



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Cálculo de hidrogramas de
avenidas extremas para estimar
inundaciones fluviales en el
estado de Hidalgo, México**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Civil

P R E S E N T A

Héctor Iván Vilchis Gómez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Oscar Arturo Fuentes Mariles



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024

Resumen

El análisis de riesgo ante avenidas extremas es crucial en las sociedades, lo cual se relaciona con el diseño de obras de infraestructura seguras y eficientes. Actualmente, el análisis de los hidrogramas de las avenidas en ríos se limita a considerar al gasto pico mediante estudios de frecuencia univariados; sin embargo, es importante considerar que la naturaleza de las avenidas es multivariada. Otra variable de principal relevancia es el volumen del hidrograma. Ante ello, es importante la emplear metodologías que ofrezcan resultados más confiables, considerando de forma conjunta el gasto de pico y el volumen. Recientemente, se han abierto investigaciones en ingeniería que usan funciones cópula para al análisis de frecuencia en un contexto multivariado.

La presente tesis aplica la metodología de análisis de frecuencia de avenidas conjunta para gasto de pico y volumen, desarrollada en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIUNAM), para registros hidrométricos del río Tlautla, ubicado en el estado de Hidalgo, México. Además, se estimaron las inundaciones fluviales asociadas a distintos periodos retorno y se determinaron las zonas afectadas por ellas.

Índice

1	Introducción	9
1.1	Objetivos	10
2	Análisis de frecuencias de avenidas	12
2.1	Funciones de distribución de probabilidad univariadas	13
2.1.1	Funciones de distribución de una población	13
2.1.1.1	Función de distribución normal.....	13
2.1.1.2	Función de distribución lognormal de 2 parámetros	14
2.1.1.3	Función de distribución exponencial de 2 parámetros	15
2.1.1.4	Función de distribución Weibull.....	15
2.1.1.5	Función de distribución Gumbel.....	16
2.1.2	Funciones de probabilidad mezcladas.....	16
2.1.2.1	Función de distribución Gumbel-Gumbel.....	17
2.1.2.2	Función de distribución Weibull- Weibull	17
2.1.3	Obtención de parámetros.....	18
2.1.3.1	Método de los momentos	18
2.1.3.2	Método de la máxima verosimilitud.....	19
2.1.4	Periodo de retorno univariado	20
2.1.5	Pruebas de bondad de ajuste	21
2.1.5.1	Error estándar de ajuste.....	22
2.1.5.2	Prueba de Kolmogórov-Smirnov	22
2.2	Funciones de distribución de probabilidad bivariadas	23
2.2.1	Funciones cópula.....	23
2.2.1.1	Cópula Gumbel-Hougaard.....	24
2.2.2	Estimación del parámetro de cópula.....	24
2.2.3	Periodo de retorno bivariado.....	24
2.2.3.1	Periodos de retorno conjunto <i>OR</i> y <i>AND</i>	25
2.2.3.2	Periodo de retorno de Kendall.....	26
3	Estimación de hidrogramas de avenidas extremas	28
3.1	Duración del hidrograma	28
3.2	Selección de datos	30
3.2.1	Criterio de volumen máximo	30
3.3	Ajuste a funciones de probabilidad univariadas	31

3.3.1	Ajuste a datos de gasto para criterio de volumen máximo	34
3.3.2	Ajuste a datos de volumen para criterio de volumen máximo	35
3.4	Ajuste a la función de probabilidad bivariada	36
3.4.1	Cópula para datos seleccionados con el criterio de volumen máximo.....	36
3.5	Extrapolación a periodos de retorno	37
3.5.1	Criterio de volumen máximo	38
3.6	Ajuste de forma de los hidrogramas	39
3.6.1	Hidrogramas para el criterio de volumen máximo	43
4	Tránsito de avenidas en cauces	46
4.1	Método hidráulico	47
4.1.1	Modelación numérica para tránsito de avenidas.....	48
4.1.1.1	Modelación unidimensional	49
4.1.1.2	Modelación bidimensional	50
4.1.1.3	Modelación tridimensional.....	52
4.1.1.4	HEC-RAS.....	52
4.2	Método hidrológico.....	54
4.2.1	Método de Muskingum.....	54
4.2.1.1	Método tradicional	56
4.2.1.2	Método con poca información	56
4.2.2	Método de Muskingum-Cunge.....	56
5	Tránsito de avenidas en el cauce en estudio.....	58
5.1	Estimación de rugosidad de Manning del cauce.....	58
5.2	Modelado 1-D para el tránsito de avenidas.....	62
5.2.1	Resultados de la modelación	66
5.3	Modelado 2D para determinar áreas de inundación	68
5.3.1	Resultados.....	74
6	Discusión de resultados y conclusiones.....	77
	Referencias	80
0	Anexos.....	i
0.1	Parejas de datos seleccionadas.....	i
0.2	Estimación de parámetro θ para la función cópula	ii
0.3	Mapas de inundación	iv

Índice de tablas

Tabla 2-1. Valores críticos d para la prueba Kolmogórov-Smirnov (Benjamin y Cornell, 1970)	22
Tabla 3-1. 15 gastos máximos del registro de gasto medio diario	29
Tabla 3-2. Estimación de duración para los 15 máximos registros anuales	29
Tabla 3-3. Selección de pareja de datos (Q, V) bajo el criterio de volumen máximo para el año 1958	31
Tabla 3-4. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas de una población para los gastos seleccionados por el criterio de volumen máximo	34
Tabla 3-5. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas mixtas para los gastos seleccionados por el criterio de volumen máximo.....	34
Tabla 3-6. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas de una población para los volúmenes seleccionados por el criterio de volumen máximo	35
Tabla 3-7. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas mixtas para los volúmenes seleccionados por el criterio de volumen máximo	36
Tabla 3-8. Valor de la función de verosimilitud maximizada para la cópula formada con las funciones marginales	37
Tabla 3-9. Equivalencia entre los periodos de retorno de Kendall y OR de interés	38
Tabla 3-10. Extrapolación a periodos de retorno para funciones de distribución marginales	38
Tabla 3-11. Parejas de datos extrapolados a periodos de retorno seleccionados	39
Tabla 3-12. Obtención de valores para el planteamiento del sistema de ecuaciones a partir del evento máximo histórico seleccionado mediante el criterio de volumen máximo	43
Tabla 3-13. Información tabular de hidrogramas de diseño obtenidos a partir del criterio de volumen máximo	45
Tabla 5-1. Factores correctivos de n según el Soil Conservation Service (Sotelo, 2002)	60
Tabla 5-2. Resumen de los coeficientes propuestos para obtener la rugosidad de Manning	61
Tabla 5-3. Rugosidades elegidas para regiones de inundación	61
Tabla 5-4. Resumen de volúmenes desbordados obtenidos a partir de modelos 1D.....	68
Tabla 0-1. Parejas de datos Q, V seleccionadas mediante el criterio de volumen máximo para los años registrados i	
Tabla 0-2. Maximización de la función de verosimilitud para la función cópula con datos del criterio de volumen máximo.....	iii

Índice de figuras

Figura 2-1. Forma típica de la función de distribución de probabilidad normal	14
Figura 2-2. Forma típica de la función de distribución de probabilidad lognormal.....	14
Figura 2-3. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Weibull.....	16
Figura 2-4. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Gumbel.....	16
Figura 2-5. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Gumbel mixta	17
Figura 2-6. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Weibull mixta	18
Figura 2-7. Esquematación del periodo de retorno univariado (izquierda) y bivariado (derecha).....	25
Figura 2-8. Dominios y regiones críticas para probabilidades de excedencia OR y AND (Serinaldi, 2015).....	26
Figura 2-9. Dominios y regiones críticas para probabilidades de excedencia Kendall (Serinaldi, 2015)	27
Figura 3-1. Vista gráfica para la selección del gasto máximo para el año 1958	31
Figura 3-2. Ajuste de datos de gasto seleccionados con criterio de volumen máximo para funciones de distribución univariadas	35
Figura 3-3. Ajuste de datos de gasto seleccionados con criterio de volumen máximo para funciones de distribución univariadas	36
Figura 3-4. Isolínea de T = 200 años.....	38
Figura 3-5. Isolínea de T = 100 años.....	38
Figura 3-6. Isolínea de T = 50 años	39
Figura 3-7. Isolínea de T = 10 años	39
Figura 3-8. Hidrograma discretizado	40
Figura 3-9. Esquema de volumen Vi	40
Figura 3-10. Hidrogramas de diseño obtenidos a partir del criterio de volumen máximo.....	44
Figura 4-1. Esquema explicativo para el tránsito de avenidas en cauces.....	46
Figura 4-2. Comparación esquemática entre un hidrograma de entrada y uno de salida.....	47
Figura 4-3. Esquema de modelación 1-D	49
Figura 4-4. Ejemplo de perfil de elevación de la SLA obtenido mediante el software EPA SWMM	50
Figura 4-5. Esquema de modelación 2-D	50
Figura 4-6. Ejemplo de mallas cuadriláteras estructurada (izq.) y no estructurada (der.)	51
Figura 4-7. Ejemplo de modelación de Iber para un canal con canal lateral con confluencia	51
Figura 4-8. Esquema de modelación 3-D	52
Figura 4-9. Información de la última versión disponible de HEC-RAS.....	53
Figura 4-10. Ejemplo del resultado de un tránsito de una avenida en HEC-RAS	53
Figura 4-11. Efecto de extensión vertical a partir de los márgenes de las secciones transversales en HEC-RAS..	54
Figura 4-12. Almacenamiento en prisma y cuña para método de Muskingum	55
Figura 5-1. Vista aérea del tramo del río Tlautla en estudio. Elaborada a partir de (Google Earth, 2024)	58
Figura 5-2. Fotografías del río Tlautla tras incidente de derrame de contaminantes de la cementera colindante. (SDP noticias, 2021).....	60
Figura 5-3. Fotografías río Tlautla (Marthahari, 2017).....	61
Figura 5-4. Interfaz de creación de proyecto en HEC-RAS.....	62
Figura 5-5. Ingreso de imagen georreferenciada al proyecto en HEC-RAS.....	63
Figura 5-6. Ingreso de la sección transversal del cauce para la estación 0+000	63
Figura 5-7. Vista del cauce dibujado con las estaciones definidas	64
Figura 5-8. Editor para la estructura lateral ficticia propuesta para el margen derecho del río.....	64
Figura 5-9. Condiciones de frontera definidas para el modelo.....	65
Figura 5-10. Definición de parámetros para ejecución de modelo	65
Figura 5-11. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=200 años	66
Figura 5-12. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=100 años	66
Figura 5-13. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=50 años	67

Figura 5-14. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=10 años	67
Figura 5-15. Corrección de unión de superficie LiDAR e interpolada del cauce	68
Figura 5-16. Interfaz de creación de proyecto en HEC-RAS	69
Figura 5-17. MDE de terreno ingresado en HEC-RAS.....	69
Figura 5-18. Superficie creada a partir de las secciones transversales conocidas	70
Figura 5-19. MDE combinado para la modelación 2D	70
Figura 5-20. Área de flujo seleccionada con el eje del cauce definido mediante una breakline	71
Figura 5-21. Puntos de cálculo para el modelo	71
Figura 5-22. Definición de regiones de rugosidad de Manning definidas para el modelo.....	72
Figura 5-23. Ubicación de líneas de condición de frontera.....	72
Figura 5-24. Condiciones de frontera definidas para el modelo 2D	73
Figura 5-25. Definición de parámetros para ejecución de modelo 2D	73
Figura 5-26. Mancha de inundación para un T = 200 años, calculado con criterio de volumen máximo	74
Figura 5-27. Mancha de inundación para un T = 100 años.....	75
Figura 5-28. Mancha de inundación para un T = 50 años.....	75
Figura 5-29. Mancha de inundación para un T = 10 años.....	76
Figura 0-1. Mapa de inundación obtenido para $T = 200$ años con el criterio de volumen máximo	iv
Figura 0-2. Mapa de inundación obtenido para $T = 100$ años con el criterio de volumen máximo	v
Figura 0-3. Mapa de inundación obtenido para $T = 50$ años con el criterio de volumen máximo.....	vi
Figura 0-4. Mapa de inundación obtenido para $T = 10$ años con el criterio de volumen máximo.....	vii

1 Introducción

Según el *Glosario internacional de hidrología* (OMM/UNESCO, 2012), una inundación queda definida como: “Desbordamiento del agua fuera de los confines normales de un río o cualquier masa de agua”. Dentro de esta definición, conviene entender a los “confines normales del río” como aquella elevación de la superficie terrestre dentro de la cual el flujo de agua no provoca afectaciones. Por otro lado, el Centro Nacional para la prevención de Desastres (CENAPRED) propone que se la inundación es “aquel evento que debido a la precipitación, oleaje, marea de tormenta, o falla de alguna estructura hidráulica provoca un incremento en el nivel de la superficie libre del agua de los ríos o el mar mismo, generando invasión o penetración de agua en sitios donde usualmente no la hay y, generalmente, daños en la población, agricultura, ganadería e infraestructura”(Salas y Jiménez, 2004).

El agua es uno de los recursos más importantes para la vida. Es la base para el desarrollo de sus actividades económicas, sin embargo, también puede ser un peligro en lo que respecta a sus eventos extremos hidrometeorológicos. Las sequías e inundaciones suelen tener importantes afectaciones en términos económicos y de vidas humanas.

La situación con las inundaciones llega a ser más delicada en algunas zonas semi urbanas, sobre todo en asentamientos humanos establecidos en las cercanías de cauces naturales. Debido al crecimiento de la población, es común que la mancha urbana llegue a invadir regiones donde el desborde de ríos origine un riesgo para su patrimonio o vidas. Incluso para la población que no se encuentra cerca de un cauce pueden verse afectados por la interrupción tanto del suministro de los servicios básicos como sus actividades económicas.

Es pertinente diseñar algunas obras hidráulicas con metodologías que consideren el análisis de frecuencia de avenidas confiables, para determinar zonas vulnerables y alertar a la población del peligro de establecerse ahí, o bien, para establecer reglamentos de protección de la población contra dichos fenómenos.

Ramírez y Aldama (2000) afirman que la estimación de avenidas de diseño implica una dificultad que no ha sido resuelta a satisfacción y para el cual el planteamiento de mejores métodos de aplicación práctica es conveniente.

Un enfoque de uso extendido para ese fin es el análisis probabilístico. Este se basa en el ajuste de parámetros de funciones de distribución de probabilidad a partir de registros hidrológicos de gastos de pico y volumen para estimar avenidas de diseño.

Por muchas décadas, la práctica en la Hidrología se han usado ajustes de funciones univariadas de probabilidad para las series de máximos o mínimos anuales. Sin embargo, algunos aspectos que involucran la ocurrencia simultánea de eventos deben tomarse en cuenta. Por ejemplo, en el diseño de una presa, la descarga máxima sobre el vertedor no sólo depende del caudal de pico del hidrograma de entrada a la presa, sino también del volumen (Escalante y Reyes, 2000).

En este trabajo se utilizará una metodología para la estimación de hidrogramas de avenidas de diseño, basado en el análisis conjunto de gasto de pico y volumen, desarrollado en el IIUNAM (Fuentes y Copca,

2018). Se partirá de la información hidrométrica disponible, para la creación de archivos con datos de gasto máximo y su volumen asociado a una determinada duración de hidrogramas de avenidas extremas, que será usado para el análisis de frecuencia bivariado.

El método se ejemplificará para los datos de la estación hidrométrica Tlautla, ubicada en el río de mismo nombre, en estado de Hidalgo. Así mismo, se utilizarán los hidrogramas obtenidos para transitarlos por el cauce de un tramo de este río y estimar el volumen que se desborda de esta corriente natural.

En el capítulo 1, se da la introducción al trabajo y se establecen los objetivos

En el capítulo 2, se explican conceptos básicos necesarios para la comprensión del método para la estimación de hidrogramas, como funciones de distribución univariadas y bivariadas de interés, métodos de estimación de parámetros de funciones y periodos de retorno univariados y bivariados.

En el capítulo 3, se resumen los procedimientos y resultados obtenidos para el ajuste a funciones de distribución de probabilidad univariadas, así como la estimación del parámetro de asociación de la cópula Gumbel-Hogaard. De igual forma, la extrapolación de parejas de datos para periodos de retorno de 10, 50, 100 y 200 años y su ajuste de forma para la obtención de los hidrogramas de avenidas extremas.

En el capítulo 4, se explican aspectos teóricos sobre el tránsito de avenidas en cauces, los enfoques disponibles, y las distintas opciones de modelos computacionales aplicables eficientemente a tramos de río menores a 5 km.

En el capítulo 5, se describe el procedimiento para el modelado numérico de las avenidas utilizando el software de uso libre *HEC-RAS*, para análisis unidimensionales y bidimensionales. De igual forma, se muestran los resultados obtenidos de dichos modelos.

En el capítulo 6, se discuten los resultados obtenidos en el análisis de frecuencias de avenidas, así como en el modelado de éstas. Se comentan las conclusiones del trabajo y algunas observaciones sobre las consideraciones tomadas en distintos puntos de la metodología, así como comentarios y recomendaciones para tomar en cuenta en trabajos futuros.

1.1 Objetivos

El objetivo principal del trabajo es calcular hidrogramas de avenidas extremas utilizando una metodología de análisis de frecuencia conjunta de gasto de pico y volumen, y usar los resultados para identificar zonas vulnerables por inundaciones fluviales en un tramo del río Tlautla.

Esto se logrará mediante los siguientes objetivos específicos:

- Crear una base de datos de gastos y volúmenes anuales a partir de los registros hidrométricos existentes en la estación hidrométrica Tlautla, considerando un criterio de selección de volumen máximo.
- Ajustar los datos anuales máximos para la función cópula Gumbel-Hougaard mediante el método semiparamétrico
- Estimar los hidrogramas asociados a los periodos de retorno 10, 50, 100 y 200 años

- Obtener los posibles volúmenes de desbordamiento del tramo del río Tlautla considerado y zonas vulnerables a inundación mediante el tránsito de los hidrogramas de avenidas empleando modelación 1D y 2D en el software HEC-RAS.

2 Análisis de frecuencias de avenidas

Dentro del diseño o revisión de algunas obras hidráulicas, se consideran avenidas extremas de los ríos. Para lo cual se realizan diversos análisis estadísticos, aceptando cierto nivel de ocurrencia. Una forma común de cuantificar el riesgo de daños considera al *periodo de retorno*.

Las metodologías existentes para la estimación de avenidas de diseño son muy variadas, en enfoque conceptual. Uno de los principales factores que propician la elección de algún procedimiento a aplicar es la calidad y cantidad de información disponible en el sitio o la región en donde se ubicará la obra (Ramírez y Aldama, 2000).

Dichos autores sugieren que, de forma general, es posible dividir las metodologías para la estimación de las avenidas de diseño en 3 enfoques: el uso de fórmulas empíricas, el hidrometeorológico y el hidrométrico. El primer enfoque es usualmente usado para obtener aproximaciones preliminares al gasto de diseño a partir de la información del área de drenaje. Para el segundo se emplean datos de precipitaciones y buscan modelar el comportamiento del proceso escurrimiento-lluvia. En el tercero se aplican métodos estadísticos a mediciones de caudal con periodos de registro relativamente largos.

Por otro lado, en función de las variables consideradas, se distinguen 2 tipos principales: univariados y los multivariados. Los análisis univariados son los más antiguos y suelen enfocarse en el gasto de pico, ya que es una variable importante para el diseño y revisión de obras hidráulicas, al mismo tiempo que suponen un análisis matemático menos complicado (Rivera y Escalante, 1999).

Dentro de este enfoque, una de las metodologías usadas con mayor frecuencia en México es la de la *Mayoración de la avenida más adversa* (Escalante y Reyes, 2000). Esta consiste en seleccionar la máxima avenida de la que se tenga registro (que podrá suponerse como la más adversa) y obtener un hidrograma adimensional donde cada ordenada de dicho hidrograma estará dada por la expresión Q_i/Q_p donde Q_i será el gasto en el instante i , mientras que Q_p será el gasto pico de la avenida. Posteriormente, con un análisis de frecuencias para los gastos máximos anuales (obtenidos mediante el análisis de los gastos medios diarios), determinar la distribución de probabilidad univariada que mejor describa el comportamiento, haciendo uso de algunas pruebas de bondad de ajuste; con ello se podrá estimar un valor de gasto de pico (Q_{TR}) asociado a un periodo de retorno apropiado para el fin del análisis al multiplicar las coordenadas del hidrograma adimensional por el gasto obtenido, pero modifica el volumen estimado.

Los análisis de frecuencia multivariados reportan mejor las variaciones aleatorias que ocurren en la naturaleza (Copca et al., 2022). Las variaciones en la escorrentía de los arroyos naturales corresponden a eventos multivariados caracterizados por variables aleatorias con cierta correlación entre ellas, como el gasto pico, el volumen de escorrentía y la duración de la crecida (Shiau et al., 2006).

En el caso particular de este trabajo, se usará un método bivariado que usa una distribución conjunta para determinar gasto de pico y volumen, desarrollado en el IIUNAM por Copca y Fuentes (2017).

2.1 Funciones de distribución de probabilidad univariadas

Para el diseño de obras hidráulicas es que se requieren determinar gastos de pico y volúmenes de hidrogramas de avenidas para periodos de retorno más grandes que el número de años con registros de caudales. Para solucionar esto, es necesario identificar una tendencia en el comportamiento de los datos y realizar una extrapolación al periodo requerido.

Aparicio (2008), explica que esto puede realizarse incluso “a ojo” dibujando una recta a mano a partir de los puntos conocidos graficados, sin embargo, es evidente que es un método sujeto a la subjetividad, por lo que los resultados no serían consistentes. Para eliminar dicha subjetividad, se propuso realizar un análisis estadístico ajustando la muestra de gastos a diversas funciones de distribución.

Con todos los años de avance en este tema, los hidrólogos han encontrado que el flujo de agua en cauces naturales usualmente ajusta mejor a determinadas funciones. Al ajustar una función de distribución de probabilidad a un registro de mediciones, permite estimar la ocurrencia de eventos extremos; estimando así valores de diseño al extrapolar estos datos a distintos periodos de retorno según sea requerido.

Pese a que se realizará un análisis bivariado, resulta necesario contar con información de ajustes a funciones de distribución de probabilidad univariadas, para los registros de gasto y volumen, con el fin de definir con ello el modelo estadístico conjunto (Subcapítulo 2.2).

2.1.1 Funciones de distribución de una población

En el análisis univariado, este tipo de funciones son las más comunes. Como el nombre sugiere, ajustan los datos de la muestra considerando que todos los datos forman parte de la misma población.

2.1.1.1 Función de distribución normal

La función de distribución normal está dada por la siguiente expresión (Devore, 2008)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx \quad (2-1)$$

Mientras que la función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} \quad (2-2)$$

Donde e es el número de Euler igual a $e = 2.7182 \dots$, x es la variable aleatoria, α y β son los parámetros de la función.

La gráfica de la función toma una forma de campana (comúnmente llamada campana de Gauss), con el eje de simetría ubicado en el valor de la media (μ). La distancia entre dicho eje y el punto de inflexión de la curva corresponde al valor de la desviación estándar (σ).

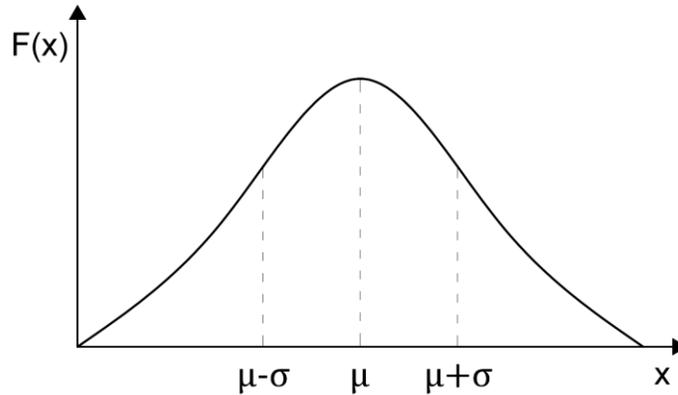


Figura 2-1. Forma típica de la función de distribución de probabilidad normal

Sus primeros dos momentos poblacionales son:

$$E(X) = \alpha \quad (2-3)$$

$$E(X^2) = \beta^2 \quad (2-4)$$

2.1.1.2 Función de distribución lognormal de 2 parámetros

En esta función los logaritmos naturales de la variable aleatoria se distribuyen normalmente. La función de distribución de probabilidad es la siguiente (Guerrero et al., 2007):

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right)^2} dx \quad (2-5)$$

Mientras que la función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right)^2} \quad (2-6)$$

Donde α es el parámetro de ubicación, mientras que β es el parámetro de escala.

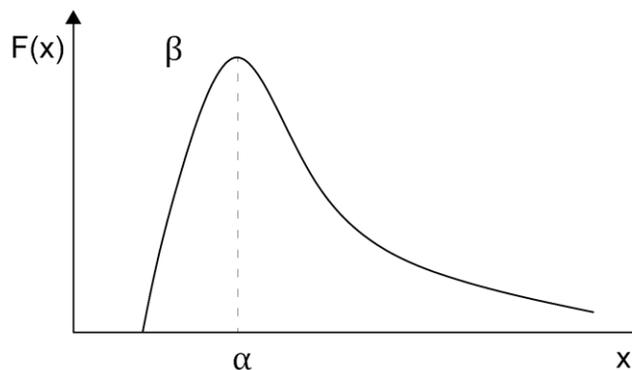


Figura 2-2. Forma típica de la función de distribución de probabilidad lognormal

Sus primeros dos momentos poblacionales son:

$$E(X) = \exp\left(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\right) \quad (2-7)$$

$$E(X^2) = \exp(2(\alpha + \beta^2)) - \exp(2\alpha + \beta^2) \quad (2-8)$$

2.1.1.3 Función de distribución exponencial de 2 parámetros

La función de distribución de probabilidad exponencial es la siguiente (Escalante y Reyes, 2002):

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)} \quad (2-9)$$

Mientras que la función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)} \quad (2-10)$$

Donde α es el parámetro de ubicación y β es el parámetro de escala. Sus primeros dos momentos poblacionales son:

$$E(X) = \alpha + \beta \quad (2-11)$$

$$E(X^2) = \beta^2 \quad (2-12)$$

2.1.1.4 Función de distribución Weibull

La función de distribución Weibull es comúnmente usada en aplicaciones de confiabilidad. La distribución de dos parámetros puede representar decrementos, constante o incrementos en rangos de falla. La función de distribución de probabilidad de Weibull es (Organización Meteorologica Mundial, 2011):

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta} \quad (2-13)$$

Mientras que la función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^\beta} e^{-(x/\alpha)^\beta} \quad (2-14)$$

Donde α es el parámetro de escala y β es el parámetro de forma. Se debe cumplir que $x \geq 0$, así como que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

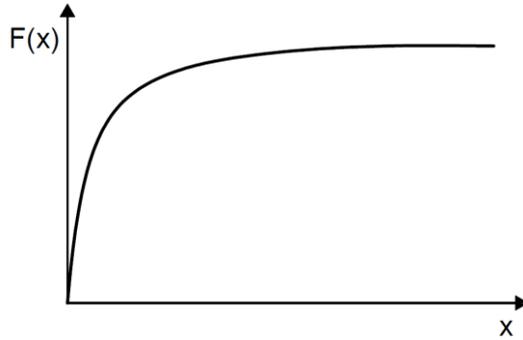


Figura 2-3. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Weibull

2.1.1.5 Función de distribución Gumbel

Supóngase que se tienen N muestras, cada una de las cuales contiene n eventos. Si se selecciona el máximo de los n eventos de cada muestra, es posible demostrar que a medida que n aumenta la función de probabilidad de x tiende a la siguiente expresión (Aparicio, 2008):

$$F(x) = e^{-e^{\alpha(x-\beta)}} \quad (2-15)$$

La función de densidad es:

$$f(x) = \alpha e^{[-\alpha(x-\beta) - e^{\alpha(x-\beta)}]} \quad (2-16)$$

Donde α es el parámetro de escala y β es el parámetro de ubicación.

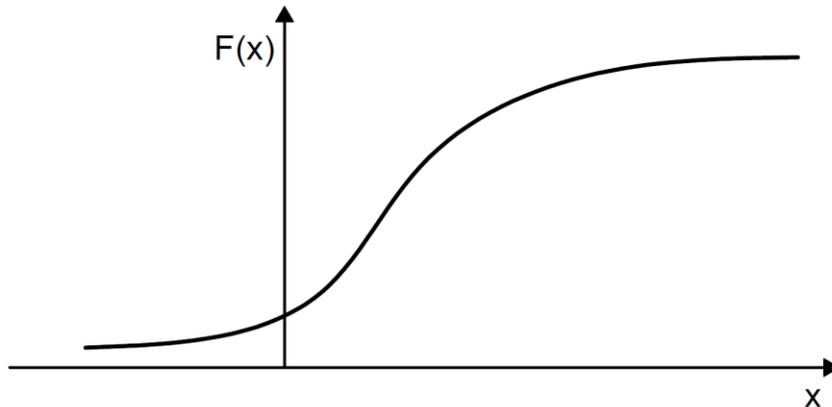


Figura 2-4. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Gumbel

2.1.2 Funciones de probabilidad mezcladas

En algunas ocasiones, las funciones de distribución de una población no ajustan apropiadamente a la distribución de la muestra de datos. Considerando la aplicación hidrológica del ajuste a funciones de distribución, de acuerdo con Palacios (2010), esto puede ser causado porque en la zona en estudio los

gastos máximos anuales corresponden a varias poblaciones distintas, debido a distintas causas como son las precipitaciones ciclónicas y no ciclónicas provocadas por fenómenos meteorológicos dominantes en algunas regiones.

2.1.2.1 Función de distribución Gumbel-Gumbel

La función de distribución de Gumbel-Gumbel (también llamada doble Gumbel) separa la muestra en dos poblaciones y aplica en cada una de ellas la distribución de Gumbel. La expresión es la siguiente (Fuentes O. A. et al., 2018):

$$F(x) = p \left(e^{-e^{\alpha_1(x-\beta_1)}} \right) + (1 - p) \left(e^{-e^{\alpha_2(x-\beta_2)}} \right) \quad (2-17)$$

La función de densidad es:

$$f(x) = p \left(\alpha_1 e^{[-\alpha_1(x-\beta_1) - e^{\alpha_1(x-\beta_1)}]} \right) + (1 - p) \left(\alpha_2 e^{[-\alpha_2(x-\beta_2) - e^{\alpha_2(x-\beta_2)}]} \right) \quad (2-18)$$

Las constantes α y β siguen siendo las constantes de ubicación y escala respectivamente, siendo identificados con el subíndice 1 para la primera población y el 2 para la segunda. Por otro lado, p es el factor de proporción de la muestra.

