

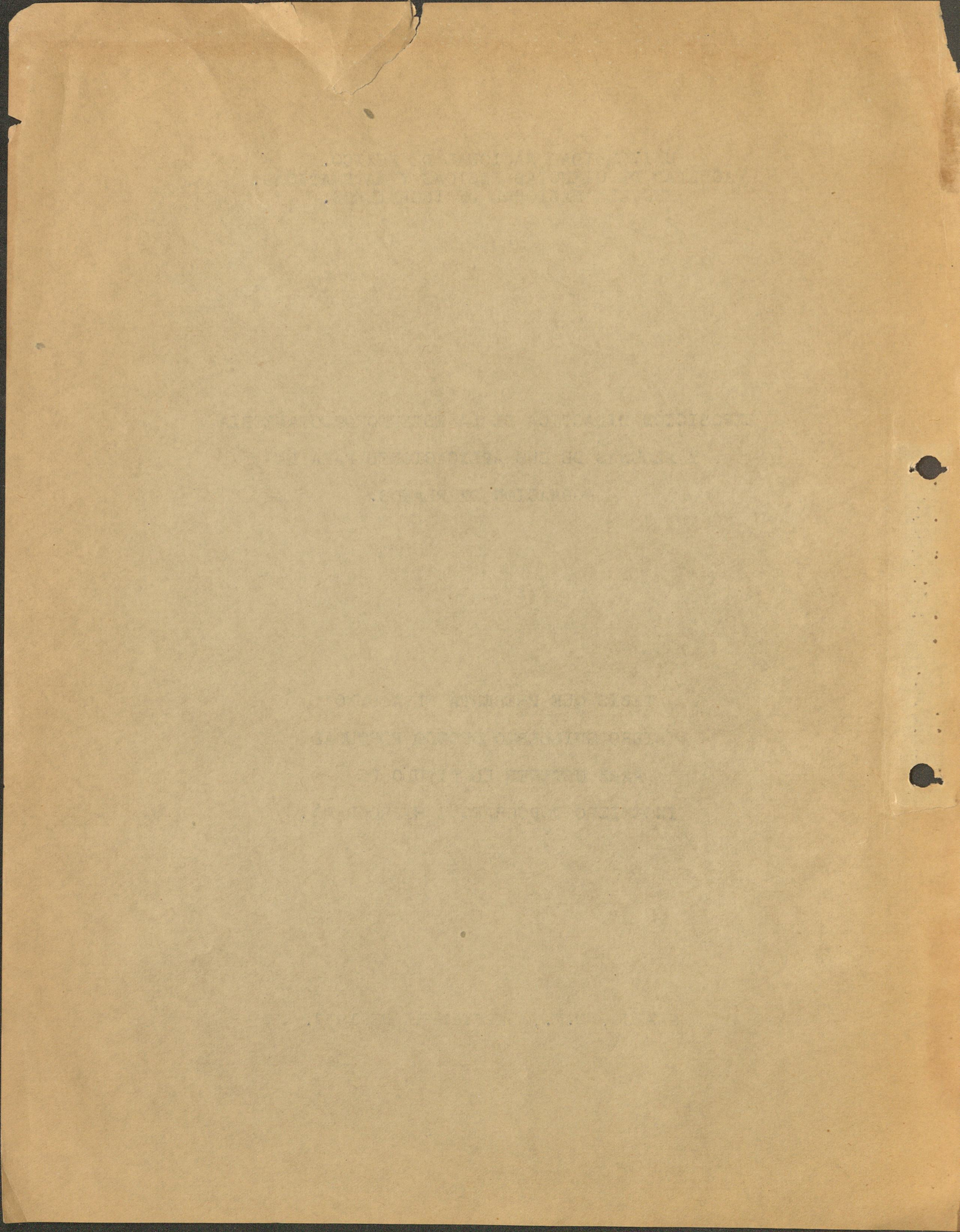
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO.  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS.  
ESCUELA NACIONAL DE INGENIEROS.



EXPOSICION DIDACTICA DE LA ESTEREOFOTOGRAMETRIA  
Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES PARA LA  
FORMACION DE PLANOS.

TESIS QUE PRESENTA EL ALUMNO  
ISIDRO GUILLERMO OROZCO PORTUGAL  
PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO TOPOGRAFO E HIDROGRAFO .

MEXICO, D.F., SEPTIEMBRE DE 1937.



## Breve exposición de la teoría fundamental de la estereofotogrametría y las diversas clases de errores que se presentan en la construcción de planos por estos procedimientos

Por I. G. OROZCO,  
Jefe de topógrafos del Depto. Fototopográfico  
de la Comisión Nacional de Irrigación

Teniendo en consideración los éxitos que día a día alcanzan los procedimientos fototopográficos, se ha creído oportuno exponer, aunque en forma elemental, la teoría de la aplicación de la fotografía estereoscópica en el campo de la Topografía.

No obstante que el principio estereoscópico es conocido desde hace siglos y de época mucho más remota data su aplicación de la que hizo uso la Naturaleza con la creación del primer animal dotado de aparato visual binocular, no fué sino hasta fines del siglo pasado cuando se meditó en la posibilidad de servirse de él para la medida indirecta de las distancias.

El primero que pensó aprovecharlo con el fin indicado, fué el Ing. H. Groussilliers en 1893, pero no fué él quien logró llevarlo a la práctica, únicamente expuso sus ideas a la casa Zeiss y el Dr. C. Pulfrich consiguió materializarlas. Construyó una pequeña escala en zig-zag que colocó en el dispositivo óptico de unos gemelos y su imagen virtual aparecía en el campo de la imagen de los oculares. Las operaciones que tenían que practicarse para conocer la distancia del operador a cualquier punto del terreno (visto en relieve a través del telémetro). (1) consistían en observar qué punto de la escala coincidía exactamente con el punto del terreno. Como la escala estaba graduada se tomaba la lectura que correspondía a dicho punto y ésta daba el valor de la distancia.

Como los telémetros no proporcionaban elementos para poder obtener las coordenadas de los puntos y además, su base estereoscópica era relativamente pequeña para apreciar el relieve a grandes distancias, el método no fué práctico para introducirlo en la Topografía, sino hasta que se aprovechó el mismo principio estereoscópico con la ayuda de la fotografía obteniéndose un positivo éxito.

Si se toman dos fotografías del mismo paisaje, pero de puntos de observación diferentes y se ven a través de un estereoscopio, las dos perspectivas se combinarán y una vista normal percibirá el paisaje en relieve.

(1) Nombre que tomaron los gemelos después que se les adaptaron las escalas para medir distancias.

La figura 1 es el esquema de un par de fotografías estereoscópicas de eje óptico normal a la base. A y B son los extremos de la base  $b$  de donde se tomaron las dos fotografías del mismo terreno;  $P_i$  y  $P_d$  son las placas izquierda y derecha respectivamente; O y O' representan los ejes ópticos, paralelos entre sí y normales a la base  $b$ . Las relaciones geométricas que exis-

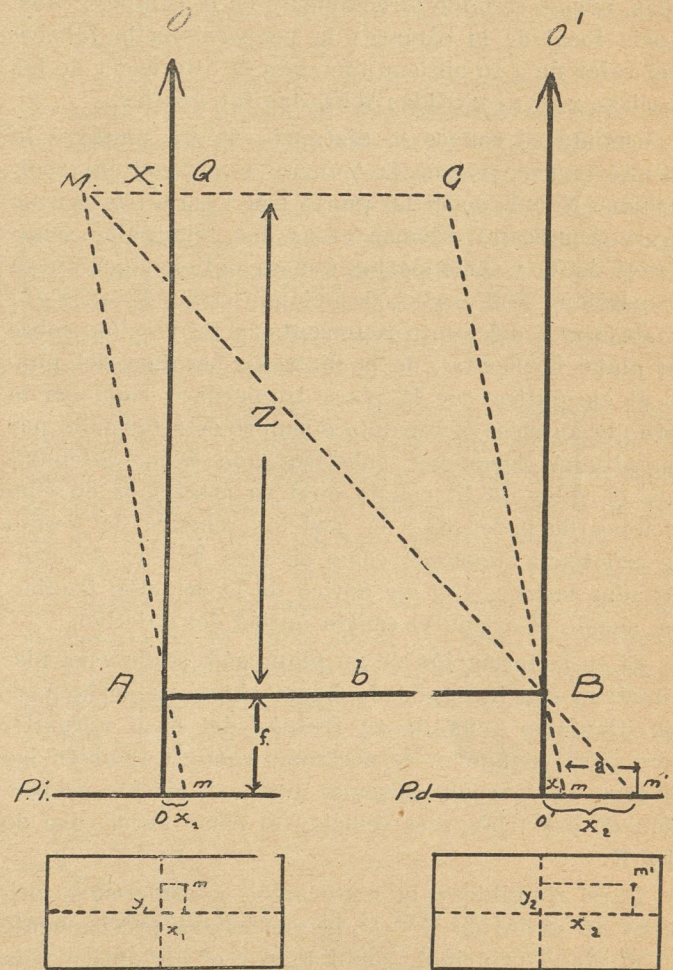


Fig. 1

ten entre la distancia focal de la cámara, la base estereoscópica, las coordenadas de las perspectivas de los puntos (medidas sobre las fotografías) y la mínima distancia de los puntos del terreno a la base, permiten calcular esta última en función de las anterior-

res cuyos valores se conocen, y ésta a su vez nos proporcionará la manera de obtener el resto de los elementos para fijar, sobre un plano, la posición relativa de todos los puntos que aparecen en cada dos perspectivas que formen par estereoscópico.

Consideremos un punto M del terreno (fig. 1): los rayos luminosos que parten de él y pasan a través de los objetivos colocados en A y B, impresionarán la imagen sobre las placas en m y m'; las magnitudes om y o'm' son las abscisas de las perspectivas y en lo sucesivo las llamaremos  $x_1$  y  $x_2$ . Si llevamos  $x_1$  a la placa  $P_d$  en posición simétrica a la que tiene en  $P_i$  y del punto m trazamos una recta que pase por B, ésta será paralela a mAM; si por M se traza una paralela a la base, se obtendrán dos triángulos semejantes, BCM y Bmm' de los que se deduce la siguiente proporción:  $Z:b = f:(x_2 - x_1)$ ; a la diferencia de abscisas  $x_2 - x_1$  se le da el nombre de paralaje y se representa generalmente por  $a$ ; despejemos a Z que representa la altura del triángulo mayor pero que en realidad es la mínima distancia del punto a la base,  $Z = bf/a$ ; de esta fórmula fácilmente se podrá obtener el valor de la distancia con sólo substituir valores en el segundo miembro por ser todas magnitudes conocidas, pues b se mide directamente en el campo, f (distancia focal de la cámara) la proporciona la fábrica y el valor de a se obtiene tomando la diferencia de las abscisas  $x_2$  y  $x_1$  medidas sobre las fotografías.

Cuando se conoce la distancia de un punto a la base, ésta proporciona la manera de obtener las coordenadas X e Y de dicho punto como sigue: la misma figura 1 muestra además otros dos triángulos semejantes AMQ y Amo de los que se obtiene una nueva proporción:  $X:Z = x_1:f$ , despejando a X;  $X = Z x_1/f$ ; la abscisa X del punto representa la proyección, sobre un plano horizontal, de la distancia mínima del punto al eje óptico (de la placa izquierda); como en la fórmula anterior el segundo miembro está formado por magnitudes conocidas, substituyendo éstas obtendremos el valor de X, con lo cual ya estaremos en condiciones de poder fijar la posición relativa del punto de referencia, tomando como sistema de ejes de coordenadas la base y el eje óptico de la estación izquierda, siendo el origen el centro óptico del objetivo.

Si en la formación de un plano sólo se deseara planimetría, con lo explicado hasta ahora ya sería posible dibujarlo (cuando se tratara del caso normal), pero para configurar es necesario conocer también las alturas, las que obtendremos por una simple proporción de dos triángulos semejantes como en el caso de Z y X.

Para simplificar la explicación consideremos primero un punto de  $X = 0$ , el que estará precisamente en el plano principal (definido por el eje óptico y la vertical de la estación); si abatimos este plano sobre el de horizonte, encontraremos los triángulos semejantes de la figura 2 y de ellos obtendremos la proporción  $Y:Z = y:f$ ;  $Y = Zy/f$ , expresión que nos da el

valor de Y. Ahora consideremos el caso general; supongamos que el punto no está en el plano principal, entonces hacemos el abatimiento, sobre el mismo plano de horizonte, del plano vertical que contiene el rayo luminoso y la vertical de la estación y nuevamente volveremos a encontrar dos triángulos semejantes de los que obtendremos una proporción poco diferente de la anterior. Si el punto considerado en este segundo caso está en el mismo plano de frente que el del primero, los últimos triángulos semejantes sólo diferirán de los primeros únicamente en f, pero no es precisamente que cambie la magnitud de ella (es constante para cada cámara) sino que la altura del triángulo menor que representaba f en el primer caso, correspondía al cateto mayor del triángulo rectángulo y en el segundo está representada dicha altura por la hipotenusa que tiene por valor  $\sqrt{f^2 + x^2}$  y la fórmula general será  $Y = Zy / \sqrt{f^2 + x^2}$ .

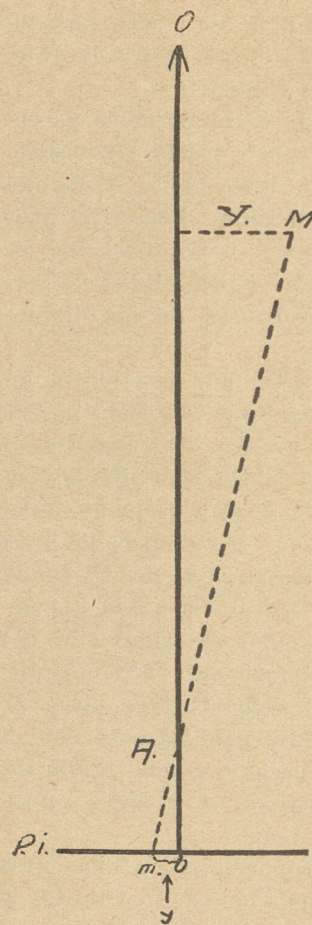


Fig. 2

En las tres simples proporciones anteriores para conocer los valores de X, Y y Z, está basada la teoría fundamental de la estereofotogrametría expuesta en forma elemental, pero no es tan fácil su aplicación por dos razones principalmente, una de origen económico y la otra técnico; la primera por lo costoso de los aparatos para medir pequeñas magnitudes con gran precisión. Estos aparatos están fundados en el mismo principio estereoscópico, como son el estereocomparador con el cual no tan sólo es posible medir las coordenadas de las perspectivas de los puntos y después obtener las diferencias de sus abscisas para conocer las paralajes, sino que estas últimas se obtienen directamente por medio de una simple lectura en el tambor de un tornillo micrométrico con la aproximación de 0.01 mm. y el estereoautógrafo,

aparato combinado del estereocomparador y un mecanismo para dibujar llamado autógrafo que en conjunto sirve para resolver de una manera gráfico-mecánica las ecuaciones de las coordenadas. No se hacen cálculos de ninguna naturaleza para fijar sobre un restridor la posición de todos los puntos que se deseen de un par de placas previamente ajustadas en él y colocada la base a la escala a la que se quiere dibujar el plano, todo es trabajo mecánico de operador que consiste en llevar un estilete que existe en el cam-

po de la imagen de los oculares del estereoscopio a coincidir con el punto del terreno, por medio de unas manivelas y discos (que se accionan con los pies), cuando se ha logrado la coincidencia, automáticamente un lápiz marca sobre un papel la posición de aquel punto.

Los aparatos citados son muy precisos y por medio de ellos la fototopografía ha alcanzado grandes éxitos, pero como se indicó, son demasiado caros y no están al alcance de todas las fortunas. Por lo que respecta a la parte técnica, presenta algunas dificultades por la cantidad de errores que contribuyen en la formación de planos por estos procedimientos y estos errores deben estudiarse cuidadosamente para que se tenga plena confianza de que todos juntos no exceden de la tolerancia que se fije de acuerdo con la escala a que se dibuje y de los fines a que se destinará el plano.

El ejemplo de que nos servimos para explicar la teoría de la estereofotogrametría considerando los ejes ópticos paralelos, en un plano horizontal y normales a la base, es el más simple como lo pudimos comprobar por la sencillez de las fórmulas, pero además del caso citado existen otros un poco complicados cuando se desean calcular las coordenadas de los puntos por medio del estereocomparador únicamente; pero si se dispone del estereoautógrafo, no se complican las operaciones, pudiendo considerarse tan fácil la localización de puntos como en el ejemplo explicado.

Los otros casos de posición de los ejes ópticos son cuando éstos, siendo paralelos entre sí, forman cualquier ángulo con la base, o bien son convergentes o divergentes (pero siempre considerados en un plano horizontal). La manera más práctica para obtener las coordenadas de los puntos en los casos citados, consiste en hacer consideraciones que nos permitan transformar cualesquiera de los casos en el primero por ser el más fácil.

La fig. 3 representa un par de fotografías estereoscópicas de ejes paralelos pero formando el ángulo  $\varphi$  con la base.

Tracemos por A dos líneas una ( $Am'_1$ ) paralela al rayo luminoso  $Mm'$  y otra ( $An'$ ) normal a los ejes ópticos ( $OO'$ ) que será forzosamente paralela a las placas  $P_i, P_d$ ; la misma figura muestra dos triángulos semejantes  $MAN'$  y  $Amm'_1$  (de lados paralelos) de los cuales obtendremos la proporción:  $b':Z = mm'_1:f$ ; como  $mm'_1 = a$ ;  $b' = Za/f$ , con lo que se habrá reducido este caso al normal, con la diferencia de que ahora la base  $b'$  es variable para cada punto. No debe expresarse el valor de la base  $b'$  en función de la distancia, sino de elementos conocidos como son el ángulo  $\varphi$ , la verdadera base  $b$  medida en el terreno, las abscisas de las perspectivas y la distancia focal  $f$ , para lo cual consideramos  $b'$  compuesta de dos partes:  $b' = An + nn' = b \cos \varphi + nn' \dots \dots \dots (1)$

La magnitud  $nn'$  la conoceremos por los triángulos semejantes  $Bnn'$  y  $Bo'm'$ ;  $nn':x_2 = Bn:f$ ;

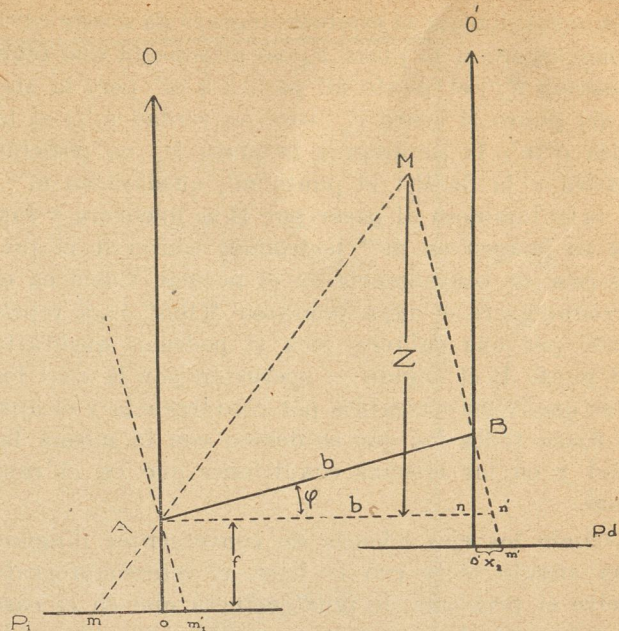


Fig. 3

$nn' = x_2 Bn/f$ ;  $Bn = b \sin \varphi$ ;  $nn' = b \sin \varphi x_2/f$ , valor que sustituimos en (1) para obtener finalmente el valor de la nueva base en función de las magnitudes deseadas:  $b' = b \cos \varphi + b \sin \varphi x_2/f = b (\cos \varphi + x_2/f \sin \varphi)$ . Esta base imaginaria y variable para cada punto, se obtiene automáticamente en el estereoautógrafo con solo calcular de antemano la posición del punto  $n$  en función de la base medida y el ángulo  $\varphi$ , por medio de las fórmulas  $b \cos \varphi$  y  $b \sin \varphi$ ; colocados estos valores en el dispositivo de bases, el aparato trabajará igual que en el caso normal. Lo que se hace prácticamente con todo lo explicado, es girar la base el ángulo  $\varphi$  para colocarla normal a la dirección de los ejes.

