UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

II/DepFI
azul claro

ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS

Abel Camacho Galván

Agosto de 1989

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

UNIDAD DE COMPUTO

INDICE

PROLOGO

La presente monografia se elaboró con la intención de colaborar a cubrir la falta del soporte computacional que en el ámbito del analisis estructural se ha venido observando en nuestro medio. Si bién es cierto que diversas instituciones cuentan con sofisticados sistemas computacionales en el ramo. no por ello es menos cierto que dichas facilidades no se encuentran al alcance de una gran parte de los estudiantes. profesores y tecnicos interesados en el cálculo estructural. Y es precisamente a estas personas a quienes se les dedica este trabajo.

A tal efecto. en los capitulos I y II se presentan los principios generales de la dinámica: y posteriormente. en una serie de 11 apéndices se ofrecen otros tantos programas computacionales. descritos con todo detalle e ilustrados mediante ejemplos.

Los programas fueron adaptados para su manejo interactivo en computadora personal XT-IBM. bajo el sistema operativo MS DOS versión 3.20. Se empleó el lenguaje fortran 77 y los algoritmos fueron tomaron del texto de Mario Paz "Structural Dynamics" publicado en 1980 por la editorial Van Nostrand Reinhold Company.

Acompañan a la presente monografia cinco diskettes conteniendo las versiones de los programas fuente y de los programas ejecutable así como los archivos de datos usados en los ejemplos. Invitamos al lector interesado para que modifique. de acuerdo a sus particulares intereses. dichos programas.

CAPITULO 1

VIBRACIONES LIBRES

1.1 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Se dice que un sistema mecánico es de un grado de libertad cuando la posición de sus componentes puede ser determinada mediante una sola variable.

Sea el sistema constituido por una partícula puntual de masa m, suspendida de un resorte cuya masa se puede despreciar. Se supone que el resorte originalmente tiene una longitud l_o, -pero toda vez que la partícula ha sido suspendida, el resorte se alarga la distancia y_e. alcanzando así una nueva posición de equilibrio, tal y como se muestra en las figuras 1.1.1 a y b.

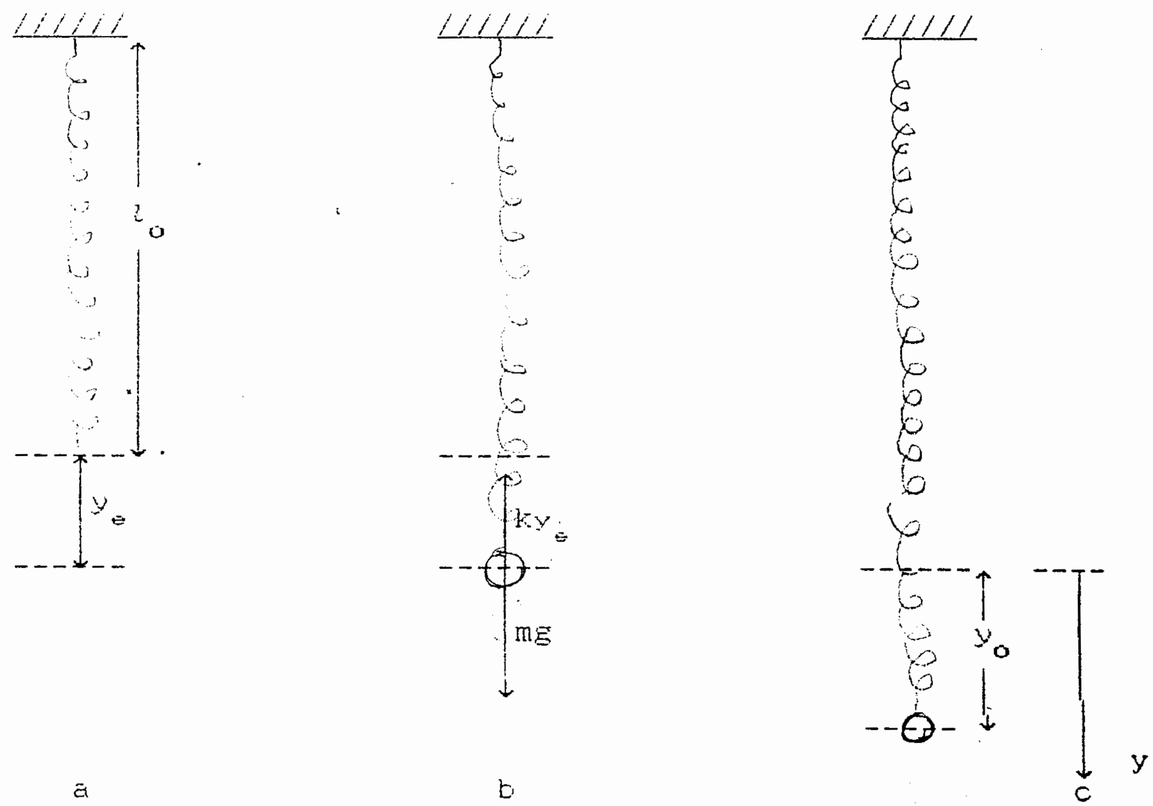


Fig. 1.1.1

Si además se satisface la ley de Hooke, entonces la fuerza de restauración, cuya magnitud es ky_e, equilibra a la fuerza de gravedad mg

$$mg = ky_e \qquad (1.1.1)$$

Resulta conveniente caracterizar al fenómeno tomando como origen de coordenadas el punto donde ahora se ubica a la partícula. Este punto es el punto de equilibrio estático.

Así pues, cuando partiendo de esta última posición de equilibrio la masa m se desplaza, de nueva cuenta, de algún modo, una distancia y, la fuerza resultante que actúa sobre la partícula es

$$F = mg - k(y_e + y) \qquad (1.1.2)$$

y da aquí se deduce

$$F = - ky.$$

Por otra parte, en virtud de la segunda ley de Newton ocurre

$$m\ddot{y} = -ky.$$

esto es

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0. \qquad (1.1.3)$$

En todo sistema en movimiento aparecen fuerzas de fricción y la experiencia muestra que éstas suelen ser proporcionales a la velocidad, sea pues

$$F_f = -c\dot{y} \qquad (1.1.4)$$

la fuerza cuya acción conduce a la disminución de energía del sistema .

En este caso la segunda ley de Newton adquiere la siguiente presentación

$$m\ddot{y} = -ky - c\dot{y} \qquad (1.1.5)$$

Introduciendo la designación

$$2\beta = c/m \qquad (1.1.6.a)$$

$$\omega^2 = k/m \qquad (1.1.6.b)$$

la ecuación diferencial que describe el movimiento de la partícula es

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega^2 y = 0. \qquad (1.1.7)$$

Como se verá, el movimiento descrito por las ecuaciones (1.1.3) y (1.1.7) es oscilatorio. Y dado que en el segundo caso existen fuerzas de fricción, de él se dice que es amortiguado.

1.2 OSCILADOR ARMONICO NO AMORTIGUADO

A efecto de proceder a resolver la ecuación (1.1.7) cuando se toma $\beta = 0$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad (1.2.1)$$

conviene hacer

$$y = e^{\lambda t}. \qquad (1.2.2)$$

llegándose así a la ecuación característica

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0. \qquad (1.2.3)$$

A ésta le corresponden las raices imaginarias $\lambda_1 = i\omega$ y $\lambda_2 = - i\omega$. De donde se deduce la solución general de la ecuación diferencial

$$y = C_1 \exp(i\omega t) + C_2(-i\omega t). \qquad (1.2.4)$$

Las constantes C_1 y C_2 pertenecen al campo de los complejos.

En tanto que la función $y(t)$ describe la posición de la partícula, debe ser real. Y de ésta consideración se deducen las siguientes igualdades:

$$C_1 = C_2^*$$

y

$$C_2 = C_1^* .$$

Sean pues

$$C_1 = a/2 \cdot \exp(i\alpha) \qquad (1.2.5.a)$$

$$C_2 = a/2 \cdot \exp(-i\alpha) . \qquad (1.2.5.b)$$

Sustituyendo estas expresiones en (1.2.4) se obtiene

$$y(t) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha) . \qquad (1.2.6)$$

En otras palabras, el movimiento descrito por la partícula es periódico.

Sea ahora el desplazamiento relativo dado por

$$d = y/a = \cos(\omega t + \alpha) \qquad (1.2.7)$$

En la figura 1.2.1 se presenta la gráfica de esta función, donde se puede apreciar que el valor del parámetro d oscila entre -1 y +1, es decir los valores de y se encuentran entre -a y +a.

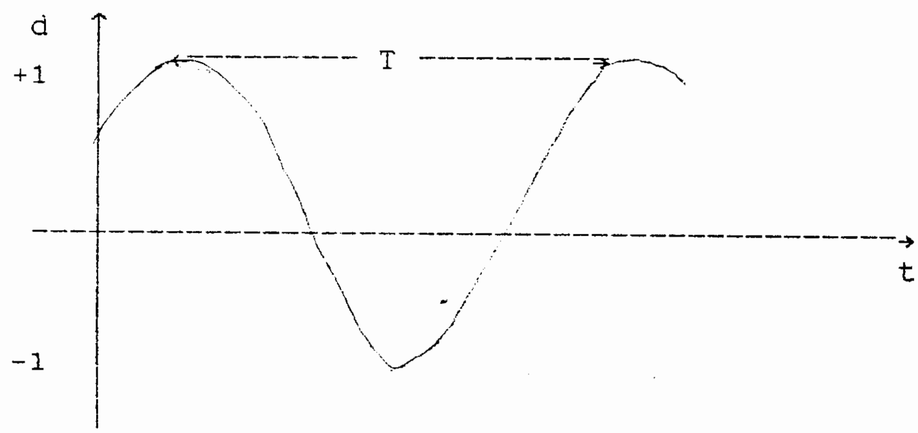


Fig. 1.2.1

Por otra parte, mediante la fórmula para el coseno de una suma, de (1.2.6) se llega a

$$y = a\cdot\cos\alpha\cdot\cos\omega t - a\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\omega t \qquad (1.2.3)$$

Introduciendo las designaciónes

$$A = a\cdot\cos\alpha \qquad (1.2.9.a)$$

y

$$B = -a \cdot \text{sen}\alpha \qquad (1.2.9.b)$$

se sabe que

$$y(t) = A \cdot \cos\omega t + B \cdot \text{sen}\omega t \qquad (1.2.10)$$

Seguidamente se procede a establecer la notación a usar.

Al valor de la máxima elongación del sistema se le llama <u>amplitud</u>. En este ejemplo corresponde a la constante a.

El ángulo $\omega t + \alpha$ es la <u>fase</u> del sistema. Cuando $t = 0$, el ángulo de fase es α, magnitud que designa la <u>fase inicial</u>.

Como por otra parte es bién conocido

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2\Pi),$$

el <u>período</u> del sistema es aquel valor T que satisface la condición

$$\omega(t + T) + \alpha = (\omega t + \alpha) + 2\pi$$

es decir

$$T = 2\pi/\omega \qquad (1.2.11)$$

Al parámetro

$$\nu = 1/T \tag{1.2.12}$$

se le conoce como la <u>frecüencia</u> e indica el número de vibraciones obtenidas en la unidad de tiempo. Se mide en hertzios.

De la ecuación (1.2.1) se deduce la siguiente correlación

$$\omega = 2\pi/T \ , \tag{1.2.13}$$

magnitud que recibe el nombre de <u>frecuencia circular</u> del sistema.

Como ya se vió. la posición de la partícula puntual de masa m se determina mediante la ecuación (1.2.6). Al derivar ésta ecuación una vez se obtiene la velocidad v de la partícula

$$v = -\omega\cdot a\cdot \cos(\omega t + \alpha). \tag{1.2.15}$$

Y derivando de nueva cuenta esta última correlación se llega a determinar la aceleración w de la masa

$$w = -a\cdot\omega^{2}\cdot\cos(wt + \alpha), \tag{1.2.16.a}$$

o sea

$$w = a\cdot\omega^{2}\cdot\cos(wt + \alpha + \pi). \tag{1.2.16.b}$$

1.3 ENERGIA TOTAL DE UN OSCILADOR ARMONICO NO AMORTIGUADO

Sea que el sistèma se pone en movimiento desplazándose la partícula, a partir de su posición de equilibrio estático, una distancia y_o, llamada desplazamiento inicial e imprimiéndole a la vez una velocidad v_o, llamada velocidad inicial. Luego, mediante las ecuaciones (1.2.6) y (1.2.15) se obtiene

$$y_o = a \cdot \cos \alpha$$

$$v_o = -a \cdot \omega \operatorname{sen} \alpha .$$

Y de aquí, mediante sencillas transformaciones se llega a

$$a = \sqrt{y_o^2 + (v_o/\omega)^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -v_o/(\omega y_o) .$$

Como se sabe, la energía cinética de una partícula de masa m es

$$E_c = mv^2/2. \qquad (1.3.5)$$

y la energía potencial, debida a la acción del resorte es

$$E_p = ky^2/2 \qquad (1.3.6)$$

Al sustituir los valores del desplazamiento y de la velocidad por los dados en las correlaciones (1.2.6) y (1.2.15), se determinan las variaciones en el tiempo de ambos tipos de energía:

$$E_p = ka^2 \cdot \cos(\omega t + \alpha) \qquad (1.3.6)$$

$$E_c = ma^2\omega^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha). \qquad (1.3.7)$$

Como era de esperarse, la energía total del sistema E, siendo la suma de aquéllas, es constante. Para convencerse de ello basta observar que $m\omega^2 = k$, esto es

$$E = E_p + E_c \qquad (1.3.9.a)$$

$$E = ka^2/2 \qquad (1.3.9.b)$$

$$E = ma^2\omega^2/2. \qquad (1.3.9.c)$$

En otros términos, cuando el resorte alcanza su máxima elongación, la energía cinética se anula y la energía potencial adquiere su máximo valor

$$E_{pm} = ka^2/2 \qquad (1.3.10)$$

Y cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio estático, la energía potencial del sistema es nula siendo así que la energía cinética adquiere su máximo valor

$$E_{cm} = ma\omega^2/2 \tag{1.3.11}$$

es decir,

$$E = E_{pm} = E_{cm} \tag{1.3.12}$$

Por otra parte, de las ecuaciones (1.3.6) y (1.3.7), mediante sencillas transformaciones trigonométricas, se obtiene

$$E_c = E\cdot(1 - \cos 2(\omega t + A))/2 \tag{1.3.15}$$

$$E_p = E\cdot(1 + \cos 2(\omega t + \alpha))/2, \tag{1.3.14}$$

siendo así que las frecuencias de estas energías son iguales a 2ω, es decir iguales al doble de la frecuencia circular del sistema en cuestión.

1.4 EJEMPLOS

A continuación se ofrecen al lector algunos ejemplos de aplicación, los que adecuadamente modelados pueden ser tratados como casos particulares de osciladores armónicos simples, es decir, no amortiguados.

EJEMPLO 1.4.1

Un recipiente contiene una mezcla de alcohol y agua. Un hidrometro de peso $P = 0.2$ kgf. y diámetro $d = 1$ cm. se puso primeramente a flotar en el liquido y despues, al ser sumergido un poco y soltado, se observó que osciló con un periodo $T = 3.3$ seg. Se desea conocer la densidad ρ de la solución. Se desprecian las fuerzas debidas a la fricción.

Solución:

Cuando el hidrómetro flota, la fuerza de gravedad se encuentra equilibrada por la fuerza de Arquímedes. En esta situación

$$P = \rho g(V + (\pi d^2/4)\cdot h),$$

siendo $V + (\pi d^2/4)\cdot h$ el volumen del hidrómetro que se encuentra sumergido. Si ahora el hidrómetro se sumerge a una profundidad y, la fuerza de Arquímedes será

$$F = \rho g(V + (\pi d^2/4)\cdot(h + y)).$$

En consecuencia, las resultante de las fuerzas es

$$F - P = \rho g(\pi d^2/4)\cdot y.$$

Siendo asi que la resultante de todas las fuerza que actúan sobre el hidrómetro es proporcional a la varible y. De aqui que sea razonable encuadrar este problema en el modelo del oscilador armónico simple. A tal efecto se toma

$$k = \rho g \pi d^2/4.$$

Valor que al ser sustituido en las ecuaciones (1.1.6.b) y 1.2.11) conducen a

$$T = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{m\pi}{\rho g}} .$$

Resolviendo respecto a la densidad ρ se tiene

$$\rho = \frac{16\cdot\pi m}{T^2 d^2 g} = \frac{16\cdot\pi\cdot 200}{(3.3)^2\cdot 1^2\cdot 981} = 0.9410 \ \mathrm{gr/cm^3},$$

pues obviamente, la masa es igual a 200 gr. El valor de la aceleración de la gravedad es igual a 981 $\mathrm{cms/seg^2}$.

EJEMPLO 1.4.2

Se tiene un vaso comunicante formado por un tubo en forma de U de sección circular cuya área $A = 2\ \mathrm{cms^2}$. Se encuentra parcialmente lleno con mercurio siendo así que la longitud de la columna de mercurio es $l = 15$ cms. Se desea determinar la frecuencia del sistema cuando se desprecian los efectos debidos a la fricción. La densidad del mercurio es $\rho\ \mathrm{gr/cm^3}$.

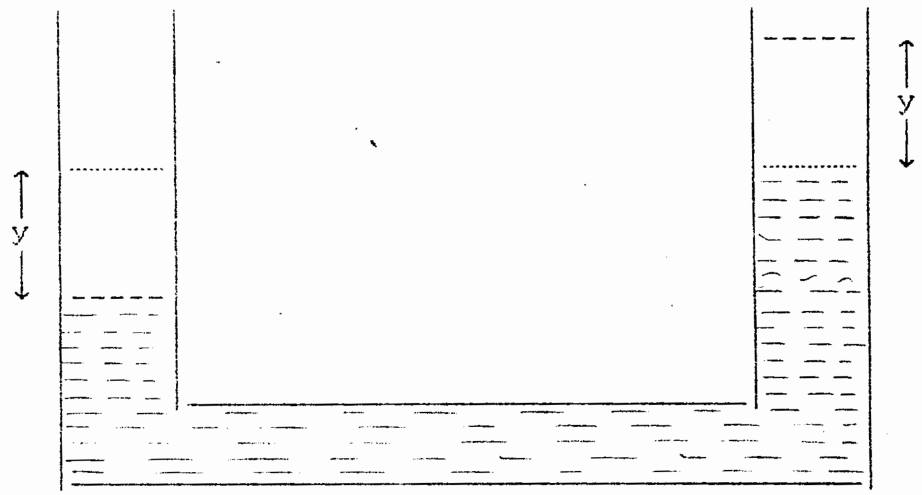


Fig. 1.3.1

Solución:

Si de algún modo la columna de mercurio se desvía de su posición de equilibrio, elevándose a una altura de y centímetros en el brazo derecho, el nivel del brazo izquierdo, a su vez, bajará la misma longitud. De esta manera el peso de la masa de mercurio fuera de equilibrio es

$$P = \rho g A(2y).$$

Esta es la fuerza que pone en movimiento a toda la masa

$$m = \rho g A l$$

de mercurio.

Y dado que cada partícula de líquido se desplaza la referida distancia y, de conformidad a la segunda ley de Newton se tiene

$$\rho A l \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho g A\cdot(2y).$$

Es decir, se tiene el modelo caracterizado por la ecuación (1.1.3), De donde de acuerdo a la fórmula (1.1.6.b) se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{2\rho g A}{\rho A l}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} .$$

Y debido a la expresión (1.2.11)

$$T = \pi\cdot\sqrt{\frac{2g}{l}} = 0.5494 \text{ seg.}$$

Cabe señalar que el período del sistema es función, exclusivamente, de la longitud de la columna de mercurio.

EJEMPLO 1.4.3

En la sección 1.1 se estudió el movimiento descrito por una pesa de masa m, suspendida de un resorte de longitud inicial l_o, constante de Hooke k y cuya masa no se consideró en el modelo.

Ahora se atiende al problema de tenerse un resorte de masa m_r, comparable a la de la pesa. Se busca la frecuencia ω del sistema.

SOLUCION:

A menudo se presentan problemas para los cuales el análisis de las fuerzas que interviene es complicado, pero que al ser abordados tomando en consideración principios energéticos, se soslayan los principales escollos. Y es de esta manera como se procede a continuación.

En la figura 1.1.1.b se puede observar que la longitud del resorte, cargado y en estado de reposo es

$$l = l_o + y_e .$$

Sea que el resorte está constituido por muchas espiras, cuya monto asciende a N, y sea, además, la amplitud de la pesa en movimiento es de a unidades. Es decir, dado que el resorte tiene N espiras, cada una de ellas tendrá una longitud igual a l/N unidades y la masa correspondiente será igual a m_r/N.

Simples consideraciones muestran que la amplitud de la trayectória descrita por la enésima espira es

$$a_n = \frac{nl/N}{l} \cdot a .$$

o sea,

270

$$a_n = \frac{na}{N} .$$

Y según (1.3.11), la máxima energía cinética obtenida es

$$E^{n}_{cm} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_r}{N}\cdot\frac{a^2 n^2}{N^2}\cdot\omega^2.$$

La máxima energía cinética, aportada por todas las espiras del resorte, consecuèntemente es

$$E^{r}_{cm} = \frac{m_r\ a^2\omega^2}{2N^3}\cdot\sum_{i=1}^{N} n^2 = \frac{m_r a^2\omega^2}{2N^3}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Si el número N es grande cuando se compara con la unidad,

$$E^{r}_{cm} \cong m_r\omega^2 a^2/6.$$

De donde al estimarse las aportaciones tanto del resorte, como de la pesa, se encuentra que la máxima energía cinética del sistema es

$$E_{cm} = \frac{1}{2}\cdot(m + m_r/3)a^2\omega^2.$$

A efecto de conocer la frecuencia se igualan las máximas energias cinética y potencial

$$ka^2 = \frac{1}{2}\cdot(m + m_r/3)\cdot a^2\omega^2.$$

Finalmente se infiere

$$\omega^2 = \frac{k}{m + m_r/3} \quad .$$

Al compulsar esta correlación con (1.1.6.b) se hace evidente que, cuando la masa del resorte es apreciable, el sistema es análogo al considerado en la sección 1.1 pero, en cambio debe tomarse la masa en consideración como una masa equivalente de magnitud igual a $m + m_r/3$. Por otra parte, si la masa de la pesa excede demasiado a la masa del resorte, $m >> m_r$, no se comete error significativo al despreciar la masa del resorte.

EJEMPLO 1.4.4

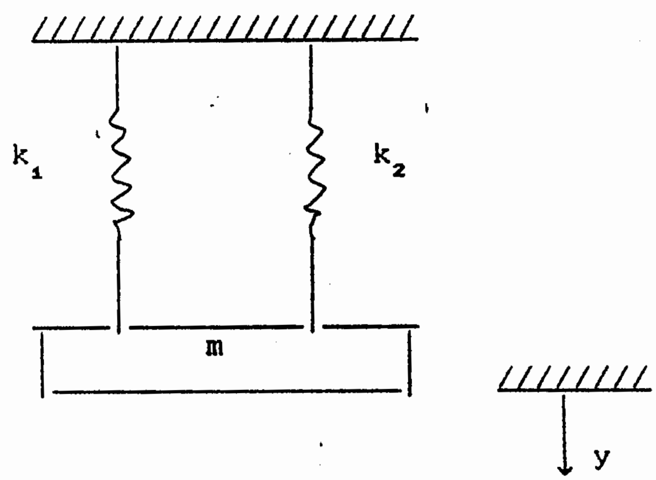


Fig. 1.4.2

Un peso de masa m se encuentra suspendido de dos resortes en paralelo, cuyas respectivas rigideces son k_1 y k_2, tal y como se muestra en la figura 1.4.2.

Se busca modelar el problema en términos de un único resorte equivalente.

Solución:

Cuando la masa m de la pesa se desplaza de su posición de equilibrio una distancia de y unidades, la fuerza restauradora, debida a la acción de los resortes es

$$F = (k_1 + k_2)\cdot y$$

De aquí que ambos resortes puedan ser sustituidos, equivalentemente, por sólo uno de rigidez

$$k_e = k_1 + k_2.$$

Cuando se tienen n resortes en paralelo sosteniendo conjuntamente un peso, el resultado anterior se generaliza fácilmente

$$k_e = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (1.4.1)$$

EJEMPLO 1.4.5

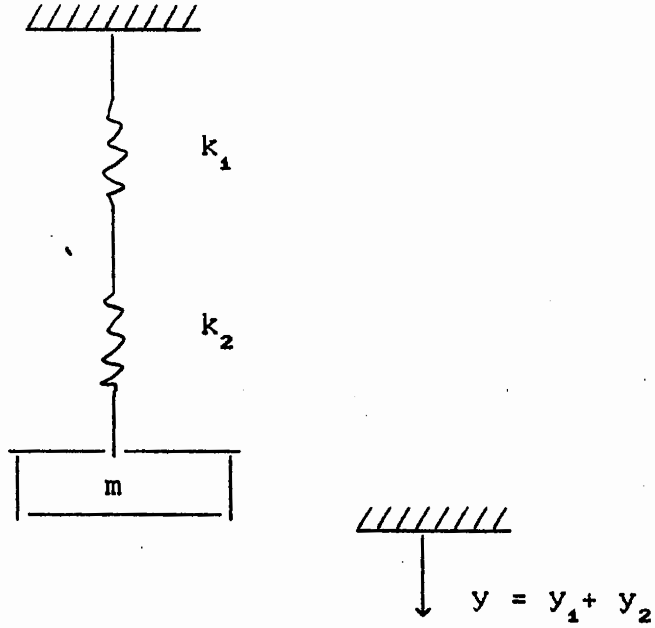


Fig. 1.4.3

Sea una carga de masa m suspendida de dos resortes colocados en serie, de constantes respectivas k_1 y k_2, tal y como se muestra en la figura superior. Se desea modelar el problema en términos de un único resorte equivalente.

Solucion:

Al desplazarse la masa m una distancia de y unidades, la contribución al respecto del primer resorte será una cierta longitud de y_1 unidades y la del segundo resorte es de y_2 unidades

$$y = y_1 + y_2$$

Pero como ambos resortes soportan el mismo peso

$P = mg,$

$$y_1 = P/k_1$$

y

$$y_2 = P/k_2.$$

Consecuentemente, un resorte equivalente deberá tener una constante de rigidez k_e, tal que

$$\frac{P}{k_e} = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \, ,$$

esto es

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \, . \qquad (1.4.3)$$

EJEMPLO 1.4.6

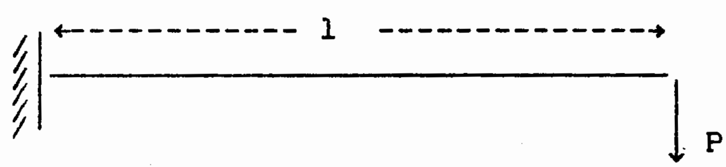


Fig. 1.4.4

Una viga en cantiliver, con módulo de elasticidad $E = 2\cdot 10^6$ kg/cm^2 y sección recta cuadrada de lado $b = 2$ cms, sostiene en su extremo libre un peso $P = 20$ kgf. Se observó que el período de oscilacion de la viga es $T = 0.1$ seg. Se desea conocer la longitud de la viga. La rigidez de una viga en voladizo esta dada por $k = 3EI/l^3$, donde I es el momento de inercia.

Solución:

Siendo el momento de inercia de la viga $I = b^4/12$, se sabe que la rigidez es

$$k = b/(4l^3).$$

Por otra parte, de las fórmulas (1.1.6.b) y (1.2.13)

$$\frac{2\Pi}{T} = \sqrt{k/m} \ .$$

Luego, mediante simples sustituciones se obtiene

$$l = \sqrt[3]{\frac{b^4 \ T^2 E}{16\Pi^2 \ m}} \ ,$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{2^4\cdot(0.1)^2\cdot 2\cdot 10^6}{16\cdot\Pi^2\cdot 20}} \simeq 34.35 \text{ cms.}$$

EJEMPLO 1.4.7

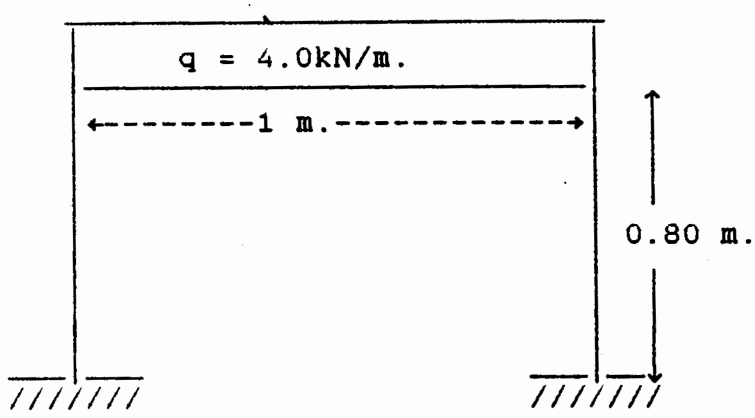


Fig. 1.4.5

Las columnas del pórtico mostrado en la figura 1.4.5 son de acero, con módulo de elasticidad $E = 2.2 \cdot 10^5$ MPa., sección recta cuadrada de lado $b = 3$ cms. y altura $h = 0.80$ m. El travesaño horizontal, de longitud $l = 1$ m. soporta una carga uniformemente repartida, de magnitud $q = 4.0$kN/m. Se desea conocer la frecuencia ν pórtico.

Solución:

Teniendo en cuenta la acción conjunta de las dos columnas, las que se consideran como dos vigas en voladizo y de los datos del problema anterior, se sabe que la rigidez del marco es

$$k = \frac{12E(2I)}{h^3} ,$$

esto es,

$$k = \frac{12\cdot 2.2\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 2\cdot (0.03)^4}{12\cdot (0.8)^3} ,$$

$$k = 696,093.75 \text{ N/m.}$$

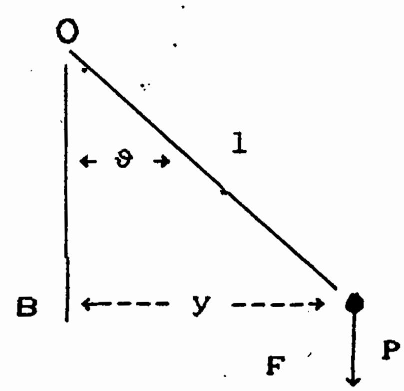
Pero según las expresiones (1.1.6.b) y (1.2.12),

$$\nu = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{kg}{P}} ,$$

$$\nu = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{696,093.75\cdot 9.82}{4,000\cdot 1.0}} = 6.5759 \text{ c.p.s.}$$

EJEMPLO 1.4.8

Fig. 1.4.6



Un péndulo físico está compuesto por una lenteja de peso $P = mg$, suspendida de un hilo imponderable, de longitud constante l y que gira alrededor de un punto fijo O. Se desea conocer el período de las oscilaciones propias cuando se desprecian los efectos debidos a la fricción.

Solución:

Al observar la figura 1.4.6, se hace evidente que sobre la lenteja actuan únicamente dos fuerzas, a saber: La fuerza de gravedad $P = m \cdot g$, dirigida hacia abajo, y la tensión T que actuan en la dirección del hilo. La posición de éste se fija mediante el ángulo ϑ que forma el hilo con la vertical. Siendo así que la fuerza tangente a la trayectoria de la masa tiene magnitud

$$F = mg \cdot \text{sen}\vartheta.$$

Calculando ahora el momento de la fuerza F respecto al punto fijo O, se obtiene la ecuación dinámica del movimiento de rotación:

$$ml^2\ddot{\vartheta} = -mgl \cdot \text{sen}\vartheta \qquad (1.4.4)$$

pues el momento de inercia de la lenteja es $I = ml^2$. El signo menos que figura en el término del lado derecho de la ecuación obedece al hecho de estar dirigida la fuerza F en sentido contrario al del crecimiento del ángulo ϑ.

Seguidamente, y con el propósito de facilitar la solución de la ecuación diferencial se simplifica el modelo de la siguiente manera:

Se conviene en mantener el ángulo ϑ de desviación del hilo siempre pequeño, de modo que se pueda considerar, sin error apreciable, que la lenteja se mueve sobre una trayectoria rectilínea. Fijándose así la posición de la masa en movimiento, respecto a su punto de reposo B, por la variable

$$y = l \cdot \vartheta.$$

Y como bajo las anteriores consideraciones

$$\operatorname{sen}\vartheta \cong \vartheta,$$

la expresión (1.4.4) deviene en

$$ml^2\ddot{\vartheta} = -gl \cdot \vartheta.$$

Es decir,

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \cdot \vartheta = 0, \qquad (1.4.5)$$

expresión que cae dentro del caso dado por la ecuación (1.2.1) cuando se hace

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} . \qquad (1.4.6)$$

Y consecuentemente, de conformidad a (1.2.13), se obtiene el periodo de las oscilaciones propias

$$T = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \tag{1.4.7}$$

1.5 MOVIMIENTO VIBRATORIO EN EL PLANO

Sea que una partícula muestra movimiento oscilatorio en dos direcciones perpendiculares entre si, por ejemplo en las direcciones de los eje X e Y. Cuando la variable temporal t se elige de modo tal que al inicio de la cuenta del tiempo la partícula no muestra desplazamiento horizontal, el movimiento vibratorio en esa dirección puede ser denotado por

$$x = a\cdot\cos\omega t, \tag{1.5.1.a}$$

mientras que el desplazamiento en la dirección perpendicular se describe mediante

$$y = b\cdot\cos(\omega t + \alpha) \tag{1.5.1.b}$$

siendo a y b las amplitudes en las direcciones, respectivamente, horizontal y vertical y α la diferencia de fase entre dichas oscilaciones.

Otra forma de expresar a la ecuación (1.5.1.b) es

$$y/b = \cos\omega t \cdot \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\omega t \cdot \cos\alpha,$$

y como $\cos\omega t = x/a$ y $\operatorname{sen}\omega t = \pm \sqrt{1 - x^2/a^2}$,

$$x^2/a^2 - 2xy/(a \cdot b) \cdot \cos\alpha + y^2/b^2 = \operatorname{sen}^2\alpha. \qquad (1.5.2)$$

Esta última es la ecuación de una elipse cuyos ejes se encuentran girados un cierto ángulo.

Seguidamente se pasa a considerar tres casos particulares del movimiento de partículas en el plano.

CASO I) Si el ángulo α es igual a cero, entonces como $\cos\alpha = 1$ y $\operatorname{sen}\alpha = 0$, se obtiene

$$y = b/a \cdot x$$

siendo así que el movimiento vibratorio de la partícula tiene una amplitud de $\sqrt{a^2 + b^2}$ unidades y la trayectoria se describe sobre una recta que pasa por el origen siendo su pendiente $m = b/a$.

CASO II) Si el ángulo α es igual a $\pm \pi/2$ radianes, de (1.5.2) se deduce fácilmente que

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$$

siendo ésta la ecuación de una elipse cuyos semiejes miden, respectivamente a y b unidades.

CASO III) Si la diferencia de fase α es igual a $\mp \pi$ radianes, entonces

$$y = -b/a \cdot x,$$

El movimiento de la partícula se describe sobre una recta que atraviesa el origen y tiene pendiente $m = -b/a$.

Hasta el momento, las frecuencias en ambas direcciones perpendiculares se han considerado iguales. Cuando no lo son, la trayectoria resultante puede tomar una configuración complicada conocida como *curva de Lissajous*. Seguidamente se presenta un sencillo ejemplo al respecto.

EJEMPLO 1.5.1

Una partícula material se encuentra afectada por dos vibraciones perpendiculares entre si, dadas por $x = \cos\pi t$ e $y = \cos\pi t/2$. Se desea conocer la trayectoria de la partícula.

SOLUCION:

Como $y = \cos\pi t/2$ y sabiendo que $\cos\pi t/2 = \sqrt{(1+\cos\pi t)/2}$ se deduce $y^2 = (1 + \cos\pi t)/2$, y de aquí $2y^2 = x - 1$.

Esto es, la partícula se mueve sobre una parábola.

CAPITULO 2

VIBRACIONES AMORTIGUADAS

2.1 INTRODUCCION

Esencialmente, en el Capítulo 1 se estudió el movimiento de partículas materiales las que, una vez puestas de algún modo en movimiento y que sin estar sometidas a fuerzas motrices, oscilan ilimitadamente. Pero la experiencia muestra que éste tipo de fenómenos no existe por causa de las llamadas fuerzas de fricción, fuerzas que consumen la energía de los sistemas en movimiento.

En la sección 1.1 se demostró que la ecuación que describe el movimiento amortiguado es

$$\ddot{y} + 2\cdot\beta\dot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (1.1.7)$$

donde $2\beta = c/m$ y $\omega^2 = k/m$.

Como el parámetro ω corresponde a la frecuencia de un sistema no amortiguado, se le conoce como la <u>frecuencia propia</u>. Por otra parte, al parámetro c se le llama <u>coeficiente de amortiguamiento viscoso</u>, ya que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad de la partícula, y este tipo de disipación de la energía se presenta cuando una partícula en movimiento se encuentra sumergida en un líquido viscoso.

De las ecuaciones (1.1.7), (1.1.6.a) y (1.1.6.b) se deduce fácilmente que

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0. \qquad (2.1.1)$$

Esta ecuación encuentra un posible modelo en la siguiente figura

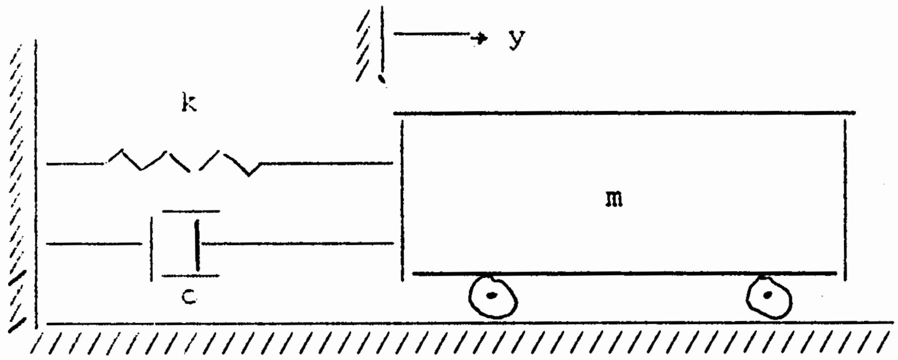


Fig. 2.1.1

Si ahora se toma

$$y = C_o e^{\lambda t} \tag{2.1.2}$$

se puede observar que a la anterior ecuación diferencial le corresponde la siguiente ecuación característica

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0, \tag{2.1.3}$$

de soluciones $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$ (2.1.4)

Si el amortiguameinto no es grande, es decir, $\beta < \omega$, la expresión dentro del radical es negativa. Para este caso resulta conveniente tomar la siguiente notación:

$$\omega_D = \sqrt{k/m - (c/(2m))^2}\ , \tag{2.1.5}$$

siendo así que la solucion general de la ecuacion diferencial (2.2.3) esta dada por

$$y = e^{-\beta t}(C_1 \cdot e^{i\omega_D t} + C_2 \cdot e^{-i\omega_D t}). \qquad (2.1.6)$$

Comparando esta ecuación con (1.2.4) y (1.2.6), es claro que el desplazamiento de la partícula oscilante se puede determinar, equivalentemente, por

$$y = C \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_D t - \alpha), \qquad (2.1.7)$$

siendo las constantes C y α constantes de integración.

A esta solución le atañe la siguiente gráfica:

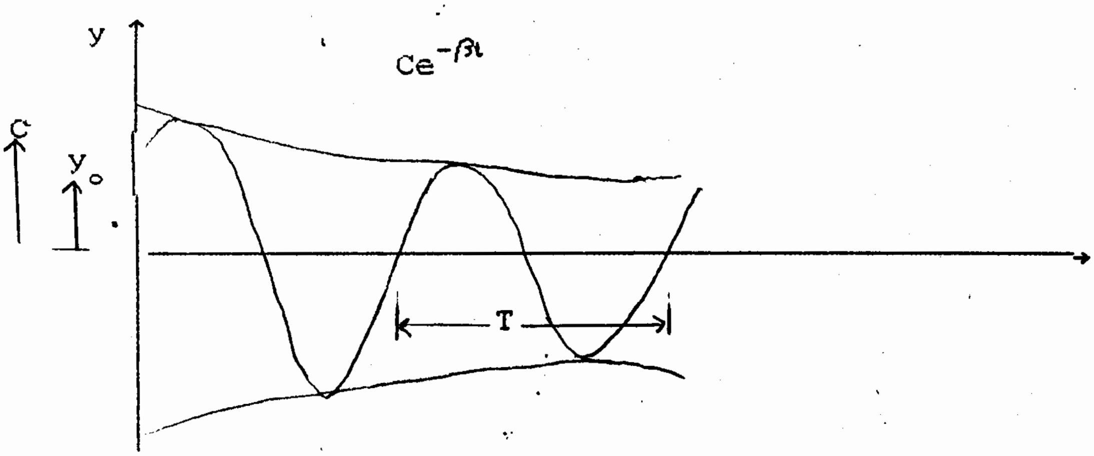


Fig. 2.1.1

Se observa que la amplitud varía de acuerdo a

$$c_o(t) = C \cdot e^{-\beta t}, \qquad (2.1.8)$$

y cuando $t = 0$,

$$v_o = C\cdot\cos\alpha. \qquad (2.1.9)$$

El período T se calcula mediante

$$T = 2\pi/\omega_D. \qquad (2.1.10)$$

Como la velocidad con que decae la amplitud depende de β, a este parámetro se le puede llamar <u>coeficiente de amortiguamiento</u>.

Tal vez resulte más cómodo modificar la correlación (2.2.7) empleando la conocida fórmula para el coseno de una suma, obteniéndose así :

$$v = e^{-\beta t}(A\cdot\cos\omega_D t + B\cdot\operatorname{sen}\omega_D t) \qquad (2.1.9)$$

donde las constantes A y B son tomadas al azar.

Las ecuaciones (2.1.6) y (2.1.7) se determinaron bajo el supuesto de ser $\beta < \omega$ pero puede darse el caso de tenerse $\beta = \omega$ o $\beta > \omega$. Seguidamente se detallan cada uno de estos tres casos:

I.- <u>SISTEMAS CRITICAMENTE AMORTIGUADOS.</u>

Se dice que un sistema oscilante se encuentra criticamente amortiguado cuando la expresión dentro del radical en la ecuación (2.1.5) se anula, así pues

$$(c_{cr}/2\cdot m)^2 - K/m = 0, \tag{2.1.11}$$

o sea

$$c_{cr} = 2\sqrt{K\cdot m} \quad . \tag{2.1.12}$$

Obviamente, c_{cr} designa el valor del amortiguamiento crítico. Y dado que la frecuencia natural del sistema no amortiguado es $\omega = \sqrt{K/m}$, el amortiguamiento crítico también se puede expresar mediante la siguiente correlación

$$c_{cr} = 2\cdot m\cdot\omega = 2\cdot K/\omega. \tag{2.1.13}$$

Las soluciones de la ecuación característica (2.1.3), para el caso de amortiguamiento crítico son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -c_{cr}/(2\cdot m), \tag{2.1.14}$$

siendo así la solución general de la ecuación diferencial (2.1.1)

$$y(t) = (C_1 + C_2t)\cdot\exp[-(c_{cr}/(2m))\cdot t]. \tag{2.1.15}$$

II.- SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS.

Cuando el coeficiente de amortiguamiento de un sistema oscilante es estrictamente mayor que el crítico, se dice que el sistema se encuentra sobreamortiguado, esto es,

$$c > c_{cr}. \tag{2.1.16}$$

En este caso, la expresión dentro del radical en (2.1.4) es positiva y las dos raices de la ecuación característica λ_1 y λ_2 son positivas. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial en cuestión es

$$y(t)\ C_1\exp(\lambda_1 \cdot t) + C_2\exp(\lambda_2 \cdot t). \tag{2.1.17}$$

Cabe senalar, que tanto cuando el sistema oscilante se encuentra críticamente amortiguado, como cuando se encuentra sobreamortiguado, el movimiento resultante no es oscilatorio y éste decae exponencialmente.

III.- SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS

Cuando el coeficiente de amortiguamiento de un sistema oscilatorio es estrictamente menor que el crítico, se dice que el sistema se encuentra subamortiguado, esto es,

BIBLIOGRAFIA

Gordon, B. D., Hoffmann, T. R. "Fortran 77: Un estilo estructurado y disciplinado". McGraw-Hill, México, 1986

Meirovitch, L. "Elements of Vibration Analisis". McGraw-Hill, Singapur, 1986

Paz, M "Structural Dynamics", Van Nostrand Reinhold Company, Nueva York, 1980

Reddy,J.N. "Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering" McGraw-Hill, Singapur, 1986.

A P E N D I C E A2

PROGRAMA "IMPULSO.FOR".

$$c < c_{cr}. \tag{2.1.18}$$

En este caso, la expresión dentro del radical en la ecuación (2.1.4) es negativa y las raices de la ecuación característica (2.1.3) son complejas conjugadas:

$$\lambda_{1,2} = -c/(2m) \mp i\sqrt{k/m - (c/2m)^2}\ , \tag{2.1.19}$$

siendo la solución general de la ecuación diferencial (2.1.1) la dada por la relación (2.1.6).

Si ahora se defina a la <u>razón de amortiguamiento</u> del sistema oscilante por

$$\xi = c/c_{cr}, \tag{2.1.20}$$

entonces el valor del parámetro ω_D se puede expresar así

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}\ . \tag{2.1.21}$$

Cuando el movimiento oscilatorio se estudia a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento, y_o y de velocidad, v_o, la solución de la ecuación diferencial (2.1.1), dada por (2.1.6) adquiere la siguiente presentación

$$y(t) = \exp(-\xi\omega t)\cdot(y_o\cdot\cos\omega_D t + (v_o+y_o\xi\omega)/\omega_D\cdot\operatorname{sen}\omega_D t). \tag{2.1.22}$$

O bién, equivalentemente

$$y(t) = C\cdot\exp(-\xi\omega t)\cdot\cos(\omega_D t + \alpha), \qquad (2.1.23)$$

donde

$$C = \sqrt{y_o^2 + (v_o+y_o\xi\omega)^2/\omega_D^2}. \qquad (2.1.24)$$

y

$$\mathrm{tg}\alpha = (v_o + y_o\xi\omega)/(\omega_D y_o). \qquad (2.1.25)$$

Para este caso, la amplitud del movimiento resultante decrece con el tiempo. El periodo de oscilación es

$$T_D = 2\cdot\Pi/w_D = 2\cdot\Pi/(\omega\sqrt{1 - \xi^2}). \qquad (2.1.26)$$

La experiencia demuestra que en las estructuras, el valor de la constante de amortiguamiento suele ser bastante menor que el valor crítico. Seguidamente se describe el rango de ξ para algunos tipos de estructuras.

TIPO DE ESTRUCTURA	ξ
TUBERIA SIN CONEXIONES	0.05 al 1 %

PUENTES DE CONCRETO	2 al 3 %
EDIFICIOS DE CONCRETO	10 al 20 %

A2.1 INTRODUCCION

PROGRAMA "IMPULSO.FOR"

A una carga que ejerce su acción sobre un sistema, durante un intervalo de tiempo relativamente pequeño, se le conoce como impulso y se cuantifica calculando el producto de la fuerza por el tiempo. Así, por ejemplo, en la figura A2.1.1 se muestra, por un área sombreada, el impulso causado for la fuerza $F(\tau)$ cuando actúa durante intervalo temporal igual $d\tau$. En otros términos, la citada superficie tiene un área de $F(\tau)\cdot d\tau$ unidades.

Cuando éste impulso se aplica a un cuerpo de masa m se produce un cambio en su velocidad según la siguiente correlación:

$$m\cdot dv/d\tau = F(\tau) \quad . \qquad \text{(A2.1.1)}$$

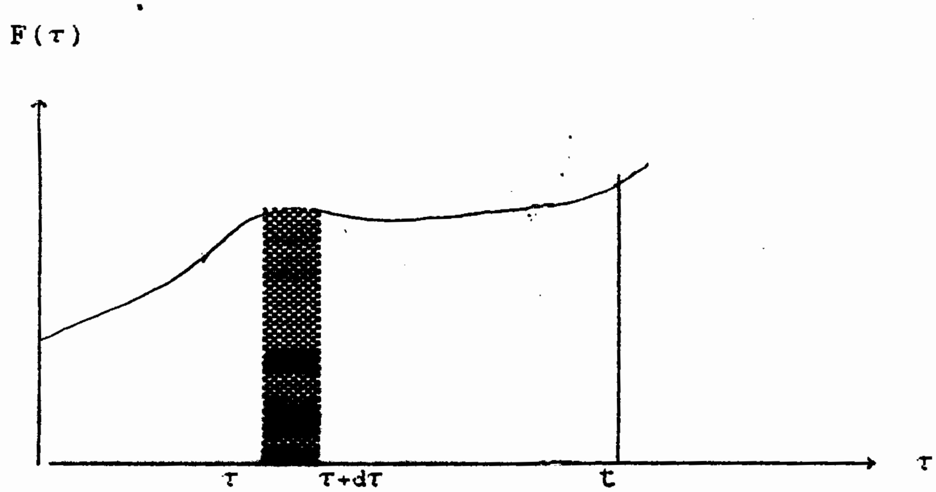


Fig. A2.1.1

De la ecuación (A2.1.1) se deduce

$$dv = F(\tau)d\tau/m \ , \qquad (A2.1.2)$$

donde dv es el incremento en la velocidad. Este incremento puede, a su vez, ser considerado como la velocidad inicial de la masa en el instante τ.

Seguidamente se procede a considerar el efecto de una acción impulsiva sobre un oscilador no amortiguado. Como se recordará, la ecuación (1.2.10) describe el movimiento de la partícula en dicho modelo. Así pues, al estimarse el desplazamiento inicial igual a cero y la velocidad inicial igual $F(\tau)d\tau/m$, la citada correlación se transforma en

$$dy(t) = F(\tau)d\tau \cdot \operatorname{sen}\omega(t-\tau)/m\omega \ . \qquad (A2.1.3)$$

La acción total del impulso se obtiene al sumar los efectos obtenidos en cada uno de estos instantes. Esto es, integrando en el intervalo temporal $[0,t]$,

$$y(t) = 1/m\omega \cdot \int_0^t F(\tau)\operatorname{sen}\omega(t-\tau)d\tau \ . \qquad (A2.1.4)$$

La anterior ecuación integral es conocida como la <u>integral de Duhamel</u>. Considerándose al desplazamiento inicial y_o se tiene ahora

$$y(t) = y_o \cos\omega t + v_o \operatorname{sen}\omega t/w + 1/m\omega \int_0^t F(\tau)\operatorname{sen}\omega(t-\tau)d\tau \quad (A2.1.5)$$

Aun cuando no siempre es posible expresar a la función $F(\tau)$ por una fórmula cerrada, se puede resolver la integral de Duhamel mediante algún método numérico. Su evaluación proporciona el desplazamiento total producido por la fuerza $F(\tau)$ cuando actúa sobre el oscilador e incluye tanto el estado estacionario como el transitorio.

La respuesta del sistema amortiguado se obtiene de modo análogo al mencionado. A tal propósito, en la ecuación (2.1.22), se toma $y_o = 0$, $v_o = F(\tau)d\tau/m$ y se sustituye a la variable t por $t-\tau$.

La diferencial en el desplazamiento es

$$dy(t) = \exp(-\xi\omega[t-\tau])\cdot F(\tau)\operatorname{sen}\omega_D(t-\tau)\cdot d\tau, \quad (A2.1.6)$$

y la respuesta total del sistema amortiguado está dada por

$$y(t) = 1/m\omega_D \int_0^t F(\tau)\cdot\exp(-\xi\omega[t-\tau])\cdot\operatorname{sen}\omega_D(t-\tau)d\tau \;. \quad (A2.1.7)$$

A2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

El programa "IMPULSO.FOR" calcula numéricamente la integral de Duhamel, obteniéndose la respuesta de un oscilador cuando se encuentra sujeto a una excitación variable en el tiempo. La función que describe a la excitación se considera lineal por partes y se construye uniendo puntos especificados de antemano. El término forzante corresponde o bién a una fuerza externa que actúa sobre la masa del oscilador, o bién a una aceleración que ejerce su acción en la base del mismo.

