ciudad ya sea de Birmingham o de Montgomery, obligando a que la suma de los flujos sea igual a 1.

En un problema de ruta más corta puede haber arcos dirigidos y arcos no dirigidos. En nuestro ejemplo sólo se tienen arcos dirigidos. Para el caso de arcos no dirigidos, sería necesario tener una variable de i a j y otra de j a i . No sería difícil modificar el planteamiento para manejar las variables en ambas direcciones.

Puesto que ya hemos formulado el problema de la ruta más corta como problema de flujo de costo mínimo, podemos entonces utilizar un programa de computación especial de programación lineal, para resolver el problema.

El lector debe percatarse de que existen diversas variaciones del problema de la ruta más corta, y que la que se ha presentado aquí es sólo una de ellas. Las dos variaciones que existen son: (1) Encontrar la ruta más corta entre algún nodo y cada uno de los otros nodos de la red; (2) Encontrar la ruta más corta entre cualquier par de nodos de la red. Al igual que con la versión que se presenta aquí, es posible formular como problemas de flujo de costo mínimo estos otros problemas de ruta más corta. Existen también algoritmos de aplicación especial para las otras versiones.

PROBLEMA DE PERT/CPM

El objeto de estos modelos es encontrar la secuencia de actividades o tareas que requieren del *mayor* tiempo para su terminación. A esta secuencia de trabajo se le denomina *ruta crítica*. Como ejemplo de un análisis de red de actividades, considérese la siguiente situación.

La Facultad de Administración de la UAM está planeando una conferencia para ejecutivos de negocios. En la tabla 6, se listan las actividades que deben llevarse a cabo antes de la conferencia y también se presentan los tiempos estimados para terminar cada una de las labores.

TABLA 6

Actividad	Descripción	Tiempo Estimado. (semanas)	Actividades precedentes
A	Elaborar el programa	3	-
B	Recopilar lista de asistentes	5	-
C	Contactar a oradores para que asistan	9	A
D	Elaborar folleto para el programa	2	B
E	Hacer arreglos físicos	4	A
F	Enviar los folletos	4	D
G	Preparar programa de las conferencias	3	E
H	Detalles de último minuto	1	C, G, F

Este problema de planeación también se muestra en un formato de redes (figura 1.14) y se ilustran en forma directa en los arcos los símbolos que representan a las actividades y el tiempo estimado para terminar la actividad; también se enumeraron los nodos.

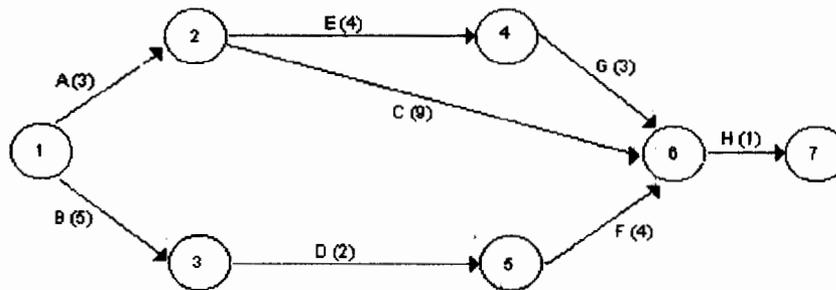


Figura 1.14. Red de planeación de conferencias.

Dado que estamos intentando descubrir cuál es la ruta más larga en esta red, tenemos la situación opuesta al problema de la ruta más corta. No obstante, este problema puede planearse en forma similar. En este caso, los tiempos estimados para cada arco se utilizan como "distancias", que van a maximizarse en vez de minimizarse. De nuevo se incluye un suministro imaginario de una unidad de flujo en el primer nodo y una demanda imaginaria de una unidad en el último. El planteamiento de programación lineal de este problema es:

En esta figura se muestra también una cantidad desconocida de flujo, f , que entra en el gasoducto en el nodo 1 (el campo de gas) y que sale del gasoducto en el nodo 5 (la terminal de Chiapas). Utilizando este flujo, f , puede plantearse este problema de la siguiente manera:

MAXIMIZAR: f

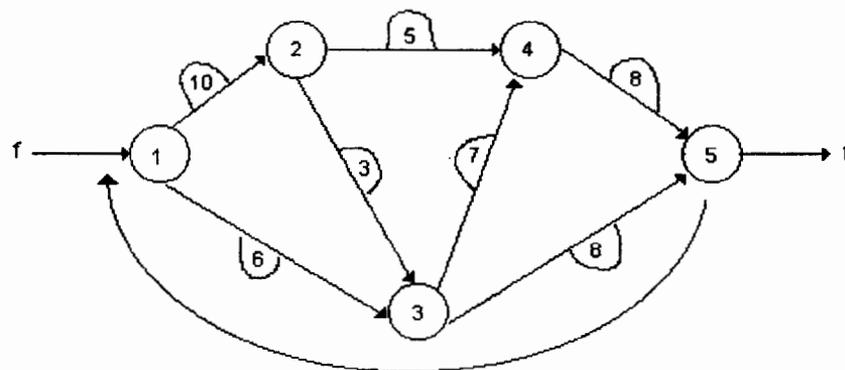
SUJETO A:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = & f \\
 x_{12} & & & - & x_{23} & - & x_{24} & & & = & 0 \\
 & & x_{13} & + & x_{23} & & & - & x_{34} & - & x_{35} & = & 0 \\
 & & & & & & x_{24} & + & x_{34} & & & - & x_{45} & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & x_{35} & + & x_{45} & = & f \\
 x_{12} \leq 10, & x_{13} \leq 6, & x_{23} \leq 3, & x_{24} \leq 5, & x_{34} \leq 7, & x_{35} \leq 8, & x_{45} \leq 8 \\
 x_{ij} \geq 0 & \text{para toda } i \text{ y toda } j
 \end{array}$$

Este planteamiento no se ajusta a nuestra formulación estándar de programación lineal de flujo de costo mínimo, puesto que el flujo que se desconoce, f , aparece tanto como variable de la función objetivo, como en forma de valor de lado derecho de las restricciones. Si se plantea de esta manera no es posible utilizar el método de flujo de costo mínimo para resolverlo.

Para evitar esta dificultad, en primer lugar se elimina el flujo f y se introduce un arco artificial o ficticio que conecta los nodos 5 y 1. El objetivo se convierte entonces en maximizar el flujo que pasa por este arco ficticio. Maximizar el flujo que regresa del nodo 5 al nodo 1, por un arco ficticio que no tiene capacidad, dará la cantidad de flujo que va del nodo 1 al nodo 5 a lo largo de la red de capacidades. En la figura 1.16 se muestra la red de gasoductos, incluyendo el arco de regreso.

Figura 1.16. Red modificada de los gasoductos



Ahora, utilizando esta nueva red de gasoductos, se tiene un planteamiento modificado, en donde el objetivo es maximizar x_{51} :

MAXIMIZAR: x_{51}

SUJETO A :

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_{51} & -x_{12} & -x_{13} & & & & & & & = 0 \\
 & x_{12} & & -x_{23} & -x_{24} & & & & & = 0 \\
 & & x_{13} & +x_{23} & & -x_{34} & -x_{35} & & & = 0 \\
 & & & & x_{24} & +x_{34} & & -x_{45} & & = 0 \\
 -x_{51} & & & & & & +x_{35} & +x_{45} & & = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_{12} \leq 10, \quad x_{13} \leq 6, \quad x_{23} \leq 3, \quad x_{24} \leq 5, \quad x_{34} \leq 7, \quad x_{35} \leq 8, \quad x_{45} \leq 8 \\
 x_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i \text{ y toda } j
 \end{array}$$

Ahora queda planteado el problema de flujo máximo en forma estándar de programación lineal de redes, excepto que no existen ofertas ni demandas. Los problemas de este tipo se denominan *redes circulares*.

PROBLEMA DE TRANSPORTE

El denominado *problema de transporte* es un caso especial del problema de transbordo, en el que todos los nodos son o fuentes (nodos de oferta) o destinos (nodos de demanda). En un problema de transporte no existen nodos de transbordo. Dado que es posible dividir el problema de transporte en dos conjuntos diferentes de nodos, es un problema de red *bipartita*. Para continuar analizando los problemas de transporte utilizaremos de nuevo un ejemplo.

Considere el caso de la Cervecería Modelo. Esta empresa elabora un cerveza que se distribuye a nivel nacional a partir de dos fábricas de cerveza, una en cada una de las dos costas de México (en Jalisco y Veracruz). La cerveza se envía a cuatro mayoristas que se encargan de la distribución subsecuente (en Chihuahua, Guerrero, Nuevo León y Yucatán), por lo que a la Modelo le ocupa sólo la distribución a los mayoristas. Los costos de distribución, por conjuntos de 100 cajas que se envían a cada mayorista, se presentan en la tabla 7 junto con la oferta mensual de cada fábrica y la demanda mensual de cada mayorista.

TABLA 7
Costos de distribución para la Modelo.

Fábrica de Cerveza	Yucatán	N. León	Chih	Gro.	Oferta (en Cientos de cajas)
Jalisco	\$21	\$15	\$18	\$9	550
Veracruz	\$10	\$14	\$16	\$23	650
Demanda (en cientos de cajas)	200	250	400	350	

Si se representa este problema en forma de red, aparecerá según se muestra en la figura 1.17. Dado que el flujo de un nodo de oferta sólo va a un nodo de demanda, se codificará el sistema común de numeración de los nodos para numerar los nodos de oferta en forma independiente de los nodos de demanda.

Observe que esto dará como resultado que haya nodos que se denotan como x_{11} , pero dado que los nodos de oferta están conectados sólo a los nodos de demanda, no existe ambigüedad con respecto a qué arco identifica a x_{11} .

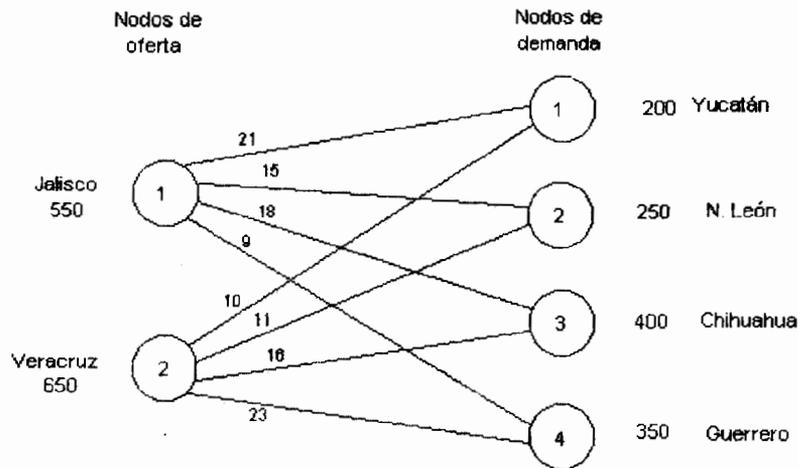


Figura 1.17. Red de transporte para la Modelo

El planteamiento de programación lineal del problema de transporte es muy similar al de los problemas de transbordo que se analizaron al inicio del capítulo.

De Jalisco a Yucatán	0
De Jalisco a Nuevo León	20 (cientos de cajas)
De Jalisco a Chihuahua	0
De Jalisco a Guerrero	350 (cientos de cajas)
De Veracruz a Yucatán	200 (cientos de cajas)
De Veracruz a Nuevo León	50 (cientos de cajas)
De Veracruz a Chihuahua	400 (cientos de cajas)
De Veracruz a Guerrero	0

No es necesario utilizar un paquete de programación lineal de redes para resolver un problema de transporte tan pequeño como ejemplo. Para ello se ha adaptado una versión del método simplex que se denomina **método del cruce del arroyo** (o de la piedra de paso: stepping stone) y se analiza en detalle en otro capítulo.

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

El ejemplo final de problemas de redes que consideramos aquí es el *problema de asignación de personal* (o en forma más simple, el problema de asignación). Este problema se refiere a la asignación de agentes a trabajos en forma tal que se minimicen los costos de esa asignación. En calidad de ejemplo, considérese la situación que debe manejar el entrenador Ricardo Martínez del Equipo de Natación de la Acuática Nelson Vargas.

El entrenador está intentando organizar el mejor equipo de relevo de mujeres para los 200 metros. Tiene 4 muchachas en el equipo: Luisa, Julieta, María y Rocío. Luisa sólo nada el estilo libre, por lo que no hay problema respecto de esa parte del equipo. Cada una de las otras tres chicas puede nadar en cualquiera de los otros tres estilos: mariposa, dorso y pecho. Entonces la cuestión es cuál de ellas debe nadar en qué estilo. Los tiempos de cada una de las nadadoras en cada uno de los estilos se muestran en la tabla 8.

TABLA 8
Tiempos por estilo del equipo de la Nelson Vargas

Nadadora	Estilo		
	Mariposa	Dorso	Pecho
Julieta	33 seg.	35 seg.	37 seg.
María	33 seg.	37 seg.	37 seg.
Rocío	33 seg.	36 seg.	39 seg.

Este problema puede plantearse en forma de red considerando tres nodos fuente, cada uno con un suministro de una unidad, y tres nodos destino, cada uno con una demanda de una unidad. Los nodos fuente representan los agentes disponibles (nadadoras) y los nodos destino, los trabajos (estilos). La red para este ejemplo se muestra en la figura 1.18.

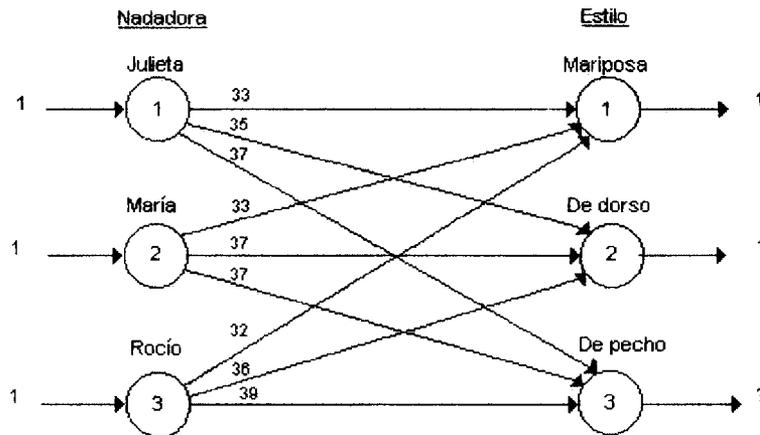


Figura 1.18. Red de asignación para el equipo de natación de la Nelson Vargas.

Es fácil de observar que el problema de asignación no es otra cosa que un caso especial de red de transporte en el que todas las ofertas o suministros y las demandas son iguales a 1 y en la que el número de nodos de oferta es igual al número de nodos de demanda. Puesto que esto es cierto, el procedimiento de programación lineal es muy similar:

$$\text{Min } Z = 33x_{11} + 35x_{12} + 37x_{13} + 33x_{21} + 37x_{22} + 37x_{23} + 32x_{31} + 36x_{32} + 39x_{33}$$

SUJETO A :

$$\begin{array}{rccccrcrcr} x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & = & 1 \\ & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 1 \\ & & & & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & = & 1 \\ x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & + & x_{31} & & & & = & 1 \\ & & x_{12} & & & & + & x_{22} & & & & + & x_{32} & & & = & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & x_{ij} \geq 0 & \text{para toda } i \text{ y toda } j \end{array}$$

Se ha omitido la última restricción de este planteamiento puesto que sería redundante, al igual que en el planteamiento de transporte. Una característica especial de este problema es que $x_{ij} = 0$ ó 1 .

En otras palabras:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si a la nadadora } i \text{ se le asigna el trabajo (estilo) } j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Estamos seguros de obtener este resultado porque en cada nodo de oferta existe sólo una unidad que pueda enviarse a lo largo de varios arcos.

1.9 NOTAS HISTÓRICAS

El estudio de los modelos de redes de flujo antecede al desarrollo de la programación lineal. Los primeros estudios en esta área los realizaron Kantorovich (1939), Hitchcock (1941) y Koopmans (1947) considerando el problema de transporte como un caso especial del problema de flujo a costo mínimo. Esos estudios proporcionaron una nueva luz en la estructura del problema y dieron nuevos métodos y algoritmos. El interés por las redes de flujo creció con el advenimiento del método SIMPLEX desarrollado por Dantzig en 1947, quien incluso especializó este algoritmo para el problema de transporte (ver Dantzig, 1951).

Durante los años 50's, las investigaciones comenzaron a mostrar un creciente interés en el problema de flujo a costo mínimo y sus especializaciones: el problema de la ruta más corta, el problema de flujo máximo y el problema de asignación; esto se debió principalmente a la importante aplicación de estos modelos en la vida real. Algunos autores desarrollaron algoritmos para resolver estos problemas. Dantzig, Ford y Fulkerson fueron pioneros en este aspecto. Mientras Dantzig se enfocó en los métodos basados en el SIMPLEX, Ford y Fulkerson desarrollaron algoritmos combinatorios primales duales. Los libros de Dantzig (1962) y de Ford y Fulkerson (1962) están presentes a través de la discusión de estas primeras contribuciones.

En los años siguientes, los problemas de flujo en red y sus generalizaciones emergieron como tópicos de gran interés en cientos de artículos y numerosos textos, así como en libros de referencia.

CAPÍTULO 2 CONCEPTOS BÁSICOS DE REDES

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan conceptos fundamentales para poder desarrollar diferentes algoritmos de redes. La representación matricial de una red que nos permite encontrar árboles de expansión y que además muestra la relación entre el teorema fundamental del Algebra Lineal y las estructuras de red. Asimismo, la dualidad entre potenciales y tensión y su relación con la programación lineal, que nos introducirá a otro concepto dual: el de trayectorias y cortes que se verá en el capítulo 3.

2.2 REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA RED

¿Cómo podemos representar numéricamente a una red?

Sea G una red, la matriz de incidencias nodos - arcos E es una matriz de $m \times n$ donde m es el número de nodos y n es el número de arcos cuyos elementos $e(i,j)$ son:
Una forma de recordar los signos de esta definición es que "una flecha siempre va

$$e(i, j) = \begin{cases} +1 & \text{si el arco } j \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si el arco } j \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

desde donde está hasta donde no está".

