

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA



Hidráulica BÁSICA

Primera parte

Amalia Adriana Cafaggi Félix



Para visualizar la obra
te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

CAFAGGI FÉLIX, Amalia Adriana
Hidráulica Básica
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería, 2025, 284 págs.

HIDRÁULICA BÁSICA

Primera edición electrónica de un ejemplar (40 MB) en formato PDF
Publicado en línea: en marzo de 2025

D.R. © 2025, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Avenida Universidad núm. 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma
de México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán,
México, Ciudad de México, Código Postal 04510.

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuidado de la edición: Elvia Angélica Torres Rojas
Diseño editorial: Luis Enrique Vite Rangel
Fotografías de la portada: Eduardo Martínez Cuautle e Ignacio Romero Castro

Prólogo

Esta obra está dirigida principalmente a los estudiantes de la asignatura Hidráulica Básica que se imparte en la Facultad de Ingeniería UNAM, si bien, al presentarse de forma digital y de libre acceso, puede ser consultada por los estudiantes de otras instituciones y por quienes tengan interés en el estudio de la hidráulica.

Con el propósito de que los estudiantes ya tengan acceso a este material, se optó por publicar la primera parte, la cual consta de los siguientes capítulos.

1. Propiedades de los fluidos
2. Hidrostática
3. Fundamentos para el análisis de flujos
4. Ecuaciones fundamentales de la hidráulica
5. Análisis dimensional y similitud dinámica

En ellos se presentan los principios y las ecuaciones básicas de la hidráulica, así como las ecuaciones de uso frecuente en la modelación hidráulica.

En el primer capítulo se analizan las propiedades comunes a los fluidos, con especial énfasis en el agua, que es el objeto de estudio en un curso de hidráulica.

El segundo capítulo inicia con las ecuaciones estáticas de Euler y a partir de estas es clara la clasificación entre fluidos compresibles e incompresibles (líquidos). Posteriormente, se calculan los empujes que ejercen líquidos en reposo sobre diferentes superficies, incluidos los cuerpos en flotación, de los cuales se analizan sus condiciones de estabilidad. Finalmente, se analiza la variación de la presión en un líquido sujeto a aceleración lineal uniforme o a rotación uniforme respecto a un eje vertical.

En el capítulo 3 se presentan los fundamentos para analizar el movimiento de líquidos y así realizar simplificaciones en las ecuaciones que lo describen. A partir de las leyes del movimiento de Euler se deriva la conocida ecuación de Bernoulli y su aplicación a problemas sencillos.

En el capítulo 4 se presentan los métodos de análisis que se emplean para describir el movimiento de los líquidos, así como los principios básicos que se emplean para describir su movimiento: conservación de masa, primera ley de la termodinámica y la segunda ley de Newton. A partir de estos principios se derivan, respectivamente, para un volumen de control finito: la ecuación de continuidad, la ecuación de la energía y la ecuación de cantidad de movimiento; las cuales son las ecuaciones que se emplean en la mayor parte de los problemas ingenieriles.

El objetivo de los primeros cuatro capítulos es que el estudiante comprenda las propiedades de los líquidos, de las leyes que rigen su movimiento y que las pueda aplicar para resolver problemas prácticos.

El análisis matemático de un flujo es con frecuencia insuficiente para resolver todos los aspectos de un problema, ya que en muchos casos las ecuaciones tienen simplificaciones que no son aceptables en el problema real o son demasiado difíciles de resolver; en estos casos la experimentación es el método que permite obtener información confiable que complementa al análisis matemático. El capítulo 5 se enfoca en la similitud en la mecánica de fluidos y con aplicaciones específicas en la hidráulica, así como determinar cuál es la fuerza preponderante en el movimiento que será relevante en la simulación.

La segunda parte de la obra comprenderá los siguientes capítulos: Orificios, compuertas y vertederos; Cálculo de pérdidas de energía en conductos a presión; y Análisis de sistemas sencillos de tubos.

Para la publicación de este libro digital se contó con la colaboración del personal de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Asimismo, agradezco a la licenciada Patricia Eugenia García, jefa de la Unidad, su gran apoyo y facilidades que me brindó para la realización de esta obra y, de manera especial, a la académica Elvia Angélica Torres Rojas por su invaluable colaboración en la corrección de estilo y cuidado de la edición del libro, así como por su gran compromiso y profesionalismo en esta labor. Finalmente, mi reconocimiento al LDG Luis Enrique Vite Rangel por el gran trabajo realizado en la formación editorial y diseño de portada.

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., febrero de 2025

Amalia Adriana Cafaggi Félix

Índice

Capítulo 1. Propiedades de los fluidos	1
1.1 Definición de fluido	1
1.2 El medio continuo	1
1.3 Clasificación de los fluidos	2
1.4 Sistemas de unidades	3
1.5 Fuerzas que actúan en el seno de un fluido	7
1.6 Escalas de presión y temperatura	8
1.7 Propiedades de los fluidos	11
1.7.1 Densidad y peso específico	11
1.7.2 Viscosidad	17
1.7.3 Compresibilidad	30
1.7.4 Presión de vapor	37
1.7.5 Tensión superficial	39
Capítulo 2. Hidrostática	45
2.1 Presión en un punto	45
2.2 Ecuaciones básicas para un campo de presión	47
2.2.1 Fluido en reposo	49
2.3 Fluido compresible y variación de la presión en la tropósfera	50
2.4 Presión en un fluido incompresible. Hidrostática	53
2.5 Carga de presión	58
2.6 Edición de la presión	60
2.6.1 Barómetro	60
2.6.2 Manómetros simples	62
2.6.3 Manómetro de Bourdon	68
2.7 Empuje hidrostático sobre superficies planas	69
2.7.1 Expresión general para el cálculo del empuje hidrostático sobre superficies planas	69
2.7.2 El prisma de presiones	87
2.8 Empuje hidrostático sobre superficies curvas	95

2.9 Empuje sobre cuerpos total o parcialmente sumergidos	105
2.10 Estabilidad	111
2.11 Variación de la presión en un fluido con movimiento de cuerpo rígido . . .	119
2.11.1 Aceleración lineal uniforme	120
2.11.2 Rotación como sólido rígido	123

Capítulo 3. Fundamentos para el análisis de flujos 128

3.1 Los campos de flujo	128
3.2 Campos vectoriales	129
3.2.1 La velocidad según los enfoques lagrangiano y euleriano	129
3.2.2 El campo de la aceleración	132
3.2.3 El campo rotacional	133
3.3 Líneas que caracterizan al flujo	133
3.4 Gasto y velocidad media	135
3.5 Clasificación de flujos	141
3.6 Sistema, volumen de control y superficie de control	143
3.7 Ecuaciones de Euler	145
3.8 Ecuación de Bernoulli	148

Capítulo 4. Ecuaciones fundamentales de la hidráulica 160

4.1 Principios y métodos de análisis	160
4.1.1 Principios básicos	160
4.1.2 Proceso reversible e irreversible	161
4.1.3 Métodos de análisis matemáticos	161
4.1.4 Método experimental	162
4.2 Las formas integrales de las leyes fundamentales	163
4.2.1 Principio de conservación de masa	164
4.2.2 Ecuación de continuidad	164
4.3 Ecuación de la energía	174
4.3.1 Flujo permanente e incompresible	180
4.3.2 Forma unidimensional	181

4.3.3 Características de las pérdidas de energía	183
4.3.4 Interpretación y aplicación	184
4.3.5 Potencia hidráulica y máquinas hidráulicas	195
4.3.6 Uniones y bifurcaciones	212
4.3.7 Flujo permanente y unidimensional en conductos con superficie libre . .	218
4.4 Ecuación del impulso y cantidad de movimiento	221
4.4.1 Flujo permanente	224
4.4.2 Flujo permanente unidimensional permanente.	227
4.4.3 Sobre la aplicación de las ecuaciones fundamentales	227
4.4.4 Forma numérica de los coeficientes α y β	227
4.5 Formas diferenciales. Ecuaciones del movimiento.	244
4.5.1 Ecuación diferencial de continuidad	244
4.5.2 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento.	247

Capítulo 5. Análisis dimensional y similitud dinámica 251

5.1 Necesidad de modelos en la hidráulica	251
5.2 Análisis dimensional	252
5.2.1 Teorema Π	252
5.2.2 Parámetros Π usuales en la mecánica de fluidos	256
5.3 Condiciones de similitud en fluidos incompresibles.	260
5.3.1 Similitud geométrica	260
5.3.2 Similitud cinemática y dinámica	262
5.4 Elección del número a igualar en modelo y prototipo	264

1.1 DEFINICIÓN DE FLUIDO

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, la materia solo puede presentarse en dos estados: sólido y fluido. Los fluidos pueden ser líquidos o gases. En un líquido las moléculas están relativamente libres para cambiar de posición unas con respecto a otras, pero restringidas por fuerzas de cohesión. El gas no tiene forma ni volumen definidos debido a que sus moléculas prácticamente no se hallan restringidas por fuerzas de cohesión.

Aunque las diferencias entre sólidos y fluidos se pueden explicar cualitativamente con base en la estructura molecular, la distinción específica se fundamenta en cómo se deforma cada uno bajo la acción de un esfuerzo tangencial. Dentro del límite elástico un sólido puede resistir un esfuerzo tangencial con una deformación estática, un fluido no. Cualquier esfuerzo tangencial aplicado a un fluido provocará su movimiento de forma continua mientras se mantenga, por lo que

Fluido es una sustancia que se deforma continuamente cuando se le aplica un esfuerzo tangencial, por pequeño que este sea.

En el subtema 1.7.2 se analiza con mayor detalle la respuesta de un fluido cuando se le aplica una fuerza tangencial.

1.2 EL MEDIO CONTINUO

Al estudiar a los fluidos desde el punto de vista matemático es necesario suponer que en vez de la estructura molecular real de los fluidos se tiene un medio continuo, es decir, una distribución continua de materia sin espacios vacíos. Por tanto, cuando en el análisis se proponga un elemento muy pequeño de fluido, este debe ser lo suficientemente grande para contener muchas moléculas.

La suposición de un medio continuo es necesaria, debido a que, si se considera la naturaleza real de las moléculas, la velocidad en un punto del espacio podría estar indeterminada, ya que la velocidad sería cero, excepto cuando una molécula ocupara exactamente el punto considerado. Para evitar problemas como el anterior, en lugar de estudiar por separado la conglomeración real de moléculas, se supone que el flujo es un medio continuo. Este concepto es la base de la mecánica de fluidos clásica y resulta válido para estudiar el comportamiento de los fluidos en condiciones normales. Una de las consecuencias de esta hipótesis es que cada una de las propiedades de un fluido se supone que tiene un valor definido en cada punto del espacio. De esta manera, las propiedades del fluido se pueden considerar como funciones continuas de la posición y del tiempo.

1.3 CLASIFICACIÓN DE LOS FLUIDOS

La mecánica de fluidos estudia el comportamiento de estos, tanto en condiciones de reposo como en las de movimiento. A partir del comportamiento de algunas de sus propiedades, la mecánica de fluidos puede subdividirse en dos amplias categorías: dinámica de gases e hidromecánica.

La dinámica de gases estudia a los fluidos que sufren cambios significativos de densidad cuando se presentan variaciones en la presión y en la temperatura.

La hidromecánica estudia las leyes del equilibrio y del movimiento de los fluidos para los que prácticamente no hay cambios de densidad, por lo que se consideran incompresibles, como son los líquidos. Si bien todos los fluidos se pueden comprimir, para el caso de los líquidos la presión que permite su compresión es muy alta, regularmente fuera de las condiciones en las que usualmente están expuestos, por lo que se pueden considerar incompresibles. Cuando la hidromecánica se aplica al estudio del agua se llama hidráulica. Esta palabra proviene del griego ὑδραυλικός (*hydraulikós*), originalmente se refería a un instrumento musical movido por agua, y se puede interpretar como *tubo de agua*, palabra compuesta por ὕδωρ (agua) y αὐλός (tubo, flauta)*.

Un fluido incompresible es el que no se considera la viscosidad (que es una propiedad interna del fluido que se opone al movimiento), se denomina fluido ideal y su estudio corresponde a una rama de la mecánica de fluidos que se conoce como hidrodinámica.

* Wikipedia, consultado el 10 de octubre de 2023.

1.4 SISTEMAS DE UNIDADES

Todo fluido posee ciertas características por las que es posible describir su condición física; estas se denominan propiedades del fluido y se expresan en términos de un número limitado de dimensiones básicas que a su vez se cuantifican mediante unidades fundamentales.

Las magnitudes físicas requieren descripciones cuantitativas cuando se trata de resolver un problema de ingeniería. Hay siete magnitudes que se consideran dimensiones fundamentales: longitud, masa, tiempo, temperatura, cantidad de sustancia, corriente eléctrica e intensidad luminosa. Las dimensiones de todas las demás magnitudes físicas se pueden expresar en términos de las dimensiones fundamentales. La longitud de un determinado cuerpo y la masa de este son ejemplos de cantidades. La longitud, sin referirse a algún objeto en particular, es una magnitud.

El Sistema Internacional de unidades (SI) es el de uso más extendido a nivel mundial, y en México este sistema debe emplearse según la Norma Oficial Mexicana NOM-008-SCFI-2002 del Sistema General de Unidades de Medida. Sin embargo, es usual que en la práctica de la ingeniería en México aún se emplee el sistema técnico, también llamado sistema gravitacional de unidades, en el que la fuerza es una dimensión fundamental y de ahí se deriva la masa. En la XXII Conferencia General de Pesas y Medidas, máxima autoridad de la metrología, efectuada en 2003, se declara el uso indistinto del punto o de la coma como separador decimal; en México es usual emplear el punto. Las dimensiones fundamentales del SI y sus unidades se presentan en la tabla 1.1 y en la 1.2 se muestran algunas unidades derivadas que se utilizan comúnmente en la mecánica de fluidos.

TABLA 1.1 DIMENSIONES FUNDAMENTALES Y SUS UNIDADES EN EL SISTEMA INTERNACIONAL

Magnitud	Unidad	Símbolo	Dimensiones
Longitud	metro	m	L
Masa	kilogramo	kg	M
Tiempo	segundo	s	T
Corriente eléctrica	ampere	A	I
Temperatura	kelvin	K	θ
Cantidad de sustancia	mol	mol	N
Intensidad luminosa	candela	cd	I_v

TABLA 1.2 UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL DERIVADAS

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Dimensiones	Unidades básicas	Nombre de la unidad derivada	Símbolo de la unidad	Expresión en otras unidades
Ángulo plano	θ		$m \cdot m^{-1}$	radián	rad	
Ángulo sólido	Ω		$m^2 \cdot m^{-2}$	esterradián	sr	
Superficie, Área	A, S	L^2	m^2	metro cuadrado	m^2	
Volumen	V	L^3	m^3	metro cúbico	m^3	
Velocidad	v, c, w, u	L / T	m/s	metro por segundo	m/s	
Aceleración	a	L / T^2	m/s^2	metro por segundo al cuadrado	m/s^2	
Velocidad angular	ω	T^{-1}	s^{-1}	radián por segundo	rad/s	
Fuerza	F	ML / T^2	$kg \cdot m/s^2$	newton	N	
Densidad	ρ	M / L^3	kg/m^3	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Frecuencia	f	T^{-1}	s^{-1}	hertz	Hz	
Presión	p	M / LT^2	$kg/m \cdot s^2$	pascal	Pa	N/m^2
Esfuerzo	τ, σ	M / LT^2	$kg/m \cdot s^2$	pascal	Pa	N/m^2
Tensión superficial	σ	M / T^2	kg/s^2	newton por metro		N/m
Energía	E	ML^2 / T^2	$kg \cdot m^2/s^2$	joule	J	$N \cdot m$
Trabajo	W	ML^2 / T^2	$kg \cdot m^2/s^2$	joule	J	$N \cdot m$
Calor	Q	ML^2 / T^2	$kg \cdot m^2/s^2$	joule	J	$N \cdot m$
Momento, Torsión	M, T	ML^2 / T^2	$kg \cdot m^2/s^2$	newton metro		$N \cdot m$
Potencia	P	ML^2 / T^3	$kg \cdot m^2/s^3$	watt	W	J/s
Viscosidad	μ	M / LT	$kg/m \cdot s$	pascal segundo	Pa·s	
Gasto o caudal*	q, Q	L^3 / T	m^3/s	metro cúbico por segundo		
Temperatura Celsius	t	T	K	grado Celsius	$^{\circ}C$	

*Si bien el SI indica q como símbolo de gasto o caudal, en la práctica lo usual es usar Q .

La magnitud de fuerza se puede relacionar con las dimensiones fundamentales de masa, longitud y tiempo a partir de la segunda ley de Newton, como

$$[F] = ma \quad (1.1)$$

Utilizando corchetes para denotar la dimensión de la cantidad física se tiene

$$[F] = [MLT^{-2}]$$

Note que la magnitud de fuerza F y la dimensión de fuerza $[F]$ utilizan el mismo símbolo. La relación del peso con la masa es

$$W = mg \quad (1.2)$$

donde g es la gravedad local y varía con la altitud; su valor estándar es 9.80665 m/s^2 . En este texto se utilizará un valor nominal de 9.81 m/s^2 .

Los sistemas técnicos de unidades, también llamados sistemas gravitacionales, eligen la fuerza como dimensión fundamental en lugar de la masa y derivan a esta a partir de la fuerza. Los más comúnmente empleados son el Sistema MKS gravitacional con sus unidades fundamentales metro, kilogramo (fuerza) y segundo y el Sistema Inglés de unidades en el que las dimensiones fundamentales de longitud fuerza y tiempo son pie, libra (fuerza) y segundo (en inglés: foot, pound, second).

De $F = ma$, las dimensiones de la masa en un sistema gravitacional resultan

$$m = \frac{F}{a} \quad [F L^{-1} T^2]$$

La elección de la fuerza como unidad fundamental no fue afortunada, ya que la fuerza de gravedad es variable de un punto a otro de la tierra y del espacio. Además, algo que causa confusión es que se utiliza el nombre kilogramo para las unidades de dos magnitudes totalmente distintas, siendo la magnitud fundamental de la masa en el SI y el nombre de la magnitud fundamental de la fuerza en el sistema gravitacional MKS.

En el SI, la fuerza se expresa en newtons, nunca en kilogramos. Dado que en el sistema métrico gravitacional la unidad básica de fuerza es el kilogramo, para no tener confusiones en lo sucesivo se le llamará kilogramo fuerza y se denotará kgf.

Debido al uso común, pueden existir motivos que justifiquen el empleo de otras unidades diferentes a las del SI; sin embargo, cualesquiera que sean estas unidades es importante que los símbolos que se utilizan para representarlas estén conforme a las recomendaciones internacionales en vigor. La tabla 1.3 muestra algunas de estas unidades.

TABLA 1.3 UNIDADES EMPLEADAS CON EL SISTEMA INTERNACIONAL Y DE USO COMÚN EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Nombre	Símbolo	Valor en unidades SI
minuto (de tiempo)	min	60 s
hora	h	3600 s
día	d	86400 s
grado	°	$(\pi/180)$ rad
litro	l, L	$10^{-3}m^3$
tonelada	t	10^3 kg
bar	bar	10^5 Pa

TABLA 1.4 CONVERSIÓN ENTRE ALGUNAS UNIDADES DE OTROS SISTEMAS DE UNIDADES Y EL SI

Nombre de la unidad	Símbolo	Se multiplica por	Se convierte a	Símbolo
metro	m	3.281	pie	pie, ft
pie, foot	pie, ft	0.3048	metro	m
pulgada, in	in	0.0254	metro	m
kilogramo fuerza	kgf	9.80665	newton	N
libra (fuerza)	lb	4.4482	newton	N
kilogramo fuerza/cm ²	kgf/cm ²	98 066.5	pascal	Pa
libra/pulgada ²	psi, lb/in ²	6 894.76	pascal	Pa
caballo de potencia	hp, cp	745.70	watt	W
Watt	W	3.412	British thermal unit/hora	Btu/h
grado Fahrenheit	°F	$t_c = (t_f - 32) / 1.8$ *	grado Celsius	°C
galón	gal	3.7854	litro	L, l
galón/minuto	gpm	6.309×10^{-5}	metro cúbico/segundo	m ³ /s
metro cúbico/segundo	m ³ /s	15 850.37	galón/minuto	gpm

*Conversión de grados Fahrenheit a grados Celsius.

En la práctica mexicana es usual que algunas características de equipos y materiales se presenten en el Sistema Inglés de uso común; en el proyecto ingenieril se emplea tanto el SI como el sistema MKS gravitacional, si bien es recomendable no usarlo, y, sobre todo, no combinarlo con el SI. En este texto se empleará preferentemente el SI, pero eventualmente se realizarán ejercicios usando el sistema MKS. En la tabla 1.4 se presentan equivalencias entre algunas unidades de estos sistemas comúnmente empleados y las del SI.

1.5 FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL SENO DE UN FLUIDO

En el análisis de los fluidos interesan dos tipos de fuerzas: de cuerpo y de superficie (figura 1.1). En dicho análisis, la fuerza de cuerpo es debida a su peso W . En la superficie que rodea a una masa de fluido se generan fuerzas de diferente magnitud y dirección, las cuales se denominan fuerzas de superficie.

Se considera sobre la superficie del fluido un elemento de área ΔA que encierra a un punto P y sobre el cual actúa la fuerza de superficie $\Delta \mathbf{F}$. La magnitud y orientación del elemento ΔA se puede representar por $\Delta \mathbf{A}$, que es un vector normal a dicho elemento y que por convención es de dirección positiva saliendo de ΔA . Si este elemento de área se reduce indefinidamente en su magnitud, siempre alrededor del punto P, la relación $\Delta \mathbf{F} / \Delta A$ se aproxima a un valor límite que se denomina esfuerzo \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad [F L^{-2}]$$

La fuerza $\Delta \mathbf{F}$ se puede descomponer en dos componentes: uno normal $\Delta \mathbf{F}_n$ y otro tangencial $\Delta \mathbf{F}_\tau$, como se muestra en la figura 1.2. Los esfuerzos que estos componentes generan son un esfuerzo normal σ y otro tangencial τ , respectivamente.

Por la definición de fluido, el esfuerzo tangencial τ solo se presenta cuando el fluido está en movimiento. El esfuerzo normal σ puede ser de tensión o de compresión. Cuando el esfuerzo normal es de compresión (se considera con signo negativo) se llama presión, p .

$$-p = \frac{dF_n}{dA} \quad 1.3$$

La presión en un punto es una magnitud escalar y no debe confundirse con la fuerza resultante de su intensidad.

Las dimensiones de un esfuerzo son $[FL^{-2}]$ y su unidad es el pascal, aunque también se acostumbra a expresar en N/m^2 . Los fluidos son capaces de soportar grandes magnitudes de esfuerzos de compresión (presión), no así para el caso de la tensión.

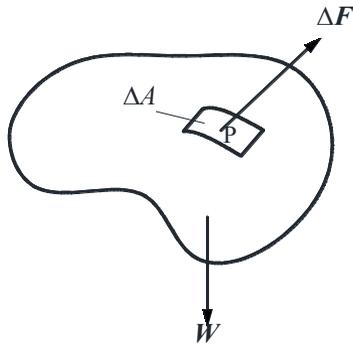


FIGURA 1.1 FUERZAS DE SUPERFICIE Y DE CUERPO

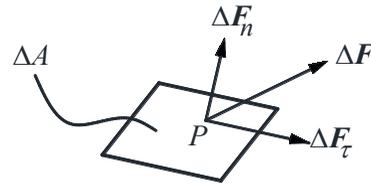


FIGURA 1.2 COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DE UNA FUERZA

1.6 ESCALAS DE PRESIÓN Y TEMPERATURA

Los diferentes instrumentos para medir la presión en realidad solo sirven para determinar la diferencia que hay entre la presión de un punto del fluido y la presión atmosférica p_{atm} , de ahí que esta se emplee comúnmente como presión de referencia. La diferencia de presiones registrada por el instrumento se llama presión manométrica p_{man} . La condición de presión absoluta igual a cero solo existe en el vacío, ya que al no haber moléculas de fluido tampoco hay colisiones moleculares. Cuando el cero de la escala de presiones corresponde a estas condiciones, la presión medida se llama presión absoluta p_{ab} . Por tanto, se cumple

$$p_{ab} = p_{atm} + p_{man} \quad (1.4)$$

La presión atmosférica depende de la elevación sobre el nivel del mar y de factores meteorológicos. Sin embargo, para la gran mayoría de las aplicaciones en los líquidos no son de importancia los cambios de presión atmosférica de un lugar a otro, salvo que varíe considerablemente

la altitud, por lo que la variación de una presión absoluta es igual a la variación de la presión manométrica, y es usual emplear esta última, por lo que generalmente se omite el subíndice.

En la atmósfera la densidad del aire depende de la altura, puesto que las condiciones cambian con el tiempo y la latitud (en la atmósfera las capas de aire tienen mayor espesor en el ecuador y menor en los polos). En la mecánica de fluidos es usual emplear la atmósfera estándar o normal que se refieren a una presión atmosférica al nivel del mar de 101.3 kPa, temperatura de 15 °C y a 40° de latitud norte. La presión atmosférica local disminuye con la altitud, pues a mayor altitud disminuye la columna de aire.

La figura 1.3 muestra las diferentes escalas para la medición de la presión. Cuando la presión absoluta está por debajo de la atmosférica local, la presión manométrica es negativa y también se le denomina vacuométrica.

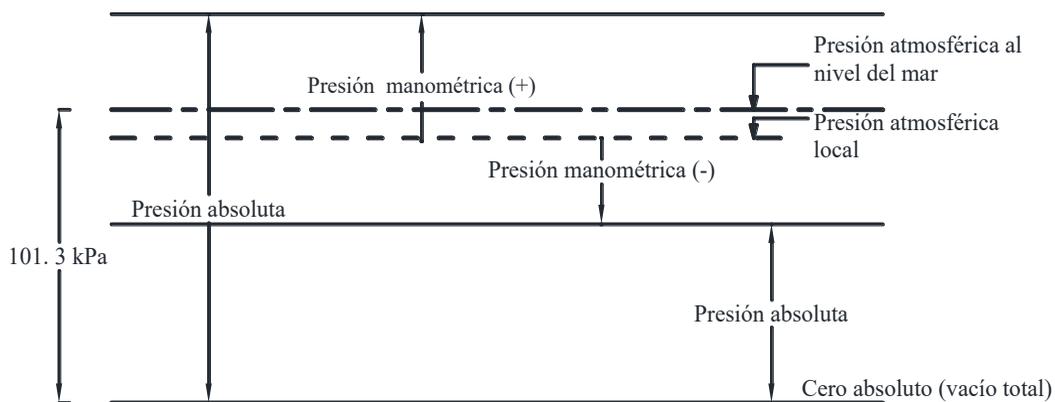


FIGURA 1.3 ESCALAS PARA LA MEDICIÓN DE LA PRESIÓN

La tabla 1.5 muestra los valores de la presión atmosférica estándar en diferentes unidades, así como su equivalente en carga de presión, la cual indica la magnitud de una columna vertical de determinado fluido que ejerce esa presión; este concepto será presentado con mayor detalle en el capítulo 2.

TABLA 1.5 PRESIÓN ATMOSFÉRICA ESTÁNDAR EXPRESADA EN DIFERENTES UNIDADES

	Sistema de unidades	Observaciones
101.3 kPa	SI	
10 330 kgf/m ²	MKS gravitacional	
14.7 psi	Inglés gravitacional	
760 mm de Hg	SI y MKS gravitacional	Expresada en carga de presión
10.33 m de agua	SI y MKS gravitacional	Expresada en carga de presión
30 in de Hg	Inglés gravitacional	Expresada en carga de presión

Las propiedades de los fluidos varían con la temperatura, siendo los gases los que presentan mayor variación con esta. Hay dos escalas de uso común para medir la temperatura: la Celsius y la Fahrenheit; ambas se basan en el punto de congelamiento y el punto de vapor del agua a una presión atmosférica de 101.3 kPa.

La unidad básica de temperatura en el SI es el Kelvin en el cual el cero absoluto se fija por la condición de que cesa la actividad molecular, producto de la transferencia de calor, y 273.15 K al punto de congelación del agua. La tabla 1.6 muestra los valores de referencia en las escalas usuales.

TABLA 1.6 VALORES DE REFERENCIA PARA LA TEMPERATURA CON LAS ESCALAS DE USO COMÚN

	°C	K	°F
Cero absoluto	-273.15	0	-460
Punto de congelamiento	0	273.15	32
Punto de vapor de agua	100	373.15	212

Se tienen las siguientes conversiones

$$K = 273.15 + ^\circ C \tag{1.5}$$

$$^\circ F = (1.8 \times ^\circ C) + 32 \tag{1.6}$$

1.7 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

Una propiedad es una característica de una sustancia, invariante cuando está en un estado particular. En cada estado la condición de la sustancia está descrita por sus propiedades. Las propiedades que son independientes de la cantidad de materia presente se llaman intensivas y relacionadas con la cantidad total de masa se denominan extensivas. A continuación, se presentan las propiedades más comunes de los fluidos. Dado que este texto es de hidráulica, se hace énfasis en sus valores para el agua.

1.7.1 DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

La densidad ρ caracteriza la masa de un fluido, se define como

$$\rho = \lim_{\Delta \mathcal{V} \rightarrow \Delta \bar{\mathcal{V}}} \frac{\Delta m}{\Delta \mathcal{V}}$$

$\Delta \bar{\mathcal{V}}$ es el volumen mínimo alrededor del punto para el cual es aplicable el concepto de medio continuo. Si esto se cumple, la densidad es

$$\rho = \frac{m}{\mathcal{V}} \quad [\text{ML}^{-3}] \quad (1.7)$$

Donde m es la masa de fluido contenida en el volumen \mathcal{V} . En el SI se expresa en kg/m^3 .

Las variaciones de presión y de temperatura afectan muy poco el valor de la densidad de los líquidos, por lo que estos se consideran prácticamente incompresibles y, como ya se indicó, su estudio cae dentro de la hidromecánica. En algunos problemas de gases, especialmente el aire, en los cuales se tengan pequeñas variaciones de la densidad, también se consideran incompresibles; por ejemplo, el flujo de aire en un ventilador.

Los gases son bastante compresibles en comparación con los líquidos. Los cambios en la densidad del gas están relacionados directamente con los cambios en la presión y temperatura por medio de la ecuación de los gases ideales

$$\rho = \frac{P_{ab}}{RT} \quad (1.8)$$

Donde T es la temperatura absoluta y R es una constante que depende del gas cuyas unidades son $J/kg \cdot K$; el resto de las variables ya han sido definidas. En la expresión 1.8 se observa que al disminuir la presión, disminuye la densidad, por tanto, a mayor altitud el aire es menos denso. También se muestra que al aumentar la temperatura y mantener constante la presión, la densidad disminuye.

Peso específico. Se define como el peso por unidad de volumen

$$\gamma = \frac{W}{\mathcal{V}} \quad [F L^{-3}] \quad (1.9)$$

Dado que el peso es $W = mg = \rho \mathcal{V} g$, el peso específico está relacionado con la densidad por medio de la ecuación

$$\gamma = \rho g \quad (1.10)$$

Así como la densidad se usa para caracterizar a la masa de un sistema fluido, el peso específico se usa para caracterizar su peso. Para el agua, el valor estándar a $4^\circ C$ es $\gamma = 9.81 \text{ kN} / \text{m}^3$.

La tabla 1.7 presenta la variación del valor de la densidad y del peso específico del agua en función de la temperatura, así como las magnitudes de otras propiedades que serán analizadas en los siguientes subtemas. Con fines de comparación con respecto al agua, en la tabla 1.8 se presentan las propiedades de algunos líquidos y en la 1.9 las propiedades de algunos gases.

El valor de la densidad del agua pura a $4^\circ C$ y presión atmosférica estándar es de $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ y la del aire a $15^\circ C$ y misma presión es $1.225 \text{ kg}/\text{m}^3$; como se puede observar, el agua es aproximadamente 800 veces más densa que el aire.

Densidad relativa. Se define como la densidad del fluido dividida entre la densidad estándar del agua

$$d_R = \frac{\rho}{\rho_{\text{agua}}} \quad (1.11a)$$

Para un fluido al que se le especifique su densidad relativa, su densidad es $\rho = d_R \rho_{agua}$. Si el lado derecho de la ecuación 1.11a se multiplica y divide por la aceleración de la gravedad se tiene $d_R = \rho g / \rho_{agua} g$, por lo que la densidad relativa también se puede expresar en función del peso específico como

$$d_R = \frac{\gamma}{\gamma_{agua}} \quad (1.11b)$$

EJEMPLO 1.1 Determine la densidad del aire a una temperatura de 15 °C y las siguientes presiones atmosféricas: 101.3 kPa , 77.09 kPa y 65.69 kPa .

Solución

La temperatura absoluta se determina con la ecuación 1.5

$$T = 273.15 + 15 = 288.15 \text{ K}$$

de la tabla 1.9 se tiene $R = 286.9 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ y con la ecuación 1.8 se calcula la densidad del aire para las presiones indicadas. Para este caso, $p_{ab} = p_{atm}$.

$$\rho = \frac{p_{ab}}{RT} = p_{ab} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{286.9 \text{ J}} \times \frac{1}{288.15 \text{ K}}$$

Para 101.3 kPa , con $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} / \text{m}^2$ y $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$

$$\rho = 101.3 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{286.9 \text{ N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{288.15 \text{ K}} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

Procediendo de igual manera para el resto de las presiones indicadas se tiene

$$p_{atm} = 77.09 \text{ kPa}$$

$$\rho = \frac{77.09 \times 10^3}{286.9 \times 288.15} = 0.932 \text{ kg/m}^3$$

$$p_{atm} = 65.69 \text{ kPa}$$

$$\rho = \frac{65.69 \times 10^3}{286.9 \times 288.15} = 0.794 \text{ kg/m}^3$$

Se observa que a menor presión atmosférica disminuye la densidad del aire.

EJEMPLO 1.2 A partir de los datos presentados en la tabla 1.8, determine la densidad relativa de los siguientes líquidos: aceite de petróleo medio, agua de mar con 3% de salinidad, gasolina y mercurio a 0 °C.

Solución

Al emplear la ecuación 1.11a se tiene:

Aceite de petróleo medio

$$d_R = \frac{852}{1000} = 0.852$$

Agua de mar con 3% de salinidad

$$d_R = \frac{1026}{1000} = 1.026$$

Gasolina

$$d_R = \frac{680}{1000} = 0.68$$

Mercurio

$$d_R = \frac{13596}{1000} = 13.596 \approx 13.6$$

TABLA 1.7 PROPIEDADES DEL AGUA (POTTER, 1998)

Temperatura	Densidad	Peso específico	Viscosidad	Viscosidad cinemática	Tensión superficial	Presión de vapor (absoluta)	Módulo de elasticidad volumétrica
t	ρ	γ	μ	ν	σ	p_v	E_v
° C	kg/m ³	kN/m ³	Pa · s	m ² /s	N / m	Pa	Pa
0	999.9	9.809	1.792×10^{-3}	1.792×10^{-6}	7.62×10^{-2}	6.10×10^2	2.04×10^9
5	1000	9.810	1.519×10^{-3}	1.519×10^{-6}	7.54×10^{-2}	8.722×10^2	2.06×10^9
10	999.7	9.807	1.308×10^{-3}	1.308×10^{-6}	7.48×10^{-2}	1.23×10^3	2.11×10^9
15	999.1	9.801	1.14×10^{-3}	1.14×10^{-6}	7.41×10^{-2}	1.7×10^3	2.14×10^9
20	998.2	9.792	1.005×10^{-3}	1×10^{-6}	7.36×10^{-2}	2.34×10^3	2.20×10^9
25	997	9.781	8.91×10^{-4}	8.94×10^{-7}	7.26×10^{-2}	3.17×10^3	2.22×10^9
30	995.7	9.768	8.01×10^{-4}	8.04×10^{-7}	7.18×10^{-2}	4.24×10^3	2.23×10^9
40	992.2	9.733	6.56×10^{-4}	6.61×10^{-7}	7.01×10^{-2}	7.38×10^3	2.27×10^9
50	988.1	9.693	5.49×10^{-4}	5.56×10^{-7}	6.82×10^{-2}	12.3×10^3	2.30×10^9
60	983.2	9.645	4.69×10^{-4}	4.77×10^{-7}	6.68×10^{-2}	19.9×10^3	2.28×10^9
70	977.8	9.592	4.06×10^{-4}	4.15×10^{-7}	6.50×10^{-2}	31.2×10^3	2.25×10^9
80	971.8	9.553	3.57×10^{-4}	3.67×10^{-7}	6.30×10^{-2}	47.3×10^3	2.21×10^9
90	965.3	9.470	3.17×10^{-4}	3.28×10^{-7}	6.12×10^{-2}	70.1×10^3	2.16×10^9
100	958.4	9.402	2.84×10^{-4}	2.96×10^{-7}	5.94×10^{-2}	101.3×10^3	2.07×10^9

NOTAS: 1) Para determinar $\gamma = \rho g$, se consideró $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

2) La tensión superficial es para agua-aire

TABLA 1.8 PROPIEDADES FÍSICAS APROXIMADAS DE ALGUNOS LÍQUIDOS A PRESIÓN ATMOSFÉRICA ESTÁNDAR
(ADAPTADO DE ROBERSON ,1983 Y MOTT, 1996)

Líquido	Temperatura	Densidad	Peso específico	Viscosidad	Viscosidad cinemática	Tensión superficial (contacto con aire)	Módulo de elasticidad
	t	ρ	γ	μ	ν	σ	E_v
	° C	kg/m ³	kN/m ³	Pa · s	m ² /s	N /m	Pa
Acetona	25	787	7.72	3.16×10^{-4}	4.02×10^{-7}		
Aceite de linaza	25	930	9.12	3.31×10^{-2}	3.56×10^{-5}		
Aceite de petróleo, medio	25	852	8.36	2.99×10^{-3}	3.51×10^{-6}		
Aceite de petróleo, pesado	25	906	8.89	1.07×10^{-1}	1.18×10^{-4}		
Aceite de ricino	25	960	9.42	6.51×10^{-1}	6.78×10^{-4}		
Alcohol etílico	20	799	7.85	1.2×10^{-3}	1.5×10^{-6}	2.2×10^{-2}	896×10^6
Agua de mar con 3.3% de salinidad	10	1026	10.07	1.4×10^{-3}	1.4×10^{-6}		
Aceite SAE 10W	38	870	8.35	3.6×10^{-2}	4.1×10^{-5}		
Aceite SAE 10W-30	38	880	8.63	6.7×10^{-2}	7.6×10^{-5}		
Aceite SAE 30	38	880	8.63	1.0×10^{-1}	1.1×10^{-4}		
Benceno	25	876	8.59	6.03×10^{-4}	6.88×10^{-7}		1.062×10^9
Gasolina	25	680	6.67	2.87×10^{-4}	4.22×10^{-7}		
Glicerina	20	1260	12.3	6.2×10^{-1}	5.1×10^{-4}	6.3×10^{-2}	4.509×10^9
Queroseno (keroseno)	20	814	8.01	1.9×10^{-3}	2.37×10^{-6}	2.9×10^{-2}	
Mercurio	20	13550	133	1.5×10^{-3}	1.2×10^{-7}	4.8×10^{-1}	24.75×10^9
Mercurio	0	13596	133.37				
Tetracloruro de carbono	20	1590	15.6	9.6×10^{-4}	6.0×10^{-7}	2.6×10^{-2}	

TABLA 1.9 PROPIEDADES FÍSICAS APROXIMADAS DE ALGUNOS GASES COMUNES

A PRESIÓN ATMOSFÉRICA ESTÁNDAR (MUNSON, 2002)

Gas	Temperatura	Densidad	Peso específico	Viscosidad dinámica	Viscosidad cinemática	Constante del gas
	t	ρ	γ	μ	ν	R
	° C	kg/m ³	kN/m ³	N s/m ²	m ² /s	J/kg K
Aire	15	1.225	12	1.79×10 ⁻⁵	1.46×10 ⁻⁵	286.9
Bióxido de carbono	20	1.83	18	1.47×10 ⁻⁵	8.03×10 ⁻⁶	188.9
Helio	20	1.66×10 ⁻¹	1.63	1.94×10 ⁻⁵	1.15×10 ⁻⁴	207.7
Hidrógeno	20	8.38×10 ⁻²	8.22×10 ⁻¹	8.84×10 ⁻⁶	1.05×10 ⁻⁴	4124
Metano	20	6.67×10 ⁻¹	6.54	1.1×10 ⁻⁵	1.65×10 ⁻⁵	518.3
Nitrógeno	20	1.16	11.4	1.76×10 ⁻⁵	1.52×10 ⁻⁵	296.8
Oxígeno	20	1.33	13	2.04×10 ⁻⁵	1.53×10 ⁻⁵	259.8

1.7.2 VISCOSIDAD

La viscosidad es la propiedad de un fluido que ofrece resistencia al movimiento relativo de sus moléculas. La facilidad con la que un líquido se derrama es un indicador de su viscosidad, por ejemplo, un aceite tiene una viscosidad mayor que la del agua, por lo que el aceite se derrama más lentamente que el agua.

Cuando un fluido se mueve, se desarrolla en él un esfuerzo tangencial (también denominado cortante) cuya magnitud depende de la viscosidad. Para analizar la relación que existe entre ambos, en la figura 1.4 se muestra inicialmente en estado estático una capa de fluido en perfecto contacto con un fondo fijo y con una placa que se puede desplazar. Entre el fondo fijo y la placa móvil el espesor de fluido es h .

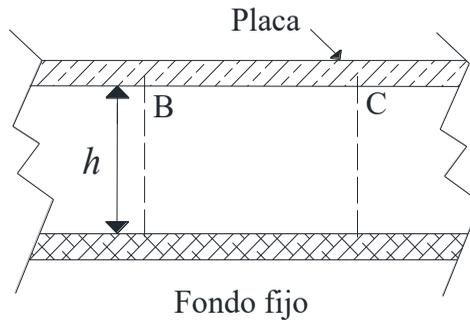


FIGURA 1.4 FLUIDO ENTRE DOS PLACAS

El fluido en contacto directo con una frontera sólida toma la misma velocidad que en la frontera, es decir, no existe deslizamiento del fluido sobre esta.

A la placa que se puede desplazar se le aplica una fuerza F tangente a la misma (figura 1.5) la cual provoca que esta se acelere y, dependiendo de la magnitud de la fuerza aplicada, la placa adquiere una velocidad constante v_m . La capa de fluido en contacto con la placa fija no se mueve, mientras que la capa que está adherida a la placa móvil se desplaza con ella con la misma velocidad v_m , lo cual provoca que dentro del fluido se tenga un gradiente de velocidad. Mientras la fuerza esté actuando, el fluido se deformará continuamente. La figura 1.5 muestra la posición de la placa transcurrido un tiempo Δt en el cual la partícula de fluido que originalmente estaba en el punto B recorre una distancia Δl y se traslada al punto B' y la que estaba en el punto C se traslada a C' recorriendo la misma distancia Δl .

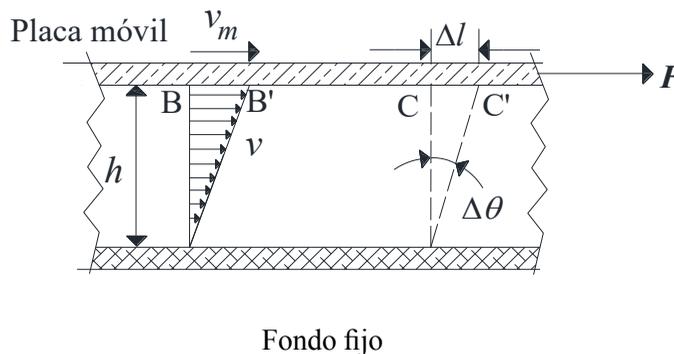


FIGURA 1.5 ESTADO DEL FLUIDO UNA VEZ QUE LA PLACA MÓVIL SE DESPLAZA

Por sencillez, en la figura 1.5 se considera que la velocidad entre el fondo fijo y la placa móvil varía de forma lineal, teniéndose $v = 0$ en el contacto con la placa fija y $v = v_m$ en contacto con la capa móvil, en que v_m es la misma velocidad con la que la placa se desplaza; esta velocidad es directamente proporcional a la distancia h entre las placas y a la magnitud de la fuerza aplicada F e inversamente proporcional al área A de la placa, por lo que

$$v_m \propto \frac{F h}{A} \quad (1.12)$$

$$\frac{v_m}{h} \propto \frac{F}{A} \quad (1.13)$$

dado que $\tau = F / A$, se tiene

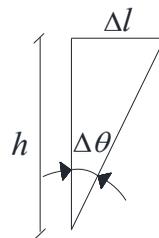
$$\tau \propto \frac{v_m}{h} \quad (1.14)$$

El desplazamiento Δl de la partícula que se traslada de B a B' es

$$\Delta l = v_m \Delta t \quad (1.15)$$

La deformación angular del fluido es $\Delta\theta$, y su tangente es $\tan \Delta\theta = \Delta l / h$. Se considera que el ángulo $\Delta\theta$ es pequeño, por lo que $\tan \Delta\theta \approx \sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$, y se tiene

$$\Delta l = h \Delta\theta \quad (1.16)$$



al igualar las expresiones 1.15 y 1.16 se llega a

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v_m}{h} \quad (1.17)$$

y al sustituir 1.17 en 1.14 resulta

$$\tau \propto \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1.18)$$

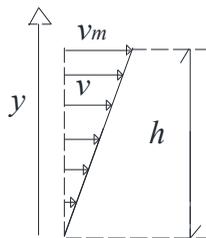
se introduce la constante de proporcionalidad μ y con $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \quad (1.19)$$

donde:

- τ esfuerzo tangencial en Pa o N/m^2
- μ viscosidad absoluta o simplemente viscosidad, en $\text{Pa} \cdot \text{s}$ o $\text{N} \cdot \text{s/m}^2$
- $\frac{d\theta}{dt}$ rapidez de deformación angular, en s^{-1}

El esfuerzo tangencial también se puede expresar en función del gradiente de velocidad. Considere un eje y con origen en el fondo fijo; en $y = 0$ la velocidad es $v = 0$, al aumentar el valor de y aumenta la velocidad dentro del fluido teniendo su máximo valor cuando $y = h$, en que se tiene $v = v_m$.



De la figura se observa que se cumple

$$v = y \frac{v_m}{h} \quad (1.20)$$

por lo que

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v_m}{h} \quad (1.21)$$

al sustituir la expresión 1.21 en 1.14 resulta

$$\tau \propto \frac{dv}{dy} \quad (1.22)$$

y con el mismo coeficiente de proporcionalidad se tiene

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.23)$$

donde:

$$\frac{dv}{dy} \quad \text{gradiente de velocidad, en s}^{-1}$$

El gradiente de velocidad dv/dy se puede interpretar como la rapidez con la que una capa de fluido se mueve con respecto a la capa adyacente. Las ecuaciones 1.19 y 1.23 representan el mismo comportamiento del fluido, solo que en la 1.19 se expresa en función de la rapidez de deformación angular y en la 1.23 en función del gradiente de velocidad. En cualquier flujo viscoso, el fluido en contacto directo con una frontera sólida toma la misma velocidad que la frontera; es decir, no existe deslizamiento fluido sobre esta. Como se puede observar, los esfuerzos tangenciales que se producen en un fluido no dependen de la deformación que experimentan, sino de la rapidez con que esta se produce. Los fluidos que satisfacen estas ecuaciones se llaman newtonianos en honor a Isaac Newton, quien fue el primero en postular que “la resistencia que resulta de deslizamiento entre las partículas de un fluido, en igualdad de condiciones, es proporcional a la velocidad con la cual las partículas mismas se separan una de otra” (Levi, 1989).

Entre los fluidos newtonianos se encuentran muchos fluidos comunes tales como el agua, el aire, los aceites, el mercurio, el petróleo, el alcohol, el hidrógeno, el oxígeno y el helio, entre otros.

En el SI la unidad de la viscosidad es Pa • s; sin embargo, hay otras unidades que se emplean para medirla, por ejemplo, algunos aceites lubricantes usan el SAE (clasificación de la Society of Automotive Engineers de EUA). Durante mucho tiempo el poise fue la unidad oficial de la viscosidad, pero fue dejada fuera del SI y ahora es una unidad de poco uso en la hidráulica, pero en algunas aplicaciones de la mecánica de fluidos, como la ingeniería petrolera, es de uso común. El poise fue definido a partir del sistema absoluto cgs (centímetro, gramo, segundo) y es igual a

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ dina} \cdot \text{s} / \text{cm}^2$$

dado que $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dina}$, se tiene

$$1 \text{ poise} = 0.1 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{cm}^2$$

$$1 \text{ poise} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

La viscosidad absoluta de la mayoría de los líquidos muestra significativa variación con la temperatura, pero es relativamente insensible a los cambios de presión, por lo que en la mayoría de los casos de interés no es apreciable el efecto de la presión sobre la viscosidad. En los líquidos disminuye la viscosidad al aumentar la temperatura, en cambio, en los gases al aumentar la temperatura también aumenta la viscosidad. Esto se debe a que en un líquido las moléculas poseen más energía al aumentar la temperatura y oponen mayor resistencia a las fuerzas de cohesión intermoleculares. En cambio, en los gases las fuerzas intermoleculares son poco significativas y a temperaturas elevadas sus moléculas se mueven de forma aleatoria a velocidades más altas. Esto conduce a que se produzcan más colisiones moleculares y, en consecuencia, en una mayor resistencia al flujo.

Dado que la viscosidad a menudo se divide entre la densidad, se define la viscosidad cinemática ν (letra griega “ni” o “nu”, no confundir con el símbolo de velocidad v) como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.24)$$

Las dimensiones básicas de la viscosidad absoluta y las de la densidad son, respectivamente, M / LT y M / L^3 , entonces las de la viscosidad cinemática resultan

$$\left[\frac{M}{LT} \frac{L^3}{M} \right] = \left[\frac{L^2}{T} \right]$$

Como se puede observar, las dimensiones $[L^2 T^{-1}]$ son independientes de los conceptos de masa y fuerza. Sus unidades en el SI y en el sistema MKS son m^2/s . La viscosidad cinemática no tiene ningún significado físico, y debe su nombre a la similitud entre sus dimensiones y las de la velocidad. Además de variar con la temperatura, en el caso de los gases la viscosidad cinemática también depende de la presión, ya que la densidad es sensible a la misma.

Así como el poise se definió como la unidad de la viscosidad en el sistema cgs absoluto, para la viscosidad cinemática se definió como unidad el stoke, sin embargo, a esta unidad ya tampoco la considera el SI.

$$1 \text{ stoke} = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

La tabla 1.7 proporciona los valores de μ y ν del agua en función de la temperatura. En la tabla 1.8 se presentan valores de las viscosidades absoluta y cinemática para algunos líquidos y en la 1.9 para algunos gases.

Es importante aclarar que el comportamiento viscoso descrito corresponde a la capa del fluido donde se concentra su efecto y que es conocida como capa límite δ . La figura 1.6a muestra el perfil de velocidad dentro de un conducto cerrado en el cual la viscosidad es preponderante en todo el fluido y la figura 1.6b presenta el perfil de velocidad en un conducto en el que los efectos viscosos se concentran en el espesor de la capa límite que está adherido a la pared. Para el primer caso, para determinar la velocidad media V se debe promediar la velocidad v de cada punto en la sección; en cambio, para el segundo, en todos los puntos la velocidad puntual es prácticamente igual a la velocidad media. Este segundo caso corresponde a lo que se llama flujo turbulento en el que los efectos de la viscosidad son poco relevantes y, como ya se mencionó, se concentran en la capa límite.

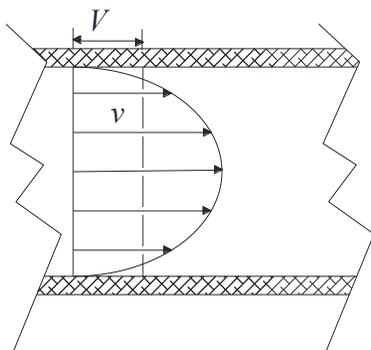


FIGURA 1.6a PERFIL DE VELOCIDAD DENTRO DE UN FLUJO VISCOZO

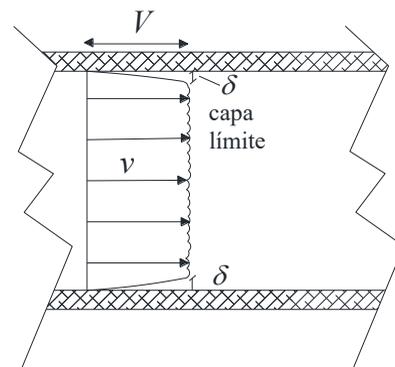


FIGURA 1.6b PERFIL DE VELOCIDAD CUANDO LA VISCOSIDAD NO ES PREPONDERANTE

Fluidos no newtonianos

Los fluidos en los que el esfuerzo tangencial es directamente proporcional al gradiente de velocidad se llaman newtonianos, los fluidos no newtonianos tienen diferente relación $\tau - (dv/dy)$. Entre los fluidos no newtonianos se encuentran: la sangre, los materiales grasos, los materiales líquidos, las mezclas asfálticas y los materiales plásticos. En los casos extremos se encuentran el fluido ideal con viscosidad $\mu=0$ y el elástico con $\mu=\infty$.

La reología es la rama de la física que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación en los materiales que son capaces de fluir. La figura 1.7 muestra los tipos de comportamiento reológico de un fluido. Los fluidos dilatantes, como mezclas de agua con harina y las arenas movedizas se vuelven más resistentes al movimiento a medida que aumenta la velocidad de deformación, por lo que el esfuerzo al retirar un cuerpo de una arena movediza aumenta a medida que aumenta la velocidad con la que se retira el objeto. Los fluidos pseudoplásticos se vuelven menos resistentes al movimiento al aumentar la razón de deformación, muchas soluciones coloidales y polímeros son ejemplo de este fluido. Otro tipo de comportamiento indicado en la figura 1.7 es el del plástico de Bingham, que no es fluido ni sólido; este tipo de material es capaz de soportar un esfuerzo tangencial finito sin moverse (por lo que no cumplen con la condición de fluido), pero una vez que se supera el esfuerzo de cedencia, se comportan como un fluido (por lo que no es sólido). Las suspensiones de arcilla y los dentífricos son ejemplos de fluido que requieren un esfuerzo tangencial mínimo para causar movimiento, pero no tienen relación lineal esfuerzo-velocidad de deformación.

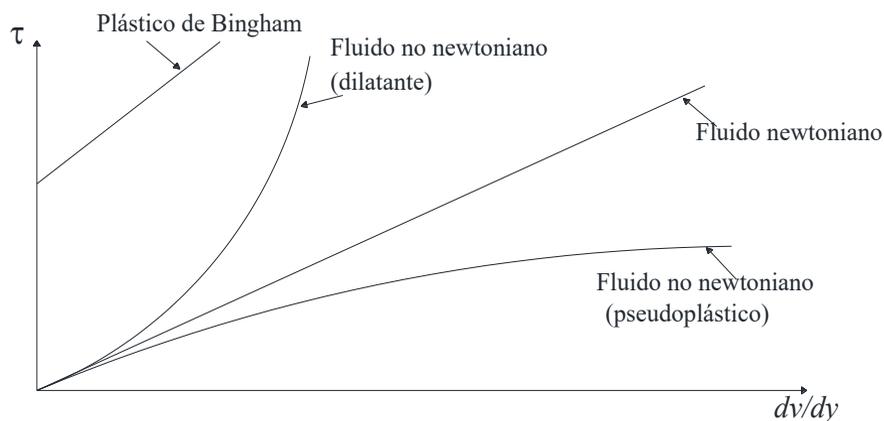


FIGURA 1.7 VARIACIÓN DEL ESFUERZO TANGENCIAL CON LA RAZÓN DE DEFORMACIÓN

- EJEMPLO 1.3** a) Un líquido tiene una viscosidad $\mu=3.3 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ y una densidad relativa $d_R = 0.85$. Determine la viscosidad cinemática; exprésela en m^2/s y en stokes.
- b) Un líquido tiene una viscosidad cinemática $\nu=5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ y un peso específico $\gamma=1260 \text{ kgf}/\text{m}^3$. Note que las unidades de fuerza vienen dadas en sistema MKS. Determine la viscosidad absoluta en las unidades de este sistema.

Solución

- a) De la ecuación 1.11a se tiene que la densidad del líquido es

$$\rho = d_R \rho_{\text{agua}} = 0.85 \times 1000 \text{ kg}/\text{m}^3 = 850 \text{ kg}/\text{m}^3$$

y con la ecuación 1.24

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 3.3 \times 10^{-3} \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^3}{850 \text{ kg}}$$

dado que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$, el valor de la viscosidad cinemática resulta

$$\nu = 3.3 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^3}{850 \text{ kg}}$$

$$\nu = 3.88 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Con la conversión $1 \text{ stoke} = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$, se tiene

$$\nu = 3.88 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times \frac{(100 \text{ cm})^2}{1 \text{ m}^2} \times \frac{1 \text{ stoke}}{1 \text{ cm}^2/\text{s}}$$

$$\nu = 3.88 \times 10^{-2} \text{ stokes}$$

- b) Note que en este inciso no se emplean unidades del SI sino del MKS en el cual las unidades de fuerza son kgf. De la ecuación 1.24, y con $\rho = \gamma / g$, la viscosidad absoluta se puede obtener como

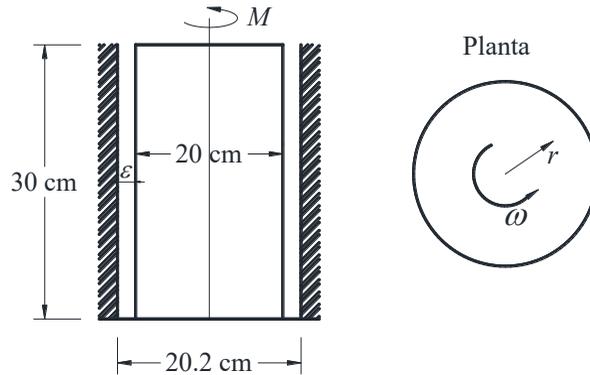
$$\mu = \nu \rho = \frac{\nu \gamma}{g}$$

y al sustituir valores resulta

$$\mu = 5 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times 1260 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{s}^2}{9.81 \text{ m}}$$

$$\mu = 6.42 \times 10^{-2} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

EJEMPLO 1.4 Se construye un viscosímetro con dos cilindros concéntricos de 30 cm de largo, el interior con diámetro de 20 cm y el exterior con diámetro de 20.2 cm. El espacio entre ambos cilindros está lleno de líquido y se requiere de un par motor $M = 0.15 \text{ N} \cdot \text{m}$ para girar el cilindro interior con una velocidad de giro $N = 450 \text{ rpm}$ (revoluciones por minuto). Determine la viscosidad absoluta del líquido que está entre las paredes de ambos cilindros.



Solución

El esfuerzo tangencial entre el líquido que está en contacto con el cilindro que gira es $\tau = F/A_l$, siendo A_l el área lateral del cilindro que gira y que está en contacto con el líquido y que es igual a

$$A_l = \pi D \times h = \pi \times 0.2 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}$$

$$A_l = 0.1885 \text{ m}^2$$

El par motor aplicado es igual al resistente, por lo que la fuerza en las paredes del cilindro interior es $F = M/d$, en que la distancia d es igual al radio R , por lo que la fuerza resulta

$$F = \frac{M}{R} = \frac{0.15 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.1 \text{ m}} = 1.5 \text{ N}$$

por lo tanto, el esfuerzo tangencial resulta

$$\tau = \frac{1.5 \text{ N}}{0.1885 \text{ m}^2} = 7.957 \text{ N/m}^2$$

Dado que 1 revolución = 2π rad y 1 min = 60s, la velocidad angular ω en rad/s se determina a partir de la velocidad en rpm como

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}$$

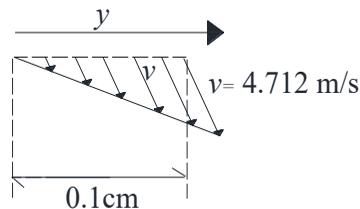
para los datos de este problema se tiene

$$\omega = \frac{2\pi \times 450}{60} = 47.124 \text{ rad/s}$$

A partir de ω , la velocidad tangencial a una distancia radial r es $v = \omega r$. Para $r = R$, la velocidad resulta

$$v = \omega R = 47.124 \frac{1}{\text{s}} \times 0.1 \text{ m} = 4.712 \text{ m/s}$$

Se considera que el eje y tiene inicio en la pared fija del cilindro que no gira y ahí la velocidad del líquido es igual a cero, mientras que en el contacto con el cilindro que gira el líquido tiene la misma velocidad que éste, por lo que se presenta un gradiente de velocidades en el líquido que se encuentra entre ambas paredes en el que el espesor es $\varepsilon = 0.1 \text{ cm} = 0.001 \text{ m}$.



Conocidos los límites de integración y el valor del esfuerzo tangencial, de la ecuación 1.23 se tiene

$$\tau dy = \mu dv$$

$$7.957 \int_0^{0.001} dy = \mu \int_0^{4.712} dv$$

finalmente, al despejar la viscosidad resulta

$$\mu = 7.957 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0.001 \text{m} \times \frac{\text{s}}{4.712 \text{m}}$$

$$\mu = 1.688 \times 10^{-3} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

EJEMPLO 1.5 Aceite lubricante con viscosidad absoluta $\mu = 6.5 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$ fluye a través de un conducto que tiene un diámetro $D = 0.20 \text{ m}$. Se midió experimentalmente la distribución de la velocidad y esta resultó

$$v = 6.5(R^2 - r^2) / \mu$$

donde:

- v velocidad, en m/s
- R radio, en m
- r distancia radial, en m
- μ viscosidad, en $\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$
- 6.5 coeficiente dimensional

- a) Determine las unidades del coeficiente 6.5, tal que la ecuación sea dimensionalmente homogénea.
- b) Calcule y grafique la distribución de la velocidad.
- c) Calcule y grafique el esfuerzo tangencial a las distancias radiales $r = 0 \text{ m}$, $r = 0.025 \text{ m}$, $r = 0.05 \text{ m}$, $r = 0.075 \text{ m}$ y $r = 0.10 \text{ m}$.

Solución

- a) Para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea, se tiene

$$v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = 6.5 [?] (R^2 - r^2) [\text{m}^2] \times \frac{1}{\mu} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{N} \cdot \text{s}} \right]$$

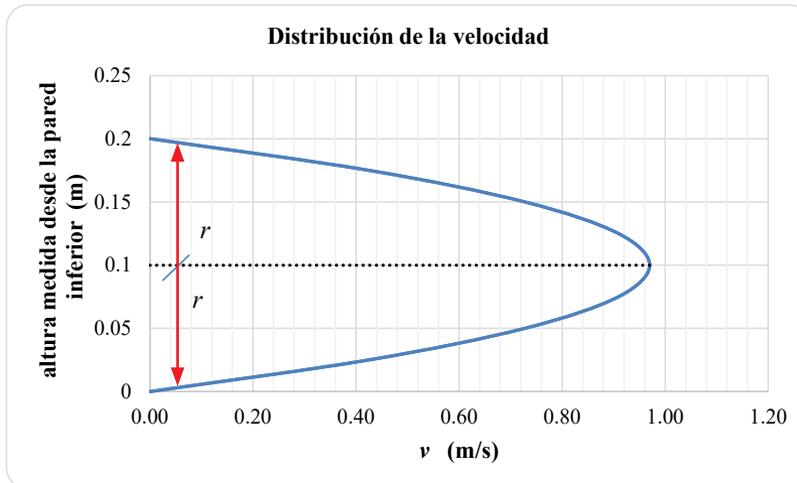
Al analizar la expresión empírica, se tiene que las unidades del coeficiente que se obtuvo de forma experimental son

$$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$$

b) Dado que el radio es $R = 0.10 \text{ m}$, para cada punto a diferentes distancias radiales, la velocidad es

$$v = 6.5(0.10^2 - r^2) / 0.067$$

Sustituyendo valores para diferentes distancias radiales dentro del intervalo $0 \leq r \leq R$, resulta



r (m)	v (m/s)
0	0.9710
0.025	0.9095
0.05	0.7276
0.075	0.4244
0.1	0

c) Para este caso, en la dirección positiva de la distancia radial la velocidad disminuye, por lo que la expresión para el esfuerzo cortante tangencial se expresa como

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}$$

donde

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d(6.5(0.1^2 - r^2) / \mu)}{dr}$$

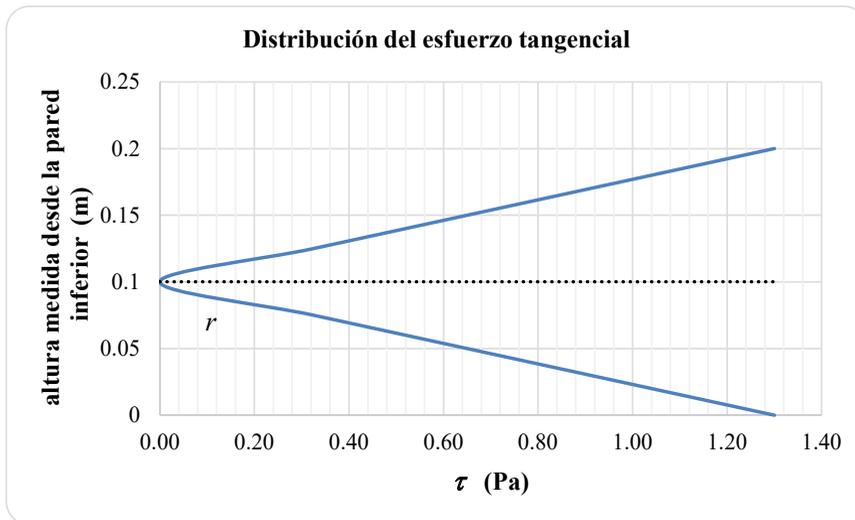
$$\frac{dv}{dr} = -13 \frac{r}{\mu}$$

por lo que

$$\tau = -\mu \left(-13 \frac{r}{\mu}\right)$$

$$\tau = 13 r$$

y al dar valores a las diferentes distancias radiales se obtiene



r (m)	τ (N/m ²)
0	0
0.025	0.325
0.05	0.65
0.075	0.975
0.1	1.3

1.7.3 COMPRESIBILIDAD

La compresibilidad es la medida del cambio de volumen y por lo tanto de la densidad de una sustancia que está sujeta a un cambio de la presión que se ejerce sobre ella. Para caracterizar la compresibilidad de un fluido se define el módulo de elasticidad volumétrica

$$E_v = -\frac{dp}{d\mathcal{V}/\mathcal{V}} \tag{1.25}$$

Donde dp es el cambio diferencial de presión necesario para crear un cambio diferencial de volumen $d\mathcal{V}$; el signo negativo indica una disminución en el volumen \mathcal{V} debido a un incremento en la presión. Dado que la relación $d\mathcal{V}/\mathcal{V}$ es adimensional, las unidades de E_v son las mismas que las de la presión.

De la ecuación 1.7 se tiene que la masa de un fluido es

$$m = \rho \mathcal{V} \quad (1.26)$$

Si se derivan ambos lados de la igualdad y dado que la masa no cambia, se tiene

$$\begin{aligned} dm &= \rho d\mathcal{V} + \mathcal{V}d\rho = 0 \\ d\rho/\rho &= -d\mathcal{V}/\mathcal{V} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Al sustituir la ecuación 1.27 en la 1.25, resulta que el módulo de elasticidad volumétrica también se puede expresar en función de la variación en la densidad como

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad (1.28)$$

Las ecuaciones 1.25 y 1.28 se pueden expresar, respectivamente, de manera aproximada en términos de cambios finitos como

$$E_v = -\frac{\Delta p}{\Delta \mathcal{V}/\mathcal{V}} \quad (1.29)$$

y

$$E_v = \frac{\Delta p}{\Delta \rho/\rho} \quad (1.30)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{V}_i \\ \rho &= \rho_i \\ \Delta p &= p_f - p_i \\ \Delta \mathcal{V} &= \mathcal{V}_f - \mathcal{V}_i \\ \Delta \rho &= \rho_f - \rho_i \end{aligned}$$

Los subíndices i y f se refieren a las condiciones iniciales y a las finales, respectivamente.