La fig. 4 representa el caso en que los ejes ópticos son convergentes entre sí, pero uno de ellos es normal a la base (el significado de las letras es el mismo de los anteriores). Consideremos una placa imaginaria  $P_d'$  en una posición tal, que con la placa  $P_i$  nos representa el primer caso explicado; el rayo luminoso que parte de  $M$  y pasa por el objetivo  $B$  impresiona su imagen en  $m'$  en la placa  $P_d$  y en  $m'_1$  de la placa  $P_d'$ , por consiguiente la abscisa de la perspectiva medida sobre esta última será:  $x'_2 = o''m'_1 = f \operatorname{tg} o''Bm'_1$ ; áng.  $o''Bm'_1 = \gamma + o'Bm'$ ;  $\operatorname{tg} o'Bm' = x_2/f$ .

$$\therefore x'_2 = f \operatorname{tg} (\gamma + \operatorname{áng.} \operatorname{tg} x_2/f) = f \frac{\operatorname{tg} \gamma + x_2/f}{1 - x_2/f \operatorname{tg} \gamma}$$

la expresión de la paralaje en este caso es  $a = x'_2 - x_1$ , en que el valor de la abscisa  $x'_2$  es función de la abscisa  $x_2$ ; por la fórmula obtenida se hace la transformación de las paralajes. Mediante la consideración de la placa ficticia también puede reducirse al caso normal como se ha visto. Cuando los ejes son divergentes

tes únicamente cambia el signo del ángulo  $\gamma$ . La resolución mecánica que el estereofotógrafo da a este caso, es como sigue: si la placa  $P_d$  se gira hasta que tome la posición  $P'_d$ , el punto  $m'$  pasará a  $m''$  pero la abscisa del punto  $M$  sobre  $P'_d$  será en verdad  $m'_1$ ; si la abscisa  $o''m'_1$  la llevamos a la placa  $P_d$  en posición simétrica a la de  $P'_d$  el punto  $m'_1$  quedará en  $m'''$ ; si el rayo luminoso al pasar por  $B$  se quebrara y formara su imagen en  $m'''$  podríamos convertir el presente caso de convergencia en el normal. Como en el estereofotógrafo el rayo luminoso  $MBm''$  está representado por una palanca, ésta sí podemos quebrarla en el punto  $B$  el ángulo  $\gamma$ ; operación por la cual los puntos quedarán corregidos por convergencia y el aparato fijará todos los que se deseen con la misma facilidad y en las mismas condiciones que en el caso normal.

Cuando los ejes además de convergentes ninguno forma ángulo recto con la base, el estereofotógrafo resuelve el problema de igual manera que en el caso explicado, pero la expresión analítica de la distancia se obtiene como sigue:

la fig. 5 representa un esquema de este caso; del triángulo  $ABM$  deducimos las proporciones:

$$E: \text{sen } \eta = \delta: \text{sen } \zeta; \eta = \tau + \alpha_2$$

$$\tau = 180^\circ - (\varphi + 90^\circ - \gamma) = 90^\circ - \varphi - \gamma$$

$$\eta = 90^\circ - \varphi - \gamma + \alpha_2$$

$$\zeta = 180^\circ - \omega - \eta; \omega = 90^\circ + \varphi - \alpha_1$$

$$\zeta = 180^\circ - (90^\circ + \varphi - \alpha_1) - \eta = 90^\circ - \varphi + \alpha_1 - (90^\circ - \varphi - \gamma + \alpha_2)$$

$$\zeta = \alpha_1 + \gamma - \alpha_2; \text{ substituyendo valores:}$$

$$E: \text{sen } [90^\circ - (\varphi + \gamma - \alpha_2)] = \delta: \text{sen } (\alpha_1 + \gamma - \alpha_2);$$

$$E = \frac{\delta \cos (\varphi + \gamma - \alpha_2)}{\text{sen } (\alpha_1 + \gamma - \alpha_2)}$$

$$Z = E \cos \alpha_1 = \delta \frac{\cos (\varphi + \gamma - \alpha_2)}{\text{sen } (\gamma + \alpha_1 - \alpha_2)} \cos \alpha_1$$

Caso de inclinación longitudinal.

Se dice que la inclinación es longitudinal cuando los ejes ópticos no están en posición horizontal, sino que forman cierto ángulo con el plano de horizonte. En este caso las fórmulas de las coordenadas también se obtienen mediante otra consideración como en los casos anteriores. La figura 6 nos lo representa en planta y elevación.

Llamaremos a los ángulos de inclinación de los ejes de las placas,  $\eta_1$  y  $\eta_2$ ; también en este caso conviene hacer una transformación de las abscisas de las placas inclinadas a placas verticales imaginarias y buscaremos una fórmula que nos exprese el valor de las abscisas en estas últimas pero en función de las medidas en las inclinadas. De la fig. 6 se obtiene:

$$\text{tg } \alpha = x'/f = \frac{x}{f \cdot \cos \beta / \cos \rho} = x \cdot \cos \rho / f \cdot \cos \beta$$

$$= x \cdot \cos \rho / f \cdot \cos (\rho - \eta);$$

$\beta = \rho - \eta$ ; el ángulo  $\rho$  es desconocido pero fácil de calcularse por su tangente:  $\text{tg } \rho = y/f$ ; de las expresiones anteriores despejamos el valor de  $x'$  que repre-



senta la abscisa de un punto sobre la placa virtual obteniéndose:  $x' = x \cos \rho / \cos (\rho - \eta)$  que es la fórmula de transformación para las abscisas de las perspec-

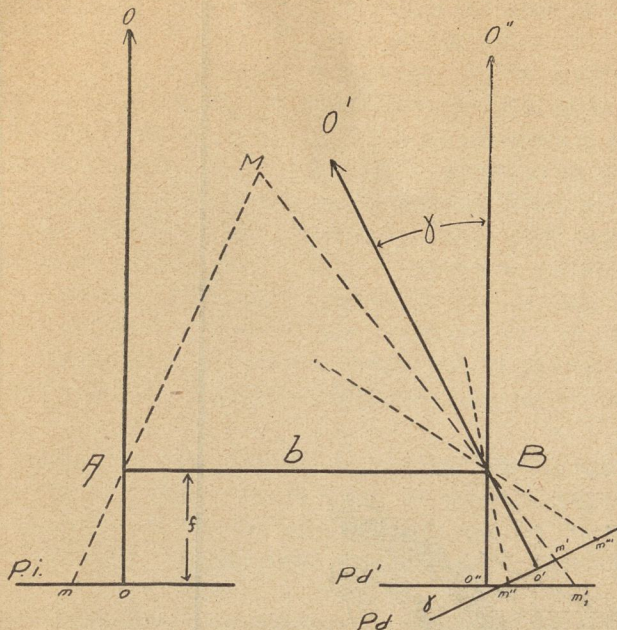


Fig. 4

tivas de las placas inclinadas en función de los ángulos de altura y el de inclinación. Supongamos que los ejes tienen el mismo ángulo de inclinación ( $\eta_1 = \eta_2$ ) y es conocido el ángulo que la base forma con la horizontal, en este caso las coordenadas de los puntos tienen por valor:  $Z = \lambda x_1 \cot \alpha_1$ ;  $X = \lambda x_1$ ;

$$Y = \lambda \cos \eta (y_1 - f \cdot \operatorname{tg} \eta);$$

en donde  $\lambda = \frac{b}{a} (\cos \varphi + x_2 \cdot k)$ ;

$$k = \frac{\operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \eta + \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} \eta}{f}$$

$$\cot \alpha_1 = \frac{\operatorname{sen} \eta}{x_1} (y_1 + f \cdot \cot \eta).$$

Cálculo de los errores.

Son muchas las causas de errores que influyen en la formación de planos por los procedimientos fototopográficos. Además de los errores propios de estos métodos entran también los de las operaciones topográficas o geodésicas que sirven para fijar la posición de cada una de las estaciones estereofotogramétricas; de estos últimos no nos ocuparemos sino únicamente de los primeros que dividiremos en dos grupos, variables para cada punto y constantes para cada par de placas. Respecto a los variables no es posible evitarlos ni corregirlos, sólo se calculará su magnitud para saber si quedan dentro de la tolerancia fijada. Los segundos se presentan en la medición de los elementos en función de los cuales se calculan las coordenadas, pero puede conocerse su magnitud y corregir las posiciones de los puntos que resulten influenciados por ellos.

*Error en la Distancia.*—El error con que se determina la distancia depende de los errores que se co-

meten al medir a, b y f por estar expresada la fórmula general de la distancia en función de esas magnitudes; la influencia del error de cada uno de ellos la estudiaremos independientemente.

Supongamos que al medir la paralaje se cometió el error  $\Delta a$ , el error  $\Delta'Z$  que se comete en la distancia por esta causa, será:  $\Delta'Z = (Z + \Delta'Z) - Z =$

$$= b f \left( \frac{1}{a + \Delta a} - 1/a \right); \text{ haciendo las operaciones y despreciando el término pequeño } a \Delta a, \text{ obtendremos:}$$

$$\Delta'Z = b \cdot f \cdot \frac{\Delta a}{a^2}; \text{ substituyendo el valor de la paralaje}$$

despejado de la misma fórmula de la distancia:

$$a = b \cdot f / Z; \Delta'Z = b \cdot f \cdot \frac{\Delta a}{a^2} = Z^2 \frac{\Delta a}{b \cdot f}$$

lo que en lenguaje llano diremos que el error absoluto que se comete en la determinación de las distancias influenciado por el error que se tiene en la medida de las paralajes, aumenta proporcionalmente con el cuadrado de la propia distancia y disminuye cuando crece la base o la distancia focal. El valor máximo que puede alcanzar  $\Delta a$  es de 0.01 mm. que corresponde a la aproximación con que se miden las paralajes en el estereocomparador.

El error  $\Delta b$  que se comete en la medida de la base, produce el error  $\Delta''Z$  y sería de la forma:  $\Delta''Z =$

$$\Delta b \cdot f / a; \text{ substituyendo el valor de } a; \Delta''Z = \frac{\Delta b \cdot f}{b \cdot f / Z}$$

$$= \frac{Z}{b} \Delta b; \text{ expresión que nos dice que el error con que}$$

se obtengan las distancias será  $Z/b$  veces más grande que el que se cometa en la medida de las bases.

El error que produzca en las distancias el  $\Delta f$  que se cometa en la medida de la distancia focal es tan pequeño que su influencia no se toma en consideración.

Error lateral o en las abscisas. La precisión con que se obtengan las abscisas depende de los errores que se cometan en la determinación de  $Z$  y en la medida de  $x$  y  $f$ . Para encontrar el error  $\Delta X$  diferenciemos la fórmula general, con respecto a cada una de las va-

$$\text{riables: } dX = \frac{x_1}{f} dZ + \frac{Z}{f} dx_1 - \frac{X}{f} df; dZ, dx_1 \text{ y } df \text{ re-}$$

presentan los errores medios afectados del signo  $\pm$ ; como el primer término del segundo miembro es el único de consideración será el que conservemos, los dos restantes son tan pequeños que podemos despreciarlos para simplificar la fórmula, la que obtendremos finalmente:

$$dX = \pm \frac{x_1 \cdot dZ}{f} = \pm \frac{X \cdot dZ}{Z}$$

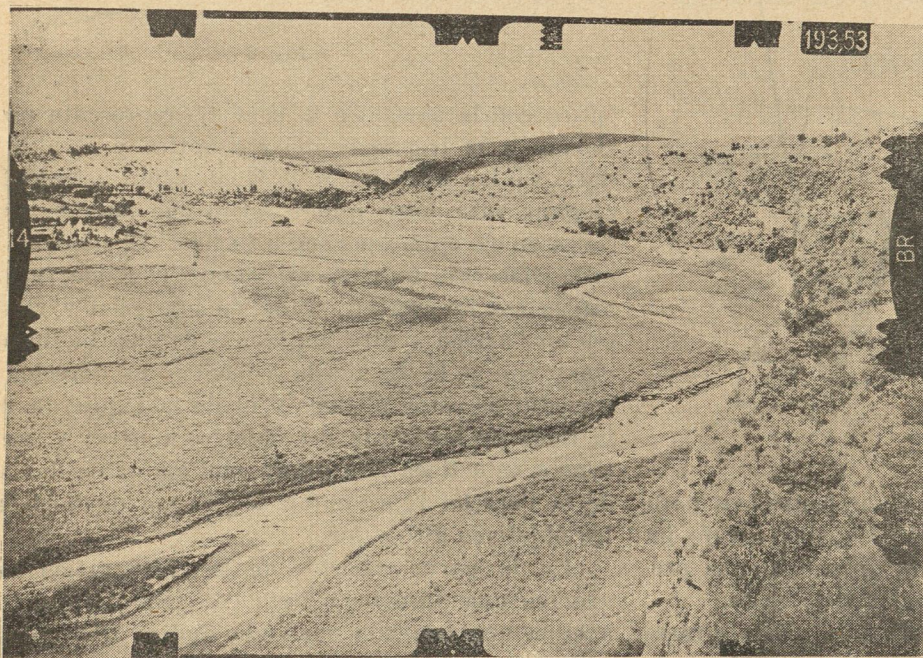
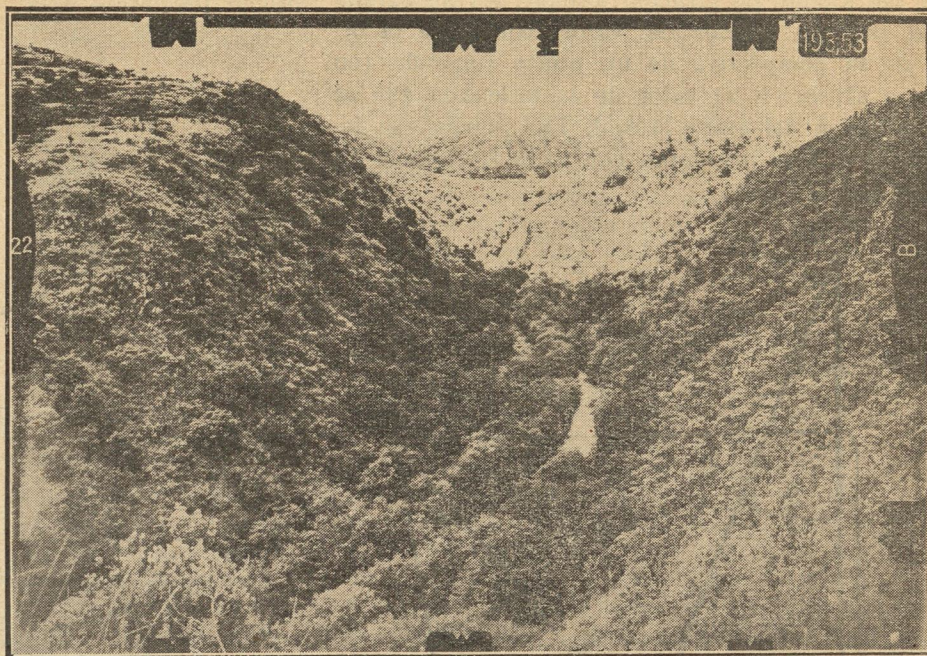
Error en la altura o en las ordenadas. Como la fórmula que expresa el valor de las ordenadas es muy semejante a la de las abscisas, el procedimiento para encontrar el error que se comete en las alturas es idéntico al del caso anterior, por consiguiente obtendremos una fórmula de la misma especie:  $dY = \pm \frac{y}{f} dZ.$

Hasta ahora se ha explicado la influencia de los errores en el cálculo de las coordenadas de los puntos en función de los errores que se cometen al medir los elementos que entran en las fórmulas y todas las deducciones anteriores son buenas únicamente si las placas tienen en verdad las posiciones teóricas consideradas, de lo contrario se presentan nuevos errores llamados de posición teórica de las placas que ameri-

base pero no a la placa.

Error de oblicuidad; cuando los ejes ópticos forman un cierto ángulo  $d\phi$  con su posición teórica, las perspectivas de los puntos se habrán desalojado la magnitud  $\Delta_1 = f \cdot d\phi$ ; cuando la desviación es igual en las dos placas no influye en la medida de las paralajes; pero si es desigual sí las afecta principalmente si se trata de puntos lejanos.

Cañada de Taxhimay,  
Distrito de Jilotepec,  
Estado de México.



Vaso de Taxhimay,  
cuya capacidad está  
calculada en 10 000,000  
de metros cúbicos.

tan ser estudiados en detalle y los que por ahora sólo se indicarán.

Error de convergencia; por considerar los ejes paralelos en cada dos posiciones. Este error se compone de dos parciales, uno por convergencia propiamente dicha y el otro cuando el eje óptico es normal a la

*Error por inclinación longitudinal o cabeceo.*—Este se produce cuando las placas no son verticales, o mejor dicho, cuando los ejes ópticos forman cierto ángulo con el plano de horizonte, lo que trae como consecuencia inmediata un error en las ordenadas de las perspectivas de los puntos.



*Error por inclinación lateral.*—Este consiste en que el horizonte marcado por las placas no coincide con el verdadero; esta posición incorrecta de la placa hace incurrir en un error en las distancias, el que se corrige por una giración imaginaria de la placa hasta que tome su verdadera posición, lo que se consigue mediante la deducción de una fórmula que dé a conocer el valor del ángulo de giración aunque sea aproximadamente, pero en función del valor teórico de la ordenada de la perspectiva de un punto conocido (en posición y altura) y el valor de la ordenada que se obtiene a causa del error lateral. Las placas con inclinación lateral se presentan con gran frecuencia en la fotogrametría aérea.

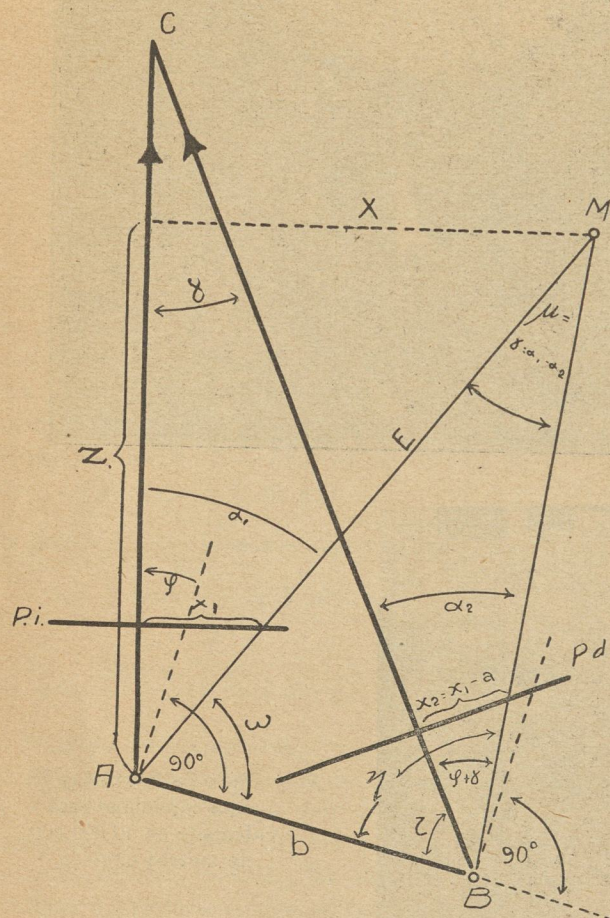


Fig. 5

La aplicación de los métodos fototopográficos para la construcción de planos con el estereofotógrafo ha dado resultados satisfactorios, no tan solo por la precisión obtenida, sino por la rapidez y bajo costo.

