3

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ANÁLISIS DE INVERSIONES: MODELOS Y APLICACIONES

Alberto Moreno Bonett
Francisco J. Jaufred

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Estudios de Posgrado
2a. edición: junio de 1994
Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510
Supervisión editorial: Lic. Ma. Guadalupe Castro Díaz

LOS AUTORES

Profesores de las Divisiones de Estudios de Posgrado y de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. Miembros de la Academia Mexicana de Ingeniería y de diversas Asociaciones Científicas y Técnicas Mexicanas y Extranjeras.

INTRODUCCION

1. A las notas publicadas en 1991.

Las notas que a continuación se presentan, como el título de ellas y la intención de la obra lo exige, se han centrado principalmente en la utilización de diversas técnicas que permiten modelar situaciones relativas a la selección de inversiones.

Se deja al lector el buscar la fundamentación matemática en la excelente bibliografía disponible con relación a las técnicas utilizadas para la modelación y la que, por estar disponible en múltiples fuentes, no ha sido incluida.

Los autores aprovecharon una parte del segundo tomo de su obra públicada en 1981 por la Universidad Católica de Santiago de Guayaquil y por el Colegio de Ingenieros Civiles del Guayas en la República del Ecuador, bajo el título "Aplicación de la Ingeniería de Sistemas en la Ingeniería Civil"; enriqueciéndola con algunos temas que hemos experimentado, tanto en las propias aplicaciones, como en diversos cursos que hemos impartido en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Como ocurre con frecuencia, es difícil clamar originalidad en los métodos mismos, pero tal vez sea posible hacerlo en su presentación y contexto, así como en la orientación hacia las aplicaciones con base en la experiencia obtenida en los muy diversos desarrollos prácticos que hemos podido llevar a cabo.

Por lo que se refiere a las aplicaciones, siempre son pocas las que se pueden citar en unas notas fundamentalmente académicas; sin embargo, consideramos que pueden ser de utilidad para los profesionales de muy diversas ramas que se enfrentan a problemas de selección de inversiones, y muy particularmente cuando ellos implican riesgo e incertidumbre; como es característico de los problemas actuales.

Ocasionalmente, en el desarrollo de dichas aplicaciones contamos con la colaboración de muy distinguidos especialistas de prestigio internacional a quienes deseamos manifestar nuestro cabal agradecimiento por la dedicación de valiosas horas de su tiempo, así como a los destacados profesionales mexicanos que participaron en los estudios que hemos tenido en suerte concebir y dirigir.

Ya que estas notas se publican por primera vez, es evidente la posible existencia de errores. Cualquier sugerencia que contribuya a disminuirlos será apreciada y aprovechada en futuras ediciones.

Finalmente, deseamos agradecer a la Sra. Elvira White por la paciente y escrupulosa transcripción de estas notas.

Alberto Moreno Bonett
Francisco J. Jauffred

Ciudad Universitaria, México, D.F., octubre de 1990.

2. Al libro editado en 1993.

Este libro se publica en atención a la amable solicitud del Comité de Publicaciones de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería en la que se nos comunicó que nuestras notas tituladas "*Algunos Modelos para la Selección de Inversiones*" se habían agotado y por ello se nos pedía autorización para reimprimirlas.

Se procedió entonces a la revisión completa de las notas citadas con objeto de corregir las erratas detectadas tanto por los autores como por los profesores y alumnos que habían utilizado nuestras notas, así como con el fin de incluir los aspectos siguientes.

. En el capítulo 2 se añadió el método de *Evaluación por Incrementos de Inversión*.

. En el capítulo 7 se incluyeron los modelos *CAPM, APT y de Desviación Media Absoluta* para la *Selección de Carteras de Inversión*.

. En el capítulo 10 se agregó el estado que guarda el estudio de las *Relaciones Valuadas de Preferencia en la Toma de Decisiones Multicriterio*.

. En el capítulo 11 se amplió el inciso relativo a *Ingeniería Financiera* en lo referente a *Antecedentes, Principales Características de las Obras de Infraestructura Concesionadas, Pronóstico de la Demanda y Financiamiento*; dejando para una posible obra futura el estudio del *Financiamiento Corporativo*.

Además se optó por el título "**Análisis de Inversiones: Modelos y Aplicaciones**" ya que éste refleja mejor el contenido y el objeto de la obra.

Finalmente deseamos agradecer a la Srita. Teresa Sánchez Escalante por la muy cuidadosa transcripción de los originales de este libro.

Alberto Moreno Bonett

Francisco J. Jauffred

Ciudad Universitaria, México, D.F., 1994

ANALISIS DE INVERSIONES

MODELOS Y APLICACIONES

C O N T E N I D O

1. COMPARACION DE INVERSIONES

1.1 INTRODUCCION

El problema a tratar es la cuestión de criterios financieros que permitan la comparación y suministren bases para establecer prioridades entre diversas inversiones. Aún en los casos más simples, en los que la incertidumbre puede hacerse de lado, esta cuestión es de gran importancia.

Es importante estudiar la afirmación **La inversión en el proyecto A es mejor que la inversión en el B.** Esto es, se pondrán en forma explícita los criterios financieros que dicha frase encierra.

Es importante señalar que son dos los problemas fundamentales relacionados con las **decisiones en la selección de inversiones.**

a) Dadas dos posibles inversiones, definir cuál es preferible.

b) Dado un orden de preferencia, y tomando en cuenta las restricciones presupuestales para un tiempo dado, determinar la inversión óptima.

Se tratará inicialmente el primero, y más adelante el segundo, contemplándose tanto a la luz de la certeza como bajo el riesgo.

Para ello se tiene que una inversión $\bar{p}$, está caracterizada por un flujo de fondos, ésto es, toda inversión se encuentra representada por un conjunto de m números reales $(p_0, p_1,\dots,p_m)$ representando ingresos $p_i > 0$ ó egresos $p_i < 0$.

En el problema (a) se pide especificar un orden de preferencia (una función de utilidad), ésto es, una enumeración no arbitraria en el conjunto de todos los conjuntos de (m+1) números, para ello se define un espacio vectorial lineal de inversiones de (m+1) dimensiones y para el que existen las siguientes operaciones:

1. Adición

   Dados $\bar{p} = \{p_0, p_1,\dots,p_m\}$ y $\bar{q} = \{q_0,q_1,\dots,q_m\}$ se define:

   $$\bar{p} + \bar{q} = \{p_0 + q_0, p_1 + q_1,\dots, p_m + q_m\}$$

2. Producto por un escalar "t"

   Dado $\bar{p} = \{ p_0, p_1,\dots, p_m\}$ se define:

   $$t\bar{p} = \{ tp_0, tp_1,\dots, tp_m\}$$

Existe también una inversión nula $\bar{0} = \{0,0,\dots,0\}$ tal que $\bar{p}+\bar{0}=\bar{p}; t\bar{0}=\bar{0}$.

También se hará uso de notación y conceptos de la Teoría de Utilidad, así, si $\bar{p}$ es preferido sobre $\bar{q}$ se escribirá $\bar{p} > \bar{q}$, si $\bar{p}$ es indiferente a $\bar{q}$ se anotará $\bar{p} \sim \bar{q}$ y si $\bar{p}$ no es preferido sobre $\bar{q}$ se escribirá $\bar{p} \lesssim \bar{q}$. Deberán cumplirse las siguientes leyes:

i) transitividad: si $\bar{p} > \bar{q}$ y $\bar{q} > \bar{r}$ entonces $\bar{p} > \bar{r}$

ii) completez: dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$; ó bien $\bar{p} > \bar{q}$ ó $\bar{p} \lesssim \bar{q}$

Existirá también una función utilidad $u(\bar{x})$ de manera que si $\bar{p} > \bar{q}$ necesariamente $u(\bar{p}) > u(\bar{q})$ y si $\bar{p} \sim \bar{q}$ entonces $u(\bar{p}) = u(\bar{q})$. El dominio de dicha función $u(\bar{x})$ es el conjunto S de todos los conjuntos de (m+1) números reales. Obsérvese que si existe una función $u(\bar{x})$ existe una infinidad de ellas, ya que cualquier tranformación monotónica de una función de utilidad es también una función de utilidad para el orden de preferencia considerado.

El problema de seleccionar un criterio financiero para las inversiones consiste meramente en determinar una función utilidad $u(\bar{x})$ *cuyo dominio sea el espacio vectorial lineal antes definido.*

Ahora bien, la propiedad aditiva para puntos del espacio se refiere únicamente a la posibilidad de agregar flujos de dinero. Esto es, un proyecto α puede conducir a una flujo $\bar{p}$, mientras que otro β puede conducir a $\bar{q}$, la combinación de los dos puede conducir a $\bar{s}$ no necesariamente igual a $\bar{p} + \bar{q}$. En general, los flujos $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{s}$ deben considerarse como puntos diferentes en el espacio de las inversiones.

A.1 Axioma de continuidad. Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$ en donde $\bar{p} > \bar{q}$ existe un $\bar{\varepsilon}(\varepsilon > 0)$ tal que $(\bar{p} - \bar{\varepsilon}) > \bar{q}$.

A.2 Axioma de preferencia manifiesta. Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$ si $p_i \geq q_i$ para cada i y $p_j > q_j$ para alguna j entonces $\bar{p} > \bar{q}$.

A.3 Axioma de la impaciencia. Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$ de manera que $\bar{p} = \{p_0, p_1, \ldots, p_i, p_j, \ldots, p_m\}$ y $\bar{q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_i, q_j, \ldots, q_m\}$

y

$$p_i > q_i$$

$$p_j = q_j$$

$$p_{j+1} \lesssim q_{j+1}$$

entonces

$$\bar{p} > \bar{q}$$

A.4 Axioma de la consistencia marginal. Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$, $\bar{p} > \bar{q}$ si y sólo si $\bar{p} - \bar{q} > \bar{0}$.

Ahora bien si $\bar{p} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}, 0\}$ y $\bar{p}^1 = \{0, p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}\}$ se dirá que $\bar{p}^1$ es la inversión $\bar{p}$ pospuesta un período.

A.5 Axioma de la consistencia temporal. Dados $\bar{p}$ y $\bar{q}$, si $p > q$ y $p_m = q_m = 0$ entonces la inversión pospuesta $\bar{p}^1$ es preferida a la inversión pospuesta $\bar{q}^1$ ($\bar{p}^1 > \bar{q}^1$).

Bajo estos axiomas, Williams y Nassar demuestran los dos siguientes teoremas:

T.1 Los únicos órdenes de preferencia que satisfacen los axiomas A.1, A.2, A.3 y A.4 son los suministrados por la fórmula del valor presente cuando se consideran tasas de actualización positivas. En otras palabras, los únicos órdenes de preferencia que satisfacen los axiomas antes mencionados son los suministrados por funciones de utilidad de la forma.

$$u(\bar{p}) = p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_1\alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m p_m$$

T.2 Los únicos órdenes de preferencia para inversiones que satisfacen los axiomas A.1, ..., A.5 son los suministrados por la fórmula del valor presente para una tasa de actualización idéntica en cada periodo, positiva e inferior a la unidad. Esto es,

$$u(\bar{p}) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i$$

Puesto que los dos teoremas anteriores han sido demostrados con todo rigor por los autores ya mencionados, cualquier discusión sobre el criterio del valor presente y su universalidad para reflejar con toda exactitud las preferencias de inversión, se convertirá en una discusión sobre los cinco axiomas antes enunciados.

En primer lugar el **A.1** debe verse más como una hipótesis de trabajo que como un axioma de preferencia; sin embargo, no deja de retratar esta última, ya que si al comparar dos flujos, los errores de los datos son suficientemente pequeños, no afectarán al juicio sobre la preferencia.

Por lo que se refiere a los axiomas **A.2** y **A.3** no se juzga que existan serias dudas sobre ellos. Sin embargo, se harán algunas consideraciones con base en la Teoría del Consumo. Obsérvese que cualquier vector de consumo que es posible satisfacer con $\bar{q}$ también lo es posible con $\bar{p}$ y por el contrario hay algunos que sí se satisfacen con $\bar{p}$ pero no con $\bar{q}$. Esto es cierto aún en el caso de que los precios cambiaran por consideraciones generales de la economía (inflacionaria o deflacionaria), ya que entonces las decisiones del consumidor deberán ser consideradas por la Teoría de Juegos y aún en ese caso el juego cuyo pago $p_j < q_j$ presupone una estrategia que seleccionaría a $\bar{p}$ sobre $\bar{q}$.

Ahora bien, en cuanto a **A.4**, supóngase que se presenta inopinadamente una oportunidad para obtener un flujo $\bar{r}$ tal que no tiene interacción con el resto del programa de inversión que conduce a seleccionar $\bar{q}$. En estas circunstancias, evidentemente está justificado $\bar{r} > \bar{0}$ si y solo si $(\bar{q} + \bar{r}) > \bar{q}$. Lo que **A.4** sostiene es que la relación de $\bar{r}$ a $\bar{0}$ no se altera si $\bar{q}$ es cambiado. En otras palabras, el axioma señala que es posible decidir si un flujo adicional es suficientemente valioso o no, independientemente de cual sea el flujo que el resto de las inversiones se encuentre generando.

Es importante hacer notar; sin embargo, que **A.4** no toma en cuenta si los proyectos que el flujo implicará son o no independientes, simplemente su implicación es para el caso en que sean independientes. Esto es, si $\bar{p} > \bar{q}$ y si $\bar{r} > \bar{s}$ entonces $(\bar{p} + \bar{r}) > \bar{s}$.

Por último **A.5** estipula que no hay una referencia absoluta sobre el tiempo. Es decir, si al principiar un período cualquiera $\bar{p}$ es preferido sobre $\bar{q}$ para los próximos n períodos, entonces al principiar el siguiente período $\bar{p}$ volverá a ser preferido sobre $\bar{q}$. Obsérvese que no dice que si al principiar un período el proyecto **A** es preferido sobre el proyecto **B**, entonces el proyecto **A** será preferido sobre el **B**, si se pospone su inicio hasta el siguiente período.

Los axiomas anteriores definen un orden de preferencia en el espacio de inversiones. Este está dado por la función de utilidad.

$$u(\bar{p}) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \; p_i$$

ya que por T.1 y T.2 sólo este orden de preferencia satisface dichos axiomas. Debe notarse; sin embargo, que no definen el valor de α, meramente su rango $0 < \alpha < 1$.

Dichos teoremas señalan que si α es una tasa de descuento entonces

a) $\bar{p} > \bar{q}$

a) $\bar{p} \sim \bar{q}$

a) $\bar{p} < \bar{q}$

según si $r(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} p_i \alpha_i - \sum_{i=0}^{m} q_i \alpha_i$ es:

a) positiva

b) nula

c) negativa

La decisión por tanto, está en funcion de la tasa de descuento α. Es claro que los valores de α para los cuales $r(\alpha) = 0$ son de especial interés ya que en ellos la decisión cambia.

1.2 CLASIFICACION DE PROYECTOS

Se fijará ahora la atención en el problema de definir el conjunto de proyectos que deben ser seleccionados cuando existe un presupuesto fijo o un conjunto fijo de fondos para invertir en el futuro. El problema de la presupuestación consiste en asignar cantidades fijas de recursos, usualmente moneda, a una cierta variedad de proyectos alternos, trabajos o inversiones. El problema de la presupuestación difiere de otros de asignación de recursos, en que el tiempo es un factor esencial. Las decisiones de presupuestación pueden ser enfocadas ya sea desde un punto de vista de definir qué proyectos a largo plazo deben ser seleccionados a partir de un cierto presupuesto, o bien definir cuándo debe iniciarse un cierto proyecto. En cualquiera de los dos casos el elemento tiempo es importante en el problema.

Se entiende por un proyecto una actividad que requiere un compromiso de recursos en uno o más períodos, con objeto de generar beneficios a lo largo del tiempo. Un proyecto es simplemente un medio para convertir recursos disponibles en un cierto período en valores disponibles en otro.

Ahora bien, los proyectos pueden ser independientes o dependientes, divisibles o indivisibles. Los *proyectos independientes* tienen la característica de que los beneficios que generan son independientes de la acción tomada en otros proyectos. Por el contrario, si la acción tomada afecta los beneficios a generar por un cierto proyecto, éste sería *dependiente.* Entre este tipo de proyectos dependientes, encontramos los contingentes y los mutuamente exclusivos. Un ejemplo de *proyecto contingente* lo encontramos en el proyecto de entronque entre dos supercarreteras (México-Cuernavaca y La Pera Cuautla), es contingente en cuanto dependerá del proyecto de la segunda carretera.

Por el contrario, dos proyectos *mutuamente exclusivos* quedan ejemplificados por dos diseños para el mismo entronque. Por su parte los proyectos *divisibles* son aquellos que generan beneficios desde el momento en que alguna de sus partes se realiza. Una carretera es un proyecto divisible puesto que sus tramos ya generan beneficios. Por el contrario un entronque es un proyecto *indivisible* ya que no principiará a generar beneficios hasta no estar abierto el tránsito.

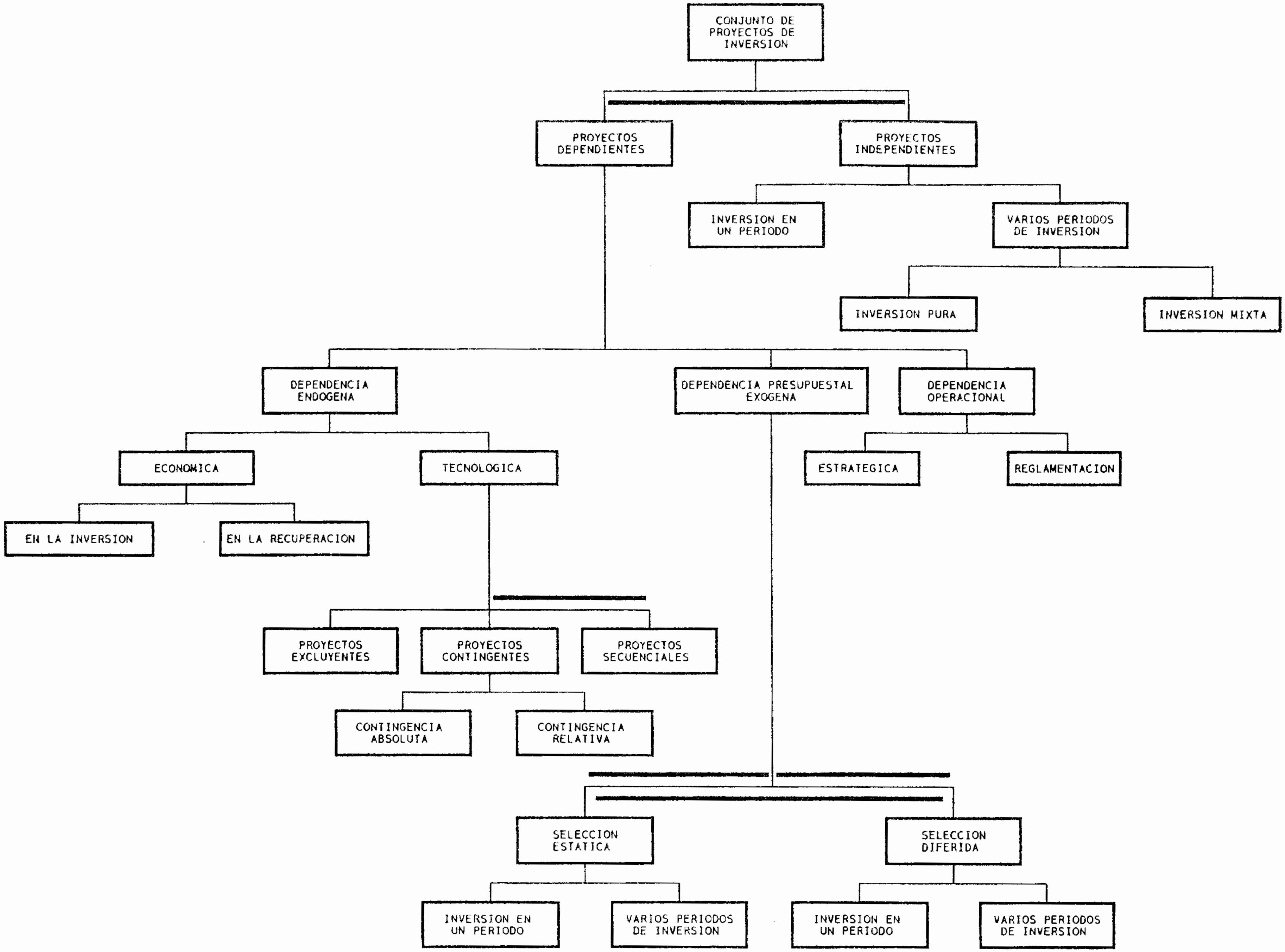
Weingartner identifica tres distintos tipos de proyectos dependientes: los mutuamente *exclusivos, los contingentes y los compuestos.* Aunque ya se han descrito los dos primeros, ellos pueden presentarse sobre bases más firmes. Se dirá que un proyecto es mutuamente exclusivo cuando su valor neto tiende a cero cuando otro es seleccionado. Por otra parte, el contingente tiene un valor neto inaceptablemente bajo a menos que otro proyecto sea aceptado.

Por su parte un proyecto compuesto consta de uno principal y de uno o varios contingentes que dependen del primero; de manera tal que un proyecto independiente y un compuesto pueden ser considerados como alternos mutuamente exclusivos.

1.3 CLASIFICACION DE LOS MODELOS

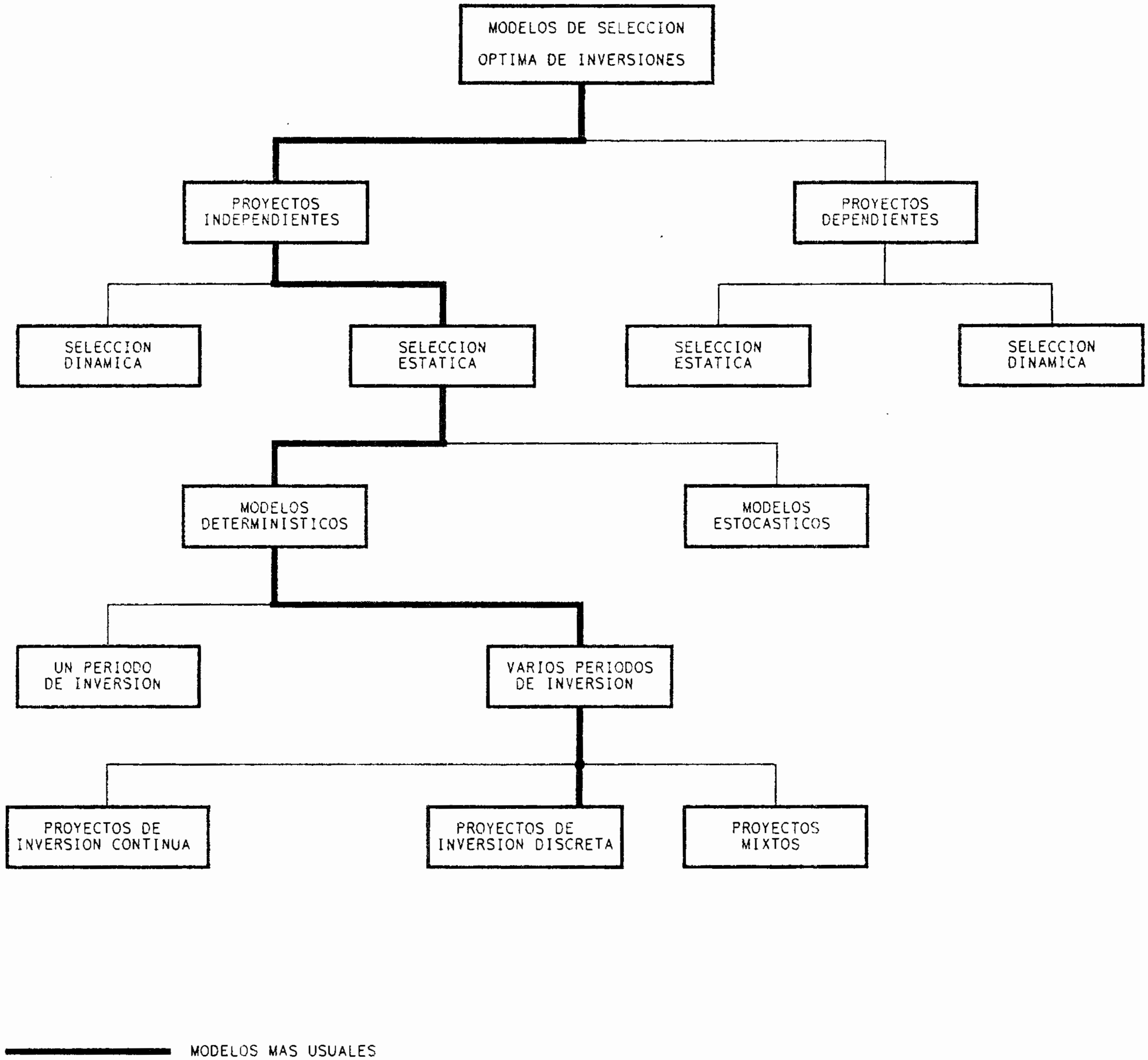
De acuerdo con la clasificación de los proyectos se identificarán las técnicas y los modelos de presupuestación. Al tratar con las técnicas y los modelos deberá agregarse un factor de clasificación más: la incertidumbre. Así los modelos de presupuestación podrán ser deterministas o probabilistas según se considere la intervención del riesgo.

En las figuras 1.1 y 1.2 se resumen respectivamente la clasificación de los proyectos y la clasificación de los modelos utilizados para la selección de inversiones; en la segunda figura, el trazo grueso identifica a los modelos tradicionales más usados.



Clasificación de problemas de selección de inversiones

Figura 1.1



Clasificación de modelos de selección óptima de inversiones

Figura 1.2

2. PROYECTOS SIN PRESUPUESTO FIJO

2.1 MODELOS DETERMINISTAS

Los modelos más utilizados son:

- el del **VALOR PRESENTE NETO** (VPN), que determina la relación entre los beneficios que genera cada alternativa y los costos asociados dentro de un intervalo de tiempo, descontados a un año base.
  Su expresión general es como sigue:

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} (B_t - C_t)$$

  donde:

  n = número de años considerados en el horizonte de planeación
  i = tasa de interés o descuento
  B_t = beneficio generado en el año t
  C_t = costo asociado en el año t

- el de la **TASA INTERNA DE RECUPERACION** (TIR), que muestra la magnitud de la tasa de descuento bajo la cual se analiza un proyecto, de tal forma que se igualen beneficios y costos actualizados, es decir, tal que:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1 + TIR)^t} (B_t - C_t) = 0$$

- el de la **RELACION BENEFICIO-COSTO** (B/C), como una de las formas clásicas para la evaluación de proyectos, refleja la proporción de beneficios respecto a los costos que se presentarán, por lo cual su valor debe ser mayor a **1** para ser justificado económicamente.

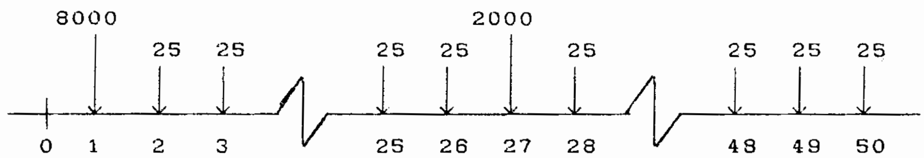
$$(B/C) = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1 + i)^t} B_t}{\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1 + i)^t} C_t}$$

- el del **COSTO ANUAL** (CA), que se utiliza para convertir beneficios y costos a series anuales, comparando los valores obtenidos, pudiendo expresarse en términos del VPN, como sigue:

$$CA = \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} VPN$$

EJEMPLO 2.1. Se trata de llevar a cabo un camino de 10 km con 8 m de ancho entre dos ciudades A y B. Se desea tomar una decisión respecto a usar concreto o asfalto. Se han elaborado los proyectos para ambos casos y se ha calculado que el costo por m^2 es de 100 para concreto y 90 para asfalto. Ambos pavimentos deben conservarse y se supondrá una vida útil de 27 años para el de concreto y de 17 para el de asfalto. Se estima que repavimentar un km de cualquiera de ellos cuesta 200,000 y que la conservación anual es de 25,000 para todo el tramo. También luce como adecuada una tasa del 8% para estos proyectos ¿qué decisión se debe tomar?, ¿qué sucede si una entidad ajena paga el 50% de los costos de construcción?

ALTERNATIVA CONCRETO



TIPO DE COSTO	CONCRETO	ASFALTO
Construcción	8 000 000 (AÑO 1)	7 200 000 (AÑO 1)
Conservación Anual	25 000 (AÑOS 2 A 26 Y 28 A 50)	25 000 (AÑOS 2 A 16, 18 A 33 Y 35 A 50)
Repavimentación	2 000 000 (AÑO 27)	2 000 000 (AÑOS 17 Y 34)

Si se considera la tasa del 8%, la alternativa concreto tendrá un valor presente neto (VPN) dado por:

$$8\,000\,000 = 8\,000\,000$$

$$25\,000\ \frac{1-(1.08)^{-25}}{0.08} = 25\,000\ (10.675) = 266\,875$$

$$2\,000\,000\ (1.08)^{-26} = 2\,000\,000\ (0.135) = 270\,000$$

$$25\,000\ \frac{1-(1.08)^{-23}}{0.08}\ (1.08)^{-26} = 25\,000\ (10.371)\ (0.135) = 35\,000$$

$$\textbf{VPN} = 8571\,875$$

y de manera enteramente similar se calcularon los valores que aparecen en la tabla 2.1

Tasa de Descuento	VPN Concreto	VPN Asfalto (sin subsidio)
1%	10 489 400	11 240 000
2%	9 957 350	10 408 825
3%	9 553 950	9 781 950
4%	9 246 500	9 303 250
5%	9 009 200	8 929 500
6%	8 827 200	8 640 150
7%	8 683 875	8 408 850
8%	8 571 875	8 222 975
9%	8 483 075	8 074 850
10%	8 413 575	7 954 325
12%	8 312 225	7 770 450
15%	8 217 850	7 595 400

Tabla 2.1

Se omiten los cálculos asociados al caso en que una entidad ajena paga el 50% de los costos de construcción (un subsidio) pero ellos se encuentran graficados en la figura 2.1; se observa que:

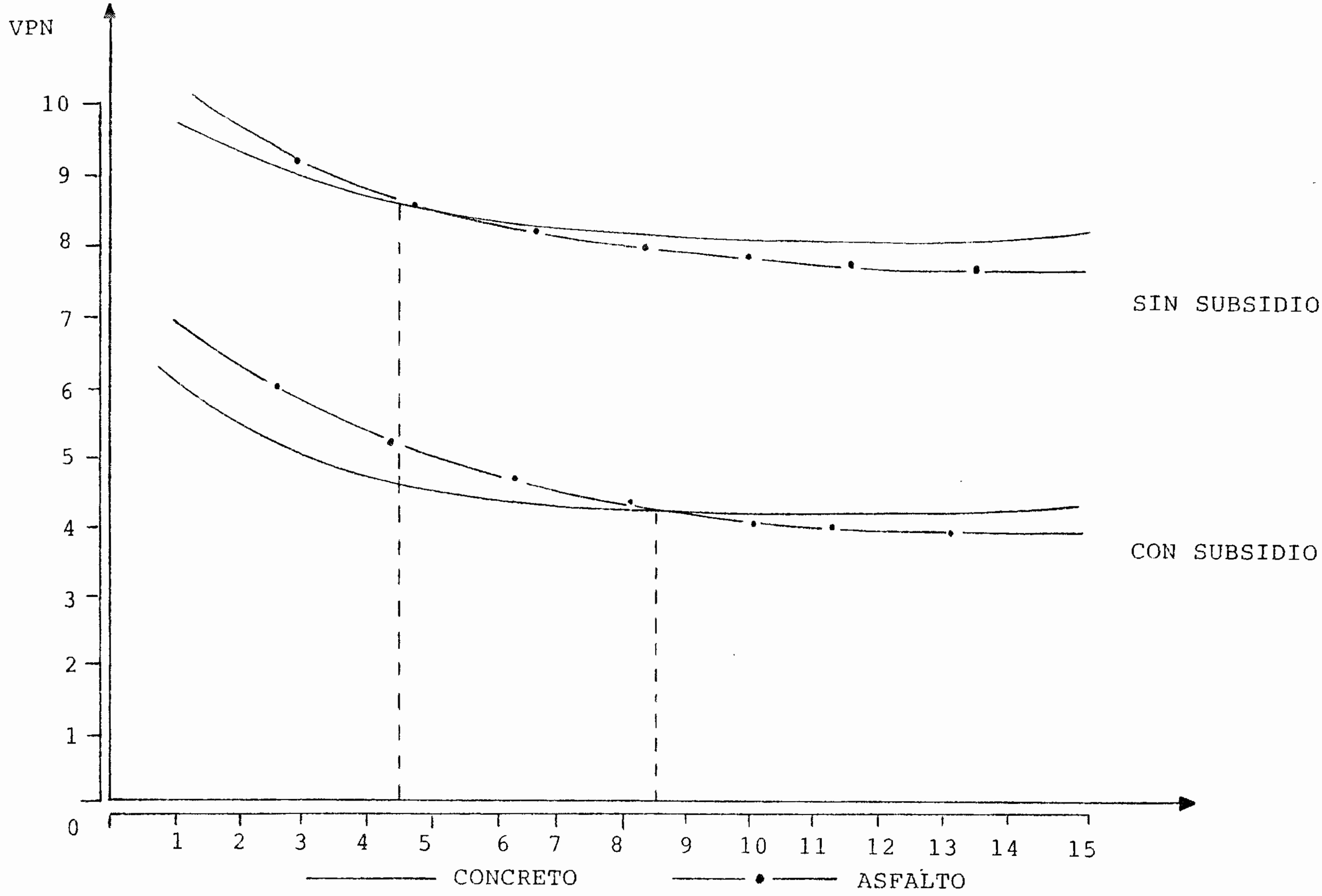

VPN
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
SIN SUBSIDIO
CON SUBSIDIO
CONCRETO
ASFALTO

Figura 2.1

- Si no se tiene subsidio, conviene seleccionar la alternativa "asfalto" si $i \geq 4.5\%$

- en caso contrario (con subsidio) dicha alternativa solo conviene si $i \geq 8.5\%$

EJEMPLO 2.2 (Riggs). Se tienen cuatro alternativas para el trazo de una carretera. Para cada una de ellas se han estimado los beneficios anuales y los costos totales de construcción que aparecen en la tabla 2.2. Además, se consideran adecuados un horizonte de planeación de 40 años y una tasa de recuperación del 4%. ¿Cuál decisión es la más adecuada?

Alternativas	Costos de Construcción	Mantenimiento y Operación Anual	Beneficios por Poblados Comunicados	Beneficios por Has. Abiertas al Cultivo	Beneficios por Recreación
A	1 200 000	20 000	200 000	20 000	30 000
B	1 500 000	35 000	190 000	40 000	30 000
C	2 700 000	50 000	280 000	60 000	60 000
D	3 500 000	60 000	300 000	70 000	70 000

Tabla 2.2

La relación beneficio-costo para los valores totales de cada alternativa se calcula de:

$$\frac{B}{C} = \frac{\text{BENEFICIO TOTAL}}{\text{COSTO ANUAL DE CONSTRUCCION + MANTENIMIENTO}}$$

en donde el beneficio total es la suma de los beneficios y además:

$$\text{COSTO ANUAL DE CONSTRUCCION} = (\text{COSTO INICIAL DE CONSTRUCCION}) \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Estos valores se muestran en la tabla 2.3.

Alternativas	Beneficios Anuales	Costo Anual	Incremento de		Relación B/C Total	Incremento Relación B/C
			Beneficio	Costo		
A	250 000	80 000			3.10	
			10 000	30 770		0.32
B	260 000	110 770			2.34	
			150 000	106 400		1.41
C	400 000	186 400			2.14	
			40 000	50 420		0.79
D	440 000	236 820			1.85	

Tabla 2.3

El incremento de la relación beneficio-costo se calcula a partir de los beneficios adicionales ocasionados por un incremento de . costo sobre la última alternativa aceptable ($\frac{B}{C}$ > 1.0) y también se muestran en la tabla 2.3.

Es claro que también debe exigirse que la relación $\frac{B}{C}$ para los incrementos sea mayor que uno. Esto hace ver que debería seleccionarse la alternativa C.

Sin el análisis de los incrementos se hubiera elegido la alternativa D,, ya que su relación B/C es mayor que uno y tiene asociados los mayores beneficios totales. Otro error hubiera sido elegir la alternativa A porque tiene la mayor relación B/C. Cabe observar que la conclusión de elegir la alternativa C, para los datos dados, también se hubiera obtenido aplicando el método del valor presente.

Es interesante notar la sensibilidad de la decisión a cambios en los datos. Usando una tasa de interés del 7% se selecciona la alternativa A porque todos los costos adicionales y los incrementos en los beneficios dan relaciones menores que uno. El considerar solamente los beneficios por poblados comunicados, también llevaría a la selección de la alternativa A. En otras palabras, el número de beneficios múltiples que se incluyen en el análisis, así como la tasa de interés pueden influir significativamente en la decisión.

Evaluación por incrementos de inversión. Un problema de evaluación generalmente involucra varios cursos alternos de acción. Algunas de las alternativas pueden eliminarse por representar una inversión obviamente superior a la requerida por otras alternativas similares. Otras son eliminadas por falta de fondos, de personal o del equipo requerido para llevarlas a cabo. Si las restantes alternativas tienen en esencia el mismo nivel de inversión y un esquema semejante de flujo de dinero, entonces la mejor es aquella que esté asociada con el valor presente mínimo. Cuando se tienen diferentes requerimientos de capital las alternativas pueden compararse como se ilustra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 2.3. (Rigss) Para elaborar ciertos productos se tienen 4 proyectos, cuyos costos e ingresos estimados se muestran en la tabla que sigue. Estas estimaciones se basaron en un período de estudio de 10 años. De otros proyectos con riesgos similares se estima como aceptable una tasa mínima de recuperación del 10% excluidos los impuestos. ¿Cuál alternativa debería elegirse?

	A	B	C	D
Inversión total	170,000	260,000	300,000	330,000
Ingreso anual	114,000	120,000	130,000	147,000
Gasto anual	70,000	71,000	64,000	79,000

Las alternativas se presentan por orden creciente de inversión. El análisis se inicia calculando el factor de recuperación del capital para la alternativa **A**, esto es:

$$\text{factor de recuperación de capital} = \frac{\text{recuperación anual}}{\text{capital invertido}}$$

$$= \frac{114{,}000 - 70{,}000}{170{,}000} = 0.2588$$

o bien:

$$\frac{i}{1 - (1 + i)^{-10}} = 0.2588$$

cuya solución es i = 22.5% > 10%, lo cual significa que la alternativa **A** es aceptable.

El siguiente incremento de capital es 260,000 - 170,000 = 90,000 y corresponde a la alternativa **B**. La comparación de esta alternativa con la última aceptable conduce a:

$$\text{factor de recuperación de capital} = \frac{120{,}000 - 71{,}000 - 44{,}000}{260{,}000 - 170{,}000}$$

o bien

$$\frac{i}{1 - (1 + i)^{-10}} = \frac{5{,}000}{90{,}000} = 0.055$$

que conduce a que i < 0.5% < 10% y la alternativa **B** es inaceptable. De hecho la recuperación anual de 5,000 ni siquiera amortiza en 10 años a la inversión inicial.

La alternativa **C** se compara con la última alternativa aceptable que es la **A**. Se obtiene:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-10}} = \frac{130{,}000 - 64{,}000 - 44{,}000}{300{,}000 - 170{,}000} = 0.1692$$

cuya solución es i = 10.9% > 10% y **C** es una alternativa aceptable. Se procede a comparar la alternativa **D** con la **C**:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-10}} = \frac{147{,}000 - 79{,}000 - 66{,}000}{330{,}000 - 300{,}000} = 0.0667$$

y por tanto es inaceptable. Consecuentemente, si se dispone del capital requerido, la alternativa más adecuada es la **C** con una tasa de recuperación i = 18.9% que se obtiene de:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-10}} = \frac{130{,}000 - 64{,}000}{300{,}000} = 0.22$$

Obsérvese que se eligió la alternativa aceptable asociada a la mayor inversión. Para hacer notar las ventajas de este método se resolverá el mismo problema considerando solamente la inversión total en lugar de los incrementos. La tasa de recuperación para cada alternativa se calcula a partir de:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-10}} = \frac{\text{recuperación neta}}{\text{inversión total}}$$

cuyos resultados se muestran en la tabla siguiente:

	A	B	C	D
Recuperación neta	44,000	49,000	66,000	68,000
Inversión	170,000	260,000	300,000	330,000
Tasa de recuperación	22.5%	13.5%	18.9%	15.9%

Sería un error elegir la alternativa **A** que tiene la tasa de recuperación mayor. Esto evitaría la inversión adicional de 300,000 - 170,000 = 130,000 en la alternativa **C**, con una tasa de recuperación del 10.9%. Como este 10.9% es mayor que el 10% esperado de otras inversiones con riesgos similares, se tendría una pérdida aproximada del 1% sobre los 130,000.

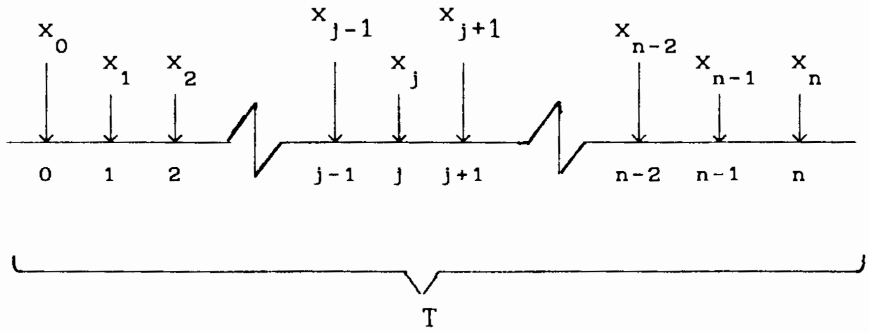
Otro tipo de error es seleccionar la mayor inversión que tenga una tasa de recuperación mayor que la mínima requerida. En el ejemplo ella sería la alternativa **D**. Sin embargo, ya se ha observado la pobre tasa de recuperación que tiene la inversión adicional que se requiere para pasar de la alternativa **C** a la **D**. En efecto, el invertir 330,000 - 300,000 = 30,000 en la alternativa **D** obliga a que dicha cantidad trabaje con un interés mucho menor del 10% que podría recibirse invirtiéndola de cualquier otra manera.

2.2 ALGUNOS ASPECTOS ALEATORIOS

Versión aleatoria del valor presente. Considérese una inversión que resultará en flujos de fondos durante algunos de los siguientes n períodos. Sea x_j la variable aleatoria (v.a.) asociada con el flujo en el j-ésimo período ($j = 0,1,\dots,n$). Se supondrá que x_j tiene una distribución $N(\mu_j, \sigma_j)$. Se harán dos hipótesis con respecto a la relación de las v.a. x_j para diferentes valores de j.

I. Para distintos valores j las x_j son totalmente independientes ($r = 0$).

II. Para distintos valores j las x_j se encuentran totalmente correlacionadas (r = 1).



Es claro que cualquier caso intermedio implicará una combinación de los resultados con cada una de las hipótesis anteriores.

Ahora bien, es sabido que el valor presente de una inversión se define como:

$$P = \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j}{(1+i)^j}$$

en donde i es la tasa de actualización. Puesto que x_j es una variable aleatoria, P a su vez será una variable aleatoria (suma ponderada de las v.a. x_j). De acuerdo con las propiedades de la suma de v.a., la esperanza matemática de P será:

$$\mu_P = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mu_j}{(1+i)^j}$$

Por otra parte, haciendo uso inicialmente de la hipótesis (I) y de las propiedades de la suma de variables, la variancia de P será:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sigma_j^2}{(1+i)^{2j}}$$

Haciendo ahora uso de la hipótesis (II), esto es, que si x_m se identifica con $\mu_m + K\,\sigma_m$ entonces x_j se identifica con $\mu_j + K\,\sigma_j$. Esta hipótesis de hecho establece que si ciertas circunstancias obligan al flujo a apartarse de lo esperado durante un período m, las mismas circunstancias lo obligarán a apartarse de lo esperado durante cualquier período j y exactamente de la misma manera.

En estas condiciones la v.a. P se encontrará distribuida normalmente con una dispersión.

$$\sigma_P = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sigma_j}{(1+i)^{j}}$$

Cualquier otro comportamiento será una combinación de los dos anteriores, entonces, las x_j que son totalmente independientes y las $z_j^{(k)}$ (mediante un reordenamiento, y por simplicidad, se puede suponer que k = 1,...,m) que se encuentran perfectamente correlacionadas cumplen con:

$$x_j = y_j + z_j^{(1)} + z_j^{(2)} + \ldots + z_j^{(m)}$$

en donde el superíndice indica el período al que está asociada la variable con la que se encuentra perfectamente correlacionada.

Empleando nuevamente los teoremas sobre la distribución de la suma:

$$\mu_p = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mu_j}{(1+i)^j} = \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{E(Y_j) + \sum_{k=1}^{m} E(Z_j^{(k)})}{(1+i)^j} \right]$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=0}^{n} \frac{Var\ (Y_j)}{(1+i)^{2j}} + \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\sigma\ (Z_j^{(k)})}{(1+i)^j} \right]^2$$

Versión aleatoria del costo anual. Puesto que el costo anual es:

$$A = \frac{i\ (1+i)^n}{(1+i)^n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{(1+i)^j}$$

$$A = \frac{i\ (1+i)^n}{(1+i)^n -1}\ P$$

A y P son por tanto proporcionales y los parámetros μ_A y σ_A son consecuencia directa.

Observación. Puede pensarse que el suponer una distribución de probabilidad normal para las x_j es limitativo y dudoso; sin embargo, por el teorema del límite central, se puede afirmar que aún en el caso en que la distribución real de las x_j se aparte de la Gaussiana no se afectarán los resultados finales, en particular cuando n es grande.

EJEMPLO 2.4 Para un camino vecinal que servirá fundamentalmente para la transportación de productos forestales se consideran dos alternativas, hacerlo pavimentado (alternativa A) que implica una inversión inicial de cinco millones, costo que puede incrementarse o disminuirse debido a la falta de estudios previos, la experiencia indica que un millón de dispersión toma en cuenta esta ignorancia.

La conservación en esta alternativa cuesta 300,000 considerando una dispersión de 200,000 ó 100,000 consecutivamente (para estimar posibles incrementos al deterioro estándar), con excepción del último año en donde debe tomarse en cuenta una posible reconstrucción con 800,000.

La otra opción (alternativa B) es un empedrado con un costo inicial de dos millones, reconstrucciones parciales cada dos años con costos de un millón, un millón y millón y medio respectivamente y además, medio millón por conservación en los años en que no hay reconstrucción. La incertidumbre asociada al empedrado se considera menor y se asignan dispersiones de medio millón a la inversión inicial y 200,000 a las restantes (tabla 2.4 en cientos de miles).

Año	Alternativa A		Alternativa B	
	μ_A	σ_A	μ_B	σ_B
0	50	10	20	5
1	3	2	5	2
2	3	1	10	2
3	3	2	5	2
4	3	1	10	2
5	3	2	5	2
6	3	8	15	2

Tabla 2.4

Si el horizonte de planeación es de seis años se pregunta: ¿Cuál es la decisión a tomar considerando un costo de capital de 7%?. ¿Cuál sería la decisión en el caso determinista y para el mismo 7%? También se desea estudiar la sensibilidad para factores de descuento comprendidos entre 1% y 15%.

En las tablas 2.5 y 2.6 se consignan respectivamente los cálculos de μ_{P_A}, $\sigma^2_{P_A}$, μ_{P_B} y $\sigma^2_{P_B}$ para diferentes valores de la tasa de actualización.

	$E(Y_j)/(1+i)^j$							μ_{P_A}	$Var(Y_j)/(1+i)^{2j}$							$\sigma^2_{P_A}$
i \ j	0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6	
1	50	2.97	2.94	2.91	2.89	2.85	2.83	66.89	100	3.92	0.96	3.76	0.93	3.62	57.00	170.19
2	50	2.94	2.89	2.83	2.78	2.73	2.65	66.82	100	3.84	0.92	3.56	0.86	3.30	50.00	162.48
3	50	2.91	2.83	2.75	2.68	2.59	2.52	66.28	100	3.76	0.89	3.37	0.80	2.97	45.20	156.99
4	50	2.88	2.78	2.67	2.57	2.46	2.36	65.72	100	3.69	0.86	3.18	0.73	2.69	39.60	150.75
5	50	2.86	2.73	2.58	2.46	2.34	2.23	65.20	100	3.63	0.83	2.97	0.67	2.44	35.60	146.14
6	50	2.83	2.68	2.52	2.38	2.24	2.11	64.76	100	3.55	0.80	2.82	0.63	2.22	31.70	141.72
7	50	2.80	2.63	2.44	2.29	2.14	2.00	64.30	100	3.48	0.77	2.64	0.58	2.03	28.40	137.90
8	50	2.77	2.57	2.38	2.21	2.04	1.88	63.85	100	3.42	0.73	2.52	0.54	1.85	25.30	134.36
9	50	2.75	2.52	2.31	2.13	1.94	1.78	63.43	100	3.36	0.70	2.37	0.50	1.69	22.70	131.32
10	50	2.73	2.48	2.25	2.05	1.86	1.69	63.06	100	3.30	0.68	2.26	0.47	1.54	20.40	128.65
11	50	2.70	2.44	2.19	1.97	1.78	1.60	62.68	100	3.24	0.66	2.13	0.43	1.41	18.30	126.17
12	50	2.68	2.40	2.14	1.91	1.70	1.52	62.35	100	3.18	0.64	2.04	0.40	1.29	16.50	124.05
13	50	2.65	2.35	2.07	1.84	1.62	1.43	61.96	100	3.13	0.61	1.91	0.38	1.17	14.70	121.90
14	50	2.63	2.31	2.03	1.77	1.55	1.37	61.66	100	3.08	0.59	1.83	0.35	1.07	13.30	120.22
15	50	2.61	2.27	1.97	1.71	1.49	1.30	61.35	100	3.02	0.57	1.73	0.33	0.98	12.10	118.73

Tabla 2.5 Alternativa A

	$E(Y_j)/(1+i)^j$							μ_{P_B}	$Var(Y_j)/(1+i)^{2j}$							$\sigma^2_{P_B}$
i \ j	0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6	
1	20	4.95	9.80	4.86	9.61	4.76	14.15	68.18	25	3.92	3.84	3.76	3.69	3.62	3.56	47.39
2	20	4.90	9.61	4.71	9.26	4.54	13.25	66.27	25	3.84	3.69	3.56	3.43	3.30	3.12	45.94
3	20	4.85	9.44	4.58	8.94	4.31	12.60	64.72	25	3.76	3.56	3.37	3.18	2.97	2.82	44.66
4	20	4.81	9.21	4.46	8.55	4.09	11.85	63.02	25	3.69	3.43	3.18	2.92	2.69	2.48	43.39
5	20	4.76	9.09	4.31	8.20	3.91	11.25	61.52	25	3.63	3.30	2.97	2.68	2.44	2.23	42.25
6	20	4.71	8.93	4.20	7.93	3.73	10.55	60.05	25	3.55	3.18	2.82	2.52	2.22	1.98	41.27
7	20	4.67	8.78	4.07	7.63	3.57	10.00	58.72	25	3.48	3.07	2.64	2.33	2.03	1.77	40.32
8	20	4.63	8.54	3.97	7.35	3.40	9.44	57.35	25	3.42	2.92	2.52	2.17	1.85	1.58	39.45
9	20	4.59	8.40	3.85	7.10	3.25	8.94	56.13	25	3.36	2.83	2.37	2.02	1.69	1.41	38.68
10	20	4.54	8.27	3.76	6.85	3.11	8.48	55.01	25	3.30	2.73	2.26	1.87	1.54	1.27	37.97
11	20	4.50	8.13	3.65	6.57	2.97	8.03	53.85	25	3.24	2.64	2.13	1.73	1.41	1.15	37.30
12	20	4.46	8.00	3.57	6.37	2.84	7.61	52.85	25	3.18	2.56	2.04	1.62	1.29	1.03	36.72
13	20	4.42	7.81	3.45	6.13	2.71	7.18	51.70	25	3.13	2.44	1.91	1.51	1.17	0.92	36.08
14	20	4.38	7.69	3.38	5.92	2.59	6.85	50.81	25	3.08	2.36	1.83	1.40	1.07	0.83	35.57
15	20	4.35	7.57	3.29	5.72	2.49	6.50	49.92	25	3.02	2.29	1.73	1.31	0.98	0.75	35.08

Tabla 2.6 Alternativa B

Si se considera un intervalo de confianza para la media de amplitud $0.2\ \sigma_p^2$ entonces los costos mínimos para los proyectos A y B serán los dados respectivamente en las columnas U_A y U_B de la tabla 2.7.

i	μ_{P_A}	$-0.1\sigma^2_{P_A}$	U_A	μ_{P_B}	$-0.1\sigma^2_{P_B}$	U_B
1	66.89	-17.02	50.37	68.18	-4.74	63.31
2	66.82	-16.25	50.57	66.57	-4.59	61.66
3	66.28	-15.70	50.58	64.72	-4.46	60.26
4	65.72	-15.08	50.64	63.02	-4.34	58.68
5	65.20	-14.61	50.59	61.52	-4.22	57.30
6	64.76	-14.17	50.59	60.05	-4.12	55.93
7	64.30	-13.79	50.51	58.72	-4.03	54.69
8	63.85	-13.44	50.41	57.33	-3.95	53.38
9	63.43	-13.13	50.30	56.13	-3.87	52.26
10	63.06	-12.87	50.19	55.01	-3.80	51.21
11	62.68	-12.62	50.06	53.85	-3.73	50.12
12	62.35	-12.40	49.95	52.85	-3.67	49.18
13	61.96	-12.20	49.76	51.70	-3.61	48.09
14	61.66	-12.02	49.64	50.81	-3.56	47.25
15	61.35	-11.87	49.48	49.92	-3.51	46.41

Tabla 2.7

En la figura 2.4 se muestra el comportamiento de los beneficios, tanto para el caso determinista como para el aleatorio, se observa que para i = 7% se elegiría la alternativa B desde un punto de vista determinista y la A para el caso aleatorio.

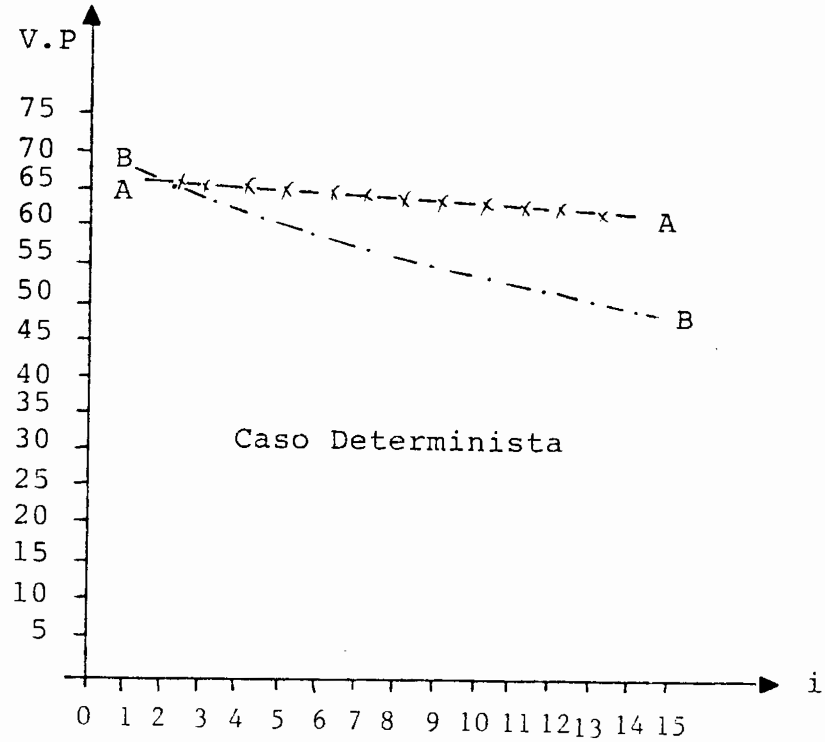


Figura 2.4 (a)

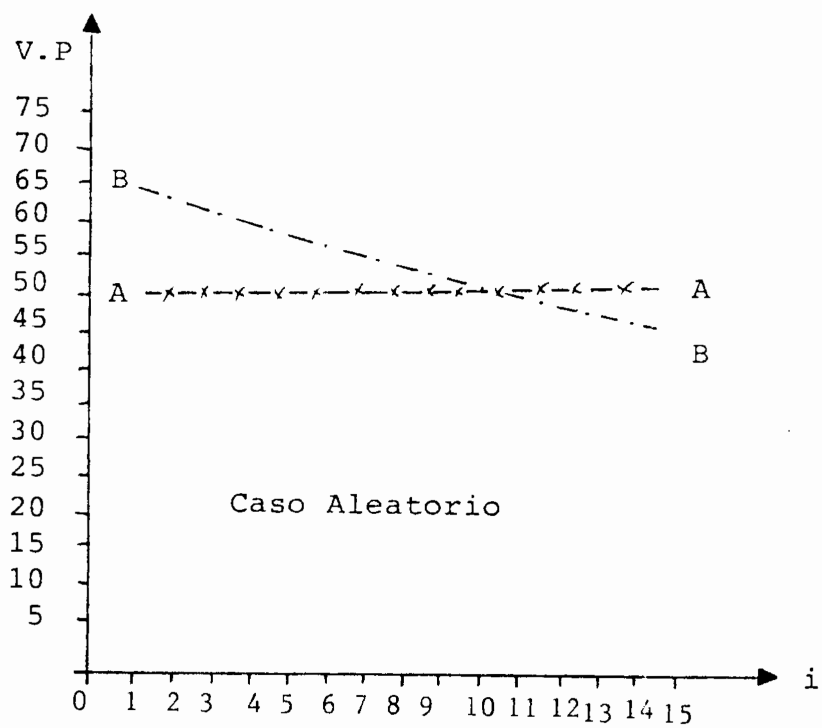


Figura 2.4 (b)

Versión aleatoria de la relación beneficio-costo. Si al calcular el cociente Z del valor presente X de los beneficios entre el costo total Y asociado a un proyecto, se considera que X y Y son variables aleatorias con densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$ será necesario determinar la función de densidad de la relación beneficio-costo Z que es una variable aleatoria.

Para resolver este problema considérense las variables aleatorias X y Y con densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$ y las funciones:

$$Z = g(X, Y) \qquad W = h(X, Y) \tag{2.1}$$

la densidad conjunta de Z y W puede obtenerse en términos de $f_{X,Y}(x,y)$ con base en el siguiente teorema.

Para determinar $f_{Z,W}(z, w)$ se resuelven las ecuaciones:

$$z = g(x, y) \qquad w = h(x, y) \tag{2.2}$$

para lograr que x y y queden expresadas en términos de z y w. Si $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), \ldots,$ son todas las soluciones reales de estas ecuaciones, esto es si:

$$g(x_i, y_i) = z, \qquad h(x_i, y_i) = w$$

entonces $f_{Z,W}(z, w)$ está dado por

$$f_{Z,W}(z, w) = \frac{f_{X,Y}(x_1, y_1)}{|J(x_1, y_1)|} + \ldots + \frac{f_{X,Y}(x_n, y_n)}{|J(x_n, y_n)|} + \ldots \tag{2.3}$$

en donde:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial \ x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial \ y} \\ \\ \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial \ x} & \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial \ y} \end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

es el **jacobiano** de la transformación (2.2) y tanto las x_i como las y_i son funciones de z y de w.

Si para ciertos valores (z, w) las ecuaciones (2.2) no tienen soluciones reales, entonces $f_{Z,W}(z,w) = 0$.

Obsérvese que este teorema también puede usarse para obtener la densidad de una función Z = g (X, Y) de dos variables aleatorias X y Y; para ello basta aplicarlos considerando W = X O W = Y lo que conduce a la densidad conjunta $f_{Z,W}$ (z, w) y, conocida ésta, puede obtenerse la densidad marginal de Z mediante:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z;W} (z,w) \, d \, w$$

en este caso, se dice que W es una **variable auxiliar**. Además, si X es una v.a. y Z = g(X) es una función tal que g(x) es diferenciable y estrictamente creciente o decreciente en un intervalo T ε R, entonces (2.3) se reduce a:

$$f_Z(z) = f_X \left[\, x \, (z) \right] \left| \frac{dx}{dz} \right| , \; z \; \varepsilon \; g \; (T)$$

De esta manera si $Z = X/Y$ es la relación beneficio costo y X e Y son variables aleatorias con densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ para obtener la función de densidad de Z se aplica el teorema anterior como sigue:

Si se hace

$$Z = \frac{X}{Y}, \quad W = Y$$

el sistema

$$z = \frac{x}{y}, \quad w = y$$

tiene la solución única:

$$x_1 = z\,w \qquad\qquad y_1 = w \tag{2.5}$$

y el **jacobiano** de (2.5) está dado por:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y} = \frac{1}{w}$$

por lo que al aplicar (2.3) resulta:

$$f_{ZW}(z,w) = |\,w\,|\; f_{X,Y}(z\,w,\; w) \tag{2.6}$$

y en consecuencia:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |\,w\,|\; f_{X,Y}(z\,w,\; w)\; d\,w \tag{2.7}$$

Si se supone que X y Y son independientes, entonces $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$ por lo que (2.6) y (2.7) quedan respectivamente como sigue:

$$f_{ZW}(z,w) = |w|\, f_X(z\,w)\, f_Y(w)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w|\, f_X(z\,w)\, f_Y(w)\, d\,w \qquad (2.8)$$

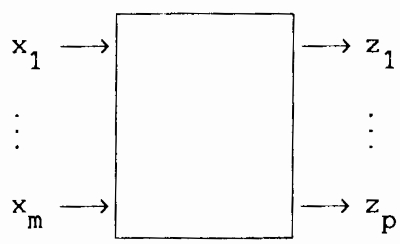
Cabe observar que en las expresiones (2.6) y (2.8) se ha supuesto $-\infty < Z < \infty$ pero si Z es la relación beneficio-costo, entonces $z, w > 0$; por lo que en ellas debería reemplazarse $|w|$ por w y cambiar en los límites de integración $-\infty$ por 0.

3. ANALISIS MARGINAL

3.1. FUNCION DE PRODUCCION DE UNA INDUSTRIA (Caja Negra)

Considérese una industria que usa m factores para fabricar p productos, a la función definida implícitamente por la ecuación:

$$Q\ (Z_1, \ldots, Z_p, X_1, \ldots, X_m) = 0$$



se le llama función de producción de la industria donde:

$Z_b \geq 0$ son los productos (cantidad de unidades)

$X_i \geq 0$ son los factores (cantidad de unidades)

y constituyen el dominio de la función de producción.

3.2 PRODUCTO MARGINAL

Se entiende por producto marginal del producto **a** con respecto al factor **b** a:

$$PM_{ab} = \frac{\partial Z_a}{\partial X_b} \quad (a = 1, \ldots, p;\ b = 1, \ldots, m)$$

$$PM_{ab} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial X_b}}{\dfrac{\partial Q}{\partial Z_a}}$$

El producto marginal mide el cambio en la producción del producto Z_a al variar el factor X_b cuando el resto de los factores y productos se mantienen constantes.

3.3 TASA DE SUSTITUCION TECNICA

Se entiende por tasa de sustitución técnica entre dos factores **a** y **b** a:

$$TST_{ab} = - \frac{\partial X_a}{\partial X_b} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial X_b}}{\dfrac{\partial Q}{\partial X_a}}$$

y mide al número de unidades de un factor requeridas para mantener constante un flujo de productos cuando se elimina una unidad del otro factor.

3.4 TASA DE TRANSFORMACION DE PRODUCTOS

Se entiende por tasa de transformación entre los productos **a** y **b** a:

$$TTP_{ab} = - \frac{\partial z_a}{\partial z_b} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial z_b}}{\dfrac{\partial Q}{\partial z_a}}$$

y mide al número de unidades de un producto que pueden obtenerse cuando se reduce una unidad de la fabricación del otro, manteniendo constante el flujo de factores.

3.5 HIPOTESIS EN QUE SE BASA EL MODELO

a) La industria posee un proceso productivo capaz de transformar un máximo de m factores en p productos.

b) Existe una función de producción que relaciona un conjunto de factores independientes con un conjunto de productos independientes.

c) La función de producción es tal que la cantidad fabricada, para un producto dado, representa la cantidad máxima de dicho producto que puede ser fabricada a partir de los factores cuando la fabricación de los restantes (p - 1) productos se mantienen en cantidades específicas.

d) La naturaleza de la función de producción ha sido predeterminada por un conjunto de decisiones técnicas por parte de los ingenieros de la industria.

e) La función de producción está caracterizada por: productos marginales decrecientes para todas las combinaciones factor-producto; tasas de sustitución técnica decrecientes para dos factores y tasas de transformación de productos crecientes entre dos productos.

f) Todos los factores y productos son perfectamente divisibles.

g) Los parámetros que determinan la función de producción de la industria son constantes para el intervalo de tiempo considerado.

h) Los parámetros no son variables aleatorias.

Solo se presentan conclusiones; se distinguen cuatro casos:

a) Competencia perfecta tanto para la compra de factores como para la venta de los productos. Se dice que la competencia es perfecta si se cumple que:

i) el producto de una industria es idéntico al producto de cualquier otra en el mercado.

ii) existen suficientes industrias como para que ninguna de ellas pueda influir los precios en el mercado.

iii) existen suficientes consumidores como para que ninguno de ellos pueda influir los precios en el mercado.

iv) las industrias y los consumidores tienen completa libertad de entrar o salir del mercado.

v) tanto las industrias como los consumidores conocen perfectamente la calidad y naturaleza del producto en el mercado.

vi) no existen arreglos ni entre las industrias ni entre los consumidores.

b) Competencia imperfecta, tanto para la compra de los factores como para la venta de productos (monopsomio, monopolio, duopolio, oligopolio o competencia monopolista). Oligopolio es la forma de organización del mercado en la cual hay pocos vendedores de un artículo (competencia monopolista). Si solo hay dos vendedores, se tiene duopolio. Si el producto es homogéneo (por ejemplo, acero, cemento, etc.), se tiene un oligopolio puro. Si el producto es diferenciado (como automóviles, cigarrillos, etc.), se tiene un oligopolio diferenciado. El monopsomio es el caso en que sólo existe un comprador del producto mientras que en el monopolio solo se tiene un vendedor.

c) Competencia perfecta para la adquisición de factores, e imperfecta para la venta de productos.

d) Competencia imperfecta para la adquisición de factores y perfecta para la venta de los productos.

Se hará uso de los siguientes indicadores:

TTP = tasa de transformación de productos $\left(- \dfrac{\partial z_a}{\partial z_b} \right)$

TST = tasa de sustitución técnica $\left(- \dfrac{\partial x_a}{\partial x_b} \right)$

PM = producto marginal $\left(\dfrac{\partial z_a}{\partial x_b} \right)$

P = precio en el mercado

C = costo (de la ecuación de costo)

IT = ingreso total

IM = ingreso marginal de un factor ($\frac{\partial (IT)}{\partial x_b}$)

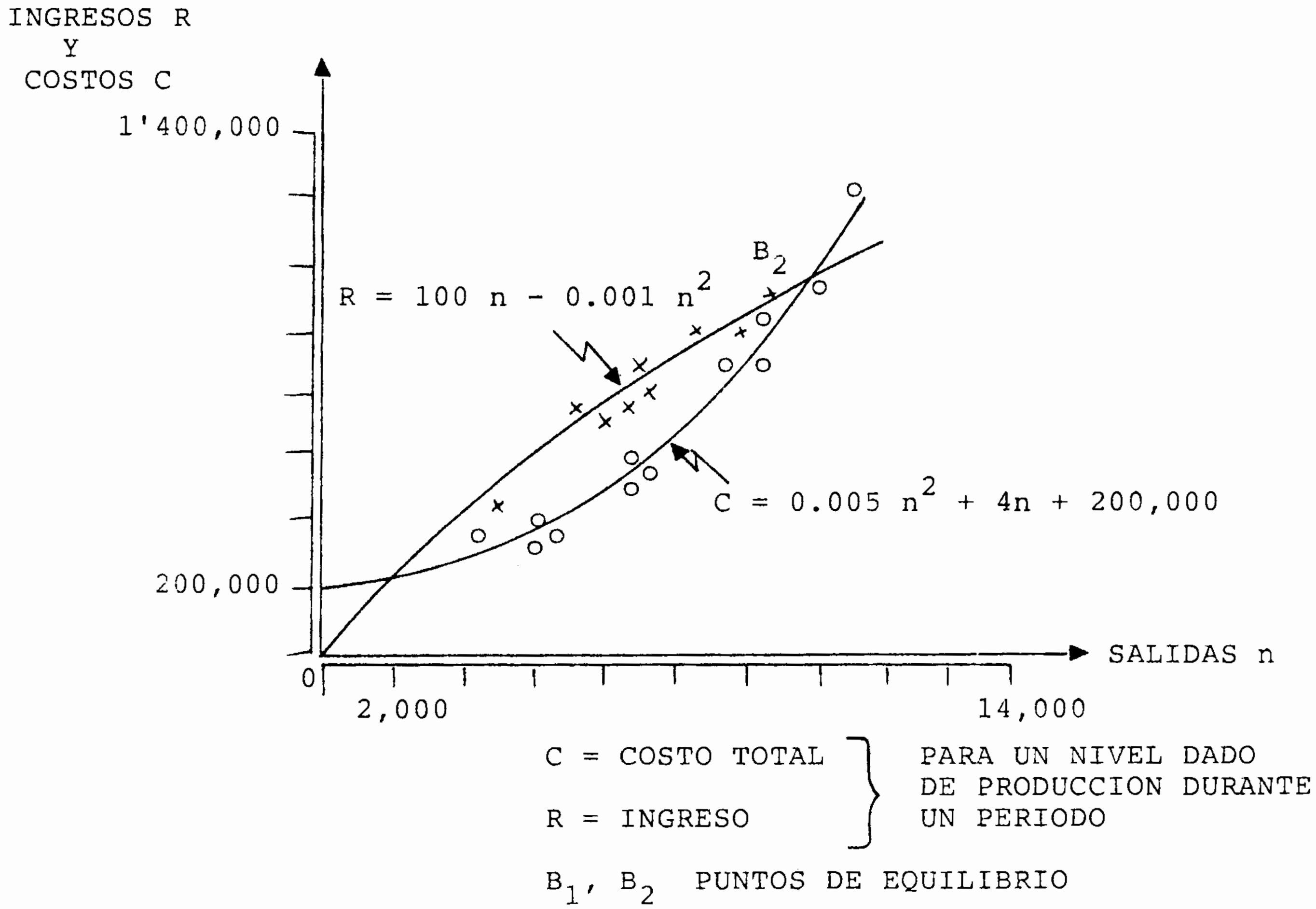
CMF = costo marginal de un factor ($\frac{\partial c}{\partial x_b}$)

Las condiciones para una operación óptima de la empresa resultan:

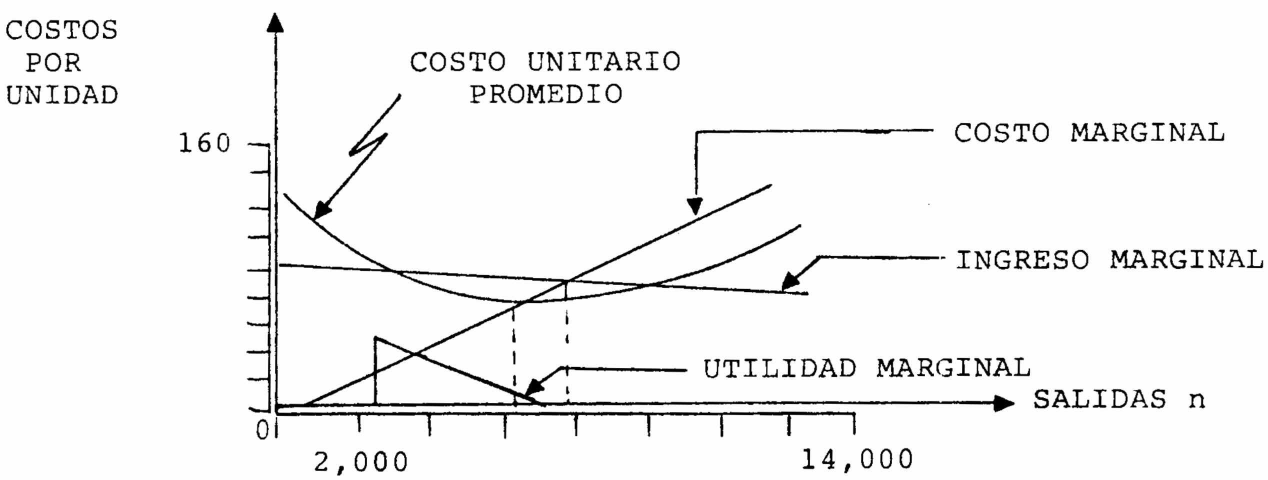
CASO	TTP	PM	TST
a	$\frac{P_a}{P_b} = -\frac{\partial z_b}{\partial z_a}$	$C_a = P_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{C_a}{C_b} = -\frac{\partial x_b}{\partial x_a}$
b	$\frac{IM_a}{IM_b} = -\frac{\partial z_b}{\partial z_a}$	$CMF_a = IM_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{CMF_a}{CMF_b} = -\frac{\partial x_b}{\partial x_a}$
c	$\frac{IM_a}{IM_b} = -\frac{\partial z_b}{\partial z_a}$	$C_a = IM_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{C_a}{C_b} = -\frac{\partial x_b}{\partial x_a}$
d	$\frac{P_a}{P_b} = -\frac{\partial z_b}{\partial z_a}$	$CMF_a = P_b \frac{\partial z_b}{\partial x_a}$	$\frac{CMF_a}{CMF_b} = -\frac{\partial x_b}{\partial x_a}$

EJEMPLO (Riggs). Se dispone de los registros mensuales de gastos de operación e ingresos de una planta. La gráfica resultante se muestra en la figura 3.1 (a). Esta gráfica parece indicar que conforme las salidas crecen los costos marginales se incrementan y el ingreso disminuye. Lo anterior, fue ratificado al obtener las ecuaciones para las curvas que mejor se ajustan a los datos.

El precio de venta de las unidades terminadas varía de acuerdo con P = (100 - 0.001 n) pesos por unidad. El comportamiento del precio se


INGRESOS R
Y
COSTOS C
1'400,000
200,000
B2
R = 100 n - 0.001 n2
C = 0.005 n2 + 4n + 200,000
SALIDAS n
0
2,000
14,000
C = COSTO TOTAL
R = INGRESO
PARA UN NIVEL DADO
DE PRODUCCION DURANTE
UN PERIODO
B1, B2 PUNTOS DE EQUILIBRIO

(a)


COSTOS
POR
UNIDAD
COSTO UNITARIO
PROMEDIO
160
COSTO MARGINAL
INGRESO MARGINAL
UTILIDAD MARGINAL
SALIDAS n
0
2,000
14,000

(b)

Figura 3.1

atribuye a los descuentos que se otorgan a pedidos al mayoreo. Se considera razonable que los costos fijos sean de 200,000 por mes y también se considera competitivo el que los costos variables estén dados por V = 0.005 n + 4 por unidad.

La planta fue diseñada para producir 12,000 unidades mensuales. Asimismo, se ha observado que la mayoría de las veces las utilidades y las pérdidas más pequeñas ocurren cuando se trabaja arriba de la capacidad de diseño.

Se desea estimar con base en los datos disponibles, las salidas que producen la máxima utilidad, el mínimo costo unitario promedio y los puntos de equilibrio.

La máxima utilidad se presenta cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal, los cuales están dados por:

$$\text{INGRESO MARGINAL} = \frac{d\,(nP)}{dn} = \frac{d(100n - 0.001\,n^2)}{d\,n}$$

$$= 100 - 0.002\,n$$

$$\text{COSTO MARGINAL} = \frac{d(n\,V + F)}{d\,n} = \frac{d(0.005\,n^2 + 4n + 200.000)}{d\,n} = 0.01n + 4$$

y consecuentemente la utilidad es máxima para:

$$100 - 0.002\,n = 0.01\,n + 4$$

o sea

$$n = \frac{96}{0.012} = 8{,}000 \text{ unidades}$$

Para una salida de 8,000 la utilidad es:

$$Z_{8000} = [R\text{-}C]_{8000} = [100\ n - 0.001\ n^2 - 0.005\ n^2 - 4n - 200{,}000]_{8000}$$

$$= [-\ 0.006\ n^2 + 96\ n - 200{,}000]_{8000} = \$\ 184{,}000$$

La salida correspondiente a utilidad máxima también puede localizarse en el punto donde la utilidad marginal es nula, según se muestra en la figura 3.1 (b); analíticamente:

$$\text{UTILIDAD MARGINAL} = \frac{dN}{dn} = \frac{d(-0.006\ n^2 + 96\ n - 200{,}000)}{dn} = 0$$

$$0 = -\ 0.012\ n + 96$$

$$n = \frac{96}{0.012} = 8000 \text{ UNIDADES}$$

El costo promedio mínimo ocurre cuando la salida satisface a la relación

$$\frac{dV}{dn} = \frac{F}{n^2} \quad \text{en efecto, pues:} \quad CT = nV + F$$

$$CP = V + \frac{F}{n}$$

$$\frac{dV}{dn} = \frac{F}{n^2}$$

$$0.005\ n^2 = 200{,}000$$

$$n = 6325 \text{ UNIDADES}$$

El costo promedio para n = 6325 se obtiene de la fórmula

$$\frac{0.005\ n^2 + 4\ n + 200{,}000}{n}$$

y da por resultado 67.20 según se muestra en la figura 3.1 (b).

Las salidas correspondientes a los puntos de equilibrio se obtienen igualando la utilidad bruta a cero; esto es:

$$Z = 0 = -\ 0.006\ n^2 + 96\ n - 200{,}000$$

y resulta B_1 = 2477 y B_2 = 13,533 unidades según se muestra en la figura 3.1 (b).

La idea de que un conjunto de recursos disponibles da lugar a diferentes combinaciones eficientes (de los mismos) con objeto de obtener un cierto nivel de producción es básica en el **Análisis de Inversiones.** El uso de isocuantas es por tanto fundamental, definir su variación mediante las pendientes de las tangentes (tasa de sustitución técnica), adquiere también especial importancia, así como recordar que es el cociente de los productos marginales de los recursos.

3.6 MODELO PARA EL PROCESO DE TRANSFORMACION DE RECURSOS

Ahora bien, el criterio para seleccionar el diseño más económico o la asignación de recursos más racional es indudablemente recuperación máxima. Se entenderá por **recuperación máxima,** lo que para el **Análisis Marginal** es la ganancia máxima, o sea, el máximo incremento neto obtenido de transformar recursos en servicios o bienes.

Se puede entonces proponer como modelo para el proceso de transformación de recursos el siguiente. Aclarando que es determinista estático, no lineal y de optimización.

$$\max \Pi = V(z) - h(x)$$

s.a.

$$\bar{z} = z(x)$$

donde:

$\bar{z}$ = cantidad del producto por obtener

$V(z)$ = valor del producto z

x = cantidad del o de los recursos usados

$h(x)$ = valor de los recursos usados

$z(x)$ = función de producción utilizada

π = valor neto del proceso de transformación

Obsérvese la analogía con el modelo de monopolio cuando en vez de h(x) (ecuación de costos) se usa h(z) función de costo. Nótese que el concepto valor de un recurso corresponde al de costo de un factor antes definido por el **Análisis Marginal.**

El problema de optimización central en el **Análisis de Inversiones**, antes planteado, da lugar a dos problemas:

a) Minimizar el costo de los recursos usados para lograr un nivel de producción $\bar{z}$.

b) Maximizar el nivel de producción cuando el presupuesto o el nivel de recursos está fijo.

También es conveniente distinguir entre los dos problemas anteriores, el primero es de optimización del proceso de producción y el segundo, es de optimización de la selección de alternativas en donde es necesario balancear costos y beneficios.

4. ANALISIS EFECTIVIDAD-COSTO

4.1 DESCRIPCION

Como se ha visto el **Análisis Marginal** se ocupa de relacionar los factores de la producción con los productos terminados, de buscar las condiciones de operación óptima para la industria de acuerdo con el mercado.

Considerando ahora un sistema, ahí se tratará de adjudicar recursos a alternativas de proyectos, de transformar valiosos recursos en aún más valiosos productos, v.g. transformar materiales, servicios de mano de obra, espacio, servicios de equipo en unidades habitacionales.

Al analista de sistemas le interesa por tanto, identificar cómo las alternativas de diseño afectan al valor del proceso de transformación de los recursos y buscará optimizar dicho proceso.

El valor del nivel de efectividad o producto de un sistema público no siempre es posible definirlo objetivamente, generalmente no producen bienes que se vendan en un mercado competitivo. Para estos sistemas el analista no puede determinar objetivamente el nivel óptimo del producto o la efectividad óptima de diseño. Su papel consistirá en suministrar al ejecutivo la función efectividad-costo. Si por el contrario, costo y efectividad pueden compararse objetivamente; entonces, el analista debe determinar el mejor nivel de efectividad.

El mejor nivel de producción es por definición un punto en la trayectoria de expansión y por tanto, un punto en la curva efectividad-costo, que se determinará por las técnicas **Análisis Marginal**. La solución será lograr ingresos marginales iguales a costos marginales.

Se mencionará como otra aplicación del **Análisis Marginal** al **Análisis de Sistemas**, los llamados **Estudios de Cambios** o variaciones (Tradeoff Analysis). El cambio entre dos recursos está medido por su tasa de sustitución técnica, que como es sabido, es el cociente de sus productividades marginales. El cambio (tradeoff) es entonces la tasa a la que un insumo puede ser sustituido por otro manteniendo el mismo nivel de producto o efectividad de diseño. Para el mejor diseño esta fracción debe ser igual al cociente de los costos marginales de los factores usados.

De esta manera el analista:

a) determinará un diseño particular que es técnicamente eficiente.

b) calculará el cociente de las productividades marginales de los recursos empleados en ese diseño, así como sus costos.

c) buscará otro diseño que incremente el uso de los recursos con la mayor productividad y disminuya el uso de recursos con la menor productividad.

d) continuará de esta manera.

4.2 APLICACION (de Neuphville)

En una determinada zona urbana, en la que se está realizando un estudio de Ingeniería de Tránsito, se analiza la posibilidad de realizar mejoras en las condiciones de tráfico de la red de transporte, tendientes a disminuir el número de los accidentes que ocurren en los cruces ferroviarios de la red.

Para los fines del análisis, se ha dividido la red en seis categorías de tráfico, cuyas características aparecen resumidas en la tabla 4.1.

Se han propuesto cuatro opciones de solución, cuyos costos anuales se presentan en la tabla 4.2.

Obviamente, la medida de efectividad más adecuada para la evaluación de las alternativas es el número esperado de accidentes en un cruce al escoger una cualquiera de ellas.

