ANALISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

SERGIO GERARD BERTRAND

Noviembre 1983
(segunda edición)

D-38

G(2) · 80080

A Julio E Damy

A Oscar de Buen

RECONOCIMIENTO

El autor agradece al doctor Octavio A. Rascón, jefe de la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM, la oportunidad y la confianza que le brindó para elaborar este libro.

En especial agradece a la psicóloga Irene Livas la enseñanza de algunos principios de la psicología educativa y su valiosa colaboración en el desarrollo del trabajo.

Aprecia también la colaboración de Jorge García de Alba y Eduardo Reza en la elaboración de las figuras, realzando el valor de la obra en la que la exposición visual es sumamente importante, así como a Augusto Villarreal la crítica de la primera versión del manuscrito, a Carmen Meda y Francisco Ortega la revisión de estilo, a Prima Aguirre el trabajo de mecanografía y a los estudiantes que probaron el material su colaboración.

Las últimas redacciones del manuscrito fueron revisadas y criticadas por Elba Carrillo, Julio E. Damy, Sergio Betancourt y Eugenia Lizalde. Sólo desearía disponer de un medio más adecuado para agradecer su generosa ayuda.

PREFACIO

Este es un programa de introducción al estudio del análisis de estructuras isostáticas. El programa ha sido diseñado para la enseñanza autodidáctica de conceptos y técnicas claves en el trazo de diagramas de elementos mecánicos de estructuras isostáticas, y con objeto de ayudar principalmente a los estudiantes de ingeniería civil a adquirir una base firme en el campo de las estructuras.

Es requisito el empleo de métodos para operar con fuerzas y obtener la resultante de sus diferentes sistemas en el espacio y en el plano; sin embargo, dada su importancia, se revisan en los capítulos 1 y 2.

El contenido del programa está elaborado siguiendo las técnicas de programación lineal y lineal de salto.

El orden de presentación de los conceptos es resultado de un análisis de contenido mediante el método de análisis comportamental de M. Le Xuan.

INSTRUCCIONES PARA EL ESTUDIO DEL TEXTO

PROGRAMACION LINEAL

Cada unidad de información está dividida en dos partes: una que comprende la información y la pregunta, y otra que contiene la respuesta correcta, la cual está separada por una doble raya punteada; sirve para que sepas si respondiste correctamente o no y para que corrijas tu error. Para estudiar las unidades cubre con una tarjeta la confirmación, después lee con mucha atención la información y da la respuesta que se te solicita. En muchas unidades tendrás que construir la respuesta completando espacios en blanco dentro de una oración mediante una palabra, frase, número o símbolo. Desliza la tarjeta hacia abajo de la doble raya y compara tu respuesta con la CORRECTA que allí aparece. Si tu respuesta coincide con la CORRECTA pasa a la unidad siguiente; si no es así, vuelve a leer la unidad hasta comprender por qué la respuesta que se da en el programa es la CORRECTA. Si es necesario, estudia las unidades anteriores que tratan ese mismo punto.
Los capítulos 3, 4, 5 y 6 están elaborados con esta técnica.

PROGRAMACION LINEAL DE SALTO

Los capítulos 1 y 2 están elaborados con la técnica de programación lineal de salto, cuya función principal es la de acelerar el ritmo de trabajo de aquellos lectores que antes de iniciar el estudio del texto ya dominan parte de la información que en él se presenta. En algunas unidades de esos capítulos encontrarás preguntas que reafirman el conocimiento de ciertos conceptos; si ya los dominas, tendrás oportunidad de saltar los ejercicios en los que se proporciona la información y la práctica referente a ellos. Sin embargo, dado que el método vectorial y los métodos escalares proporcionan soluciones matemáticas adecuadas para la mayoría de los problemas de estructuras, es conveniente te asegures de manejarlos perfectamente, revisando las definiciones y operaciones fundamentales.

El presente programa ha sido diseñado para que aprendas por tí mismo en un tiempo promedio de 20 horas.
Elige un lugar tranquilo para estudiar y hazlo durante periodos de 60 minutos aproximadamente. Al terminar cada capítulo resuelve totalmente el examen o serie de ejercicios correspondientes y después verifica tus respuestas; cada una vale un punto. Si tu calificación es de 85 por ciento, o mayor, repasa los temas en los cuales te equivocaste; si la calificación es menor, estudia nuevamente todo el capítulo.

CONTENIDO

CAPITULO 1. OPERACIONES CON FUERZAS

Objetivos:

1.1 Explicarás qué es vector

1.2 Distinguirás las diferentes clases de vectores

1.3 Sumarás y restarás vectores

1.4 Calcularás el producto de vectores por escalares

1.5 Representarás vectores en función del vector unitario

1.6 Representarás vectores en función de una base ortogonal tridimensional de vectores unitarios

1.7 Calcularás el producto escalar de dos vectores

1.8 Calcularás el producto vectorial de dos vectores

1.9 Calcularás el momento de una fuerza respecto a cualquier punto en el espacio

1.10 Calcularás el momento de un par respecto a cualquier punto en el espacio

1.11 Transportarás fuerzas de un punto a otro en el espacio

1.1 VECTOR

Es una cantidad determinada por el conocimiento de un módulo, una dirección, un sentido y, si así se requiere, un punto de aplicación.

Vayamos por partes; estudia con mucha atención:

VECTOR. Es una cantidad determinada por el conocimiento de:

1. Un __________, se representa analíticamente con un número mayor o igual a cero; geométricamente, con un segmento de recta a escala. Esto implica un origen y un extremo.

---

módulo

---

2. Una ___________, llamada también línea de acción, se representa analíticamente con la ecuación de una recta y gráficamente, trazando la recta.

---

dirección

---

3. Un __________, se representa analíticamente con el signo (+) ó el (-), geométricamente, con la cabeza de una flecha.

---

sentido

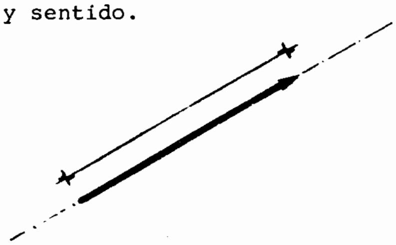
---

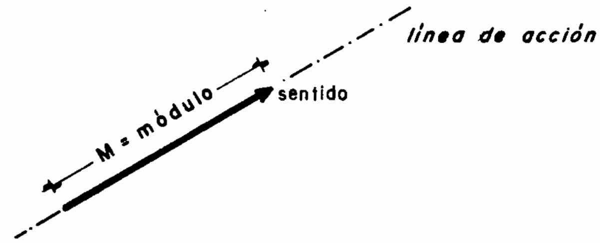
4. Un _________ ____ ____________, se representa analíticamente por las coordenadas de un punto y geométricamente, trazando el punto.

---

punto de aplicación

La siguiente figura representa un vector, identifica su módulo, dirección y sentido.





1.2 Ahora, vamos a estudiar las definiciones de las tres diferentes clases de vectores que existen:

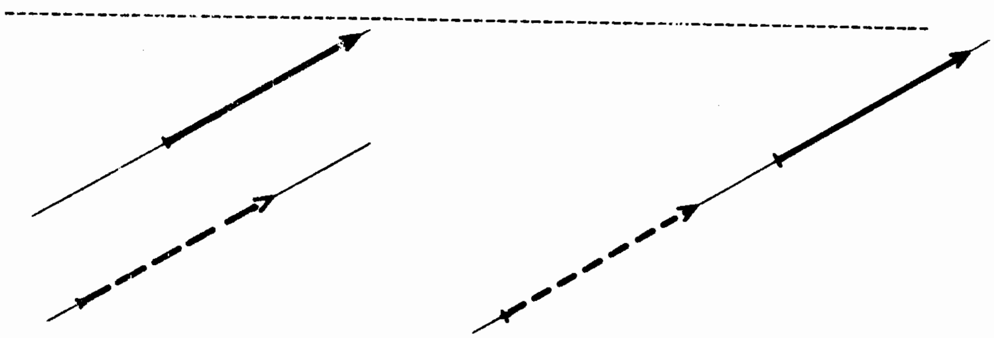
a) Libres. Se pueden mover libremente, pero conservando su dirección y sentido. Se pueden trasladar paralelamente a sí mismos.

b) Deslizantes. Su línea de acción es fija. El vector sólo tiene libertad de movimiento sobre ésta.

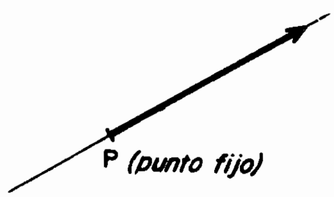
c) Fijos. Su línea de acción es fija y está aplicado a un punto fijo.

Escribe las definiciones anteriores.

Dibuja un vector libre, uno deslizante y uno fijo.



Vector libre **Vector deslizante**

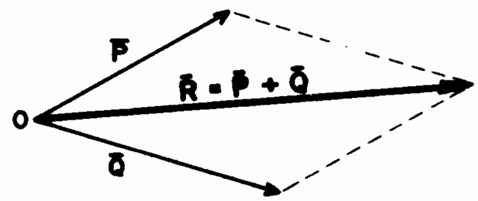


Vector fijo

Si sabes calcular la suma de dos o más vectores, pasa a la pág 1-8.
Si no te acuerdas, estudia con mucha atención lo siguiente:

1.3 Para sumar vectores, contamos con la LEY DEL PARALELOGRAMO, que establece que la <u>resultante</u>, $\overline{R}$, de dos vectores, $\overline{P}$ y $\overline{Q}$, es la diagonal del paralelogramo en el que $\overline{P}$ y $\overline{Q}$ son lados adyacentes.

Observa la figura



Los tres vectores concurren en el punto ____.

0

En otras palabras, suma o resultante de dos vectores $\overline{P}$ y Q, es otro <u>vector</u> $\overline{R}$.

Observa la figura

$\overline{R}$ se obtiene trasladando el origen de $\overline{Q}$ al extremo de $\overline{P}$, y uniendo el origen de P con el __________ de $\overline{Q}$

---

extremo

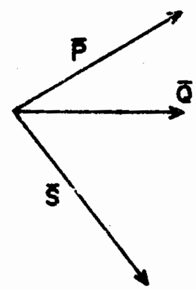
Lo anterior se puede aplicar a la suma de más vectores; sólo hay que sumar sucesivamente de dos en dos.

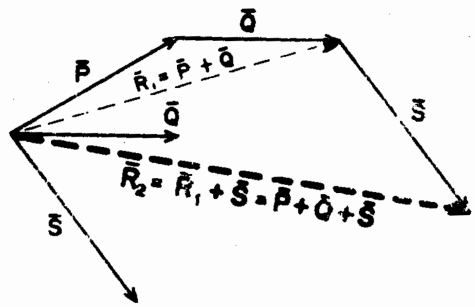
Por ejemplo, si se desea sumar tres vectores: $\bar{P}$ $\bar{Q}$ y $\bar{S}$, lo primero que se debe hacer es sumar dos de ellos, y el resultado, que es otro __________, se suma con el tercero.

---

vector

Sean tres vectores, $\bar{P}$, $\bar{Q}$ y $\bar{S}$, mostrados en la siguiente figura. Obtén la resultante de la suma de estos.



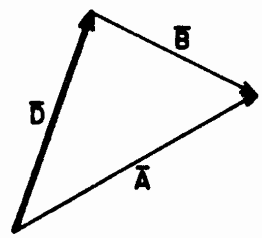


Si sabes calcular la diferencia de dos vectores, pasa a la pág 1-9.

Si no te acuerdas, lo que sigue te servirá de repaso.

La diferencia de dos vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$, que se representa analítica-mente por $\bar{A} - \bar{B}$, es otro vector $\bar{D}$.

Observa la figura



Este vector $\bar{D}$ es tal, que sumado al vector ___, produce el vector ___.

$\bar{B}$, $\bar{A}$

La diferencia de vectores es un caso particular de la __________; se conoce como la LEY DEL TRIANGULO.

---

suma

En el caso en que $\bar{A} = \bar{B}$, el vector $\bar{A} - \bar{B}$ se llama <u>vector nulo</u> o __________ y se representa por 0.

---

cero

¿Sabes calcular el producto de escalares por vectores?

Si lo sabes, pasa a la pág 1-11. Si no te acuerdas, repasa lo siguiente:

1.4 El producto de un escalar α por un vector $\bar{A}$ es otro vector $\alpha\bar{A}$ con las siguientes características:

a) Su módulo es $|\alpha|$ veces el de ___.

$\bar{A}$

---

b) Su dirección o línea de acción, es la del vector ___.

$\bar{A}$

---

c) Su sentido es el mismo u __________ al de $\bar{A}$, según sea α positivo o negativo.

---

opuesto

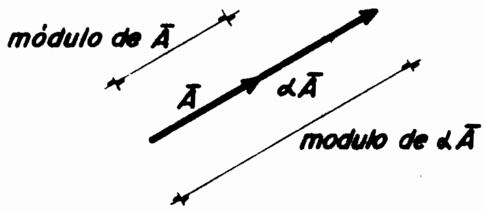
---

d) α es cualquier __________ real.

---

número

Observa la figura



Si el escalar es cero, el vector que se multiplique por este escalar será el vector ________.

---

nulo o cero

Pasa a la página siguiente

RESUMEN

Podemos resumir las operaciones de suma, resta y multiplicación de vectores por escalares por medio de las LEYES DEL ALGEBRA VECTORIAL.

Si $\overline{P}$, $\overline{Q}$ y $\overline{S}$ son tres vectores, y α y β dos escalares, se exige que

$\overline{P} + \overline{Q} = \overline{Q} + \overline{P}$

$\overline{P} + (\overline{Q} + \overline{S}) = (\overline{P} + \overline{Q}) + \overline{S}$

$\overline{P} + 0 = \overline{P}$

$\overline{P} + (-\overline{P}) = 0$

$\alpha(\overline{P} + \overline{Q}) = \alpha\overline{P} + \alpha\overline{Q}$

$(\alpha + \beta)\,\overline{P} = \alpha\overline{P} + \beta\overline{P}$

$(\alpha\,\beta)\,\overline{P} = \alpha(\beta\overline{P})$

$1\,\overline{P} = \overline{P}$

Ejercicio.-

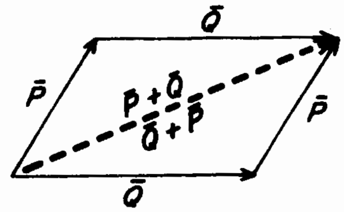
Verifica las siguientes LEYES DEL ALGEBRA VECTORIAL en forma gráfica (la solución está en la página siguiente).

1) $\overline{P} + \overline{Q} = \overline{Q} + \overline{P}$

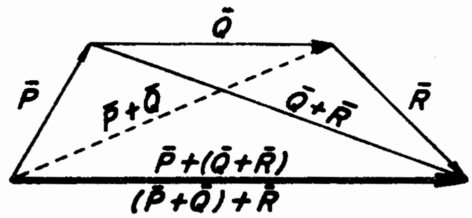
2) $\overline{P} + (\overline{Q} + \overline{R}) = (\overline{P} + \overline{Q}) + \overline{R}$

3) $\alpha(\overline{P} + \overline{Q}) = \alpha\overline{P} + \alpha Q$ (considera en este caso $\alpha > 1$)

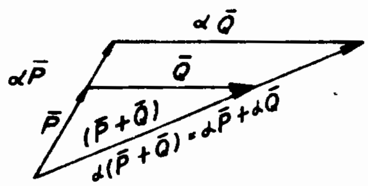
$$\bar{P}+\bar{Q}=\bar{Q}+\bar{P}$$



$$\bar{P}+(\bar{Q}+\bar{R})=(\bar{P}+\bar{Q})+\bar{R}$$



$$\alpha(\bar{P}+\bar{Q})=\alpha\bar{P}+\alpha\bar{Q}$$



Recuerda que α es cualquier número REAL, y las leyes anteriores rigen para vectores LIBRES.

Lo que sigue es importante; estúdialo con mucha atención.

1.5 VECTOR UNITARIO

Lo que caracteriza al vector unitario es su módulo, el cual es la ___________.

---

unidad

Un vector $\bar{P}$ se puede representar con el producto de su módulo por un vector __________, $\bar{a}$, con la misma dirección y el mismo sentido de $\bar{P}$.

---

unitario

Entonces, si P es el módulo del vector $\bar{P}$ y $\bar{a}$ es un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido de $\bar{P}$, queda:

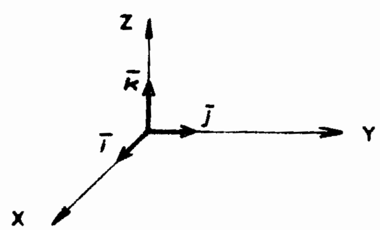
$$\bar{P} =$$

$\bar{P} = P\,\bar{a}$

1.6 BASE ORTOGONAL TRIDIMENSIONAL DE VECTORES UNITARIOS

Sean tres vectores unitarios llamados $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ contenidos en los ejes x, y, z respectivamente, de un sistema derecho de coordenadas cartesianas.

El sentido de estos vectores es el mismo del eje que les corresponde.



Comentario:

Si al tomar un tornillo de rosca derecha, su eje se hace coincidir con el eje Z y, girándolo desde el eje X al Y, avanza en sentido positivo del eje Z, tendremos un sistema derecho de coordenadas cartesianas.

Si como consecuencia, el eje del tornillo coincide con el eje X, se tendrá que girar desde el eje Y al Z para que su avance sea en sentido positivo del eje X.

Si su eje coincide con el eje Y, se tendrá que girar desde el eje Z al eje X para que su avance sea en sentido positivo del eje Y.

Un vector $\overline{P}$ en el espacio de tres dimensiones se puede representar con su origen en el correspondiente origen de un sistema de coordenadas trirrectangulares como:

$$\overline{P} = Px\ \overline{i} + Py\ \overline{j} + \_\_\_\_$$

Pz $\overline{k}$

Donde Px $\overline{i}$, Py $\overline{j}$ y Pz $\overline{k}$ se llaman **VECTORES COMPONENTES** de $\overline{P}$ a lo largo de los ejes ___ ___ ___ respectivamente.

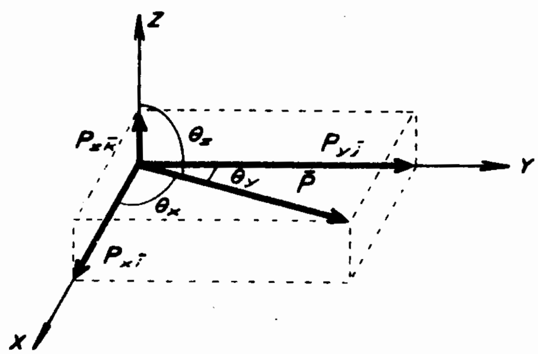
X, Y, Z

Los escalares Px, Py y Pz se llaman COMPONENTES del vector ________.

$\bar{P}$

Su módulo es

$$P = \sqrt{Px^2 + Py^2 + Pz^2}$$



Observa que $Px = P \cos \theta x$

$Py =$

$Pz =$

$Py = P \cos \theta y$; $Pz = P \cos \theta z$

En particular, un vector cuyo origen es el de un sistema de coordenadas trirrectangulares y cuyo extremo es un punto (x,y,z), se llama VECTOR DE POSICION, y se escribe:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

con módulo:

$$r =$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

FUERZA

Es la acción de un cuerpo sobre otro. Es causa de la producción o modificación del movimiento de un cuerpo en la dirección de su acción sobre él.

Analíticamente, se representa con un __________.

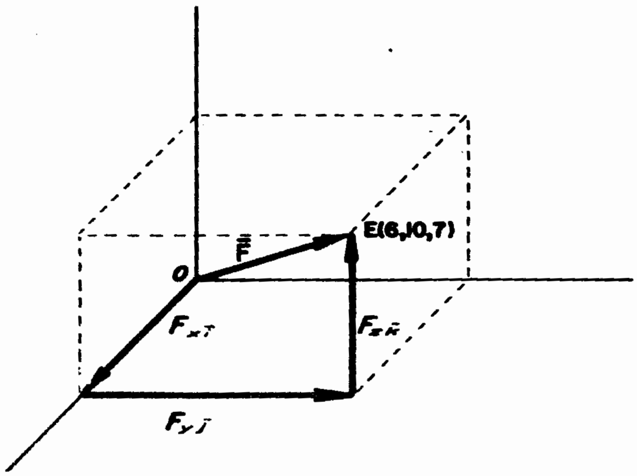
---

vector

Escribe la definición de fuerza.

Ejemplo 1.-

Expresar el vector $\overline{F}$ que representa una fuerza de 68 kg, que a partir del origen llega hasta el punto E(6,10,7), en función de los vectores unitarios $\overline{i}$, $\overline{j}$ y $\overline{k}$.



Solución:

Si se desea llegar a la expresión

$$\overline{F} = Fx\ \overline{i} + Fy\ \overline{j} + Fz\ \overline{k},$$

el primer paso es la obtención del módulo del vector $\overline{F}$; calcúlalo:

$F = \sqrt{6^2 + 10^2 + 7^2} = 13.6$ unidades de longitud

1-13

Este módulo representa una fuerza de 68 kg; si se dividen los 68 kg entre 13.6 unidades de longitud, nos queda que cada unidad del módulo del vector representa ____.

---

5 kg.

Por tanto:

$$F_x = 6 \text{ unidades por } 5 \text{ kg/unidad} = 30 \text{ kg}$$

$$F_y =$$

$$F_z =$$

F_y=50 kg; F_z=35 kg

---

y nuestro vector $\bar{F}$ queda expresado como

$$\bar{F} =$$

$$\bar{F} = 30\bar{i} + 50\bar{j} + 35\bar{k} \quad \text{(kg)}$$

Comentario:

Con este, se quiere aclarar que el módulo del vector es, como ya se dijo, una dimensión y que a su vez puede representar el valor de una fuerza.

Por consiguiente, si estamos tratando con fuerzas, en lugar de decir que el módulo del vector $\overline{F}$ es de 13.6 unidades, decimos que el módulo del vector $\overline{F}$ es de 68 kg.

Ejemplo 2.-

¿De qué otra manera se puede llegar al resultado del ejemplo anterior?

Solución:

Obtengamos los componentes del vector $\overline{F}$:

$$Fx = F \cos \theta x$$

$$Fy = F \cos \theta y$$

$$Fz = F \cos \theta z$$

Para lograrlo, necesitamos conocer: cos θx, cos θy y cos θz; que son los cosenos directores del vector $\overline{F}$.

Por tanto

$\cos \theta x = \dfrac{6}{13.6}$

$\cos \theta y =$

$\cos \theta z =$

$\cos \theta y = \dfrac{10}{13.6}$; $\cos \theta z = \dfrac{7}{13.6}$

Entonces, los componentes del vector $\overline{F}$, considerando su módulo como fuerza, son

$$Fx = 68 \frac{6}{13.6} = 30 \text{ kg}$$

Fy =

Fz =

Fy = 50 kg; Fz = 35 kg

Y el vector $\overline{F}$ queda expresado como

$$\overline{F} =$$

$$F = 30\overline{i} + 50\overline{j} + 35\overline{k} \quad (kg)$$

Ejercicio.-

Expresa el vector $\overline{F}$ que representa a una fuerza de 99 kg que a partir del origen llega hasta el punto E(3, -8, 5), en función de los vectores unitarios $\overline{i}$, $\overline{j}$ y $\overline{k}$.

Cuidado con los signos

$$\overline{F} = 30\overline{i} - 80\overline{j} + 50\overline{k} \quad (kg)$$

PRODUCTO ESCALAR O INTERNO

Si ya sabes calcular el producto escalar de dos o más vectores, pasa a la pág 24.

Si no te acuerdas, estudia con mucha atención lo siguiente:

1.7 Si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos vectores su producto escalar o interno se define como el producto del módulo de $\bar{A}$ por el módulo de $\bar{B}$ y por el COSENO del ángulo θ menor que forman entre sí.

Analíticamente el producto escalar o itnerno se escribe:

$\bar{A} \cdot \bar{B} =$ $(0 \leq \theta \leq 180°)$

$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos\theta$

Como A, B y cos θ son escalares, entonces el producto escalar o interno de dos vectores es un _________.

---

escalar

Si $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ y $\bar{D}$ son vectores, y α un escalar, se exige que

$\bar{A}\cdot\bar{B} = \bar{B}\cdot\bar{A}$

$\bar{A}\cdot(\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A}\cdot\bar{B} + \bar{A}\cdot\bar{C}$

$(\bar{A} + \bar{B})\cdot(\bar{C} + \bar{D}) = \bar{A}\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot\bar{D} + \bar{B}\cdot\bar{C} + \bar{B}\cdot\bar{D}$

$\alpha(\bar{A}\cdot\bar{B}) = (\alpha\bar{A})\cdot\bar{B} = \bar{A}\cdot(\alpha\bar{B})$

Si $\theta=90°$, $\cos\theta=0$, por tanto, si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar o interno es ________.

---

cero

Entonces

$$\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i} = \_\_\_\_$$

---

cero

Si θ=0° cos θ=1, por tanto, si un vector se multiplica escalarmente por sí mismo, se obtendrá

$$\bar{A} \cdot \bar{A} =$$

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = A\ A\ (1) = A^2 = Ax^2 + Ay^2 + Az^2$$

Y el producto escalar de los vectores unitarios por sí mismos será igual a _____.

---

uno

Esto es

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = \_\_\_\_.$$

---

uno

Ejemplo.-

Calcular el producto escalar o interno de los vectores

$\overline{A} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}$ y $\overline{B} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}$

Solución:

$\overline{A}\cdot\overline{B} = (3\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k})\cdot(2\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k})$

$\overline{A}\cdot\overline{B} = 3\overline{i}\cdot(2\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}) - 4\overline{j}\cdot(2\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}) + 5\overline{k}\cdot(2\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}$

Recuerda que:

$i\cdot j =$ _____ $=$ _____ $= 0$

$i\cdot i =$ _____ $=$ _____ $= 1$

$\overline{i}\cdot\overline{j} = \overline{j}\cdot\overline{k} = \overline{k}\cdot\overline{i} = 0$

$\overline{i}\cdot\overline{i} = \overline{j}\cdot\overline{j} = \overline{k}\cdot\overline{k} = 1$

Entonces

$\overline{A}\cdot\overline{B} =$

$\overline{A}\cdot\overline{B} = 6 - 20 + 5 = -9$

Ejercicio.-

Calcula el producto escalar o interno de

$\overline{A} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$

$\overline{B} = 4\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$

Ejercicios.

Si $\overline{A} = 3\overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k}$ y $\overline{B} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$

a) Dibuja una figura que represente a los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$

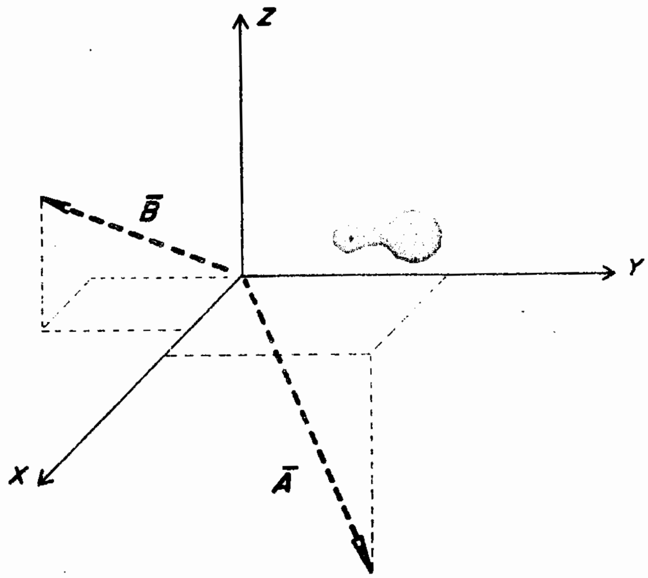
b) Calcula $\overline{A} + \overline{B}$

c) Calcula $\overline{A} - \overline{B}$

d) Calcula $\overline{A} \cdot \overline{B}$

Respuestas

a)



b) $\bar{A} + \bar{B} = 5\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$

c) $\bar{A} - \bar{B} = \bar{i} + 7\bar{j} - 9\bar{k}$

d) $\bar{A} \cdot \bar{B} = -26$

Pasa a la página siguiente.

PRODUCTO VECTORIAL O EXTERNO

Si sabes calcular el producto vectorial de dos vectores, pasa a la pág 29.

Si no te acuerdas, estudia con mucha atención:

1.8 El producto vectorial o externo de dos vectores, $\bar{A}$ y $\bar{B}$, es otro vector, $\bar{P}$, con las siguientes características:

Su módulo es el producto de los módulos de los vectores A y B por el SENO del ángulo θ menor que forman entre sí; entonces,

$P =$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

$P = A\ B \text{ sen } \theta$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

Su línea de ________ es normal al plano formado por $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

---

acción

Su sentido de avance es el de un tornillo de rosca derecha cuando se le hace girar de $\bar{A}$ hacia ___ a través del ángulo menor que forman entre sí.

$\bar{B}$

Si $\bar{e}$ es el vector unitario que da la dirección y sentido de $\bar{P}$, entonces $\bar{P}$, analíticamente, se escribe:

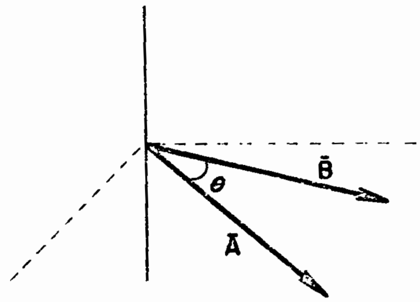
$P = \bar{A} \times \bar{B} =$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

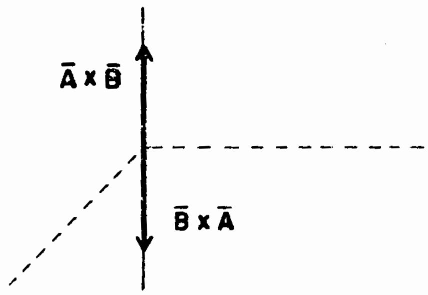
$\bar{P} = \bar{A} \times \bar{B} = (AB \text{ sen } \theta)\ \bar{e}$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

Se exige que el producto vectorial cumpla

$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$

Dibuja en la figura el sentido de $\bar{A} \times \bar{B}$ y el de $\bar{B} \times \bar{A}$





También se exige que el producto vectorial cumpla

$(\bar{T} + \bar{U}) \times \bar{S} = \bar{T} \times \bar{S} + \bar{U} \times \bar{S}$

$(\bar{R} + \bar{S}) \times (\bar{T} + \bar{U}) = \bar{R} \times \bar{T} + \bar{R} \times \bar{U} + \bar{S} \times \bar{T} + \bar{S} \times \bar{U}$

$\alpha(\bar{R} \times \bar{S}) = \alpha\, \bar{R} \times \bar{S} = \bar{R} \times \alpha\, \bar{S}$

Siendo $\bar{i}$, $\bar{j}$ y $\bar{k}$ ortogonales

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

---

cero (recuerda la definición de producto vectorial)

También, si $\bar{i}$, $\bar{j}$ y $\bar{k}$ son ortogonales

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$

$\bar{j} \times \bar{k} =$

$\bar{k} \times \bar{i} =$

$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$; $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$ (recuerda que el sistema de ejes que se escogió es DERECHO)

Si

$\bar{R} = Rx\ \bar{i} + Ry\ \bar{j} + Rz\ \bar{k}$

$S = Sx\ \bar{i} + Sy\ \bar{j} + Sz\ \bar{k}$

Se asegura que

$$\bar{R} \times \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ Rx & Ry & Rz \\ Sx & Sy & Sz \end{vmatrix}$$

Pasa a la página siguiente

Ejercicio.-

Sean $\bar{R} = Rx\ \bar{i} + Ry\ \bar{j} + Rz\ \bar{k}$ y $\bar{S} = Sx\ \bar{i} + Sy\ \bar{j} + Sz\ \bar{k}$

entonces

$$\bar{R} \times \bar{S} = (Rx\ \bar{i} + Ry\ \bar{j} + Rz\ \bar{k}) \times (Sx\ \bar{i} + Sy\ \bar{j} + Sz\ \bar{k})$$

Desarrolla el producto y agrupa en términos de $\bar{i}$, $\bar{j}$ y $\bar{k}$.

Se asegura que

$$\bar{R} \times \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ Rx & Ry & Rz \\ Sx & Sy & Sz \end{vmatrix}$$

Verifícalo desarrollando el determinante.

1· ·

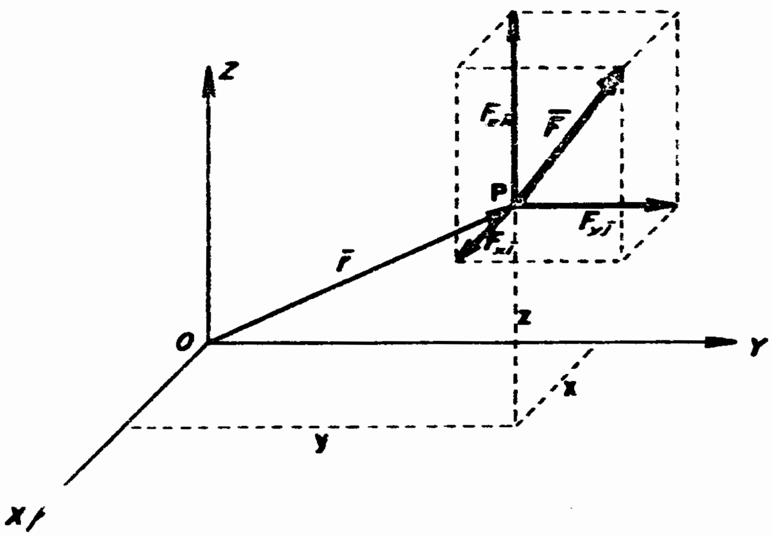
E... conceptos son muy importantes

1 MOMENTO DE UNA FUERZA

S... una fuerza $\overline{F} = Fx\overline{i} + Fy\overline{j} + Fz\overline{k}$ y

$\overline{r}$. $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ el vector de posición respecto al origen de un s..tema de coordenadas de tres dimensiones de un punto P contenido e. .a línea de acción de la fuerza $\overline{F}$.

Ob..rva la figura



Se .efine momento, $\overline{M}$, de la fuerza, $\overline{F}$, respecto al ORIGEN de un sistema .e coordenadas trirrectangular como

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

Desarrolla el determinante y agrupa en términos de $\bar{i}$, $\bar{j}$ y $\bar{k}$

$\bar{M} = (Fz \cdot Y - Fy \cdot Z)\ \bar{i} - (Fz \cdot X - Fx \cdot Z)\ \bar{j} + (Fy \cdot X - Fx \cdot Y)\ \bar{k}$

También $\bar{M}$ se puede escribir como

$\bar{M} = Mx\bar{i} + My\bar{j} + Mz\bar{k}$

Por tanto

$Mx =$

$My =$

$Mz =$

$Mx = Fz \cdot Y - Fy \cdot Z$

$My = -(Fz \cdot X - Fx \cdot Z) = Fx \cdot Z - Fz \cdot X$

$Mz = Fy \cdot X - Fx \cdot Y$

donde Mx, My y Mz son los momentos de los COMPONENTES de $\bar{F}$ respecto a los ejes X, Y, Z, respectivamente.

Entonces, el momento $\bar{M}$ queda

$\bar{M} =$

$M = (Fz \cdot Y - Fy \cdot Z)\bar{i} + (Fx \cdot Z - Fz \cdot X)\bar{j} + (Fy \cdot X - Fx \cdot Y)\bar{k}$

Estudiemos los componentes de M:

$\underline{\underline{Mx = F_z \cdot Y - Fy \cdot Z}}$

Esto indica que el momento <u>alrededor</u> del eje X es la suma algebraica del componerte ____ por su brazo de palanca ____, y el componente ____ por su brazo de palanca ____.

Fz, Y, Fy, Z.

Fz·Y resulta positivo y Fy·Z negativo, como consecuencia de la convención del __________ ____ _______ _________.

---

tornillo de rosca derecha.

$\underline{\underline{My = Fx \cdot Z - Fz \cdot X}}$

o sea, que el momento <u>alrededor</u> del eje ____ es la suma algebráica del ____________ Fx por su brazo de palanca ____ y el componente ____ por su _______ ___ _________ X.

Y, componente, Z, F_z, brazo de palanca

Los signos, son consecuencia de la __________ ___ __________ ___ _______ _________.

---

convención del tornillo de rosca derecha.

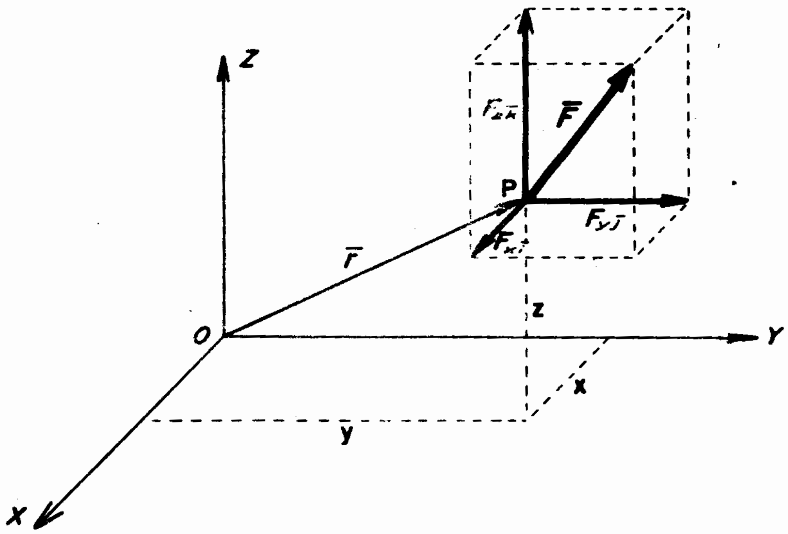
$Mz = Fy \cdot X - Fx \cdot Y$

Esto muestra que el momento ___________ del eje Z es la suma algebráica del componente ____ por su brazo ____ _________ X y el componente Fx por su brazo de palanca Y.

---

alrededor, Fy, de palanca

Ahora, partiendo de la siguiente figura, obtén los componentes, Mx, My y Mz. Recuerda la convención del tornillo de rosca derecha.



Mx =

My =

Mz =

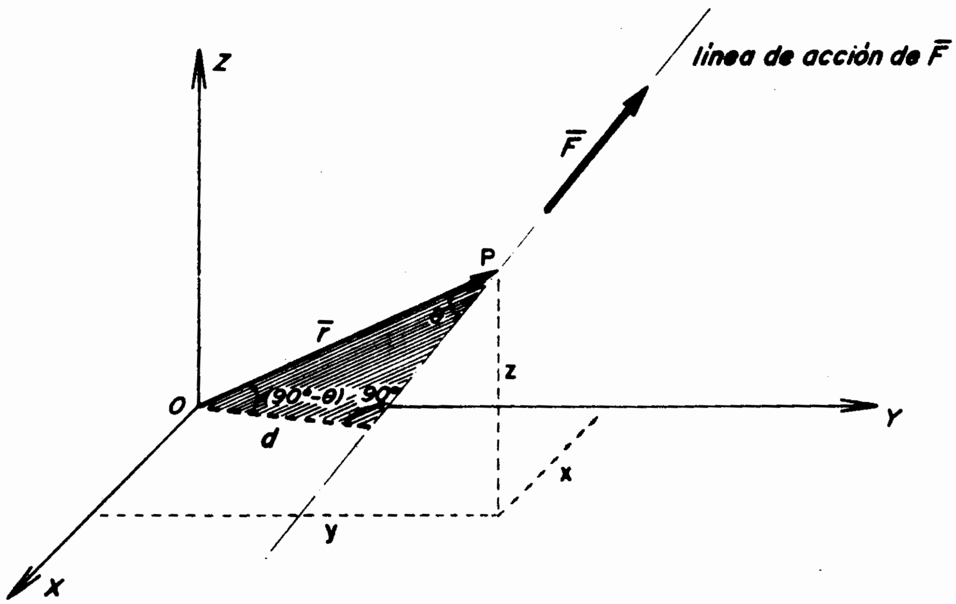
$Mx = F_z \cdot Y - Fy \cdot Z$

$My = F_x \cdot Z - F_z \cdot X$

$Mz = Fy \cdot Z - F_x \cdot Y$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

Estudia con mucha atención la siguiente figura



El producto vectorial $\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$ es un vector cuyo módulo es

M = $\qquad\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

M = r F sen θ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

---

que se puede escribir como

$$M = F\ (r \text{ sen } \theta)$$

En donde, siendo $\bar{r}$ el vector de __________ de un punto cualquiera de la __________ ____ __________ de la fuerza $\bar{F}$, necesariamente el producto r sen θ, que puede escribirse como r cos (90-θ), es siempre igual a la distancia ____ que es perpendicular a la línea de acción de la fuerza $\bar{F}$.

---

posición, línea de acción, d

Por tanto

$$M = F\ (r \text{ sen } \theta) = F\ r \cos\ (90 - \theta) = \_\_\_\_$$

F d

En resumen:

El momento de una fuerza respecto a un punto es igual al valor de la __________ por la ______________ menor que los separa.

---

fuerza, distancia

Estudia con mucha atención:

PAR

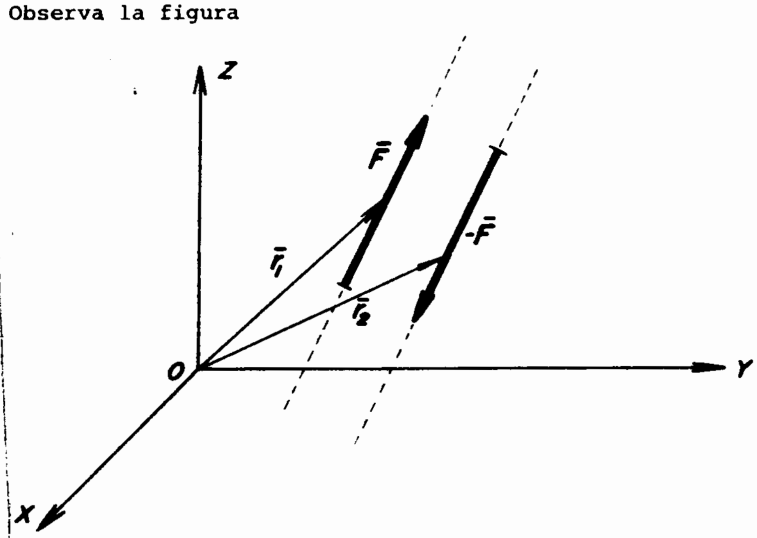
Se define como PAR, a dos fuerzas que cumplen con las siguientes características:

Sus módulos, iguales.

Sus líneas de acción, paralelas entre sí.

Sus sentidos, opuestos entre sí.

Observa la figura



1.10 El momento $\overline{P}$, de un par con respecto al origen de un sistema de coordenadas trirrectangulares, se define como la suma de los momentos producidos por las dos fuerzas que constituyen el par.

Por consiguiente

$$\overline{P} = \overline{r}_1 \times \overline{F} \quad \underline{\qquad\qquad}$$

$$\overline{P} = \overline{r}_1 \times \overline{F} + \overline{r}_2 \times (-F) = \overline{r}_1 \times \overline{F} - \overline{r}_2 \times \overline{F}$$

Entonces

$$\overline{P} = \overline{r}_1 \times \overline{F} - \overline{r}_2 \times \overline{F}$$

Ahora, al recordar que

$$(\overline{T} + \overline{U}) \times \overline{S} = \overline{T} \times \overline{S} + \overline{U} \times \overline{S} \ ,$$

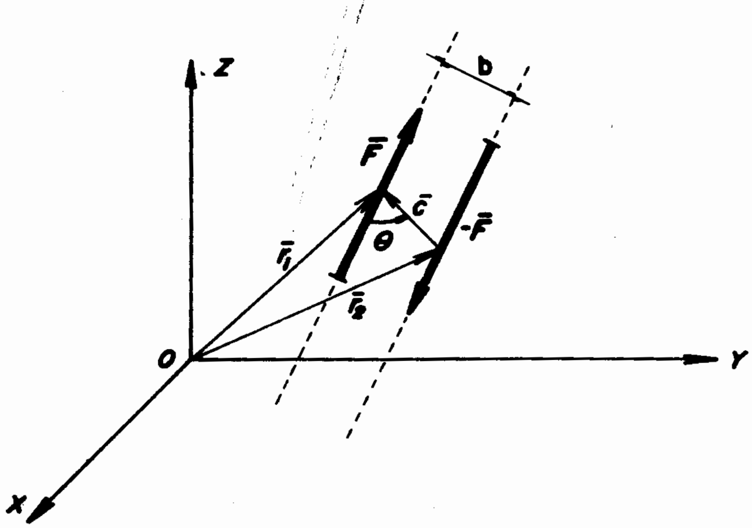
el momento de un par respecto al origen de un sistema de coordenadas trirrectangulares queda

$$\overline{P} =$$

$$\overline{P} = (\overline{r}_1 - \overline{r}_2) \times \overline{F}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL MOMENTO DE UN PAR

Estudia con mucha atención la siguiente figura



Por la ley del triángulo, el vector $\overline{C}$ es

$$\overline{C} =$$

$$\overline{C} = \overline{r}_1 - \overline{r}_2, \text{ puesto que } \overline{r}_2 + \overline{C} = \overline{r}_1$$

Por tanto

$$\bar{P} = \bar{C} \times \bar{F}$$

Entonces, el módulo o valor de $\bar{P}$ es

$P =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

$P = C\ F\ \text{sen}\ \theta = F\ (C\ \text{sen}\ \theta)$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 180°$

Pero

$C\ \text{sen}\ \theta =$

$C\ \text{sen}\ \theta = b$

Por consiguiente

$P = F\ b$

la ecuación anterior indica que el módulo del momento de un par es el __________ del vector $\bar{F}$ multiplicado por la distancia ____ que separa a las líneas de acción del par.

---

módulo, b

Esto quiere decir que, si la distancia b permanece constante, el módulo del momento de este par con respecto a cualquier punto en el espacio, es siempre el ________.

---

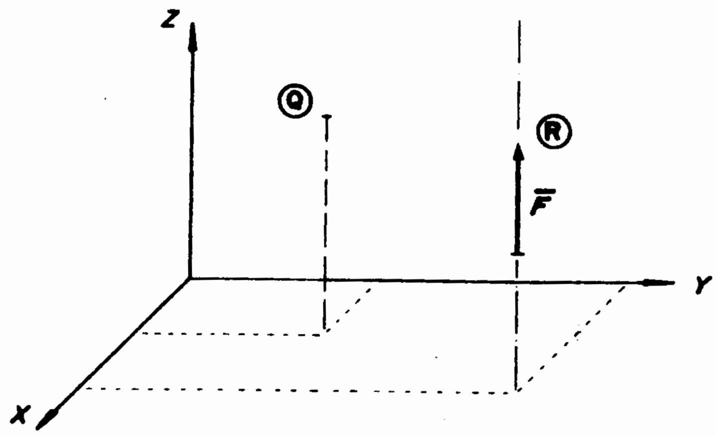
mismo

MUCHA ATENCION

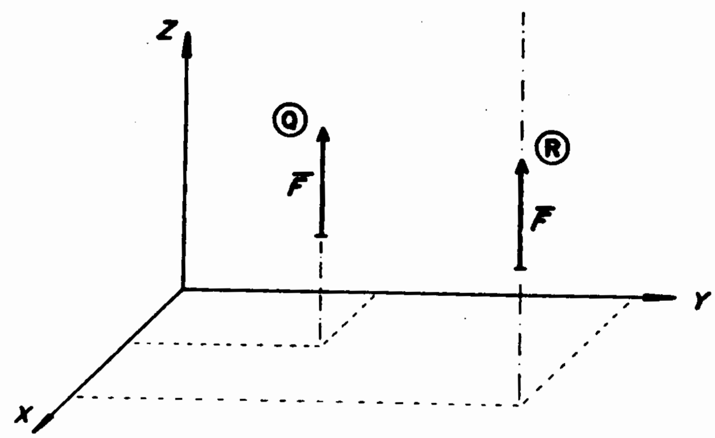
1.11 TRANSPORTE DE FUERZAS

Sea una fuerza $\overline{F}$ actuando en un punto R en el espacio que deseamos transportar a otro punto Q

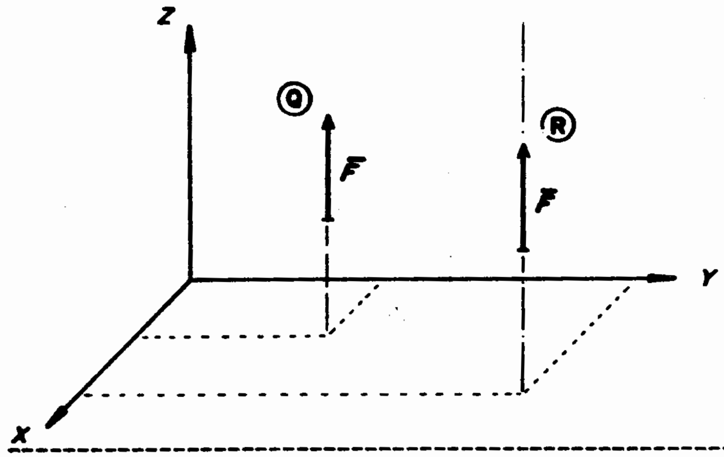
Observa la figura

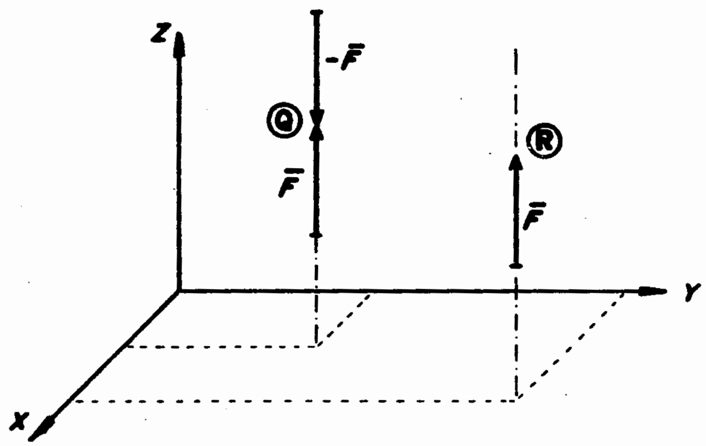


Dibuja en la figura una fuerza con las mismas características de $\overline{F}$ actuando en el punto Q



Ahora, dibuja en la siguiente figura otra fuerza aplicada en Q tal que, sumada con la anterior resulte el vector nulo.