Como ejemplo de trabajos prácticos puede citarse el levantamiento estereofotogramétrico del Vaso de Taxhimay, Distrito de Jilotepec, Estado de México, ejecutados por el Departamento Fototopográfico de la Comisión Nacional de Irrigación para el Sistema de Riego del Valle del Mezquital, Hidalgo.

Las dos fotografías que se publican muestran las estaciones 14 y 22 del levantamiento citado. Nótese

que las mismas vistas proporcionan todos los datos para identificarlas independientemente del registro de campo, como son: al lado izquierdo el número de la estación (en este caso 14 y 22); posición del eje óptico con respecto a la base (BR y B). Las iniciales A y B indican en qué extremo de la base fué tomada la fotografía (A extremo izquierdo y B derecho). La inicial pospuesta a A y B indica la posición del eje

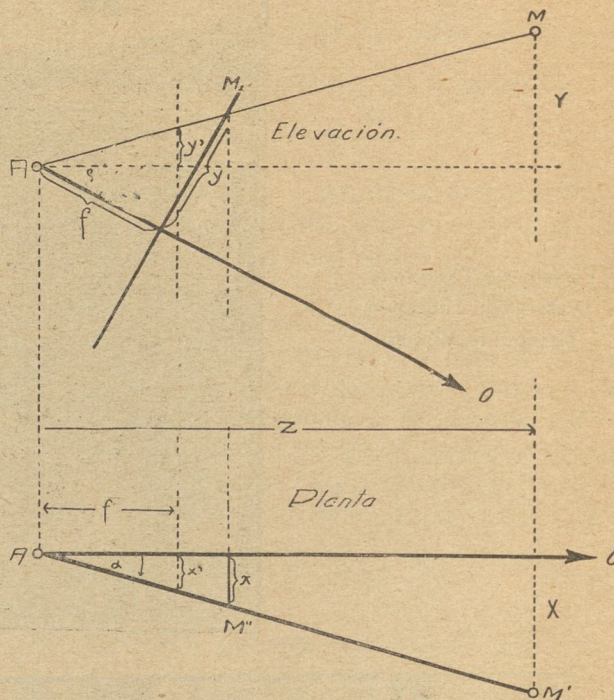


Fig. 6

óptico con la normal a la base (L representa una desviación a la izquierda del eje óptico y R a la derecha). Si las iniciales A y B no están precedidas de ninguna otra letra quiere decir que aquella fotografía es de eje óptico normal a la base. El número 193.53 es la distancia focal de la cámara con que fueron tomadas las fotografías. También aparecen varios índices uno arriba y otro abajo que definen la línea principal uno a la izquierda y tres a la derecha el de enmedio de estos últimos y el de la izquierda definen la línea de horizonte del objetivo central y las paralelas a esta línea que pasan por los otros dos índices de la derecha representan las líneas de horizonte de los objetivos alto y bajo.

En la parte superior de las fotografías también aparece una pequeña silueta con tres índices y frente a ellos una pequeña raya que indica qué objetivo se utilizó para tomarlas.

Las cuatro marcas colocadas, dos arriba y dos abajo, a uno y otro lado de los índices que definen la línea principal, sirven para comprobar en el estereofotógrafo que las placas no tienen error de convergencia y además en ellas se fija el dispositivo de ajuste de colimación de la cámara.

# FOTOTOPOGRAFIA

## Errores por la Posición Teórica de las Placas.-Corrección por Curvatura y Refracción.-Paralajes de Altura.-Trabajos Prácticos.

Por. I. G. OROZCO,

Ing. Auxiliar del Depto. Fototopográfico de la Comisión Nacional de Irrigación.

EN el artículo titulado "Breve exposición de la teoría fundamental de la estereofotogrametría y las diversas clases de errores que se presentan en la construcción de planos por estos procedimientos" publicado en el Vol. III, N° 1. página 20, enero 1929, de esta misma revista, se hizo un estudio de los errores con que resultan afectadas las coordenadas de los puntos y se determinó su magnitud para saber si deben corregirse o despreciarse si son tan pequeños que se conservan dentro de la tolerancia permitida en estos procedimientos. También se habló de otra clase de errores llamados de posición teórica de las placas, pero éstos únicamente se mencionaron sin estudiarlos para conocer su magnitud.

Como se vió en el artículo citado, los errores de distancia, lateral o de abscisas y de alturas o de ordenadas, se obtuvieron en función de los errores que se cometen en las medidas de la base, de la distancia focal de la cámara y de la diferencia de abscisas o paralajes, y éstos podrían considerarse exactos y las fórmulas precisas, si las consideraciones sobre las cuales nos hemos basado no estuvieran influenciadas por otra nueva fuente de errores.

Las coordenadas de los puntos y los errores con que estas se obtienen, se encontraron tomando en consideración un par estereoscópico de ejes paralelos, formando cierto ángulo con la base, de magnitud conocida, en un plano horizontal y que el horizonte de la placa coincidiera con el verdadero. Cualquier detalle que se aparte de las consideraciones anteriores nos provocará un nuevo error, que no afecta a la base, ni a la distancia focal cuyas magnitudes son absolutas e independientes, pero sí al tercer elemento que se toma como conocido para el cálculo de las distancias, que es la paralaje; como a su vez la distancia así encontrada sirve como dato para obtener las abscisas y ordenadas, resulta que un error que se cometa en la medida de las paralajes afecta a todos los resultados a que se lleguen con las fórmulas que nos dan los valores de las coordenadas, y no es precisamente que se cometa el error por una falsa medida de las abscisas o por hacer mal la diferencia entre ellas para conocer las paralajes, sino porque las placas entre sí no tienen la posición teórica considerada y las paralajes, aunque medidas con gran precisión, no son las verdaderas.

Supongamos que en el campo se han practicado muy cuidadosamente todas las operaciones necesarias para obtener pares estereoscópicos en las condiciones más favorables, o sean aquellas en que la posición que se atribuye a las placas es la verdadera. Pues no obstante los buenos propósitos y grandes precauciones, es imposible evitar que se cometan errores por diferentes causas, como son: los personales, por de-

fectos de construcción de los aparatos (por bien fabricados que estén), por desajustes, de los cuales muchos de ellos son producto de los cambios de temperatura en el preciso momento de operar (esto se ha comprobado en la práctica), imprecisión en las coincidencias, etc., etc. Este gran número de causas que producen errores hacen que los pares no se obtengan en las condiciones más favorablemente deseadas.

Como los errores citados ocasionan falsas posiciones en las placas las que a su vez provocan otros en el cálculo de las coordenadas, a estos últimos son a los que se les llama de posición teórica de las placas.

Ejecutando las operaciones de campo con gran cuidado, teniendo especial atención en los niveles (que estén correctos y nivelados) y en las coincidencias que indican la dirección del eje óptico comprobando que estén en su posición correcta, antes y después de cada exposición y siempre que los aparatos se tengan previamente ajustados lo mejor posible, es casi seguro que estos errores se conservan dentro de la tolerancia, pero conviene estudiarlos y determinar su magnitud por si fuera preciso corregirlos.

### ERROR POR CONVERGENCIA.

ESTE error se comete por considerar los ejes paralelos. El error total  $\Delta$  se compone de dos parciales,  $\Delta'$  y  $\Delta''$ . El primero,  $\Delta'$  lo provoca la pro-

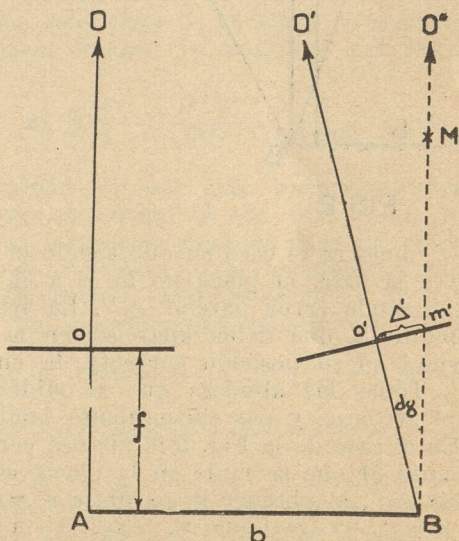


FIG. 1

pia convergencia de los ejes y el segundo  $\Delta''$  la inclinación de la placa con respecto al eje.

La Fig. 1, muestra el primer error. El eje del ex-

tremo B no es normal a la base, forma un pequeño ángulo  $d\gamma$  con respecto a la posición normal que debía tener.

El punto M que está en el plano principal tendría su perspectiva en la línea principal si el eje fuera normal a la base, pero en virtud de la desviación tiene su perspectiva en  $m'$ , lo que produce el error  $\Delta'$  que afecta todas las abscisas de la perspectiva y tiene por valor  $\Delta' = f \cdot d\gamma$  (por ser el ángulo  $d\gamma$  tan pequeño hemos tomado la cuerda por la tg); como el error influye también en las paralajes, éstas exigen una corrección constante de igual magnitud.

Un ejemplo numérico nos dará a conocer con facilidad el valor aproximado que puede tener el ángulo  $d\gamma$ . El error máximo permitido en la medida de las paralajes, es de 0.01 mm., por ser la aproximación con que se obtienen estas medidas en el estereocomparador. En cuanto a la distancia focal tomaremos en números redondos  $f = 200$  mm., sustituyendo:

$$d\gamma \leq \frac{\Delta'}{f} \leq \frac{0.01}{200} \leq \frac{1}{20\,000} \approx 10''.$$

Como el valor 0.01 no cambia, únicamente habrá que sustituir en la fórmula el valor de la verdadera distancia focal de la cámara utilizada, para conocer la magnitud de la corrección constante que se aplica a las paralajes, en función del ángulo de desviación.

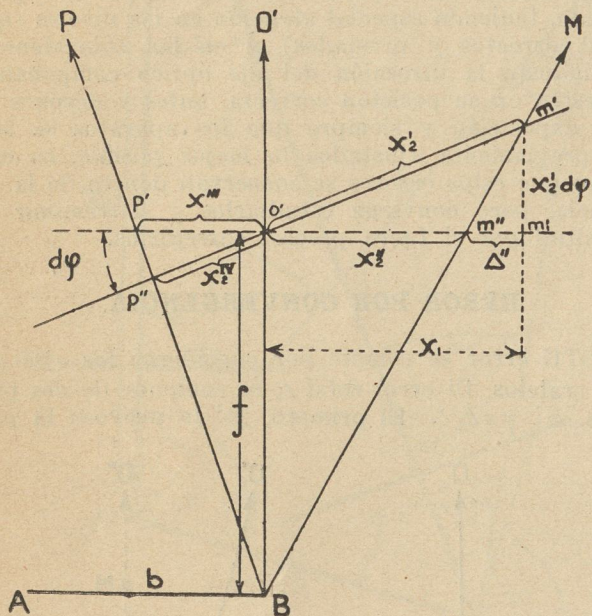


FIG. 2

La Fig. 2, muestra el caso en que siendo el eje óptico normal a la base, la placa no lo es a él, lo que produce el segundo error parcial  $\Delta''$ . La perspectiva de un punto M que debía aparecer en  $m''$  si la placa estuviera en su posición correcta, la encontramos en  $m'$ . Todas las abscisas que se miden sobre la placa, son erróneas y por consiguiente también las paralajes. En el caso de la Fig. 2 la abscisa correspondiente al punto M que se mide en la placa, es  $x_2'$  en vez de medir  $x_2''$ , al obtener la paralaje  $a = x_1 - x_2''$  se tendrá:  $a = x_1 - x_2'$ .—Como  $x_2' > x_2''$ , y en general todas las abscisas que se midan a la derecha del plano principal son mayores que las verdaderas, al tomar la diferencia como los sustraendos están incrementados positivamente, las restas o sean las paralajes, resultan menores que las reales. La misma Fig.

2 muestra otro punto P del lado izquierdo del plano principal, en donde pasa lo contrario que en el derecho; en este caso las abscisas medidas son menores y por consiguiente las paralajes serán mayores que las verdaderas.

Para conocer el error  $\Delta''$ , procederemos como en el caso anterior, obteniendo una fórmula para deducir su valor en función del ángulo de desviación  $d\varphi$  y con un ejemplo numérico calcular el valor aproximado que puede adquirir dicho ángulo.

De los triángulos semejantes B o  $m''$  y  $m''m'm_1'$  de la Fig. 2, deducimos la siguiente proporción:  $m''m_1' : x_2'' = m_1'm' : f$ ; sustituyendo  $m''m_1' = \Delta''$  y  $m_1'm' = x_2'd\varphi$ , tendremos:  $\Delta'' : x_2'' = x_2'd\varphi : f$ ; por lo pequeño del ángulo  $d\varphi$ , las magnitudes  $x_2''$  y  $x_2'$ , son muy poco diferentes entre sí, para simplificar la fórmula este producto lo tomaremos como el cuadrado de una de ellas, con lo cual haremos:

$$\Delta'' = \frac{x_2'^2 d\varphi}{f}$$

expresión que nos dice que el error  $\Delta''$  que se comete es proporcional al cuadrado de la abscisa, el que también debe conservarse igual o menor de la aproximación 0.01 mm.

Para la aplicación en el ejemplo numérico, tomemos también  $f = 200$  mm. y para  $x_2$  un valor de los más grandes que permiten las placas de dimensiones más frecuentemente usadas en esta clase de trabajos ( $13 \times 18$  cm.  $\approx 5'' \times 7''$ ), hagamos  $x_2 = 80$ , de la fórmula obtenida despejemos a  $d\varphi$  y sustituyamos valores:

$$d\varphi \leq \frac{\Delta'' f}{x_2'^2} \leq \frac{0.01 \times 200}{6400} \approx 1'.$$

Habiendo calculado los valores parciales de convergencia, estableceremos la fórmula general:

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' = f \cdot d\gamma + \frac{x_2'^2 d\varphi}{f}.$$

El error  $\Delta'$  es constante y fácil de calcular conociendo el ángulo de convergencia como se explicó, pero el  $\Delta''$  es difícil por ser variable, debiendo aplicarse diferente corrección para cada punto por ser función de las abscisas.

Con objeto de hacer más práctico el procedimiento para la corrección del primer error  $\Delta'$  (ya que el segundo  $\Delta''$  sólo se aplica en caso de placas oblicuas), se consideran tres grupos: pares estereocópicos cuyos ejes ópticos tengan un ángulo de convergencia de  $10''$ , los errores son tan pequeños que no se toman en consideración, se aplican únicamente las fórmulas generales de ejes paralelos. Los que tienen un ángulo de convergencia mayor de  $10''$ , pero sin exceder de  $1'$ , se aplican las mismas fórmulas anteriores, pero corrigiendo las paralajes la magnitud constante  $\Delta' = f \cdot d\gamma$ . Si es mayor la convergencia, ya no se consideran los pares de ejes paralelos, sino que se aplicarán las fórmulas correspondientes según la posición de los ejes.

#### ERROR DE OBLICUIDAD.

SE comete por considerar los ejes formando un ángulo con la base, cuya magnitud se cree conocer con precisión. También presenta dos casos: cuando los ejes ópticos están desalojados el mismo ángulo

lo de su posición teórica y por consiguiente son paralelos, y cuando estos ángulos de desviación son diferentes. Este segundo caso, aunque considerado como error de oblicuidad por tener los ejes ópticos desalojados con respecto a la base, no es más que el caso general de convergencia.

Cuando los ejes están desalojados el mismo ángulo, como el error afecta a las abscisas de los dos puntos en las dos placas, pero en igual magnitud, al tomar la diferencia para tener las paralajes éstas resultan sin error, por consiguiente el error sólo influye en las direcciones, pero no en las paralajes, al calcular las coordenadas de un punto se obtendrá correcta la distancia y la ordenada (si no hay error de cabeceo que se explicará después), pero la abscisa está afectada de error. Si no se hace la corrección correspondiente, se encontrará la posición de un punto en un plano de frente cuya distancia a la base es correcta, así como su cota, pero con una falsa abscisa. Si se continúa fijando la posición de varios puntos para configurar, se encontrará que las formas del terreno casi todas coinciden con la realidad, pero aquella zona quedará desalojada respecto al resto del terreno, pudiendo corregir su posición con la fórmula  $e' = f \cdot d\alpha$  que nos da el valor del error en función del ángulo de desviación.

En el caso que los ángulos de desviación sean diferentes en las dos placas, los ejes forzosamente serán convergentes y esta circunstancia sí afecta las paralajes. Para calcular este error nos podemos servir de las fórmulas encontradas para el caso de convergencia. El error que se comete al medir las abscisas de la placa izquierda, es:  $e_1'' = x_1^2 \cdot d\alpha / f$  y en la derecha:  $e_2'' = x_2^2 \cdot d\alpha / f$  para conocer el error en la paralaje tomaremos la diferencia entre las abscisas;

$$e_2'' - e_1'' = x_2^2 - x_1^2 = \frac{d\alpha}{f} (x_2^2 - x_1^2) \quad (1)$$

La fórmula general de las distancias en el caso normal, es:  $Z = \frac{b \cdot f}{a}$ , como  $b$  y  $f$ , son magnitudes constantes, la primera en cada par y la segunda en cada cámara, las distancias sólo son función de las paralajes, pero éstas no pueden adquirir cualquier valor arbitrariamente, sino dentro de ciertos límites fijados principalmente por la experiencia observando las coincidencias que puede hacer una vista normal de un índice en el relieve óptico, encontrando en una larga serie de pruebas que las coincidencias más precisas con los puntos más próximos a la base y más distantes de ella, correspondían a las paralajes de 30 mm. y 10 mm., respectivamente. El error de oblicuidad se acentúa en la medida de las paralajes de los puntos más lejanos. Tomando el valor mínimo de 10 mm., por ser el que corresponde a la mayor distancia y considerando una abscisa de  $x_2 = 80$  mm., se obliga a  $x_1$  a que tenga forzosamente el valor  $x_1 = 70$  mm., en virtud de la expresión de las paralajes:  $a = x_2 - x_1$ . Sustituimos los valores anteriores en la fórmula (1):

$$e''a = \frac{d\alpha}{f} (80^2 - 70^2) = \frac{d\alpha}{f} 1500; \text{ como ya hemos}$$

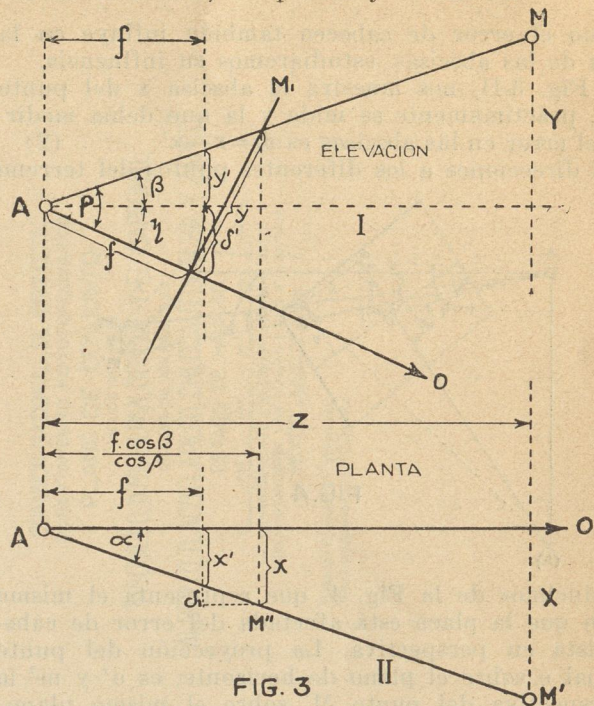
fijado un valor límite 0.01 mm. del cual no debe exceder el error en la medida, de las paralajes y si hacemos  $f = 200$ , como en los casos anteriores, podremos despejar a  $d\alpha$  en función de magnitudes conocidas y calcular su valor:

$$d\alpha \leq \frac{0.01 \times 200}{1500} \leq \frac{1}{750} \approx 5',$$

por consiguiente: un error de desviación hasta de  $5'$  no influye en la medida de las paralajes.