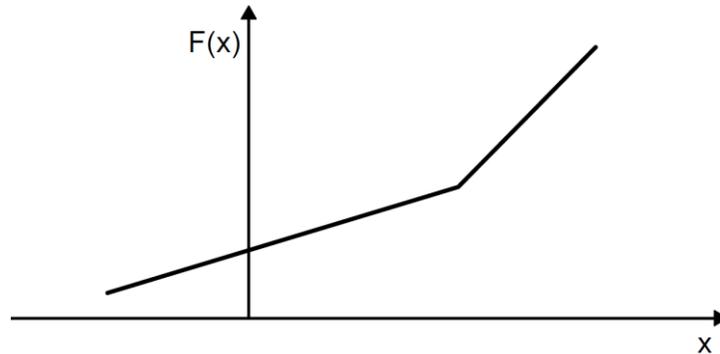


Figura 2-5. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Gumbel mixta

2.1.2.2 Función de distribución Weibull- Weibull

Al igual que en el caso anterior, en la función de distribución Weibull mezclada (también conocida como Weibull-Weibull) la muestra se separa en 2 poblaciones y se estiman los parámetros para cada una de ellas. La función de distribución es (Fuentes O. A. et al., 2018):

$$F(x) = p \left(1 - e^{-(x/\alpha_1)^{\beta_1}} \right) + (1 - p) \left(1 - e^{-(x/\alpha_2)^{\beta_2}} \right) \quad (2-19)$$

La función de densidad es:

$$f(x) = p \left(\frac{\beta_1 x^{\beta_1-1}}{\alpha_1^{\beta_1}} e^{-(x/\alpha_1)^{\beta_1}} \right) + (1 - p) \left(\frac{\beta_2 x^{\beta_2-1}}{\alpha_2^{\beta_2}} e^{-(x/\alpha_2)^{\beta_2}} \right) \quad (2-20)$$

Las constantes α y β siguen siendo las constantes de escala y forma respectivamente, siendo identificados con el subíndice 1 para la primera población y el 2 para la segunda.

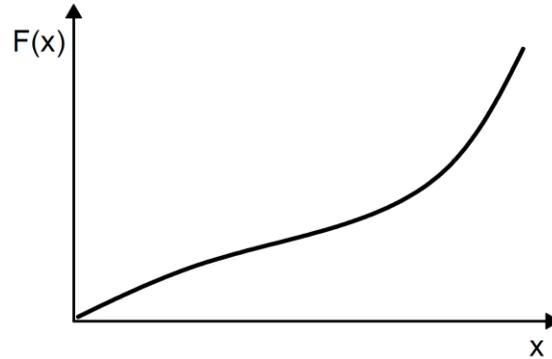


Figura 2-6. Forma típica de la función de distribución de probabilidad de Weibull mixta

2.1.3 Obtención de parámetros

Al realizar el ajuste a los datos hidrométricos a una función de distribución de probabilidad, el objetivo principal es determinar los parámetros de la función que describan un comportamiento lo más similar posible al registro de datos disponible. Las metodologías a disposición son diversas, y su elección dependerá principalmente de la confiabilidad de parámetros deseada y los recursos disponibles para realizar los cálculos. Algunos de ellos son:

- Método de momentos
- Método de máxima verosimilitud
- Método de momentos-L

Dentro de estos métodos se destaca el de momentos por ser el que ofrece estimaciones más sencillas, y el de máxima verosimilitud.

2.1.3.1 Método de los momentos

El método de los momentos es un proceso relativamente sencillo para estimar los parámetros de las funciones de distribución (Denia y Meuleón, 1995).

Siendo x una variable aleatoria continua, el k -ésimo momento poblacional es definido como:

$$\mu'_k = E\{x^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \tag{2-21}$$

Donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria. Por otro lado, teniendo una muestra aleatoria de tamaño n , el k -ésimo momento muestral es:

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \tag{2-22}$$

La metodología consiste en plantear un sistema de ecuaciones igualando los momentos muestrales con los momentos poblacionales, planteando tantas ecuaciones como el número de parámetros desconocidos.

$$\begin{cases} \mu'_1 = m'_1 \\ \mu'_2 = m'_2 \\ \mu'_3 = m'_3 \\ \vdots \\ \mu'_t = m'_t \end{cases} \quad (2-23)$$

Donde t es el número de parámetros por estimar. Varios autores han demostrado que los estimadores del método de los momentos, bajo supuestos no muy restrictivos, son consistentes y sus funciones de distribución fácilmente calculables (Pérez, 2023).

2.1.3.2 Método de la máxima verosimilitud

Este método establece que para una variable aleatoria x que tiene una función de densidad de probabilidad $p(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; son los m parámetros de dicha función, la probabilidad de obtener un valor dado x_i , es proporcional a $p(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, y la probabilidad conjunta de obtener una muestra aleatoria de n valores independientes x_1, x_2, \dots, x_n es proporcional al producto (Kite, 1988).

$$L = \prod_{i=1}^n p(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2-24)$$

Esta función es llamada verosimilitud. El objetivo del método es estimar los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, tales que el valor de la función sea el máximo. Estimar el punto en donde la función se maximiza, implica la derivación parcial con respecto a cada parámetro e igualarlo a cero. Esto permite obtener un sistema de m ecuaciones para obtener los m parámetros.

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_2} = 0 \\ \frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_3} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_m} = 0 \end{cases} \quad (2-25)$$

El sistema de ecuaciones puede resultar ser lineal o no lineal, dependiendo de la función de distribución, haciendo que en diversas ocasiones obtener una solución analítica sea imposible. Esto último supone un problema complicado, que requiere de métodos numéricos con una gran cantidad de cálculos, por lo que es común optar por el método de momentos para obtener estimaciones de parámetros de manera más sencilla.

Como una forma de simplificación, Escalante y Reyes (2002) proponen usar el logaritmo de la función de verosimilitud, ya que cuando el logaritmo es maximizado, la función lo hará también; obteniendo lo siguiente:

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n p(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2-26)$$

A partir de esta función, se plantea un sistema de ecuaciones siguiendo el procedimiento que se usó para la función sin logaritmo. Fuentes, Arganis, Domínguez, Fuentes y Rodríguez (2015) postulan otro interesante enfoque maximizando la función de verosimilitud usando algoritmos genéticos.

2.1.4 Periodo de retorno univariado

El periodo de retorno se define como el número de años que transcurren en promedio para que un evento de magnitud dada x sea igualado o excedido por lo menos una vez en ese periodo de tiempo (Escalante y Reyes, Técnicas Estadísticas en Hidrología, 2002).

$$T = \frac{1}{P(X > x)} \quad (2-27)$$

Donde T es el periodo de retorno, X es la variable aleatoria, x el evento y $P(X > x)$ es la probabilidad de excedencia. Otra forma de expresar al periodo de retorno es:

$$T = \frac{1}{1 - P(X \leq x)} = \frac{1}{1 - F(x)} \quad (2-28)$$

Donde $P(X \leq x)$ es la probabilidad de no excedencia y $F(x)$ es la función de distribución de probabilidad. Si se tiene una muestra de gastos máximos anuales Q , de tamaño n , ordenada de mayor a menor

$$Q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ tal que } x_m > x_{m+1} \text{ para } m = 1, 2, \dots, n \quad (2-29)$$

Definiendo a m como el número de orden del evento (correspondiente a la posición del dato en la lista ordenada). Se puede observar que la probabilidad de que el gasto máximo anual sea menor que el registro más pequeño se encuentra en el siguiente intervalo:

$$0 \leq P(X \leq x_n) \leq \frac{1}{n} \quad (2-30)$$

Mientras que la probabilidad de que sea mayor que el máximo registro, se encuentra en el intervalo:

$$1 - \frac{1}{n} \leq P(X \leq x_1) \leq 1 \quad (2-31)$$

Tomando en cuenta los límites superiores de las ecuaciones 2-30 y 2-31 se puede plantear la probabilidad de no excedencia como:

$$P(X \leq x_m) = 1 + \frac{1 - m}{n} \quad (2-32)$$

Mientras que con los límites inferiores:

$$P(X \leq x_m) = 1 - \frac{m}{n} \quad (2-33)$$

Sin embargo, según la ecuación 2-32 no es posible que se presente un gasto mayor al máximo registro, mientras que con la ecuación 2-33 la probabilidad nula corresponde a que se presente un gasto menor que el mínimo registro, para corregirlo se usa la expresión propuesta por Weibull (1939):

$$P(X \leq x) = 1 - \frac{m}{n + 1} \quad (2-34)$$

La ecuación 2-34 es muy usada dentro de la hidrología. Sustituyendo la ecuación 2-34 en la 2-28, el periodo de retorno del m -ésimo evento de los n registrados ordenados es:

$$T = \frac{n + 1}{m} \quad (2-35)$$

Mientras que la probabilidad de no excedencia en función del periodo de retorno queda expresada como:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \frac{1}{T} \quad (2-36)$$

En Hidrología, normalmente se prefiere trabajar con periodos de retorno en lugar de probabilidades, pues es un concepto que resulta más claro ya que tiene las mismas unidades (tiempo) que la vida útil de las obras y puede compararse con ésta (Aparicio, 2008).

El periodo de retorno a considerar para una avenida de diseño generalmente está dado por las normativas oficiales en materia de obras hidráulicas, o bien, en documentos de recomendaciones técnicas para la elaboración de estudios hidrológicos. Sin embargo, determinarlo es complicado por lo que debe realizarse un análisis hidrológico y económico.

Diversos investigadores han realizado este análisis exhaustivamente, proponiendo intervalos de periodo de retorno que busquen equilibrar eficientemente el costo y seguridad de las obras, en función del tamaño, importancia de la obra, o bien, en función de las zonas que son puestas en riesgo.

La Comisión Nacional del Agua (2014) propone que, para el análisis de riesgo por inundaciones, los estudios hidrológicos deben realizarse considerando periodos de retorno de 2, 5, 10, 20, 50, 100, 500 y 1000 años.

2.1.5 Pruebas de bondad de ajuste

Para determinar qué tan bueno es el ajuste de los parámetros de la función de distribución de probabilidad al registro de datos y compararlo con los obtenidos para otras funciones de este tipo, se plantean las pruebas o criterios de bondad de ajuste.

2.1.5.1 Error estándar de ajuste

Kite (1988) propuso una forma de determinar la mejor opción entre distintas funciones de distribución de probabilidad para el ajuste a una muestra de datos, conocido como error estándar de ajuste (EE). Considerando una muestra de datos Q_i de tamaño n , el EE está dado por:

$$EE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Q}_T - Q_T)^2}{n - mp} \right]^{1/2} \quad (2-37)$$

Donde Q_T son los eventos Q_i ordenados de mayor a menor con un periodo de retorno asignado T (ec. 2-35), y una probabilidad P (ec. 2-36), \hat{Q}_T son los eventos estimados por la función de distribución de probabilidad en análisis para cada periodo de retorno T asignado a la muestra ordenada Q_T , y mp es el número de parámetros de la función de distribución.

Como resulta evidente, la función que mejor ajuste con la muestra será la que obtenga el valor de EE mínimo. Si llegase a obtenerse valores similares de EE para distintas funciones de distribución, convendrá elegir aquella que tenga el menor número de parámetros.

2.1.5.2 Prueba de Kolmogórov-Smirnov

La prueba de Kolmogórov-Smirnov consiste en comparar el máximo valor absoluto de la diferencia D entre la función de distribución de probabilidad observada $F_o(x)$ y la estimada $F(x)$ (Aparicio, 2008).

$$D = \text{máx}|F_o(x) - F(x)| \quad (2-38)$$

La función de probabilidad observada $F_o(x)$ es calculada mediante las ecuaciones 2-35 y 2-36, mientras que $F(x)$ corresponderá al valor obtenido con la función que se busca evaluar. Si lo que se busca es validar o rechazar una hipótesis, es necesario determinar un valor crítico d que depende del número de datos y el nivel de significancia α , que representa la probabilidad aceptada en que se rechace la hipótesis cuando en realidad esta sea verdadera. El valor crítico puede estimarse de diversas formas, una de ellas es usando la Tabla 2-1.

Tamaño de la muestra	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	0.51	0.56	0.67
10	0.37	0.41	0.49
15	0.30	0.34	0.40
20	0.26	0.29	0.35
25	0.24	0.26	0.32
30	0.22	0.24	0.29
40	0.19	0.21	0.25
<i>n</i> grande	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Tabla 2-1. Valores críticos d para la prueba Kolmogórov-Smirnov (Benjamin y Cornell, 1970)

Si se obtiene que $D < d$, se acepta la hipótesis (es decir la función de distribución ajusta apropiadamente), caso contrario se rechaza. Al comparar diversas funciones de distribución de probabilidad, la que proporcione el mejor ajuste a la muestra será aquella que obtenga el mínimo valor de D .

2.2 Funciones de distribución de probabilidad bivariadas

El diseño de metodologías para la estimación de avenidas de diseño más confiable ha sido un objetivo de trabajo para los hidrólogos. Rivera y Escalante (1999) mencionan que en los fenómenos en los que el almacenamiento es una variable de interés, conocer el volumen es más importante que el gasto. Sin embargo, una metodología capaz de modelar conjuntamente el gasto y volumen para la estimación de avenidas de diseño será inherentemente capaz de proporcionar resultados más confiables.

Fuentes, et al. (2018) mencionan que recientemente se han realizado nuevos análisis utilizando modelos estadísticos en donde no se explique de forma individual el comportamiento de cada variable, sino modelos que resulten más confiables logrando representar la relación entre ellas, es decir, *modelos conjuntos*. Una herramienta útil para realizar dichos análisis conjuntos son las llamadas funciones cópula.

2.2.1 Funciones cópula

El término cópula fue propuesto por Sklar (1959), mediante el denominado *teorema de Sklar*, el cual plantea que “Sea H una función de distribución conjunta con sus marginales F y G , entonces existe una cópula C tal que para toda u y v en \mathbb{R}

$$H(x, y) = C(F(u), G(v)) \quad (2-39)$$

Si F y G son continuas, entonces C será única”. Una función cópula une a funciones de distribución marginales de una dimensión para obtener una función de distribución conjunta n -dimensional. Para el caso de este trabajo, se hará uso de una función cópula bidimensional.

Ramírez (2019) afirma que las cópulas actualmente suponen una herramienta poderosa para la modelación de datos multivariados en los que la dependencia de las variables aleatorias existe. Esto cobra especial relevancia en la hidrología dado que las variables en análisis (gasto y volumen) están relacionadas entre sí.

A partir de una medida de la dependencia entre dos variables, es posible estimar el parámetro de algunas clases de cópulas. La medida de dependencia más utilizada es el coeficiente de correlación de Pearson (ρ) que considera la dependencia lineal y no se modifica para transformaciones crecientes de las variables (Fuentes O. A. et al., 2018).

Para análisis hidrológicos se recomienda el uso de la familia de cópula Gumbel-Hougaard, puesto que su versatilidad permite que se utilice con muchas de las funciones de probabilidad tradicionales y sus resultados son confiables (Copca, 2019).

2.2.1.1 Cópula Gumbel-Hougaard

La cópula Gumbel-Hougaard está dada por:

$$C(u, v) = \exp\left[-\{(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\}^{-\frac{1}{\theta}}\right] \quad (2-40)$$

La relación entre el coeficiente de concordancia de Kendall τ y el parámetro θ de la cópula es:

$$|\tau| = 1 - \theta^{-1} \quad (2-41)$$

La función de densidad de la cópula de acuerdo con Copca (2019) es:

$$c = \frac{(\ln u \ln v)^{\theta-1}}{u v} \exp\left(-w^{\frac{1}{\theta}}\right) \left[w^{\frac{2}{\theta}-2} + (\theta - 1)w^{\frac{1}{\theta}-2}\right] \quad (2-42)$$

Donde:

$$w = (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \quad (2-43)$$

2.2.2 Estimación del parámetro de cópula

La estimación del parámetro θ de la cópula es necesario para definir correctamente a la función de distribución conjunta. Para ello, Genest, Ghoudi y Rivest (1995) proponen un método semiparamétrico que se basa en maximizar la función de verosimilitud de la cópula.

La función de verosimilitud para una función cópula, cuya definición es dada en la ecuación 2-39, es:

$$V(\theta) = \prod_{k=1}^n c(F(u_k), G(v_k)) \quad (2-44)$$

Donde c es la función de densidad de la cópula C ; $F(u_k)$ y $G(v_k)$ son las distribuciones de probabilidad marginales de las k -ésimas variables aleatorias u y v .

Con el parámetro θ conocido y, por lo tanto, la función de distribución bivariada definida, es posible realizar la extrapolación a periodos de retorno bivariados.

2.2.3 Periodo de retorno bivariado

Como ya se ha descrito en la sección 2.1.4, la selección del periodo de retorno es muy importante en lo que se refiere a la estimación de avenidas de diseño. En los análisis bivariados, la definición del periodo de retorno supone un problema más complejo que en un caso univariado, ya que este periodo se encuentra relacionado con 2 variables que guardan cierta dependencia (en este caso en particular, gasto y volumen). De forma convencional en hidrología, el periodo de retorno univariado está asociado a un valor Q , sin embargo, un periodo de retorno bivariado está asociado a un conjunto infinito de parejas de datos (Q, V) , que describirán una curva, denominada isolínea de periodo de retorno o curva de nivel de cópula, como se muestra en la Figura 2-7.

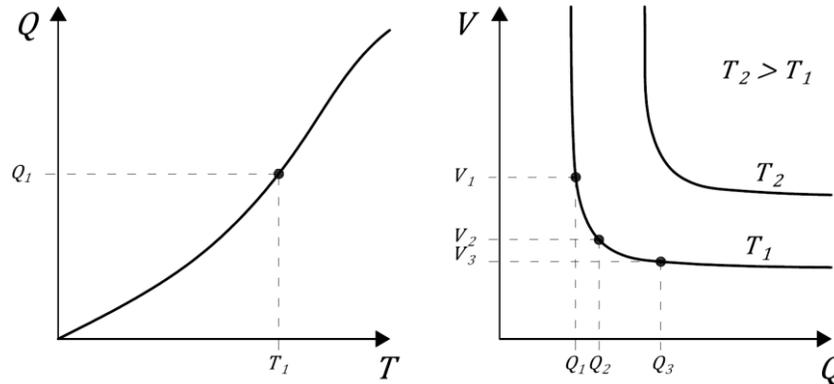


Figura 2-7. Esquemmatización del periodo de retorno univariado (izquierda) y bivariado (derecha)

Brunner, Favre y Seibert (2016) afirman que la estimación del periodo de retorno bivariado puede hacerse mediante tres enfoques: probabilidad condicional, funciones de distribución de probabilidad conjunta, función de distribución de Kendall.

Para fines específicos de este trabajo, son de interés principal el segundo (referido a los periodos de retorno T_{OR} y T_{AND}) y tercer enfoque (referido al periodo de retorno T_K), explicados a continuación.

2.2.3.1 Periodos de retorno conjunto OR y AND

Corresponden al enfoque de las funciones de distribución conjunta (cópulas). Como sus nombres sugieren, el periodo de retorno OR (ecuación 2-45), corresponde a la disyunción "o" en español, que implica que la variable aleatoria u o la variable v son excedidas ($U > u$ o $V > v$).

$$T_{OR} = \frac{1}{1 - C(u, v)} \quad (2-45)$$

Por otro lado, el periodo de retorno AND (ecuación 2-46) lo hace a la conjunción "y", en donde la variable aleatoria u y la variable v son excedidas ($U > u$ y $V > v$)

$$T_{AND} = \frac{1}{1 - F(u) - G(v) + C(u, v)} \quad (2-46)$$

Esto puede ser observado de forma más clara en la Figura 2-8, donde Serinaldi (2015) ejemplifica a regiones críticas (regiones donde se cumplen las condiciones de excedencia) en color gris, mientras que las líneas negras indican las regiones en donde la probabilidad es calculada. Las probabilidades de excedencia p_{OR} y p_{AND} están dadas por las ecuaciones 2-47 y 2-48 respectivamente.

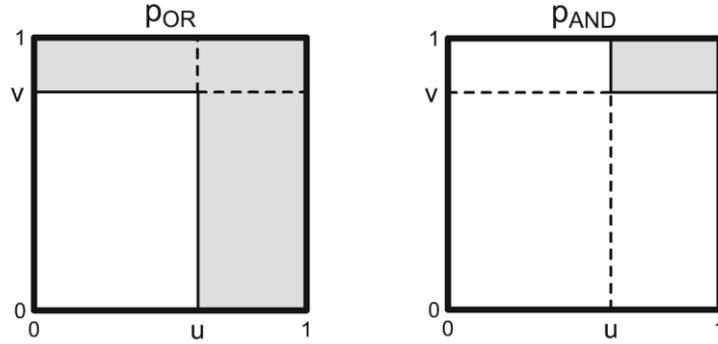


Figura 2-8. Dominios y regiones críticas para probabilidades de excedencia OR y AND (Serinaldi, 2015)

$$p_{OR} = 1 - \frac{1}{T_{OR}} \quad (2-47)$$

$$p_{AND} = 1 - \frac{1}{T_{AND}} \quad (2-48)$$

2.2.3.2 Periodo de retorno de Kendall

Salvadori y Michelle (2004) introducen el concepto de *función de distribución de Kendall*, la cual representa la función de distribución acumulada de las isolíneas de periodo de retorno (o curvas de nivel de cópula). En una distribución bivariada, dicha función queda definida como:

$$K_C(t) = P(W \leq t) = P(C(U, V) \leq t) \quad (2-49)$$

También puede ser expresada en función de la función generadora de una cópula arquimediana.

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \quad (2-50)$$

Donde t es la probabilidad obtenida de una cópula arquimediana $C(u, v)$, $\varphi(t)$ es la función generadora de una cópula arquimediana y $\varphi'(t)$ es la derivada de dicha función. Nótese que la función de Kendall aplica únicamente en cópulas arquimedianas, y por tanto, el periodo de retorno de Kendall (ecuación 2-51) también.

$$T_K = \frac{1}{1 - K_C(t)} \quad (2-51)$$

De forma similar al caso anterior, Serinaldi (2015) identifica a regiones críticas en color gris, mientras que la línea negra indica la región en donde la probabilidad de excedencia de Kendall (ecuación 2-52) es calculada.

$$p_K = 1 - \frac{1}{T_K} \quad (2-52)$$

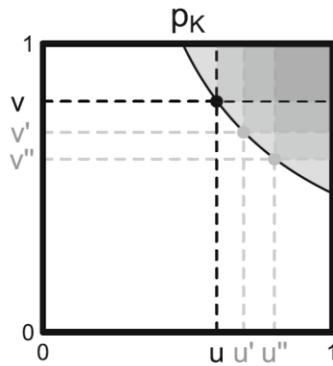


Figura 2-9. Dominios y regiones críticas para probabilidades de excedencia Kendall (Serinaldi, 2015)

Ya que la función cópula arquimediana que se usará para el análisis es la Gumbel-Hougaard, conviene conocer la función generadora $\varphi(t)$ (ec. 2-53) y su primera derivada (ec. 2-54) para poder estimar el periodo de retorno de Kendall en los análisis posteriores. Gosh (2024) propone las siguientes expresiones para dichas funciones:

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta \tag{2-53}$$

$$\varphi'(t) = \frac{\theta}{t} (-\ln t)^{\theta-1} \tag{2-54}$$

3 Estimación de hidrogramas de avenidas extremas

La metodología que se usará para la estimación de hidrogramas de diseño mediante el análisis conjunto del gasto de pico y volumen fue desarrollada en el IIUNAM. El procedimiento es el siguiente:

1. **Selección de la duración que tendrá el hidrograma de diseño:** Se determinará la duración de los hidrogramas que mejor represente el comportamiento del escurrimiento real.
2. **Selección de datos para el criterio de *volumen máximo*:** A partir de los registros hidrométricos diarios y la duración del hidrograma elegida, se podrán crear hidrogramas a partir de los cuales se determinarán los registros de gastos y volúmenes anuales
3. **Ajuste de datos a funciones de probabilidad univariadas:** Los datos anuales de gasto y volumen, serán ajustados a funciones de probabilidad univariadas, para determinar aquella que mejor describa su comportamiento.
4. **Ajuste de datos a funciones de probabilidad bivariadas usando cópulas:** Se estimará el parámetro de la cópula Gumbel-Hougaard a partir de las funciones marginales seleccionadas.
5. **Extrapolación a periodos de retorno de interés:** Se formarán las parejas de gasto y volumen extrapolados a los periodos de retorno elegidos.
6. **Selección de forma del hidrograma:** A las parejas de gasto y volumen extrapolados se le asignará una forma para poder obtener los hidrogramas finales.

3.1 Duración del hidrograma

La selección de la duración del hidrograma es un paso crucial en el análisis de frecuencia de avenidas. Existen diversas metodologías que varían en complejidad o requerimiento de datos, sin embargo, para este trabajo se decidió analizar las máximas avenidas registradas determinando su duración.

Una avenida será identificada rápidamente mediante un máximo local de gasto en los registros hidrométricos. Antes de alcanzar dicho pico, el gasto tendrá un registro más o menos constante que correspondería al gasto base del río. El inicio de la avenida corresponderá al registro anterior antes de que se observe la tendencia ascendente en los gastos medios medidos, y el final del evento será cuando el gasto vuelva a tomar un valor con una diferencia de máximo del 10% del gasto definido para el inicio. La duración será el intervalo comprendido entre los inicios y finales determinados para los distintos eventos.

Aplicar esta metodología a todos los registros tomaría demasiado tiempo, por lo que puede acotarse a los 15 máximos registros anuales, considerando que para fines de este análisis resulta de especial interés las máximas avenidas que puedan presentarse. Dichos eventos se muestran ordenados de mayor a menor según su intensidad en la Tabla 3-1.

Año	$Q_{m\acute{a}x}$ (m ³ /s)
1937	118.524
1971	96.899
1967	91.554
1976	90.709

1958	87.991
1938	80.905
1931	80.029
1965	69.047
1935	66.544
1978	65.255
1944	64.238
1991	62.483
2003	55.091
1941	54.324
1974	52.865

Tabla 3-1. 15 gastos máximos del registro de gasto medio diario

La diferencia entre los gasto inicial y final del evento que se considerará en cada caso puede ser obtenido como:

$$\Delta Q(\%) = \left| \frac{Q_{\text{inicial}} - Q_{\text{final}}}{Q_{\text{inicial}}} \right| \times 100 \quad (3-1)$$

Donde Q_{inicial} es el gasto que define el inicio de la avenida y Q_{final} el final de ésta, $\Delta Q(\%)$ es la diferencia en porcentaje de dichos gastos. Esta metodología permite evaluar “a ojo” si la forma de la avenida resultante resulta razonable, o debe ser ajustada. Aplicándola a los 15 años de interés se obtiene lo mostrado en la Tabla 3-2.

Año	Fecha de inicio	Fecha de fin	Q_{inicial} (m ³ /s)	Q_{final} (m ³ /s)	ΔQ (%)	Q_p (m ³ /s)	Duración (días)
1931	7/29/1931	8/17/1931	8.82	9.07	2.8	80.03	20
1935	6/21/1935	7/11/1935	6.04	6.33	4.9	66.54	21
1937	6/27/1937	7/19/1937	5.24	5.33	1.6	118.52	23
1938	7/3/1938	7/19/1938	1.88	1.92	2.0	80.91	17
1941	10/1/1941	10/13/1941	8.89	8.88	0.7	54.32	13
1944	9/6/1944	9/18/1944	6.43	6.34	1.3	64.24	13
1958	8/31/1958	9/26/1958	10.41	10.42	0.1	87.99	27
1965	9/22/1965	10/11/1965	3.70	3.87	3.6	69.05	20
1967	9/21/1967	10/8/1967	6.14	6.59	7.3	91.55	18
1971	9/24/1971	10/25/1971	3.94	3.88	4.9	96.90	32
1974	9/21/1974	10/3/1974	7.37	8.07	9.5	52.87	13
1976	8/17/1976	9/6/1976	4.47	4.65	3.9	90.71	21
1978	10/5/1978	10/28/1978	1.57	1.64	3.9	36.58	24
1991	7/5/1991	7/26/1991	10.64	10.48	1.5	56.36	22
2003	10/8/2003	10/27/2003	4.24	4.33	2.1	55.09	20

Media: 20.27

Tabla 3-2. Estimación de duración para los 15 máximos registros anuales

La media de los resultados es de 20.27 días, por lo que se propone redondear al entero superior siguiente. Es decir, la duración de los hidrogramas de diseño será de $n = 21$ días.

3.2 Selección de datos

Bajo el criterio convencional de selección de datos para análisis univariados, la selección de datos se enfoca en la selección de un gasto máximo para cada año de registro, elegidos a partir de una base de datos de gastos medios diarios. En este caso bivariado, se cuenta con la misma base de datos, por lo que es necesario estimar el valor del volumen de escurrimiento, lo cual puede calcularse como:

$$V_i = \sum_{k=i}^{i+n} Q_k \Delta t \quad (3-2)$$

Donde V_i es el volumen para el registro i , Δt es el incremento de tiempo en el que es analizado el registro (en este caso $\Delta t = 1 \text{ día} = 86,400 \text{ s}$) y n es la duración del hidrograma de diseño. Esto quiere decir que corresponde al acumulado de volumen a partir del día del registro hasta n días posteriores. Para simplificar los cálculos y facilitar el manejo de los resultados, las unidades de volumen serán $\left[\text{m}^3 \cdot \frac{\text{día}}{\text{s}} \right]$ que equivalen a $86,400 \text{ m}^3$. Esta consideración hará que la ecuación 3-2 se simplifique numéricamente a solo la suma de datos Q_i .

Una vez conocidos ambas variables, en lo que respecta a la selección de datos máximos anuales, se aplicará el proceso de selección de datos bajo el criterio de volumen máximo.

3.2.1 Criterio de volumen máximo

En este criterio de selección, la pareja de datos será seleccionada priorizando el volumen máximo (por ello recibe su nombre). Por lo tanto, el valor del volumen corresponderá al máximo registro anual de volumen. Este valor estará relacionado con n registros de gasto que corresponden a los que se utilizaron para obtener el valor del acumulado de volumen. El valor del gasto será seleccionado eligiendo el valor máximo encontrado dentro de dichos datos.