CATEGORIA	RANGO DE VARIACION DEL PROMEDIO ANUAL DE TRAFICO DIARIO (VEH/DIA)	PROMEDIO DEL NUMERO DE TRENES	NUMERO DE VIAS EN EL CRUCE	NUMERO DE CRUCES
1	35 000-50 000	20	1	3
2	15 000-35 000	20	1	27
3	0-15 000	20	1	23
4	35 000-50 000	75	2	27
5	15 000-35 000	75	2	83
6	0-15 000	75	2	22

Tabla 4.1

ALTERNATIVA	DESCRIPCION	COSTO MEDIO ANUAL
1	BARRAS CRUZADAS	42
2	LUCES INTERMITENTES	1 995
3	BARRERAS AUTOMATICAS	4 235
4	PASOS A DESNIVEL	87 900

Tabla 4.2

Con objeto de cuantificar dicha medida, se aprovecharon los estudios de regresión efectuados por Newman para establecer una expresión que relacionara el número de accidentes con una serie de características físicas de un cruce ferroviario. Dicha expresión es de la forma:

$$NEA = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_7 x_7$$

donde:

NEA - número esperado de accidentes en un cruce ferroviario de una red urbana.

x_1 - valor del promedio anual de tráfico diario/100

x_2 - número de vías en el cruce.

x_3 - visibilidad horizontal (su valor típico es 20).

x_4 - promedio del número de trenes diarios.

x_5 - factor del ángulo de cruzamiento (su valor típico es 9).

x_6 - tipo de aproximación (su valor típico es 5).

x_7 - visibilidad diagonal (su valor típico es 5).

Los valores de los coeficientes a_i para cada una de las alternativas de prevención en estudio se consignan en la tabla 4.3.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
BARRAS CRUZADAS	-0.0978	0.0014	-	0.0018	0.0164	0.0096	-	0.0153
LUCES INTERMIT.	0.0131	0.0009	0.0145	-	0.0107	-	0.0178	0.0151
BARRERAS AUTOM.	-0.2469	-0.0018	-0.0421	0.0093	0.0096	-	-	0.0812

Tabla 4.3

Mediante la sustitución de los parámetros a_i por los valores correspondientes a cada una de las seis categorías de la red urbana y considerando como promedio anual de tráfico diario, el límite superior de su intervalo de variación; se obtienen para el número esperado de accidentes anuales en un cruce (NEA) los valores que se muestran en la tabla 4.4.

	ALTERNATIVA			
CATEGORIA	1	2	3	4
1	1.12	0.85	-0.40	0
2	0.91	0.72	-0.13	0
3	0.63	0.54	0.22	0
4	2.03	1.45	0.08	0
5	1.82	1.32	0.35	0
6	1.54	1.14	0.71	0

Tabla 4.4

Es evidente que para el caso de pasos a desnivel el NEA sea cero, ya que esta alternativa consiste en la eliminación del cruce que es la causa que motiva los accidentes.

Al considerar el número de cruces que se presentan en cada categoría, se obtienen los valores mostrados en las tablas 4.5 y 4.6 que se refieren respectivamente al total esperado de accidentes por año y al costo total de cada alternativa.

CATEGORIA	ALTERNATIVA 1	2	3	4
1	3.36	2.56	-1.2	0
2	24.6	19.5	-3.5	0
3	14.5	12.5	5.1	0
4	5.5	39.1	2.1	0
5	15.1	10.9	2.9	0
6	33.8	25.1	15.5	0

Tabla 4.5. Total esperado de accidentes anuales.

CATEGORIA	ALTERNATIVA 1	2	3	4
1	126	5,995	12,700	263,000
2	1,130	53,800	114,500	2'380,000
3	965	45,800	97,500	2'020,000
4	1,130	53,800	114,500	2'380,000
5	3,480	165,000	351,000	7'300,000
6	925	44,000	93,500	1'910,000

Tabla 4.6. Costo total de cada alternativa.

Se observa que en cada categoría se puede emplear una cualquiera de las cuatro alternativas propuestas; de esta manera, asociando en forma aleatoria a cada categoría una alternativa específica, se puede formar una combinación de seis parejas que integrarán lo que se denominará un **plan o estrategia.**

El número total de planes o estrategias factibles, es igual a $4^6 = 4096$. En donde 4 es el número de alternativas propuestas y 6 es el número de categorías en que está dividida la red urbana. Para evaluar tan solo aquellos planes o estrategias que presenten las características de efectividad y costo más relevantes dentro del conjunto de soluciones factibles, se procede como sigue:

- Se analiza primeramente la combinación de menor costo posible, que resulta ser también, para este ejemplo, la de menor efectividad.

- A partir de este plan, se investigan los incrementos en costo y en efectividad que resultan de escoger, dentro de una misma categoría, a cada una de las otras alternativas **no** tomadas en cuenta con anterioridad.

- Si se dividen cada uno de los incrementos de efectividad mencionados, entre sus correspondientes incrementos en costo, los cocientes que resultan proporcionan el criterio que permitirá decidir cuál es el siguiente plan a evaluar, puesto que si se elige el máximo de esos cocientes (considerando todas las categorías) se está tomando en consideración aquella nueva pareja que proporciona el mayor incremento en efectividad al menor costo posible.

Este procedimiento termina cuando en el último plan considerado se haya logrado la máxima efectividad posible.

La aplicación del proceso antes descrito, se muestra en la tabla 4.7. En la primera columna aparece la enumeración ordenada de las parejas **categoría-alternativa** (C-A) a combinar para formar un plan (una sola pareja de las cuatro posibles en cada categoría, puede pasar a formar parte de un plan).

En las siguientes dos columnas aparecen los valores de efectividad (NEA) y de costo por cruce, asociados a cada una de las parejas mencionadas. Dichos valores son los elementos de la matriz de efectividad unitaria y de la matriz de costo unitario respectivamente desarrolladas por renglones.

De la misma manera, las columnas cuarta y quinta son las matrices de efectividad total y de costo total ya descritas, pero desarrolladas renglón por renglón.

El primer plan se forma con aquellas parejas (C-A), que en cada categoría tienen asociado el costo total mínimo. Este primer plan se presenta en la parte inferior de la tabla, en medio de las primeras dos columnas encabezadas bajo el título **PLAN 1**; en estas columnas aparecen los valores de efectividad y costo total de las parejas elegidas, mismas que se suman en sus respectivas columnas y los resultados se anotan en el último renglón de la tabla. Dichas sumas constituyen las coordenadas correspondientes al punto que representa al primer plan en la gráfica Efectividad-Costo.

En la tercera columna que cae debajo del encabezado **PLAN 1** se calculan, con respecto al elemento elegido en cada categoría, los incrementos en efectividad que se tienen al cambiar la pareja elegida por otra cualquiera de las restantes en esa categoría. Estos incrementos se calculan con respecto a la efectividad unitaria.

					PLAN 1				Δ NEA / Δ COSTO 1/10⁶	PLAN 2				Δ NEA / Δ COSTO 1/10⁶	PLAN 3				Δ NEA / Δ COSTO 1/10⁶	PLAN 4				Δ NEA / Δ COSTO 1/10⁶
C-A	NEA	COSTO	NEA(CR)	COSTO(CR)	NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO	
1-1	1.12	42	3.36	126	3.36	126	-	-	-	3.36	126	-	-	-			-	-	-			-	-	-
1-2	0.85	1995	2.56	5995			0.27	1953	138			0.27	1953	138			-	-	-			-	-	-
1-3	-0.40	4235	-1.2	12700			1.52	4193	354			1.52	4193	364*	-1.2	12700	-	-	-	-1.2	12700	-	-	-
1-4	0	87900	0	263000			1.12	87858	12			1.12	87858	12			-0.40	83665	-4		•	-0.40	83665	-4
2-1	0.91	42	24.6	1130	24.6	1130	-	-	-	24.6	1130	-	-	-	24.6	1130	-	-	-	24.6	1130	-	-	-
2-2	0.72	1995	19.5	53800			0.19	1953	98			0.19	1953	98			0.19	1953	98			0.19	1953	9.8
2-3	-0.13	4235	-3.5	114500			1.04	4193	248			1.04	4193	248			1.04	4193	248			1.04	4193	248*
2-4	0	87900	0	2380000			0.91	87858	10			0.91	87858	8			0.72	87858	8			0.72	87858	8
3-1	0.63	42	14.5	965	14.5	965	-	-	-	14.5	965	-	-	-	14.5	965	-	-	-	14.5	965	-	-	-
3-2	0.54	1995	12.5	45800			0.09	1953	46			0.09	1953	46			0.09	1953	46			0.09	1953	46
3-3	0.22	4235	5.1	97500			0.41	4193	98			0.41	4193	98			0.41	4193	98			0.41	4193	98
3-4	0	87900	0	2020000			0.63	87858	8			0.53	87858	7			0.63	87858	7			0.63	87858	7
4-1	2.03	42	55	1130	55	1130	-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
4-2	1.45	1995	39.1	53800			0.58	1953	297			-	-	-			-	-	-			-	-	-
4-3	0.08	4235	2.1	114500			1.95	4193	465*	2.1	114500	-	-	-	2.1	114500	-	-	-	2.1	114500	-	-	-
4-4	0	87900	0	2380000			2.03	87858	23			0.08	83665	0.9			0.08	83665	.9			0.08	83665	.9
5-1	1.82	42	151	3480	151	3480	-	-	-	151	3480	-	-	-	151	3480	-	-	-			-	-	-
5-2	1.32	1995	109	165200			0.50	1953	256			0.50	1953	256			0.50	1953	256			-	-	-
5-3	0.35	4235	29	351000			1.47	4193	350			1.47	4193	350			1.47	4193	350*	29	351000	-	-	-
5-4	0	87900	0	7302000			1.82	87858	21			1.82	87858	21			1.82	87858	21			0.35	83665	4
6-1	1.54	42	33.6	925	33.6	925	-	-	-	33.8	925	-	-	-	33.6	925	-	-	-	33.8	925	-	-	-
6-2	1.14	1995	25.1	44000			0.40	1953	205			0.40	1953	205			0.40	1953	205			0.40	1953	205
6-3	0.71	4235	15.5	93500			0.83	4193	198			0.83	4193	198			0.83	4193	198			0.83	4193	198
6-4	0	87900	0	1910000			1.54	87858	18			1.53	87858	18			1.54	87858	18			1.54	87858	18
					282.5	7756				229.4	121126				224.8	133700				102.8	481220			

OPCIONES QUE FORMAN EL PLAN O ESTRATEGIA	PLAN 1	PLAN 2	PLAN 3	PLAN 4
	(1-1)	(1-1)	→ (1-3)	(1-3)
	(2-1)	(2-1)	(2-1)	(2-1)
	(3-1)	(3-1)	(3-1)	(3-1)
	(4-1)	→ (4-3)	(4-3)	(4-3)
	(5-1)	(5-1)	(5-1)	→ (5-3)
	(6-1)	(6-1)	(6-1)	(6-1)

SOLUCION DE MINIMO COSTO

Tabla 4.7 (continúa)

					PLAN 5				$\frac{\Delta \text{NEA}}{\Delta \text{COSTO}}$ $1/10^6$	PLAN 6				$\frac{\Delta \text{NEA}}{\Delta \text{COSTO}}$ $1/10^6$	PLAN 7				$\frac{\Delta \text{NEA}}{\Delta \text{COSTO}}$ $1/10^6$	PLAN 8				$\frac{\Delta \text{NEA}}{\Delta \text{COSTO}}$ $1/10^6$
C-A	NEA	COSTO	NEA(CR)	COSTO(CR)	NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO	
1-1	1.12	42	3.36	126			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
1-2	0.85	1995	2.56	5995			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
1-3	-0.40	4235	-1.2	12700	-1.2	12700	-	-	-	-1.2	12700	-	-	-	-1.2	12700	-	-	-	-1.2	12700	-	-	-
1-4	0	87900	0	263000			-0.40	83665	-4			-0.40	83665	-4			-0.40	83665	-4			-0.4	83665	-4
2-1	0.91	42	24.6	1130			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
2-2	0.72	1995	19.5	53800			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
2-3	-0.13	4235	-3.5	114500	-3.5	114500	-	-	-	-3.5	114500	-	-	-	-3.5	114500	-	-	-	-3.5	114500	-	-	-
2-4	0	87900	0	2380000			-0.13	83665	-2			-0.13	83665	-2			-0.13	83665	-2			-0.13	83665	-2
3-1	0.63	42	14.5	965	14.5	965	-	-	-	14.5	965	-	-	-	14.5	965	-	-	-			-	-	-
3-2	0.54	1995	12.5	45800			0.09	1953	46			0.09	1953	46			0.09	1953	46			-	-	-
3-3	0.22	4235	5.1	97500			0.4	4193	98			0.4	4193	98			0.41	4193	98*	5.1	97500	-	-	-
3-4	0	87900	0	2020000			0.63	87858	7			0.63	87858	7			0.63	87858	7			0.22	83665	3
4-1	2.03	42	55	1130			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
4-2	1.45	1995	39.1	53800			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
4-3	0.08	4235	2.1	114500	2.1	114500	-	-	-	2.1	114500	-	-	-	2.1	114500	-	-	-	2.1	114500	-	-	-
4-4	0	87900	0	2380000			0.08	83665	.9			0.08	83665	.9			0.08	83665	.9			0.08	83665	.9
5-1	1.82	42	151	3480			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
5-2	1.32	1995	109	165000			-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
5-3	0.35	4235	29	351000	29	351000	-	-	-	29	351000	-	-	-	29	351000	-	-	-	29	351000	-	-	-
5-4	0	87900	0	7300000			0.35	83665	4			0.35	83665	4			0.35	83665	4			0.35	83665	4
6-1	1.54	42	33.8	925	33.8	925	-	-	-			-	-	-			-	-	-			-	-	-
6-2	1.14	1995	25.1	44000			-	-	205*	25.1	44000	-	-	-			-	-	-			-	-	-
6-3	0.71	4235	15.5	93500			0.43	2240	198			0.43	2240	192*	15.5	93500	-	-	-	15.5	93500	-	-	-
6-4	0	87900	0	1910000			1.14	85905	18			1.14	85905	13			0.71	83665	9			0.71	83665	9*
					74.7	594590				66.0	637665				56.4	687165				47.0	783700			

	PLAN 5	PLAN 6	PLAN 7	PLAN 8
OPCIONES QUE FORMAN EL PLAN O ESTRATEGIA	(1-3)	(1-3)	(1-3)	(1-3)
	→ (2-3)	(2-3)	(2-3)	(2-3)
	(3-1)	(3-1)	(3-1)	→ (3-3)
	(4-3)	(4-3)	(4-3)	(4-3)
	(5-3)	(5-3)	(5-3)	(5-3)
	(6-1)	→ (6-2)	→ (6-3)	(6-3)
	SOLUCION DE MINIMO COSTO			

Tabla 4.7 (continúa)

					PLAN 9				$\frac{\Delta\ NEA}{\Delta\ COSTO}$ $1/10^6$	PLAN 10				$\frac{\Delta\ NEA}{\Delta\ COSTO}$ $1/10^6$	PLAN 11	
C-A	NEA	COSTO	NEA(CR)	COSTO(CR)	NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)	Δ NEA	Δ COSTO		NEA(CR)	COSTO(CR)
1-1	1.12	42	3.36	126			-	-	-			-	-	-		
1-2	0.85	1995	2.56	5995			-	-	-			-	-	-		
1-3	-0.40	4235	-1.2	12700	-1.2	12700	-	-	-	-1.2	12700	-	-	-	-1.2	12700
1-4	0	87900	0	263000			-0.40	83665	-4			-0.40	83665	-4		
2-1	0.91	42	24.6	1130			-	-	-			-	-	-		
2-2	0.72	1995	19.5	53800			-	-	-			-	-	-		
2-3	-0.13	4235	-3.5	114500	-3.5	114500	-	-	-	-3.5	114500	-	-	-	-3.5	114500
2-4	0	87900	0	2380000			-0.13	83665	-2			-0.13	83665	-2		
3-1	0.63	42	14.5	965			-	-	-			-	-	-		
3-2	0.54	1995	12.5	45800			-	-	-			-	-	-		
3-3	0.22	4235	5.1	97500	5.1	97500	-	-	-	5.1	97500	-	-	-		
3-4	0	87900	0	2020000			0.22	83665	3			0.22	83665	3*	0	2020000
4-1	2.03	42	55	1130			-	-	-			-	-	-		
4-2	1.45	1995	39.1	53800			-	-	-			-	-	-		
4-3	0.08	4235	2.1	114500	2.1	114500	-	-	-	2.1	114500	-	-	-	2.1	114500
4-4	0	87900	0	2380000			0.08	83665	.9			0.08	83665	.9		
5-1	1.82	42	151	3480			-	-	-			-	-	-		
5-2	1.32	1995	109	165000			-	-	-			-	-	-		
5-3	0.35	4235	29	351000	29	351000	-	-	-			-	-	-		
5-4	0	87900	0	7300000			0.35	83665	4*	0	7300000	-	-	-	0	7300000
6-1	1.54	42	33.8	925	33.8	925	-	-	-			-	-	-		
6-2	1.14	1995	25.1	44000			-	-	-			-	-	-		
6-3	0.71	4235	15.5	93500			-	-	-			-	-	-		
6-4	0	87900	0	1910000	0	1910000	-	-	-	0	1910000	-	-	-	0	1910000
					31.5	2600200				2.5	9549200				-2.6	11471700

OPCIONES QUE FORMAN EL PLAN O ESTRATEGIA	PLAN 9	PLAN 10	PLAN 11
	(1-3)	(1-3)	(1-3)
	(2-3)	(2-3)	(2-3)
	(3-3)	(3-3)	→ (3-4)
	(4-3)	(4-3)	(4-3)
	(5-3)	→ (5-4)	(5-4)
	→ (6-4)	(6-4)	(6-4)
	SOLUCION DE MINIMO COSTO		

Tabla 4.7 (concluye)

En la cuarta columna se calculan los correspondientes incrementos en costo, también con respecto al unitario y, finalmente, en la quinta aparece, expresado en **millonésimos,** el cociente de dividir el primer incremento entre el segundo.

El valor máximo de dicho cociente (tomando en consideración a las seis categorías), se marca con un asterisco, y la pareja a la que corresponde sustituye a la elegida anteriormente dentro de la categoría que le haya tocado, para formar el nuevo plan. Obsérvese que en cada plan solo se efectúa un cambio a la vez con respecto al conjunto anterior. La pareja que ha sido tomada en cuenta para sustituir a la de su misma categoría en el plan anterior, se señala con una pequeña flecha en la descripción simbólica de las opciones, en la parte inferior de la tabla.

Cualquier pareja que haya sido elegida con anterioridad para formar parte de un plan, queda automáticamente descartada para cualquier elección posterior; además, carece de sentido el considerar cualquier pareja que no represente un incremento positivo en la efectividad.

El número de planes **relevantes** extraídos de este análisis, fue de 11. Obsérvese que después del último plan considerado, ya no se tiene ningún incremento en la efectividad al incrementar el costo.

En la tabla 4.8 aparecen las parejas (NEA, Costo total) para cada uno de los 11 planes, y la graficación de estos valores se muestra en la figura 4.1

PLAN	NEA TOTAL	COSTO TOTAL
1	282.6	7,756
2	229.4	121,126
3	224.8	133,700
4	102.8	481,220
5	74.7	594,590
6	66.0	637,665
7	56.4	687,165
8	47.0	783,700
9	31.5	2'600,200
10	2.5	9'549,200
11	- 2.6	11'471,700

Tabla 4.8

Se observa que si el límite presupuestal anual para el proyecto es de hasta un millón, el mejor plan es el 8, consistente en la instalación de barreras automáticas en los cruces de todas las categorías de tráfico en que está dividida la red urbana.

Sin embargo, si el presupuesto es mayor del millón, la mejor estrategia es el plan 9 que consiste en la instalación de barreras automáticas en todas las categorías, exceptuando la sexta en la que se deben construir pasos a desnivel en sus 22 cruces. La razón de esta preferencia es que para un incremento razonable de costo aumenta la efectividad del proyecto en casi el 20%.

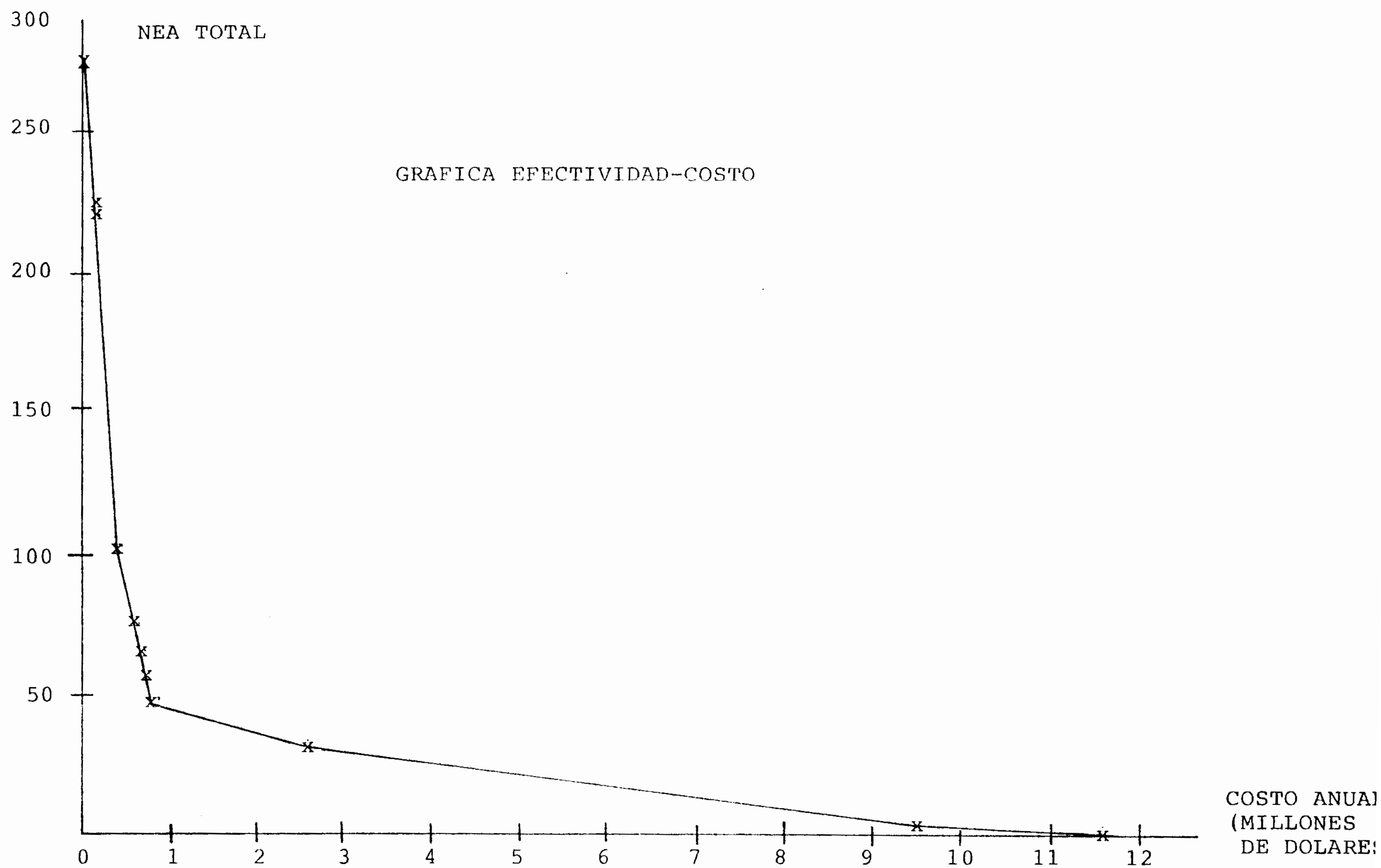

NEA TOTAL
GRAFICA EFECTIVIDAD-COSTO
300
250
200
150
100
50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
COSTO ANUAL
(MILLONES
DE DOLARES

Figura 4.1

5. ANALISIS DE ACTIVIDADES

5.1 INTRODUCCION

El análisis de actividades, dentro de las técnicas microeconómicas, permite no sólo sustitución sino también complementaridad sin perder la ley de las recuperaciones decrecientes ni las recuperaciones a escala. Permite trabajar con funciones de producción menos restringidas pero presenta el inconveniente de la linealidad. Ofrece a cambio el uso de las técnicas lineales de optimización.

La idea central es el concepto de Actividad entendiéndose por ella un proceso de transformación de factores (recursos) en productos. Las actividades o variables intermedias entre insumos y productos, representan procesos (cambios) alternos mediante los cuales se obliga la combinación de los recursos. En la práctica, de hecho sólo se emplean efectivamente los recursos cuando se usan en una combinación específica. Dado que las actividades pueden representarse mediante cajas negras (figura 5.1) de las que se obtienen producciones eficientes, el Análisis de Actividades suministra una excelente metodología al de sistemas cuyos fines son idénticos.

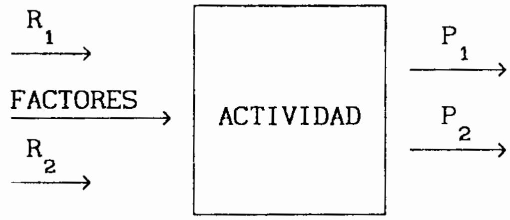


Figura 5.1

5.2. AXIOMAS DEL ANALISIS DE ACTIVIDADES

El Análisis de Actividades se fundamenta en los dos axiomas básicos siguientes:

5.2.1. Axioma de la proporcionalidad

Por proporcionalidad se entiende que si una actividad puede ser operada a un **nivel tipo,** también puede ser operada a cualquier fracción no negativa o múltiplo de dicho nivel, variando los factores y los productos proporcionalmente. El múltiplo suministra la **intensidad** a que dicha actividad será operada.

5.2.2. Axioma de la aditividad

Este axioma implica que si dos actividades se usan conjuntamente en la fabricación de un producto, la primera operada a una intensidad x_1 y la segunda a una intensidad x_2, los factores requeridos y los productos fabricados consistirán de la suma de los factores y los productos correspondientes a la operación individual de la primera actividad a la intensidad x_1 y a la segunda a la intensidad x_2. En términos económicos las actividades reciben el nombre de **economías externas** y se supone que no existe interacción entre ellas. De existir debió tomarse en cuenta en la etapa de diseño de las actividades.

5.3. ELEMENTOS EN UN ANALISIS DE ACTIVIDADES

En un problema que implique un análisis de actividades deben distinguirse los siguientes elementos:

a) Las posibilidades de producción puramente técnicas.

b) Las limitaciones cuantitativas en los recursos básicos disponibles en la economía en estudio (factores de producción primarios).

c) Las metas que deben ser servidas por la producción.

d) Las mejores selecciones que permitan explotar las posibilidades técnicas coordinadamente hacia un objetivo.

5.4. LA TECNOLOGIA

La formalización de las posibilidades técnicas involucra únicamente dos conceptos: el de un bien y el de una actividad. Los bienes deben ser homogéneos y perfectamente divisibles, bajo esta denominación se incluyen tanto los factores primarios (obra de mano, materia prima, etc.), como los productos intermedios (acero, concreto, etc.) y los productos finales (cortinas, puentes, etc.).

Se representará con y_n, $n = 1,2,\dots, N$ a la cantidad neta del n-ésimo bien en el sistema productivo, si y_n es negativo, se tratará de un insumo, cada y_n representa una tasa de flujo por unidad de tiempo.

La k-ésima actividad, $k = 1,2,\dots, K$, se representará por un conjunto de coeficientes a_{nk} indicando la tasa de flujo por unidad de tiempo del n-ésimo bien en la k-ésima actividad. Entonces si x_k es la intensidad de dicha actividad, el flujo del bien será $x_k\ a_{nk}$. De esta manera los productos netos finales serán:

$$y_n = \sum_{k=1}^{K} a_{nk}\, x_k \ , \quad x_k \geq 0, \quad n = 1,2,\ldots, N$$

Al arreglo

$$\bar{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{Nk} \end{bmatrix} \quad , \ k = 1,2,\ldots, K$$

se le llamará **actividad básica** y al conjunto de actividades básicas:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NK} \end{bmatrix}$$

se le llamará **matríz tecnológica** o simplemente la **tecnología.**

Los postulados que siguen definen el tipo de tecnología en estudio.

Postulado A. Es imposible encontrar un conjunto de intensidades positivas de algunas o de todas las actividades para las que el efecto conjunto es un producto nulo de todos los bienes.

Postulado B. Es imposible encontrar un conjunto de intensidades positivas de algunas o de todas las actividades para las que el efecto conjunto consista de un producto neto positivo, de por lo menos un bien sin ocasionar un producto neto negativo para al menos otro bien.

5.5. EFICIENCIA ECONOMICA, OPTIMO DE PARETO

Se dice que un conjunto de intensidades positivas de algunas o de todas las actividades, es un arreglo eficiente, si cualquier otro arreglo que aumente el producto neto de algún bien, implica una disminución de algún otro.

Relacionado con la eficiencia, se tiene el concepto de optimalidad de Pareto. Se dice que una situación es un óptimo de Pareto cuando es imposible efectuar un cambio que beneficie a alguna persona sin que surta efectos perjudiciales para alguna otra.

La eficiencia es pues, un concepto puramente tecnológico, mientras que la optimalidad de Pareto, es el concepto correspondiente para las personas como consumidores.

EJEMPLO 5.1.- Una industria desea definir la intensidad con que deben emplearse las actividades A_1 y A_2 con objeto de transformar los recursos R_1 y R_2 en un producto P máximo (figura 5.2), si:

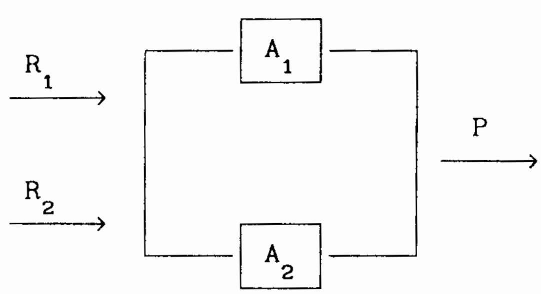


Figura 5.2

a) Se dispone de cuatro unidades de R_1 y de 6 unidades de R_2.

b) La actividad A_1 rinde dos unidades de P por unidad de R_1 y tres de R_2.

c) La actividad A_2 rinde tres unidades de P por dos unidades de R_1 y una de R_2.

Se utilizará la siguiente convención:

bien 1 = recurso R_1
bien 2 = recurso R_2
bien 3 = producto P

De esta manera las actividades básicas son:

$$\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

y la tecnología está dada por

$$\bar{A} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ P \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 & \quad a_2 \end{matrix} & \end{array}$$

Si las intensidades de A_1 y A_2 son 3 y 2 respectivamente, entonces los productos netos finales de los bienes serán:

$$y_1 = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} x_k = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = -\frac{1}{2}(3) - \frac{2}{3}(2) = -\frac{17}{6}$$

y en forma análoga se obtiene:

$$y_2 = -\frac{31}{6} \; ; \quad y_3 = 5$$

El problema se puede resolver gráficamente como sigue:

El primer paso es construir el mapa de isocuantas, situando en el eje Y el recurso R_1 y en el X el R_2. En estas condiciones, las actividades A_1 y A_2 quedan representadas por rectas que pasan por el origen; ya que la tasa de flujo de recursos es constante para cada actividad (pendiente de la recta) y para una intensidad nula el flujo también es nulo.

A continuación se inicia la selección de puntos sobre las actividades, con objeto de disponer de las isocuantas. El enunciado indica que A_1 rinde dos unidades de P por una unidad de R_1 y tres de R_2, entonces, usando el axioma de la proporcionalidad se tendrá una unidad de P usando 0.5 de R_1 y 1.5 de R_2; el punto (1.5, 0.5) se sitúa sobre A_1. Análogamente para A_2 el enunciado indica que para tres unidades de P se usan dos de R_1 y una de R_2; luego, por el mismo axioma para una de P se utilizarán 0.67 de R_1 y 0.33 de R_2. El punto (0.33, 0.67) se sitúa sobre A_2 y se dibuja el segmento de isocuanta correspondiente a P = 1 (figura 5.3).

Las isocuantas incluyen segmentos paralelos a los ejes, lo que indica que cualquier otra adición de un factor es redundante y no puede incrementar el producto cuando el otro factor se encuentra fijo.

En la forma descrita y siempre usando el axioma de las proporciones, se dibujó el resto de las isocuantas.

El tercer paso es dibujar la región de factibilidad, la que está definida en términos de los recursos disponibles: cuatro unidades de R_1 y seis de R_2. Estos datos definen un rectángulo en el mapa. El punto M resuelve el problema. Basta pasar una isocuanta por él para obtener que P = 6.8 unidades.

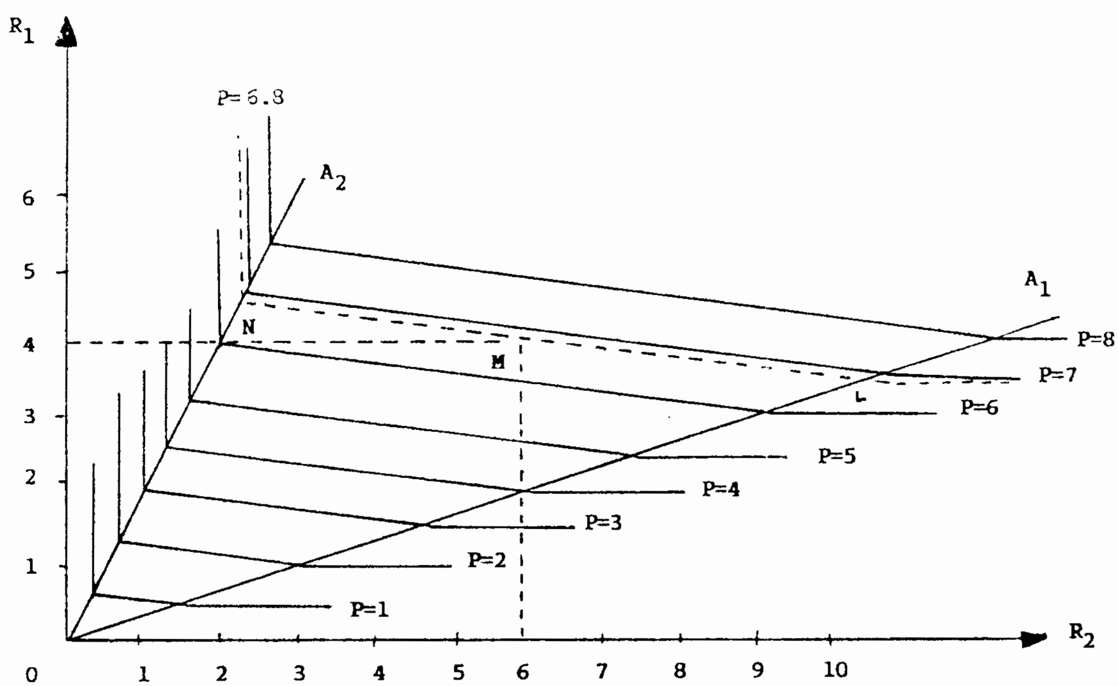


Figura 5.3

Las intensidades con que deben operarse las actividades están dadas por:

$$x_1 = \frac{M\ N}{L\ N}\ \frac{7}{2} = \frac{3.8}{8.3}\ \frac{7}{2} = 1.6$$

$$x_2 = \frac{L\ M}{L\ N}\ \frac{7}{3} = \frac{4.5}{8.3}\ \frac{7}{3} = 1.2$$

Usando los diferentes teoremas, el problema planteado puede expresarse como sigue:

Maximizar

$$z = 2\ x_1 + 3\ x_2 \qquad P$$

sujeta a las restricciones

$$x_1 + 2\ x_2 \leq 4 \qquad R_1$$

$$3\ x_1 + x_2 \leq 6 \qquad R_2$$

$$A_1 \qquad A_2$$

que es un modelo determinista, estático, lineal y de optimización que pertenece al dominio de la programación matemática. La solución del modelo anterior mediante la aplicación del método simplex se muestra en la tabla 5.1 y su correspondiente análisis de sensibilidad en la tabla 5.2.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 \leqq 4$$

$$3x_1 + x_2 \leqq 6$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

				2	3	0	0
		v.b	$\bar{b}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$
0	2	x_3	4	1	2*	1	0
0	6	x_4	6	3	1	0	1
		$z_j - c_j$	0	- 2	-3		
3	4	x_2	2	0.5	1	0.5	0
0	1.6	x_4	4	2.5*	0	-0.5	1
		$z_j - c_j$	6	-0.5	0	1.5	0
2		x_1	1.6	1	0	-0.2	0.4
3		x_2	1.2	0	1	0.6	-0.2
		$z_j - c_j$	6.8	0	0	1.4	0.2

$x_1 = 1.6 \quad x_2 = 1.2 \quad z = 6.8$

Tabla 5.1

	v.b	$\bar{b}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	
$2(1+t)$	x_1	1.6	1	0	-0.2	0.4	y_3
3	x_2	1.2	0	1	0.6	-0.2	y_4
	$z_j - c_j$	6.8	0	0	1.4	0.2	$\bar{b}$
			y_3	y_4	y_1	y_2	

Tabla 5.2 (continúa)

$$2(1+t)\ (-0.2) + 3(0.6) = -0.4 + 1.8 - 0.4t = 1.4 - 0.4t$$

$$2(1+t)\ (0.4) + 3(-0.2) = 0.8 + 0.8t - 0.6 = 0.2 - 0.8t$$

$$1.4 - 0.4t = 0, \quad t = \frac{1.4}{0.4} = 3.5$$

$$0.2 + 0.8t = 0, \quad t = \frac{0.2}{0.8} = -0.25$$

$$2(1+t) = 3, \quad t = 0.5$$

$$2(1+t) = 0, \quad t = -1$$

	$-\infty$	-1	-0.25	0	3.5	$+\infty$
1.4−0.4t	+	+	+	+	−	
0.2+0.8t	−	−	+	+	+	

$$-0.25 < t < 3.5$$

$$2(1-0.25) < C_1 < 2(1+3.5)$$

$$1.5 < C_1 < 9$$

Tabla 5.2 (continúa)

	v.b.	$\bar{b}$	y_1	y_2	y_3	y_4
4(1+t)	y_1	1.4	1	0	-0.2	0.6
6	y_2	0.2	0	1	0.4	-0.2
	$z_j - c_j$	6.8			1.6	1.2

$$4(1+t)(-0.2) + 6(0.4) = -0.8 + 2.4 - 0.8t = 1.6 - 0.8t$$

$$4(1+t)(0.6) + 6(-0.2) = 2.4 - 1.2 + 2.4t = 1.2 + 2.4t$$

$$1.6 - 0.8t = 0 \qquad t = 2$$

$$1.2 + 2.4t = 0 \qquad t = -0.5$$

$$4(1+t) = 6 \qquad t = 0.5$$

$$4(1+t) = 0 \qquad t = 1$$

	+ ∞	-1	-0.5	0	0.5	2	+ ∞
1.6 - 0.8t	+	+	+	+	+	–	
1.2 + 2.4t	–	–	+	+	+	+	

$$-0.5 < t < 2$$

$$4(1-0.5) < b_1 < 4(1+2)$$

$$2 < b_1 < 12$$

Tabla 5.2 (concluye)

Obsérvese que el análisis de actividades está ligado a conceptos del análisis marginal y conduce a problemas de programación matemática.

También debe observarse que la actividad es un concepto más específico que la función de producción en un Análisis Marginal. De hecho, una función de producción es una familia de actividades que usan los mismos factores y suministran los mismos productos. Si se comparan dos valores cualesquiera de la función de producción representan distintas intensidades de la misma actividad, o bien, representan actividades diferentes. La función de producción, es entonces, una herramienta para exhibir y comparar actividades diferentes aunque relacionadas. Lo que no presenta adecuadamente es la consecuencia de usar diferentes actividades en paralelo, y estas combinaciones de actividades son especialmente importantes.

5.6. Comparación entre los modelos de una industria (caja negra) para Análisis Marginal y para Análisis de Actividades. Esta comparación se muestra en la siguiente tabla.

Análisis Marginal	**Análisis de Actividades**
1. Los precios de los productos de la industria son fijos y conoci dos.	1. Los precios de los productos son fijos y conocidos
2. Los precios de los factores son fijos y conocidos.	2. Los precios de los factores son fijos y conocidos.
3. El objetivo de la industria es maximizar su ganancia sujeta a las restricciones técnicas im puestas por su función de pro - ducción.	3. El objetivo es maximizar su ganan cia sujeta a las restricciones - impuestas por la naturaleza de las actividades y los factores fijos disponibles.

Análisis Marginal	**Análisis de Actividades**
4. Dispone de un proceso de produc ción capaz de transformar un má ximo de **m** factores variables en **p** productos	4. Dispone de **p** actividades indepen dientes capaces de cambiar un má ximo de **m** factores variables en una unidad de producto, aunque puede fabricar más de un producto
5. Existe una función de producción que relaciona un conjunto de fac tores independientes con un con- junto de productos independien tes.	5. Cada actividad está caracterizada por un conjunto de cocientes de las cantidades de factores usadas para lograr una unidad de produc- to. Estos cocientes son constan tes e independientes de la inten- sidad con que se opere la activi- dad.
6. La función de producción es tal que la cantidad de producto fa bricado para uno dado, represen ta la cantidad máxima de tal pro ducto que puede fabricarse a par tir de cantidades de factores - previamente especificadas, cuan- do los restantes p-1 productos - permanecen fijos.	6. La intensidad con que use sus ac tividades se encuentra restrin- gida por los recursos disponi- bles. Los factores son perfecta mente divisibles, pero tienen una cota superior.
7. La naturaleza de la función de producción fue previamente deter minada mediante un conjunto de decisiones técnicas.	7. La naturaleza de las actividades ha sido predeterminada por un con junto de decisiones técnicas.
8. La función de producción está ca racterizada por productos margi- nales decrecientes para todas las combinaciones factor-factor y una tasa de transformaciones - entre productos crecientes para las combinaciones producto-pro - ducto.	8. Dos o más actividades pueden usar se simultáneamente y el producto logrado, es la suma de los produc tos que se obtendrían de usarlas separadamente.
9. Todos los factores y productos son perfectamente divisibles.	9. Todos los productos y factores son perfectamente divisibles.
10. Los parámetros que definen la función de ingresos totales, la función de producción y la ecua ción de costos totales no varían con el tiempo y no tienen fluc tuaciones aleatorias.	10. Ni los precios de los productos y factores ni los cocientes que definen las actividades cambian con el tiempo y no se permiten fluctuaciones aleatorias.

6. SELECCION DE PROYECTOS A PRESUPUESTO FIJO

Ahora se fijará la atención en el problema de definir el conjunto de proyectos que deben ser seleccionados cuando existe un presupuesto fijo y un conjunto también fijo de fondos para invertir en el futuro. Las decisiones de presupuestación pueden ser enfocadas, ya sea desde el punto de vista de definir qué proyectos a largo plazo deben ser seleccionados a partir de un cierto presupuesto, o bien, definir cuándo debe iniciarse un cierto proyecto. En cualquiera de los dos casos el elemento tiempo es importante en el problema.

Las técnicas y los modelos de presupuestación estarán acordes con la clasificación de los proyectos presentada en el primer capítulo. Debería agregarse además otro factor de clasificación: la incertidumbre. Así los modelos podrán ser deterministas o probabilistas según se considere la intervención del riesgo. En seguida se presentarán algunos modelos deterministas.

6.1 PROYECTOS INDEPENDIENTES, INDIVISIBLES Y DE UN SOLO PERIODO

Considérese un conjunto de proyectos $P_1, \ldots, P_n$ independientes e indivisibles que requieren inversiones $a_1, \ldots, a_n$ para producir, en un solo período, beneficios netos actuales $b_1, \ldots, b_n$. Considerando que existe una disponibilidad presupuestal C, se desea definir el subconjunto de proyectos que maximice la suma de beneficios netos invirtiendo sumas que no sobrepasen el presupuesto.

El modelo básico es muy simple:

$$\max Z = b_1 X_1 + \ldots + b_n X_n$$

s. a.

$$a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n \leq C$$

$$X_j = \begin{cases} 1 \text{ si se adopta el proyecto } P_j \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

La solución de este modelo es inmediata acudiendo a uno cualquiera de los métodos de la programación binaria.

6.2 PROYECTOS INDEPENDIENTES, INDIVISIBLES Y DE PERIODOS MULTIPLES

El modelo a aplicar es similar al anterior, sólo que ahora las inversiones y las disponibilidades presupuestales variarán de período en período. Considerando un horizonte de planeación T de manera que $t = 1, 2, \ldots, T$ resulta:

$$\max Z = b_1 X_1 + \ldots + b_n X_n$$

s.a.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq C_1$$

$$\ldots$$

$$a_{T1} X_1 + a_{T2} X_2 + \ldots + a_{Tn} X_n \leq C_T$$

$$X_j = 0 \text{ ó } 1$$

6.3 PROYECTOS INDEPENDIENTES, INDIVISIBLES, DE UN SOLO PERIODO Y CON VARIAS OPCIONES DE INVERSION

Sea el caso en que los proyectos $P_1, \ldots, P_n$ presenta cada uno de ellos m_j ($j=1, \ldots, n$) opciones de inversión, así en el proyecto P_j se dispone de las siguientes alternativas:

ALTERNATIVA	P_{j1}	P_{j2}	...	P_{jm_j}
COSTO	a_{j1}	a_{j2}		a_{jm_j}
BENEFICIO	b_{j1}	b_{j2}	...	b_{jm_j}

en estas condiciones el modelo resulta:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k_j=1}^{m_j} b_{jk_j} X_{jk_j} \right]$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k_j=1}^{m_j} a_{jk_j} X_{jk_j} \right] \leq C$$

en donde C es la disponibilidad presupuestal.

6.4 PROYECTOS INDEPENDIENTES, INDIVISIBLES, DE PERIODOS MULTIPLES Y CON VARIAS OPCIONES DE INVERSION

Sea el caso en que los proyectos $P_1, \ldots, P_n$ presentan cada uno de ellos m_j $(j = 1,\dots, n)$ opciones de inversión en el período t $(t = 1,\dots,T)$ en el horizonte de planeación.

En estas condiciones el modelo resulta:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k_j=1}^{m_j} b_{jk_j} X_{jk_j} \right]$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k_j=1}^{m_j} a_{jk_{jt}} X_{jk_j} \right] \leq C_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, T$$

en donde:

b_{jk_j} = beneficio reportado por la opción j del proyecto k_j

$a_{jk_{jt}}$ = inversión requerida por la opción j del proyecto k_j en el período t

C_t = disponibilidad presupuestal en el período t.

X_{jk_j} = variable de decisión igual a uno, si es seleccionada la opción j del proyecto k_j e igual a cero en caso contrario.

6.5 PROYECTOS DIVISIBLES INDEPENDIENTES DE PERIODOS MULTIPLES Y CON VARIAS ALTERNATIVAS DE INVERSION Y DE BENEFICIOS

Sean los proyectos $P_1,\dots,$ P_n cada uno de ellos presentan m_j $(j = 1,\dots, n)$ alternativas de inversión en cada uno de los períodos t $(t = 1, \ldots, T)$ del horizonte de planeación. Se supondrá que los proyectos son divisibles y por lo tanto, la altenativa i del proyecto P_j en el período t genera el beneficio b_{ijt} cuando se invierte en ella a_{ijt}.

En estas condiciones el modelo resulta:

$$\max Z = \sum_{t=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} b_{ijt} X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_j} a_{ijt} X_{ij} \leq d_t \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

$$X_{ij} = 0 \text{ ó } 1$$

en donde:

b_{ijt} = beneficio generado por la alternativa i del proyecto j en el período t.

a_{ijt} = inversión requerida por la alternativa i del proyecto j en el período t.

d_t = disponibilidad presupuestal en el período t.

x_{ij} = variable de decisión igual a uno si es seleccionada la opción i del proyecto j; igual a cero en caso contrario.

6.6 RESTRICCIONES ADICIONALES

Se considerarán las siguientes:

a) Cuando de un conjunto de proyectos o alternativas de inversión sólo se desea, a lo más, elegir uno de ellos, será necesario imponer la condición.

$$\sum_{j \in J} X_j \leq 1 \qquad (J = \text{conjunto de proyectos})$$

b) Cuando el proyecto P_r, sólo puede llevarse a cabo si el proyecto P_s es llevado a cabo, se deberá agregar la condición.

$$X_r \leq X_s$$

c) Si los proyectos P_r y P_s son mutuamente exclusivos, ésto es, la selección de uno impide la selección del otro, la condición será:

$$X_r + X_s \leq 1$$

d) Si el proyecto P sólo puede llevarse a cabo cuando alguno de los proyectos P_r o P_s son previamente realizados y estos últimos son mutuamente exclusivos, las condiciones que se deben agregar son:

$$X_r + X_s \leq 1$$

$$X \leq X_r + X_s$$

6.7 PROYECTOS INTERACTUANTES (Dependientes)

Reiter ofrece un modelo que permite tomar en cuenta la interacción entre proyectos. Para ellos, considera una matriz triangular **B** de valores presentes netos para n alternativas de inversión de manera que la aceptación del proyecto r suministra un beneficio neto b_{rr}, la aceptación del s suministra b_{ss}. y la aceptación de los dos proporciona además de b_{rr} y b_{ss}, el efecto secundario b_{rs}.

La matriz **B** es de la forma:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Puede ocurrir adicionalmente que al considerar aisladamente a los proyectos, las inversiones sean respectivamente a_r y a_s, y que al considerar la interacción, la inversión requerida sea $a_r + a_s + v_{rs}$. Al término v_{rs} se le suele llamar el **costo de coordinación** entre P_r y P_s. Los efectos pueden ser de orden superior al segundo cuando dejan de considerarse por pares los proyectos.

Se buscará entonces elaborar un programa con m de las n alternativas de manera que su valor sea el máximo. Evidentemente esto se puede lograr con una función objetivo de la forma:

$$\max Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_i X_j$$

en donde, las X_i, X_j podrán adquirir únicamente los valores cero o uno. Obsérvese que dicha función objetivo es una forma cuadrática.

Es claro que en un arreglo tabular como el mencionado se puede tomar en cuenta el que algunos de los proyectos sean mutuamente exclusivos, para ello basta considerar una magna (M) con signo negativo para los efectos secundarios de dichos proyectos, así si r y s encuentran en dicha situación $b_{rs} = - M$.

De hecho si todos los proyectos son mutuamente exclusivos la matriz será de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & -M & \dots & -M \\ 0 & b_{22} & \dots & -M \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Si el proyecto r es contingente al s, esta situación se puede manejar colocando en la matriz el costo de r en el lugar b_{rr} con signo negativo, mientras que b_{rs} representará la ventaja de adoptar r en adición a s, evidentemente figurará b_{ss} que es el beneficio neto de adoptar aisladamente el proyecto s.

Así por ejemplo, la matriz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_{rr} & -M & -b_{ru} & -b_{rv} \\ 0 & -b_{ss} & -b_{su} & -b_{sv} \\ 0 & 0 & -b_{uu} & -M \\ 0 & 0 & 0 & -b_{vv} \end{bmatrix}$$

representa una situación en que los proyectos u y v son mutuamente exclusivos como también lo son r y s, mientras que r o s son contingentes a la aceptación de u o v. Las cantidades $-b_{vr}$ y $-b_{ss}$ representan respectivamente al costo de los proyectos r y s; b_{uu} y b_{vv}

representan los beneficios de aceptar aisladamente u o v; b_{ru}, b_{su}, b_{rv} y b_{sv} representan los beneficios adicionales de seleccionar respectivamente r y u, s y u, r y v, s y v.

Para tomar en cuenta las disponibilidades presupuestales, basta adicionar las restricciones.

$$\sum_{j=1}^{n} C_{tj} \; X_j \leq C_t \quad ; \quad t = 1, \ldots, T$$

6.8 REINVERSION EN PROYECTOS DIVISIBLES

Cuando los beneficios son susceptibles de capitalizarse y, por tanto, de reinvertirse posteriormente en el mismo proyecto, el análisis para seleccionar las mejores inversiones de acuerdo con la disponibilidad presupuestal sigue lineamientos diferentes y conduce a resultados distintos.

Sea b_k el beneficio total producido por el proyecto P_k. Este beneficio será:

$$b_k = \sum_{t=0}^{T} \frac{S_{tk} - Y_{t+1,\,k}}{(1+r)^t}$$

en donde:

S_{tk} = rendimiento del proyecto P_k al final del período t.

Y_{tk} = inversión requerida por el proyecto P_k al principio del período t.

T = horizonte de planeación.

r = factor de descuento (usualmente costo del capital).

En estas condiciones el desembolso requerido por el proyecto P_k al principio del período t será $a_{tk} = Y_{tk} - S_{t-1, k}$.

De acuerdo con las expresiones anteriores, los datos sin actualizar se transforman antes de iniciar el análisis.

EJEMPLO 6.1 Sean los siguientes datos:

BENEFICIOS $\bar{b} = [3, 4, 5, 1]$

respectivamente para los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4; y

$$\text{COSTOS} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

para los cuatro proyectos y los tres períodos t_1, t_2, t_3 respectivamente y sean:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix}$$

las disponibilidades presupuestales en cada uno de los períodos.

Se tiene:

$$\max\ Z = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + X_4$$

s.a.

$$10X_1 + 15X_2 + 20X_3 + 5X_4 \leq 30 \qquad R_1$$

$$5X_1 + 10X_2 + 10X_3 + 10X_4 \leq 20 \qquad R_2$$

$$15X_1 + 15X_2 + 15X_3 + 5X_4 \leq 40 \qquad R_3$$

$$X_j = 0 \text{ ó } 1$$

dado lo simple del problema se empleará búsqueda directa según se muestra en la tabla siguiente.

$\bar{X}$	R_1	R_2	R_3	Z
(0,0,0,0)	sí	sí	sí	0
(0,0,0,1)	sí	sí	sí	1
(0,0,1,0)	sí	sí	sí	5
(0,0,1,1)	sí	sí	sí	6
(0,1,0,0)	sí	sí	sí	4
(0,1,0,1)	sí	sí	sí	5
(0,1,1,0)	no	sí	sí	-
(0,1,1,1)	no	no	sí	-
(1,0,0,0)	sí	sí	sí	3
(1,0,0,1)	sí	sí	sí	4
(1,0,1,0)	sí	sí	sí	8
(1,0,1,1)	no	no	sí	-
(1,1,0,0)	sí	sí	sí	7
(1,1,0,1)	sí	no	sí	-
(1,1,1,0)	no	no	sí	-
(1,1,1,1)	no	no	no	-

$$X_1 = X_3 = 1, \quad X_2 = X_4 = 0$$

luego conviene invertir en los proyectos P_1 y P_3.

EJEMPLO 6.2 Considérense los siguientes cuatro proyectos interactuantes entre sí.

PROYECTO	BENEFICIO	COSTO
P_1	10	30
P_2	25	40
P_3	5	20
P_4	15	35

Se tienen las siguientes condiciones:

a) P_1 y P_2 son mutuamente exclusivos.

b) P_3 y P_4 son mutuamente exclusivos.

c) La adopción de P_1 ó P_2 está condicionada a la adopción de P_3 ó P_4.

d) Si se adopta P_3 los efectos con P_1 se evalúan en 5 y con P_2 en 3.

e) Si se adopta P_4 los efectos con P_1 se evalúan en 4 y con P_2 en 3.

f) No se consideran gastos de coordinación y la disponibilidad presupuestal es de 100.

Se obtiene:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 25 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

el modelo resulta:

$$\max \quad Z = 10X_1^2 + 25X_2^2 + 5X_3^2 + 15X_4^2 + 5X_1 X_3 + 4X_1 X_4 + 3X_2 X_3 + 3X_2 X_4$$

s.a.

$$30X_1 + 40X_2 + 20X_3 + 35X_4 \leq 100 \qquad R_1$$

$$X_1 + X_2 \leq 1 \qquad R_2$$

$$X_3 + X_4 \leq 1 \qquad R_3$$

$$X_1 \leq X_3 + X_4 \qquad R_4$$

$$X_2 \leq X_3 + X_4 \qquad R_5$$

$$X_j = 0 \text{ ó } 1$$

La solución de este modelo conduce a que conviene seleccionar los proyectos P_2 y P_4 obteniéndose un beneficio de 43.

EJEMPLO 6.3 Sean los proyectos P_1, P_2, P_3 y P_4 en donde P_1 y P_2 son mutuamente exclusivos, así como P_3 y P_4; P_1 y P_2 dependen de la aceptación de P_3 ó P_4. Se consideran tres períodos cuyas disponibilidades presupuestales son respectivamente [15, 10, 10]. Además se tiene:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

el modelo resulta:

$$\max Z = 3X_1^2 + X_1X_3 + 2X_1X_4 + 2X_2^2 + 3X_2X_3 + X_2X_4 + 4X_3^2 + X_4^2$$

s.a.

$$\begin{array}{ll}
5X_1 + 2X_2 + 8X_3 + 5X_4 \leq 15 & R_1 \\
3X_1 + 6X_2 + 3X_3 + X_4 \leq 10 & R_2 \\
4X_1 + 8X_2 + 5X_3 + 3X_4 \leq 10 & R_3 \\
X_1 + X_2 \leq 1 & R_4 \\
X_3 + X_4 \leq 1 & R_5 \\
X_1 \leq X_3 + X_4 & R_6 \\
X_2 \leq X_3 + X_4 & R_7 \\
X_j = 0 \text{ ó } 1 &
\end{array}$$

La solución del modelo anterior conduce a que conviene seleccionar los proyectos P_1 y P_3 obteniéndose un beneficio de 8.

EJEMPLO 6.4 Considérense los proyectos divisibles P_1, P_2, P_3 y P_4 cuyos beneficios pueden reinvertirse; los datos sin descontar son:

	COSTOS	BENEFICIOS
P_1	(5, 6, 8)	[10, 4, 6]
P_2	(3, 5, 2)	[2, 7, 4]
P_3	(6, 4, 3)	[5, 8, 4]
P_4	(2, 5, 8)	[10, 2, 6]

¿Cuáles proyectos conviene seleccionar si el costo del capital es del 5% y las disponibilidades presupuestales son [12, 5 5]?

Se tiene:

$$b_1 = \frac{0-5}{1} + \frac{10-6}{1.05} + \frac{4-8}{1.15^2} + \frac{6-0}{1.15^3} = 0.33$$

$$b_2 = \frac{0-3}{1} + \frac{2-5}{1.05} + \frac{7-2}{1.10} + \frac{4-0}{1.16} = 2.15$$

$$b_3 = \frac{0-6}{1} + \frac{5-4}{1.05} + \frac{8-3}{1.10} + \frac{4-0}{1.16} = 2.95$$

$$b_4 = \frac{0-2}{1} + \frac{10-5}{1.05} + \frac{2-8}{1.10} + \frac{6-0}{1.16} = 2.48$$

$a_{11} = 5-0 = 5,\ a_{12} = 3-0 = 3,\ a_{13} = 6-0 = 6,\ a_{14} = 2-0 = 2$

$a_{21} = 6-10 = -4,\ a_{22} = 5-2 = 3,\ a_{23} = 4-5 = -1,\ a_{24} = 5-10 = 5$

$a_{31} = 8-4 = 4,\ a_{32} = 2-7 = -5,\ a_{33} = 3-8 = -5,\ a_{34} = 8-2 = 6$

Los desembolsos y beneficios transformados resultan:

	COSTOS	BENEFICIOS
P_1	(5, -4, 4)	0.33
P_2	(3, 3, -5)	2.15
P_3	(6, -1, -5)	2.95
P_4	(2, -5, 6)	2.48

y el modelo queda:

$$\max Z = 0.33X_1 + 2.15X_2 + 2.95X_3 + 2.48X_4$$

s.a.

$$5X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 2X_4 \leq 12$$
$$-4X_1 + 3X_2 - X_3 - 5X_4 \leq 5$$
$$4X_1 - 5X_2 - 5X_3 + 6X_4 \leq 5$$
$$X_j = 0 \text{ ó } 1$$

La solución de este modelo conduce a elegir todos los proyectos excepto el P_1, con un beneficio de 7.58.

6.9 SENSIBILIDAD DE LA DISPONIBILIDAD PRESUPUESTAL

Cuando el problema no consiste en determinar la inversión óptima para una disponibilidad presupuestal específica, sino definirlas para un intervalo entre A y B considerando subintervalos de amplitud señalada, entonces el camino es la Programación Dinámica.

Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal para proyectos independientes, indivisibles y de un solo período. Sea ξ la variable de estado que describe el presupuesto, sean x_j las variables de decisión para el proyecto p_j. Los beneficios obtenidos por invertir en los proyectos p_1, $p_2, \ldots,$ p_j se representarán por $\Lambda_j(\xi)$.

Se tiene:

$$\Lambda_0(\xi) = 0$$

$$\Lambda_j(\xi) = \max_{x_1,\dots x_j} \left\{ \Lambda_{j-1}(\xi),\ b_j + \Lambda_{j-1}(\xi - a_j x_j) \right\} \quad ;$$

$$\Lambda_{j-1}(\xi - a_j x_j) = -\infty \text{ si } \xi - a_j x_j < 0$$

Esto es, los beneficios iniciales, sin invertir en ningún proyecto, son nulos, cualquiera que sea el estado de la disponibilidad de capital.

Los beneficios producidos por los proyectos $p_1, \dots, p_j$ son los obtenidos por $p_1, \dots p_{j-1}$ si p_j no es seleccionado ($x_j=0$) o son los que se llevaban hasta p_{j-1} más los aportados por $p_j(x_j=1)$. Obsérvese que si hasta p_j se disponía de ξ, hasta j-1 se dispondrá de $(\xi - a_j)$.

Sensibilidad para la disponibilidad presupuestal en proyectos independientes, indivisibles y de períodos múltiples. La fórmula de recurrencia coincide con la antes usada sólo que ahora, se tendrá un vector de variables de estado.

$$\Lambda_0(\bar{\xi}) = 0$$

$$\Lambda_j(\bar{\xi}) = \max_{x_1,\dots,x_j} [\Lambda_{j-1}(\bar{\xi}),\ b_j + \Lambda_{j-1}(\bar{\xi} - \bar{a}_j\, x_j)]$$

$$\Lambda_{j-1}(\bar{\xi} - \bar{a}_j\, \bar{x}_j) = -\infty \text{ si cualquiera de los elementos } (\xi_t - a_{tj} x_j) < 0$$

La interpretación de la fórmula de recurrencia coincide con la antes expuesta.

Sensibilidad para la disponibilidad presupuestal en proyectos indivisibles de un solo período y con varias opciones de inversión. En este caso se tienen las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$\Lambda_0(\xi) = 0$$

$$\Lambda_{j+1}(\xi) = \max_{x_1,\ldots,\, x_{j+1}} \left\{ \left[\Lambda_j(\xi),\ \max_{m=1,\ldots,\, b_{j+1}} \left[b_{j+1} + \Lambda_j(\xi - A_{j+1,m}) \right] \right] \right\}$$

$$j=0,\ldots,\, N-1$$

en donde $\Lambda_j\ (\xi - A_{j+1,m}) = -\infty$ si $(\xi - A_{j+1,m}) < 0.$

Sensibilidad para la disponibilidad presupuestal en proyectos indivisibles de períodos múltiples y con varias alternativas de inversión. En este caso la fórmula de recurrencia se generaliza considerando vectorial a la variable de estado. La fórmula de recurrencia resultante es:

$$\Lambda_0(\bar{\xi}) = 0$$

$$\Lambda_{j+1}(\bar{\xi}) = \max_{x_1,\ldots,\, x_{j+1}} \left\{ \left[\Lambda_j(\bar{\xi}),\ \max_{m=1,\ldots,\, b_{j+1}} \left[b_{j+1} + \Lambda_j(\bar{\xi} - \bar{A}_{j+1,m}) \right] \right] \right\}$$

Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interactuantes indivisibles y de un solo período. Para este caso y razonando de la misma manera que en los anteriores, se obtiene como fórmula de recurrencia.

$$\begin{cases} \Lambda_0(\bar{\xi},\bar{\eta}_0\ (\bar{\xi})) = 0 \\ \Lambda_{j+1}(\bar{\xi},\bar{\eta}_{j+1}(\bar{\xi})) = \max\limits_{x_1,\ldots,\ x_j} \left[\Lambda_j(\bar{\xi},\bar{\eta}_j(\bar{\xi})),\ b^1_{j+1}+\Lambda_j(\bar{\xi}-A^1_{j+1},\ \bar{\eta}_{j+1}(\bar{\xi}-A^1_{j+1})) \right] \end{cases}$$

en donde

$$b^1_{j+1} = b_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} (d_{i,j+1} \mid \eta_{ij}\ (\xi - A^1_{j+1}\ ) = 1)$$

$$A^1_{j+1} = A_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} (V_{i,j+1} \mid \eta_{ij}\ (\xi - A^1_{j+1}\ ) = 1)$$

Como en los casos anteriores $\Lambda_j(\xi-A^1_{j+1},\ \eta_j(\xi-A^1_{j+1})) = -\infty$ si $-A^1_{j+1} < 0$

ξ = variable de estado de la disponibilidad presupuestal.

$\bar{\eta}_j$ = $(\eta_{004}\ (\xi),\ldots,\ \eta_{jj}\ (\xi))$ = vector de decisión.

$$\eta_{ij}(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ si para una disponibilidad } \xi \text{ existe interacción entre i y} \\ \quad j\ (i \leq j) \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

b_j = beneficio del proyecto P_j considerado aislado.

A_j = costo del proyecto P_j considerado aislado.

d_{ij} = beneficio de seleccionar conjuntamente los proyectos P_i y $P_j (i \leqq j)$

v_{ij} = costo de coordinación al seleccionar conjuntamente los proyectos P_i y P_j $(i \leqq j)$.

A_j^1 = es el costo programado de seleccionar el proyecto Pj más los efectos de la interacción de Pj con los proyectos elegidos de entre $P_1, \dots, P_{j-1}$

b_j^1 = es el valor neto de los beneficios actualizados aportados por seleccionar P_j y por la interacción con los proyectos seleccionados de entre $P_1, \dots, P_{j-1}$

<u>Sensibilidad de la disponibilidad presupuestal en proyectos interactuantes, indivisibles y de período múltiples.</u> Esta generalización implica simplemente el considerar a la variable de estado como vectorial, se obtiene así:

$$\begin{cases} \Lambda_0(\bar{\xi}, \bar{\eta}_0(\bar{\xi})) = 0 \\ \Lambda_{j+1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_{j+1}(\bar{\xi})) = \max\limits_{x_1, \dots, x_j} \left[\Lambda_j(\xi, \bar{\eta}_j(\bar{\xi})),\ b_{j+1}^1 + \Lambda_j(\bar{\xi} - \bar{A}_{j+1}^1,\ \bar{\eta}_j(\bar{\xi} - \bar{A}_{j+1}^1))\right] \end{cases}$$

en donde:

$$b^1_{j+1} = b_{j+1} + \sum_{i=1}^{n} (d_{i,\ j+1} \mid \eta_{ij}(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}) = 1)$$

$$\bar{A}^1_{j+1} = \bar{A}_{j+1} + \sum_{i=1}^{n} (\bar{V}_{i+1} \mid \eta_{ij}(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}) = 1)$$

Si cualquiera de los elementos de $(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1})$ es negativo, $\Lambda_j(\bar{\xi} - \bar{A}^1_{j+1}\ \bar{\eta}_j\ (\bar{\xi} - \bar{A}^{-1}_{j+1}))$ será igual a menos infinito. Obsérvese que ahora $\bar{A}_j$ y $\bar{V}_{ij}$ son vectores.

EJEMPLO 6.5 Estudiar para sensibilidad disponibilidades entre 0 y 50,000 considerando intervalos de 5,000 para los proyectos de la tabla siguiente.

PROYECTO P_j	P_1	P_2	P_3	P_4
BENEFICIO b_j	3,000	4,000	5,000	1,000
COSTO a_j	10,000	15,000	20,000	5,000

la solución se muestra en seguida:

NIVELES	INTERVALOS
1	0 a 5,000
2	5,000 a 10,000
3	10,000 a 15,000
4	15,000 a 20,000
5	20,000 a 25,000
6	25,000 a 30,000
7	30,000 a 35,000
8	35,000 a 40,000
9	40,000 a 45,000
10	45,000 a 50,000
11	50,000 ⟶

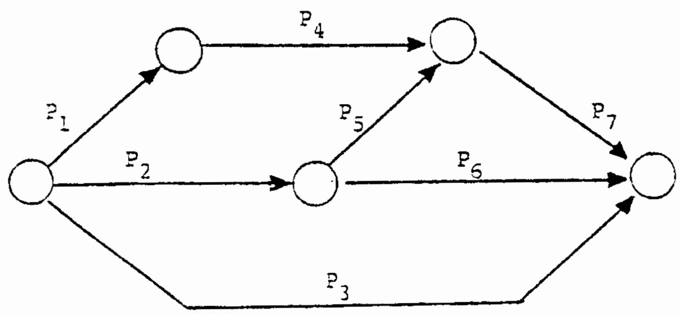
ξ	$\Lambda_0(\xi)$	$\xi-10$	$3+\Lambda_0$	$\Lambda_1(\xi)$	x_j	$\xi-15$	$4+\Lambda_1$	Λ_2	x_j	$\xi-20$	$5+\Lambda_2$	Λ_3	x_j	$\xi-5$	$1+\Lambda_3$	Λ_4	x_j	
1	0	-	-	0	0,0,0,0	-	-	0	0,0,0,0	-	-	0	0,0,0,0	-	-	0	0,0,0,0	
2	0	-	-	0	0,0,0,0	-	-	0	0,0,0,0	-	-	0	0,0,0,0	1	1	1	0,0,0,1	
3	0	1	3	3	1,0,0,0	-	3	3	1,0,0,0	-	-	3	1,0,0,0	2	1	3	1,0,0,0	
4	0	2	3	3	1,0,0,0	1	4	4	0,1,0,0	-	-	4	0,1,0,0	3	4	4	0,1,0,0	1,0,0,1
5	0	3	3	3	1,0,0,0	2	4	4	0,1,0,0	1	5	5	0,0,1,0	4	5	5	0,0,1,0	0,1,0,1
6	0	4	3	3	1,0,0,0	3	7	7	1,1,0,0	2	5	7	1,1,0,0	5	6	7	1,1,0,0	
7	0	5	3	3	1,0,0,0	4	7	7	1,1,0,0	3	8	8	1,1,0,0	6	8	8	1,0,1,0	1,1,0,1
8	0	6	3	3	1,0,0,0	5	7	7	1,1,0,0	4	9	9	1,0,1,0	7	9	9	0,1,1,0	1,0,1,1
9	0	7	3	3	1,0,0,0	6	7	7	1,1,0,0	5	9	9	0,1,1,0	8	10	10	0,1,1,1	
10	0	8	3	3	1,0,0,0	7	7	7	1,1,0,0	6	12	12	0,1,1,0	9	10	12	1,1,1,0	
11	0	9	3	3	1,0,0,0	8	7	7	1,1,0,0	7	12	12	1,1,1,0	10	13	13	1,1,1,1	

Consecuentemente los proyectos que conviene llevar a cabo para disponibilidades entre 0 y 50,000 considerando intervalos de 5000, son los que se muestran en seguida:

NIVEL	INTERVALO PRESUPUESTAL	PROYECTOS A INVERTIR
1	0 a 4,999	- -
2	5,000 a 9,999	(P_4)
3	10,000 a 14,999	(P_1)
4	15,000 a 19,999	(P_2) ó $(P_1$ y $P_4)$
5	20,000 a 24,999	(P_3) ó $(P_2$ y $P_4)$
6	25,000 a 29,999	$(P_1$ y $P_2)$
7	30,000 a 34,999	$(P_1$ y $P_3)$ ó $(P_1$, P_2 y $P_4)$
8	35,000 a 39,999	$(P_2$ y $P_3)$ ó $(P_1$, P_3 y $P_4)$
9	40,000 a 44,999	$(P_2$, P_3 y $P_4)$
10	45,000 a 49,999	$(P_1$, P_2 y $P_3)$
11	50,000 ⟶	$(P_1$ P_2, P_3 y $P_4)$

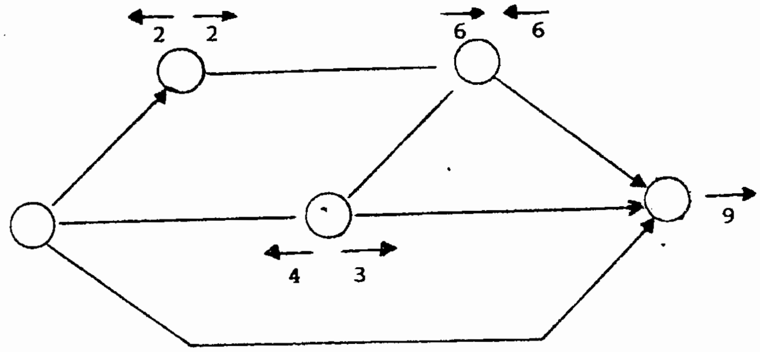
6.10 ASIGNACION DE RECURSOS A UNA RED DE PROYECTOS (o de actividades)

Se ilustrará con el siguiente ejemplo. Se dispone de cinco unidades monetarias diarias y se quiere terminar un conjunto de siete proyectos, cuya red de precedencias se muestra en seguida, en no más de doce períodos. Se desea definir cómo se deben programar los proyectos cuyas duraciones y requerimientos monetarios se consignan en la tabla siguiente:



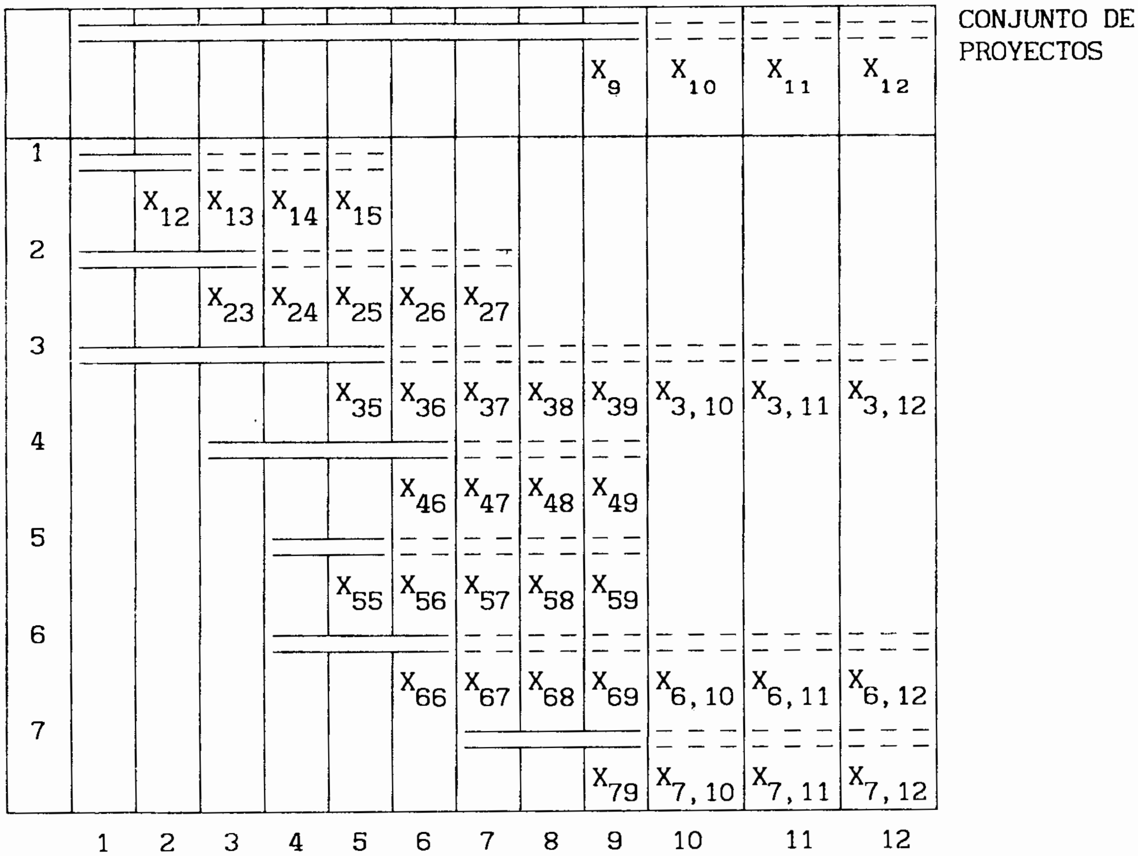
PROYECTO	DURACION	REQUERIMIENTO MONETARIO POR PERIODO
P_1	2	2
P_2	3	4
P_3	5	5
P_4	4	3
P_5	2	1
P_6	3	4
P_7	3	3

a) Se inicia determinando los tiempos más próximos y más lejanos de terminación de cada proyecto y el correspondiente diagrama de barras.



j PROYECTO	d_j DURACION	u_j TIEMPO LEJANO TERMINACION	u_j TIEMPO LEJANO TERMINACION
P_1	2	2	5
P_2	3	3	7
P_3	5	5	12
P_4	4	6	9
P_5	2	5	9
P_6	3	6	12
P_7	3	9	12

b) Se construye el diagrama de barras y variables del problema



$$X_{jt} = \begin{cases} 1 \text{ si el proyecto } j \text{ se termina en el período } t \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$X_{t} = \begin{cases} 1 \text{ si el proyecto se termina en el período } t \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

c) Restricciones de terminación de proyectos

$$\sum_{t=\ell_j}^{u_j} X_{jt} = 1 \qquad \text{para} \quad j = 1,\dots, 7$$

en donde:

ℓ_j = período lo más cercano posible en que puede terminarse el proyecto j

u_j = período lo más lejano posible en que se puede terminar el proyecto j

luego resulta:

$$X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 1 \qquad (6.1)$$

$$X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27} = 1 \qquad (6.2)$$

$$X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38} + X_{39} + X_{3,10} + X_{3,11}\ X_{3,12} = 1 \qquad (6.3)$$

$$X_{46} + X_{47} + X_{48} + X_{49} = 1 \qquad (6.4)$$

$$X_{55} + X_{56} + X_{57} + X_{58} + X_{59} = 1 \qquad (6.5)$$

$$X_{66} + X_{67} + X_{68} + X_{69} + X_{6,10} + X_{6,11}\ X_{6,12} = 1 \qquad (6.6)$$

$$X_{79} + X_{7,10} + X_{7,11}\ X_{7,12} = 1 \qquad (6.7)$$

d) Restricciones de terminación del conjunto de proyectos

$$X_t \leqq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{q=\ell_j}^{t-1} X_{jq} \right] \qquad (t = e,\ e + 1, \ldots,\ G)$$

en donde:

N = número de actividades

e = período lo más cercano posible en que puede completarse el conjunto de proyectos.

G = fecha especificada (en períodos) de terminación del conjunto de proyectos.

de esta manera se obtiene:

$$
\begin{aligned}
7X_9 \leqq\ & (X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15}) + (X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27}) + \\
& +(X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38}) + (X_{46} + X_{47} + X_{48}) + (X_{55} + X_{56} + \\
& + X_{57} + X_{58}) + (X_{66} + X_{67} + X_{68})
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

$$
\begin{aligned}
7X_{10} \leqq\ & (X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15}) + (X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27}) + \\
& +(X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38} + X_{39}) + (X_{46} + X_{47} + X_{48} + X_{49}) + \\
& + (X_{55} + X_{56} + X_{57} + X_{58} + X_{59}) + (X_{66} + X_{67} + X_{68} + X_{69}) + \\
& + X_{79}
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

$$
\begin{aligned}
7X_{11} \leqq\ & (X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15}) + (X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27}) + \\
& + (X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38} + X_{39} + X_{3,10}) + (X_{46} + X_{47} + X_{48} + \\
& + X_{49}) + (X_{55} + X_{56} + X_{57} + X_{58} + X_{59}) + (X_{66} + X_{67} + X_{68} + \\
& + X_{69} + X_{6,10}) + (X_{79} + X_{7,10})
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

$$
\begin{aligned}
7X_{12} \leqq\ & (X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15}) + (X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27}) + \\
& + (X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38} + X_{39} + X_{3,10} + X_{3,11}) + (X_{46} + \\
& +X_{47} + X_{48} + X_{49}) + (X_{55} + X_{56} + X_{57} + X_{58} + X_{59}) + (X_{66} + \\
& + X_{67} + X_{68} + X_{69} + X_{6,10} + X_{6,11}) + (X_{79} + X_{7,10} + X_{7,11})
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

e) Restricciones de secuenciación

$$\sum_{t=\ell_m}^{u_m} tX_{mt} + d_n \leq \sum_{t=\ell_n}^{u_n} tX_{nt} \qquad \text{cuando m antes de n}$$

en donde:

d_j = duración en períodos del proyecto j

luego resulta

$$2X_{12} + 3X_{13} + 4X_{14} + 5X_{15} + 4 \leq 6X_{46}\ 7X_{47} + 8X_{48} + 9X_{49} \qquad (6.12)$$

$$3X_{23} + 4X_{24} + 5X_{25} + 6X_{26} + 7X_{27} + 2 \leq 5X_{55} + 6X_{56}\ 7X_{57} + + 8X_{58} + 9X_{59} \qquad (6.13)$$

$$3X_{23} + 4X_{24}\ 5X_{25} + 6X_{26} + 7X_{27} + 3 \leq 6X_{66} + 7X_{67}\ 8X_{68} + 9X_{69} + + 10X_{6,10} + 11X_{6,11} + 12X_{6,12} \qquad (6.14)$$

$$6X_{46} + 7X_{47} + 8X_{48} + 9X_{49} + 3 \leq 9X_{79} + 10X_{7,10} + 11X_{7,11} + + 12X_{7,12} \qquad (6.15)$$

$$5X_{55} + 6X_{56} + 7X_{57} + 8X_{58} + 9X_{59} + 3 \leq 9X_{79} + 10X_{7,10} + 11X_{7,11} + + 12X_{7,12} \qquad (6.16)$$

f) Restricciones de recursos

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{q=t}^{t+d_j-1} r_{jk} \, X_{jq} \leq R_{kt} \qquad \begin{matrix}(t=1,\ldots,\ G) \\ (k=1,\ldots,\ K)\end{matrix}$$

en donde:

r_{jk} = cantidad del recurso k requerido por el proyecto j

R_{kt} = cantidad del recurso k disponible en el período t

k = número (nombre) del recurso, k=1,..., K

K = total de recursos (tipos)

de esta manera se obtiene:

$$t=1, \qquad 2X_{12} + 4X_{23} + 5X_{35} \leq 5 \tag{6.17}$$

$$t=2, \qquad 2(X_{12} + X_{13}) + 4(X_{23} + X_{24}) + 5(X_{35} + X_{36}) \leq 5 \tag{6.18}$$

$$t=3, \qquad 2(X_{13} + X_{14}) + 4(X_{23} + X_{24} + X_{25}) + 5(X_{35} + X_{36} + X_{37}) + 3X_{46} \leq 5 \tag{6.19}$$

$$t=4, \qquad 2(X_{14} + X_{15}) + 4(X_{24} + X_{25} + X_{26}) + 5(X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38}) + 3(X_{46} + X_{47}) + 1X_{55} + 4X_{66} \leq 5 \tag{6.20}$$

t=5, $$2X_{15} + 4(X_{25} + X_{26} + X_{27}) + 5(X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38} + X_{39}) + 3(X_{46} + X_{47} + X_{48}) + 1(X_{55} + X_{56}) + 4(X_{66} + X_{67}) \leqq 5 \tag{6.21}$$

t=6, $$4(X_{26} + X_{27}) + 5(X_{36} + X_{37} + X_{38} + X_{39} + X_{3,10}) + 3(X_{46} + X_{47} + X_{48} + X_{49}) + 1(X_{56} + X_{57}) + 4(X_{66} + X_{67} + X_{68}) \leqq 5 \tag{6.22}$$

t=7, $$4X_{27} + 5(X_{37} + X_{38} + X_{39} + X_{3,10} + X_{3,11}) + 3(X_{47} + X_{48} + X_{49}) + 1(X_{57} + X_{58}) + 4(X_{67} + X_{68} + X_{69}) + 3\,X_{79} \leqq 5 \tag{6.23}$$

t=8, $$5(X_{38} + X_{39} + X_{3,10} + X_{3,11} + X_{3,12}) + 3(X_{48} + X_{49}) + 1(X_{58} + X_{59}) + 4(X_{68} + X_{69} + X_{6,10}) + 3(X_{79} + X_{7,10}) \leqq 5 \tag{6.24}$$

t=9, $$5(X_{39} + X_{3,10} + X_{3,11} + X_{3,12}) + 3X_{49} + X_{59} + 4(X_{69} + X_{6,10} + X_{6,11}) + 3(X_{79} + X_{7,10} + X_{7,11}) \leqq 5 \tag{6.25}$$

t=10, $$5(X_{3,10} + X_{3,11} + X_{3,12}) + 4(X_{6,10} + X_{6,11} + X_{6,12}) + 3(X_{7,10} + X_{7,11} + X_{7,12}) \leqq 5 \tag{6.26}$$

t=11, $$5(X_{3,11} + X_{3,12}) + 4(X_{6,11} + X_{6,12}) + 3(X_{7,11} + X_{7,12}) + \leqq 5 \tag{6.27}$$

$$t=12, \qquad 5X_{3,12} + 4X_{6,12} + 3X_{7,12} \leq 5 \qquad (6.28)$$

g) Funciones objetivo.

i) Minimizar la duración total del conjunto de proyectos.

$$\max Z = \sum_{t=e}^{G} X_t - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=\ell_j}^{u_j} (tX_{jt}) \; ;$$

$$M > \sum_{j=1}^{N} u_j = 66$$

$$\max Z = \sum_{t=9}^{12} X_t - \frac{1}{70} \left[\sum_{t=2}^{5} tX_{1t} + \sum_{t=3}^{7} tX_{2t} + \sum_{t=5}^{12} tX_{3t} + \right.$$

$$\left. \sum_{t=6}^{9} tX_{4t} + \sum_{t=5}^{9} tX_{5t} + \sum_{t=6}^{12} tX_{6t} + \sum_{t=9}^{12} tX_{7t} \right]$$

$$\begin{aligned} \max Z = {} & 70X_9 + 70X_{10} + 70X_{11} + 70X_{12} - 2X_{12} - 3X_{13} - 4X_{14} - 5X_{15} \\ & - 3X_{23} - 4X_{24} - 5X_{25} - 6X_{26} - 7X_{27} - 5X_{35} - 6X_{36} - 7X_{37} \\ & - 8X_{38} - 9X_{39} - 10X_{3,10} - 11X_{3,11} - 12X_{3,12} - 6X_{46} \\ & - 7X_{47} - 8X_{48} - 9X_{49} - 5X_{55} - 6X_{56} - 7X_{57} - 8X_{58} - 9X_{59} \\ & - 6X_{66} - 7X_{67} - 8X_{68} - 9X_{69} - 10X_{6,10} - 11X_{6,11} \\ & - 12X_{6,12} - 9X_{79} - 10X_{7,10} - 11X_{7,11} - 12X_{7,12} \end{aligned} \qquad (6.29)$$

ii) Minimizar las multas por retardos.

