



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

Desarrollo y validación del modelo  
matemático de una plataforma  
experimental para procesos de  
transferencia de calor

TESIS

Que para obtener el título de  
Ingeniero Eléctrico Electrónico

PRESENTA

Rodrigo Robledo Castillo

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Hoover Mujica Ortega



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024



Jurado asignado

Presidente: Dr. Rafael Iriarte Vivar-Balderrama

Secretario: M.A. Luis Yair Bautista Blanco

Vocal: Dr. Hoover Mujica Ortega

1<sup>er</sup> suplente: Dr. Roberto Giovanni Ramírez Chavarría

2<sup>do</sup> suplente: Dra. Anahí Flores Pérez

Ciudad Universitaria, Departamento de Control y Robótica, Laboratorio de  
Automatización.

Ciudad de México.

Director de tesis

---

Dr. Hoover Mujica Ortega



## Dedicatoria

A mi madre Gaby quien siempre me guía y me apoya con todo su esfuerzo y cariño.

A mi padre Ricardo que me ha transmitido valores y conocimientos muy importantes.

A Ricky que es lo máximo.

Con mucha gratitud por todo su apoyo a mis tíos Lucy, Rosy, Rafa y Alex.

A los amigos con los que siempre pude contar a lo largo de esta carrera: Johan, Carlos y Luis Juárez;  
con los que trabajar, aprender y convivir siempre fue significativo y ameno.



## Agradecimientos

A la UNAM, a la Facultad de Ingeniería y a las instituciones que me han dado la oportunidad de formarme.

A mi asesor y profesor, el Dr. Hoover por su apoyo y asesoría en este trabajo.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la UNAM por el apoyo y la beca brindada en el Proyecto UNAM-PAPIME PE109121.



## Resumen

En este trabajo se desarrolló un modelo matemático en parámetros concentrados, expresado en un sistema de 6 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para describir la dinámica de una plataforma experimental de procesos de transferencia de calor.

En la industria los sistemas de transferencia de calor están presentes en áreas de alta relevancia, por nombrar algunas, la industria del plástico, metalúrgica, automotriz, en procesamiento de alimentos y sistemas de refrigeración, donde frecuentemente se busca controlar niveles de temperatura para garantizar que los procesos se lleven a cabo adecuadamente. En la actualidad, existe la necesidad de optimizar los costos y el consumo de energía en estos procesos lo cual en gran parte puede lograrse con mejores estrategias de control y un mayor entendimiento de este tipo de sistemas.

Dada la importancia de estos procesos, en el Laboratorio de Automatización de la Facultad de Ingeniería se desarrolló en trabajos anteriores una plataforma de transferencia de calor que, siguiendo un enfoque industrial, permite reforzar el aprendizaje en temas de control y automatización, así como explorar de forma práctica el desempeño y cualidades de distintas estrategias. La plataforma consta de un sensor de temperatura IFM TD2231, el cual se calienta por la acción de una lámpara de halógeno de 20 Watts que está adyacente a él. Estos componentes están montados y contenidos en una estructura de Fibropanel de densidad media (MDF, por sus siglas en Inglés), de forma que además es posible regular la distancia de la lámpara al sensor con un micrómetro de profundidad y enfriar al sistema con un ventilador de golpe radial. Las temperaturas en el vidrio de la lámpara, el aire y las paredes de MDF se miden por medio de termopares tipo K. Todos los componentes están debidamente acondicionados en un circuito electrónico para interactuar con el sistema a través del controlador de automatización programable *ControlLogix L81E*.

El siguiente paso para consolidar la plataforma es un modelo matemático del sistema en el que se pueda simular su respuesta de forma suficientemente representativa y que mantenga validez en distintos escenarios, una de las características que debe tener el modelo es estar expresado en parámetros concentrados para simularlo y aprovecharlo con facilidad. Para lograr esto se contemplaron a detalle los mecanismos de transferencia de calor y las propiedades físicas de los materiales. El modelo se desarrolló considerando las mediciones en los 4 sensores de temperatura como estados y a la lámpara de halógeno como actuador. El modelo se representó en el software MATLAB - Simulink, en donde se pueden aplicar condiciones iniciales y señales de entrada al actuador para simular la respuesta del sistema real. A través del software *Studio 5000 Logix Designer* el modelo también se implementó en el controlador con el fin de que la interacción sea en el mismo entorno en el que está configurada la plataforma.

Para validar el grado en que la dinámica del modelo se aproxima a la real se realizaron 10 experimentos bajo distintos escenarios en los que tanto el modelo matemático como la plataforma real recibieron el mismo estímulo. Tomando como referencia los valores adquiridos por el controlador y comparando los valores simulados, la validación se llevó a cabo usando como métrica el Coeficiente de variación de la raíz del error cuadrático medio, o  $CV(RMSE)$  donde se estableció que para que la simulación de cada temperatura fuera aceptable, su  $CV(RMSE)$  no tendría que exceder el límite del 20% en los experimentos realizados.

Con los valores obtenidos de la métrica de validación se concluyó que el modelo matemático desarrollado en este trabajo es satisfactorio para simular los estados de la temperatura en el vidrio y el sensor de temperatura IFM TD2231, que son los dos estados más relevantes del sistema por lo que el modelo se puede emplear para evaluar estrategias de control y entender comportamientos físicos en procesos de transferencia de calor y abre la posibilidad de que en trabajos futuros se utilice para realizar implementaciones de control basadas en modelo o generar un gemelo digital en un entorno virtual que favorezca la interacción con la simulación y provea un flujo de datos automático y bidireccional a la plataforma física.

# Índice general

Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xv
Acrónimos	xvii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	5
1.3. Formulación del problema . . . . .	5
1.4. Objetivos . . . . .	6
1.4.1. Objetivo general . . . . .	6
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	6
1.5. Contribuciones . . . . .	6
1.6. Organización de la tesis . . . . .	7
<b>2. Fundamento teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Transferencia de calor . . . . .	9
2.1.1. Leyes de la termodinámica . . . . .	9
2.1.2. Mecanismos de transferencia de calor . . . . .	10
2.1.3. Transferencia de calor por conducción . . . . .	10
2.1.4. Transferencia de calor por convección . . . . .	12
2.1.5. Transferencia de calor por radiación . . . . .	16
2.1.6. Modelado en parámetros concentrados . . . . .	19
2.2. Elementos del sistema térmico y sus características . . . . .	20
2.2.1. Lámpara de halógeno . . . . .	20
2.2.2. Radiación sobre el vidrio de la lámpara . . . . .	25
2.2.3. Radiación sobre las paredes de MDF . . . . .	25
2.2.4. Sensor de temperatura IFM TD2231 . . . . .	26
2.2.5. Termopares tipo K . . . . .	28
<b>3. Desarrollo del modelo matemático</b>	<b>33</b>
3.1. Elementos relevantes y materiales . . . . .	33
3.1.1. Consideraciones y descripción de las partes que integran al sistema . . . . .	34
3.1.2. Descripción de la transferencia de calor entre los elementos del modelo . . . . .	35
3.1.3. Variables de índice de transferencia de calor entre cuerpos del sistema . . . . .	35