EJEMPLO 2.1

Construya la matriz nodos - arcos asociada a la red de la figura 2.1.

$$E = \begin{matrix} & \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

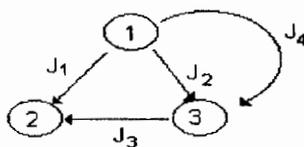


Figura 2.1

Si existen rizados la matriz nodos - arcos no sirve.

J_1, J_2, J_3 son linealmente dependientes ya que $J_1 + J_3 - J_2 = 0$.

¿Que significado tiene esto en la red?

Si se cambia de sentido un arco significa que se multiplica por -1 la columna, entonces en este caso que los vectores sean linealmente dependientes significa que se forma un circuito.

Los árboles son aquellas estructuras que no tienen circuitos, por lo tanto son linealmente independientes.

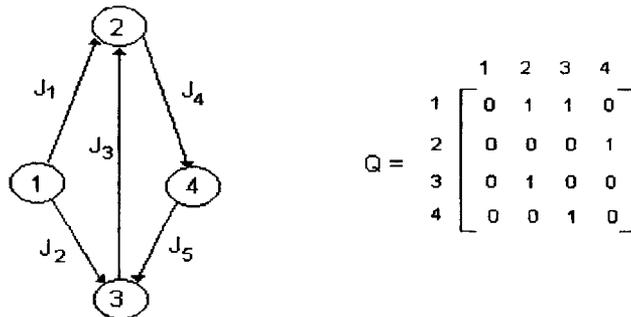
Además de la matriz de incidencia (o función de incidencia). Existe una matriz de adyacencia. Q de orden $m \times m$ definida en $N \times N$ de la siguiente manera:

$$q(i_1, i_2) = \begin{cases} 1 & \text{si existe un arco que parte de } i_1 \text{ y llegue a } i_2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por supuesto se tiene que G es una digráfica, esto es $A \subset N \times N$

EJEMPLO 2.2

Encuentre la matriz de adyacencia nodos-nodos de la siguiente red:



$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 2.2

Una matriz de $m \times m$ puede ser la matriz adyacente de una red con m nodos si consiste sólo de 0 y 1 y si no contiene rizos debe tener ceros en la diagonal principal y se define como se muestra en la figura 2.2.

El grado exterior de un nodo i es el número de arcos que salen de i por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} g_e(1) = 2 & g_e(3) = 1 \\ g_e(2) = 1 & g_e(4) = 1 \end{array}$$

El grado interior de un nodo i es el número de arcos que entran al nodo i .

$$\begin{array}{l} g_i(1) = 0 \\ g_i(2) = 2 \\ g_i(3) = 2 \\ g_i(4) = 1 \end{array}$$

la suma de los grados de todos los arcos es par

$$\sum g_e + \sum g_i = 5 + 5 = 10$$

2.3 REDES ESPECIALES

Una red G es **bipartita** si el conjunto de nodos N puede particionarse en N_1, N_2 con $N_1 \cap N_2 = \phi$ de manera que todo arco $j \sim (i_1, i_2)$ es tal que $i_1 \in N_1, i_2 \in N_2$ o $i_2 \in N_1, i_1 \in N_2$

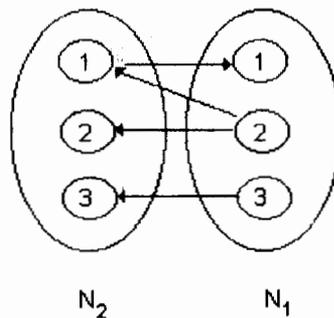


Figura 2.3

Nota:

1. Las matrices nodos-nodos para gráficas no dirigidas son simétricas.
2. La matriz nodos-nodos de una red bipartita es de la forma:

$$q = \begin{matrix} & I_1 & I_2 \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \# \\ \# & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

que es simétrica.

LEMA DE HANDSHAKING

En una gráfica, la suma de los grados de todos los nodos es igual al doble del número de arcos.

Demostración

Ya que cada arco tiene dos extremos, debe contribuir exactamente dos veces a la suma de los grados.

Este lema apareció por primera vez aunque en forma diferente en un artículo de Leonhard Euler (1707-1783). Titulado *Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis* (la solución de un problema referido a la geometría de posición) este artículo data de 1736 y es ampliamente conocido como el primer artículo en la teoría de gráficas, donde también da la solución de los puentes de Königsberg.

Para gráficas que no son dirigidas simplemente se habla del grado de un vértice como el número de arcos que "llegan a él" (pueden entrar o salir)

REDES SIMPLES

Es una gráfica que no contiene rizados ni arcos en paralelo con un nodo sumidero y un nodo fuente.

Un nodo **fuelle** es un nodo de donde únicamente salen arcos.

Un nodo **sumidero** es un nodo a donde únicamente entran arcos.

REDES CIRCULATORIAS

Una red es circulatoria si no existen nodos fuente o sumideros.

CONECTIVIDAD

Una cadena de longitud q (cardinalidad q) es una sucesión de q arcos.

$$L = \{j_1, \dots, j_q\}$$

tal que cada arco j_r de la sucesión ($2 \leq r \leq q-1$) tiene un punto final en común con el arco j_{r-1} ($j_{r-1} \neq j_r$) y un segundo punto final común con el arco j_{r+1} ($j_{r+1} \neq j_r$).

El punto final i de j_1 que no es adyacente a j_2 y el punto final i' de j_q que no es adyacente a j_{q-1} son llamados los puntos finales de la cadena L . Decimos que la cadena L une los nodos i, i' . Así en la siguiente red:

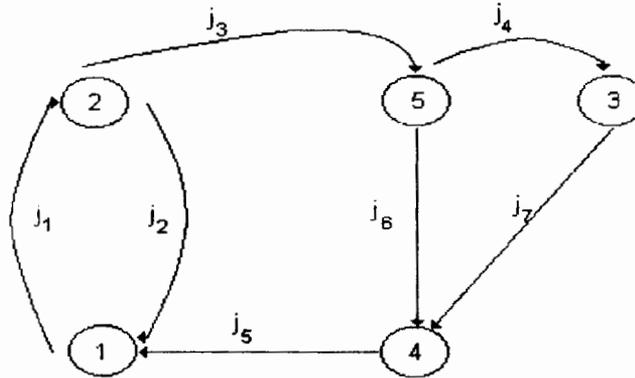


Figura 2.4

$L = \{j_2, j_5, j_6, j_4\}$ es una cadena del nodo 2 al nodo 3.

Una cadena es elemental si no se pasa 2 veces por un mismo nodo.

Un **ciclo** es una cadena cuyos puntos finales coinciden. Una **trayectoria** de longitud q (cardinalidad q) es una sucesión de q arcos $P = \{j_1, \dots, j_q\}$ con $j_1 = (i_0, i_1)$, $j_2 = (i_1, i_2), \dots, j_q = (i_{q-1}, i_q)$. Es decir, una trayectoria es una cadena cuyos arcos están todos dirigidos en el mismo sentido.

El nodo i_0 es el punto inicial de la trayectoria P y el nodo i_q es el punto terminal de la trayectoria P .

Así para la gráfica anterior $P = \{j_1, j_3, j_4, j_7\}$ es una trayectoria del nodo 1 al nodo 4, y se puede describir como la sucesión de nodos $\{1, 2, 5, 3, 4\}$.

Un **circuito** es una trayectoria cuyos nodos finales coinciden. Una **gráfica** se llama **conectada** si para cualquier par de nodos (i_1, i_2) existe una cadena que une i_1 con i_2 . La relación

$$i_1 R i_2 = \begin{cases} i_1 = i_2 \\ \text{o existe una cadena que une } i_1 \text{ con } i_2 \end{cases}$$

Es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva).

2.4 FLUJO Y DIVERGENCIA EN UNA RED

Un flujo en una red es una función real definida en A (donde A es el conjunto de arcos de una red G).

$$x : A \rightarrow \mathbb{R}$$

El valor $x(j)$ es el flujo en el arco j , y se interpreta como la cantidad de material que fluye en el arco j .

EJEMPLO 2.3

Sea la red siguiente:

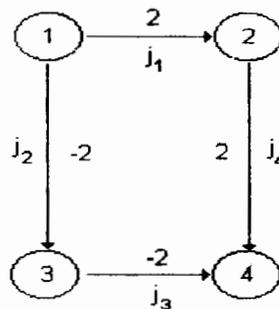


Figura 2.5

El tipo de material es el mismo para todos los arcos. Para entender en forma más clara los conceptos es útil entender j como un canal y $x(j)$ como el número de litros de agua por segundo pasando por cada punto de j un flujo estacionario del nodo inicial i al nodo final i' . La cantidad que entra en i es la misma que sale por i' , pero puede ser positivo, negativo o cero dependiendo de la dirección física del flujo.

Para un orden fijo de arcos $A = \{j_1, \dots, j_n\}$ un flujo x se puede representar como un vector (x_1, \dots, x_n) así para la figura anterior el flujo se puede representar como

$$x = (2, -2, -2, 2)$$

Así x es un "vector" indexado por el conjunto A (es decir un elemento del espacio R^A)

Existe otra notación para flujos que está vinculada con la representación de una red por su matriz de adyacencia. Como más tarde se requerirá que la red sea una digráfica (gráfica dirigida) cada arco se puede identificar por un par de nodos (i, i') . La idea es simplemente escribir $x(i, i')$ en lugar de $x(j)$ tomando $x(i, i') = 0$ en los casos en que no exista arco entre i, i' .

Los flujos en G se representan como funciones en $N \times N$ que pueden representarse matricialmente como:

$$x = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

DIVERGENCIA

Las matrices de incidencia vuelven a entrar en escena cuando tratamos de analizar qué sucede a un flujo x en un nodo i , particularmente las entradas y salidas o pérdidas. El nodo i está representado en la matriz de incidencia E por el renglón i .

Las cantidades de material que salen de i están asociadas con los arcos j tales que $x(j) > 0$ y $e(i, j) = 1$, o tales que $x(j) < 0$ y $e(i, j) = -1$.

¿Qué significa esto?

EJEMPLO 2.4

Sea la red de la figura 2.6.

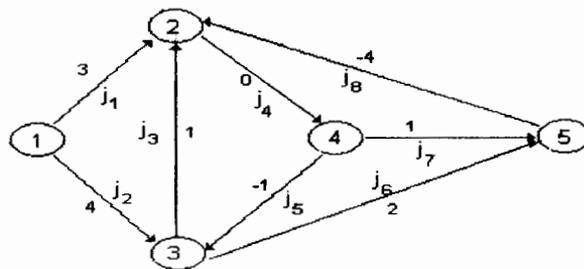


Figura 2.6

Para el nodo 3 se tiene en la matriz de incidencia:

$$E = \begin{matrix} & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 & j_7 & j_8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

el arco j_3 sale del nodo 3 y tiene asociado un 1 es decir $e(3,3) = 1$ (recuerde que cada entrada de la matriz está representada por $e(i, j)$) si se tiene un flujo $x(j=3) = 1$ (cantidad de material que sale del nodo 3) significa que el flujo "pasa" por el arco j_3 en el sentido que lleva el arco y por lo tanto $x(j) e(i,j) > 0$. Si $x(j) < 0$ por ejemplo $x(j) = -4$ significa que el flujo recorre en sentido contrario el arco y por lo tanto $e(i,j) = -1$ como es el caso de $x(8) = -4$ y $e(2,8) = -1$ lo que implica que $x(j) e(i,j) > 0$.

Así la cantidad total que sale desde i es la suma de todos los términos de la forma $e(i,j) x(j)$ que son positivos.

En forma semejante las cantidades que llegan a i corresponden a los casos donde $x(j) > 0$ y $e(i,j) = -1$ por ejemplo:

En el nodo 5: $x(6) = 2$ es decir la cantidad de flujo que llega al nodo 5 por el arco j_6 es de 2 y $e(5,6) = -1$ en la matriz de incidencia por lo tanto $x(6) e(5,6) < 0$

O $x(j) < 0$ y $e(i,j) = 1$ como en el nodo 4, $x(5) = -1$ es decir por el arco j_5 pasa un flujo que va al nodo 4 con -1 y $e(4,5) = 1$.

La suma de todos los términos de la forma $e(i,j) x(j)$ que son negativos es el negativo de la cantidad de flujo que llega a i .

De esta forma la suma de $e(i,j) x(j)$ sobre todos los arcos j nos da el total de salidas de i menos el total de llegadas a i .

Esta cantidad es la divergencia del flujo en el nodo i , y se denota $y(i)$, así

$$y(i) = \sum_{j \in A} e(i, j) x(j) = \text{divergencia de } x \text{ en } i$$

Por ejemplo, de la figura anterior:

en el nodo 3 llegan 4 unidades por j_2
 salen 2 j_6
 salen 1 j_5
 salen 1 j_3

Este nodo tiene la particularidad de que:

total de llegadas = # total de salidas.

Así $y(3) = 0$ en el nodo 5 se tiene $y(5) = -7$ esto significa que llegan 7 unidades más de las que salen y en general se dice que:

- Un nodo es fuente para el flujo x si $y(i) > 0$
- Un nodo es sumidero para el flujo x si $y(i) < 0$
- Si el flujo se conserva $y(i)=0$

Se llama y a la función de divergencia (vector) asociada con x y se escribe:

$$y = Ex = \text{div } x$$

En este caso para el flujo de la figura anterior usamos la matriz de incidencia y se calcula

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Así i_1 es una fuente, i_5 es sumidero, y el flujo se conserva en i_2, i_3 e i_4

El hecho de que las 7 unidades creadas en el nodo fuente i_1 sean las 7 que se destruyen en el sumidero no es un accidente. La intuición física sugiere, y el álgebra lo confirma que la cantidad de flujo que se crea en la fuente es igual a la cantidad que se destruye en el sumidero.

Esto se expresa como el **principio de la divergencia total**:

$$\sum_{i \in N} y(i) = 0 \quad \text{para } y = \text{div } x$$

Esto se verifica de la siguiente forma:

$$\sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in A} e(i, j)x(j) = \sum_{j \in A} \sum_{i \in N} e(i, j)x(j)$$

Pero

$$\sum_{i \in N} e(i, j) = 0 \quad \text{para toda } j \in A$$

ya que cada columna de la matriz de incidencia contiene exactamente un 1 y un -1 y la suma da 0.

OPERACIONES VECTORIALES

Dos flujos x y x^1 se pueden sumar o superponer para producir un flujo resultante x'' :
 $x''(j) = x(j) + x^1(j)$ para toda $j \in A$.

Así mismo, un flujo se puede multiplicar por un escalar $x' = \Lambda x$ lo que significa que
 $x'(j) = \Lambda x(j)$ para toda $j \in A$

¿Que está sucediendo físicamente?

Considerando la red del ejemplo 2.4 se tiene:

El flujo x' está representado en esta red, como una unidad de flujo pasando desde el nodo 1 hasta el nodo 5 pasando por los nodos 2 y 3.

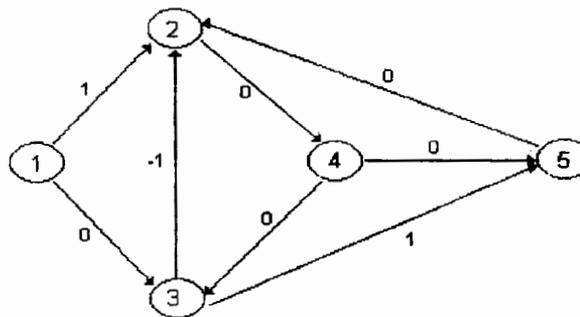


Figura 2.7

Haciendo la suma se tiene:

$x'' = x + x'$ y se tienen 8 unidades en el nodo fuente y llegan 8 unidades al nodo sumidero.

Note que el arco j_3 es usado por x y x' pero no por x'' .

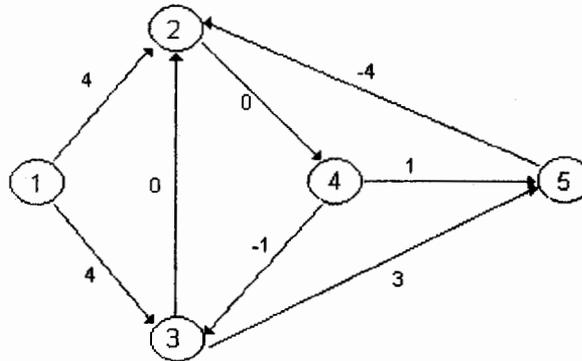


Figura 2.8

El flujo $2x'$ podría representar dos unidades moviéndose en el mismo sentido que x' de $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow i_5$, mientras $-x'$ podría representar una unidad moviéndose en forma inversa. Trivialmente se tienen las reglas

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x + x') &= \operatorname{div} x + \operatorname{div} x' \\ \operatorname{div}(\alpha x) &= \alpha \operatorname{div} x \end{aligned}$$

2.5 CIRCULACIONES

Un papel especial lo constituyen los flujos x en una red G tales que:

$$\operatorname{div} x = 0$$

Esto es que x se conserva en cada nodo. Tales flujos se conocen como circulaciones. La suma y el producto por un escalar de una circulación es nuevamente una circulación. Así el conjunto de todas las circulaciones forma un subespacio de \mathbb{R}^A : el espacio de las circulaciones C , claramente C es el espacio nulo de la matriz de incidencia E .

Una de las razones de porqué las circulaciones son importantes es que las discusiones teóricas a menudo pueden simplificarse en términos de ellas, esto debido a que todo flujo en una red G se puede identificar como una circulación de una red más grande. En el caso del flujo x del ejemplo 2.4 la idea se ilustra en la figura 2.9.

Formamos de una red G una nueva red \underline{G} aumentando un nuevo nodo i' (el nodo de distribución) y un arco $j_i \sim (i', i)$ (un arco de distribución) para cada uno de los nodos viejos i . Para esta nueva red los conjuntos de nodos y arcos se denotan \underline{N} y \underline{A} . Para cada flujo x en G le corresponde un flujo \underline{x} en \underline{G} definido por:

$$\begin{aligned} \underline{x}(j) &= x(j) \text{ para todos los arcos viejos} \\ \underline{x}(j_i) &= y(i) \text{ para todos los arcos de distribución} \end{aligned}$$

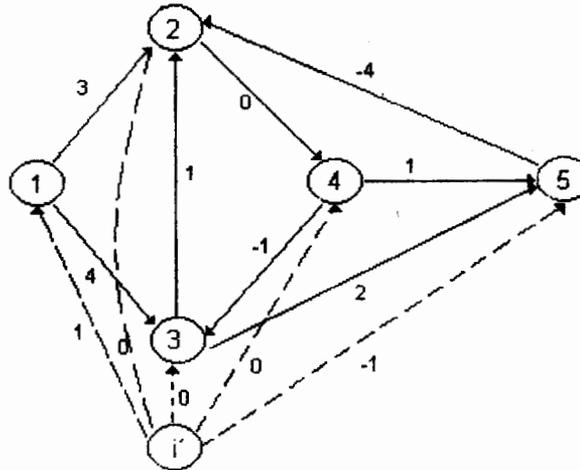


Figura 2.9

Así \underline{x} es una circulación en \underline{G} . Inversamente, cada circulación en \underline{G} corresponde de esta forma a un flujo en G .

