



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Optimización de pruebas de
presión con algoritmos
genéticos**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Petrolero

P R E S E N T A

Victor Alan Acosta Olvera

DIRECTORA DE TESIS

Dra. Rosa María Mariscal Romero



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado OPTIMIZACION DE PRUEBAS DE PRESION CON ALGORITMOS GENETICOS que presenté para obtener el título de INGENIERO PETROLERO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.



VÍCTOR ALAN ACOSTA OLVERA
Número de cuenta: 316287283

Agradecimientos

En principio quiero presentar mi más sincero agradecimiento a mis padres, María Concepción y Víctor Hugo, que han sido una fuente inagotable de apoyo durante toda mi vida, y sin ellos esta tesis no hubiera sido posible.

Agradezco a mi hermano, Ángel Alexis, que ha sido mi amigo desde que tengo conciencia y me ha brindado ayuda siempre que la he requerido.

Quiero agradecer a mi amada novia, Andrea Itzel, que ha sido mi compañera y consejera cuando me he sentido perdido.

Finalmente, presento mi más sincero agradecimiento a la Doctora Rosa María Mariscal Romero, que me entregó conocimiento, guía, ayuda y confianza antes y durante el desarrollo de este trabajo.

También extendo mi agradecimiento al Doctor Víctor Leonardo Teja Juárez, que me tendió una mano cuando acudí a su presencia en búsqueda de orientación.

Resumen

El análisis del registro de presión permite la determinación de propiedades dinámicas del sistema roca fluido; este proceso recibe el nombre de análisis de pruebas de presión, las cuales son un conjunto de técnicas que permiten registrar el comportamiento de la presión dentro de un yacimiento a causa de un estímulo (ej., producción o inyección). El ajuste con curvas tipo es una técnica para analizar pruebas de presión que trata de ajustar los datos de presión a una de varias curvas, generadas por la solución de la ecuación de difusión, para un conjunto dado de propiedades del sistema. Esta técnica puede considerarse un problema de búsqueda para encontrar los parámetros del sistema que generen la solución que mejor se adapte a los datos. Un problema de búsqueda en IA es el proceso de partir de un estado conocido hacia un estado objetivo. La solución para un problema de búsqueda es una secuencia de acciones que transforman el estado de partida al estado objetivo, para lo cual pueden emplearse los algoritmos genéticos, que se caracterizan por presentar un conjunto de soluciones posibles para el problema, las cuales evolucionan por medio de operadores genéticos y evolutivos para encontrar una solución óptima o cercana al óptimo en un número finito de iteraciones llamadas generaciones. En este trabajo se propone el uso de los algoritmos genéticos para el ajuste de datos de pruebas de decremento de presión con curvas tipo, ya que es un método muy utilizado en la industria petrolera, que puede ser mejorado con inteligencia artificial y el *machine learning*.

Abstract

Log pressure enables us to determine a fluid-rock system's dynamic properties; this process is called well-test analysis, which consists of a set of techniques that allow recording the behavior of pressure within a reservoir derived from a stimulus (e.g., production or injection). Type curve matching is a well-test analysis technique to match the pressure data to one of many curves generated by solving the diffusivity equation for a set of system properties, which represent search problem attempting to find the system properties through the best curve match. A search problem in IA is the process of moving from a known starting state to a desired goal state. The solution to a search problem is a sequence of actions that transforms the starting state into the goal state.

Search problems can be solved using a variety of algorithms, such as genetic algorithms, which implement a set of random solutions that evolve through genetic and evolution operators to find an optimal solution or close to optimal in a finite number of iterations called generations. In this work, we present genetic algorithms for curve matching in well-test analysis, given that it is a method employed in the oil industry that can be enhanced with artificial intelligence and machine learning.

Estructura de tesis

El presente trabajo está dividido en 5 capítulos en los que se desarrolla y explica la teoría necesaria para cumplir con los objetivos propuestos.

El capítulo 1 abarca todas las generalidades de las pruebas de presión. Se da una breve explicación de las diferentes pruebas de presión, y se presentan los conceptos básicos para el análisis de dichas pruebas, el fundamento matemático de la ecuación de difusión y las distintas soluciones que se pueden obtener, así como las generalidades concernientes a los yacimientos naturalmente fracturados.

El capítulo 2 presenta consideraciones necesarias para el entendimiento de las técnicas para el análisis de datos de pruebas de presión, y presenta la técnica de curvas tipo de Gringarten y de la presión derivada.

El capítulo 3 presenta la teoría relacionada con los algoritmos genéticos, los modelos naturales en los que se basa y la estructura básica de los mismos.

El capítulo 4 presenta la metodología general propuesta para la elaboración de un algoritmo genético orientado a la optimización de análisis de pruebas de presión.

El capítulo 5 presenta los resultados obtenidos de la aplicación de los algoritmos genéticos en el análisis de datos de pruebas de presión con la técnica de curvas tipo, y el análisis de estos resultados.

Finalmente se presenta las conclusiones y recomendaciones en base a los resultados obtenidos y observaciones en el desarrollo del modelo computacional, así como los posibles trabajos futuros.

Índice

Agradecimientos.....	1
Resumen.....	2
Abstract.....	3
Estructura de tesis.....	4
Introducción.....	7
Objetivos.....	8
<i>Objetivo General</i>	8
<i>Objetivos Específicos</i>	8
Capítulo 1 Pruebas de Presión.....	10
1.1. Definición de las Pruebas de Presión.....	10
1.2. Tipos de Pruebas de Presión.....	11
1.2.1. <i>Drillstem Test (DST)</i>	11
1.2.2. <i>Prueba de Decremento</i>	11
1.2.3. <i>Prueba de Incremento</i>	12
1.2.4. <i>Prueba de Interferencia</i>	13
1.2.5. <i>Prueba de Inyección</i>	14
1.2.6. <i>Prueba de Abatimiento de Presión (Falloff test)</i>	15
1.2.7. <i>Prueba de Pulso</i>	15
1.2.8. <i>Prueba a Gasto Variable</i>	16
1.3. Regímenes de Presión.....	17
1.4. La Ecuación de Difusión.....	18
1.4.1. <i>Bases para la derivación de la ecuación de difusión</i>	18
1.4.2. <i>Derivación de la Ecuación de Difusión</i>	21
1.5. Almacenamiento.....	25
1.6. Daño.....	29
1.7. Variables Adimensionales.....	31
1.8. Yacimientos Naturalmente Fracturados.....	32
1.9. Soluciones de la Ecuación de Difusión.....	36
1.9.1. <i>Solución Línea Fuente</i>	37
1.9.2. <i>Solución Para un Yacimiento Cilíndrico con Comportamiento Dominado por Efectos de Frontera</i>	38

1.9.3. Solución Para un Yacimiento Naturalmente Fracturado	40
Capítulo 2 Análisis de Pruebas de Presión	42
2.1. Principio de Superposición	43
2.2. Curvas Tipo	44
2.3. Curvas Tipo en Yacimientos Naturalmente Fracturados	50
Capítulo 3 Algoritmos Genéticos	54
3.1. Contexto Histórico de los Algoritmos Genéticos	55
3.2. Conceptos Biológicos de los Algoritmos Genéticos	56
3.3. Estructura de los Algoritmos Genéticos	59
3.4. Operaciones en un AG	61
3.4.1. Selección	61
3.4.2. Cruza	62
3.4.3. Mutación	64
3.4.4. Elitismo	64
3.4.5. Hiperparámetros de los AG	65
Capítulo 4 Modelo de Optimización con Algoritmos Genéticos	67
4.1. Metodología	67
4.2. Hiperparámetros del algoritmo	71
Capítulo 5 Resultados	76
5.1. Comparación gráfica de los mejores resultados	76
5.1.1. Prueba 1	77
5.1.2. Prueba 2	79
5.2.3. Prueba 3	82
5.2.3. Prueba 4	84
5.2. Discusión resultados	86
5.3. Posibles Aplicaciones	88
Conclusiones	89
Trabajos Futuros	89
Referencias	91
Bibliografía Adicional	94

Introducción

La interpretación de datos provenientes de pruebas de presión es considerada un problema inverso, es decir, se conocen los parámetros de entrada al sistema y la respuesta de salida, pero no el sistema, **Figura 1**. En este caso el sistema es el yacimiento, el parámetro de entrada es la perturbación en el gasto de producción o inyección, y el parámetro de salida es la respuesta de la presión (Horne, 1995). En este tipo de problemas, diferentes configuraciones del sistema pueden ajustarse con los parámetros, lo que complica la determinación exacta del sistema.

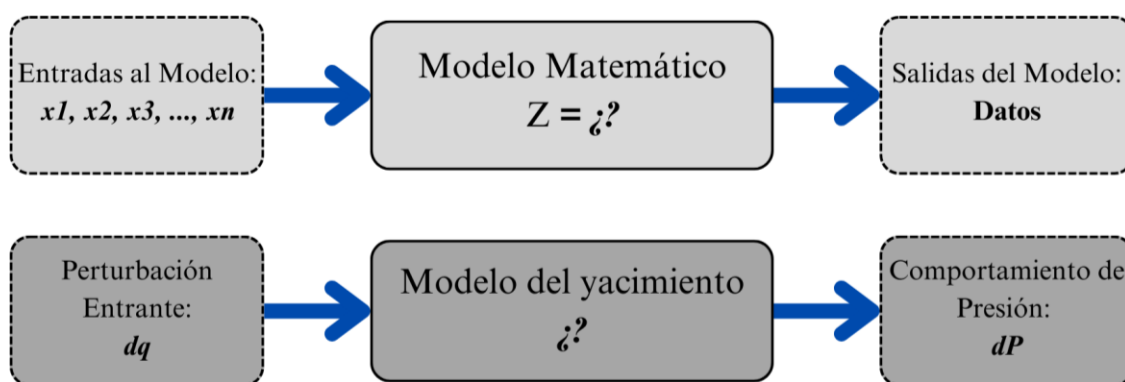


Figura 1. Esquema del sistema inverso y como este ajusta al análisis de pruebas de presión (Horne, 1995, modificada)

El término optimización hace referencia al proceso de búsqueda para poder medir, describir y alcanzar una mejora continua de un proceso hasta llegar a su punto óptimo (Goldberg, 1989). Los algoritmos de optimización han sido especialmente diseñados para la resolución de problemas inversos. Los algoritmos genéticos son conjuntos de algoritmos de optimización basados en la teoría de la evolución de Darwin y de la genética, los cuales son ampliamente reconocidos por su robustez, simpleza y efectividad.

Las curvas tipo son uno de los métodos más antiguos utilizados para el análisis de pruebas de presión en yacimientos petroleros. Este método se popularizó ampliamente por la facilidad del mismo, sin embargo, rápidamente fueron evidentes algunas restricciones que tiene el método, los resultados dependen enteramente de la percepción de la persona que analiza los datos, la cual puede variar entre diferentes expertos. Con la llegada de la era digital, el método evolucionó dando lugar al desarrollo de propuestas orientadas a lograr un ajuste con curvas tipo automático, como el

desarrollado por Rosa y Horne (1983). En la mayoría de estos estudios se lograron resultados particulares, pero no suficientemente exactos para ser aplicables de manera general. Por otro lado, el desarrollo de otras técnicas para el análisis de pruebas de presión, como la regresión no lineal y el método TDS parecieron ser más eficientes, lo que resultó en el desarrollo y expansión de su uso. El ajuste de datos de pruebas de presión es un problema que se puede abordar como un proceso de optimización, y así es elegible para la aplicación de algoritmos orientados a este tipo de problemas

En este trabajo se propone el uso de los algoritmos genéticos para el ajuste de datos de pruebas de presión con curvas tipo, ya que es un método comúnmente utilizado en la industria petrolera, que puede ser mejorado con inteligencia artificial y el *machine learning*.

Objetivos

Objetivo General

- Optimizar el método de curvas tipo para análisis de pruebas de presión en yacimientos naturalmente fracturados mediante el uso de algoritmos genéticos.

Objetivos Específicos

- Revisar exhaustivamente la literatura existente sobre el método de curvas tipo y su aplicación en pruebas de presión.
- Identificar las limitaciones y desafíos actuales del método de curvas tipo en el análisis de pruebas de presión.
- Diseñar y desarrollar un modelo computacional que integre algoritmos genéticos para optimizar el método de curvas tipo para el análisis de pruebas de decremento de presión en yacimientos naturalmente fracturados.
- Evaluar el desempeño y eficacia del método optimizado en términos de precisión, eficiencia y robustez.
- Analizar y discutir las implicaciones prácticas y teóricas de la aplicación de algoritmos genéticos en la optimización del método de curvas tipo.

- Proponer recomendaciones para la implementación y mejora continua del método optimizado en la práctica de análisis de pruebas de presión en la industria.

Capítulo 1

Pruebas de Presión

La medición de la presión a lo largo de la vida de un yacimiento proporciona información clave sobre las condiciones de este. Con esta información es posible inferir las propiedades dinámicas del yacimiento, el volumen original en sitio e incluso pronosticar el volumen total recuperado. Estos resultados son uno de los insumos principales para realizar la caracterización dinámica del yacimiento, lo que a su vez impacta en la determinación de la estrategia de explotación del yacimiento, las instalaciones superficiales necesarias, el plan de abandono, evaluación económica, etc.

Una de las mediciones de presión más importantes de un campo o yacimiento son las que se llevan a cabo por medio de pruebas de presión, las cuales se pueden realizar durante toda la vida del yacimiento, pero son especialmente valiosas antes de la puesta en producción del yacimiento, ya que tanto el fluido como la formación conservan sus características muy cercanas a sus condiciones originales.

1.1. Definición de las Pruebas de Presión

Es el nombre que se le da a un conjunto de técnicas que permiten registrar el comportamiento de la presión dentro de un yacimiento a causa de un estímulo, producción o inyección en el mismo pozo o en pozos cercanos en el mismo yacimiento. Los datos registrados posteriormente son analizados, este proceso recibe el nombre de análisis de pruebas de presión, y con ello es posible determinar propiedades del sistema roca fluido.

1.2. Tipos de Pruebas de Presión

1.2.1. *Drillstem Test (DST)*

Esta prueba es el primer registro de presión que se puede realizar de un pozo; normalmente se lleva a cabo en pozos exploratorios nuevos, en agujero descubierto, mediante una terminación temporal. Su objetivo es determinar el potencial productor del intervalo. El nombre de esta prueba está relacionado con la herramienta que se usa, la cual se ensambla en la tubería de producción

El procedimiento para la realización de esta prueba es, una vez bajada la herramienta DST, se procede a realizar cierres y aperturas secuenciales al flujo de la formación, registrando su presión; adicionalmente, se toman muestras del fluido para su análisis (Satter & Iqbal, 2015).

1.2.2. *Prueba de Decremento*

Es realizada normalmente en pozos nuevos o en pozos que han estado cerrado suficiente tiempo para estabilizar la presión. En la **Figura 2** está representada la producción y la presión de una prueba de decremento ideal; en estas pruebas se realizan mediciones de la presión de fondo cuando el pozo es puesto en producción a un gasto constante, consecuentemente la presión disminuye, por esta razón se llama prueba de decremento. El proceso de cerrar y abrir el pozo se puede realizar varias veces para obtener varias medidas representativas (Satter & Iqbal, 2015).

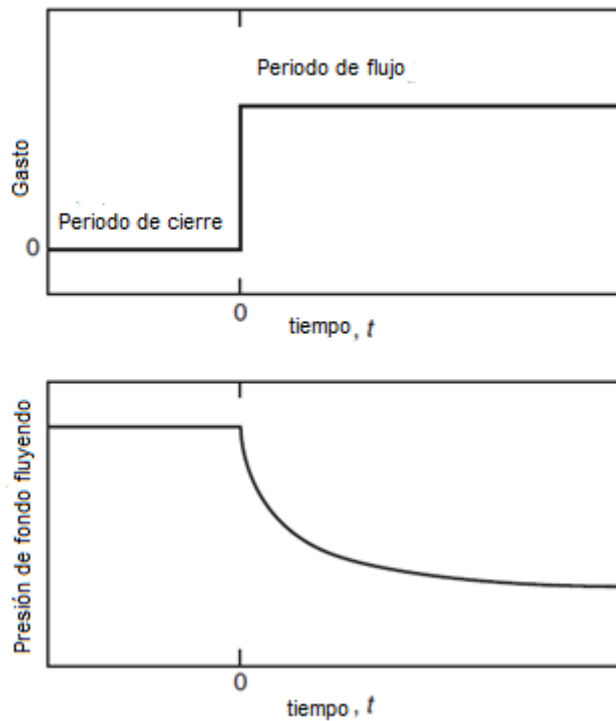


Figura 2. Prueba de decremento, cuando el pozo es abierto y comienza a fluir, la presión en el fondo del pozo cae (Ahmed & McKinney, 2011, traducida).

1.2.3. Prueba de Incremento

Es una de las más usadas para determinar la capacidad de flujo, la permeabilidad, el espesor del intervalo productor. Esta se realiza en un pozo que ha estado en un periodo de producción a gasto constante y el pozo se cierra, midiendo el incremento de la presión de fondo en función del tiempo. El cierre del pozo se puede realizar en superficie o en el fondo, lo que puede minimizar los efectos de almacenamiento en el pozo. En la **Figura 3** se muestran las gráficas representativas e ideales de presión contra tiempo y gasto contra tiempo de una prueba de incremento.

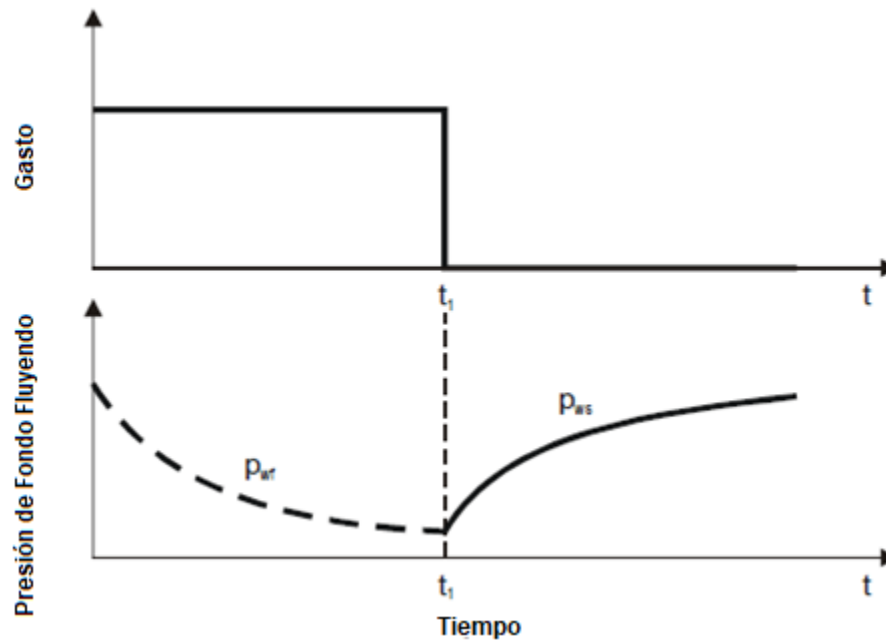


Figura 3. Prueba de incremento, al momento de cerrar el pozo que se encuentra produciendo, la presión en el mismo se ve afectada (Heinneman & Mittermeir, 2013, Traducida).

1.2.4. Prueba de Interferencia

Esta prueba se realiza para determinar la influencia que tiene la producción de un pozo sobre otros en el mismo yacimiento, lo que a su vez permite determinar el grado de comunicación que hay entre pozos. En su forma más simple y común se usan 2 pozos, un pozo de observación y un pozo activo (produciendo o con inyección de fluido a gasto constante). El pozo de observación se cierra y se mide la presión en el mismo (Heinemann & Mittermeir, 2013). En la **Figura 4** se observa una gráfica de la producción en una prueba de interferencia de dos pozos, donde q_A es la producción del pozo activo y q_B es la producción del pozo de observación; debajo se muestra la gráfica de la presión en el pozo de observación, la cual es similar a la gráfica de presión en una prueba de incremento, línea punteada, pero la presión se ve modificada debido a la producción del pozo activo.

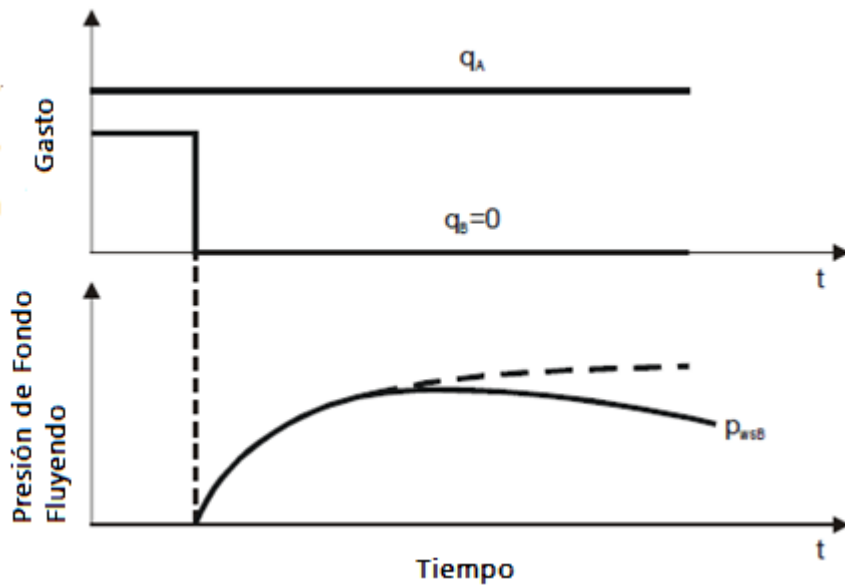


Figura 4. Prueba de Interferencia, al momento de cerrar el pozo de observación, la presión en el pozo activo presenta una respuesta (Heinneman & Mittermeir, Traducida).

1.2.5. Prueba de Inyección

Son muy similares a las pruebas de decremento, la diferencia está en que, en vez de producir a un gasto constante, se inyecta fluido a gasto constante. Para llevar a cabo una prueba de inyección se cierra el pozo hasta que la presión se estabiliza e iguala a la presión de yacimiento, igual que en una prueba de decremento. Una vez en este punto se comienza la inyección a gasto constante, lo que provoca que la presión de fondo en el pozo y en la formación aumente. En la **Figura 5** es posible observar el periodo de estabilización, con producción de 0, y el periodo de inyección, en donde se utiliza un gasto con signo negativo.

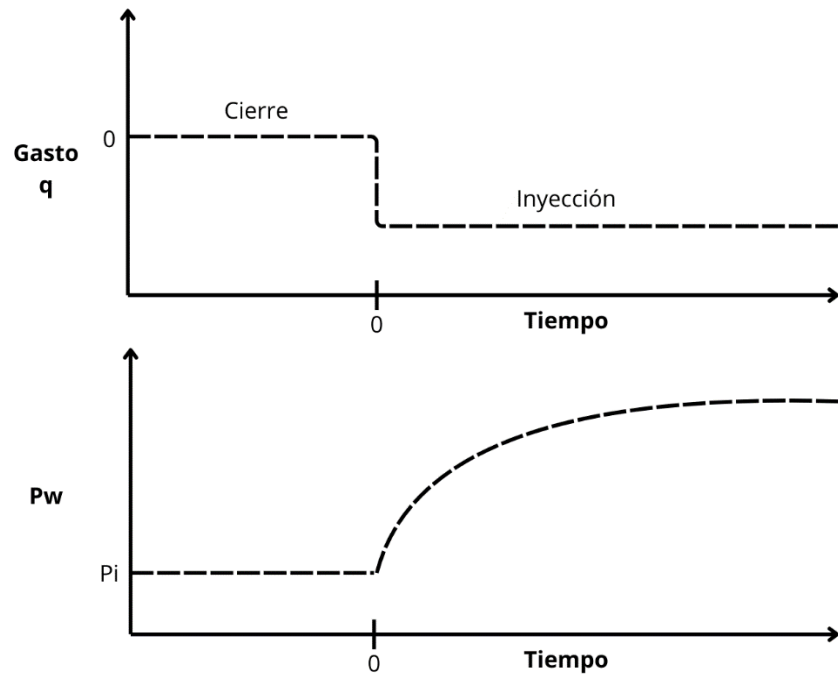


Figura 5. Prueba de inyección, al momento de iniciar la inyección, gasto negativo, la presión en el fondo aumenta (Lee et al., 2003, Traducida).

1.2.6. Prueba de Abatimiento de Presión (Falloff test)

En esta prueba se inyecta a gasto constante un fluido al pozo hasta que la presión se estabiliza, luego se cierra el pozo inyector y se mide la presión de fondo. La presión estabilizada de inyección es mayor que la presión en la formación; entonces cuando el pozo es cerrado, la presión de fondo comienza a disminuir hasta llegar a un valor de presión estable (Satter & Iqbal, 2015).