Se supone que hay retardo cuando se termina entre las fecha deseada y la impuesta, entonces:

$$\min Z = \sum_{t=g+1}^{G} P_j X_t$$

en donde:

g = fecha (en períodos) de terminación deseada para el conjunto de proyectos.

P_j = penalización por terminar en el período j

Para el caso en estudio considerando una penalización de 100 por período, queda:

$$\min Z = 100X_{10} + 200X_{11} + 300X_{12} \qquad (6.30)$$

Luego el problema consiste en optimizar la función objetivo (6.29) ó la (6.30) sujeta a las restricciones (6.1) a (6.28). Obsérvese que se tienen 41 variables y 28 restricciones por lo que se vuelve indispensable la utilización de los modernos equipos de cómputo y de la paquetería de optimización disponible.

6.11 OPTIMIZACION DE PROGRAMAS

Formulación del problema. Supóngase que cada una de los períodos (i, j) representados en un diagrama de flechas tiene asociada una gráfica de costos como la mostrada en la figura 6.1. En esta figura se distinguen las duraciones normal D_{ij} y la límite d_{ij} así como sus costos correspondientes.

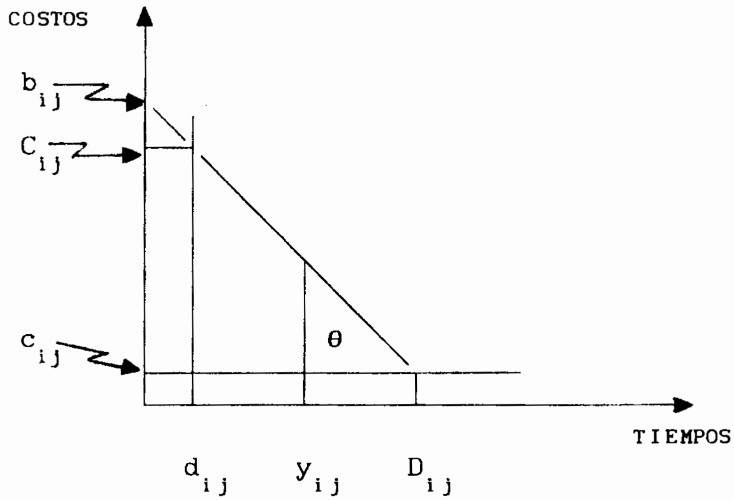


Figura 6.1

De esta manera el costo de realizar el proyecto (i, j) en un lapso y_{ij} está dado por:

$$b_{ij} - a_{ij}\, y_{ij} \qquad (6.31)$$

en donde b_{ij} se muestra en la figura 6.1 y:

$$a_{ij} = \frac{C_{ij} - c_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} = \tan \theta$$

$$0 \leq d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij} \qquad (6.32)$$

El problema es determinar y_{ij} para cada proyecto de manera que el conjunto (red) de proyectos se complete en un tiempo λ a costo mínimo. Esto es minimizar a:

$$\sum_{i,j} (b_{ij} - a_{ij}\, y_{ij}) \tag{6.33}$$

o bien maximizar a:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, y_{ij} \tag{6.34}$$

Por otra parte si t_i es el tiempo de ocurrencia del evento i se deberá tener:

$$y_{ij} + t_i - t_j \leq 0 \tag{6.35}$$

y si n es el evento terminal:

$$- t_i + t_n \leq \lambda \tag{6.36}$$

La desigualdad (6.32) puede escribirse:

$$y_{ij} \leq D_{ij} \tag{6.37}$$

$$- y_{ij} \leq -d_{ij} \tag{6.38}$$

Se ha formulado un problema de programación lineal cuya función objetivo es (6.34) y las restricciones son las dadas de (6.35) a (6.38). Existirá solución factible si alguna de las cadenas que van de la iniciación a la terminación del conjunto de proyectos tiene como duración λ.

Considérese ahora el dual del problema planteado. Por conveniencia multiplíquese (6.35) por f_{ij}, (6.36) por ν, a (6.37) por g_{ij} y a (6.38) por h_{ij}.

El problema dual expresa como sigue:

Minimizar:

$$\nu\lambda + \sum_{i,j} D_{ij}\, g_{ij} - \sum_{i,j} d_{ij}\, h_{ij} \tag{6.39}$$

sujeto a las restricciones:

$$f_{ij} + g_{ij} - h_{ij} \geqq a_{ij} \tag{6.40}$$

$$\sum_{i,j} [f_{ij} - f_{ji}] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ -\nu & \text{si } i = n \end{cases} \tag{6.41}$$

Obsérvese que (6.41) es una igualdad puesto que en el primal las variables no están sujetas a restricción.

Puesto que en el dual todas las variables son no negativas se sigue que g_{ij} ó h_{ij} vale cero y (6.40) resulta:

$$g_{ij} = \max [\ o,\ a_{ij} - f_{ij}]$$
$$h_{ij} = \max [\ o,\ f_{ij} - a_{ij}] \qquad (6.42)$$

La función por minimizar se expresará:

$$\lambda\ \nu + \sum_{i,j} D_{ij} \max [\ o,\ a_{ij} - f_{ij}]$$
$$\lambda\ \nu - \sum_{i,j} d_{ij} \max [\ o,\ f_{ij} - a_{ij}] \qquad (6.43)$$

f_{ij} puede sustituirse por la suma de dos variables no negativas:

$$f_{ij} = f_{ij1} + f_{ij2} \qquad (6.44)$$

con las restricciones de capacidad:

$$f_{ij1} \leqq a_{ij}$$
$$f_{ij2} < \infty \qquad (6.45)$$

En (6.43) f_{ij1} tiene el coeficiente $-D_{ij}$ y f_{ij2} tiene el coeficiente $-d_{ij}$. Si se define:

$$a_{ijk} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } k = 1 \\ \infty & \text{si } k = 2 \end{cases} \tag{6.46}$$

$$d_{ijk} = \begin{cases} D_{ij} & \text{si } k = 1 \\ d_{ij} & \text{si } k = 2 \end{cases} \tag{6.47}$$

el nuevo dual será como sigue:

Minimizar:

$$\lambda \nu - \sum_{i,j,k} d_{ijk} \; f_{ijk} \tag{6.48}$$

sujeta a las restricciones:

$$\sum_{j,k} [f_{ijk} - f_{jik}] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1, n \\ -\nu & \text{si } i = n \end{cases} \tag{6.49}$$

$$0 \leqq f_{ijk} \leqq d_{ijk} \tag{6.50}$$

Considérese ahora que la red de proyectos contiene dos flechas por cada proyecto y que el diagrama así formado es una red de transporte R cuyas capacidades para cada arco son las d_{ijk}.

El problema puede resolverse determinando el flujo f_{ijk} en cada arco de la red R que minimiza a (6.48) y satisface a (6.49) y (6.50). La ecuación (6.49) especifica que con excepción de la fuente y del sumidero, el flujo que llega a un vértice es igual al que sale. La ecuación (6.50) especifica que el flujo en cualquier arco debe ser menor o igual que su capacidad. Finalmente, la ecuación (6.41) especifica que el flujo que llega al sumidero es ν.

De esta manera el problema puede resolverse aplicando el algoritmo de Ford y Fulkerson a la red de transporte R ya mencionada.

El diagrama de flujo de este algoritmo se muestra en la figura 6.2 .

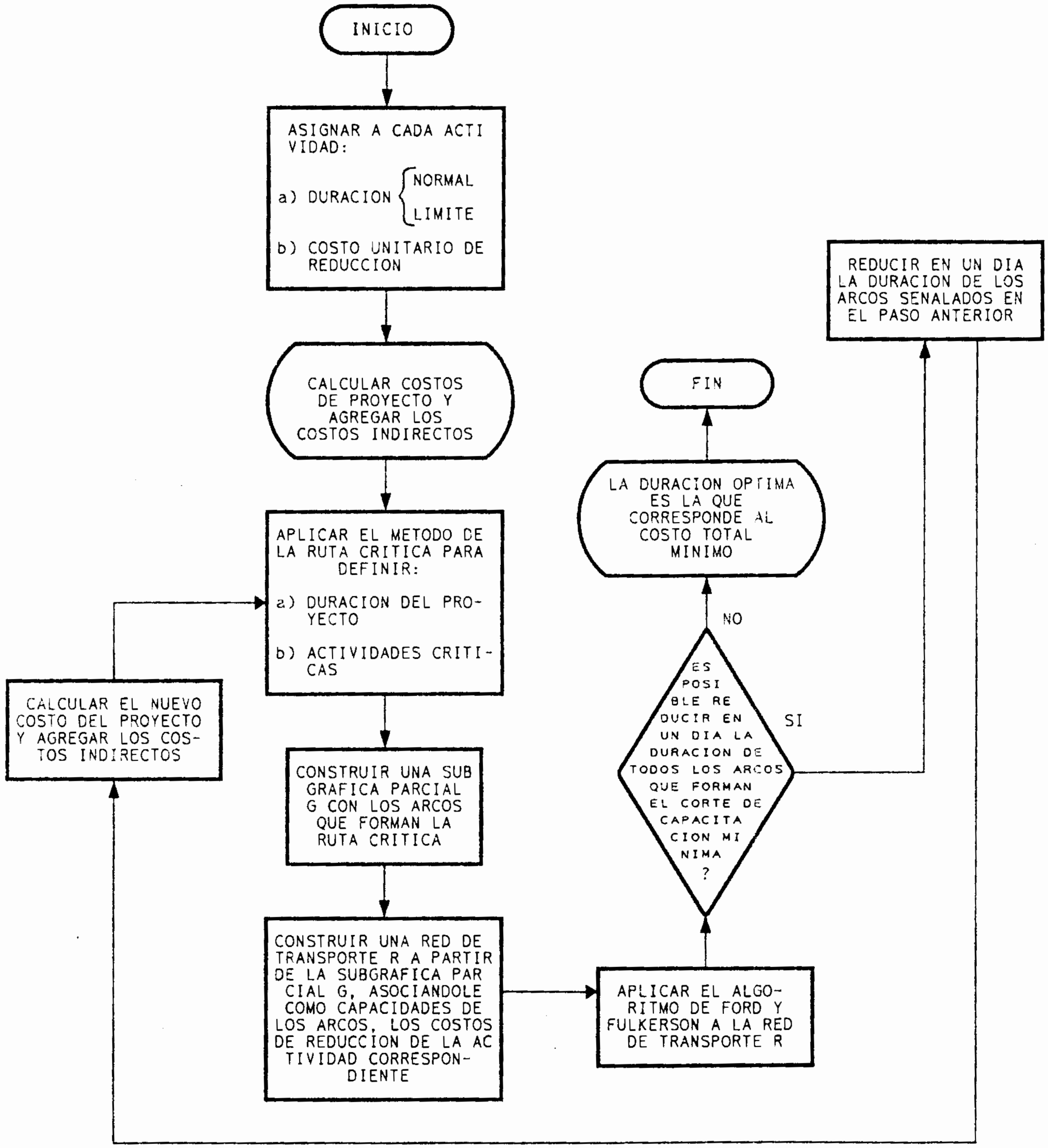

INICIO
ASIGNAR A CADA ACTI VIDAD:
a) DURACION NORMAL LIMITE
b) COSTO UNITARIO DE REDUCCION
CALCULAR COSTOS DE PROYECTO Y AGREGAR LOS COSTOS INDIRECTOS
APLICAR EL METODO DE LA RUTA CRITICA PARA DEFINIR:
a) DURACION DEL PRO-YECTO
b) ACTIVIDADES CRITI-CAS
CONSTRUIR UNA SUB GRAFICA PARCIAL G CON LOS ARCOS QUE FORMAN LA RUTA CRITICA
CONSTRUIR UNA RED DE TRANSPORTE R A PARTIR DE LA SUBGRAFICA PAR CIAL G, ASOCIANDOLE COMO CAPACIDADES DE LOS ARCOS, LOS COSTOS DE REDUCCION DE LA AC TIVIDAD CORRESPON-DIENTE
APLICAR EL ALGO-RITMO DE FORD Y FULKERSON A LA RED DE TRANSPORTE R
ES POSI BLE RE DUCIR EN UN DIA LA DURACION DE TODOS LOS ARCOS QUE FORMAN EL CORTE DE CAPACITA CION MI NIMA ?
NO
SI
LA DURACION OPTIMA ES LA QUE CORRESPONDE AL COSTO TOTAL MINIMO
FIN
REDUCIR EN UN DIA LA DURACION DE LOS ARCOS SENALADOS EN EL PASO ANTERIOR
CALCULAR EL NUEVO COSTO DEL PROYECTO Y AGREGAR LOS COS-TOS INDIRECTOS

Figura 6.2

6.12 MAXIMIZACION DEL VALOR PRESENTE EN REDES DE PROYECTOS

Se tiene una red que consta de eventos (nodos) y proyectos (arcos). Se conoce la duración (d_k) de cada proyecto, el tiempo (T_i) y la cantidad neta de dinero (S_i) asociados a cada evento.

Las cantidades netas de dinero están formadas por la suma de costos e ingresos, pudiendo por tanto tener cualquier signo. Con una tasa de interés dada (r) existe un valor en el momento presente que es equivalente a cada una de esas cantidades. La suma de todos esos valores constituye el valor presente de la red, el cual cambiará si varían los tiempos T_i. Se desea maximizar dicho valor presente.

Se utilizará el método de A.H. Russell, basado en la propiedad que las variables duales son ortogonales a las de holgura en el primal y en el siguiente:

> **Teorema. Las soluciones de los problemas de flujo en redes convergen en un número finito de pasos a la solución óptima (o por lo menos a un óptimo local) del problema de maximizar el valor presente.**

Usando la forma exponencial para obtener el valor presente VP (se podría usar la forma discreta) se tiene:

$$\max VP = \sum_{i-1}^{n} S_i e^{-rT_i}$$

s. a.

$$T_j(k) - T_i(k) \geq d_k, \qquad k = 1, \ldots, m$$

donde:

VP = valor presente del dinero en toda la red.

m = número de proyectos

n = número de eventos

$T_j(k)$ = tiempo asociado con el nudo terminal del arco k

$T_i(k)$ = tiempo asociado con el nudo inicial del arco k

Para evitar esta función objetivo no lineal, se parte de una solución factible inicial F'_i y se obtiene el programa lineal aproximado:

$$\max VP = - \sum_{i=2}^{n} rF'_i \ T_i$$

s. a.

$$T_j(k) - T_i(k) \geqq d_k, \qquad k = 1, \ldots, m$$

donde $F'_i = S_i e^{-rT'_i}$

Matricialmente el problema queda:

$$\min VP = rF'T$$

s. a.

$$\Lambda \bar{T} \leqq - \bar{d}$$

el problema dual es por tanto:

$$\max z = \bar{d} \ \bar{u}$$

s. a.

$$\Lambda \bar{u} = - r \bar{F}'$$

$$\bar{u} \geqq 0$$

en donde:

$\bar{T}$ = vector de tiempo asociado a cada evento

$\bar{d}$ = vector de duración de los proyectos

$\bar{\Lambda}$ = Matriz de incidencia

$\bar{\Lambda}'$ = Transpuesta de $\bar{\Lambda}$

Las variables duales u_k pueden considerarse como flujos en la red. Su cálculo se conseguirá con el algoritmo de Ford y Fulkerson modificado por Russell que se describe enseguida:

1. Cuando la cantidad de dinero en un evento es positiva considérese como una fuente, si es negativa considérese como sumidero. Una el evento final con el inicial asignándole una duración negativa.

2. Comience con una solución factible inicial T'_i

3. Calcule para cada actividad $a_k = T'_j(k) - T'_i(k) - d_k$

4. Obtenga $-F'_i = -S_i e^{-rT'i}$; $i = 2, \ldots, n$

5. $VP = \sum_{i=2}^{n} F'_i$; $F'_1 = VP$

6. Distribuya los $-F'_i$ en flujos u_k observando las leyes de conservación de Kirchoff.

7. Si a_k y u_k no son simultáneamente mayores que cero, el flujo es óptimo. Si por el contrario en algún arco S, a_2 y u_2 son mayores que cero continúe con:

8. Etiquete el nudo i(s) con (j(S) -, u_2).

9. Intente completar un circuito al etiquetar terminando en j(S).

Si i(k) está etiquetado y $a_k = 0$ etiquete j(k) con (i(k)) +, E(i(k)).

Si j(k) está etiquetado y $u_k > 0$ etiquete i(k) con [j(k)-, min $(u_k$, E(j(k))] donde E(m) es el cambio de flujo máximo que puede lograrse en la trayectoria dada por las etiquetas.

10. ¿El nudo j(S) está etiquetado?

11. Encuentre $a^* = \min \{a_k | k \in$ conjunto i(k) etiquetado y j(k) no$\}$

Si el nudo 1 está etiquetado reste a* de los tiempos de todos los nudos sin etiqueta. Si el nudo 1 no tiene etiqueta sume a* en cada tiempo de los nudos etiquetados. Regrese a 3.

En caso afirmativo:

12. En el circuito, si el nudo h tiene en la etiqueta i(k) +, al flujo en el arco (i(k), h) súmesele E(j(S)); si el mismo nudo tiene en la etiqueta j(k)-, al flujo en el arco (h, j(k)) réstele E(j(S)). Regrese a 7.

Multiplicando el flujo por la tasa de interés r se tendrá el costo marginal de duración.

El diagrama de flujo de este algoritmo se muestra en la figura 6.3

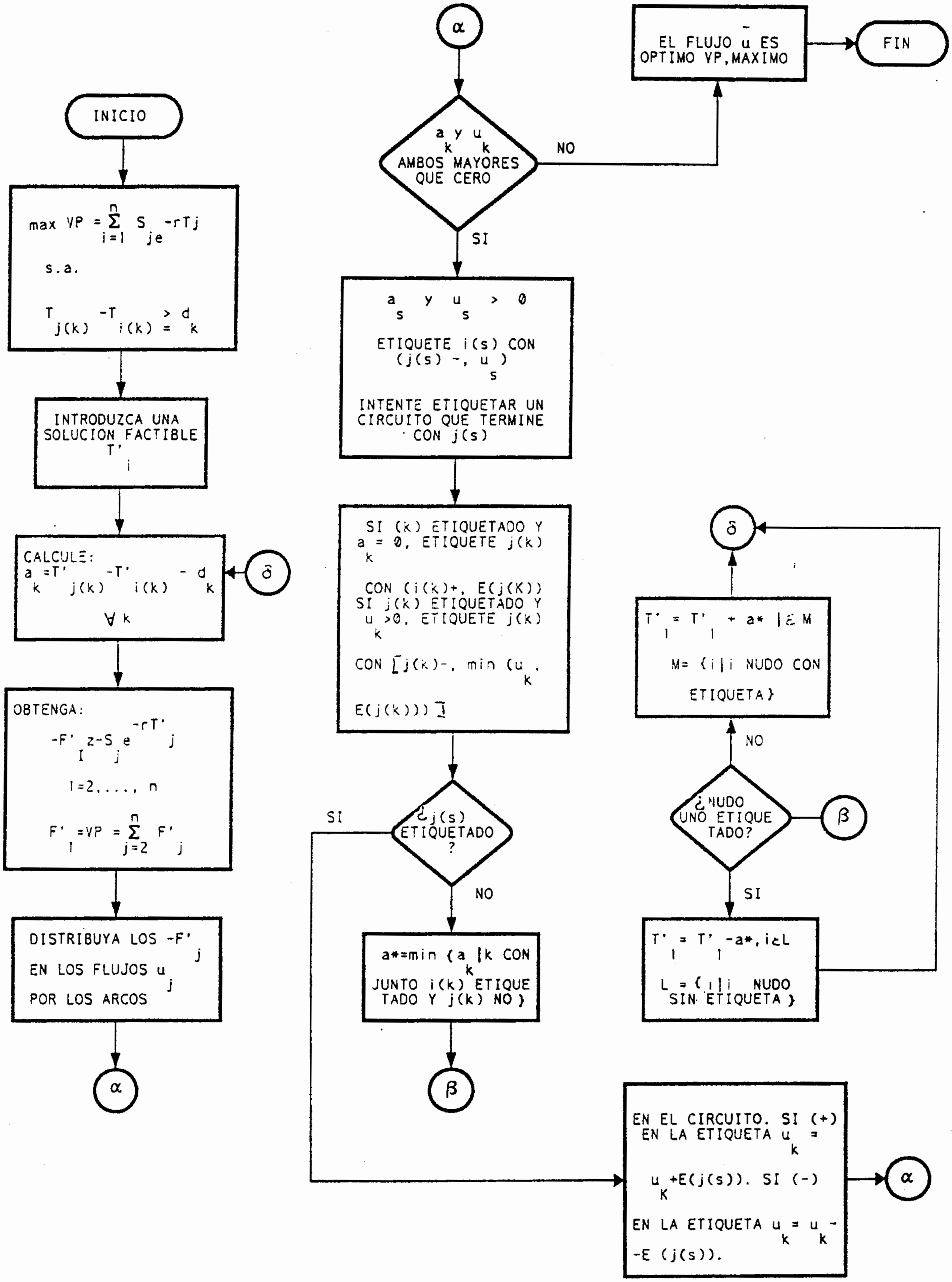

INICIO
max VP = Σ(i=1..n) S_je^(-rTj)
s.a.
T_j(k) - T_i(k) ≥ d_k
INTRODUZCA UNA SOLUCION FACTIBLE T'_i
CALCULE: a_k = T'_j(k) - T'_i(k) - d_k ∀ k
OBTENGA: -F'_I z - S_j e^(-rT'_j)
I=2, . . . , n
F'_1 = VP = Σ(j=2..n) F'_j
DISTRIBUYA LOS -F'_j EN LOS FLUJOS u_j POR LOS ARCOS
α
a_k y u_k AMBOS MAYORES QUE CERO
NO
SI
EL FLUJO u ES OPTIMO VP, MAXIMO
FIN
a_s y u_s > 0
ETIQUETE i(s) CON (j(s) -, u_s)
INTENTE ETIQUETAR UN CIRCUITO QUE TERMINE CON j(s)
SI (k) ETIQUETADO Y a_k = 0, ETIQUETE j(k) CON (i(k)+, E(j(K)) SI j(k) ETIQUETADO Y u_k >0, ETIQUETE j(k) CON [j(k)-, min (u_k, E(j(k)))]
¿j(s) ETIQUETADO ?
SI
NO
a*=min {a_k | k CON JUNTO i(k) ETIQUETADO Y j(k) NO}
β
δ
T'_1 = T'_1 + a*, I ∈ M
M= {i | i NUDO CON ETIQUETA}
NO
¿NUDO UNO ETIQUETADO?
β
SI
T'_1 = T'_1 - a*, i ∈ L
L = {i | i NUDO SIN ETIQUETA}
EN EL CIRCUITO. SI (+) EN LA ETIQUETA u_k = u_k + E(j(s)). SI (-) EN LA ETIQUETA u_k = u_k - E (j(s)).
α

Figura 6.3

EJEMPLO 6.6. Se tiene la red mostrada en la figura 6.4 que consta de cinco eventos y siete proyectos. En dicha red se consigna la duración de cada proyecto.

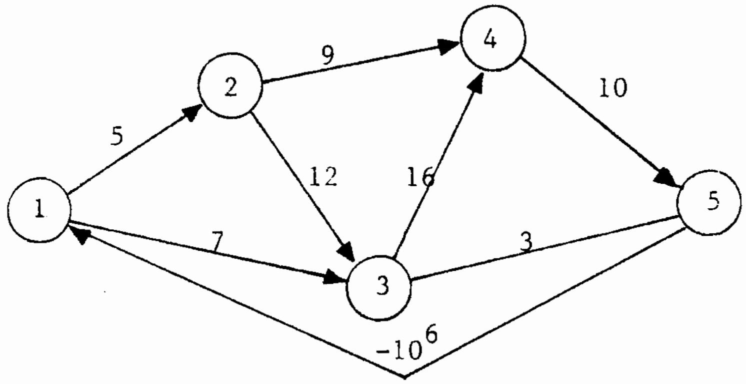


Figura 6.4

En cada evento se tienen los siguientes ingresos o costos.

EVENTO	CANTIDAD NETA
1	- 50
2	- 100
3	+ 400
4	- 200
5	300

Se desean encontrar los tiempos asociados con cada evento que maximicen el valor presente, considerando una tasa de interés r = 1%.

Se comienza con la siguiente solución factible calculándose a_k y $-F'_i$ según los pasos 3, 4 y 5 del algoritmo.

NUDOS	SOLUCION INICIAL T_i	$-F'_j$
1	0	288
2	7	93
3	19	-331
4	35	141
5	45	-191

ARCO	NUDOS	a_k
1	1-2	2
2	1-3	12
3	2-3	0
4	2-4	19
5	3-4	0
6	3-5	23
7	4-5	0
8	5-1	10^6-45

De acuerdo con el paso 6 del algoritmo se efectúa la distribución de flujos en la red que se muestra en la figura 6.5.

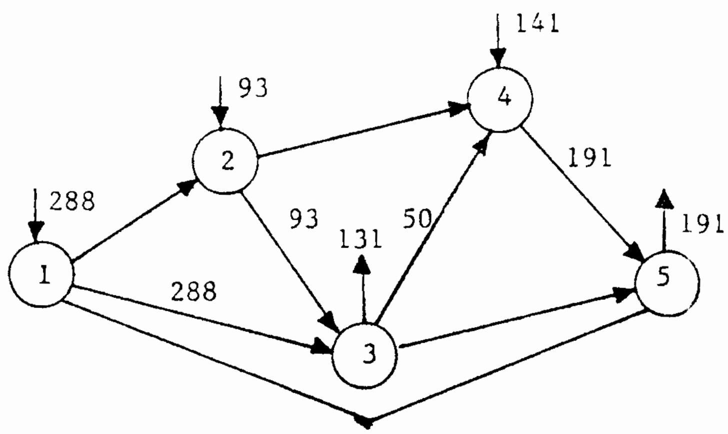


Figura 6.5

En el arco 1-3, a_2 = 12 y u_2 = 288, ambos mayores que cero, luego el valor presente no es el máximo debiéndose etiquetar el nudo 1, según indica el paso 8, con (3-, 288).

Considerando i(k) = 1 se etiquetarían los nudos 2 ó 3 si a_1 ó a_2 fueran iguales a cero. Si j(k) = 1 se pondría la etiqueta en 5, si u_2 fuera mayor que cero.

En el paso 10 se pregunta si j(s) = 3 se logró etiquetar. Puesto que no fue posible, se continúa con el paso 11.

$$a^* = \min (2,\ 12) = 2$$

Ya que el nudo 1 está etiquetado se restará a* de los tiempos en todos los nudos sin etiqueta, regresándose a 3 donde se repetirá el proceso.

NUDOS	SOLUCION T_i	$-F'_j$
1	0	294
2	5	95
3	17	-338
4	33	144
5	43	-195

ARCO	NUDOS	a_k
1	1-2	0
2	1-3	10
3	2-3	0
4	2-4	19
5	3-4	0
6	3-5	23
7	4-5	0
8	5-1	10^6-43

Se procede a distribuir los nuevos $-F'_i$ en la red mostrada en la figura 6.6

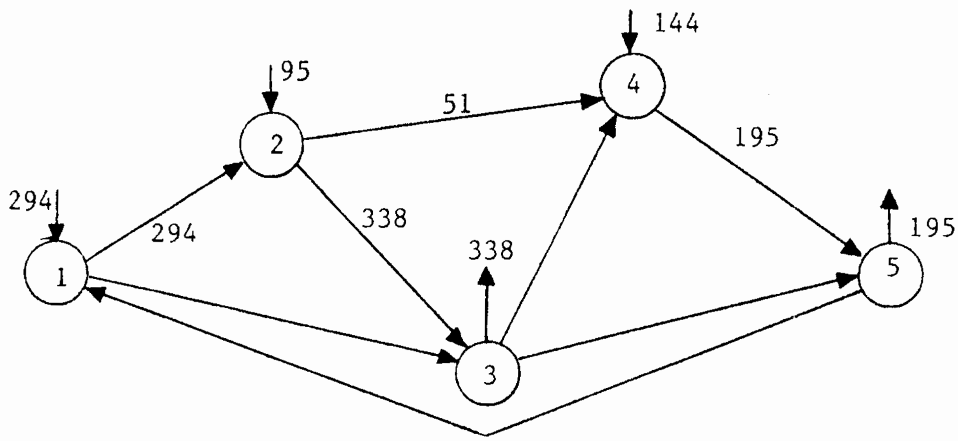


Figura 6.6

En el arco 2-4, a_4 = 19 y u_4 = 51 por lo que el flujo no está distribuido en forma óptima; se procede a etiquetar el nudo 2 y tratando de lograr un circuito que termine con una etiqueta en 4.

NUDOS	ETIQUETA
1	
2	(4-, 51)
3	(2+, 51)
4	(4+, 51)
5	

Luego se tiene el circuito (4,2), (2,3), (3,4).

En 10 se pregunta si j(s) = 4 está etiquetado. Como la contestación es afirmativa se continúa con el paso 12, el que indica que al flujo del arco (2,4) se le reste 51 y a los de los arcos (2,3) y (3,4) se les sume esa cantidad. Se regresa a 7, donde se dice que si no existen a_k

y u_k simultáneamente mayores que cero la solución es óptima. Este es el caso, luego la solución óptima es:

NUDOS	T_i
1	0
2	5
3	17
4	33
5	43

ARCO	NUDOS	FLUJO	COSTO MARGINAL DE DURACION
1	1-2	294	2.94
2	1-3	0	0
3	2-3	389	3.89
4	2-4	0	0
5	3-4	51	0.51
6	3-5	0	0
7	4-5	195	1.95
8	5-1	0	0

6.13 PROGRAMACION DE PROGRAMAS

Se desea planear la actividad de los programas que deberá desarrollar anualmente una institución para cumplir con las metas que se ha prefijado para dentro de cierto número de años. Se presenta a continuación un modelo dinámico en su fase determinista.

Las variables de decisión en el período t son:

X_{jt} - nivel de actividad del programa j.

b_{it} - cantidad utilizada del recurso i.

W_{it} - aumento del recurso i al inicio del período t.

(Comprar nueva maquinaria del tipo i o bien, podría ser emplear nuevos trabajadores con la especialidad i).

Y_{it} - disminución del recurso i al inicio del período t. (Dar de baja maquinaria del tipo i).

d_{it} - cantidad ociosa del recurso i.

Así las restricciones son:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijt} X_{jt} = b_{it} \qquad i = 1,\ldots, m \; ; \; t = 1,\ldots, T$$

donde a_{ijt} es la cantidad del recurso i necesaria para obtener una unidad tipo del programa j en el período t.

El segundo tipo de restricciones para el primer período son:

$$\begin{array}{c} b_{11} - W_{11} + Y_{11} + d_{11} = r_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{m1} - W_{m1} + Y_{m1} + d_{m1} = r_m \end{array}$$

o sea, lo que se utiliza del recurso i(b_{i1}) durante el período 1 más lo que se da de baja (Y_{i1}) más lo que se tiene ocioso (d_{i1}) debe ser igual a la disponibilidad de este recurso (r_i) más lo que se adquiere al iniciarse este período (W_{i1}).

Para los períodos restantes las restricciones son:

$$b_{it} + Y_{it} + d_{it} = W_{it} + b_{i,t-1} + d_{i,t-1}; \qquad i = 1,\ldots,m; t = 1,\ldots,T$$

o sea, lo que se utiliza en el período $t(b_{it})$ más lo que se da de baja (Y_{it}) y lo que permanece ocioso (d_{it}) es igual a lo que se compra en el período t (W_{it}) del recurso i más lo que se empleó en el período anterior $(b_{i,t-1})$ y lo que permaneció ocioso en el período t-1 $(d_{i,t-1})$.

Las últimas restricciones son:

$$\sum_{t=1}^{T} X_{jt} = M_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

Donde M_j es la meta a la que se pretende llegar al final del período T en el programa j.

Así estas últimas restricciones indican que el total de actividad desarrollada en todos los períodos debe conducir a poder alcanzar la meta prefijada para el programa j.

La función objetivo es:

Maximizar

$$z = \sum_{t=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} B_{jt} X_{jt} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} (C_{it} b_{it} + k_{it} W_{it} + b_{it} y_{it} + f_{it} d_{it})$$

en la que se maximiza la diferencia entre los beneficios totales y los costos totales (los asociados a la operación, a la adquisición de recursos, a darlos de baja y a mantenerlos ociosos).

Esquemáticamente se tiene:

DATOS REQUERIDOS:

- DISPONIBILIDAD ACTUAL DE LOS RECURSOS
- METAS A LAS QUE SE DESEA LLEGAR EN CADA UNO DE LOS PROGRAMAS.
- BENEFICIOS DE CADA PROGRAMA (QUITANDO EL COSTO DE OPERACION, MANTENIMIENTO Y RECONSTRUCCION).
- COSTOS DE OPERACION, ADQUISICION, DAR DE BAJA Y TENER LOS RECURSOS OCIOSOS.

PROCESAMIENTO DE DATOS UTILIZANDO EL MODELO

EL MODELO PROPORCIONA :

- QUE RECURSO SE DEBE ADQUIRIR, CUANDO Y EN QUE CANTIDAD
- CUANDO ES CONVENIENTE DAR DE BAJA CIERTO TIPO DE RECURSOS
- LOS RECURSOS QUE SE DEBEN TENER OCIOSOS DURANTE UN CIERTO PERIODO DE TIEMPO
- LA CANTIDAD DE OBRA (NIVEL DE ACTIVIDAD) QUE SE DEBE EFECTUAR EN CADA UNO DE LOS PROGRAMAS DURANTE CADA PERIODO DE TIEMPO PARA LA REALIZACION DE LAS METAS
- INVERSION NECESARIA DURANTE CADA PERIODO DE TIEMPO Y SU DISTRIBUCION EN CADA UNO DE LOS PROGRAMAS, INDICANDO EL USO A QUE SE DEBE DESTINAR
- COSTO TOTAL DEL PROGRAMA

SE OBTIENEN ADEMAS COMO COPRODUCTOS FACTORES DE TIPO ECONOMICO:

- PRECIOS SOMBRA
- COSTOS DE OPORTUNIDAD

Naturalmente, quien tiene que tomar las decisiones no se conformará con una sola solución, sino que requerirá varias para poder seleccionar la que él considere la más adecuada.

Puesto que se tienen los precios sombra asociados a las metas, se podrán escoger aquella o aquellas que sean menos importantes y considerándolas como medidas de efectividad hacerlas variar, cambiando por consiguiente la solución y su costo asociado. Se obtiene así una curva efectividad-costo, en donde cada uno de los puntos implica una solución óptima perfectamente determinada como se muestra en la figura 6.7.

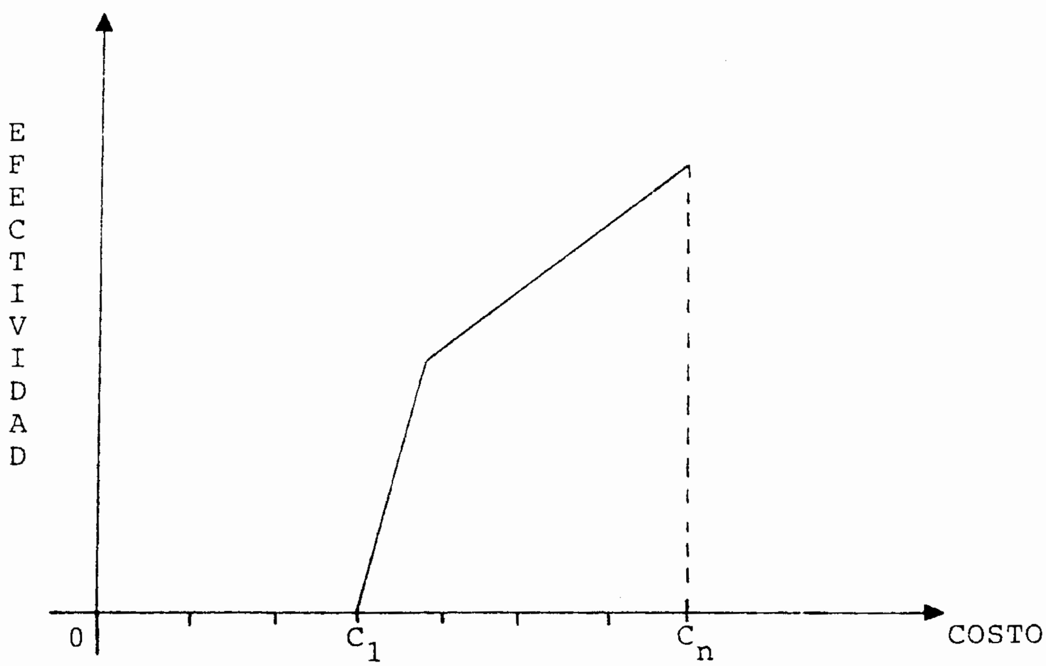


Figura 6.7

Estas curvas pueden obtenerse para las diferentes medidas de efectividad, y por supuesto hacer combinaciones con ellas como se ejemplifica en la figura 6.8

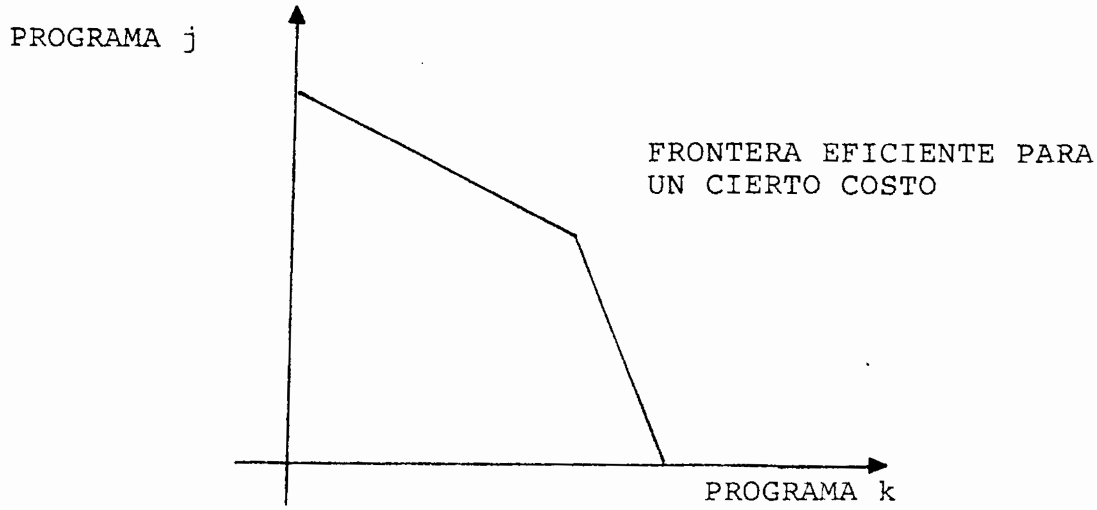


Figura 6.8

Resulta así la frontera eficiente, también conocida como conjunto de Pareto, lugar geométrico de las soluciones óptimas.

Se observa que el decisor deberá tener en consideración el intercambio, o sea, el hecho de que para alcanzar un cierto nivel de aspiración en una medida de efectividad, se deberá sacrificar el nivel de aspiración de otra u otras.

6.14 PROGRAMACION EN PASCAL DEL ALGORITMO DE BALAS-GEOFFRION (Syslo).

El algoritmo de Balas resuelve problemas del tipo:

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

s. a.

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j = 0 \text{ ó } 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

en donde $b_j \geq 0 \ \forall_j$. Si alguna $b_j < 0$ se usan los cambios de variable.

$$x_j = \begin{cases} y_j & \text{si } b_j \geq 0 \\ 1-y_j & \text{si } b_j < 0 \end{cases}$$

y si el problema es de maximización, basta recordar que $\max z = -\min (-z)$.

Glover y Geoffrion han efectuado modificaciones al algoritmo de Balas con el objeto de reducir tanto la demanda de memoria de la computadora como el tiempo de procesamiento. Estas modificaciones se apoyan en el procedimiento denominado **"backtracking"**.

Enseguida, se presenta el listado del programa en Turbo Pascal del algoritmo de Balas incluidas las modificaciones señaladas.

```
PROGRAM BALAS (INPUT,OUTPUT):
LABEL 10,20:
TYPE
   ARRMN  = ARRAY[1..31,1..78] OF INTEGER;
   ARRM   = ARRAY[1..31] OF INTEGER;
   ARRN   = ARRAY[1..78] OF INTEGER;
   ARRN1  = ARRAY[1..79] OF INTEGER;
VAR
   N,M,N1,INF  :   INTEGER;
   A : ARRMN;
   B : ARRM;
   C,X : ARRN;
   FVAL : INTEGER;
   EXIST : BOOLEAN;
   ALFA,BETA,GAMMA,I,J,MNR,NR,P,R,R1,R2,S,T,Z : INTEGER;
   Y,W,ZR : ARRM;
   II,JJ,XX : ARRN;
   KK : ARRN1:
BEGIN
   WRITE ('NUMERO (N) DE VARIABLES =     '):
   READ (N);
   WRITE (  NUMERO (M) DE RESTRICCIONES =    ');
   READ (M);
   WRITE ( 'ENTERO CUYO VALOR ES N+1 =  ');
   READ (N1);
   WRITE ( 'ENTERO POSITIVO GRANDE =   ');
   READ (INF);
   WRITELN ( 'MATRIZ DE COEFICIENTES DE LAS RESTRICCIONES ');
   FOR I: =1 TO M DO
      FOR J:=1 TO N DO
         READLN (A[I,J]);
   WRITELN (' VECTOR DE LOS RECURSOS DISPONIBLES ');
   FOR J:=1 TO M DO
      READLN (B[J]);
   WRITELN ( ' VECTOR DE LOS BENEFICIOS NETOS ');
   FOR I:=1 TO N DO
      READLN (C[I]);
   FOR I:=1 TO M DO Y[I]:=B[I];
   Z:=1;
   FOR J :=1 TO N DO
   BEGIN
      XX[J]:=0;
      Z:=Z+C[J]
   END;
   FVAL:=Z+Z;
   S:=0; T:=0; Z:=0;
   KK[1]:=0;
```

```
   EXIST:=FALSE;
10;
   P:=0;  MNR:=0;
   FOR I:=1 TO M DO
   BEGIN
      R:=Y[I];
      IF R < 0 THEN
      BEGIN
         P:=P+1;
         GAMMA:=0;
         ALFA:=R;
         BETA:=-INF;
         FOR J :=1 TO N DO
         IF XX[J] <= 0 THEN
            IF C[J]+Z >=FVAL THEN
            BEGIN
               XX[J]:=2;
               KK[S+1]:=KK[S+1]+1;
               T:=T+1;
               JJ[T]:=J
            END
            ELSE
            BEGIN
               R1:=A[I,J];
               IF R1 < 0 THEN
               BEGIN
                  ALFA:=ALFA-R1;
                  GAMMA:=GAMMA+C[J];
                  IF BETA < R1 THEN BETA:=R1
               END
            END:
      IF ALFA < 0 THEN GOTO 20;
      IF ALFA + BETA < 0 THEN
      BEGIN
         IF GAMMA+Z >= FVAL THEN GOTO 20;
         FOR J:=1 TO N DO
         BEGIN
            R1:=A[I,J];
            R2:=XX[J];
            IF R1 < 0 THEN
            BEGIN
               IF R2 = 0 THEN
               BEGIN
                  XX[J]:=-2;
                  FOR NR:=1 TO MNR DO
                  BEGIN
                     ZR[NR]:=ZR[NR]-A[W[NR],J];
```

```
                    IF ZR[NR] < 0 THEN GOTO 20
                 END
              END
           END
           ELSE
              IF R2 < 0 THEN
              BEGIN
                 ALFA:=ALFA-R1;
                 IF ALFA < 0 THEN GOTO 20;
                 GAMMA:=GAMA+C[J];
                 IF GAMMA+C[J] >= FVAL THEN GOTO 20
              END
        END;
        MNR:=MNR+1;
        W[MNR]:=I;
        ZR[MNR];=ALFA
     END
  END
  IF P = 0 THEN
  BEGIN
     FVAL:=Z;
     EXIST:=TRUE;
     FOR J:=1 TO N DO
        IF XX[J] = 1 THEN X[J]:=1 ELSE X[J]:=0;
     GOTO 20
  END
  IF MNR = 0 THEN
  BEGIN
     P:=0;
     GAMMA:=-INF;
     FOR J:=1 TO N DO
        IF XX[J] = 0 THEN
        BEGIN
           BETA:=0;
           FOR I:=1 TO M DO
           BEGIN
              R:=Y[I];
              R1:=A[I,J];
              IF R < R1 THEN BETA:=BETA+R-R1
           END;
           R:=C[J];
           IF (BETA > GAMMA) OR (BETA = GAMMA) AND (R < ALFA) THEN
           BEGIN
              ALFA:=R;
              GAMMA:=BETA;
              P:=J
           END
        END;
```

```
    IF P = 0 THEN GOTO 20;
    S:=S+1;
    KK[S+1]:=0;
    T:=T+1;
    JJ[T]:=P;
    II[S]:=1: XX[P]:=1;
    Z:=Z+C[P];
    FOR I:=1 TO M DO
       Y[I]:=Y[I]-A[I,P]
END
ELSE
BEGIN
   S:=S+1;
   II[S]:=0; KK[S+1]:=0;
   FOR J:=1 TO N DO
      IF XX[J] < 0 THEN
      BEGIN
         T:=T+1;
         JJ[T]:=J;
         II[S]:=II[S]-1;
         Z:=Z+C[J];
         XX[J]:=1;
         FOR I:=1 TO M DO
            Y[I]:=Y[I]-A[I,J]
      EN
   END
   GOTO 10;
20;
   FOR J:=1 TO N DO
      IF XX[J] < 0 THEN XX[J]:=0;
   IF S > 0 THEN
      REPEAT
         P:=T;
         T:=T-KK[S+1];
         FOR J:=T+1 TO P DO XX[JJ[J]]:=0;
         P:=ABS(II[S]);
         KK[S]:=KK[S]+P;
         FOR J :=T-P+1 TO T DO
         BEGIN
            P:=JJ[J];
            XX[P]:=2;
            Z:=Z-C[P];
            FOR I:=1 TO M DO
```

```
                Y[I]:= Y[I]+A[I,P]
          END
          S:=S-1;
       UNTIL (II[S+1] < 0 OR (S = 0) ;
       IF S > 0 THEN GOTO 10;
    WRITELN;
    writeln ( ' ------' H O J A  D E  R E S U L T A D O S ' ------');
    WRITELN;
    WRITELN ( '--VECTOR DE LA SOLUCION OPTIMA (Transformado)' );
    FOR J:=1 TO N DO
       WRITELN ( ' X[J] = ',X[J],'     J = ',J);
    WRITELN;
    WRITELN ( ' --- VALOR OPTIMO DE LA FUNC. OBJ. = ',FVAL);
    WRITELN ( ' --- TIENE SOLUCION EL PROBLEMA = ',EXIST);
    WRITELN;
    WRITELN ( ' --- NUMERO DE VARIABLES (N) = ',N);
    WRITELN (' --   NUMERO DE RESTRICCIONES (M) = ',M);
    WRITELN;
    WRITELN ('**** MATRIZ DE COEFICIENTES DE LAS RESTRICCIONES **** '
    WRITELN;
    FOR I:=1 TO M DO
    BEGIN
       FOR J:=1 TO N DO
          WRITE ( A[I,J]:6);
          WRITELN
    END;
    BEGIN
    WRITELN;
    WRITELN ( ' ---- VECTOR DE RECURSOS ---- ');
    FOR J:=1 TO M DO
       WRITELN ( '  B[1..M] = ',B[J],'      J = ',J)
    END;
    BEGIN
    WRITELN;
    WRITELN ( ' ---- VECTOR DE BENEFICIOS NETO ---- ');
    FOR I:=1 TO N DO
       WRITELN ('  C[1..N] = ',C[I],'      I = ',I)
    END;
END.
```

7. COMBINACION DE INVERSIONES BAJO RIESGO

Los métodos del valor presente, costo anual, etc. en su versión aleatoria, toman en cuenta el riesgo, pero analizando cada una de las inversiones por separado. Los métodos descritos solamente permiten establecer un orden de preferencia considerando características internas, pero sin tomar en cuenta interrelaciones en los beneficios; o bien, los beneficios derivados de una **combinación de inversiones.**

Cuando lo que se busca es una buena combinación de inversiones con objeto de lograr mejores beneficios, se hace necesario disponer no sólo de las características aleatorias aisladas de cada uno de los proyectos, sino también, de aquellas que permiten relacionarlos: correlaciones y covariancias.

Así, un histograma de los beneficios, como el mostrado en la figura 7.1 (a), suministra información de carácter aleatorio sobre un tipo **A** de inversión aislado, pero no sobre cómo se ven afectados estos beneficios al considerar otro tipo de inversión **B**.

7.1 COMBINACIONES DE INVERSIONES EFICIENTES Y LINEAS CRITICAS

Se ha visto que a cada tipo de inversión P, considerada aisladamente, se le pueden asociar dos parámetros definidos por el carácter aleatorio de los beneficios que genera: esperanza matemática y variancia P (μ_j, σ_j^2). Se pueden asociar puntos en un plano $\mu - \sigma^2$ a cada tipo de inversión (figura 7.1 (b)).

Se observa que de esta manera se pueden clasificar los tipos de inversiones de acuerdo con sus beneficios. Por ejemplo P_3 será preferida sobre P_1 ya que a misma variancia corresponde mayor esperanza de beneficio para P_3 (figura 7.1 (b)). En forma análoga P_2 será preferida sobre P_6 puesto que a misma esperanza ofrece menor variancia. El principio de **Comportamiento Racional del Inversionista,** hace uso de estas preferencias.

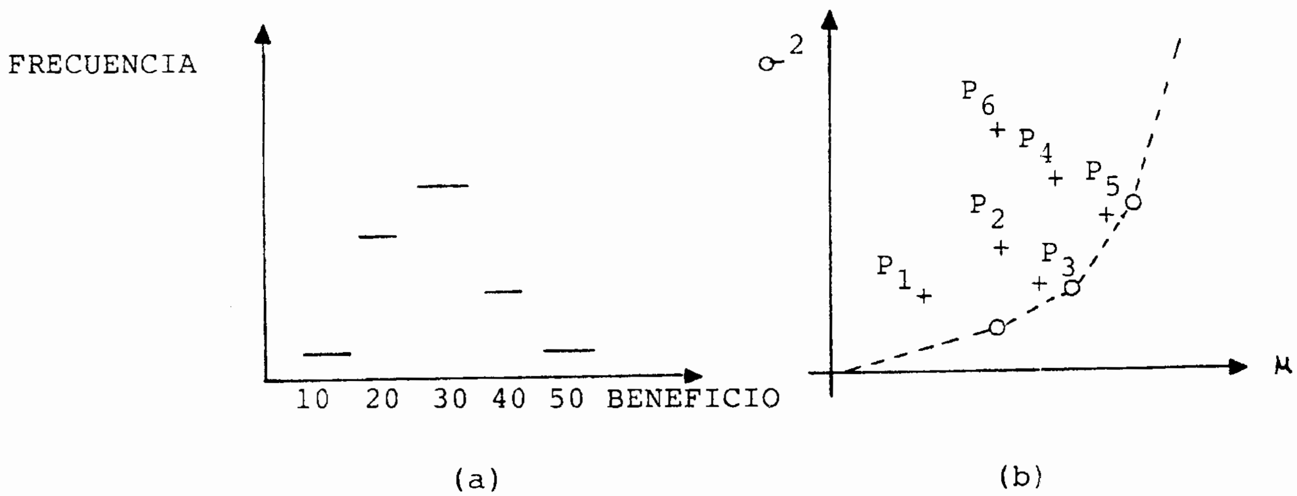


Figura 7.1

En resumen, al estudiar combinaciones de inversiones es necesario disponer de: la esperanza matemática de la combinación, obtenida mediante la suma de esperanzas matemáticas de cada tipo de inversión (beneficios) por separado; la variancia de la combinación que nuevamente es la suma de las variancias correspondientes a los tipos de inversiones por separado y, el coeficiente de correlación para cada par de combinaciones y las covariancias también para cada par por separado.

El cálculo de las variancias y covariancias permiten formular la matriz de covariancias.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ - & - & - & - \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

De la cual se hará uso posteriormente para el cálculo de las combinaciones eficientes.

Ahora bien, si las inversiones son divisibles lo conveniente no es optar por un tipo aislado de ellas, sino aprovechar las relaciones entre beneficios buscando una combinación que ofrezca las dos siguientes características:

a) Para una esperanza dada, la variancia sea menor que para cualquier otra combinación (incluyendo las aisladas).

b) Para una variancia dada, la esperanza sea mayor que para cualquier otra combinación (incluyendo las aisladas).

Una combinación de inversiones que satisfaga los dos requisitos anteriores será **eficiente**. Al lugar geométrico de las combinaciones eficientes se le llama **línea crítica** y ésta es una línea quebrada.

Puesto que la línea crítica es quebrada conviene definirla en términos de un parámetro λ de manera que resulta la familia $k = \lambda \mu - \sigma^2$, obsérvese que para definirla se está haciendo uso del comportamiento racional, ($k = 0$ si $\mu = \sigma^2 = 0$). Esta línea crítica es de la forma $U = a_0 + a_1 \mu - a_2 \sigma^2$, luego es una función utilidad.

7.2 DOSIFICACION DE LAS INVERSIONES. CALCULO DE LA LINEA CRITICA

El problema de las combinaciones eficientes se reduce a dosificar la intervención de cada uno de los tipos aislados, determinar porcentajes para dicha intervención, de acuerdo con la aversión al riesgo del inversionista, con objeto de lograr dichas combinaciones eficientes.

Sea x_i el porcentaje con que intervendrá el tipo de inversión P_i en la combinación eficiente, es claro que $\bar{x} = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n]$ tendrá como propiedad que $\sum_i x_i = 100\% = 1$.

Se trata de un vector estocástico y determina una combinación eficiente.

Por definición.

$$E = \sum_i x_i \mu_i$$

será la esperanza matemática de la combinación eficiente. Análogamente la variancia de dicha combinación será:

$$V = \sum_i \sigma^2$$

o en términos de las x_i

$$V = \sum_{i,j} x_i \; x_j \; \sigma_{ij}$$

Si $\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ es el vector de las esperanzas

$\bar{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ - & - & - & - \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$ es la matriz de las covariancias

entonces $E = \bar{x}\,\bar{\mu}$, $V = \bar{x}\,\bar{c}\,\bar{x}^{\,t}$, donde $\bar{x}^{\,t}$ es la transpuesta de $\bar{x}$.

Para el cálculo de las combinaciones eficientes (línea crítica), se definirán también los siguientes vectores y matrices;

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \text{ matriz } (n+1) \times (n+1)$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{vector } (n+1) \times 1$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{vector } (n+1) \times 1$$

La matriz $\tilde{\bar{M}}$ coincide con la $\bar{M}$ salvo que para los vectores no seleccionados en la etapa tiene cruces unitarios, ésto es, si x_i no es seleccionado en la etapa correspondiente la matriz $\tilde{\bar{M}}$ tendrá ceros en el renglón y en la columna i, salvo en su intersección en donde tendrá un uno. El vector $\tilde{\bar{S}}$ coincide con $\bar{S}$ salvo que si x_i no es seleccionada en la etapa, el i-ésimo elemento es cero; λ_E es el parámetro en función del cual se describe la línea quebrada y medirá la aversión al riesgo del inversionista.

Markowitz demuestra que la ecuación de la línea quebrada es:

$$\tilde{\bar{M}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \bar{R} + \tilde{\bar{S}} \lambda_E$$

$$\tilde{\bar{M}} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \bar{R} + \tilde{\bar{S}} \lambda_E$$

De donde se despejará la dosificación de acuerdo con la aversión al riesgo.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = (\tilde{\bar{M}})^{-1} \bar{R} + (\tilde{\bar{M}})^{-1} \tilde{\bar{S}} \lambda_E$$

El método procede por etapas describiendo en cada una de ellas el segmento de recta que identifica. Si i es la etapa, el segmento de recta será:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \bar{N}(i) \bar{R} + \bar{N}(i) \bar{S} \lambda_E$$

en donde $\bar{N}(i)$ coincide con $(\tilde{\bar{M}})^{-1}$ salvo que tendrá cruces de ceros para las x_i no seleccionadas.

En cada etapa será seleccionada la x_i de manera que la posición i sea la del mayor elemento de $\bar{\mu}$ no seleccionado previamente, λ_E será el mayor elemento de $\bar{\lambda}$ para la etapa correspondiente y para las variables que no se han seleccionado previamente.

Es posible distinguir pasos en el método para definir las combinaciones eficientes.

a) Identificar la $x_i^{(1)}$ que maximice a E

b) Encontrar la ecuación de la línea crítica asociada a $x_i^{(1)}$.

c) Definir los valores de λ_E para los que la primera línea crítica intersecta a otra línea crítica.

Para ello se definen:

$$\bar{T}(1) = \bar{N}(1)\,\bar{R} \quad ; \quad \bar{U}(1) = \bar{N}(1)\,\bar{S}$$

y para cada una de las variables no seleccionadas se plantea el sistema

$$\bar{M}_j \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mu_j \lambda_E \qquad (x_j \text{ variable no seleccionada})$$

$$(\bar{M}_j \text{ renglón j-ésimo de } \bar{M})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \bar{T}\ (1) + \lambda_E\ \bar{U}\ (1)$$

obteniéndose

$$\bar{M}_j\ [\bar{T}\ (1) + \lambda_E\ \bar{U}\ (1)] = \mu_j\ \lambda_E$$

al despejar λ_E **para cada variable**, será seleccionada la mayor λ_E. La j asociada a λ_E define a $x_j^{(2)}$.

d) Encontrar la ecuación de la línea crítica asociada a $x_j^{(2)}$; N(1) se modificará para proporcionar $\bar{N}$ (2) de la siguiente manera: Supóngase que la j_0-ésima variable es seleccionada para la (j+1)-ésima línea crítica sea $\bar{M}_{0_{j_0}}$ la j_0-ésima columna de $\bar{M}$. Se definirá:

$$\bar{B} = \bar{N}\ (1)\ \bar{M}_{0_{j_0}}$$

$$b = \bar{B}^{\,t}\ \bar{M}_{0_{j_0}}$$

$$c = m_{j_0 j_0} - b$$

Entonces los elementos q_{ij} de $\bar{N}(i+1)$ se expresan en términos de los f_{ij} de $\bar{N}(i)$ de la siguiente manera

$$g_{j_0 j_0} = \frac{i}{C}$$

$$g_{i j_0} = g_{j_0 i} = - \frac{b_j}{C} \qquad (i=i_0)$$

$$g_{ij} = f_{ij} + \frac{b_i \, b_j}{C} \qquad (i \neq j_0 \neq j)$$

e) Definir, en la forma ya descrita, los valores de λ_E para los cuales la segunda línea crítica intersecta a otra y determinar los $x_j^{(3)}$ a partir de las ecuaciones de la línea crítica.

f) Repetir los pasos ya mencionados hasta que $\lambda_E = 0$.

g) Con los $x_j^{(k)}$ definidos en cada etapa encontrar los vértices de la línea crítica en el plano μ-σ^2 mediante

$$E = \bar{x}\,\bar{\mu}, \qquad \bar{v} = \bar{x}\,\bar{c}\,\bar{x}$$

con uno de los vértices en el origen.

h) Mediante la λ que corresponde a la aversión al riesgo del inversionista seleccionar la combinación eficiente correspondiente. Dada una λ se ubicará en el intervalo $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ que corresponde, definiendo la razón $\lambda/\lambda_i = r$ y la x_3 buscada se expresará en términos de las x_i de los extremos.

$$x_3 = \frac{x_i + r x_{i+1}}{1 + r}$$

7.3 TEOREMA DE MARKOWITZ-WOLFE

Dado un conjunto finito de tipos de inversiones todas ellas diversificables, el factor de diversificación x_i para una aversión al riesgo θ se encuentra haciendo máxima la función $U = \theta\, \bar{x}\, \bar{\mu} - \bar{x}\, \bar{c}\, \bar{x}^{t}$ cuando $\bar{x}^{t}$ es un vector estocástico; esto es:

$$\max z = \theta\, \bar{x}\, \bar{\mu} - \bar{x}\, \bar{c}\, \bar{x}^{t}$$

s.a.

$$\sum_i x_i = 1$$

$$x_i \geqq 0$$

7.4 INVERSIONES EN PROYECTOS

En los incisos anteriores se han presentado métodos para seleccionar inversiones óptimas, pero no para seleccionar inversiones óptimas en proyectos. La principal diferencia es que el proyecto requiere, que si es seleccionado, se invierta en él la totalidad de lo programado para realizarlo. No así las inversiones en bonos o acciones.

Aquí el problema es suministrar una lista de proyectos seleccionados y no un conjunto de factores de diversificación para inversiones.

7.5 SELECCION DE COMBINACIONES OPTIMAS DE PROYECTOS ATENDIENDO UNICAMENTE A LA EFICIENCIA DE LOS BENEFICIOS

Cuando se consideran únicamente los beneficios aportados por los proyectos, el criterio para seleccionar combinaciones atiende exclusivamente a la eficiencia por concepto de esperanza y variancia. Puesto que se trata de suministrar una lista de proyectos, ésta estará constituida por aquellos que se encuentran en la línea crítica. Para determinar esta última, basta situar todas las combinaciones en el plano μ-σ^2 y ligar la envolvente máxima (abajo y a la derecha) de los puntos dibujados.

7.6 SELECCION DE COMBINACIONES OPTIMAS DE PROYECTOS ATENDIENDO A BENEFICIOS Y A COSTOS. MODELO GENERAL (Estático)

Siguiendo a Weingartner se tiene:

$$\max z = \bar{\mu}\,\bar{x} - \lambda\,\bar{x}\,\bar{\sigma}^2\,\bar{x}^t$$

s. a.

$$\bar{A}\,\bar{x} = \bar{b}$$

$$\bar{x} = \{x_i \mid x_i = 0 \text{ ó } 1\}$$

Donde:

$\bar{\mu}$ = vector de las esperanzas matemáticas de los beneficios.

$\bar{\sigma}^2$ = matriz de las covariancias de los beneficios.

$\bar{A}$ = matriz de los costos.

λ = coeficiente de aversión al riesgo.

Si los proyectos son por definición independientes, los coeficientes de correlación son nulos y la matriz es diagonal.

Si existen proyectos mutuamente exclusivos o uno es contingente a otro, se tomará en cuenta agregando las restricciones correspondientes.

EJEMPLO 7.1 Obtener las características aleatorias de la combinación de los proyectos de inversión P_1, P_2 y P_3 si sus beneficios aislados son los indicados en la tabla 7.1; encontrar la línea crítica.

MONTO DEL BENEFICIO	FRECUENCIA		
	P_1	P_2	P_3
10	5	9	2
20	8	12	4
30	10	8	7
40	8	5	9
50	3	1	8
60	1	0	5

Tabla 7.1

Se tiene:

$$m_1 = 29.7, \; m_2 = 23.4, \; m_3 = 39.1$$

$$S_1^2 = 162.76, \; S_2^2 = 122.57, \; S_3^2 = 196.4$$

$$S_1 = 12.75, \; S_2 = 11.05, \; S_3 = 14.02$$

$$r_{12} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{35 \times 12.75 \times 11.05} = \frac{1}{4931} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{4,514.3}{4,931.0} = 0.91$$

$$r_{13} = \frac{1}{6256} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0.942$$

$$r_{23} = \frac{1}{5422} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{4895.6}{5422} = 0.903$$

$$S_{12} = 0.915 \times 12.75 \times 11.05 = 129$$

$$S_{13} = 0.942 \times 12.75 \times 14.02 = 168$$

$$S_{23} = 0.908 \times 11.05 \times 14.02 = 140$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 163 & 129 & 168 \\ 129 & 123 & 140 \\ 168 & 140 & 196 \end{bmatrix} \qquad \bar{\mu} = \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \end{bmatrix}$$

las matrices y vectores adicionales resultan

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 163 & 129 & 168 & 1 \\ 129 & 123 & 140 & 1 \\ 168 & 140 & 196 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{S} = \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) La $x_i^{(1)}$ que maximiza a E es $X_3^{(1)}$; $\bar{x}$ = [0,0,1] es el primer vértice

b) Cálculo de la línea crítica asociada a $x_3^{(1)}$; se tiene:

$$\tilde{\bar{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 196 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad (\tilde{\bar{M}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\bar{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{N}\,(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.1 \end{bmatrix} \lambda_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.1\ \lambda_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196+39.1\lambda_E \end{bmatrix}$$

c) Valores de λ_E para los que una línea crítica intersecta a otra.

$$\bar{T}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196 \end{bmatrix} \qquad \bar{U}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 39.1 \end{bmatrix}$$

para i = 1

$$[163 \quad 129 \quad 169 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196+39.1\ \lambda_E \end{bmatrix} = 29.7\ \lambda_E$$

$$168 + (-196 + 39.1\ \lambda_E) = 29.7\ \lambda_E$$

$$-28 + 39.1\ \lambda_E = 29.7\ \lambda_E$$

$$\lambda_E = \frac{28}{9.4} = 2.97$$

para i = 2

$$[129 \quad 123 \quad 140 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -196+39.1\,\lambda_E \end{bmatrix} = 23.4\,\lambda_E$$

$$140 + (-196 + 39.1\,\lambda_E) = 23.4\,\lambda_E$$

$$-\,56 + 39.1\,\lambda = 23.4\,\lambda_E$$

$$\lambda_E = \frac{56}{15.7} = 3.56687898$$

luego λ_E = max [2.97, 3.56687898] = 3.56687898 por lo que para $\bar{x}$ = [0,0,1] se tiene $3.56687898 \leq \lambda < \infty$

d) Ecuaciones de la línea crítica asociada a $x_2^{(2)}$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 129 \\ 123 \\ 140 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -56 \end{bmatrix}$$

$$b = [\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -56\ ] \begin{bmatrix} 129 \\ 123 \\ 140 \\ 1 \end{bmatrix} = 84$$

$c = 123 - 84 = 39$

$\frac{1}{c} = 0.0256410$

$$\bar{N}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0256410 & -0.0256410 & 1.435896 \\ 0 & -0.0256410 & 0.0256410 & -0.435896 \\ 0 & 1.435896 & -0.435896 & -115.589824 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.435896 \\ -0.435896 \\ -115.589824 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4025737 \\ 0.4025737 \\ 16.5564328 \end{bmatrix}$$

como comprobación

$$-0.435896 + 3.56687898\ (0.4025737) = 1$$

e) Determinación de λ_E para el que la nueva línea crítica intersecta alguna otra.

La primera intersección ocurre cuando

$$x_3 = 0 = -0.435896 + 0.4025737\ \lambda_E$$

$$\lambda_E = \frac{0.435896}{0.4025737} = 1.08273732$$

La segunda intersección se calcula a partir de

$$[163 \quad 129 \quad 168 \quad 1\ ] \begin{bmatrix} 0 \\ 1.435896 - 0.4025737\ \lambda_E \\ -0.435896 + 0.4025737\ \lambda_E \\ -115.589824 + 16.5564328\ \lambda_E \end{bmatrix} = 29.7\ \lambda_E$$

$$185.230584 - 51.932007\ \lambda_E - 73.230528 + 67.632382\ \lambda_E - 115.589824 + $$
$$+ 16.556433\ \lambda_E = 29.7\ \lambda_E$$

$$- 3.589768 + 2.556808\ \lambda_E = 0$$

$$\lambda_E = \frac{3.589768}{2.556808} = 1.40400374$$

$$\lambda_E = \max [\ 1.0827732,\ 1.40400374\ ] = 1.40400374$$

El nuevo vértice es:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1.435896 - (1.40400374)\ (0.4025737) = 1.435896 - 0.565215$$

$$x_3 = -0.435896 + (1.40400374)\ (0.4025737) = -0.435896 + 0.565215$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0.870681,\ x_3 = 0.129319$$

$$1.404004 \leq \lambda \leq 3.566879$$

f) Ecuaciones de la nueva línea crítica.

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0256410 & -0.0256410 & 1.435896 \\ 0 & -0.0256410 & 0.0256410 & -0.435896 \\ 0 & 1.435896 & -0.435896 & -115.589824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 163 \\ 129 \\ 168 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3.307689 - 4.307688 + 1.435896 \\ -3.307689 + 4.307688 - 0.435896 \\ 185.230584 - 73.230528 - 115.589824 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.435897 \\ 0.564103 \\ -3.589768 \end{bmatrix}$$

$$b = [0 \quad 0.435897 \quad 0.564103 \quad -3.589768] \begin{bmatrix} 163 \\ 129 \\ 168 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 56.230713 + \\ + 94.7699304 \\ - 3.589768 \\ \\ \end{matrix}$$

$b = 147.410\ 120$

$c = 163 - 147.410120 = 15.589880 \qquad \frac{1}{c} = 0.0641442$

$$\bar{N}\ (3) = \begin{bmatrix} 0.0641442 & -0.0279603 & -0.0361839 & 0.230263 \\ -0.0279603 & 0.0378288 & -0.0098685 & 1.335525 \\ -0.0361839 & -0.0098685 & 0.0460525 & -0.565788 \\ 0.230263 & 1.335525 & -0.565788 & -114.763178 \end{bmatrix} ; \begin{array}{c} \bar{S} \\ \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.230263 \\ 1.335535 \\ -0.565788 \\ -114.763178 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} -0.163978 \\ -0.331084 \\ 0.495068 \\ 15.967785 \end{bmatrix}$$

La comprobación es:

$$1.335525 - (1.404004)\ (0.331084) = 0.870681$$
$$-0.565788 + (1.404004)\ (0.495068) = 0.129319$$

g) Definición de intersecciones

$$x_2 = 1.335525 - 0.331084\ \lambda_E = 0$$

$$\lambda_E = \frac{1.335525}{0.331084} = 4.033785$$

$$x_E = -0.565788 + 0.495068\ \lambda_E = 0$$

$$\lambda_E = \frac{0.565788}{0.495068} = 1.142849063$$

La primera intersección ocurre con una línea fuera del intervalo de la anterior. Intersectará la segunda $\lambda_E = 1.142849063$

Las coordenadas del nuevo vértice serán:

$$x_1 = 0.230263 - 0.187402 = 0.042861$$

$$x_2 = 1.335525 - 0.378879 = 0.957146$$

$$x_3 = -0.565788 + 0.565788 = 0.000000$$

$$1.142849 \leqq \lambda \leqq 1.404004$$

h) Ecuaciones de la nueva línea crítica.

Puesto que ahora se trata de eliminar a una de las variables previamente selecionadas, la x_3, las expresiones para obtener $\bar{N}$ (i + 1) a partir de $\bar{N}$ (i) también se alteran. Las nuevas son:

$$g_{ij} = f_{ij} - \frac{f_{ij_0} \; f_{j_0 j}}{f_{j_0 j_0}}$$

$$\frac{1}{f_{j_0 j_0}} = 21.714348$$

$$\bar{N}(4) = \begin{bmatrix} 0.0357142 & -0.0357142 & 0 & -0.214282 \\ -0.0357142 & 0.0357142 & 0 & 1.214282 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.214282 & 1.214282 & 0 & -121.714290 \end{bmatrix} ; \quad \begin{array}{c} \bar{S} \\ \begin{bmatrix} 29.7 \\ 23.4 \\ 39.1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \bar{R} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\quad \begin{array}{cc} \bar{N}\,(4)\,\bar{R} & \bar{N}\,(4)\,\bar{S} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.214282 \\ 1.214282 \\ 0 \\ -121.714290 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0.2249994 \\ -0.224801 \\ 0 \\ 22.050024 \end{bmatrix}$$

La comprobación es análoga.

Puesto que λ_E ha alcanzado el valor cero, el último punto es:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 0$$

$$0 \leqq \lambda \leqq 1.142849$$

i) Los vértices en función de μ y σ^2 se consignan en la tabla 7.2

	V_1	μ_1	σ_1^2	V_2	μ_2	σ_2^2	V_3	μ_3	σ_3^2	V_4	μ_4	σ_4^2
x_1	0	0	0	0	0	0	0.042861	1.27	5.59	0	0	0
x_2	0	0	0	0.870681	20.36	107.91	0.957146	22.40	117.98	1	23.4	123
x_3	1	39.10	196	0.129319	5.04	18.99	0	0	0	0	0	0
Σ		39.10	196		25.40	126.90		23.67	123.57		23.4	123

Tabla 7.2

La línea crítica se muestra en la figura 7.2

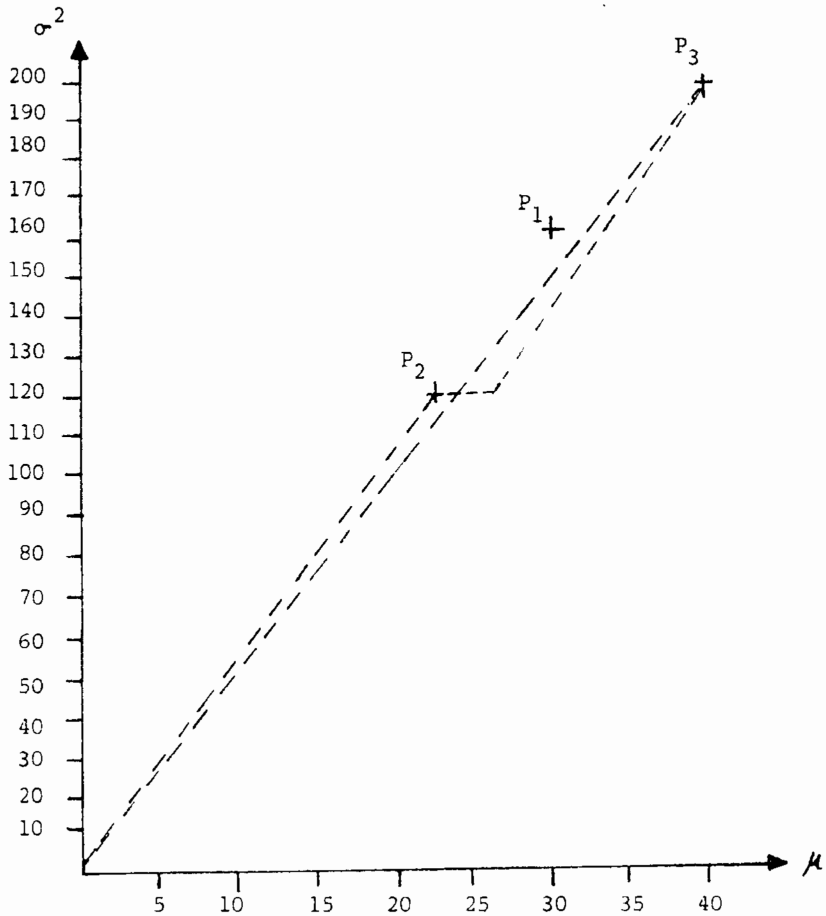


Figura 7.2

EJEMPLO 7.2. (Markowitz). Sean tres tipos de inversiones A, B y C y se trata de dosificarlas si:

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 0.062 \\ 0.146 \\ 0.128 \end{bmatrix} \qquad \bar{c} = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{bmatrix}$$

Los resultados se consignan en la tabla 7.3 y la línea crítica se muestra en la figura 7.3

	V_1	μ_1	σ_1^2	V_2	μ_2	σ_2^2	V_3	μ_3	σ_3^2	V_4	μ_4	σ_4^2
x_1	0	0	0	0	0	0	0.84	0.052	0.0123	0.99	0.061	0.014
x_2	1	0.146	0.0854	0.22	0.032	0.0059	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0.78	0.103	0.0193	0.16	0.021	0.0027	0.01	0.001	0.000
		0.146	0.0854		0.135	0.0252		0.073	0.0150		0.062	0.014

Tabla 7.3

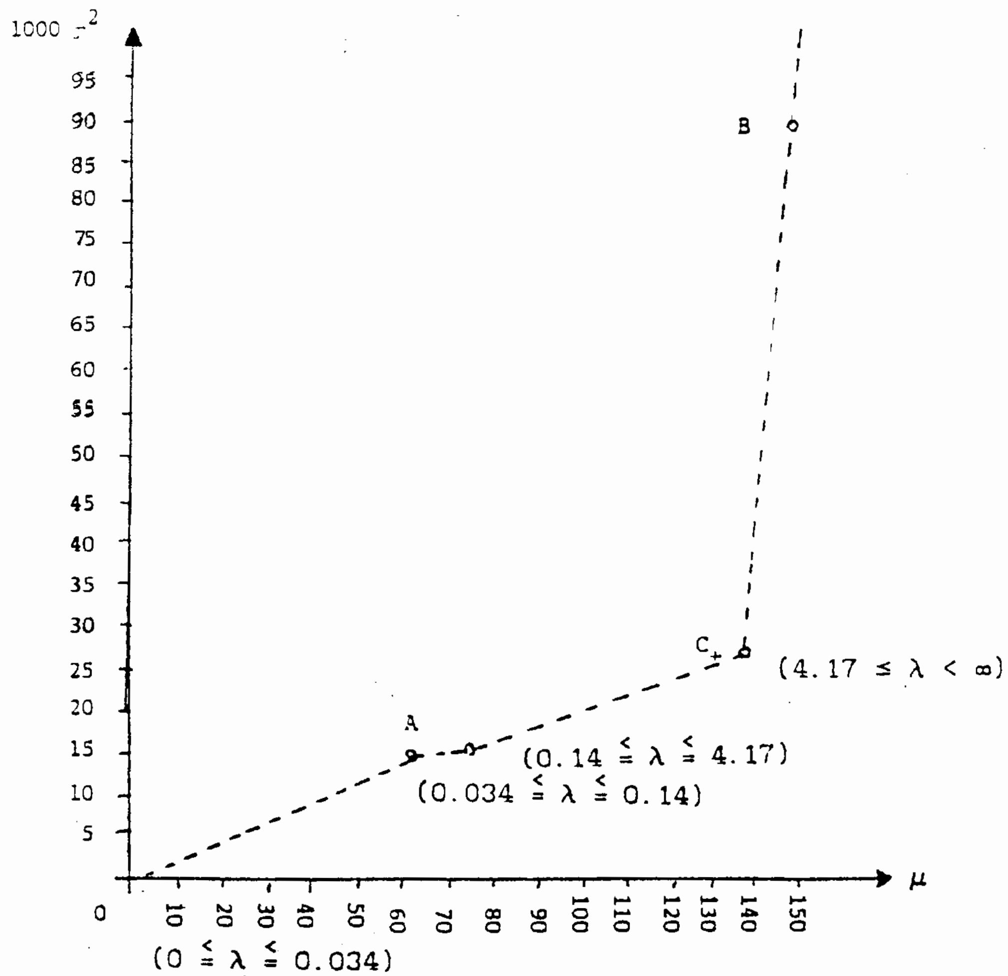


Figura 7.3

EJEMPLO 7.3. Se dispone de 50,000 ¿Cómo se invertiría esta suma considerando el primero de los dos ejemplos anteriores, y

a) $\lambda = 10$

b) $\lambda = 3$

c) $\lambda = 1$?

a) $\lambda = 10$

Las ecuaciones de la línea crítica son:

$x_1 = 0 + 0\,\lambda$ luego $\qquad x_1 = 0 + 0(10) = 0$

$x_2 = 0 + 0\,\lambda \qquad x_2 = 0 + 0(10) = 0$

$x_3 = 1 + 0\,\lambda \qquad x_3 = 1 + 0(10) = 1$

Inversión en $P_1 = 0\ (50{,}000) = 0$

Inversión en $P_2 = 0\ (50{,}000) = 0$

Inversión en $P_3 = 1\ (50{,}000) = 50{,}000$

b) $\lambda = 3$

Las ecuaciones de la línea crítica son:

$x_1 = 0 + \lambda\ (0)$

$x_2 = 1.44 + \lambda\ (-0.40)$

$x_3 = -0.44 + \lambda\ (0.40)$

luego para $\lambda = 3$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1.44 - 1.20 = 0.24$

$x_3 = -0.44 + 1.20 = 0.76$

Inversión en P_1 = 0(50,000) = 0

Inversióm en P_2 = 0.24 (50,000) = 12,000

Inversión en P_3 = 0.76 (50,000) = 38,000

c) $\lambda = 1$

Las ecuaciones de la línea crítica son:

$x_1 = -0.22 + 0.22\ \lambda$

$x_2 = 1.22 + (-0.22\lambda)$

$x = 0 + 0\ \lambda$

luego para $\lambda = 1$

$x_1 = -0.22 + 0.22 = 0$

$x_2 = 1.22 - 0.22 = 1$

$x_3 = 0 - 0 = 0$

Inversión en $P_1 = 0$

Inversión en $P_2 = 50,000$

Inversión en $P_3 = 0$

EJEMPLO 7.4. Aplique el teorema de Markowitz-Wolfe a los datos del ejemplo 7.1.

$$\max Z= 29.7\ \theta x_1 + 23.4\ \theta x_2 + 39.1\ \theta x_3 - 163\ x_1^2 - 129\ x_1\ x_2$$
$$- 168\ x_1\ x_3 - 129\ x_1\ x_2 -123\ x_2^2 - 140\ x_2\ x_3 - 168\ x_1\ x_3$$
$$- 140\ x_2\ x_3 - 196\ x_3^2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_i \geqq 0$$

o bien

$$\max z= 29.7\ \theta x_1 + 23.4\ \theta x_2 + 39.1\ \theta x_3 - 163\ x_1^2 - 258\ x_1\ x_2$$
$$- 336\ x_1\ x_3 - 123\ x_2^2 - 280\ x_2\ x_3 - 196\ x_3^2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 \geqq 0$$

Que es un problema de programación cuadrática paramétrica que puede resolverse con el método de Wolfe, según se muestra en la tabla 7.4.