El programa permite conocer

- -El desplazamiento de la masa
- -La velocidad de la masa
- -La aceleración de la masa
- -La fuerza en la base del soporte

y estos resultados se obtienen según un cierto incremento dado en el tiempo. Por añadidura, se puede incluir el efecto debido al amortiguamiento

A continuación se describen la principales variables usadas.

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
NTYPE		Tipo de la excitación.(1) si

		se considera fuerza actuando sobre la masa del oscilador. (2) si se considera la base sujeta a aceleración.
N		Número de puntos que definen a la función de excitación.
M	m	Masa del oscilador
K	k	Constante del resorte.
XI	ξ	Coeficiente de amortiguamiento.
TMAX		Dominio de integración (en el tiempo).
INT		Indice de interpolación. (1): No se interpola (2): Si se interpola.
DT	dt	Paso de interpolación
GR	g	Aceleración de la gravedad.
T(I)	t_i	Tiempo asignado al iésimo punto.
F(I)	$F(t_i)$	Fuerza o aceleración asignada al iésimo punto.
LBL1		Indice de lectura de los datos (1): Los datos se proporcionan mediante el teclado. (2): Los datos se leen de archivo en disco.
LBL2		Nombre del archivo de datos.

El manejo del programa es bastante simple. Cuando los datos se introducen directamente mediante el teclado de la terminal, el mismo programa dirige, paso a paso, al usuario, indicandole la clase de datos què deben irse suministrando.

En caso de usar archivo creado de antemano en disco, se deben proporcionar los siguientes datos

NOBRE DEL ARCHIVO (hasta 12 caracteres alfanuméricos)

NTYPE

N

M

K

XI

TMAX

INT

DT

GR

T(I),F(I) (I=1,N) (tantos renglones cuantos sean necesarios).

Se hacen las siguientes observaciones:

A2.2.1-Si se considera el caso de una fuerza actuando sobre la masa (NTYPE = 1), se debe tomar GR = 0.0

A2.2.2-Si no se va a calcular el valor de la excitación mediante interpolación (INT = 1), se debe tomar DT = TMAX = 0.0.

El programa "IMPULSO.FOR) permite el uso de cualquier sistema consistente de unidades.

EJEMPLO A2.3

Sea la torre mostrada en la figura A2.3.1 y cuya masa, de peso w = 38.6 klbs se supone concentrada en su extremo superior. El sistema posee un amortiguamiento igual al 5% del crítico, estimándose la fuerza de restauración en 100 klbs por pulgada.

La torre se somete a una fuerza de tipo explosivo descrita en la figura A2.3.2. Se pide encontrar los máximos valores absolutos correspondientes al desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa, así como el máximo esfuerzo en la base de la torre.

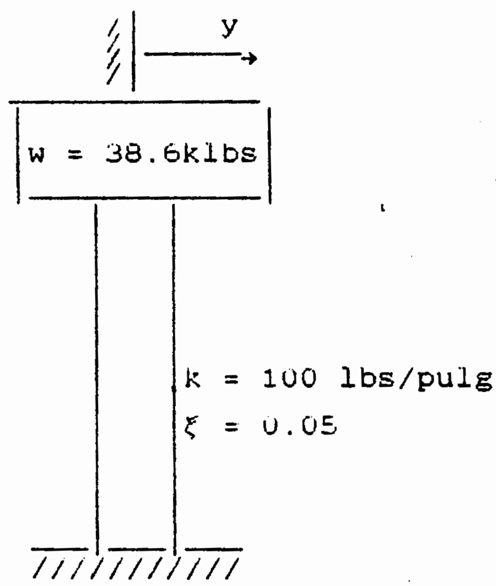


Fig. A2.3.1

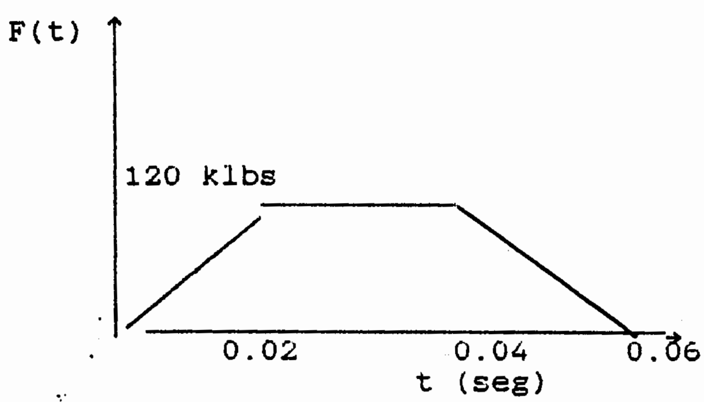


Fig. A2.3.2

Solución:

Se procede a determinar estos valores mediante el programa "IMPULSO.FOR", siendo los datos que lo alimentan los siguientes.

En primer término se teclea el número "2" para indicar que los datos se van a leer de un archivo en disco. Seguidamente se proporciona el nombre del mismo, en este caso "DATOS1.DAT".

Los datos grabados en el disco son:

El mencionado nombre del archivo.

Por otra parte, dado que una fuerza actua directamente sobre la masa del sistema, y no se encuentra la base del soporte sometida a movimiento acelerado, a la variable "NTYPE" se le asigna el valor 1.

Como se puede observar en la figura A2.3.2, la gráfica de la fuerza F(t), es recta por partes, estando constituída por tres segmentos, esto es, N es igual a 4.

Dado que el peso de la masa es de 38.6 klbs, la masa se obtiene dividiendo esta magnitud entre 386 pulg/seg^2 el valor de la constante de gravedad. Así pues $m = 100$ lbs·seg^2/pulg.

Los valores de la constante del resorte k y del coeficiente de amortiguamiento ξ son, respectivamente, 100000.0 y 0.05.

A efecto de estimar los parámetros deseados, se procede a asignar el lapso de tiempo durante el cual se estudia el fenómeno. En esta ocasión se consideró razonable considerar un intervalo igual al doble del tiempo durante el que actúa la fuerza, esto es, "TMAX" toma el valor de 0.12.

Como la fuerza aplicada a la masa esta descrita mediante tres segmentos rectilíneos, se conviene evaluarla cada 0.005

segundos. En otras palabras, a los parámetros "INT" y "dt" se les asignan los valores de 2 y 0.005, respectivamente.

De conformidad a lo comentado en el inciso A2.2.1, y debido a que no se considera aceleración en la base de la torre, se toma el valor de la aceleración g = 0.0.

Los pares de coordenadas que describen a la fuerza en el tiempo son:

T(1) = 0.0	F(1) = 0.0
T(2) = 0.02	F(2) = 120,000.00
T(3) = 0.04	F(3) = 120,000.00
T(4) = 0.06	F(4) = 0.0

Con estos datos el programa calcula los parámetros solicitados. Al final de este apéndice se presentan tanto el listado de resultados como el de los datos grabados en disco.

A2.4 EJEMPLO

Sea de nueva cuenta la torre presentada en A2.3.1, pero ahora sujeta a un movimiento acelerado de su base. Los valores de la aceleración se dan el el archivo grabado en disco denominado "DATOS2.DAT" y fueron obtenidos de los registros del temblor del El Centro, Calif. del año 1940. Se supone que el amortiguamiento del sistema es igual al 5% del valor crítico.

Al final del apéndice se presentan tanto el listado de los datos como el de resultados.

NOMBRE DEL ARCHIVO

DE DATOS INICIALES : DATOS1.DAT

DATOS INICIALES

MASA .... = .1000000E+03
CONSTANTE DEL RESORTE (K) .... = .1000000E+06
RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XI) .... = .5000000E-01
INTERVALO DE TIEMPO (A INTEGRAR) .... = .1200000E+00
PASO DE INTERPOLACION (DT) .... = .5000000E-02
CONSTANTE DE GRAVEDAD (G) .... = .0000000E+00
NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA LA EXCITACION = 4

SE EFECTUARA INTERPOLACION

TABLA INICIAL

TIEMPO	ACELERACION O FUERZA
.0000000E+00	.0000000E+00
.2000000E-01	.1200000E+06
.4000000E-01	.1200000E+06
.6000000E-01	.0000000E+00

RESPUESTA DEL SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD
CALCULADA MEDIANTE LA INTEGRAL DE DUHAMEL

MASA CONSIDERADA (M) .... = .1000000E+03
CONSTANTE DEL RESORTE (K)........ = .1000000E+06
FRECUENCIA NATURAL (W) .... = .3162278E+02 RAD/SEG
FRECUENCIA AMORTIGUADA (WD) ..... = .3158322E+02 RAD/SEG
CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO (C) = .3162278E+03
AMORTIGUAMIENTO RELATIVO (XI) ... = .5000000E-01

TIEMPO	FUERZA	DESPL	VELOCIDAD	ACEL.	FUERZA EN BASE
.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
.500000E-02	30000.0	.124352E-02	.744511	296.402	266.258
.100000E-01	60000.0	.987208E-02	2.94402	580.818	1356.95
.150000E-01	90000.0	.329818E-01	6.52126	846.396	3889.82
.200000E-01	120000.	.771990E-01	11.3661	1086.86	8515.61
.250000E-01	120000.	.147280	16.5942	1000.24	15634.9
.300000E-01	120000.	.242319	21.3295	890.232	25153.1
.350000E-01	120000.	.359571	25.4626	759.910	36847.6
.400000E-01	120000.	.495785	28.9006	612.823	50413.8
.450000E-01	90000.0	.646050	30.8249	156.473	65336.2
.500000E-01	60000.0	.800234	30.4709	-296.591	80601.4
.550000E-01	30000.0	.947033	27.8831	-735.207	95112.9
.600000E-01	-.208189E-10	1.07550	23.1606	-1148.74	107799.
.650000E-01	-.000000	1.17657	17.1984	-1230.96	117783.
.700000E-01	.000000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

.750000E-01	.000000	1.28533	4.43848	-1299.36	128540.
.800000E-01	.000000	1.29130	-2.03550	-1284.87	129132.
.850000E-01	.000000	1.26523	-8.35753	-1238.80	126550.
.900000E-01	.000000	1.20824	-14.3735	-1162.79	120909.
.950000E-01	.000000	1.12224	-19.9394	-1059.19	112401.
.100000	.000000	1.00982	-24.9244	-930.997	101289.
.105000	.000000	.874157	-29.2143	-781.774	87902.6
.110000	.000000	.718991	-32.7138	-615.541	72639.5
.115000	.000000	.548462	-35.3486	-436.680	55973.7

I M P R E S I O N DE V A L O R E S M A X I M O S

DESPLAZAMIENTO MAXIMO .... = .1291305E+01
VELOCIDAD MAXIMA .... = -.3534863E+02
ACELERACION MAXIMA .... = -.1299363E+04
FUERZA MAXIMA EN LA BASE........ = .1291321E+06

N O M B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S : DATOS2.DAT

D A T O S   I N I C I A L E S

MASA	=	.1000000E+03
CONSTANTE DEL RESORTE (K)	=	.1000000E+06
RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XI)	=	.5000000E-01
INTERVALO DE TIEMPO (A INTEGRAR)	=	.1200000E+00
PASO DE INTERPOLACION (DT)	=	.0000000E+00
CONSTANTE DE GRAVEDAD (G)	=	.3860000E+03
NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA LA EXCITACION	=	24

NO SE EFECTUARA INTERPOLACION

T A B L A   I N I C I A L

T I E M P O	A C E L E R A C I O N O F U E R Z A
.0000000E+00	.1080000E-01
.4200000E-01	.1000000E-02
.9700000E+00	.1590000E-01
.1610000E+00	-.1000000E-03
.2210000E+00	.1890000E-01
.2630000E+00	.1000000E-03
.2910000E+00	.5900000E-02
.3320000E+00	-.1200000E-02
.3740000E+00	.2000000E-01
.4290000E+00	-.2370000E-01
.4710000E+00	.7600000E-02
.5810000E+00	.4250000E-01
.6230000E+00	.9400000E-02
.6650000E+00	.1380000E-01
.7200000E+00	-.8800000E-02
.7250000E+00	-.2560000E-01
.7890000E+00	-.3870000E-01
.7940000E+00	-.5680000E-01
.8720000E+00	-.2320000E-01
.8770000E+00	-.3430000E-01
.9410000E+00	-.4020000E-01
.9460000E+00	-.6030000E-01
.9970000E+00	-.7890000E-01
.1066000E+01	-.6660000E-01

RESPUESTA DEL SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD
CALCULADA MEDIANTE LA INTEGRAL DE DUHAMEL

MASA CONSIDERADA (M)	=	.1000000E+03	
CONSTANTE DEL RESORTE (K)........	=	.1000000E+06	
FRECUENCIA NATURAL (W)	=	.3162278E+02	RAD/SEG
FRECUENCIA AMORTIGUADA (WD)	=	.3158322E+02	RAD/SEG
CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO (C)	=	.3162278E+03	
AMORTIGUAMIENTO RELATIVO (XI) ...	=	.5000000E-01	

TIEMPO	FUERZA	DESPL	VELOCIDAD	ACEL.	FUERZA EN BASE
.000000	-416.880	.000000	.000000	-4.16880	.000000
.420000E-01	-38.6000	-.204962E-02	-.542586E-01	1.83520	205.679
.970000	-613.740	-.560130E-02	-.115813E-01	-.499477	560.142
.161000	3.86000	.188898E-02	.276564E-02	-1.85912	188.900
.221000	-729.540	-.385774E-02	-.203800	-2.79319	391.120
.263000	-3.86000	-.103282E-01	-.987031E-02	10.3208	1032.83
.291000	-227.740	-.716551E-02	.206954	4.23366	719.533
.332000	46.3200	.284725E-02	.229822	-3.11081	293.854
.374000	-772.000	.558489E-02	-.168849	-12.7709	561.036
.429000	914.820	-.695389E-02	-.824143E-02	16.1282	695.394
.471000	-293.360	.138526E-02	.251939	-5.11557	159.803
.581000	-1640.50	-.224469E-01	-.380570	7.24541	2247.92
.623000	-362.840	-.256572E-01	.326381	20.9967	2567.79
.665000	-532.680	-.675500E-03	.662879	-6.74751	220.236
.720000	339.680	.167812E-01	-.882255E-01	-13.1054	1678.35
.725000	988.160	.162062E-01	-.135779	-5.89522	1621.19
.789000	1493.82	.683595E-02	.292780E-02	8.09299	683.596
.794000	2192.48	.697991E-02	.602098E-01	14.7545	698.251
.872000	895.520	.236783E-01	-.568491E-01	-14.5433	2367.90
.877000	1323.98	.232325E-01	-.117355	-9.62159	2323.55
.941000	1551.72	.789980E-02	-.158308	8.11801	791.565
.946000	2327.58	.724443E-02	-.969862E-01	16.3381	725.092
.997000	3045.54	.229258E-01	.615409	5.58346	2300.83
1.06600	2570.76	.455492E-01	-.264212	-19.0060	4555.68

I M P R E S I O N   D E   V A L O R E S   M A X I M O S

DESPLAZAMIENTO MAXIMO .... = .4554915E-01
VELOCIDAD MAXIMA .... = .6628788E+00
ACELERACION MAXIMA .... = .2099667E+02
FUERZA MAXIMA EN LA BASE......... = .4555682E+04

```
DATOS1.DAT
1
4
00.0
100000.0
0.05
.12

0.005
0.0
.0,  0.0
0.02, 120000.0
0.04, 120000.0
.06, 0.0
```

```
DATOS2.DAT
2
24
100.0
100000.0
0.05
0.12
1
0.0
386.0
0.0,     0.0108
0.042,   0.001
0.97,   0.0159
0.161, -0.0001
0.221,  0.0189
0.263,  0.0001
0.291, -0.0059
0.332, -0.0012
0.374,  0.02
0.429, -0.0237
0.471,  0.0076
0.581,  0.0425
0.623,  0.0094
0.665,  0.0138
0.72,  -0.0088
0.725, -0.0256
0.789, -0.0387
0.794, -0.0568
0.872, -0.0232
0.877, -0.0343
0.941, -0.0402
0.946, -0.0603
0.997, -0.0789
1.066, -0.0666
```

```
C     NOMBRE DEL PROGRAMA "IMPULSO.FOR"
C     RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD
C     USANDO LA INTEGRAL DE DUHAMEL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8INT1,INT2,INT3,INT4,K,M
      DIMENSION T(50),F(50)
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
C
C     DECLARACION DE FUNCIONES
C
      INT1(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DCOS(WD*TAU)+WD*DSIN(WD*TAU))/DWSQ
      INT2(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DSIN(WD*TAU)-WD*DCOS(WD*TAU))/DWSQ
      INT3(TAU)=TAU*INT2(TAU)-XIWD*INT2(TAU)/DWSQ+WD*INT1(TAU)/DWSQ
      INT4(TAU)=TAU*INT1(TAU)-XIWD*INT1(TAU)/DWSQ-WD*INT2(TAU)/DWSQ
      WRITE(*,31)
 31   FORMAT(/' DAME MODO LECTURA DE DATOS'/
     11X,'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
     21X,'(2) LECTURA EN DISCO '//)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
221   FORMAT(A12)
223   FORMAT(1X,A12//)
222   FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X,'EJEMPLO : DATOS1.DAT'//)
      WRITE(*,222)
      READ(*,221)ANOM1
      WRITE(*,223)ANOM1
      OPEN(4,FILE=ANOM1)
      READ(4,221)ANOM2
      ENDIF
C     LECTURA DE LOS DATOS
C
      WRITE(*,105)
105   FORMAT(' DAME EL NUMERO DEL CASO: ',/
     1,26X,'(1) EXISTE FUERZA APLICADA A LA MASA'/
     1,26X,'(2) EXISTE ACELERACION APLICADA A LA BASE',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 32
      READ(*,*)NTYPE
      GO TO 63
 32   READ(4,*)NTYPE
 63   NTYPE=NTYPE-1
      WRITE(*,104)
104   FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA ',/
     11X,'LA FUNCION DE EXCITACION',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 34
      READ(*,*)N
      GO TO 35
 34   READ(4,*)N
 35   WRITE(*,103)
103   FORMAT(/' DAME LA MASA DEL SISTEMA (M):',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 36
      READ(*,*)M
      GO TO 37
 36   READ(4,*)M
 37   WRITE(*,102)
102   FORMAT(/' DAME LA CONSTANTE DEL RESORTE (K):',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 68
      READ(*,*)K
      GO TO 69
 68   READ(4,*)K
101   FORMAT(/' DAME LA RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XI):',//)
 69   WRITE(*,101)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 40
      READ(*,*)XI
```

```
      GO TO 41
   40 READ(4,*)XI
   41 WRITE(*,100)
  100 FORMAT(/' DAME EL INTERVALO DE TIEMPO (RANGO DE INTEGRACION)',/
     11X,'SI NO HAY INTERPOLACION TMAX = 0',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 42
      READ(*,*)TMAX
      GO TO 43
   42 READ(4,*)TMAX
   43 WRITE(*,99)
   99 FORMAT(/' DAME (1): NO SE INTERPOLA',/
     1,6X,'(2): SI SE INTERPOLA',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 44
      READ(*,*)INT
      GO TO 45
   44 READ(4,*)INT
   45 INT=INT-1
      WRITE(*,96)
   96 FORMAT(/' DAME EL PASO DE INTERPOLACION (EN EL TIEMPO)',/
     11X,'SI NO HAY INTERPOLACION DT = 0'/)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 46
      READ(*,*)DT
      GO TO 47
   46 READ(4,*)DT
   47 WRITE(*,98)
   98 FORMAT(/' DAME LA CONSTANTE DE GRAVEDAD (G)',/
     11X,'G = 0.0  SI SE ASIGNA FUERZA A LA MASA (TIPO = 1)',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 48
      READ(*,*)GR
      GO TO 49
   48 READ(4,*)GR
   49 OPEN(6,FILE='PRN')
  335 FORMAT(1X,' N O M B R E   D E L   A R C H I V O '//
     11X' D E   D A T O S  I N I C I A L E S : ',A12//)
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
      WRITE(*,335)ANOM2
      WRITE(6,335)ANOM2
      END IF
      WRITE(6,97)M,K,XI,TMAX,DT,GR,N
      WRITE(*,97)M,K,XI,TMAX,DT,GR,N
   97 FORMAT(' D A T O S   I N I C I A L E S',///
     31X'MASA .......................................... = ',E15.7,/
     41X'CONSTANTE DEL RESORTE (K) ..................... = ',E15.7,/
     51X'RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XI) ................. = ',E15.7,/
     61X'INTERVALO DE TIEMPO (A INTEGRAR) .............. = ',E15.7,/
     71X'PASO DE INTERPOLACION (DT) .................... = ',E15.7,/
     81X'CONSTANTE DE GRAVEDAD (G) ..................... = ',E15.7,/
     21X'NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA LA EXCITACION = ',I15,/)
      IF(INT.EQ.0)WRITE(*,39)
      IF(INT.EQ.0)WRITE(6,39)
      IF(INT.EQ.1)WRITE(*,38)
      IF(INT.EQ.1)WRITE(6,38)
   38 FORMAT(' SE EFECTUARA INTERPOLACION',///)
   39 FORMAT(' NO SE EFECTUARA INTERPOLACION',//)
      WRITE(*,79)
      READ(*,*)LABEL1
      DO 51 I=1,N
      WRITE(*,95)I
   95 FORMAT(//' PARA EL PUNTO NO. ',I3,2X,'DAME:',/
     1,1X'(A):TIEMPO ',/
     2,1X'(B):LA FUERZA EN LA MASA O LA ACELERACION DEL SUELO.'//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 50
      READ(*,*)T(I),F(I)
      GO TO 51
   50 READ(4,*)T(I),F(I)
   51 CONTINUE
```

```
   91 CONTINUE
      WRITE(*,94)
      WRITE(6,94)
   94 FORMAT(21X,' T A B L A     I N I C I A L'//
     1,12X'T I E M P O     A C E L E R A C I O N  O  F U E R Z A'//)
      DO 93 I=1,N
      WRITE(*,92)T(I),F(I)
      WRITE(6,92)T(I),F(I)
   92 FORMAT(8X,E17.7,2X,E17.7)
   93 CONTINUE
      WRITE(*,79)
      READ(*,*)LABEL1
   79 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      IF(INT.EQ.0)GO TO 21
      CALL INTER(N,T,F,DT,TMAX,INT)
C
C  INICIALIZA VALORES
   21 IF(NTYPE.EQ.0)GO TO 6
      DO 5 I=1,N
    5 F(I)=F(I)*GR
    6 FIM1=F(1)
      TIM1=T(1)
      ATI=0.0
      BTI=0.0
      DAT=0.0
      DBT=0.0
      Y=0.0
      V=0.0
      P=0.0
      YMAX=0.0
      VMAX=0.0
      AMAX=0.0
      PMAX=0.0
      OMEGA=DSQRT(K/M)
      CRIT=2*DSQRT(K*M)
      C=XI*CRIT
      WD=OMEGA*DSQRT(1.-(XI**2))
      XIWD=XI*OMEGA
      DWSQ=XIWD**2+WD**2
      ACC=FIM1/M
C    IMPRESION DE LOS PRIMEROS CALCULOS
   90 FORMAT(//' RESPUESTA DEL SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD '/
     1,1X'CALCULADA MEDIANTE LA INTEGRAL DE DUHAMEL'///)
      WRITE(*,90)
      WRITE(6,90)
   89 FORMAT(' MASA CONSIDERADA (M) ............ = ',E15.7,/
     1,1X'CONSTANTE DEL RESORTE (K)......... = ',E15.7,/
     2,1X'FRECUENCIA NATURAL (W) .......... = ',E15.7,2X,'RAD/SEG',/
     3,1X'FRECUENCIA AMORTIGUADA (WD) ..... = ',E15.7,2X,'RAD/SEG',/
     4,1X'CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO (C)  = ',E15.7,/
     5,1X'AMORTIGUAMIENTO RELATIVO (XI) ... = ',E15.7,///)
      WRITE(*,89)M,K,OMEGA,WD,C,XI
      WRITE(6,89)M,K,OMEGA,WD,C,XI
      WRITE(*,79)
      READ(*,*)LABEL1
   88 FORMAT(4X,'TIEMPO',8X,'FUERZA',8X,'DESPL',4X,'VELOCIDAD',5X
     1,'ACEL.',5X,'FUERZA EN BASE',//)
      WRITE(*,88)
      WRITE(6,88)
      IF(NTYPE.EQ.0) GO TO 12
      ACC=-FIM1
      FIM1=-FIM1*M
   12 WRITE(*,87)TIM1,FIM1,Y,V,ACC,P
      WRITE(6,87)TIM1,FIM1,Y,V,ACC,P
   87 FORMAT(6G13.6)
C  LOOP SOBRE INTERVALOS DE TIEMPO
```

```
      NM1=N-1
      DO 1 I=1,NM1
C     SE RESUELVE RESPECTO DESPLAZAMIENTO
      FI=F(I+1)
      TI=T(I+1)
      IF(NTYPE.NE.0)FI=-FI*M
      DFTI=FI-FIM1
      DTI=TI-TIM1
      FT=DFTI/DTI
      G=FIM1-TIM1*FT
      AI=INT1(TI)-INT1(TIM1)
      BI=INT2(TI)-INT2(TIM1)
      VS=INT3(TI)-INT3(TIM1)
      VC=INT4(TI)-INT4(TIM1)
      AI=AI*G
      BI=BI*G
      BI=BI+FT*VS
      AI=AI+FT*VC
      ATI=ATI+AI
      BTI=BTI+BI
      Y=DEXP(-XIWD*TI)*(ATI*DSIN(WD*TI)-BTI*DCOS(WD*TI))/(M*WD)
C     SE RESUELVE RESPECTO A LA VELOCIDAD
      DA=(WD*BTI-XIWD*ATI)*DSIN(WD*TI)
      DB=(WD*ATI+XIWD*BTI)*DCOS(WD*TI)
      V=DEXP(-XIWD*TI)*(DA+DB)/(M*WD)
C     SE RESUELVE RESPECTO A LA ACELERACION
      ACC=(FI-C*V-K*Y)/M
C     SE RESUELVE RESPECTO AL RESORTE Y FUERZAS DE AMORTIGUAMIENTO
      FS=Y*K
      FD=V*C
      P=DSQRT(FS**2+FD**2)
C     SE GUARDAN LOS VALORES MAXIMOS
      IF(DABS(Y).GT.DABS(YMAX)) YMAX=Y
      IF(DABS(V).GT.DABS(VMAX)) VMAX=V
      IF(DABS(ACC).GT.DABS(AMAX))AMAX=ACC
      IF(DABS(P).GT.DABS(PMAX))PMAX=P
C     SE INCREMENTAN LAS VARIBLES
      TIM1=TI
      FIM1=FI
C     IMPRESION DE LA RESPUESTA
      WRITE(*,85)TI,FI,Y,V,ACC,P
      WRITE(6,85)TI,FI,Y,V,ACC,P
   85 FORMAT(6G13.6)
    1 CONTINUE
C     IMPRESION DE LOS VALORES MAXIMOS
   33 FORMAT(////)
   84 FORMAT(6X'I M P R E S I O N  DE  V A L O R E S  M A X I M O S'//)
      WRITE(*,33)
      WRITE(6,33)
      WRITE(*,84)
      WRITE(6,84)
   83 FORMAT(//5X,'DESPLAZAMIENTO MAXIMO .......... = ',E15.7,/
     1,5X,'VELOCIDAD MAXIMA .............. = ',E15.7,/
     2,5X,'ACELERACION MAXIMA ............ = ',E15.7,/
     3,5X,'FUERZA MAXIMA EN LA BASE........ = 'E15.7,///)
      WRITE(*,83)YMAX,VMAX,AMAX,PMAX
      WRITE(6,83)YMAX,VMAX,AMAX,PMAX
      CLOSE(4)
      CLOSE(6)
      STOP
      END
C     INTERPOLACION LINEAL ENTRE PUNTOS DADOS
      SUBROUTINE INTER(N,TC,X,DT,TMAX,INT)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION TC(50),X(50),F(50)
      NT=TMAX/DT
```

```
      NT1=NT+1
      DO 5 I=1,NT1
    5 F(I)=0.0
      F(1)=X(1)
      ANN=0.0
      II=1
      DO 10 I=2,NT1
      AI=I-1
      T=AI*DT
      IF(T.GT.TC(N)) GO TO 12
      IF(T.LE.TC(II+1)) GO TO 9
      ANN=-TC(II+1)+T-DT
      II=II+1
    9 ANN=ANN+DT
      F(I)=X(II)+(X(II+1)-X(II))*ANN/(TC(II+1)-TC(II))
   10 CONTINUE
   12 TC1=TC(1)
      N=NT1
      DO 20 I=1,NT1
      X(I)=F(I)
      AL=I
   20 TC(I)=TC1+DT*(AL-1.)
      RETURN
      END
```

A P E N D I C E   B2

PROGRAMA "FOURIER.FOR"

B2.1 INTRODUCCION

PROGRAMA "FOURIER.FOR"

En éste apéndice se encara el problema de encontrar, computacionalmente, la respuesta de un sistema dinámico, de un grado de libertad, cuando se encuentra bajo la acción de una fuerza F(t), de tipo periódica.

Dicha fuerza puede expresarse mediante el desarrollo de una serie de Fourier:

$$F(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\bar{\omega}t + b_n \operatorname{sen} n\bar{\omega}t\}, \qquad (B2.1.1)$$

donde $\bar{\omega} = 2\Pi/T$ es la frecuencia de la función y T es su periodo.

Los parámetros a_o, a_n y b_n se calculan por medio de las expresiones

$$a_o = \int_{t_i}^{t_i+T} F(t)dt \qquad (B2.1.2)$$

$$a_n = \int_{t_i}^{t_i+T} F(t)\cdot \cos n\bar{\omega}t\cdot dt \qquad (B2.1.3)$$

$$b_n = \int_{t_i}^{t_i+T} F(t)\cdot \operatorname{sen} n\bar{\omega}t\cdot dt \qquad (B2.1.4)$$

La respuesta del sistema no amortiguado, para cualquier término seno de la serie de Fourier, está dada por

$$y_n(t) = \frac{a_n/k}{1 - r_n^2} \cdot \operatorname{sen} n\bar{\omega}t \qquad (B2.1.5)$$

Análogamente, la respuesta correspondiente a los términos coseno de la serie de Fourier es

$$y_n(t) = \frac{b_n/k}{1 - r_n^2} \cdot \cos n\bar{\omega}t \,, \qquad (B2.1.6)$$

donde $r_n = n\bar{\omega}/\omega$ y $\omega = \sqrt{k/m}$.

El principio de superposición permite conocer la respuesta del sistema cuando se consideran todos los términos de la serie de Fourier

$$y(t) = a_o/k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - r_n^2} \cdot \{(a_n/k)\cos n\bar{\omega}t + (b_n/k)\operatorname{sen} n\bar{\omega}t\} \qquad (B2.1.7)$$

Ahora bién, cuando se considera el amortiguamiento del sistema, la respuesta estacionaria para los términos seno de la serie Fourier se calcula por

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k} \cdot \frac{(1-r_n^2)\,\mathrm{sen}\,n\bar{\omega}t - 2\cdot r_n \xi \cos n\bar{\omega}t}{(1-r_n^2)^2 + (2\cdot r_n \xi)^2} \quad . \tag{B2.1.8}$$

Y la respuesta estàcionaria para los términos <u>coseno</u> de la serie de Fourier se calculan por

$$y_n(t) = \frac{a_n}{k} \cdot \frac{(1-r_n^2)\cdot \cos n\bar{\omega}t + 2\cdot r_n \xi\,\mathrm{sen}\,n\bar{\omega}t}{(1-r_n^2)^2 + (2\cdot r_n \xi)^2} \quad . \tag{B2.1.9}$$

Siendo asi que la respuesta total, para el sistema amortiguado, de un grado de libertad, esta dada por

$$y(t) = a_o/k + 1/k\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{a_n 2r_n\xi + b_n(1-r_n^2)}{(1-r_n^2)^2 + (2r_n\xi)^2}\cdot \mathrm{sen}\,n\bar{\omega}t \; + \right.$$

$$\left. + \frac{a_n(1-r_n^2) - b_n 2r_n\xi}{(1-r_n^2)^2 + (2r_n\xi)^2}\cdot \cos n\bar{\omega}t \right\rangle \tag{B2.1.10}$$

Desde un punto de vista práctico en muchas ocasiones es conveniente considerar a los términos de la función forzante definidos por funciones seccionalmente rectas, como la ilustrada en la figura B2.1.1.

intervalo

Para valores de t comprendidos en el rango $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ los valores de la función F(t) se expresan por

$$F(t) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\cdot (t - t_i) \tag{B2.1.11}$$

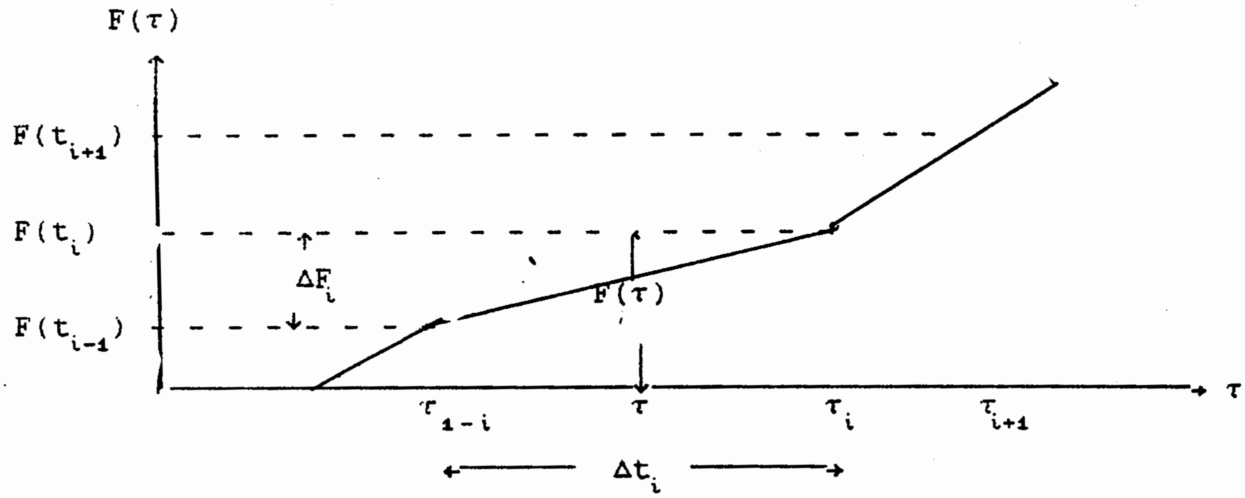


Fig. B2.1.1

C2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

El programa "FOURIER.FOR" presentado en este capítulo permite evaluar la respuesta de un oscilador armónico excitado, ya sea por medio de una fuerza externa, variable en el tiempo, o ya sea por medio de un movimiento acelerado del soporte del sistema. Cualquier fuerza que actúe en un intervalo finito de tiempo, se puede considerar como una función periodica al extender el intervalo de modo tal que incluya una porción final donde la fuerza se anule.

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
NTYPE		Indice de excitación: 1, si

		actúa fuerza sobre la masa 2, si actúa aceleración sobre el soporte.
N		Número de puntos que definen a la función de excitación.
NT		Número de términos considerados en la serie de Fourier
DT	dt	Incremento en el tiempo y paso de impresión.
TP		Periodo de la función de excitación
TT		Tiempo total de impresión resultados
AK	k	Constante del resorte
AM	m	Masa
XSI	ξ	Razón de amortiguamiento
INT		Indice de interpolación: 1, no se interpola. 2, si se interpola.
NPRT		Indice de impresión. 1, no se imprimen pasos intermedios de cálculo. 2, si se imprimen
T(I)		Tiempo en el i-ésimo punto
F(I)		Valor de la fuerza de

excitación en el i-ésimo punto

Cuando los datos se proporcionan directamente del teclado de la terminal, el usuario es guiado por el programa indicándosele, paso a paso, los datos que deben irse proporcionando.

Pero cuando los datos se alimentan mediante un archivo creado exprofeso en disco, se deben proporcionar en el siguiente orden:

NOMBRE DEL ARCHIVO (hasta 12 caracteres alfanuméricos)

N

AM

AK

XSI

TT

INT

DT

NT

TF

NPRT

T(I),F(I) (tantos renglones cuantos sean necesarios)

El programa "FOURIER.FOR" proporciona a guisa de resultados:

I.- Las frecuencias, dadas en radianes y en ciclos por segundo, correspondientes a cada uno de los

NT puntos de la serie de Fourier solicitados

II.- Los coeficiente a_n y b_n de la serie de Fourier para cada uno de los NT términos solicitados, y correspondientes tanto a la función forzante como a la respuesta espacial del sistema.

III.- Para cada instante, evaluado según dt, se proporciona el valor del término forzante, la respuesta estacionaria del sistema en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración, y valor de la fuerza sobre el soporte de la estructura.

B2.3 EJEMPLO

Sea la torre dada en el ejemplo A2.2, cuya masa tiene un peso de 38.6 Klbs, la constante del resorte se estima en 100 lbs/pulg, siendo la razón ξ = 0.10. La estructura en cuestión se encuentra sujeta a la acción de la fuerza periodica descrita en la figura B2.3.1. Se pide calcular los parámetros correspondientes a los primeros 20 términos de la serie Fourier que determinan el valor de la fuerza sobre la masa y el desplazamiento de la misma. También se pide calcular la magnitud de la fuerza que actúa sobre la masa de la estructura, el valor del desplazamiento y aceleración de la misma, así como la magnitud de la fuerza en la base de la torre.

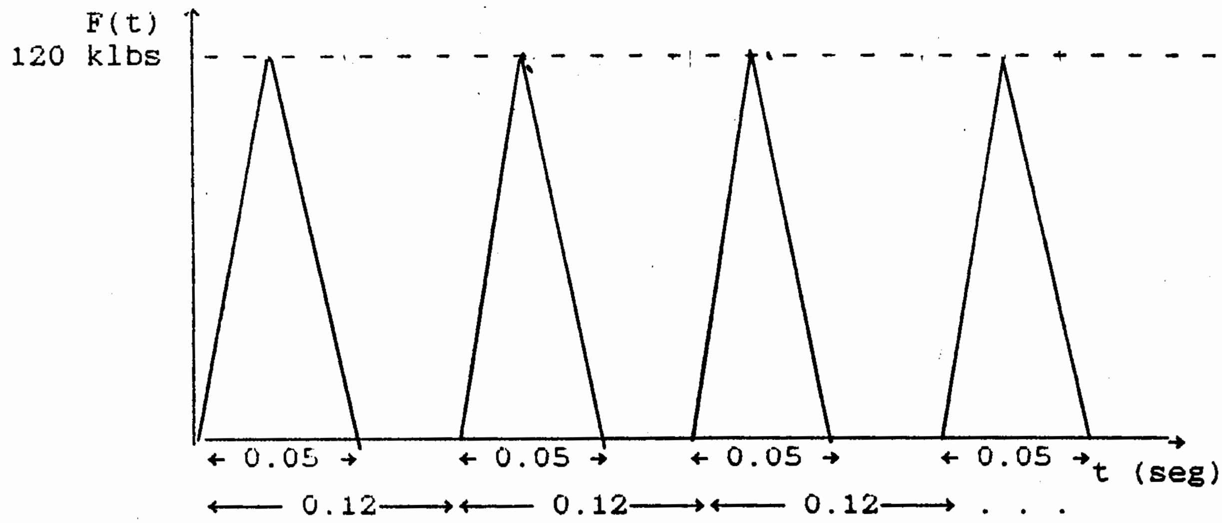


Fig. B2.3.1

SOLUCION

Con el propósito de aplicar el programa en cuestión, resta tan sólo determinar los siguientes parámetros:

NTYPE: Dado que actúa fuerza sobre la masa, este parámetro se toma igual 1

N: De la figura B2.3.1 claramente se observa que la función de excitación es periódica, quedando determinada mediante cuatro puntos adecuadamente elegidos.

AM: Es igual 100 $lbs \cdot seg^2/pulg$.

AK: De los datos del problema se sabe que AK = 100 Klbs/pulg.

XSI: De los datos del problema se sabe que la razón de amortiguamiento es igual a 0.10.

TT: Se considera conveniente estudiar al fenómeno durante

0.12 segundos.

INT: Como la función excitadora se va a determinar mediante cuatro puntos adecuadamente elegidos, resulta indispensable determinar los restantes valores de la citada función, requeridos por el programa, mediante interpolación, luego NT = 2.

DT: Como paso de integración se considera conveniente tomar el valor DT = 0.05 segundos. En ésta medida será interpolada la función de excitación.

NT: Se considera conveniente determinar a la serie de Fourier en sus primeros 20 términos.

TP: De la figura B2.3.1 se sabe que el periodo de la función excitadora es 0.12 segundos.

NPRT: En éste caso se imprimen los principales parámetros calculados por interpolación, mismos que permiten conocer la historia del fenómeno. Luego NPRT = 2.

T(I),F(I): Los cuatro pares de puntos que determinan a la función de excitación, de conformidad a la figura B2.3.1 son: (0.0, 0.0), (0.025, 120,000.0), (0.05, 0.0) y (0.12,0.0).

En las páginas 14-B2 y 17-B2 se presenta al lector el listado de resultados respectivo.

B2.4 EJEMPLO

Como un segundo ejemplo de aplicación del presente programa se considera a la misma torre del ejemplo anterior, pero ahora sometida a un movimiento acelerado en su base. El registro de la aceleración se muestra en la figura B2.4.1. Se pide determinar:

a) Los primeros 20 parámetros de la serie de Fourier que que determinan a la fuerza <u>efectiva</u> aplicada a la masa.

b) Los primeros 20 parámetros que determinan, en la respuesta estacionaria del sistema, el desplazamiento relativo de la masa.

c) El registro del fenómeno dado en términos del desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa, respecto al suelo; así como la magnitud de la fuerza que actua en la base de la torre.

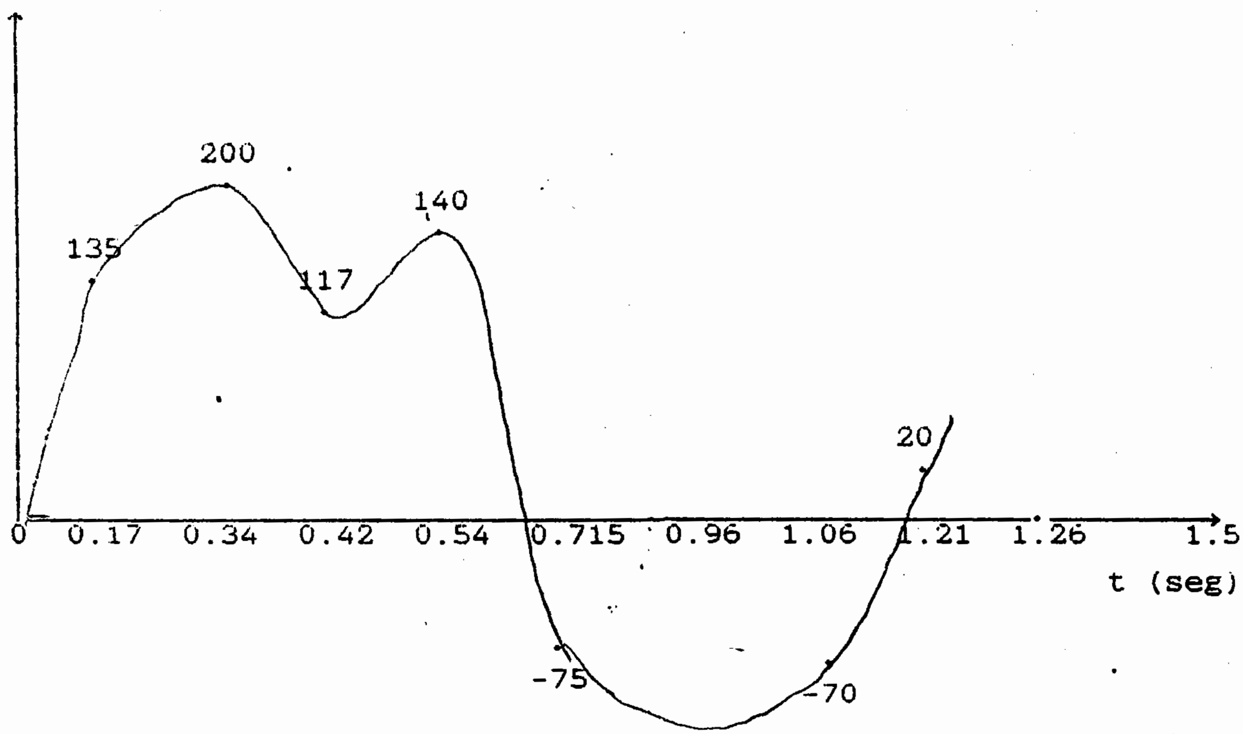


Fig. B2.4.1

SOLUCION

Para resolver este problema de nueva cuenta, se usa el programa "FOURIER.FOR", siendo los datos que lo alimentan los siguientes:

NTYPE: Dado que se considera la acción de una aceleración en la base de la estructura, este parámetro se toma igual a 2.

N: De la gráfica mostrada en la figura B2.4.1, se sabe que la función de excitación se fija en 10 puntos.

AM: Igual que en el ejemplo anterior

AK: Igual que en el ejemplo anterior

XSI: Igual que en el ejemplo anterior

TT: El fenómeno se va a estudiar en el intervalo temporal que va de 0 a 1.5 segundos, esto es TT = 1.5.

INT: Puesto que cada uno de los datos que definen a la función de excitación se proporcionan directamente al programa, entonces éstos, obviamente, no se obtienen mediante interpolación, de aquí que se tome INT = 1.

DT: Se considera conveniente tomar éste parámetro igual a 0.05 seg.

NT: Las series de Fourier se van a determinar de acuerdo a sus primeros 20 términos.

TP: Conviene considerar, con propósitos de cálculo, a la función de excitación como una función periódica, siendo su periodo TP = 1.5 segundos.

NPRT: Igual que en el ejemplo anterior

T(I),F(I): Los diez pares de puntos que definen a la función de excitación son: (0.0,0.0), (0.17,135.0), (0.34,200.0), (0.42,117.0), (0.54,140.0), (0.71,-75.0), (1.06,-70.0), (1.21,20.0), (1.26,0.0) y (1.5,0.0).

En las páginas 18-B2 y 21-B2 se presenta el listado de resultados correspondiente a este problema.