Los líquidos poseen un módulo de elasticidad volumétrica relativamente grande que depende de la temperatura; por ejemplo, de la tabla 1.7 para agua a 20 °C se tiene $E_v = 2.20 \times 10^9$ Pa. Esto significa que ocurren variaciones pequeñas de volumen o de densidad incluso para variaciones grandes de presión, y salvo para aquellos fenómenos en que se producen incrementos violentos de presión (golpe de ariete, por ejemplo), en los restantes casos no son de importancia. Debido a lo anterior, los líquidos se consideran incompresibles. La tabla 1.7 muestra los valores de E_v para el agua a diferentes temperaturas y la 1.8 para otros líquidos.

El módulo de elasticidad volumétrica no se aplica normalmente a los gases, y se deben emplear los principios de la termodinámica para determinar el cambio en el volumen de un gas debido al cambio en la presión. Con la ecuación 1.8 (gases ideales), se puede determinar la densidad del gas tomando en cuenta la presión absoluta y la temperatura.

EJEMPLO 1.6 Determine el incremento de presión que se requiere para aumentar en 1% la densidad de los siguientes líquidos: a) Agua a 5 °C; b) Mercurio a 20 °C.

Solución

a) De la tabla 1.7 se tiene, para $t = 5$ °C, $E_v = 2.06 \times 10^9$ Pa y $\rho = 1000$ kg/m³. Dado que el incremento en la densidad es del 1%, su valor final es

$$\rho_f = (1000 \times 1.01) = 1010 \text{ kg/m}^3$$

la diferencia de densidades resulta

$$\Delta\rho = 1010 - 1000 = 10 \text{ kg/m}^3$$

con la ecuación 1.30 se calcula la diferencia de presiones como

$$\Delta p = \frac{E_v \times \Delta\rho}{\rho} = \frac{2.06 \times 10^9 \times 10}{1000} = 20.6 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\Delta p = 20.6 \text{ MPa}$$

Como se puede observar, para el caso del agua se requiere una gran presión para solo aumentar en 1% su densidad. El valor de aumento de presión obtenido no corresponde a condiciones normales de trabajo.

b) Para el mercurio a 20 °C, de la tabla 1.8 se tienen $E_v = 24.75 \times 10^9$ Pa y $\rho = 13550$ kg/m³; para este caso el incremento de densidad es

$$\Delta\rho = (13550 \times 1.01) - 13550 = 135.5 \text{ kg/m}^3$$

y la diferencia de presiones resulta

$$\Delta p = \frac{E_v \times \Delta\rho}{\rho} = \frac{24.75 \times 10^9 \times 135.5}{13550} = 247.5 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Del resultado se observa que el mercurio es prácticamente incompresible, pues requiere de una presión mucho mayor que la del agua para cambiar en 1% su densidad.

EJEMPLO 1.7 Calcule el volumen y la densidad final de una masa de alcohol etílico que inicialmente tiene un volumen de 2m³ y que posteriormente es sujeto a una presión de 15 MPa.

Solución

De la tabla 1.8 se obtiene para el alcohol etílico, $\rho = 799$ kg/m³ y $E_v = 896 \times 10^6$ Pa . Para este caso, al aplicar la ecuación 1.29 se tiene

$$\Delta\mathcal{V} = -\frac{\Delta p \cdot \mathcal{V}}{E_v} = \frac{15 \times 10^6 \times 2}{896 \times 10^6}$$

$$\Delta\mathcal{V} = -0.0335 \text{ m}^3$$

y el volumen final resulta

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_i + \Delta\mathcal{V} = 2 - 0.0335$$

$$\mathcal{V}_f = 1.9665 \text{ m}^3$$

el incremento de la densidad es igual a

$$\Delta\rho = \frac{\Delta p}{E_v / \rho} = \frac{15 \times 10^6}{896 \times 10^6 / 799} = 13.376 \text{ kg/m}^3$$

y se obtiene la densidad final

$$\rho_f = \rho_i + \Delta\rho = 799 + 13.376$$

$$\rho_f = 812.376 \text{ kg/m}^3$$

EJEMPLO 1.8 Considere una masa de aire con condiciones iniciales $p=101.3$ kPa, $\rho=1.225$ kg/m³ y $t=15^\circ\text{C}$. Determine la densidad final y el módulo de elasticidad volumétrico de la masa de aire después de que es sometida a un incremento de presión de 20 kPa y la temperatura se mantiene constante.

Solución

La presión final resulta

$$p_f = p_i + \Delta p = 101.3 \times 10^3 + 20 \times 10^3$$

$$p_f = 121.3 \times 10^3 \text{ Pa}$$

la temperatura absoluta es

$$T = 15 + 273.15 = 288.15 \text{ K}$$

de la tabla 1.9 se tiene para el aire $R=286.9$ J/kg·K y con la ecuación 1.8 se obtiene la densidad del aire para la presión y temperatura indicadas

$$\rho = \frac{p_{ab}}{T R} = \frac{121.3 \times 10^3}{288.15 \times 286.9} = 1.467 \text{ kg/m}^3$$

el incremento de densidad resulta

$$\Delta\rho = \rho_f - \rho_i = 1.467 - 1.225$$

$$\Delta\rho = 0.242 \text{ kg/m}^3$$

y el módulo de elasticidad se obtiene como

$$E_v = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho} = \frac{20 \times 10^3}{(0.242 / 1.225)} = 1.0124 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Note que el módulo de elasticidad volumétrico obtenido para el aire, con condición de temperatura constante, es aproximadamente 20 000 veces menor que el del agua, por lo tanto, el aire, al igual que otros gases, se comprime más fácilmente que el agua y que otros líquidos.

Velocidad de las ondas en un fluido

Una consecuencia importante de la compresibilidad de los fluidos es que la velocidad, también llamada celeridad, con la que se propaga una onda de presión introducida en algún punto de este es finita, y está dada por

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (1.31)$$

de la ecuación 1.28 se tiene $dp/d\rho = E_v/\rho$, por lo que la celeridad también se puede determinar como

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad (1.32)$$

esta es la velocidad con la cual se transmiten las señales de presión de pequeña amplitud a través de un fluido de extensión infinita. Cuando se consideran las características elásticas del conducto y del líquido, la celeridad se modifica y disminuye su valor con respecto al que se obtiene con la ecuación 1.32, que representa la máxima celeridad con la que se pueda propagar la perturbación.

La velocidad del sonido se refiere a la velocidad de las ondas sonoras y se determina también con la ecuación 1.32. Note que esta velocidad depende de las características del fluido y es mayor en los líquidos que en los gases, esto debido al mayor grado de cohesión que tienen los enlaces atómicos en los líquidos que en los gases. En el vacío no hay transmisión del sonido ya que requiere de un medio que lo transmita.

Un ejemplo de propagación de una perturbación en la presión es cuando un líquido corre por una tubería y una válvula se cierra repentinamente, lo cual produce una transformación de energía cinética en energía de presión, el efecto del cierre no se refleja de manera instantánea aguas arriba de la válvula pues es necesario que transcurra un tiempo finito para que el aumento de presión creado por el cierre se propague por todo el conducto.

Para el agua, el valor de la celeridad se puede calcular a partir de los valores de E_v y ρ presentados en la tabla 1.7.

EJEMPLO 1.9 a) Calcule la velocidad de las ondas sonoras dentro del agua en un medio no confinado. Considere $t = 5\text{ }^\circ\text{C}$ y $t = 25\text{ }^\circ\text{C}$. b) Calcule la velocidad de las ondas sonoras en el aire a una temperatura $t = 15\text{ }^\circ\text{C}$; considere el módulo de compresibilidad obtenido en el ejemplo 1.8.

Solución

a) Con la ecuación 1.32 y los valores del módulo de elasticidad volumétrica y de la densidad del agua obtenidos de la tabla 1.7, se tiene para $t = 5\text{ }^\circ\text{C}$

$$c = \sqrt{\frac{2.06 \times 10^9 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3}}$$

$$\text{Dado que } 1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} = \frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{2.06 \times 10^9 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2}{1000 \text{ kg/m}^3}}$$

$$c = 1435 \text{ m/s}$$

y para $t = 25\text{ }^\circ\text{C}$

$$c = \sqrt{\frac{2.22 \times 10^9}{997}} = 1492 \text{ m/s}$$

Note que en este último caso se obtendría prácticamente el mismo resultado si se considera $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, por lo que, para efectos prácticos, es usual emplear este valor.

- b) Para el caso del aire, con $t = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$, su densidad es $\rho = 1.225\text{ kg/m}^3$ y del problema 1.8 se obtuvo $E_v = 1.0124 \times 10^5\text{ Pa}$, por lo que la velocidad de las ondas sonoras en este medio para las condiciones dadas resulta

$$c = \sqrt{\frac{1.0124 \times 10^5}{1.225}} = 287\text{ m/s}$$

1.7.4 PRESIÓN DE VAPOR

Los líquidos se evaporan si se colocan en un recipiente abierto a la atmósfera; esto se lleva a cabo porque algunas moléculas en la superficie del líquido poseen una cantidad de movimiento suficiente para superar las fuerzas intermoleculares de cohesión y escapar hacia la atmósfera. Cuando se alcanza una condición de equilibrio de modo que el número de moléculas que abandonan la superficie es igual al número de moléculas que entran, se dice que el vapor está saturado y la presión ejercida por el vapor sobre la superficie del líquido se denomina presión de vapor p_v . Como la presión de vapor está estrechamente relacionada con la actividad molecular, su valor depende de la temperatura y varía de un líquido a otro.

La ebullición, que es la formación de burbujas de vapor dentro de una masa de líquido, se inicia cuando la presión absoluta alcanza la presión de vapor. El agua a presión atmosférica estándar hierve a una temperatura de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$; sin embargo, si se intenta hervir agua a una altitud mayor, la presión atmosférica es menor y la ebullición se presenta a menor temperatura. Así, es posible inducir la ebullición a una presión dada que actúa sobre el líquido al elevar la temperatura o a una temperatura dada del líquido al disminuir la presión. En la tabla 1.7 se muestra la relación de la presión absoluta de vapor del agua con la temperatura.

Cuando en un sistema a presión se tiene un líquido, este puede vaporizarse si la presión absoluta que lo rodea cae por debajo de la presión de vapor de este. El resultado es la formación de burbujas llenas de vapor de líquido, las cuales al ser transportadas hacia regiones de mayor presión colapsan rápidamente, generando presiones transitorias extremadamente altas, a este fenómeno se le llama cavitación y si se repite continuamente puede provocar severo daño mecánico por fatiga sobre las fronteras sólidas, en las cuales se generan cavidades debido al repetido colapso de las burbujas de vapor. Las figuras 1.8a y 1.8b muestran ejemplos de daño por cavitación.



FIGURA 1.8a EFECTO DE LA CAVITACIÓN EN EL CUERPO DE UNA VÁLVULA ESFÉRICA

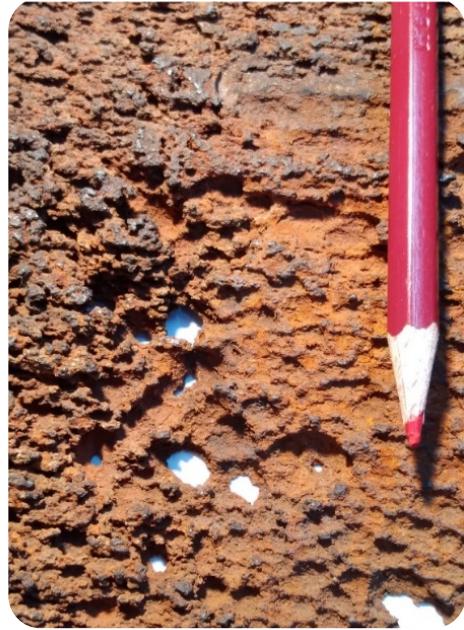


FIGURA 1.8b EFECTO DE LA CAVITACIÓN EN UNA PLACA DE ACERO

A partir de los datos de la tabla 1.7, en la figura 1.9 se muestra la relación temperatura-presión absoluta de vaporización del agua.

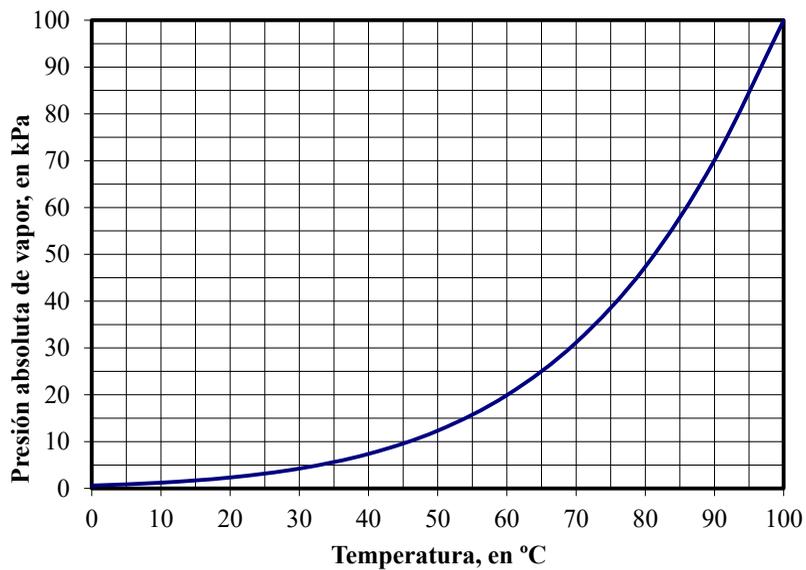


FIGURA 1.9 RELACIÓN TEMPERATURA-PRESIÓN DE VAPOR DEL AGUA

EJEMPLO 1.10 Considere un conducto que transporta agua a una temperatura $t = 10\text{ }^\circ\text{C}$ en un lugar cuya presión atmosférica es de 80 kPa. Determine la presión manométrica a la cual se presenta vaporización del agua.

Solución

De la tabla 1.7, para $t = 10\text{ }^\circ\text{C}$, la presión absoluta de vaporización es $p_v = 1.23 \times 10^3\text{ Pa}$, por lo que, de la ecuación 1.4, la presión manométrica de vaporización resulta

$$\begin{aligned} p_{man} &= p_v - p_{atm} \\ p_{man} &= 1.23 \times 10^3 - 80 \times 10^3 \\ p_{man} &= -78.77\text{ kPa} \end{aligned}$$

Si bien en este ejemplo se aclara con el subíndice que se refiere a la presión manométrica, en la práctica lo común es omitir este subíndice.

1.7.5 TENSIÓN SUPERFICIAL

En la interfase entre un líquido y un gas, o entre líquidos que no se mezclan, se crean fuerzas en la superficie del líquido que hacen que esta se comporte como si fuera una capa o membrana estirada sobre la masa del líquido. Este fenómeno superficial se debe a las fuerzas de cohesión no equilibradas que actúan sobre las moléculas del líquido en contacto con un gas (aire, por ejemplo).

En la figura 1.10 se muestra la molécula 1 que es atraída por igual en todas direcciones por todas las moléculas circundantes y se encuentra en equilibrio y sobre ella las fuerzas de cohesión molecular no producen efecto resultante alguno; por el contrario, la molécula 2 se encuentra cerca de la superficie libre a una distancia menor que la del radio de acción de otras moléculas y la molécula 3 se encuentra sobre la misma superficie libre. En estas dos últimas moléculas, el equilibrio se rompe porque las moléculas del líquido ejercen una atracción mucho mayor que las del gas con el que está en contacto el líquido; por tanto, existe una fuerza de cohesión neta que actúa sobre las moléculas en la superficie del líquido hacia el interior de este. Estas fuerzas impulsan a las moléculas inferiores a un movimiento ascendente. La consecuencia física aparente de esta fuerza no equilibrada es la creación de la capa o membrana hipotética sobre el líquido.

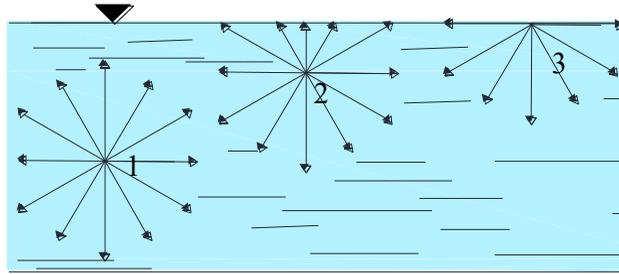


FIGURA 1.10 FUERZAS DE COHESIÓN EN LAS MOLÉCULAS DE UN LÍQUIDO

La intensidad de la fuerza de atracción molecular por unidad de longitud a lo largo de cualquier línea de la superficie se denomina tensión superficial σ , que es una propiedad del líquido y depende de la temperatura y del fluido con el que está en contacto (agua-aire, agua-mercurio, por ejemplo). Las dimensiones de la tensión superficial son $[FL^{-1}]$.

La fuerza debida a la tensión superficial es igual a

$$F_{\sigma} = \sigma L \quad (1.33)$$

La tabla 1.7 muestra los valores de la tensión superficial para agua en contacto con el aire. La tensión superficial no tiene importancia en el movimiento de un líquido en un conducto cerrado.

La tensión superficial explica la formación de la forma esférica de las gotas en un líquido cuando se liberan hacia el aire, ya que las fuerzas de cohesión predominantes son hacia el centro de la gota y esta trata de adoptar la mínima superficie exterior de configuración estable para su volumen, la cual es esférica.

La tensión superficial puede cambiarse de manera considerable por la presencia de impurezas. Por ejemplo, los detergentes y jabones disminuyen la tensión superficial del agua y permiten su penetración por las pequeñas aberturas de las fibras y permitir un lavado eficaz.

Si el líquido está limitado por una pared, sus moléculas son atraídas no solo por las fuerzas del medio superior, sino también por las de la propia pared. Si las fuerzas moleculares del sólido son mayores que las del líquido, este se extiende sobre la pared (caso agua-aire-vidrio), por el

contrario, si las fuerzas moleculares de la pared son menores que las del líquido, éste repele a la pared (caso mercurio-aire vidrio). La figura 1.11 muestra este efecto. Note que para el caso del mercurio el ángulo de contacto con la pared es mayor de 90° ; un valor aproximado es $\theta = 138^\circ$ (Sotelo, 1990), para el agua se puede considerar $\theta = 0^\circ$.

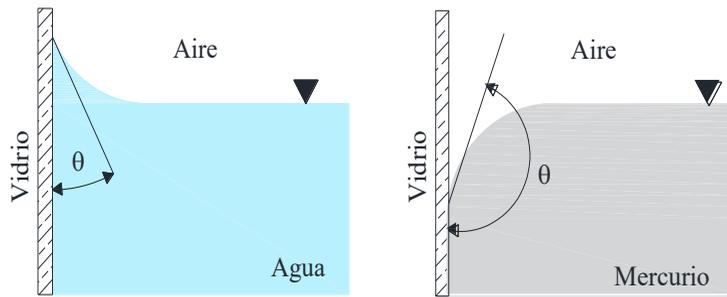


FIGURA 1.11 FORMAS EN EL CONTACTO LÍQUIDO-PARED-AIRE

Se llama menisco a la curvatura de la superficie de un líquido que se produce debido a la atracción molecular, la cual puede ser cóncava o convexa, según si las moléculas del líquido y las del recipiente se atraen (agua y vidrio, por ejemplo) o se repelen (mercurio y vidrio, por ejemplo). La concavidad del menisco se origina cuando las fuerzas de adhesión entre las moléculas de un líquido y las paredes del recipiente que lo contiene son mayores que la fuerza de cohesión del líquido. La convexidad del menisco surge cuando las fuerzas de cohesión del líquido son mayores que las de adhesión entre el líquido y la pared.

Uno de los efectos de la tensión superficial es la capilaridad. En un tubo de pequeño radio el líquido puede ascender o descender con respecto al nivel del líquido fuera del tubo de pequeño diámetro. La figura 1.12 muestra este efecto cuando se presenta ascensión.

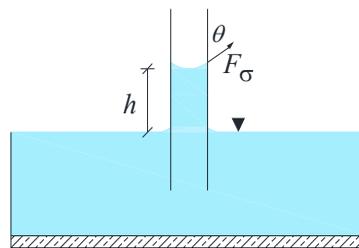


FIGURA 1.12 EFECTO DE CAPILARIDAD

El peso del líquido dentro del tubo es

$$W = \gamma h \pi R^2$$

y la fuerza de tensión superficial en la dirección vertical se determina como

$$F_{\sigma} = \sigma 2\pi R \cos \theta$$

al igualar ambas fuerzas, pues el líquido está en equilibrio, se tiene

$$\gamma h \pi R^2 = \sigma 2\pi R \cos \theta$$

por lo que la altura capilar resulta

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{R \gamma} \quad (1.34)$$

El efecto de la capilaridad se puede observar en la vida diaria, por ejemplo, en el ascenso del queroseno por la mecha de algodón en una lámpara de ese combustible, en las laderas “mojadas” por encima del nivel del agua de un almacenamiento o en el ascenso del agua en un pantalón que solo se mojó en su orilla. El efecto de la capilaridad es parcialmente responsable del ascenso del agua en árboles altos.

EJEMPLO 1.11 Determine la ascensión o el descenso capilar h en un tubo con radio $R = 0.5 \text{ mm}$ para los siguientes casos: a) agua a 20°C , considere $\theta = 0^\circ$; b) mercurio a 20°C , considere $\theta = 138^\circ$.

Solución

- a) De la tabla 1.7, para $t = 20^\circ\text{C}$, la tensión superficial y el peso específico del agua son, respectivamente, $\sigma = 7.36 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ y $\gamma = 9792 \text{ N/m}^3$; sustituyendo estos valores en la ecuación 1.34 la ascensión capilar es

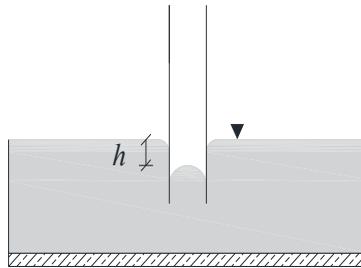
$$h = \frac{2 \times 7.36 \times 10^{-2} (\text{N/m}) \times \cos 0^\circ}{0.0005 (\text{m}) \times 9792 (\text{N/m}^3)}$$

$$h = 0.030 \text{ m}$$

- b) Procediendo de la misma forma para el caso del mercurio, de la tabla 1.8, su tensión superficial y peso específico son, respectivamente, $\sigma = 4.8 \times 10^{-1} \text{ N/m}$ y $\gamma = 133 \text{ kN/m}^3$, por lo que se tiene

$$h = \frac{2 \times 4.8 \times 10^{-1} (\text{N/m}) \times \cos 138^\circ}{0.0005 (\text{m}) \times 133 \times 10^3 (\text{N/m}^3)} = -0.0107 \text{ m}$$

$$h = -10.7 \text{ mm}$$



Descenso capilar

AGRADECIMIENTOS

Los dibujos fueron elaborados Brandon Alain Montaña Castillo y Edgar Omar Castillo Chávez, como parte de su prestación del Servicio Social.

BIBLIOGRAFÍA

CAFAGGI F., A., RODAL C., E., SANCHEZ H., A. (2016). *Sistemas de bombeo*. 2ª reimp. México: UNAM, Facultad de Ingeniería.

CENGEL, Y., CIMBALA, J. (2018). *Mecánica de fluidos*. 4ª. ed. México: Mc. Graw Hill.

LEVI, E. (1989). *El agua según la ciencia*. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología-Ediciones Castell, S. A.

MOTT, R. (1998). *Mecánica de fluidos aplicada*. 4ª. ed. en español. México: Prentice Hall.

MUNSON, B., YOUNG, D., OKIISHI, T. (2002). *Fundamentos de mecánica de fluidos*. 1ª. reimp. México: Limusa.

POTTER, M., WIGGWERT, D. (1998). *Mecánica de fluidos*. 2ª. ed. en español. México: Prentice Hall.

ROBERSON, J., CROWE, C. (1983). *Mecánica de fluidos*. 1ª. ed. en español. México: Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V.

SOTELO A., G. (1990). *Hidráulica general*. México: Limusa.

La estática de fluidos estudia las condiciones de equilibrio de los fluidos que están en reposo. Al no haber movimiento, no existen esfuerzos tangenciales, pues es necesario que existan gradientes de velocidad para que estén presentes estos esfuerzos; por lo tanto, el único esfuerzo que se presenta es el esfuerzo normal: la presión.

Hay casos especiales de fluidos que se mueven como un cuerpo sólido, entonces entre sus partículas adyacentes no hay movimiento relativo y al no existir este, no se presentan esfuerzos tangenciales, por lo tanto, el único esfuerzo que se presenta es el esfuerzo normal. Los fluidos dentro de contenedores que sufren aceleración lineal y los fluidos contenidos en cilindros en rotación son ejemplos de estos tipos de fluidos.

La hidrostática estudia las condiciones de equilibrio de los líquidos y es el caso que comúnmente interesa al ingeniero civil. La figura 2.1 muestra un recipiente con líquido en reposo.

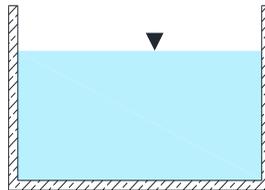


FIGURA 2.1 LÍQUIDO EN REPOSO

2.1 PRESIÓN EN UN PUNTO

La presión es la fuerza de compresión normal infinitesimal dividida entre el área infinitesimal sobre la que actúa. La intensidad de presión es una cantidad escalar, es decir, tiene solo magnitud y actúa por igual en todas las direcciones. Para demostrar lo anterior, considere el elemento de fluido en forma de cuña que se muestra la figura 2.2. El volumen de la cuña es $\frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z$;

se observa que $\Delta z = \Delta l \operatorname{sen}\theta$ y $\Delta y = \Delta l \operatorname{cos}\theta$. Se considera que no se presentan fuerzas tangenciales, por lo que las fuerzas que actúan sobre el elemento son las fuerzas de presión y el peso propio, el cual solo actúa en la dirección vertical z .

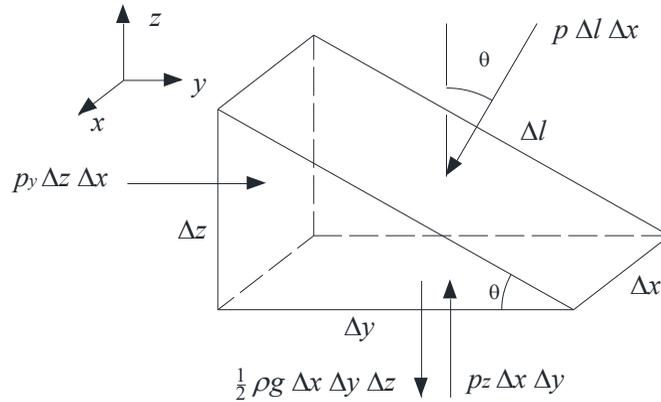


FIGURA 2.2 FUERZAS SOBRE UN ELEMENTO DE FLUIDO EN FORMA DE CUÑA

Al aplicar la segunda ley de Newton, en las direcciones y y z , se tiene

$$\sum F_y = m a_y : p_y \Delta x \Delta l \operatorname{sen}\theta - p \Delta x \Delta l \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \rho \Delta x \Delta l \operatorname{sen}\theta \Delta y a_y$$

$$\sum F_z = m a_z : p_z \Delta x \Delta l \operatorname{cos}\theta - p \Delta x \Delta l \operatorname{cos}\theta - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta l \operatorname{cos}\theta \Delta z = \frac{1}{2} \rho \Delta x \Delta l \operatorname{cos}\theta \Delta z a_z$$

Al dividir todo entre $\Delta x \Delta l \operatorname{sen}\theta$ resulta, en la dirección y

$$p_y - p = \frac{1}{2} \rho \Delta y a_y \quad (2.1)$$

y en la dirección z

$$p_z - p = \frac{1}{2} \rho (g + a_z) \Delta z \quad (2.2)$$

En el límite, cuando el elemento se reduce hasta un punto, $\Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta z \rightarrow 0$, por lo que los términos del lado derecho de las ecuaciones 2.1 y 2.2 tienden a cero, y entonces se cumple $p_y = p_z = p$. Puesto que el ángulo θ es arbitrario, esta relación se cumple para todos los ángulos. Si se analiza una cuña en la que actúen fuerzas en la dirección x y z , de forma similar se

concluye que $p_x = p_y = p_z = p$, por lo que resulta

$$p_x = p_y = p_z = p \tag{2.3}$$

Se puede concluir que la presión en un líquido en reposo, o en movimiento en el que no se presentan esfuerzos cortantes, es independiente de la dirección. Esta importante conclusión se denomina *Ley de Pascal*, en honor de Blaise Pascal (1623-1662).

2.2 ECUACIONES BÁSICAS PARA UN CAMPO DE PRESIÓN

Para analizar como varía la presión de un punto a otro en un fluido en el que no se presentan esfuerzos tangenciales, se considera idealmente un elemento de un fluido de forma prismática; en su centro la densidad es ρ y la presión es p (ver figura 2.3). Los lados del prisma están referidos a un sistema de ejes ortogonales, siendo z un eje vertical. Sobre el prisma actúan las fuerzas de presión sobre cada una de las caras de este y la fuerza de cuerpo igual al peso del elemento $\rho g \, dx \, dy \, dz$.

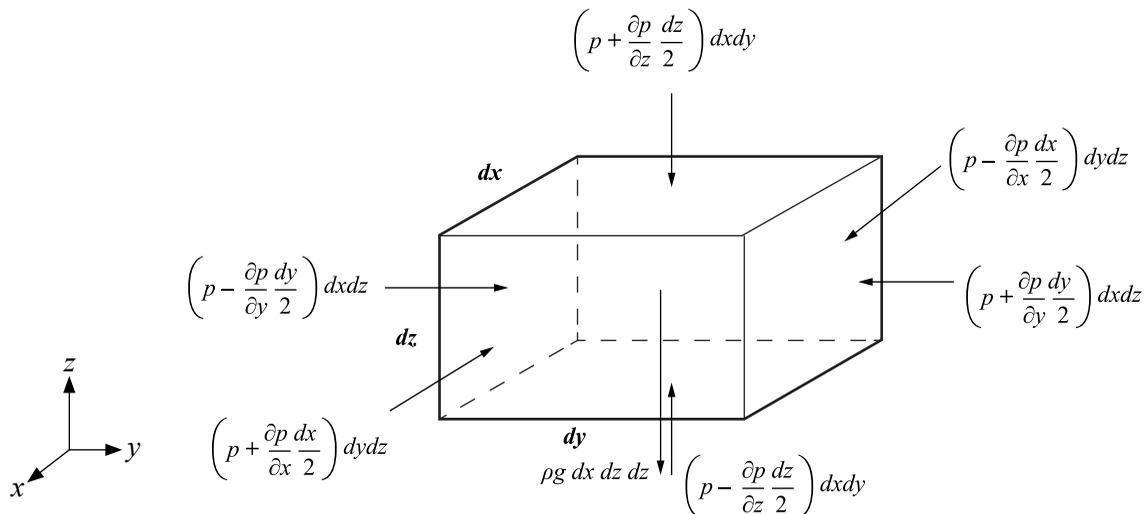


FIGURA 2.3 FUERZAS SOBRE UN ELEMENTO DE UN FLUIDO EN EL QUE NO ACTÚAN FUERZAS TANGENCIALES

La presión media sobre la diversas caras se puede expresar en términos de p y sus derivadas, por ejemplo, la presión en una cara que está a una distancia $dx/2$ en el sentido positivo del eje

x es $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ y para la cara que se encuentra a la distancia $dx/2$ en el sentido negativo del eje x se tiene $p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$. Las presiones en todas las caras se expresan de esta manera, tal como se muestran en la figura 2.3. Por lo tanto, la suma de fuerzas en cada una de las direcciones de los ejes coordenados resulta

$$\sum F_x = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

$$\sum F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$$

$$\sum F_z = \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \rho g dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz - \rho g dx dy dz$$

La segunda ley de Newton se escribe, en forma vectorial, para un sistema de masa constante como $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Esto produce las tres ecuaciones de componentes en cada una de las direcciones, las cuales son

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz &= \rho dx dy dz a_x \\ -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz &= \rho dx dy dz a_y \\ -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz - \rho g dx dy dz &= \rho dx dy dz a_z \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde a_x , a_y y a_z son los componentes de aceleración del elemento. Al dividir las ecuaciones 2.4 entre el volumen del elemento resulta

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \tag{2.5a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y \tag{2.5b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(a_z + g) \tag{2.5c}$$

Como p es una función de la posición (x, y, z) , su diferencial total es

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (2.6)$$

se sustituyen las derivadas parciales por las obtenidas en las ecuaciones 2.5 y se obtiene

$$dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho(a_z + g)dz \quad (2.7)$$

2.2.1 FLUIDO EN REPOSO

En un fluido en reposo los componentes de la aceleración son todos iguales a cero, por lo tanto, las ecuaciones 2.5 se reducen a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.8c)$$

Las ecuaciones 2.8 son las ecuaciones estáticas de Euler y muestran que la presión solo varía en la dirección vertical y que en un plano horizontal xy cualquiera, la presión en cada punto del plano es constante. Dado que la presión solo tiene variación en la dirección vertical, la ecuación 2.8c se puede escribir como

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (2.9)$$

y al despejar dp se tiene

$$dp = -\rho g dz \quad (2.10)$$

La ecuación 2.10 es válida para cualquier fluido en equilibrio estático; su integración depende de la naturaleza de la densidad.

2.3 FLUIDO COMPRESIBLE Y VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN LA TROPÓSFERA

Son muchas de las aplicaciones en la ingeniería en las que se requiere conocer la presión atmosférica. En la hidráulica se emplea especialmente en los diseños de conducciones a presión, en los sistemas de bombeo y en los hidroeléctricos, en los que es importante evitar los problemas de cavitación ya que la presión de vapor está relacionada con la presión absoluta. Para la atmósfera, en la que la densidad depende de la altura, la ecuación 2.10 se debe integrar a lo largo de una distancia vertical. De $\rho = p / RT$ (ecuación para un gas ideal), al sustituir en la ecuación 2.10, resulta

$$dp = -\frac{p g}{RT} dz \quad (2.11)$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz \quad (2.12)$$

La presión en la atmósfera es de interés ingenieril. La atmósfera se divide en cuatro capas: la tropósfera, la estratósfera, la ionosfera y la exósfera. La capa más cercana a la superficie de la tierra es la tropósfera (*tropos* significa cambio), esta capa obtiene su nombre del clima que está cambiando constantemente y mezclando los gases en esta parte de nuestra atmósfera. La tropósfera se extiende desde la superficie hasta unos 9-14 kilómetros de altitud (menor en los polos y mayor en el ecuador). Contiene aproximadamente el 75% de la masa de gases totales que componen la atmósfera, el aire aquí es 78% de nitrógeno y 21% de oxígeno. El último 1% está compuesto principalmente de argón, vapor de agua y dióxido de carbono.

En la tropósfera la temperatura varía linealmente con la altitud. En la parte baja de la estratósfera, entre los 11 y 20 km, la temperatura es constante (-56.5 °C) (Potter et al. 1998). En la atmósfera estándar la temperatura varía linealmente con la altura con la relación

$$T = T_0 - a z \quad (2.13)$$

donde T temperatura en K; T_0 temperatura estándar igual a 288 K (15 °C); a constante de decremento de temperatura, igual a 0.0065 K/m y z altura sobre el nivel del mar.

La ecuación 2.12 se puede integrar entre el nivel del mar y una altitud z y queda

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - az}$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{aR} \ln \frac{T_0 - az}{T_0} \quad (2.14)$$

que se puede expresar en la forma

$$p = p_0 \left(1 - \frac{az}{T_0} \right)^{\frac{g}{aR}} \quad (2.15)$$

donde $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ es la presión atmosférica en la elevación $z = 0$. Con los valores de $T_0 = 288 \text{ K}$, $a = 0.0065 \text{ K/m}$, la constante de los gases para el aire $R = 286.9 \text{ J/kg K}$ (tabla 1.9), y dado que la aceleración de la gravedad no varía de forma significativa en la tropósfera (en $z = 11000 \text{ m}$, $g = 9.773 \text{ m/s}^2$), su valor se puede considerar constante y usar su valor estándar. Al sustituir valores en la ecuación 2.15, la presión dentro de la tropósfera se puede calcular, para fines prácticos, como sigue

$$p = p_0 \left(1 - 2.26 \times 10^{-5} z \right)^{5.26} \quad (2.16)$$

Ejemplo 2.1 Determine la presión atmosférica que se tiene en las siguientes altitudes: $z = 0$ msnm (metros sobre el nivel del mar), $z = 2240$ msnm, y $z = 3500$ msnm. Expresar en Pa, kgf/cm^2 y psi (lb/in^2).

Solución

Con la ecuación 2.16 se determina la presión atmosférica, y para cada altitud se tiene

$$z = 0 \text{ msnm}$$

$$p_{atm} = 101.3(1 - 2.26 \times 10^{-5} \times 0)^{5.26} = 101.3 \text{ kPa}$$

$$z = 2240 \text{ msnm}$$

$$p_{atm} = 101.3(1 - 2.26 \times 10^{-5} \times 2240)^{5.26} = 77.07 \text{ kPa}$$

$$z = 3500 \text{ msnm}$$

$$p_{atm} = 101.3(1 - 2.26 \times 10^{-5} \times 3500)^{5.26} = 65.67 \text{ kPa}$$

En la tabla 1.4 se indica la conversión: $1 \text{ kgf/cm}^2 = 98066.5 \text{ Pa}$, por lo que en kgf/cm^2 la presión resulta

$$z = 0 \text{ msnm}$$

$$p_{atm} = 101.3 \times 10^3 \text{ Pa} \times \frac{1 \text{ kgf/cm}^2}{98066.5 \text{ Pa}} = 1.033 \text{ kgf/cm}^2$$

$$z = 2240 \text{ msnm}$$

$$p_{atm} = 77.07 \times 10^3 \text{ Pa} \times \frac{1 \text{ kgf/cm}^2}{98066.5 \text{ Pa}} = 0.786 \text{ kgf/cm}^2$$

$$z = 3500 \text{ msnm}$$

$$p_{atm} = 65.67 \times 10^3 \text{ Pa} \times \frac{1 \text{ kgf/cm}^2}{98066.5 \text{ Pa}} = 0.67 \text{ kgf/cm}^2$$

Con el valor estándar de $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, la conversión es $1 \text{ kgf/cm}^2 = 98100 \text{ Pa}$, por lo que, para fines prácticos, también se puede usar esta conversión sin que los resultados se vean afectados de forma significativa.

De la tabla 1.4 se tiene: $1 \text{ psi} = 1 \text{ lb/in}^2 = 6894.76 \text{ Pa}$, y las presiones son

$$z = 0 \text{ msnm} \quad p_{atm} = 101.3 \times 10^3 \text{ Pa} \times \frac{1 \text{ psi}}{6894.76 \text{ Pa}} = 14.69 \text{ psi}$$

$$z = 2240 \text{ msnm} \quad p_{atm} = 77.07 \times 10^3 \text{ Pa} \times \frac{1 \text{ psi}}{6894.76 \text{ Pa}} = 11.18 \text{ psi}$$

$$z = 3500 \text{ msnm} \quad p_{atm} = 65.67 \times 10^3 \text{ Pa} \times \frac{1 \text{ psi}}{6894.76 \text{ Pa}} = 9.53 \text{ psi}$$

EJEMPLO 2.2 Determine la densidad del aire en una altitud de 10 000 msnm.

Solución

A esa altitud la presión atmosférica y la temperatura absoluta son, respectivamente

$$p_{atm} = 101.3(1 - 2.26 \times 10^{-5} \times 10000)^{5.26} = 26.32 \text{ kPa}$$

$$T = 288 \text{ K} - 0.0065 \frac{\text{K}}{\text{m}} \times 10000 \text{ m} = 223 \text{ K}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 1.8, la densidad del aire es

$$\rho = \frac{p_{ab}}{RT} = \frac{26.32 \times 10^3 \text{ (Pa)}}{286.9 \text{ (J/kg K)} \times 223 \text{ (K)}} = 0.411 \text{ kg/m}^3$$

2.4 PRESIÓN EN UN FLUIDO INCOMPRESIBLE. HIDROSTÁTICA

Para casos prácticos de ingeniería la aceleración de la gravedad se considera constante y para los líquidos, que son prácticamente incompresibles, la densidad también se considera constante. Dado que el peso específico es $\gamma = \rho g$, para el caso de los líquidos la ecuación 2.10 se puede escribir como

$$dp = -\gamma dz \quad (2.17)$$

la cual es la ecuación básica para determinar la variación de la presión hidrostática con la elevación. Al integrar la ecuación 2.17 se tiene

$$\int dp = -\gamma \int dz \quad (2.18)$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{constante} \quad (2.19)$$

Si se tienen dos puntos en diferentes elevaciones z_1 y z_2 , tal como se muestra en la figura 2.4, al integrar la ecuación 2.18 entre estas elevaciones resulta

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \quad (2.20)$$

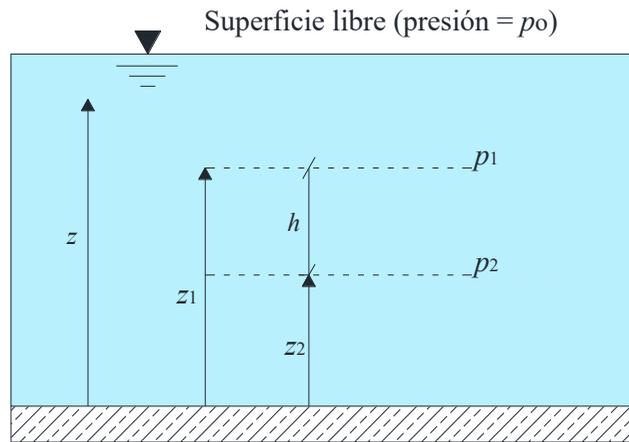


FIGURA 2.4 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD

La diferencia de presiones entre ambos puntos es

$$p_2 - p_1 = \gamma(z_1 - z_2) \quad (2.21)$$

Donde p_1 y p_2 son las presiones en las elevaciones z_1 y z_2 , respectivamente. De la figura 2.4 se observa que la diferencia de elevaciones ($z_1 - z_2$) se puede escribir como $h = (z_1 - z_2)$, por lo que es más sencillo expresar el incremento de presión en función de h , y se tiene

$$p_2 = p_1 + \gamma h \quad (2.22)$$

La ecuación 2.22 muestra que en un fluido incompresible en reposo la presión varía linealmente con la profundidad. Esta ecuación se cumple tanto en términos de presión absoluta como de presión manométrica. Dado que en la superficie libre de un líquido la presión manométrica es cero, esta aumenta de forma lineal con la profundidad h que ahora tiene origen en la superficie libre

del líquido, tal como se muestra en la figura 2.5, y para cualquier punto medido a una distancia vertical h desde esta superficie la presión manométrica es

$$p = \gamma h \tag{2.23}$$

La presión absoluta también aumenta con la profundidad; en la figura 2.6 se muestra que en cualquier punto a la profundidad h la presión absoluta es

$$p_{ab} = p_{atm} + \gamma h \tag{2.24}$$

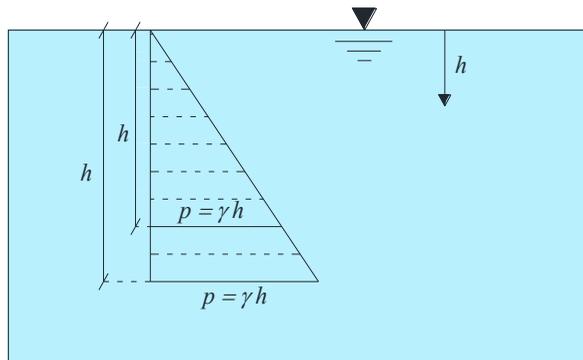


FIGURA 2.5 DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA EN TÉRMINOS DE PRESIÓN MANOMÉTRICA

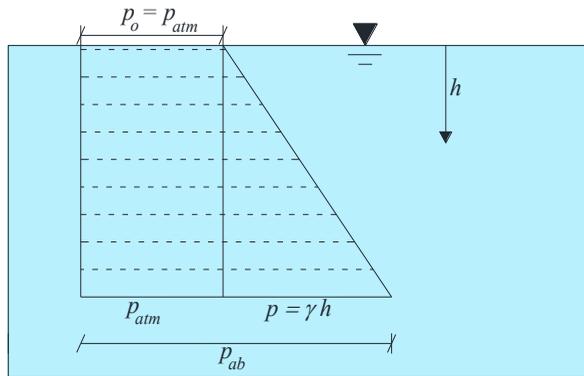


FIGURA 2.6 DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA EN TÉRMINOS DE PRESIÓN ABSOLUTA

La presión en un fluido incompresible homogéneo en reposo dentro de un recipiente es función solo de la profundidad con respecto a un plano de referencia en el que se conozca la presión y no es afectada por el tamaño o la forma del depósito. Así, en la figura 2.7 la presión es la misma en todos los puntos contenidos en un plano horizontal del cual solo se observa la recta AB .

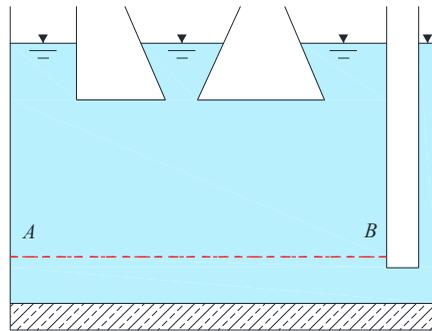


FIGURA 2.7 PRESIÓN DENTRO DE UN RECIPIENTE DE FORMA ARBITRARIA

En la mayor parte de los problemas de ingeniería es común referirse a presiones manométricas, por lo que, en lo que sigue de este texto, cuando se aluda a la presión, esta se refiere a la manométrica y cuando se trate de presión absoluta se hará la aclaración.

Entre líquidos que no se mezclan la presión también aumenta con la profundidad, pero como para cada líquido se tiene diferente peso específico, el incremento de presión se tiene que determinar con el peso específico de cada uno de ellos. La figura 2.8 muestra esta variación.

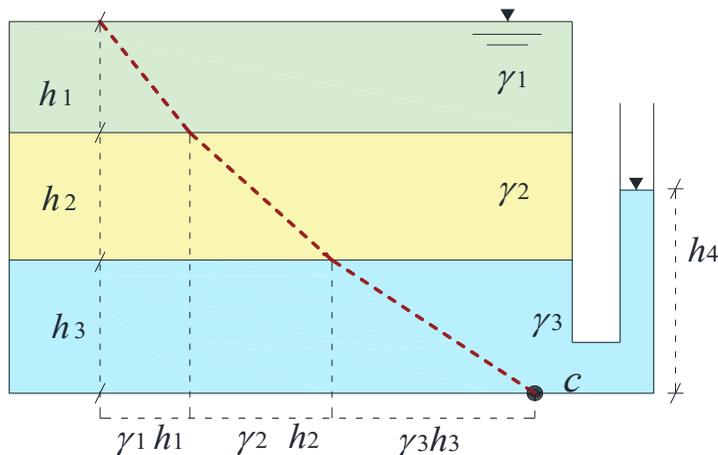


FIGURA 2.8 INCREMENTO DE LA PRESIÓN EN LÍQUIDOS CON DIFERENTE PESO ESPECÍFICO Y QUE NO SE MEZCLAN

EJEMPLO 2.3 Un buceador se encuentra a 50 m bajo el nivel del mar, en donde la densidad del agua es $\rho = 1028 \text{ kg/m}^3$. Determine la presión manométrica y la presión absoluta a la que está sometido el buceador.

Solución

El peso específico del agua es

$$\gamma = \rho g = \frac{1028 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{9.81 \text{ m}}{\text{s}^2} = 10084.68 \text{ N/m}^3$$

Con la ecuación 2.23 se obtiene la presión manométrica, la cual resulta

$$p = \gamma h = 10084.68 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 50 \text{ m} = 504234 \text{ N/m}^2$$

$$p = 504.23 \text{ kPa}$$

Al nivel del mar la presión atmosférica estándar es $p_{atm} = 101.3 \text{ kPa}$, y sustituyendo valores en la ecuación 2.24 se obtiene

$$p_{ab} = 101.3 + 504.23 = 605.53 \text{ kPa}$$

EJEMPLO 2.4 En el depósito mostrado en la figura 2.8 se tienen los siguientes valores

$\gamma_1 = 6\,670 \text{ N/m}^3$	$h_1 = 3 \text{ m}$
$\gamma_2 = 9\,810 \text{ N/m}^3$	$h_2 = 1.5 \text{ m}$
$\gamma_3 = 133\,400 \text{ N/m}^3$	$h_3 = 0.5 \text{ m}$

Calcule la presión manométrica en el fondo del recipiente y la altura h_4 del tubo lateral que se comunica con el recipiente.

Solución

La presión en el fondo se determina sumando las presiones que ejercen los tres líquidos:

$$p_c = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$$

$$p_c = 6670(\text{N/m}^3) \times 3 \text{ m} + 9810(\text{N/m}^3) \times 1.5 \text{ m} + 133400(\text{N/m}^3) \times 0.5 \text{ m}$$

$$p_c = 101.425 \times 10^3 \text{ Pa}$$

Dado que en un plano horizontal de un líquido en reposo la presión no varía, la presión que ejerce la columna de altura h_4 en el fondo del tubo lateral debe ser igual a p_c , por lo que se tiene

$$p_c = 101.425 \times 10^3 \text{ Pa} = \gamma_3 h_4$$

$$h_4 = \frac{p_c}{\gamma_3} = \frac{101.425 \times 10^3 \text{ N/m}^2}{133.4 \times 10^3 \text{ N/m}^3} = 0.76 \text{ m}$$

2.5 CARGA DE PRESIÓN

Es usual expresar la presión en términos de la columna de determinado líquido que pueda producirla, llamada carga de presión. De $p = \gamma h$, la carga de presión es

$$h = \frac{p}{\gamma} \quad (2.25)$$

Al realizar un análisis dimensional, se tiene para la carga de presión

$$\left[\frac{F / L^2}{F / L^3} \right] = [L]$$

Dado que la dimensión de la carga de presión es de longitud, tanto en el SI como en el sistema métrico gravitacional, se expresa en m.

En SI:

p presión, en Pa

γ peso específico, en N/m^3

h carga de presión, en metros de columna del líquido empleado para calcularla

En el sistema MKS:

p presión, en kgf/m^2

γ peso específico, en kgf/m^3

h carga de presión, en metros de columna del líquido empleado para calcularla

EJEMPLO 2.5 El valor de la presión atmosférica estándar es 101.3 kPa. Calcule el valor de la columna de agua que produce la misma presión.

Solución

De la ecuación 2.25 se tiene

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{101.3 \text{ kPa}}{9810 \text{ N/m}^3} = \frac{101.3 \times 10^3 \text{ N/m}^2}{9810 \text{ N/m}^3} = 10.33 \text{ m columna de agua}$$

EJEMPLO 2.6 En un conducto la presión es 0.6 kgf/cm^2 . Determine la carga de presión en metros de columna de agua que produce esa misma presión.

Solución

Dado que la unidad de fuerza empleada es el kgf, el sistema de unidades es gravitacional en el cual el peso específico del agua es 1000 kgf/m^3 . En este sistema de unidades es común expresar la presión en kgf/cm^2 , por lo cual, para convertir a carga de presión, lo primero que debe hacerse es convertir los kgf/cm^2 a kgf/m^2

$$0.6 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{0.6 \text{ kgf}}{\text{cm}^2} \times \frac{(100 \text{ cm})^2}{1 \text{ m}^2} = 6 \times 10^3 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

y la carga de presión resulta

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{6 \times 10^3 \text{ kgf/m}^2}{1000 \text{ kgf/m}^3}$$

$$h = 6 \text{ m columna de agua}$$

Note que cualquier presión x expresada en kgf/cm^2 , tiene su equivalente h en carga de presión en metros de columna de agua igual a $h = 10x$.

2.6 MEDICIÓN DE LA PRESIÓN

Como ya se indicó en el capítulo 1, y se ha seguido analizando en el presente capítulo, la presión en un punto dentro de la masa de un fluido se puede expresar como una presión absoluta o como una presión manométrica. La presión absoluta se mide con respecto al vacío perfecto (presión cero absoluto), en tanto que la que la presión manométrica se mide con respecto a la presión atmosférica local. Las presiones absolutas son siempre positivas (ver figura 1.2), pero las presiones manométricas pueden ser positivas o negativas, dependiendo de si la presión está por arriba de la presión atmosférica local (valor positivo) o por abajo de la presión atmosférica local (valor negativo). Una presión manométrica negativa también se conoce como vacuométrica.

2.6.1 BARÓMETRO

La medición de la presión atmosférica suele llevarse a cabo con un barómetro de mercurio, que en su forma más simple consta de un tubo de vidrio cerrado por un extremo y con el extremo abierto inmerso en un recipiente de mercurio.

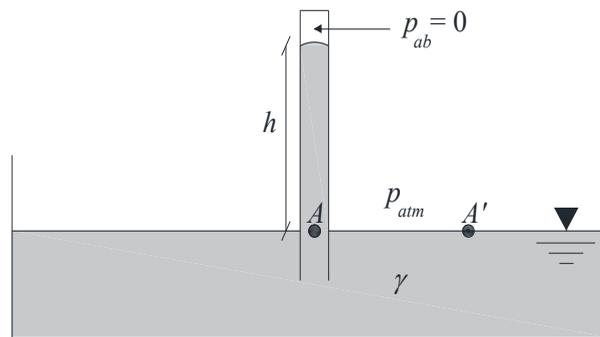


FIGURA 2.9 BARÓMETRO

La figura 2.9 muestra un barómetro en el cual en la parte superior se logra una presión absoluta prácticamente igual a cero. A la profundidad h y dentro del tubo, la presión absoluta en el punto A es

$$p_{abA} = 0 + \gamma h = \gamma h$$

La presión absoluta en la superficie libre que contiene al punto A' es igual a la presión atmosférica

$$P_{abA'} = P_{atm}$$

Dado que los puntos A y A' se encuentran en el mismo plano horizontal de un líquido en reposo, la presión en ambos puntos es la misma, por lo que

$$P_{atm} = \gamma h \quad (2.26)$$

Teóricamente se puede construir un barómetro con cualquier líquido; sin embargo, se tienen dos inconvenientes cuando no se emplea mercurio: el primero, dado que los pesos específicos de los otros líquidos son mucho menores que los del mercurio, se tendría una columna muy grande dentro del tubo y el segundo es que se debe lograr un vacío prácticamente total en el extremo superior, y los líquidos diferentes al mercurio vaporizan fácilmente con el calor y entonces en la parte superior del tubo es significativa la presión de vapor que ejerce el líquido evaporado. Para el caso del mercurio, a una temperatura de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, la presión de vapor es de 0.1586 Pa (Munson, 2002), por lo que para casos prácticos esta presión se puede considerar nula.

El invento del barómetro se adjudica a Evangelista Torricelli (1608-1647) en 1644. Blais Pascal, en 1648, dirigió un experimento empleando el barómetro para medir la presión atmosférica en diferentes altitudes del volcán Puy Dome en Francia; así comprobó que a mayor altitud menor presión atmosférica, y adjudicó acertadamente este efecto al peso de la columna de aire.

EJEMPLO 2.7 Es usual expresar la presión atmosférica en términos de la columna de mercurio que se mide en un barómetro. a) Calcule la columna de mercurio que se tendrá en un barómetro que mide una presión atmosférica de 70 kPa . Considere el peso específico del mercurio a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. b) A cero grados Celsius la densidad del mercurio es $\rho_{Hg} = 13596\text{ kg/m}^3$. Calcule la columna que marca el barómetro a una presión de 101.3 kPa .

Solución

a) De la tabla 1.9, para $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$, el peso específico del mercurio es $\gamma_{Hg} = 133\text{ kN/m}^3$, y de ecuación 2.26, al despejar la columna de líquido se tiene

$$h = \frac{p_{atm}}{\gamma} = \frac{70 \text{ kN/m}^2}{133 \text{ kN/m}^3} = 0.526 \text{ m de H}_G$$

b) Con $\gamma_{Hg} = \rho_{Hg} g = 13596 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 133776 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \text{ m}^3} = 133776 \text{ N/m}^3$, se tiene

$$h = \frac{p_{atm}}{\gamma} = \frac{101.3 \text{ kN/m}^2}{133.776 \text{ kN/m}^3} = 0.756 \text{ m de H}_G$$

$$h \approx 760 \text{ mm de H}_G$$

Note que el valor obtenido es el que ya se indicó en la tabla 1.5 como valor de la presión atmosférica estándar expresada en carga de presión. Es usual no especificar la temperatura del mercurio y emplear una densidad igual a $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$.

2.6.2 MANÓMETROS SIMPLES

Los manómetros son dispositivos que miden la presión tomando como referencia la presión atmosférica.

PIEZÓMETRO

El manómetro más sencillo, llamado piezómetro, sirve para medir la presión por encima del cero manométrico (presión atmosférica). Este dispositivo, que se muestra en la figura 2.10, consiste en un tubo vertical conectado al recipiente cuya presión se va a medir; el líquido que está dentro del recipiente asciende hasta alcanzar el equilibrio y entonces la presión se puede determinar midiendo la distancia vertical h desde la superficie libre del líquido hasta el punto de interés, y resulta $p_A = \gamma h$.

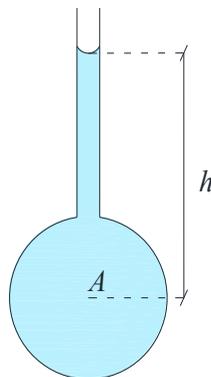


FIGURA 2.10 PIEZÓMETRO

En términos de carga de presión $h = p_A/\gamma$, donde h se expresa unidades de altura de columna del líquido; por ejemplo, m de columna de agua, mm de columna de mercurio, etc.

Evidentemente, el piezómetro no mide presiones manométricas negativas, ya que en tal caso se tendría el paso del aire hacia el recipiente a través del tubo manométrico. Una limitante práctica es que no es adecuado para medir grandes presiones, pues se requeriría de un tubo muy largo.

MANÓMETROS ABIERTOS EN FORMA DE U

Se emplea para medir presiones manométricas en un líquido, ya sean positivas o negativas. En la figura 2.11 se muestra que el menisco puede alcanzar su posición de equilibrio por debajo del punto A.

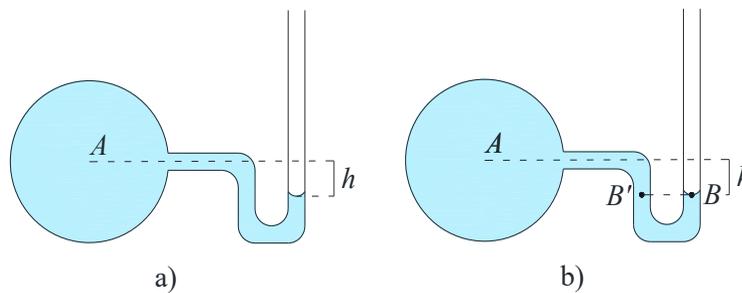


FIGURA 2.11 MANÓMETRO EN FORMA DE U

Para conocer la presión en el punto A, se puede trazar de forma ideal una línea horizontal que pase por el punto B en la superficie libre del líquido, esta línea también pasa por el punto B' que se encuentra del lado izquierdo del tubo (figura 2.11b). Dado que por debajo de la línea horizontal el líquido tiene un peso específico constante, se tiene $p_B = p_{B'}$. Como la presión aumenta de forma descendente, se tiene $p_A + \gamma h = p_{B'}$. En el punto B la presión manométrica es cero, por lo que

$$p_A = -\gamma h$$

Cuando se tienen diferencias de presión manométrica positivas o negativas “grandes” generalmente se emplea un segundo líquido de mayor peso específico, inmisible con el primero y llamado líquido manométrico (figura 2.12a). Este tipo de manómetro también se puede emplear cuando el fluido dentro del recipiente es un gas.

Procediendo de forma similar al caso anterior, se tiene $p_B = \gamma_2 h_2$ y $p_A + \gamma_1 h_1 = p_{B'}$, por lo que, de $p_B = p_{B'}$, resulta

$$\gamma_2 h_2 = p_A + \gamma_1 h_1$$

$$p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1$$

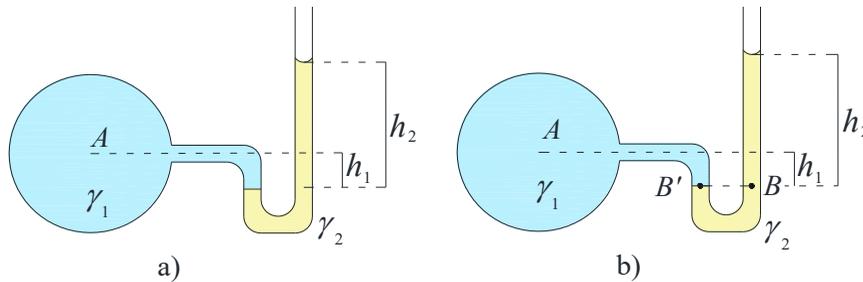


FIGURA 2.12 MANÓMETRO EN U CON LÍQUIDO AUXILIAR

Una forma sencilla para resolver problemas de manómetros es la siguiente:

1. Empezar en un extremo del circuito, anotar la presión en ese punto empleando unidades adecuadas o un símbolo apropiado si se trata de una incógnita.
2. Al valor anterior se le suma el cambio de presión $\Delta p = \gamma h$ que se tenga de un punto al siguiente; positivo si el segundo punto se encuentra a menor elevación o negativo si se encuentra a elevación mayor.
3. Proceder de esta manera hasta alcanzar el último extremo o el punto de interés e igualar la expresión obtenida a la presión en este último punto.
4. Sustituir los valores conocidos y resolver para la presión que se desea conocer.

MANÓMETROS DIFERENCIALES CERRADOS

Un manómetro diferencial cerrado sirve para medir la diferencia de presiones entre dos puntos. La figura 2.13 muestra dos manómetros de este tipo.

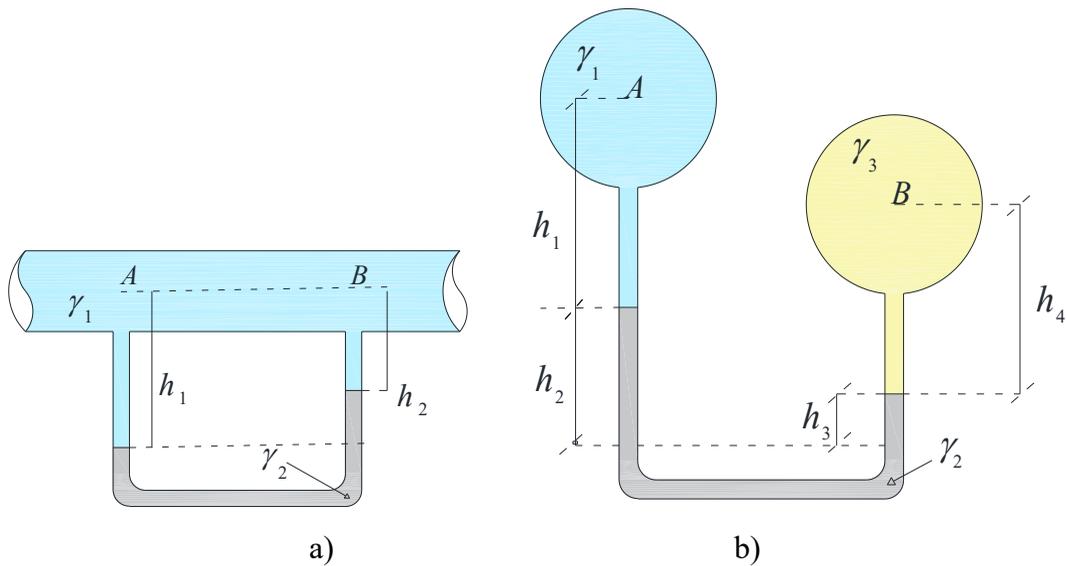


FIGURA 2.13 MANÓMETROS DIFERENCIALES CERRADOS

Para el caso del manómetro diferencial mostrado en la figura 2.13a que conecta dos puntos A y B dentro de un mismo conducto, la diferencia de presiones se calcula como

$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 (h_1 - h_2) - \gamma_1 h_2 = p_B$$

$$p_A - p_B = (\gamma_2 - \gamma_1) (h_1 - h_2)$$

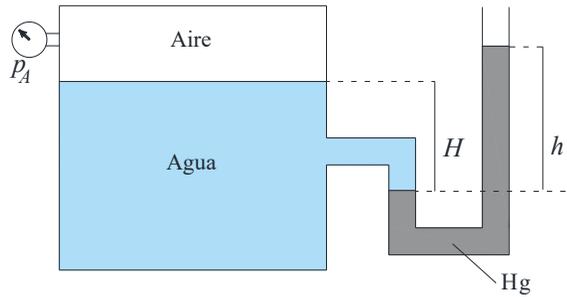
Note que en este caso la diferencia de presiones depende de la diferencia de pesos específicos $(\gamma_2 - \gamma_1)$ y de la diferencia de columnas $(h_1 - h_2)$.

Para el manómetro mostrado en la figura 2.13b, al hacer el recorrido manométrico se obtiene

$$p_A + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_2 h_3 - \gamma_3 h_4 = p_B$$

$$p_A - p_B = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 (h_3 - h_2) + \gamma_3 h_4$$

EJEMPLO 2.8 Calcule la presión del aire p_A si $H = 0.1$ m y $h = 0.30$ m. Considere $\gamma_{Hg} = 133$ kN/m³. El peso de la columna de aire es despreciable debido a la baja densidad de este.



Solución

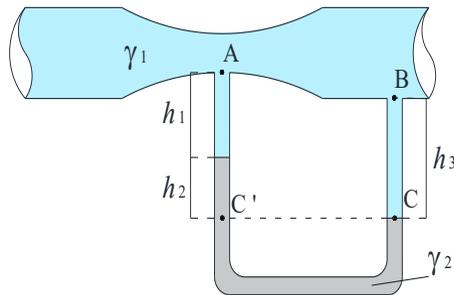
Al hacer el recorrido manométrico desde el punto A hasta el extremo abierto del manómetro en U, se tiene

$$p_A + \gamma_{\text{agua}} H - \gamma_{\text{Hg}} h = 0$$

$$p_A = 133 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 0.3 \text{ m} - 9.81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 0.1 \text{ m} = 38.92 \text{ kN/m}^2$$

$$p_A = 38.92 \text{ kPa}$$

EJEMPLO 2.9 Determine la diferencia de presiones entre los puntos A y B de una conducción. Emplee sistema métrico gravitacional de unidades. $\gamma_1 = 1000 \text{ kgf/m}^3$, $\gamma_2 = 13600 \text{ kgf/m}^3$, $h_1 = 0.15 \text{ m}$, $h_2 = 0.10 \text{ m}$ y $h_3 = 0.18 \text{ m}$.



Solución

En la figura se trazó una línea horizontal que pasa por los puntos C' y C; en estos puntos la presión es la misma ya que por debajo de ellos se tiene el mismo líquido. Para calcular la presión en el punto C' se tiene

$$p_A + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 = p_{C'}$$

de igual forma, para el punto C resulta

$$p_B + \gamma_1 h_3 = p_C$$

De $p_{C'} = p_C$ se llega a

$$p_A + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 = p_B + \gamma_1 h_3$$

$$p_A - p_B = \gamma_1 (h_3 - h_1) - \gamma_2 h_2$$

Al sustituir valores se obtiene la diferencia de presiones

$$p_A - p_B = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times (0.18 - 0.15)\text{m} - 13600 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times 0.1\text{m}$$

$$p_A - p_B = -1330 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

Como se puede observar, la presión en el punto B es mayor que la del punto A. En el sistema métrico gravitacional es usual expresar la presión en kgf/cm^2 , por lo que se tiene

$$p_B - p_A = 1330 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^2}{(100\text{cm})^2}$$

$$p_B - p_A = 0.133 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Este problema también se puede calcular con el procedimiento general. El recorrido del circuito manométrico se puede iniciar en cualquiera de los extremos; si se elige iniciar por el punto B, se tiene

$$p_B + \gamma_1 h_3 - \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 = p_A$$

$$p_B - p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 (h_3 - h_1)$$

y al sustituir valores se llega al resultado obtenido con el primer procedimiento.

2.6.3 MANÓMETRO DE BOURDON

Los manómetros simples, abiertos o cerrados se emplean principalmente en los laboratorios, lo común en la industria y en las instalaciones domiciliarias es emplear los manómetros llamados comerciales o de carátula. El funcionamiento de estos se basa en el tubo de Bourdon que fue desarrollado y patentado en 1849 por el ingeniero francés Eugene Bourdon. En su forma más simple consiste en un tubo de sección circular elíptica doblado en un arco de aproximadamente 270° , tal como se muestra en la figura 2.14. Cuando se aplica presión al manómetro el tubo curvado tiende a enderezarse. Este movimiento se transmite mediante una conexión mecánica a un sistema de engranajes conectado a una aguja. La aguja se coloca delante de una plantilla que lleva las indicaciones del valor de la presión relativa a la posición de la aguja.

