



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Análisis hidrodinámico de un
fluido no newtoniano que circula
en un microcanal rectangular de
paredes permeables**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Raúl Alejandro Hernández Martínez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Edgar Ali Ramos Gómez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, le agradezco a Dios por permitirme concluir con esta etapa de mi vida, por darme las fuerzas y el conocimiento necesario para sortear los obstáculos que se han presentado a lo largo de mi formación. Le doy gracias por todas las experiencias buenas y malas que han permitido forjarme profesionalmente, de igual manera por darme la oportunidad de compartir este logro con mi familia y personas importantes para mí.

Agradezco profundamente a mis padres, Alejandra Martínez y Raúl Hernández, quienes con amor, dedicación y esfuerzo siempre me apoyaron durante todos los años de mi formación académica, por guiarme y aconsejarme siempre que lo necesité en cada una de estas etapas, pero sobre todo por permitirme tener la mejor de las herencias, mi educación profesional.

Le agradezco a Calos Hernández, mi hermano y mejor amigo, por estar siempre para mí, por motivarme, ayudarme y sacarme una sonrisa cada vez que lo necesitaba, por su cariño y compañía,

también por prestarme sus libros en el área de la salud para la elaboración de esta tesis y que deseo en lo más profundo de mi ser, que en un futuro él pueda vivir esta misma etapa.

A mi abuela y a mi tío, por ser para mí como una segunda madre y un segundo padre respectivamente, por sus consejos y motivaciones en todo momento, que sin su apoyo este trayecto hubiera sido más complicado para mí.

A Tania Cerón le agradezco por ser para mí un ejemplo a seguir en el ámbito académico. De igual manera a mi prima Samara, que me recuerda a mi niño interior, quien siempre tuvo el sueño de convertirse en ingeniero y que espero poder inspirarla a superarse día con día.

Le agradezco a Tania Flores, por todo su amor, apoyo y compañía incondicional que me ha brindado a lo largo de este proceso y que me inspira a ser una mejor persona y profesionalista cada vez.

Al Doctor Edgar Ali Ramos de antemano le agradezco por su tiempo, apoyo y por compartir conmigo sus conocimientos en la elaboración de esta tesis, por sus aportaciones, consejos y paciencia para la mejora del presente trabajo.

A todos mis amigos y amigas, en especial a Alondra Posadas, con quienes compartí esta etapa inolvidable en mi vida, llena de crecimiento y buenos momentos, por motivarme y darme ánimos desde el inicio hasta el día de hoy.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería por abrirme sus puertas y facilitarme las herramientas y conocimientos proporcionados mediante su plantilla docente e infraestructura como laboratorios, en mi formación profesional.

De igual manera, quiero agradecer a cada uno de mis profesores que me acompañaron a lo largo de mi vida académica, por tu tiempo y conocimientos compartidos conmigo, llevándome lo mejor de cada uno. En especial al profesor Topiltzin, que en donde quiera que se encuentre, sé que estaría orgulloso de contribuir en la formación de un profesional de la ingeniería.

Finalmente, quiero agradecer a DGAPA (UNAM) por la infraestructura de tecnología de la información brindada para el desarrollo de esta tesis, ya que la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería obtuvo equipo de cómputo gracias al financiamiento proveniente del proyecto PAPIIT-IA100623 que lleva como nombre '*Estudio teórico y numérico de las ecuaciones diferenciales involucradas en fenómenos eléctricos y electrocinéticos asociados a la micro y nano escala*'.'

TABLA DE CONTENIDOS

1. Introducción	7
2. Descripción del modelo físico	17
2.1. Ecuaciones del Modelo Físico	18
2.2. Condiciones de Frontera	22
2.3. Análisis del Orden de Magnitud	25
2.4. Ecuaciones Adimensionales	26
2.5. Condiciones de Frontera Adimensionales	28
3. Implementación y resolución del método numérico	33
3.1. Planteamiento del Sistema en el Software	34
3.2. Formulación Variacional	35

3.3. Representación Gráfica	42
4. Análisis de resultados	47
5. Conclusiones	69
A. Ley de la viscosidad de Newton	73
B. Adimensionalización de Ecuaciones	79
C. Forma Variacional de la Ecuación de Momentum en Y	93
REFERENCIAS	97

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas ha evolucionado la técnica de la dinámica de fluidos computacional (CFD) por sus siglas en inglés, lo que genera un interés creciente en esa área; esto implica un avance en cuestiones de investigación y simulación de fenómenos fluido-dinámicos. La técnica de CFD surge de la necesidad del estudio, resolución y análisis de problemas que, impliquen un fluido en movimiento o la transferencia de calor mediante el uso de algoritmos y métodos numéricos, sin importar el nivel de complejidad del sistema. Además, se puede considerar a la CFD como una rama multidisciplinaria de la mecánica de fluidos, puesto que involucra ciencias como: la física, matemáticas, ingeniería e informática, que al trabajar en conjunto permiten contar con una mayor certeza en el desarrollo del modelo del sistema que se esté analizando [1].

A la técnica de CFD se le atribuye una complejidad en la descripción del comportamiento del flujo de un fluido previamente a su proceso de estudio; el subsanar esa complicación representa una oportunidad de desarrollo, de esta manera tener la capacidad de ser una herramienta útil en similitud con otros programas de ingeniería asistidos por computadora (CAE) por sus siglas en inglés. Pese a

este inconveniente, también es cierto que cuenta con diversas ventajas, destacando entre ellas la virtualidad del análisis de sistemas; los cuales implican un alto nivel de complejidad al momento de la implementación de sus réplicas o simulaciones de forma física, debido a sus condiciones, además, gracias al avance tecnológico en términos de la potencia y capacidad de ordenadores, se logra un mayor manejo de datos, lo que se traduce en una reducción tiempo-costo de los diseños e investigaciones, así como en resultados con altos estándares de detalle [2].

El CFD se puede aplicar para una gran cantidad de sistemas fluidodinámicos sin importar su complejidad, siempre y cuando se tenga la capacidad de describir y plantear sus características, esto engloba tanto a sistemas en macro escalas como aquellos que cuentan con dimensiones micrométricas; tal es el caso de las venas, arterias y capilares del sistema circulatorio humano, cuyas estructuras biológico-anatómicas se pueden considerar como microcanales, los cuales son de interés en la presente tesis.

En este sentido, el sistema circulatorio es aquel que distribuye fluidos líquidos por todo el cuerpo humano y se compone de dos partes; el sistema linfático y el sistema cardiovascular; éste último a su vez se forma de tres elementos, el corazón, el cual bombea la sangre por las extensas redes de vasos alrededor del cuerpo, la sangre, que se puede considerar como el fluido de trabajo, ya que en ella se encuentran los nutrientes y oxígeno, los cuales se transportan hacia las células, pero también en la sangre se hallan sustancias de desecho que el sistema ya no necesita; y finalmente los vasos sanguíneos, que sirven como los conductos de transporte por donde fluye la sangre [3]. Es importante tener en cuenta que la mayoría de los vasos sanguíneos poseen características estructurales muy semejantes entre sí; sin embargo, también cuentan con ciertas diferencias, las cuales permiten su clasificación en tres tipos: venas, arterias y capilares [4].

Según el Dr. Moore en su libro de *Anatomía con orientación clínica*, las arterias son aquellos vasos sanguíneos que transportan la sangre proveniente del corazón para su distribución alrededor de todo el organismo. La presión a la que se encuentra la sangre dentro de las arterias es relativamente alta en comparación al

resto de vasos sanguíneos, estas arterias se van ramificando en conductos cada vez más pequeños logrando su diferenciación en tres tipos, los cuales se describen según su tamaño, el grosor de la pared y su funcionamiento. La primera clase de arterias son las de conducción, estas son las de mayor diámetro, puesto que son las primeras en recibir el gasto de sangre directamente del corazón, por su estructura anatómica su trabajo consiste en aminorar el cambio de presión arterial entre las contracciones cardíacas, de esta manera evitar el reflujo de la presión cuando el corazón se encuentra en la fase de contracción y relajación. El segundo tipo de arterias son las de distribución, estas cuentan con un calibre mediano, permitiendo la irrigación e impulso del flujo sanguíneo por diversas partes del organismo gracias a su capacidad de reducir su diámetro [5]. Por último, las arterias más pequeñas o arteriolas, cuyo diámetro es menor a 0.1[mm] [3], son aquellas que controlan el flujo terminal de la sangre en dirección a los lechos capilares.

Así mismo el autor Keiht Moore sustenta que el segundo tipo de vasos sanguíneos con los que cuenta el sistema circulatorio humano son las venas, cuya presión interna en su red es menor en comparación con el resto de los vasos, además, por lo general permiten el regreso de la sangre pobre de nutrientes y oxígeno hacía el corazón, desde los lechos capilares, mediante su ramificación en venas de mayor calibre [5].

De manera similar a las arterias, las venas se clasifican en tres tipos según la dimensión de sus diámetros y grosores. El primer grupo se llama vénulas y son aquellas venas de menor tamaño, de 15 a 20[μm] [6], se encargan de drenar la sangre proveniente de los lechos capilares. A continuación, siguen las venas medianas, las cuales tienen un diámetro menor a 1[cm] [4], su tarea es drenar la sangre de la mayoría de las áreas del cuerpo, y se encuentran acompañando a ciertas arterias de mediano calibre, además, cuentan con válvulas de no retroceso que impiden el reflujo de sangre en zonas donde los efectos de la gravedad dificultan la circulación del flujo. Finalmente se encuentran las venas grandes, cuyo trabajo es regresar la sangre de ciertas áreas del cuerpo como la cabeza, extremidades, etc., directamente al corazón.

Finalmente, la tercera clase de canales vasculares son los llamados capilares.

Para los autores Leslie Gartner y James Hiatt, este tipo de estructuras cuentan con una longitud de aproximadamente 0.5[mm] y un diámetro de 8 a 10[μm], lo que los clasifica como los vasos sanguíneos más pequeños en el organismo [6]. Estos conductos unen a la parte arterial y venosa mediante una ramificación conocida como lechos capilares, cuyo trabajo consiste en el intercambio de productos con el organismo.

Para entender el proceso del intercambio de productos entre los capilares y fuera de ellos, se debe tener en cuenta que este tipo de vasos no es más que un tubo cuya pared está formada por células y que se considera permeable, ya que permite el paso de ciertas moléculas, pero impide el paso de otras como las proteínas del plasma. De esta forma, cercano al lado arterial (corriente arriba), la presión hidrostática con la que cuentan las arteriolas permiten la existencia de flujo de sangre a través de los capilares, de igual manera promueven la salida de nutrientes y oxígeno así como de diversos materiales, y al contar con una pared impermeable a las proteínas plasmáticas, impiden que estas salgan, esto produce un aumento en la concentración de este tipo de moléculas, naturalmente, por efectos de ósmosis y en consecuencia del aumento en la presión osmótica en el lado venoso (corriente abajo), ingresan a los capilares productos de desecho así como dióxido de carbono, para posteriormente drenarse a las venas y seguir con el proceso circulatorio [5]. Se debe tener en consideración que la presión hidrostática, la cual facilita la salida de moléculas fuera de los capilares va disminuyendo a lo largo del conducto, por otro lado, la presión osmótica que permite la entrada de los desechos va aumentando conforme esté más cerca del área venosa.

La sangre juega un rol sumamente importante en el estudio del flujo en capilares, puesto que se considera como el fluido de trabajo, ya que en ella se van a transportar los nutrientes y oxígeno, los cuales serán intercambiados en el lecho capilar, por ello es necesario tomar en consideración las propiedades hemodinámicas que presenta. Así, en el sistema circulatorio como en la ingeniería, una de las características y de las más relevantes en la dinámica de fluidos, es el tipo de comportamiento que se presenta, en el caso de la sangre es el de un fluido no newtoniano, lo cual se refiere a que su densidad va a ser variable en diferentes puntos del flujo con respecto a la velocidad de cizallamiento, a su vez,

es importante tomar en cuenta que el hematocrito es la proporción de glóbulos rojos que se puede encontrar en la sangre, lo cual, tiene un efecto en el valor de la densidad [2], es decir, entre más concentración de glóbulos rojos se tengan en ciertas secciones, la densidad aumentará y viceversa.

Al ser la sangre un flujo cuyo conducto (vaso capilar) tiene dimensiones micrométricas, se clasifica como microfluido, lo cual trae consigo ciertas consideraciones y efectos que difícilmente se pueden apreciar o tomarse en cuenta en flujos de escalas macrométricas, por ejemplo, las fuerzas gravitacionales son despreciables en sistemas microfluídicos, únicamente se utilizan para recipientes de almacenamiento, o cuando hay diferencias de presión causadas por este tipo de fuerzas que generen el movimiento del microfluido; otro ejemplo es la tensión superficial, la cual es muy relevante en este tipo de sistemas micrométricos y que en muy pocas ocasiones es tomada en cuenta para escalas más grandes. También los microfluidos rigurosamente presentan comportamiento laminar en su flujo, caso contrario de los sistemas macroscópicos donde suelen ser por lo general flujos turbulentos [7]. Si bien, existen diferencias notables entre los efectos de los microfluidos y macrofluidos, las ecuaciones de momentum y de continuidad siguen siendo válidas para el modelado de fluidos en cualquiera de estas escalas, por lo que la presente tesis se basará en ellas para el desarrollo y análisis del fenómeno físico a estudiar.

Según la Organización Mundial de la Salud, las enfermedades cardiovasculares cobran la vida de 17.9 millones de personas en todo el mundo cada año, volviéndola la principal causa de muerte [8]. Estas forman parte de un grupo de trastornos en el corazón y en vasos sanguíneos, en los que se enmarcan cardiopatías coronarias, así como enfermedades cerebrovasculares. Este tipo de padecimientos se deben por lo general al impedimento en el suministro de sangre hacia el corazón o el cerebro, mediante la obstrucción de los vasos sanguíneos, ya sea una arteria, vena o capilar, comúnmente las pequeñas capas de grasa que se van apilando dentro de las paredes de los canales por donde viaja la sangre son las causantes de esto. Un ejemplo de estas afecciones cardiovasculares son los aneurismas, los cuales el Dr. Javier Vega los describe como la dilatación en consecuencia de una debilidad en la pared del vaso sanguíneo, logrando un ensanchamiento mayor al 50% del diámetro original del vaso, corriendo el riesgo

de ruptura, causando una hemorragia grave que impida la circulación correcta de la sangre [9].

Otro tipo de ejemplo de estos trastornos es la estenosis, la cual es definido por Muhammad Hasnain como el estrechamiento de la pared del vaso sanguíneo de forma anormal, el cual puede ser producido por esta misma pared o el aumento en la placa de sustancias grasas que reducen el diámetro por el cual fluye la sangre, impidiendo su distribución de forma normal; en casos extremos la sección transversal arterial puede llegar a taparse por completo produciendo problemas graves e incluso la muerte [10]. Los factores de riesgo que pueden derivar en un problema cardiovascular de este tipo son antecedentes genéticos, la diabetes, obesidad, falta de actividad física, hipertensión, tabaquismo, consumo de alcohol y una mala alimentación [11]. Lamentablemente una gran parte de la población mexicana padecen este tipo de factores de riesgo, los cuales derivan en las afecciones cardiovasculares.

El presente trabajo tiene como fundamento los diversos estudios en donde se muestra que gran parte del nivel de formación y desarrollo de las enfermedades cardiovasculares tienen una estrecha relación con la fluidodinámica de la sangre, así como del comportamiento mecánico de las paredes de los vasos sanguíneos [12]. De esta manera es como la dinámica de biofluidos genera un mayor interés, por su importancia en el sistema circulatorio humano, lo que resulta en la necesidad de estudio del comportamiento sanguíneo y sus componentes, así como su interrelación con las paredes de los vasos. Entendiendo la interacción entre las características del fluido tales como la variación en su viscosidad, el cambio en el comportamiento del flujo a lo largo del trayecto (sobre todo en la generación de turbulencias derivadas de obstrucciones en el canal), así, como factores estructurales del conducto, lo cual permite el análisis de su influencia en el progreso de afecciones cardiovasculares; lo anterior se ha demostrado en experimentos hemodinámicos, donde se observa la creación de aneurismas o venas varicosas, así como su desarrollo en función de la hemodinámica presente. Anteriormente la hemodinámica se encargaba de las mediciones de presión y resistencia de los vasos sanguíneos de manera in vivo, en la actualidad, gracias al avance en la mecánica de fluidos, obtienen y analizan ciertos parámetros como lo son la velocidad local, características del flujo dependientes del tiempo,

etc [13].

La importancia del estudio de la dinámica del flujo sanguíneo y el cómo se relaciona con los vasos por dónde esta se desplaza, radica en la necesidad de obtener un modelo analítico que permita en medida de lo posible, el análisis de este fenómeno físico-biológico, así, poder realizar investigaciones que logren generar un mayor conocimiento del que se tiene actualmente, cuya finalidad es la de la presente tesis. De igual manera, poder estudiar de forma individual los parámetros que se requieran, como la geometría, elasticidad en los vasos sanguíneos y propiedades no newtonianas del flujo, sin la necesidad de un análisis experimental, el cual requeriría una mayor cantidad de tiempo y costo, así como una gran dificultad en el control de diversas variables que permitan la réplica experimental [13]. Por lo que el modelo fisicomatemático podría reproducirse las veces que se quisiese sin alterar su resultado para unas mismas variables, esto logra colocarlo en una gran ventaja respecto a los análisis experimentales, propósito de esta tesis.

Las ventajas de trabajar con un modelo hidrodinámico, el cual se desarrolla y analiza a lo largo del presente trabajo, son que al comprender el comportamiento de los trastornos cardiovasculares se puede dar un tratamiento más adecuado a ellos dependiendo de su progresión, por otro lado, en la parte preventiva, al conocer como es la interacción entre el flujo de sangre y la superficie de los vasos sanguíneos existe la posibilidad de alertar sobre la formación de coágulos que se derivan en graves complicaciones e incluso mortales. Otro beneficio es el diseño y optimización de dispositivos, al igual que de tratamientos médicos, ya que al tener la capacidad de entender cómo se comporta la sangre al relacionarse con estos, permite su desarrollo y mejora, de esta manera poder llegar a ser cada vez más seguros y eficaces [14] [15].

Pueden existir muchas técnicas y herramientas para el análisis y simulación de un modelo analítico que describa el comportamiento del flujo de la sangre, en el caso de la presente tesis, se empleará el software de uso libre FreeFEM++ [16], el cual permite el desarrollo de simulaciones numéricas para problemas físicos e ingenieriles, sobre todo en el área de la mecánica de termofluidos. Para ello se basa en el método de elementos finitos (MEF) o por sus siglas en inglés (FEM),

esta es una técnica numérica que permite aproximar soluciones a ecuaciones diferenciales parciales que a su vez están modelando fenómenos físicos. La forma de hacerlo es mediante la discretización del dominio del problema a través de una malla de elementos simples y de cantidad finita, para el caso de trabajar en 2D se utilizan triángulos, y tetraedros para problemas en 3D. Finalmente, el software aproxima la solución para cada uno de los elementos, así la ecuación diferencial parcial se puede satisfacer por partes, y la solución general se da al unir cada uno de los resultados individuales, teniendo la precaución de asegurar que se dé la continuidad entre las fronteras entre cada elemento [17] [18].

A pesar de lo aparatoso que pudiese sonar el método de elementos finitos, FreeFEM++ cuenta con una interfaz en dónde el usuario puede describir los problemas de una forma intuitiva, para esto, se define el dominio, número de nodos en el mallado, condiciones de frontera, las ecuaciones del problema y algunos otros parámetros relevantes si es que así lo requiere, utilizando el lenguaje específico de script del software. Una vez realizado lo anterior, FreeFEM++ mediante técnicas numéricas resuelve el sistema de ecuaciones generado, de esta manera se obtiene la solución aproximada del problema planteado.