RESPUESTA DE UN SISTEMA DE
UN GRADO DE LIBERTAD USANDO
SERIES DE FOURIER

NOMBRE DEL ARCHIVO
DE DATOS INICIALES : DATOS3.DAT

DATOS INICIALES

MASA (AM)..	=	.1000000E+03
CONSTANTE DEL RESORTE (AK)	=	.1000000E+06
RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XSI)	=	.1000000E+00
RANGO DEL TIEMPO (TT)...........................	=	.1200000E+00
PERIODO DE LA EXCITACION (TP)...................	=	.1200000E+00
INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT)	=	.1000000E-01
NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA LA FUNCION DE EXCITACION (N)....................	=	0000004
NUMERO DE TERMINOS EN LA SERIE DE FOURIER (NT).	=	0000020

SE EFECTUARA INTERPOLACION

SE IMPRIME LA HISTORIA DE LA RESPUESTA

TABLA INICIAL

TIEMPO	ACELERACION O FUERZA
.0000000E+00	.0000000E+00
.2500000E-01	.1200000E+06
.5000000E-01	.0000000E+00
.1200000E+00	.0000000E+00

VALORES INTERPOLADOS
A CONSIDERAR EN LOS CALCULOS

(TABLA DE VALORES EN TERMINOS TIEMPO-FUERZA)

TIEMPO	FUERZA
.0000000E+00	.0000000E+00
.1000000E-01	.4800000E+05
.2000000E-01	.9600000E+05
.3000000E-01	.9600000E+05

.4000000E-01	.4800000E+05
.5000000E-01	.1665512E-10
.6000000E-01	.0000000E+00
.7000000E-01	.0000000E+00
.8000000E-01	.0000000E+00
.9000000E-01	.0000000E+00
.1000000E+00	.0000000E+00
.1100000E+00	.0000000E+00
.1200000E+00	.0000000E+00

R E S U L T A D O S :

N	FRECUENCIA RAD/SEG	CPS	COEF. FOURIER FUERZA A(N)	B(N)	COEF. FOURIER RESP. A(N)	B(N)
0	0	0	.2400E+05		.2400E+00	
1	52.36	8.33	.1068E+05	.3986E+05	-.1012E+00	-.2096E+00
2	104.72	16.67	-.2189E+05	.1264E+05	.2102E-01	-.1408E-01
3	157.08	25.00	-.6485E+04	-.6485E+04	.2849E-02	.2620E-02
4	209.44	33.33	-.2762E-03	.4783E-03	.6092E-10	-.1135E-09
5	261.80	41.67	-.1594E+04	-.4272E+03	.2375E-03	.5744E-04
6	314.16	50.00	-.6285E-10	.2834E-03	-.5898E-12	-.2900E-10
7	366.52	58.33	-.8135E+03	.2180E+03	.6071E-04	-.1740E-04
8	418.88	66.67	.1381E-03	.2392E-03	-.8121E-11	-.1359E-10
9	471.24	75.00	-.7205E+03	.7205E+03	.3215E-04	-.3303E-04
10	523.60	83.33	-.8754E+03	-.5054E+03	.3227E-04	.1811E-04
11	575.96	91.67	.8827E+02	-.3294E+03	-.2559E-05	.9989E-05
12	628.32	100.00	.3717E-10	-.2688E-12	-.9437E-18	.1635E-19
13	680.68	108.33	.6320E+02	.2359E+03	-.1414E-05	-.5089E-05
14	733.04	116.67	-.4466E+03	.2579E+03	.8285E-05	-.4879E-05
15	785.40	125.00	-.2594E+03	-.2594E+03	.4245E-05	.4178E-05
16	837.76	133.33	-.6904E-04	.1196E-03	.9721E-12	-.1714E-11
17	890.12	141.67	-.1379E+03	-.3696E+02	.1746E-05	.4546E-06
18	942.48	150.00	-.6206E-10	.9448E-04	-.7153E-14	-.1065E-11
19	994.84	158.33	-.1104E+03	.2959E+02	.1115E-05	-.3063E-06
20	1047.20	166.67	.5523E-04	.9566E-04	-.5094E-12	-.8701E-12

RESPUESTA ESTADO ESTACIONARIO

TIEMPO	FUERZA	DESPL.	VELOC.	ACEL.	FUERZA EN BASE
.0000	.1504E+04	.1631E+00	-.1203E+02	-.7190E+02	.1799E+05
.0100	.4807E+05	.4829E-01	-.9950E+01	.4954E+03	.7932E+04
.0200	.9439E+05	-.1771E-01	-.2422E+01	.9769E+03	.2342E+04
.0300	.9439E+05	.6697E-02	.7161E+01	.8919E+03	.4578E+04
.0400	.4807E+05	.1134E+00	.1314E+02	.2843E+03	.1406E+05
.0500	.1504E+04	.2485E+00	.1287E+02	-.3149E+03	.2615E+05
.0600	.8103E+02	.3591E+00	.9098E+01	-.4158E+03	.3637E+05
.0700	-.7443E+02	.4284E+00	.4687E+01	-.4587E+03	.4294E+05
.0800	.2814E+02	.4522E+00	.9575E-01	-.4525E+03	.4522E+05
.0900	.2814E+02	.4312E+00	-.4225E+01	-.4042E+03	.4320E+05
.1000	-.7443E+02	.3700E+00	-.7874E+01	-.3209E+03	.3733E+05
.1100	.8103E+02	.2770E+00	-.1054E+02	-.2095E+03	.2849E+05
.1200	.1504E+04	.1631E+00	-.1203E+02	-.7190E+02	.1799E+05

RESPUESTA DE UN SISTEMA DE

UN GRADO DE LIBERTAD USANDO

SERIES DE FOURIER

NOMBRE DEL ARCHIVO

DE DATOS INICIALES : DATOS4.DAT

DATOS INICIALES

```
MASA (AM)....................................... =     .1000000E+03
CONSTANTE DEL RESORTE (AK) ..................... =     .1000000E+06
RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XSI) ................. =     .1000000E+00
RANGO DEL TIEMPO (TT)........................... =     .1500000E+01
PERIODO DE LA EXCITACION (TP)................... =     .1500000E+01
INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT) ................... =     .5000000E-01
NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA
LA FUNCION DE EXCITACION (N).................... =          0000010
NUMERO DE TERMINOS EN LA SERIE DE FOURIER (NT).  =          0000020
```

NO SE EFECTUARA INTERPOLACION

SE IMPRIME LA HISTORIA DE LA RESPUESTA

TABLA INICIAL

TIEMPO	ACELERACION O FUERZA
.0000000E+00	.0000000E+00
.1700000E+00	.1350000E+03
.3400000E+00	.2000000E+03
.4200000E+00	.1170000E+03
.5400000E+00	.1400000E+03
.7100000E+00	-.7500000E+02
.1060000E+01	-.7000000E+02
.1210000E+01	.2000000E+02
.1360000E+01	.0000000E+00
.1500000E+01	.0000000E+00

(TABLA DE VALORES EN TERMINOS TIEMPO-FUERZA)

.0000000E+00	.0000000E+00
.1700000E+00	-.1350000E+05
.3400000E+00	-.2000000E+05
.4200000E+00	-.1170000E+05
.5400000E+00	-.1400000E+05
.7100000E+00	.7500000E+04
.1060000E+01	.7000000E+04

.1210000E+01	-.2000000E+04
.1260000E+01	.0000000E+00
.1500000E+01	.0000000E+00

R E S U L T A D O S :

	FRECUENCIA		COEF. FOURIER FUERZA		COEF. FOURIER RESP.	
N	RAD/SEG	CPS	A(N)	B(N)	A(N)	B(N)
0	0	0	-.2997E+04		-.2997E-01	
1	4.19	.67	-.4406E+04	-.1018E+05	-.4202E-01	-.1048E+00
2	8.38	1.33	.4781E+04	.6358E+03	.5087E-01	.9736E-02
3	12.57	2.00	.6648E+03	-.2678E+03	.8122E-02	-.2413E-02
4	16.76	2.67	.1486E+04	-.4857E+03	.2119E-01	-.3630E-02
5	20.94	3.33	-.1066E+04	.6751E+03	-.2068E-01	.7147E-02
6	25.13	4.00	.2416E+03	-.5519E+03	.1098E-01	-.1025E-01
7	29.32	4.67	.8509E+03	.3905E+03	.8680E-02	.3932E-01
8	33.51	5.33	-.2890E+02	.1606E+03	-.5077E-02	-.4309E-02
9	37.70	6.00	-.2874E+03	-.1341E+03	.6532E-02	-.5131E-03
10	41.89	6.67	.1056E+03	-.2459E+03	-.2269E-03	.3339E-02
11	46.08	7.33	.1021E+03	.1413E+03	-.1157E-02	-.9575E-03
12	50.27	8.00	.4274E+02	.3802E+02	-.3180E-03	-.1828E-03
13	54.45	8.67	.8992E+02	.9365E+02	-.5249E-03	-.3845E-03
14	58.64	9.33	.5126E+00	-.1799E+03	.1076E-03	.7211E-03
15	62.83	10.00	.1032E+03	-.1842E+02	-.3356E-03	.1077E-03
16	67.02	10.67	-.6642E+02	.1093E+03	.1500E-03	-.3313E-03
17	71.21	11.33	.1430E+02	.2302E+02	-.4088E-04	-.5203E-04
18	75.40	12.00	.3967E+02	-.2345E+02	-.7877E-04	.5807E-04
19	79.59	12.67	.2851E+02	-.2229E+01	-.5258E-04	.9141E-05
20	83.78	13.33	-.1184E+02	-.5024E+02	.2681E-04	.8111E-04

RESPUESTA ESTADO ESTACIONARIO

TIEMPO	FUERZA	DESPL.	VELOC.	ACEL.	FUERZA EN BASE
.0000	-.3125E+03	.6177E-02	.5337E+00	-.1268E+02	.7039E+03
.0500	-.3973E+04	.1340E-02	-.9297E+00	-.3519E+02	.6030E+03
.1000	-.7914E+04	-.7530E-01	-.1764E+01	.7313E+01	.7613E+04
.1500	-.1198E+05	-.1403E+00	-.6898E+00	.2482E+02	.1404E+05
.2000	-.1466E+05	-.1514E+00	.7156E-01	.4299E+01	.1514E+05
.2500	-.1658E+05	-.1515E+00	-.2276E+00	-.1283E+02	.1515E+05
.3000	-.1853E+05	-.1769E+00	-.7068E+00	-.3953E+01	.1769E+05
.3500	-.1899E+05	-.2097E+00	-.3921E+00	.2222E+02	.2097E+05
.4000	-.1349E+05	-.1855E+00	.1545E+01	.4079E+02	.1857E+05
.4500	-.1222E+05	-.8753E-01	.1613E+01	-.4484E+02	.8813E+04
.5000	-.1329E+05	-.7893E-01	-.1267E+01	-.4593E+02	.7934E+04
.5500	-.1273E+05	-.1656E+00	-.1405E+01	.4721E+02	.1658E+05
.6000	-.6283E+04	-.1482E+00	.2317E+01	.7068E+02	.1489E+05
.6500	-.1805E+03	.1355E-01	.3219E+01	-.3571E+02	.2445E+04
.7000	.6175E+04	.1097E+00	.5128E+00	-.5122E+02	.1098E+05
.7500	.7499E+04	.8914E-01	-.9722E+00	-.7995E+01	.8935E+04
.8000	.7440E+04	.4848E-01	-.3370E+00	.2805E+02	.4852E+04
.8500	.7232E+04	.6256E-01	.6943E+00	.5368E+01	.6272E+04
.9000	.7235E+04	.9081E-01	.2202E+00	-.1985E+02	.9082E+04
.9500	.7208E+04	.7925E-01	-.5383E+00	-.3767E+01	.7933E+04
1.0000	.7024E+04	.5756E-01	-.1825E+00	.1383E+02	.5757E+04
1.0500	.6983E+04	.6478E-01	.3795E+00	.2651E+01	.6482E+04
1.1000	.4645E+04	.7386E-01	-.2659E+00	-.2573E+02	.7388E+04
1.1500	.1661E+04	.3055E-01	-.1289E+01	-.5790E+01	.3162E+04
1.2000	-.1439E+04	-.2785E-01	-.8484E+00	.1882E+02	.2836E+04
1.2500	-.3826E+03	-.3875E-01	.5415E+00	.3150E+02	.3890E+04
1.3000	-.5724E+02	.1104E-01	.1006E+01	-.1797E+02	.1274E+04
1.3500	.1818E+02	.2814E-01	-.3791E+00	-.2557E+02	.2825E+04
1.4000	.5702E+02	-.8202E-02	-.7332E+00	.1341E+02	.9422E+03
1.4500	-.6482E+02	-.2043E-01	.2749E+00	.1805E+02	.2051E+04
1.5000	-.3125E+03	.6177E-02	.5337E+00	-.1268E+02	.7039E+03

```
DATOS3.DAT
1
4
1[illegible]0.0
1[illegible]0000.0
0.1
0.12
2
0.01
20
0.12
2
0.0,0.0
0.025,120000.0
0.05,0.0
0.12,0.0
```

```
[redacted]ATOS4.DAT
2
10
[redacted]00.0
[redacted]00000.0
0.1
[redacted].5

0.05
20
[redacted].5
2
0.0,0.0
[redacted].17,135.0
[redacted].34,200.0
0.42,117.0
[redacted].54,140.0
[redacted].71,-75.0
1.06,-70.0
1.21,20.0
[redacted].26,0.0
[redacted].5,0.0
```

```
      RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD USANDO
      SERIES DE FOURIER.
```



```
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(50),B(50),F(50),T(50)
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
C     DECLARACION DE FUNCIONES
      AI(T1,T2,F1,F2,WB)=(F1-T1*(F2-F1)/(T2-T1))*(DSIN(WB*T2)-DSIN(WB*
     1T1))/WB+(F2-F1)*((DCOS(WB*T2)-DCOS(WB*T1))+WB*(T2*DSIN(WB*T2)
     2-T1*DSIN(WB*T1)))/(WB*WB*(T2-T1))
C
      BI(T1,T2,F1,F2,WB)=(F1-T1*(F2-F1)/(T2-T1))*(DCOS(WB*T1)-DCOS(
     1WB*T2))/WB+(F2-F1)*((DSIN(WB*T2)-DSIN(WB*T1))-WB*(T2*DCOS(WB*T2)
     2-T1*DCOS(WB*T1)))/((T2-T1)*WB*WB)
C
      S(AN,BN,RN,XSI)=(AN*2.*RN*XSI+BN*(1.-RN*RN))/((1.-RN*RN)**2
     1+(2.*RN*XSI)**2)
C
      C(AN,BN,RN,XSI)=(AN*(1.-RN*RN)-BN*2.*RN*XSI)/((1.-RN*RN)**2
     1+(2.*RN*XSI)**2)
C
      OPEN(6,FILE='PRN')
      WRITE(6,100)
      WRITE(*,100)
  100 FORMAT(//' R E S P U E S T A   D E   U N   S I S T E M A   D E'//
     1' U N   G R A D O   D E   L I B E R T A D   U S A N D O'//
     2' S E R I E S   D E   F O U R I E R'///)
C
C     LECTURA DE LOS DATOS
      WRITE(*,31)
   31 FORMAT(/ ' DAME EL MODO DE LECTURA DE DATOS'/
     11X,'(1) LECTURA EN TERMINAL'/
     21X,'(2) LECTURA EN DISCO (NOMBRE DEL ARCHIVO : "DATOS£.DAT"'//)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
  221 FORMAT(A12)
  223 FORMAT(1X,A12//)
  222 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X,'EJEMPLO : DATOS1.DAT'//)
      WRITE(*,222)
      READ(*,221)ANOM1
      WRITE(*,223)ANOM1
      OPEN(4,FILE=ANOM1)
      READ(4,221)ANOM2
      ENDIF
      WRITE(*,105)
  105 FORMAT(' DAME EL NUMERO DEL CASO:'/
     126X,'(1) EXISTE FUERZA APLICADA A LA MASA'/
     226X,'(2) EXISTE ACELERACION APLICADA A LA BASE'//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 32
      READ(*,*)NTYPE
      GO TO 63
   32 READ(4,*)NTYPE
   63 NTYPE=NTYPE-1
      WRITE(*,104)
  104 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA'/
     11X,'LA FUNCION DE EXCITACION',//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 34
      READ(*,*)N
      GO TO 35
   34 READ(4,*)N
   35 WRITE(*,103)
  103 FORMAT(/' DAME LA MASA DEL SISTEMA (AM):',//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 36
      READ(*,*)AM
      GO TO 37
```

```
 36 READ(4,*)AM
 37 WRITE(*,102)
102 FORMAT(/' DAME LA CONSTANTE DEL RESORTE (AK):',//)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 68
    READ(*,*)AK
    GO TO 69
 68 READ(4,*)AK
101 FORMAT(/' DAME LA RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XSI):',//)
 69 WRITE(*,101)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 40
    READ(*,*)XSI
    GO TO 41
 40 READ(4,*)XSI
 41 WRITE(*,99)
 99 FORMAT(/' DAME EL RANGO DEL TIEMPO (TT):'//)
    IF(LBL2.EQ.2)GO TO 42
    READ(*,*)TT
    GO TO 43
 42 READ(4,*)TT
 43 WRITE(*,9)
  9 FORMAT(/' DAME (1): NO SE INTERPOLA',/
   1,6X,'(2): SI SE INTERPOLA',//)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 44
    READ(*,*) INT
    GO TO 45
 44 READ(4,*)INT
 45 INT=INT-1
    WRITE(*,96)
 96 FORMAT(/' DAME INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT):',//)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 46
    READ(*,*)DT
    GO TO 47
 46 READ(4,*)DT
 47 WRITE(*,98)
 98 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE TERMINOS DE LA SERIE DE FOURIER (NT)'
   1//)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 48
    READ(*,*)NT
    GO TO 49
 48 READ(4,*)NT
 49 WRITE(*,401)
401 FORMAT(/' DAME EL PERIODO DE LA EXCITACION (TP):'//)
    IF(LBL2.EQ.2)GO TO 402
    READ(*,*)TP
    GO TO 403
402 READ(4,*)TP
403 WRITE(*,404)
404 FORMAT(/,' DAME EL INDICE DE IMPRESIÒN (NPRT):'/
   11X,'(1): NO SE IMPRIME LA HISTORIA DE LA RESPUESTA'/
   21X,'(2): SI SE IMPRIME LA HISTORIA DE LA RESPUESTA'//)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 405
    READ(*,*)NPRT
    GO TO 406
405 READ(4,*)NPRT
406 NPRT=NPRT-1
335 FORMAT(1X,'N O M B R E   D E L   A R C H I V O '//
   11X,'D E  D A T O S   I N I C I A L E S : ',A12//)
    IF(LBL2.EQ.2) THEN
    WRITE(*,335)ANOM2
    WRITE(6,335)ANOM2
    END IF
    WRITE(*,97)AM,AK,XSI,TT,TP,DT,N,NT
    WRITE(6,97)AM,AK,XSI,TT,TP,DT,N,NT
 97 FORMAT(' D A T O S   I N I C I A L E S'///
   11X,'MASA (AM)................................. = ',E15.7,/
   21X,'CONSTANTE ...
```

```
     31X,'RAZON DE AMORTIGUAMIENTO (XSI) ................ = ',E15.7,/
     41X,'RANGO DEL TIEMPO (TT)........................... = ',E15.7,/
     51X,'PERIODO DE LA EXCITACION (TP).................. = ',E15.7,/
     61X,'INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT) .................. = ',E15.7,/
     71X,'NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA '/
     81X,'LA FUNCION DE EXCITACION (N).................... = ',I15.7,/
     91X,'NUMERO DE TERMINOS EN LA SERIE DE FOURIER (NT). = ',I15.7,//)
      IF(INT.EQ.0)WRITE(*,39)
      IF(INT.EQ.0)WRITE(6,39)
      IF(INT.EQ.1)WRITE(*,38)
      IF(INT.EQ.1)WRITE(6,38)
   38 FORMAT(' SE EFECTUARA INTERPOLACION',/)
   39 FORMAT(' NO SE EFECTUARA INTERPOLACION'/)
      IF(NPRT.EQ.0)WRITE(*,666)
      IF(NPRT.EQ.0)WRITE(6,666)
      IF(NPRT.EQ.1)WRITE(*,667)
      IF(NPRT.EQ.1)WRITE(6,667)
  666 FORMAT(' NO SE IMPRIME LA HISTORIA DE LA RESPUESTA'///)
  667 FORMAT(' SE IMPRIME LA HISTORIA DE LA RESPUESTA'///)
      WRITE(*,79)
      READ(*,*)LABEL1
   79 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      DO 91 I=1,N
      WRITE(*,95)I
   95 FORMAT(//' PARA EL PUNTO NO. ',I3,2X,'DAME:',/
     11X'(A):TIEMPO ',/
     21X'(B):LA FUERZA EN LA MASA O LA ACELERACION DEL SUELO.'//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 50
      READ(*,*)T(I),F(I)
      GO TO 51
   50 READ(4,*)T(I),F(I)
   51 CONTINUE
   91 CONTINUE
      WRITE(*,516)
      WRITE(6,516)
      WRITE(*,94)
      WRITE(6,94)
   94 FORMAT(31X,' T A B L A   I N I C I A L'//
     112X,'T I E M P O      A C E L E R A C I O N   O   F U E R Z A'//)
      DO 93 I=1,N
      WRITE(*,92)T(I),F(I)
      WRITE(6,92)T(I),F(I)
   92 FORMAT(8X,E17.7,10X,E17.7)
   93 CONTINUE
      WRITE(*,79)
      READ(*,*)LABEL1
    INTERPOLACION ENTRE PUNTOS DE LOS DATOS
      IF(INT.EQ.0) GO TO 17
      CALL INTER(N,T,F,DT,TP)
   21 FORMAT(///' V A L O R E S   I N T E R P O L A D O S'/
     11X,'A   C O N S I D E R A R   E N   L O S   C A L C U L O S'//
     112X,'T I E M P O            F U E R Z A'//)
      WRITE(*,21)
      WRITE(6,21)
   17 CONTINUE
  763 FORMAT(35X,'(TABLA DE VALORES EN TERMINOS TIEMPO-FUERZA)'//)
      WRITE(*,763)
      WRITE(6,763)
      DO 300 L=1,N
      IF(NTYPE.EQ.0) GO TO 299
      F(L)=-F(L)*AM
  299 CONTINUE
      WRITE(*,92)T(L),F(L)
  300 WRITE(6,92)T(L),F(L)
      WRITE(*,516)
      WRITE(6,516)
```

```
      WRITE(*,150)
      WRITE(6,150)
  150 FORMAT(1H1,9X,'R E S U L T A D O S :'//,14X,'FRECUENCIA',5X,
     1 'COEF. FOURIER FUERZA    COEF. FOURIER RESP.'/5X,'N',
     13X,'RAD/SEG',7X,'CPS',8X,'A(N)',8X,'B(N)',8X,'A(N)',8X,'B(N)'/)
C   SE INICIALIZAN LAS VARIBLES
      W=6.283185307/TP
      AZ=0.
      DO 5 I=2,N
      AZ=AZ+(T(I)-T(I-1))*(F(I)+F(I-1))/2.
    5 CONTINUE
      AZ=AZ/TP
      CO = AZ/AK
      WRITE(*,4)AZ,CO
      WRITE(6,4)AZ,CO
    4 FORMAT(5X,'0',9X,'0',9X,'0',E12.4,12X,E12.4,/)
C   SE CALCULAN LOS COEFICENTES DE FOURIER
      DO 630 J=1,NT
      A(J)=0.
      B(J)=0.
      AJ=J
      WB=W*AJ
      DO 620 I=2,N
      T1=T(I-1)
      T2= T(I)
      F1=F(I-1)
      F2=F(I)
      A(J)=A(J)+AI(T1,T2,F1,F2,WB)
  620 B(J)=B(J)+BI(T1,T2,F1,F2,WB)
      A(J)=A(J)*2./TP
      B(J)=B(J)*2./TP
      CPS=WB/6.283185307
      RN=WB/DSQRT(AK/AM)
      CC=C(A(J),B(J),RN,XSI)/AK
      CS=S(A(J),B(J),RN,XSI)/AK
      WRITE(*,740)J,WB,CPS,A(J),B(J),CC,CS
      WRITE(6,740)J,WB,CPS,A(J),B(J),CC,CS
  740 FORMAT(1X,I5,2F10.2,4E12.4)
  630 CONTINUE
      IF(NPRT.EQ.0) GO TO 699
C   SE CALCULA EL ESTADO ESTACIONARIO
      NI=TT/DT+2
      CD=2.0*DSQRT(AK*AM)*XSI
      WRITE(*,516)
      WRITE(6,516)
      WRITE(*,760)
      WRITE(6,760)
  516 FORMAT(//)
  760 FORMAT(1H1,15X,'RESPUESTA ESTADO ESTACIONARIO',//,7X,'TIEMPO',5X,
     1 'FUERZA',7X,'DESPL.',8X,'VELOC.',8X,'ACEL.'2X,'FUERZA EN BASE'/)
      DO 670 J=1,NI
      AJ=J-1
      TAU=AJ*DT
      FT=AZ
      X=AZ/AK
      V=0.0
      ACC=0.0
      DO 665 I=1,NT
      AA=I
      WB=AA*W
      RN=WB/DSQRT(AK/AM)
      FT=FT+A(I)*DCOS(WB*TAU)+B(I)*DSIN(WB*TAU)
      X=X+(S(A(I),B(I),RN,XSI)*DSIN(WB*TAU)+C(A(I),B(I),RN,XSI)*
     1DCOS(WB*TAU))/AK
      V=V+(S(A(I),B(I),RN,XSI)*WB*DCOS(WB*TAU)-C(A(I),B(I),RN,XSI)*
     1WB*DSIN(WB*TAU
```

```
      ACC=ACC+(-S(A(I),B(I),RN,XSI)*WB*WB*DSIN(WB*TAU)-C(A(I),B(I),RN
     1,XSI)*WB*WB*DCOS(WB*TAU))/AK
      FTR=DSQRT((CD*V)**2+(AK*X)**2)
  665 CONTINUE
      WRITE(*,800)TAU,FT,X,V,ACC,FTR
      WRITE(6,800)TAU,FT,X,V,ACC,FTR
  800 FORMAT(F11.4,5E13.4)
  670 CONTINUE
  699 STOP
      END
C   INTERPOLACION
      SUBROUTINE INTER(N,TC,X,DT,TMAX)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION TC(50),X(50),F(50)
      NT=TMAX/DT
      NT1=NT+2
      DO 5 I=1,NT1
    5 F(I)=0.0
      F(1)=X(1)
      ANN=0.0
      II=1
      DO 10 I=2,NT1
      AI=I-1
      T=AI*DT
      IF(T.GT.TC(N)) GO TO 12
      IF(T.LE.TC(II+1)) GO TO 9
      ANN=-TC(II+1)+T-DT
      II=II+1
    9 ANN=ANN+DT
      F(I)=X(II)+(X(II+1)-X(II))*ANN/(TC(II+1)-TC(II))
   10 CONTINUE
   12 TC1=TC(1)
      N=NT1
      DO 20 I=1,NT1
      X(I)=F(I)
      AL=I
   20 TC(I)=TC1+DT*(AL-1.)
      RETURN
      END
```

A P E N D I C E   C 2

PROGRAMA "FASTFOUR.FOR"

C2.1 INTRODUCCION

PROGRAMA "FASTFOUR.FOR"

El apéndice B2 muestra la forma de calcular la respuesta de un sistema dinámico de un grado de libertad cuando se encuentra sujeto a la acción de fuerzas periódicas. Ahora se intenta

a) Extender el uso de las series de Fourier a funciones que no son periódicas

b) Acelerar el cálculo de los parámetros evaluados por el programa "FOURIER.FOR"

A tal efecto se instrumenta en el programa denominado "FASTFOUR.FOR" un algoritmo altamente eficiente conocido como <u>la transformada rápidad de Fourier</u> (TRF).

La serie de Fourier (B2.1.1) **también** se puede expresar **en términos de funciones exponenciales mediante** el uso de las conocidas ecuaciones de Euler:

$$\mathrm{sen}\,n\bar{\omega} = \langle \exp(in\bar{w}) - \exp(-in\bar{w})\rangle/(2i) \qquad \text{(C2.1.1.a)}$$

$$\cos n\bar{\omega} = \langle \exp(in\bar{\omega}) + \exp(-in\bar{\omega})\rangle/(2i) \qquad \text{(C2.1.1.b)}$$

Asi pues. la citada **serie se** transforma en

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp(in\bar{\omega}t) \quad . \qquad \text{(C2.1.2)}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) \cdot \exp(-in\bar{\omega}t)dt \quad . \qquad \text{(C2.1.3)}$$

Sea ahora [0,T] el intervalo de la función periódica y sea la transformación $C_n = T \cdot c_n$, luego se tiene

$$F(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \exp(in\bar{\omega}t) \quad . \qquad \text{(C2.1.4)}$$

siendo

$$C_n = \int_0^T F(t) \exp(-in\bar{\omega}t)dt \quad . \qquad \text{(C2.1.5)}$$

A efecto de extender el método de Fourier a cargas no periódicas se supone, sin pérdida de generalidad, que la carga es periódica de período igual a T. Esta hipótesis introduce, desde luego, un error que se puede minimizar extendiendo bastante el domonio del término forzante. de tal modo que fuera del intervalo [0.T] la función de carga se anula. Por otro lado. la especificación del periódo T también sirve para determinar la frecuencia que se va a usar en los cálculos. a saber:

$$\bar{\omega} = \Delta\omega = 2\cdot\Pi/t \ . \qquad (C2.1.6)$$

A continucación el periódo en cuestión se divide en N intervalos $\Delta t = T/N$ y el valor de la carga se evalua. consecuentemente. en los instantes $t_j = j\cdot\Delta t$. $j = 1,2,3,\ldots$. Con el empleo de estas relaciones se tiene que

$$\exp(in\bar{\omega}t) = \exp(in\Delta\omega j\Delta t) = \exp(2\pi i[nj/N]) \qquad (C2.1.7)$$

Y consecuentemente la ecuación (C2.1.4) toma la forma

$$F(t_j) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(2\pi i[nj/N]) \qquad (C2.1.8)$$

El término C_n se obtiene de (C2.1.5) mediante la sustitución del signo de integración por el de suma

$$C_n = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \exp(-2\pi i[nj/N]) \ . \qquad (C2.1.9)$$

Estas dos últimas ecuaciónes constituyen la transformada discreta de Fourier.

Al expresar. en la ecuación diferencial. a la función forzante en términos de la función de módulo uno $E_n = \exp(i\omega_n t)$ se tiene

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \exp(i\omega_n t) \ . \tag{C2.1.10}$$

siendo la solución estacionaria de la forma

$$y(y) = H(\omega_n)\ \exp(i\omega_n t) \ . \tag{C2.1.11}$$

La función $H(\omega_n)$ se describe por

$$H(\omega_n) = 1/(k-m\omega_n^2 + ic\omega_n) \tag{C2.1.12}$$

Y cuando se designan a

$$r_n = \omega_n/\omega \ . \tag{C2.1.13}$$

y

$$\xi = c/c_{cr} = c/(2\sqrt{Km}) \ . \tag{C2.1.14}$$

la ecuación (C2.1.12) se trasforma en

$$H(\omega_n) = 1/[k(1-r_n^2 + 2ir_n\xi]) \ . \tag{C2.1.15}$$

Ahora bién haciendo $\omega_n = n\Delta\omega$ y $r_1 = \bar{\omega}/\omega = \Delta\omega/\omega$.

se llega a

$$H(n\Delta\omega) = 1/(k[1-n^2 r_1^2 + 2inr_1\xi]) \quad . \qquad (C2.1.16)$$

De aquí que la respuesta en el instante $y_j = j\Delta t$ a la fuerza armónica de amplitud $A_n = \Delta\omega C_n/(2\pi)$ está dada por

$$y_n(t_j) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{C_n \exp(2\pi i[nj/N])}{k(1-n^2 r_1^2 + 2inr_1\xi)} \quad . \qquad (C2.1.17)$$

Y la respuesta total cuando se consideran todas las frecuencias está dada por

$$y_n(t_j) = \frac{\Delta\omega}{2\pi k} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{C_n \exp(2\pi i[nj/N])}{1-n^2 r_1^2 + 2inr_1\xi} \quad . \qquad (C2.1.18)$$

La evaluàción de estas sumas se simplifica notablemente debido a que las funciones exponenciales son armónicas y aquella se extienden sobre un rango igual a N^2 términos.

La última ecuación. excepto por el signo. puede ser representada por la siguiente función exponencial

$$A(j) = \sum_{n=0}^{N-1} A^{(0)}(n) W_N^{jn} \quad . \qquad (C2.1.19)$$

donde

$$W_N = \exp(2\pi i/N) \; . \qquad \text{(C2.1.20)}$$

El cálculo se acelera haciendo

$$N = 2^M \; . \qquad \text{(C2.1.21)}$$

donde M es un entero.

Considerése el caso particular cuando N = 8 y M = 3, entonces los índice j y n se pueden expresar así

$$j = j_0 + 2j_1 + 4j_2 \qquad \text{(C2.1.22.a)}$$

$$n = n_0 + 2n_1 + 4n_2 \; . \qquad \text{(C2.1.22.b)}$$

siendo así que (C2.1.19) se expresa de la siguiente manera

$$A(j) = \sum_{n_2=0}^{1} \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_0=0}^{1} A^{(0)}(n) W_8^{(j_0+2j_1+4j_2)(n_0+2n_1+4n_2)} \; . \qquad \text{(C2.1.23)}$$

El factor exponencial se describe por

$$W_8^{jn} = W_8^{8(j_1n_2+2j_2n_2+j_2n_1)}W_8^{4n_2j_0}W_8^{2n_1(2j_1+j_0)}W_8^{n_0(4j_2+2j_1+j_0)}.$$

(C2.1.24)

Por otra parte se observa que en virtud de la ecuación (C2.1.20), el primer factor de la anterior ecuación es

$$W_8^{jn} = \exp(2\pi i[8/8]I) = \cos 2\pi I + \operatorname{sen} 2\pi I = 1.$$

donde $I = j_1n_2+2j_2n_2+j_2n_1$ es siempre un número entero. Así pues, en la sumatoria restan por considerar tan sólo tres factores que pueden ser evaluados por pasos

$$A^{(1)}(j_0,n_1,n_0) = \sum_{n_2=0}^{1} A^{(0)}(n_2,n_1,n_0)W_8^{4n_2j_0}$$

siendo $A^{(0)}(n_2,n_1,n_0) = A^{(0)}(n)$. Análogamente se tiene

$$A^{(2)}(j_0,j_1,n_0) = \sum_{n_1=0}^{1} A^{(1)}(j_0,n_1,n_0)W_8^{2n_1(2n_1+j_0)}$$

y

$$A^{(3)}(j_0,j_1,j_2) = \sum_{n_0=0}^{1} A^{(2)}(j_0,j_1,n_0)W_8^{n_0(4j_2+2j_1+j_0)}$$

El resultado $A^{(3)}(j_0 . j_1 . j_2)$ es igual a $A(j)$ según (C2.1.19). Este proceso. ilustrado para $N = 8$. puede generalizarse fácilmente para enteros $N = 2^M$.

El método es particularmente eficiente en virtud de que el resultado obtenido en un paso es utilizado inmediatamente en el siguiente. La reducción en el tiempo de procesamiento es mayor a medida que el rango temporal se subdivide en un mayor número de subintervalos.

C2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA.

El programa "FASTFOUR.FOR" calcula . dentro del dominio de la frecuencia. la respuesta de un sistema amortiguado de un grado de libertad. El término forzante es proporcionado como una función discreta a través del tiempo. Cuando el índice de control INT se hace igual a 1. se efectúa interpolacion entre los puntos especificados en los datos. a razón de un incremento en el tiempo constante e igual a Δt.

El listado de resultado consiste de dos tablas:

I.- Se dan los primeros N términos de la serie de Fourier correspondientes a la expanción de la fuerza de excitación.

II.-Se da la respuesta estacionaria del sistema según la variable temporal. En ésta segunda tabla también se describe. con el objeto de comprobar resultados. a la fuerza de excitación calculada de acuerdo a (C2.1.8).

Seguidamente se detallan las principales variables usadas en el programa.

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
M	M	Exponente en $N = 2^M$
T	T	Periodo
AK	k	Coeficiente de rigidez
C	c	Coeficiente de amortiguamiento
AM	m	Masa
INT		Indice de interpolación INT = 0. No se interpola INT = 1. Se interpola
NEQ		Número de puntos que definen a la función de excitación.
TC(I)	t_i	Tiempo en el i-ésimo punto
P(I)	F_i	Fuerza en el i-ésimo punto.

C2.3 EJEMPLO

Sea de nueva cuenta la torre dada en el ejemplo B2.3. pero ahora sujeta a la acción de una fuerza impulsiva triangular descrita en la figura C2.3.1. Como se observa, la fuerza de excitación se considera artificialemte periódica, de periódo igual a 0.64 segundos, rango que sobradamente excede a la acción real de la citada fuerza.

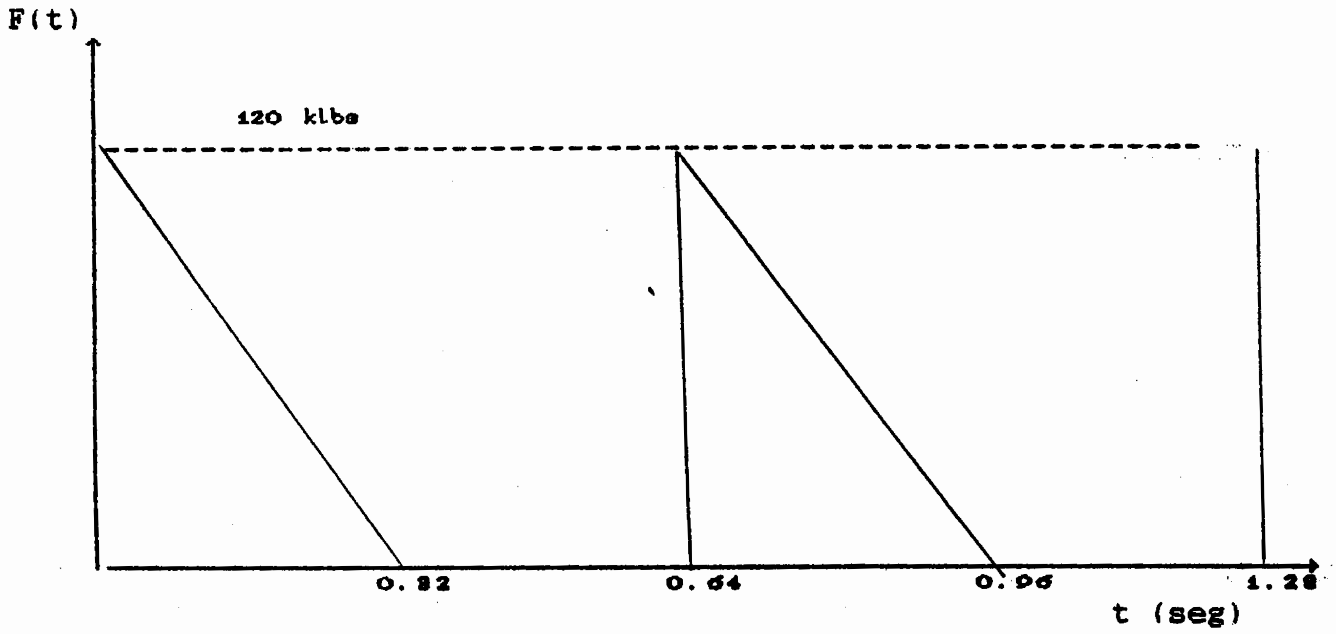


Fig. C2.3.1

SOLUCION

El ejemplo se resuelve mediante el empleo del programa "FASTFOUR.FOR".

A continuación se presentan tanto el listado de resultados como el archivo de datos correspondiente.

NOMBRE DEL ARCHIVO
DE DATOS INICIALES :FAST.DAT

DATOS INICIALES

EXPONENTE (M).................................... = 3
PERIODO (T)...................................... = .6400000E+00
COEFICIENTE DE RIGIDEZ (AK)...................... = .1000000E+06
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO (C)............... = .6320000E+03
MASA (AM).. = .1000000E+03
NUM. DE PUNTOS QUE DEFINEN A LA FUNCION (NEQ).. = 3

SE EFECTUA INTERPOLACION

TABLA INICIAL

TIEMPO	ACELERACIO O FUERZA
.0000000E+00	.1200000E+06
.3200000E+00	.0000000E+00
.6400000E+00	.0000000E+00

RESULTADOS

FUERZA DE FOURIER COEFICIENTES

N	REAL	IMAG
1	24000.00000	.00000
2	12994.11000	-11588.22000
3	4800.00000	-4800.00000
4	6205.88800	-1988.22500
5	4800.00000	.00000
6	6205.88800	1988.22500
7	4800.00000	4800.00000
8	12994.11000	11588.22000

TIEMPO	DESPL.REAL	DESPL.IMAG	FUERZA REAL	FUERZA IMAG
.000E+00	.5652E+00	-.9565E+00	.12E+06	.00E+00
.800E-01	.1047E+01	.6276E+00	.90E+05	.20E-02
.160E+00	-.3626E-01	.1845E+00	.60E+05	.00E+00
.240E+00	.7095E+00	.1200E+00	.30E+05	.35E-04
.320E+00	.9285E-01	.5015E+00	.00E+00	.00E+00
.400E+00	.1456E+00	-.2852E+00	.39E-02	-.73E-03
.480E+00	.4200E+00	.6104E-01	.20E-02	.00E+00
.560E+00	.5571E-01	-.2529E+00	.98E-03	-.13E-02

```
C     EMPLEO DE LA TRANSFORMADA RAPADIDA DE FOURIER PARA OBTENER LA
C     RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA
C
C
      COMPLEX A(1024).CC.F(1024)                                  13-C2
      DIMENSION P(200).TC(200)
      CHARACTER ANOM1*12.ANOM2*12
C
      OPEN(6.FILE='PRN')
C     LECTURA DE DATOS
      WRITE(*.31)
31    FORMAT(/' DAME EL MODO DE LECTURA DE LOS DATOS'/
     *1X.' (1) LECTURA EN TERMINAL'/
     *1X.' (2) LECTURA EN DISCO (NOMBRE DEL ARCHIVO:"DATOS#.DAT")'/)
      READ(*.*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
222   FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO  DE DATOS'/
     *1X.'(EJEMPLO DATOS5.DAT)'//)
221   FORMAT(A12)
223   FORMAT(1X.A12//)
      WRITE(*.222)
      READ(*.221)ANOM1
      WRITE(*.223)ANOM1
      OPEN(4.FILE=ANOM1)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 75
      READ(*.221)ANOM2
      GO TO 80
75    READ(4.221)ANOM2
80    ENDIF
      WRITE(*.105)
105   FORMAT(' DAME EL VALOR DEL EXPONENTE M (N=2**M ES EL NUMERO DE'/
     *1X.' INTERVALOS DE TIEMPO EN EL QUE ES DIVIDIDO EL PERIODO T)'//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 34
      READ(*.*)M
      GO TO 35
34    READ(4.*)M
35    WRITE(*.103)
103   FORMAT(/' DAME EL PERIODO DE LA FUNCION (T):'.//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 36
      READ(*.*)T
      GO TO 37
36    READ(4.*)T
37    WRITE(*.104)
104   FORMAT(' DAME EL COEFICIENTE DE RIGIDEZ:(AK)'.//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 38
      READ(*.*)AK
      GO TO 40
38    READ(4.*)AK
40    WRITE(*.110)
110   FORMAT(' DAME EL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO:(C)'.//)
      IF (LBL2.EQ.2) GO TO 42
      READ(*.*)C
      GO TO 44
42    READ(4.*)C
44    WRITE(*.115)
115   FORMAT(' DAME LA MASA DEL SISTEMA (AM):'.//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 46
      READ(*.*)AM
      GO TO 48
46    READ(4.*)AM
48    WRITE(*.120)
120   FORMAT(' DAME EL NUMERO DEL CASO:'/
     *26X.'(0) NO SE INTERPOLA'/
```

```
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 50
      READ(*.*)INT
      GO TO 52
 50   READ(4.*)INT
 52   WRITE(*.125)
 125  FORMAT(' DAME EL NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINEN A LA FUNCION'/
     *26X.'FUERZA (NEQ):'//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 54
      READ(*.*)NEQ
      GO TO 56
 54   READ(4.*)NEQ
 56   N=2**M
      AN=N
      DT=T/AN
C   LECTURA DE TIEMPOS Y FUERZAS
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 58
      DO 60 L=1.NEQ
 129  FORMAT(/' PARA EL PUNTO NUMERO :'.I3//)
 130  FORMAT(/' DAME EL VALOR DEL TIEMPO'/)
 135  FORMAT(/' DAME EL VALOR DE LA FUERZA'/)
      WRITE(*.129)L
      WRITE(*.130)
      READ(*.*)TC(L)
      WRITE(*.135)
      READ(*.*)P(L)
   60 CONTINUE
      GO TO 300
   58 DO 62 L=1.NEQ
      READ(4.*)TC(L)
      READ(4.*)P(L)
   62 CONTINUE
  300 IF(LBL2.EQ.2)THEN
      WRITE(6.661)ANOM2
      WRITE(*.661)ANOM2
      END IF
  661 FORMAT(1X.'N O M B R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X.'D E   D A T O S   I N I C I A L E S  :'.A12//)
  697 FORMAT(/' D A T O S   I N I C I A L E S'///
     11X.'EXPONENTE (M)...............................  =  '.I15/
     21X.'PERIODO (T)..................................  =  '.E15.7/
     31X.'COEFICIENTE DE RIGIDEZ (AK)....................  =  '.E15.7/
     41X.'COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO (C).............  =  '.E15.7/
     51X.'MASA (AM).......................................  =  '.E15.7/
     61X.'NUM. DE PUNTOS QUE DEFINEN A LA FUNCION (NEQ)..  =  '.I15///)
      WRITE(6.697)M.T.AK.C.AM.NEQ
      WRITE(*.697)M.T.AK.C.AM.NEQ
  601 FORMAT(/' PARA CONITUNUAR TECLEE UN NUMERO')
  698 FORMAT( ' SE EFECTUA INTERPOLACION'//)
  699 FORMAT(' NO SE EFECTUA INTERPOLACION'//)
      IF(INT.EQ.0)THEN
      WRITE(*.699)
      WRITE(6.699)
      ELSE
      WRITE(*.698)
      WRITE(6.698)
      ENDIF
      WRITE(*.601)
      READ(*.*)LBL3
  700 FORMAT(21X.'T A B L A   I N I C I A L'//
     112X.'T I E M P O      A C E L E R A C I O   O   F U E R Z A'//)
      WRITE(6.700)
      WRITE(*.700)
      DO 701 I = 1.NEQ
      WRITE(*.702)TC(I).P(I)
      WRITE(6.702)TC(I).P(I)
```

```
      WRITE(*.601)
      READ(*.*)LBL3
  702 FORMAT(8X.E17.7.10X.E17.7)
      IF(INT.EQ.0) GO TO 13
      CALL INTER(NEQ.TC.P.DT.T)
C
C     CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER PARA LA FUERZA
C
13    CONTINUE
      WRITE(*.155)
      WRITE(6.155)
      DO 6 I=1.N
      A(I)=CMPLX(P(I).0.)*DT
6     CONTINUE
      FAC=-1.0
      CALL FFT(A.FAC.M)
155   FORMAT(//.10X.' RESULTADOS'///.10X.'FUERZA DE FOURIER'.
     *' COEFICIENTES'//.4X.'N'.11X.'REAL'.11X.'IMAG'/)
160   FORMAT(I3.3X.F16.5.3X.F16.5)
      DO 17 I=1.N
      NI=I-1
      WRITE(*.160)I.A(I)
      WRITE(6.160)I.A(I)
17    CONTINUE
      WRITE(*.601)
      READ(*.*)LBL3
C
C     CALCULO DE LA RESPUESTA Y LA FUERZA PARA VERIFICACION
C
      Z=C/(2.*SQRT(AK*AM))
      WB=2.*3.141592653/T
      WF=SQRT(AK/AM)
      R1=WB/WF
      WRITE(*.170)
      WRITE(6.170)
170   FORMAT(/.6X.'TIEMPO'.4X.'DESPL.REAL'.3X.'DESPL.IMAG'.
     *6X.'FUERZA REAL'.4X.'FUERZA IMAG'/)
      DO 10 I=1.N
      AI=I-1
      CC=CMPLX(1.-(AI*R1)**2.2.*AI*R1*Z)
      F(I)=A(I)/T
      A(I)=A(I)*WB/(2.*3.14159265358979*AK*CC)
10    CONTINUE
      FAC=1.0
      CALL FFT(A.FAC.M)
      CALL FFT(F.FAC.M)
      DO 20 I=1.N
      AI=I-1
      TIEMPO=AI*DT
      WRITE(*.180)TIEMPO.A(I).F(I)
      WRITE(6.180)TIEMPO.A(I).F(I)
20    CONTINUE
180   FORMAT(E10.3.2E15.4.2E15.2)
      STOP
      END
      SUBROUTINE FFT(A.SIGN.M)
      COMPLEX A(1024).U.W.H
      N=2**M
      NV2=N/2
      NM1=N-1
      J=1
      DO 7 I=1.NM1
      IF(I.GE.J) GO TO 5
      H=A(J)
      A(J)=A(I)
```

```
5       K=NV2
6       IF(K.GE.J) GO TO 11
        J=J-K
        K=K/2
        GO TO 6
11      J=J+K
7       CONTINUE
        PI=3.14159265358979
        DO 20 L=1.M
        LE=2**L
        LE1=LE/2
        U=(1.0.0.)
        W=CMPLX(COS(PI/LE1).+SIGN*SIN(PI/LE1))
        DO 20 J=1.LE1
        DO 10 I=J.N.LE
        IP=I+LE1
        H=A(IP)*U
        A(IP)=A(I)-H
        A(I)=A(I)+H
10      CONTINUE
        U=U*W
20      CONTINUE
        RETURN
        END
C
C       INTERPOLACION ENTRE LOS PUNTOS DE LOS DATOS
C
        SUBROUTINE INTER(N.TC.X.DT.TMAX)
        DIMENSION TC(200).X(200).F(200)
        NT=TMAX/DT
        NT1=NT+1
        DO 5 I=1.NT1
        F(I)=0.0
5       CONTINUE
        F(1)=X(1)
        ANN=0.0
        II=1
        DO 10 I=2.NT1
        AI=I-1
        T=AI*DT
        IF(T.GT.TC(N)) GO TO 12
        IF(T.LE.TC(II+1)) GO TO 9
        ANN=-TC(II+1)+T-DT
        II=II+1
9       ANN=ANN+DT
        F(I)=X(II)+(X(II+1)-X(II))*ANN/(TC(II+1)-TC(II))
10      CONTINUE
12      TC1=TC(1)
        N=NT1
        DO 20 I=1.NT1
        X(I)=F(I)
        AL=I
        TC(I)=TC1+DT*(AL-1.)
20      CONTINUE
        RETURN
        END
```

```
FAST.DAT
3
0.64
100000.
632.
100.
1
3
0.
120000.
0.32
0.
0.64
0.
```

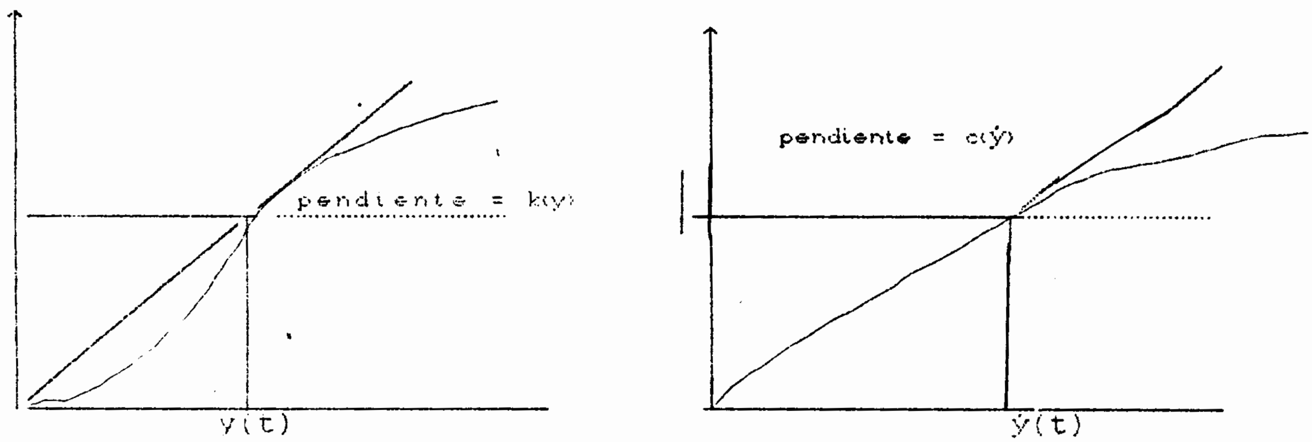
A P E N D I C E D2

PROGRAMA "ELASPLAS.FOR"

D2.1 INTRODUCCION

PROGRAMA "ELASPLAS.FOR"

En los apéndices anteriores, al estudiar el comportamineto dinámico de los sistemas de un grado de libertad, se considero a las fuerzas, restauradora y disipativa, variando proporcionalmente al desplazamiento y velocidad de la masa del sistema en cuestión. Sin embargo, en ocasiones reviste importancia considerar a dichas fuerza variando de manera distinta a la lineal. En la figuras D2.1.1 a y b se ilustra gráficamente las leyes que determinan los coeficientes de restauración y amortiguamiento en un gran número de casos reales.



a b

Fig. D2.1.1

Seguidamente se presenta el llamado comportamiento elasto-plástico de un cierto elemento estructural. En la figura D2.1.2 se muestra el modelo de dicho comportamiento, pero idealizado de modo tal que las leyes de variación son seccionalemte lineales

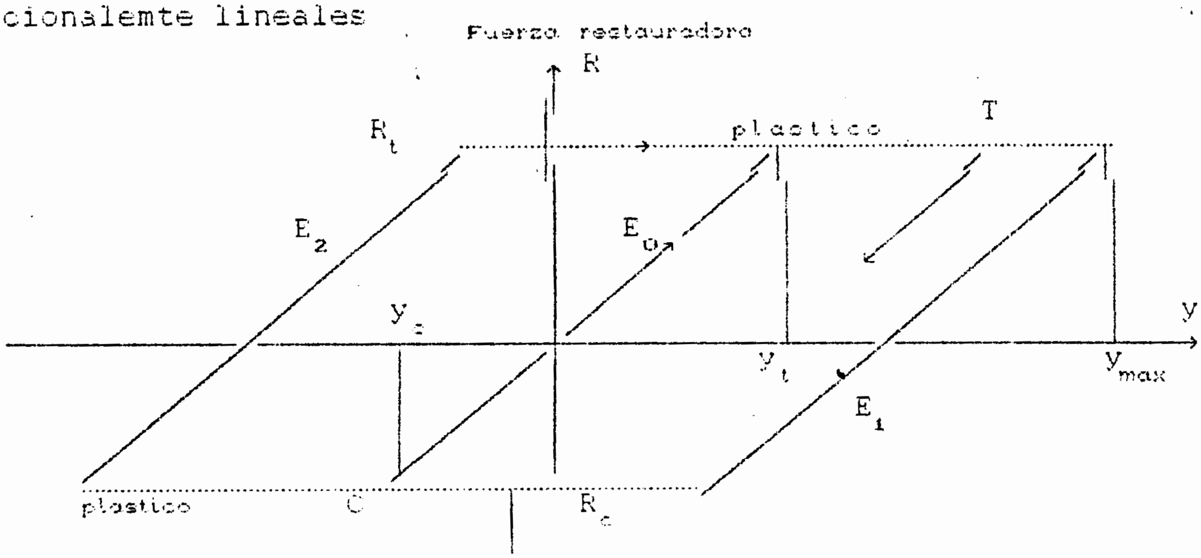


Fig. D2.1.2

En la figura se puede observar que existe una porción de la gráfica donde ocurre el comportamiento elástico lineal, pero la que una vez rebasada conduce al comportamiento plástico . De este modo, cuando la estructura es descargada, de nueva cuenta se comporta elásticamente.

Toda vez que la estructura ha sido encuadrada en el modelo resorte-masa, las expresiones matemáticas que lo describen se obtiene de modo sencillo. Estas dependen, por una parte de la magnitud de la fuerza restauradora, y por otra parte del movimiento caracterizado o bién por un desplazamiento creciente ($\dot{y} > 0$) o bién por un desplazamiento decreciente ($\dot{y} < 0$).

La figura D2.1.2 describe un ciclo completo del comportamiento elasto-plástico del material. Aqui las condiciones iniciales coresponden al estado dado por $y = 0$ y $\dot{y} = 0$, considerándose, además a la estructura libre de cargas. Pero una vez que alguna carga ha sido aplicada, el sistema se comporta elásticamente a lo largo del segmento E_o, hasta que la magnitud del desplazamiento ès igual a y_t, en el caso de tensión, o a y_c en la compresión. Más allá de estos puntos el sistema se comporta plásticamente.

Ahora bién,

$$y_t = R_t/k \qquad \text{(D2.1.1)}$$

y

$$y_c = R_c/k. \qquad \text{(D2.1.2)}$$

Obviamente, R_t y R_c designan, respectivamente, la magnitud de las fuerzas donde se alcanzan los puntos de fluencia en tensión y en compresión, siendo k la rigidez elástica de la estructura.

El sistema permanece en el ~~rango~~ descrito por el segmento E_o mientras el desplazamiento y satisface el siguiente requerimiento

$$y_c < y < y_t \; . \qquad \text{(D2.1.3)}$$

Si sucede que $y > y_t$, la estructura entra al ~~rango~~ de comportamiento plástico, representado en la figura superior por el segmento T, y permanece ahí en tanto que $\dot{y} > 0$. Pero si $\dot{y} < 0$, entonces el sistema regresa al estado elástico a lo largo del segmento E_1. Ahora los nuevos puntos de fluencia se determinan por

$$y_t = y_{max} \tag{D2.1.4}$$

$$y_c = y_{max} - (R_t - R_c)/k, \tag{D2.1.5}$$

siendo y_{max} el máximo desplazamiento a lo largo de la curva T, presentándose cuando $\dot{y} = 0$.