3.2.	Propiedades de los elementos . . . . .	37
3.2.1.	Propiedades físicas de los materiales . . . . .	37
3.2.2.	Medidas de los elementos del sistema . . . . .	37
3.2.3.	Coefficientes de convección aproximados . . . . .	39
3.3.	Obtención de resistencias y capacitancias térmicas . . . . .	40
3.3.1.	Resistencias térmicas . . . . .	41
3.3.2.	Otras resistencias térmicas . . . . .	43
3.3.3.	Capacitancias térmicas . . . . .	43
3.4.	Obtención de otras dinámicas . . . . .	44
3.4.1.	Disipación de calor en el filamento de tungsteno . . . . .	44
3.4.2.	Resistencia térmica entre el filamento y el exterior del vidrio . . . . .	45
3.4.3.	Resistencia térmica entre el exterior del vidrio y el aire . . . . .	46
3.4.4.	Resistencia entre el vidrio, el aire cercano y el sensor . . . . .	46
3.4.5.	Radiación del filamento a las paredes . . . . .	49
3.5.	Modelo matemático del sistema . . . . .	49
3.6.	Analogía eléctrica del modelo de transferencia de calor . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Evaluación y validación</b>	<b>53</b>
4.1.	Experimentos en lazo abierto con entrada escalón . . . . .	53
4.2.	Experimento con señal variante en el tiempo . . . . .	59
4.3.	Validación . . . . .	61
4.3.1.	Métrica de validación: coeficiente de variación de la raíz del error cuadrático medio	61
4.3.2.	Validación con coeficiente de variación de la raíz del error cuadrático medio . .	65
4.4.	Discusión . . . . .	65
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>67</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	67
5.2.	Trabajo futuro . . . . .	68
	<b>Referencias</b>	<b>69</b>

# Índice de figuras

1.1. Plataforma de transferencia de calor . . . . .	3
1.2. Compartimento del circuito impreso . . . . .	4
2.1. Transferencia de calor por conducción . . . . .	11
2.2. Transferencia de calor por convección . . . . .	12
2.3. Haz incidente en un medio . . . . .	17
2.4. Comportamiento de la temperatura en sistemas de parámetros concentrados y distribuidos	19
2.5. Fotografía de la lámpara de halógeno . . . . .	21
2.6. Dimensiones del vidrio de la lámpara de halógeno . . . . .	21
2.7. Regiones de temperatura en una lámpara de halógeno . . . . .	22
2.8. Emisividad total del tungsteno . . . . .	23
2.9. Resistividad . . . . .	24
2.10. Radiación de un cuerpo negro a distintas temperaturas y longitudes de onda . . . . .	26
2.11. Fotografía del sensor TD2231 . . . . .	27
2.12. Medidas de la sonda de acero del sensor TD2231 . . . . .	28
2.13. Fotografía de un termopar tipo K . . . . .	28
2.14. Efecto Seebeck . . . . .	30
2.15. Representación básica de un termopar . . . . .	30
2.16. Curva de Seebeck del termopar tipo K para 0 a 500°C . . . . .	31
3.1. El índice de transferencia de calor a la sonda tiene un comportamiento distinto según la distancia . . . . .	47
3.2. Representación de la resistencia entre el vidrio, el aire cercano y el sensor . . . . .	47
3.3. Analogía eléctrica del modelo de transferencia de calor . . . . .	51
4.1. Configuración de equipos para realizar los experimentos . . . . .	54
4.2. Experimento 1 - Actuador encendido al 100 % por 10 minutos con la lámpara en contacto con el sensor TD2231 . . . . .	55
4.3. Experimento 2 - Actuador encendido al 100 % por 10 minutos con la lámpara separada a 2 mm del sensor TD2231 . . . . .	55
4.4. Experimento 3 - Actuador encendido al 100 % por 10 minutos con la lámpara separada a 5 mm del sensor TD2231 . . . . .	56
4.5. Experimento 4 - Actuador encendido al 50 % por 10 minutos con la lámpara en contacto con el sensor TD2231 . . . . .	56
4.6. Experimento 5 - Actuador encendido al 50 % por 10 minutos con la lámpara separada a 2 mm del sensor TD2231 . . . . .	57

---

4.7. Experimento 6 - Actuador encendido al 50 % por 10 minutos con la lámpara separada a 5 mm del sensor TD2231 . . . . .	57
4.8. Experimento 7 - Actuador encendido al 25 % por 10 minutos con la lámpara en contacto con el sensor TD2231 . . . . .	58
4.9. Experimento 8 - Actuador encendido al 25 % por 10 minutos con la lámpara separada a 2 mm del sensor TD2231 . . . . .	58
4.10. Experimento 9 - Actuador encendido al 25 % por 10 minutos con la lámpara separada a 5 mm del sensor TD2231 . . . . .	59
4.11. Sintonización del bloque PID en software <i>Studio 5000 Logix Designer</i> . . . . .	60
4.12. Rutina <i>Ladder</i> para acción con controlador PID . . . . .	60
4.13. Prueba con señal de controlador proporcional, integral y derivativo (PID) . . . . .	61
4.14. Errores CV(RMSE) en los distintos experimentos con entrada escalón . . . . .	64

# Índice de tablas

3.1. Índices de transferencia de calor entre cuerpos del sistema . . . . .	35
3.2. Propiedades de los materiales . . . . .	37
3.3. Medidas del filamento de tungsteno . . . . .	38
3.4. Medidas del vidrio de la lámpara . . . . .	38
3.5. Medidas de la sonda TD2231 . . . . .	39
3.6. Medidas consideradas para el aire . . . . .	39
3.7. Medidas para las paredes de MDF . . . . .	39
3.8. Coeficientes de convección . . . . .	40
3.9. Parámetros y variables análogos entre el modelo térmico y un sistema eléctrico . . . . .	52
4.1. Errores CV(RMSE) para el experimento con señal de controlador PI . . . . .	65



# Acrónimos

**MDF** Fibropanel de densidad media. IX, XI, XV, 2, 25, 26, 28, 33, 35, 37, 39, 42, 44, 45, 46, 49

**CV(RMSE)** Coeficiente de variación de la raíz del error cuadrático medio. X, XIV, XV, 6, 62, 63, 64, 65, 66, 67

**PID** Controlador proporcional, integral y derivativo. XIV, 1, 3, 60, 61, 68

**PAC** Controlador de automatización programable. 2, 3, 6, 45, 59

**FEM** Fuerza electromotriz. 29, 30

**MAE** Error absoluto medio. 61, 67

**RMSE** Raíz del error cuadrático medio. 61, 62, 67

**OPC** Estándar de Comunicaciones de Plataforma Abierta, se usa ampliamente para la comunicación en sistemas de automatización industrial.. 68



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Se le llama sistemas térmicos a aquellos que están ampliamente gobernados por los principios de transferencia de calor, termodinámica y mecánica de fluidos. Este tipo de sistemas se encuentran frecuentemente en la industria en aplicaciones de mucho interés, por nombrar algunas áreas aparecen en sistemas energéticos, en la industria del plástico, metalúrgica, automotriz, en procesamiento de alimentos y sistemas de enfriamiento y refrigeración ([Kulacki, 2008]). Por la naturaleza física estos procesos los tiempos de respuesta suelen ser lentos con **tiempos de asentamiento largos**. Este es un efecto que se incrementa con el volumen y es muy notorio en procesos industriales. Sumado a esto, no siempre es posible colocar sensores de temperatura para medir todos los puntos de interés y las mediciones pueden presentar cierto retraso con respecto a la temperatura en otros puntos del proceso, a este tipo de retraso se le conoce como **tiempo muerto**. Estas dos características provocan incertidumbre y representan una dificultad para la sintonización de controladores del tipo PID que se mantienen como un algoritmo de control ampliamente utilizado ([Somefun, *et al.*, 2021]). Para evitar fallas o defectos en los productos, en la industria se puede optar por estrategias que disminuyan sustancialmente el rendimiento o la eficiencia del proceso como se menciona en el caso de un gasoducto en la revista *Automation Today* edición 58 ([Rockwell-Automation, 2023]).