## ERROR POR INCLINACION LONGITUDINAL O CABEECO.

ESTE error se comete cuando las placas no son verticales y afecta principalmente las alturas de los puntos. La Fig. 3 (I y II), nos muestra un esquema de este caso, en planta y elevación.



En vez de medir la ordenada  $y'$  de la perspectiva de un punto  $M$  con respecto a un plano horizontal, se mide  $y$  con respecto a uno inclinado, definido por la línea de horizonte de la placa y el eje óptico; el que forma el ángulo de cabeceo  $\eta$  con el horizontal. La magnitud del error de separación del horizonte real con el teórico, lo tendremos por la expresión:

$$\delta' = f \cdot d\eta.$$

El error que se tolera en la medida de las abscisas no debe exceder de 0.02 mm. (aproximación con que se pueden medir en el estereocomparador). Sustituimos este valor y haciendo nuevamente  $f = 200$  mm., para conocer la magnitud del ángulo de cabeceo:

$$d\eta \leq \frac{\delta'}{f} \leq \frac{0.02}{200} \leq \frac{1}{10\,000} \approx 20''.$$

También en este caso puede encontrarse que la placa no es normal al eje, pero como es muy semejante al estudiado para el caso de convergencia, si abatimos el sistema para considerar el plano horizontal como vertical, podemos servirnos de las mismas fórmulas ya simplificadas tomando las abscisas como ordenadas, obteniendo:  $\delta'' = \frac{y_2^2 \cdot d\eta}{f}$ , por consiguiente,

el error total será  $\delta = \delta' + \delta'' = f \cdot d\eta + \frac{y_2^2 \cdot d\eta}{f}$ ; como el ángulo  $d\eta$  es tan pequeño el producto  $f \cdot d\eta$  es insignificante, si lo despreciamos para simplificar la fórmula no alteraremos casi nada la expresión, en cambio el error total nos quedará muy simplificado:

$$\delta = \frac{y_2^2 \cdot d\eta}{f}.$$

En nuestro ejemplo numérico para encontrar el límite del error por cabeceo, hagamos  $y = 30$  mm. (de acuerdo con las dimensiones citadas para las placas) y  $f = 200$ , sustituyendo estos valores:

$$d\eta \approx \frac{\delta f}{y^2} \leq \frac{0.02 \cdot 200}{900} \leq \frac{1}{225} \approx 15'$$

Como el error de cabeceo también influye en la medida de las abscisas, estudiaremos su influencia.

La Fig. 3-II, nos muestra la abscisa  $x$  del punto  $M$  que, prácticamente se mide y la que debía medirse  $x'$ ; el error en las abscisas es:  $\delta_1 = x - x'$  (2)

Las direcciones a los diferentes puntos del terreno

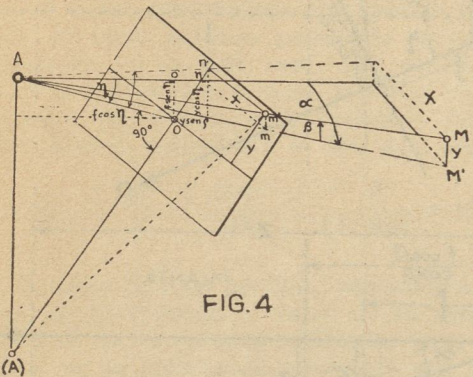


FIG. 4

las deducimos de la Fig. 4, que representa el mismo caso en que la placa está afectada del error de cabeceo, vista en perspectiva. La proyección del punto principal o sobre el plano de horizonte, es o' y m' la de perspectiva del punto M, sobre el mismo plano;  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos azimutal y de altura del mismo punto y estos tienen por valores:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m n}{A n} = \frac{x}{f \cos \eta + y \operatorname{sen} \eta} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m m'}{m A} = \frac{n n'}{m A} = \frac{y \cos \eta - f \operatorname{sen} \eta}{f \cos \eta + y \operatorname{sen} \eta} \cos \alpha \quad (4)$$

tomaremos el  $\operatorname{sen} \beta$  para eliminar  $\alpha$  que es desconocida:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{m m'}{m' A} = \frac{y \cos \eta - f \operatorname{sen} \eta}{1 - x^2 + y^2 + f^2} \quad (5)$$

con lo cual llegamos a las expresiones de los ángulos de dirección y alturas en función de elementos conocidos;  $\eta$  es el ángulo de cabeceo o inclinación del eje óptico con el plano horizontal y su valor lo hemos obtenido con anterioridad.

Aprovechando la fórmula (3), que nos da las direcciones de los puntos en placas que tienen error por cabeceo e introduciendo este valor en (2), tendremos:

$$\delta_1 = x - x'; \quad x = \operatorname{tg} \alpha (f \cos \eta + y \operatorname{sen} \eta)$$

$$\delta_1 = \operatorname{tg} \alpha (f \cos \eta + y \operatorname{sen} \eta - f);$$

desarrollando en serie esta expresión y sustituyendo los valores numéricos convenidos (error en paralaje  $< 0.01$  mm.,  $f = 200$  mm.,  $x = 80$  mm.,  $y = 60$  mm.), obtendremos el valor del cual no debe pasar el error por cabeceo para que no afecte las paralajes:

$$d\eta \leq \frac{f}{100 \cdot x \cdot y} = \frac{200}{100 \cdot 80 \cdot 60} \approx 1.5'$$



COMISION NACIONAL DE IRRIGACION  
 DEPARTAMENTO FOTOPOGRAFICO  
 PLANO DE CONJUNTO  
 DE LOS VALLES DE  
 TASQUILLO, XIMULPAN, DEBODE Y EL CARONAL  
 ASI COMO DE LOS VALLES DE  
 ALBERTO, TLACOTLAPILCO, CHILQUAUTLA, ELBA Y ZAPOTE.  
 ESTADO DE HIDALGO  
 LEVANTAMIENTO ESTEREOFOTOGRAFICO  
 EQUIDISTANCIA DE LAS CURVAS 2.50.5 Y 10 METROS  
 MEXICO, JULIO DE 1929.  
 TRABAJOS DE CAMPO: M. FERNANDEZ  
 TRABAJOS DE GABINETE: L. GONZALEZ

## ERROR LATERAL.

SE comete este error cuando las placas están desalojadas por una giración al rededor del eje óptico, como lo muestra la Fig. 5. El pequeño ángulo de giro lo representamos por  $d\omega$ . La ordenada de la perspectiva  $m$  de un punto  $M$ , que se mide so-

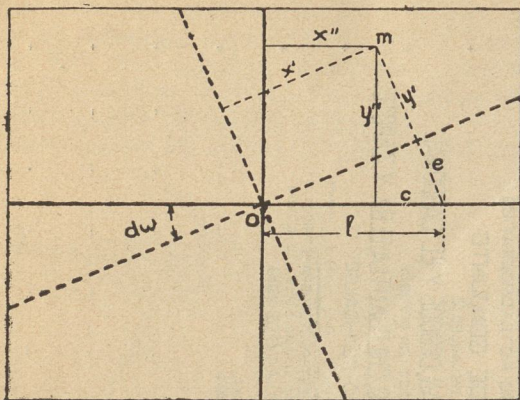


FIG. 5

bre la placa, es  $y''$ ; la ordenada teórica que debía ser medida, es  $y'$ . El ángulo de giro tiene por valor:

$$d\omega = \frac{y'' - y'}{x''} \quad (I),$$

esta corrección es fácil de llevarse a la práctica, porque el estereocomparador tiene un dispositivo especial con graduación, que hace girar la placa al rededor de su eje óptico. En este caso sería una amplitud angular  $e = 1 \cdot d\omega$ .

Como este error también influye en la medida de las abscisas, calculemos la tolerancia permitida en el ángulo de giro para que no influya en la medida de las paralajes:  $\Delta x = x' - x'' \approx y' \cdot d\omega$ , como el error que se cometa en las paralajes debe conservarse inferior a 0.01 mm.  $d\omega \leq \frac{0.01}{y'}$ ; para un valor de  $y' = 60$

mm., nos dará  $d\omega \leq \frac{0.01}{60} \approx 30''$ .

$$(I) \quad y' + e = \frac{y''}{\cos \omega}$$

$$\cos \omega = \frac{y''}{y' + e} \quad e = l \sin \omega = (x'' + c) \sin \omega$$

$$\cos \omega = \frac{y''}{y' + (x'' + c) \sin \omega}$$

$$\cos \omega = \frac{y''}{y' + x'' \sin \omega + y'' \operatorname{tg} \omega \sin \omega}$$

$$y' \cos \omega + x'' \sin \omega \cos \omega + y'' \operatorname{tg} \omega \sin \omega \cos \omega = y''$$

$$y' \cos \omega + x'' \sin \omega \cos \omega + y'' \sin^2 \omega = y''$$

$$y' \cos \omega + x'' \sin \omega \cos \omega = y'' (1 - \sin^2 \omega) = y'' \cos^2 \omega$$

$$y' + x'' \sin \omega = y'' \cos \omega \quad \text{por ser tan pequeño el áng. } d\omega$$

$$\cos \omega = 1$$

$$\sin \omega = 0$$

$$y' + x'' d\omega = y''$$

$$d\omega = \frac{y'' - y'}{x''}$$

## ERROR POR CURVATURA Y REFRACCION.

CUANDO se fija la posición de puntos con el estereocomparador, esta corrección no tiene nada de particular, no difiere a la que se aplica en cualquier caso en el que se quiera determinar la posición de un punto por observación a distancia. Si se trabaja con el estereoaquígrafo (aparato combinado del estereocomparador y un sistema mecánico especial para dibujar), la corrección se hace mecánicamente.

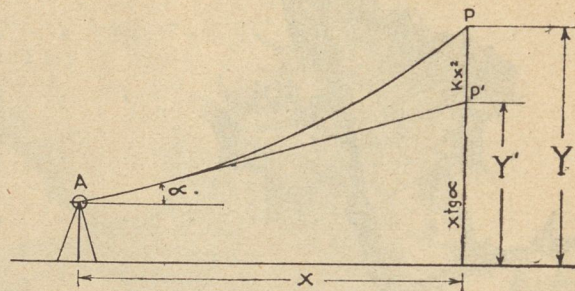


FIG. 6

La Fig 6, nos representa una observación desde la estación A a un punto P, que se supone observado, pero el que en verdad se observa es P', por los fenómenos de curvatura y refracción. La visual teórica es una parábola de la forma  $y = x \operatorname{tg} \alpha + k x^2$  (6)

y la recta definida por la línea de cotlimación es:  $y = ax + b$  (7)

El procedimiento de corrección automática que se hace con el estereoaquígrafo fué ideado por el Ing. Asehenbrenner y consiste en sustituir los rayos parabólicos por rayos rectos, pero en condiciones muy especiales, tales como que el cuadrado de la suma de los errores que se cometan por las separaciones de la recta y la curva, sea un mínimo entre los límites  $t$  y  $w$ .

El cálculo de la corrección única que debe hacerse al estereoaquígrafo, para que las alturas de todos los puntos se obtengan corregidas, consta de dos par-

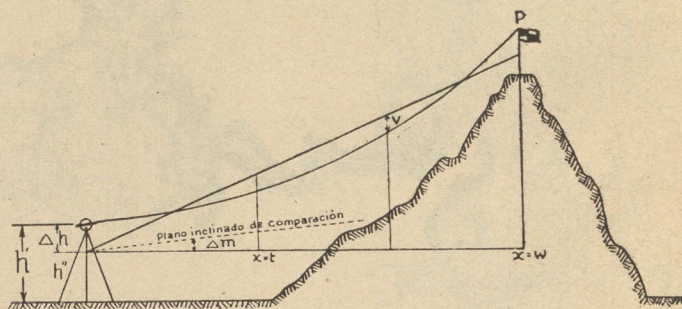


FIG. 7

tes: calcular la magnitud  $\Delta h$  Fig 7, para restarla de la altura del plano de horizonte  $h'$  y obtener el punto  $h''$  del cual debe partir el rayo recto que sustituye al parabólico y segundo calcular la magnitud  $\Delta m$  que puede considerarse como amplitud angular, porque al aplicar esta corrección al aparato, equivale a tomar como plano de horizonte uno inclinado que asciende en el sentido de la dirección del eje óptico; con esto se consigue que no obstante que aumente la distancia de los puntos, las cotas con respecto a él son un poco más pequeñas que con respecto al de horizonte y esta diferencia constituye la corrección del error por curvatura y refracción.

La altura  $h''$  de la cual debe partir el rayo recto, es:  $h'' = h' - \Delta h$ ;  $\Delta h$  la podemos expresar en

función de las distancias w y t, que son la máxima y mínima dentro de las cuales debe corregirse el error:

$$\Delta h = \frac{k}{6} [(w + t)^2 + 2w] \quad (8)$$

(adelante se verá el origen de esta fórmula), k representa el error total por curvatura y refracción cuyo valor medio es el mismo que se usa en todos los casos:  $k = 6.85 \times 10^8$ . Sustituyendo el valor de k en (8)

$$\Delta h = 0.0114 [(w + t)^2 + 2w]$$

Para la aplicación práctica basta dar valores a w y t, que como se indicó son las distancias que limitan la faja dentro de la cual se desean las alturas corregidas; estas magnitudes deben considerarse en kilómetros, pero la corrección estará expresada en metros.

Falta calcular la segunda corrección  $\Delta m$ , la que podemos expresar en la forma:  $\Delta m = Zk (w + t)$ . Z representa la distancia del plano de frente que contiene el punto; como se trata de varios puntos del terreno y estos están a diferentes distancias, no sería práctico sustituir en cada caso el valor de Z, para aplicar la corrección, se le da un valor entre w y t; la experiencia aconsejó el valor  $Z = \frac{2}{3} w + t$ , como el más conveniente.

Conocidos los valores de  $\Delta h$  y  $\Delta m$ , se aplica la corrección  $\Delta h$ , restándola de la cota del plano de horizonte y  $\Delta m$  se coloca en la escala de alturas y se hace la conexión del autógrafo con el estereocomparador en lugar de hacerla en cero; con lo anterior se tendrá como plano de comparación uno inclinado en vez del de horizonte.

Estudiaremos los errores máximos que se pueden cometer por las separaciones entre la recta auxiliar y la parábola: llamaremos v a los valores de los errores. Las fórmulas (6) y (7) son las ecuaciones de las líneas, que como hemos visto son de la forma:  $y = x \operatorname{tg} \alpha + k x^2$ ;  $y = ax + b$ ; el valor de x lo obtendremos de la diferencia de estas ecuaciones:  $v = x \operatorname{tg} \alpha + k x^2 - (ax + b) \dots \dots \dots (9)$  haremos  $\operatorname{tg} \alpha = p$ , sustituyéndolo en (9) y ordenando:  $v = kx^2 - (a-p)x - b$ ; elevemos al cuadrado ordenando con respecto a las potencias de x:

$$v^2 = k^2 x^4 - 2k(a-p)x^3 + [(a-p)^2 - 2kb]x^2 + 2b(a-p)x + b^2$$
; integrando entre los límites  $x=t$  y  $x=w$ :

$$\int_t^w v^2 dx = \frac{k^2}{5} (w^5 - t^5) - \frac{k}{2} (a-p)(w^4 - t^4) + \frac{1}{3} [(a-p)^2 - 2kb] (w^3 - t^3) + b(a-p)(w^2 - t^2) + b^2 (w - t).$$

Para obtener los valores de a y b, diferenciamos parcialmente la expresión con respecto a cada una de ellas.

$$\frac{d(v^2)}{da} = \frac{k}{2} (w^4 - t^4) + \frac{2}{3} (a-p)(w^3 - t^3) + b(w^2 - t^2) = 0. \quad (10)$$

$$\frac{d(v^2)}{db} = -\frac{2}{3} k(w^3 - t^3) + (a-p)(w^2 - t^2) + 2b(w - t) = 0. \quad (12)$$

de las ecuaciones anteriores obtendremos los valores de a y b:  $a = p + k (w + t)$  (12)

$$b = -\frac{k}{6} [(w + t)^2 + 2w] \quad (13)$$

El valor de v lo obtendremos diferenciando la ecuación (9) e igualando a cero:  $\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \alpha + 2kx - a = 0$ ,

sustituyendo el valor de a y el de  $\operatorname{tg} \alpha = p$ , tendremos:

$$\frac{dv}{dx} = 2kx - k(w + t) = 0 \quad (14)$$

calculemos el valor que adquiere v para uno de

$$x = \frac{w + t}{2}$$

$$\frac{V_{w+t}}{2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{w + t}{2} + \frac{k}{4} (w + t)^2 - \frac{a}{2} (w + t) - b,$$

sustituyendo los valores de a y b de (12) y (13);

$$\frac{V_{w+t}}{2} = -\frac{k}{12} (w + t)^2$$
; de donde se ve que el valor

considera lo  $\frac{w+t}{2}$  para x, corresponde a uno máximo de v.

Estudiaremos los valores que adquiere v para  $y = w$  y  $x = t$ :

$$v_t = k[t^2 - t(w+t) + \frac{1}{6} [(w+t)^2 + 2w]] = \frac{k}{6} (w - t)^2$$

$$v_w = k[w^2 - w(w+t) + \frac{1}{6} [(w+t)^2 + 2w]]$$

Si damos valores a w y t, y calculamos el resultado comparándolo con los valores absolutos de curvatura y refracción correspondientes a esas distancias, veríamos que los errores que quedan después de aplicar la corrección, por el procedimiento explicado, son tan pequeños que la aproximación de 0.02 mm. que permite el estereocomparador, no los acusa.

### PARALAJE DE ALTURAS.

COMO en el campo no es posible obtener con facilidad bases horizontales de cuyos extremos se tomen las fotografías, las dos perspectivas correspondientes a un punto sobre las dos placas, no están en el mismo plano horizontal y a la diferencia entre los dos planos en que se encuentran es a lo que se llama paralaje de alturas, y ésta debe corregirse. Si al través del estereoscopio se observan las dos placas sin corregir la paralaje de alturas, el índice o estilete de coincidencias se ve duplicado en el sentido vertical y las dos imágenes sin relieve, se verían solamente proyectadas en un plano de frente y en muchos casos no se percibiría el relieve óptico.

En los procedimientos estereofotogramétricos se ha convenido tomar la placa izquierda como directora, la derecha se ajusta a ella. La altura correspondiente a la estación se considera con respecto al plano de horizonte de la placa izquierda, la diferencia de alturas desalojando la placa derecha sobre el mismo plano de la izquierda y paralelamente a su línea principal haciendo que las dos perspectivas de un mismo punto sobre las placas estén en el mismo plano horizontal.

Como en este caso no cambian las abscisas de los puntos, tampoco cambiará la paralaje. Lo que prácticamente se modifica es la magnitud de la base inclinada, pero esto tampoco tiene influencia, porque no se toma en consideración la distancia inclinada sino su proyección horizontal y como las verticales de los extremos se conservan, la magnitud de la proyección de la base es siempre la misma.

## TRABAJOS PRACTICOS.

COMO un ejemplo de aplicación práctica de los procedimientos estereofotogramétricos para configuraciones, se publica un conjunto de una parte del Río Tula, Hgo., con desarrollo aproximado de 35 km., desde un punto llamado Chileautla hasta el valle de Tasquillo y además los Valles de Ixmiquilpan, Tasquillo, el Cardonal y los vasos de Debodé. Trabajo ejecutado por el Departamento Fotopográfico de la Comisión Nacional de Irrigación.

No todo el plano original se pudo construir a la misma escala: el cañón del río se configuró en las escalas de 1 : 1000 y 1 : 2,500 con curvas de 2 y 2.5 m. de equidistancia; los valles a 1 : 10,000 con curvas de 5m. y los vasos de Debodé a 1 : 2,500 y 2 m., de equidistancia.