Algunas de las características con las que cuenta este software que se propone utilizar en esta tesis son que genera automáticamente el mallado para el problema. Cuenta con un lenguaje de script fácil de usar con variedad de funciones. El problema se describe mediante ecuaciones en su forma variacional, es decir, cuentan con una parte bilineal, una lineal y las condiciones de frontera. Se pueden proponer sistemas con múltiples variables y dimensiones, estáticos o dinámicos, lineales o no lineales, así como sistemas acoplados, siempre que el usuario detalle los procesos iterativos que permitan simplificar el problema en un conjunto de problemas lineales. La generación geométrica es sencilla mediante su descripción por límites, pero se debe tener en cuenta que no es un sistema CAD, ya que el usuario debe especificar el punto de intersección cuando los límites se cruzan [16].

Considerando todas las ideas anteriores, la presente tesis plantea el análisis hidrodinámico del flujo sanguíneo a través de un capilar. Como se ha comentado, por la naturaleza fluidodinámica de la sangre, ésta se considera como un flui-

do no newtoniano, el cual viajará a través de un microcanal rectangular, debido a que el problema se describe en dos dimensiones (x,y) , y cuyas paredes son permeables a causa de los fenómenos biológicos de intercambio de nutrientes dentro de los capilares. Al considerarse un estudio hidrodinámico, como resultados se espera la obtención de los perfiles de velocidades tanto longitudinal como transversal, de igual manera el campo de presiones del sistema, para ello, se emplean las ecuaciones de momentum y continuidad, las cuales rigen la dinámica de fluidos, estas se presentan de una manera adimensional para facilitar su manejo e interpretación, posteriormente se reescriben en su forma variacional, lo que es necesario para su sintaxis dentro del lenguaje de FreeFEM++, cuyo software se emplea para la aproximación de la solución de las ecuaciones diferenciales parciales obtenidas. De esta manera, lograr la generación de resultados gráficos que permitan su análisis y comparación tanto cualitativa como cuantitativamente.

Este trabajo, pretende contribuir a futuros proyectos de investigación relacionados al tema de la descripción fluidodinámica del sistema circulatorio humano, lo cual se espera que permita el avance en la comprensión de su comportamiento tanto en el área de la salud como en el ingenieril. Si bien, no se plantea un problema de afección a la salud como los aneurismas o estenosis, si se pretende la descripción hidrodinámica básica del flujo sanguíneo de la forma más clara y detallada posible, para que cualquier persona con conocimientos en mecánica de fluidos e interés en el tema, pueda comprender el fenómeno físico según lo mencionado en este trabajo de investigación.

Considero que el estudio del comportamiento de la sangre dentro del sistema circulatorio humano desde un punto de vista ingenieril es de gran importancia, por el marco de oportunidades que engloba el tema, desde la prevención y detección de problemas cardiovasculares, su desarrollo con base al conocimiento del comportamiento y relación de cada una de las variables del sistema, sobre todo en la implementación de tratamientos que permitan la reducción en términos de gravedad de la afección e incluso su erradicación. A lo largo del desarrollo de la presente investigación, se observa que existe escasa investigación sobre el tema, lo que mi interés es sumar debido a la importancia que tiene en nuestro país, reflejado en el aumento de personas vulnerables a este tipo de enfermedades.

CAPÍTULO

2

DESCRIPCIÓN DEL MODELO FÍSICO

En la presente tesis se plantea el análisis hidrodinámico de un fluido no newtoniano que circula a través de un microcanal de paredes permeables, para ello se emplea un sistema de coordenadas rectangulares en dos dimensiones (x, y) , cuyo origen se encuentra situado en la entrada del microcanal, tal y como se puede apreciar en la Figura 2.1. La dirección longitudinal se representa mediante el eje de las abscisas (x), mientras que el eje de las ordenadas (y) corresponde a la dirección transversal. Las dimensiones geométricas del microcanal son: la altura del canal, denotada como $2H$, siendo la altura media H y su longitud, descrita por L , donde se considera que L es mucho mayor que H , $L \gg H$, así, se define al microcanal con un tamaño significativo en relación con las dimensiones del grosor de sus paredes.

Dado el carácter permeable de las paredes, el perfil de velocidades, inicialmente alimentado por un caudal de entrada Q_0 , presenta una mayor velocidad para la dirección longitudinal en la entrada respecto a la salida, como resultado de la pérdida de caudal en dirección transversal. También se puede o no omitir la condición de deslizamiento en las paredes del microcanal debido a las dimensiones

del mismo, sin embargo, para esta tesis, no se considera este efecto.

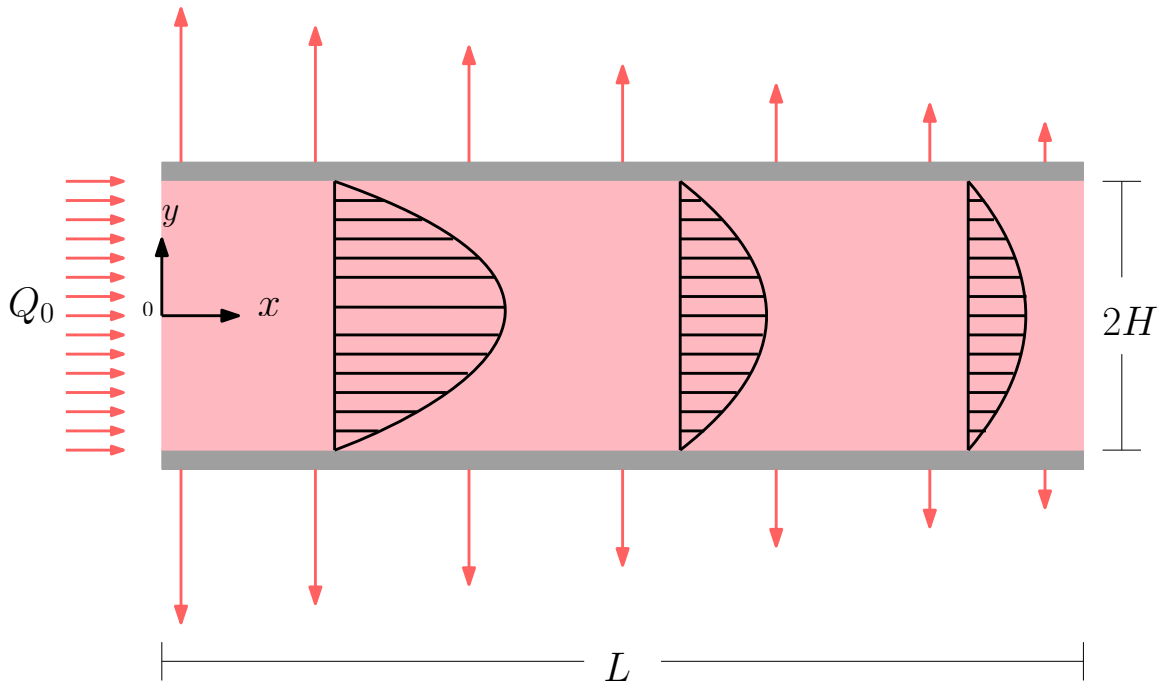


Figura 2.1: Diagrama representativo del sistema a estudiar. Un microcanal de dimensiones $L \times 2H$, de paredes permeables en las cuales existe la condición de no deslizamiento y por el cual circula un fluido no newtoniano de caudal inicial Q_0 . El origen de coordenadas se sitúa en el centro del microcanal por la simetría del sistema.

La descripción anterior puede ser visualizada de mejor manera en la Figura 2.1, en donde se observa que el origen de coordenadas está situado en la línea media del microcanal, ya que el flujo puede ser considerado axisimétrico, lo que permite el estudio únicamente de una de las mitades, debido a las condiciones de simetría. Este enfoque permitirá una mejor optimización en la solución numérica que se implementa para este trabajo.

2.1. Ecuaciones del Modelo Físico

Se parte del hecho que las expresiones que rigen el comportamiento físico de los fluidos son la ecuación de continuidad y las de momentum. Considerando

que se realiza el análisis de un flujo en un microcanal rectangular (2D), las ecuaciones se describen en términos de los ejes x y y . También, tomando en cuenta que se estudia un flujo completamente desarrollado, incompresible, estacionario y axisimétrico, se plantean las siguientes ecuaciones para el sistema.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Ecuación de momentum en x y y :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right), \quad (2.3)$$

en donde la densidad ρ es constante, u y v son las velocidades en dirección x y y respectivamente, p representa la presión y τ el esfuerzo viscoso.

Tomándose en cuenta la Ley de Newton de la viscosidad, en donde se definen las componentes del esfuerzo viscoso como:

$$\tau_{xx} = 2\eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = 2\eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Como se puede notar, la viscosidad $\eta (T_f, \dot{\gamma})$ es una función variable, que muestra dependencia de la temperatura y la velocidad de deformación, lo cual describe a un fluido no Newtoniano con base en el modelo de Carreau, cuya expresión se define como [19]:

$$\eta (T_f, \dot{\gamma}) = \eta_0 \exp [-b (T_f - T_0)] \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.4)$$

Donde η_0 representa la viscosidad del fluido a altas velocidades de cizallamiento, es decir, la viscosidad mínima (recordando que la viscosidad es inversamente proporcional a la velocidad de cizallamiento del fluido), b mide la dependencia entre la temperatura y viscosidad (cuyo valor de dicho parámetro es obtenido de forma empírica), λ es el tiempo de relajación (es una constante de tiempo para el fluido), n es el índice de Ley de Potencia y finalmente $\dot{\gamma}$ representa la magnitud de la velocidad de deformación y cuya expresión para el caso de un flujo en dos dimensiones está dada por [19]:

$$\dot{\gamma} = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

Para efectos de la presente tesis, se considera una temperatura constante en todo momento a lo largo del sistema, es decir $T_f = T_0$. Por lo que se reescribe la ecuación (2.4) como:

$$\eta (T_f, \dot{\gamma}) = \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.6)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones (2.2) y (2.3), cuyo

desarrollo se muestra en el Apéndice A, se obtiene respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial x} \\
 &+ \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial y} \\
 &+ \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Cabe mencionar que por la naturaleza FreeFEM++, para poder trabajar con los términos convectivos, a las ecuaciones de momentum se les anexa el término

temporal, quedando definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial x} \\
 &+ \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial y} \\
 &+ \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

2.2. Condiciones de Frontera

Para el sistema que se estudia en la presente tesis y cuya descripción en variables físicas esta descrita por las ecuaciones planteadas anteriormente, es importante describir las condiciones de frontera, las cuales se muestran a continuación, de igual manera en variables físicas.

$$u(x=0, y) = \frac{Q_0}{2HW}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.11)$$

$$u(x, y = \pm H) = -s\eta \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.12)$$

$$v(x = 0, y) = 0; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.13)$$

$$v(x, y = 0) = 0; \quad v(x, y = \pm H) = k\Delta p \quad (2.14)$$

Es de suma importancia el planteamiento de las condiciones de fronteras para un sistema de ecuaciones diferenciales, ya que especifica restricciones que deben cumplir las soluciones para su validez dentro del dominio de interés. La primer expresión de (2.11) representa la velocidad en dirección x en términos de un caudal inicial y el área transversal del microcanal, todo ello a la entrada de este. La velocidad u se obtiene a partir del caudal Q , el cual es igual al producto de la velocidad en dirección longitudinal por el área transversal A , a su vez esta área se define como la multiplicación de la altura del microcanal $2H$ por su profundidad W . Por otro lado, el caudal inicial Q_0 se determina mediante la integración de la velocidad u a la entrada del microcanal por el diferencial de área, $Q_0 = \int u dA$. La segunda expresión de la ecuación (2.11) asegura la inexistencia de variaciones en la velocidad u respecto a la distancia longitudinal en la salida del microcanal, es decir, cuando se tiene un flujo completamente desarrollado.

La primer expresión de la ecuación (2.12) representa la inexistencia de una velocidad u en las paredes internas del microcanal, es decir, valida la condición de no deslizamiento en las paredes. Esta ecuación es conocida como la ley de deslizamiento lineal de Navier, la cual es dependiente de la longitud de deslizamiento α , como se muestra a continuación.

$$u = \alpha \frac{\partial u}{\partial n}$$

La longitud de deslizamiento se define a partir del producto del coeficiente de deslizamiento s y la viscosidad absoluta del fluido η , además en la ecuación original de la ley de deslizamiento, la derivada parcial de la velocidad es respecto a la dirección normal a la pared del canal, por lo que en este caso se sustituye respecto a la dirección y [20]. La longitud de deslizamiento es aquella distancia entre las paredes del canal real de estudio y un canal de referencia, cuyas dimensiones son mayores al real, además que en sus paredes se cumple la condición de no deslizamiento, por lo que si $\alpha = 0$ significa que no existe deslizamiento en las paredes del canal real, como es en el presente caso. Cabe mencionarse que el parámetro s se define como $s = Ae^{-\epsilon p}$ [21], en donde A es el coeficiente de deslizamiento a presión nula, ϵ es el parámetro de caída exponencial y p la presión. Se observa la relación inversamente proporcional entre la presión y el parámetro de deslizamiento s , lo cual asegura el deslizamiento en las paredes a una presión relativamente mayor. La segunda expresión de (2.12) representa la condición de simetría dentro del microcanal, lo cual permite el estudio de una sola mitad en cuanto a la altura, siendo $y = 0$ la altura media.

En la ecuación (2.13) la primer expresión asegura que a la entrada del microcanal la velocidad v es cero, similar a un flujo Poiseuille, de igual manera en la segunda expresión se muestra que la variación de v a la salida del canal es cero, lo que representa una conservación en la variación de la velocidad transversal en ese punto del canal.

Por último, la primer expresión de la ecuación (2.14) representa que la velocidad v es cero en la línea media el microcanal, lo cual es una idealización, la segunda expresión muestra la permeabilidad en las paredes del canal, este efecto se nota en el coeficiente de permeabilidad k y la diferencia de presión $\Delta p = p - p_0$ en donde p_0 es la presión fuera del microcanal [22].

Tanto las expresiones de las ecuaciones (2.1), (2.9), (2.10) y el sistema de ecuaciones (2.11) a (2.14) pueden ser representadas en su forma adimensional, con el fin de que se identifiquen los parámetros físicos más relevantes, para lo cual previamente es importante el análisis del orden de magnitud y posteriormente la obtención de variables adimensionales.

2.3. Análisis del Orden de Magnitud

Iniciando con la descripción de la ecuación de continuidad (2.1), es necesario garantizar que ambas partes sean comparables en términos de su magnitud, lo que implica que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

De la ecuación anterior se sustituyen las variables de velocidad u y v al igual que las de posición x y y por sus valores característicos u_c , v_c , L y H respectivamente, de esta manera se puede describir v_c en términos de las variables características.

$$\frac{u_c}{L} \sim \frac{v_c}{H}$$

$$v_c \sim \frac{Hu_c}{L} \tag{2.15}$$

A partir de la ecuación (2.7) se compara el orden de magnitud entre la diferencia de presión longitudinal del sistema y los efectos viscosos en dirección transversal.

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Similar al análisis anterior, se describen las variables por sus valores característicos, y se despeja la diferencia de presión característica.

$$\frac{\Delta p_c}{L} \sim \frac{\eta_0 u_c}{H^2}$$

$$\Delta p_c \sim \frac{\eta_0 u_c L}{H^2} \tag{2.16}$$

Ahora se definen las siguientes variables adimensionales. Para el caso de aquellas que describen la geometría del micocanal se toman como base los valores máximos que pueden llegar a tener, es decir, para las medidas longitudinal y transversal se utiliza H y L respectivamente. En cuanto a las velocidades, estas se describen mediante valores característicos, u_c , que se determina mediante el caudal y el área a la entrada del microcanal; y v_c , la cual está en función de u_c , H y L , como se observa en la ecuación (2.15). Por último, para el caso de la presión, se define mediante un valor característico Δp_c que varía según lo mostrado en (2.16). Con base en lo descrito anteriormente, se tiene:

$$X = \frac{x}{L}; \quad Y = \frac{y}{H}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_c}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c}; \quad \tilde{p} = \frac{p - p_0}{\Delta p_c} \quad (2.17)$$

Para las cuales:

$$u_c \sim \frac{Q_0}{2HW}; \quad v_c \sim \frac{u_c H}{L}; \quad \Delta p_c \sim \frac{\eta_0 u_c L}{H^2}$$

2.4. Ecuaciones Adimensionales

Tomando en cuenta lo descrito en los apartados anteriores, se pueden adimensionalizar las ecuaciones que describen el modelo físico del sistema. El desarrollo de la adimensionalización se muestra en el Apéndice B, quedando:

Ecuación adimensional de continuidad.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad (2.18)$$

Ecuación adimensional de momentum en X .

$$\begin{aligned}
 \varepsilon Re \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) + \varepsilon Re \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \\
 + \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\
 + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Ecuación adimensional de momentum en Y .

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^3 Re \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right) + \varepsilon^3 Re \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \\
 + \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\
 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\
 + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right), \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1; \quad Re = \frac{\rho u_c H}{\eta}; \quad (2.21)$$

Además:

$$Wi = \frac{\lambda u_c}{H} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\gamma} = \left\{ 2\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)^2 \right] + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

De las anteriores expresiones, ε es un parámetro adimensional que relaciona la altura media H con la longitud L del microcanal, y cuyo valor debe ser mucho menor a 1, lo que geoméricamente representa que la distancia longitudinal es considerablemente mayor a la transversal. Por otro lado, Re es el número de Reynolds, el cual define el comportamiento del flujo de un fluido relacionando su densidad ρ , velocidad característica u_c , longitud característica H y la viscosidad dinámica de este η . En cuanto a Wi es conocido como el número de Weissenberg, este parámetro es comúnmente utilizado en la mecánica de fluidos y la reología, pues caracteriza el comportamiento viscoelástico de ciertos fluidos no newtonianos; relaciona el tiempo de relajación del fluido λ , la velocidad característica u_c y la altura media del canal. En resumidas cuentas, Wi compara el tiempo de relajación y el tiempo característico de cizallamiento del fluido.

Se puede observar en la ecuación (2.23) que $\tilde{\gamma}$ es la variable adimensional respectiva a la magnitud de la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$ y cuyo desarrollo se muestra en el Apéndice B. Cabe mencionarse que a pesar de definir al sistema como un flujo estacionario, las ecuaciones de momentum se consideran con su término temporal debido a las condiciones de script de FreeFEM++, ya que se debe diferenciar entre la solución en un tiempo anterior y la solución en un tiempo actual, de esta manera garantizando la convergencia del método numérico, lo cual se describe a profundidad en el Capítulo 3 .

2.5. Condiciones de Frontera Adimensionales

Las expresiones que describen las condiciones de frontera (2.11)-(2.14) deben adimensionalizarse, en este sentido se reescriben como se muestra a conti-

nuación empleando las variables adimensionales:

$$\int_0^1 \tilde{u}(X=0, Y) dY = 1; \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right|_{X=1} = 0 \quad (2.24)$$

$$\tilde{u}(X, Y = \pm 1) = 0; \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (2.25)$$

$$\tilde{v}(X=0, Y) = 0; \quad \left. \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right|_{X=1} = 0 \quad (2.26)$$

$$\tilde{v}(X, Y = 0) = 0; \quad \tilde{v}(X, Y = \pm 1) = \beta \frac{\tilde{p}}{\varepsilon^2} \quad (2.27)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\beta = \frac{k\eta}{H},$$

donde β representa el coeficiente de filtración adimensional, que relaciona la permeabilidad característica de las paredes del microcanal k , la densidad del fluido η y la altura media de canal H .