Conociendo estas situaciones, aún existe un gran espacio en el que se pueden mejorar las técnicas de control y en consecuencia el rendimiento de los procesos en sistemas de transferencia de calor. Una alternativa que recientemente ha adquirido fuerza y busca cubrir estas áreas de mejora es el concepto de gemelos digitales. De acuerdo con [Rasheed, *et al.*, 2020] un gemelo digital se puede definir como la representación virtual de un recurso físico, habilitada a través de datos y simuladores para predicción en tiempo real, optimización, monitoreo, control y toma de decisiones mejorada. Según definiciones frecuentemente aceptadas como las que se encuentran en [Kritzinger, *et al.*, 2018] y [Errandonea, *et al.*, 2020], se puede clasificar como un gemelo digital a un objeto modelado digitalmente que interactúa a través de un flujo de datos automático y bidireccional con un objeto físico. El gemelo digital es un nivel de integración superior al de un “modelo digital” donde el flujo de datos es manual en ambas direcciones y al de una “sombra digital” donde hay una transferencia de datos automática en la dirección del objeto digital pero manual hacia el objeto físico.

Volviendo al caso del gasoducto, el desempeño del sistema pudo mejorar al implementar un software inteligente de optimización de rendimiento. Haciendo uso de simulaciones se implementó una actividad del sistema de control en tiempo real para ayudar a prevenir problemas de confiabilidad y aumentar el rendimiento, de forma que a medida que cambiaba la composición del fluido procesado, la estrategia de control fue capaz de adaptarse a ese cambio.

Este tipo de soluciones más eficientes además de ser convenientes son necesarias en la actualidad, pues como sociedad, estamos en un punto en el que es sabido que el uso excesivo de recursos impacta negativamente a nuestro entorno ambiental y social. Este conocimiento empuja a las empresas a reaccionar a estos desafíos y tratar estos problemas buscando alternativas tecnológicas más sustentables, pues tienen que responder tanto a políticas gubernamentales como a la presión que ejercen las comunidades conscientes de estos efectos [Hermundsdottir y Aspelund, 2021, Jamwal, *et al.*, 2021].

Dada la importancia de estos procesos, en el Laboratorio de Automatización de la Facultad de Ingeniería de la UNAM se ha diseñado y desarrollado en [Macías-Bejarano, 2018] y en [González-Salgado, 2021] una plataforma experimental para procesos de transferencia de calor para reforzar el aprendizaje en temas de control y automatización, así como explorar de forma práctica el desempeño y cualidades de distintas estrategias. El equipo cuenta con acondicionamiento para trabajar con entradas y salidas estándar de la industria, por lo que se puede interactuar con él a través de un Controlador de automatización programable (PAC) *ControlLogix L81E*.

En la Figura 1.1 se puede observar esta plataforma y se señalan los componentes visibles. A grandes rasgos el sistema está conformado por:

- Un sensor de temperatura IFM TD2231. Se considera que la cubierta de acero del sensor tiene dinámica dado lo voluminoso que este componente resulta con respecto a otros del proceso.
- Una lámpara de halógeno de 12 Volts, 20 Watts. Inyecta calor en el sistema, su señal de acción es regulable de 0 a 100 %.
- Un micrómetro de profundidad con rango de 0 a 2 pulgadas. Permite variar la distancia entre el sensor TD2231 y la lámpara de halógeno.
- Estructura de MDF. Los componentes se montan sobre esta estructura y el proceso de transferencia de calor está contenido en ella.
- Ventilador de golpe radial de 50 mm con alimentación de 12 Volts. Permite enfriar al proceso ingresando aire del exterior.
- Termopares tipo K. Se usan para medir las temperaturas en el vidrio de la lámpara, el aire y las paredes de MDF las cuales se consideran estados del proceso al igual que la temperatura medida por el sensor TD2231.

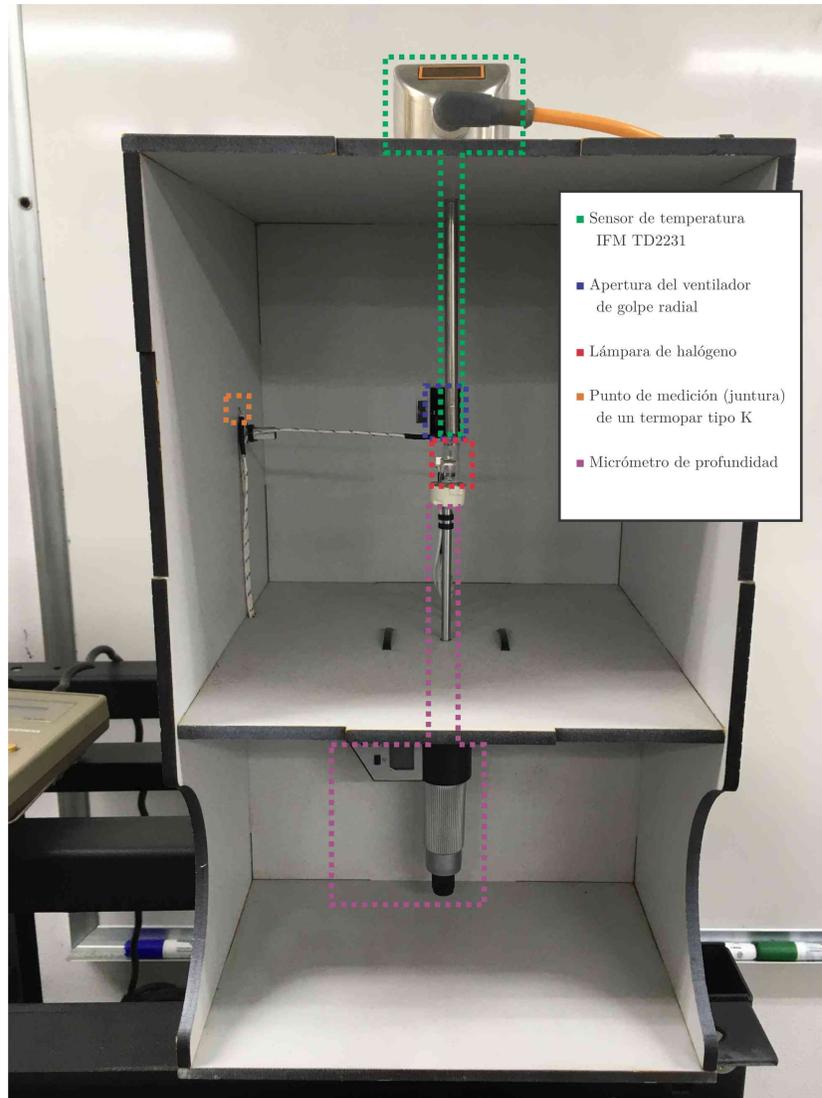


Figura 1.1 Plataforma de transferencia de calor

A comparación de algunos sistemas que existen comercialmente, las ventajas que ofrece la plataforma que se ha desarrollado previamente son:

- El costo de la plataforma es mucho menor.
- Sus dimensiones permiten que, manteniendo las cualidades de un sistema de transferencia de calor, la dinámica sea considerablemente más rápida que otras plataformas del mismo tipo.
- Los componentes utilizados y la electrónica proveen acondicionamiento para funcionar con el PAC *ControlLogix L81E* y el software *Studio 5000 Logix Designer* lo que permite una mayor familiarización con entornos industriales. En la Figura 1.2 se observa la etapa de acondicionamiento integrada a la plataforma en su compartimento dedicado.
- Al estar configurado con el PAC se tiene la posibilidad de trabajar con múltiples estrategias de control para analizar y comparar sus cualidades y desempeño, a diferencia de diversas plataformas comerciales que solo permitirían trabajar con lazo abierto o control PID.