1.2.7. Prueba de Pulso

Las pruebas de presión de pulso tienen el mismo objetivo que las pruebas de presión de interferencia, es decir, determinar el grado de comunicación que hay entre pozos.

La prueba de pulso consiste en el envío de un código en forma de pulsos enviado desde un pozo (el pozo activo) hacia un pozo de observación, el cual está cerrado. Los pulsos son generados desde el pozo activo alternando entre periodos de producción y periodos de cierre. También es posible generar los pulsos inyectando un fluido a alta presión y cerrando el pozo repetidas ocasiones. La **Figura 6** muestra un ejemplo ideal de una prueba de pulso, se puede observar cómo es que los pulsos de presión no coinciden exactamente con los pulsos de producción en el pozo activo.

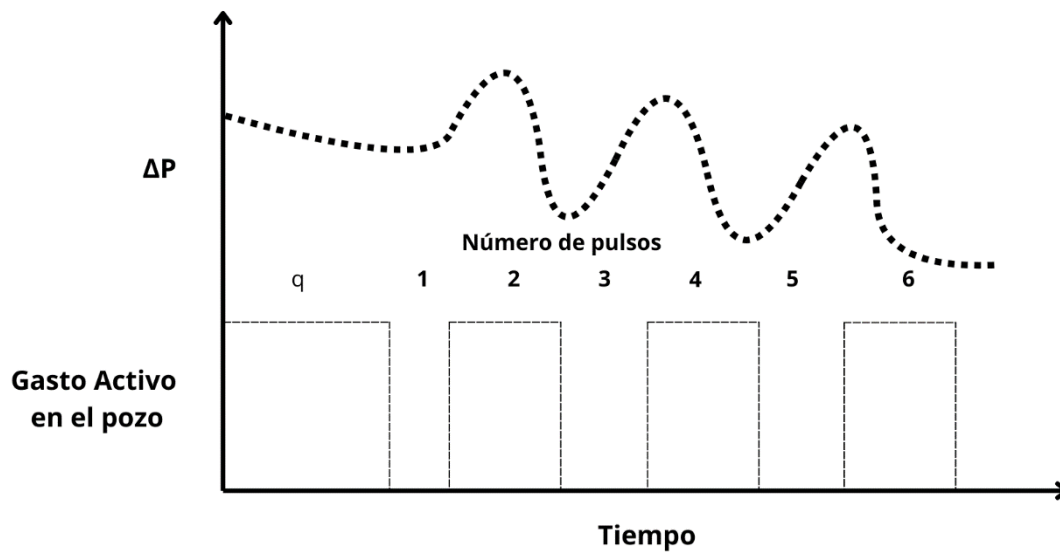


Figura 6. Prueba de pulso, conforme se cierra y abre el pozo activo a gasto constante, se mide la presión en el fondo del pozo de observación (Lee,1982, Modificada).

1.2.8. Prueba a Gasto Variable

Se llevan a cabo cuando un cierre de pozo total no es costeable. La principal ventaja de este tipo de pruebas es que se reduce el tiempo de segregación de fases en el pozo, sin embargo, una desventaja es que una vez que se cambia el gasto debe mantenerse constante durante el periodo de medición, lo cual es muy complicado (Lee, 1982). Un tipo particular de prueba de presión a gasto variable son las pruebas de gasto escalonado o en pasos. En esta prueba se incrementa o disminuye el gasto en una serie de etapas, **Figura 7**, con gastos constantes entre etapa y etapa.

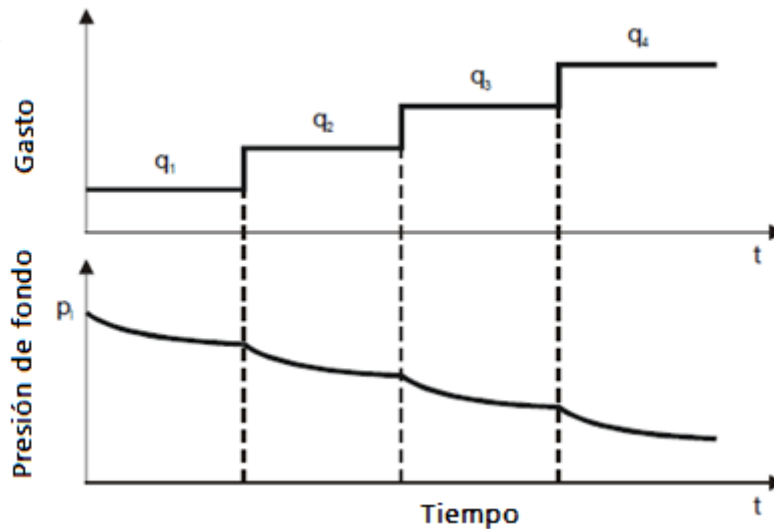


Figura 7. Ejemplo de prueba de presión a gasto variable con incrementos en pasos (Heinemann & Mittermeir, 2013, Traducida).

1.3. Regímenes de Presión

El régimen de presión describe cómo se comporta la presión a lo largo del tiempo en el yacimiento cuando hay un gasto constante. Hay 3 principales regímenes:

Flujo estacionario: Se considera régimen de flujo estacionario cuando la presión permanece constante en cualquier punto del yacimiento y no cambia con el tiempo, esto es representado en la *ecuación 1.1*. Este régimen raramente se presenta, aunque es más común cuando el yacimiento es un sistema abierto (hay un intercambio másico en las fronteras) y hay presencia de un empuje hidráulico, como un acuífero activo o también cuando se tienen operaciones de mantenimiento de presión (Schlumberger, 2002).

$$\frac{dP}{dt} = 0 \tag{1.1}$$

Flujo pseudoestacionario: Este régimen se presenta cuando la caída de presión es constante por unidad de tiempo en cualquier parte del yacimiento; representado matemáticamente en la *ecuación 1.2*. Este régimen es característico en sistemas cerrados (donde no hay intercambio másico en las fronteras) y cuando los efectos de todas las fronteras ya se han presentado (Kushtanova, 2015).

$$\frac{dP}{dt} = c \quad (1.2)$$

Flujo transitorio: Finalmente, cuando se habla de régimen de flujo transitorio se hace referencia a cuando la caída de presión en el yacimiento es variable y es función de la posición r y del tiempo t ; la *expresión 1.3* demuestra esto matemáticamente. Este régimen se presenta cuando todavía no hay presencia de los efectos de frontera (Kushtanova, 2015).

$$\frac{dP}{dt} = f(r, t) \quad (1.3)$$

1.4. La Ecuación de Difusión

Como se mencionó antes, el flujo de fluidos en la formación es consecuencia de una diferencia del potencial del fluido dentro de la formación. Inclusive el flujo de fluidos dentro del mismo pozo es consecuencia de esta misma diferencia de potencial de presión.

Dentro de la formación hay otros factores de los cuales depende el flujo de fluidos, como son la porosidad, permeabilidad, fases fluyendo, mojabilidad, etc. Comúnmente, al hablar de flujo de fluidos en medios porosos, como lo es la formación, sale a relucir la Ley de Darcy.

1.4.1. Bases para la derivación de la ecuación de difusión

La base matemática para el análisis de las pruebas de presión es la ecuación de difusión, la cual parte de 3 principios físicos:

- El principio de continuidad
- La ley de Darcy
- Ecuación(es) de estado

Principio de Continuidad. Este principio hace referencia al principio de conservación de materia el cual establece que “... la masa de fluido en cualquier sistema cerrado no puede ser creada ni destruida” (Muskat, 1946). En otras palabras y reorganizando esta definición para el flujo de fluidos, se puede expresar de la siguiente manera: “... de la masa de fluido que en la unidad de tiempo entra a un volumen especificado dentro del flujo, una parte se queda almacenada en su interior y el resto sale del volumen” (Sotelo, 2018). Matemáticamente esto se puede expresar con la ecuación 1.4.

$$m_e - m_s = \Delta m_{ac} \quad (1.4)$$

Ley de Darcy. Es una ley desarrollada empíricamente en 1856 por el hidráulico francés Henry Darcy que describe el flujo de fluidos a través de un medio poroso (como una roca), es análoga a La ley de Ohm y tiene la siguiente forma para un medio poroso como una arena completamente saturada con un único fluido (Hubbert, 1956):

$$\vec{v} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \phi \quad (1.5)$$

Donde:

\vec{v} : Es la velocidad aparente del fluido

σ : Es la conductividad volumétrica del sistema

\mathbf{E} : Es la fuerza por unidad de masa o la intensidad del campo de fuerza actuando sobre el fluido

ϕ : Es la energía por unidad de masa o, en otras palabras, es el potencial del fluido.

Expresando la ecuación de Darcy en una forma equivalente queda de la siguiente manera

$$\vec{v} = -\frac{k\rho}{\mu} \nabla \phi \quad (1.6)$$

Donde:

k : Es la permeabilidad del sistema poroso

ρ : Es la densidad del fluido contenido en el sistema poroso

μ : Es la viscosidad del fluido contenido en el sistema poroso

Comparando las *ecuaciones 1.5 y 1.6* se puede observar que el término $\frac{k\rho}{\mu}$ es la conductividad volumétrica del sistema σ .

El potencial del fluido representa el trabajo requerido por unidad de masa para transportar dicho fluido, por un proceso sin fricción y con una trayectoria dada, desde una posición y estado estándar hasta otro estado y posición de un punto considerado; por ello un fluido tenderá a moverse desde un nivel de potencial dado a un nivel de menor potencial (Hubbert, 1956). Al aplicar el operador nabla con respecto a los ejes coordenados x, y y z ($\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$), el gradiente de potencial se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla\phi = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1.7)$$

Donde:

\vec{g} : es el vector de la gravedad dirigido hacia abajo

∇P : es el gradiente de presión dentro del sistema poroso

Colocando de manera explícita la Ley de Darcy queda de la siguiente forma

$$\vec{v} = -\frac{k\rho}{\mu} \left(\vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P \right) = -\frac{k}{\mu} (\rho\vec{g} - \nabla P) \quad (1.8)$$

La Ley de Darcy en la forma anteriormente presentada tiene ciertas condiciones que deben cumplirse para que sean válidas:

- Medio isotrópico y homogéneo
- Flujo Laminar
- Flujo de 1 sola fase
- Medio 100% saturado por el fluido
- Se desprecia el fenómeno de resbalamiento
- La permeabilidad es independiente de la presión, temperatura y localización
- El fluido es inerte con el medio
- Fluido incompresible

Finalmente, es común encontrar la ley de Darcy para el gasto volumétrico (cantidad de volumen que atraviesa la roca por unidad de tiempo). En la siguiente expresión se omiten los vectores y solo se consideran las magnitudes de los vectores, dado que el flujo de fluidos se da en la misma dirección que el gradiente de potencial. Esta expresión se obtiene multiplicando en ambos lados de la igualdad por el área transversal de flujo A .

$$q = -\frac{kA\rho}{\mu} \left(g - \frac{1}{\rho} \nabla P \right) \quad (1.9)$$

1.4.2. Derivación de la Ecuación de Difusión

Para la demostración de la ecuación de difusión se toman en cuenta algunas consideraciones importantes las cuales son dadas a continuación (Matthews & Russell, 1967):

- Una sola fase satura la totalidad del yacimiento.
- Medio homogéneo e isotrópico.
- Porosidad y permeabilidad independientes de la presión.
- Fluido con una pequeña y constante compresibilidad.
- Pequeños gradientes de presión.
- Flujo radial únicamente (los efectos de la gravedad son despreciables) en todo el espesor de la formación.
- Espesor constante de la formación.

Para comenzar el análisis se parte de un volumen de control infinitesimal. La **Figura 8** funciona como un esquema de referencia para desarrollar la derivación de la ecuación de difusión. En ella se observa una porción de un yacimiento homogéneo (con una porosidad ϕ y una permeabilidad k constantes), de espesor constante h , e isotrópico. En el centro de la porción se encuentra un pozo de radio r_w , a una distancia r se encuentra un volumen de control de roca. Las propiedades de los fluidos también son constantes en todo el yacimiento y solo existe el flujo de 1 sola fase ligeramente compresible en forma radial (Ahmed & McKinney, 2011).

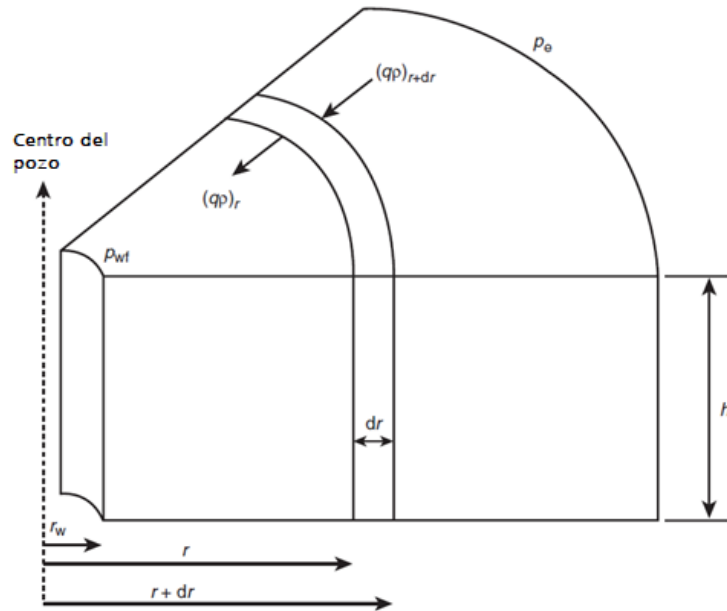


Figura 8. Representación simplificada del volumen de control dentro de una porción del yacimiento con flujo radial (Ahmed & McKinney, 2011, Traducida).

Haciendo uso del principio de continuidad en el esquema anterior, se establece que la masa que entra al volumen de control en un periodo de tiempo Δt , menos la masa que sale del volumen de control en el periodo Δt es igual al cambio de masa acumulada en el volumen de control durante el periodo Δt . Recordando que la masa se puede representar con la *ecuación 1.10*.

$$m = \rho \Delta V \quad (1.10)$$

Además, el gasto volumétrico es definido por la *expresión 1.11*.

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (1.11)$$

Reemplazando la *ecuación 1.10* y *1.11* en la expresión del principio de continuidad, *ecuación 1.4*, se obtiene la *expresión 1.12*.

$$\Delta t(\rho q)_e - \Delta t(\rho q)_s = \Delta(\rho \Delta V_{ac}) \quad (1.12)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$(\rho q)_e - (\rho q)_s = \frac{\Delta(\rho \Delta V_{ac})}{\Delta t} \quad (1.13)$$

El gasto de entrada y de salida del volumen de referencia se puede describir con la ley de Darcy. La expresión de la ley de Darcy para flujo radial se muestra en la *ecuación 1.14*. En dicha ecuación, al tratarse de flujo radial (θ, r) se desprecia el efecto de la gravedad, y como la presión no varía con respecto al ángulo θ , entonces el gradiente de potencial queda simplemente como $\frac{dP}{dr}$.

$$q = \frac{kA}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (1.14)$$

En cambio, la variación del volumen acumulado en el volumen de control con respecto al tiempo, $\frac{dV_{ac}}{dt}$, es posible representarlo con la *ecuación 1.15*.

$$V_{ac} = \pi((r + dr)^2 - r^2)h\phi = \pi(2rdr + dr^2)h\phi \quad (1.15)$$

Recordemos que dr es un aumento muy pequeño en el radio r , por lo tanto, al elevarlo al cuadrado se vuelve tan pequeño que es posible despreciarlo. De esta manera la *expresión 1.15* se reduce a la *expresión 1.16*.

$$V_{ac} = 2\pi r dr h \phi \quad (1.16)$$

Reemplazando la *ecuación 1.15* y *1.16* en la *ecuación 1.13* obtenemos la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\rho k A}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}\right)_{r+dr} - \left(\frac{\rho k A}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}\right)_r = \frac{\partial(\rho 2\pi r dr h \phi)}{\partial t} \quad (1.17)$$

Dado que se considera un medio homogéneo e isotrópico, las propiedades de la roca no dependen de la posición. Tomando esto en cuenta y reemplazando el área en $r + dr$ y en r , se obtienen la *expresión 1.18*.

$$\frac{2\pi h k}{\mu} \left((r + dr) \left(\rho \frac{dP}{dr}\right)_{r+dr} - r \left(\rho \frac{dP}{dr}\right)_r \right) = \frac{\partial(\rho 2\pi r dr h \phi)}{\partial t} \quad (1.18)$$

En cambio, en el miembro derecho de la *ecuación 1.18*, las únicas variables que van a cambiar con el tiempo son la densidad y la porosidad, por esta razón es posible reducirla a la *expresión 1.19*.

$$\frac{d(\rho 2\pi r dr h \phi)}{dt} = 2\pi r dr h \frac{d(\rho \phi)}{dt} \quad (1.19)$$

Reemplazando en la *expresión 1.18* la reducción realizada en la *ecuación 1.19* se obtiene:

$$\frac{2\pi hk}{\mu} \left((r + dr) \left(\rho \frac{dP}{dr} \right)_{r+dr} - r \left(\rho \frac{dP}{dr} \right)_r \right) = 2\pi r dr h \frac{d(\rho\phi)}{dt} \quad (1.20)$$

Desarrollando el miembro izquierdo de la ecuación anterior obtenemos la *ecuación 1.21*. Analizando esta expresión se observa que el radio, la densidad y la diferencial de la presión con respecto a r pueden representarse como una diferencial gracias a la definición de la derivada. Implementando el cambio y desarrollando se obtiene la *expresión 1.22*.

$$\frac{2\pi hk}{\mu} \left((r + dr) \left(\rho \frac{dP}{dr} \right)_{r+dr} - r \left(\rho \frac{dP}{dr} \right)_r \right) = \frac{2\pi hk dr}{\mu} \left(\frac{r\rho \left(\frac{dP}{dr} \right)_{r+dr} - r\rho \left(\frac{dP}{dr} \right)_r}{dr} \right) \quad (1.21)$$

$$\frac{2\pi r h k dr}{\mu} \left(\frac{\partial \left(r\rho \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \right)}{\partial r} \right) = \frac{2\pi r h k dr}{\mu} \left(\frac{\partial r}{\partial r} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial r} \right) + r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) \right) \quad (1.22)$$

Reemplazando en la *ecuación 1.20*.

$$\frac{2\pi h k r dr}{\mu} \left(\frac{\rho \partial P}{r \partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) = 2\pi r dr h \frac{d(\rho\phi)}{dt} \quad (1.22)$$

Realizando algebra en la *expresión 1.22*, se obtiene la *ecuación 1.23*.

$$\frac{k}{\mu} \left(\frac{\rho \partial P}{r \partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) = \frac{d(\rho\phi)}{dt} \quad (1.23)$$

Si multiplicamos $\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r}$ por uno $\frac{\partial P}{\partial P}$, y aplicando la regla de la cadena obtenemos lo siguiente:

$$\frac{k}{\mu} \left(\frac{\rho \partial P}{r \partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) = \frac{d(\rho\phi)}{dt} \quad (1.24)$$

Lo que se puede simplificar como $\frac{\partial \rho}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2$. El termino $\left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2$ es considerado muy pequeño, por lo que se puede despreciar (Ahmed & McKinney, 2011), llevándonos a la *expresión 1.25*.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\mu}{k\rho} \frac{d(\rho\phi)}{dt} \quad (1.25)$$

Finalmente, la diferencial del miembro derecho se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$\frac{d(\rho\phi)}{dt} = \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \phi \quad (1.26)$$

Multiplicando por uno, $\frac{\partial P}{\partial P}$, y recordando la ecuación de compresibilidad.

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial P} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial P} \phi = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) \left(\rho \frac{\partial\phi}{\partial P} + \frac{\partial\rho}{\partial P} \phi\right) = (\rho(C_{for}\phi) + (C_{flu}\rho)\phi) \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) \quad (1.27)$$

Agrupando los términos obtenemos la *expresión 2.28*.

$$\frac{d(\rho\phi)}{dt} = \rho\phi(C_{for} + C_{flu}) \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) = \rho\phi C_t \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) \quad (1.28)$$

La compresibilidad del fluido más la compresibilidad de la formación es igual a la compresibilidad total. Reemplazando la *ecuación 1.28* en la *expresión 1.25* obtenemos la *ecuación 1.29*.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\mu\phi C_t}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.29)$$

La ecuación anterior es conocida como **la ecuación de difusión para flujo radial**. Es una ecuación diferencial lineal de derivadas parciales. En ella se considera a la presión como una función del radio y del tiempo únicamente. La constante $\frac{k}{\mu\phi C_t}$ es comúnmente llamada difusividad hidráulica (Matthews & Russell, 1967), y se representa con el símbolo η .

1.5. Almacenamiento

El almacenamiento es un efecto que sucede dentro del pozo cuando un pozo es cerrado o abierto. Cuando un pozo es puesto en producción después de un periodo de tiempo cerrado, la producción comienza a salir del pozo, pero en el fondo aún no hay movimiento de los fluidos; por lo tanto, la formación no ha comenzado a aportar fluidos al pozo y no hay variaciones en la presión dentro del yacimiento. La producción en superficie puede ser entonces consecuencia de diversas situaciones ocurriendo dentro del pozo hasta que la formación comienza a aportar fluidos. Un efecto similar sucede cuando un pozo es cerrado “un gasto es inducido dentro del pozo después del cierre, porque el flujo del yacimiento no se detiene inmediatamente, si no que continua, disminuyendo lenta y constantemente hasta que la presión de pozo se estabiliza” (Schlumberger, 2002). Entonces el flujo en superficie, al principio es debido al efecto de almacenamiento, pero después de un tiempo, la

formación empieza a aportar fluidos y el pozo empieza a disminuir su aportación; de modo que el flujo en superficie se puede expresar con la *ecuación 1.30*.

$$q_{sup} = q_w + q_{sf} \quad (1.30)$$

Donde

q_w es el gasto debido al almacenamiento del pozo

q_{sf} es el gasto debido al yacimiento (sandface)

Si se reacomoda la *ecuación 1.30*, se puede obtener la *ecuación 1.31*, que es conveniente para analizar cómo cambia el aporte de fluidos por el pozo y por el yacimiento (Horne, 1995).

$$\frac{q_{sf}}{q_{sup}} = 1 - \frac{q_w}{q_{sup}} \quad (1.31)$$

El efecto de almacenamiento puede ser causado por muchas razones, pero las principales son la expansión de los fluidos dentro del pozo y el cambio de altura hidrostática dentro del pozo. El efecto de almacenamiento debido al cambio de altura hidrostática dentro del pozo está representado en la **Figura 9**, en la que se puede apreciar que el fluido entra en el espacio anular entre el aparejo de producción y la tubería de revestimiento, y cuando el pozo es cerrado, el fluido comienza a aumentar su nivel en este espacio. Para cuantificar el efecto de almacenamiento, se usa el coeficiente de almacenamiento (Horne, 1995).