Análogamente, si $y < y_c$, el sistema entra al rango de compresión plástica, caracterizado, en la figura, por la curva C, y permanece en dicho estado en tanto que $\dot{y} < 0$. Pero si el movimiento inverte su dirección y esto ocurre cuando $\dot{y} > 0$, el sistema se comporta de nueva cuenta elásticamente.

Bajo estas circunstancias los puntos de fluencia se determinan por

$$y_c = y_{min} \tag{D2.1.6}$$

$$y_t = y_{min} + (R_t - R_c)/k, \tag{D2.1.7}$$

donde y_{min} es el desplazamiento mínimo marcado a lo largo del segmento C. Este punto se alcanza cuando $\dot{y} = 0$.

Ahora se procede a evaluar la magnitud de la fuerza restauradora considerándose, a tal efecto, cada uno de los segmentos que componen el ciclo elasto-plástico descrito.

La magnitud de la fuerza de restauración, correspondiente la fase elástica del ciclo, (E_0, E_1, E_2, ...) puede ser calculada por

$$R = R_t - (y_t - y)\cdot k. \tag{D2.1.8}$$

Para el caso de tensión plástica, la fuerza esta dada por

$$R = R_t. \tag{D2.1.9}$$

Y finalmente, en el caso de compresión plástica por

$$R = R_c. \tag{D2.1.10}$$

Este es el algoritmo que se ha instrumentado en el programa "ELASPLAS.FOR".

D2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

Las principales variables usadas por el programa son:

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
NTYPE		Indice de excitación: 1, actúa fuerza sobre la masa. 2 actúa

		aceleración en la base.
NEQ		Número de puntos que definen a la función de excitación.
SK	k	Coeficiente de rigidez.
SM	m	Masa.
SC	c	Coeficiente de amortiguamiento
DT	Δt	Incremento en el tiempo
RT	R_t	Máxima fuerza restauradora en tensión.
RC	R_c	Máxima fuerza restauradora en compresión.
TC(I)	t_i	Tiempo en el i-ésimo punto.
X(I)	F_i	Fuerza o aceleración en el instante t_i.

Cuando los datos se proporcionan directamente, por el teclados de la terminal, el usuario es guiado por programa indicándosele, paso a paso, los datos que deben irse proporcionando.

Pero cuando los datos se alimentan mediante un archivo creado exprofeso en disco, se deben proporcionar en el orden siguiente:

NOMBRE DEL ARCHIVO (hasta 12 caracteres alfanuméricos)

NTYPE

NEQ

SM

SK

SC

DT

RT

RC

T(I), X(I) (I = 1,NEQ. tantos renglones cuantos sean necesarios)

D2.3 EJEMPLO

Sea la estructura mostrada en la figura D2.3.1, sometida a la carga variable en el tiempo descrita en la figura D2.3.2. El coeficiente de amortiguamiento se supone constante, además se considera a ξ = 0.087. Por otra parte se sabe que el comportamiento no lineal de la estructura se debe al cambio de la rigidez del sistema, presentándose en el punto de fluencia del material. El ciclo elasto-plástico se detalla en la figura D2.3.3.

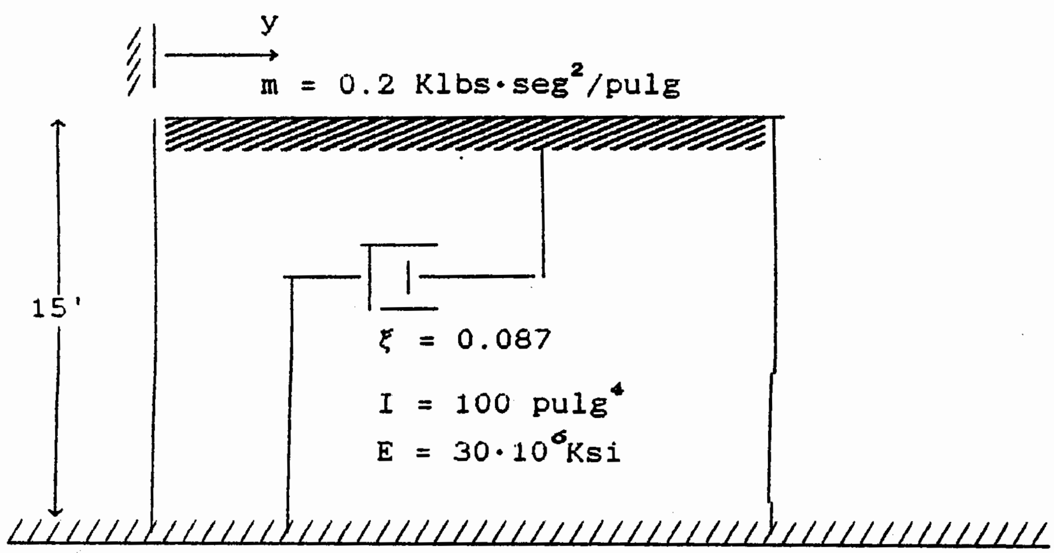


Fig. D2.3.1

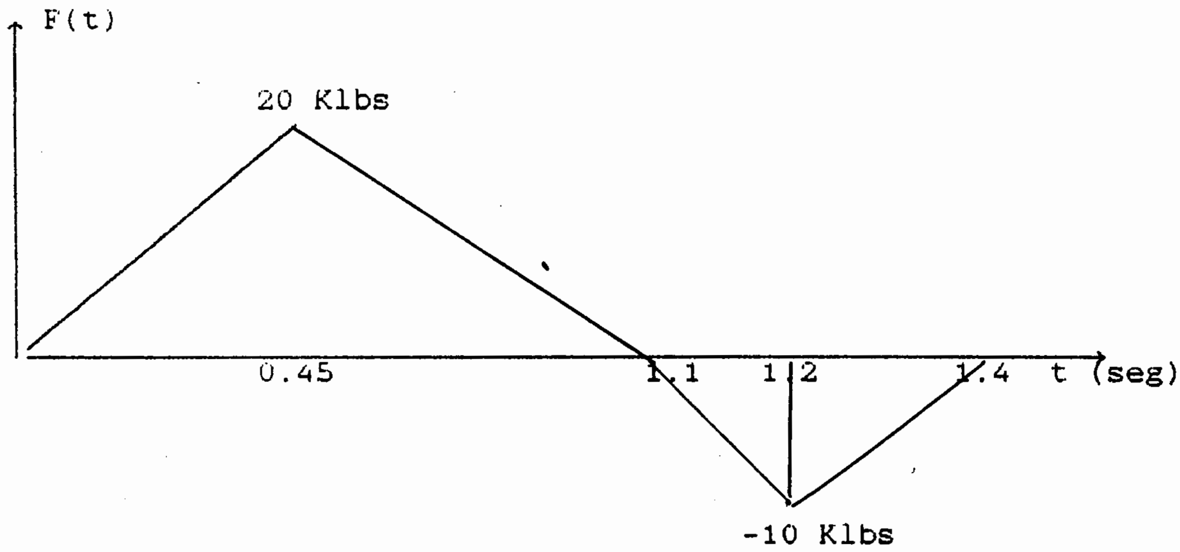


Fig. D2.3.2

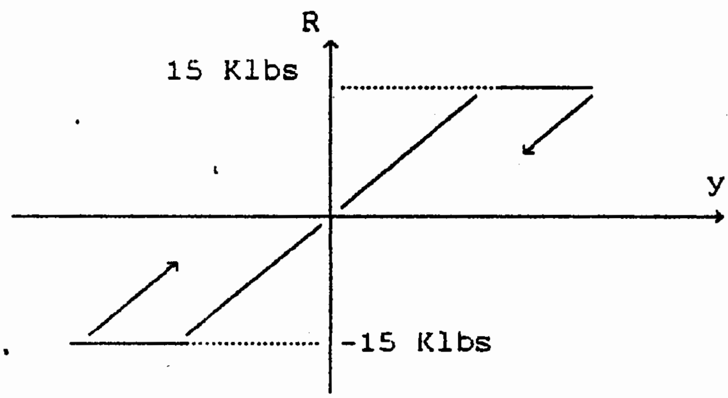


Fig. D2.3.3

SOLUCION

En el caso elástico, la rigidez de la estructura es

$k = 12EI/L^3 = 12.35$ Klbs/pulg.

El coeficente de amortiguamiento es

$$c = \xi \cdot c_{cr} = (0.087)\cdot(2)\cdot\sqrt{0.2\cdot 12.35} = 0.27 \text{ Klbs}\cdot\text{seg/pulg}$$

Por otra parte, el desplazamiento y velocidad iniciales, son $y_o = \dot{y} = 0.0$, siendo la aceleración inicial

$$\ddot{y} = F(0)/k = 0.0.$$

Resta tan sólo determinar los puntos de fluencia,

$$y_t = R_t/k = 15/12.35 = 1.215 \text{ pulg},$$

y

$$y_c = -1.215 \text{ pulg}.$$

Se aclara, finalmente, que como paso en el tiempo se consideró conveniente tomar $\Delta t = 0.1$ seg.

Seguidamente se presenta el listado de resultados, dándose éstos en términos del desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema. Entre los resultado también aparece la clave KEY, si ésta es igual a 0, indica que el sistema se mantiene en el rango elástico, pero si es igual a 1 o -1, indica que el sistema entró al rango plástico, en tensión o en compresión, respectivamente.

RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTOPLASTICO PERFECTO

DE UN GRADO DE LIBERTAD

N O M B R E D E L A R C H I V O

D E D A T O S I N I C I A L E S :datos5.dat

D A T O S I N I C I A L E S

NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA LA FUNCION DE EXCITACION (NEQ)................	=	6
MASA (SM)......................................	=	.2000000E+00
CONSTANTE DEL RESORTE (SK).....................	=	.1235000E+02
CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO (SC)..............	=	.2700000E+00
INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT)...................	=	.1000000E+00
MAXIMA FUERZA DE REST. EN TRACCION (RT)........	=	.1500000E+02
MAXIMA FUERZA DE REST. EN COMPRESION (RC)......	=	.0000000E+00

ACTUA FUERZA SOBRE LA MASA

T A B L A I N I C I A L

T I E M P O	A C E L E R A C I O N O F U E R Z A
.0000000E+00	.0000000E+00
.4500000E+00	.2000000E+02
.1100000E+01	.0000000E+00
.1200000E+01	-.1000000E+02
.1400000E+01	.0000000E+00
.2000000E+01	.0000000E+00

RESPUESTA PERFECTAMENTE ELASTO-PLASTICA
SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

TIEMPO	DESPL.	VELOCIDAD	ACL.	KEY
.100	.0316	.9493	18.9866	0
.200	.2328	3.1870	25.7661	0
.300	.6677	5.3837	18.1696	0
.400	1.2697	6.3854	5.2686	1
.500	1.9388	7.0391	7.8049	1
.600	2.6561	7.0496	-7.5939	1
.700	3.3007	5.6177	-21.0454	1
.800	3.7376	2.9256	-32.7957	1
.900	3.8491	-.8672	-43.0601	0
1.000	3.5600	-4.7854	-35.3038	0
1.100	2.9474	-7.0414	-9.8162	0
1.200	2.1911	-8.1154	-11.6648	0

1.300	1.4356	-5.8520	56.9338	0
1.400	1.1862	1.3738	73.1453	-1
1.500	1.6739	8.2259	63.8951	0
1.600	2.7032	11.2342	-3.7288	0
1.700	3.7116	7.9685	-61.5855	0
1.800	4.1693	.8753	-76.1817	1

```
datos5.dat
1
6
0.2
12.35
0.27
0.1
15.0
-15.0
0.0, 0.0
0.45, 20.0
1.10, 0.0
1.20, -10.0
1.40, 0.0
2.0, 0.0
```

```
C     SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD ELASTOPLASTICO.
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
      DIMENSION X(100), F(100),TC(100)
C     SE LEEN DATOS INICIALES
      WRITE(*,100)
      OPEN(6,FILE='PRN')
      WRITE(6,100)
  100 FORMAT(//' RESPUESTA  DE  UN  SISTEMA  ELASTOPLASTICO PERFECTO'//
     1'  DE  UN  GRADO  DE  LIBERTAD'///)
C     LECTURA DE LOS DATOS
      WRITE(*,31)
   31 FORMAT(/' DAME EL MODO DE LECTURA DE DATOS'/
     11X,'(1) LECTURA EN TERMINAL'/
     21X,'(2) LECTURA EN DISCO (NOMBRE DEL ARCHIVO:"DATOS£.DAT")'//)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
  221 FORMAT(A12)
  223 FORMAT(1X,A12//)
  222 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X,'EJEMPLO:DATOS1.DAT'//)
      WRITE(*,222)
      READ(*,221)ANOM1
      WRITE(*,223)ANOM1
      OPEN(4,FILE=ANOM1)
      READ(4,221)ANOM2
      ENDIF
      WRITE(*,105)
  105 FORMAT(' DAME EL NUMERO DEL CASO:'/
     126X,' (1) EXISTE FUERZA APLICADA A LA MASA'/
     226X, '(2) EXISTE ACELERACION APLICADA A LA BASE'//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 32
      READ(*,*)NTYPE
      GO TO 63
   32 READ(4,*)NTYPE
   63 NTYPE=NTYPE-1
      WRITE(*,104)
  104 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA'/
     11X,' LA FUNCION DE EXITACION (NEQ):',//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 34
      READ(*,*)NEQ
      GO TO 35
   34 READ(4,*)NEQ
   35 WRITE(*,103)
  103 FORMAT(/' DAME LA MASA DEL SISTMA (SM):',//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 36
      READ(*,*)SM
      GO TO 37
   36 READ(4,*)SM
   37 WRITE(*,102)
  102 FORMAT(/' DAME LA CONSTANTE DEL RESORTE (SK): ',//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 68
      READ(*,*)SK
      GO TO 69
   68 READ(4,*)SK
  101 FORMAT(/' DAME LA CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO (SC):',//)
   69 WRITE(*,101)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 40
      READ(*,*)SC
      GO TO 41
   40 READ(4,*)SC
   41 WRITE(*,799)
  799 FORMAT(/' DAME INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT):',//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 42
      READ(*,*)DT
```

```
   42 READ(4,*)DT
   43 WRITE(*,669)
  669 FORMAT(/' DAME MAXIMA FUERZA DE REST. EN TRACCION (RT):'//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 44
      READ(*,*)RT
      GO TO 45
   44 READ(4,*)RT
   45 WRITE(*,96)
   96 FORMAT(/' DAME MAXIMA FUERZA DE REST. EN COMPRESION (RC):'//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 46
      READ(*,*)RC
      GO TO 47
   46 READ(4,*)RC
   47 CONTINUE
  335 FORMAT(1X,'N O M B R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X,'D E   D A T O S   I N I C I A L E S  :',A12//)
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
      WRITE(*,335)ANOM2
      WRITE(6,335)ANOM2
      END IF
      WRITE(6,97)NEQ,SM,SK,SC,DT,RT,RS
      WRITE(*,97)NEQ,SM,SK,SC,DT,RT,RC
   97 FORMAT(' D A T O S   I N I C I A L E S'///
     1,1X,'NUMERO DE PUNTOS DONDE ESTA DEFINIDA'/
     2,1X,'LA FUNCION DE EXCITACION (NEQ)................. = ',I15,/
     3,1X,'MASA (SM)...................................... = ',E15.7,/
     4,1X,'CONSTANTE DEL RESORTE (SK)..................... = ',E15.7,/
     5,1X,'CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO (SC).............. = ',E15.7,/
     6,1X,'INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT)................... = ',E15.7/
     7,1X,'MAXIMA FUERZA DE REST. EN TRACCION (RT)........ = ',E15.7/
     8,1X,'MAXIMA FUERZA DE REST. EN COMPRESION (RC)..... = ',E15.7,//)
      IF(NTYPE.EQ.0)WRITE(*,666)
      IF(NTYPE.EQ.0)WRITE(6,666)
  666 FORMAT(' ACTUA FUERZA SOBRE LA MASA',///)
      IF(NTYPE.EQ.1)WRITE(*,667)
      IF(NTYPE.EQ.1)WRITE(6,667)
  667 FORMAT(' ACTUA ACELERACION EN LA BASE',///)
      WRITE(*,79)
      READ(*,*)LABEL1
   79 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      DO 91 I=1,NEQ
      WRITE(*,95)I
   95 FORMAT(//' PARA EL PUNTO NO. ',I3,2X,'DAME:',/
     11X,'(A) : TIEMPO',/
     21X,'(B) :LA FUERZA EN LA MASA O LA ACELERACION DEL SUELO.'//)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 50
      READ(*,*)TC(I),X(I)
      GO TO 51
   50 READ(4,*)TC(I),X(I)
   51 CONTINUE
   91 CONTINUE
      WRITE(*,516)
      WRITE(6,516)
      WRITE(*,94)
      WRITE(6,94)
   94 FORMAT(21X,' T A B L A   I N I C I A L'//
     112X,' T I E M P O     A C E L E R A C I O N  O  F U E R Z A'//)
      DO 93 I=1,NEQ
      WRITE(*,92)TC(I),X(I)
      WRITE(6,92)TC(I),X(I)
   92 FORMAT(8X,E17.7,10X,E17.7)
   93 CONTINUE
      WRITE(*,79)
      READ(*,*)LABEL1
  516 FORMAT(//)
```

```
      DO 7 I=1,NEQ
    7 X(I)=-X(I)*SM
    5 UD=0.0
      UV=0.0
      UA=X(1)/SM
      F(1)=X(1)
      NT=TC(NEQ)/DT
      NT1=NT+1
      ANN=0.0
      NTM1=NT-1
      A1 = 3.0/DT
      A2 = 6.0/DT
      A3 = DT/2.0
      A4 = 6.0/DT**2
      YT = RT/SK
      YC = RC/SK
      KEY = 0
      SKP = SK
      II = 1
C     IMPRESION DE ENCABEZADOS
C     INTERPOLACION ENTRE LOS PUNTOS DE DATOS
      DO 10 I = 2,NT1
      AI = I-1
      T = AI*DT
      IF(T.GT.TC(NEQ)) GO TO 99
      IF(T.LE.TC(II+1)) GO TO 9
      ANN = -TC(II+1)+T - DT
      II = II+1
    9 ANN = ANN +DT
      F(I)=X(II)+(X(II+1)-X(II))*ANN/(TC(II+1)-TC(II))
   10 CONTINUE
   99 CONTINUE
C     LOOP RESPUESTA PASO A PASO
      WRITE(*,115)
      WRITE(6,115)
  115 FORMAT(//,10X,'RESPUESTA PERFECTAMENTE ELASTO-PLASTICA'/,10X,
     1 'SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD'//,6X,'TIEMPO',6X,'DESPL.',4X
     2,'VELOCIDAD',5X,'ACL.',5X,'KEY'/)
      DO 90 L=1,NTM1
      AL=L
      T=DT*AL
      SKB=SKP+A4*SM+A1*SC
      DFB=F(L+1)-F(L)+(A2*SM+3*SC)*UV+(3.0*SM+A3*SC)*UA
      DUD = DFB/SKB
      DUV = 3.0*DUD/DT-3.0*UV-UA*DT/2.0
      UD=UD+DUD
      UV=UV+DUV
      IF(KEY)11,12,13
   12 R = RT-(YT-UD)*SK
      SKP=SK
      IF(UD.GT.YC.AND.UD.LT.YT) GO TO 20
      IF(UD.LT.YC) GO TO 15
      KEY = 1
      SKP = 0.0
      R = RT
      GO TO 20
   13 IF(UV.GT.0.0) GO TO 20
      KEY = 0
      SKP =SK
      YT=UD
      YC=UD-(RT-RC)/SK
      R =RT-(YT-UD)*SK
      GO TO 20
   11 IF(UV.LT.0.0) GO TO 20
      KEY = 0
      SKP=SK
```

```
      YT=UD+(RT-RC)/SK
      YC=UD
      R=RT-(YT-UD)*SK
      GO TO 20
   15 KEY = -1
      R = RC
      SKP=0.0
   20 UA=(F(L+1)-SC*UV-R)/SM
      WRITE(6,120)T,UD,UV,UA,KEY
   90 WRITE(*,120)T,UD,UV,UA,KEY
  120 FORMAT(F10.3,3F12.4,I8)
      STOP
      END
```

A P E N D I C E   E2

PROGRAMA "JACOBI.FOR"

PROGRAMA "JACOBI.FOR"

E2.1 INTRODUCCION.

Las vibraciones libres de un sistema dinámico no amortiguado se calculan mediante la siguiente ecuación diferencial

$$[M]\cdot\langle\ddot{y}\rangle + [K]\cdot\langle y\rangle = \langle 0\rangle \qquad (E2.1.1)$$

donde las matrices [M] y [K] son, respectivamente, las matrices de masas y de rigideces.

Durante el proceso de solución de la citada ecuación diferencial se llega al planteamiento del sistema lineal homogeneo

$$[[K] - \omega^2[M]]\cdot\langle a\rangle = \langle a\rangle. \qquad (E2.1.2)$$

el cual es un problema de valores y vectores característicos.

El programa "JACOBI.FOR" calcula estos valores. En otros términos, el programa determina los siguientes parámetros:

ω^2 : Los valores característicos

$\langle\phi\rangle$: Los vectores característicos correspondientes

La matriz $[\phi]$ es la matriz modal del sistema, cuyas columnas se forman con los vectores caraterísticos y estos se normalizan de modo tal que se satisfacen las ecuaciones

$$\langle\phi\rangle_i^T \cdot [M] \cdot \langle\phi\rangle_i = 1, \qquad i = 1,2,\ldots,n \;.$$

Los vectores modales normalizados $\langle\phi\rangle_i$ se obtuvieron al dividir las componentes del vector $\langle a\rangle_i$ por $\sqrt{\langle a\rangle_i^T [M] \langle a\rangle_i}$.

Además se observa que se satisfacen las ecuaciones

$$\langle\phi\rangle_i^T \cdot [M] \cdot \langle\phi\rangle_j = 0, \qquad i \quad j.$$

Estas dos últimas correlaciones se pueden expresar equivalnetemente mediante

$$[\phi]^T \cdot [M] \cdot [\phi] = [I]. \qquad \text{(E2.1.3)}$$

E2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

Las principales variables usadas por el programa son:

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
A(I,I)	[K]	Matriz de rigideces
B(I,I)	[M]	Matriz de masas
X(I,I)	[ϕ]	Matriz modal
EIGV(I)	ω^2	Valor característico
D(I)		Area auxiliar de trabajo
N		Orden de la matriz A o B
RTOL		Tolerancia de la convergencia. (Fijada en 10E-12)

NSMAX	Maximo número de iteraciones
IFPR	Indice de impresión de resultados en iteraciones. IFPR = 1, no se imprimen. IFPR = 2, si se imprimen

Cuando los datos se proporcionan directemente, mediante el teclado, el usuario es guiado por el programa indicándosele paso a paso los datos que deben irse proporcionando.

Pero cuando los datos se alimentan mediante un archivo creado exprofeso en disco, se deben proporcionar los datos en el siguiente orden:

NOMBRE DEL ARCHIVO (hasta 12 caracteres alfanuméricos)

N

IFPR

A(I,I) (tantos renglones cuantos sean necesarios)

B(I,I) (tantos renglones cuantos sean necesarios)

E2.3 EJEMPLO

En la figura E2.3.1 se muestra la estructura de un edificio de dos niveles. Ahí se indica la carga que soporta cada uno de los pisos, además se supone que el peso de las paredes es de 20 lbs por piè cuadrado. El edificio está constituído por una serie de marcos erigidos cada 15 piès. Se pide obtener las frecuencias naturales y la matriz modal correspondiente.

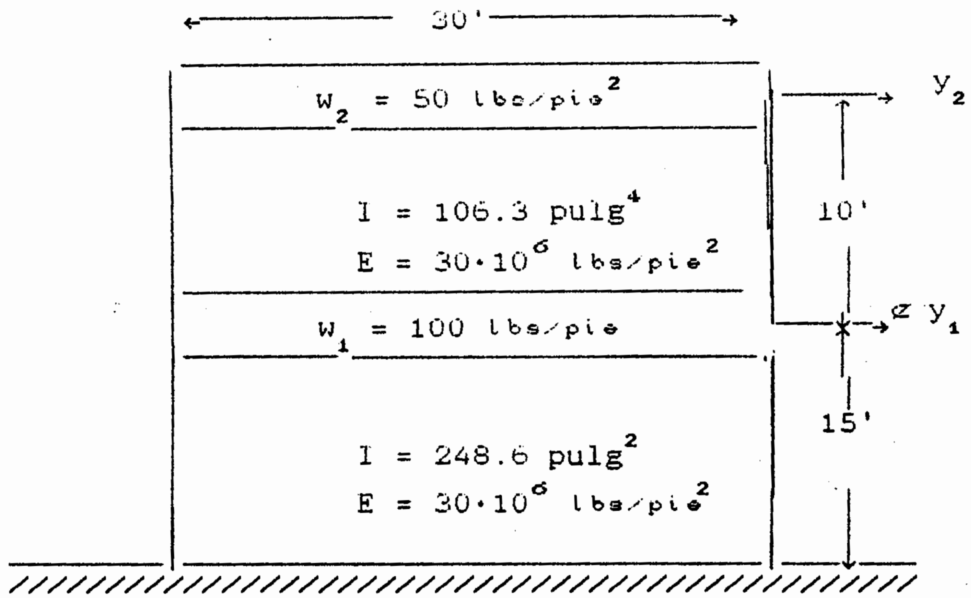


Fig. E2.3.1

Solución:

La estructura en cuestión se inserta dentro del modelo masa-resorte, donde se supone que la masa del edificio se encuentra concentrada en los entrepisos.

El diagrama de fuerzas se muestra en la siguiente figura:

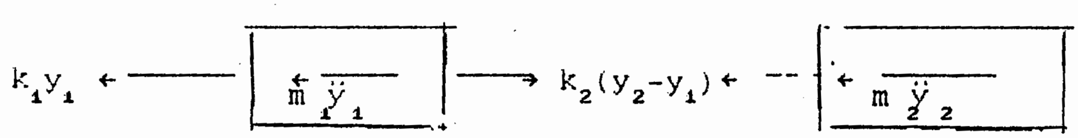


Fig. E2.3.2

Seguidamente se procede a determinar la magnitud de las masas.

$$W_1 = 100 \cdot 30 \cdot 15 + 20 \cdot 12.5 \cdot 15 \cdot 2 = 52{,}500.00 \text{ lbs}$$

$$W_2 = 50 \cdot 30 \cdot 15 + 20 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 2 = 25{,}000.00 \text{ lbs}$$

Y de aqui

$$m_1 = 136 \text{ lbs} \cdot \text{seg}^2/\text{pulg}$$

$$m_2 = 66 \text{ lbs} \cdot \text{seg}^2/\text{pulg}$$

Y dado que los marcos se suponen rigidos, la constante k del resorte se calcula mediante

$$k = \frac{12E(2I)}{L^3}$$

Esto es,

$$k_1 = \frac{12 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 248.6 \cdot 2}{(15 \cdot 12)^3} = 30{,}700.00 \text{ lbs/pulg}$$

$$k_2 = \frac{12 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 106.3 \cdot 2}{(10 \cdot 12)^3} = 44{,}300.00 \text{ lbs/pulg}$$

Asi pues, las matrices de masas y de rigideces son

$$[M] = \begin{bmatrix} 136.0 & 0.0 \\ 0.0 & 66.0 \end{bmatrix}$$

y

$$[K] = \begin{bmatrix} 75000.00 & -44300.00 \\ -44300.00 & 44300.00 \end{bmatrix}.$$

Estos elementos son suficientes para alimentar al programa "JACOBI.FOR". Tanto el listado de resultados como el archivo de datos usado se presentan a continuación.

DADAS LAS MATRICES DE MASAS B Y DE RIGIDECES A,
MEDIANTE EL METODO ITERATIVO DE JACOBI, SE CALCULAN
LOS VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS (MATRIZ MODAL)

N O M R E   D E L   A R C H I V O
D E   D A T O S   I N I C I A L E S   :DATJACOB.DAT

D A T O S   I N I C I A L E S

M A T R I Z   D E   M A S A S

```
 .7500000E+05   -.4430000E+05
-.4430000E+05    .4430000E+05
```

M A T R I Z   D E   R I G I D E C E S

```
 .1360000E+03    .0000000E+00
 .0000000E+00    .6600000E+02
```

ITERACION 1

V A L O R E S   P R O P I O S

.1399371D+03   .1082746D+04

ITERACION 2

V A L O R E S   P R O P I O S

.1399371D+03   .1082746D+04

V E C T O R E S   P R O P I O S

VECTOR PROPIO NUM. 1

.6436926D-01   .8132403D-01

VECTOR PROPIO NUM. 2

-.5665280D-01   .9240085D-01

```
DATJACOB.DAT
2
2
75000.0
-44300.0
-44300.0
44300.0
136.0
0.0
0.0
66.0
```

```
C     ESTE PROGRAMA CALCULA LOS VALORES PROPIOS (CUDRADO DE LA
C     FRECUENCIA NATURAL) Y LOS VECTORES PROPIOS (MODOS) DE UN
C     SISTEMA ESTRUCTURAL DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD
C     PROGRMA PRINCICPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(30,30),B(30,30),X(30,30),EIGV(30),D(30)
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
      OPEN(6,FILE='PRN')
      RTOL=1.E-12
      NSMAX=15
   60 FORMAT(//' DADAS LAS MATRICES DE MASAS B Y DE RIGIDECES A,'//
     11X,'MEDIANTE EL METODO ITERATIVO DE JACOBI, SE CALCULAN'//
     21X,'LOS VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS (MATRIZ MODAL)'///)
   61 FORMAT(1X,'N O M R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X,'D E   D A T O S   I N I C I A L E S  :',A12//)
      WRITE(*,60)
      WRITE(6,60)
   31 FORMAT(/' DAME MODO DE LECTURA DE DATOS'/
     11X,'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
     21X,'(2) LECTURA EN DISCO'//)
      WRITE(*,31)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
  221 FORMAT(A12)
  223 FORMAT(1X,A12//)
  222 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X,'EJEMPLO : DATOSE.DAT'//)
      WRITE(*,222)
      READ(*,221)ANOM1
      WRITE(*,223)ANOM1
      OPEN(4,FILE=ANOM1)
      READ(4,221)ANOM2
      ENDIF
      IF(LBL2.EQ.2)THEN
      WRITE(*,61)ANOM2
      WRITE(6,61)ANOM2
      ENDIF
   62 FORMAT(' D A T O S   I N I C I A L E S'///)
C     LECTURA DE LOS DATOS INICIALES
C
  104 FORMAT(/' DAME EL ORDEN N DE LAS MATRICES A y B '/
     11X,'A MATRIZ DE RIGIDECES'/,
     21X,'B MATRIZ DE MASAS',//)
      WRITE(*,104)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 34
      READ(*,*)N
      GO TO 35
   34 READ(4,*)N
  105 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DEL CASO:',/
     1,26X,'(1) NO IMPRIME DURANTE LA ITERACION'/
     2,26X,'(2) SI IMPRIME DURANTE LA ITERACION'//)
   95 FORMAT(//' DAME A(',I3,',',I3,')'/)
   35 WRITE(*,105)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 36
      READ(*,*)IFPR
      GO TO 37
   36 READ(4,*)IFPR
   37 IFPR = IFPR -1
   28 FORMAT(' DATOS CORRESPONDIENTES A LA MATRIZ DE RIGIDECES:',//)
      WRITE(*,28)
      DO 91 I=1,N
      DO 91 J=1,N
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 500
      WRITE(*,95)I,J
```

```
      GO TO 91
  500 READ(4,*)A(I,J)
      WRITE(*,107)I,J,A(I,J)
  107 FORMAT(' A(',I3,',',I3,')= ',F12.7/)
   91 CONTINUE
  106 FORMAT(//' DAME B(',I3,',',I3,')='/)
   29 FORMAT(' DATOS CORRESPONDIENTES A LA MATRIZ DE MASAS',//)
      WRITE(*,29)
      DO 92 I=1,N
      DO 92 J=1,N
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 51
      WRITE(*,106)I,J
      READ(*,*)B(I,J)
      GO TO 92
   51 READ(4,*)B(I,J)
      WRITE(*,108)I,J,B(I,J)
  108 FORMAT(/' B(',I3,',',I3')= ',F12.7/)
   92 CONTINUE
      WRITE(*,62)
      WRITE(6,62)
      WRITE(*,52)
      WRITE(6,52)
      DO 55 I=1,N
      WRITE(*,56)(A(I,J),J=1,N)
      WRITE(6,56)(A(I,J),J=1,N)
   55 CONTINUE
   52 FORMAT(//,'     M A T R I Z    D E    M A S A S'//)
   56 FORMAT(1X,4(E14.7,2X)/)
   53 FORMAT(//,'    M A T R I Z   D E   R I G I D E C E S'//)
   57 FORMAT(/' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'/)
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      WRITE(*,53)
      WRITE(6,53)
      DO 54 I=1,N
      WRITE(6,56)(B(I,J),J=1,N)
      WRITE(*,56)(B(I,J),J=1,N)
   54 CONTINUE
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      CALL JACOBI(A,B,X,EIGV,D,N,IFPR)
      CLOSE(6)
      CLOSE(4)
      STOP
      END
C     INICIA SUBRUTINA
C
      SUBROUTINE JACOBI(A,B,X,EIGV,D,N,IFPR)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(30,30),B(30,30),X(30,30),EIGV(30),D(30)
      NSMAX=15
 1980 FORMAT(/10X,'V A L O R E S    P R O P I O S'///)
      RTOL=1.D-12
      DO 10 I=1,N
      IF(A(I,I).GT.0. .AND. B(I,I).GT.0.)GO TO 4
      WRITE(*,2020)
      WRITE(6,2020)
 2020 FORMAT(25X,'E R R O R    E N    L A  M A T R I Z   A   O   B'/)
      RETURN
    4 D(I)=A(I,I)/B(I,I)
   10 EIGV(I)=D(I)
      DO 30 I=1,N
      DO 20 J=1,N
   20 X(I,J)=0.0
   30 X(I,I)=1.0
```

```
C
C
      NSWEEP=0
      NR=N-1
   40 NSWEEP=NSWEEP+1
      IF(IFPR.EQ.1)WRITE(*,2000)NSWEEP
      IF(IFPR.EQ.1)WRITE(6,2000)NSWEEP
C
C
      EPS=(0.01**NSWEEP)**2
      DO 210 J=1,NR
      JJ=J+1
      DO 210 K=JJ,N
      EPTOLA=(A(J,K)*A(J,K))/(A(J,J)*A(K,K))
      EPTOLB=(B(J,K)*B(J,K))/(B(J,J)*B(K,K))
      IF((EPTOLA.LT.EPS).AND.(EPTOLB.LT.EPS))GO TO 210
C
C
      AKK= A(K,K)*B(J,K)-B(K,K)*A(J,K)
      AJJ= A(J,J)*B(J,K)-B(J,J)*A(J,K)
      AB=  A(J,J)*B(K,K)-A(K,K)*B(J,J)
      CHECK=(AB*AB+4.0*AKK*AJJ)/4.0
      IF(CHECK)50,60,60
   50 WRITE(*,2020)
      WRITE(6,2020)
      RETURN
   60 SQCH=DSQRT(CHECK)
      D1=AB/2.0+SQCH
      D2=AB/2.0-SQCH
      DEN=D1
      IF(ABS(D2).GT.DABS(D1))DEN=D2
      IF(DEN)80,70,80
   70 CA=0.0
      CG=-A(J,K)/A(K,K)
      GO TO 90
   80 CA=AKK/DEN
      CG=-AJJ/DEN
C
C
   90 IF(N-2)100,190,100
  100 JP1=J+1
      JM1=J-1
      KP1=K+1
      KM1=K-1
      IF(JM1-1)130,110,110
  110 DO 120 I=1,JM1
      AJ=A(I,J)
      BJ=B(I,J)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I,K)
      A(I,J)=AJ+CG*AK
      B(I,J)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
  120 B(I,K)=BK+CA*BJ
  130 IF(KP1-N)140,140,160
  140 DO 150 I=KP1,N
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(K,I)
      BK=B(K,I)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(K,I)=AK+CA*AJ
  150 B(K,I)=BK+CA*BJ
  160 IF(JP1-KM1)170.170.190
```

```
  170 DO 180 I=JP1,KM1
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I,K)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
  180 B(I,K)=BK+CA*BJ
  190 AK=A(K,K)
      BK=B(K,K)
      A(K,K)=AK+2.0*CA*A(J,K)+CA*CA*A(J,J)
      B(K,K)=BK+2.0*CA*B(J,K)+CA*CA*B(J,J)
      A(J,J)=A(J,J)+2.0*CG*A(J,K)+CG*CG*AK
      B(J,J)=B(J,J)+2.0*CG*B(J,K)+CG*CG*BK
      A(J,K)=0.0
      B(J,K)=0.0
      DO 200 I=1,N
      XJ=X(I,J)
      XK=X(I,K)
      X(I,J)=XJ+CG*XK
  200 X(I,K)=XK+CA*XJ
  210 CONTINUE
C
C
      DO 220 I=1,N
      IF(A(I,I).GT.0.0 .AND. B(I,I).GT.0.0) GO TO 220
      WRITE(*,2020)
      WRITE(6,2020)
      RETURN
  220 EIGV(I)=A(I,I)/B(I,I)
      IF(IFPR.EQ.0)GO TO 230
      WRITE(*,2030)
      WRITE(6,2030)
      WRITE(*,2010)(EIGV(I),I=1,N)
      WRITE(6,2010)(EIGV(I),I=1,N)
 2030 FORMAT(15X,'V A L O R E S    P R O P I O S '/)
C
C
  230 DO 240 I=1,N
      TOL=RTOL*D(I)
      DIF=DABS(EIGV(I)-D(I))
      IF(DIF.GT.TOL)GO TO 280
  240 CONTINUE
C
C
      EPS=RTOL*RTOL
      DO 250 J=1,NR
      JJ =J+1
      DO 250 K=JJ,N
      EPSA=(A(J,K)*A(J,K))/(A(J,J)*A(K,K))
      EPSB=(B(J,K)*B(J,K))/(B(J,J)*B(K,K))
      IF((EPSA.LT.EPS).AND.(EPSB.LT.EPS))GO TO 250
      GO TO 280
  250 CONTINUE
C
C
  255 DO 260 I=1,N
      DO 260 J=1,N
      A(J,I)=A(I,J)
  260 B(J,I)=B(I,J)
      DO 270 J=1,N
      BB=DSQRT(B(J,J))
      DO 270 K=1,N
  270 X(K,J)=X(K,J)/BB
   57 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
```

```
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      ENDIF
      IF(IFPR.EQ.0) THEN
      WRITE(*,1980)
      WRITE(6,1980)
      WRITE(6,2010)(EIGV(I),I=1,N)
      WRITE(*,2010)(EIGV(I),I=1,N)
      ENDIF
      IF(IFPR.EQ.0)THEN
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      ENDIF
      WRITE(6,1990)
      WRITE(*,1990)
      DO 1991 LJ=1,N
      WRITE(*,59)LJ
      WRITE(6,59)LJ
   59 FORMAT(//15X,'VECTOR PROPIO NUM. ',I4/)
      WRITE(*,2010)(X(LI,LJ),LI=1,N)
 1991 WRITE(6,2010)(X(LI,LJ),LI=1,N)
 1990 FORMAT(/15X,'V E C T O R E S   P R O P I O S',/)
      RETURN
  280 DO 290 I=1,N
  290 D(I)=EIGV(I)
      IF(NSWEEP.LT.NSMAX)GO TO 40
      GO TO 255
 2000 FORMAT(/'  ITERACION ',I4//)
 2010 FORMAT(6X,4D14.7,2X,/)
      END
```

A P E N D I C E   F2

PROGRAMA "MODUS.FOR"

PROGRAMA "MODUS.FOR"

F2.1 INTRODUCCION.

En el Apéndice E2 se vió como el movimiento dinámico libre de una estructura puede ser descrito en términos de sus distintos modos de vibrar. En cambio, ahora se muestra como el sistema estructural sujeto a movimiento forzado, también puede se descrito en términos de los citados modos. A este fin, el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se transforma en un conjunto de ecuaciones diferenciales desacopladas, donde cada una de éstas contiene una y sólo una variables dependiente.

Sea de nueva cuenta la estructura mostrada en la figura E2.3.1, misma que ahora se encuentra sujeta a la acción de las fuerzas variables en el tiempo, $F_1(t)$ y $F_2(t)$, aplicadas a los niveles primero y segundo, respectivamente.

Bajo estas circunstancias las ecuaciones de movimiento son pues,

$$m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)\cdot y_1 - k_2 y_2 = F_1(t) \qquad \text{(F2.1.1.a)}$$

y

$$m_2\ddot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 = F_2(t). \qquad \text{(F2.1.1.b)}$$

Se supone ahora que las soluciones de estas dos ecuaciones son de la forma

$$y_1(t) = a_{11}\cdot z_1(t) + a_{12}\cdot z_1(t) \qquad \text{(F2.1.2.a)}$$

y

$$y_1(y) = a_{21}\cdot z_1(t) + a_{22}\cdot z_2(t) \qquad \text{(F2.1.2.b)}$$

donde la matriz $[a_{ij}]$ es la matriz modal del sistema.

Al sustituir las expresiones (F2.1.2) en las ecuaciones (F2.1.1) y después de multiplicar la primera de éstas por el término a_{11} y la segunda por a_{21} para seguidamente sumar los productos así obtenidos, y tomando en cuenta las relaciones de ortogonalidad, se llega a

$$(m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{22}^2)\cdot\ddot{z}_1 + \omega_1^2\cdot(m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2)\cdot z_1 = a_{11}F_1(t)+a_{21}F_2(t) \qquad \text{(F2.1.3.a)}$$

De modo análogo se obtiene

$$(m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2)\cdot\ddot{z}_2 + \omega^2(m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{21}^2)\cdot z_2 = a_{12}F_1(t)+a_{22}F_2(t) \qquad \text{(F2.1.3.b)}$$

Estas dos últimas ecuaciones son de la forma

$$M_1\ddot{z}_1 + K_1 z_1 = P_1(t) \qquad \text{(F2.1.4.a)}$$

$$M_2\ddot{z}_2 + K_2 z_2 = P_2(t) \qquad \text{(F2.1.4.b)}$$

Las masa modales son, por supuesto,

$$M_1 = m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2$$
$$M_2 = m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2 \,.$$

Las constantes de rigidez modales son

$$K_1 = \omega_1^2 \cdot M_1$$
$$K_2 = \omega_2^2 \cdot M_2.$$

Y por último, las fuerzas modales son

$$P_1(t) = a_{11}F_1(t) + a_{21}F_2(t)$$
$$P_2(t) = a_{12}F_1(t) + a_{22}F(t).$$

Por otra parte, si los vectores característicos han sido ya normalizados, tal y como lo indica la correlación (E2.1.3), las ecuaciones (F2.1.4) adquiere la siguiente presentación:

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = P_1(t) \qquad \text{(F2.1.5.a)}$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = P_2(t) \qquad \text{(F2.1.5.b)}$$

donde

$$P_1(t) = \phi_{11}F_1(t) + \phi_{21}F_2(t) \qquad \text{(F2.1.6.a)}$$
$$P_2(t) = \phi_{12}F_1(t) + \phi_{22}F_2(t). \qquad \text{(F2.1.6.b)}$$

La solución de las ecuaciones (F2.1.5) puede ser determinada por diversos métodos, por ejemplo, mediante la integral de Duhamel.

Por último, cabe señalar que los desplazamientos máximos se calculan mediante las siguientes fórmulas.

$$y_{1max} = \sqrt{(\phi_{11}z_{1max})^2 + (\phi_{12}z_{2max})^2} \qquad \text{(F2.1.7.a)}$$

$$y_{2max} = \sqrt{(\phi_{21}z_{1max})^2 + (\phi_{22}z_{2max})^2} \qquad \text{(F2.1.7.b)}$$

Sea que la base de la estructura mostrada en la figura E2.3.1 se encuentra sujeta a movimiento acelerado, determinándose el desplazamiento del suelo mediante la variable $y_s = y_s(t)$.

Las ecuaciones de movimiento son

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_s) - k_2(y_2-y_1) = 0 \qquad \text{(F2.1.8.a)}$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = 0. \qquad \text{(F2.1.8.b)}$$

Expresando ahora los desplazamientos de los pisos en términos de los desplazamientos relativos

$$u_1 = y_1 - y_s \qquad \text{(F2.1.9.a)}$$

$$u_2 = y_2 - y_s, \qquad \text{(F2.1.9.b)}$$

las ecuaciones (F2.1.8) se transforman así

$$m_1\ddot{u} + (k + k_2)\cdot u - k_2\cdot u_2 = -m_1\ddot{y}_s \qquad \text{(F2.1.10.a)}$$

$$m_2\ddot{u}_2 - k_2\cdot u_1 + k_2\cdot u_2 = -m_2\ddot{y}_s. \qquad \text{(F2.1.10.b)}$$

Y de aquí, por supuesto, se pueden obtener ecuaciones semejantes, por la forma, a las dadas en (F2.1.5), esto es

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2\cdot z_1 = \Gamma_1\ddot{y}_s(t) \qquad \text{(F2.1.11.a)}$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2\cdot z_2 = \Gamma_2\ddot{y}_s(t) \;, \qquad \text{(F2.1.11.b)}$$

donde Γ_1 y Γ_2 son los llamdados <u>factores de participación</u>, y están dados por

$$\Gamma_1 = \frac{m_1 a_{11} + m_2 a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2} \qquad \text{(F2.1.12.a)}$$

$$\Gamma_2 = \frac{m_1 a_{12} + m_2 a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2} \qquad \text{(F2.1.12.b)}$$

Así pues, de acuerdo a (F2.1.2) se tiene que

$$u_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \tag{F2.1.13.a}$$
$$u_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \tag{F2.1.13.b}$$

Resulta cómodo introducir el siguiente cambio de variables:

$$z_1 = \Gamma_1 \cdot g_1 \tag{F2.1.14.a}$$
$$z_2 = \Gamma_2 \cdot g_2 . \tag{F2.1.14.b}$$

Y de aquí se obtienen

$$\ddot{g}_1 + \omega_1^2 \cdot g_1 = \ddot{y}_s(t) \tag{F2.1.15.a}$$

$$\ddot{g}_2 + \omega_2^2 \cdot g_2 = \ddot{y}_s(t). \tag{F2.1.15.b}$$

Finalmente, resolviendo las ecuaciones desacopladas se llega a

$$u_1(t) = \Gamma_1 a_{11} \cdot g_1(t) + \Gamma_2 a_{12} \cdot g_2(t) \tag{F2.1.16.a}$$
$$u_2(t) = \Gamma_1 a_{21} \cdot g_2(t) + \Gamma_2 a_{22} \cdot g_2(t) \tag{F2.1.16.b}$$

En la práctica se acostumbra obtener las respuestas modales máximas g_{1max} y g_{2max} a partir de los diagramas espectrales. Una vez conocidas los valores u_{1max} y u_{2max} se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$u_{1max} = \sqrt{(\Gamma_1 a_{11} g_{1max})^2 + (\Gamma_2 a_{12} g_{2max})^2}, \qquad \text{(F2.1.17.a)}$$

$$u_{2max} = \sqrt{(\Gamma_1 a_{12} g_{1max})^2 + (\Gamma_2 a_{22} g_{2max})^2}\ . \qquad \text{(F2.1.17.b)}$$

F2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA.

El programa "MODUS.FOR" permite obtener, para un sistema de varios grados de libertad, la respuesta al cortante. El método empleado es el de superposición modal descrito en la sección anterior.

Seguidamente se detallan las principales variables usadas por el programa.

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
ND	N	Número de grados de libertad
GR	g	Indice de excitación. Para el caso de movimiento de la base, g = acel. de la gravedad. Para el caso de fuerzas

		actuando sobre la estructura
		g = 0
EIGEN(I)	ω^2	Cuadrado de las frecuencias naturales.(Valores Propios)
X(I,J)	$[\phi]$	Matriz modal. (Vectores Propios)
DT		Paso de integración
TMAX		Intervalo Rango en el tiempo
NQ(L)		Número de puntos que definen a la función de excitación en nivel de piso L
M(I,J)		Matriz de Masas
T(I)	t_i	Tiempo en el i-ésimo punto
P(I)	$p(t_i)$	Fuerza a aceleración en el i-ésimo punto
XIS(I)	ξ_i	Relaciónes de amortiguamiento

Cuando los datos se proporcionan directamente, mediante el teclado, el usuario es guiado por el programa indicándosele paso a paso los datos que deben irse proporcionando.

Pero cuando los datos se alimentan mediante un archivo creado exprofeso en disco, se deben proporcionar los datos en el siguiente orden:

NOMBRE DEL ARCHIVO (Hasta 12 caracteres alfanuméricos)
N
GR
:
M(I,J) (La matriz se lee por elementos

	porcionados según renglones)
EIGEN(I)	(Tantos renglones cuantos sea necesarios)
X(I,J)	(La matriz se lee por elementos porcionados según renglones)
DT	
TMAX	
NQ(J)	
T(I),P(I)	(Para I = 1,NQ(1))
XIS(I)	(Tantos renglones cuantos sean rios)

F3.3 EJEMPLO

Se pide encontrar la respuesta de la estructura mostrada en la figura E2.3.1, cuando el suelo empieza a moverse súbitamente con una aceleración igual a $\ddot{y}_s$ = 0.28·g, donde g es la constante de aceleración de la gravedad.

Solución

Tomando para este problema los datos consecuentes dados en el Apéndice E2, se tiene que el número de grados de libertad N es igual 2. La aceleración de la gravedad es 360 pulg/seg^2. Los elementos de la matriz de masa son 136.0, 0.0, 0.0 y 66.0. Los cuadrados de los valores propios, esto es los valores de ω^2 son, respectivamente, 140.0 y 1082.0. Los elementos de la matriz modal son 0.0644, 0.0567, 0.0813 y -0.0924. Actuando en forma un poco conservadora, se consideró conveniente estudiar el fenómenos considerando la acción de la fuerza durante un minuto, o sea TMAX = 1.0. Y como paso iterativo se tomó DT = 0.05 seg. Por otra parte, dado que la magnitud de la aceleración en la base de la estructura es constante, esta queda determinada por dos puntos, en consecuencia, NQ = 2. Se aclara que dado que se estudia a la estructura afectada por un movimiento acelerado de su base y no el caso de fuerzas actuando directamente sobre la estructura del edificio, entonces el programa considera automáticamente que el término forzante, para cada uno de los niveles, estará dado por el mismo número de puntos, esto es dos. De acuerdo a esta consideración T(1) = 0.0, P(1) = 0.28 y T(2) = 1.0, P(2) = 0.28. Por otra parte no se consideró a la estructura amortiguada, de aquí que XSI(1) = 0.0 y XSI(2) = 0.0.