Observando la figura, apreciamos que la fuerza $\overline{F}$ actuando en R, no se ha alterado por la presencia de las otras dos actuando en Q, puesto que su suma es igual a ________.

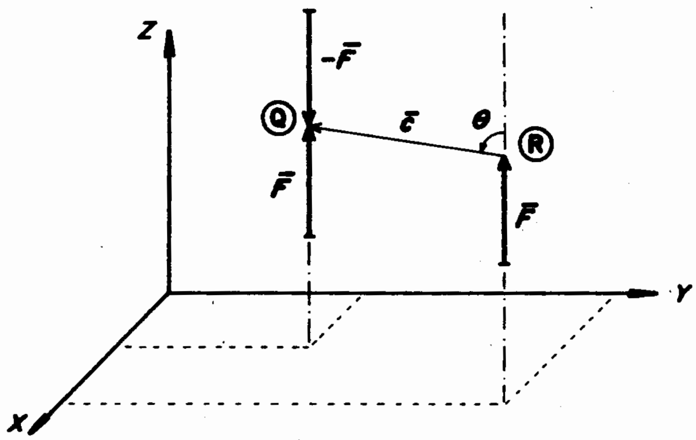
---

cero

Pero, lo que deseamos es que la fuerza $\overline{F}$ actúe en Q. Por consiguiente, para que la fuerza $\overline{F}$ actuando en el punto Q sea equivalente a la fuerza $\overline{F}$ actuando en el punto R, se debe considerar el PAR formado por las fuerzas ____ en Q y ____ en R.

$-\overline{F}$, $\overline{F}$

Observa la figura



Entonces, la fuerza $\overline{F}$ aplicada en el punto R es igual a la misma __________ aplicada en ____ y un PAR, $\overline{P}$ =

---

fuerza, Q, $\overline{P} = \overline{F} \times \overline{C}$.

Suponiendo que b es la distancia menor entre las fuerzas, el valor del PAR será: P =

$P = F\ C \text{ sen } \theta = F\ b$

EXAMEN

1.- Define lo que es vector

2.- ¿Cuántas clases de vectores hay y cuales son?

3.- Sean $\bar{A} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$; $\bar{B} = 3\bar{i} + 6\bar{j} + 8\bar{k}$; $C = -\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}$

Calcula:

$(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C}$

$\bar{A} - \bar{B}$

$(\bar{A} \cdot \bar{B})\ \bar{C}$

$\bar{A} \cdot (\bar{A} + \bar{B})$

$(\bar{A} + \bar{B}) \times \bar{C}$

En los sigientes ejercicios, los componentes de los vectores están dados en ton y las coordenadas en m

4.- Calcula el momento respecto al origen de la fuerza $\bar{F} = 10\bar{i} + 20\bar{j} + 15\bar{k}$, que pasa por el punto (3,4,5)

5.- Calcula el momento respecto al origen de un par que se constituye de la fuerza $\bar{F} = 5\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k}$ actuando en el punto (3,2,4) y la fuerza $-\bar{F} = -5\bar{i} - 10\bar{j} - 5\bar{k}$ actuando en el punto (5,4,6).

6.- Transporta la fuerza $\bar{F} = 10\ \bar{i} + 20\ \bar{j} + 15\ \bar{k}$ que actúa en el punto (5,5,5) por su equivalente aplicado en el origen.

Respuestas

1.- Es una cantidad determinada por el conocimiento de un módulo una dirección, un sentido, y si así se requiere, un punto de aplicación.

2.- Hay tres clases: libres, deslizantes y fijos.

3.- $(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = 5\bar{i} + 15\bar{j} + 7\bar{k}$

$(\bar{A} - \bar{B}) = -2\bar{j} - 13\bar{k}$

$(A \cdot B)\ \bar{C} = 7\bar{i} - 35\bar{j} - 28\bar{k}$

$\bar{A} \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = 43$

$(\bar{A} + \bar{B}) \times \bar{C} = 25\bar{i} - 27\bar{j} + 40\bar{k}$

4.- $\bar{M} = -40\bar{i} + 5\bar{j} + 20\bar{k}$ (ton-m)

5.- $\bar{M} = 10\bar{i} - 10\bar{k}$ (ton-m)

6.- $\bar{F} = 10\bar{i} + 20\bar{j} + 15\bar{k}$ (ton)

$\bar{P} = -25\bar{i} - 25\bar{j} + 50\bar{k}$ (ton-m)

CAPITULO 2. RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL ESPACIO Y EN EL PLANO

Objetivos:

2.1 Explicarás de qué se compone un sistema de fuerzas espaciales concurrentes

2.2 Explicarás de qué se compone un sistema de fuerzas espaciales paralelas

2.3 Explicarás de qué se compone un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes ni paralelas

2.4 Calcularás la resultante de un sistema de fuerzas espaciales concurrentes

2.5 Calcularás la resultante de un sistema de fuerzas en el plano concurrentes

2.6 Calcularás la resultante de un sistema de fuerzas espaciales paralelas

2.7 Calcularás la resultante de un sistema de fuerzas en el plano paralelas

2.8 Calcularás la resultante de un sistema de fuerzas espaciales ni concurrentes ni paralelas

2.9 Calcularás la resultante de un sistema de fuerzas en el plano ni concurrentes ni paralelas

RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES

La <u>resultante</u> de un sistema de fuerzas espaciales se compone de:

a) Una fuerza $\overline{R}=\Sigma\overline{F}$, donde $\Sigma\overline{F}$ representa la suma ____________ de todas las __________ del sistema.

b) Un momento $\overline{M}_R=\Sigma\overline{M}$, donde $\Sigma\overline{M}$ representa la suma ____________ de los ____________ de todas las fuerzas del sistema respecto a un punto determinado.

---

vectorial, fuerzas, vectorial, momentos

Por consiguiente, como primer caso para determinar la <u>resultante</u> de un sistema de fuerzas espaciales, se debe distinguir a qué tipo de sistema pertenece, los cuales se agrupan en:

1) Sistema de fuerzas espaciales concurrentes
2) Sistema de fuerzas espaciales paralelas
3) Sistema de fuerzas espaciales ni concurrentes ni paralelas

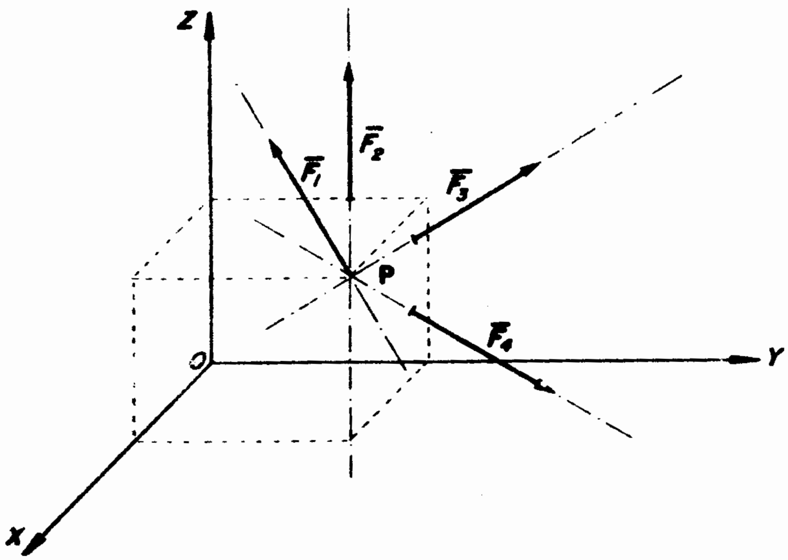
Si sabes distinguir entre los diferentes sistemas de fuerzas a qué tipo pertenece, o sea, puedes explicar de qué se compone cada uno de ellos, pasa a la pág 2-10.

Si no lo sabes, se te dará toda la información que necesitas, será cuestión de minutos. Pasa a la siguiente página y estudia con mucha atención.

2.1 SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES CONCURRENTES

Se compone de fuerzas que se cortan en un punto común, llamado de concurrencia.

Observa la figura



El sistema de fuerzas espaciales ________________ representado en la figura, nos muestra un sistema de cuatro fuerzas en el espacio, concurrentes al punto ____.

---

concurrentes, P

Dibuja, sobre la figura, todas las fuerzas que quieras, sin olvidar que todas las líneas de acción deben cortar el punto P para que el sistema siga siendo de fuerzas espaciales ________________.

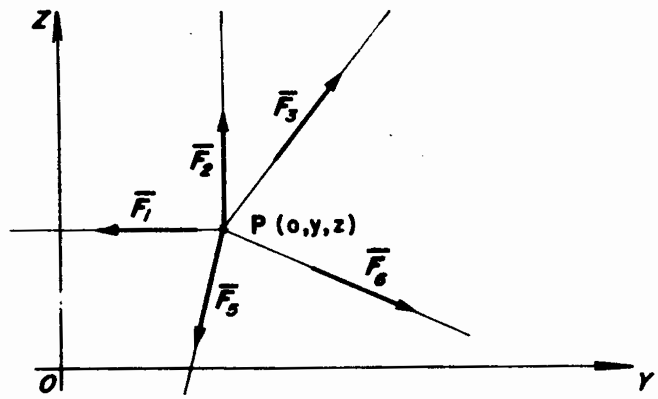
---

concurrentes

SISTEMA DE FUERZAS EN EL PLANO CONCURRENTES.- (caso particular)

Se compone de fuerzas contenidas en un ____________ que se cortan en un punto llamado de ________________.

Observa la figura.



---

plano, concurrencia

Por tanto, los vectores que representan a estas fuerzas pertenecen a la clase de ________________.

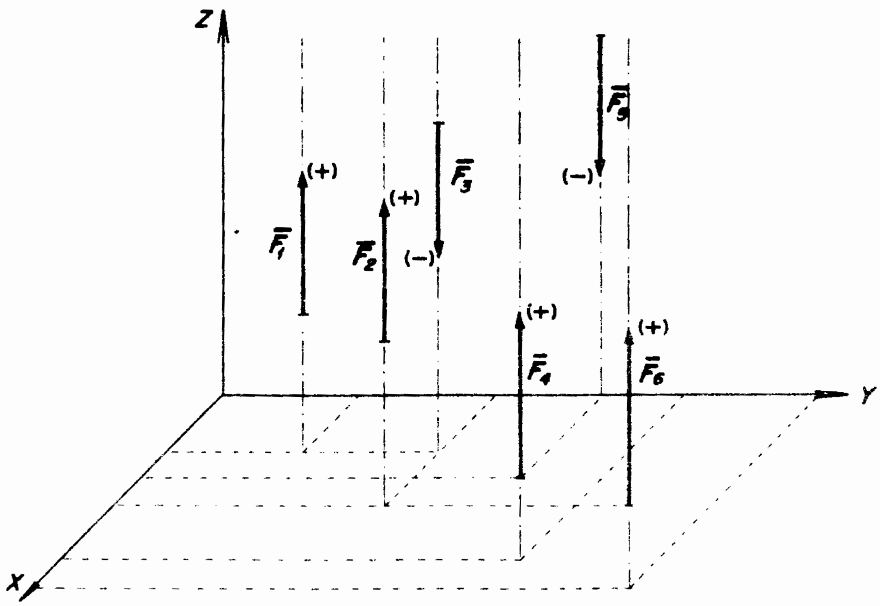
---

deslizantes

2.2 SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES PARALELAS

Se compone de fuerzas que se cortan en el infinito.

Observa la figura



Un sistema de fuerzas espaciales ________________ debe cumplir con la condición de que todas las fuerzas que componen a este sistema sean ________________ entre sí.

---

paralelas, paralelas

Por comodidad, cuando tratamos con un sistema de fuerzas espaciales paralelas, hacemos que el eje Z de un sistema de coordenadas rectangulares sea paralelo al sistema de fuerzas, con la ventaja de conocer el ____________ de éstas en forma automática.

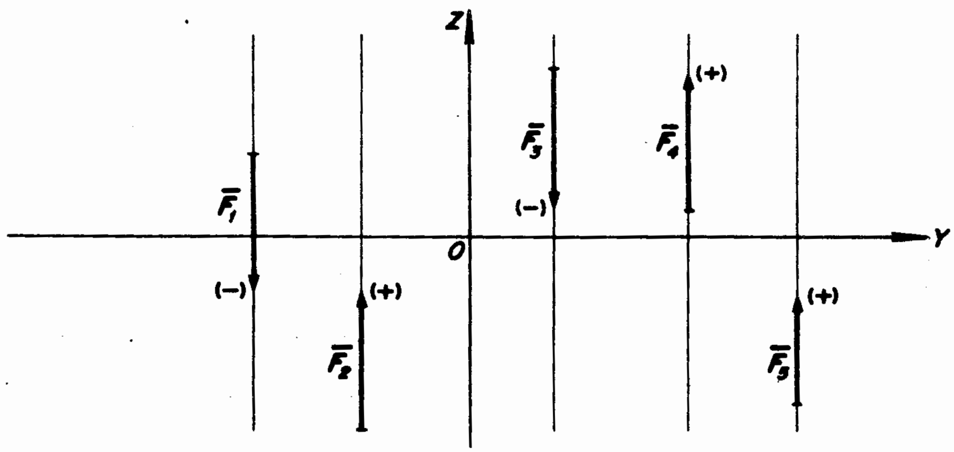
---

sentido

SISTEMA DE FUERZAS EN EL PLANO PARALELAS.- (caso particular)

Se compone de fuerzas contenidas en un ____________ que se cortan en el ______________.

Observa la figura



---

plano, infinito

Los vectores que representan a estas fuerzas pertenecen a la clase de ____________________.

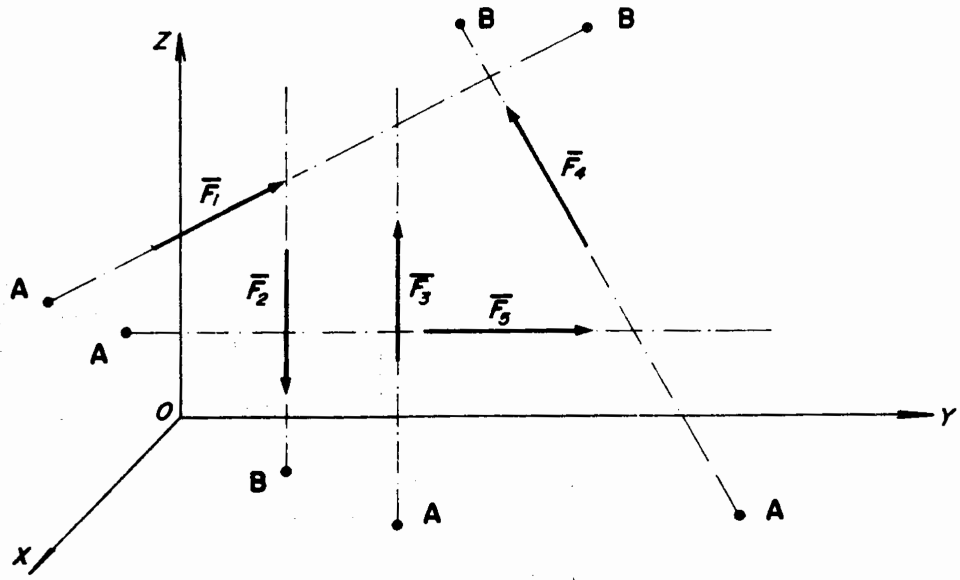
---

deslizantes

2.3 SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES NI CONCURRENTES NI PARALELAS

Es el sistema más general, puesto que las fuerzas no son todas concurrentes ni todas paralelas.

Observa la figura



En la figura, se muestra un sistema de cinco fuerzas en el espacio donde ____ son todas ________________, ____ ________________.

---

no, concurrentes, ni paralelas

Escribe en la figura las coordenadas de los puntos (en centímetros) donde las líneas de acción de las fuerzas cortan los planos X-Y, Y-Z y Z-X

$\overline{F}_1$ A(3.5, 0, 4.5), B(0, 7.5, 7.0) ; $\overline{F}_2$ B(1.4, 3.0, 0)

$\overline{F}_3$ A(2.8, 6.0, 0) ; F_4 A(2.5, 12.0, 0) , B(0,5.1,7.0)

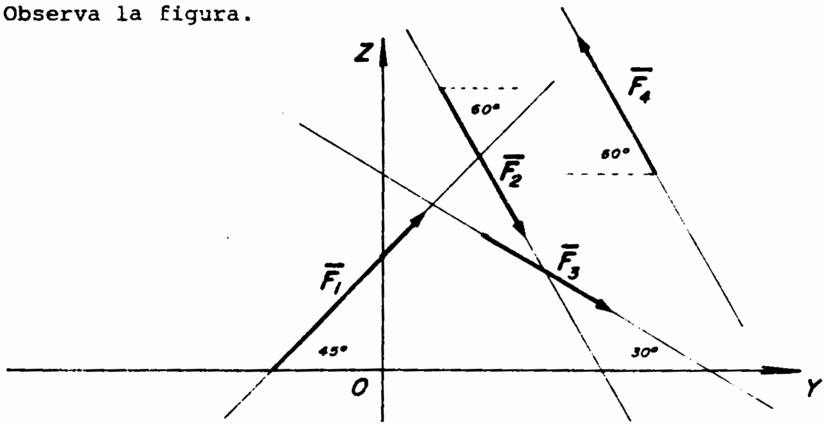
$\overline{F}_5$ A(1.4, 0, 2.5)

SISTEMA DE FUERZAS EN EL PLANO NI CONCURRENTES NI PARALELAS.- (caso particular).

Se compone de fuerzas _______________ ____ ____ ____________ y, ____

son todas __________________ ____ __________________.

Observa la figura.



La línea de acción de cada fuerza está dada por un punto, y por el ángulo menor que forma con el eje Y.

---

contenidas en un plano, no, concurrentes ni paralelas

Los vectores que representan a estas fuerzas pertenecen a la clase de

__________________.

---

deslizantes

Ejercicios.-

1) Explica, brevemente, de qué se compone un sistema de fuerzas espaciales concurrentes.

Se compone de fuerzas que se cortan en un punto común llamado de concurrencia. Los vectores que representan a estas fuerzas pertenecen a la clase de deslizantes.

---

2) Explica, brevemente, de qué se compone un sistema de fuerzas espaciales paralelas.

Se compone de fuerzas que se cortan en el infinito. Debe cumplir con la condición de que todas las fuerzas sean paralelas entre sí. Los vectores que representan a estas fuerzas pertenecen a la clase de deslizantes.

---

3) Explica, brevemente, de qué se compone un sistema de fuerzas espaciales ni concurrentes ni paralelas.

Es el sistema más general, puesto que las fuerzas que lo componen no son todas concurrentes ni paralelas. Los vectores que representan a estas fuerzas pertenecen a la clase de deslizantes.

Si ya sabes obtener la <u>resultante</u> de un sistema de fuerzas espaciales concurrentes, pasa a la pág 2-21.

Si no, pasa a la página siguiente.

2.4 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES CONCURRENTES

La resultante de un sistema de fuerzas espaciales concurrentes, es una UNICA ___________.

FUERZA

Esta fuerza está representada por un vector deslizante cuya línea de acción debe cortar el punto de ________________.

---

concurrencia

ATENCION

El vector puede ser el ___________ NULO

---

vector

OBTENCION DE LA RESULTANTE

Si $\overline{R}=\Sigma\overline{F}$,

$$R_x\,\overline{i} + R_y\,\overline{j} + R_z\,\overline{k} = \Sigma F_x\,\overline{i} + \Sigma F_y\,\overline{j} + \Sigma F_z\,\overline{k}$$

por tanto,

$R_x=\Sigma F_x$

$R_y=$

$R_z=$

$R_y=\Sigma F_y$

$R_z=\Sigma F_z$

Donde las escalares Rx, _____ y _____, que son los <u>componentes</u> del vector $\bar{R}$, son las sumas de los respectivos ________________ en los ejes x, y, z, de TODOS los vectores $\bar{F}$.

Ry, Rz, componentes

Su módulo es

$$R = \sqrt{(\Sigma Fx)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$(\Sigma Fy)^2$, $(\Sigma Fz)^2$

Su dirección es

$\cos \theta x = \frac{\Sigma Fx}{R}$, $\cos \theta y =$ __________, $\cos \theta z =$ __________

donde θx, ____ y ____ son los ángulos que la <u>resultante</u> $\bar{R}$ forma con los ejes x, y, z, respectivamente.

$\frac{\Sigma Fy}{R}$, $\frac{\Sigma Fz}{R}$, $\theta y, \theta z$

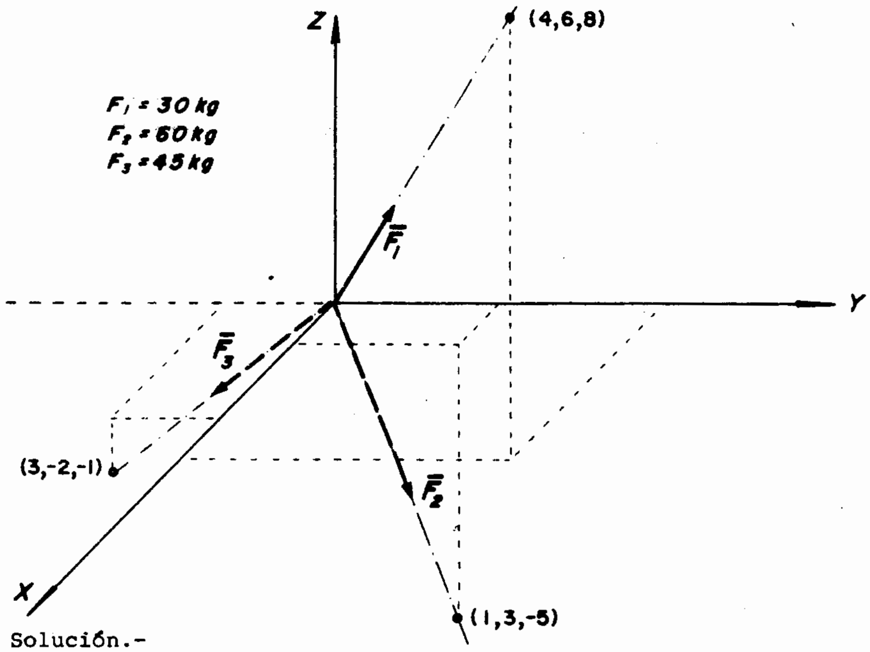
Los signos de los cosenos directores nos proporcionan su __________.

---

sentido.

Ejemplo.-

Obtener la <u>resultante</u> del siguiente sistema de fuerzas concurrentes en el ORIGEN de un sistema trirrectangular derecho. La posición de las líneas de acción, módulos y sentidos, se muestran en la figura.



Solución.-

Como primer paso, obtengamos los componentes de los vectores **$\bar{F}$**.

Para $\bar{F}_1$, $L_1 = \sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2} = 10.77$

$\cos \theta x = \frac{4}{10.77} = 0.3714$ $\qquad F_{1x} = 30kg\ (0.3714) = 11.14kg$

$\cos \theta y = \_\_\_\_\_ = 0.5571$ $\qquad F_{1y} = \qquad\qquad = 16.71kg$

$\cos \theta z = \_\_\_\_\_ = 0.7428$ $\qquad F_{1z} = \qquad\qquad = 22.28kg$

$\frac{6}{10.77}$, $\frac{8}{10.77}$, 30kg (0.5571), 30kg (0.7428)

Para $\overline{F}_2$,

$F_{2x}=10.14kg$, $F_{2y}=30.42kg$, $F_{2z}=-50.67kg$

Para $\overline{F}_3$,

$F_{3x}=36.08kg$, $F_{3y}=-24.05kg$, $F_{3z}=-12.03kg$

Ahora, obtengamos el módulo de la <u>resultante</u>

$F_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=57.36kg.$

Fy=

Fz=

Por tanto R=

Fy=23.08kg, Fz=-40.46kg, R=73.89kg

Solo resta conocer su ______________ y su ___________, para determinar nuestro vector resultante.

---

dirección, sentido

Obténlos

---

cos θx=0.7763 θx=39.07°

cos θy=0.3123 θy=71.80°

cos θz=-0.5475 θz=123.20°

La dirección está dada por los ángulos, θ, obtenidos a partir de los cosenos directores de la ___________ ____ ___________ del vector resultante.

---

línea de acción

El sentido está dado por los ___________ de los cosenos directores, observa que el cos θz, resultó ___________, por tanto, el ángulo θz es mayor de 90°y se mide a partir del eje Z hacia el plano X-Y.

---

signos, negativo

2.5 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL PLANO CONCURRENTES

La <u>resultante</u> es una __________ fuerza, representada por un vector deslizante cuya línea de acción debe ___________ el punto de ________________.

El vector puede ser el vector _________.

única, cortar, concurrencia, nulo

OBTENCION DE LA RESULTANTE

Si $\overline{R}=\Sigma\overline{F}$

$$Rx\ \overline{i} + Ry\ \overline{j} + Rz\ \overline{k} = \Sigma Fx\ \overline{i} + \Sigma Fy\ \overline{j} + \Sigma Fz\ \overline{k}$$

pero en el caso de un sistema de fuerzas en el plano, y en particular del plano y-z, no existe componente en el eje x, por tanto

$$Ry\ \overline{j} + Rz\ \overline{k} =$$

$$Ry\ \overline{j} + Rz\ \overline{k} = \Sigma Fy\ \overline{j} + \Sigma Fz\ \overline{k}$$

Entonces

$$Ry = \Sigma Fy = \Sigma(F \cos \theta y)$$

$$Rz =$$

$$Rz = \Sigma Fz = \Sigma(F \cos \theta z) = \Sigma(F \text{ sen } \theta y)$$

Donde los componentes Ry y Rz del vector $\overline{R}$ son las sumas de los respectivos ___________________ en los ejes Y y Z de todos los vectores $\overline{F}$.

---

componentes

Su módulo es

$$R =$$

$$R = \sqrt{(\Sigma Fy)^2 + (\Sigma Fz)^2}$$

La dirección de la línea de acción del vector que representa la fuerza resultante, se define perfectamente si conocemos el ángulo menor que forma con el eje, el cual se obtiene en función de sus componentes.

Por consiguiente

$$\tan \theta y =$$

$$\tan \theta y = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma Fy}$$

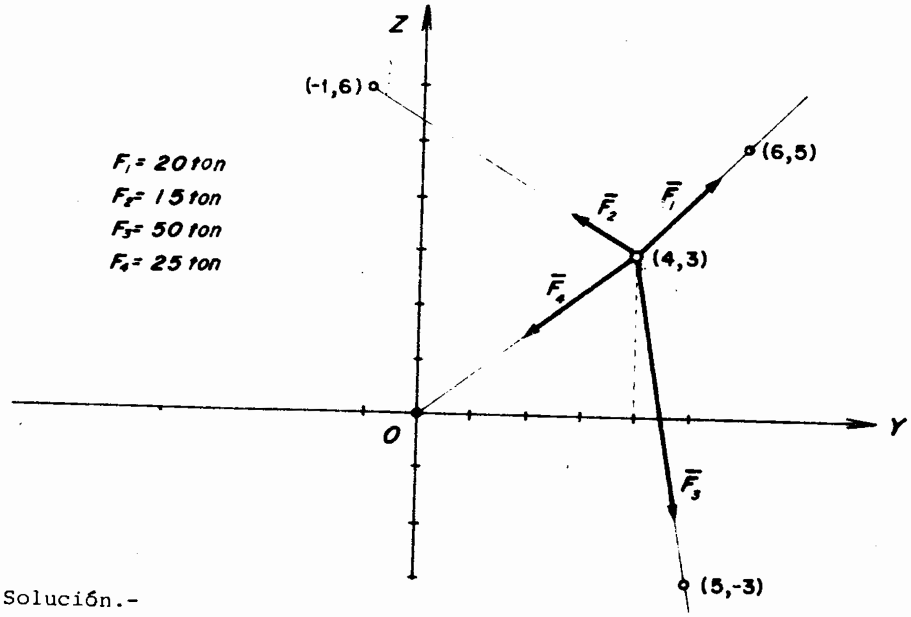
Por último, el sentido de la fuerza <u>resultante</u> está dado por el __________ de la _____________ del ángulo.

---

signo, tangente

Ejemplo.-

Obtener la resultante del siguiente sistema de fuerzas que concurren en el punto (0,4,3). La posición de las líneas de acción, módulos y sentidos, se muestran en la figura.



Solución.-

Obtención de los componentes de las fuerzas.

$\bar{F}_1$, $L = \sqrt{(6-4)^2 + (5-3)^2} = 2.828$

$\cos\theta y = \dfrac{6-4}{2.828} = 0.7071 \quad \therefore \quad F_{1y} = 20\ (0.7071) = 14.142$ ton

$\cos\theta z = \operatorname{sen}\theta y = \qquad \therefore \quad F_{1z} =$

$\operatorname{sen}\theta y = 0.7071 \qquad F_{1z} = 14.142$ ton

---

Obtén los componentes de las fuerzas $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ y $\overline{F}_4$.

$\overline{F}_2$

$F_{2y} = -12.863$ ton, $F_{2z} = 7.717$ ton

$\overline{F}_3$

$F_{3y} = 8.2$ ton, $F_{3z} = -49.3$ ton

$\overline{F}_4$

$F_{4y} = -20$ ton, $F_{4z} = -15$ ton

Ahora,

$$R = \sqrt{(\Sigma Fy)^2 + (\Sigma Fz)^2} =$$

$$\tan \theta y = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma Fy} = \underline{\qquad\qquad} = \qquad\qquad \theta y =$$

La resultante queda

$R = 43.726$ ton, $\tan \theta y = 4.0339$

$\theta y = 76.077°$, ángulo que forma su línea de acción con el eje y.

Ejercicios.-

Obtén la resultante de los siguientes sistemas espaciales, concurrentes en el ORIGEN de un sistema derecho de coordenadas rectangulares:

1. $F_1 = 20$ kg, Q_1 (2,2,2)
   $F_2 = 40$ kg, Q_2 (0,3,3)
   $F_3 = 15$ kg, Q_3 (4,0,0)

$\overline{R} = 26.547\ \overline{i} + 39.831\ \overline{j} + 39.831\ \overline{k}$, $R = 62.272$ kg

$\cos \theta x = 0.4263$, $\theta x = 64.76°$

$\cos \theta y = 0.6396$, $\theta y = 50.23°$

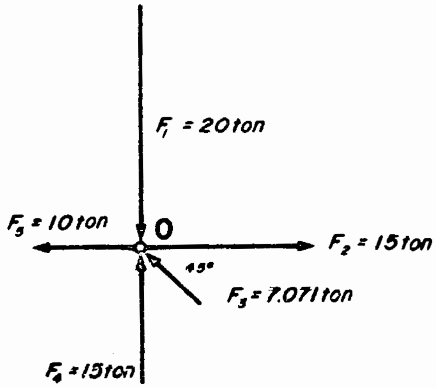
$\cos \theta z = 0.6396$, $\theta z = 50.23°$

---

2. $F_1 = 20$ ton, Q_1 (0,3,4)
   $F_2 = 10$ ton, Q_2 (0,3,-4)
   $F_3 = 18$ ton, Q_3 (0,-4,0)
   $F_4 = 8$ ton, Q_4 (0,0,-2)

La resultante es el vector nulo, por tanto, es CERO.

3.



La resultante es el vector nulo.

Si sabes obtener la resultante de un sistema de fuerzas espaciales paralelas, pasa a la pág 2-37.

Si no, pasa a la página siguiente.

2.6 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES PARALELAS

La resultante puede ser:

a) Una UNICA ___________, representada por un vector PARALELO al sistema, sin olvidar que el vector puede ser el vector ________.

FUERZA, nulo

---

b) Si $\overline{R} = 0$, la resultante es un PAR. Se considera que el vector que lo represente puede ser el vector _________.

---

nulo

---

caso a) $\overline{R} = \Sigma\overline{F}$

$$Rx\ \overline{i} + Ry\ \overline{j} + Rz\ \overline{k} = \Sigma Fx\ \overline{i} + \Sigma Fy\ \overline{j} + \Sigma Fz\ \overline{k}$$

por tanto,

$Rx =$

$Ry =$

$Rz =$

$Rx = \Sigma Fx$, $Ry = \Sigma Fy$, $Rz = \Sigma Fz$

Si suponemos que el eje Z de nuestro sistema de coordenadas cartesianas es paralelo al sistema de fuerzas, entonces, ΣFx = ____ y ΣFy = _____, puesto que los respectivos ______________ en los ejes X y Y de todos los vectores $\overline{F}$ son CERO.

---

cero, cero, componentes

Por tanto, el módulo de la resultante es la suma ALGEBRAICA de todas las fuerzas del sistema, ésto es,

$R =$

$R = \Sigma Fz$

Para obtener la ubicación de la línea ____ __________ del vector que representa a la resultante, recordemos la definición del momento de una fuerza respecto a un punto (página 1-30)

$$M = Mx\,\overline{i} + My\,\overline{j} + Mz\,\overline{k}$$

donde

$$Mx = Fz\,(Y) - Fy(Z)$$

$$My =$$

$$Mz =$$

---

de acción, $My = Fx\,(Z) - Fz\,(X)$, $Mz = Fy\,(X) - Fx\,(Y)$

Si consideramos la ley del paralelogramo,

$$\overline{M}_R = \Sigma\overline{M} = \Sigma Mx\ \overline{i} + \Sigma My\ \overline{j} + \Sigma Mz\ \overline{k}$$

entonces:

$$M_{Fx} = \Sigma Mx = \Sigma(Fz\ Y) - \Sigma(Fy\ Z)$$

$$M_{Fy} =$$

$$M_{Fz}$$

$$M_{Fy} = \Sigma My = \Sigma(Fx\ Z) - \Sigma(Fz\ X)$$

$$M_{Fz} = \Sigma Mz = \Sigma(Fy\ X) - \Sigma(Fx\ Y)$$

Ahora, de acuerdo con la suposición del eje Z paralelo al sistema de fuerzas en estudio, esto es, que las respectivas fuerzas componentes en los ejes X y Y de todos los vectores $\overline{F}$ son cero, queda

$$M_{Fx} = \Sigma Mx =$$

$$M_{Fy} = \Sigma My =$$

$$M_{Fz} = \Sigma Mz =$$

$$M_{Fx} = \Sigma Mx = \Sigma(Fz\ Y)$$

$$M_{Fy} = \Sigma My = -\Sigma(Fz\ X)$$

$$M_{Fz} = \Sigma Mz = 0$$

Comentario:

Recuerda la convención del tornillo de rosca derecha para obtener el sentido del vector que representa el momento de una fuerza.

Por otro lado, de acuerdo con esta convención y suponiendo positivo el sentido de la resultante

$$M_{Fx} = R\ Y$$

$$M_{Fy} = -R\ X$$

entonces

$$\Sigma(Fz.y) = R\ Y$$

$$-\Sigma(Fz.x) = -R\ X$$

Por tanto, la línea de acción de la resultante corta el plano X-Y en el punto de coordenadas

x = __________, y = __________

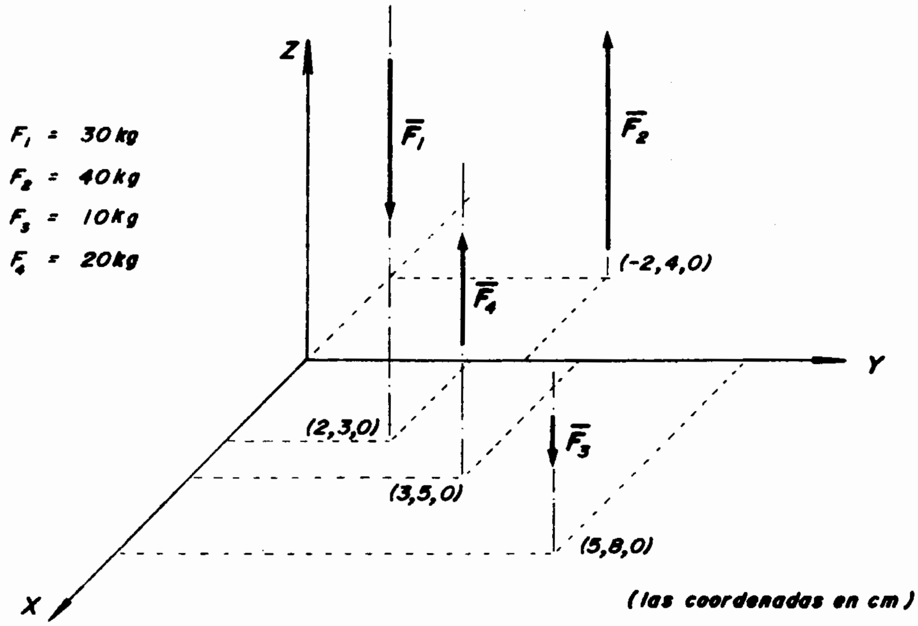
$$x = \frac{\Sigma(Fz.X)}{R}, \quad y = \frac{\Sigma(Fz.Y)}{R}$$

Pasa a la página siguiente

Ejemplo.-

Obtener la resultante del siguiente sistema de fuerzas espaciales paralelas.

La posición de las líneas de acción, módulos y sentidos, se muestran en la figura.



Solución.-

El módulo de la resultante es

$R =$

$R = \Sigma Fz = 20$ kg

Su sentido es ___________

---

positivo

Para determinar nuestro vector <u>resultante</u>, sólo resta conocer la ubicación de su __________ ___ _________.

---

línea de acción

La cual está dada por

$$x = \frac{\Sigma(Fz.X)}{R}$$

$$y = \frac{\Sigma(Fz.y)}{R}$$

Entonces,

$$\Sigma(Fz.X) = (-30)(2) + (40)(-2) + (-10)(5) + (20)(3) = -130 \text{ kg-cm}$$

(Fíjate bien en los signos de las fuerzas y de las coordenadas)

por tanto

$$x = \frac{-130 \text{ kg-cm}}{20 \text{ kg}} = -6.5 \text{ cm}$$

Ahora:

$\Sigma(Fz.Y)$ =

y =

(Fz.Y) = 90 kg-cm

y = 4.5 cm

Dibuja en la figura anterior la <u>resultante</u> de este sistema.

Caso b) Si $R = \Sigma Fz = 0$

entonces

$$\bar{R} = 0$$

Por tanto, la <u>resultante</u> es un par $\bar{P}$, cuyo módulo es

$$P = \sqrt{(\Sigma Mx)^2 + \qquad}$$

$(\Sigma My)^2$

Su dirección está dada por

$$\cos \theta x = \frac{\Sigma Mx}{P} = \frac{\Sigma (Fz.Y)}{P}$$

$$\cos \theta y = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\cos \theta y = \frac{\Sigma My}{P} = \frac{\Sigma (Fz.X)}{P}$$

Su sentido nos lo indica el __________ de los cosenos directores.

---

signo

Recuerda que el vector que representa al par $\bar{P}$, también puede ser el vector __________.

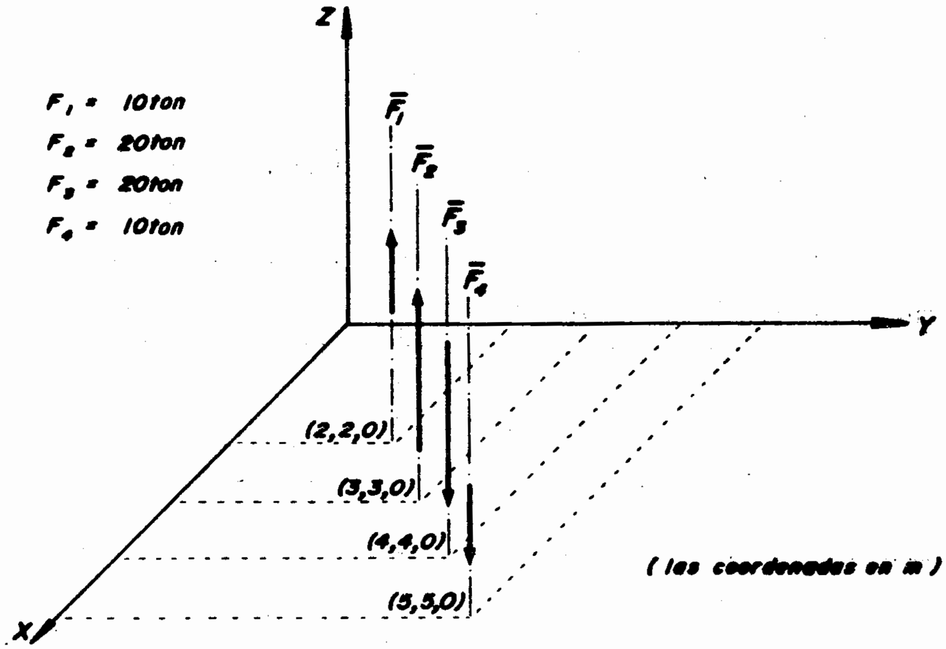
---

nulo

Ejemplo.-

Obtener la resultante del siguiente sistema de fuerzas espaciales paralelas.

La posición de las líneas de acción, módulos y sentidos, se muestran en la figura.



Solución.-

El módulo de la fuerza resultante es

$$R =$$

$$R = 0$$

Por consiguiente, la resultante es un PAR. Se considera que el vector que lo representa puede ser el vector __________.

---

nulo

El módulo del par resultante es

$$P = \sqrt{(\Sigma Mx)^2 + (\Sigma My)^2}$$

donde

$\Sigma Mx = \Sigma(Fz.Y) = (10)(2)+(20)(3)+(-20)(4)+(-10)(5) = -50$ ton-m

$\Sigma My = -\Sigma(Fz.X) =$

$\Sigma My = -(Fz.X) = -[(10)(2)+(20)(3)+(-20)(4)+(-10)(5)] = 50$ ton-m

---

Entonces,

$$P =$$

$$P = 70.71 \text{ ton-m}$$

Su dirección y sentido son

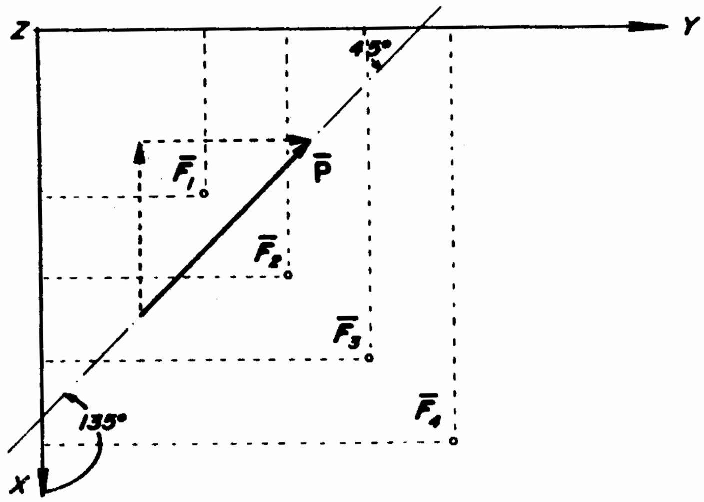
$\cos \theta x =$

$\cos \theta y =$

$\cos \theta x = -0.7071 \qquad \theta x = 135°$

$\cos \theta y = 0.7071 \qquad \theta y = 45°$

Observa la siguiente figura



Recuerda que el vector $\overline{P}$ es un vector ___________.

LIBRE

Su proyección respecto al eje X es ______________ y respecto al eje Y ______________.

---

negativa, positiva

Al considerar la ley del ___________________, el sentido del vector $\overline{P}$ es el indicado en la figura.

---

paralelogramo

2.7 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL PLANO PARALELAS

La <u>resultante</u> puede ser:

a) Una ___________ fuerza $\bar{R}$, paralela al ___________.

única, sistema

---

b) Un par en el plano del sistema, si $\bar{R}=0$ considerando que el par puede ser __________ también.

---

cero

Caso a)

$$R = \Sigma Fz$$

donde ΣFz es la suma de todas las ___________ del sistema.

---

fuerzas

Para obtener la ubicación de la línea de acción de la resultante, recordemos la interpretación geométrica del momento de una fuerza:

$$M_o = F.d$$

donde, d, es la distancia desde el origen de coordenadas hasta el pie de la ____________________ con la línea ____ __________ de la fuerza.

---

perpendicular, de acción

Por tanto,

$$\Sigma M_o = \Sigma(F.d) = \Sigma(F.Y) = R(Y)$$

entonces,

Y =

$$Y = \frac{\Sigma(F.Y)}{R}$$

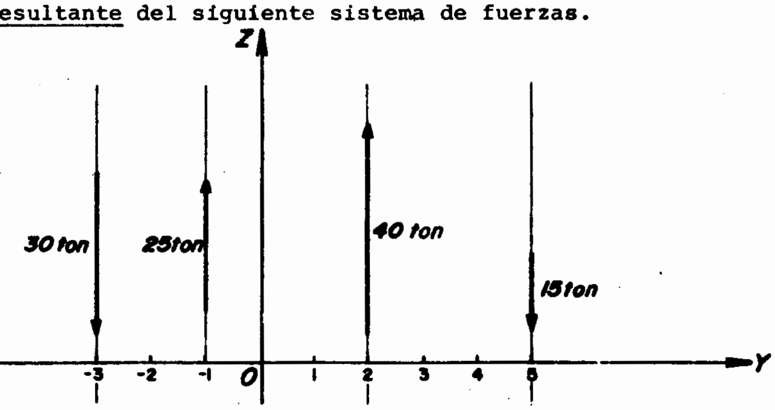
Las fuerzas $\overline{F}$ y las distancias, deben considerarse con su signo para cumplir con la convención del __________ ____ __________ __________.

---

tornillo de rosca derecha

Ejemplo.-

Obtener la <u>resultante</u> del siguiente sistema de fuerzas.



(las coordenadas en m)

Solución.-

$R = \Sigma F_z =$

$R(Y) = \Sigma(F.Y) =$

Y =

R = 20 ton , Y = 3.5 m

Caso b)

Si $\bar{R} = 0$, la <u>resultante</u> es un par, $\bar{P}$, normal al plano y-z.

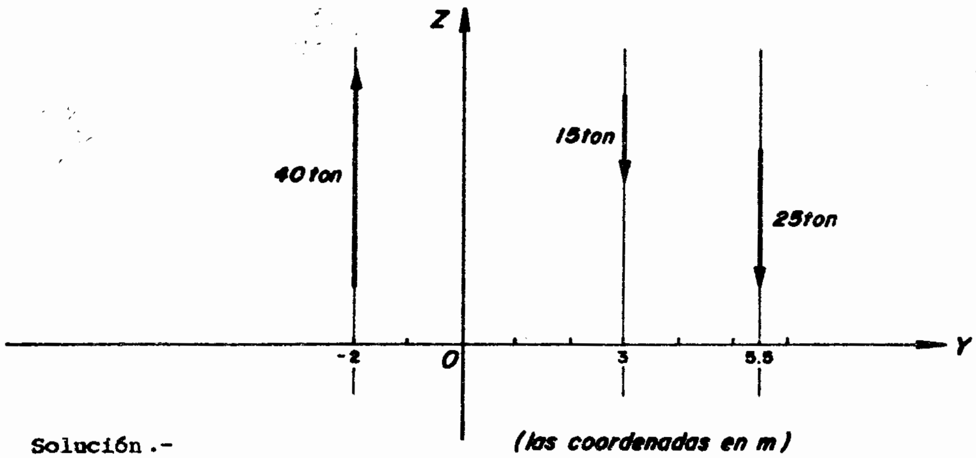
Por tanto

$$\bar{P} = \Sigma M_o$$

Su sentido se obtiene mediante la convención del tornillo de rosca derecha.

Ejemplo.-

Obtener la <u>resultante</u> del siguiente sistema de fuerzas.