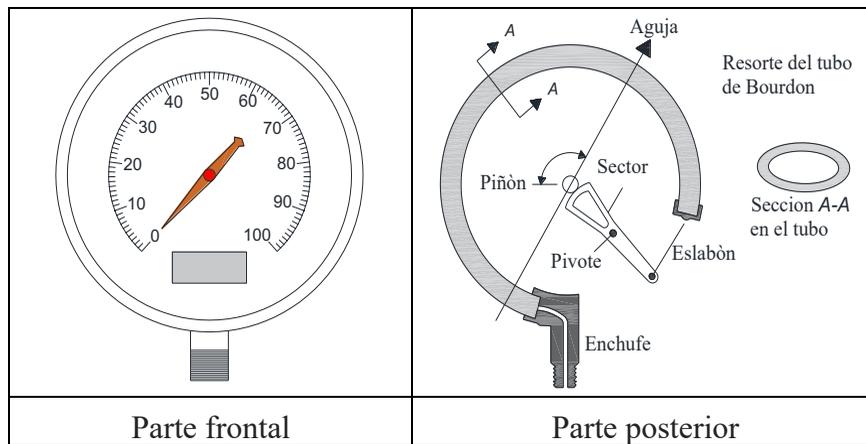


FIGURA 2.14 TUBO DE BOURDON (ROBERSON, 1984)

La escala del medidor indica cero cuando el manómetro está abierto a la presión atmosférica. Las unidades de presión pueden estar en diferentes sistemas de unidades, por ejemplo, Pa o bar en SI, kgf/cm^2 en el sistema gravitacional métrico o psi en el Sistema Inglés de Unidades; también es común que se exprese en términos de carga de presión, como cm de Hg o in de Hg.

2.7 EMPUJE HIDROSTÁTICO SOBRE SUPERFICIES PLANAS

Debido a que la presión varía dentro de un fluido en reposo, su acción da como resultado la existencia de fuerzas distribuidas sobre cualquier superficie finita que se encuentre en contacto con el fluido; sin embargo, en el análisis estático de tales superficies conviene reemplazar las fuerzas distribuidas por una fuerza resultante equivalente junto con su línea de acción (centro de presión).

2.7.1 EXPRESIÓN GENERAL PARA EL CÁLCULO DEL EMPUJE HIDROSTÁTICO SOBRE SUPERFICIES PLANAS

Considere una superficie plana de área A , como la mostrada en la figura 2.15, que está contenida en un plano inclinado xy , siendo x un eje horizontal contenido en la superficie libre del líquido. El eje y corta en el punto O de la superficie libre, θ es el ángulo que forma el plano xy (real o ficticio) con la superficie libre del líquido. La superficie plana tiene un centroide c que solo depende de la forma de esta.

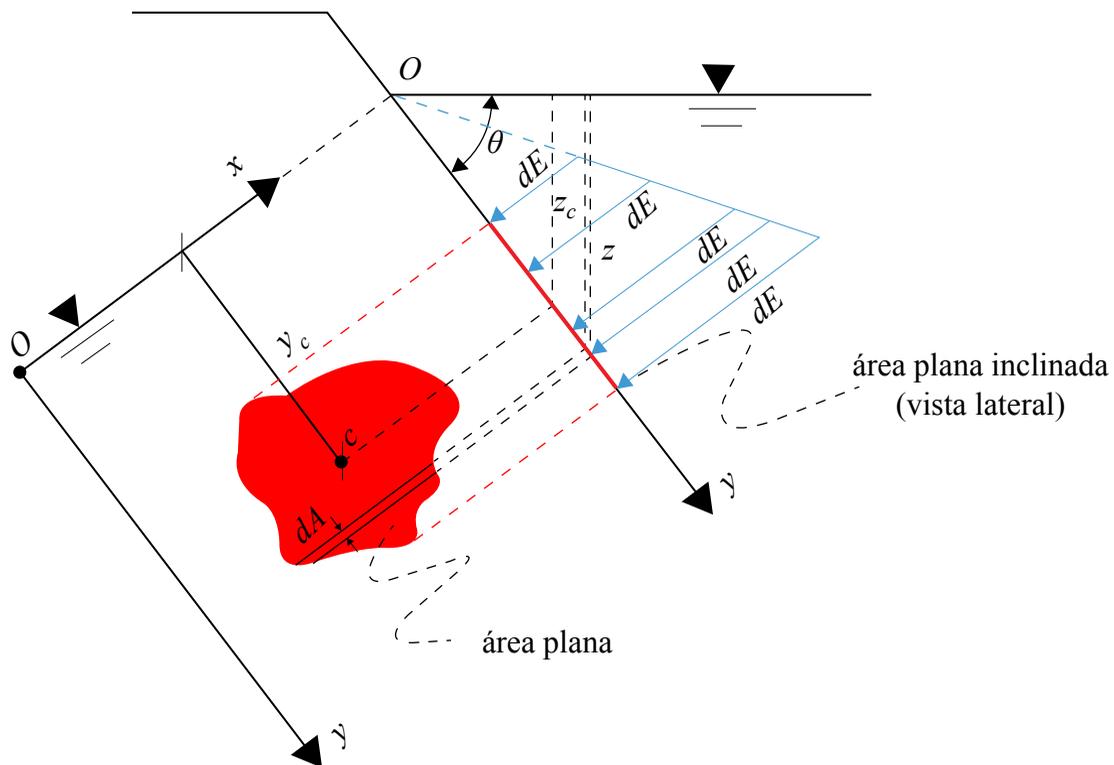


FIGURA 2.15 FUERZAS HIDROSTÁTICAS SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA SUMERGIDA

La presión en cada uno de los puntos de la superficie plana viene dada por $p = \gamma z$, siendo γ el peso específico del líquido y z la distancia vertical que se mide a partir de la superficie libre del líquido, donde la presión es $p = 0$ (manométrica). En cualquier punto se cumple que $z = y \text{ sen } \theta$.

En cualquier profundidad dada, la fuerza o empuje elemental que actúa sobre el área diferencial dA es $dE = \gamma z dA$ y es perpendicular a la superficie. Así, la magnitud de la fuerza resultante, también conocida como empuje hidrostático, se puede calcular sumando todas las fuerzas diferenciales sobre toda la superficie. Al integrar se tiene

$$E = \int_A \gamma z dA = \int_A \gamma y \text{ sen } \theta dA$$

Para γ y θ constantes

$$E = \gamma \text{ sen } \theta \int_A y dA \quad (2.27)$$

La integral que aparece en la ecuación 2.27 es el primer momento del área con respecto al eje x

$$\int_A y dA = y_c A$$

donde y_c es la ordenada del centroide medida desde el eje x , por lo que la magnitud del empuje hidrostático resulta

$$E = \gamma A y_c \text{ sen } \theta$$

en función de la profundidad vertical z se tiene

$$E = \gamma A z_c \quad (2.28)$$

Donde z_c es la distancia vertical desde la superficie del líquido hasta el centroide de la superficie plana. Note que la magnitud es independiente del ángulo θ . Dado que la presión en el centroide es $p_c = \gamma z_c$, la fuerza resultante es igual a la presión en el centroide por el área total. Todas las fuerzas diferenciales dE que se sumaron son perpendiculares a la superficie, por lo tanto, el empuje resultante E también es perpendicular a esta. La ecuación 2.28 es la expresión general para calcular la magnitud del empuje hidrostático.

Cuando un sistema de fuerzas paralelas se reduce a una fuerza resultante, también interesa conocer su punto de aplicación, el cual se determina igualando el momento que ejerce la fuerza resultante con el que ejercen las fuerzas elementales en su conjunto. El punto por el que pasa el empuje hidrostático resultante, llamado centro de presiones tiene coordenadas (x_{cp}, y_{cp}) ; la figura 2.16 muestra la ubicación de estas.

Para calcular la coordenada y_{cp} se suman los momentos estáticos con respecto al eje x que ejercen las fuerzas elementales y se igualan con el que produce la fuerza resultante

$$E y_{cp} = \int_A y dE = \int_A y \gamma y \text{sen} \theta dA$$

$$\gamma A y_c \text{sen} \theta y_{cp} = \gamma \text{sen} \theta \int_A y^2 dA$$

$$A y_c y_{cp} = \int_A y^2 dA$$

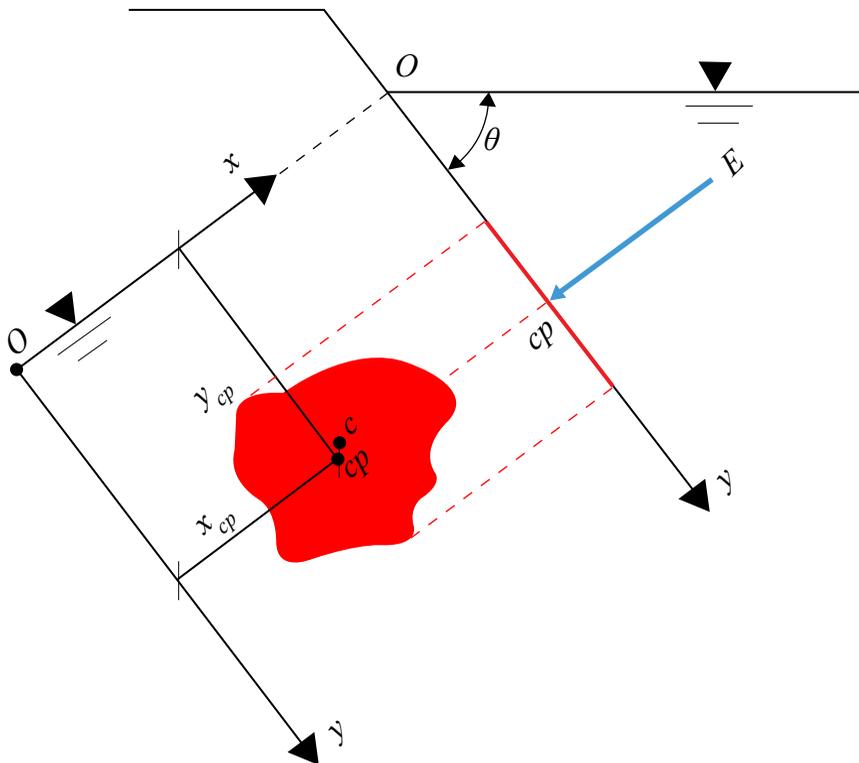


FIGURA 2.16 UBICACIÓN DEL EMPUJE HIDROSTÁTICO RESULTANTE SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA

$I_x = \int_A y^2 dA$ es el segundo momento del área con respecto al eje x . A partir del teorema de los ejes paralelos I_x se expresa

$$I_x = I_{xc} + A y_c^2$$

Donde I_{xc} es el segundo momento del área con respecto a un eje que pasa por su centroide y es paralelo al eje x . Así

$$A y_c y_{cp} = I_{xc} + A y_c^2$$

$$y_{cp} = \frac{I_{xc}}{A y_c} + y_c \tag{2.29}$$

I_{xc} también puede expresarse como $I_{xc} = \bar{r}_x^2 A$, donde \bar{r}_x es el radio de giro de A respecto al eje centroidal paralelo al eje x . Por lo tanto, la posición de la coordenada y_{cp} también se puede determinar de la siguiente forma

$$y_{cp} = \frac{\bar{r}_x^2}{y_c} + y_c \tag{2.30}$$

De la ecuación 2.30 se puede observar que el empuje hidrostático resultante pasa por debajo del centroide de la superficie, también se nota que, para un área dada, el centro de presión y_{cp} se acerca al centroide y_c a medida que la superficie se encuentra a mayor profundidad dentro del líquido. En la tabla 2.1 se muestran las propiedades geométricas para las superficies más usuales.

La coordenada x_{cp} del empuje hidrostático resultante se puede determinar sumando los momentos estáticos con respecto al eje y , así

$$E x_{cp} = \int_A x dE = \int_A x \gamma y \text{sen} \theta dA$$

$$\gamma A y_c \text{sen} \theta x_{cp} = \gamma \text{sen} \theta \int_A x y dA$$

$$A y_c x_{cp} = \int_A x y dA$$

La integral es segundo momento mixto de la superficie I_{xy} con respecto a los ejes x y y , por lo que

$$A y_c x_{cp} = I_{xy}$$

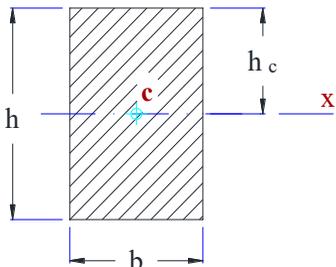
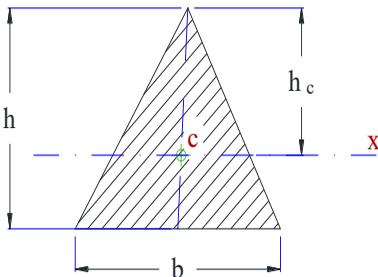
$$x_{cp} = \frac{I_{xy}}{A y_c}$$

Utilizando el teorema de los ejes paralelos: $I_{xy} = I_{xy_c} + A x_c y_c$, donde I_{xy_c} es el segundo momento mixto con respecto a un sistema ortogonal de coordenadas que pasa por el centroide del área.

$$x_{cp} = x_c + \frac{I_{xy_c}}{A y_c} \tag{2.31}$$

En superficies simétricas con respecto a un eje paralelo al eje y que pasa por el centroide, se tiene $I_{xy_c} = 0$ y $x_{cp} = x_c$.

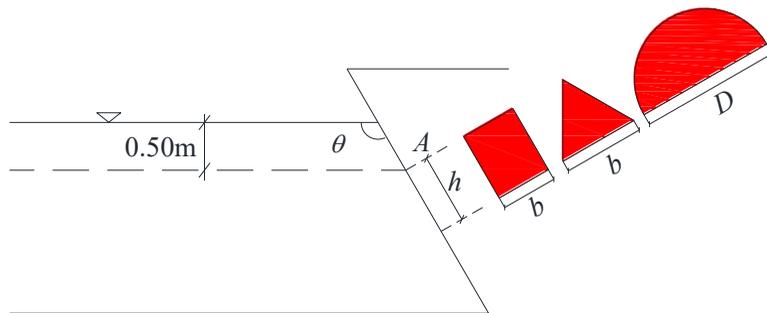
Tabla 2.1 CENTROIDES, ÁREAS Y CUADRADO DEL RADIO DE GIRO DE ALGUNAS FORMAS GEOMÉTRICAS (SOTELO, 1990)

Área, A	Posición del centroide, h_c	Área, A	Cuadrado del radio de giro, $\overline{r_x^2}$
	$h_c = \frac{h}{2}$	$A = bh$	$\overline{r_x^2} = \frac{h^2}{12}$
	$h_c = \frac{2}{3}h$	$A = \frac{bh}{2}$	$\overline{r_x^2} = \frac{h^2}{18}$

	$h_c = \frac{h}{3} \left(\frac{2b+a}{b+a} \right)$	$A = h \frac{b+a}{2}$	$\overline{r_x^2} = \frac{h^2}{18} \left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \right)$
	$h_c = R$	$A = \pi R^2$	$\overline{r_x^2} = \frac{R^2}{4}$
	$h_c = 0.5756 R$	$A = \frac{\pi R^2}{2}$	$\overline{r_x^2} = 0.06987 R^2$
	$h_c = R \left[1 - \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{3 \theta} \right]$	$A = \theta R^2$	$\overline{r_x^2} = \frac{R^2}{4} \left[1 + \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\theta} - \frac{16 \operatorname{sen}^2 \theta}{9 \theta^2} \right]$
	$h_c = R \left[1 - \frac{4 \operatorname{sen}^3 \theta}{6 \theta - 3 \operatorname{sen} 2 \theta} \right]$	$A = \frac{1}{2} R^2 (2 \theta - \operatorname{sen} 2 \theta)$	$\overline{r_x^2} = \frac{R^2}{4} \left[\frac{1 + \frac{2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta}{\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta}}{9} - \frac{\operatorname{sen}^6 \theta}{(2 \theta - \operatorname{sen} 2 \theta)^2} \right]$

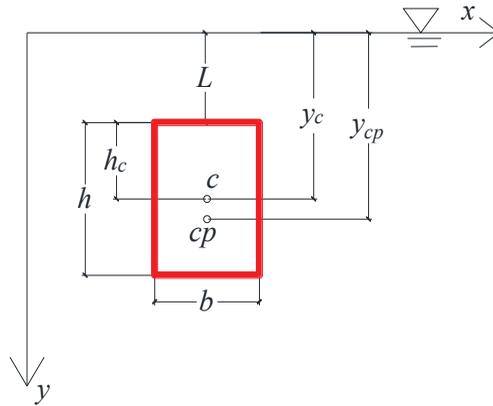
	$h_c = b$	$A = \pi a b$	$\overline{r_x^2} = \frac{b^2}{4}$
	$h_c = \frac{2}{5} a$	$A = \frac{4}{3} a b$	$\overline{r_x^2} = 0.06857 a^2$

EJEMPLO 2.10 Determine el empuje hidrostático resultante E y la ubicación de su línea de acción y_{cp} medida sobre el plano que contiene a la superficie y la distancia z_{cp} medida verticalmente. También, determine la distancia d_{cp} medida sobre el plano inclinado desde el punto A hasta el centro de presiones. Considere los siguientes casos: a) rectangular, $h = 1$ m, $b = 0.8$ m; b) triangular, $h = 1$ m, $b = 0.8$ m; c) semicircular, $h = R = 1$ m. Para todos los casos, $\theta = 115^\circ$. El líquido es agua.



Solución

a) El plano que contiene a la superficie rectangular es el mostrado



Note que $y_c = L + h_c$, donde L es la distancia desde la superficie libre hasta el borde superior de la superficie sobre la cual se desea calcular el empuje hidrostático y h_c es la posición del centroide medida desde el borde superior de la superficie sobre la cual se desea calcular el empuje hidrostático

El empuje hidrostático se determina con la ecuación 2.28 y las propiedades geométricas se pueden consultar en la tabla 2.1.

Para este caso se tiene

$$A = h \times b = 1 \text{ m} \times 0.8 \text{ m} = 0.8 \text{ m}^2$$

$$h_c = \frac{h}{2} = \frac{1 \text{ m}}{2} = 0.5 \text{ m}$$

$$\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{(1 \text{ m})^2}{12} = 0.0833 \text{ m}^2$$

en el plano que contiene a la superficie rectangular la distancia L es

$$L = 0.5 \text{ m} / \sin 115^\circ = 0.552 \text{ m}$$

la distancia y_c desde la superficie libre hasta el centroide, medida sobre el plano $x y$ es

$$y_c = L + h_c = 0.552 \text{ m} + 0.5 \text{ m} = 1.052 \text{ m}$$

la coordenada vertical z_c resulta

$$z_c = y_c \text{ sen } 15^\circ = 1.052 \text{ m} \times \text{sen } 15^\circ = 0.953 \text{ m}$$

otra forma de calcular z_c es

$$z_c = 0.5 \text{ m} + h_c \text{ sen } 15^\circ = 0.5 \text{ m} + 0.5 \text{ m} \times \text{sen } 15^\circ = 0.953 \text{ m}$$

Con la ecuación 2.28 se determina el empuje hidrostático

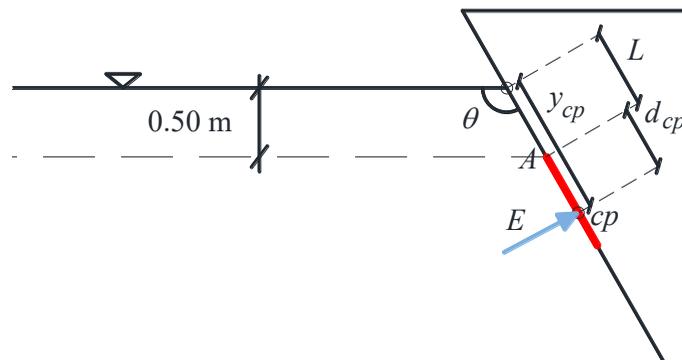
$$E = \gamma A z_c = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.8 \text{ m}^2 \times 0.953 \text{ m} = 7480 \text{ N} \angle 25^\circ$$

el cual está aplicado en el centro de presiones y_{cp} que se determina a partir de la ecuación 2.30.

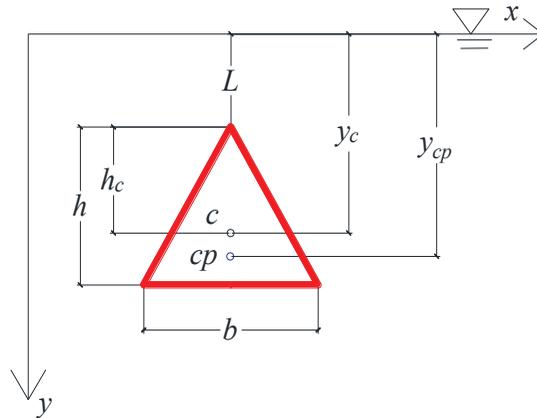
$$y_{cp} = \frac{\overline{r_x^2}}{y_c} + y_c = \frac{0.0833 \text{ m}^2}{1.052 \text{ m}} + 1.052 \text{ m} = 1.131 \text{ m}$$

La distancia d_{cp} medida sobre el plano inclinado desde el punto A hasta el centro de presiones es igual a

$$d_{cp} = y_{cp} - L = 1.131 \text{ m} - 0.551 \text{ m} = 0.58 \text{ m}$$



b) Procediendo de igual forma para la superficie triangular se tiene



$$A = \frac{h \times b}{2} = \frac{1\text{m} \times 0.8\text{m}}{2} =$$

$$h_c = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}1\text{m} = 0.667\text{m}$$

$$\overline{r_x^2} = \frac{h^2}{18} = \frac{(1\text{m})^2}{18} = 0.0556\text{m}^2$$

$$L = 0.5\text{m} / \text{sen } 115^\circ = 0.552\text{m}$$

$$y_c = L + h_c = 0.552\text{m} + 0.667\text{m} = 1.219\text{m}$$

$$z_c = y_c \text{ sen } 115^\circ = 1.219\text{m} \times \text{sen } 115^\circ = 1.104\text{m}$$

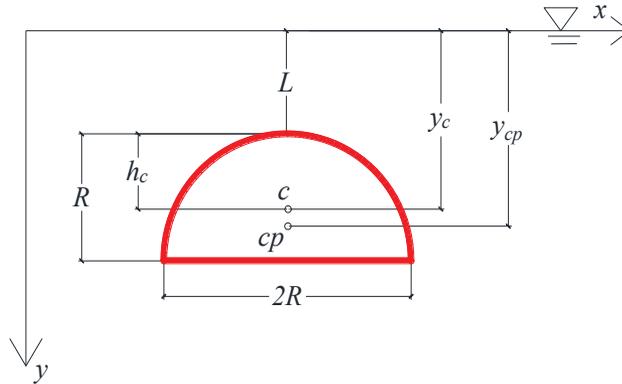
$$z_c = 0.5\text{m} + h_c \text{ sen } 115^\circ = 0.5\text{m} + 0.667\text{m} \times \text{sen } 115^\circ = 1.104\text{m}$$

$$E = \gamma A z_c = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.4\text{m}^2 \times 1.104\text{m} = 4332\text{N} \llcorner 25^\circ$$

$$y_{cp} = \frac{\overline{r_x^2}}{y_c} + y_c = \frac{0.0556\text{m}^2}{1.219\text{m}} + 1.219\text{m} = 1.264\text{m}$$

$$d_{cp} = y_{cp} - L = 1.264\text{m} - 0.552\text{m} = 0.712\text{m}$$

c) Para la superficie semicircular resulta



$$A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi (1 \text{ m})^2}{2} = 1.5708 \text{ m}^2$$

$$h_c = 0.5756R = 0.5756 \times 1 \text{ m} = 0.5756 \text{ m}$$

$$\overline{r_x^2} = 0.06987R^2 = 0.06987 \times (1 \text{ m})^2 = 0.06987 \text{ m}^2$$

$$L = 0.5 \text{ m} / \text{sen } 115^\circ = 0.552 \text{ m}$$

$$y_c = L + h_c = 0.552 \text{ m} + 0.5756 \text{ m} = 1.128 \text{ m}$$

$$z_c = y_c \text{ sen } 115^\circ = 1.128 \text{ m} \times \text{sen } 115^\circ = 1.022 \text{ m}$$

o

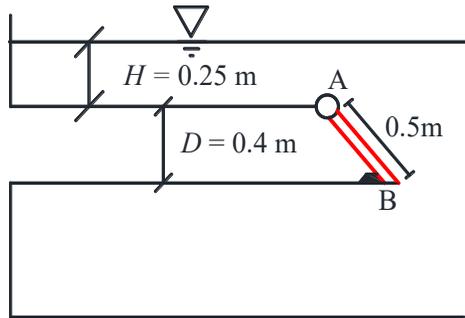
$$z_c = 0.5 \text{ m} + h_c \text{ sen } 115^\circ = 0.5 \text{ m} + 0.5756 \text{ m} \times \text{sen } 115^\circ = 1.022 \text{ m}$$

$$E = \gamma A z_c = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 1.5708 \text{ m}^2 \times 1.022 \text{ m} = 15748 \text{ N} \angle 25^\circ$$

$$y_{cp} = \frac{\overline{r_x^2}}{y_c} + y_c = \frac{0.06987 \text{ m}^2}{1.128 \text{ m}} + 1.128 \text{ m} = 1.189 \text{ m}$$

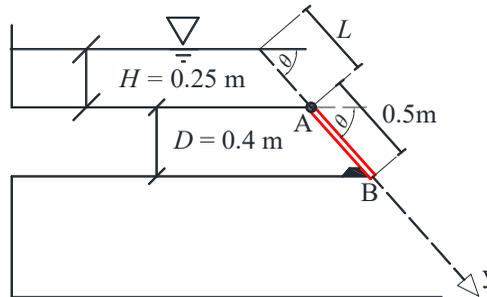
$$d_{cp} = y_{cp} - L = 1.189 \text{ m} - 0.552 \text{ m} = 0.637 \text{ m}$$

EJEMPLO 2.11 a) Determine el empuje hidrostático sobre la compuerta inclinada que cierra al tubo circular, así como su línea de acción referida a la articulación A. b) Determine las reacciones en el tope B y en la articulación A. No considere el peso de la compuerta ni el efecto de la fricción. c) Si se coloca un cable normal a la compuerta en su extremo inferior, determine el valor de la fuerza de tensión a partir del cual abre la compuerta.

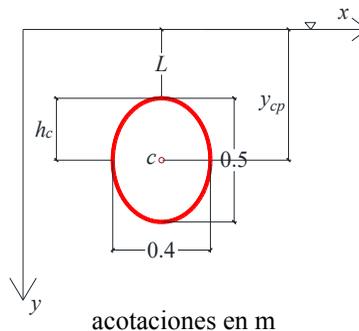


Solución

- a) La compuerta está inclinada, por lo que tiene una forma elíptica con eje mayor igual a 0.5 m y eje menor igual a 0.4 m . El plano xy que contiene a la compuerta forma un ángulo θ con la superficie libre del agua.



El plano que contiene a la superficie es el que se muestra enseguida:



El ángulo θ se determina como

$$\text{sen } \theta = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

$$\theta = \text{sen}^{-1} 0.8 = 53.13^\circ$$

la distancia L , medida sobre el plano inclinado, desde la superficie libre hasta la articulación A es

$$L = 0.25 \text{ m} / \text{sen } \theta = 0.25 \text{ m} / 0.8 = 0.3125 \text{ m}$$

El área, el centroide y el radio de giro al cuadrado son, respectivamente,

$$A = \pi \times \frac{0.5 \text{ m}}{2} \times \frac{0.4 \text{ m}}{2} = 0.1571 \text{ m}^2$$

$$h_c = \frac{0.5 \text{ m}}{2} = 0.25 \text{ m}$$

$$\overline{r_x^2} = \frac{(0.25 \text{ m})^2}{4} = 0.01563 \text{ m}^2$$

Las distancias y_c , medida sobre el plano xy , y z_c medida verticalmente, resultan

$$y_c = L + h_c = 0.3125 \text{ m} + 0.25 \text{ m} = 0.5625 \text{ m}$$

$$z_c = y_c \text{ sen } \theta = 0.5625 \text{ m} \times \text{sen } 53.13^\circ = 0.45 \text{ m}$$

o

$$z_c = 0.25 \text{ m} + (0.5 \text{ m} / 2) \text{ sen } 53.13^\circ = 0.45 \text{ m}$$

Una vez determinadas las variables que intervienen en el cálculo del empuje hidrostático, este se determina como

$$E = \gamma A z_c = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.1571 \text{ m}^2 \times 0.45 \text{ m} = 693.51 \text{ N} \angle 36.87^\circ$$

La ubicación del centro de presiones es

$$y_{cp} = \frac{\overline{r_x^2}}{y_c} + y_c = \frac{0.01563 \text{ m}^2}{0.5625 \text{ m}} + 0.5625 \text{ m} = 0.5903 \text{ m}$$

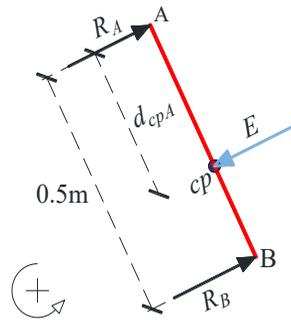
y si se mide verticalmente se tiene

$$z_{cp} = y_{cp} \text{ sen } \theta = 0.5903 \text{ m} \times 0.8 = 0.472 \text{ m}$$

desde la articulación A, la línea de acción del empuje hidrostático es igual a

$$d_{cpA} = y_{cp} - L = 0.5903 \text{ m} - 0.3125 \text{ m} = 0.278 \text{ m}$$

- b) En condiciones estáticas se cumple que la suma de momentos con respecto a cualquier punto es igual a cero. Las fuerzas que pueden generar momento con respecto a la articulación A son la reacción R_B y el empuje hidrostático E , ambos normales a la compuerta.



En condiciones estáticas se tiene

$$\sum M_A = R_B \times 0.5 \text{ m} - 693.51 \text{ N} \times 0.278 \text{ m} = 0$$

$$R_B = 385.59 \text{ N} \quad \angle 36.87^\circ$$

La segunda condición de equilibrio es $\Sigma F = 0$. Dado que tanto R_B como E son normales a la compuerta, R_A también lo es, por lo que resulta

$$R_B + R_A - E = 0$$

$$R_A = 693.51 \text{ N} - 385.59 \text{ N}$$

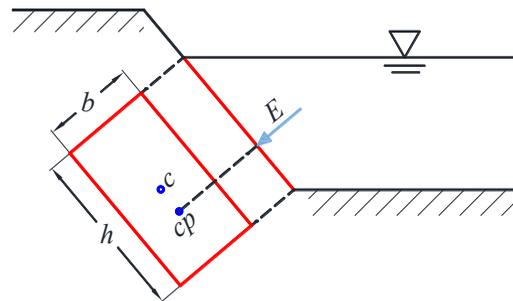
$$R_A = 307.92 \text{ N} \quad \nearrow 36.87^\circ$$

c) Para abrir la compuerta basta que la fuerza de tensión T sea mayor que R_B

$$T > 385.59 \text{ N} \quad \nearrow 36.87^\circ$$

Evidentemente, al ir abriendo la compuerta, cambiará la dirección de la fuerza de tensión.

EJEMPLO 2.12 Demuestre que sobre un muro rectangular inclinado o vertical el centro de presiones de la resultante del empuje hidrostático siempre se encuentra a una distancia $y_{cp} = \frac{2}{3}h$.



Solución

Dado que la superficie es rectangular, $h_c = \frac{h}{2}$ y $\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{12}$. La ubicación del centroide desde la superficie libre es $y_c = L + h_c = 0 + \frac{h}{2}$. A partir de la ecuación 2.30 se determina el centro de presiones, el cual resulta

$$y_{cp} = \frac{\bar{r}_x^2}{y_c} + y_c = \left(\frac{h^2}{12} \times \frac{1}{h/2} \right) + \frac{h}{2}$$

$$y_{cp} = \frac{2}{3}h$$

Columna equivalente

El cálculo del empuje hidrostático a partir de la ecuación general 2.28 se ha empleado cuando se tiene una superficie libre del líquido y la densidad es constante; sin embargo, también se puede emplear en un sistema a presión como el mostrado en la figura 2.17a, para lo cual la presión que ejerce el aire se transforma en una columna de líquido que ejerza la misma presión que la que se tiene originalmente en el punto c .

La columna de líquido equivalente de peso específico γ en el punto c , tal que la presión sea la indicada se calcula como

$$h_c = \frac{p_c}{\gamma}$$

Para poder emplear la expresión general en el cálculo del empuje hidrostático sobre la superficie AB, el sistema equivalente es como el mostrado en la figura 2.17b.

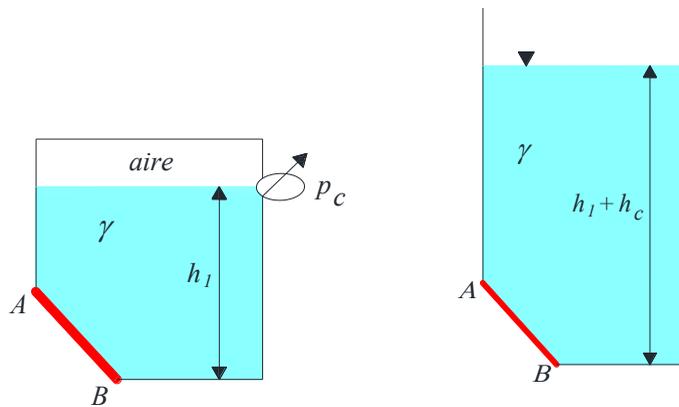
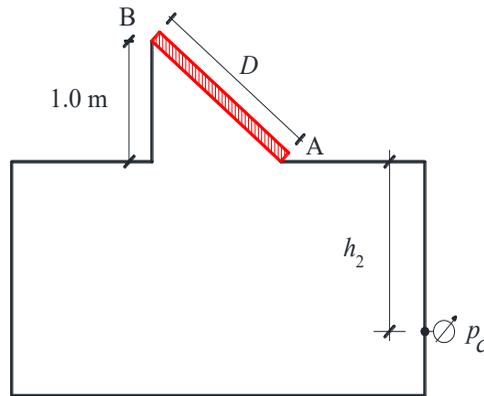


FIGURA 2.17A SISTEMA ORIGINAL

FIGURA 2.17B SISTEMA EQUIVALENTE

EJEMPLO 2.13 En un tanque lleno de agua a presión se tiene un domo circular con diámetro $D = 1.5 \text{ m}$. La presión en el manómetro es $p_c = 49.05 \text{ kPa}$. Determine el empuje hidrostático sobre el domo y ubique su línea de acción con respecto al punto B. Considere $h_2 = 2 \text{ m}$.

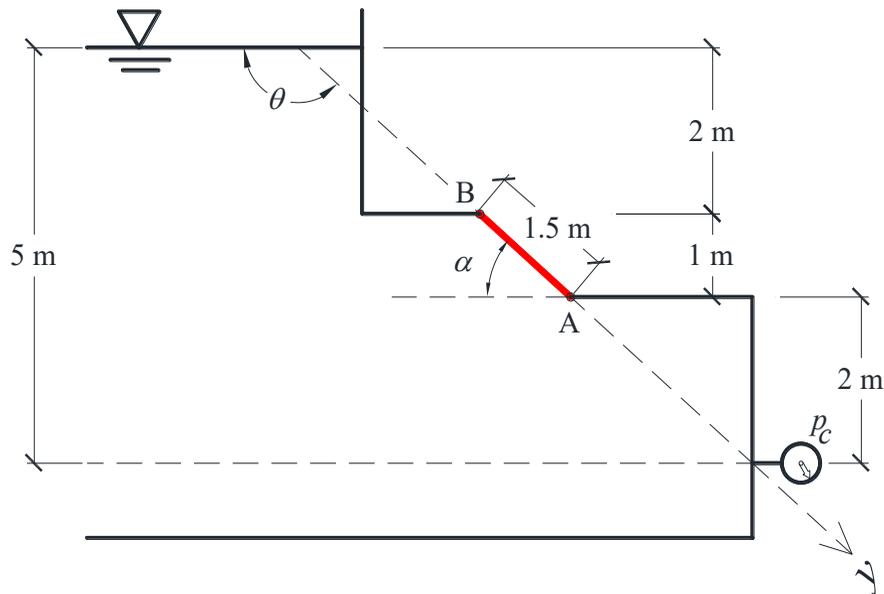


Solución

La columna de agua equivalente que ejerce la presión indicada es

$$h_c = \frac{p_c}{\gamma} = \frac{49.05 \times 10^3 \text{ N/m}^2}{9810 \text{ N/m}^3} = 5 \text{ m.c.a. (metros de columna de agua)}$$

El sistema equivalente es el mostrado



El plano xy contiene al domo circular; θ es el ángulo que forma la superficie libre con este plano. Note que el líquido está por debajo del domo, por lo que $\theta > 90^\circ$. El ángulo α es el que forma el domo con la horizontal. Por tanto, se tiene

$$\alpha = \text{sen}^{-1} \frac{1}{1.5} = 41.81^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 41.81^\circ = 138.19^\circ$$

$$\text{sen } \theta = \text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$$

Con el sistema equivalente se procede de forma similar al problema 2.10, ahora para la superficie circular y resulta

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (1.5\text{m})^2}{4} = 1.767\text{m}^2$$

$$h_c = R = 1.5\text{m}/2 = 0.75\text{m}$$

$$\overline{r_x^2} = \frac{R^2}{4} = \frac{(0.75\text{m})^2}{4} = 0.1406\text{m}^2$$

$$L = 2\text{m} / \text{sen } 138.19^\circ = 3\text{m}$$

$$y_c = L + h_c = 3\text{m} + 0.75\text{m} = 3.75\text{m}$$

$$z_c = y_c \text{ sen } \theta = 3.75\text{m} \times 2/3 = 2.5\text{m}$$

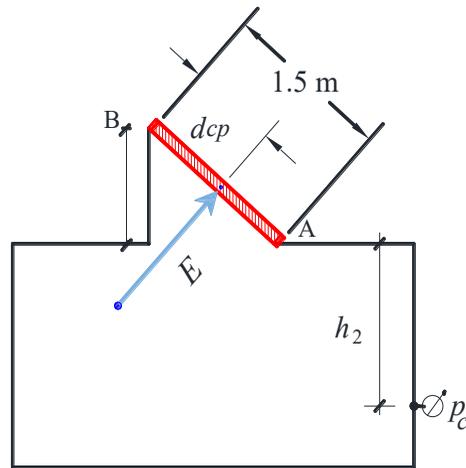
$$E = \gamma A z_c = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 1.767\text{m}^2 \times 2.5\text{m} = 43339\text{N} \quad \swarrow 48.19^\circ$$

$$y_{cp} = \frac{\overline{r_x^2}}{y_c} + y_c = \frac{0.1406\text{m}^2}{3.75\text{m}} + 3.75\text{m} = 3.787\text{m}$$

Desde B la línea de acción está a una distancia

$$d_{cp} = y_{cp} - L = 3.787\text{m} - 3\text{m} = 0.787\text{m}$$

y regresando al sistema original se tiene



2.7.2 EL PRISMA DE PRESIONES

Un método alternativo para determinar la magnitud y localización de la fuerza hidrostática resultante sobre una superficie plana inclinada se basa en el concepto del prisma de presiones. La base de este prisma está constituida por la superficie misma y su altura en cada punto queda determinada por la presión γz . La magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen del prisma, y la línea de acción pasa por el centroide G' del prisma (figura 2.18).

El empuje hidrostático elemental dE que actúa sobre el área elemental dA es

$$dE = \gamma z dA = d\mathcal{V}_{pp}$$

Donde $d\mathcal{V}_{pp}$ es el elemento diferencial del volumen del prisma de presiones que tiene una base dA y una altura γz . Al integrar sobre toda el área resulta

$$E = \mathcal{V}_{pp} \tag{2.32}$$

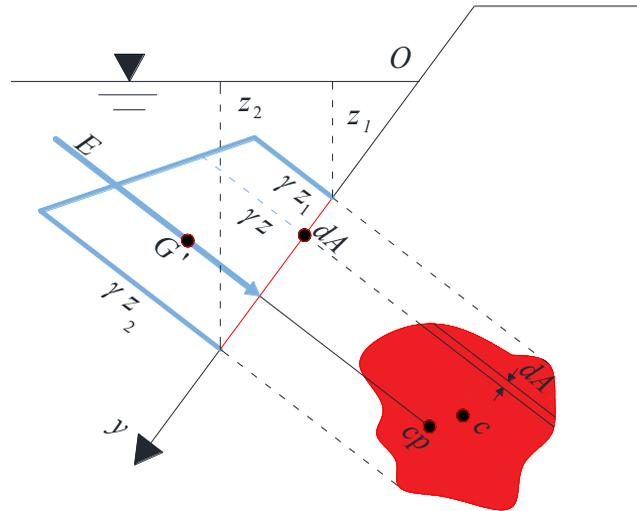


FIGURA 2.18 EL PRISMA DE PRESIONES

Las coordenadas y_c , y x_c , de la línea de acción se determinan igualando los momentos de los empujes elementales respecto a los ejes x y y , respectivamente. Para la coordenada x_c , se tiene

$$\mathcal{V}_{pp} x_c = \int_A x d\mathcal{V}_{pp}$$

$$x_c = \frac{1}{\mathcal{V}_{pp}} \int_A x d\mathcal{V}_{pp} \quad (2.33)$$

y para la coordenada y_c ,

$$\mathcal{V}_{pp} y_c = \int_A y d\mathcal{V}_{pp}$$

$$y_c = \frac{1}{\mathcal{V}_{pp}} \int_A y d\mathcal{V}_{pp} \quad (2.34)$$

Con lo que se demuestra que la línea de acción pasa por el centroide del prisma de presiones.

La figura 2.19 muestra el prisma sobre una superficie rectangular. Note que dentro del prisma el empuje resultante pasa por su centroide G' y se aplica en el centro de presiones de la superficie plana.

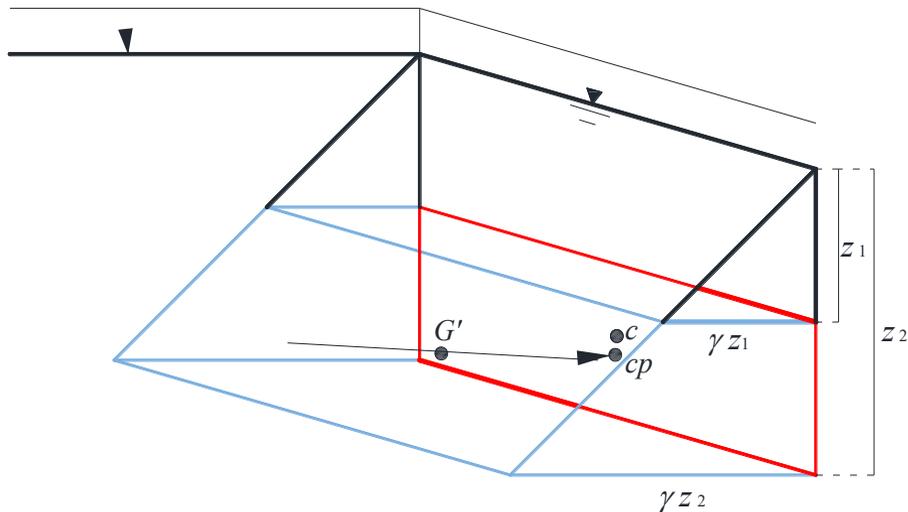


FIGURA 2.19 PRISMA DE PRESIONES SOBRE UNA SUPERFICIE RECTANGULAR

El uso del prisma de presiones se recomienda especialmente para empujes sobre superficies rectangulares; para las superficies circulares el cálculo del prisma es sencillo, pero se complica la ubicación del centroide con este método. Para otras geometrías es más sencillo emplear la expresión general. Sin embargo, cuando se tiene el mismo líquido a ambos lados de la superficie, el uso de prismas de presiones simplifica el cálculo aun en superficies no rectangulares.

EJEMPLO 2.14 Determine, con el prisma de presiones, el empuje hidrostático solicitado en el ejemplo 2.13.

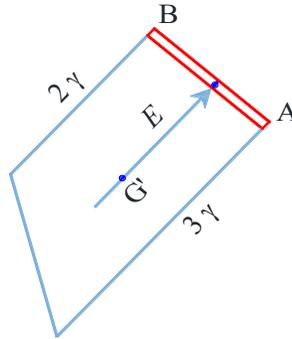
Solución

Las presiones en los puntos A y B son

$$p_A = p_c - 2\gamma = 49.05 \times 10^3 \text{ N/m}^2 - 2\text{m} \times 9810 \text{ N/m}^3 = 29430 \text{ N/m}^2 = 3\gamma$$

$$p_B = p_c - 3\gamma = 49.05 \times 10^3 \text{ N/m}^2 - 3\text{m} \times 9810 \text{ N/m}^3 = 19620 \text{ N/m}^2 = 2\gamma$$

El volumen del prisma de presiones sobre el domo es como el mostrado



y se determina como

$$V_{pp} = \pi R^2 \times \left(\frac{P_A + P_B}{2} \right) = \pi (0.75 \text{ m})^2 \times \left(\frac{29430 \text{ N/m}^2 + 19620 \text{ N/m}^2}{2} \right)$$

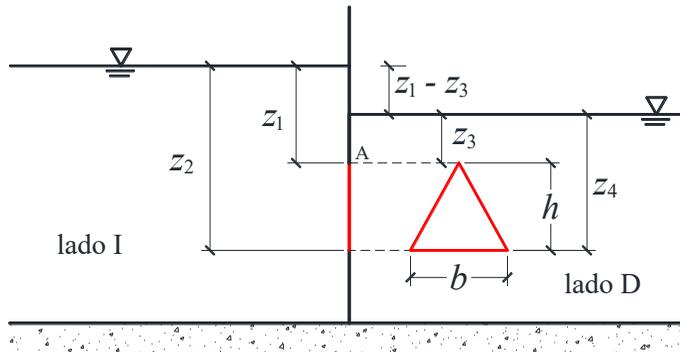
$$V_{pp} = 43339 \text{ N}$$

Dado que la magnitud del empuje hidrostático es igual al V_{pp} y además el empuje es normal a la superficie, se tiene

$$E = 43339 \text{ N} \quad \nearrow 48.19^\circ$$

y se comprueba el resultado obtenido en el ejemplo 2.13. Para determinar las coordenadas del centro de presiones en el caso de una superficie circular es más sencillo emplear la ecuación 2.30.

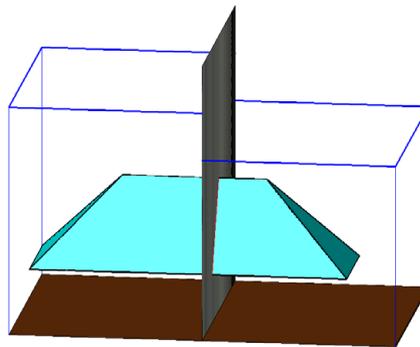
EJEMPLO 2.15. Determine la resultante del empuje hidrostático sobre la superficie triangular que se encuentra en un muro que separa dos almacenamientos que tienen diferentes elevaciones del nivel del agua. a) Emplee el prisma de presiones. b) Use la expresión general.



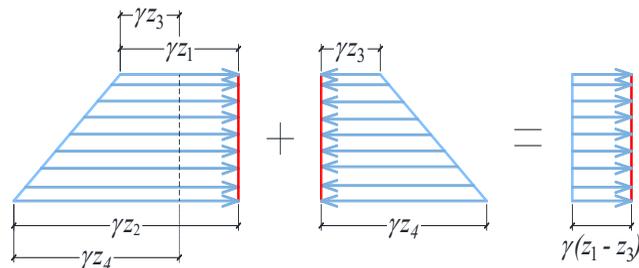
Los datos son: $z_1 = 1\text{ m}$, $z_2 = 1.9\text{ m}$, $z_3 = 0.5\text{ m}$, $z_4 = 1.4\text{ m}$, $b = 1\text{ m}$ y $h = 0.9\text{ m}$.

Solución

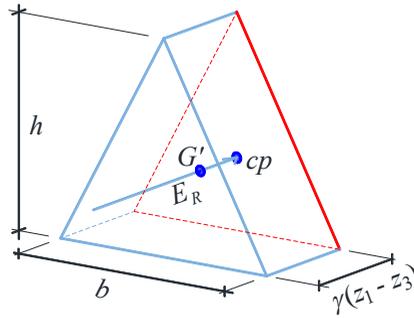
- a) Los empujes hidrostáticos a cada lado del muro tienen la misma dirección, pero diferente sentido, y dado que la superficie triangular se encuentra a diferentes profundidades, el prisma a cada lado tiene diferente magnitud.



En vez de calcular el empuje a cada lado de la superficie se puede hacer la suma de ambos directamente. Note que el prisma del lado derecho tiene la misma magnitud, pero el sentido del empuje es contrario al que tiene una parte del prisma del lado izquierdo, por lo que al hacer la suma de ambos se tiene



y el prisma de presiones resultante que considera $\rightarrow E_R = E_I - E_D$ es como el mostrado



por lo tanto, el empuje resultante es

$$E_R = \mathcal{V}_{ppR} = \frac{bh}{2} \times \gamma(z_1 - z_3) = \frac{1\text{m} \times 0.9\text{m}}{2} \times 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times (1 - 1.5)\text{m} = 2207.25 \text{ N} \rightarrow$$

Dado que el prisma está formado por una familia de triángulos paralelos, el centroide G' del prisma coincide con el centroide de la superficie triangular, el cual, medido desde el vértice del triángulo es

$$h_{G'} = \frac{2h}{3} = \frac{2 \times 0.9\text{m}}{3} = 0.6\text{m}$$

b) Los datos comunes para determinar el empuje hidrostático a cada lado de la superficie triangular son

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{1\text{m} \times 0.9\text{m}}{2} = 0.45 \text{ m}^2$$

$$h_c = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} 0.9\text{m} = 0.6\text{m}$$

$$\overline{r_x^2} = \frac{h^2}{18} = \frac{(0.9\text{m})^2}{18} = 0.045 \text{ m}^2$$

Dado que la superficie triangular está contenida en un plano vertical, $y = z$.

Lado I

$$y_{cI} = z_{cI} = z_1 + h_c = 1 \text{ m} + 0.6 \text{ m} = 1.6 \text{ m}$$

$$E_I = \gamma A z_{cI} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.45 \text{ m}^2 \times 1.6 \text{ m} = 7063.2 \text{ N} \rightarrow$$

$$y_{cpI} = \frac{\overline{r_x^2}}{y_{cI}} + y_{cI} = \frac{0.045 \text{ m}^2}{1.6 \text{ m}} + 1.6 \text{ m} = 1.628 \text{ m}$$

El punto de aplicación referido al vértice del triángulo es

$$d_{cpI} = y_{cpI} - z_1 = 1.628 \text{ m} - 1 \text{ m} = 0.628 \text{ m}$$

Lado D

$$y_{cD} = z_{cD} = z_3 + h_c = 0.5 \text{ m} + 0.6 \text{ m} = 1.1 \text{ m}$$

$$E_D = \gamma A z_{cD} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.45 \text{ m}^2 \times 1.1 \text{ m} = 4855.95 \text{ N} \leftarrow$$

$$y_{cpD} = \frac{\overline{r_x^2}}{y_{cD}} + y_{cD} = \frac{0.045 \text{ m}^2}{1.1 \text{ m}} + 1.1 \text{ m} = 1.141 \text{ m}$$

El punto de aplicación referido al vértice del triángulo es

$$d_{cpD} = y_{cpD} - z_3 = 1.141 \text{ m} - 0.5 \text{ m} = 0.641 \text{ m}$$

El empuje resultante se obtiene al hacer la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la superficie triangular

$$+ \rightarrow E_R = E_I - E_D = 7063.2 \text{ N} - 4855.95 \text{ N} = 2207.25 \text{ N} \rightarrow$$

El momento que ejerce la fuerza resultante sobre cualquier punto es igual a la suma de momentos que ejercen las fuerzas individuales. En este caso al calcular el momento con respecto al vértice de la superficie triangular se obtiene

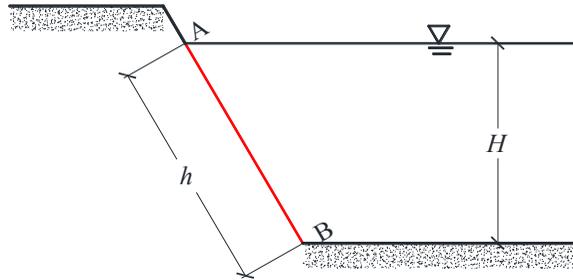
$$E_R \times d_{cp} = E_I \times d_{cpI} - E_D \times d_{cpD}$$

$$2207.25 \text{ N} \times d_{cp} = 7063.2 \text{ N} \times 0.628 \text{ m} - 4855.95 \text{ N} \times 0.641 \text{ m}$$

$$d_{cp} = 0.6 \text{ m}$$

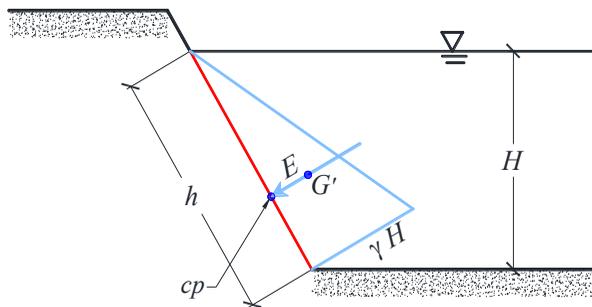
Evidentemente, el resultado es el mismo que el encontrado con los prismas de presiones, pero en este caso el procedimiento fue más largo.

EJEMPLO 2.16 Calcule el empuje que se ejerce sobre el muro rectangular de ancho b .



Solución

La presión sobre el muro tiene una distribución triangular que inicia con $p_A = 0$ y en el fondo es $p_B = \gamma H$.



Dado que en todo el ancho del muro las presiones son como las mostradas, el empuje resultante, calculado con el método del prisma de presiones, resulta

$$E = \mathcal{V}_{pp} = \frac{\gamma H \times h}{2} \times b$$

El empuje pasa por el centroide del prisma, que medido sobre el plano inclinado se ubica a una distancia medida desde la superficie libre igual a

$$h_{G'} = \frac{2h}{3}$$

Evidentemente, es la misma ubicación que se obtuvo en el ejemplo 2.12.

2.8 EMPUJE HIDROSTÁTICO SOBRE SUPERFICIES CURVAS

En el caso de superficies curvas sumergidas en líquidos en reposo las fuerzas elementales $dE = p dA$ tienen diferentes direcciones y, por tanto, deben sumarse como cantidades vectoriales: se toman sus componentes a lo largo de tres direcciones mutuamente perpendiculares y se suman como escalares, formando así las tres componentes del vector fuerza resultante. Por sencillez, en lo que sigue se considerará solo la dirección vertical y una horizontal.

La figura 2.20a muestra una superficie curva de radio R y ancho b (saliendo del papel). Dado que la presión aumenta con la profundidad, el empuje elemental dE también se incrementa con la misma y es normal al elemento dA sobre el que se ejerce, tal como se puede observar en la figura 2.20b.



FIGURA 2.20 a) SUPERFICIE CURVA. b) EMPUJES ELEMENTALES SOBRE UNA SUPERFICIE CURVA

Componentes horizontal y vertical

Sobre cada elemento dA se tiene una fuerza elemental dE , que como ya se indicó, siempre es normal y “hacia” la superficie; esta fuerza se puede proyectar en una componente horizontal y en otra vertical, tal como se muestra en la figura 2.21.

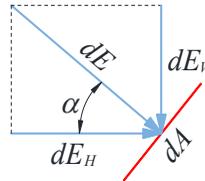


FIGURA 2.21 COMPONENTES HORIZONTAL Y VERTICAL DE dE SOBRE EL ELEMENTO DIFERENCIAL DE ÁREA

En la dirección vertical el empuje elemental es

$$dE_V = dE \operatorname{sen} \alpha = p dA \operatorname{sen} \alpha = \gamma z dA \operatorname{sen} \alpha$$

$dA \operatorname{sen} \alpha = dA_V$ es la proyección de dA sobre un plano normal al eje vertical. Al integrar, el empuje vertical resulta

$$E_V = \gamma \int_A z dA_V \quad (2.35)$$

La integral $\int_A z dA_V$ es el volumen de la columna de líquido \mathcal{V}'_c que se encuentra por encima de la superficie curva, por lo tanto, el empuje resultante en la dirección vertical es

$$E_V = \gamma \mathcal{V}'_c \quad (2.36)$$

La figura 2.22a muestra la columna de líquido sobre el elemento diferencial de área y la 2.22b el volumen total sobre la superficie curva.

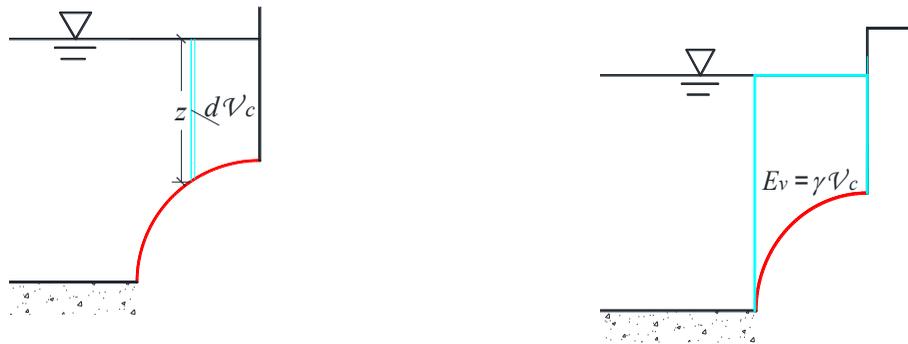


FIGURA 2.22 a) VOLUMEN SOBRE dA_V . b) EMPUJE VERTICAL SOBRE LA SUPERFICIE CURVA

La ecuación 2.36 indica que el empuje vertical es igual al peso de la columna “real” soportada por la superficie curva y el sentido es descendente; la línea de acción de la fuerza resultante se ubica en el centroide G' de la columna; cuando el líquido se encuentre por debajo de la superficie el empuje es igual al peso de la columna “ficticia”, el sentido es ascendente y la línea de acción se ubica en centroide de la columna.

En la dirección horizontal se tiene

$$dE_H = dE \cos \alpha = p dA \cos \alpha = \gamma z dA \cos \alpha$$

$dA \cos \alpha = dA_H$ es la proyección de dA sobre un plano normal al eje horizontal. Al integrar, el empuje horizontal resulta

$$E_H = \gamma \int_A z dA_H \tag{2.37}$$

Esta expresión es similar a la 2.27 para calcular el empuje sobre superficies planas, solo que en este caso el empuje que se está calculando es el que actúa sobre la proyección del área curva sobre un plano vertical normal a la dirección horizontal, por lo que

$$E_H = \gamma (z_c)_H A_H \tag{2.38}$$

Donde A_H es la proyección de la superficie curva en un plano normal al eje horizontal y $(z_c)_H$ es la distancia vertical desde la superficie libre hasta el centroide de A_H . La línea de acción por

la que pasa el empuje horizontal se calcula igual que con la ecuación 2.30; dado que el eje y es vertical, se tiene $z = y$ por lo que

$$(z_{cp})_H = \frac{\overline{r_x^2}}{(z_c)_H} + (z_c)_H \quad (2.39)$$

La figura 2.23 muestra la proyección de la superficie de un cuarto de cilindro sobre un plano vertical, el prisma de presiones sobre A_H , y el volumen de la columna real de líquido sobre la superficie curva.

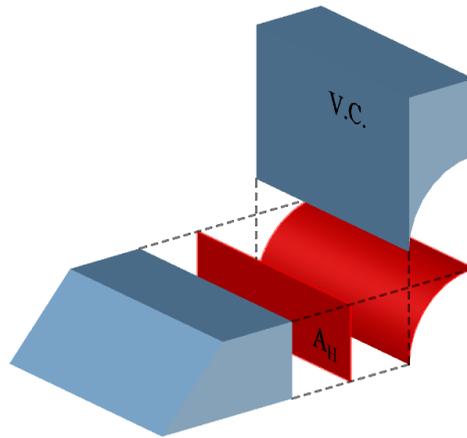
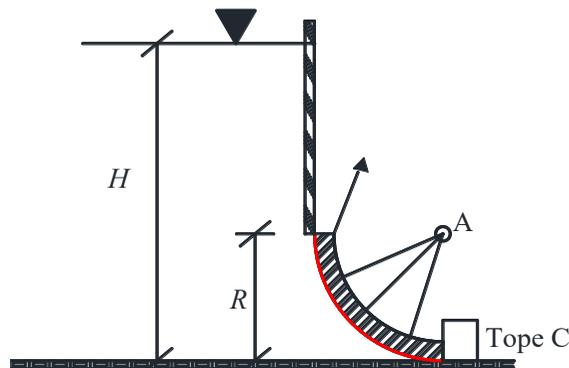


Figura 2.23 EMPUJES HORIZONTAL Y VERTICAL SOBRE LA SUPERFICIE DE UN CUARTO DE CILINDRO

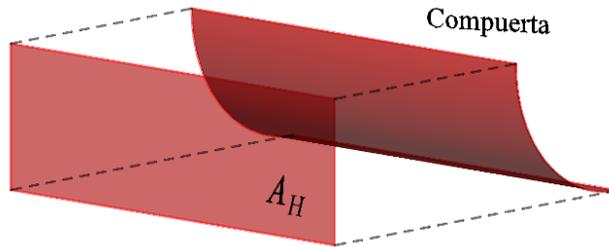
EJEMPLO 2.17 En el sistema mostrado en la figura se tiene: $H = 5 \text{ m}$, $R = 2 \text{ m}$ y $B = 6 \text{ m}$ (saliendo del plano mostrado). El líquido es agua. a) Calcule las componentes E_V y E_H del empuje hidrostático sobre la compuerta curva de $\frac{1}{4}$ de cilindro, así como la ubicación de sus respectivas líneas de acción d_G (para E_V) y d_{cp} (para E_H) referidas a la articulación A. b) Determine el momento que ejercen estas fuerzas con respecto a la articulación.



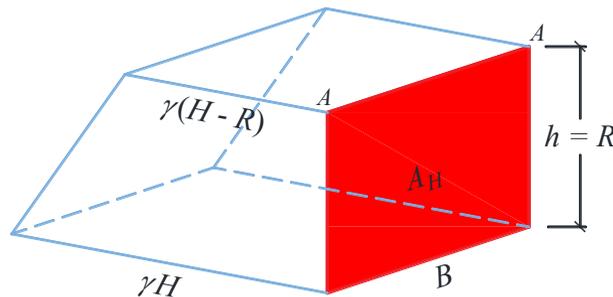
Solución

a)

Empuje horizontal. La proyección de la superficie curva sobre un plano vertical es la mostrada.



El empuje horizontal se puede calcular empleando el prisma de presiones o la expresión general. Dado que A_H es una superficie rectangular, el prisma es como el que se muestra a continuación



y se calcula como

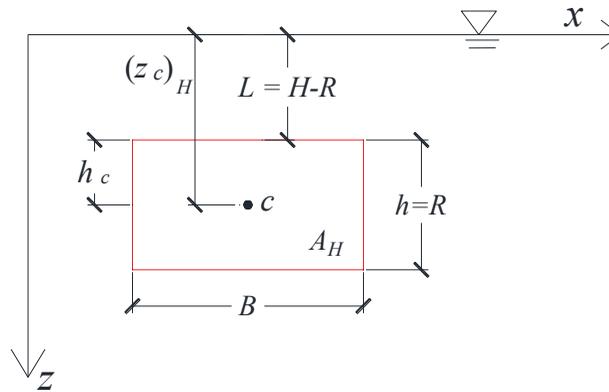
$$E_H = \mathcal{V}_{pp} = \frac{\gamma H + \gamma(H - R)}{2} \times h \times B$$

$$E_H = \frac{5\text{m}(9.81\text{kN/m}^3) + 3\text{m}(9.81\text{kN/m}^3)}{2} \times 2\text{m} \times 6\text{m} = 470.88 \text{ kN} \rightarrow$$

con la ayuda de la tabla 2.1 se calcula la línea de acción medida desde la articulación es

$$d_{cp} = h_{G'} = \frac{2}{3} \times \frac{\gamma(2H + (H - R))}{\gamma(H + (H - R))} = \frac{2\text{m}}{3} \times \frac{((2 \times 5) + 3)\text{m}}{(5 + 3)\text{m}} = 1.083 \text{ m}$$

Al mismo resultado se debe llegar si se emplea la ecuación 2.38 y se tiene



en que

$$A_H = h \times B = 2 \text{ m} \times 6 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$$

$$h_c = \frac{h}{2} = \frac{2 \text{ m}}{2} = 1 \text{ m}$$

$$\overline{r_x^2} = \frac{h^2}{12} = \frac{(2 \text{ m})^2}{12} = \frac{1}{3} \text{ m}^2$$

$$L = H - R = 5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

la distancia $(z_c)_H$ desde la superficie libre hasta el centroide, resulta

$$(z_c)_H = 3 \text{ m} + 1 \text{ m} = 4 \text{ m}$$

el empuje horizontal se determina con la ecuación

$$E_H = \gamma (z_c)_H A_H = 9.81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 4 \text{ m}^2 \times 12 \text{ m} = 470.88 \text{ kN} \rightarrow$$

el cual está aplicado en el centro de presiones z_{cp} que se determina a partir de la ecuación 2.39

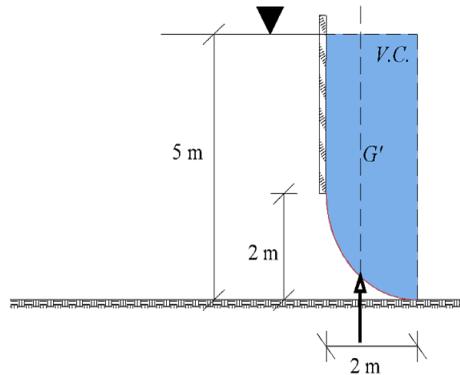
$$(z_{cp})_H = \frac{\overline{r_x^2}}{(z_c)_H} + (z_c)_H = \frac{0.333 \text{ m}^2}{4 \text{ m}} + 4 \text{ m} = 4.083 \text{ m}$$

La distancia d_{cp} medida desde la articulación A hasta el centro de presiones es igual a

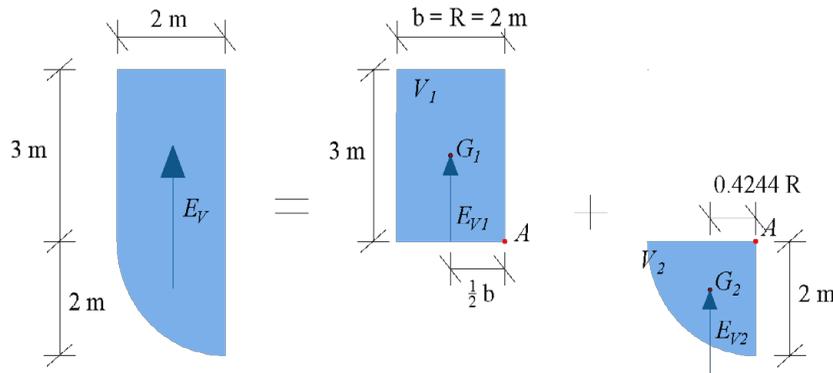
$$d_{cp} = (z_{cp})_H - L = 4.083 \text{ m} - 3 \text{ m} = 1.083 \text{ m}$$

Evidentemente, el resultado tiene que ser el mismo sin importar cual método se emplee.

Empuje vertical. En este caso la columna es “ficticia” y el empuje es ascendente. La siguiente figura muestra el área de la columna y para calcular el volumen se multiplica por el ancho B de esta.