Con estos datos se puede alimentar al programa "MODUS.FOR". El listado de resultado se presenta a continuación.

```
ROGRAMA "MODUS.FOR".  ESTE PROGRAMA CALCULA LA
A RESPUESTA DE UN SISTEMA , DE VARIOS GRADOS DE
IBERTAD MEDIANTE EL METODO DE SUPERPOSICION MODAL


 A T O S   I N I C I A L E S


 O M B R E   D E L   A R C H I V O
 E   D A T O S   I N I C I A L E S  :DATOS8.DAT


 A T R I Z   D E   M A S A S

     .1360E+03      .0000E+00
     .0000E+00      .6600E+02

 A T R I Z    M O D A L

     .6440E-01      .5670E-01
     .8130E-01     -.9240E-01

UADRADOS DE LAS FRECUENCIAS NATURALES ( EIGENVALORES ) ,

     .1400E+03      .1082E+04


UMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.............. =              2
ONSTANTE DE ACELERACION DE LA GRAVEDAD (GR).... =       .3860E+03
NCREMENTO EN EL TIEMPO (DT).................... =       .5000E-01
ANGO DEL TIEMPO (TMAX)......................... =       .1000E+01


ARA LA FUERZA NUM.   1  EN EL TIEMPO       .0000
    EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES       .2800


ARA LA FUERZA NUM.   1  EN EL TIEMPO      1.0000
    EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES       .2800


IVEL NUMERO :    1
OEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO =   .0000E+00

IVEL NUMERO :    2
OEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO =   .0000E+00
```

RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTICO

TIEMPO	DESPLAZAMIENTO DE LAS COORDENADAS NODALES	
.000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.500E-01	-.1292E+00	-.1347E+00
.100E+00	-.4550E+00	-.5218E+00
.150E+00	-.8516E+00	-.1054E+01
.200E+00	-.1204E+01	-.1519E+01
.250E+00	-.1405E+01	-.1738E+01
.300E+00	-.1364E+01	-.1672E+01
.350E+00	-.1086E+01	-.1358E+01
.400E+00	-.6894E+00	-.8658E+00
.450E+00	-.3135E+00	-.3531E+00
.500E+00	-.6267E-01	-.3318E-01
.550E+00	-.2012E-01	-.1817E-01
.600E+00	-.2245E+00	-.2737E+00
.650E+00	-.6048E+00	-.7155E+00
.700E+00	-.1008E+01	-.1232E+01
.750E+00	-.1302E+01	-.1640E+01
.800E+00	-.1410E+01	-.1763E+01
.850E+00	-.1286E+01	-.1572E+01
.900E+00	-.9521E+00	-.1169E+01

```
DA[redacted]OS8.DAT
2
386.0
13[redacted].0
0.[redacted]
0.0
66[redacted]0
14[redacted].0
10[redacted]2.0
0.0644
0.[redacted]567
0[redacted]813
-0.0924
0.[redacted]5
1.[redacted]
2
0.[redacted],0.28
1.[redacted],0.28
0.[redacted]
0.0
```

15-F2

```
C      PROGRAMA PRINCIPAL
C      PROGRAMA "MODUS.FOR"
C      CALCULA LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE VARIOS
C      GRADOS DE LIBERTAD.
       IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
       DIMENSION EIGEN(40),X(40,40),SM(40,40),F(40,40)
       COMMON LBL2
       CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
       OPEN(6,FILE='PRN')
C      ENTRADA DE DATOS
    20 FORMAT(' PROGRAMA "MODUS.FOR".  ESTE PROGRAMA CALCULA LA',/
      11X,'LA RESPUESTA DE UN SISTEMA , DE VARIOS GRADOS DE'/
      21X,'LIBERTAD MEDIANTE EL METODO DE SUPERPOSICION MODAL',//)
       WRITE(*,20)
       WRITE(6,20)
   990 FORMAT(//' D A T O S   I N I C I A L E S'///)
       WRITE(*,990)
       WRITE(6,990)
    21 FORMAT(/' DAME MÖDO DE LECTURA DE DATOS'/
      11X,'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
      21X,'(2) LECTURA EN DISCO'//)
       WRITE(*,21)
       READ(*,*)LBL2
    22 FORMAT(A12)
    23 FORMAT(1X,A12///)
    24 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
      11X,'EJEMPLO : DATOS£.DAT'//)
    25 FORMAT(1X,'N O M B R E   D E L   A R C H I V O'//
      11X,'D E   D A T O S   I N I C I A L E S  :',A12//)
    26 FORMAT(' D A T O S   I N I C I A L E S'///)
    27 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):'//)
    28 FORMAT(/' DAME LA CONSTANTE DE ACELERACION (GR):'/
      11X,'(SI ACTUAN FUERZAS EN LAS MASAS, ENTONCES  GR = 0)'//)
    29 FORMAT(/' DAME LOS CUADRADOS DE LAS FRECUENCIAS NATURALES'/
      11X,' (VALORES PROPIOS, W**2)'//)
    30 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ MODAL (X) :'//)
    31 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ DE MASAS (M) :'//)
       IF(LBL2.EQ.2) THEN
C      NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS: "DATOS£.DAT"A
       WRITE(*,24)
       READ(*,22)ANOM1
       OPEN(4,FILE=ANOM1)
       READ(4,22)ANOM2
       WRITE(*,25)ANOM2
       WRITE(6,25)ANOM2
       ENDIF
       WRITE(*,27)
       IF(LBL2.EQ.2) GO TO 35
       READ(*,*)ND
       GO TO 36
    35 READ(4,*)ND
    36 WRITE(*,28)
       IF(LBL2.EQ.2) GO TO 37
       READ(*,*)GR
       GO TO 873
    37 READ(4,*)GR
   873 IF(GR.EQ.0.0) GO TO 38
       WRITE(*,871)
       IF(LBL2.EQ.2)GO TO 870
   871 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ DE MASAS (SM)',//)
   872 FORMAT(/' DAME EL TERMINO SM(',I3,I3,')'/)
       DO 4 I=1,ND
       DO 4, J=1,ND
       WRITE(*,872)I,J
```

```
    4 CONTINUE
      GO TO 38
  870 DO 5 I=1,ND
      DO 5 J=1,ND
      READ(4,*)SM(I,J)
    5 CONTINUE
   38 WRITE(*,29)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 39
   40 FORMAT(//' DAME EIGEN(',I3,') '/)
      DO 41 I=1,ND
      WRITE(*,40)I
      READ(*,*)EIGEN(I)
   41 CONTINUE
      GO TO 43
   39 DO 42 I=1,ND
      READ(4,*)EIGEN(I)
   42 CONTINUE
   43 WRITE(*,30)
   45 FORMAT(//' DAME X(',I3,',',I3,')'/)
      DO 46 I=1,ND
      DO 46 J=1,ND
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 44
      WRITE(*,45)I,J
      READ(*,*)X(I,J)
      GO TO 46
   44 READ(4,*)X(I,J)
   46 CONTINUE
  776 FORMAT(/' M A T R I Z   D E   M A S A S'//)
  777 FORMAT(/' M A T R I Z      M O D A L'//)
  778 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      WRITE(*,776)
      WRITE(6,776)
  779 FORMAT(1X,4E15.4)
      DO 780 I=1,ND
      WRITE(*,779)(SM(I,J),J=1,ND)
      WRITE(6,779)(SM(I,J),J=1,ND)
  780 CONTINUE
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
      WRITE(*,777)
      WRITE(6,777)
      DO 781 I=1,ND
      WRITE(*,779)(X(I,J),J=1,ND)
      WRITE(6,779)(X(I,J),J=1,ND)
  781 CONTINUE
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
  782 FORMAT(/' CUADRADOS DE LAS FRECUENCIAS NATURALES ( EIGENVALORES )
     1,'//)
      WRITE(*,782)
      WRITE(6,782)
      WRITE(*,779)(EIGEN(I),I=1,ND)
      WRITE(6,779)(EIGEN(I),I=1,ND)
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
      CALL MODAL (ND,EIGEN,X,F,GR,SM)
      CLOSE(4)
      CLOSE(6)
      STOP
      END
C
      SUBROUTINE MODAL (ND,EIGEN,X,F,GR,SM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8INT1,INT2,INT3,INT4,K,M
      DIMENSION EIGEN(40),X(40,40),XIS(40),F(40,40),P(40),T(40),Y(40,40)
```

```
      COMMON LBL2

      INT1(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DCOS(WD*TAU)+WD*DSIN(WD*TAU))/DWSQ
      INT2(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DSIN(WD*TAU)-WD*DCOS(WD*TAU))/DWSQ
      INT3(TAU)=TAU*INT2(TAU)-XIWD*INT2(TAU)/DWSQ+WD*INT1(TAU)/DWSQ
      INT4(TAU)=TAU*INT1(TAU)-XIWD*INT1(TAU)/DWSQ-WD*INT2(TAU)/DWSQ
C
C     LECTURA E INTERPOLACION DE FUNCIONES FORZANTES
C
   32 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DISTINTO DE PUNTOS DONDE ESTAN'/
     11X,'DEFINIDAS LAS FUNCIONES DE EXCITACION VARIABLES ',/
     21X,'EN LA COORDENADA DEL TIEMPO (NG=1 SI ACTUA ACELERACION)'//)
   33 FORMAT(/' DAME EL INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT):',//)
   34 FORMAT(/' DAME EL RANGO EN EL TIEMPO (TMAX):',//)
      NG=ND
      IF(GR.NE.0.) NG=1
      NNN=40
      WRITE(*,33)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 47
      READ(*,*)DT
      GO TO 48
C
   47 READ(4,*)DT
   48 WRITE(*,34)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 49
      READ(*,*)TMAX
      GO TO 60
  778 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
   49 READ(4,*)TMAX
  775 FORMAT(///
     11X,'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.............. = ',I15,/
     21X,'CONSTANTE DE ACELERACION DE LA GRAVEDAD (GR).... = ',E15.4,/
     31X,'INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT).................... = ',E15.4,/
     41X,'RANGO DEL TIEMPO (TMAX)......................... = ',E15.4,/
     5///)
      WRITE(*,775)ND,GR,DT,TMAX
      WRITE(6,775)ND,GR,DT,TMAX
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
   60 WRITE(*,32)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 61
  772 FORMAT(/,' DAME EL NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINE A LA FUNCION',/
     11X,'DE EXCITACION  NUM ',I3,' O SEA DAME EL VALOR DE NQ(',I3,')'/)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 61
      DO 771 L=1,NG
      WRITE(*,772)L,L
      READ(*,*)NQ(L)
      WRITE(*,783)L,NQ(L)
  783 FORMAT(/' EL NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINEN A LA FUNCION NUM.'I3,/
     1,' ES :' I3/)
      WRITE(6,783)L,NQ(L)
  771 CONTINUE
      GO TO 62
   61 DO 773 L=1,NG
      WRITE(*,772)L,L
      READ(4,*)NQ(L)
  773 CONTINUE
   62 DO 76 I=1,NNN
      FF(I)=0.0
      DO 76 J=1,NNN
   76 F(I,J)=0.0
      DO 77 ID=1,NG
      NEQ=NQ(ID)
      IF(NEQ.EQ.0) GO TO 77
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 63
```

```
     1,1X,'(A):'DAME EL VALOR DE T(',I3,')'/
     2,1X,'(B): DAME EL VALOR DE P(',I3,')'/)
      DO 65 L = 1,NEQ
      WRITE(*,64)ID,L,L
      READ(*,*)T(L),P(L)
   65 CONTINUE
      GO TO 67
   63 DO 66 L=1,NEQ
      WRITE(*,64)ID,L,L
      READ(4,*)T(L),P(L)
   66 CONTINUE
      DO 785 L=1,NEQ
  784 FORMAT(/' PARA LA FUERZA NUM. 'I3,'  EN EL TIEMPO ',F10.4,/
    1        '          EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES ',F10.4//)
      WRITE(*,784)ID,T(L),P(L)
      WRITE(6,784)ID,T(L),P(L)
  785 CONTINUE
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
   67 NT=T(NEQ)/DT
      IF(NT.GT.TMAX/DT) NT=TMAX/DT
      NT1=NT+1
      FF(1)=P(1)
      ANN = 0.0
      II=1
      DO 19 I=2,NT1
      AI = I-1
      TA = AI*DT
      IF(TA.GT.T(NEQ)) GO TO 160
      IF(TA.LE.T(II+1)) GO TO 9
      ANN = -T(II+1)+TA-DT
      II = II+1
    9 ANN = ANN + DT
      FF(I)=P(II)+(P(II+1)-P(II))*ANN/(T(II+1)-T(II))
      IF(GR.NE.0.)FF(I)=FF(I)*GR
      F(ID,I) = FF(I)
   19 CONTINUE
  160 CONTINUE
   77 CONTINUE
C
C     DETERMINACION DEL TIEMPO Y FUERZAS EQUIVALENTES
C
      NT = TMAX/DT
      DO 17 L=1,NNN
      AL = L -1
      T(L) = T(1) + AL*DT
      IF(GR.EQ.0.) GO TO 17
      DO 18 ID=1,ND
   18 F(ID,L)=-FF(L)*SM(ID,ID)
   17 CONTINUE
C
C     LECTURA DE AMORTIGUAMIENTOS E INICIALIZACION
C
      DO 75 L=1,ND
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 74
   73 FORMAT(/' DAME EL AMORTIGUAMIENTO XIS(',I3,')'//)
      WRITE(*,73)L
      READ(*,*)XIS(L)
      GO TO 75
C
   74 READ(4,*)XIS(L)
   75 CONTINUE
  786 FORMAT(/' NIVEL NUMERO : 'I3,/
     11X'COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = ',E10.4/)
  100 FORMAT(8E10.3)
```

```
      WRITE(*,786)L,XIS(L)
      WRITE(6,786)L,XIS(L)
  787 CONTINUE
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
C     ESCRITURA DE ENCABEZADOS
  991 FORMAT(//' I M P R E S I O N   D E   R E S U L T A D O S'///)
      WRITE(*,991)
      WRITE(6,991)
      WRITE(*,700)
      WRITE(6,700)
  700 FORMAT(/9X,'RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTICO',//,
     16X,'TIEMPO',5X,'DESPLAZAMIENTO DE LAS COORDENADAS NODALES',/)
      NT1 = NT + 1
      DO 50 ID = 1,ND
      DO 10 IT = 1,NT1
      P(IT) = 0.0
      DO 10 I = 1,ND
   10 P(IT) = P(IT) + F(I,IT)*X(I,ID)
      M = 1.0
      K = EIGEN(ID)
      XI = XIS(ID)
    6 FIM1 = P(I)
      TIM1 = T(1)
      ATI = 0.0
      BTI = 0.0
      DAT = 0.0
      DBT = 0.0
      Y(ID,1) = 0.0
      OMEGA = DSQRT(K/M)
      CRIT = 2.*DSQRT(K*M)
      C = XI*CRIT
      WD = OMEGA*DSQRT(1.0-(XI**2))
      XIWD = XI*OMEGA
      DWSQ = XIWD**2 + WD**2
C     BUCLE SOBRE EL TIEMPO Y SOLUCION RESPECTO
C     DESPLAZAMIENTOS NODALES
      NM1 = NT - 1
      DO 1 I = 1,NM1
      FI= P(I+1)
      TI = T(I+1)
      DFTI = FI - FIM1
      DTI = TI - TIM1
      FT = DFTI/DTI
      G = FIM1 - TIM1*FT
      AI = INT1(TI) - INT1(TIM1)
      BI = INT2(TI) - INT2(TIM1)
      VS = INT3(TI) - INT3(TIM1)
      VC = INT4(TI) - INT4(TIM1)
      AI = AI*G
      AI = AI + FT*VC
      ATI = ATI + AI
      BI = BI*G
      BI = BI + FT*VS
      BTI = BTI + BI
      Y(ID,I+1)=DEXP(-XIWD*TI)*(ATI*DSIN(WD*TI)-BTI*DCOS(WD*TI))/(M*WD)
      TIM1 = TI
      FIM1 = FI
    1 CONTINUE
   50 CONTINUE
      DO 53 IT = 1,NT
      DO 52 I = 1,ND
      UD(I) = 0.0
      DO 52 J = 1,ND
   52 UD(I) = UD(I) + X(I,J)*Y(J,IT)
```

```
      WRITE(6,301) T(IT),(UD(L),L=1,ND)
   53 WRITE(*,301) T(IT),(UD(L),L=1,ND)
  301 FORMAT(1X,E10.3,6E10.4)
      RETURN
      END
```

A P E N D I C E   G2

PROGRAMA   "SRESB.FOR"

G2.1 INTRODUCCION

El programa "SRESB.FOR" permite calcular la respuesta dinámica, en el rango elástico, para el caso de tenerse un movimiento acelerado en la base de la estructura. Las ecuaciones de movimiento se desacoplan haciendo uso del método de superposición modal.

A tal propósito se utiliza la subrutina JACOBI utilizada en el programa del mismo nombre y ya presentada en el Apéndice E2. Se conocen así los valores carateristicos ω^2 y la matriz modal $[\Phi]$. Seguidamente mediante la subrutina "MODAL" contenida en el programa "MODUS", presentatado en el Apéndice F2, se resuelven las ecuaciones modales usando la integral de Duhamel. En cada paso las soluciones de las ecuaciones modales se combinan a fin de obtener la respuesta en términos de las coordenadas originales.

G2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

El programa 'SRESB.FOR" permite obtener los desplazamientos verticales de cada uno de los niveles de la estructura analizada según el paso en el tiempo, cuando aquella se encuentra sometida a moviemto acelerado en su base. De hecho en este programa se combinan las subrutianas ya citadas con la resolución de la integral de Duhamel según se presentó en el programa "IMPULSO.FOR".

Importa observar como la subrutina MODAL considera la acción de una sola fuerza, a saber, la aceleración en la base de la estructura.

Seguidamente se detallan las principales variables usadas por el programa.

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
E	E	Módulo de elasticidad
GR	g	Aceleración de la gravedad
ND		Número de grados de libertad
IFPR		Indice de impresión de resultados intermedios en Jacobi. 1: no se imprimen 2: si se imprimen
SI	I_i	Momento de inercia en el i-ésimo nivel
SL	L_i	Altura del iésimo nivel
SM(I)	M_i	Masa del i-ésimo nivel
DT		Paso de integración
TMAX		Rango en el tiempo
NG		Número de puntos que definen a la fuerza de excitación
T(I)		Tiempo en el i-ésimo punto
P(I)		Aceleración en el i-ésimo punto dada en términos de g

XIS(I)	ξ_i	Razón de amortiguamiento modal

Cuando los datos se proporcionan directamente mediante el teclado, el usuario es guiado por el programa indicándosele paso a paso los datos que deben irese proporcionando. Pero cuando los datos se alimentan mediante un archivo creado exprofeso en disco, los datos se deben propocionar en el siguiente orden:

NOMBRE DEL ARCHIVO	(Hasta 12 caracteres alfanuméricos)
E	
ND	
IFPR	
SI, SL,SM	(I = 1,...,ND)
DT	
TMAX	
T(L),P(L)	(L = 1,...,NQ)
XSI(I)	(I = 1,...,ND)

G2.3 EJEMPLO

Se pide, de nueva cuenta, calcular la respuesta de la estructura dada en el Ejemplo F3.3, siendo ahora el rango en el tiempo 0.19 segundos.

Solución

En el la solución del citado ejemplo se presentó ya el análisis del problema. Con los datos ahí obtenidos se alimenta ahora al programa "SRESB.FOR". El listado de resultados se presenta a continuación.

N O M R B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S   :SRE1.DAT

D A T O S   I N I C I A L E S

```
MODULO DE ELASTICIDAD  (E)....................... =     .3000000E+08
CONSTANTE. DE ACELERACION DE GRAVEDAD  (GR).... =     .3860000E+03
GRADOS DE LIBERTAD  (ND)......................... =                2
INDICE DE IMPRESION EN JACOBI (IFPR)........... =                0
```

```
PISO NUMERO:    1
 MOMENTO DE INERCIA  (SI)....................... =     .4972000E+03
 ALTURA DEL PISO     (SL)....................... =     .1800000E+03
 MASA DEL PISO       (SM).......................=     .1360000E+03
```

```
PISO NUMERO:    2
 MOMENTO DE INERCIA  (SI)....................... =     .2120000E+03
 ALTURA DEL PISO     (SL)....................... =     .1200000E+03
 MASA DEL PISO       (SM).......................=     .6600000E+02
```

V A L O R E S   P R O P I O S

.1398628D+03   .1079756D+04

V E C T O R E S   P R O P I O S

VECTOR PROPIO NUM.   1

.6435084D-01   .8135405D-01

VECTOR PROPIO NUM.   2

-.5667372D-01   .9237442D-01

```
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.............. =           2
CONSTANTE DE ACELERACION DE LA GRAVEDAD (GR).... =   .3860E+03
INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT).................... =   .1000E-01
RANGO DEL TIEMPO (TMAX)......................... =   .2000E+00
```

PARA LA FUERZA NUM.   1 EN EL TIEMPO   .0000

EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES .2800

PARA LA FUERZA NUM. 1 EN EL TIEMPO 1.0000
EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES .2800

NIVEL NUMERO : 1
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = .0000E+00

NIVEL NUMERO : 2
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = .0000E+00

I M P R E S I O N   D E   R E S U L T A D O S

RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTICO

TIEMPO DESPLAZAMIENTO DE LAS COORDENADAS NODALES (DADAS EN ORDEN CRECIENTE DE LOS NIVELES)

```
 .000E+00 .0000E+00 .0000E+00
 .100E-01-.5394E-02-.5404E-02
 .200E-01-.2145E-01-.2161E-01
 .300E-01-.4783E-01-.4862E-01
 .400E-01-.8394E-01-.8637E-01
 .500E-01-.1290E+00-.1348E+00
 .600E-01-.1822E+00-.1936E+00
 .700E-01-.2424E+00-.2624E+00
 .800E-01-.3086E+00-.3407E+00
 .900E-01-.3797E+00-.4276E+00
 .100E+00-.4546E+00-.5221E+00
 .110E+00-.5323E+00-.6229E+00
 .120E+00-.6116E+00-.7284E+00
 .130E+00-.6918E+00-.8369E+00
 .140E+00-.7719E+00-.9465E+00
 .150E+00-.8511E+00-.1055E+01
 .160E+00-.9284E+00-.1161E+01
 .170E+00-.1003E+01-.1262E+01
 .180E+00-.1075E+01-.1357E+01
 .190E+00-.1142E+01-.1443E+01
```

```
SRE1.DAT
30000000.
386.
2
1
497.2,180.,136.
212.,120.,66.
0.01
0.20
2
0.,0.28
1.,0.28
0.
0.
```

```
C         ⁱ                                "SRESB.FOR"
C     DADOS:
C     MODULO DE ELASTICIDAD, ACELERACION INDICE DE IMPRESION          9-G2
C     MOMENTO DE INERCIA, ALTURA, MASA DEL PISO
C     PASO Y RANGO DE INTEGRACION,NUM. DE PUNTOS QUE DEFINEN
C                A LA FUNCION DE EXCITACION
C     TIEMPO Y VALOR DE LA FUERZA DE EXCITACION
C     RAZON DE AMORTIGUAMIENTO MODAL
C
C
C     EL PROGRAMA DA COMO RESULTADOS
C     LA RESPUESTA SISMICA ELASTICA AL CORTANTE
C     EN TERMINOS DE TIEMPO Y DESPLAZAMIENTO EN CADA PISO
C
C     NOTA IMPORTANTE: AL CAMBIAR EL DIMENSIONAMIENTO DE LAS
C                      MATRICES, ES NECESARIO HACER CORRESPONDER
C                      EL VALOR DE LA VARIABLE  "NNN" EN LA
C                      SUBRUTINA "MODAL"
C
C     RESPUESTA ELASTICA AL CORTANTE PARA EFECTOS SISMICO
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION SK(20,20),SM(20,20),SC(20,20),X(20,20),
     1 DUA(20),UD(20),UV(20),UA(20),S(20),EIGEN(20)
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
      COMMON LBL2
C     LECTURA DE DATOS E INICIALIZACION
C
      OPEN(6,FILE= 'PRN')
   11 FORMAT(//' N O M R B R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X,'D E   D A T O S   I N I C I A L E S    :'A12//)
   31 FORMAT(/' DAME MODO DE LECTURA DE LOS DATOS'/
     11X,'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
     21X,'(2) LECTURA EN DISCO'//)
      WRITE(*,31)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2)THEN
  221 FORMAT(A12)
  223 FORMAT(1X,A12//)
  222 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X,'EJEMPLO: DATOS£.DAT'//)
      WRITE(*,222)
      READ(*,221)ANOM1
      WRITE(*,223)ANOM1
      OPEN(4,FILE=ANOM1)
      READ(4,221)ANOM2
      WRITE(*,11)ANOM2
      WRITE(6,11)ANOM2
      ENDIF
   62 FORMAT(' D A T O S   I N I C I A L E S'///
     1,1X,' MODULO DE ELASTICIDAD  (E)..................... = ',E15.7,/
     2,1X,' CONSTANTE. DE ACELERACION DE GRAVEDAD  (GR).... = ',E15.7,/
     3,1X,' GRADOS DE LIBERTAD  (ND)....................... = ',I15,/
     4,1X,' INDICE DE IMPRESION EN JACOBI (IFPR)........... = ',I15//)
  104 FORMAT(/' DAME EL VALOR DEL MODULO DE ELASTICIDAD: (E)'/)
      WRITE(*,104)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 34
      READ(*,*)E
      GO TO 35
   34 READ(4,*)E
  105 FORMAT(/' DAME EL VALOR DE LA CONSTANTE DE GRAVEDAD: (GR)'/)
   35 WRITE(*,105)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 36
      READ(*,*)GR
```

```
 36 READ(4,*)GR
106 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD: (ND)'/)
 37 WRITE(*,106)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 38
    READ(*,*)ND
    GO TO 39
 38 READ(4,*)ND
107 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DEL CASO :'/
   1,26X,'(1) NO SE IMPRIME DURANTE LA ITERACION'/
   2,26X,'(2) SI SE IMPRIME DURANTE LA ITERACION'//)
 39 WRITE(*,107)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 40
    READ(*,*)IFPR
    GO TO 42
 40 READ(4,*)IFPR
 42 IFPR = IFPR - 1
    WRITE(*,62)E,GR,ND,IFPR
    WRITE(6,62)E,GR,ND,IFPR
    DO 2 I=1,ND
    DO 2 J=1,ND
    SM(I,J) = 0.0
    SC(I,J) = 0.0
    X(I,J) = 0.0
  2 SK(I,J) = 0.0
    ND1 = ND+1
928 FORMAT(/' C A R A T E R I S T I C A S   D E L   P I S O'//)
    WRITE(*,928)
    DO 7 I=1,ND
    WRITE(*,95)I
 95 FORMAT(/' PARA EL PISO NUMERO ',I2,' DAME LOS SIGUIENTES DATOS:',/
   11X,'(1): EL MOMENTO DE INERCIA:.(SI)'/
   21X,'(2): LA ALTURA DEL PISO:....(SL)'/
   31X,'(3): LA MASA DEL PISO.......(SM)'//)
    IF(LBL2.EQ.2)GO TO 500
    READ(*,*)SI,SL,SM(I,I)
    GO TO 501
500 READ(4,*)SI,SL,SM(I,I)
501 CONTINUE
611 FORMAT(/' PISO NUMERO:  'I3,/
   1,1X,' MOMENTO DE INERCIA  (SI)......................= ',E15.7,/
   2,1X,' ALTURA DEL PISO     (SL)......................= ',E15.7,/
   3,1X,' MASA DEL PISO       (SM)......................= ',E15.7,
   4 //)
    WRITE(*,611)I,SI,SL,SM(I,I)
    WRITE(6,611)I,SI,SL,SM(I,I)
    S(I) = 12.0*E*SI/SL**3
    SC(I,I) = SM(I,I)
    UD(I) = 0.0
  7 UV(I) = 0.0
C
C     ENSAMBLADO DE LA MATRIZ
C
    S(ND+1) = 0.0
    DO 19 I=1,ND
    IF(I.EQ.1) GO TO 19
    SK(I,I-1)=-S(I)
    SK(I-1,I) = -S(I)
 19 SK(I,I) = S(I)+S(I+1)
C     SE DETERMINAN LAS FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS DE VIBRACION
C
    CALL JACOBI(SK,SC,X,EIGEN,S,ND,IFPR)
C     RESPUESTA USANDO SUPERPOSICION MODAL
    CALL MODAL(ND,EIGEN,X,SC,GR,SM)
    CLOSE(4)
```

```
      CLOSE(6)
      STOP
      END
C
      SUBROUTINE JACOBI(A,B,X,EIGEN,D,N,IFPR)                          11-G2
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(20,20),B(20,20),X(20,20),EIGEN(20),D(20)
      COMMON LBL2
      NSMAX=15
  980 FORMAT(/10X,'V A L O R E S    P R O P I O S'///)
      RTOL=1.D-12
      DO 10 I=1,N
      IF(A(I,I).GT.0. .AND. B(I,I).GT.0.)GO TO 4
      WRITE(*,202)
      WRITE(6,202)
  202 FORMAT(25X,'E R R O R    E N    L A  M A T R I Z    A    O    B'/)
      RETURN
    4 D(I)=A(I,I)/B(I,I)
   10 EIGEN(I)=D(I)
      DO 30 I=1,N
      DO 20 J=1,N
   20 X(I,J)=0.0
   30 X(I,I)=1.0
      IF(N.EQ.1) RETURN
C
C
      NSWEEP=0
      NR=N-1
   40 NSWEEP=NSWEEP+1
      IF(IFPR.EQ.1)WRITE(*,2)NSWEEP
      IF(IFPR.EQ.1)WRITE(6,2)NSWEEP
C
C
      EPS=(0.01**NSWEEP)**2
      DO 210 J=1,NR
      JJ=J+1
      DO 210 K=JJ,N
      EPTOLA=(A(J,K)*A(J,K))/(A(J,J)*A(K,K))
      EPTOLB=(B(J,K)*B(J,K))/(B(J,J)*B(K,K))
      IF((EPTOLA.LT.EPS).AND.(EPTOLB.LT.EPS))GO TO 210
C
C
      AKK= A(K,K)*B(J,K)-B(K,K)*A(J,K)
      AJJ= A(J,J)*B(J,K)-B(J,J)*A(J,K)
      AB=  A(J,J)*B(K,K)-A(K,K)*B(J,J)
      CHECK=(AB*AB+4.0*AKK*AJJ)/4.0
      IF(CHECK)50,60,60
   50 WRITE(*,202)
      WRITE(6,202)
      RETURN
   60 SQCH=DSQRT(CHECK)
      D1=AB/2.0+SQCH
      D2=AB/2.0-SQCH
      DEN=D1
      IF(ABS(D2).GT.DABS(D1))DEN=D2
      IF(DEN)80,70,80
   70 CA=0.0
      CG=-A(J,K)/A(K,K)
      GO TO 90
   80 CA=AKK/DEN
      CG=-AJJ/DEN
C
C
   90 IF(N-2)100,190,100
  100 JP1=J+1
      JM1=J-1
```

```
      KP1=K+1
      KM1=K-1
      IF(JM1-1)130,110,110
  110 DO 120 I=1,JM1
      AJ=A(I,J)
      BJ=B(I,J)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I,K)
      A(I,J)=AJ+CG*AK
      B(I,J)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
  120 B(I,K)=BK+CA*BJ
  130 IF(KP1-N)140,140,160
  140 DO 150 I=KP1,N
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(K,I)
      BK=B(K,I)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(K,I)=AK+CA*AJ
  150 B(K,I)=BK+CA*BJ
  160 IF(JP1-KM1)170,170,190
  170 DO 180 I=JP1,KM1
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I,K)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
  180 B(I,K)=BK+CA*BJ
  190 AK=A(K,K)
      BK=B(K,K)
      A(K,K)=AK+2.0*CA*A(J,K)+CA*CA*A(J,J)
      B(K,K)=BK+2.0*CA*B(J,K)+CA*CA*B(J,J)
      A(J,J)=A(J,J)+2.0*CG*A(J,K)+CG*CG*AK
      B(J,J)=B(J,J)+2.0*CG*B(J,K)+CG*CG*BK
      A(J,K)=0.0
      B(J,K)=0.0
      DO 200 I=1,N
      XJ=X(I,J)
      XK=X(I,K)
      X(I,J)=XJ+CG*XK
  200 X(I,K)=XK+CA*XJ
  210 CONTINUE
C
C
      DO 220 I=1,N
      IF(A(I,I).GT.0.0 .AND. B(I,I).GT.0.0) GO TO 220
      WRITE(*,202)
      WRITE(6,202)
      RETURN
  220 EIGEN(I)=A(I,I)/B(I,I)
      IF(IFPR.EQ.0)GO TO 230
      WRITE(*,203)
      WRITE(6,203)
      WRITE(*,211)(EIGEN(I),I=1,N)
      WRITE(6,211)(EIGEN(I),I=1,N)
  203 FORMAT(15X,'V A L O R E S     P R O P I O S '/)
C
C
  230 DO 240 I=1,N
      TOL=RTOL*D(I)
      DIF=DABS(EIGEN(I)-D(I))
      IF(DIF.GT.TOL)GO TO 280
```

```
  270 CONTINUE
C
C
      EPS=RTOL*RTOL
      DO 250 J=1,NR
      JJ =J+1
      DO 250 K=JJ,N
      EPSA=(A(J,K)*A(J,K))/(A(J,J)*A(K,K))
      EPSB=(B(J,K)*B(J,K))/(B(J,J)*B(K,K))
      IF((EPSA.LT.EPS).AND.(EPSB.LT.EPS))GO TO 250
      GO TO 280
  250 CONTINUE
C
C
  255 DO 260 I=1,N
      DO 260 J=1,N
      A(J,I)=A(I,J)
  260 B(J,I)=B(I,J)
      DO 270 J=1,N
      BB=DSQRT(B(J,J))
      DO 270 K=1,N
  270 X(K,J)=X(K,J)/BB
   57 FORMAT(/' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      IF(IFPR.EQ.1) THEN
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      ENDIF
      IF(IFPR.EQ.0) THEN
      WRITE(*,980)
      WRITE(6,980)
      WRITE(6,211)(EIGEN(I),I=1,N)
      WRITE(*,211)(EIGEN(I),I=1,N)
      ENDIF
      IF(IFPR.EQ.0)THEN
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      ENDIF
      WRITE(6,199)
      WRITE(*,199)
      DO 1991 LJ=1,N
      WRITE(*,59)LJ
      WRITE(6,59)LJ
   59 FORMAT(//15X,'VECTOR PROPIO NUM. ',I4/)
      WRITE(*,211)(X(LI,LJ),LI=1,N)
 1991 WRITE(6,211)(X(LI,LJ),LI=1,N)
  199 FORMAT(/15X,'V E C T O R E S   P R O P I O S',/)
      RETURN
  280 DO 290 I=1,N
  290 D(I)=EIGEN(I)
      IF(NSWEEP.LT.NSMAX)GO TO 40
      GO TO 255
    2 FORMAT(/'  ITERACION ',I4//)
  211 FORMAT(6X,4D14.7,2X,/)
      END
C
      SUBROUTINE MODAL(ND,EIGEN,X,SC,GR,SM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8INT1,INT2,INT3,INT4,K,M
      DIMENSION EIGEN(20),X(20,20),XIS(20),F(20,20),P(20),T(20),Y(20,20)
     1,UD(20),FF(20),NQ(20),SM(20,20)
      COMMON LBL2
C
      INT1(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DCOS(WD*TAU)+WD*DSIN(WD*TAU))/DWSQ
      INT2(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DSIN(WD*TAU)-WD*DCOS(WD*TAU))/DWSQ
      INT3(TAU)=TAU*INT2(TAU)-XIWD*INT2(TAU)/DWSQ+WD*INT1(TAU)/DWSQ
```

```
C      LECTURA E INTERPOLACION DE FUNCIONES FORZANTES
C
   32 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DISTINTO DE PUNTOS DONDE ESTAN'/
     11X,'DEFINIDAS LAS FUNCIONES DE EXCITACION VARIABLES ',/        14-G2
     21X,'EN LA COORDENADA DEL TIEMPO (NQ=1 SI ACTUA ACELERACION)'//)
   33 FORMAT(/' DAME EL INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT):',//)
   34 FORMAT(/' DAME EL RANGO EN EL TIEMPO (TMAX):',//)
      NG=ND
      IF(GR.NE.0.)NG=1
      NNN=20
      WRITE(*,33)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 47
      READ(*,*)DT
      GO TO 48
C
   47 READ(4,*)DT
   48 WRITE(*,34)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 49
      READ(*,*)TMAX
      GO TO 60
  778 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
   49 READ(4,*)TMAX
  775 FORMAT(///
     11X,'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.............. = ',I15,/
     21X,'CONSTANTE DE ACELERACION DE LA GRAVEDAD (GR).... = ',E15.4,/
     31X,'INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT).................... = ',E15.4,/
     41X,'RANGO DEL TIEMPO (TMAX)......................... = ',E15.4,/
     5///)
   60 WRITE(*,775)ND,GR,DT,TMAX
      WRITE(6,775)ND,GR,DT,TMAX
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
      WRITE(*,32)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 61
  772 FORMAT(/,' DAME EL NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINE A LA FUNCION',/
     11X,'DE EXCITACION  NUM ',I3,' O SEA DAME EL VALOR DE NQ(',I3,')'/)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 61
      DO 771 L=1,NG
      WRITE(*,772)L,L
      READ(*,*)NQ(L)
      WRITE(*,783)L,NQ(L)
  783 FORMAT(/' EL NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINEN A LA FUNCION NUM.'I3,/
     1,' ES :' I3/)
      WRITE(6,783)L,NQ(L)
  771 CONTINUE
      GO TO 62
   61 DO 773 L=1,NG
      WRITE(*,772)L,L
      READ(4,*)NQ(L)
  773 CONTINUE
   62 DO 76 I=1,NNN
      FF(I)=0.0
      DO 76 J=1,NNN
   76 F(I,J)=0.0
      DO 77 ID=1,NG
      NEQ=NQ(ID)
      IF(NEQ.EQ.0) GO TO 77
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 63
   64 FORMAT(/,' PARA LA FUERZA NUMERO',I3,/
     1,1X,'(A): DAME EL VALOR DE T(',I3,')'/
     2,1X,'(B): DAME EL VALOR DE P(',I3,')'/)
      DO 65 L = 1,NEQ
      WRITE(*,64)ID,L,L
      READ(*,*)T(L),P(L)
   65 CONTINUE
```

```
      GO TO 67
   63 DO 66 L=1,NEQ
      WRITE(*,64)ID,L.L
      READ(4,*)T(L),P(L)
   66 CONTINUE
      DO 785 L=1,NEQ
  784 FORMAT(/' PARA LA FUERZA NUM. 'I3,'  EN EL TIEMPO ',F10.4,/
     1          '            EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES ',F10.4//)
      WRITE(*,784)ID,T(L),P(L)
      WRITE(6,784)ID,T(L),P(L)
  785 CONTINUE
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
   67 NT=T(NEQ)/DT
      IF(NT.GT.TMAX/DT) NT=TMAX/DT
      NT1=NT+1
      FF(1)=P(1)
      ANN = 0.0
      II=1
      DO 19 I=2,NT1
      AI = I-1
      TA = AI*DT
      IF(TA.GT.T(NEQ)) GO TO 160
      IF(TA.LE.T(II+1)) GO TO 9
      ANN = -T(II+1)+TA-DT
      II = II+1
    9 ANN = ANN + DT
      FF(I)=P(II)+(P(II+1)-P(II))*ANN/(T(II+1)-T(II))
      IF(GR.NE.0.)FF(I)=FF(I)*GR
      F(ID,I) = FF(I)
   19 CONTINUE
  160 CONTINUE
   77 CONTINUE
C
C     DETERMINACION DEL TIEMPO Y FUERZAS EQUIVALENTES
C
      NT = TMAX/DT
      DO 17 L=1,NNN
      AL = L -1
      T(L) = T(1) + AL*DT
      IF(GR.EQ.0.) GO TO 17
      DO 18 ID=1,ND
   18 F(ID,L)=-FF(L)*SM(ID,ID)
   17 CONTINUE
C
C     LECTURA DE AMORTIGUAMIENTOS E INICIALIZACION
C
      DO 75 L = 1, ND
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 74
   73 FORMAT(/' DAME EL AMORTIGUAMIENTO XIS(',I3,')'//)
      WRITE(*,73)L
      READ(*,*)XIS(L)
      GO TO 75
C
   74 READ(4,*)XIS(L)
   75 CONTINUE
  786 FORMAT(/' NIVEL NUMERO : 'I3,/
     11X'COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = ',E10.4/)
  100 FORMAT(8E10.3)
      DO 787 L=1,ND
      WRITE(*,786)L,XIS(L)
      WRITE(6,786)L,XIS(L)
  787 CONTINUE
      WRITE(*,778)
      READ(*,*)LBL1
C     ESCRITURA DE ENCABEZADOS
```

```
      FORMAT(//   I M P R E S I O N   D E   R E S U L T A D O S'///)
      WRITE(*,991)
      WRITE(6,991)
      WRITE(*,700)
      WRITE(6,700)
  700 FORMAT(/9X,'RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTICO',//,
     16X,'TIEMPO',3X,'DESPLAZAMIENTO DE LAS COORDENADAS NODALES (DADAS'
     2/15X,'EN ORDEN CRECIENTE DE LOS NIVELES)'/)
      NT1 = NT + 1
      DO 50 ID = 1,ND
      DO 10 IT = 1,NT1
      P(IT) = 0.0
      DO 10 I = 1,ND
   10 P(IT) = P(IT) + F(I,IT)*X(I,ID)
      M = 1.0
      K = EIGEN(ID)
      XI = XIS(ID)
    6 FIM1 = P(I)
      TIM1 = T(1)
      ATI = 0.0
      BTI = 0.0
      DAT = 0.0
      DBT = 0.0
      Y(ID,1) = 0.0
      OMEGA = DSQRT(K/M)
      CRIT = 2.*DSQRT(K*M)
      C = XI*CRIT
      WD = OMEGA*DSQRT(1.0-(XI**2))
      XIWD = XI*OMEGA
      DWSQ = XIWD**2 + WD**2
C     BUCLE SOBRE EL TIEMPO Y SOLUCION RESPECTO
C     DESPLAZAMIENTOS NODALES
      NM1 = NT - 1
      DO 1 I = 1,NM1
      FI= P(I+1)
      TI = T(I+1)
      DFTI = FI - FIM1
      DTI = TI - TIM1
      FT = DFTI/DTI
      G = FIM1 - TIM1*FT
      AI = INT1(TI) - INT1(TIM1)
      BI = INT2(TI) - INT2(TIM1)
      VS = INT3(TI) - INT3(TIM1)
      VC = INT4(TI) - INT4(TIM1)
      AI = AI*G
      AI = AI + FT*VC
      ATI = ATI + AI
      BI = BI*G
      BI = BI + FT*VS
      BTI = BTI + BI
      Y(ID,I+1)=DEXP(-XIWD*TI)*(ATI*DSIN(WD*TI)-BTI*DCOS(WD*TI))/(M*WD
      TIM1 = TI
      FIM1 = FI
    1 CONTINUE
   50 CONTINUE
      DO 53 IT = 1,NT
      DO 52 I = 1,ND
      UD(I) = 0.0
      DO 52 J = 1,ND
   52 UD(I) = UD(I) + X(I,J)*Y(J,IT)
      WRITE(6,301) T(IT),(UD(L),L=1,ND)
   53 WRITE(*,301) T(IT),(UD(L),L=1,ND)
  301 FORMAT(1X,E10.3,6E10.4)
      RETURN
      END
```

A P E N D I C E H2

PROGRAMA "ARMONICO.FOR"

H2.1 INTRODUCCION

PROGRAMA "ARMONICO.FOR"

En el apéndice E2 se vió la forma de calcular la respuesta de una estructura mediante el análisis de sus modos de vibrar, y dicho método es general. Pero cuando las funciones de excitación son armónicas; esto es, están dadas en términos de senos y cosenos, entonces es posible simplificar los algoritmos de cálculo, dando de lado al análisis modal.

A efecto de lo ilustrar lo aquí enunciado, considerése de nueva cuenta, la estructura mostrada en la figura E2.3.1, pero ahora sometida, en su segundo nivel, a una fuerza variable en el tiempo $F_2(t) = F_0 \cdot \operatorname{sen}\bar{\omega}t$. Bajo éstas condiciones, haciendo $F_1(t) = 0.0$, las ecuaciones (F2.1.1.) adquieren la siguiente presentación:

$$m_1\ddot{y}_1(k_1 + k_2)\cdot y_1 - k_2y_2 = 0.0 \qquad \text{(H2.1.1.a)}$$

$$m_2\ddot{y}_2 - k_2y_1 + k_2y_2 = F_0\cdot \operatorname{sen}\bar{\omega}t \qquad \text{(H2.1.1.b)}$$

Ahora bién, por otra parte se sabe que la respuesta estacionaria del sistema es de la forma

$$y_1 = Y_1\cdot \operatorname{sen}\bar{\omega}t \qquad \text{(H2.1.2.a)}$$

$$y_2 = Y_2\cdot \operatorname{sen}\bar{\omega}t. \qquad \text{(H2.1.2.b)}$$

Asi pues, previa sustitución de (H2.1.2) en (H2.1.1) y después de cancelar el factor común $\operatorname{sen}\bar{\omega}t$, se desemboca en

$$(k_1 + k_2 - m_1\bar{\omega}^2)\cdot Y_1 - k_2 Y_2 = 0 \qquad \text{(H2.1.3.a)}$$

$$-k_2 Y_1 + (k_2 - m_2\bar{\omega}^2)\cdot Y_2 = F_o \ . \qquad \text{(H2.1.3.b)}$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución única siempre que su determinante no se anule. Pero si la frecuencia forzante $\bar{\omega}$ es igual a alguna de las frecuencia naturales del sistema, entonces el determinate en cuestión se anula, siendo ésta , como se recordará, precisamente la condición impuesta a efecto de determinar las frecuencias naturales. En otras palabras, a menos que la estructura sea forzada a vibrar en alguna de sus frecuencias resonantes, el sistema lineal de ecuaciones (H2.1.3) tiene solución única.

El programa "ARMONICO.FOR" exige que los amortiguamientos sean proporcionales a los coeficientes de rigidez y a las masas, esto es,

$$[C] = a_o\cdot[M] + a_1\cdot[K] \ . \qquad \text{(H2.1.4)}$$

H2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

Las principales variables usadas por el programas són:

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
ND		Número de grados de libertad
SK(I.J)	[K]	Matriz de rigideces
SM(I,J)	[M]	Matriz de masas

FACK	a_1	Factor de proporcionalidad respecto a las rigideces
FACM	a_o	Factor de proporcionalidad respecto a las masas
W	$\bar{\omega}$	Frecuencia de términos forzantes. (rad/seg)
$F_c(I), F_s(I)$		Coeficientes del término forzante $F_c\cos\bar{\omega}t + F_s\operatorname{sen}\bar{\omega}t$ en la i-ésima coordenada

Cuando los datos se proporciona directamente, por el teclado de la terminal, el usuario es guiado por el programa indicándosele, paso a paso, los datos que deben irse proporcionando.

Pero cuando los datos se alimentan mediante un archivo creado exprofeso en disco, se deben proporcionar en el orden siguiente:

NOMBRE DEL ARCHIVO	(hasta 12 caracteres alfanuméricos)
ND	
SK(I,J)	(Lectura elemento por elemento, según renglones)
SM(I,J)	(Lectura elemento por elemento, según renglones)
FACK	
FACM	
W	

$F_c(I), F_s(I)$ (I = 1, ND. Tantos renglones cuantos sean necesarios)

H2.3 EJEMPLO

Para la estructura mostrada en la figura H2.3.1, se requiere determinar la respuesta estacionaria considerando el amortiguamiento. Se supone que las constantes de amortiguamiento c_1 y c_2 son, respectivamente, proporcionales a la magnitud de las constantes de rigidez k_1 y k_2, tomándose el factor de proporcionalidad $a_o = 0.01$. Esto es, $c_1 = a_o \cdot k_1 = 307$ lbs·seg/pulg y $c_2 = a_o \cdot k_2 = 443$ lbs·seg/pulg. Se toma $\bar{\omega} = 20$ rad/seg.

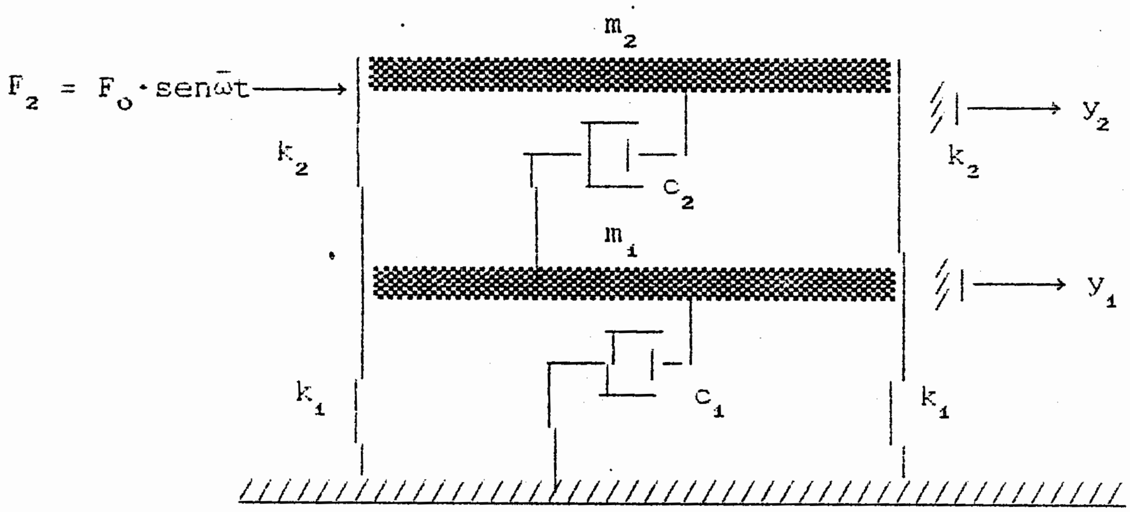


Fig. H2.3.1

SOLUCION

El programa se alimenta directamente a partir de las condiciones especificadas en el planteamiento del problema. Seguidamente se presentan tanto el listado de los resultados como el archivo de datos creado en disco.

NOMBRE DEL PROGRAMA: "ARMONICO.FOR"

CALCULA LA RESPUESTA ESTACIONARIA DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A CARGAS ARMONICAS.

RESTRICCION: LOS COEFICIENTES DE AMORTIGUAMIENTO DEBEN SER PROPORCIONALES A LAS MASA O RIGIDECES.