Solución.-

$$\Sigma Fy = 0$$

$$\bar{P} = \Sigma M_o =$$

$$\bar{P} = -262.5 \text{ ton-m}$$

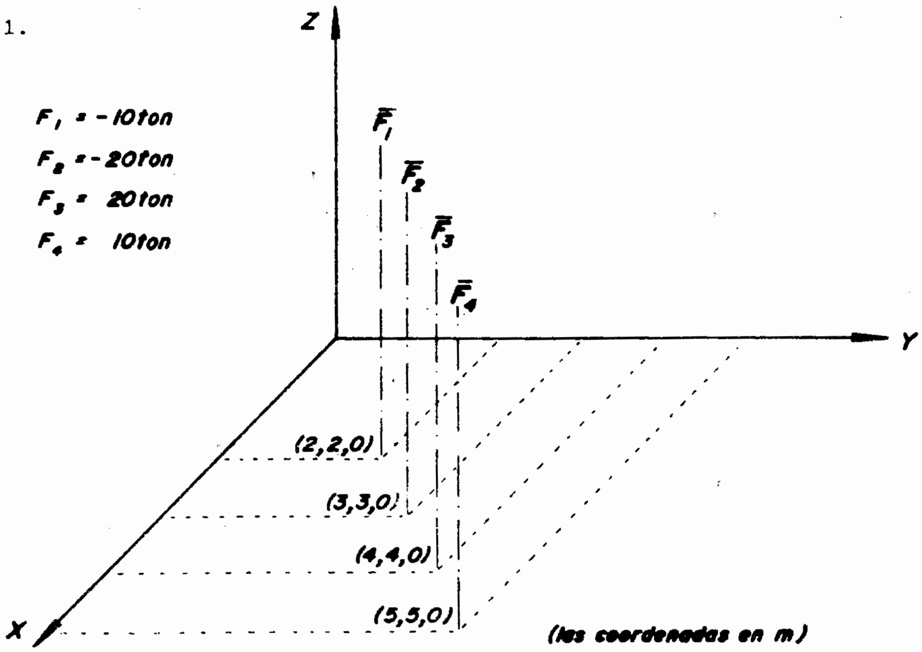
Recuerda que un <u>par</u> es un vector <u>libre</u>. El punto escogido, en este ejemplo, fue el origen de coordenadas; pero puede ser el que tu quieras

---

Ejercicios.-

Obtén la resultante de los siguientes sistemas de fuerzas espaciales paralelas.

1.



Dibuja, en la figura, los sentidos de las fuerzas.

R =

ΣMx =

ΣMy =

P =

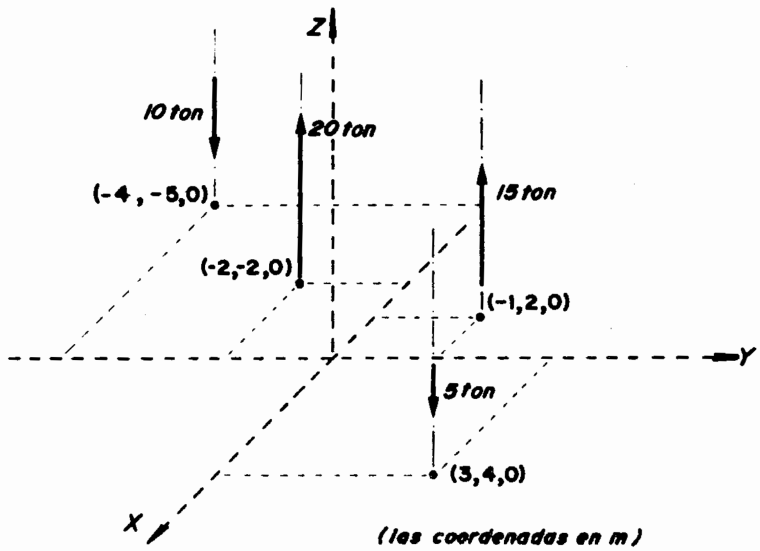
cos θx = θx =

cos θy = θy =

P = 70.71 ton-m, θx = 45°, θy = 135°

El sentido de, P, es opuesto al de $\bar{P}$, del ejemplo de la pág 2-30

2.



R = 20 ton, la línea de acción pasa por el punto, (-1.5, 1,0)

3.

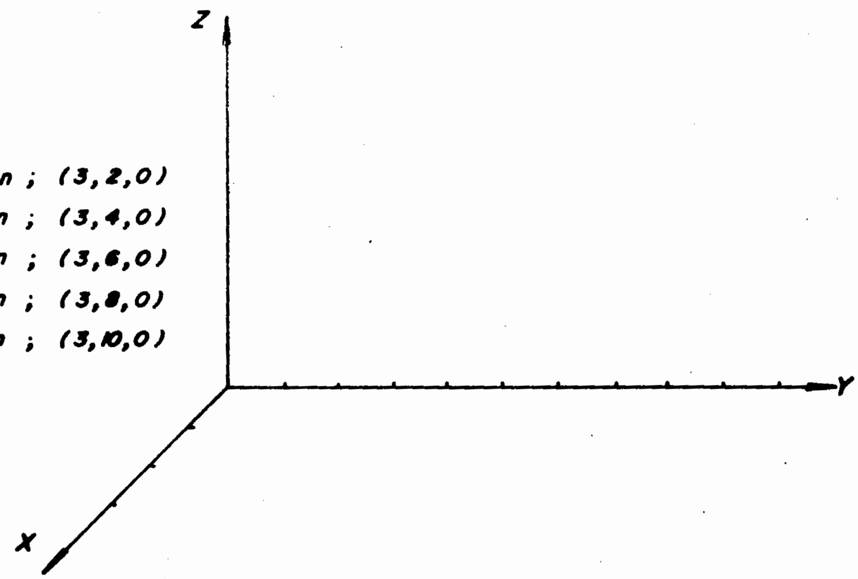
$F_1 = 15$ ton ; $(3,2,0)$

$F_2 = -10$ ton ; $(3,4,0)$

$F_3 = -10$ ton ; $(3,6,0)$

$F_4 = -10$ ton ; $(3,8,0)$

$F_5 = 15$ ton ; $(3,10,0)$



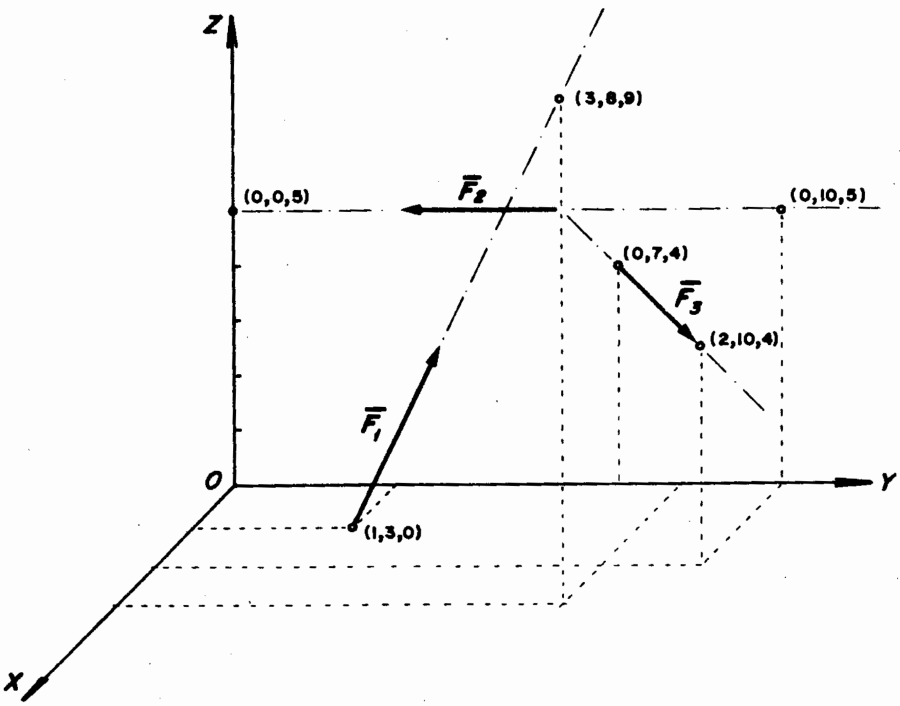
Dibuja los vectores que representan a estas fuerzas, las coordenadas en cm.

$\overline{R} = 0$ y $\overline{P} = 0$ (la resultante es nula)

Pasa a la página siguiente. (estudia con mucha atención, es IMPORTANTE)

2.8 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES NI CONCURRENTES NI PARALELAS

En este tipo de sistema, que es el más general en un espacio de tres dimensiones, la resultante se compone de una ____________ $\overline{R}$ actuando en un punto escogido y un ________ $\overline{P}$ respecto al mismo punto.



---

fuerza, par

Sustituyamos estas fuerzas por un sistema de coordenadas de fuerzas concurrentes en el origen, como punto ____________ y su respectivo sistema de _________.

---

escogido, pares

Recuerda el transporte de fuerzas (pág 1-39).

Dibuja estas fuerzas en la figura.

¿Ya dibujaste las fuerzas?

Ahora, la resultante de las fuerzas ____________ se obtiene en el origen de coordenadas y con las mismas características de las fuerzas del sistema original.

Entonces

$$\bar{R} = \Sigma Fx\ \bar{i} + \Sigma Fy\ \bar{j} + \Sigma Fz\ \bar{k}$$

su módulo es

$$R =$$

---

concurrentes, $R = \sqrt{(\Sigma Fx)^2 + (\Sigma Fy)^2 + (\Sigma Fz)^2}$

Los componentes Fx, Fy, Fz de las fuerzas, se obtienen por medio de los cosenos directores de sus respectivas líneas ____ ____________, lo cual es muy fácil si contamos con las coordenadas de dos ________ _____ de éstas.

---

de acción, puntos

Recuerda que el SENTIDO del vector se considera para asignar el

___________ correspondiente a cada coseno director.

---

signo

Esto es, los cosenos ______________ de la línea de acción de un vector están dados por las DIFERENCIAS de coordenadas de DOS de sus _________, divididas por la longitud L entre éstos.

---

directores, puntos

Como ejemplo, los cosenos directores de $\overline{F}_1$ de la figura anterior, son

$$L_1 = \sqrt{(3-1)^2 + (8-3)^2 + (9-0)^2} = 10.488$$

$$\cos\theta_{1x} = \frac{3-1}{10.488} = 0.190$$

$$\cos\theta_{1y} =$$

$$\cos\theta_{1z} =$$

$\cos\theta_{1y} = 0.477$, $\cos\theta_{1z} = 0.858$

Observa que los cosenos directores de $\overline{F}_1$ resultaron positivos; esto quiere decir que sus componentes <u>vectoriales</u> son _____________.

---

positivos

Ahora, como ejercicio, calcula los cosenos directores de las líneas de acción de los vectores que representan a las fuerzas $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_3$ en la misma figura.

$L_2 = 10$, $\cos \theta_{2x} = 0$, $\cos \theta_{2y} = -1$, $\cos \theta_{2z} = 0$

$L_3 = 3.605$, $\cos \theta_{3x} = 0.555$, $\cos \theta_{3y} = 0.832$, $\cos \theta_{3z} = 0$

Con los cosenos directores de las líneas de acción de las fuerzas que componen el sistema, estamos en condiciones de obtener los componentes <u>Fx</u>, ____, ____.

Fy, Fz

Entonces

$$R = \sqrt{(\Sigma Fx)^2 + (\Sigma Fy)^2 + (\Sigma Fz)^2}$$

$$\cos \theta_{Rx} = \frac{\Sigma Fx}{R}$$

$$\cos \theta_{Ry} = \text{———}$$

$$\cos \theta_{Rz} = \text{———}$$

con lo cual queda completamente definida la fuerza $\overline{R}$.

$\cos \theta_{Ry} = \frac{\Sigma Fy}{R}$, $\cos \theta_{Rz} = \frac{\Sigma Fz}{R}$

Por otro lado, se obtiene la resultante del sistema de pares que es otro __________, y está dado por

$$\overline{P} =$$

---

par, $\overline{P} = \Sigma Px\ \overline{i} + \Sigma Py\ \overline{j} + \Sigma Pz\ \overline{k}$

De acuerdo con la definición de par (pág 1-36), tenemos

$$\bar{P}_1 = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times F_1$$

pero el vector de posición $\bar{r}_2$, en este caso, es el vector ________, ya que la fuerza $-\bar{F}_1$, que compone el par, actúa en el __________ de coordenadas.

---

nulo, origen

Por tanto

$$\bar{P} =$$

$$\bar{P} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1$$

Como $\bar{r}_1$ es el vector de posición de <u>cualquier</u> <u>punto</u> de la línea de acción de $\bar{F}_1$, tenemos

$$\bar{P}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix}$$

Lo mismo se puede decir para obtener $\overline{P}_2$ y $\overline{P}_3$.

Con ésto, podemos definir completamente el par <u>resultante</u>

$\overline{P}$ =

P =

cos θx =

cos θy =

cos θz =

$$\overline{P} = \Sigma Px\ \overline{i} + \Sigma Py\ \overline{j} + \Sigma Pz\ \overline{k}$$

$$P = \sqrt{(\Sigma Px)^2 + (\Sigma Py)^2 + (\Sigma Pz)^2}$$

$$\cos \theta x = \frac{\Sigma Px}{P}$$

$$\cos \theta y = \frac{\Sigma Py}{P}$$

$$\cos \theta z = \frac{\Sigma Pz}{P}$$

En casos especiales la RESULTANTE es únicamente una fuerza, cuando el par resultante es el vector __________.

---

nulo.

También la RESULTANTE puede ser un ______, cuando la fuerza es el vector nulo.

PAR

Por último, se puede dar el caso de que la fuerza y el par, RESULTANTES, sean vectores ___________.

---

nulos

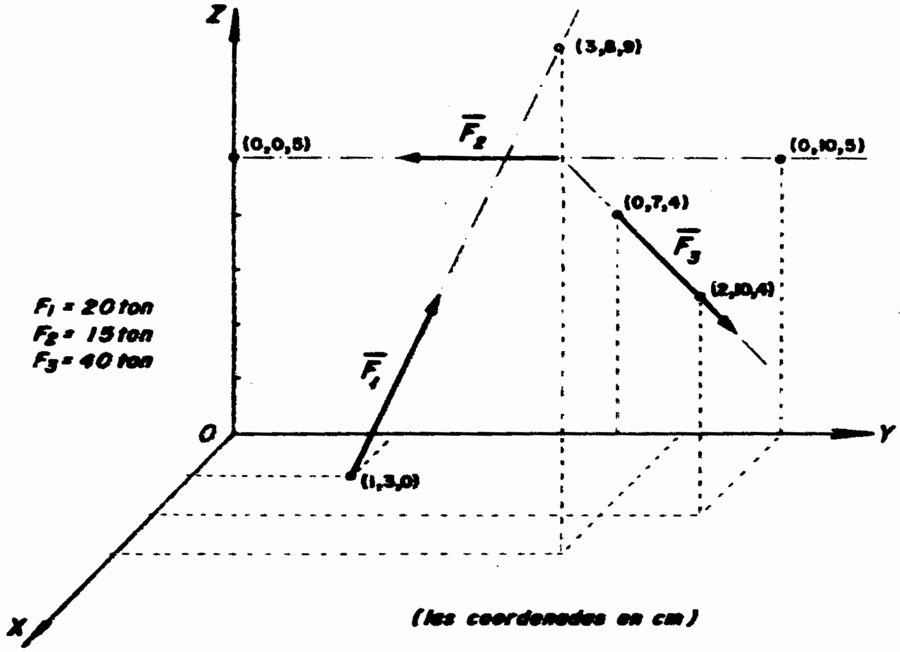
<u>ATENCION</u>

Es importante recalcar la conveniencia de escoger el origen de coordenadas como punto de referencia, pero se puede escoger cualquier otro punto.

La RESULTANTE estará compuesta por la misma fuerza $\overline{R}$ y un par, donde éste será el mismo par que se obtiene cuando se escoge el origen de coordenadas como punto de referencia, más otro par, <u>resultante</u> del transporte de $\overline{R}$ desde el origen de coordenadas al otro punto. Pòr consiguiente, habrá un punto tal que las líneas de acción de los vectores $\overline{R}$ y $\overline{P}$ <u>coincidan</u>; denominándose a esta combinación TORSOR.

Ejercicio.-

Obtén la RESULTANTE del siguiente sistema de fuerzas espaciales ni concurrentes ni paralelas.



Los cosenos directores de las líneas de acción de las fuerzas ya están calculados (págs 2-41 y 2-42).

$R = 41.76$ ton	$P = 173.42$ ton-cm
$\cos \theta x = 0.6226$	$\cos \theta x = -0.0382$
$\cos \theta y = 0.6661$	$\cos \theta y = -0.4131$
$\cos \theta z = 0.4109$	$\cos \theta z = -0.9099$

2.9 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL PLANO NI CONCURRENTES NI PARALELAS

La <u>resultante</u> puede ser

a) Una única fuerza $\overline{R}$

b) Un par $\overline{P}$ en el plano del sistema, si, $\overline{R} = 0$. El par puede ser _______ también.

---

cero

---

caso a)

$$\overline{R} = \Sigma Fy\ \overline{j} + \Sigma F_z\ \overline{k}$$

$$R =$$

$$R = \sqrt{(\Sigma Fy)^2 + (\Sigma Fz)^2}$$

---

la dirección y sentido se obtienen con

$$\tan \theta y =$$

$$\tan \theta y = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma Fy}$$

---

donde θy es el ángulo menor que forma la ______________ con el eje Y. El sentido lo proporcionan los signos de las sumas de los ______________ de las fuerzas.

---

resultante, componentes

Para terminar de definir la línea de acción de la resultante, recordemos que el momento de las fuerzas que componen al sistema respecto al origen de coordenadas, es

$$M_o = \Sigma(Fz.Y) -$$

$$M_o = \Sigma(Fz.Y) - \Sigma(Fy.Z)$$

También consideremos la ventaja de que el vector que representa la <u>resultante</u> es de clase _____________, con lo cual podemos hacer coincidir su origen con el eje Y.

---

deslizante

Entonces, como el componente ΣFy queda contenido en el eje y, no ocasiona ____________ respecto al origen de coordenadas; por consiguiente, el momento de la resultante queda en función del componente _____ y de una distancia ___.

---

momento, Fz, Y

Por tanto

$$M_o =$$

pero

$$M_o = \Sigma(Fz.Y)$$

entonces

$$(\Sigma Fz)\ Y =$$

y

$$Y =$$

con lo cual queda perfectamente definida la resultante $\bar{R}$.

$$M_o = (\Sigma Fz)\ Y$$

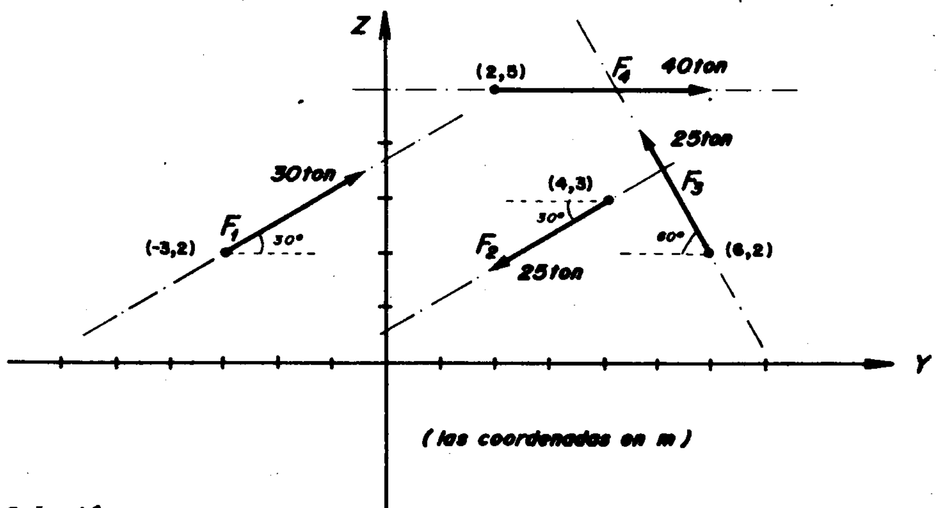
$$M_o = \Sigma(Fz.Y) - \Sigma(Fy.Z)$$

$$(\Sigma Fz)\ Y = \Sigma(Fz.Y) - \Sigma(Fy.Z)$$

$$Y = \frac{\Sigma(Fz.Y)-\Sigma(Fy.Z)}{(\Sigma Fz)}$$

Ejemplo.-

Obtener la <u>resultante</u> del siguiente sistema de fuerzas



Solución.-

$$\Sigma Fy = F_1 \cos 30° - F_2 \cos 30° - F_3 \cos 60° + F_4 \cos 0°$$

$\Sigma Fy =$

$$\Sigma Fz = F_1 \text{ sen } 30° - F_2 \text{ sen } 30° + F_3 \text{ sen } 60° + F_4 \text{ sen } 0°$$

$\Sigma Fz =$

por tanto

$R =$

$\tan \theta y =$ θy

$\Sigma Fy = 31.83$ ton $R = 39.95$ ton

$\Sigma Fz = 24.15$ ton $\tan \theta y = 0.759$, $\theta y = 37.19°$

Ahora, obtengamos la distancia Y.

$$M_o = \Sigma(Fz \cdot Y) - \Sigma(Fy.Z)$$

$$\Sigma(Fz \cdot Y) = (15)(-3)+(-12.5)(4)+(21.65)(6)+0 = 34.9 \text{ ton-m}$$

$$\Sigma(Fy.Z) =$$

$$M_o =$$

por último

$$Y =$$

$$\Sigma\ (Fy.Z) = 162.01 \text{ ton-m}$$

$$M_o = -127.11 \text{ ton-m}$$

$$Y = -5.263 \text{ m}$$

Dibuja la resultante en la figura. Su línea de acción corta el eje y al punto (-5.263,0), y como ΣFy y ΣFz son positivos, el sentido de la resultante es hacia la ___________ y hacia ___________.

---

derecha, arriba

Comprueba el último resultado con la convención del tornillo de rosca derecha.

Caso b)

Si R = 0, $\overline{R}$ = 0

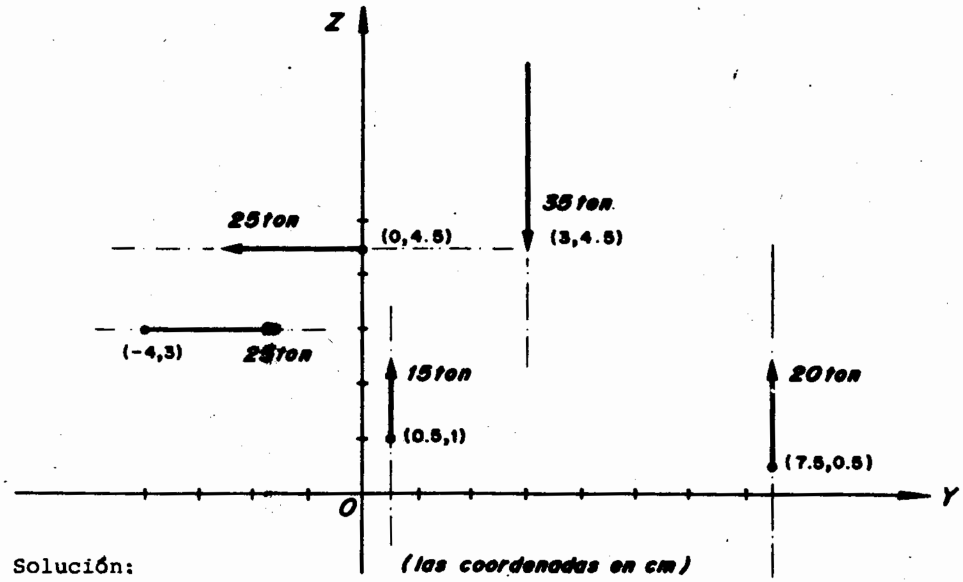
Por tanto, la <u>resultante</u> es un ______________, igual a ΣM respecto a un punto cualquiera.

---

par $\overline{P}$

Ejemplo.-

Obtener la <u>resultante</u> del siguiente sistema de fuerzas.



Solución:

$\Sigma Fy = 25-25 = 0$

$\Sigma Fz = 15-35+20 = 0$

$\overline{R} = 0$

$\Sigma M_o = -(25)\ (3) + (15)(0.5) +$ ____________________________

$\Sigma M_o =$

$(25)(4.5)-(35)\ (3) + (20)\ (7.5)\quad \Sigma M_o = 90$ ton-cm

---

Ejercicio.-

Comprueba el resultado del ejemplo anterior obteniendo la suma de momentos de las fuerzas respecto a cualquier punto que escojas.

Pasa a la página siguiente

EXAMEN

1) ¿De qué se compone un sistema de fuerzas espaciales concurrentes?

2) ¿De qué se compone un sistema de fuerzas espaciales paralelas?

3) ¿De qué se compone un sistema de fuerzas espaciales ni concurrentes ni paralelas?

4) Obtén la resultante del siguiente sistema de fuerzas espaciales concurrentes en el origen de un sistema trirrectangular derecho.

   F_1 = 20 ton, su línea de acción está contenida en el eje x.

   F_2 = 30 ton, su línea de acción está contenida en el eje y.

   F_3 = 10 ton, su línea de acción está contenida en el eje z.

5) Obtén la resultante del siguiente sistema de fuerzas espaciales paralelas

   Sus respectivas líneas de acción cortan el plano X-Y, en:

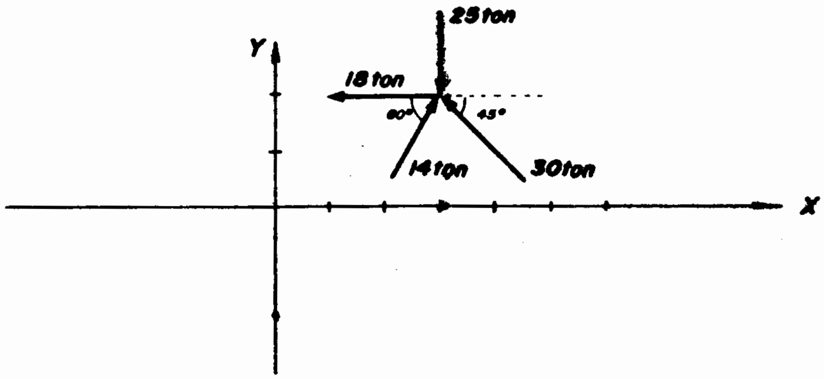
F_1 = -20 ton	(-2,-2,0)
F_2 = -20 ton	(2,2,0)
F_3 = -20 ton	(-2,2,0)
F_4 = -20 ton	(2,-2,0)
F_5 = 80 ton	(0,0,0)

6) Obtén la resultante del siguiente sistema de fuerzas espaciales ni concurrentes ni paralelas

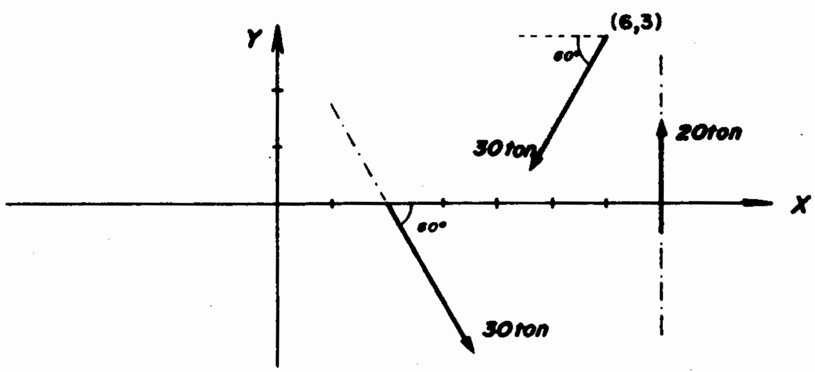
F_1 = 100 ton	A_1 (0,0,0) cm	A_2 (0,4,0) cm
F_2 = 80 ton	B_1 (0,0,0) cm	B_2 (0,0,3) cm
F_3 = 80 ton	C_1 (2,0,4) cm	C_2 (2,0,0) cm

Identifica a qué tipo de sistema de fuerzas pertenecen los siguientes y obtén la resultante. (Coordenadas en cm)

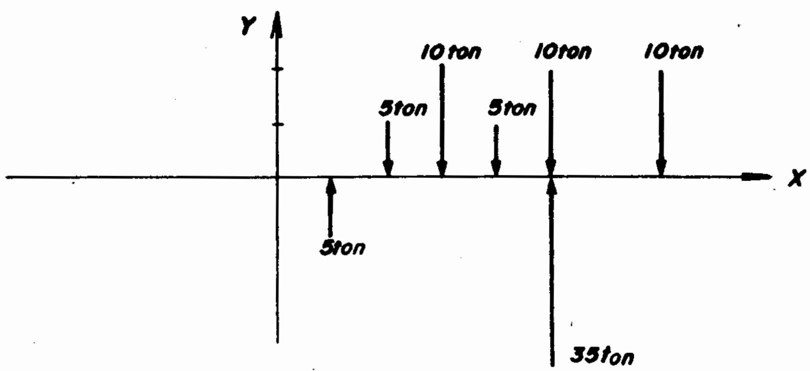
1.



2.



3.



Respuestas

1) Se compone de fuerzas que se cortan en un punto común llamado de concurrencia.

2) Se compone de fuerzas que se cortan en el infinito. Debe cumplir con la condición de que todas las fuerzas sean paralelas entre si.

3) Es el sistema más general, puesto que las fuerzas que lo componen no son todas concurrentes ni paralelas.

4) $\bar{R} = 20\ \bar{i} + 30\ \bar{j} + 10\ \bar{k}$; $R = 37.42$ ton

$\cos \theta x = 0.5345$

$\cos \theta y = 0.8017$

$\cos \theta z = 0.2672$

5) $\bar{R} = 0$

$\bar{P} = 0$

6) La resultante es el torsor:

$\bar{R} = o\bar{i} + 100\ \bar{j} + o\bar{k}$; $R = 100$ ton

$\bar{P} = o\bar{i} + 160\ \bar{j} + o\bar{k}$; $P = 160$ ton-cm

7) Concurrentes

$\bar{R} = -32.21\ \bar{j} + 8.34\ \bar{k}$; $R = 33.27$ ton

$\tan \theta = -0.2589$

$\theta = -14.51°$

8) Ni concurrentes ni paralelas

$\bar{R} = o\bar{j} - 31.96\ \bar{k}$; $R = 31.96$ ton

$\tan \theta = \dfrac{-31.96}{0}$

$\theta = -90°$

9) Paralelas

$\bar{R} = 0$

$\bar{P} = 0$

CAPITULO 3 INTRODUCCION AL ESTUDIO DEL EQUILIBRIO DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS EN EL ESPACIO.

Objetivos:

3.1 Deducirás las ecuaciones escalares que aseguran el equilibrio de un sistema de fuerzas espaciales

3.2 Identificarás estructuras isostáticas en el espacio

3.3 Calcularás las reacciones que obran en los apoyos de estructuras isostáticas tipo en el espacio

3.1 EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS ESPACIALES

Existe equilibrio en un sistema de fuerzas espaciales si su resultante NO es ni una fuerza $\overline{R}$ ni un par $\overline{P}$, esto es, que $\overline{R}$ y $\overline{P}$ sean vectores _________.

---

nulos

Por consiguiente, las condiciones necesarias y suficientes para que $\overline{R}$ y $\overline{P}$ sean vectores nulos son

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F} =$$

$$\overline{P} =$$

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F} = 0$$

$$\overline{P} = \Sigma\overline{M} = 0$$

Para un sistema de fuerzas espaciales concurrentes, se parte de nuestra primera condición vectorial de equilibrio.

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F} = 0$$

$$R_x\,\overline{i} + R_y\,\overline{j} + R_z\,\overline{k} = \Sigma F_x\,\overline{i} + \Sigma F_y\,\overline{j} + \Sigma F_z\,\overline{k} = 0$$

por tanto

$$R_x = \Sigma F_x = 0$$

$$R_y = \Sigma F_y = 0$$

$$R_z = \Sigma F_z = 0$$

donde los escalares R_x, R_y y R_z, que son los componentes del vector $\overline{R}$, deberán ser cero para cumplir la condición de _____________.

---

equilibrio

Entonces, para un sistema de fuerzas espaciales concurrentes, las ecuaciones escalares que aseguran el equilibrio son

---

$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma F_z = 0$

En el caso de tratar con un sistema de fuerzas espaciales paralelas y suponiendo que el eje Z de nuestro sistema de coordenadas cartesianas es paralelo al sistema de fuerzas, las condiciones necesarias y suficientes para que exista equilibrio son

$$\bar{R} = \Sigma F_z = 0$$

$$\text{y} \quad \bar{P} = \Sigma M_x \,\bar{i} + \Sigma M_y \,j = 0$$

esto es

$R =$

$M_{Fx} =$

$M_{Fy} =$

$R = \Sigma F_z = 0, \quad M_{Fx} = \Sigma M_x = 0, \quad M_{Fy} = \Sigma M_y = 0$

Recuerda que en un sistema de fuerzas espaciales paralelas si la resultante $\bar{R}$ es igual a cero, existe un par, $\bar{P}$, el cual deberá ser el vector ________ para cumplir con nuestras condiciones de ________ ________.

---

nulo, equilibrio

Por último, si el sistema de fuerzas espaciales no es concurrente ni paralelo, las condiciones que aseguran el equilibrio son

$$\bar{R} = \Sigma\bar{F} = 0$$

$$\bar{P} = \Sigma\bar{M} = 0$$

entonces

$R_x =$ $M_{Fx} =$

$R_y =$ $M_{Fy} =$

$R_z =$ $M_{Fz} =$

$R_x = \Sigma F_x = 0$ $M_{Fx} = \Sigma M_x = 0$

$R_y = \Sigma F_y = 0$ $M_{Fy} = \Sigma M_y = 0$

$R_z = \Sigma F_z = 0$ $M_{Fz} = \Sigma M_z = 0$

Esto es, las sumas de los componentes de las fuerzas y de los componentes de sus ____________ deben ser cero para que exista __________ ______

---

momentos, equilibrio

3.2 El estudio de la ESTATICA que implica estructuras que están en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas determina dos condiciones que deben satisfacer las diversas partes de esta, para que puedan actuar tales fuerzas:

1. La estructura NO DEBE MOVERSE, esto es, deben estar ligados sus elementos entre sí y con el suelo (a las ligas de la estructura con el suelo se les conoce con el nombre de APOYOS), de tal manera que sus posiciones resulten perfectamente definidas.

Esta condición nos dice que la estructura NO _______ _________.

DEBE MOVERSE

Esto es, sus elementos deben estar _________ entre sí y con el suelo (a las ligas de la estructura con el suelo se les conoce con el nombre de _________), de tal manera que sus posiciones resulten perfectamente ___________.

----

ligados, APOYOS, definidas

Por consiguiente, este sistema en _____________ está compuesto de fuerzas actuantes o CARGAS Y REACCIONES de los _______ de la estructura.

----

equilibrio, APOYOS

Para calcular las ___________ de los APOYOS de una estructura, estas deben satisfacer la condición de mantenerla en equilibrio cuando sustituyen a los APOYOS; esto es, las ___________ equilibran a las _________.

REACCIONES, REACCIONES, CARGAS

----

2. Todo cuerpo sólido se <u>deforma</u> bajo cualquier sistema de fuerzas. Sin embargo, si se toman en cuenta los materiales que se emplean en las estructuras, y suponiendo que las fuerzas no sean excesivas, las DEFORMACIONES son MUY PEQUEÑAS respecto a las <u>dimensiones</u> de la estructura, de modo que estas ___________ se alteran en forma casi insensible.

---

dimensiones

Entonces, hay que determinar ciertas <u>características</u> desconocidas de las ___________ de los _________ de las estructuras, para que las RESULTANTES de los diversos sistemas sean iguales a CERO.

REACCIONES, APOYOS

Por tanto, si en una estructura el número de características desconocidas de sus reacciones es IGUAL al número de ecuaciones escalares de _____________, existe un conjunto de reacciones que produce el equilibrio, y es UNICO.
A estas estructuras se les conoce como
ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS O ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

---

equilibrio

Si en una estructura el número de características _____________ de sus reacciones es MAYOR que el de las ecuaciones escalares de _____________ el problema es indeterminado. Estas estructuras se dice que son ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS O ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

---

desconocidas, equilibrio

Si en una estructura, el número de características ______________ de sus reacciones es <u>MENOR</u> que el de las ecuaciones escalares de ______________, el problema es generalmente imposible. Como no existe un conjunto de reacciones capaz de equilibrar las cargas, la estructura es INESTABLE.

----

desconocidas, equilibrio

Nuestro estudio lo reduciremos a los casos en que las ecuaciones escalares de ______________ basten para determinar <u>ciertas</u> <u>carac-terísticas</u> desconocidas de las REACCIONES que aparecen en los ____ ______ de la estructura por efecto de las fuerzas aplicadas, esto es, las ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS O ESTRUCTURAS ______ ________.

----

equilibrio, APOYOS, ISOSTATICAS

Esas incógnitas o características ______________ pueden calcularse si su número no es mayor ni __________ que el de las ______________ ______________ de equilibrio del sistema de fuerzas estudiado.

----

desconocidas, menor, ecuaciones escalares

Por consiguiente, un cuerpo (usualmente una viga) que forma parte de una estructura isostática, debe estar unido de modo estrictamente suficiente con el suelo o con las otras partes para impedir cualquier ______________ (con excepción de sus deformaciones).

----

movimiento

Los apoyos se distinguen por el número de ______________ que puedan impedir.

----

movimientos

Por tanto, una estructura es ISOSTATICA si las reacciones de sus __________ dependen de SEIS características ______________ en un sistema espacial.

APOYOS, desconocidas

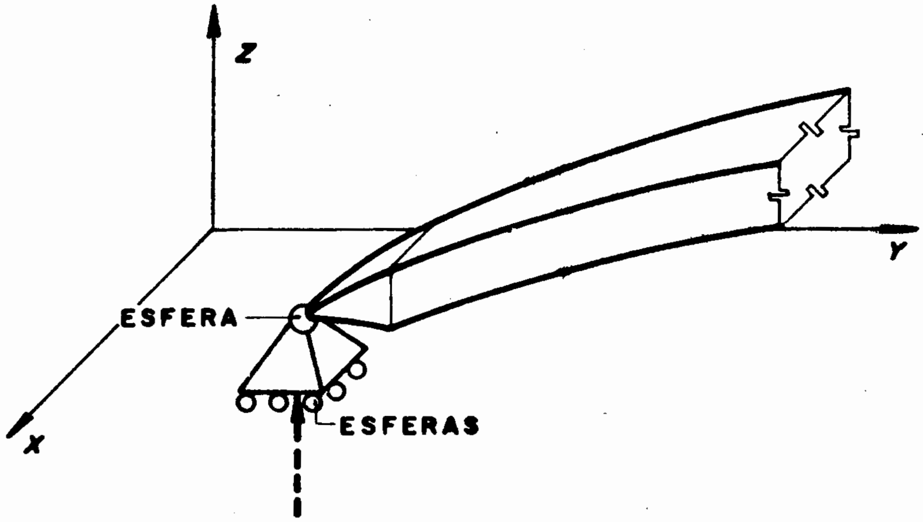
Como existen __________ movimientos posibles, puede haber numerosas combinaciones de impedir estos.

Sin embargo, para fines prácticos, los apoyos se reducen a los tipos siguientes

----

seis

APOYO DESLIZANTE SOBRE UN PLANO



Este tipo de apoyo impide únicamente la traslación normal a su plano de liga; por consiguiente, la REACCION, que se compone de una fuerza, actúa __________ a ese plano.

Se considera que el apoyo no se levanta del plano; esto es, el sentido de la REACCION puede ser hacia arriba o hacia __________.

---

normal, abajo

En general, si los sentidos de los componentes de la REACCION de un apoyo son evidentes a simple vista, puede mostrarse con el sentido propio. Si no es evidente, puede suponerse cualquiera de los dos ____________ posibles y, si al obtener el valor del componente su signo es POSITIVO, el sentido es como se ____________; si el signo es negativo, el sentido es ____________ a que se ____________.

---

sentidos, supuso, opuesto, supuso

Lo anterior es consecuencia del ______________ de la estructura.

----

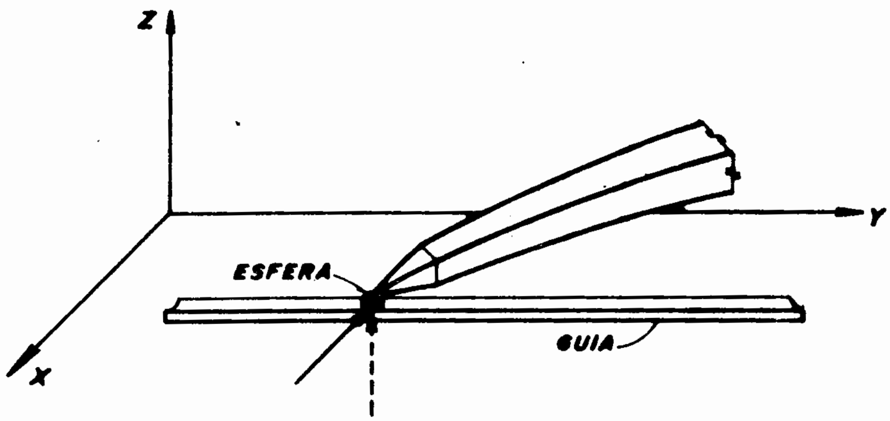
equilibrio

Entonces, de la REACCION de un apoyo deslizante sobre un plano se conoce su dirección, se supone su ____________ y queda la _______ _____ como su única característica ________________.

----

sentido, intensidad, desconocida

APOYO DESLIZANTE SOBRE UNA GUIA

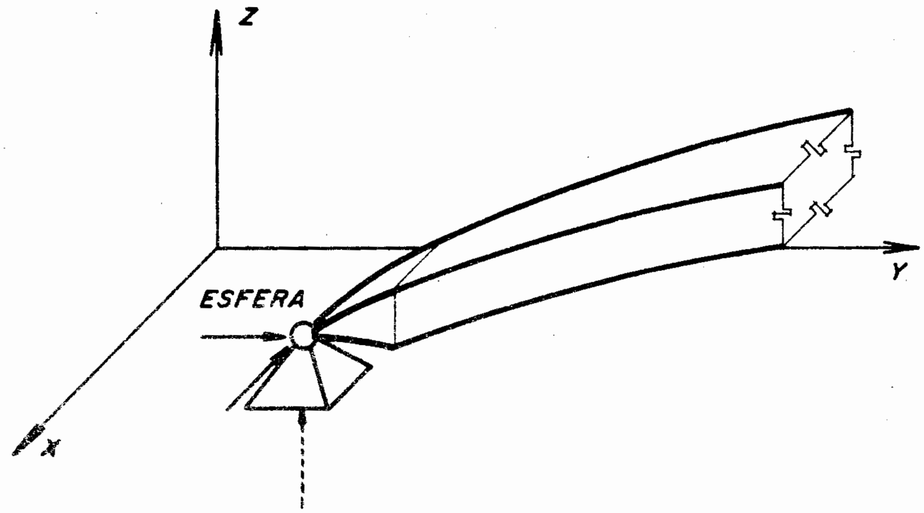


Impide las dos traslaciones perpendiculares a la __________. Su REACCION está contenida en un plano normal a esta como resultante de la suma vectorial de sus ____ componentes. Por tanto, se conocen las direcciones de los componentes, se suponen sus sentidos y quedan como características desconocidas sus ___________.

----

guía, dos, intensidades

ARTICULACION ESFERICA



Impide las ________ traslaciones. Su reacción se trasmite a través de la articulación esférica.

Es conveniente, por lo general, representar la reacción por medio de sus tres componentes paralelos a los ejes coordenados; entonces se conoce la dirección de cada componente, se suponen los sentidos y quedan como características desconocidas sus ______________.

---

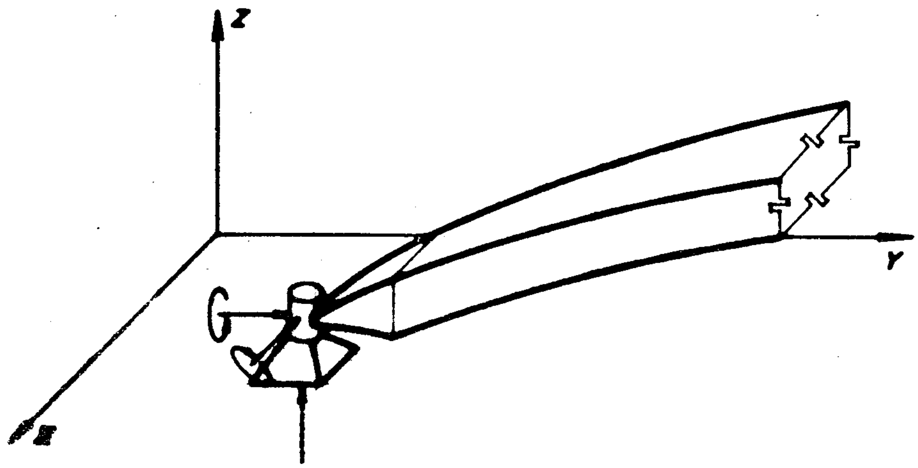
tres, intensidades

Entonces, se conoce la ____________ de cada componente, se __________ los sentidos y quedan como características ______________ sus ______________.

---

dirección, suponen, desconocidas, intensidades

ARTICULACION CILINDRICA



Impide las tres traslaciones y dos rotaciones. Solo permite la rotación alrededor de un eje normal a la base del cilindro.

Por tanto, la reacción depende de las cinco ____________ de sus componentes.

---

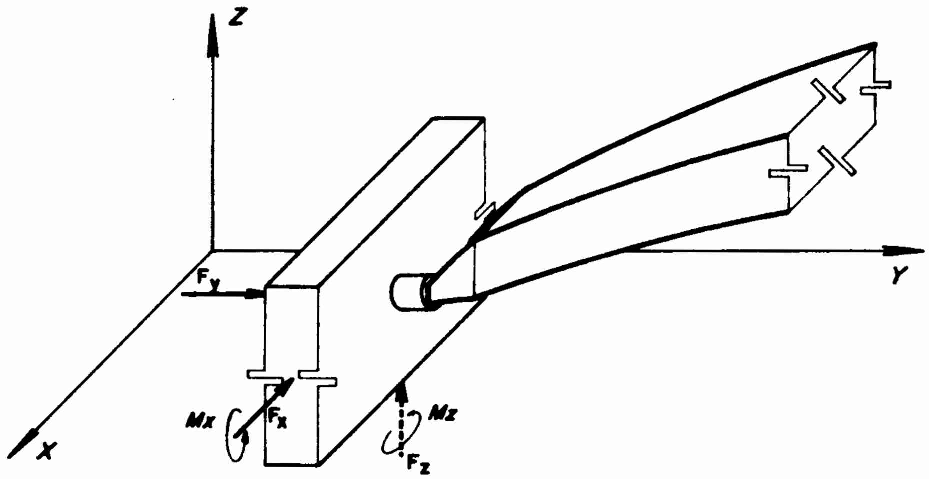
intensidades

Esto es, conoces la __________ de cada componente, ________ los sentidos y quedan como características ____________ sus ____________.

---

dirección, supones, desconocidas, intensidades

EMPOTRAMIENTO GIRATORIO



Impide las tres ____________ y dos rotaciones, únicamente permite la rotación alrededor de un eje normal al empotramiento.

Su reacción depende de las _______ ____________ de sus componentes.

---

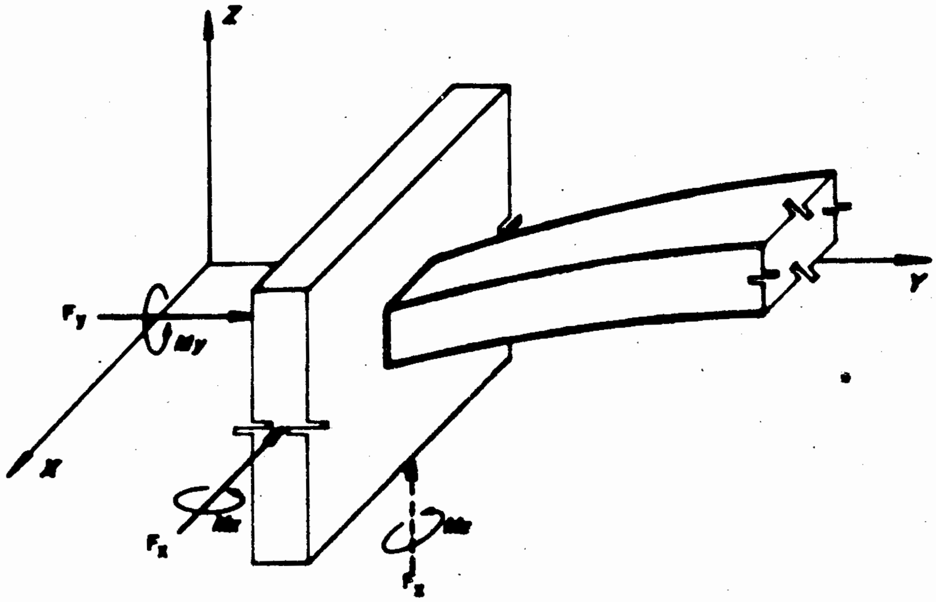
traslaciones, cinco intensidades

Entonces, __________ la dirección de cada componente, supones los __________ y quedan como características desconocidas sus ____________.