Para explicarlo, se mostrará la selección de la pareja (Q, V) para el máximo evento histórico encontrado bajo este criterio (año 1958). El registro máximo histórico de volumen encontrado corresponde al día 1 de septiembre de 1958. Según lo explicado en el párrafo anterior, el registro de volumen está formado por el acumulado de 21 registros de gasto (del 1 de septiembre al 21 de septiembre de 1958) que marcarán el evento máximo, así mismo, deben revisarse dichos valores para seleccionar el gasto máximo.

i	Fecha	Q (m ³ /s)	V (m ³ · día/s)
1	01/09/1958	13.832	731.732
2	02/09/1958	23.162	731.316
3	03/09/1958	39.549	719.449
4	04/09/1958	43.361	688.082
5	05/09/1958	54.521	651.692
6	06/09/1958	52.363	607.594
7	07/09/1958	31.279	561.301
8	08/09/1958	36.617	535.881
9	09/09/1958	54.504	504.531
10	10/09/1958	68.633	454.436
11	11/09/1958	87.991	389.995
12	12/09/1958	31.717	309.706

13	13/09/1958	30.822	288.191
14	14/09/1958	30.82	265.852
15	15/09/1958	33.131	242.459
16	16/09/1958	23.989	215.398
17	17/09/1958	18.673	196.038
18	18/09/1958	15.647	182.298
19	19/09/1958	15.583	171.884
20	20/09/1958	14.011	165.318
21	21/09/1958	11.527	156.065

Tabla 3-3. Selección de pareja de datos (Q, V) bajo el criterio de volumen máximo para el año 1958

En la Tabla 3-3, se muestran los registros mencionados y se resaltan en color amarillo los máximos identificados.

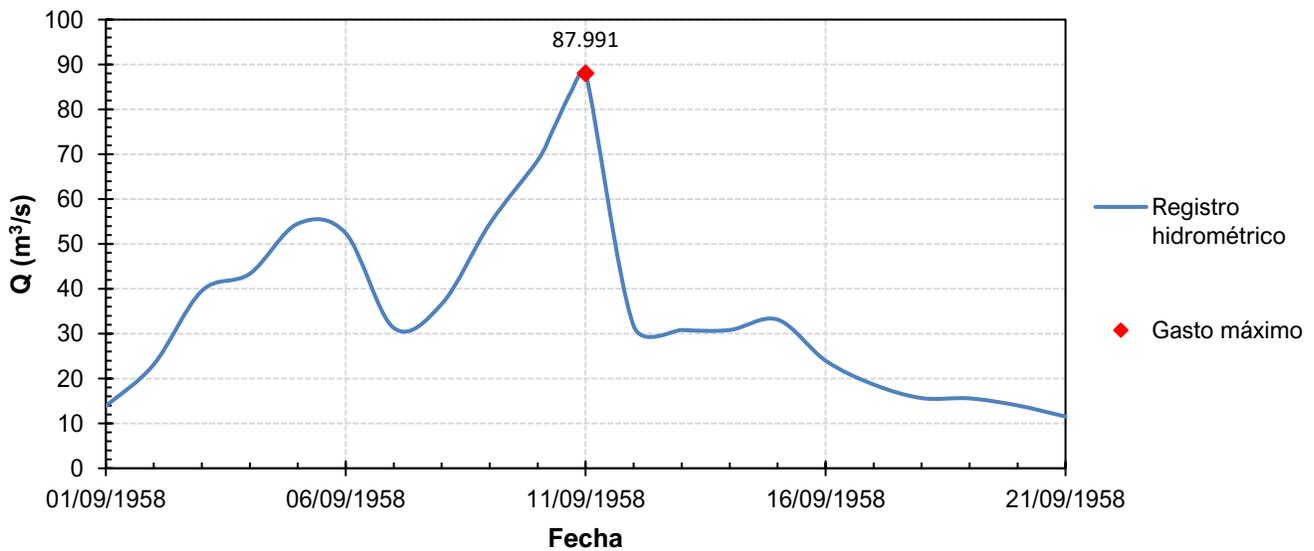


Figura 3-1. Vista gráfica para la selección del gasto máximo para el año 1958

La pareja de datos para 1958 es:

$$(Q_{1958}, V_{1958}) = \left(87.99 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, 731.73 \frac{\text{m}^3 \cdot \text{día}}{\text{s}} \right) = \left(87.99 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, 63\,221\,644 \text{ m}^3 \right)$$

Este proceso debe repetirse para la totalidad de años en los que se tienen mediciones. El conjunto de parejas de (Q, V) obtenidos se muestran en la Tabla 0-1 de la sección Anexos.

3.3 Ajuste a funciones de probabilidad univariadas

Para obtener el ajuste a una función de distribución bivariada (cópula) es necesario contar con el ajuste a una función de distribución univariada para cada variable (gasto y volumen) seleccionada bajo el criterio de volumen máximo. Para determinar los parámetros de las funciones de distribución de una población (a excepción de la distribución Gumbel y Weibull) se hará uso del método de momentos.

Como se definió en la sección 2.1.3.1, el método se basa en igualar los momentos muestrales con los momentos poblacionales de cada distribución. Como primer paso, es necesario obtener los primeros 2 momentos muestrales, expresados como:

$$m'_1 = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3-3)$$

$$m'_2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3-4)$$

A partir de la información de gasto del registro histórico formado (Tabla 0-1) los momentos muestrales para los datos de gasto son:

$$\bar{x} = 31.22 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$s^2 = 596.05 (\text{m}^3/\text{s})^2$$

Para los datos de volumen son:

$$\bar{x} = 204.28 \text{ m}^3 \cdot \text{día}/\text{s}$$

$$s^2 = 29,736.04 (\text{m}^3 \cdot \text{día}/\text{s})^2$$

Es importante aclarar que, pese a que diversas ecuaciones numéricamente deben tener 2 soluciones, se considerará solamente las raíces positivas ya que para las distribuciones involucradas los parámetros deben ser siempre mayores que cero. A continuación, se muestra el resumen del procedimiento para las distribuciones siguientes:

- **Normal**

Siendo este el caso más simple, igualando los momentos muestrales y poblacionales, se tiene que:

$$\alpha = \bar{x} \quad (3-5)$$

$$\beta^2 = s^2 \Rightarrow \beta = s \quad (3-6)$$

Sustituyendo los valores de los momentos muestrales en las expresiones anteriores servirá para encontrar los parámetros de la función de distribución normal.

- **Lognormal de 2 parámetros**

Igualando los momentos muestrales y poblacionales, se tiene que:

$$\bar{x} = \exp\left(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\right) \quad (3-7)$$

$$s^2 = \exp\left(2(\alpha + \beta^2)\right) - \exp(2\alpha + \beta^2) \quad (3-8)$$

Esto plantea un sistema de ecuaciones. Partiendo de la ecuación 3-7:

$$\ln \bar{x} = \ln \exp\left(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\right) \Rightarrow \ln \bar{x} = \alpha + \frac{\beta^2}{2} \Rightarrow 2 \ln \bar{x} = 2\alpha + \beta^2$$

$$\ln \bar{x}^2 = 2\alpha + \beta^2 \quad (3-9)$$

Para la ec. 3-8:

$$s^2 = \exp(2(\alpha + \beta^2)) - \exp(2\alpha + \beta^2) = (\exp \beta^2 - 1)(\exp(2\alpha + \beta^2))$$

$$\ln s^2 = \ln(\exp \beta^2 - 1)(\exp(2\alpha + \beta^2)) \Rightarrow \ln s^2 = \ln(\exp \beta^2 - 1) + \ln(\exp(2\alpha + \beta^2))$$

$$\ln s^2 = \ln(\exp \beta^2 - 1) + 2\alpha + \beta^2 \quad (3-10)$$

Sustituyendo la ec. 3-9 en la ec. 3-10 y resolviendo para β se obtiene:

$$\ln s^2 = \ln(\exp \beta^2 - 1) + \ln \bar{x}^2 \Rightarrow \ln s^2 - \ln \bar{x}^2 = \ln(\exp \beta^2 - 1) \Rightarrow \ln \frac{s^2}{\bar{x}^2} = \ln(\exp \beta^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \exp \ln \frac{s^2}{\bar{x}^2} = \exp \ln(\exp \beta^2 - 1) \Rightarrow \frac{s^2}{\bar{x}^2} = \exp \beta^2 - 1 \Rightarrow \frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1 = \exp \beta^2$$

$$\frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1 = \exp \beta^2 \Rightarrow \ln\left(\frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1\right) = \ln \exp \beta^2 \quad \beta^2 = \ln\left(\frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1\right)$$

$$\beta = \sqrt{\ln\left(\frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1\right)} \quad (3-11)$$

Sustituyendo la ec. 3-11 en la ec. 3-9 y resolviendo para α queda:

$$\ln \bar{x}^2 = 2\alpha + \ln\left(\frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1\right) \Rightarrow 2\alpha = \ln \bar{x}^2 - \ln\left(\frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1\right) = \ln\left(\frac{\bar{x}^2}{\frac{s^2}{\bar{x}^2} + 1}\right) = \ln\left(\frac{\bar{x}^4}{s^2 + \bar{x}^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\bar{x}^4}{s^2 + \bar{x}^2}\right) \quad (3-12)$$

Sustituyendo los valores de los momentos muestrales en las ecuaciones 3-11 y 3-12 servirá para encontrar los parámetros de la función de distribución lognormal.

- **Exponencial de 2 parámetros**

Igualando los momentos muestrales y poblacionales, se tiene que:

$$\bar{x} = \alpha + \beta \quad (3-13)$$

$$s^2 = \beta^2 \quad (3-14)$$

Partiendo de la ecuación 3-14:

$$\beta = s \quad (3-15)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 3-13 se obtiene:

$$\bar{x} = \alpha + s \Rightarrow \alpha = \bar{x} - s \quad (3-16)$$

Sustituyendo los valores de los momentos muestrales en las ecuaciones 3-15 y 3-16 servirá para encontrar los parámetros de la función de distribución.

Para las funciones Gumbel, Weibull, Gumbel-Gumbel y Weibull-Weibull, se hizo uso de un programa creado en el Instituto de Ingeniería por Fuentes, et. al. (2015) basado en el lenguaje de programación C++, que realiza la estimación de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud. A continuación, se mostrarán los resultados de dicho análisis.

3.3.1 Ajuste a datos de gasto para criterio de volumen máximo

Los parámetros estimados para funciones de distribución de una población se muestran en la Tabla 3-4 mientras que los de funciones mixtas en la Tabla 3-5. En la Figura 3-2 se muestra el gasto que se extrapola con cada función de distribución estimada para distintos periodos de retorno.

Las pruebas de bondad de ajuste Kolmogórov-Smirnov (D) y Error Estándar de Ajuste (EE) confirman a la función de distribución de Weibull de una población como la que mejor se ajusta a los datos medidos. Por lo tanto, será elegida como función marginal para el gasto para continuar el análisis bivariado de los datos seleccionados bajo el criterio de volumen máximo.

Función de distribución	Parámetros de la función		Pruebas de bondad de ajuste	
	α	β	D	EE (m ³ /s)
Normal	31.22	24.41	0.1264	7.94
Lognormal	3.0836	0.9519	0.0923	11.01
Exponencial	6.808	24.414	0.0972	4.75
Weibull	33.7417	1.2881	0.0304	2.18
Gumbel	20.6189	17.0816	0.0664	4.94

Tabla 3-4. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas de una población para los gastos seleccionados por el criterio de volumen máximo

Función de distribución	Parámetros de la función					Pruebas de bondad de ajuste	
	α_1	β_1	α_2	β_2	p	D	EE (m ³ /s)
Gumbel mixta	5.1359	8.0229	14.9056	35.4309	0.4	0.0677	4.900
Weibull mixta	102.5788	6.5596	31.8785	1.3553	0.043	0.0392	2.218

Tabla 3-5. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas mixtas para los gastos seleccionados por el criterio de volumen máximo

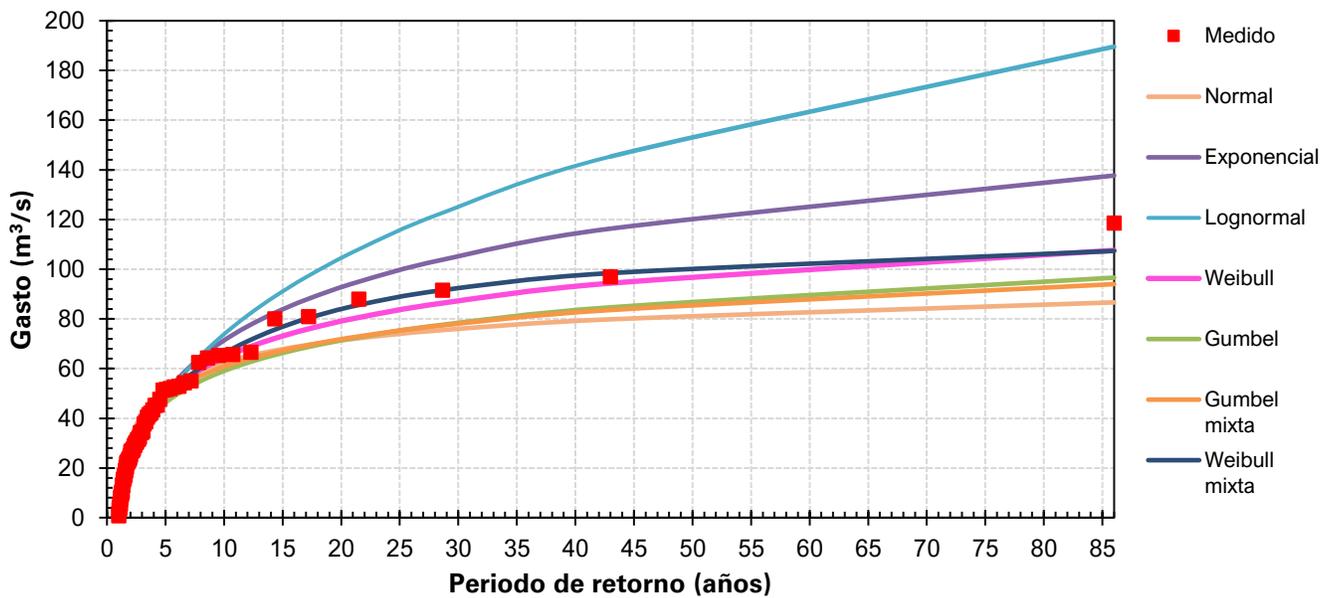


Figura 3-2. Ajuste de datos de gasto seleccionados con criterio de volumen máximo para funciones de distribución univariadas

3.3.2 Ajuste a datos de volumen para criterio de volumen máximo

Los parámetros estimados para funciones de distribución de una población se muestran en la Tabla 3-6 mientras que los de funciones mixtas en la Tabla 3-7. En la Figura 3-3 se muestra el gasto que se extrapola con cada función de distribución estimada para distintos periodos de retorno.

Mediante la prueba de bondad de ajuste Kolmogórov-Smirnov (D) la función que mejor ajusta es la Weibull de una población, sin embargo, considerando la prueba de Error Estándar de Ajuste (EE) el mejor ajuste corresponde a la función Weibull de dos poblaciones (mixta). Dado que se tiene que elegir entre 2 funciones de distribución un distinto número de parámetros, será elegida la que tenga menos parámetros. Esto se considera ya que la estimación de parámetros acarrea cierto error, el incrementar el número de éstas implica necesariamente un modelo con mayor incertidumbre. Por lo tanto, será elegida la función Weibull de una población como función marginal para el volumen para continuar el análisis bivariado de los datos seleccionados bajo el criterio de volumen máximo.

Función de distribución	Parámetros de la función		Pruebas de bondad de ajuste	
	α	β	D	EE (m ³ /s)
Normal	204.28	172.44	0.1604	62.97
Lognormal	5.0505	0.7335	0.0738	67.76
Exponencial	31.835	172.441	0.0627	22.35
Weibull	215.608	1.1682	0.0355	22.03
Gumbel	130.7263	114.9646	0.0838	45.02

Tabla 3-6. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas de una población para los volúmenes seleccionados por el criterio de volumen máximo

Función de distribución	Parámetros de la función					Pruebas de bondad de ajuste	
	α_1	β_1	α_2	β_2	p	D	$EE (m^3 \cdot día/s)$
Gumbel mixta	33.1761	53.6071	109.072	242.8154	0.4471	0.0609	35.083
Weibull mixta	549.0771	3.2864	157.4581	1.538	0.153	0.0661	21.421

Tabla 3-7. Parámetros estimados para funciones de probabilidad univariadas mixtas para los volúmenes seleccionados por el criterio de volumen máximo

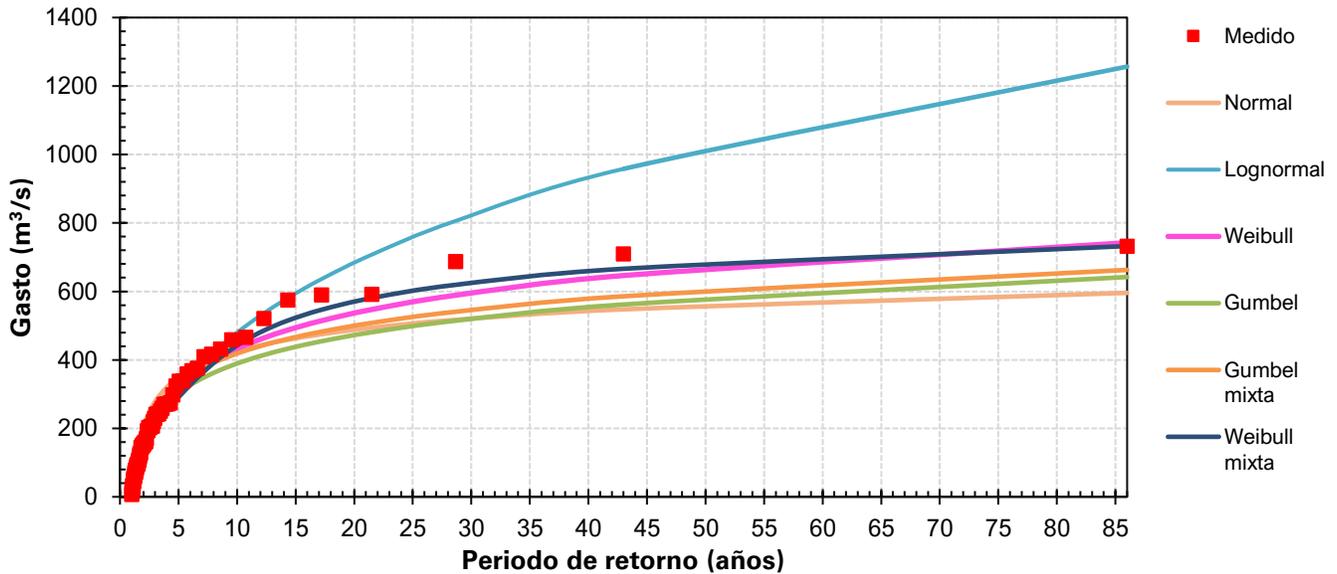


Figura 3-3. Ajuste de datos de gasto seleccionados con criterio de volumen máximo para funciones de distribución univariadas

3.4 Ajuste a la función de probabilidad bivariada

Como se explicó en la sección 2.2.2 el ajuste a la función cópula se realizará mediante el método semiparamétrico. Dado que la cópula Gumbel-Hougaard tiene un solo parámetro por estimar (θ), maximizar la función de verosimilitud puede resolverse de manera relativamente simple usando la herramienta *Solver* del software *Excel* eligiendo un método de resolución no lineal.

Dado que los valores que toma la función de verosimilitud maximizada suelen ser muy grandes, usar la propiedad de maximizar el logaritmo natural de la función dará por resultado valores de un orden que facilitará el manejo de los datos.

3.4.1 Cópula para datos seleccionados con el criterio de volumen máximo

Al maximizar la función de verosimilitud de la función cópula haciendo uso de las ecuaciones 2-42, 2-43 y 2-44, se obtiene un valor del parámetro de cópula de:

$$\theta = 3.41543$$

En la Tabla 3-8 se muestra el valor obtenido de la función de verosimilitud maximizada. La tabla completa se muestra en la Tabla 0-2 de la sección Anexos.

Año	Q (m^3/s)	V ($m^3 \cdot día/s$)	$F(Q)$	$G(V)$	w	c	$\ln V(\theta)$
2014	38.66	205.95	0.6962	0.6124	0.1188	2.3641	70.212

Tabla 3-8. Valor de la función de verosimilitud maximizada para la cópula formada con las funciones marginales

3.5 Extrapolación a periodos de retorno

Para efectos de análisis o revisión es importante contar con hidrogramas asociados a determinados periodos de retorno. Partiendo de las recomendaciones dadas por CONAGUA (2014), se extrapolarán los datos a 10, 50, 100 y 200 años de periodo de retorno.

Como ya se explicó en la sección 2.2.3, existen infinitas parejas de (Q, V) que cumplan con el periodo de retorno requerido, formando las isolíneas de periodo de retorno. Para elegir una sola pareja, se pueden tomar en cuenta los periodos de retorno marginales, es decir, el periodo de retorno considerando la función de distribución marginal según la variable de interés. Esto permitirá dibujar 2 rectas que intersecarán con la isolínea de T bivariado, lo que dará por resultado 2 parejas de (Q, V) de interés, que podrán ser definidos como punto tipo A (aquel que resulta de la intersección de la isolínea de T bivariada con la recta de T marginal de gasto) y el tipo B (intersección entre la isolínea de T bivariada y la recta de T marginal de volumen). En este punto es importante definir si para el fenómeno en estudio resulta una variable en estudio más importante el gasto o el volumen, pues seleccionar uno de los puntos implicará dar más relevancia a una variable que a la otra.

En el caso de los tránsitos de avenidas en cauces, en especial en aquellos en que es de gran relevancia el desbordamiento, la variable de gasto resulta de principal relevancia ya que ésta junto con la rugosidad y geometría del cauce, determinarán el tirante y, por lo tanto, si se alcanza una condición en la que el río se desborda o no.

El proceso para obtener las coordenadas de las isolíneas de periodo de retorno es el siguiente:

1. Definir una pareja de datos (Q, V)
2. Estimar el valor de las funciones de probabilidad marginales dados los datos anteriores $F(Q)$ y $G(V)$
3. Calcular el valor de la probabilidad bivariada mediante la cópula de Gumbel-Hougaard $C(F(Q), G(V))$
4. Calcular el valor del periodo de retorno bivariado
5. Si el periodo de retorno es el deseado se detiene el proceso, caso contrario se selecciona una nueva pareja de datos

Obtener parejas de datos mediante esta metodología es complejo y hace necesario el uso de herramientas iterativas. Una buena opción es la función de *buscar objetivo* en *Excel*, sin embargo, permite trabajar iterando una sola celda. Una forma de lidiar con ello es proponiendo un valor muy grande de gasto e iterando para obtener su pareja de volumen para determinado periodo de retorno. Esto dará un valor que será relativamente cercano a la asíntota de la isolínea de T , por lo que para determinar más

puntos se pueden proponer valores mayores de volumen que el que se asume como cercano a la asíntota, obteniendo así más puntos.

De igual forma, los puntos más relevantes serán calculados definiendo el gasto o volumen obtenidos mediante el periodo de retorno marginal y obteniendo su pareja mediante la metodología explicada.

Se hará uso del periodo de retorno de Kendall (T_K) que se estima a partir de la función de distribución de Kendall (véase ecuaciones 2-51, 2-53 y 2-54). Para aplicar la metodología numérica a los pares de datos se hará uso también del periodo de retorno OR (T_{OR}), obteniendo su equivalente en T_K para las cópulas ajustadas a los datos seleccionadas bajo los dos criterios de selección de datos. Para los periodos de retorno de interés se tiene lo mostrado en la Tabla 3-9.

T_K (años)	T_{OR} (años)
10	7.28
50	35.57
100	70.93
200	141.66

Tabla 3-9. Equivalencia entre los periodos de retorno de Kendall y OR de interés

3.5.1 Criterio de volumen máximo

Los gastos y volúmenes extrapolados mediante las funciones de distribución marginales ajustadas para cada caso se muestran en la Tabla 3-10.

T (años)	Q (m^3/s)	V ($m^3 \cdot día/s$)
10	64.47	440.28
50	97.29	693.06
100	110.43	796.92
200	123.12	898.55

Tabla 3-10. Extrapolación a periodos de retorno para funciones de distribución marginales

Al seguir la metodología descrita anteriormente, es posible definir las isólineas de periodo de retorno para 10, 50, 100 y 200 años. El resultado de ello se muestra en las ilustraciones mostradas más adelante.

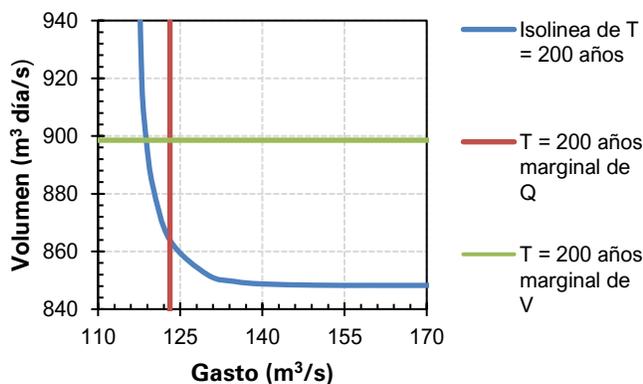


Figura 3-4. Isólinea de $T = 200$ años

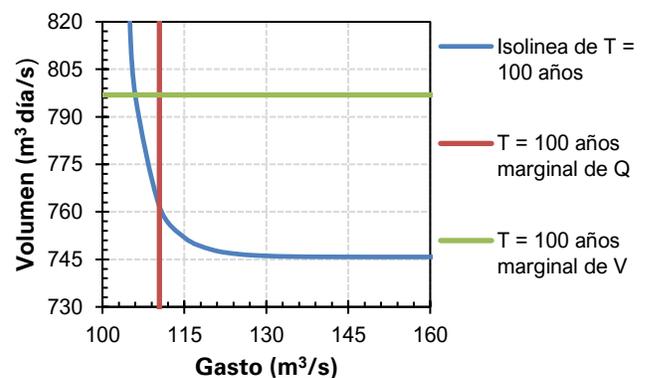


Figura 3-5. Isólinea de $T = 100$ años

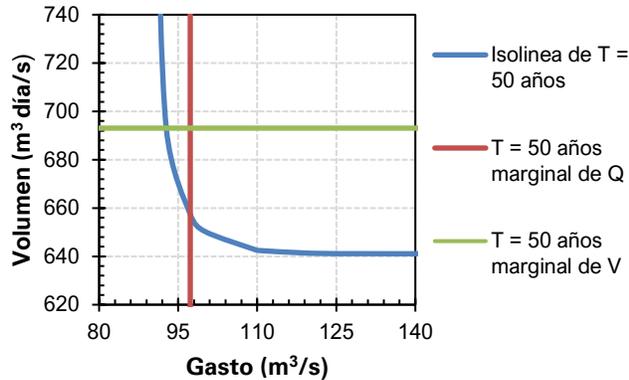


Figura 3-6. Isolínea de $T = 50$ años

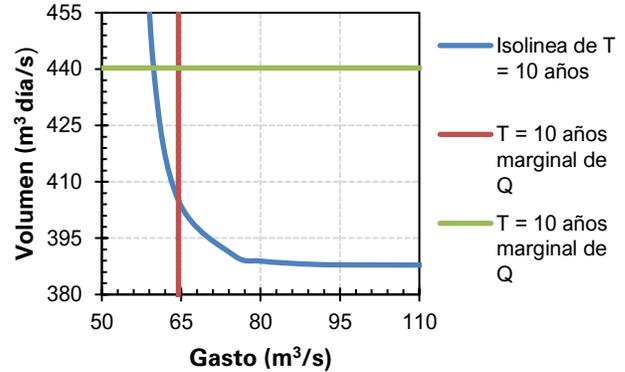


Figura 3-7. Isolínea de $T = 10$ años

Ya que para el análisis que se realizará posteriormente a partir de los hidrogramas obtenidos es de principal interés el gasto de pico, se trabajará con la pareja de datos que se obtenga de la isólinea de T y la recta de T marginal para gasto de pico, que fueron definidos como puntos tipo A. Los resultados de dichas estimaciones se muestran en la Tabla 3-11.

T (años)	Tipo A		Tipo B	
	Q (m^3/s)	V ($m^3 \cdot día/s$)	Q (m^3/s)	V ($m^3 \cdot día/s$)
10	64.47	405.06	59.78	440.28
50	97.29	657.39	92.74	693.06
100	110.43	761.72	105.99	796.92
200	123.12	863.88	118.81	898.55

Tabla 3-11. Parejas de datos extrapolados a periodos de retorno seleccionados

3.6 Ajuste de forma de los hidrogramas

La forma de los hidrogramas de diseño es un aspecto muy importante. Tener dos hidrogramas con el mismo gasto pico y volumen de escurrimiento, pero distinta forma, producirán distintos resultados al ser usados para los análisis en los que estén destinados. Ya que lo que se obtiene tras el análisis de frecuencia de avenidas es una pareja de gasto y volumen extrapolado, es posible darle distintas formas al hidrograma final. Existen metodologías que pueden proponer formas sintéticas, sin embargo, una forma más práctica de hacerlo es usar formas conocidas, siendo de mayor relevancia los eventos de mayor magnitud registrados.

El planteamiento anterior parece similar a lo que se realiza en el método de la mayoración de la avenida más adversa, sin embargo, ajustar las máximas avenidas registradas para un análisis bivariado no es tan simple como en el caso univariado, ya que se debe cumplir un gasto pico al mismo tiempo que un volumen de escurrimiento determinado.

Dado que los hidrogramas históricos generalmente estarán conformados por registros discretizados de gasto, para un hidrograma de cierta duración, se tendrán n registros de gasto espaciados por un mismo intervalo de tiempo Δt .