$\bar{b}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	ζ_1	β_1	ν_1	ν_2	ν_3	θ
		1	1						
	-326	-258	-336	-1	1	1			29.7
	-258	-246	-280	-1	1	1			23.4
	-336	-280	-392	-1	1			1	39.1
$z_1 - c_1$	12	0	44	1	-1	0	-1	0	
$z_2 - c_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
$z_3 - c_3$	-8.8889	0	-7.1815	0	0	.1587	-.1587	0	0
$z_4 - c_4$	0	0	-4.2177	0	0	-.0733	-.0194	.0933	0
$z_5 - c_5$	15.019	0	0	0	0	-.5043	.2434	.2666	
$z_6 - c_6$	3.7889	6.1609		0	0	0	-.059	.055	0
$z_7 - c_7$	0.6743	2.0183	-.24		.24			.24	
	β_1	β_2	β_3	β_4	x	y	θ		
z	-246		-1		-246	-1	Φ		
x_2	1				1				
ν_1	243	1			258		258		
μ_2	246		1		246		246		
ν_3	280			1	260	1	280		
z						-1			
x_2	1				1				
ν_1	12	1	-1		12	6.3*	1.9047		
ε_1	246		1		246	23.4	10.512		
ν_3	34		-1	1	34	15.7	2.1656		
z	1.9047	.1587	.1587		1.9047	-8.8889			
x_2	1				1	1			
θ	1.9047	.1587	-.1587		1.9047	-8.8889			
ε_1	201.43	-3.7136	4.7136	·	201.43	187.9558			
ν_3	4.0962	-2.4916	1.4916	1	4.0962	95.5164	* .0428		
z	2.2851	-.0733	-.0194	.0933	2.2851	-4.2177			
x_2	.9572	-.0261	-.0159	-.0105	.9571	0.7556	1		
θ	2.2965	-.0733	-.0194	.0933	2.2851	-4.2177	-		
ε_1	193.3855	1.092	1.7251	-1.9735	193.3855	117.0575	1		
x_1	.0428	-0.0261	.0159	.0105	.0428	0.2554	* .1676		

Tabla 7.4 (continúa)

	β_1	β_2	β_3	4	X	Y	θ		
z	2.992	1	.2434	.2666	2.992	-.5043			
x_2	0.8366	-.5043	-.0620	-.0415	0.8306	.1033*	8.0406		
θ	2.992	.1033	.2434	.2666	2.992	-.5043	-		
ε_1	173.7667	-.5043	-5.5676	-6.7846	173.7667	13.0553			
x_3	.1676	13.0553	.0623	.0411	.1676	-.1022	-		
		-.1022							
z	7.0469		-.059	-.064	7.0469	-.059			
ν_1	8.0406	1	-.6	-.4017	8.0406	-.6			
θ	7.0469		-.059	+.069	7.0469	-.059			
ε_1	68.7943		2.2654	-1.5621	68.7943	2.2654*	30.3673		
x_3	1				1		∞		
	β_1	β_2	β_3	β_4	X	Y			
z	8.7383			.024	8.7383				
ν_1	26.4344	1		.8143	26.4344	-.8143			
θ	8.7383			.024	8.7383	-.024			
ν_2	30.3673		1	-.6895	30.3673	-.3105	SOLUCION NO ACOTADA FIN.		
x_3	1				1	0			
	S	O	L	U	C	I	O	N	
	x_1	x_2	x_3			K			
	0	1	0		0	1			
	0	1	0		1.9047	2			
	.0428	.9572	0		2.2851	3			
	0	.8306	.1676		2.992	4			
	0	0	1		7.0469	5			

Tabla 7.4 (concluye)

7.7 CARTERAS DE INVERSION

Se trata de analizar diferentes inversiones para el caso de México. Se obtuvieron datos de los rendimientos mensuales que han dado varios de los instrumentos que se ofrecen en el mercado financiero secundario desde el primero de enero de 1985, hasta el 28 de febrero de 1989. Para hacer equiparables los datos, se transformaron de tal manera que según el caso, se manejara la tasa mensual del rendimiento o la tasa del cambio en su cotización con respecto al mes anterior.

Los instrumentos que se estudiaron son los siguientes:

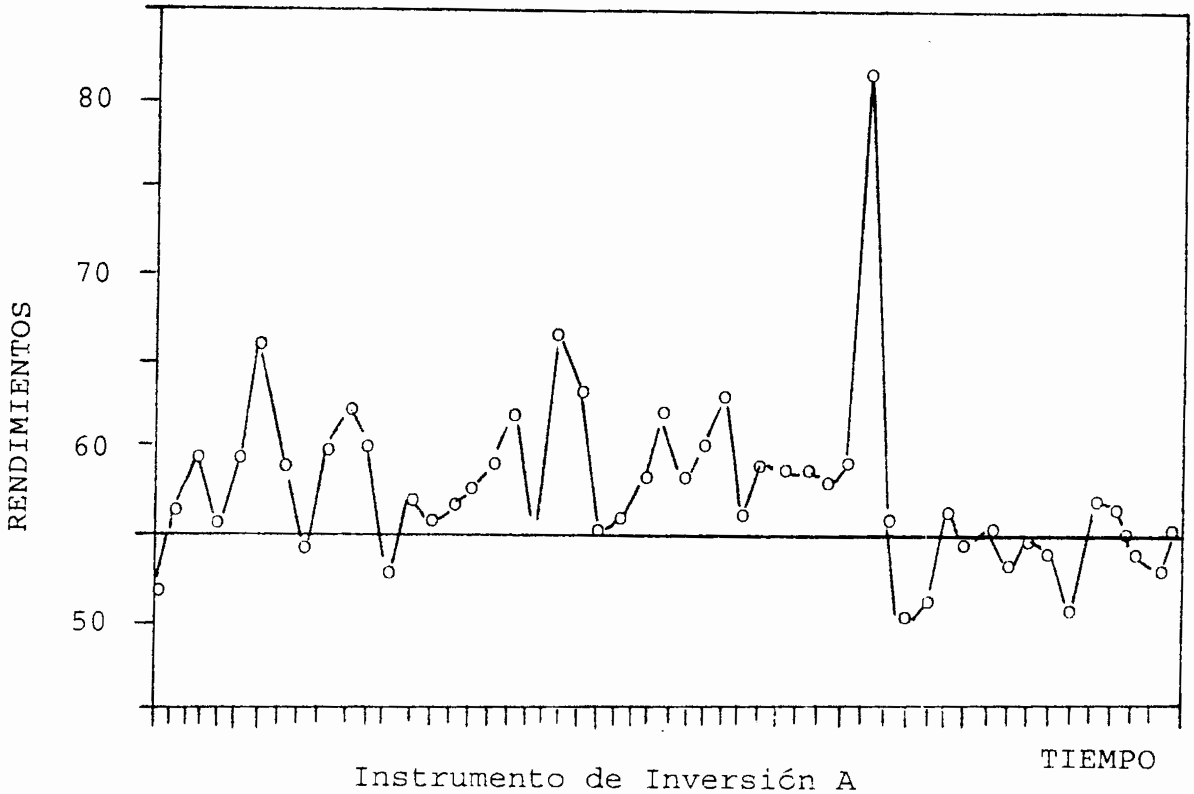
- Dos metales: el **A** y el **B** al precio de venta en pesos mexicanos, precios al cierre de cada fin de mes.

- Dos monedas, entre las más cotizadas: la **C** y la **D** al precio de venta de la cotización oficial.

- Una inversión de renta fija: la **E** de 28 días.

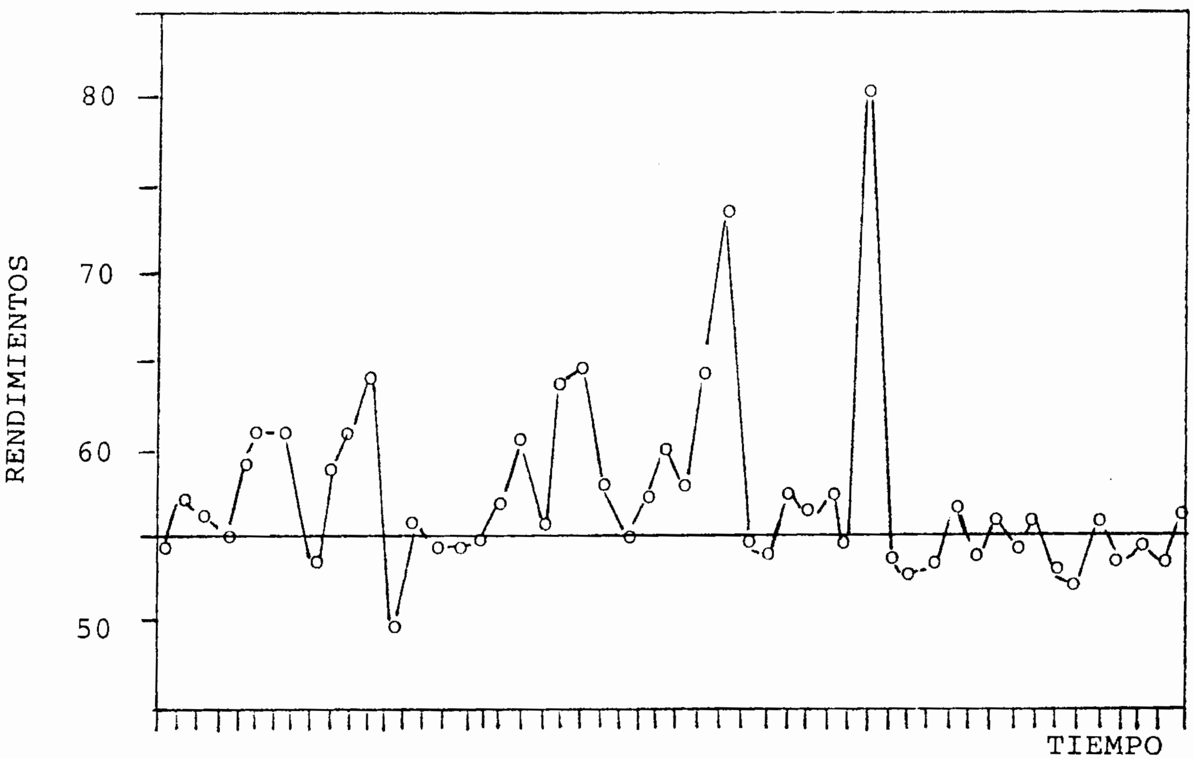
- Una inversión de renta variable: la **F**

El comportamiento de los diferentes instrumentos de inversión se muestran en las figuras 7.4 a 7.9, los promedios de sus rendimientos son los siguientes (valores enteros): **A**, 56; **B**, 52; **C**, 53; **D**, 69; **E**, 65; **F**, 65.



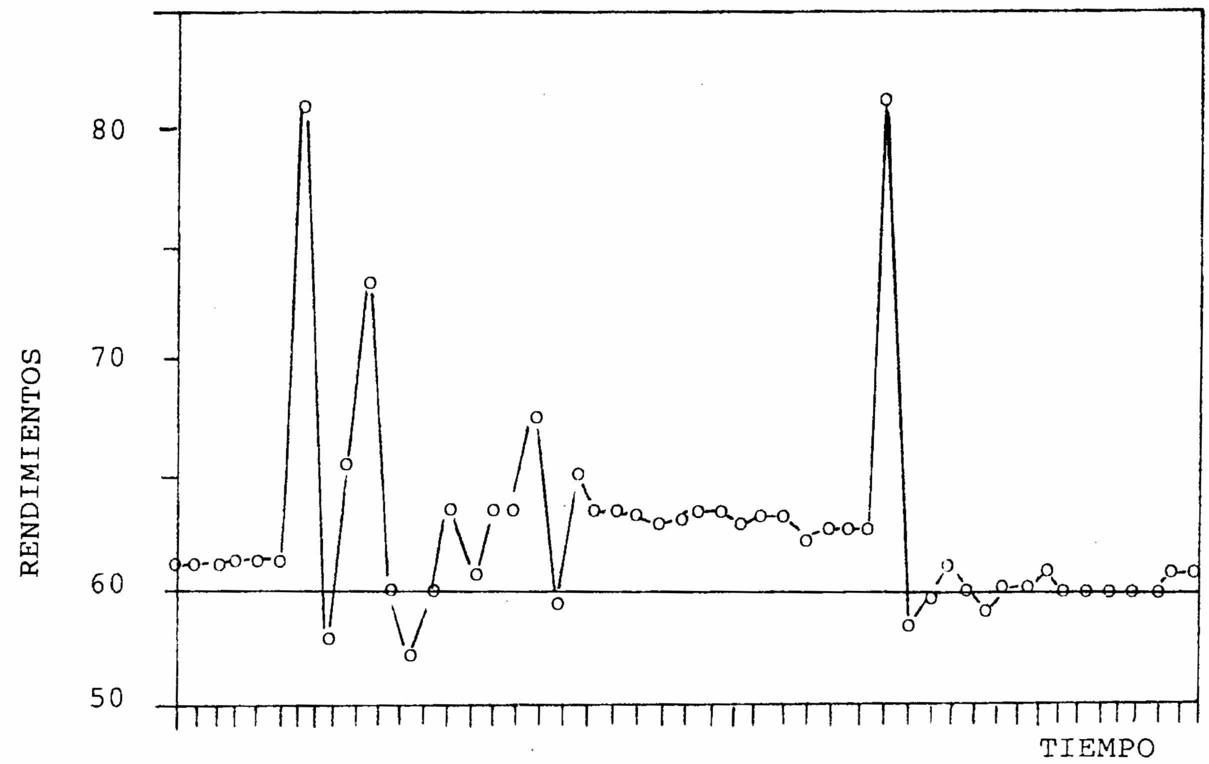
Instrumento de Inversión A

Figura 7.4



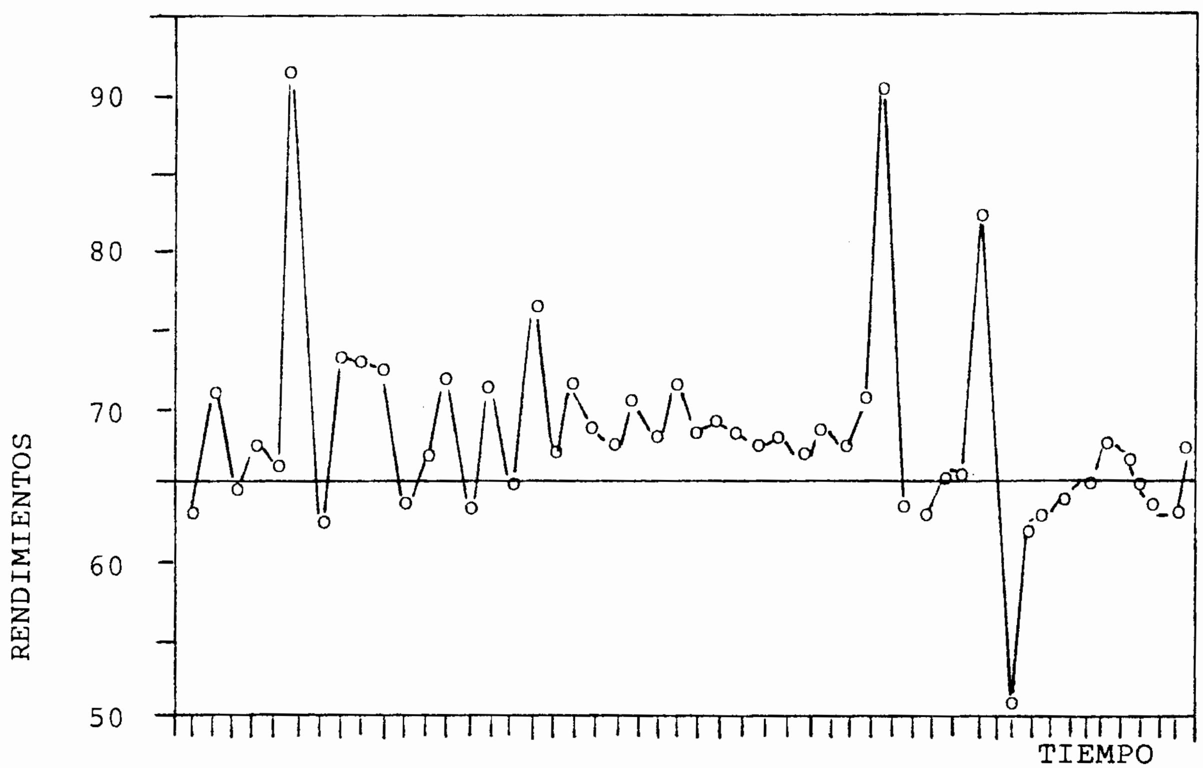
Instrumento de Inversión B

Figura 7.5



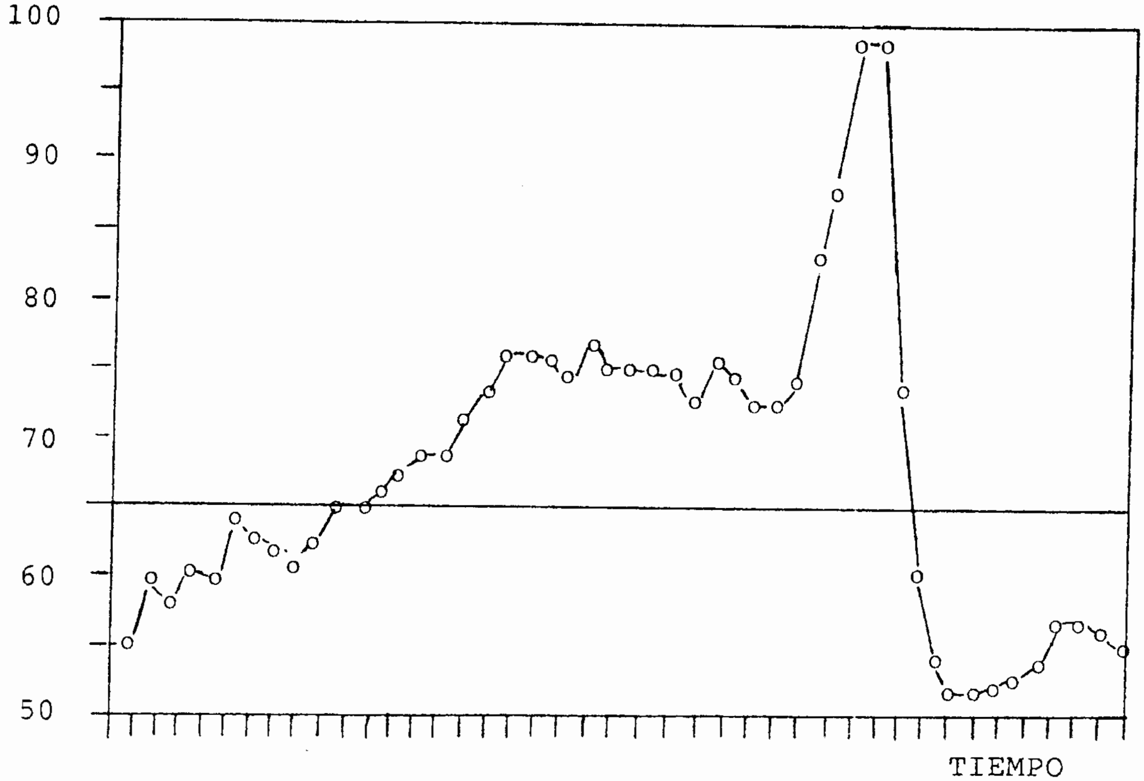
Instrumento de Inversión C

Figura 7.6



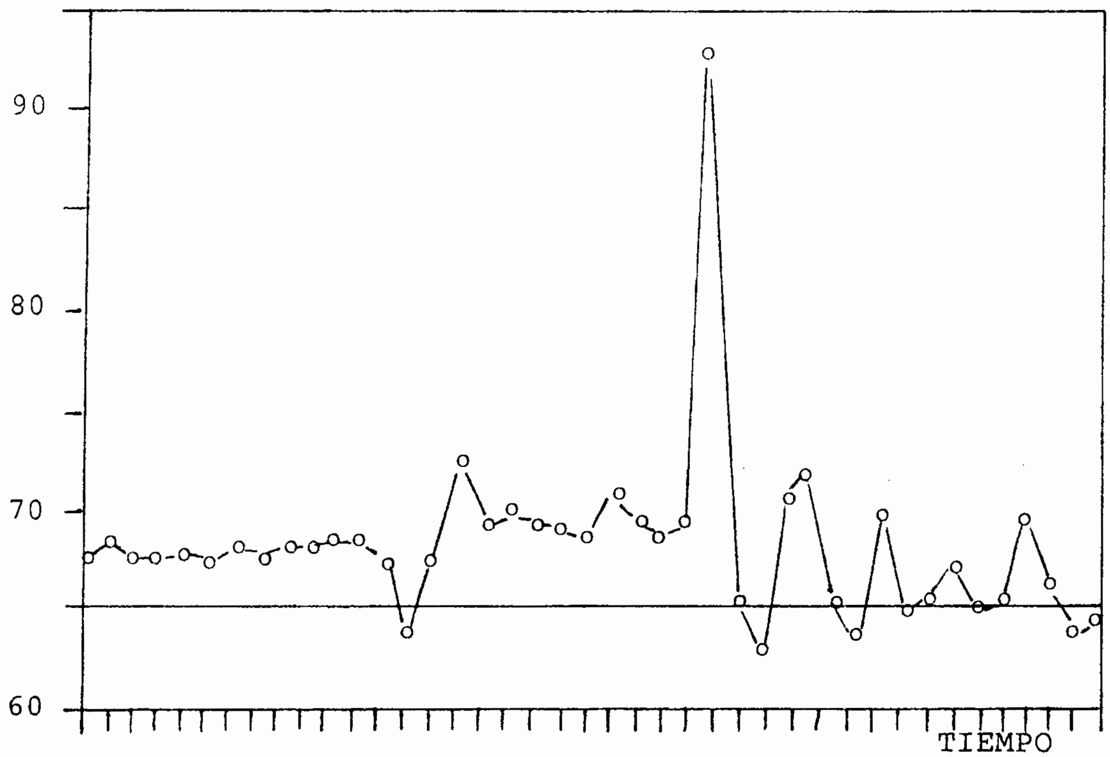
Instrumento de Inversión D

Figura 7.7



Instrumento de Inversión E

Figura 7.8



Instrumento de Inversión F

Figura 7.9

En este ejemplo se debe escoger entre las diversas alternativas la, o las más prometedoras para invertir un capital fijo disponible, a estos problemas se les ha llamado de **carteras o portafolios de inversión.**

Se tienen diversos planteamientos para este caso, desde el que sólo considera el beneficio, hasta los que consideran momentos de más alto orden de la distribución de probabilidad de los beneficios.

Notación:

X_j variable de decisión 1 ó 0 según se invierta o no en el instrumento j.

C_{jt} variable aleatoria que representa el valor del beneficio neto del j-ésimo instrumento de inversión en el tiempo t donde $j = 1, 2, \ldots, N$, $t = 1, 2, \ldots, T$.

A_{jt} variable aleatoria que representa el costo neto del j-ésimo instrumento de inversión en el tiempo t.

B_t variable aleatoria que representa al presupuesto disponible en el tiempo t.

Se supone que, o se conocen las funciones de distribución, o se tienen datos suficientes para determinar sus tres primeros momentos.

En el primer modelo se asume certeza, ya que cada variable aleatoria está representada por su valor esperado. Así el modelo determinista que se usa es el siguiente:

$$\text{(I)} \quad \max \sum_j E\,(C_j)\,X_j \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_j E\,(A_{jt})\,X_j \leqq E\,(B_t) \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

$$X_j = 0,\ 1$$

En este modelo la función de utilidad, o sea, la función objetivo, es lineal, pues no toma en cuenta el riesgo que es la dispersión.

El segundo modelo que si toma en cuenta el riesgo, es el siguiente:

$$\text{(II)} \quad \max Y = E\,(Z) - K\,V\,(Z)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum E\,(A_{jt})\,X_j \leqq E\,(B_t)$$

$$X_j = 0,\ 1$$

$$t = 1, 2, \ldots, T \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Donde: $E(Z) = \sum E\,(C_j)\,X_j$ es la esperanza de los beneficios; $V\,(Z) = \sum_{i,j} X_i\,\sigma_{ij}\,X_j$ con $(i, j) = 1, 2, \ldots, N$ es la varianza de Z; σ_{ij} es la covariancia de (C_i, C_j); y K es un factor de peso que dará el decisor.

En esta función objetivo se maximiza $E(Z)$ y se minimiza $V(Z)$; K significa el grado de aversión al riesgo, de tal manera que una K grande refleja una actitud conservadora y los valores pequeños indican que casi no se toma en cuenta la posibilidad de perder.

El tercer modelo que se propone maximiza beneficios sujetos a un riesgo máximo fijo como sigue:

$$\text{(III)} \quad \max \; \Sigma\, E\,(C_j)\, X_j$$
$$\text{s.a.} \; V\,\{\Sigma\, E\,(C_j)\, X_j\} \;\leqq\; M$$
$$X_j = 0,\ 1 \qquad\qquad j = 1,\ 2, \ldots,\ N$$

La notación es la misma que se ha usado.

El cuarto modelo minimiza el riesgo sujeto a un rendimiento mínimo como sigue:

$$\text{(IV)} \quad \min \; V\,\{\Sigma\, E\,(C_j)\, X_j\}$$
$$\text{s.a.} \; \Sigma\, E\,(C_j)\, X_j \;\geqq\; M$$
$$X_j = 0,\ 1 \qquad\qquad j = 1,\ 2, \ldots,\ N$$

En cualquier caso se obtiene en qué instrumentos se debe invertir y cuánto. Se hicieron seis aplicaciones utilizando un paquete de cómputo que permite manejar programación lineal binaria.

En la primera aplicación, el modelo sólo maximiza beneficios y conduce a que **D** es el mejor instrumento de inversión.

En la segunda aplicación, se obtiene que si se desea formar una cartera con tres de los mejores instrumentos debe invertirse en **A**, **E** y **F**.

En la tercera aplicación, se usa un modelo del segundo tipo, donde se maximizan los beneficios esperados, se minimiza el riesgo y el decisor no pondera su aversión al riesgo, o sea, que K = 1 para todos los instrumentos. En este caso se usa la varianza de cada tipo de inversión en forma independiente y resulta que la inversión de más alto rendimiento y menor riesgo es la **E**.

En la cuarta aplicación, se utiliza el mismo modelo anterior, pero proporciona los tres mejores elementos para la cartera maximizando rendimiento y minimizando riesgo; ellos son **A**, **D** y **E**.

En la quinta aplicación (tabla 7.4), se usó un modelo del tercer tipo y resulta que el máximo beneficio con un riesgo máximo de 21, se obtiene invirtiendo en **A**, **E** y **F**.

En la sexta aplicación, se usó un modelo del cuarto tipo donde para minimizar el riesgo sujeto a un mínimo de beneficio fijo en 150, se debe invertir en **C**, **E** y **F**.

Quinta aplicación

```
: MAX 56X1 + 52X2 + 53X3 + 69X4 + 65X5 + 65X6
? S.T.
? 10X1 + 11X2 + 9X3 + 13X4 + 2X5 + 9X6 <= 21
? END

: INT 6
:         OBJECTIVE FUNCTION VALUE
:
:         1)          186.000000
:
: VARIABLE              VALUE                REDUCED COST
:       X1            1.000000                 -.545460
        X2             .000000                 5.909087
        X3             .000000                  .000000
        X4             .000000                  .000000
        X5            1.000000               -50.818180
        X6            1.000000               -12.000010

       ROW       SLACK OR SURPLUS             DUAL PRICES
        2)             .000000                 5.545454
        3)             .000000                 3.090907

NO. ITERATIONS=            9
BRANCHES=      1 DETERM. =     22.000E    0
BOUND ON OPTIMUM:     185.4545
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=               1 PIVOTS=           9

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
:
```

Tabla 7.4

7.8 MODELO DE DESVIACION MEDIA ABSOLUTA PARA LA SELECCION DE CARTERAS DE INVERSION

7.8.1. Descripción del modelo

Propuesto por Hiroshi Konno y Hiroaki Yamazaky (1989) el Modelo de Desviación Media Absoluta (MAD) es un modelo estático que permite la obtención de la Frontera Eficiente del conjunto de carteras factibles, en el plano Rendimiento-Riesgo. A diferencia del modelo de Markowitz, propone como medida del riesgo la desviación media absoluta de los datos lo cual conduce, como se verá más adelante, a un Problema de Programación Lineal.

Sea R_j la variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento (por período) del activo S_j, $j = 1, \ldots, n$. Sea x_j el porcentaje del dinero disponible (presupuesto) para invertir en el activo j.

El rendimiento esperado (por periodo) de esta inversión está dado por:

$$r(x_1, \ldots, x_n) = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j \right] = \sum_{j=1}^{n} E[\ R_j\ ] x_j$$

donde E [.] representa el valor esperado de la variable aleatoria dentro de los corchetes. Un inversionista desea tener un $r(x_1, \ldots, x_n)$ tan grande como sea posible y al mismo tiempo mantener un nivel de riesgo mínimo.

La función objetivo, que mide el riesgo de la cartera, en lugar de la desviación estándar (o variancia) del modelo de Markowitz, es la siguiente:

$$w(x) = E\left[\left| \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j \right] \right| \right]$$

Por lo que el modelo MAD es:

$$
(\text{MAD}) \qquad
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & w(x) = E\left[\, \left| \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j \right] \right| \,\right] \\
\text{s. a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} E[R_j] x_j \geq \rho \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& 0 \leq x_j \leq u_j \qquad\qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

donde ρ es un parámetro que representa la mínima tasa de rendimiento requerida por el inversionista y u_j es el porcentaje máximo de dinero que puede ser invertido en el activo S_j.

Este modelo tiene la importante característica de que puede formularse como un Problema de Programación Lineal, según se verá a continuación:

Sea r_{jt} la realización de la variable aleatoria R_j ($j = 1, \ldots, n$) durante el periodo t ($t = 1, \ldots, T$), la cual se supone está disponible por datos históricos, o bien mediante alguna proyección a futuro; también se admite que su valor esperado puede aproximarse mediante el promedio de estos datos. Sea

$$
r_j := E[R_j] = \sum_{t=1}^{T} r_{jt}/T \qquad\qquad j = 1, \ldots, n
$$

entonces,

$$
E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j \right] = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j
$$

por lo que:

$$w(x) = E[\ |\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\ ]\ |\ ] =$$

$$= E[\ |\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j\ |\ ] =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \left\{ \ |\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j\ | \right\} / T =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \left\{ \ |\sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j\ | \right\} / T$$

y definiendo $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ (desviaciones de la realización del activo j respecto de su promedio, en el periodo t), se tiene que:

$$w(x) = \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \right| / T \qquad (7.1)$$

de modo que el modelo MAD se puede reescribir como:

$$\text{(MAD1)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \right| / T \\ \text{s. a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & 0 \leq x_j \leq u_j \qquad j=1,\dots,n \end{aligned}$$

que es equivalente, al siguiente Problema de Programación Lineal:

$$\min \sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\text{s. a.} \quad y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$\text{(MADL)} \qquad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$y_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde el valor de $w(x)$ puede recuperarse a partir de la definición de a_{jt} y la relación (7.1).

Esta última expresión del modelo puede aplicarse directamente con los paquetes de programación lineal usuales y que son fácilmente accesibles.

La minimización de $w(x)$ que propone el modelo MAD es equivalente a la minimización de la variancia $\sigma^2(x)$ propuesta en el modelo clásico de Markowitz si $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ tiene distribución normal multivariada, de acuerdo con la siguiente:

PROPOSICION: Si $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ tiene distribución normal multivariada, entonces:

$$w(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma(x)$$

Prueba: Sean $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ la media de $(R_1, \ldots, R_n)$ y (σ_{ij}) nxn su matriz de covariancias. Entonces, los resultados básicos de estadística matemática establecen que $\sum_{j=1}^{n} R_j x_j$ tiene distribución normal con media $\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$ y desviación estándar

$$\sigma(x)=[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j]^{1/2}$$

Por lo tanto:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)}\int_{-\infty}^{\infty} |\,u\,|\, \exp[-u^2/2\sigma^2(x)]du =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)}\left[\int_{-\infty}^{0} -u\exp[-u^2/2\sigma^2(x)]du+\int_{0}^{\infty} u\exp[-u^2/2\sigma^2(x)]du\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)}[\sigma^2+\sigma^2]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma(x).$$

De este resultado se desprende que el modelo MAD propone una medida de riesgo tan buena como la propuesta por el modelo de Markowitz. Se ha señalado sin embargo, que ante dos carteras con el mismo rendimiento y desviación estándar (absoluta), puede ser importante considerar el tercer momento de su distribución (curtosis) ya que si dicha distribución no es simétrica (como lo muestran resultados estadísticos del Mercado de Valores de Japón), un inversionista prudente elegirá la de tercer momento más grande ya que esto implica un menor riesgo de pérdidas.

En este sentido se han propuesto algunas variantes del modelo MAD, que también conducen a problemas de programación lineal y que en su conjunto constituyen toda una clase de modelos denominados cuasilineales (o lineales por trozos).

Sin profundizar en esta clase de modelos, se señalarán algunas particularidades del aquí expuesto y que lo colocan por encima del modelo de Markowitz.

i) Cálculos previos. La construcción del modelo de Markowitz requiere del cálculo previo de $n(n + 1)/2$ covariancias, a partir de los datos históricos (o proyecciones futuras); mientras que la aplicación del modelo MADL es directa a partir de dichos datos.

ii) Linealidad. El modelo cuadrático de Markowitz para problemas de gran escala puede resultar muy poco manejable, en términos de tiempo-máquina; por su parte es bien conocida la existencia de algoritmos lineales que tienen una gran eficiencia computacional de modo que el modelo MADL aún cuando n sea grande, por ejemplo mayor que 1,000, se puede resolver en tiempos razonables.

iii) Costos de administración. La solución óptima del modelo de Markowitz usualmente contiene una gran cantidad de variables diferentes de cero. Esto en la práctica constituye una dificultad para administrar un gran número de activos, a parte de que algunos de los valores óptimos de las variables son tan pequeños que resultan incompatibles con las cantidades mínimas que se ofrecen en el mercado. Por su parte, la solución óptima del modelo MADL puede contener a lo más $2T + 2$ componentes positivas, sin importar el número n de activos que se manejen.

iv) Actualización de datos. Como no se tiene que calcular la matriz de covariancias, el modelo MADL permite una fácil actualización e incluso la incorporación de los datos y variables que se vayan registrando al paso del tiempo.

Adicionalmente, resultados numéricos reportados por los autores mencionados al principio de este inciso, evidencian las características que permiten justificar que el modelo MAD es una alternativa digna de considerarse para la optimización de carteras de inversión.

7.8.2. Aplicación

Se complementa la descripción del modelo de Desviación Media Absoluta mediante la aplicación concreta que se presenta en seguida.

A partir de la información obtenida en la Bolsa Mexicana de Valores S. A. de C. V. (BMV), se procedió a la aplicación del modelo MADL. Para ello se consideraron activos formados por las acciones de 33 empresas que cotizan en la BMV y que en su conjunto constituyen más del 90% del Indice de Precios y Cotizaciones (IPyC). Los reportes que se utilizaron corresponden a los rendimientos reales mensuales de dichas acciones (descontando la inflación correspondiente), de enero de 1991 a enero de 1992. Debe señalarse que sólo se tomaron en cuenta ganancias de capital y no pagos de dividendos debido a la gran irregularidad (o a veces inexistencia) de éstos.

Con referencia al modelo MADL antes citado, se tuvo que $T = 13$ (meses), $n = 33$ (activos) y se consideraron variaciones para el rendimiento ρ del orden del 1% al 14%, se asumió también que $u_j = \infty$, para $j = 1, \ldots, 33$.

Como se demostró anteriormente, dicho modelo constituye un problema de programación lineal, el cual fue resuelto aplicando el paquete computacional denominado "LINDO" (Linear, Interactive, Discrete Optimizer) versión 1991.

Las corridas efectuadas para diferentes valores de ρ en el rango arriba indicado permitieron construir la <u>frontera eficiente</u> que se muestra en la figura 7.10. Cabe aclarar que a partir de $\rho = 14\%$ el problema resultó no factible. Cada punto de dicha gráfica representa una cartera óptima en el sentido de que para un rendimiento dado ρ, es la de menor riesgo $w(x)$; o bien, para un riesgo dado $w(x)$ es la de máximo rendimiento ρ.

Los valores que se muestran en dicha figura corresponden a los consignados en la tabla 7.5.

FRONTERA EFICIENTE

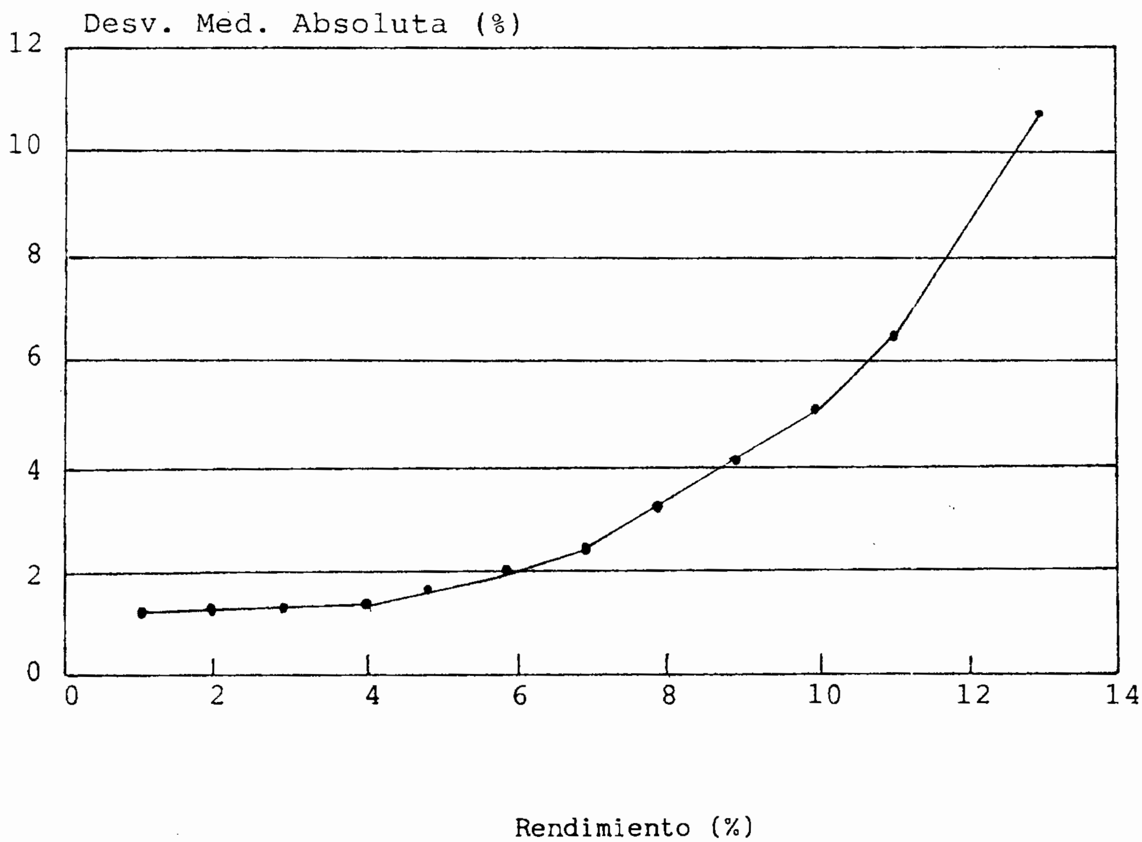


Figura 7.10

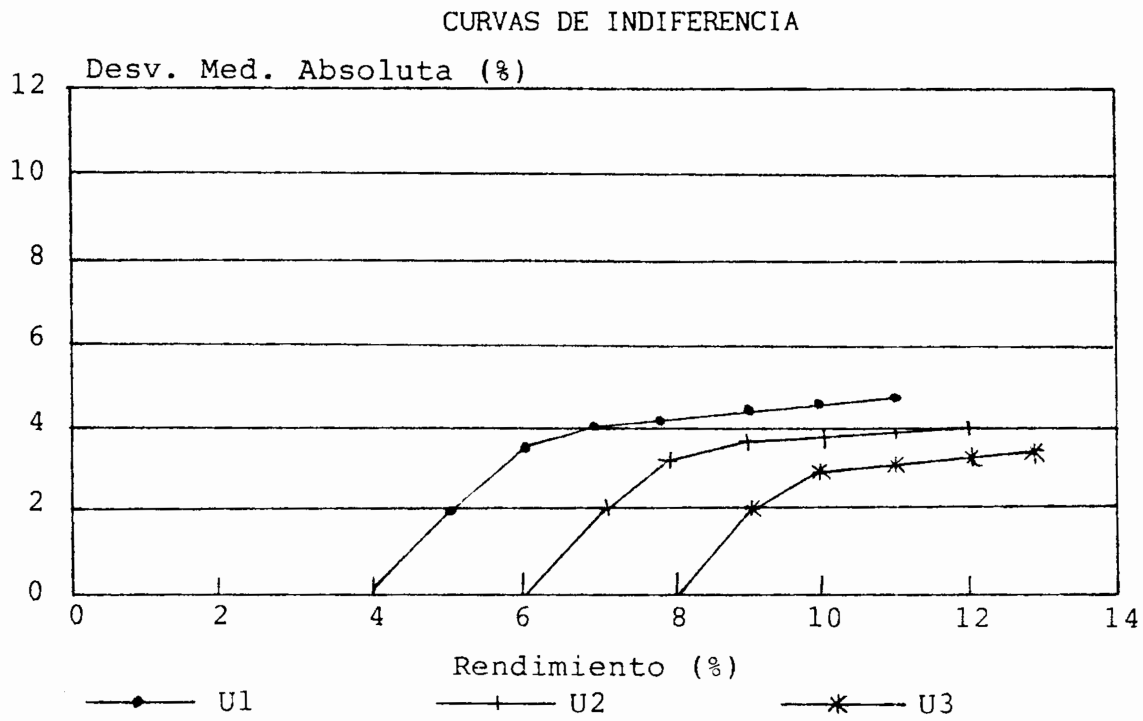


Figura 7.11

Rendimiento ρ (%)	Desviación Media Absoluta W(x)
1	1.29
2	1.29
3	1.29
4	1.34
5	1.65
6	2.02
7	2.51
8	3.30
9	4.16
10	5.10
11	6.42
12	8.50
13	10.69
14	no factible

Tabla 7.5

Por otro lado y atendiendo a la Teoría de la Utilidad, se construyó el mapa de indiferencia personal rendimiento-riesgo del inversionista, que se muestra en la figura 7.11 denominada "CURVAS DE INDIFERENCIA".

Finalmente, superponiendo este mapa de indiferencia sobre la gráfica de la <u>frontera</u> <u>eficiente</u> se determinó el punto de tangencia buscado (ver figura 7.12) con lo que se obtuvo la siguiente cartera óptima personal:

Rendimiento esperado: 8% Riesgo esperado 3.3%

Composición de la Cartera Optima:

	EMISORA	SERIE	%
1)	BANORTE	B	12.64
2)	INTENAL	B	11.69
3)	CEMEX	A	19.85
4)	CIFRA	C	11.37
5)	TELMEX		12.48
6)	TEXEL		31.97

CARTERA OPTIMA PERSONAL

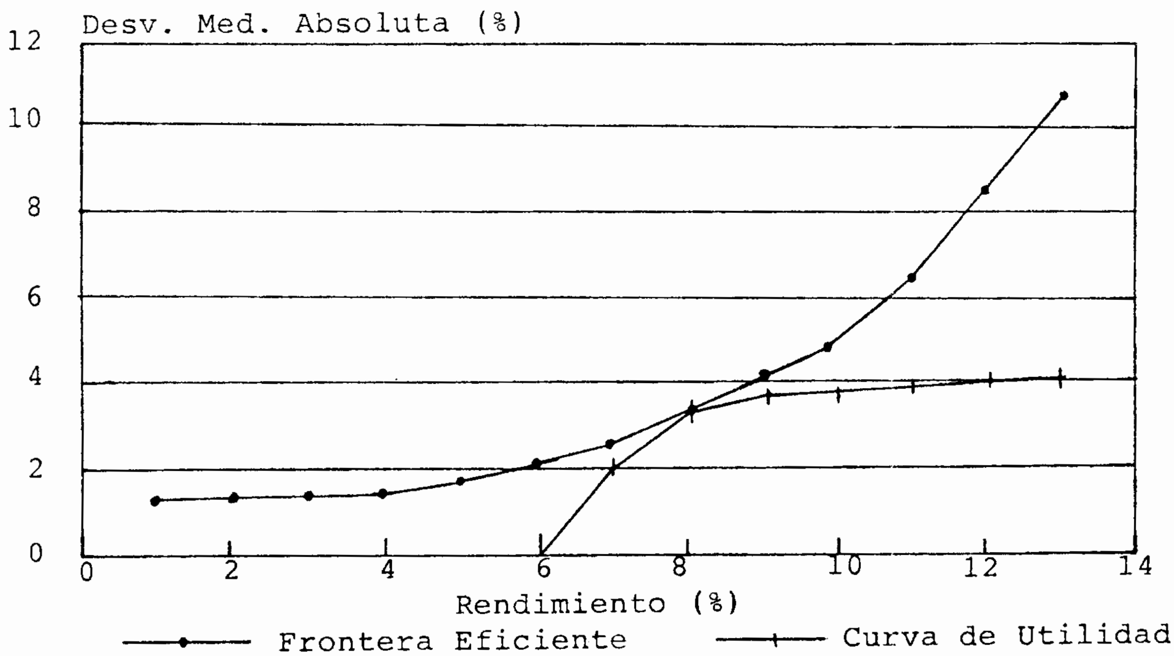


Figura 7.12

7.8.3. Conclusiones

Con relación al Modelo de Desviación Media Absoluta se puede establecer lo siguiente:

- La cartera óptima resultante está compuesta tan sólo por seis activos. La proporción invertida en cada uno de ellos supera en todos los casos al 10% del capital total disponible para la inversión. Esto, desde un punto de vista práctico, permite un manejo adecuado para el administrador de la cartera, quien puede ir registrando las modificaciones que presenten los rendimientos de sus activos para mantener actualizados en todo momento sus niveles de información, sin tener que manejar grandes volúmenes de datos.

- Se puede observar que el rendimiento de la cartera (8%) supera al rendimiento individual (promedio) de cuatro de los seis activos que la forman. Hay diversificación en los activos seleccionados pues se tienen empresas de los ramos bancos, cemento, casas comerciales, comunicaciones y textiles.

- Nótese que el rendimiento del 8% real mensual de la cartera óptima, al compararse con el rendimiento actual (Marzo de 1992) de los CETES a 28 días (instrumento de renta fija, es decir, sin riesgo), que equivale a 1.06% real mensual, representa un avance bastante significativo, que compensa el riesgo asumido del 3.3% real mensual.

- El modelo de Desviación Media Absoluta (MAD) conduce a un problema de Programación Lineal que se puede solucionar con la paquetería existente, además su medida del riesgo es tan buena como la del modelo clásico de Markowitz.

Estas razones hacen ver que el modelo MAD es una alternativa viable con grandes posibilidades de aplicación en la práctica.

7.9 LOS MODELOS DE VAN HORNE Y DE BENISHAY

Van Horne propone un método para evaluar combinaciones de inversiones cuando los flujos de fondos no son conocidos bajo certidumbre. En este método se estudian los incrementos de contribución, tanto al valor presente neto esperado como a la variancia, de las posibles combinaciones de las inversiones; tomando en cuenta los objetivos de la institución o empresa como un todo sobre el cual debe medirse la efectividad de cada contribución. De esta manera diversificando sus inversiones se logra que la organización logre la combinación más deseable de valor presente neto y riesgo en las inversiones.

Para ello considera, para una propuesta de inversión aislada, que el valor presente esperado se encuentra dado por la serie infinita.

$$U_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{(1 + i)^n}$$

en donde f_n es el flujo neto de fondos en el período n (ingresos menos egresos) i es una tasa de descuento determinista. La variancia la obtiene mediante.

$$\sigma^2 = \sum_x (U^x - U_p)^2 P_x$$

en donde U^x sería el valor presente de una serie de flujos de fondos que cubrieran todos los períodos en consideración y P_x sería la probabilidad de que tal serie ocurriera en la realidad.

Puesto que el valor presente esperado y la variancia suministran suficiente información sobre el riesgo de adoptar una cierta inversión, si el ejecutivo las conoce, se encuentra en condiciones, de seleccionarla o no. Es claro que esto será para el caso de inversiones aisladas; formulando la correspondiente distribución de probabilidad (normal) cuando son conocidos los parámetros.

Para el caso en que se plantean combinaciones se hace nuevamente necesario considerar las covariancias δ_{kj}, que, como es sabido, pueden obtenerse a partir de las variancias δ_k y δ_j mediante

$$\delta_{kj} = \delta_j \, \delta_k \, r_{kj}$$

en donde r_{kj} es el coeficiente de correlación entre los dos valores presentes netos esperados. El paso por la covariancia es obligado, puesto que, como también es sabido, las variancias no son aditivas sino que

$$V = \sum_j \sum_k \delta_{jk}$$

Las variancias se obtienen con la expresión correspondiente ya señalada. Por lo que hace al coeficiente de correlación, este puede obtenerse a partir de datos históricos o con estimaciones futuras insesgadas o, mejor, con una combinación de las dos fuentes de datos.

El paso siguiente es la evaluación de todas las posibles combinaciones de inversiones, para ello se obtendrá una región con los puntos (μ, δ^2) de todas las posibles combinaciones definiendo, con el criterio de Markowitz, la curva de combinaciones eficientes. Según este criterio, una combinación no es eficiente si existe otra que para la misma variancia suministra mayor valor presente neto esperado o, para un mismo valor presente neto esperado, existe otra de menor variancia.

Por último, conocida la curva de combinaciones eficientes, la selección de una en particular, se hará de acuerdo con índices de aversión al riesgo de la organización, así, para alguna con criterio conservador (podría ser una institución de carácter oficial) una combinación eficiente cuya variancia sea pequeña, podría ser más atractiva que otra, aunque esta última suministrara un mayor valor presente neto esperado. Y, es claro, podría presentarse el caso contrario en una empresa cuyo deseo de lograr mayor utilidad le hiciera preferir una combinación con mayor riesgo (medido por la variancia).

Como ha sido visto, Van Horne considera a la tasa de interés como determinista, ésto es, el riesgo y la incertidumbre no tienen efecto sobre ella; sin embargo, Benishay, generaliza el modelo considerando aún esta posibilidad.

En su trabajo Benishay trata tres diferentes casos.

a) Flujo de fondos, tasa de interés, principio y fin del período de recuperación, todos ellos deterministas.

b) Tasa de interés determinista; principio y fin del período de recuperación, así como el flujo de fondos, probabilistas.

c) Todo aleatorio: principio y fin del período de recuperación flujo de fondos y tasa de interés.

La notación empleada es como sigue:

- M = principio del período de recuperación
- N = fin del período de recuperación
- X = flujo de fondos
- r = tasa de interés
- W = valor presente de la inversión
- $E(W)$ = valor presente esperado (esperanza matemática del valor presente).
- $V(W)$ = variancia del valor presente esperado

$$R_i = \frac{1}{(1 + r)^i}$$

$$R^1_{1i} = R_1 + R_2 + \ldots + R_i$$

$$R^{11}_{1i} = R_1^2 + R_2^2 + \ldots + R_i^2$$

Para el caso (a) llega a la bien conocida expresión

$$W_{MN} = \frac{X}{(1 + r)^M} + \frac{X}{(1 + r)^{M+1}} + \ldots + \frac{X}{(1 + r)^N}$$

Aunque hace el comentario de que cuando se emplea el caso determinista todos los riesgos se **apilan** en la tasa de descuento r. Señala que esta se considera de manera que la intuición o el **sentimiento** definen cuál es la más apropiada suponiendo que su valor compensa por la incertidumbre implícita en la selección. Hace ver que en este caso se comete un error de fondo al ignorar el riesgo latente al adoptar X, M, N y r.

Para el caso (b) llega a:

$$E(W_{MNX}) = E(X)\ [E(R^{1}_{1,M-1})]$$

$$V(W_{MNX}) = [E(X)]^{2}\ [V(R^{1}_{1N}) + V(R^{1}_{1,M-1})] + V(X)\ [E(R^{11}_{1N}) - E(R^{11}_{1,M-1})]$$

Señala que N, M y X deben ser serialmente independientes, r es determinista, conocida con certeza y no ajustada por concepto de riesgo; implica que el flujo de fondos también es conocido con certeza.

Para el caso (c) obtiene:

$$E(W_{MNXr}) = E(X)E\left\{ [E(R^{1}_{1N})]\ r \right\} - E(X)E\left\{ [E(R^{1}_{1,M-1})]\ r \right\}$$

$$V(W_{MNXr}) = [E(X)]^{2}\ V\left\{ [E(X)\ E\ (R^{1}_{1N}) - E(X)E(R^{1}_{1,M-1})]\ r \right\} +$$

$$+ [E(X)]^{2}\left\{ E\ [V(R^{1}_{1N})]\ r \right\} + V(X)\left\{ E\ [E(R^{11}_{1N})]\ r + E\ [R^{11}_{1,N-1}]\ r \right\}$$

Una combinación de este modelo con el de Van Horne permitiría encontrar la curva de inversiones eficientes y de ahí seleccionar una de ellas, según la aversión al riesgo del ejecutivo.

7.10 MODELO CAPM

En este apartado se expone la lógica fundamental del *modelo de fijación de precios de activos de capital* (CAPM). La figura 7.14 muestra un conjunto factible de carteras de activos con riesgo y un conjunto de curvas de indiferencia (I_1, I_2, I_3), que representan las ventajas y desventajas que existen entre el riesgo y el rendimiento respecto de un inversionista. El punto N, donde la curva de utilidad es tangente a la curva de oportunidades de cartera, ANMB (que es precisamente la frontera eficiente para ese conjunto), representa un equilibrio: es el punto en que el inversionista obtiene el rendimiento más alto por una cantidad determinada de riesgo (σ_N) o el riesgo más bajo a la vez que obtiene un rendimiento esperado específico $E(R_N)$.

Sin embargo, el inversionista puede tener mejores alternativas que la cartera N si alcanza una curva de indiferencia más alta. Además de los valores de riesgo que están representados en el conjunto factible de carteras, existe un activo libre de riesgo que otorga un rendimiento R_F; este también se muestra en la figura 7.14. Con la alternativa adicional de invertir en el activo libre de riesgo, el inversionista puede crear una nueva cartera que combine el activo libre de riesgo con una cartera de activo con riesgo. Esto permite al individuo poder alcanzar cualquier combinación de riesgo y de rendimiento que se encuentre a lo largo de la línea recta R_FZ y que tenga una tangente con la frontera eficiente. Tal punto de tangencia ocurre en M. todas las carteras que se encuentren sobre la línea R_FMZ son preferibles a las demás oportunidades de cartera con riesgo que se encuentran sobre la curva ANMB (excepto la cartera M, que es común a ambas); los puntos que se encuentren sobre la línea R_FMZ representan las combinaciones factibles más altas de riesgo y de rendimiento.

Dado el nuevo conjunto de oportunidad R_FMZ, el inversionista se desplazará hacia el punto P, sobre una curva de indiferencia más alta de riesgo y rendimiento. Obsérvese que la línea R_FMZ domina las oportunidades de cartera ANMB. En general, si los inversionistas pueden incluir el valor libre de riesgo y una fracción de la cartera con riego, M, en sus propias carteras, tendrán la oportunidad de desplazarse hacia un punto como P.

Equilibrio del inversionista combinando el activo libre de riesgo.

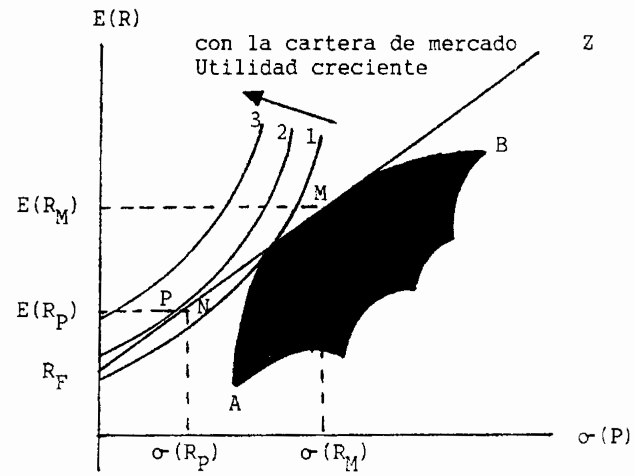


Figura 7.14

Bajo las condiciones que se exponen en la figura 7.14, todos los inversionistas mantendrían carteras que se encontrarán sobre la línea $R_F MZ$; esto implica que conservarían sólo carteras eficaces, las cuales son combinaciones lineales del valor libre de riesgo y de la cartera con riesgo M. Para que el mercado de capitales (operaciones a largo plazo) esté en equilibrio, M debe ser una cartera que contenga cada activo en proporción exacta a la fracción del activo, tomando como base el valor total de mercado de todos los activos; es decir, si el activo j es el ω % del valor total de mercado de todos los activos de inversión, entonces el ω % de la cartera de mercado M estará formado por el activo j. La ubicación particular de un individuo sobre la línea estará determinada por el punto en el cual la curva de indiferencia de ese individuo sea tangente a la línea, y esto a la vez reflejará la actitud de esta persona hacia el riesgo.

La línea $R_F MZ$ de la figura 7.14 queda determinada por la siguiente ecuación:

$$E(R_p) = R_F + \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M} \sigma_P \qquad (7.2)$$

Por lo tanto, el rendimiento esperado sobre cualquier cartera es igual a la tasa libre de riesgo, más una prima de riesgo igual a $[E(R_M) - R_F]/\sigma_M$ multiplicada por la desviación estándar de la cartera. Por lo tanto, la *recta del mercado de capitales* (CML) para carteras eficaces (o eficientes) mantiene una relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo, y queda determinada de la siguiente forma:

$$E(R_p) = R_F + \lambda^* \sigma_P \qquad (7.3)$$

Donde:

$E(R_P)$ = Rendimiento esperado sobre una cartera eficaz

R_F = Tasa de interés libre de riesgo

λ^* = Precio de mercado del riesgo $\lambda^* = [E(R_M) - R_F]/\sigma_M$

σ_P = Desviación estándar de los rendimientos provenientes de una cartera eficaz

$E(R_M)$ = Rendimiento esperado sobre la cartera de mercado

σ_M = Desviación estándar de los rendimientos provenientes de la cartera de mercado

Todas las carteras eficaces, incluyendo la cartera de mercado, yacen sobre CML. Por lo tanto:

$$E(R_M) = R_F + \lambda^{*}\sigma_M$$

Las ecuaciones (7.3) y (7.4) indican que el rendimiento esperado sobre una cartera eficaz en equilibrio es igual a un rendimiento libre de riesgo más el precio de mercado del reisgo multiplicado por la desviación estándar de los rendimientos de la cartera. Esta relación se dibuja en la figura 7.15 CML se ha trazado como una línea recta que tiene una intercepción en R_F, el rendimiento libre de riesgo, y una pendiente igual al precio de mercado del riesgo λ^{*}, que es la prima de riesgo del mercado $[E(R_M) - R_F]$ dividida entre σ_M. De tal forma, el precio de mercado del riesgo, λ^{*}, es una prima de riesgo normalizada.

El precio de mercado del riesgo refleja las actitudes de los individuos en forma conjunta hacia el riesgo.

Este tipo de modelos constituye una extensión para los modelos como el de Markowitz o el de Desviación Media Absoluta que, bajo el marco de los modelos CAPM, se ven enriquecidos.

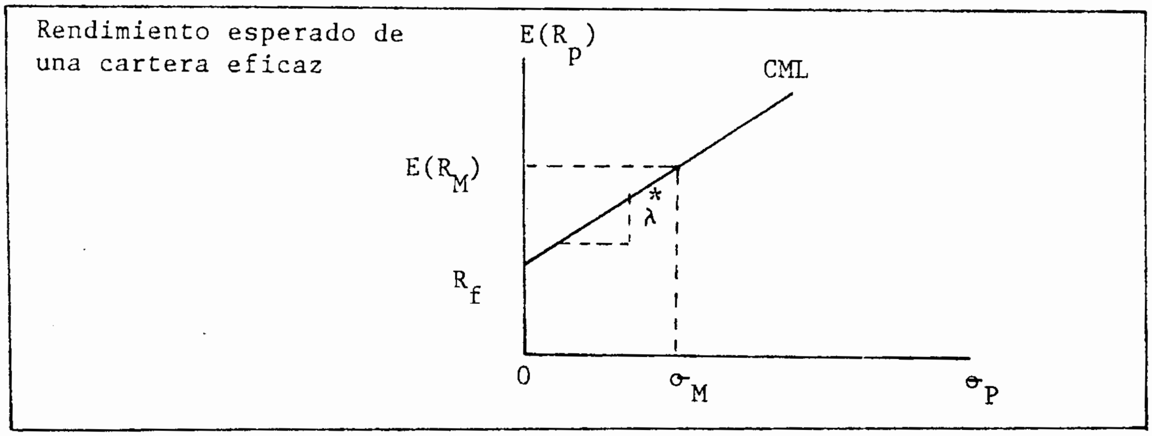


Figura 7.15

7.11 MODELOS APT

Como una generalización para los modelos CAPM, presentados en el apartado anterior, se tienen los modelos llamados APT (modelos de fijación de precios por arbitraje). Mientras que en los modelos CAPM la tasa de rendimiento de la cartera es una función lineal de un solo factor (la tasa de rendimiento de la cartera de mercado), en los modelos APT esta dependencia lineal se extiende a k factores, como se muestra a continuación:

$$\bar{R}_i = E(\bar{R}_i) + b_{i1}\bar{F}_i + \ldots + b_{ik}F_k + \bar{\varepsilon}_i$$

donde:

$\bar{R}_i$ = tasa de rendimiento aleatoria del i-ésimo activo.

$E(\bar{R}_i)$ = valor esperado de la tasa de rendimiento del i-ésimo activo.

b_{ik} = sensibilidad del rendimiento del i-ésimo activo con respecto al k-ésimo factor.

F_k = k-ésimo factor (de media cero) común a los rendimientos de todos los activos bajo consideración.

$\bar{\varepsilon}_i$ = término aleatorio de ruido (con media cero) para el i-ésimo activo.

Estas carteras reciben el nombre de carteras con arbitraje. Para construirlas se define:

W_i = cambio en la cantidad de dinero invertida en el i-ésimo activo, expresada como porcentaje del total a invertir.

Como estas carteras no requieren de dinero extra, normalmente se forman vendiendo algunos de sus activos para comprar otros. El cambio total en la cantidad invertida debe ser cero, así que se tiene la condición:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 0 \tag{7.5}$$

Si hay n activos en la cartera con arbitraje, entonces el rendimiento adicional ganado es:

$$\bar{R}_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{R}_i$$

$$= \sum_i w_i E(\bar{R}_i) + \sum_i w_i b_{i1}\bar{F}_1 + \ldots + \sum_i w_i b_{ik}\bar{F}_k + \sum_i w_i \bar{\varepsilon}_i$$

Por otro lado, para obtener una cartera con arbitraje libre de riesgo se deben eliminar tanto los riesgos sistemáticos como los no sistemáticos. Esto se logra estableciendo tres condiciones:

i) seleccionando cambios w_i que sean pequeños.

ii) diversificando la cartera mediante la inclusión de un gran número de activos.

iii) seleccionando w_i para cada factor k, de modo que la suma ponderada de los componentes del riesgo sistemático, b_k, sea cero.

Es decir:

$$W_i \cong 1/n$$

n es un número grande

$$\sum_i w_i b_{ik} = 0, \quad \text{para toda } k \tag{7.6}$$

Para n grande, la Ley de los Grandes Números garantiza que el promedio ponderado de los errores no sistemáticos, $\bar{\varepsilon}_i$, se aproxima a cero. De modo que resulta:

$$\bar{R}_p = \sum_i w_i E(\bar{R}_i) + \sum_i w_i b_{i1} \bar{F}_1 + \ldots + \sum_i w_i b_{ik} \bar{F}_k$$

A primera vista, el rendimiento de la cartera con arbitraje parece ser una variable aleatoria, pero debido a la condición iii) anterior se elimina todo el riesgo sistemático. Es decir, R_p, se convierte en una constante gracias a una adecuada selección de las w_i; por lo tanto se tiene:

Fa 1

$$R_p = \sum_i w_i E(\bar{R}_i)$$

Resumiendo se puede decir que las carteras con arbitraje, construidas como se ha indicado, tienen las siguientes dos propiedades que las caracterizan:

A) No requieren dinero extra.

B) Están libres de riesgo.

Para que el mercado se encuentre en equilibrio, se debe cumplir con:

$$R_p = \sum_i w_i E(\bar{R}_i) = 0 \qquad (7.7)$$

Como una consecuencia de las ecuaciones (7.5), (7.6) y (7.7) resulta que el rendimiento esperado debe ser una combinación lineal de los coeficientes b_i, es decir, debe existir constantes λ_0, ..., λ_k tales que:

$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \ldots + \lambda_k b_{ik}$$

Si existe un activo libre de riesgo con rendimiento R_f, entonces $b_{ok} = 0$, $R_f = \lambda_0$, y se tiene:

$$E(R_i) - R_f = \lambda_1 b_{i1} + \ldots + \lambda_k b_{ik}$$

La figura (7.16) ilustra esta última relación para el caso de un solo factor estocástico, el k-ésimo. En equilibrio, todos los activos deben caer sobre la línea de precios con arbitraje; λ representa el premio por el riesgo para ese factor.

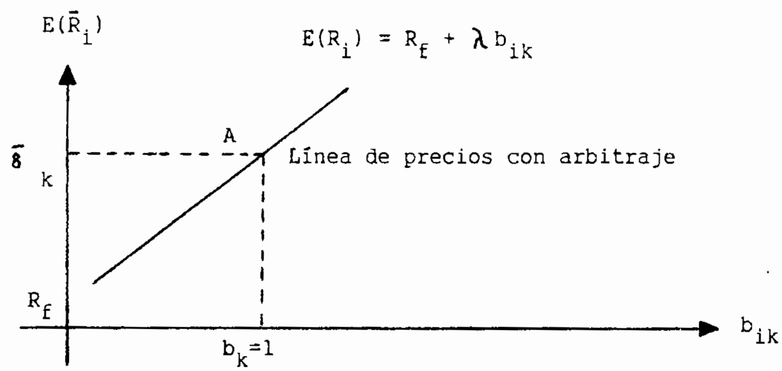


Figura 7.16

Para el caso de la figura, la última ecuación se puede reescribir como:

$$E(R_i) = R_f + \left[\bar{\delta}_k - R_f \right] b_{ik}$$

donde:

$\bar{\delta}_k$ = rendimiento esperado de una cartera con sensibilidad unitaria con respecto al k-ésimo factor y cero con respecto a todos los demás.

Por lo que resulta:

$$\lambda_k = \bar{\delta}_k - R_f$$

Para el caso general, el modelo APT puede escribirse como:

$$E(R_i) - R_f = \left[\bar{\delta}_1 - R_f \right] b_{i1} + \ldots + \left[\bar{\delta}_k - R_f \right] b_{ik}$$

Finalmente se resumen a continuación las características que permiten afirmar que los modelos APT constituyen una generalización para los modelos CAPM, conformando una teoría más amplia:

1. APT no hace suposiciones sobre la distribución empírica de los rendimientos de los activos.

2. APT permite que el equilibrio en el rendimiento de los activos dependa (linealmente) de muchos factores, en vez de uno solo como lo hace CAPM.

3. No hay un rendimiento especial para la cartera de mercado en APT mientras que en CAPM es fundamental que esta cartera sea eficiente.

8. USO DE LA TEORIA DE DECISIONES BAYESIANAS

8.1 LA FORMULA DE BAYES

Al manejar la demanda que influye sobre un sistema, una muy útil herramienta la suministra la Teoría de Decisiones Bayesianas ya que permite tanto el ir manejando el conocimiento del estado probable de la demanda colectado inicialmente por medios estadísticos, como el incluir la opinión subjetiva sobre las acciones a tomar dado un estado de la demanda. Se obtienen probabilidades *a posteriori* sobre dichos estados a partir de las probabilidades *a priori*, tanto objetivas como subjetivas del inversionista.

La fórmula de Bayes resulta así:

$$P(E_i|a_j) = \frac{P(a_j|E_i)\,P(E_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(a_j|E_i)P(E_i)} \quad ; \; j = 1, \ldots, n$$

en donde:

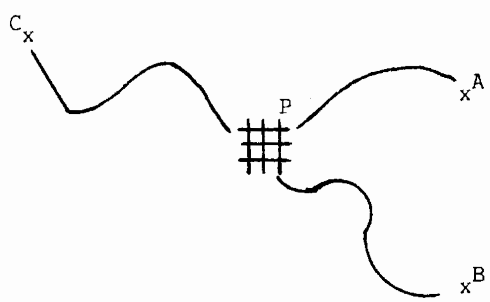
$P(E_i|a_j)$ = Probabilidad *a posteriori* de que la demanda se encuentre en un estado E_i cuando se ha tomado la acción a_j.

$P(a_j|E_i)$ = Probabilidad *a priori* de llevar a cabo la acción a_j si la demanda se encuentra en un estado E_i.

$P(E_i)$ = Probabilidad *a priori* de que la demanda se encuentre en un estado E_i.

8.2 APLICACION A LA PLANEACION CARRETERA

Se desea definir el orden en que deben llevarse a cabo las inversiones, en tres períodos sucesivos, para la construcción de las carreteras desde una capital de estado P, a las ciudades A, B y C, cuando la demanda puede ser fuerte (E_1) o débil (E_2). En términos de vehículos por día la demanda se expresa mediante:



$$\bar{D} = \begin{array}{c} \\ P-A \\ P-B \\ P-C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 200 \\ 500 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los aforos de tránsito permiten tipificarla *a priori* en [0.5, 0.5]. Las inversiones anuales requeridas para la construcción son respectivamente 700,000, 1'000,000, 1'000,000. Considerando un beneficio por viaje y por vehículo de 10, los beneficios netos resultan

$$
B = \begin{array}{c} \\ P-A \\ P-B \\ P-C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3.95 & 0.3 \\ 4.60 & -2.7 \\ 8.25 & -6.35 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Considerando, por simplicidad, beneficios no descontados en la vida útil de la carretera.

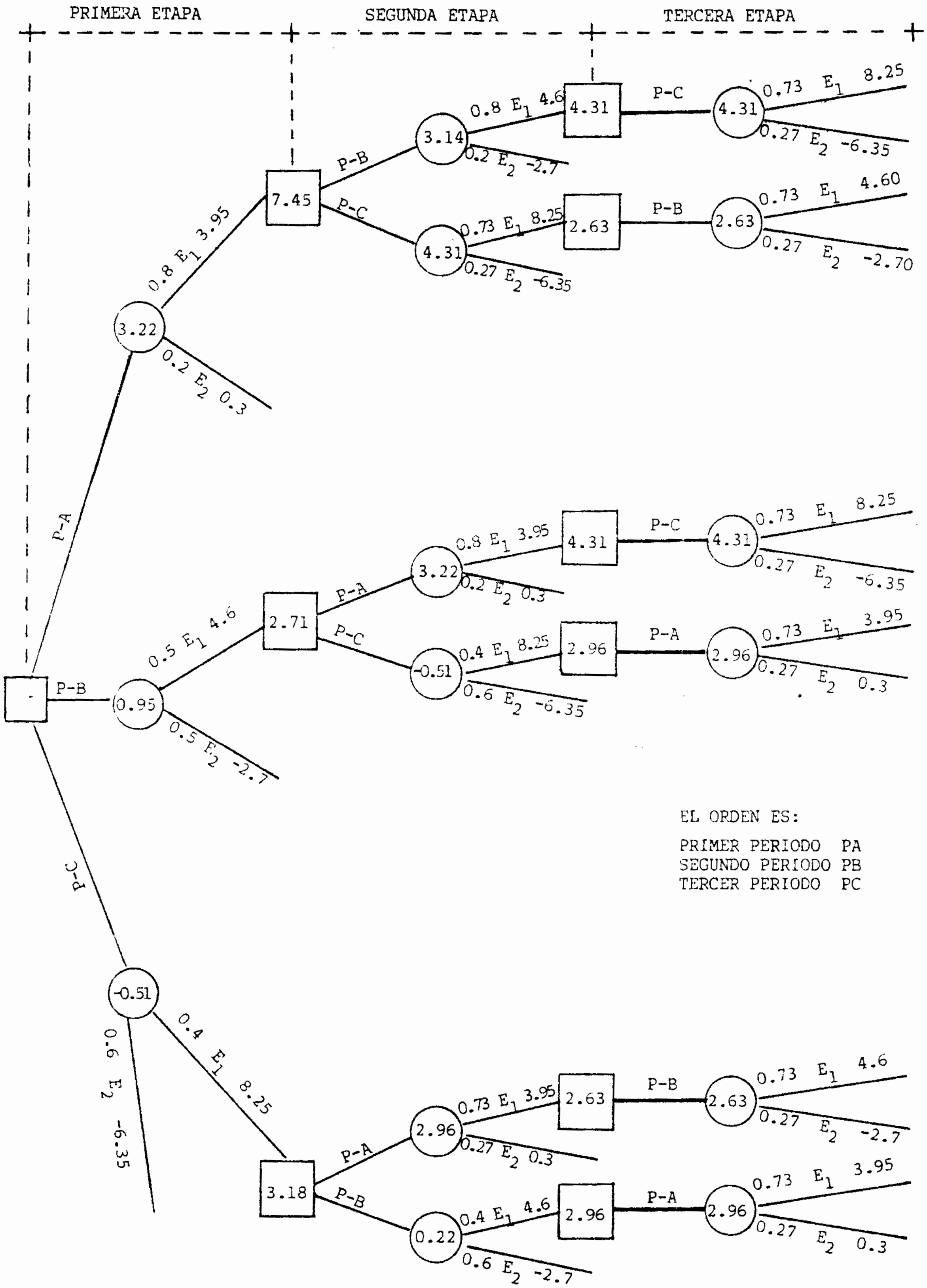
La opinión subjetiva y *a priori* de los inversionistas sobre la demanda (propensión a tomar una decisión) es como sigue:

$$
B = \begin{array}{c} \\ P-A \\ P-B \\ P-C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}
$$

El criterio de selección es el usual de maximizar la esperanza de los beneficios.

Las probabilidades *a posteriori* son:

$$
P(E_1 | a_1) = \frac{0.8 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5} = 0.8
$$



PRIMERA ETAPA
SEGUNDA ETAPA
TERCERA ETAPA
P-A
P-B
P-C
3.22
0.8 E1 3.95
0.2 E2 0.3
7.45
3.14
0.8 E1 4.6
0.2 E2 -2.7
4.31
0.73 E1 8.25
0.27 E2 -6.35
4.31
4.31
0.73 E1 8.25
0.27 E2 -6.35
2.63
2.63
0.73 E1 4.60
0.27 E2 -2.70
0.95
0.5 E1 4.6
0.5 E2 -2.7
2.71
3.22
0.8 E1 3.95
0.2 E2 0.3
4.31
4.31
0.73 E1 8.25
0.27 E2 -6.35
-0.51
0.4 E1 8.25
0.6 E2 -6.35
2.96
2.96
0.73 E1 3.95
0.27 E2 0.3
-0.51
0.4 E1 8.25
0.6 E2 -6.35
3.18
2.96
0.73 E1 3.95
0.27 E2 0.3
2.63
2.63
0.73 E1 4.6
0.27 E2 -2.7
0.22
0.4 E1 4.6
0.6 E2 -2.7
2.96
2.96
0.73 E1 3.95
0.27 E2 0.3
EL ORDEN ES:
PRIMER PERIODO PA
SEGUNDO PERIODO PB
TERCER PERIODO PC

Figura 8.1

$$P(E_1|a_2) = \frac{0.5 \times 0.5}{0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5} = 0.5$$

$$P(E_1|a_3) = \frac{0.4 \times 0.5}{0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5} = 0.4$$

$$P(E_1|a_1 a_2) = \frac{0.8 \times 0.5 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5 \times 0.5} = 0.8$$

$$P(E_1|a_1 a_3) = \frac{0.8 \times 0.4 \times 0.5}{0.8 \times 0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.2 \times 0.5} = 0.73$$

$$P(E_1|a_2 a_3) = \frac{0.5 \times 0.4 \times 0.5}{0.5 \times 0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5} = 0.4$$

$$P(E_1|a_1 a_2 a_3) = \frac{0.8 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5 \times 0.6 \times 0.5} = 0.73$$

El árbol de decisiones se muestra en la figura 8.1, así como el orden resultante para las inversiones.

8.3 TIPIFICACION DE LA DEMANDA

Dada la incertidumbre en la cuantificación de la demanda, se acostumbra tipificarla en los estados $E_1 \ldots, E_n$ y estudiar los cambios de estado en el transcurso del tiempo. A la vez, conviene distinguir etapas (períodos en el horizonte de planeación) al estudiar la demanda, y cuantificar la frecuencia de los cambios, al transcurrir las diferentes etapas, con objeto de estimar una probabilidad para cada cambio de estado. Se estima así la probabilidad de transición de un estado E_i a otro E_j. La matriz estocástica definida por las distintas probabilidades recibe el nombre de matriz de transiciones.

El vector fijo, al considerar comportamiento ergódico de la Cadena de Markov especificada por la matriz, suministra una estimación de la probabilidad de que la demanda se encuentre en alguno de los estados $E_1, \ldots, E_n$.

EJEMPLO 8.1 Estimar la matriz de transiciones para los estados E_1, E_2, E_3 de la demanda en una carretera y tipificarlos mediante una estimación de su probabilidad de ocurrencia. Si en 1978 fue baja (E_1), en 1979 fue alta (E_3), en 1980 baja (E_1), en 1981 media (E_2), baja en 1982, alta en 1982, media en 1984, media en 1985, alta en 1986, alta en 1987, y baja en 1988.

Se tiene:

AÑO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ESTADO	E_1	E_3	E_1	E_2	E_1	E_3	E_2	E_2	E_3	E_3	E_1

que conduce a la siguiente tabla de cambios

	E_1	E_2	E_3
E_1	0	1	2
E_2	1	1	1
E_3	2	1	1

luego, con base en la experiencia disponible, una estimación de la matriz de transición entre estados es:

$$\bar{T}r = \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline E_1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ E_2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ E_3 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Para tipificar la demanda se planteará:

$$[x,\ y,\ 1-x-y] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = [x,\ y,\ 1-x-y]$$

que conduce a $x = 0.30$, $y = 0.30$.

Luego, se estima que los estados de la demanda se pueden tipificar de la siguiente manera

Baja	(E_1)	30%
Media	(E_2)	30%
Alta	(E_3)	40%

y trabajar con el vector estocástico [0.30, 0.30, 0.40]

8.4 PROCESO DECISIONAL DISCRETO

Dado que la demanda generalmente cambia de estado al variar el tiempo, el inversionista congruentemente debe tomar decisiones en varios puntos en el tiempo. Se ve así confrontado con un proceso decisional discreto.

En un proceso decisional discreto se distinguen cuatro conceptos: etapa, estado, transición y valor. Intuitivamente etapa es un período cualquiera en el horizonte del proceso, el estado expresa las condiciones en que se encuentra el proceso, la transición determina el estado en que se encuentra un proceso o al menos señala la probabilidad de que para una etapa dada el proceso se encuentra en un estado dado. El valor es un índice de la utilidad que, para el que toma la decisión, implica un cambio de estado del proceso.

Rigurosamente un proceso decisional discreto se define mediante un conjunto de números naturales $T = \{1, 2, \ldots, t, \ldots, \}$ llamado de índices de estado, un espacio de estados $S = \{1, 2, \ldots, s, \ldots, \}$ una función $f(s, t)$ cuyo dominio es TxS llamada la transición y una segunda función $F(s, t)$ con el mismo dominio.

Si la función $F(s, t)$ es escalar, esto es, a cada par (s, t) corresponde un solo número real se dice que el proceso es determinista. Por el contrario, si la función es vectorial, ésto es, a cada par (s, t) le corresponde un vector y éste es estocástico, se dice que el proceso es estocástico.

A un proceso decisional discreto se le llama histórico cuando la transición no depende de los pares estado-etapa que siguen en la etapa bajo análisis sino únicamente de los pares anteriores a ella. En particular se dirá que el proceso es Markoviano cuando sólo depende del par inmediatamente anterior. Se dirá que el proceso es independiente cuando sólo depende de la etapa bajo análisis.

Cuando la transición depende de todos los pares estado-etapa, se dirá que es un proceso general.

Dado que la demanda no se puede definir con precisión y sólo se aspira a conocer la probabilidad de que se encuentre en un cierto estado, los procesos decisionales discretos que se presentan al analizar inversiones son de tipo estocástico.

8.5 OBJETIVO AL ANALIZAR INVERSIONES BAJO LA INTERVENCION DE LA DEMANDA

El objetivo primordial que busca un inversionista mediante un proceso decisional discreto, es definir qué acción debe llevar a cabo en cada etapa para maximizar los beneficios acumulados esperados (esperanza matemática de los beneficios acumulados) al finalizar el proceso y conforme al estado en que se encuentre la demanda.

Dado que el proceso decisional discreto es eminentemente dinámico, no es de extrañar que una de las herramientas matemáticas más eficientes para su estudio sea la Programación Dinámica.

8.6 DEMANDA NO TIPIFICADA, FUNCION DE TRANSICION CONSTANTE

El caso más simple ocurre cuando la carencia de estudios estadísticos previos impide tipificar la demanda; los estados de la misma corresponden a apreciaciones sujetivas v.g. fuerte, débil, etc. Por otra parte, las probabilidades de transición de un estado a otro se juzga que se mantienen constantes a lo largo del proceso.

Para este caso, Howard demuestra que las acciones a tomar, con objeto de maximixar los beneficos acumulados esperados a final del proceso, se obtienen con la fórmula de recurrencia:

$$\Lambda_j(s) = \max_{x_j} f_s(x_j) \quad ; \quad s = 1,\ldots, m$$

$$\Lambda_t(s) = \max_{x_j} \left[\left\{ f_s(x_t) + \beta \sum_{k=1}^{m} \beta_{sk}(x_t) \, \Lambda_{t-1}(k) \right\} \right] \qquad \begin{array}{l} s = 1,\ldots, m \\ t = 2,\ldots, n \end{array}$$

en donde:

$\Lambda_t(s)$ = esperanza de los beneficios acumulados desde la etapa 1 hasta la t como función del estado inicial s.

$f_s(x_t)$ = beneficio esperado, cuando el proceso se encuentra en el estado s, por la decisión x_t tomada en la etapa t.

$\beta_{sk}(t)$ = probabilidad de que el proceso cambie del estado k en la etapa (t-1) al estado s en la etapa t cuando se toma la decisión x_t en la etapa t.

$\beta = \dfrac{1}{(1 + i)^t}$ factor de descuento.