N O M B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S :ARMONICO 1

D A T O S   I N I C I A L E S

```
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):................. =              2
COEF. DE AMORT. RESPECTO RIGIDECES (FACK).......... =      .1000E-01
COEF. DE AMORT. RESPECTO A LAS MASAS (FACM)....... =      .0000E+00
FRECUENCIA DEL TERMINO FORZANTE (W)............... =      .2000E+02
```

M A T R I Z   D E   R I G I D E C E S

```
     .7500E+05      -.4430E+05
    -.4430E+05       .4430E+05
```

M A T R I Z   D E   M A S A S

```
     .1360E+03       .0000E+00
     .0000E+00       .6600E+02
```

PARA EL NIVEL NUM. 1 LA FUERZA ARMONICA
TIENE LAS SIGUIENTES COMPONENTES EN TERMINOS
DEL COSENO Y DEL SENO, RESPECTIVAMENTE   .0000E+00   .0000E+00

PARA EL NIVEL NUM. 2 LA FUERZA ARMONICA
TIENE LAS SIGUIENTES COMPONENTES EN TERMINOS
DEL COSENO Y DEL SENO. RESPECTIVAMENTE   .0000E+00   .1000E+05

LA RESPUESTA DEL ESTADO ESTACIONARIO ES:

NIVEL.	COMP COS.	COPM SEN.
1	.6814D-03	-.2686D+00
2	-.6309D-01	-.1378D+00

7-H:

```
ARMONICO 1
2
75000.0
-44300.0
-44300.0
44300.0
136.0
0.0
0.0
66.0
0.01
0.0
20.0
0.0.0.0
0.0,10000.0
```

9-H2

```
C     NOMBRE DEL PROGRAMA "ARMONICO.FOR"
C     CALCULA LA RESPUESTA ESTACIONARIA DE UNA ESTRUCTURA SUJETA
C     A TERMINOS FORZANTES ARMONICOS.
C     RESTRICCIONES: COEFICIENTES DE AMORTIGUAMIENTO PROPORCIONALES
C     MASAS Y RIGIDECES. METODO:NUMEROS COMPLEJOS
C     PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H.O-Z)
      DIMENSION SK(30.30),SM(30,30)
      COMPLEX*16 A(30.30).DET
      COMMON LBL2
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
      OPEN(6.FILE='PRN')
  300 FORMAT(//' NOMBRE DEL PROGRAMA: "ARMONICO.FOR"'//
     1' CALCULA LA RESPUESTA ESTACIONARIA DE UNA ESTRUCTURA'/
     2' SUJETA A CARGAS ARMONICAS.'//
     3' RESTRICCION: LOS COEFICIENTES DE AMORTIGUAMIENTO DEBEN SER'/
     4' PROPORCIONALES A LAS MASA O RIGIDECES.'//)
      WRITE(*,300)
      WRITE(6.300)
  301 FORMAT(/' DAME MODO DE LECTURA DE DATOS'/
     11X.'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
     21X.'(2) LECTURA EN DISCO'//)
      WRITE(*.301)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2)THEN
  302 FORMAT(A12)
  303 FORMAT(1X,A12//)
  304 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X.'EJEMPLO : DATOS#.DAT'//)
      WRITE(*,304)
      READ(*.302)ANOM1
      WRITE(*,303)ANOM1
      OPEN(4.FILE=ANOM1)
      READ(4.302)ANOM2
      WRITE(*.305)ANOM2
      WRITE(6,305)ANOM2
  305 FORMAT(' N O M B R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X,'D E   D A T O S   I N I C I A L E S  :'.A12//)
      ENDIF
C     DATOS INICIALES
      WRITE(*.120)
      WRITE(6.120)
  120 FORMAT(/' D A T O S   I N I C I A L E S'///)
  306 FORMAT(/' DAME EL GRADO DE LIBERTAD DE LA ESTRUCTURA :(ND)'/)
      WRITE(*.306)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 307
      READ(*.*)ND
      GO TO 308
  307 READ(4,*)ND
  308 WRITE(*.309)
  309 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ DE RIGIDECES (SK):'/)
  310 FORMAT(//' DAME SK('.I3,',',I3,')'/)
      DO 10 I=1,ND
      DO 10 J=1.ND
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 311
      WRITE(*,310)I.J
      READ(*,*)SK(I.J)
      WRITE(*.312)I,J,SK(I.J)
      GO TO 10
  311 READ(4.*)SK(I.J)
  312 FORMAT(/' SK('.I3.','.I3.') = '.E14.4/)
      WRITE(*.312)I.J.SK(I.J)
   10 CONTINUE
      WRITE(*.316)
```

```
         DAME LA MATRIZ DE MASAS (SM):'/)
 314 FORMAT(//' DAME SM('.I3.','.I3.')'/)
     DO 20 I=1.ND
     DO 20 J=1.ND
     IF(LBL2.EQ.2) GO TO 313
     WRITE(*.314)I.J
     READ(*.*)SM(I.J)
     WRITE(*,315)I.J.SM(I,J)
     GO TO 20
 315 FORMAT(/' SM('.I3.','.I3.') = '.E14.4/)
 313 READ(4,*)SM(I.J)
  20 CONTINUE
     CALL HARMO(ND.SK.SM)
     CLOSE(4)
     CLOSE(6)
     STOP
     END
     SUBROUTINE HARMO(ND.SK.SM)
     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
     COMPLEX*16 A(30,30).DET
     DIMENSION SK(30,30).SM(30.30)
     COMMON LBL2
 317 FORMAT(/' DAME EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO '/
    11X.'RELATIVO A LAS RIGIDECES (FACK): '//)
     WRITE(*,317)
     IF(LBL2.EQ.2) GO TO 318
     READ(*,*)FACK
 319 FORMAT(/' FACTOR DE AMORIGUAMIENTO RESPECTO RIGIDECES = ',E14.4//)
     WRITE(*.319)FACK
     GO TO 320
 318 READ(4,*)FACK
 320 WRITE(*.321)
 321 FORMAT(/' DAME EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO'/
    11X.'RELATIVO A LAS MASAS (FACM):'//)
     IF(LBL2.EQ.2) GO TO 322
     READ(*,*)FACM
 335 FORMAT(/' FACTOR DE AMORIGUAMIENTO RESPECTO LAS MASAS = ',E14.4//)
     WRITE(*.335)FACM
     GO TO 323
 322 READ(4,*)FACM
 323 WRITE(*.324)
 324 FORMAT(/' DAME LA FRECUENCIA DEL TERMINO'/
    11X,'FORZANTE EN RAD/SEG (W):'//)
     IF(LBL2.EQ.2) GO TO 325
     READ(*,*)W
     GO TO 326
 325 READ(4.*)W
 326 CONTINUE
 340 FORMAT(///
    11X.'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):................. = '.I15./
    21X.'COEF. DE AMORT. RESPECTO RIGIDECES (FACK)......... = ',E15.4./
    31X.'COEF. DE AMORT. RESPECTO A LAS MASAS (FACM)....... = ',E15.4./
    41X.'FRECUENCIA DEL TERMINO FORZANTE (W)............... = '.E15.4./
    5//)
     WRITE(*.340)ND.FACK.FACM.W
     WRITE(6.340)ND.FACK.FACM.W
 341 FORMAT(//' M A T R I Z   D E   R I G I D E C E S'//)
 342 FORMAT(1X.4(E14.4,2X)/)
     WRITE(*.341)
     WRITE(6.341)
     DO 343 I=1,ND
     WRITE(6.342)(SK(I,J).J=1,ND)
     WRITE(*.342)(SK(I,J).J=1,ND)
 343 CONTINUE
 344 FORMAT(//' M A T R I Z   D E   M A S A S '//)
     WRITE(*.344)
```

```
      DO 345 I=1,ND
      WRITE(6,342)(SM(I,J),J=1,ND)
      WRITE(*,342)(SM(I,J),J=1,ND)
  345 CONTINUE
      DO 10 I=1,ND
      DO 10 J=1,ND
      AR = SK(I,J) - W*W*SM(I,J)
      AI = SK(I,J)*W*FACK + SM(I,J)*W*FACM
   10 A(I,J) = DCMPLX(AR,AI)
  110 FORMAT(8F10.2)
  331 FORMAT(/' PARA EL NIVEL ',I3,2X,'DAME LA FUERZA ARMONICA'/
     11X,'DESCOMPUESTA DEL SIGUIENTE MODO:'/
     21X,'(1) COMPONENTE EN TERMINOS DEL COSENO'/
     31X,'(2) COMONENTE EN TERMINOS DEL SENO'//)
      DO 332 L=1,ND
      WRITE(*,331)L
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 370
      READ(*,110)A(L,ND+1)
      GO TO 333
  370 READ(4,110)A(L,ND+1)
  333 CONTINUE
  332 CONTINUE
      DO 350 L=1,ND
  334 FORMAT(//' PARA EL NIVEL NUM.',I3,' LA FUERZA ARMONICA'/
     11X,'TIENE LAS SIGUIENTES COMPONENTES EN TERMINOS '/
     21X,'DEL COSENO Y DEL SENO, RESPECTIVAMENTE',2E14.4//)
      WRITE(*,334)L,A(L,ND+1)
      WRITE(6,334)L,A(L,ND+1)
  350 CONTINUE
      DO 7 L = 1,ND
    7 A(L,ND+1) = DCONJG(A(L,ND+1))
      EPS = 1.0E-10
      NPLUSM = ND + 1
      DET = DCMPLX(1.D0,0.D0)
      DO 9 K = 1,ND
      DET = DET*A(K,K)
      IF(CDABS(A(K,K)).GT.EPS) GO TO 5
      WRITE(*,202)
      GO TO 99
    5 KP1 = K+1
      DO 6 J = KP1,NPLUSM
    6 A(K,J) = A(K,J)/A(K,K)
      A(K,K) = DCMPLX(1.D0,0.D0)
      DO 9 I=1,ND
      IF(I.EQ.K.OR.CDABS(A(I,K)).EQ.0.) GO TO 9
      DO 8 J = KP1,NPLUSM
    8 A(I,J) = A(I,J) - A(I,K)*A(K,J)
      A(I,K)= DCMPLX(0.D0,0.D0)
    9 CONTINUE
  202 FORMAT(/' LA MATRIZ PUEDE SER SINGULAR. PIVOTE PEQUENO'//)
      WRITE(*,170)
      WRITE(6,170)
  170 FORMAT(//5X,' LA RESPUESTA DEL ESTADO ESTACIONARIO ES:'//
     14X,'NIVEL.',5X,'COMP COS.'4X,'    COPM SEN.',//)
      DO 87 I=1,ND
      A(I,ND+1) = DCONJG(A(I,ND+1))
      WRITE(6,122)I,A(I,ND+1)
   87 WRITE(*,122)I,A(I,ND+1)
  122 FORMAT(/' ',I10,2D15.4)
   99 RETURN
      END
```

11-H2

A P E N D I C E   I2

PROGRAMA "AMORTIG.FOR"

I2.1 INTRODUCCION

PROGRAMA "AMORTIG.FOR"

En páginas anteriores se ha mostrado la manera de calcular tanto las frecuencias naturales como los modos de vibración, al cortante, de una cierta estructura.

Como se recordará, la respuesta del sistema se obtuvo mediante superposición modal. En éste método las ecuaciones de movimiento se desacoplan haciendo uso de ciertas transformaciones de coordenadas las que incoporan determinadas condiciones de ortogonalidad.

Pero cuando en los cálculos se consideran los efectos de amortiguamiento, el análisis dinámico del sistema se complica. Esto se debe a la inclusión de términos adicionales en las ecuaciones de movimiento, y sobre todo a la dificultad para obtener un sistema desacoplado. A tal propósito es indispensable imponer ciertas restriciones en la expresión funcional de los coeficientes de amortiguamiento.

El amortiguamiento presente en las estructura es, por lo general, relativamente pequeño y prácticamente no tiene influencia ni sobre las frecuencias naturales ni sobre los modos de vibración. De aquí que el efecto del amortiguamientos en la determinación de los citados parámetros se desprecie. En otras palabras, el problema de valores característico de una estructura amortiguada, se resuelve empleando aquellos mismos métodos que consideran a la estructura no amortiguada.

En la figura I2.1.1 se presenta la estructura de un edificio de tres niveles, sujeta a amortiguamiento.

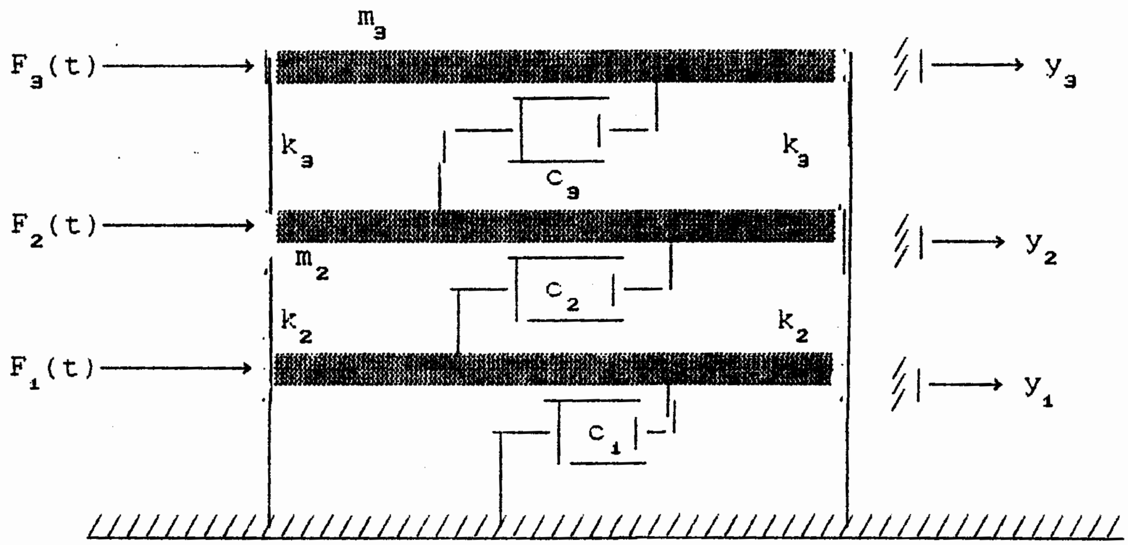


Fig. I2.1.1

El correspondiente diagrama de cuerpo libre es

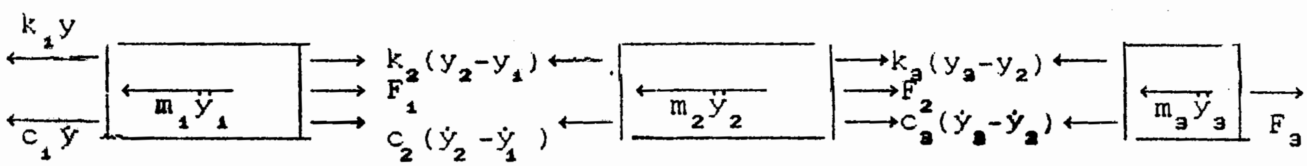


Fig. I2.1.2

En consecuencia, las ecuaciones de movimiento son

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 - c_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1) - k_2(y_2-y_1) = F_1(t) \quad \text{(I2.1.1.a)}$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1) + k_2(y_2-y_1) - c_3(\dot{y}_3-\dot{y}_2) - k_3(y_3-y_2) = F_2(t) \quad \text{(I2.1.1.b)}$$

$$m_3\ddot{y}_3 + c_3(\dot{y}_3-\dot{y}_2) + k_3(y_3-y_2) = F_3(t) \ . \quad \text{(I2.1.1.c)}$$

Las anteriores ecuaciones pueden resumirse empleando matrices

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\} \ . \quad \text{(I2.1.2)}$$

Y como las matrices de masas y de rigideces fueron definidas anteriormente, resta tan solo aclarar que

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{(I2.1.3)}$$

Ahora bién, a efecto de desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales (I2.1.2), resulta pertinente efectuar el siguiente cambio de varibles

$$\{y\} = [\phi]\{y\} \quad , \qquad \text{(I2.1.4)}$$

donde $[\phi]$ es la matriz modal obtenida a partir del análisis del sistema libre <u>no amortiguado</u>.

La sustitución de (I2.1.4) en (I2.1.2) conduce a

$$[M][\phi]\{\ddot{z}\} + [C][\phi]\{\dot{z}\} + [K][\phi]\{z\} = \{F(t)\}. \qquad \text{(I2.1.5)}$$

Premultiplicando esta ecuación por el enésimo vector modal $\{\phi\}_n^T$, y observando que de conformidad a las propiedades de ortogonalidad se tiene

$$\{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_m = 0 \qquad \text{(I2.1.6)}$$

$$\{\phi\}_n^T[K]\{\phi\}_m = 0, \quad m \neq n \qquad \text{(I2.1.7)}$$

entonces todas las componentes, excepto las correspondientes al enésimo modo, en el primer y segundo términos de (I2.1.5) se anulan.

En este punto se supone, a priori, la análoga reducción de la matriz de amortiguamiento

$$\{\phi\}_n^T[C]\{\phi\}_m = 0, \; n \neq m \; . \qquad (I2.1.8)$$

Así pues, bajo estas consideraciones, las ecuaciones (I2.1.5) se reducen a

$$M_n\ddot{z} + C_n\dot{z} + K_n z_n = F_n(t) \; . \qquad (I2.1.9)$$

Ahora bién, con el propósito de obtener la satisfacción de la condición estipulada en (I2.1.8), la expresión de la matriz de amortiguamiento se restringe a la siguiente presentación.

$$[C] = [M]\sum_i a_i([M]^{-1}[K])^i \; . \qquad (I2.1.10)$$

I2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

Las principales variables usadas por el programa son:

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
NL		Número de grados de libertad
EIGEN(I)	ω^2	Valores propios
X(I,J)	$[\phi]$	Matriz modal
SM(I,J)	$[M]$	Matriz de masas
XIS(I)	ξ	Razón de amortiguamiento

Cuando los datos se proporcionan directamente, por el teclado de la terminal, el usuario es guiado por el programa indicándosele, paso a paso, los datos que deben irse proporcionando.

Pero cuando los datos se alimentan mediante un archivo creado exprofeso en disco, se deben proporcionar en el orden siguiente:

NOMBRE DEL ARCHIVO (hasta 12 caracteres alfanumericos)

NL

EIGEN(I) (I = 1,NL. tantos renglones cuantos sean necesarios)

X(I,J) (lectura por elemento, según renglones)

SM(I,J) (lectura por elemento, según renglones)

XIS(I) (I = 1,NL. tantos renglones cuantos sean necesarios)

El programa "AMORTIG.FOR" arroja como resultado a la matriz de amortiguamiento [C].

I2.3 EJEMPLO

Con el objeto de ilustrar el funcionamiento del programa se pide calcular a la matriz de amortiguamiento de una estructura de tres grados de libertad, cuando las tres razones de amortiguamiento $\xi = 0.1$, se consideran iguales y además se tiene que

$$\omega_1^2 = 1.9681, \quad \omega_2^2 = 15.3927, \quad \omega_3^2 = 60.7968.$$

Las matrices modal y de de masa son

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0.4430 & -0.7421 & 0.7228 \\ 0.7967 & 0.0000 & -0.7719 \\ 0.04330 & 0.7421 & 0.7228 \end{bmatrix}$$

y

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.8169 & 0.1286 & -0.0740 \\ 0.1286 & 0.8571 & 0.1286 \\ -0.0740 & 0.1286 & 0.8169 \end{bmatrix}.$$

Estos datos son suficientes para alimentar el programa en cuestión. Seguidamente se presenta el listado de resultados correspondiente

PROGRAMA "AMORTIG.FOR". PARA UN SISTEMA LIBRE,
DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD, CALCULA LA MATRIZ MODAL,
DADAS LAS RAZONES MODALES DE AMORTIGUAMIENTO

D A T O S   I N I C I A L E S

N O M B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S   :AMTGUA1.DAT

NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):............... =   3

L O S   V A L O R E S   P R O P I O S   S O N :

EL VALOR PROPIO NUMERO 1 ES .1962E+01

EL VALOR PROPIO NUMERO 2 ES .1539E+02

EL VALOR PROPIO NUMERO 3 ES .6080E+02

L A   M A T R I Z   M O D A L   E S

.4430E+00	-.7421E+00	.7228E+00
.7967E+00	.0000E+00	.7719E+00
.4330E+00	.7421E+00	.7228E+00

L A   M A T R I Z   D E   M A S A S   E S

.8169E+00	.1286E+00	-.7400E-01
.1286E+00	.8571E+00	.1286E+00
-.7400E-01	.1286E+00	.8169E+00

LAS RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO SON:

LA RAZON DE AMORTIGUAMIENTO NUMERO 1 ES .5000E+00

LA RAZON DE AMORTIGUAMIENTO NUMERO 2 ES .2000E+00

LA RAZON DE AMORTIGUAMIENTO NUMERO 3 ES .4000E+00

R E S U L T A D O S :

LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO ES

.2143D+01	-.8171D+00	.7655D+00
-.8171D+00	.2298D+01	-.8270D+00
.7655D+00	-.8270D+00	.2132D+01

AMTGUA1.DAT


```
3
1.9618
15.3927
60.7968
0.443
-0.7421
0.7228
0.7967
0.0
-0.7719
0.433
0.7421
0.7228
0.8169
0.1286
-0.074
0.1286
0.8571
0.1286
-0.074
0.1286
0.8169
0.5
0.2
0.4
```

```
C     PROGRAMA PRINCIPAL
C     NOMBRE DEL PROGRAMA : "AMORTIG.FOR"
C     OBJETIVO: PARA UN SISTEMA LIBRE, DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD
C     CALCULA LA MATRIZ MODAL, DADOS LAS RAZONES MODALES DE
C     AMORTIGUAMIENTO.
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON LBL2
      DIMENSION EIGEN(30),X(30,30),SM(30,30),SC(30,30)
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
      OPEN(6,FILE='PRN')
  220 FORMAT(' PROGRAMA "AMORTIG.FOR".  PARA UN SISTEMA LIBRE.'/
     11X,'DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD, CALCULA LA MATRIZ MODAL,'/
     21X,'DADAS LAS RAZONES MODALES DE AMORTIGUAMIENTO'//)
      WRITE(*,220)
      WRITE(6,220)
C     LECTURA DE LOS DATOS INICIALES
  115 FORMAT(//' D A T O S    I N I C I A L E S'//)
      WRITE(*,115)
      WRITE(6,115)
  221 FORMAT(/' DAME EL MODO DE LECTURA DE LOS DATOS'/
     11X,'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
     21X,'(2) LECTURA EN DISCO'//)
      WRITE(*,221)
      READ(*,*)LBL2
  222 FORMAT(A12)
  223 FORMAT(1X,A12///)
  224 FORMAT(/' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X'EJEMPLO : DATOS.DAT'//)
  225 FORMAT(1X,'N O M B R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X,'D E   D A T O S   I N I C I A L E S   :',A12//)
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
      WRITE(*,224)
      READ(*,222)ANOM1
      OPEN(4,FILE=ANOM1)
      READ(4,222)ANOM2
      WRITE(*,225)ANOM2
      WRITE(6,225)ANOM2
      ENDIF
  116 FORMAT(/' DAME LOS GRADOS DE LIBERTAD (NL):  '/)
      WRITE(*,116)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 235
      READ(*,*)NL
      GO TO 236
  235 READ(4,*)NL
  117 FORMAT(/' DAME LOS VALORES PROPIOS EIGEN(I):'/)
  236 WRITE(*,117)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 237
  118 FORMAT(/' DAME EL VALOR DE EIGEN(',I3,')'/)
      DO 119 I=1,NL
      WRITE(*,118)I
      READ(*,*)EIGEN(I)
  119 CONTINUE
      GO TO 273
  237 DO 40 I=1,NL
      READ(4,*)EIGEN(I)
   40 CONTINUE
  120 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ MODAL X(I,J):'//)
  273 WRITE(*,120)
  121 FORMAT(/' DAME EL VALOR DE X(',I3,',',I3,')'/)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 274
      DO 122 I=1,NL
      DO 122 J=1,NL
      WRITE(*,121)I,J
      READ(*,*)X(I,J)
```

```
      GO TO 276
  274 DO 275 I=1.NL
      DO 275 J=1.NL
      READ(4,*)X(I,J)
  275 CONTINUE
  123 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ DE MASAS SM(I.J):'//)
  276 WRITE(*,123)
  124 FORMAT(/' DAME LE VALOR DE SM('.I3.','.I3.')'/)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 277
      DO 20 I=1,NL
      DO 20 J=1,NL
      WRITE(*,124)I,J
      READ(*,*)SM(I.J)
   20 CONTINUE
      GO TO 278
  277 DO 279 I=1,NL
      DO 279 J=1,NL
      READ(4,*)SM(I,J)
  279 CONTINUE
  290 FORMAT(///
     11X,,'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.............. = ',I15//)
  278 WRITE(*,290)NL
      WRITE(6,290)NL
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  291 FORMAT(/' L O S   V A L O R E S   P R O P I O S   S O N :'//)
      WRITE(*,291)
      WRITE(6,291)
  292 FORMAT(/' EL VALOR PROPIO NUMERO '.I2,2X,'ES  ',E14.4//)
      DO 293 I =1,NL
      WRITE(*,292)I,EIGEN(I)
      WRITE(6,292)I,EIGEN(I)
  293 CONTINUE
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  294 FORMAT(//' L A   M A T R I Z   M O D A L   E S'//)
      WRITE(*,294)
      WRITE(6,294)
  295 FORMAT(/' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'/)
  296 FORMAT(1X.6E14.4)
      DO 297 I=1.NL
      WRITE(*,296)(X(I,J),J=1.NL)
      WRITE(6.296)(X(I,J),J=1.NL)
  297 CONTINUE
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  298 FORMAT(//' L A  M A T R I Z   D E   M A S A S   E S'//)
      WRITE(*,298)
      WRITE(6,298)
      DO 299 I=1,NL
      WRITE(*,296)(SM(I,J),J=1,NL)
      WRITE(6,296)(SM(I,J),J=1,NL)
  299 CONTINUE
      CALL DAMP(NL,X,SM,SC,EIGEN)
      CLOSE(4)
      CLOSE(6)
      STOP
      END
      SUBROUTINE DAMP(NL,X,SM,SC,EIGEN)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(30,30),T(30,30),SM(30,30),SC(30,30),EIGEN(30),XIS(30)
      COMMON LBL2
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  130 FORMAT(/' DAME LAS RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO XIS(I):'//)
```
13-I2

```
      WRITE(*,130)
  131 FORMAT(/' DAME EL VALOR DE XIS('.I3.')'/)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 283
      DO 132 L=1.NL
      WRITE(*.131)L
      READ(*.110 )XIS(L)
  132 CONTINUE
      GO TO 284
  283 DO 285 L=1.NL
      READ(4.110)XIS(L)
  285 CONTINUE
  301 FORMAT(//' LAS RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO SON;'//)
  284 WRITE(*,301)
      WRITE(6.301)
  295 FORMAT(/' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'/)
  292 FORMAT(/' LA RAZON DE AMORTIGUAMIENTO NUMERO ',2X,I2,2X,'ES  '
     1,E14.4//)
      DO 293 I = 1.NL
      WRITE(*,292)I,XIS(I)
      WRITE(6,292)I,XIS(I)
  293 CONTINUE
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  500 FORMAT(//,5X,' R  E  S  U  L  T  A  D  O  S   :'///)
      WRITE(*,500)
      WRITE(6,500)
  125 FORMAT(//,5X,' LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO ES',//)
      WRITE(*,125)
      WRITE(6,125)
      DO 10 I=1,NL
      EIGEN(I)=DSQRT(EIGEN(I))
      DO 10 J=1,NL
   10 SC(I,J)=0.0
      DO 20 II=1,NL
      DA = 2.*XIS(II)*EIGEN(II)
      DO 20 I=1,NL
      DO 20 J=1,NL
   20 SC(I,J)=SC(I,J)+X(I,II)*X(J,II)*DA
      DO 30 I=1,NL
      DO 30 J=1,NL
      T(I,J)=0.0
      DO 30 K=1,NL
   30 T(I,J)= T(I,J)+SM(I,K)*SC(K,J)
      DO 40 I=1,NL
      DO 40 J=1,NL
      SC(I,J)=0.0
      DO 40 K=1,NL
   40 SC(I,J)=SC(I,J)+T(I,K)*SM(K,J)
      DO 50 I=1,NL
      WRITE(*,120)(SC(I,J),J=1,NL)
      WRITE(6,120)(SC(I,J),J=1,NL)
   50 CONTINUE
  110 FORMAT(3F10.2)
  120 FORMAT(6D14.4)
      RETURN
      END
```

A P E N D I C E   J 2

PROGRAMA "CONDENSA.FOR"

J2.1 INTRODUCCION
PROGRAMA "CONDENSA.FOR"

Durante el proceso de discretización, frecuentemente resulta necesario dividir a la estructura en un gran número de elementos, y como consecuencia las matrices de masa, de rigidez, y de amortiguamiento son considerablemente grandes. En tales casos el problema de la determinación de los valores característicos se dificulta. A fin de soslayar este tipo de problemas se sugiere reducir el órden de las matrices en juego. En este apéndice se describe un método conocido como <u>condensación</u> <u>estática</u> y el cual, siendo práctico, es a la vez razonablemente aproximado.

En el método de la condensación estática, a efecto de reducir el orden de las matrices, ciertos grados de libertad, elegidos por analista, se expresan en términos de combinaciones lineales de los restantes. Por ésta razón a los primeros se les acostumbra reconocer como las <u>coordenadas</u> <u>dependientes</u> .La relación establecida entre las coordenadas dependientes e independientes se determina en base a consideraciones de índole éstatica, y de aquí el nombre del método en cuestión.

El método de la condensación estática reduce inicialmete el órden de la matriz de masa y posteriormente, extrapolando sus resultados, reduce de forma análoga la dimensión de las matrices de rigidez y de amortiguamiento. Es necesario advertir que éste método no es exacto y que generalmente se introducen errores en los resultado cuyas magnitudes dependen tanto de la elección del número de coordenadas dependientes, como de la localización espacial de los elementos estructurales correspondientes. Pero cuando en los elementos estructurales, cuyos elementos matriciales se condensan, no se localizan masas, entonces el método es exacto.

Supóngase que una cierta estructura, la matriz de rigidez se va a reducir considerando los primeros p grados de libertad como dependientes siendo, en consecuencia, los restantes q grados independientes. Toda vez que se aplica eliminación Gasussiana, la ecuación de rigidez puede ser expresada de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} [I] & -[\bar{T}] \\ 0 & [\bar{K}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle y_p \rangle \\ \langle y_q \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 0 \rangle \\ \langle F_q \rangle \end{bmatrix} \qquad \text{(J2.1.1)}$$

donde el vector $\langle y_p \rangle$ denota el desplazamiento correspondiente a los p primeros grados de libertad, considerados como dependientes, y $\langle y_q \rangle$ el desplazamiento de los q grados restantes, mismo que se toman como coordenadas independientes.

La ecuación anterior equivale a las dos siguientes

$$\langle y_p \rangle = [\bar{T}] \cdot \langle y_q \rangle \qquad \text{(J2.1.2.a)}$$

$$[\bar{K}]\cdot\{y_q\} = \{F_q\} \quad . \qquad \text{(J2.1.2.b)}$$

Pero la ecuación (J2.1.2.a) expresa la relación estática entre las coordenadas $\{y_p\}$ y $\{y_q\}$, pudiéndose escribir también así

$$\begin{bmatrix} \{y_p\} \\ \{y_q\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{T}] \\ [I] \end{bmatrix}\cdot\{y_q\} \quad , \qquad \text{(J2.1.3.a)}$$

o así

$$\{y\} = [T]\cdot\{y_q\} \quad , \qquad \text{(J2.1.3.b)}$$

donde

$$\{y\} = \begin{bmatrix} \{y_p\} \\ \{y_q\} \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{(J2.1.4.a)}$$

y

$$[T] = \begin{bmatrix} [\bar{T}] \\ [I] \end{bmatrix} \quad . \qquad \text{(J2.1.4.b)}$$

La ecuación (J2.1.2.b) establece la relación entre las coordenadas $\{y_q\}$ y las fuerzas $\{F_q\}$, siendo pues ésta la ecuación reducida. Y naturalmente, la matriz $[\bar{K}]$ es la matriz condensada del sistema.

La matriz de rigidez reducida también se puede expresar como una transformación de la matriz de rigidez $[K]$ del sistema

$$[\bar{K}] = [T]^{T} \cdot [K]] \ . \qquad (J2.1.5)$$

El método mostrado se generaliza a fin de poder reducir también las matrices de masa y de amortiguamiento, es decir

$$[\bar{M}] = [T]^{T} \cdot [M] \cdot [T] \ , \qquad (J2.1.6)$$

y

$$[\bar{C}] = [T]^{T} \cdot [C] \cdot [T] \ . \qquad (J2.1.7)$$

J2.2 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

El programa "CONDENSA.FOR" reduce mediante el método de condensación estática las primeras p coordenadas nodales, llamadas coordenadas dependientes, y calcula las matrices reducidas de rigidez $[\bar{K}]$, de masa $[\bar{M}]$ y la matriz de transformación $[T]$.

A continuación se desciben las principales variables empleadas

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
ND	N	Número total de grados de

		grados de libertad
NCR	p	Número de coordenadas nodales dependientes
NL	q	Número de coordenadas nodales independientes
SM(I,J)	[M]	Matriz de masa
SK(I,J)	[K]	Matriz de rigidez
T(I,J)	[T]	Matriz de transformación

J2.3 EJEMPLO

Condensando la primera coordenada nodal, se pide calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración de la estructura mostrada en la figura J2.3.1

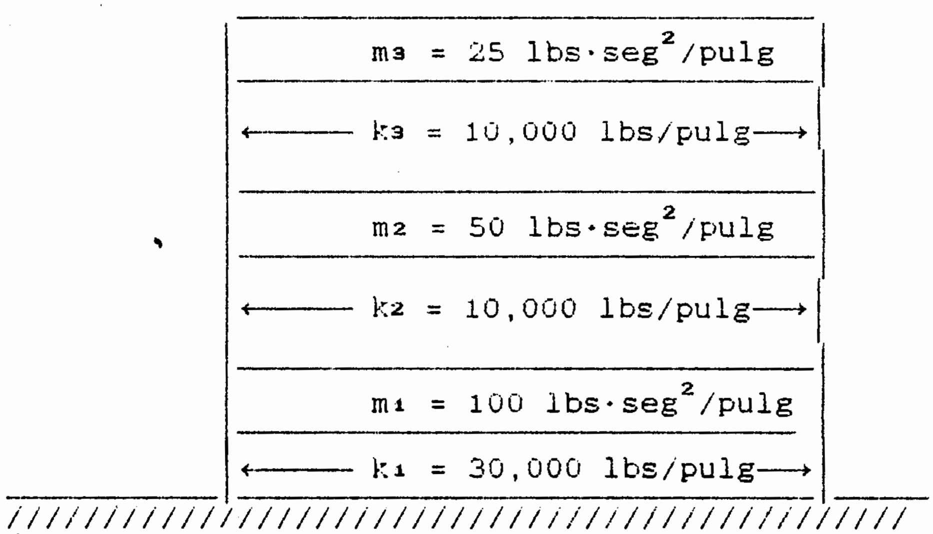


Fig. J2.3.1

SOLUCION

La ecuación de movimiento para el caso de vibración libre está dada por la ecuación

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = [F] \ , \qquad (J2.3.1)$$

donde, para este caso la matriz [F] se anula, y las matrices de masa y de rgidez se calculan mediante las siguientes fórmulas

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad (J2.3.2)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} . \qquad (J2.3.2)$$

Obteniéndose así

$$[M] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} ,$$

y

$$[K] = 10^{3} \cdot \begin{bmatrix} 40 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} .$$

Con estos datos se alimenta el programa "CONDE.FOR", obteniéndose los valores de las matrices de masa y de rigidez reducidas, tal y como puede verse en el listado de resultados.

Ahora bién, con dichas matrices reducidas se procede a resolver, en la forma acostumbrada, el problema de valores característicos

$$\begin{bmatrix} 56.25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17{,}500 & -10{,}000 \\ -10{,}000 & 10{,}000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [0] .$$

Resolviendo el sistema se encuentra

$$\omega_1^2 = 85.20 ,$$
$$\omega_2^2 = 625.90 .$$

Y de aquí se calculan los vectores característicos

$a_{21} = 1$ $a_{22} = 1$

$a_{31} = 1.27$ $a_{32} = -1.77.$

En este punto procede comentar que los valores de estos parámetros corresponden con bastante aproximación a los valores determinados con exactitud. Como regla general se puede establecer que una reducción en los grados de libertad igual o menor a la mitad de la totalidad de éstos, limita razonablemete la magnitud de los errores

NOMBRE DEL PROGRAMA: "CONDENSA.FOR"

CALCULA (1): LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA
(2): LA MATRIZ DE TRANFORMACION
(3): LA MATRIZ DE MASA REDUCIDA

N O M B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S   :CONDENSA 1.

NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.................. = 3
NUMERO DE COORDENADAS NODALES DEPENDIENTES (NCR).... = 1

M A T R I Z   D E   R I G I D E C E S

.4000E+05	-.1000E+05	.0000E+00
-.1000E+05	.2000E+05	-.1000E+05
.0000E+00	-.1000E+05	.1000E+05

M A T R I Z   D E   M A S A S

.1000E+03	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.5000E+02	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.2500E+02

LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA ES :

.1750E+05	-.1000E+05
-.1000E+05	.1000E+05

LA MATRIZ DE TRANSFORMACION ES

.2500E+00	.0000E+00
.1000E+01	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+01

LA MATRIZ DE MASAS REDUCIDA ES:

.5625E+02	.0000E+00
.0000E+00	.2500E+02

CONDENSA 1. DATOS


```
3
1
40000.0
-10000.0
0.0
-10000.0
20000.0
-10000.0
0.0
-10000.0
10000
100.0
0.0
0.0
0.0
50.0
0.0
0.0
0.0
25.0
```

```
C     NOMBRE DEL PROGRAMA "CONDENSA.FOR"
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION SK(30,30),SM(30,30),SC(30,30),T(30,30)
      CHARACTER ANOM1*12,ANOM2*12
      OPEN(6,FILE='PRN')
  300 FORMAT(//' NOMBRE DEL PROGRAMA: "CONDENSA.FOR"'//
     1' CALCULA (1): LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA'/
     2'         (2): LA MATRIZ DE TRANFORMACION'/
     3'         (3): LA MATRIZ DE MASA REDUCIDA'//)
      WRITE(*,300)
      WRITE(6,300)
  301 FORMAT(/' DAME MODO DE LECTURA DE DATOS'/
     11X,'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
     21X,'(2) LECTURA EN DISCO'//)
      WRITE(*,301)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2) THEN
  302 FORMAT(A12)
  303 FORMAT(1X,A12//)
  304 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X,'EJEMPLO  : DATOS#.DAT'//)
      WRITE(*,304)
      READ(*,302)ANOM1
      WRITE(*,303)ANOM1
      OPEN(4,FILE=ANOM1)
      READ(4,302)ANOM2
      WRITE(*,305)ANOM2
      WRITE(6,305)ANOM2
  305 FORMAT(' N O M B R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X,'D E   D A T O S   I N I C I A L E S   :',A12//)
      ENDIF
C     LECTURA DE LOS DATOS INICIALES
      WRITE(*,125)
  125 FORMAT(6X,'D A T O S   I N I C I A L E S'/)
  306 FORMAT(/'  DAME EL GRADO DE LIBERTAD DE LA ESTRUCTURA : (ND)'/)
      WRITE(*,306)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 307
      READ(*,*)ND
      GO TO 308
  307 READ(4,*)ND
  308 WRITE(*,309)
  309 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE COORDENADAS NODALES'/
     11X,'DEPENDIENTES  :  (NCR)'/)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 310
      READ(*,*)NCR
      GO TO 311
  310 READ(4,*)NCR
  311 WRITE(*,312)
  312 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ DE RIGIDECES : SK(I,J)'/)
  313 FORMAT(//' DAME SK(',I3,',',I3,')'/)
      DO 10 I=1,ND
      DO 10 J=1,ND
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 314
      WRITE(*,313)I,J
      READ(*,*)SK(I,J)
      WRITE(*,315)I,J,SK(I,J)
      GO TO 10
  314 READ(4,*)SK(I,J)
  315 FORMAT(/' SK(',I3,',',I3,') = ',E14.4/)
      WRITE(*,315)I,J,SK(I,J)
   10 CONTINUE
      WRITE(*,316)
  316 FORMAT(/' DAME LA MATRIZ DE MASAS : (SM)'/)
  317 FORMAT(//' DAME SM(',I3,',',I3,')'/)
```

12-J2

```
      DO 20 J=1.ND
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 318
      WRITE(*.317)I.J
      READ(*,*)SM(I,J)
      WRITE(*.319)I.J.SM(I.J)
      GO TO 20
  319 FORMAT(/' SM(',I3.','.I3.') = '.E14.4/)
  318 READ(4.*)SM(I.J)
   20 CONTINUE
  340 FORMAT(///
     11X.'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.................. = 'I15./
     21X.'NUMERO DE COORDENADAS NODALES DEPENDIENTES (NCR).... = 'I15./
     3//)
      WRITE(*,340)ND,NCR
      WRITE(6.340)ND.NCR
  341 FORMAT(//' M A T R I Z   D E   R I G I D E C E S'//)
  342 FORMAT(1X.6(E14.4.2X)/)
      WRITE(*,341)
      WRITE(6.341)
      DO 343 I=1,ND
      WRITE(6,342)(SK(I.J).J=1.ND)
      WRITE(*,342)(SK(I.J).J=1.ND)
  343 CONTINUE
      WRITE(*,111)
      READ(*,*)LB1
  344 FORMAT(//' M A T R I Z   D E   M A S A S '//)
      WRITE(*.344)
      WRITE(6.344)
      DO 345 I=1.ND
      WRITE(6.342)(SM(I.J).J=1.ND)
      WRITE(*.342)(SM(I.J).J=1.ND)
  345 CONTINUE
  111 FORMAT(/'  PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      WRITE(*.111)
      READ(*,*)LB1
      CALL CONDE(ND,NCR.SK.SM.SC.T)
      CLOSE(4)
      CLOSE(6)
      STOP
      END
      SUBROUTINE CONDE(ND.NCR.SK.SM.SC.T)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION SK(30.30).SM(30.30).T(30.30).TT(30).SC(30.30)
C     SE CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA
C     Y LA MATRIZ DE TRANSFORMACION
      NL = ND - NCR
      DO 9 K=1.NCR
      IF(DABS(SK(K,K)).GT.1.D-10) GO TO 5
      WRITE(*.202)K
  202 FORMAT(//' PIVOTE DEMASIADO PEQUENO'.I10.//)
      GO TO 99
    5 KP1 = K+1
      DO 6 J=KP1,ND
    6 SK(K,J) = SK(K.J)/SK(K.K)
      SK(K,K) = 1.
      DO 9 I=1,ND
      IF(I.EQ.K.OR.SK(I,K).EQ.0)GO TO 9
      DO 8 J=KP1,ND
    8 SK(I,J)=SK(I,J) - SK(I.K)*SK(K.J)
      SK(I.K) = 0.0
    9 CONTINUE
      DO 30 I=1.NCR
      DO 30 J=1.NL
      JJ = J+NCR
   30 T(I.J) =-SK(I.JJ)
```

```
      DO 40 I=1,NL
      II = I+NCR
      DO 50 J=1,NL
   50 T(II,J)=0.0
      T(II,I)= 1.0
   40 CONTINUE
      DO 20 I=1,NL
      DO 20 J=1,NL
      II = I+NCR
      JJ = J+NCR
   20 SK(I,J) = SK(II,JJ)
  169 FORMAT(//' LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA ES :'//)
      WRITE(6,169)
      WRITE(*,169)
      DO 80 I=1,NL
      WRITE(6,190)(SK(I,J),J=1,NL)
   80 WRITE(*,190)(SK(I,J),J=1,NL)
  111 FORMAT(/'  PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      WRITE(*,111)
      READ(*,*)LB1
      WRITE(6,170)
      WRITE(*,170)
  170 FORMAT(//6X,' LA MATRIZ  DE TRANSFORMACION ES'//)
      DO 81 I=1,ND
      WRITE(6,190)(T(I,J),J=1,NL)
   81 WRITE(*,190)(T(I,J),J=1,NL)
  190 FORMAT(6E14.4)
      WRITE(*,111)
      READ(*,*)LB1
C     SE CALCULA LA MATRIZ DE MASA REDUCIDA
      DO 68 J=1,ND
      DO 60 I=1,NL
      TT(I)=0.0
      DO 60 K=1,ND
   60 TT(I) = TT(I) + T(K,I)*SM(K,J)
      DO 65 K=1,NL
   65 SM(K,J) = TT(K)
   68 CONTINUE
      DO 78 I=1,NL
      DO 70 J=1,NL
      TT(J) = 0.0
      DO 70 K=1,ND
   70 TT(J) = TT(J) + SM(I,K)*T(K,J)
      DO 75 K=1,NL
   75 SM(I,K) = TT(K)
   78 CONTINUE
      DO 83 I=1,NL
      DO 83 J=1,NL
   83 SC(I,J) = SM(I,J)
      WRITE(6,172)
      WRITE(*,172)
  172 FORMAT(//' LA MATRIZ DE MASAS REDUCIDA ES:'//)
    7 DO 82 I=1,NL
      WRITE(6,190)(SM(I,J),J=1,NL)
   82 WRITE(*,190)(SM(I,J),J=1,NL)
   99 RETURN
      END
```

A P E N D I C E   K2

PROGRAMA "BEAM.FOR"

K2.1 INTRODUCCION

PROGRAMA "BEAM.FOR"

En este apéndice se estudia el comportamiento dinámico de las estructuras cuando las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal de los elementos estructurales. produciéndose así tanto esfuerzos de flexión como desplazamientos laterales.

K2.2 PROPIEDADES ESTATICAS DE LAS VIGAS

Sea un segmento de una viga homogénea con módulo de elasticidad E. cuya sección recta posee un momento de inercia I. tal y como se muestra en la figura K2.2.1.

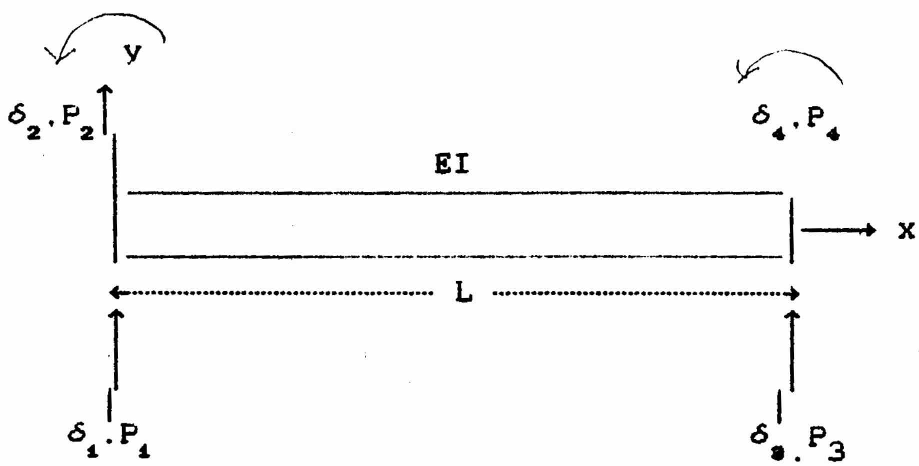


Fig. K2.2.1

Se busca establecer la relación que liga a las fuerzas y y a los momentos estáticos P_1, P_2, P_3 y P_4 con los desplazamientos lineales y angulares δ_1, δ_2, δ_3 y δ_4 en los extremos del segmento tal y como se muestra en la figura. Dicha relación estará dada por la matriz de rigideces del elemento viga. A las fuerzas P_i y a las deformaciones δ_i se les conoce como las coordenadas nodales de la viga.

La ecuación diferencial que determina la flecha de la viga, para el caso de pequeñas deformaciones es

$$EI \cdot d^2y/dx^2 = M(x) \qquad \text{(K2.2.1)}$$

en donde M(x) es el momento flector en la sección considerada e y es el desplazamiento vertical del eje de la viga. Sea k_{ij} la fuerza en la coordenada nodal i producida por un desplazamiento unitario en la coordenada j, cuando en las restantes coordenadas nodales se mantienen fijas, con un desplazamiento nulo.

En la figura K2.2.2 se presentan las curvas elásticas generadas por un desplazamiento unitario en cada una de las coordenadas nodales.

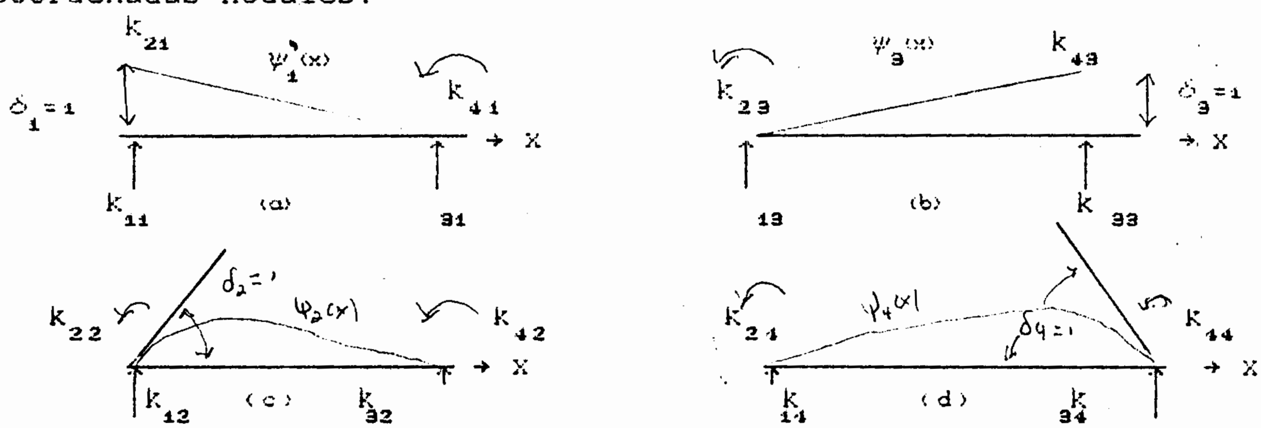


Fig. K2.2.2

Para el segmento de la viga mostrada en la figura K2.2.2.(a) el momento flector en la sección x esta dado por

$$M(x) = k_{11} \cdot x - k_{21} , \qquad (K2.2.2)$$

donde al sustituir en la ecuación (K2.2.1) se obtiene

$$EI \cdot d^2y/dx^2 = k_{11}x - k_{21} . \qquad (K2.2.3)$$

Integrando dos veces se obtiene

$$EI \cdot dy/dx = k_{11}x^2/2 - k_{21}x + C_1 , \qquad (K2.2.4)$$

y

$$EI \cdot y = k_{11}x^3 - k_{21}x^2 + C_1x + C_2 . \qquad (K2.2.5)$$

Mediante las condiciones de frontera se determinan las cuatro constantes desconocidas C_1, C_2, k_{11} y k_{21}:

$$x = 0, \quad y(0) = 1, \quad dy(0)/dx = 0; \qquad (K2.2.6)$$

$$x = L, \quad y(0) = 0, \quad dy(L)/dx = 0. \qquad (K2.2.7)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuaciones (K2.2.4) y (K2.2.5) se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones, las que toda vez resueltas dan

$$C_1 = 0. \qquad k_{11} = 12\cdot EI/L^3. \tag{K2.2.8}$$

$$C_2 = 0. \qquad k_{21} = 6\cdot EI/L^2. \tag{K2.2.9}$$

Así pues, se sabe que

$$\psi_1(x) = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L) \ , \tag{K2.2.10.a}$$

$$\psi_2(x) = x(1 - x/L)^2 \ , \tag{K2.2.10.b}$$

$$\psi_3(x) = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^2, \tag{K2.2.10.c}$$

$$\psi_4(x) = x^2/L\cdot(x/L - 1) \ . \tag{K2.2.10.d}$$

Superponiendo efectos se obtiene

$$y(x) = \psi_1(x)\delta_1 + \psi_2(x)\delta_2 + \psi_3(x)\delta_3 + \psi_4(x). \tag{K2.2.11}$$

Recordando que el principio del trabajo virtual establece que en un sistema elástico en equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas externas W_E es igual al trabajo realizado por las fuerzas internas W_I realizado a través del desplazamiento virtual, se tiene que

$$W_E = k_{12}\cdot\delta_1. \tag{K2.2.12}$$

Considerando ahora el trabajo realizado por el momento flexionante se obtiene el trabajo interno

$$W_I = \int_0^L M(x)d\theta \ , \qquad (K2.2.13)$$

donde $M(x)$ es el momento flector en la sección x.

El desplazamiento virtual en la sección transversal se obtiene mediante la ecuación (K2.2.1),

$$EI\psi''_2(x) = M(x), \qquad (K2.2.14)$$

El desplazamiento angular esta dado por

$$d\theta/dx = d^2\psi_1(x)/dx^2 = \psi''_1(x), \qquad (K2.2.15)$$

o sea

$$d\theta = \psi''_1 dx \qquad (K2.2.16)$$

Igualando el trabajo externo con el interno se deduce

$$k_{12} = \int_0^L EI\psi''_1(x)\psi''_2(x)dx \qquad (K2.2.17)$$

Y en general, los coeficientes de rigidez del segmento sometido a flexión se pueden expresar mediante la siguiente ecuación

$$k_{ij} = \int_0^L EI\psi''_i(x)\psi''_j(x)dx \quad . \qquad \text{(K2,2,18)}$$

La última expresion muestra que

$$k_{ij} = k_{ji} \quad , \qquad \text{(K2.2.19)}$$

siendo este un caso particular del teorema de Betti, mejor conocido con el nombre de teorema de Maxwell.

Para un cierto segmento de viga, conocidos su momento de inercia I, su longitud L y su módulo de Young E, la ecuación (K2.2.20) permite calcular la respectiva rigidez cuando los valores de las funciones ψ_i se calculan mediante las fórmulas (K2.2.10).

En particular, el coeficiente de rigidez k_{12} se obtiene a partir de

$$\psi''_1(x) = -6/L^2 + 12x/L^3,$$

y

$$\psi''_2(x) = -4/L + 6x/L^2.$$

Sustituyendo en (K2.2.18) se sabe que

$$k_{12} = EI \int_0^L \{-6/L^2+12x/L^3\}\cdot\{-4/L+6x/L^2\}dx \ ,$$

y de aquí, integrando se llega a

$$k_{12} = 6EI/L^2.$$

Superponiendo efectos se pueden conocer las fuerzas P_1, P_2, P_3 y P_4;

$$P_1 = k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4 \ , \qquad (K2.2.20.a)$$

$$P_2 = k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4 \ , \qquad (K2.2.20.b)$$

$$P_3 = k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4 \ , \qquad (K2.2.20.c)$$

$$P_4 + k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_4 + k_{44}\delta_4. \qquad (K2.2.20.d)$$

Equivalentemente, en notación matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} , \qquad (K2.2.21)$$

y simbólicamanete se reduce así

$$\{P\} = [K]\cdot\{\delta\} \ . \qquad (K2.2.22)$$

K2.3 MATRIZ DE RIGIDECES

Hasta aquí se ha considerado las ecuaciones de rigidez para el caso de un segmento de viga, ahora se procede a considera a la viga completa.