Es importante considerar que el valor mínimo y máximo para una variable adimensional en el caso de las coordenadas longitudinal y transversal es cero y uno respectivamente, donde cero representa el valor más lejano al de la variable característica, y uno cuando se toma el valor de esta variable de referencia. Sin embargo, para variables que describen el comportamiento del fluido, como lo son las velocidades \tilde{u} , \tilde{v} y la presión \tilde{p} se podrán tener valores mayores a uno, ya que en algunos casos el valor máximo de estas variables es superior al característico.

Teniendo en cuenta lo anterior, las expresiones de (2.24)- (2.27) describe que la suma de todas las velocidades longitudinales \tilde{u} a la entrada del microcanal ($X = 0$) en cualquier punto de Y desde el punto medio del canal (0) hasta la pared (1) es igual a uno, es decir, el valor característico de la velocidad longitudinal se da a la entrada. De igual forma la velocidad de permeado en las paredes \tilde{v} se define a partir de parámetros adimensionales que están involucrados en el sistema.

Finalmente en la Tabla 2.1 se muestran los valores propuestos para algunas propiedades físicas que al sustituirse en los parámetros adimensionales generan los valores de la Tabla 2.2.

Parámetro	Valor
H	$4 - 5[\mu m]$, [6]
L	$0.5 - 1[mm]$, [6]
ρ	$\sim 1065[\frac{kg}{m^3}]$, [23],[24],[25]
η_0	$0.0035 - 0.004[Pa * s]$, [25],[26],[27]
λ	$0.1 - 1[s]$ [28], [29], [30]
k	$1x10^{-8} - 1.25x10^{-8}[\frac{m}{Pa*s}]$

Tabla 2.1: Valores de las propiedades físicas y geométricas

Parámetro adimensional	Valor
ε	$\sim 0.008 - 0.01$
β	$\sim 8.75x10^{-6} - 1.09x10^{-5}$
n	$0.5 - 0.8$, [23], [31]
Re	$\sim 7.3x10^{-4} - 30.4x10^{-4}$, [32]
Wi	$0.1 - 1$, [30], [33], [34], [35]

Tabla 2.2: Valores de las propiedades adimensionales

Tanto el valor de H como el de L , que representan las dimensiones geométricas del micro canal son obtenidas del libro *Texto Atlas de Histología*, tomando como referencia el diámetro y longitud de un capilar sanguíneo respectivamente [6]. ρ es considerado como la densidad del fluido de trabajo, en este caso de la sangre, así como η_0 es la viscosidad sanguínea aproximada, ya que estos valores

dependen realmente de ciertos factores como de su composición, condiciones de flujo, entre otros. λ es considerada como la constante de relajación de la sangre después de ser sometida a un esfuerzo cortante, aunque en ocasiones puede variar el rango de valores, usualmente se encuentra del orden mostrado en la Tabla 2.1.

Otro aspecto a considerar es que n es menor a 1, ya que para el modelo de Carreau al tener $n = 1$ se tiene un fluido newtoniano, para valores de $n > 1$ se describe un fluido dilatante, es decir que su viscosidad es directamente proporcional a la tasa de cizalla que se le aplique, por otra parte $n < 1$ representa un fluido pseudoplastico, es decir, que su viscosidad disminuye al aumentar el valor de la velocidad de cizallamiento, lo cual se demuestra empíricamente que al dejar la sangre en reposo, esta comienza a coagularse. Este rango de valores para n se obtienen de los trabajos sobre la reología de la sangre de Chien (1970) y Thurston (1972) en *Shear dependence of effective cell volume as a determinant of blood viscosity* y *Viscoelastic properties of blood and blood analogs*. *Advances in Hemodynamics and Hemorheology*, respectivamente.

Re es extremadamente pequeño debido al diámetro pequeño de los capilares y las propiedades reológicas de la sangre, lo que asegura que dentro de este tipo de vasos sanguíneos el flujo sea laminar y no turbulento, en donde el comportamiento es dominado por los efectos de la viscosidad y no los inerciales.

Wi al ser menor que 1 indica que el tiempo de relajación es menor al tiempo de deformación, es decir que sus propiedades viscosas dominan sobre sus propiedades elásticas, por lo que se comporta como fluido viscoso principalmente y los efectos viscoelásticos (por ejemplo la elasticidad) son menores. Implica un flujo laminar (como se comprueba con el Reynolds) ya que es menos propenso a inestabilidades causadas por efectos elásticos. En general, su descripción es más simple y predicativa en condiciones normales. Podría Wi llegar a valer más de 1 pero solo en casos específicos como en donde se tiene actividad cardiaca o arterias demasiado estrechas como en el caso de problemas de estenosis [36]. Finalmente ε se puede obtener mediante los valores correspondientes de la Tabla 2.1, a su vez el rango de valores para β cumplen que son del orden de ε^2 .

CAPÍTULO 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO FÍSICO

A continuación se explica toda la metodología realizada en FreeFem++ para la resolución numérica del sistema de ecuaciones junto a las condiciones de frontera que fueron planteadas en el Capítulo 2.

CAPÍTULO

3

IMPLEMENTACIÓN Y RESOLUCIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO

Para poder realizar el análisis hidrodinámico planteado y obtener las soluciones de las velocidades longitudinal y transversal así como el campo de presiones del sistema, es necesario hacer uso de un software que permita obtener tales resultados.

Como se menciona en el Capítulo 1, actualmente existen diversos programas CFD que permiten el análisis de sistemas fluidodinámicos. Para el caso de la presente tesis se emplea el software llamado FreFEM++, el cual es un programa de uso libre y permite la resolución de ecuaciones diferenciales parciales en dos y tres dimensiones aplicando el método de elementos finitos. Este programa es muy versátil ya que se puede emplear en diversos problemas de la física e ingeniería, puesto que maneja un lenguaje de programación propio de alto nivel pero con una interfaz amigable a los usuarios, además genera mallado automático así como la visualización gráfica del sistema que se esté modelando.

3.1. Planteamiento del Sistema en el Software

Se comienza definiendo el dominio del sistema a analizar Ω correspondiente a la región que se encuentra delimitada geoméricamente por la frontera Γ y en donde se aplican las condiciones de frontera con las cuales se tenga que trabajar. Para generar el área de control se debe recordar las características geométricas del sistema, por ejemplo, al tratarse de un problema axisimétrico respecto al eje horizontal, en el análisis únicamente se puede considerar la mitad superior del microcanal, ya que el comportamiento es exactamente el mismo en ambas partes.

Por otra parte al estar adimensionalizado el sistema, gráficamente no se representa al microcanal de forma rectangular, sino con una forma cuadrada, cuyos lados son de dimensiones igual a uno, esto no quiere decir que ese sea el valor de las paredes, más bien que la unidad representa el máximo de sus valores respectivos. Así se tiene que el lado izquierdo es la entrada al microcanal, el derecho es la salida, el superior representa la pared permeable y el lado inferior es la línea media del microcanal.

En este sentido, se utiliza el comando *square* para trazar un cuadrado de las dimensiones especificadas definidas por otras dos variables que representan las distancias geométricas longitudinales y transversales, a su vez esto se ingresa en el comando *mesh* para generar el mallado automático por parte de FreeFEM++, declarando el número de elementos para el eje x y el eje y , 100×100 respectivamente, dando un total de 10,000 elementos triangulares que conforman el mallado para el análisis del sistema. Cabe aclarar que la decisión de hacer uso de 10,000 elementos se debe a un sencillo análisis de malla realizado durante la obtención de los resultados. En este caso dejó de existir variación en la obtención de los resultados.

El mallado finalmente queda como en la Figura 3.1, donde se muestra un cuadrado cuyas dimensiones son la unidad y un mallado de 10,000 elementos, los cuales se concentran mayormente en la entrada geométrica del microcanal, lo cual dota de una mayor definición en esa zona por tener mas puntos de análisis. Esta distribución de la malla se debe también a que al realizar el análisis

con menor cantidad de elementos en esa área se presentan problemas de comportamientos no homogéneos, situaciones que no se dan a la salida geométrica del microcanal, por lo que no es necesario el aumento del mallado en esa parte, evitando así el aumento en el tiempo de procesamiento para la resolución del sistema.

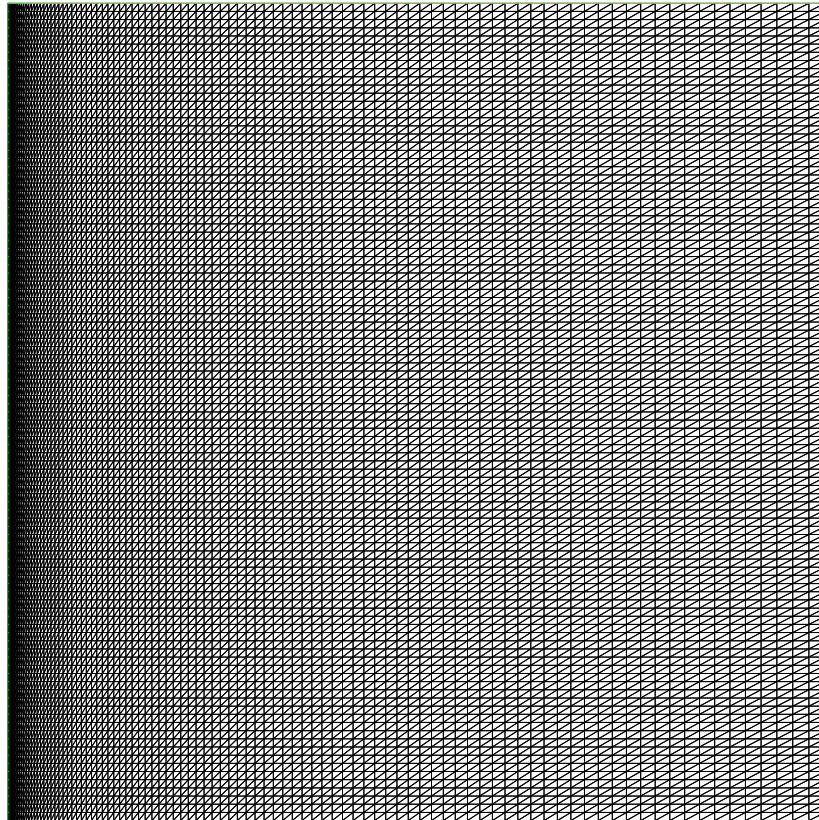


Figura 3.1: *Mallado de 100x100 elementos en el sistema a analizar, en donde se observa un mayor número de elementos del lado izquierdo, que representa la entrada al microcanal.*

3.2. Formulación Variacional

El tratar de resolver ecuaciones diferenciales parciales de una forma analítica resulta ser muy complicado y en algunos casos imposible, por lo que se opta transformarlas a su forma variacional, siendo esta la clave para poder aplicar

el método de elementos finitos y darle resolución a problemas complejos. Una vez transformado el problema a su forma variacional, las ecuaciones son discretizadas en su forma temporal y espacial en un dominio, y de esta forma poder encontrar las soluciones en espacios de funciones manejables y de dimensión finita. Para darle solución mediante FreeFEM++ a las ecuaciones resultantes del capítulo anterior es necesario reescribir estas en su forma variacional o débil, lo cual es simplemente otra forma de representarlas de manera integral, pero como se ha mencionado, ahora pueden ser manejadas mediante métodos de álgebra lineal para obtener su solución.

Una herramienta clave para convertir las ecuaciones de continuidad y momentum a su forma variacional es el uso de las fórmulas de Green, las cuales se representan de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma} v \nabla u \cdot \bar{n} dS = \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega + \iint_{\Omega} v \Delta u d\Omega \quad (3.1)$$

$$\iint_{\Omega} (\nabla u) v d\Omega = - \iint_{\Omega} u (\nabla v) d\Omega + \int_{\Gamma} (\bar{n} u) v dS \quad (3.2)$$

En donde u representa una función y v su función auxiliar, además las integrales de línea muestran las condiciones sobre la frontera Γ , por otro lado las integrales superficie Ω se definen en un dominio bidimensional de X y Y , es decir $d\Omega = dXdY$.

Teniendo en cuenta que las condiciones de frontera para este sistema son tipo Dirichlet, es decir, se conoce el valor que la función debe tomar en la frontera, como se muestra en el capítulo 2; las integrales de línea sobre la frontera mostradas en el teorema de Green son igual a cero.

$$\int_{\Gamma} v \nabla u \cdot \bar{n} dS = 0$$

$$\int_{\Gamma} (\bar{n}u) v dS = 0$$

Reescribiendo el teorema de Green, las expresiones quedan como:

$$\iint_{\Omega} v \Delta u d\Omega = - \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega \quad (3.3)$$

$$\iint_{\Omega} (\nabla u) v d\Omega = - \iint_{\Omega} u (\nabla v) d\Omega \quad (3.4)$$

Se deben establecer variables auxiliares igual al número de ecuaciones que componen el sistema o al número de variables que se obtendrán con la solución de este. En este caso se consideran como variables las velocidades \tilde{u} , \tilde{v} y la presión \tilde{p} , por lo que las variables auxiliares a utilizar quedan definidas como u_a , v_a y p_a , las cuales se multiplican en la ecuación de momentum en X , la ecuación de momentum en Y y en la ecuación de continuidad, respectivamente.

Primero se comienza con la ecuación de continuidad, la cual se iguala a cero y posteriormente se multiplican las derivadas parciales de la expresión por la variable auxiliar p_a . Es importante resaltar que esta ecuación no cuenta con términos de presión, por lo que se hace la consideración de agregar un término \tilde{p} multiplicado por un escalar cuyo valor es tan pequeño que tiende a cero, $\phi = 1 \times 10^{-10}$. Cabe destacar que esta consideración es necesaria para el procesamiento del programa en FreeFEM++. Finalmente integrando respecto a una diferencial de área se tiene:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} + \phi \tilde{p} \right) p_a d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

Para el análisis en FreeFEM++ se debe declarar un valor temporal característico t_c que sirva de referencia en el programa para que el sistema diferencie entre re-

sultados obtenidos en una solución anterior, por ejemplo (\tilde{u}^m) y un resultado en una solución actual (\tilde{u}^{m+1}). Este valor característico se puede obtener mediante el valor de la longitud del microcanal L y la velocidad característica u_c .

$$t_c = \frac{L}{u_c}$$

Lo cual representa el tiempo desde la entrada al sistema hasta su salida, recordando que es únicamente un tiempo de referencia y al no ser el real, no afecta a los resultados obtenidos.

Finalmente reescribiendo la ecuación (3.5) para un momento de estudio actual se tiene:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} + \phi \tilde{p} \right) p_a d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

De igual manera para el caso de la ecuación de momentum en X se comienza igualando la expresión (2.19) a cero y multiplicando por su variable auxiliar u_a . Además se realiza una discretización en la parte temporal y de esta forma facilitar su manejo.

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon Re \left(\frac{\tilde{u}^{m+1} - \tilde{u}^m}{\Delta t} \right) + \epsilon Re \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \right. \\ & \quad - \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\ & \quad \left. - 2\epsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \epsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \right] u_a = 0 \end{aligned}$$

Para los términos convectivos temporales es de interés estudiar un momento o tiempo anterior y de esta manera poder referenciarse debido a la no linealidad.

Para el resto de los términos es de interés el estudio de la variable en un tiempo actualizado, por lo que:

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon Re \left(\frac{\tilde{u}^{m+1} - \tilde{u}^m}{\Delta t} \right) + \varepsilon Re \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \tilde{p}^{m+1}}{\partial X} \right. \\ & \quad - \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}^{m+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y^2} \right) \\ & \quad \quad \quad - 2\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) \right] u_a = 0 \end{aligned}$$

Integrando respecto a la diferencial de área Ω :

$$\begin{aligned} & \varepsilon Re \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\tilde{u}^{m+1} - \tilde{u}^m}{\Delta t} \right) + \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial Y} \right) \right] u_a d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{p}^{m+1}}{\partial X} u_a d\Omega \\ & \quad - \iint_{\Omega} \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}^{m+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y^2} \right) u_a d\Omega \\ & \quad \quad \quad - 2\varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} u_a d\Omega \\ & \quad - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) \right] u_a d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Lo cual es lo mismo que si se describiera:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{u}^{m+1}}{\Delta t} \right) u_a d\Omega - \varepsilon Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{u}^m - \Delta t \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial Y} \right) \right) u_a d\Omega \\
 + \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{p}^{m+1}}{\partial X} u_a d\Omega - \iint_{\Omega} \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}^{m+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y^2} \right) u_a d\Omega \\
 - 2\varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} u_a d\Omega \\
 - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) \right] u_a d\Omega = 0
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las fórmulas de Green desarrolladas anteriormente (3.3)- (3.4) y aplicándolas según corresponda en la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{u}^{m+1}}{\Delta t} \right) u_a d\Omega - \varepsilon Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{u}^m - \Delta t \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{u}^m}{\partial Y} \right) \right) u_a d\Omega \\
 - \iint_{\Omega} p^{m+1} \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial X} d\Omega + \iint_{\Omega} \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial Y} \right) d\Omega \\
 - 2\varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} u_a d\Omega \\
 - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) \right] u_a d\Omega = 0 \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Finalmente, para escribir la ecuación en su forma variacional dentro de la sintaxis manejada en FreeFEM++ se emplea el comando *convect* para los términos

convectivos en la ecuación (3.7), teniendo:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{u}^{m+1}}{\Delta t} \right) u_a d\Omega - \varepsilon Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^m, \tilde{v}^m], -\Delta t, \tilde{u}^m) u_a d\Omega \\
 & - \iint_{\Omega} \tilde{p}^{m+1} \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial X} d\Omega + \iint_{\Omega} \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial Y} \right) d\Omega \\
 & \quad - 2\varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} u_a d\Omega \\
 & - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) \right] u_a d\Omega = 0 \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Para el caso de la ecuación de momentum en Y , se sigue el mismo planteamiento, cuyo desarrollo se muestra en el Apéndice C, dando como resultado la siguiente ecuación variacional:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{v}^{m+1}}{\Delta t} \right) v_a d\Omega - \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{v}^m - \Delta t \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial Y} \right) \right) v_a d\Omega \\
 & - \iint_{\Omega} \tilde{p}^{m+1} \frac{\partial v_a}{\partial Y} d\Omega + \iint_{\Omega} \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial v_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial v_a}{\partial Y} \right) d\Omega \\
 & \quad - 2\varepsilon \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} v_a d\Omega \\
 & - \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) v_a d\Omega = 0 \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Y la forma variacional de la ecuación de momentum en Y utilizando el comando

convect:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{v}^{m+1}}{\Delta t} \right) v_a d\Omega - \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^m, \tilde{v}^m], -\Delta t, \tilde{v}^m) v_a d\Omega \\
 & - \iint_{\Omega} \tilde{p}^{m+1} \frac{\partial v_a}{\partial Y} d\Omega + \iint_{\Omega} \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial v_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial v_a}{\partial Y} \right) d\Omega \\
 & \quad - 2\varepsilon \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} v_a d\Omega \\
 & - \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) v_a d\Omega = 0 \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

3.3. Representación Gráfica

Una vez ingresado el código correspondiente al programa FreeFEM++, compilando y ejecutando se obtienen los resultados gráficos que se muestran a continuación.