En resumen, las fórmulas anteriores indican que para la primera etapa y para cada estado se consideren todas las posibles decisiones disponibles para dicha etapa. Para cada estado se seleccione la decisión que produce la mayor esperanza de beneficios. Que para todas las etapas subsecuentes se multipliquen las esperanzas de beneficios acumuladas máximas por las probabilidades de cambios de estado y se sumen. Al resultado de esta suma se le agregará la esperanza de beneficio máximo bajo cada una de las decisiones que se encuentran disponibles para dicha etapa. Obsérvese que:

$$f_s(x_1) = f_s(x_2) = \ldots = f_s(x_t) = \ldots = f_s(x_n)$$

8.7 USO COMBINADO DE DECISIONES BAYESIANAS Y PROCESOS MARKOVIANOS AL TRABAJAR CON LA DEMANDA TIPIFICADA

Al tratar de aplicar el modelo común para la toma de decisiones bajo incertidumbre se encuentra el siguiente panorama:

a) Existen estados de la demanda que condicionan las acciones a llevar a cabo.

b) Asociado a cada par acción-estado existe un resultado.

c) A cada resultado se le puede asociar un beneficio o un índice de utilidad.

d) La distribución de probabilidad para la demanda, de existir, es independiente de las acciones (*a priori*).

e) La definición y clasificación de estados de la demanda es arbitraria y vaga.

f) Los estados son tan generales y amplios que a un par acción-estado puede asociársele más de un resultado, o la distribución de la demanda es dependiente de alguna acción realizada.

g) El modelo usual de decisiones presupone que un inversionista primero selecciona información, posiblemente en forma secuencial, hasta colectar una cantidad óptima y después de esto lleva a cabo un acto que es el final del proceso de decisión; sin embargo, esto frecuentemente es falso. En general, una acción decidida en una etapa afecta las consecuencias inmediatas de su acto en la etapa y la nueva información concerniente al estado de la demanda en la que se basará para decisiones futuras.

Ying modifica el modelo de Howard buscando subsanar las deficiencias señaladas, apegándose más al proceso decisional discreto real y, permitiendo la modificación de las decisiones conforme se va logrando un mejor conocimiento de la tipificación de la demanda. Ying propone la siguiente formula de recurrencia:

$$\Lambda_t[\bar{P}_t(s|x_{it})\ \theta_{it}] = \max_{\bar{x}_t} \{\ f_s(\bar{x}_t)\ \}$$

$$\Lambda_t[\bar{P}_t(s)] = \max_{\bar{x}_t} \{\ f_s(x_t) + \beta \sum_{i=1}^{n} r_{ij}(t)\ \Lambda_{t+1}\ [\bar{P}_t(s|x_{it}, \theta_{jt})]$$

$$t = 1, \ldots, T-1$$

en donde:

β = factor de descuento.

$\bar{x}_t$ = $\{x_{1t}, \ldots, x_{nt}\}$= vector de decisiones disponible para la etapa t.

θ_t = $\{\theta_{1t}, \ldots, \theta_{nt}\}$= vector de consecuencias de las decisiones disponibles para la etapa.

$i=1,\ldots,n$ = índice de las decisiones.

$j=1,\ldots,n$ = índice de las consecuencias de las decisiones.

$t=1,\ldots,T$ = índice de las etapas.

$s=1,\ldots,m$ = índice de los estados de la demanda.

$\bar{P}_t(s)$ = vector de probabilidades de que la demanda se encuentre en cualquiera de los estados $\bar{S}$ en la etapa t.

$P_t(s|x_{it},\theta_{jt})$ = vector de probabilidades condicionales de que la demanda se encuentre *a posteriori* en cualquiera de los estados $\bar{S}$ cuando se ha tomado la decisión x_{it} con la consecuencia θ_{jt}, en la etapa t.

$$\bar{P}_t(s|x_{it},\ \theta_{jt}) = P_{t+1}(s)$$

$r_{ij}(t)$ = probabilidad, percibida al inicio de la etapa t de que la acción x_{it} tenga la consecuencia θ_{jt}.

$r_{ij}(t)$ = probabilidad de un evento compuesto por eventos mutuamente exclusivos.

$$r_{ij}(t) = \sum_{s=1}^{m} P_t(s)\ P^s_{ij}(t)$$

$P^s_{ij}(t)$ = probabilidad de que la decisión x_{it} tenga la consecuencia θ_{jt} en la etapa t cuando la demanda se encuentra en el estado s. Son probabilidades de transición y se mantienen constantes al variar t.

$b_{ij}(t)$ = beneficio o índice de utilidad logrado al tomar la decisión x_{it} y obtener la consecuencia θ_{jt}. Se mantienen constantes al variar t.

$f_s(x_{it})$ = $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}(t)b_{ij}(t)$ = esperanza de los beneficios en la etapa t al tomar la decisión x_{it} y encontrarse la demanda en el estado θ_{jt}.

$\Lambda_t[\bar{P}_t(s)]$ = esperanza de los beneficios acumulados desde la etapa t hasta la T.

Las probabilidades condicionales se obtienen con la fórmula de Bayes:

$$P_t(s|x_{it},\ \theta_{jt}) = \frac{P_t(s)\ P^2_{ij}(t)}{r_{ij}(t)}$$

Este modelo permite únicamente definir la mejor decisión al principio de la **primera** etapa, pero tomando en cuenta las consecuencias y los beneficios en todo el horizonte de planeación.

EJEMPLO 8.2 Aplicación a la Planeación de Tarifas. Considerando que cada dos años se revisan las tarifas de un camino de cuota y tomando como horizonte de planeación un sexenio, definir cuál es la mejor acción a llevar a cabo al principio del mismo de entre duplicar la tarifa existente o mantener la actual. Las consecuencias de esta decisión pueden ser tanto incrementar como disminuir la circulación actual. Los beneficios que el par acción-consecuencia puede suministrar, se reflejan mediante su índice de utilidad en la siguiente tabla.

A	C O N S E C U E N C I A			
C		INCREMENTAR	DISMINUIR	
C				
I	a_1	2	-1	(DUPLICAR TARIFA)
O	a_2	1	-2	(MANTENER TARIFA)
N				
		θ_1	θ_2	

La decisión deberá analizarse considerando tres posibles estados de la demanda: baja, alta y media. La tipificación *a priori* arrojó los siguientes resultados respectivamente [0.33, 0.34, 0.33]. Las probabilidades *a priori*, de obtener los beneficios mostrados en la tabla, en opinión de los expertos son como sigue:

Para demanda baja (s = 1)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para demanda alta (s = 2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para demanda media (s = 3)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

El primer paso para resolver este problema es calcular, para cada etapa, la probabilidad de que la acción tenga la consecuencia prevista.

Se tiene:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0.33, \ 0.34, \ 0.33 \end{bmatrix}$$

$$P^1_{ij} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad P^2_{ij} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad P^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\overline{R}(1) = [r_{ij}(1)] = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.33(0.3)+0.34(0.4)+(0.33)0.5 \ , & 0.33(0.7)+(0.34)0.6+(0.33)0.5 \\ 0.33(0.6)+0.34(0.8)+0.33(0.7) \ , & 0.33(0.4)+(0.34)0.2+(0.33)0.3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}(1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$p_1(1|a_1,\theta_1) = \frac{0.33 \times 0.3}{0.4} = 0.25 \qquad p_1(1|a_1,\theta_2) = 0.38$$

$$p_1(2|a_1,\theta_1) = \frac{0.34 \times 0.4}{0.4} = 0.34 \qquad p_1(2|a_1,\theta_2) = 0.35$$

$$p_1(3|a_1,\theta_1) = \frac{0.33 \times 0.5}{0.4} = 0.41 \qquad p_1(3|a_1,\theta_2) = 0.27$$

$$p_1(1|a_2,\theta_1) = 0.28 \qquad p_1(1|a_2,\theta_2) = 0.44$$

$$p_1(2|a_2,\theta_1) = 0.39 \qquad p_1(2|a_2,\theta_2) = 0.23$$

$$p_1(3|a_2,\theta_1) = 0.33 \qquad p_1(3|a_2,\theta_2) = 0.33$$

$$\bar{P}_2 = \begin{array}{c c c} & \theta_1 & \theta_2 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{bmatrix} [0.25,\ 0.34,\ 0.41] \\ [0.28,\ 0.39,\ 0.33] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [0.38,\ 0.35,\ 0.27] \\ [0.44,\ 0.23,\ 0.33] \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\bar{R}(2) = \begin{array}{c c c c c} & & \theta_1 & & \theta_2 \\ & & \overbrace{\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2} & & \overbrace{\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2} \\ a_1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. & a_1 & [0.42,\ 0.58] & a_1 & [0.39,\ 0.61] \\ & a_2 & [0.71,\ 0.29] & a_2 & [0.69,\ 0.31] \\ a_2 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. & a_1 & [0.40,\ 0.60] & a_1 & [0.39,\ 0.61] \\ & a_2 & [0.71,\ 0.29] & a_2 & [0.68,\ 0.32] \end{array}$$

Se tiene para $a_1 - \theta_1$ en la primera etapa:

$p_2(1|a_1,\theta_1) = 0.18$ $p_2(1|a_1,\theta_2) = 0.30$

$p_2(2|a_1,\theta_1) = 0.32$ $p_2(2|a_1,\theta_2) = 0.35$

$p_2(3|a_1,\theta_1) = 0.50$ $p_2(3|a_1,\theta_2) = 0.35$

$p_2(1|a_2,\theta_1) = 0.21$ $p_2(1|a_2,\theta_2) = 0.34$

$p_2(2|a_2,\theta_1) = 0.38$ $p_2(2|a_2,\theta_2) = 0.23$

$p_2(3|a_2,\theta_1) = 0.41$ $p_2(3|a_2,\theta_2) = 0.43$

Para $a_1 - \theta_2$ en la primera etapa:

$p_2(1|a_1,\theta_1) = 0.29$ $p_2(1|a_1,\theta_2) = 0.44$

$p_2(2|a_1,\theta_1) = 0.36$ $p_2(2|a_1,\theta_2) = 0.34$

$p_2(3|a_1,\theta_1) = 0.35$ $p_2(3|a_1,\theta_2) = 0.22$

$p_2(1|a_2,\theta_1) = 0.33$ $p_2(1|a_2,\theta_2) = 0.49$

$p_2(2|a_2,\theta_1) = 0.41$ $p_2(2|a_2,\theta_2) = 0.23$

$p_2(3|a_2,\theta_1) = 0.26$ $p_2(3|a_2,\theta_2) = 0.28$

Para a_2 -θ_1 en la primera etapa:

$p_2(1|a_1,\theta_1) = 0.21$ $p_2(1|a_1,\theta_2) = 0.33$

$p_2(2|a_1,\theta_1) = 0.39$ $p_2(2|a_1,\theta_2) = 0.39$

$p_2(3|a_1,\theta_1) = 0.40$ $p_2(3|a_1,\theta_2) = 0.29$

$p_2(1|a_2,\theta_1) = 0.24$ $p_2(1|a_2,\theta_2) = 0.39$

$p_2(2|a_2,\theta_1) = 0.44$ $p_2(2|a_2,\theta_2) = 0.27$

$p_2(3|a_2,\theta_1) = 0.32$ $p_2(3|a_2,\theta_2) = 0.34$

Para a_2 -θ_2 en la primera etapa:

$p_2(1|a_1,\theta_1) = 0.34$ $p_2(1|a_1,\theta_1) = 0.51$

$p_2(2|a_1,\theta_1) = 0.24$ $p_2(2|a_1,\theta_2) = 0.23$

$p_2(3|a_1,\theta_1) = 0.42$ $p_2(3|a_1,\theta_2) = 0.26$

$p_2(1|a_2,\theta_1) = 0.39$ $p_2(1|a_2,\theta_2) = 0.55$

$p_2(2|a_2,\theta_1) = 0.27$ $p_2(2|a_2,\theta_2) = 0.14$

$p_2(3|a_2,\theta_1) = 0.34$ $p_2(3|a_2,\theta_2) = 0.31$

De donde:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\begin{array}{cc} 1 & \qquad\qquad\qquad 2 \end{array}}^{1} & \overbrace{\begin{array}{cc} 1 & \qquad\qquad\qquad 2 \end{array}}^{2} \end{array} \\
\bar{P}_3 = & \left[\begin{array}{ccc}
a_1 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.18,0.32,0.50\,] & [\,0.30,0.35,0.35\,] \\ a_2 & [\,0.21,0.38,0.41\,] & [\,0.34,0.23,0.43\,] \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc} [\,0.29,0.36,0.35\,] & [\,0.44,0.34,0.22\,] \\ [\,0.33,0.41,0.26\,] & [\,0.49,0.23,0.28\,] \end{array}\right] \\
a_2 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.21,0.39,0.40\,] & [\,0.33,0.39,0.28\,] \\ a_2 & [\,0.24,0.44,0.32\,] & [\,0.39,0.27,0.34\,] \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc} [\,0.34,0.24,0.42\,] & [\,0.51,0.23,0.26\,] \\ [\,0.39,0.27,0.34\,] & [\,0.55,0.14,0.31\,] \end{array}\right]
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\begin{array}{cc} 1 & \qquad\qquad\qquad 2 \end{array}}^{1} & \overbrace{\begin{array}{cc} 1 & \qquad\qquad\qquad 2 \end{array}}^{2} \end{array} \\
\bar{R}(3) = & \left[\begin{array}{ccc}
a_1 & \left[\begin{array}{cc}
a_1 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.41,\ 0.59\,] & [\,0.40,\ 0.60\,] \\ a_2 & [\,0.70,\ 0.30\,] & [\,0.71,\ 0.29\,] \end{array}\right] \\
a_2 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.42,\ 0.58\,] & [\,0.41.\ 0.59\,] \\ a_2 & [\,0.72,\ 0.28\,] & [\,0.69,\ 0.31\,] \end{array}\right]
\end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc}
a_1 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.41,\ 0.59\,] & [\,0.38,\ 0.62\,] \\ a_2 & [\,0.71,\ 0.29\,] & [\,0.69,\ 0.31\,] \end{array}\right] \\
a_2 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.39,\ 0.61\,] & [\,0.38,\ 0.62\,] \\ a_2 & [\,0.71,\ 0.29\,] & [\,0.67,\ 0.33\,] \end{array}\right]
\end{array}\right] \\
a_2 & \left[\begin{array}{cc}
a_1 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.42,\ 0.58\,] & [\,0.40,\ 0.60\,] \\ a_2 & [\,0.72,\ 0.28\,] & [\,0.70,\ 0.29\,] \end{array}\right] \\
a_2 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.41,\ 0.59\,] & [\,0.40.\ 0.60\,] \\ a_2 & [\,0.72,\ 0.28\,] & [\,0.69,\ 0.31\,] \end{array}\right]
\end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc}
a_1 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.41,\ 0.59\,] & [\,0.38,\ 0.62\,] \\ a_2 & [\,0.69,\ 0.31\,] & [\,0.67,\ 0.33\,] \end{array}\right] \\
a_2 & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & [\,0.38,\ 0.62\,] & [\,0.38,\ 0.62\,] \\ a_2 & [\,0.66,\ 0.34\,] & [\,0.66,\ 0.34\,] \end{array}\right]
\end{array}\right]
\end{array}\right]
\end{array}
$$

El segundo paso es aplicar la fórmula de recurrencia tal y como se muestra en el árbol de la figura 8.2.

Obsérvese que por muy ligera ventaja la decisión se inclina hacia duplicar las tarifas al iniciar el sexenio. De hecho, la decisión no es clara y la conclusión es conocer mejor la demanda, y revisar el criterio de los expertos.

8.8 MATRICES DE INFORMACION SOBRE LA DEMANDA

Como fue posible apreciar en el ejemplo anterior, el conocimiento de la demanda desempeña un papel primordial para una buena toma de decisiones; la información por escasa que resulte deberá incorporarse en el proceso decisional. Surge así la necesidad de establecer un sistema de información sobre la demanda.

Ahora bien, un sistema de información se caracteriza por su matriz estructural. Esta matriz es estocástica y de probabilidades condicionales $[q_{ij}]$ ésto es, probabilidades de recibir un cierto mensaje dado un estado de la demanda.

$$q_{ij} = p\ (Y_i | s_j)$$

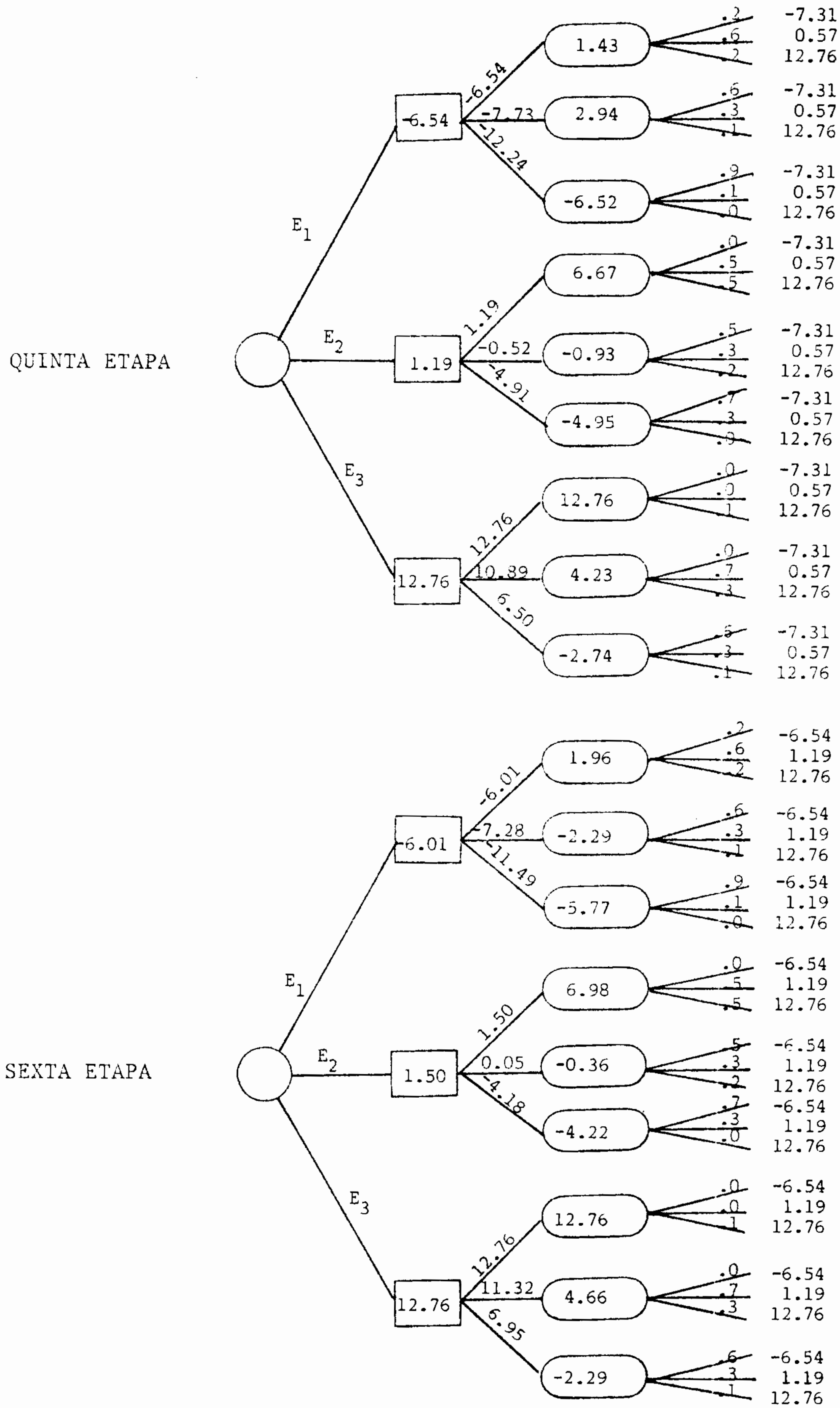


Figura 8.2 (continúa)

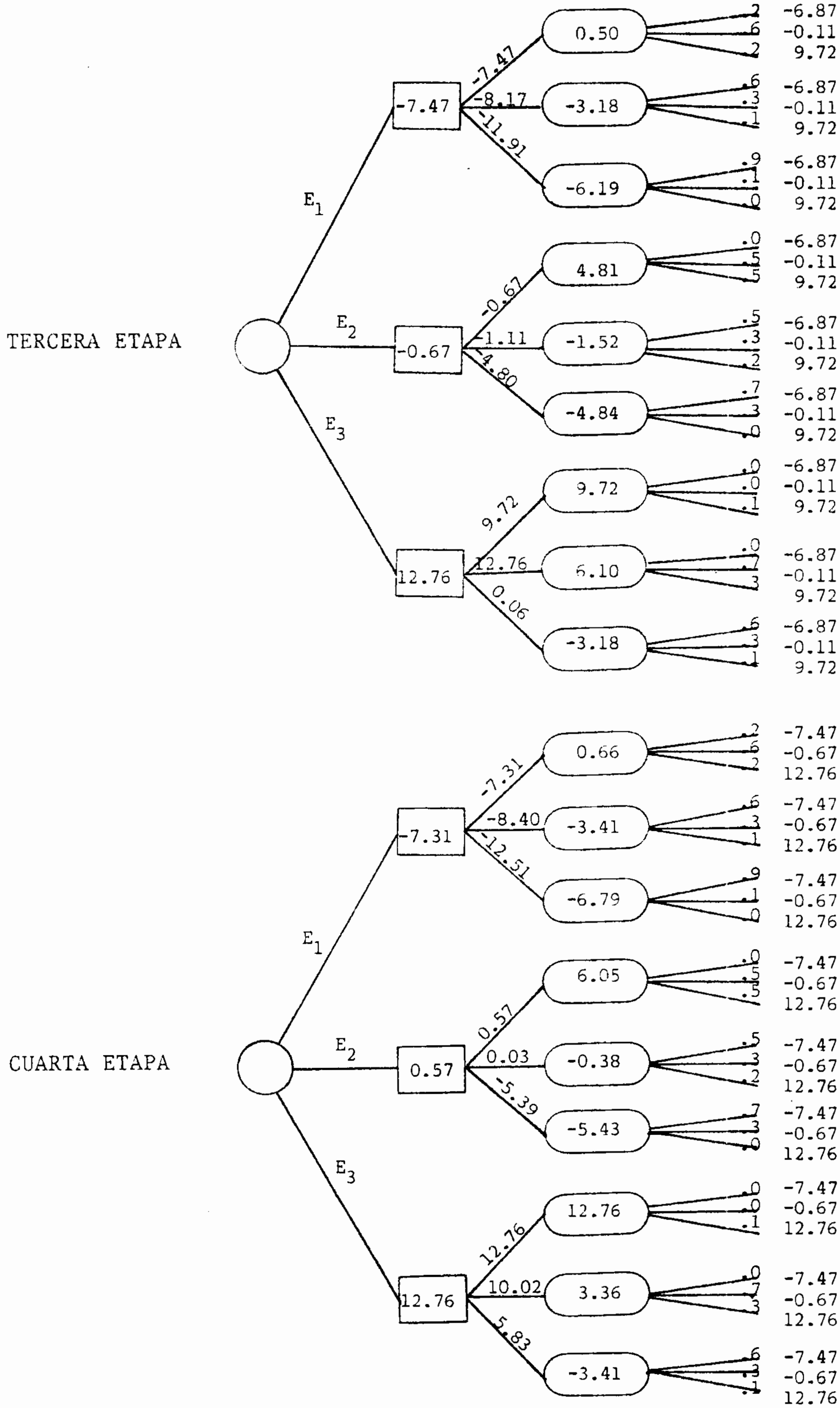


Figura 8.2 (continúa)

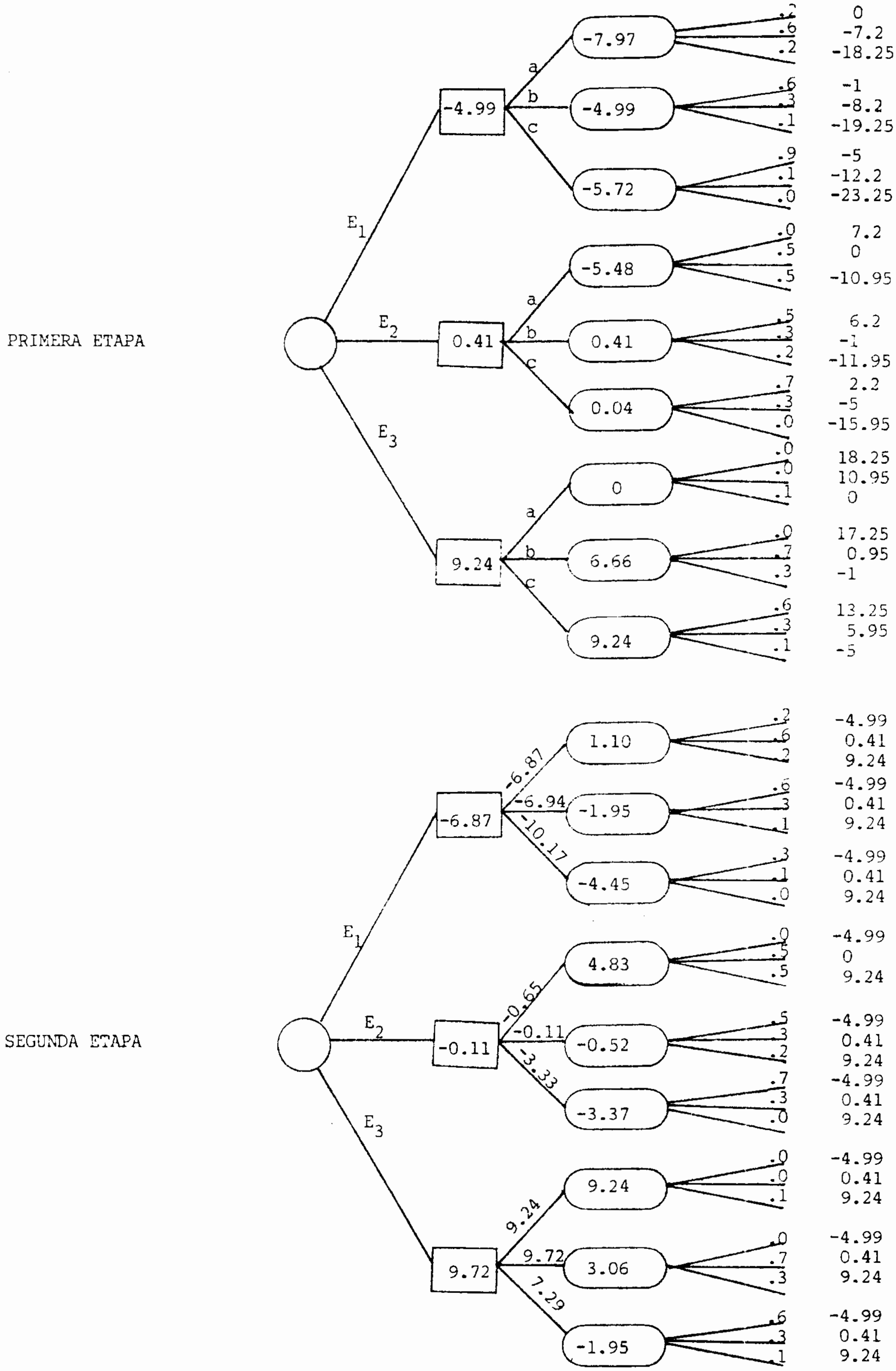


Figura 8.2 (concluye)

en donde y_i $(i = 1,\dots,L)$ son posibles mensajes y s_j $(j = 1,\dots,m)$ son posibles estados de la demanda. Se acostumbra representar una estuctura de información mediante η:

$$\eta = \bar{Q} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \dots & s_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2m} \\ - & - & - & - \\ q_{L3} & q_{L2} & \dots & q_{Lm} \end{bmatrix} \end{array}$$

Para una η dada la probabilidad *a priori* de recibir un mensaje es $p(Y_i|s_j)$ y la probabilidad *a posteriori* de que prevalezca un cierto estado de la demanda s_j habiéndose recibido un mensaje y_i se encuentra por la fórmula de Bayes.

$$p(s_j|y_i) = \frac{p(s_j)\ q_{ij}}{\sum_{h=1}^{m} [p(s_h)\ q_{ih}]}$$

Sea ahora b_{kh} el beneficio de llevar a cabo una acción a_k con una consecuencia θ_h. Entonces el beneficio esperado cuando el mensaje y_i ha sido recibido será:

$$W(a_k|y_i) = \sum_{h=1}^{n} r_{k_h}(y_i) b_{k_h}$$

en donde

$$r_{k_h}(y_i) = \sum_{j=1}^{m} p(s_j|y_i)p_{k_h} = \text{probabilidad de que el acto}$$

a_k resulte en una consecuencia θ_h cuando el mensaje y_i se ha recibido.

Se entiende por una regla de decisión bayesiana $\alpha^*(y)$ aquella que para cada mensaje $\underline{y}$ selecciona una acción $\underline{a}$, de manera que suministra el máximo beneficio esperado cuando el mensaje $\underline{y}$ ha sido recibido.

$$\max W(a|y) = W\ [\alpha^*(y)\ |\ y]$$

Se entiende por valor Bayesiano de una estructura de información η y se representa con $B(\eta)$ al beneficio esperado al considerar todas las posibles acciones elegidas con una regla Bayesiana, dada una estructura de información y un vector estocástico $\bar{P}(S_j)$ que tipifica a la demanda:

$$B(\eta) = \sum_{i=1}^{L} q\ [y_i\ |\ \bar{P}(S_j),\ \eta]\quad W\ [\alpha^*(y_i)\ |\ y_i]$$

en donde:

$$q\ [y_i\ |\ \bar{P}(S_j),\ \eta] = \sum_{j=1}^{m} p(S_j)\ q_{ij}$$

EJEMPLO 8.3 Para los datos del ejemplo 8.2, determinar el valor bayesiano de la estructura de información η que a continuación se define

$$\eta = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Los datos son

$$P^1_{ij} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad P^2_{ij} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad P^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$, \quad b_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P} = \{\ 0.33,\ 0.34,\ 0.33\ \}$$

luego:

$$p_1(S_1\,|y_1\,) = \frac{0.33 \times 0.2}{0.33 \times 0.2 + 0.34 \times 0.6 + 0.33\ (0.2)} = \frac{0.066}{0.336} = 0.196$$

$$p_1(S_2|y_1) = \frac{0.34 \times 0.6}{0.336} = \frac{0.204}{0.336} = 0.608$$

$$p_1(S_3|y_1) = \frac{0.33 \times 0.2}{0.336} = 0.196$$

$$p_1(S_1|y_2) = \frac{0.33 \times 0.6}{0.33 \times 0.6 + 0.34 \times 0.1 + 0.33 \times 0.3} = \frac{0.198}{0.331} = 0.598$$

$$p_1(S_2|y_2) = \frac{0.34 \times 0.1}{0.331} = \frac{0.034}{0.331} = 0.103$$

$$p_1(S_3|y_2) = \frac{0.33 \times 0.3}{0.331} = 0.299$$

$$p_1(S_1|y_3) = \frac{0.33 \times 0.4}{0.33 \times 0.4 + 0.34 \times 0.2 + 0.33 \times 0.4} = \frac{0.132}{0.332} = 0.397$$

$$p_1(S_2|y_3) = \frac{0.34 \times 0.2}{0.332} = 0.205$$

$$p_1(S_3|y_3) = \frac{0.33 \times 0.4}{0.332} = \frac{0.132}{0.332} = 0.397$$

Se tiene:

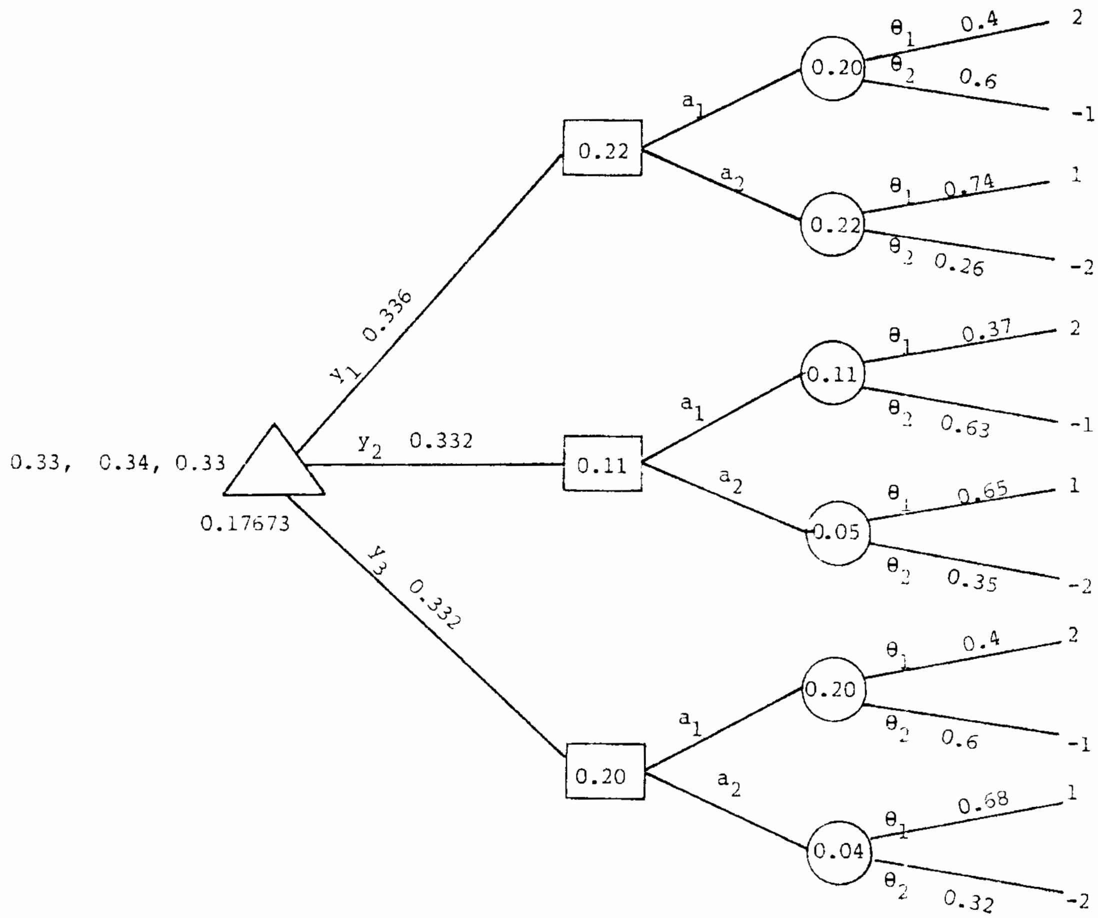
$$\bar{R}(1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.74 & 0.26 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}(2) = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.65 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}(3) = \begin{bmatrix} 0.3(0.397)+0.4(0.206)+0.5(0.397) \ , & 0.7(0.397)+0.6(0.206)+0.5(0.397) \\ 0.6(0.397)+0.8(0.206)+0.7(0.397) \ , & 0.4(0.397)+0.2(0.206)+0.3(0.397) \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}(3) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.68 & 0.32 \end{bmatrix}$$

En resumen:



Las reglas de decisión Bayesianas son como sigue:

$$\alpha^* (y_1) = a_2,\ \alpha^* (y_2) = a_1,\ \alpha^* (y_3) = a_1$$

Los beneficios esperados, bajo dichas reglas de decisión, cuando se ha recibido el mensaje son:

$$W\ [\alpha^*(y_1)|y_1] = 0.22,\quad W\ [\alpha^*(y_2)|y_2] = 0.11,\quad W\ [\alpha^*(y_3)|y_3] = 0.2$$

Calculando el valor Bayesiano de la estructura de información se tiene:

$$q\ [y_1|\bar{P}(S_j),\eta] = 0.33 \times 0.2 + 0.34 \times 0.6 + 0.33 \times 0.2 = 0.336$$

$$q\ [y_2|\bar{P}(S_j),\eta] = 0.33 \times 0.6 + 0.34 \times 0.1 + 0.33 \times 0.3 = 0.332$$

$$q\ [y\ |\bar{P}(S\ ),\eta] = 0.33 \times 0.4 + 0.34 \times 0.2 + 0.33 \times 0.4 = 0.332$$

$$B(\eta) = 0.336 \times 0.22 + 0.332 \times 0.11 + 0.332 \times 0.20 = 0.17684$$

Este resultado se usará más adelante para estimar la calidad de la estructura de información considerada.

8.9 INDICE DE CALIDAD DE UNA ESTRUCTURA DE INFORMACION

Con objeto de apreciar lo adecuado o no de una estructura de información para un problema dado, se compara su valor Bayesiano con los que resultan para una estructura de información perfecta y para una estructra nula.

Así, para el problema anterior, la estructura perfecta sería:

$$\eta^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la estructura nula sería

$$\eta^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

En la estructura perfecta se tiene certeza de que cada mensaje (observación o señal), llegará al que toma la decisión para cada estado de la demanda. En la estructura nula por el contrario, existe la misma probabilidad de que un mensaje cualquiera llegue al inversionista cualquiera que sea el estado de la demanda.

Ahora bien, un sistema de información carece de valor para la toma de decisiones, si el valor bayesiano de su estructura es igual al valor bayesiano de la estructura del sistema nulo. Entonces el valor absoluto de la estructura del ejemplo anterior será:

$$B\ (\eta) - B\ (\eta^0) = V$$

Calculando $B(\eta^0)$ se tiene:

$$q\,[y_1|\bar{P}(S_j),\ \eta^0] = q\,[y_2|\bar{P}(S_j),\ \eta^0] = q\,[y_3|\bar{P}(S_j),\ \eta^0] =$$

$$= 0.33\ (\tfrac{1}{3}) + 0.34\ (\tfrac{1}{3}) + 0.33\ (\tfrac{1}{3}) = 0.3333$$

de donde

$$B\ (\eta^0) = 0.3333 \times 0.22 + 0.334 \times 0.11 + 0.3333 \times 0.20 = 0.1766$$

$$V = 0.17684 - 0.17666 = 0.00018$$

Los cálculos de los valores bayesianos se han hecho considerando una sola etapa. El valor absoluto obtenido deberá compararse con el de dos etapas, con objeto de decidir si conviene, dado el sistema de información, proseguir a más etapas.

8.10 PROCESO DECISIONAL DISCRETO CON DECISIONES BAYESIANAS Y SISTEMA DE INFORMACION

Sea $P_1(S_h)$ la probabilidad *a priori* asociada con el h-ésimo estado de la demanda al principio de la primera etapa y supóngase que el mensaje y_i se recibe durante dicha primera etapa y que de ello se deriva la acción a_j con una consecuencia θ_k al final de la etapa, entonces: si $P_1(S_h|y_i,\ a_j,\ \theta_k)$ es la probabilidad *a posteriori* asociada con el h-ésimo estado de la demanda al final de la etapa dado el hecho de que se ha recibido el mensaje y_i, se ha tomado la acción a_j y se ha obtenido la consecuencia θ_k

$$P\,(S_h|y_i,\ a_j,\ \theta_k) = \frac{p_1(S_h|y_i)\ p^h_{jk}}{\sum\limits_{h=1}^{m} p_1\ (S_h|y_i)\ p^h_{jk}} \quad ;\ h = 1,\ldots,\ m$$

Como consecuencia la probabilidad *a priori* asociada con el h-ésimo estado de la demanda al principio de la segunda etapa será:

$$P_2(S_h) = p_1(S_h|y_i,\ a_j,\ \theta_k)$$

Luego, para la segunda etapa

$$p_2(S_h|y_j) = \frac{p_2(S_h)\ q_{jh}}{\sum\limits_{k=1}^{m} p_2(S_k)\ q_{jk}}$$

$$r_{ik}(2|y_j) = \sum_{h=1}^{m} p_2(S_h|y_j)\ p^h_{ik},\quad q_2(y_i) = \sum_{k=1}^{m} p_2(S_k)\ q_{ik}$$

disponiéndose así de todos los elementos necesarios para entrar al cálculo del proceso markoviano; la fórmula general de recurrencia resulta:

$$\begin{cases} \Lambda_T [\bar{P}_T(S) | \alpha(y_k),\ \theta_j,\ y_k;\ \eta] = \max\limits_{\alpha} \left\{ f_s [\alpha(y_k)] \right\} \\ \Lambda_T [\bar{P}_t(S);\ \eta] = \max\limits_{\alpha} \left\{ f_s [\alpha(y_k)] + \beta \sum\limits_{j=1}^{n} r_1 [\alpha(y_k)], \right. \\ \qquad \left. ,\ \theta_j(t|y_k)\Lambda_{t+1}[\bar{P}_t(S)]\alpha(y_k), \theta_j, y_k;\ \eta] \right\} \end{cases}$$

expresión análoga a las anteriores usadas en procesos markovianos.

EJEMPLO 8.4 Resolver el ejemplo 8.2, pero considerando la estructura de información del ejemplo 8.3.

En el ejemplo 8.2 se calculó

$p_1(S_1\|y_1) = 0.196$	$p_1(S_1\|y_2) = 0.598$	$p_1(S_1\|y_3) = 0.397$
$p_1(S_2\|y_1) = 0.608$	$p_1(S_2\|y_2) = 0.103$	$p_1(S_2\|y_3) = 0.206$
$p_1(S_3\|y_1) = 0.196$	$p_1(S_3\|y_2) = 0.299$	$p_1(S_3\|y_3) = 0.397$

De donde

$$p_1(S_1|y_1,\ a_1,\ \theta_1) = \frac{p_1\ (S_1|y_1)\ p_{11}^{1}}{\sum\limits_{h=1}^{m} p(S_h|y_1)\ p_{11}^{h}} =$$

$$= \frac{0.196 \times 0.3}{0.196 \times 0.3 + 0.603 \times 0.4 + 0.196 \times 0.5} = 0.147$$

análogamente se calculan los restantes, obteniendo:

$p_1(S_1|y_1, a_1, \theta_2) = 0.228$

$p_1(S_2|y_1, a_1, \theta_1) = 0.067$ $p_1(S_2|y_1, a_1, \theta_2) = 0.608$

$p_1(S_3|y_1, a_1, \theta_1) = 0.246$ $p_1(S_3|y_1, a_1, \theta_2) = 0.164$

$p_1(S_1|y_2, a_1, \theta_1) = 0.485$ $p_1(S_1|y_2, a_1, \theta_2) = 0.664$

$p_1(S_2|y_2, a_1, \theta_1) = 0.111$ $p_1(S_2|y_2, a_1, \theta_2) = 0.098$

$p_1(S_3|y_2, a_1, \theta_1) = 0.404$ $p_1(S_3|y_2, a_1, \theta_2) = 0.238$

$p_1(S_1|y_3, a_1, \theta_1) = 0.297$ $p_1(S_1|y_3, a_1, \theta_2) = 0.463$

$p_1(S_2|y_3, a_1, \theta_1) = 0.207$ $p_1(S_2|y_3, a_1, \theta_2) = 0.206$

$p_1(S_3|y_3, a_1, \theta_1) = 0.496$ $p_1(S_3|y_3, a_1, \theta_2) = 0.331$

$p_1(S_1|y_1, a_2, \theta_1) = 0.158$ $p_1(S_1|y_1, a_2, \theta_2) = 0.303$

$p_1(S_2|y_1, a_2, \theta_1) = 0.656$ $p_1(S_2|y_1, a_2, \theta_2) = 0.469$

$p_1(S_3|y_1, a_2, \theta_1) = 0.186$ $p_1(S_3|y_1, a_2, \theta_2) = 0.223$

$p_1(S_1|y_2, a_2, \theta_1) = 0.551$ $p_1(S_1|y_2, a_2, \theta_2) = 0.684$

$p_1(S_2|y_2, a_2, \theta_1) = 0.127$ $p_1(S_2|y_2, a_2, \theta_2) = 0.059$

$p_1(S_3|y_2, a_2, \theta_1) = 0.322$ $p_1(S_3|y_2, a_2, \theta_2) = 0.257$

$p_1(S_1|y_3, a_2, \theta_1) = 0.349$ $p_1(S_1|y_3, a_2, \theta_2) = 0.497$

$p_1(S_2|y_3, a_2, \theta_1) = 0.242$ $p_1(S_2|y_3, a_2, \theta_2) = 0.129$

$p_1(S_3|y_3, a_2, \theta_1) = 0.409$ $p_1(S_3|y_3, a_2, \theta_2) = 0.374$

De donde, en resumen se tiene:

para y_1:

$$\bar{P}_2 = \begin{array}{ccc} & \theta_1 & \theta_2 \\ \end{array}$$

$$\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & [0.147,\ 0.607,\ 0.246] & [0.228,\ 0.603,\ 0.164] \\ a_2 & [0.158,\ 0.656,\ 0.186] & [0.303,\ 0.469,\ 0.228] \end{bmatrix}$$

para y_2:

$$\begin{array}{ccc} & \theta_1 & \theta_2 \end{array}$$

$$\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & [0.485,\ 0.111,\ 0.404] & [0.664,\ 0.098,\ 0.238] \\ a_2 & [0.551,\ 0.127,\ 0.322] & [0.684,\ 0.059,\ 0.257] \end{bmatrix}$$

para y_3:

$$\begin{array}{ccc} & \theta_1 & \theta_2 \end{array}$$

$$\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & [0.297,\ 0.207,\ 0.496] & [0.463,\ 0.206,\ 0.331] \\ a_2 & [0.349,\ 0.242,\ 0.409] & [0.497,\ 0.129,\ 0.374] \end{bmatrix}$$

Calculando ahora, para cada condición de demanda, la probabilidad de recibir un mensaje al principio del segundo período, se tiene:

Bajo [0.147, 0.607, 0.246], la probabilidad de recibir y_1 es:

$$0.147\ (0.2) + 0.607\ (0.6) + 0.246\ (0.2) = 0.443$$

Procediendo de la misma manera para todos los mensajes y todas las condiciones de demanda resulta:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc|ccc} & \theta_1 & & & \theta_2 & \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\bar{Y} = & \left[\begin{array}{ll}
a_1 & [0.443,\ 0.250,\ 0.307] \quad [0.454,\ 0.257,\ 0.289] \\
a_2 & [0.497,\ 0.238,\ 0.288] \quad [0.391,\ 0.300,\ 0.309] \\
 & \\
a_1 & [0.226,\ 0.405,\ 0.369] \quad [0.206,\ 0.447,\ 0.347] \\
a_2 & [0.229,\ 0.418,\ 0.353] \quad [0.189,\ 0.458,\ 0.353] \\
 & \\
a_1 & [0.286,\ 0.351,\ 0.363] \quad [0.269,\ 0.385,\ 0.346] \\
a_2 & [0.295,\ 0.354,\ 0.351] \quad [0.236,\ 0.407,\ 0.357]
\end{array} \right]
\end{array}
$$

Iniciando la segunda etapa:

a) $\bar{P}_2 = [\ 0.147,\ 0.607,\ 0.246\ ]$

$$P_2(S_1|y_1) = \frac{0.147 \times 0.2}{0.147 \times 0.2 + 0.60 \times 0.6 + 0.24 \times 0.2} = 0.066$$

$p_2(S_2|y_1) = 0.822$ $\qquad$ $P_2(S_1|y_3) = 0.211$

$p_2(S_3|y_1) = 0.112$ $\qquad$ $p_2(S_2|y_3) = 0.435$

$p_2(S_1|y_2) = 0.396$ $\qquad$ $p_2(S_3|y_3) = 0.354$

$p_2(S_2|y_2) = 0.273$

$p_2(S_3|y_2) = 0.331$

entonces

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix} 0.066(0.3)+0.822(0.4)+0.112(0.5), & 0.066(0.7)+0.822(0.6)+0.112(0.5) \\ 0.066(0.6)+0.822(0.8)+0.112(0.7), & 0.066(0.4)+0.822(0.2)+0.112(0.3) \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix} 0.405 & 0.595 \\ 0.776 & 0.224 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix} 0.394 & 0.606 \\ 0.688 & 0.312 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix} 0.414 & 0.586 \\ 0.722 & 0.278 \end{bmatrix}$$

procediendo análogamente se llega a los siguientes resultados:

b) $\bar{P}_2$ = [0.228, 0.608, 0.164]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix} 0.397 & 0.603 \\ 0.772 & 0.228 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix} 0.364 & 0.633 \\ 0.669 & 0.331 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix} 0.391 & 0.609 \\ 0.711 & 0.289 \end{bmatrix}$$

c) $\bar{P}_2$ = [0.158, 0.656, 0.186]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix} 0.401 & 0.599 \\ 0.778 & 0.222 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix} 0.382 & 0.618 \\ 0.687 & 0.313 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix} 0.464 & 0.595 \\ 0.725 & 0.275 \end{bmatrix}$$

d) $\bar{P}_2$ = [0.303, 0.469, 0.228]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix} 0.396 & 0.604 \\ 0.757 & 0.243 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix} 0.362 & 0.638 \\ 0.655 & 0.345 \end{bmatrix} \quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix} 0.390 & 0.610 \\ 0.691 & 0.309 \end{bmatrix}$$

e) $\bar{P}_2$ = [0.485, 0.111, 0.404]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.393 & 0.607\\0.687 & 0.313\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.360 & 0.640\\0.634 & 0.366\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.392 & 0.608\\0.655 & 0.345\end{bmatrix}$$

f) $\bar{P}_2$ = [0.664, 0.098, 0.238]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.364 & 0.636\\0.669 & 0.331\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.332 & 0.668\\0.619 & 0.381\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.355 & 0.645\\0.635 & 0.365\end{bmatrix}$$

g) $\bar{P}_2$ = [0.551, 0.127, 0.322]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.382 & 0.618\\0.687 & 0.313\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.347 & 0.653\\0.628 & 0.372\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.376 & 0.624\\0.648 & 0.352\end{bmatrix}$$

h) $\bar{P}_2$ = [0.684, 0.059, 0.257]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.362 & 0.638\\0.655 & 0.345\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.332 & 0.668\\0.618 & 0.382\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.356 & 0.644\\0.633 & 0.367\end{bmatrix}$$

i) $\bar{P}_2$ = [0.297, 0.207, 0.496]

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.414 & 0.586\\0.723 & 0.277\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.391 & 0.609\\0.655 & 0.345\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.422 & 0.678\\0.679 & 0.321\end{bmatrix}$$

j) $\bar{P}_2 = [\ 0.463,\ 0.206,\ 0.331\ ]$

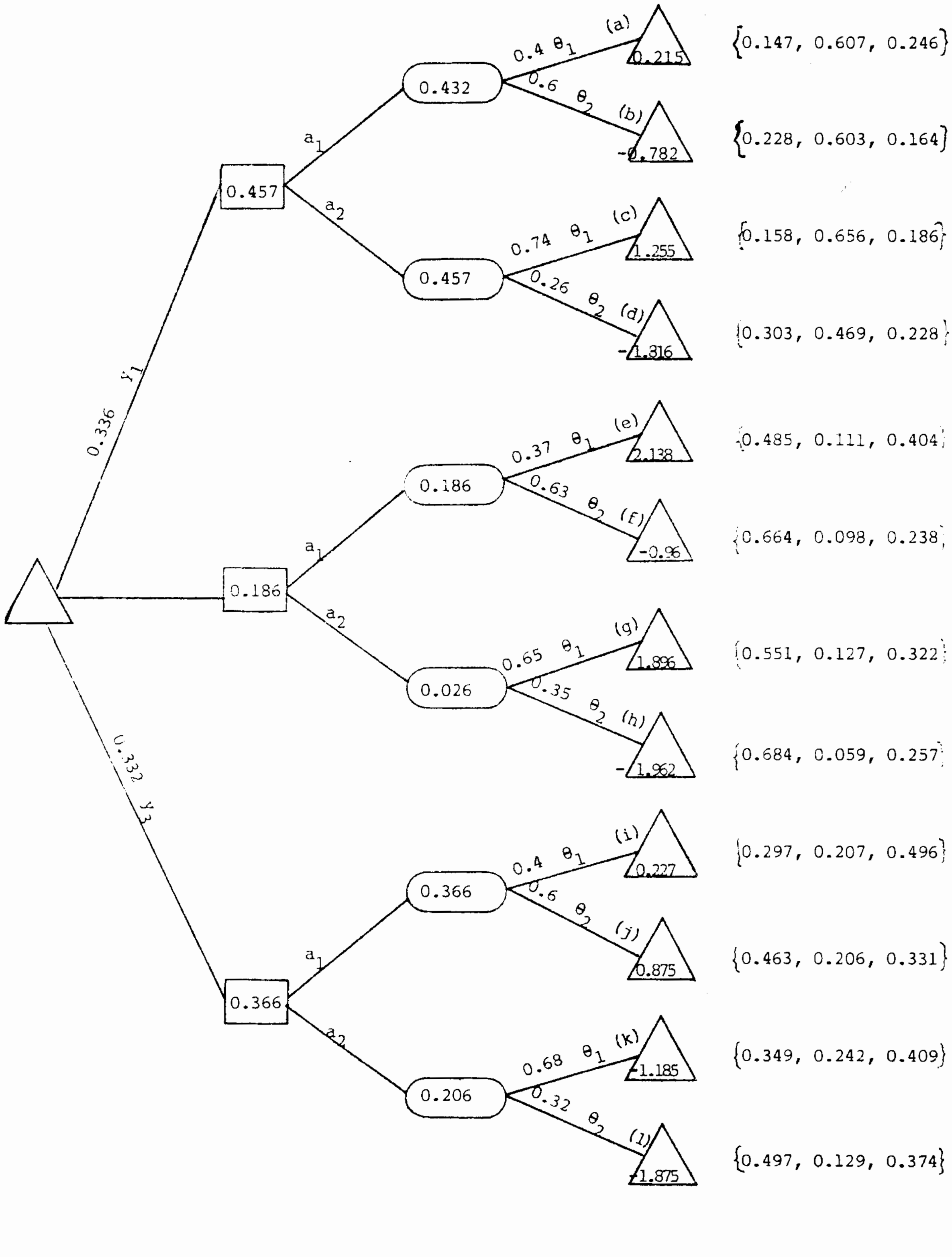
$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.391 & 0.609\\ 0.711 & 0.289\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.355 & 0.645\\ 0.635 & 0.365\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.385 & 0.615\\ 0.660 & 0.340\end{bmatrix}$$

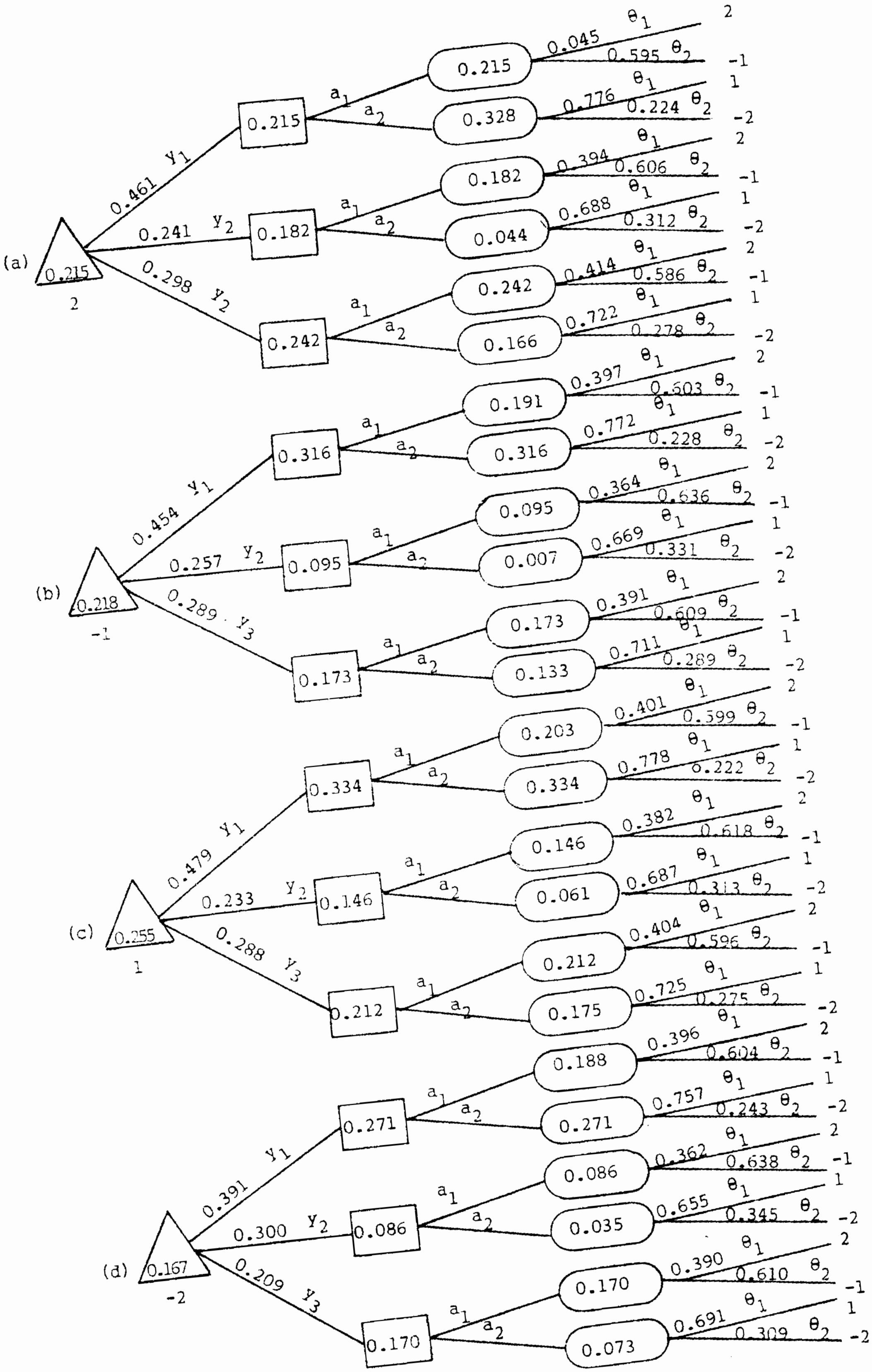
k) $\bar{P}_2 = [\ 0.349,\ 0.242,\ 0.409\ ]$

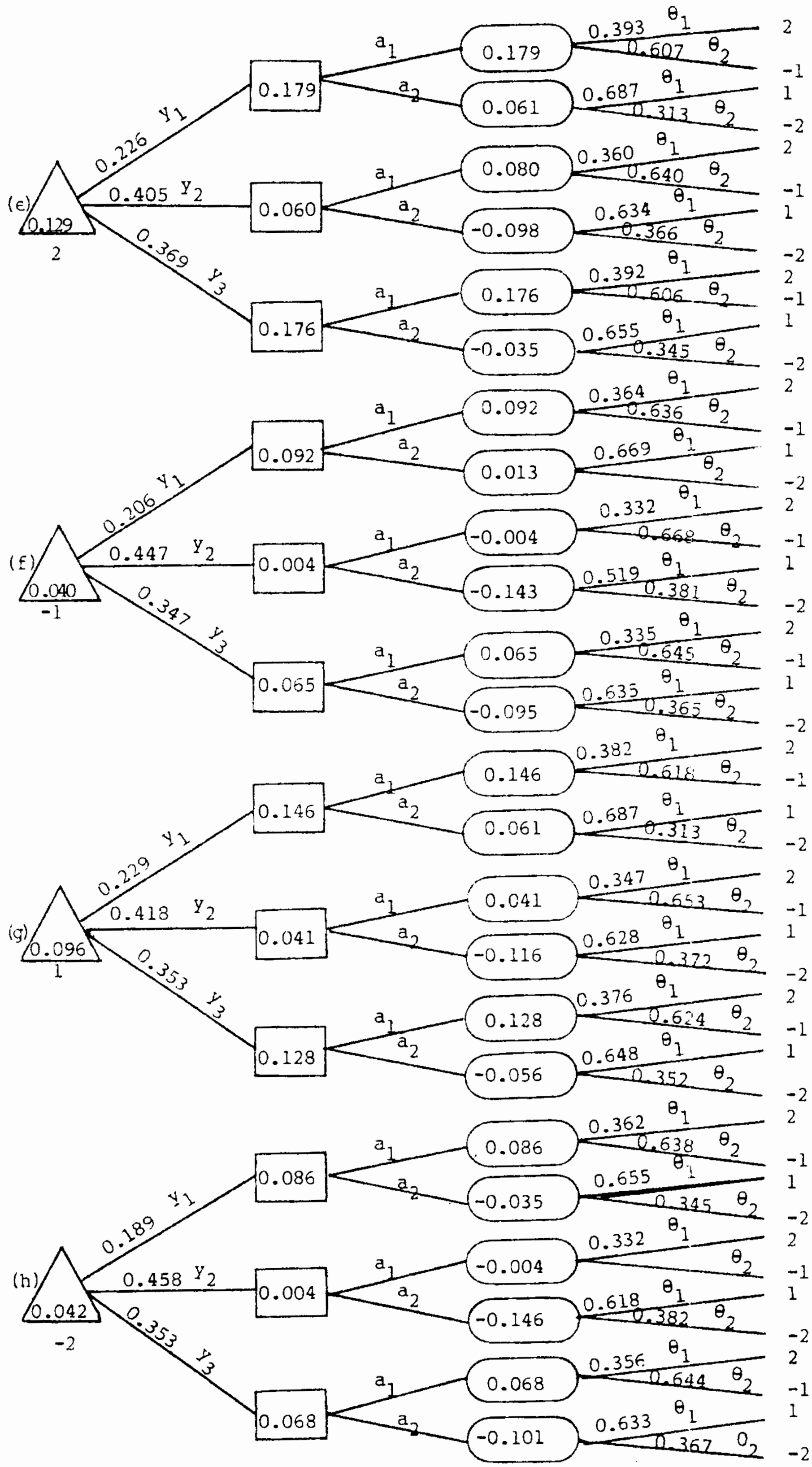
$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.404 & 0.596\\ 0.725 & 0.275\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.376 & 0.624\\ 0.648 & 0.352\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.407 & 0.593\\ 0.674 & 0.326\end{bmatrix}$$

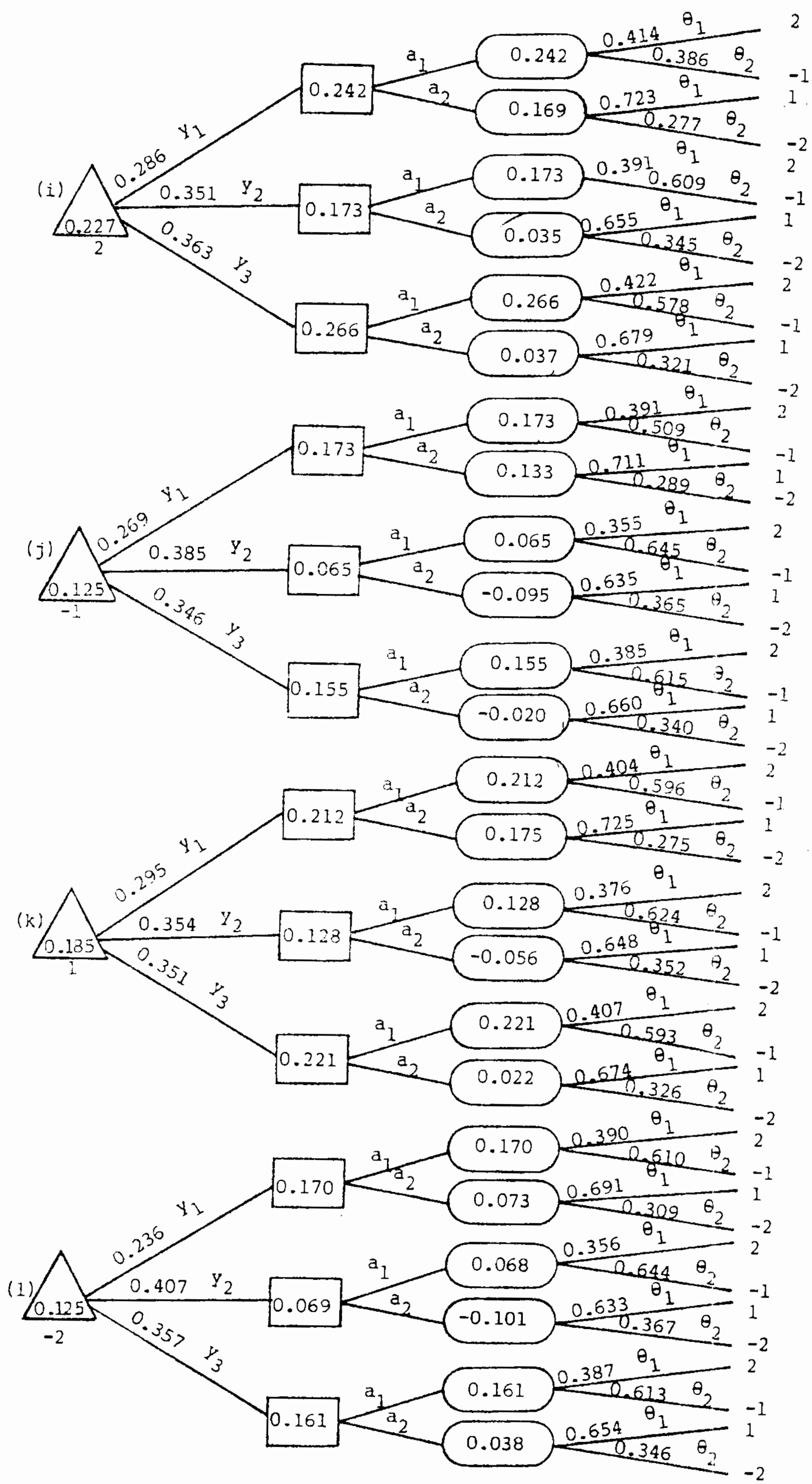
l) $\bar{P}_2 = [\ 0.497,\ 0.129,\ 0.374\ ]$

$$\bar{R}(2|y_1)=\begin{bmatrix}0.390 & 0.610\\ 0.691 & 0.309\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_2)=\begin{bmatrix}0.356 & 0.644\\ 0.633 & 0.367\end{bmatrix}\quad \bar{R}(2|y_3)=\begin{bmatrix}0.387 & 0.613\\ 0.654 & 0.346\end{bmatrix}$$


0.336 y_1
0.332 y_3
0.457
0.186
0.366
a_1
a_2
0.432
0.457
0.186
0.026
0.366
0.206
0.4 θ_1
0.6 θ_2
0.74 θ_1
0.26 θ_2
0.37 θ_1
0.63 θ_2
0.65 θ_1
0.35 θ_2
0.4 θ_1
0.6 θ_2
0.68 θ_1
0.32 θ_2
(a) 0.215
(b) -0.782
(c) 1.255
(d) -1.816
(e) 2.138
(f) -0.96
(g) 1.896
(h) -1.962
(i) 0.227
(j) 0.875
(k) -1.185
(l) -1.875
{0.147, 0.607, 0.246}
{0.228, 0.603, 0.164}
{0.158, 0.656, 0.186}
{0.303, 0.469, 0.228}
{0.485, 0.111, 0.404}
{0.664, 0.098, 0.238}
{0.551, 0.127, 0.322}
{0.684, 0.059, 0.257}
{0.297, 0.207, 0.496}
{0.463, 0.206, 0.331}
{0.349, 0.242, 0.409}
{0.497, 0.129, 0.374}


(a)
(b)
(c)
(d)


(e)
0.129
2
0.226 y1
0.405 y2
0.369 y3
0.179
0.060
0.176
(f)
0.040
-1
0.206 y1
0.447 y2
0.347 y3
0.092
0.004
0.065
(g)
0.096
1
0.229 y1
0.418 y2
0.353 y3
0.146
0.041
0.128
(h)
0.042
-2
0.189 y1
0.458 y2
0.353 y3
0.086
0.004
0.068


(i)
0.227
2
(j)
0.125
-1
(k)
0.185
1
(l)
0.125
-2

9. USO DE LA TEORIA DE JUEGOS

9.1 DEFINICIONES

Se establecerán primeramente algunas definiciones.

Juegos Normales. La teoría matemática de los juegos de estrategia estudia situaciones en las que intervienen dos o más participantes cuyos intereses están en conflicto. Se dice que ésto constituye el juego normal.

Juegos Normales con dos participantes y cuya suma es cero. En estos juegos intervienen sólo dos personas y una de ellas gana lo que la otra pierde. A este tipo se pueden reducir los llamados **de suma constante** en la que los dos participantes compiten por llevarse la mayor parte de una recompensa (premio).

Conjunto de Estrategias. Un conjunto de estrategias para el jugador *A* es una enumeración completa de todas las acciones que dicho jugador seguirá para cualquiera de las contingencias que puedan ocurrir, ya sea por azar o por el contrincante.

Pago o Ley de Pagos. El pago es una regla que indica cuánto recibirá el jugador *A* del jugador *B* si *A* elige una estrategia particular de su conjunto y *B* elige una particular del suyo.

Espacio de Estrategias. Es la totalidad de estrategias para un juego dado y un jugador determinado.

Juego. Se llama juego a una terna (X, Y, K) que goza de las siguientes propiedades:

X representa el espacio de estrategias del jugador A

Y representa el espacio de estrategias del jugador B

K es una función real de X e Y

Si A elige $x \in X$; B elige $y \in Y$ entonces $K(x, y)$ es la ley de pagos para el jugador A y $-K(x, y)$ es la ley de pagos para el jugador B. Se dirá que K es el Kernel de pagos.

Jugadas, resultados y estrategias. Una jugada se obtiene cuando cada uno de los competidores elige una sola de sus posibles formas de actuar. Se supone que todas las elecciones se realizan simultáneamente de tal manera que ningún competidor conoce la elección de su oponente hasta que ha realizado la suya.

El resultado de un juego está formado por el conjunto particular de cursos de acción tomados por los competidores. Cada resultado determina un conjunto de pagos (positivo, negativo o nulo), uno para cada competidor.

La estrategia de un competidor i es la regla de decisión que usa para elegir entre sus posibles formas de actuar. Esta regla de decisión no requiere de información definida sobre la elección hecha por sus oponentes, ya que se supone que todas ellas se hacen simultáneamente y se divulgan en el mismo instante. Se estudiarán dos tipos de estrategias, las puras y las mixtas.

Una estrategia pura es una decisión, tomada antes de que realicen las diversas jugadas, y la cual siempre elige un curso particular de acción i_0. Una estrategia mixta es una decisión que permite elegir un curso de acción para cada jugada de acuerdo con una distribución de probabilidad particular.

Juegos matriciales de dos personas. Un juego con sólo dos competidores A y B, se puede describir fácilmente por medio de un par de matrices. Los renglones de cada matriz son los posibles cursos de acción que puede tomar A y las columnas los correspondientes a B.

Cada elemento de la matriz de pagos de B será igual al correspondiente de A pero cambiado de signo. Por esta razón, se acostumbra omitir a la matriz de pagos de B.

9.2 JUEGOS CONTRA LA NATURALEZA

Se puede considerar a la naturaleza como un adversario en el caso de que sus estados futuros puedan ser numerables y asociados a una ley de pagos; ésto se ilustra en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 9.1 En una región R se distinguen cinco subregiones homogéneas. Estudios estadísticos preliminares han permitido fijar la probabilidad de que el producto bruto sea P por subregiones y bajo los reactivos A, B, C (industrias) según se muestra en la matriz que sigue:

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
A	$\boxed{0.3}$	0.4	0.5	$\boxed{1}$	0
B	0.2	0.3	$\boxed{0.6}$	0	$\boxed{1}$
C	0.1	$\boxed{0.5}$	0.3	0.1	0

¿En qué proporción se deben establecer las industrias? y ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea mayor o igual a P en toda la región?

Si se circulan los mínimos por renglón y se enmarcan los máximos por columna, se observa que la matriz no tiene puntos silla.

Las columnas R_2 y R_3 dominan a la columna R_1, luego si se eliminan resulta:

	R_1	R_4	R_5
A	0.3	1	0
B	0.2	0	1
C	0.1	0.1	0

pero el renglón C es dominado por el A, luego si se elimina C, queda:

	R_1	R_4	R_5
A	0.3	1	0
B	0.2	0	1

y haciendo uso del método gráfico (figura 9.1) se obtiene:

$$\{ \frac{8}{11} , \frac{3}{11} , 0 \} \qquad v = \frac{3}{11}$$

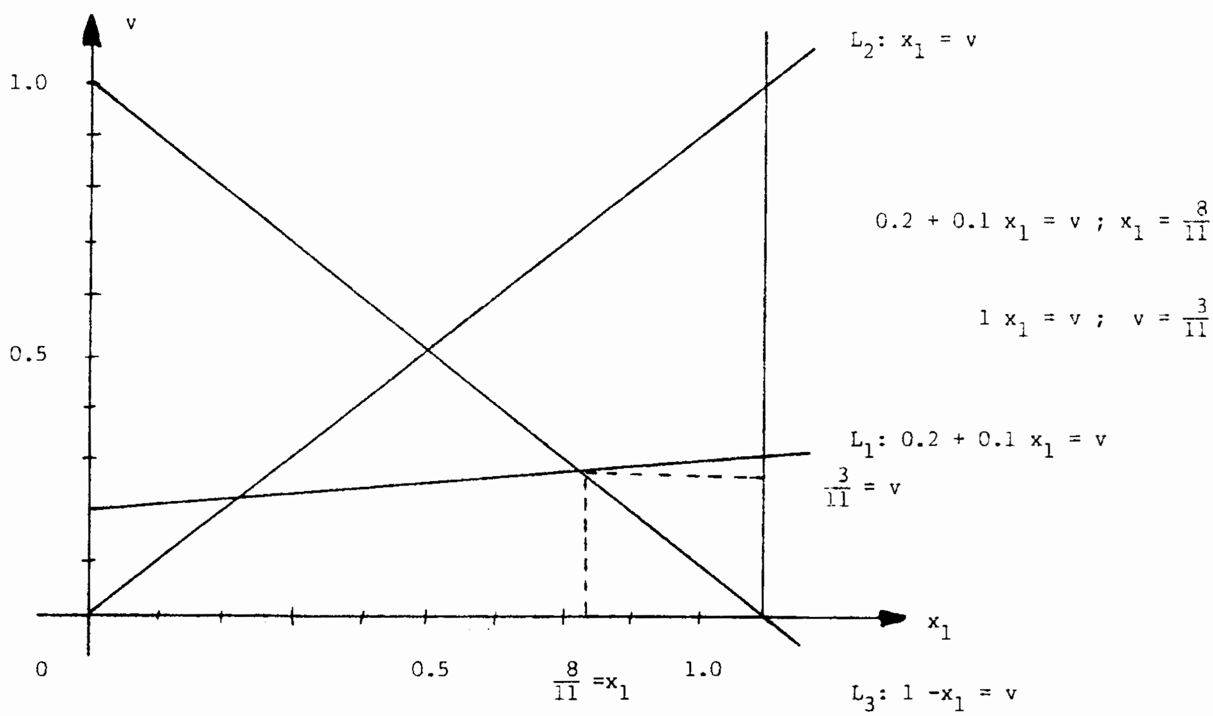


Figura 9.1

Luego la probabilidad de obtener un producto mayor o igual a P es $\frac{3}{11}$ (valor del juego) y las industrias se deben establecer en la relación $(\frac{8}{11}, \frac{3}{11}, 0)$.

EJEMPLO 9.2 Al planear la operación de una presa de una planta hidroeléctrica para el mes siguiente, se presenta el siguiente panorama:

I) La demanda de energía hidroeléctrica permite dejar en la presa una reserva de A millones de m^3 o una de B millones con $A < B$.

II) El escurrimiento para el mes en estudio puede ser a, b, c, ó d millones de m^3.

III) Un m^3 almacenado representa α unidades monetarias de ingreso para la compañía que opera la presa.

IV) Un m^3 de almacenamiento vacío representa una pérdida de β unidades monetarias para la compañía.

V) Un m^3 vertido representa una pérdida de λ unidades monetarias.

Se tiene:

$\alpha, \beta, \lambda > 0 \; ; \; \alpha > \beta > \lambda$

Si de las condiciones anteriores resulta la siguiente ley de pagos:

		a	b	c	d
OPERADOR	A	8	2	-2	-6
	B	2	4	5	8

¿Cuántos metros cúbicos deben reservarse para el escurrimiento del mes siguiente (A ó B)?

Al resolver el juego gráficamente (figura 9.2) la estrategia mixta que más conviene al operador es $\{\frac{3}{13}, \frac{10}{13}\}$ y por lo tanto, dejará B millones de m^3 de reserva.

En forma análoga se atacan problemas de organización en una obra, por ejemplo, decidir si se inician simultáneamente la ataguía y el canal de desvío o si primero el canal de desvío y después la ataguía, o si esta última es definitiva o provisional. En estos problemas el constructor participa en un juego contra la naturaleza (el río).

Se han propuesto diversos criterios para el caso en que se desconocen las probabilidades de los diferentes estados posibles de la naturaleza, enseguida se presentan cinco de ellos.

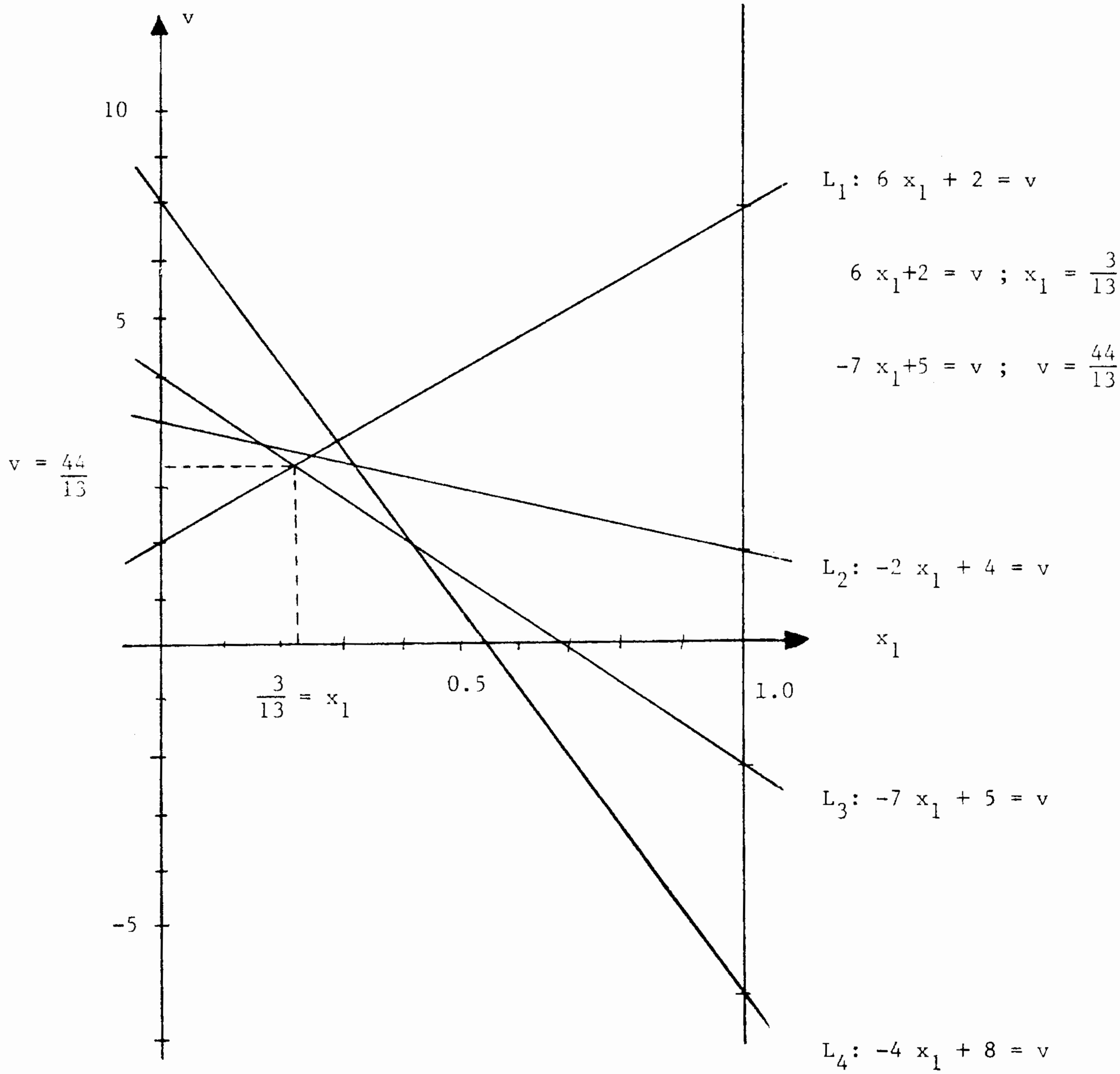

v
10
5
-5
$v = \frac{44}{13}$
$\frac{3}{13} = x_1$
0.5
1.0
x_1
L_1: $6\ x_1 + 2 = v$
$6\ x_1+2 = v\ ;\ x_1 = \frac{3}{13}$
$-7\ x_1+5 = v\ ;\ v = \frac{44}{13}$
L_2: $-2\ x_1 + 4 = v$
L_3: $-7\ x_1 + 5 = v$
L_4: $-4\ x_1 + 8 = v$

Figura 9.2

Criterio de Bayes-Laplace. El criterio establece que si no se dispone de ninguna información sobre las probabilidades asociadas con los futuros resultados, entonces se deben asignar probabilidades iguales a cada uno de los posibles resultados y usar estas probabilidades para calcular el valor esperado de cada uno de los posibles cursos de acción.

Evidentemente este criterio tiene varios inconvenientes. La más seria de estas deficiencias es que usualmente el ejecutivo no puede considerar los diferentes resultados como igualmente posibles. De hecho si existen n posibles cursos de acción y el ejecutivo sólo está conciente de m de ellos, entonces su decisión estará influenciada por la magnitud de m. Así si existen 20 posibles cursos y sólo hay conciencia de tres de ellos, asignará probabilidades de 33.3% cuando debía asignar sólo 5%.

En ocasiones este criterio es llamado el de la **Razón insuficiente** ya que no hay razón para preferir un curso de acción sobre otro, no hay por qué seguir alguno de ellos, pero esto en sí constituye un curso de acción (dejar todo al azar). Sin embargo, difícilmente puede considerarse ésta como una posición racional.

Criterio del Maximin de Wald. Este criterio representa un enfoque muy conservador del proceso de toma de decisiones. Para cada posible alternativa el ejecutivo determina cuál es el peor de los posibles resultados, esto es, el que le produce máximos perjuicios o beneficios mínimos. Selecciona entonces de entre todos estos últimos el que maximiza sus beneficios o minimiza sus pérdidas.

Algunos han considerado que este criterio no es sino una manifestación típica de cobardía. Desde luego que no puede considerarse como irracional y de hecho al confrontar situaciones conflictivas en las que debe esperarse una actuación maliciosa e inteligente del oponente es sano emplearlo. Sin embargo, en problemas en los que se toman decisiones con relación a la naturaleza (juegos contra naturaleza) el criterio es extremadamente conservador.

Criterio del Maximax (Baumol). Al contrario del anterior este criterio corresponde a los optimistas, los que **siempre** consideran únicamente el lado positivo de los posibles resultados en la toma de decisiones. Aquél que al apostarle a un caballo sólo toma en cuenta que ganó en las últimas dos carreras, sin considerar que perdió las veinte anteriores.

Puede establecerse de la siguiente manera, para cada curso de acción defínase cuál es el mejor resultado (máximas ganancias o pérdidas mínimas) y selecciónese de entre los anteriores el máximo de los máximos.

Criterio de Hurwicz. Por su parte Hurwicz ha propuesto un criterio que se encuentra a medio camino entre el Maximin y el Maximax. Esto es, el ejecutivo hará un promedio ponderado entre el mejor resultado que pueda esperarse de cada curso de acción y el peor para el mismo curso.

En la asignación del coeficiente de peso para el mejor y el peor se reflejarán las características **conservadoras u optimistas** del ejecutivo. Así un pesimista le asignará un peso de 1/4 al mejor resultado y de 3/4 al peor. Por el contrario un optimista, confrontado con la misma decisión, le asignará 3/4 al mejor y 1/4 al peor.