---

conoces, sentidos, intensidades

EMPOTRAMIENTO COMPLETO



Impide todo ______________.

Su reacción depende de ________ características ______________,

las cuales son las ______________ de sus componentes.

---

movimeinto, seis, desconocidas, intensidades

Este tipo de apoyo __________ todo movimiento, esto es, el APOYO es estrictamente suficiente para que una estructura no se __________.

---

impide, mueva

ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

Como ya se dijo, una estructura con apoyos estrictamente suficientes(isostática) no puede MOVERSE y está en equilibrio bajo cualquier sistema de cargas.

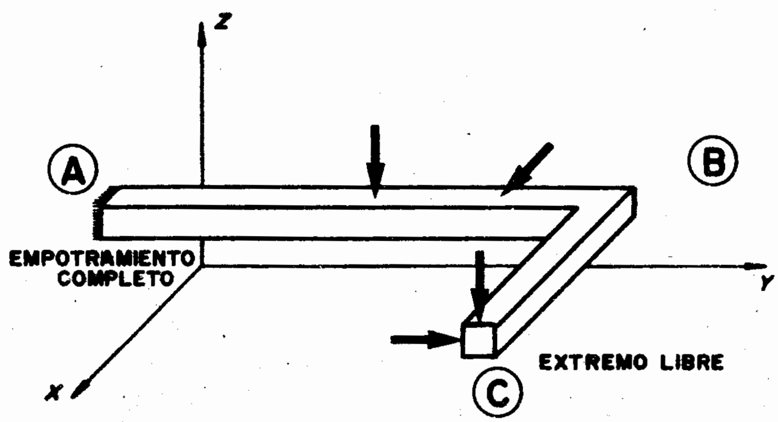
Por consiguiente, una estructura en el espacio es isostática si el apoyo o una combinación de apoyos hacen posible que la estructura no se _________.

---

mueva

Un ejemplo muy sencillo es el caso siguiente.

Observa la figura



En este caso, se observa que el marco no puede moverse por más arbitrario que sea el sistema de cargas, puesto que el extremo A está empotrado. Por consiguiente, están restringidos los seis _____ ________ posibles en ese extremo, cumpliéndose así el ____________

---

movimientos, equilibrio

Observemos ante todo, que una estructura con apoyos estrictamente suficientes (ISOSTATICA) no puede ___________ y está en ________ ______ bajo cualquier sistema de cargas que son, por consiguiente, totalmente arbitrarias.

----

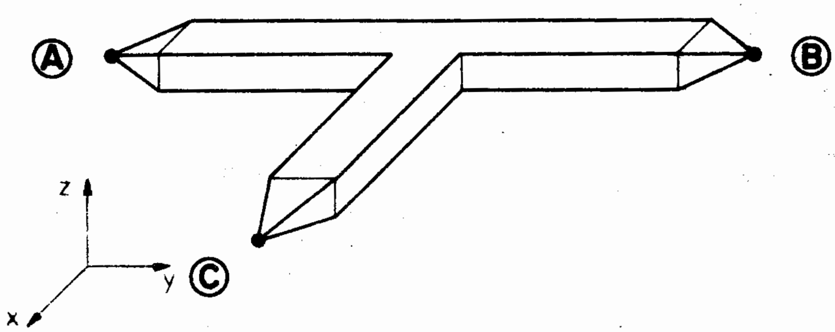
moverse, equilibrio

Por tanto, dada una estructura ISOSTATICA cargada arbitrariamente, y sustituyendo sus APOYOS por las REACCIONES desconocidas, estas deben satisfacer la condición de no permitir el _____________, es decir, han de estar en _____________.

----

movimiento, equilibrio

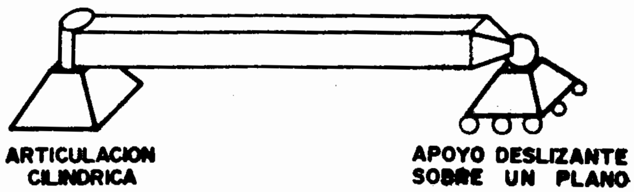
La siguiente figura representa una estructura en el espacio, impide sus SEIS movimientos empleando una articulación esférica y apoyos deslizantes en los puntos A, B y C.



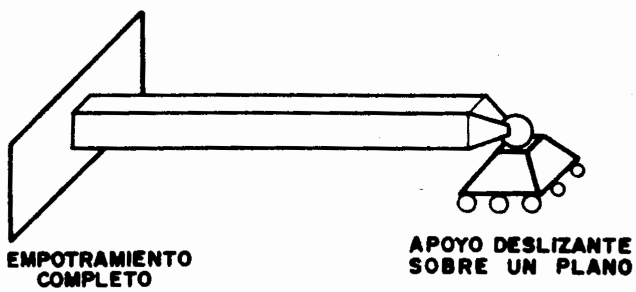
Para impedir los SEIS movimientos se deben usar, por ejemplo, una articulación esférica en el punto A, dos apoyos deslizantes en B y C sobre el plano X-Y, y un apoyo deslizante en B o en C sobre el plano Y-Z o X-Z, o alguna combinación semejante.

Explica, brevemente, a qué casos pertenecen las siguientes estructuras (vigas).

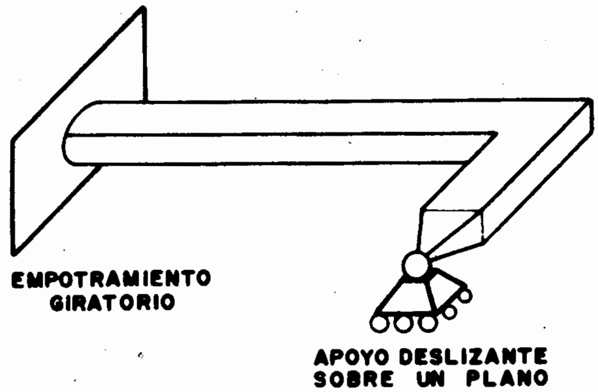
1)



2)



3)



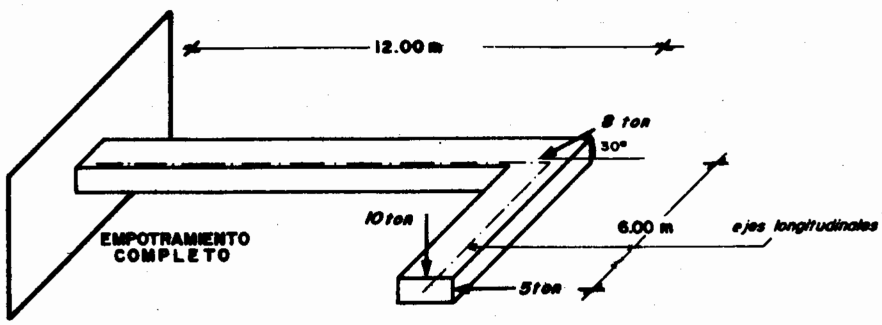
La estructura representada en la fig 1 es inestable, ya que el apoyo deslizante sobre ese plano no impide el movimiento alrededor del eje del cilindro de esa articulación.

La estructura representada en la fig 2 es estáticamente indeterminada, puesto que aunque impide los seis movimientos posibles, las características desconocidas de las reacciones de los apoyos son siete.

La única estructura ISOSTATICA es la representada en la fig 3.

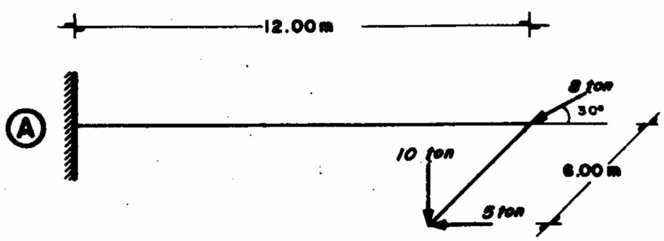
3.3 Ejemplo.-

Calcula el valor de las reacciones en el apoyo de la siguiente estructura.



Solución:

Es conveniente representar a la estructura por medio de sus ejes longitudinales y, el empotramiento completo, de la siguiente forma:



Como primer paso, comprueba que la estructura sea isostática (observa la figura).

Recuerda tus ecuaciones escalares de equilibrio y escríbelas.

$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_y = 0$

$\Sigma M_z = 0$ $\Sigma M_z = 0$

Ordena tu sistema de ecuaciones asignando sentido positivo a los componentes de las reacciones.

$\Sigma F_x =$

$\Sigma F_y =$

$\Sigma F_z =$

Recuerda la convención del tornillo de rosca derecha para asignar el sentido del vector que representa el momento de una fuerza. Completa el sistema de ecuaciones.

$\Sigma F_x = F_{Ax} = 0$

$\Sigma F_y = F_{Ay} - 5 - 8 \cos 30° = 0$

$\Sigma F_z = F_{Az} - 10 = 0$

$\Sigma M_x = M_{Ax} - 10\ (12) - 8 \text{ sen } 30°(12) = 0$

$\Sigma M_y = M_{Ay} + 10(6) = 0$

$\Sigma M_z = M_{Az} - 5\ (6) = 0$

Despeja tus incógnitas.

F_{Ax} =

F_{Ay} =

F_{Az} =

M_{Ax} =

M_{Ay} =

M_{Az} =

$F_{Ax} = 0$

$F_{Ay} = 11.33$ ton

$F_{Az} = 14.0$ ton

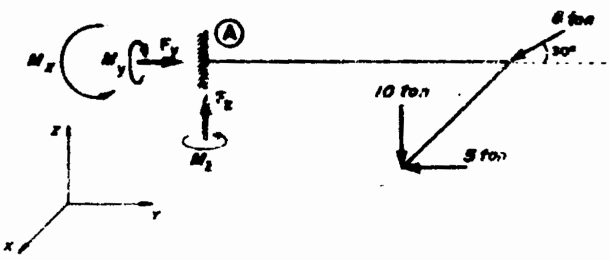
$M_{Ax} = 168$ ton-m

$M_{Ay} = -60$ ton-m

$M_{Az} = 30$ ton-m

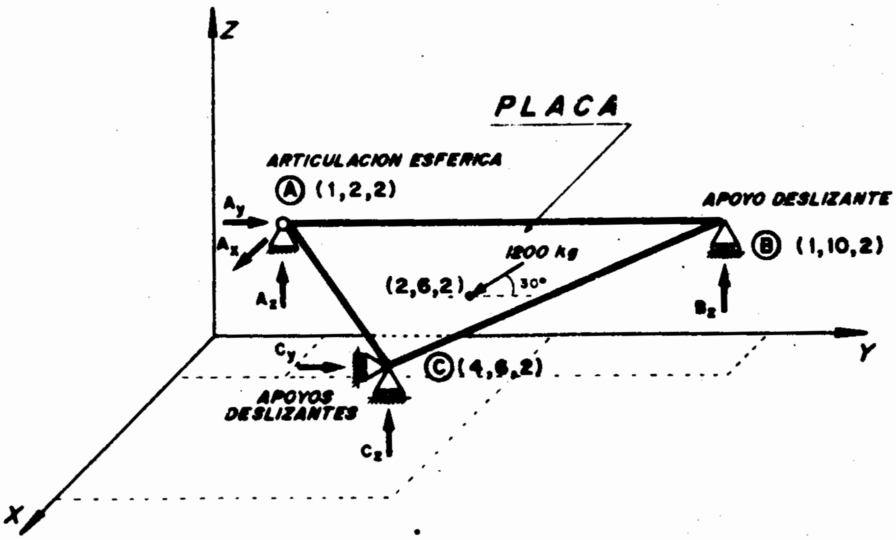
El signo de M_{Ay} resultó negativo, por tanto, en lugar de girar alrededor del eje Y en el sentido que se supuso, gira en sentido contrario, esto es, del eje X al eje Z.

Por consiguiente, nuestras reacciones quedan:



Ejemplo.-

Calcula las reacciones en los apoyos de la siguiente placa, (emplea la convención del tornillo de rosca derecha).



La fuerza de 1200 kg está contenida en un plano paralelo al plano Y-Z.

Las coordenadas en cm

Solución:

$\Sigma F_x = 0;$ $\quad A_x + 0 = 0$

$\Sigma F_y = 0;$ $\quad A_y + C_y - 1200 \cos 30° = 0$

$\Sigma F_z = 0;$ $\quad A_z + B_z + C_z - 1200 \text{ sen } 30° = 0$

Completa el sistema de ecuaciones

$\Sigma M_x = 0, \; -A_y(2)-C_y(2)+A_z(2)+B_z(10)+C_z(6)+1200\cos 30°(2)-1200\,\text{sen}\,30°(6)=0$

$\Sigma M_y = 0, \; A_x(2)-A_z(1)-B_z(1)-C_z(4)+1200\ \text{sen}\ 30°(2) = 0$

$\Sigma M_z = 0, \; -A_x(2)+A_y(1)+C_y(4)-1200\ \cos\ 30°(2) = 0$

Ordena tu sistema de ecuaciones.

$A_x = 0$

$A_y + C_y = 1039.23$

$A_z + B_z + C_z = 600$

$-2A_y - 2C_y + 2A_z + 10B_z + 6C_z = 1521.54$

$-A_z - B_z - 4C_z = -1200$

$A_y + 4C_y = 2078.46$

Resuelve el sistema de ecuaciones

$A_x = 0$

$A_y = 692.82$ kg

$A_z = 200.00$ kg

$B_z = 200.00$ kg

$C_y = 346.41$ kg

$C_z = 200.00$ kg

Se complicó un poco el ejercicio anterior por tener nuestro sistema de referencia fuera de la placa. ¿Qué pasará si trasladas el sistema de referencia hasta que el origen coincida con la articulación esférica?

Házlo y establece nuevamente tu sistema de ecuaciones.

(Cuidado con las coordenadas de los puntos)

$\Sigma F_x = 0, \qquad A_x + 0 = 0$

$\Sigma F_y = 0, \qquad A_y + C_y - 1200 \cos 30° = 0$

$\Sigma F_z = 0, \qquad A_z + B_z + C_z - 1200 \text{ sen } 30° = 0$

$\Sigma M_x = 0, \qquad C_z (4) + B_z(8) - 1200 \text{ sen } 30°(4) = 0$

$\Sigma M_y = 0, \qquad -C_z (3) + 1200 \text{ sen } 30°(1) = 0$

$\Sigma M_z = 0, \qquad C_y (3) - 1200 \cos 30°(1) = 0$

Si se usa adecuadamente el sistema de referencia como en el ejemplo anterior, el planteamiento de las ecuaciones de suma de momentos se facilita notablemente, ya que si el origen de ese sistema está contenido en la articulación esférica, las tres fuerzas que componen su reacción no producen ___________.

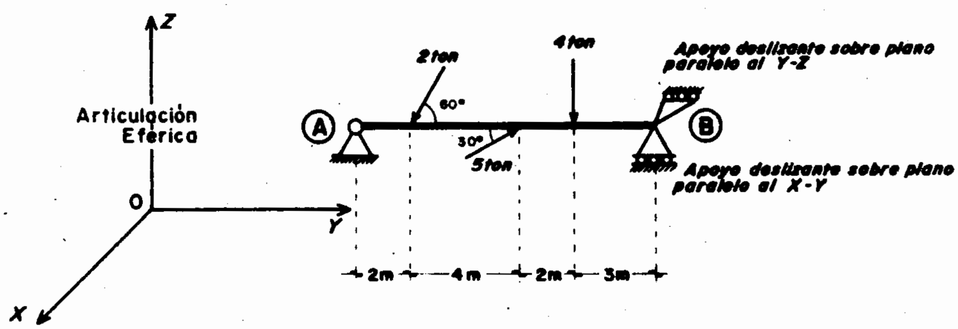
---

momento

En algunos casos particulares, las características desconocidas de las reacciones en una estructura, son menos de ________.

En el caso frecuente de una viga de eje recto a la cual se le aplica un sistema de fuerzas, este debe cumplir que las fuerzas que lo componen corten el eje de la ________.

Observa la figura



---

seis, viga

Por consiguiente, en este caso, para que la viga esté en equilibrio, el número de movimientos que se deben impedir es de ________.

---

cinco

Ahora, si hacemos coincidir el origen con el punto A y el eje de la viga con el eje Y de nuestro sistema de referencia, las ecuaciones de equilibrio serán

---

$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_z = 0$

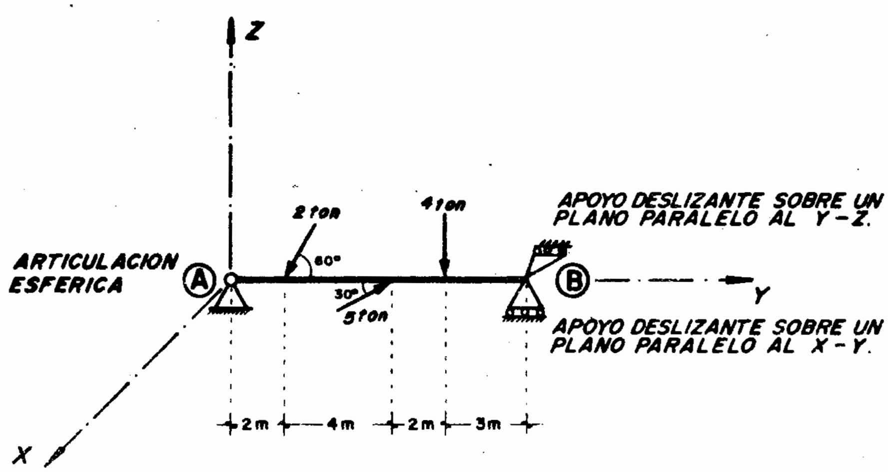
Entonces, el número de características ____________ de las reacciones en los apoyos de la viga es de ________.

---

desconocidas, cinco

Ejemplo.-

Obtener las reacciones de la siguiente viga.



Solución:

La articulación esférica está contenida en el origen. Los apoyos deslizantes están sobre planos paralelos a los planos X-Y y Y-Z, respectivamente.

Las fuerzas de 2 y 4 ton están contenidas en el plano Y-Z, cortando al eje y.

La fuerza de 5 ton está contenida en el plano X-Y, cortando al eje ____.

Entonces, si todas las fuerzas del sistema cortan al eje Y, el movimiento alrededor de este eje no ________.

Y, existe

Establece tu sistema de ecuaciones.

Considera tus reacciones con sentido POSITIVO.

Recuerda la convención del tornillo de rosca derecha.

$\Sigma F_x = 0; \qquad A_x + B_x - 5 \text{ sen } 30° = 0$

$\Sigma F_y = 0; \qquad A_y + 5 \cos 30° - 2 \cos 60° = 0$

$\Sigma F_z = 0; \qquad A_z + B_z - 2 \text{ sen } 60° - 4 = 0$

$\Sigma M_x = 0; \qquad B_z (11) - 4(8) - 2 \text{ sen } 60°(2) = 0$

$\Sigma M_z = 0; \qquad -B_x (11) + 5 \text{ sen } 30°(6) = 0$

Resuelve el sistema de ecuaciones.

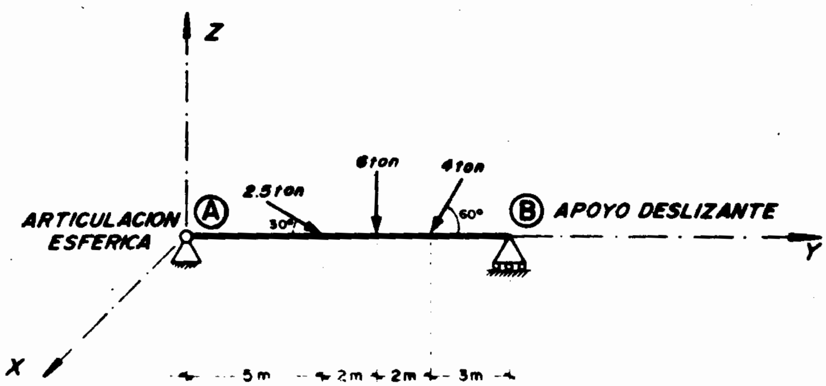
A_x = 1.136 ton B_x = 1.364 ton

A_y = 3.33 ton (con sentido opuesto al que se supuso).

A_z = 2.508 ton B_z = 3.224 ton

Ahora, consideremos el caso particular de una viga de eje recto en que el sistema de fuerzas esté contenido en el plano Y-Z y que la sección de la viga sea simétrica respecto a los ejes X y Z

Observa la figura



Entonces, como las fuerzas están contenidas en el plano Y-Z, el número de movimientos que debes impedir para que la viga cumpla el equilibrio es de ________.

---

tres

Por tanto, escogiendo el punto A, el conjunto de ecuaciones escalares que aseguran el equilibrio en este caso particular, es:

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_z = 0$

$\Sigma M_A = 0$, suma de momentos de las fuerzas respecto al punto A

Recuerda que la suma de momentos de las fuerzas en este caso debe ser cero respecto a cualquier punto del plano Y-Z como condición de equilibrio.

Se escogió el punto A para facilitar el establecimiento de nuestro sistema de ecuaciones. Hay otro punto que lo facilita de la misma forma.

Regresa a la página anterior, observa la figura y señala este otro punto.

El punto B

Comentario:

El caso anterior es el caso general de equilibrio de vigas en el plano.

Si en la viga de la pág 3-29 aplicamos a un sistema de cargas paralelas al eje Z, nuestras ecuaciones que aseguran el equilibrio se reducen a ________.

---

dos

De los siguientes conjuntos de ecuaciones, señala los que aseguran el equilibrio de la viga en este caso particular.

$\Sigma M_A = 0$	$\Sigma M_A = 0$	$\Sigma M_B = 0$	$\Sigma M_B = 0$	$\Sigma M_B = 0$
$\Sigma M_B = 0$	$\Sigma F_z = 0$	$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma F_z = 0$

↑	↑			↑

EXAMEN

1. Para un sistema de fuerzas espaciales concurrentes, las ecuaciones que aseguran el equilibrio son:

2. Para un sistema de fuerzas espaciales paralelas, las ecuaciones que aseguran el equilibrio son:

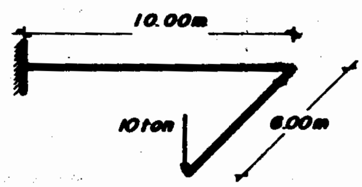
3. Para un sistema de fuerzas espaciales ni concurrentes ni paralelas, las ecuaciones que aseguran el equilibrio son:

4. Si en una estructura el número de características desconocidas de sus reacciones es igual al número de ecuaciones escalares de equilibrio, existe un conjunto de reacciones que produce el equilibrio, y es __________. A estas estructuras se les conoce como

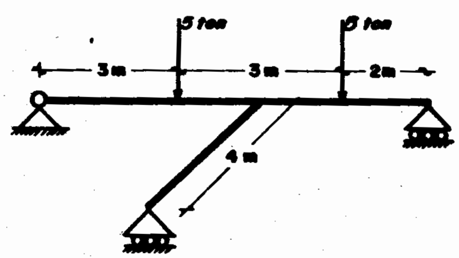
3-34

Identifica las siguientes estructuras y obtén reacciones de las isostáticas.

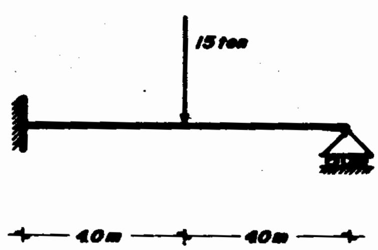
a)



b)



c)



Respuestas

1. $\Sigma Fx = 0$

   $\Sigma Fy = 0$

   $\Sigma Fz = 0$

2. $\Sigma Fz = 0$

   $\Sigma Mx = 0$

   $\Sigma My = 0$

3. $\Sigma Fx = 0$ $\quad$ $\Sigma Mx = 0$

   $\Sigma Fy = 0$ $\quad$ $\Sigma My = 0$

   $\Sigma Fz = 0$ $\quad$ $\Sigma Mz = 0$

4. UNICO

   ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

a) Isostática $\quad$ Mx =

   Rx = 0 $\quad$ Mx = 100 ton-m

   Ry = 0 $\quad$ My =-60 ton-m

   Rz = 10 ton $\quad$ Mz = 0

b) Inestable

c) Hiperestática

CAPITULO 4. EQUILIBRIO DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS EN EL PLANO.

Objetivos:

4.1 Deducirás las ecuaciones escalares que aseguran el equilibrio de un sistema de fuerzas en el plano

4.2 Identificarás las estructuras isostáticas en el plano en función de sus apoyos

4.3 Calcularás las fuerzas que obran en los apoyos de estructuras isostáticas en el plano, bajo la acción de diferentes tipos de carga

Existe equilibrio en un sistema de fuerzas en el plano, si su resultante no es ni una ________ ____ ni un ________ ____; esto es, si $\overline{R}$ y $\overline{P}$ son vectores __________.

---

fuerza $\overline{R}$, par $\overline{P}$, nulos

Por consiguiente, las condiciones vectoriales necesarias y suficientes para que $\overline{R}$ y $\overline{P}$ sean vectores nulos, son

$\overline{R}$ =

$\overline{P}$ =

$\overline{R} = \Sigma\overline{F} = 0$

$\overline{P} = \Sigma\overline{M} = 0$

En este capítulo, como en el anterior aprenderás a determinar ciertas características desconocidas de las reacciones de los apoyos de la estructura, de los diversos sistemas para cumplir con nuestras ecuaciones escalares de ______________.

---

equilibrio

Para un sistema de fuerzas concurrentes en el plano, se asegura el equilibrio, si

$$R = \Sigma\ \overline{F} = 0$$

$$Ry\ \overline{j} + Rz\ \overline{k} = \Sigma Fy\ \overline{j} + \Sigma Fz\ \overline{k} = 0$$

por tanto

$$Ry = \Sigma\ Fy =$$

y $$Rz = \Sigma\ Fz =$$

Como los componentes del vector $\overline{R}$ son nulos, el sistema se encuentra en ____________.

$$Ry = \Sigma\ Fy = 0$$

$Rz = \Sigma\ Fz = 0$, equilibrio

Entonces, para que en un sistema de fuerzas concurrentes en el plano exista equilibrio, las ecuaciones escalares que lo aseguran son:

$\Sigma Fy = 0, \quad \Sigma F_z = 0$

Si el sistema de fuerzas es paralelo y lo suponemos paralelo al eje Z de nuestro sistema de coordenadas cartesianas, las condiciones necesarias y suficientes para que exista equilibrio, son

$$\overline{R} = \Sigma\ F_z = 0$$

$$\overline{P} = \Sigma\ M = 0$$

donde Σ M es la suma de momentos de las fuerzas respecto a un punto cualquiera del __________.

---

plano

En este caso, si la resultante $\overline{R}$ es igual a cero, debes asegurar que también el par $\overline{P}$ sea cero para cumplir con el ______________.

---

equilibrio

Por último, si el sistema de fuerzas no es concurrente ni paralelo, el equilibrio existe si

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F} = 0$$

$$\overline{P} = \Sigma\overline{M} = 0$$

entonces

$$R_y =$$

$$R_z =$$

$$M =$$

$R_y = \Sigma\, F_y = 0$

$R_z = \Sigma\, F_z = 0$

$M = \Sigma\, M = 0$

Esto es, las SUMAS de los componentes de las fuerzas y la SUMA de sus ______________ respecto a un punto cualquiera del plano, deben ser ______________ para que exista ______________

---

momentos, cero, equilibrio

Entonces, si en una estructura en el plano, el número de caracte rísticas desconocidas de sus reacciones es IGUAL al número de ecuaciones escalares de equilibrio, existe un conjunto de reacciones que lo produce y es ________. A estas estructuras se les conoce como

ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS O ESTRUCTURAS____________

UNICO, ISOSTATICAS

Si en una estructura el número de características desconocidas de sus reacciones es MAYOR que el de las ecuaciones escalares de ____________, el problema es indeterminado.

Estas estructuras son; ESTATICAMENTE ______________ O ESTRUCTURAS ______________

---

equilibrio, INDETERMINADAS, HIPERESTATICAS

Por último, si en una estructura el número de ________________ _____________ de sus reacciones es MENOR que el de las ecuaciones escalares de equilibrio, el equilibrio es generalmente imposible.

Estas estructuras son ___________.

---

características desconocidas, INESTABLES

TIPOS DE APOYO Y SUS REACCIONES

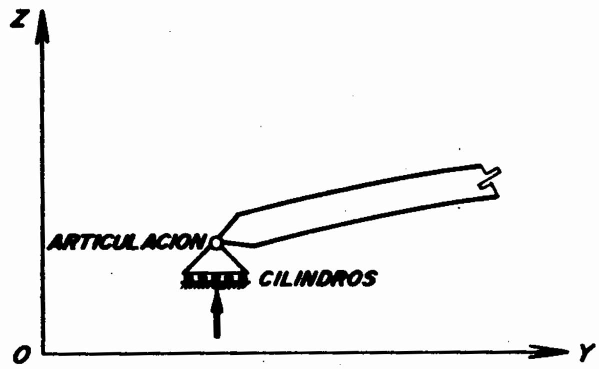
Los apoyos que se usan para impedir los TRES ____________ posibles en el plano, para fines prácticos, se reducen a los tipos siguientes.

---

movimientos

APOYO SIMPLE

Observa la figura



Este tipo de apoyo impide únicamente la traslación en la dirección Z.

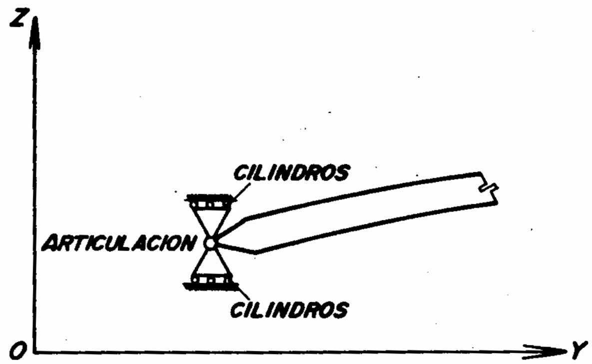
Por consiguiente, la reacción actúa paralela a esta dirección, siendo su única característica desconocida, la ____________.

---

intensidad

En rigor, este tipo de apoyo se debería representar de la siguiente forma.

Observa la figura



Se sigue impidiendo únicamente la ___________ en la dirección Z.

---

traslación

Por tanto, la reacción actúa paralela a la dirección Z, y suponiendo su sentido POSITIVO, queda como única característica desconocida la _____________.

---

intensidad

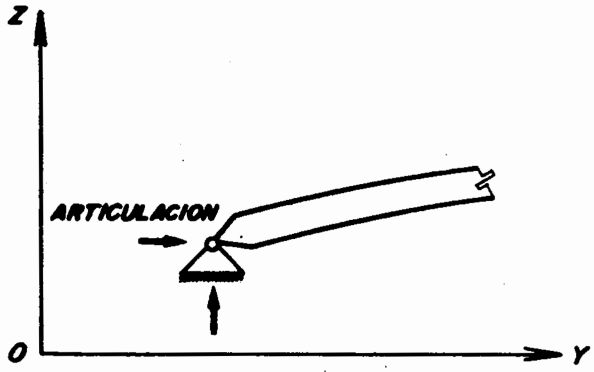
Si al obtener el valor de la reacción, su signo es positivo, el sentido es como se supuso. Si el signo es negativo, el sentido es el ___________.

---

opuesto

ARTICULACION FIJA

Observa la figura



Impide las dos ______________ en el plano Y-Z

Su reacción está contenida en este plano como la resultante de la suma vectorial de sus ____________.

Por tanto, la reacción, en función de sus componentes, se determina si se conocen las ______________ de estos.

---

traslaciones, componentes, intensidades

Los sentidos de los componentes se suponen ____________.

---

positivos

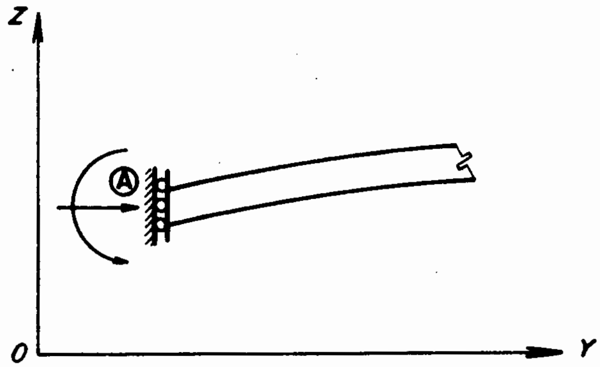
Si al obtener los valores de los componentes de la reacción, sus signos son ____________, los ____________ son como se supuso. Si el signo es ____________ el sentido es el ________.

---

positivos, sentidos, negativo, opuesto

EMPOTRAMIENTO DESLIZANTE

Observa la figura



Impide la traslación en la dirección del eje y; también impide la

__________ alrededor del punto A.

Su reacción depende de una fuerza paralela a la dirección Y; y un

_____________ alrededor del punto A.

---

rotación, momento

Entonces, la reacción en este apoyo se obtiene si se conocen las

_______________ de la fuerza y del momento.

---

intensidades

Recuerda que los sentidos se suponen POSITIVOS.

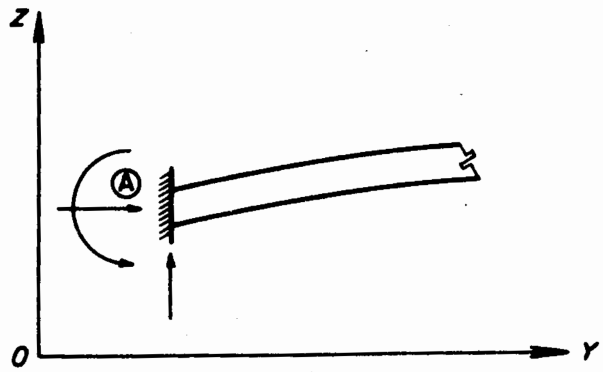
Según la convención del tornillo de rosca derecha, el momento es

positivo si gira de ____ a ____.

Y, Z

EMPOTRAMIENTO COMPLETO

Observa la figura



Impide los tres _____________ posibles en el plano, los cuales son: dos _____________ y un _________ alrededor del punto A.

---

movimientos, traslaciones, giro

Su reacción está compuesta de una fuerza resultante, función de sus _____________, y un _____________ alrededor del punto A.

---

componentes, momento

Si suponemos sus sentidos POSITIVOS, quedan como características desconocidas sus _____________.

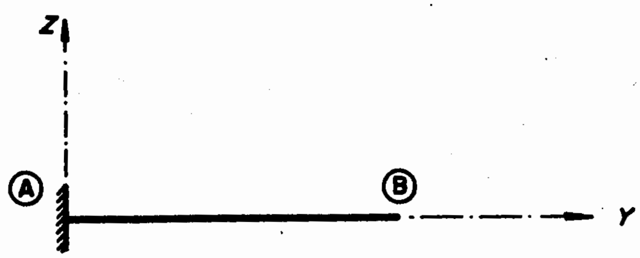
---

intensidades

EJEMPLOS DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS EN EL PLANO

Convendremos en representar las estructuras por medio de sus ejes longitudinales.

El caso más sencillo es una viga de eje recto, el cuál está contenido en el eje Y de nuestro sistema de coordenadas cartesianas, empotrada en uno de sus extremos.



La estructura es isostática, puesto que el empotramiento impide los ________ ______________ posibles en el plano.

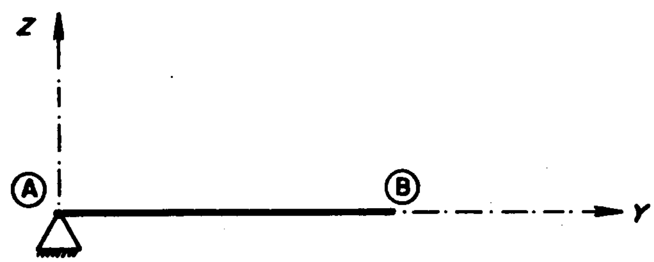
---

tres movimientos

Comentario:

a este tipo de estructura isostática se le conoce con el nombre de viga en voladizo o CANTILIVER.

Ahora, si tratamos de hacer isostática una viga con una articulación fija, es preciso ayudarla con un apoyo simple.
Observa la figura.



Si dejamos únicamente la articulación fija, esta impedirá los dos movimientos de ______________; pero bajo cualquier sistema de cargas giraría alrededor del punto A.

---

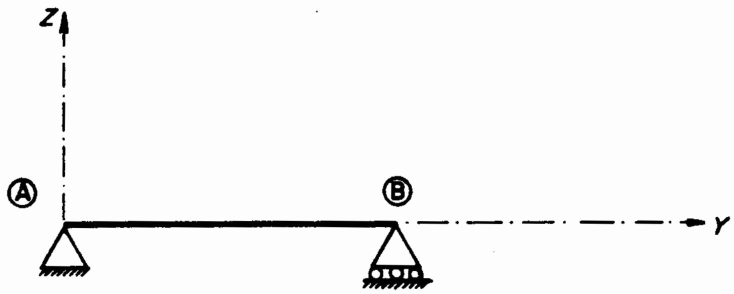
traslación

Entonces necesitamos impedir que gire. Esto se logra con un apoyo simple aplicado en cualquier parte de la viga; pero con la condición de que un componente de su reacción sea ______________ al eje de esta.

---

perpendicular

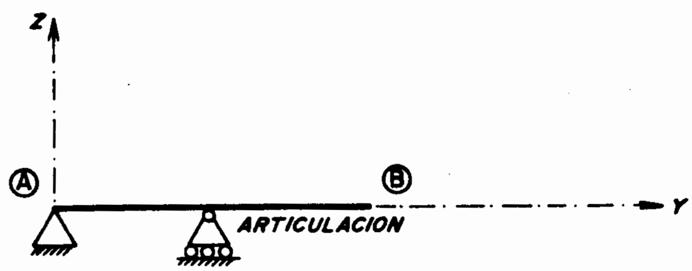
Por tanto, la viga es isostática sí se impiden los _____ movimientos posibles en el plano con una articulación fija y un apoyo _________.



---

tres, simple

Si el apoyo simple se encuentra situado a la mitad de la viga, queda representada así

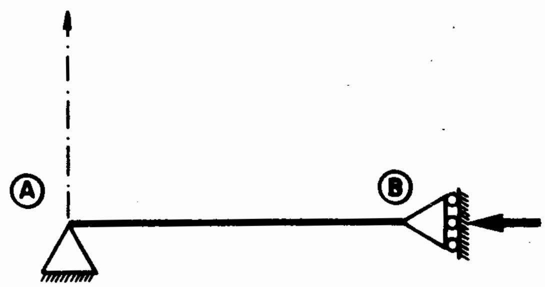


La viga se apoya en la ____________ del apoyo simple.

---

articulación

Observa la figura.

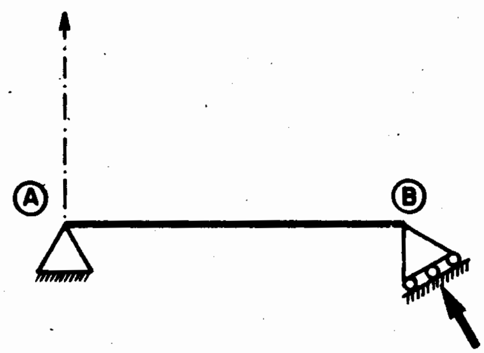


¿Esta viga es isostática?

NO

Puesto que, el apoyo simple debe impedir la rotación consentida por la articulación, que no se verifica y, en este caso, el apoyo simple no impide un pequeño giro alrededor del punto A.

Caso especial:



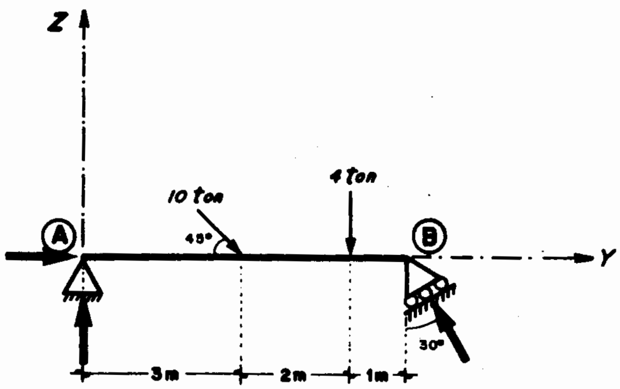
La viga es isostática, puesto que cumple con la condición de que un COMPONENTE de la reacción del apoyo simple es ______________ al eje de la viga.

---

perpendicular

Ejemplo.-

Obtener las reacciones en los apoyos de la siguiente viga.



El sentido de la reacción en el apoyo simple es obvio, ya que se debe impedir el giro alrededor del punto A que producen las cargas.

Los sentidos de los componentes de la reacción de la articulación fija se suponen ___________.

---

positivos

La reacción en el apoyo simple se obtiene si se conoce su <u>intensidad</u>, ya que conocemos su dirección, su _________ y su punto de ___________

---

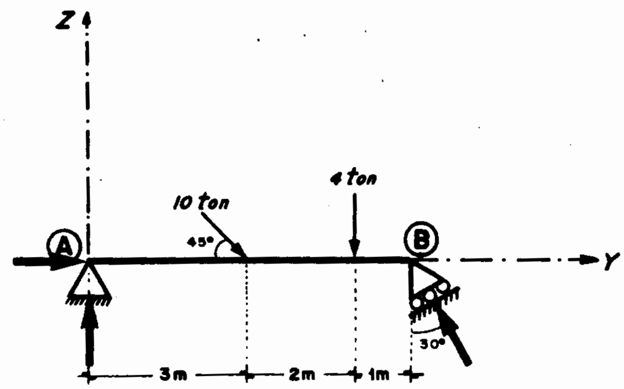
sentido, aplicación

Escribe las ecuaciones de equilibrio.

$\Sigma Fy = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M = 0$

Para obtener la intensidad de la reacción en el apoyo simple, usemos la ecuación

$\Sigma M_A = 0$



Entonces

$\Sigma M_A = -10 \text{ sen } 45°(3) - 4\ (5) + R_B \cos 30°(6) = 0$

Recuerda la convención del tornillo de rosca derecha

Obtén el valor de R_B.

$R_B = 7.931$ ton (su sentido es el supuesto)

Ahora, se tendrá que obtener el componente, en Y, de R_B para calcular R_{AY} con la ecuación

$\Sigma Fy = 0$

$R_{BY} = R_B$ sen 30°= 3.965 ton

Por tanto

$\Sigma Fy =$

$R_{AY} =$

$\Sigma Fy = R_{AY} + 10 \cos 45° - 3.965 = 0$

$R_{AY} = -3.106$ ton

R_{AY} resultó con signo negativo; por tanto, se sentido es __________ al que se supuso.

---

opuesto

Por último, nos falta calcular R_{AZ}.

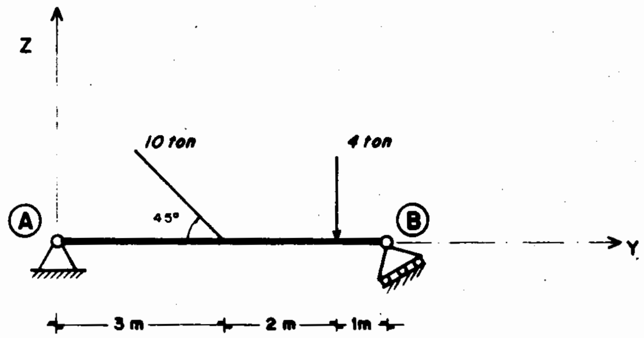
CALCULALA

$\Sigma F_Z = 0$

$\Sigma F_Z = R_{AZ} - 10$ sen $45° - 4 + R_B \cos 30° = 0$

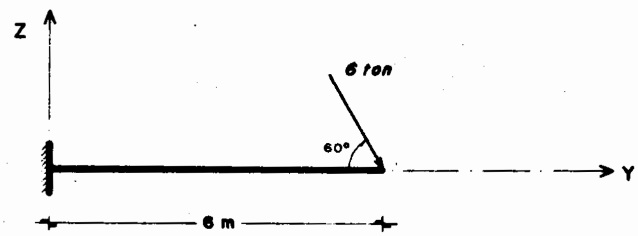
$R_{AZ} = 4.202$ ton (su sentido es el supuesto)

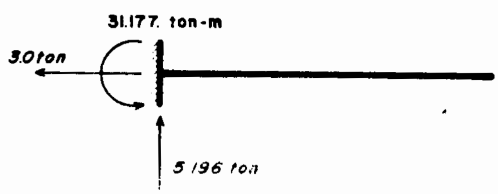
Dibuja en la siguiente figura las reacciones de los apoyos de la estructura.



Ejercicio.-

Obtén las reacciones





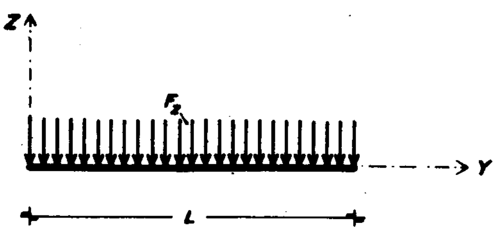
Antes de seguir obteniendo reacciones en apoyos de diferentes estructuras en el plano, estudiemos otros tipos de carga.

Hasta ahora, el único tipo de carga que se ha aplicado a una estructura se conoce como carga concentrada en un punto y se ha representado por un __________.

---

vector

Un tipo de carga muy común en estructuras es la carga uniformemente repartida. Esta carga es clásica de un sistema de fuerzas paralelas iguales en todas sus características.



Se representa con la letra ω, como

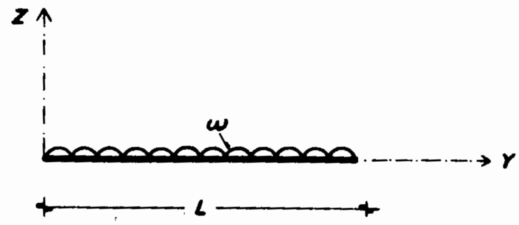
$$\omega = \frac{\Sigma\ Fz}{L}$$

Por tanto, las unidades de la carga uniformemente repartida son unidades de fuerza (intensidad) entre unidades de _____________.

---

longitud

Esquemáticamente, se puede representar así



considerando que para la obtención del equilibrio de una estructura en la cual esté actuando este tipo de carga, se use su resultante, la cual es paralela al eje ____, su sentido es opuesto al de este eje, su intensidad es

$$W = \omega L$$

y su punto de aplicación exactamente la <u>mitad</u> de la ___________ que cubre.

Z, longitud

Por tanto, en el caso de estructuras cargadas uniformemente, para la obtención del equilibrio podrás usar su resultante, la cual será:

Paralela al eje ____

Su sentido, ____________ a este eje

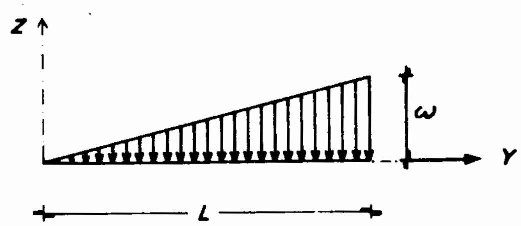
Su intensidad w = _____

Y su punto de aplicación en la __________ del claro que cubre

---

Z, opuesto, ωL, mitad

Otro tipo de carga es la carga repartida con ley triangular, esto es:



donde su resultante es ____________ al eje Z, su sentido ____________ a este eje y su intensidad

$$W_T = \frac{\omega L}{2}$$

ya que W_T es la mitad de W.

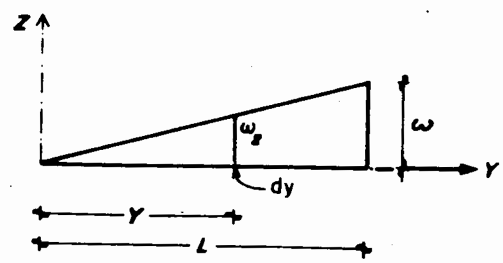
---

paralela, opuesto

Para obtener el punto de aplicación de la resultante, consideremos la interpretación geométrica del momento de una fuerza (pág 1-34)

$$\Sigma M_o = \Sigma (F_z Y) = W_T \bar{Y}$$

En este caso, $\bar{y}$ es la distancia desde el origen hasta el pie de la perpendicular con la línea de acción de la resultante. Entonces



Por triángulos semejantes:

$$\omega_z = \frac{\omega Y}{L}$$

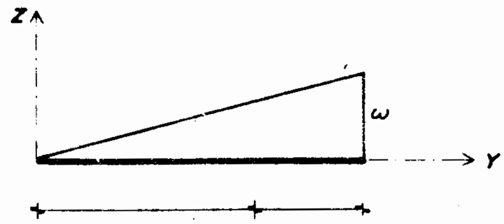
$$Fz = \omega_z \, dy = \frac{\omega Y \, dy}{L}$$

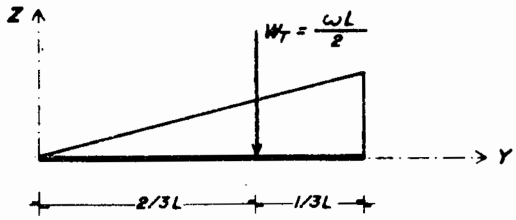
$$\Sigma (Fz\ Y) = \int_0^L Fz\ Y = \int_0^L \frac{\omega Y^2}{L} dy = \frac{\omega}{L}\left[\frac{Y^3}{3}\right]_0^L = \frac{\omega L^2}{3}$$

Por tanto

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma (FzY)}{W_T} = \frac{\frac{\omega L^2}{3}}{\frac{\omega L}{2}} = \frac{2}{3} L$$

Dibuja en la siguiente figura la resultante de este sistema de carga sin olvidar ninguna de sus características.