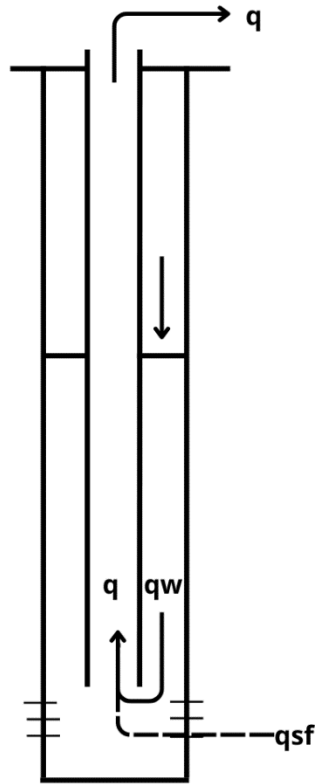


Figura 9. Efecto de almacenamiento debido al cambio de nivel de fluido dentro de un pozo sin empacador (Horne, 1995, modificada)

El efecto de almacenamiento debido a la expansión de fluidos dentro del pozo puede obtenerse por medio de un balance de masa con el pozo como volumen de control. En la *expresión 1.32* se considera que el fluido tiene una densidad constante, por lo tanto, se omiten algunos pasos.

$$\frac{dV_{ac}}{dt} = \frac{dV_{in}}{dt} - \frac{dV_{out}}{dt} \quad (1.32)$$

El diferencial de volumen que entra y sale del volumen de control por unidad de tiempo es igual al gasto de entrada, q_{sf} , y salida q_{sup} respectivamente, multiplicados por el factor de volumen del fluido B , *ecuación 1.33*.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{24}{5.615} V_{wb} \right) = (q_{sf} - q_{sup})B \quad (1.33)$$

Donde V_{wb} es el volumen del pozo expresado en metros cúbicos, y la constante $\frac{24}{5.615}$ es un factor de conversión de unidades. El volumen del pozo, al ser considerado un cilindro, es igual a $V_{wb} = A_{wb}Z$,

donde Z es la profundidad del pozo y A_{wb} es el área transversal del pozo. Reemplazando en la ecuación 1.34 (Lee et al., 2003).

$$\frac{24}{5.615} A_{wb} \frac{dZ}{dt} = (q_{sf} - q_{sup})B \quad (1.34)$$

Haciendo uso de la fórmula para presión hidrostática y tomando como referencia la cabeza del pozo, tenemos la expresión 1.35.

$$P_{wf} = P_{wh} + \frac{\rho Z}{144} \quad (1.35)$$

Despejando Z y aplicando el diferencial con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{144}{\rho} \right) \frac{d(P_{wf} - P_{wh})}{dt} \quad (1.36)$$

Reemplazando la expresión 1.36 en la ecuación 1.34.

$$\frac{(24)(144)}{5.615 \rho} A_w \frac{d(P_{wf} - P_{wh})}{dt} = (q_{sf} - q_{sup})B \quad (1.37)$$

Suponiendo que la presión en la cabeza del pozo se mantiene constante, entonces podemos reducir la ecuación 1.37 a su equivalente:

$$\frac{24}{B} \frac{144 A_{wb}}{5.615 \rho} \frac{dP_{wf}}{dt} = q_{sf} - q_{sup} \quad (1.38)$$

La expresión 1.38 sirve de base para obtener la definición de coeficiente de almacenamiento expresado en [bls/psi], ecuación 1.39. El radio del pozo está dado en pies y la densidad está dada en [lbm/ft³].

$$C_s = \frac{144 A_{wb}}{5.615 \rho} = \frac{144 (\pi r_w^2)}{5.615 (\rho)} \quad (1.39)$$

También es equivalente usar la expresión 1.40 para una producción de una sola fase, la cual está representada con la compresibilidad del fluido contenido en el pozo, C_{fl} (Lee, 1982).

$$C_s = C_{fl} \forall_{wb} \quad (1.40)$$

1.6. Daño

Las actividades de perforación y terminación tienen un fuerte impacto en las propiedades de la formación. Es por ello que en la cercanía de un pozo casi siempre se tiene una alteración en la permeabilidad de la roca (Lee, 1982). La **Figura 10** muestra una comparación de la presión en el pozo sin daño y con daño, y como esta caída de presión ocurre dentro de la formación.

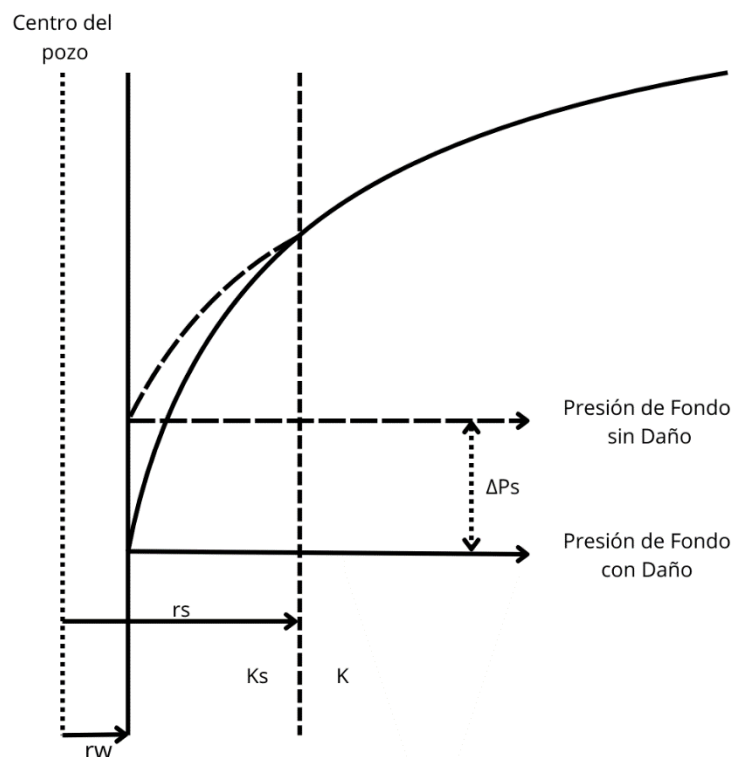


Figura 10. Comportamiento ideal de la presión en un pozo sin daño vs comportamiento real en el mismo pozo con daño (Horne, 1995, Modificada).

Cuando la permeabilidad se ve reducida en la cercanía del pozo se le llama daño. Esto puede ocurrir por la filtración del fluido de perforación hacia la formación, dispersión de arcillas, presencia del enjarre, alta saturación de gas en las cercanías del pozo, etc. (Matthews & Russell, 1967). La reducción de la permeabilidad, puede ser traducida como una restricción adicional al flujo y, por ende, una caída adicional de presión dentro de la formación.

$$\Delta P_{skin} = s \left(\frac{qB\mu}{2\pi kh} \right) = \frac{qB\mu}{2\pi kh} \left(\frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_s}{r_w} \right) \quad (1.41)$$

Con la ley de Darcy es posible cuantificar esta caída de presión adicional equivalente, *ecuación 1.41*. El factor de daño “s”, es adimensional y es equivalente a $s = \left(\frac{k}{k_s} - 1\right) \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right)$, donde k_s es la permeabilidad en la zona dañada, k es la permeabilidad de la formación sin daño y r_s es el radio de la zona dañada.

Es importante notar que si $k_s < k$, entonces el factor de daño será positivo y, consecuentemente, se tendrá una caída de presión adicional de magnitud igual a ΔP_{skin} ; se dice entonces que la formación está “dañada”.

En el caso contrario, en el que $k_s > k$, el factor de daño tendrá un valor negativo y la diferencia de presión ΔP_{skin} se vuelve negativa; esto significa que tendremos una presión mayor en la cara de la formación que la esperada idealmente, lo cual está ejemplificado en la **Figura 11**. Cuando se tiene la condición mencionada se dice que la formación está “estimulada” y es común en yacimientos naturalmente fracturados, con fracturamiento hidráulico, fracturamiento ácido u otros tratamientos para mejorar la producción.

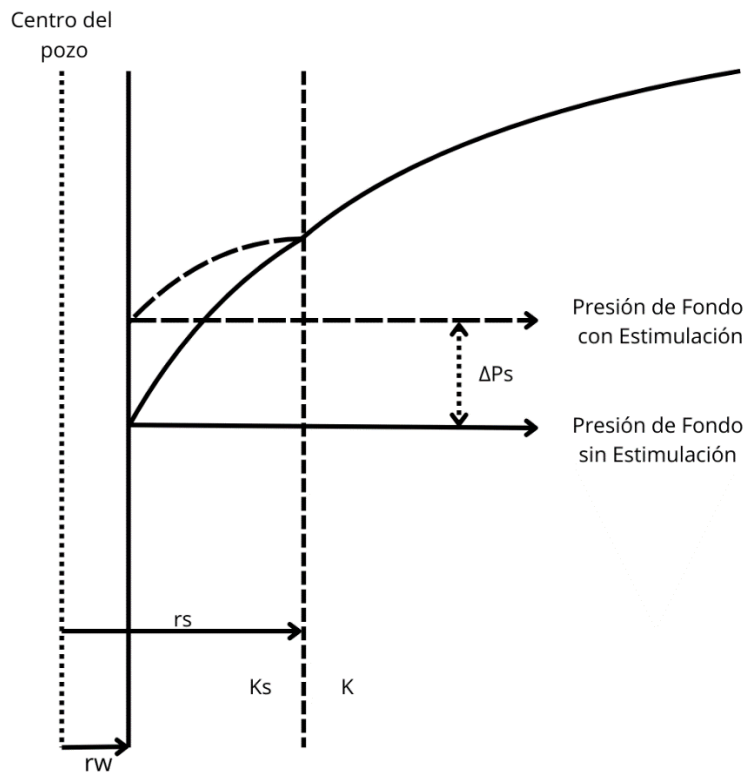


Figura 11. Comportamiento de la presión en un pozo estimulado vs comportamiento ideal de la presión en un pozo sin daño (Horne,1995, Traducida).

1.7. Variables Adimensionales

Las variables adimensionales son simplificaciones introducidas las cuales facilitan el análisis de los datos de presión, generalizándolos y permitiendo compararlos con información de diferentes pozos, yacimientos o campos (Kamal et al, 2008). Estas variables adimensionales son dependientes y proporcionales a las variables anteriores, además de no tener unidades.

Al expresar la ecuación de difusión en variables adimensionales se tiene la ventaja de que esta se vuelve independiente de las unidades. De este modo es más fácil analizar datos de campo con distintas unidades. Las variables adimensionales representan una manera generalizada para calcular la solución de la ecuación de difusión independientemente de las propiedades de yacimiento (Kamal et al, 2008).

Existe una gran cantidad de variables adimensionales, pero las más comunes en el ámbito de las pruebas de presión son las siguientes

Tiempo adimensional

$$t_D = \frac{0.0002637kt}{\phi\mu C_t r_w^2} \quad (1.42)$$

Presión adimensional

$$P_D = \frac{kh(P_i - P_{r,t})}{141.2qB\mu} \quad (1.43)$$

Radio adimensional

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (1.44)$$

Coefficiente de almacenamiento adimensional

$$C_D = \frac{0.894C_s}{\phi h C_t r_w^2} \quad (1.45)$$

1.8. Yacimientos Naturalmente Fracturados

Los yacimientos naturalmente fracturados son un amplio tema de estudio en la ingeniería de yacimientos, ya que sus propiedades geológicas, petrofísicas, de producción y económicas difieren mucho con respecto a otro tipo de yacimientos. Su principal característica son las fracturas naturales, las cuales forman una red que se extienden parcial o totalmente por todo el yacimiento. Las fracturas cambian el comportamiento de flujo de las unidades geológicas originales (Da Prat, 1990).

Las fracturas naturales en las rocas son discontinuidades en el medio que normalmente están asociadas con esfuerzos de deformación. Al sistema de fracturas interconectadas se le llama red de fracturas, en cambio a los bloques de roca separados por las fracturas se les tiende a llamar bloques de matriz o simplemente matriz. Las fracturas pueden estar abiertas o cerradas (mineralizadas) y esto puede representar un medio para fluir o una barrera al flujo respectivamente. Las fracturas son clasificadas como una porosidad secundaria, ya que estas se generan una vez que la roca fue

consolidada, es por esta razón que los yacimientos naturalmente fracturados también son llamados yacimientos de doble porosidad (Nelson, 2001).

Una de las clasificaciones de yacimientos naturalmente fracturados más utilizada es la presentada por Nelson (1982) y que se puede observar en la **Figura 12**. En esta clasificación se distinguen 4 tipos de yacimientos; el tipo I es un yacimiento en el que la porosidad y la permeabilidad del sistema las provee la red de fracturas en la roca, la matriz tiene una muy baja permeabilidad y porosidad; el tipo II y III son similares, en el II la permeabilidad la provee mayormente la red de fracturas, y la porosidad está repartida entre la matriz y las fracturas, en el tipo III la permeabilidad está repartida entre la red de fracturas y la matriz, pero la porosidad esta provista mayormente por la matriz; finalmente en el yacimiento tipo M la porosidad y la permeabilidad esta provista básicamente por la matriz.

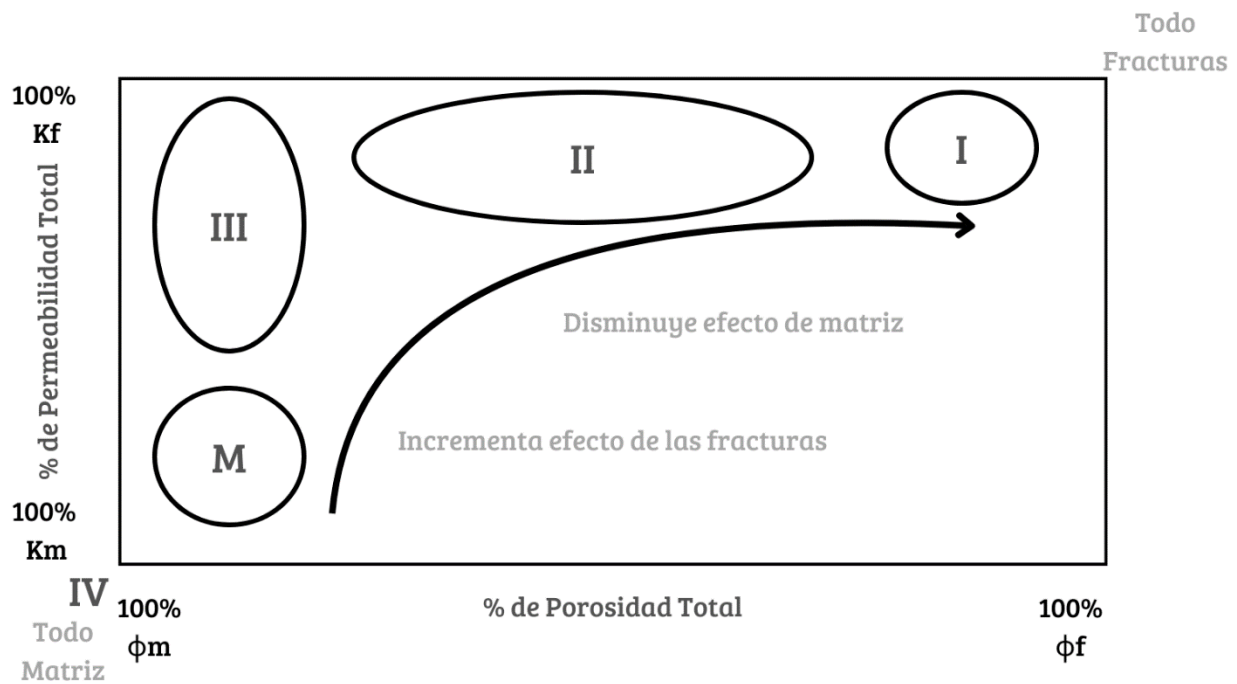


Figura 12. Clasificación de YNF de Nelson. Esta gráfica muestra una clasificación de los yacimientos naturalmente fracturados en función de la porosidad y permeabilidad de matriz y de fractura (Dusseault & Jalali, 2012, Traducida)

Warren & Root (1953) presentaron uno de los modelos más ampliamente usados para el análisis de yacimientos naturalmente fracturados. Este modelo idealiza que la porosidad primaria y la porosidad

secundaria son sistemas independientes, y que la porosidad secundaria se superpone en el sistema de porosidad primaria. Para poder observar mejor esta superposición nos apoyaremos en la **Figura 13**. se modeló un volumen de roca heterogéneo como un conjunto de bloques con porosidad primaria (bloques de matriz), los cuales están unidos por el segundo sistema de porosidad secundaria (sistema de fracturas). Con este modelo, se vuelve evidente que el flujo de fluidos puede ocurrir solo desde los bloques de matriz hacia el sistema de fracturas, y no de los bloques de matriz a otros bloques de matriz; por otro lado, el flujo de fluidos del yacimiento al pozo solo ocurre por medio del sistema de fracturas (Cinco-Ley et al, 1985).

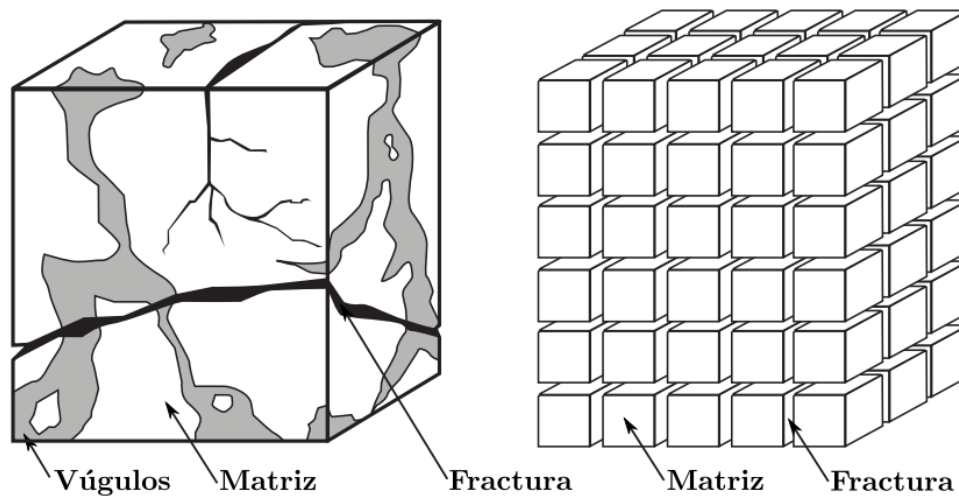


Figura 13. Idealización de un yacimiento naturalmente fracturado según el modelo de Warren y Root Tomada de Pérez R. 2016.

Derivado de las premisas descritas por Warren y Root, para modelar el sistema de doble porosidad completamente, se debe aplicar la ecuación de difusión para ambos medios, el sistema de matriz, o de porosidad primaria, y el sistema de fracturas, o de porosidad secundaria. La ecuación de difusión para el sistema de matriz, el cual fluye únicamente de la matriz a la fractura, expresado en variables adimensionales está dada por la *ecuación 1.46*.

$$(1 - \omega) \frac{\partial P_{mD}}{\partial t_D} = \lambda(P_{fD} - P_{mD}) \quad (1.46)$$

Donde P_{fD} y P_{mD} son la presión adimensional del sistema de fracturas y del sistema de matriz respectivamente.

Para el sistema de fracturas, el cual es el que fluye desde el yacimiento hasta el pozo, se obtiene la siguiente ecuación aplicando la ecuación de difusión.

$$\frac{\partial^2 P_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_{fD}}{\partial r_D} = (1 - \omega) \frac{\partial P_{mD}}{\partial t_D} + \omega \frac{\partial P_{fD}}{\partial t_D} \quad (1.47)$$

Donde

$\omega = \frac{\phi_f C_{tf}}{(\phi_m C_{tm} + \phi_f C_{tf})}$ es un parámetro adimensional que mide la capacidad de almacenamiento del fluido en la porosidad secundaria en contraste con la capacidad de almacenamiento de todo el yacimiento.

$\lambda = \alpha \frac{K_m}{K_f} r_w^2$ es un parámetro adimensional relacionado con el flujo interporoso, entre la matriz y la fractura.

$\alpha = \frac{4n(n+2)}{l}$ es un factor de forma de la geometría de los elementos de la matriz, las dimensiones del factor son $\frac{1}{L^2}$

n es el número de familias de fracturas normales que rodean a los bloques de matriz. Por ejemplo, si $n=1$, entonces la matriz solo está fracturada paralelamente a 1 plano, **Figura 14**. Para el caso de cubos tridimensionales, **Figura 13**, el valor de n es igual a 3.

l es el espesor de cada bloque de matriz.

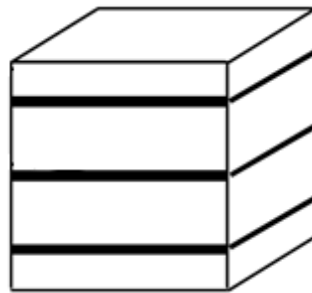


Figura 14. Sistema en donde solo se tiene una familia de fracturas, $n=1$ (Bourdet, 2002, Modificada).

Las variables adimensionales utilizadas en el análisis de pruebas de presión en yacimientos naturalmente fracturados cambian ligeramente con las definidas anteriormente, debido a que ahora se consideran dos medios porosos independientes y superpuestos; con ello cambia la permeabilidad y la compresibilidad total del sistema.

Para el tiempo adimensional, la definición de la variable cambia a:

$$t_D = \frac{0.0002637k_f t}{[(\phi VC)_m + (\phi VC)_f]\mu r_w^2} \quad (1.48)$$

La otra variable adimensional que cambia es el coeficiente de almacenamiento adimensional, el cual queda de la siguiente forma:

$$C_D = \frac{0.894C_s}{[(\phi C)_m + (\phi C)_f]hr_w^2} \quad (1.49)$$

En el caso de P_{fD} y P_{mD} , lo único que cambia con respecto a la definición de presión adimensional dada anteriormente es la presión utilizada para calcular la diferencia de presión y la permeabilidad del sistema. Para P_{fD} se utiliza la permeabilidad del sistema de fracturas, k_f , y la diferencia $\Delta P = P_i - P_f(r, t)$, donde $P_f(r, t)$ es la presión en el sistema de fracturas. Con la presión adimensional en el sistema de matriz se procede de manera similar, simplemente cambiando las características del sistema de matriz.

1.9. Soluciones de la Ecuación de Difusión

La ecuación 1.29 es la principal herramienta matemática para el análisis de los datos obtenidos de pruebas de presión, por lo tanto, su solución es un punto clave.

Las distintas soluciones que existen para la ecuación de difusión en flujo radial dependen de las condiciones iniciales y de frontera que sean consideradas. La ecuación de difusión es una ecuación diferencial parcial de segundo orden (por esta razón requiere 2 condiciones de frontera y requiere una condición inicial). De acuerdo con Horne (1995), los dos periodos de flujo más importantes son cuando el flujo en el yacimiento está dominado por comportamiento infinito y comportamiento dominado por efectos de fronteras.

La condición inicial, así como la de frontera interna, son las mismas para todos los casos. La condición de frontera externa es particular para cada caso.

La condición inicial establece que la presión en un yacimiento en cualquier punto del mismo al tiempo cero es igual a la presión inicial:

$$P(r, t = 0) = P_i \quad (1.50)$$

La condición de frontera deriva de la consideración de que el pozo produce a gasto constante. Entre la superficie perforada del yacimiento (o cara del yacimiento) y el fondo del pozo debe haber una diferencia de presión constante para que exista un gasto constante del yacimiento al pozo. Esta condición es explicada por la ley de Darcy:

$$\frac{dP(r = r_w, t)}{dr} = \frac{q\mu}{2\pi kh r_w} \quad (1.51)$$

1.9.1. Solución Línea Fuente

En este caso se considera el pozo ubicado en un medio poroso de extensión infinita, produciendo a gasto constante. El pozo es considerado que tiene radio cero y la presión es uniforme una vez que comenzó la producción (Lee, 1982). Este comportamiento es común cuando los efectos de frontera del yacimiento aún no se han presentado (Horne, 1995). La condición de frontera externa para este caso establece que, si el radio del yacimiento tiende a infinito, la presión en este radio a cualquier tiempo tenderá a la presión inicial.

$$P(r \rightarrow \infty, t) = P_i \quad (1.52)$$

La solución a la ecuación de difusión se puede obtener por medio de la transformada de Laplace. A continuación, se muestra la solución de la ecuación de difusión para las condiciones dadas donde la presión está en libras por pulgada cuadrada y el radio en pies.

$$P = P_i + 70.6 \frac{qB\mu}{kh} \left[E_i \left(\frac{-948\phi\mu C_t r^2}{kt} \right) - 2s \right] \quad (1.53)$$

En donde:

B Es el factor volumétrico del fluido [barriles de yacimiento/barriles estándar medidos en tanque]

E_i es la integral exponencial $E_i(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$

La integral exponencial, cuando $x < 0.02$, puede aproximarse con $E_i(-x) = \ln(1.781x)$

Dado que $x = \frac{948\phi\mu C_t r^2}{kt}$, entonces $\frac{\phi\mu C_t r^2}{kt} < 0.000021097$. Como puede notarse, la solución línea fuente es válida para tiempos largos, y cuando aún no se han presentado los efectos de las fronteras.

Haciendo uso de variables adimensionales, la solución se puede escribir como:

$$P_D = -\frac{1}{2}E_i\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \approx \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t_D}{r_D^2}\right) + 0.80907 + 2s\right] \quad (1.54)$$

1.9.2. Solución Para un Yacimiento Cilíndrico con Comportamiento Dominado por Efectos de Frontera

Para un yacimiento dominado por efectos de frontera, se tienen dos casos particulares. El primero es cuando la frontera es cerrada y el segundo es cuando la frontera es abierta y con presión constante en la misma (Horne, 1995).

Para ambos casos se considera que un pozo con radio r_w está ubicado en un yacimiento cilíndrico de radio r_e , produciendo a un gasto constante (Lee, 1982) y donde los efectos de las fronteras ya se han presentado en el pozo (Horne, 1995).