Se observa que este criterio posee la misma deficiencia de los dos anteriores, esto es, toma en cuenta únicamente resultados extremos ignorando los restantes.

RESULTADOS

ACCIONES

	R_1	R_2	R_3
A_1	12	-6	24
A_2	36	12	48
A_3	-3	60	30

a) Bayes-Laplace

$$E\ (A_1) = \frac{1}{3}\ (12) + \frac{1}{3}\ (-6) + \frac{1}{3}\ (24) = 10$$

$$E\ (A_2) = \frac{1}{3}\ (36) + \frac{1}{3}\ (12) + \frac{1}{3}\ (48) = 32$$

$$E\ (A_3) = \frac{1}{3}\ (-3) + \frac{1}{3}\ (60) + \frac{1}{3}\ (30) = 29$$

La acción seleccionada es A_2

b) Maximin

	R_1	R_2	R_3
A_1	12	-6*	24
A_2	36	12*	48
A_3	-3*	60	30

$\max \{ -6,\ 12,\ -3 \} = 12$

La acción seleccionada es A_2

c) Maximax

	R_1	R_2	R_3
A_1	12	-6	24*
A_2	36	12	48*
A_3	-3	60*	30

max { 24, 48,, 60 } = 60

La acción seleccionada es A_3

d) Hurwicz

Conservador:

$$A_1 = \frac{-3}{4}(6) + \frac{1}{4}(24) = \frac{-18}{4} + \frac{24}{4} = \frac{6}{4}$$

$$A_2 = \frac{3}{4}(12) + \frac{1}{4}(48) = \frac{36}{4} + \frac{48}{4} = \frac{84}{4}$$

$$A_3 = \frac{3}{4}(-3) + \frac{1}{4}(60) = \frac{-9}{4} + \frac{60}{4} = \frac{51}{4}$$

Optimista:

$$A_1 = \frac{1}{4}(-6) + \frac{3}{4}(24) = \frac{-6}{4} + \frac{72}{4} = \frac{68}{4}$$

$$A_2 = \frac{1}{4}(12) + \frac{3}{4}(48) = \frac{12}{4} + \frac{144}{4} = \frac{156}{4}$$

$$A_3 = \frac{1}{4}(-3) + \frac{3}{4}(60) = \frac{-3}{4} + \frac{180}{4} = \frac{177}{4}$$

Conservador: $\text{Max}\ \{ \frac{6}{4}, \frac{84}{4}, \frac{51}{4} \} = \frac{84}{4}$

Selección: A_2

Optimista: $\text{Max}\ \{ \frac{68}{4}, \frac{156}{4}, \frac{177}{4} \} = \frac{177}{4}$

Selección: A_3

e) Savage

	R_1	R_2	R_3
A_1	12	-6	24
A_2	36	12	48
A_3	-3	60	30

36-12	60+6	48-24
36-36	60-12	48-48
36+3	60-60	48-30

24	66*	24
0	48*	0
39*	0	18

min {66, 48, 39 } = 39

Selección: A_3

9.3 COMPETENCIA EN UN MERCADO (Davis)

Dos empresas están a punto de lanzar al mercado productos competitivos. La firma A sólo puede comprar tres espacios del tiempo de televisión de una hora de duración cada uno, mientras que la firma B, sólo puede comprar dos. El día se divide en tres períodos básicos; mañana, tarde y noche que se representarán con M, T y N respectivamente. Las compras de espacio deben hacerse con anticipación y son confidenciales. Un 50% de los televidentes ven televisión por la noche; un 30% por la tarde y un 20% por la mañana. Se supone que ninguna persona ve televisión más de un período.

Si una empresa compra más tiempo que su competidora durante cualquier período, ocupará la totalidad de la audiencia durante ese período. Si ambas empresas compran el mismo número de horas durante cualquier período, o si ninguna compra tiempo en absoluto, cada una consigue a la mitad de la audiencia. Cada televidente compra el producto de sólo una de las empresas ¿Cómo deberán las empresas situar sus espacios? ¿Qué parte del mercado podría esperar lograr cada una de ellas?

La empresa B tiene seis estrategias que se representan con dos letras, así MT significa una hora de publicidad en la mañana y otra en la tarde. Análogamente la empresa A tiene diez estrategias que se designan con tres letras. La matriz de pagos se muestra enseguida. Los números que aparecen en la matriz representan los porcentajes de mercado que logra la empresa A, la B consigue el resto.

Empresa B

EMPRESA A

	NN	NT	NM	TT	TM	MM	
NNN	75	60	65	60	50	65	x_1, R_1
NNT	65	75	80	60	65	80	x_2, R_2
NNM	60	70	75	70	60	65	x_3, R_3
NTT	40	65	55	75	80	80	x_4, R_4
NTM	50	60	65	70	75	80	x_5, R_5
NMM	35	45	$\overline{\underline{60}}$	70	70	75	x_6, R_6 ⟶
TTT	40	40	30	65	55	55	x_7, R_7 ⟶
TTM	50	50	40	60	65	55	x_8, R_8 ⟶
TMM	50	35	50	45	60	65	x_9, R_9 ⟶
MMM	35	20	35	45	45	60	x_{10}, R_{10} ⟶
	y_1, C_1	y_2, C_2	y_3, C_3	y_4, C_4	y_5, C_5	y_6, C_6 ↓	

Como ilustración supóngase que la empresa A elige NMM - una hora por la noche y dos por la mañana (renglón R_6)- y la empresa B, NM - una hora por la noche y una por la mañana (columna C_3). Puesto que la empresa A ha comprado dos horas por la mañana frente a una de B, acaparará todo el mercado de la mañana que es el 20%. Puesto que cada empresa tiene una hora por la noche y ninguna por la tarde, estos mercados que son del 50% y del 30% respectivamente, se lo dividirán por partes iguales. De esta manera, la empresa A obtendrá el (20 + 25 + 15)% = 60% del total del mercado, si se emplean las estrategias indicadas. Análogamente se llenaron los casilleros de la matriz anterior.

Al aplicar criterios de dominancia, se observa que R_3 domina a R_7, R_9 y R_{10}, así como R_5 domina a R_6 y a R_8. Esto significa que la cinco últimas estrategias $-R_6$ a $R_{10}-$ de la empresa A pueden eliminarse. Una vez hecho ésto resulta que C_5 es dominada por C_6, por lo que C_6 puede eliminarse. La matriz resultante se muestra enseguida.

				B			
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	x_1	75	60	65	60	50	NNN
	x_2	65	75	80	60	65	NNT
A	x_3	60	70	75	70	60	NNM
	x_4	40	65	55	75	80	NTT
	x_5	50	60	65	70	75	NTM
		NN	NT	NM	TT	TM	

Considérese la submatriz:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 75 & 60 & 50 \\ 65 & 60 & 60 \\ 50 & 70 & 75 \end{bmatrix}$$

que involucra a las estrategias x_1, x_2 y x_5 de la empresa A y las estrategias y_1, y_4 y y_5 de la empresa B. Se tiene:

$$\operatorname{adj} B_1 = \begin{bmatrix} -50 & -1000 & 900 \\ -1625 & 3125 & -1625 \\ 1550 & -2250 & 600 \end{bmatrix} ; \quad (\operatorname{adj} B_1)^t = \begin{bmatrix} -50 & -1625 & 1550 \\ -1000 & 3125 & -2250 \\ 900 & -1625 & 600 \end{bmatrix}$$

y consecuentemente

$$\overline{X} = \frac{[111]\begin{bmatrix} -50 & -1000 & 900 \\ -1625 & 3125 & -1625 \\ 1550 & -2250 & 600 \end{bmatrix}}{[111]\begin{bmatrix} -50 & -1000 & 900 \\ -1625 & 3125 & -1625 \\ 1550 & -2250 & 600 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{[-125 \ -125 \ -125]}{-375} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

como x_1, x_2. $x_5 \geqq 0$ y $\Sigma\, x_i = 1$ se procede al cálculo de $\overline{Y}$:

$$\overline{Y} = \frac{[111]\begin{bmatrix} -50 & -1625 & 1550 \\ -1000 & 3125 & -2250 \\ 900 & -1625 & 600 \end{bmatrix}}{-375} = \frac{[-150 \ -125 \ -100]}{-375} = \begin{bmatrix} \frac{6}{15} & \frac{5}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

como y_1, y_4, $y_5 \geqq 0$ y $\Sigma\, y_i = 1$ se calcula el valor del juego:

$$v = \frac{\begin{vmatrix} 75 & 60 & 50 \\ 65 & 60 & 65 \\ 50 & 70 & 75 \end{vmatrix}}{-375} = \frac{-23750}{-375} = 63 \ \frac{1}{3}$$

conocidas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y v se verifica el cumplimiento del teorema de Von Nuemann:

$$(75)\ \frac{1}{3} + (65)\ \frac{1}{3} + (50)\ \frac{1}{3} = 63\ \frac{1}{3} = v$$

$$(60)\ \frac{1}{3} + (75)\ \frac{1}{3} + (60)\ \frac{1}{3} = 65 \quad > v$$

$$(65)\ \frac{1}{3} + (80)\ \frac{1}{3} + (65)\ \frac{1}{3} = 70 \quad > v$$

$$(60)\ \frac{1}{3} + (60)\ \frac{1}{3} + (70)\ \frac{1}{3} = 63\ \frac{1}{3} = v$$

$$(50)\ \frac{1}{3} + (65)\ \frac{1}{3} + (75)\ \frac{1}{3} = 63\ \frac{1}{3} = v$$

$$(75)\ \frac{6}{15} + (60)\ \frac{5}{15} + (50)\ \frac{4}{15} = 63\ \frac{1}{3} = v$$

$$(65)\ \frac{6}{15} + (60)\ \frac{5}{15} + (65)\ \frac{4}{15} = 63\ \frac{1}{3} = v$$

$$(60)\ \frac{6}{15} + (70)\ \frac{5}{15} + (60)\ \frac{4}{15} = 63\ \frac{1}{3} = v$$

$$(40)\ \frac{6}{15} + (75)\ \frac{5}{15} + (80)\ \frac{4}{15} = 62 < v$$

$$(50)\ \frac{6}{15} + (70)\ \frac{5}{15} + (75)\ \frac{4}{15} = 63\ \frac{1}{3} = v$$

Luego una solución a este problema es que la empresa A debería jugar cada una de las estrategias NNN, NNT y NTM un tercio del tiempo y la empresa B sus estrategias NN, TT y TM; $\frac{6}{15}$, $\frac{6}{15}$ y $\frac{4}{15}$ del tiempo. Si la empresa A utiliza sus estrategias recomendadas, puede estar segura de ganar como promedio, al menos $v = 63\ \frac{1}{3}$ % de la audiencia; y si la empresa B utiliza sus estrategias recomendadas, la B no ganará más que v.

9.4 COMPETENCIA ENTRE CONSTRUCTORES

En dos concursos similares (idénticos para fines académicos) convocados por una entidad, los consorcios de constructoras A y B han presentado presupuestos bajos que eliminaron a los demás concursantes. Las diferencias entre los presupuestos de A y B fueron despreciables en comparación con la magnitud de la obra. El criterio anunciado a los concursantes A y B fue de que se otorgarían los contratos, dado que las obras están en zonas donde hay problema de falta de empleo, al concursante que para cada obra empleara mayor número de trabajadores.

A está organizada en cuatro empresas y B en tres.

Los intereses de A son tanto ganar los contratos como eliminar del mercado al competidor, en estas condiciones el director de A recibirá 100,000 por contrato que gane y por empresa competidora que elimine y pierde 100,000 por contrato que gane el competidor y por empresa de A que sea eliminada.

¿Cómo se debe organizar el director de A si las empresas de los consorcios son similares (idénticas para fines académicos)?

A tiene cinco estrategias puras posibles y B tiene cuatro. Estas estrategias son los pares (x, y); x es el número de empresas que se destinan al contrato 1 y y el número de empresas que se destinan al contrato 2.

Para A son (4,0), (0,4), (3,1), (1,3), (2,2)

Para B son (3,0), (0,3), (2,1), (1,2)

La ley de pagos (en cientos de miles) es:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{B} \\
 & & \begin{array}{cccc} a & a & b & b \\ (3,0) & (0,3) & (2,1) & (1,2) \end{array} \\
\text{A} & \begin{array}{c} \alpha\ (4,0) \\ \alpha\ (0,4) \\ \beta\ (3,1) \\ \beta\ (1,3) \\ \gamma\ (2,2) \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Para A el juego es simétrico en las estrategias α y β

Para B el juego es simétrico en las estrategias a y b

Se buscarán estrategias óptimas simétricas. Sea p la probabilidad de que B use la estategia a y q la probabilidad de que B use la estrategia b. Se lograría que { p, p, q, q } sea óptima para B, si:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \; y_j \leq v$$

luego:

$$4p + 3q \leqq v$$

$$4p + 3q \leqq v$$

$$3q \leqq v$$

$$-4p + 4q \leqq v$$

de donde:

$$p + \frac{3}{2} \leqq v$$

$$-8p + 2 \leqq v$$

puesto que p + p + q + q = 1 (juego matricial).

Resolviendo, por ejemplo con el método gráfico, se obtiene que:

$$p^0 = \frac{1}{18}, \quad q^0 = \frac{4}{9} \; ; \quad v = \frac{14}{9}$$

Con base a los resultados anteriores y aplicando el teorema de Von-Neumann al jugador A, se obtiene:

$$4r - 2t = \frac{14}{9}$$

$$3r + 3s + 2t = \frac{14}{9}$$

$$2r + 2s + t = 1$$

en donde r es la probabilidad de emplear las estrategias α; s es la probabilidad de emplear las estrategias β; y t es la probabilidad de utilizar las estrategias γ.

El resultado es

$$r = \frac{4}{9}\ ,\ s = 0,\ t = \frac{1}{9}$$

En resumen $$A\left\{\frac{4}{9}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{9}\right\}\ ;\ B\left\{\frac{1}{18}\ ,\ \frac{1}{18}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{4}{9}\right\}$$

A deberá ofrecer sus cuatro compañías para uno cualquiera de los contratos.

9.5 JUEGOS CON DOS PARTICIPANTES DE SUMA NO NULA

Pueden considerarse todos los juegos con dos participantes como situados en un continuo con los juegos de suma cero en un extremo. En este tipo de juegos generalmente se tienen elementos competitivos y cooperativos; los intereses de los jugadores son opuestos en algunos aspectos y complementarios en otros. En el juego de suma cero los jugadores no tienen intereses comunes. En el juego completamente cooperativo por el contrario los jugadores sólo tienen intereses comunes. El resto de los juegos con dos participantes caen entre estos dos extremos y tienen, tanto elementos cooperativos como competitivos. El grado en que los jugadores se pueden comunicar, puede tener un efecto profundo sobre el resultado del juego; puede existir información imperfecta, restricción de alternativas, amenazas (una aseveración de que se actuará de un cierto modo bajo determinadas condiciones) acuerdos que obligan y pagos secundarios, regateo (cada jugador quiere hacer el pacto más favorable que pueda, evitando el riesgo de no hacer ninguno) y otras situaciones que complican el análisis.

9.6 JUEGOS CON n PARTICIPANTES

En los juegos con n participantes el concepto de poder es todavía más evasivo. Desde luego, hay siempre un pago mínimo que el jugador puede obtener por sí mismo. Para lograr más, debe unirse a otros jugadores formando una **coalición**. Pero si los otros jugadores no cooperan no tiene recursos. Podría inferirse entonces que un jugador está desamparado para lograr algo por encima de su pago mínimo. Sin embargo, coaliciones de jugadores aparentemente impotentes tienen poder. El precisar este concepto de poder es una de las funciones básicas de la teoría de los juegos con n participantes.

Si a cada coalición se le asocia un número: el valor de una coalición; se dice que el juego correspondiente está en forma **de función característica**. Los valores asignados a las coaliciones pueden asumir casi cualquier modelo. Sin embargo, existe una relación básica entre los valores de ciertas coaliciones que es una consecuencia de la forma en que estos valores son definidos; surgen así las teorías clásicas de Von Neumann y Morgenstern, los conjuntos autoreglamentarios de Vickrey, la teoría de Ausman-Maschler, el valor de Shapley que pretende determinar el valor de un juego para un jugador particular cuando se tienen n participantes y se conoce la función característica del juego; la teoría de Caplow y otras.

En el capítulo 11 se presenta una aplicación al cálculo de tarifas de aterrizaje en un aeropuerto de diferentes tipos de aviones orientándola como la solución de un juego con n participantes.

10. USO DEL ANALISIS DE DECISIONES

10.1 INTRODUCCION

Supóngase que se desean evaluar probabilísticamente las alternativas de configuración de la red del Sistema de Transporte Colectivo-Metro; de tal forma que se defina un orden jerárquico de acuerdo con el grado o medida en que cada una de ellas satisface los objetivos del Plan Rector de Vialidad y Transporte.

El proceso de evaluación-jerarquización cuantifica la efectividad conjunta (grado en que se satisfacen los objetivos) de las alternativas sujetas a análisis, en atención a los siguientes objetivos:

- Minimizar el costo total
- Minimizar el gasto en transporte
- Minimizar el tiempo de transporte
- Maximizar la integración de los sistemas de transporte
- Maximizar el impacto sobre el transporte terrestre en cuanto a disminución de su nivel de congestionamiento
- Maximizar el total de personas beneficiadas

Se observa que:

- Se desean satisfacer varios aspectos, algunos de ellos conflictivos.

- Existe incertidumbre en cuanto a la efectividad que se logra con cada alternativa.

El análisis de decisiones es una técnica especialmente diseñada para problemas en donde las alternativas son controvertibles y se manejan aspectos sociales, económicos y técnicos; auxiliando en la toma de decisiones al proporcionar un medio para examinar sistemática y cuantitativamente las alternativas propuestas y sus implicaciones.

10.2 METODOLOGIA

La aplicación del Análisis de Decisiones para la evaluación probabilística de alternativas de configuración del sistema de Transporte Colectivo-Metro, involucra el desarrollo de los pasos que a continuación se enuncian y cuya representación esquemática se muestra en la figura 10.1.

1. Identificación de las medidas de efectividad.

2. Determinación del impacto de las alternativas sobre las medidas de efectividad.

3. Elaboración de las curvas de preferencias.

4. Definición de las preferencias entre medidas de efectividad.

5. Obtención de la efectividad conjunta de las alternativas.

EVALUACION PROBABILISTA DE ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION DE LA RED DEL SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO-METRO

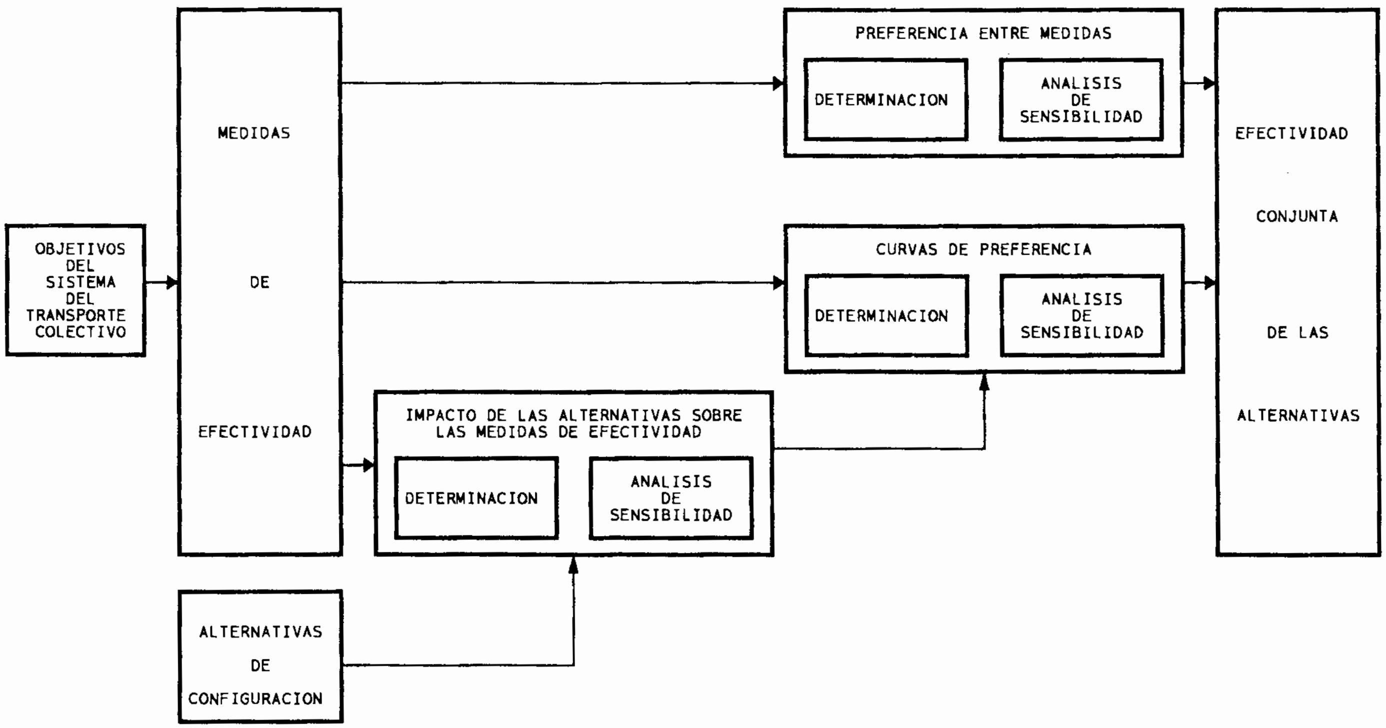


Figura 10.1

6. Análisis de sensibilidad

En el primer inciso se identifican, en función de los objetivos, las medidas de efectividad que se usan para hacer la evaluación de las alternativas. Se especifican también las unidades en que se cuantifican dichas medidas de efectividad.

En el segundo inciso, se determina el impacto de las alternativas sobre las medidas de efectividad, a partir de funciones de distribución de probabilidades, de tal manera que la incertidumbre asociada quede representada.

En el tercer inciso, se elaboran las curvas de preferencias que indican la utilidad marginal de diferentes situaciones para una misma medida de efectividad.

En el cuarto inciso, se definen las preferencias entre las medidas de efectividad, de tal suerte que se indique en qué proporción se puede sacrificar una medida de efectividad a cambio de lograr un mejor valor en otra.

En el quinto inciso, se obtiene la efectividad conjunta de las alternativas a partir de la utilidad esperada.

En el sexto inciso, se analiza la sensibilidad de todos los factores involucrados en el análisis, con lo que se pretende definir el efecto que se presenta en la utilidad esperada al variar las condiciones iniciales del problema.

10.3 MEDIDAS DE EFECTIVIDAD

En función de los objetivos y con el fin de poder cuantificar en qué grado cada alternativa los satisface, se seleccionan como medidas de efectividad las siguientes:

1. Costo
2. Gasto de Transporte
3. Tiempo de Transporte
4. Nivel de Correspondencia de los Sistemas de Transporte
5. Vialidad
6. Captación

La medida de efectividad **Costo,** refleja el monto que implica realizar cada una de las alternativas. La unidad en que se maneja es: **Millones de Pesos.**

La medida de efectividad **Gasto en Transporte**, que se cuantifica en **pesos-viaje-persona** es el ahorro que obtiene la población al incorporarse las nuevas líneas del Metro al Sistema de Transporte.

La medida de efectividad **Tiempo de Transporte**, que se cuantifica en **minutos-viaje-persona** es la reducción en el tiempo de traslado que obtiene la población en cada una de las alternativas de configuración.

La medida de efectividad **Nivel de Correspondencia**, que se maneja como número de **transbordos-viaje-persona** de metro a metro, de metro a transporte de superficie y de transporte de superficie a metro; refleja el grado de integración de los sistemas de transporte.

La medida de efectividad **Vialidad** mide el mejoramiento que en el transporte terrestre ocasiona cada alternativa de configuración, como consecuencia de la disminución en el nivel de congestionamiento. La unidad en que se maneja esta medida de efectividad es un **porcentaje** y se considera igual a cero para la situación actual. La disminución en el nivel de congestionamiento del tránsito tiene como consecuencia la reducción de la contaminación ambiental, de los accidentes y del consumo de energéticos atribuibles a éste.

La medida de efectividad **Captación** se maneja como el **número de personas** diarias beneficiadas al incorporar al sistema de transporte nuevas líneas del metro.

10.4 IMPACTO DE LAS ALTERNATIVAS SOBRE LAS MEDIDAS DE EFECTIVIDAD

Para cada alternativa se define una función de distribución de probabilidad conjunta, en donde las variables aleatorias son las medidas de efectividad.

Con base en el supuesto de independencia estocástica entre las variables aleatorias, la función de distribución de probabilidad conjunta queda en términos de sus marginales correspondientes, de la siguiente manera:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = f(x_1)\, f(x_2)\, f(x_3)\, f(x_4)\, f(x_5)\, f(x_6)$$

donde x_i es una variable aleatoria.

De esta manera se procede a definir para cada medida de efectividad y para cada alternativa el rango dentro del cual está comprendido el valor real de la variable aleatoria. Se considera que la probabilidad de que la variable aleatoria tenga un valor menor que el límite inferior, o un valor mayor que el límite superior del rango fijado para una medida de efectividad y una alternativa particular, es cero.

Además, se determina el valor de la variable aleatoria que se espera se presente con más probabilidad dentro del rango previamente definido, y que normalmente se denomina moda.

A los tres valores previamente determinados (límite inferior del rango, moda y límite superior del rango) se les ajusta una función de distribución de probabilidad tipo Beta, de acuerdo con la metodología que se indica en el inciso 10.9. Con esto, se logra obtener una función que cuantifica el impacto que cada alternativa tiene sobre cada medida de efectividad, considerándose, al trabajar con distribuciones de probabilidad, la incertidumbre.

10.5 CURVAS DE PREFERENCIAS

La jerarquización de las alternativas implica considerar los posibles impactos de cada alternativa sobre las diferentes medidas de efectividad, lo cual se cuantifica por medio de las distribuciones de probabilidad; sin embargo, esta jerarquización también está condicionada a las preferencias que se tengan sobre dichos impactos.

Se lleva a cabo un análisis que permite enmarcar dentro de una escala de utilidad previamente definida, el valor que se asignará a diferentes situaciones para una misma medida de efectividad. Para esto, se asigna al límite inferior o valor menos deseado una utilidad de cero, y al superior o más deseable una utilidad de uno. Para determinar el comportamiento intermedio se acepta como base, dado el carácter subjetivo del análisis, que el mismo está definido por la actitud hacia el riesgo.

Para definir la curva de preferencias de cada medida de efectividad, se determina la actitud hacia al riesgo empleando los fundamentos de la teoría de la utilidad, de acuerdo a la siguiente secuela.

Se plantean dos situaciones, una que implica riesgo y que supone dos posibilidades igualmente probables; la primera es que se obtenga el valor más deseable y la segunda el menos deseable; la otra situación es cierta, es decir, se tiene la seguridad de obtener el valor de la variable involucrada. Lo anterior, se presenta esquemáticamente en la figura 10.2.

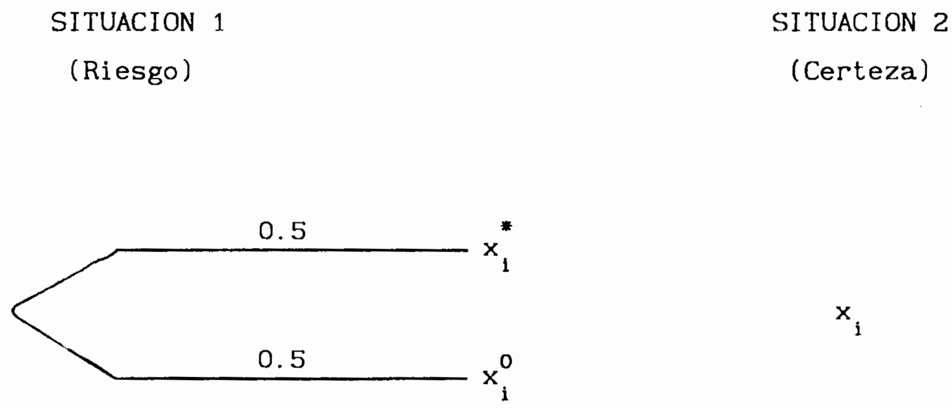


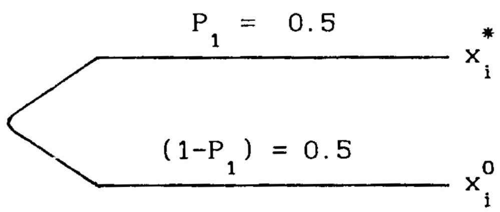
Figura 10.2

donde x_i^* es el valor más deseado de la i-ésima medida de efectividad; x_i^0 es el valor menos deseado de la i-ésima medida de efectividad, y x_i es el valor cierto, que tiene la propiedad de que es menos deseado que x_i^* y más deseado que x_i^0.

Con base en las dos situaciones anteriores, se determina por cuál de ellas se optaría. Si por la primera, buscando lograr el valor más deseable pero sin dejar de considerar el riesgo, igualmente probable, de caer en la menos deseable; o bien la segunda, en la cual de antemano se asegura un valor mejor que el menos deseable pero peor que el más deseable.

Con el propósito de seguir un procedimiento lógico y ya que se busca definir un punto de indiferencia para el cual ya no exista preferencia de una situación respecto a la otra, es conveniente ir cambiando la situación cierta de un valor cercano al menos deseable a uno cercano al más deseable, de manera de ir cerrando el intervalo hasta llegar al punto de indiferencia. Lo anterior se presenta en la figura 10.3.

SITUACION 1



SITUACION 2

$x_i^* > x_i^1$

$x_i^1 > x_i^2$

$\vdots$

P. I.

$\vdots$

$x_i^{n-1} > x_i^n$

$x_i^n > x_i^0$

Figura 10.3

Al punto de indiferencia (P. I.) se le asigna una utilidad de 0.5, ya que aplicando el valor esperado a la situación de riesgo, se tiene:

$$u\,(P.I.) = P_1 u(x_i^*) + (1-P_1)\, u(x_i^0) = (0.5)1 + (1-0.5)\,0 = 0.5$$

A partir de estos tres puntos ($u\,(x_i^*) = 1$, $u(x_i^0) = 0$, $u(P.I.) = 0.5$) se obtiene la curva de preferencias de la i-ésima medida de efectividad, empleando una función de tipo exponencial de la forma:

$$u_i\,(x_i) = e^{-A_i x_i} - B\,e^{-C_i x_i}$$

En el inciso 10.10 se muestra la metodología para determinar las constantes A, B y C, y por ende para obtener la curva de preferencias.

Cabe señalar que es conveniente realizar pruebas de consistencia antes de dar como definitivos los valores correspondientes a los puntos de indiferencia. Las pruebas de consistencia se basan en la metodología antes descrita, con la salvedad que para éstas se fija el punto de indiferencia y lo que varían son las probabilidades involucradas en la situación de riesgo.

10.6 PREFERENCIAS ENTRE MEDIDAS DE EFECTIVIDAD

Una vez establecidas las preferencias entre diferentes situaciones para una misma medida de efectividad, se procede a determinar las preferencias entre situaciones conjuntas, es decir, entre aquellas formadas por todas las medidas de efectividad en forma simultánea.

Para ilustrar la metodología que implica esto último, se hará uso del caso más sencillo que se presenta cuando sólo se tienen dos variables (x_1 y x_2), para las cuales ya se ha definido en forma individual sus funciones de utilidad marginal ($u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$).

Dado que se trata de dos medidas de efectividad diferentes, las escalas de utilidad, a pesar de variar ambas de cero a uno, no son comparables, por consiguiente, se establece una sola escala de utilidad conjunta.

Considérese la representación gráfica de la figura 10.4 para el caso de dos medidas de efectividad.

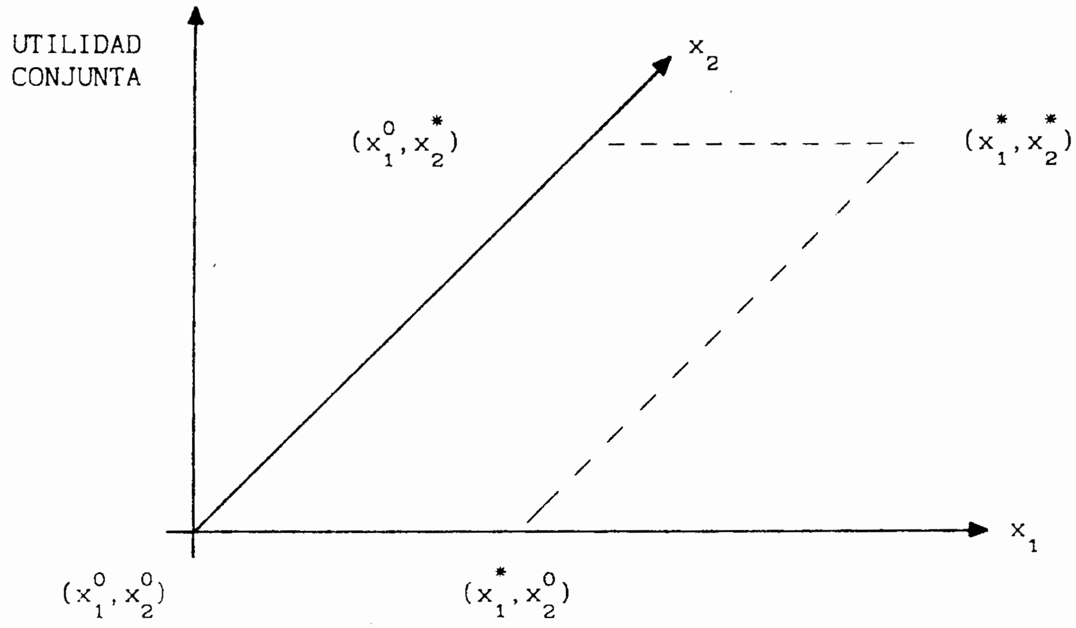


Figura 10.4

Se comparan los puntos $(x_1^0,\ x_2^0)$, $(x_1^*,\ x_2^0)$, $(x_1^0,\ x_2^*)$, y $(x_1^*,\ x_2^*)$ entre sí. Se puede observar que los tres últimos son preferidos sobre el primero, ya que éste está definido por los valores menos deseados para las dos medidas de efectividad, siendo por lo tanto cualquiera de las otras situaciones mejor. Un caso similar se presenta en lo que se refiere al último punto, el cual está definido por los valores más deseados de las dos medidas de efectividad, por lo que éste es preferido sobre los demás.

El problema que se presenta es determinar cuál de las situaciones restantes $(x_1^*,\ x_2^0)$ ó $(x_1^0,\ x_2^*)$ es preferida y en cuanto es mejor una que otra.

Para ello se efectúa un proceso similar al descrito en el caso de las funciones de utilidad marginal, bajo el planteamiento esquemático que se presenta en la figura 10.5.

SITUACION 1 (Riesgo)

SITUACION 2 (Certeza)

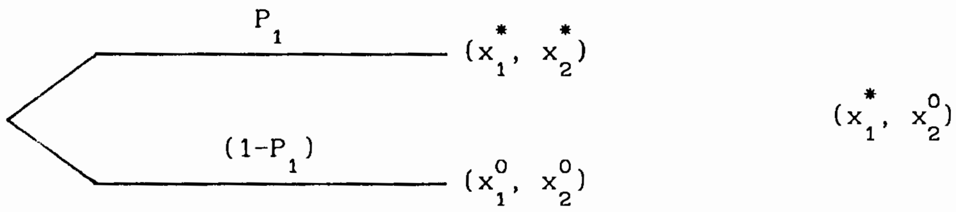


Figura 10.5

Donde (x_1^*, x_2^*) es el punto formado por los valores más deseados de las dos medidas de efectividad; (x_1^0, x_2^0) contiene a los valores menos deseados, y (x_1^*, x_2^0) es el punto definido por lo más deseado de la primera medida de efectividad y lo menos deseado de la segunda; estos tres puntos son conocidos. El problema consiste en determinar los valores de P_1 y de $(1 - P_1)$. Para esto se varía el valor de P_1 hasta llegar a la indiferencia entre las dos situaciones.

Dado que se está trabajando con una escala arbitraria, se asigna por ejemplo, una utilidad de uno al punto (x_1^*, x_2^*) y de cero a (x_1^0, x_2^0), si dicha convención se adopta, ello significa que la utilidad de (x_1^*, x_2^0) es igual a:

$$u(x_1^*, x_2^0) = P_1 u(x_1^*, x_2^*) + (1-P_1)\, u(x_1^0, x_2^0) = P_1$$

Resta únicamente definir qué utilidad se ha de asignar al punto (x_1^0, x_2^*) para lo cual, se sigue en procedimiento similar al indicado para (x_1^*, x_2^0).

Para el caso de seis medidas de efectividad hay que determinar las utilidades de:

$$(x_1^*, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0)$$

$$(x_1^0, x_2^*, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0)$$

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^*, x_4^0, x_5^0, x_6^0)$$

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^*, x_5^0, x_6^0)$$

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^*, x_6^0)$$

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^*)$$

10.7 EFECTIVIDAD CONJUNTA DE LAS ALTERNATIVAS

Se admiten las hipótesis siguientes:

- Las variables aleatorias definidas para cada medida de efectividad y para cada alternativa, son estocásticamente independientes.

- La utilidad marginal o conjunta es independiente de la alternativa; esto es, se utiliza la misma escala de valores para todas las alternativas.

Se deducirá la expresión para dos medidas de efectividad, las cuales generan las variables x_1 y x_2. Además, se supone que ya se han definido las curvas de utilidad marginal correspondientes a ambos conceptos.

Se considera que la escala de utilidad conjunta varía de cero a uno, por lo que al punto formado por los valores más deseados (x_1^*, x_2^*) le corresponde la utilidad de uno y al punto formado por los valores menos deseados (x_1^0, x_2^0) se le asigna la utilidad de cero.

Una vez que se ha fijado la escala se define la utilidad de los puntos (x_1^*, x_2^0) (x_1^0, x_2^*), según el procedimiento descrito en el inciso anterior.

Por otra parte, se asume que la curva que une a los puntos (x_1^0, x_2^0) y (x_1^*, x_2^0) es la función de utilidad marginal correspondiente a x_1, y de igual manera la que une a los puntos (x_1^0, x_2^0) y (x_1^0, x_2^*) es la que corresponde a x_2. En general cualquier combinación de puntos (x_1^0, x_2) y (x_1^*, x_2) ó (x_1, x_2^0) y (x_1, x_2^*) estarán unidos por la función de utilidad marginal de x_1 y x_2, respectivamente.

La hipótesis anterior se basa en que la actitud al riesgo para una medida de efectividad en forma individual, es independiente de la situación que guarda la otra medida (para el caso de dos medidas de efectividad) siempre y cuando esta última permanezca constante, mientras la otra varía.

Una representación gráfica de la función de utilidad conjunta se muestra en la figura 10.6.

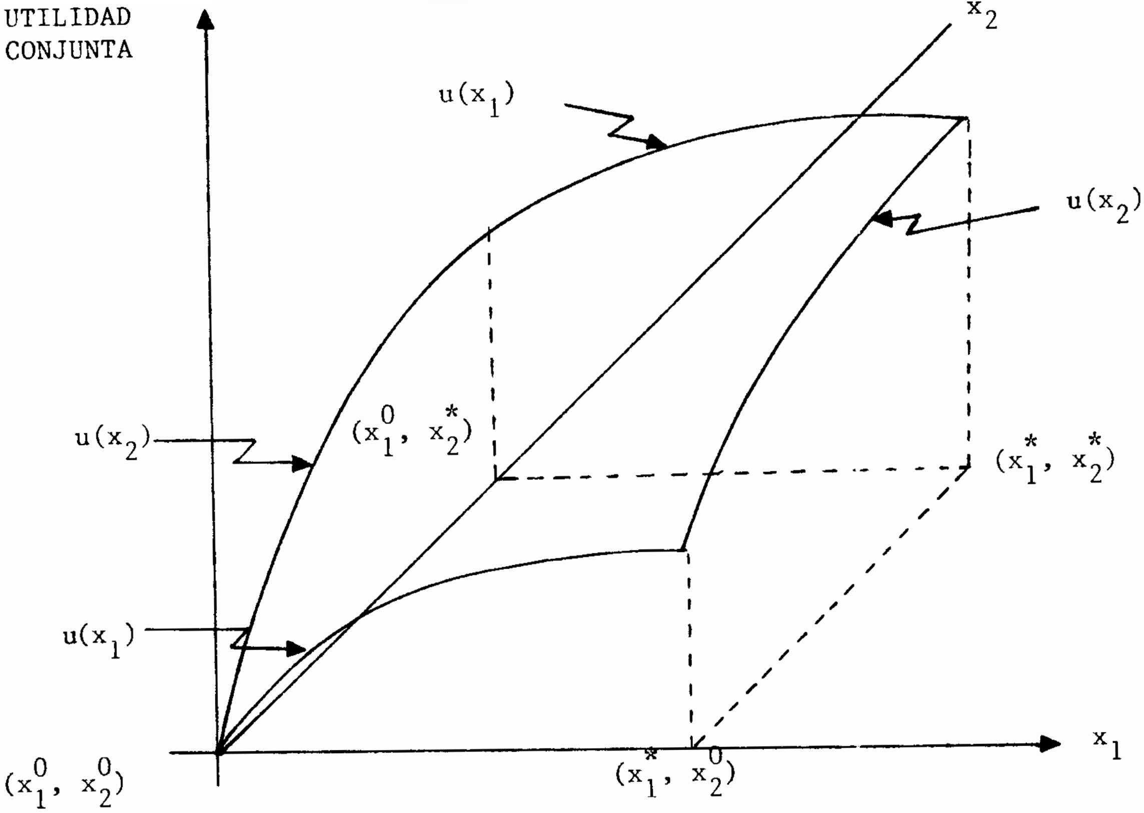


Figura 10.6

Para otra parte, su representación algebraica puede tomar cualquiera de las dos formas siguientes:

- Si $u(x_1^*, x_2^*)$ es igual a la suma de $u(x_1^*, x_2^0)$ y de $u(x_1^0, x_2^*)$, la utilidad de cualquier punto (x_1, x_2) está definida por la expresión:

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2^0) + u(x_1^0, x_2)$$

- Si $u(x_1^*, x_2^*)$ es diferente a la suma de $u(x_1^*, x_2^0)$ y $u(x_1^0, x_2^*)$, la utilidad de cualquier punto (x_1, x_2) está definida por la expresión:

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2^0) + u(x_1^0, x_2) + ku(x_1, x_2^0)\ u(x_1^0, x_2)$$

donde k es una constante positiva si:

$$u(x_1^*, x_2^*) > u(x_1^*, x_2^0) + u(x_1^0, x_2^*)$$

y negativa en caso contrario.

Para determinar el valor de k, basta con sustituir el punto (x_1, x_2) por (x_1^*, x_2^*) en la expresión anterior, para que todos los términos involucrados resulten conocidos.

$$u(x_1^*, x_2^*) = u(x_1^*, x_2^0) + u(x_1^0, x_2^*) + ku(x_1^*, x_2^0)\ u(x_1^0, x_2^*)$$

Por lo que:

$$k = \frac{u(x_1^*, x_2^*) - u(x_1^*, x_2^0) - u(x_1^0, x_2^*)}{u(x_1^*, x_2^0) \quad u(x_1^0, x_2^*)}$$

La forma general de la función de utilidad conjunta es:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{k} \left[\prod_{i=1}^{2} (1+K\ k_i u_i(x_i)) - 1 \right]$$

que se obtiene de la siguiente secuela de cálculo:

A la expresión

$$u(x_1,\ x_2) = u(x_1,\ x_2^0) + u(x_1^0,\ x_2) + ku(x_1,\ x_2^0)\ u(x_1^0,\ x_2)$$

se le suma $\frac{1}{k}$ a ambos miembros de la igualdad, quedando:

$$u(x_1, x_2) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k} + u(x_1, x_2^0) + u(x_1^0, x_2) + ku(x_1, x_2^0)\ u(x_1^0, x_2)$$

$$u(x_1, x_2) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left[\ 1+ku(x_1, x_2^0) + ku(x_1^0, x_2) + k^2\ u(x_1, x_2^0)\ u(x_1^0, x_2)\ \right]$$

y factorizando el segundo miembro, se tiene:

$$u(x_1, x_2) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left[\ (1+ku(x_1, x_2^0))\ (1+ku(x_1^0, x_2))\ \right]$$

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{k}\left[\ (1+ku(x_1, x_2^0))\ (1+ku(x_1^0, x_2))\ -1\ \right]$$

ahora bien, si se utilizan las funciones de utilidad marginal correspondientes a las diferentes medidas de efectividad, se tiene:

$$u(x_1, x_2^0) = k_1\ u(x_1)$$

$$u(x_1^0, x_2) = k_2\ u(x_2)$$

donde k_i son los valores que permiten transformar las utilidades marginales a una sola escala general que corresponde a la escala de utilidad conjunta y k_i refleja la preferencia que se tiene sobre la i-ésima medida de efectividad.

Luego:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{k} \left\{ \left[\prod_{i=1}^{2} (1+K\, k_i\, u(x_i)) \right] -1 \right\}$$

Generalizando a seis medidas de efectividad se tiene:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{K} \left\{ \left[\prod_{i=1}^{6} (1+K\, k_i\, u(x_i)) \right] -1 \right\}$$

Para determinar la utilidad conjunta esperada para cada alternativa, se utilizan las distribuciones de probabilidad definidas en el inciso 10.4 y la función de utilidad conjunta, se obtiene:

$$u_j(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\prod_{i=1}^{6} f_{ij}(x_{ij}) \right] \frac{1}{K} \left\{ \left[\prod_{i=1}^{6} (1+K\, k_i u_i (x_{ij} \right] -1 \right\} \prod_{i=1}^{6} dx_{ij} \right\}$$

y con base en la hipótesis de independencia estocástica entre medidas de efectividad, resulta:

$$u_j(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{K} \left\{ \prod_{i=1}^{6} \left[1+K \int_{-\infty}^{\infty} k_i f_{ij}(x_{ij})\, u_i(x_{ij})\, dx_{ij} \right] -1 \right\}$$

donde:

i	:	Medida de efectividad.
j	:	Alternativa.
x_{ij}	:	Variable aleatoria asociada a la medida de efectividad i y la alternativa j.
$f_{ij}(x_{ij})$	:	Distribución de probabilidad de la variable aleatoria x_{ij}.
u_j	:	Utilidad conjunta esperada de la alternativa j.
u_i	:	Utilidad marginal de la medida de efectividad i.
k_i	:	Constante que transforma la función de utilidad marginal a la escala de la función de utilidad conjunta.
K	:	Constante general.

10.8 ANALISIS DE SENSIBILIDAD

En este análisis se busca identificar y evaluar el efecto en la utilidad conjunta esperada de variaciones en las medidas de efectividad. Para ello, se varía cada medida de efectividad en forma determinista de manera de cubrir el rango que va desde el mejor valor hasta el peor valor.

La expresión que define la utilidad conjunta esperada es:

$$u_j = \frac{1}{K}\left\{\prod_{i=1}^{6}\left[\, 1+ \int_{-\infty}^{\infty} Kk_i f_{ij}(x_{ij})\; u_i(x_{ij}) d\, x_{ij}\,\right] -1\right\}$$

si se desea variar x_{ij} en forma determinista, se tiene:

$$u_j = \frac{1}{K}\left\{ (1+Kk_1 u_1(x_{ij}))\cdot \prod_{i=2}^{6}\left[\, 1+ \int_{-\infty}^{\infty} Kk_i f_{ij}(x_{ij})\; u_i(x_{ij})\; dx_{ij}\,\right] -1 \right\}$$

en donde:

$$u_j = \frac{1}{K}\left\{\prod_{i=2}^{6}\left[\, 1+ \int_{-\infty}^{\infty} Kk_i f_{ij}(x_{ij})\; u_i(x_{ij})\; d\, x_{ij}\,\right] -1\right\}$$

$$+ \; k_1 u_1(x_{1j}) \left\{\prod_{i=2}^{6}\left[\, 1+ \int_{-\infty}^{\infty} Kk_i f_{ij}(x_{ij})\; u_i(x_{ij})\; d\, x_{ij}\,\right] -1\right\}$$

$$u_j = A_j + Kk_1 u_1(x_{1j})\; A_j$$

$$= A_j + u_1(x_{1j})\; B_j$$

Lo que significa que la curva de variación de la utilidad esperada al cambiar la medida de efectividad 1, para la alternativa j es congruente con la curva de utilidad marginal relativa, correspondiente a la medida de efectividad 1.

Ahora bien x_1^* es el valor más deseado y x_1^0 es el menos deseado, para la medida de efectividad considerada, se cumple que:

$$u\,(x_1^*) = 1 \quad y \quad u\,(x_1^0) = 0$$

y que el intervalo de estudio para el análisis es:

$$x_1^0 \leqq x_1 \leqq x_1^*$$

y que:

$$u_j = A_j + u_1(x_{1j}) \ B_j$$

para x_1^* es igual a:

$$u_j = A_j + B_j$$

y para x_1^0 es igual a:

$$u_j = A_j$$

Es claro que si para la alternativa j=1 se tiene:

$$u_1 = A_1 + u_1(x_{11}) \ B_1$$

para la alternativa j=2 se tendrá:

$$u_2 = A_2 + u_1(x_{12}) \ B_2$$

De esta manera se logra una familia de curvas congruentes entre sí para todas las alternativas y, como ya se mencionó, todas ellas congruentes con la curva de utilidad marginal, tal y como se muestra en la figura 10.7.

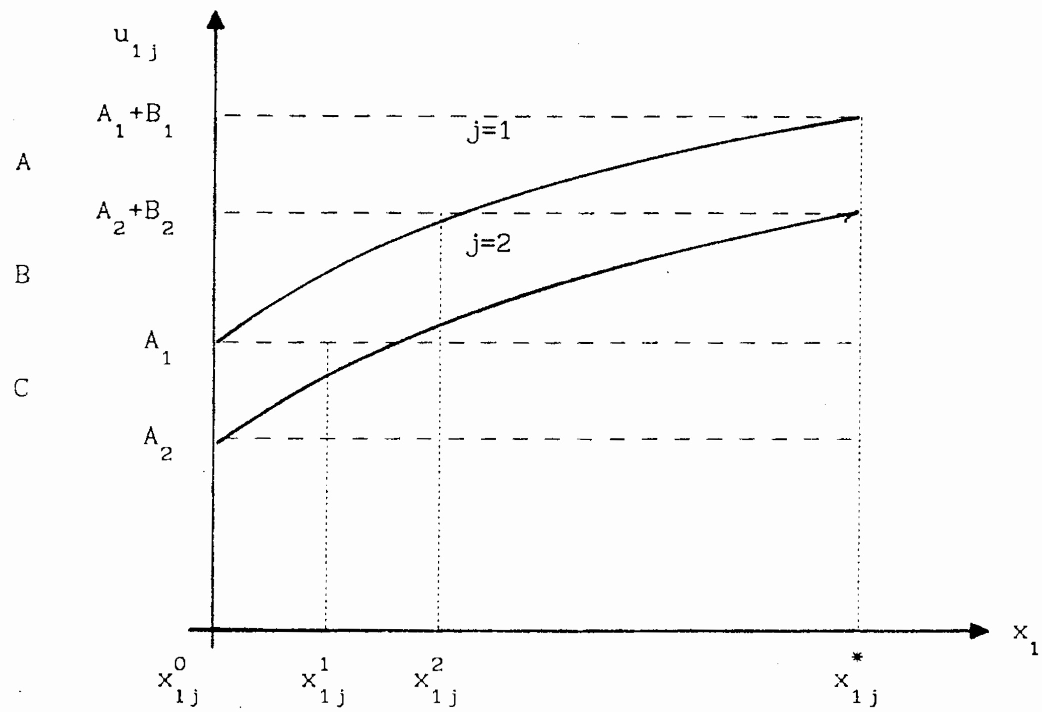


Figura 10.7

Al compararse las dos alternativas entre sí, pueden apreciarse tres franjas que convencionalmente se designarán por A, B y C, y que permiten extraer las conclusiones siguientes:

1. Si para la alternativa j=1 la medida de efectividad en estudio adquiere un valor que se encuentre entre x_1^2 y x_1^* su utilidad esperada se encuentra en la franja C, y se puede afirmar que la alternativa j=1 es preferida a la alternativa j=2, para cualquier valor dentro del rango para esta última.

2. Si para la alternativa j=2 la medida de efectividad en estudio adquiere un valor que se encuentre comprendido entre x_1^0 y x_1^1 su utilidad esperada se encuentra en la franja A, lo cual significa que para cualquier valor dentro del rango para la alternativa j=1, esta última es preferida sobre la primera.

3. Si el valor de la medida de efectividad en estudio se encuentra entre x_{1j}^1 y x_{1j}^* para la alternativa j=2, y entre x_{1j}^0 y x_{1j}^2 para la alternativa j=1, la utilidad esperada se encuentra en la franja B y existe duda sobre la preferencia. Puede existir indiferencia entre alternativas.

Así como se efectúa el análisis de sensibilidad variando en forma determinista una medida de efectividad a la vez, se desarrolla para el caso de n medidas de efectividad.

10.9 AJUSTE A UNA DISTRIBUCION BETA

Se describe la metodología para ajustar a una función de distribución Beta los valores x_{ij}^0, $\hat{x}_{ij}$ y x_{ij}^*, que corresponden al valor menos deseado, a la moda y al valor más deseado, de la medida de efectividad i para cada alternativa j.

Con el fin de simplificar el método de ajuste, se hace un cambio de variable reduciendo el rango entre x_{ij}^0 y x_{ij}^* a un rango entre cero y uno.

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{ij}^0}{x_{ij}^* - x_{ij}^0}$$

La ecuación que define a la distribución Beta en el rango $0 \leq x_{ij} \leq 1$ es:

$$\beta(m, n, x_{ij}) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\, x_{ij}^{m-1}\,(1-x_{ij})^{n-1}$$

El primer paso es encontrar los valores de m y n que definen a la función, lo cual se hace a partir del valor estimado de la media de la variable aleatoria.

$$\mu = \frac{m}{m+n} = \frac{x_{ij}^{o} + 4\hat{x}_{ij} + x_{ij}^{*}}{6}$$

y del valor exacto de la moda

$$\text{MODA} = \frac{m-1}{m+n-2} = \hat{x}_{ij}$$

De esta manera, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, m y n.

La anterior ecuación de la moda exige para su cumplimiento que:

$$m > 1 \quad \text{y} \quad n > 1$$

en caso contrario, en lugar de la fórmula de la moda se aplica la ecuación del valor estimado de la variancia.

$$\sigma^2_{x_{ij}} = \frac{m \ . \ n}{(m+n)^2 \ . \ (m+n+1)} = \left[\frac{(x^*_{ij} - x^0_{ij})}{6} \right]^2$$

la cual junto a la ecuación de la media da nuevamente el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Conocidos los valores de m y n, se sustituyen directamente en la ecuación de la distribución Beta, la cual queda completamente definida.

10.10 AJUSTE A UNA FUNCION DE TIPO EXPONENCIAL

Se describe la metodología para ajustar las curvas de utilidad marginal correspondientes a las medidas de efectividad, a funciones de tipo exponencial de la forma:

$$u_i(x_i) = e^{-A_i x_i} - B_i \ e^{-C_i x_i} \quad ; \quad x_i \geq 0$$

Se considera que:

$$u_i(x^0_i) = 0$$

$$u_i(\hat{x}_i) = 0.5$$

$$u_i(x^*_i) = 1$$

donde x_i^0 es el valor menos deseado, $\hat{x}_i$ es el punto de indiferencia y x_i^* es el valor más deseado de la medida de efectividad i.

Con el fin de simplificar el método de ajuste, se efectúa el cambio de variable:

$$z_i = \frac{x_i - x_i^0}{x_i^* - x_i^0}$$

De lo anterior se tiene:

$$u_i(z_i^0) = e^{-A_i z_i^0} - B_i e^{-C_i z_i^0} = 0$$

que se verifica solamente si $B_i = 1$.

Además:

$$u_i(z_i^*) = e^{-A_i z_i^*} - e^{-C_i z_i^*} = 1$$

entonces:

$$e^{-A_i} - e^{-C_i} = 1$$

de aquí que:

$$A_i = - \mathrm{Ln}\ (1+e^{-C_i})$$

Por otra parte

$$u_i(\hat{z}_i) = e^{-A_i \hat{z}_i} - e^{-C_i \hat{z}_i} = 0.5$$

por lo que:

$$e^{\mathrm{Ln}(1+e^{-C_i})\ \hat{z}_i} - e^{-C_i \hat{z}_i} = 0.5$$

resulta ser una ecuación con una incógnita, .

Definidos los valores de A_i y C_i se determina la función de utilidad marginal de la medida de efectividad i.

10.11 APLICACION

De acuerdo con la metodología descrita, las alternativas de configuración se estructuraron a partir de la red del Sistema de Transporte Colectivo-Metro, en su tercera etapa (figura 10.8) y de la adición de diferentes combinaciones de líneas nuevas. En total se analizaron siete alternativas.

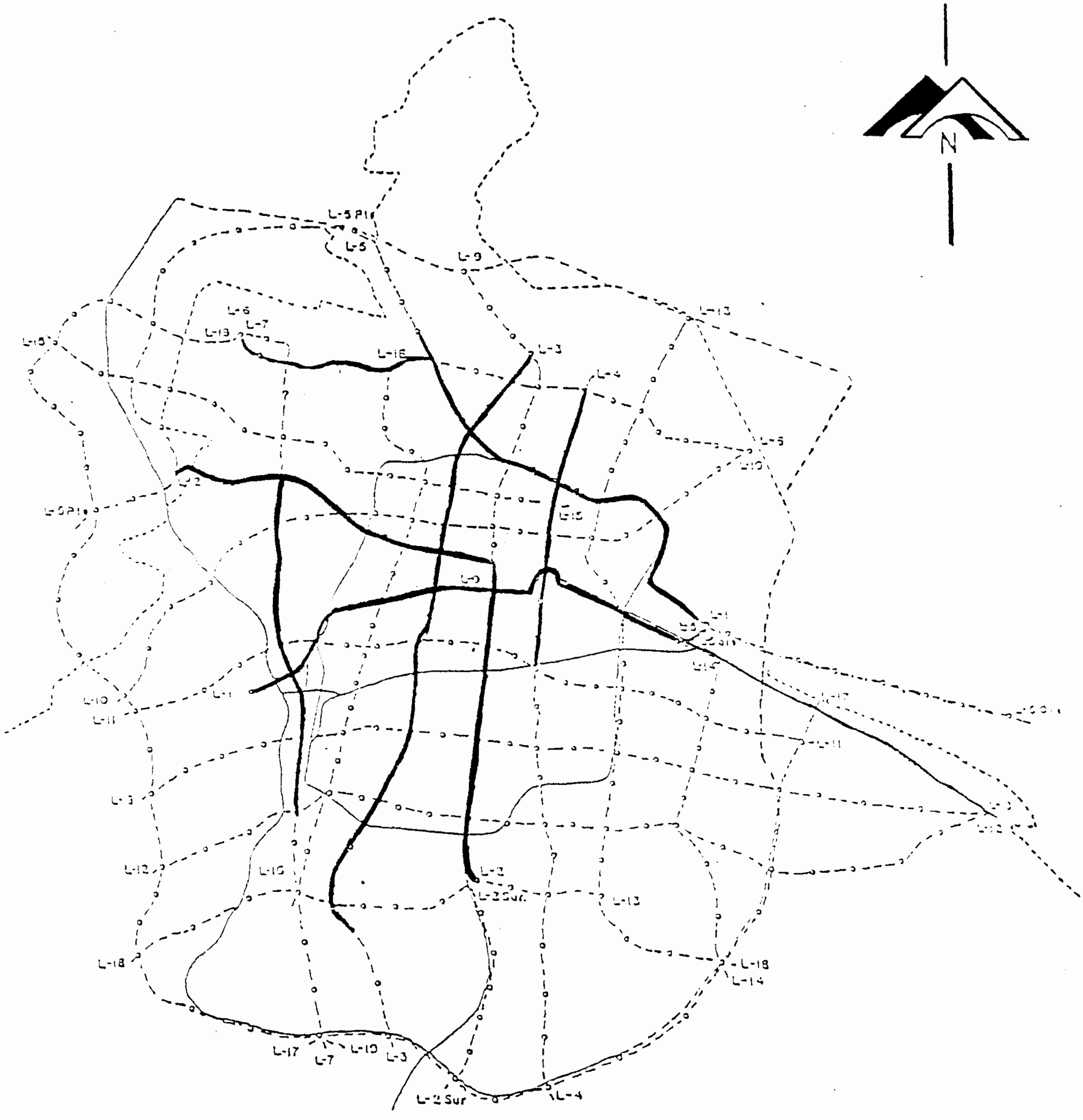


Figura 10.8

Con base en los objetivos del Plan Rector de Vialidad y Transporte del Distrito Federal y las medidas de efectividad correspondientes, se determinaron funciones de probabilidades que cuantificaran el impacto de las alternativas sobre cada una de ellas; utilizando el ajuste a una distribución de tipo Beta. En la figura 10.9 se ilustran las curvas de probabilidades obtenidas para la medida de efectividad **personas beneficiadas** y correspondientes a las alternativas 1 y 2.

Para cada una de las medidas de efectividad empleadas en la evaluación de alternativas, se captaron los valores menos deseado, más deseado y el correspondiente al punto de indiferencia. A los tres valores citados se les ajustó una función de utilidad doble exponencial. En la figura 10.10 se ilustra la curva de preferencia obtenida para la medida de efectividad **personas beneficiadas.**

La efectividad conjunta de cada alternativa se obtuvo determinando la utilidad conjunta esperada, la cual se calculó a partir de las funciones de distribución de probabilidad que reflejan el impacto de las alternativas sobre las medidas de efectividad, de la utilidad marginal de cada medida de efectividad representada por las curvas de preferencias, y de las preferencias relativas entre las medidas de efectividad. En la figura 10.11 se ilustra para cada alternativa la utilidad marginal esperada de las medidas de efectividad y su correspondiente efectividad conjunta; esta última permite jerarquizar las alternativas analizadas.

Además, se realizó el análisis de sensibilidad correspondiente. Para ello se determinó la efectividad conjunta de las alternativas excluyendo del proceso de evaluación una medida de efectividad a la vez, y se determinaron las curvas de la utilidad conjunta esperada variando en forma determinista la utilidad marginal de la medida de efectividad excluida de la evaluación, de manera que cubra todo el rango.

De la inspección de las curvas de utilidad conjunta esperada así obtenidas, se determinaron los rangos de los valores de las medidas de efectividad en las que podría haber indiferencia entre alternativas. Indiferencia que se presenta, tanto por encontrarse la utilidad conjunta esperada en el mismo rango, como por la incertidumbre asociada a las medidas de efectividad.

El análisis de sensibilidad permite determinar el efecto en la utilidad conjunta esperada, de eliminar una medida de efectividad del proceso de evaluación, generándose así un nuevo orden jerárquico de las alternativas.

En la figura 10.12, se ilustran las curvas de variación de la utilidad conjunta esperada en las siete alternativas de configuración al variar en forma determinista la medida de efectividad **reducción en el tiempo de transporte** y en la tabla 10.1 se muestran los rangos de indiferencia que resultan de las curvas para el caso de la alternativa de configuración 5 comparada con el resto.

La determinación de la efectividad conjunta de las diversas alternativas y el análisis de sensibilidad correspondiente permitió finalmente el jerarquizarlas conforme al grado o medida en que cada una de ellas satisfizo los objetivos del Plan Rector de Vialidad y Transporte.

EVALUACION PROBABILISTA DE ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION DE LA RED DEL SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO - METRO

IMPACTO DE LAS ALTERNATIVAS SOBRE LAS MEDIDAS DE EFECTIVIDAD

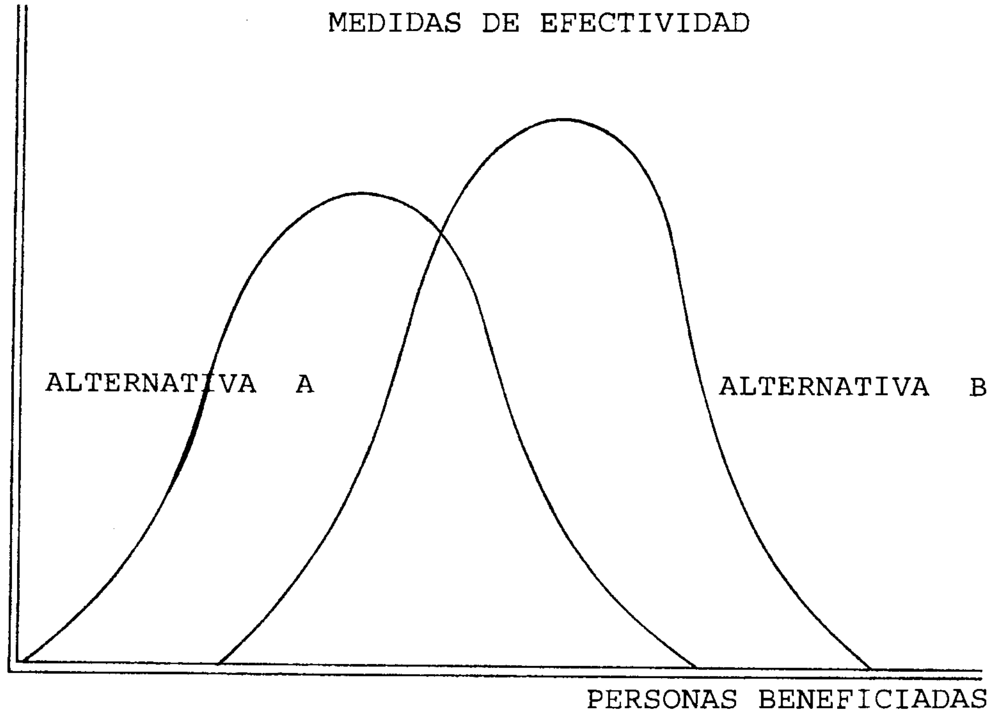


Figura 10.9

EVALUACION PROBABILISTA DE ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION DE LA RED DEL SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO - METRO

CURVA DE PREFERENCIA

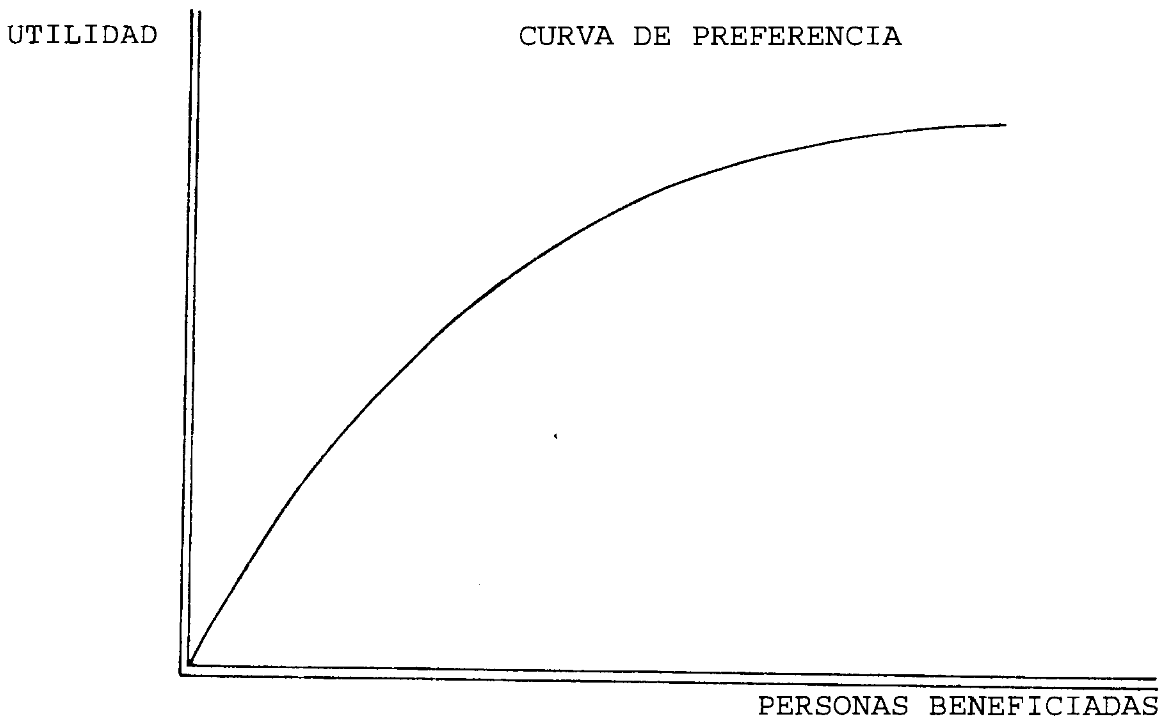


Figura 10.10

EVALUACION PROBABILISTA DE ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION DE LA RED DEL SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO - METRO

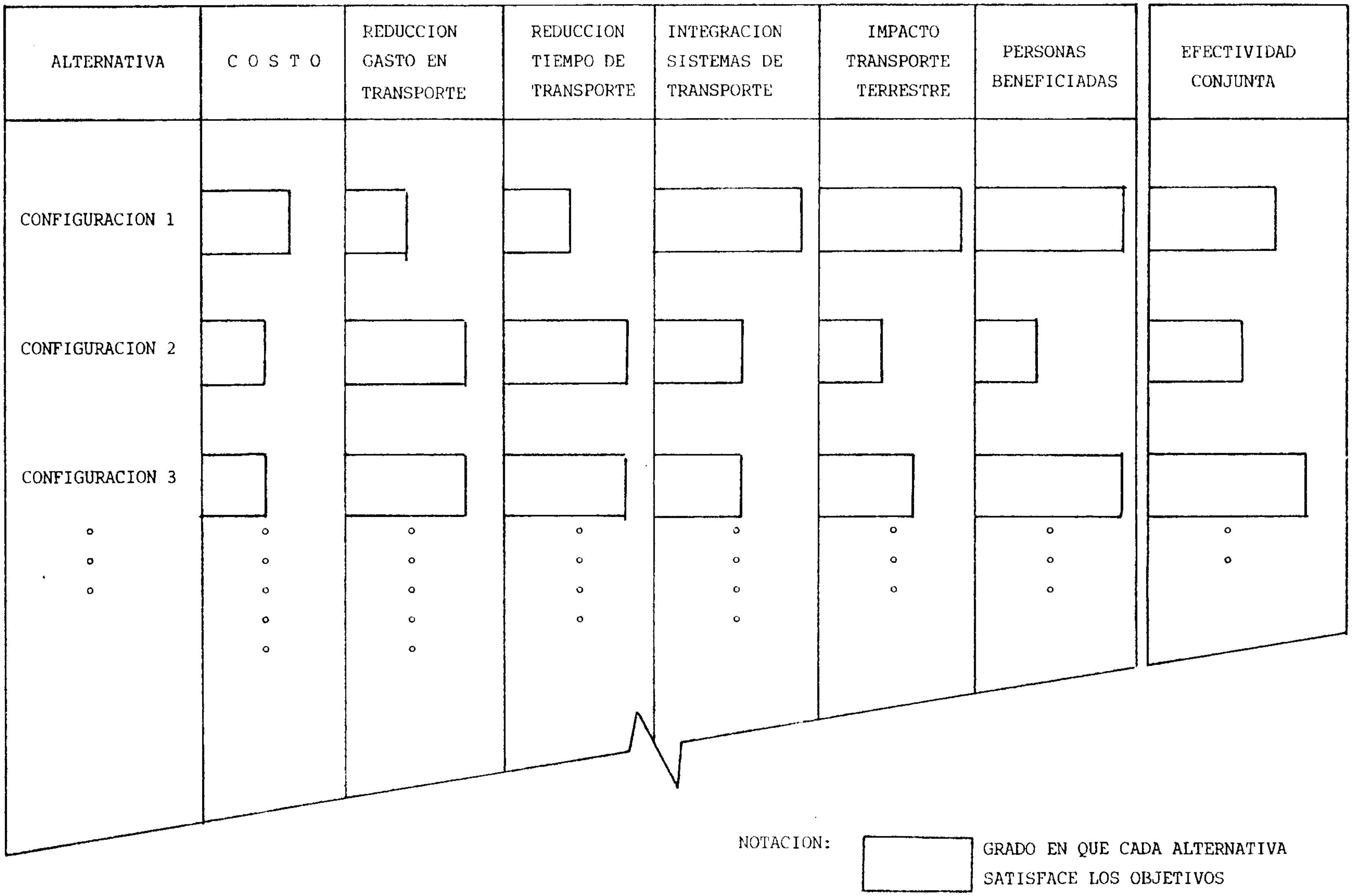


Figura 10.11

EVALUACION PROBABILISTA DE ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION DE LA RED DEL SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO - METRO

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

VARIACION DETERMINISTA DE LA REDUCCION DE TIEMPO DE TRANSPORTE

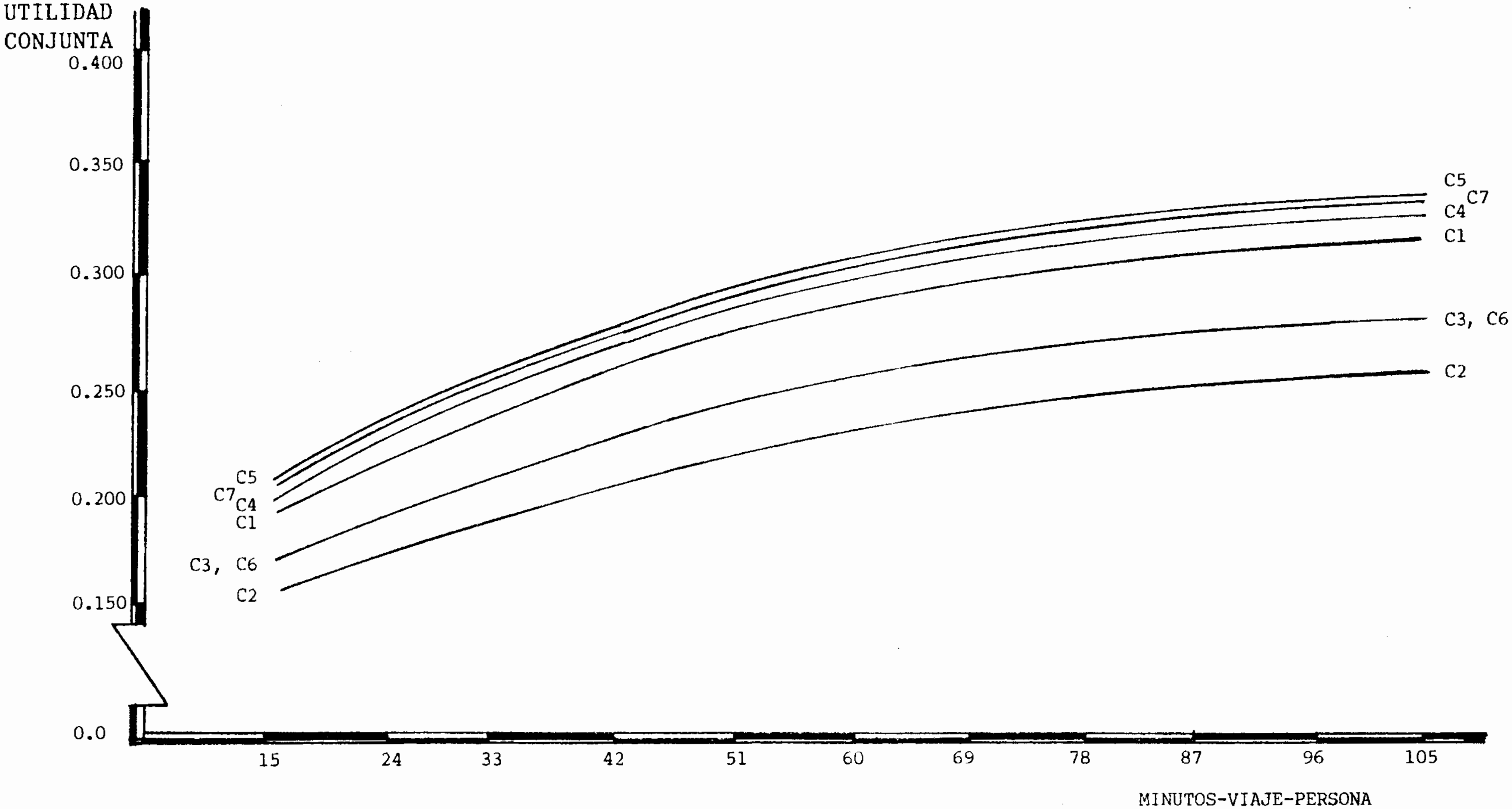


Figura 10.12

3.2

EVALUACION PROBABILISTA DE ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION DE LA RED DEL SISTEMA DE TRANSPORTE COLECTIVO - METRO

RANGOS DE POSIBLE INDIFERENCIA

MEDIDAS DE EFECTIVIDAD REDUCCION DEL TIEMPO DE TRANSPORTE (MINUTOS-VIAJE-PERSONA)

ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION	ALTERNATIVAS DE CONFIGURACION					
	C5	C7	C4	C1	C3 y C6	C2
C5	----------	menor que 103.69	menor que 101.06	menor que 93.18	menor que 68.21	menor que 49.82
C7	mayor que 16.96	---------	menor que 102.39	menor que 94.56	menor que 69.78	menor que 51.52
C4	mayor que 18.94	mayor que 16.97	---------	menor que 97.12	menor que 72.15	menor que 53.76
C1	mayor que 23.86	mayor que 21.82	mayor que 19.77	---------	menor que 69.09	menor que 60.00
C3 y C6	mayor que 42.69	mayor que 40.38	mayor que 38.08	mayor que 32.69	---------	menor que 83.46
C2	mayor que 60.00	mayor que 57.45	mayor que 54.91	mayor que 48.96	mayor que 29.43	---------

Tabla 10.1

3.2

10.12 RELACIONES VALUADAS DE PREFERENCIA EN LA TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO

10.12.1 INTRODUCCION

El problema central de la ayuda a la toma de decisiones es construir un modelo de las preferencias del "decisor", el cual idealmente haría las mismas elecciones que éste para cualquier subconjunto de opciones de un conjunto **A** de alternativas, que especifica el dominio de aplicabilidad del modelo. Estos modelos suponen la existencia de una función sobre los subconjuntos de **A**, denominada función de elección, la cual es determinista si la elección es siempre la misma para cada subconjunto, y es probabilista en caso contrario. Cuando las preferencias cumplen ciertas condiciones de "racionalidad", como la transitividad y el axioma de las alternativas irrelevantes o rechazadas, entonces la función de elección puede ser obtenida de solamente comparaciones binarias entre alternativas.

La estructura binaria clásica de preferencia consiste en que las comparaciones por pares de alternativas sólo pueden dar como resultado una preferencia estricta o una indiferencia. Esta estructura no considera grados intermedios entre la indiferencia y la preferencia que pudieran interpretarse como medidas de confianza, de intensidad de preferencia, decidibilidad, etc., de que una alternativa es mejor que otra. La necesidad de estructuras de preferencia más amplias es clara en diversas situaciones, por ejemplo, cuando el decisor es una colectividad y la proporción de individuos que prefieren una alternativa sobre otra es más apropiada para describir las preferencias del grupo, que simplemente decir que más del 50% prefiere una a la otra. Esta necesidad se presenta también si hay imprecisión en la evaluación de las alternativas o cuando el decisor tiene dificultades para discriminar preferencialmente pares de alternativas o asignar valores que afectan parámetros del modelo preferencial.

Como posibilidades para ampliar la estructura clásica de preferencia se tienen:

(a) agregar a la estructura de preferencia clásica una relación asimétrica Q, llamada *preferencial débil*, la cual contiene a la preferencia "normal" P, o en general, agregar una sucesión de preferencias débiles anidadas, $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \ldots \supseteq P$;

(b) considerar la relación de preferencia como una relación valuada sobre un conjunto totalmente ordenado Λ, típicamente alguno de los intervalos $[0,1]$ o $[-1,1]$, la cual está dada por un índice binario $\phi : A \times A \longrightarrow \Lambda$, donde los distintos valores de Λ corresponden con diversos grados de credibilidad, intensidad, etc. de la preferencia de una alternativa $\mathbf{x}$ sobre una alternativa $\mathbf{y}$; los dos extremos de la escala corresponden con el máximo grado de la preferencia en un sentido y el opuesto, respectivamente, el cual disminuye al aproximarse al centro de la escala, que por simetría corresponde con la indiferencia.

El primer camino es frecuente en los métodos de relaciones binarias de sobreclasificación (Roy, 1985 y 1991), y el otro, que considera la relación de preferencia como una relación valuada, ha sido explorada en el marco de la teoría de utilidad monoatributo, suponiendo preferencias inexactas (Fishburn, 1970), y con el enfoque de la teoría de la elección probabilista, en que la preferencia consiste en una probabilidad de elección distribuida sobre un conjunto de alternativas (Fishburn, 1973; Suppes *et al.*, 1989). También se ha explorado representar la relación de preferencia como un subconjunto difuso, donde el valor de la función de pertenencias $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in [0,1]$ es el grado en que una alternativa $\mathbf{x}$ es mejor que otra $\mathbf{y}$ (Roubens y

Vincke, 1983). Sobre el modelado de las preferencias con relaciones valuadas pueden consultarse también Roubens y Vincke (1984, 1985) y Doignon *et al.* (1986).

Los artículos hasta ahora mencionados no consideran las relaciones valuadas dentro de la problemática específica de una estructura de preferencia multicriterio.

10.12.2 ESTADO DEL ARTE

El tema de las relaciones valuadas de preferencia en la toma de decisiones multicriterio ha sido poco estudiado. Los trabajos que a continuación se mencionan resumen el estado actual del conocimiento sobre este tema.

Jacquet-Lagràze (1982)

Jacquet-Lagràze (1982) analiza en términos abstractos el proceso de agregación de preferencias multicriterios y después muestra que los métodos usuales caen en el mismo tipo de procedimiento de agregación básica, independientemente de que manejen datos ordinales o cardinales; para ello considera una estructura de preferencia basada en índices binarios, evaluados sobre escalas que pueden ser no numéricas, como la escala clásica { "indiferente", "preferido" }, o numéricas, valores en el intervalo $[0,1]$; en todos los casos la máxima credibilidad no necesariamente corresponde a la dominancia o dominancia de Pareto (se recuerda que una alternativa **x** *domina* a otra **y** si y sólo si **x** es al menos tan buena como **y** para todo criterio, y es estrictamente mejor para al menos un criterio).

Fishburn (1982, 1984)

En un contexto de toma de decisiones bajo riesgo, donde el conjunto de alternativas, A, es un conjunto convexo de medidas de probabilidad, Fishburn (1982) generaliza la conocida teoría de utilidad lineal de von Neumann y Morgenstern (1967). Para modelar las preferencias en vez de una función de utilidad usa una función binaria $i),)$: $A \times A \longrightarrow [-1,1]$ cuasisimétrica ($i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\ i(\mathbf{y},\mathbf{x})$), que puede interpretarse como una medida de intensidad de preferencia. Demuestra que la propiedad de transitividad

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) + i(\mathbf{y},\mathbf{z}) = i(\mathbf{x},\mathbf{z}) \qquad \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}.\mathbf{z} \in A$$

equivale a la existencia de una función de utilidad u sobre A tal que

$$i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})$$

situación en la cual su teoría se reduce a la teoría de utilidad tradicional. Posteriormente Fishburn (1984) aplica sus ideas al caso multicriterio y obtiene su teoría de utilidad no lineal multiatributo.