La Figura 3.2, muestra el desarrollo de los perfiles de velocidades longitudinales adimensionales \tilde{u} a lo largo del microcanal de $X = 0$ a $X = 1$ y en un rango transversal que va desde la línea media $Y = 0$ hasta la pared $Y = 1$, para el caso de un canal de paredes permeables y un fluido newtoniano, cuyos parámetros adimensionales son $n = 1.0$, $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Nótese como a la entrada del microcanal el caudal Q es mayor que el caudal de salida, sobretodo por que el conjunto de velocidades \tilde{u} en la salida es menor, esto se debe a la pérdida de flujo de forma transversal por la permeabilidad de la pared del microcanal. Así como lo muestran las ecuaciones de frontera, la velocidad \tilde{u} es mayor en el centro del microcanal y va disminuyendo al acercarse a la pared $Y = 1$, tanto por cuestiones de condiciones de no deslizamiento como por la fuga de fluido debido a la permeabilidad de la pared. Es importante recordar que las cifras numéricas mostradas en la Figura 3.2 no representan valores concretos de la velocidad \tilde{u} , ya que al ser adimensional, el 0 es el valor mínimo que puede tomar y el 1 es el valor máximo característico, pero no se limita únicamente a este, ya que como se observa en estas figuras y en las del Capítulo 4, se pueden

llegar a tener valores adimensionales mayores a 1.

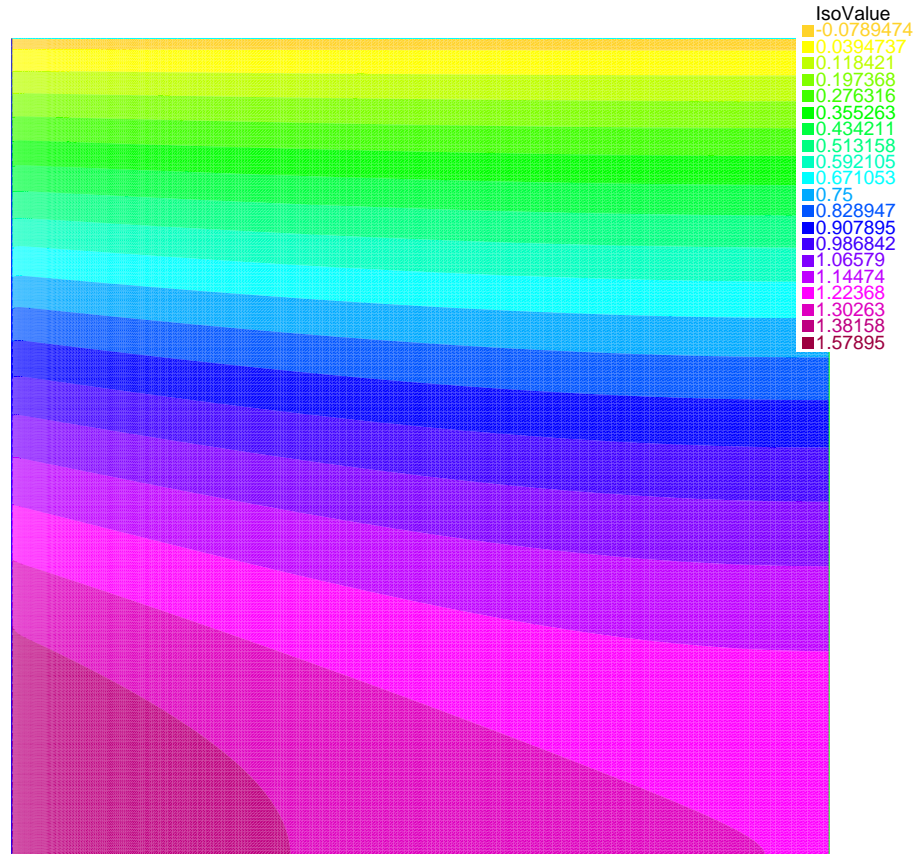


Figura 3.2: Desarrollo del perfil de velocidades \tilde{u} a lo largo del microcanal, así como desde la línea media hasta la pared superior. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$.

La Figura 3.3, muestra el desarrollo de los perfiles de velocidades transversales adimensionales \tilde{v} a lo largo del microcanal de $X = 0$ a $X = 1$ y en un rango transversal que va desde la línea media $Y = 0$ hasta la pared $Y = 1$, para el caso de un canal de paredes permeables y un fluido newtoniano, cuyos parámetros adimensionales son $n = 1.0$, $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Se muestra conforme a lo esperado en las condiciones de frontera que las velocidades \tilde{v} se encuentren en la parte superior ya que están cercanas a la pared del microcanal $Y = 1$, en donde se encuentra la pérdida de flujo transversal, y en esta parte superior, las velocidades mayores en dirección transversal se encuentran en el lado izquierdo, ya que es donde aún existe un mayor flujo, pero conforme

este disminuye, por condiciones de conservación, la velocidad \tilde{v} igual lo hace, inclusive también la velocidad \tilde{u} . Las menores velocidades como se muestra en la Figura 3.3 se encuentran en la parte inferior $Y = 0$, ya que aquí los efectos de la permeabilidad de la pared no tienen ninguna reacción en el fluido de trabajo, de igual forma a la salida del microcanal en $X = 1$. Es importante destacar que aunque exista una variedad de velocidades \tilde{v} , estas son muy pequeñas en comparación a las velocidades \tilde{u} .

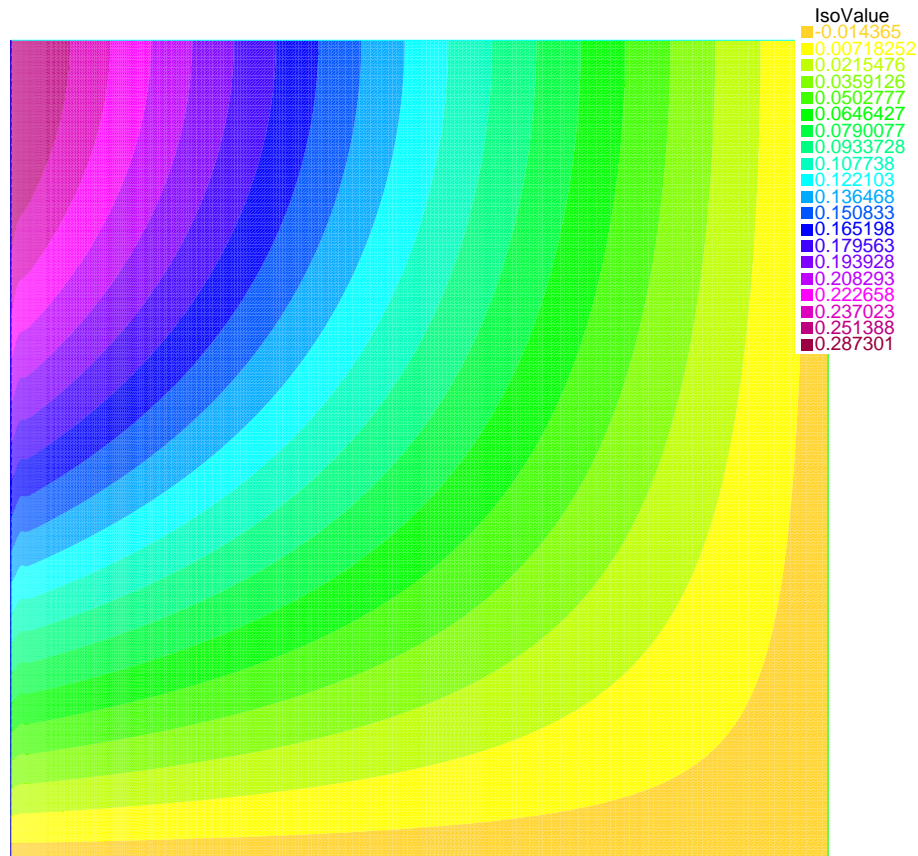


Figura 3.3: Desarrollo del perfil de velocidades \tilde{v} a lo largo del microcanal, así como desde la línea media hasta la pared superior. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $\beta = 1 \times 10^{-5}$ $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$.

La Figura 3.4, muestra el desarrollo del campo de presiones adimensionales \tilde{p} a lo largo del microcanal de $X = 0$ a $X = 1$ y en un rango transversal que va desde la línea media $Y = 0$ hasta la pared $Y = 1$, para el caso de un canal de paredes permeables y un fluido newtoniano, cuyos parámetros adimensionales

son $n = 1.0$, $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Se observa que la presión mayor se encuentra a la entra del microcanal $X = 0$ y la presión mínima se encuentra a la salida de este $X = 1$, esta diferencia de presiones permite el deslizamiento del fluido a través del microcanal. También es importante mencionar que la presión \tilde{p} varía únicamente en dirección longitudinal, es decir se relaciona con X y no tiene cambios respecto a Y , lo cual se corrobora en las ecuaciones mostradas en el Capítulo 2, dónde se describía la variación de la presión para la coordenada longitudinal.

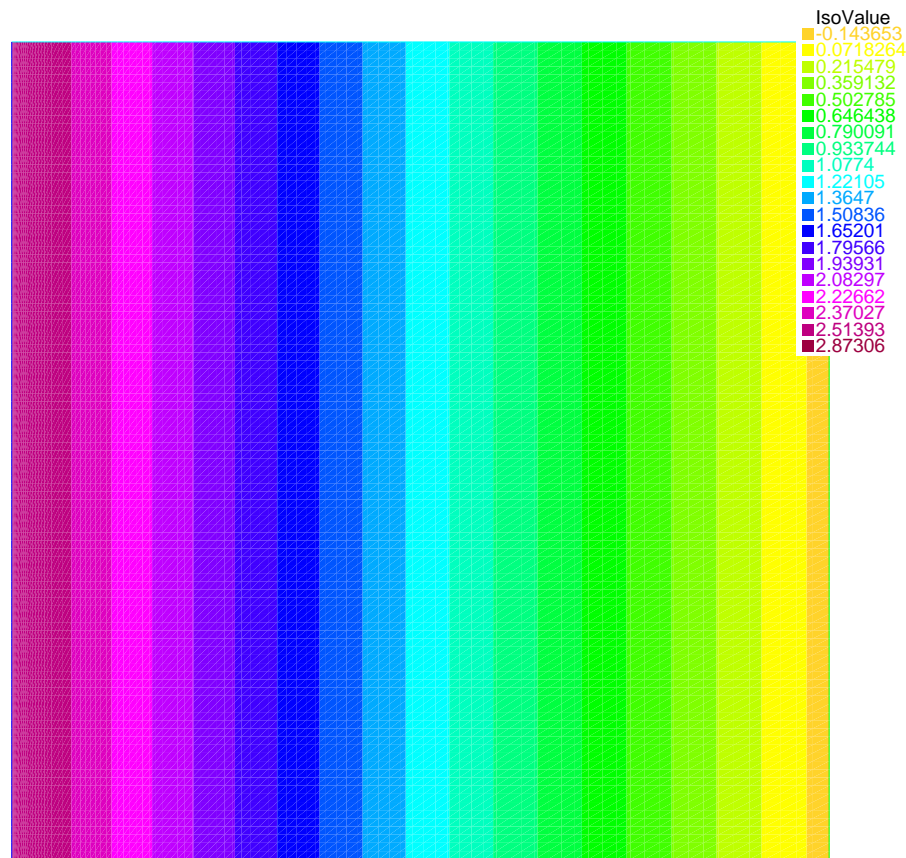


Figura 3.4: Desarrollo del campo de presión \tilde{p} a lo largo del microcanal, así como desde la línea media hasta la pared superior. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$.

En el siguiente capítulo se presentan los resultados más representativos del proyecto mediante un análisis cuantitativo y cualitativo.

CAPÍTULO

4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En la figura 4.1, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores del parámetro adimensional β , en $X = 0.6$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{u} alcanza un valor máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$), mientras que alcanza un valor mínimo igual a cero en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$) como consecuencia de la condición de no deslizamiento. Los perfiles muestran un comportamiento parabólico. Un aspecto importante a considerar es que $n = 1.0$, lo que significa que estamos en el caso de un fluido newtoniano. Es importante resaltar este punto ya que para un fluido newtoniano a valores creciente del parámetro adimensional β , la velocidad en la dirección longitudinal decrece. Este comportamiento se debe a que el parámetro β representa de manera adimensional el permeado del fluido a través de las paredes del microcanal y por ende, al aumentar la fuga en la dirección transversal, por conservación, la velocidad en la dirección longitudinal disminuye, alcanzando su valor mínimo al centro del microcanal cuando $\beta = 3 \times 10^{-5}$. Cabe aclarar que todas las gráficas que se van a presentar fueron evaluadas en $X = 0.6$, la razón es porque a dife-

rentes valores de la dirección longitudinal, el comportamiento hidrodinámico es el mismo.

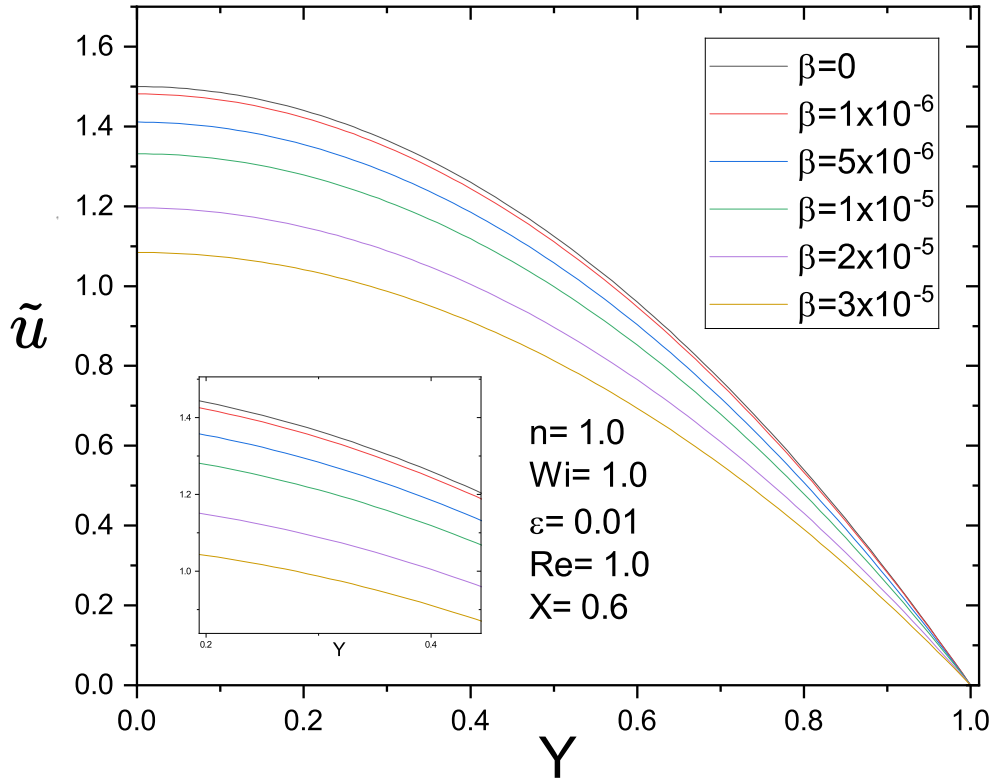


Figura 4.1: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.

En la figura 4.2, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores del parámetro adimensional β , en $X = 0.8$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{u} alcanza un valor máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$), mientras que alcanza un valor mínimo igual a cero en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$) como consecuencia de la condición de no deslizamiento. Los perfiles muestran un comportamiento parabólico. Un aspecto importante a con-

siderar es que $n = 0.8$, lo que significa reológicamente que estamos en el caso de un fluido no newtoniano. Es importante resaltar este punto ya que se muestra como a valores crecientes del parámetro adimensional β , la velocidad en la dirección longitudinal decrece, similar al de las figuras 4.1. Este comportamiento se debe a que el parámetro β representa de manera adimensional el permeado del fluido a través de las paredes del microcanal y por ende, al aumentar la fuga en la dirección transversal, por conservación, la velocidad en la dirección longitudinal disminuye, alcanzando su valor mínimo al centro del microcanal cuando $\beta = 3 \times 10^{-5}$. Se observa como el máximo valor de \tilde{u} en $\beta = 0$ es menor que el que se da para la figura 4.1, por otro lado el valor máximo de \tilde{u} en $\beta = 3 \times 10^{-5}$ (que es el valor máximo más pequeño entre todos los β) es ligeramente mayor que el que se tiene en la figura 4.1.

En la figura 4.3, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores del parámetro adimensional β , en $X = 0.6$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{u} alcanza un valor máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$), mientras que alcanza un valor mínimo igual a cero en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$) como consecuencia de la condición de no deslizamiento. Los perfiles muestran un comportamiento parabólico. Un aspecto importante a considerar es que $n = 0.6$, lo que significa reológicamente que estamos en el caso de un fluido no newtoniano. Es importante resaltar este punto ya que se muestra como a valores crecientes del parámetro adimensional β , la velocidad en la dirección longitudinal decrece, similar al de las figuras 4.1 y 4.2. Este comportamiento se debe a que el parámetro β representa de manera adimensional el permeado del fluido a través de las paredes del microcanal y por ende, al aumentar la fuga en la dirección transversal, por conservación, la velocidad en la dirección longitudinal disminuye, alcanzando su valor mínimo al centro del microcanal cuando $\beta = 3 \times 10^{-5}$. Se observa como el máximo valor de \tilde{u} en $\beta = 0$ es menor que el que se da para la figura 4.2, por otro lado el valor máximo de \tilde{u} en $\beta = 3 \times 10^{-5}$ (que es el valor máximo más pequeño entre todos los β) es ligeramente mayor que el que se tiene en la figura 4.2. Se nota como la diferencia entre la velocidad \tilde{u} al centro del microcanal variando el parámetro n para cada respectivo β es diferente, es decir, para $\beta = 0$ estas diferencias son considerablemente mayores

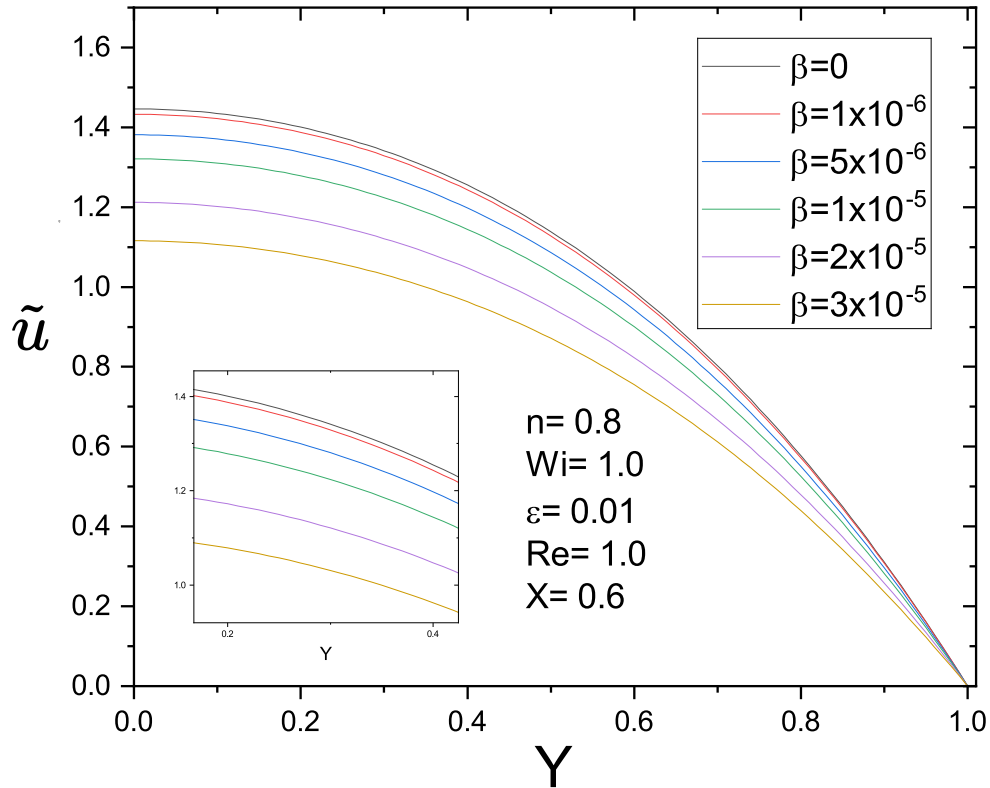


Figura 4.2: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.8$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.

que las que se perciben en $\beta = 3 \times 10^{-5}$. También, al disminuir el valor de n para $\beta = 0$, $\beta = 1 \times 10^{-6}$, $\beta = 5 \times 10^{-6}$ y $\beta = 1 \times 10^{-5}$ en el centro del microcanal la velocidad \tilde{u} va disminuyendo, caso contrario para $\beta = 3 \times 10^{-5}$ cuya velocidad \tilde{u} va en aumento, por otro lado el comportamiento de $\beta = 2 \times 10^{-5}$ difiere a lo descrito en los dos casos anteriores, puesto que el valor de la velocidad longitudinal disminuye en la segunda gráfica respecto la primera pero vuelve a aumentar como se muestra en la figura 4.3.