También se tiene el caso en que se tienen identificados un nodo fuente y un nodo sumidero por lo cual sólo se agrega un arco como se ilustra en la figura siguiente:

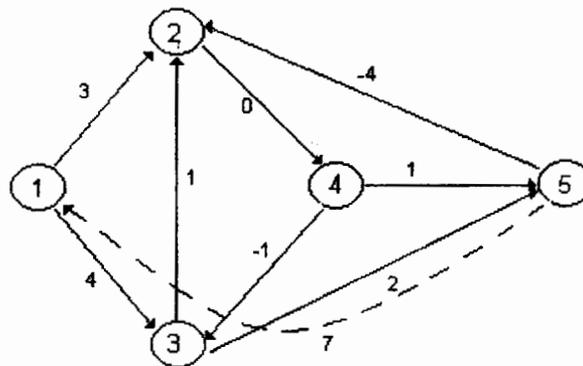


Figura 2.10

El nuevo arco j se conoce como un arco de suministro.

2.6 POTENCIALES Y TENSIÓN

Un potencial u en una red G es una función real definida en el conjunto de los nodos N .

$$u: N \rightarrow \mathbb{R}$$

El valor $u(i)$ es llamado el **potencial** en el nodo i . Con un arco $j \sim (i, i')$ se asocia la diferencia de potenciales

$$v(j) = u(i') - u(i) = \text{tensión a través de } j$$

El signo de la diferencia depende de la orientación del arco. Así se define la **función tensión** v en A , y se denomina el diferencial del potencial u .

La tensión $v(j)$ se puede escribir como

$$v(j) = - \sum_{i \in N} u(i) e(i, j)$$

o

$$v = -uE = \Delta u$$

Un ejemplo de potenciales y tensiones se muestra en la figura 2.11 donde los números en los nodos son los potenciales y los números en los arcos son las tensiones correspondientes.

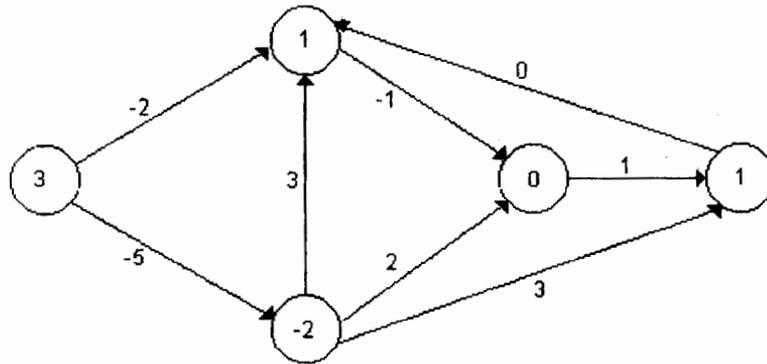


Figura 2.11

En general, llamamos a v un diferencial en G si $v = \Delta u$ para algún potencial u . El conjunto de todos los diferenciales se preserva bajo la suma y la multiplicación por un escalar, y así como el espacio de las circulaciones forma un subespacio de \mathbb{R}^A , y

se llama el espacio de los diferenciales y se denota por D . De esta forma D es el espacio de los renglones en la matriz de incidencia E , el rango de la transformación lineal $u \rightarrow -uE$ de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^A$.

Es natural usar la notación siguiente de producto punto para elementos de \mathbb{R}^N y \mathbb{R}^A .

$$u \cdot y = \sum_{i \in N} u(i)y(i) \quad v \cdot x = \sum_{j \in A} v(j)x(j)$$

y se obtiene de esta manera la fórmula de conversión:

$$v \cdot x = -u \cdot y \quad \text{sí } y = \text{div } x, v = \Delta u$$

la validez de esta fórmula parte del hecho de que ambos lados se reducen a la expresión:

$$v(j) = -\sum u(i) e(i,j)$$

entonces

$$v \cdot x = - \sum_{i \in N, j \in A} u(i) e(i, j) x(j) = -uEx = -u \cdot y$$

Una consecuencia inmediata de la fórmula de conversión es el hecho de que

$$v \cdot x = 0 \quad \text{para todos } v \in D, x \in C, \text{ ya que:}$$

1. $v \cdot x = -u \cdot y$ como y está asociada a un flujo x que es circulación, entonces $y(i) = 0$ para todo i , lo que implica que $v \cdot x = 0$
2. Si $x \in C$, $v \in D$ y C es el espacio nulo de E y D es el espacio renglón de E por la segunda parte del Teorema Fundamental de Álgebra Lineal que dice:

Dada una matriz de $m \times n$ se tiene

$$N(A) = (R(A^T))^{\perp} \\ R(A^T) = N(A)^{\perp}$$

además

$$N(A^T) = (R(A))^{\perp} \\ R(A) = (N(A^T))^{\perp}$$

y $\dim(\text{espacio fila}) + \dim(\text{espacio nulo}) = \text{número de columnas}$.

Entonces C y D son complementos ortogonales, lo que significa que el producto entre 2 elementos cualesquiera de ellos es igual a cero además:

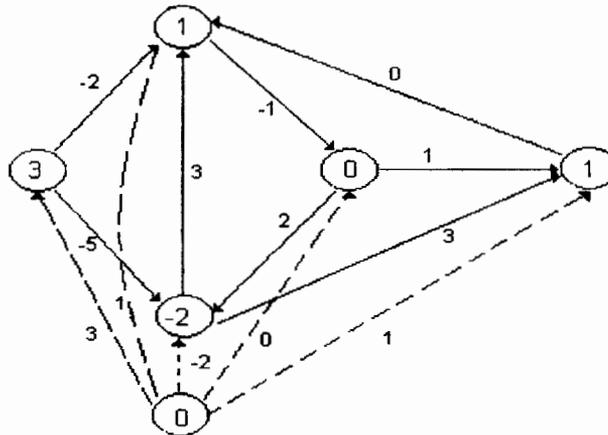
$$\dim C + \dim D = |A|$$

$$D = C^\perp = \{v \in R^A \mid \forall x = 0 \quad \forall x \in C\}$$

$$C = D^\perp = \{x \in R^A \mid \forall x = 0 \quad \forall v \in D\}$$

Así como un flujo en G se puede ver como parte de una circulación de la red aumentada \underline{G} , se puede también ver cada potencial en G como parte de un diferencial en \underline{G} : como se muestra en la figura siguiente:

Figura 2.12



Entonces dado cualquier potencial u en G con una tensión asociada v se define el potencial \underline{u} en \underline{G} como:

$$\underline{u}(i) = \begin{cases} u(i) & \text{para toda } i \text{ tal que } i \text{ es "nodo viejo"} \\ u(i) = 0 & \text{para el nodo de distribución } i \end{cases}$$

La tensión $\underline{v} = \Delta \underline{u}$ en \underline{G} satisface

$$\underline{v}(j) = v(j) \text{ para toda } j \text{ donde } j \text{ son "arcos viejos"}$$

$$\underline{v}(j) = u(i) \text{ para los arcos de distribución } j_i$$

En términos de dualidad los variables definidas sobre los arcos se convierten en variables definidas sobre los nodos.

La tabla siguiente define un par de sistemas lineales duales.

<i>Primal</i>	<i>Dual</i>
Flujos - variables definidas sobre los arcos divergencias - variables definidas sobre los nodos	potencial - variables definidas sobre los nodos tensión - variables definidas sobre los arcos

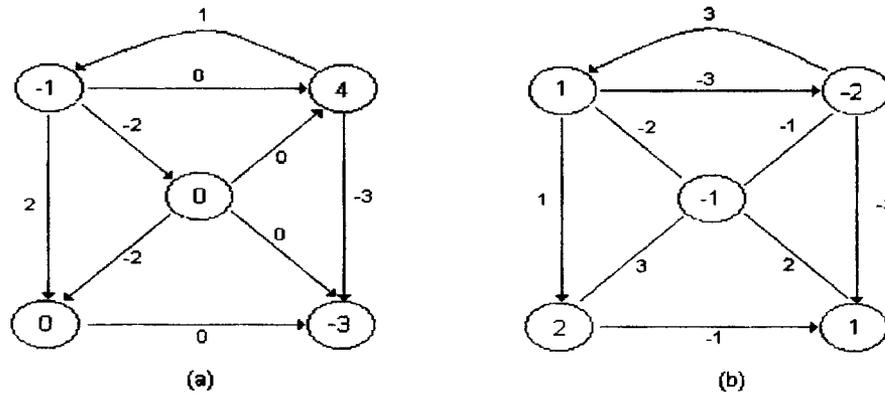
Los potenciales y las tensiones se pueden sumar o multiplicar por escalares, dos mismos potenciales pueden tener la misma tensión. En particular si:

$$u'(i) = u(i) + k \text{ donde } k \text{ es una constante, para toda } i \text{ en } N$$

Ejercicio

Considere las redes de la figura 2.13 (a y b). En la figura a se muestran los flujos y se pide calcular las divergencias. En la figura b se muestran las potenciales y se pide calcular las tensiones en los arcos.

Figura 2.13 a y b.



2.7 FLUJOS ÓPTIMOS Y POTENCIALES

Para cada arco $j \in A$ existe un intervalo $c(j) \subset \mathbb{R}$ y una función $f_j: c(j) \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que para cada nodo $i \in N$ existe un intervalo $c(i) \subset \mathbb{R}$ y una función $f_i: c(i) \rightarrow \mathbb{R}$. El problema de flujo óptimo es a grandes rasgos:

$$\min \sum_{j \in A} f_j(x(j)) + \sum_{i \in N} f_i(y(i)) \text{ sobre todos los flujos}$$

$$x \in \mathbb{R}^A \text{ satisface } x(j) \in c(j) \quad \forall j \in A$$

$$y(i) \in c(i) \quad \forall i \in N \text{ donde } y = \text{div } x.$$

En forma análoga se tiene el problema de potencial óptimo

$$\min \sum g_i(u(i)) + \sum g_j(u(j)) \quad \forall u \in \mathbb{R}^N$$

que satisfacen

$$u(i) \in D(i) \quad \forall i \in N \quad \text{y} \quad v(j) \in D(j) \quad \forall j \in A$$

2.8 NOTAS HISTÓRICAS

Aunque las **redes eléctricas** se han estudiado por mucho tiempo, la utilidad de los flujos y potenciales de las redes en la modelación de problemas en economía e investigación de operaciones no fue reconocida hasta los cincuenta. El libro de L.R. Ford y D.R. Fulkerson (1962) ha jugado un papel realmente significativo al estimular el crecimiento y aplicaciones de la teoría de redes en esas nuevas áreas. La notación y terminología en ese libro son naturales para la gente familiarizada con la programación lineal y han sido ampliamente aceptadas en la Investigación de Operaciones.

La noción de **sistemas lineales duales** corresponde a la programación lineal. Ha sido desarrollada en muchas direcciones interesantes por A.W. Tucker (1960), (1963) y prueba ser especialmente útil al hacer generalizaciones de los problemas de optimización en redes a otros de programación separable.

Los términos **flujo** y **divergencia** no fueron usados en teoría de redes antes de Rockafellar y pueden no estar completamente ligados a la ingeniería eléctrica debido a otro uso conectado con magnetismo. Sin embargo son simples, naturales y cubren una necesidad definida. El "nodo de distribución" en la red aumentada corresponde a la "tierra" en teoría eléctrica.

Los flujos x que pertenecen al espacio de circulaciones C se dice que también satisfacen la **Ley de Corriente de Kirchhoff**, mientras que las tensiones v en el espacio de diferenciales D satisfacen la **Ley de Voltaje de Kirchhoff**. El uso de esta terminología es en honor al trabajo pionero de G Kirchhoff en 1847. Una discusión de esas condiciones en la terminología de topología combinatoria se encuentra en Slepian (1968). El hecho de que C y D son ortogonales es también conocido como el **Teorema de Tellegen**.

CAPÍTULO 3 TRAYECTORIAS Y CORTES

3.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es describir dos conceptos duales asociados con nodos y arcos: la trayectoria y el corte; así como el resultado central que los relaciona: el teorema de la red pintada y su equivalencia, el Lema de Minty.

DEFINICIÓN 3.1

En una red G se dice que P es una trayectoria, si consiste de una sucesión finita de la forma:

$$i_0, j_1, i_1, j_2, \dots, j_r, i_r.$$

donde $r > 0$ y cada i_k es un nodo mientras que j_k es un arco tal que

$$j_k \sim (i_{k-1}, i_k) \text{ o } j_k \sim (i_k, i_{k-1})$$

Los nodos i_0 e i_r reciben el nombre de nodos **inicial** y **final** de la trayectoria, respectivamente. Si $i_0 = i_r$ se dice que P es un **circuito**.

Un arco j_k en una trayectoria P se dice que se recorre positivamente (negativamente) si $j_k \sim (i_{k-1}, i_k)$ (si $j_k \sim (i_k, i_{k-1})$). Si todos los arcos de P se recorren positivamente, se dice que P es una **trayectoria positiva** o **circuito positivo**. De manera semejante P es una trayectoria negativa o circuito negativo si todos sus arcos se recorren negativamente.

Si G es una digráfica, la trayectoria P se puede denotar como:

$$P: i_0 \rightarrow i_1 \leftarrow i_2 \rightarrow i_3$$

Pues a cada arco le corresponde un par de nodos en forma única.

EJEMPLO 3.1

En la figura 3.1:

- a) un circuito es: 1, J_1 , 2, J_3 , 3, J_2 , 1
- b) una trayectoria 2, J_5 , 5, J_6 , 3

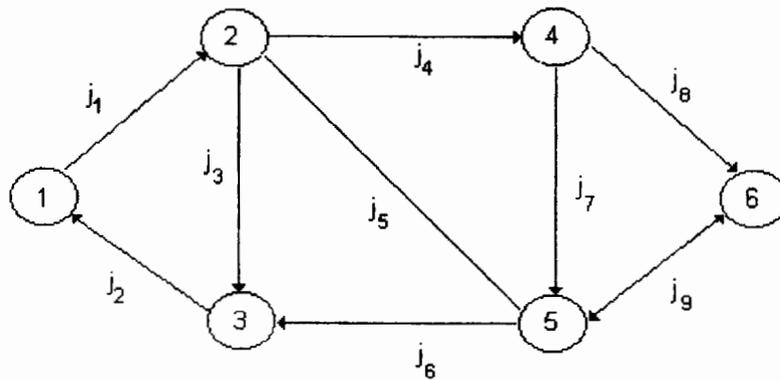


Figura 3.1

es usual escribir si G es digráfica

a) P: 1→2→3→1

b) P: 2→5→3

Una trayectoria P puede recorrer más de una vez un arco, si esto sucede se dice que P tiene **multiplicidades** o que es una **trayectoria con multiplicidades**.

Una trayectoria **elemental** o **simple** es aquella en donde cada arco y nodo se recorren una sola vez.

Sea P una trayectoria sin multiplicidades. Denotaremos por: P⁺ el conjunto de arcos que se recorren positivamente y por P⁻ el conjunto de arcos que se recorren negativamente.

Se define la **función de incidencia** de la trayectoria elemental P como:

$$e_p(j) = e(j, p) = \begin{cases} +1 & \text{si } j \in P^+ \\ -1 & \text{si } j \in P^- \\ 0 & \text{si } j \notin P \end{cases}$$

Note que esta función además de indicar la orientación en el arco puede interpretarse como un flujo "unitario" en la red para el ejemplo 3.1

a) $e_p = [1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

b) $e_p = [0, 0, 0, 0, 1, -1, 1, 0, 0]$

EJEMPLO 3.2

Dada la siguiente red:

- a) ¿ Existe una trayectoria positiva del nodo 5 al 2? No
- b) ¿ Existe un circuito positivo que contenga al arco J_6 ? No

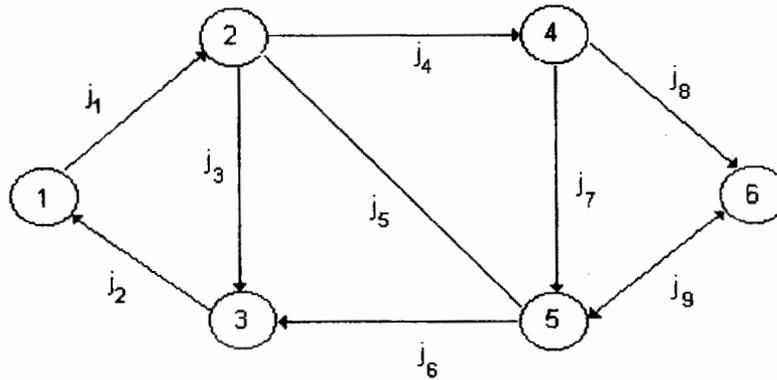


Figura 3.2

CONECTIVIDAD

Una red G se dice **conexa** si para cada par de nodos distintos s y s^1 existe una trayectoria $P: s \rightarrow s^1$, esto es, una trayectoria P que tiene como nodo inicial s y como nodo final s^1 .

Si G no es conexa podemos particionarla en k redes $G_i(N_i, A_i)$ $i=1, 2, \dots, k$ donde los subconjuntos de nodos N_i forman una partición de N y son tales que dos nodos s y s^1 pertenecen al mismo conjunto N_i si y sólo si existe una trayectoria $P: s \rightarrow s^1$ o bien $s = s^1$.

Los subconjuntos de arcos A_i , se definen como los arcos cuyos extremos pertenecen a N_i y también forman una partición de A .