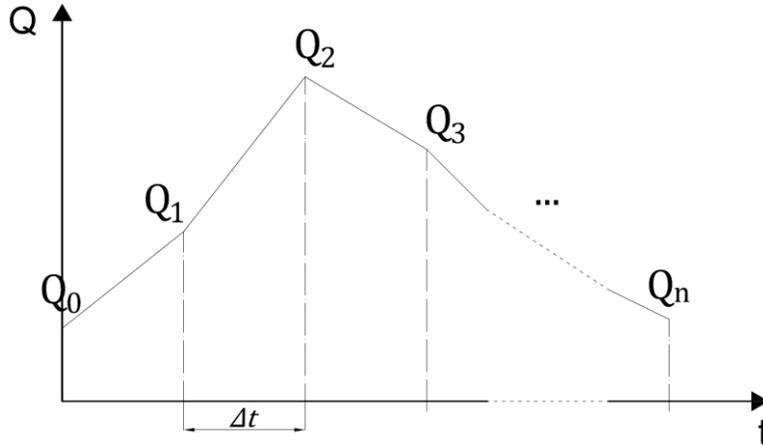


Figura 3-8. Hidrograma discretizado

El volumen de escurrimiento será el área debajo del hidrograma, que puede ser calculado de forma aproximada como la suma del área de los trapecios formados por cada intervalo Δt . El área de cada trapecio (Figura 3-9) puede ser calculado como:

$$V_i = \frac{\Delta t}{2} (Q_i + Q_{i+1}) \quad (3-17)$$

Donde V_i es el volumen del i -ésimo trapecio, Q_i y Q_{i+1} , son los registros de gasto en los instantes i e $i + 1$. Por lo tanto, el volumen de escurrimiento de la avenida puede ser expresado de la siguiente manera:

$$V_T = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i + Q_{i+1}) \quad (3-18)$$

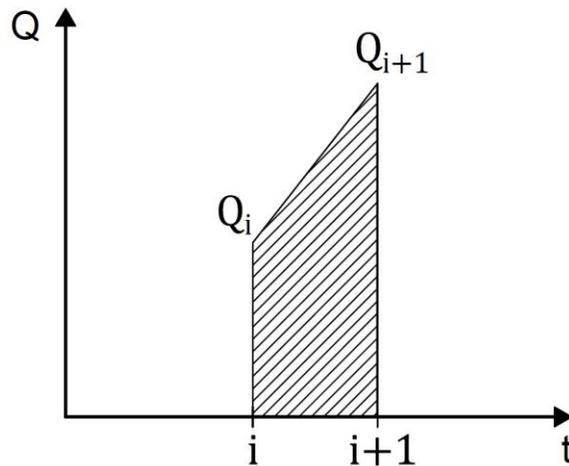


Figura 3-9. Esquema de volumen V_i

Dado que se requiere modificar las ordenadas de gasto para que se cumplan los valores de gasto y volumen extrapolado, se puede modificar el valor del registro histórico de tal forma que:

$$Q_{A_i} = k_i Q_i \quad (3-19)$$

Donde Q_{A_i} es el valor de la ordenada de gasto ajustada y Q_i es la ordenada de la máxima avenida registrada, en el instante i , k_i es un coeficiente adimensional para modificar la ordenada del hidrograma histórico en dicho instante. Para el valor de la constante k , se partirá de la propuesta de Copca (2019), quien propone considerar la forma mediante el factor adimensional usado en la mayoración de avenida convencional.

$$\phi_i = \frac{Q_i}{Q_p} \quad (3-20)$$

Donde Q_p es el gasto pico del hidrograma histórico. Es importante notar que se cumplirá que $\phi_i \leq 1$, siendo el gasto pico el único dato que cumplirá que $\phi_p = 1$.

También propone considerar dos coeficientes extras que permitirán establecer las condiciones de igualdad de gasto y volumen que se buscan, de tal manera que se pueda expresar como:

$$k_i = \alpha \phi_i + \beta \quad (3-21)$$

Obteniendo que las ordenadas del hidrograma ajustado pueden ser expresadas como:

$$Q_{A_i} = (\alpha \phi_i + \beta) Q_i \quad (3-22)$$

Considerando que el gasto extrapolado debe ser igual al gasto pico del hidrograma ajustado, se establece la siguiente condición:

$$Q_E = Q_{A_p} = (\alpha \phi_p + \beta) Q_p \quad (3-23)$$

Donde Q_p es el gasto pico del hidrograma histórico y Q_E el gasto de la pareja extrapolada al periodo de retorno deseado. Sin embargo, para el tiempo pico se tiene que:

$$\phi_p = \frac{Q_p}{Q_p} = 1 \quad (3-24)$$

Por lo que la ecuación 3-23 puede ser replanteada como:

$$Q_E = (\alpha + \beta) Q_p \quad (3-25)$$

$$\frac{Q_E}{Q_p} = \alpha + \beta \quad (3-26)$$

La ecuación 3-26 es una de las ecuaciones fundamentales para este método. Por otro lado, el volumen de escurrimiento del hidrograma ajustado debe ser igual al valor extrapolado y considerando la ecuación 3-18 para este hidrograma, es posible plantear que:

$$V_E = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_{A_i} + Q_{A_{i+1}}) \quad (3-27)$$

Sustituyendo la ec. 3-22 en la ec. 3-27 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V_E &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{n-1} ((\alpha\phi_i + \beta)Q_i + (\alpha\phi_{i+1} + \beta)Q_{i+1}) \Rightarrow V_E = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [(Q_i\phi_i + Q_{i+1}\phi_{i+1})\alpha + (Q_i + Q_{i+1})\beta] \\
 V_E &= \frac{\Delta t}{2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (Q_i\phi_i + Q_{i+1}\phi_{i+1})\alpha + \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i + Q_{i+1})\beta \right] \Rightarrow V_E = \frac{\Delta t}{2} \left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i\phi_i + Q_{i+1}\phi_{i+1}) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i + Q_{i+1}) \right] \\
 V_E &= \alpha \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i\phi_i + Q_{i+1}\phi_{i+1})}_{P-I} + \beta \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i + Q_{i+1})}_{P-II} \tag{3-28}
 \end{aligned}$$

La ecuación 3-28 es la segunda parte del sistema de ecuaciones necesario para obtener los coeficientes α y β . Es importante notar que las partes de la ecuación marcadas como $P - I$ y $P - II$, son dimensionalmente volúmenes de escurrimiento. $P - I$ corresponde al volumen del hidrograma histórico donde sus ordenadas han sido afectadas por el factor adimensional ϕ_i , mientras que $P - II$ es el volumen de escurrimiento del hidrograma histórico (ec. 3-18). Por lo que definiendo una nueva variable como volumen de escurrimiento reducido (V_R):

$$V_R = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i\phi_i + Q_{i+1}\phi_{i+1}) \tag{3-29}$$

La ecuación 3-28 entonces puede ser reescrita como:

$$V_E = \alpha V_R + \beta V_T \tag{3-30}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las expresiones 3-26 y 3-30, se obtiene que:

$$\begin{cases} \frac{Q_E}{Q_p} = \alpha + \beta \\ V_E = \alpha V_R + \beta V_T \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{Q_E}{Q_p} - \beta \tag{3-31}$$

$$\begin{aligned}
 V_E &= \left(\frac{Q_E}{Q_p} - \beta \right) V_R + \beta V_T \Rightarrow V_E = \frac{Q_E}{Q_p} V_R + \beta (V_T - V_R) \\
 \beta &= \frac{1}{V_T - V_R} \left(V_E - \frac{Q_E}{Q_p} V_R \right) \tag{3-32}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ec. 3-32 en la ec. 3-31 queda:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{Q_E}{Q_p} - \frac{V_E - \frac{Q_E}{Q_p} V_R}{V_T - V_R} = \frac{Q_E}{Q_p} + \frac{\frac{Q_E}{Q_p} V_R}{V_T - V_R} - \frac{V_E}{V_T - V_R} \\
 \alpha &= \frac{Q_E}{Q_p} \left(1 + \frac{V_R}{V_T - V_R} \right) - \frac{V_E}{V_T - V_R} \tag{3-33}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores requeridos en las ecuaciones 3-32 y 3-33 para cada periodo de retorno, se obtendrán los coeficientes α y β . Con dichos valores, se puede usar la ecuación 3-22 para obtener el hidrograma ajustado.

3.6.1 Hidrogramas para el criterio de volumen máximo

La obtención del máximo evento histórico seleccionado bajo este criterio fue mostrado en la sección 3.2.1 (correspondiente al año 1958), por lo tanto, los valores extrapolados serán ajustada a esa forma. Como primer paso se obtendrán los volúmenes V_T y V_R para poder calcular los coeficientes α y β . La obtención de dichos valores se muestra en la Tabla 3-12.

t	Q (m^3/s)	ϕ_i	$Q\phi_i$ (m^3/s)	V_i ($m^3 \cdot día/s$)	V_{R_i} ($m^3 \cdot día/s$)
0	10.41	0.12	1.23	12.12	1.70
1	13.83	0.16	2.17	18.50	4.14
2	23.16	0.26	6.10	31.36	11.94
3	39.55	0.45	17.78	41.46	19.57
4	43.36	0.49	21.37	48.94	27.58
5	54.52	0.62	33.78	53.44	32.47
6	52.36	0.60	31.16	41.82	21.14
7	31.28	0.36	11.12	33.95	13.18
8	36.62	0.42	15.24	45.56	24.50
9	54.50	0.62	33.76	61.57	43.65
10	68.63	0.78	53.53	78.31	70.76
11	87.99	1.00	87.99	59.85	49.71
12	31.72	0.36	11.43	31.27	11.11
13	30.82	0.35	10.80	30.82	10.80
14	30.82	0.35	10.80	31.98	11.63
15	33.13	0.38	12.47	28.56	9.51
16	23.99	0.27	6.54	21.33	5.25
17	18.67	0.21	3.96	17.16	3.37
18	15.65	0.18	2.78	15.62	2.77
19	15.58	0.18	2.76	14.80	2.50
20	14.01	0.16	2.23	12.77	1.87
21	11.53	0.13	1.51	--	--
			$\Sigma =$	731.17	379.15

Tabla 3-12. Obtención de valores para el planteamiento del sistema de ecuaciones a partir del evento máximo histórico seleccionado mediante el criterio de volumen máximo

Con los valores obtenidos en la Tabla 3-12 junto con los datos extrapolados tipo A de la Tabla 3-11 y sustituyéndolos en las ecuaciones 3-32 y 3-33, se obtienen los siguientes coeficientes:

Para $T = 200$ años:

$$\begin{cases} \alpha = 0.4522 \\ \beta = 0.9470 \end{cases} \quad (3-34)$$

Para $T = 100$ años:

$$\begin{cases} \alpha = 0.4429 \\ \beta = 0.8121 \end{cases} \quad (3-35)$$

Para $T = 50$ años:

$$\begin{cases} \alpha = 0.4291 \\ \beta = 0.6766 \end{cases} \quad (3-36)$$

Para $T = 10$ años:

$$\begin{cases} \alpha = 0.3712 \\ \beta = 0.3615 \end{cases} \quad (3-37)$$

Usando la ecuación 3-22 con los coeficientes obtenidos, se obtienen finalmente los hidrogramas de diseño; mostrados a continuación en forma tabular y gráfica.

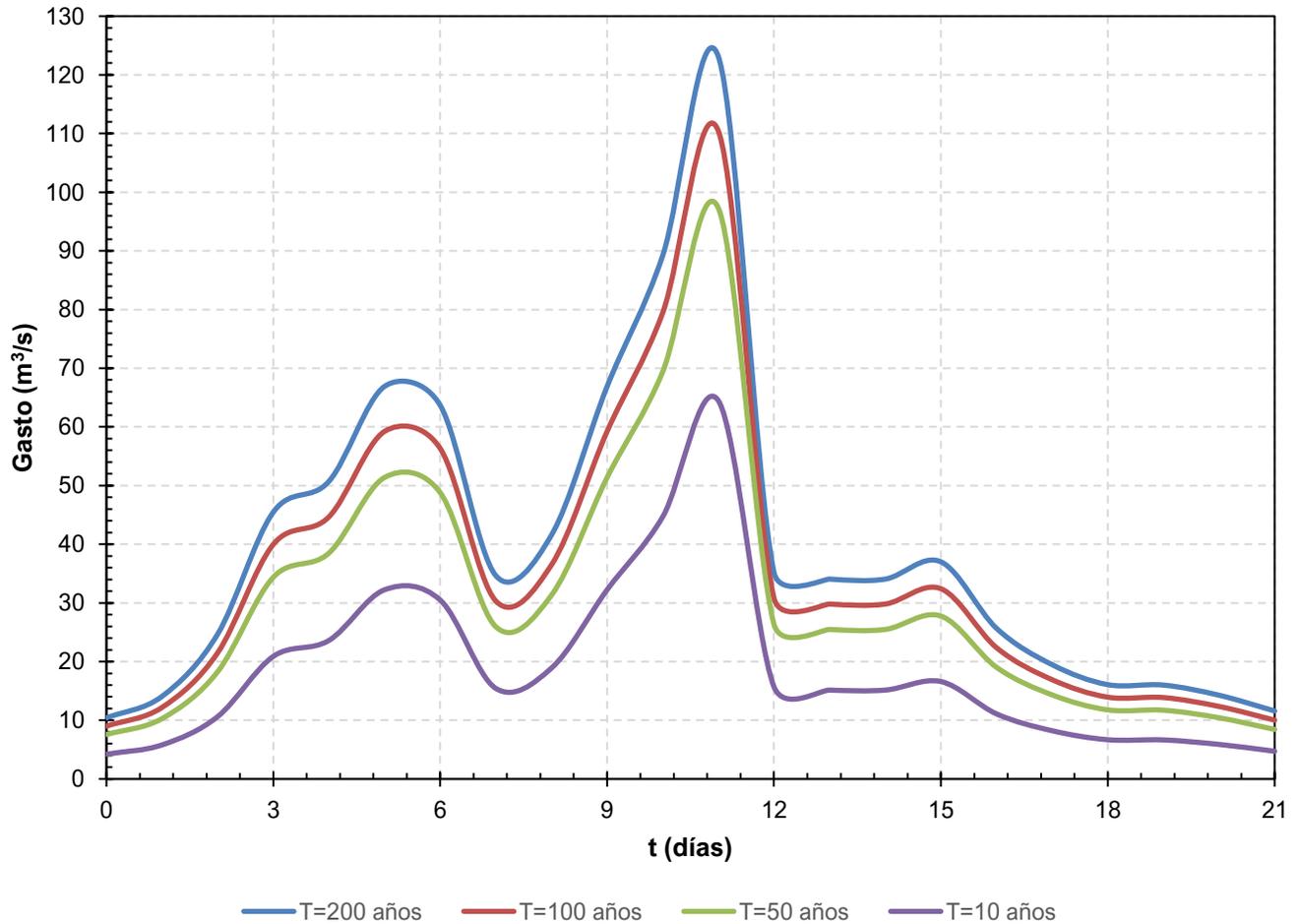


Figura 3-10. Hidrogramas de diseño obtenidos a partir del criterio de volumen máximo

<i>i</i>	<i>Q</i> (m ³ /s)			
	<i>T</i> = 10 años	<i>T</i> = 50 años	<i>T</i> = 100 años	<i>T</i> = 200 años
0	10.42	9.00	7.57	4.22
1	14.08	12.20	10.29	5.81
2	24.69	21.51	18.29	10.64
3	45.49	39.99	34.39	20.90
4	50.73	44.68	38.51	23.61
5	66.91	59.24	51.38	32.25
6	63.68	56.33	48.80	30.50
7	34.65	30.33	25.93	15.43
8	41.57	36.49	31.31	18.89
9	66.88	59.22	51.36	32.24
10	89.21	79.45	69.41	44.68
11	123.12	110.43	97.29	64.47
12	35.21	30.82	26.36	15.71
13	34.07	29.81	25.49	15.15
14	34.07	29.81	25.48	15.15
15	37.02	32.43	27.77	16.61
16	25.67	22.38	19.04	11.10
17	19.48	16.92	14.33	8.22
18	16.08	13.94	11.78	6.69
19	16.00	13.88	11.73	6.66
20	14.28	12.37	10.44	5.89
21	11.60	10.03	8.45	4.73

Tabla 3-13. Información tabular de hidrogramas de diseño obtenidos a partir del criterio de volumen máximo

4 Tránsito de avenidas en cauces

Un aspecto importante los estudios de diseño de obras hidráulicas, o bien, en el análisis de riesgos por inundaciones, es que las estaciones hidrométricas que se encuentran disponibles son limitadas, y pueden estar a varios kilómetros de distancia del sitio de interés.

La simulación de flujo de agua permite determinar la evolución de un hidrograma conocido en el punto de la estación hidrométrica hasta una sección aguas abajo del río donde sea de utilidad. Al proceso de calcular la evolución del hidrograma de avenida por el transporte de agua a lo largo del río se le conoce como tránsito de avenidas en cauces.

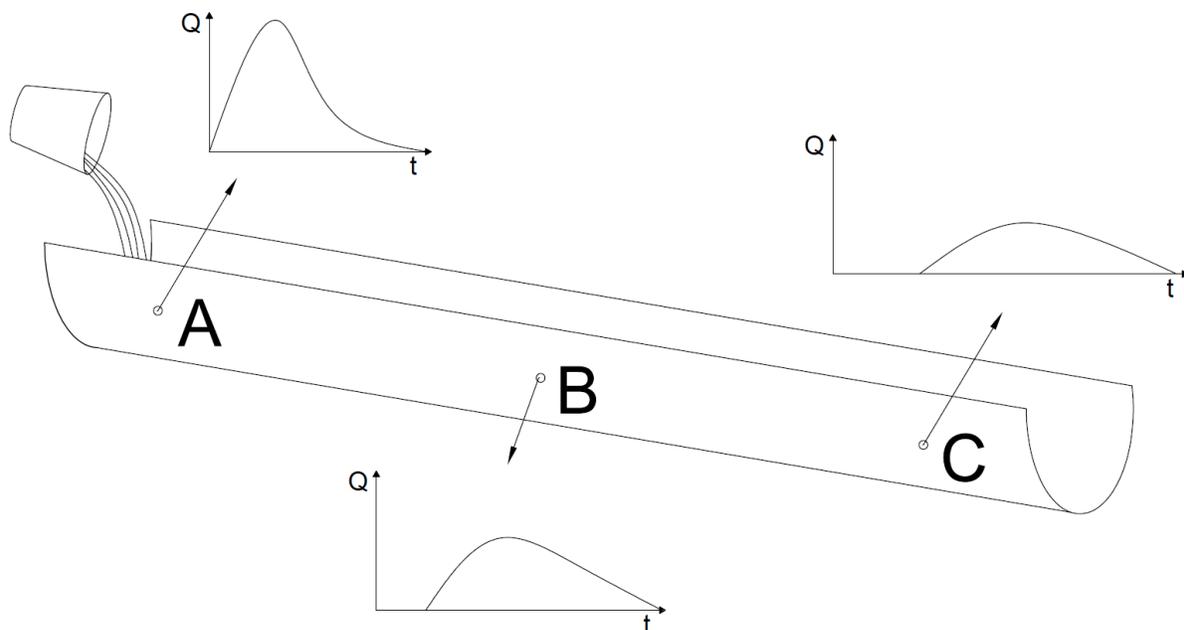


Figura 4-1. Esquema explicativo para el tránsito de avenidas en cauces

Si se tiene un cauce completamente seco y de pronto se arroja un volumen de agua durante un cierto tiempo (Figura 4-1) en la sección inicial (sección A) se podría medir un hidrograma. Conforme se avanza en el cauce, el hidrograma tendrá un gasto pico menor y una mayor duración, tomando una forma más aplanada (secciones B y C).

El área bajo la curva entre los hidrogramas que se presenten a lo largo del cauce debe ser igual si no existe ningún volumen de agua que sea derramado o perdido. Esto presenta la posibilidad de estimar cuantitativamente el volumen de agua derramado en un determinado tramo del cauce conociendo los hidrogramas en las secciones inicial y final, mediante la diferencia de áreas bajo la curva de dichos hidrogramas.

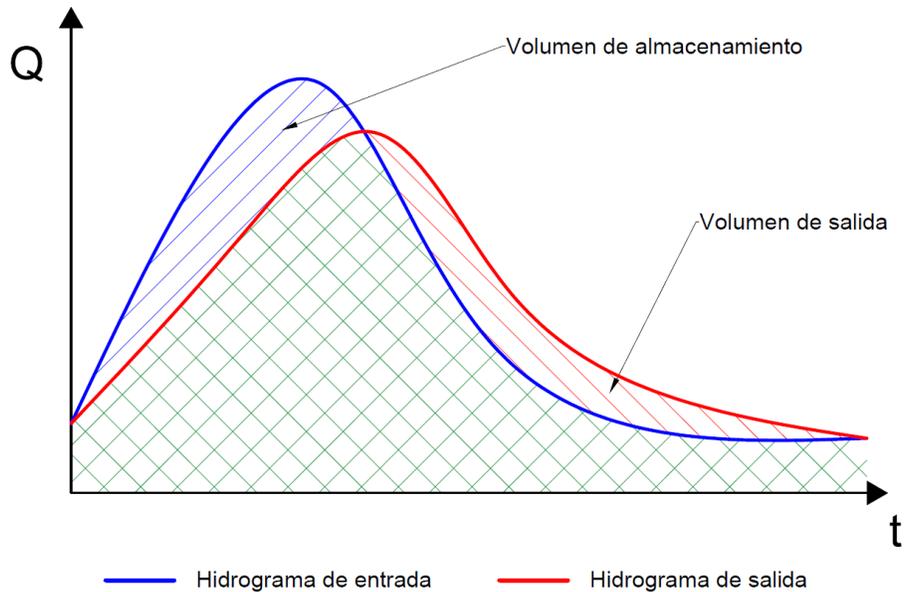


Figura 4-2. Comparación esquemática entre un hidrograma de entrada y uno de salida

De acuerdo con la literatura disponible, el enfoque para realizar dicho tránsito puede ser hidráulico e hidrológico.

4.1 Método hidráulico

En el enfoque hidráulico para el tránsito de avenidas, la solución se basa en las ecuaciones de Saint-Venant (1871) de conservación de masa y cantidad de movimiento considerando un régimen no permanente.

Ecuación de conservación de masa
$$y \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_{0,x} - S_{f,x}) = 0 \quad (4-2)$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento planteadas para 3 dimensiones
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} - g(S_{0,y} - S_{f,y}) = 0 \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial z} - g(S_{0,z} - S_{f,z}) = 0 \quad (4-4)$$

En donde h es el tirante hidráulico en m, v es la velocidad en m/s en las direcciones, x es la dirección del flujo paralela al eje del cauce, y es la dirección perpendicular a esta, z es la dirección perpendicular al plano definido por las direcciones x y y , t es el tiempo en s, S_0 es la pendiente del fondo del cauce y S_f es la pendiente de fricción.

Las ecuaciones no tienen una solución analítica, por lo que se opta por el uso de métodos numéricos para llegar a resultados satisfactorios, tales como el método de elemento finito o el método de las características.

4.1.1 Modelación numérica para tránsito de avenidas

Un modelo puede entenderse como una representación simplificada de la realidad. Un modelo numérico específicamente se refiere a un conjunto determinados de ecuaciones que describen el comportamiento un modelo físico. (Rodríguez, 2020)

Usualmente, la aplicación de métodos numéricos para resolver las ecuaciones de Saint-Venant, implican la discretización del cauce en estudio. Si se quiere de una buena precisión, lo normal sería buscar que está sea lo más pequeña posible, implicando así una gran cantidad de cálculos que serían necesario llevar a cabo para realizar, sobre todo en para flujo no uniforme.

La forma más común de aplicar este enfoque es mediante el uso de software especializado para simulación de flujo en cauces. Existen distintas opciones de software comercial o de uso libre para la modelación y, aunque la construcción de un modelo en cada uno de ellos requerirá de ciertos procedimientos específicos, en general el proceso que se sigue es el siguiente:

1. **Definición de la información geométrica del cauce:** Se refiere a insertar la información topográfica/batimétrica del cauce y sus alrededores que puedan ser de interés para el análisis.
2. **Definición de la resistencia al flujo:** Por lo general, se hace uso de la rugosidad de Manning, y según el tipo de modelo, se definen para el lecho del cauce y sus márgenes, o bien, se definen regiones con determinadas rugosidades.
3. **Selección de régimen de flujo:** Se puede considerar un régimen de flujo permanente o no permanente, dependiendo de la finalidad del análisis.
4. **Definición de condiciones de frontera:** En este punto se incluirán condiciones conocidas o razonablemente supuestas que generalmente se definen para las secciones inicial y final del cauce, aunque se pueden tener igualmente en secciones de control a lo largo del cauce. Algunos ejemplos de estas condiciones son los hidrogramas de entrada o salida, tirantes conocidos, o bien, condiciones de flujo crítico, supercrítico o normalizado.

En este apartado es muy importante el criterio del modelador, ya que el modelo es muy sensible a las consideraciones que se propongan en este apartado.

Según la precisión o la naturaleza de los resultados requeridos, así como de la información disponible, existen distintos tipos de modelación. Una forma de clasificarlos es en función de las dimensiones que analizan, siendo divididos como:

- Modelos unidimensionales (1-D)
- Modelos bidimensionales (2-D)
- Modelos tridimensionales (3-D)

A continuación, se explicarán de manera general estos modelos.

4.1.1.1 Modelación unidimensional

Este tipo de modelos asume que el movimiento del agua es en una sola dimensión, es decir, se considera que el agua únicamente se mueve de forma perpendicular al plano formado por las secciones transversales que se consideran en el modelo (Figura 4-3). Se trabaja mediante la suposición de que se tiene un flujo gradualmente variado.

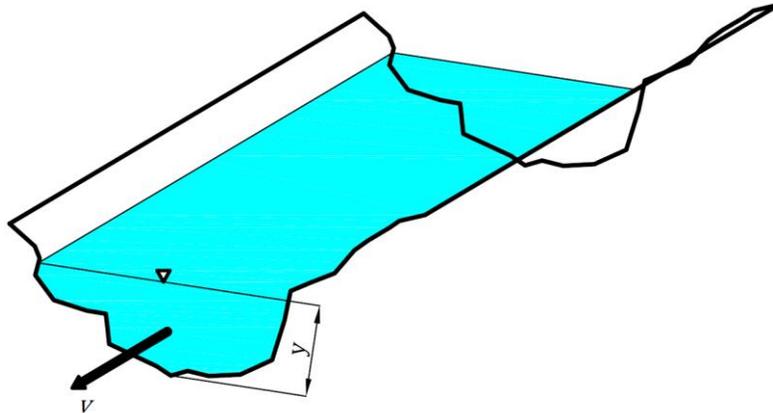


Figura 4-3. Esquema de modelación 1-D

En este tipo de modelos dividen los cálculos en tramos interconectados por nodos (en algunos programas se definen como estaciones) por lo que se requiere de información de secciones transversales del cauce en estudio perpendiculares al flujo (batimetría). Los resultados que ofrecen este tipo de modelos se limitan a un tirante del agua por cada sección transversal definida en el modelo, así como el gasto (y por lo tanto, la velocidad media transversal) en el cauce.

Debido a la consideración unidimensional del flujo, los efectos que provoquen variación del tirante en una misma sección transversal (como la existencia de curvas u obstáculos) son despreciados. La aplicación de modelos unidimensionales para el análisis de flujo en cauces naturales cobra importancia cuando los tramos modelados se encuentran en el orden de decenas o centenas de kilómetros según autores como Yoshida y Dittrich (2002), cuando se tienen tramos apreciablemente rectos y la información batimétrica de la que se dispone se limita a determinadas secciones (Lammersen et al., 2002), o bien, se requieren periodos de análisis largos, así como si el poder de cómputo y tiempo disponible es limitado.

Algunos programas de software libre comúnmente usados para este tipo de modelación son:

- HEC-RAS
- EPA SWMM

EPA SWMM permite este tipo de modelado, pero su aplicación más común se refiere al análisis de sistemas de tuberías que funcionan como canal. Aun así, resulta posible obtener perfiles de elevación de superficie de agua (Figura 4-4) y tránsitos de avenidas con algunas limitaciones cuando el río desbordaría.

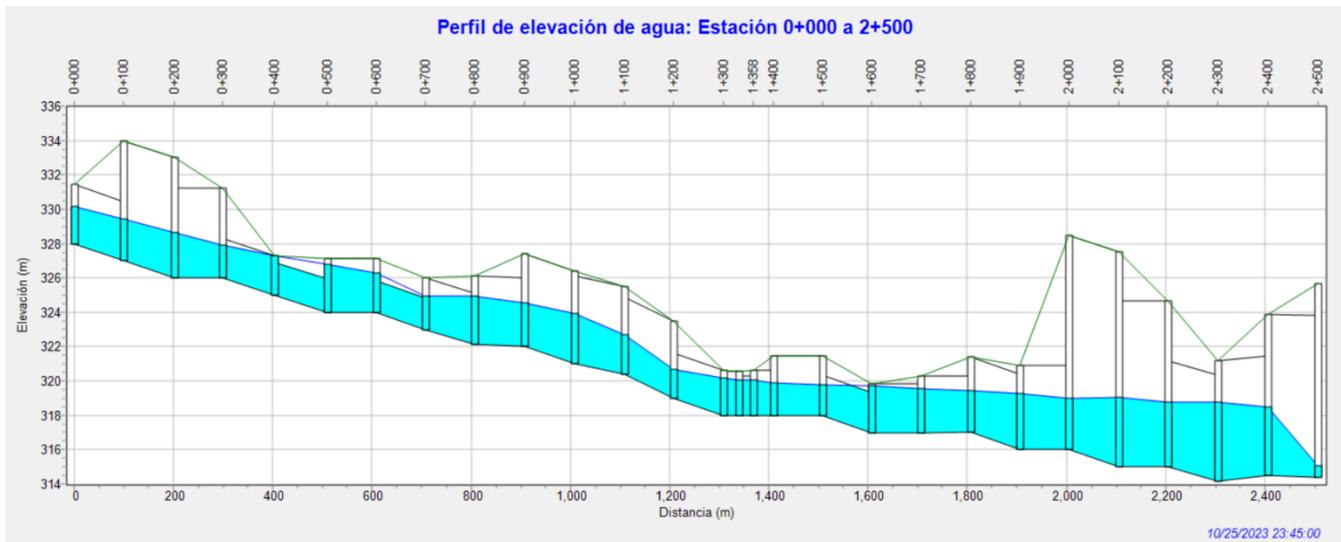


Figura 4-4. Ejemplo de perfil de elevación de la SLA obtenido mediante el software EPA SWMM

Dentro de estos programas, HEC-RAS destaca para el análisis de flujo en cauces, ya que es su objetivo principal y proporciona más herramientas para facilitarlos.

4.1.1.2 Modelación bidimensional

Como su nombre sugiere, en este tipo de modelos la dirección del flujo considerada es en dos dimensiones. A diferencia del caso anterior, las variaciones del nivel de agua en una sola sección transversal son considerados, por lo que la precisión que ofrecen es mucho mayor.