En la figura 4.4, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 5 valores del parámetro adi-

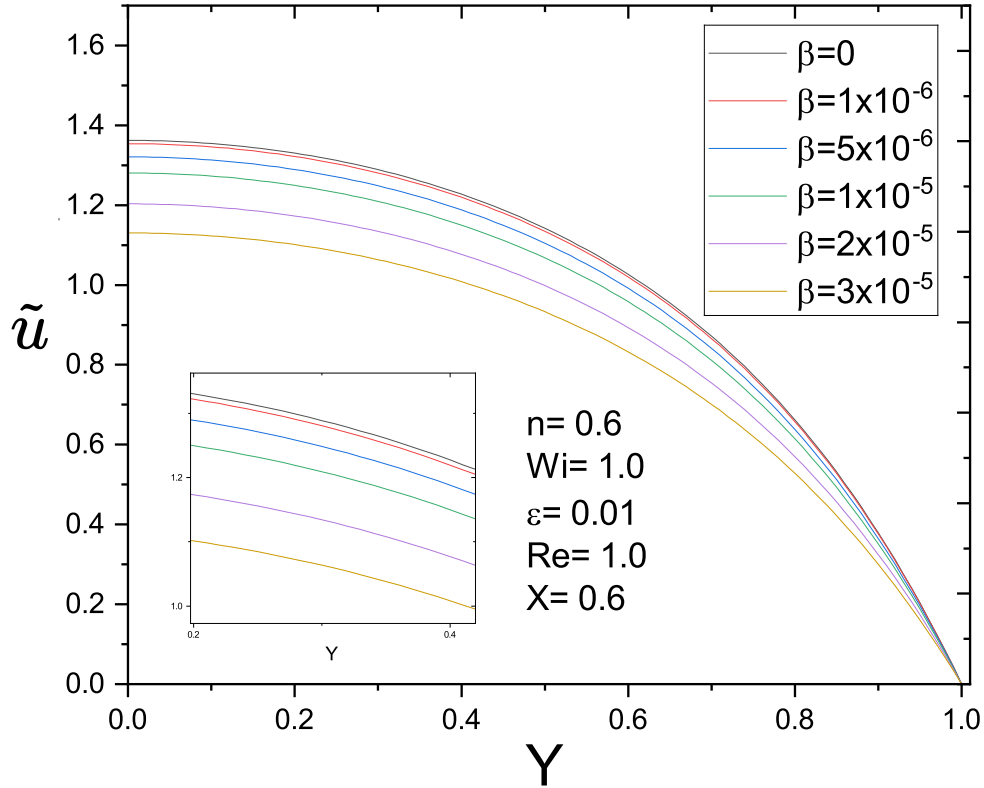


Figura 4.3: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.

mensional n , en $X = 0.6$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{u} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo en el centro del microcanal ($Y = 0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$) como consecuencia de la condición de no deslizamiento. Los perfiles muestran un comportamiento parabólico. Se observa que al considerarse un fluido newtoniano $n = 1.0$ se tiene la mayor velocidad \tilde{u} respecto al resto de perfiles de fluidos no newtonianos en el centro del microcanal, teniéndose una relación directamente proporcional entre el valor reológico de n y la velocidad \tilde{u} en ($Y = 0$). Durante el desarrollo de los perfiles

de velocidades se muestra una disminución de \tilde{u} más pronunciado en el fluido newtoniano que para el resto, dándose en el siguiente orden $n = 0.9, n = 0.8, n = 0.7, n = 0.6$. Finalmente se nota que no existe un punto en el cual converjan todos los perfiles de velocidad durante su desarrollo, a excepción de la pared en ($Y = 1.0$)

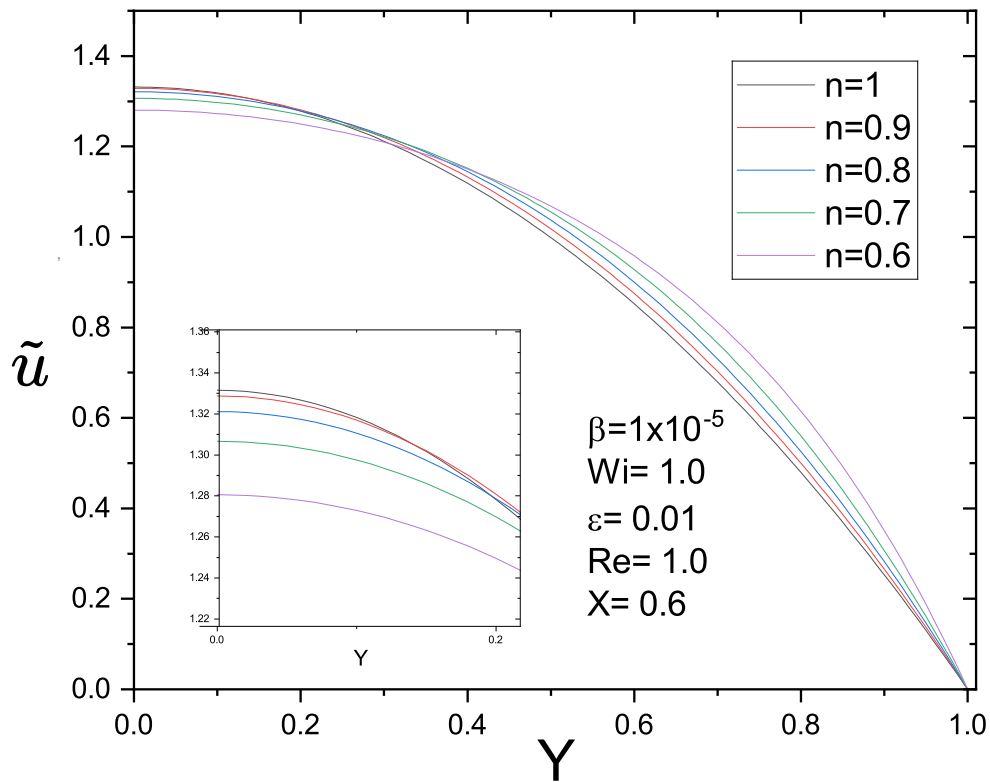


Figura 4.4: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{u} como una función de la coordenada transversal Y para 5 valores diferentes de n . Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.

En la figura 4.5, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores del parámetro adimensional β , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{v} alcanza un valor máximo en la entrada del microcanal ($X = 0$),

mientras que alcanza un valor mínimo igual a cero en la salida del microcanal ($X = 1.0$) como consecuencia de la pérdida de flujo de forma transversal a lo largo del microcanal. Los perfiles muestran un comportamiento no lineal decreciente. Un aspecto importante a considerar es que $n = 1.0$, lo que significa que estamos en el caso de un fluido newtoniano. Cabe aclarar que todas las gráficas que se van a presentar fueron evaluadas en $Y = 0$, la razón es porque se aprecia de mejor manera el comportamiento de la velocidad transversal \tilde{v} a lo largo de las paredes del microcanal. Notese la tendencia de los perfiles de cada uno de los valores del parámetro adimensional β , el cual representa el permeado del fluido a través de las paredes del microcanal, para $\beta = 0$ la velocidad \tilde{v} es cero en todo momento, ya que al no existir una fuga transversal en las paredes la velocidad en este sentido es nula. Por otro lado al aumentar el valor de β la velocidad \tilde{v} es mayor a la entrada del microcanal, como en el caso de $\beta = 3 \times 10^{-5}$. Es decir, \tilde{v} en $X = 0$ es directamente proporcional a β .

En la figura 4.6, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores del parámetro adimensional β , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.8$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{v} alcanza un valor máximo en la entrada del microcanal ($X = 0$), mientras que alcanza un valor mínimo igual a cero en la salida del microcanal ($X = 1.0$) como consecuencia de la pérdida de flujo de forma transversal a lo largo del microcanal. Los perfiles muestran un comportamiento no lineal decreciente. Un aspecto importante a considerar es que $n = 0.8$, lo que reológicamente se interpreta como el caso de un fluido no newtoniano. Notese la tendencia de los perfiles de cada uno de los valores del parámetro adimensional β , el cual representa el permeado del fluido a través de las paredes del microcanal, para $\beta = 0$ la velocidad \tilde{v} es cero en todo momento, ya que al no existir una fuga transversal en las paredes la velocidad en este sentido es nula, teniéndose un flujo Poiseulle. Por otro lado al aumentar el valor de β la velocidad \tilde{v} es mayor a la entrada del microcanal, como en el caso de $\beta = 3 \times 10^{-5}$. Es decir, \tilde{v} en $X = 0$ es directamente proporcional a β . También es importante observar que las velocidades iniciales \tilde{v} en la Figura 4.6 de cada respectiva β son menores en comparación a los mostrados en la Figura 4.5. Además las diferencias iniciales entre unos perfiles y otros respectivamente son mayores entre mayor es el valor

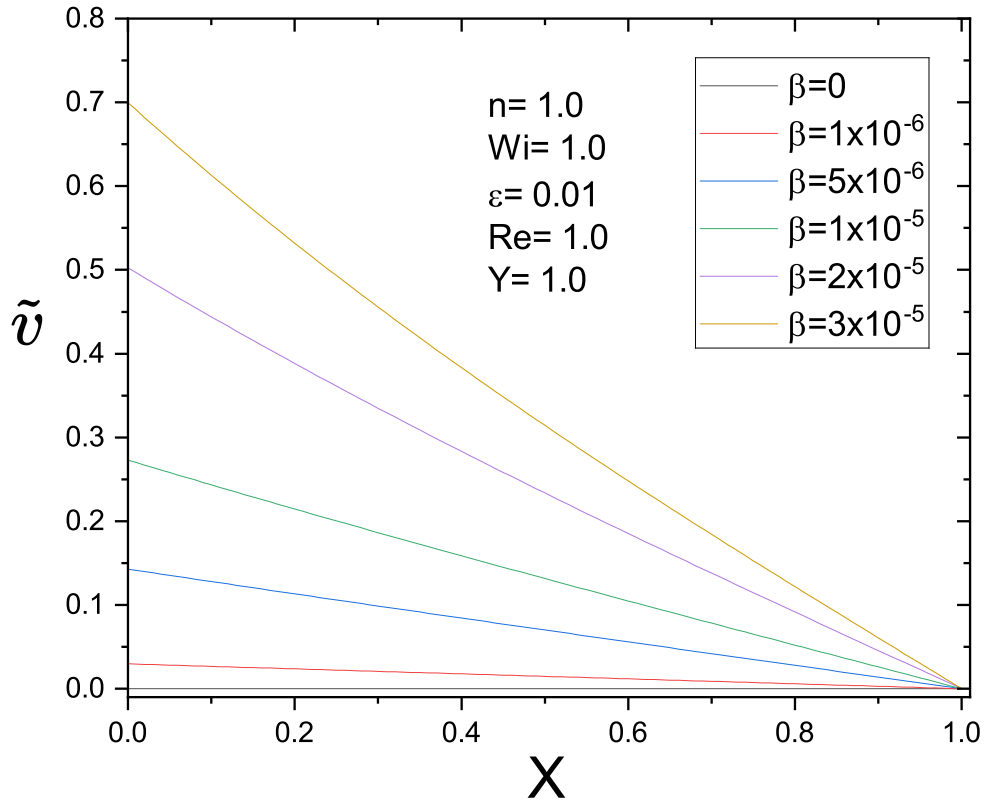


Figura 4.5: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

de β .

En la figura 4.7, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores del parámetro adimensional β , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{v} alcanza un valor máximo en la entrada del microcanal ($X = 0$), mientras que alcanza un valor mínimo igual a cero en la salida del microcanal ($X = 1.0$) como consecuencia de la pérdida de flujo de forma transversal a lo largo del microcanal. Los perfiles muestran un comportamiento no lineal decre-

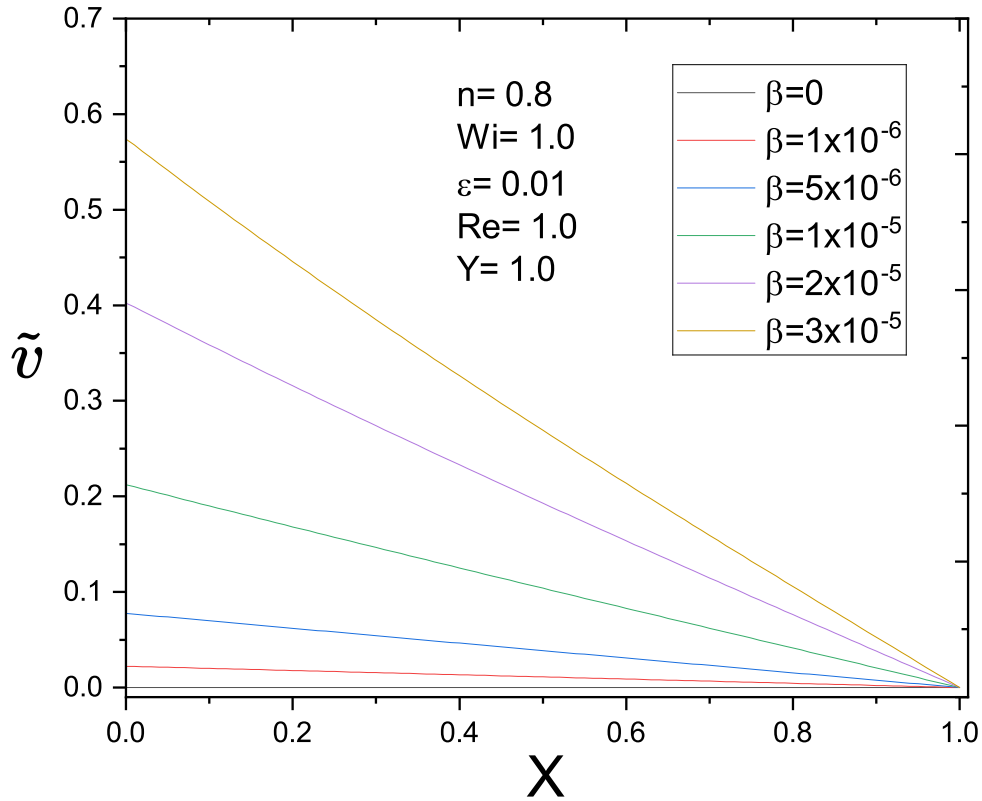


Figura 4.6: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.8$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

ciente. Un aspecto importante a considerar es que $n = 0.6$, lo que reológicamente se interpreta como el caso de un fluido no newtoniano. Notese la tendencia de los perfiles de cada uno de los valores del parámetro adimensional β , el cual representa el permeado del fluido a través de las paredes del microcanal, para $\beta = 0$ la velocidad \tilde{v} es cero en todo momento, ya que al no existir una fuga transversal en las paredes la velocidad en este sentido es nula, teniéndose un flujo Poiseuille. Por otro lado al aumentar el valor de β la velocidad \tilde{v} es mayor a la entrada del microcanal, como en el caso de $\beta = 3 \times 10^{-5}$. Es decir, \tilde{v} en $X = 0$ es directamente proporcional a β . También es importante observar que las velocidades iniciales \tilde{v} en la Figura 4.7 de cada respectiva β son menores en

comparación a los mostrados en la Figura 4.6. Además las diferencias iniciales entre unos perfiles y otros respectivamente son más grandes entre mayor es el valor de β . Esta tercer gráfica de \tilde{v} contra X corrobora que al tener un valor pequeño de n en general la velocidad transversal al inicio del microcanal va a ser menor, por lo que existe una importante relación entre esta velocidad y el valor reológico n .

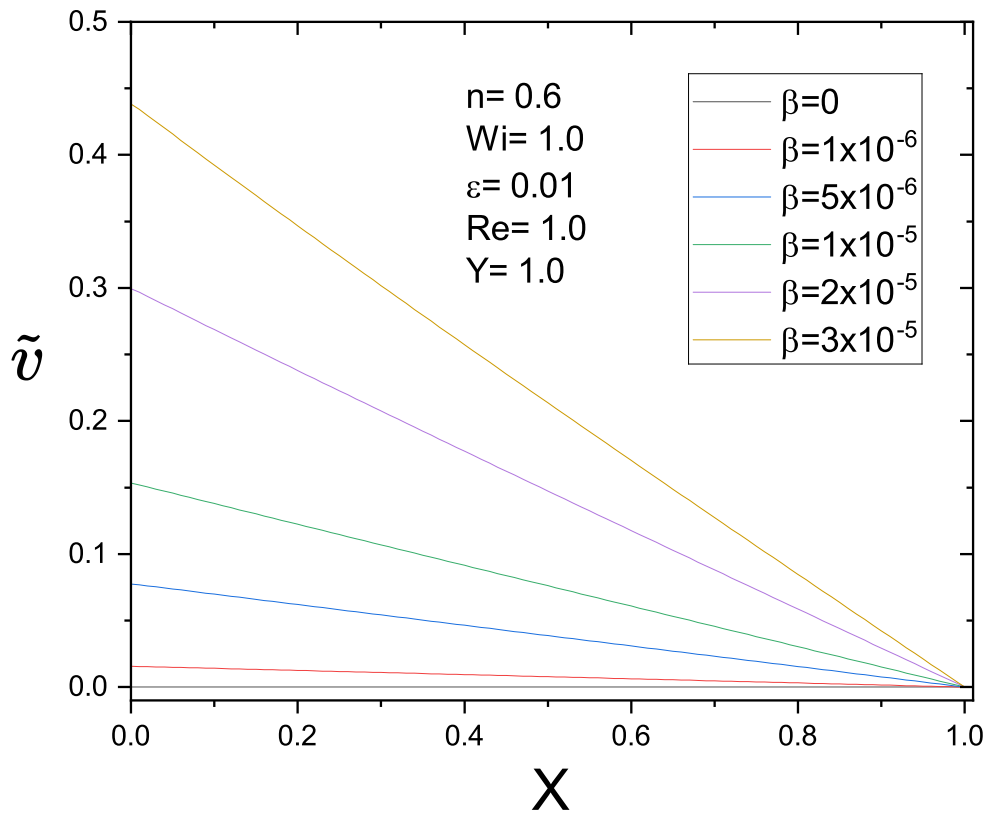


Figura 4.7: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\epsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

En la figura 4.8, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 5 valores del parámetro adimensional n , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\epsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la fi-

gura, la velocidad \tilde{v} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo en la entrada del microcanal ($X = 0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en la salida del microcanal ($X = 1.0$) como consecuencia de la pérdida de flujo en dirección transversal. Los perfiles muestran un comportamiento decreciente. Se observa que al considerarse un fluido newtoniano $n = 1.0$ se tiene la mayor velocidad \tilde{v} respecto al resto de perfiles de fluidos no newtonianos en la entrada del microcanal, y conserva ese comportamiento, teniéndose una relación directamente proporcional entre el valor reológico de n y la velocidad \tilde{v} en ($Y = 1.0$). Durante el desarrollo de los perfiles de velocidades se muestra una disminución de \tilde{u} más pronunciado en el fluido newtoniano que para el resto, dándose en el siguiente orden $n = 0.9, n = 0.8, n = 0.7, n = 0.6$. Finalmente se nota que no existe un punto en el cual converjan todos los perfiles de velocidad durante su desarrollo, a excepción de la pared en ($Y = 1.0$)

En la figura 4.9, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores del parámetro adimensional β , en $X = 0.6$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0, Wi = 1.0, \varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{v} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en el centro del microcanal ($Y = 0$), a excepción de $\beta = 0$ donde se tiene un valor constante de cero en toda la distancia transversal, como consecuencia de que al no existir permeabilidad, no se tiene una pérdida de flujo transversal y por eso la velocidad \tilde{v} en esa distancia es nula, lográndose un flujo tipo Poiseuille. Los perfiles a excepción del caso que no existe permeabilidad muestran un comportamiento parabólico. Es importante considerar que el parámetro $n = 1.0$ nos muestra un comportamiento de fluido newtoniano, además se debe destacar, que al aumentar el valor de la permeabilidad los perfiles adquieren un valor mayor en la velocidad \tilde{v} , esto se debe a que β es directamente proporcional al aumento del caudal de fuga en dirección transversal al microcanal. Las gráficas presentadas a continuación son evaluadas en ($X = 0.6$) ya que a lo largo del microcanal en dirección longitudinal el comportamiento es el mismo.