Una red **fuertemente conexa** es aquella para la cual existe una trayectoria positiva $p: s \rightarrow s^1$ para cada par de nodos distintos s y s^1

EJEMPLO 3.3

Una red conexa

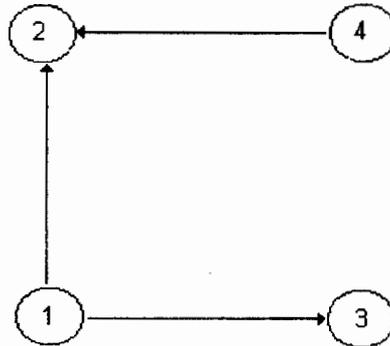


Figura 3.3

Una red fuertemente conexa

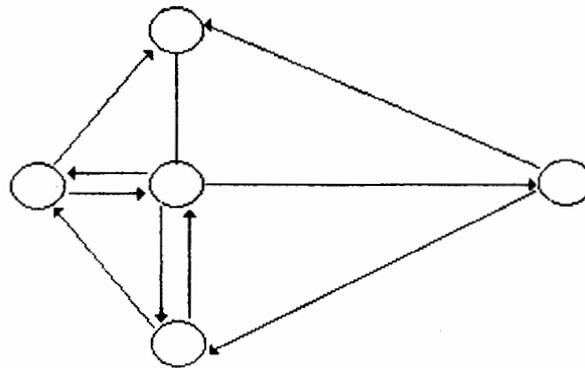


Figura 3.4

3.2 EL PROBLEMA DE DETERMINAR UNA TRAYECTORIA

Un aspecto básico de la definición de conexidad de una red es la existencia de trayectorias de un nodo a otro con el propósito de analizar este problema, que se repetirá continuamente, diremos que los arcos pueden recorrerse de acuerdo con las siguientes reglas:

- Arcos que se recorren en cualquier sentido (verdes)
- Arcos que únicamente se recorren en el sentido del arco (blancos)
- Arcos que únicamente se recorren en sentido inverso (negros)
- Arcos que no pueden recorrerse (rojos)

Para el ejemplo 3.2 dado el siguiente coloreado

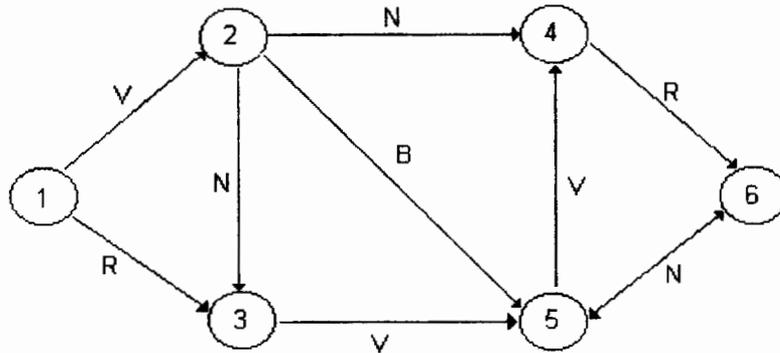


Figura 3.5

Encuentre una trayectoria del nodo 5 al nodo 2 y otra del nodo 1 al nodo 6.

PROBLEMA DE LA TRAYECTORIA PINTADA

Sea G una red y N^+ y N^- conjuntos ajenos de nodos. Suponga que hemos efectuado un pintado de la red. (Colores: verde, blanco, negro y rojo).

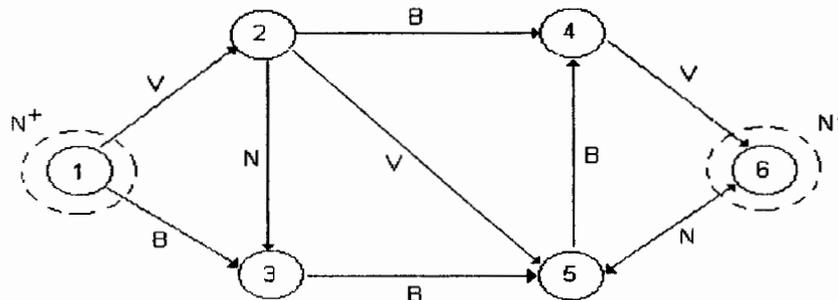
Determine una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$; esto es, una trayectoria que parte de N^+ y termina en N^- tal que cada arco de P^+ es verde o blanco y cada arco de P^- es verde o negro.

Una trayectoria P con las propiedades anteriores se dice **compatible** con la coloración o bien el problema anterior equivale a encontrar una trayectoria compatible de N^+ a N^- .

EJEMPLO 3.4

En la siguiente red encuentre una trayectoria compatible con la coloración de N^+ a N^-

Figura 3.6



Se propone la siguiente trayectoria P: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$.

Es importante hacer notar que en el pintado, cada arco de la red tiene exactamente uno de los colores que se han dado, aunque puede haber un color no usado. Por ejemplo para probar conexidad todos los arcos se pintan de verde mientras que para probar que una red es fuertemente conexa se pintarían de blanco o negro como se verá más adelante.

CORTES

Un concepto dual a una trayectoria, es el concepto de corte o cortadura que podemos formularlo como sigue:

Sean S y S' dos subconjuntos de nodos de una red G y se definen los conjuntos de arcos:

$$\begin{aligned} [S, S']^+ &= \{j \in A \mid j \sim (i, i') \ i \in S, i' \in S'\} \\ [S, S']^- &= \{j \in A \mid j \sim (i', i) \ i \in S, i' \in S'\} \end{aligned}$$

el caso más usual es que $S' = N \setminus S$, es decir que S' es el complemento de S en N.

En este caso se dice que un conjunto de la forma $[S, N \setminus S]$ es un corte $Q = [S, N \setminus S]$ tal que:

$$Q^+ = [S, N \setminus S]^+ \quad \text{y} \quad Q^- = [S, N \setminus S]^-$$

o también

$$\begin{aligned} Q^+ &= \{j \in A \mid j \sim (i, i'), \ i \in S, i' \in S'\} \\ Q^- &= \{j \in A \mid j \sim (i', i), \ i \in S, i' \in S'\} \end{aligned}$$

La palabra corte para Q proviene de la idea de que cualquier trayectoria P con nodo inicial en S y nodo terminal en $N \setminus S$ debe, al menos en una etapa, atravesar uno de los arcos en Q, al borrar arcos en Q se cortaría tal trayectoria. El hecho de que P debe usar un arco de Q se establece formalmente de la siguiente manera:

Sea i el primero de los nodos en P que no está en S, tal nodo existe ya que P va de S a $N \setminus S$. El arco de P inmediatamente anterior i, llamado j, que une al nodo de S con un nodo de $N \setminus S$, y pertenece a Q, entonces $j \in P^+ \cap Q^+$ ó $j \in P^- \cap Q^-$

Por ejemplo, en la red anterior

$$\begin{aligned} Q &= [S, N \setminus S] \quad \text{Si} \quad S = \{1, 2, 3\} \\ Q^+ &= \{(2, 4), (2, 5), (3, 5)\} \quad Q^- = \emptyset \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.6

Sea la red, con la siguiente coloración (ver figura 3.7).

Sea $Q = [S, N_S]$ si $S = \{2, 5\}$

$$Q^+ = \{(2,4), (2,3), (5,4)\}$$

$$Q^- = \{(1,2), (3,5), (6,5)\}$$

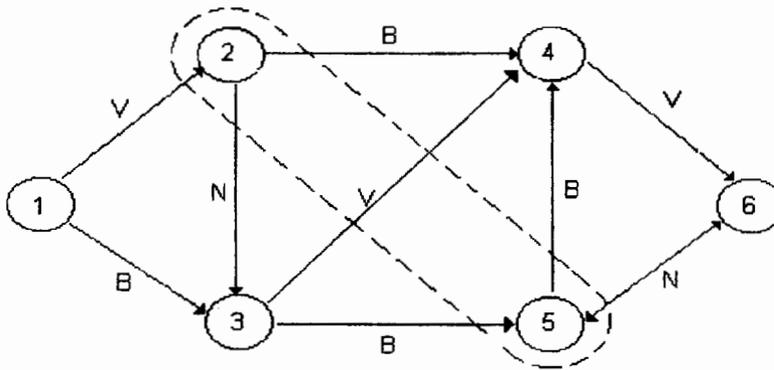


Figura 3.7

EJEMPLO 3.7

En la red del ejemplo 3.6 especifique el corte Q considerando que los elementos de Q^+ sean blancos o verdes y los de Q^- sean negros o verdes.

Sea $S = \{2, 5\}$ con $Q = [S, N_S]$

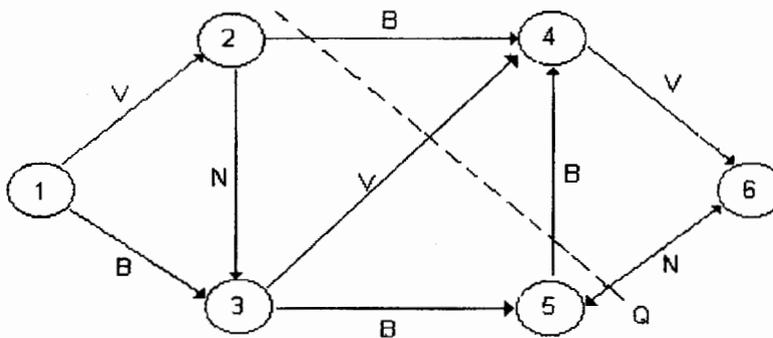


Figura 3.8

La función de incidencia del corte Q se define como:

$$e_Q(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in Q^+ \\ -1 & \text{si } j \in Q^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad e_s E = e_Q$$

Es interesante observar que e_Q , como una función en el conjunto de los arcos, se puede considerar como un diferencial; sin embargo, ésta es la tensión correspondiente al negativo del potencial

$$e_s(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

Donde S es tal que $Q=[S, N \setminus S]$.

En general, $e_Q = \Delta u$ con

$$u(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in N \setminus S \\ 0 & \text{si } i \in S \end{cases}$$

EJEMPLO 3.8

Sea la red

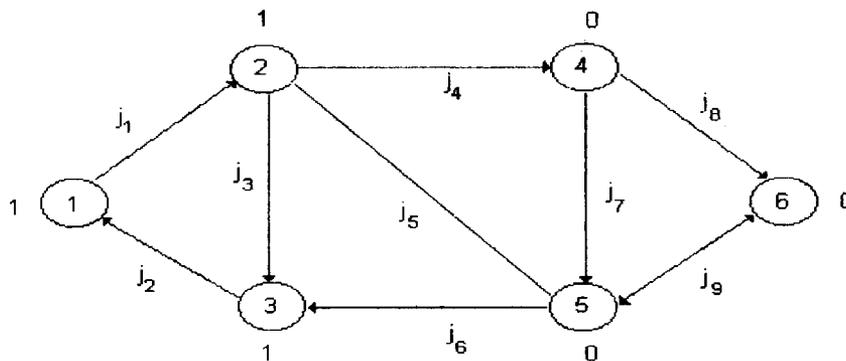


Figura 3.9

Sea $Q=[S, N \setminus S]$ $S=\{1,2,3\}$

$$Q^+ = \{(2,4), (2,5)\}$$

$$Q^- = \{(5,3)\}$$

$$e_Q = [0,0,0,1,1,-1,0,0,0]$$

Un corte se dice **elemental** si al quitar estos arcos de la red, el número de componentes de la red aumenta en uno.

3.3 ALGORITMO DE ENRUTAMIENTO

Se usa para determinar una solución al problema de las trayectorias compatible con una coloración dada o bien un corte.

La idea del algoritmo es combinar un conjunto de nodos $S \supset N^+$ y una función $\Theta: SN^+ \rightarrow A$ que recibe el nombre de enrutamiento (ó Θ -enrutamiento) de S con base en N^+ tal que etiqueta cada nodo $i \in SN^+$, con un arco $j \in A$, dicha etiqueta servirá para representar las trayectorias construidas.

- a) Para cada $i \in SN^+$, $\Theta(i)$ es un arco que une i con algún nodo de S .
- b) Se genera la sucesión $i_0, \Theta(i_0), i_1, \Theta(i_1), \dots, i_k, \Theta(i_k)$, donde i_k es el nodo final del arco $\Theta(i_{k-1})$ y eventualmente se llega a N^- .

ALGORITMO DE ENRUTAMIENTO

Propósito: Determinar una trayectoria de N^+ a N^- compatible con una coloración dada.

Descripción

- PASO 1 Sea $S=N^+$ y Θ vacío
- PASO 2 Determine el corte $Q=[S, N^+]$
- 2.1 Si existe $j \in Q^+$ verde o blanco o si $j \in Q^-$ es verde o negro ir a 3
 - 2.2 Si no existe j terminar. No hay solución al problema
- PASO 3 Sea $\Theta(i)=j$ con $i \notin S$ hacer $S := S \cup \{i\}$ (enrutamiento compatible con la coloración).
- 3.1 Si $i \in N^-$ terminar. Θ contiene una trayectoria compatible $P: N^+ \rightarrow N^-$
 - 3.2 Si $i \notin N^-$ se tiene $S \cap S^- = \emptyset$ ir a 2

EJEMPLO 3.9

Dada la red con $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{s'\}$ encontrar una trayectoria compatible con el pintado

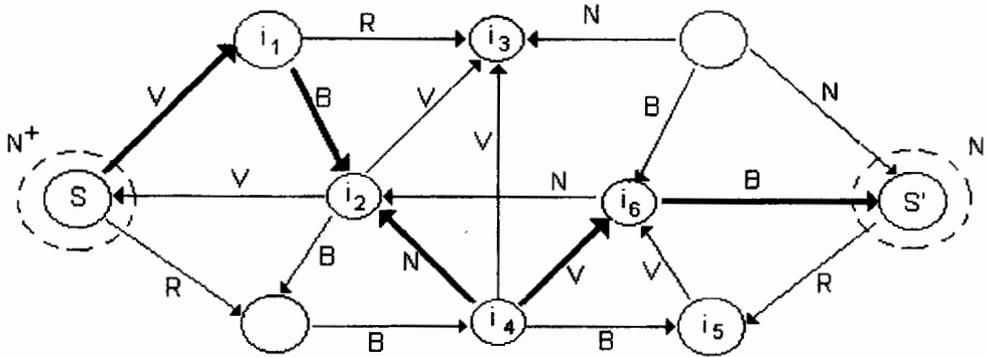


Figura 3.10

el nodo i_k se aumenta a S en la k-ésima iteración

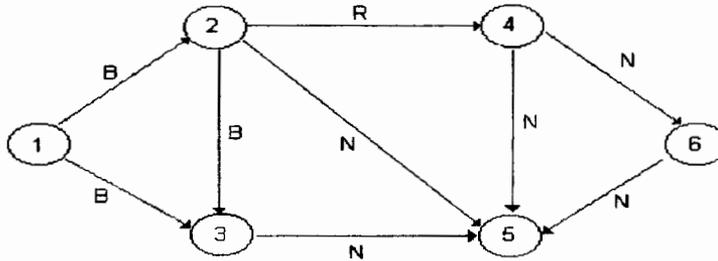
$$P: s \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_4 \leftarrow i_6 \leftarrow s'$$

EJEMPLO 3.10

Determine si existe una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ en la siguiente red.

$$N^+ = \{1\} \quad N^- = \{6\}$$

Figura 3.11



Definimos un corte que sólo contenga al nodo 1, nos fijamos en sus arcos, si el arco que va al nodo 2 es blanco extendemos s a ese nodo, lo mismo para el nodo 3, el conjunto de estados alcanzables es 2,3. Se define otro corte que abarca a los nodos 1,2,3 y se vuelve a empezar.

EJEMPLO 3.11

Dada la siguiente red (figura 3.12), encuentre una trayectoria compatible con la coloración o un corte.

PASO 1

Comenzamos con $S_0 = N^+ = \{i_1\}$ y Θ vacío.

PASO 2

$Q_1 = \{j_1, j_2, j_3\}$; j_1, j_2, j_3 son compatibles con el pintado.

PASO 3

Sea

$$\Theta(i_2) = j_1$$

$$\Theta(i_3) = j_2$$

$$\Theta(i_4) = j_3$$

$$S_1 = S_0 \cup \{i_2, i_3, i_4\} = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$$

$$S_1 \cap N^- = \emptyset, \text{ Ir al paso 2.}$$

Iteración 1

$Q_2 = \{j_4, j_5, j_7, j_9, j_{10}, j_{11}\}$; j_4, j_5 son compatibles con el pintado.

VER PASO 3

Sea $\Theta(i_7) = j_4$

$$\Theta(i_5) = j_5$$

$$S_2 = S_1 \cup \{i_5, i_7\} = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_7\}$$

$$S_2 \cap N^- = \emptyset, \text{ Ir al paso 2.}$$

Iteración 2

$$Q_3 = \{j_9, j_{10}, j_{11}, j_{13}, j_{14}, j_{17}, j_{18}\}.$$

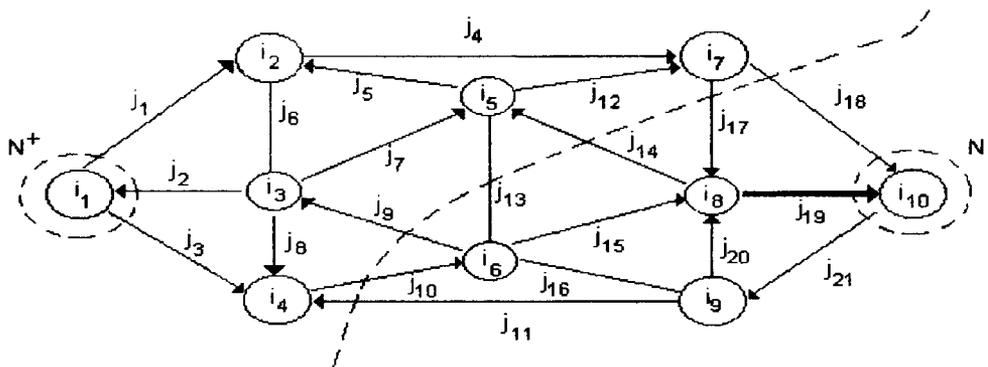


Figura 3.12

No existen arcos compatibles con la coloración. Por lo cual no existe solución al problema.