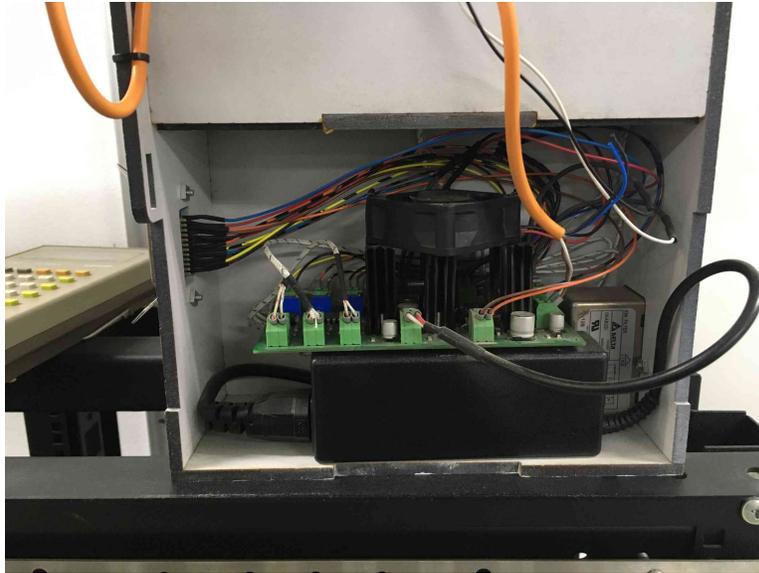


Figura 1.2 Compartimento del circuito impreso

Una posibilidad reciente que permite complementar el aprendizaje son las simulaciones y laboratorios virtuales que gracias al crecimiento del poder computacional de los últimos años se han convertido en una alternativa viable. En [Balamuralithara y Woods, 2009], se detallan las características, diseño e implementación de un laboratorio instruccional virtual para la enseñanza de ingeniería, desarrollando un producto con instrucciones y actividades que puede guiar a un estudiante a lo largo de una práctica de laboratorio. Algunas de las conclusiones son que un modelo ofrece la oportunidad de acceder al experimento repetidamente y en los momentos que le sean convenientes al estudiante.

Más ventajas de trabajar con estas simulaciones se encuentran en [Gibbins y Perkin, 2013]: los costos y tiempos de simulación son muy bajos a comparación trabajar con experimentos reales, y la existencia de una simulación ayuda a reducir las restricciones de tiempo que provoca trabajar con equipos reales.

Teniendo lo anterior en mente, se concluye lo conveniente de contar con un modelo matemático que permita simular el comportamiento de una plataforma experimental, pues mejoraría la experiencia al contar con las ventajas que ofrecen ambas alternativas.

Aunque existe software profesional con el que se puede obtener una predicción detallada de los fenómenos de transferencia de calor, este tipo de software trabaja principalmente con modelos en los que la dinámica varía en el espacio tridimensional, que suelen tener una representación más compleja que dificulta el análisis y simulación.

En los trabajos mencionados antes ([Macías-Bejarano, 2018] y [González-Salgado, 2021]) se trabajó en la adición de un modelo matemático del sistema en el que fuera posible simular su respuesta de forma suficientemente representativa, el desarrollo del modelo se pensó usando parámetros concentrados para evitar dificultades al analizarlo y simularlo. Sin embargo, aún no había sido posible obtener un modelo que se mantuviera aproximado frente a distintas entradas del actuador y distancias de separación del

micrómetro de profundidad.

## 1.2. Motivación

Lo que motiva a la elaboración de esta tesis es consolidar una herramienta que ayude al aprendizaje en temas de control y automatización, y más específicamente, en sistemas térmicos de transferencia de calor. Si bien, la plataforma es distinta a un proceso térmico industrial real, cuenta con características que son importantes para los sistemas de transferencia de calor en general y que se acentúan en cuerpos de mayores dimensiones.

Este trabajo de tesis busca agregar solidez al proyecto mejorando el modelo matemático con el que se contaba anteriormente. Las ventajas de un mejor modelo basado en la física son varias, las principales de ellas son:

- Permite probar estrategias de control en la plataforma de forma más rápida y ágil, pudiendo usar la versión de la simulación antes de trabajar con la plataforma real, lo cual, en el contexto local de una clase de laboratorio, optimiza el tiempo en el que los estudiantes pueden probar técnicas de control; además, le da a los estudiantes una mayor oportunidad de familiarizarse con problemas comunes que pueden aparecer en sistemas térmicos de no considerarse una estrategia correcta y encontrar formas de solucionar estos inconvenientes.
- Contar con un procedimiento detallado de la obtención de las constantes, capacitancias y resistencias térmicas puede dar un punto de partida para analizar y trabajar con sistemas de transferencia de calor.
- Puede usarse para generar algoritmos de control basados en modelo y evaluar su desempeño en la plataforma física.
- Representa un paso importante para la implementación de un gemelo digital de la plataforma. Este enfoque permite, a través de un entorno virtual, realizar una mayor cantidad de pruebas de rendimiento además de proveer un flujo de información en tiempo real entre el proceso físico, que se produce cuando los sensores proporcionan datos relevantes y posteriormente al hacer uso del gemelo digital para retroalimentar al proceso.

## 1.3. Formulación del problema

Partiendo de lo expuesto en los antecedentes, se observa que existen problemáticas que podemos abordar en el desarrollo de este proyecto, se pueden destacar los siguientes puntos:

- Si bien, se cuenta ya con la plataforma física para realizar experimentos y pruebas de control, la dinámica lenta propia de un sistema de transferencia de calor puede dificultar la tarea de realizar múltiples pruebas. De esto se identifica la necesidad de contar con una reformulación del modelo matemático previo, que permita obtener una respuesta más cercana a la real en distintas condiciones para trabajar con mayor agilidad.

- Los modelos matemáticos de parámetros distribuidos permiten una mejor representación en sistemas térmicos, sin embargo, su complejidad puede dificultar el análisis y desarrollo de estrategias de control basadas en modelo. Se requiere que el modelo sea útil y suficientemente simple para ser analizado sin demasiada dificultad.
- Para confirmar que el modelo sea suficientemente representativo, es necesaria una métrica de validación que evalúe el desempeño en distintos escenarios.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Desarrollar y validar un modelo matemático en parámetros concentrados de la plataforma experimental para procesos de transferencia de calor, de forma que se pueda obtener una respuesta suficientemente representativa del sistema real a distintas entradas, realizando el modelado con las ecuaciones de transferencia de calor por conducción, convección y radiación.

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Identificar y conocer las características físicas relevantes de los componentes que forman parte del sistema térmico y cómo están integradas en él para poder describir el modelo con las consideraciones adecuadas.
- Revisar y tomar en cuenta la adición de termopares al sistema, que permitirán medir más variables térmicas.
- Mantener el modelo de transferencia de calor en parámetros concentrados, de forma que el modelo se pueda modificar sin mayor complicación en caso de cambiar algunos elementos, se eviten tiempos de simulación largos y se tenga una perspectiva más simplificada de la dinámica.
- Validar el sistema comparando la respuesta del modelo matemático con mediciones de los sensores a distintas entradas y condiciones usando una métrica de validación que permita cuantificar el grado en el que el modelo se aproxima a los datos medidos.

## 1.5. Contribuciones

- Se expresó el modelo matemático de la plataforma térmica desarrollada con anterioridad en un modelo de parámetros concentrados. Su validación se realizó con la medición de 9 experimentos, con entradas en lazo abierto en los que se varió la intensidad de la lámpara de halógeno y la distancia entre la lámpara y la sonda, además de un experimento con una señal variante para el actuador. El modelo está descrito en un archivo de MATLAB - Simulink en el que también se implementó el bloque que genera la métrica para validarlo (el  $CV(RMSE)$ ). Con esta métrica, el modelo se identifica como válido para simular las temperaturas en la sonda y el vidrio de la lámpara.
- Se realizaron algunas conexiones y el ensamblado de la plataforma térmica para tener la capacidad de conectarla con su circuito impreso al PAC del Laboratorio de Automatización, a través de un puerto del tipo Centronics de 24 pines.