En la figura 4.10, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores del parámetro adi-

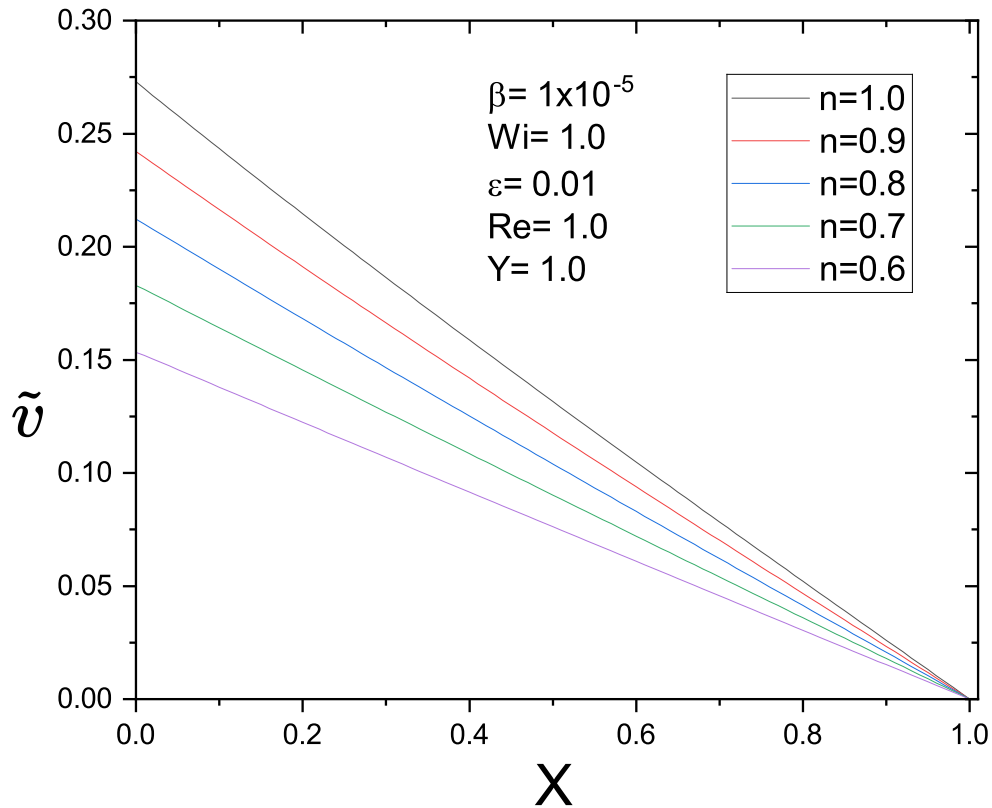


Figura 4.8: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada longitudinal X para 5 valores diferentes de n . Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

mensional β , en $X = 0.6$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.8$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{v} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en el centro del microcanal ($Y = 0$), a excepción de $\beta = 0$ dónde se tiene un valor constante de cero en toda la distancia transversal, como consecuencia de que al no existir permeabilidad, no se tiene una pérdida de flujo transversal y por eso la velocidad \tilde{v} en esa distancia es nula, lográndose un flujo tipo Poiseuille. Los perfiles a excepción del caso que no existe permeabilidad muestran un comportamiento parabólico. Es importante considerar que el parámetro $n = 0.8$

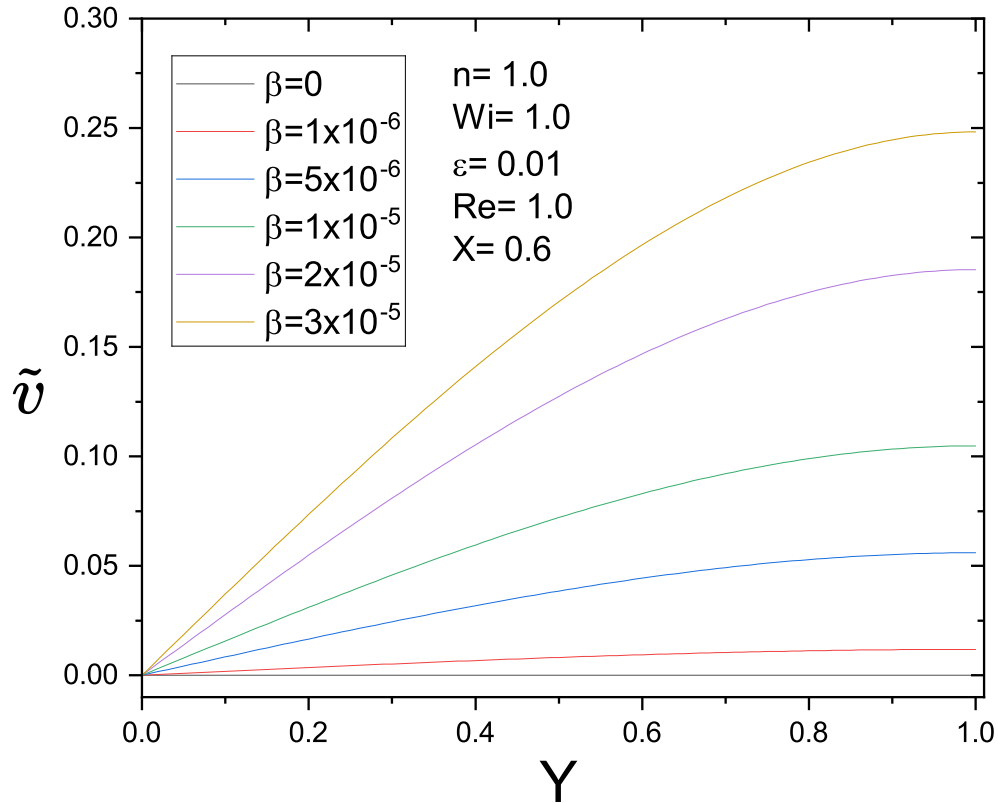


Figura 4.9: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $Wi = 1.0$, $\epsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.

nos muestra un comportamiento de fluido no newtoniano, además se debe destacar, que al aumentar el valor de la permeabilidad los perfiles adquieren un valor mayor en la velocidad \tilde{v} , esto se debe a que β es directamente proporcional al aumento del caudal de fuga en dirección transversal al microcanal. La razón por la que todos los perfiles inician con un valor inicial de $\tilde{v} = 0$ es que los efectos de la pérdida de flujo en dirección transversal no llegan a repercutir en la línea media del microcanal. Obsérvese como con un valor menor de n los valores máximos de velocidades transversales son menores respecto a los mostrados en la figura 4.9, las diferencias que se tienen entre la figura 4.10 y 4.9 son mayores entre mas grande sea el valor del parámetro β .

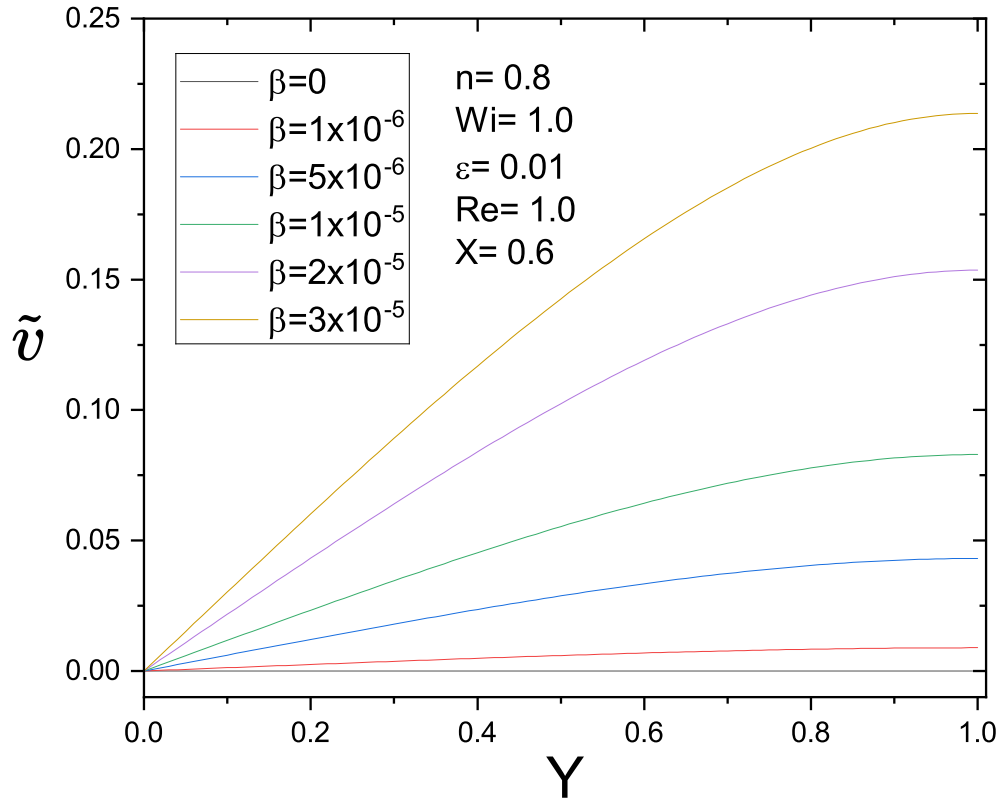


Figura 4.10: *Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.8$, $Wi = 1.0$, $\epsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.*

En la figura 4.11, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores del parámetro adimensional β , en $X = 0.6$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\epsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{v} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en el centro del microcanal ($Y = 0$), a excepción de $\beta = 0$ dónde se tiene un valor constante de cero en toda la distancia transversal, como consecuencia de que al no existir permeabilidad, no se tiene una pérdida de flujo transversal y por ende la velocidad \tilde{v} en esa distancia es nula, lográndose un flujo tipo Poiseui-

lle. Los perfiles a excepción del caso que no existe permeabilidad muestran un comportamiento parabólico. Es importante considerar que el parámetro $n = 0.6$ nos muestra un comportamiento de fluido no newtoniano, además se debe destacar, que al aumentar el valor de la permeabilidad los perfiles adquieren un valor mayor en la velocidad \tilde{v} , esto se debe a que β es directamente proporcional al aumento del caudal de fuga en dirección transversal al microcanal. Obsérvese como con un valor menor de n los valores máximos de velocidades transversales son menores respecto a los mostrados en la figura 4.10 y 4.9, las diferencias que se tienen entre la figura 4.10 y 4.11 son mayores entre mas grande sea el valor del parámetro β . Con ello se demuestra que n es directamente proporcional al valor máximo de \tilde{v} en cualquier valor de β exceptuando el caso de que no exista fuga transversal en las paredes.

En la figura 4.12, se muestran los perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 5 valores del parámetro adimensional n , en $X = 0.6$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la velocidad \tilde{v} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo en las paredes del microcanal ($Y = 1.0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en el centro del microcanal ($Y = 0$). Los perfiles muestran un comportamiento parabólico. Esta figura muestra de mejor forma lo comentado en la figura 4.11, donde el valor máximo de las velocidades para un β determinado es directamente proporcional al valor de n , dónde el fluido newtoniano alcanza las mayores velocidades transversales a lo largo de Y .

En la figura 4.13, se muestran los perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores del parámetro adimensional β , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la presión \tilde{p} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo al inicio del microcanal ($X = 0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en la salida del microcanal ($X = 1.0$), es importante recordar que al decir que el valor es cero no significa que esto valga la presión, ya que al ser una presión adimensional simplemente significa que es el valor mínimo. Los perfiles tienen un comportamiento decreciente como consecuencia de la diferencia de presión

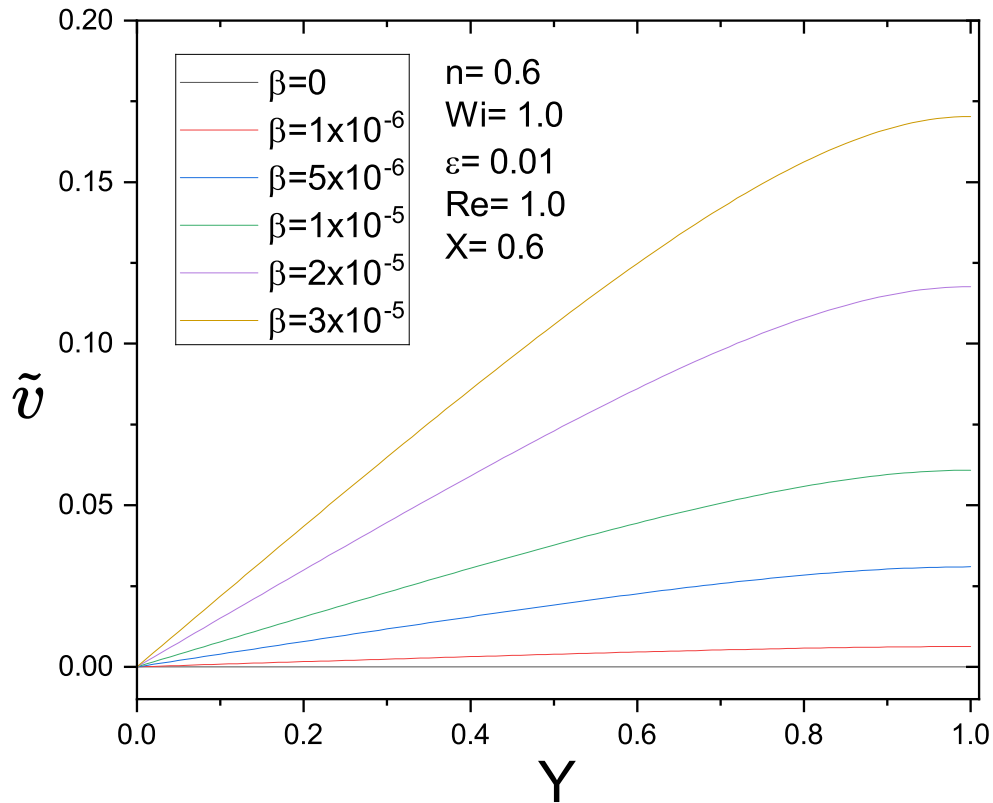


Figura 4.11: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\epsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.

entre la entrada y la salida del microcanal, lo que permite el flujo del fluido de trabajo, ya que si la presión fuera constante no existirían movimiento alguno. Es importante destacar que se trabaja en un valor de $n = 1.0$ lo que significa que se trata de un fluido newtoniano. Obsérvese como en $\beta = 0$ que representa el caso donde no existe pérdida de flujo en dirección transversal, el perfil de presiones es lineal, por otro lado en los casos dónde existe fuga de fluido los perfiles de presiones no son completamente lineales, esto se muestra de mejor forma en $\beta = 3 \times 10^{-5}$. Nótese como la presión en ($X = 0$) es inversamente proporcional al parámetro β , debido a que entre mayor permeabilidad exista, se tiene una mayor pérdida de flujo transversal y por consecuencia una presión inicial menor.

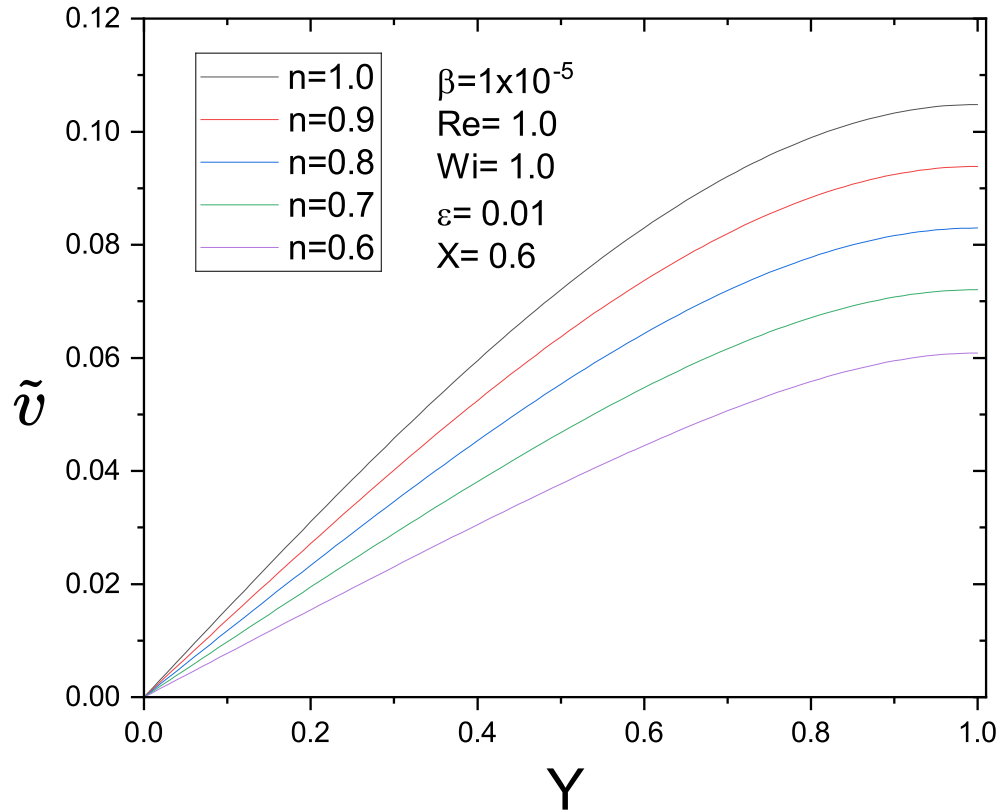


Figura 4.12: Perfiles de la velocidad adimensional \tilde{v} como una función de la coordenada transversal Y para 5 valores diferentes de n . Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada longitudinal $X = 0.6$.