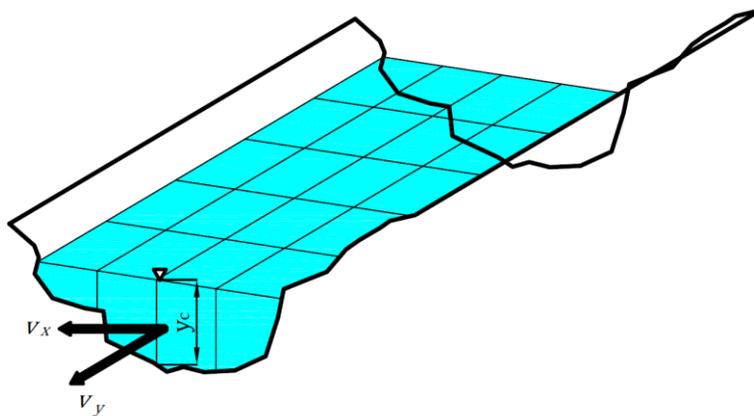


Figura 4-5. Esquema de modelación 2-D

Para este caso, la información de entrada debe ser más precisa, requiriendo información topográfica y batimétrica de buena resolución (esta dependerá de la disponibilidad y precisión deseada) en forma de Modelos Digitales de Elevación (MDE). Para la discretización de la información del MDE, este tipo de modelo suele basar su análisis en mallas 2D, que suelen ser formadas por cuadriláteros (aunque también existen mallas de polígonos irregulares de más lados) que se dividen en estructuradas o no estructuradas

(véase la Figura 4-6). La precisión de datos de entrada y los cálculos realizados, permiten simular condiciones más complejas como el caso de planicies de inundación o eventos en donde ocurre un desbordamiento en el cauce, siendo muy usados para determinar zonas inundables.

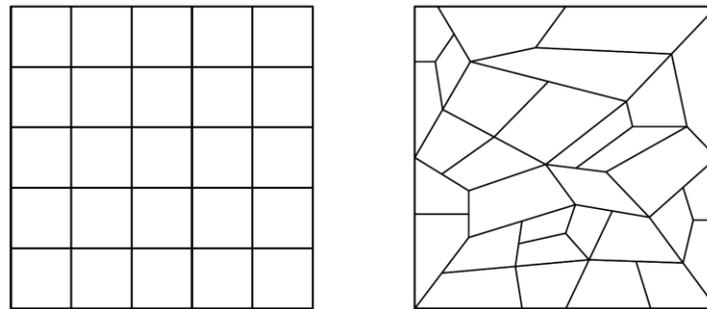


Figura 4-6. Ejemplo de mallas cuadriláteras estructurada (izq.) y no estructurada (der.)

Algo para tener en cuenta es que, si se tratan áreas extensas o periodos de análisis largos, los enormes tiempos de cálculo harán evidente el requerimiento de equipo de cómputo potente (Timbe y Willems, 2011). Una parte importante en el uso de estos modelos es determinar si la escala del problema hace que sea eficiente el costo computacional que supone. De igual forma, si la información geográfica de la que se dispone no es muy precisa, se acarrearán incertidumbres adicionales que deberán ser consideradas.

Algunos de los principales softwares de uso libre comúnmente utilizados para este tipo de modelación son:

- HEC-RAS
- Iber

El programa Iber proporciona una interfaz intuitiva y la capacidad de visualizar los resultados de maneras más claras que resultan más útiles en determinadas situaciones (Figura 4-7). HEC-RAS por otro lado, proporciona como principal ventaja la inclusión de su herramienta de manejo de información geográfica *RAS Mapper*, la cual hace facilita importar definir la geometría del cauce en estudio sin necesidad de requerir programas externos para ello.

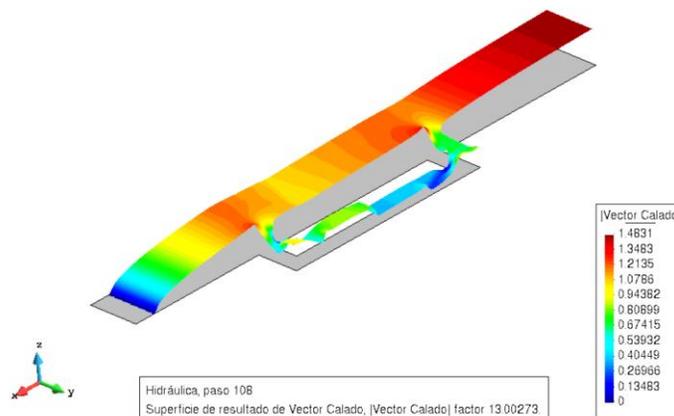


Figura 4-7. Ejemplo de modelación de Iber para un canal con canal lateral con confluencia

4.1.1.3 Modelación tridimensional

Es el tipo de modelación más precisa de todas, ya que considera el flujo en las 3 dimensiones posibles. Para este tipo de análisis, el modelo discretizará el espacio en estudio en porciones tridimensionales (Figura 4-8).

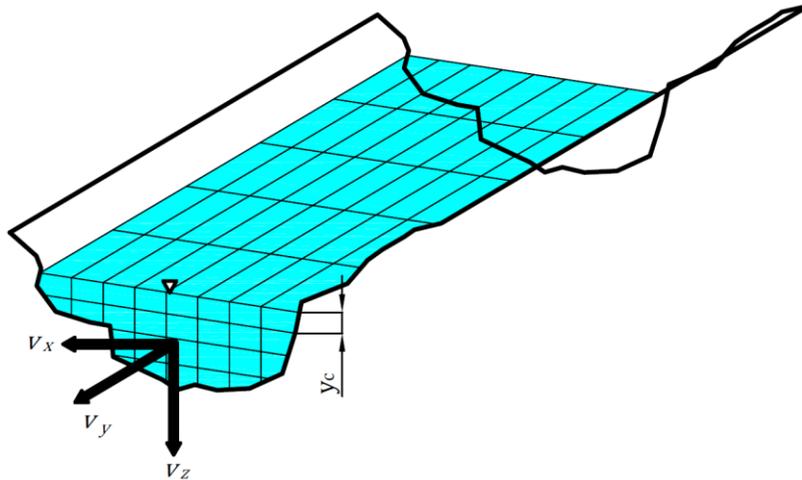


Figura 4-8. Esquema de modelación 3-D

Los modelos tridimensionales para el cálculo de zonas inundables son menos comunes que la de los modelos unidimensionales y bidimensionales, ya que la modelación de un cauce requeriría de mallas de cálculo de varios millones de elementos que resultarían en un costo de cómputo elevado (Rodríguez, 2020). Dicha autora menciona que la aplicación de la modelación 3-D dentro de la hidráulica fluvial, comúnmente se limita a fenómenos locales en los que sea de importancia determinar con precisión el comportamiento del agua, como lo pueden ser estructuras hidráulicas (vertedores, compuertas o pilas de puentes) o el estudio de meandros.

En el caso particular de este trabajo, el uso de este tipo de modelos no resulta viable, debido a la precisión de la información requerida y los tiempos de cálculo que supondría hacerlo en un tramo de cauce del orden de kilómetros de largo.

4.1.1.4 HEC-RAS

HEC-RAS es un software de uso libre desarrollado por el *Hydrologic Engineering Center del ejército estadounidense (U. S. Army Corps of Engineers)* que por sus siglas significa *Sistema de Análisis de Ríos (River Analysis System)*. Es un programa de destaca al ser gratuito y su uso es extendido en el modelado de cauces naturales, ya que ofrece diversas herramientas que facilitan dicho proceso. Su principal desventaja es su interfaz poco intuitiva e inclusive confusa.



Figura 4-9. Información de la última versión disponible de HEC-RAS

Este programa permite el análisis de flujo bajo régimen permanente o no permanente, además de contar módulos que permiten los análisis de transporte de sedimento y la calidad del agua. De igual forma permite la modelación 1D, 2D y un híbrido entre estas (es decir, modelación unidimensional donde se pueden obtener mapas de inundación). Una herramienta muy útil que posee el programa es su herramienta de manejo de SIG, llamada *RAS Mapper*. Partiendo de un modelo digital de elevaciones en formato *.geotiff* facilita la definición de la geometría del cauce, ya sea obteniendo secciones transversales de un eje de cauce definido, o bien, definiendo regiones de área para el flujo y la definición de mallas para la simulación 2D.

En la Figura 4-10, se muestra un tránsito de avenida de un hidrograma triangular con tiempo base de 215 minutos y un gasto pico de 85 m³/s, que fue realizado como prueba para la calibración del modelo 1-D (en la sección 5.2 se explica el procedimiento para la elaboración de este modelo). En los hidrogramas se observa el aparente desplazamiento y reducción de gasto pico que se explicó anteriormente.

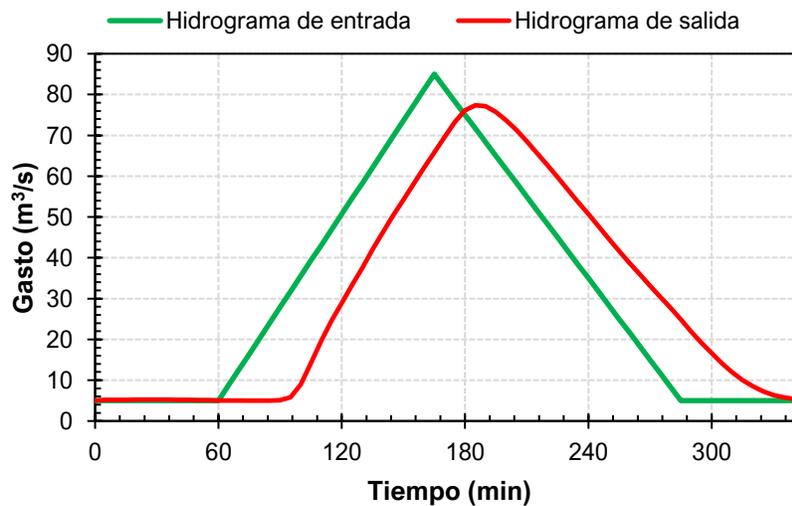


Figura 4-10. Ejemplo del resultado de un tránsito de una avenida en HEC-RAS

Algo a tener en consideración es que al superar el nivel en el que el río desbordaría, la sección transversal se extiende a partir del último punto ingresado en cada extremo de manera vertical, de tal manera que no se registra ningún desbordamiento (ver Figura 4-11). Para ello, si se quiere visualizar los efectos del desbordamiento en la zona colindante al cauce es necesario realizar una modelación 2-D.

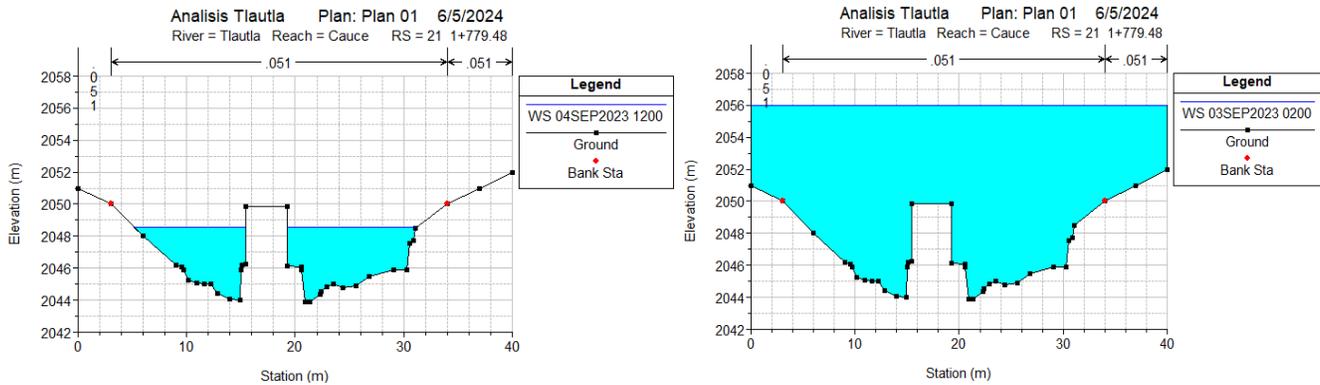


Figura 4-11. Efecto de extensión vertical a partir de los márgenes de las secciones transversales en HEC-RAS

4.2 Método hidrológico

El segundo enfoque en el tránsito de las avenidas en cauces es el tipo hidrológico, que resulta de simplificar las ecuaciones diferenciales planteadas en el enfoque hidráulico. Se plantea una ecuación de continuidad discretizada y se utiliza una relación entre el almacenamiento y el gasto de salida.

$$\begin{array}{l} \text{Ecuación de continuidad} \\ \text{discretizada} \end{array} \quad \left[\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right] \Delta t = \Delta V \quad (4-5)$$

$$\begin{array}{l} \text{Relación almacenamiento-salida} \end{array} \quad V = KO + Kx(I - O) = K[xI + (1 - x)O] \quad (4-6)$$

Donde V es el almacenamiento en el cauce de estudio en m^3 , mientras que O es el gasto de salida en m^3/s e I es el gasto de entrada en m^3/s y Δt es el intervalo de tiempo en el que están dados los hidrogramas. Por otro lado, K es una constante que se suele denominar coeficiente de almacenamiento y x es denominado como factor de peso.

Por otro lado, distintos efectos hidráulicos como el remanso hidráulico, o incluso el cambio en la geometría de la sección transversal del cauce, a lo largo del tramo en análisis, se ignoran por lo que la precisión con respecto el método hidráulico es menor. El método de Muskingum (1930) o bien su complementación con el enfoque hidráulico del método Muskingum-Cunge (1969) son aplicaciones comunes de este enfoque.

4.2.1 Método de Muskingum

Es un método de tránsito de avenidas hidrológico desarrollado por G.T. McCarthy en 1930 cuando se realizaba un proyecto de protección contra inundaciones en el río Muskingum en Ohio, Estados Unidos.

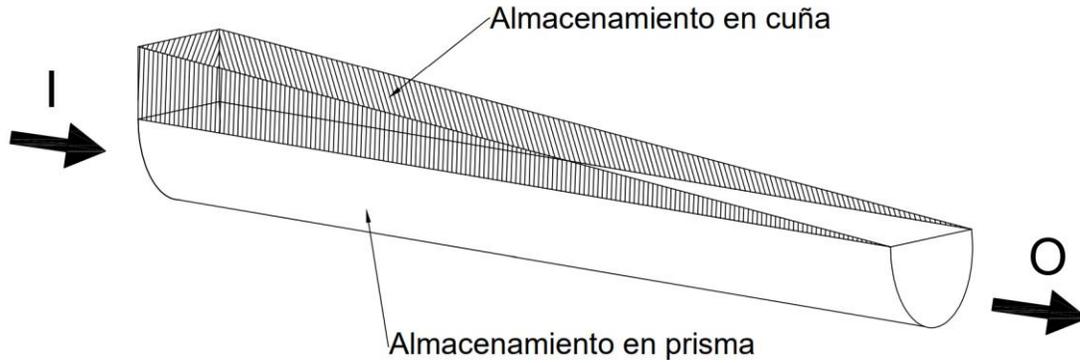


Figura 4-12. Almacenamiento en prisma y cuña para método de Muskingum

El método parte del concepto de almacenamiento en prisma y cuña (Figura 4-12), utilizando como base las ecuaciones 4-5 y 4-6. Suponiendo que los valores de K y x son conocidos, el tránsito de la avenida se realiza con la siguiente ecuación:

$$O_2 = C_0 I_2 + C_1 I_1 + C_2 O_1 \quad (4-7)$$

Donde C_0 , C_1 y C_2 son coeficientes de tránsito que son definidos de la siguiente manera:

$$C_0 = \frac{-Kx + 0.5 \Delta t}{K(1-x) + 0.5 \Delta t} \quad (4-8)$$

$$C_1 = \frac{Kx + 0.5 \Delta t}{K(1-x) + 0.5 \Delta t} \quad (4-9)$$

$$C_2 = \frac{K(1-x) - 0.5 \Delta t}{K(1-x) + 0.5 \Delta t} \quad (4-10)$$

Donde se debe cumplir con que:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad (4-11)$$

Dado que los coeficientes anteriores deben ser adimensionales, y según se expresa en las ecuaciones 4-8, 4-9 y 4-10, es necesario que el factor K esté expresado en las mismas unidades que el tiempo de los intervalos Δt para que se obtengan resultados dimensionalmente consistentes. El valor de x determina el grado de atenuación de la onda al pasar por el tramo del río, depende de la forma del almacenamiento de cuña varía entre $0 \leq x \leq 0.5$. El valor de x se aproxima a cero en cauces muy caudalosos y con pendiente pequeña, a 0.5 en el caso contrario (Aparicio, 2008).

K es un coeficiente de almacenamiento que tiene la dimensión de tiempo es aproximadamente igual al tiempo de recorrido de la ola de inundación desde el punto aguas arriba al punto aguas abajo (tramo del cauce) que expresa la relación entre el almacenamiento y descarga del río (Sullivan y Ahilan, 2012).

Dado que, en un principio, los valores de los coeficientes x y K son desconocidos, existen distintas formas de estimarlos, dependiendo principalmente de la información de la que se disponga.

4.2.1.1 Método tradicional

De acuerdo con Breña y Jacobo (2006), cuando se tiene registro de por lo menos una avenida en ambas direcciones del cauce el procedimiento para la calibración es el siguiente:

1. Se divide el hidrograma de entrada en intervalos Δt iguales.
2. Se calcula el almacenamiento promedio para cada intervalo siguiendo la ecuación 4-5.
3. Se calcula el volumen de almacenamiento acumulado.
4. Se asume un valor de x cualquiera dentro de su intervalo.
5. Se calcula Y con la siguiente expresión:

$$Y = xI + (1 - x)O \quad (4-12)$$

6. Se grafican los valores del almacenamiento obtenidos en el paso 3 y los de Y del paso anterior para cada instante.
7. Se comprueba si los puntos se ajustan a una recta, de no ser así se debe regresar al paso 4 probando con otro valor de x hasta obtener un ajuste satisfactorio.
8. Con el valor adecuado de x seleccionado, el parámetro K es igual a la pendiente de la recta ajustada.

4.2.1.2 Método con poca información

En caso de que la información disponible sea limitada se puede aproximar el valor de K mediante la siguiente expresión:

$$K = 0.014 \left(\frac{L}{H} \right)^{1/6} \quad (4-13)$$

Donde H es el desnivel entre las secciones inicial y final; y L es la longitud del tramo del río en km. Es recomendado que el valor de x se encuentre dentro el intervalo $0 \leq x \leq 0.3$. Si se desea asumir el valor medio de $x = 0.2$ será posible ya que los resultados del método son relativamente insensibles a este parámetro, por lo que no es requerida una gran precisión (Chow et al., 1996).

4.2.2 Método de Muskingum-Cunge

El método de Muskingum-Cunge es un método de tránsito de avenidas de tipo hidrológico que incorpora al método tradicional de Muskingum gastos laterales (entrada y salida) y calcula los hidrogramas en varias secciones transversales de un tramo de río (Fuentes et al., 2006).

Esta metodología combina la simpleza del método de Muskingum con algunas características del método hidráulico, incorporando parámetros que consideran las características hidráulicas del cauce. La ecuación principal del método es la siguiente:

$$O_2 = C_0 I_2 + C_1 I_1 + C_2 O_1 + C_3 q_L \quad (4-14)$$

Donde I_1 y O_1 son los gastos de entrada y salida en el tiempo Δt , I_2 y O_2 el tiempo $\Delta t + 1$, mientras que C_0 , C_1 , C_2 y C_3 son los coeficientes de tránsito, siendo C_3 el parámetro que considera el gasto lateral q_L que entra o sale en cualquier sección del cauce. Dichos coeficientes están dados por las siguientes expresiones:

$$C_0 = \frac{(\Delta t/k) - 2x}{2(1-x) + (\Delta t/K)} \quad (4-15)$$

$$C_1 = \frac{(\Delta t/k) + 2x}{2(1-x) + (\Delta t/K)} \quad (4-16)$$

$$C_2 = \frac{2(1-x) - (\Delta t/K)}{2(1-x) + (\Delta t/K)} \quad (4-17)$$

$$C_3 = \frac{2(\Delta t/k)}{2(1-x) + (\Delta t/K)} \quad (4-18)$$

Al igual que con el método de Muskingum, la estimación de los parámetros K y x es una dependerá de la información de la que se disponga. Fuentes, et. al. (2006) proponen un práctico enfoque basado en el ajuste por mínimos cuadrados de por lo menos una avenida en ambas direcciones del cauce.

5 Tránsito de avenidas en el cauce en estudio

El cauce en estudio corresponde a un tramo del río Tlautla (también conocido como río Coscomate) de 3.053 km de longitud. Se ubica, en la localidad de San Miguel Vindhó, en el municipio de Tula de Allende, Hidalgo. En la zona se encuentra la Ciudad Cooperativa Cruz Azul (con una población de 8,808 personas de acuerdo con el censo de población del 2020 realizado por el INEGI), y la planta cementera Cruz Azul S.C.L.

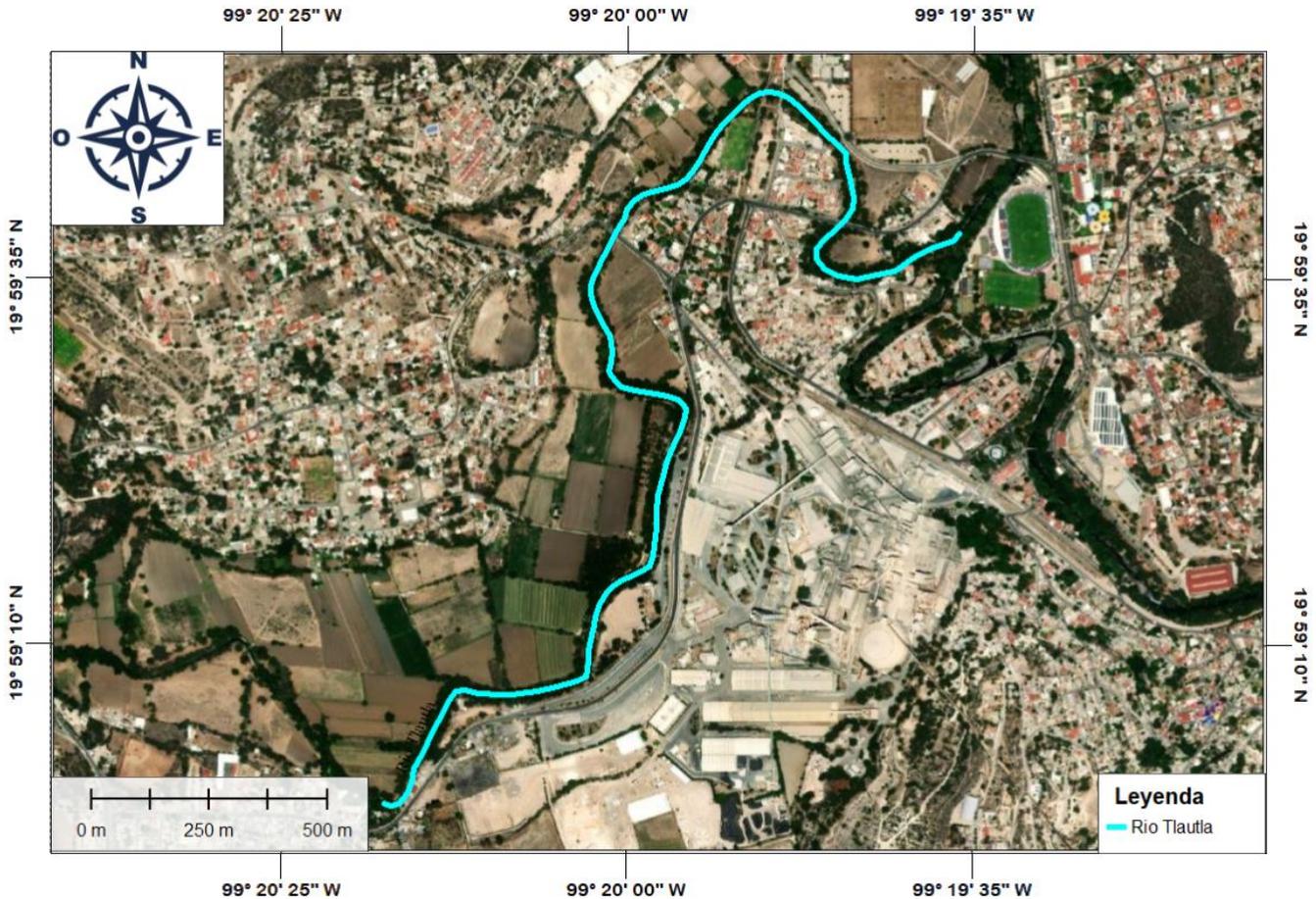


Figura 5-1. Vista aérea del tramo del río Tlautla en estudio. Elaborada a partir de (Google Earth, 2024)

El río Tlautla nace en la cerca del municipio de Jilotepec en el Estado de México a una altitud de 2450 msnm y culmina en su confluencia con el río Tula, en el municipio de Tula de Allende, Hidalgo. Sus principales afluentes son el río Los Fresnos y el río Las Tinajas.

5.1 Estimación de rugosidad de Manning del cauce

Para la construcción adecuada de cualquier modelo numérico de flujo para ríos, una de las principales variables a considerar es el del coeficiente de rugosidad de Manning, debido a la gran sensibilidad del

modelo con respecto a este parámetro. Existen distintos criterios para definirlo, pero debido a la escasa información con la que se cuenta, se usará el método del Soil Conservation Service (actualmente conocido como Natural Resources Conservation Service) el cual toma en cuenta las siguientes condiciones del cauce:

- a. **Rugosidad superficial:** Corresponde a la rugosidad por el tamaño y forma del material en el fondo y márgenes del cauce. En canales de sección regular, este parámetro suele ser el único factor tomado en cuenta para la estimación de la rugosidad n .
- b. **Irregularidades del cauce:** Se refiere a las variaciones de forma y tamaño que existe en la sección transversal del cauce.
- c. **Obstrucciones:** en este parámetro se considera la existencia de objetos que pueden suponer un obstáculo para el flujo de agua en el cauce, tal y como pueden ser árboles caídos, azolves, pilas de puentes, etcétera.
- d. **Vegetación:** La presencia de vegetación en cauces naturales es muy común, por lo que este parámetro la toma en cuenta, considerando su densidad, altura o el tipo de vegetación.
- e. **Sinuosidad:** Las curvaturas en un cauce afectan el coeficiente n de Manning,
- f. **Sedimentación y socavación:** La sedimentación y socavación son procesos que alteran las irregularidades en el canal debido al transporte de sedimentos en el cauce, siendo la sedimentación uno en el que el éste se vuelve relativamente uniforme, mientras que la socavación tendrá el efecto opuesto.

Este método utiliza la ecuación propuesta por Cowan (1956):

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4)m_5 \quad (5-1)$$

Los valores de los parámetros por considerar vienen dados en una tabla que fue propuesta por el SCS.

Condiciones del cauce o canal	Valor del coeficiente
1. Características del canal	n_0
En tierra	0.02
Costados en roca	0.025
En grava fina	0.024
En grava gruesa	0.028
2. Grado de irregularidad	n_1
Fronteras lisas. Lo mejor que se obtiene para los materiales que se utilizan	0
Irregularidades menores. Por ejemplo, canal bien dragado o excavado, o ligeramente socavado en las orillas, o canales de drenaje.	0.005
Irregularidades moderadas. Canal mal dragado o excavado. Ligera socavación en las márgenes.	0.01
Muy irregular. Salientes o entrantes continuas del mismo orden de magnitud que el tirante. Erosiones muy irregulares en los márgenes.	0.02
3. Variaciones de la sección transversal en forma y tamaño	n_2
Graduales	0
Secciones grandes y pequeñas alternadas ocasionalmente. Se alternan secciones amplias y estrechas por cambio de forma o del ancho de la plantilla, causando desviación ocasional desde el cauce principal a ambos lados	0.005

Secciones grandes y pequeñas alternadas frecuentemente o bien, cambios de forma que cause desviación ocasional desde el cauce principal a ambos lados	0.01 a 0.015
4. Obstrucciones al área hidráulica debidas a grandes rocas troncos, depósitos de desperdicios o de rocas	n_3
Sin obstrucción	0
Menores	0.05 a 0.015
Apreciables	0.02 a 0.03
Severas	0.04 a 0.06
5. Cantidad y tipo de vegetación	n_4
Poca densidad. Márgenes cubiertas de pasto o hierbas. Tirante 2 a 3 veces mayor que la altura de la vegetación.	0.005 a 0.1
Moderada. Matorral o pastos. El tirante de agua es de 2 a 3 veces mayor que la altura media de la vegetación. Troncos delgados sin hojas.	0.01 a 0.25
Densa. Igual a la anterior, pero con tirantes similares a la altura de la vegetación. Arbustos.	0.025 a 0.05
Muy densa. Los tirantes son del orden de la mitad de la altura de la vegetación	0.05 a 0.1
6. Grado de sinuosidad. Se defina como el cociente s de la distancia entre dos puntos siguiendo el eje del cauce y la distancia en la línea recta entre los mismos puntos. Puede ser:	m_5
Menor, si $s < 1.2$	1.0
Apreciable, si $1.2 \leq s < 1.5$	1.15
Severo, si $s \geq 1.5$	1.3
James (1994) propuso tomar en cuenta los siguientes valores: $m_5 = 0.43 s + 0.57, \text{ si } s < 1.7$ $m_5 = 1.3, \text{ si } s \geq 1.7$	
A fin de eliminar las discontinuidades en los límites de los intervalos de s considerados por el SCS.	

Tabla 5-1. Factores correctivos de n según el Soil Conservation Service (Sotelo, 2002)

Para estimar las condiciones del río y ajustar valores para los coeficientes que intervienen en la ecuación de Cowan, es útil utilizar como guía fotografías disponibles que sean de buena calidad lo más reciente posibles. A partir de ellas (algunas son mostradas en la Figura 5-2 y la Figura 5-3) es posible determinar que se trata de un cauce con un lecho con grava, que cuenta con irregularidades ligeras en los márgenes, con secciones transversales que varían ocasionalmente (debido a la presencia de 4 puentes vehiculares), sin obstrucciones al flujo (como troncos derribados o rocas grandes a mitad del cauce).



Figura 5-2. Fotografías del río Tlautla tras incidente de derrame de contaminantes de la cementera colindante. (SDP noticias, 2021)

La presencia de vegetación es poca (considerando que los árboles se ubican en lo que se comienza a considerar llanura de inundación) y mediante el uso de herramientas de manejo de SIG, se determinó que la distancia en línea recta entre las secciones inicial y final del tramo en estudio es de 1.701 km, la sinuosidad (considerando la definición descrita en la Tabla 5-1) está dada por:

$$s = \frac{3.057 \text{ km}}{1.701 \text{ km}} = 1.79$$

Lo que clasifica a la sinuosidad como severa. De acuerdo con esto, se estimaron los coeficientes que se muestran en la Tabla 5-2, que al sustituir en la ecuación 5-1 da por resultado una rugosidad de Manning $n = 0.051$.