A fin de obtener la matriz de rigideces del sistema, se procede a dividir a la viga en elementos tal y como se muestra en la figura K2.3.1 donde la viga se ha divido en tres elementos.

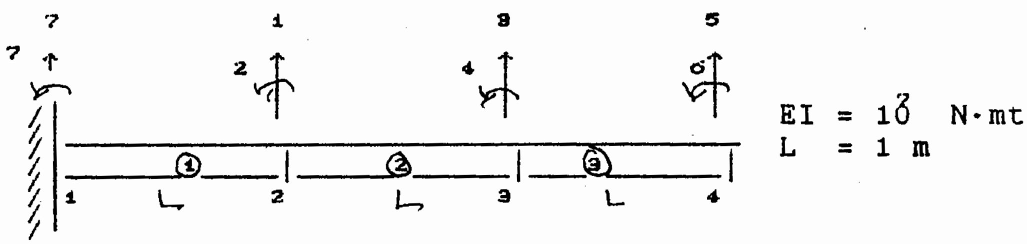


Fig. K2.3.1

Como segundo paso se procede a identificar a los nodos entre dos elementos numerándolos, también se numeran consecutivamente las coordenadas nodales que no están sujetas a restricción. Las coordenadas sujetas a restricción se numeran en último término asignándoseles a todas éstas el mismo número. En el caso mostrado en la figura superior se consideran tan sólo dos posibles movimientos o desplazamientos en cada nodo, a saber: la deflexión vertical y el desplazamiento angular. Así pues, la viga en cantiliver considerada aquí se ha dividido en tres elementos, teniéndose así seis coordenadas nodales libres y dos coordenadas a las que se les asignó el número siete.

Como tercer paso, se procede a deducir la matriz de rigideces de cada elemento del sistema y a sumarlos de modo apropiado; es decir, a ensamblar la matriz a fin de obtener la matriz de rigideces del sistema. Así por ejemplo, para obtener el elemento k_{33} se deben sumar los coeficientes de rigidez de los elementos dos y tres correspondientes al nodo número tres; a éstos términos los designaremos por k^2_{33}, y k^3_{33}. Los subíndices superiores identifican al elemento.

Para el segundo elemento se tiene, de acuerdo a la figura K2.3.1, se obtiene

$$[k^1] = 10^7 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7 & 7 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots 7 \\ \cdots 7 \\ \cdots 1 \\ \cdots 2 \end{array} \qquad (K2.3.1.a)$$

$$[K^2] = 10^7 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots 1 \\ \cdots 2 \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \end{array} \qquad (K2.3.1.b)$$

$$[K^3] = 10^7 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots 3 \\ \cdots 4 \\ \cdots 5 \\ \cdots 6 \end{array} \qquad (K2.3.1.c)$$

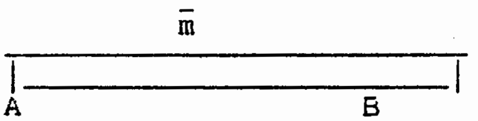
A continuación se procede a ensamblar a la matriz de rigideces del sistema en estudio; a tal propósito, los elementos de las matrices (K2.3.1) se reacomodan en una nueva matriz preservándose su localización, por ejemplo el elemento k^{a}_{13} = $-12 \cdot 10^7$ se ubica, en la nueva matriz, en el tercer renglón, quinta columna; pues estas son, respectivamente, la columna y el renglón señalados en la matriz (K2.3.1.c). Los coeficientes trasladados a una misma ubicación deberán ser acumulados mediante sumas algebraicas. Así se obtiene, finalmente, una matriz de orden seis

$$[K] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad (K2.3.2)$$

Esta es la matriz de rigideces para la viga en cantiliver mostrada en la figura K2.3.1, la cual fué dividida en tres segmentos de la misma longitud. Esta matriz relaciona las fuerzas con los desplazamientos en el sistema nodal de cooordenadas de la misma manera como la matriz de rigideces del elemento relaciona las fuerzas con los desplazamientos referidas a las coordenadas nodales del elemento.

K2.4 MASA CONCENTRADA.

Tal vez el modo más sencillo para considerar las propiedades dinámicas del sistema consiste en suponer que la masa del sistema se encuentra concentrada en aquellos nodos donde las desplazamientos por traslación han sido definidos; de aquí el nombre del *metodo de la masa concentrada*. El procedimiento usual estriba en distribuir la masa de cada elemento en sus respectivos nodos. La distribución de la masa se hace atendiendo consideraciones estáticas, en las figuras K2.4.1 se muestra una viga de longitud L, la que soporta una masa distribuida de $\bar{m}(x)$ unidades de masa por unidad de longitud. El ensamblado de la matriz de masas se hace mediante la simple adición de las contribuciones debidas a la masa concentrada.

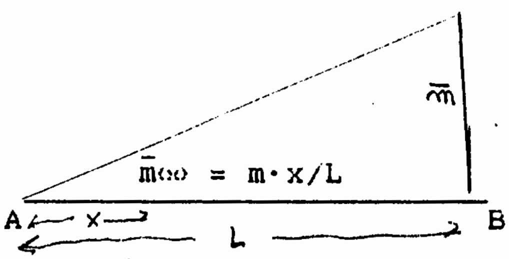


Carga uniformemente distribuida

(a)

$$m_A = \bar{m} \cdot L/2$$

$$m_B = \bar{m} \cdot L/2$$



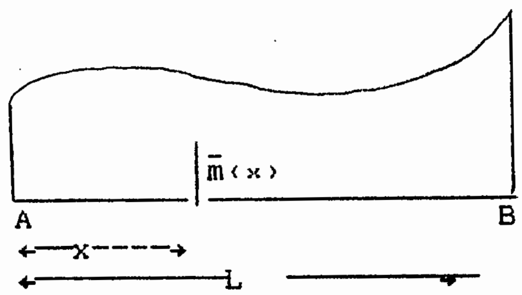
Carga triangular

(b)

$$m_A = \bar{m} \cdot L/6$$

$$m_B = \bar{m} \cdot L/3$$

Fig. K2.4.1



Caso general

(c)

$$m_A = \int (L-X)\,\bar{m}(x)\,dx \Big/ \int \bar{m}(x)\,dx$$

$$m_B = \int x\cdot \bar{m}(x)\,dx \Big/ \int \bar{m}(x)\,dx$$

Fig. K2.4.1

Este método presupone que los efectos inerciales debidos a las rotaciones es nulo, sin embargo se le deberá asociar in valor finito a los momentos de inercia. Por ejemplo, para una viga uniformemente cargada el momento de inercia de la masa en cada uno de los nodos será

$$I_A = I_B = (\bar{m}\cdot L/2)\cdot(L/2)/3 \;,$$

Volviendo al ejemplo de la viga en cantiliver mostrada en la figura K2.3.1, en la cual sólo se consideran los efectos de la traslación de la masa, la matriz de masas será, evidentemente, diagonal.

$$[M] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} m_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & m_5 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (K2.4.1)$$

donde

$$m_1 = \bar{m} \cdot L_1/2 + \bar{m} \cdot L_2/2 \quad ,$$

$$m2 = \bar{m} \cdot L_2/2 + \bar{m} \cdot L_3/2 \quad ,$$

$$m_1 = \bar{m} \cdot L_3 \ .$$

Luego la matriz de masas resulta ser

$$[M] = [m_1 \ 0 \ m_3 \ 0 \ m_5 \ ] \ . \qquad (K2.4.2)$$

K2.4 MASA CONSISTENTE

Es posible determinar a los coeficientes de masa correspondientes a las coordenadas nodales del elemto de una viga por un procedimiento análogo al empleado en la determinación de la matriz de rigideces. Primeramente se define el coeficiente de masa m_{ij} como la fuerza en la coordenada nodal i provocada por una aceleración unitaria en la coordenada nodal j, manteniendo las restantes coordenadas nodales sujetas a una aceleración nula.

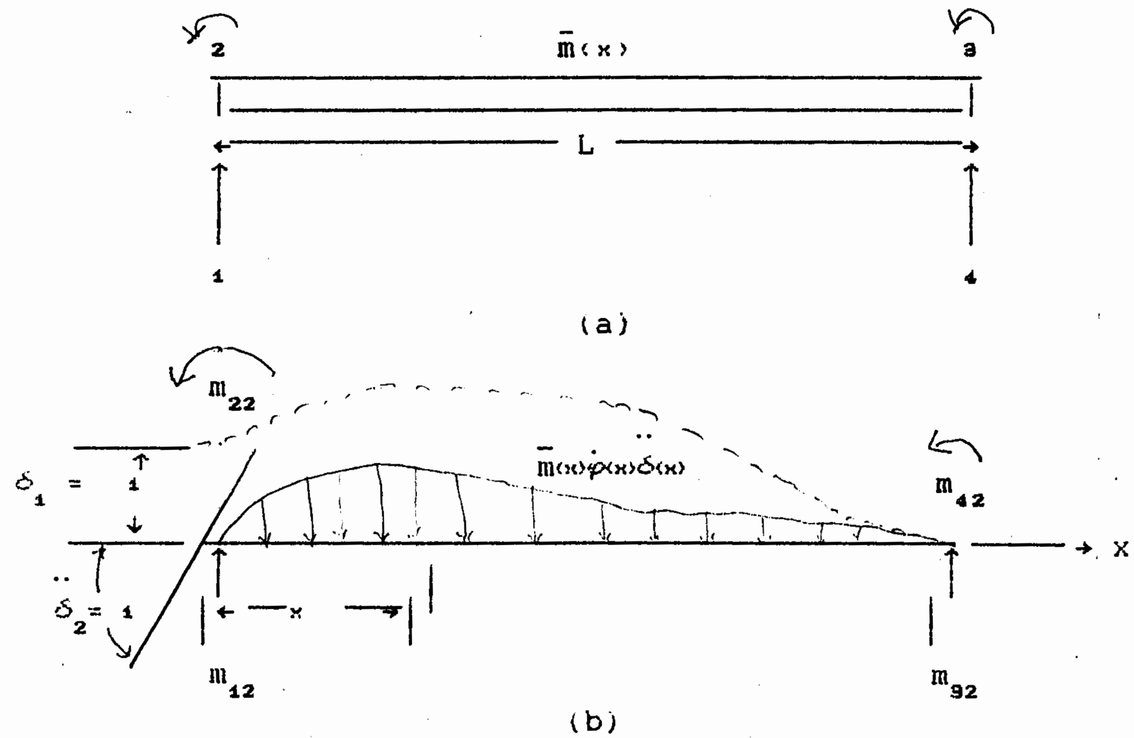


Fig. K2.4.4.1

Sea el segmento de la viga mostrado en en la figura K2.4.1 (a), el que soporta una masa distribuida de $\bar{m}(x)$ por unidad de longitud. En el método de la masa consistente, se supone que las deflexiones resultantes del desplazamiento dinámico unitario en las coordenadas nodales de la viga están dadas por las mismas funciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ y $\varphi_4(x)$ dadas en las ecuaciones(K2.1.10), mismas que fueron deducidas a partir de consideraciones de la estática. Si el segmento de la viga se encuentra sujeto a una aceleración unitaria en una de sus coordenadas nodales, por ejemplo $\ddot{\delta}_1 = 1$, entonces la aceleración transversal desarrollada a lo largo de la longitud de la viga se encuentra derivando dos veces respecto al tiempo la ecuación (K2.1.11), mientras se mantienen $\ddot{\delta}_1 = \ddot{\delta}_3 = \ddot{\delta}_4 = 0$, obteniéndose así

$$\ddot{y}_2(x) = \varphi_2(x)\ddot{\delta}_2 \quad . \qquad \text{(K2.4.1)}$$

La fuerza de inercia a lo largo de la viga debida a ésta aceleración está dada por

$$f_I(x) = \bar{m}(x)\ddot{y}_2(x) \quad , \qquad \text{(k2.4.2)}$$

o bién, empleando (K2.4.1) por

$$f_I(x) = \bar{m}(x)\ddot{y}(x) \quad ,$$

y puesto que $\ddot{\delta}_2 = 1$,

$$f_I(x) = \bar{m}(x)\varphi_2(x) \quad . \qquad \text{(K2.4.3)}$$

Para calcular al coeficiente de masa m_{12}, damos a la viga mostrada en la figura K2.4.1.(b) un desplazamiento unitario en la coordenada nodal 1, $\delta_1 = 1$ y se procede a aplicar el principio del trabajo virtual en el sistema elástico. El trabajo virtual debido a la fuerza externa es

$$W_E = m_{12}\delta_1 = m_{12} \qquad (K2.4.4)$$

puesto que la única fuerza externa es la reacción a la fuerza de inercia $m_{12}\delta_1$ donde $\delta_1 = 1$. Por otra parte el trabajo virtual ejecutado por las fuerza internas a lo largo del segemento de la viga es

$$\delta W_I = f_I(x)\varphi_1(x),$$

y de aquí, empleando la ecuación (K2.4.3) se obtiene

$$\delta W_I = \bar{m}(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x) \quad ,$$

y sumando

$$W_I = \int_0^L \bar{m}(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)dx \quad . \qquad (K2.4.5)$$

Igualando el trabajo virtual ejecutado por las fuerzas externas con el ejecutado por las fuerzas internas, a partir de las ecuaciones (K2.4.4) y (K2.4.5) se obtiene finalmente que

$$m_{12} = \int_0^L \bar{m}(x)\varphi_2(x)dx \qquad (K2.4.6)$$

ésta es la expresión que da el coeficiente de la masa consistente m_{12}. Generalizando estos resultados se sabe que

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \; . \qquad (K2.4.7)$$

Observando (K2.4.7) se deduce fácilmente que $m_{ij} = m_{ji}$.

Por otra parte, las ecuaciones (K2.1.10) se pueden usar para calcular los coeficientes de masa en una viga recta cualquiera. Para el caso especial cuando la viga soporta una masa uniformemente distribuida se obtiene la siguiente relación entre las fuerza de inercia y la aceleración en la coordenadas nodales

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \bar{m}L/420 \cdot \begin{bmatrix} 156 & & \text{simetrica} & \\ 22L & 4L^2 & & \\ 54 & 13L & 156 & \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \end{bmatrix} \qquad (K2.4.8)$$

Toda vez que la matriz de masas dadas por la ecuación superior ha sido evaluada, se procede a ensamblar la matriz para el sistema entero, para tal fin se procede en la forma usual ya explicada.

El análisis dinámico usando la matriz de masas permite un considerable ahorro detrabajo computacional, comparado con el método de la masa consistente debido, esencialmente a las siguientes causas. La matriz de masas concentradas genera una matriz diagonal, mientras que la matriz de masas consistente puede contener bastantes términos fuera de la diagonal. La matriz de masas consistente, como se vió, también contiene ceros en la diagonal principal. Este hecho permite la eliminación por condensación estática de los grados de libertad asociados a las rotaciones, reduciéndose así la dimensión del problema dinámico. Sin embargo, el análisis dinámico empleando el método de la matriz de masas consistente aproxima mejor los resultados, cuando se compara con el método de la masa condensada.

K2.5 CARACTERISTICAS DE AMORTIGUAMIENTO

Los coeficientes de amortiguamiento se definen de modo análogo a los coeficientes de rigidez de masa. En particular, el coeficiente de amortiguamiento c_{ij} se define como la fuerza en la coordenada i generada por una velocidad unitaria en j. Por ejemplo

$$c_{ij} = \int_0^L c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \quad , \qquad \text{(K2.5.1)}$$

donde $c(x)$ representa el coeficiente de amortiguamiento distribuido por unidad de longitud. En la práctica no se acostumbra evaluar al coeficiente $c(x)$. Por esta razón, el amortiguamiento casi siempre se expresa en términos de las razones de amortiguamiento obtenidos experimentalmente. Estas razones de amortiguamiento son estimadas a partir de los modos naturales de vibración.

K2.6 CARGAS EXTERNAS

Cuando las cargas dinámicas que actúan sobre la estructura consisten de fuerzas concentradas y momentos aplicados en las coordenadas nodales ya definidas, el vector de cargas puede ser escrito directamente. En el caso general, las cargas suelen estar aplicadas en puntos distintos a aquéllos donde estan definidas las coordenadas nodales. Además, la carga externa puede comprender la acción de cargas uniformente distribuidas; en estos casos, el vector de carga correspondiente a las coordenadas nodales consiste de fuerzas equivalentes o fuerzas generalizadas. El procedimiento para determinar las fuerzas nodales equivalentes, correspondiente con la matriz de rigideces y la matriz de masas, estriba en suponer la validez de las funciones de deflexión estática dada por las ecuaciones (K2.1.10), obtenidas en el caso del problema dinámico y emplear seguidamente el principio del trabajo virtual.

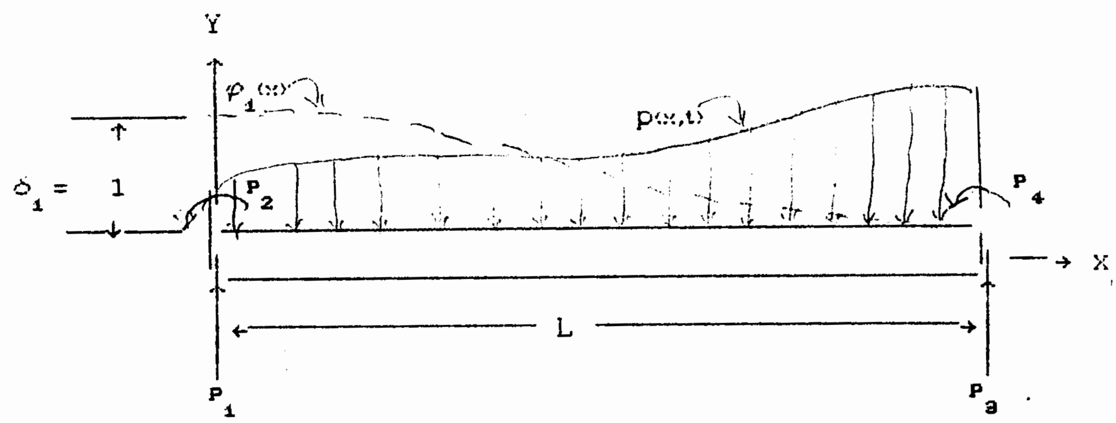


Fig. K2.6.1

Sea el elemento de una viga mostrado en la figura superior misma que se encuentra sujeta a la acción de de una fuerza arbitraria distribuida según $p(x,t)$. La fuerza equivalente P_1 en la coordenada 1 puede ser determinada dando el desplazamiento virtual $\delta = 1$ en dicha coordenada e igualando el trabajo realizado por las fuerzas externa con el realizado por las fuerzas internas.

$$W_E = P_1 \cdot \delta_1 = P_1 \tag{K2.6.1}$$

pues $\delta_1 = 1$. Por otra parte, el trabajo interno por unidad de longitud de la viga esta dado por $p(x,t) \cdot \varphi_1$, siendo la suma igual a

$$W_I = \int_0^L p(x,t)\varphi_1(x)dx \ . \tag{K2.6.2}$$

Y de aquí, igualando, como de costumbre, las ecuaciones (K2.6.1) y (K2.6.2) se deduce

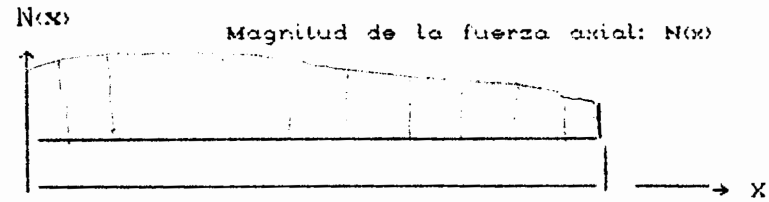
$$P_1(t) = \int_0^L p(x,t)\cdot\varphi_1(x)dx \quad . \qquad \text{(K2.6.3)}$$

Análogamente, el caso general está dado por

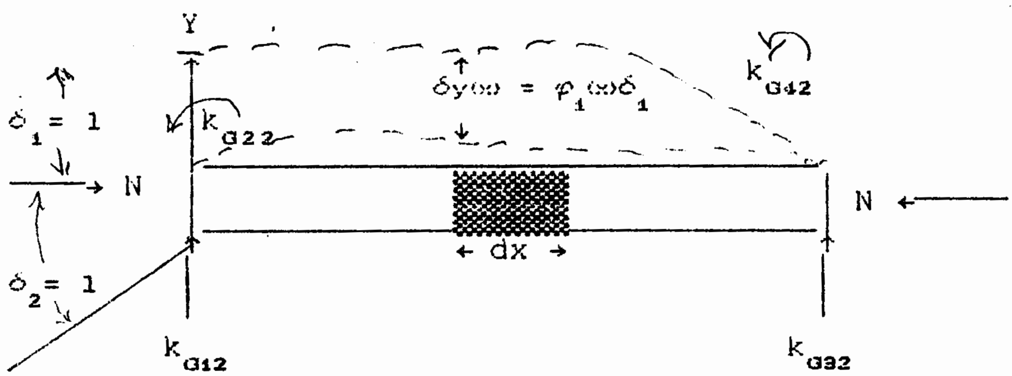
$$P_i(t) = \int_0^L p(x,t)\varphi_i(x)dx \quad . \qquad \text{(K2.6.4)}$$

K2.6 ASPECTOS GEOMETRICOS DE LA RIGIDEZ

Cuando una viga se encuentra sometida a esfuerzos axiales, además de los esfuerzos flexionantes aparecen esfuerzos axiales, debiéndose modificar consecuentemente los coeficientes de rigidez k_{ij}, los nuevos coeficientes k_{Gij} conocidos como coeficiente de rigidez geométrica. Este último coeficiente se define como la fuerza resultante en la coordenada nodal i cuando la coordenada j sufre un desplazamiento unitario, y además se consideran las fuerzas axiales en la estructura. También este coeficiente de rigidez geométrico se puede obtener aplicando el principio del trabajo virtual.



(a)



(b)

Fig. K2.6.1

Sea la viga mostrada en la figura superior, misma que se encuentra sujeta a una fuerza axial uniformemente distribuida de magnitud N(x) unidades de fuerza por unidad de longitud. Sea que la viga gira ahora en su extremo izquierdo un ángulo igual a $\delta_2 = 1$. Por definición, las fuerzas nodales debidas a este giro son k_{G12} la fuerza vertical en el mismo extremo, etc. Si a continuación permitimos que la viga ya deformada se deforme nuevamente por causa del desplazamiento $\delta_1 = 1$, el trabajo externo será

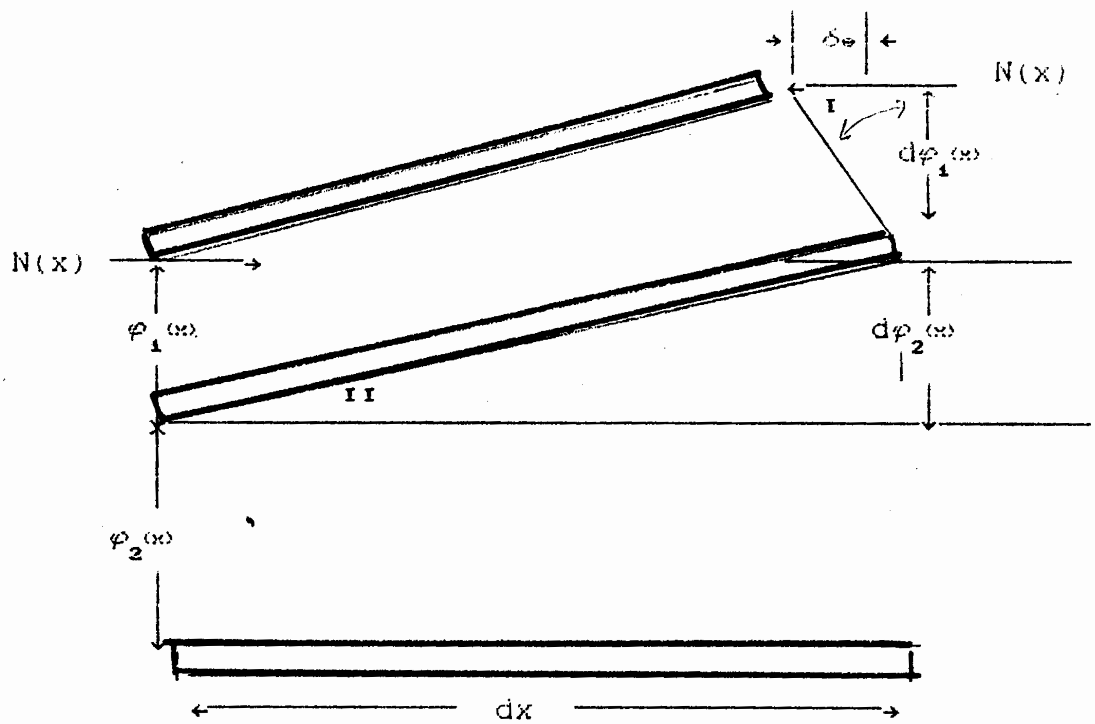
$$W_E = k_{G12}\delta_1 = k_{G12}. \qquad (K2.6.1)$$

pues $\delta_1 = 1$.

Por otra parte, se sabe que el trabajo interno debido al desplazamiento virtual se calcula por

$$dW_I = N(x)\cdot\delta_e \ , \qquad (K2.6.2)$$

donde δ_e representa el desplazamiento relativo ocasionado por la fuerza normal N(x) al actuar en elemento diferencial durante el desplazamiento virtual. Considerando ahora la semejanza de los triangulos en la figura K2.6.2, se deduce que



Segmento diferencial de una viga deformada

Fig. K2.6.2

$$\delta_e / d\varphi_1(x) = d\varphi_2(x)/dx \ ,$$

o sea

$$\delta_e = d\varphi_1/dx \cdot d\varphi_2/dx \cdot dx$$

$$\delta_e = \varphi_1'(x)\varphi_2'(x) \cdot dx,$$

donde φ_1' y φ_2' son las derivadas respecto a la variable x de los deplazamientos definidos de acuerdo a las expresiones (K2.1.10).

Sustituyendo ahora δ_e en (K2.6.2) se obtiene

$$dW_I = N(x)\varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx \qquad \text{(K2.6.3).}$$

Integrando esta expresión e igualandola al trabajo externo dado por (K2.6.1) finalmente se deduce

$$k_{G12} = \int_0^L N(x)\varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx \ . \qquad \text{(K2.6.4)}$$

En general, el coeficiente de rigidez se expresa por

$$k_{Gij} = \int_0^L N(x)\varphi_i'(x)\varphi_2'(x)dx \ . \qquad \text{(K2.6.5)}$$

En esta última fórmula se supone que la fuerza $N(x)$ es independiente del tiempo. Por otra parte, cuando los desplazamientos de la viga se emplean las fórmulas (K2.2.10) para calcular los coeficientes de rigidez geométricos, se obtiene la llamada matriz geométrica de rigidez consistente, a saber

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{N}{30L} \cdot \begin{bmatrix} 36 & & \text{simétrica} & \\ 3L & 4L^2 & & \\ -36 & -3L & 36 & \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}. \quad \text{(K2.6.6)}$$

Se acostumbra definir a la matriz de rigidez geométrica $[K_c]$ para las fuerzas de compresión axiales por

$$[K_c] = [K] - [K_G] \quad \text{(K2.6.7)}$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez elástica ya ensamblada.

K2.7 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Se pueden obtener las ecuaciones de movimiento, en función de las coordenadas nodales, tomando en cuenta a las condiciones de equilibrio dinámico dadas por las fuerzas inerciales $\{F_I(T)\}$, las fuerzas de amortiguamiento $\{F_D(T)\}$, las fuerzas elásticas $\{F_S(T)\}$, y las fuerzas externas $\{F(T)\}$, esto es

$$\{F_I(T)\} + \{F_D(T)\} + \{F_S(T)\} = \{F(t)\} . \qquad (K2.7.1)$$

Los términos de la izquierda se expresan como a continuación se indica

$$\{F_I(T)\} = [M]\cdot\{\ddot{y}\} , \qquad (K2.7.2)$$

$$\{F_D(T)\} = [C]\cdot\{\dot{y}\} , \qquad (K2.7.3)$$

$$\{F_S(T)\} = [K]\cdot\{y\} . \qquad (K2.7.4)$$

Sustituyendo estas cuatro ecuaciones en (K2.7.1) se obtiene la ecuación diferencial que describe el movimiento de un sistema lineal

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [C]\{y\} = \{F(t)\}. \qquad (K2.7.5)$$

Por añadidura, cuando se toman en cuenta los efectos de las fuerzas axiales, la anterior ecuación se modifica como seguidamente se indica

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K_c]\{y\} = \{F(t)\}. \qquad (K2.7.6)$$

K2.8 EJEMPLO

Sea la viga mostrada en la figura K2.8.1, se desea determinar la frecuencia natural y las tres primeras frecuencias y modós de vibración, cuando aquélla se ha dividido en cuatro segmentos de igual longitud.

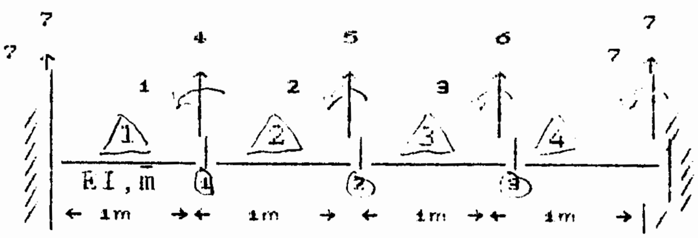


Fig. K2.8.1

La matriz de rigidez de los elementos viene dada por

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 4 & 1 \end{array} \\
[K] = EI \cdot & \left[\begin{array}{cccc} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 7 & 4 \\ 7 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{array}
\end{array}
\qquad (K2.8.1)
$$

Y la respectiva matriz ya ensamblada es

$$[K] = EI \cdot \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 24 & -12 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -12 & 24 \end{bmatrix} . \qquad (K2.8.2)$$

Se efectúa ahora la reducción de esta matriz mediante la eliminación según Gauss-Jordan de los tres primeros renglones

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0-.214 & -0.750 & 0.214 \\ 0 & 1 & 0 & 0.858 & 0 & -0.858 \\ 0 & 0 & 1 & -0.214 & 0.750 & 0.214 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 18.86EI & -12.00EI & 5.14EI \\ 0 & 0 & 0 & -12.00EI & 15.00EI & -12.00EI \\ 0 & 0 & 0 & 5.14EI & -12.00EI & 28.86EI \end{array}\right] . \qquad (K2.8.3)$$

Y de aquí se sabe la matriz reducida $[\bar{K}]$ y la matriz de transformación $[T]$ son, respectivamente

$$[\bar{K}] = EI \cdot \begin{bmatrix} 18.86 & -12 & 5.14 \\ -12.00 & 15.00 & -12.00 \\ 5.14 & -12.00 & 18.86 \end{bmatrix} \qquad (K2.8.4)$$

y

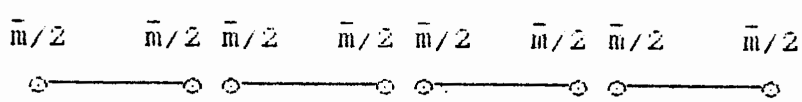
$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 0.214 & 0.750 & -0.214 \\ -0.858 & 0 & 0.858 \\ 0.214 & -0.750 & -0.214 \end{bmatrix} . \qquad \text{(K2.8.5)}$$

Siendo la matriz de transformación

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.214 & 0.750 & -0.214 \\ -0.858 & 0 & 0.858 \\ 0.214 & -.0750 & -0.214 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \qquad \text{(K2.8.6)}$$

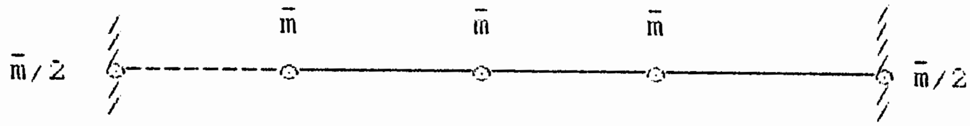
Por el método de la masa concentrada se obtiene

$$[\hat{M}] = \bar{m} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \qquad \text{(K2.8.7)}$$



(a)

Masas concentradas en los segmentos



(b)

Masas concentradas en los nodos

Fig. K2.8.2

Las frecuencias naturales y los modos de virbación se encuentran resolviendo el problema de vibración libre no amortiguado

$$[\bar{M}]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} . \qquad \text{(K2.8.8)}$$

Si ahora se supone que $\{y\} = \{a\} \cdot \text{sen}\,\omega t$ se obtiene

$$([\bar{K}] - \omega^2[\bar{M}]) \cdot \{y\} = \{0\} , \qquad \text{(K2.8.9)}$$

y de aquí que

$$\begin{vmatrix} 18.86 - \lambda & -12.00 & 5.14 \\ -12.00 & 15.00 - \lambda & -12.00 \\ 5.15 & -12.00 & 18.86 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(K2.8.10)}$$

donde

$$\lambda = (\bar{m}\omega^2)/(EI) \quad . \tag{K2.8.11}$$

Las raices de la ecuación (K2.8.10) son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.943 \\ \lambda_2 &= 13.720 \\ \lambda_3 &= 37.057. \end{aligned} \tag{K2.8.12}$$

Y en consecuencia, de (K2.8.11) se deduce

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1.393\sqrt{EI/\bar{m}} \\ \omega_2 &= 3.857\sqrt{EI/\bar{m}} \\ \omega_3 &= 6.087\sqrt{EI/\bar{m}} \quad . \end{aligned} \tag{K2.8.13}$$

Y los modos naturales de vibración son

$$\langle a \rangle_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.84 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad \langle a \rangle_2 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0 \\ -1.00 \end{bmatrix}, \quad \langle a \rangle_3 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -1.08 \\ 1.00 \end{bmatrix} \tag{K2.8.14}$$

Por otra parte, normalizando los modos mediante el procedimiento de dividir a los elementos de las ecuaciones (K2.8.14) entre $\sqrt{\Sigma m_i a_{ij}^2}$, donde se tomó $m_i = \bar{m} = 100$kg/m, se obtiene

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.0431 & 0.0707 & 0.0562 \\ 0.0793 & 0 & -0.0607 \\ 0.0431 & -0.0707 & 0.0562 \end{bmatrix} . \qquad (K2.8.15)$$

Ahora se desea conocer la respuesta estacionaria de la misma viga cuando se encuentra sujeta las siguientes fuerzas armónicas

$$F_1 = F_{01}\text{sen}\bar{\omega}t\ ,$$
$$F_2 = F_{02}\text{sen}\bar{\omega}t,$$
$$F_3 = F_{03}\text{sen}\bar{\omega}t,$$

las que actúan, respectivamente en los nodos 1,2 y 3. Se desprecian los efectos debidos a la fricción; además se considera que $EI = 10^8$ N·m^2, $m = 100$kg/m, $\bar{\omega} = 3000$ rad/seg, $F_{01} = 2{,}000$ N, $F_{02} = 3{,}000$ N y $F_{03} = 1{,}000$ N.

Las ecuaciones desacopladas son

$$\ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = P_n \mathrm{sen}\bar{\omega}t \qquad (K2.8.16)$$

donde

$$P_n = \sum_{i=1}^{N} \phi_{in} F_{oi} \; .$$

La solución estacionaria de la ecuación (K2.8.16) viene dada por

$$z_n = Z_n \mathrm{sen}\bar{\omega}t = (P_n \mathrm{sen}\bar{\omega}t)/(\omega_n^2 - \bar{\omega}^2) \; . \qquad (K2.8.17)$$

Los cálculos respectivos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla K2.8.1

Modo n	ω_n^2	$P_n = \sum_i \varphi_{in} F_{oi}$	$Z_n = P_n(\omega_n^2 - \bar{\omega}^2)$
1	$1.943 \cdot 10^6$	367.2	$-5.200 \cdot 10^{-5}$
2	$13.720 \cdot 10^6$	70.7	$1.500 \cdot 10^{-5}$
3	$37.057 \cdot 10^6$	-13.5	$-0.048 \cdot 10^{-5}$

Por otra parte, las deflexiones en las coordenadas nodales se puden encontrar mediante la siguiente ecuación

$$\{y\} = [\Phi]\{Z\} \qquad (K2.8.18)$$

donde $[\Phi]$ es la matriz modal y

$$\{y\} = \{Y\}\cdot \operatorname{sen}\bar{\omega}t$$

$$\{z\} = \{Z\}\cdot \operatorname{sen}\bar{\omega}t \ .$$

Tomando los valores de la matriz modal de la ecuación (K2.8.15), y los valores de $\{Z\}$ de la tabla K2.8.1, se obtiene la amplitud en las coordenadas nodales 4,5, y 6

$$\begin{bmatrix} Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0431 & 0.0707 & 0.0562 \\ 0.0793 & 0 & -0.0607 \\ 0.0431 & -0.0707 & 0.0562 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.200 \\ 1.500 \\ -0.048 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

o sea

$$Y_4 = -1.207\cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$Y_5 = -4.094\cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$Y_6 = -3.329\cdot 10^{-6} \text{ m} \ .$$

Luego el movimiento en estas coordenadas nodales está puede ser descrito por

$$y_4 = -1.207\cdot 10^{-6} \operatorname{sen}3000t \text{ m}$$

$$y_5 = -4.094\cdot 10^{-6} \operatorname{sen}3000t \text{ m} \qquad \text{(K2.8.19)}$$

$$y_6 = -3.329\cdot 10^{-6} \operatorname{sen}3000t \text{ m} \ .$$

K2.9 FUERZAS EN LOS NODOS

Una vez que se conocen los desplazamientos en la estructura se pueden calcular facilmente las fuerzas que actúan en los nodos $\langle P\rangle$. Para ello basta sumar la fuerza inercial $\langle P_I\rangle$, la fuerza de amortiguamiento $\langle P_D\rangle$, la fuerza elástica $\langle P_S\rangle$, y además restarse las fuerza equivalente $\langle P_E\rangle$

$$\langle P\rangle = \langle P_I\rangle + \langle P_D\rangle + \langle P_S\rangle - \langle P_E\rangle \ ,$$

o sea

$$\langle P\rangle = [m]\langle\ddot{\delta}\rangle + [c]\langle\dot{\delta}\rangle - \langle P_E\rangle . \qquad (K2.9.1)$$

Asi, para determinar las fuerzas que actúan en los nodos de la viga mostrada en el ejemplo anterior, puesto que el efecto debido al amortiguamiento se desprecia, la ecuación (K2.9.1) se reduce a

$$\langle P\rangle = [m]\langle\ddot{\delta}\rangle + [k]\langle\delta\rangle \ . \qquad (K2.9.2)$$

Usando la matriz de transformación para calcular los desplazamientos nodales correspondientes a las coordenadas condensadas se tiene que

$$\{y_p\} = [\bar{T}]\{y_q\} \qquad (K2.9.3)$$

donde

$$\{y_p\} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

son las coordenadas condensadas (desplazamiento angular), y

$$\{y_q\} = \begin{bmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}$$

son las coordenadas independientes (traslaciones). Sustituyendo el valor de la matriz $[\bar{T}]$ según (K2.8.5) y $\{y_q\}$ según (K2.8.19) en (K2.9.3) se deduce

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.214 & 0.750 & -0.214 \\ -0.858 & 0 & 0.858 \\ 0.214 & -0.750 & -0.214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.207 \\ -4.094 \\ -3.329 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen}3000t$$

o sea

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.616 \\ -1.818 \\ 3.524 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen}3000t. \qquad \text{(K2.9.3)}$$

Consecuentemente, las funciones de desplazamiento son

$$\{\delta\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_4 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \{\delta\}_2 = \begin{bmatrix} y_4 \\ y_1 \\ y_5 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \{\delta\}_3 = \begin{bmatrix} y_5 \\ y_2 \\ y_6 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \{\delta\}_4 = \begin{bmatrix} y_6 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(K2.8.5)

Aplicando (K2.9.3) en el primer segmento de la viga se tiene que

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m}/2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \bar{m}/2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_4 \\ y_1 \end{bmatrix} (-\bar{\omega}^2)\text{sen}\bar{\omega}t + EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sen}\bar{\omega}t$$

Ahora bién, dando los valores $\bar{\omega}$ = 3000 rad/seg, $\bar{m}$ = 100 Kg/m y EI = 10^8 N·m^2 se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 7.5 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.207 \\ -2.616 \end{bmatrix} \cdot 10^2 \cdot \mathrm{sen}3000t$$

Tabla K2.9.1

Fuerzas en los nodos (amplitudes)

Fuerza	segmento de la viga 1	2	3	4	unidades
P_1	-121.2	1347.1	1947.9	-382.3	N
P_2	201.0	322.2	-481.4	-587.0	N·m
P_3	664.3	1038.3	1392.4	1880.4	N
P_4	-322.2	481.4	587.0	-1292.6	N·m

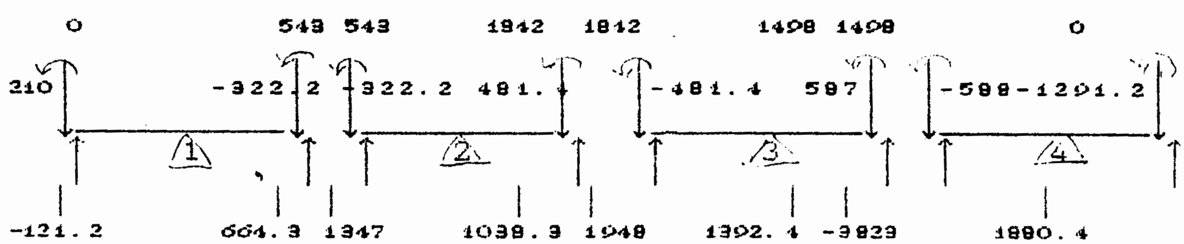


Fig. K2.9.1

Además se tiene que

$$P_1 = -121.2\cdot \text{sen}3000t \text{ N},$$

$$P_2 = 201.0\cdot \text{sen}3000t \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$P_3 = 664.3\cdot \text{sen}3000t \text{ N},$$

$$P_4 = -322.2\cdot \text{sen}3000t \text{ N}\cdot\text{m}.$$

K2.9 DESCRIPCION DEL PROGRAMA

El programa "BEAM.FOR" permite el análisis de vigas mediante el método de la matriz de rigideces. La sección principal del programa ejecuta el loop sobre los segmentos en los cuales se subdividió a la viga. Se calculan y se arman así los elementos de las matrices de masas y de rigideces. Posteriormente, en caso de existir, se leen los datos correspondientes a las masas concentradas en las coordenadas nodales y se añaden estos resultados a la matriz de masas. La siguiente parte del programa permite el llamado de las siguientes subrutinas

JACOBI	Calcula las frecuencias naturales y los modos normales
CONDE	Condensa las matrices de masas y de rigideces
STEPM	Calcula la respuesta paso a paso por

	el método θ de Wilson
MODAL	Calcula la respuesta por el método de superposición modal
DAMP	Calcula la matriz de amortiguamiento a partir de las razones de amortiguamiento

A continuación se describen las principales variables usadas.

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
NE		Número de elementos
ND		Número de grados de libertad
NCR	p	Número de grados de libertad por condensar
NCM		Número de masas concentradas
LOC		Indice de masa 0 → masa concentrada 1 → masa consistente
IFPR		Impresión de valores intermedios en JACOBI: 0 → no se imprimen 1 → si se imprimen
E	E	Módulo de elasticidad
LE		Número del segmento de viga

SL	L	Longitud del segmento de la viga
SMA	$\bar{m}$	Masa por unidad de longitud
NC(L)		Coordenadas nodales del segmento de la viga (L = 1.4)
CM(L)		Masas concentradas (L = 1.4)
JC(L)		Coordenadas nodales de CM(L)

K2.10 EJEMPLO

Empleando el programa "BEAM.FOR" calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración para la viga mostrada en la figura K2.8.1. Dividir la viga en cuatro segmentos iguales. condensar las rotaciones. despreciar el amortiguamiento y usar masas concentradas.

SOLUCION

El problema se resuelve empleando las subrutinas "CONDE". a efecto de condensar los grados de libertad correspondientes a las rotaciones: y utilizando también la subrutina "JACOBI". para resolver el problema de valores característicos.

Los datos que alimentan al programa se obtienen de la sección K2.8. Si bién la selección de las subrutinas se hace a través del teclado. los datos que alimentan a las subrutinas se leen del archivo "BEA1.DAT" creado de antemano. Seguidamente se presentan los listados de resultados y de datos.

N O M B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S : BEA1.DAT

D A T O S   I N I C I A L E S

```
NUMERO DE ELEMENTOS (NE)........................ =           4
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND)............... =           6
NUMERO DE GRADOS DE LIBERATAD A CONDENSAR (NCR).. =          3
NUMERO DE MASAS CONDENSADAS (NCM)............... =           0
INDICE DE MASA (LOC)............................ =           0
INDICE DE IMPRESION EN JACOBI (IFPR)............ =           0
MODULO DE ELASTICIDAD (E)....................... =     .10E+13

PARA EL ELEMENTO NUMERO   1
LONGITUD DE LA VIGA (SL)........................... =   .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)............................ =   .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................ =   .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO   1 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
PRIMERA COORDENADA NODAL .......................... =   7
SEGUNDA COORDENADA NODAL .......................... =   7
TERCERA COORDENADA NODAL .......................... =   4
CUARTA  COORDENADA NODAL .......................... =   1

PARA EL ELEMENTO NUMERO   2
LONGITUD DE LA VIGA (SL)........................... =   .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)............................ =   .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................ =   .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO   2 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
PRIMERA COORDENADA NODAL .......................... =   4
SEGUNDA COORDENADA NODAL .......................... =   1
TERCERA COORDENADA NODAL .......................... =   5
CUARTA  COORDENADA NODAL .......................... =   2

PARA EL ELEMENTO NUMERO   3
LONGITUD DE LA VIGA (SL)........................... =   .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)............................ =   .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................ =   .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO   3 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
```

PRIMERA COORDENADA NODAL .... = 5
SEGUNDA COORDENADA NODAL .... = 2
TERCERA COORDENADA NODAL .... = 6
CUARTA COORDENADA NODAL .... = 3 44-K2

PARA EL ELEMENTO NUMERO 4
LONGITUD DE LA VIGA (SL)........................... = .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)........................... = .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................... = .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO 4 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
PRIMERA COORDENADA NODAL .... = 6
SEGUNDA COORDENADA NODAL .... = 3
TERCERA COORDENADA NODAL .... = 7
CUARTA COORDENADA NODAL .... = 7

LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA ES :

.1886E+10	-.1200E+10	.5143E+09
-.1200E+10	.1500E+10	-.1200E+10
.5143E+09	-.1200E+10	.1886E+10

LA MATRIZ DE TRANSFORMACION ES

.2143E+00	.7500E+00	-.2143E+00
-.8571E+00	-.1388E-16	.8571E+00
.2143E+00	-.7500E+00	-.2143E+00
.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+01	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.1000E+01

LA MATRIZ DE MASAS REDUCIDA ES:

.1000E+03	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+03	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.1000E+03

V A L O R E S P R O P I O S

.3673583D+08 .2168988D+07 .1380947D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942952D+07 .1371429D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942950D+07 .1371429D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942950D+07 .1371429D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942950D+07 .1371429D+08

V E C T O R E S   P R O P I O S

45-K2

VECTOR PROPIO NUM. 1

.5604256D-01 -.6097921D-01 .5604256D-01

VECTOR PROPIO NUM. 2

.4311881D-01 .7925614D-01 .4311881D-01

VECTOR PROPIO NUM. 3

-.7071068D-01 -.2343012D-17 .7071068D-01

BEA1.DAT

```
4
6
3
0
0
0
1000000000000.
1.0.0.0001.100.0
7.7.4.1
1.0.0.0001.100.0
4.1.5.2
1.0.0.0001.100.0
5.2.6.3
1.0.0.0001.100.0
6.3.7.7
0.01
0.2
0
2
0
0.0.5000.0
0.2.5000.0
0.0
0.0
0.0
```

K2.11 EJEMPLO

Para la viga del ejemplo anterior. calcular la respuesta cuando se le aplica súbitamente una fuerza de 5.000 N en el centro del claro. Usar el método de las masas concentradas y despreciar el amortiguamiento.

SOLUCION

La solución a este problema se puede encontrar mediante el uso del programa "BEAM.FOR" como a continuación se indica:

Toda vez que han sido calculadas las matrices reducidas de masas y de rigideces y resuelto el correspondiente problema de valores característicos del ejemplo anterior. se llama a la subrutina "MODAL" para calcular la respuesta en cada uno de las tres coordenadas nodales (traslación) de la viga. Al final del apéndice se muestran tanto el listado de resultados como el listado de los datos que alimentaron al programa.

```
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.............. =              3
CONSTANTE DE ACELERACION DE LA GRAVEDAD (GR).... =      .0000E+00
INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT).................... =      .1000E-01
RANGO DEL TIEMPO (TMAX)......................... =      .2000E+00
```

```
PARA LA FUERZA NUM.   2  EN EL TIEMPO       .0000
     EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES  5000.0000
```

```
PARA LA FUERZA NUM.   2  EN EL TIEMPO       .2000
     EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES  5000.0000
```

```
NIVEL NUMERO :    1
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO =  .0000E+00

NIVEL NUMERO :    2
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO =  .0000E+00

NIVEL NUMERO :    3
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO =  .0000E+00
```

I M P R E S I O N   D E   R E S U L T A D O S

RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTICO

TIEMPO	DESPLAZAMIENTO DE LAS COORDENADAS NODALES (DADAS EN ORDEN CRECIENTE DE LOS NIVELES)		
.000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.100E-01	.6428E-05	.1367E-04	.6428E-05
.200E-01	.1612E-04	.3194E-04	.1612E-04
.300E-01	.1368E-04	.2526E-04	.1368E-04
.400E-01	.2172E-05	.5309E-05	.2172E-05
.500E-01	.5451E-06	.3613E-05	.5451E-06
.600E-01	.1192E-04	.2235E-04	.1192E-04
.700E-01	.1717E-04	.3235E-04	.1717E-04
.800E-01	.8002E-05	.1741E-04	.8002E-05
.900E-01	-.1098E-06	.7007E-06	-.1098E-06
.100E+00	.5164E-05	.9831E-05	.5164E-05
.110E+00	.1513E-04	.3037E-04	.1513E-04
.120E+00	.1465E-04	.2838E-04	.1465E-04
.130E+00	.4063E-05	.7533E-05	.4063E-05
.140E+00	-.1726E-06	.1901E-05	-.1726E-06
.150E+00	.9595E-05	.1961E-04	.9595E-05
.160E+00	.1758E-04	.3233E-04	.1758E-04
.170E+00	.1019E-04	.2046E-04	.1019E-04
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

	el método θ de Wilson
MODAL	Calcula la respuesta por el método de superposición modal
DAMP	Calcula la matriz de amortiguamiento a partir de las razones de amortiguamiento

A continuación se describen las principales variables usadas.

VARIABLE	SIMBOLO EN EL TEXTO	DESCRIPCION
NE		Número de elementos
ND		Número de grados de libertad
NCR	p	Número de grados de libertad por condensar
NCM		Número de masas concentradas
LOC		Indice de masa 0 → masa concentrada 1 → masa consistente
IFPR		Impresión de valores intermedios en JACOBI: 0 → no se imprimen 1 → si se imprimen
E	E	Módulo de elasticidad
LE		Número del segmento de viga

SL	L	Longitud del segmento de la viga
SMA	$\bar{m}$	Masa por unidad de longitud
NC(L)		Coordenadas nodales del segmento de la viga (L = 1.4)
CM(L)		Masas concentradas (L = 1.4)
JC(L)		Coordenadas nodales de CM(L)

K2.10 EJEMPLO

Empleando el programa "BEAM.FOR" calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración para la viga mostrada en la figura K2.8.1. Dividir la viga en cuatro segmentos iguales. condensar las rotaciones. despreciar el amortiguamiento y usar masas concentradas.

SOLUCION

El problema se resuelve empleando las subrutinas "CONDE". a efecto de condensar los grados de libertad correspondientes a las rotaciones; y utilizando también la subrutina "JACOBI". para resolver el problema de valores característicos.