Cómo consideración todas las gráficas mostradas a continuación se evaluaron en ($Y = 1.0$).

En la figura 4.14, se muestran los perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores del parámetro adimensional β , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.8$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura, la presión \tilde{p} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo al inicio del microcanal ($X = 0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en la salida del microcanal ($X = 1.0$), es importante recordar que al decir que el

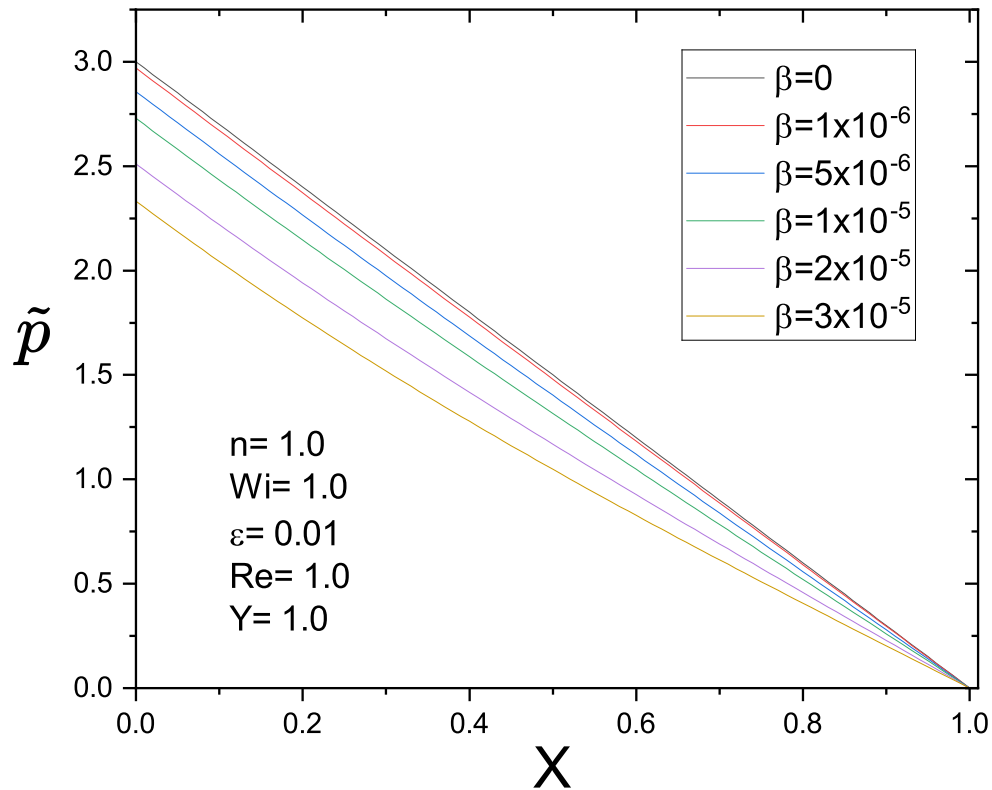


Figura 4.13: Perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 1.0$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

valor es cero no significa que esto valga la presión, ya que al ser una presión adimensional simplemente significa que es el valor mínimo. Los perfiles tienen un comportamiento decreciente como consecuencia de la diferencia de presión entre la entrada y la salida del microcanal. Es importante destacar que se trabaja en un valor de $n = 0.8$ lo que significa que se trata de un fluido no newtoniano. Obsérvese como en $\beta = 0$ que representa el caso donde no existe pérdida de flujo en dirección transversal, el perfil de presiones es lineal, por otro lado en los casos donde existe fuga de fluido los perfiles de presiones no son completamente lineales, esto se muestra de mejor forma en $\beta = 3 \times 10^{-5}$, sin embargo es menos pronunciada la curva respecto a la figura 4.13. Nótese como la presión

en ($X = 0$) es inversamente proporcional al parámetro β , debido a que entre mayor permeabilidad exista se tiene una mayor pérdida de flujo transversal y por consecuencia una presión inicial menor. Es de destacarse el hecho que al tener un valor menor de n respecto a la figura 4.13 los valores máximos de las presiones para todos los fluidos disminuyen pero a su vez entre ellos se muestran más cercanos.

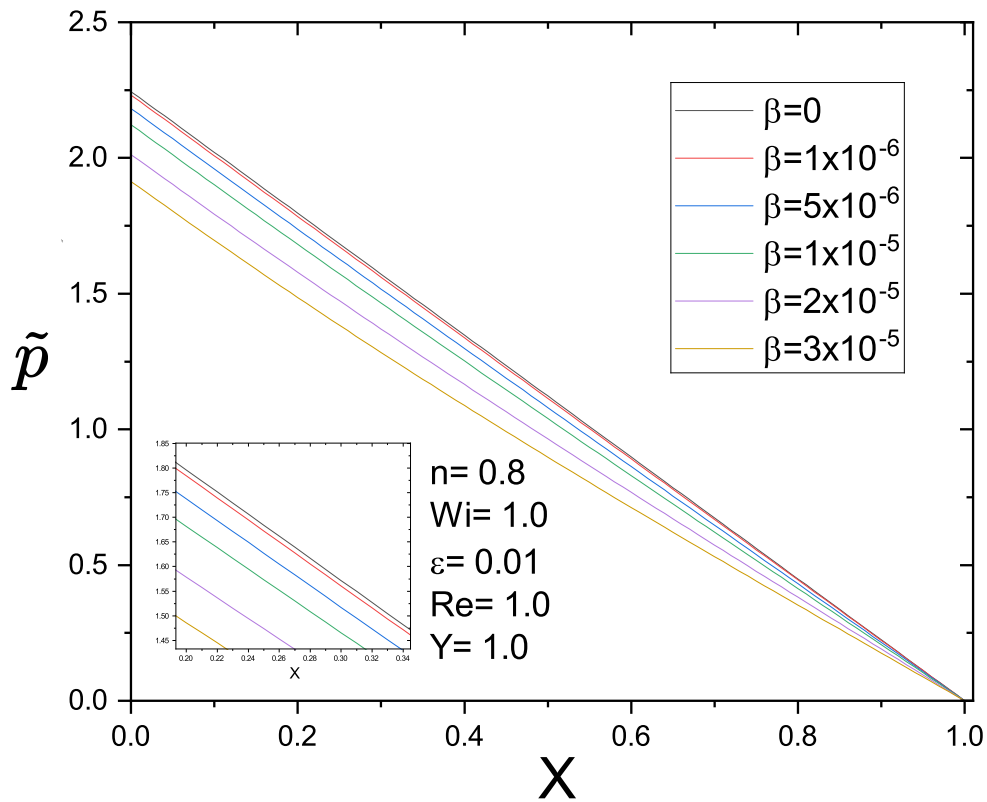


Figura 4.14: Perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.8$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

En la figura 4.15, se muestran los perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores del parámetro adimensional β , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura,

la presión \tilde{p} para cada uno de los perfiles alcanza un valor máximo al inicio del microcanal ($X = 0$), mientras que se tiene un valor mínimo igual a cero en la salida del microcanal ($X = 1.0$). Los perfiles tienen un comportamiento decreciente como consecuencia de la diferencia de presión entre la entrada y la salida del microcanal. Es importante destacar que se trabaja en un valor de $n = 0.6$ lo que significa que se trata de un fluido no newtoniano. Obsérvese como en $\beta = 0$ que representa el caso donde no existe pérdida de flujo en dirección transversal, el perfil de presiones es lineal, por otro lado en los casos donde existe fuga de fluido los perfiles de presiones no son completamente lineales, esto se muestra de mejor forma en $\beta = 3 \times 10^{-5}$, sin embargo es menos pronunciada la curva y casi podría percibirse lineal respecto a la figura 4.14 y 4.13. Nótese como la presión en ($X = 0$) es inversamente proporcional al parámetro β , debido a que entre mayor permeabilidad exista se tiene una mayor pérdida de flujo transversal y por consecuencia una presión inicial menor. Es de destacarse el hecho que al tener un valor menor de n respecto a la figura 4.14 los valores máximos de las presiones para todos los fluidos disminuyen pero a su vez entre ellos se muestran más cercanos.

En la figura 4.16, se muestran los perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 5 valores del parámetro adimensional n , en $Y = 1.0$. Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Como se puede apreciar en la figura la presión tiene una relación inversamente proporcional a la distancia longitudinal del microcanal, tanto por cuestiones necesarias para el desplazamiento del fluido, como de la existencia de una pérdida de caudal de forma transversal a lo largo de este. Los perfiles de presión mostrados en la figura 4.16 no son lineales aunque así pareciesen, esto se debe a que al existir una fuga en las paredes del microcanal la presión se ve afectada, al no permitir su disminución de forma lineal. Es importante observar como la presión máxima que se da a la entrada del microcanal es directamente proporcional al valor de n , donde el fluido newtoniano tiene el valor máximo de \tilde{p} .

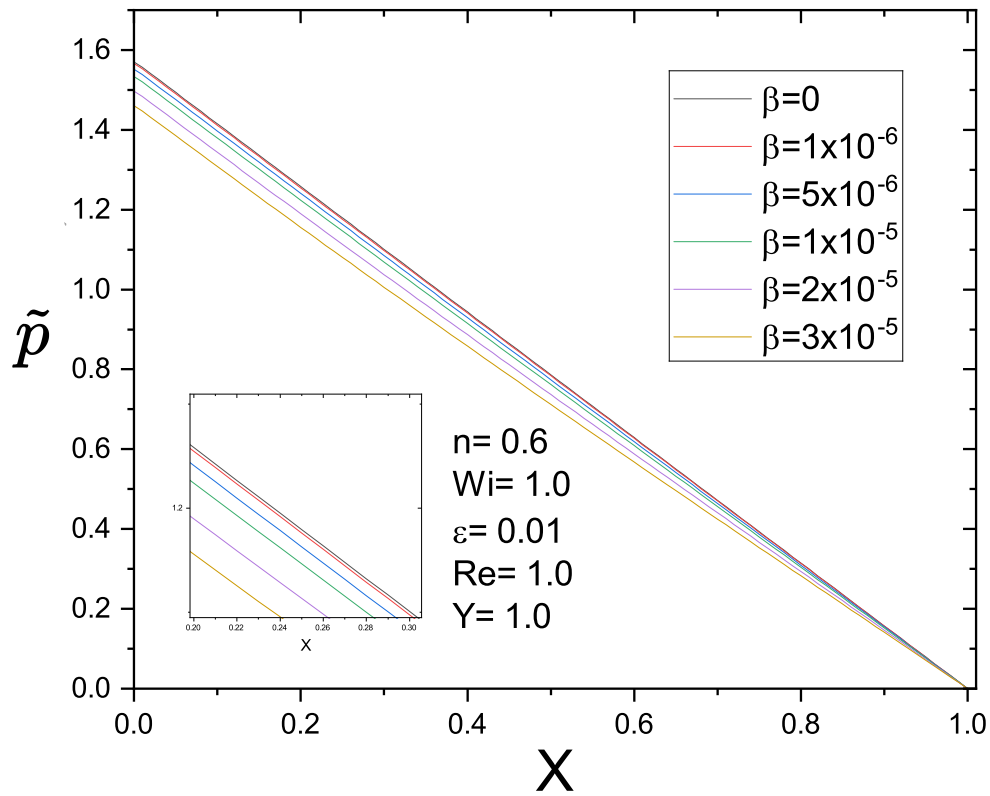


Figura 4.15: Perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 6 valores diferentes de β . Los valores de los parámetros adimensionales son: $n = 0.6$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

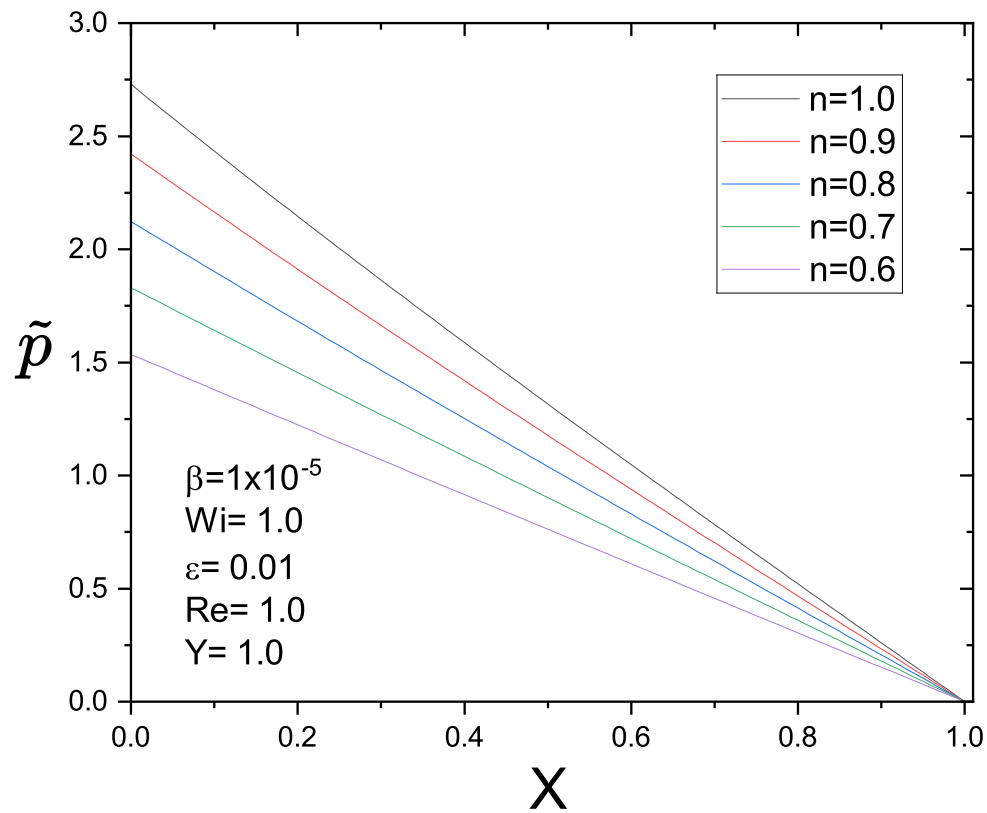


Figura 4.16: Perfiles de la presión adimensional \tilde{p} como una función de la coordenada longitudinal X para 5 valores diferentes de n . Los valores de los parámetros adimensionales son: $\beta = 1 \times 10^{-5}$, $Wi = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$ y $Re = 1.0$. Los perfiles fueron evaluados en la coordenada transversal $Y = 1.0$.

CAPÍTULO

5

CONCLUSIONES

En la presente tesis se desarrolló el estudio hidrodinámico de la sangre a través de un capilar, representado como un fluido no newtoniano que circula dentro de un microcanal de paredes permeables. Para ello se emplearon las ecuaciones de momentum y continuidad que son las que rigen el comportamiento dinámico de los fluidos, pero en dos dimensiones como parte de la simplificación del problema. Una vez desarrolladas las ecuaciones de Navies-Stokes y planteadas las condiciones de frontera para este sistema, se adimensionalizaron las expresiones y convirtieron en su forma variacional para su descripción dentro de la sintaxis del programa utilizado para el análisis, en este caso el software de uso libre FreeFEM++.

Como resultados del estudio hidrodinámico se obtuvo el perfil de velocidades longitudinal \tilde{u} y transversal \tilde{v} , así como el campo de presiones del sistema \tilde{p} de forma gráfica, y de igual manera el como influyen en el comportamiento de estas variables los valores de los parámetros como el permeado del fluido β , el índice de Ley de Potencia n , así como la posición transversal Y y longitudinal X del microcanal.

Entre los resultados más importantes para cada variable se tiene que en el caso de la velocidad longitudinal \tilde{u} su comportamiento es el mismo a lo largo del microcanal, pero si varia respecto a la distancia Y , ya que entre más cercano se esté de la pared la velocidad \tilde{u} disminuye debido a la condición de no deslizamiento al igual que la influencia de la pérdida de flujo de forma transversal, lo cual muestra que al aumentar el parámetro β por condición de conservación disminuye el caudal Q en dirección longitudinal y por ende la velocidad \tilde{u} es menor. De igual forma \tilde{u} y el valor de n , tienen una relación directamente proporcional durante la entrada del microcanal.

Para el caso de la velocidad transversal \tilde{v} se tienen variaciones respecto a X y Y únicamente cuando existe una permeabilidad β diferente de cero, como se muestra gráficamente al igual que en las condiciones de frontera. Esto se debe que al no existir permeabilidad en las paredes del microcanal no se cuenta con un flujo transversal, por lo que se tiene un flujo Poiseuille en donde $\tilde{v} = 0$ para cualquier punto del sistema. Por otra parte, al tener una pérdida de flujo transversal, la velocidad \tilde{v} ira en incremento entre más cerca se encuentre de la pared, teniéndose en $Y = 1.0$ la zona de mayor velocidad en dirección transversal. Considerando toda el área del microcanal donde $Y = 1.0$, la velocidad \tilde{v} decrece entre más se acerque a la salida del microcanal $X = 1.0$, esto se debe a que al irse perdiendo flujo en dirección y a lo largo del microcanal disminuye el caudal que fluye de forma longitudinal, es decir, es menor la cantidad de caudal de fuga transversal cercano a la salida que respecto a la entrada donde se tiene el caudal inicial Q_0 , cuyo valor es el máximo; recordando que todo esto es cuando se tiene $\beta > 0$.

Para el caso de la presión \tilde{p} , tanto en las ecuaciones como en las figuras mostradas en el Capítulo 3 y 4 se muestra como esta variable únicamente varia en dirección longitudinal y no de forma transversal al microcanal. Al existir esta diferencia de presión entre la entrada y la salida se garantiza el movimiento del fluido de trabajo de la zona de mayor presión ($X = 0$) a la zona de menor presión ($X = 1.0$).

Finalmente, como conclusión, se tiene que el modelo planteado tanto de forma analítica así como en el software FreFEM++ cumple con los resultados espera-

dos en su análisis fluidodinámico. Al estar correctamente modelado se esperan futuras investigaciones de este sistema teniendo consideraciones como el deslizamiento en las paredes o estudios más específicos como la dilatación u obstrucción de un capilar, pudiendo entender el comportamiento de la sangre en situaciones donde se tienen estas afecciones vasculares, apoyando al área de la salud desde un punto de vista ingenieril.

APÉNDICE

A

LEY DE LA VISCOSIDAD DE NEWTON

Para el caso de la ecuación de momentum en x , se sustituyen en la ecuación (2.2), las expresiones de cada uno de los términos del esfuerzo viscoso dados por la Ley de la viscosidad de Newton.

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

Desarrollando:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \right) + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \right) + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &+ \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 &+ \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \right) \\
 &+ \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Recordando la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \right) + \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Para el caso de la ecuación de momentum en y, se sustituyen en la ecuación

(2.3), las expresiones de cada uno de los términos del esfuerzo viscoso dados por la Ley de la viscosidad de Newton.