NOTA: El pintado es:

<u>Color</u>	<u>Arco</u>
Verde	$J_1, J_3, J_4, J_{12}, J_{15}, J_{21}$
Blanco	$J_9, J_{11}, J_{13}, J_{14}$
Negro	$J_2, J_5, J_6, J_7, J_8, J_{16}, J_{18}, J_{20}$
Rojo	J_{10}, J_{17}, J_{19}

DUALIDAD DE TRAYECTORIAS Y CORTES

El problema complementario al de encontrar una trayectoria compatible con una coloración dada es el corte compatible. Se dice que el **corte Q separa N^+ de N^-** si es de la forma $[S, N \setminus S]$, para algún $S \subset N$, tal que $N^+ \subset S$ y $N^- \cap S = \emptyset$. Se denotará Q con $N^+ \downarrow N^-$.

Problema del corte coloreado (o pintado) Sean N^+ y $N^- \subset N$ tales que $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Sea una coloración en la red G con los colores verde, blanco, negro y rojo.

El problema es determinar un corte $Q: N^+ \downarrow N^-$ tal que todo arco de Q^+ sea rojo o negro mientras que todo arco de Q^- sea rojo o blanco.

Un corte que cumple las restricciones de color se dice **compatible** con la coloración y si además separa N^+ de N^- constituye la solución al problema del corte coloreado. Observe la dualidad entre las restricciones de color para trayectorias y cortes.

Teorema (de la red colorada) Sea $N^+ \subset N$, tales que $N^+ \cap N^- = \emptyset$. Entonces, para toda coloración de la red G con los colores verde, blanco, negro y rojo, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida.

- El problema de la trayectoria coloreada tiene solución P.
- El problema del corte coloreado tiene solución Q.

Demostración:

Sea G una red coloreada y $N^+ \subset N$ y $N^+ \cap N^- = \emptyset$ aplique el algoritmo de enrutamiento, entonces el algoritmo tiene 2 terminaciones posibles y excluyentes, si termina en el paso 2 se ha construido un corte Q compatible con la coloración, la existencia de este corte garantiza la no existencia de una trayectoria compatible; o bien, en el paso 3, donde se obtiene una trayectoria coloreada P la que a su vez excluye la posibilidad de encontrar un corte Q compatible con la coloración

Existe otro resultado fuertemente relacionado con el teorema de la red coloreada. Este resultado es el lema de Minty que utiliza el concepto de corte elemental paralelo al de trayectoria elemental.

LEMA DE MINTY

Considere una red G con pintado de arcos verde, blanco, negro o rojo. Dado cualquier arco j blanco o negro uno y sólo uno de los siguientes postulados es cierto:

- a. Existe un corte Q (elemental) compatible con la coloración que usa j .
- b. Existe un circuito (elemental) compatible con la coloración que usa j .

Demostración:

Sea $J=(i_1, i_2)$ un arco blanco o negro, si J es blanco considere $N^+ = \{i_2\}$ y $N^- = \{i_1\}$. Si J es negro considere $N^+ = \{i_1\}$ y $N^- = \{i_2\}$.

Apliquemos el algoritmo del enrutamiento para encontrar una trayectoria de N^+ a N^-

Observe que el arco J siempre pertenece al corte Q del paso 2 del algoritmo, pero debido a su coloración y la forma de selección de N^+ y N^- J no es compatible con la coloración.

Ahora el algoritmo sólo tiene dos terminaciones excluyentes en el paso 2: que es el determinar un corte que contendría a J o bien en el paso 3 al encontrar una trayectoria de N^+ a N^- que no contiene a J y como J es compatible con una trayectoria de N^- a N^+ por su forma de selección se forma un circuito.

PROPOSICIÓN

El teorema de la red coloreada y el lema de Minty son equivalentes.

Demostración: Use Minty para probar el Teorema.

Ya vimos que se demuestra el lema de Minty usando el teorema de la red coloreada, para demostrar que son equivalentes basta demostrar el teorema de la red coloreada usando el Lema de Minty.

Entonces procedemos a demostrar el Teorema de la red coloreada.

Demostración:

Sea G una red coloreada con los cuatro colores de costumbre y sean N^+ , N^- dos subconjuntos ajenos del conjunto N de nodos de la red. Sea G' una red construida agregando a G el arco $J'=(s', s)$ y los arcos (s, i) para todo $i \in N^+$ y (k, s') para toda $k \in N^-$ como se muestra en la figura siguiente:

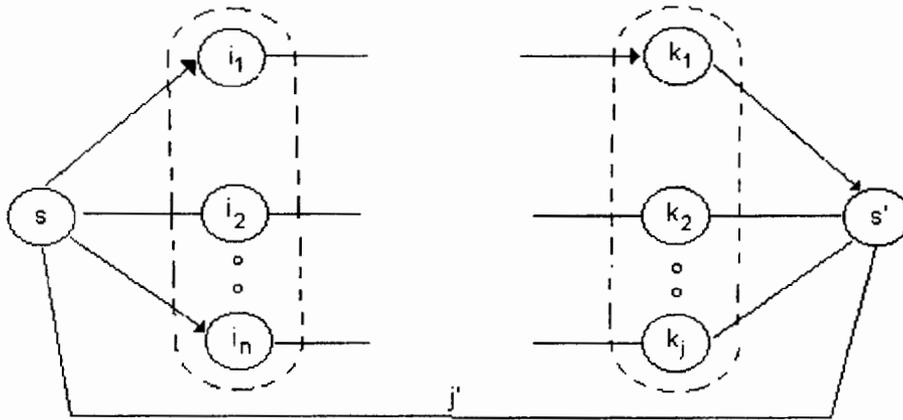


Figura 3.13

Se colorean todos los nuevos arcos de blanco. La aplicación del lema de Minty para el arco J' lleva dos posibilidades:

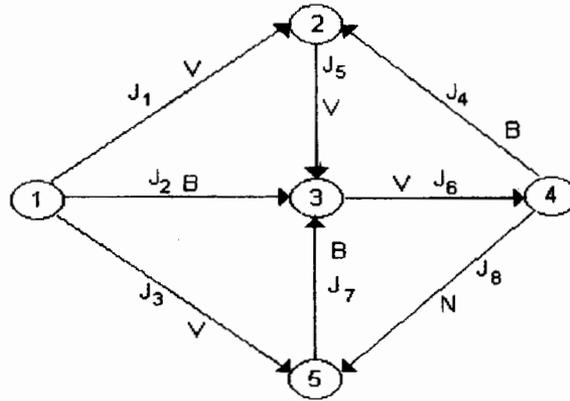
- i) Existe un circuito elemental P compatible con la coloración que contiene al arco J' . Puesto que J' es blanco, este circuito debe ser de la forma $P: s', J', s, j_1, P', j_2, s'$ en donde $j_1 \sim (s, i)$ con $i \in N^+$, $j_2 \sim (k, s')$ con $k \in N^-$ y P' es una trayectoria de i a k compatible con la coloración. Con esto se establece una correspondencia biunívoca de los circuitos P con estas características y las trayectorias $P': i \rightarrow k$ con $i \in N^+, k \in N^-$ de donde se deriva la primera condición del teorema de la trayectoria coloreada.
- ii) Existe un corte elemental Q compatible con la coloración que contiene el arco J' . En este caso Q no puede contener ningún arco nuevo distinto de J' puesto que, siendo estos blancos, no satisfarían las restricciones de color (nótese que $j \in Q^+$). De aquí que los demás arcos de Q son arcos de la red original G y por tanto constituyen un corte compatible con la coloración en ella. De nuevo, esta correspondencia de cortes es biunívoca por lo que se deriva la segunda alternativa del teorema de la red coloreada.

Conviene señalar que el Lema de Minty en términos algebraicos es equivalente al Lema de Farkas; que no es otra cosa que un resultado de separación de dos conjuntos convexos (poliedros).

EJEMPLO 3.12

Determine si el arco $j_{\sim}(i_4, i_5)$ pertenece a un circuito elemental compatible o a un corte elemental compatible con la coloración definida en la red de la figura siguiente:

Figura 3.14



Solución:

Para verificar si este arco pertenece a un circuito o corte elementales compatibles con la coloración se utilizará el algoritmo de Minty. Es decir, se resuelve el problema de la trayectoria coloreada de $N^+ = \{i_4\}$ a $N^- = \{i_5\}$

Utilizando el algoritmo de enrutamiento se obtiene la trayectoria compatible de i_4 a i_5

$$P: 4 \rightarrow 2 \leftarrow 1 \rightarrow 5$$

esta trayectoria P junto con el arco j_8 forman un circuito elemental.

EJEMPLO 3.13

Determine si el arco j_8 pertenece a un circuito elemental compatible o a un corte elemental compatible con la coloración dada en la red de la figura siguiente:

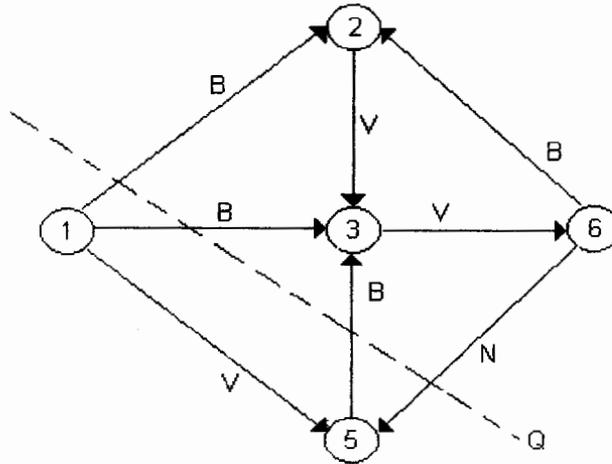


Figura 3.15

Solución

Aplicando el algoritmo de enrutamiento se determina $Q=[S,N\setminus S]$ donde $S=\{i_1, i_2, i_3\}$ que contiene a j_B y es compatible con la coloración.

3.4 APLICACIONES A CONEXIDAD

El algoritmo de la red pintada proporciona un medio eficiente para probar cuándo una red es conexa y si no lo es nos sirve para determinar sus componentes.

Seleccione un nodo arbitrario s y aplique el algoritmo con $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \emptyset$ y todos los arcos pintados de verde. En la terminación habrá un enrutamiento máximo con base s (es decir base $\{s\}$) correspondiente a cierto conjunto S que contiene a s . De la naturaleza del pintado, es claro que S consiste de todos los nodos alcanzables por trayectorias que empiezan en s y describe un sistema particular de trayectorias que completan la tarea. Si $S = N$, G está conectada. Si no, entonces los nodos en S , junto con los arcos incidentes a ellos forman la componente de G conteniendo a s .

Para determinar otra componente seleccione cualquier nodo que no está en S y repita el procedimiento. Después de una sucesión finita de tales cálculos todas las componentes se identificarán.

La prueba para una red fuertemente conexa, necesita el doble del esfuerzo. Aplicando el algoritmo como se hizo antes, y comenzando desde un nodo arbitrariamente seleccionado s , pero con los arcos pintados de blanco. Esto nos da un enrutamiento máximo compatible con la coloración θ_w asociado con un conjunto

de nodos S_w . Repetimos la aplicación con los arcos todos blancos, obteniendo θ_b y S_b .

Obviamente, los nodos en S_w (fuera de s) son aquéllos que pueden alcanzarse por una trayectoria positiva desde s , mientras aquéllos en S_b son los que pueden llegar a s a través de una trayectoria positiva. Entonces el conjunto $S = S_w \cap S_b$ está compuesto por todos los nodos fuertemente conectados a s . Si $S = N$, G es fuertemente conectada. Si no, S suministra una componente fuerte conteniendo a s (como podemos ver en la figura siguiente).

En el caso de una red en una ciudad se pueden pintar las calles de doble sentido de verde, todas las de un sentido de blanco, y todas las que estén cerradas por reparaciones de rojo. ¿Será posible ir de un nodo a cualquier otro nodo?

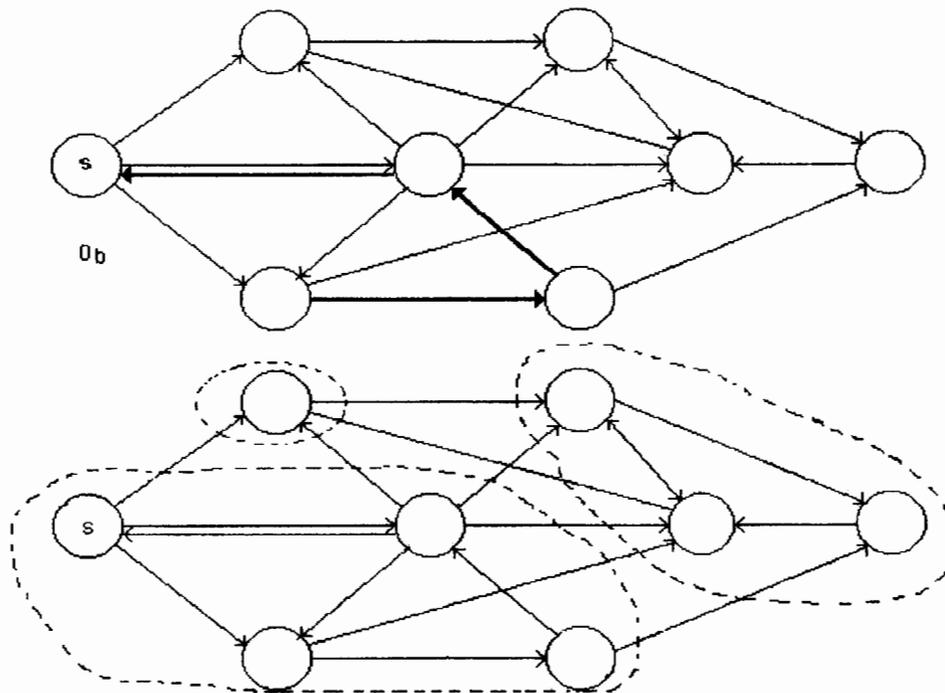


Figura 3.16

3.5 NOTAS HISTÓRICAS

La teoría de gráficas y redes ha sufrido de una falta de estandarización en cuanto a su terminología, diferentes autores usan diferentes palabras para el mismo concepto, o una misma palabra en diferente sentido. En parte, ésto se debe a que hay muchas áreas de aplicación.

En el caso de las "trayectorias" como las que se exponen aquí es difícil encontrar dos textos que estén de acuerdo, lo mismo sucede con cortes. La terminología usada aquí es acorde con el teorema de la red coloreada y el Lema de Minty (1960), aunque Minty sólo usó tres colores, él no admitió la categoría de usar negro, sólo se refiere al sentido inverso de los arcos blancos. Sin embargo, ésto no provoca ningún problema al usar arcos negros. Enrutamiento se usa por otros autores como arcos con raíz o arborescencias, que veremos más adelante.

CAPÍTULO 4 FLUJOS Y CAPACIDADES

4.1 INTRODUCCIÓN

En muchos problemas de redes se involucran flujos que tienen ciertas restricciones en al menos uno de los arcos, también se pueden tener restricciones en las divergencias permitidas en los nodos. El propósito de este capítulo es introducir los conceptos necesarios para resolver estos problemas así como analizar el problema clásico de flujo máximo, y sus correspondientes métodos de solución.

4.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE DIVERGENCIA

El problema de flujo máximo fue resuelto en 1986 por R. L. Ford y R.D. Fulkerson que de hecho fueron los iniciadores de la era de flujo en redes independientes de redes eléctricas.

INTERVALOS DE CAPACIDAD

El flujo en un arco j de una red varía en un intervalo cerrado $c(j)$, denominado intervalo de capacidad de j . Dicho intervalo se denota por:

$$c(j) = [c^-(j), c^+(j)]$$

donde $c^-(j)$ es la mínima capacidad y $c^+(j)$ es la máxima.

La única restricción es que $c(j)$ sea un intervalo no-vacío. En particular $c^+(j)$ puede ser $+\infty$ y $c^-(j)$ puede ser $-\infty$.

Un flujo se dice **factible** si $x(j) \in c(j)$ para toda $j \in A$.

Algunos ejemplos de intervalos de capacidad son:

1. $c(j) = [-c, c]$ con $0 \leq c < +\infty$; el flujo x puede usar el arco j en ambas direcciones pero el flujo debe satisfacer $|x(j)| \leq c$.
2. $c(j) = [0, c]$ con $0 \leq c < +\infty$ como en el ejemplo anterior, pero el arco sólo puede usarse en dirección positiva.
3. $c(j) = [0, \infty)$ el arco sólo puede usarse en dirección positiva, pero no hay una cota superior en el flujo.
4. $c(j) = (-\infty, +\infty)$ aquí no hay ninguna restricción de flujo en el arco j .
5. $c(j) = [c, c]$ con $-\infty < c < +\infty$; aquí hay un requerimiento exacto, $x(j) = c$

Una consecuencia directa de que los flujos en los arcos estén acotados es que se restringe el flujo que puede pasar a través de un corte. Específicamente, el flujo x a través de un corte Q se define como:

$$e_Q x = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) \quad (4.1)$$

donde e_Q es la función de incidencia para Q . Este se puede interpretar como la cantidad neta de material que fluye a través de Q en la dirección de la orientación de Q .

Para reforzar esta interpretación escriba $Q = [S, N \setminus S]$ para el conjunto de nodos S , se define la divergencia de x desde S como:

$$y(S) = \sum_{i \in S} y(i) \quad (4.2)$$

Esta cantidad representa la cantidad neta de material originada en S (esto es, la cantidad total de la fuente menos la cantidad total del sumidero). Estas cantidades (4.1) y (4.2) se relacionan a través del **principio de divergencia**.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE DIVERGENCIA

Sea x un flujo en la red G y sea el corte $Q = [S, N \setminus S]$. Entonces $y(S) = e_Q x$

[divergencia de x desde S] = [flujo de x a través del corte Q]

Demostración

Usando las definiciones de $y = \text{div } x$ y de e_Q se tiene:

$$\begin{aligned} y(S) &= \sum_{i \in S} y(i) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in A} e(i, j) x(j) = \sum_{j \in A} \sum_{i \in S} e(i, j) x(j) = \\ &= \sum_{j \in Q^+} \sum_{i \in S} e(i, j) x(j) + \sum_{j \in Q^-} \sum_{i \in S} e(i, j) x(j) = \\ &= \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = e_Q x \end{aligned}$$

Nota: La regla de divergencia total donde $y(N)=0$ es un caso particular del principio de divergencia ya que si $S = N$ entonces $Q = \emptyset$ y de aquí se concluye el resultado.