Figura 5-3. Fotografías río Tlautla (Marthahari, 2017)

Coefficiente	Condición	Valor
n_0	Fondo con grava gruesa	0.028
n_1	Irregularidades menores	0.005
n_2	Secciones grandes y pequeñas alternadas ocasionalmente	0.005
n_3	Sin obstrucciones	0
n_4	Poca densidad	0.005
m_5	Severo	1.3

Tabla 5-2. Resumen de los coeficientes propuestos para obtener la rugosidad de Manning

Para definir las rugosidades en las llanuras de inundación, se usaron valores recomendados por Chow (2004). Los valores elegidos se muestran en la Tabla 5-3.

Superficies	n de Manning
Regiones de cultivo	0.03
Regiones con árboles	0.05
Regiones urbanas (considerando calles de concreto hidráulico)	0.030
Regiones urbanas (considerando calles de concreto asfáltico)	0.020

Tabla 5-3. Rugosidades elegidas para regiones de inundación

5.2 Modelado 1-D para el tránsito de avenidas

Dado que se cuenta con información batimétrica y topográfica de secciones transversales del cauce en estudio, y considerando que una variable de principal interés para este trabajo son los hidrogramas de salida, la modelación 1-D es útil.

Para tomar en cuenta a las limitaciones asociadas a eventos en donde ocurren desbordes, se optó por definir estructuras laterales que descarguen el agua del sistema cuando el nivel de la superficie del agua supere a la de los márgenes del cauce, esto permite además observar los efectos de las pérdidas de volumen de agua en el hidrograma de salida.

A continuación, se describe de manera general el procedimiento para la construcción del modelo unidimensional usado, así como los resultados que se obtienen de él.

Procedimiento seguido para el modelado en HEC-RAS

Para realizar una simulación hidráulica mediante el software HEC-RAS, son requeridos ciertos datos y debe seguirse un procedimiento, el cual puede ser resumido en los siguientes pasos:

1. **Creación de un nuevo proyecto:** Es el inicio del procedimiento y consiste en crear un archivo en donde se guardará todo el trabajo relacionado con el modelado.

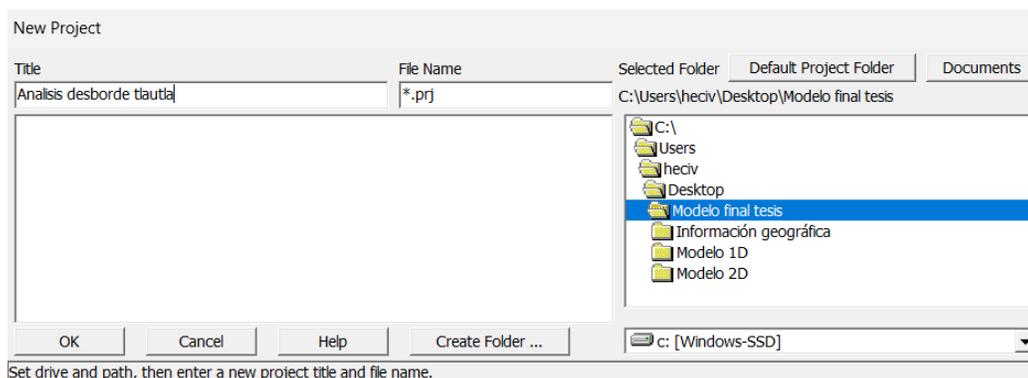


Figura 5-4. Interfaz de creación de proyecto en HEC-RAS

2. **Definir referencia geográfica:** Para este proceso es común hacer uso de SIG, que permiten obtener una imagen georreferenciada de la zona donde estará la zona del cauce en estudio. Esto permitirá dibujar más fácilmente durante los procesos posteriores del modelado, así como tener una mejor visualización de la ubicación de las estaciones de interés.

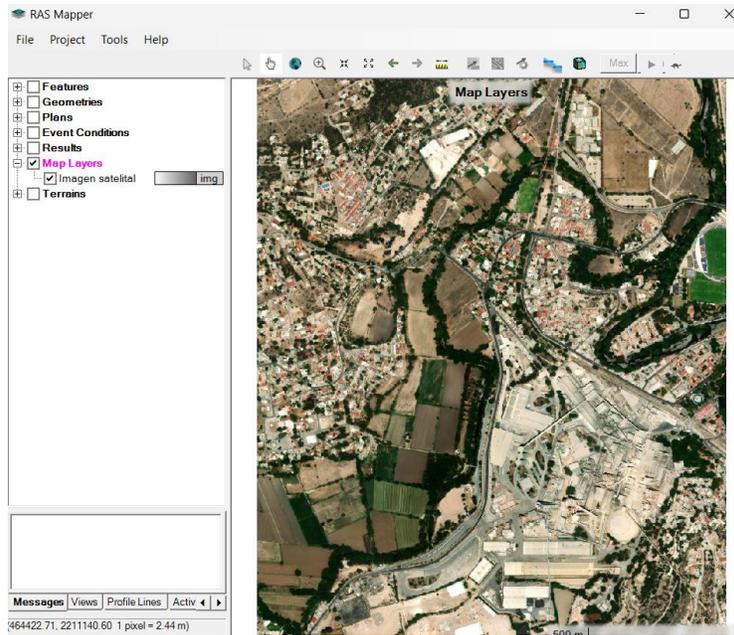


Figura 5-5. Ingreso de imagen georreferenciada al proyecto en HEC-RAS

- Ingresar secciones transversales:** Se ingresarán las secciones transversales de las estaciones conocidas del río (como coordenadas elevación/distancia), así mismo, se definen las estaciones de la sección transversal a partir del cual se considerará como volumen desbordado. Otro dato importante que ingresar en esta sección es el coeficiente de regularidad de Manning que se determinó es de $n = 0.051$ (la estimación se explica en la sección 0 de los Anexos).

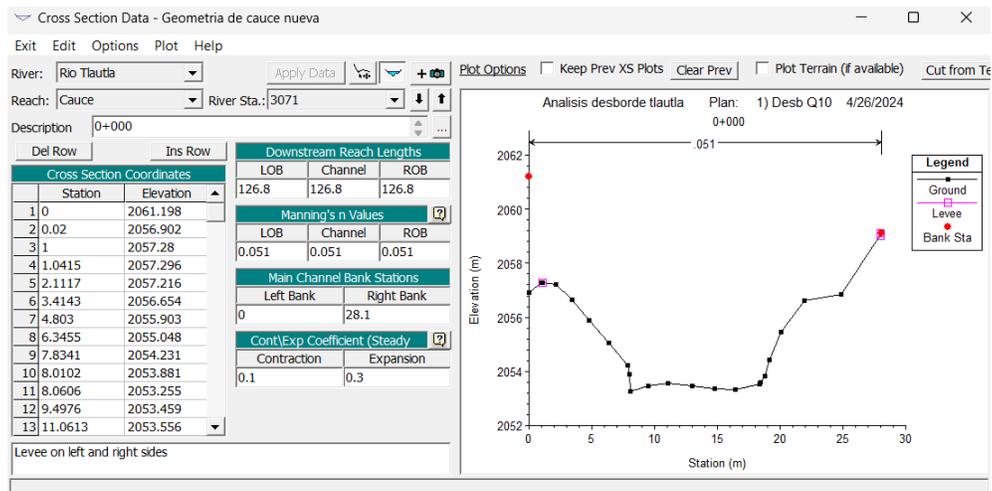


Figura 5-6. Ingreso de la sección transversal del cauce para la estación 0+000

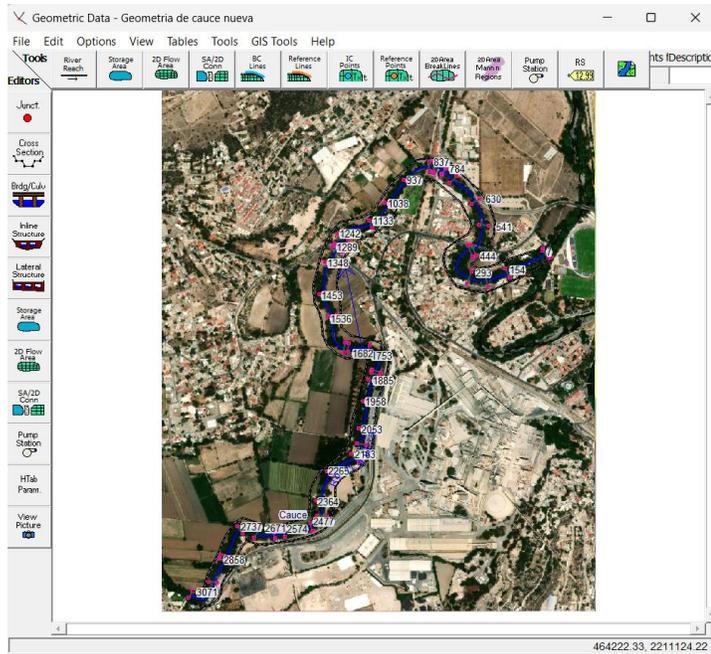


Figura 5-7. Vista del cauce dibujado con las estaciones definidas

- Definición de estructuras auxiliares:** En el caso particular del modelo trabajado, se busca realizar un tránsito de hidrograma en donde se consideren las pérdidas de volumen de agua por desbordamiento. Para dicha consideración, se incluyeron dos estructuras laterales ficticias que tuvieran las mismas cotas que los márgenes del río, para que el agua desbordada saliera del sistema.

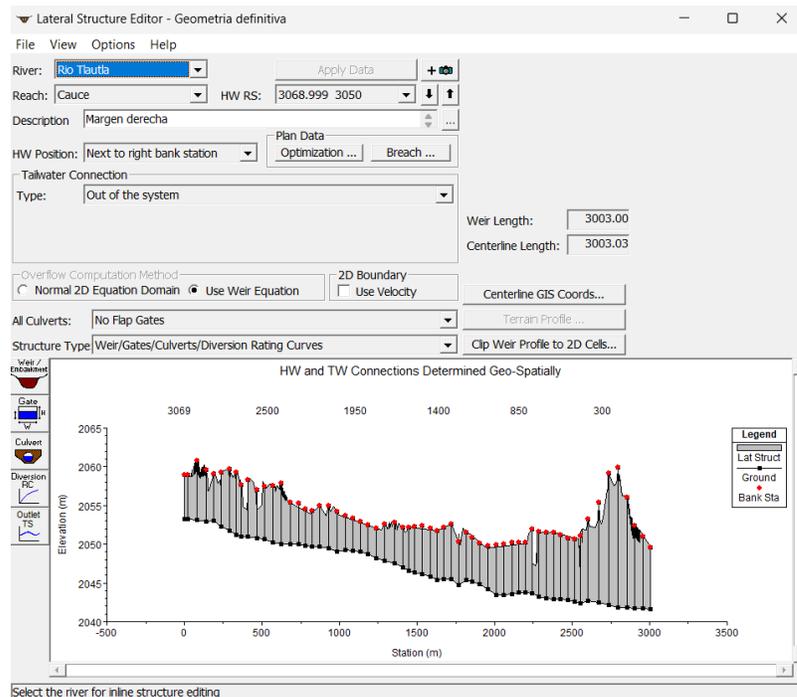


Figura 5-8. Editor para la estructura lateral ficticia propuesta para el margen derecho del río

5. **Ingresar datos hidráulicos y definir condiciones de frontera:** Para este apartado se requerirán ingresar los hidrogramas de interés para su tránsito en el cauce. Igualmente se establecen las condiciones de frontera, en donde se establece el ingreso del caudal dado por el hidrograma en la estación inicial y el alcance del tirante normal en la última estación.

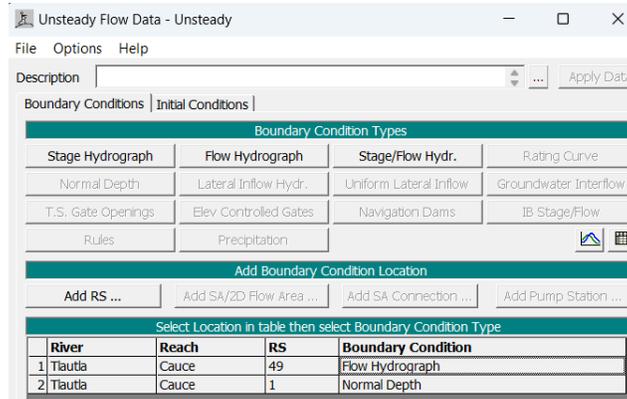


Figura 5-9. Condiciones de frontera definidas para el modelo

6. **Ejecutar la simulación:** Este paso consiste en simplemente ejecutar el análisis bajo régimen no permanente, en donde se selecciona el hidrograma de interés. Se deben especificar los intervalos de tiempo de análisis, los incrementos de tiempo donde se computan los datos, así como los incrementos de tiempo en los que los resultados serán dados.

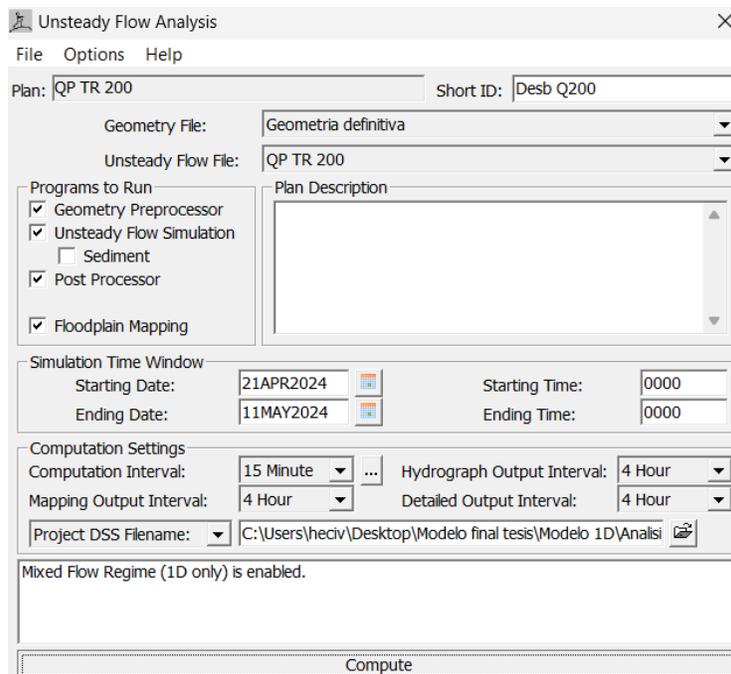


Figura 5-10. Definición de parámetros para ejecución de modelo

5.2.1 Resultados de la modelación

Los principales resultados que se buscan a partir de la modelación unidimensional son el hidrograma de salida y el volumen desbordado. Este último puede ser estimado como la diferencia entre el área de los hidrogramas de salida y entrada obtenidos. Los resultados obtenidos para los 8 hidrogramas de interés son los siguientes:

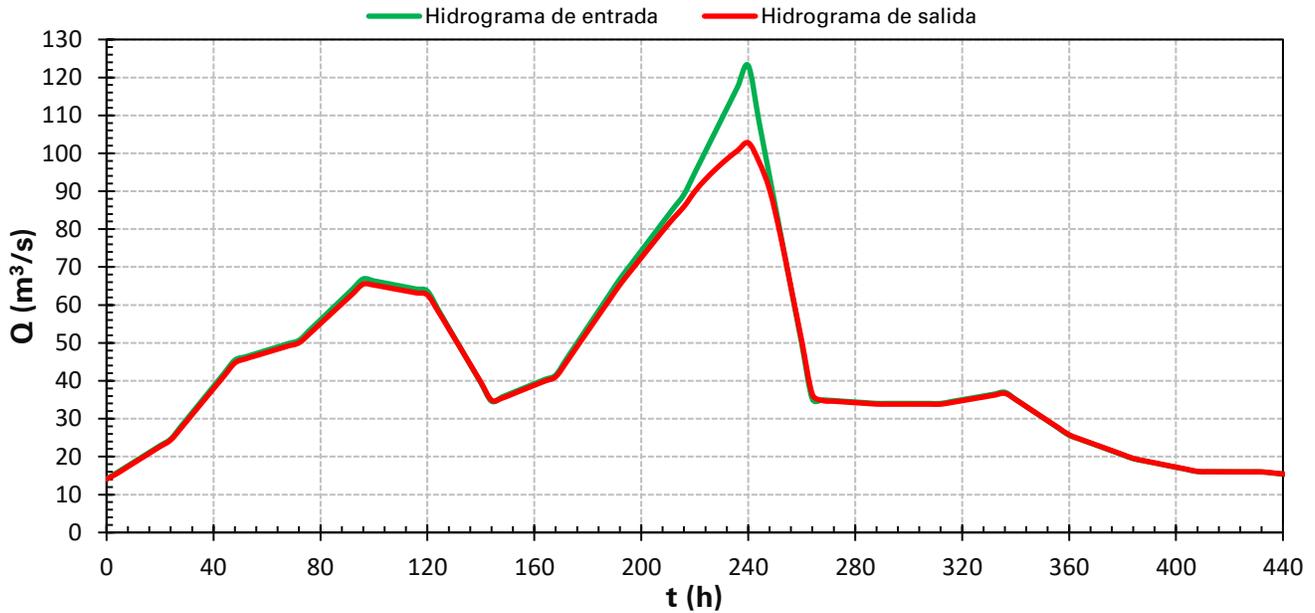


Figura 5-11. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=200 años

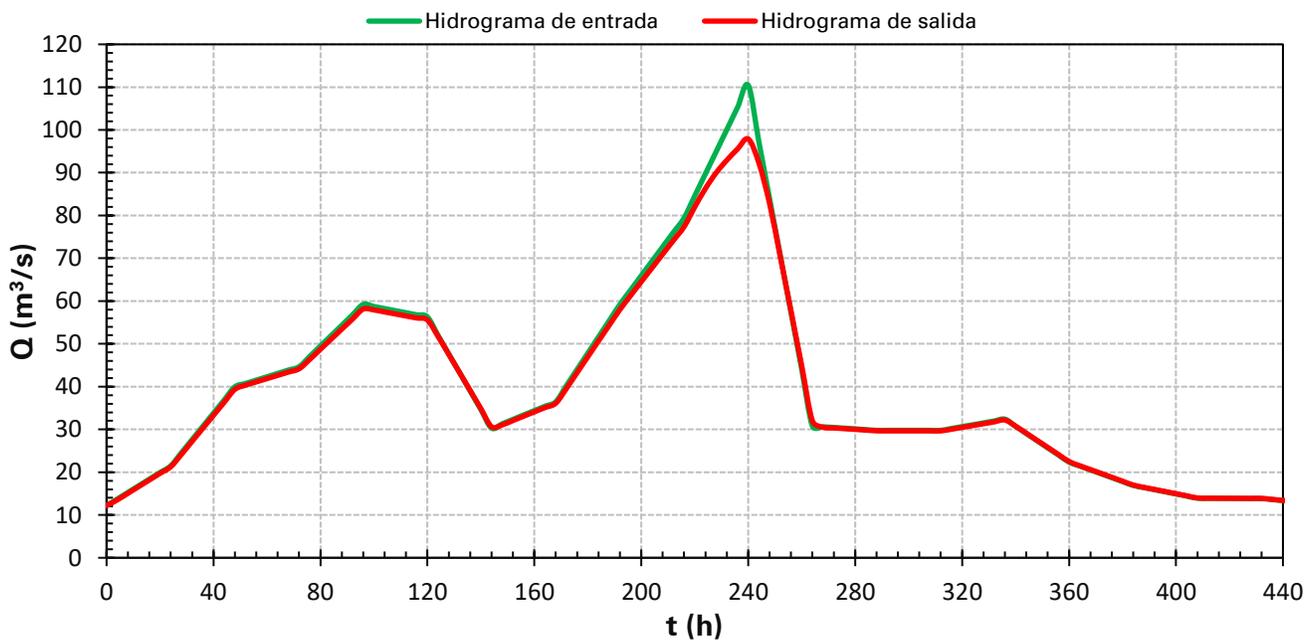


Figura 5-12. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=100 años

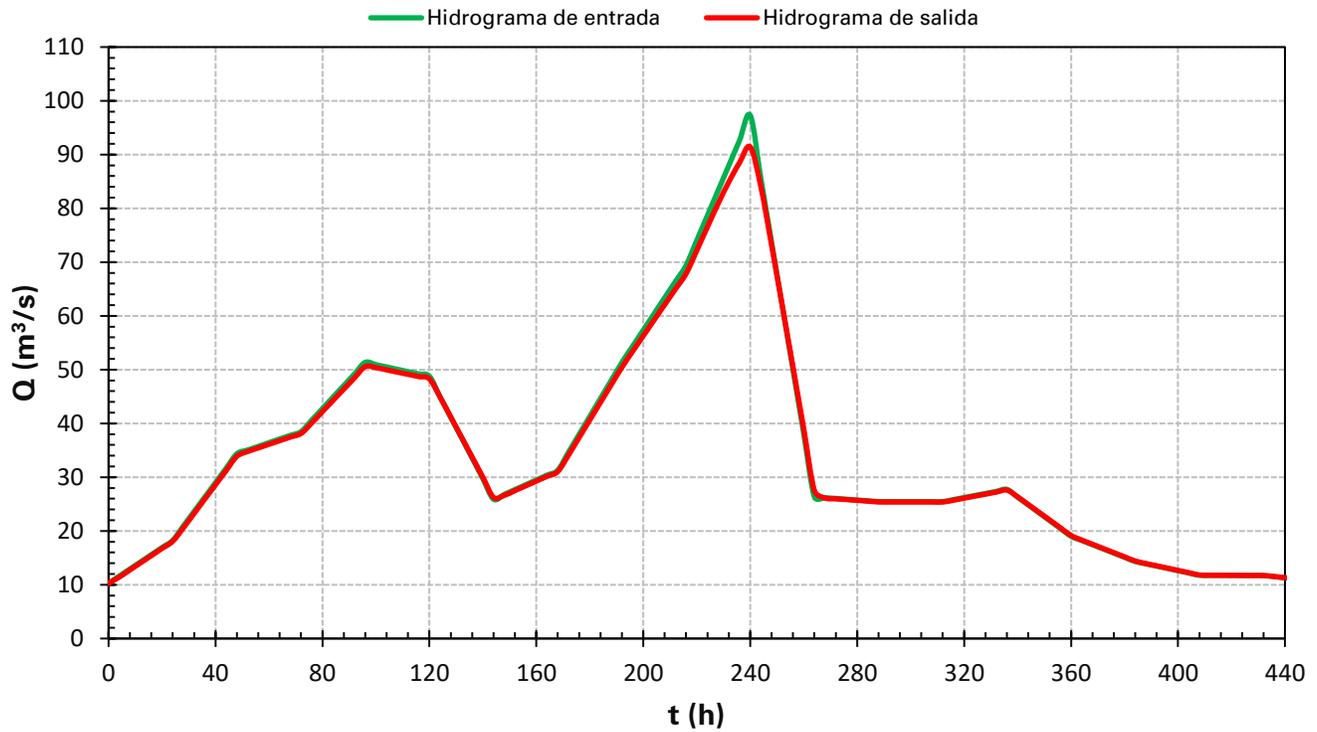


Figura 5-13. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=50 años

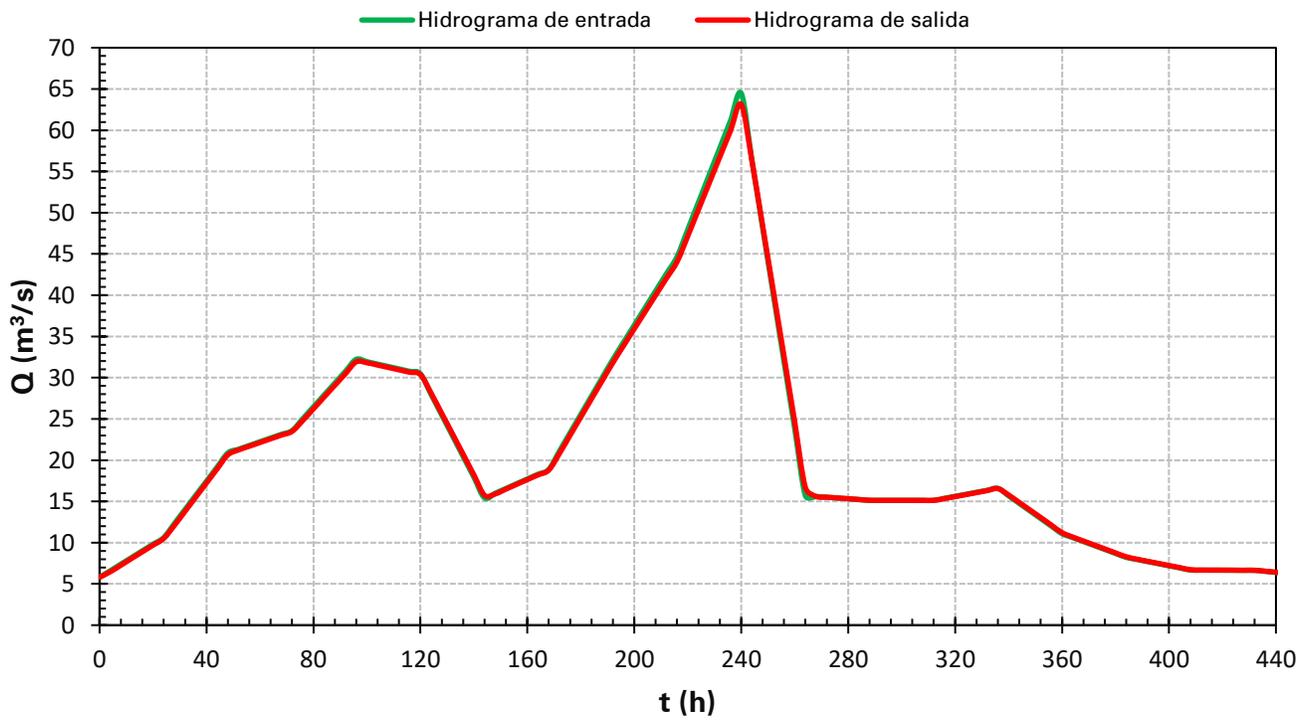


Figura 5-14. Hidrogramas de entrada y salida para un TR=10 años

El resumen de los volúmenes desbordados es el siguiente:

Periodo de retorno (años)	Volumen desbordado (m ³)
200	1,912,320
100	1,130,184
50	615,888
10	154,224

Tabla 5-4. Resumen de volúmenes desbordados obtenidos a partir de modelos 1D

5.3 Modelado 2D para determinar áreas de inundación

Utilizar un modelo bidimensional para la estimación de volúmenes de desborde tiene como principal limitante que la información de buena calidad de la que se dispone se limita a la topografía/batimetría de algunas secciones transversales. Es posible determinar una superficie interpolada a partir de dichas secciones y se puede complementar con la información LiDAR disponible en el sitio web del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Debido a que la intersección de las superficies mostrará irregularidades abruptas que podrían afectar en gran medida la capacidad de conducción del cauce, es necesario modificar la información resultante para obtener una transición más razonable (ver Figura 5-15). El hecho de crear una superficie a partir de secciones transversales, así como su modificación para que resulte congruente con la información LiDAR disponible, acarrea incertidumbres que deben ser consideradas. Esa es la principal razón por la que se optó por usar un modelo unidimensional a partir de información confiable para la obtención del hidrograma de salida y la modelación bidimensional para poder estimar regiones inundables de forma ilustrativa.

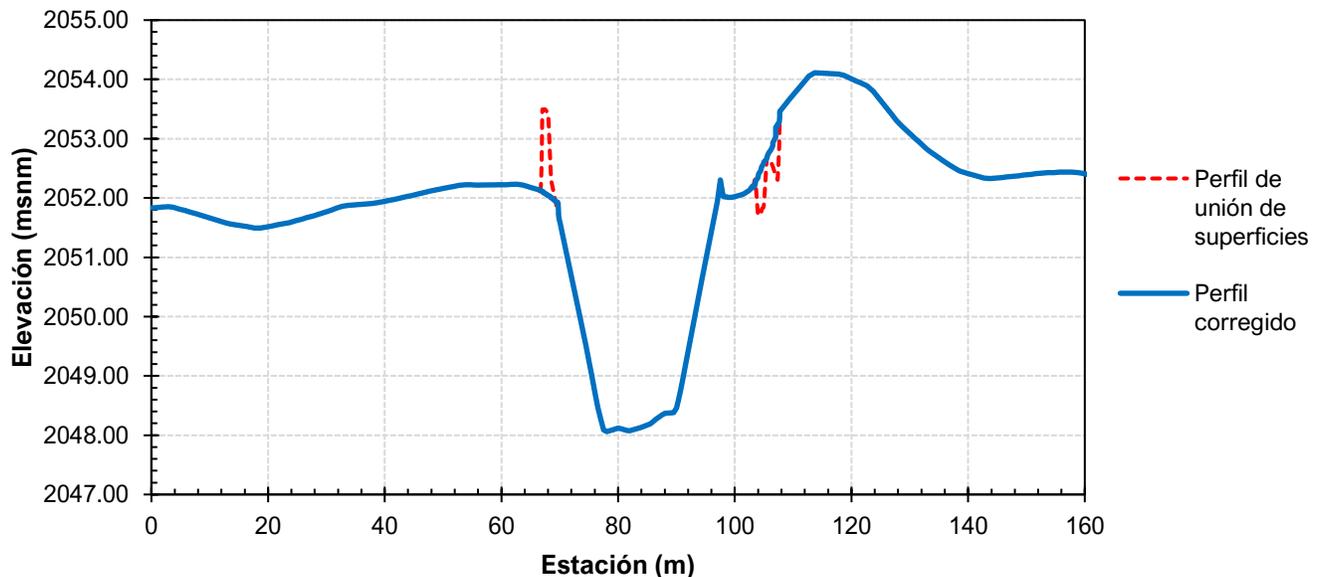


Figura 5-15. Corrección de unión de superficie LiDAR e interpolada del cauce

A continuación, se describe de manera general el procedimiento para la construcción del modelo bidimensional usado, así como los resultados que se obtienen de él.

Procedimiento seguido para el modelado en HEC-RAS

1. **Creación de un nuevo proyecto:** Es el inicio del procedimiento y consiste en crear un archivo en donde se guardará todo el trabajo relacionado con el modelado.