El área de la columna puede descomponerse en dos formas geométricas sencillas: un rectángulo y un cuarto de círculo. Para determinar los volúmenes se multiplica por el ancho B .



$$V_{c1} = 2 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 6 \text{ m} = 36 \text{ m}^3, \quad V_{c2} = \frac{\pi(2 \text{ m})^2}{4} \times 6 \text{ m} = 18.85 \text{ m}^3$$

$$V_{c1} + V_{c2} = 54.85 \text{ m}^3$$

$$E_V = \gamma(V_{c1} + V_{c2}) = 9.81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} (54.85 \text{ m}^3) = 538.08 \text{ kN} \uparrow$$

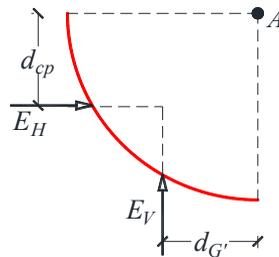
Los centroides de las columnas \mathcal{V}'_{c1} y \mathcal{V}'_{c2} medidos desde A son, respectivamente

$$d_{G1} = \frac{b}{2} = \frac{2\text{ m}}{2} = 1\text{ m} \quad \text{y} \quad d_{G2} = 0.4244R = 0.4244 \times 2\text{ m} = 0.8488\text{ m}$$

El centroide $d_{G'}$ de la columna resultante es

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}'_{c1} + \mathcal{V}'_{c2}) \times d_{G'} &= \mathcal{V}'_{c1} \times d_{G1} + \mathcal{V}'_{c2} \times d_{G2} \\ 54.85\text{ m}^3 \times d_{G'} &= 36\text{ m}^3 \times 1\text{ m} + 18.85\text{ m}^3 \times 0.8488\text{ m} \\ d_{G'} &= 0.948\text{ m} \end{aligned}$$

- b) Para obtener el momento que ejercen las componentes horizontal y vertical del empuje hidrostático sobre la compuerta se tiene



$$\Sigma M_A = E_H \times d_{cp} - E_V \times d_{G'}$$

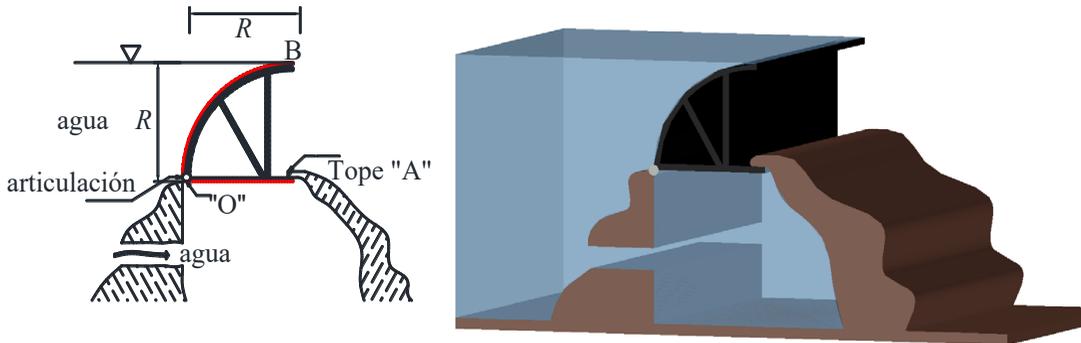
$$\Sigma M_A = 470.88\text{ kN} \times 1.083\text{ m} - 538.07\text{ kN} \times 0.948\text{ m}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

El resultado anterior indica que para abrir la compuerta solo se requiere vencer el peso propio y el efecto de la fricción. Esto es evidente, ya que, al ser un cuarto de círculo, todas las fuerzas elementales pasan por el centro y dado que es una compuerta de $\frac{1}{4}$ de cilindro esto se extrapola a la articulación.

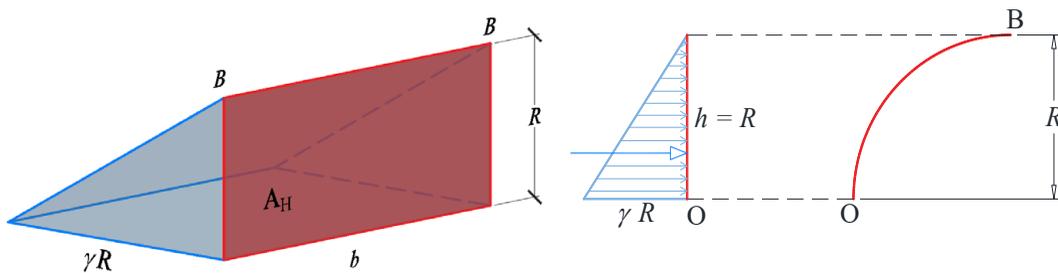
Ejemplo 2.18 La figura muestra una compuerta de radio $R = 3\text{ m}$ y ancho $b = 5\text{ m}$.

- Calcule las componentes E_V y E_H del empuje hidrostático sobre la compuerta radial mostrada en la figura, así como la ubicación de sus respectivas líneas de acción d_G y d_{cp} .
- Determine la reacción en el tope A y en la articulación O. Note que hay agua arriba y abajo de la compuerta. Resuelva empleando sistema gravitacional de unidades.



Solución

- Empuje horizontal.** La proyección del área de la compuerta en un plano normal al eje horizontal es un rectángulo. La distribución de presiones varía linealmente: de cero en la superficie libre hasta γR en la profundidad O.

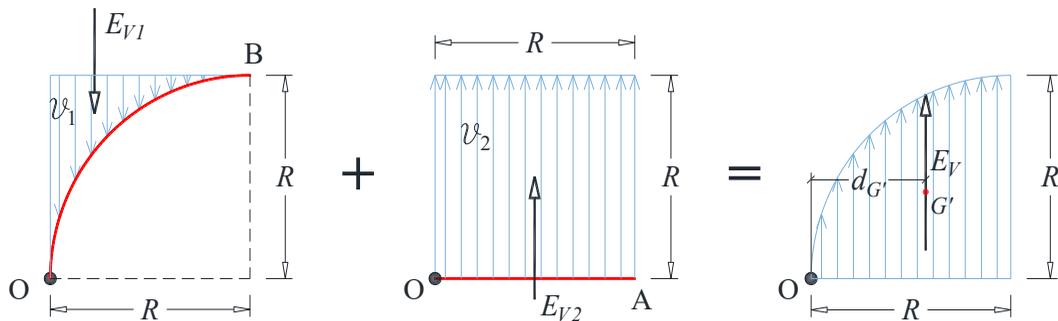


$$E_H = \frac{\gamma R \times R}{2} \times b = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times \frac{(3\text{ m})^2}{2} \times 5\text{ m} = 22500\text{ kgf} \rightarrow$$

la línea de acción medida desde el punto O, y dado que la cuña de presiones tiene altura $R = h$, resulta

$$d_{cpO} = R - h_G = R - \frac{2}{3}R = 3\text{ m} - \frac{2}{3} \times 3\text{ m} = 1.0\text{ m}$$

Empuje vertical. Sobre la compuerta se tienen dos empujes verticales: descendente sobre la parte curva BO y ascendente sobre la parte plana OA, dado que tienen diferentes sentidos, al hacer la suma vectorial de los empujes se tiene una columna resultante y no es necesario calcular por separado los empujes descendente y ascendente, sino directamente el empuje vertical resultante.



$$E_V = \gamma \times \frac{\pi R^2}{4} \times b = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times \frac{\pi (3\text{ m})^2}{4} \times 5\text{ m} = 35343\text{ kgf} \uparrow$$

El centroide $d_{G'}$ de la columna resultante, medido desde O es

$$d_{G'} = 0.5756R = 0.5756 \times 3\text{ m} = 1.727\text{ m}$$

- b) Para determinar la reacción en el tope A se toman momentos respecto a la articulación O. El sentido de R_A es descendente.

$$\sum M_O = -E_H \times d_{cpO} + E_V \times d_{G'} - R_A \times R = 0$$

$$22500\text{ kgf} \times 1.0\text{ m} - 35343\text{ kgf} \times 1.727\text{ m} - R_A \times 3\text{ m} = 0$$

$$R_A = 12843\text{ kgf}$$

Para calcular las reacciones en la articulación O se establece el equilibrio en la dirección horizontal y en la vertical

$$+ \rightarrow \sum F_H = E_H - R_{OH} = 0$$

$$R_{OH} = 22\,500 \text{ kgf} \leftarrow$$

$$+ \uparrow \sum F_V = E_V - R_A - R_{OV} = 0$$

$$35\,343 \text{ kgf} - 12\,843 \text{ kgf} - R_{OV} = 0$$

$$R_{OV} = 22\,500 \text{ kgf} \downarrow$$

2.9 EMPUJE SOBRE CUERPOS TOTAL O PARCIALMENTE SUMERGIDOS

La fuerza resultante que un fluido en reposo ejerce sobre un cuerpo sumergido parcial o totalmente en él, se llama fuerza de flotación. Esta fuerza siempre actúa verticalmente hacia arriba ya que las fuerzas de presión que actúan desde abajo son mayores que las que actúan desde arriba. En cualquier dirección horizontal el empuje resultante es nulo, ya que siempre hay dos proyecciones del cuerpo sumergido sobre planos verticales sobre los cuales se ejercen fuerzas horizontales con la misma magnitud, pero con sentido contrario.

En la figura 2.24, la fuerza vertical resultante ejercida sobre un elemento del cuerpo con forma de prisma y sección transversal dA es

$$dE_V = (p_2 - p_1)dA = \gamma(z_2 - z_1)dA = \gamma d\mathcal{V}'_S$$

Donde $d\mathcal{V}'_S$ es el volumen elemental sumergido del prisma. Al integrar a lo largo de todo el cuerpo resulta

$$E_V = \gamma \mathcal{V}'_S \quad (2.40)$$

en que el peso específico del fluido se consideró constante y \mathcal{V}'_S es el volumen sumergido del cuerpo. La expresión 2.40 es válida para cuerpos total o parcialmente sumergidos. El punto de

aplicación de la fuerza de flotación, también conocida como fuerza boyante, coincide con el centroide del volumen desalojado y se le conoce como centro de flotación o centro de carena.

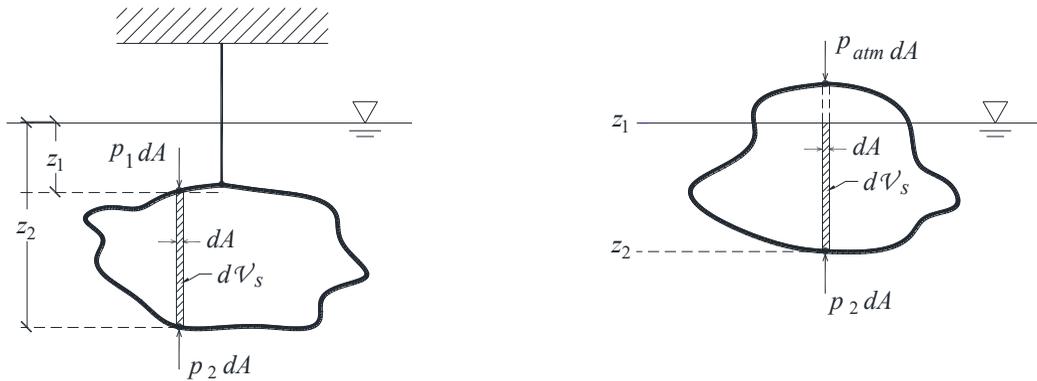


Figura 2.24 COMPONENTE VERTICAL SOBRE UN ELEMENTO DE UN CUERPO SUMERGIDO

La ecuación 2.40 es la interpretación matemática del conocido Principio de Arquímedes:

Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje vertical ascendente igual al peso del volumen del líquido desalojado.

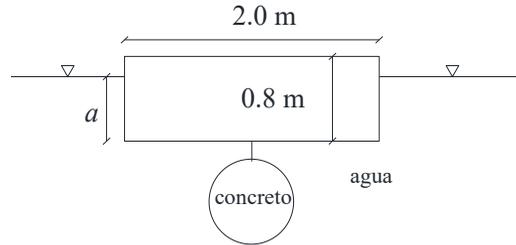
Al resolver problemas que traten de cuerpos flotantes o cuerpos totalmente sumergidos en fluidos en reposo, se suele considerar al cuerpo como un cuerpo libre y se acostumbra dibujar el diagrama correspondiente indicando todas las fuerzas que intervienen. El peso del cuerpo se representa actuando a través de su centro de gravedad y la acción del fluido se indica mediante la fuerza de flotación que actúa en el centroide del volumen desalojado (volumen sumergido del cuerpo).

La fuerza de flotación no solo equilibra al peso, sino que debe estar aplicada en la misma línea vertical, ya que en equilibrio estático no puede haber momentos.

Eventualmente, un cuerpo puede tener el peso y volumen adecuados para que su peso específico sea igual al del fluido. En este caso, el cuerpo tendrá flotabilidad neutra y permanecerá en el punto en que se le sumerja. Un submarino puede adquirir flotabilidad negativa o positiva al bombear, respectivamente, agua hacia dentro o hacia afuera de los tanques de lastre.

EJEMPLO 2.19 Un bloque de madera ($\rho_{mad} = 700\text{kg/m}^3$) que se encuentra en flotación tiene las dimensiones que se muestran en la figura y un ancho $b = 0.9\text{ m}$ (saliendo del plano mostrado).

- a) Calcule el volumen y peso de concreto ($\rho_{conc} = 2400\text{kg/m}^3$) que debe sujetarse a la parte inferior del bloque tal que $a = 0.70\text{ m}$. b) Si se retira el concreto sumergido, ¿cuánto concreto, uniformemente repartido se debe poner en la parte superior del bloque tal que no cambie el valor de a ?



Solución

- a) La condición de equilibrio es

$$\sum E_V - \sum W = 0$$

$$E_{V1} + E_{V2} - W_{mad} - W_{conc} = 0$$

donde E_{V1} es el empuje sobre el volumen sumergido de madera, E_{V2} es el empuje sobre el concreto, W_{mad} es el peso del bloque de madera y W_{conc} es el peso del concreto. Para este caso el volumen de concreto es igual a su volumen sumergido.

$$E_{V1} = \gamma_{agua} \mathcal{V}_{sum} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.7\text{ m} \times 0.9\text{ m} \times 2\text{ m} = 12\,360.6\text{ N}$$

$$E_{V2} = \gamma_{agua} \mathcal{V}_{conc} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times \mathcal{V}_{conc}$$

$$W_{mad} = \rho_{mad} g \mathcal{V}_{mad} = 700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.8\text{ m} \times 0.9\text{ m} \times 2\text{ m} = 9888.48\text{ N}$$

$$W_{conc} = \rho_{conc} g \mathcal{V}_{conc} = 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \mathcal{V}_{conc}$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio se tiene

$$12360.6 \text{ N} + 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times \mathcal{V}'_{conc} = 9888.48 \text{ N} + 23544 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times \mathcal{V}'_{conc}$$

al despejar el volumen de concreto y calcular su peso resulta

$$\mathcal{V}'_{conc} = 0.180 \text{ m}^3$$

$$W_{conc} = \rho_{conc} g \mathcal{V}'_{conc} = 4237.92 \text{ N}$$

- b) Para este caso no cambian E_{V1} ni W_{mad} , pero ya no existe empuje sobre el concreto dado que este se coloca en la parte superior del bloque de madera, por lo que la ecuación de equilibrio ahora es

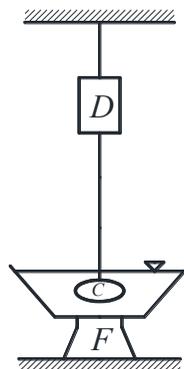
$$E_{V1} = W_{mad} + W_{conc}$$

$$12360.6 \text{ N} = 9888.48 \text{ N} + W_{conc}$$

$$W_{conc} = 2472.12 \text{ N}$$

$$\mathcal{V}'_{conc} = \frac{W_{conc}}{\rho_{conc} g} = 0.105 \text{ m}^3$$

EJEMPLO 2.20 Se tiene un cuerpo sumergido en agua y soportado por un cable el cual pende de un dinamómetro D que registra 70 N. El peso del agua es $W_a = 60 \text{ N}$, el peso del recipiente que contiene al agua es $W_B = 20 \text{ N}$. La báscula F que soporta al recipiente marca 135 N. Calcule la densidad ρ_c del cuerpo sumergido.



Solución

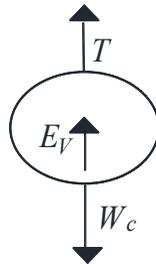
La báscula registra el peso del agua, el peso del recipiente y el peso del cuerpo menos el peso que ya está soportando el dinamómetro.

$$W_a + W_B + W_c - D = F$$

$$60 \text{ N} + 20 \text{ N} + W_c - 70 \text{ N} = 135 \text{ N}$$

$$W_c = 125 \text{ N}$$

El empuje vertical se determina al realizar un equilibrio de las fuerzas verticales que actúan sobre el cuerpo, que son la tensión del cable, el peso propio del cuerpo y el empuje hidrostático.



$$T + E_V - W_c = 0$$

$$E_V = 125 \text{ N} - 70 \text{ N} = 55 \text{ N}$$

Una vez que se conoce el empuje vertical se determina el volumen sumergido del cuerpo, que en este caso es igual al volumen total

$$E_V = \gamma \mathcal{V}'_s$$

$$\mathcal{V}'_s = 55 \text{ N} / 9810 (\text{N} / \text{m}^3) = 5.607 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = \mathcal{V}'_c$$

y al partir del volumen y peso del cuerpo la densidad resulta igual a

$$\rho_c = \frac{W_c}{g \mathcal{V}'_c} = \frac{125 (\text{N})}{9.81 (\text{m/s}^2) \times 5.607 \times 10^{-3} (\text{m}^3)} = 2272 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Hidrómetro

El principio de flotación permite tener una medición precisa de la densidad de un líquido. El dispositivo empleado es el densímetro, también conocido como hidrómetro, el cual consiste en un bulbo de vidrio con un peso en un extremo para hacer que el densímetro flote en posición vertical, y un vástago de diámetro constante que se extiende hasta el otro extremo, según se muestra en la figura 2.25. El densímetro se diseña de forma tal que únicamente el vástago esté por encima de la superficie del líquido.

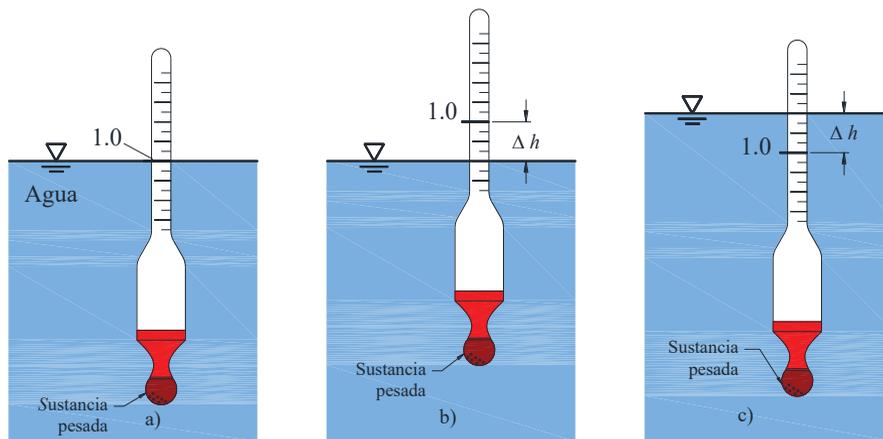


FIGURA 2.25 DENSÍMETRO. a) EN AGUA. b) EN UN LÍQUIDO CON DENSIDAD MAYOR QUE LA DEL AGUA. c) EN UN LÍQUIDO CON DENSIDAD MENOR QUE LA DEL AGUA

En la figura 2.25a se muestra un densímetro que cuando se coloca en agua pura, la lectura es 1.0. Para este caso el balance de fuerzas es

$$W_d = E_V = \rho_{\text{agua}} g \mathcal{V}'_0$$

Donde W_d es el peso del densímetro y \mathcal{V}'_0 es el volumen sumergido por debajo de la superficie libre del agua. En un líquido desconocido con densidad ρ_2 , como el mostrado en la figura 2.25b), el balance de fuerzas resulta

$$W_d = E_V = \rho_2 g (\mathcal{V}'_0 - A \Delta h)$$

Donde A es el área de la sección transversal del vástago. Al igualar ambas expresiones se tiene

$$\Delta h = \frac{\mathcal{V}_0}{A} \left(1 - \frac{\rho_{agua}}{\rho_2} \right) \quad (2.41)$$

Para un hidrómetro dado \mathcal{V}_0 y A son constantes, así que la cantidad Δh solo depende de la densidad relativa $d_R = \rho_2 / \rho_{agua}$. De igual forma, a partir de $\mathcal{V}_0 = W_d / \rho_{agua} g$ y la ecuación 2.41 se puede encontrar el valor de la densidad relativa conocido Δh . Para el caso de un líquido con densidad menor a la del agua, el volumen sumergido es $(\mathcal{V}_0 + A \Delta h)$.

2.10 ESTABILIDAD

Un cuerpo está en una posición de equilibrio estable si al ser desplazado vuelve a su posición de equilibrio. Recíprocamente, el cuerpo está en una posición de equilibrio inestable si cuando es desplazado, incluso ligeramente, se mueve a otra posición de equilibrio. Las condiciones de estabilidad de cuerpos sumergidos dependen de la ubicación del centro de gravedad G del cuerpo con respecto a la del centroide C (centro de flotación) del volumen desplazado. Un cuerpo sumergido es estable si tiene un fondo pesado y, por tanto, el centro de gravedad está por debajo del centro de flotación (figura 2.26a). En este caso una perturbación rotacional produce un momento de restitución que lo regresa a su posición estable original. Por ejemplo, en un submarino el peso de motores y cabinas se ubican en la mitad inferior del mismo. Un cuerpo sumergido cuyo centro de gravedad esté por encima del centro de flotación (figura 2.26b), es inestable y cualquier perturbación hará que el cuerpo se voltee. Un cuerpo para el cual el centro de gravedad y el centro de flotación coinciden (figura 2.26c) es neutralmente estable; situación que se observa siempre que la densidad es constante en todos los puntos del cuerpo sumergido.

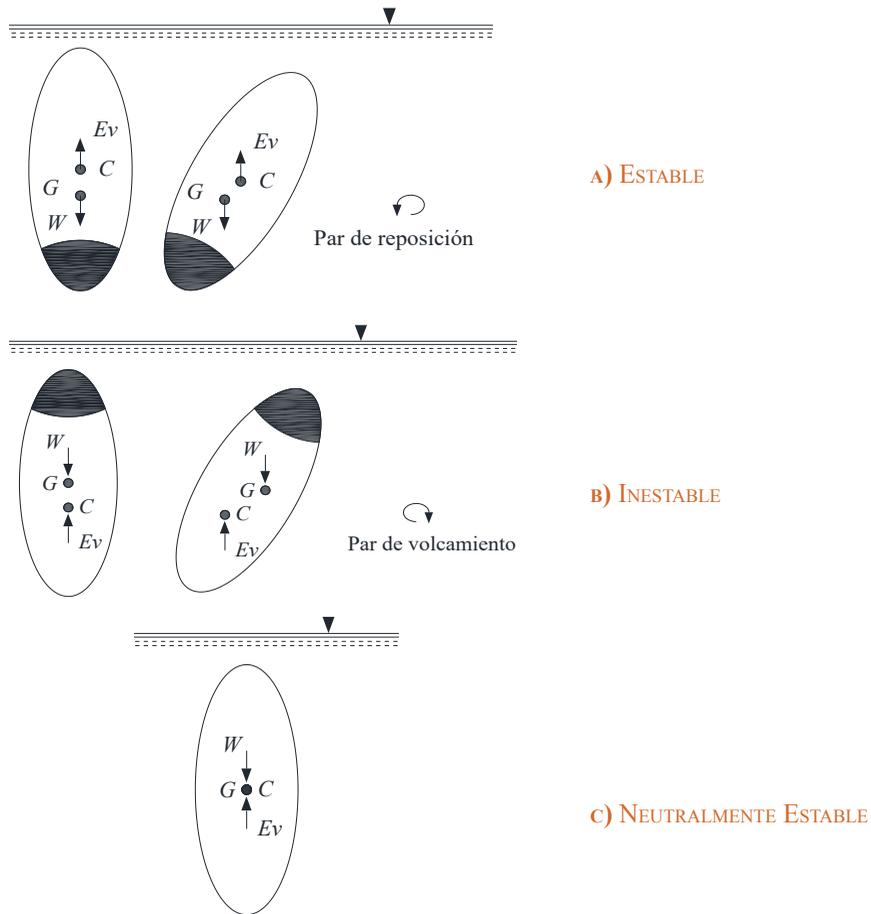


FIGURA 2.26 CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE LOS CUERPOS SUMERGIDOS

Para el caso de los cuerpos flotantes el problema de estabilidad es más complicado, ya que a medida que el cuerpo gira varía la ubicación del centro de flotación debido a que cambia el volumen desplazado. Si el centro de gravedad está por debajo del centroide, el cuerpo siempre es estable. Sin embargo, el cuerpo puede ser estable, aunque el centro de gravedad esté por encima del centro de flotación como se muestra en la figura 2.27a. Cuando el cuerpo gira, el centroide del volumen de líquido desplazado se mueve a un nuevo punto C' , que se muestra en la figura 2.27b. Si el punto C' está suficientemente lejos, estas dos fuerzas crean un momento de restitución y regresan el cuerpo a la posición original. Esto lo determina la altura metacéntrica \overline{GM} que se define como la distancia desde G hasta el metacentro M (punto de intersección de las líneas de acción de la fuerza de flotación antes y después de la rotación). Un cuerpo flotante es estable si M está por encima de G y, por consiguiente, \overline{GM} es positiva, y es inestable si M está por debajo de G y, en consecuencia, \overline{GM} es negativa.

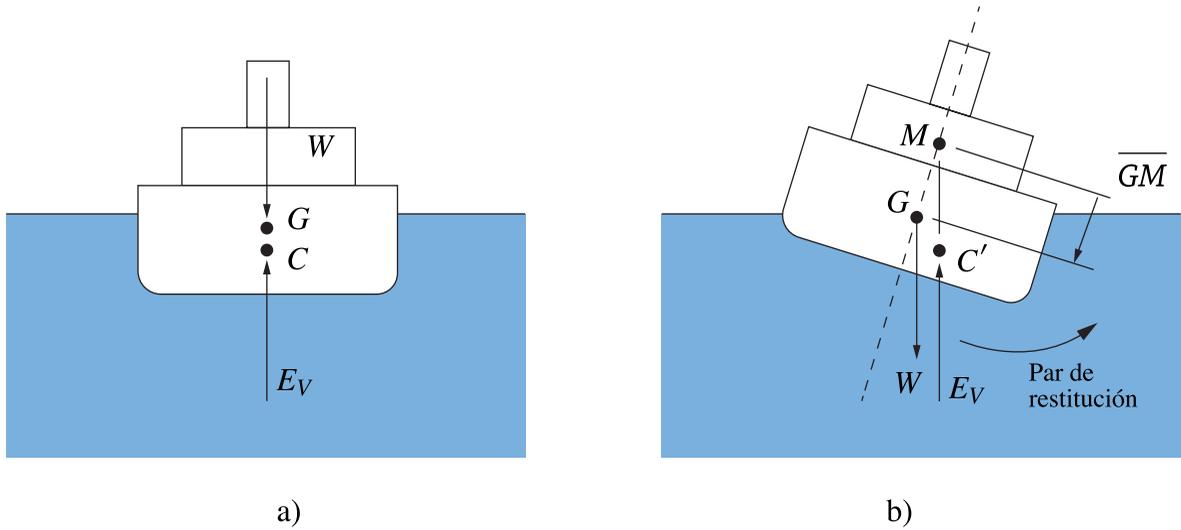


FIGURA 2.27 ESTABILIDAD DE UN CUERPO FLOTANTE: a) POSICIÓN DE EQUILIBRIO, b) POSICIÓN GIRADA

Para determinar la distancia metacéntrica \overline{GM} , se presenta la figura 2.28 que muestra un cuerpo flotante, con sección transversal uniforme y largo l constante, el cual se ha inclinado un pequeño ángulo α .

El volumen desplazado \mathcal{V} es igual al volumen original \mathcal{V}_0 por debajo de la línea de flotación más \mathcal{V}_{DOE} que es el volumen que se obtiene de multiplicar el área DOE por la longitud l menos el volumen \mathcal{V}_{AOB} que es el área AOB multiplicada por l .

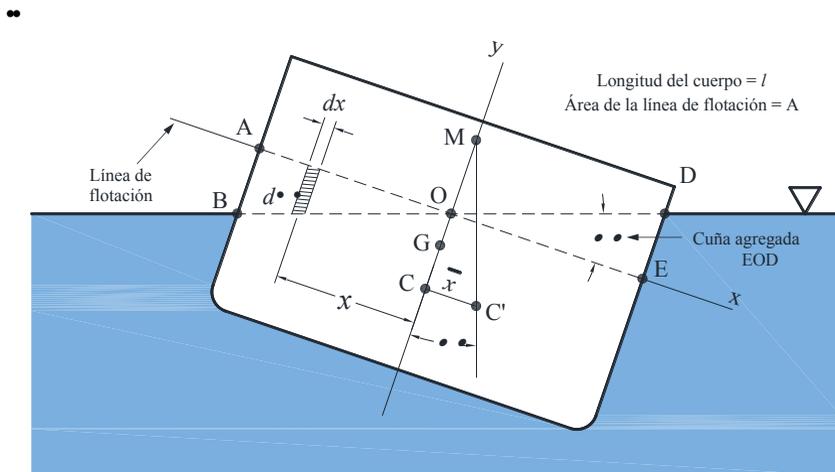


FIGURA 2.28 CUERPO FLOTANTE CON SECCIÓN TRANSVERSAL UNIFORME (ADAPTADO DE POTTER 1998)

Para encontrar la coordenada centroidal C' (donde $\bar{x} = CC'$) del volumen compuesto, se toman momentos respecto al plano de simetría del cuerpo flotante. :

$$\bar{x} \mathcal{V} = \text{momento de } \mathcal{V}_0 \text{ antes de la inclinación} - \text{momento de } \mathcal{V}_{AOB} + \text{el momento de } \mathcal{V}_{DOE} \quad (2.42)$$

Dado que el volumen inicial de flotación es simétrico respecto al eje y , su momento es cero. El momento de \mathcal{V}_{AOB} es negativo, en tanto el de \mathcal{V}_{DOE} es positivo, entonces se tiene

$$\bar{x} \mathcal{V} = (-)(-) \int_{AOB} x d\mathcal{V} + \int_{DOE} x d\mathcal{V}$$

El volumen diferencial $d\mathcal{V}$ es igual al producto de la longitud $x \tan \alpha$ por el área diferencial dA . En consecuencia, la ecuación 2.42 puede escribirse como

$$\bar{x} \mathcal{V} = \tan \alpha \int_{AOB} x^2 dA + \tan \alpha \int_{DOE} x^2 dA$$

las dos integrales se pueden sumar considerando el área total de la línea de flotación

$$\bar{x} \mathcal{V} = \tan \alpha \int_{A \text{ línea de flotación}} x^2 dA \quad (2.43)$$

$I = \int_A x^2 dA$ es el segundo momento del área, definida por la línea de flotación, con respecto al eje x , entonces la ecuación 2.43 queda

$$\bar{x} \mathcal{V} = \tan \alpha I$$

De la figura 2.28 se observa que $\bar{x} = \overline{CM} \tan \alpha$, por lo que $\overline{CM} \mathcal{V} = \tan \alpha I$; además, $\overline{CG} + \overline{GM} = \overline{CM}$, por lo que se tiene

$$\overline{GM} = \frac{I}{\mathcal{V}} - \overline{CG} \quad (2.44)$$

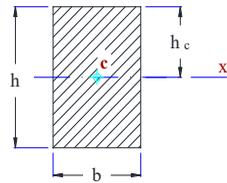
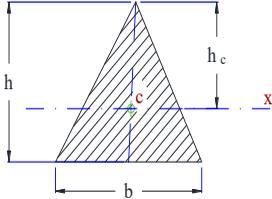
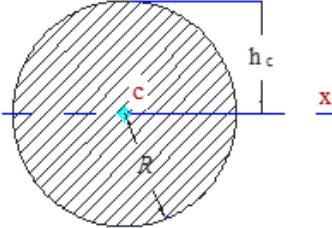
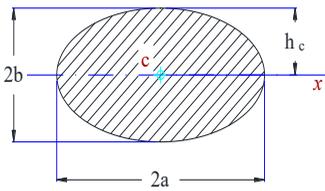
La ecuación 2.44 se utiliza para determinar la estabilidad de los cuerpos flotantes. Si \overline{GM} es positiva, el cuerpo es estable y si es negativa, es inestable. Si bien la ecuación se dedujo para

un cuerpo flotante con sección transversal uniforme, es aplicable a cuerpos flotantes en general, pero su cálculo es más complicado. El análisis realizado es para un pequeño movimiento rotacional.

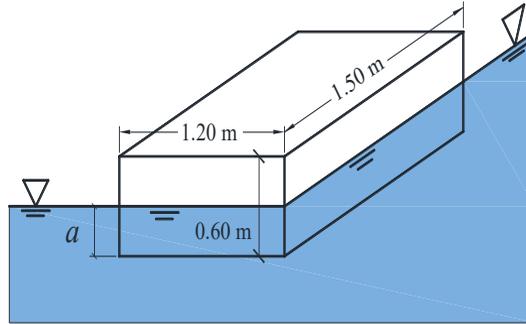
La rotación alrededor del eje longitudinal se denomina balanceo y la que se presenta alrededor del eje transversal se conoce como cabeceo. Estos términos son ampliamente empleados en embarcaciones.

La tabla 2.2 presenta los segundos momentos de área de algunas formas geométricas comunes. En la literatura técnica es fácil obtener información de otras geometrías.

Tabla 2.2 SEGUNDO MOMENTO DEL ÁREA DE ALGUNAS FORMAS GEOMÉTRICAS

Figura	Segundo momento
	$I = \frac{bh^3}{12}$
	$I = \frac{bh^3}{36}$
	$I = \frac{\pi D^4}{64}$
	$I = \frac{\pi ab^3}{4}$

EJEMPLO 2.21 Se muestra un bloque en flotación que tiene un peso de 6357 N. Estime las condiciones de estabilidad con respecto al eje transversal A-A y al eje longitudinal B-B.



Solución

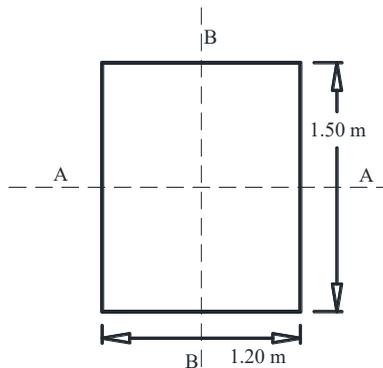
Según el principio de Arquímedes, el volumen sumergido es

$$V_s = \frac{W_{\text{bloque}}}{\gamma_{\text{agua}}} = \frac{6357 \text{ N}}{9810 (\text{N} / \text{m}^3)} = 0.648 \text{ m}^3$$

la profundidad de flotación resulta

$$a = \frac{0.648 \text{ m}^3}{1.2 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}} = 0.36 \text{ m}$$

El centro de flotación y el centro de gravedad del bloque se ubican, respectivamente, a $0.36 \text{ m} / 2 = 0.18 \text{ m}$ y a $0.6 \text{ m} / 2 = 0.30 \text{ m}$ por arriba del borde inferior del bloque, por lo que $\overline{CG} = 0.30 \text{ m} - 0.18 \text{ m} = 0.12 \text{ m}$. La superficie en la línea de flotación es como se muestra:



Dado que la sección es rectangular, el segundo momento de área con respecto al eje centroidal es $I = \frac{bh^3}{12}$.

Estabilidad con respecto al eje $A - A$

$$I_{AA} = \frac{1}{12} \times 1.2 \text{ m} \times (1.5 \text{ m})^3 = 0.338 \text{ m}^4$$

de la ecuación 2.44 la altura metacéntrica resulta

$$\overline{GM} = \frac{0.338 \text{ m}^4}{0.648 \text{ m}^3} - 0.18 \text{ m} = 0.34 \text{ m} > 0$$

el cuerpo es estable con respecto al volteo alrededor del eje $A - A$

Estabilidad con respecto al eje $B - B$

$$I_{BB} = \frac{1}{12} \times 1.5 \text{ m} \times (1.2 \text{ m})^3 = 0.216 \text{ m}^4$$

$$\overline{GM} = \frac{0.216 \text{ m}^4}{0.648 \text{ m}^3} - 0.18 \text{ m} = 0.153 \text{ m} > 0$$

por lo que el cuerpo también es estable con respecto al volteo alrededor del eje longitudinal.

EJEMPLO 2.22 a) Un cilindro con diámetro de 0.25 m y longitud de 0.3 m está hecho de un material cuyo peso específico es 7000 N/m^3 . ¿Flotará en el agua el cilindro con una de sus bases sumergidas? b) Considere los mismos datos, excepto que la longitud es de 0.10 m y también revise si el nuevo cilindro flotará con una base circular sumergida.

Solución

a) Con el extremo circular sumergido la superficie de flotación también es circular y su segundo momento se determina como

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \times (0.25 \text{ m})^4}{64} = 0.000192 \text{ m}^4$$

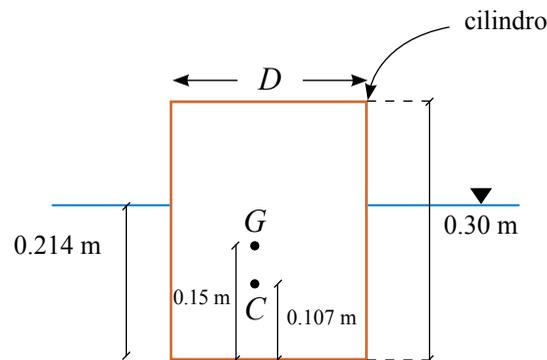
El volumen desplazado será

$$v'_S = \frac{W_{cilindro}}{\gamma_{agua}} = \frac{\gamma_{cilindro} V_{cilindro}}{\gamma_{agua}} = \frac{7000(\text{N} / \text{m}^3) \times \pi(0.125\text{m})^2 \times 0.3\text{m}}{9810(\text{N} / \text{m}^3)} = 0.0105 \text{m}^3$$

la profundidad de flotación resulta

$$a = \frac{v'_S}{A} = \frac{0.0105 \text{m}^3}{\pi(0.125\text{m})^2} = 0.214\text{m}$$

El centro de gravedad y el centro de flotación del cilindro se ubican, respectivamente, a $0.30\text{m} / 2 = 0.15\text{m}$ y a $0.214\text{m} / 2 = 0.107\text{m}$ por arriba de la base inferior, por lo que $\overline{CG} = 0.15\text{m} - 0.107\text{m} = 0.043\text{m}$.



entonces, la altura metacéntrica es

$$\overline{GM} = \frac{0.000192\text{m}^4}{0.0105\text{m}^3} - 0.043\text{m} = -0.0243\text{m} < 0$$

Este valor es negativo, lo que indica que el cilindro no flotará con su extremo horizontal sumergido. Seguramente flotará de lado. Este caso se puede extrapolar a los troncos de árbol que flotan en un río, cuyos ejes longitudinales son paralelos al agua.

- b) El segundo momento estático de la superficie circular no cambia, pero ahora el volumen sumergido queda

$$V'_S = \frac{W_{cilindro}}{\gamma_{agua}} = \frac{7000 (\text{N} / \text{m}^3) \times \pi (0.125\text{m})^2 \times 0.1\text{m}}{9810 (\text{N} / \text{m}^3)} = 0.0035 \text{ m}^3$$

la profundidad de flotación resulta

$$a = \frac{V'_S}{A} = \frac{0.0035 \text{ m}^3}{\pi (0.125\text{m})^2} = 0.0714\text{m}$$

El centro de gravedad y el centro de flotación del cilindro se ubican, respectivamente, a $0.10\text{m} / 2 = 0.05\text{m}$ y a $0.0714\text{m} / 2 = 0.0357\text{m}$ por arriba de la base inferior, por lo que la altura metacéntrica es $\overline{CG} = 0.05\text{m} - 0.0357\text{m} = 0.0143\text{m}$. Entonces, la altura metacéntrica es

$$\overline{GM} = \frac{0.000192 \text{ m}^4}{0.0035 \text{ m}^3} - 0.0143\text{m} = 0.0405 \text{ m} > 0$$

Dado que \overline{GM} es positivo, el cilindro sí flotará con un extremo circular sumergido.

2.11 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO CON MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO

Para movimientos de fluidos en que no se tenga movimiento relativo entre capas adyacentes del mismo, los esfuerzos tangenciales resultan nulos. Un fluido que se mueve con velocidad uniforme sigue las leyes de la variación estática de la presión. Cuando un fluido es sometido a una aceleración tal que no exista movimiento relativo entre capas adyacentes, es decir, cuando se acelera como si fuera un sólido, no se desarrollan esfuerzos tangenciales y la variación de la presión se puede determinar estableciendo la ecuación de movimiento para un cuerpo libre apropiado. Existen dos casos de interés: la aceleración lineal uniforme y la rotación uniforme respecto a un eje vertical, en ambos casos se dice que el fluido se encuentra en equilibrio relativo. Las figuras 2.29a y 2.29b muestran, respectivamente, los casos antes mencionados.

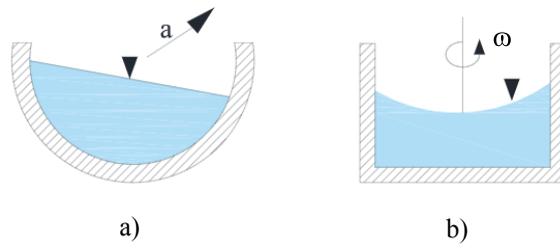


Figura 2.29 Líquido con: a) ACCELERACIÓN LINEAL; b) ROTACIÓN COMO SÓLIDO RÍGIDO

2.11.1 ACCELERACIÓN LINEAL UNIFORME

Si a un líquido en un recipiente abierto se le proporciona una aceleración uniforme \mathbf{a} , tal como se muestra en la figura 2.30, el líquido, después de cierto tiempo, se ajustará a la aceleración moviéndose como si fuera un sólido. Si se selecciona un sistema de coordenadas cartesianas con eje z y el eje x de tal forma que el vector aceleración se encuentre en el plano xz , el eje y resulta normal al vector aceleración ($a_y = 0$).

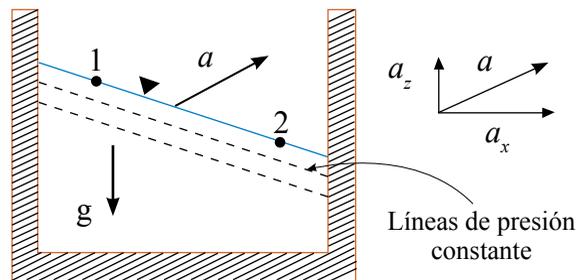


Figura 2.30 ACCELERACIÓN LINEAL DE UN LÍQUIDO CON SUPERFICIE LIBRE

De la ecuación 2.7 y dado que no hay aceleración en la dirección y , la diferencial total de la presión queda

$$dp = -\rho a_x dx - \rho(a_z + g)dz \quad (2.45)$$

A lo largo de una línea de presión constante (como las contenidas en la superficie libre del líquido) $dp=0$ y se tiene

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{(a_z + g)} \quad (2.46)$$

De esto se concluye que las superficies de presión constante (isobaras) en un fluido incompresible con aceleración constante en movimiento lineal son superficies paralelas cuya pendiente en el plano xz (ver figura 2.31) es: $\tan \alpha = (z_1 - z_2) / (x_2 - x_1) = -dz/dx$, por lo que

$$\tan \alpha = \frac{a_x}{(a_z + g)} \quad (2.47)$$

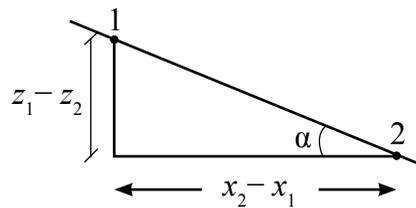


Figura 2.31 PENDIENTE DE LAS SUPERFICIES CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Para el caso especial en que $a_x=0$ y $a_z \neq 0$, que corresponde a la masa de fluido que acelera en la dirección vertical, la ecuación 2.46 indica que la superficie del fluido es horizontal, sin embargo, a partir de la ecuación 2.45 se observa que la distribución de la presión no es hidrostática, sino dada por la ecuación

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(a_z + g)$$

Esta ecuación muestra que la presión varía linealmente con la profundidad, aunque la variación se debe a los efectos combinados de la gravedad y la aceleración inducida externamente, en vez de deberse simplemente al peso específico. Suponga que se fuerza al fluido a acelerar en la dirección ascendente, como en el caso de un recipiente dentro de un ascensor, con $a_z = g$, entonces el gradiente de presión es $dp/dz = -2\rho g$. Por lo tanto, la diferencia entre la capa superior e

inferior de fluido se duplica con relación con el caso del fluido en reposo. En cambio, si el movimiento del ascensor es descendente con $a_z = -g$, entonces $dp/dz = 0$ y la presión es constante en toda la masa de fluido.

EJEMPLO 2.23 Un recipiente de 1m de alto, con sección transversal de $1.5\text{m} \times 0.5\text{m}$ está parcialmente lleno con agua que se va a transportar sobre la parte posterior de un camión. La carretera es horizontal y el camión acelera desde 0 hasta 90 km/h en 5 s. La altura del agua en reposo es de 0.8m. Se requiere que el agua no se derrame durante la aceleración. Considere que no hay topes u otro obstáculo en el camino. Determine cómo conviene alinear el tanque ζ con el lado corto o con el lado largo en la dirección del movimiento?

Solución

El movimiento solo es la dirección horizontal x , por lo que $a_z = 0$. La aceleración del camión es

$$a_x = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{(90-0)\text{km/h}}{5\text{s}} \times \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} = 5\text{m/s}^2$$

El ángulo α que forma la superficie libre con la horizontal se determina como

$$\tan \alpha = \frac{a_x}{(a_z + g)} = \frac{5\text{m/s}^2}{(0 + 9.81\text{m/s}^2)} = 0.509$$

$$\alpha = 27^\circ$$

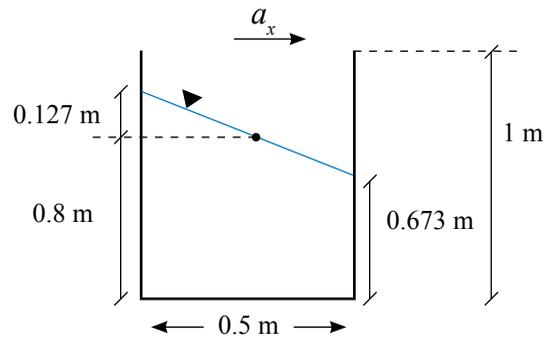
El ascenso vertical de la superficie libre ocurre en la parte posterior del recipiente y el plano vertical a la mitad no experimenta ascenso ni descenso durante la aceleración, ya que es un plano de simetría. Entonces, el ascenso vertical para el lado largo paralelo a la dirección del movimiento resulta

$$\Delta z = \frac{b}{2} \tan \alpha = (1.5\text{m}/2) \times 0.509 = 0.381\text{m}$$

y con el lado corto paralelo a la dirección del movimiento sería

$$\Delta z = \frac{b}{2} \tan \alpha = (0.5\text{m}/2) \times 0.509 = 0.127\text{m}$$

Para el primer caso el agua derramaría, pues llegaría la elevación $0.8 + 0.381 = 1.181 \text{ m} > 1 \text{ m}$, por lo que conviene alinear el tanque con el lado corto paralelo a la dirección del movimiento, pues el agua llegaría a la elevación $0.8 + 0.127 = 0.927 \text{ m} < 1 \text{ m}$ y no se presentaría el derrame, tal como se muestra a continuación.



2.11.2 ROTACIÓN COMO SÓLIDO RÍGIDO

Un recipiente cilíndrico, parcialmente lleno con un líquido, se hace girar con respecto a un eje vertical, sin traslación, a una velocidad angular ω constante. Una vez que pasan los efectos transitorios iniciales, el líquido se moverá como un sólido junto con el recipiente tal como se ve en la figura 2.32, en el que h_0 es la altura del líquido antes del movimiento. Este movimiento se conoce como vórtice forzado. Dadas las características del movimiento, no se presenta ningún esfuerzo cortante dentro del líquido.

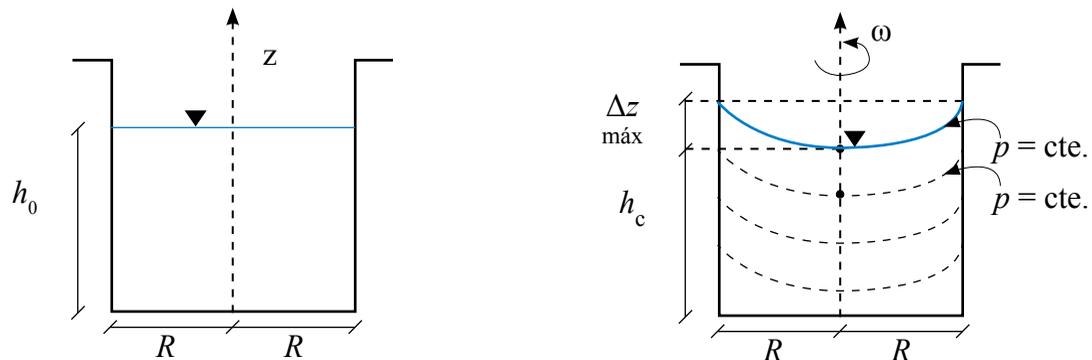


Figura 2.32 RECIPIENTE CON LÍQUIDO ANTES Y DESPUÉS DE LA ROTACIÓN

El análisis se realiza empleando coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . En la dirección tangente a la trayectoria circular la velocidad es $v = \omega r$ y es constante para cada distancia r , por lo que no hay aceleración en esta dirección. La aceleración centrípeta de una partícula de fluido que se encuentra a la distancia r del eje de rotación es $\omega^2 r$ y está dirigida en forma radial hacia el eje de rotación (dirección r negativa), por lo tanto, en esta dirección la aceleración es $a_r = -\omega^2 r$. Como hay simetría alrededor del eje de rotación z , cuyo origen está en el fondo y el centro del recipiente, no hay dependencia respecto de θ . En la dirección vertical z prevalece la ley hidrostática $\partial p / \partial z = -\rho g$.

Al analizar las fuerzas en la dirección radial debidas a la presión que actúa sobre el elemento diferencial de longitud dr y sección transversal dA , la resultante de las fuerzas de presión en esta dirección es

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) dA = -\frac{\partial p}{\partial r} dr dA$$

Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección r , se obtiene $F_r = ma_r$,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} dr dA &= \rho dr dA (-\omega^2 r) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \omega^2 r \end{aligned} \quad (2.48)$$

Como la presión solo es función de r y z , su diferencial total está dada por

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

al sustituir las derivadas parciales por sus valores en las direcciones r y z , la diferencial de presión es, entonces

$$dp = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz \quad (2.49)$$

al integrar la ecuación 2.49 entre dos puntos cualquiera (r_1, z_1) y (r_2, z_2) , se obtiene

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}{2} - \rho g (z_2 - z_1) \quad (2.50)$$

si los dos puntos están en una superficie de presión constante, como la superficie libre, $p_2 = p_1$, y si el punto 1 se coloca en el eje z , de modo que $r_1 = 0$, esto da como resultado

$$\frac{\omega^2 r_2^2}{2g} = (z_2 - z_1) \quad (2.51)$$

que es la ecuación de una parábola, por lo tanto, las superficies de presión constante forman un paraboloide de revolución. En este análisis se considera que hay líquido suficiente en el recipiente de modo que toda la superficie del fondo permanece cubierta por él. La figura 2.32 muestra las superficies de presión constante en el líquido en rotación, paralelas entre ellas. La ecuación 2.50 muestra que, en un radio fijo, la presión varía en forma hidrostática en la dirección vertical, como en un fluido en reposo. Para una distancia vertical fija z , la presión varía con el cuadrado de la distancia radial r .

La diferencia de nivel entre el vértice del paraboloide y el máximo ascenso del líquido en la pared del recipiente $\Delta z_{m\acute{a}x}$ se calcula con la ecuación 2.51 con la distancia radial igual al radio del recipiente $r = R$.

$$\Delta z_{m\acute{a}x} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (2.52)$$

La distancia desde el vértice de la parábola hasta el fondo del recipiente es h_c . Un paraboloide de revolución tiene un volumen igual a la mitad del volumen del cilindro que lo circunscribe ($\pi R^2 \Delta z_{m\acute{a}x} \times 1/2$). Del principio de conservación de masa, se tiene

$$\pi R^2 h_0 = \pi R^2 (h_c + \Delta z_{m\acute{a}x}) - \frac{1}{2} \pi R^2 \Delta z_{m\acute{a}x} \quad (2.53)$$

EJEMPLO 2.24 Un recipiente cilíndrico vertical de 30 cm de diámetro y 50 cm de alto está parcialmente lleno hasta una altura $h_0 = 40$ cm con un líquido cuya densidad es 820 kg/m^3 .

- Determine la máxima velocidad angular tal que el líquido no se derrame.
- Para la condición anterior, determine h_c y la presión en el punto A en la pared al fondo del recipiente.

Solución

- a) La máxima altura dentro del recipiente para que el líquido no se derrame es $h_c + \Delta z_{m\acute{a}x} = 0.50\text{m}$. A partir de las ecuaciones 2.52 y 2.53 se tiene

$$h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 R^2}{2g} = 0.50\text{m}$$

Al sustituir valores resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{4g(0.5 - 0.4)}{0.15^2}} = 13.2\text{rad/s}$$

Una revolución completa corresponde a 2π rad. La velocidad de rotación del recipiente también se puede expresar en términos de revoluciones por minutos (rpm) como

$$N = \frac{13.2(\text{rad/s})}{2\pi(\text{rad/rev})} \times \frac{60\text{s}}{1\text{min}} = 126\text{rpm}$$

Note que el análisis es válido para cualquier líquido, ya que el resultado es independiente de la densidad del líquido.

- b) La altura desde el fondo del recipiente hasta el vértice de la parábola resulta

$$h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = 0.4 - \frac{13.2^2 \times 0.15^2}{4g} = 0.3\text{m}$$

ya que h_c es positivo, se valida el resultado del inciso a).

De la ecuación 2.52, con $r_2 = r_1 = 0$, la presión en la superficie libre $p_2 = 0$ (manométrica), $z_2 - z_1 = h_c$, la presión en el fondo del recipiente es

$$p_1 = \rho g h_c = 820\text{kg/m}^3 \times 9.81\text{m/s}^2 \times 0.3\text{m} = 2413\text{ Pa}$$

Para $z_A = z_1$ en el fondo del recipiente, la presión en cualquier punto A de su pared se calcula como

$$p_A = p_1 + \frac{\rho \omega^2 (R^2 - 0)}{2} = 2413\text{ Pa} + \frac{820\text{kg/m}^3 \times (13.2\text{rad/s})^2 \times (0.15\text{m})^2}{2}$$

$$p_A = 4020\text{ Pa}$$

AGRADECIMIENTOS

Los dibujos fueron elaborados por Evan Villaseñor Brito, Paul Felipe Jarquín López y Emiliano García Rodríguez como parte de su prestación del Servicio Social en la Facultad de Ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

CENGEL, Y., CIMBALA, J. (2018). *Mecánica de Fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. 4ª. ed., México: Mc. Graw Hill Interamericana Editores, S.A de C.V.

MUNSON, B., YOUNG, D., OKIISHI, T. (2002). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. 1ª. reimpresión, México: Limusa.

ROBERSON, J., CROWE, C. (1983). *Mecánica de Fluidos*. 1ª ed. en español. México: Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V.

POTTER, M., WIGGERT, D. (1998). *Mecánica de Fluidos*. 2ª ed. México: Prentice Hall.

SOTELO ÁVILA, G. (1990). *Hidráulica General*. México: Limusa.

STREETER, V., WYLIE, E. (1982). *Mecánica de los Fluidos*. 6ª ed. México: Mc. Graw Hill.

3.1 LOS CAMPOS DE FLUJO

Un campo de flujo es cualquier región en el espacio donde hay fluido en movimiento. La figura 3.1 muestra un campo de flujo aguas arriba de una compuerta. El líquido sin movimiento en la cercanía de la compuerta no forma parte del campo de flujo.

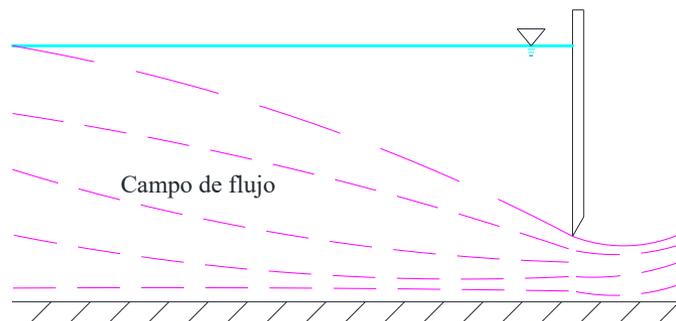


Figura 3.1 EJEMPLO DE CAMPO DE FLUJO

En cada punto dentro del flujo y en cada instante, existe una serie de valores de las variables físicas que intervienen, las cuales pueden ser escalares, vectoriales o tensoriales, si bien estas últimas no se consideran en este texto.

Un campo escalar se define exclusivamente por la magnitud que adquiere la cantidad física a la cual corresponde, por ejemplo: temperatura, densidad y presión. Aunque la viscosidad es por sí misma una propiedad escalar del líquido, solo se manifiesta si existe variación transversal de la velocidad, en la forma de esfuerzo tangencial de resistencia al flujo.

Un campo vectorial se define a través de tres magnitudes en cada punto del flujo que son sus componentes escalares en un sistema de ejes coordenados y que le dan magnitud, dirección y sentido para la variable física a la que describe; la velocidad, la aceleración y la rotación son los campos vectoriales de interés en un campo de flujo.

3.2 CAMPOS VECTORIALES

3.2.1 LA VELOCIDAD SEGÚN LOS ENFOQUES LAGRANGIANO Y EULERIANO

Existen dos métodos fundamentales para expresar las ecuaciones de un fluido en movimiento: el *lagrangiano* y el *euleriano*.

El análisis lagrangiano considera una partícula individual del fluido durante todo el transcurso del tiempo; este es el método común en la dinámica. En este caso, la velocidad de la partícula se obtiene derivando respecto al tiempo la expresión de vector de posición de la partícula. Si se emplea un sistema de coordenadas cartesianas, el vector de posición es

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.1)$$

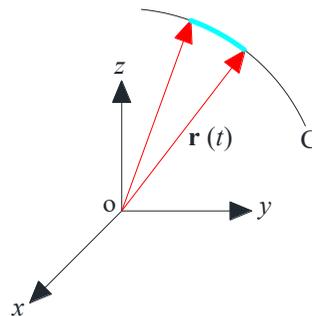


Figura 3.2 VECTOR DE POSICIÓN DE UNA PARTÍCULA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

Donde \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios en las direcciones x , y y z , respectivamente. Derivando la ecuación 3.1 con respecto al tiempo se obtiene la velocidad de la partícula.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (3.3)$$

Donde v_x , v_y y v_z son los componentes de la velocidad en las respectivas direcciones coordenadas.

Si se conoce la curva que recorre la partícula y la función camino recorrido-tiempo, la posición de la partícula se determina por la longitud del camino recorrido siguiendo la curva como una función escalar del tiempo; es decir $s = s(t)$, tal como se muestra en la figura 3.3.

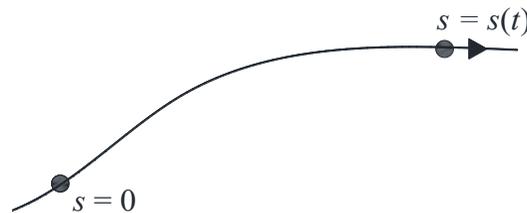


FIGURA 3.3 MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA SEGÚN LA CURVA $s = s(t)$

La magnitud del vector $d\mathbf{r}$ es $|d\mathbf{r}| = ds$, donde ds es el elemento diferencial de arco sobre la trayectoria, por lo que la magnitud de la velocidad es $v = ds/dt$. Si \mathbf{s} es el vector unitario tangente en cada punto a la trayectoria de la partícula y, además es función de s , el vector velocidad se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v\mathbf{s} = \frac{ds}{dt}\mathbf{s} \\ \mathbf{v} &= \frac{ds}{dt} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $d\mathbf{s} = ds\mathbf{s}$ es el vector diferencial de arco.

La ecuación 3.4 muestra que el vector velocidad solo tiene un componente tangente a la trayectoria.

Es evidente que el movimiento de una partícula de fluido es inadecuado para describir todo el campo de flujo, por lo que será necesario considerar simultáneamente todas las partículas dentro de este o considerar el movimiento del fluido en todos los puntos del campo.

El enfoque euleriano es una alternativa para describir la velocidad dentro de un campo de flujo, el cual consiste en identificar un punto en el espacio y luego observar la velocidad de las partículas que pasan por el punto (véase la figura 3.4). En este enfoque, la velocidad de la partícula es función del tiempo y de la posición del punto en el espacio.

$$\mathbf{v} = f(x, y, z, t) \quad (3.5)$$

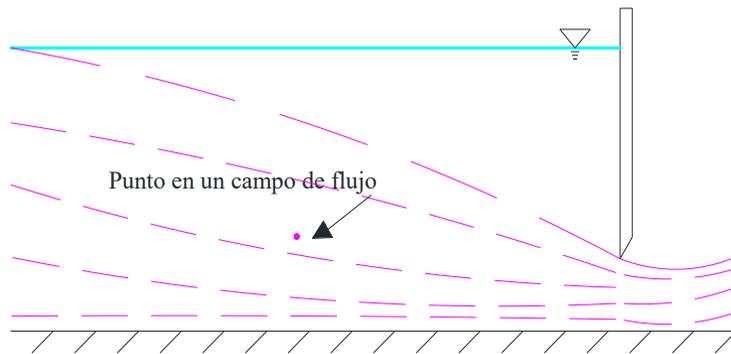


Figura 3.4 PUNTO DENTRO DE UN CAMPO DE FLUJO

Dado que la velocidad \mathbf{v} y, por tanto, sus componentes v_x , v_y y v_z en cada punto del fluido dependen del punto que se analice y del tiempo que se considere, se tiene

$$v_x = f_1(x, y, z, t) \quad (3.6a)$$

$$v_y = f_2(x, y, z, t) \quad (3.6b)$$

$$v_z = f_3(x, y, z, t) \quad (3.6c)$$

Las ecuaciones 3.6 proporcionan los componentes de velocidad en función del espacio y del tiempo con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas. Como la velocidad es un vector, tiene magnitud y dirección. La magnitud de \mathbf{v} , denotada por $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, es la rapidez, aunque es común denominarla velocidad en vez de rapidez.

3.2.2 EL CAMPO DE LA ACELERACIÓN

El movimiento de un fluido se puede describir ya sea siguiendo partículas individuales (enfoque lagrangiano) o fijando un sistema de coordenadas en el espacio y observando partículas diferentes a medida que estas pasan por el punto en análisis (enfoque euleriano). En el método lagrangiano, de uso poco frecuente en la hidráulica, la aceleración se describe en la misma forma que se hace para la dinámica de sólidos, es decir, la aceleración es función del tiempo para cada partícula. Para la descripción según el enfoque euleriano, el campo de la aceleración se describe en función de la posición y del tiempo, sin seguir ninguna partícula específica. Los componentes escalares de la aceleración $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, según los tres ejes de coordenadas cartesianas, son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (3.7a)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad (3.7b)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (3.7c)$$

Los términos dentro del paréntesis forman la aceleración convectiva y el término del lado derecho fuera del paréntesis es la aceleración local debido a la variación de la velocidad en la posición ocupada por la partícula.

Es muy útil conocer la magnitud de los componentes de la aceleración en cualquier punto de una trayectoria a lo largo de una coordenada curvilínea. En cada punto de la trayectoria, se define la dirección s tangente a la coordenada curvilínea en ese punto, la dirección normal n perpendicular a la dirección tangencial y con sentido positivo hacia el centro instantáneo de curvatura, y la dirección binormal local b que es perpendicular tanto a s como a n , véase la figura 3.5. De los conceptos básicos de cinemática se demuestra que la aceleración solo tiene componentes en la dirección tangencial y en la dirección normal, y son

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{s} + \frac{v^2}{r} \mathbf{n} \quad (3.8)$$

donde r es el radio de curvatura local y puede variar en los diferentes puntos de la trayectoria.

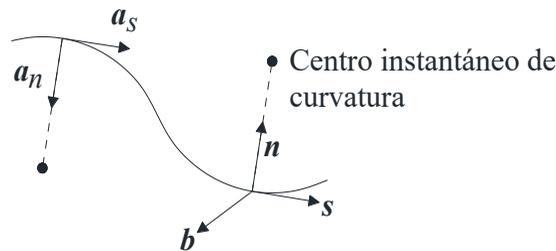


Figura 3.5 DIRECCIONES TANGENCIAL, NORMAL Y BINORMAL DE LOS COMPONENTES DE LA ACELERACIÓN

Las ecuaciones 3.7 y 3.8 proporcionan la aceleración relativa a un observador solo en el marco de referencia de este.

3.2.3 EL CAMPO ROTACIONAL

El rotacional evalúa la rotación local de una partícula. Se define matemáticamente por el determinante

$$rot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Si $rot \mathbf{v} = 0$ el flujo es irrotacional; la partícula se traslada, pero no rota
 Si $rot \mathbf{v} \neq 0$ el flujo es rotacional; además de trasladarse, la partícula rota

3.3 LÍNEAS QUE CARACTERIZAN AL FLUJO

Con frecuencia es conveniente trazar líneas a lo largo del campo de flujo tal que estas proporcionen la velocidad del flujo. Una construcción de este tipo recibe el nombre de patrón de flujo y está formado por una infinidad de líneas de corriente o de flujo, las cuales se definen como toda línea trazada idealmente en el interior de un campo de flujo, de manera que la tangente en

cada uno de sus puntos proporcione la dirección del vector velocidad en el punto mismo. Estas líneas se definen para un instante determinado y pueden cambiar de un instante a otro. Con excepción de puntos singulares, no existe posibilidad de que dos líneas de corriente se intersequen, pues ello implicaría que existieran dos vectores velocidad distintos. Las figuras 3.6 y 3.7 muestran, respectivamente, una línea de corriente y un patrón de flujo formado por infinidad de líneas de corriente.

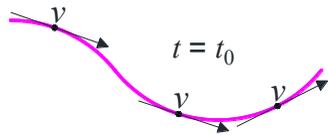


Figura 3.6 CONCEPTO DE LÍNEA DE CORRIENTE

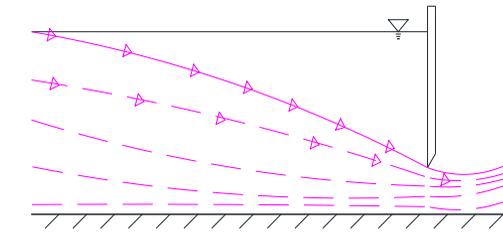


Figura 3.7 PATRÓN DE FLUJO EN UN CANAL AL PASAR POR UNA COMPUERTA

Las líneas de corriente pueden ser diferentes al analizar el campo de flujo en diferentes instantes. La trayectoria de una partícula es la línea que une los puntos de posición sucesivamente ocupados por esta. La figura 3.8 muestra los puntos ocupados por la partícula A en el transcurso del tiempo.

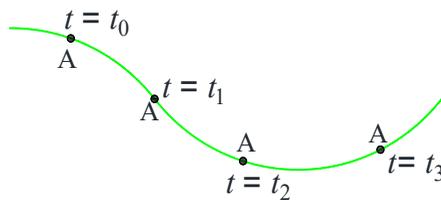


Figura 3.8 TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA

Considere una curva C cualquiera (que no sea línea de corriente) y las líneas de corriente que pasan por cada punto de esa curva. La totalidad de estas líneas están contenidas en una superficie que se denomina *superficie de flujo o de corriente*, figura 3.9.