Trejos (1991); *Bana e Costa y Vincke* (1992)

Trejos (1991) y Bana e Costa y Vincke (1992) en forma independiente han propuesto índices binarios de credibilidad aplicables a modelos aditivos cuando hay imprecisión en la asignación de los pesos. La credibilidad $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de que una alternativa $\mathbf{x}$ es mejor que una alternativa **y** es una cierta medida (el volúmen o una determinada proyección) sobre la intersección de dos conjuntos, un *paralelepípedo de pesos admisibles,* que el decisor especifica dando un intervalo de indeterminación a cada peso $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$, y el semiespacio de los vectores de peso $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ acordes con la proposición de que la alternativa **x** es al menos tan buena como la alternativa **y**,

$$H^+(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\{ p_i : \sum p_i \; (\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) \geq 0 \right\} \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Si el paralelepípedo de pesos admisibles está totalmente contenido en el semiespacio $H^+(\mathbf{x},\mathbf{y})$, entonces $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ y la credibilidad de que **x** es mejor que **y** alcanza su máximo, lo que no implica la dominancia de **x** sobre **y**. Estos índices cumplen la propiedad que Fishburn (1973) y Suppes *et al.* (1989) denominan de *transitividad estocástica moderada.*

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq c(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq 0.5 \;\Rightarrow\; c(\mathbf{x},\mathbf{z}) \geq c(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

11. APLICACIONES AL TRANSPORTE

En este capítulo se presentan algunas aplicaciones a problemas de transporte; cabe observar que los modelos utilizados pueden adecuarse para su empleo en muchas otras áreas de interés.

11.1 **MOVIMIENTO DE TIERRAS** (Griffis)

Un proyecto requiere de mover 535,000 m^3 de material medido en banco. El material será tierra ordinaria buena con un peso de 1,602 kg/m^3 medida en banco.

Los bancos de préstamo son fácilmente accesibles a los camiones, los cuales podrán estacionare a ambos lados de la pala cuyo ángulo de oscilación no excederá a 90^{o}. La excavación puede efectuarse a profundidad óptima.

Se requerirá de un acarreo promedio de 2.1 km hacia arriba de una pendiente del 2.2% en promedio. La tierra se excavará con una pala mecánica de 2.30 m^3 con una producción probable de (0.80) (298) = 238.4m^3/hora medida en banco.

Se estima que la resistencia promedio al rodamiento en el camino de acarreo será de 30 kg./ton. El coeficiente de tracción entre las llantas de los camiones y el camino de acarreo tendrá un promedio de 0.60.

La tierra se transportará con vagonetas de vaciado por el fondo, cuya capacidad estimada será de 11.5m^3 medida en banco.

Las especificaciones para los caminos son las siguientes:

CAPACIDAD DE CARGA NETA	18 144 kg
MOTOR DIESEL DE	200 hp
PESO EN VACIO	16 692 kg
PESO BRUTO CARGADO	34 836 kg
DISTRIBUCION DEL PESO BRUTO	
EJE DELANTERO	5 443 kg
EJE TRASERO	14 696 kg
TAMANO DE LAS LLANTAS EN LOS EJES MOTRICES	24.00 x 25

Especificaciones de rendimiento: las dadas en la tabla 11.1

ENGRANE	VELOCIDAD km/hr	TRACCION kg
1a.	5.15	9026
2a.	10.14	4581
3a.	19.15	2427
4a.	53.47	1388
5a.	52.63	882

Tabla 11.1

De registros pasados se sabe que el costo horario por camión incluyendo al chofer, es de 148 unidades monetarias mientras que para la pala mecánica incluyendo al operador es de 356 unidades monetarias por hora.

Determine el número de camiones que deben utilizarse si se desea minimizar los costos.

Para determinar el tiempo medio entre llegadas T_a se analiza el tiempo requerido para cada operación en un ciclo de viaje redondo de un camión. Para calcular el tiempo T_s de servicio se pueden utilizar las tablas proporcionadas por el fabricante. Se sigue que:

$$\lambda = \frac{1}{T_a} \quad ; \quad \mu = \frac{1}{T_s}$$

En donde λ y μ son respectivamente la **relación media de llegadas** y la **relación media de servicios.** Conocidos estos parámetros y suponiendo producción máxima de la pala, resulta que la cantidad acarreada Q en m^3 por hora es:

$$Q = t\ c\ \mu \tag{11.1}$$

en donde c es la capacidad de los camiones y t la porción productiva de una hora.

Para obtener la verdadera producción esperada, Q deberá multiplicarse por la probabilidad de que al menos se tenga un camión en la cola en espera de servicio de la pala, esto es:

$$< Q > = (1-P_0)t\ c\ \mu$$

en donde, por tratarse de un modelo de espera M|M|s con fuente finita de tamaño m, se tiene:

$$P_0(m) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

siendo m el número de camiones por determinar en forma tal que se minimice el costo total < Tc > por m^3 que está dado por:

$$< Tc > = \frac{C_t\ m + C_s}{< Q >} \qquad (11.2)$$

en donde:

C_t = costo horario por camión.

C_s = costo horario de la pala.

El efecto combinado de la resistencia al rodamiento y de la pendiente en un camión cargado será:

Resistencia al rodamiento	=	30 Kg/ton
Resistencia por pendiente, (2.2) 10	=	22 Kg/ton
Resistencia total	=	52 Kg/ton
Peso bruto del camión $\frac{34836}{1000}$	=	34.8 ton
Tracción requerida (34.8) (52)	=	1810 Kg
Velocidad máxima del camión cargado	=	19.15 Km/hr

El efecto combinado de la resistencia al rodamiento y de la pendiente de un camión vacío será:

Resistencia al rodamiento	=	30 Kg/ton
Resistencia por pendiente (2.2) (10)	=	22 Kg/ton
Resistencia total	=	8 Kg/ton
Peso del camión vacio $\frac{16692}{1000}$	=	16.7 ton
Tracción requerida (16.7) (8)	=	134 Kg
Velocidad máxima del camión vacío	=	52.63 Km/hr

El tiempo requerido para cada operación en un ciclo de viaje redondo se calcula como sigue:

Tiempo perdido en el banco y en acelerar 1.5 min	=	0.0250 hr
Viaje a descargar $\frac{2.1 \text{ km}}{19.15 \text{ km/hr}}$	=	0.1097 hr
Descarga, volteo y aceleración 1 min	=	0.0167 hr
Viaje al banco $\frac{2.1 \text{ km}}{52.63 \text{ km/hr}}$	=	0.0399 hr
Tiempo total del ciclo	=	0.1913 hr
Carga $\frac{11.5 \text{ m}^3}{238.4 \text{ m}^3\text{/hr}}$	=	0.0482 hr

Del análisis anterior se obtiene:

$$T_a = 0.1913 \; ; \; \lambda = \frac{1}{T_a} = 5.2274$$

$$T_s = 0.0482 \; ; \; \mu = \frac{1}{T_s} = 20.7469 \; ; \; \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.2520$$

Debe ahora calcularse $P_0(m)$ para diversos valores de m (número de camiones); así para m=1 resulta:

$$P_0(1) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{1} \frac{11}{(1-n)!} \; (0.2520)^n} = \frac{1}{1+0.2520} = 0.7987$$

y de la misma manera se obtienen los valores consignados en la tabla 11.2.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_0(m)$	0.7987	0.6224	0.4597	0.3202	0.2080	0.1244	0.0679	0.0336	0.0151	0.0061

Tabla 11.2

Para obtener la producción esperada < Q >, basta aplicar (11.1) en donde se supondrá un tiempo productivo de 50 min por hora, luego:

$$tc\mu = (\frac{50}{60}) \; (11.5) \; (20.747) = 198.8 \; \frac{m^3}{hr}$$

y consecuentemente:

$$< Q > = 198.8 \; (1-P_0)$$

Así para m=1 se obtiene:

$$< Q > = 198.8 \; (1-0.7987) = 40.02 \; \frac{m^3}{hr}$$

en forma análoga se obtienen los valores consignados en la tabla 11.3

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\langle Q(m)\rangle$	40.02	75.06	107.41	135.14	157.44	174.06	185.30	192.11	195.78	197.58

Tabla 11.3

Finalmente deberá aplicarse (11.2) con $C_t = 148$ y $C_s = 356$; si m=1 resulta:

$$\langle T_c(1)\rangle = \frac{148 + 356}{40.02} = \frac{12.59}{m^3}$$

y de la misma manera se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 11.4

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\langle T_c(m)\rangle$	12.59	8.69	7.45	7.02	6.96	7.15	7.51	8.02	8.62	9.29

Tabla 11.4

De la tabla 11.4 se concluye que lo más conveniente es utilizar cinco camiones.

11.2 OPERACION PORTUARIA (Sasieni)

Se desea ampliar las facilidades de un puerto construyendo muelles dedicados a la descarga de mineral. Debe decidirse el número de muelles y el tipo de instalación en cada uno en forma tal que se minimicen los costos totales de descarga.

Se deben elegir entre tres tipos de instalación de descarga I_1, I_2 e I_3 cuyas características se muestran en la tabla 11.5

TIPO I_j	COSTOS UNITARIOS FIJOS C_{fj}	COSTOS UNITARIOS DE OPERACION C_{oj}	CAPACIDAD DE DESCARGA DIARIA C_{dj}
I_1	5,000	6,000	3,000
I_2	10,000	9,000	5,000
I_3	15,000	12,000	7,000

Tabla 11.5

Los costos fijos C_{fj} incluyen conceptos tales como amortización de la instalación, mantenimiento general, etc., y son aplicables independientemente de que se utilice o no el equipo. Los costos de operación C_{oj} solo se presentan cuando se usan las instalaciones.

Los barcos transportan 9,000 toneladas de mineral y arriban al puerto en forma poissoniana con una relación media de llegadas de dos barcos cada tres días. Los tiempos de servicio de cada tipo de instalación se consideran exponenciales con una relación media de servicio definida por la capacidad de descarga C_{dj} correspondiente. El tiempo de permanencia en el sistema representa un costo de 20,000 por barco y por día.

Finalmente, por razones de homogeneidad, se desea que todas las instalaciones de descarga sean del mismo tipo.

¿Qué tipo de instalación debe elegirse y cuántos muelles deben construirse?

Se considerará *a priori* la posibilidad de construir de uno a cuatro muelles, de esta manera cada tipo de instalación puede utilizarse en 1, 2, 3 ó 4 muelles. Luego si se designa una $I_j (j=1,2,3)$ al tipo de instalación y con i al número de muelles, resultan 12 políticas posibles (I_j, i).

La relación media de llegadas λ permanece constante para cada una de las 12 políticas y está dada por:

$$\lambda = \frac{2}{3} = 0.667 \text{ BARCOS POR DIA}$$

La relación media de servicio para cada muelle depende solamente del tipo de instalación de descarga. Se tiene:

$$\mu_{I_1} = \frac{3000}{9000} = 0.333 \qquad \text{BARCOS POR DIA}$$

$$\mu_{I_2} = \frac{5000}{9000} = 0.556 \qquad \text{BARCOS POR DIA}$$

$$\mu_{I_3} = \frac{7000}{9000} = 0.778 \qquad \text{BARCOS POR DIA}$$

Obsérvese que las políticas $(I_1,1)$, $(I_1,2)$ e $(I_2,1)$ pueden omitirse ya que en estos casos los factores de utilización respectivos son:

$$\frac{0.667}{0.333} = 2 > 1, \quad \frac{0.667}{(2)\ (0.333)} = 1 \ ; \ \frac{0.667}{0.556} \quad = 1.20 > 1$$

y las colas correspondientes crecerían indefinidamente. Consecuentemente sólo se analizarán las 9 políticas restantes. Para ello se calculará, para cada política, el costo total esperado por día de operación. Este costo será la suma de:

i) los costos fijos de las instalaciones

ii) los costos de operación de las instalaciones

iii) los costos de permanencia en el sistema.

Los costos fijos para cada política se calculan con base en la columna C_{fj} de la tabla 11.5. Por ejemplo, la política $(I_1,3)$ tiene un costo fijo de (3) (5000) = 15,000 por día. Estos resultados se muestran en la tabla 11.6.

$I_j \backslash i$	1	2	3	4
I_1	--	--	15,000	20,000
I_2	--	20,000	30,000	40,000
I_3	15,000	30,000	45,000	60,000

Tabla 11.6

El costo diario de operación correspondiente a cada política se puede obtener calculando primero la porción del día en que debe trabajar un muelle para conservar en promedio un equilibrio estable entre las llegadas y los servicios. Por ejemplo, la política $(I_1,3)$ tiene una relación media de servicios de $3\ \mu I_1 = (3)\ (0.333) = 1$ barco por día; luego la fracción del día que deberá trabajar cada muelle es $(\lambda/1) = 0.667$ que es precisamente el factor de utilización del sistema. Los factores correspondientes a cada política se muestra en la tabla 11.7.

I_j \ i	1	2	3	4
I_1	--	--	0.667	0.500
I_2	--	0.6000	0.400	0.300
I_3	0.858	0.429	0.286	0.2145

Tabla 11.7

Consecuentemente el costo de operación diario para cada política estará dado por: $(i) * (C_{oj}) *$ (factor de utilización del sistema) así, para la política $(I_1,3)$ dicho costo es $(3)\ (6000)\ (0.667) = 12{,}000$. De la misma manera se obtienen los valores mostrados en la tabla 11.8.

I_j \ i	1	2	3	4
I_1	--	--	12,000	12,000
I_2	--	10,800	10,800	10,800
I_3	10,296	10,296	10,296	10,296

Tabla 11.8

Como se trata de un modelo de espera $M|M|s$, el tiempo medio de permanencia en el sistema está dado por:

$$W = \frac{\rho^{i}}{i!\ (1-\rho/i)^{2}}\ \rho_0 + \frac{1}{\mu} \qquad (11.3)$$

en donde λ y μ deben estar referidos a la política correspondiente y P_0 está dado por

$$P_0 = \frac{1}{\dfrac{\rho^{i}}{i!\ (1-\rho/i)} + \sum_{n=0}^{i-1} \dfrac{\rho^{n}}{n\ !}}$$

Por ejemplo para la política $(I_1,\ 3)$ se tiene:

$$\mu = 3\ \mu_{I_1} = 3(0.333) = \ ;\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.667$$

luego:

$$P_0 = \frac{1}{\dfrac{0.667^{3}}{3!\ (1-\dfrac{0.667}{3})} + \sum_{n=0}^{2} \dfrac{0.667^{n}}{n!}} = 0.111\ .$$

De la misma manera se obtienen los valores de P_0 para cada política que se muestran en la tabla 11.9.

I_j \ i	1	2	3	4
I_1	--	--	0.111	0.130
I_2	--	0.250	0.294	0.300
I_3	0.143	0.200	0.422	0.404

Tabla 11.9

Al utilizar (11.3) y los valores dados en la tabla 11.9 se obtiene, para cada política, el tiempo medio de permanencia en el sistema. Estos valores se consignan en la tabla 11.10.

I_j \ i	1	2	3	4
I_1	--	--	2.666	0.261
I_2	--	1.015	0.294	0.024
I_3	7.714	0.289	0.261	0.005

Tabla 11.10

Para obtener el costo de permanencia correspondiente a cada política bastará multiplicar los valores dados en la tabla 11.10 por el número esperado de barcos por día (λ) y por 20,000 (costo de permanencia por barco y por día); los resultados se muestran en la tabla 11.11.

I_j \ i	1	2	3	4
I_1	--	--	35,546	3,480
I_2	--	13,532	3,920	320
I_3	102,850	3,853	3,480	67

Tabla 11.11

Al sumar los costos diarios de operación (tabla 11.8), fijos (tabla 11.6) y de permanencia (tabla 11.11) se obtienen los costos totales esperados que se consignan, para cada política, en la tabla 11.12.

I_j \ i	1	2	3	4
I_1	--	--	62,546	35,480
I_2	--	44,332	44,920	51,120
I_3	128,146	44,149	58,776	70,363

Tabla 11.12

De la tabla 11.12 se concluye que lo más conveniente es construir 4 muelles y equiparlos con instalaciones del tipo I_1.

11.3 TARIFAS DE ATERRIZAJE (Driessen)

Considérese el problema de asignar tarifas por el aterrizaje de diferentes tipos de aviones.

En general, se tienen dos tipos de gastos en el aeropuerto:

- costos variables de operación debido a los aterrizajes de los diferentes tipos de avión y
- un costo de capital fijo (v.g. construcción de terminales, pistas y calles de rodaje).

Los costos de operación variables son directamente adjudicables a los aviones que usan el aeropuerto, y por lo tanto, ellos se asignan por aterrizaje. Consecuentemente, el problema consiste en cómo asignar el costo de capital a los aviones. El costo fijo asociado a proporcionar facilidades aeroportuarias depende del mayor avión que lo va a utilizar, ya que es el que requiere de mayores facilidades.

Se agruparán los aviones en m tipos ($m \geq 1$). Sea N_j el conjunto de aterrizajes del tipo j ($j=1,\ldots,m$) y $N = \bigcup_{j=1}^{m} N_j$ el conjunto de todos los aterrizajes en el aeropuerto. Sea C_j el costo de adecuar pistas y calles de rodaje para aviones del tipo j. Sin perder generalidad, estos tipos pueden ordenarse en forma tal que $0 = C_0 < C_1 < \ldots < C_m$.

Sea $S \subset N$, $S \neq \phi$. Luego el costo $C(S)$ de adecuar las facilidades aeroportuarias para poder recibir todos los aterrizajes en S está dado por:

$$C(S) = \max \left(C_j \mid 1 \leq j \leq m,\ S \cap N_j \neq \phi \right) \tag{11.4}$$

mientras que $C(\phi) = 0$.

Se trata de un **juego cooperativo con** n **participantes y función característica** que es una pareja ordenada (N; v) en donde N es un conjunto de n elementos y $v: 2^N \longrightarrow R$ es una función de conjuntos con valores reales en el conjunto 2^N de todos los subconjuntos de N tal que v (ϕ) = 0.

Los elementos del conjunto N se denominan **jugadores**, y a la función de conjuntos relevantes v se le llama la **función característica** del juego. Al subconjunto S del conjunto de jugadores N ($S \subset N$) se le llama una **coalición** y a V (S) el **valor de la coalición** en el juego; además se dice que la coalición S es no trivial si $S \neq \phi$, N. Al número de jugadores en la coalición S se le representa con $|S|$.

Generalmente al juego cooperativo (N;v) se le identifica con su función característica v. Además, a la clase de todos los juegos cooperativos con n participantes y conjunto de jugadores N se le designa con G^N.

En general se supone que los n jugadores en N se numeran con 1,2,...,n por lo que se admite que N = {1,2,...,n} y también se anota G^n en lugar de G^N.

De esta manera, el problema de asignación de costos aeroportuarios puede enfocarse como un juego cooperativo (N;c) y resolverse utilizando dos tipos de soluciones específicas de **un punto** llamadas valor τ (Driessen y Tijs) y valor de Shapley (ϕ (c)).

Teorema 1. Sea (N;c) el juego de asignación de costos aeroportuarios derivado de (11.4) y sean $n_j = |N_j|$ para toda $1 \leqq j \leqq m$. Luego:

(i) $\tau_i (c) = (\sum_{k=1}^{m} n_k c_k)^{-1} c_m c_j$ para $i \in n_j$ si $n_m \geqq 2$

(ii) Si $n_m = 1$ y $m \geqq 2$ entonces:

$$\tau_i(c) = \left(\sum_{k=1}^{m-1} n_k c_k + c_{m-1}\right)^{-1} c_{m-1} c_j \text{ para } i \in N_j,\ j \neq m$$

$$\tau_i(c) = \tau_i(c) + c_m - c_{m-1} \text{ para } i \in N_m \text{ e } i \in N_{m-1}$$

De acuerdo con este teorema el concepto de valor τ aplicado a la clase de juegos de asignación de costos aeroportuarios equivale a la siguiente regla.

"Siempre que se tengan al menos dos aterrizajes de aviones del mayor tipo, asígnese los costos conjuntos C_m en proporción a los costos de acondicionamiento aeroportuario C_j, $1 \leq j \leq m$, en donde el costo C_j representa el costo de adecuación aeroportuaria para aviones del tipo j. En el caso de aviones del mayor tipo se usa el costo de acondicionamiento sólo una vez, como paso inicial, en el segundo paso se carga el costo incremental $C_m - C_{m-1}$ al mayor avión, asignando los costos conjuntos restantes C_{m-1} entre todos los aterrizajes en proporciòn a los costos de acondicionamiento de su tipo, en el entendimiento de que el mayor avión de tipo m se considera ahora como un avión de tipo m-1".

Teorema 2. Sea (N;c) el juego de asignación de costos aeroportuarios derivado de (11.4) y sea $m = \sum_{k=j}^{m} |N_k|$ para toda $1 \leq j \leq m$. Luego:

$$\phi_i(c) = \sum_{k=1}^{j} m_k^{-1} (c_k - c_{k-1}) \text{ para } i \in N_j$$

De acuerdo con este teorema el concepto de valor de Shapley aplicado a la clase de juegos de asignación de costos aeroportuarios equivale a la siguiente regla.

"Divídase el costo de adecuación aeroportuaria para aviones del menor tipo entre el número de aterrizajes de todos los aviones. Divídase el costo incremental $C_2 - C_1$ de adecuación aeroportuaria para recibir todos los aterrizajes de aviones del **segundo menor tipo** (arriba del costo de los de menor tipo) entre el número de aterrizajes de todos los aviones exceptuando los de menor tipo. Continúese de la misma manera hasta que finalmente el costo incremental $C_m - C_{m-1}$ del mayor tipo se divide entre el número de aterrizajes hechos por el avión de mayor tipo".

En la tabla 11.13 se ilustra el cálculo de tarifas utilizando el valor τ y el valor de Shapley; en ella:

j = tipo de avión; $j = 1,2,\ldots, 11$

n_j = número de aterrizajes de aviones del tipo j

C_j = costo anual del capital

a_j = costo de operación por aterrizaje de un avión de tipo j

j	c_j	n_j	a_j	ϕ_j	τ_j	TARIFAS	
						$\phi_j + a_j$	$\tau_j + a_j$
1	65,899	42	5.23	4.86	6.81	10.09	12.04
2	76,725	9,555	6.09	5.66	7.93	11.75	14.02
3	95,200	288	7.55	10.30	9.83	17.85	17.38
4	97,200	303	7.71	10.85	10.04	18.56	17.75
5	97,436	151	7.73	10.92	10.06	18.65	17.79
6	98,142	1,315	7.79	11.13	10.14	18.92	17.93
7	102,496	505	8.13	13.40	10.59	21.53	18.72
8	104,849	1,128	8.32	15.07	10.83	23.39	19.15
9	113,322	151	8.99	44.80	11.71	53.79	20.70
10	115,440	112	9.16	60.61	11.92	69.77	21.08
11	117,676	22	9.34	162.24	12.16	171.58	21.50

Tabla 11.13

11.4 DESARROLLO AEROPORTUARIO (de Neufville, Keeney)

11.4.1 El Problema

El rápido crecimiento del número de pasajeros combinado con la dificultad creciente para operar las facilidades disponibles en el aeropuerto existente en la zona metropolitana de una gran urbe requirieron el dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo deberían desarrollarse las facilidades aeroportuarias para asegurar un servicio adecuado para la región durante el período que va del momento actual al año T?

Como sucede con prácticamente todas las decisiones respecto al desarrollo de servicios públicos, la interrogante general respecto a ¿qué hacer? puede ser redefinida con base en preguntas relativas a ¿dónde?, ¿cómo? y ¿cuándo? implementar los servicios.

Específicamente se necesita definir:

- La localización y/o configuración de los elementos del sistema;

- La política operacional que determina cómo se van a prestar los servicios y en dónde estarán localizados; y

- La ubicación en el tiempo de los diferentes etapas del desarrollo.

En este caso, debido a restricciones físicas, sólo hay dos sitios adecuados para un aeropuerto del tamaño requerido. El primero es el sitio existente A, muy próximo al centro de la ciudad; el otro en Z ubicado aproximadamente a 40 km de ella. Las configuraciones específicas para cada sitio -por ejemplo con respecto a pistas- no son realmente relevantes.

Existen numerosas formas de operar los aeropuertos que conducen a diferencias significativas en la calidad del servicio proporcionado, pero en particular, es necesario decidir qué tipos de aviación (internacional, doméstica, militar o general), deberían operar en cada uno de los sitios.

Finalmente, la oportunidad de las decisiones es muy importante. El no actuar en un instante dado puede anular opciones importantes, aún la de adquirir el terreno requerido en un sitio. Por otra parte, una acción prematura puede incrementar significativamente los costos totales. La ubicación temporal de las decisiones y el control operacional son los aspectos más importantes de este problema de decisión.

11.4.2 El Enfoque Analítico

Elegir la mejor estrategia para desarrollar las facilidades aeroportuarias es un problema extremadamente complejo en el que un análisis formal puede ser de un gran valor al proporcionar enfoques importantes y al orientar hacia la mejor decisión.

Este análisis debe tomar en cuenta los objetivos múltiples, algunos de ellos en conflicto; a las incertidumbres respecto a los eventos futuros y respecto al impacto de las posibles acciones; y a los efectos de decisión de políticas tanto presentes como futuros; además, es necesario considerar valores e intercambios sujetivos.

El análisis de decisiones requiere que el analista considere estos factores explícitamente y proporciona un marco para integrarlos en una estructura eficiente que apoye a la toma de decisiones.

Como se expuso en el capitudo 10, este enfoque requiere primeramente de la identificación de alternativas, objetivos y medidas de efectividad. Estas últimas deben permitir cuantificar los efectos presentes y futuros de las diversas alternativas. Para cada una de éstas, se determina una distribución de probabilidad que representa, a juicio de los decisores, a los posibles impactos de la alternativa sobre cada una de las medidas de efectividad.

Separadamente se determinan las preferencias del decisor para todos los posibles niveles de satisfacción de los objetivos en términos de sus correspondientes medidas de efectividad. Estas preferencias se obtienen interrogando al decisor y conducen a funciones de utilidad.

Finalmente, para evaluar las alternativas, las probabilidades y las preferencias se combinan sistemáticamente usando los **axiomas de comportamiento racional** establecidos por von Neumann y Morgenstern. Estos axiomas son aceptables para la mayoría de los decisores y no introducen ninguna sobresimplificación del problema.

Las mayores dificultades del enfoque descrito, además de las relativas a la identificación de alternativas y objetivos, son las referentes a la obtención de las curvas de probabilidad y de utilidad de los decisores.

11.4.3 El Modelo

El estudio se dirigió a encontrar las mejores estrategias de desarrollo en tres años específicos t_1, t_2 y t_3 dentro del horizonte de planeación T.

Objetivos y medidas de efectividad

El objetivo general del análisis fue determinar cómo proporcionar un servicio aeroportuario adecuado al área metropolitana considerada. Para evaluar cómo satisfacen este objetivo las diferentes alternativas, se necesitan especificar algunos índices, esto es, algunas medidas de efectividad. Estas medidas considerarían explícitamente los efectos de cada alternativa en los diversos grupos importantes que serán efectados; en este caso: el gobierno como operador, los usuarios de las facilidades aeroportuarias y los no usuarios.

El objetivo, para casi todo diseño de sistemas, tiene varias dimensiones. Para tener una estimación realista del impacto de diversas alternativas, se requiere entonces definir subobjetivos relevantes del problema; ellos fueron:

- Minimizar el **costo** total de construcción y los costos de mantenimiento

- Proporcionar una **capacidad** adecuada para satisfacer las demandas de tráfico aéreo

- Minimizar el **tiempo de acceso** al aeropuerto

- Maximizar la **seguridad** del sistema

- Minimizar la **inquietud social** causada por los requerimientos para las nuevas facilidades aeroportuarias.

- Minimizar la **contaminación por ruido** debido al tráfico aéreo.

Aunque existen muchos traslapes, puede considerarse que los dos primeros objetivos toman en cuenta al gobierno como operador, el tercero a los usuarios y los últimos tres a los no usuarios. Las medidas de efectividad X_i correspondientes a estos seis objetivos que se utilizan frecuentemente en planeación de aeropuertos son:

X_1 = Costo total en millones de pesos

X_2 = La capacidad horaria en términos del número de operaciones por hora

X_3 = Tiempo medio de acceso en minutos ponderado por el número de pasajeros de cada zona del área metropolitana

X_4 = Número esperado de personas seriamente dañadas o muertas como consecuencia de un accidente aéreo

X_5 = Número de personas desplazadas por la expansión del aeropuerto

X_6 = Número de personas sujetas a un alto nivel de ruido, en este caso 90 CNR (Composite Noise Rating) o más.

Las Alternativas

Las alternativas para el análisis estático se definieron como el conjunto factible de todas las combinaciones de diseño que podrían establecerse para diferentes decisiones respecto a: localización, configuración operacional y tiempo. Se consideraron dos sitios: el A y el Z; las operaciones se clasificaron en cuatro categorías: doméstica (D), internacional (I), general (G) y militar (M); y tres instantes de decisión: t_1, t_2 y t_3 definieron la dimensión tiempo.

El número total de combinaciones a considerarse fue entonces del orden de $(4^2)^3$. De hecho se analizaron menos de 4,000 alternativas ya que algunas selecciones iniciales (en t_1) prácticamente eliminaban a algunas selecciones subsecuentes. Por ejemplo, era poco probable mover todas las operaciones al sitio Z en t_1 para después regresarlas a A en T_2.

Impactos de cada Alternativa

Para determinar los impactos posibles de cada alternativa sobre las medidas de efectividad, es necesario determinar funciones de distribución de probabilidades, de tal manera, que la incertidumbre quede representada. Luego, para cada alternativa a_j se define una distribución de probabilidad conjunta $p^j(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ en donde las variables aleatorias son las medidas de efectividad.

Con base en el supuesto de independencia estocástica entre las variables aleatorias, la función de distribución conjunta, queda:

$$p^j(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = p_1^j(x_1)\, p_2^j(x_2)\, p_3^j(x_3)\, p_4^j(x_4)\, p_5^j(x_5)\, p_6^j(x_6) \tag{11.5}$$

en donde $p_i^j(x_i)$ es la función de densidad marginal de X_i con la condición a_j.

La razonabilidad de esta hipótesis de independencia fue verificada cualitativamente identificando los factores que influían a cada X_i y examinando su grado de traslape. Por ejemplo, el tamaño del aeropuerto y la calidad de sus instalaciones afectaban obviamente tanto a los costos de construcción como a la capacidad. Con esta base, se decidió que la hipótesis de independencia probabilística no era **correcta** pero que posiblemente era apropiada dado que con el modelo se trataba de tener algunas orientaciones sobre cuáles eran los planes de desarrollo efectivos.

Las asignaciones reales de las distribuciones de probabilidad marginales fueron hechas por expertos. Se utilizó la técnica de los fractiles propuesta por Raiffa. Luego todas las probabilidades representaban el juicio cuantificado de un grupo de expertos muy familiarizados con los impactos de las diferentes alternativas. En muchos casos ellos tenían mucha información que respaldaba su juicio o que, de hecho, daba forma a su juicio.

Por ejemplo, al considerar la distribución de probabilidad del tiempo de acceso dado que todas las facilidades aeroportuarias permanecieran en el sitio A; primero el área metropolitana se dividió en zonas relativamente homogéneas y se identificaron las características de su población. También se identificaron las características de estos grupos en cuanto a cómo usaban el aeropuerto. Se determinó un nodo central para cada zona y se realizaron experimentos bajo muy diversas condiciones (hora del día, día de la semana, clima, etc.), para estimar el tiempo que se requeriría para llegar al aeropuerto.

En ocasiones la información empleada para alguna alternativa también se usó para evaluar otras posibilidades. Por ejemplo, si en una alternativa se consideraban aterrizajes domésticos en A, se podría generar la contribución a la distribución de probabilidad del tiempo de acceso de los viajeros domésticos, conociendo el por ciento de ellos en cada zona.

Con base en tal información, se generaron las funciones de densidad conjuntas para cada una de las 16 alternativas en cada uno de los tres años: t_1, t_2 y t_3 su determinación se realizó en sesiones de grupo de dos o tres horas que se llevaron a cabo a lo largo de un mes. Se hicieron pruebas de consistencia para detectar asignaciones **no razonables** que necesitaban modificarse.

La distribución de probabilidad del tiempo de acceso para la alternativa **todo en A, en t_1** se muestra en la figura 11.1. Los puntos representan a los fractiles obtenidos empíricamente.

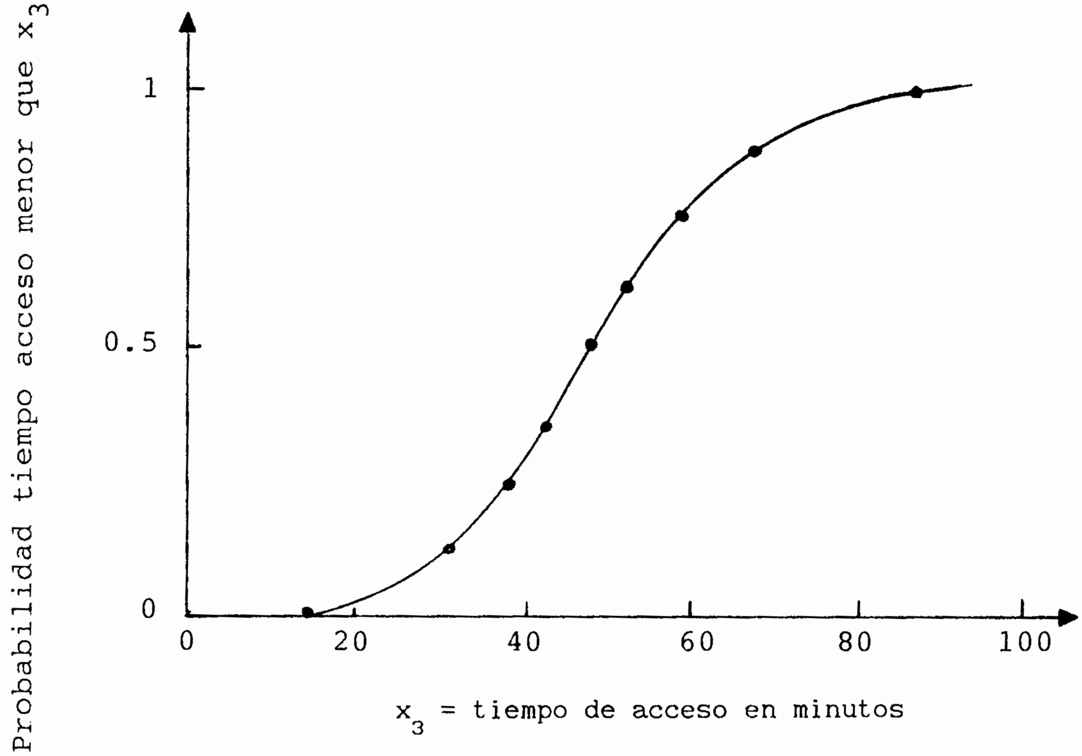


Figura 11.1

Preferencias entre Medidas de Efectividad

Para elegir la **mejor alternativa** es necesario considerar tanto el posible impacto de cada alternativa como las preferencias relativas de los decisores con respecto a cada uno de estos impactos. las funciones de probabilidad cuantifican los posibles impactos y las preferencias se cuantifican asignando una función de utilidad u(x) sobre las seis medidas de efectividad; esta función $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ asignará a cada vector de impactos x un número tal que:

- El mayor de dos números indica al conjunto de impactos preferido, y

- En situaciones que involucran incertidumbre, se prefiere a la alternativa con mayor utilidad esperada.

Como se expuso en el capítulo 10, la utilidad conjunta u(x) es una función de las utilidades marginales $u_i(x_i)$; ésto es:

$$u(x) = f\ [u_1(x_1),\ u_2(x_2),\ u_3(x_3),\ u_4(x_4),\ u_5(x_5),\ u_6(x_6)] \qquad (11.6)$$

Las $u_i(x_i)$ se obtuvieron interrogando a los expertos con respecto a sus preferencias para cada medida de efectividad. Primero se identificaron los valores mínimo y máximo conforme a lo determinado en las funciones de probabilidad; por ejemplo al considerar **tiempo de acceso** el rango fue de 12 a 90 minutos, en este caso se hizo:

$$u_3(12) = 1 \quad , \qquad u_3(90) = 0$$

puesto que 12 y 90 son los valores más y menos deseado respectivamente. Interrogando al grupo de expertos y obteniendo un consenso se llegó a la función de utilidad mostrada en la figura 11.2.

Para escalar consistentemente las $u_i(x_i)$ a fin de obtener u(x), se interrogó a los expertos con respecto a posibles intercambios entre los diferentes atributos. Las preguntas fueron de la forma: ¿Para qué valor de la probabilidad P_i sería usted indiferente entre:

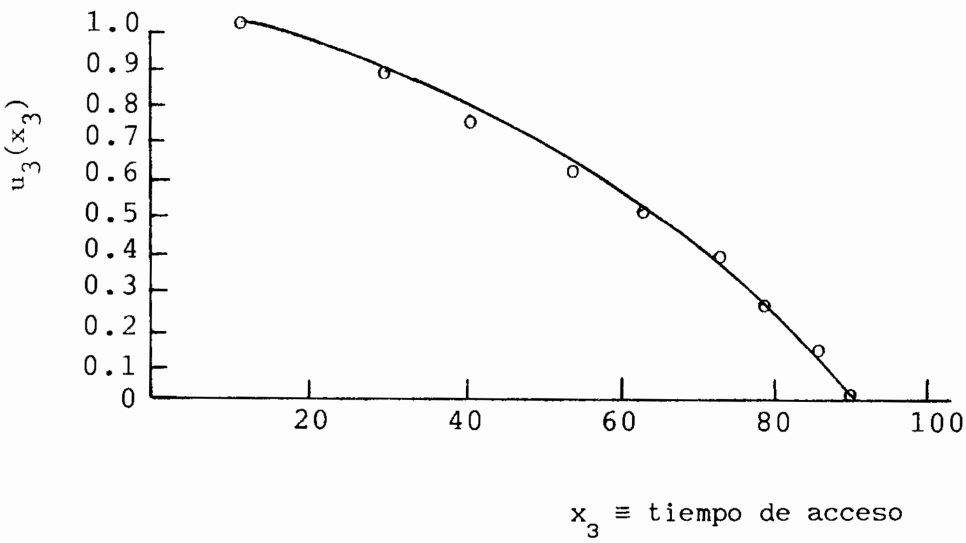


Figura 11.2

- Una consecuencia segura en que todos los atributos estuviesen a su nivel menos deseado con excepción del atributo X_i que estaría en su nivel más deseado; y

- Una alternativa con dos posibles consecuencias: con todos los atributos en su nivel más deseado con probabilidad P_i, o bien, a su nivel menos deseado con probabilidad $1-P_i$?

Para evaluar los impactos que podrían ocurrir en cada uno de los instantes considerados - t_1, t_2, t_3 - fue necesario colocarlos en una misma base de comparación. Para los impactos en costo, ello se logró utilizando valores presentes (actualizados). Para los otros impactos, con excepción del referente a capacidad, se utilizaron valores **promedio** a lo largo del horizonte de planeación como sigue:

- El tiempo promedio de acceso ponderado por el número de pasajeros

- El número esperado de víctimas por accidentes en el horizonte de planeación.

- El número total de personas desplazadas

- El número promedio de personas sujetas a altos niveles de ruido.

No se tuvo ningún camino razonable para promediar la capacidad en el tiempo, ya que la deseabilidad para la capacidad es altamente dependiente del tráfico y se supone que éste crece significativamente con el tiempo. Para determinar la función de utilidad para los seis atributos y sobre los tres períodos de decisión, fue necesario evaluar una función de ocho dimensiones en términos de los cinco atributos promedio o actualizados y de los tres atributos que representan a la capacidad en los diferentes tiempos. La función fue entonces del tipo:

$$u\ (\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4,\bar{x}_5,\bar{x}_6) = u\ \{\bar{x}_1,\ [(x_2)_{t_1},(x_2)_{t_2},(x_3)_{t_3}],\ \bar{x}_3,\bar{x}_4,\bar{x}_5,\bar{x}_6\ \}$$

en donde las $\bar{x}_i$ representan los valores **promediados** de las X_i tal como se definieron anteriormente. El procedimiento para hacer esto usando una descomposición como la indicada en (11.6) fue similar al descrito en el capítulo 10.

Una vez determinadas las $u_i(\bar{x}_i)$ y realizada su escalación, el cálculo de u(x) es inmediato. Esta función u, además de permitir la

determinación de las preferencias relativas de las diferentes alternativas, también especifica el valor de los intercambios entre diferentes aspectos del diseño; esto es, posibilita el especificar en cuánto sacrificar el atributo X_i para lograr un incremento determinado del atributo X_j, para niveles dados de ambos.

11.4.4 El Modelo Computarizado

Para evaluar las alternativas se desarrolló un programa de cómputo interactivo con entradas y salidas gráficas. Computacionalmente el programa fue simple: dado cualquier conjunto de distribuciones de probabilidad y de funciones de utilidad, se calcula la utilidad conjunta esperada para las alternativas especificadas.

La capacidad interactiva del sistema ofrecía un camino muy flexible y eficiente para realizar el análisis de sensibilidad de los resultados.

En la práctica, las funciones de probabilidad y de utilidad que se obtuvieron en el estudio se almacenaban en la computadora. Las funciones alternas podrían ser alimentadas cambiando los rangos de los valores posibles en la función de probabilidad, o alterando el escalamiento entre los atributos para la función de utilidad. Los cambios más sutiles en la configuración de las funciones de probabilidad y de utilidad marginales no podían llevarse a cabo con el programa interactivo.

Además, una rutina muy útil permitía calcular equivalentes bajo certeza. Para una alternativa dada, el equivalente bajo certeza de un decisor para un atributo particular es el valor de ese atributo que es indiferente a su distribución probabilística. Esta rutina permitía reducir el impacto total de cualquier alternativa a un impacto equivalente descrito por un vector de equivalentes bajo certeza. Esto permite un análisis de dominancia y discernir cuánto del atributo X_i sería necesario intercambiar por una cantidad específica del atributo X_j para que alguna alternativa sea preferida sobre otra.

La aplicación del modelo permitió recomendar la alternativa con mayor efectividad conjunta esperada y realizar el correspondiente análisis de sensibilidad.

11.5 TRANSPORTE URBANO

11.5.1 Objetivos

Es necesario construir modelos que ubiquen al problema del transporte dentro de la ciudad como sistema y que permitan:

a) describir su operación actual (diagnóstico)

b) estimar su comportamiento probable (pronóstico)

c) construir escenarios para diversas condiciones, compararlos y evaluarlos

d) recomendar acciones inmediatas, a corto y a largo plazo.

11.5.2 Modelo Conceptual

Inmerso en la conceptualización sistémica del funcionamiento de la urbe, debe desarrollarse el modelo del transporte, para lo cual se generan cinco subsistemas (figura 11.3) dedicados al pronóstico de la demanda, a distribuirla por líneas de deseo, a determinar los medios por los que circulará y, finalmente a asignarla a las redes vial y de transporte público. Adicionalmente, deberá tener la capacidad de simular alternativas de solución y de evaluar sus consecuencias.

Subsistema de Demanda. El propósito de este modelo es cuantificar posibles demandas de transporte, tanto de los pasajeros cautivos que necesariamente recurren a algún transporte público específico, como de los pasajeros libres que son aquellos que poseen automóviles pero que, bajo ciertas circunstancias, pueden optar por los servicios de transporte público. Además, se incluye la demanda en cuanto a tránsito interurbano generado por la zona de influencia de la ciudad y por el transporte de mercancías y el tráfico de paso.

Lo anterior, implica estratificar a la ciudad y a su zona de influencia, determinar las características socioeconómicas preponderantes y los usos del suelo en cada estrato. En su forma más sencilla las relaciones matemáticas que se pueden desarrollar para representar a la demanda de transporte por motivo del viaje, son del tipo que sigue:

$$\text{Producción de viajes} \begin{cases} \text{al trabajo} = f_1 \text{(población económicamente activa de la zona,...)} \\ \text{de estudio} = f_2 \text{(población estudiantil de la zona,...)} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\text{Atracción de viajes} \begin{cases} \text{al trabajo} = g_1 \text{(demanda de obreros en la zona, ...)} \\ \text{de estudio} = g_2 \text{(centros de estudio,...)} \\ \vdots \end{cases}$$

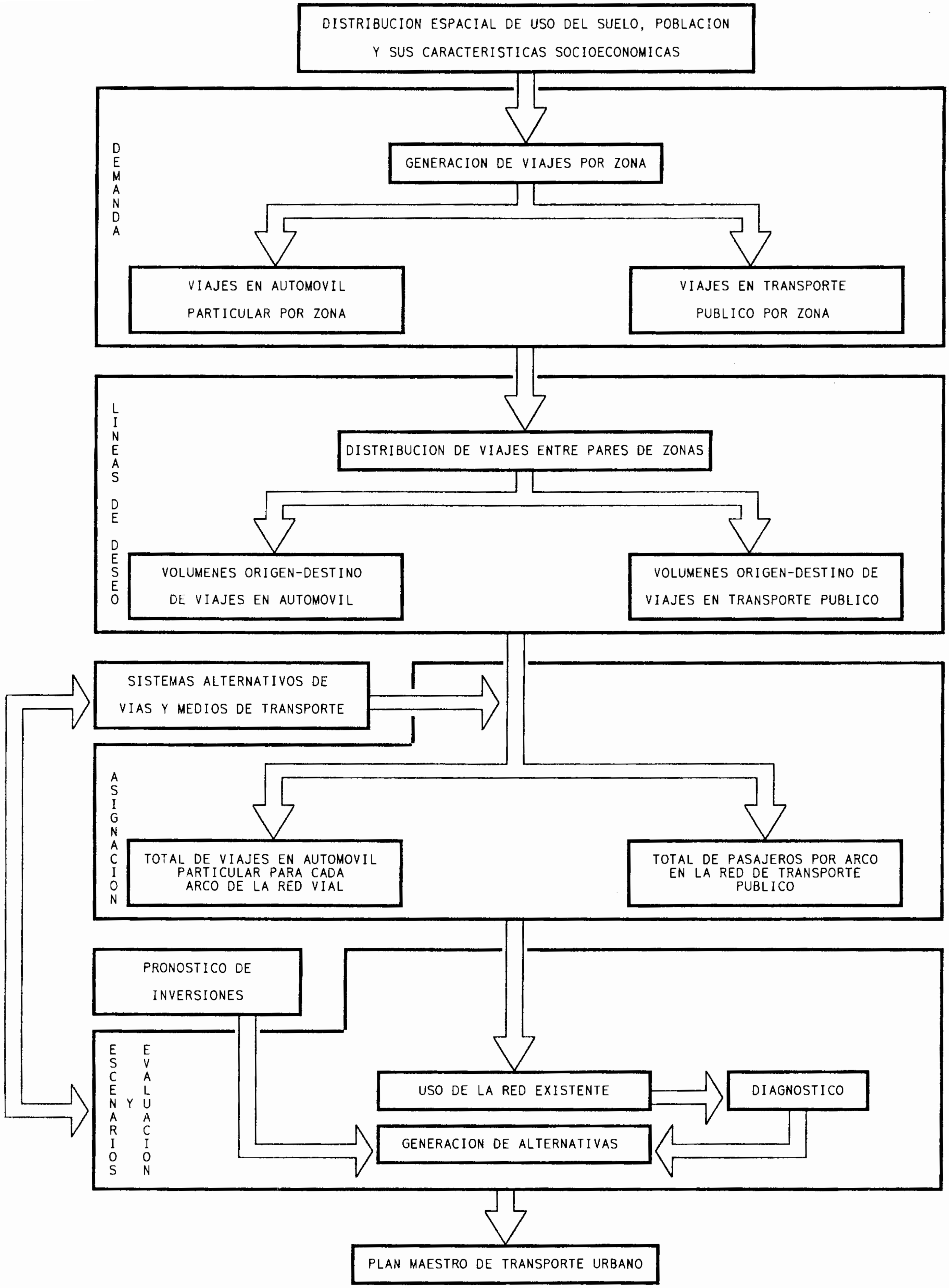


Figura 11.3.- Transporte Urbano

Una técnica que usualmente se emplea para la elaboración de expresiones como las anteriores, es la de regresión múltiple a partir de información muestral, aunque también pueden usarse otras técnicas propias de la Ingeniería de Sistemas que permitan incorporar demanda cualitativa.

Subsistema de Líneas de Deseo. En el subsistema de demanda se llega a determinar la producción y la atracción de viajes por estrato y por motivo, pero no se llegan a estimar las parejas origen-destino que les corresponden, esto es, no se logra conocer la distribución de los viajes entre parejas de zonas, esto se logra en el subsistema de líneas de deseo. Una técnica usual para determinar dicha distribución es la de los modelos gravitacionales los que, esencialmente, son modelos estadísticos que determinan el flujo de los viajes entre dos zonas en relación directa a la producción de viajes de la zona origen y a la atracción de la zona destino, e inversamente proporcional a una determinada potencia del costo de transporte. Estos modelos se calibran de modo que satisfagan las condiciones de equilibrio que deben cumplir la producción y la atracción de viajes.

En este subsistema también se simula el proceso mediante el cual los pasajeros discriminan entre los diversos medios de transporte disponibles.

Así los pasajeros cautivos deberán distribuirse entre los autobuses urbanos, los trolebuses, el metro y los taxis colectivos en función de las tarifas, los tiempos de recorrido y las características socioeconómicas de cada zona. Para los pasajeros libres la distribución puede estar tanto en función de los costos de viajes en automóvil particular y en transporte colectivo como de los tiempos de recorrido. En ambos casos deberán incluirse patrones de conducta de los posibles usuarios y participantes en el esquema de transportación y calibrar los resultados con objeto de obtener distribuciones razonables.

Subsistema de Asignación. Ya conocidos los volúmenes que circulan en cada medio de transporte así como su origen y destino, en este subsistema se determinan sus posibles trayectorias, esto es, se asignan pasajeros cautivos a la red de transporte existente o propuesta, y vehículos particulares y de paso a la red vial tratando de minimizar el tiempo o el costo. En ambos casos dicha asignación usualmente se lleva a cabo utilizando métodos de optimización para caminos mínimos y requiere de información relativa a vías y medios de transporte.

Así para la red de transporte público se deben incluir las de los diversos medios disponibles (autobuses, taxis colectivos, metro, trolebuses), los posibles transbordos y las tarifas. En cuanto a la red vial, como ya se dijo, puede clasificarse por calles, avenidas rápidas y sentidos de circulación asociando además sus características de fluidez en función de los volúmenes de tránsito y sus correspondientes características de costo. En ambas redes, que se estructuran manualmente, se identifican nodos y arcos. Los nodos son intersección de las redes de transporte y/o cruceros de la red vial, y los arcos son las ligas entre parejas de nodos y no son otra cosa que tramos de las rutas y/o de la red vial.

Para determinar los caminos mínimos por los que pueden circular los volúmenes de tránsito asociados a las líneas de deseo, se tienen diversos modelos. Todos ellos, aunque no son conceptualmente complejos, requieren de un manejo elaborado de cada arco de la red, lo que requiere de la utilización de computadoras electrónicas.

Subsistema de Escenarios y Evaluación. Al consolidar los resultados asociados a cada arco puede obtenerse para cada año del horizonte de planeación: el total de pasajeros-kilómetro en el sistema, el número de vehículos urbanos que se requieren para satisfacer la demanda, los arcos congestionados que debieran mejorar su nivel de servicio, el costo total del transporte anual, etc. De esta manera, los responsables de la planeación pueden proponer una serie de mejoras que permitan que la red de transporte urbano acomode a los volúmenes futuros; esto es, que se generen diversas alternativas al respecto.

Sin embargo, para determinar la factibilidad económica de un determinado plan maestro de transporte urbano, es necesario estimar el monto esperado de la inversión pública y privada en el sector y simular los diversos escenarios, con objeto de generar curvas efecto-costo en donde se muestren las consecuencias de cada alternativa para seleccionar aquella que mejor se ajuste a las restricciones presupuestales y a las políticas existentes.

La evaluación puede ser numérica, operativa, ambiental, económica y financiera.

La evaluación numérica comprueba la validez del cálculo y persigue asegurarse de que los datos obtenidos reflejen con fidelidad las hipótesis de entrada. Existen dos fuentes principales de error, errores en los datos de entrada y errores de programación o en la aplicación de los modelos, en todo caso sujeto a la naturaleza humana.

Con respecto a la operatividad, la evaluación centra su interés en conocer si los medios y modos de transporte existentes pueden absorber el tráfico, considerando en algunos casos su sobreutilización bajo condiciones aceptables para el usuario y para la operación misma. Lo anterior, sólo es posible después de realizar un examen detallado de los flujos de tráfico y de las velocidades y niveles de servicio en cada una de las partes de la red, acotando las limitaciones de capacidad de los distintos modos de transporte, considerando las horas (o los días) de máxima demanda.

La evaluación ambiental, es sobre todo una cuestión de apreciación sujetiva sobre lo que es deseable y tolerable, para lo cual deberían analizarse los beneficios relacionados con los medios de transporte y los costos ambientales.

Destacan la evaluación económica y la evaluación financiera, los indicadores más idóneos para el primer caso son: el valor presente neto, la tasa interna de recuperación, la relación beneficio-costo y los costos de operación anual, entre otros que ya fueron presentados en el capítulo 2.

Para el análisis financiero se toman en consideración fundamentalmente elementos tales como costo de oportunidad del capital, cobertura de cada alternativa, flujo de fondos, rentabilidad, estados proforma y puntos de equilibrio. Un modelo de ingeniería financiera se presenta en el inciso 11.7.

La evaluación conjunta y comparativa de las alternativas se puede desarrollar aplicando variados enfoques metodológicos como son: los métodos de suma ponderada, de jerarquía de criterios y electra; el análisis de decisiones y la teoría de la utilidad.

El método de **Suma Ponderada** consiste en asignar a cada uno de los criterios de evaluación un peso relativo, de acuerdo con las preferencias del decisor, los valores obtenidos bajo cada uno de los criterios se multiplican por el factor de preferencia; finalmente se sumarizan estos productos dentro de cada alternativa y se listan en función del valor global obtenido.

El método de **Jerarquía de Criterios** se fundamenta en una ordenación de los criterios de evaluación considerados, de acuerdo con los pesos asignados. Tomando el más importante, se ordenan las soluciones con relación a dicho criterio, para obtener un subconjunto que se someterá a la ordenación bajo el siguiente criterio en orden de importancia, y así sucesivamente. Este método también se conoce como **Orden**

Lexicográfico, ya que sigue la forma de ordenar las palabras en un diccionario.

El método **Electra**, recibe su nombre del término Electre: ELimination Et Choix Traduisant la REalité. El método parte de las siguientes definiciones:

A cada criterio de Evaluación E_i se puede asociar un **grafo** de la siguiente forma:

$$Gr_i = (A, Ur_i)$$

donde:

A = Conjunto de soluciones.

Ur_i = Conjunto de arcos definidos por la condición de preferencia

Para lo cual se utiliza la representación por medio de una flecha orientada:

$$a \longrightarrow b$$

Los grafos tienen las siguientes características:

1. Cuando entre dos nodos a y b existe al menos un camino que va del primero al segundo, se produce necesariamente una reducción a un sólo arco, es decir, se tiene la propiedad de transitividad.

2. Dos nodos a y b son siempre adyacentes, es decir, que Gr_i es completo, ya que existe al menos un arco entre ambos nodos.

El problema consiste en reducir un grafo Gs que opere la síntesis de los grafos Gr_i. Para lo cual se inicia identificando un grafo Gu, en aquellos arcos para los cuales la preferencia es unánime. Se añaden arcos a Gu conforme a parámetros llamados **Indicador de Concordancia** e **Indicador de Discordancia**, lo cual equivale a dividir el conjunto de criterios en clases disjuntas.

Existen ciertas precauciones que se deberán tomar en cuenta para su aplicación como son: el conjunto A constituye un grupo homogéneo de elementos a priori no diferenciados para su selección; los criterios considerados deben ser en lo posible **no** dependientes **ni** correlacionados entre sí; se deben escoger las escalas apropiadas a cada criterio de evaluación, lo cual determina el problema de decisión.

Con respecto al tratamiento de las escalas, se producen variaciones fundamentales en el método: el modelo **Electra 1** considera un único rango máximo para el cálculo del índice de discordancia; **Electra 2**, admite la determinación de varios rangos; **Electra 3**, incluye un tratamiento de cada escala utilizando algunos conceptos de Conjuntos Difusos.

Raynaud ha formulado diversas observaciones a los modelos antes descritos y formula nuevos algoritmos basados en algunos teoremas de **posibilidades** que se refieren a **esfuerzos, decepciones y recompensas**; con ello pretende que los nuevos algoritmos ayuden a clasificar y a dar una formulación operacional a las conductas sujetivas de los que toman decisiones.

Por lo que respecta al uso del **Análisis de Decisiones** y de la **Teoría de la Utilidad**, éste ya se ha presentado en el capítulo 10, y en el inciso 11.4.

11.5.3 Uso de Paquetes de Cómputo

Un avance importante en este campo se registró en los años 70 con el paquete de software denominado **UTPS (Urban Transportation Planning System)** desarrollado conjuntamente por la Urban Mass Transportation Administration y la Federal Highway Administration en los EEUU.

Los nuevos paquetes comerciales disponibles son sistemas que incorporan gráficas en pantalla, edición y administración de bases de datos, diseñados para usarse en minicomputadoras con capacidad de graficación de alta resolución o en terminales tipo **workstation**. Los mayores avances se aprecian en el desarrollo de las bases de datos, los cuales han eliminado los tediosos formatos rígidos de entrada de datos a formatos flexibles e indexación automática de características de redes, comandos simples con órdenes de graficación orientadas al usuario, y en general amplias facilidades para el análisis.

En la actualidad existen varios paquetes de software que apoyan el proceso de planeación del transporte urbano; enseguida se comentan tres de ellos.

El paquete **EMME2** que fue desarrollado por la Universidad de Montreal y que facilita la planeación a largo plazo de redes de vialidad primaria y corredores de transporte público, incluyendo interacciones entre el flujo vial y la red de transporte público; sin embargo, no incluye facilidades para la generación de alternativas, ni para la optimización de frecuencias.

El paquete **VIPS11** que fue desarrollado por VTS Transportation Systems Corporation en Suecia y que está orientado a la planeación estratégica y operacional de redes de transporte público y rutas; sin embargo, no puede utilizarse para la asignación de tráfico en la red vial y por lo tanto, no incluye la evaluación de esquemas viales ni la estimación de impactos sobre el tránsito de las mejoras que se hagan en el transporte público.

El paquete **STEPS** (**S**trategic **T**ransportation and **E**nvironment **P**lanning **S**ystem) fue desarrollado conjuntamente por VTS Transportation Systems y The Urban Analysis Group y se encuentra disponible desde fines de 1990. Este paquete, que se esquematiza en la figura 11.4, combina adecuadamente las facilidades de optimización de rutas con una planeación más detallada de la red vial; además, tiene importantes facilidades de graficación y de manejo de la base de datos sobre la red de transporte, así como un módulo para evaluar la calidad del aire y los impactos en el nivel de ruido.

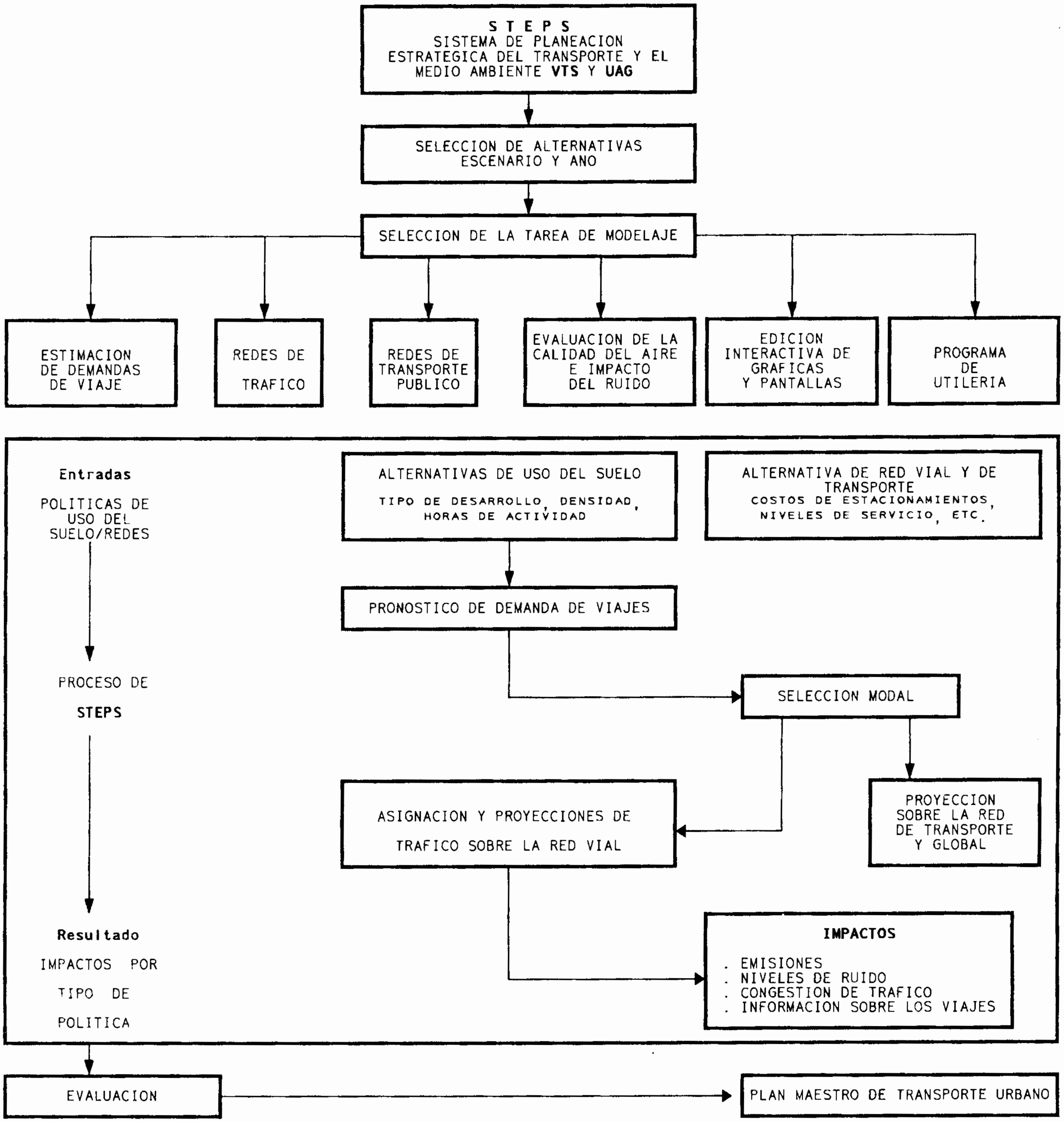


Figura 11.4 Esquema General del Sistema STEPS

11.6 TRANSPORTE INTERURBANO

11.6.1 Modelo Conceptual

Un modelo de transporte interurbano se muestra en la figura 11.5, él está constituido por diversos subsistemas que permiten:

- pronosticar la demanda considerando la generación y atracción de viajes en cada una de las zonas socioeconómicas que cubren el área bajo estudio (entidad federativa, región, país) y que la distribuyen por modo de transporte (matrices origen-destino).

- asignar la demanda a la red de transporte básico para generar alternativas que consideren, tanto posibles mejoras a los tramos existentes, como la realización de obras nuevas, todo ello en función de los niveles de servicio que se consideren convenientes.

- evaluar las diversas alternativas con objeto de apoyar la selección de aquella que mejor se ajuste a las restricciones existentes.

La descripción de este modelo es muy similar a la ya realizada para el caso del trasporte urbano.

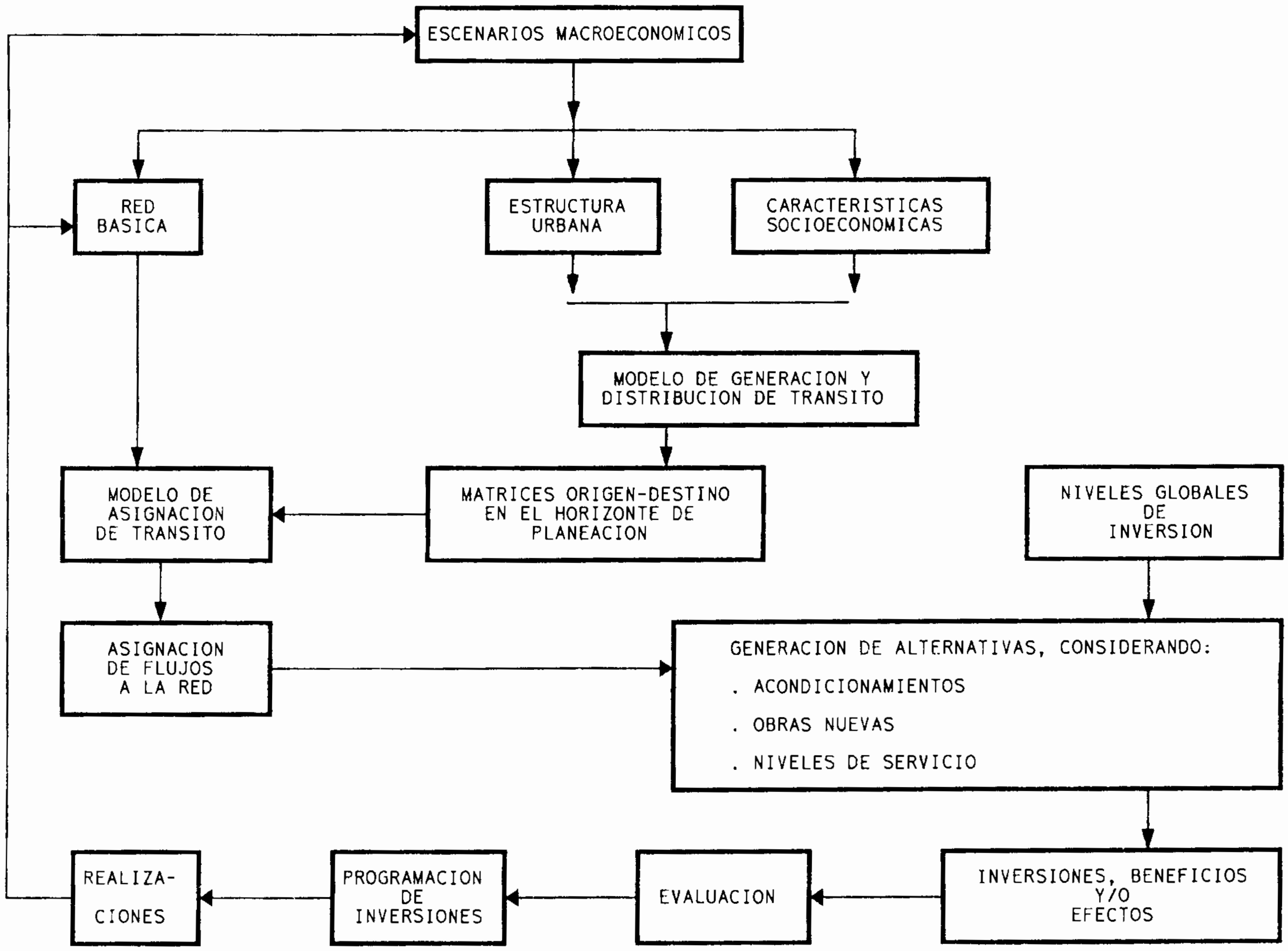


Figura 11.5 Transporte Interurbano

11.6.2 Programación de inversiones en una red multimodal

En este subinciso se presenta el modelo clásico de Bergendahl, para determinar políticas de inversión de una red carretera, de manera tal que se minimicen tanto los costos de construción como los sociales de operación. Este modelo puede adecuarse fácilmente para el caso de una red multimodal.

Se supone que (figura 11.6).

i) Cada carretera es un arco de la red.

ii) Cada alternativa de inversión ocasiona que un arco cerrado pueda ser abierto entre dos períodos adyacentes; el tráfico durante cada período solo puede operar en la red abierta dada.

iii) Un nodo de la red es el lugar donde se unen dos o más arcos.

iv) Una cadena es una secuencia de arcos consecutivos y solo se consideran aquellos cuya operación es económicamente factible.

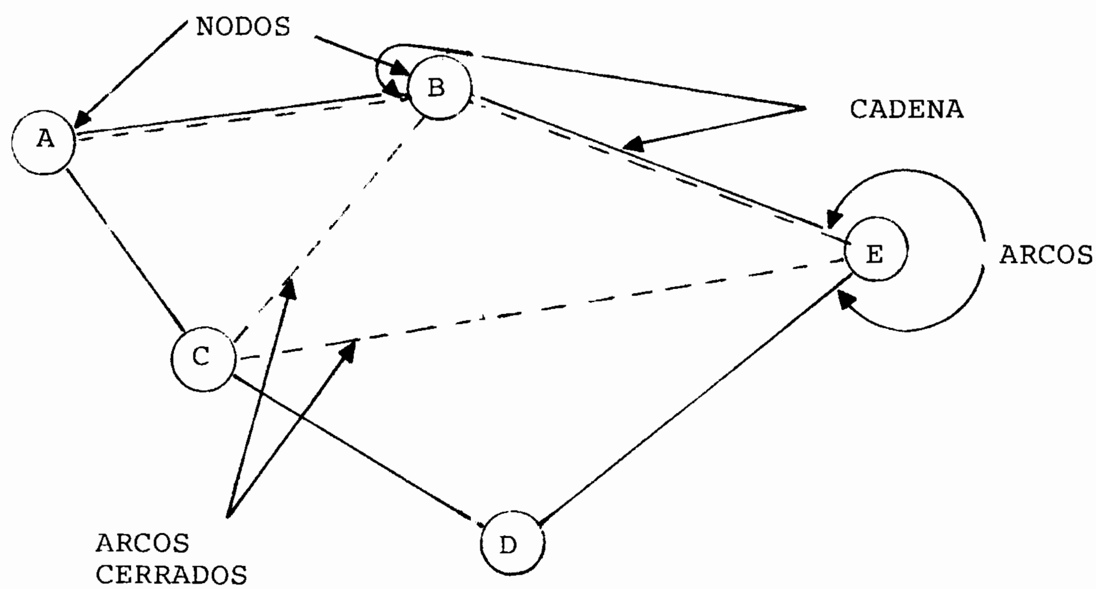


Figura 11.6

v) La demanda de tráfico es una relación entre dos nodos arbitrarios de la red durante cualquier período.

v_i) El flujo de un arco es el número de vehículos que pasan por el arco durante un período.

Los costos de la red se clasifican como se muestra en la figura 11.7

- costos de la red
  - costo social de operación
    - mantenimiento
    - operación de vehículos
    - tiempo de recorrido
    - accidentes
  - inversiones
    - derecho de vía
    - mantenimiento
    - construcción

Figura 11.7

El costo de operación de un tramo L, en un período t, depende del flujo que circule por él; si se representa a este flujo como X_L^t, el costo social de operación puede ser expresado como una función $C_L^t\ (X_L^t)$; y este costo generalmente crecerá cuando el flujo del tramo se incremente (figura 11.8); para el análisis sólo se consideran dos segmentos de recta como se muestra en la figura 11.9.

Con ésto, una aproximación del costo social de operación del tramo en un período es:

$$C^t_{L_1} \quad X^t_{L_1} \; + \; C^t_{L_2} \quad X^t_{L_2}$$

y como en un período el objetivo es minimizar el costo social de operación total, resulta:

$$\min Z^t = \sum_{L} \left(C^t_{L_1} \quad X^t_{L_1} \; + \; C^t_{L_2} \quad X^t_{L_2} \right) \qquad (11.7)$$

esta minimización esta sujeta a ciertas restricciones. La primera impone que para cada arco L el flujo sin saturación no podrá ser mayor que su capacidad, $M^t_{L_1}$, ésto es:

$$X^t_{L_1} \leq M^t_{L_1} \qquad \forall\ L \qquad (11.8)$$

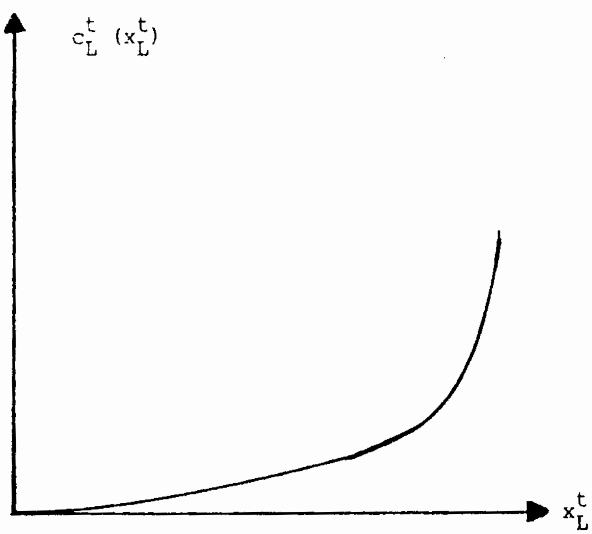


Figura 11.8

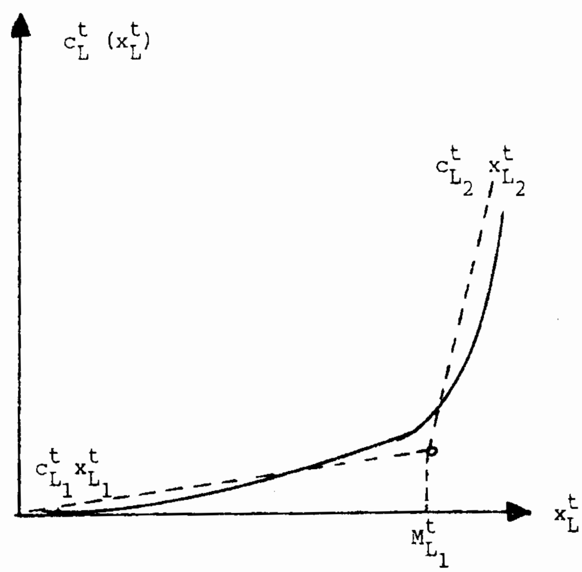


Figura 11.9

La segunda restricción indica que el número de vehículos que circulan entre dos nodos, por todos los caminos posibles entre éstos, debe ser igual a la demanda de tráfico; resulta

$$\sum_k Y^t_{ijk} = d^t_{ij} \qquad \forall\ i,\ j \qquad (11.9)$$

en donde d^t_{ij} es la demanda de tráfico entre los nodos i y j en el período t, y Y^t_{ijk} es una variable que define el número de vehículos que circulan en el período t entre los nodos i y j por la cadena k. Una condición necesaria es que exista por lo menos una cadena entre cada par de nodos con cierta demanda de tráfico.

Finalmente, el flujo total en cada tramo deberá ser igual a la suma de vehículos que circulen por las distintas cadenas que contengan a dicho tramo; ésto conduce a

$$X^t_{L_1} + X^t_{L_2} = \sum_i \sum_j \sum_k \mu^t_{ijk} \; Y^t_{ijk} \qquad (11.10)$$

donde la suma $X^t_{L_1} + X^t_{L_2}$ expresa el flujo total en el tramo L y μ^t_{ijk} es tal que:

$$\mu^t_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la cadena k entre los nodos i y j} \\ & \text{pasa por el tramo L} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Luego el modelo consiste en minimizar la función objetivo (11.7) sujeta a las restricciones (11.8) a (11.10); su solución conduce a los flujos en cada cadena y en cada arco (tramo) que minimiza el costo social de operación.

La segunda parte del modelo de Bergendhal consiste en la determinación de un programa óptimo de inversiones.

Para tal efecto se introduce el concepto de **estado** de la red carretera. Por un estado (s^t) en un período (t) se entenderá el conjunto de arcos en la red carretera que estén abiertos durante ese período. Si se considera una inversión como la acción que **abre** arcos en la red, entonces un programa de inversión se puede formular como la secuencia de acciones que determinan una secuencia de estados.

Para determinar una política de inversión óptima, debe conocerse el costo de inversión $S(s^t, s^{t+1})$ para cada transición factible (s^t, s^{t+1}) entre estados, estos costos deben cubrir los gastos de inversión (figura 11.7).

Aquí se usan los resultados obtenidos en el modelo lineal que son el costo social de operación anual mínimo para cada período y cada red carretera resultante al hacer una inversión. Esto es lo mismo que formular el óptimo como una función $Z^t(s^t)$ del estado (s^t).

Conocidos los costos estáticos de operación para cada estado en cada período considerado, la política óptima de inversión puede determinarse por medio de la siguiente ecuación de recurrencia:

$$Q^{t+1}(s^{t+1}) = \min\,[R^1 Z^{t+1}(s^{t+1}) + C(s^t,s^{t+1}) + R\,Q^t(s^t)] \qquad (11.11)$$

donde

$$(s^t,\ s^{t+1}) \ \varepsilon\ P \tag{11.12}$$

$$Q^0\ (s^0) = 0$$

y además:

$t\ =\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

P = Programas factibles

$Z^t(s^t)$ = Mínimo costo social de operación para el estado s^t

$C(s^t,\ s^{t+1})$ = Costo de inversión para pasar del estado s^t al s^{t+1}

s^t = Estado de la red en el período t

$R,\ R^1$ = Factores de descuento dados por

$$R = (1+r)^{-\xi} \qquad R = (1+r)^{-\frac{\xi}{2}}$$

ξ = Longitud del período en años

r = Tasa anual de descuento

El proceso (11.11) se detiene después de una fecha t especificada, llamada el **horizonte de planeación**. Para determinar el proceso (11.11) se introduce un valor residual $V(s^t)$ para cada estado s^t, este valor se determina calculando los costos de operación con la hipótesis de que el sistema continúa funcionando indefinidamente y la demanda se mantiene estacionaria; estos costos se descuentan al final del horizonte T. De esta manera resulta:

$$V(s^t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^T(s^T)}{(1+r)^n} = \frac{1+r}{r} Z^T(s^T) \qquad (11.13)$$

Consecuentemente, (11.11) se aplicará solamente para t = 0,1,..., T-1 y deberá agregarse la siguiente fórmula de recurrencia.

$$Q^{T+1}(s^{T+1}) = \min\,[R^T Q^T(s^T) - V(s^T)] \qquad (11.14)$$

De esta manera, el programa óptimo de inversiones será la secuencia de estados determinada al través de las fórmulas de recurrencia (11.11) y (11.14) sujetas a la condición (11.12).

11.6.3. Transporte multimodal de los productos terminados de una siderúrgica

Este modelo permitió el análisis exhaustivo de las distintas alternativas de transporte para tres programas distintos de producción -pesimista, normal y optimista- de una gran planta siderúrgica, teniendo como objetivo principal determinar la alternativa de costo total actualizado mínimo para el transporte de sus productos. Se consideraron los elementos de costo más importantes que son: el valor de la infraestructura necesaria, el costo de adquisición de equipo móvil y finalmente los costos de operación y mantenimiento. El horizonte de planeación fue de T años.

El modelo tiene como restricciones: el uso actual de las vías de comunicación existentes, su grado de saturación, su capacidad disponible dentro del horizonte de planeación analizado, el año probable de saturación de algunos de sus arcos, así como las posibles adiciones y/o modificaciones de las vías mencionadas.

Conceptualización del problema

El problema fue concebido como una red compuesta por arcos, nodos y el flujo que viaja a través de ellos.

Los nodos representan ciudades, puntos de transbordo, estaciones y puntos terminales; los arcos son las vías de comunicación -carretera ferrocarril, o vía marítima- que conectan los nodos entre sí, y los flujos que viajan son las cargas a transportar. La configuración y características actuales de la red, y sus modificaciones futuras son el punto de partida del estudio.

Se tomó como base para desarrollar este modelo, el que Bergendahl usa para asignación de tráfico, modificado de acuerdo con las características particulares del problema bajo estudio. En el planteamiento del modelo de Programación Matemática se consideraron los aspectos que a continuación se enuncian.

a) Existe una cierta demanda por satisfacer en ciertas ciudades destino. Esta demanda corresponde a la carga que se requiere transportar partiendo de la Siderúrgica. Lógicamente esa carga será variable a lo largo del tiempo.

b) La carga a transportar antes descrita deberá adicionarse a la que ya circule en los diversos tramos de la red que sean utilizados, y deberá hacerse lo mismo a lo largo de todo el horizonte de planeación. La carga así obtenida no deberá exceder la capacidad de los tramos en la red por los que circule.

c) Se deberán definir todas las rutas (cadenas) posibles (y razonables) para viajar en un determinado período desde el origen (la Siderúrgica) hasta los destinos.

Deben contemplarse en c a da ruta las modificaciones (reconstrucción parcial o total) que puedan requerir uno o varios arcos, con objeto de admitir tránsito pesado.

También debe preverse la adición de arcos potenciales dentro del horizonte de planeación. Esto origina las redes llamadas red Carretera, red Ferroviaria y su combinación, así como las resultantes de combinar las dos anteriores con un arco marítimo.

La superposición de estas redes conduce a la Red simplificada de Transporte que se esquematiza en la figura 11.10.

d) Componentes de costo. El problema consiste en diseñar la red de transporte de tal manera que los flujos que circulen a través de toda ella, sean iguales a la demanda total existente en cada período y en cada centro consumidor. El diseño óptimo será aquel en el cual el costo global para todo el sistema sea mínimo.

Se han considerado los componentes de costo siguientes:

d.1) Costos de operación. Estos son los asociados a transportar y operar un tipo de vehículo con características determinadas por un tramo de la red con especificaciones definidas. Diferenciando dichos costos para los casos de vehículo cargado y vehículo vacío.

RED SIMPLIFICADA E INTEGRADA

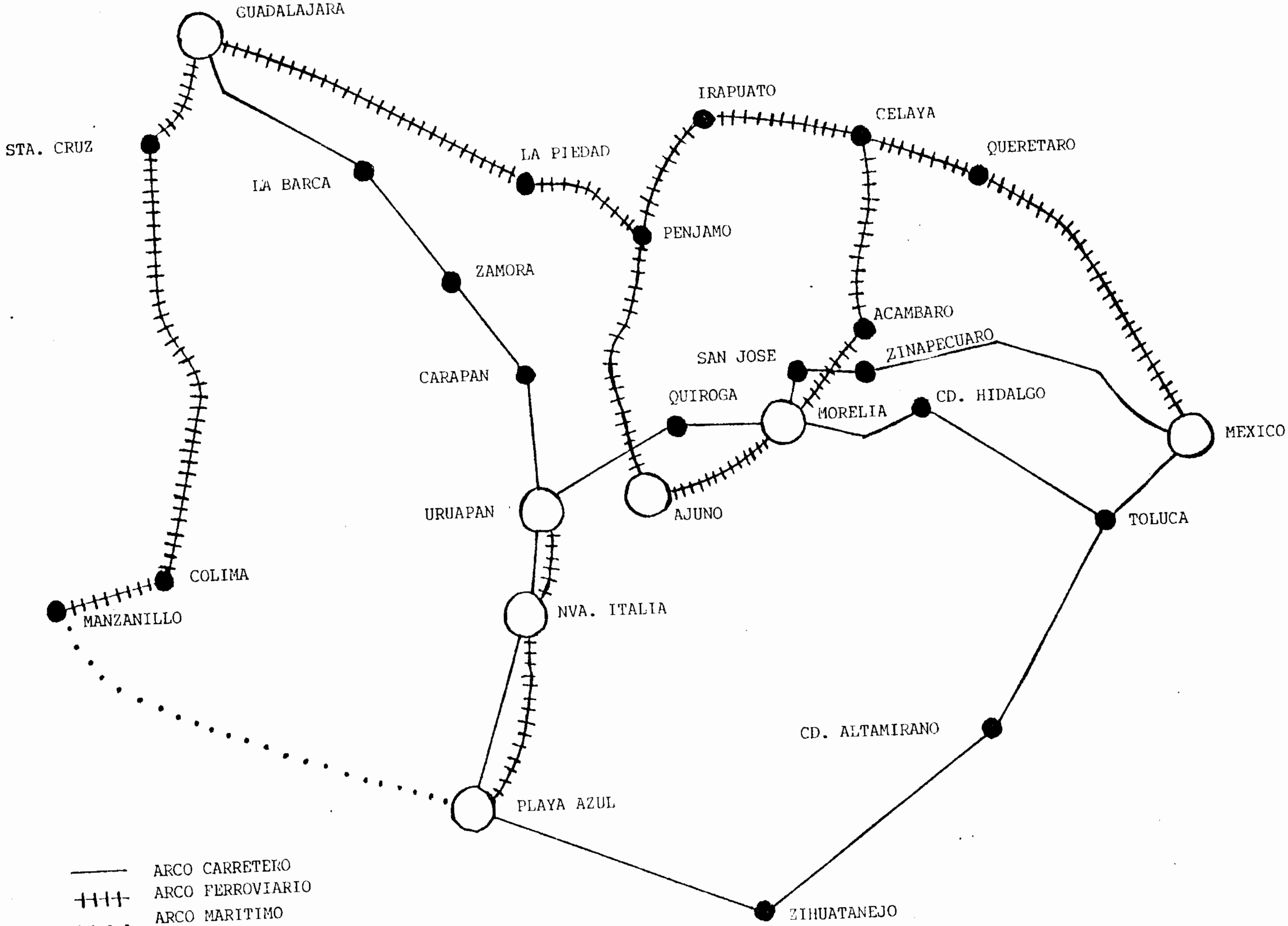


Figura 11.10

d.2) Costos de inversión en Equipo Móvil. Son los costos correspondientes a la adquisición del material rodante en el caso del transporte terrestre y al de lanchones, remolcadores y grúas en el marítimo.

d.3) Costos de inversión en infraestructura. Estos son los costos inherentes al mejoramiento o nueva construcción de carreteras, vías férreas o instalaciones portuarias, así como los correspondientes a conservación.