Los trabajos de campo duraron dos meses aproximadamente y cuatro los de gabinete. Las operaciones de campo y gabinete más rápidas, fueron las correspondientes a los valles por haberse configurado a escala pequeña, gran equidistancia en las curvas y porque las fotografías mostraban gran extensión de terreno para configurar.

Para darse cuenta de la importancia de esta clase de trabajos ejecutados por los procedimientos estereofotogramétricos, por su rapidez, costo y precisión, a continuación se consignan algunos datos del mismo trabajo que se publica.

El Valle de Ixmiquilpan se construyó con el estereofotograma a la escala de 1 : 10,000 con curvas de 5 y 10 m. de equidistancia. El tiempo empleado en todo el trabajo de configuración de este valle fué de un mes y medio; 15 días los trabajos de campo y un

mes en el gabinete; se abarcó una superficie aproximada de 20,000 hectáreas con un costo de \$0.22 por hectárea.

Este trabajo no fué comprobado en precisión, pero algunos otros sí lo han sido, entre ellos el Vaso de Taxhimay, Estado de México que se configuró también por estos procedimientos, se corrió una nivelación topográfica en la curva de inundación, dejando monumentos y estos se encontraron en el plano estereofotogramétrico correctos en posición y sobre la misma curva. Igualmente se han ejecutado otros trabajos de prueba y comparación, obteniendo siempre resultados satisfactorios.

El original del conjunto publicado lo forman 26 hojas de 1 x 1 m., a diferentes escalas, como se indicó; por procedimientos fotográficos se unificaron las escalas a 1 : 10,000 y de todas las nuevas hojas se volvió a hacer otra reducción a 1 : 50,000 (y de ésta la que se publica a 1 : 100,000 aproximadamente). Antes de hacer esta última reducción, del conjunto a 1 : 10,000 se hizo una calca suprimiendo las curvas de 2 y 2.5 m., dejando únicamente las de 5, 10 y 20 m., para que no se confundieran muchas curvas principalmente en el cañón del río en que la pendiente es muy fuerte. Para que se compensaran los errores o no se propagaran por el proceso de reducción, antes de hacer la calca se fijaron por sus coordenadas los vértices de triangulación, estaciones estereofotogramétricas y puntos de control, se hizo la sobreposición de los puntos dibujados con los mismos, pero dibujados en las hojas originales y reducidos a la escala y cuando se logró la coincidencia de estos puntos se calcularon las curvas de nivel y la planimetría.



# - FOTOTOPOGRAFIA -

## ESTEREOFOTOGRAMETRIA TERRESTRE

Distancia máxima de percepción del relieve en la vista normal.—Ventajas de los procedimientos y algunos casos favorables en que conviene aplicarse.—Su precisión comparada con los métodos topográficos.—Operaciones de campo.—Cálculo de las bases.

Por I. G. OROZCO,

Ing<sup>o</sup> Auxiliar del Depto. Fototopográfico de la Comisión Nacional de Irrigación.

EN 1838, Westone demostró que el efecto estereoscópico era el resultado de la percepción simultánea de dos imágenes de cada objeto observado de diferentes puntos de vista. Lo comprobó prácticamente construyendo un estereoscopio en el cual, delante de cada ojo colocaba una imagen de un objeto, tomada de distinto lugar. El aparato fue acondicionado de tal manera que sólo permitía ver a cada ojo la imagen que le estaba destinada. La intersección de los rayos hacía que se superpusieran las imágenes y formaran en la retina el efecto del relieve, tal como si se observara el objeto mismo a pequeña distancia.

La separación entre los ojos hace que cada uno de ellos vea los objetos con una pequeña diferencia en sus aspectos, por ejemplo: el ojo derecho verá un poco más del mismo lado derecho y el izquierdo verá más del suyo. Si con un solo ojo se observan dos objetos que estuvieran enfilados, ese ojo no verá más que el primero, porque él mismo cubriría el segundo, Fig. 1, pero si se ven con los dos ojos, no obs-

ticamente con la ayuda de estereogramas el valor mínimo del ángulo  $\alpha$ , condujeron al conocimiento de que una vista normal puede percibir (por término medio) magnitudes subtendidas por ángulos de  $30''$ , también se encontró que algunas personas podían percibir separaciones con ángulos hasta de  $10''$  y aún de  $5''$ , pero estos casos eran excepcionales, por lo tanto, en todos los cálculos en donde esté el ángulo de agudeza visual, se le considera con un valor de  $30''$ .

### CALCULO DE LA DISTANCIA MAXIMA DE PERCEPCION DEL RELIEVE EN LA VISTA NORMAL

El esquema de la Fig. 2, es la observación binocular a un punto M situado a la distancia D de los ojos A y B (izquierdo y derecho respectivamente). P, es la traza de un plano horizontal con uno de frente colocado a la distancia D' de b (distancia interocular o base estereoscópica). El ojo A verá el punto

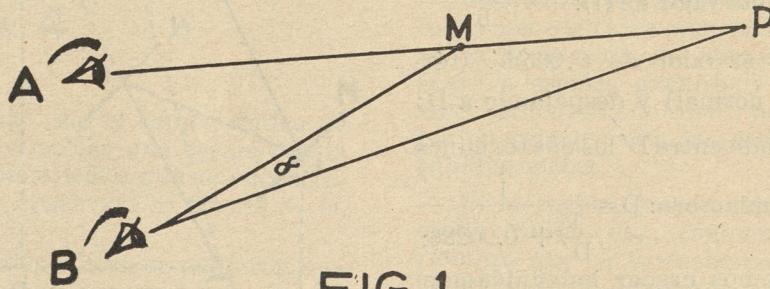


FIG. 1

tante que uno viera únicamente el más próximo, el otro vería los dos; esto permitiría al observador no tan sólo darse cuenta de la existencia de los dos objetos, sino apreciar las separaciones entre ellos y estimar las distancias, lo que sería imposible poder hacer con un ojo.

La facultad que tiene la visión binocular de producir en la retina el fenómeno estereoscópico o impresión del relieve, es limitada. La Fig. 1, muestra los dos rayos luminosos que parten de los puntos M y P y van al ojo derecho; éstos forman el ángulo  $\alpha$ , variable con la distancia entre los puntos. Este ángulo tiene un límite, después del cual la retina ya no puede percibir la separación, dando por resultado que los dos puntos se vean proyectados en el mismo plano de frente o confundidos entre sí. Los estudios y experiencias que se hicieron con objeto de obtener prác-

M proyectado sobre el plano P, en  $m_2$  y el ojo B en  $m_1$ . Si se aproxima el punto M a la base b, crece la magnitud del segmento a, comprendido entre las dos proyecciones; lo anterior permite una clara percepción entre la separación del punto y el plano. Si por lo contrario, se aleja M de b, aproximándose constantemente a P, los ojos van perdiendo la facultad de apreciar la separación entre M y P a medida que disminuye la distancia entre ellos y llega un momento en que prácticamente los ojos no distinguen la distancia que los separa. Lo anterior demuestra experimentalmente que el segmento a tiene un valor límite para que los ojos puedan ver el relieve. Ese valor límite es precisamente cuando el segmento a está subtendido por el ángulo de agudeza visual de  $30'' = \frac{1}{120}$  de grado, de lo que podemos deducir el va-

$\frac{360 \cdot 120}{2\pi} = \frac{43200}{628} \approx 6800$ ; que nos dice que los ojos no perciben la separación entre objetos cuya distancia al observador sea mayor de 6800 veces la distancia que los separa entre sí.

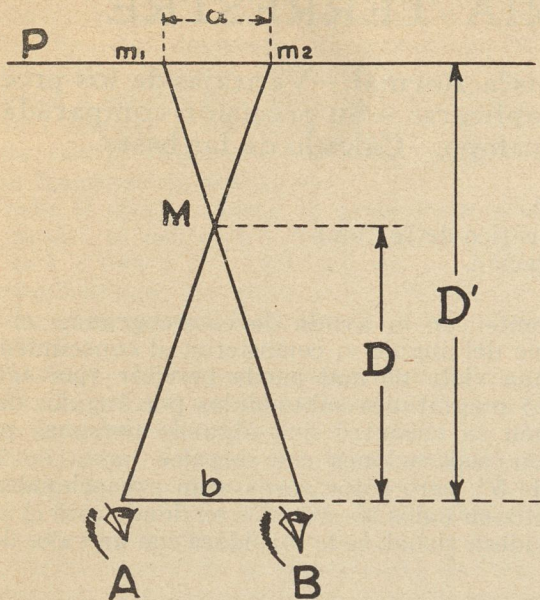


FIG. 2

De los triángulos semejantes de la Fig. 2, se obtiene la proporción:  $\frac{a}{b} = \frac{D'-D}{D} = \frac{D'}{D} - 1 \dots (1)$

de las conclusiones del párrafo anterior podemos dar a D' el valor:  $D' = 6800a$ , despejando a a:  $a = \frac{D'}{6800} = 0.000147D'$ , sustituyendo este valor en (1):

$$\frac{0.000147D'}{b} = \frac{D'}{D} - 1$$

dando a b el valor de 0.065m. (término medio para la vista normal) y despejando a D:

$$D = \frac{D'}{1 + 0.00226 D'}$$

de la fracción del segundo miembro:  $D = \frac{1}{\frac{1}{D'} + 0.00226}$ ;

si a la distancia D' la hacemos crecer indefinidamente, la fracción  $\frac{1}{D'}$ , tiende a cero, por consiguiente el

segundo miembro tiene por límite  $\frac{1}{0.00226} \approx 440$ , lo

que nos dice que el alcance máximo de percepción estereoscópica para la vista normal, es de 440m. aproximadamente; más allá de esta distancia no se aprecia el relieve, todos los objetos se ven proyectados en el mismo plano.

Como la separación entre los ojos es tan pequeña, la distancia de 440m. para que la vista perciba el relieve, también es muy pequeña. La primera es función de la segunda y del ángulo de agudeza visual; aumentando la base estereoscópica o ayudando a los ojos a estimar magnitudes bajo ángulos mayores que a simple vista, es posible alcanzar grandes distancias apreciando el relieve.

Lo primero se obtuvo artificialmente por medio de espejos o prismas de reflexión total, lo que equi-

valía a separar los ojos determinada magnitud y lo segundo se consiguió con la ayuda de lentes.

La Fig. 3, muestra un esquema del primer caso en que se aumenta la magnitud de la base estereoscópica. A y B representan los ojos, b la distancia inter-ocular o base estereoscópica, P un punto que se observa. El ángulo de convergencia de las visuales a P, es APB cuando se ve a simple vista; si ante los ojos se coloca un sistema de espejos M y N para el izquierdo y M'N' al derecho, los rayos que parten de P inciden en los espejos M y M' en i e i' y son reflejados sobre los espejos N y N' en r y r' en donde sufren una segunda reflexión para dirigirlos directamente a los ojos, los que verán el punto P en la intersección de los rayos Ar y Br' o sea P', más próximo a los ojos que P. Como el ángulo de convergencia AP'B es igual al iPi', equivale a que los ojos estuvieran colocados en i e i', con una separación inter-ocular b' o que el punto P se observara con un ángulo de intersección de las visuales mayor que si el punto se viera a simple vista.

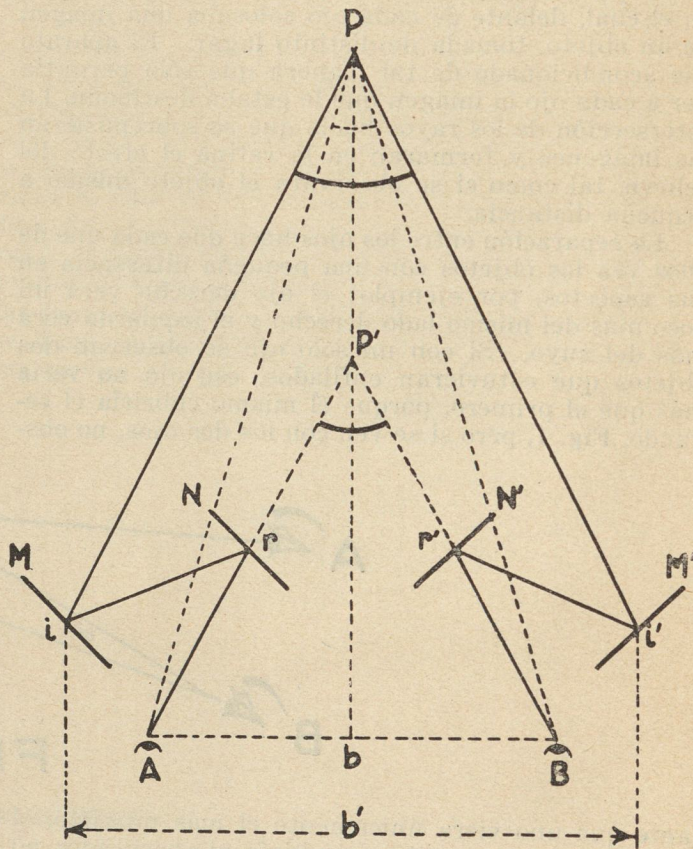


FIG. 3

La Fig. 4, es un esquema del segundo caso en que el ojo estima magnitudes con ángulos mayores que a simple vista, lo que también permite que dichas magnitudes puedan estar colocadas a mayores distancias.

A, es el ojo, PM el objeto observado bajo el ángulo PAM; si se coloca una lente entre el ojo y el objeto, por el poder amplificador de ésta se verá que PM crece y toma la posición y magnitud P'M' que se ve bajo el ángulo P'AM', mayor que el primero, lo que equivale a que PM se aproxime al observador ocupando la posición P''M''.

Estas dos maneras de ayudar a la vista para alcanzar grandes distancias percibiendo el relieve fueron aplicadas al telémetro de Helmholtz.

Las fórmulas que se obtuvieron para el alcance máximo de percepción estereoscópica en la vista normal, se modifican por la introducción de los dos elementos variables:  $b'$  que es la base estereoscópica aumentada y  $V$  el poder amplificador de las lentes; con estos dos elementos se obtiene una nueva fórmula:  $D' = D \frac{b'}{b} V$ ;  $D'$  representa la distancia máxima que se alcanza con el telémetro,  $D$  la distancia máxima a simple vista; al producto  $\frac{b'}{b} V$  se le da el nombre de efecto plástico total.

El Ing<sup>o</sup> Groussilliers (en 1893) concibió la idea de hacer el telémetro de verdadera utilidad adaptándole un dispositivo para medir distancias, pero no pudo realizar su propósito y fue el Dr. Carl Pulfrich

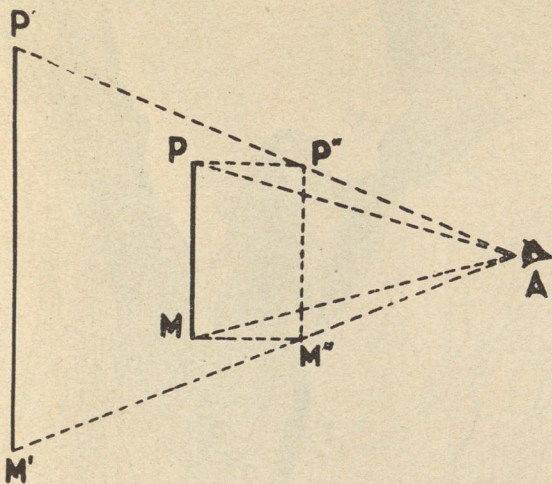


FIG. 4

quien lo llevó a la práctica. En el campo óptico de la imagen (de los oculares) colocó una escala con la cual era posible medir la distancia a que se encontraba cualquier punto que se observara al través de él, al lugar de observación.

Con el telémetro y su dispositivo se pudieron medir distancias de 2000m. y aún mayores, con errores de  $\pm 1$  a 2% aproximadamente. No obstante este procedimiento tan útil para la medida indirecta de las distancias no fue posible aplicarlo en los levantamientos topográficos.

Con el telémetro se aumentaba la magnitud de la base, pero éste era un instrumento rígido, de base grande, pero fija e invariable para cada uno. La mayor longitud que convenía dársele para que no resultara tan incómodo su manejo era de 1.50m. y con esta base se podrían determinar distancias cuando más de 3000m. con la precisión que se ha dicho, pero como infinidad de veces era necesario conocer la posición de puntos a mayor distancia, se pensó en aumentar la longitud de la base y que ésta no fuera de construcción rígida sino en condiciones tales que pudiera cambiarse de longitud a voluntad, lo que se consiguió sustituyendo la observación directa del terreno por perspectivas de él que fueran tomadas con una separación entre ellas como se deseara.

Fácil fue pensar la ayuda que podría dar para este procedimiento la fotografía ya que con anterioridad se aplicaba en la fototopografía por intersecciones.

Los requisitos más importantes que necesitaba la sustitución de los objetivos de observación directa por perspectivas fotográficas, eran que las placas deberían colocarse en posición vertical, que estuvieran en el mismo plano y que el eje óptico en cada dos posiciones fuera paralelo.

Las placas tomadas en las condiciones explicadas y vistas al través de un estereoscopio, mostraban fielmente la representación del paisaje y en relieve, tan claro y preciso como si se observara el terreno mismo.

La introducción de la fotografía para aprovechar la estereoscopia en la medición, dió a esta última los elementos que necesitaba para que fuera de verdadera utilidad en la formación de planos y otras muchas aplicaciones.

#### VANTAJAS DE LOS PROCEDIMIENTOS Y ALGUNOS CASOS FAVORABLES EN QUE CONVIENE APLICARSE.

**L**A estereofotogrametría para la formación de planos que muestren configuraciones, da excelentes resultados por su precisión, rapidez y economía, siempre que se aplique en los casos más favorables, pero como éstos no son todos, su radio de acción es limitado.

Puede asegurarse que para configuraciones supera ventajosamente a los métodos topográficos ordinarios, como son: la plancheta, taquímetro, secciones transversales con cadena y nivel de mano, etc.

Son varios los requisitos necesarios para obtener todas las ventajas que puede dar la fototopografía en la formación de planos para fines técnicos, o sean: a escalas grandes y pequeñas equidistancias entre las curvas de nivel; pero van disminuyendo éstos en relación con las pequeñas escalas y grandes equidistancias.

Si la región que se desea configurar es una boquilla, cañón, etc., conviene aplicar estos métodos siempre que el estrechamiento no sea menor de 200m. aproximadamente, porque de lo contrario los pares estereoscópicos abarcarán una zona muy pequeña del terreno, y como es preciso fotografiarlo todo, se necesita tomar gran número de vistas, lo que complica las operaciones de campo, porque el operador tiene que elegir y localizar más estaciones fotogramétricas y de tránsito, aumentar el número de puntos de control y consumir mayor cantidad de material fotográfico. Además los trabajos de gabinete también se aumentan considerablemente; el calculador deberá obtener las coordenadas de más puntos, el dibujante que situarlos, el autogrametría evaluará mayor cantidad de pares y éstos dan muy pequeño rendimiento. Todo lo anterior trae como consecuencia que el trabajo sea lento y antieconómico. En general se recomienda que el operador busque la manera que las fotografías muestren del terreno la mayor extensión que sea posible.