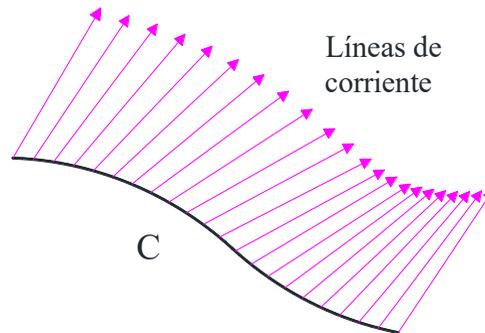


Figura 3.9 SUPERFICIE DE CORRIENTE

Si la curva C es cerrada, la superficie de corriente adquiere el nombre de *tubo de flujo* o *tubo de corriente* y el volumen encerrado por esta superficie se denomina *vena fluida*. La pared de una conducción y la superficie libre (si existe) son superficies de corriente y la curva C encerraría a una sección perpendicular a dichas superficies, a través de la cual pasaría el fluido.

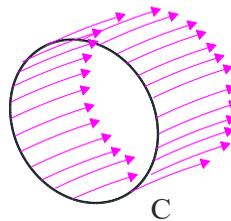


Figura 3.10 TUBO DE FLUJO

Como se puede observar en la figura 3.10, las paredes de un tubo de flujo son líneas de corriente, por lo tanto, el fluido no puede atravesar estas paredes. El tubo de flujo no tiene necesariamente paredes rígidas; por ejemplo, en un canal el agua en contacto con la presión atmosférica forma parte del tubo de flujo.

3.4 GASTO Y VELOCIDAD MEDIA

La vena fluida de la figura 3.11 muestra una superficie S (limitada por la curva C), por la cual cruzan una infinidad de líneas de corriente. Cualquier elemento diferencial de área dA contenido en esa superficie, se puede representar por el vector diferencial de superficie $d\mathbf{A}=dA\mathbf{n}$,

donde \mathbf{n} es un vector unitario normal a dA . La velocidad \mathbf{v} en el instante t que pasa por el elemento diferencial de área puede tener una dirección distinta a la del vector dA .

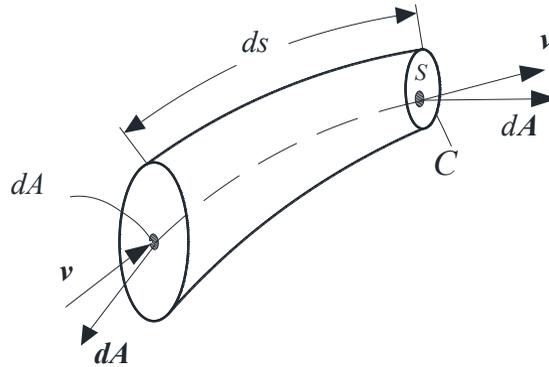


Figura 3.11 TUBO DE FLUJO DE TAMAÑO DIFERENCIAL

En un intervalo de tiempo dt , el volumen elemental de fluido $d\mathcal{V}$ que atraviesa el elemento de superficie dA vale

$$d\mathcal{V} = ds \cdot dA$$

dado que $ds = \mathbf{v} dt$, se tiene

$$d\mathcal{V} = \mathbf{v} \cdot dA dt$$

El flujo de volumen que atraviesa en la unidad de tiempo al elemento dA resulta

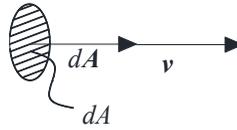
$$dQ = \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \mathbf{v} \cdot dA$$

y el flujo de volumen en toda la superficie S queda definido por

$$Q = \iint_A \mathbf{v} \cdot dA \quad (3.10)$$

Donde Q es el gasto o caudal, también conocido como gasto volumétrico y sus dimensiones son $[L^3 T^{-1}]$.

El producto escalar de vectores es $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = |\mathbf{v}||d\mathbf{A}|\cos\theta$, donde θ es ángulo que forman los dos vectores. Si en un flujo la superficie S se escoge de modo que las trayectorias sean sensiblemente normales a ella en cada punto, se tiene $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = |\mathbf{v}||d\mathbf{A}|\cos 0^\circ = v dA$



y el gasto se puede calcular

$$Q = \iint_A v dA \quad (3.11)$$

Se define la velocidad media instantánea, a través de toda la superficie S de área A al promedio

$$V = \frac{\iint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{A} \quad (3.12a)$$

$$V = \frac{Q}{A} \quad (3.12b)$$

entonces

$$Q = VA \quad (3.13)$$

y dado que el gasto se define como el flujo de volumen en la unidad de tiempo, también se expresa como

$$Q = \frac{\mathcal{V}}{t} \quad (3.14)$$

A partir de la definición de gasto o caudal también se puede deducir el flujo de masa o gasto másico que atraviesa por la superficie S . Dado que la masa es $m = \rho \mathcal{V}$, al despejar el volumen y sustituir en la ecuación 3.14 se llega a $m = \rho Q t$. Se define el flujo de masa o flujo másico

$$\frac{m}{t} = \rho Q$$

$$\dot{m} = \rho Q \quad (3.15)$$

EJEMPLO 3.1 En el interior de un conducto circular de 0.3 m de diámetro fluye un líquido con densidad $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ y velocidades que siguen la distribución

$$v = 0.0225 - (1)r^2$$

donde

- v velocidad, en m/s
- r distancia radial, $0 \leq r \leq 0.15$, en m
- 0.0225 coeficiente dimensional, en m/s
- 1 coeficiente dimensional, en $\text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Determine el gasto, el flujo másico y la velocidad media. Grafique la distribución de la velocidad.

Solución

Conviene expresar al elemento diferencial de área en coordenadas polares $dA = r dr d\theta$; dado que el área por la fluye el líquido es circular, $dA = 2\pi r dr$ y con la ecuación 3.11 se tiene

$$Q = \iint_A v dA = 2\pi \int_0^R (0.0225 - r^2) r dr = 2\pi \int_0^{0.15} (0.0225r - r^3) dr$$

al integrar se obtiene

$$Q = 0.000795 \text{ m}^3/\text{s}$$

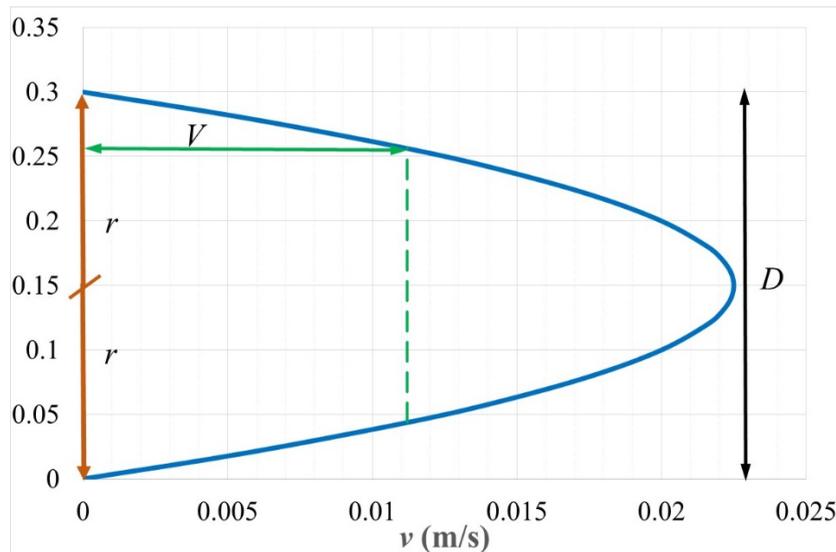
El flujo de masa se calcula con la ecuación 3.15 y resulta

$$\dot{m} = \rho Q = 920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.000795 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 7.31 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

El área del conducto es $A = \pi(0.15)^2 = 0.0707 \text{ m}^2$, y de la ecuación 3.12 la velocidad media vale

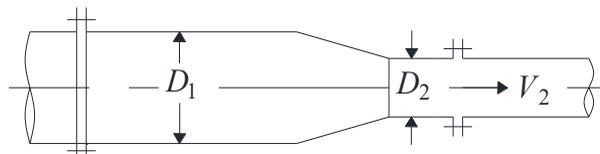
$$V = Q / A = 0.000795 / 0.0707 = 0.0112 \text{ m/s}$$

Al dar valores a la coordenada radial, la distribución de la velocidad se puede graficar y es como la mostrada a continuación



La coordenada radial tiene origen en el centro del conducto. Debido a la distribución de la velocidad, las líneas de corriente se mueven con diferente velocidad una con respecto a la otra. La distancia radial a la cual la velocidad coincide con la velocidad media es $r = \sqrt{0.0225 - 0.0112} = 0.1063$ m.

EJEMPLO 3.2 Por un conducto de diámetro $D_1 = 0.30$ m fluye agua con una velocidad media $V_1 = 1$ m/s. El tubo se reduce gradualmente a un diámetro $D_2 = 0.20$ m. a) Calcule el gasto. b) Determine la velocidad en la sección 2, considere que la masa que entra es la misma que la que sale, pues no hay variación de esta dentro del conducto.



Solución

- a) Las áreas de cada sección son

$$A_1 = \pi (0.30)^2 / 4 = 0.0707 \text{ m}^2 \quad \text{y} \quad A_2 = \pi (0.20)^2 / 4 = 0.0314 \text{ m}^2$$

el gasto dentro del conducto vale

$$Q = V_1 A_1 = 1 \times 0.0707 = 0.0707 \text{ m}^3 / \text{s}$$

- b) Dado que el gasto que pasa por la sección 1 es igual al que pasa por la sección 2, la velocidad en 2 resulta

$$V_2 = Q / A_2 = 0.0707 / 0.0314 = 2.25 \text{ m/s}$$

la cual también se puede calcular a partir de

$$V_2 A_2 = V_1 A_1$$

$$V_2 \times \pi \frac{D_2^2}{4} = V_1 \times \pi \frac{D_1^2}{4}$$

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

$$V_2 = 1 \times \left(\frac{0.3}{0.2} \right)^2 = 2.25 \text{ m/s}$$

3.5 CLASIFICACIÓN DE FLUJOS

Atendiendo a alguna de sus diversas características, existen diferentes criterios para clasificar un flujo; los más importantes son:

Flujo permanente y flujo no permanente

Si las características del flujo en un punto determinado varían de un instante a otro, el flujo es no permanente. En el caso de flujo permanente todas las cantidades de flujo en un punto dado son independientes del tiempo, es decir

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0 \quad \frac{\partial p}{\partial t}=0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

Si la velocidad puntual v cambia con respecto al tiempo, también lo hará la velocidad media V y al analizar el campo de flujo es más sencillo emplear la velocidad media, por lo que la clasificación también se puede realizar con respecto a los valores medios y para el flujo no permanente se tiene $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$; por el contrario, será un flujo permanente si la velocidad media en cada sección permanece constante para cualquier instante, con lo que $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Por sencillez en el análisis se aceptan pequeñas variaciones en los valores medios y el flujo se puede analizar como permanente. El flujo permanente también es conocido como flujo estable o estacionario; evidentemente, al flujo no permanente se le denomina flujo no estable o no estacionario.

Flujo uniforme y flujo variado

El flujo uniforme ocurre cuando el vector velocidad en todos los puntos del escurrimiento es idéntico en magnitud y dirección para un instante dado, expresado matemáticamente $\frac{\partial v}{\partial s}=0$, y con los valores medios $\frac{\partial V}{\partial s}=0$. Note que la ecuación establece que no existe cambio alguno en el vector velocidad para cualquier dirección que se considere en la región del escurrimiento para un instante dado, pero no indica algo con respecto al cambio de velocidad en un punto en relación con el tiempo. Cuando el vector velocidad es diferente en los diversos puntos del flujo, este es un flujo variado, $\frac{\partial v}{\partial s} \neq 0$, $\frac{\partial V}{\partial s} \neq 0$; el cual puede ser permanente o no permanente. Las figuras 3.12a y 3.12b muestran ejemplos de estos tipos de flujo en un canal.

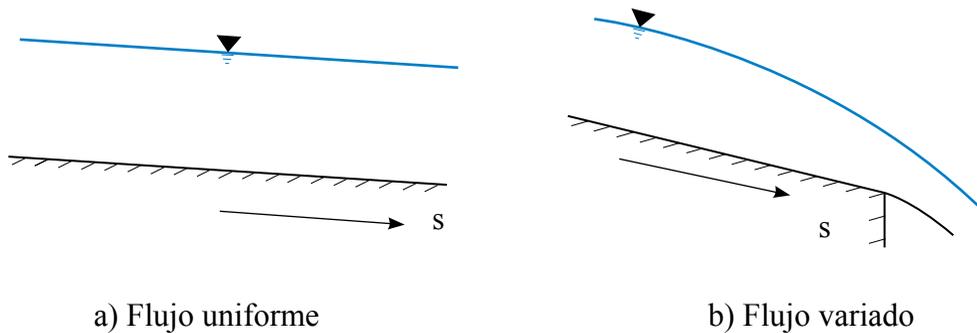


Figura 3.12 FLUJO UNIFORME Y FLUJO VARIADO

Flujo laminar y flujo turbulento

En un flujo laminar, las partículas de fluido se mueven a lo largo de trayectorias bastante regulares, dando la impresión de que se tratara de láminas o capas más o menos paralelas entre sí, deslizándose suavemente unas sobre otras. El flujo laminar está regido por la ley de Newton de la viscosidad ya analizada en el capítulo 1. El flujo turbulento es el que más se presenta en la práctica de la ingeniería; en él las partículas se mueven siguiendo trayectorias muy irregulares y se caracteriza por la acción de mezclado en todo el campo. Este mezclado se debe a los remolinos o torbellinos de tamaño variable que se forman en el fluido. Dado que los remolinos hacen que el flujo se mezcle casi por completo, la distribución de velocidades en este caso es más uniforme en la mayor parte de la sección transversal que en el caso del flujo laminar. Esto se debe a que el proceso de mezcla turbulenta transporta hacia el centro del tubo el fluido de baja velocidad que se encuentra cerca de las paredes, y las partículas de alta velocidad de la región central se transportan hacia las paredes. La turbulencia provoca continuamente componentes fluctuantes de velocidad al flujo; sin embargo, si se toma un promedio de las velocidades durante un intervalo de tiempo y los valores medios no cambian, el flujo puede ser permanente.

Flujo compresible y flujo incompresible

El flujo es compresible si la densidad ρ de la partícula varía mientras se mueve dentro del campo de flujo; si los cambios en la densidad son despreciables, el flujo es incompresible. Los líquidos se consideran incompresibles ya que para la mayor parte de los casos prácticos el efecto de la compresibilidad es despreciable.

Flujo rotacional y flujo irrotacional

Si todos los puntos en un campo de fluido tienen la misma velocidad, lo cual requiere que no haya gradientes de velocidad, entonces la partícula se traslada, pero no gira y el flujo es irrotacional. Si al trasladarse la partícula, además gira, el flujo es rotacional. En los flujos viscosos se presentan gradientes de velocidad que provocan que las partículas giren, por tanto, y el flujo es rotacional. Si se exceptúa la presencia de singularidades vorticosas, el movimiento de un fluido ideal es irrotacional.

Flujo tridimensional, flujo bidimensional y flujo unidimensional

Si se requieren tres direcciones coordenadas para describir los cambios en velocidad y propiedades de un campo de flujo, este es tridimensional. Si no hay cambio en una de las direcciones bastará analizar las otras dos direcciones y el flujo es bidimensional. Por ejemplo, el flujo entre dos paredes paralelas en que no hay componente de velocidad en la dirección normal a estas, es un caso de flujo bidimensional. El caso más sencillo y que permite reducir la complejidad de las ecuaciones que describen el movimiento es el del flujo unidimensional en el cual se considera que sus características en el espacio varían como funciones del tiempo y de una coordenada curvilínea en el espacio, usualmente, el eje de la conducción. En este caso interesan los cambios de velocidad y de la presión promedio que se presentan a lo largo de la longitud del conducto, más que los que se tienen en la sección transversal. El flujo de un líquido real no puede ser completamente unidimensional debido al efecto de la viscosidad, ya que la velocidad en una frontera sólida es igual a cero, sin embargo, con la consideración del valor medio de la velocidad en cada sección se puede considerar unidimensional.

3.6 SISTEMA, VOLUMEN DE CONTROL Y SUPERFICIE DE CONTROL

Un *sistema* se define como una cantidad fija de materia compuesto siempre por las mismas partículas. El análisis de un sistema se hace desde el punto de vista lagrangiano y se sigue al sistema a través de su recorrido para determinar sus propiedades dentro del flujo. La figura 3.13 muestra el flujo a través de una tubería en la cual se muestra una cantidad de fluido en el instante t y el cual es el sistema en análisis; este sistema se mueve a causa de una velocidad a una posi-

ción aguas abajo en el instante $t + \Delta t$. Este análisis es similar al que se realiza en el movimiento de un cuerpo sólido en la dinámica clásica. En la mecánica de fluidos a menudo es bastante difícil identificar y seguir el rastro de una cantidad específica de materia, ya que una porción finita de fluido contiene una cantidad innumerable de partículas de fluido que se mueven con bastante libertad, a diferencia de un sólido que, aunque se puede deformar, es relativamente fácil de identificar. Por ejemplo, una porción de agua que se mueve en el mar no se puede seguir tan fácilmente como una boya que flota sobre el mar.

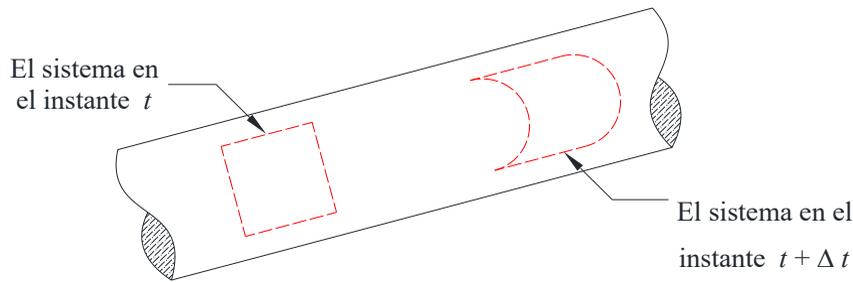


Figura 3.13 SISTEMA DENTRO DE UN CONDUCTO

La forma más usual de analizar un flujo es desde el punto de vista euleriano, en el que se fija una región en el espacio llamada *volumen de control* ($\mathcal{V}C$), cuyo contorno se denomina *superficie de control* (SC); véase la figura 3.14. A través de las fronteras del volumen de control, también conocido como sistema abierto, entra y sale continuamente un fluido. La forma y el tamaño del volumen de control son enteramente arbitrarios, aunque en general se hace coincidir en algunas de sus partes con las fronteras sólidas del escurrimiento y en otras, con el objeto de simplificar el análisis, se le considera perpendicular al flujo. El concepto de volumen de control se emplea en la deducción de las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía. Para el análisis de flujos, este enfoque es más sencillo que el lagrangiano.

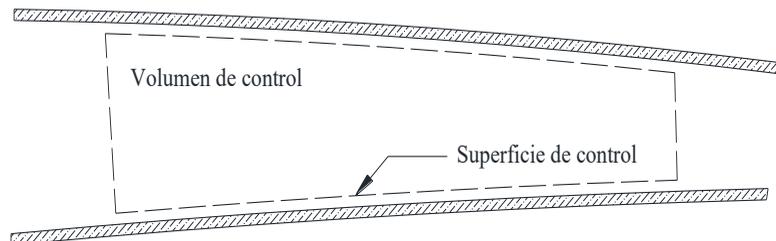


Figura 3.14 EJEMPLO DE VOLUMEN DE CONTROL Y SUPERFICIE DE CONTROL

El tamaño y la forma de un volumen de control son totalmente arbitrarios, pero con fines de simplificación su superficie de control con frecuencia se hace coincidir en parte con contornos sólidos de la conducción, con áreas normales al flujo y con superficie libre del líquido cuando esta exista en la región de interés. El volumen de control puede ser de tamaño diferencial o finito, según el tipo de análisis que se desee efectuar, toda vez que representa simplemente una región de interés particular en la cual se establecen los principios. Puede ser de dos tipos:

Volumen de control no deformable. Su volumen es fijo en el espacio, pero puede cambiar la masa en su interior por efecto de la compresibilidad del fluido. En general, el análisis de problemas de flujo con volúmenes de control no deformable es más práctico y sencillo, y permite la solución de una gran cantidad de problemas y facilita las deducciones físicas.

Volumen de control deformable. Parte de su superficie de control o toda ella está en movimiento en un instante dado y por supuesto cambia la masa en su interior. Un ejemplo es cuando el volumen de control abarca hasta la superficie libre del líquido contenido en un recipiente que se vacía a través de un orificio o de una tubería, y en el que la superficie libre cambia con el tiempo. El flujo no permanente en un canal o en un río requiere de un volumen de control deformable para su estudio; en este caso, las paredes no son deformables, pero la superficie libre, que forma parte del contorno del \mathcal{VC} , sí cambia con el tiempo.

En la hidráulica se utilizan igualmente los volúmenes de control no deformables y los que sí lo son. Los primeros tienen aplicación cuando el flujo es permanente y los segundos cuando es no permanente.

3.7 ECUACIONES DE EULER

Leonhard Euler (1707-1783) aplicó el principio que ahora es conocido como Segunda Ley de Newton, pero que originalmente fue formulado como axioma, sin notación matemática, y que en el escrito original establecía “El cambio de (cantidad de) movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y se realiza en la dirección de la recta según la cual la fuerza se aplica”. Con este principio, Euler dedujo las llamadas ecuaciones eulerianas de la aceleración, las cuales en las direcciones de los ejes ortogonales x, y y z , son

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_x}{m} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= \frac{dv_x}{dt} + v_x \frac{dv_x}{dx} + v_y \frac{dv_x}{dy} + v_z \frac{dv_x}{dz} \\ \frac{F_y}{m} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= \frac{dv_y}{dt} + v_x \frac{dv_y}{dx} + v_y \frac{dv_y}{dy} + v_z \frac{dv_y}{dz} \\ \frac{F_z}{m} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= \frac{dv_z}{dt} + v_x \frac{dv_z}{dx} + v_y \frac{dv_z}{dy} + v_z \frac{dv_z}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Ecuación de Euler del movimiento a lo largo de una línea de corriente

Considere el elemento de fluido mostrado en la figura 3.15. Aquí el elemento se ha acelerado en la dirección s y únicamente actúan sobre él las fuerzas del peso y la presión; no se consideran fuerzas viscosas. El eje z es vertical y se mide desde un plano horizontal de referencia PHR; se ha supuesto que la presión varía a lo largo de la longitud del elemento.

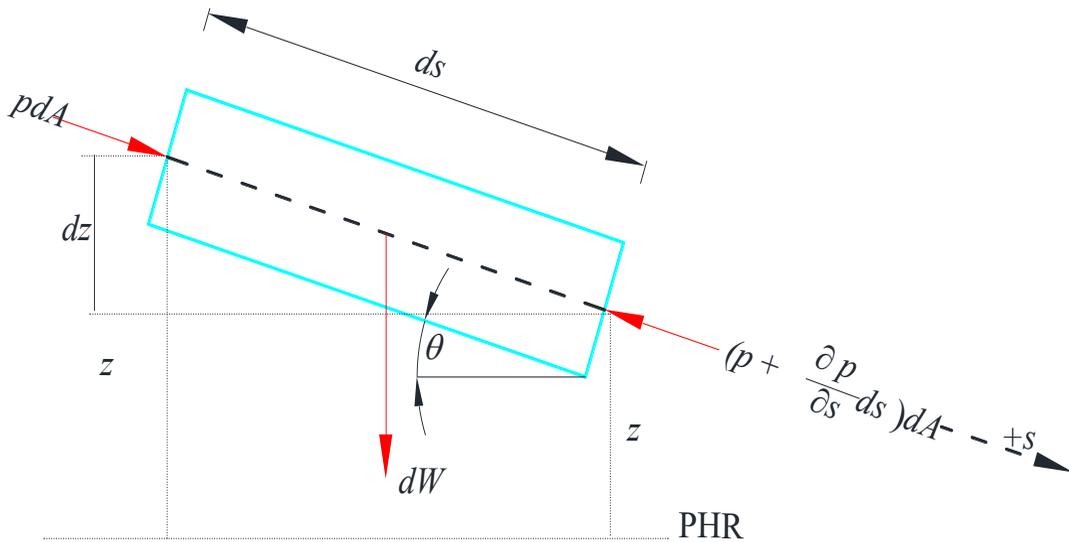


Figura 3.15 FUERZAS DE PRESIÓN Y PESO QUE ACTÚAN SOBRE UN ELEMENTO DE FLUIDO

El peso del volumen elemental es $dW = \rho g dV = \rho g dA ds$; en la dirección $+s$ su componente es $dW_s = \rho g ds dA \sin \theta$, donde $\sin \theta = -dz / ds = -\partial z / \partial s$ (el signo negativo es debido a que cuando s aumenta, z disminuye), por lo que es igual a

$$dW_s = -\rho g ds dA \frac{\partial z}{\partial s} \quad (3.17)$$

la resultante de las fuerzas de presión en la dirección +s es

$$pdA - (p + \frac{\partial p}{\partial s} ds)dA = -\frac{\partial p}{\partial s} ds dA \quad (3.18)$$

la suma de fuerzas en la dirección +s resulta

$$\sum F_s = -\frac{\partial p}{\partial s} ds dA - \rho g ds dA \frac{\partial z}{\partial s} \quad (3.19)$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, $\sum F_s = m a_s$, se tiene

$$-\frac{\partial p}{\partial s} ds dA - \rho g ds dA \frac{\partial z}{\partial s} = \rho ds dA a_s \quad (3.20)$$

al dividir todo entre el volumen $ds dA$ resulta

$$-\frac{\partial}{\partial s}(p + \rho g z) = \rho a_s \quad (3.21)$$

Note que esta ecuación es equivalente a cualquiera de las ecuaciones 3.16, pero ahora se estableció en la dirección s . Es interesante notar que cuando la aceleración es cero, la ecuación 3.21 se reduce a $\frac{\partial}{\partial s}(p + \rho g z) = 0$.

Con un procedimiento similar al efectuado para obtener la ecuación 3.21, pero ahora en la dirección de la normal principal, $\sum F_n = m a_n$, se llega a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial n}(p + \rho g z) &= \rho a_n \\ -\frac{\partial}{\partial n}(p + \rho g z) &= \rho \frac{v^2}{r} \end{aligned} \quad (3.22)$$

En el caso de que la curvatura fuese despreciable, $r \rightarrow \infty$ y se tiene que en la dirección normal la distribución de la presión es hidrostática $p + \rho g z = C$. Un resultado análogo se obtiene en la dirección de la binormal ya que $a_b = 0$.

3.8 ECUACIÓN DE BERNOULLI

Cuando se emplea la ecuación de Euler (3.21) para un flujo a lo largo de una línea de corriente de un flujo permanente, no viscoso e incompresible se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s}(p + \rho g z) &= \rho \left(v \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial s}(p + \rho g z) &= \rho \left(\frac{\partial v^2}{\partial s} \frac{1}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

esto es

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = C \quad (3.24)$$

Donde C es una constante que permanece constante a lo largo de una línea de corriente, pero que puede cambiar de una línea de corriente a otra. La ecuación 3.24 fue obtenida por Euler, si bien el llamarla *Ecuación de Bernoulli*, como es ampliamente conocida, se debe al reconocimiento hacia Daniel Bernoulli (1700-1782) quien fue el primero en demostrar la relación presión-velocidad en un conducto y deducir el mecanismo por el cual este se produce.

Entre dos puntos de una línea de corriente la ecuación 3.24 puede escribirse como

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.25a)$$

Dado que se considera flujo incompresible, con $\gamma = \rho g$, la ecuación 3.25a también se puede escribir

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.25b)$$

La ecuación de Bernoulli se puede aplicar en una vena líquida al considerar un flujo irrotacional en todo el campo, tal que en una sección la velocidad puntual sea la misma en cualquier punto de esta y la ecuación se puede expresar en función de la velocidad media V ; además, con la consideración de flujo unidimensional, en el que la elevación z se mide desde un plano horizontal de referencia hasta el centroide de la sección transversal, la ecuación 3.24 se convierte en

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = C \quad (3.26)$$

Entre dos secciones del campo de flujo, la ecuación de Bernoulli resulta

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.27)$$

La figura 3.16 muestra de forma gráfica la ecuación 3.27

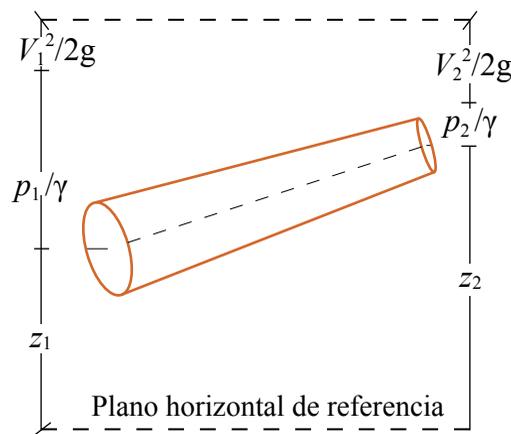


Figura 3.16 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

donde

$$\begin{aligned} z & \text{ carga de posición} \\ \frac{p}{\gamma} & \text{ carga de presión} \\ \frac{V^2}{2g} & \text{ carga de velocidad} \end{aligned}$$

A fin de aplicar correctamente la ecuación de Bernoulli se deben de tomar en cuenta las hipótesis que fueron consideradas en su deducción. La ecuación de Bernoulli no considera efectos viscosos, por lo que cuando estos son importantes, se tendrá que emplear la ecuación de la energía (capítulo 4). Una más amplia interpretación de los términos “carga” también se hará en el capítulo 4.

Algunas aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

Medición de la velocidad

Dado que el conocer la velocidad en un conveniente número de puntos de una sección transversal permite calcular el gasto que circula a través de la sección, la medición de la velocidad es un aspecto importante en la caracterización del movimiento.

Un dispositivo que permite medir la velocidad con bastante precisión es el *tubo de Pitot* en honor a su inventor Henri Pitot (1665-1771). La figura 3.17 muestra este instrumento. A la entrada del tubo se muestra un punto de estancamiento, por lo cual la velocidad ahí es cero.

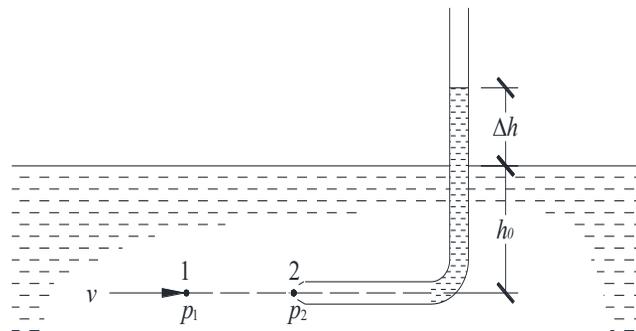


Figura 3.17 TUBO DE PITOT SIMPLE

Para este caso con $z_1 = z_2$, $v_2 = 0$ y $v_1 = v$, al aplicar la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}$$

Dado que en la dirección normal en un conducto sin curvatura la distribución de la presión es hidrostática, $p_1/\gamma = h_0$ y en la sección 2 se tiene $p_2/\gamma = h_0 + \Delta h$, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{v^2}{2g} = \Delta h$$

$$v = \sqrt{2g \Delta h}$$

Medición del caudal

Una forma de medir el gasto en una tubería es con el tubo de Venturi -llamado así en honor de Giovanni Battista Venturi (1746-1822)-, el cual consiste en un conducto convergente seguido de una garganta de diámetro constante y después un conducto gradualmente divergente; véase figura 3.18. Dado que cuando un fluido que circula por el interior de un conducto cerrado pasa por un estrechamiento, su velocidad aumenta y su presión disminuye, por lo que si se mide la presión en la sección inicial y en la estrecha, o directamente la diferencia de presiones entre ambas secciones, se podrán calcular el caudal y la velocidad del fluido.

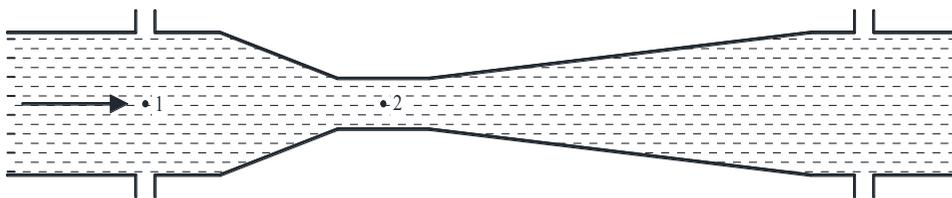


Figura 3.18 TUBO DE VENTURI

Dado que $z_1 = z_2$, $V_1 = Q/A_1$ y $V_2 = Q/A_2$, al aplicar la ecuación de Bernoulli para una vena líquida se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{Q^2}{A_1^2 2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{Q^2}{A_2^2 2g}$$

Al despejar el gasto

$$Q = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)/\gamma}{\frac{1}{2g} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)}}$$

Descarga a través de un orificio

Una de las ecuaciones más antiguas de la mecánica de fluidos está relacionada con el flujo de un líquido que sale de un depósito de gran área en su superficie libre comparada con el área de la descarga, tal como se muestra en la figura 3.19. Al ser $A_1 \gg A_2$ se tiene $V_1 \ll V_2$ y se considera $V_1^2/2g \approx 0$. En las secciones 1 y 2, el líquido está en contacto con la presión atmosférica, por lo tanto $p_1 = p_2 = 0$ y con $V_2 = V$, al aplicar la ecuación de Bernoulli resulta

$$h + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V^2}{2g}$$

$$V = \sqrt{2gh} \tag{3.28}$$

que es la versión moderna del resultado obtenido por Evangelista Torricelli (1608-1647) quien encontró $V \propto \sqrt{h}$. Al aplicar la ecuación de Bernoulli se obtuvo que el coeficiente de proporcionalidad es $\sqrt{2g}$.

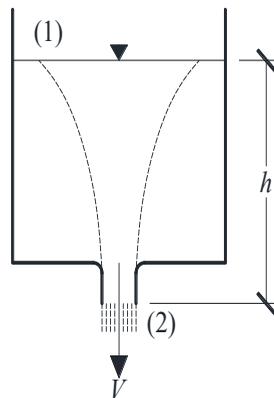
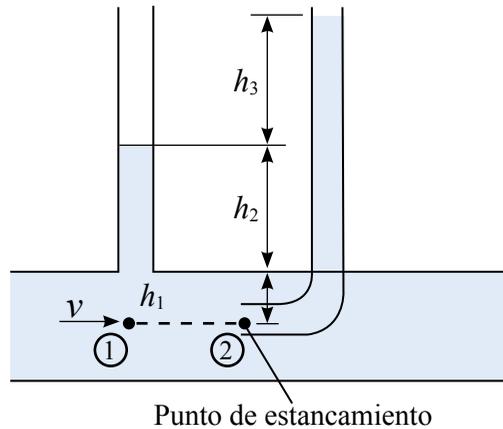


Figura 3.19 ORIFICIO EN EL FONDO DE UN RECIPIENTE

EJEMPLO 3.3 Un piezómetro y un tubo de Pitot están colocados en un tubo horizontal en el que fluye agua y cuyo diámetro es $D=10$ cm. El punto 1 está directamente abajo del piezómetro y el 2 en la entrada al tubo de Pitot. Para las alturas $h_1=5$ cm, $h_2=8$ cm y $h_3=11$ cm, determine la velocidad en el centro del conducto. Determine el gasto si en todos los puntos de la sección transversal la velocidad se aproxima a la media.



Solución

Se establece la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 a lo largo de la línea de corriente; se observa que $z_1 = z_2$ y el punto 2 es un punto de estancamiento, por lo que $v_2 = 0$.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}$$

donde

$$p_1 = \gamma(h_1 + h_2)$$

$$p_2 = \gamma(h_1 + h_2 + h_3)$$

al despejar la carga de velocidad se obtiene

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{\gamma(h_1 + h_2 + h_3) - \gamma(h_1 + h_2)}{\gamma} = h_3$$

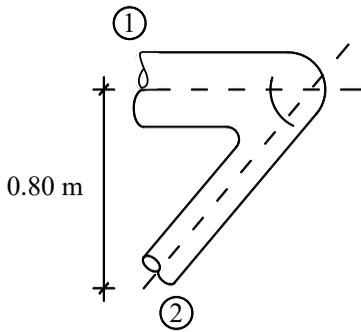
por lo que la velocidad es

$$v_1 = \sqrt{2gh_3} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)0.1 \text{ m}} = 1.469 \text{ m/s}$$

Dado que se considera $v_1 = V$ y con $Q = VA$, el gasto resulta

$$Q = (1.469 \text{ m/s}) \times \pi (0.10 \text{ m})^2 / 4 = 0.0115 \text{ m}^3 / \text{s}$$

EJEMPLO 3.4 La figura muestra un codo con reducción en el cual $D_1 = 0.8 \text{ m}$, $D_2 = 0.50 \text{ m}$, $V_1 = 1 \text{ m/s}$ y $p_1 = 350 \text{ kPa}$. El flujo es de 1 a 2, calcule p_2 si: a) el tubo está contenido en un plano horizontal; b) el tubo es vertical.



Solución

Para ambos casos se tiene:

$$A_1 = 0.502 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0.1963 \text{ m}^2, \quad Q = V_1 A_1 = 0.502 \text{ m}^3 / \text{s},$$

$$V_2 = Q / A_2 = 0.502 / 0.1963 = 2.557 \text{ m/s}.$$

Las cargas de velocidad son: $\frac{V_1^2}{2g} = 0.051 \text{ m}$ y $\frac{V_2^2}{2g} = 0.333 \text{ m}$;

la carga de presión en la sección 1 es $\frac{p_1}{\gamma} = \frac{350 \text{ kN/m}^2}{9.81 \text{ kN/m}^3} = 35.677 \text{ m}$

a) Para $z_1 = z_2$, al sustituir en la ecuación de Bernoulli

$$35.677 + 0.051 = \frac{p_2}{\gamma} + 0.333$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 35.395 \text{ m}$$

$$p_2 = 35.395 \text{ m} \times 9.81 \text{ kN/m}^3 = 347.22 \text{ kPa}$$

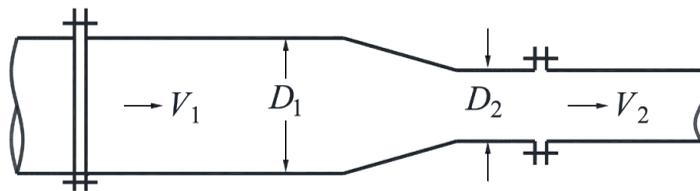
b) En un plano vertical, con $z_1 = 0.8 \text{ m}$ y $z_2 = 0$, al sustituir en la ecuación de Bernoulli resulta

$$0.8 + 35.677 + 0.051 = \frac{p_2}{\gamma} + 0.333$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 36.195 \text{ m}$$

$$p_2 = 36.195 \text{ m} \times 9.81 \text{ kN/m}^3 = 355.07 \text{ kPa}$$

EJEMPLO 3.5 En el conducto mostrado fluye aceite con densidad $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$. Las presiones en las secciones 1 y 2 son: $p_1 = 35.316 \text{ kPa}$ y $p_2 = 17.658 \text{ kPa}$. $D_1 = 0.15 \text{ m}$ $D_2 = 0.10 \text{ m}$. Calcule el gasto y las cargas de velocidad en cada una de las secciones.



Solución

De la ecuación de Bernoulli

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \dots\dots$$

En este caso $z_1 = z_2$, $\gamma = \rho g = 900 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 8829 \text{ N/m}^3$

$$A_1 = \pi(0.15 \text{ m})^2 / 4 = 0.01768 \text{ m}^2, \quad A_2 = \pi(0.10 \text{ m})^2 / 4 = 0.00785 \text{ m}^2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{35.316 \text{ kN/m}^2}{8829 \text{ N/m}^3} = 4 \text{ m}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{17.658 \text{ kN/m}^2}{8829 \text{ N/m}^3} = 2 \text{ m}$$

Al sustituir en la ecuación de Bernoulli y con $V_1 = Q/A_1$ y $V_2 = Q/A_2$, se tiene

$$4 + \frac{Q^2}{(0.01768)^2 \times 2g} = 2 + \frac{Q^2}{(0.007854)^2 \times 2g}$$

$$Q = \sqrt{\frac{(4-2)(2g)}{\frac{1}{(0.007854)^2} - \frac{1}{(0.01768)^2}}} = 0.0549 \text{ m}^3/\text{s}$$

La velocidad y su respectiva carga de velocidad en cada sección son

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.0549}{0.01768} = 3.105 \text{ m/s}, \quad \frac{V_1^2}{2g} = 0.49 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.0549}{0.007854} = 6.99 \text{ m/s}, \quad \frac{V_2^2}{2g} = 2.49 \text{ m}$$

Se revisa que la ecuación de Bernoulli se cumpla

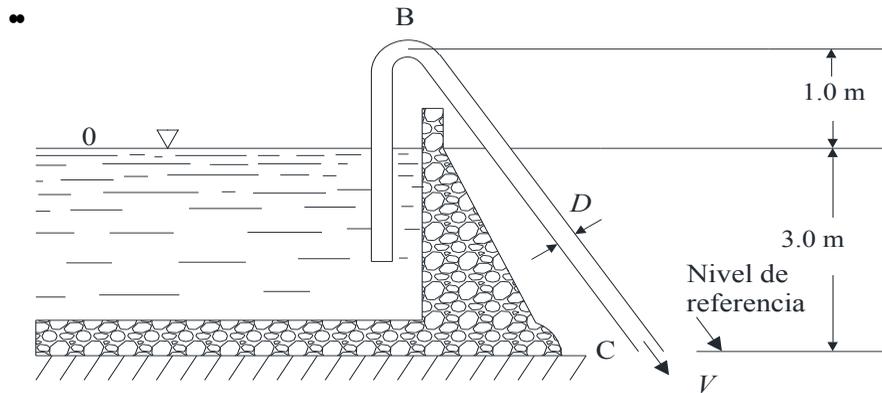
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$4 + 0.49 = 2 + 2.49$$

$$4.49 = 4.49$$

EJEMPLO 3.6

Determine el gasto que descarga el sifón y la presión en la sección B. El diámetro del conducto es $D=0.15\text{ m}$. La descarga es libre (chorro).

*Solución*

En la sección 0, en la superficie libre del agua, con respecto al nivel de referencia se tienen: $z_0 = 3.0\text{ m}$, $p_0 = 0$, y $V_0^2 / 2g \approx 0$ (por ser un almacenamiento de “grandes dimensiones”, comparado con el área del conducto). En la sección C, $z_C = 0$ y por ser descarga como chorro $p_C = 0$. De la ecuación de Bernoulli

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g}$$

al sustituir, se tiene

$$3 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_C^2}{2g}$$

$$\frac{V_C^2}{2g} = 3\text{ m}, \quad V_C = \sqrt{3 \times 2g} = 7.67\text{ m/s}$$

En todo el conducto el área es $A = \pi(0.15\text{ m})^2 / 4 = 0.01767\text{ m}^2$, por lo que el gasto resulta

$$Q = AV = 0.01767 \times 7.67 = 0.1355\text{ m}^3/\text{s}$$

para determinar la presión en B se puede plantear la ecuación de Bernoulli entre O y B o entre B y C, en que $z_C = 4 \text{ m}$

$$z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} \quad \text{o} \quad z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

Dado que el área del conducto no cambia, las cargas de velocidad en las secciones B y C son iguales.

Para B-C

$$4 + \frac{p_B}{\gamma} + 3 = 0 + 0 + 3$$

$$\frac{p_B}{\gamma} = -4 \text{ m}$$

Para 0-B

$$3 + 0 + 0 = 4 + \frac{p_B}{\gamma} + 3$$

$$\frac{p_B}{\gamma} = -4 \text{ m}$$

AGRADECIMIENTOS

Los dibujos fueron elaborados por Yovani Hernández García como parte de su prestación del Servicio Social en la Facultad de Ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

MUNSON, B., YOUNG, D., OKIISHI, T. (2002). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. 1ª. reimpresión, México: Limusa.

POTTER, M., WIGGERT, D. (1998). *Mecánica de Fluidos*. 2ª ed. México: Prentice Hall.

ROBERSON, J., CROWE, C. (1983). *Mecánica de Fluidos*. 1ª ed. en español. México: Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V.

SOTELO ÁVILA, G. (1990). *Hidráulica general*. México: Limusa.

4.1 PRINCIPIOS Y MÉTODOS DE ANÁLISIS

4.1.1 PRINCIPIOS BÁSICOS

Los métodos de análisis del movimiento de los fluidos tienen el propósito de evaluar la capacidad de un flujo para transportar materia a lo largo de una conducción y el mecanismo por el cual cambian sus características dinámicas y de energía de un punto a otro y en el tiempo. Cuando se trata del flujo de un líquido, se establece como axioma que se satisfagan solo tres principios básicos de la Física

- a) Conservación de la masa (principio de continuidad)
- b) Conservación de la energía (primera ley de la termodinámica)
- c) Segunda Ley de Newton del movimiento (principio de la cantidad de movimiento)

La segunda ley de la termodinámica tiene más interés en el flujo de gases y ninguno en el de un líquido, por lo cual no se considera en este análisis.

Las aplicaciones de estos principios a regiones particulares de tamaño infinitesimal o finito en un flujo constituyen los métodos de análisis del movimiento de los líquidos. El principio de la conservación de la masa permite derivar una ecuación de tipo escalar, llamada de continuidad, que presenta diferentes formas y simplificaciones, según el análisis que se elija y el tipo de flujo a considerar.

El principio de conservación de la energía permite derivar la ecuación de la energía, de tipo escalar, que relaciona el trabajo mecánico efectuado por las fuerzas que intervienen en el movimiento, con el flujo de energía y la cantidad de calor transmitido al exterior.

La segunda ley de Newton establece la relación fundamental entre las fuerzas que intervienen y la variación de la cantidad de movimiento que experimenta el líquido de un punto a otro en el transcurso del tiempo. Esta ecuación es de tipo vectorial.

4.1.2 PROCESO REVERSIBLE E IRREVERSIBLE

Un proceso se define como la trayectoria de los estados sucesivos a través de los cuales pasa un sistema durante el cambio de alguna de sus propiedades, como cambios de velocidad, presión, posición, temperatura, etc. En general, el proceso ocasiona algún cambio en los alrededores del sistema; por ejemplo, desplazándolo o transfiriéndole calor a través del contorno. Cuando se puede lograr que el proceso vuelva a su estado original sin ningún cambio definitivo en sus propiedades, se dice que el proceso es reversible.

Cualquier proceso real es irreversible. Los efectos de la viscosidad del fluido, la fricción entre las partes que intervienen, la transferencia de calor, etc., impiden que el proceso sea reversible. La diferencia entre la cantidad de trabajo que pudiera efectuar una sustancia al pasar de un estado a otro a lo largo de un camino de manera reversible, y la cantidad de trabajo real que se produce siguiendo la misma trayectoria, es la irreversibilidad del proceso. En determinadas circunstancias se denomina trabajo perdido, es decir, la pérdida de la capacidad de un sistema para desarrollar trabajo debido a la fricción y otras causas. Por esta razón, cuando en hidráulica se habla de pérdidas o de pérdidas de energía, se desea expresar la irreversibilidad del proceso y no una pérdida real de energía.

La pérdida se puede expresar en función del trabajo por unidad de masa o peso del líquido, o de trabajo por unidad de tiempo.

4.1.3 MÉTODOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICOS

Los métodos de análisis del movimiento de líquidos resultan de la aplicación de los principios básicos de continuidad, energía y cantidad de movimiento a volúmenes de control previamente seleccionados, los cuales tienen la forma, tamaño y extensión que se desee, según la región de interés en el estudio.

Existen distintas maneras de aplicar estos principios. Cuando se aplican a volúmenes de control de magnitud finita resulta el llamado análisis integral con soluciones convencionales sencillas de obtener, ya que en general se refieren a flujo permanente y volúmenes de control seleccionados de manera adecuada. Cuando se aplican a un volumen de control de tamaño diferencial se deriva el análisis diferencial que ha sido tradicional en la mecánica de fluidos. Dicho análisis equivale a seleccionar volúmenes de control de tamaño muy pequeño -de dimensiones Δx , Δy y Δz - que en el límite equivale a expresar como varían las condiciones en los puntos x, y, z , encerrado por dicho volumen en el tiempo. Sin embargo, el intento de una integración general lleva a soluciones muy complejas, y cuando se introducen hipótesis simplificadoras, son de poca utilidad práctica.

4.1.4 MÉTODO EXPERIMENTAL

El análisis matemático de un flujo es con frecuencia insuficiente para resolver todos los aspectos de un problema. Es, por ejemplo, el caso de las pérdidas que ocurren en el flujo o de algunos coeficientes o parámetros de gran importancia. En otros, la solución matemática se vuelve tan compleja o imposible que para obtenerla es necesario conceder hipótesis simplificadoras que no describen la situación real del problema. Cuando esto ocurre es necesario auxiliarse de los métodos de análisis experimental. El planteamiento racional de un experimento o la similitud con otro ya efectuado permite continuar, complementar o sustituir el análisis matemático en la solución.

La similitud dinámica entre dos flujos es la base del método experimental en hidráulica. Además de permitir el planteamiento racional de un experimento, se utiliza para establecer las condiciones de semejanza entre el flujo que ocurrirá en una nueva estructura por diseñar y el que se presentó en un experimento ya realizado y cuyos resultados se conocen.

4.2 LAS FORMAS INTEGRALES DE LAS LEYES FUNDAMENTALES

En la hidráulica, la información deseada con frecuencia se refiere a magnitudes medias de las características en una conducción y no tanto a las variaciones de un punto a otro de la sección. Debido a esta razón, es común seleccionar un volumen finito de control no deformable en el caso de flujo permanente cuyo contorno coincide con las secciones transversales al flujo y con las paredes de la conducción cuando es a presión (tubería), o parte con paredes rígidas y otra con la superficie libre del líquido cuando la conducción es abierta (canal).

Al volumen de control seleccionado se le aplican los principios básicos y se obtiene un conjunto de ecuaciones que contienen integrales, por eso se le conoce como análisis integral o análisis del volumen finito de control. Estas ecuaciones llevan a soluciones convencionales sencillas y prácticas cuando la forma y extensión del $\mathcal{V}C$ es la adecuada. Para algunos casos de flujo no permanente es más conveniente un $\mathcal{V}C$ deformable, aunque con soluciones más complicadas.

El análisis integral es uno de los más utilizados. En este capítulo se hace mayor énfasis en flujos permanentes y, por tanto, en $\mathcal{V}C$ no deformables. Cuando se aplican los principios básicos no se hace distinción entre flujo laminar y turbulento, y las ecuaciones resultantes son válidas si se hace la interpretación adecuada de variables.

En ocasiones se puede encontrar falta de rigor matemático en algunos desarrollos para hacerlos más sencillos, o bien, se aceptan suposiciones razonables, como despreciar una pérdida o desechar algún término. Cuando esto sucede, se necesita de un conocimiento más detallado del comportamiento del flujo para una solución, o bien de la valuación experimental de dichos términos.

El método del análisis integral no es adecuado para abordar problemas donde es crucial entender el comportamiento local del flujo, y es entonces cuando el método de análisis diferencial se utiliza para dar mayor exactitud y más detalles. Las ecuaciones integrales se reemplazan por otras de diferenciales parciales, cuyas condiciones de frontera y solución tienen una mayor complejidad matemática, lo cual muchas veces requiere de métodos numéricos avanzados.

4.2.1 PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE MASA

Para un volumen de control, este principio se puede expresar como la transferencia neta de masa hacia adentro de un volumen de control o hacia afuera de este. Durante un intervalo Δt es igual al cambio neto (aumento o disminución) en la masa total que está adentro del volumen de control. Es decir

$$m_{\text{entra}} - m_{\text{sale}} = \Delta m_{\mathcal{V}C}$$

donde $\Delta m_{\mathcal{V}C}$ es el cambio en la masa dentro del $\mathcal{V}C$ durante el proceso. Esto también se puede expresar como

$$\dot{m}_{\text{entra}} - \dot{m}_{\text{sale}} = dm_{\mathcal{V}C}/dt \quad (4.1)$$

$dm_{\mathcal{V}C}/dt$ es la razón del cambio de masa que está dentro de las fronteras del $\mathcal{V}C$.

4.2.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad se basa en el principio de conservación de masa aplicado al movimiento de los fluidos.

La masa que está dentro de un volumen diferencial $d\mathcal{V}$ es $dm = \rho d\mathcal{V}$. Por integración se determina que la masa total dentro del volumen de control en cualquier instante t es $m_{\mathcal{V}C} = \int_{\mathcal{V}C} \rho d\mathcal{V}$. Entonces, la razón de cambio de la cantidad de masa dentro del volumen de control se expresa

$$\frac{dm_{\mathcal{V}C}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}C} \rho d\mathcal{V} \quad (4.2)$$

El $\mathcal{V}C$ mostrado en la figura 4.1 corresponde al comprendido en una parte de interés de la conducción de un líquido y está limitado por la superficie de control SC . Esta se forma por la superficie lateral coincidente con la pared de la conducción y por las secciones 1, 2 y 3. Estas últimas se seleccionan de manera que el flujo a través de ellas sea, en lo posible, en dirección perpendicular a dichas superficies. La velocidad \mathbf{v} del líquido en cada punto de una misma sec-

ción puede variar, pero existe el valor medio V de la misma representativo de toda la sección, con dirección perpendicular a ella y aplicado en su centroide.

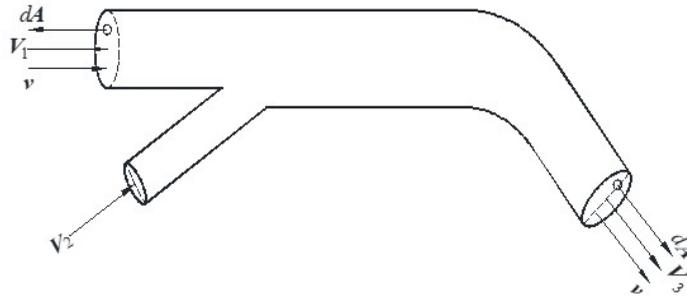


Figura 4.1 VOLUMEN DE CONTROL PARA LA DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La expresión matemática del principio de conservación de masa aplicado al volumen de control seleccionado se escribe en la forma

$$\int_{SC} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = 0 \quad (4.3)$$

El primer término representa la cantidad neta de masa que atraviesa la porción de superficie de control donde hay flujo. Una parte de esa masa entra al VC y es de signo negativo debido a que los vectores \mathbf{v} y $d\mathbf{A}$ están en sentido opuesto, como en las sección 1; otra parte de la masa sale del VC y es de signo positivo debido a que los vectores \mathbf{v} y $d\mathbf{A}$ están en el mismo sentido, como ocurre en la sección 3. De acuerdo con esta convención, la cantidad neta de masa que pasa por la superficie de control, en la unidad de tiempo, es la diferencia entre la que sale y la que entra al VC , mediante la suma algebraica de los términos del tipo $\rho_i V_i A_i$, es decir

$$\int_{SC} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i A_i \quad (4.4)$$

donde, para cada área de la sección transversal $\int_{A_i} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \rho_i V_i A_i$; ρ_i y V_i son la densidad y la velocidad media en cada sección i de la superficie de control donde hay flujo y cuya área es A_i , siendo n el número de secciones en las que hay entrada o salida de masa. Por ejemplo, para el volumen de control de la figura 4.1 se tiene que

$$\int_{SC} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = -\rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 V_3 A_3$$

Si el flujo es no permanente en el volumen de control de la figura 4.1, la ecuación de continuidad queda

$$\sum_{i=1}^n \rho_i V_i A_i + \frac{dm_{VC}}{dt} = 0$$

Para cualquier volumen de control se tiene

$$\sum \dot{m}_{\text{sale}} - \sum \dot{m}_{\text{entra}} + \frac{dm_{VC}}{dt} = 0 \quad (4.5)$$

Cuando el flujo es permanente, el volumen de masa dentro del volumen de control no varía y si además es incompresible, la ecuación de continuidad resulta

$$\sum_{i=1}^n V_i A_i = 0 \quad (4.6a)$$

donde hay que recordar que $V_i A_i$ lleva signo negativo si entra al volumen de control y signo positivo si sale de este. Otra forma de expresar la ecuación de continuidad para flujo permanente e incompresible es

$$\sum Q_{\text{sale}} - \sum Q_{\text{entra}} = 0 \quad (4.6b)$$

El flujo es unidimensional cuando el volumen de control es como el mostrado en la figura 4.2 y el comportamiento se analiza en cada sección transversal, la cual se localiza mediante una sola coordenada curvilínea que sigue el eje de la conducción y la otra variable es el tiempo.

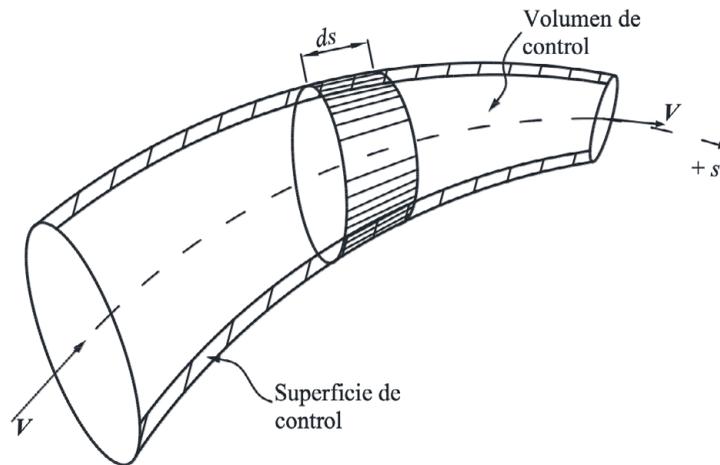


Figura 4.2 FLUJO UNIDIMENSIONAL

En la deducción de la ecuación se emplea un volumen de control deformable limitado lateralmente por la superficie de control coincidente con la pared del conducto, además de dos secciones transversales al flujo, separadas la distancia ds , donde s representa la coordenada curvilínea que sigue el eje de la conducción. La otra variable independiente es el tiempo t . En cualquier instante, el volumen de líquido contenido en el volumen de control es $d\mathcal{V} = A ds$, donde el área A es función de (s, t) y ds es independiente de ambos. Las velocidades en cada sección transversal poseen un valor medio V que se considera representativo de la sección transversal y con dirección tangente al eje de la conducción.

Para el $\mathcal{V}C$ mostrado, el flujo neto de masa a través de las secciones de flujo es la diferencia entre la que sale y la que entra, es decir

$$\left[\rho VA + \frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} ds \right] - \rho VA = \frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} ds$$

La rapidez con que varía la masa dentro del volumen de control es

$$\frac{\partial(\rho A ds)}{\partial t}$$

Por tanto, el principio de conservación de masa establece

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} ds + \frac{\partial(\rho A ds)}{\partial t} = 0$$

Dado que la longitud ds no depende del tiempo, esta puede salir de la derivada del segundo término y al dividir la ecuación anterior entre ds , se tiene

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$$

al desarrollar las derivadas parciales resulta

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial s} V + \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} V + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

con $V = ds/dt$, y por el desarrollo de la derivada total, se llega a

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (4.7)$$

que es la ecuación de continuidad para una vena líquida donde el flujo es no permanente y compresible. Esta ecuación es la que se emplea en el análisis del golpe de ariete. En problemas de flujo no permanente en conductos a superficie libre, el líquido es incompresible y desaparece el último término de la ecuación 4.7.

Cuando el flujo es permanente, $\partial(\rho A)/\partial t = 0$, y de $\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$, se tiene

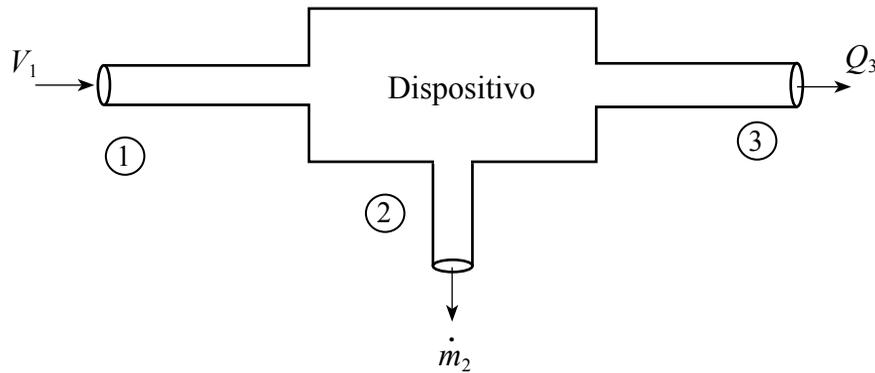
$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial s} = 0$$

Si el flujo es permanente e incompresible, la ecuación anterior se simplifica a la forma

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (4.8)$$

que también se pudo obtener a partir de la ecuación 4.6b.

EJEMPLO 4.1 Agua entra y sale del dispositivo que se muestra en la figura. $D_1 = 8$ cm, $V_1 = 10$ m/s, $\dot{m}_2 = 22$ kg/s, $Q_3 = 0.012$ m³/s. Calcule la rapidez de cambio de la masa dentro del dispositivo.



Solución

El flujo de masa en la unidad de tiempo es $\dot{m} = \rho VA = \rho Q$. De los datos del problema se tiene:

$$\rho A_1 V_1 = 1000 \text{ kg/m}^3 \times (\pi \times 0.08^2 / 4) \text{ m}^2 \times 10 \text{ m/s} = 50.26 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_2 = 22 \text{ kg/s}$$

$$\rho Q_3 = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.02 \text{ m}^3/\text{s} = 12 \text{ kg/s}$$

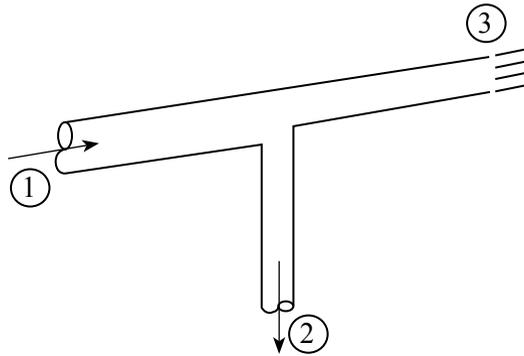
De la ecuación 4.5, la variación de la masa dentro del dispositivo es

$$\frac{dm_{vC}}{dt} = \sum \rho VA_{entra} - \sum \rho VA_{sale}$$

$$\frac{dm_{vC}}{dt} = 50.26 - 22 - 12 = 16.26 \text{ kg/s}$$

Se debe aclarar que el resultado es para un instante dado en el cual se tienen las entradas y salidas de masa al dispositivo.

EJEMPLO 4.2 En la bifurcación mostrada en la que el flujo es permanente e incompresible, el agua entra por la sección 1 y sale por las secciones 2 y 3. La velocidad media en la sección 1 es $V_1 = 12 \text{ m/s}$ y el gasto en la sección 3, en la cual se tiene una descarga como chorro, es $Q_3 = 0.020 \text{ m}^3/\text{s}$. Los diámetros son $D_1 = 60 \text{ mm}$ y $D_2 = D_3 = 50 \text{ mm}$. Calcule los gastos en las secciones 1 y 2, y las velocidades medias en las secciones 2 y 3.



Solución

Las áreas son: $A_1 = \frac{\pi(0.06 \text{ m})^2}{4} = 0.002827 \text{ m}^2$, $A_2 = A_3 = \frac{\pi(0.05 \text{ m})^2}{4} = 0.001963 \text{ m}^2$

El gasto en la sección 1 es

$$Q = V_1 A_1 = 12(\text{m/s}) \times 0.002827(\text{m}^2) = 0.0339 \text{ m}^3/\text{s}$$

De la ecuación de continuidad, el gasto en la sección 2 resulta

$$Q_2 = Q_1 - Q_3$$

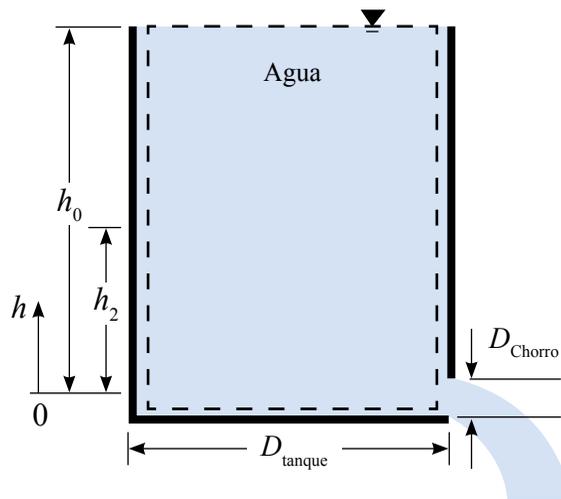
$$Q_2 = 0.0339 \text{ m}^3/\text{s} - 0.020 \text{ m}^3/\text{s} = 0.0139 \text{ m}^3/\text{s}$$

De la ecuación del gasto, las velocidades en las secciones 2 y 3 quedan

$$V_2 = Q_2 / A_2 = 0.0139(\text{m}^3/\text{s}) / 0.001963(\text{m}^2) = 7.08 \text{ m/s}$$

$$V_3 = Q_3 / A_3 = 0.020(\text{m}^3/\text{s}) / 0.001963(\text{m}^2) = 10.18 \text{ m/s}$$

EJEMPLO 4.3 Un tanque cilíndrico con $h_0 = 4$ m de alto y diámetro $D_{\text{tanque}} = 0.9$ m, cuya parte superior está en contacto con la atmósfera, inicialmente está lleno de agua. Se quita el tapón de un orificio que está en el fondo del tanque, cuyo diámetro es $D_{\text{chorro}} = 15$ mm y que descarga hacia afuera. La velocidad media del chorro es $V = \sqrt{2gh}$, donde h es la altura del agua en el tanque medida desde el centro del orificio. Determine el tiempo que se requiere para que el nivel del agua descienda hasta $h_2 = 2$ m, medido desde el fondo. Considere despreciable la distancia desde el fondo del recipiente y el centro del orificio, ya que es muy pequeña comparada con la altura total del agua.



Solución

En este caso decrece el volumen ocupado por el agua conforme el agua desciende y, por lo tanto, es un \mathcal{VC} variable. Dado que la densidad es constante, $\frac{dm_{\mathcal{VC}}}{dt} = \rho \frac{d\mathcal{V}}{dt}$, de la ecuación de continuidad 4.5, se tiene

$$\dot{m}_{\text{entra}} - \dot{m}_{\text{sale}} = \rho \frac{d\mathcal{V}}{dt}$$

donde: $\dot{m}_{\text{entra}} = 0$, $\dot{m}_{\text{sale}} = (\rho VA)_{\text{sale}} = \rho \sqrt{2gh} A_{\text{chorro}}$, $\rho \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \rho A_{\text{tanque}} \frac{dh}{dt}$.

Al sustituir en la ecuación de continuidad, esta queda

$$-\rho \sqrt{2gh} A_{\text{chorro}} = \rho A_{\text{tanque}} \frac{dh}{dt}$$

$$-\rho \sqrt{2gh} \frac{\pi D_{\text{chorro}}^2}{4} = \rho \frac{\pi D_{\text{tanque}}^2}{4} \frac{dh}{dt}$$

$$dt = -\frac{D_{\text{tanque}}^2}{D_{\text{chorro}}^2} \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

Se integra desde $t = 0$, en donde $h = h_0$, hasta $t = t$, en donde $h = h_2$ y resulta

$$\int_0^t dt = -\frac{D_{\text{tanque}}^2}{D_{\text{chorro}}^2} \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

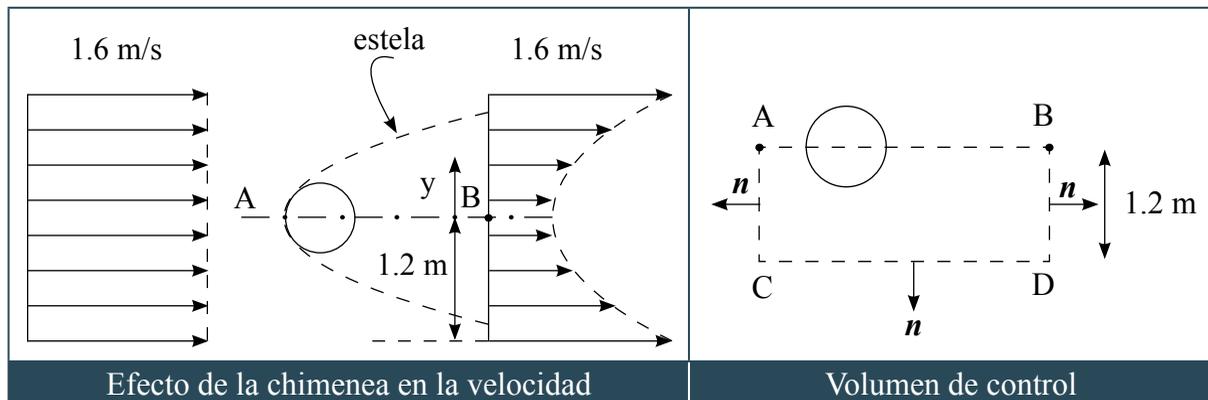
$$t = \left(\frac{0.9 \text{ m}}{0.015 \text{ m}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2 \times 9.81 \text{ m/s}^2}} \frac{\sqrt{4 \text{ m}} - \sqrt{2 \text{ m}}}{(1/2)} = 952.18 \text{ s} = 15.87 \text{ min}$$

Por lo tanto, en 15.87 min se vaciará la mitad superior del tanque después de quitar el tapón.