Frontera Cerrada. En este caso se asume frontera cerrada (no hay flujo a través de la frontera), además, se considera que $r_w \ll r_e$. Como la frontera es cerrada, el gradiente de presión en la frontera es cero, esta es la condición de frontera externa:

$$\frac{dP(r = r_e, t)}{dr} = 0 \quad (1.55)$$

La ecuación 1.56 es la solución exacta de la ecuación de difusión para las condiciones dadas; también es conocida como la solución de gasto terminal constante de van Everdingen-Hurst (Lee, 1982).

$$P_{wf} = P_i + 141.2 \frac{qB\mu}{kh} \left(\frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t_D} J_1^2(\alpha_n r_{eD})}{\alpha_n^2 [J_1^2(\alpha_n r_{eD}) - J_1^2(\alpha_n)]} \right) \quad (1.56)$$

Donde

B Es el factor volumétrico del fluido [barriles de yacimiento/barriles estándar medidos en tanque]

r_{eD} Es radio adimensional evaluado en r_e

r_e Es radio del yacimiento

α_n Representa una raíz de la siguiente ecuación $J_1(\alpha_n r_{eD})Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n)Y_1(\alpha_n r_{eD}) = 0$

J_1 y Y_1 son las funciones Bessel de primer y segundo tipo de primer orden

Una forma corta de la *ecuación 1.56*, considerando las mismas condiciones, resulta para tiempos largos $\left(t > \frac{948\phi\mu C_t r_e^2}{k}\right)$, donde la suma que involucra exponenciales elevados al tiempo adimensional y las funciones de Bessel son despreciables (Matthews & Russell, 1967).

$$P_{wf} = P_i + 141.2 \frac{qB\mu}{kh} \left(\frac{0.000527kt}{\phi\mu C_t r_e^2} + \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} \right) \quad (1.57)$$

O usando variables adimensionales

$$P_D = \left(\frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \right) \quad (1.58)$$

Frontera Abierta con Presión Constante. En este caso, la frontera permite la entrada de fluidos externos. Esto se puede ver cuando hay un acuífero activo, o cuando hay una capa de gas expandiéndose sin que fluya el gas.

Cuando el pozo empieza a producir y los efectos de esto no han llegado a la frontera, r_e , la presión del fluido en producción está en equilibrio con la presión del fluido externo, la presión de equilibrio es la presión inicial. Una vez que los efectos de la producción llegan hasta frontera, hay una caída de presión en ella e inmediatamente el empuje del fluido externo reestablece la presión de equilibrio. La condición de frontera externa para lo descrito anteriormente se puede expresar de la siguiente manera:

$$P(r = r_e, t) = P_i \quad (1.59)$$

Finalmente, la solución se obtiene en la *ecuación 1.62*.

$$P_{wf} = P_i + 141.2 \frac{qB\mu}{kh} \left(\ln r_{eD} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 t_D} J_1^2(\beta_n r_{eD})}{\beta_n^2 [J_1^2(\beta_n) - J_1^2(\beta_n r_{eD})]} \right) \quad (1.60)$$

Donde

β_n es una raíz de la ecuación $J_1(\beta_n)Y_0(\beta_n r_{eD}) - J_0(\beta_n r_{eD})Y_1(\beta_n) = 0$

1.9.3. Solución Para un Yacimiento Naturalmente Fracturado

Como en el análisis de yacimientos naturalmente fracturados tenemos 2 medios, cada uno descrito con una ecuación de difusión en derivadas parciales, una de primer orden y la segunda de segundo orden, entonces requeriremos 3 condiciones de frontera y 2 condiciones iniciales.

La condición inicial, así como la condición de frontera interna, son las mismas para todos los casos.

La condición de frontera externa es particular para cada caso.

La condición inicial para ambos medios establece que la presión en un yacimiento en cualquier punto del mismo al tiempo cero es igual a la presión inicial, esto considera al sistema de fracturas y al sistema de matriz:

$$P_{mD}(r_D, t_D = 0) = P_{fD}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (1.61)$$

Considerando que el pozo produce a gasto constante se tiene la *expresión 1.62*.

$$P_{fD} - s \left(\frac{\partial P_{fD}(r_D = 1, t)}{\partial t_D} \right) = 1 \quad (1.62)$$

Por otro lado, si el pozo está produciendo a presión constante, entonces se utiliza la siguiente condición de frontera interna:

$$C_D \frac{\partial P_{fD}}{\partial t_D} - \left(\frac{\partial P_{fD}(r_D = 1, t_D)}{\partial r_D} \right) = 1 \quad (1.63)$$

Solución Para un YNF con Comportamiento Infinito. La condición de frontera externa en la solución de comportamiento infinito es la misma que la dada en la *ecuación 1.59* para los dos medios. Presentándola aquí con variables adimensionales queda la *ecuación 1.64*.

$$P_{fD}(r_D \rightarrow \infty, t_D) = P_{mD}(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0 \quad (1.64)$$

La solución con las condiciones dadas tiene un problema aplicar la transformada inversa de Laplace. Cinco-Ley et al., (1985) explican este problema “una inversión analítica de la ecuación... genera una expresión mucho más compleja, la cual puede ser difícil de evaluar”. Es por esta razón que es común mantener la solución de la ecuación en el espacio de Laplace, a partir de la cual se obtienen

soluciones para tiempos cortos, medios y largos con mayor facilidad. La solución para comportamiento infinito en el espacio de Laplace es la siguiente:

$$\overline{P_{f_{wD}}} = \frac{K_0(\sqrt{Sf(S)}) + s\sqrt{Sf(S)}K_1(\sqrt{Sf(S)})}{S\{\sqrt{Sf(S)}K_1(\sqrt{Sf(S)}) + SC_D[K_0(\sqrt{Sf(S)})] + s\sqrt{Sf(S)}K_1(\sqrt{Sf(S)})\}} \quad (1.65)$$

s (minúscula) representa el daño

S (mayúscula) representa la variable de Laplace

K_n representa las funciones modificadas de Bessel

$$f(S) = \frac{\omega(1-\omega)S+\lambda}{(1-\omega)S+\lambda}$$

Warren & Root (1963) dieron una solución para un yacimiento naturalmente fracturado de comportamiento infinito considerando $r_D = 1$, es decir, en el radio de pozo, y, por lo tanto, la solución para la presión adimensional del fondo del pozo, P_{wD} (Da Prat, 1990).

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \left[\ln(t_D) + 0.80908 + E_i\left(\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}\right) - E_i\left(\frac{-\lambda t_D}{1-\omega}\right) \right] + S \quad (1.66)$$

Solución para un YNF con Efectos de Frontera. Warren & Root también obtuvieron la solución para un yacimiento naturalmente fracturado con efecto de frontera cerrada, *ecuación 2.67.*

$$P_{wD} = \frac{2}{r_{eD}^2 - 1} \left[\frac{1}{4} + t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} (1 - e^{\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}}) \right] - \frac{3r_{eD}^2 - 4r_{eD}^2 \ln(r_{eD}^2) - 2r_{eD}^2 - 1}{4(r_{eD}^2 - 1)} \quad (1.67)$$

Capítulo 2

Análisis de Pruebas de Presión

En un principio, las pruebas de presión estaban preparadas para determinar la calidad del pozo o la determinación del gasto a diferentes presiones de producción; para determinar la razón de la baja calidad de la producción, e inclusive para determinar la presión estática de pozo y hacer uso de la ecuación de balance de materia (Ramey, 1992). En este punto ya se hacía uso del análisis de líneas rectas semilogarítmicas, el cual es una herencia de la hidrología de aguas subterráneas (Gringarten, 2008).

Los métodos tradicionales de análisis de pruebas de presión consisten en el uso continuo de representaciones gráficas. Estos análisis han evolucionado de hacerse con papel y lápiz a hacerse con ordenadores. La ayuda computacional en la interpretación permite obtener mejores resultados en menos tiempo (Horne, 1995).

El proceso general que se sigue, independientemente del tipo de prueba está dado por 4 pasos (Kamal et al, 2008).

1. Examinación de datos: verificar que los datos de la prueba estén completos, verificar si hay pozos cercanos que pudieran afectar los datos, comparar los datos si hubo múltiples medidores de presión, determinar si los datos tienen ruido y minimizar esta influencia del ruido. En general, verificar la calidad de los datos.
2. Identificación de los regímenes de flujo exhibidos en los datos e identificación del mejor modelo de ajuste: en este proceso se grafica la presión vs tiempo y la derivada de presión vs tiempo en una misma gráfica. Esto sirve para reconocer los regímenes de flujo exhibidos en cada periodo de tiempo, además de determinar qué tipo de geometría de flujo es exhibida después de que terminan los efectos de almacenamiento.
3. Cálculo de valores iniciales de propiedades del yacimiento: una vez que se determinan los periodos de tiempo en el que se presenta cada régimen de flujo es posible realizar un análisis

con graficas semilogarítmicas. En este análisis se pueden determinar propiedades de la formación, el daño y el coeficiente de almacenamiento.

4. Análisis de regresión para encontrar los mejores valores de las propiedades: finalmente, después de obtener valores de las propiedades de la formación, se generan análisis con curvas tipo y análisis de regresión no lineal para obtener un mejor ajuste de las propiedades.

2.1. Principio de Superposición

Este principio es una de las herramientas más poderosas para el análisis de pruebas de presión, que nos permite analizar pruebas de presión con más de un gasto, representar efectos de barreras al flujo, e incluso, analizar pruebas en yacimientos donde hay más de un pozo. Este principio dice que “la respuesta del sistema a un número de perturbaciones es exactamente igual a la suma de respuestas de cada perturbación como si se presentaran solas” (Horne, 1995, p. 36). El principio de superposición es válido únicamente para sistemas lineales matemáticamente hablando (Horne, 1995).

Para representar el principio de superposición se tomar como referencia un pozo que produce primero a un gasto q_1 , desde el tiempo t_0 hasta el tiempo t_1 , y después de ese periodo el pozo cambia a un gasto q_2 . Cuando nos preguntamos cual va a ser la caída de presión total a un tiempo mayor a t_1 , y haciendo uso del principio de superposición, podemos deducir que si $q_1 > q_2$, entonces la caída de presión total va a ser resultado del pozo produciendo al gasto q_1 más la caída de presión resultado del cambio del gasto $\Delta q = q_2 - q_1$ (al q_1 ser más grande que q_2 , la caída de presión resultante es negativa). En el caso en el que $q_1 < q_2$, entonces la caída de presión total va a ser el resultado del pozo produciendo al gasto q_1 más la caída de presión resultado del cambio del gasto $\Delta q = q_2 - q_1$ (al q_2 ser más grande que q_1 , la caída de presión resultante es positiva). Como podemos ver en la *ecuación 3.1*, indistintamente de cuál gasto sea mayor, el principio de superposición nos ayuda a determinar cuál será la caída total de presión debida a dichos cambios en el gasto.

$$\Delta P_{tot} = \Delta P_{q_1} + \Delta P_{q_2 - q_1} \quad (2.1)$$

2.2. Curvas Tipo

Las curvas tipo representan uno de los métodos más antiguos utilizados para el análisis de pruebas de presión en yacimientos petroleros. La técnica consiste en tratar de ajustar todos los datos provenientes de la prueba de presión en una curva entre varias que se presenta juntas en una misma gráfica. Las curvas se generan resolviendo analítica o numéricamente la ecuación de difusión especificando un conjunto de condiciones iniciales y de frontera, parámetros y haciendo uso de variables adimensionales. En la actualidad, esta familia de curvas es generada por computadora, así como su ajuste.

Las curvas fueron implementadas para tratar de ajustar los datos a la solución línea fuente, y más tarde para mejorar el método de Horner. Luego, se mejoraron estas curvas para considerar efectos como la geometría de flujo o heterogeneidades. Con la llegada de la gráfica derivada de la presión, se hizo común presentar las curvas tipo en pares con la derivada de la presión (Schlumberger, 2002).

Este método se popularizó ampliamente por la facilidad del mismo, sin embargo, rápidamente fueron evidentes algunas restricciones que tiene el método, por ejemplo, los resultados dependen enteramente de la percepción de la persona que analiza los datos, la cual puede variar entre diferentes expertos. Con la llegada de la era digital, el método evolucionó dando lugar al desarrollo de propuestas orientadas a lograr un ajuste con curvas tipo automático, como el desarrollado por Rosa & Horne (1983).

Las diferentes curvas tipo pueden graficarse con respecto a cualquier grupo de variables que sea conveniente, siempre y cuando se cumpla la condición de que las curvas resultantes tengan la misma forma que la curva resultante de los datos medidos en el sistema coordenado (Da Prat, 1990). Las variables más usadas para representar curvas tipo son las con P_D vs t_D y $P_D' \left(\frac{t_D}{C_D} \right)$ vs $\frac{t_D}{C_D}$. Existen una gran variedad de curvas tipo para distintas condiciones de yacimiento o combinaciones de variables. Las curvas tipo más usadas son las curvas de Gringarten y las de Bourdet, pues tienen la ventaja de que ambas se grafican en escala Log-Log con el mismo grupo adimensional en uno de sus ejes.

El principio de las curvas de Gringarten se basa en que, al graficar la presión adimensional contra el tiempo adimensional en una gráfica Log-Log, esta debería tener la misma forma que al graficar la

diferencia de presión vs el tiempo en una escala Log-Log. Esto se puede ver muy sencillo a partir de la definición de presión adimensional y tiempo adimensional.

$$P_D = \frac{kh(P_i - P_{r,t})}{141.2qB\mu} \quad (2.2)$$

Al aplicar el logaritmo de ambos lados de la ecuación obtenemos la *expresión 2.3*.

$$\log(P_D) = \log(\Delta P) + \log\left(\frac{kh}{141.2qB\mu}\right) \quad (2.3)$$

De manera similar se obtienen para el tiempo adimensional

$$\log(t_D) = \log(t) + \log\left(\frac{0.0002637k}{\phi\mu C_t r_w^2}\right) \quad (2.4)$$

De esta manera, colocando la solución línea fuente en variables adimensionales

$$P_D = \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{t_D}{C_D}\right) + 0.80907 + \ln(C_D e^{2s}) \right) \quad (2.5)$$

Obtendremos que las curvas tipo varían con respecto al valor $C_D e^{2s}$. También se observa que las curvas, a pesar de tener la misma forma, no tienen las mismas ordenadas al origen, éstas variarán en función de $\frac{kh}{141.2qB\mu}$ para la presión adimensional y de $\frac{0.0002637k}{\phi\mu C_t r_w^2}$ para el tiempo adimensional.

Las curvas tipo de Gringarten son presentadas en la **Figura 15**. Como se mencionó anteriormente, son graficadas en escala Log-Log y los ejes coordenados representan a la presión adimensional y al grupo adimensional $\frac{t_D}{C_D}$. En la misma gráfica se muestra una curva que representa el inicio del periodo de flujo radial infinito o, lo que es igual, el inicio de la línea recta en escala semilogarítmica.

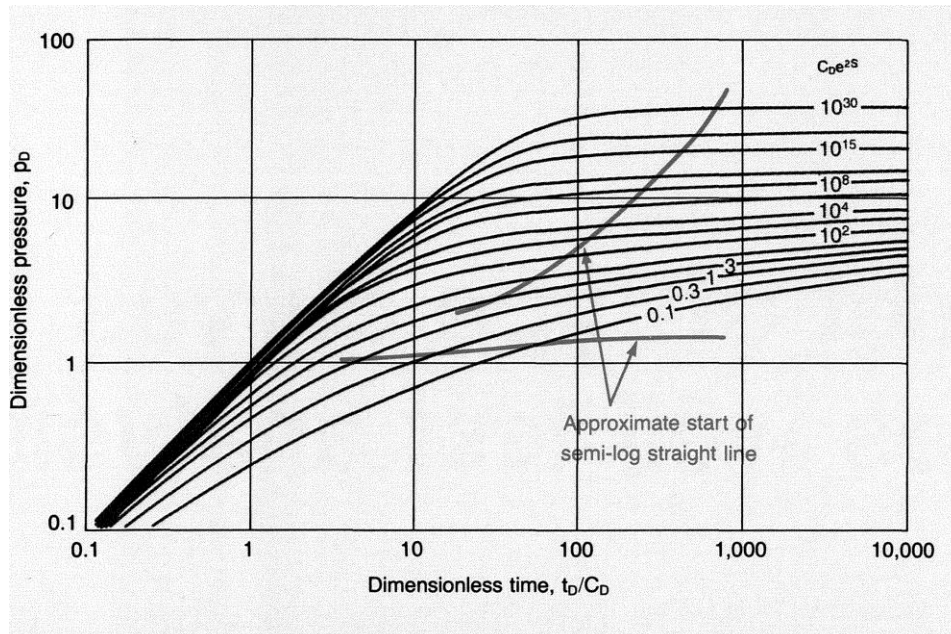


Figura 15. Curvas tipo de Gringarten, tomada de Bourdet & Douglas, 1983.

Las curvas tipo de Bourdet se basan en el concepto de la derivada de la presión, es por eso que son mejor conocidas como curvas tipo de la derivada de la presión.

La derivada de la presión está fundamentada matemáticamente en las aproximaciones de la solución a tiempos cortos, medios y largos de la solución línea fuente. Para comprenderlo es necesario recordar la ecuación 1.38.

$$\frac{24}{B} \frac{144 A_{wb}}{5.615 \rho} \frac{dP_{wf}}{dt} = q_{sf} - q_{sup}$$

Introduciendo el coeficiente de almacenamiento:

$$\frac{24C_s}{B} \frac{dP_{wf}}{dt} = q_{sf} - q_{sup} \quad (2.6)$$

Es posible introducir las variables adimensionales en esta igualdad a partir de las definiciones de P_D , T_D y C_D , y con el uso de la regla de la cadena.

$$\frac{dP_w}{dt} = \frac{dP_D}{dt_D} \frac{dP_w}{dP_D} \frac{dt_D}{dt} = \frac{0.0373qB}{\phi\mu C_t h r_w^2} \frac{dP_D}{dt_D} \quad (2.7)$$

Reemplazando la *expresión 2.7* en la *ecuación 2.6* e insertando la definición del coeficiente de almacenamiento adimensional se obtiene la *expresión 2.8*.

$$\frac{q_{sf}}{q_{sup}} = 1 - C_D \frac{dP_D}{dt_D} \quad (2.8)$$

La ecuación anterior es conocida como la condición de frontera interna con almacenamiento (Lee, 1982). A tiempos cortos, el aporte del yacimiento es 0 y, por tanto, la anterior ecuación expresa lo siguiente:

$$C_D \frac{dP_D}{dt_D} = 1 \quad (2.9)$$

A partir de esta ecuación e integrándola, se puede obtener la *ecuación 2.10*. Esta ecuación describe el comportamiento de la presión cuando el gasto en superficie está completamente dominado por el almacenamiento del pozo y el yacimiento no ha comenzado a manifestarse.

$$P_D = \frac{t_D}{C_D} \quad (2.10)$$

La derivada de la presión en el análisis de pruebas de presión se define como:

$$P'_D = \frac{dP_D}{d\left(\frac{t_D}{C_D}\right)} \quad (2.11)$$

Para tiempos cortos en los que el flujo está dominado por los efectos de almacenamiento y aplicando la derivada de la presión a la *ecuación 2.10* se obtiene un resultado de uno. Multiplicando la derivada de la presión por $\left(\frac{t_D}{C_D}\right)$ se obtiene:

$$P'_D \left(\frac{t_D}{C_D}\right) = \left(\frac{t_D}{C_D}\right) \quad (2.12)$$

Lo que nos muestra que si graficamos P_D vs $\frac{t_D}{C_D}$ en la misma gráfica que $P'_D \left(\frac{t_D}{C_D}\right)$ vs $\frac{t_D}{C_D}$, a tiempos cortos, ambas gráficas tendrán exactamente la misma forma.

Cuando los efectos de almacenamiento dejan de afectar los datos de presión y se tiene comportamiento infinito, entonces se presentará el comportamiento típico del flujo radial el cual está dominado por la *expresión 2.13*.

$$P_D = \frac{1}{2}(\ln(t_D) + 0.80907 + 2s) \quad (2.13)$$

Esta expresión puede ser modificada introduciendo el coeficiente de almacenamiento adimensional, colocando el factor de daño en una forma logarítmica.

$$P_D = \frac{1}{2}(\ln(t_D) + 0.80907 - \ln(C_D) + \ln(C_D) + \ln(e^{2s})) \quad (2.14)$$

Y como resultado se obtiene la solución línea fuente con almacenamiento y daño, *ecuación 2.15*.

$$P_D = \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{t_D}{C_D} \right) + 0.80907 + \ln(C_D e^{2s}) \right) \quad (2.15)$$

Al aplicar la derivada de la presión a la *expresión 3.15* obtenemos:

$$P'_D = \frac{1}{2} \left(\frac{C_D}{t_D} \right) \quad (2.16)$$

Y al despejar $\frac{t_D}{C_D}$

$$P'_D \left(\frac{t_D}{C_D} \right) = \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

Lo que significa que la gráfica de $P'_D \left(\frac{t_D}{C_D} \right)$ vs $\frac{t_D}{C_D}$ en el periodo de flujo radial será una línea horizontal constante con valor de un medio.

Las curvas tipo de la derivada de la presión varían con respecto a $C_D e^{2s}$ en los periodos de tiempo en los que el flujo no está dominado totalmente por el efecto de almacenamiento, pero tampoco no se ha llegado al periodo de flujo radial infinito. En la **Figura 16** se muestran las curvas tipo para yacimientos Homogéneos en donde se gráfica las curvas tipo de Gringarten y las curvas tipo de la derivada de la presión, o de Bourtdet. La presentación de ambas familias de curvas juntas es común, pues de esta manera se puede reducir la incertidumbre cuando se utiliza solo una familia.

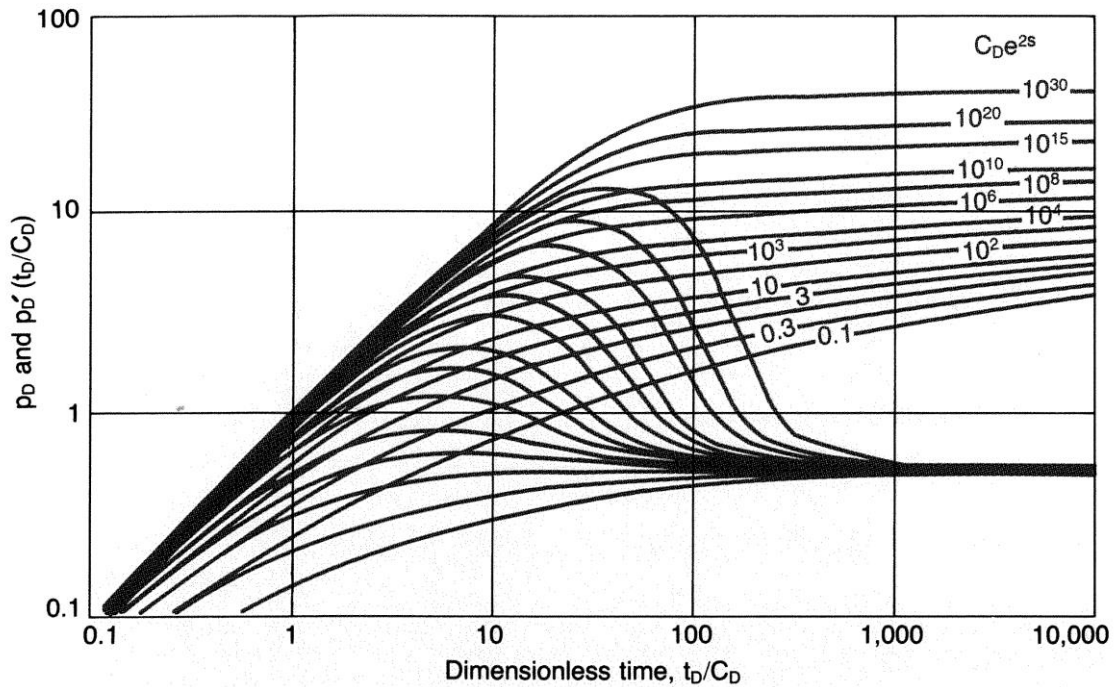


Figura 16. Curvas tipo en escala log-log donde se grafica presión adimensional y PD' (tD/CD) vs tD/CD para diferentes valores de $CD e^{2s}$. tomada de Bourdet et al; 1983.

Como se puede observar, la derivada de la presión es una de las herramientas más poderosas para identificar diferentes periodos de flujo fácilmente, así como otro tipo de información, pues para diferentes geometrías de flujo o barreras, la forma de la derivada de la presión cambia. Esta constituye la principal herramienta que se usa para la técnica de análisis con curvas tipo.