- A través del software *Studio 5000 Logix Designer* el modelo también se implementó en el controlador *ControlLogix L81E* para tener la posibilidad de interactuar con él en el mismo entorno en el que se configuró la plataforma física.

## 1.6. Organización de la tesis

El contenido de esta tesis se distribuye en cinco capítulos, empezando por el capítulo actual en el que se da una vista general de las actividades realizadas, además del contexto y problemática sobre los que se desarrolla este trabajo. A continuación se describe el contenido de los otros capítulos:

- En el Capítulo 2 se revisa la teoría básica necesaria para modelar un sistema de transferencia de calor en parámetros concentrados, considerando los fenómenos de conducción, convección y radiación, así como propiedades importantes de los elementos que es necesario tomar en consideración para modelarlos adecuadamente.
- La obtención del modelo partiendo de la teoría está descrita en el Capítulo 3, también se nombran y definen diversos valores y constantes que son parte del modelo y se presenta un diagrama que explica la dinámica por medio de una analogía a un sistema eléctrico.
- En el Capítulo 4 se describen los experimentos realizados, los resultados de ellos y la metodología empleada para validar al modelo.
- Las conclusiones de este trabajo están en el Capítulo 5, en donde también se observan algunas posibilidades de trabajo futuro.



## Capítulo 2

# Fundamento teórico

### 2.1. Transferencia de calor

Antes de proceder a una explicación del modelado térmico se explicarán brevemente las leyes de la termodinámica y las ecuaciones de transferencia de calor que se usarán.

#### 2.1.1. Leyes de la termodinámica

##### Ley cero de la termodinámica

Cuando un cuerpo se pone en contacto con otro que está a una temperatura diferente, el calor se transfiere del que está a mayor temperatura al que está a menor temperatura hasta que ambos alcanzan la misma temperatura, es en ese momento cuando se detiene la transferencia de calor y los cuerpos alcanzan el **equilibrio térmico**. *La ley cero de la termodinámica establece que si dos cuerpos se encuentran en equilibrio térmico con un tercero, están en equilibrio entre sí. Si el tercer cuerpo se sustituye por un termómetro, la ley cero se puede volver a expresar como: dos cuerpos están en equilibrio térmico si ambos tienen la misma lectura de temperatura incluso si no están en contacto.* De forma que esta ley sirve como base para la validez de la medición de temperatura. [Çengel y Boles, 2011] R. H. Fowler fue el primero que formuló y nombró la ley cero en 1931.

##### Primera ley de la termodinámica

Fundamentalmente, esta ley establece que *la energía total de un sistema se conserva, y por lo tanto la única forma de que la cantidad de energía en un sistema pueda cambiar es si la energía atraviesa los límites del sistema* [Bergman, et al., 2011]. Es equivalente a la ley de la conservación de la energía en el contexto de termodinámica y se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\Delta E = Q - W \quad (2.1)$$

Donde  $\Delta E$  es el cambio en la energía total almacenada por el sistema,  $Q$  el calor neto transferido al sistema y  $W$  el trabajo neto realizado por el sistema. Los primeros enunciados de Rudolf Clausius y William Rankine se elaboraron en 1850.

## Segunda ley de la termodinámica

Se basa en gran parte en ideas de Sadi Carnot, los primeros enunciados formales fueron formulados cerca del año 1850 por Rudolf Clausius y Lord Kelvin. Esta ley establece que los procesos que bajo ciertas condiciones pueden ocurrir en una dirección no pueden ir en dirección contraria. Una manifestación de la segunda ley es que la transferencia de calor puede ocurrir desde un cuerpo a mayor temperatura hasta otro a menor temperatura, pero este mismo proceso no puede ocurrir por sí mismo en dirección contraria a menos que intervenga un dispositivo (enunciado de Clausius). Existen muchos enunciados para la segunda ley de la termodinámica, el enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley expresa que:

*Es imposible que un dispositivo que opera en un ciclo reciba calor de un solo depósito y produzca una cantidad neta de trabajo*

La interpretación del enunciado anterior es que si en un depósito se genera calor para alimentar una máquina térmica tiene que existir un escape a menor temperatura al cual se tendrá que transferir parte del calor del primer depósito. Bajo esta restricción, la eficiencia de una máquina térmica nunca será del 100%. [Çengel y Boles, 2011] [Bergman, *et al.*, 2011].

## Tercera ley de la termodinámica

Proporciona un punto de referencia absoluto para la determinación de entropía. *La entropía de una sustancia cristalina pura a la temperatura del cero absoluto es cero.* [Çengel y Boles, 2011]. Se atribuye a Walter Nernst, y se estableció a principios del siglo XX.

### 2.1.2. Mecanismos de transferencia de calor

El calor es la forma de energía que se puede transferir de un sistema a otro como resultado de una diferencia de temperaturas. El calor se puede transferir de tres modos diferentes: conducción, convección y radiación. Todos los modos de transferencia de calor requieren la existencia de una diferencia de temperatura, y en todos, el flujo es desde el medio de mayor temperatura hasta el medio a menor temperatura.

En el caso más general, la transferencia de calor a través de un medio es **tridimensional**. Esto es, la temperatura varía a lo largo de las tres direcciones primarias dentro del medio durante el proceso de transferencia de calor. Si un sistema tiene proporciones simétricas se puede simplificar un sistema tridimensional a uno bidimensional o unidimensional.

Un problema de transferencia de calor se dice **unidimensional** si la temperatura en el medio varía en solo una dirección y por tanto la transferencia de calor es en una sola dirección, con esto, la variación de temperatura y transferencia de calor en otras direcciones son despreciables o nulas. [Çengel, 2011]

### 2.1.3. Transferencia de calor por conducción

La **conducción** es la transferencia de energía desde partículas más energéticas de una sustancia hacia las adyacentes menos energéticas, como resultado de las interacciones entre ellas. La conducción toma lugar en sólidos, líquidos y gases. En líquidos y gases, la conducción es debida a las colisiones y difusión de las moléculas durante su movimiento aleatorio, mientras que en los sólidos se debe a la

combinación de la vibración de las moléculas en una red y el transporte de energía mediante electrones libres.

La tasa de conducción de calor  $\dot{Q}_{cond}$  a través de una capa plana (ilustrada en la Figura 2.1) es proporcional a la diferencia de temperatura  $T_1 - T_2$  a lo largo de la capa y al área de transferencia de calor, pero es inversamente proporcional al grosor  $\Delta x$  de la capa, esto es,

$$\text{Tasa de transferencia de calor} \propto \frac{(\text{Área})(\text{Diferencia de temperatura})}{\text{Grosor}} \quad (2.2)$$

o también,

$$\dot{Q}_{cond} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2.3)$$

donde la constante de proporcionalidad  $k$  es la conductividad térmica del material, la cual es una medida de la habilidad del material para conducir calor. En el caso límite donde  $\Delta x \rightarrow 0$  la ecuación pasa a su forma diferencial:

$$\dot{Q}_{cond} = kA \frac{dT}{dx} \quad (2.4)$$

A la ecuación 2.3 se le llama **ley de conducción de calor de Fourier**, pues fue él el primero en expresarlo en textos de transferencia de calor en 1822. [Çengel, 2011]