EJEMPLO 4.4 La figura muestra una chimenea cilíndrica la cual distorsiona un flujo de aire que tiene una velocidad uniforme de 1.6 m/s. La distribución de la velocidad en el sitio mostrado corriente abajo y dentro de la estela del cilindro se aproxima a la ecuación

$$v(y) = 1.24 + 0.25y^2, \text{ válida para } -1.2 \leq y \leq 1.2$$

donde $v(y)$ está en m/s y y en m. a) Determinar el flujo de la masa de aire a través de la superficie CD por metro de profundidad; considere la densidad del aire $\rho = 1.1 \text{ kg/m}^3$.



Solución

Se elige el contorno ABCD como $\mathcal{V}C$. En la figura se muestra que dentro de la zona de influencia de la estela el flujo se retarda, pero la velocidad fuera de ella es de 1.6 m/s, con la misma magnitud que la velocidad normal al plano AC. El plano AB es de simetría y evidentemente no hay flujo a través de dicho plano. Se considera que el flujo es permanente y la ecuación de continuidad aplicable es

$$\sum \dot{m}_{sale} - \sum \dot{m}_{entra} = 0$$

$$\dot{m}_{BD} + \dot{m}_{CD} - \dot{m}_{AC} = 0$$

donde, por cada metro de profundidad

$$\dot{m}_{AC} = (\rho VA)_{AC} = 1.1 \text{ kg/m}^3 \times 1.6 \text{ m/s} \times 1.2 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 2.112 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{BD} = \int_{CD} \rho v \dot{g} dA = \int_0^{1.2} 1.1(1.24 + 0.25 y^2)(1) dy = \left[1.364 y + 0.09166 y^3 \right]_0^{1.2} = 1.795 \text{ kg/m}^3$$

y el flujo de masa a través de la superficie CD, por cada metro de profundidad resulta

$$\dot{m}_{CD} = 2.112 - 1.795 = 0.317 \text{ kg/m}^3$$

4.3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

Este principio establece que la energía, en cualquiera de sus formas, nunca se puede crear o destruir, pero sí se transforma. El calor es una forma de energía y una cantidad dQ_c de él se puede transmitir desde el exterior a un sistema o desde este al exterior y expresarlo en términos de unidades mecánicas a través del llamado equivalente mecánico del calor; de igual manera, el trabajo y la energía mecánica también se pueden medir en términos de unidades de calor. Además, al existir un intercambio dW de trabajo mecánico del sistema con el exterior, también se produce un cambio de la energía intrínseca que posee la sustancia como resultado de su actividad molecular, posición y velocidad en su movimiento.

En hidráulica, el principio se expresa en término de la rapidez con que se produce la transferencia de calor por efecto del intercambio de energía y trabajo mecánico entre un volumen de control $\mathcal{V}C$ lleno de líquido y la transferencia de calor al medio que lo rodea. En forma de ecuación se tiene que

$$\frac{dQ_c}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (4.9)$$

donde

- dQ_c cantidad de calor añadido a la masa contenida en el volumen de control
- dW trabajo mecánico de intercambio hacia adentro o hacia afuera del volumen de control
- dE incremento de energía intrínseca asociada a la masa del $\mathcal{V}C$.

todo realizado en el tiempo dt . Tanto Q_c como W y E se expresan en unidades de energía, por lo tanto, las unidades de dQ_c / dt , dW / dt y dE / dt son de energía por unidad de tiempo, es decir, de potencia.

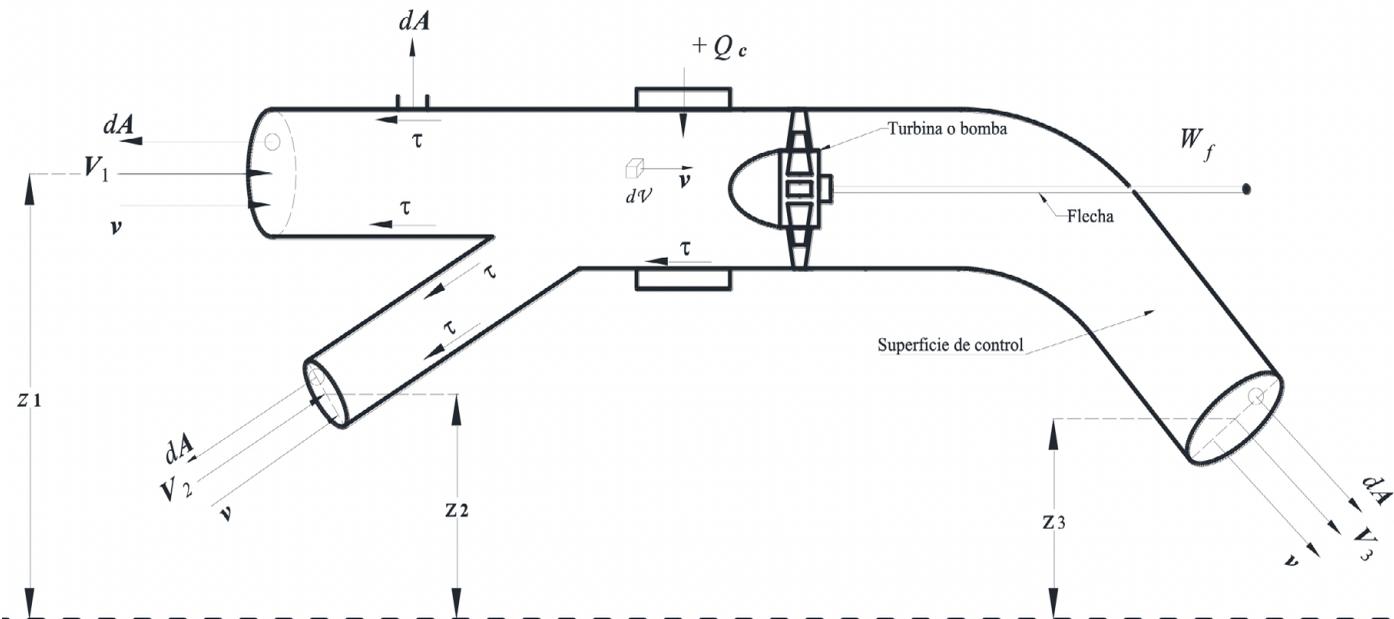


Figura 4.3 VOLUMEN DE CONTROL PARA LA DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES

Se considera que la ecuación 4.9 se aplica al volumen de control de la figura 4.3, donde el líquido entra y sale del volumen de control en dirección perpendicular a las secciones 1, 2 y 3, con velocidad distinta en cada punto de estas y se mueve tangente a las fronteras laterales. La rapidez del cambio de energía dE/dt es la rapidez del flujo neto de energía a través de algunas partes o el total del volumen de control más la rapidez del cambio de energía intrínseca asociada a la masa en movimiento como lo indica la ecuación 4.3; es decir

$$\frac{dE}{dt} = \int_{SC} e\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{VC} e\rho dV \quad (4.10)$$

donde e representa la energía intrínseca por unidad de masa del líquido en el volumen de control, de acuerdo con los componentes de esta que intervienen en el movimiento. Para el escurrimiento de líquidos no intervienen los componentes de la energía debidos a reacciones químicas ni nucleares o de tipo eléctrico o magnético. Por lo tanto, solo se consideran:

- u energía interna producto de las fuerzas y actividad molecular del líquido, asociado íntimamente con su temperatura
- gz energía potencial por unidad de masa debida al campo gravitacional dentro del que se produce el escurrimiento, donde z es la elevación local de cada partícula que atraviesa el área del flujo
- $v^2 / 2$ energía cinética asociada a la velocidad local de la partícula.

De este modo, la energía intrínseca total de la unidad de masa es

$$e = u + gz + \frac{v^2}{2} \quad (4.11)$$

Al sustituir los valores de energía intrínseca de la ecuación 4.11 en la ecuación 4.10, se tiene

$$\frac{dE}{dt} = \int_{SC} (u + gz + \frac{v^2}{2}) \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}C} (u + gz + \frac{v^2}{2}) \rho d\mathcal{V} \quad (4.12)$$

La razón de transferencia de trabajo, es decir, la potencia, se determina con sus componentes

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_p}{dt} + \frac{dW_\tau}{dt} + \frac{dW_f}{dt} \quad (4.13)$$

donde

- W_p trabajo debido a las fuerzas producidas por la presión ejercida desde el exterior sobre la superficie de frontera SC o por el volumen $\mathcal{V}C$ al medio que lo rodea.
- W_τ trabajo debido a esfuerzos tangenciales ejercidos sobre la SC , similar al efectuado por la presión.
- W_f trabajo de flecha realizado sobre un elemento rotatorio (turbina) dentro del volumen de control y transmitido hacia el exterior a través de una flecha rotatoria, en cuyo caso es positivo, o transferido al interior del flujo (bomba), es decir negativo. El término dW_f / dt es la potencia de flecha.

El trabajo elemental es $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por lo que respecta al trabajo debido a la presión, este es $dW_p = p dA \cdot d\mathbf{s}$ y con $\mathbf{v} = d\mathbf{s} / dt$ se tiene $dW_p = p(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) dt$; resulta entonces

$$\frac{dW_p}{dt} = \int_{SC} p(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (4.14)$$

El signo es positivo cuando la masa sale del volumen, negativo en caso contrario; y es cero cuando no hay flujo en la parte de área en la que así ocurra.

El trabajo desarrollado por las fuerzas tangenciales sobre la superficie de control se determina en forma similar al desarrollado por las fuerzas debidas a la presión; es decir, $dW_\tau = \int_{SC} \tau(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) dt$. Sin embargo, dado que τ se genera solamente sobre la frontera sólida y no existe flujo a través de ella, $(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = 0$, se tiene que

$$\frac{dW_\tau}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

El término dW_f / dt es la potencia de flecha (potencia mecánica) que ocurre en algún punto del \mathcal{VC} .

$$\frac{dW_f}{dt} = P_f \quad (4.16)$$

Con las ecuaciones 4.12 a 4.16, al sustituir en la ecuación 4.9, agrupar términos y con $\dot{Q}_c = dQ_c / dt$, se obtiene la ecuación general de energía en la forma

$$\dot{Q}_c = \int_{SC} \left(\frac{p}{\rho} + u + gz + \frac{v^2}{2} \right) \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{VC}} \left(u + gz + \frac{v^2}{2} \right) \rho d\mathcal{V} + P_f \quad (4.17)$$

La primera integral de esta ecuación debe efectuarse sobre todas las partes de la superficie de control donde exista flujo, con las mismas consideraciones que se hicieron para la ecuación 4.4. Si se supone que p , ρ , u , y z son valores medios que ocurren en el centroide de las partes de la superficie de control donde hay flujo y que este es perpendicular a ellas, resulta

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{p}{\rho} + u + gz \right) \rho VA + \frac{V^2}{2} \rho VA \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA \right] \\
 \int_{SC} \left(\frac{p}{\rho} + u + gz + \frac{v^2}{2} \right) \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{p}{\rho} + u + gz + \alpha \frac{V^2}{2} \right) \rho VA \right] \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA \quad (4.19)$$

es el coeficiente de corrección de energía cinética o de Coriolis, y corrige el cálculo del flujo de este tipo de energía al efectuarse con la velocidad media. Su valor siempre es igual o mayor a 1 y se aproxima más a la unidad en la medida que la distribución de la velocidad sea más uniforme.

El término $\sum_{i=1}^n$ en el lado derecho de la ecuación 4.18 indica que debe efectuarse la suma algebraica de los distintos componentes en todas las partes de la superficie de control donde haya flujo en la misma forma que en la ecuación 4.4, toda vez que el signo depende de que el flujo salga (positivo) o entre al volumen de control (negativo).

Al sustituir la ecuación 4.18 en la 4.17, se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(gz + \frac{p}{\rho} + \alpha \frac{V^2}{2} \right) \rho VA \right] + \frac{d}{dt} \int_{VC} \left(gz + \frac{v^2}{2} \right) \rho dV + P_f + \frac{d}{dt} \int_{VC} u \rho dV + \sum_{i=1}^n u \rho VA - \dot{Q}_c = 0 \quad (4.20)$$

En la ecuación 4.20 no existe un término de pérdida de energía debido a que el principio de conservación de la energía no establece que esta puede perderse, sino convertirse en otro tipo susceptible de recuperarse. Sin embargo, el fluido en su movimiento efectúa un trabajo para vencer las fuerzas de fricción, que se convierte en calor, disminuyendo la energía disponible para el movimiento. Una parte del calor produce un cambio de la energía interna entre el flujo entrante y saliente. Además, la mayor parte del calor producido se transfiere del \mathcal{VC} al medio que lo rodea. Es decir, el calor producido equivalente al trabajo mecánico realizado para vencer las fuerzas de fricción es precisamente igual a los tres últimos términos de la ecuación 4.20.

En cualquier caso, la conversión en calor es un trabajo o pérdida equivalente a una energía no recuperable por la irreversibilidad I_r del proceso al tratarse de un líquido, y se considera una pérdida de energía por unidad de tiempo, la cual se representa como

$$I_r = \sum_{i=1}^n u \rho VA + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{VC}} u \rho d\mathcal{V} - \dot{Q}_c \quad (4.21)$$

donde I_r siempre es positiva debido a su carácter irreversible.

La ecuación 4.21 contiene dos términos que dependen de la temperatura y, en el caso de un fluido, como ya se dijo, corresponde a la irreversibilidad en el proceso. En efecto, el primer término es el flujo neto de intercambio de energía del \mathcal{VC} con el medio ambiente; la segunda es la rapidez con que ocurre el cambio de energía interna del fluido en el \mathcal{VC} . Cuando la temperatura del \mathcal{VC} permanece constante, la energía interna no cambia y la pérdida se balancea por transferencia de calor a través de la SC . Con ello, el valor de los dos primeros términos es prácticamente cero, de manera que la irreversibilidad se atribuye principalmente al intercambio de calor \dot{Q}_c con el exterior. El término I_r es la pérdida de energía (en la unidad de tiempo), ya que es una conversión de energía útil a energía no aprovechable cuya valuación es netamente empírica. Dicha pérdida se debe principalmente a dos efectos: a) la viscosidad causa fricción interna que resulta en incremento de energía interna (incremento de temperatura); b) los cambios de geometría resultan en separación de flujo que requiere de energía útil para mantener su movimiento.

Por lo tanto, de 4.21 en 4.20 se tiene

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(gz + \frac{p}{\rho} + \alpha \frac{V^2}{2} \right) \rho VA \right] + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}C} \left(gz + \frac{v^2}{2} \right) \rho d\mathcal{V} + P_f + I_r = 0 \quad (4.22)$$

La potencia de flecha P_f será positiva si se aprovecha potencia del $\mathcal{V}C$ (turbina) o negativa si se introduce potencia al flujo (bomba).

La ecuación 4.22 es la ecuación de energía más general para el análisis de un volumen a través de un volumen de control del flujo, donde I_r tiene un tratamiento netamente experimental. Note que todos los términos de esta ecuación tienen unidades de potencia.

4.3.1 FLUJO PERMANENTE E INCOMPRESIBLE

Cuando el volumen de control es indeformable y el flujo permanente e incompresible, la ecuación 4.22 se reduce a

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(gz + \frac{p}{\rho} + \alpha \frac{V^2}{2} \right) \rho VA \right] + P_f + I_r = 0 \quad (4.23)$$

Al aplicar la ecuación 4.23 al volumen de control de la figura 4.3 cuando haya flujo permanente e incompresible resulta

$$-\left(gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} \right) \rho Q_1 - \left(gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} \right) \rho Q_2 + \left(gz_3 + \frac{p_3}{\rho} + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2} \right) \rho Q_3 + P_f + I_r = 0$$

Esto indica que la potencia que tiene el flujo a la entrada del volumen de control es igual a la potencia que tiene a la salida de este, más la pérdida de potencia (irreversibilidad) que se produjo durante el proceso, más la potencia de flecha (con el signo que le corresponda).

Se define carga total H en cada sección

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (4.24)$$

Donde H representa la energía de flujo en cada sección por unidad de peso del líquido. Los términos tienen las dimensiones de longitud y suelen designarse como cargas o alturas: de posición z , de presión p/γ , y de velocidad $\alpha V^2/2g$. Los productos $\rho g H Q = \gamma H Q$ tienen las dimensiones de energía por unidad de tiempo (potencia), al igual que P_f e I_r . Entonces, la ecuación 4.23 también se puede expresar

$$\sum_{i=1}^n (H \gamma Q) + P_f + I_r = 0 \quad (4.25)$$

Cuando no se tiene una máquina que aproveche o adicione energía, $P_f = 0$, la ecuación 4.25 se reduce a la forma

$$\sum_{i=1}^n (H \gamma Q) + I_r = 0 \quad (4.26)$$

4.3.2 FORMA UNIDIMENSIONAL

En el volumen de control de la figura 4.4, el flujo entra por la sección 1 y sale por la sección 2, por lo que $Q_1 = Q_2 = Q$. Al aplicar la ecuación 4.25 y dividir todos sus términos entre γQ se tiene

$$\sum_{i=1}^2 \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) \right] + \frac{P_f}{\gamma Q} + \frac{I_r}{\gamma Q} = 0$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_f}{\gamma Q} + \frac{I_r}{\gamma Q} \quad (4.27)$$

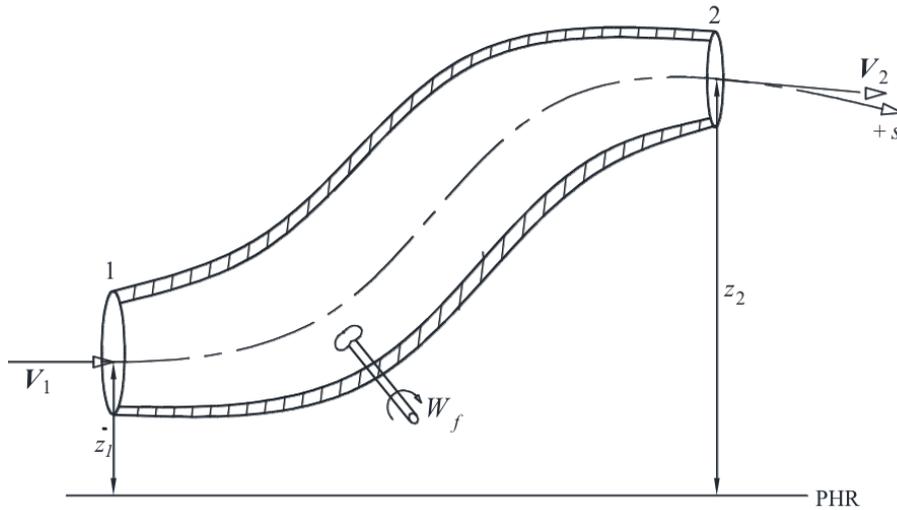


Figura 4.4 VOLUMEN DE CONTROL PARA FLUJO UNIDIMENSIONAL

El término I_r es la pérdida de potencia. Se define la pérdida de carga h_r como la irreversibilidad entre γQ

$$h_r = \frac{I_r}{\gamma Q} \quad (4.28)$$

La energía neta por unidad de peso del líquido que una máquina aprovecha o proporciona se define

$$H_{m\acute{a}q} = \frac{P_f}{\gamma Q} \quad (4.29)$$

Al sustituir las expresiones 4.28 y 4.29 en la ecuación 4.27, esta se convierte en una ecuación de energía por unidad de peso, aunque es usual llamarla simplemente ecuación de energía

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + H_{m\acute{a}q} + h_{r1-2} \quad (4.30)$$

donde h_{r1-2} representa las pérdidas que ocurren en el flujo entre las secciones 1 y 2. Esta ecuación incluye la carga que aprovecha (+) o proporciona la flecha (-). Cuando no existe intercambio de energía con el exterior la ecuación 4.30, se reduce a

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2} \quad (4.31)$$

La ecuación 4.31 establece las relaciones entre las diferentes transformaciones de la energía mecánica del flujo por unidad de peso de este. La carga de posición es la energía potencial; la carga de presión es la energía correspondiente al trabajo mecánico ejecutado por las fuerzas debidas a la presión; la carga de velocidad es la energía cinética del flujo en cada sección y la pérdida de carga es la energía mecánica equivalente al trabajo perdido por el flujo entre dos secciones (todas por unidad de peso).

Si no se consideran pérdidas y el coeficiente de Coriolis es $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, resulta

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (4.32)$$

Esto muestra que la ecuación de la energía se ha reducido a una forma idéntica a la ecuación de Bernoulli 3.27, la cual obtuvo Euler a partir de la segunda ley de Newton y con aplicación originalmente para una línea de corriente. La ecuación de Bernoulli se puede aplicar solamente cuando las fuerzas viscosas o de fricción son sumamente pequeñas en comparación con las otras fuerzas que actúan en el fluido. En casos reales no se puede aplicar en todas las partes en un flujo, ya que por pequeña que sea la viscosidad siempre existe esta.

4.3.3 CARACTERÍSTICAS DE LAS PÉRDIDAS DE ENERGÍA

Existen dos tipos distintos de pérdida. La primera se debe a la resistencia interna del flujo y a la que oponen las fronteras rígidas de la conducción. Se conoce como pérdida por fricción y depende de varios factores como: la rugosidad de la frontera, la longitud del conducto, sus dimensiones transversales y la velocidad del flujo. Entre mayor sea la longitud, mayor será la pérdida.

Otro tipo de pérdida se conoce como local y ocurre en sitios donde hay cambios geométricos del conducto, como su entrada, cambios de dirección o de sus dimensiones transversales (bruscos o graduales), dispositivos de cierre o apertura, rejillas, mallas, etc. Esta pérdida se debe a la generación de turbulencias, separación del líquido y vórtices en el sitio que se producen. La suma de pérdidas locales puede ser tan importante como la de fricción.

Los dos tipos de pérdida son de diferente índole, pero tienen en común que dependen de la carga de velocidad en el conducto, en la forma

$$h_r = K \frac{V^2}{2g} \quad (4.33)$$

La valuación de K se basa en resultados experimentales y si en las secciones 1 y 2 se tiene diferente velocidad, siempre se especifica a cuál de ellas corresponde la carga de velocidad.

4.3.4 INTERPRETACIÓN Y APLICACIÓN

En la figura 4.5 se muestra una conducción cerrada donde el flujo es permanente y llena totalmente el espacio interior. El \mathcal{VC} queda limitado por las paredes y por las secciones arbitrarias 1 y 2.

Con el propósito de entender mejor las distintas aplicaciones de la ecuación 4.31 es adecuado hacer una interpretación física de los diferentes términos que intervienen en ella. Cada término de esta ecuación tiene unidades de longitud y se le llama carga o altura; en inglés se emplea *head*. En la figura 4.5 se ha usado un plano arbitrario de referencia a partir del cual se mide la altura z . La carga de presión equivale a la altura que alcanzaría el agua en piezómetros hipotéticos que se instalaran en cada sección.

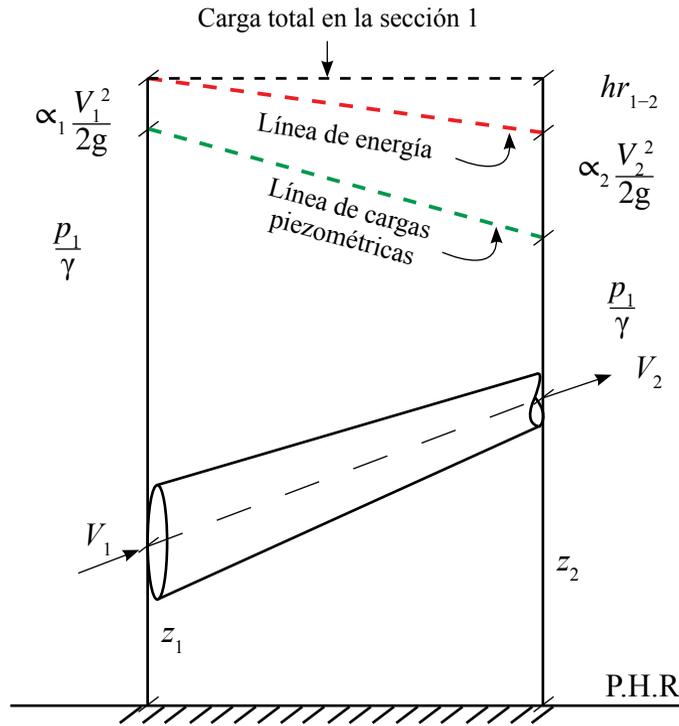


Figura 4.5 INTERPRETACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA UNA CONDUCCIÓN A PRESIÓN Y CON FLUJO PERMANENTE

Con este esquema se pueden hacer las siguientes definiciones:

- La *línea de la energía* (L.E.) une los puntos que indican en cada sección la carga total H representativa de la energía del flujo.
- La *línea de cargas o alturas piezométricas* (L.C.P.), también conocida como línea piezométrica o gradiente de cargas de presión, une los puntos que marcan en cada sección la suma de las cargas $z + p / \gamma$.

De acuerdo con estas definiciones, la línea de cargas piezométricas está separada de la línea de energía, la distancia vertical $\alpha V^2 / 2g$, correspondiente a cada sección. En el trazo de las líneas se pueden hacer las siguientes generalizaciones:

- La línea de energía no puede ser horizontal o con inclinación ascendente en la dirección del movimiento si el líquido es real y no adquiere energía adicional desde el exterior. La diferencia de nivel de la línea de energía en dos secciones distintas representa la pérdida de energía o disipación de energía por unidad de peso del líquido fluyente.
- La línea de energía y la de cargas piezométricas coinciden y quedan al nivel de la superficie libre para un líquido en reposo.
- En el caso de que la línea de alturas piezométricas quede en algún tramo por debajo del eje del conducto, la presión local en ese tramo es menor que la presión cero de referencia que se utilice (comúnmente la presión atmosférica).

La figura 4.6 muestra una conducción en la que la línea de cargas piezométricas cruza por debajo del eje de esta; dado que la carga piezométrica es $z + p/\gamma$, en todas las secciones en las que esta línea cruza por debajo de la conducción se tiene que las presiones locales son menores que la presión atmosférica, es decir que la presión manométrica es $p < 0$.

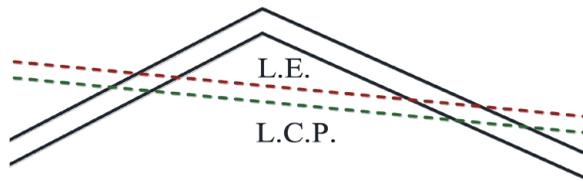


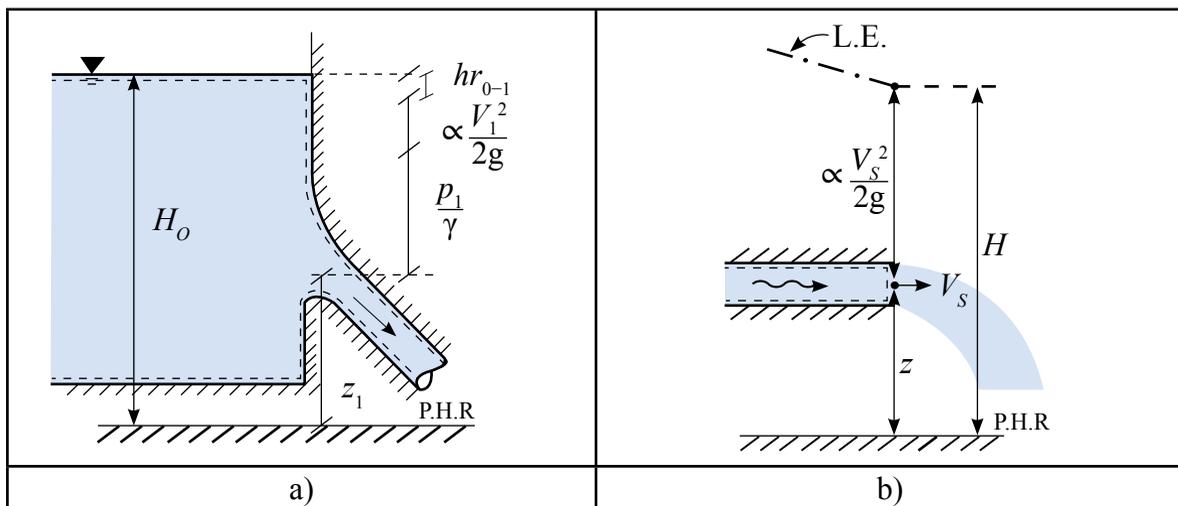
Figura 4.6 LÍNEA DE CARGAS PIEZOMÉTRICAS QUE CRUZA POR DEBAJO DEL EJE DE LA CONDUCCIÓN

Para aplicar la ecuación de la energía se utilizan volúmenes finitos de control limitados por las paredes de la conducción y una superficie libre (si existe), y por las secciones transversales al flujo. Por ello es común decir que se aplica entre dos secciones de la conducción sin mencionar las restantes fronteras, las que se sobreentienden y debe conocerse su geometría cuando son rígidas, o su posición puede ser motivo del cálculo cuando se trata de una superficie libre. Es recomendable que en una de las secciones se conozca la energía total y en la otra haya el menor número de variables desconocidas para lograr una solución congruente con el número posible de ecuaciones.

Algunas condiciones de frontera de un conducto a presión se muestran en la figura 4.7. La figura 4.7a corresponde a las condiciones del flujo a la entrada, donde es conveniente extender el contorno del volumen de control al exterior. Si el depósito es de grandes dimensiones, la carga de velocidad de acercamiento del agua sería insignificante y el nivel H de la energía estaría dado por la posición de la superficie libre en el recipiente. En rigor, el depósito debe estar alimentado con un gasto igual al que sale por el conducto para que dicho nivel no cambiara.

En la figura 4.7b, el conducto descarga libremente a la atmósfera, de manera que la presión atmosférica domina alrededor del chorro. Si se considera que $p_{atm} = 0$ (manométrica), la altura piezométrica en la sección de salida será z , a la cual se agrega la carga de velocidad del agua en el conducto $\alpha V_s^2 / 2g$ y la energía total del flujo en la sección de salida será $H = z + \alpha V_s^2 / 2g$.

En la figura 4.7c, la descarga es a un gran depósito de manera que la altura piezométrica corresponde al nivel de su superficie libre. Sin embargo, la energía total en la sección final del conducto incluye a la carga de velocidad, como se acota en dicha figura. Esta carga de velocidad se pierde por las turbulencias que genera la difusión del chorro en el depósito, por eso se le llama pérdida por salida; para reducirla se puede ampliar el área del conducto de descarga. En el caso de que no se considere la pérdida por salida (aunque siempre se presenta), la línea de la energía al finalizar el conducto coincide con la superficie libre del almacenamiento, tal como se muestra en la figura 4.7d.



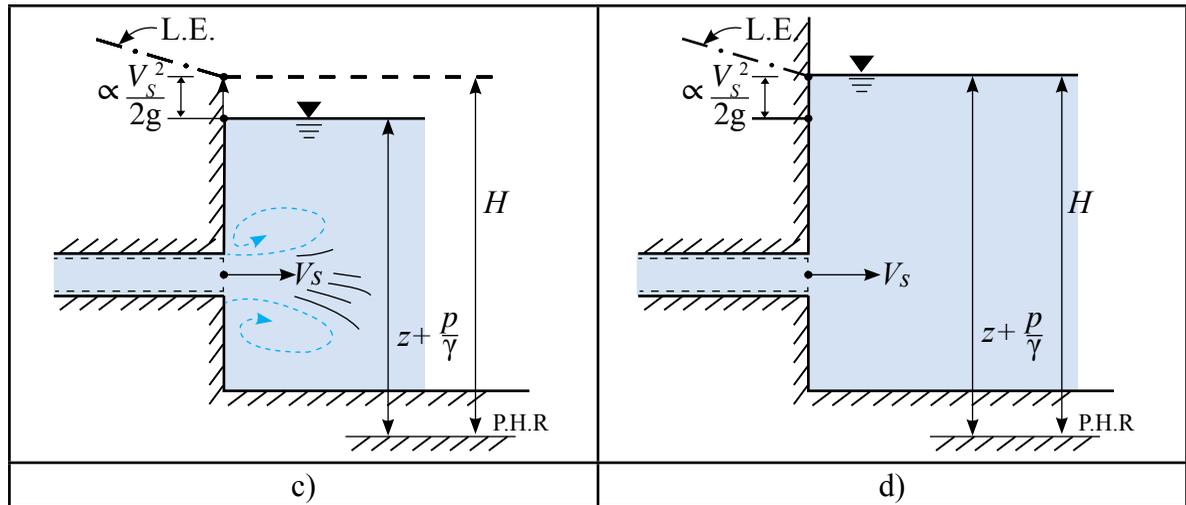


FIGURA 4.7 CONDICIONES DE ENERGÍA EN LOS EXTREMOS DE UN CONDUCTO

La figura 4.8 muestra los componentes de la carga total de un conducto que tiene dos almacenamientos. Dado que la carga de posición se refiere a un plano horizontal de referencia, en cualquier sección la carga total se mide con respecto a este plano. En el almacenamiento, la carga disponible con respecto al plano de referencia es $H_1 = z_1$. La sección 2 corresponde al inicio de la conducción y ya se presenta una pequeña pérdida por entrada a la conducción. Se grafican las dos líneas de especial interés: la línea de energía y las cargas totales que se tienen en cada sección, y la línea de cargas piezométricas que sucesivamente a estas en cada sección. Esta última representa la altura a la que llegaría el líquido en caso de que se instalara un piezómetro sobre la conducción. En el caso mostrado, entre las secciones (4) y (5) se tiene una pérdida por salida igual a la carga de velocidad, tal que $h_{r4-5} = 1 \frac{V^2}{2g}$.

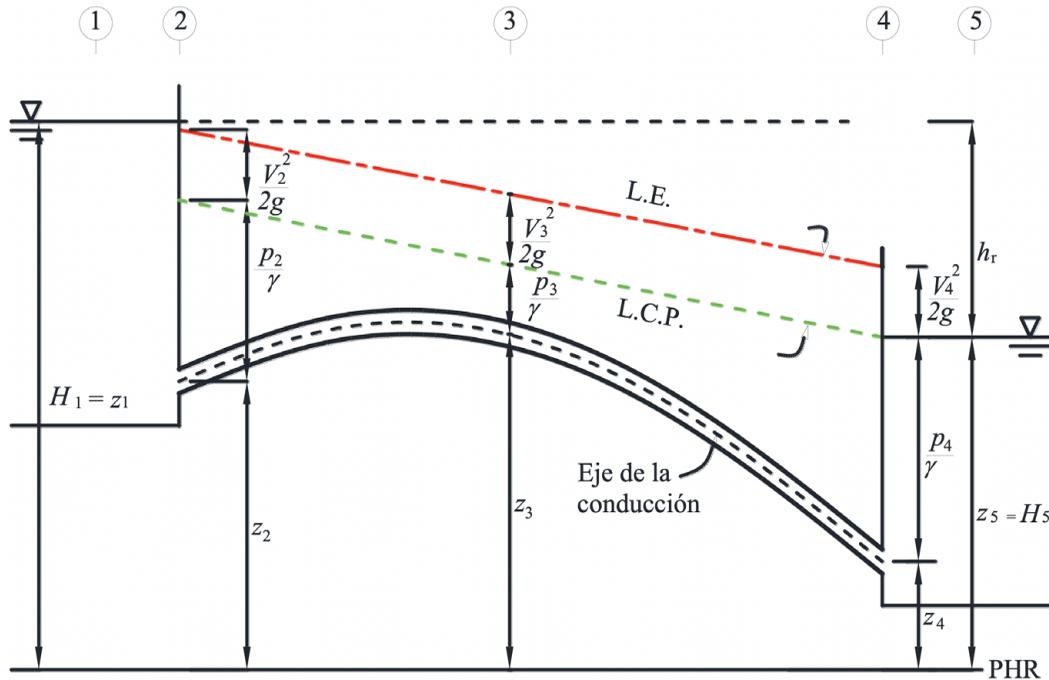


Figura 4.8 INTERPRETACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ENERGÍA (CAFAGGI ET AL 2011)

Al aplicar la ecuación de la energía entre la sección en el almacenamiento y la de entrada al conducto, resulta

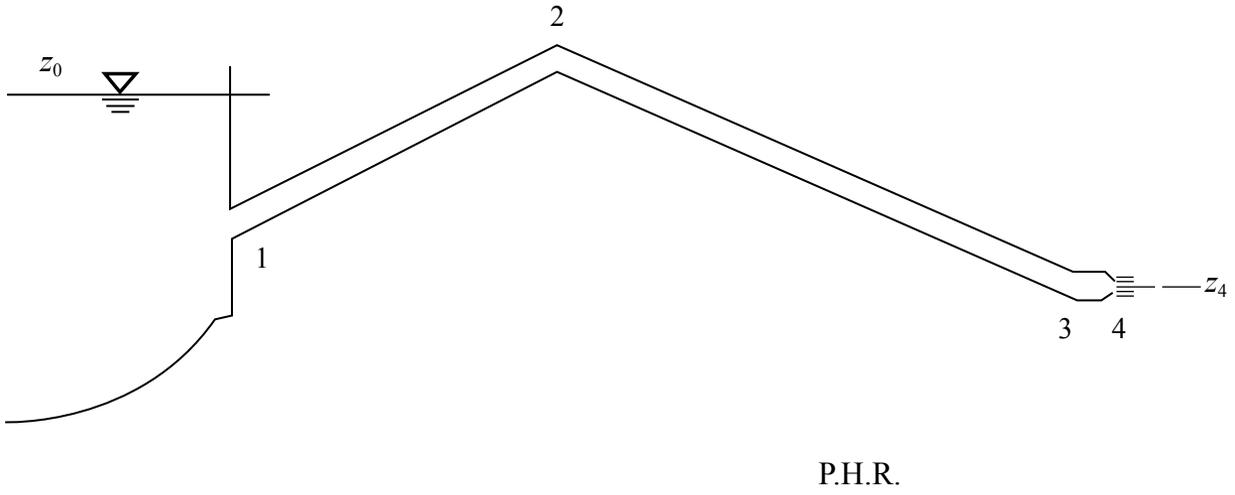
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2}$$

$$z_1 + 0 + 0 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2}$$

Todas estas energías son por unidad de peso (cargas). Esto muestra que la energía potencial que tiene el líquido en la superficie libre se va transformando poco a poco, tal que al llegar a la entrada al conducto disminuye la energía potencial, pero adquiere energía de presión, energía cinética y además pierde energía útil para el movimiento.

Salvo aclaración, en los siguientes ejemplos se considera el coeficiente de Coriolis $\alpha = 1$.

EJEMPLO 4.5 En el sistema mostrado, $z_0 = 40.0 \text{ m}$, $z_2 = 40.5 \text{ m}$, $z_3 = z_4 = 35 \text{ m}$. El diámetro entre las secciones 1 y 3 es constante, $D_1 = D_2 = D_3 = 0.20 \text{ m}$, y se reduce por medio de un chiflón en la descarga a $D_4 = 0.15 \text{ m}$. Para las pérdidas de energía, considere $h_{r0-1} = 0$, $h_{r1-2} = 9.8 \frac{V_1^2}{2g}$, $h_{r2-3} = 29.4 \frac{V_1^2}{2g}$ y $h_{r3-4} = 0.8 \frac{V_4^2}{2g}$. La descarga en la sección 4 es hacia la atmósfera (descarga libre).



- a) Calcule el gasto. b) Determine la carga total H y la piezométrica $z + p / \gamma$ en las secciones 1, 2, 3 y 4. c) Dibuje la línea de energía y la de cargas piezométricas.

Solución

- a) Las respectivas áreas de los conductos son

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{\pi \times (0.20)^2}{4} = 0.03142 \text{ m}^2, \quad A_4 = \frac{\pi \times (0.15)^2}{4} = 0.01767 \text{ m}^2$$

Al aplicar la ecuación de la energía entre las secciones 0 y 4, se tiene

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2g} + h_{r0-4}$$

En la sección 4, la descarga es en chorro y la presión manométrica es nula. Debido a que no cambia el diámetro se tiene $V_1 = V_2 = V_3$ y al sustituir se llega a

$$z_0 + 0 + 0 = z_4 + 0 + \frac{V_4^2}{2g} + h_{r0-1} + h_{r1-2} + h_{r2-3} + h_{r3-4}$$

$$z_0 + 0 + 0 = z_4 + 0 + \frac{V_4^2}{2g} + 0 + 9.8 \frac{V_1^2}{2g} + 29.4 \frac{V_1^2}{2g} + 0.8 \frac{V_4^2}{2g}$$

$$40 = 35 + 1.8 \frac{V_4^2}{2g} + 39.2 \frac{V_1^2}{2g}$$

Dado que $Q = A_1 V_1 = A_4 V_4$, la velocidad V_1 se puede expresar en función de la velocidad final V_4

$$V_1 = (A_4 / A_1) V_4$$

$$V_1 = \left((\pi D_4^2 / 4) / (\pi D_1^2 / 4) \right) V_4 = (D_4 / D_1)^2 V_4$$

$$V_1^2 = (D_4 / D_1)^4 V_4^2 = (0.15 / 0.2)^4 V_4^2$$

Al sustituir en la ecuación de energía entre 0-4, resulta

$$(40 - 35) = 1.8 \frac{V_4^2}{2g} + (39.2) \frac{(0.15 / 0.2)^4 V_4^2}{2g}$$

$$5 \times 2g = 14.20 V_4^2$$

$$V_4 = \sqrt{\frac{5 \times 2g}{14.20}} = 2.628 \text{ m/s}$$

El gasto es $Q = A_4 V_4 = 0.01767 \times 2.628 = 0.04644 \text{ m}^3/\text{s}$

Otra forma de obtener el gasto es con $V = Q/A$ directamente en la ecuación de la energía.

$$40 = 35 + \frac{Q^2}{0.01767^2 \times 2g} + 39.2 \frac{Q^2}{0.03142^2 \times 2g} + 0.8 \frac{Q^2}{0.01767^2 \times 2g}$$

$$Q = 0.04644 \text{ m}^3/\text{s}$$

Con el valor del gasto, las respectivas velocidades son

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.04644}{0.03142} = 1.477 \text{ m/s}, \quad V_4 = \frac{Q}{A_4} = \frac{0.04644}{0.01767} = 2.628 \text{ m/s}$$

Las cargas de velocidad en cada conducto y las pérdidas resultan

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{1.447^2}{2g} = 0.111 \text{ m}; \quad \frac{V_4^2}{2g} = \frac{2.628^2}{2g} = 0.352 \text{ m}$$

$$h_{r1-2} = 9.8 \times \frac{1.447^2}{2g} = 1.092 \text{ m}$$

$$h_{r2-3} = 29.4 \times \frac{1.447^2}{2g} = 3.275 \text{ m}$$

$$h_{r3-4} = 0.8 \times \frac{2.628^2}{2g} = 0.281 \text{ m}$$

Se revisa que se cumpla la ecuación de la energía

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2g} + h_{r0-1} + h_{r1-2} + h_{r2-3} + h_{r3-4}$$

$$40 + 0 + 0 = 35 + 0 + 0.352 + 1.092 + 3.275 + 0.281$$

$$40 = 40$$

b) Para determinar la carga total y la carga piezométrica en cada sección, se establece la ecuación de la energía entre las secciones (i) e ($i+1$), esto es $H_i = H_{i+1} + h_{r(i)-(i+1)}$. Al despejar la carga en la sección ($i+1$) se tiene $H_{i+1} = H_i - h_{r(i)-(i+1)}$. Una vez conocida la carga total, la piezométrica se determina como $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_{i+1} = H_{i+1} - \frac{V_{i+1}^2}{2g}$.

Por tanto, las cargas son:

$$H_0 = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = 40 + 0 + 0 = 40 \text{ m (esto es expresar la carga total en función de sus componentes)}$$

$$H_0 = H_1 + h_{r0-1} \text{ (esto es aplicar energía entre 0 y 1)}$$

$$H_1 = 40 - 0 = 40 \text{ m}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = H_1 - \frac{V_1^2}{2g} = 40 - 0.111 = 39.889 \text{ m}$$

$$H_1 = H_2 + h_{r1-2}$$

$$H_2 = 40 - 1.092 = 38.908 \text{ m}$$

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = H_2 - \frac{V_2^2}{2g} = 38.908 - 0.111 = 38.797 \text{ m}$$

$$H_2 = H_3 + h_{r2-3}$$

$$H_3 = 38.908 - 3.275 = 35.633 \text{ m}$$

$$z_3 + \frac{p_3}{\gamma} = H_3 - \frac{V_3^2}{2g} = 35.633 - 0.111 = 35.522 \text{ m}$$

$$H_3 = H_4 + h_{r3-4}$$

$$H_4 = 35.633 - 0.281 = 35.352 \text{ m}$$

$$z_4 + \frac{p_4}{\gamma} = H_4 - \frac{V_4^2}{2g} = 35.352 - 0.352 = 35.0 \text{ m}$$

Tanto el valor de la carga total como el de la carga piezométrica en la sección 4, también se pueden obtener en términos de sus componentes ya conocidos

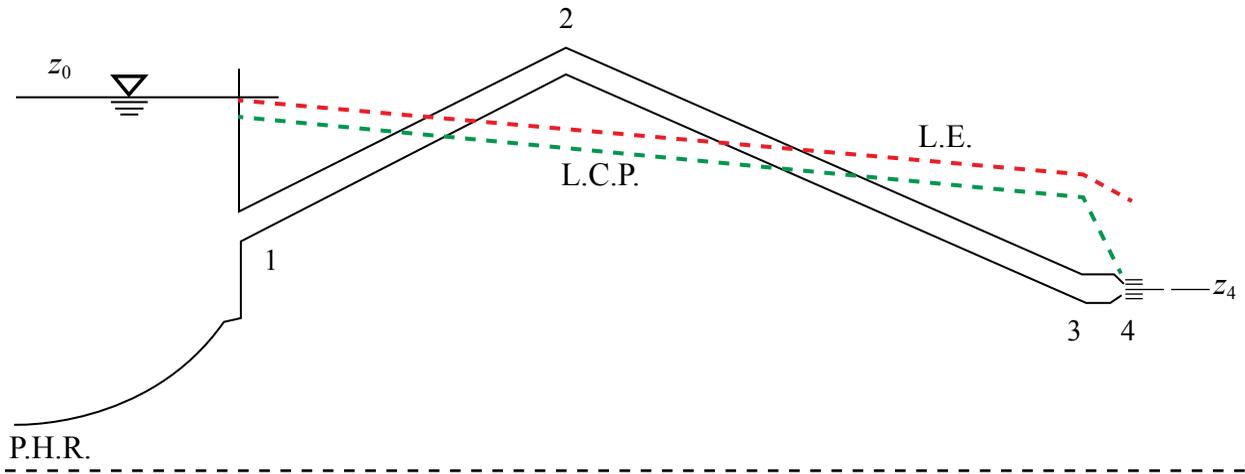
$$H_4 = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2g} = 35 + 0 + 0.352 = 35.352 \text{ m}$$

$$z_4 + \frac{p_4}{\gamma} = 35 + 0 = 35.0 \text{ m}$$

Una forma sencilla de hacer estos cálculos es con una tabla. En rojo se muestran los datos iniciales y valores calculados en el inciso a) y en morado, los de las cargas totales H que se van obteniendo al restar la pérdida de carga (columna f) a la carga total anterior (columna e). La carga piezométrica (en azul) resulta de restar la carga de velocidad (columna d) a la carga total. Además, una vez conocida la carga piezométrica, si se conoce la elevación, es posible despejar la carga de presión. En la sección 1 solo se puede determinar la carga piezométrica, pues al no conocer la elevación, no se puede obtener la carga de presión.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Sección	z (m)	p / γ (m)	$V^2 / 2g$ (m)	H (m)	h_r (m)
0	40	0	0	40	
1			0.111	40	0
	39.889				
2	40.5	-1.703	0.111	38.908	1.092
	38.797				
3	35	0.522	0.111	35.633	3.275
	35.522				
4	35	0	0.352	35.352	0.281
	35.0				

c) Líneas de energía y de cargas piezométricas (forma aproximada)



4.3.5 POTENCIA HIDRÁULICA Y MÁQUINAS HIDRÁULICAS

En la ecuación 4.25 el término $H\gamma Q$ es de potencia, por lo que la potencia hidráulica en cada sección es

$$P_H = \gamma Q H \quad (4.34)$$

El término $P_f / \gamma Q$ de la ecuación 4.27 se interpreta como la carga que aprovecha o adiciona la máquina hidráulica. En el caso de la turbina, la cual aprovecha energía del líquido, esta se denota H_T y tiene signo positivo en la ecuación 4.30. En la práctica profesional mexicana se le llama carga neta H_N .

Por lo tanto, para el caso de una turbina que se encuentra entre dos secciones 1 y 2, la ecuación de la energía es

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = H_N + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2} \quad (4.35)$$

[Carga total inicial] = [Carga que el fluido proporciona a la turbina] + [Carga final] + [Pérdidas de carga]

En esta forma se ha igualado la energía por unidad de peso en la entrada, con la energía por unidad de peso en la salida, más la extraída por la turbina y la que se pierde entre ambas secciones.

Para el caso de la bomba, la carga que adiciona al líquido se denomina carga de bombeo H_B y tiene signo negativo en la ecuación 4.30. Por lo tanto, para este caso, la ecuación de la energía se escribe como sigue

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + H_B = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2} \quad (4.36)$$

[Carga total inicial] + [Carga que la bomba proporciona al fluido] = [Carga final] + [Pérdidas de carga]

en esta forma se ha igualado la energía por unidad de peso en la entrada, más la que adiciona la bomba con la energía por unidad de peso en la salida, más lo que se pierde entre ambas secciones.

Los términos H_N (o H_T) y H_B representan la energía que se transfiere desde y hacia el fluido, respectivamente. Si se desea obtener la energía generada por la turbina o la que transfirió la bomba, es necesario conocer la eficiencia de cada máquina ya que la transferencia de energía no es 100% eficiente.

Para el caso de las turbinas, la potencia hidráulica es mayor que la potencia mecánica P_{mec} en la flecha de la turbina, y esta es mayor que la potencia eléctrica P_E (ver figura 4.9). Se define la eficiencia global del sistema turbina-generator eléctrico como

$$\eta_T = P_E / P_H \quad (4.37)$$

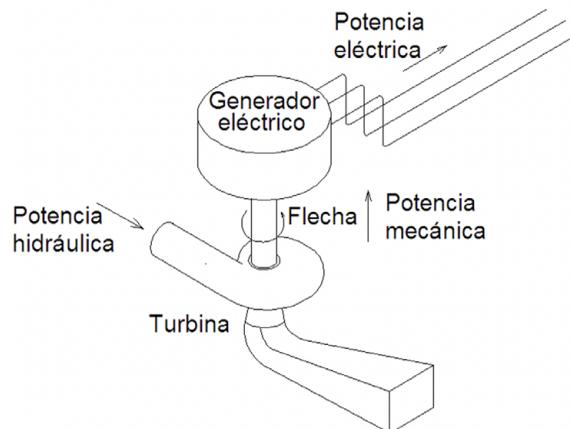


Figura 4.9 TURBINA HIDRÁULICA

por lo tanto, la potencia eléctrica del sistema turbina-generator eléctrico se calcula como

$$P_E = \eta_T \gamma Q H_N \quad (4.38)$$

En el caso de las bombas accionadas por un motor eléctrico o de combustión interna, la potencia que este proporciona P_M , es mayor que la potencia hidráulica. La figura 4.10 muestra una bomba acopada a un eje llamado flecha y este a un motor eléctrico. La eficiencia global del sistema motor-bomba es

$$\eta_B = P_H / P_M \quad (4.39)$$

por lo que la potencia que debe proporcionar el motor para incrementar la potencia hidráulica se calcula como

$$P_M = \gamma Q H_B / \eta_B \quad (4.40)$$

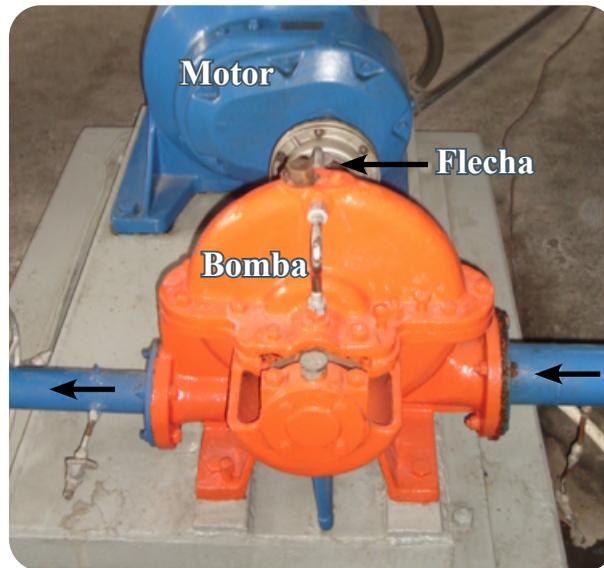


Figura 4.10 MOTOR-FLECHA-BOMBA. (LABORATORIO DE HIDRÁULICA, FACULTAD DE INGENIERÍA)

En la figura 4.11 se muestra un almacenamiento con una elevación H_A , el cual tiene una energía potencial mayor que un río u otro almacenamiento con una elevación menor y que se ubica en la sección C.

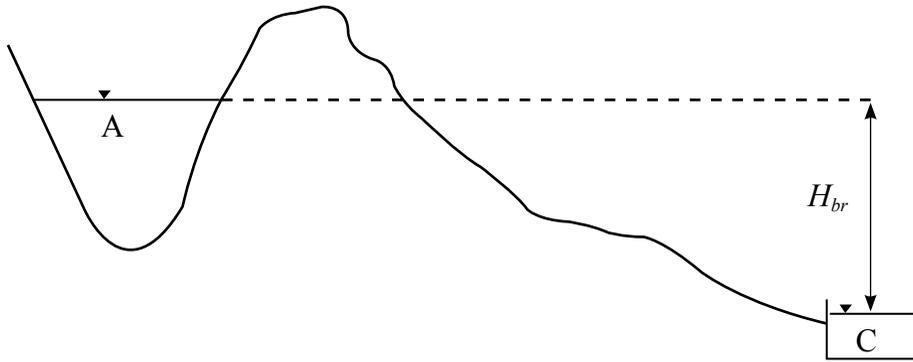


Figura 4.11 ALMACENAMIENTO CON ENERGÍA POTENCIAL DISPONIBLE

La diferencia de elevaciones entre el almacenamiento A y el río se denomina carga bruta H_{br} . La energía potencial disponible entre estas secciones se puede aprovechar con una turbina como ahora se muestra en la figura 4.12. Al aplicar la ecuación de la energía entre las secciones A y C resulta

$$H_A = H_C + H_N + h_{rA-C}$$

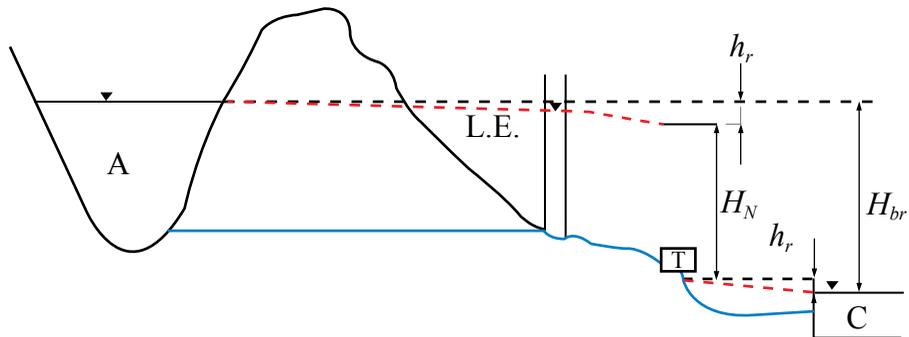


Figura 4.12 TURBINA QUE APROVECHA LA ENERGÍA DEL AGUA

La carga de velocidad en el río no es considerable, por lo que la diferencia de energías (por unidad de peso) entre las secciones A y C es igual a la carga bruta. En la figura 4.12 se muestra de forma aproximada cómo queda la línea de la energía, la cual parte desde el inicio del conducto hasta justo antes de la turbina, ahí la turbina aprovecha la carga neta y disminuye notablemente la energía que el líquido tenía antes de entrar a esta. Antes de llegar a la turbina se muestra una galería de oscilación. En el caso de flujo permanente, el pozo o galería de oscilación actúa como un gran tubo piezométrico y en el caso de flujo no permanente, la galería se emplea como dispositivo de alivio.

La figura 4.13 muestra de forma gráfica la adición de carga de bombeo H_B entre las secciones inmediatamente anterior a una bomba y la otra justo en la descarga. La sección 1 corresponde a la brida de succión y la sección 2 a la brida de descarga. Al aplicar la ecuación de la energía entre ambas secciones, esta es

$$H_1 + H_B = H_2$$

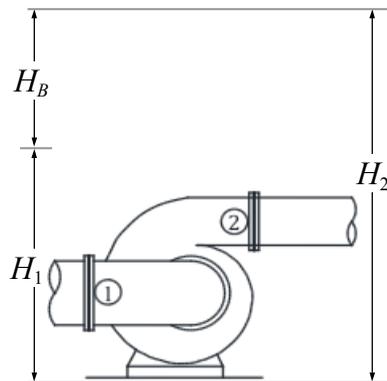


Figura 4.13 CARGA ADICIONADA POR UNA BOMBA

En la figura 4.14 se muestran dos almacenamientos. Se requiere llevar agua del almacenamiento A al C. La diferencia de elevaciones entre ambos se denomina carga estática H_E . Por sí solo, el líquido no puede ir de A a C, pues $H_A < H_C$, por lo que tiene que ser auxiliado por una bomba y así poder ser transportado de menor a mayor energía.

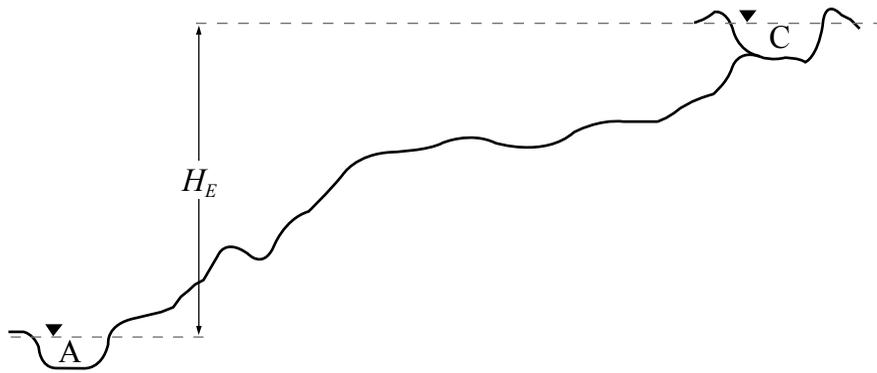


Figura 4.14 ALMACENAMIENTOS CON DIFERENTE ENERGÍA POTENCIAL

La figura 4.15 muestra la bomba que toma el agua desde el almacenamiento A y le adiciona una carga de bombeo tal que pueda ser transportada hasta el almacenamiento de descarga. La conducción se lleva sobre el terreno.

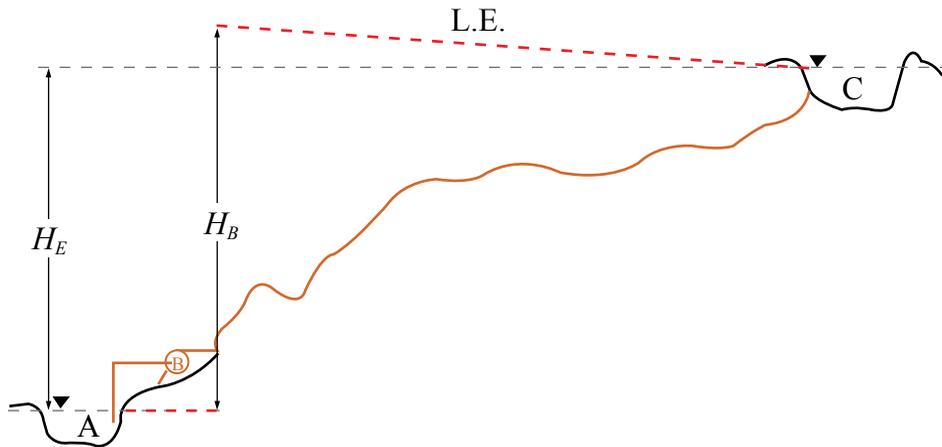


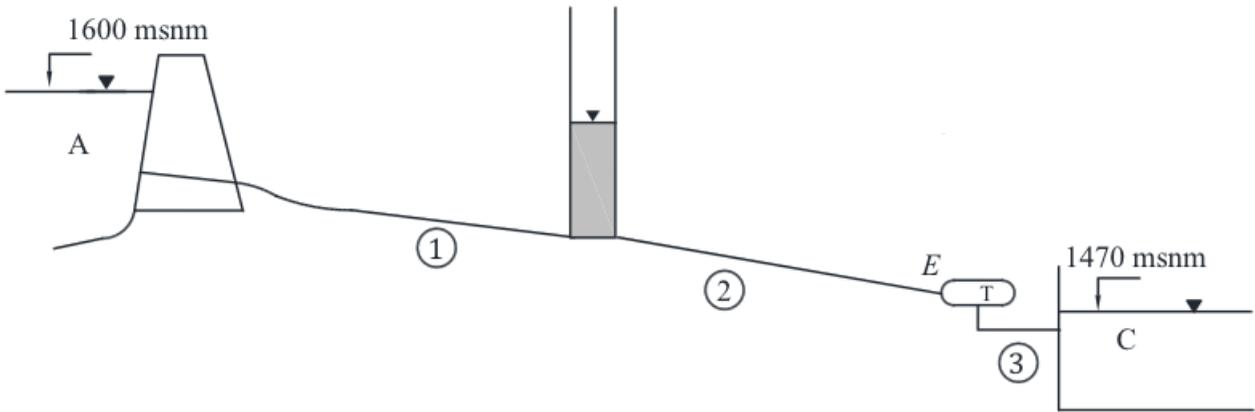
Figura 4.15 BOMBA ENTRE DOS ALMACENAMIENTOS

Al aplicar la ecuación de la energía entre ambos almacenamientos se tiene

$$H_A + H_B = H_C + h_{r A-C}$$

En este caso, la bomba tiene que ser capaz de proporcionar energía para vencer la diferencia de elevaciones (carga estática) y las pérdidas de energía en la conducción.

EJEMPLO 4.6 En el sistema mostrado, el gasto es $Q = 48 \text{ m}^3/\text{s}$. Los diámetros en los conductos son $D_1 = 4 \text{ m}$ y $D_2 = 3.5 \text{ m}$; las pérdidas son $h_{r1} = 16.1 \frac{V_1^2}{2g}$ y $h_{r2} = 1.6 \frac{V_2^2}{2g}$. Solo se consideran pérdidas de energía en los tubos 1 y 2, ya que el área del conducto 3 es muy grande ($V_3^2 / 2g \approx 0$). La carga de velocidad en el río es despreciable. Las elevaciones que se indican son con respecto al nivel del mar.



- a) Calcule la potencia hidráulica que se proporciona a la turbina. b) Determine la elevación en la galería de oscilación y la carga justo antes de la turbina (sección E). c) Dibuje la línea de la energía.

Solución

- a) La potencia hidráulica que se le proporciona a la turbina es $P_H = \gamma Q H_N$. Para determinarla se requiere calcular la carga neta y para esto se aplica la ecuación de la energía entre la presa y la descarga al río.

$$H_A = H_C + H_N + h_{r1} + h_{r2}$$

Con los datos se pueden calcular las áreas, velocidades y pérdidas de energía en los tubos 1 y 2

$$A_1 = \frac{\pi \times 4^2}{4} = 12.57 \text{ m}^2, \quad A_2 = \frac{\pi \times 3.5^2}{4} = 9.62 \text{ m}^2$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{48}{12.57} = 3.82 \text{ m/s}, \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{48}{9.62} = 4.99 \text{ m/s}$$

$$h_{r1} = 16.1 \frac{3.82^2}{2g} = 11.97 \text{ m}, \quad h_{r2} = 1.6 \frac{4.99^2}{2g} = 2.03 \text{ m}$$

Al sustituir en la ecuación de la energía, la carga neta resulta

$$H_N = H_A - H_C - h_{r1} - h_{r2}$$

$$H_N = 1600 - 1470 - 11.97 - 2.03 = 116 \text{ m}$$

La potencia hidráulica que se proporciona a la turbina es

$$P_H = \gamma Q H_N = 9810 (\text{N/m}^3) \times 48 (\text{m}^3/\text{s}) \times 116 (\text{m}) = 54.62 \times 10^6 \text{ W} = 54.62 \text{ MW}$$

b) Para determinar la elevación en la galería de oscilación se aplica la ecuación de la energía entre el almacenamiento y la galería. Llamando H_{GO} a la elevación del agua en la galería, se tiene

$$H_A = H_{GO} + h_{r1}$$

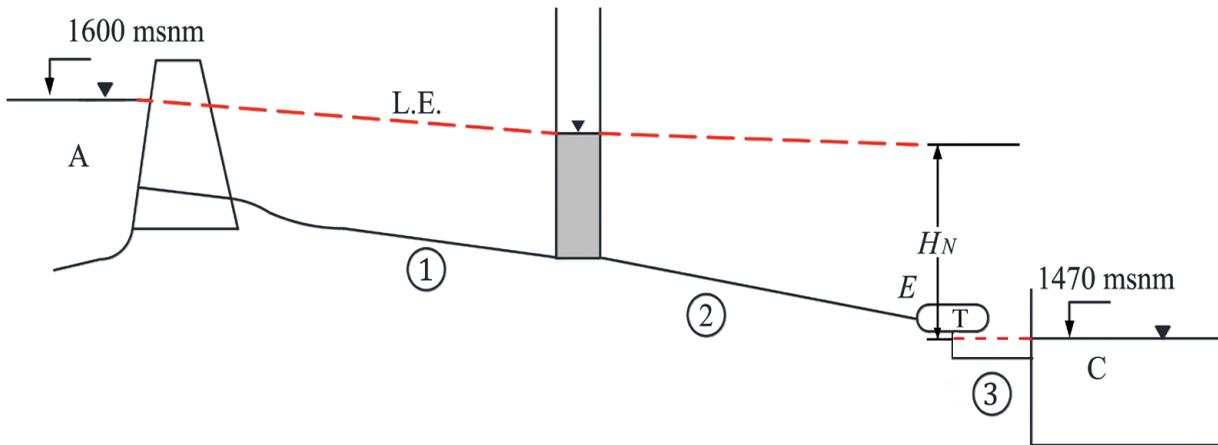
$$H_{GO} = 1600 - 11.97 = 1588.03 \text{ msnm}$$

De igual forma, para calcular la carga total en la sección E se aplica la ecuación de la energía entre A y E

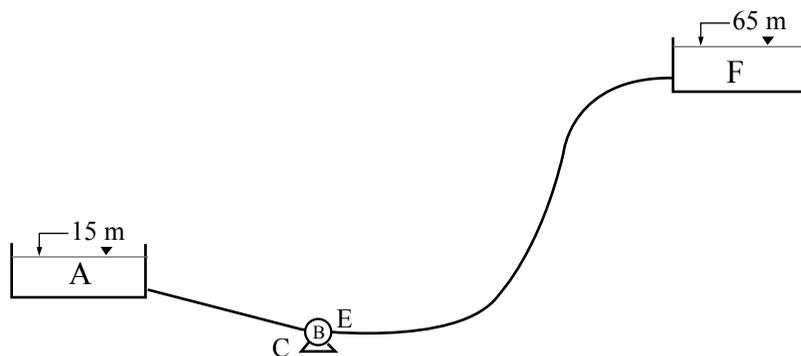
$$H_A = H_E + h_{r1} + h_{r2}$$

$$H_E = 1600 - 11.97 - 2.03 = 1586 \text{ m}$$

c) La línea de energía sobre el sistema queda



EJEMPLO 4.7 Se desea llevar un gasto de 160 l/s (litros por segundo) de aceite desde el almacenamiento A hasta el F. Las pérdidas son: $h_{r,A-C} = 2.0\text{ m}$ y $h_{r,E-F} = 7.2\text{ m}$. Entre el almacenamiento A y la entrada al conducto no se consideran pérdidas de energía ni tampoco en la entrega al terminar el conducto y el almacenamiento F. La densidad del aceite es $\rho = 820\text{ kg/m}^3$. a) Determine la potencia que la bomba debe proporcionar al líquido. b) Calcule la energía, en joule y en kW·h, que la bomba le proporciona al líquido durante dos horas de operación. c) Calcule la carga total en las secciones C y E. d) Dibuje la línea de la energía.