Para obtener la derivada de la presión de los datos se han desarrollado varias técnicas enfocadas en disminuir el ruido de los datos, pues la derivada de la presión suele amplificar el ruido en las mediciones, y así obtener una forma más clara del comportamiento. Una de las técnicas más usadas es la técnica de Bourdet. Esta consiste en una derivación numérica usando 3 puntos.

$$\frac{dP}{d(\ln(t))} \Big|_j = t \frac{dP}{dt} \Big|_j = \frac{\frac{\Delta P_j - \Delta P_{j-1}}{\ln\left(\frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}}\right)} \ln\left(\frac{\Delta t_{j+1}}{\Delta t_j}\right) + \frac{\Delta P_{j+1} - \Delta P_j}{\ln\left(\frac{\Delta t_{j+1}}{\Delta t_j}\right)} \ln\left(\frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta t_{j+1}}{\Delta t_{j-1}}\right)} \quad (2.18)$$

El proceso para realizar el ajuste con curvas tipo de forma manual se explica a continuación:

1. Se grafican juntos los datos de dP vs dT y la derivada de la presión vs tiempo en una escala Log-Log.
2. Se colocan los datos sobre las curvas tipo, de manera que sea posible observar las curvas tipo y los datos al mismo tiempo.
3. Se usa la derivada de la presión en el flujo radial infinito como guía para ajustar con las curvas tipo. Así mismo se utiliza la diferencia de presión cuando la producción está totalmente dominada por el efecto de almacenamiento para terminar de ajustar.
4. Se elige un punto en el que los datos ajusten con la mejor curva tipo.
5. Del punto de ajuste se obtiene la diferencia de presión, de la gráfica de los datos, y la presión adimensional, de la gráfica de las curvas tipo. Por medio de la fórmula para el cálculo de la presión adimensional, es posible obtener kh , comúnmente llamado capacidad de flujo.
6. De manera análoga, se puede obtener $\phi\mu C_t$ del punto de ajuste por medio de la fórmula para tiempo adimensional.

2.3. Curvas Tipo en Yacimientos Naturalmente Fracturados

Para analizar la respuesta de presión de un yacimiento naturalmente fracturado es importante recordar que el nuevo modelo depende del coeficiente de almacenamiento, el factor de daño y dos parámetros nuevos, ω y λ .

Un yacimiento naturalmente fracturado, con las consideraciones hechas por Warren & Root (1963), presenta tres regímenes diferentes de flujo. El primero a tiempos cortos, en donde el yacimiento comienza a producir como si el sistema fuera homogéneo; esto debido a que el sistema de fracturas inicialmente es el único que produce. El segundo régimen, que recibe el nombre de régimen de transición, comienza cuando la presión de las fracturas disminuye a tal grado, que el fluido contenido en la matriz comienza a fluir hacia las fracturas; esto genera que por un momento la caída de presión en el sistema de fracturas se detenga. Finalmente, el tercer régimen se caracteriza por la estabilización de la presión entre el sistema de fracturas y el sistema de matriz; similar al primer régimen, el sistema produce como si fuera homogéneo.

En tiempos cortos, la respuesta de la presión está dominada por el efecto de almacenamiento, y en cuanto el yacimiento empieza a producir, el efecto de almacenamiento podría ocultar por completo el primer régimen de flujo.

El tiempo adimensional y el coeficiente de almacenamiento adimensional pueden relacionarse con el parámetro de almacenamiento de las fracturas de la siguiente manera.

$$t_{Df+m} = \frac{0.0002637k_f t}{[(\phi VC)_m + (\phi VC)_f]\mu r_w^2} = \omega t_{Df} = \omega \left(\frac{0.0002637k_f t}{(\phi VC)_f \mu r_w^2} \right) \quad (2.19)$$

Y para el coeficiente adimensional.

$$C_{D+m} = \frac{0.894C_s}{[(\phi C)_m + (\phi C)_f]hr_w^2} = \omega C_{Df} = \omega \left(\frac{0.894C_s}{(\phi C)_f hr_w^2} \right) \quad (2.20)$$

Para tiempos cortos, el yacimiento se comporta como un yacimiento homogéneo. En un principio el yacimiento no produce y la presión está dominada por la *ecuación 2.10*. Cuando el yacimiento comienza a fluir, lo hace desde el sistema de fracturas, siguiendo el comportamiento descrito por la *ecuación 2.21*.

$$P_{Dfw}(t_D) = \frac{1}{2} \left[0.80907 + \ln(t_D) + \ln\left(\frac{1}{\omega}\right) + 2s \right] \quad (2.21)$$

Una vez que la presión en el sistema de fracturas disminuye y la matriz comienza a fluir, cambiamos al régimen de transición descrito por la *ecuación 2.22*.

$$\begin{aligned} P_{Dfw}(t_D) &= \frac{1}{2} \left[0.80907 + \ln(t_D) + E_i\left(-\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}\right) - E_i\left(-\frac{\lambda t_D}{1-\omega}\right) + 2s \right] \\ &\approx \left(\frac{1}{2}\right) \left[0.80907 + \ln(t_D) - E_i\left(-\frac{\lambda t_D}{1-\omega}\right) + 2s \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

A tiempos cortos, la *ecuación 3.22* se puede reducir a la *ecuación 3.23*.

$$P_{Dfw}(t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln(t_D) + \ln\left(\frac{1.26(1-\omega)}{\lambda}\right) + 2s \right] \quad (2.23)$$

Finalmente, para el tercer periodo de flujo, la presión se estabiliza y el yacimiento actúa nuevamente como un sistema homogéneo, pero ahora considerando la matriz y las fracturas. La *ecuación 2.24* modela este periodo, y como se observa, es la solución línea fuente.

$$P_{Dfw}(t_D) = \frac{1}{2} [0.80907 + \ln(t_D) + 2s] \quad (2.24)$$

Con estas aclaraciones realizadas, Bourdet & Gringarten (1980) extendieron el método de curvas tipo para yacimientos naturalmente fracturados con dos porosidades, una permeabilidad. Estas curvas superponen el flujo homogéneo y las soluciones para el régimen en transición.

Por último, la función derivada para un yacimiento naturalmente fracturado actuando de manera infinita, puede ser descrito a tiempos cortos y multiplicando por el grupo adimensional $\left(\frac{t_D}{C_D}\right)$, cuando la producción está dominada por el almacenamiento, por la *ecuación 2.8*.

Cuando los efectos de almacenamiento terminan, la presión se comportará como en un yacimiento homogéneo, *ecuación 2.21*, y cuando ambos medios fluyan y se establezca la presión, también se comportará como un yacimiento homogéneo, *ecuación 2.24*. Si derivamos ambas ecuaciones, se obtiene la misma derivada, que es igual a la presentada en la *ecuación 2.13*.

$$P'_{Dfw}\left(\frac{t_D}{C_D}\right) = \frac{1}{2}$$

En el periodo de transición, la derivada de la presión se obtiene al aplicar la definición en la *ecuación 2.22*. La *ecuación 2.25* es el resultado de este proceso (Bourdet, 2002). Una nota importante con respecto a la derivada de la presión, es que a menudo el efecto de almacenamiento puede ocultar parcial o totalmente la presencia de los dos comportamientos homogéneos e incluso del comportamiento de transición

$$P'_{Dfw}(t_D/C_D) = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\left[\frac{\lambda C_{Df+m} t_D}{\omega(1-\omega)C_D}\right]} - e^{-\left[\frac{\lambda C_{Df+m} t_D}{(1-\omega)C_D}\right]} \right] \quad (2.25)$$

La **Figura 17** muestra las curvas tipo para yacimientos naturalmente fracturados; para las curvas tipo de Gringarten se grafican diferentes soluciones superpuestas para cada uno de los periodos de flujo; y para la derivada se grafican las soluciones homogéneas, y por otro las curvas que dan origen a los valles característicos en yacimientos naturalmente fracturados. Esta presentación de las curvas tipo permite una mejor evaluación de los parámetros que intervienen en cada periodo.

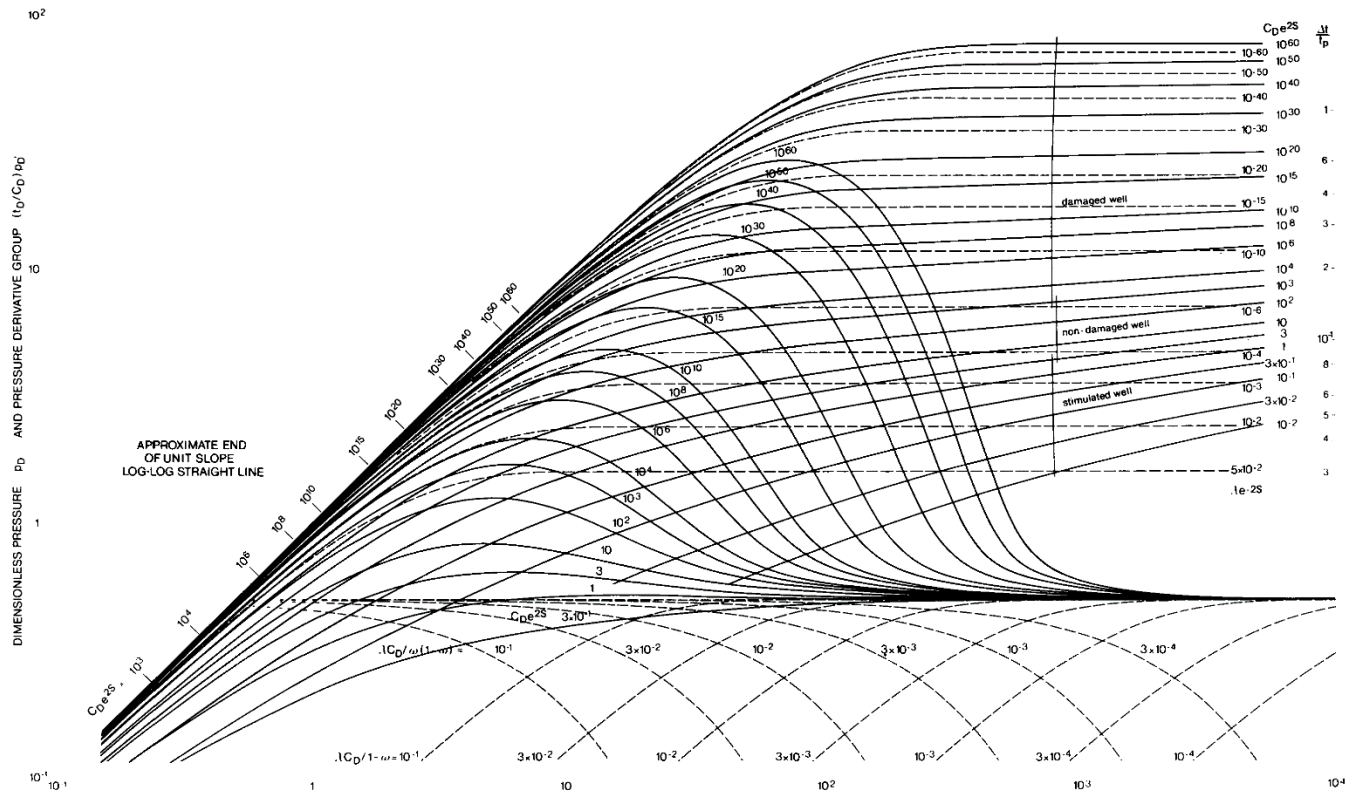


Figura 17. Conjunto de curvas tipo para el ajuste de datos de yacimientos naturalmente fracturados tomada de Da Prat; 1990.

Capítulo 3

Algoritmos Genéticos

Los algoritmos genéticos son una metodología de búsqueda estocástica, que tiene la particularidad de imitar el mecanismo de la selección natural propuesto por Darwin, y los procesos de herencia genética como estrategia de búsqueda. La definición que da Goldberg (1989) es que los “algoritmos genéticos son algoritmos de búsqueda basados en la mecánica de selección natural y genética natural”. Estos algoritmos son ampliamente ocupados para resolver problemas de optimización.

Los problemas de optimización son aquellos problemas, típicamente muy complejos, en los cuales se tiene un conjunto amplio de soluciones posibles y se busca la solución que mejor ajuste bajo ciertas condiciones que deben cumplirse. Para resolver estos problemas puede pensarse en la estrategia de probar todas las soluciones posibles y elegir la mejor. Esta estrategia se vuelve inútil cuando se considera el tiempo requerido para evaluar todas las soluciones posibles. Cuando el número de soluciones crece, puede volverse una tarea infinita si los intervalos de solución lo son. Para llegar a una solución óptima sin la necesidad de evaluar todas las soluciones, se han desarrollado una gran cantidad estrategias de búsqueda que tratan de aproximarse mediante características matemáticas o lógicas en el menor tiempo posible.

La estrategia de búsqueda de los algoritmos genéticos se basa en probar soluciones aleatoriamente; y de explotar la información de pruebas pasadas para optimizar la búsqueda sin dejar de explorar un amplio espectro de posibles soluciones, gracias a eso es posible encontrar máximos o mínimos globales y no sólo locales (Goldberg, 1989).

Algunas de las principales ventajas al usar los algoritmos genéticos son mencionadas por Gen & Cheng (1997) y Goldberg (1989). A continuación, se resumen las principales:

1. Son relativamente efectivos con problemas no lineales debido al paralelismo.
2. No requieren un desarrollo matemático muy complejo para resolver problemas de optimización, además trabajan con cualquier tipo de función objetivo y restricción, lineal o no lineal, definida o discreta, continua o con espacios de búsqueda mixtos.

3. Son capaces de explorar un amplio espacio de búsqueda dado que operan con muchas soluciones en cada generación.
4. No requiere de información adicional para el proceso de optimización.
5. Tienen mayor facilidad de salir de óptimos locales.

Sin embargo, a pesar de tener tan buenas características, los algoritmos genéticos tienen una ciertas limitantes y desventajas a tomar en cuenta:

1. Los problemas de ingeniería y problemas en la vida real, a menudo son de alta complejidad, lo que puede generar funciones objetivo de alto coste computacional, imposibilitando el uso de algoritmos genéticos.
2. La introducción de variables independientes en la función objetivo hará que el espacio de búsqueda crezca exponencialmente, resultando en poblaciones más grandes y más generaciones, implicando mayor costo computacional.
3. Las soluciones que arroja son una aproximación al óptimo absoluto, o también puede ser una aproximación a un óptimo local, ya que no están exentos de caer en óptimos locales cuando son muy similares al óptimo absoluto.
4. La solución arrojada dependerá mucho de la población inicial.

3.1. Contexto Histórico de los Algoritmos Genéticos

El nacimiento de los algoritmos genéticos está muy relacionado con el nacimiento de las computadoras digitales. Los investigadores de los 50 comenzaron con el desarrollo de este tipo de técnicas tratando de generar un simulador de los procesos que involucran la evolución y poco después empezaron a concebirse las nociones de la aplicación evolutiva en otras áreas (Legerén, et al., 2012). Algunas estrategias evolutivas fueron desarrolladas en la década de los 60 por Ingo Rechenberg y Hans Paul en la Universidad Técnica de Berlín (Luke, 2016).

Jhon Henry Holland es considerado el padre de los algoritmos genéticos luego de la publicación de su libro “*Adaptation in natural and Artificial systems*” en 1975. En este libro, Holland trató de resumir y explicar el fenómeno de adaptación en la naturaleza y replicarlo en un sistema artificial que contuviera las características principales de un sistema natural.

En años posteriores Goldberg popularizó el uso de esta técnica, y propuso que los algoritmos genéticos funcionaban porque en la población hay partes, que él llamó bloques, de la solución óptima en algunos de los individuos, y que al cruzarse y seleccionarse los mejores, esas características que forman la solución óptima tienen mayor probabilidad de encontrarse y acercarse al objetivo (Dianati et al., 2002).

Durante los siguientes años, los algoritmos genéticos se han desarrollado en 3 campos principales: la investigación enfocada en el algoritmo genético básico, la optimización usando algoritmos genéticos y en el *machine learning* con sistemas clasificadores. En el campo de optimización usando algoritmos genéticos se han diseñado y mejorado los métodos de cruce, selección, mutación y codificación.

3.2. Conceptos Biológicos de los Algoritmos Genéticos

La célula es la unidad fundamental de los seres vivos; en ella se almacena material hereditario de generaciones anteriores. Este material genético está codificado en el ADN por medio de cuatro bases nitrogenadas, adenina, timina, guanina y citosina. La molécula fundamental del ADN se llama nucleótido y resulta de la unión de una base nitrogenada, una molécula de azúcar y un grupo fosfato. El ADN controla los procesos de síntesis de proteínas y enzimas celulares. Los genes son segmentos de ADN, los cuales pueden contener información para sintetizar proteínas mediante la codificación de la secuencia de sus bases y, estos son los responsables de las características físicas y genéticas de cada ser vivo (Angulo et al., 2012). La manera en la que el ADN controla la forma en la que un individuo se ve, es por medio de las proteínas, a la combinación de proteínas se le llama *genotipo* y a la forma *fenotipo*, a cada genotipo le corresponde un único fenotipo, pero a cada fenotipo le pueden corresponder múltiples genotipos, por lo que su relación en la naturaleza no es uno a uno (National Human Genome Research Institute, 2025).

En las células eucariotas, el ADN se encuentra dentro del núcleo en forma de una maraña delgada de hilos llamada cromatina; pero cuando la célula ha alcanzado su tamaño máximo, y comienza su

proceso de réplica¹ se duplica el ADN y se enrolla, dando forma a estructuras conocidas como cromosomas. En la **Figura 18** se observa cómo es que la cromátida se enrolla en sí misma dando como resultado un cromosoma. El número de cromosomas en cada célula es característico de cada especie (Angulo et al., 2012). Similar a esto, los individuos en los algoritmos genéticos son un modelo simplificado de un cromosoma. Están compuestos de variables codificadas similares a los genes y que componen el código genético del individuo.

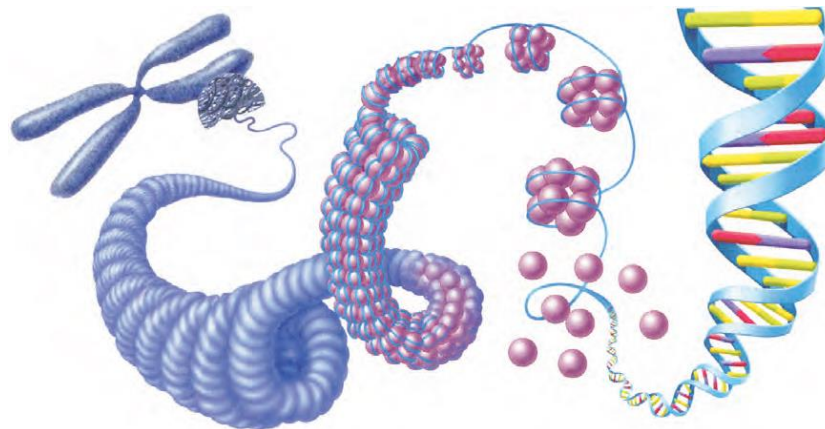


Figura 18. *Constitución de cromosoma. En la parte izquierda se puede observar un cromosoma doble, y como es que su estructura está constituida de ADN enrollado alrededor de proteínas (Ángulo et al., 2012)*

Las células pueden replicarse por mitosis o meiosis. Tomando como referencia la **Figura 19**, cuando una célula se multiplica por mitosis, cada célula hija recibe un material genético idéntico al de la célula progenitora (células diploides), en cambio, cuando lo hace por meiosis, cada célula hija recibe únicamente la mitad de material genético de la célula progenitora (células haploides), lo que significa que tienen solamente la mitad de cromosomas. Las células sexuales o gametos son células haploides, por lo tanto, contienen únicamente la mitad de material genético del progenitor. Cuando las células sexuales de dos progenitores se unen, los núcleos se fusionan, combinando el material genético y completando el número de cromosomas. Esto genera un código genético nuevo que la célula usará para multiplicarse por mitosis (Angulo et al., 2012). En los algoritmos genético, este proceso es imitado por la cruce, una operación genética que mezcla el código de dos individuos.

¹ El ADN tiene la importante habilidad de autocopiarse, a este proceso de autocopiado se le llama réplica.

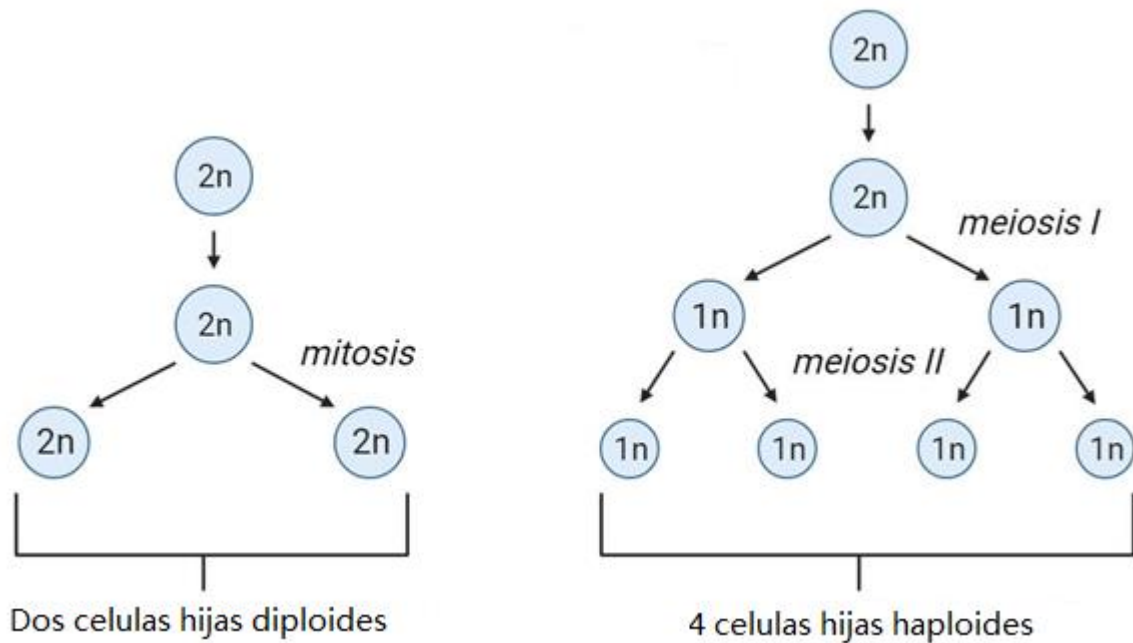


Figura 19. Diferencia entre las mitosis y la meiosis. El tipo de célula resultante, diploide [2n] o haploide [1n] (Sagar Aryal, 2023, Modificada)

Algunas veces, cuando el ADN se está copiando, ocurre un cambio en la secuencia de nucleótidos. A este cambio se le llama mutación genética y puede generar desde pequeños cambios de apariencia o funcionamiento, hasta desordenes o la muerte. Cuando las mutaciones ocurren en los gametos son heredadas a los descendientes (Angulo et al., 2012). Las mutaciones que se heredan son una fuente constante de evolución. Cuando un miembro de una especie tiene una mutación que le ayuda a adaptarse mejor a su entorno, tendrá una ventaja sobre los demás miembros de su misma especie, dándole más probabilidades de reproducirse y heredar su mutación, generando más miembros con ese rasgo y provocando que a largo plazo se vuelva una característica de la especie; en cambio si la mutación es negativa, es decir, le provoca una desventaja al miembro para adaptarse a su entorno, entonces el organismo tendrá menor probabilidad de reproducirse, y con el tiempo su mutación tenderá a desaparecer. La mutación es utilizada en los algoritmos genéticos para salir de mínimos o máximos locales, y para acelerar la convergencia a una solución óptima.

La variación entre los miembros de una especie es un elemento esencial en la teoría evolutiva por selección natural, una teoría publicada por Charles Darwin. Esta teoría se basa en 4 conceptos; **variación** entre todos los miembros de una misma especie; **sobreproducción** de miembros de una misma especie en contraste con el alimento disponible; **competencia** entre los miembros de una misma especie para sobrevivir debido a los recursos limitados; y **la selección natural**, los miembros más aptos de una especie, debido a sus características físicas o funcionales, tendrán más probabilidad de sobrevivir y reproducirse (Angulo et al.,2012). Esta teoría es una de las más importantes para los algoritmos genéticos; la selección es una operación evolutiva que está basada completamente en esta teoría y permite que se obtengan mejores soluciones en cada generación.

3.3. Estructura de los Algoritmos Genéticos

El algoritmo genético actúa sobre una población, evaluando a los individuos que pertenecen a ella, realizando operaciones entre ellos, y de este modo, generando una nueva población que contenga las mejores características de la anterior. Los elementos que conforman al algoritmo genético son *el individuo, la población, las generaciones, la descendencia, la función objetivo y las operaciones genéticas y evolutivas.*

Un individuo en un algoritmo genético, comúnmente llamado cromosoma, representa una solución candidata para el problema propuesto. Normalmente, dicha solución está codificado en una cadena de unos y ceros, aunque también puede ser codificada en decimal. La **Figura 20** muestra la estructura de un individuo en un algoritmo genético; cada cero o uno dentro del cromosoma es llamado alelo, y un conjunto de alelos forman un gen; todos los cromosomas de la población tienen el mismo número de alelos.