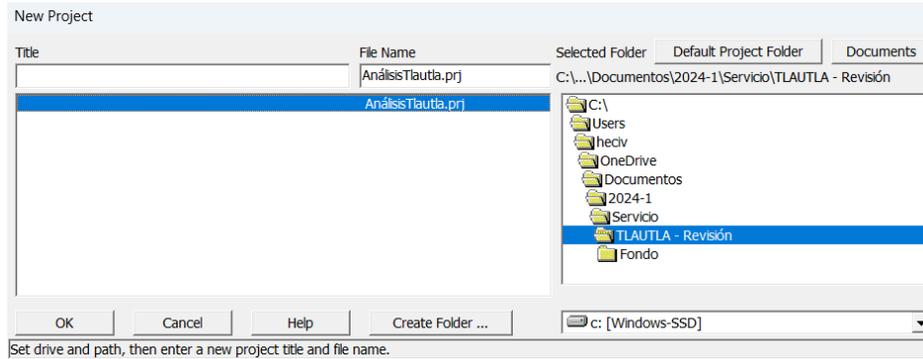


Figura 5-16. Interfaz de creación de proyecto en HEC-RAS

2. **Ingreso de información geográfica:** Para la construcción de este modelo es requerida la información de un Modelo Digital de Elevaciones (MDE) y como un auxiliar para una mejor referenciación de la zona una fotografía satelital. El MDE fue tomado a partir de la información LiDAR disponible en los mapas digitales del INEGI. Dado que los márgenes del río se encuentran cubiertos por árboles, la información proporcionada no es muy precisa, sin embargo, HEC-RAS cuenta con un módulo que permite crear una superficie a partir de la interpolación de las secciones transversales del río. A partir de ello puede obtenerse un MDE útil para el modelo.

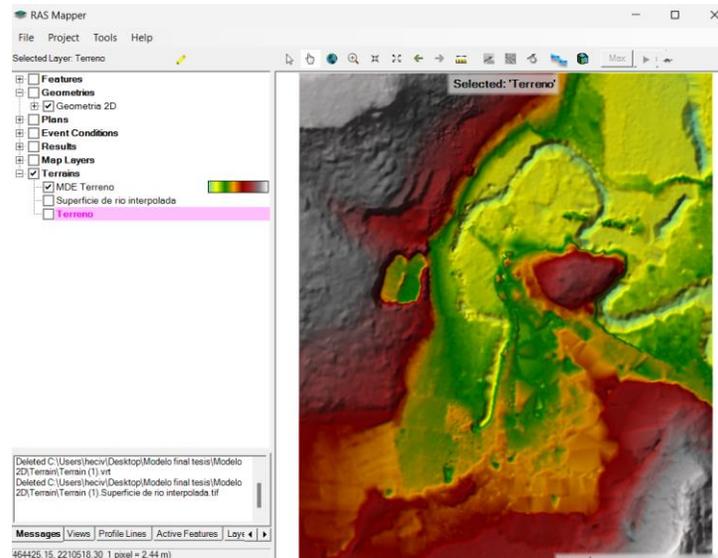


Figura 5-17. MDE de terreno ingresado en HEC-RAS

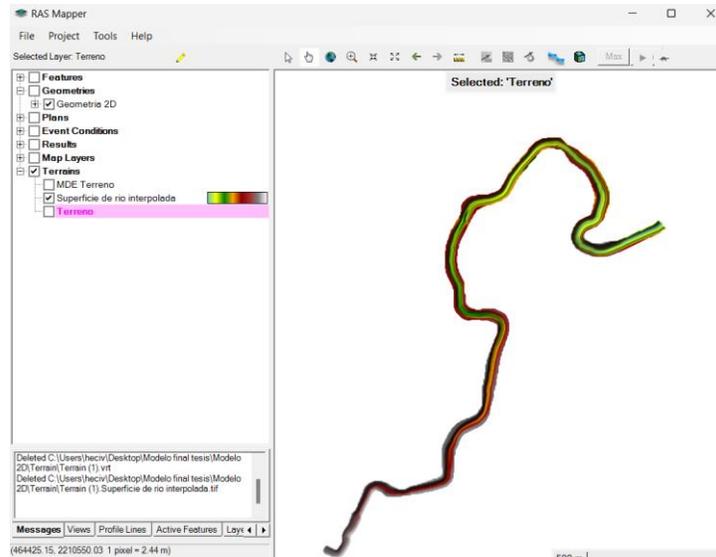


Figura 5-18. Superficie creada a partir de las secciones transversales conocidas

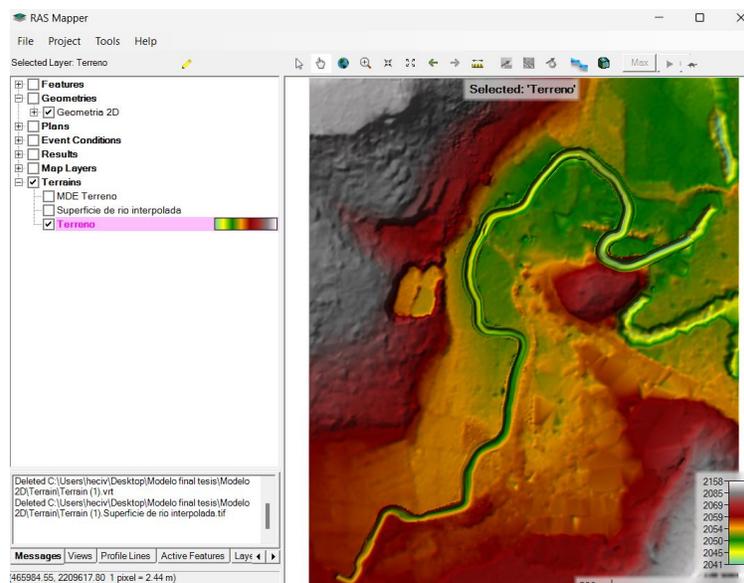


Figura 5-19. MDE combinado para la modelación 2D

- 3. Seleccionar área de flujo:** Se debe definir el área dentro de la cual se considera posible el flujo de agua, buscando sea lo menor posible para reducir el tiempo de ejecución de modelación. Esto puede lograrse analizando la información topográfica de la zona, o bien, haciendo ejecuciones de prueba bajo régimen permanente, considerando un gasto igual o superior al gasto pico máximo de los hidrogramas en análisis.

El área de flujo alcanzada será mayor que la que se alcanzará mediante el modelado de los hidrogramas analizados, por lo que será una referencia útil para delimitar un área de flujo más precisa. En el mismo apartado, es importante definir una *breakline* a lo largo del eje del cauce que será importante para afinar los resultados en la región correspondiente al cauce.

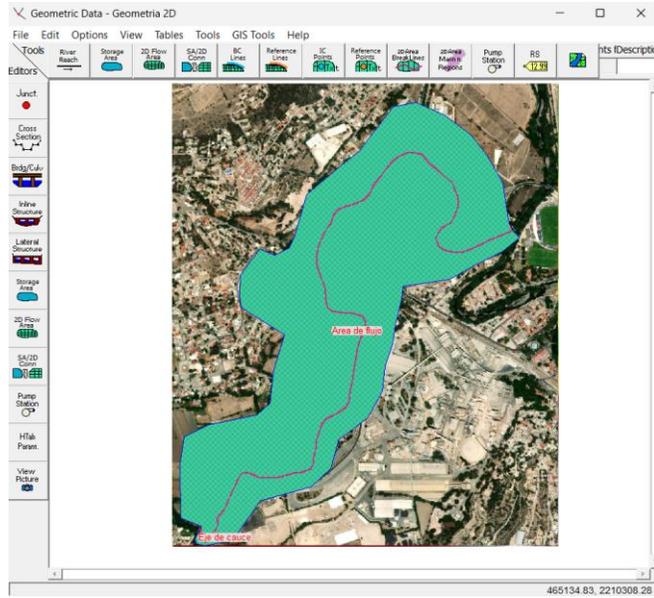


Figura 5-20. Área de flujo seleccionada con el eje del cauce definido mediante una breakline

- Afinar los puntos de computación para el modelo:** Se deberá elegir el tamaño de la celda que contendrá los puntos que el software considerará para realizar los cálculos. La elección de este tamaño de celda es crucial para obtener resultados válidos.

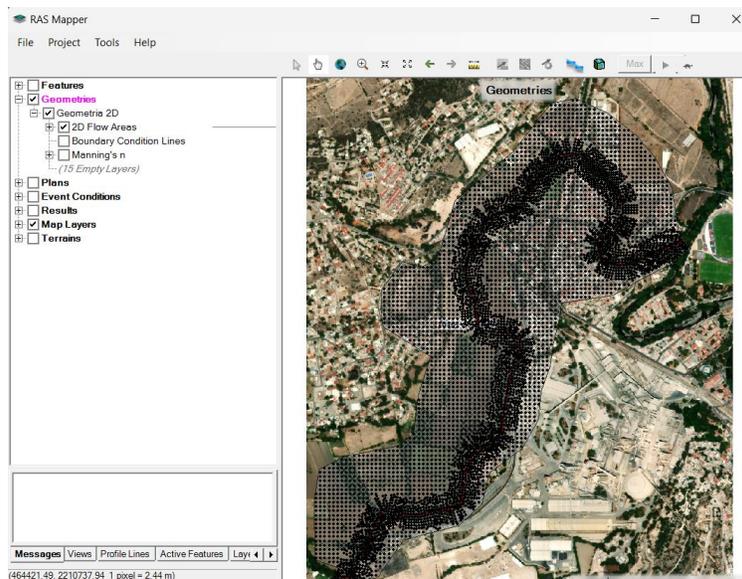


Figura 5-21. Puntos de cálculo para el modelo

5. Definir regiones con distinta rugosidad de Manning

Debido a que la rugosidad de Manning estimada para el cauce no sería válida para las llanuras de inundación, se han definidos distintas regiones según el tipo de uso de suelo y así asignado valores estándar de coeficiente de rugosidad para cada una de esas zonas.

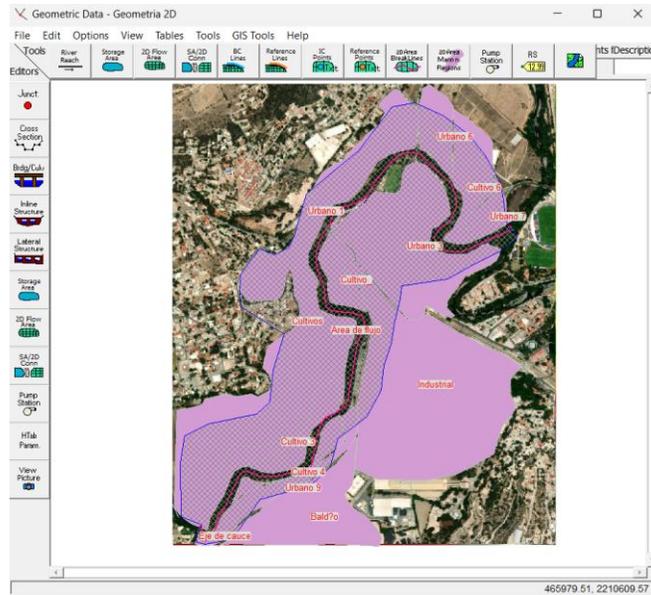


Figura 5-22. Definición de regiones de rugosidad de Manning definidas para el modelo

6. Ingresar datos hidráulicos y definir condiciones de frontera

En este apartado, es necesario definir 2 líneas que servirán para indicar las condiciones de frontera (aguas arriba y aguas abajo) y así definir los mismos casos analizados que en el modelo 1D.

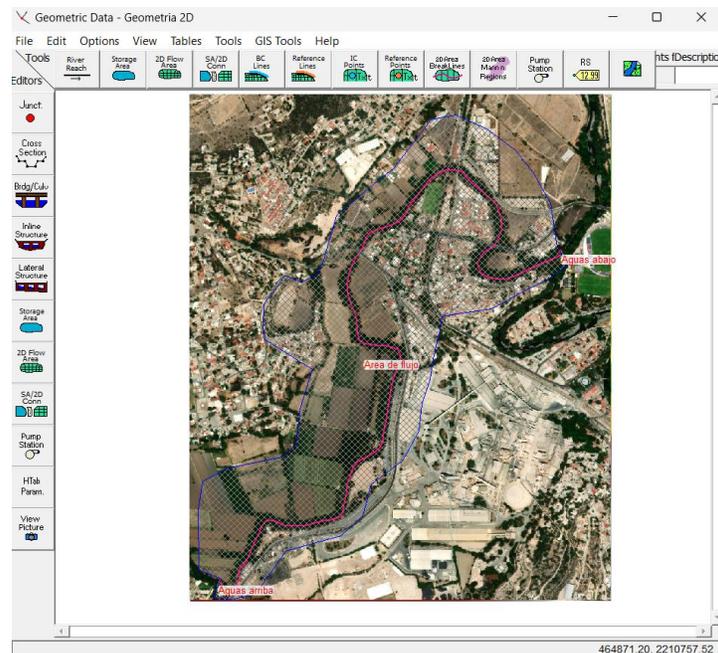


Figura 5-23. Ubicación de líneas de condición de frontera

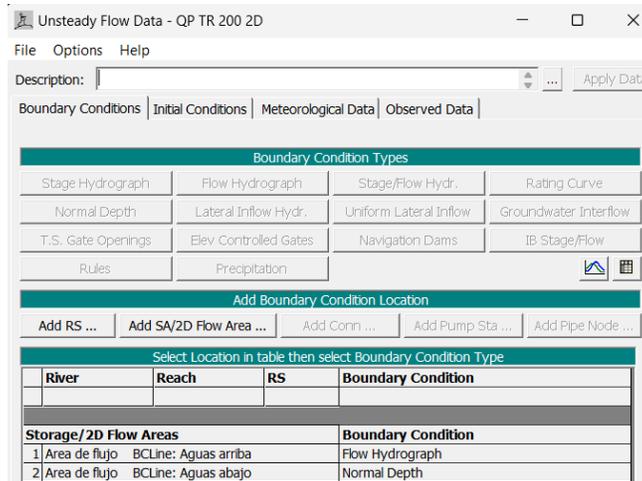


Figura 5-24. Condiciones de frontera definidas para el modelo 2D

7. Calibración y ejecución de la simulación

Este paso consiste en simplemente ejecutar el análisis bajo régimen no permanente, en donde se selecciona el hidrograma de interés. Sin embargo, en este software se deben modificar algunos parámetros que permiten obtener resultados estables y precisos, lo cual se logra iterando desde un punto donde los resultados sean estables y se irán proponiendo nuevos valores que favorezcan la precisión hasta el punto en que la estabilidad empiece a disminuir. Igualmente se deben especificar los intervalos de tiempo de análisis, los incrementos de tiempo donde se computan los datos, así como los incrementos de tiempo en los que los resultados serán dados.

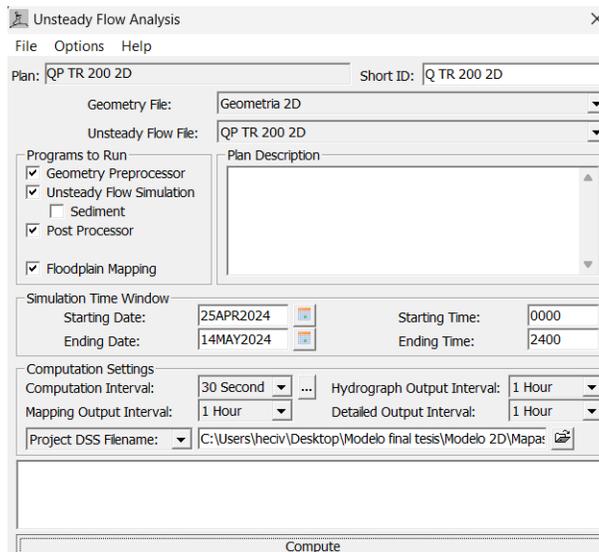


Figura 5-25. Definición de parámetros para ejecución de modelo 2D

5.3.1 Resultados

Uno de los principales resultados de la modelación bidimensional son los mapas de inundación. Ellos permiten visualizar las zonas afectadas por el desbordamiento del río de una manera más clara.

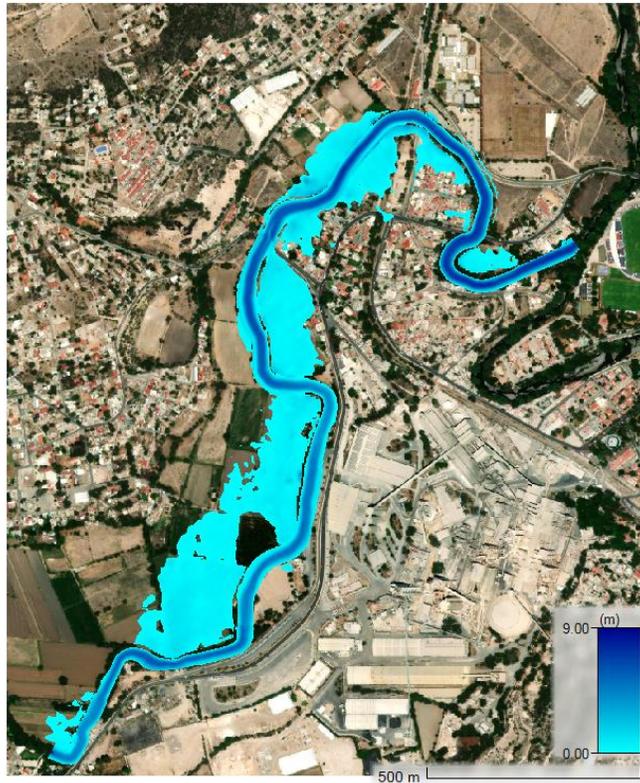


Figura 5-26. Mancha de inundación para un $T = 200$ años, calculado con criterio de volumen máximo

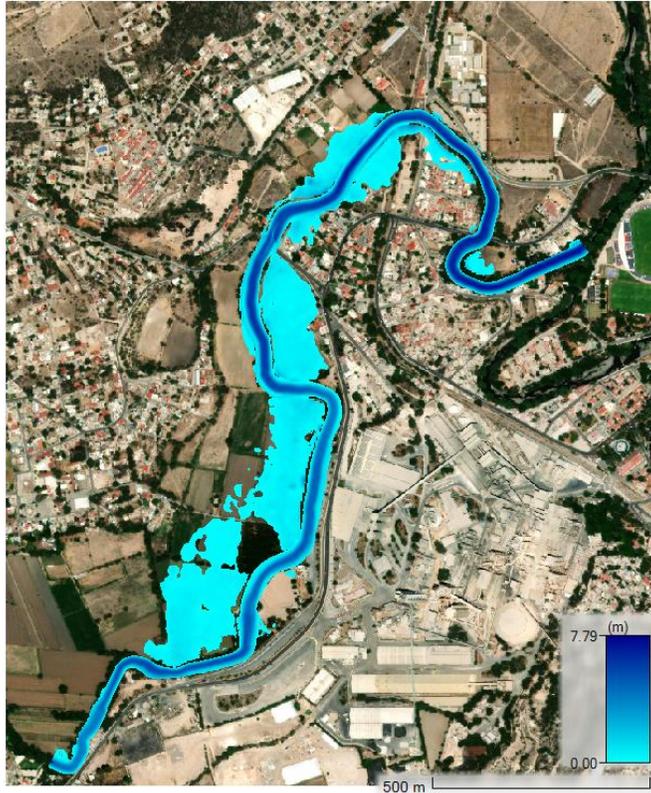


Figura 5-27. Mancha de inundación para un $T = 100$ años

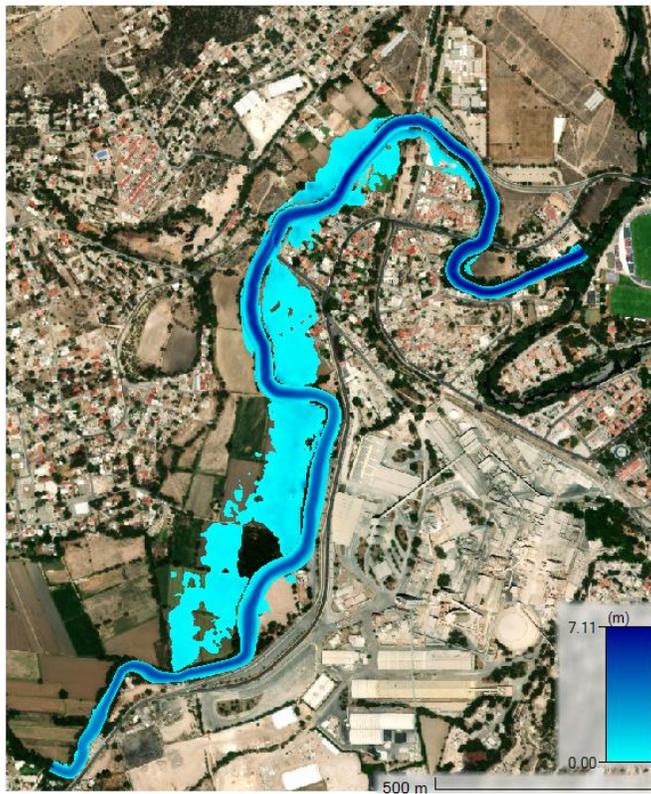


Figura 5-28. Mancha de inundación para un $T = 50$ años



Figura 5-29. Mancha de inundación para un $T = 10$ años

6 Discusión de resultados y conclusiones

La metodología que analiza de forma conjunta al gasto de pico y al volumen del hidrograma de una avenida permite analizar fenómenos de desbordamiento de ríos (aunque no se limita solamente a dicha aplicación).

A partir del trabajo se han obtenido resultados útiles en la Ingeniería Hidráulica. Como son los hidrogramas de diseño, los hidrogramas transitados por cauces y los mapas de inundación asociados a un periodo de retorno.

La metodología presentada emplea la función cópula Gumbel-Hougaard que en Latinoamérica es un área de investigación reciente.

El procedimiento para determinar la duración del hidrograma de diseño es simple; sin embargo, es necesario tener en cuenta que se basa en gran medida en la apreciación de quien la use y es útil en el caso de estudio ya que se dispone de suficientes registros históricos.

La estimación de la duración de eventos de diseño, es un área de oportunidad trabajar propuestas para que resulte en un mejor procedimiento.

El criterio para la selección de datos se ha hecho toma como variable de principal relevancia al volumen del hidrograma. El desborde de un río ocurre cuando la elevación de la superficie libre del agua supera la elevación de las márgenes por lo que, ya que ella depende del gasto de la corriente en el río, se puede definir al gasto que alcanza dicha condición como la capacidad de conducción del cauce. Esto último implica que el mayor volumen de desborde se alcanzará cuando el gasto supera durante más tiempo la capacidad de conducción del cauce.

Actualmente se disponen de herramientas de software que permiten un ajuste rápido a funciones de distribución de probabilidad univariadas y que hacen uso de métodos confiables como el de máxima verosimilitud o el de momentos. Hacer uso de ellos simplifica en gran medida el procedimiento y permite el análisis de una mayor cantidad de funciones, para lo cual se observó que la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorv-Smirnov es más estricta y resulta una herramienta más confiable para la elección de funciones para cada variable.

La cópula Gumbel-Hougaard posee un solo parámetro de asociación (θ), y la obtención de este mediante el método semiparamétrico de Genest et al. (1995) es de sencilla aplicación con las herramientas computacionales actuales.

Los periodos de retorno bivariados suponen un punto importante para esta metodología. (Fuentes O. A. et al., 2018) encontraron que los resultados más consistentes corresponden al periodo de retorno de Kendall. Sin embargo, salta a la vista que el uso de periodos de retorno conjuntos puede ser de utilidad en determinados casos. En específico, el periodo de retorno OR, es de utilidad cuando se supera un umbral de gasto de pico o volumen, por lo que para el análisis de inundaciones es de particular interés.

Un punto principalmente interesante durante el desarrollo de este trabajo es la propuesta para el ajuste de forma a hidrogramas existentes planteado a partir de la idea de Copca (2019). Calculando el volumen de los hidrogramas a partir de la discretización de trapecios ofreció resultados adecuados, sin embargo, hace falta investigar más sobre sus limitaciones. Analizando las expresiones matemáticas, se observa que no es posible que se indeterminen, ya que por cómo se definió, se debe cumplir que $V_T > V_R$. Para que el método de por resultados valores negativos se debe cumplir que $\alpha < 0$ y $\beta < 0$, lo cual solo es posible si se utilizan volúmenes de escurrimiento negativos, lo cual carece de sentido. El último caso que salta a la vista es la solución trivial ($\alpha = \beta = 0$) que de nuevo no es posible, a menos que se utilicen hidrogramas con gasto pico y volumen nulo, lo cual tampoco tiene sentido. Es recomendable aplicar esta metodología en otros casos de estudio para poder obtener más información sobre los resultados que ofrece.

En lo que se refiere a la modelación fluvial, se han hecho uso de modelos 1D y 2D. En el modelo 1D el tiempo de cómputo fue pequeño (cerca de 1 min por cada análisis), sin embargo, el calibrado fue un proceso mucho más complejo, ya que se detectó que ocurrían cambios de régimen, lo que hacía al modelo inestable. Esto último debido a que la distancia entre las secciones transversales de las que se tenía información en algunos tramos superaba los 140 m. Pese a que el software, ofrece la opción de generar secciones interpoladas para reducir esta distancia, la mejora en estabilidad no fue significativa, por lo que fue necesario modificar de forma iterativa los coeficientes involucrados en el modelado hasta obtener resultados estables.

Por otro lado, la modelación 2D tomaba un tiempo de cómputo mucho más largo (40 min en promedio por análisis); sin embargo, los resultados eran más estables. Esto se entiende fácilmente gracias a que la información proporcionada para este modelo es mas precisa.

Se observó que la mayor inundación se da en el margen izquierdo del río (a partir del sentido de flujo) pero las zonas inundadas son principalmente zonas de cultivos por lo que la población no se ve afectada. Por otro lado, el margen opuesto significó el menor volumen de desborde, pero la mayor afectación a la población de la Cd. Cooperativa Cruz Azul que, según datos del mapa digital del INEGI (2024), implicaría la afectación directa de aproximadamente 300 habitantes, para el hidrograma estimado para un periodo de retorno de 200 años. Para un periodo de retorno de 10 años, las afectaciones a la población son nulas (los mapas de inundación se muestran en la sección de Anexos).

De manera general, el trabajo sirvió para mostrar la metodología de análisis de frecuencia de avenidas conjunto de gasto pico y volumen, obteniendo más información sobre los resultados que otorga y la confiabilidad del método. A cambio de un análisis que, si bien es más extenso que la tradicional mayoración, vale la pena tener en cuenta para contar un nuevo enfoque de análisis o evaluación de riesgos por inundación, y así lograr obras más seguras.

Referencias

- Aparicio, F. J. (2008). *Fundamentos de Hidrología Superficial*. Editorial Limusa.
- Benjamin, J. R., y Cornell, C. A. (1970). *Probability, statistics and decision for civil engineers*. New York: McGraw Hill.
- Breña, A. F., y Jacobo, M. A. (2006). *Principios y Fundamentos de la Hidrología Superficial*. Universidad Autónoma Metropolitana.
- Brunner, M. I., Favre, A.-C., y Seibert, J. (2016). Bivariate return periods and their importance for flood peak and volumen estimation. *WIREs Water, Volume 3*(Issue 6), 819-833.
- Chow, V. T. (2004). *Hidráulica de Canales Abiertos*. Mc Graw Hill.
- Chow, V., Maidment, D. R., y Mays, L. W. (1996). *Hidrología aplicada*. McGraw Hill.
- Comisión Nacional del Agua. (2014). *Lineamientos para la elaboración de mapas de peligro por inundación*. México.
- Copca, E. O. (2019). *Hidrograma de descarga de una presa calculado con una distribución de probabilidad conjunta de gasto máximo y volumen*. Facultad de Ingeniería, UNAM: Tesis de maestría.
- Copca, E. O., Fuentes, Ó. A., y Morales, H. L. (2022). Análisis del parámetro de asociación theta entre las variables de cópulas. *XXX Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, 230-242.
- Cowan, W. (1956). Estimating hydraulic roughness coefficients . *Agricultural Engineering*, 37(7), 473-475.
- Denia, A., y Meuleón, I. (1995). *El método generalizado de los momentos*. Instituto Valenciano de Invetigaciones Económicas.
- Devore, J. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. CENGAGE Learning.
- Escalante, C., y Reyes, L. (2000). Estimación regional de avenidas de diseño. *Ingeniería Hidráulica en México*, 47-61.
- Escalante, C., y Reyes, L. (2002). *Técnicas Estadísticas en Hidrología*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Fuentes, O. A., Arganis, M. L., Copca, E. O., y Hernández, R. D. (2018). Hidrograma de descarga de una presa calculado con una distribución de probabilidad conjunta de gasto máximo y volumen. *XVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Buenos Aires, Argentina*, 870-1948.
- Fuentes, O. A., Arganis, M. L., Domínguez, R., Fuentes, G. E., y Rodriguez, K. (2015). Maximización de la función de Verosimilitud de Distribuciones de Probabilidad usando Algoritmos Genéticos. *Ingeniería del Agua*, 17-29.

- Fuentes, Ó. A., Ravelo, A., y Ávila, A. A. (2006). Método para determinar los parámetros K, X y los coeficientes de tránsito del método Muskingum-Cunge. *XIX Congreso Nacional de Hidráulica, AMH*. Cuernavaca, Morelos.
- Fuentes, O. A., y Martínez, P. (1988). *Introducción a los métodos numéricos aplicados a la hidráulica*. IMTA.
- Genest, C., Ghoudi, K., y Rivest, L. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 543-542.
- Genest, C., y Rivest, L. (1993). Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. *Journal of the American Statistical Association* 88, 1034-1043.
- Ghosh, S. (2024). Modelling bivariate rainfall distribution and generating bivariate rainfall data in neighbouring meteorological subdivisions using copula. *Hydrological Processes*(24), 3558-3567.
- Gobierno Municipal de Tepeji del Rio Ocampo. (2021). *Programa municipal de desarrollo urbano y ordenamiento territorial de Tepeji del Rio Ocampo*. Hidalgo.
- Gobierno Municipal de Tula de Allende. (2021). *Programa municipal de desarrollo urbano y ordenamiento territorial de Tula de Allende*. Hidalgo.
- Gómez Rios, W. (2017). Análisis de frecuencia hidrológico multivariado para eventos extremos mediante funciones cópula arquimedianas. Casos de estudio: cuenca baja del Río Tunjuelo y región de la Mojana (Colombia). *Tesis de Maestría*. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Colombia.
- Guerrero, A., Victoria, M., y Curieses, M. (2007). *Estadística básica*. Medellín, Colombia: Fondo Editorial ITM.
- Hydrologic Engineering Center. (2024). *HEC-RAS User's Manual*. U.S. Army Corps of Engineers: <https://www.hec.usace.army.mil/confluence/rasdocs/rasum/latest>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (2024). *Mapa digital de México v6.1*. <https://gaia.inegi.org.mx/>
- Kite, G. W. (1988). *Frequency and risk analyses in hydrology*. Colorado, USA: Water Resources Publications.
- Lammersen, R., Engel, H., van de Langemheen, W., y Buiteveld, H. (2002). Impact of river training and retention measures on flood peaks along the Rhine. *Journal of Hydrology*, 267(1-2), 115-124.
- Marthahari. (2017). Río Tlautla. *Ojo del puente*. Santiago Tlautla, Hidalgo.
- Noticias, S. (2021). *Hidalgo: Río Tlautla se pinta de azul*. <https://www.sdpnoticias.com/estados/hidalgo-rio-tlautla-se-pinta-de-azul/>
- OMM/UNESCO. (2012). *Glosario hidrológico internacional*. Ginebra.
- Organización Meteorologica Mundial. (2011). *Guía de prácticas hidrológicas* (Vol. II). OMM.
- Palacios, S. E. (2010). *Tormentas de diseño en el río Grijalva*. Facultad de Ingeniería, UNAM: Tesis de licenciatura.