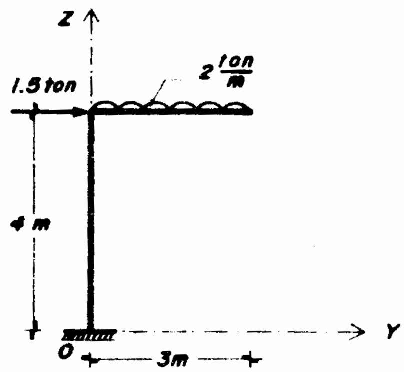


Comentario:

Hay otros tipos de cargas, los cuales, para fines de este texto, no es necesario mencionar, puesto que, cuando se te presente el caso, con las bases que has logrado lo comprenderás fácilmente.

Ejemplo.-

Obtener las reacciones de la siguiente estructura.



Solución.-

Antes de hacer operaciones, comprueba que la estructura tenga el número estricto de apoyos para ser una estructura ____________.

---

isostática

Escribe las ecuaciones escalares que aseguran el equilibrio de la estructura.

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_z = 0$

$\Sigma M_o = 0$ Recuerda que, por comodidad, la suma de momentos se hace alrededor de o, pero puede ser respecto al punto que quieras.

Ahora, sustituye en las ecuaciones los datos del problema y los componentes (considéralos positivos) de la reacción del empotramiento.

$\Sigma Fy = 1.5 + Ry = 0$

$\Sigma F_z = -\omega L + R_z = -2(3) + R_z = 0$

$\Sigma M_o = -1.5\ (4)\ -\omega L\ (\frac{L}{2}) + M_o = 1.5(4)-2(3)\ (\frac{3}{2}) + Mx = 0$

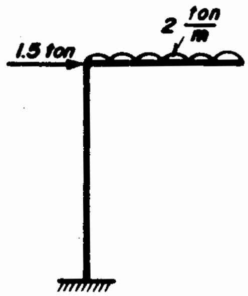
Despeja las incógnitas y calcula sus valores.

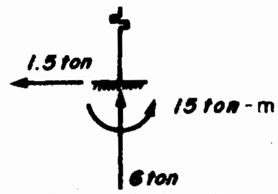
Ry = -1.5 ton

Rz = 6 ton

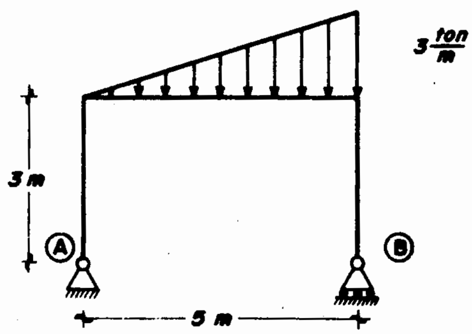
M_o = 15 ton-m

En la siguiente figura dibuja las reacciones en el empotramiento, con todas sus características.





Ejercicio.-



Explica por qué este marco es isostático.

Porque una articulación fija y un apoyo simple son estrictamente suficientes para que el marco no se mueva.

Establece el sistema de ecuaciones escalares que aseguran el equilibrio

---

¿Consideraste los sentidos positivos de las reacciones?

$\Sigma Fy = Ay = 0$

$\Sigma F_z = A_z + B_z - \frac{3\ (5)}{2} = 0$

$\Sigma M_A = B_z\ (5) - \frac{3\ (5)}{2}\ (\frac{2}{3})\ 5 = 0$

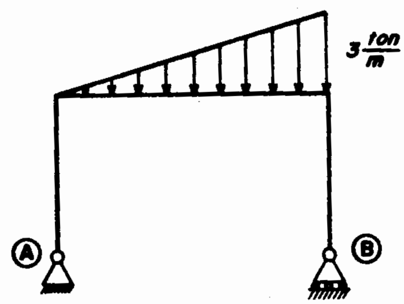
Calcula el valor de cada reacción

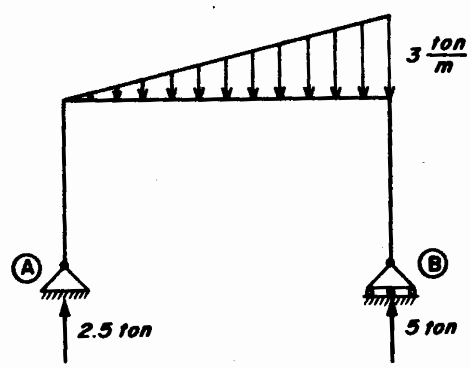
Ay = 0 ton

B_z = 5 ton

A_z = 2.5 ton

Dibuja las reacciones



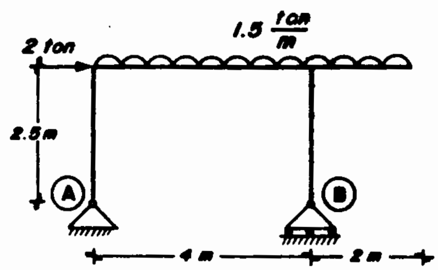


Comentario:

En este caso particular, por no existir cargas horizontales el componente horizontal en A es cero, y se podría pensar que la articulación fija, ahí, se pudiera cambiar por un apoyo simple sin alterar el equilibrio. Esto es válido hasta que alguien <u>se la lleve rodando</u>, con lo que se dejaría de cumplir la condición de isostaticidad.

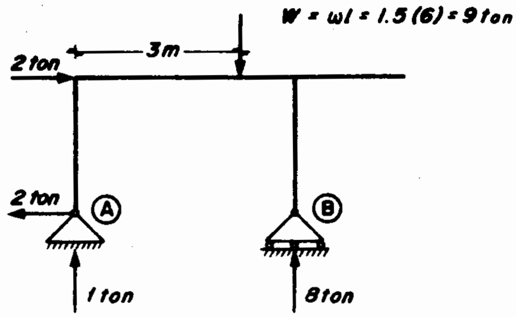
Ejercicio.-

Obtén reacciones



Los pasos que debes seguir son:

1. Comprueba que el marco sea isostático
2. Establece tus ecuaciones escalares de equilibrio considerando la carga uniformemente repartida como su resultante y las reacciones con sentido positivo.
3. Calcula el valor de cada reacción.
4. Dibuja en la figura las reacciones con TODAS sus características.

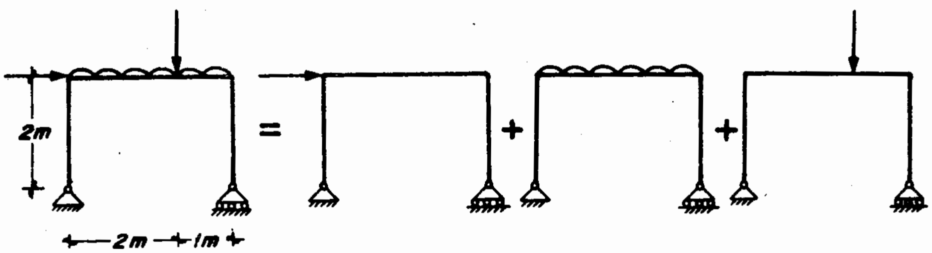

W = ωl = 1.5 (6) = 9 ton
3m
2 ton
2 ton
A
B
1 ton
8 ton

Comprueba el equilibrio con una suma de momentos respecto al punto que quieras; deberá ser cero.

Descansa 5 minutos

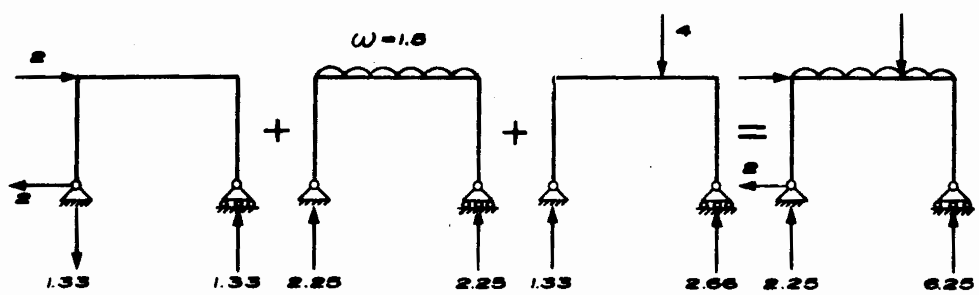
Cuando crece el número de cargas en un marco se complica un poco la obtención de las reacciones.

Una solución muy sencilla para facilitar los cálculos es obtener las reacciones para cada tipo diferente de carga y sumar resultados.



Ahora, si la carga horizontal es de 2 ton, la carga $\omega = 1.5\ \frac{ton}{m}$ y la carga vertical de 4 ton.

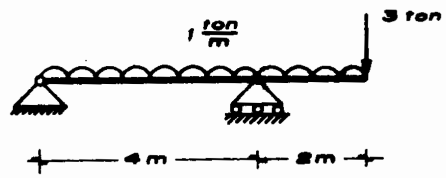
Obtén las reacciones en cada marco y súmalas, para llegar a la solución requerida.

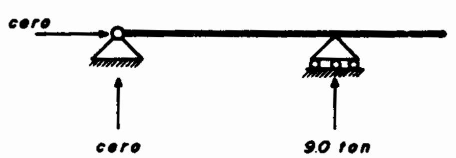


2
ω=1.5
4
+
+
=
2
2
1.33
1.33
2.25
2.25
1.33
2.66
2.25
6.25

Ejercicios.-

1. Obtén las reacciones de la siguiente estructura

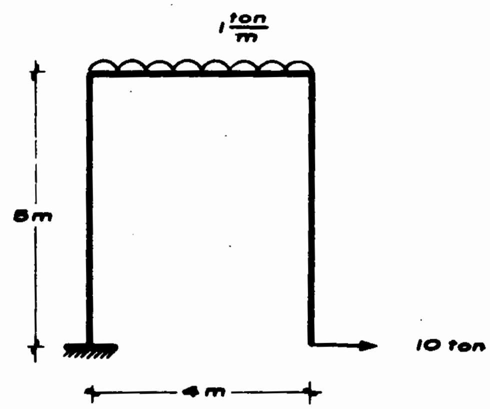


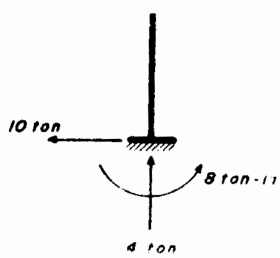


Nota: Es importante resaltar la posibilidad de que en un apoyo sus reacciones sean nulas por las características de las cargas.

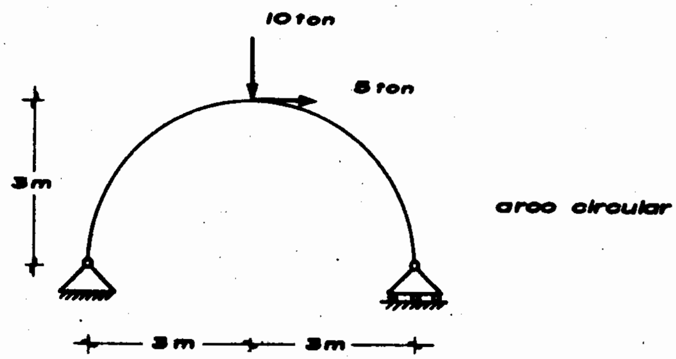
---

2. Obtén reacciones.

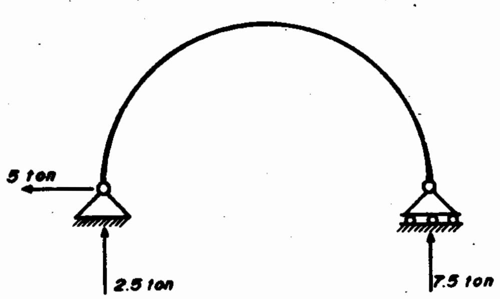




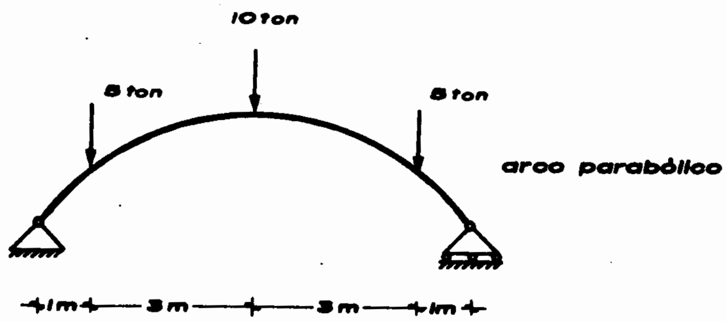
3. Obtén reacciones

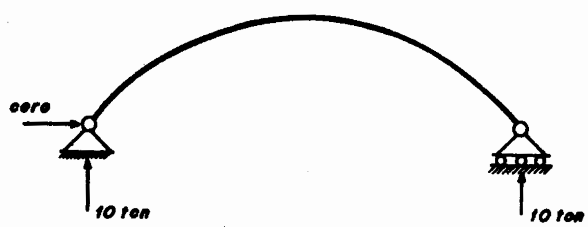


No te ASUSTES por la forma de la estructura; las reacciones son función de las cargas y tipos de apoyo.



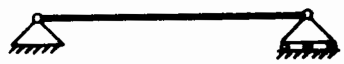
4. Obtén reacciones.



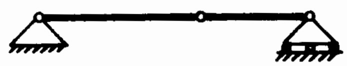


Hasta aquí, hemos estudiado estructuras isostáticas continuas con apoyos o enlaces externos al suelo.

Pero, si la estructura isostática, como la que se muestra,



la cortamos en un punto cualquiera y la volvemos a unir, pero con una articulación interna,

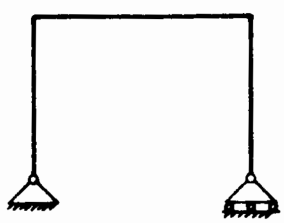


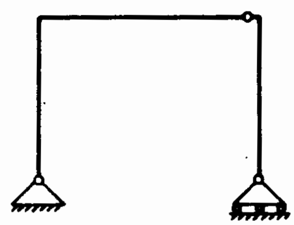
la estructura se convierte en una estructura __________

---

inestable

Tomemos otra estructura isostática y hagamos lo mismo que con la anterior





Entonces, la estructura de la izquierda es ______________ y la de la derecha es ______________

---

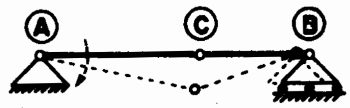
isostática, inestable

Por el estudio anterior, sabemos que una estructura en el plano es isostática si se impiden los tres movimientos posibles.

Pero si introducimos una articulación en un punto, se convierte en una estructura inestable.

¿Cómo podemos hacerla nuevamente isostática?

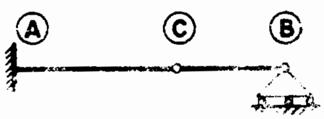
Para contestar esta pregunta, estudiemos antes con mucha atención la siguiente figura:

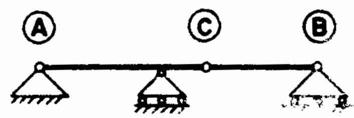


La estructura, sin deformarse, adquiere una configuración como la mostrada en la figura, esto es, se está permitiendo un movimiento en el plano.

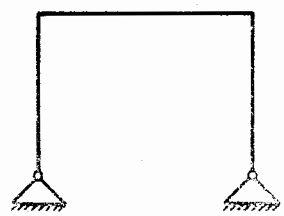
Este movimiento es un giro alrededor del punto A.

Dibuja dos soluciones para regresar el giro





Ahora, enfoquemos nuestra atención en la siguiente estructura



Esta estructura es estáticamente ______________ ¿Cuántas ar-
ticulaciones internas necesita [illegible]
para [illegible]?__

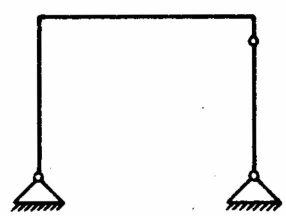
---

indeterminada, DOS

Si la estructura anterior necesita [illegible] articulaciones [illegible]
para hacerse inestable, y sin articulaciones internas es está-
ticamente indeterminada, ¿cuántas articulaciones internas nece-
sita para hacerse isostática?____

UNA

Por tanto, la siguiente estructura es ______________

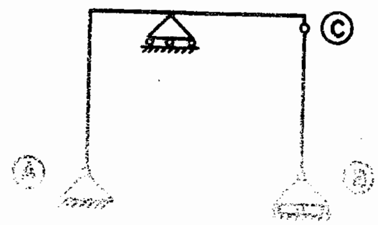


---

isostática

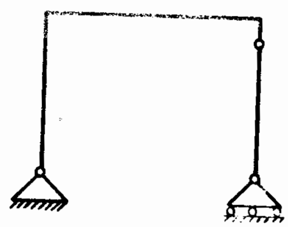
Explica por qué esta estructura NO es isostática.

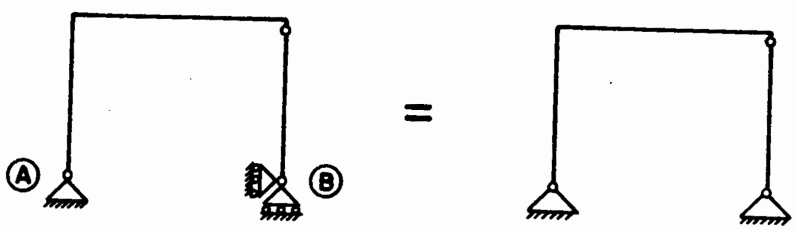
(Hay que comprobar que todos los enlaces sean eficaces, o sea, que cada uno impida realmente los movimientos consentidos por los otros.)



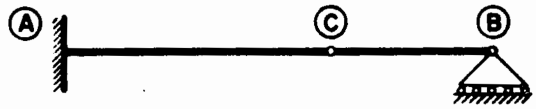
[illegible]

[illegible] la posición más adecuada [illegible] apoyo simple para evitar el movimiento.





Regresemos a la primera solución de la pág 4-39.



Sabemos que la estructura es isostática, pero haciendo un recuento de las características desconocidas de las reacciones, encontramos que son ________.

---

cuatro

Las ecuaciones escalares de equilibrio son ________; por lo que necesitamos otra condición para calcular las cuatro incógnitas.

---

tres

Todo este problema nació por la introducción de una articulación; entonces, si ésta es responsable, tendrá que ayudarnos a resolverlo.

Podemos pensar que el tramo C-B de la estructura, se está apoyando en el tramo A-C por medio de la ________________.

---

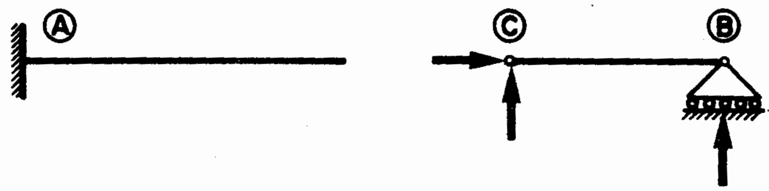
articulación

Esto es, el tramo A-C, que es un cantilíver y, por tanto, una estructura _______________, está sirviendo de apoyo al tramo ______.

----

isostática, C-B.

Entonces, podemos separar así el tramo C-B de la estructura;



Luego, obtenemos las reacciones en el apoyo simple y en la ________ ________, como si estuviera ________ y bajo cualquier sistema de cargas.

----

articulación, fija

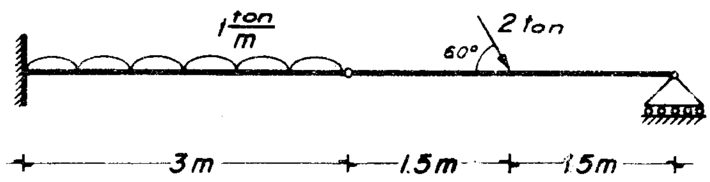
Ahora, obtengamos las reacciones en el empotramiento A debido a las cargas que obran en esa viga empotrada, más el opuesto de la ___________ en la _______________ del tramo C-B.

----

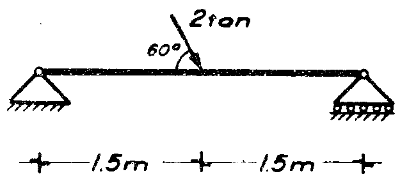
reacción, articulación

Ejemplo.-

Obtener reacciones



Separemos la estructura y obtengamos reacciones del tramo de la derecha de la articulación



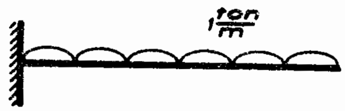
Como tú ya sabes calcular reacciones de una triste viga como esta, CALCULALAS

C_H = Componente horizontal en C = -1 ton.

C_V = Componente vertical en C = 0.866 ton.

B_V = Componente vertical en B = 0.866 ton.

Ahora, obtén la reacción en el empotramiento del cantilíver; sin olvidar el opuesto de la reacción de la articulación.

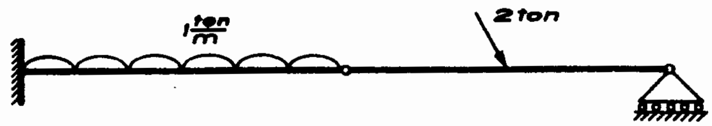


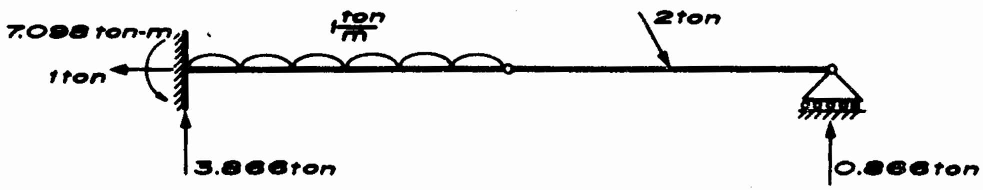
A_H = -1 ton

A_V = 3.866 ton

M_A = 7.098 ton-m

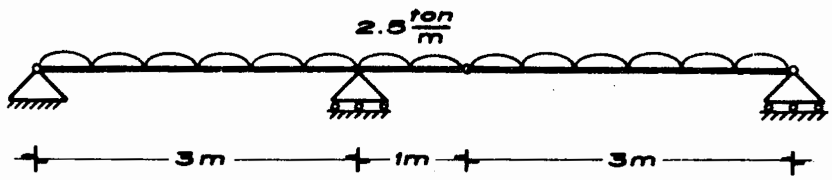
En la siguiente figura, dibuja las reacciones en los apoyos con todas sus características

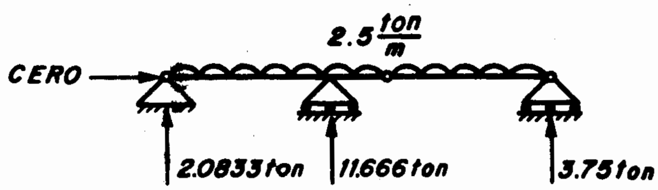




Ejercicio.-

Obtén reacciones




2.5 ton/m
CERO
2.0833 ton
11.666 ton
3.75 ton

Al separar la estructura exactamente en la articulación, usamos indirectamente la cuarta condición de equilibrio, la cual está relacionada con una suma de momentos precisamente en esta

________________.

---

articulación

Esta suma de momentos respecto a la articulación tiene una valiosa particularidad.

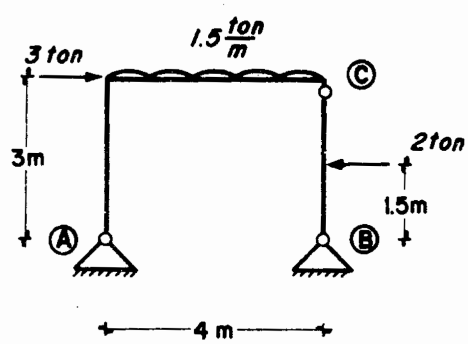
¿Cuál es esta particularidad?

La suma de momentos respecto a la articulación a la DERECHA o a la

______________ de ésta es __________.

IZQUIERDA, CERO

Ejemplo.-

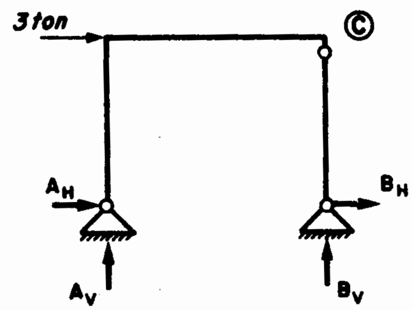


Comprueba que la estructura es isostática.

Se tienen cuatro incógnitas; tres ecuaciones escalares de equilibrio y la condición de la articulación interna; entonces, la estructura es isostática.

Ahora, hay que obtener las características desconocidas de las reacciones en los apoyos para las tres condiciones de carga.

Condición 1.



La primera ecuación que conviene usar es:

$\Sigma M_A = 0$, puesto que la única incógnita que tendremos es ________.

Plantea la ecuación y resuélvela.

$\Sigma M_A = -3(3) + B_V\ (4) = 0$

$B_V = 2.25$ ton

La segunda ecuación es:

$\Sigma F_V = 0$, ya que solo tendremos una incógnita, y esta es ______.

$\Sigma F_V = A_V + 2.25 = 0$

$A_V = -2.25$ ton

Si queremos usar la ecuación $\Sigma F_H = 0$, tendremos una ecuación con dos incógnitas; entonces, es mejor usar la condición extra, que dice:

$$\Sigma M_C \Big]_{\text{derecha}} = B_H\ (3) = 0$$

Ya que no hay ninguna carga a la __________ de la articulación y el componente B_V no produce __________.

Por tanto, $B_H = 0$

---

derecha, momento

Por último, podemos usar:

$\Sigma F_H = 0$

$\Sigma F_H =$

$A_H =$

$\Sigma F_H = A_H + B_H + 3 = 0$

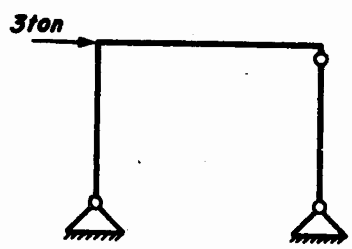
$A_H = -3$ ton

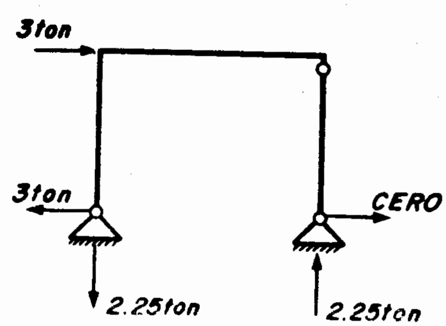
Comprueba el valor de A_H con:

$$\left.\Sigma M_C\right]_{\text{izquierda}} = 0$$

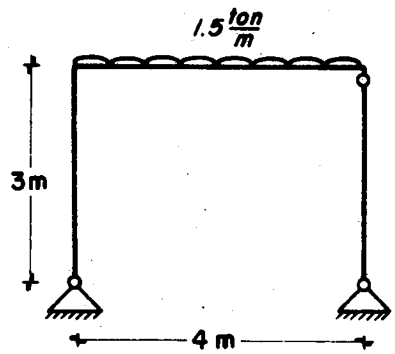
$$\left.\Sigma M_C\right]_{\text{izquierda}} =$$

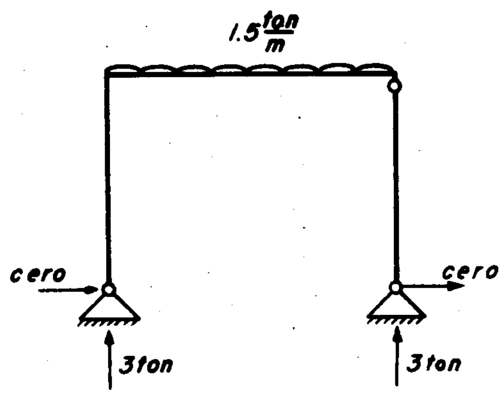
Dibuja las reacciones



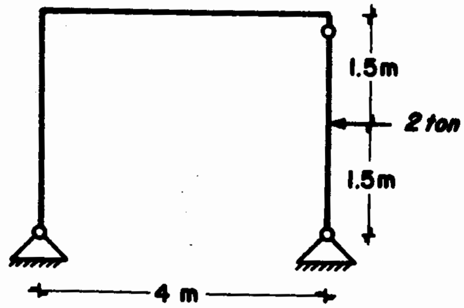


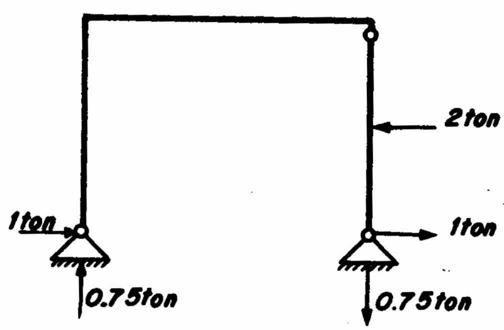
Calcula las reacciones con la condición de carga 2.



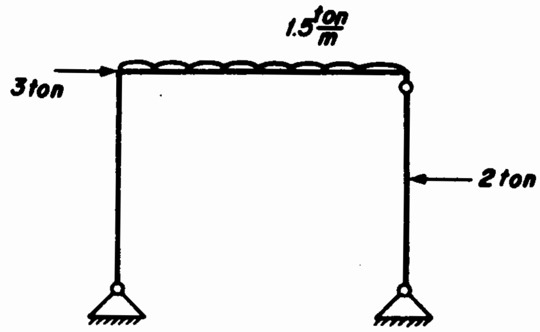


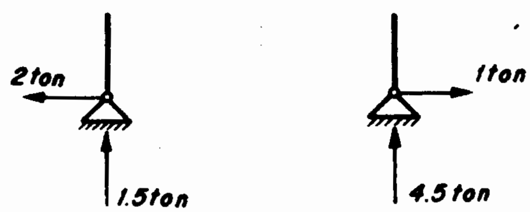
Calcula las reacciones con la condición de carga 3.





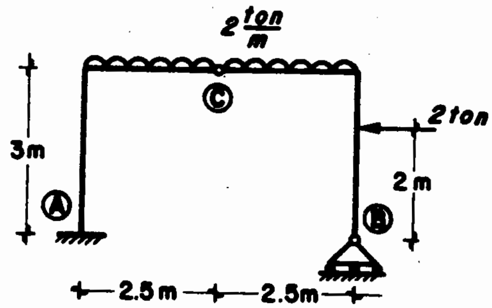
Suma las reacciones de las tres condiciones y el problema estará resuelto.





Ejercicio.-

Obtén reacciones, considera todas las cargas de una sola vez.



Piensa antes como abordar el problema; busca siempre las ecuaciones que contengan una sola incógnita.

Comprueba el resultado final, con una suma de momentos respecto al punto que quieras. Deberá ser CERO.

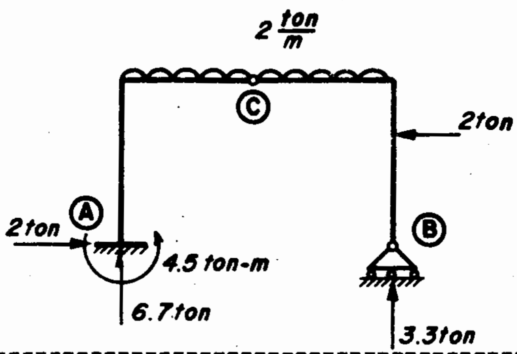
La solución más cómoda es

1. $\Sigma M_C \Big]_{derecha} = 0$

2. $\Sigma F_V = 0$

3. $\Sigma F_H = 0$

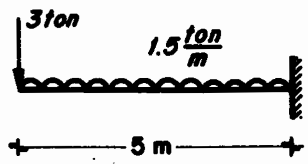
4. $\Sigma M_A = 0$



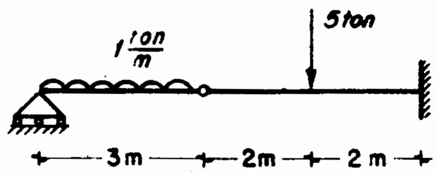
EXAMEN

Obtén reacciones en las siguientes estructuras.

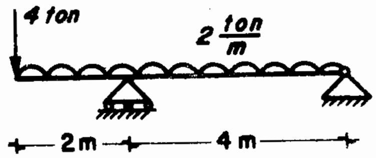
1.



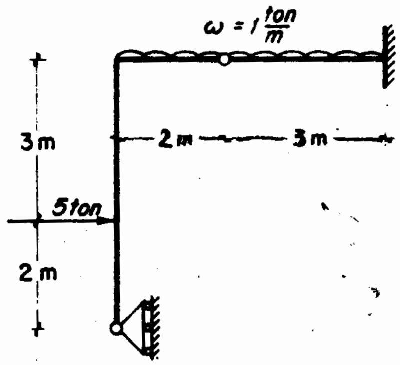
2.



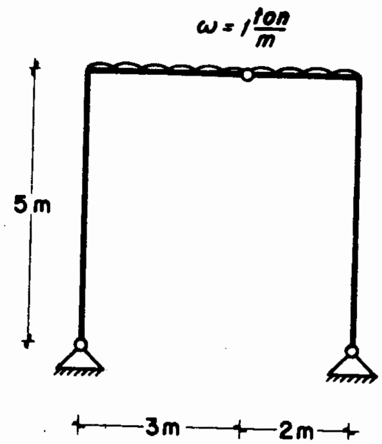
3.



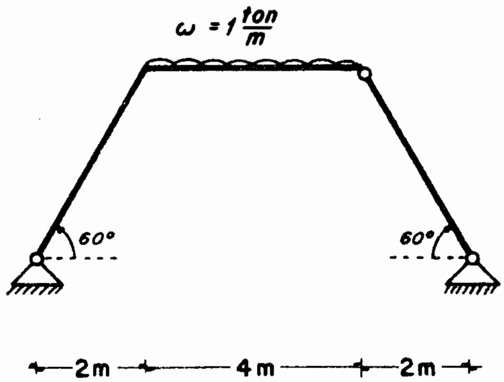
4.



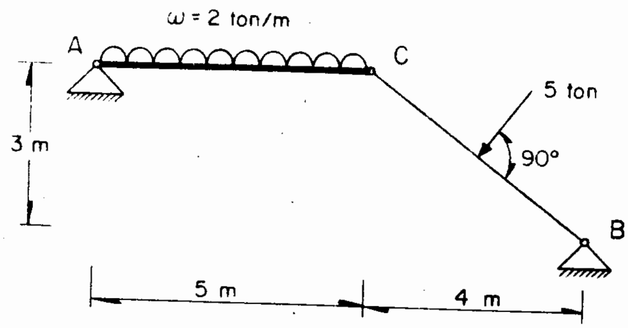
5.



6.

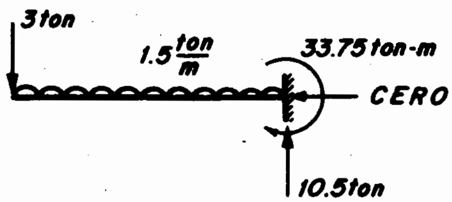


7.

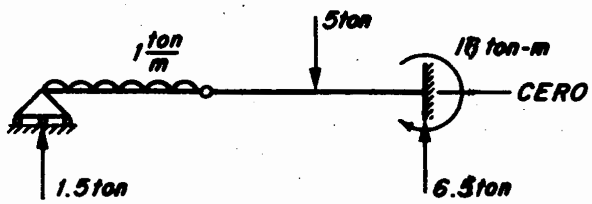


Respuestas

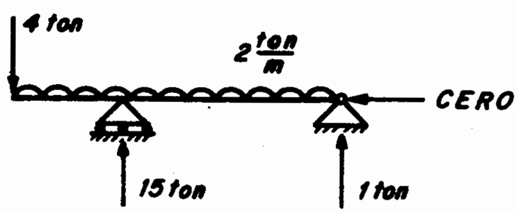
1.



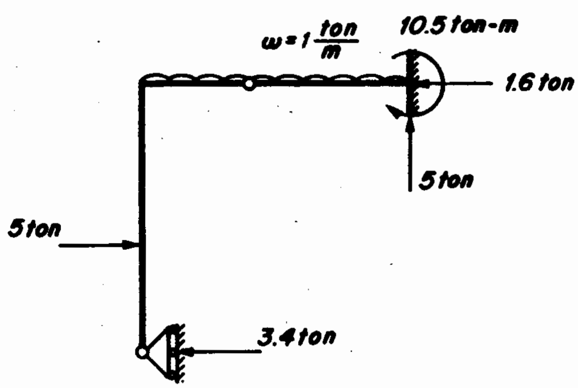
2.



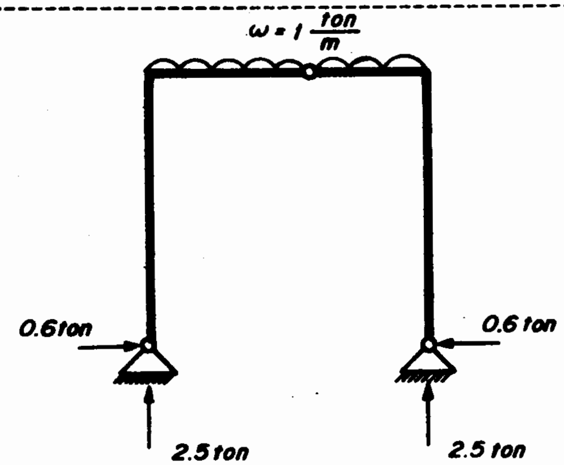
3.



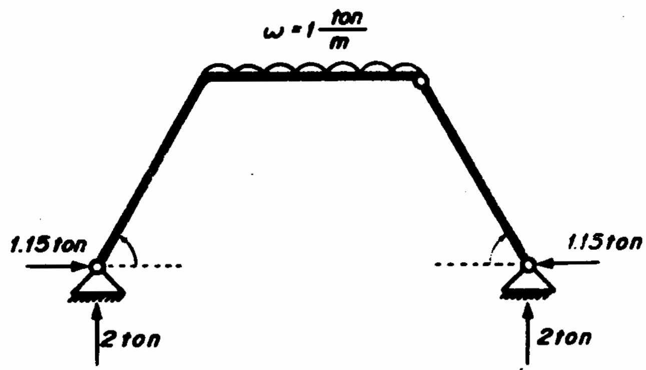
4.



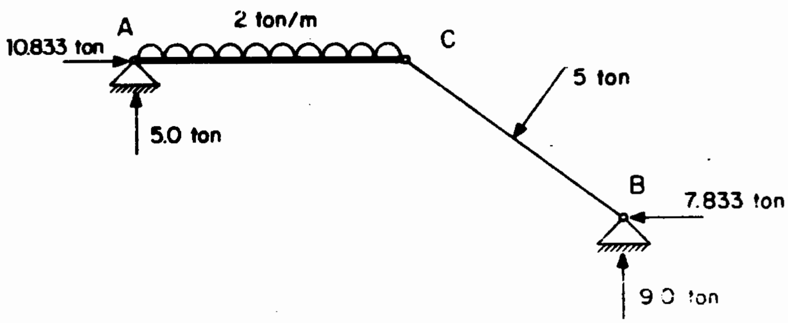
5.


ω = 1 ton/m
0.6 ton
0.6 ton
2.5 ton
2.5 ton

6.


ω = 1 ton/m
1.15 ton
1.15 ton
2 ton
2 ton

7.


A
2 ton/m
C
10.833 ton
5 ton
5.0 ton
B
7.833 ton
9.0 ton

CAPITULO 5. DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS EN ESTRUCTURAS ISOSTATICAS EN EL PLANO

Objetivos:

5.1 Aplicarás nuevas convenciones de signos para el equilibrio de estructuras isostáticas

5.2 Trazarás diagramas de momento flexionante de estructuras isostáticas

5.3 Trazarás diagramas de fuerza cortante de estructuras isostáticas

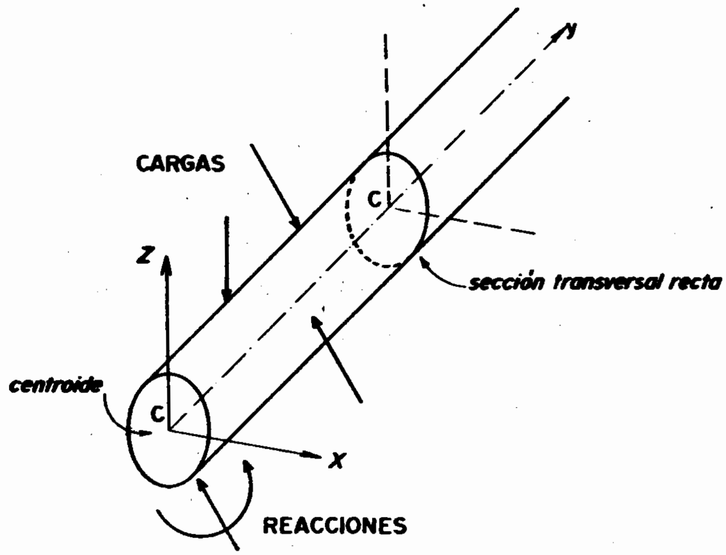
5.4 Trazarás diagramas de fuerza normal de estructuras isostáticas

Determinadas las REACCIONES de los __________, se tienen todas las fuerzas EXTERNAS que actúan en una estructura.

---

apoyos

Observa la figura



Las fuerzas EXTERNAS que actúan sobre el segmento de esta viga pueden variar de infinitos modos en número, intensidad, dirección, ____________ y punto de ______________.

---

sentido, aplicación

Con objeto de evitar el estudio de las fuerzas INTERNAS* caso por caso, se sustituyen las fuerzas ___________ por algunos tipos de solicitaciones equivalentes

---

EXTERNAS

Estas solicitaciones equivalentes a la IZQUIERDA de una sección transversal recta de una viga en el espacio, por las condiciones de la estática, pueden sustituirse por su _____________ que obra en el plano de esta sección.

RESULTANTE

En general, la RESULTANTE a la IZQUIERDA de la sección transversal recta tiene _________ componentes.

---

seis

Para considerar el EQUILIBRIO, las fuerzas INTERNAS en la sección transversal recta deben ___________ estas solicitaciones equivalentes (_____________) que se indican, respectivamente con N, V_x, V_z, M_t, M_x y M_z. (Su significado se explica a continuación)

---

equilibrar, RESULTANTE

La fuerza N se llama fuerza normal o axial, y su efecto en la sección es de alargar o _________ la viga.
Entonces, según nuestro sistema de coordenadas, N=

---

acortar, $N = \Sigma \overline{F}y$

---

* El estudio de las fuerzas internas en las estructuras corresponde a los cursos de MECANICA DE MATERIALES.

Las fuerzas V_x y V_z se denominan fuerzas cortantes porque tienden a ________ la viga en esa sección.

Entonces, $V_x =$ y $V_z =$

---

cortar, $V_x = \Sigma\overline{F}_x$, $V_z = \Sigma\overline{F}_z$

El par M_t se llama MOMENTO de torsión, pues tiende a ________ la viga, esto es, $M_t =$

---

torcer, $M_t = \Sigma\overline{M}_y$

Los pares M_x y M_z se llaman ________ flexionantes porque tienden a doblar o ________ la viga.

Por tanto, $M_x =$ y $M_z =$

---

momentos, flexionar, $M_x = \Sigma\overline{M}_x$, $M_z = \Sigma\overline{M}_z$

Cada uno de estos efectos satisface el llamado principio de superposición de causas y efectos:

El efecto producido por varias fuerzas actuando simultaneamente es igual a la ________ de los efectos producidos por cada ________ si actuaran por separado.

---

suma, fuerza

Este principio significa que los efectos de una fuerza son INDEPENDIENTES de la existencia de otras ________.

---

fuerzas

Entonces, una fuerza aplicada a una estructura, ya sometida a otras fuerzas, produce efectos iguales a los que ____________ aplicándola a la estructura descargada.

---

producirfa

Por consiguiente, sus efectos se _________ a los ya producidos por las __________ previamente existentes.

---

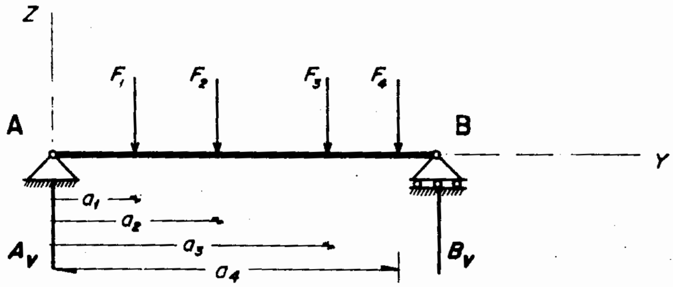
suman, fuerzas

¡ATENCION!

En el estudio de las estructuras ISOSTATICAS, la independencia citada solo es consecuencia del hecho de que las fuerzas previamente existentes han modificado muy poco la forma de la estructura, y que, por consiguiente, las nuevas fuerzas actúan sobre la estructura que ha permanecido APROXIMADAMENTE IGUAL a la estructura descargada. Sin embargo, no hay que olvidar que las estructuras isostáticas se deforman; aunque sean <u>deformaciones</u> muy pequeñas, y por las características de este tipo de estructuras, estas <u>deformaciones</u> no están restringidas.

Para una mejor comprensión en la obtención de las solicitaciones _______________ en una viga, la supondremos, por ahora, simplemente apoyada sobre la que actúan fuerzas verticales y contenida en su plano axial de simetría, esto es, la sección transversal recta de la viga es ___________ respecto al eje Z.

Observa la figura



---

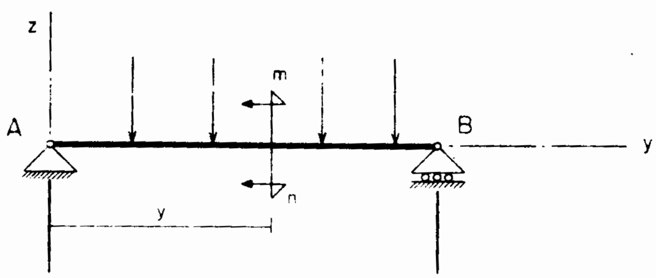
equivalentes, simétrica

La viga está contenida en su plano axial de ___________.

---

simetría

Estudia con mucha atención la siguiente figura



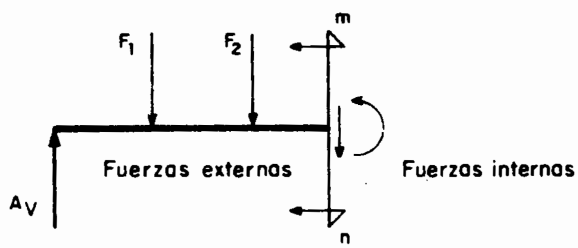
Supongamos que cortamos la viga en dos tramos por una __________ transversal recta m-n situada a una distancia ____ del apoyo IZQUIERDO

---

sección, y

Si prescindimos del tramo a la DERECHA de la sección transversal recta m-n, para analizar el EQUILIBRIO del tramo de viga que conservamos, o sea, el tramo a la ______________ de esa sección, debemos considerar no solo las fuerzas EXTERNAS que actúan en este, sino también las fuerzas ______________ distribuidas en la sección, que representan la acción del tramo de viga ____________ sobre el tramo IZQUIERDO.

Observa la figura



IZQUIERDA, INTERNAS, DERECHO

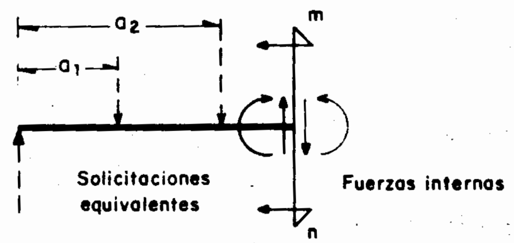
Estas fuerzas INTERNAS deben EQUILIBRAR a las fuerzas EXTERNAS a la ______________ de la sección transversal recta m-n.

IZQUIERDA

Recuerda que todas las fuerzas EXTERNAS, por las condiciones de la estática, pueden sustituirse por su <u>resultante</u>, la cuál, en este caso, es una __________ VERTICAL $\overline{F}_z$ que obra en el plano de la sección y un __________ M_x.

FUERZA, MOMENTO

Observa la figura



La fuerza vertical $\overline{F}_z$ o fuerza cortante V_z es igual a la suma de las fuerzas __________ situadas a la __________ de la sección transversal recta m-n y se denomina

FUERZA CORTANTE EN LA SECCION TRANSVERSAL RECTA

EXTERNAS, IZQUIERDA

El valor de la fuerza, en este caso, es

$$V_z = \Sigma F_z =$$

$$V_z = \Sigma F_z = A_V - F_1 - F_2$$

Comentario:

El sentido de la fuerza V_z, en la sección, sigue con la convención inicial.

Para obtener el valor del momento M_x, seguiremos una NUEVA CONVENCION DE SIGNOS: (estudia con mucha atención, es muy importante)

Si el momento de la fuerza a la ____________ de la sección gira en el MISMO sentido que las manecillas del reloj, se considerará POSITIVO.