EJEMPLO 4.1

Dada la red

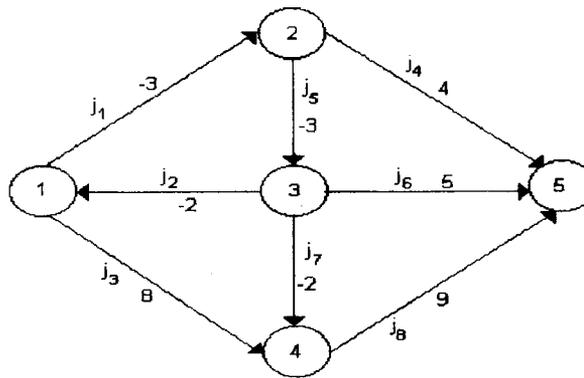


Figura 4.1

Con $y(1) = 7$, $y(2) = 4$, $y(3) = 4$, $y(4) = 3$, $y(5) = -18$

Sea $S = \{1, 2, 4\}$, entonces $Q = \{j_4, j_5, j_2, j_3, j_7\}$

Se puede observar que la divergencia de x desde S : $y(S) = 7 + 4 + 3 = 14$ y el flujo x a través de Q

$$Q^+ = \{j_4, j_5, j_8\} = 4 - 3 + 9 = 10$$

$$Q^- = \{j_2, j_7\} = -2 - 2 = -4$$

$$e_Q x = 10 - (-4) = 14, \text{ son iguales}$$

EJEMPLO 4.2

Dada la siguiente red

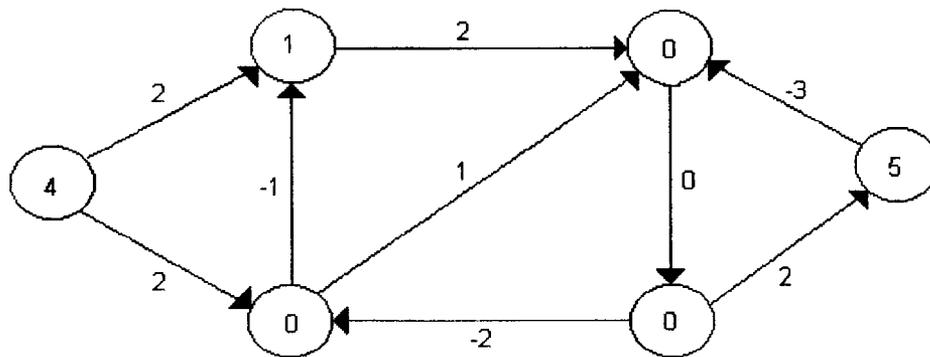


Figura 4.2

I	1	2	3	4	5	6	7
y _i	0	5	0	-3	0	-1	0

$$S = \{1, 2, 4\}$$

$$Q = \{J_4, J_5, J_2, J_6, J_7\}$$

$$y(S) = 2 = e_Q \cdot x$$

Ejercicio

Verifique el principio fundamental de divergencia en la siguiente red:

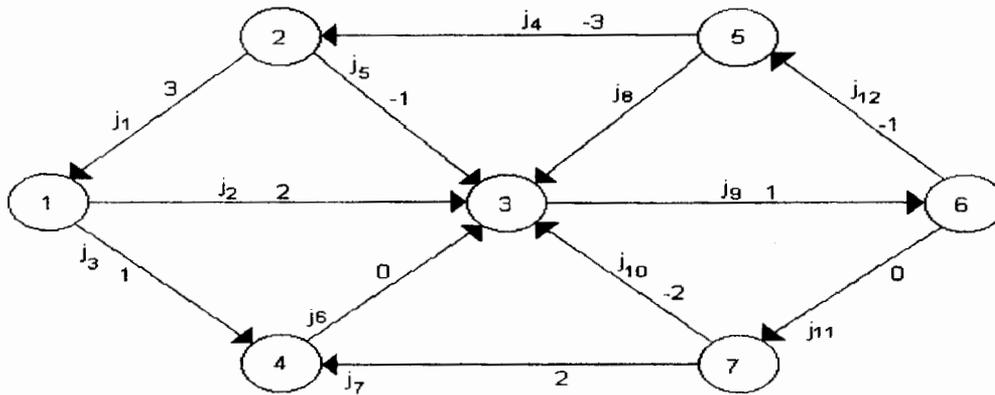


Figura 4.3

En un corte Q se observa:

$$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \quad j \in Q^+$$

$$-c^+(j) \leq -x(j) \leq -c^-(j) \quad j \in Q^-$$

y sumando se tiene:

$$\sum_{j \in Q^+} c^-(j) \leq \sum_{j \in Q^+} x(j) \leq \sum_{j \in Q^+} c^+(j)$$

$$-\sum_{j \in Q^-} c^+(j) \leq -\sum_{j \in Q^-} x(j) \leq -\sum_{j \in Q^-} c^-(j)$$

$$\sum_{j \in Q^+} c^-(j) - \sum_{j \in Q^-} c^+(j) \leq \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) \leq \sum_{j \in Q^+} c^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c^-(j)$$

$$C^-(Q) \leq \text{flujo a través del corte } Q \leq C^+(Q)$$

éstas son las capacidades inferior y superior del corte, el intervalo de capacidad asociado con Q es $c(Q) = [c^-(Q), c^+(Q)]$

4.3 PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO EN UNA RED

Sea G una red con intervalos de capacidad, y sean N^+ y N^- conjuntos de nodos disjuntos de G . Sea también cualquier flujo x que se conserva en todos los nodos que no pertenecen a N^+ ó N^- , en otras palabras, tales que tienen $y(i)=0$ para toda $i \notin (N^+ \cup N^-)$ y donde $y = \text{div } x$. Por la regla de divergencia total se tiene que:

$$0 = \sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N^+} y(i) + \sum_{i \in N^-} y(i)$$

lo que implica

$$y(N^+) = -y(N^-)$$

Esta última cantidad recibe el nombre de **flujo de x de N^+ a N^-**

PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

El problema de flujo máximo queda entonces definido de la siguiente manera:

El problema consiste en maximizar el flujo de N^+ a N^- sobre todos los flujos x tales que $y(i) = 0$ para todas las $i \in N^+ \cup N^-$ factibles con respecto a las capacidades.

Se supondrá la existencia de al menos un flujo que satisfaga todas las restricciones de capacidad y conservación.

La mínima cota superior del conjunto de flujos factibles de N^+ a N^- se denomina el **supremo** en el problema de flujo máximo. El supremo puede ser infinito, un flujo cuyo valor es igual al supremo se dice **solución** al problema de flujo máximo.

Una formulación del problema en términos de programación lineal equivale a

$$\max z = \sum_{i \in N^+} \sum_{j \in A} e(i, j)x(j)$$

sujeto a

$$\sum_{j \in A} e(i, j)x(j) = 0 \quad i \notin N^+ \cup N^- \quad (\text{restricciones de conservación})$$

$$c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) \quad j \in A \quad (\text{restricciones de capacidad})$$

Para resolver este problema se introduce el concepto dual de corte mínimo que será utilizado como herramienta de optimización. Como se había mencionado anteriormente, todas las trayectorias de N^+ a N^- utilizan algún arco de cualquier corte $Q: N^+ \downarrow N^-$, de este modo los cortes constituyen "cuellos de botella" para el valor del flujo de N^+ a N^- . Es decir:

PROPOSICIÓN 4.1

Sea x un flujo que satisface las restricciones del problema y sea $Q: N^+ \downarrow N^-$ un corte que separa N^+ de N^- entonces

$$\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^- \leq C^+(Q)$$

Demostración:

Puesto que Q es un corte que separa N^+ de N^- entonces es de la forma $[S, N \setminus S]$ con $N^+ \subset S$ y $S \cap N^- = \emptyset$. Además como x se conserva en todos los nodos excepto los de $N^+ \cup N^-$, se tiene que $y(i)=0$ para $i \in S \setminus N^+$, por tanto $y(N^+) = y(S)$, pues $y(i) = 0$ para toda $i \in S \setminus N^+$. Asimismo por el principio de divergencia $y(S) = e_Q x \leq C^+(Q)$ lo que demuestran la proposición.

PROBLEMA DE CORTE MÍNIMO

Minimizar $C^+(Q)$ sobre todos los cortes $Q: N^+ \downarrow N^-$

Una consecuencia inmediata, de la proposición anterior esta dada por:

Supremo en problemas de flujo máximo \leq mínimo en problemas de corte mínimo

La relación más importante entre los dos problemas es el hecho de que la igualdad se cumple en los óptimos. Para probar este resultado es necesario definir los conceptos de trayectoria aumentante de flujo y trayectoria de capacidad ilimitada.

Definición 4.1

Una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ es **aumentante** para el flujo x

Si

$$x(j) < c^+(j) \text{ para toda } j \in P^+$$

y

$$x(j) > c^-(j) \text{ para toda } j \in P^-$$

Claramente, el flujo x puede mejorarse a través de una trayectoria aumentante. En efecto, puede garantizarse la existencia de un número $\alpha > 0$ tal que:

$$x'(j) = x(j) + \alpha e_p(j) = \begin{cases} x(j) + \alpha & j \in P^+ \\ x(j) - \alpha & j \in P^- \\ x(j) & j \notin P^+ \end{cases}$$

Es importante notar que el flujo x' construido de esta manera cumple con todas las restricciones del problema para todos los valores de α que cumplan

$$\begin{aligned} \alpha &\leq c^+(j) - x(j) && \text{para toda } j \in P^+ \\ \alpha &\leq x(j) - c^-(j) && \text{para toda } j \in P^- \end{aligned}$$

ya que con esto $c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j)$, para toda $j \in A$ además

$$\text{div } x' = \text{div } x + \alpha \text{ div } e_p$$

pero

$$\begin{aligned} \text{div } e_p(i) &= 1 && \text{si } i \in N^+ \\ \text{div } e_p(i) &= -1 && \text{si } i \in N^- \\ \text{div } e_p(i) &= 0 && \text{si } i \notin N^+ \cup N^- \\ \alpha &> 0 \end{aligned}$$

Esto implica que x' se conserva en todos los nodos fuera de $N^+ \cup N^-$ y también que:

$$[\text{flujo } x' \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = [\text{Flujo } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] + \alpha$$

de aquí que x' sea mejor que x .

Al valor máximo del número α se le llama capacidad incremental de la trayectoria P . Se dice que una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ tiene capacidad ilimitada si su capacidad incremental no es finita; es decir, si:

$$\begin{aligned} c^+(j) &= +\infty && \text{para toda } j \in P^+ \text{ y} \\ c^-(j) &= -\infty && \text{para toda } j \in P^- \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.3

En la figura 4.4 se muestran trayectorias aumentantes, con capacidades incrementales 3, 5 y 1 respectivamente:

a) flujo inicial

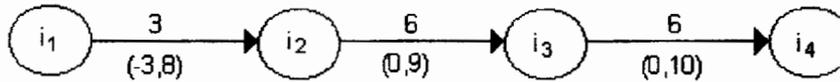
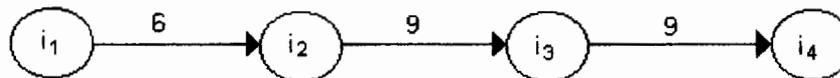


Figura 4.4 a

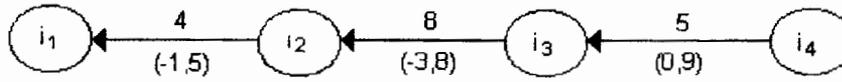
flujo actualizado: $\alpha=3$

Figura 4.4b



b) flujo inicial

Figura 4.4c



flujo actualizado: $\alpha=5$

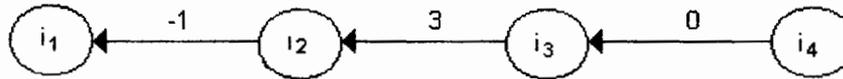


Figura 4.4d

c) flujo inicial

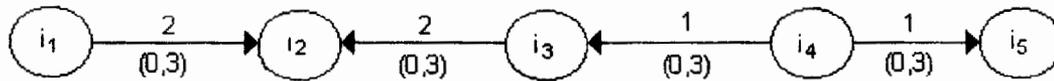


Figura 4.4e

flujo actualizado: $\alpha=1$

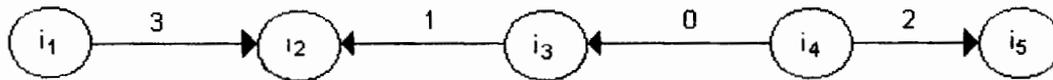


Figura 4.4f

La siguiente es una trayectoria no aumentante

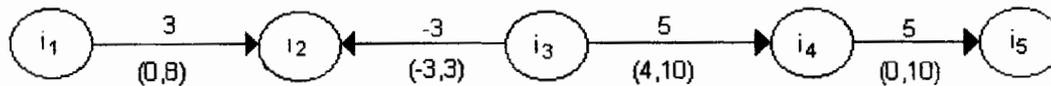


Figura 4.4g

Ya que se tiene $\alpha = 0$ en el segundo arco.

TEOREMA DE FLUJO MÁXIMO - CORTE MÍNIMO (FORD Y FULKERSON)

Suponga que existe al menos un flujo x que satisface todas las restricciones del problema, entonces:

$$\text{Supremo en problemas de flujo máximo} = \text{mínimo en problemas de corte mínimo}$$

Demostración:

La demostración de este teorema es constructiva por lo cual constituye un algoritmo para resolver ambos problemas. En vista del resultado que afirma que el supremo en el problema de flujo máximo es menor o igual que el ínfimo en el problema del corte mínimo, basta exhibir un flujo x y un corte Q tales que:

$$[\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] = C^+(Q)$$

Para ello, considere cualquier flujo x en la red G tal que se conserva en todos los nodos fuera de $N^+ \cup N^-$ y construya un corte aplicando

- i) $S = N^+$
 - ii) Si $i \in N^+$
 - $j \sim (i, i') \in A$ y $x(j) < c^+(j)$
 - $j \sim (i', i) \in A$ y $x(j) > c^-(j)$
- ó

actualice $S = N^+ \cup \{i\}$

Repita (ii) hasta que no sea posible agregar nodos a S .

Es importante señalar que los nodos de S son aquellos a los cuales aún puede enviarse flujo. Pueden presentarse entonces dos casos: $S \cap N^- \neq \emptyset$, o bien $S \cap N^- = \emptyset$.

Caso 1 Si $S \cap N^- \neq \emptyset$ entonces aún puede enviarse flujo de N^+ a N^- , es decir, dada la construcción de S , existe una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ tal que $x(j) < c^+(j)$ para toda $j \in P^+$ y $x(j) > c^-(j)$ para toda $j \in P^-$. De aquí se concluye que P es una trayectoria aumentante para el flujo X . Sea α la capacidad incremental de P y se define x como sigue:

$$x(j) = \begin{cases} x(j) + \alpha & \text{si } j \in P^+ \\ x(j) - \alpha & \text{si } j \in P^- \\ x(j) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Construya de nuevo el conjunto S con el procedimiento (i), (ii) utilizando este flujo mejorado.

Caso 2 Si $S \cap N^- = \emptyset$, entonces $Q = [S, N \setminus S]$ es un corte de Q por construcción se tiene que $x(j) = c^+(j)$ para toda $j \in Q^+$ y $x(j) = c^-(j)$ para toda $j \in Q^-$; entonces puesto que $S \cap N^- = \emptyset$

$$\begin{aligned}
[\text{flujo de } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-] &= y(N^+) - y(N^-) = e_Q x = \\
&= \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = \sum_{j \in Q^+} c^+(j) - \sum_{j \in Q^-} c^-(j) = \\
&= C^+(Q)
\end{aligned}$$

En este caso x es flujo máximo y Q es corte mínimo.

ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON

Propósito: Determinar el flujo máximo de N^+ a N^- en una red G en la cual no existen trayectorias de capacidad ilimitada.

Descripción

PASO 1 Determinar x , un flujo que satisfaga todas las restricciones del problema.

PASO 2 Colorear los arcos de G de acuerdo a:

Verde	si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
Blanco	si $c^-(j) = x(j) < c^+(j)$
Negro	si $c^-(j) < x(j) = c^+(j)$
Rojo	si $c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

PASO 3 Utilizar el algoritmo de enrutamiento para determinar una trayectoria compatible con la coloración (es decir, una trayectoria aumentante para x).

3.1 Si se determina la trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración, calcular:

$$\alpha = \min \left\{ \begin{array}{l} c^+(j) - x(j) \quad j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) \quad j \in P^- \end{array} \right\}$$

hacer $x = x + \alpha e_p$ y regresar a 2

3.2 Si se determina un corte $Q: N^+ \downarrow N^-$ compatible con la coloración terminar con el flujo máximo x y el corte mínimo Q ya que este último satisface

$$\begin{aligned}
c^+(j) &= x(j) & j \in Q^+ \\
c^-(j) &= x(j) & j \in Q^-
\end{aligned}$$

y por lo tanto el flujo x a través de

$$Q = \sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = C^+(Q)$$

Nota: El valor en la igualdad del teorema puede ser $+\infty$ cuando el corte tiene capacidad ilimitada.

EJEMPLO 4.3

En la siguiente red se busca el flujo máximo que se puede enviar del nodo s al nodo s' , se aplica el algoritmo de flujo máximo, comenzando con un flujo cero $x(j) = 0$ para toda $j \in A$. Esto es posible porque todos los intervalos de capacidad contienen al cero.

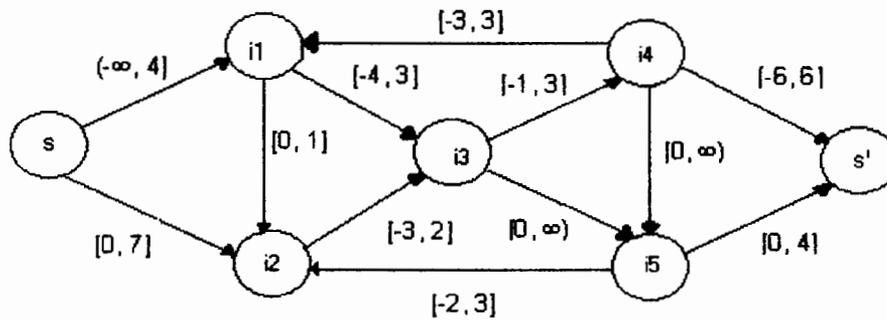


Figura 4.5

En siguiente figura se muestran los números en cada arco que corresponden a las iteraciones 1 a 5.