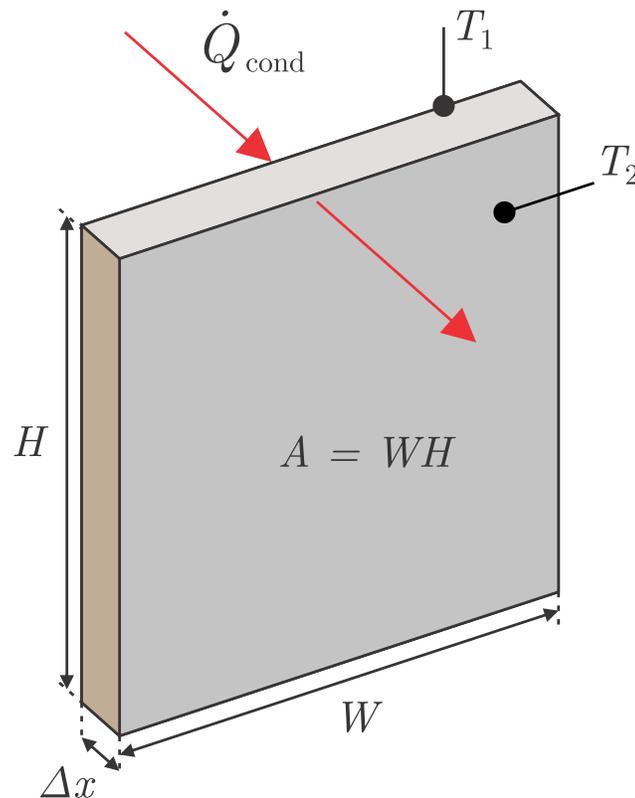


Figura 2.1 La conducción de calor es normal al área de la capa

### 2.1.4. Transferencia de calor por convección

La **convección** es el modo de transferencia de energía entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacente que está en movimiento, y tiene que ver con los efectos combinados de *conducción* y *movimiento del fluido*: mientras más rápido se mueva éste mayor es la transferencia de calor por convección. Si el fluido está estático, la transferencia de calor entre una superficie sólida y el fluido adyacente es por conducción pura como se ilustra en la Figura 2.2 La tasa de transferencia de calor por convección  $\dot{Q}_{conv}$  se determina a partir de la **ley de enfriamiento de Newton**, expresada como

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_f) \quad (2.5)$$

donde  $h$  es el **coeficiente de transferencia de calor por convección**,  $A$  es la superficie en la cual tiene lugar la transferencia de calor,  $T_s$  es la temperatura de la superficie y  $T_f$  es la temperatura del fluido lejos de la superficie. (En la superficie, la temperatura del fluido es igual a la temperatura superficial del sólido.) El coeficiente  $h$  no es una propiedad del fluido, es un parámetro determinado de forma experimental que depende de todas las variables que afectan la convección, como la configuración geométrica de la superficie, la naturaleza del movimiento del fluido, las propiedades del fluido y la velocidad volumétrica del fluido. La transferencia de calor por convección depende fuertemente en las propiedades del fluido, estas son, la viscosidad dinámica  $\mu$ , la conductividad térmica  $k$ , la densidad  $\rho$ , el calor específico  $C_p$ , así como la velocidad del fluido  $V$ . También depende de la geometría y la aspereza de la superficie sólida, en adición al tipo de flujo del fluido. [Çengel, 2011]

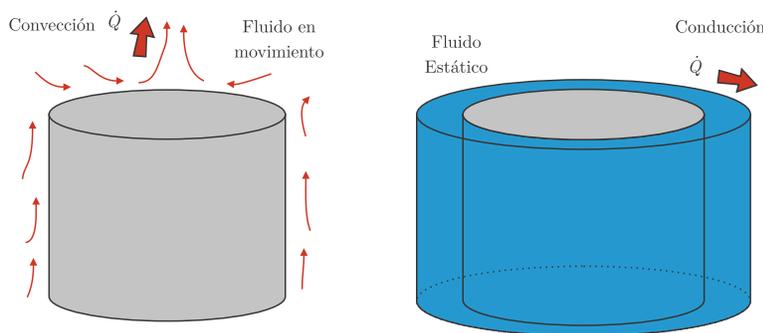


Figura 2.2 En la convección siempre interviene un fluido en movimiento

### Efectos combinados de conducción y convección

Aunque existen tres mecanismos de transferencia de calor, los tres no pueden existir simultáneamente en un medio. La convección en sí se considera como el efecto combinado de la conducción y el fluido en movimiento; la conducción se puede ver como un caso especial de la convección en la ausencia de cualquier movimiento de fluido. [Çengel, 2011]

### Condiciones de no deslizamiento y no salto de temperatura

Cuando un fluido fluye sobre una superficie sólida, incluso si esta es impermeable al fluido, ocurre que el fluido en movimiento está totalmente detenido en la superficie del sólido, y así, asume una velocidad nula relativa a la superficie. Esto significa que el fluido que está en contacto directo con la superficie sólida “se pega” a la superficie y no se desliza. A este fenómeno se le conoce como **Condición**

**de no deslizamiento**, y sucede por la viscosidad del fluido. La condición de no deslizamiento provoca que, por la viscosidad del fluido, la capa inmediatamente próxima al sólido ralentice a la capa adyacente, las capas cercanas se ralentizan entre sí de forma que la velocidad del fluido baja conforme se acerca al sólido. Un fenómeno similar ocurre para la temperatura, de forma que en el punto de contacto entre el fluido y el sólido, ambos están a la misma temperatura, a esto se le conoce como **condición de no salto de temperatura**.

### Capas límite

Si un fluido fluye paralelamente a una placa plana a una velocidad  $V$ , se le conoce como **capa límite de la velocidad** al espacio que hay desde la superficie de la placa (donde la velocidad es cero) y el punto a partir del cual el fluido alcanza la velocidad  $0.99V$

Si un fluido está a una temperatura uniforme  $T_\infty$  y fluye sobre una placa plana a temperatura  $T_s$ , se define como **capa límite térmica** al espacio desde la superficie hasta el punto a partir del cual la temperatura del fluido es  $0.99(T_\infty - T_s)$

### Número de Nusselt

El número de Nusselt es una variable que expresa de forma adimensional la relación entre la convección y la conducción en un fluido

$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{\dot{Q}_{conv}}{\dot{Q}_{cond}} \quad (2.6)$$

donde  $L$  es la distancia o grosor entre los puntos a temperatura distinta que se consideren en la ecuación 2.5

### Número de Prandtl

El número de Prandtl se usa para describir la relación entre la capa límite de velocidad y la capa límite térmica. Es un parámetro adimensional que se define como

$$Pr = \frac{\text{Difusividad molecular de la cantidad de movimiento}}{\text{Difusividad molecular del calor}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k} \quad (2.7)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $\alpha$  la difusividad térmica.

Es una propiedad del fluido y para el caso del aire a presión atmosférica, se puede expresar como una función de su temperatura. [Çengel, 2011] [Bergman, *et al.*, 2011].

### Número de Reynolds

La transición de flujo laminar a turbulento depende de la geometría de la superficie, su aspereza, la velocidad de corriente libre, temperatura de la superficie y el tipo de fluido, entre otras cosas. El régimen del flujo depende principalmente de la relación entre las fuerzas de inercia y las de viscosidad en el fluido. A esta relación se le llama **número de Reynolds**, el cual es una cantidad adimensional y se expresa para flujo externo como

$$Re = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} = \frac{VL_c}{\nu} = \frac{\rho VL_c}{\mu} \quad (2.8)$$

Donde  $V$  es la velocidad de aproximación del fluido que se acerca a un cuerpo y  $L_c$  la longitud característica de ese cuerpo, en el caso de una esfera o un cilindro,  $L_c$  es el diámetro externo. [Çengel, 2011] [Bergman, *et al.*, 2011]. Para el aire a presión constante, tanto  $\nu$  como  $\mu$  se pueden expresar en función de su temperatura. La longitud característica no tiene una forma única de definirse y puede depender tanto de la geometría como de la dirección que siga el fluido.