- Pérez, W. (2023). *Una aproximación al método generalizado de los momentos y sus limitaciones*. FLACSO Andes.
- Ramírez, A. I., y Aldama, Á. A. (2000). *Análisis de frecuencias conjunto para la estimación de avenidas de diseño*. México: AMH-IMTA.
- Ramírez, L. E. (2019). *Aplicación de funciones cópula para el análisis de frecuencias bivariado para estimar avenidas de diseño con gasto y volumen pico*. Facultad de Ingeniería, UNAM: Tesis de maestría.
- Rivera, F., y Escalante, C. (1999). Análisis comparativo de técnicas de estimación de avenidas de diseño. *Ingeniería del Agua Vol. 6*, 49-54.
- Rodriguez, B. (2020). *Análisis de inundación en Paraíso, Tabasco. Caso de aplicación: Dos Bocas*. UNAM, Facultad de Ingeniería: Tesis de Maestría.
- Saint-Venant, A. (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et a l'introduction de marées dans leurs lits. *Comptes Rendus des Séances de Académie des Sciences*, 73, 147-154, 237-240.
- Salas, M. A., y Jiménez, M. (2004). *Inundaciones*. Ciudad de México: CENAPRED.
- Salvadori, G., De Michele, C., Kottegoda, N. T., y Rosso, R. (2007). *EXTREMES IN NATURE An Approach Using Copulas*. Springer.
- Salvadori, G., De Michele, C., y Durante, F. (2011). On the return period and design in a multivariate framework. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15, 3293-3305.
- Salvadori, G., y De Michele, C. (2004). Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resources Research*, Volume 40(Issue 12).
- Serinaldi, F. (2015). Dismissing return periods! *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, Volume 29(Issue 4), 1179-1189.
- Shiau, J., Wang, H., y Tsai, C. (2006). Bivariate frequency analysis of floods using copulas. *Journal of the American Water Resources Association*, 42(6), 1549-1564.
- Sklar, M. (1959). Fonctions de répartition à N dimensions et leurs marges. *Annales de l'SUP*, 229-231.
- Sotelo, G. (2002). *Hidráulica de Canales*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Sullivan, J. O., y Ahilan, M. B. (2012). *A modified muskingum routing approach for floodplain flows: Theory and practice*. Elsevier.
- Sullivan, J., y Ahilan A., M. (2012). *A modified muskingum routing approach for floodplain flows: Theory and practice*. Elsevier.
- Timbe, L., y Willems, P. (2011). Desempeño de modelos hidráulicos 1D y 2D para la simulación de inundaciones. *MASKANA*, 2(1), 91-98.
- Yoshida, H., y Dittrich, A. (2002). 1D unsteady-state flow simulation of a section of the upper Rhine. *Journal of Hydrology*, 269(1-2), 79-88.

0 Anexos

0.1 Parejas de datos seleccionadas

Año	Q (m ³ /s)	V (m ³ · día/s)	Año	Q (m ³ /s)	V (m ³ · día/s)	Año	Q (m ³ /s)	V (m ³ · día/s)
1930	23.089	192.916	1959	26.871	271.103	1986	13.423	71.552
1931	80.029	709.587	1960	15.553	60.69	1987	5.115	27.408
1932	51.307	416.695	1961	10.463	106.098	1988	27.747	125.88
1933	51.958	270.763	1962	9.861	54.442	1989	21.801	94.891
1934	42.147	274.2	1963	45.352	242.56	1990	32.342	96.995
1935	66.544	457.929	1964	3.906	23.753	1991	62.483	589.484
1936	25.215	297.608	1965	24.322	269.785	1992	34.168	228.726
1937	118.524	686.989	1966	41.524	240.531	1993	14.534	161.86
1938	80.905	240.92	1967	91.554	520.391	1994	16.77	85.599
1939	17.134	79.013	1968	30.474	205.657	1995	2.025	34.792
1940	40.404	219.406	1969	37.802	430.877	1996	3.333	32.758
1941	54.324	337.919	1970	29.323	147.328	1997	0.76	6.54
1942	34.769	159.094	1971	96.899	591.031	1998	9.068	128.516
1943	31.625	201.95	1972	9.815	69.741	1999	5.512	60.162
1944	64.238	465.776	1973	52.671	337.15	2000	4.295	56.508
1945	28.919	80.996	1974	52.865	408.819	2001	5.509	43.215
1946	7.888	44.826	1975	23.529	250.3	2002	17.546	153.105
1947	26.491	105.496	1976	65.741	574.6	2003	55.091	323.065
1948	26.865	144.239	1977	20.301	51.53	2004	27.213	143.586
1949	4.006	20.501	1978	65.255	375.503	2005	22.594	93.337
1950	8.79	45.783	1979	47.68	204.72	2006	10.368	115.837
1951	15.418	71.254	1980	22.256	121.393	2007	22.446	154.946
1952	30.11	193.519	1981	15.996	90.861	2008	31.306	150.014
1953	12.886	77.959	1982	6.978	15.916	2009	23.533	158.464
1954	34.363	258.75	1983	45.17	367.73	2010	20.232	67.148
1955	43.333	358.854	1984	10.628	150.949	2011	19.009	98.113
1956	18.822	170.001	1985	12.958	110.279	2012	8.026	31.522
1957	3.573	13.166	1986	13.423	71.552	2013	51.533	201.907
1958	87.991	731.732	1987	5.115	27.408	2014	38.658	205.952

Tabla 0-1. Parejas de datos (Q, V) seleccionadas mediante el criterio de volumen máximo para los años registrados

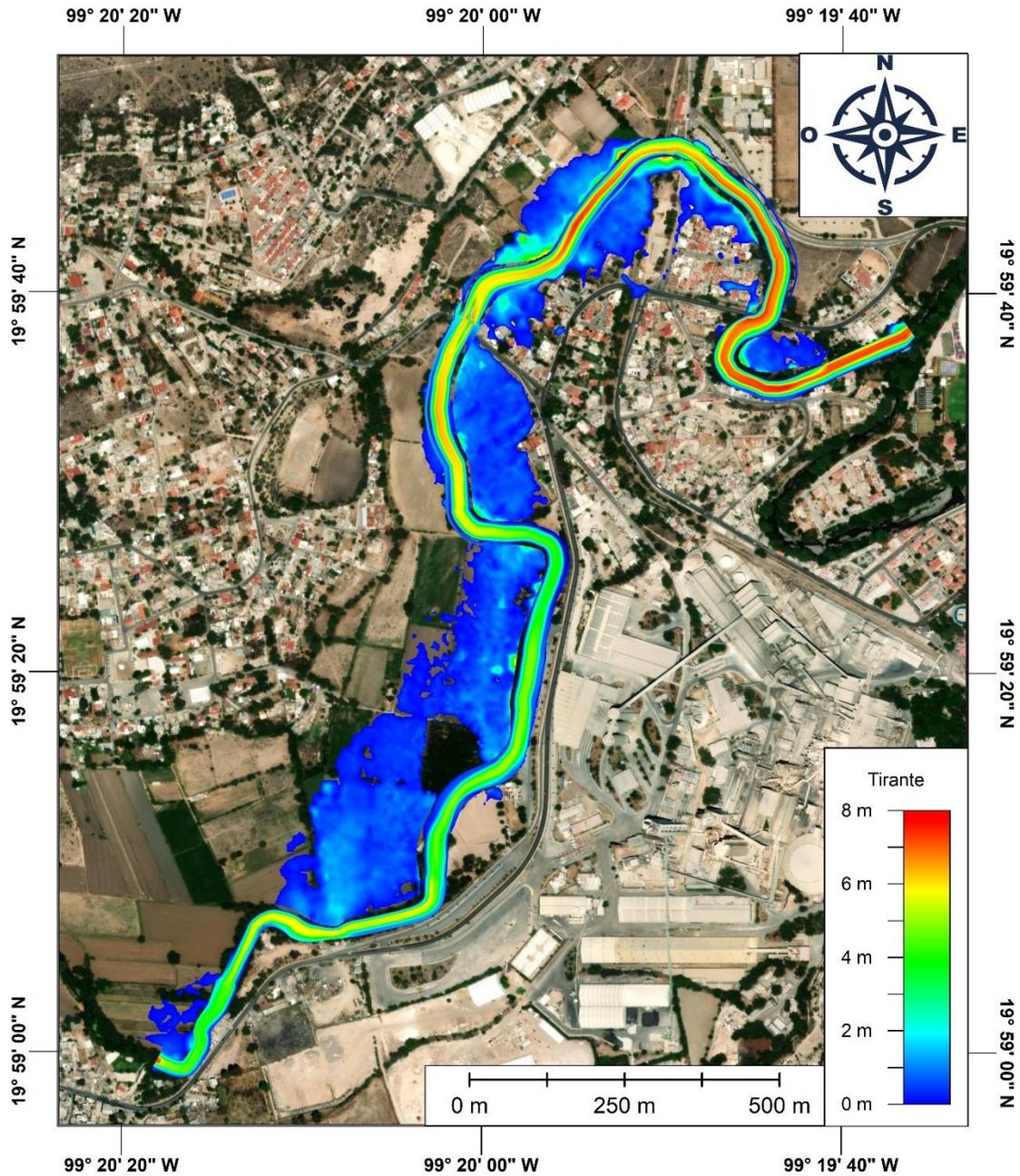
0.2 Estimación de parámetro θ para la función cópula

Año	Q (m ³ /s)	V (m ³ · día/s)	$F(Q)$	$G(V)$	w	$c(F(Q), G(V))$	$\ln V(\theta)$
1930	23.09	192.92	0.4585	0.5845	0.5472	1.7955	0.585
1931	80.03	709.59	0.9523	0.9821	0.0000	4.3863	2.064
1932	51.31	416.70	0.8202	0.8846	0.0047	3.4299	3.296
1933	51.96	270.76	0.8251	0.7288	0.0232	2.3354	4.145
1934	42.15	274.20	0.7360	0.7340	0.0358	3.5256	5.405
1935	66.54	457.93	0.9091	0.9103	0.0006	8.8106	7.581
1936	25.22	297.61	0.4970	0.7671	0.3053	0.5223	6.931
1937	118.52	686.99	0.9936	0.9792	0.0000	6.5419	8.809
1938	80.91	240.92	0.9543	0.6797	0.0388	0.0465	5.740
1939	17.13	79.01	0.3415	0.2662	3.8826	2.2408	6.547
1940	40.40	219.41	0.7167	0.6396	0.0873	2.5076	7.466
1941	54.32	337.92	0.8423	0.8155	0.0068	4.6518	9.004
1942	34.77	159.09	0.6463	0.5040	0.3339	1.6451	9.501
1943	31.63	201.95	0.6015	0.6040	0.1956	2.7181	10.501
1944	64.24	465.78	0.8989	0.9145	0.0007	7.9522	12.575
1945	28.92	81.00	0.5595	0.2729	2.5987	0.6466	12.139
1946	7.89	44.83	0.1426	0.1475	18.9280	3.3829	13.357
1947	26.49	105.50	0.5192	0.3520	1.3952	1.4486	13.728
1948	26.87	144.24	0.5255	0.4649	0.6240	2.2793	14.552
1949	4.01	20.50	0.0622	0.0620	65.6061	5.5253	16.261
1950	8.79	45.78	0.1621	0.1509	16.5368	3.2454	17.439
1951	15.42	71.25	0.3056	0.2399	5.1610	2.3625	18.298
1952	30.11	193.52	0.5783	0.5858	0.2458	2.6460	19.271
1953	12.89	77.96	0.2513	0.2627	5.7084	2.6284	20.238
1954	34.36	258.75	0.6408	0.7099	0.0888	2.5984	21.193
1955	43.33	358.85	0.7485	0.8369	0.0173	2.5356	22.123
1956	18.82	170.00	0.3759	0.5312	1.1374	1.5427	22.557
1957	3.57	13.17	0.0539	0.0374	96.9570	6.4886	24.427
1958	87.99	731.73	0.9678	0.9845	0.0000	11.1744	26.840
1959	26.87	271.10	0.5257	0.7293	0.2409	1.0013	26.841
1960	15.55	60.69	0.3084	0.2034	6.6409	2.0888	27.578
1961	10.46	106.10	0.1985	0.3539	6.2993	1.6004	28.048
1962	9.86	54.44	0.1854	0.1815	12.1486	3.0186	29.153
1963	45.35	242.56	0.7686	0.6826	0.0478	2.4963	30.068
1964	3.91	23.75	0.0603	0.0732	60.6569	5.2131	31.719
1965	24.32	269.79	0.4811	0.7273	0.3643	0.7134	31.381
1966	41.52	240.53	0.7292	0.6790	0.0586	2.9477	32.462
1967	91.55	520.39	0.9731	0.9391	0.0001	4.8909	34.050
1968	30.47	205.66	0.5840	0.6118	0.2086	2.6465	35.023
1969	37.80	430.88	0.6858	0.8941	0.0364	0.4281	34.175
1970	29.32	147.33	0.5660	0.4732	0.5173	2.0796	34.907

1971	96.90	591.03	0.9796	0.9611	0.0000	10.9588	37.301
1972	9.82	69.74	0.1844	0.2347	9.5632	2.6750	38.285
1973	52.67	337.15	0.8305	0.8147	0.0076	4.7317	39.839
1974	52.87	408.82	0.8319	0.8790	0.0040	4.3300	41.305
1975	23.53	250.30	0.4666	0.6959	0.4269	0.8639	41.158
1976	65.74	574.60	0.9057	0.9568	0.0004	3.3846	42.378
1977	20.30	51.53	0.4053	0.1713	7.6613	0.9455	42.322
1978	65.26	375.50	0.9035	0.8522	0.0023	4.2542	43.769
1979	47.68	204.72	0.7901	0.6099	0.0974	1.0823	43.849
1980	22.26	121.39	0.4429	0.4002	1.2363	2.3214	44.691
1981	16.00	90.86	0.3177	0.3054	3.3867	2.4847	45.601
1982	6.98	15.92	0.1231	0.0465	58.5182	3.1900	46.761
1983	45.17	367.73	0.7668	0.8452	0.0131	2.8357	47.803
1984	10.63	150.95	0.2021	0.4828	5.3053	0.6790	47.416
1985	12.96	110.28	0.2529	0.3668	3.9772	1.9419	48.080
1986	13.42	71.55	0.2629	0.2409	6.0275	2.6257	49.045
1987	5.12	27.41	0.0843	0.0859	43.5165	4.5580	50.562
1988	27.75	125.88	0.5403	0.4133	0.8457	1.7790	51.138
1989	21.80	94.89	0.4343	0.3184	2.1228	1.8811	51.770
1990	32.34	97.00	0.6121	0.3252	1.5759	0.6232	51.297
1991	62.48	589.48	0.8905	0.9608	0.0007	1.6617	51.805
1992	34.17	228.73	0.6381	0.6575	0.1164	2.8761	52.861
1993	14.53	161.86	0.2868	0.5110	2.3941	1.0243	52.885
1994	16.77	85.60	0.3339	0.2881	3.4810	2.3914	53.757
1995	2.03	34.79	0.0263	0.1120	96.7931	2.8488	54.804
1996	3.33	32.76	0.0494	0.1048	59.0586	3.9246	56.171
1997	0.76	6.54	0.0075	0.0167	349.0744	15.5612	58.916
1998	9.07	128.52	0.1681	0.4210	7.8196	0.8216	58.720
1999	5.51	60.16	0.0924	0.2016	24.3748	2.2704	59.539
2000	4.30	56.51	0.0679	0.1888	35.0943	2.0783	60.271
2001	5.51	43.22	0.0923	0.1418	29.2368	3.4213	61.501
2002	17.55	153.11	0.3500	0.4885	1.5013	1.6876	62.024
2003	55.09	323.07	0.8475	0.7989	0.0082	3.9128	63.389
2004	27.21	143.59	0.5314	0.4631	0.6181	2.2354	64.193
2005	22.59	93.34	0.4493	0.3134	2.1280	1.7195	64.735
2006	10.37	115.84	0.1965	0.3837	6.1395	1.3147	65.009
2007	22.45	154.95	0.4465	0.4933	0.7848	2.3267	65.853
2008	31.31	150.01	0.5967	0.4803	0.4512	1.8888	66.489
2009	23.53	158.46	0.4667	0.5024	0.6747	2.3842	67.358
2010	20.23	67.15	0.4040	0.2258	4.6012	1.3895	67.687
2011	19.01	98.11	0.3797	0.3287	2.3353	2.3131	68.525
2012	8.03	31.52	0.1455	0.1004	26.5653	3.4041	69.750
2013	51.53	201.91	0.8219	0.6039	0.1003	0.6708	69.351
2014	38.66	205.95	0.6962	0.6124	0.1188	2.3641	70.212

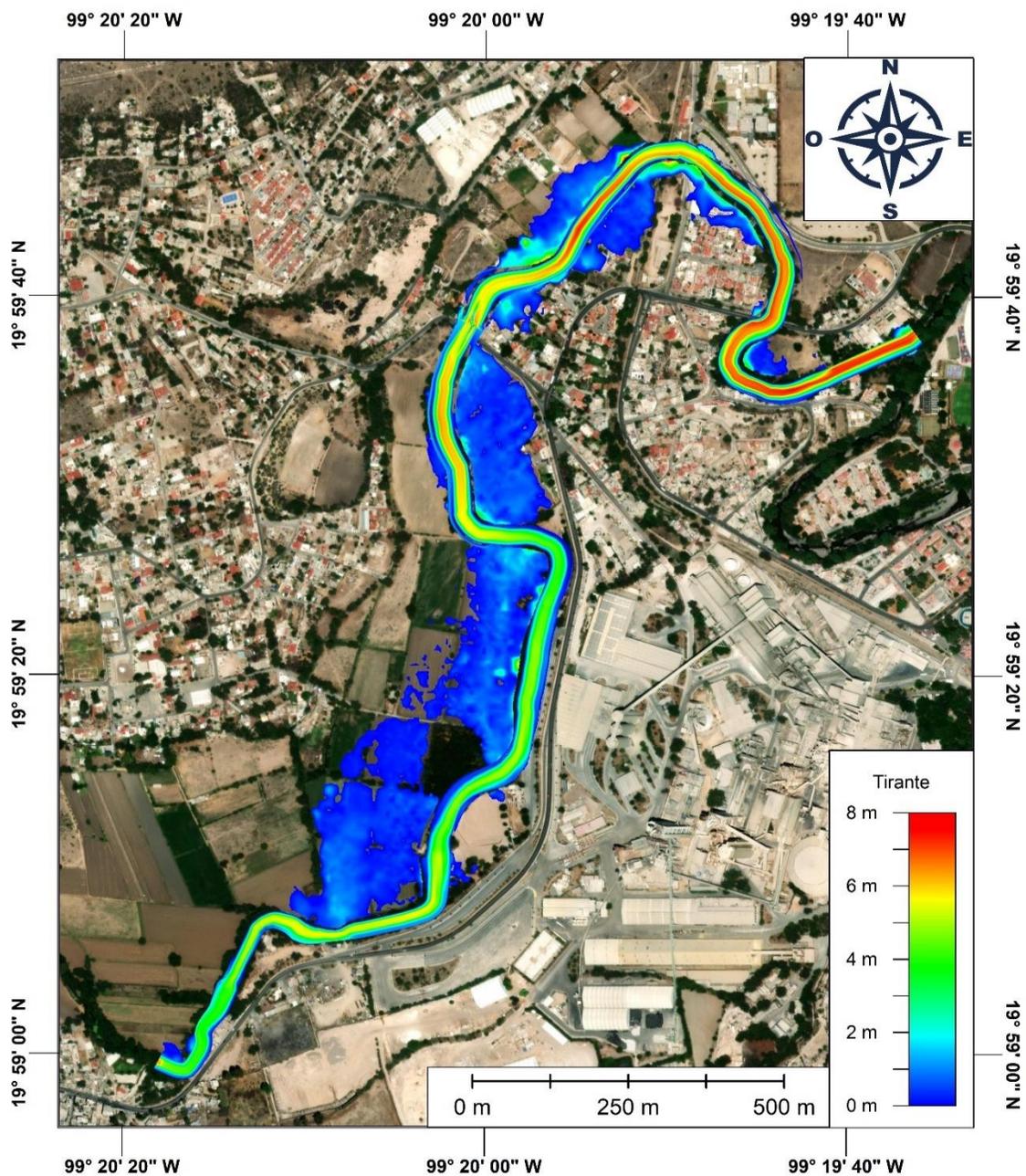
Tabla 0-2. Maximización de la función de verosimilitud para la función cópula con datos del criterio de volumen máximo

0.3 Mapas de inundación



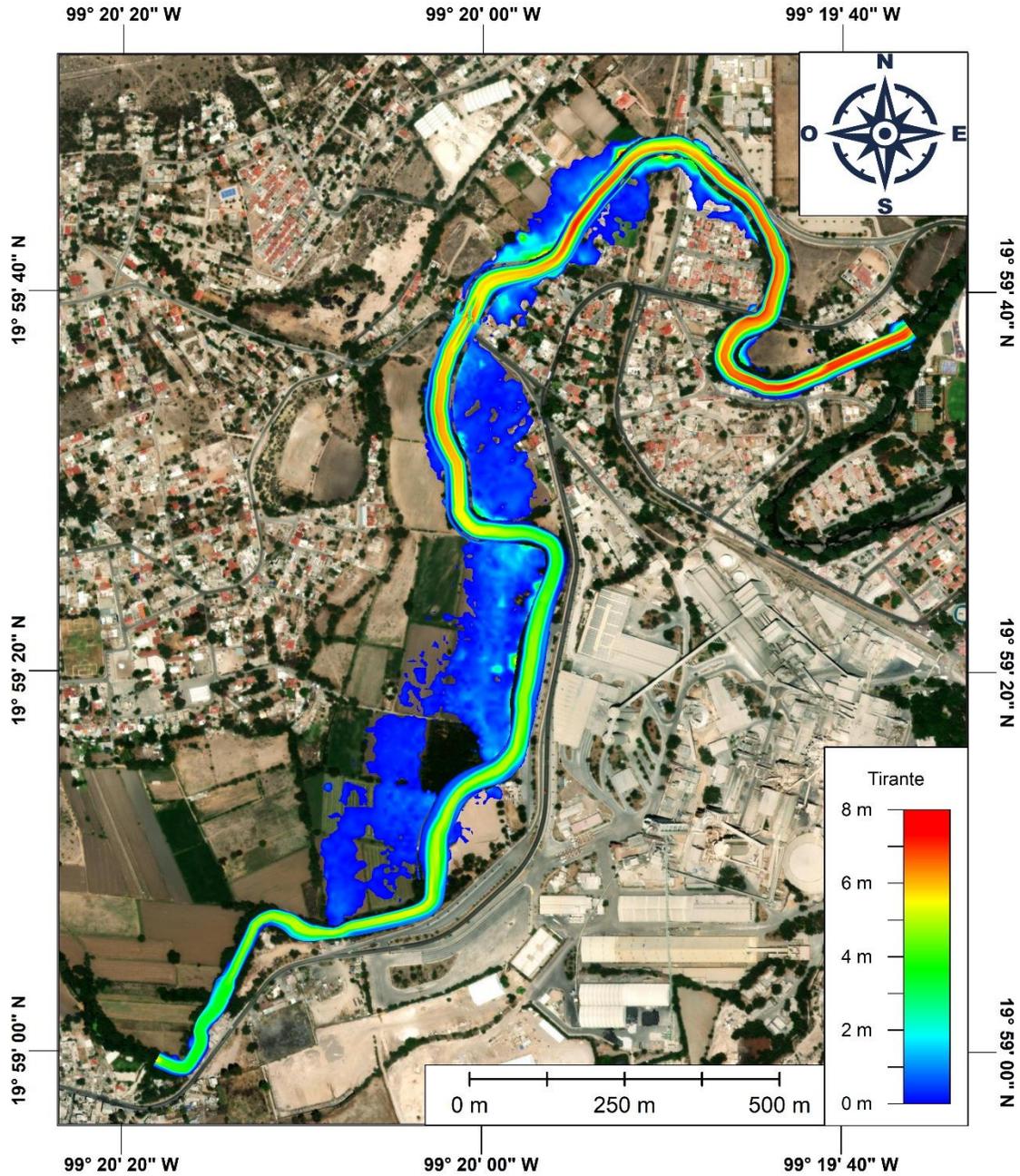
Mancha de inundación por el desborde del río Tlaxiaco	
Periodo de retorno de 200 años Calculado bajo el criterio de volumen máximo	
Elaborado por: Héctor Iván Vilchis Gómez	

Figura 0-1. Mapa de inundación obtenido para $T = 200$ años con el criterio de volumen máximo



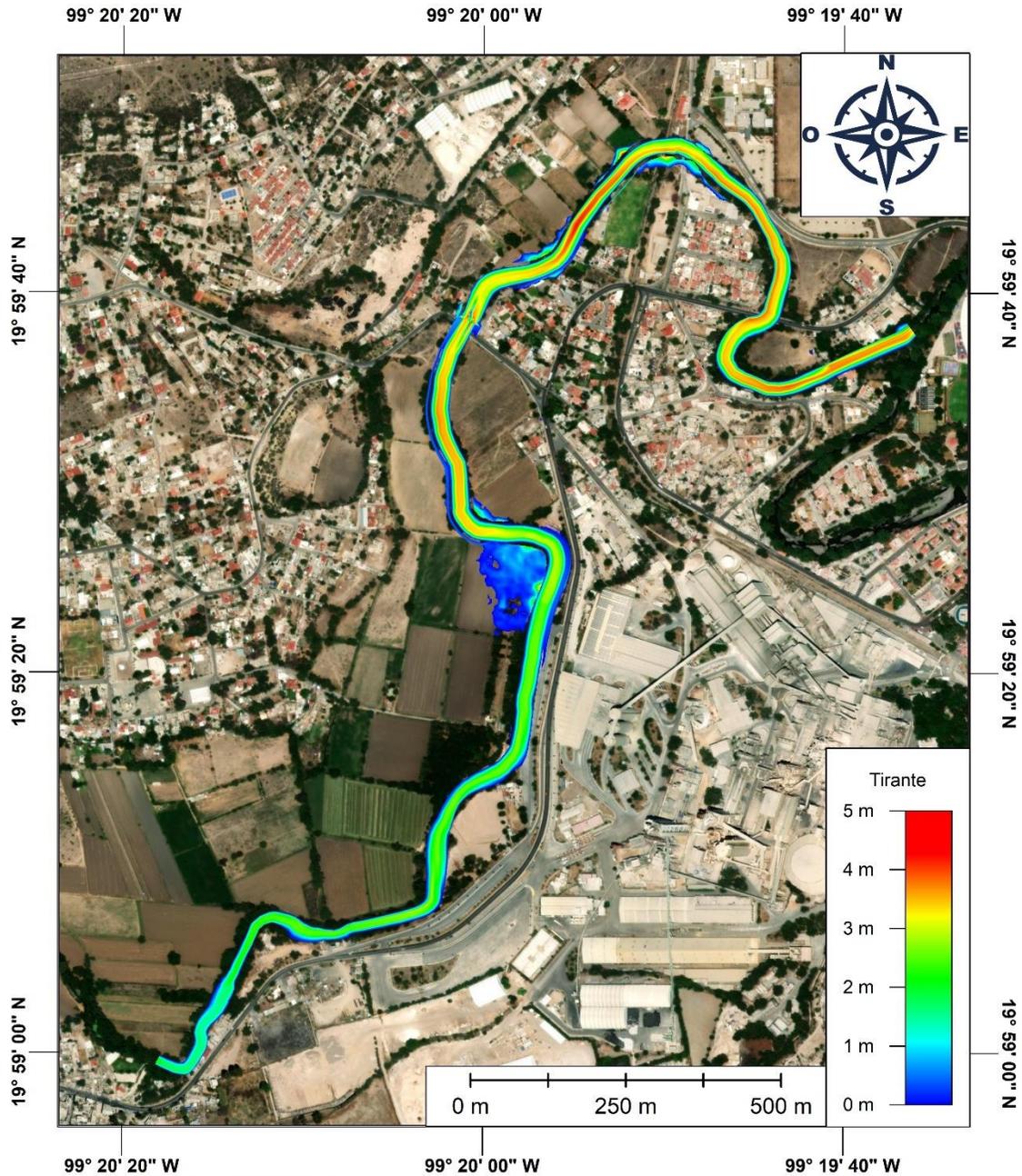
Mancha de inundación por el desborde del río Tlaxiaco	
Periodo de retorno de 100 años Calculado bajo el criterio de volumen máximo	
Elaborado por: Héctor Iván Vilchis Gómez	

Figura 0-2. Mapa de inundación obtenido para $T = 100$ años con el criterio de volumen máximo



Mancha de inundación por el desborde del río Tlautla	
Periodo de retorno de 50 años Calculado bajo el criterio de volumen máximo	
Elaborado por: Héctor Iván Vilchis Gómez	

Figura 0-3. Mapa de inundación obtenido para $T = 50$ años con el criterio de volumen máximo



Mancha de inundación por el desborde del río Tlautla	
Periodo de retorno de 10 años Calculado bajo el criterio de volumen máximo	
Elaborado por: Héctor Iván Vilchis Gómez	

Figura 0-4. Mapa de inundación obtenido para $T = 10$ años con el criterio de volumen máximo