Uno de los más grandes enemigos de la fototopografía, es la vegetación. Para aplicarse con éxito, el

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION

DEPARTAMENTO FOTOTOPOGRAFICO

VASOS DE 'ELBA' Y 'ZAPOTE'

-VALLE DEL MEZQUITAL-ESTADO DE HIDALGO.-

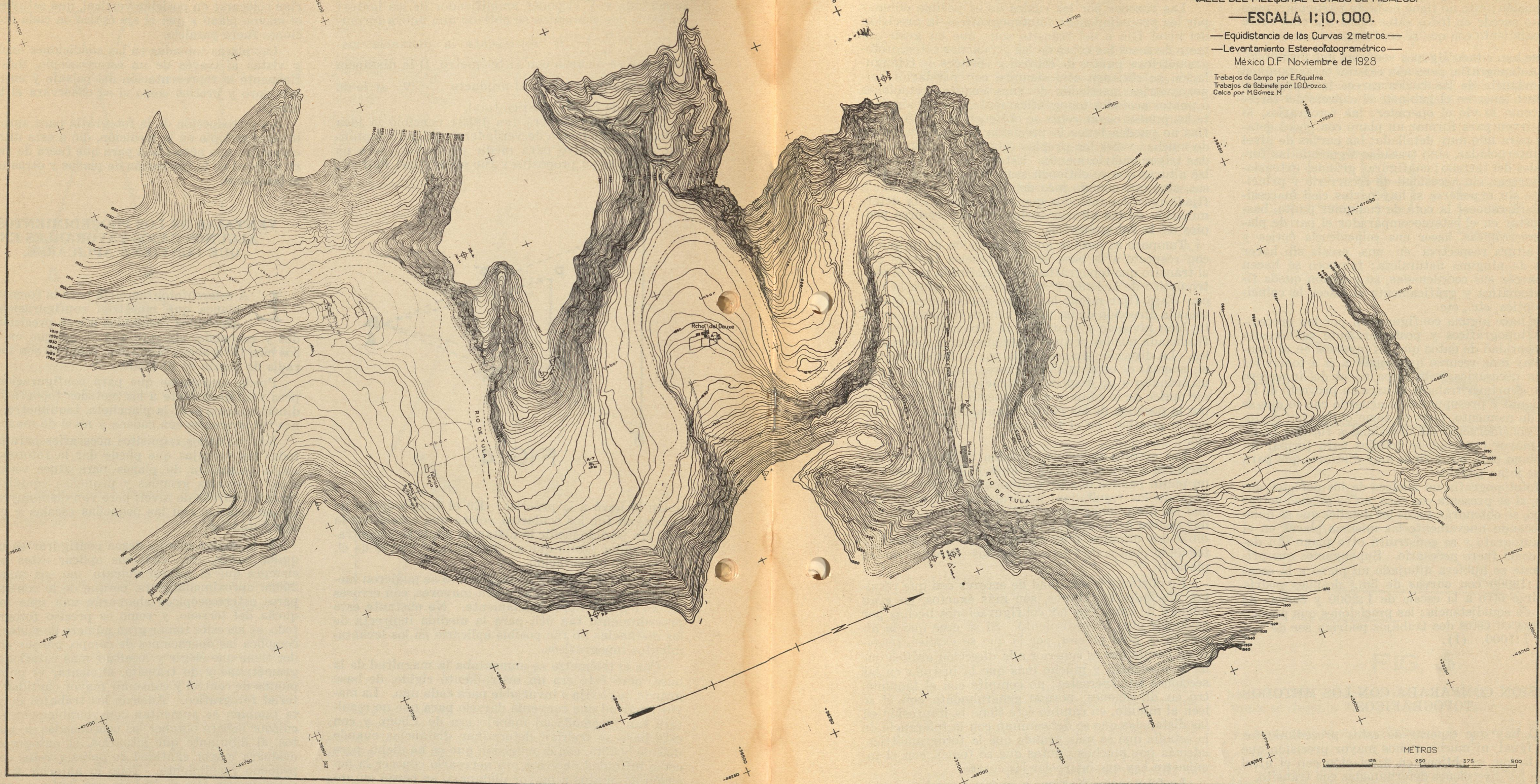
—ESCALA 1:10,000.

—Equidistancia de las Curvas 2 metros.—

—Levantamiento Estereofotogramétrico—

México D.F. Noviembre de 1928

Trabajos de Campo por E. Riquelme  
Trabajos de Gabinete por I. G. Orozco  
Calco por M. Gómez M.



terreno que se desea configurar debería estar desprovisto de ella, pero como ésto es prácticamente imposible, aún conviene si no es de gran altura ni denso follaje.

Una de las aplicaciones en que estos procedimientos se recomiendan por todos conceptos principalmente porque dan su máximo de rendimiento, es en la formación de cartas geográficas que se constru-

yen en pequeñas escalas y grandes equidistancias entre las curvas de nivel, por ejemplo: 1 : 50 000 ó menor y curvas de 25m. Además, en esta clase de trabajos casi no tiene influencia la vegetación, no

obstante que sea alta y densa. Como la tolerancia es grande en estas escalas, con sólo medir aproximadamente la altura de la arboleda en el campo y restarla de la cota que tenga ésta en el estereocom-

parador, es suficiente. La configuración se hace siguiendo sensiblemente las formas de la propia vegetación porque generalmente éstas son las mismas del propio terreno. Las regiones configuradas en la forma anterior, se representarán en el plano con la indicación de bosque para que la persona que lo interprete comprenda que dichas regiones tienen menor precisión; ésto no tiene nada de particular, pues lo mismo sucede en todos éstos casos sea cual fuere el procedimiento con que se configure.

Ya se han citado algunas ventajas que proporciona la fototopografía, pero aún existen otras también de importancia de las cuales carece la topografía, como son: tener en el gabinete el aspecto del terreno tal como lo vió el operador; las fotografías, lo mismo sirven para formar un plano con pocos detalles que para uno muy detallado; las curvas de nivel no son interpoladas, sino trazadas siguiendo las formas reales del terreno; configurar grandes extensiones de terreno sin necesidad de recorrerlo y principalmente sin exponerse si hay partes casi inaccesibles. Para conocer la cota de cualquier punto, bastará ajustar en el estereocomparador el par de placas estereoscópicas, hacer una coincidencia óptica y leer su altura respectiva en una escala sin hacer cálculos de ninguna naturaleza; tampoco se hacen para conocer sus coordenadas, su posición queda fijada automática y gráficamente al hacer la coincidencia óptica, etc., etc.

Si se hace alguna configuración por los procedimientos topográficos y posteriormente se necesita mayor cantidad de datos que los tomados en el campo, no hay más recurso que volver a él a tomar los que sean necesarios, y la culpa no es del ingeniero que hizo el primer trabajo, él hace su proyecto de levantamiento y presupuesto de acuerdo con lo que se le pide de momento, pero no tiene obligación de tomar en consideración las necesidades futuras ni levantar mayor cantidad de detalles para formar un nuevo plano para otros fines muy distintos que para lo que se le ha pedido.

La fototopografía no adolece de los defectos anteriores, si se presenta ese caso, no es preciso volver al campo, se obtendrán todos los detalles que se quieren colocando nuevamente las mismas placas en el estereoautógrafo y se construirá otro plano tan detallado como fuera necesario. Supongamos que primeramente se hubiera dibujado un plano a la escala de 1:10000 con curvas de 5m., después podría construirse otro a la escala de 1:2000 y curvas de 1 ó 2m. de equidistancia; las precisiones que pueden alcanzarse en estos dos trabajos podrían ser de ... 1:300 y 1:1000. (1).

#### PRECISION COMPARADA CON LOS METODOS TOPOGRAFICOS.

**N**O hay que esperar de estos procedimientos igual, ni mucho menos mayor precisión que la que se obtiene en nivelación con el nivel fijo o en las direcciones determinadas con tránsito.

(1).—Al describir el estereoautógrafo se explicarán las limitaciones que tiene para construir planos a diferentes escalas con las mismas placas. Quizá la precisión que se cita parezca muy pequeña, pero no hay que olvidar que se trata de configuraciones.

Tampoco debe creerse que la fototopografía sustituirá a la topografía. La primera es principalmente para configuraciones, sirve de ayuda o auxiliar a la segunda, necesita apoyarse en trabajos topográficos previos, como cualquier otro de los métodos de configuración, pero tiene a su favor muchas ventajas.

Las razones por las cuales no es posible obtener por los procedimientos fototopográficos la precisión del nivel fijo o del tránsito son: que en gran número de casos las cotas de las estaciones estereofotogramétricas, puntos de control y vértices de triangulación se obtienen casi siempre con nivelación trigonométrica, partiendo de unas cuantas estaciones o puntos acotados topográficamente, por consiguiente los puntos cuyas cotas se obtienen de las fotografías no pueden tener la precisión topográfica cuando muchas veces las propias estaciones están acotadas trigonométricamente. Esto no quiere decir que las alturas que se obtienen sean erróneas o imprecisas, sino que cuando más debe pedirse la tolerancia fijada para los métodos que se aplican en la determinación de las alturas incluyendo los errores propios de la fotogrametría.

Tampoco es posible que la dirección de un punto con respecto a la base sea tan precisa tomada con el tránsito que topográficamente definida por el centro óptico de la lente y su perspectiva sobre la placa. Para fijar mejor las ideas, supongamos que se toma la dirección de un punto con un tránsito correcto, bien nivelado y centrado; la dirección estará influenciada por los errores instrumentales y personales. La dirección determinada por la fotografía tiene, además de estos mismos errores, supuesto que con un tránsito o un dispositivo semejante se orienta el eje óptico de la cámara con respecto a la base, otros por la posición de las placas, alguna flexión de ellas, por la gelatina en el tratamiento fotoquímico, etc. etc.

Los errores anteriores pueden comprobarse con facilidad y prácticamente midiendo la dirección de un punto por los dos procedimientos citados y comparando los resultados; generalmente se encuentra que las direcciones fotográficas se pueden determinar dentro de la aproximación media de uno y medio a dos minutos (con cámara de  $f=193.53\text{mm.}$  y tomando puntos que no estén en los extremos de las placas).

No obstante la cantidad de errores con que resultan afectados los planos, son más exactos, en gran número de casos que las configuraciones hechas por cualquier otro procedimiento. Si se cree que la dirección es poco precisa, por lo que se explicó, téngase en cuenta que es superior a la dirección gráfica que dá la plancheta y mucho más que la brújula en las secciones transversales; no compite con el taquímetro en direcciones, porque generalmente con él se leen al minuto, en cambio éste tiene la impresión en las distancias que se determinan con la tolerancia de la estadia que es más grande que la fotogramétrica, además por muchos puntos que se tomen con el taquímetro hay que interpolar las curvas.

La fototopografía tiene a su favor muchas ventajas pero a su vez tiene inconvenientes de los cuales el principal de todos es el costo de los instrumentos y útiles, tanto de campo como de gabinete y lo peor del caso es que son complementarios, no pueden tenerse unos u otros, sino forzosamente los dos,

además, por lo que se ha explicado, los métodos no son aplicables en todos los casos y debe tenerse buen juicio para hacer uso de ellos aplicándolos cuando realmente convengan, de lo contrario resultan costosos y tardíos, aunque no imprecisos.

## OPERACIONES DE CAMPO

### Cálculo de las bases.

**L**AS operaciones de campo consisten en hacer los trabajos topográficos necesarios para fijar puntos y estaciones fotogramétricas y nivelar algunos de ellos; además, tomar pares de fotografías estereoscópicas que muestren todo el terreno que se desea configurar, que las placas llenen determinados requisitos, calcular y medir las bases.

La Fig. 5 nos recordará la manera de obtener las fórmulas que nos dan las coordenadas de todos los puntos que aparecen en un par estereoscópico. A y B son los extremos de la base  $b$ , de donde se han tomado las fotografías en que el eje óptico de la cámara se conservó paralelo y normal a la base.

Por la proporcionalidad de triángulos semejantes se obtienen las fórmulas siguientes:  $Z = \frac{b \cdot f}{a}$

$X = \frac{Z \cdot x_1}{f}$ ;  $Y = \frac{Z \cdot y_1}{f}$ ;  $Z$  representa la distancia a la base, del plano de frente que contiene al punto;  $X$ , la distancia del punto al plano principal;  $Y$ , la altura del punto sobre el plano de comparación; del resto de las literales ya conocemos su significado.

Una de las primeras operaciones especiales de la estereofotogrametría que se ejecutan en los trabajos de campo, es el cálculo de las bases. En la fórmula de las distancias:  $Z = \frac{b \cdot f}{a}$ , se despeja  $b$ ,

$b = \frac{Z \cdot a}{f}$ . — El valor de  $Z$  lo podemos obtener de diferentes modos, pero lo más práctico es estimar a ojo las distancias máxima y mínima dentro de las cuales se desea configurar.

Los pares estereoscópicos muestran una zona del terreno en forma de sector circular, pero no todo lo que aparece en las fotografías se puede configurar. El aparato que se utiliza en el gabinete para hacer los planos, trabaja dentro de ciertos límites, de los que se hablará cuando se describa éste.

El valor de  $a$ , diferencia de abscisas o paralaje, fué obtenida por la experiencia, estudiando prácticamente las magnitudes máxima y mínima que debían tener las paralajes para que los ojos percibieran con claridad las coincidencias ópticas de un índice con el relieve. Se encontró por término medio que las paralajes más favorables eran las comprendidas entre los límites 10mm. y 35mm. para las distancias máxima y mínima respectivamente (son inversamente proporcionales).

El valor de  $f$ , distancia focal de la cámara, lo dá la misma fábrica, además, puede determinarse con facilidad, pero casi nunca es necesario hacer. Las cámaras tienen en un lámina metálica, marcada su distancia focal, con números resacados de tal manera que se fotografía en cada placa.

Con lo explicado anteriormente ya estamos en condiciones de poder calcular cualquier base estereofotogramétrica. No obstante que las paralajes más favorables están comprendidas entre los valores de

10 y 35mm., al sustituir en la fórmula, no se toman los de los extremos próximos entre sí, como son 15 y 30mm., por las razones que se verán luego. Ejemplo de cálculo de una base, suponiendo que se hayan tomado pares estereoscópicos con una cámara de  $f = 200\text{mm.}$ : se desea saber qué longitud debe tener la base para alcanzar a configurar a una distancia de 3000m. con

$$\text{paralaje de } 15\text{mm.}; b = \frac{Z \cdot a}{f} = \frac{3000 \times 0.015}{0.200} = 225\text{m.}$$

Con lo anterior sabemos a qué distancia máxima llegamos porque fué uno de los datos, pero como también nos interesa conocer desde qué distancia podemos configurar con la paralaje máxima de 30mm.,

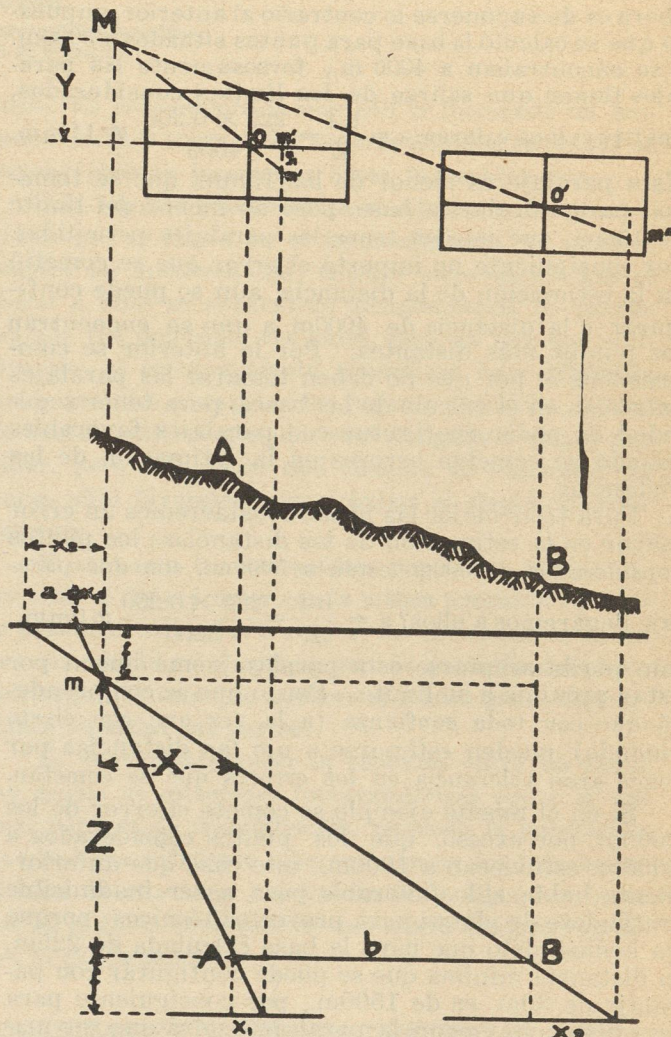


FIG. 5

haremos una operación inversa: de la misma fórmula se despeja  $Z$ , á  $b$  se le dá el valor encontrado

$$\text{y a la paralaje su valor máximo: } Z = \frac{b \cdot f}{a} = \frac{225 \times 0.200}{0.030}$$

1500m.

Como la forma de obtener un valor para la distancia  $Z$  es tan imprecisa (a ojo, según se dijo), siempre se cometen errores fuertes; en los 3000m. considerados puede equivocarse el observador posiblemente en  $\pm 800$  y quizá más. Supongamos que en nuestro ejemplo se cometió un error por exceso de 1000m., que los puntos considerados a 3000m. de

parador, es suficiente. Como lo que nos interesa en este caso es saber con qué paralaje se llega a ellos, de la misma fórmula se despeja  $a$  y se sustituyen los otros valores. Desde luego, en estas condiciones es de preverse que la paralaje sea más favorable que para los puntos que están más próximos a la estación porque la base se calculó para mayor distancia,

veamos lo que nos dá la fórmula:  $a = \frac{b.f}{Z} = \frac{225 \times 0.200}{2000} \approx 22.5\text{mm.}$ , la paralaje más favorable es

precisamente el promedio de las paralajes extremas. Consideremos el segundo caso, cuando se comete un error por defecto en la estimación de las distancias; ahora es de suponerse lo contrario al anterior, supuesto que se calculó la base para puntos situados a 3000m. y se encontraban a 4000 m., forzosamente las paralajes tienen que salirse de los límites considerados, sustituyamos valores:  $a = \frac{b.f}{Z} = \frac{225 \times 0.200}{4000} \approx 11\text{mm.}$

Esta paralaje es menor de los 15mm. que se tomaron para calcular la base, pero no menor del límite de 10mm. que pueden tener las paralajes permitidas, por consiguiente no importó el error que se cometió en la estimación de la distancia, aún se puede configurar a la distancia de 4000m. a que se encuentran los puntos más distantes. Por lo anterior se comprenderá el por qué no deben tomarse las paralajes extremas en el cálculo de las bases, para tener seguridad de poder configurar con paralajes favorables cuando se cometen errores en la estimación de las distancias.

Para fijar mejor las ideas, consideremos un error mayor en la estimación de las distancias; los puntos considerados a 3000m. están a 5000m., con qué paralaje llegaremos a ellos?  $a = \frac{b.f}{Z} = \frac{225 \times 0.200}{5000} \approx 9\text{mm.}$ ,

aún puede aceptarse esta paralaje como buena por estar próxima a su límite. Por lo que se comprenderá que con toda confianza (a la vez que con cierto cuidado) pueden estimarse a ojo las distancias por tener gran tolerancia en los errores que se cometan.

Si en el mismo ejemplo se comete el error de los 2000m. por exceso, que los puntos considerados a 3000m. estuvieran a 1000m., este caso que anteriormente había sido favorable pasa a ser inadmisibles tratándose de planos para proyectos técnicos: porque ya hemos visto que para la base calculada de 225m. la distancia mínima que se puede configurar con paralaje de 30m. es de 1500m., por consiguiente para una distancia menor, la paralaje tendrá que ser mayor que la fijada como límite, calculémosla:  $a = \frac{b.f}{Z} = \frac{225 \times 0.200}{1000} \approx 45\text{mm.}$ , paralajes no permitidas en estos casos, pero es difícil que se cometa el error anterior por tratarse de distancias relativamente pequeñas en que por lo general se estiman con más aproximación.

Si al elegir y calcular las bases, el operador con-

sidera que se debe configurar desde determinada distancia por ser la más importante, en este caso estimará la distancia mínima con la paralaje máxima y con esos valores calculará las bases, de este modo no se cometerá el error explicado en el párrafo anterior. Si con las magnitudes obtenidas para las bases en función de las distancias mínimas no se llegara a las máximas con paralajes favorables, sería preciso combinar dos bases de dimensiones proporcionales a las distancias, como se verá después.