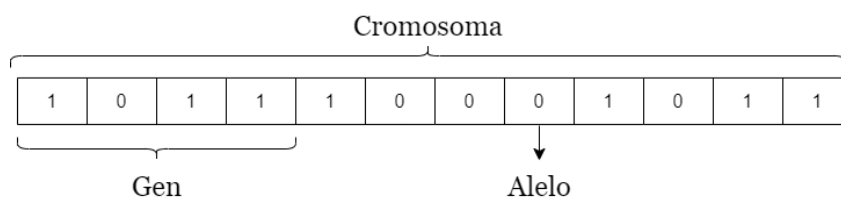


Figura 20. Representación de un individuo o cromosoma en un algoritmo genético. El gen representa una variable codificada en unos y ceros. Autoría propia

Los genes son representaciones de las variables que codifican a la solución propuesta, por ejemplo, para abordar el problema de ajuste de pruebas de presión en YNF con curvas tipo; en este caso se propondrían las variables que intervienen en la generación de las curvas tipo, ω , C_D , λ y s , además de cualquier otra variable necesaria para el ajuste, por ejemplo K_f . Cada una de las variables sería codificada en una cadena de unos y ceros; las cadenas representativas de cada variable tomarían el nombre de gen, y éstas tienen un tamaño fijo para todos los individuos, lo que significa que los valores que puede representar cada gen están dentro de un rango. La unión de cada uno de los genes conformaría al cromosoma o individuo y representa una solución candidata al problema.

La población es el conjunto de individuos o cromosomas presentes en una generación. En los algoritmos genéticos, generalmente se usa un tamaño de población fija, es decir, que no cambia durante todo el proceso. Las operaciones entre la población descartan a los individuos menos aptos, y con los restantes se generan nuevos individuos que son llamados *descendencia* para rellenar el espacio dejado por aquellos descartados.

La población en una iteración es llamada generación, estas representan el número iteraciones que se realizaron desde el inicio del algoritmo hasta que se encontró una solución apta, o hasta que se llegó al número máximo de iteraciones. La población inicial se genera de manera aleatoria, de esta forma se puede obtener un amplio espectro de búsqueda desde el inicio sin tener sesgos en las soluciones propuestas.

La función objetivo es la función o modelo que se desea optimizar. Este modelo funciona como herramienta para evaluar las soluciones candidatas o individuos. Por ejemplo, en el problema ejemplificado anteriormente, la función objetivo sería un modelo matemático que permita cuantificar el grado de ajuste entre los datos de la prueba y la curva resultante de cada individuo; los individuos que presenten un mayor grado de ajuste serían considerados más aptos. El valor que obtiene cada cromosoma al ser evaluado por la función objetivo es llamado puntuación o score.

3.4. Operaciones en un AG

Hay tres operaciones principales definidas en los algoritmos genéticos; la selección, cruza y mutación. La selección es una operación evolutiva, en cambio la cruza y la mutación son operaciones genéticas.

3.4.1. Selección

También llamada reproducción, es una operación que elige a un cromosoma y decide si pasa a la siguiente generación o no. La selección se realiza en base al desempeño de los cromosomas con respecto a la función objetivo. Los cromosomas más aptos, con mejor desempeño en la función objetivo, tendrán mayor probabilidad de pasar a la próxima generación. Un cromosoma puede ser seleccionado más de una vez. La selección habitualmente también se usa para seleccionar padres y generar descendencia.

Ahora, podrá surgir la siguiente duda, ¿y si únicamente se seleccionan los mejores cromosomas? Esta acción eliminaría la posibilidad de encontrar otras soluciones viables, reduciendo el espacio de búsqueda y generando una única tendencia, lo que podría hacernos caer en extremos locales.

El método de selección puede crearse por medio de distintos métodos, pero los más usados son la selección por ruleta y la selección por torneo. La selección por ruleta toma la puntuación de cada uno de los cromosomas y la suma, *ecuación 3.1*.

$$ST = \sum_{i=1}^{n_{población}} f(x_i) \quad (3.1)$$

Donde:

$f(x_i)$ es la puntuación del cromosoma x_i

Después se divide la puntuación de cada cromosoma entre la suma total del de puntuaciones. De este modo se obtiene la probabilidad de ser seleccionado de cada cromosoma. Luego se obtiene la probabilidad acumulada desde el primer cromosoma hasta el último, y de este modo se obtiene un intervalo para cada cromosoma. Finalmente se genera un número aleatorio entre 1 y 0, dependiendo del intervalo en el que caiga el número aleatorio, será seleccionado el cromosoma. Este método tiene un inconveniente, y es que, si en la población hay un cromosoma que tiene una puntuación mucho

mejor que todos los demás cromosomas, será seleccionado la mayoría de veces, lo que puede provocar que la variabilidad genética se pierda, reduciendo drásticamente el espacio de búsqueda, o inclusive forzando a que el algoritmo converja prematuramente.

El método de selección por torneo toma a la población y la divide en grupos de n integrantes elegidos aleatoriamente, de los cuales se seleccionan a los mejores individuos de cada grupo. En este método es común que el número de integrantes por grupo ronde entre dos a siete, aunque dos es el valor más usado, de este modo se pone a competir a dos cromosomas y se elige al mejor de los dos. Este método de selección se ha vuelto muy popular en los algoritmos genéticos, pues es menos sensible a cromosomas que tienen mucho mejor puntaje que los demás, permitiendo que individuos con menor puntaje transmitan su información genética y de esta manera se explora un espacio de búsqueda más amplio durante mas generaciones (Luke, 2016).

3.4.2. Cruza

La cruza es una operación que toma a dos individuos y mezcla partes de su información genética para dar lugar a nuevos individuos. El método más usado en los algoritmos genéticos es el cruce en un punto. En la **Figura 21** se representa el método; en este método se toma a dos cromosomas padres, A y B, y se elige un punto aleatorio de la cadena en donde se dividirá a cada uno de los padres (a_1 , a_2 , b_1 , b_2). Después se toma la primera subcadena del primer padre y se une con la segunda subcadena del segundo padre; en un proceso análogo se une la primera subcadena del segundo padre con la segunda subcadena del primer padre. Este proceso da como resultado dos individuos nuevos, A2 y B2, los cuales son llamados descendencia y reemplazaran a los padres en la siguiente generación. Este procedimiento, imita el entrecruzamiento de cromosomas homólogos en las células sexuales, el cual genera variabilidad genética.

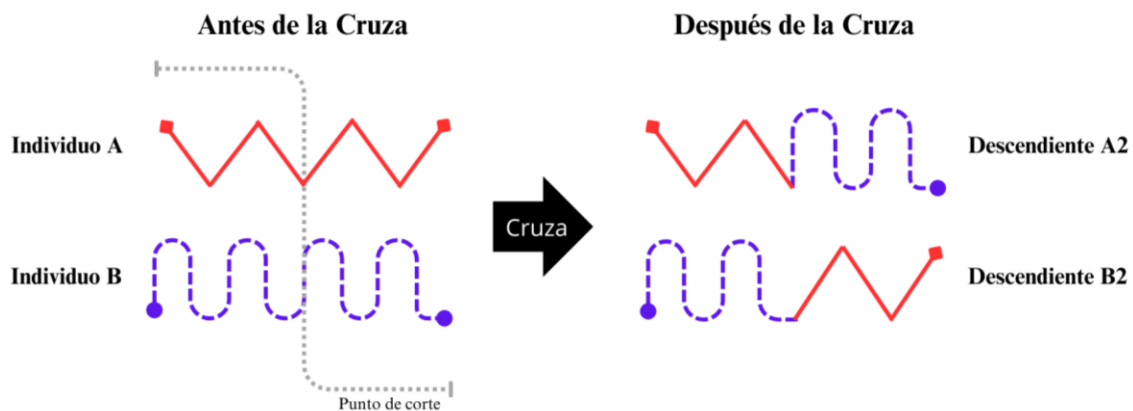


Figura 21. Representación gráfica del procedimiento de cruce. Las dos cadenas padres A y B producen descendencia al mezclarse desde un punto de corte, A2 y B2 (Goldberg, 1989, modificada).

Una técnica menos popular para realizar la cruce es el método de cruce uniforme. Esta plantea un intercambio de múltiples alelos de los padres para generar a la descendencia, la cual puede resultar en uno o dos individuos. La manera en que este método trabaja para la generación de dos descendientes es mediante un número aleatorio entre 0 y 1, el cual se genera una vez por cada alelo de los padres. Si el número es mayor a 0.5 el alelo del padre 1 es heredado al hijo 1 y el alelo del padre 2 es heredado al hijo 2; en el caso contrario el alelo del padre 1 es heredado al hijo 2 y el alelo del padre 2 es heredado al hijo 1 (Luke, 2016), este proceso está representado en la **Figura 22** y tiene la ventaja de generar una mayor variabilidad genética que el cruce de un solo punto.

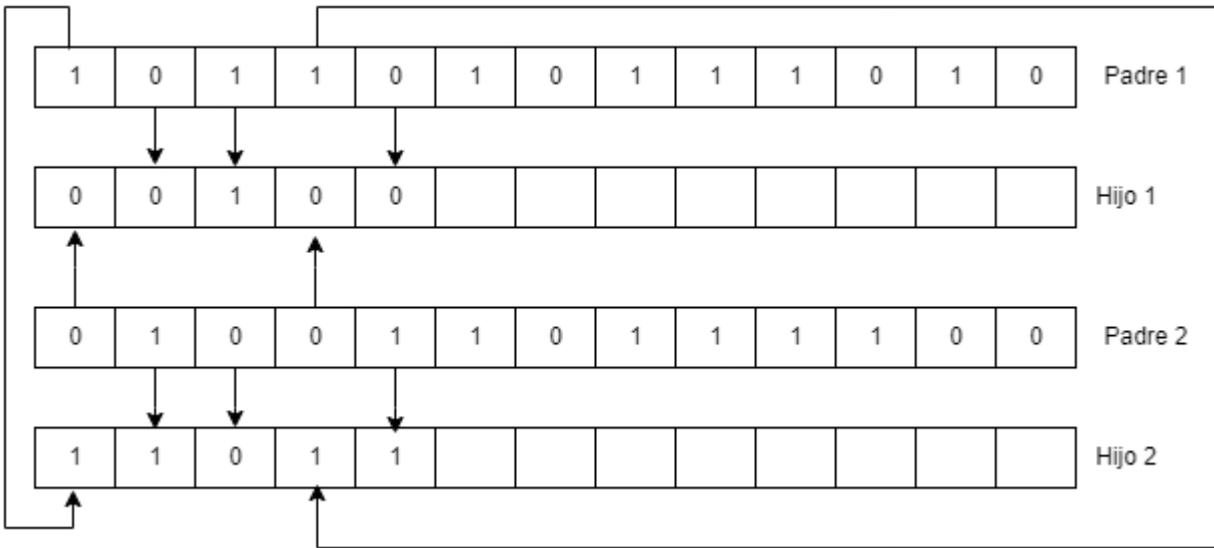


Figura 22. Esquematiza del cruce uniforme con 2 descendientes. Autoría propia

3.4.3. Mutación

La mutación es una operación que toma a un individuo, al cual le cambia aleatoriamente el valor a uno o más alelos con muy baja probabilidad. Esta operación permite que el algoritmo amplíe su rango de búsqueda, saliendo de extremos locales y llegando a buscar en valores que, de otro modo, no serían considerados.

La mutación está controlada por la probabilidad de mutación, esta representa la probabilidad de que un alelo cambie de valor, y es denotada como P_m ; su valor ronda valores menores o igual al 1%, aunque también es usual usar una probabilidad de mutación $P_m = 1/m$, donde m es el tamaño de cromosoma.

3.4.4. Elitismo

Durante la selección, la cruce y la muta es posible que el mejor individuo se pierda, y que sus genes se pierdan en generaciones futuras dado que su descendencia fue peor. Por esta razón, un método para asegurar que los genes del mejor individuo se conserven es el elitismo. El elitismo se trata de

elegir a los mejores de una generación e incluirlos en la siguiente, asegurando así que los mejores de la generación anterior se conserven y puedan generar más descendencia.

3.4.5. Hiperparámetros de los AG

A continuación, se mencionan y describen brevemente los hiperparámetros de los algoritmos genéticos, los cuales deben ajustarse al problema y a los resultados deseados.

Tamaño de población: Es el número de individuos (soluciones potenciales) en cada generación. Un tamaño más grande puede aumentar la diversidad genética, pero también incrementa el costo computacional.

Número de generaciones: Indica cuántas veces el algoritmo realizará el proceso de selección, cruce y mutación antes de detenerse. Más generaciones pueden ayudar a mejorar las soluciones, pero también aumentan el tiempo de cálculo.

Función objetivo: Es la función que se utiliza para evaluar la calidad o “ajuste” de cada individuo en la población. El algoritmo busca maximizar o minimizar esta función.

Método de selección: Es la estrategia para elegir a los individuos más aptos que pasarán a la siguiente generación o se utilizará para el cruce. Ejemplos incluyen a la selección por *ruleta*, *torneo*, o *ranking*.

Porcentaje de probabilidad de selección: Es la probabilidad de que un individuo sea seleccionado para reproducirse. Puede estar relacionado con su “ajuste”, es decir, los más aptos tienen más probabilidades de ser seleccionados.

Método de cruce: Es el procedimiento para combinar dos individuos (padres) y generar nuevos individuos (hijos). Ejemplos de métodos de cruce incluyen el cruce de un punto, dos puntos, o uniforme.

Porcentaje de probabilidad de cruce: Es la probabilidad de que el cruce ocurra entre dos individuos seleccionados. Generalmente, se elige un valor alto para asegurar que las características se mezclen en las nuevas generaciones.

Método de mutación: Es el mecanismo para introducir pequeñas variaciones aleatorias en un individuo, lo que ayuda a mantener la diversidad genética y evita el estancamiento en óptimos locales.

Porcentaje de probabilidad de mutación: Es la probabilidad de que una mutación ocurra en un individuo. Suele ser bajo para evitar alterar en excesos a los individuos, pero lo suficientemente alto para permitir variabilidad.

Capítulo 4

Modelo de Optimización con Algoritmos Genéticos

El proceso de ajuste de datos provenientes de pruebas de presión con curvas tipo puede considerarse un proceso de optimización. En dicho proceso se busca la curva tipo que mejor ajuste con los datos de la prueba y a partir de esa curva se obtienen los valores para ω , λ , C_D y s . Por otro lado, se puede abordar este mismo problema realizando una búsqueda de los valores de ω , λ , C_D y s que generen la curva tipo que mejor ajuste con los datos de la prueba; con este enfoque es posible hacer uso de algoritmos de búsqueda y optimización para encontrar soluciones viables.

En este trabajo se propone el desarrollo de un algoritmo genético para realizar el ajuste de datos provenientes de pruebas de presión de decremento en yacimientos naturalmente fracturados con las curvas tipo de Gringarten y de Bourdet, derivadas de la solución de Warren y Root para flujo monofásico y flujo interporoso pseudoestacionario.

El ajuste depende de los cuatro parámetros antes mencionados, λ , ω , s , C_D , coeficiente de almacenamiento adimensional y de un quinto parámetro que es necesario para el cálculo del tiempo adimensional, *ecuación 2.48*, y presión adimensional; la permeabilidad de la fractura, K_f . Como se discutió anteriormente, las variables adimensionales son necesarias para realizar el ajuste con las curvas tipo.

Con estos 5 parámetros se diseñó el algoritmo para realizar la búsqueda de la mejor combinación de valores que generen la curva tipo que mejor ajuste con los datos de cada prueba.

4.1. Metodología

El desarrollo del modelo computacional se realizó en el lenguaje de programación Python, con el cual se exploraron diferentes alternativas para lograr los objetivos. Se eligió este lenguaje de programación por su sencilla sintaxis, su facilidad para la manipulación de listas y vectores (arrays),

además de la posibilidad de usar las numerosas librerías enfocadas en inteligencia artificial y *machine learning* desarrolladas para este lenguaje de programación.

En un principio la investigación se enfocó en todo lo relacionado al método de curvas tipo, la forma de computarlas y las variables que intervienen en ese proceso. En esta investigación se programó una función que genera curvas tipo con el uso de 4 parámetros, λ , C_D , s y ω . Dicho programa usó la librería **mpmath** para Python, para calcular la transformada inversa de Laplace por medio del método de *Stehfest*.

Con el avance en el tema de las curvas tipo, la investigación se dirigió a la obtención de información sobre algoritmos genéticos; una vez que se tuvo suficiente información, comenzó la codificación de un algoritmo genético orientado al ajuste de curvas con pruebas de presión en yacimientos naturalmente fracturados. Lo primero fue elegir el tipo de codificación de los individuos; se eligió la codificación binaria para simplificar las operaciones.

Después, se programó cada una de las operaciones de cruce, mutación y selección del algoritmo por separado, para realizar pruebas en cada una y verificar que las operaciones funcionaran como es debido. En el orden de tener alternativas para las operaciones mencionadas, se programaron, para la selección, el método de ruleta y el método de torneo; para la cruce se programó el método de cruce en un punto, dos puntos y el método de cruce uniforme.

Con los avances obtenidos se realizaron las primeras pruebas en donde se implementó cada una de las partes del algoritmo genético y del método de curvas tipo. En este primer conjunto de pruebas no se usaron datos de pruebas de presión, en su lugar se utilizó un vector en donde se guardaron valores de t_D/C_D y se asignó un valor para λ , C_D , s y ω , con los cuales se pudo calcular una curva tipo y, en conjunto con el vector t_D/C_D y la derivada de la presión, se utilizaron como las curvas objetivo. En esta primera prueba, todos los ajustes se realizaron en variables adimensionales.

Con la primera prueba se afinaron detalles como la elección del mejor método de selección y de cruce para el problema específico. En el análisis del método de selección, se observó que en diferentes evaluaciones se presentó la pérdida de variabilidad por un individuo mucho mejor que los demás, lo que supuso un problema para llegar a una buena solución, por ello se eligió el método de selección por torneo, el cual fue menos sensible a este tipo de situaciones. En el caso de la cruce, se

observó que el método de cruza por un punto y dos puntos generaron menor variabilidad que el método de cruza uniforme; además de lo anterior, en algunos casos se presentó que, cuando el algoritmo estaba cerca de una solución óptima, la cruza de un punto y dos puntos tenían dificultades para aterrizar en un valor para una o más variables, por tal motivo se eligió el método de cruza uniforme.

Además de ajustar los métodos de cruza y selección, en este primer algoritmo se pusieron en análisis diferentes funciones objetivo para ver como evolucionaba el ajuste con cada una. Se analizó el error cuadrático, el error cuadrático medio y el error relativo medio. Entre estas funciones objetivo se destacaron el error cuadrático medio y el error relativo medio; sin embargo, se eligió el error cuadrático medio ya que este presentó una convergencia más rápida que el error relativo medio.

En un siguiente paso, se compararon los datos de pruebas de presión de variables reales, con los datos de las curvas tipo, obtenidas de variables adimensionales. La solución encontrada es descrita en la siguiente sección como la *metodología para evaluar a los individuos*, y como parte de esta metodología, se incluyó una quinta variable por determinar, K_f .

Esto dio como resultado un segundo algoritmo que fue puesto a prueba con las pruebas de presión presentadas en este trabajo. Durante este proceso se presentó una de las mayores problemáticas con las que se lidió en el desarrollo. El tiempo de cómputo de la transformada inversa de Laplace era demasiado alto, por lo que únicamente se llevó a cabo la evaluación de 85 – 100 individuos con un aproximado de 15 generaciones, tardando 125 minutos aproximadamente.

Otra problemática surgió por el intervalo de valores asignados a lambda. Esta variable es una de las más importantes cuando se habla de yacimientos naturalmente fracturados. El rango considerado fue 10^{-1} a 10^{-9} , un rango que contiene 10^8 posibles valores, provocando que la población inicial tuviera carencias en ciertos espacios de búsqueda que, en conjunto con la densidad baja de individuos, representó una fuerte debilidad en el algoritmo. Para dar solución a esto se optó por no codificar directamente a lambda en los individuos, en su lugar se codificó una variable auxiliar, p , con un rango entre -1.00 a -9.00 con 2 cifras significativas después del punto, esta variable es usada para calcular lambda por medio de la siguiente expresión:

$$\lambda = 10^p$$

Con este método se logró reducir el espacio de búsqueda para lambda a únicamente 800 posibilidades y permitiendo una buena precisión para la variable.

Por otro lado, la problemática del tiempo de cómputo permitió explorar diferentes opciones para abordar el tema del ajuste. Entre las más destacadas se planteó hacer uso de la aproximación de la solución para tiempos medios y largos, *ecuación 2.22*, y tratar de realizar un ajuste con esta; también se planteó realizar un algoritmo genético en el que hubiera dos poblaciones, una dedicada a ajustar únicamente C_D , s y K_f y la otra dedicada a ajustar λ y ω por medio de la *ecuación 2.25*. Ninguno de estos intentos tuvo éxito debido a la poca sinergia que tuvieron las variables al tratar de precisarlas en grupos separados, y al efecto de almacenamiento que cubre parcialmente algunos datos de las pruebas, lo que genera un error en las aproximaciones de los valores de presión afectados por este efecto, **Figura 23**, lo que daña parcial o totalmente el ajuste del algoritmo.

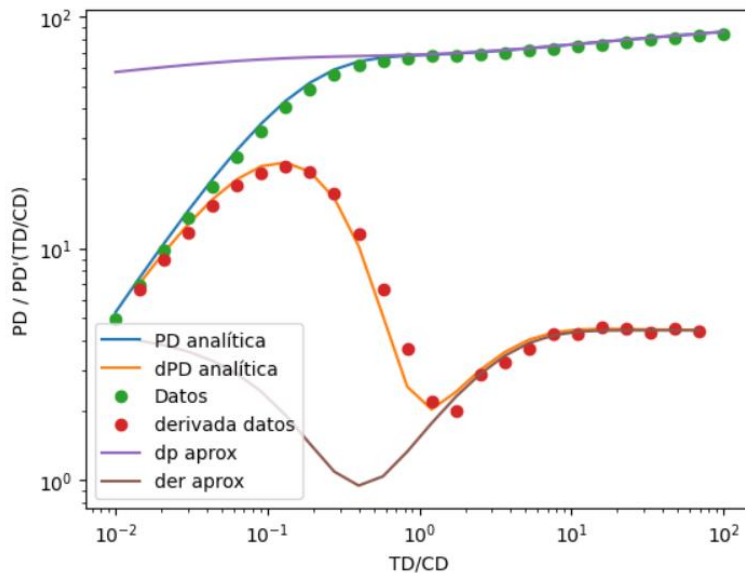


Figura 23. Evidencia de como las aproximaciones para la solución de YNF y la solución analítica varían fuertemente entre sí por el efecto de almacenamiento. Elaboración propia

Después de explorar estas opciones, se optó por utilizar la solución analítica y el método de *Stehfest* para calcular la transformada inversa de Laplace, desechando el uso de la librería **mpmath**. En su lugar se programó el método de *Stehfest* completo para obtener una reducción de tiempo de cómputo enorme y dejar un algoritmo genético más práctico y funcional, permitiendo evaluaciones de 500 individuos y 300 generaciones en periodos menores a 10 minutos.

4.2. Hiperparámetros del algoritmo

La *ecuación 4.1* presenta la función objetivo utilizada en este algoritmo, el error cuadrático medio entre la presión generada por la curva tipo y los datos, más el error cuadrático medio entre la derivada de presión generada por la curva tipo y la derivada de presión de los datos. El objetivo de este algoritmo genético es minimizar la función objetivo, siendo 0 el valor mínimo, lo cual supondría que las curvas tipo generadas pasan exactamente por cada uno de los datos de la prueba de presión.

$$FunOb = \frac{1}{n_{datos}} \sum_{i=1}^{n_{datos}} (dP_i - d\bar{P}_i)^2 + \frac{1}{n_{datos}} \sum_{j=1}^{n_{datos}} (derP_j - der\bar{P}_j)^2 \quad (4.1)$$

En donde:

$d\bar{P}_i$ es la diferencia de presión en el tiempo i generada por la curva tipo

$der\bar{P}_j$ es la derivada de presión en el tiempo j generada por la curva tipo

Para generar las curvas tipo se usa la solución para yacimientos naturalmente fracturados para yacimientos con dos porosidades y una permeabilidad, el modelo de Warren y Root, con flujo interporoso pseudoestacionario y actuando de forma infinita, *ecuación 1.67*. Las soluciones se calculan obteniendo la transformada inversa de Laplace de dicha ecuación mediante el algoritmo de *Stehfest*. Para lograr la evaluación de los individuos se utilizó la siguiente metodología:

1. Partiendo de un individuo cualquiera, se decodifica su información y se obtienen los valores que representa para las variables C_D , s , ω , λ y K_f .
2. Se usa el vector que guarda los datos de tiempo de la prueba para calcular el tiempo adimensional con la permeabilidad de la fractura obtenida en el paso anterior.
3. Se usa el tiempo adimensional y el factor de almacenamiento adimensional para calcular $\frac{t_D}{C_D}$.
4. Se calcula el coeficiente de almacenamiento equivalente, $C_{Ds} = C_D e^{2s}$.