Modelo matemático

a) Resultados del modelo. Los resultados que se obtienen de la aplicación del modelo matemático son: Valor total actualizado de la inversión necesaria para poder enviar la producción de la Siderúrgica a los lugares en que se demanda. Esta inversión deberá cubrir los costos de transporte, de conservación, de equipo y de infraestructura.

b) Descripción general. El modelo utilizado es de programación matemática lineal mixta (emplea variables contínuas y enteras) y se basa en el desarrollo por Bergendahl para la asignación de tráfico, modificado de acuerdo con las características particulares del problema.

En el modelo se minimiza la función objetivo siendo esta la suma, a lo largo de todo el horizonte de planeación, de los costos actualizados de transporte, de conservación y de infraestructura.

Las restricciones generales a que se encuentra sujeto son las siguientes:

La suma de las cantidades de producción que se transporten anualmente por las cadenas que conducen a cada destino debe ser igual a la demanda anual de ese centro consumidor.

La carga movida en cada arco, en cada año, no deberá exceder a la capacidad anual disponible de los mismos.

c) Diagrama del sistema. En la figura 11.11, se muestra el diagrama del sistema el cual se compone de tres subsistemas.

En el primero se actualizan los costos de transporte por tonelada-cadena, los de conservación de los tramos y los de infraestructura y equipo.

El segundo se alimenta con los resultados del anterior y tiene como insumos propios: los arcos y años durante los cuales no es posible que ellos estén en operación, el programa de distribución de la Siderúrgica y la capacidad anual de cada arco. Con estos insumos, el segundo subsistema desarrolla la matriz que representa matemáticamente a la función objetivo y a las restricciones del modelo.

El tercer subsistema utiliza la información obtenida del segundo para ya propiamente resolver el modelo proporcionando los siguientes resultados: cadenas utilizadas y cantidad transportada durante cada año; arcos modificados y año en que inician su operación; valor acualizado de la inversión y el programa de inversiones a lo largo de todo el horizonte de planeación.

SUBSISTEMA 1

ACTUALIZACION DE COSTOS

INSUMOS PROPIOS

- NUMERO DE CADENAS, PERIODOS Y ARCOS QUE INTEGRAN AL SISTEMA
- COSTOS ANUALES DE TRANSPORTE POR TONELADA-CADENA
- TASA DE RENDIMIENTO DEL CAPITAL
- PROGRAMAS DE INVERSIONES E INFRAESTRUCTURA
- COSTO ANUAL DE CONSERVACION POR KILOMETRO
- COSTO ANUAL DE EQUIPO
- LONGITUD DE LOS ARCOS
- MATRIZ DE RELACIONES ARCOS-CADENA

- COSTOS ACTUALIZADOS DE:
- TRANSPORTE POR TONELADA-CADENA
- INFRAESTRUCTURA
- CONSERVACION ANUAL POR TRAMO
- EQUIPO ANUAL

- ARCOS Y AÑOS DURANTE LOS CUALES NO PUEDEN ESTAR FUNCIONANDO
- DEMANDAS ANUALES A LOS DESTINOS
- CAPACIDAD ANUAL DE CADA ARCO
- INCREMENTOS DE CAPACIDAD EN CADA ARCO

SUBSISTEMA 2

GENERACION DE LA FUNCION

OBJETIVO Y DE LAS RESTRICCIONES

- REPRESENTACION MATEMATICA DE LA FUNCION, OBJETIVO Y LAS RESTRICCIONES

SUBSISTEMA 3

SOLUCION DEL MODELO

- VALOR TOTAL ACTUALIZADO DE LA INVERSION
- CADENAS UTILIZADAS Y CANTIDAD TRANSPORTADA, EN CADA AÑO, A LOS DESTINOS
- ARCOS MODIFICADOS Y AÑOS EN QUE SE PONEN A FUNCIONAR
- PROGRAMA DE INVERSIONES

Figura 11.11

Desarrollo del modelo

a) Notación.

La nomenclatura utilizada en el modelo es la siguiente:

- j = subíndice que representa un centro consumidor (destino) de la producción.

- k = Representa una cadena del sistema. Se entenderá por cadena el conjunto de tramos ya sean carreteros, ferroviarios, marítimos o cualquier combinación de los mismos que unan a la Siderúrgica con uno de los centros consumidores.

- kj = Se emplea para designar una cadena cuyo destino es j. Se hace necesario la descripción de cadenas en general (k) y cadenas que tienen un cierto destino (kj) porque en el modelo se utilizan ambas literales.

- r = Se usa para representar a los arcos (tramos) que integran la red de transporte.

- r' = Arcos que si no son utilizados provocan gastos de conservación y que, dado que en la actualidad no tienen la capacidad suficiente para el transporte de los productos o que dentro del horizonte analizado se puede agotar la misma, pueden sufrir modificaciones.

r'' = Arcos que no provocan gastos de conservación pero que, por las razones expuestas en el párrafo anterior, pueden sufrir modificaciones.

r''' = Arcos que ni provocan gastos de conservación ni necesitan ser modificados.

q, t **y** t' = Subíndices que se usan para designar un año dentro del horizonte de planeación. Los tres varían de 1 a T.

C_{kt} = Representa el costo actualizado de transportar una tonelada de producción por la cadena k en el período t. En este coeficiente se incluyen diferentes conceptos, dependiendo del medio de transporte utilizado; así por ejemplo, en ferrocarriles se incluye conservación de la vía, adquisición, operación y mantenimiento del equipo.

X_{kt} = Variable que se usa para designar la cantidad de producción (en toneladas) que se debe enviar por la cadena k en el período t.

$M_{r'q}$ = Costo actualizado de modificar o construir (infraestructura) el arco r' de tal manera que pueda ser utilizado desde el año q. El mismo significado tiene $M_{r''q}$.

$S_{r'qt}$ = Costo actualizado de conservación para el arco r' si es utilizado desde el año q hasta el t.

$Y_{r'qt}$ = Variable binaria que toma el valor 1 en caso de que el arco r' sea utilizado para el transporte de los productos de la Siderúrgica desde el año q hasta el t; toma el valor cero si lo anterior no sucede.

$Y_{r''q}$ = Variable binaria que toma el valor 1 en caso de que el arco r' (que no provoca gastos de conservación) se modifique o construya de tal manera que pueda ser utilizado desde el año q. Toma el valor cero en caso de que no suceda así.

d_{jt} = Representa la cantidad de producción (en toneladas) que se debe enviar al centro consumidor j en el año t. Estos valores forman el programa de ventas por año y por destino de la Siderúrgica.

$\delta_k^{r'}$ = Parámetro binario que toma el valor 1 si el arco r' pertenece a la cadena k idéntico significado se tiene para $\delta_k^{r''}$ y $\delta_k^{r'''}$.

$b_{r't}$ = Capacidad del arco r' (en toneladas) disponible para transportar los productos terminados de la Siderúrgica. Se tiene el mismo significado para $b_{r''t}$ y $b_{r'''t}$.

$I_{r'}(I_{r''})$ = Incremento anual, en toneladas, que se tendrá en la capacidad de arco r' (o r'') en caso de que sea modificado.

b) Función objetivo.

Está dada por:

$$\min Z = \sum_{k}\sum_{t} C_{kt} X_{kt} + \sum_{r'}\sum_{q}\sum_{t} (M_{r'q} + S_{r'qt})\, Y_{r'qt} \qquad (11.15)$$

$$+ \sum_{r''}\sum_{t} M_{r''q} \quad Y_{r''q}$$

Con esta función objetivo se pretende minimizar, a lo largo de todo el horizonte de planeación, la suma total de los costos actualizados de transporte anual, de conservación (de los arcos que no incluyan ésta dentro del transporte) y de infraestructura.

El primer término del segundo miembro de (11.15) representa a la suma de los costos de transporte por tonelada-cadena (C_{kt}) multiplicados por la cantidad de producción en toneladas que se debe transportar por cada cadena en cada año.

En el segundo término del mismo miembro aparecen la suma de los productos de los costos de modificación de los arcos r' (los que en caso de emplearse pueden sufrir modificaciones y que provocan gastos de conservación fuera de los de transporte) si éstos se ponen a funcionar ya modificados en el año q, más los costos de conservación del mismo arco si es utilizado del año q al t, multiplicado por el valor que tome la variable binaria.

El tercer sumando tiene un significado análogo al segundo pero referido a los arcos r''' que no provocan gastos de conservación ni necesitan ser modificados.

El procesamiento que permite transformar el programa de inversiones asociado a cada posible modificación a un costo actualizado se presenta en el subinciso (f) así como el proceso de actualización de los costos restantes que aparecen en la función objetivo, incluyendo los de transporte y los de conservación.

c) Restricciones de demanda.

Estas restricciones significan que la suma de las cantidades de producción que se transporten anualmente por las cadenas que conducen a un cierto destino, sea igual a la demanda anual de este centro consumidor. Su representación analítica es:

$$\sum_{kj} X_{kjt} = d_{jt} \quad ; \quad \forall j, \quad \forall t \tag{11.16}$$

La expresión (11.16) es independiente de las alternativas que deseen analizarse, es decir, ya sea que se procese la red general o una parte (p.e. solución carretera durante τ años), que se hagan variar los costos de infraestructura, etc.

d) Restricciones de capacidad.

La representación analítica del primer grupo de restricciones asociadas a las capacidades de los arcos es la siguiente:

$$\sum_{k} \delta_{k}^{r'} X_{kt} - I_{r'} \sum_{q} \sum_{t'} Y_{r'qt} \leqq b_{r't} \quad \forall r', \ \forall t \ ; \ q \leqq t \leqq t' \tag{11.17}$$

y está asociado a los arcos que pueden modificarse y que provocan gastos de conservación (r'). Este grupo de restricciones obliga a que la suma de las cantidades de producción que se transportan por todas las cadenas que contengan a un cierto arco de las características mencionadas, en un año dado, no es mayor que la capacidad disponible, en toneladas, de ese arco en ese año, más el incremento que se tendría en caso de que el arco fuese modificado o construído en un período anterior al analizado. El término que se refiere al incremento de capacidad se transladó al primer miembro de la desigualdad para que quedaran en uno solo las variables y en otro los términos independientes.

Para impedir el uso de arcos no construidos se asoció a ellos una capacidad anual disponible nula ($b_{r't} = 0$) desde el inicio hasta el término de su construcción. De esta manera si es necesario usarlos, el modelo reconoce los costos de construcción, el plazo en que estarán disponibles y su correspondiente capacidad de diseño al término de dicho plazo.

El segundo conjunto de restricciones de capacidad, dado en (11.18), tiene idéntica estructura al ya explicado, y sólo se diferencia por el grupo de arcos que contiene.

$$\sum_{k} \delta_{k}^{r''} X - I_{r''} \sum_{q=1}^{t} Y_{r''q} \leq b_{r''t} \qquad \forall r', \forall t \tag{11.18}$$

La diferencia entre los arcos r' y r" se debe a que en el caso ferroviario el costo de transporte incluye al de conservación de la vía mientras que en el caso carretero la conservación se trata separadamente.

De esta manera, los grupos de restricciones (11.17) y (11.18) contienen a todos aquellos tramos que cumplen con alguna de las siguientes condiciones:

1. No se han construido.

2. Para admitir tránsito pesado es necesario modificarlos.

3. En algun año dentro del horizonte de planeación llegan a

saturarse y para seguir usándolos deben sufrir ampliaciones y/o modificaciones.

Un grupo separado está constituído por aquellos arcos cuya capacidad disponible puede cubrir, en todo el horizonte de planeación, tanto su demanda propia previsible como la que aportará la Siderúrgica. En este caso las restricciones de capacidad pueden representarse como sigue:

$$\sum_{k} \delta_{k}^{r'''} X_{kt} \leq b_{r'''t}, \quad \forall r'', \quad \forall t \qquad (11.19)$$

Como en (11.17) y (11.18), lo anterior significa que la suma de las cantidades de producción que se transporten en cada año por todas las cadenas que contengan a un cierto arco de las característiccas mencionadas (r'''), sea menor o igual que la capacidad disponible de ese arco en ese año.

Se insiste en que la forma de estas restricciones es similar a la de los dos grupos (11.17) y (11.18) ya descritos, sólo que ahora se omite el término que se refiere al incremento de capacidad debido a que no es necesario hacer ninguna obra que produzca tal efecto.

e) Restricciones de construcción y/o modificación.

Obviamente la estructura del modelo debe impedir que un mismo arco se construya o se modifique más de una vez dentro del horizonte de planeación considerado. Esto se debe a que en ambos casos deberá preverse una capacidad tal que puede absorber el tránsito previsto. La expresión analítica de la condición antes descrita está dada en las expresiones (11.20) y (11.21) siguientes:

$$\sum_{q} \sum_{t} Y_{r'qt} \leqq 1 \qquad \forall r' \qquad (11.20)$$

$$\sum_{q} Y_{r''q} \leqq 1 \qquad \forall r'' \qquad (11.21)$$

La razón de dividir estas restricciones en dos grupos es la ya expuesta al presentar los grupos de restricciones (11.17) y (11.18).

f) Actualización de costos.

En este inciso se describe el proceso de actualización de los diferentes costos que intervienen en el modelo (subsistema 1).

f.1) Costos de transporte. Sean:

C'_{kt} = Costo de transportar una tonelada de producto por la cadena K en el período t.

i = Tasa de actualización.

C_{kt} = Costo actualizado de transportar una tonelada de producto por la cadena k en el período t.

De esta manera se tiene:

$$C = \frac{C'_{kt}}{(1+i)^{t+2}} \qquad \forall k, \quad \forall t \qquad (11.22)$$

El exponente del factor de actualización $\left[\frac{1}{1+i}\right]$ es t + 2 debido a que el estudio se realizó dos años antes de que la Siderúrgica comenzase a operar.

f.2) Costo de modificaciones (construcción o reconstrucción). Los costos ocasionados por la construcción o acondicionamiento de los arcos que así lo requieren pueden considerarse como una serie de pagos anuales y actualizarse mediante la expresión:

$$M_{rq} = \sum_{h=1}^{Hr} \frac{M'_{rh}}{(1+i)^{q-Hr+h+2}} \qquad (11.23)$$

en donde:

H_r = Duración, en años, de la construcción o reconstrucción del arco r (recuérdese que de los tres tipos de arcos r', r" y r''', sólo los dos primeros pueden ser modificados).

h = Contador del año de ejecución de una obra, dentro de la duración total de ella (h = 1,..., H_r).

M'_{rh} = Inversión, sin actualizar, que se debe hacer en el año h de ejecución de la construcción o modificación del arco r.

M_{rq} = Costo actualizado de la inversión total que se requiere para modificar el arco r y ponerlo a funcionar a partir del año q.

De esta manera es posible que el modelo analice todas las posibles alternativas en cuanto a programa de inversión en los arcos susceptibles de modificarse, así como en lo referente al año en que ellos empiecen a operar. De todas las posibles combinaciones elegirá aquella que contribuya a la minimización del costo total.

f.3) Costos de conservación. La expresión que transforma los pagos anuales de conservación, a un solo valor actualizado es:

$$S_{r'qt} = L_{r'} \sum_{m=1}^{t-q-1} \frac{S'_{r'm}}{(1+i)^{q+1+m}} \qquad \forall r,\ \forall q,\ \forall t \qquad (11.24)$$

en donde:

$S'_{r'm}$ = Costo promedio no actualizado de conservar un kilómetro del arco r' durante el año m contando éste a partir del año en que es puesto en operación el arco (año q).

$L_{r'}$ = Longitud, en kilómetros, del arco r'.

$S'_{r'qt}$ = Costo de conservación actualizado del arco r' comprendida ella desde el año q hasta el t inclusive.

La expresión (11.24) se aplica a todos los arcos carreteros considerando todas las posibilidades en cuanto a los años en que inicie su operación y en que la termine. Por lo que se refiere a los arcos ferroviarios sólo el tramo que va de las Truchas a Coróndiro no incluye la conservación dentro de los costos de transporte. Si la Siderúrgica hace uso de este tramo deberá aportar anualmente **A** millones de pesos (no actualizados) por tal concepto para todo el tramo. El artificio que se utiliza consiste en suponer la longitud del arco ($L_{r'}$) igual a la unidad y los gastos anuales de conservación, no actualizados, ($S'_{r'm}$) iguales a **A**.

Otro caso particular se tiene en el arco marítimo. Debido a que el costo del equipo móvil no se incluye en el de transporte, se le dió un tratamiento similar a la conservación, es decir, como una serie de pagos anuales no actualizados, cuyos valores son el costo anual del equipo para el transporte de la producción de la Siderúrgica. Al parámetro que se refiere a la longitud ($L_{r'}$) se le dió también el valor unitario.

El funcionamiento integral del modelo se muestra en la figura 11.11 y su aplicación permitió determinar la alternativa de costo mínimo para el transporte de los productos terminados de la Siderúrgica.

11.6.4 Simulación del funcionamiento de casetas de cobro en carreteras de cuota

Introducción

Este modelo permite realizar un análisis del número de cabinas que se requieren en las casetas de cobro, que operan en caminos y puentes de cuota, para ofrecer niveles de servicio adecuados a los usuarios de las mismas. Se trata de un modelo de simulación digital de un Sistema de Espera como el mostrado en la figura 11.12 mediante el cual es posible plantear diversas alternativas de operación, con el fin de seleccionar aquella que proporcione las mayores ventajas.

Para la aplicación del modelo se requiere determinar los siguientes parámetros que intervienen de manera significativa en la operación de las casetas:

- Número máximo de vehículos que pueden permanecer simultáneamente en el área de las casetas.

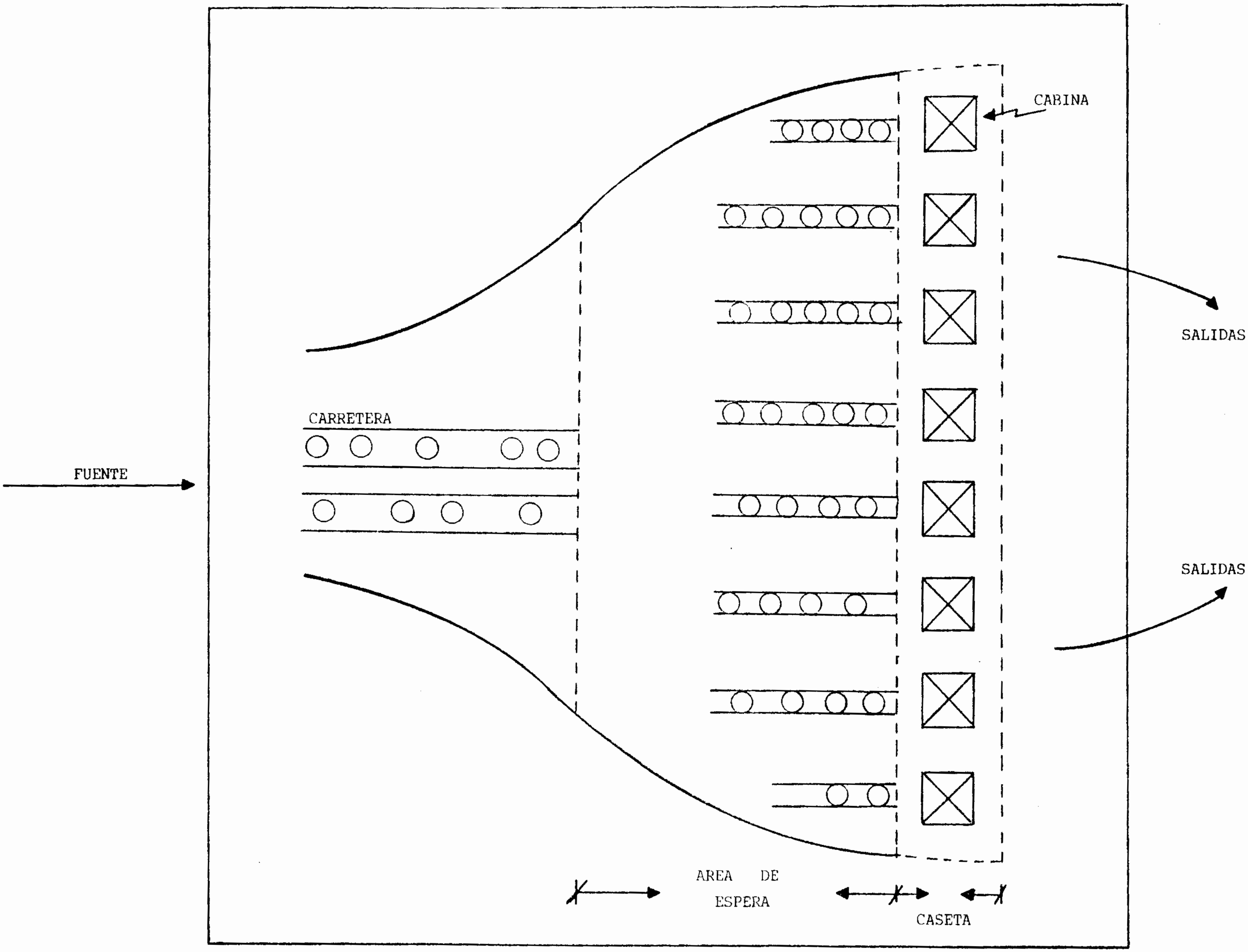
- Proporción de cada uno de los tipos de vehículos que transitan por los caminos y puentes de cuota, clasificados de acuerdo con las tarifas que se aplican.

- Número de vehículos que llegan en un intervalo de tiempo T, determinado previamente, a cada una de las casetas bajo condiciones normales y de máxima demanda.

- Tiempo que requiere el operador de la caseta para cobrar la cuota y regresar el cambio, si es necesario.

- Número de cabinas planeado o disponible en cada caseta.

- Número de carriles en el camino o puente.



Sistema de espera

Figura 11.12

- Tiempo que requiere cada tipo de vehículo para iniciar un movimiento, ya sea para avanzar en la cola o para efectuar el pago de la cuota.

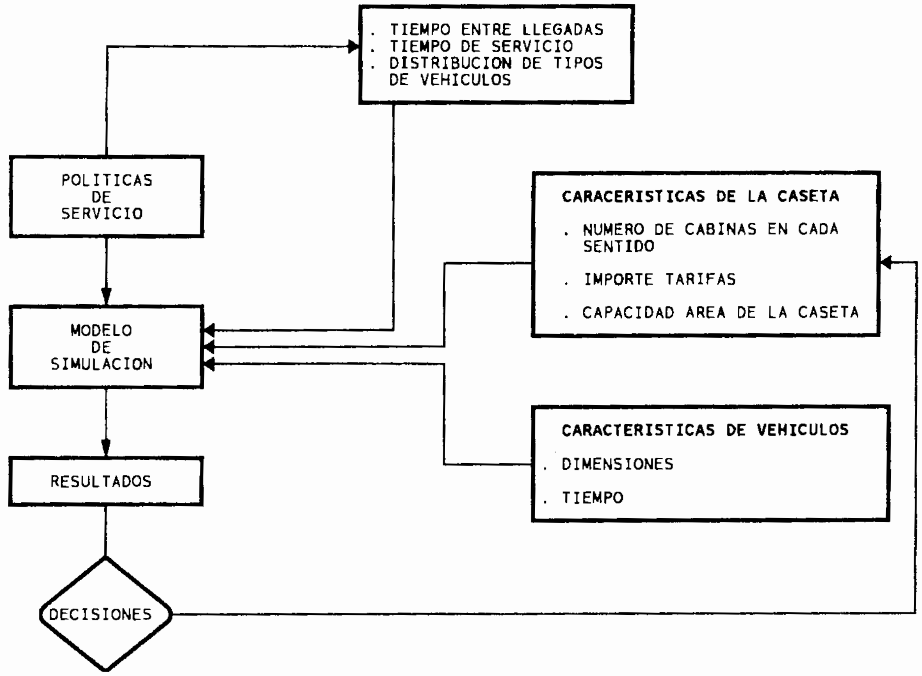
- Dimensiones promedio de cada uno de los tipos de vehículo.

Cada caseta tiene un comportamiento particular, por lo cual es preciso realizar un muestreo en días normales y de máxima demanda, en cada una de ellas, con objeto de establecer mediante pruebas estadísticas las funciones de probabilidad de las duraciones del servicio y del número de vehículos que llegan a la caseta en un intervalo de tiempo dado. Asimismo, el número de cabinas, el número de carriles en el camino, el número máximo de vehículos que puede albergar la caseta y los tiempos promedios que cada tipo de vehículo requiere para iniciar su movimiento y volver a detenerse.

La generación de las alternativas por simular, se efectuarán mediante la modificación de los valores que se asignen a los parámetros, dentro de rangos aceptables, con lo cual se obtendrán resultados bajo distintas políticas de operación, por ejemplo, ¿qué pasa si se incrementa el número de cabinas de alguna caseta? ¿cuántas cabinas se requieren si se desea que el tiempo promedio de estancia en la caseta sea menor que 20 segundos?, generando así diversas alternativas con objeto de conocer los niveles de servicio que se obtendrán con cada una de ellas.

En cuanto a la evaluación de resultados, se deberán establecer criterios que permitan eliminar aquellas alternativas que no sean congruentes con las políticas tendientes a incrementar los niveles de servicio y sugerir al tomador de decisiones las que proporcionen los mayores beneficios, tanto al Organismo que opera las casetas, como al usuario.

El esquema conceptual del modelo planteado se presenta en la figura 11.13.



Esquema Conceptual del Modelo de Simulación de Casetas

Figura 11.13

Descripción del modelo

Enseguida se describe el modelo de simulación con base en su aplicación a una caseta **C** para la cual se hicieron los estudios estadísticos necesarios para cuantificar los parámetros que en ella se utilizan.

Se admite que:

- El área de la caseta no presenta problemas de obstrucción por vehículos estacionados o descompuestos.

- Existe un número máximo de vehículos, k, que pueden permanecer simultáneamente en el área de espera de la caseta, el resto no ingresa a ésta y forman una cola en la carretera.

- El tipo de vehículo que llega a la caseta se distribuye de acuerdo con la función de probabilidad que se muestra en la tabla 11.14, obtenida del estudio estadístico citado.

- Al llegar un vehículo a la caseta, se forma frente a la cabina que en ese momento tiene el menor número de vehículos en cola.

- El número de vehículos que llega a la caseta en un intervalo de tiempo T, se ajusta a un proceso de Poisson de parámetro ℓ_1, por lo cual el tiempo que transcurre entre dos llegadas sucesivas de vehículos, se distribuye conforme a una función de probabilidad exponencial de parámetro T/ℓ_1.

TIPO DE VEHICULO	FUNCION DE DISTRIBUCION
AUTOMOVIL	$F(x) \leq 0.6952$
AUTOMOVIL CON REMOLQUE	$0.6952 < F(x) \leq 0.6972$
AUTOBUS	$0.6972 < F(x) \leq 0.7912$
CAMIONES DOS EJES	$0.7912 < F(x) \leq 0.8676$
CAMIONES TRES EJES	$0.8676 < F(x) \leq 0.9097$
CAMIONES CUATRO EJES	$0.9097 < F(x) \leq 0.9113$
CAMIONES CINCO EJES	$0.9113 < F(x) \leq 0.9727$
MOTOCICLETA	$0.9727 < F(x) \leq 0.9733$
EJES EXTRA	$0.9733 < F(x) \leq 1$

Tabla 11.14

- El cobro de la cuota se realiza de acuerdo con la siguiente política: primero en formarse frente a la cabina, segundo en cobrarle.

- El tiempo que requiere el operador de cualquier cabina para cobrar la cuota y regresar el cambio, si es necesario, se reparte conforme a una distribución exponencial de parámetro ℓ_2. Sin embargo, este tiempo también depende del tipo de vehículo, al respecto se utilizó la función que se muestra en la figura 11.14, para calcular los incrementos en los tiempos correspondientes.

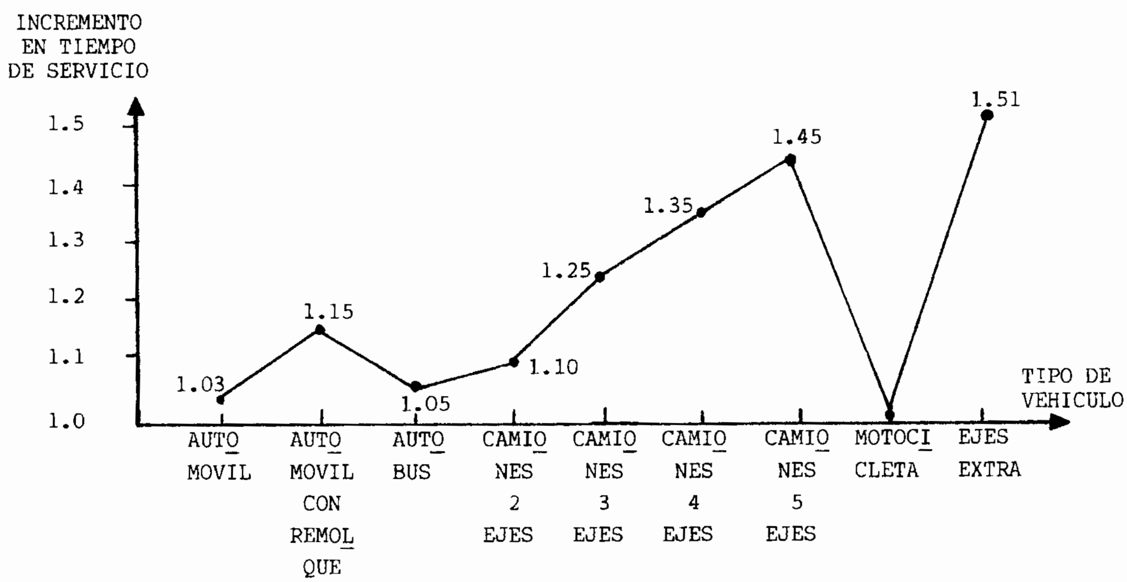


Figura 11.14

De acuerdo con la figura 11.14, la motocicleta representa la base para los demás tipos de vehículos, por ejemplo, el tiempo de servicio para automóvil tendrá un incremento de 1.03 veces con relación al parámetro correspondiente a motocicletas. Es posible refinar las estimaciones que se presentan, mediante un análisis que correlacione el tiempo de servicio con el tipo de vehículo.

- El tiempo que espera un vehículo antes de efectuar el pago de la cuota, depende del número de vehículos que están formados delante de él y del tiempo que requiere cada uno de ellos para iniciar su movimiento y volver a detenerse, ya sea para avanzar en la cola o efectuar el pago de la cuota. Este movimiento varía según el tipo de vehículo que se encuentra formado frente a la cabina y para ponderarlo se aplicó la función que se presenta en la figura 11.15, cuya interpretación es similar a la que se hizo para la figura 11.14.

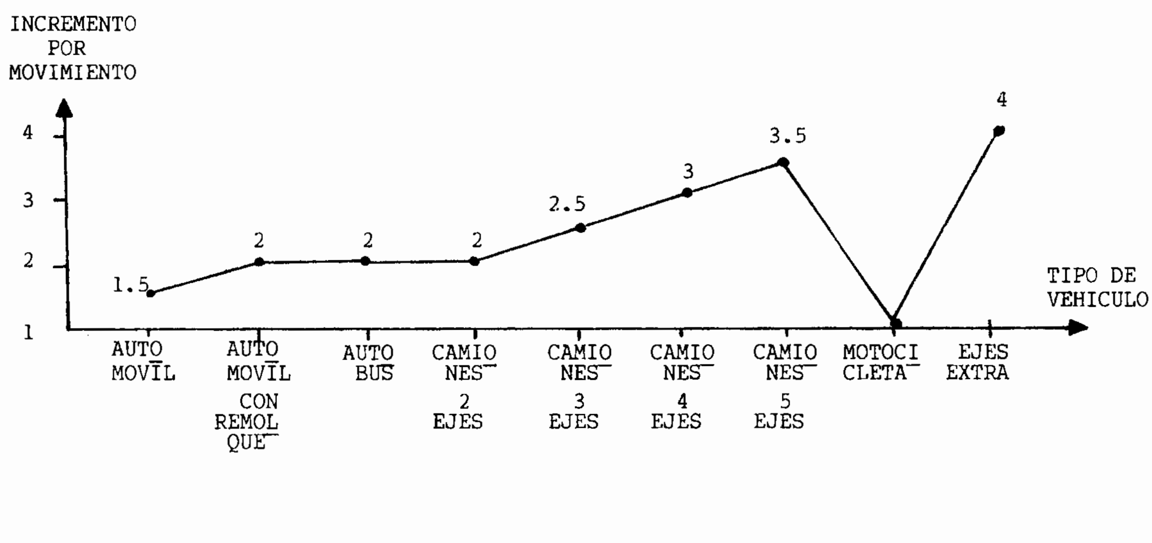


Figura 11.15

Con base en las hipótesis señaladas se desarrolló el modelo de simulación cuya estructura general se muestra en la figura 11.16.

Como puede observarse, los eventos que determinan la operación de la caseta son la llegada de vehículos y el paso de éstos por alguna cabina, por lo cual se estableció un control de la hora en que llegará el próximo vehículo a la caseta (entrada al modelo) y la hora a la que pasará el vehículo por aquella cabina cuyo tiempo de paso sea menor (salida del modelo).

Ahora bién, las acciones que ejecuta el modelo dependen de cual de los dos tiempos mencionados en el párrafo anterior, es menor.

Al llegar un vehículo a la caseta ejecuta las acciones siguientes:

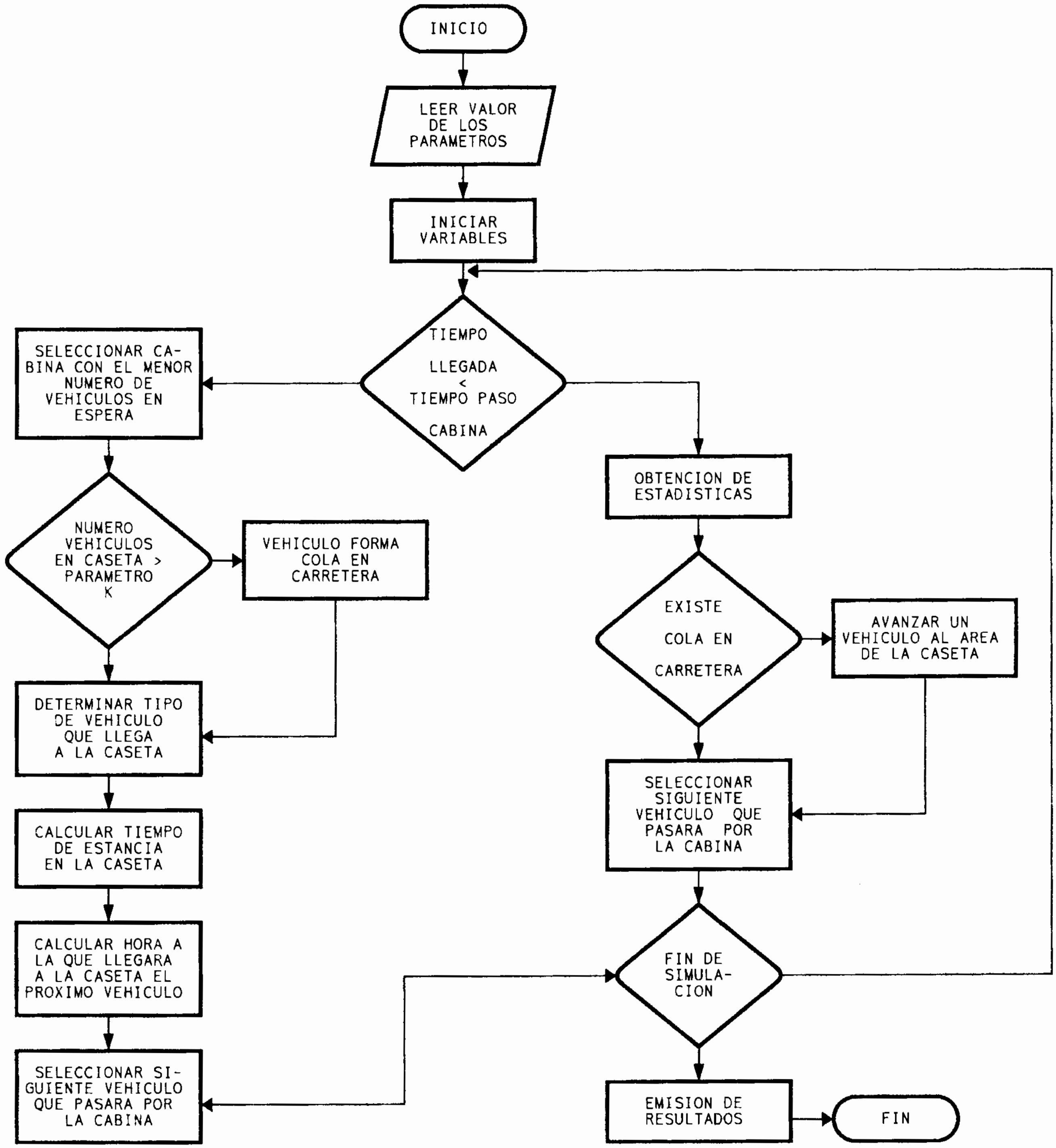
- Determina la cabina que tiene en espera el menor número de vehículos, con el objeto de formarlo frente a esa cabina.

- Verifica si se encuentra al límite el área de la caseta, esto es, si el número de vehículos que permanecen en este momento en ella, es igual al parámetro k.

- Establece de qué tipo de vehículo se trata.

- Para dicho vehículo calcula la hora a la que pasará por la cabina. Este valor es igual al tiempo de servicio ponderado de acuerdo con tipo de vehículo, más el número de vehículos que se encuentran en cola por el tiempo en que avanza cada uno de ellos.

- Calcula la hora a la que llegará a la caseta el próximo vehículo.



Estructura General del Modelo de Simulación

Figura 11.16

- Selecciona el vehículo cuyo tiempo de paso por la cabina sea menor.

Las acciones que ejecuta cuando pasa un vehículo por alguna cabina, son las siguientes:

- Obtención de estadísticas:

  . tiempo promedio de espera para pasar la cabina
  . tiempo máximo de espera para pasar la cabina
  . número promedio de vehículos en cola
  . número máximo de vehículos en cola
  . número de vehículos que pasan por la cabina
  . número promedio de vehículos en espera de ingresar al área de la caseta
  . número máximo de vehículos en espera de ingresar al área de la caseta

- Selecciona el vehículo cuyo tiempo de paso por la cabina sea menor.

Cabe señalar, que los parámetros que utiliza el modelo influyen en gran medida en los resultados que se obtendrán, por lo cual es necesario realizar los estudios que conlleven a estimarlos de manera tal que reflejen la realidad con un adecuado nivel de confianza. Asimismo, a través de estos parámetros es posible plantear diversas alternativas.

Definida la estructura del modelo de simulación, se desarrolló el programa de computadora correspondiente, utilizando el lenguaje de programación PASCAL.

Se realizó la calibración del modelo con el objeto de verificar la lógica planteada en su estructura y para determinar los parámetros para los cuales el modelo es sensible.

Se plantearon las alternativas que se simularían, con el objeto de obtener las estadísticas que reflejan la operación de la caseta para cada una de ellas.

Al conjugar las características operativas de las diversas alternativas simuladas con el criterio de optimalidad en cuanto a costo y nivel de servicio, fue posible recomendar la configuración más adecuada de la caseta de cobro.

11.7 INGENIERIA FINANCIERA

11.7.1 Antecedentes

En este inciso se presentan en forma suscinta los criterios para la evaluación financiera de proyectos de infraestructura, específicamente carreteras, concesionadas al sector privado.

Primeramente se comentan brevemente los antecedentes de la obra concesionada en México para después discutir el análisis para la evaluación financiera de proyectos bajo la modalidad **COT** (construcción, operación y transferencia), destacando las variables de mayor importancia sobre las cuales es conveniente realizar un análisis de sensibilidad que permita conocer el comportamiento financiero del proyecto.

Es obvio que el modelo de Ingeniería Financiera que se expondrá para el caso de autopistas concesionadas puede adecuarse fácilmente para ser aplicado en muchas otras áreas de interés.

El programa de concesión evidentemente es novedoso, porque tiene facetas peculiares como son el otorgamiento por parte del Estado del proyecto de la vía y la adquisición de los terrenos necesarios para su construcción, elementos con los que participa el Gobierno en el establecimiento de los caminos concesionados; sin embargo, se podría afirmar con justa razón, que el sistema de construcción de caminos mediante concesión, no sólo ha sido tradicional en la administración pública mexicana, sino que se heredó de la antigua administración colonial; en efecto, desde la época de la colonia, la administración pública otorgaba a los particulares concesiones para la construcción de caminos, basta como ejemplo la que el II Conde de Revillagigedo otorgó a un particular para la construcción del camino México-Toluca el año de 1785, y que se llevó a cabo mediante el sistema de administración, en virtud de no haber encontrado empresa alguna que aceptara realizar los trabajos por contrato.

La ley actual establece dos formas para la construcción de vías generales de comunicación, entre las cuales se encuentran naturalmente los caminos carreteros; una que es directamente por el Estado con recursos propios y que constituyen bienes de uso común, según lo establece el artículo 29 de la Ley General de Bienes Nacionales; y consecuentemente conforme lo dispone el propio ordenamiento legal, de ellos pueden usar libremente todos los habitantes de la República, sin más restricción que las establecidas por las leyes y reglamentos administrativos y que por ello son bienes de dominio público de la Federación y tienen el carácter de inalienables e imprescriptibles y no están sujetos, mientras no varíe su situación jurídica, a acción reivindicatoria o de posesión definitiva o provisional.

La otra forma que comprende la legislación actual, es la de concesionar a los particulares la construcción, establecimiento y explotación de dichas vías, conforme lo señala el artículo 8^{0} de la Ley de Vías Generales de Comunicación; concesión que se otorga a través de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (S.C.T.) y cuyo término máximo es de 30 años; temporalidad en que la vía construida conforme a la concesión que se otorga, es propiedad del concesionario; y por lo tanto puede ser objeto de transacciones comerciales con las limitaciones y condiciones que la propia ley establece.

11.7.2 Principales características de las obras de infraestructura concesionadas

La evaluación del proyecto de infraestructura depende de las características del mismo, destacando los aspectos técnico-ingenieriles, los estudios de mercado que estimen la demanda potencial, el sector económico en que se desarrollará y su interrelación con otros sectores.

Generalmente se trata de proyectos de un considerable monto de inversión, la cual se ejerce de acuerdo con un programa de obra, cubriendo siempre las especificaciones técnicas que se establezcan. Estos niveles de inversión impiden la aplicación de garantías tradicionales para la obtención de créditos, de manera que, como ya se ha mencionado, el propio proyecto se convierte en la principal garantía a través de su capacidad para generar ingresos.

Son proyectos que de no respetarse el programa de construcción pueden generar serios problemas de costos, tanto de obra como financieros, poniendo en peligro la recuperación de las inversiones; ya que por lo general la etapa de generación de ingresos se inicia una vez concluida la construcción.

La característica de un período de construcción donde no existe generación de ingresos, se traduce financieramente en la existencia de una etapa de capitalización de intereses, proceso que se detiene una vez que el proyecto genera recursos suficientes.

Por el lado de la demanda, generalmente el gobierno fija y garantiza niveles mínimos en determinadas variables, como pueden ser un mínimo de ingresos, ya sea por tarifa o por volúmen, determina mecánicas de ajuste de las tarifas y establece el tratamiento fiscal del proyecto, lo cual caracteriza la fase de operación y transferencia del mismo.

Ejemplificando lo anterior, en los proyectos carreteros, la S.C.T. determina los niveles de cuota, el aforo, la composición vehicular y las tasas de crecimiento; con ello se proyecta el flujo de ingresos, el cual deberá ser suficiente para recuperar la inversión durante la concesión. De no cumplirse las premisas en los niveles de estas variables, se ampliaría el período de concesión.

En cuanto a los egresos, es importante una buena estimación, puesto que una desviación, sobretodo en los relativos a la construcción, se puede traducir en el fracaso del proyecto. El período real de construcción debe ser compatible con el programa de obra, ya que el incumplimiento de éste no sólo puede encarecer el proyecto sino provocar retrasos que incidan desfavorablemente en el período de recuperación de la inversión.

Este tipo de desvío de costos de obra y rezagos de la misma, tienen un impacto negativo en la situación financiera del proyecto, al registrarse incrementos en los costos financieros. Como se mencionó anteriormente, en la etapa de construcción se tiene una capitalización de intereses, la cual aumenta al prolongarse la primera; con su consecuente impacto en los montos del crédito.

En lo relativo a los costos de operación y mantenimiento deberán calcularse y programarse de manera consistente, ya que estos serán cubiertos con los propios ingresos de operación.

Las variables de costos son propuestas por parte de las concesionarias y autorizadas por el gobierno.

La veracidad y consistencia de estas variables redundará en resultados más realistas en cuanto a la recuperación de las inversiones. Por lo que una deficiente estimación de éstas podría significar el fracaso del proyecto.

El último conjunto de variables clave requeridas para la evaluación del proyecto son aquellas que están relacionadas al entorno macroeconómico y financiero, y que son estimadas por el agente financiero, destacando los niveles de inflación, tasas de interés, márgenes financieros, entre otros. Una estimación conservadora de este tipo de variables permitirá obtener resultados realistas en la evaluación del proyecto.

11.7.3 Modelo conceptual

El modelo conceptual que se presenta en la figura 11.17 tiene como finalidad la de constituirse como un marco integrado y coherente, que ayude a la toma de decisiones en la evaluación financiera de una autopista concesionada. Consecuentemente, el modelo busca la congruencia interna tomando como punto de partida los aspectos económicos, de modo que las distintas variables, políticas y criterios que se manejen, sean acordes y estén enmarcados por los escenarios económicos que se utilicen.

Como primer bloque, se presenta el de los escenarios macroeconómicos, que es el que sirve de elemento de enlace de todo el modelo. En él se determina el (los) escenario (s) con que se trabajará en el modelo.

A continuación, se consideran los elementos de costos y beneficios del proyecto. En primer lugar, se encuentran los costos de construcción en donde éstos se determinan de acuerdo con la información de costos unitarios constantes disponibles, el calendario de construcción y el escenario macroeconómico considerado.

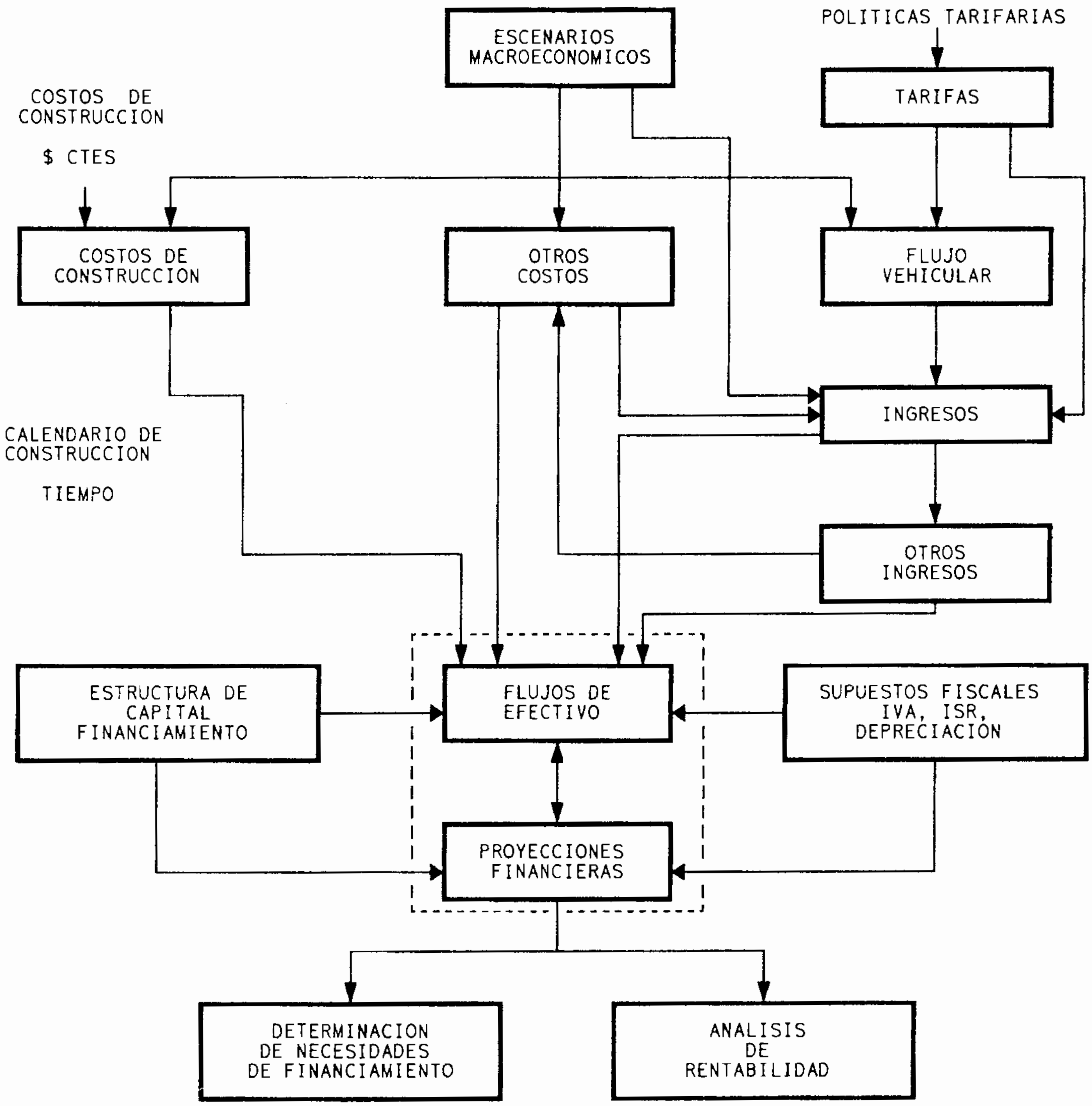


Figura 11.17 Modelo de Ingeniería Financiera

Por el lado de los beneficios, se encuentran los bloques que permiten el cálculo calendarizado de beneficios del proyecto. Como primer punto, se encuentra el de tarifas, en donde éstas se determinan de acuerdo con el escenario económico y con las políticas tarifarias existentes. A partir de dichas tarifas y otra vez considerando los factores económicos, se determina el flujo vehicular que se tendrá, para que finalmente se puedan calcular los ingresos, combinando la demanda y las tarifas.

Finalmente, a partir de los escenarios económicos y del flujo vehicular, se calculan otros ingresos, derivados de la explotación del proyecto (por ejemplo gasolineras). Por el lado de los costos, se calculan otros costos complementarios, como pueden ser los de mantenimiento y conservación, y los asociados a los otros ingresos.

En el bloque de Estructura de Capital y Financiamiento, se considera el aspecto de la estructura financiera que permitirá desarrollar el proyecto, como son el monto y condiciones de los créditos, lo que junto con las políticas fiscales que se manejen, como la recuperación del IVA, el pago de impuestos y el manejo de la depreciación, permita determinar los flujos de efectivo de cada una de las organizaciones involucradas en el desarrollo y manejo del proyecto.

Finalmente, a partir de los flujos de efectivo y del financiamiento de cada entidad, se calculan los aspectos de rentabilidad de las diversas organizaciones involucradas en el proyecto.

A partir del modelo de Ingeniería Financiera que se ha planteado, se pueden realizar las evaluaciones, estudios y sensibilidades que ayuden a la toma de decisiones con respecto al proyecto analizado. Entre otras, se presentan las siguientes:

I. Determinación de las rentabilidades de los participantes en el proyecto. Consiste en la evaluación y determinación de la rentabilidad del proyecto para cada uno de los participantes, así como de las sensibilidades y riesgos incurridos, a partir de:

- escenario (s) macroeconómico (s)
- costos de construcción, contemplando costos unitarios, calendario, economías de escala, etc.
- ingresos, a partir de la política tarifaria, las tarifas y las demandas
- otros ingresos
- otros costos
- supuestos fiscales
- estructura de capital: participantes, creditos, montos y calendarios

II. Determinación de variables, para que el proyecto satisfaga requerimientos de rentabilidad y/o riesgos para los participantes en él. Aquí se puede contemplar la determinación de variables como:

- tiempo de concesión, si éste es el caso
- condiciones de los créditos (vg tiempo de repago, montos, etc.)
- estructura de capital
- tarifas (manteniendo congruencia con el escenario económico)
- supuestos fiscales

que se requieren o son óptimos, para satisfacer requerimientos de rentabilidad y/o riesgo, como función de:

- escenario (s) macroeconómico (s)
- costos de construcción, contemplando costos unitarios, calendario, economía de escala, etc.
- relación flujo vehicular-tarifa
- otros ingresos
- otros costos

- supuestos fiscales (si procede)
- estructura de capital: participantes, créditos, montos, calendarios (si procede)

III. Análisis de sensibilidad y riesgo sobre diferentes casos base.

En cada una de las posibilidades I a III se obtienen Flujos de Efectivo, Puntos de Equilibrio, Estado de Resultados, Balance, Análisis de Rentabilidad, Conciliación Fiscal-Contable, Análisis de Préstamos y Parámetros Operativos.

Otra formulación del modelo conceptual para Estudios de Ingeniería Financiera se muestra en la figura 11.18.

Es obvio que el modelo expuesto para el caso de proyectos de transporte puede adecuarse fácilmente para ser aplicado en muchas otras áreas de interés.

11.7.4 Pronóstico de la demanda

Tradicionalmente, en la planeación del transporte urbano o interurbano, el modelo de predicción de la demanda de viajes se divide en cuatro submodelos:

a) Generación de viajes.

En este submodelo se estima el número total de viajes producidos y atraidos en cada una de las zonas en que se divide la región estudiada.

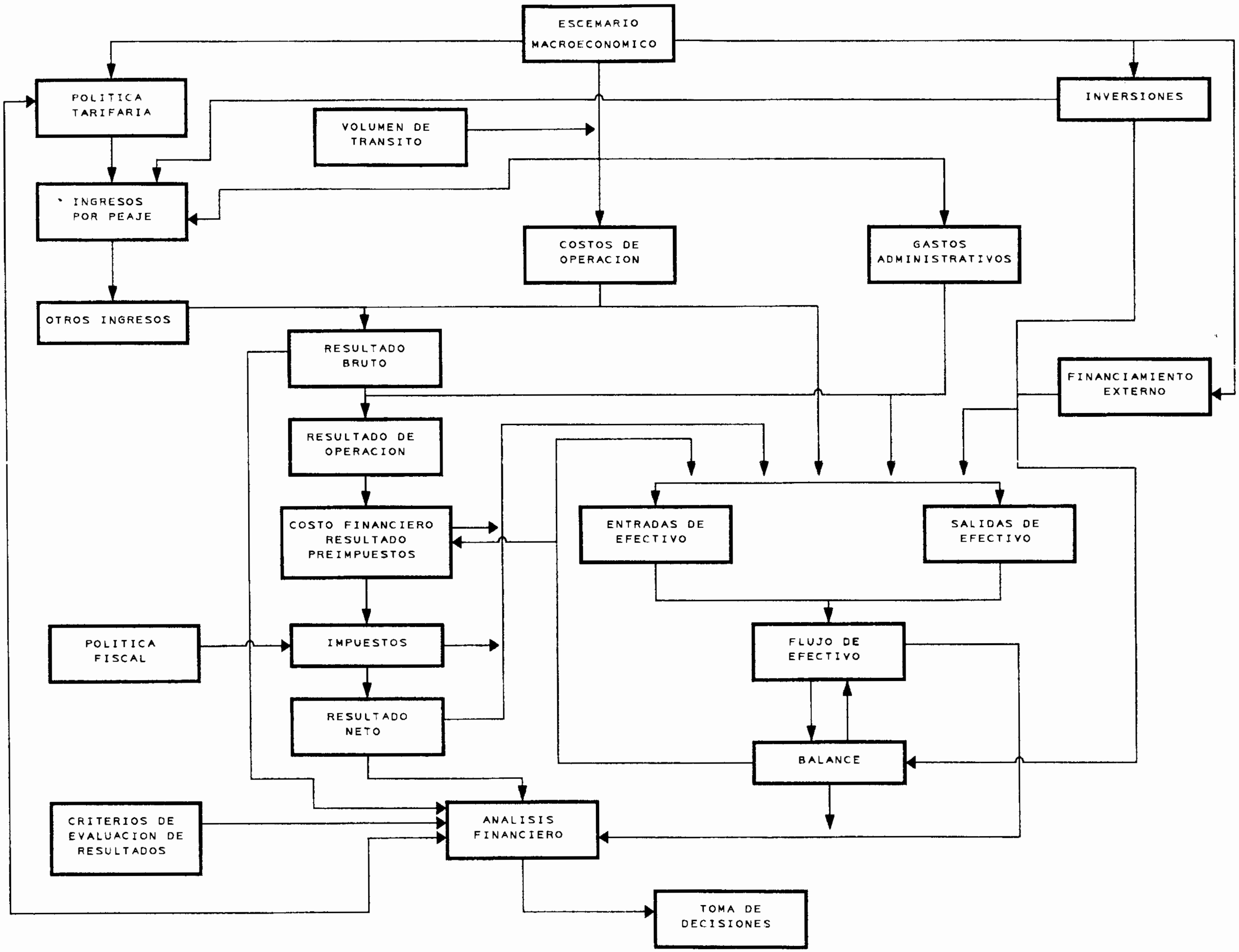

ESCENARIO MACROECONOMICO
POLITICA TARIFARIA
VOLUMEN DE TRANSITO
INVERSIONES
INGRESOS POR PEAJE
COSTOS DE OPERACION
GASTOS ADMINISTRATIVOS
OTROS INGRESOS
RESULTADO BRUTO
FINANCIAMIENTO EXTERNO
RESULTADO DE OPERACION
COSTO FINANCIERO RESULTADO PREIMPUESTOS
ENTRADAS DE EFECTIVO
SALIDAS DE EFECTIVO
POLITICA FISCAL
IMPUESTOS
FLUJO DE EFECTIVO
RESULTADO NETO
BALANCE
CRITERIOS DE EVALUACION DE RESULTADOS
ANALISIS FINANCIERO
TOMA DE DECISIONES

Figura 11.18

b) Distribución geográfica de viajes.

En este submodelo el número total de viajes que se producen en una zona dada son distribuidos entre todos los destinos posibles.

c) Selección del medio de transporte.

Los viajes correspondientes a una combinación dada de origen y destino son distribuidos entre los medios de transporte disponibles.

d) Asignación de viajes a la red de transporte.

Los viajes estimados para una combinación dada de par origen-destino y medio de transporte, se asignan a rutas de la red de transporte.

En el caso de las autopistas de cuota no es necesario desarrollar ningún modelo de selección de medio de transporte, porque solamente se analizará la demanda de recorridos interurbanos realizados en vehículos que utilizan la red carretera de influencia de la autopista bajo estudio como la que se ilustra en la figura 11.19.

Es decir, no se requiere estimar, por ejemplo, el porcentaje de viajeros que seleccionan el autobús, el tren, el avión o el automóvil particular para realizar un recorrido entre dos ciudades de las redes de influencia identificadas.

Por lo tanto, la predicción de la demanda se centrará en aquellos recorridos vehiculares que se efectúan por la red carretera de influencia.

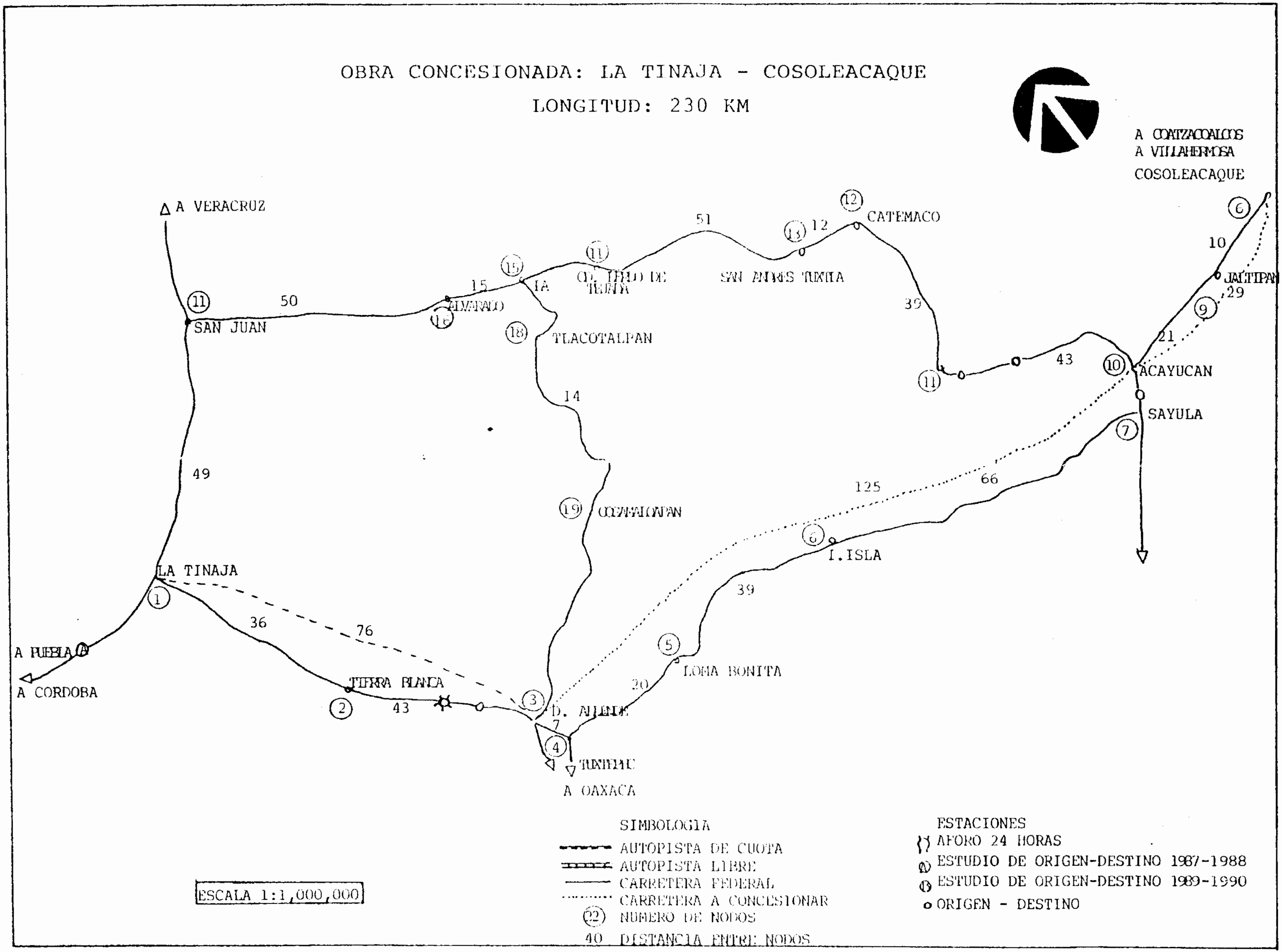

OBRA CONCESIONADA: LA TINAJA - COSOLEACAQUE
LONGITUD: 230 KM
A COATZACOALCOS
A VILLAHERMOSA
COSOLEACAQUE
A VERACRUZ
SAN JUAN
50
15
ALVARADO
TLACOTALPAN
14
CATEMACO
51
12
SAN ANDRES TUXTLA
39
43
ACAYUCAN
JALTIPAN
10
29
21
SAYULA
125
66
I. ISLA
39
LOMA BONITA
20
49
COSAMALOAPAN
LA TINAJA
36
76
A PUEBLA
A CORDOBA
TIERRA BLANCA
43
7
TUXTEPEC
A OAXACA
SIMBOLOGIA
AUTOPISTA DE CUOTA
AUTOPISTA LIBRE
CARRETERA FEDERAL
CARRETERA A CONCESIONAR
NUMERO DE NODOS
40 DISTANCIA ENTRE NODOS
ESTACIONES
AFORO 24 HORAS
ESTUDIO DE ORIGEN-DESTINO 1987-1988
ESTUDIO DE ORIGEN-DESTINO 1989-1990
ORIGEN - DESTINO
ESCALA 1:1,000,000

Figura 11.19

Para fines prácticos y por simplicidad, el modelo de predicción de demanda se divide en dos submodelos:

1. Distribución geográfica del tránsito vehicular.

2. Asignación del tránsito vehicular.

En el primer submodelo se combinan los submodelos tradicionales de generación de viajes y de distribución geográfica de viajes, considerando para una ciudad dada solamente los recorridos interurbanos que se realizan en los diversos tramos de las redes de influencia identificadas.

El submodelo de asignación del tránsito vehicular utilizará como insumo básico los flujos vehiculares estimados por el primer submodelo para cada combinación de origen y destino de las redes de influencia. En lo que sigue, por simplicidad, se utilizará el término **modelo** para referirse a estos submodelos.

En el análisis de sistemas de transporte generalmente se han utilizado tres variables básicas para la predicción de la demanda de viajes (figura 11.20).

1. El sistema de transporte (**T**).

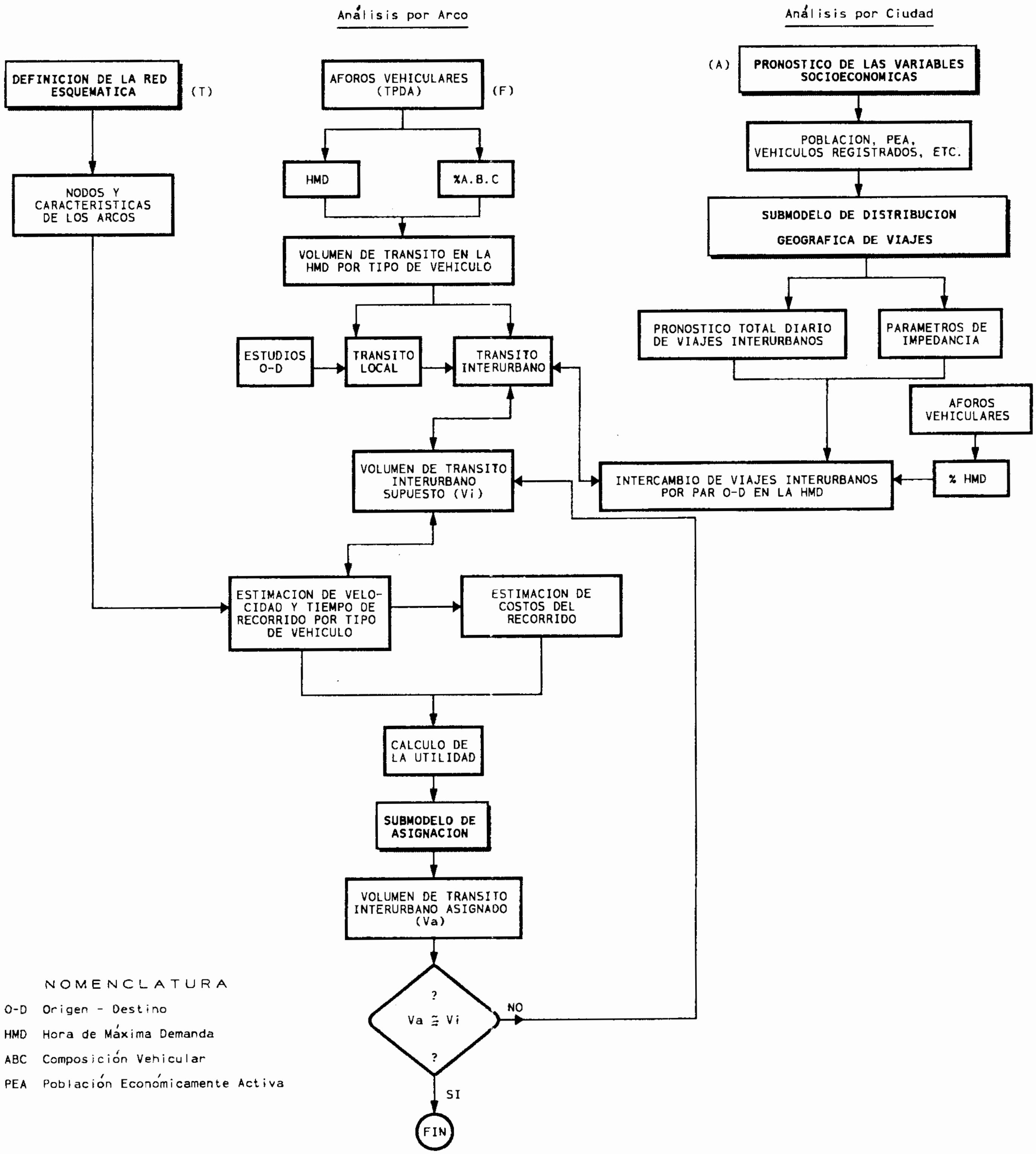
   Que engloba todas las características de dicho sistema como son: (i) nodos, (ii) enlaces o arcos, (iii) tipo de vehículos, etc.

2. El sistema de actividades, o socioeconómico (**A**).

   Incluye características o variables como: (i) población, (ii) número de empleos, (iii) número de unidades productivas, (iv) producto interno bruto y otras.

3. El Patrón de flujos en el sistema (**F**).

ESTRUCTURA DEL MODELO PARA PRONOSTICO Y ASIGNACION DE TRANSITO



NOMENCLATURA

O-D Origen - Destino

HMD Hora de Máxima Demanda

ABC Composición Vehicular

PEA Población Económicamente Activa

Figura 11.20

Que considera la magnitud y la dirección de los flujos en movimiento o por movilizar, ya sea como transporte de pasajeros o de carga.

Existen interrelaciones importantes de estas tres variables, las cuales se consideran explícitamente en los modelos de predicción de demanda de viajes.

Las características del sistema de transporte se especifican mediante funciones de servicio (**J**). Para una red carretera dada, el nivel de servicio (**S**) que recibirá un usuario normalmente será función del volúmen de vehículos que se encuentren en la red, y del sistema de transporte que utilice:

$$S = J\ (\ T,\ V\ ) \qquad (11.25)$$

Este nivel de servicio que cada usuario percibe puede estar representado por diferentes indicadores, entre los que destacan el tiempo de viaje, los costos de operación, y los desembolsos directos, p.e. peajes, que dicho usuario tenga que hacer.

Por otra parte, en el sistema socioeconómico se establecen funciones de demanda (**D**), con las que se estima el volúmen de tránsito (**V**) con base en el nivel de servicio:

$$V = D\ (\ A,\ S\ ) \qquad (11.26)$$

Lo que significa que el volumen de viajes estará determinado por el sistema de actividades económicas (**A**) de la región, zona o ciudad; y por el nivel de servicio (**S**) que el sistema de transporte le proporcione al usuario.

En el caso del patrón de flujos, normalmente se utiliza la siguiente función para indicar sus características:

$$F = (V, S)$$

Lo que significa que el patrón de flujos consiste de un volumen de usuarios **V** que utilizan un sistema de transporte con un nivel de servicio **S**.

Para una combinación dada de los sistemas **T** y **A**, el patrón de flujos que realmente se presentará en la red corresponde a la solución de equilibrio de las relaciones indicada en las ecuaciones 11.25 y 11.26, que se conoce comúnmente como el **equilibrio del mercado de viajes.**

Sin embargo, con el transcurso del tiempo se presentan cambios en el sistema socioeconómico, representados por un aumento en la demanda debido a variaciones en las principales variables socioeconómicas, tales como la población.

Las fuerzas que inducen estos cambios son externas al sistema de transporte y teóricamente producen un desplazamiento de la función de demanda ecuación (11.26), de tal manera que para un valor constante de S, se presenta un incremento del volúmen de tránsito con respecto al que se registraba originalmente. La solución de equilibrio cuando ocurre un desplazamiento en la función de demanda se denomina **equilibrio del sistema socioeconómico**.

Por tal motivo, se desarrolla un modelo adicional que permita predecir el aumento en la producción total de viajes interurbanos en carretera, debido a los cambios en la población y en otras variables socieconómicas asociadas a las principales ciudades de la red de influencia de la autopista de cuota que se está analizando. A este modelo se le denomina **modelo de pronóstico de cambios socioeconómicos.**

11.7.5 El financiamiento

El esquema financiero de los primeros proyectos instrumentados bajo el esquema de concesión utilizó la modalidad del **Fideicomiso** en el que participaban con capital de riesgo el Gobierno y las empresas constructoras; y un banco aportando un crédito. A su vez el banco intervino como fiduciario al que se le otorgó la concesión para la construcción, operación y explotación de las autopistas por un período de 20 años, renovable por una sola vez, tiempo en el que se calculó que se recuperaría la inversión.

Bajo esta concepción, el fideicomiso se constituyó en el receptor y administrador de las aportaciones de capital y del crédito, así como de los flujos provenientes del cobro de las cuotas para ejecutar la obra, hacer frente a la conservación y mantenimiento de las propias carreteras, recuperar el préstamo y pagar el rendimiento ofrecido a los inversionistas en su calidad de fideicomitentes. Una vez recuperada la inversión y habiendo pagado en forma alícuota a los participantes, el fideicomiso se extinguirá y las carreteras serán entregadas en propiedad al Gobierno Federal.

Dada la extraordinaria dinámica del Programa de Concesión de Carreteras de Cuota fue necesario desarrollar esquemas financieros novedosos y flexibles. Así, mediante la figura de **crédito por aval** los bancos pudieron hacer uso de su capacidad crediticia, sin que ello gravitara sobre su techo financiero, situación que abrió de inmediato la posibilidad de acudir al mercado de valores para obtener el fondeo necesario de mediano y largo plazo.

De esta manera, en la primera autopista financiada bajo esta modalidad, la concesionaria recibió un crédito por aval, equivalente al 60% de la inversión total, para que mediante la emisión de papel comercial se financiara su construcción en dos etapas durante las cuales estará vigente como garantía, una fianza por el anticipo y otra por terminación de obra; una vez en operación, se emitirán Certificados de Participación Ordinarios de mediano plazo con riesgo proyecto, con lo que quedará liberado el compromiso del banco para, de considerarlo conveniente, continuar con otros proyectos.

La colocación del papel de corto plazo avalado, así como la que habrá de los certificados una vez que esté en operación la autopista, corre a cargo de una Casa de Bolsa, la cual se compromete a la toma en firme en ambos casos, entregando el producto de la primera de las emisiones a un fideicomiso de administración constituido por el banco, cuyo fin consiste en aplicar los recursos para sufragar los costos de construcción y emitir una vez concluidos cada uno de los tramos, Certificados de Participación Ordinarios Amortizables, que sustituyan al papel comercial. Asimismo, una vez en operación la carretera, recibirá el importe de las cuotas de peaje para cubrir los gastos de conservación y mantenimiento, así como los intereses y amortización de los títulos emitidos.

Como se sabe, el papel comercial y los certificados no son los únicos productos que maneja la Banca de Inversión Mexicana, sino que dentro de una clasificación un poco más amplia pueden citarse:

- Papel comercial Quirografario
  Avalado
  Indizado

- Obligaciones Quirografiarias
  Hipotecarias
  Intereses capitalizables
  Disposiciones múltiples
  Indizadas
  Convertibles

- Certificados de participación inmobiliarios

- Bono de prenda

- Acciones

A título de ejemplo, en el Apéndice se describen las ventajas y desventajas de las obligaciones y se describen con algún detalle adicional las **obligaciones con disponibilidades múltiples.**

La funcionalidad del esquema financiero depende en gran medida del diseño de instrumentos de captación compatibles con las características de cada proyecto, por lo que deben analizarse alternativas de instrumentos financieros para allegarse de recursos, y con ello lograr la factibilidad del proyecto con una estructura adecuada de capital de riesgo y de financiamiento.

11.7.6 Apéndice

I. OBLIGACIONES

I.1. USOS

Financiamiento de proyectos a largo plazo.

I.2. REQUISITOS

a) Empresas preferentemente con capital mayoritario mexicano inscritas o no en la bolsa.

b) Se deberán destinar los recursos a nuevas inversiones, desarrollo de productos, inmuebles, capital de trabajo permanente, o adquisición de empresas, entre otros.

c) La empresa debe tener capacidad de pago, o forma de garantizar la emisión.

d) Que tenga administración competente y auditores externos reconocidos.

I.3. CARACTERISTICAS

Monto: De acuerdo con la capacidad de pago de la emisora.

Plazo: Aunque no existe un plazo máximo lo usual es hasta 7 años con 3 de gracia.

Forma de pago: El diseño de una obligación es muy flexible y permite adaptarse a las necesidades y capacidad de pago de una empresa en particular.

Garantías: Dependiendo de la capacidad de pago podrán ser quirografarias o garantizadas (hipoteca, aval, carta de crédito, etc.)

Tasas: De mercado. Generalmente se calcula un spread sobre CETES, CEDES, aceptaciones bancarias y bondes.

Limitaciones financieras: En obligaciones quirografarias: sobre apalancamiento, liquidez, venta de activos, pago de dividendos, entre otros.

I.4. VENTAJAS

1) Es un instrumento muy flexible que se adecúa a los requerimientos de las empresas en lo que se refiere a plazo amortizaciones, años de gracia, entre otros.

2) En épocas de contracción crediticia es una alternativa de financiamiento en moneda nacional a largo plazo.

3) En caso de ser quirografarias, los activos quedan libres de gravámenes.

4) Por lo general, tienen un costo total competitivo contra otras alternativas de financiamiento.

5) Dan presencia en el mercado a las empresas.

I.5. DESVENTAJAS

1) Existen limitaciones financieras que deben cumplirse y que en algunos casos pueden entorpecer el desarrollo de la empresa.

2) La emisora se obliga a proporcionar información al público.

I.6. FONDEOS

1) Personas físicas o morales de nacionalidad mexicana o extranjera.

2) Sociedades de inversión (fondos de renta fija).

3) Fondos de pensiones y primas de antiguedad.

4) Instituciones de seguros y fianzas.

II. OBLIGACIONES CON DISPONIBILIDADES MULTIPLES

Se denominan **Emisión de Obligaciones con Disponibilidades Múltiples de (nombre de la empresa).**

La modalidad de este tipo de obligaciones estriba en que la emisora va disponiendo el monto total conforme lo necesite, es decir, no se allega del total de los recursos en un inicio, sino en formas parciales.

Tiene la obligación de disponer del total antes de que realice su primera amortización.

En caso que no requiera del monto total, amortizará lo que realmente se utilizó.

Los intereses se pagarán sobre el saldo insoluto de las obligaciones.

II.1. COSTOS FIJOS

En primer término, las obligaciones a partir de su fecha de colocación generan un interés bruto anual sobre su valor nominal.

Dicho interés se determina obteniendo la tasa más alta que resulte de comparar usualmente Cetes, Certificados de Depósito Bancarios, Aceptaciones Bancarias y Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal.

A la tasa más alta, se le sumará una sobretasa pactada desde el inicio, la cual será el rendimiento que obtiene el tenedor de los títulos.

Ante la Comisión Nacional de Valores:

- La cuota a cubrirse por estudio y trámite (ingreso de documentación).

- Por inscripción en la Sección Valores del Registro Nacional de Valores e Intermediarios.

Ante Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V.

- Por estudio técnico-económico.

- Por concepto de inscripción en la Bolsa Mexicana de Valores.

Este pago deberá hacerse una vez que hayan sido colocadas las obligaciones.

Durante el primer año, la cuota de inscripción se calculará en forma anualizada, conforme al número de días que resten para que concluya el año.

El resto se calculará con base en un año completo sobre el saldo insoluto del monto de la emisión en circulación.

Ante Indeval, S. A. de C. V., Institución para el Depósito de Valores. (Depositario de los títulos).

- Por custodia, guarda y administración del macrotítulo que ampara la emisión y hasta el momento del canje por los títulos definitivos.

II.2. COSTOS VARIABLES

Ante el Representante Común de los Obligacionistas:

a) Por la aceptación del cargo.

b) Por manejo de la emisión (Cálculo de la tasa de interés) durante la vida de ésta misma.

- Por impresión de los títulos definitivos.

- Por publicaciones en los diarios.

- Por la impresión de los prospectos de colocación.

- Ante el Notario por la protocolización e inscripción del Acta de Emisión en el Registro Público de Comercio.

Jauffred M. Francisco J., Moreno Bonett Alberto, et al; **Técnicas auxiliares para la toma de decisiones**; Cámara Nacional de la Industria de la Construcción; México, D.F., México, edición agotada, 1967

Jauffred M. Francisco J., Moreno Bonett Alberto, et al; **Ingeniería de Sistemas**; Cámara Nacional de la Industria de la Construcción, México, D.F., México, edición agotada, 1971

Jauffred M. Francisco J., Moreno Bonett Alberto y Acosta F.J., **Métodos de optimización: Programación lineal gráficas**; México Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1987

Jauffred M. Francisco J., y Moreno Bonett Alberto; **Técnicas discretas de la ingeniería de sistemas**, México, Representaciones y Servicios de Ingeniería, Tomo I, 1983, Tomo II, Alfaomega Editores, 1992

Moreno Bonett Alberto; **Introducción a la estadística**, México, Comisión Económica para la América Latina, edición agotada, 1962

Moreno Bonett Alberto y Jauffred M. Francisco J.; **Elementos de probabilidad y estadística**; México, Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1987

Moreno Bonett Alberto; **Introducción a la programación lineal**, México, Universidad Iberoamericana, México, D.F., 1963

Moreno Bonett Alberto; **El método de la ruta crítica**, México, Secretaría de Obras Públicas, 1966

Moreno Bonett Alberto et al; **La administración pública federal**, México, Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, UNAM; 1976

Moreno Bonett Alberto y Jauffred M. Francisco J.; **Aplicaciones de la ingeniería de sistemas en la ingeniería civil**, dos tomos, Universidad Católica de Santiago de Guayaquil y Colegio de Ingenieros Civiles del Guayas, Guayaquil, Ecuador, 1981

Moreno Bonett Alberto y Jauffred M. Francisco J.; **Algunos modelos para la selección de inversiones**; Departamento de Sistemas, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1991