La manera de calcular las bases tal como se ha explicado, es para obtener de los métodos fototopográficos la mayor precisión que con ellos se pueden construir los planos para proyectos técnicos, pero si se deseara una configuración para una carta geográfica o para dar idea de las formas del terreno únicamente, pueden ampliarse los límites de las paralajes desde 6 a 50mm. en la inteligencia de que las configuraciones que se hagan con paralajes más distantes de los límites de 10 y 35mm. merecen menor confianza. Las formas del terreno son las mismas en el plano que en la naturaleza, los errores consisten en pequeños desalojamientos en las posiciones relativas de puntos y zonas.

Veamos el rendimiento que puede dar un par de placas cuando con ellas se construye únicamente dentro de los límites de 10 y 35mm. en que las paralajes dan su máximo de precisión en la determinación de las distancias y cuando se continúa configurando con menor precisión hasta los límites de 6 y 50mm.

Por comodidad tomemos el ejemplo de la base de 225m. en que sabemos se puede configurar desde 1500m. con 30mm. hasta 3000m. con 15mm., ahora

calculemos con paralajes de 6 y 50mm.  $Z = \frac{b.f}{a} = \frac{225 \times 0.200}{0.006} \approx 7500\text{m.}; Z = \frac{225 \times 0.200}{0.050} \approx 900\text{m.}$

Nótese la gran diferencia en el rendimiento para las dos clases de trabajos.

Nota: Se habrá visto que los valores de la base y las distancias se han tomado aproximados pero no es necesaria mayor precisión. Para estas operaciones se usa regla de cálculo y su aproximación es suficiente. También se han repetido las fórmulas en cada caso sustituyendo después valores, ésto se hizo con objeto de comprender mejor la manera de obtener los resultados y para conocer las muchas combinaciones que con la expresión de las distancias se deben hacer en el cálculo de bases.

## TRABAJOS PRACTICOS

**C**ONTINUANDO con el sistema de mostrar en cada artículo un trabajo ejecutado por los procedimientos estereofotogramétricos, hoy se publica un plano de una parte del Río Tula en el Estado de Hidalgo, levantado por el Departamento Fototopográfico de la Comisión Nacional de Irrigación.

# ESTEREOFOTOGRAMETRIA TERRESTRE

## OPERACIONES DE CAMPO

RECONOCIMIENTO, ELECCION, LOCALIZACION Y ORIENTACION DE LAS BASES.  
BASES DOBLES O COMBINADAS.—TRABAJOS EN UNA ESTACION.

Por I. G. OROZCO.

Ingeniero Auxiliar del Departamento Fototopográfico  
de la Comisión Nacional de Irrigación.

**L**AS operaciones de campo en los trabajos estereofotogramétricos consisten en tomar pares de fotografías estereoscópicas en determinadas condiciones, en hacer los trabajos topográficos necesarios para fijar la posición de las bases y de puntos notables que aparezcan con claridad en las placas para que sirvan de referencia o comprobación en la formación del plano y finalmente, en nivelar topográficamente algunos puntos o estaciones para obtener las cotas de los demás, trigonométricamente.

El proceso en las operaciones se debe ajustar a un programa que facilite la buena marcha en los trabajos y evite la omisión de datos por olvido. La práctica ha demostrado que el mejor programa para esta clase de trabajos es el que a continuación se explica.

### RECONOCIMIENTO Y ELECCION DE LUGARES PARA BASES.

**L**O primero que se recomienda hacer, es un reconocimiento general de la región que se desea configurar. Si ésta fuera muy grande, se hará por zonas cuyas dimensiones quedan al criterio del operador, quien además de las necesidades técnicas, por comodidad, deberá tener en cuenta las condiciones más favorables para el cambio de campamento.

El reconocimiento debe hacerse rápidamente, utilizando los medios de transporte más expeditos, teniendo en cuenta que sólo se pretende conocer la región en conjunto, por ejemplo: si se trata de un valle, muchas veces es suficiente recorrer parte de él, tomando nota de las alturas que lo rodean y eligiendo a distancia las que se consideran más convenientes; otras veces únicamente se recorre parte de esas alturas y desde ellas se eligen los lugares opuestos, siempre que éstos no estén tan lejanos que se pierdan las formas de los cerros. En un cañón, boquilla, cañada, etc., con recorrer un lado eligiendo las estaciones opuestas es suficiente.

Al practicar el reconocimiento citado se debe dar especial atención a la topología del terreno para la localización de las estaciones, con objeto de que desde ellas se perciban todas las formas del terreno y den un buen rendimiento. También se estudiará con todo cuidado la manera más conveniente de apoyar o ligar los trabajos fotogramétricos con los topográficos o geodé-

sicos. Es conveniente y muy útil ir formando un croquis e indicar sobre él los lugares elegidos en donde se supone podrían localizarse bases favorablemente.

Los lugares probables para estaciones fotogramétricas que se eligen en el reconocimiento, no siempre pueden ser aprovechados; muchas veces sucede que al llegar a ellos se encuentran circunstancias no previstas que fué imposible ver antes, pues no hay que olvidar que el reconocimiento general se hace eligiendo desde grandes distancias los lugares probables. Cuando sucede ésto, el operador está obligado a elegir otro lugar, pero felizmente casi siempre se encuentra un nuevo sitio favorable muy próximo al elegido primitivamente.

Si se hacen las operaciones por zonas, la liga entre ellas se deberá tener con la misma precisión con que se practican todos los trabajos; las divisiones se hacen por comodidad en el campo, pero la precisión del plano del conjunto tiene que merecer el mismo grado de confianza en todas sus partes.

Es conveniente hacer la conexión entre las zonas por medio de estaciones fotogramétricas que a la vez sean vértices de triangulación, teniendo la precaución de que haya suficiente sobreposición de las fotografías últimas de una zona y primeras de la siguiente, para que en el gabinete se pase de una a otra sin interrupciones ni dificultades.

### LOCALIZACION Y ORIENTACION DE LAS BASES.

**L**OS instrumentos y útiles que se necesitan para estas operaciones, son los siguientes: prisma de reconocimiento, elisímetro, gemelos, regla de cálculo, material y pintura para señales y útiles de desmonte.

Terminado el reconocimiento general, irá el operador a cada uno de los lugares que ha elegido para localizar bases; como éstos no son definitivos, al estar en ellos se verá si son los más convenientes, teniendo en consideración los requisitos que deben llenar, como son: poca vegetación, para que no haya el peligro de que ésta impida al objetivo impresionar el paisaje; de lo contrario habrá que desmontar todo lo que sea necesario, con objeto de tener visibilidad en las formas y detalles del terreno que se desea configurar. Para conseguir esto último se buscan lugares suficientemente altos para las estaciones; también es preciso que las



condiciones del terreno permitan medir las bases de la magnitud calculada (en función de las distancias a las zonas de configuración, según se explicó en el cálculo de las bases) y además que tenga como máximo una inclinación de 10 grados; pero el operador siempre procurará apartarse lo menos posible de la posición horizontal.

Aparentemente son muchos los requisitos que hacen pensar que sea difícil encontrar los lugares deseados, pero ya estando en el campo se encuentran con relativa facilidad y quizá no solamente uno, sino varios que satisfagan esos requisitos, entre los cuales el operador elegirá el que considere mejor. Aunque también algunas veces se presentan casos en que se tienen grandes dificultades para llegar a encontrarlos por varias causas, por ejemplo: porque haya que desmontar en regiones casi boscosas, necesita caminar mucho por el cerro y forzosamente a pie para ir estudiando y buscando los lugares que más se aproximen a llenar los requisitos, etc. Muchas veces la mayor dificultad consiste en encontrar el único lugar en que pudiera localizarse la estación y no sería improbable que cuando es preciso hacerla en circunstancias desfavorables por las condiciones de la región, se obtenga una base forzada, en la que la mayor magnitud que pueda dársele sea más pequeña que la necesaria y tal vez tenga hasta fuerte pendiente. Si fuese materialmente imposible en-

contrar otro lugar en mejores condiciones, se hará en el que se encuentre, pero sólo se aprovechará con ciertos requisitos que se verán al tratar de las operaciones de gabinete.

Cuando se presenten casos como el anteriormente explicado, antes de proceder a hacer una estación forzada, siempre se estudiará cuidadosamente el lugar para convencerse de que realmente no hay otro. Algunas veces se hace esta clase de estaciones porque toca la coincidencia de que sean las que primero se encuentran y como a pesar de ser desfavorables es posible obtener algún provecho de ellas, el operador de poca buena voluntad las hace allí por ahorrarse el trabajo de recorrer más el cerro en busca de otro lugar mejor.

Lo anterior se evita cuando se tiene verdadero gusto y afición por esta clase de trabajos; así habrá empeño por hacer cuidadosamente las operaciones correctas para obtener todas las ventajas que proporcionan estos procedimientos, sin que haya el peligro de sacrificarlos por comodidad del fotogrametrista.

Las estaciones forzadas complican los trabajos de gabinete y restan precisión. Es verdad que para vencer las dificultades materiales que se presentan en las operaciones de campo, se requieren grandes esfuerzos por parte de los ingenieros y si fuera posible, sería conveniente resolver algunas de aquéllas en el gabinete, en donde el esfuerzo físico es menor y los trabajos se hacen con mayor comodidad, pero desgraciadamente esto no se debe hacer porque el trabajo que el operador cree ahorrarse en el campo, en el gabinete se manifiesta con pérdida de precisión, pues ya se ha dicho que cuando las paralajes salen de ciertos límites, la configuración va perdiendo precisión y una base que no tenga la magnitud necesaria, hace que fácilmente salgan de la tolerancia; además, cuando las bases tienen fuerte inclinación, al hacer la restitución de los pares estereoscópicos en el estereoautógrafo, con gran facilidad el autogrametrista pierde la estereoscopia, lo que hace imposible trazar una curva de nivel continua, sino únicamente con algunos puntos y con esto se pierde fidelidad en las formas del terreno.

Si es fuerte el desnivel en los extremos de las bases, hay algo más muy digno de tomarse en consideración: se pierde la estereoscopia y el autogrametrista lucha constantemente por encontrarla nuevamente para continuar el trabajo y mientras lo consigue, cada uno de sus ojos ve imágenes diferentes y el esfuerzo óptico que hace para combinar las dos perspectivas es muy grande y altamente perjudicial a la vista.

Se ha insistido en lo anterior, porque con frecuencia se presentan esos casos que se pueden llamar de fácil localización en terreno desfavorable, que inducen al operador a aceptarlos por comodidad, pero estas tentaciones deben de rechazarse por lo explicado.

Cuando se ha localizado el lugar en que deba estar una estación o base estereofotogramétrica, se calcula su magnitud y se orienta, o lo que es lo mismo, se

determina la dirección que deba tener para que las fotografías que desde ella se tomen se superpongan con las de la estación anterior, procurando que no quede alguna parte del terreno sin fotografiar.

La orientación de la base se hace con un pequeño instrumento llamado prisma de reconocimiento, que tiene un juego de prismas que permiten ver en tres direcciones: el extremo opuesto de la base a aquel del cual se ve y los límites izquierdo y derecho hasta donde abarcan las fotografías.

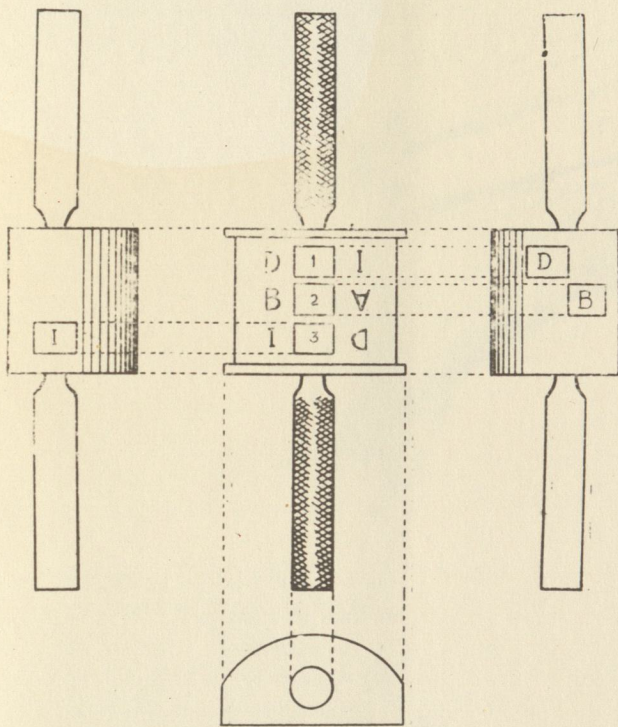


FIG. 1.

Un tipo de esta clase de instrumentos puede verse en la Fig. 1.—Está arreglado para tres pares estereoscópicos, uno normal (que sus ejes ópticos formen ángulo recto con la base) y los otros formando ángulos de 35 grados a la izquierda y derecha de la normal. Abarca un sector circular de 120 grados. Los números 1, 2 y 3 son los orificios por los cuales se ven las tres direcciones. El 1 con la D, indica el límite hacia la derecha; el 2 con la inicial B, define la dirección de la base (suponiendo que el observador estuviera situado en el extremo A) y el 3 con la letra I es el límite hasta donde abarcan las fotografías al lado izquierdo.

La Fig. 2 representa las direcciones indicadas vistas en proyección horizontal. Cuando las observaciones se hacen desde el extremo B, se invierte el prisma de reconocimiento para que las letras en cuya columna se encuentra A queden en posición correcta y ya en estas condiciones el caso es idéntico al explicado.

Terminadas las operaciones de localización, cálculo y orientación, se mide aproximadamente (a pasos)

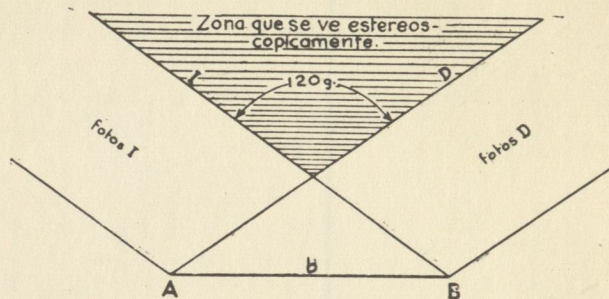


FIG. 2.

en la dirección fijada, la base que se ha encontrado en el cálculo. Uno de los extremos (de preferencia el izquierdo), se marca con una pequeña estaca clavada al ras del terreno, y si fuese difícil esta operación por lo duro del piso, se marca con pintura de aceite. Sobre la estaca o pintura se coloca verticalmente otra nueva estaca grande, de magnitud conocida e igual para todas las señales; para detener esta segunda estaca se forma a su derredor una mojonera de piedras y se blanquean (para lo que da muy buenos resultados la cal). La Fig. 3-1 es un dibujo que muestra la forma en que se

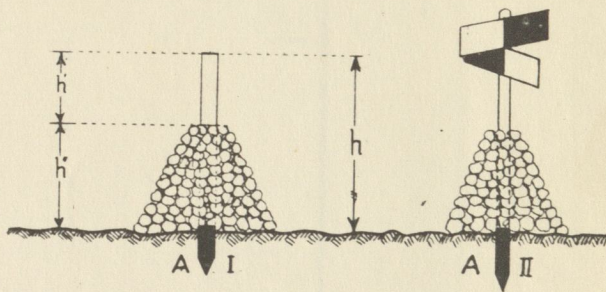


FIG. 3.

construyen las señales. Terminada la mojonera, se mide la magnitud  $h'$ ; el valor de  $h$  es conocido (es el tamaño de la estaca) y el de  $h''$  es:  $h'' = h - h'$ .

Es necesario conocer el valor de  $h''$  porque cuando la distancia desde la cual se ve, es grande, no es posible hacer la observación sobre la cabeza de la estaca sino únicamente en la mojonera, y como las cotas se dan sobre la superficie del terreno, hay que sumar o restar la altura  $h''$  a la del terreno, ya sea que la señal sirva como punto de control en el estereofotogrametría o para determinar su cota trigonométricamente midiendo el ángulo de altura sobre la mojonera. El otro extremo de la base medida a pasos, se marca provisionalmente con unas cuantas piedras (sin encalar), las que servirán únicamente para conocer la magnitud y dirección aproximadas.

Cuando se hace el reconocimiento, y al localizar las bases, se estiman las distancias hasta donde es preciso hacer la configuración; la experiencia aconseja que

si éstas no exceden de 3 kms. conviene que las estacas grandes sean de  $h = 1m.$  y las mojoneras  $h'' = 60$  u 80 cm.

Es natural que mientras más grandes sean las estacas y mojoneras, con mayor facilidad se vean y con esto las distancias pueden ser mayores, pero haciéndolas de las dimensiones indicadas, hay la ventaja de que cuando se efectúan las operaciones de tránsito y las fotogramétricas, no es necesario mover las estacas ni destruir las mojoneras, se montan los tripiés sobre ellas, como se ve en la Fig. 3-III; de este modo, ade-

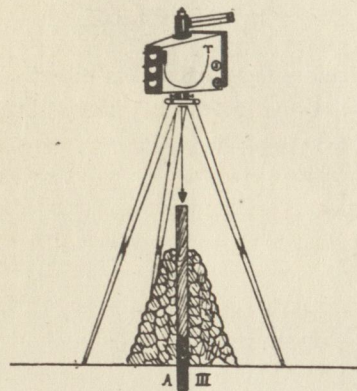


FIG 3

más de ser muy práctico el trabajo, porque ya no hay que perder tiempo en quitar y poner las señales, el cierre de los triángulos se obtiene con gran precisión, porque prácticamente el punto de observación y el de centramiento es el mismo. Cuando las distancias sean mayores de 3 Kms., pero que no excedan de 5 Kms., pueden utilizarse señales como las que muestra la Fig. 3-II, que aparecen claramente sobre las fotografías hasta esa distancia, cuando hay buena iluminación en el momento de tomarlas. Esta clase de señales tiene el inconveniente de no poder montar sobre ellas los tripiés, por lo que hay necesidad de quitarlas y aún destruir las mojoneras al hacer las operaciones en cada estación y volverlas a colocar al terminar; otros inconvenientes se han presentado en la práctica: siendo más visibles, las destruyen o tiran los transeúntes, su costo es grande, principalmente si son desarmables, es beroso y difícil su transporte, sobre todo cuando hay que ascender a varios cerros de gran altura, boscosos y de fuerte pendiente. Si las distancias fuesen mayores de 5 Kms., se colocarán señales semejantes a las de triangulación para los trabajos de apoyo o liga y para puntos de control de las fotografías se elegirán casas, árboles notables o con detalles característicos, cruzamientos o inflexiones de cercas, etc., etc.

Al localizar las estaciones, el operador procurará que éstas sirvan también como vértices de triangulación y aún como puntos de comprobación o control para las estaciones que están frente a ellas. Con esto se ganará tiempo y precisión; no serán necesarias más operaciones topográficas de apoyo y el cálculo de sus co-



ordenadas se obtendrá con la precisión de la triangulación, sin necesidad de recurrir a otros procedimientos como situación por tres vértices, poligonación, etc. No sería posible situar una estación fotogramétrica por intersecciones, porque no se trata de fijar un punto, sino de conocer también la dirección de la base orientada con respecto al sistema de apoyo y para esto es necesario hacer estación de tránsito en el extremo en que se encuentra la señal.

Algunas veces no se podrá lograr que las estaciones solas formen todos los vértices de la red de triangulación y en ese caso se localizarán los lugares más convenientes en que deban fijarse los vértices que no sean estaciones, y sobre ellos también se colocarán señales como las indicadas, siempre que haya probabilidad de que se aprovechen como puntos de control; pues de lo contrario se pondrán simples señales de triangulación, sin monumentos enclavados.