5. Se usa $\frac{t_D}{c_D}$, C_{DS} , ω y λ para calcular la transformada inversa de Laplace, obteniéndose un vector que contiene las presiones adimensionales que conforman la curva tipo de Gringarten.
6. La curva tipo de Gringarten es pasada a variables reales haciendo nuevamente uso de la permeabilidad de la fractura.
7. Se calcula la derivada de la presión de la curva tipo de Gringarten.
8. Se calcula el error medio cuadrático entre la curva tipo de Gringarten y los datos más el error medio cuadrático entre la curva tipo de la derivada contra la derivada de los datos.
9. Se pasa al siguiente individuo.

El algoritmo genético requiere como información de entrada, los datos de la prueba de decremento en formato diferencia de presión vs tiempo, el radio de pozo, el espesor del intervalo productor, la porosidad total, la compresibilidad total de la formación, la viscosidad del fluido, el factor de volumen del fluido y el gasto.

La elección adecuada de los rangos de búsqueda para cada parámetro se realizó a partir de los datos de presión y la información adicional requerida. Para el cálculo de los límites de la permeabilidad de fractura se usaron las *ecuaciones 4.2 y 4.3*, las cuáles son versiones modificadas de la ecuación con la que se calcula la presión adimensional en las que se despejó la permeabilidad.

$$limSup_k = \left(\frac{141.2 * q * \mu * B_o}{dp^+ * h} \right) * P_{Ds} \quad (4.2)$$

$$limInf_k = \left(\frac{141.2 * q * \mu * B_o}{dp^+ * h} \right) * P_{Di} \quad (4.3)$$

Donde:

dp^+ Es el último valor de diferencia de presión de los datos.

P_{Ds} Es la presión adimensional más alta que puede alcanzarse en las curvas tipo a tiempos largos.

Se recomienda el valor de 40.

P_{Di} Es la presión adimensional más baja que se puede alcanzar en las curvas tipo a tiempos largos.

Se recomienda el valor de 1.

El valor de P_{Ds} y P_{Di} se obtienen de la **Figura 17**, las cuales son las curvas tipo de Gringarten y de Bourdet para yacimientos naturalmente fracturados. Los valores propuestos presentaron un buen espacio de búsqueda, pero tendrán que ser modificados para pruebas de presión largas o si se tiene una noción del rango de la permeabilidad.

Similar a la permeabilidad de la fractura, se obtiene el rango del coeficiente de almacenamiento adimensional, *ecuación 4.4* y *ecuación 4.5*. Estas ecuaciones se basan en la premisa de que el primer dato de la diferencia de presión está dominado total o parcialmente por el efecto de almacenamiento, y por ende se apoyan en la *ecuación 2.10*.

$$\limSup C_D = 1.15 * \left(\frac{0.0002637 * q * B_o}{\phi * C_t * h * r_w^2} \right) \quad (4.4)$$

$$\limInf C_D = 0.2 * \left(\frac{0.0002637 * q * B_o}{\phi * C_t * h * r_w^2} \right) \quad (4.5)$$

Para el resto de variables se utilizaron rangos encontrados en la literatura. Los autores Heinemann & Mittermeir (2014) proponen un rango para omega de 0.1 a 0.001, sin embargo, se optó por un rango un poco mayor, entre 0.2 a 0.001; para lambda se propone un rango que va desde 10^{-1} hasta 10^{-9} y finalmente, para el daño, se propuso un rango de cero a menos nueve.

A parte de las ecuaciones dadas, se incluyó una opción de ingresar un valor aproximado para s , C_D , K_f y λ . Con esta opción se obtendrán rangos 20% por encima del valor dado y 20% por debajo, disminuyendo en gran medida el espacio de búsqueda. En el caso de omega no se incluyó esta opción, dado que omega es una variable que está fuertemente influenciada por el efecto de almacenamiento y su valor tiene menor impacto en los resultados.

Los individuos del algoritmo fueron codificados en binario, simplificando las operaciones que actúan sobre ellos. Para obtener el número de alelos necesarios para cada variable se recurre a la *ecuación 4.6*. Sumando el número de alelos necesarios para cada variable se obtiene el tamaño que tendrán los individuos.

$$n_alelos = \log_2((l_s - l_i) * 10^p) \quad (4.6)$$

Donde:

l_s es el límite superior que puede tomar la variable

l_i es el límite inferior que puede tomar la variable

p es la precisión requerida para la variable

Los métodos de selección y cruce son vitales en el algoritmo; una selección inadecuada puede dificultar la obtención de los resultados deseados. Para la selección se eligió el método de torneo y para el cruce se eligió el método de cruce uniforme. La probabilidad de cruce se fijó en 60% y la probabilidad de mutación se fijó en 5%. El diagrama de flujo del algoritmo genético se presenta en la **Figura 24**.

Finalmente, el criterio de parada propuesto es un número finito de generaciones o cuando se presente una solución dada con un error relativo, *ecuación 4.7*, menor o igual al 8% en el 90% de los datos, entonces el algoritmo genético podrá salir antes de que terminen las generaciones.

$$E.R. = \frac{VR - VO}{VR} * 100 \quad (4.7)$$

En donde VR representa el valor real, en este caso particular representa el valor de la diferencia de presión para un tiempo determinado, y VO representa el valor obtenido, que en este caso particular representa la diferencia de presión obtenida para un tiempo determinado por la curva tipo propuesta.

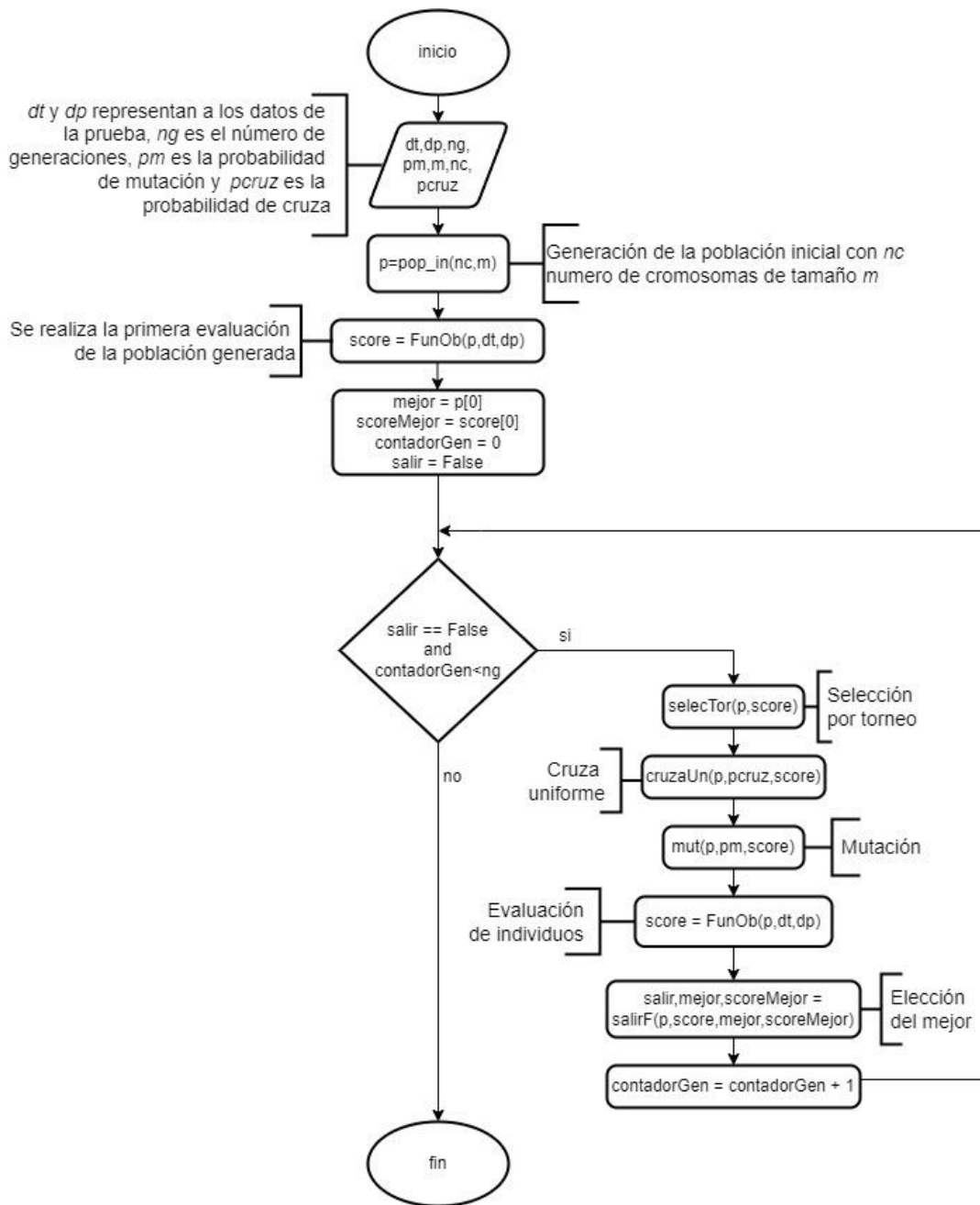


Figura 24. Diagrama de flujo del algoritmo genético propuesto. Elaboración propia

Capítulo 5

Resultados

Para probar el algoritmo genético, se usaron tres pruebas de decremento de presión en yacimientos naturalmente fracturados, encontradas en la literatura, y una prueba de decremento de presión simulada con el modelo de dos porosidades una permeabilidad de Warren y Root. La **Tabla 1** muestra la información de cada prueba.

Tabla 1. Información de entrada para el ajuste con el algoritmo genético

Información	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4
Porosidad [1]	0.033	0.2	0.052	0.11
Viscosidad del fluido [cP]	0.3	1.25	1.2816	0.72
Compresibilidad total [psi ⁻¹]	$3 * 10^{-6}$	$14 * 10^{-6}$	$1.5 * 10^{-5}$	$8.72 * 10^{-6}$
Factor de volumen del fluido [RB/STB]	1	1.25	1.2816	1.21
Radio de pozo [ft]	0.29	0.292	0.175	0.401
Espesor del intervalo productor [ft]	12	70	29	30
Gasto [bls/día]	1245	4200	2160	2500
Fuente	Horne, R. N. (1995), pp 170	Niko, H. (1983), pp 7	Da Prat, G., et al (1984), pp 10	simulada

5.1. Comparación gráfica de los mejores resultados

Para todas las pruebas se generó una población de 600 individuos y se usaron 300 generaciones como límite. Los mejores resultados obtenidos se presentan en la **Tabla 2**, y se graficaron en escala Log-Log y semilogarítmica. Adicionalmente se adjuntó una tabla en cada prueba, en la que se muestran diferentes evaluaciones realizadas.

Tabla 2. Resultados obtenidos con el Algoritmo Genético

Resultados	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4
Omega	0.088	0.168	0.073	0.099
Lambda	$3.85 * 10^{-7}$	$3.0572 * 10^{-5}$	$1.821 * 10^{-6}$	$2.87 * 10^{-7}$
S	-2.1	-2.0	-1.4	0
CD	909,659	2950	6146	3057
K_f [mD]	500.9	115.4	76.9	499

Las **Figuras 25 a 32** se generaron con los resultados obtenidos para cada prueba y sus diferentes evaluaciones y a continuación, se muestran y se discuten.

5.1.1. Prueba 1

La **Figura 25** muestra el ajuste de la primera prueba en escala Log-Log. La curva tipo resultante es producto de los valores en la **Tabla 2**. La primera prueba de presión muestra un conjunto de datos prácticamente sin ruido. La mayor cantidad de ruido se presenta en los últimos datos de la derivada, aunque se sigue observando una clara tendencia. La curva derivada resultante del algoritmo genético parece seguir la tendencia de los datos, mostrando un ajuste adecuado.

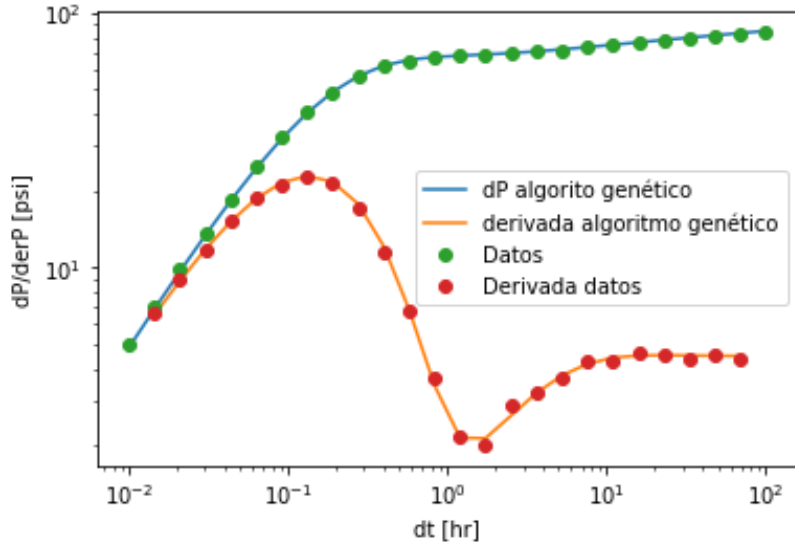


Figura 25. Ajuste de la primera prueba con el algoritmo propuesto, escala Log-Log. *Elaboración Propia*

La **Figura 26** muestra el ajuste de la curva tipo resultante del algoritmo genético con la primera prueba en escala semilogarítmica. Se observa el ajuste de los datos con la curva tipo de Gringarten, pues en escala Log-Log, una pequeña desviación de la curva podría significar una gran diferencia. La curva tipo de Gringarten resultante pasa por cada uno de los datos de la prueba con un error menor al 0.5%, la tendencia de cada uno de los periodos de flujo es bastante similar entre los datos y la curva tipo.

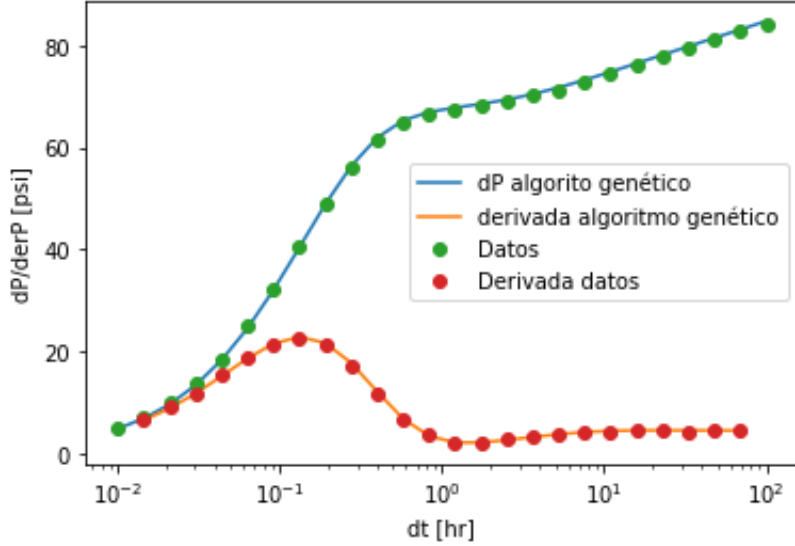


Figura 26. Ajuste de la primera prueba con el algoritmo propuesto, escala semilogarítmica. Elaboración Propia

La **Tabla 3** presenta cinco evaluaciones diferentes para la primera prueba de presión, donde puede observarse que el error cuadrático medio (ECM) se mantiene muy cercano (entre 0.05 y 0.15) en la mayoría de las pruebas; sin embargo, los valores de omega y el factor de daño entregan valores diferentes en la mayoría de las pruebas, lo que muestra que varias combinaciones de estos parámetros dan curvas similares.

Tabla 3. Evaluaciones de la primera prueba

Evaluaciones	C_D	s	ω	λ	K_f	ECM
1	897,011	-1.6	0.088	$1.53 * 10^{-7}$	525.3	0.1287
2	912,070	-1.3	0.099	$1.09 * 10^{-7}$	541.8	0.1418
3	908,182	-1.4	0.11	$1.3 * 10^{-7}$	534.9	0.1262
4	887,910	-1.6	0.128	$1.63 * 10^{-7}$	524	0.0562
5	888,245	-1.9	0.084	$2.68 * 10^{-7}$	505.7	0.1361

5.1.2. Prueba 2

La segunda prueba dos es presentada en la **Figura 27**, la cual presenta mayor cantidad de ruido. Por lo que, en la derivada de la presión es muy complicado observar alguna tendencia específica. La

curva tipo de la derivada de la presión pasa por la mayor cantidad de datos cercanos entre sí, despreciando los puntos más alejados. Con respecto a la curva tipo de Gringarten, el ajuste parece bueno, con excepción del primer dato.

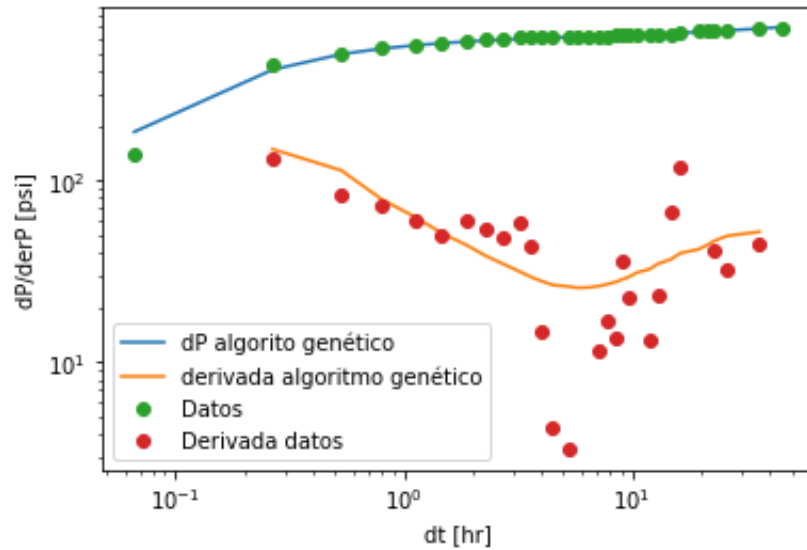


Figura 27. Ajuste de la segunda prueba con el algoritmo propuesto, escala Log-Log. Elaboración Propia

La **Figura 28** muestra el ajuste de las curvas tipo con la segunda prueba en escala semilogarítmica, mediante la cual es posible determinar con mayor claridad la calidad del ajuste con la curva tipo de Gringarten, que parece ajustar en casi todos los datos de la prueba. En este caso el algoritmo dio más peso al ajuste de la curva tipo de Gringarten que a la curva de la derivada de la presión.

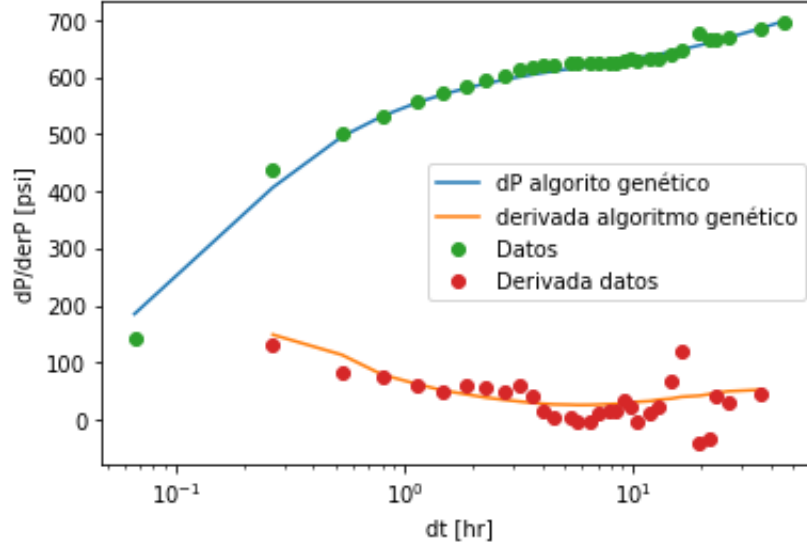


Figura 28. Ajuste de la segunda prueba con el algoritmo propuesto, escala semilogarítmica. Elaboración Propia

Las evaluaciones de la segunda prueba se presentan en la **Tabla 4**. Los resultados en esta prueba muestran una mayor variabilidad en λ , el factor de daño y la permeabilidad de la fractura, aunado a eso, el error cuadrático medio se mantiene en valores muy próximos. Es interesante observar que el error cuadrático medio en esta prueba se mantiene en valores cercanos a 585, lo cual puede deberse a la gran cantidad de ruido en la prueba, y en específico, en la derivada de la presión, en donde se amplifica dicho ruido; es por esta razón que el ajuste óptimo en esta prueba debe estar cercano a estos valores.

Tabla 4. Evaluaciones de la segunda prueba

Evaluaciones	C_D	s	ω	λ	K_f	ECM
1	3110	-1.1	0.18	$5.77 * 10^{-6}$	133.8	589.01
2	3017	-1.9	0.176	$1.82 * 10^{-5}$	118.3	580.323
3	3228	-1.4	0.2	$9.52 * 10^{-7}$	152.2	631.34
4	3318	-2.0	0.142	$3.19 * 10^{-5}$	114.7	584.91
5	3197	-1.3	0.2	$8.46 * 10^{-6}$	129.5	567.07

5.2.3. Prueba 3

La **Figura 29** muestra el ajuste resultante del algoritmo genético de la tercera prueba en escala Log-Log, en la que es posible notar como el ajuste con la curva tipo de Gringarten ajusta bastante bien, sin embargo, en la curva tipo de la derivada de la presión, no ajusta perfectamente con algunos de los datos. Es importante notar los dos últimos puntos de la curva derivada que parecen salir de la tendencia.

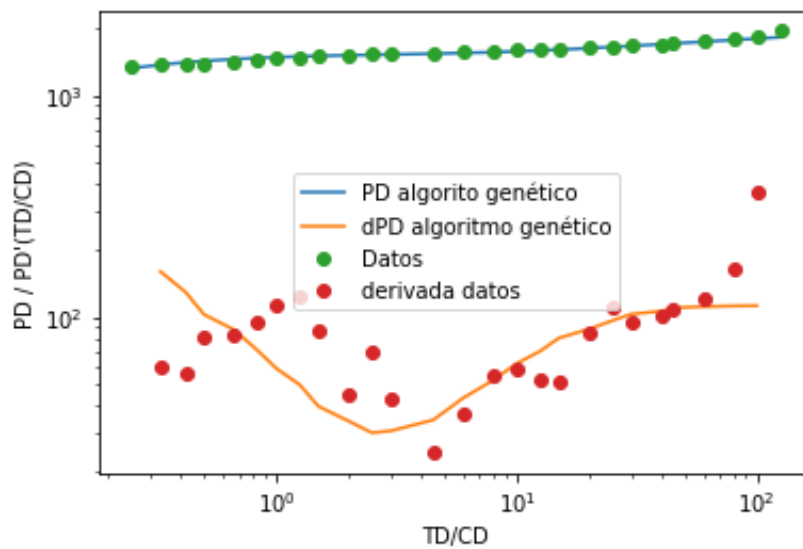


Figura 29. Ajuste de la tercera prueba en escala Log-Log. Elaboración Propia

La **Figura 30** muestra el ajuste de la prueba en escala semilogarítmica, en la que es posible apreciar de mejor manera el ajuste con la curva tipo de Gringarten. La curva resultante presenta un buen ajuste y también es posible notar que los últimos dos puntos de los datos en la curva de Gringarten salen de la tendencia. Esto puede explicarse por el inicio de flujo pseudoestacionario. Lo que prueba que el algoritmo puede funcionar con la presencia de algunas condiciones no consideradas siempre y cuando sean mínimas al aporte del error cuadrático medio.