En caso CONTRARIO, se considerará ___________.

IZQUIERDA, NEGATIVO

Entonces, el valor del momento M_x siguiendo la nueva convención de signos, será

$$M_x = Av\ (Y) - F_1\ (Y-a_1) - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$F_2\ (y-a_2)$

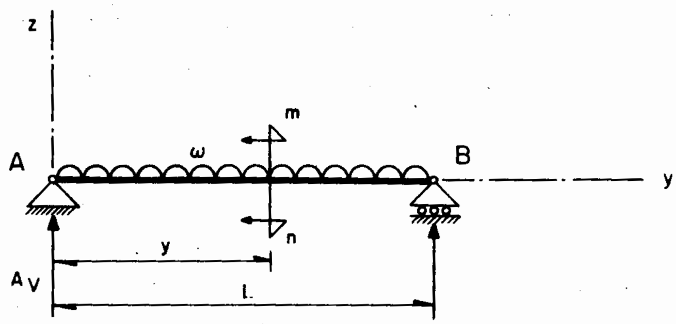
Esto es, el momento M_x es igual a la suma de los momentos de las fuerzas ___________ situadas a la IZQUIERDA de la sección m -n, respecto al CENTROIDE de esta y se denomina

MOMENTO FLEXIONANTE EN LA SECCION TRANSVERSAL RECTA

EXTERNAS

Ahora, si sobre la viga actúa en lugar de las fuerzas (cargas concentradas) una carga uniformemente ______________, se utiliza el mismo razonamiento.

Observa la figura

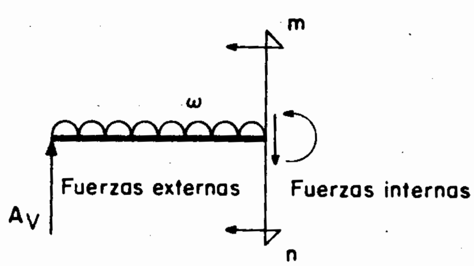


---

repartida

Consideremos nuevamente el equilibrio del tramo ______________ de la viga.

Observa la figura



IZQUIERDO

Entonces, la fuerza cortante, llamémosla V, en la sección transver sal recta m-n, es

$$V =$$

$$V = A_V - \omega Y$$

El momento flexionante, M, en la sección transversal recta m-n, es (Recuerda la nueva convención de signos)

$$M =$$

$$M = A_V\ Y - \omega Y\ \frac{Y}{2} = A_V\ Y - \omega\ \frac{Y^2}{2}$$

Si la longitud de la viga es L, Av = $\frac{\omega L}{2}$; entonces, la fuerza cortante en esa sección, será

$$V =$$

$$V = \frac{\omega L}{2} - \omega y$$

Y, el momento flexionante en la sección, será

$$M =$$

$$M = \frac{\omega L}{2}\ Y - \frac{\omega\ Y^2}{2}$$

Del estudio anterior obtuvimos las expresiones que representan, respectivamente, la FUERZA __________ y el MOMENTO _____________, en la sección recta m-n, considerado el equilibrio del tramo de viga a la ______________ de esa sección.

CORTANTE, FLEXIONANTE, IZQUIERDA.

Si en lugar del tramo izquierdo se conserva el __________, la suma de las fuerzas a la derecha de la sección y la de sus momentos, tendrán los mismos módulos V y M, pero serán de sentidos ___________.

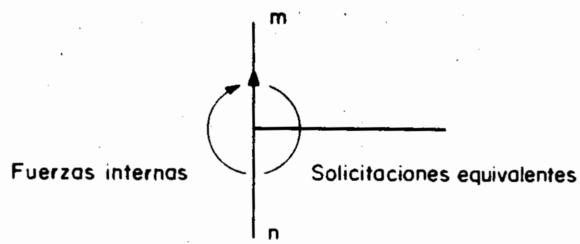
DERECHO, opuestos

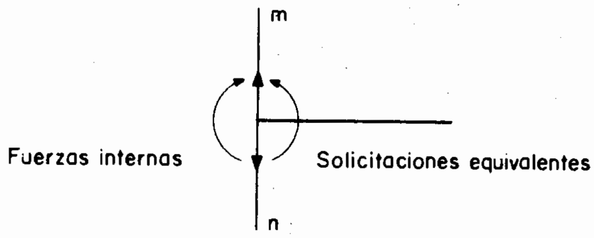
Lo anterior, es consecuencia de nuestras condiciones de equilibrio; esto es, las sumas de las fuerzas y la de sus momentos con respecto a CUALQUIER PUNTO de su plano DEBEN ser ______.

---

cero

Dibuja, en la siguiente figura, los sentidos de las fuerzas y el momento a la derecha de la sección recta m-n, para que se cumpla el equilibrio.





Siguiendo con nuestra nueva convención de signos, de aquí en adelante, el momento ____________ y la fuerza ___________ se tomarán ___________ sí (considerando el tramo de viga a la DERECHA de la sección) los sentidos obtenidos son los de la figura anterior.

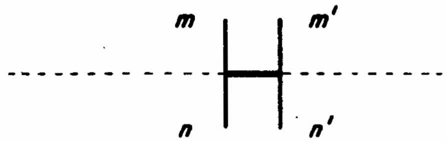
---

flexionante, cortante, positivos

Para una mejor comprensión de esta regla del signo del momento flexionante y la fuerza cortante, vayamos por partes.

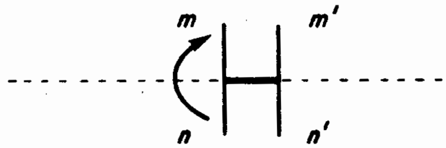
Aislemos un elemento de la viga mediante dos secciones transversales rectas.

Observa la figura

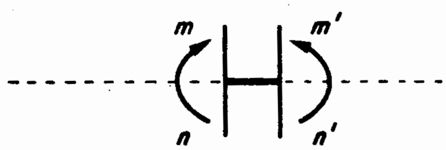


Si el momento flexionante es positivo, dibuja en la figura el sentido del momento a la izquierda de la sección m-n

---



Ahora, dibuja, en la figura anterior, el sentido del momento a la derecha de la sección m'-n', para cumplir con el equilibrio.

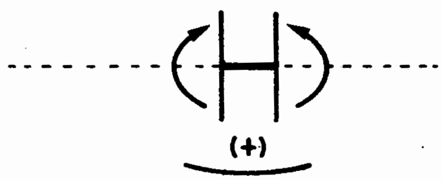


Esto es, el sentido del momento, a la derecha de la sección m'-n', resulta CONTRARIO al de las manecillas del reloj, sí, el momento flexionante es ____________.

---

positivo

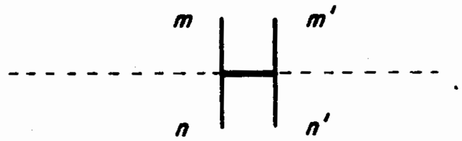
Por estos sentidos, de los momentos, la viga se flexiona cóncava hacia __________.

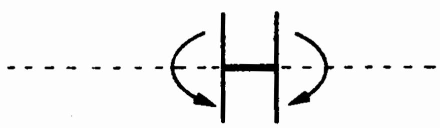


---

arriba

Dibuja, en la siguiente figura, los sentidos de los momentos a la <u>Izquierda</u> y a la derecha del elemento de viga, sí, el momento flexionante es NEGATIVO



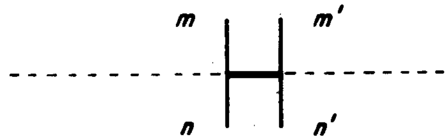


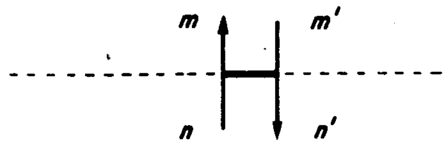
Por estos sentidos, de los momentos, la viga se flexiona cóncava hacia ________.

---

abajo

Consideremos el mismo elemento de viga, aislado por sus dos secciones rectas, si la <u>fuerza</u> <u>cortante</u> es POSITIVA, dibuja, en la siguiente figura, los sentidos de las fuerzas a la izquierda de la sección recta m-n y a la derecha de la sección recta m'-n'

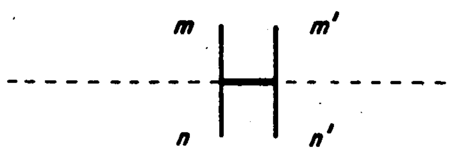


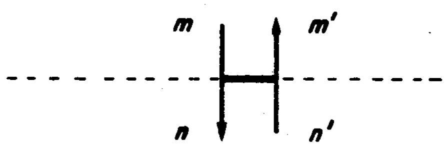


Esto es, el sentido de la fuerza a la DERECHA de la sección m'-n', resulta CONTRARIO al de nuestra convención inicial, sí, la fuerza cortante es ___________.

positiva

Ahora, dibuja, en la siguiente figura, los sentidos de las fuerzas a la izquierda y a la derecha del elemento de viga, sí, la fuerza cortante es NEGATIVA.





Hasta aquí, hemos cumplido con las condiciones de equilibrio, únicamente, en lo que concierne al __________.

---

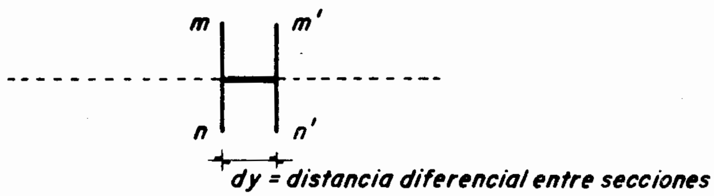
sentido

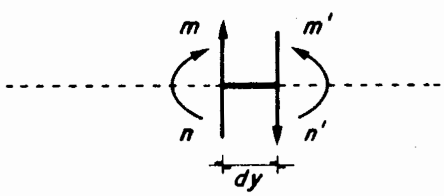
Ahora, nos ocuparemos de cumplir con las condiciones de equilibrio, respecto a la ______________.

---

intensidad

Suponiendo positivos el momento flexionante y la fuerza cortante en las secciones m-n y m'-n' del elemento de viga, dibuja en la siguiente figura cómo queda representado:



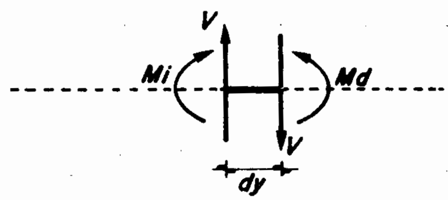


Si no actúan fuerzas externas sobre la viga, entre las secciones m-n y m'n', las intensidades de las fuerzas cortantes en las dos secciones son ___________.

---

iguales

Observa la figura



Obtén el equilibrio del elemento (la suma de momentos hazla respecto al centroide de la sección m'-n')

$\Sigma Fy = 0$

$\Sigma F_z = V - V = 0$

$\Sigma M_c \Big]_{m'-n'} = M_i + V\,dy - Md = 0$

Considerando la ecuación de momentos, tenemos

$$M_d = Mi + Vdy$$

pero, Md, se puede escribir como

$$Md = Mi + dM$$

por simple inspección de las dos ecuaciones anteriores, se deduce que

$$dM =$$

$$dM = V\ dy.$$

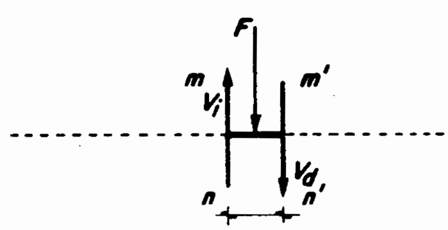
$$\frac{dM}{dy} = V$$

Por consiguiente, para tramos de viga sin cargas concentradas, la fuerza cortante es la derivada del __________ ____________ respecto a y.

---

momento flexionante

Ahora consideremos el siguiente caso:



Establece la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales y despeja Vd.

$$Vd = V_i - F$$

Por tanto, el valor de la fuerza ___________ varía en la cantidad F al pasar por el punto de aplicación de la _________ concentrada.

---

cortante, carga

De la ecuación

$$\frac{dM}{dy} = V$$

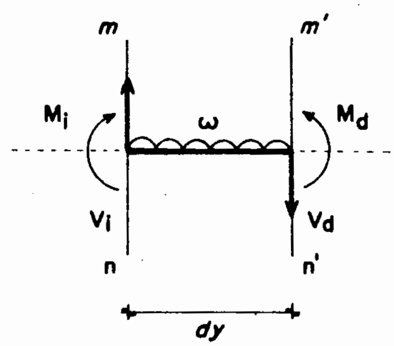
Se deduce que en el punto de _____________ de una carga ___________ se presenta un salto brusco en el valor de la derivada $\frac{dM}{dy}$.

---

aplicación, concentrada

Por último, vamos a considerar el caso en que una carga uniformemente distribuida actúa entre las secciones m-n y m' n'

observa la figura



Establece tus ecuaciones de equilibrio, y despeja Vd y Md

V_d = Vi - ωdy = Vi + dV

Md = $M_i + V_i dy - \frac{\omega dy^2}{2}$

De la ecuación $V_d = V_i + dV = V_i - \omega dy$, podemos despejar $\frac{dV}{dy}$ = ____

Por tanto, la derivada de la fuerza cortante respecto a y, con signo contrario, es igual a la ____________ de la carga.

$-\omega$, intensidad

De la ecuación $M_d = M_i + dM = M_i + Vdy - \frac{\omega d^2 y}{2}$, podemos despejar dM,

$$dM = V\,dy - \omega \frac{d^2 y}{2}$$

despreciando el segundo término del segundo miembro, por ser una cantidad diferencial elevada al cuadrado, la ecuación queda como

---

$$dM = V\,dy$$

$$\frac{dM}{dy} = V$$

Esto es, que también en el caso de carga uniformemente distribuida, la fuerza cortante es la __________ ___ __________ ____________ respecto a y.

---

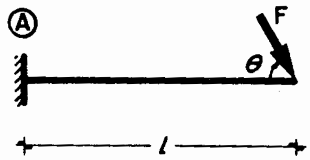
derivada del momento flexionante

Comentario:

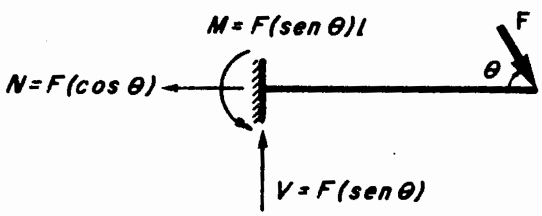
Del estudio de una viga simplemente apoyada sobre la que actúan fuerzas verticales, se obtuvieron las expresiones que representan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flexionante en esta.

Ahora, estudiemos un caso general en el plano.

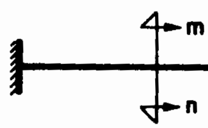
Observa la figura



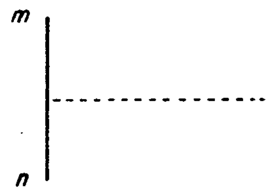
Obtén la reacción del empotramiento en función de F y θ

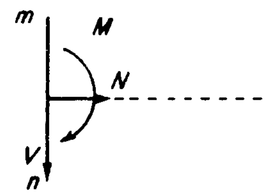


Supongamos que la viga la cortamos en dos tramos por una sección recta m-n y <u>conservemos el tramo DERECHO</u>



Sustituye, en la siguiente figura, por su resultante todas las fuerzas EXTERNAS a la derecha de la sección recta m-n; usando las literales M, V y N.



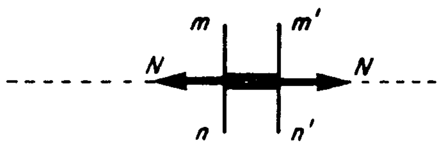


De aquí, se obtiene una nueva fuerza N que se le conoce con el nombre de fuerza __________, por ser <u>normal</u> a la sección.

---

normal.

Del equilibrio de un elemento de viga separado por dos secciones rectas m-n y m'-n',



es obvio que las fuerzas normales sean independientes de la fuerza cortante y el momento flexionante en esta sección. Respecto a su signo, convendremos que si las fuerzas, N, tiende a ALARGAR el elemento, se considerará POSITIVA. Si tiende a ACORTARLO, se considerará ____________.

NEGATIVA

DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE Y FUERZA NORMAL

Del estudio anterior, se ha visto que las fuerzas INTERNAS que actúan en una sección transversal recta de una viga, EQUILIBRAN el ___________ ___________, la ___________ ___________, y la ___________ ___________, correspondientes a dicha sección.

---

momento flexionante, fuerza cortante, fuerza normal

Estas fuerzas internas distribuidas en una sección transversal recta se les conoce con el nombre de ESFUERZOS*.
Por consiguiente, los ESFUERZOS, en estructuras isostáticas en el plano, DEPENDEN de los ELEMENTOS MECANICOS (momento ___________ fuerza ___________ y fuerza ___________) y de la GEOMETRIA de las secciones transversales rectas de la estructura.

---

flexionante, cortante, normal

O sea, los ESFUERZOS, en estructuras isostáticas en el plano, DEPENDEN de los ___________ ___________ y de la ___________ de las secciones transversales rectas de la estructura.

ELEMENTOS MECANICOS, GEOMETRIA

Por tanto, para conocer los esfuerzos en una sección transversal recta de una estructura es necesario conocer antes las variaciones de los elementos ___________ a lo largo del eje longitudinal de esta.

---

mecánicos

---

*El estudio de las fuerzas internas en las estructuras corresponde a los cursos de MECANICA DE MATERIALES.

Esto es, para simplificar el estudio de los ESFUERZOS en una estructura, es conveniente representar en forma gráfica las variaciones de los _______ _______ a lo largo del EJE LONGITUDINAL de esta.

ELEMENTOS MECANICOS

Estas formas gráficas de representar las _______ de los _______ _______ a lo largo del EJE LONGITUDINAL de la estructura, se denominan:

DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS.

---

variaciones, elementos mecánicos

Por consiguiente, en estructuras en el plano contamos con tres formas gráficas para representar las variaciones de los elementos mecánicos; las cuales son:

DIAGRAMA DE _______ _______ (DMF)

DIAGRAMA DE _______ _______ (DFC)

DIAGRAMA DE _______ _______ (DFN)

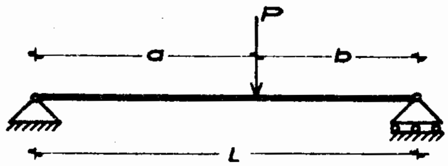
MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE, FUERZA NORMAL

Para una mejor compresión del análisis de una estructura; esto es, la obtención de las _______ de sus apoyos y los _______ de elementos mecánicos; consideremos, por ejemplo, el caso sencillo de una viga simplemente apoyada solicitada por una carga concentrada $\overline{P}$.

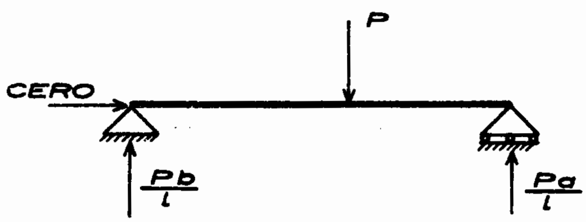
---

reacciones, diagramas

Observa la figura



Entonces, las reacciones de los apoyos de la estructura en este caso son (Obtenlas en función de P, b, a y L)



Ahora, obtengamos el diagrama de momento flexionante a lo largo del eje de la viga. En esta representación los valores en este eje (Y) indican la posición de la <u>sección</u> y los valores paralelos al eje Z indican el valor del __________ ______________ que actúa en cada __________.

---

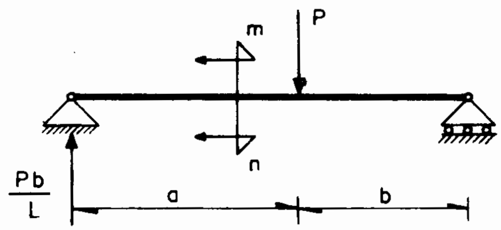
momento flexionante, sección

Los valores positivos del momento flexionante se toman arriba del eje horizontal y los negativos __________

---

abajo

Entonces, tomando una sección m-n a la izquierda de P, se obtiene que para ella:



$$M = \frac{P\,b}{L} \cdot y$$

De la ecuación anterior, se observa que el momento flexionante varía proporcionalmente a ____.

---

y

Para y = o, el momento es nulo y para y = a, es decir, para la sección de aplicación de la carga P, el momento vale

$$M =$$

$$M = \frac{Pab}{L}$$

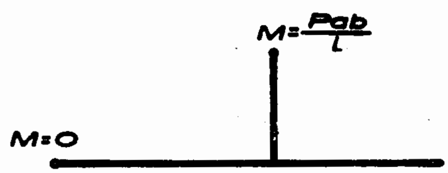
El sentido del momento flexionante desde y = 0, hasta y = a, es

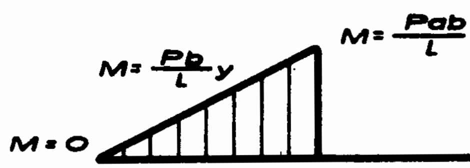
____________.

---

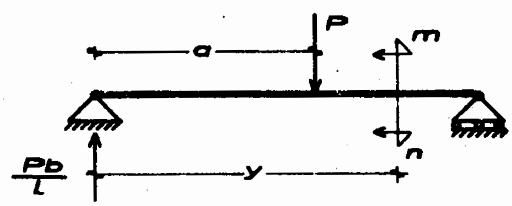
positivo

Dibuja la primera parte del diagrama:





Ahora, tomando una sección m-n a la derecha de P obtén el valor del momento flexionante a la IZQUIERDA de esta sección.



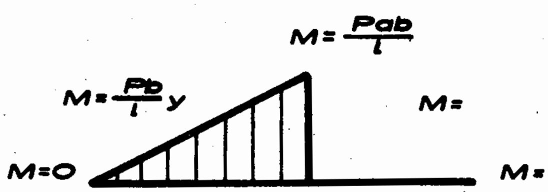
$$M = \frac{P\ b}{L}\ y - P\ (y-a)$$

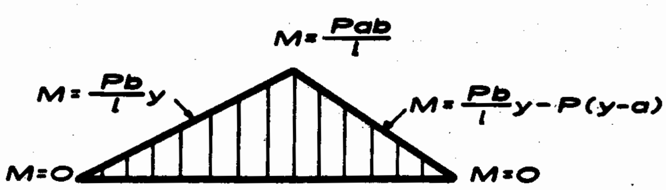
El momento flexionante sigue siendo una función lineal de y; el cual vale $\frac{Pab}{L}$ para y = a, y para y = L, vale

M =

$$M = \frac{Pb}{L}\ L - P(L-a) = Pb - Pb = 0$$

Entonces, el diagrama queda:





Obtengamos ahora el diagrama de fuerza cortante a lo largo del eje de la viga. En esta representación los valores en el eje (Y) indican la posición de la __________ y los valores paralelos al eje Z indican el valor de la __________ ____________ que actúa en cada sección

---

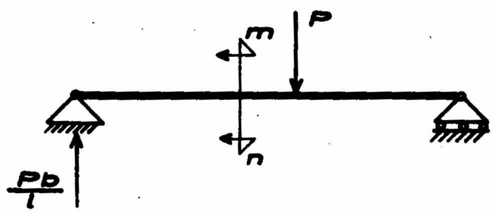
sección, fuerza cortante

Los valores positivos de la fuerza cortante se toman arriba del eje horizontal y los negativos __________.

---

abajo

Entonces, tomando una sección m-n a la izquierda de P, se obtiene que para ella:



V =

$V = \frac{Pb}{L}$ (es la única fuerza cortante a la izquierda de la sección m-n y es CONSTANTE).

El sentido de la fuerza cortante desde y = 0, hasta y = a, es

__________.

---

positivo.

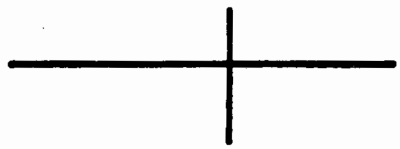
Dibuja la primera parte del diagrama:

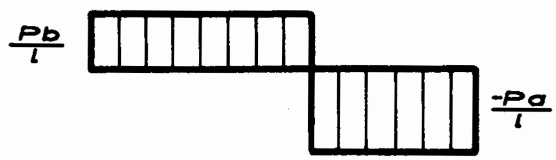
Ahora, tomando una sección m-n a la derecha de P, obtén el valor de la fuerza cortante a la IZQUIERDA de esta sección.

V =

$$V = \frac{Pb}{L} - P = P\left(\frac{b}{L} - 1\right) = P\left(\frac{b - L}{L}\right) = P\left(\frac{-a}{L}\right) = -\frac{Pa}{L}$$

Dibuja el diagrama completo de fuerza cortante





En el punto de aplicación de la carga P se presenta un salto brusco en el valor de la __________ ____________, desde el positivo $\frac{Pb}{L}$ al negativo $\frac{Pa}{L}$.

---

fuerza cortante

También se presenta, en el punto de aplicación de la carga P, un cambio brusco en el valor de la pendiente en el diagrama del

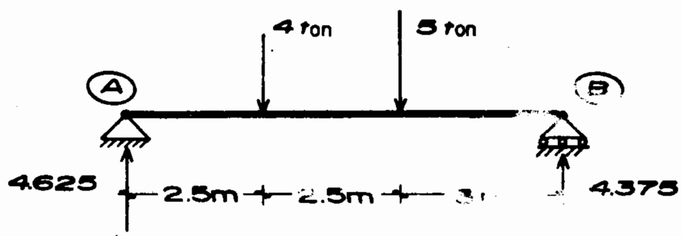
__________ ______________.

---

momento flexionante

Ejemplo.-

Obtener diagramas de elementos mecánicos de la siguente viga.



Obtengamos primero el diagrama de fuerzas cortantes, puesto que nos ayudará en la obtención del de momentos flexionantes. Para esto, se divide en varios tramos la viga, estableciéndose los valores de la fuerza cortante para cada uno de ellos.

Para: $y \leq 2.5$ m; V = ; a la izquierda

Para: $2.5 \text{ m} \leq y \leq 5$ m; V = ; a la izquierda

Para: $5 \text{ m} \leq y \leq 8$ m; V = ; a la DERECHA

V = 4.625 ton

V = 0.625 ton

V =-4.375 ton (Recuerda la regla del signo)

Dibuja el diagrama de fuerza cortante, en la página siguiente.

Ahora, en el caso general de cargas repartidas sabemos que:

$$\frac{dM}{dy} = V; \ \frac{dV}{dy} = -\ \omega$$

Entonces

$$\frac{d^2M}{dy^2} =$$

$$\frac{d^2M}{dy^2} = -\ \omega$$

De aquí se deduce que en los tramos descargados (ω = o) V es constante y M varía ____________.

---

linealmente

También se deduce que en los tramos sometidos a cargas ____________ repartidas, V y M varían con leyes continuas de primero y ________ grado respectivamente.

---

uniformemente, segundo

También se deduce que V y M varían con leyes continuas de segundo y ________ grado, si la carga varía linealmente (carga __________), y así sucesivamente.

---

tercer, triangular

Finalmente, se concluye que en las secciones en las que la fuerza cortante se anula, el momento flexionante se hace ________ y no mínimo, porque la segunda derivada de M es NEGATIVA.

---

máximo

En las aplicaciones del análisis es importante encontrar las secciones para las que el momento flexionante toma un valor máximo o __________.

---

mínimo

En el caso considerado, el momento flexionante máximo se encuentra exactamente en el punto de aplicación de la ________ ____.

---

carga P

Esto es, en este punto la pendiente en el diagrama cambia de ______

---

signo

Por otro lado, sabemos que la <u>pendiente</u> en el diagrama de momentos flexionantes es igual a la ________ __________, o sea:

$$\frac{dM}{dy} = V$$

---

fuerza cortante

Por consiguiente el momento flexionante toma sus valores máximos o mínimos en las secciones para los que la fuerza cortante cambia BRUSCAMENTE de __________

---

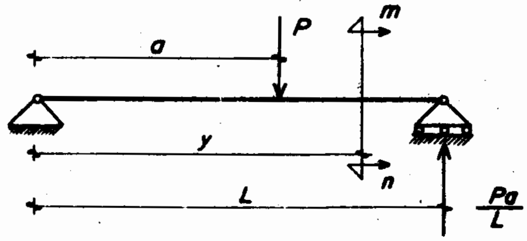
signo

Estas últimas expresiones para la obtención del momento flexionante y fuerza cortante a la IZQUIERDA de la viga, en las cuales se incluye el valor de la carga P, se complicaron un poco.

Más sencillo es, en este caso, considerar el tramo de viga a la DERECHA de la sección sobre el que actúa únicamente la reacción ____.

$\frac{Pa}{L}$

Siguiendo este procedimiento y utilizando la REGLA de los SIGNOS a la derecha de la sección, obtén las expresiones del momento flexionante y fuerza cortante para este tramo.

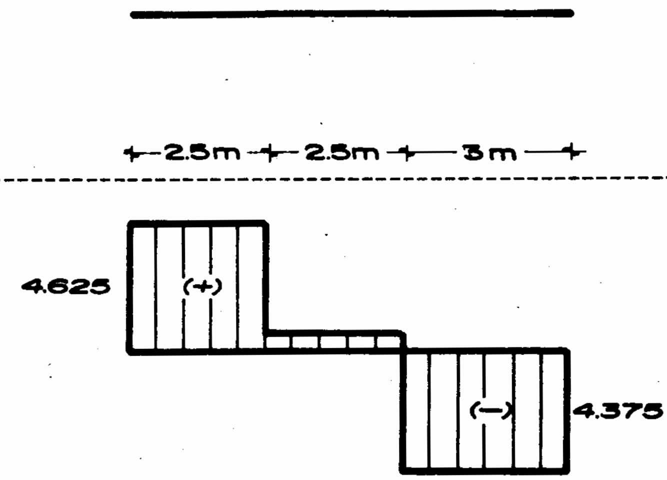


$$M = \frac{Pa}{L}(L - y)$$

$$V = \frac{-Pa}{L}$$

Verifica que para $y = a$, $M = \frac{Pab}{L}$; y para $y = L$, $M = o$

Caso particular, para $y = a = b = \frac{L}{2}$; verifica que $M = \frac{PL}{4}$



Ahora, obtengamos el diagrama de momentos flexionante. Para esto, consideremos dos aspectos muy importantes:

1. Las cargas son concentradas; por tanto, el momento flexionante es una función __________ de y.
2. Existe un salto brusco en el valor de la fuerza cortante en la sección y = 5 m; por consiguiente, el momento flexionante en esta sección cambia bruscamente de pendiente positiva a _____ _________, presentándose un momento flexionante _________.

---

lineal, negativa, máximo

Entonces, los puntos claves para trazar el diagrama de momento flexionante, en este caso, son:

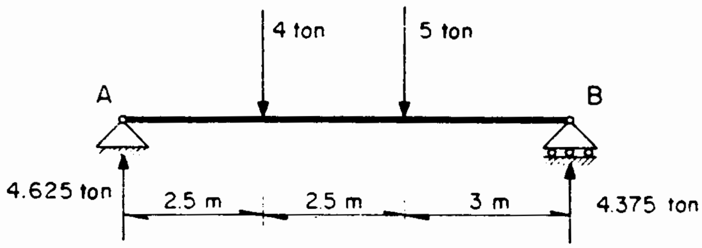
a) Los apoyos, en donde el momento flexionante vale _______

b) Los puntos donde están ___________ ____ __________

---

cero, aplicadas las cargas

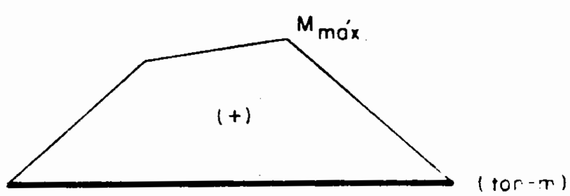
O sea, solo necesitas cuatro valores para trazar el diagrama; dos de estos ya los conoces, solo falta calcular los otros dos. Calcúlalos



Para y = 2.5 m ; M = + 11.563 ton-m (a la izquierda)

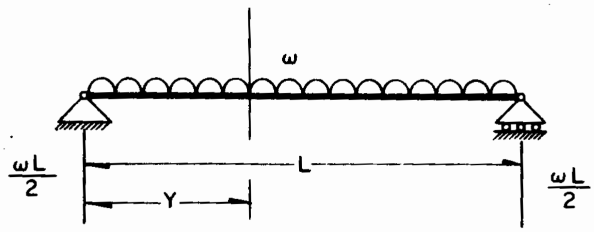
Para y = 5.0 m ; M = + 13.125 ton-m (a la derecha)

Traza el diagrama



Ejemplo.-

Obtener diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.



En este caso, la fuerza cortante para una sección a una distancia Y del apoyo izquierdo, es

$V =$

$$V = \frac{\omega L}{2} - \omega Y$$

De la ecuación anterior se deduce que el diagrama de fuerza cortante es una recta inclinada, cuyos valores para $Y = 0$, $Y = \frac{L}{2}$ y $Y = L$, son

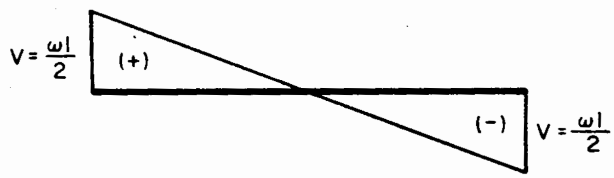
$V =$

$V =$

$V =$

$\frac{\omega L}{2}$, cero, $- \frac{\omega L}{2}$

Traza el diagrama



Ahora, obtén la ecuación del momento flexionante considerando la misma sección.

M =

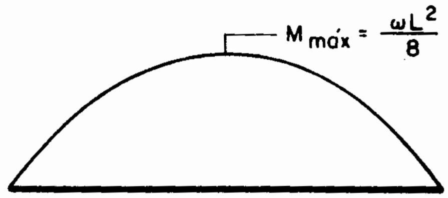
$$M = \frac{\omega l}{2} y - \frac{\omega Y^2}{2}$$

De la ecuación anterior, se deduce que el diagrama de momento flexionante es una curva ____________, de eje vertical. Los momentos en los apoyos son _________, y para $Y = \frac{L}{2}$ se presenta un valor ________.

---

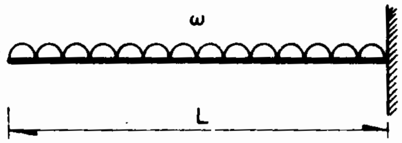
parabólica, nulos, máximo

Obtén el valor máximo del momento flexionante y traza el diagrama. Hazlo en la siguiente página.



Ejemplo.-

Obtener diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga en voladizo o cantiliver.



Obtén reacciones

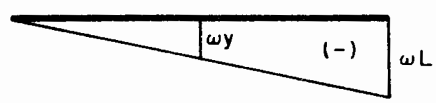
$V_B = \omega L, \quad M_B = \frac{\omega L^2}{2}$

Ahora, la fuerza cortante a una distancia y del extremo libre de la viga en voladizo, es

$$V =$$

$$V = - \omega y$$

Traza, aproximadamente, a escala, el diagrama.



Para trazar el diagrama de momento flexionante, conviene obtener la ecuación del momento a la ___________ de una sección, o sea, a una distancia y del extremo _________.

---

izquierda, libre

Obtén la ecuación

$$M =$$

$$M = -\omega y \left(\frac{y}{2}\right) = -\frac{\omega y^2}{2}$$

La expresión anterior es la ecuación de una parábola de eje

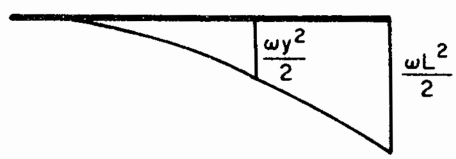
__________ y tangente al eje horizontal en el extremo libre de la

viga.

---

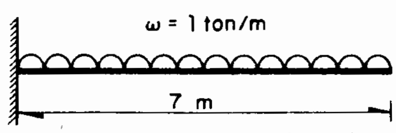
vertical

Traza el diagrama



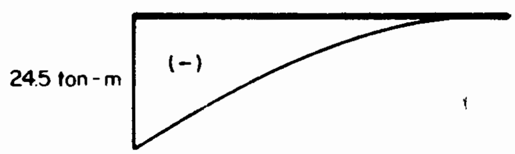
Ejercicio.-

Traza aproximadamente, a escala, los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.



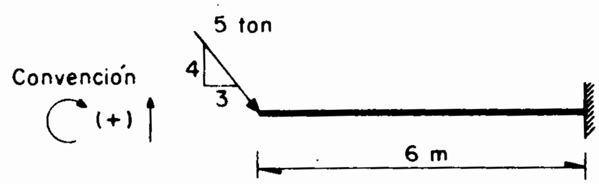
Te conviene obtener tus ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante a la derecha de una sección cualquiera.

El signo positivo del diagrama de fuerza cortante es consecuencia de la posición del apoyo



Ejemplo.-

Trazar diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.



Solución:

Obtén tus ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante a la ______________ de cualquier sección a una distancia y del extremo libre.

---

izquierda

Entonces

V =

M =

$$V = -\left[5\left(\frac{4}{5}\right)\right] = -4 \text{ ton}$$

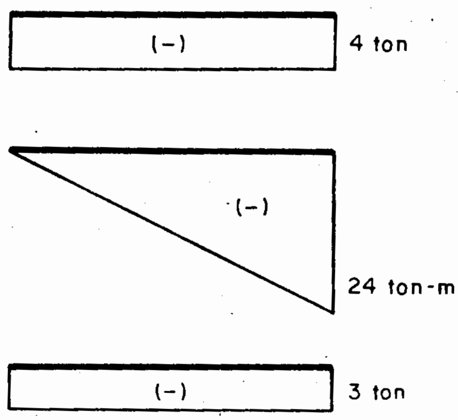
$$M = -\left[5\left(\frac{4}{5}\right)y\right] = -4y \text{ ton-m}$$

En este caso particular, existe una fuerza normal a la sección transversal de la viga. Obtén su valor

N =

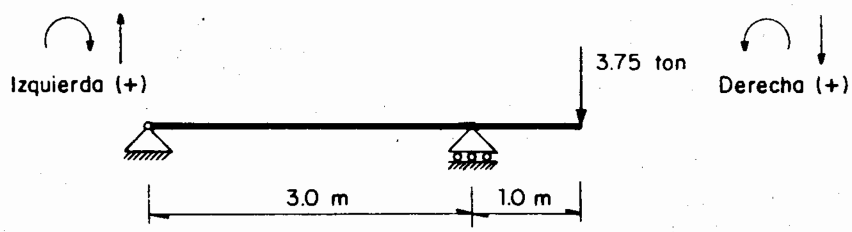
N =-3 ton (El signo es negativo, puesto que la fuerza tiende a acortar a la viga).

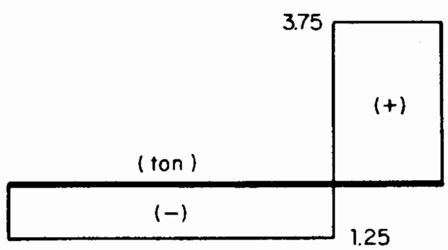
Ahora, traza los diagramas

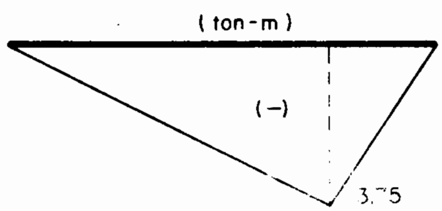


Ejercicio.-

Obtén los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.

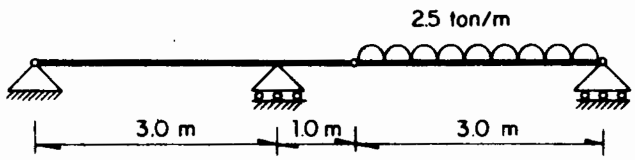


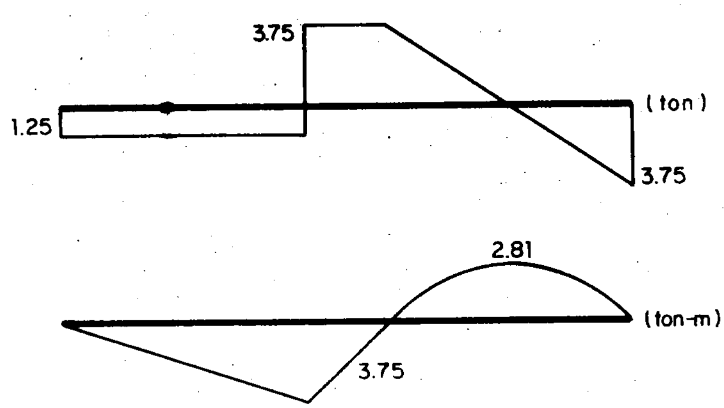




Ejercicio.-

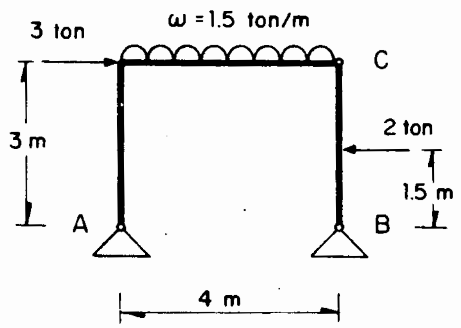
Obtén los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.




3.75
1.25
(ton)
3.75
2.81
(ton-m)
3.75

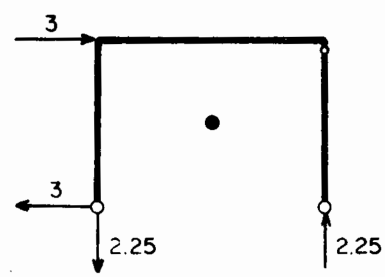
Ejemplo.-

Obtener diagramas de elementos mecánicos del siguiente marco



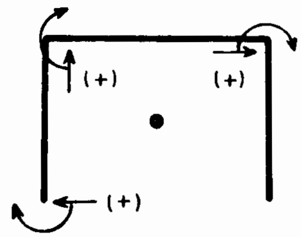
Para trazar los diagramas de elementos mecánicos del marco es conveniente, por ahora, considerar por separado las condiciones de carga que lo solicitan.

Condición 1. (Las reacciones las calculaste en el capítulo anterior)

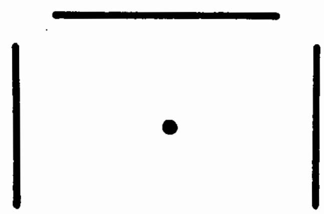


Teniendo las reacciones, el trazo de los diagramas es muy sencillo si te imaginas estar de pie sobre el círculo de la figura anterior y recorres el marco con la vista de izquierda a derecha, usando la convención para vigas.

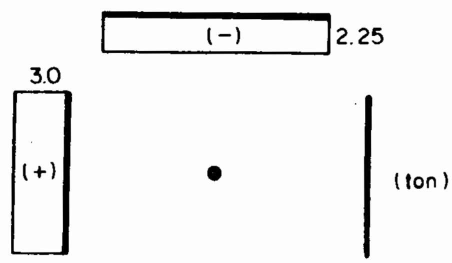
Dibuja en los extremos izquierdos de cada una de las barras que forman este marco, las convenciones para fuerza cortante y momento flexionante.



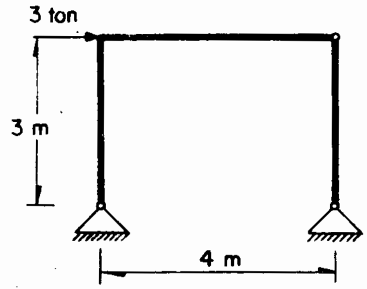
Antes de trazar el diagrama de fuerza cortante, separemos las barras que lo componen de la siguiente manera:

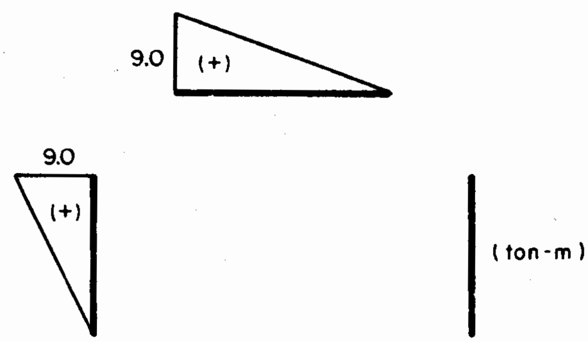


Ahora, recorre el marco de izquierda a derecha obteniendo valores claves de la fuerza cortante que te ayuden a trazar el diagrama. Recuerda que la fuerza cortante a la izquierda de una sección es la suma de <u>todas</u> las fuerzas cortantes a la izquierda de esta.
Traza el diagrama en la figura anterior

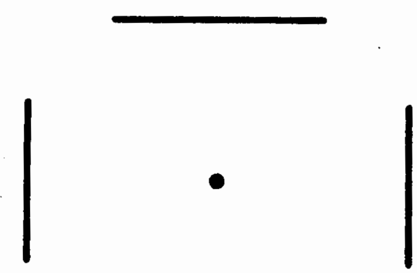


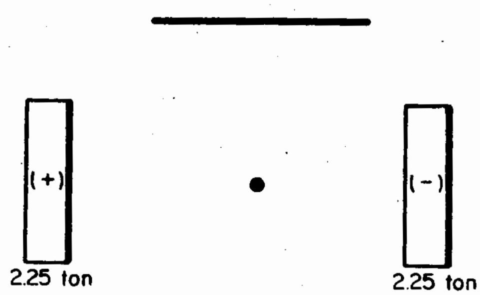
Siguiendo con la misma idea traza el diagrama de momento flexionante. No olvides incluir todas las fuerzas a la izquierda de la sección que producen momento.





Por último, traza el diagrama de fuerzas normal considerando las fuerzas que actúan a la izquierda y normales a la sección. Si estas fuerzas tienden a alargar el elemento se considera positivo y si tienden a acortarlo, negativo.



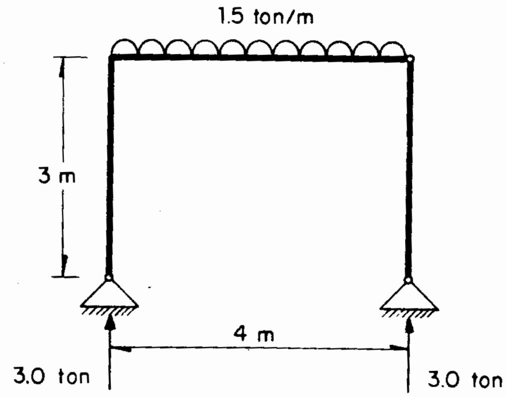


Observa que la suma de fuerzas normales a la izquierda de cualquier sección en el cabezal del marco, es CERO.

Ejercicio.-

Traza los diagramas de elementos mecánicos del marco anterior siguiendo la convención derecha.

Consideremos ahora, la condición de carga 2.

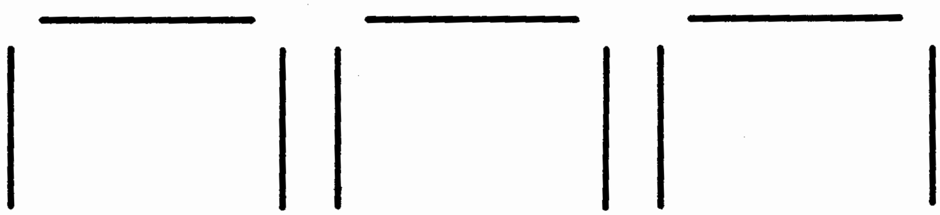


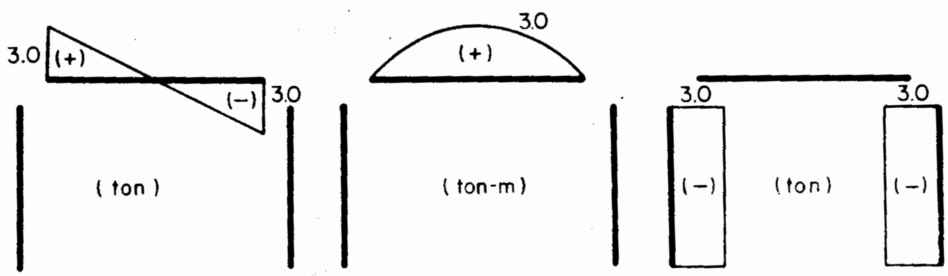
Observa que en este caso, el único elemento que está sometido a fuerza cortante y momento flexionante es el cabezal. Las columnas solamente están sometidas a fuerza __________

---

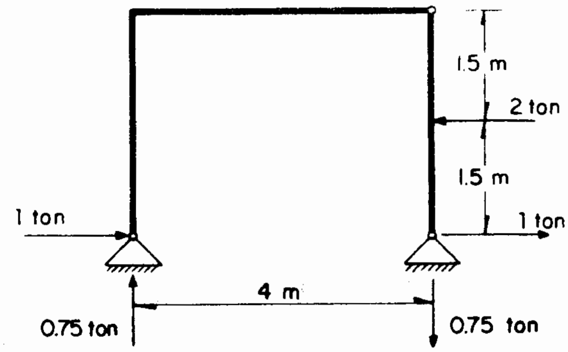
normal

Traza los diagramas



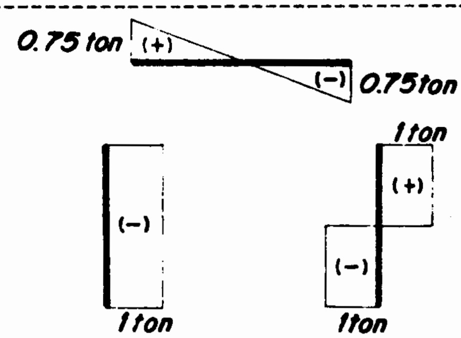


Condición de carga 3.