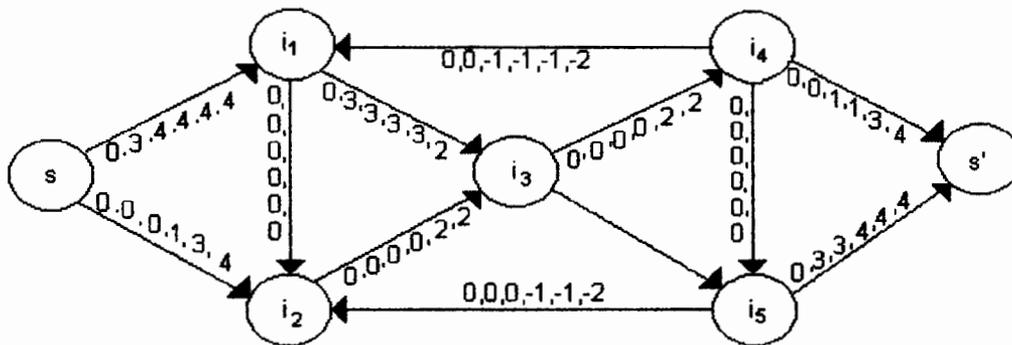


Figura 4.6

Las correspondientes trayectorias aumentantes son:

- | | |
|---|----------------|
| $P_1: s \rightarrow i_1 \rightarrow i_3 \rightarrow i_5 \rightarrow s'$ | $\alpha_1 = 3$ |
| $P_2: s \rightarrow i_1 \leftarrow i_4 \rightarrow s'$ | $\alpha_2 = 1$ |
| $P_3: s \rightarrow i_2 \leftarrow i_5 \rightarrow s'$ | $\alpha_3 = 1$ |
| $P_4: s \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow i_4 \rightarrow s'$ | $\alpha_4 = 2$ |
| $P_5: s \rightarrow i_2 \leftarrow i_5 \leftarrow i_3 \leftarrow i_1 \leftarrow i_4 \rightarrow s'$ | $\alpha_5 = 1$ |

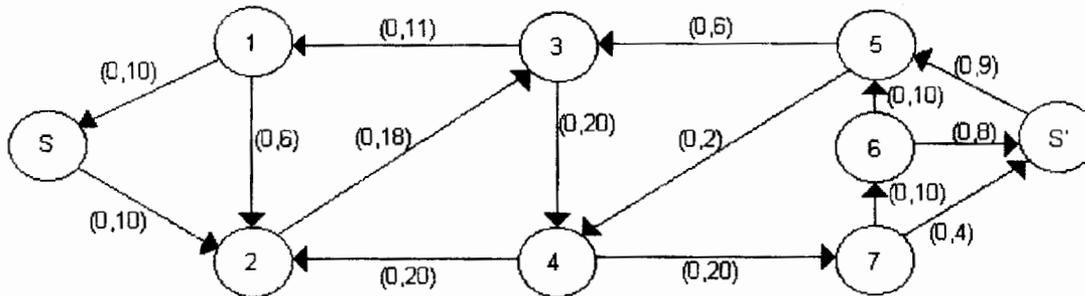
La iteración seis no nos proporciona otra trayectoria de flujo aumentante, sólo el corte $Q = [S, N^S]$ correspondiente a $S = \{s, i_2\}$. Así, el flujo x en esta etapa resuelve el problema de flujo máximo mientras Q resuelve el problema de corte mínimo. El flujo de s a s' es 8, y éste es el mismo valor de $c^+(Q)$.

Note que la cancelación del flujo toma lugar en la iteración 5 en los arcos (i_1, i_3) e (i_3, i_5) donde las trayectorias P_1 y P_5 corren contrarias una con otra. Tal cancelación corresponde al enrutamiento de un flujo anterior, y el algoritmo no funcionaría si esto no fuera permitido.

Ejercicio

Considere la siguiente red y determine el flujo máximo de S a S' .

Figura 4.7



Justificación de convergencia del algoritmo.

Suponga que las capacidades de los arcos $c^+(j)$, $c^-(j)$ y los valores de flujo inicial $x(j)$ son conmensurables, es decir, son múltiplos de cierta cantidad q . En particular capacidades y flujos enteros son conmensurables con $q=1$. De esta condición de conmensurabilidad se concluye que los números α y $x^1(j)$, calculados durante el algoritmo, son también múltiplos de la cantidad q . De aquí que, en cada iteración, el flujo de N^+ a N^- se incrementa al menos en la cantidad positiva q y por lo tanto se realiza un número finito de iteraciones si no existen trayectorias de capacidad ilimitada. Sin esta condición puede no converger el algoritmo o que converja dando una solución errada.

Discriminación de arcos

La condición de conmensurabilidad puede eliminarse si el algoritmo de Ford y Fulkerson se utiliza con una pequeña modificación llamada criterio de discriminación de arcos. Este cambio consiste en utilizar, siempre que sea posible, arcos verdes durante la rutina de enrutamiento; cuando se utilizan trayectorias de arco verdes, el

flujo "mejorado" alcanzará la cota superior o la inferior para al menos un arco, el correspondiente al valor de α . De este modo, para la siguiente iteración, al menos un arco se vuelve blanco o negro mientras que los que tenían estos colores no se alteran. Después de un número finito de iteraciones no existen trayectorias aumentantes con todos los arcos verdes, por lo que para continuar con el proceso de aumento de flujo (si esto es posible) deberá recurrirse a los arcos blancos o negros. En tal momento hay un conjunto S correspondiente a un corte Q que no contiene arcos verdes; es decir, todo arco j de Q satisface $x(j) = c^+(j)$ o $x(j) = c^-(j)$ o ambas. De aquí que

$$\sum_{j \in Q^+} x(j) - \sum_{j \in Q^-} x(j) = \text{flujo a través del corte } Q = \text{flujo } x \text{ de } N^+ \text{ a } N^-$$

4.4 EL PROBLEMA DE FACTIBILIDAD DE FLUJO

El algoritmo de flujo máximo requiere inicialmente un flujo factible en la red, es decir, un flujo que satisfaga las restricciones de capacidad y conservación en arcos y nodos respectivamente. Se considera un caso especial de un modelo más general llamado el Problema de Distribución Factible, donde además se tiene que las divergencias en los nodos deben coincidir con cantidades preestablecidas de oferta y demanda en los nodos.

PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN FACTIBLE

Sean los intervalos de capacidad $C(j) = [c^-(j), c^+(j)]$ para todo arco j y sean los valores de oferta $b(i)$ para todo nodo i . Se desea determinar un flujo x tal que:

$$\begin{aligned} c^-(j) &\leq x(j) \leq c^+(j) && \text{para toda } j \in A \\ y(i) &= b(i) && \text{para toda } i \in N, \quad (y = \text{div } x) \end{aligned}$$

La función b recibe el nombre de función de oferta, entendiéndose como demanda una oferta negativa. En el caso particular en que $b=0$ el problema recibe el nombre de problema de circulación factible.

Debido al principio de divergencia total, una condición necesaria para que exista solución al problema de distribución factible es $b(N) = 0$; es decir, que la oferta total sea igual a la demanda total.

El problema puede ser más general si en vez de considerar un cierto valor para la divergencia, se permite que esta última pueda tomar valores en un determinado intervalo llamado de oferta y se formula como:



PROBLEMA DE FLUJO FACTIBLE GENERAL

Determinar un flujo x tal que

$$\begin{aligned} x(j) &\in C(j) && \text{para toda } j \in A \\ y(i) &\in C(i) && \text{para toda } i \in N \text{ (} y = \text{div } x \text{).} \end{aligned}$$

Donde $C(j)$ es el intervalo de capacidad para el arco j y $C(i)$ es el intervalo de oferta para el nodo i .

Puede verificarse fácilmente que el problema de distribución factible, circulación factible y flujo factible son equivalentes.

TEOREMA DE DISTRIBUCIÓN FACTIBLE (GALE Y HOFFMAN)

El problema de distribución factible tiene solución si y sólo si $b(N)=0$ y $b(S) \leq C^+(Q) \forall Q=[S, N \setminus S]$ con $S \subset N$.

Demostración:

Condición necesaria

La condición $b(N)=0$ debe cumplirse como se estableció en la formulación del problema. Por otro lado, según el principio de divergencia, si $S \subset N$ y $Q=[S, N \setminus S]$

$$b(S) = [\text{divergencia de } x \text{ desde } S] = \text{flujo de } x \text{ a través de } Q.$$

Si $\text{div } x = b$ como x debe ser un flujo factible con respecto a las capacidades de los arcos.

$$b(S) \in C(Q) = [c^-(Q), c^+(Q)]$$

En particular $b(S) \leq c^+(Q)$.

Condición suficiente

Se prueba constructivamente con el algoritmo de distribución factible.

ALGORITMO DE DISTRIBUCIÓN FACTIBLE

Propósito: Resolver el problema de distribución factible.

Descripción

PASO 1 Determinar un flujo factible x con respecto a las capacidades de los arcos.

PASO 2 Sean $N^+ = \{i \in N \mid b(i) > y(i)\}$, $N^- = \{i \in N \mid b(i) < y(i)\}$

Si $N^+ = N^- = \emptyset$, entonces el flujo x es la solución deseada, terminar.

Si $N^+ \neq \emptyset$ y $N^- \neq \emptyset$, colorear los arcos de la red de la siguiente manera:

Verde si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$

Blanco si $c^-(j) = x(j) < c^+(j)$

Negro si $c^-(j) < x(j) = c^+(j)$

Rojo si $c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

ir al Paso 3.

PASO 3 Aplicar el algoritmo de enrutamiento a la red.

- a) Si se determina una trayectoria $P: N^+ \rightarrow N^-$ compatible con la coloración, calcular:

$$\alpha = \min \begin{cases} c^+(j) - x(j) & j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) & j \in P^- \\ b(i) - y(i) & i \text{ nodo inicial de } P \text{ (en } N^+) \\ y(i) - b(i) & i \text{ nodo terminal de } P \text{ (en } N^-) \end{cases}$$

Hacer $x' = x + \alpha e_p$ y regresar al Paso 2.

- b) Si se determina un corte $Q = [S, N \setminus S]$ compatible con la coloración, terminar, no existe solución al problema.

EJEMPLO 4.4

Determine un flujo factible en la red siguiente:

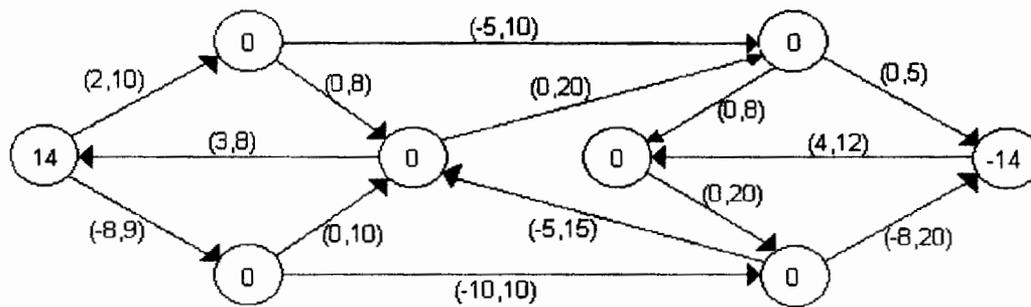


Figura 4.8

PASO 1

Se inicia con el flujo x factible con respecto a los arcos. En la figura se muestra en los arcos el flujo y el color del arco, así como los conjuntos N^+ y N^- de nodos cuya divergencia es mayor o menor que la demanda.

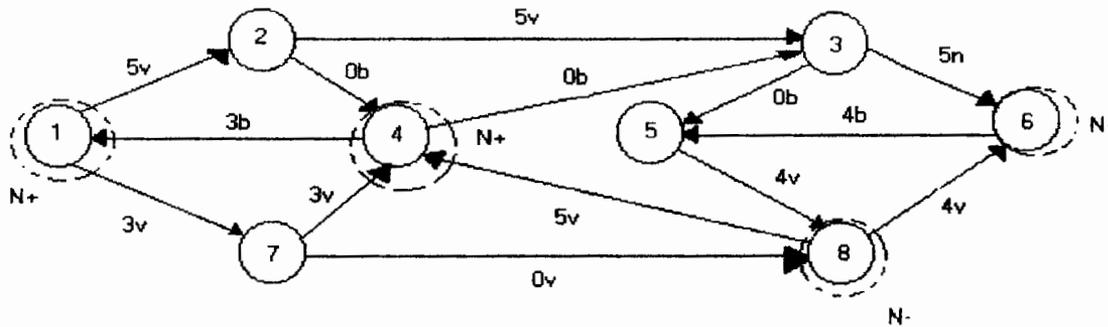


Figura 4.9

PASO 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(i)$	5	0	0	-5	0	-5	0	+5
$b(i)$	14	0	0	0	0	-14	0	0

entonces $N^+ = \{1, 4\}$ y $N^- = \{6, 8\}$

PASO 3

Se obtiene la trayectoria compatible con la coloración

$$P: 1 \rightarrow 7 \rightarrow 8$$

En la figura 4.10 se muestra la trayectoria con arcos más gruesos y el flujo actualizado en los arcos así como la coloración.

$$\alpha = \min \{9-3, 10, 14-5, 5\} = 5$$

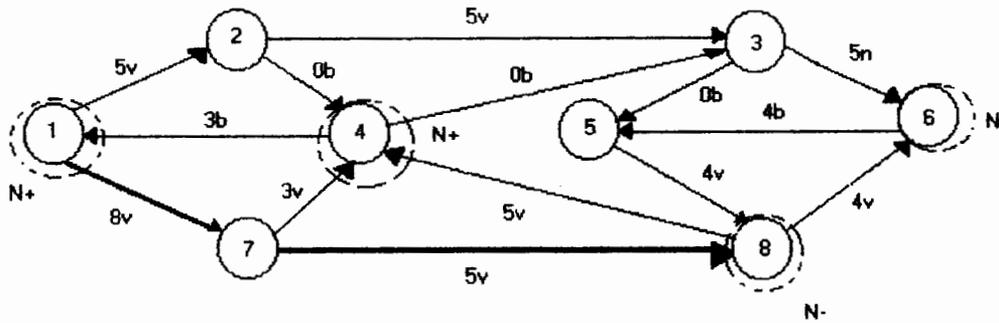


Figura 4.10

Iteración 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8
y(i)	10	0	0	-5	0	-5	0	0
b(i)	14	0	0	0	0	-14	0	0

de donde

$$N^+ = \{1, 4\} \text{ y } N^- = \{6\}$$

con la coloración correspondiente y P: $4 \leftarrow 8 \rightarrow 6$ y $\alpha = \min \{10, 16, 5, 9\} = 5$ con el nuevo flujo que se muestra en la figura 4.11

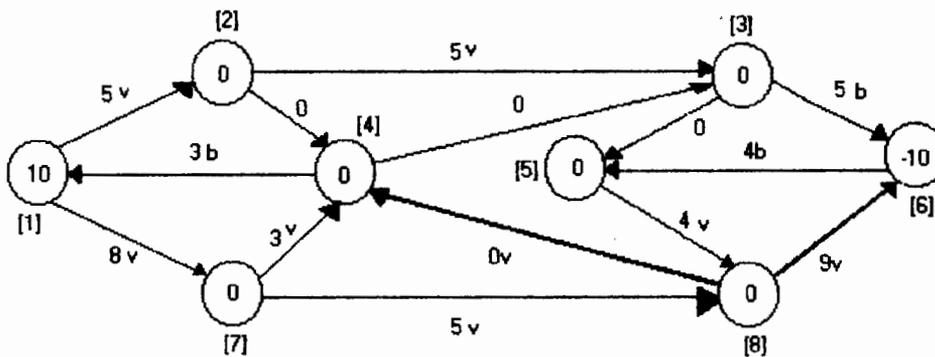


Figura 4.11

Iteración 2

La divergencia y las ofertas son

i	1	2	3	4	5	6	7	8
y(i)	10	0	0	0	0	-10	0	0
b(i)	14	0	0	0	0	-14	0	0

de donde $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \{6\}$

y la trayectoria compatible con la coloración

$$P: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \leftarrow 8 \rightarrow 6$$

con $\alpha = \min \{10-5, 8-0, 0-(-5), 20-9, 14-10, -10-(-14)\} = \min \{5, 8, 5, 11, 4, 4\} = 4$

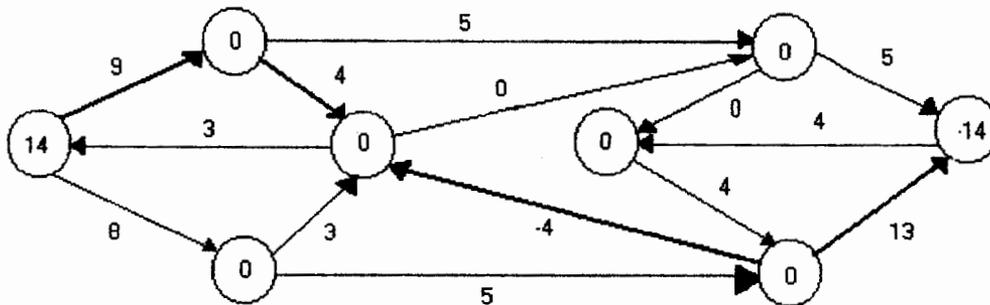


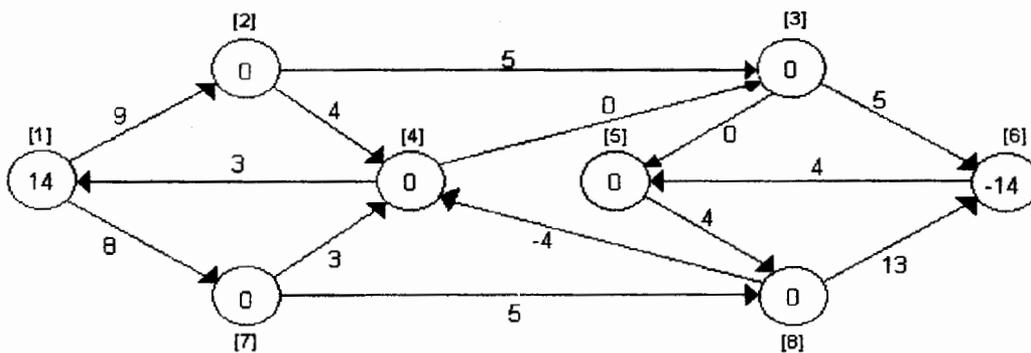
Figura 4.12

Iteración 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8
y(i)	14	0	0	0	0	-14	0	0

$N^+ = N^- = \emptyset$ y $y(i) = b(i)$ para toda i

Figura 4.13



ALGORITMO DE RECTIFICACIÓN DE FLUJO

Una alternativa natural para resolver el problema de distribución factible consiste en determinar inicialmente un flujo factible con respecto a las restricciones de oferta en los nodos y posiblemente no factible con respecto a las restricciones de capacidad sobre los arcos. Al igual que en el algoritmo de distribución factible se construye en cada iteración, un flujo que "rompa menos" las restricciones de capacidad en el sentido de que el flujo definido sobre el arco se acerque más a las cotas de capacidad en cada iteración.