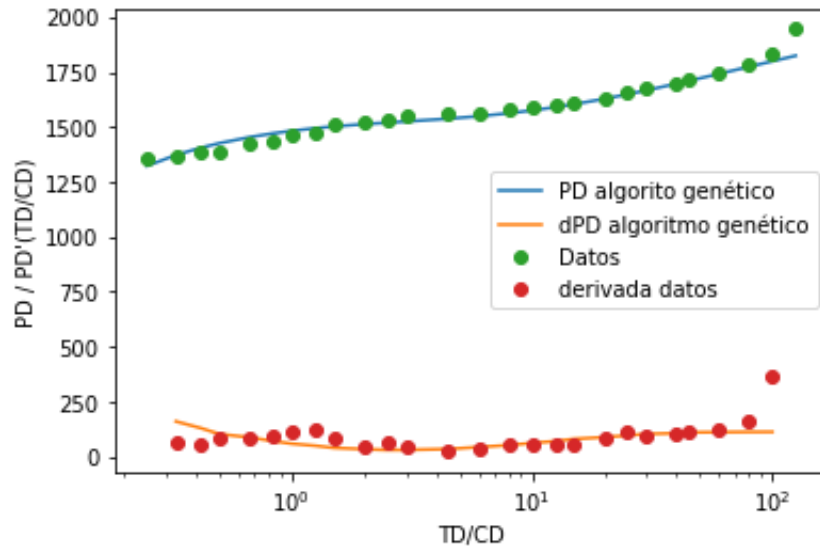


Figura 30. Ajuste de la tercera prueba en escala semilogarítmica. Elaboración propia

En la **Tabla 5** se presentan diferentes resultados del algoritmo genético para la tercera prueba. El error cuadrático medio para esta prueba encuentra su óptimo en valores cercanos a 35.5. La mayoría de evaluaciones presenta valores muy cercanos entre sí, exceptuando la última. Esto muestra como en esta prueba hay más de una combinación de parámetros que den un error cuadrático medio similar.

Tabla 5. Evaluaciones de la prueba 3

Evaluaciones	C_D	s	ω	λ	K_f	ECM
1	5585	0	0.129	$8.3 * 10^{-8}$	95.8	35.48
2	5517	0	0.131	$7.8 * 10^{-8}$	95.8	35.31
3	6336	0	0.097	$7.6 * 10^{-8}$	95.7	38.82
4	5728	0	0.093	$7.9 * 10^{-8}$	96.0	38.13
5	5827	-1.1	0.064	$9.2 * 10^{-7}$	80.5	37.24

5.2.3. Prueba 4

La cuarta prueba fue simulada con usando el modelo de dos porosidades una permeabilidad de Warren y Root. Los valores asignados a las variables en la simulación se pueden observar en la **Tabla 6** junto con el error relativo obtenido del ajuste con el algoritmo genético.

Tabla 6. Error relativo obtenido con la cuarta prueba

Variable	Valores usados en la simulación	Error Relativo %
C_D	2974	2.79
ω	0.09	10
S	0	0
K_f	500	0.2
λ	$2.9865 * 10^{-7}$	3.9

La **Figura 31** muestra el ajuste de la tercera prueba con las curvas tipo resultantes del algoritmo genético en escala Log-Log. Esta prueba, al ser simulada, no presenta ruido. La curva tipo de la derivada de la presión se ajusta con buena precisión a los datos, y la curva tipo de Gringarten también tiene un buen ajuste en esta escala. Esto muestra que en ausencia de ruido el algoritmo es capaz de generar curvas solución que ajusten con todos los datos.

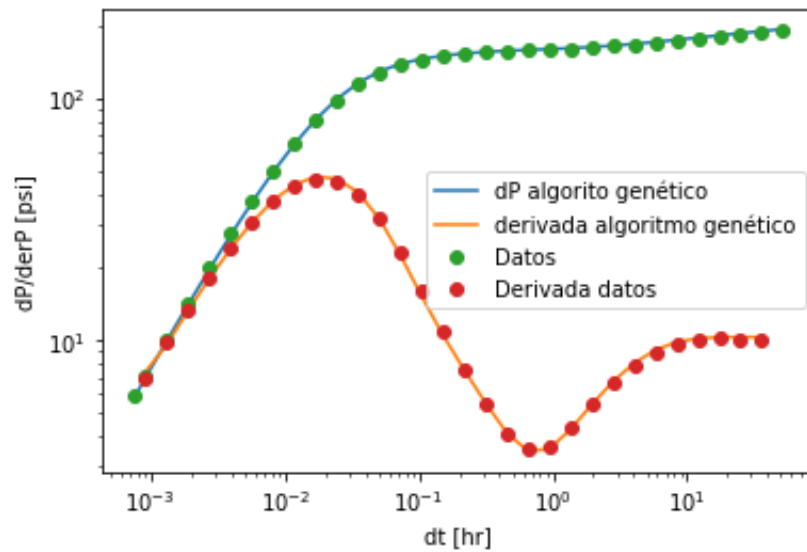


Figura 31. Ajuste de la cuarta prueba mediante el Algoritmo propuesto, escala Log-Log

La **Figura 32** muestra una mejor comparación de los datos de la tercera prueba con la curva tipo de Gringarten. Esta gráfica está en escala semilogarítmica y es útil para observar con más claridad que, aunque los parámetros usados para generar las curvas tipo son muy cercanos a los teóricos, las pequeñas diferencias en estos provocan que la curva tipo de Gringarten no ajuste perfectamente con los datos.

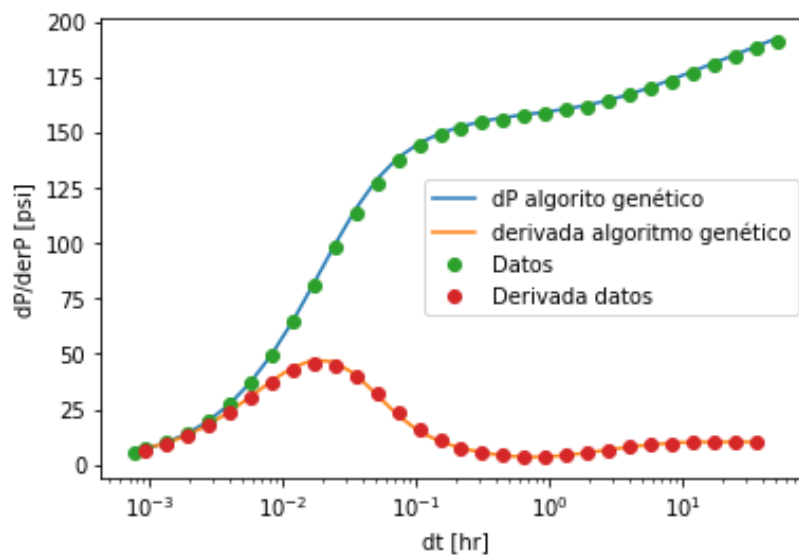


Figura 32. Ajuste de la cuarta prueba mediante el algoritmo genético propuesto, escala semilogarítmica

La **Tabla 7** muestra diferentes evaluaciones para la tercera prueba. Los resultados en la tabla muestran que diferentes combinaciones de parámetros pueden generar un buen resultado de acuerdo al error cuadrático medio, inclusive en una prueba de presión sin ruido. Cabe mencionar la fuerte relación entre algunas de las variables, como lo son el factor de daño, la permeabilidad de la fractura y lambda.

Tabla 7. *Evaluaciones de la cuarta prueba*

Evaluaciones	C_D	s	ω	λ	K_f	ECM
1	2936	-0.3	0.1	$4.93 * 10^{-7}$	483.7	0.881
2	3092	-0.3	0.102	$5.64 * 10^{-7}$	480.2	0.7014
3	3120	0	0.083	$2.87 * 10^{-7}$	505.2	1.379
4	3006	-0.3	0.098	$4.93 * 10^{-7}$	482.7	0.322
5	3024	-0.1	0.116	$2.94 * 10^{-7}$	497.2	0.697

5.2. Discusión resultados

El algoritmo genético desarrollado presentó resultados satisfactorios, permitiendo el ajuste de curvas tipo con diferentes pruebas de decremento de presión, y permitiendo el análisis de diferentes evaluaciones con cada prueba. Los resultados permiten identificar

A continuación, se discuten algunas de las implicaciones más importantes del uso de algoritmos genéticos para optimizar el método de curvas tipo.

En cada prueba se observó la presencia de múltiples soluciones que dan un error cuadrático medio similar. Esto puede ser explicado por dos fenómenos; la naturaleza del problema, un problema inverso no lineal; y la naturaleza del mismo algoritmo genético, pues este permite que un genotipo tenga únicamente un fenotipo, pero un fenotipo puede ser resultado de diferentes genotipos. El genotipo en este problema es la configuración de parámetros C_D , s , ω , λ y K_f y el fenotipo es la forma de la curva tipo resultante.

Mientras más datos tenga una prueba es más probable que su error cuadrático medio óptimo sea mayor, y esto es agravado por el ruido los datos. Esto es claramente observado entre los resultados

de la prueba 1 y 4; la prueba 1 presenta errores menores que la 4, aunque en la prueba 1 hay un poco más de ruido, esto es debido al menor número de datos en la prueba 1. En contraste, la prueba 2 tiene un ECM mucho mayor al de las pruebas 1, 3 y 4, lo que es explicado por la mayor presencia de ruido en los datos de la prueba 2.

Hay parámetros que pueden ser más o menos dependientes de otros. Para ejemplificar esto es interesante analizar los resultados de la cuarta prueba. En ellos se observa más claramente como C_D es una de las variables más independiente, y por ende más estable; sin embargo, las otras cuatro variables parecen presentar una relación. Cuando el factor de daño tiende a -0.3 , la permeabilidad de la fractura tiende a 480; cuando omega tiende a 0.1, lambda tiende a $4 * 10^{-7}$ **Tabla 7**.

Finalmente, en esta sección se presentan algunas recomendaciones que parten del desarrollo del algoritmo genético y las pruebas a las que fue sometido.

Hacer uso de técnicas de minimización de ruido en la derivada de la presión. El ruido en las pruebas puede afectar negativamente los resultados del algoritmo, pues este va a buscar el menor error cuadrático medio y, como el ruido es amplificado en la derivada de la presión, una gran cantidad de ruido en la derivada de la presión va a tender a darle más prioridad a minimizar el ECM en el ajuste de la curva tipo derivada, dejando de lado la curva tipo de Gringarten.

Los resultados dependen fuertemente de que el espacio de búsqueda para cada variable comprenda suficientes individuos con valores cercanos a los óptimos, para que estos no se perdieran durante la evolución del algoritmo. Ciertamente, esta condición es difícil de cumplir con 5 variables con rangos tan amplios, y además de tomar en cuenta que el algoritmo tenderá fuertemente a darle prioridad a los individuos que presentan un mejor ajuste a las variables que más impacto tienen, como lo son C_D y K_f . Es por esta razón que, si no se obtiene un resultado satisfactorio en la primera corrida, se recomienda correr el algoritmo una segunda vez ingresando los valores aproximados obtenidos en la primera corrida de C_D , s , K_f y λ con lo cual se reducirá drásticamente el espacio de búsqueda, permitiendo una mayor probabilidad para encontrar una aproximación a la solución óptima.

A pesar de que el algoritmo presentó buenos resultados con las pruebas utilizadas, es conveniente aún trabajar en la optimización de los hiperparámetros del algoritmo genético, o quizá explorar la

interacción con otros métodos de optimización, pues de esta manera se reducen los espacios de búsqueda y la presencia de ambigüedades se reduce bastante.

5.3. Posibles Aplicaciones

Los algoritmos genéticos tienen una gran área de oportunidad en problemas relacionados con la ingeniería petrolera, por ejemplo, la determinación de ubicación de pozos de relleno, el ajuste de ecuaciones cúbicas de estado, la determinación de parámetros de perforación, la optimización de gastos, o el ajuste de curvas tipo, entre otras. La complejidad de estos problemas está en la determinación de soluciones confiables en periodos de tiempo aceptables. Los algoritmos genéticos pueden proporcionar estas características e incluir una ventaja contra otros métodos de optimización y búsqueda, pues es más fácil para estos salir de mínimos o máximos locales.

En este trabajo se presentó el ajuste de pruebas de presión de decremento en yacimientos naturalmente fracturados. Este problema es descrito por un modelo matemático de gran complejidad. El algoritmo genético demostró la capacidad para manejar este tipo de problemas, evitando algunas limitantes en técnicas tradicionales, por ejemplo, técnicas que se apoyan en la identificación de características gráficas de los datos de que son fácilmente reconocibles en casos ideales. Estas características no se presentan con tanta claridad en casos reales, lo que provoca que los resultados dependan de la percepción de la especialista que analiza la prueba.

Derivado de los resultados, se puede plantear extender la técnica de análisis de pruebas de presión por medio de algoritmos genéticos a otro tipo de pruebas a las consideradas en este trabajo, por ejemplo, de incremento, de interferencia, de inyección, gasto variable, entre otras. También se puede ampliar su uso a yacimientos homogéneos o con heterogeneidades diferentes a las aquí propuestas, permitiendo el análisis de sistemas roca fluido complejos. En el ámbito de los yacimientos naturalmente fracturados, es posible considerar más variables del sistema de doble porosidad una permeabilidad, como podría ser el tamaño de bloque, el tipo de flujo interporoso, etc. Permitiendo un mayor espacio de búsqueda y resultados más precisos.

Conclusiones

El modelo computacional desarrollado integró satisfactoriamente los algoritmos genéticos con el método de curvas tipo para el análisis de pruebas de decremento de presión en yacimientos naturalmente fracturados. Con esto fue posible optimizar el método de curvas tipo para dichas pruebas. Como parte del desarrollo del modelo computacional, se desarrolló una metodología que permitió la evaluación de curva tipo para algoritmos genéticos.

También se probaron diferentes opciones para las operaciones de selección, cruce y función objetivo, lo que permitió elegir las mejores opciones. Se presentaron algunas de las problemáticas enfrentadas con el desarrollo y como se solucionaron, como lo fueron las dificultades con el tiempo de cómputo, o el tamaño de intervalo de búsqueda para cada parámetro.

Se analizaron y presentaron alternativas que permitieran que el algoritmo genético lograra el ajuste entre las curvas tipo y los datos, y se presentaron las limitaciones de las alternativas.

Se probó el algoritmo genético con 3 pruebas de decremento de presión en yacimientos naturalmente fracturados encontradas en la literatura y con una prueba simulada. Derivado de los resultados, se discutieron las implicaciones del uso de algoritmos genéticos para la optimización del método de curvas tipo y las recomendaciones. Por otra parte, también se presentaron posibles aplicaciones de los algoritmos genéticos en la industria petrolera, así como las ventajas del algoritmo genético desarrollado en este trabajo en contraste con las técnicas de análisis con curvas tipo tradicionales.

Trabajos Futuros

Para finalizar, a continuación, se proponen los siguientes trabajos futuros y caminos a seguir a partir de este trabajo de investigación, los cuales se dividen en 3 principales vertientes:

La mejora del algoritmo aquí propuesto para reducir las ambigüedades, mejorar la precisión y reducir el tiempo de cómputo de este por medio de técnicas de programación paralela o cualquier otra. En esta vertiente se puede plantear la elaboración de una metodología para mejorar el AG, e inclusive explorar la opción de elaborar un algoritmo genético para optimizar este algoritmo genético.

Ampliar la aplicación de este algoritmo a diferentes modelos de yacimientos con flujo en 1,2 o 3 fases con o sin fronteras o con pozos horizontales, o ampliarlo a diferentes tipos de pruebas de presión.

Someter el algoritmo a diferentes comparaciones contra otros algoritmos de búsqueda y optimización para evaluar su eficiencia y eficacia, además de poder combinarse con otras técnicas y algoritmos de optimización, como el método de *tunneling*, el cual es un método enfocado en encontrar un mínimo global de una función. Esto puede ayudar al algoritmo genético a encontrar con mayor seguridad el mínimo global de la función objetivo.

Referencias

- Ahmed T. & McKinney P. (2011). *Advanced reservoir engineering*. Elsevier. ISBN: 0-7506-7733-3.
- Amanat U. Chaudhry. (2004). *Oil well testintg handbook*. Elsevier, Texas EUA. ISBN: 0-7506-7706-6
- Angulo R., Avendaño P. Galindo U. (2012). *Biología básica*. Octava edición. Universidad Autónoma de Sinaloa, DGEP.
- Bourdet D. & Gringarten A. C. (1980). *Determination of fissure volume and block size in fractured reservoir by type-curve analysis*. SOC. Pet. Eng., 55th Annu. Fall Tech. Conf. Exhib., Dallas, Texas, September 21-24, SPE Paper 9293.
- Bourdet D., Whittle T. M., Douglas A. A. & Pirard Y. M. (1983). *A new set of type curves simplifies well test analysis*. Gulf Publishing Co. Houston, Texas. World oil, 196(6), 95-106.
- Bourdet D., Alagoa A., Ayoub J.A. & Pirard Y. M. (1984). *New type curves aid analysis of fissured zone well test*. World Oil, April.
- Bourdet D. (2002). *Well test analysis: the use of advanced interpretation models*. Elsevier. ISBN: 1567-50968-2
- Cinco-Ley H., Samaniego V, F. & Kucuk, F. (1985, September). *The pressure transient behavior for naturally fractured reservoirs with multiple block size*. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition? (pp. SPE-14168). SPE.
- Colmont G., Pinoargote C. (2018). *Flujo de Fluidos en Medios Porosos*. Universidad Estatal Península de Santa Elena. Primera edición. ISBN: 978-9942-776-03-7
- Da Prat G. (1990). *Well test analysis for fractured reservoir evaluation*. Elsevier. ISBN: 0-444-88691-5

- Da Prat, G., Mannucci, J., Prado, L., & Millan, E. (1984, September). *Use of pressure transient testing to evaluate fractured reservoirs in western Venezuela*. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition? (pp. SPE-13054). SPE.
- Dianati, M., Song, I., & Treiber, M. (2002). *An introduction to genetic algorithms and evolution strategies*. Technical report, University of Waterloo, Ontario, N2L 3G1, Canada.
- Ganat T. A. A. O. (2023). *Modern Pressure Transient Analysis of Petroleum Reservoirs*. Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-28889-0>
- Gen M. & Cheng R., (1997). *Genetic Algorithms and Engineering Design*. Ashikaga Institute of Technology. ISBN: 0-471-12741-8
- Goldberg E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company. ISBN: 0-201-15767-5
- Gringarten, A. C. (2008). *From straight lines to deconvolution: The evolution of the state of the art in well test analysis*. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 11(01), 41-62.
- Heinemann, Z. & Mittermeir G. (2013). *Well testing*. Professor Henemanns Doktorandengruppe
- Heinemann, Z. & Mittermeir G. (2014). *Natural fractured reservoir engineering*. Professor Henemanns Doktorandengruppe
- Horne R. N. (1995). *Modern well test analysis*. Stanford University. ISBN: 0-9626992-0-9
- Hubbert, M. K. (1956). *Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids*. Transactions of the AIME, 207(01), 222-239.
- Dusseault M. B. & Jalali M. R. (2012). *Coupling geomechanics and transport in naturally fractured reservoirs*. International Journal of Mining and Geo-Engineering, 46(2), 105-131.
- Kamal M. M., Abbaszadeh, M., & Cinco-Ley, H. (2008). *Transient well testing*. Society of Petroleum Engineers.
- Kushtanova G. G. (2015). *Well Test Analysis: Teaching Textbook for the Course of Lectures*. Kazan University, Kazan.

- Lee J. (1982). *Well testing*. SPE TEXBOOK SERIES VOL. 1. Society of Petroleum Engineers. ISBN: 0-89520-317-0
- Lee J., Rollins J. & Spivey J. (2003). *Pressure Transient Testing*. SPE TEXBOOK SERIES VOL. 9. Society of Petroleum Engineers. ISBN: 1-55563-099-5
- Legerén A., Núñez J & Ortiz L. (2012). *Introducción a los algoritmos genéticos*. informe de seminarios. Escuela Superior de ingenieros de minas y energía.
- Luke S. (2016). *Essentials of Metaheuristics*. Department of Computer Science. George Mason University. ISBN: 978-1-300-54962-8
- Matthews C. S. & Russell D. G. (1967). *Pressure buildup and flow tests in wells*. Vol. 1, p. 27. New York: Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME. ISBN: 0-89520-200-X
- Muskat M. (1946). *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Soil Science, 46(2), 169.
- National Human Genome Research Institute. (2025). *Fenotipo*. Glosario de términos de genética y genómica. <https://www.genome.gov/es/genetics-glossary/Fenotipo#:~:text=As%C3%AD%20que%20un%20fenotipo%20puede,ejercicio%2C%20cu%C3%A1nto%20fuma%2C%20etc.>
- Nelson R. A. (1992). *An Approach to Evaluating Fractured Reservoirs*. SPE JPT, pp.2167-2170.
- Nelson R. A. (2001). *Geologic analysis of naturally fractured reservoirs* (Vol. 2). Gulf Professional Publishing.
- Niko, H. (1983, October). *Well Test Interpretation in Heterogeneous Reservoirs with Skin and Afterflow: Some New Theoretical Solutions and General Field Experience*. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition?* (pp. SPE-11964). SPE.
- Pérez, R. (2016). *Modelos de Fractura Discreta Para la Simulación de Flujo Monofásico en Medios Porosos Fracturados*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería.

Quasar S. Padiath. (junio 2023). *Genes y cromosomas*. MANUAL MSD versión para público general. https://www.msmanuals.com/es-mx/hogar/fundamentos/gen%C3%A9tica/genes-y-cromosomas#Genes_v711445_es

Ramey Jr H. J. (1992). *Advances in practical well-test analysis* (includes associated paper 26134). Journal of Petroleum Technology, 44(06), 650-659.

Rosa A. J. & Horne R. N. (1983, October). *Automated type-curve matching in well test analysis using Laplace space determination of parameter gradients*. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition? (pp. SPE-12131). SPE.

Satter A. & Iqbal G. M. (2015). *Reservoir engineering: the fundamentals, simulation, and management of conventional and unconventional recoveries*. Gulf Professional Publishing.

Schlumberger. (2002). *Well Test Interpretation*.

Sotelo A. G. (2018). *HIDRÁULICA GENERAL VOLUMEN 1 FUNDAMENTOS*. Limusa. ISBN: 978-968-18-0503-6

Warren, J. E., & Root, P. J. (1963). *The behavior of naturally fractured reservoirs*. Society of Petroleum Engineers Journal, 3(03), 245-255.

Bibliografía Adicional

Abbaszadeh, M., & Kamal, M. M. (1988). *Automatic type-curve matching for well test analysis*. SPE formation evaluation, 3(03), 567-577.

Allain, O. F., & Horne, R. N. (1990). *Use of artificial intelligence in well-test interpretation*. Journal of Petroleum Technology, 42(03), 342-349.

Agarwal, R. G., Al-Hussainy, R., & Ramey Jr, H. J. (1970). *An investigation of wellbore storage and skin effect in unsteady liquid flow: I. Analytical treatment*. Society of Petroleum Engineers Journal, 10(03), 279-290.

- Blasingame, T. A., Johnston, J. L., & Lee, W. J. (1989, April). *Type-curve analysis using the pressure integral method*. In SPE Western Regional Meeting (pp. SPE-18799). SPE.
- Bourdet, D., Ayoub, J. A., & Plard, Y. M. (1989). *Use of pressure derivative in well-test interpretation*. SPE Formation Evaluation, 4(02), 293-302.
- Bourdet, D. (2002). *Well test analysis: the use of advanced interpretation models*. Elsevier. ISBN: 0-444-50968-2
- Da Prat, G., Mannucci, J., Prado, L., & Millan, E. (1984, September). *Use of pressure transient testing to evaluate fractured reservoirs in western Venezuela*. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition? (pp. SPE-13054). SPE.
- Deb, K. (2011). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. London: Springer London. ISBN: 0-471-87339-X
- Earlougher, R. C. (1977). *Advances in well test analysis*. Society of Petroleum Engineers Monograph, 5, 264.
- Earlougher Jr, R. C., & Kersch, K. M. (1974). *Analysis of short-time transient test data by type-curve matching*. Journal of Petroleum Technology, 26(07), 793-800.
- Ehlig-Economides, C. A. (1979). *WELL TEST ANALYSIS FOR WELLS PRODUCED AT A CONSTANT PRESSURE*. Stanford University.
- Gringarten, A. C., Bourdet, D. P., Landel, P. A., & Kniazeff, V. J. (1979, September). *A comparison between different skin and wellbore storage type-curves for early-time transient analysis*. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition? (pp. SPE-8205). SPE.
- Sagar Aryal. (3 de agosto de 2023). *Mitosis vs. Meiosis: 32 Major Key Differences*. Microbe Notes. <https://microbenotes.com/differences-between-mitosis-and-meiosis/>
- Ubani C.E., Karl U. (2014). *Automated Well Test Analysis I*. University of Port-Harcourt, ISSN: 2225-0913.

Van Everdingen, A. F. (1953). *The skin effect and its influence on the productive capacity of a well.*
Journal of petroleum technology, 5(06), 171-176.