Como el operador al hacer el reconocimiento marca en su croquis aproximadamente el lugar en donde queda situada cada estación, al terminar de construir la señal sólo anotará en su libreta de registro el número que le corresponde, nombre del lugar si lo tuviere; la magnitud que ha calculado para la base, la altura  $h'$  de la señal y algunas observaciones y dibujos para facilitar la manera de encontrarlas desde otras estaciones, identificarlas y no confundirlas.

El objeto del elisímetro en la localización de estaciones, es para conocer aproximadamente la inclinación de la base, principalmente en regiones muy accidentadas en que haya el peligro de que salga de la tolerancia permitida; además, cuando la zona por configurar es muy estrecha, como en los cañones, boquillas, etc., se debe dar a la estación la altura conveniente para que aparezca en la fotografía todo el terreno cuyo plano se desea. Por ejemplo: si se tuviera que localizar la estación en la falda de un cerro y por su pie pasara un río que se necesitara configurar; al localizar la estación se deberá tener especial cuidado de que las visuales más bajas formen con su proyección horizontal un ángulo menor o cuando mucho igual al que abarque la cámara (que es conocido y constante para cada equipo); si el ángulo medido con el elisímetro fuera mayor, habría que ir bajando, midiendo constantemente dicho ángulo, hasta que estuviera dentro de los límites y hasta entonces sería cuando se fijara la estación y se colocara la señal.

#### BASES DOBLES O COMBINADAS:

CON frecuencia se presenta el caso en que hay puntos o detalles importantes, unos próximos y otros distantes de una estación, que podrían situarse o configurarse con ella misma; pero esto no sería posible hacer con una sola base de determinada magnitud, porque, como se sabe, las paralajes están en función de las distancias y en el caso citado éstas últimas serán muy pequeñas para unos puntos y muy

grandes para otros, y por consiguiente tendrían que ser las paralajes desfavorables en sus máximos y mínimos.

Si la base se calcula partiendo de las distancias más próximas, casi es seguro que no se llegue a las más lejanas con paralajes favorables y vice-versa; si se calculara la base en función de una distancia media, no se podrían configurar los extremos; por consiguiente, la única solución es hacer dos bases de diferente magnitud para poder configurar toda la región con la misma precisión. Estas dos bases pueden ser combinadas para ahorrarse los trabajos de una nueva estación independiente y algunas veces hasta se economiza material fotográfico.

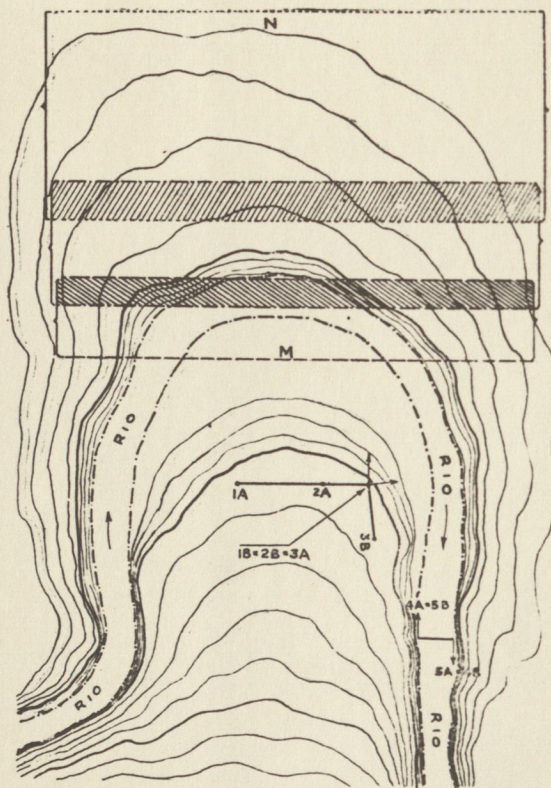


FIG. 4.

La Fig. 4 muestra tres casos de bases dobles o combinadas, que pueden presentarse. Uno de ellos es el explicado anteriormente, en que son necesarias dos bases; éstas pueden hacerse una a continuación de la otra en una misma línea recta, como están los puntos 1A, 2A, (1B = 2B = 3A). Se supone que se necesita configurar desde M hasta N. Se calcula una base para las distancias más grandes; se fija uno de sus extremos y se determina la dirección que deba tener; en esta dirección y alineando con el tránsito, se fija un nuevo punto a una distancia aproximada de un tercio de la longitud total, la que puede medirse a partir de cualquiera de los extremos, procurando elegir el que más convenga para las fotografías. Desde los extremos de la base y del punto intermedio se toman fotografías haciendo que los ejes ópticos sean paralelos entre sí para cada grupo de tres vistas, con lo que se podrán

formar tres pares estereoscópicos con bases de diferente magnitud. Se tendrá una base grande, cuyos extremos son 1A y (1B = 2B = 3A), con la que se podrá configurar favorablemente la faja marcada en la Fig. 4 con una llave y las iniciales 1A-1B, una base media con la que se puede configurar la faja 1A-2A y una pequeña 2A 2B para configurar a las distancias más cortas. Con la combinación de las tres bases se podrá configurar todo el terreno que aparece en las fotografías. Las fajas achuradas representan la sobreposición entre las configuraciones de las diferentes bases.

En la misma Fig. 4, hay otras dos clases de estaciones dobles o bases combinadas, una que tiene un extremo común con la explicada anteriormente y otra, que siendo la misma base, se aprovecha para tomar fotografías hacia adelante y hacia atrás.

Las bases de extremo común, no siempre permiten ahorrar operaciones fotográficas, pero sí topográficas, porque para fijar la posición de las dos se hace una sola estación de tránsito centrando en el extremo común. Esta clase de estaciones se hace cuando el terreno cambia de dirección rápidamente como en el esquema de la Fig. 4, lo que obliga al fotogrametrista a hacer bases muy próximas entre sí. En esta misma figura se ha marcado el extremo común de las dos bases con las iniciales 1B = 2B = 3A (que es como se anota en el registro), lo que quiere decir que es a la vez extremo derecho para las bases 1 y 2 e izquierdo para la 3.

En la otra clase de bases combinadas se aprovecha la misma base en magnitud y dirección, tomando fotografías hacia a uno y otro lado. Esta base, que puede verse en el lecho del río, tiene marcados sus extremos como las iniciales 4A = 5B y 5A = 4B que es un caso semejante al explicado con respecto a los significados; cada extremo es a la vez izquierdo y derecho de una y otra dirección. En esta clase de estaciones las operaciones de tránsito pueden hacerse en cualquiera de los extremos. Las fotografías tomadas en ella servirán para configurar dos zonas a lo largo del río, divididas por el lugar en donde está localizada la esta-

ción; para completar el plano es necesario fotografiar desde otra estación ese lugar que queda entre las zonas; y la propia estación servirá para punto de control. También estas clases de estaciones ahorran operaciones topográficas y además cuando hay poca vegetación en el lecho del río, permiten dar muchos detalles con gran precisión. Algunas veces, cuando el terreno por fotografiar es muy alto, es preciso tomar fotografías con las mismas direcciones en sus ejes, pero con diferentes alturas de los objetivos, pero éstas no se consideran como estaciones dobles.

#### TRABAJOS EN UNA ESTACION ESTEREO-FOTOGAMETRICA.

**C**UANDO se ha preparado el terreno, localizando bases, vértices de liga y puntos de control, encajadas todas las señales para que sean fácilmente visibles en las fotografías y con el tránsito (cuando menos entre las más próximas para ir ligándolas), puede decirse que se habrá ejecutado casi la mitad del trabajo, ya se sabe cómo quedarán ligadas las estaciones para proceder al cálculo de sus coordenadas y se tendrá absoluto conocimiento de que las fotografías abarcarán en alturas todas las partes importantes y habrá buena sobreposición entre ellas, sin que haya el peligro de que quede alguna parte del terreno sin fotografiar.

El equipo necesario para las operaciones en una estación estereofotogramétrica, es el siguiente: Tránsito y cámara con dispositivo de orientación o simplemente un fototeodolito; por lo menos tres tripiés, una cinta de acero (de preferencia de 50 m. o mayor), un estadal, una baliza, útiles de desmonte y pintura por si alguna de las mencionadas no hubiera quedado lo suficientemente clara o para hacer nuevas marcas.

Para comenzar los trabajos en una estación, se coloca un tripié en cada extremo de la base; si es doble o combinada se colocará uno en cada punto que se tome como extremo. Si la base no fuera mayor de 50 m. se medirá aproximadamente con la cinta la magnitud calculada para fijar de manera definitiva el extremo que se señaló provisoriamente al localizarla y también se marcará con una pequeña estaca clavada al ras, pero sin la señal. Esta primera medida con cinta no es para tener con precisión la magnitud de la base, sino para encontrar el lugar en donde debe estar el otro extremo, con relativa aproximación; por ejemplo, un error de 2% no es de importancia. Si la magnitud de la base es mayor que la longitud de la cinta, se estima la distancia con estadia y tanto en este caso como cuando se mide aproximadamente con la cinta, se volverá a hacer la medida con toda precisión cuando estén colo-

cados los tripiés, que definen perfectamente bien los extremos de las bases.

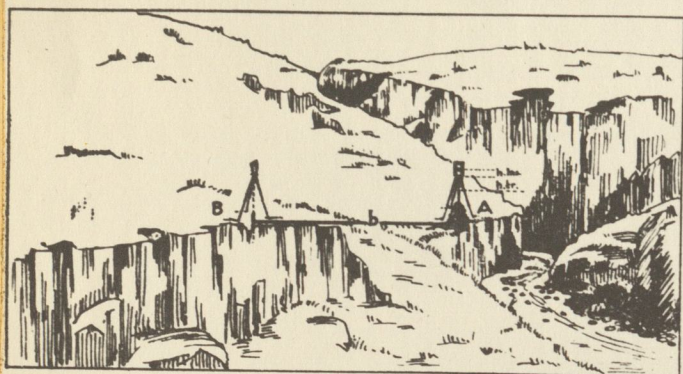


FIG. 5.

La Fig. 5 muestra una base en cuyos extremos se han colocado los tripiés. Sobre el que está en el extremo de la mojonera se coloca el tránsito o fototeodolito y se hace una radiación dirigiendo visuales a todas las mojoneras que sea posible ver desde ahí y además tomando las direcciones a puntos notables que aparecerán en las placas y que puedan verse desde otras estaciones para fijarlos por intersecciones y calcular sus coordenadas. Ya se ha dicho que estos puntos pueden ser casas, iglesias, árboles, esquinas de cercas, etc., etc. La elección de estos puntos se debe hacer, no únicamente para que aparezcan en las fotografías tomadas desde la estación en donde se hace la observación sino de todos los que puedan ser útiles para el trabajo y aparezcan fotografiados desde las otras estaciones.

Antes de comenzar la radiación, es conveniente hacer la coincidencia de la graduación en 100 g. (I) si la estación de tránsito se hace en A; y en 300 g. si se hace en B; siempre se debe tomar como origen el extremo opuesto de la base y se da la vuelta de horizonte en el sentido de las manecillas del reloj. La ventaja que hay en la coincidencia de la graduación y en partir de ese origen, consiste en hacer que la dirección de los 400 g. o cero, sea normal a la base para que en el gabinete sea fácil saber en qué par de placas estará algún punto de control o estación, con sólo ver en el registro de campo el ángulo de dirección sin hacer ningunos cálculos.

La Fig. 6 es un modelo de registro de campo, correspondiente a las estaciones 9 y 10 (combinadas con extremo común) cuyo plano se publica (II).

La medida de los ángulos debe hacerse en posiciones directa e inversa. El círculo de alturas da distancias zenitales y por lo tanto, al exceso de cualquier

(I).—Las amplitudes angulares se refieren a graduación centesimal; para distinguirla de la sexagesimal, los grados, minutos y segundos se anotarán con las iniciales g, m, s.

(II).—Esta clase de registro ya no es práctico para usarse con los últimos modelos de aparatos en que con una sola lectura se tiene el promedio de los vernieres con la aproximación de segundo. Estos se hicieron para instrumentos de dos vernieres de un minuto de aproximación.

lectura mayor de 100 g. (en directa) se le pondrá el signo menos, para indicar que su altura es menor que la del punto de observación y se escribirá en el renglón destinado a promedios.

Terminada la radiación se continúa con las fotografías. A pesar de que se ha recomendado hacer los trabajos siempre en el mismo orden, según un programa fijo, no es posible sujetar a ese criterio las operaciones de tránsito y fotografías (es el único caso); el orden depende de las condiciones atmosféricas en el momento de ejecutar los trabajos. Muchas veces, al llegar a la estación, la luz es favorable para fotografiar y desde luego se procede a tomar las fotografías; en cambio, puede ser que la iluminación sea mala y en-

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION					
DEPARTAMENTO FOTOTOPOGRAFICO					
REGISTRO DE					
Form. 11					Nro.
A.tr	0.96	Estación	10 B - 9A		
	0.25	Nombre y situación	Comales en el Rio Laguna		
A.ins	1.21	Fecha	VII - 29		Operador: I G Orozco
Medidas angulares					
Puntos Observados	Iz	Dr	Angulo horizontal		Angulo vertical
			I	II	A
10 A	Iz	300.00.00			97.13.45
	Dr	300.00.20			102.06.35
11 B	Iz	323.51.16			103.43.07
	Dr	323.51.30			96.55.90
P-1	Iz	326.14.90			103.74.66
	Dr	326.14.30			96.25.10
P-2	Iz	335.47.01			100.00.23
	Dr	335.47.10			95.95.00
P-3	Iz	352.95.58			105.62.00
	Dr	352.95.40			94.37.00
1-A	Iz	381.58.18			101.64.57
	Dr	381.58.30			98.30.24
Vertice de $\Delta$ 10	Iz	392.80.29			93.95.31
	Dr	392.80.50			106.04.00
P-4	Iz	12.81.86			119.56.62
	Dr	12.82.95			80.43.10
2-B	Iz	21.71.77			102.02.23
	Dr	21.71.90			97.97.77
4A	Iz	63.88.08			101.53.58
	Dr	63.88.24			98.06.60

A.tr=Altura del tripié. A.ins=Altura del instrumento  
+ Altura del aparato sobre el tripié

continúa la triangulación

Fig 6

tonces se comienza con la radiación para dar tiempo a que mejore la luz, aunque también algunas veces empeora, y es necesario aplazar las fotografías para otro día en que la iluminación sea buena, entre tanto se hace el resto de los trabajos y sólo se dejan pendientes las operaciones fotográficas.

La Fig. 6a es un modelo de registro para los trabajos de fotografía y se encuentra al dorso del registro de tránsito de la Fig. 6. Ya se conoce el significado de las letras A y B; estas mismas letras, seguidas de las iniciales L o R indican que el eje óptico está a 35g. a la izquierda (AL, BL) o a 35 g. a la derecha de la normal, (AR BR); si están solas significa que el eje óptico forma ángulo recto con la base.

Los datos del registro de la Fig. 6a, se refieren a un equipo fotogramétrico en que el tránsito y la cámara son independientes; ésta última tiene un dispo-

sitivo de orientación que solamente permite dar al eje óptico ángulos fijos con respecto a la base y en tres direcciones: normal y 35 g. a la izquierda y derecha de ella. También tiene tres objetivos en posición vertical, como lo muestra la Fig. 3-III, de alturas fijas y conocidas, por lo cual en el renglón correspondiente a la posición del objetivo en mm. únicamente se anota el número correspondiente al que fué utilizado. En la última columna se anota la hora y condiciones atmosféricas en el momento de tomar las fotografías, con objeto de comparar estos datos con los que da la tabla de exposiciones, para saber si ésta no tiene que modificarse por las condiciones especiales de la región.

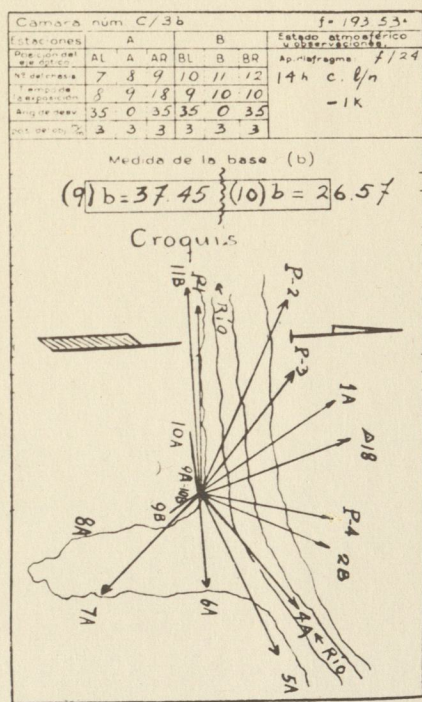


Fig 6a

Por los datos del registro, se ve que las fotografías se tomaron a las 14 horas; las iniciales c. l/n significan: cielo ligeramente nublado y -1k que la zona por configurar está a una distancia aproximada menor de un kilómetro.

El tiempo de exposición puede calcularse por medio de tablas o exponiómetros, pero para mayor seguridad del autogrametrista, es conveniente hacer una prueba fotográfica con una o varias placas, que expondrá en las mismas condiciones atmosféricas y de luminosidad con diferentes tiempos de exposición. Reveladas las placas se ven los tonos. Cuando se elige el más conveniente se compara el tiempo que se le dió con el que se obtiene por medio de las tablas para las mismas condiciones; si estos valores son muy próximos entre sí, ya con seguridad se podrán usar siempre las tablas en aquella región, pero si la diferencia es fuerte y se tiene absoluta seguridad de haber hecho las operaciones de prueba correctamente, se ve la diferencia

entre los dos valores y se utiliza la tabla corrigiendo proporcionalmente sus valores cada vez que se haga uso de ellas.

Se dijo que la prueba anteriormente explicada podía hacerse con una sola placa, lo que se consigue recorriendo la cortina del chasis en partes, fotografiando la placa en cada tramo descubierto, para que tengan diferente exposición; la primera tendrá el doble de la segunda, el triple de la tercera y así sucesivamente.

Terminados los trabajos en la estación, el operador no debe retirarse hasta que se haya convencido de que no falta ningún dato ni operación. Para esto hará una rápida revisión de su registro, procurando que todas estas investigaciones se hagan siempre en el mismo orden; por ejemplo: obtendrá las diferencias de los ángulos azimutales entre las lecturas directa e inversa; si éstas no exceden de 10 s las dará por correctas; si fueren mayores, repetirá las observaciones a esos puntos (el tránsito o fototeodolito no se quita del tripié hasta que se haya hecho la revisión del registro, para que inmediatamente se repita la lectura o lecturas incorrectas). La comprobación respecto a los ángulos de altura se hará sumando las dos lecturas correspondientes a cada punto (directa e inversa) y la suma tendrá que ser igual a 200 g, permitiendo tolerancia de 10s. Terminada la revisión de las magnitudes angulares, se hará la de las lineales: que esté anotada la medida de la base (el promedio de dos lecturas referente a dos medidas con la cinta de acero hechas al cm. y con el mayor cuidado posible); las alturas de los tripiés se anotan en una columna especial cuando se trata de la estación desde la cual se hace la radiación y en la columna de los croquis las demás; estas alturas se tomarán de las cabezas de las estacas a las plataformas de los tripiés, las alturas de los instrumentos son constantes y conocidas.

Cuando se han hecho las operaciones en las estaciones fotogramétricas, las radiaciones en los vértices de liga y nivelado topográficamente algunos puntos (de preferencia estaciones), estará terminado el trabajo de campo y listo para calcular las coordenadas de las estaciones y vértices, después ya se podrá proceder a la formación del plano con los aparatos de evaluación o restitución.

El plano que se publica como ejemplo de una aplicación práctica de los procedimientos estereofotogramétricos, fué levantado por el Depto. Fototopográfico de la Comisión Nacional de Irrigación. Muestra la configuración de una boquilla llamada de Los Corrales, en el Río Lerma, a 25 kilómetros aproximadamente de La Piedad, Mich.