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

Desarrollando:

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \right) + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \right) + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Sabiendo que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \right) \\ &+ \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \eta (T_f, \dot{\gamma}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Recordando la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta (T_f, \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial y} \right) + \frac{\partial (\eta (T_f, \dot{\gamma}))}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial \left(\eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

APÉNDICE

B

ADIMENSIONALIZACIÓN DE ECUACIONES

Primero se toma en cuenta las expresiones que definen los parámetros adimensionales descritos en el Capítulo 2:

$$X = \frac{x}{L}; \quad Y = \frac{y}{H}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_c}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c}; \quad \tilde{p} = \frac{p - p_0}{\Delta p_c} \quad (\text{B.1})$$

Además, se considera el orden de magnitud de las siguientes variables:

$$\begin{aligned} x &\sim L; & y &\sim H; \\ u &\sim u_c; & v &\sim v_c \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

De las cuales se obtiene la expresión dada en la ecuación (2.15) al sustituir los

valores característicos en:

$$\frac{u_c}{L} \sim \frac{v_c}{H}$$

Teniendo que:

$$v_c = \frac{u_c H}{L} \quad (\text{B.3})$$

Finalmente se expresa la variable característica u_c en términos de variables físicas de la siguiente manera:

$$u_c = \frac{Q_0}{2HW} \quad (\text{B.4})$$

Ecuación de continuidad

Partiendo de la ecuación de continuidad (2.1), se sustituyen en ella las expresiones de (B.1), (B.3) y (B.4) según se muestra en el siguiente desarrollo:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}u_c) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{v}v_c) = 0$$

$$u_c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + v_c \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

$$u_c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{1}{L} + v_c \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{1}{H} = 0$$

$$\frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{u_c H}{L} \frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0$$

Finalmente, la ecuación de continuidad adimensional queda:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Magnitud de la velocidad de deformación

Antes de adimensionalizarse las ecuaciones de momentum, es importante que se realice este mismo proceso para la magnitud de la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$, ya que está descrita en términos de las derivadas de velocidad u y v respecto a x y y . A su vez, la viscosidad η (considerada en las ecuaciones de momentum) está en función de esta magnitud. Para ello, tomándose en cuenta las expresiones en (B.1), se definen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} ; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} ; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{v_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} ; & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{v_c}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Considerando la ecuación (2.5), se desarrolla completamente, quedando:

$$\dot{\gamma} = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.7})$$

Se sustituye en (B.7) lo descrito previamente en (B.6), por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = \left[2 \left(\frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right)^2 + 2 \left(\frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{v_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{v_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_c}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Se continua el desarrollo de la ecuación, tomando en cuenta (B.3):

$$\dot{\gamma} = \left[2 \frac{u_c^2}{L^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2 + \frac{u_c^2}{H^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right)^2 + 2 \frac{u_c^2}{L^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) + \frac{u_c^2 H^2}{L^2 L^2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{u_c^2}{L^2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.8})$$

Factorizando términos semejantes en (B.8):

$$\dot{\gamma} = \left\{ \frac{u_c^2}{H^2} \left[2 \frac{H^2}{L^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right)^2 + 2 \frac{H^2}{L^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) + \frac{H^4}{L^4} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{H^2}{L^2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Definiendo ε como la relación de aspecto del microcanal:

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \gg 1 \quad (\text{B.9})$$

Agrupando términos se tiene que:

$$\dot{\gamma} = \frac{u_c}{H} \left\{ 2\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)^2 \right] + \varepsilon^4 \left[\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.10})$$

Finalmente, se puede reescribir (B.10) como:

$$\dot{\gamma} = \frac{u_c}{H} \tilde{\gamma} \quad (\text{B.11})$$

En donde $\tilde{\gamma}$ es el término adimensional de la magnitud de la velocidad de deformación.

$$\tilde{\gamma} = \left\{ 2\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right)^2 \right] + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.12})$$

Viscosidad del fluido

Si bien, la expresión de la viscosidad no puede ser adimensionalizada completamente, si una parte de esta. Tomando la ecuación (2.6) y (B.11), se tiene:

$$\eta(T_f, \dot{\gamma}) = \eta_0 \left[1 + \left(\lambda \frac{u_c}{H} \tilde{\gamma} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{B.13})$$

Para lo cual se considera el número de Weissenberg Wi :

$$Wi = \frac{\lambda u_c}{H} \quad (\text{B.14})$$

Reescribiendo (B.13):

$$\eta(T_f, \dot{\gamma}) = \eta_0 \left[1 + (Wi \tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{B.15})$$

Una vez teniendo en cuenta la expresión dada en (B.15), se procede a adimensionalizar las ecuaciones de momentum.

Ecuación de Momentum en x

Previo al desarrollo de la adimensionalización, se debe considerar la siguiente

expresión:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \Delta p_c \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \Delta p_c \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\Delta p_c}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \quad (\text{B.16})$$

De igual manera, tomando en cuenta (B.1), las segundas derivadas parciales de las velocidades u y v respecto a x y y se definen como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_c}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} ; & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_c}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{v_c}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2}; & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{v_c}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Para el caso de la derivada parcial de la función de viscosidad respecto a x y y , se muestra el desarrollo de sus respectivas ecuaciones:

$$\frac{\partial \eta (T_f, \dot{\gamma})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \eta_0 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} = \frac{\eta_0}{L} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial \eta (T_f, \dot{\gamma})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \eta_0 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} = \frac{\eta_0}{H} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \quad (\text{B.19})$$

De igual manera, para el término temporal respecto a x se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u} u_c}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{u_c}{t_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{u_c^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{B.20})$$

Donde \tilde{t} representa el tiempo de forma adimensional y además:

$$t_c = \frac{L}{u_c}$$

Tomando en cuenta las expresiones de (B.6), (B.15)-(B.20), se sustituyen en (2.9), quedando como:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{u_c^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \rho \left(\tilde{u} u_c \frac{\partial \tilde{u}}{L \partial X} + \tilde{v} v_c \frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\Delta p_c}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \\
 + \eta_0 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{u_c}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{u_c}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
 + 2 \frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\eta_0}{L} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial X} \\
 + \frac{\eta_0}{H} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial Y} \left(\frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{v_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \quad (B.21)
 \end{aligned}$$

Se sustituyen algunos valores característicos en la ecuación (B.21):

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{u_c^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \rho \left(\tilde{u} \frac{u_c^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{u_c^2 H}{LH} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\eta_0 u_c L}{LH^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \\
 + \eta_0 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{u_c}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{u_c}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
 + 2 \frac{\eta_0 u_c}{L^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial X} \\
 + \frac{\eta_0}{H} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial Y} \left(\frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{u_c H}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)
 \end{aligned}$$

Factorizando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{u_c^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \rho \frac{u_c^2}{L} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\eta_0 u_c}{H^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \\
 &+ \frac{\eta_0 u_c}{H^2} \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\eta_0 u_c}{L^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial X} \\
 &+ \frac{\eta_0 u_c}{H^2} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial Y} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)
 \end{aligned}$$

Se despeja el término de la derivada parcial adimensional de la presión respecto a la distancia longitudinal del canal:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{u_c^2}{L} \frac{H^2}{\eta_0 u_c} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \\
 &+ \frac{\eta_0 u_c}{H^2} \frac{H^2}{\eta_0 u_c} \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\eta_0 u_c}{L^2} \frac{H^2}{\eta_0 u_c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial X} \\
 &+ \frac{\eta_0 u_c}{H^2} \frac{H^2}{\eta_0 u_c} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial Y} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)
 \end{aligned}$$

Simplificando y agrupando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho u_c H H}{\eta_0 L} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) \right) &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \\
 + \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
 + 2 \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial X} \\
 + \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial Y} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \quad (B.22)
 \end{aligned}$$

La ecuación (B.22) representa la ecuación adimensional de momentum en x , que se puede describir finalmente como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon Re \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon Re \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} \\
 + \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \\
 + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial X} \\
 + \frac{\partial \left(\left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right)}{\partial Y} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \quad (B.23)
 \end{aligned}$$

En donde Re representa el número de Reynolds y ε la relación adimensional de esbeltez.

Ecuación de Momentum en y

Previo al desarrollo de la adimensionalización, se debe considerar la siguiente expresión:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \Delta p_c \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \Delta p_c \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\Delta p_c}{H} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \quad (\text{B.24})$$

Para el caso del término temporal en la ecuación de momentum en y, se muestra el desarrollo de sus respectivas ecuaciones:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{v} v_c}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{v_c}{t_c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = \frac{u_c^2 H}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{B.25})$$

Tomando en cuenta las expresiones de (B.6), (B.15), (B.17)-(B.19), (B.24)-(B.25), se sustituyen en (B.10), quedando como:

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_c^2 H}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \rho \left(\tilde{u} u_c \frac{v_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} v_c \frac{v_c}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\Delta p_c}{H} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \\ + \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{v_c}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{v_c}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\ + 2 \frac{v_c}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\eta_0}{H} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ + \frac{\eta_0}{L} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{v_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Se sustituyen algunos valores característicos en la ecuación (B.26):

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_c^2 H}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \rho \left(\tilde{u} u_c \frac{u_c H}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{u_c H}{L} \frac{u_c H}{HL} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\eta_0 u_c L}{H^2 H} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \\ &+ \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{u_c H}{L^3} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{u_c H}{LH^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\ &+ 2 \frac{u_c H}{HL} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\eta_0}{H} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi \tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ &+ \frac{\eta_0}{L} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi \tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{u_c H}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \end{aligned}$$

Factorizando términos semejantes:

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_c^2 H}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \rho \frac{u_c^2 H}{L^2} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\eta_0 u_c L}{H^3} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \\ &+ \frac{\eta_0 u_c L}{H^3} \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{H^4}{L^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\ &+ 2 \frac{\eta_0 u_c}{HL} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi \tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ &+ \frac{\eta_0 u_c}{LH} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi \tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \end{aligned}$$

Se despeja el término de la derivada parcial adimensional de la presión respecto

a la distancia transversal del canal:

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_c^2 H}{L^2} \frac{H^3}{\eta_0 u_c L} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \\ &+ \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{H^4}{L^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\ &+ 2 \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ &+ \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \end{aligned}$$

Simplificando y agrupando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\rho u_c H H^3}{\eta_0 L^3} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \\ &+ \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{H^4}{L^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\ &+ 2 \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ &+ \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

La ecuación (B.27) representa la ecuación adimensional de momentum en y,

que se puede describir finalmente como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^3 Re \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon^3 Re \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \\
 + \varepsilon^2 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \\
 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\
 + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

En donde Re representa el número de Reynolds y ε la relación adimensional de esbeltez.

APÉNDICE

C

FORMA VARIACIONAL DE LA ECUACIÓN DE MOMENTUM EN Y

De igual manera para el caso de la ecuación de momentum en Y se comienza igualando la expresión (2.20) a cero y multiplicando por su variable auxiliar v_a . Además se realiza una discretización en la parte temporal y de esta forma facilitar su manejo.

$$\begin{aligned}
 & \left[\varepsilon^3 Re \left(\frac{\tilde{v}^{m+1} - \tilde{v}^m}{\Delta t} \right) + \varepsilon^3 Re \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - 2\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right) \right] v_a = 0
 \end{aligned}$$

Para los términos convectivos temporales es de interés estudiar un momento o tiempo anterior y de esta manera poder referenciarse debido a la no linealidad. Para el resto de los términos es de interés el estudio de la variable en un tiempo actualizado, por lo que:

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon^3 Re \left(\frac{\tilde{v}^{m+1} - \tilde{v}^m}{\Delta t} \right) + \varepsilon^3 Re \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \tilde{p}^{m+1}}{\partial Y} \right. \\ & \quad - \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}^{m+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y^2} \right) \\ & \quad \quad - 2\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ & \quad \left. - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) \right] v_a = 0 \end{aligned}$$

Integrando respecto a la diferencial de área Ω :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\tilde{v}^{m+1} - \tilde{v}^m}{\Delta t} \right) + \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial Y} \right) \right] v_a d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{p}^{m+1}}{\partial Y} v_a d\Omega \\ & \quad - \iint_{\Omega} \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}^{m+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y^2} \right) v_a d\Omega \\ & \quad \quad - 2\varepsilon \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} v_a d\Omega \\ & \quad - \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) v_a d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Lo cual es lo mismo que si se describiera:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{v}^{m+1}}{\Delta t} \right) v_a d\Omega - \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{v}^m - \Delta t \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial Y} \right) \right) v_a d\Omega \\
 & + \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{p}^{m+1}}{\partial Y} v_a d\Omega - \iint_{\Omega} \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}^{m+1}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y^2} \right) v_a d\Omega \\
 & \quad - 2\varepsilon \iint_{\Omega}^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} v_a d\Omega \\
 & \quad - \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) v_a d\Omega = 0
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las identidades de Green desarrolladas anteriormente (3.3)-(3.4) y aplicándolas según corresponda en la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{v}^{m+1}}{\Delta t} \right) v_a d\Omega - \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{v}^m - \Delta t \left(\tilde{u}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial X} + \tilde{v}^m \frac{\partial \tilde{v}^m}{\partial Y} \right) \right) v_a d\Omega \\
 & - \iint_{\Omega} \tilde{p}^{m+1} \frac{\partial v_a}{\partial Y} d\Omega + \iint_{\Omega} \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial v_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial v_a}{\partial Y} \right) d\Omega \\
 & \quad - 2\varepsilon \iint_{\Omega}^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} v_a d\Omega \\
 & \quad - \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) v_a d\Omega = 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, para escribir la ecuación en su forma variacional dentro de la sintaxis manejada en FreeFEM++ se emplea el comando *convect* para los términos

convectivos en la ecuación (3.7), teniendo:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \left(\frac{\tilde{v}^{m+1}}{\Delta t} \right) v_a d\Omega - \varepsilon^3 Re \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^m, \tilde{v}^m], -\Delta t, \tilde{v}^m) v_a d\Omega \\
 & - \iint_{\Omega} \tilde{p}^{m+1} \frac{\partial v_a}{\partial Y} d\Omega + \iint_{\Omega} \varepsilon^2 \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \frac{\partial v_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial v_a}{\partial Y} \right) d\Omega \\
 & \quad - 2\varepsilon \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} v_a d\Omega \\
 & \quad - \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[1 + (Wi\tilde{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{m+1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^{m+1}}{\partial X} \right) v_a d\Omega = 0
 \end{aligned}$$

REFERENCIAS

- [1] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *Computational fluid dynamics. The finite volume method*. 2a ed., Harlow, England: Pearson, 2002.
- [2] W. Bracamonte, J. Bracamonte, Baritto M., and Antonio. D'Alessandro. Computational fluid dynamics applied to the study of blood flow in the human aortic arch and its main branches. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 17(1):45–60, 2016.
- [3] R. Drake, A. Vogl, and A. Mitchell. *Gray. Anatomía para estudiantes*. Elsevier Health Sciences, 2024.
- [4] M. Latarjet and A. Liard. *Anatomía humana*, volume 2. Ed. Médica Panamericana.
- [5] K. Moore and A. Dalley. *Anatomía con orientación clínica*. 9a ed., Barcelona, España: Wolters Kluwer, 2002.
- [6] L. Gartner and J. Hiatt. *Texto Atlas de Histología*. 3a ed., Ciudad de México, México: Mc Graw Hill, 2008.
- [7] B. Rapp. *Microfluidics: modeling, mechanics and mathematics*. Elsevier, 2022.

REFERENCIAS

- [8] WHO. Cardiovascular diseases. *World Health Organization*, 2024.
 - [9] J. Vega, D. Gonzalez, W. Yankovic, J. Oroz, R. Guaman, and N. Castro. Aneurismas de la aorta torácica: Historia natural, diagnóstico y tratamiento. *Revista chilena de cardiología*, 33(2):127–135, 2014.
 - [10] S. Muhammad, N. Sohail, A. Aziz, A. Seham, N. Ahammad, and E. Sayed. On the steady flow of non-newtonian fluid through multi-stenosed elliptical artery: A theoretical model. *Ain Shams Engineering Journal*, 15(1):102262, 2024.
 - [11] OPS. Enfermedades cardiovasculares. *Organización Panamericana de la Salud*, 2024.
 - [12] A. Noreen and S. Nadeem. Carreau fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis. *Ain Shams Engineering Journal*, 5(4):1307–1316, 2014.
 - [13] D. Liepsch. An introduction to biofluid mechanics—basic models and applications. *Journal of Biomechanics*, 35(4):415–435, 2002.
 - [14] P. Morris, A. Narracott, H. von Tengg-Kobligk, D. Soto, S. Hsiao, A. Lungu, P. Evans, N. Bressloff, P. Lawford, D. Hose, et al. Computational fluid dynamics modelling in cardiovascular medicine. *Heart*, 102(1):18–28, 2016.
 - [15] F. Syed, S. Khan, and M. Toma. Modeling dynamics of the cardiovascular system using fluid-structure interaction methods. *Biology*, 12(7):1026, 2023.
 - [16] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le-Hyarić, and K. Ohtsuka. Freefem++ manual. *Laboratoire Jacques Louis Lions*, 2005.
 - [17] Joao N. and Abimael F. Finite element analysis of transient creep problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 117(3):309–329, 1994.
 - [18] O. Zienkiewicz. *El método de los elementos finitos*. Reverté, 2010.
-

REFERENCIAS

- [19] Sánchez S., J. Arcos, O. Bautista, and F. Méndez. Joule heating effect on a purely electroosmotic flow of non-newtonian fluids in a slit microchannel. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 192:1–9, 2013.
 - [20] K. Housiadas. Viscoelastic poiseuille flows with total normal stress dependent, nonlinear navier slip at the wall. *Physics of Fluids*, 25(4), 2013.
 - [21] E. Ramos, C. Trevino, J. Lizardi, and F. Mendez. Electroosmotic flow in a thin microchannel when the slippage condition and the viscosity of the electrolytic solution depend on the temperature. In *APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*, pages P09–011, 2021.
 - [22] M. Qasim, M. Badrelzaman, N. Darwish, N. A Darwish, and N. Hilal. Reverse osmosis desalination: A state-of-the-art review. *Desalination*, 459:59–104, 2019.
 - [23] S. Chien. Shear dependence of effective cell volume as a determinant of blood viscosity. *Science*, 168(3934):977–979, 1970.
 - [24] Y. Fung. *Biomechanics: circulation*. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [25] A. Guyton and J. Hall. *Textbook of medical physiology*: Saunders elsevier. Elsevier, 2011.
 - [26] A. Popel and P. Johnson. Microcirculation and hemorheology. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37(1):43–69, 2005.
 - [27] S. Chien. Physiology of blood flow. *Journal of Biomechanics*, 8(2):115–128, 1975.
 - [28] M. Armstrong, K. Rook, W. Pulles, M. Deegan, and T. Corrigan. Importance of viscoelasticity in the thixotropic behavior of human blood. *Rheologica Acta*, 60:119–140, 2021.
 - [29] J. Horner, M. Armstrong, N. Wagner, and A. Beris. Measurements of human blood viscoelasticity and thixotropy under steady and transient shear and constitutive modeling thereof. *Journal of Rheology*, 63(5):799–813, 2019.
-

REFERENCIAS

- [30] O. Baskurt and H. Meiselman. Blood rheology and hemodynamics. In *Seminars in thrombosis and hemostasis*, volume 29, pages 435–450. Copyright© 2003 by Thieme Medical Publishers, Inc., 333 Seventh Avenue, New York, 2003.
 - [31] G. Thurston. Viscoelastic properties of blood and blood analogs. *Advances in hemodynamics and hemorheology*, 1:1–30, 1996.
 - [32] T. How. *Advances in Hemodynamics and Hemorheology, Volume 1*, volume 1. Elsevier, 1996.
 - [33] R. Owens. A new microstructure-based constitutive model for human blood. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 140(1-3):57–70, 2006.
 - [34] R. Larson. *The structure and rheology of complex fluids*, volume 150. Oxford university press New York, 1999.
 - [35] R. Bird, R. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. John Wiley and Sons Inc., New York, NY, 1987.
 - [36] A. Zaman, N. Ali, M. Sajid, and T. Hayat. Effects of unsteadiness and non-newtonian rheology on blood flow through a tapered time-variant stenotic artery. *AIP advances*, 5(3), 2015.
-