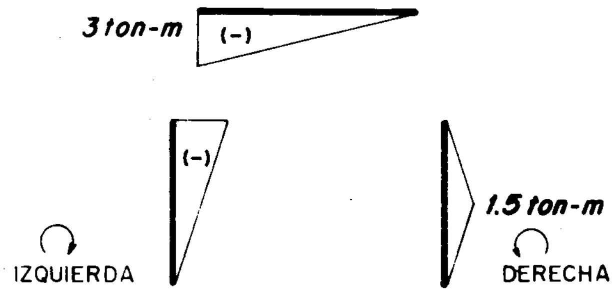


Para facilitar el trazo de los diagramas conviene combinar las dos convenciones de signos, por ejemplo, recorrer el marco de izquierda a derecha hasta la articulación intermedia y de derecha a izquierda hasta esta misma articulación.

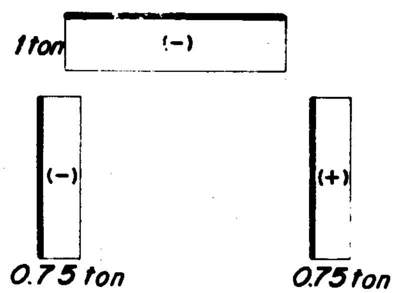
Considerando lo anterior, traza el diagrama de fuerzas cortantes.



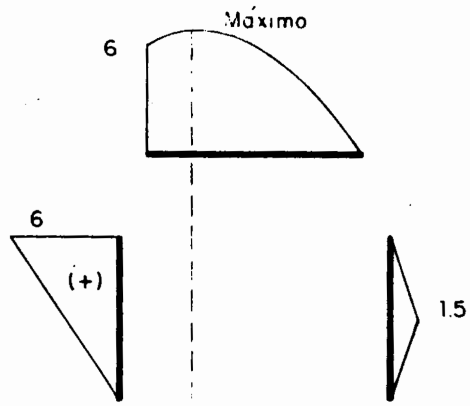
Ahora, traza el diagrama de momento flexionante.



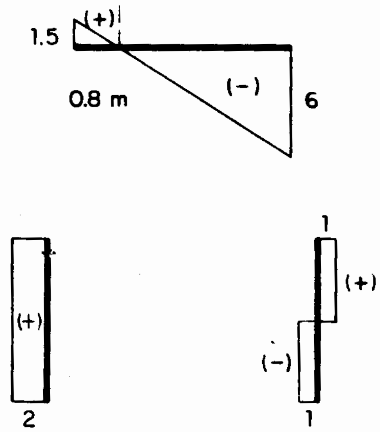
Por último, traza el diagrama de fuerza normal



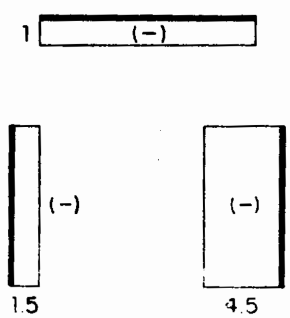
La solución final del problema la obtenemos con la suma de los diagramas de elementos mecánicos de todas las condiciones de carga consideradas, por tanto, obtén las sumas de estos y compara tus resultados con los de la siguiente página.
Observarás que la suma de dos diagramas, uno con ley de variación lineal y otro con ley de variación parabólica, resulta con ley de variación PARABOLICA.



DMF (ton-m)



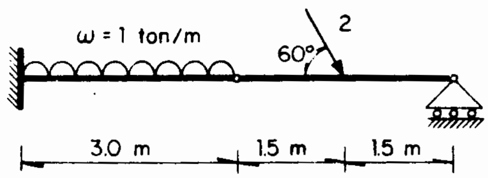
DFC (ton)

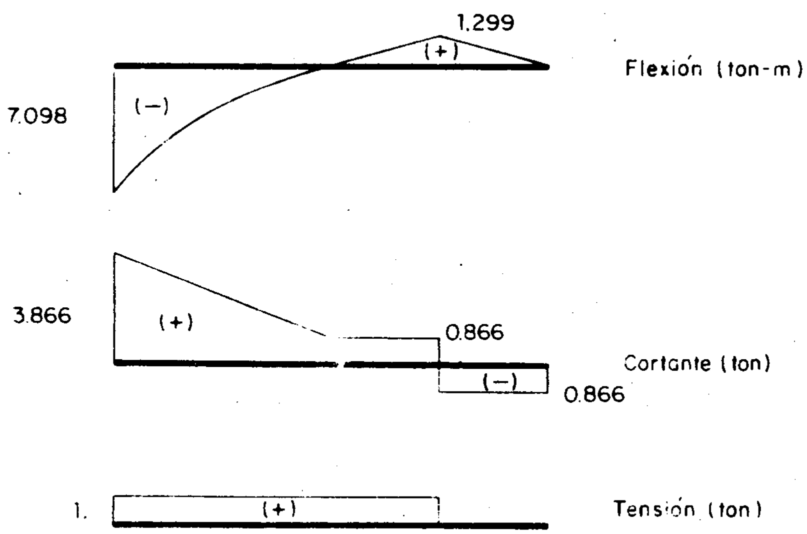


DFN (ton)

Ejercicio.-

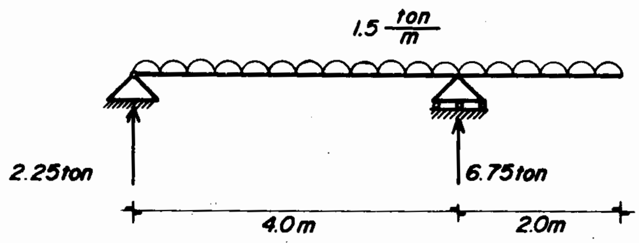
Obtén los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga. Considera la carga uniformemente repartida como condición de carga 1 y la carga concentrada como condición de carga 2; luego suma los diagramas y compara tus resultados con los que te proporciona el texto




1.299
(+)
Flexión (ton-m)
7.098
(−)
3.866
(+)
0.866
Cortante (ton)
(−)
0.866
1.
(+)
Tensión (ton)

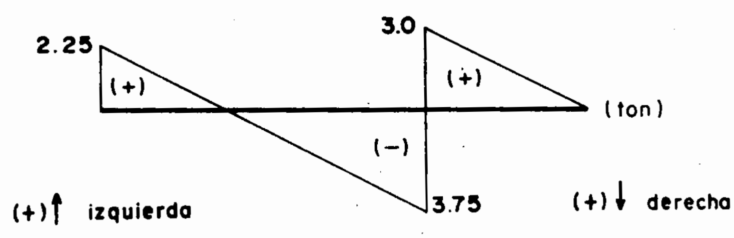
Ejemplo.-

Obtener diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.



Comprueba los valores de las reacciones de los apoyos.

Traza el diagrama de fuerza cortante, te conviene usar las dos convenciones de signos.



Antes de trazar el diagrama de momento flexionante considera los siguientes aspectos:

1. La curva que representa el momento flexionante a la IZQUIERDA del apoyo intermedio es una ___________
2. Esta curva se inicia con un valor _________.
3. En la sección donde la fuerza cortante es nula tiene un valor _________, que puedes calcular
4. La curva termina, precisamente en el apoyo intermedio, con un valor que también puedes calcular.

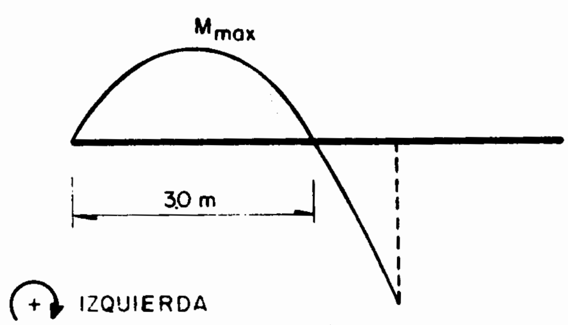
---

parábola, nulo, máximo

Calcula estos valores

$M_{máx}$=1.688 ton-m, M=-3.0 ton-m

Ahora, para trazar el diagrama a la IZQUIERDA del apoyo intermedio es conveniente conocer otro punto. Para esto, observa que el momento flexionante en la sección donde se encuentra el apoyo intermedio es negativo, por tanto, hay un valor NULO en otra sección de la viga. Localízala y traza el diagrama.



Para terminar, considera el tramo a la DERECHA del apoyo intermedio. El momento flexionante se representa mediante otra curva ___________

---

parabólica

En el extremo libre de la viga el momento flexionante vale ________.

---

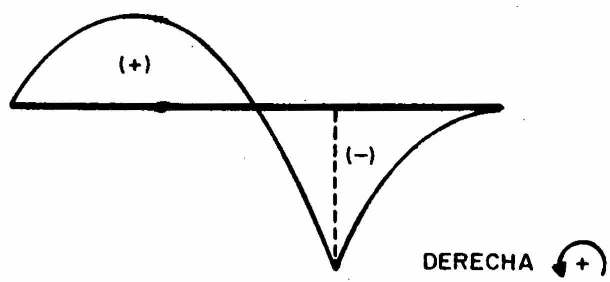
cero

Si recorres este tramo de derecha a izquierda y sigues la convención de momento flexionante a la derecha notarás que solo existen valores con signo ____________.

---

negativo

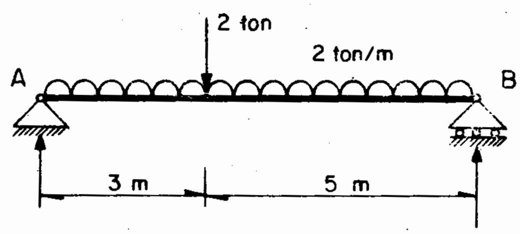
En el apoyo intermedio la curva termina con el mismo valor que acabas de calcular. Comprueba este valor considerando el momento a la derecha y completa el diagrama en la figura anterior.



También podemos obtener los diagramas de elementos mecánicos considerando todas las cargas de una sola vez, esta forma es muy sencilla si llevas en orden la obtención de los puntos claves de los diagramas y si usas las dos convenciones de signos.

Ejemplo.-

Trazar los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.



Obtengamos las reacciones de los apoyos

$\Sigma M_A = 0, \quad (2)(8)(4)+(2)(3)-B_V(8) = 0$

$B_V = 8.75$ ton

$\Sigma F_V = 0, \quad -(2)(8) - 2 + 8.75 + A_V = 0$

$A_V = 9.25$ ton

Comprueba los resultados obtenidos con $\Sigma M_B = 0$

Ahora, obtengamos el diagrama de fuerza cortante que servirá de apoyo en la obtención de los puntos claves del diagrama de momento flexionante. En este caso, la fuerza cortante a la IZQUIERDA de una sección, a la izquierda de la fuerza concentrada es

---

$V = Av - \omega y = 9.25 - \omega y \qquad 0 \leq y \leq 3$

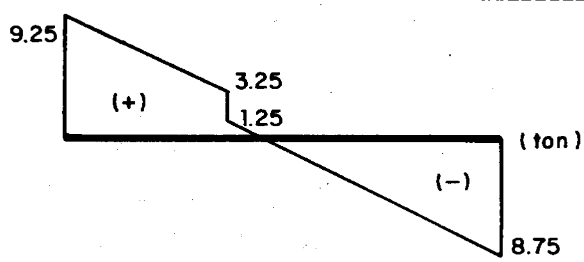
---

y la fuerza cortante a la DERECHA de una sección, a la derecha de la fuerza concentrada es

---

$V = -Bv + \omega y = -8.75 + \omega y \qquad 0 \leq y \leq 5$

Traza el diagrama, recuerda que en el punto de aplicación de la carga concentrada se presenta un salto brusco en el valor de la fuerza cortante.



Para trazar el diagrama de momento flexionante considera los siguientes aspectos:

1.- En el punto de aplicación de la carga concentrada se presenta un cambio brusco en el valor de la ___________ del diagrama del momento flexionante.

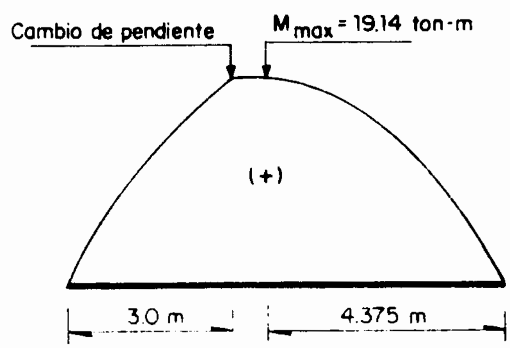
2.- El diagrama tiene una ley de variación parabólica a la izquierda de la carga concentrada y otra ley de variación ___________ a la derecha.

3.- En la sección donde la fuerza cortante es nula se presenta un momento flexionante __________.

---

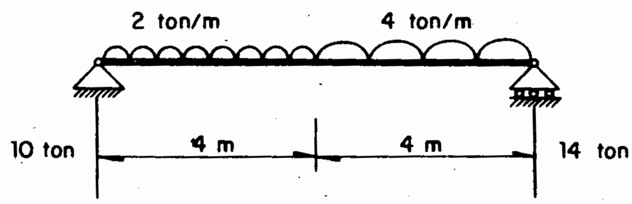
pendiente, parabólica, máximo

Traza el diagrama



Ejemplo.-

Trazar los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.



Comprueba los valores de las reacciones

Para obtener el diagrama de fuerza cortante combina las dos convenciones de signo de la manera siguiente:

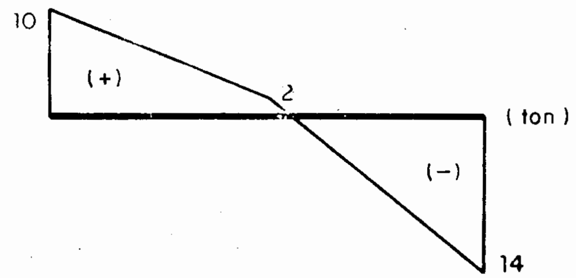
a la izquierda de 0 a 4 m; V =

a la derecha de 0 a 4 m; V =

$V = 10 - 2y$

$V = -14 + 4y$

Traza el diagrama

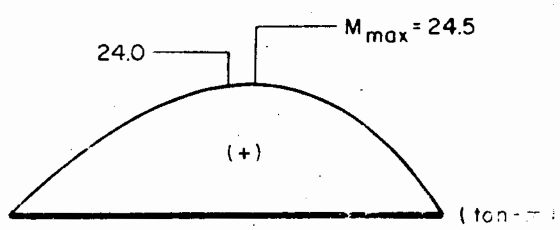


Como habrás notado, en el punto donde hay cambio de carga no se presenta un salto brusco en el valor de la fuerza cortante, por tanto, en este punto existe continuidad en las dos curvas que forman el diagrama de momento flexionante, esto es, la pendiente es la

____

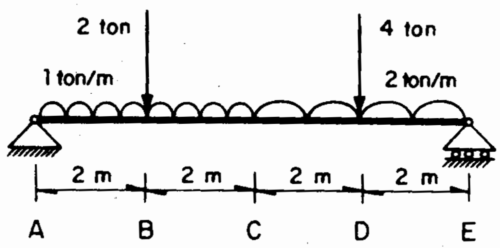
misma

Traza el diagrama de momento flexionante



Ejercicio.-

Obtén los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga.

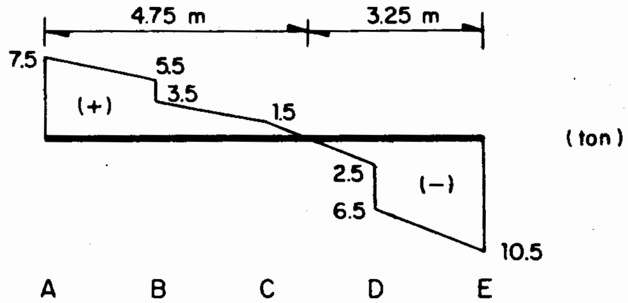


Identifica los puntos clave para el trazo del diagrama de fuerza cortante

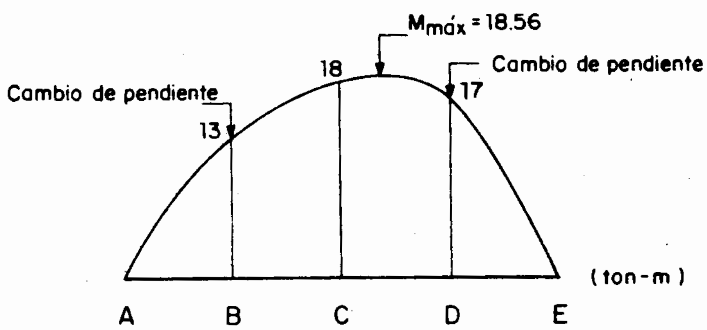
---

A, B, C, D, E

Obtén reacciones, traza el diagrama de fuerza cortante y, localiza la sección donde la cortante es nula.



Traza el diagrama de momento flexionante



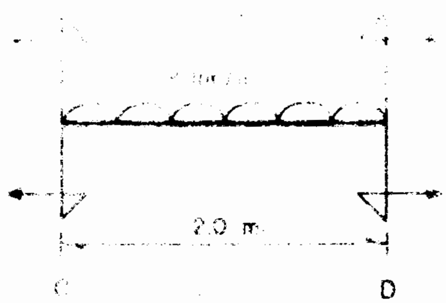
ATENCION

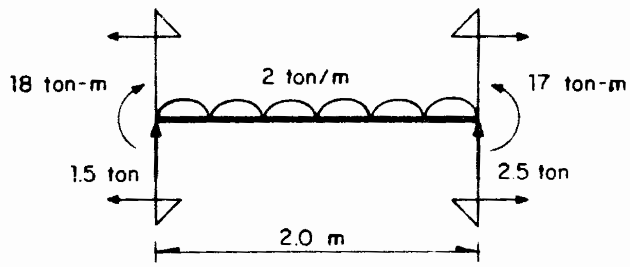
La presentación de los diagramas de elementos mecánicos es la base de tu trabajo en el campo de las estructuras, esto es, te servirán para resolver problemas de cursos posteriores.

Para facilitar el trabajo es necesario descomponer los diagramas completos, o sea, los que se obtienen al considerar todas las cargas de una sola vez, en figuras geométricas sencillas.

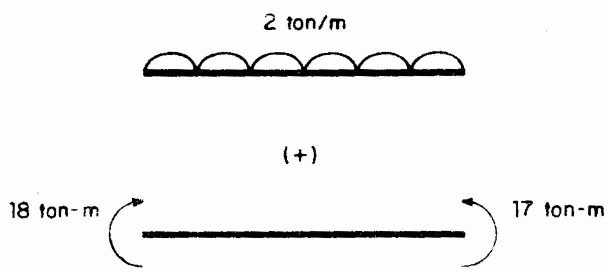
Esta descomposición se demuestra mediante el principio de superposición de causas y efectos.

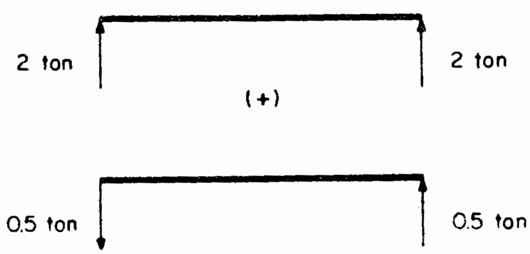
Observando los diagramas de elementos mecánicos del ejercicio anterior el tramo C-D es un ejemplo típico; entonces, hay que buscar algunas figuras geométricas sencillas y estáticamente equivalentes. Para esto, aislemos el tramo mediante dos secciones transversales rectas sin olvidar las acciones de los otros tramos sobre éste para cumplir las condiciones de equilibrio. Dibuja en la [illegible] acciones.



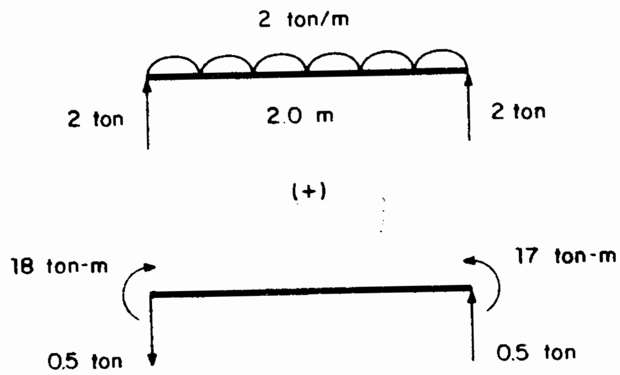


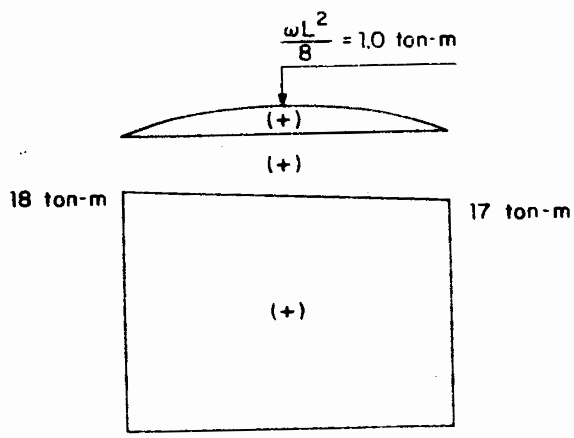
Por el principio de superposición de causas y efectos siempre podrás separar las fuerzas que actúan en un tramo en la forma que tú quieras. En la siguiente figura se muestra la más conveniente; pero, incompleta, esto es, tienes que obtener las fuerzas que faltan para cumplir con este principio.





Traza los diagramas de momento flexionante de los dos segmentos





Esto es, cuando se presenta el caso de un diagrama como el del tramo estudiado siempre podrás descomponerlo en una ___________ y un ___________

---

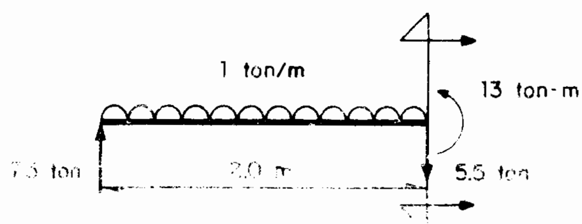
parábola, trapecio

Existe un caso particular en el cuál el momento flexionante en uno de los extremos vale cero, por consiguiente, podrás descomponerlo en una parábola y un ___________.

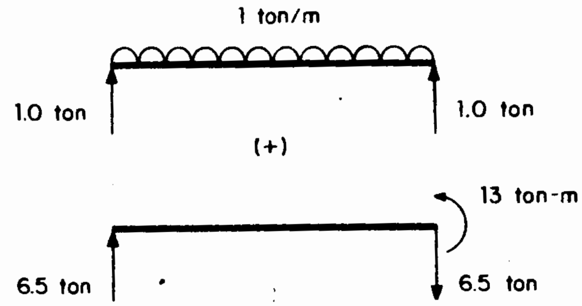
---

triángulo

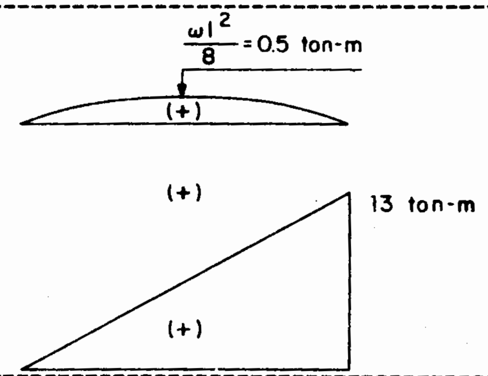
El caso anterior es típico en tramos extremos de vigas simplemente apoyadas. Por ejemplo, aislemos el tramo A-B.



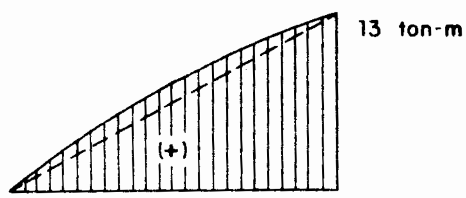
Considerando el principio de superposición de causas y efectos, separa en la forma más conveniente las fuerzas que actúan en este tramo.



Obtén diagramas de momento flexionante de los dos segmentos.

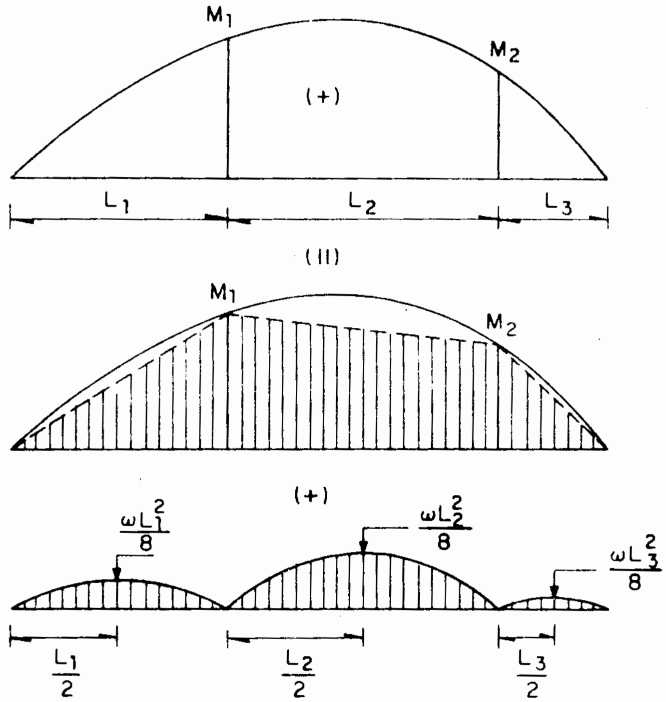


Si superponemos los diagramas se obtiene el original.



Ejemplo.-

Obtener la descomposición del siguiente diagrama de momento flexionante.



Por tanto, el diagrama del primer tramo es equivalente a la suma de un ___________ y, una ___________ con un momento máximo igual a _____.

---

triángulo, parábola, $\frac{\omega L_1^2}{8}$

El diagrama del segundo tramo es equivalente a la suma de un ___________ y una ___________ con un momento máximo igual a _____.

---

trapecio, parábola, $\frac{\omega L_2^2}{8}$

Y, el diagrama del tercer tramo es equivalente a la suma de ...

____________ y una ____________ con un momento máximo igual a

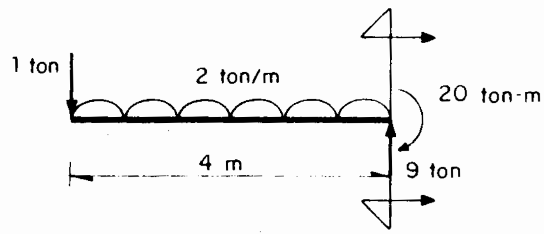
______.

---

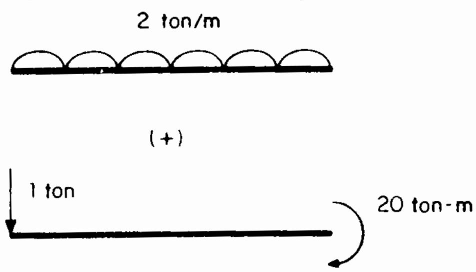
triángulo, parábola, $\frac{wL^2}{8}$

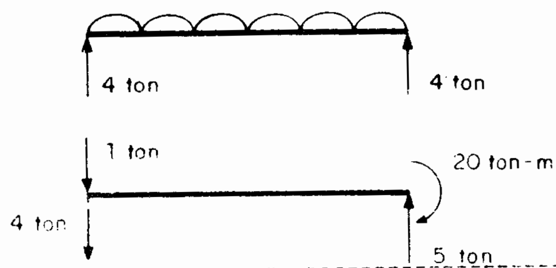
Estudiemos ahora el caso típico de la viga en voladizo.

Observa la figura

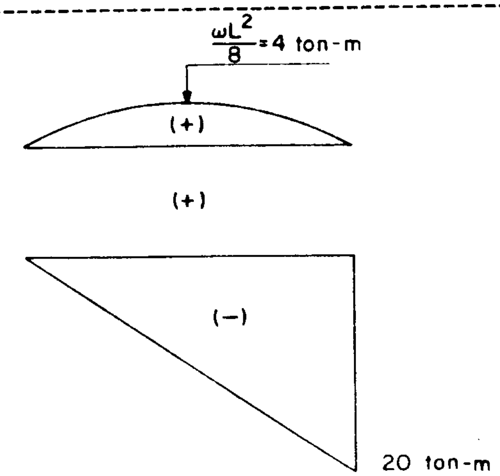


Considerando el principio de superposición de causas y efectos completa las fuerzas que actúan en esa viga.



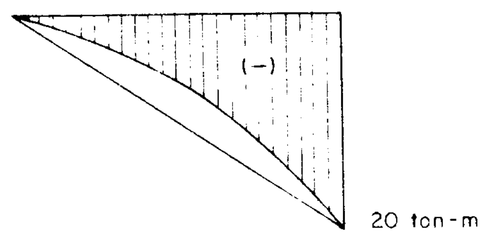


Traza los diagramas de momento flexionante.



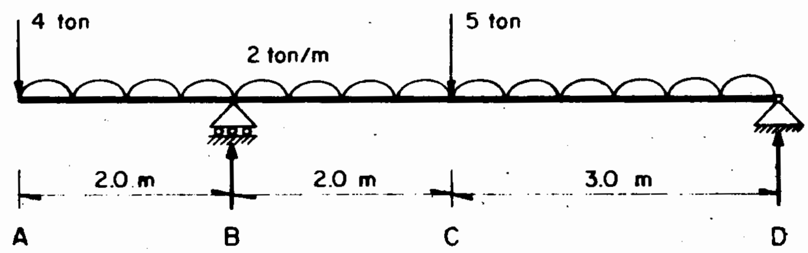
Si superponemos los diagramas se obtiene el original.

Verifícalo gráficamente (1 cm = 5 ton-m)

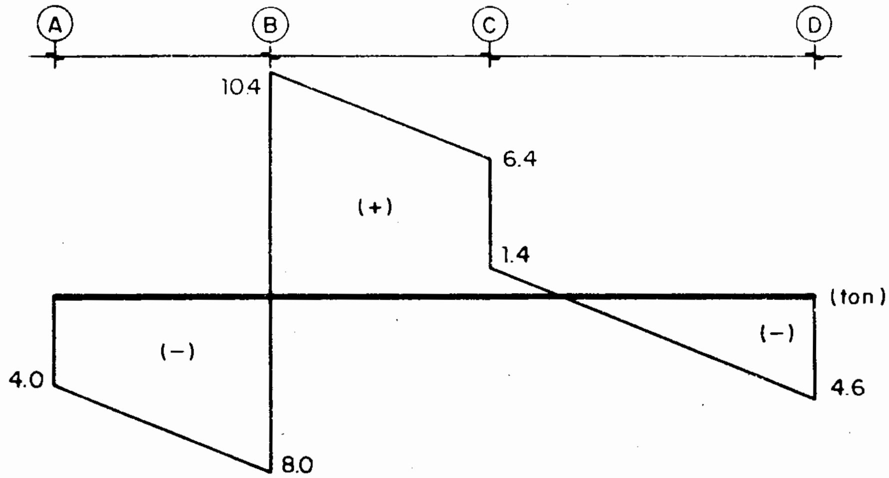


Ejercicio.-

Obtén los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente viga y, efectúa la descomposición geométrica.



Obtén reacciones y traza el diagrama de fuerza cortante. Los puntos A, B, C y D son los puntos clave.



Analicemos el diagrama:

La figura del tramo A-B es un __________ de base mayor igual a -8.0 ton y base menor igual a __________.

trapecio, -4.0 ton

La del tramo B-C es otro __________ de base mayor igual a __________ y base menor igual a __________.

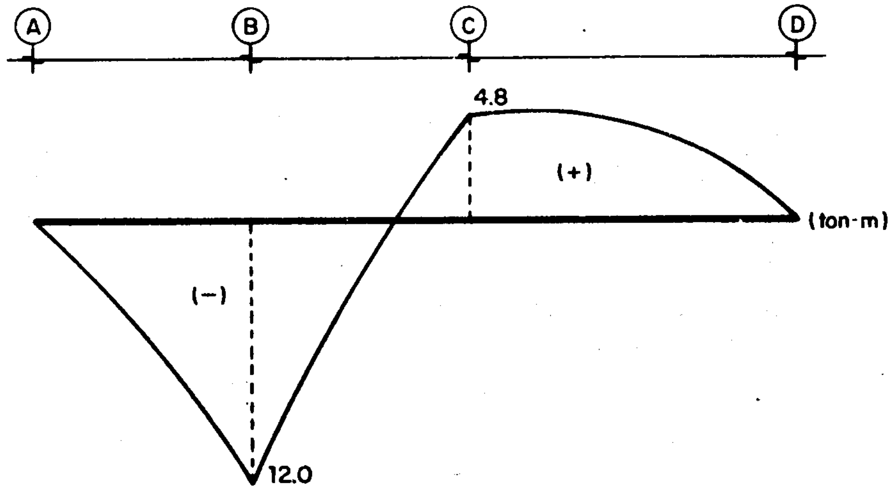
trapecio, 10.4 ton, 6.4 ton

Y, la del tramo C-D es también otro __________ de base mayor igual a __________ y base menor igual a __________.

trapecio, -4.6 ton, 1.4 ton

Por consiguiente, no se necesita su descomposición geométrica.

Ahora, traza el diagrama de momento flexionante, apoyate únicamente en los puntos clave y calcula el $\frac{\omega L^2}{8}$ de cada tramo.



Analicemos el diagrama:

La figura del tramo A-B es equivalente a la suma de un __________ de base igual a _________, y una _____________ con un momento máximo igual a ___________.

---

triángulo, -12.0 ton-m, parábola, 1.0 ton-m

La del tramo B-C es equivalente a la suma de un ____________, de base mayor igual a __________ y base menor igual a ___________, y una _________________ con un momento máximo igual a __________.

---

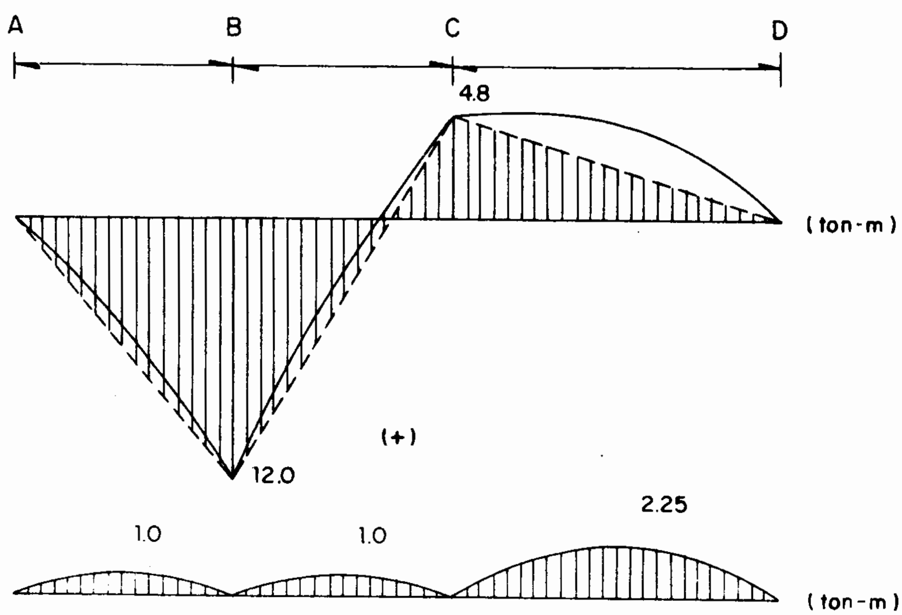
trapecio, -12.0 ton-m, 4.8 ton-m, parábola, 1.0 ton-m

Y, la del tramo C-D es equivalente a la suma de un _____________ de base igual a __________ y una ____________ con momento máximo igual a __________.

---

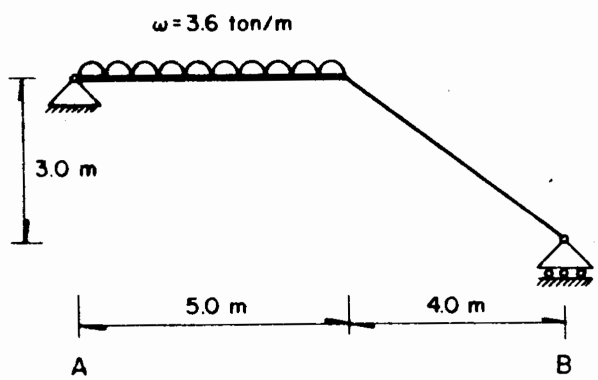
triángulo, 4.8 ton-m, parábola, 2.25 ton-m

Traza los diagramas equivalentes.



Ejercicio.-

Obtén diagramas de elementos mecánicos del siguiente marco.



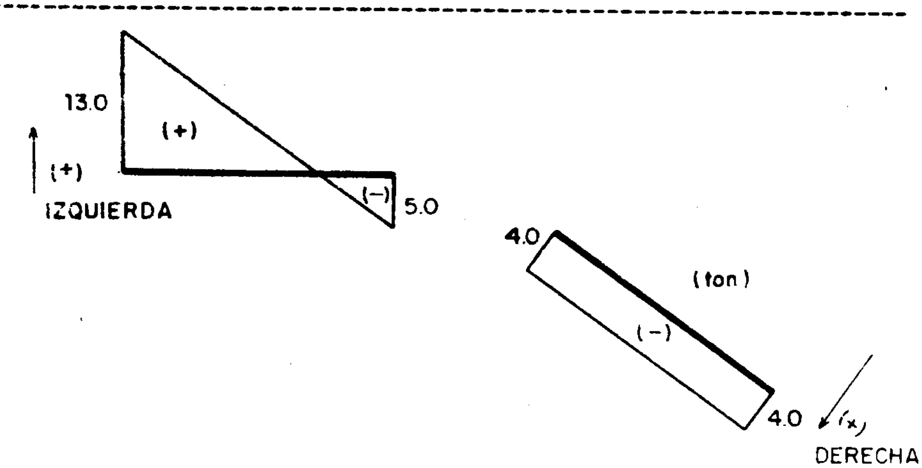
Como primer paso, obtén las reacciones de los apoyos.

$A_H = 0$

$A_V = 13.0$ ton

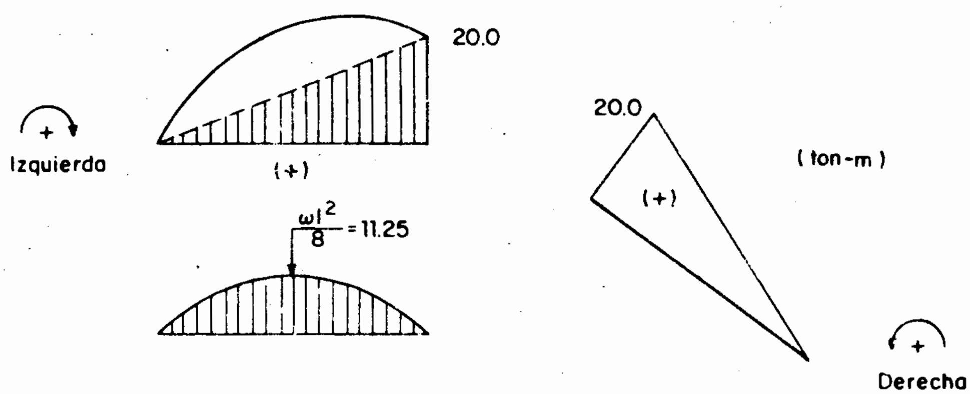
$B_V = 5.0$ ton

Ahora, obtén el diagrama de fuerza cortante. Recuerda que la fuerza cortante es la fuerza que trata de cortar a la viga, esto es, su dirección es perpendicular al eje longitudinal de esta.

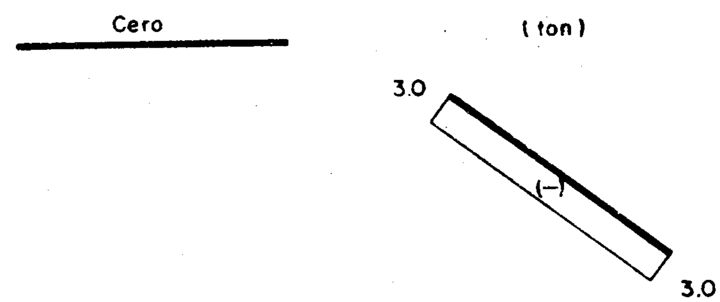


5-88

Traza el diagrama de momento flexionante. No olvides efectuar la descomposición geométrica.



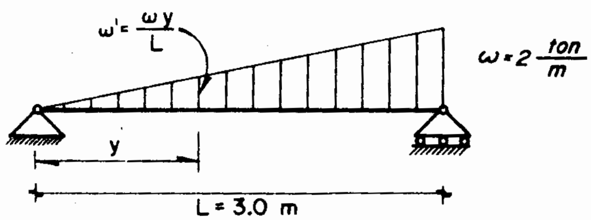
Por último, traza el diagrama de fuerza normal.



FELICITACIONES

Has adquirido habilidad en el trazo de diagrâmas de elementos mecânicos de estructuras isostâticas, con cargas concentradas y uniformemente repartidas. Ahora, para demostrar esta habilidad consideremos la carga repartida con ley triangular, con la ventaja de que ya estás en condiciones de analizarlo tû mismo sin necesidad de muchas explicaciones, por consiguiente, obtén los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de las siguientes vigas.

1.



Antes de hacer operaciones piensa como abordar el problema.
La siguiente guía te servirá para ordenar ideas.

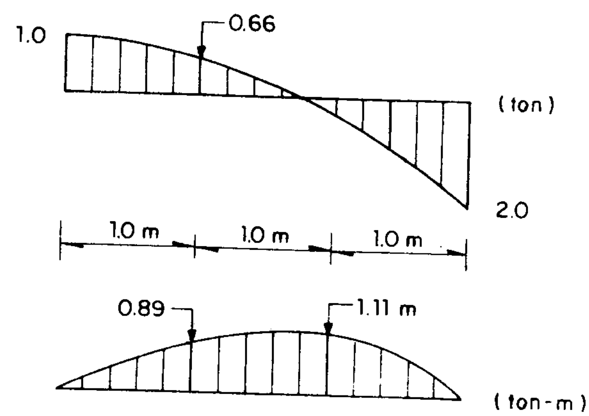
a) Usa las convenciones de fuerza cortante y momento flexionante a la IZQUIERDA o a la DERECHA de cualquier sección.

b) La fuerza cortante a la izquierda o a la derecha de una sección es la RESULTANTE de todas las fuerzas que CORTAN a la viga en esa sección.

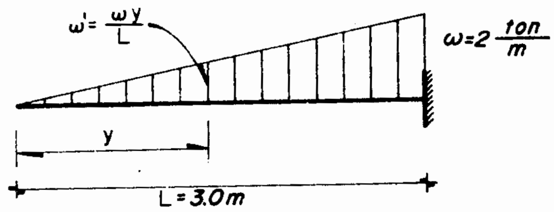
c) Dadas las características de la carga, el diagrama de fuerza cortante varía con ley PARABOLICA.

c) El momento flexionante a la izquierda o a la derecha de una sección es igual al momento de la RESULTANTE de TODAS las fuerzas a la izquierda o a la derecha de esa sección.

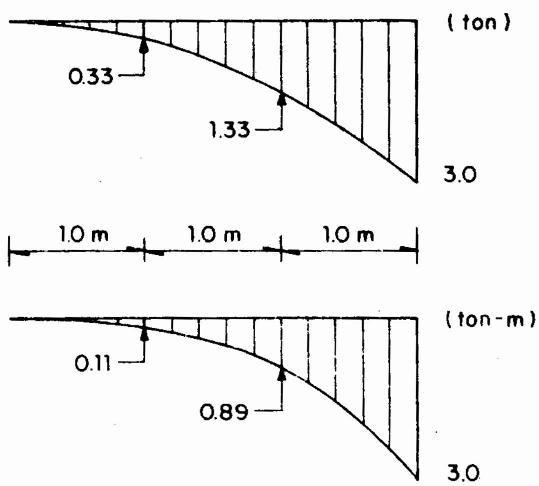
e) Dadas las características de la carga, el diagrama de momento flexionante varía con ley CUBICA. (Entiéndase por cúbica la parábola cúbica)


1.0
0.66
(ton)
2.0
1.0 m
1.0 m
1.0 m
0.89
1.11 m
(ton - m)

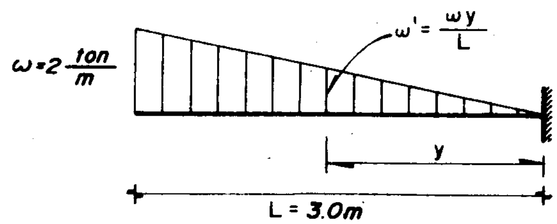
2.



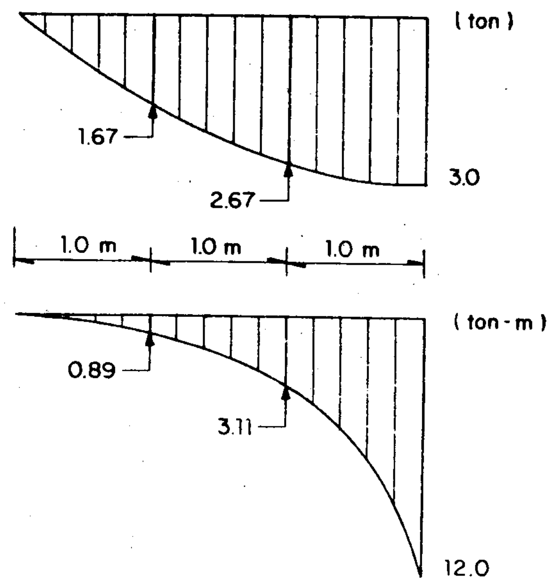
Ordena tus ideas, emplea la guía anterior.



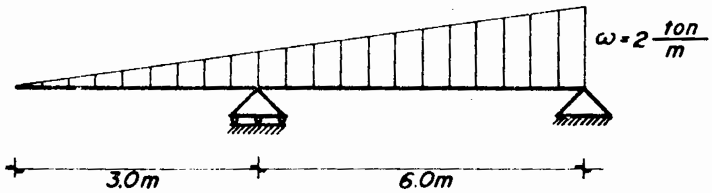
3.



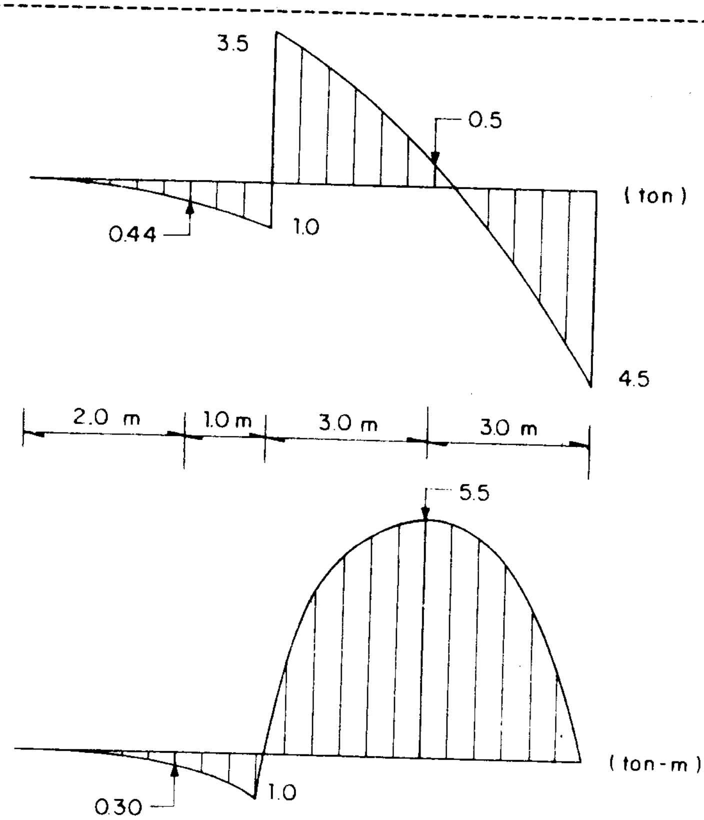
Ordena tus ideas, ya sabes lo que tienes que hacer.



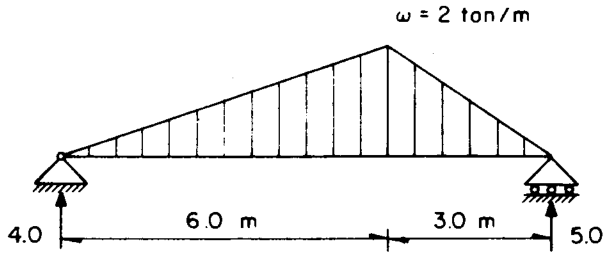
4.