### Flujo alrededor de cilindros y esferas

La longitud característica para un cilindro circular o una esfera se toma como el diámetro externo  $D$ . Por lo tanto, el número de Reynolds se define como  $Re = VD/\nu$  donde  $V$  es la velocidad uniforme del fluido conforme se aproxima al cilindro o esfera. El número crítico de Reynolds para el flujo alrededor de un cilindro o esfera es aproximadamente  $Re = 2 \times 10^5$ , para un valor mayor se considera que el flujo es turbulento.

Cuando un fluido avanza sobre una esfera o cilindro y choca contra él en el **punto de estancamiento** ocurre que la presión del fluido y su velocidad son distintos en cada punto de la superficie del cilindro, en función del ángulo de ese punto específico con respecto al punto de estancamiento y así, el número de Nusselt en cada punto es distinto, pero en muchos casos resulta más relevante conocer un promedio aproximado del número de Nusselt para conocer la transferencia de calor entre el total del sólido y el fluido.

Para determinar el número de Nusselt promedio para la convección fluyendo de forma externa sobre un cilindro existen distintas expresiones empíricas y semiempíricas como la relación propuesta por [Churchill y Bernstein, 1977]:

$$Nu_{cil} = \frac{hD}{k} = 0.3 + \frac{0.62Re^{1/2}Pr^{1/3}}{[1 + (0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[ 1 + \left( \frac{Re}{282,000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad (2.9)$$

que tiene validez aceptable para  $Pr \times Re > 0.2$

### Número de Grashof

La **convección libre** o natural ocurre principalmente debido a que un fluido al calentarse tiene menor densidad que si estuviera frío, de forma que de manera natural la parte menos densa del fluido tiende a subir por fuerzas de flotación, a estas fuerzas de flotación se les oponen las fuerzas de viscosidad del mismo fluido.

De la misma forma que el número de Reynolds representa la relación de las fuerzas de inercia respecto a las fuerzas viscosas actuando en el fluido, el número de Grashof representa la relación de las fuerzas de flotación con respecto a las fuerzas viscosas que actúan en el fluido y tiene gran relevancia para las ecuaciones de convección libre.

$$Gr = \frac{\text{Fuerzas de flotación}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2} \quad (2.10)$$

donde  $g$  es la aceleración gravitacional,  $\beta$  es el coeficiente de expansión volumétrica ( $1/T$  para gases ideales en donde  $T$  está expresado en la escala absoluta),  $T_s$  la temperatura de la superficie,  $T_\infty$  la temperatura del fluido suficientemente lejos de la superficie,  $L_c$  la longitud característica de la geometría y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido. [Çengel, 2011]

### Convección libre

La transferencia de calor en una superficie por convección natural depende de la geometría de la superficie, así como su orientación. También depende de la variación de temperatura en la superficie y las propiedades termofísicas del fluido involucrado. Aunque el fenómeno es bien comprendido, la complejidad del movimiento del fluido hace muy difícil obtener relaciones analíticas simples y generalizables. Las correlaciones empíricas simples para el número de Nusselt promedio en la convección natural son de la forma

$$\text{Nu} = \frac{hL_c}{k} = C(GrPr)^n = CRa^n \quad (2.11)$$

donde  $Ra$  es el **número de Rayleigh** que se obtiene del producto de los números de Grashof y Prandtl, las constantes  $C$  y  $n$  dependen de la configuración geométrica de la superficie y del régimen de Flujo. El valor  $n$  suele ser  $\frac{1}{4}$  para el flujo laminar y  $\frac{1}{3}$  para el turbulento. La constante  $C$  normalmente es menor que 1.

La siguiente correlación de [Churchill y Chu, 1975] también es aplicable para la convección natural en la circunferencia de un cilindro vertical con propiedades que se aproximen a las de una pared plana vertical, esto es, que se cumpla la condición  $(D/L) \geq (35/Gr_L^{0.25})$  [Bergman, *et al.*, 2011]:

$$\overline{Nu} = \left\{ 0.825 + \frac{0.387Ra^{1/6}}{[1 + (0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2 \quad (2.12)$$

Una recopilación de distintas expresiones desarrolladas para la convección natural en cilindros verticales se puede encontrar en [Day, *et al.*, 2013].

### Convección mixta

Los efectos de ambos tipos de convección combinados se conocen como convección mixta.

Se considera que la convección forzada y la libre son ambas significativas cuando  $Gr/Re^2 \approx 1$ . De otra forma se tienen casos en donde alguna de ellas es despreciable, si  $Gr/Re^2 \ll 1$  la convección libre es despreciable y si  $Gr/Re^2 \gg 1$  la convección forzada es despreciable.

La convección natural puede asistir u oponerse a la transferencia de calor por convección forzada, dependiendo de las direcciones relativas de los movimientos inducidos por la flotabilidad y la convección forzada

- En el flujo asistido el movimiento inducido por flotabilidad tiene la misma dirección que el movimiento forzado. Por lo tanto, la convección natural apoya a la forzada y mejora la transferencia de calor.
- En el flujo en oposición la dirección del movimiento inducido por flotabilidad es opuesta a la del movimiento forzado. Por lo tanto, la convección natural opone resistencia a la forzada y hace disminuir la transferencia de calor.
- En el flujo transversal el movimiento inducido por flotabilidad es perpendicular al movimiento forzado. El flujo transversal mejora el mezclado del fluido y, de este modo, la transferencia de calor.

Es una práctica común correlacionar los resultados de la convección mixta para los flujos internos y externos con una expresión de la forma

$$Nu^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n \quad (2.13)$$

Para la geometría de interés en específico, los números de Nusselt  $Nu_F$  y  $Nu_N$  se determinan de las correlaciones existentes. El signo de adición aplica para flujos asistidos y transversales, mientras que el signo de sustracción aplica para flujo en oposición. Se obtienen mejores resultados frecuentemente con  $n = 3$ , aunque los valores de  $7/2$  y  $4$  pueden funcionar mejor para flujos transversales que involucren planos horizontales y cilindros (o esferas), respectivamente. [Bergman, *et al.*, 2011] [Çengel, 2011]

### 2.1.5. Transferencia de calor por radiación

La **radiación** es la energía que emite la materia en la forma de ondas electromagnéticas (o fotones) como resultado de cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas. A diferencia de la conducción y la convección, la transferencia de energía por radiación no requiere la presencia de un medio. De hecho, este tipo de transferencia es la más rápida (a la velocidad de la luz) y no experimenta ninguna atenuación en el vacío. En los estudios de transferencia de calor, el interés se halla en la radiación térmica, que es la forma de radiación que emiten los cuerpos debido a su temperatura, y difiere de las otras formas de radiación electromagnética como los rayos X, gamma, microondas y ondas de radio que no están relacionadas con la temperatura. Todos los cuerpos a una temperatura superior al cero absoluto emiten radiación térmica. Aunque la radiación es un fenómeno volumétrico, se considera que es un fenómeno superficial para sólidos opacos a la radiación térmica, como los metales, madera y rocas, puesto que la radiación emitida en el interior de estos materiales nunca alcanza la superficie, mientras que la radiación que incide en esos cuerpos se absorbe dentro de unas micras de la superficie. [Çengel, 2011] La tasa máxima de radiación que se puede emitir desde una superficie a una temperatura absoluta  $T_s$  se determina mediante la ley de Stefan-Boltzmann como

$$\dot{Q}_{emitida,máx} = \sigma AT_s^4 [W] \quad (2.14)$$

donde  $A$  es el área superficial y  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$  es la **constante de Stefan-Boltzmann**. La superficie idealizada que emite radiación a esta tasa máxima se llama **cuerpo negro**, y la radiación emitida por un cuerpo negro se denomina **radiación de cuerpo negro**. La radiación que emiten las superficies reales es menor que la emitida por un cuerpo negro y se expresa como

$$\dot{Q}_{emitida} = \epsilon \sigma AT_s^4 \quad (2.15)$$

donde  $\epsilon$  es la emisividad de la superficie. Esta propiedad que toma valores del 0 al 1, es una medida de qué tanto se aproxima el comportamiento de una superficie al de un cuerpo negro. Otra propiedad de radiación es la absorptividad,  $\alpha$ , que es la fracción de la energía de radiación incidente sobre una superficie absorbida por ésta. Al igual que la emisividad, su valor está en un intervalo de 0 a 1. En general  $\epsilon$  y  $\alpha$  de una superficie dependen de la temperatura y la longitud de onda de la radiación. La **Ley de Kirchhoff de radiación** establece que la emisividad y absorptividad de una superficie son iguales con las mismas temperaturas y longitudes de onda. En la mayor parte de aplicaciones prácticas se ignora la dependencia que  $\epsilon$  y  $\alpha$  tienen con la temperatura y longitud de onda.