Solución

- a) La carga de bombeo que la bomba proporciona se determina aplicando la ecuación de la energía entre las secciones A y F

$$H_A + H_B = H_F + h_{r1} + h_{r2}$$

$$15 + H_B = 65 + 2 + 7.2$$

$$H_B = 59.2 \text{ m}$$

El peso específico del aceite es $\gamma = \rho g = 820(\text{kg/m}^3) \times 9.81(\text{m/s}^2) = 8044.2 \text{ N/m}^3$. La potencia que la bomba adiciona al sistema resulta

$$P_H = \gamma Q H_B = 8044.2(\text{N/m}^3) \times 0.160(\text{m}^3/\text{s}) \times 59.2(\text{m}) = 76.19 \text{ kW}$$

- b) Dado que la potencia es $P = E/t$, la energía que se consume en dos horas se calcula como

$$E = Pt = 76.19 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \times 2\text{h} \times \frac{3600\text{s}}{\text{h}} = 548.57 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$E = 548.57 \text{ MJ}$$

$$E = Pt = 76.19 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \times 2\text{h} = 152.38 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

- c) Para determinar la carga H_C se aplica la ecuación de la energía entre A y C

$$H_A = H_C + h_{rA-C}$$

$$15 = H_C + 2$$

$$H_C = 13 \text{ m}$$

y para calcular H_E se aplica la ecuación entre secciones de la energía entre C y E o entre E y F

$$H_C + H_B = H_E$$

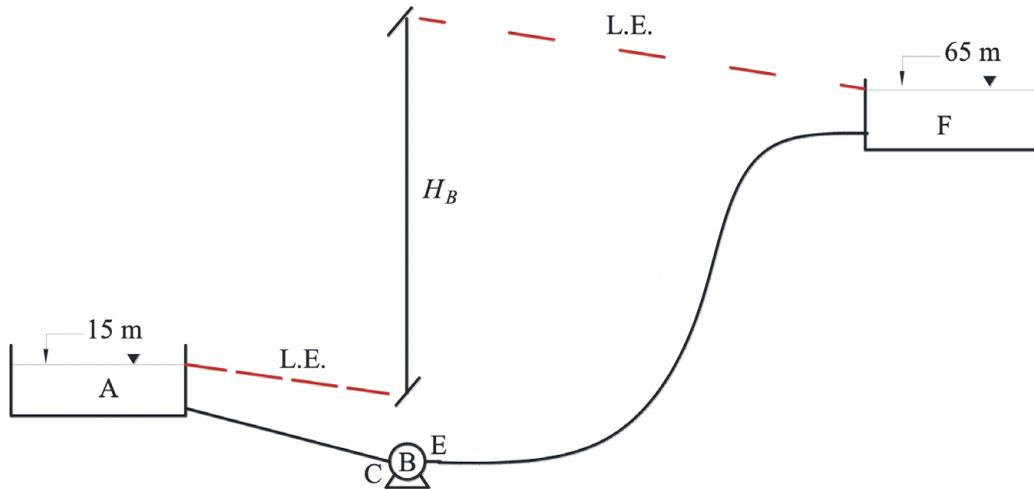
$$H_E = 13 + 59.2 = 72.2 \text{ m}$$

o

$$H_E = H_F + h_{rE-F}$$

$$H_E = 65 + 7.2 = 72.2 \text{ m}$$

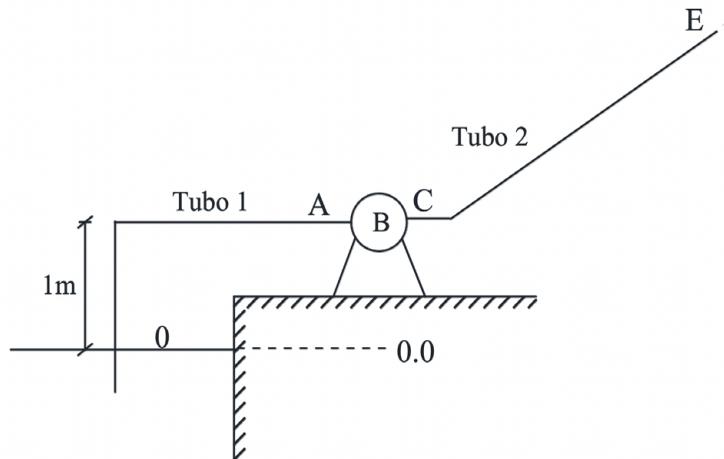
d)



EJEMPLO 4.8 La bomba proporciona una potencia de 50 kW. Determine la elevación en la sección E. La descarga es libre. Calcule la carga total H y la piezométrica $z + p/\gamma$ en las secciones A, C y E. Dibuje las líneas de energía y de cargas piezométricas.

Los datos son:

D_1	h_{r1}	D_2	V_2	h_{r2}
(mm)	(m)	(mm)	(m/s)	(m)
200	$1.5 \frac{V_1^2}{2g}$	150	5	$3 \frac{V_2^2}{2g}$



Solución

Con los datos se pueden calcular las áreas, el gasto, la velocidad en el tubo 1, las cargas de velocidad y las pérdidas de carga en el sistema:

$$A_1 = \frac{\pi \times (0.20)^2}{4} = 0.03142 \text{ m}^2, \quad A_2 = \frac{\pi \times (0.15)^2}{4} = 0.01767 \text{ m}^2$$

$$Q = A_2 V_2 = 0.01767 \times 5 = 0.08836 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.08836}{0.03142} = 2.813 \text{ m/s}, \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{2.813^2}{2g} = 0.4032 \text{ m/s};$$

$$h_{r1} = 1.5 \times \frac{2.813^2}{2g} = 0.605 \text{ m}, \quad \frac{V_2^2}{2g} = \frac{5^2}{2g} = 1.274 \text{ m/s}, \quad h_{r2} = 3 \times \frac{5^2}{2g} = 3.823 \text{ m}$$

La potencia hidráulica que el sistema proporciona es $P_H = 50000 \text{ W} = \gamma Q H_B$; al despejar la carga de bombeo resulta

$$H_B = \frac{P_H}{\gamma Q} = \frac{50000 (\text{N} \cdot \text{m/s})}{9810 (\text{N/m}^3) \times 0.0883 (\text{m}^3/\text{s})} = 57.684 \text{ m}$$

Se aplica la ecuación de la energía entre la sección 0 del almacenamiento y la sección E, y se obtiene

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + H_B = z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1} + h_{r2}$$

$$0 + 0 + 0 + 57.684 = z_E + 0 + 1.274 + 0.605 + 3.823$$

$$z_E = 51.983 \text{ m}$$

Para determinar los valores de las energías y de las cargas piezométricas se tiene

$$H_0 = H_A + h_{r0-A}$$

$$H_A = 0 - 0.605 = -0.605 \text{ m}$$

$$\left(z + \frac{p}{\gamma} \right)_A = H_A - \frac{V_A^2}{2g} = -0.605 - 0.403 = -1.008 \text{ m}$$

$$H_A + H_B = H_C$$

$$H_C = -0.605 + 57.684 = 57.079 \text{ m}$$

$$\left(z + \frac{p}{\gamma} \right)_C = H_C - \frac{V_C^2}{2g} = 57.079 - 1.274 = 55.805 \text{ m}$$

Tanto la carga total como la piezométrica en la sección E se pueden calcular a partir de los datos ya conocidos

$$H_E = z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = 51.983 + 0 + 1.274 = 53.257 \text{ m}$$

$$z_E + \frac{p_E}{\gamma} = 51.983 + 0 = 51.983 \text{ m}$$

o bien, al aplicar energía entre C y E

$$H_C = H_E + h_{C-E}$$

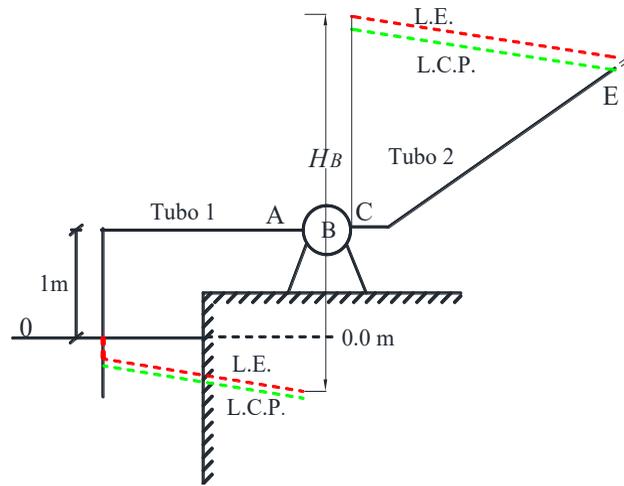
$$H_E = 57.079 - 3.823 = 53.256 \text{ m} \approx 53.257 \text{ m}$$

$$\left(z + \frac{p}{\gamma} \right)_E = H_E - \frac{V_E^2}{2g} = 53.256 - 1.274 = 51.983 \text{ m}$$

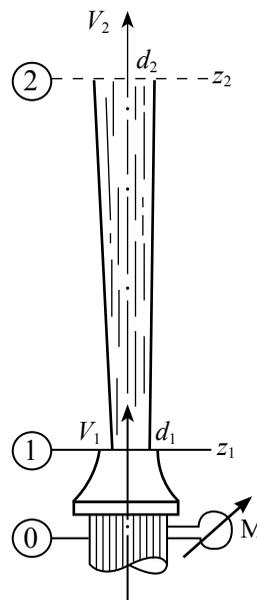
Para calcular los valores de las cargas totales y piezométricas también se puede usar una tabla como en el ejemplo 4.5, pero en este caso, cuando se tiene la bomba entre las secciones A y C, se suma el valor de H_B .

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Sección	z (m)	p/γ (m)	$V^2/2g$ (m)	H (m)	$hr(-)$ o $H_B(+)$ (m)
0	0	0	0	0	
A	1	-2.008			0.605
		-1.008	0.4032	-0.605	
C	1	56.080	1.274	57.08	57.684
		57.080			
E	51.983	0	1.274		3.823
		51.983		53.257	

Las líneas de energía (L.E.) y de cargas piezométricas (L.C.P.) son, de forma aproximada,



EJEMPLO 4.9 a) Despreciando la resistencia del aire, determine la altura que alcanzará un chorro vertical de agua que sale de un chiflón con una velocidad $V_1 = 14 \text{ m/s}$; el diámetro de la boquilla es $D_1 = 2 \text{ cm}$. b) Antes del chiflón el diámetro del conducto es $D_0 = 10 \text{ cm}$; determine la presión que se lee en el manómetro si este se encuentra 20 cm por debajo de la descarga. La pérdida de carga entre el manómetro y la sección de salida es $h_{r0-1} = 0.1 \frac{V_1^2}{2g}$. c) Si el chorro se inclina 60° con respecto a la horizontal, determine la máxima altura que este alcanzará y la distancia horizontal medida desde la descarga. Emplee las ecuaciones de tiro parabólico.



Solución

- a) Se considera el plano horizontal de referencia en la sección 1; al ser un chorro se tiene que $p_1 = p_2 = 0$ (manométrica). Por lo tanto, la carga total en la sección 1 es

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + 0 + \frac{14^2}{2g} = 9.99 \text{ m} \approx 10 \text{ m}$$

Cuando $V_2 = 0$, el chorro alcanza la máxima altura, y al no considerarse la fricción

$$H_1 = H_2 + h_{r1-2}$$

$$10 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2} = z_2 + 0 + 0 + 0$$

$$z_2 = 10 \text{ m}$$

- b) Dado que $Q = A_0 V_0 = A_1 V_1$, la velocidad V_0 resulta

$$V_0 = V_1 (A_1 / A_0) = V_1 \left((\pi D_1^2 / 4) / (\pi D_0^2 / 4) \right)$$

$$V_0 = 14 \times (0.02 / (0.1)^2) = 0.56 \text{ m/s}$$

para determinar la carga total en el manómetro se aplica la ecuación de la energía entre las secciones 0 y 1 y se obtiene

$$H_0 = H_1 + h_{r0-1} = 10 + 0.1 \frac{V_1^2}{2g} = 10 + 0.1 \frac{14^2}{2g}$$

$$H_0 = 10 + 1 = 11 \text{ m}$$

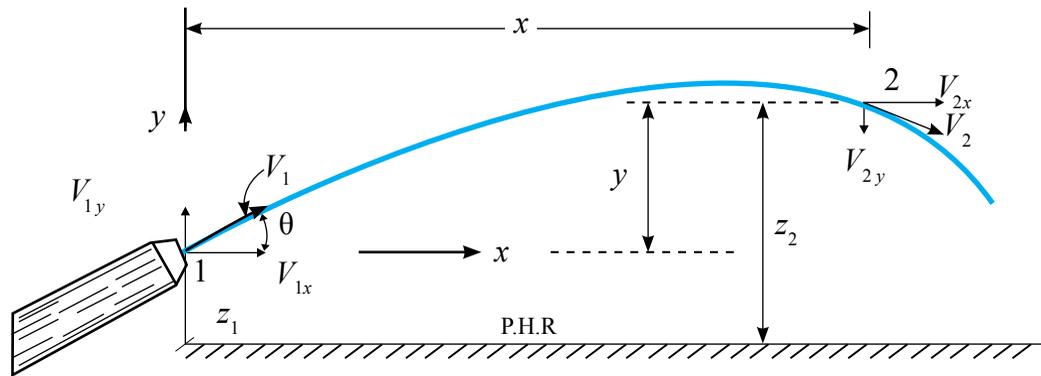
El plano horizontal de referencia se fijó en la sección 1, entonces $z_0 = -0.2 \text{ m}$, y al expresar H_0 en función de sus componentes se determina la carga de presión, y a partir de esta se calcula la presión en el manómetro

$$H_0 = 11 \text{ m} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = -0.2 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{0.56^2}{2g}$$

$$\frac{p_0}{\gamma} = 11.184 \text{ m}$$

$$p_0 = 11.184 \text{ m} \times 9810 \text{ N/m}^3 = 109.72 \text{ kPa}$$

- c) La figura muestra la descarga del conducto inclinado. La sección 1 se ubica exactamente en la descarga y la sección 2 en una sección cualquiera del chorro.



En el tiro parabólico, las relaciones entre las componentes de velocidad entre los puntos 1 y 2 vienen dadas por

$$V_{2x} = V_{1x}$$

$$V_{2y} = V_{1y} - g t$$

y con respecto al punto 1, las coordenadas del punto 2 son

$$x = V_{1x} t$$

$$y = V_{1y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para los datos del problema

$$V_{1x} = 14 \cos 60^\circ = 7 \text{ m/s}$$

$$V_{1y} = 14 \sin 60^\circ = 12.124 \text{ m/s}$$

El chorro llega a la máxima altura cuando $V_{2y} = 0$, pero V_{2x} permanece constante, entonces, en esa sección $V_{2x} = V_2$. En este caso se ubica el nivel de referencia en la sección 1, es decir $z_1 = 0$. Se aplica la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2 y resulta

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$0 + 0 + \frac{14^2}{2g} = z_2 + 0 + \frac{7^2}{2g}$$

$$z_2 = 7.492 \text{ m}$$

En este caso z_2 se interpreta como la altura y_2 medida desde la descarga del chiflón. El mismo resultado se obtiene calculando el tiempo que tarda el chorro en llegar a su máxima altura y después calculando la coordenada y_2 . Dado que $V_{2y} = 0$

$$0 = V_{1y} - g t$$

$$t = \frac{V_{1y}}{g} = \frac{12.124 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 1.236 \text{ s}$$

$$y_2 = V_{1y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 12.124 \times 1.236 - \frac{1}{2} \times 9.81 \times 1.236^2$$

$$y_2 = 7.492 \text{ m}$$

Evidentemente, se debe llegar al mismo resultado. La distancia horizontal desde la boquilla hasta la sección 2 es

$$x_2 = V_{1x} t = 7 \times 1.236$$

$$x_2 = 8.652 \text{ m}$$

4.3.6 UNIONES Y BIFURCACIONES

En los proyectos hidráulicos es común la necesidad de incorporar flujo a un conducto principal por lo que es necesario emplear una unión o bien separar el flujo, para lo cual se requiere una bifurcación. Debido a la incorporación de flujo, las pérdidas son mayores en las uniones que en las bifurcaciones.

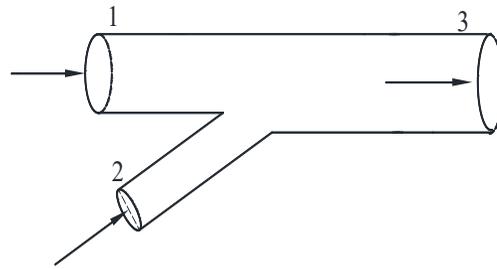


Figura 4.16 UNIÓN

Para el análisis de cualquiera de estos casos se hace uso de la ecuación de la energía 4.26, la cual para el caso de la unión de la figura 4.16 queda

$$H_1 \gamma Q_1 + H_2 \gamma Q_2 = H_3 \gamma Q_3 + I_r \quad (4.41)$$

La irreversibilidad en el proceso depende de muchos factores y es necesario recurrir a la evidencia empírica, debido a que influye el diámetro de cada una de las secciones, el ángulo que forman los tubos entre sí, la relación de gastos, radio de curvatura, rugosidad, etc. Dependiendo de estos factores diversos, investigadores han analizado el flujo tanto en uniones como en bifurcaciones y entre ellos hay disparidad de resultados. En este capítulo no se presentan las recomendaciones empíricas para determinar I_r de todo el volumen de control, pero sí la forma de analizar al mismo.

Como ejemplo de análisis de una unión se presenta un caso de unión en T que es la que presenta mayores pérdidas debido a la separación de flujo. La figura 4.17 presenta una unión de este tipo y la forma aproximada de las líneas de energía y de cargas piezométricas (gradiente hidráulico). En el dibujo, $h = z + p / \gamma$.

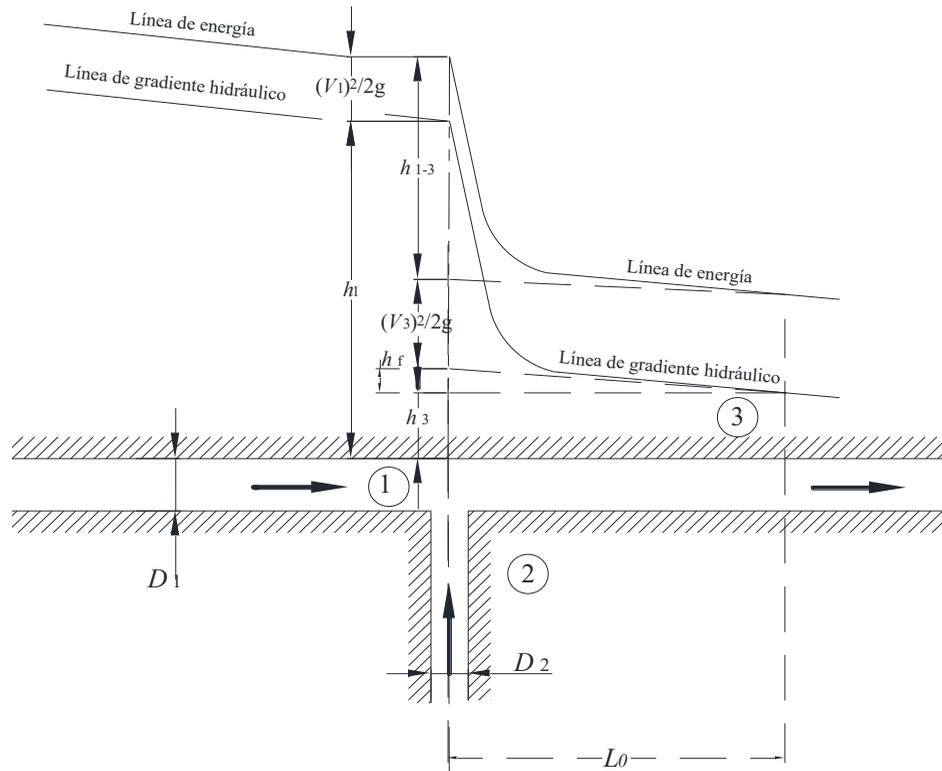


Figura 4.17 VOLUMEN DE CONTROL EN UNA UNIÓN EN T (ADAPTADO DE SERRE, 1994)

La sección 1 está inmediatamente aguas arriba del chorro incorporado por el tubo 2; la sección 3 está lo suficientemente lejos, tal que el flujo ya esté totalmente desarrollado en esa sección. La potencia perdida es igual a la suma de las potencias en las secciones 1 y 2 menos la potencia en la sección 3. De la ecuación 4.26, la irreversibilidad es

$$I_r = [H_1 Q_1 + H_2 Q_2 - H_3 (Q_1 + Q_2)] \gamma \quad (4.42)$$

La pérdida de potencia consiste en la pérdida en el tubo principal debido a la entrada de flujo del tubo 2 y la pérdida por fricción en el tubo principal entre las secciones 1 y 3, hasta que el flujo se desarrolle uniformemente con la velocidad V_3 . Entonces

$$I_r = [Q_1 h_{1-3} + Q_2 h_{2-3} + (Q_1 + Q_2) h_f] \gamma \quad (4.43)$$

Los términos h_{1-3} y h_{2-3} se refieren a pérdidas locales y h_f a la pérdida por fricción. Al sustituir la ecuación 4.43 en la 4.42 resulta

$$Q_1 [H_1 - (H_3 + h_{r1-3})] + Q_2 [H_2 - (H_3 + h_{r2-3})] = 0 \quad (4.44)$$

Donde h_r ya considera la suma de pérdida local y por fricción. Para que se cumpla la ecuación 4.44, se requiere que los términos dentro de los paréntesis rectangulares sean igual a cero y se tiene

$$H_1 = H_3 + h_{r1-3} \quad (4.45)$$

y

$$H_2 = H_3 + h_{r2-3} \quad (4.46)$$

Note que las ecuaciones 4.45 y 4.46 son equivalentes a aplicar las ecuaciones de la energía para flujo unidimensional entre las secciones 1 y 3 y entre 2 y 3, respectivamente.

Los términos de pérdida de carga tradicionalmente se expresan como el producto de un coeficiente adimensional K y la carga de velocidad aguas abajo, por lo que para este caso

$$h_{r1-3} = K_{1-3} \frac{V_3^2}{2g}$$

y

$$h_{r2-3} = K_{2-3} \frac{V_3^2}{2g}$$

Como ya se indicó, los valores K se obtienen de forma experimental. En las uniones la pérdida por fricción es regularmente mucho menor que la pérdida local y es usual que en las ecuaciones 4.45 y 4.46 no se considere la fricción.

La pérdida de energía en una bifurcación también depende de diferentes factores como son la relación de gastos entre los conductos, diámetros, ángulo de la bifurcación, etc. Pero en general, en la bifurcación se presentan menores pérdidas de energía que en las uniones.

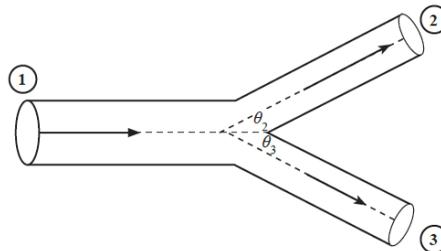


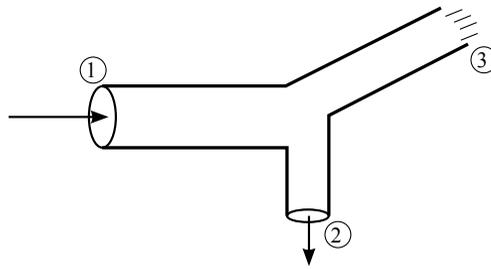
Figura 4.18 BIFURCACIÓN

Para el caso de la bifurcación, como la mostrada en la figura 4.18, con un análisis similar al realizado para el caso de la unión resulta

$$H_1 = H_2 + h_{r1-2} \quad (4.47)$$

$$H_1 = H_3 + h_{r1-3} \quad (4.48)$$

EJEMPLO 4.10 La bifurcación mostrada, que conduce agua, está contenida en un plano vertical. Los datos son $z_1 = 0.4$ m, $z_2 = 0$ m, $z_3 = 0.95$ m, $Q_1 = 0.060$ m³ / s, $A_1 = 0.02$ m², $A_2 = A_3 = 0.008$ m², $p_1 = 13.4$ kPa, $h_{r1-2} = h_{r1-3} \approx 0$. Determine: la carga total en la sección 1, los gastos en las secciones 2 y 3, y la presión en la sección 2. En la sección 3 la descarga es libre.



Solución

Con los datos se puede calcular la velocidad, carga de velocidad, carga de presión y carga total en la sección 1, las cuales son

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0.06}{0.02} = 3 \text{ m/s}, \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{3^2}{2g} = 0.458 \text{ m}, \quad \frac{p_1}{\gamma} = \frac{13400}{9810} = 1.366 \text{ m}$$

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 0.4 + 1.366 + 0.458 = 2.224 \text{ m}$$

En la sección 3 hay más datos que en la sección 2, pues se conocen la elevación y la carga de presión, ya que al ser una descarga libre, la presión (manométrica) es cero, por lo que conviene inicialmente aplicar la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 3

$$H_1 = H_3 + h_{r1-3}$$

$$2.224 = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + h_{r1-3} = 0.95 + 0 + \frac{V_3^2}{2g} + 0$$

$$\frac{V_3^2}{2g} = 1.274 \text{ m}$$

la velocidad y gasto en la sección 3 resultan

$$V_3 = \sqrt{1.274 \times 2g} = 5 \text{ m/s}$$

$$Q_3 = A_3 \times V_3 = 0.008 \times 5 = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$$

De la ecuación de continuidad, el gasto en la sección 2 es

$$Q_2 = Q_1 - Q_3 = 0.06 - 0.04 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$$

y su velocidad y carga de velocidad son

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{0.02}{0.008} = 2.5 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{2.5^2}{2g} = 0.318 \text{ m}$$

Para determinar la presión en la sección 2 se aplica la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2

$$H_1 = H_2 + h_{r1-2}$$

$$2.224 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2} = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + 0.318 + 0$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 1.906 \text{ m}; \quad p_2 = 1.906 \times 9810 = 18.69 \text{ kPa}$$

4.3.7 FLUJO PERMANENTE Y UNIDIMENSIONAL EN CONDUCTOS CON SUPERFICIE LIBRE

Este flujo se produce principalmente por la acción de la fuerza de gravedad y se caracteriza porque expone una superficie libre a la presión atmosférica. Los ríos y canales son ejemplos de flujo a superficie libre. El conducto puede ser abierto (figura 4.19a) o cerrado sin que esté lleno (figura 4.19b).



FIGURA 4.19 EJEMPLOS DE CONDUCTOS CON SUPERFICIE LIBRE

Se denomina tirante y a la distancia que se mide perpendicular desde la superficie libre hasta el fondo del canal (plantilla). La plantilla del canal forma un ángulo θ con la horizontal. Cuando el tramo de un canal tiene sección transversal e inclinación de plantilla constantes, se denomina prismático; evidentemente, los cauces naturales difícilmente son prismáticos. La figura 4.20 presenta el corte longitudinal de un canal; las secciones transversales, como las mostradas en las figuras 4.19a y 4.19b son normales a la dirección del movimiento.

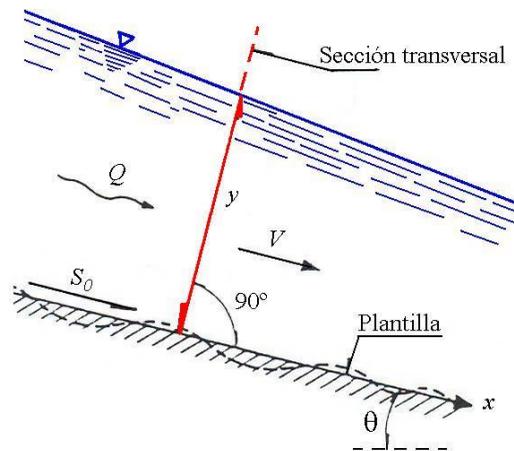


Figura 4.20 CORTE LONGITUDINAL DE UN CANAL (SOTELO, 2025)

La presión en el fondo del canal es $p / \gamma = y \cos \theta$, siendo $y \cos \theta$ la proyección del tirante en la dirección vertical. El centroide de la sección transversal está a una distancia y_c medida desde la superficie libre, tal como se muestra en la figura 4.21, la carga de posición hasta el centroide es z_c , por lo tanto, la carga piezométrica es $z_c + y_c \cos \theta$. En la misma figura, se observa que $z_c + y_c \cos \theta = z + y \cos \theta$, por lo que la carga piezométrica en una conducción a superficie libre se puede determinar calculándola a cualquier profundidad de la sección transversal. En una conducción con líneas de corriente de curvatura despreciable y paralelas, es más adecuado medir la carga de posición desde el plano de referencia hasta el punto más bajo de la sección transversal. La suma $z + y \cos \theta$ define la línea de cargas piezométricas, la cual coincide con la superficie libre.

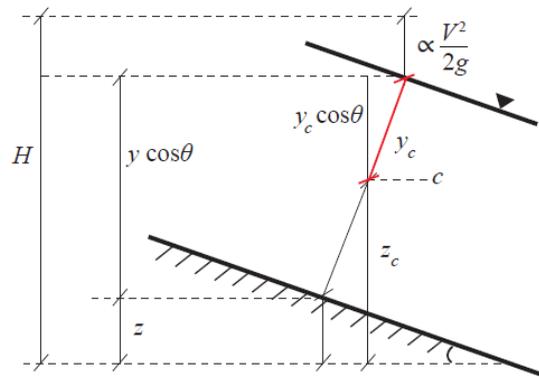


Figura 4.21 CARGA TOTAL EN UN CANAL

De modo que la energía total (por unidad de peso) respecto al nivel de referencia es

$$H = z + y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \tag{4.49}$$

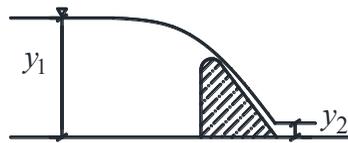
donde V es la velocidad media en la sección perpendicular al fondo. El valor de α es un poco mayor que 1; sin embargo, es común aceptar el valor de la unidad cuando se eligen secciones donde la distribución de velocidad se asemeja a la uniforme. Los errores que trae consigo son generalmente menores comparados con los que se tiene al calcular la pérdida de energía. Es usual que $\theta \leq 8^\circ$ por lo que $y \cos \theta \approx y$, y con el caso común de $\alpha = 1$ se tiene

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \tag{4.50}$$

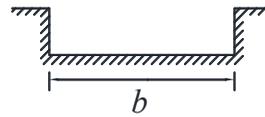
Al aplicar la ecuación de la energía entre dos secciones se tiene

$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2} \quad (4.51)$$

EJEMPLO 4. 11 En un canal rectangular de ancho $b = 3$ m, fluye un gasto $Q = 5.25$ m³/s con un tirante $y_1 = 3.5$ m. Se tiene un vertedor que acelera el flujo en la descarga y en el cual las pérdidas de energía son despreciables. Calcule el tirante y_2 que se presenta al pie del vertedor.



Corte longitudinal del canal



Sección transversal

Solución

Entre las secciones 1 y 2 la plantilla es horizontal, por lo que $z_1 = z_2$, además, como $h_{r1-2} \approx 0$, la ecuación de la energía 4.51 queda

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

En la sección 1 se tiene

$$A_1 = b y_1 = 3 \times 3.5 = 10.5 \text{ m}^2; V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{5.25}{10.5} = 0.5 \text{ m/s}; \frac{V_1^2}{2g} = 0.0127 \text{ m}$$

Al sustituir en la ecuación de la energía, donde $V_2 = Q/A_2$, resulta

$$3.5 + 0.0127 = y_2 + \frac{5.25^2}{(3 \times y_2)^2 \times 2g}$$

$$3.5127 = y_2 + \frac{0.1561}{y_2^2}$$

$$y_2^3 - 3.5127 y_2^2 + 0.1561 = 0$$

se tiene una ecuación de tercer grado cuyas raíces son

$$y_2 = 0.2176 \text{ m}$$

$$y_2 = 3.5 \text{ m}$$

$$y_2 = -0.2049 \text{ m}$$

El resultado es $y_2 = 0.2176 \text{ m}$, pues $y_2 = 3.5 \text{ m}$ es el valor del tirante antes del vertedor y como ya se indicó, el flujo se acelera. La raíz negativa no tiene significado físico. En la sección 2 la velocidad y la carga de velocidad resultan

$$V_2 = \frac{Q}{(by_2)} = \frac{5.25}{(3 \times 0.2176)} = 8.042 \text{ m/s} ; \frac{V_2^2}{2g} = 3.296 \text{ m}$$

Esto significa que, si coloca un tubo de Pitot en la sección 2, el nivel del agua dentro del tubo subirá aproximadamente 3.3 m por encima del nivel del tirante.

4.4 ECUACIÓN DEL IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento de una partícula de masa m es el producto de esta por la velocidad \mathbf{v} con la que se desplaza, por lo cual se trata de un vector. Para considerar la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento del flujo en el interior de un volumen de control, es necesario separar la que tiene la masa que pasa a través de la superficie de control de la que tiene la masa contenida en el \mathcal{VC} .

La masa de líquido que pasa a través del elemento dA de la superficie de control en la unidad de tiempo es $\rho (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})$ y la variación de su cantidad de movimiento es $\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})$. Cabe recordar que la magnitud del vector $d\mathbf{A}$ es igual a la del elemento de superficie y su dirección normal al mismo elemento; y por convención, positivo al dirigirse hacia afuera del volumen. Esto equivale a que el flujo de masa $\rho (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})$, que es un escalar, es positivo si sale del \mathcal{VC} , ya que \mathbf{v} y $d\mathbf{A}$ tienen la misma dirección, y negativo en caso contrario, por lo que el vector cantidad de movimiento es colineal con \mathbf{v} , pero su signo se afecta igualmente con el que se le asigna a $\rho (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})$.

En cualquier instante, la masa de un elemento es $\rho d\mathcal{V}$, donde la densidad del elemento depende del instante que se considere y de su posición en el interior del $\mathcal{V}C$. La cantidad de movimiento dentro del $\mathcal{V}C$ es entonces $\int_{\mathcal{V}C} \mathbf{v} \rho d\mathcal{V}$ y su variación en el tiempo $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}C} \mathbf{v} \rho d\mathcal{V}$.

La segunda ley de Newton establece que la suma de todas las fuerzas externas sobre un sistema es igual a la razón del cambio de la cantidad de movimiento de dicho sistema. Esto aplicado a un $\mathcal{V}C$ se expresa como

$$\sum \mathbf{F} = \int_{SC} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}C} \mathbf{v} \rho d\mathcal{V} \quad (4.52)$$

Esta ecuación es válida para un volumen de control inercial, es decir, un $\mathcal{V}C$ que no se acelere con respecto a un sistema de referencia estacionario. Cuando el flujo es permanente, la última integral vale cero y la ecuación resultante tiene la ventaja de no necesitar información sobre el tamaño y condiciones dentro del $\mathcal{V}C$.

El término $\sum \mathbf{F}$ de la ecuación 4.52 se considera de la misma forma que las fuerzas sobre un cuerpo libre dentro de la ingeniería mecánica básica. En este caso, el cuerpo es la masa dentro del volumen de control en el mismo instante del cálculo y la superficie de control delimita a este cuerpo. La velocidad está siempre referida al $\mathcal{V}C$ mismo, ya que representa la descarga a través del SC .

La ecuación de cantidad de movimiento es válida para un volumen de control inercial (estacionario o moviéndose a velocidad constante). En el caso de que el $\mathcal{V}C$ esté en movimiento, la velocidad que se considera es la relativa al $\mathcal{V}C$. Para un observador que se desplaza con la misma velocidad que el volumen de control, lo que observa es un flujo estacionario.

En la mayoría de las aplicaciones, el volumen de control se elige de manera que el flujo que entra y sale sea normal a las secciones contenidas en la superficie de control (figuras 4.1 y 4.3), con valores medios espaciales de ρ y \mathbf{v} en cada una de ellas. En estas condiciones, la primera integral de la ecuación 4.52 en cada sección es de la forma

$$\int_A \mathbf{v} \rho \mathbf{v} dA = \int_A \rho v^2 dA = \rho Q V \left[\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dA \right] = \rho Q \beta V$$

donde

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dA \quad (4.53)$$

es el coeficiente de Boussinesq, que corrige el uso de la velocidad media en el cálculo de la cantidad de movimiento del flujo que pasa por la sección. Su valor es igual a uno cuando la distribución de la velocidad es uniforme y tiene magnitud igual a la media; es mayor que uno en la medida que la distribución se aparta de la media. Se tiene entonces

$$\int_{SC} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V) \quad (4.54)$$

donde el término $\sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V)$ es la suma vectorial de las cantidades de movimiento en las n secciones donde hay flujo. Además del signo que le corresponda a V , el gasto se deberá afectar con otro signo: positivo ($+Q$) si sale del volumen de control y negativo ($-Q$), si entra a este. Tanto la densidad como el vector velocidad corresponden a los valores medios en el centroide de cada sección.

Para el caso de un volumen de control con movimiento constante en el que se emplea la velocidad relativa \mathbf{v}_r , se emplea

$$\int_{SC} \rho \mathbf{v}_r (\mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V_r) \quad (4.55)$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, la cantidad $\sum \mathbf{F}$ representa todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control. Dichas fuerzas incluyen las fuerzas de superficie que son el resultado de la acción del entorno sobre la superficie de control y las fuerzas de cuerpo que son el resultado del campo gravitacional. Por tanto, en la suma de fuerzas se consideran:

- F_{pe} resultante de las fuerzas de presión estática
- F_{τ} resultante de las fuerzas tangenciales que se oponen al movimiento
- F_c fuerza de cuerpo, debida principalmente a la acción de la gravedad
- R resultante de todas las fuerzas ejercidas por las paredes laterales del tubo (que es igual en magnitud, pero de sentido contrario que la resultante de las fuerzas dinámicas F_{pd} que el fluido ejerce sobre sus paredes).

Con estas consideraciones, la ecuación 4.52 resulta

$$\mathbf{F}_{pe} + \mathbf{F}_{\tau} + \mathbf{F}_c + \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V) + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}C} \mathbf{v} \rho d\mathcal{V} \quad (4.56)$$

4.4.1 FLUJO PERMANENTE

Cuando el flujo es permanente, el último término de la ecuación 4.56 vale cero y esta se simplifica a la forma

$$\mathbf{F}_{pe} + \mathbf{F}_{\tau} + \mathbf{F}_c + \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V) \quad (4.57)$$

Dado que la ecuación 4.57 es vectorial, obviamente también se puede escribir en función de sus componentes en las diferentes direcciones de los ejes coordenados, a saber

$$F_{pe_x} + F_{\tau_x} + F_{c_x} + R_x = \sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V_x) \quad (4.57a)$$

$$F_{pe_y} + F_{\tau_y} + F_{c_y} + R_y = \sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V_y) \quad (4.57b)$$

$$F_{pe_z} + F_{\tau_z} + F_{c_z} + R_z = \sum_{i=1}^n (\rho Q \beta V_z) \quad (4.57c)$$

Si además el flujo es incompresible, ρ sale de la suma vectorial. Las fuerzas debidas a la presión se ejercen desde el medio exterior hacia el $\mathcal{V}C$ (a través de la superficie de control). Puede haber partes de la SC que coincidan con la superficie libre (si existe) sobre las cuales la fuerza de presión vale cero, ya que la presión interior se maneja comúnmente como manométrica. Otras partes de la SC coinciden con las áreas de flujo y con las paredes de la conducción; la fuerza de presión estática \mathbf{F}_{pe} que se ejerce sobre las áreas de flujo generalmente se conoce o se puede calcular, ya que se debe a las presiones hidrostáticas producidas por el líquido que fluye en la conducción y que se encuentran en los límites del $\mathcal{V}C$; las fuerzas de presión estática son en dirección normal a dichas áreas y siempre dirigidas hacia el $\mathcal{V}C$.

Dado que al analizar las fuerzas que actúan sobre el $\mathcal{V}C$, este se considera como un cuerpo libre, la fuerza externa \mathbf{R} sobre las paredes es igual en magnitud, pero de sentido contrario a la fuerza

interna de presión dinámica F_{pd} que el líquido ejerce sobre sus paredes y que, generalmente, es la incógnita por calcular. Para evaluar R hay que estimar la dirección y sentido que se consideren lógicos; el cálculo confirmará o no la suposición hecha. Un valor negativo que se obtenga para una fuerza desconocida indica que el sentido no es el correcto y debe invertirse. Si bien R es la fuerza externa que debe considerarse al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento, si en vez de esta fuerza se considera la fuerza interna F_{pd} , el resultado no cambia.

La figura 4.22 muestra las cantidades vectoriales, fuerzas y velocidades, que actúan sobre un conducto. Tanto fuerzas de presión estática como velocidades se consideran aplicadas en el centroide de cada sección (aunque no aparecen así en la figura).

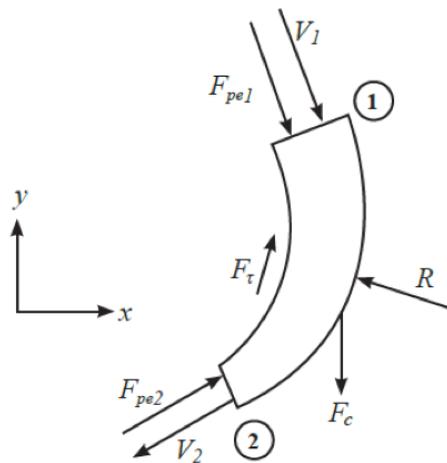


Figura 4.22 FUERZAS QUE SE EJERCEN SOBRE UN CONDUCTO Y VELOCIDADES DE ENTRADA Y SALIDA

Es usual que para eliminar variables se elija un volumen de control de tamaño “pequeño” tal que la fuerza F_r tenga poca magnitud comparada con las fuerzas de presión y se considere “despreciable” en el cálculo; esto también equivale a no considerar las pérdidas por fricción h_f en la ecuación de la energía. Sin embargo, aunque la pérdida por fricción no se considere por ser poco significativa en el cálculo, sí se puede presentar una pérdida local h_l importante al aplicar la ecuación de la energía. En general, cada que se presenta un obstáculo al flujo (reducción, ampliación, cambio de dirección, etc.), el fluido emplea energía útil en su paso. En cuanto a la fuerza de cuerpo, debida al peso propio F_c , esta solo tiene un componente en la dirección vertical y cuando el volumen de control no es muy grande su efecto también puede ser poco significativo y no considerarse. Cuando esto ocurra siempre debe aclararse.

Por ejemplo, para el conducto mostrado en la figura 4.22 y de acuerdo con los sentidos positivos de los ejes x y y ; siendo y un eje vertical, por lo que solo hay fuerza de cuerpo (peso propio) en esta dirección, y considerando $\beta = 1$, las ecuaciones 4.57a y 4.57b son

$$F_{pe1x} + F_{pe2x} + F_{\tau x} - R_x = \rho((-Q)V_{1x} + (+Q)(-V_{2x}))$$

$$-F_{pe1y} + F_{pe2y} + F_{\tau y} - F_c + R_y = \rho((-Q)(-V_{1y}) + (+Q)(-V_{2y}))$$

La magnitud de la fuerza de presión estática en un conducto a presión es $F_{pe} = pA$, siendo p la presión representativa de la sección (usualmente se emplea la presión manométrica).

A diferencia de un chorro, en que toda la presión a su alrededor es la atmosférica local (manométrica igual a cero), en un escurrimiento a superficie libre sí se presentan presiones manométricas, siempre positivas; para este tipo de flujo, la fuerza de presión estática es $F_{pe} = \gamma A z_c$, siendo z_c la distancia vertical desde la superficie libre hasta el centroide c de la sección transversal de la conducción. Para el caso común de canales con poca pendiente ($\theta \leq 8^\circ$), $y_c \approx z_c$ y $F_{pe} = \gamma A y_c$. La figura 4.23 muestra la sección transversal de un canal, su tirante y la ubicación de su centroide.

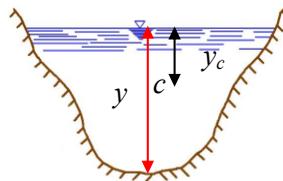


Figura 4.23 CENTROIDE EN LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN CANAL

Por ejemplo, en un canal rectangular de ancho b , la fuerza de presión estática es $F_{pe} = \gamma(by) \frac{y}{2}$; dado que la sección es rectangular, el punto de aplicación (centro de presiones) de esta fuerza se ubica a $\frac{2}{3}y$ medido desde la superficie libre.

4.4.2 FLUJO PERMANENTE UNIDIMENSIONAL PERMANENTE

Cuando el flujo entra solo por la sección 1 y sale por la 2 (flujo unidimensional), la ecuación 4.57 se simplifica como sigue

$$F_{pe} + F_{\tau} + F_c + R = (\rho Q \beta_2 V_2) - (\rho Q \beta_1 V_1) \quad (4.58)$$

la cual también puede escribirse en términos de sus componentes sobre un sistema adecuado de ejes cartesianos.

4.4.3 SOBRE LA APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES

La mayor parte de los problemas en la hidráulica se resuelven aplicando las tres ecuaciones fundamentales: continuidad, energía y cantidad de movimiento. La ecuación de la energía es escalar y toma en cuenta los cambios internos de energía y no las fuerzas totales y condiciones externas, en cambio, la ecuación de cantidad de movimiento es vectorial y engloba fuerzas totales y condiciones externas, sin tomar en cuenta los cambios de energía interna. En algunos casos basta con dos de ellas y hay que tener muy clara la diferencia entre la aplicación de la ecuación de la energía y la de cantidad de movimiento.

4.4.4 FORMA NUMÉRICA DE LOS COEFICIENTES α Y β

Cuando se conoce por medición directa la magnitud de la velocidad en diferentes puntos de una sección, a cada punto se le considera un área de influencia ΔA_i (figura 4.24) y tanto la magnitud de la velocidad media como la de los coeficientes se puede determinar por incrementos finitos en forma aproximada. Esto es especialmente aplicado en cauces a superficie libre. El valor de los coeficientes es generalmente mayor en pequeños cauces y menor para grandes corrientes con tirantes considerables.

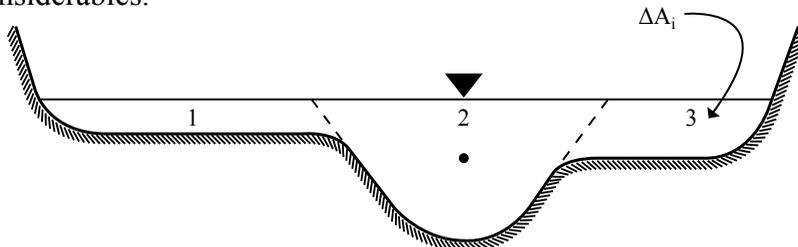


Figura 4.24 SECCIONES CON DIFERENTE VELOCIDAD

Conocidos los valores de las velocidades v_i y sus correspondientes áreas de influencia, tanto la magnitud aproximada de la velocidad media como la de los valores de los coeficientes se determinan de la siguiente manera

$$V \approx \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n v_i \Delta A_i \quad (4.59)$$

$$\alpha = \frac{1}{AV^3} \sum_{i=1}^n v_i^3 \Delta A_i \quad (4.60)$$

$$\beta = \frac{1}{AV^2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \Delta A_i \quad (4.61)$$

Donde n es el número de elementos ΔA_i elegidos. Por ejemplo, para la sección de río mostrada en la figura 4.24 se tiene

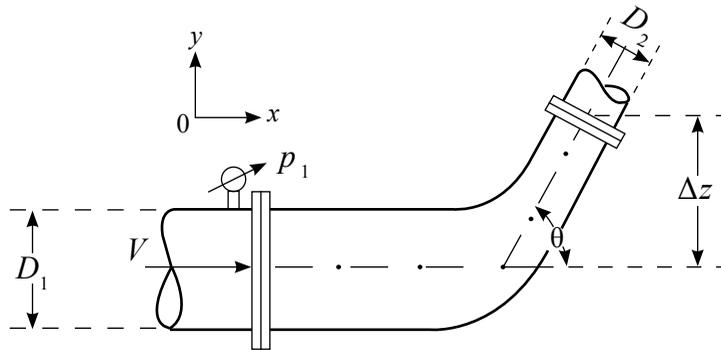
$$V \approx \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\alpha \approx \frac{v_1^3 A_1 + v_2^3 A_2 + v_3^3 A_3}{V^3 (A_1 + A_2 + A_3)}$$

$$\beta \approx \frac{v_1^2 A_1 + v_2^2 A_2 + v_3^2 A_3}{V^2 (A_1 + A_2 + A_3)}$$

Salvo aclaración, en los siguientes ejemplos se empleará presión manométrica y SI para las unidades, además $\alpha = \beta = 1$.

EJEMPLO 4.12 Una conducción de grandes dimensiones con diámetro $D_1 = 6$ m, tiene un codo reductor ascendente que la une con un ángulo de 50° a otro tramo con un diámetro $D_2 = 4.5$ m. La presión a la entrada del codo es $p_1 = 9$ kgf/cm² (manométrica) y la velocidad es $V_1 = 8$ m/s. Determine los componentes de la fuerza que han de soportar los anclajes del conector. No considere el peso del líquido dentro del codo ni las pérdidas de energía debido a la fricción, pero sí las pérdidas internas debidas al cambio de dirección-reducción $h_{r1-2} = 0.21 \frac{V_2^2}{2g}$. La diferencia de elevaciones entre los centroides de las secciones 1 y 2 es 7 m. Emplee sistema técnico de unidades.



Solución

Con los datos se realizan los siguientes cálculos

$$A_1 = \frac{\pi \times 6^2}{4} = 28.27 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \times 4.5^2}{4} = 15.904 \text{ m}^2$$

$$Q = A_1 V_1 = 28.27 \times 8 = 226.195 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{226.195}{15.904} = 14.22 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{8^2}{2g} = 3.262 \text{ m}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{14.22^2}{2g} = 10.309 \text{ m}$$

$$h_{r1-2} = 0.21 \frac{V_2^2}{2g} = 0.21 \times 10.309 = 2.165 \text{ m}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = 9 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \times \frac{(100\text{cm})^2}{1\text{m}^2} \times \frac{1}{1000 \text{ kgf}} = 90 \text{ m}$$

Para calcular la presión en la sección 2 es necesario aplicar la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2; se considera el plano de referencia en la sección 1

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{r1-2}$$

$$0 + 90 + 3.262 = 7 + \frac{p_2}{\gamma} + 10.309 + 2.165$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 73.787 \text{ m}, \quad p_2 = 73.787 \text{ m} \times 1000 \text{ kgf/m}^3 = 73787 \text{ kgf/m}^2$$

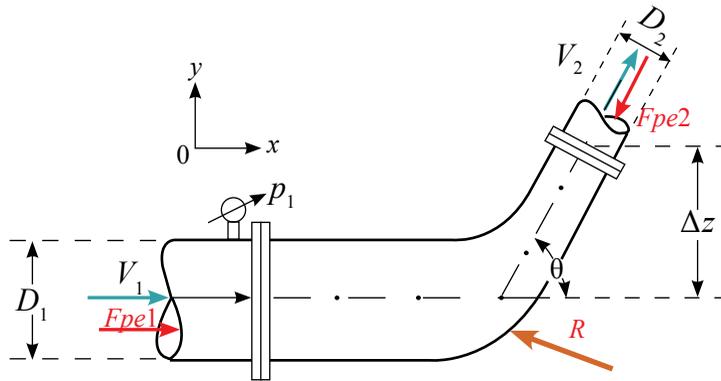
Dado que la presión es positiva, la fuerza de presión estática es “hacia el volumen de control”. El sentido de los componentes de la fuerza **R** se suponen y si son correctos, estuvieron bien estimados, en caso contrario, se corrigen.

Las fuerzas de presión estática son

$$F_{pe1} = p_1 A_1 = 90\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \times 28.274 \text{ m}^2 = 2.54 \times 10^6 \text{ kgf} \rightarrow$$

$$F_{pe2} = p_2 A_2 = 73\,787 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \times 15.904 \text{ m}^2 = 1.17 \times 10^6 \text{ kgf} \checkmark$$

En el volumen de control se muestran las fuerzas de presión estática, las velocidades y la fuerza R que los anclajes proporcionan al volumen de control.



Cuando se emplea sistema técnico de unidades, conviene expresar $\rho = \gamma/g$ para no confundirse con el valor de la densidad en el SI. Dado que en la dirección horizontal no hay fuerza de cuerpo y se despreció la fuerza tangencial debida a la fricción, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x queda

$$F_{pe1x} - F_{pe2x} - R_x = \frac{\gamma}{g} ((-Q)(+V_{1x}) + (+Q)(+V_{2x}))$$

$$(2.54 \times 10^6 - 1.17 \times 10^6 \times \cos 50^\circ) \text{ kgf} - R_x =$$

$$= \frac{1000 \text{ kgf} / \text{m}^3}{9.81 \text{ m/s}^2} \times 226.195 \text{ m}^3 / \text{s} \times (14.22 \cos 50^\circ - 8) \text{ m/s}$$

$$1.79 \times 10^6 \text{ kgf} - R_x = 26\,295 \text{ kgf}$$

$$R_x = 1.76 \times 10^6 \text{ kgf} \leftarrow$$

Como el resultado tiene signo positivo, fue bien estimado el sentido de R_x . En la dirección y se tiene

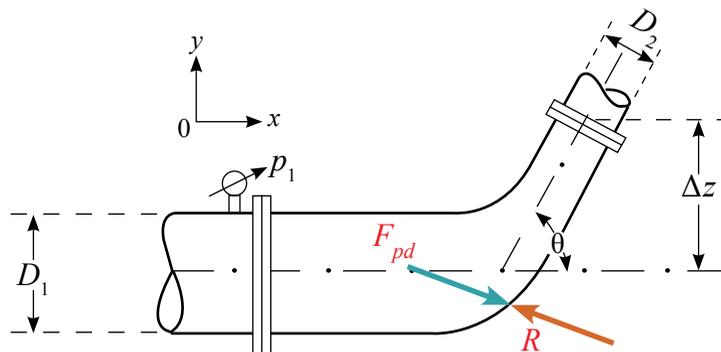
$$-F_{pe2y} + R_y = \frac{\gamma}{g} \left((-Q)(V_{1y}) + (+Q)(+V_{2y}) \right)$$

$$(-1.17 \times 10^6 \times \text{sen } 50^\circ) \text{ kgf} + R_y = \frac{1000 \text{ kgf/m}^3}{9.81 \text{ m/s}^2} \times 226.195 \text{ m}^3/\text{s} (14.22 \text{ sen } 50^\circ - 0) \text{ m/s}$$

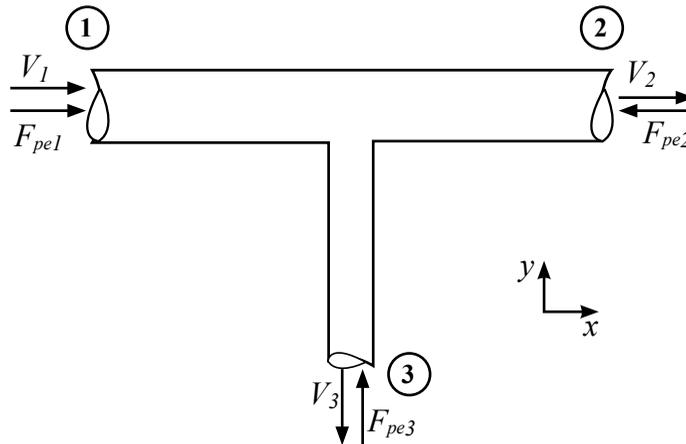
$$-8.99 \times 10^5 + R_y = 251.21 \times 10^3$$

$$R_y = 1.15 \times 10^6 \text{ kgf } \uparrow$$

Dado que el signo de R_y es positivo, el sentido estimado es correcto. La fuerza de presión dinámica que el agua ejerce sobre las paredes del codo-reducción es de igual magnitud y sentido contrario que la fuerza R que se requiere para mantener en equilibrio a la pieza de acoplamiento. La fuerza de presión dinámica F_{pd} tiende a mover la pieza de izquierda a derecha y en dirección descendente; por lo que es necesario que se diseñe un anclaje que pueda soportar los empujes dinámicos. Si bien se calculan fuerzas resultantes en las diferentes direcciones, cada una de estas es el resultado de las fuerzas que se ejercen en todo el conector.



EJEMPLO 4.13 Calcule los componentes del empuje dinámico que el líquido ejerce sobre la bifurcación que está contenida en un plano horizontal. No considere pérdidas de energía. $V_1 = 10 \text{ m/s}$, $V_3 = 8 \text{ m/s}$, $D_1 = D_2 = 0.06 \text{ m}$, $D_3 = 0.04 \text{ m}$, $p_1 = 245.25 \text{ kPa}$.



Solución

Las áreas y gastos en cada sección, así como la velocidad en la sección 2 resultan

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi \times (0.06)^2}{4} = 0.002827 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{\pi \times (0.04)^2}{4} = 0.001256 \text{ m}^2$$

$$Q_1 = A_1 V_1 = 0.002827 \times 10 = 0.02827 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = A_3 V_3 = 0.001256 \times 8 = 0.0100 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = Q_1 - Q_3 = 0.02827 - 0.010 = 0.01827 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{0.01827 \text{ m}^3/\text{s}}{0.002827 \text{ m}^2/\text{s}} = 6.46 \text{ m/s}$$

Al establecer la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2 se tiene

$$\frac{245.25 \times 10^3}{9810} + \frac{10^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{6.46^2}{2g}$$

$$25 + 5.1 = \frac{p_2}{\gamma} + 2.13$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 27.97 \text{ m}$$

y entre las secciones 1 y 3 se llega a

$$\frac{245.25 \times 10^3}{9810} + \frac{10^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{8^2}{2g}$$

$$25 + 5.1 = \frac{p_3}{\gamma} + 3.26$$

$$\frac{p_3}{\gamma} = 26.83 \text{ m}$$

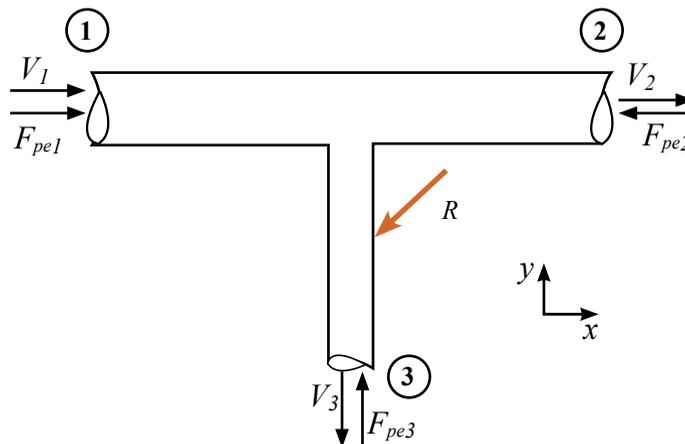
Las fuerzas de presión estática en cada sección son

$$F_{pe1} = p_1 A_1 = 245.25 \times 10^3 \text{ N/m}^2 \times 0.002827 \text{ m}^2 = 693.32 \text{ N} \rightarrow$$

$$F_{pe2} = p_2 A_2 = 27.97 \text{ m} \times 9810 \text{ N/m}^3 \times 0.002827 \text{ m}^2 = 775.68 \text{ N} \leftarrow$$

$$F_{pe3} = p_3 A_3 = 26.83 \text{ m} \times 9810 \text{ N/m}^3 \times 0.001256 \text{ m}^2 = 330.58 \text{ N} \uparrow$$

Como todas las presiones son positivas, el sentido de F_{pe} de cada una de ellas es “hacia” el volumen de control. Con la ecuación 4.57 en la dirección x , tomando en cuenta los sentidos de cada fuerza, se puede calcular la fuerza que el exterior aplica al fluido, lo mismo para la dirección y . Los sentidos de R_x y R_y se estiman y después se revisan. En la dirección x se tiene con R_x estimado en el sentido contrario del eje x positivo y R_y también en sentido contrario al positivo



En la dirección x la ecuación de cantidad de movimiento es

$$\begin{aligned}
 F_{pe1x} - F_{pe2x} - R_x &= \rho \left((-Q_1)V_{1x} + (+Q_2)(V_{2x}) \right) \\
 (693.32 - 775.68) \text{ N} - R_x &= \\
 = 1000 \text{ kg/m}^3 \left((-0.02827 \text{ m}^3/\text{s} \times 10 \text{ m/s}) + (0.01827 \text{ m}^3/\text{s} \times 6.46 \text{ m/s}) \right) \\
 -82.36 \text{ N} - R_x &= -164.67 \text{ N} \\
 R_x &= 82.31 \text{ N}
 \end{aligned}$$

y en la dirección y

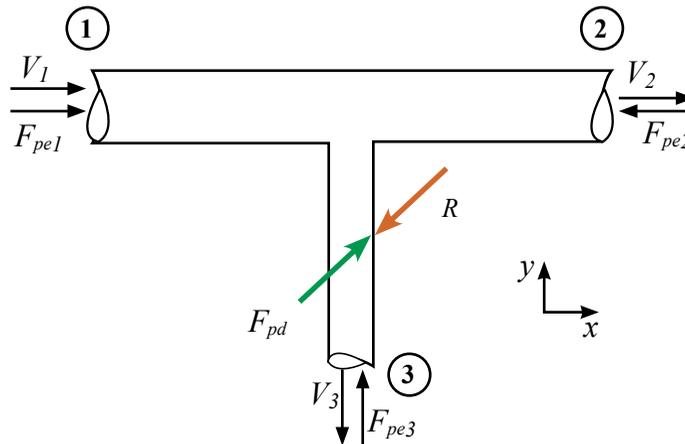
$$\begin{aligned}
 +F_{pe3y} - R_y &= \rho \left((Q_3)(-V_{3y}) \right) \\
 +330.58 \text{ N} - R_y &= 1000 \text{ kg/m}^3 \left((0.01 \text{ m}^3/\text{s}) \times (-8 \text{ m/s}) \right) \\
 R_y &= 410.58 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Tanto R_x como R_y tienen signo positivo, entonces el sentido fue bien estimado. Los componentes del empuje dinámico del líquido sobre la bifurcación son de igual magnitud, pero de sentido contrario tanto de R_x como R_y por lo que

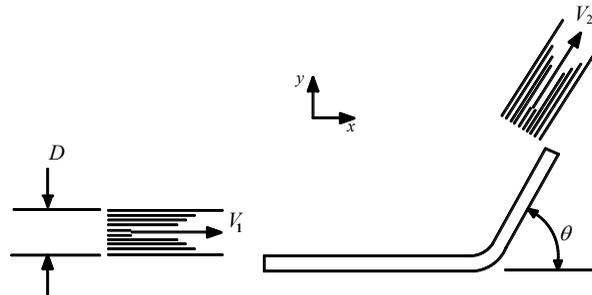
$$\begin{aligned}
 R_x = 82.31 \text{ N} \leftarrow & \quad R_y = 410.58 \text{ N} \downarrow \\
 F_{pdx} = 82.31 \text{ N} \rightarrow & \quad F_{pdy} = 410.58 \text{ N} \uparrow
 \end{aligned}$$

El empuje dinámico que el agua ejerce sobre toda la bifurcación es

$$F_{pd} = \sqrt{82.31^2 + 410.58^2} = 418.74 \text{ N}$$



EJEMPLO 4. 14 Calcule los componentes del empuje dinámico que el chorro ejerce sobre el deflector. El chorro está contenido en un plano horizontal. No considere pérdidas de energía. $V_1 = 30 \text{ m/s}$, $\theta = 45^\circ$, $D_1 = 0.05 \text{ m}$. Emplee sistema gravitacional con $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$.



Solución

Al ser un chorro se tiene que $p_1 = p_2 = 0$ (manométrica). Al establecer la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2 se tiene

$$0 + 0 + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

Por lo que $V_1 = V_2$. El área del chorro es

$$A = \frac{\pi \times (0.05)^2}{4} = 0.001963 \text{ m}^2$$

y el gasto se calcula

$$Q = AV = 0.001963 \times 30 = 0.05889 \text{ m}^3/\text{s}$$

No hay fuerzas de presión estática, ya que la presión manométrica es nula, tampoco se tiene fuerza de cuerpo debido a que el chorro está contenido en un plano horizontal, además, al no considerarse pérdidas de energía, se tiene $F_\tau = 0$. Dado que se empleará sistema gravitacional, la densidad es $\rho = \gamma/g = 1000 \text{ kgf/m}^3 / 9.81 \text{ m/s}^2$

Los sentidos de las fuerzas de R_x y R_y que el exterior aplica al fluido desde el deflector, se suponen y posteriormente se revisan. Al aplicar la ecuación 4.57 en la dirección x , se tiene

$$-R_x = \frac{\gamma}{g} ((-Q)V_{1x} + (+Q)(V_{2x}))$$

$$-R_x = \frac{\gamma}{g} Q (V_{2x} - V_{1x})$$

$$-R_x = \frac{1000 \text{ kgf/m}^3}{9.81 \text{ m/s}^2} \times 0.05889 \text{ m}^3/\text{s} (30 \cos 45^\circ - 30) \text{ m/s}$$

$$R_x = 52.75 \text{ kgf}$$

$$R_x = 52.75 \text{ kgf} \leftarrow$$

Como R_x resultó con signo positivo, fue bien supuesto su sentido. En la dirección y , se tiene

$$-R_y = \frac{\gamma}{g} ((-Q)V_{1y} + (+Q)(V_{2y}))$$

$$-R_y = \frac{\gamma}{g} Q (V_{2y} - 0)$$

$$-R_y = \frac{1000 \text{ kgf/m}^3}{9.81 \text{ m/s}^2} \times 0.05889 \text{ m}^3/\text{s} \times (30 \sin 45^\circ) \text{ m/s}$$

$$R_y = -127.34 \text{ kgf}$$

Para el caso de R_y , como el signo resultó negativo, el sentido se estimó incorrectamente, por lo que este se corrige y queda

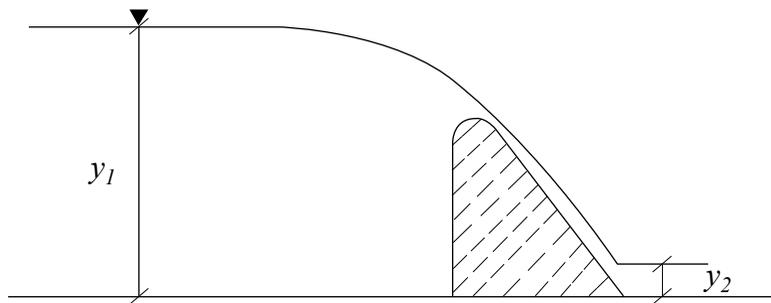
$$R_y = 127.34 \text{ kgf} \uparrow$$

El empuje dinámico del chorro sobre el deflector es de igual magnitud, pero de sentido contrario que las fuerzas R_x y R_y , por lo que

$$F_{pdx} = 52.75 \text{ kgf} \rightarrow$$

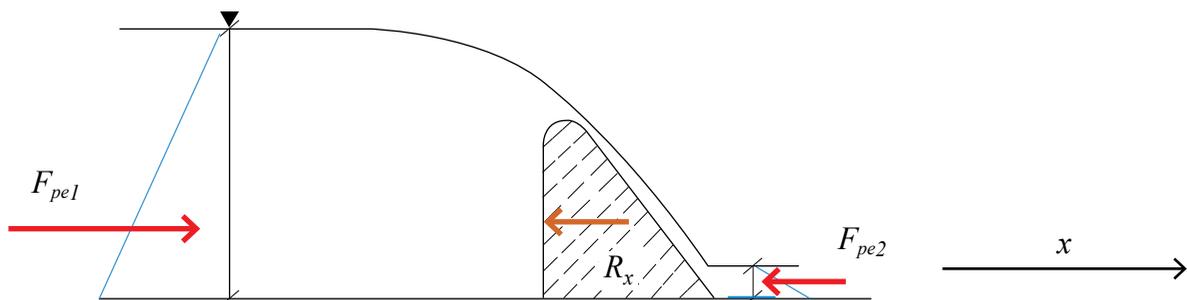
$$F_{pdy} = 127.34 \text{ kgf} \downarrow$$

EJEMPLO 4.15 Considere el vertedor del ejemplo 4.11. cuyos datos son $Q = 5.25 \text{ m}^3/\text{s}$, $b = 3 \text{ m}$, $y_1 = 3.5 \text{ m}$, $y_2 = 0.2176 \text{ m}$, $V_1 = 0.5 \text{ m/s}$ y $V_2 = 8.042 \text{ m/s}$. Determine el empuje dinámico que soporta el vertedor.