Los datos que alimentan al programa se obtienen de la sección K2.8. Si bién la selección de las subrutinas se hace a través del teclado. los datos que alimentan a las subrutinas se leen del archivo "BEA1.DAT" creado de antemano. Seguidamente se presentan los listados de resultados y de datos.

N O M B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S : BEA1.DAT

D A T O S   I N I C I A L E S

```
NUMERO DE ELEMENTOS (NE)........................... =              4
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND).................. =              6
NUMERO DE GRADOS DE LIBERATAD A CONDENSAR (NCR).. =                3
NUMERO DE MASAS CONDENSADAS (NCM).................. =              0
INDICE DE MASA (LOC)............................... =              0
INDICE DE IMPRESION EN JACOBI (IFPR)............... =              0
MODULO DE ELASTICIDAD (E).......................... =         .10E+13

PARA EL ELEMENTO NUMERO   1
LONGITUD DE LA VIGA (SL)........................... =    .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)............................ =    .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................ =    .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO   1 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
PRIMERA COORDENADA NODAL .......................... =   7
SEGUNDA COORDENADA NODAL .......................... =   7
TERCERA COORDENADA NODAL .......................... =   4
CUARTA  COORDENADA NODAL .......................... =   1

PARA EL ELEMENTO NUMERO   2
LONGITUD DE LA VIGA (SL)........................... =    .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)............................ =    .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................ =    .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO   2 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
PRIMERA COORDENADA NODAL .......................... =   4
SEGUNDA COORDENADA NODAL .......................... =   1
TERCERA COORDENADA NODAL .......................... =   5
CUARTA  COORDENADA NODAL .......................... =   2

PARA EL ELEMENTO NUMERO   3
LONGITUD DE LA VIGA (SL)........................... =    .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)............................ =    .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................ =    .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO   3 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
```

SEGUNDA COORDENADA NODAL .... = 2
TERCERA COORDENADA NODAL .... = 6
CUARTA COORDENADA NODAL .... = 3 44-K2

PARA EL ELEMENTO NUMERO 4
LONGITUD DE LA VIGA (SL)............................ = .1000000E+01
MOMENTO DE INERCIA (SI)............................ = .1000000E-03
MASA POR UNIDAD DE LONGITUD........................ = .1000000E+03

PARA EL ELEMENTO NUMERO 4 SE TIENEN LAS
LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :
PRIMERA COORDENADA NODAL .... = 6
SEGUNDA COORDENADA NODAL .... = 3
TERCERA COORDENADA NODAL .... = 7
CUARTA COORDENADA NODAL .... = 7

LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA ES :

.1886E+10	-.1200E+10	.5143E+09
-.1200E+10	.1500E+10	-.1200E+10
.5143E+09	-.1200E+10	.1886E+10

LA MATRIZ DE TRANSFORMACION ES

.2143E+00	.7500E+00	-.2143E+00
-.8571E+00	-.1388E-16	.8571E+00
.2143E+00	-.7500E+00	-.2143E+00
.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+01	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.1000E+01

LA MATRIZ DE MASAS REDUCIDA ES:

.1000E+03	.0000E+00	.0000E+00
.0000E+00	.1000E+03	.0000E+00
.0000E+00	.0000E+00	.1000E+03

V A L O R E S P R O P I O S

.3673583D+08 .2168988D+07 .1380947D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942952D+07 .1371429D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942950D+07 .1371429D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942950D+07 .1371429D+08

V A L O R E S P R O P I O S

.3705705D+08 .1942950D+07 .1371429D+08

VECTOR PROPIO NUM. 1

.5604256D-01 -.6097921D-01 .5604256D-01

VECTOR PROPIO NUM. 2

.4311881D-01 .7925614D-01 .4311881D-01

VECTOR PROPIO NUM. 3

-.7071068D-01 -.2343012D-17 .7071068D-01

BEA1.DAT

```
4
6
3
0
0
0
1000000000000.
1.0.0.0001.100.0
7.7.4.1
1.0.0.0001.100.0
4.1.5.2
1.0.0.0001.100.0
5.2.6.3
1.0.0.0001.100.0
6.3.7.7
0.01
0.2
0
2
0
0.0.5000.0
0.2.5000.0
0.0
0.0
0.0
```

K2.11 EJEMPLO

Para la viga del ejemplo anterior. calcular la respuesta cuando se le aplica súbitamente una fuerza de 5.000 N en el centro del claro. Usar el método de las masas concentradas y despreciar el amortiguamiento.

SOLUCION

La solución a este problema se puede encontrar mediante el uso del programa "BEAM.FOR" como a continuación se indica:

Toda vez que han sido calculadas las matrices reducidas de masas y de rigideces y resuelto el correspondiente problema de valores característicos del ejemplo anterior. se llama a la subrutina "MODAL" para calcular la respuesta en cada uno de las tres coordenadas nodales (traslación) de la viga. Al final del apéndice se muestran tanto el listado de resultados como el listado de los datos que alimentaron al programa.

NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):...............	=	3
CONSTANTE DE ACELERACION DE LA GRAVEDAD (GR)....	=	.0000E+00
INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT).....................	=	.1000E-01
RANGO DEL TIEMPO (TMAX)..........................	=	.2000E+00

PARA LA FUERZA NUM. 2 EN EL TIEMPO .0000
EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES 5000.0000

PARA LA FUERZA NUM. 2 EN EL TIEMPO .2000
EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES 5000.0000

NIVEL NUMERO : 1
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = .0000E+00

NIVEL NUMERO : 2
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = .0000E+00

NIVEL NUMERO : 3
COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = .0000E+00

I M P R E S I O N D E R E S U L T A D O S

RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTICO

TIEMPO	DESPLAZAMIENTO DE LAS COORDENADAS NODALES (DADAS EN ORDEN CRECIENTE DE LOS NIVELES)		
.000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
.100E-01	.6428E-05	.1367E-04	.6428E-05
.200E-01	.1612E-04	.3194E-04	.1612E-04
.300E-01	.1368E-04	.2526E-04	.1368E-04
.400E-01	.2172E-05	.5309E-05	.2172E-05
.500E-01	.5451E-06	.3613E-05	.5451E-06
.600E-01	.1192E-04	.2235E-04	.1192E-04
.700E-01	.1717E-04	.3235E-04	.1717E-04
.800E-01	.8002E-05	.1741E-04	.8002E-05
.900E-01	-.1098E-06	.7007E-06	-.1098E-06
.100E+00	.5164E-05	.9831E-05	.5164E-05
.110E+00	.1513E-04	.3037E-04	.1513E-04
.120E+00	.1465E-04	.2838E-04	.1465E-04
.130E+00	.4063E-05	.7533E-05	.4063E-05
.140E+00	-.1726E-06	.1901E-05	-.1726E-06
.150E+00	.9595E-05	.1961E-04	.9595E-05
.160E+00	.1758E-04	.3233E-04	.1758E-04
.170E+00	.1019E-04	.2046E-04	.1019E-04
.180E+00	-.3563E-07	.2337E-05	[illegible]

[illegible]
.190E+00 .3597E-05 .6783E-05 .3597E-05

N O M B R E   D E L   A R C H I V O

D E   D A T O S   I N I C I A L E S   :FLUJO

DATOS DEL PROBLEMA

NO. DE ELEMENTOS (NELS) =	32
NO. DE NODOS (NNDS) =	45
NO. DE ZONAS (NZNS) =	1
NO. DE NODOS CON CARGA ESPECIFICADA (NHDS) =	10
NO. DE FUENTES O SUMIDEROS (NWELS) =	0
NO. DE ELEMENTOS CON GASTO ESPECIFICADO (NQBND)=	20

NODO	XCORD	YCORD
1	250.00	1500.00
2	312.50	1125.00
3	375.00	750.00
4	437.50	375.00
5	500.00	.00
6	500.00	1500.00
7	625.00	1125.00
8	750.00	750.00
9	875.00	375.00
10	1000.00	.00
11	750.00	1500.00
12	937.50	1125.00
13	1125.00	750.00
14	1312.50	375.00
15	1500.00	.00
16	1000.00	1500.00
17	1250.00	1125.00
18	1500.00	750.00
19	1750.00	375.00
20	2000.00	.00
21	1500.00	1500.00
22	1687.50	1125.00
23	1875.00	750.00
24	2062.50	375.00
25	2250.00	.00
26	2000.00	1500.00
27	2125.00	1125.00
28	2250.00	750.00

```
BEA2.DAT
4
6
3
0
0
0
1000000000000.
1.0.0.0001.100.0
7.7.4.1
1.0.0.0001.100.0
4.1.5.2
1.0.0.0001.100.0
5.2.6.3
1.0.0.0001.100.0
6.3.7.7
0.01
0.2
0
2
0
0.0.5000.0
0.2.5000.0
0.0
0.0
0.0
0.0100
0.200
2
0.0.5000.0
0.2.5000.0
0.0
0.0
0.0
```

```
C      PROGRAMA "BEAM.FOR"
C      ANALISIS DINAMICO DE VIGAS
C
C
C       ATENCION                  ATENCION
C       EL USUARIO DEBERA CUIDAR EL COTEJO DE LOS PARAMETROS
C       EN CADA UNA DE LAS SUBRUTINAS EMPLEADAS EN CADA
C       CASO PARTICULAR
C
C      SUBRUTINAS:
C             CONDE(ND.NCR.LOC.SK.SM.SC.T)
C             JACOBI(SK.SC.T,EIGEN.TT,NL.IFPR)
C             DAMP(NL.T.SM.SC.EIGEN)
C             HARMO(NL.SK.SM)
C             STEP(SK.SM.SC,NL)
C             MODAL(ND.EIGEN,T.SC.GR.SM)
       IMPLICIT REAL*8(A-H.O-Z)
      DIMENSION SK(20.20),SM(20.20).T(20.20),TT(20.20).EIGEN(20),NC(4).
     1 BK(4.4).BM(4.4).JC(20).CM(20).SC(20.20)
      CHARACTER ANOM1*12.ANOM2*12
      COMMON LBL2
C      LECTURA DE DATOS INICIALES
C
      OPEN(6.FILE='PRN')
  211 FORMAT(//' N O M B R E   D E L   A R C H I V O'//
     11X.'D E   D A T O S   I N I C I A L E S  : 'A12//)
   31 FORMAT(/'           INICIO DEL PROGRAMA "BEAM.FOR"',/
     1.1X.'DAME MODO DE LECTURA DE LOS DATOS'/
     1.1X.'(1) LECTURA EN PANTALLA'/
     2.1X.'(2) LECTURA EN DISCO'//)
    2 WRITE(*,31)
      READ(*,*)LBL2
      IF(LBL2.EQ.2)THEN
  321 FORMAT(A12)
  323 FORMAT(1X.A12//)
  322 FORMAT(' DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS'/
     11X.'EJEMPLO: DATOS#.DAT'//)
      WRITE(*,322)
      READ(*.321)ANOM1
      WRITE(*.323)ANOM1
      OPEN(4.FILE=ANOM1)
      READ(4.321)ANOM2
      WRITE(*.211)ANOM2
      WRITE(6.211)ANOM2
      ENDIF
   62 FORMAT(' D A T O S   I N I C I A L E S'///
     11X.'NUMERO DE ELEMENTOS (NE).......................... = '.I15/
     21X.'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND)................. = '.I15/
     31X.'NUMERO DE GRADOS DE LIBERATAD A CONDENSAR (NCR).. = '.I15/
     41X.'NUMERO DE MASAS CONDENSADAS (NCM)................ = '.I15/
     51X.'INDICE DE MASA (LOC)............................. = '.I15/
     61X.'INDICE DE IMPRESION EN JACOBI (IFPR)............ = '.I15/
     71X.'MODULO DE ELASTICIDAD (E)....................... = '.E15.2//)
      WRITE(*.104)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 34
      READ(*,*)NE
  104 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE ELEMENTOS (NE)'/)
      GO TO 35
```

```
   34 READ(4.*)NE
  105 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND)'/)
   35 IF(NE.EQ.0)GO TO 99
      WRITE(*.105)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 36
      READ(*.*)ND
      GO TO 37
   36 READ(4.*)ND
  106 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD A CONDENSAR (NCR)'
     1./)
   37 WRITE(*.106)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 38
      READ(*.*)NCR
      GO TO 39
   38 READ(4.*)NCR
  107 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DE MASAS CONCENTRADAS (NCM)'/)
   39 WRITE(*.107)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 20
      READ(*.*)NCM
      GO TO 42
   20 READ(4.*)NCM
  108 FORMAT(/' DAME EL INDICE DE MASA (LOC) :'/
     1.26X.'(1) MASA CONCENTRADA'/
     2.26X.'(2) MASA CONSISTENTE'//)
   42 WRITE(*.108)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 43
      READ(*.*)LOC
      GO TO 44
   43 READ(4.*)LOC
  109 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DEL CASO EN JACOBI (IFPR):'/
     1.26X.'(1)  NO SE IMPRIME DURANTE LA ITERACION'/
     2.26X.'(2)  SI SE IMPRIME DURANTE LA ITERACION'//)
   44 WRITE(*.109)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 45
      READ(*.*)IFPR
      GO TO 46
   45 READ(4.*)IFPR
  110 FORMAT(/' DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD (E)'//)
   46 WRITE(*.110)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 47
      READ(*.*)E
      GO TO 48
   47 READ(4.*)E
   48 WRITE(*.62)NE.ND.NCR.NCM.LOC.IFPR.E
      WRITE(6.62)NE.ND.NCR.NCM.LOC.IFPR.E
      LOC =LOC-1
      IFPR = IFPR-1
      NL = ND - NCR
      DO 5 I =1. ND
      DO 5 J =1. ND
      SK(I.J) = 0.0
    5 SM(I.J) = 0.0
C
C     MATRICES DE:
C                          MASA Y RIGIDEZ
C
C     LOOP SOBRE SEGEMENTOS DE VIGAS
C
```

```
      DO 30 LE = 1. NE
      WRITE(*.95)LE
   95 FORMAT(/' PARA EL ELEMTO NUMERO '.I3.' DAME LOS SIGUIENTES DATOS:'
     1./
     2.1X.'(1): LONGITUD DEL ELEMNTO VIGA (SL)'/
     3.1X.'(2): MOMENTO DE INERCIA (SI)'/
     4.1X.'(3): MASA POR UNIDAD DE LONGITUD (SMA)'//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 500
      READ(*,*)SL.SI.SMA
      GO TO 501
  500 READ(4,*)SL.SI.SMA
  501 WRITE(*.611)LE.SL.SI.SMA
      WRITE(6.611)LE.SL.SI.SMA
  611 FORMAT(/' PARA EL ELEMENTO NUMERO '.I3./
     11X.'LONGITUD DE LA VIGA (SL)............................ = '.E15.7/
     21X.'MOMENTO DE INERCIA (SI)............................. = '.E15.7/
     31X.'MASA POR UNIDAD DE LONGITUD......................... = '.E15.7/
     4//)
  505 FORMAT(/' PARA EL ELEMENTO NUMERO '.I3./
     11X.'DAME LAS COORDENADAS NODALES EN EL SIGUIENTE ORDEN:'/
     21X.'(1): PRIMERA COORDENADA NODAL'/
     31X.'(2): SEGUNDA COORDENADA NODAL'/
     41X.'(3): TERCERA COORDENADA NODAL'/
     51X.'(4): CUARTA  COORDENADA NODAL'//)
      WRITE(*.505)LE
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 506
      READ(*.*)(NC(L).L=1.4)
      GO TO 507
  506 READ(4.*)(NC(L).L=1.4)
  508 FORMAT(/' PARA EL ELEMENTO NUMERO '.I3.' SE TIENEN LAS'/
     11X.'LAS SIGUIENTES COORDENADAS NODALES :'/
     21X.'PRIMERA COORDENADA NODAL ......................... = '.I3/
     31X.'SEGUNDA COORDENADA NODAL ......................... = '.I3/
     41X.'TERCERA COORDENADA NODAL ......................... = '.I3/
     51X.'CUARTA  COORDENADA NODAL ......................... = '.I3//)
  507 WRITE(*.508)LE.(NC(L).L=1.4)
      WRITE(6.508)LE.(NC(L).L=1.4)
      A1 = E*SI/SL**3
      A2 = SMA*SL/420.0
      BK(1,1) = 12.0*A1
      BK(1.2) = 6.0*A1*SL
      BK(1.3) = -12.0*A1
      BK(1,4) = 6.0*A1*SL
      BK(2.2) = 4.0*A1*SL**2
      BK(2.3) = -6.0*A1*SL
      BK(2.4) = 2.0*A1*SL**2
      BK(3.3) = 12.0*A1
      BK(3.4) = -6.0*A1*SL
      BK(4.4) = 4.0*A1*SL**2
      IF(LOC.EQ.1) GO TO 11
      DO 6 I=1.4
      DO 6 J=1.4
    6 BM(I.J) = 0.0
      BM(1.1) = SL*SMA/2.0
      BM(3.3) = SL*SMA/2.0
      GO TO 12
   11 BM(1.1) = 156.0*A2
      BM(1.2) = 22.0*A2*SL
```

```
      BM(1,3) = 54.0*A2
      BM(1,4) = -13.0*A2*SL
      BM(2,2) = 4.0*A2*SL**2
      BM(2,3) = 13.0*A2*SL
      BM(2,4) = -3.0*A2*SL**2
      BM(3,3) = 156.0*A2
      BM(3,4) = -22.0*A2*SL
      BM(4,4) = 4.0*A2*SL**2
   12 DO 15 I = 2,4
      L = I-1
      DO 15 J = 1,L
      BK(I,J) = BK(J,I)
   15 BM(I,J) = BM(J,I)
C
C     ENSAMBALADO DE LAS MATRICES DE MASA Y DE RIGIDEZ
C
      DO 13 II =1,4
      I = NC(II)
      IF(I.GT.ND) GO TO 13
      DO 10 JJ = 1,4
      J = NC(JJ)
      IF(J.GT.ND) GO TO 10
   16 SK(I,J) = SK(I,J) + BK(II,JJ)
      SM(I,J) = SM(I,J) + BM(II,JJ)
   10 CONTINUE
   13 CONTINUE
   30 CONTINUE
C
C
C     PARA CUANDO SE TIENE EL CASO DE :
C     MASA CONCENTRADA
C
      IF(NCM.EQ.0)GO TO 41
  520 FORMAT(/' SE TIENEN MASAS CONCENTRADAS :'/
     11X,' PARA EL CASO ',I3,' DAME LOS SIGUIENTES DATOS :'/
     21X,'(1) EL NUMERO DE LA COORDENADA NODAL .......(JC)'/
     31X,'(2) LA RESPECTIVA MASA CONCENTRADA .........(CM)'//)
      DO 521 L=1,NCM
      WRITE(*,520)L
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 522
      READ(*,*)JC(L),CM(L)
      GO TO 523
  522 READ(4,*)JC(L),CM(L)
  523 WRITE(*,524)L,JC(L),CM(L)
      WRITE(6,524)L,JC(L),CM(L)
  524 FORMAT(/' PARA EL CASO ',I3,' SE TIENE :'/
     11X,' COORDENADA NODAL (JC) ........................ = ',I15/
     21X,' RESPECTIVA MASA CONCENTRADA (CM)............. = ',E15.4//)
  521 CONTINUE
      DO 40 L = 1,NCM
      I = JC(L)
   40 SM(I,I) = SM(I,I) + CM(L)
   41 CONTINUE
      DO 81 I = 1,ND
      DO 81 J = 1,ND
   81 SC(I,J) = SM(I,J)
C     PARA CONDENSACION ESTATICA LLAMARA CONDE
```

```
      WRITE(*,90)
   90 FORMAT(/1X,'(DESEA UTILIZAR CONDENSACION ESTATICA LLAMANDO'/
     11X,'SUBRUTINA "CONDE"(, TECLEAR :'/
     21X,'(1): NO SE LLAMA A LA SUBRUTINA'/
     31X,'(2): SI SE LLAMA A LA SUBRUITNA'//)
      LBL3 = 1
      READ(*,*)LBL3
      IF(LBL3.EQ.2) CALL CONDE(ND,NCR,LOC,SK,SM,SC,T)
C     PARA CONOCER FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS NORMALES
C     SE LLAMA SUBRUTINA JACOBI
  996 FORMAT(/1X,'PARA DETERMINAR LAS FRECUENCIAS Y'/
     11X,'MODOS NATURALES LLAMAR A LA SUBRUTINA "JACOBI"'/
     21X,'(1): NO SE LLAMA A LA SUBRUTINA'/
     31X,'(2): SI SE LLAMA A AL SUBRUTINA'//)
      LBL8 = 1
      WRITE(*,996)
      READ(*,*)LBL8
      IF(LBL8.EQ.2)CALL JACOBI(SK,SC,T,EIGEN,TT,NL,IFPR)
C     PARA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO LLAMAS DAMP
C
   91 FORMAT(//1X,'DESEA CALCULAR LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO LLAMANDO'/
     11X,'SUBRUTINA "DAMP"?, TECLEAR :'/
     21X,'(1): NO SE LLAMA A LA SUBRUTINA'/
     31X,'(2): SI SE LLAMA A LA SUBRUTINA'//)
      LBL4 = 1
      WRITE(*,91)
      READ(*,*)LBL4
      IF(LBL4.EQ.2)CALL DAMP(NL,T,SM,SC,EIGEN)
C     CALCULO EN CASO DE ACTURA FUERZAS ARMONICAS
C
   92 FORMAT(1X,'DESEA CALCULAR CASO DE FUERZAS ARMONICAS LLAMANDO'/
     11X,'A LA SUBRUTINA "HARMO"?, TECLEAR :'/
     21X,'(1): NO SE LLAMA A LA SUBRUTINA'/
     31X,'(2): SI SE LLAMA A LA SUBRUTINA'//)
      LBL5 = 1
      WRITE(*,92)
      READ(*,*)LBL5
      IF(LBL5.EQ.2) CALL HARMO(NL,SK,SM)
C     PARA SOLUCION PASO A PASO LLAMAR STEP
C
C        OJO ACTUALIZAR SUBRUTNA STEPS
C
   93 FORMAT(1X,'DESEA CALCULAR EFECTOS PASO A PASO LLAMANDO'/
     11X,'A LA SUBRUTINA "STEP"?, TECLEAR :'/
     21X,'(1): NO SE LLAMA A LA SUBRUTINA'/
     31X,'(2): SI SE LLAMA A LA SUBRUTINA'//)
      LBL6 = 1
C      WRITE(*,93)
C      READ(*,*)LBL6
C      IF(LBL6.EQ.2)CALL STEP(SK,SM,SC,NL)
   94 FORMAT(1X,'DESEA CALCULAR LA RESPUESTA AL CORTANTE LLAMANDO'/
     11X,'A LA SUBRUTINA "MODAL"?, TECLEAR :'/
     21X,'(1): NO SE LLAMA A LA SUBRUTINA'/
     31X,'(2): SI SE LLAMA A LA SUBRUTINA'//)
      LBL7 = 1
      WRITE(*,94)
      READ(*,*)LBL7
```

```
      NNDD = ND-NCR
      IF(LBL7.EQ.2)CALL MODAL(NNDD.EIGEN.T.SC.GR.SM)
      GO TO 2
   99 CONTINUE
      STOP
      END
C
C
C
      SUBROUTINE JACOBI(A.B.X.EIGEN.D.N.IFPR)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(20.20).B(20.20).X(20.20).EIGEN(20).D(20)
      COMMON LBL2
      NSMAX=15
  980 FORMAT(/10X,'V A L O R E S    P R O P I O S'///)
      RTOL=1.D-12
      DO 10 I=1,N
      IF(A(I,I).GT.0. .AND. B(I,I).GT.0.)GO TO 4
      WRITE(*,202)
      WRITE(6,202)
  202 FORMAT(25X,'E R R O R    E N    L A  M A T R I Z    A   O   B'/)
      RETURN
    4 D(I)=A(I,I)/B(I,I)
   10 EIGEN(I)=D(I)
      DO 30 I=1,N
      DO 20 J=1,N
   20 X(I,J)=0.0
   30 X(I,I)=1.0
      IF(N.EQ.1) RETURN
C
C
      NSWEEP=0
      NR=N-1
   40 NSWEEP=NSWEEP+1
      IF(IFPR.EQ.1)WRITE(*,2)NSWEEP
      IF(IFPR.EQ.1)WRITE(6,2)NSWEEP
C
C
      EPS=(0.01**NSWEEP)**2
      DO 210 J=1,NR
      JJ=J+1
      DO 210 K=JJ,N
      EPTOLA=(A(J,K)*A(J,K))/(A(J,J)*A(K,K))
      EPTOLB=(B(J,K)*B(J,K))/(B(J,J)*B(K,K))
      IF((EPTOLA.LT.EPS).AND.(EPTOLB.LT.EPS))GO TO 210
C
C
      AKK= A(K,K)*B(J,K)-B(K,K)*A(J,K)
      AJJ= A(J,J)*B(J,K)-B(J,J)*A(J,K)
      AB=  A(J,J)*B(K,K)-A(K,K)*B(J,J)
      CHECK=(AB*AB+4.0*AKK*AJJ)/4.0
      IF(CHECK)50,60,60
   50 WRITE(*,202)
      WRITE(6,202)
      RETURN
   60 SQCH=DSQRT(CHECK)
      D1=AB/2.0+SQCH
```

```
      D2=AB/2.0-SQCH
      DEN=D1
      IF(ABS(D2).GT.DABS(D1))DEN=D2
      IF(DEN)80.70.80
   70 CA=0.0
      CG=-A(J.K)/A(K.K)
      GO TO 90
   80 CA=AKK/DEN
      CG=-AJJ/DEN
C
C
   90 IF(N-2)100.190.100
  100 JP1=J+1
      JM1=J-1
      KP1=K+1
      KM1=K-1
      IF(JM1-1)130.110.110
  110 DO 120 I=1,JM1
      AJ=A(I.J)
      BJ=B(I.J)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I.K)
      A(I.J)=AJ+CG*AK
      B(I.J)=BJ+CG*BK
      A(I.K)=AK+CA*AJ
  120 B(I.K)=BK+CA*BJ
  130 IF(KP1-N)140.140.160
  140 DO 150 I=KP1.N
      AJ=A(J.I)
      BJ=B(J.I)
      AK=A(K,I)
      BK=B(K,I)
      A(J.I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(K.I)=AK+CA*AJ
  150 B(K,I)=BK+CA*BJ
  160 IF(JP1-KM1)170.170.190
  170 DO 180 I=JP1.KM1
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J.I)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I.K)
      A(J.I)=AJ+CG*AK
      B(J.I)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
  180 B(I,K)=BK+CA*BJ
  190 AK=A(K,K)
      BK=B(K,K)
      A(K.K)=AK+2.0*CA*A(J,K)+CA*CA*A(J.J)
      B(K.K)=BK+2.0*CA*B(J,K)+CA*CA*B(J.J)
      A(J.J)=A(J.J)+2.0*CG*A(J.K)+CG*CG*AK
      B(J.J)=B(J.J)+2.0*CG*B(J.K)+CG*CG*BK
      A(J.K)=0.0
      B(J,K)=0.0
      DO 200 I=1.N
      XJ=X(I,J)
      XK=X(I.K)
```

```
      X(I,J)=XJ+CG*XK
  200 X(I,K)=XK+CA*XJ
  210 CONTINUE
C
C
      DO 220 I=1,N
      IF(A(I,I).GT.0.0 .AND. B(I,I).GT.0.0) GO TO 220
      WRITE(*,202)
      WRITE(6,202)
      RETURN
  220 EIGEN(I)=A(I,I)/B(I,I)
      IF(IFPR.EQ.0)GO TO 230
      WRITE(*,203)
      WRITE(6,203)
      WRITE(*,211)(EIGEN(I),I=1,N)
      WRITE(6,211)(EIGEN(I),I=1,N)
  203 FORMAT(15X,'V A L O R E S    P R O P I O S '/)
C
C
  230 DO 240 I=1,N
      TOL=RTOL*D(I)
      DIF=DABS(EIGEN(I)-D(I))
      IF(DIF.GT.TOL)GO TO 280
  240 CONTINUE
C
C
      EPS=RTOL*RTOL
      DO 250 J=1,NR
      JJ =J+1
      DO 250 K=JJ,N
      EPSA=(A(J,K)*A(J,K))/(A(J,J)*A(K,K))
      EPSB=(B(J,K)*B(J,K))/(B(J,J)*B(K,K))
      IF((EPSA.LT.EPS).AND.(EPSB.LT.EPS))GO TO 250
      GO TO 280
  250 CONTINUE
C
C
  255 DO 260 I=1,N
      DO 260 J=1,N
      A(J,I)=A(I,J)
  260 B(J,I)=B(I,J)
      DO 270 J=1,N
      BB=DSQRT(B(J,J))
      DO 270 K=1,N
  270 X(K,J)=X(K,J)/BB
   57 FORMAT(/' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      IF(IFPR.EQ.1) THEN
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      ENDIF
      IF(IFPR.EQ.0) THEN
      WRITE(*,980)
      WRITE(6,980)
      WRITE(6,211)(EIGEN(I),I=1,N)
      WRITE(*,211)(EIGEN(I),I=1,N)
      ENDIF
      IF(IFPR.EQ.0)THEN
```

```
      WRITE(*,57)
      READ(*,*)LABEL
      ENDIF
      WRITE(6,199)
      WRITE(*,199)
      DO 1991 LJ=1,N
      WRITE(*,59)LJ
      WRITE(6,59)LJ
   59 FORMAT(//15X,'VECTOR PROPIO NUM. ',I4/)
      WRITE(*,211)(X(LI,LJ),LI=1,N)
 1991 WRITE(6,211)(X(LI,LJ),LI=1,N)
  199 FORMAT(/15X,'V E C T O R E S   P R O P I O S',/)
      RETURN
  280 DO 290 I=1,N
  290 D(I)=EIGEN(I)
      IF(NSWEEP.LT.NSMAX)GO TO 40
      GO TO 255
    2 FORMAT(/'  ITERACION ',I4//)
  211 FORMAT(6X,4D14.7,2X,/)
      END
C
C
C
      SUBROUTINE MODAL(ND,EIGEN,X,SC,GR,SM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8INT1,INT2,INT3,INT4,K,M
      DIMENSION EIGEN(20),X(20,20),XIS(20),F(20,20),P(20),T(20),Y(20,20)
     1,UD(20),FF(20),NQ(20),SM(20,20)
      COMMON LBL2
C
      INT1(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DCOS(WD*TAU)+WD*DSIN(WD*TAU))/DWSQ
      INT2(TAU)=DEXP(XIWD*TAU)*(XIWD*DSIN(WD*TAU)-WD*DCOS(WD*TAU))/DWSQ
      INT3(TAU)=TAU*INT2(TAU)-XIWD*INT2(TAU)/DWSQ+WD*INT1(TAU)/DWSQ
      INT4(TAU)=TAU*INT1(TAU)-XIWD*INT1(TAU)/DWSQ-WD*INT2(TAU)/DWSQ
C
C     LECTURA E INTERPOLACION DE FUNCIONES FORZANTES
C
   32 FORMAT(/' DAME EL NUMERO DISTINTO DE PUNTOS DONDE ESTAN'/
     11X,'DEFINIDAS LAS FUNCIONES DE EXCITACION VARIABLES ',/
     21X,'EN LA COORDENADA DEL TIEMPO (NQ=1 SI ACTUA ACELERACION)'//)
   33 FORMAT(/' DAME EL INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT):',//)
   34 FORMAT(/' DAME EL RANGO EN EL TIEMPO (TMAX):',//)
      NG=ND
      IF(GR.NE.0.)NG=1
      NNN=20
      WRITE(*,33)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 47
      READ(*,*)DT
      GO TO 48
C
   47 READ(4,*)DT
   48 WRITE(*,34)
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 49
      READ(*,*)TMAX
      GO TO 60
  778 FORMAT(//' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
   49 READ(4,*)TMAX
```

```
775 FORMAT(///
   11X,'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):.............. = ',I15,/
   21X,'CONSTANTE DE ACELERACION DE LA GRAVEDAD (GR).... = ',E15.4,/
   31X,'INCREMENTO EN EL TIEMPO (DT).................... = ',E15.4,/
   41X,'RANGO DEL TIEMPO (TMAX)......................... = ',E15.4,/
   5///)
 60 WRITE(*,775)ND,GR,DT,TMAX
    WRITE(6,775)ND,GR,DT,TMAX
    WRITE(*,778)
    READ(*,*)LBL1
    WRITE(*,32)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 61
772 FORMAT(/,' DAME EL NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINE A LA FUNCION',/
   11X,'DE EXCITACION  NUM ',I3,' O SEA DAME EL VALOR DE NQ(',I3,')'/)
    IF(LBL2.EQ.2) GO TO 61
    DO 771 L=1,NG
    WRITE(*,772)L,L
    READ(*,*)NQ(L)
    WRITE(*,783)L,NQ(L)
783 FORMAT(/' EL NUMERO DE PUNTOS QUE DEFINEN A LA FUNCION NUM.'I3,/
   1,' ES :' I3/)
    WRITE(6,783)L,NQ(L)
771 CONTINUE
    GO TO 62
 61 DO 773 L=1,NG
    WRITE(*,772)L,L
    READ(4,*)NQ(L)
773 CONTINUE
 62 DO 76 I=1,NNN
    FF(I)=0.0
    DO 76 J=1,NNN
 76 F(I,J)=0.0
    DO 77 ID=1,NG
    NEQ=NQ(ID)
    IF(NEQ.EQ.0) GO TO 77
    IF(LBL2.EQ.2)GO TO 63
 64 FORMAT(/,' PARA LA FUERZA NUMERO',I3,/
   1,1X,'(A): DAME EL VALOR DE T(',I3,')'/
   2,1X,'(B): DAME EL VALOR DE P(',I3,')'/)
    DO 65 L = 1,NEQ
    WRITE(*,64)ID,L,L
    READ(*,*)T(L),P(L)
 65 CONTINUE
    GO TO 67
 63 DO 66 L=1,NEQ
    WRITE(*,64)ID,L,L
    READ(4,*)T(L),P(L)
 66 CONTINUE
    DO 785 L=1,NEQ
784 FORMAT(/' PARA LA FUERZA NUM. 'I3,'  EN EL TIEMPO ',F10.4,/
   1          '           EL VALOR DEL TERMINO FORZANTE ES ',F10.4//)
    WRITE(*,784)ID,T(L),P(L)
    WRITE(6,784)ID,T(L),P(L)
785 CONTINUE
    WRITE(*,778)
    READ(*,*)LBL1
 67 NT=T(NEQ)/DT
```

```
      IF(NT.GT.TMAX/DT) NT=TMAX/DT
      NT1=NT+1
      FF(1)=P(1)
      ANN = 0.0
      II=1
      DO 19 I=2.NT1
      AI = I-1
      TA = AI*DT
      IF(TA.GT.T(NEQ)) GO TO 160
      IF(TA.LE.T(II+1)) GO TO 9
      ANN = -T(II+1)+TA-DT
      II = II+1
    9 ANN = ANN + DT
      FF(I)=P(II)+(P(II+1)-P(II))*ANN/(T(II+1)-T(II))
      IF(GR.NE.0.)FF(I)=FF(I)*GR
      F(ID.I) = FF(I)
   19 CONTINUE
  160 CONTINUE
   77 CONTINUE
C
C     DETERMINACION DEL TIEMPO Y FUERZAS EQUIVALENTES
C
      NT = TMAX/DT
      DO 17 L=1.NNN
      AL = L -1
      T(L) = T(1) + AL*DT
      IF(GR.EQ.0.) GO TO 17
      DO 18 ID=1.ND
   18 F(ID.L)=-FF(L)*SM(ID.ID)
   17 CONTINUE
C
C     LECTURA DE AMORTIGUAMIENTOS E INICIALIZACION
C
      DO 75 L = 1. ND
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 74
   73 FORMAT(/' DAME EL AMORTIGUAMIENTO XIS('.I3.')'//)
      WRITE(*,73)L
      READ(*,*)XIS(L)
      GO TO 75
C
   74 READ(4.*)XIS(L)
   75 CONTINUE
  786 FORMAT(/' NIVEL NUMERO : 'I3./
     11X'COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO = '.E10.4/)
  100 FORMAT(8E10.3)
      DO 787 L=1.ND
      WRITE(*.786)L.XIS(L)
      WRITE(6.786)L.XIS(L)
  787 CONTINUE
      WRITE(*.778)
      READ(*.*)LBL1
C     ESCRITURA DE ENCABEZADOS
  991 FORMAT(//' I M P R E S I O N  D E  R E S U L T A D O S'///)
      WRITE(*.991)
      WRITE(6.991)
      WRITE(*.700)
      WRITE(6.700)
```

```
  700 FORMAT(/9X,'RESPUESTA DE UN SISTEMA ELASTICO',//,
     16X,'TIEMPO',3X,'DESPLAZAMIENTO DE LAS COORDENADAS NODALES (DADAS'
     2/15X,'EN ORDEN CRECIENTE DE LOS NIVELES)'/)
      NT1 = NT + 1
      DO 50 ID = 1,ND
      DO 10 IT = 1,NT1
      P(IT) = 0.0
      DO 10 I = 1,ND
   10 P(IT) = P(IT) + F(I,IT)*X(I,ID)
      M = 1.0
      K = EIGEN(ID)
      XI = XIS(ID)
    6 FIM1 = P(I)
      TIM1 = T(1)
      ATI = 0.0
      BTI = 0.0
      DAT = 0.0
      DBT = 0.0
      Y(ID,1) = 0.0
      OMEGA = DSQRT(K/M)
      CRIT = 2.*DSQRT(K*M)
      C = XI*CRIT
      WD = OMEGA*DSQRT(1.0-(XI**2))
      XIWD = XI*OMEGA
      DWSQ = XIWD**2 + WD**2
C     BUCLE SOBRE EL TIEMPO Y SOLUCION RESPECTO
C     DESPLAZAMIENTOS NODALES
      NM1 = NT - 1
      DO 1 I = 1,NM1
      FI= P(I+1)
      TI = T(I+1)
      DFTI = FI - FIM1
      DTI = TI - TIM1
      FT = DFTI/DTI
      G = FIM1 - TIM1*FT
      AI = INT1(TI) - INT1(TIM1)
      BI = INT2(TI) - INT2(TIM1)
      VS = INT3(TI) - INT3(TIM1)
      VC = INT4(TI) - INT4(TIM1)
      AI = AI*G
      AI = AI + FT*VC
      ATI = ATI + AI
      BI = BI*G
      BI = BI + FT*VS
      BTI = BTI + BI
      Y(ID,I+1)=DEXP(-XIWD*TI)*(ATI*DSIN(WD*TI)-BTI*DCOS(WD*TI))/(M*WD)
      TIM1 = TI
      FIM1 = FI
    1 CONTINUE
   50 CONTINUE
      DO 53 IT = 1,NT
      DO 52 I = 1,ND
      UD(I) = 0.0
      DO 52 J = 1,ND
   52 UD(I) = UD(I) + X(I,J)*Y(J,IT)
      WRITE(6,301) T(IT),(UD(L),L=1,ND)
   53 WRITE(*,301) T(IT),(UD(L),L=1,ND)
```

```
  301 FORMAT(1X.E10.3,6E10.4)
      RETURN
      END
C
C
C
      SUBROUTINE HARMO(ND.SK.SM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H.O-Z)
      COMPLEX*16 A(20.20).DET
      DIMENSION SK(20.20).SM(20.20)
      COMMON LBL2
  317 FORMAT(/' DAME EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO '/
     11X.'RELATIVO A LAS RIGIDECES (FACK): '//)
      WRITE(*,317)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 318
      READ(*,*)FACK
  319 FORMAT(/' FACTOR DE AMORIGUAMIENTO RESPECTO RIGIDECES = '.E14.4//)
      WRITE(*,319)FACK
      GO TO 320
  318 READ(4,*)FACK
  320 WRITE(*,321)
  321 FORMAT(/' DAME EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO'/
     11X.'RELATIVO A LAS MASAS (FACM):'//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 322
      READ(*,*)FACM
  335 FORMAT(/' FACTOR DE AMORIGUAMIENTO RESPECTO LAS MASAS = '.E14.4//)
      WRITE(*,335)FACM
      GO TO 323
  322 READ(4,*)FACM
  323 WRITE(*,324)
  324 FORMAT(/' DAME LA FRECUENCIA DEL TERMINO'/
     11X,'FORZANTE EN RAD/SEG (W):'//)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 325
      READ(*,*)W
      GO TO 326
  325 READ(4,*)W
  326 CONTINUE
  340 FORMAT(///
     11X.'NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD (ND):................. = '.I15./
     21X.'COEF. DE AMORT. RESPECTO RIGIDECES (FACK)......... = '.E15.4./
     31X.'COEF. DE AMORT. RESPECTO A LAS MASAS (FACM)....... = '.E15.4./
     41X.'FRECUENCIA DEL TERMINO FORZANTE (W)............... = '.E15.4./
     5//)
      WRITE(*,340)ND,FACK,FACM,W
      WRITE(6,340)ND,FACK.FACM.W
  341 FORMAT(//' M A T R I Z   D E   R I G I D E C E S'//)
  342 FORMAT(1X.4(E14.4.2X)/)
      WRITE(*,341)
      WRITE(6,341)
      DO 343 I=1,ND
      WRITE(6,342)(SK(I,J),J=1,ND)
      WRITE(*,342)(SK(I,J),J=1,ND)
  343 CONTINUE
  344 FORMAT(//' M A T R I Z   D E   M A S A S '//)
      WRITE(*,344)
      WRITE(6,344)
      DO 345 I=1,ND
```

```
      WRITE(6,342)(SM(I,J),J=1,ND)
      WRITE(*,342)(SM(I,J),J=1,ND)
  345 CONTINUE
      DO 10 I=1,ND
      DO 10 J=1,ND
      AR = SK(I,J) - W*W*SM(I,J)
      AI = SK(I,J)*W*FACK + SM(I,J)*W*FACM
   10 A(I,J) = DCMPLX(AR,AI)
  110 FORMAT(8F10.2)
  331 FORMAT(/' PARA EL NIVEL ',I3,2X,'DAME LA FUERZA ARMONICA'/
     11X,'DESCOMPUESTA DEL SIGUIENTE MODO:'/
     21X,'(1) COMPONENTE EN TERMINOS DEL COSENO'/
     31X,'(2) COMONENTE EN TERMINOS DEL SENO'//)
      DO 332 L=1,ND
      WRITE(*,331)L
      IF(LBL2.EQ.2)GO TO 370
      READ(*,110)A(L,ND+1)
      GO TO 333
  370 READ(4,110)A(L,ND+1)
  333 CONTINUE
  332 CONTINUE
      DO 350 L=1,ND
  334 FORMAT(//' PARA EL NIVEL NUM.',I3,' LA FUERZA ARMONICA'/
     11X,'TIENE LAS SIGUIENTES COMPONENTES EN TERMINOS '/
     21X,'DEL COSENO Y DEL SENO, RESPECTIVAMENTE',2E14.4//)
      WRITE(*,334)L,A(L,ND+1)
      WRITE(6,334)L,A(L,ND+1)
  350 CONTINUE
      DO 7 L = 1,ND
    7 A(L,ND+1) = DCONJG(A(L,ND+1))
      EPS = 1.0E-10
      NPLUSM = ND + 1
      DET = DCMPLX(1.D0,0.D0)
      DO 9 K = 1,ND
      DET = DET*A(K,K)
      IF(CDABS(A(K,K)).GT.EPS) GO TO 5
      WRITE(*,202)
      GO TO 99
    5 KP1 = K+1
      DO 6 J = KP1,NPLUSM
    6 A(K,J) = A(K,J)/A(K,K)
      A(K,K) = DCMPLX(1.D0,0.D0)
      DO 9 I=1,ND
      IF(I.EQ.K.OR.CDABS(A(I,K)).EQ.0.) GO TO 9
      DO 8 J = KP1,NPLUSM
    8 A(I,J) = A(I,J) - A(I,K)*A(K,J)
      A(I,K)= DCMPLX(0.D0,0.D0)
    9 CONTINUE
  202 FORMAT(/' LA MATRIZ PUEDE SER SINGULAR, PIVOTE PEQUENO'//)
      WRITE(*,170)
      WRITE(6,170)
  170 FORMAT(//5X,' LA RESPUESTA DEL ESTADO ESTACIONARIO ES:'//
     14X,'NIVEL.',5X,'COMP COS.'4X.'   COPM SEN.',//)
      DO 87 I=1,ND
      A(I,ND+1) = DCONJG(A(I,ND+1))
      WRITE(6,122)I,A(I,ND+1)
   87 WRITE(*,122)I,A(I,ND+1)
```

```
  122 FORMAT(/' ',I10,2D15.4)
   99 RETURN
      END
C
C
C
      SUBROUTINE CONDE(ND,NCR,LOC,SK,SM,SC,T)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION SK(20,20),SM(20,20),T(20,20),TT(20),SC(20,20)
C     SE CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA
C     Y LA MATRIZ DE TRANSFORMACION
      NL = ND - NCR
      DO 9 K=1,NCR
      IF(DABS(SK(K,K)).GT.1.D-10) GO TO 5
      WRITE(*,202)K
  202 FORMAT(//' PIVOTE DEMASIADO PEQUENO',I10,//)
      GO TO 99
    5 KP1 = K+1
      DO 6 J=KP1,ND
    6 SK(K,J) = SK(K,J)/SK(K,K)
      SK(K,K) = 1.
      DO 9 I=1,ND
      IF(I.EQ.K.OR.SK(I,K).EQ.0)GO TO 9
      DO 8 J=KP1,ND
    8 SK(I,J)=SK(I,J) - SK(I,K)*SK(K,J)
      SK(I,K) = 0.0
    9 CONTINUE
      DO 30 I=1,NCR
      DO 30 J=1,NL
      JJ = J+NCR
   30 T(I,J) =-SK(I,JJ)
      DO 40 I=1,NL
      II = I+NCR
      DO 50 J=1,NL
   50 T(II,J)=0.0
      T(II,I)= 1.0
   40 CONTINUE
      DO 20 I=1,NL
      DO 20 J=1,NL
      II = I+NCR
      JJ = J+NCR
   20 SK(I,J) = SK(II,JJ)
  169 FORMAT(//' LA MATRIZ DE RIGIDEZ REDUCIDA ES :'//)
      WRITE(6,169)
      WRITE(*,169)
      DO 80 I=1,NL
      WRITE(6,190)(SK(I,J),J=1,NL)
   80 WRITE(*,190)(SK(I,J),J=1,NL)
  111 FORMAT(/'  PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'//)
      WRITE(*,111)
      READ(*,*)LB1
      WRITE(6,170)
      WRITE(*,170)
  170 FORMAT(//6X,' LA MATRIZ  DE TRANSFORMACION ES'//)
      DO 81 I=1,ND
      WRITE(6,190)(T(I,J),J=1,NL)
   81 WRITE(*,190)(T(I,J),J=1,NL)
```

```
  190 FORMAT(6E14.4)
      WRITE(*,111)
      READ(*,*)LB1
C     SE CALCULA LA MATRIZ DE MASA REDUCIDA
      DO 68 J=1,ND
      DO 60 I=1,NL
      TT(I)=0.0
      DO 60 K=1,ND
   60 TT(I) = TT(I) + T(K,I)*SM(K,J)
      DO 65 K=1,NL
   65 SM(K,J) = TT(K)
   68 CONTINUE
      DO 78 I=1,NL
      DO 70 J=1,NL
      TT(J) = 0.0
      DO 70 K=1,ND
   70 TT(J) = TT(J) + SM(I,K)*T(K,J)
      DO 75 K=1,NL
   75 SM(I,K) = TT(K)
   78 CONTINUE
      DO 83 I=1,NL
      DO 83 J=1,NL
   83 SC(I,J) = SM(I,J)
      WRITE(6,172)
      WRITE(*,172)
  172 FORMAT(//' LA MATRIZ DE MASAS REDUCIDA ES:'//)
    7 DO 82 I=1,NL
      WRITE(6,190)(SM(I,J),J=1,NL)
   82 WRITE(*,190)(SM(I,J),J=1,NL)
   99 RETURN
      END
C
C
C
      SUBROUTINE DAMP(NL,X,SM,SC,EIGEN)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(20,20),T(20,20),SM(20,20),SC(20,20),EIGEN(20),XIS(20)
      COMMON LBL2
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  130 FORMAT(/' DAME LAS RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO XIS(I):'//)
      WRITE(*,130)
  131 FORMAT(/' DAME EL VALOR DE XIS(',I3,')'/)
      IF(LBL2.EQ.2) GO TO 283
      DO 132 L=1,NL
      WRITE(*,131)L
      READ(*,110 )XIS(L)
  132 CONTINUE
      GO TO 284
  283 DO 285 L=1,NL
      READ(4,110)XIS(L)
  285 CONTINUE
  301 FORMAT(//' LAS RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO SON:'//)
  284 WRITE(*,301)
      WRITE(6,301)
  295 FORMAT(/' PARA CONTINUAR TECLEE UN NUMERO'/)
  292 FORMAT(/' LA RAZON DE AMORTIGUAMIENTO NUMERO ',2X,I2,2X,'ES  '
```

```
     1,E14.4//)
      DO 293 I = 1,NL
      WRITE(*,292)I,XIS(I)
      WRITE(6,292)I,XIS(I)
  293 CONTINUE
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  500 FORMAT(//,5X,' R  E  S  U  L  T  A  D  O  S  :'///)
      WRITE(*,500)
      WRITE(6,500)
  125 FORMAT(//,5X,' LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO ES',//)
      WRITE(*,125)
      WRITE(6,125)
      DO 10 I=1,NL
      EIGEN(I)=DSQRT(EIGEN(I))
      DO 10 J=1,NL
   10 SC(I,J)=0.0
      DO 20 II=1,NL
      DA = 2.*XIS(II)*EIGEN(II)
      DO 20 I=1,NL
      DO 20 J=1,NL
   20 SC(I,J)=SC(I,J)+X(I,II)*X(J,II)*DA
      DO 30 I=1,NL
      DO 30 J=1,NL
      T(I,J)=0.0
      DO 30 K=1,NL
   30 T(I,J)= T(I,J)+SM(I,K)*SC(K,J)
      DO 40 I=1,NL
      DO 40 J=1,NL
      SC(I,J)=0.0
      DO 40 K=1,NL
   40 SC(I,J)=SC(I,J)+T(I,K)*SM(K,J)
      DO 50 I=1,NL
      WRITE(*,120)(SC(I,J),J=1,NL)
      WRITE(6,120)(SC(I,J),J=1,NL)
   50 CONTINUE
  110 FORMAT(3F10.2)
  120 FORMAT(6D14.4)
      RETURN
      END
```

```
     1,E14.4//)
      DO 293 I = 1,NL
      WRITE(*,292)I,XIS(I)
      WRITE(6,292)I,XIS(I)
  293 CONTINUE
      WRITE(*,295)
      READ(*,*)LBL1
  500 FORMAT(//,5X,' R  E  S  U  L  T  A  D  O  S  :'///)
      WRITE(*,500)
      WRITE(6,500)
  125 FORMAT(//,5X,' LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO ES',//)
      WRITE(*,125)
      WRITE(6,125)
      DO 10 I=1,NL
      EIGEN(I)=DSQRT(EIGEN(I))
      DO 10 J=1,NL
   10 SC(I,J)=0.0
      DO 20 II=1,NL
      DA = 2.*XIS(II)*EIGEN(II)
      DO 20 I=1,NL
      DO 20 J=1,NL
   20 SC(I,J)=SC(I,J)+X(I,II)*X(J,II)*DA
      DO 30 I=1,NL
      DO 30 J=1,NL
      T(I,J)=0.0
      DO 30 K=1,NL
   30 T(I,J)= T(I,J)+SM(I,K)*SC(K,J)
      DO 40 I=1,NL
      DO 40 J=1,NL
      SC(I,J)=0.0
      DO 40 K=1,NL
   40 SC(I,J)=SC(I,J)+T(I,K)*SM(K,J)
      DO 50 I=1,NL
      WRITE(*,120)(SC(I,J),J=1,NL)
      WRITE(6,120)(SC(I,J),J=1,NL)
   50 CONTINUE
  110 FORMAT(3F10.2)
  120 FORMAT(6D14.4)
      RETURN
      END
```