Descripción

PASO 1 Determine un flujo x que es factible con respecto a las restricciones de divergencias, es decir $\text{div } x = b$

PASO 2 Defina los conjuntos de arcos:

$$A^+ = \{j \in A \mid x(j) > c^+(j)\} \qquad A^- = \{j \in A \mid x(j) < c^-(j)\}$$

- a) Si $A^+ = A^- = \emptyset$, entonces x es la solución deseada, terminar.
 b) Si existe $j \in A^+$ o $j \in A^-$, colorear los arcos de la red, de la siguiente manera:

verde	si $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$
blanco	si $x(j) \leq c^-(j)$; $x(j) < c^+(j)$
negro	si $x(j) \geq c^+(j)$; $x(j) > c^-(j)$
rojo	si $c^-(j) = x(j) = c^+(j)$

ir al paso 3

PASO 3 Aplique el lema de Minty:

- a) Si se determina un circuito elemental P compatible con la coloración, que contenga a j calcular:

$$\alpha = \min \begin{cases} c^+(j) - x(j) & j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) & j \in P^- \\ \bar{\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\bar{\alpha} = \min \begin{cases} c^+(j) - x(j) & j \in A^- \\ x(j) - c^-(j) & j \in A^+ \end{cases}$$

Hacer $x' = x + \alpha e_p$ e ir a 2

- b) Si se determina un corte $Q = [S, N \setminus S]$ compatible con la coloración que contenga a j terminar, ya que en este caso no existe solución al problema.

EJEMPLO 4.5

Determine un flujo factible en la red de la figura siguiente:

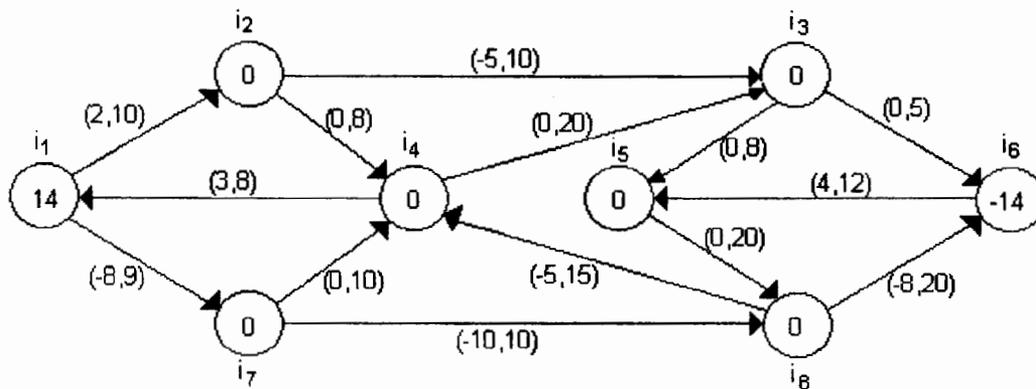


Figura 4.14

Iteración 1

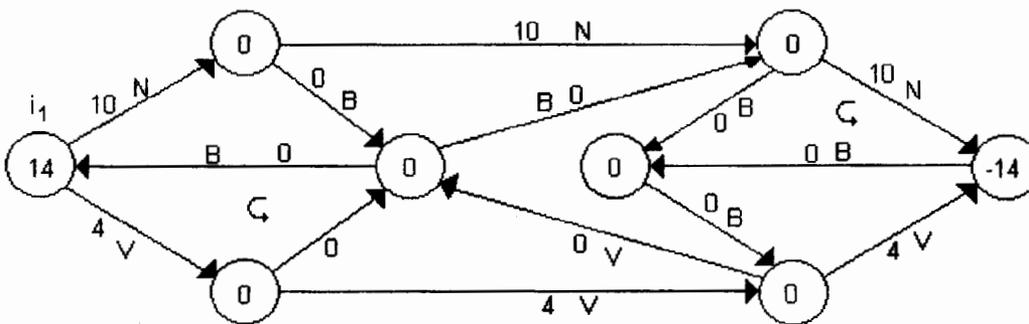


Figura 4.15

$$A^+ = \{(i_3, i_6)\}$$

$$A^- = \{(i_4, i_1), (i_6, i_5)\}$$

$$P_1 : i_4 \rightarrow i_1 \rightarrow i_7 \rightarrow i_4$$

$$P_2 : i_6 \leftarrow i_3 \rightarrow i_5 \rightarrow i_8 \rightarrow i_6$$

que contienen a los arcos (i_4, i_1) y (i_3, i_6) respectivamente

Para el primer circuito se obtiene:

$$\alpha_1 = \min\{9 - 4, 10 - 0, 8 - 0\} = \min\{5, 10, 8\} = 5$$

$$\alpha_2 = \min\{10 - 0, 8, 20 - 0, 20 - 4\} = \min\{10, 8, 20, 16\} = 8$$

resultando el flujo

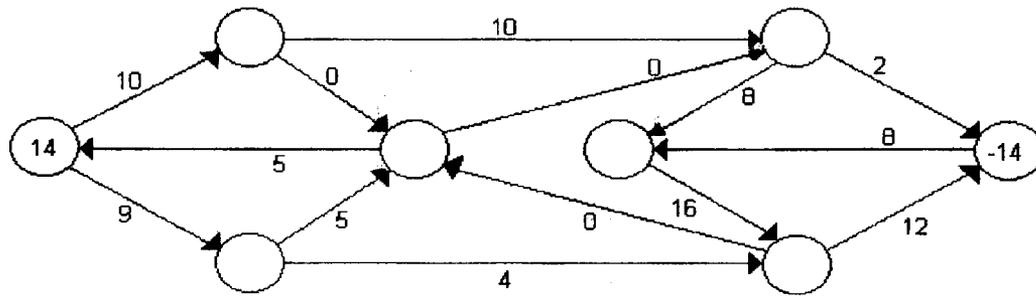


Figura 4.16

Iteración 2

$$A^+ = \phi \quad A^- = \{(i_6, i_5)\}$$

Sea $P_3: i_6 \rightarrow i_5 \rightarrow i_8 \rightarrow i_6$ que contiene a (i_6, i_5)

$$\alpha = \min \{12, 12, 8\} = 8$$

y resulta para este flujo $A^+ = A^- = \phi$

DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO DE ETIQUETADO DE FORD FULKERSON

El método que se describirá a continuación, resuelve el problema de flujo máximo a través de etiquetar nodos. A grandes rasgos consiste en lo siguiente: Primero, se etiqueta el nodo origen s con dos etiquetas $[s, \infty]$ indicando que en este nodo se dispone de cualquier cantidad de flujo. Después, si j es un nodo etiquetado y puede enviarse flujo del nodo j al nodo i , recibe dos etiquetas $[+j, x(j,i)]$. La primera etiqueta será de la forma $+j$ si $i \in P^+(j)$, es decir, si puede aumentarse flujo a través del arco (j,i) . Será de la forma $-j$ si $i \in P^-(j)$, es decir, si puede disminuirse el flujo a través del arco (j,i) . La segunda etiqueta es la cantidad de flujo que puede enviarse de j a i y se calculará por lo tanto como el mínimo entre $x(j,i)$ y h donde

$$h = \begin{cases} c_{ji}^+ - x_{ji} & \text{si } i \in P^+(j) \\ x_{ji} & \text{si } i \in P^-(j) \end{cases}$$

Debe observarse que si $h = 0$ no puede enviarse flujo de j a i , por lo que no se etiquetará con $[j, x(j,i)]$. Aquí c_{ji}^+ es la capacidad máxima del arco

Este proceso de asignación de etiquetas a nodos se repetirá mientras sea posible. Si el nodo destino t recibe etiquetas entonces, dado el modo de etiquetar, existe una trayectoria aumentante de s a t con una capacidad incremental igual a $x(t)$ y por lo

tanto se procederá a determinar ésta con la ayuda de la primer etiqueta, y se actualizará el flujo a través de ella. Si, por el contrario, t no recibe etiqueta alguna, entonces se habrá determinado el flujo máximo. Para justificar esto último considere el conjunto de arcos que tienen extremo inicial etiquetado y extremo final no etiquetado; este conjunto forma un corte de capacidad igual al valor del último flujo definido y por lo tanto éste es máximo.

Note la similitud de este algoritmo con la demostración del teorema de flujo máximo - corte mínimo.

Es importante observar que el algoritmo converge sólo si las capacidades para el flujo en los arcos son enteras; sin embargo, en casos donde las capacidades sean racionales, pueden transformarse éstas en enteras multiplicándolas por la potencia de 10 adecuada. De este modo, el algoritmo puede usarse también en estos casos.

ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON

Propósito: Determinar el flujo máximo entre el origen y destino en una red G .

Descripción

- PASO 1 Iniciar con cualquier flujo factible x
- PASO 2 Etiquetar el origen con $[s, \infty]$
- PASO 3 Elegir un nodo etiquetado y no examinado; sea j dicho nodo y sean $[\pm j, x(j)]$ sus etiquetas.
- 3.1 Para todo $i \in P^+(j)$ que no esté etiquetado y tal que $x_{ji} < c_{ji}^+$ asignar la etiqueta $[+j, x(i)]$, donde $x(i) = \min \{x(j), c_{ji}^+ - x_{ji}\}$
- 3.2 Para todo $i \in P^-(j)$ que no este etiquetado y tal que $c_{ji}^+ > 0$ asignar la etiqueta $[-j, x(i)]$, donde $x(i) = \min \{x(j), x_{ji}\}$
- Se puede decir ahora que el nodo j ha sido examinado
- PASO 4 Repetir el paso 3 hasta que suceda:
- 4.1 El nodo destino t no tiene etiqueta y todos los nodos etiquetados han sido examinados. Terminar, ya que el flujo factible x es máximo o
- 4.2 El nodo t recibe etiqueta. Ir al paso 5
- PASO 5 Sea $y = t$
- 5.1 Si la etiqueta de y es de la forma $[+z, x(y)]$, hacer
$$x_{zy} = x_{zy} + x(t)$$
- 5.2 Si la etiqueta de y es de la forma $[-z, x(y)]$ hacer
$$x_{yz} = x_{yz} - x(t)$$
- PASO 6 Si $z = s$, borrar todas las etiquetas y regresar al paso 2 actualizando el flujo en la trayectoria.
- Si $z \neq s$, hacer $y = z$ y regresar al paso 5

EJEMPLO 4.6

Determine el flujo máximo de s a t en la siguiente red usando el algoritmo de Ford y Fulkerson.

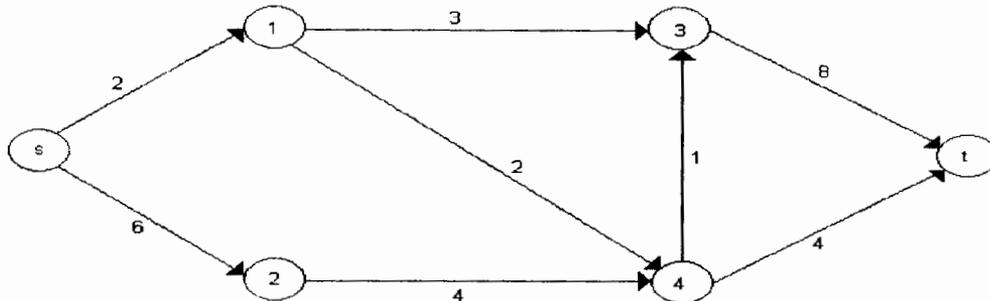


Figura 4.17

PASO 1

Como se puede observar de la figura 4.17 todos los arcos tienen al cero como cota inferior, es por esto que los números sobre los arcos lo que representan son las capacidades máximas de cada uno. Así que se propone el flujo factible inicial $x = 0$.

PASO 2

Primero se etiqueta el nodo s con $[s, \infty]$, después se calculan las otras etiquetas conforme a los pasos 3 y 4 del algoritmo.

PASO 3

Se elige el nodo s puesto que está etiquetado pero no examinado. Los sucesores i de s no etiquetados y tales que $x_{si} < q_{si}$ son 1 y 2 por lo cual

1 recibe etiqueta $[+s, \min\{\infty, 2\}]$

2 recibe etiqueta $[+s, \min\{\infty, 6\}]$

El nodo s ha sido examinado.

Se repite el paso 3.

PASO 4

Se elige el nodo 1 puesto que está etiquetado pero no examinado, los sucesores i de 1 no etiquetados y tales que $x_{1i} < c_{1i}$ son 3 y 4 por lo que

PASO 5

3 recibe etiqueta $[+1, \min\{2, 3\}]$

4 recibe etiqueta $[+1, \min\{2, 2\}]$

El nodo 1 ha sido examinado.

Iteración 1

Se elige el nodo 4

El sucesor i de 4 no etiquetado y tal que $x_{4i} < c_{4i}^+$ es t , de donde:

t recibe etiqueta $[+4,2]$

El nodo 4 ha sido examinado.

Puesto que el nodo t recibió etiqueta existe una trayectoria aumentante de s a t . Se determina ésta y se actualiza el flujo a través de ella en los pasos 5 y 6, ver figura 4.18

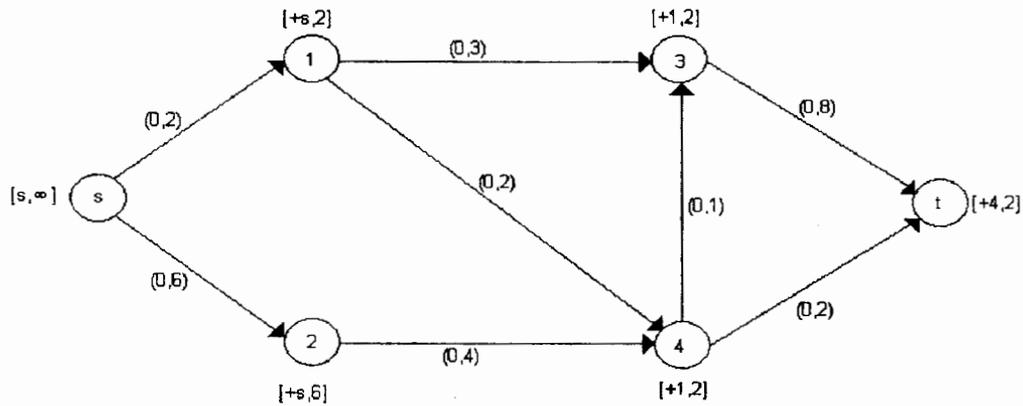


Figura 4.18

$y = t$, su etiqueta es $[+4,2]$ entonces $x_{4t} = 2$
 $y = 4$, su etiqueta es $[+1,2]$ entonces $x_{14} = 2$
 $y = 1$, su etiqueta es $[+s,2]$ entonces $x_{s1} = 2$

Con este nuevo flujo de valor 2 se realiza otra iteración.

Iteración 2

Las etiquetas resultantes de esta iteración se muestran en la siguiente red:

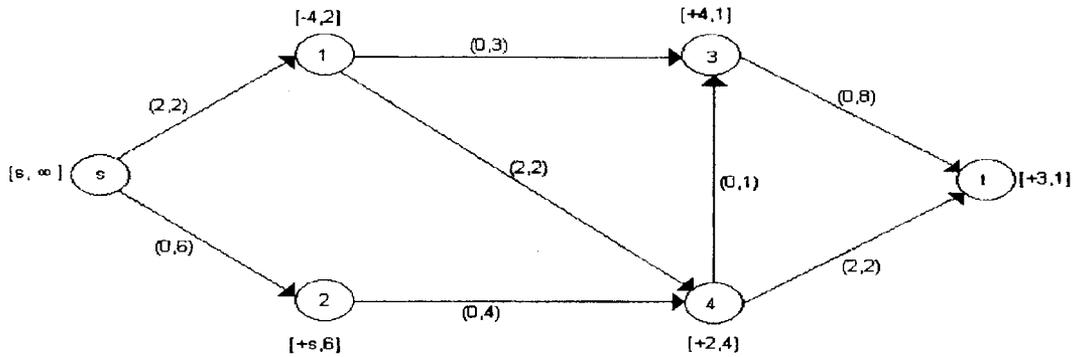


Figura 4.19

De nuevo, se etiquetó s con $[s, \infty]$, después:

Se elige el nodo s

El vecino i de s no etiquetado y tal que $x_{si} < c_{si}$ es 2 por lo cual

2 recibe etiqueta $[+s, \min\{\infty, 6\}]$

El nodo s ha sido examinado.

Se elige el nodo 2

El único sucesor no etiquetado de 2 es 4 y $x_{24} < c_{24}$ por lo que

4 recibe etiqueta $[+2, \min\{6, 4\}]$

El nodo 2 ha sido examinado.

Se elige el nodo 4

El sucesor i de 4 no etiquetado y tal que $x_{4i} < c_{4i}$ es 3, de donde:

3 recibe etiqueta $[+4, \min\{4, 1\}]$

El predecesor de 4 no etiquetado es 1 y $x_{14} > 0$ de donde

1 recibe etiqueta $[-4, \min\{4, 2\}]$

El nodo 4 ha sido examinado.

Se elige el nodo 3

El sucesor no etiquetado de 3 es t y $x_{3t} < q_{3t}$, de donde