Solución

Se establece el volumen de control delimitado por el líquido contenido entre las secciones 1 y 2. Al no considerarse fricción $F_\tau = 0$, y dado que el movimiento es en la dirección horizontal no hay fuerza de cuerpo en esta. Las fuerzas por considerar son las de presión estática F_{pe1} , F_{pe2} y la incógnita R_x del vertedor hacia el volumen de control.



La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x queda

$$F_{pe1x} - F_{pe2x} - R_x = \rho((-Q)(+V_{1x}) + (+Q)(+V_{2x}))$$

donde

$$F_{pe1} = \gamma A_1 y_{c1} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times (3 \times 3.5) \text{m}^2 \times \frac{3.5\text{m}}{2} = 180.258 \times 10^3 \text{ N} \rightarrow$$

$$F_{pe2} = \gamma A_2 y_{c2} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times (3 \times 0.2176) \text{m}^2 \times \frac{0.2176\text{m}}{2} = 696.75 \text{ N} \leftarrow$$

$$180258 - 696.75 - R_x = 1000 \times 5.25 (8.042 - 0.5)$$

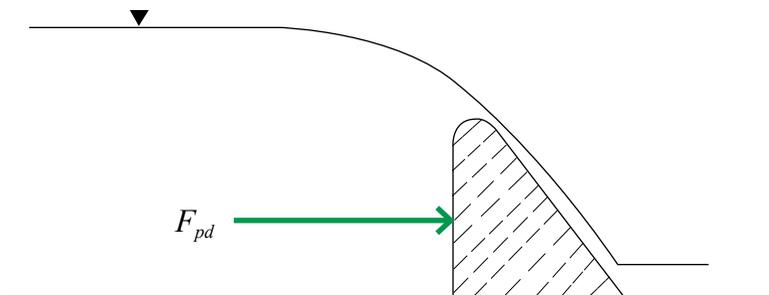
$$179562 - R_x = 39595$$

$$R_x = 179561 - 39595 = 139966 \text{ N}$$

Dado que R_x tiene signo positivo, estuvo bien estimado su sentido. La fuerza de presión dinámica F_{pdx} que el agua ejerce sobre el muro es de igual magnitud y de sentido contrario que R_x , por lo que resulta

$$R_x = 139.966 \text{ kN} \leftarrow$$

$$F_{pdx} = 139.966 \text{ kN} \rightarrow$$

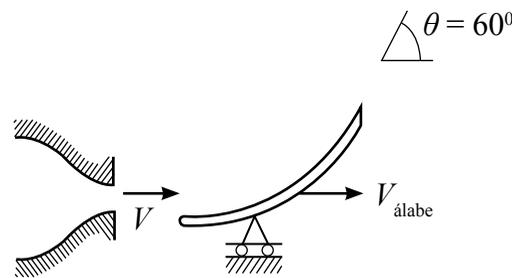


Dado que

$$V_2 = \frac{Q}{(by_2)} = \frac{5.25}{(3 \times 0.2176)} = 8.042 \text{ m/s}; \quad \frac{V_2^2}{2g} = 3.296 \text{ m}$$

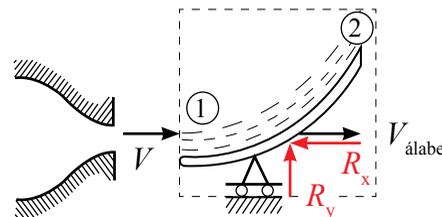
esto significa que, si coloca un tubo de Pitot en la sección 2, el nivel del agua dentro del tubo subirá aproximadamente 3.3 m por encima del nivel del tirante.

EJEMPLO 4. 16 La figura muestra un álabe deflector con un ángulo de 60° , el cual recibe un chorro de agua que sale de una boquilla estacionaria con velocidad $V = 30 \text{ m/s}$. El álabe se desplaza en dirección horizontal con velocidad constante $V_{\text{álabe}} = 10 \text{ m/s}$. La boquilla tiene un área de salida de 0.004 m^2 . Determine la fuerza que ejerce el agua sobre el deflector. No considere las pérdidas de energía ni el peso del líquido.



Solución

Se selecciona el volumen de control que se mueve con el álabe a velocidad constante. R_x y R_y son los componentes de la fuerza necesaria para mantener la velocidad del VC constante. El VC es inercial, puesto que no se acelera. Las velocidades se deben medir respecto al volumen de control al aplicar las ecuaciones fundamentales.



Dado que el flujo es estacionario relativo al álabe para un observador que se mueve a la misma velocidad que el álabe, la velocidad que observa en el chorro es

$$V_r = V - V_{\text{álabe}} = (30 - 10) \text{ m/s}$$

$$V_r = 20 \text{ m/s}$$

El gasto volumétrico resulta

$$Q = V_r A = 20 \text{ m/s} \times 0.004 \text{ m}^2 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$$

Al igual que en el problema 4.14, al aplicar la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2 se tiene $V_{r1} = V_{r2}$, y al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento 4.55 en la dirección x , con el sentido de R_x estimado se tiene

$$-R_x = \rho((-Q)(+V_{r1x}) + (+Q)(+V_{r2x}))$$

$$-R_x = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.08 \text{ m}^3/\text{s} \times (-20 + 20 \cos 60^\circ) \text{ m/s}$$

$$R_x = 800 \text{ N}$$

$$R_x = 800 \text{ N} \leftarrow$$

en la dirección y la ecuación queda

$$+R_y = \rho((-Q)(+V_{r1y}) + (+Q)(+V_{r2y}))$$

$$R_y = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.08 \text{ m}^3/\text{s} \times (0 + 20 \sin 60^\circ) \text{ m/s}$$

$$R_y = 1385 \text{ N}$$

$$R_y = 1385 \text{ N} \uparrow$$

En ambos casos los sentidos fueron bien estimados. Los componentes del empuje del chorro sobre el álabe son

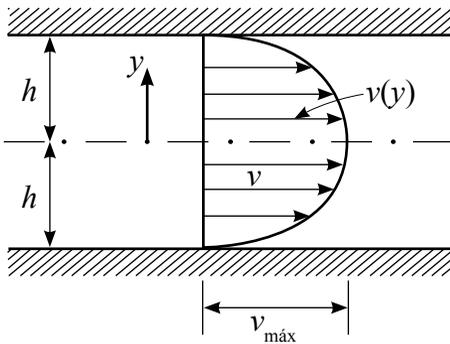
$$F_{pdx} = 800 \text{ N} \rightarrow$$

$$F_{pdy} = 1385 \text{ N} \downarrow$$

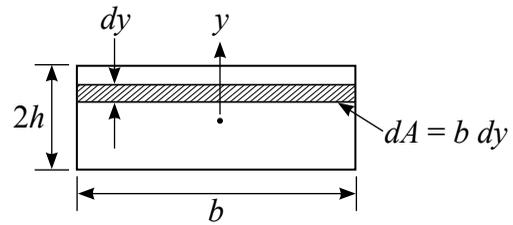
EJEMPLO 4.17 Calcule los coeficientes de corrección α y β de un flujo laminar entre placas paralelas. El perfil parabólico de la distribución de la velocidad se puede expresar como

$$v(y) = v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

donde y se mide desde la línea central; en $y = \pm h$, $v = 0$ y en $y = 0$, $v = v_{\text{máx}}$.



Perfil de velocidades



Sección transversal

Solución

La velocidad media es igual a

$$V = \frac{1}{A} \int_A v dA = \frac{1}{2hb} \int_{-h}^h v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) b dy = \frac{v_{\text{máx}}}{2h} \left(2h - \frac{2}{3}h \right) = \frac{2}{3}v_{\text{máx}}$$

El coeficiente de Coriolis se determina como

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA = \frac{b}{2hbV^3} \int_{-h}^h \left(v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \right)^3 dy = \frac{v_{\text{máx}}^3}{2h \left(\frac{2}{3}v_{\text{máx}} \right)^3} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)^3 dy$$

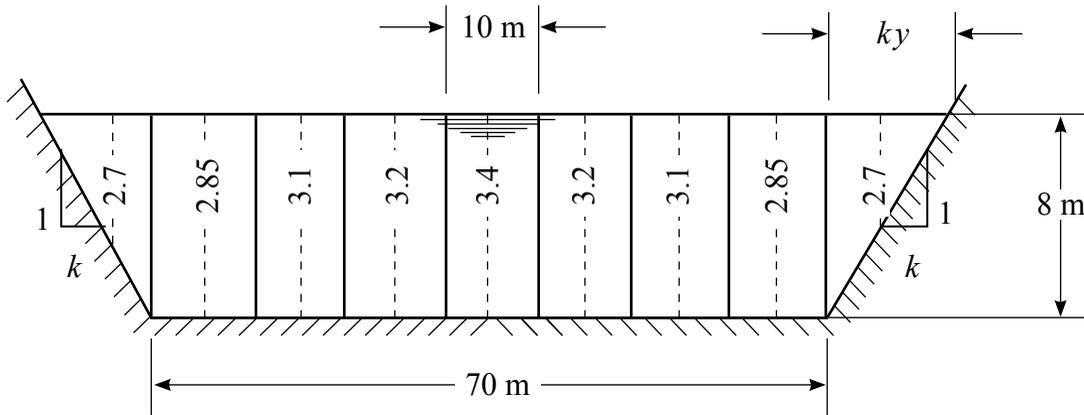
$$\alpha = \frac{1}{(16/27)h} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)^3 dy = 1.542$$

y el coeficiente de Boussinesq es

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dA = \frac{b}{2hbV^2} \int_{-h}^h \left(v_{m\acute{a}x} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \right)^2 dy = \frac{v_{m\acute{a}x}^2}{2h \left(\frac{2}{3} v_{m\acute{a}x} \right)^2} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)^2 dy$$

$$\beta = \frac{1}{(8/9)h} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)^2 dy = 1.2$$

EJEMPLO 4.18 La figura muestra la sección transversal de un río, la cual se aproxima a un trapecio. El ancho total es 70 m y para medir las velocidades en diferentes puntos se subdividió en 7 áreas rectangulares de ancho 10 m y dos subsecciones triangulares laterales que tienen un talud $k = 2$. Las velocidades, en m/s, se midieron en el centro de las subáreas y se consideran representativas de las mismas. Determine: gasto, velocidad media y los coeficientes α y β .



Solución

Cada una de las subáreas centrales son iguales a

$$\Delta A_{central} = 10y = 10 \times 8 = 80 \text{ m}^2$$

y las laterales

$$\Delta A_{lateral} = \frac{1}{2}(ky)y = \frac{1}{2}(2 \times 8) \times 8 = 64 \text{ m}^2$$

el área total resulta

$$A = (7 \times 80) + (2 \times 64) = 688 \text{ m}^2$$

Los cálculos se pueden sistematizar en la siguiente tabla, en la cual la numeración de las secciones es de izquierda a derecha

1	2	3	4	5	6
Sección	v_i	ΔA_i	$Q_i = v_i \Delta A_i$	$v_i^3 \Delta A_i$	$v_i^2 \Delta A_i$
	m / s	m ²	m ³ / s	m ⁵ / s ³	m ⁴ / s ²
1	2.7	64	172.8	1259.7	466.56
2	2.85	80	228	1851.9	649.8
3	3.1	80	248	2383.3	768.8
4	3.2	80	256	2621.4	819.2
5	3.4	80	272	3144.3	924.8
6	3.2	80	256	2621.4	819.2
7	3.1	80	248	2383.3	768.8
8	2.85	80	228	1851.9	649.8
9	2.7	64	172.8	1259.7	466.56
suma		688	2081.6	19377	6333.52

Con la ayuda de los cálculos efectuados en la tabla anterior, el gasto, la velocidad media y los coeficientes de Coriolis y de Boussinesq resultan

$$Q = \sum_{i=1}^n v_i \Delta A_i = 2081.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V \approx \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n v_i \Delta A_i = \frac{2081.6}{688} = 3.026 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \frac{1}{AV^3} \sum_{i=1}^n v_i^3 \Delta A_i = \frac{1}{688 \times 3.026^3} \times 19377 = 1.0168$$

$$\beta = \frac{1}{AV^2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \Delta A_i = \frac{1}{688 \times 3.026^2} \times 6333.52 = 1.005 \approx 1.0$$

4.5 FORMAS DIFERENCIALES. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Los principios de conservación de masa, conservación de energía y cantidad de movimiento se han aplicado hasta aquí a volúmenes finitos de control para deducir las ecuaciones que más se utilizan en hidráulica y que son las que se requieren en un curso básico. Sin embargo, en muchos problemas de flujo es necesario conocer sus características a lo largo de trayectorias o de líneas de corriente y en direcciones transversales para aclarar condiciones locales difíciles de precisar a partir de los valores medios de dichas características o de sus propiedades. Para hacerlo se requiere de aplicar los mismos principios a volúmenes de control de tamaño diferencial para derivar ecuaciones diferenciales que permiten entender las características del flujo, aunque su solución sea posible solo en ciertos casos.

Los principios de continuidad y cantidad de movimiento son suficientes en este tipo de aplicaciones al derivar dos ecuaciones, con las que se puede inclusive explicar algunos de los términos en la de energía. Además, tienen más generalidad en el caso de flujo no permanente.

En los desarrollos que aquí se presentan, la ecuación diferencial de continuidad se obtiene de un volumen de control diferencial orientado según tres ejes cartesianos ortogonales fijos, pero también se pueden desarrollar para el sistema de coordenadas naturales. En cambio, la ecuación diferencial de cantidad de movimiento se obtiene de un volumen de control similar, pero orientado según la trayectoria del flujo, que también se puede transformar al sistema cartesiano. Las dos ecuaciones así derivadas se conocen como ecuaciones del movimiento y tienen formas particulares, como las ecuaciones de Euler.

4.5.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONTINUIDAD

Se considera el flujo de masa a través de cada cara del volumen de control infinitesimal que se muestra en la figura 4.25. El flujo neto de masa que entra en el elemento es igual a la rapidez de cambio de la masa en el elemento. Para realizar el balance se considera ρv en el centro del elemento de lados dx , dy y dz .

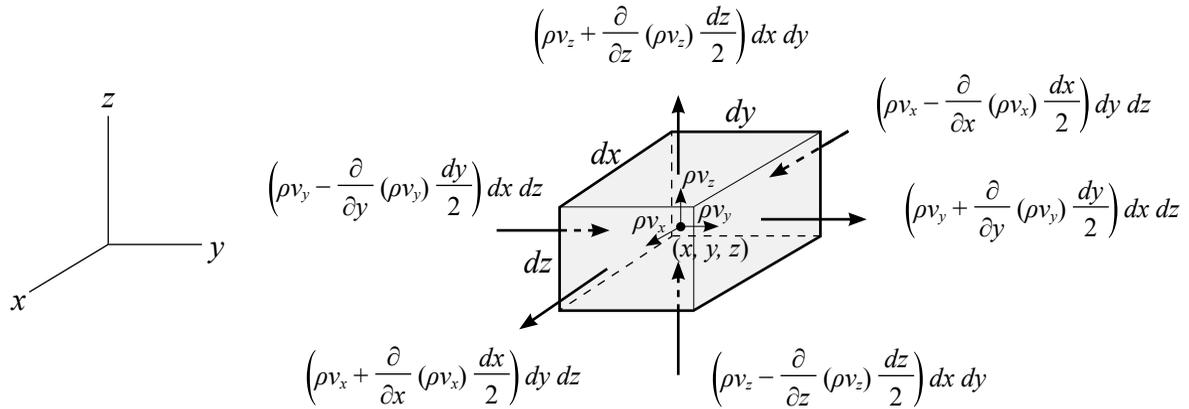


Figura 4.25 VOLUMEN DE CONTROL INFINITESIMAL PARA LA DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Al pasar las caras normales al eje x , la función ρv se incrementa y decrementa en la misma cantidad $\frac{1}{2} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx$. De este modo, considerando signo negativo para la masa que entra y positivo para la que sale, la cantidad neta de masa que atraviesa las caras normales al eje x es

$$-\left(\rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz$$

con un razonamiento similar en las direcciones y y z se tiene

$$-\left(\rho v_y - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz + \left(\rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz$$

$$-\left(\rho v_z - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy + \left(\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz$$

La rapidez de cambio de la masa dentro del elemento es $\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dy dz)$. Al aplicar la ecuación 4.1 al volumen de control diferencial resulta

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dy dz) = 0$$

Al dividir cada uno de los términos entre $dx dy dz$, el principio de conservación de masa establece

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (4.62a)$$

Los primeros tres términos forman el divergente de ρv , por lo que la ecuación anterior también se puede expresar de la forma

$$\text{div } \rho v + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (4.62b)$$

Las ecuaciones 4.62 admiten las siguientes simplificaciones:

- Flujo compresible y permanente $\text{div } \rho v = 0$
- Incompresible ($\rho = \text{constante}$) y no permanente $\text{div } v = 0$
- Incompresible permanente $\text{div } v = 0$

EJEMPLO 4.19 Considere el campo de velocidad bidimensional dado por $v = (0.4+0.7x) i + (2-0.7 y) j$. Revise si este campo de flujo se puede considerar incompresible.

Solución

Los componentes de velocidad en las direcciones x y y , respectivamente, son

$$v_x = 0.4 + 0.7x \quad y \quad v_y = 2 - 0.7y$$

El flujo es incompresible dado que no se presentan variaciones con la densidad. Para que adicionalmente sea permanente se debe cumplir que

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Dado que no hay componente de velocidad en la dirección z se tiene que $\partial v_z / \partial z = 0$, y al efectuar las derivadas parciales se obtiene

$$0.7 - 0.7 + 0 = 0$$

En efecto, el campo de flujo es incompresible.

4.5.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de Euler (3.16a, b y c) son un ejemplo de ecuación diferencial de cantidad de movimiento aplicada a una línea de corriente de un flujo no viscoso y es a partir de esta ecuación, en la dirección del movimiento s , con la consideración de flujo permanente, que se dedujo la ecuación de Bernoulli.

La figura 4.26 muestra las fuerzas que actúan sobre un elemento de tamaño diferencial; por simplicidad no se presentan las fuerzas de presión en la dirección binormal, las cuales también existen. En el centro se encuentra el punto P en el cual existen los valores v, p, ρ, τ (velocidad, presión, densidad, esfuerzo de fricción).

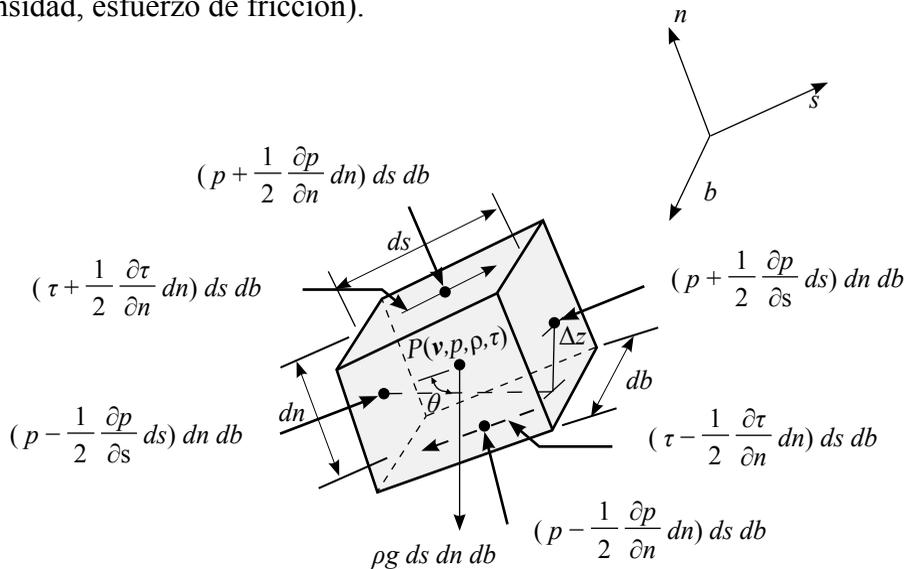


Figura 4.26 FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN VOLUMEN DE CONTROL INFINITESIMAL (ADAPTADO DE SOTELO, 1990)

Las fuerzas que actúan sobre este elemento en la dirección $+s$ son

- a) La componente de la fuerza de cuerpo $-\rho g dV \cos \theta = -\rho g ds dn db \cos \theta$; donde $\cos \theta = dz / ds = \partial z / \partial s$ (el signo positivo es debido a que cuando s aumenta, z también aumenta), por lo que es igual a

$$-\rho g ds dn db \frac{\partial z}{\partial s}$$

b) La resultante de las fuerzas de presión

$$\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dn db - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dn db = -\frac{\partial p}{\partial s} ds dn db$$

c) La fuerza de superficie debida a la resistencia al movimiento, la cual se puede evaluar en términos del esfuerzo tangencial de fricción τ , el cual solo varía en la dirección n , dado que en la dirección binormal no hay variación de la velocidad. La resultante de esta fuerza es

$$\left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) ds db - \left(\tau - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) ds db = \frac{\partial \tau}{\partial n} ds dn db$$

la suma de fuerzas en la dirección $+s$ resulta

$$\left(-\rho g \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n}\right) ds dn db$$

La magnitud de la aceleración en la dirección $+s$ es $a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}$. Al aplicar la segunda ley de Newton al elemento, la cual establece que la suma de las fuerzas es igual a la masa del elemento multiplicada por la aceleración, se obtiene

$$\left(-\rho g \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n}\right) ds dn db = \rho ds dn db \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}\right]$$

al dividir todo entre la masa $\rho ds dn db$ se obtiene

$$-g \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.63)$$

Esta es la primera ecuación diferencial del movimiento. El primer término es debido al peso del líquido; el segundo es debido al gradiente de presiones en la dirección de la línea de corriente; el tercero a la fuerza de resistencia causada por la fricción (todas estas fuerzas por unidad de masa); el cuarto término (después del signo de igualdad) es el cambio de energía cinética que experimenta la unidad de masa a lo largo de la línea de corriente; y, el último la aceleración local de la misma.

Con un procedimiento similar, en la dirección de la normal principal, y dado que la magnitud de la aceleración en la dirección normal es $a_n = \frac{v^2}{r}$, donde r es el radio local de curvatura, resulta

$$-g \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{v^2}{r} \quad (4.64)$$

que es la segunda ecuación diferencial del movimiento.

En la dirección binormal, dado que $a_s = 0$, se llega a

$$-g \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} = 0 \quad (4.65)$$

que es la tercera ecuación diferencial del movimiento.

Las ecuaciones 4.63 y 4.64 ya habían sido presentadas en el capítulo 3.

AGRADECIMIENTOS

Algunos de los dibujos fueron elaborados por Emiliano García Rodríguez como parte de su prestación del Servicio Social en la Facultad de Ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

CENGEL, Y., CIMBALA, J. (2018). *Mecánica de Fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. 4ª. ed., México: Mc. Graw Hill Interamericana Editores, S.A de C.V.

MUNSON, B., YOUNG, D., OKIISHI, T. (2002). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. 1ª. reimpresión, México: Limusa.

POTTER, M., WIGGERT, D. (1998). *Mecánica de Fluidos*. 2ª ed. México: Prentice Hall.

SERRE, M., ODGAR, J., ELDER, R. “Energy loss at Combining Pipe Junction”.
Journal of Hydraulic Engineering, USA: ASCE, Vol. 120, No. 7, July 1994, pp. 808-830.

SOTELO ÁVILA, G. (2025). *Hidráulica de canales*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería.

<http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/handle/RepoFi/19586>

____ (2004). *Notas de curso para profesores*. Facultad de Ingeniería. Sin publicar.

____ (1990). *Hidráulica general*. México: Limusa.

5.1 NECESIDAD DE MODELOS EN LA HIDRÁULICA

Como ya se indicó al derivar las ecuaciones fundamentales, el análisis matemático de un flujo es con frecuencia insuficiente para resolver todos los aspectos de un problema, ya que, en muchos problemas en la ingeniería, las ecuaciones tienen simplificaciones que no son aceptables en el problema real o son demasiado difíciles de resolver; en estos casos, la experimentación es el método que permite obtener información confiable que complementa al análisis matemático, pero no lo sustituye. Si bien este capítulo se enfoca a la similitud en la mecánica de fluidos y con aplicaciones específicas en la hidráulica, la experimentación apoyada en la similitud y en el análisis dimensional es aplicable a otras disciplinas de la ingeniería cuando es necesario diseñar y realizar experimentos.

Por motivos prácticos y económicos, la experimentación se realiza en un modelo a escala geométrica en vez de un prototipo de tamaño real, que suele ser la estructura por construir. El tamaño del modelo depende, entre otros aspectos, del espacio disponible, la capacidad de la instalación para proporcionar gasto y carga, los efectos de escala, etc. Además, el aspecto económico para la construcción del modelo y adquisición de equipo de medición son variables importantes por considerar.

Entre otros propósitos, los modelos hidráulicos se usan para:

- Determinar coeficientes de pérdidas de energía para poder evaluar tanto las pérdidas locales como las debidas a la fricción.
- Determinar coeficientes de resistencia al movimiento de los cuerpos que se mueven a través de un fluido.
- Predecir el patrón de flujo a su llegada a diversas estructuras, como son los vertedores de grandes dimensiones, ya que usualmente se emplean ecuaciones de flujo unidimensional y el flujo real no lo es.

- Determinar coeficientes de descarga para orificios y vertedores.
- Proporcionar curvas de operación que relacionen gasto-carga y eficiencia en máquinas hidráulicas.
- Diseñar métodos de disipación de energía en obras de excedencia.
- Diseñar protecciones a ríos.
- Diseñar altura y ubicación de rompeolas.

5.2 ANÁLISIS DIMENSIONAL

En el estudio experimental del flujo de fluidos intervienen variables geométricas y las propias del fluido. Cuando se tienen resultados experimentales, los cuales se expresan con parámetros adimensionales, estos permiten que se reduzca la lista original de variables y que los resultados obtenidos en determinadas condiciones se puedan extrapolar a situaciones en las que se tengan diferentes dimensiones geométricas e inclusive a situaciones en que las propiedades del fluido sean distintas a las presentadas durante la experimentación. La técnica empleada para determinar las combinaciones posibles de los parámetros que describan al experimento se apoya en el teorema Π .

5.2.1 TEOREMA Π

En un problema de mecánica de fluidos se tienen diversas variables a considerar, por ejemplo: presión, velocidad, densidad, viscosidad, diámetro del conducto, longitud del conducto. Para determinar cuántos parámetros adimensionales se requieren para sustituir de la lista original cuando se realiza experimentación y se facilite interpretar resultados, se recurre al método de repetición de variables que fue popularizado por el físico estadounidense Edgar Buckingham (1867-1940), y publicado por primera vez por el científico ruso experto en aerodinámica Dimitri Pavlovich Riabouchinsky (1882-1962), quien fue el autor de diversas teorías y técnicas que raramente se asocian con su nombre y que en 1911 publicó sus contribuciones al análisis dimensional (Rouse, 1957). Más tarde, en 1915, Buckingham publicó una generalización del método de Riabouchinsky que es conocido como teorema Π , ya que es el símbolo que usó para representar un producto adimensional y si bien el teorema es simple, no lo es su demostración que aquí se omite.

El teorema establece que en un problema físico en que se tengan k variables o cantidades físicas que incluyan m dimensiones, estas variables se pueden agrupar en $k - m$ parámetros independientes. En su aplicación se considera el número de dimensiones independientes que se presentan entre las k variables (por ejemplo: fuerza, densidad, tiempo, diámetro del conducto) es igual a m , lo cual se puede expresar mediante la relación funcional

$$q_1 = F(q_2, q_3, \dots, q_k) \quad (5.1)$$

Sean $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{k-m}$ parámetros adimensionales que agrupan a las variables $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$, todas estas incluyendo las m dimensiones, el teorema establece la existencia de una ecuación del tipo

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-m}) \quad (5.2)$$

en la que todos los términos Π son adimensionales. Regularmente, en la mecánica de fluidos las dimensiones de referencia necesarias para describir las variables son las dimensiones básicas M, L y T o F, L y T , aunque en algunos casos se pueden requerir menos. Un requisito para aplicar con éxito el método es que una dimensión debe ocurrir al menos dos o ninguna vez.

Procedimiento

1. Enumerar todas las k variables que aparecen en el problema, generalmente, estas incluyen cualquier propiedad del fluido y aquellas que se requieran para describir la geometría.
2. Expresar cada variable en términos de sus dimensiones básicas; por ejemplo, el gasto tiene dimensiones $L^3 T^{-1}$.
3. Identificar las m variables repetidas que se combinarán con cada una de las variables restantes para formar los $k-m$ parámetros Π . Las variables repetidas seleccionadas de entre las variables independientes deben incluir todas las dimensiones básicas, pero no forman un parámetro Π por sí solas.
4. Formar los parámetros Π combinando las variables repetidas con cada una de las variables restantes.
5. Escribir la forma funcional de los $k-m$ parámetros Π adimensionales

Para ilustrar el procedimiento anterior, se relaciona la pérdida de presión por unidad de longitud $\Delta p/l$ que se produce en un fluido, con las variables densidad ρ , viscosidad absoluta μ , gasto Q y diámetro del conducto D .

La variable dependiente es $\Delta p/l$ y las independientes son ρ, μ, Q y D ($k = 5$). Las dimensiones (véase tabla 1.2 del capítulo 1) de cada variable son

Variable	Dimensiones
$\Delta p/l$	$(M / LT^2) / L = ML^{-2}T^{-2}$
ρ	ML^{-3}
μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Q	L^3T^{-1}
D	L

Se tiene $k = 5$ y dado que son tres dimensiones fundamentales las que intervienen, entonces $m = 3$, por lo tanto, se tendrán $k - m = 5 - 3 = 2$ parámetros Π .

Se seleccionan como variables repetidas ρ, Q y D . Para determinar el primer parámetro generalmente se empieza con la variable dependiente y se combina con las variables repetidas para formar el primer número Π . El procedimiento algebraico se puede escribir así

$$\Pi_1 = (\Delta p/l) D^a Q^b \rho^c$$

Como esta combinación debe ser adimensional, se concluye que

$$M^0 L^0 T^0 = (M L^{-2} T^{-2})(L)^a (L^3 T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

Los exponentes a, b y c se deben determinar de modo que el exponente obtenido para cada una de las dimensiones básicas del lado izquierdo sea igual a cero y así la combinación resultante sea adimensional. Así se tiene

$$\begin{aligned} 1+c &= 0 && \text{Para } M \\ -2+a+3b-3c &= 0 && \text{Para } L \\ -2-b &= 0 && \text{Para } T \end{aligned}$$

se concluye que $c = -1$, $b = -2$ y $a = 5$ y, en consecuencia

$$\Pi_1 = \left(\frac{\Delta p}{l} \right) \frac{D^5}{\rho Q^2}$$

se repite el procedimiento con las mismas variables repetidas y con μ como no repetida

$$\Pi_2 = \mu D^a Q^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 T^0 = (M L^{-1} T^{-1}) (L)^a (L^3 T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$1 + c = 0$	Para M
$-1 + a + 3b - 3c = 0$	Para L
$-1 - b = 0$	Para T

al resolver las ecuaciones se tiene $c = -1$, $b = -1$ y $a = 1$ y se obtiene

$$\Pi_2 = \mu D / Q \rho$$

por último, se puede establecer la relación funcional

$$\frac{\Delta p}{l} \frac{D^5}{\rho Q^2} = f(\mu D / Q \rho)$$

esta expresión también se puede escribir como

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\rho Q^2}{D^5} f(\mu D / Q \rho)$$

para determinar la función desconocida f se requiere aplicar algún método experimental o analítico.

5.2.2 PARÁMETROS Π USUALES EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Considere que en el análisis de un problema físico la caída de presión Δp está relacionada con todas las cantidades físicas que pueden intervenir en él, como son: una longitud característica l , una velocidad característica V , la densidad ρ , la viscosidad μ , la aceleración de la gravedad g , la tensión superficial σ , la celeridad de las ondas de presión c y la frecuencia angular ω .

Para este caso la ecuación 5.1 resulta

$$\Delta p = f(l, V, \rho, \mu, g, \sigma, c, \omega)$$

Las 9 variables contienen 3 dimensiones fundamentales, por lo tanto, se pueden obtener $9-3 = 6$ parámetros Π . Al elegir l, V y ρ como variables repetidas, para el primer parámetro se tiene

$$\Pi_1 = \Delta p l^a V^b \rho^c$$

Como esta combinación debe ser adimensional, se concluye que

$$M^0 L^0 T^0 = (M L^{-1} T^{-2})(L)^a (L T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

así se tiene

$$\begin{array}{ll} 1+c=0 & \text{Para } M \\ -1+a+b-3c=0 & \text{Para } L \\ -2-b=0 & \text{Para } T \end{array}$$

al resolver las ecuaciones resulta $c = -1$, $b = -2$ y $a = 0$, por lo que el primer parámetro resulta

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

a este parámetro se le conoce como número de Euler, Eu ; si ahora se elige μ como variable no repetida se llega a

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V l}$$

al sacar inverso a este parámetro, se tiene uno equivalente igual a

$$\Pi_{2a} = \frac{V l \rho}{\mu}$$

que es el muy conocido número de Reynolds; así como en este caso, en la deducción de algunos otros parámetros también se invierte numerador con denominador o se saca raíz cuadrada. Al continuar con el procedimiento y asignando nombre a cada uno de los parámetros resultantes se llega a

Parámetro Π	Símbolo	Expresión
Número de Euler	Eu	$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$
Número de Reynolds	Re	$\frac{V \rho l}{\mu} = \frac{V l}{\nu}$
Número de Froude	Fr	$\frac{V}{\sqrt{l g}}$
Número de Mach	Ma	$\frac{V}{c}$
Número de Weber	We	$\frac{V^2 l \rho}{\sigma}$
Número de Strouhal	St	$\frac{l \omega}{V}$

Cada uno de estos parámetros tiene significado físico, el cual puede determinarse observando que cada uno se pueden escribir como el cociente de dos fuerzas. Las fuerzas que intervienen se pueden expresar en función de sus variables de la siguiente forma:

Fuerza de inercia $F_i = m V \frac{dV}{ds} \sim \rho l^3 V^2 l^{-1} = \rho l^2 V^2$

Fuerza de presión $F_p = \Delta p A = \Delta p l^2$

Fuerza viscosa $F_\mu = \tau A = \mu \frac{dv}{dy} A \sim \mu \frac{V}{l} l^2 = \mu V l$

Fuerza de gravedad

$$F_g = m g = \rho l^3 g$$

Fuerza de compresibilidad

$$F_{Ev} = E_v A = c^2 \rho A = c^2 \rho l^2$$

Fuerza de tensión superficial

$$F_\sigma = \sigma l$$

Fuerza centrífuga

$$F_\omega = m a_r = m \omega^2 r \sim \rho l^3 \omega^2 l = \rho l^4 \omega^2$$

Así, se tiene que

$$Eu = \frac{F_p}{F_i} = \frac{\Delta p l^2}{\rho l^2 V^2}$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad (5.3)$$

$$Re = \frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\rho l^2 V^2}{\mu V l}$$

$$Re = \frac{V l}{\nu} \quad (5.4)$$

$$Fr = \sqrt{\frac{F_i}{F_g}} = \sqrt{\frac{\rho l^2 V^2}{\rho l^3 g}}$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g l}} \quad (5.5)$$

$$Ma = \sqrt{\frac{F_i}{F_{Ev}}} = \sqrt{\frac{\rho l^2 V^2}{\rho c^2 l^2}}$$

$$Ma = \frac{V}{c} \quad (5.7)$$

$$We = \frac{F_i}{F_\sigma} = \frac{\rho l^2 V^2}{\sigma l}$$

$$We = \frac{V^2 l \rho}{\sigma} \quad (5.8)$$

$$St = \sqrt{\frac{F_\omega}{F_i}} = \sqrt{\frac{\rho l^4 \omega^2}{\rho l^2 V^2}}$$

$$St = \frac{\omega l}{V} \quad (5.9a)$$

Dado que la velocidad angular ω es directamente proporcional a la frecuencia f , el número de Strouhal también se acostumbra a escribir como

$$St = \frac{f l}{V} \quad (5.9b)$$

Para el análisis realizado, al tomar en cuenta las fuerzas ya indicadas, la ecuación 5.2 se puede expresar como

$$Eu = f(Re, Fr, Ma, We, St) \quad (5.10)$$

Se debe aclarar que existen otros parámetros útiles en la mecánica de fluidos y que, evidentemente, el análisis dimensional tiene una aplicación más compleja para encontrar datos útiles en la interpretación de datos obtenidos a partir de modelos.

Si bien en este ejemplo se obtuvieron los números adimensionales con la técnica del análisis dimensional, las relaciones entre las diferentes fuerzas fueron obtenidas a través de muchos años de investigación por diferentes estudiosos de la mecánica de fluidos, a algunos de los cuales se les honra llamando por su nombre al número adimensional que obtuvieron o hicieron aportaciones para su deducción. Leonhard Euler fue el pionero del trabajo sobre la relación entre presión y movimiento; William Froude (1810-1879) realizó diversos estudios sobre la resistencia que el agua ejerce sobre las naves en movimiento, pero no propuso, como ahora se conoce, la relación adimensional que ahora lleva su nombre, en cambio Osborne Reynolds (1842-1912), estableció y popularizó la relación entre fuerzas de inercia y fuerzas viscosas, pero fue Moritz Webber (1871-1951) quien específicamente nombró a los números de Froude y Reynolds, y dedujo el número adimensional que lleva su nombre.

5.3 CONDICIONES DE SIMILITUD EN FLUIDOS INCOMPRESIBLES

La similitud se emplea para predecir las condiciones de un prototipo a partir de los resultados obtenidos en un modelo. Existen tres condiciones para que se cumpla la similitud entre modelo y prototipo: similitud geométrica, similitud cinemática y similitud dinámica.

5.3.1 SIMILITUD GEOMÉTRICA

El modelo debe tener la misma forma del prototipo, esto implica que la relación de todas las longitudes homólogas sea igual en los dos sistemas.

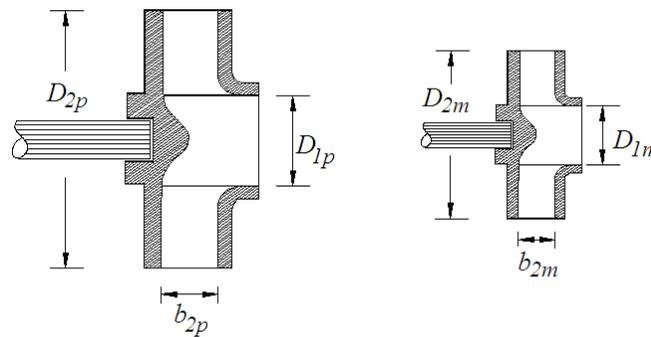


Figura 5.1 SEMEJANZA GEOMÉTRICA EN EL IMPULSOR DE UNA BOMBA (CAFAGGI, ET AL. 2011)

La figura 5.1 muestra el corte meridional en los impulsores de una bomba, tanto en prototipo como en modelo, los subíndices p y m indican respectivamente a cada uno. Para que se cumpla con la escala de longitudes l_e en secciones homólogas, se debe cumplir

$$l_e = \frac{D_{1p}}{D_{1m}} = \frac{b_{2p}}{b_{2m}} = \frac{D_{2p}}{D_{2m}} = \dots \quad (5.11)$$

donde D_1 , D_2 y b_2 , son las dimensiones lineales específicas asociadas con el prototipo y el modelo.

La similitud geométrica se extiende a las áreas y a los volúmenes, siendo para las áreas

$$A_e = \frac{A_p}{A_m} = l_e^2 \quad (5.12)$$

y para los volúmenes

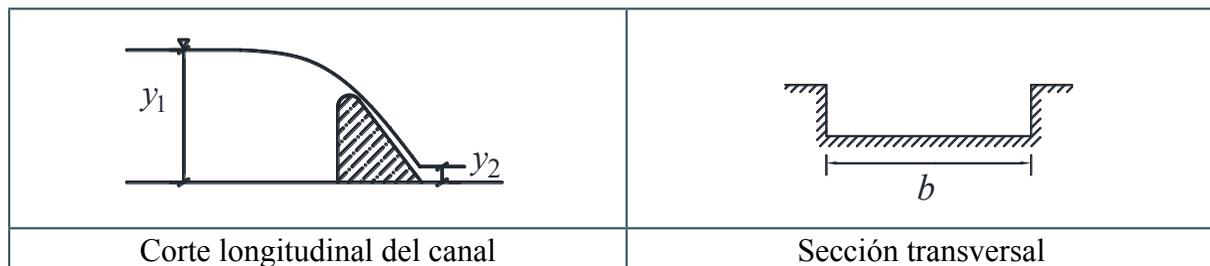
$$V_e = \frac{V_p}{V_m} = l_e^3 \quad (5.13)$$

En algunos casos, como en los modelos de ríos y puertos, en los cuales la profundidad es pequeña con relación a la longitud, se realizan modelos distorsionados en los que la escala de longitudes horizontal y vertical no es la misma; cuando así se requiere se definen las escalas de longitudes horizontal l_{eh} y escala de longitudes vertical l_{ev} . Como se demostrará posteriormente, la escala de cargas de presión en un flujo en que la viscosidad no es relevante es igual a la escala de longitud vertical; por ejemplo, para el caso de los tirantes mostrados en el ejemplo 4.11, la escala de longitud vertical debe cumplir, para las secciones homólogas, que

$$l_{ev} = \frac{y_{1p}}{y_{1m}} = \frac{y_{2p}}{y_{2m}} \quad (5.14)$$

y para que se cumpla con la escala de longitud horizontal

$$l_{eh} = \frac{b_{1p}}{b_{1m}} \quad (5.15)$$



Si se especifica que la escala de un modelo es 1:15, se refiere a que $l_e = 15$; en el caso de que el modelo sea distorsionado, se deben indicar las escalas horizontal y vertical.

Las rugosidades en una conducción son difíciles de escalar, por ejemplo, si en la conducción del prototipo es de 0.1 mm, esto es prácticamente imposible escalar en el modelo y suele suplirse con longitudes más largas que puedan reproducir la pérdida de energía debida a la rugosidad.

5.3.2 SIMILITUD CINEMÁTICA Y DINÁMICA

Para que se cumpla con la similitud cinemática se requiere que dos sistemas con fronteras geoméricamente semejantes tengan configuraciones de flujo geoméricamente semejantes en tiempos correspondientes. Así, todas las que fuerzas que actúan en el campo del flujo deben cumplir con una misma relación entre los dos sistemas (modelo y prototipo), llamada escala de fuerzas. Estas condiciones implican la existencia de escalas de longitudes, tiempos, densidades y fuerzas, las cuales relacionan a los dos sistemas.

A partir de las escalas de longitudes y tiempos se definen las siguientes escalas

$$\text{Velocidades} \quad V_e = \frac{V_p}{V_m} = \frac{l_e}{t_e} \quad (5.16)$$

$$\text{Aceleraciones} \quad a_e = \frac{a_p}{a_m} = \frac{V_e}{t_e} = \frac{V_e^2}{l_e} \quad (5.17)$$

$$\text{Gastos} \quad Q_e = \frac{Q_p}{Q_m} = A_e V_e \quad (5.18)$$

La escala de fuerzas es

$$F_e = \frac{F_p}{F_m} \quad (5.19)$$

de la segunda ley de Newton, se tiene

$$F_e = m_e a_e \quad (5.20)$$

con $m_e = \rho_e \mathcal{V}_e = \rho_e l_e^3$ y $a_e = V_e^2 / l_e$, la escala de fuerzas también se puede expresar como

$$F_e = \rho_e V_e^2 l_e^2 \quad (5.21)$$

Las fuerzas que generalmente se consideran en la hidráulica son las de inercia, presión, viscosas y de gravedad. El número de Mach es importante en fenómenos relacionados con la compresibilidad, especialmente en el caso de los gases, y tiene pocas aplicaciones en los ensayos en modelos hidráulicos. La ley de Weber raramente se emplea en las pruebas con modelos hidráulicos, ya que las fuerzas de tensión superficial no son relevantes en los problemas de ingeniería hidráulica. En los problemas de flujo no permanente en que la periodicidad del fenómeno es importante, como en la formación de vórtices o movimientos de ondas, el número de Strouhal caracteriza la acción.

Cuando se toman en cuenta las fuerzas de inercia, presión, viscosas y de gravedad; entonces la similitud dinámica exige que, en puntos correspondientes de los campos de flujo se cumpla

$$\frac{(F_i)_p}{(F_i)_m} = \frac{(F_p)_p}{(F_p)_m} = \frac{(F_\mu)_p}{(F_\mu)_m} = \frac{(F_g)_p}{(F_g)_m} = \text{cte.}$$

Estas relaciones pueden reacomodarse así

$$\left(\frac{F_p}{F_i}\right)_p = \left(\frac{F_p}{F_i}\right)_m \quad \left(\frac{F_i}{F_\mu}\right)_p = \left(\frac{F_i}{F_\mu}\right)_m \quad \left(\frac{F_i}{F_g}\right)_p = \left(\frac{F_i}{F_g}\right)_m$$

lo que equivale a

$$Eu_p = Eu_m \quad (5.21)$$

$$Re_p = Re_m \quad (5.22)$$

$$Fr_p = Fr_m \quad (5.23)$$

Si estas fuerzas, al ser las relevantes, son las únicas que se toman en cuenta, se puede escribir

$$F_i = f(F_p, F_\mu, F_g) \quad (5.24)$$

Dado que solo hay una dimensión básica, es decir, la fuerza, la ecuación anterior se puede escribir en términos de cocientes de las fuerzas, y resulta

$$Eu = f(Re, Fr) \quad (5.25)$$

Así, se puede concluir que, si el número de Reynolds y el de Froude son iguales en el modelo y en el prototipo, el número de Euler también cumple con esta igualdad; sin embargo, en la práctica es difícil satisfacer estas relaciones de manera simultánea. No obstante, se puede seleccionar solamente uno de estos números que involucre a la fuerza que se considere preponderante en el movimiento y así reducir el número de parámetros que deben igualarse en modelo y prototipo.

5.4 ELECCIÓN DEL NÚMERO A IGUALAR EN MODELO Y PROTOTIPO

SIMILITUD CON PREDOMINIO DEL NÚMERO DE EULER

Se emplea en problemas en que la presión o las diferencias de presión entre dos puntos son de interés, es decir, en casi todas las situaciones de flujo, por lo que el número de Euler o alguna de las formas derivadas de este deberá ser el mismo en modelo y en prototipo. Una de las formas derivadas es el *coeficiente de presión*, $\Delta p / 2 \rho V^2$. Para problemas en que la cavitación es importante, se emplea el grupo adimensional $(p - p_{ref}) / 2 \rho V^2$, en que p_{ref} es la presión de referencia, por ejemplo, la presión de vapor, aunque este grupo adimensional es de la misma forma que el número de Euler, generalmente se le llama *número de cavitación*.

El número de Euler rige en la modelación de fenómenos de flujo ocasionados por un gradiente de presiones donde la densidad y la aceleración del fluido intervienen primordialmente, y las fuerzas viscosas pierden importancia. Esto ocurre en problemas de flujos a presión como tuberías, orificios, válvulas, accesorios y dispositivos de medición en los que los números de Rey-

nolds sean suficientemente grandes para no tener en cuenta los efectos viscosos. En los modelos de turbomáquinas en que la diferencia de presión entre la entrada y la salida es muy importante, también rige el número de Euler. Para todos estos casos, en la modelación se debe cumplir

$$Eu_p = Eu_m \quad (5.26a)$$

$$\left[\frac{\Delta p}{\rho V^2} \right]_p = \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2} \right)_m \quad (5.26b)$$

SIMILITUD CON PREDOMINIO DEL NÚMERO DE REYNOLDS

Los flujos confinados son aquellos que no tienen superficies libres; en ellos, la gravedad no influye en el patrón de flujo y las fuerzas relevantes son las inerciales, de presión y viscosas. Estos flujos incluyen flujos externos, alrededor de objetos tales como perfiles de ala, edificios y submarinos, así como flujos internos, dentro de tuberías y conductos. Por lo tanto, la similitud dinámica se logra si las relaciones de fuerzas viscosas, inerciales y de presión entre modelo y prototipo son iguales. Esto lleva a concluir que en los flujos incompresibles confinados se cumple

$$Eu = f(Re) \quad (5.27)$$

y en la experimentación el número de Reynolds es el dominante en un flujo confinado e incompresible, por lo que se harán ensayos de manera que los números de Reynolds sean iguales en el modelo y en el prototipo, por lo tanto,

$$Re_p = Re_m \quad (5.28a)$$

$$\left[\frac{Vl}{\nu} \right]_p = \left(\frac{Vl}{\nu} \right)_m \quad (5.28b)$$

La longitud característica l depende del problema a estudiar; por ejemplo, en una conducción circular a presión la longitud característica es el diámetro de este o si se estudia la caída de una esfera, también su diámetro es la longitud característica que se emplea para determinar el número de Reynolds.

A partir de la ecuación 5.28b, la escala de velocidades resulta

$$\frac{V_p}{V_m} = \frac{l_m}{l_p} \frac{v_p}{v_m}$$

$$V_e = v_e / l_e \quad (5.29)$$

Al sustituir la ecuación 5.29 en la 5.17, se obtiene la escala de aceleraciones

$$a_e = \frac{V_e^2}{l_e} = \frac{(v_e / l_e)^2}{l_e}$$

$$a_e = \frac{v_e^2}{l_e^3} \quad (5.30)$$

la escala de gastos es

$$Q_e = A_e V_e = l_e^2 (v_e / l_e)$$

$$Q_e = l_e v_e \quad (5.31)$$

y la de fuerzas queda como

$$F_e = m_e a_e = \rho_e V_e^2 l_e^2 = \rho_e (v_e / l_e)^2 l_e^2$$

$$F_e = \rho_e v_e^2 \quad (5.32)$$

Las escalas indicadas en las ecuaciones 5.29 a 5.32 son exclusivas para modelos donde se utiliza el número de Reynolds.

Un flujo con números de Reynolds pequeños indica preponderancia de las fuerzas viscosas sobre las de inercia; en cambio, un flujo con números de Reynolds grandes indica preponderancia de las fuerzas de inercia sobre las viscosas y, en estos casos, es posible ignorar el efecto de la viscosidad; por ejemplo, en el flujo turbulento, y solo hay que asegurar que en el modelo también se tenga un número muy grande que asegure la escasa relevancia de las fuerzas viscosas. La modelación con el número de Reynolds como parámetro relevante siempre se emplea en aquellos flujos a poca velocidad donde las fuerzas viscosas son las más importantes.

Una de las dificultades comunes con modelos que requieran el criterio de semejanza del número de Reynolds se presenta cuando la viscosidad cinemática es la misma en el modelo y en el prototipo, ya que de la ecuación 5.29 se tiene $V_m = V_p (l_p/l_m)$, entonces para $(l_p/l_m) > 1$ se tiene que $V_m > V_p$ y se puede llegar a valores irrazonables de la velocidad para el modelo. Por ejemplo, para $(l_p/l_m) = 10$ y $V_p = 2.5$ m/s, se tendría $V_m = 25$ m/s, que es un valor elevado para alcanzar con líquidos. Para el caso en que se tenga simulación en un túnel de viento y no se consideren los efectos de la compresibilidad en el aire, se debe cumplir que $V > 0.3 c$, siendo c la celeridad del fluido (Capítulo 1).

SIMILITUD CON PREDOMINIO DEL NÚMERO DE FROUDE

Si además de la fuerza debida al gradiente de presiones interviene de forma preponderante la gravedad, la ecuación 5.25 se reduce a

$$Eu = f(Fr) \quad (5.33)$$

El número de Froude tiene importancia en flujos con velocidades grandes que escurren por la acción exclusiva de la gravedad; tal es el caso del flujo turbulento a superficie libre, donde los efectos viscosos no tienen relevancia. A medida que aumenta el número de Froude, mayor es la reacción inercial de cualquier fuerza; en tanto disminuye, mayor es el efecto de la acción gravitacional. Cuando el flujo es horizontal, la acción del peso desaparece y con ella la influencia del número de Froude.

La gravedad juega un papel primordial siempre que exista una superficie libre, por ejemplo, el flujo a través de: un vertedor, un río, conductos de desagüe, obras de excedencias de presas o modelos de inundaciones.

En modelos de ríos o de puertos es usual que se realicen con modelos distorsionados, pues al presentar grandes longitudes comparadas con los tirantes, no se puede respetar la similitud geométrica, pues se llegaría a tener tirantes sumamente pequeños y la tensión superficial ya tendría efecto.

Para todos los casos en donde la gravedad es la fuerza relevante, en los ensayos se debe cumplir que los números de Froude sean iguales en modelo y en prototipo, tal que

$$Fr_p = Fr_m \quad (5.34a)$$

$$\left[\frac{V}{\sqrt{gl}} \right]_p = \left(\frac{V}{\sqrt{gl}} \right)_m \quad (5.34b)$$

A partir de la ecuación 5.34b, y dado que la aceleración de la gravedad no varía significativamente con la altitud, se puede considerar $g_p = g_m$ y la escala de velocidades resulta

$$\frac{V_p}{V_m} = \left(\frac{l_p}{l_m} \right)^{1/2}$$

$$V_e = l_e^{1/2} \quad (5.35)$$

La escala de gastos es

$$Q_e = A_e V_e = l_e^2 l_e^{1/2}$$

$$Q_e = l_e^{5/2} \quad (5.36)$$

En los casos en que se tenga que emplear un modelo distorsionado, se tiene que

$$V_e = l_{ev}^{1/2} \quad (5.37)$$

Cuando se emplea el número de Froude, con agua en el modelo y en el prototipo, la escala de fuerzas queda

$$F_e = m_e g_e = \rho_e l_e^3 g_e = 1 \times l_e^3 \times 1$$

$$F_e = l_e^3 \quad (5.38)$$

En la hidráulica es común trabajar con cargas de presión, por ejemplo, los tirantes en un canal o en un río, o la carga sobre un vertedor. Para los casos en que el líquido sea el mismo en el modelo y en el prototipo ($\gamma_e=1$), se tiene que la escala de cargas de presión es

$$\frac{p_e}{\gamma_e} = \frac{F}{A_e \gamma_e} = \frac{l_e^3}{l_e^2 \times 1}$$

$$\frac{p_e}{\gamma_e} = l_e \quad (5.39)$$

Las escalas indicadas en las ecuaciones 5.35 a 5.39 son exclusivas para los modelos en que se emplea el número de Froude y el líquido es el mismo en modelo y prototipo.

EJEMPLO 5.1 Se requiere determinar la fuerza de arrastre que el agua ejerce sobre un dispositivo detector de sonidos que tiene forma de elipsoide de revolución, el cual tiene 1.25 m de longitud y se desplaza en aguas profundas con una velocidad de 3 m/s. La temperatura del agua es 15 °C. Un modelo geoméricamente semejante de 25 cm de longitud se prueba en un túnel de viento de presión variable con una velocidad máxima de 30 m/s y una temperatura de 15 °C. El túnel se encuentra al nivel del mar.

- Se requiere determinar la densidad del aire y la presión manométrica en el túnel de viento, tal que se pueda cumplir con la condición de similitud del número de Reynolds.
- Para las condiciones anteriores, se mide una fuerza sobre el dispositivo en el túnel de viento de 3.5 N ¿cuál es la fuerza de arrastre que se espera en el prototipo?

Solución

- Del problema 1.9 se tiene que la celeridad del aire al nivel del mar es $c = 287$ m/s. Para que no se presenten efectos de compresibilidad, se debe cumplir que en el túnel de viento $V < 0.3 c$, es decir $V < 86.1$ m/s, lo cual se cumple. Dado que la fuerza de gravedad no es relevante y además se tienen dos diferentes fluidos, la ley de Reynolds es la preponderante en la simulación; por lo tanto,

$$\frac{V_e l_e}{\nu_e} = 1$$

donde las escalas de velocidades y de longitudes son, respectivamente

$$V_e = \frac{V_p}{V_m} = \frac{3 \text{ m/s}}{30 \text{ m/s}} = 0.1$$

y

$$l_e = \frac{l_p}{l_m} = \frac{1.25 \text{ m}}{0.25 \text{ m}} = 5$$

Entonces, la escala de viscosidades cinemáticas resulta

$$\nu_e = V_e l_e = 0.1 \times 5 = 0.5$$

$$\nu_e = 0.5 = \frac{\nu_{agua}}{\nu_{aire}}$$

De la tabla 1.6, para agua a 15 °C, $\nu_{agua} = 1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, por lo tanto, la viscosidad cinemática del aire debe ser

$$\nu_{aire} = \frac{\nu_{agua}}{0.5} = \frac{1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{0.5} = 2.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

De la tabla 1.9, la viscosidad absoluta del aire es $\mu_{aire} = 1.79 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, por lo que la densidad del aire resulta

$$\rho = \frac{\mu}{\nu} = \frac{1.79 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2}{2.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 7.85 \text{ kg}/\text{m}^3$$

La presión absoluta para que se tenga esta densidad se determina a partir de la ecuación 1.8, en la que $p_{ab} = \rho RT$. La temperatura absoluta es $T = 273.15 + 15 = 288.15 \text{ K}$ y $R = 286.9 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K}$, entonces

$$p_{ab} = \rho RT = (7.85 \text{ kg}/\text{m}^3) \times (286.9 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{kg} \cdot \text{K}) \times (288.15 \text{ K}) = 649 \text{ kPa}$$

La presión manométrica que se requiere en el túnel de viento resulta

$$p = p_{ab} - p_{atm} = 649 \text{ kPa} - 101.3 \text{ kPa} = 547.7 \text{ kPa}$$

b) Para este caso la escala de densidades es $\rho_e = \frac{1000 \text{ kg/m}^3}{7.85 \text{ kg/m}^3} = 127.37$, por lo tanto, la escala de fuerzas resulta

$$F_e = \rho_e V_e^2 l_e^2 = 127.37 \times (0.1)^2 \times (5)^2 = 31.84$$

entonces, la fuerza que se espera en el prototipo es

$$F_p = F_e \times F_m = 31.84 \times 35 \text{ N} = 1114 \text{ N}$$

EJEMPLO 5.2 En un túnel de viento se ensaya un modelo de un torpedo a escala 1:1. Si la velocidad del torpedo en el agua es de 6 m/s ¿cuál debe ser la velocidad del aire a presión atmosférica estándar en el túnel? La temperatura en el agua es de 10 °C y en el túnel de viento es de 15 °C. Rige el criterio de Reynolds.

Solución

De la tabla 1.7, para una temperatura de 10 °C, la viscosidad cinemática del agua que se considera en el prototipo es

$$\nu_{agua} = 1.308 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

De la tabla 1.9, para el aire se obtiene

$$\nu_{aire} = 1.46 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

entonces, la escala de viscosidades cinemáticas se determina como

$$\nu_e = \frac{\nu_p}{\nu_m} = \frac{1.308 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{1.46 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 0.0896$$

La escala de velocidades se obtiene a partir de

$$V_e = \frac{v_e}{l_e} = \frac{0.0896}{1} = 0.0896$$

por lo que velocidad en el modelo resulta

$$V_m = \frac{V_p}{V_e} = \frac{6 \text{ m/s}}{0.0896} = 66.97 \text{ m/s}$$

EJEMPLO 5.3 Para realizar el estudio experimental de una obra de excedencias, se construyó el modelo de un vertedor con una escala de longitudes 1:49. La descarga esperada en el prototipo es $Q = 10\,000 \text{ m}^3/\text{s}$. ¿Cuál caudal debe proporcionarse al modelo para simular este flujo? Si se mide una velocidad de 1.3 m/s en una sección del modelo, ¿cuál es la velocidad correspondiente en el prototipo? Tanto en el prototipo como en el modelo el líquido es agua.

Solución

En este caso rige el criterio del número de Froude igual en prototipo y en modelo, por lo tanto,

$$\left[\frac{V}{\sqrt{gl}} \right]_p = \left(\frac{V}{\sqrt{gl}} \right)_m$$

Dado que la aceleración de la gravedad no sufre cambios significativos entre el lugar donde se construirá el prototipo y en el que se realizará el modelo, se tiene $g_p = g_m$, por lo que la escala de velocidades resulta

$$V_e = l_e^{1/2} = 49^{1/2} = 7$$

Dado que en un modelo no distorsionado $A_e = l_e^2$, la escala de gastos queda

$$\begin{aligned} Q_e &= A_e V_e = l_e^{5/2} \\ Q_e &= 49^{5/2} = 16\,807 \end{aligned}$$

por lo que al modelo se le debe proporcionar

$$Q_m = \frac{Q_p}{Q_e} = \frac{10000 \text{ m}^3/\text{s}}{16807} = 0.595 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para la velocidad medida en el modelo, la esperada en el prototipo resulta

$$V_p = V_e V_m = 7 \times 1.3 \text{ m/s} = 9.1 \text{ m/s}$$

EJEMPLO 5.4 Determine la relación entre la escala de viscosidades cinemáticas y la de longitudes, tal que se cumpla de forma simultánea el criterio de semejanza de Reynolds y el de Froude.

Solución

La escala de velocidades con el criterio de Reynolds es

$$V_e = l_e^{1/2}$$

y la de Froude

$$V_e = v_e / l_e$$

al igualar ambas escalas se llega a

$$l_e = v_e^{2/3}$$

Evidentemente, esto es una gran limitante, ya que para un estudio con agua en el modelo y agua en el prototipo se llegaría a que la escala de longitudes es igual a 1. Por lo que es importante seleccionar la fuerza preponderante en el movimiento al realizar la modelación.

EJEMPLO 5.5 La resistencia debida a las olas en el modelo a escala 1:25 de un barco es de 100 kgf cuando la velocidad en el modelo es de 1.5 m/s. Calcule velocidad y la resistencia debida a las olas en el prototipo. Dado que la unidad de fuerza es el kgf, emplee el sistema técnico de unidades.

Solución

Rige el criterio del número de Froude, por lo tanto, la escala de velocidades es

$$V_e = l_e^{1/2} = 25^{1/2} = 5$$

y la escala de fuerzas resulta

$$F_e = l_e^3 = 25^3 = 15625$$

La velocidad y la resistencia esperada en el prototipo son, respectivamente

$$V_p = V_e V_m = 5 \times 1.5 \text{ m/s} = 7.5 \text{ m/s}$$

y

$$F_p = F_e F_m = 15625 \times 100 \text{ kgf} = 1.56 \times 10^6 \text{ kgf}$$

EJEMPLO 5.6 Se va a construir el modelo de un río con escala horizontal 1:60 y a escala vertical 1:20. Si el gasto en el río es de $2600 \text{ m}^3/\text{s}$, determine el gasto en el modelo.

Solución

Dado que es un modelo distorsionado, la escala de áreas es igual a

$$A_e = l_{ev} l_{eh}$$

En un modelo distorsionado

$$V_e = l_{ev}^{1/2}$$

por tanto, la escala de gastos es

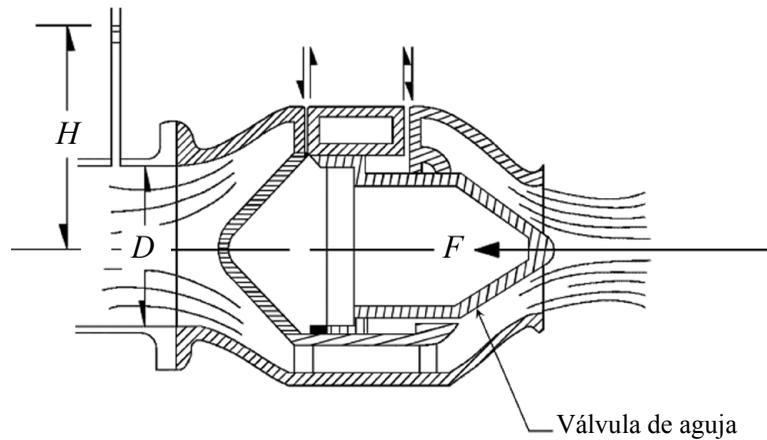
$$Q_e = A_e V_e = (l_{eh} l_{ev}) \times l_{ev}^{1/2} = (60 \times 20) \times 20^{1/2} = 5366.56$$

entonces, el gasto que se debe proporcionar al modelo es

$$Q_m = \frac{Q_p}{Q_e} = \frac{2600 \text{ m}^3/\text{s}}{5366.56} = 0.484 \text{ m}^3/\text{s} = 484 \text{ l/s}$$

EJEMPLO 5.7 Las válvulas de aguja, como la mostrada en la figura, se emplean para regular las descargas en conductos que soportan altas presiones. Para estimar las condiciones que se presentarán en un prototipo con diámetro $D_p = 1.9 \text{ m}$ y sujeto a una carga de presión $h_p = 125 \text{ m}$, se construyó y se probó en laboratorio una válvula en la cual $D_m = 0.95 \text{ m}$ y $h_m = 5 \text{ m}$. Cuando en el modelo se descarga un gasto $Q_m = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$, se mide un empuje dinámico $F_m = 620 \text{ N}$. Determine el gasto y el empuje dinámico en el prototipo con estas condiciones. Tanto en el prototipo como en el modelo, el líquido es agua.

Considere que el flujo es totalmente turbulento e independiente del número de Reynolds, por lo cual la ley de semejanza que rige es el número de Euler.



Solución

Dado que rige el número de Euler, de la ecuación 5.26, al dividir cada término por la aceleración de la gravedad, resulta lo siguiente

$$\left[\frac{\Delta p}{\rho g V^2} \right]_p = \left(\frac{\Delta p}{\rho g V^2} \right)_m$$

$$\left[\frac{h}{V^2} \right]_p = \left(\frac{h}{V^2} \right)_m$$

$$V_e = \sqrt{h_e}$$

Las escalas de cargas de presión, longitudes, velocidades, gastos y fuerzas son, respectivamente

$$h_e = \frac{h_p}{h_m} = \frac{125 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 5$$

$$l_e = \frac{D_p}{D_m} = \frac{1.9 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} = 9.5$$

$$V_e = \sqrt{h_e} = \sqrt{25} = 5$$

$$Q_e = A_e V_e = l_e^2 V_e = 9.5^2 \times 5 = 451.25$$

$$F_e = \rho_e V_e^2 l_e^2 = 1 \times 5^2 \times 9.5^2 = 2256.25$$

Con $Q_m = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$, el gasto en prototipo es

$$Q_p = Q_e Q_m = 451.25 \times 0.3 \text{ m}^3/\text{s} = 137.37 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para un empuje dinámico $F_m = 620 \text{ N}$, el esperado en el prototipo resulta

$$F_p = F_e F_m = 2256.25 \times 60 \text{ N} = 1.4 \text{ MN}$$

BIBLIOGRAFÍA

- CENGEL, Y., CIMBALA, J. (2018). *Mecánica de Fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. 4ª ed., México: Mc. Graw Hill Interamericana Editores, S.A de C.V.
- MUNSON, B., YOUNG, D., OKIISHI, T. (2002). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. 1ª reimpresión, México: Limusa.
- POTTER, M., WIGGERT, D. (1998). *Mecánica de Fluidos*. 2ª ed. México: Prentice Hall.
- ROUSE H., INCE S. (1957). *History of Hydraulics*. Iowa Institute of Hydraulic Research: State University of Iowa, U.S.A.



HIDRÁULICA BÁSICA

se publicó digitalmente en el repositorio de la
Facultad de Ingeniería en marzo de 2025.
Primera edición electrónica de un ejemplar
(40 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron
a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la
Facultad de Ingeniería.

La familia tipográfica utilizada fue
Times New Roman para títulos y textos
con sus respectivas variantes.