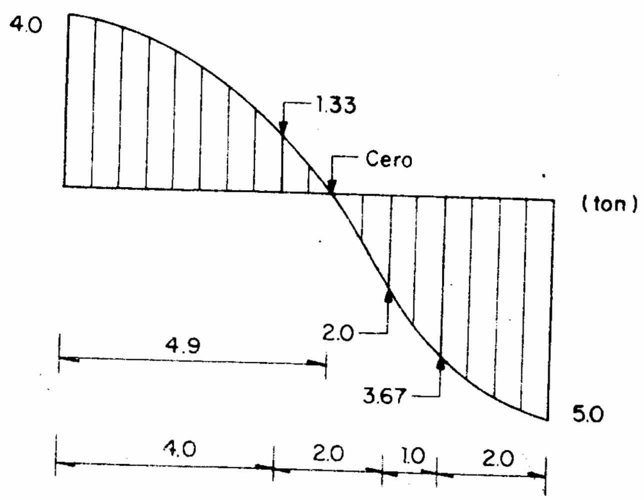
Confía en tu análisis.

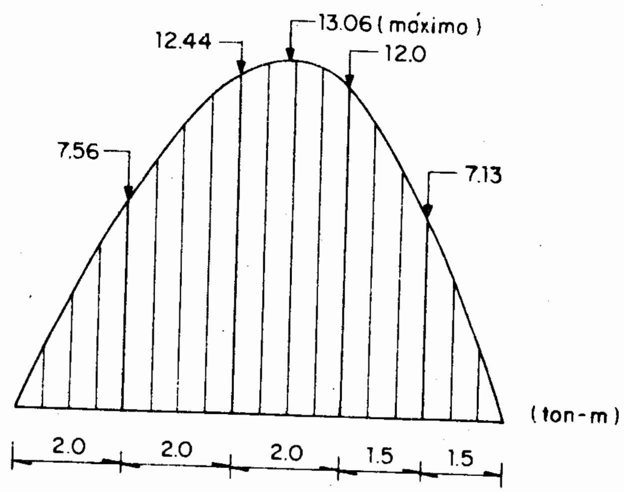

3.5
0.5
(ton)
0.44
1.0
4.5
2.0 m
1.0 m
3.0 m
3.0 m
5.5
(ton-m)
0.30
1.0

5.



HAZLO


4.0
1.33
Cero
(ton)
2.0
4.9
3.67
5.0
4.0
2.0
1.0
2.0


13.06 (máximo)
12.44
12.0
7.56
7.13
(ton-m)
2.0
2.0
2.0
1.5
1.5

CAPITULO 6. EQUILIBRIO DE ARMADURAS ISOSTATICAS EN EL PLANO

Objetivos:

6.1 Identificarás armaduras isostáticas

6.2 Calcularás las fuerzas que obran en los apoyos de armaduras isostáticas

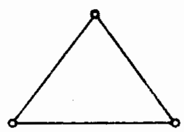
6.3 Calcularás la fuerza normal en las barras de armaduras isostáticas

En general, las armaduras están constituidas por barras rígidas unidas entre sí en puntos llamados nudos, formando un conjunto estrictamente indeformable (cuerpo rígido). Las diferentes barras que concurren en cada nudo se consideran articuladas entre sí.
Nos ocuparemos únicamente de las armaduras en el plano, llamadas trianguladas; esto es, formadas por barras contenidas en un plano y con el número de barras b, estrictamente necesario para ligar entre sí, mediante _____________, de modo invariable, n, nudos en un plano.

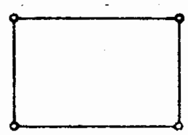
---

articulaciones

De las siguientes estructuras, identifica la que cumple con las condiciones anteriores



n = 3
b = 3



n = 4
b = 4

---

triángulo

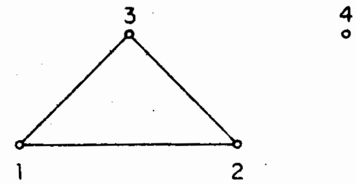
Explica brevemente por qué la otra estructura no se considera como cuerpo rígido

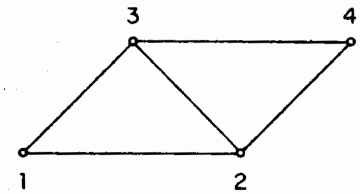
---

Porque puede variar su forma

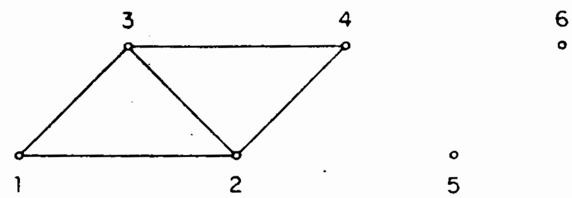
Partiendo de que la estructura más sencilla es un triángulo, en el que se tiene 3 barras y 3 nudos, para fijar otro nudo respecto a los tres primeros, debes unirlo por lo menos a dos de ellos mediante dos barras.

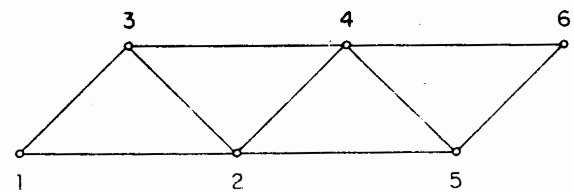
Une el nudo 4 con el triángulo





Ahora, une los siguientes nudos a la estructura de la figura. Recuerda que debes usar por lo menos dos barras para cada nudo.





Por consiguiente, el número MINIMO de barras necesarias para ligar los (n-3) nudos restantes es _________.

2(n-3)

Por tanto, el número total de barras es

b =

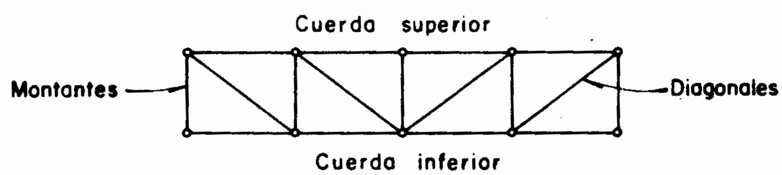
$$b = 3 + 2(n-3) = 2n-3$$

Formada la estructura triangulada indeformable (armadura), es necesario fijarla con el suelo con apoyos ____________ suficientes para impedir cualquier movimiento, esto es, se forman las estructuras trianguladas ___________.

---

estrictamente, isostáticas

El tipo más sencillo y frecuente de estas estructuras está formado por una sucesión de triángulos.
Observa la figura



Considerando la hipótesis de barras articuladas en sus extremos, los únicos apoyos que satisfacen la restricción de movimiento, son

---

articulación fija y apoyo simple

Ahora, si tratamos de hacer isostática una armadura con una articu lación fija, necesitamos impedir la rotación consentida por ella mediante un _______ _________ aplicado en cualquier nudo de la armadura.

---

apoyo simple

Por tanto, la armadura es isostática si se impiden los ____ movimientos posibles en el plano, con una articulación fija y un ______ _________.

---

tres, apoyo simple

También, una armadura es isostática si se impiden los tres movimientos posibles en el plano, mediante ______ apoyos simples.

---

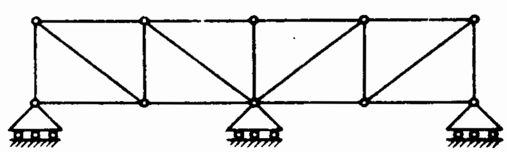
tres

Esto es, los tres apoyos simples son estríctamente necesarios para hacer una armadura isostática, siempre y cuando impidan los tres __________ _________ en el plano.

---

movimientos posibles

Observa la figura



Explica, brevemente, por qué esta armadura NO es isostática.

Porque se está permitiendo el movimiento de traslación horizontal

---

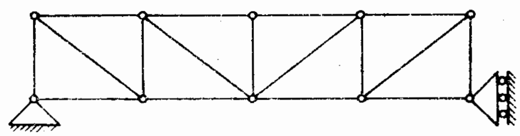
Entonces, para impedir este movimiento de traslación, será suficiente con girar, por ejemplo, el apoyo simple en A, para que su reacción tenga componente ____________.

---

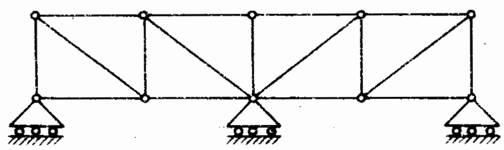
horizontal

Explica, brevemente, por qué las siguientes armaduras NO son isostáticas

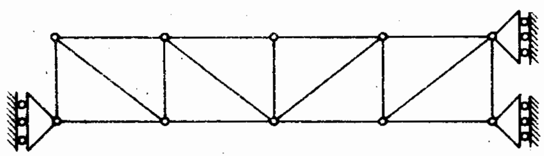
1.



2.



3.



---

1. Porque se está permitiendo el giro alrededor de la articulación fija
2. Porque se está permitiendo la traslación horizontal
3. Porque se está permitiendo la traslación vertical

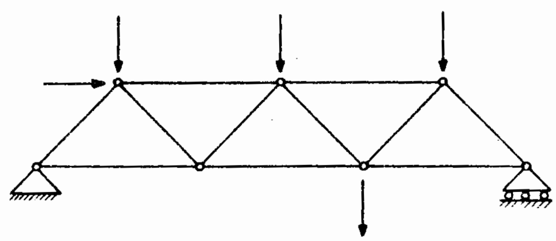
Entonces, una armadura triangulada ESTRICTAMENTE ____________ y contenida en un plano, es ISOSTATICA si el número de barras es igual a _______ y el número de apoyos es estrictamente suficiente para impedir los _____ ___________ _________ en el plano.

INDEFORMABLE, (2n-3), tres movimientos posibles

Por lo anterior, la geometría de una armadura triangulada isostática puede adquirir infinidad de formas; sin embargo, para fines prácticos, estudiaremos a lo largo de este capítulo los tipos más sencillos.

Por otra parte, se supone que las fuerzas exteriores sólo actúan en los nudos, esto es, las barras no soportan cargas intermedias.

Observa la figura



Por tanto, una barra articulada y sin _______ intermedias sólo puede estar sometida a tensión o a ____________.

---

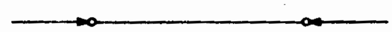
cargas, compresión

Por consiguiente, las incógnitas del problema son las reacciones de los apoyos y las fuerzas __________ internas, N, en las barras.

---

normales

Para obtener las fuerzas normales __________ en las barras es necesario recordar la convención de signos empleada anteriormente. Observa la figura

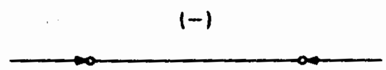


Esta barra está sujeta a fuerzas externas de __________.

---

internas, compresión

Por consiguiente, el sentido de las fuerzas normales <u>internas</u> en compresión, es:



Compresión

Esto es, las fuerzas <u>internas</u> se oponen a la __________ producida por las fuerzas __________.

---

compresión, externas

Ahora, para una barra sujeta a fuerzas externas de tensión, el sentido de las fuerzas normales <u>internas</u> es

(+)

Tensión

Esto es, las fuerzas <u>internas</u> se __________ a la tensión producida por las fuerzas ____________.

---

oponen, externas

Resumiendo, las fuerzas normales internas, N, en las barras y las reacciones de los apoyos se calculan suponiendo:

a) Las barras están articuladas en los __________

b) Las fuerzas externas solo actúan en los __________

---

nudos, nudos

ATENCION

En la práctica, la primera hipótesis no se realiza, porque en las armaduras, principalmente de acero, todo nudo se forma soldando los extremos de las barras. Sin embargo, las fuerzas normales internas que se obtienen al considerar esta hipótesis difieren poco de las verdaderas.

La segunda hipótesis es consecuencia del diseño de la estructura en sí, puesto que, las cargas que obran sobre la armadura se aplican precisamente en sus nudos, por lo que las barras están sometidas sólo a su peso propio, que en el análisis se aplica repartiéndolo en partes iguales entre los dos nudos.

Estas dos hipótesis permiten una gran simplificación del cálculo, puesto que, de este modo se tienen tantas fuerzas internas desconocidas N como barras existan.

Efectivamente, cada nudo es un punto en equilibrio sometido a fuerzas exteriores (cargas y/o reacciones) y a las fuerzas internas en las __________ que concurren en él.

---

barras

Entonces, para todo nudo puedes escribir únicamente las dos ecuaciones de __________ $\Sigma F_H = 0$ y $\Sigma F_V = 0$,

---

equilibrio

Se impone esta limitación porque el sistema de fuerzas es __________, de modo que sólo puedes disponer de dos ecuaciones por nudo, obteniendo en total ______ ecuaciones de equilibrio.

---

concurrente, 2n

Por otra parte, las incógnitas del problema son las fuerzas normales __________ en las barras y las ___________ de los apoyos; en conjunto, b + R =

---

internas, reacciones, $b + R = 2n - 3 + 3 = 2n$

Por consiguiente, el número de ecuaciones de equilibrio basta para determinar las características desconocidas de las fuerzas que aparecen en la armadura por efecto de las fuerzas aplicadas, esto es, las ARMADURAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS O ARMADURAS ____________

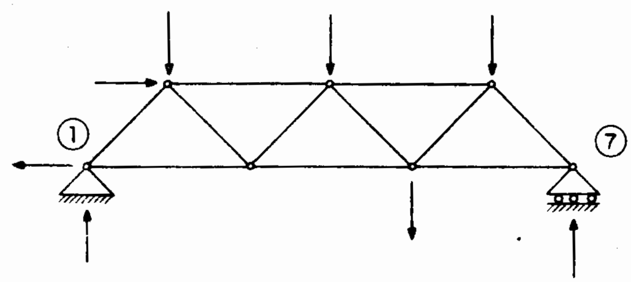
ISOSTATICAS

Para utilizar este sistema de ecuaciones, conocido como método de los nudos, es conveniente que obtengas antes las ____________ de los apoyos de la armadura (como cualquier otra estructura), luego, dibuja el diagrama de cuerpo libre de cualquier nudo de ésta con tal que no actúen más de ____ incógnitas sobre dicho nudo

---

reacciones, dos

Observa la figura



Los únicos nudos donde NO actúan más de dos incógnitas son el ____ y _____

1, 7

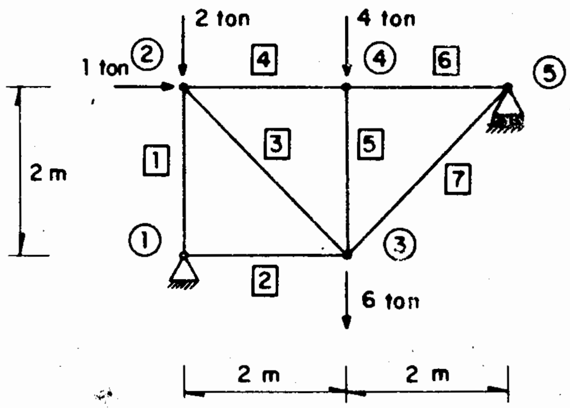
Recuerda que se impone esta limitación porque el sistema de fuerzas es _____________, de modo que solo puedes disponer de ______ ecuaciones de equilibrio por nudo para su resolución. Así vas pasando de un nudo a otro hasta que se hayan determinado todas las _____________.

---

concurrente, dos, incógnitas

Ejemplo.-

Obtener reacciones y fuerzas normales en las barras de la siguiente armadura



Explica por qué la armadura es isotática.

Porque cumple con b = 2n-3 = 7, R = 3 y los apoyos impiden los tres movimientos posibles en el plano

---

Ahora, obtén reacciones en los apoyos.

$\Sigma M_1F = 0;$ $R5_V = 5.5$ ton

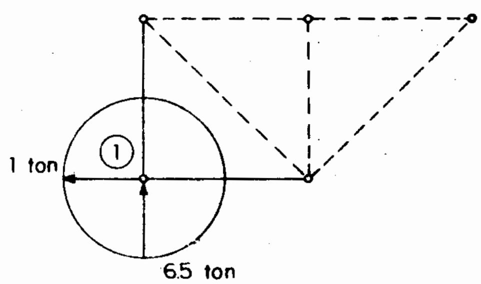
$\Sigma F_V = 0;$ $R1_V = 6.5$ ton

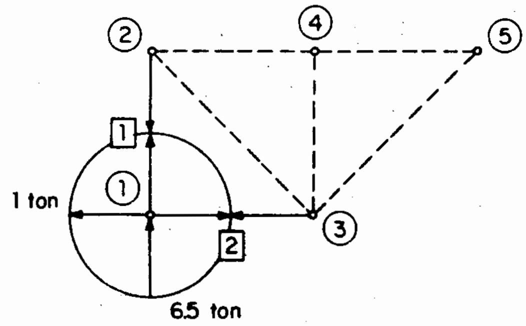
$\Sigma F_H = 0;$ $R1_H = 1.0$ ton

Para obtener las fuerzas normales internas, N, en las barras, podemos empezar indistintamente por el nudo ____ o ____.

1, 5

Empecemos por el nudo 1, dibujemos el diagrama de cuerpo libre y supongamos que las fuerzas normales <u>internas</u>, en las dos barras, están trabajando a <u>tensión</u>. Dibuja en la figura los sentidos de las fuerzas en las barras.





Obtengamos las fuerzas normales <u>internas</u> en las barras.

$\Sigma F_V = \boxed{1} + 6.5 = 0 \qquad \boxed{1} = -6.5$ ton

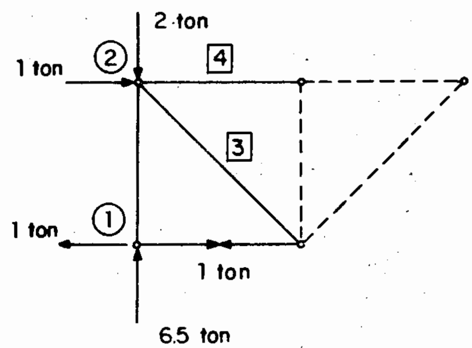
$\Sigma F_H = \boxed{2} - 1.0 = 0 \qquad \boxed{2} = 1.0$ ton

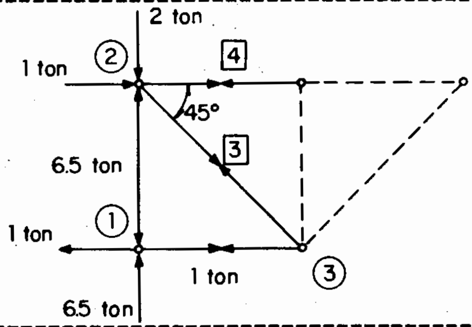
Por lo anterior, la barra 1 está trabajando a __________ y la barra 2 a __________.

---

compresión, tensión

Sigamos con el nudo 2, dibuja en la figura los sentidos de las fuerzas en las barras, no olvides considerar la fuerza normal en la barra 1 con su sentido y puedes suponer que las fuerzas en las otras dos barras están trabajando a tensión.



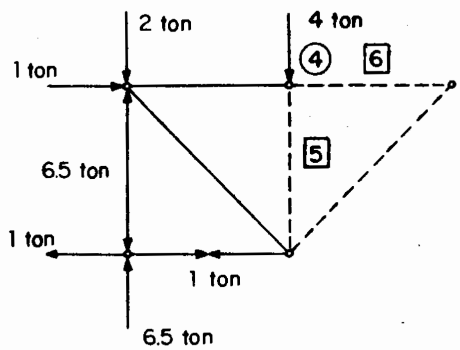


Obtén las fuerzas normales en las barras 3 y 4

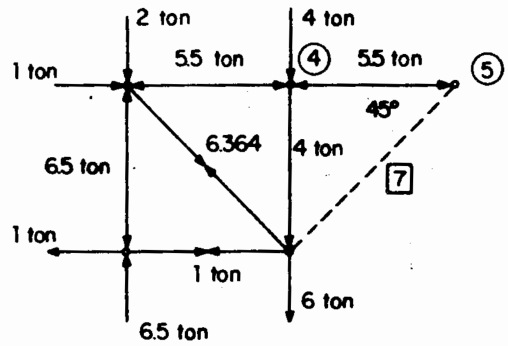
$\Sigma F_V = 6.5 - 2.0 - \boxed{3}$ sen $45° = 0$ $\qquad \boxed{3} = 6.364$ ton

$\Sigma F_H = 1.0 + 6.364 \cos 45° + \boxed{4} = 0$ $\qquad \boxed{4} = -5.500$ ton

Dibuja en la siguente figura los sentidos de las fuerzas en las barras



Ahora, por comodidad, pasa al nudo 4 y calcula las fuerzas normales en las barras 5 y 6 . En este nudo los sentidos de las incógnitas son evidentes.

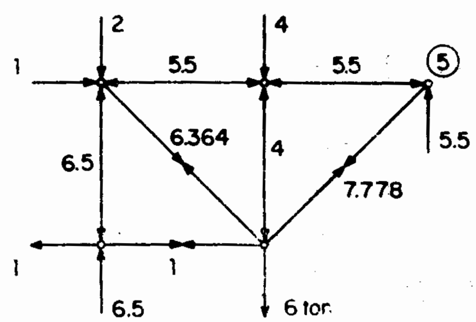


Equilibra el nudo 3 , en este caso tenemos dos ecuaciones con una incógnita, entonces, con una ecuación calcula la fuerza normal en la barra 7 y con la otra compruébalo.

ΣF_V = 6.364 sen 45°- 4.0 + $\boxed{7}$ sen 45° - 6 =0, $\boxed{7}$ = 7.778 ton

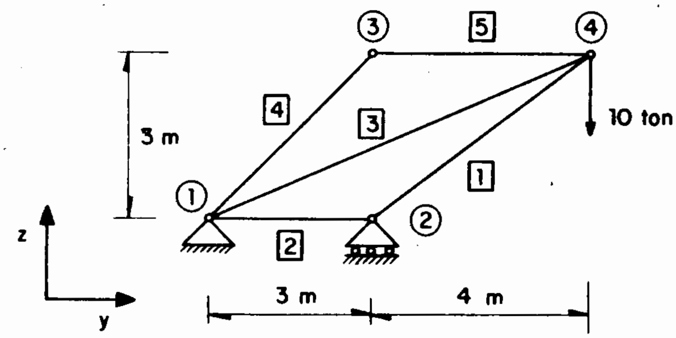
ΣF_H = -6.364 cos 45°- 1.0 + 7.778 cos 45°= 0, (comprobación)

Al fin, el nudo 5 , en este nudo se tienen conocidos todos los valores; por tanto, solo comprueba el equilibrio.



Ejercicio.-

Obtén reacciones y fuerzas normales en las barras de la siguiente armadura.



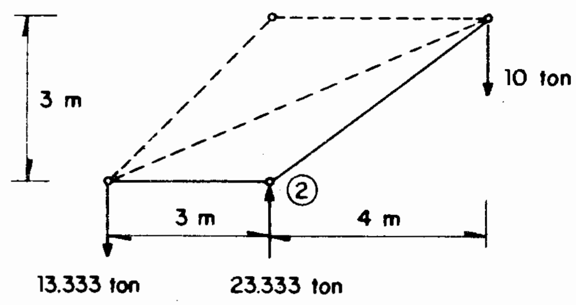
Comprueba la isostaticidad de la armadura y obtén reacciones.

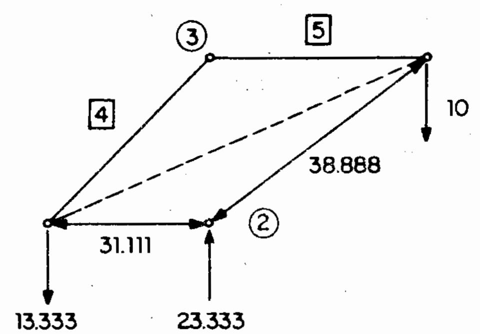
$R1_V$ = - 13.333 ton

$R1_H$ = 0

$R2_V$ = 23.333 ton

Ahora, te conviene empezar por el nudo 2





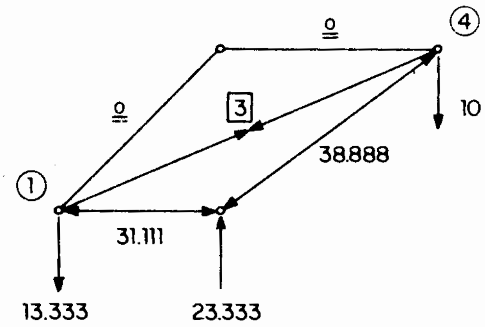
Sigue con el nudo 3 , observa que NO hay cargas externas, entonces para cumplir con el equilibrio las fuerzas en las dos barras deben ser igual a ________.

---

cero

Sólo resta obtener la fuerza normal en la barra 3 .

Observa la figura



Es obvio que del equilibrio del nudo 1 se obtenga, más comodamente, la fuerza en la barra 3 . Calcúlala

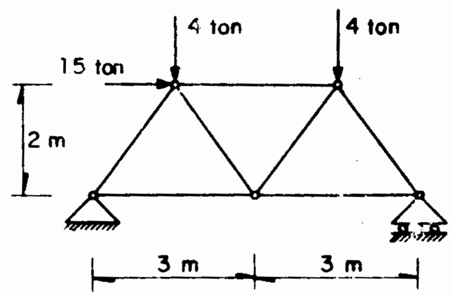
---

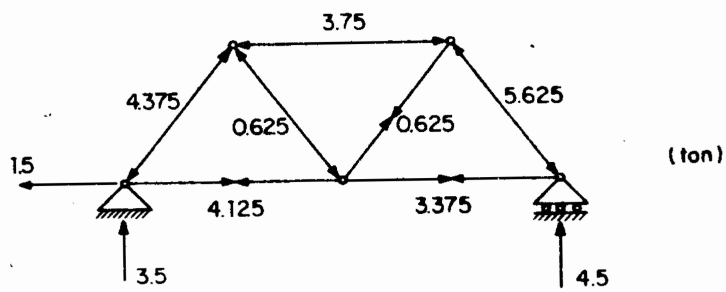
$\boxed{3}$ = 33.847 ton

En el nudo 4 se tienen conocidos todos los valores, por tanto, sólo comprueba el equilibrio.

Ejercicio.-

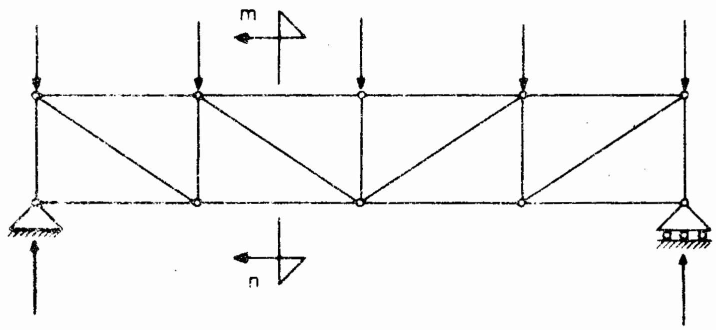
Obtén reacciones y fuerzas normales en las barras de la siguiente armadura.




3.75
4.375
0.625
0.625
5.625
1.5
4.125
3.375
(ton)
3.5
4.5

Empleando el método anterior se obtiene el equilibrio de las armaduras a través de sus nudos. Ahora, estudiemos el equilibrio a través de las secciones; esto es, se escoge una sección m-n de la armadura que corte a TRES barras que NO concurran en un nudo (sección de Ritter), con objeto de aislar una parte de la armadura.

Observa la figura



La sección m-n corta a ______ barras que NO ____________ en un nudo.

---

tres, concurren

La sección de Ritter tiene como objeto ________ una parte de la armadura.

---

aislar

Entonces, para determinar las fuerzas __________ en las barras puede emplearse el mismo principio general que se emplea en las vigas.

---

internas

Conocidas todas las fuerzas externas, comprendidas las ____________ de los apoyos, se traza una sección de Ritter que divida a la estructura en dos partes, cortando ______ barras.

---

reacciones, tres

Una de las dos partes, por ejemplo, la de la izquierda, está en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas EXTERNAS que actúan sobre ella y de las fuerzas INTERNAS que representan la acción de la parte __________ sobre la parte IZQUIERDA

---

derecha

Estas fuerzas INTERNAS deben equilibrar las fuerzas ____________ a la izquierda de la sección de Ritter.

EXTERNAS

Recuerda que todas las fuerzas EXTERNAS, por las condiciones de la estática, pueden sustituirse por su resultante y, para simplificar el estudio de las fuerzas internas se conviene en representarlas en forma gráfica mediante los diagramas de ____________ ____________.

---

elementos mecánicos

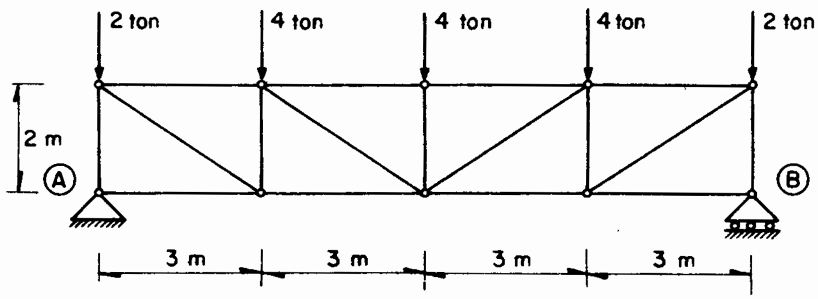
En otras palabras, el estudio del equilibrio a través de las secciones es una aplicación directa de los diagramas de elementos mecánicos, puesto que, las incógnitas del problema son precisamente las fuerzas ___________ en las barras de la armadura.

---

internas

Ejemplo.-

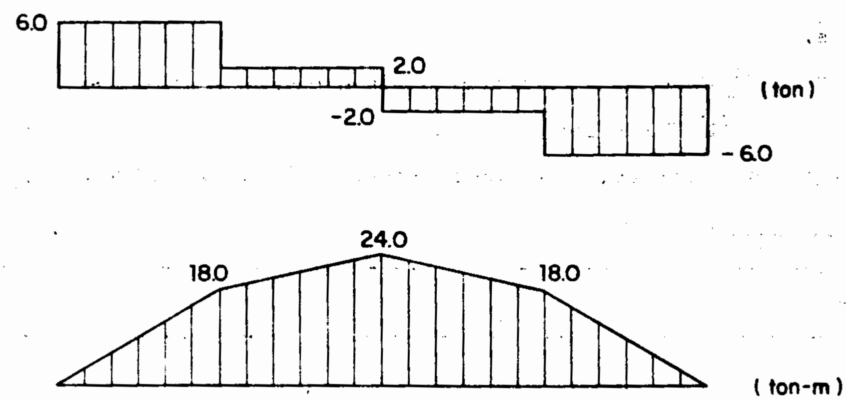
Obtener reacciones y fuerzas normales en las barras de la siguiente armadura.



Obtén reacciones

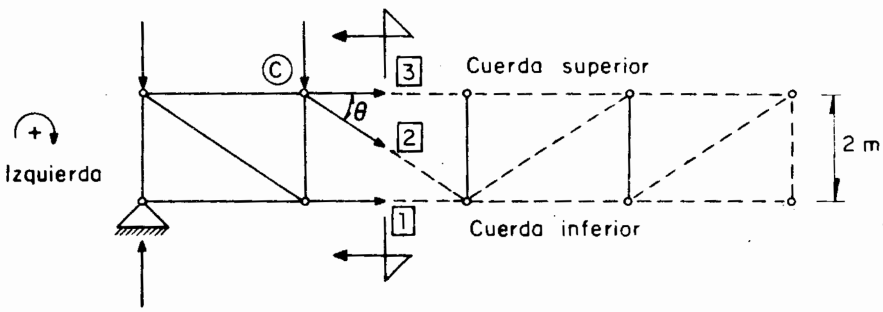
$A_H = 0$, $A_V = 8$ ton, $B_V = 8$ ton

Ya conoces todas las fuerzas externas, ahora obtén los diagramas de elementos mecánicos como si se tratara de una viga.



Aislemos un tramo de la armadura mediante una sección de Ritter. Puede ser cualquier tramo siempre y cuando corte tres barras para aislarlo.

Observa la figura



Los sentidos de las fuerzas INTERNAS los suponemos positivos. Ahora, apoyándonos en el diagrama de momento flexionante, sabemos que en el punto C el momento vale ___________.

18.0 ton-m

Por otra parte, la única fuerza interna que produce momento respecto al punto C es la fuerza en la barra de la cuerda inferior, por tanto, esta fuerza debe equilibrar al momento flexionante en C, entonces:

$$18.0 - \boxed{1}\,(2.0) = 0 \quad \text{(recuerda la convención izquierda)}$$

$$\boxed{1} = 9.0 \text{ ton}$$

El sentido es el supuesto, por consiguiente, la barra está trabajando a _________.

----

tensión

Ahora, usemos el D.F.C. para obtener la fuerza en la barra 2 , puesto que, esta fuerza es la única que tiene proyección vertical. Entonces, la fuerza cortante en esa sección es de +2.0 ton y según la convención izquierda, su sentido es hacia __________.

---

arriba

Por consiguiente, la proyección vertical de la fuerza en la barra 2 debe equilibrar la fuerza cortante, esto es,

$$2.0 - \boxed{2}\ \text{sen}\ \theta = 0$$

Pero,

$$\text{sen}\ \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0.555$$

$$\boxed{2} = \frac{2}{\text{sen}\ \theta} = 3.61 \text{ ton}$$

El sentido es el supuesto, por tanto, la barra esta trabajando a __________.

---

tensión

Por último, falta calcular la fuerza en la barra 3 ; pero, no existe diagrama de fuerza normal, por tanto, las proyecciones horizontales de las fuerzas internas deben equilibrarse por sí mismas. Considerando lo anterior, calcula la fuerza en la barra 3.

$\boxed{3} + \boxed{2}\cos\theta + \boxed{1} = 0$

$\boxed{3} = -12.0$ ton

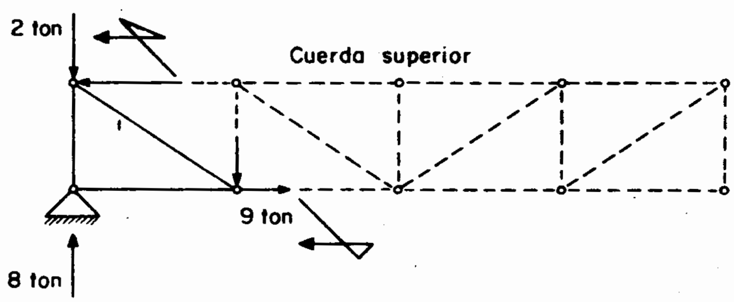
El sentido es opuesto al que se supuso, por tanto, la barra está tra_
bajando a ___________.

---

compresión

Aislemos otro tramo de la armadura.

Observa la figura



Vamos a obtener la fuerza interna en la barra vertical (montante), para esto, la fuerza cortante (fíjate bien) a la izquierda de esa sección vale _________.

+ 6.0 ton (recuerda la convención izquierda)

Por consiguiente, la fuerza interna en la barra vertical debe valer __________, con el sentido mostrado en la figura, esto es, está trabajando a ____________.

6.0 ton, compresión

ATENCION

Es muy importante definir, perfectamente, las fuerzas que están actuando en la sección escogida, ya sea a la izquierda o a la derecha.

Obtén la fuerza en la barra de la cuerda superior. Apóyate en el D.M.F.

9.0 ton, la barra está trabajando a compresión

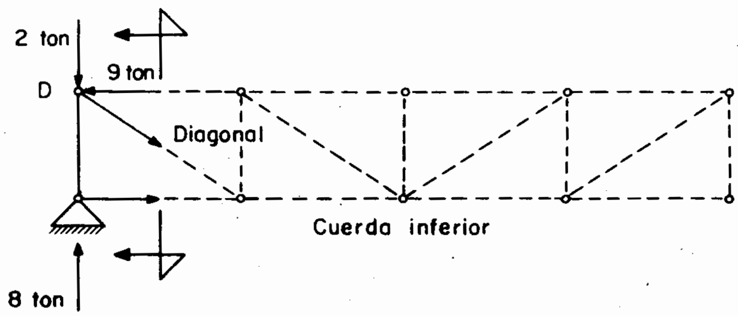
El resultado anterior se comprueba fácilmente, puesto que, las proyecciones horizontales de las fuerzas internas deben ______________ por sí mismas.

---

equilibrarse

Aislemos otro tramo de la armadura.

Observa la figura



Obtén la fuerza normal en las barras. Recuerda que el momento flexionante en el punto D vale cero y la fuerza cortante + 6.0 ton.

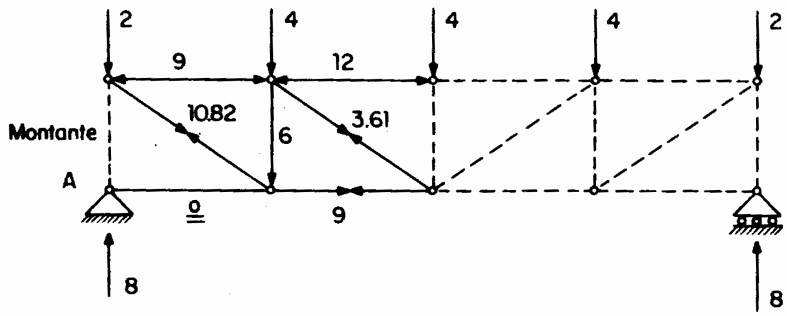
La fuerza en la barra de la cuerda inferior es igual a cero.

La fuerza en la diagonal es igual a 10.82 ton trabajando a tensión.

Se cumple el equilibrio horizontal.

Resumen de resultados.

Observa la figura



Como habrás notado, para completar el análisis de la parte izquierda, respecto a un eje de simetría de la armadura, sólo resta obtener la fuerza normal en el <u>montante</u> extremo, la cuál, para no complicarnos la existencia, podemos calcularla mediante el equilibrio del nudo A, por tanto, la fuerza vale _______ y está trabajando a ___________.

8.0 ton, compresión

También, la fuerza normal en el <u>montante central</u> la podemos calcular mediante el equilibrio de su nudo superior; puesto que, la única incógnita con proyección vertical es precisamente este montante, por consiguiente, la fuerza vale _______ y está trabajando a __________.

4.0 ton, compresión

Un aspecto muy importante de la geometría de este tipo de armaduras, de cuerdas paralelas, o viga Mohniè, es la orientación de las diagonales, esto es, las diagonales descienden hacia la derecha en la primera mitad, donde usualmente la fuerza cortante tiene sentido __________, y hacia la ___________ en la segunda mitad, donde es negativa.

---

positivo, izquierda

Por consiguiente, las diagonales resultan predominantemente en TENSION y los montantes en ___________.

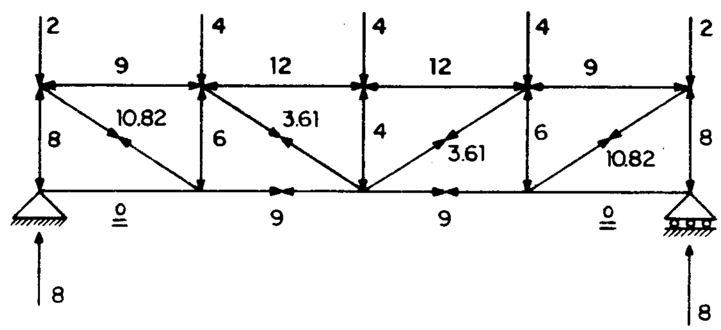
COMPRESION

Por lo anterior, para distribuir la acción de las cargas concentradas, conviene que las diagonales trabajen a __________ y los montantes a ___________; ya que los montantes son más cortos.

---

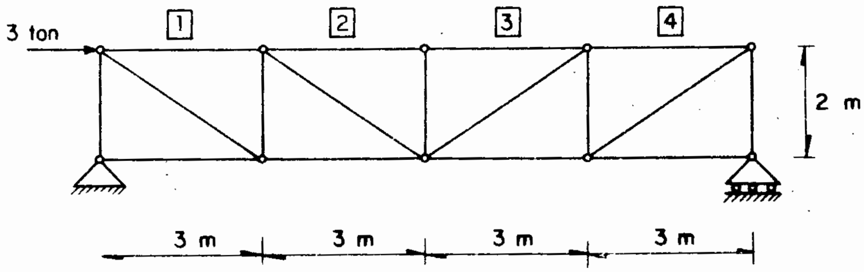
tensión, compresión

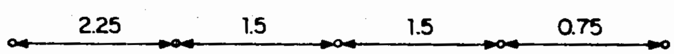
Considerando la simetría en geometría y cargas, la obtención de las fuerzas normales restantes es evidente



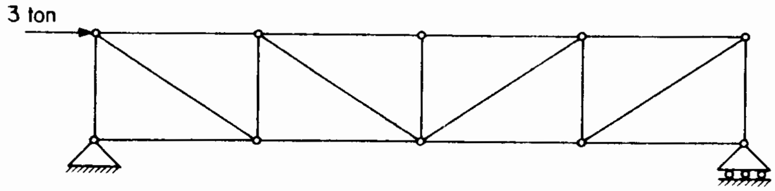
Ejercicio.-

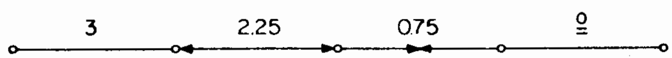
Obtén las fuerzas normales en las barras de la cuerda superior de la siguiente armadura. Considera el momento flexionante a la derecha para obtener las fuerzas en las barras 1 y 2, y a la izquierda para las barras 3 y 4. (Notarás la comodidad de emplear las dos convenciones)





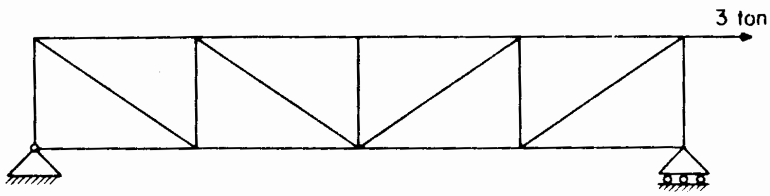
Ahora, obtén las fuerzas en las barras de la cuerda inferior de la misma armadura.

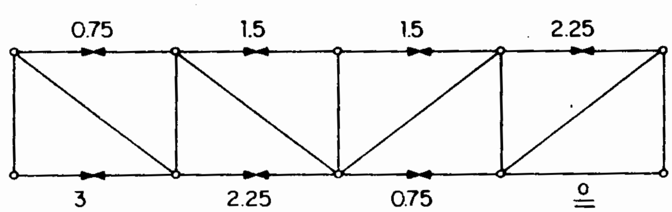




Ejercicio.-

Obtén las fuerzas normales en las barras de las dos cuerdas de la siguiente armadura. Observa que la fuerza de 3.0 ton está actuando, ahora, en el extremo derecho de ella.





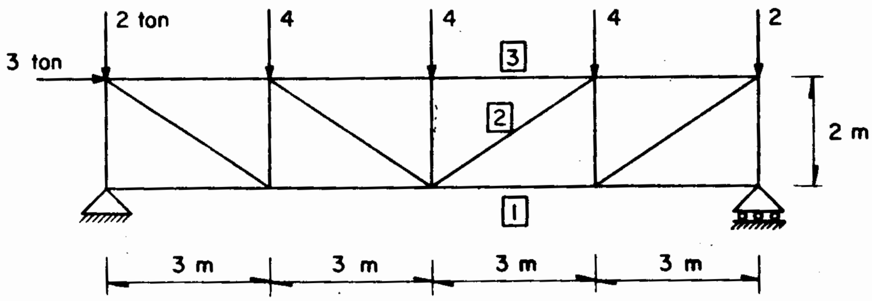
Comentario:

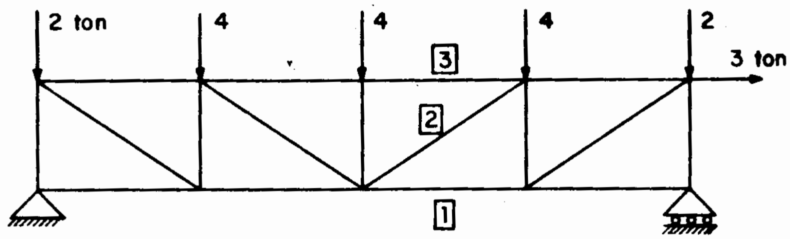
Como habrás notado, el simple hecho de cambiar el punto de aplicación de la carga implica un cambio en el valor de la fuerza normal, en cada barra, en intensidad y sentido.

Como ejercicio, obtén la fuerza normal, mediante el DFC, en la tercera diagonal (cuenta de izquierda a derecha) de las dos armaduras y comprueba los valores de las barras con el diagrama de fuerza normal. Para evitar sorpresas, en el primer caso no existe D.F.N., por tanto, las fuerzas normales en las barras deben equilibrarse por sí mismas, mientras que, en el segundo caso si existe D.F.N. y debes considerarlo.

Ejercicio.-

Obtén las fuerzas normales en las barras 1, 2 y 3 de las siguientes armaduras



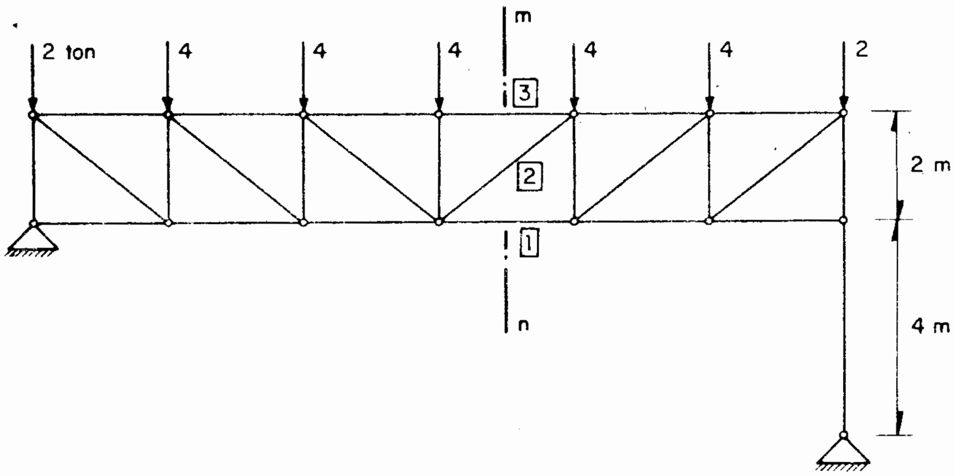


Considerando el principio de superposición de causas y efectos:

3 = 13.5 compresión	3 = 10.5 compresión
2 = 4.51 tensión	2 = 4.51 tensión
1 = 9.75 tensión	1 = 9.75 tensión

Ejercicio.-

Explica por qué esta estructura es isostática y obtén las fuerzas normales en las barras 1, 2 y 3. Considera el momento flexionante y la fuerza cortante a la izquierda de la sección. Comprueba los resultados considerando el momento flexionante y la fuerza cortante a la derecha de la sección.



Porque la armadura, que es un cuerpo rígido, está unida a la columna mediante una articulación, por tanto, esta estructura es equivalente a un marco triarticulado.

1 = 20.0 ton (tensión)

2 = 3.2 ton (tensión)

3 = 22.5 ton (compresión)

ATENCION

Existe otro tipo de armaduras de cuerdas paralelas o viga Howe, en el cuál, las diagonales <u>ascienden</u> hacia el centro; por consiguiente, las diagonales resultan predominantemente en compresión y los montantes en tensión. En los cursos de Mecánica de Materiales tendrás oportunidad de criticar este tipo de diseño y apreciar las conveniencias de la viga Mohniè.

Por otra parte, si deseas hacer más ejercicios o investigar algunos otros métodos, por ejemplo, el de la doble sección de Ritter o el gráfico de Cremona, te pueden ayudar las referencias citadas en la bibliografía.

BIBLIOGRAFIA

1. R.F. Mager, Preparación de objetivos de instrucción, Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., 1972.

2. B.S. Bloom, Taxonomía cognoscitiva de los objetivos de la educación, Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., 1974

3. M. Castañeda, "Introducción a la enseñanza programada: una aproximación y un ejemplo práctico, Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., Vol. I, 1974.

4. A. Antunes y J. Lanoux, "Estudio de una población para la enseñanza programada", Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., Vol. I, 1974.

5. B.E. Fernández, "Teorías del aprendizaje", Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., Vol I, 1974.

6. M. Castañeda, "Análisis del comportamiento/Análisis del contenido de M. Le Xuan y J.C. Chassain", Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., Vol I, 1974.

7. I. Livas, "Programación lineal", Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., Vol. II, 1974.

8. I. Livas, "Validación interna", Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., Vol. II, 1974.

9. I. Livas, "Validación externa", Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza, UNAM., Vol II, 1974.

10. M.R. Spiegel, Análisis vectorial, Mc Graw-Hill de México, 1969.

11. W.G. Mc Lean y E.W. Nelson, Mecánica técnica, Mc Graw-Hill de México, 1969.

12. O. Belluzzi, Ciencia de la construcción, Aguilar, Tomo I, Madrid, 1973.

13. F.B. Seely y N.E. Ensign, Mecánica analítica para ingenieros, Uteha, México, 1965.

14. S. Timoshenko, Resistencia de materiales, Espasa-Calpe, Madrid, 1961.

15. A. Murrieta, Aplicaciones de la estática, Limusa-Wiley, México, 1972.