Entre dos superficies sólidas, planas y de área infinita, separadas por un medio que no absorbe radiación, la transferencia de calor es:

$$\dot{Q}_{rad} = A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \frac{1}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} \quad (2.16)$$

El origen del término de la derecha es una simplificación de una serie geométrica, que viene de considerar que el cuerpo 1 y el cuerpo 2 se irradian mutuamente [McAdams, 1985].

### Irradiancia

La cantidad de energía sobre tiempo que es emitida, absorbida, reflejada, transmitida o recibida se le conoce como **flujo radiante** o **potencia radiante**.

Al flujo radiante sobre el área de la superficie se le refiere por el término **irradiancia** (como convención antigua también se le puede encontrar como intensidad), que se denota por  $I$ .

Para expresar la energía radiada por un cuerpo en función de las frecuencias o longitudes de onda que emite se usa el concepto de **irradiancia espectral**, que es la potencia radiante dividida sobre el área de la superficie, y **además dividida sobre la longitud de onda o la frecuencia**. Así que si la irradiancia espectral fuera constante en todas las longitudes de onda para un cuerpo que emite, el flujo radiante sería proporcional a la longitud de onda. [Hecht y Zajac, 2002]

### Transmisión, reflexión y absorción.

Cuando un haz de radiación espectral electromagnética incide en un medio, parte de esa radiación es **reflejada**, otra parte es **absorbida** y la demás es **transmitida** como se ilustra en la Figura 2.3. De manera que la suma de la irradiancia absorbida, radiada y transmitida resulta en el total de la irradiancia del haz incidente. [Çengel y Boles, 2011]

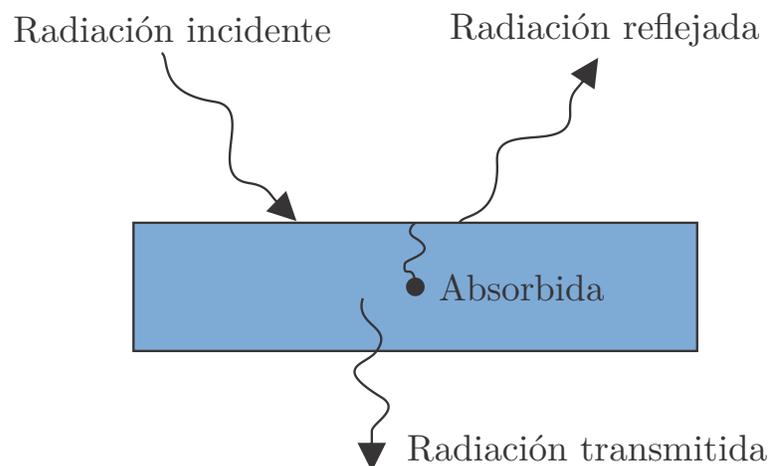


Figura 2.3 Haz incidente en un medio

Si se tiene un haz incidente de irradiancia  $I$  sobre un medio, de forma que la irradiancia absorbida es  $I_{abs}$ , la reflejada  $I_{ref}$  y la transmitida  $I_{tr}$ , se definen los coeficientes de **absortividad**, **reflectividad** y **transmisividad** respectivamente en las ecuaciones 2.17

$$\alpha = \frac{I_{abs}}{I} \quad (2.17a)$$

$$\rho = \frac{I_{ref}}{I} \quad (2.17b)$$

$$\tau = \frac{I_{tr}}{I} \quad (2.17c)$$

Donde cada coeficiente está entre 0 y 1.

Como se mencionó, por la ley de conservación de la energía, la suma de la irradiancia absorbida, reflejada y emitida es la misma irradiancia que la del haz incidente. [Çengel, 2011]

$$I_{abs} + I_{ref} + I_{tr} = I$$

Y dividiendo cada término sobre I

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (2.18)$$

### Factor de visión

El factor de visión  $F_{ij}$  se define como *la fracción de radiación que abandona la superficie  $i$  que es interceptada por la superficie  $j$* . Para conseguir una expresión general para el factor de visión se consideran dos superficies diferenciales  $dA_i$  y  $dA_j$ , sobre superficies orientadas de manera arbitraria,  $A_i$  y  $A_j$ , respectivamente. La distancia entre  $dA_i$  y  $dA_j$  es  $r$  y los ángulos entre las normales a las superficies y la recta que une a  $dA_i$  con  $dA_j$  son  $\theta_i$  y  $\theta_j$ , respectivamente. La expresión final del factor de visión entre  $A_i$  y  $A_j$  es

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_j} \int_{A_i} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (2.19)$$

Una explicación más detallada se puede encontrar en los trabajos de [Bergman, *et al.*, 2011], [Çengel, 2011] y [McAdams, 1985].

Procediendo con la teoría explicada en [Stewart, 2012], las integrales de superficie anteriores se pueden expresar de la siguiente forma si se definen las tres coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la superficie en función de dos variables  $u$ ,  $v$ :

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(r(u, v)) |r_u \times r_v| dA \quad (2.20)$$

en donde  $r$ ,  $r_u$  y  $r_v \in \mathbb{R}^3$  se definen como

$$r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in D \quad (2.21)$$

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \quad (2.22)$$

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} \quad (2.23)$$

Donde  $S$  es la superficie y  $D$  es una región plana general, no necesariamente rectangular. Aunque la superficie original es tridimensional,  $D$  es una región “plana” porque está contenida en el plano  $uv$ .

Para describir una superficie de esta manera es necesario que  $S$  solo sea cubierta una vez cuando  $(u, v)$  varía en todo el dominio  $D$ .

La integral doble en el caso específico donde  $D$  es un plano rectangular  $R = \{(u, v) | a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$  se puede expresar de forma aún más explícita con el teorema de Fubini como:

$$\iint_R f(r(u, v)) |r_u \times r_v| dA = \int_c^d \int_a^b f(r(u, v)) |r_u \times r_v| du dv \quad (2.24)$$

### 2.1.6. Modelado en parámetros concentrados

Un sistema de transferencia de calor es de **parámetros concentrados** o de resistencia interna despreciable cuando se considera que un elemento está a una misma temperatura independientemente del punto en el espacio en que se mida la temperatura, de forma que la temperatura de ese cuerpo solo varía con el tiempo. Esto es aplicable sobre todo para cuerpos de tamaño pequeño. Su contraparte es el modelo de **parámetros distribuidos** en el que para un mismo cuerpo la temperatura se considera distinta en función de la ubicación espacial del punto que se mida. Esta comparativa se ilustra en la Figura 2.4. El sistema de parámetros concentrados se modela con ecuaciones diferenciales ordinarias mientras que su contraparte requiere modelarse con ecuaciones diferenciales parciales, haciéndolo más detallado, pero también aumentando la complejidad de modelarlo y analizarlo. [Çengel, 2011] [Kulakowski, *et al.*, 2007]

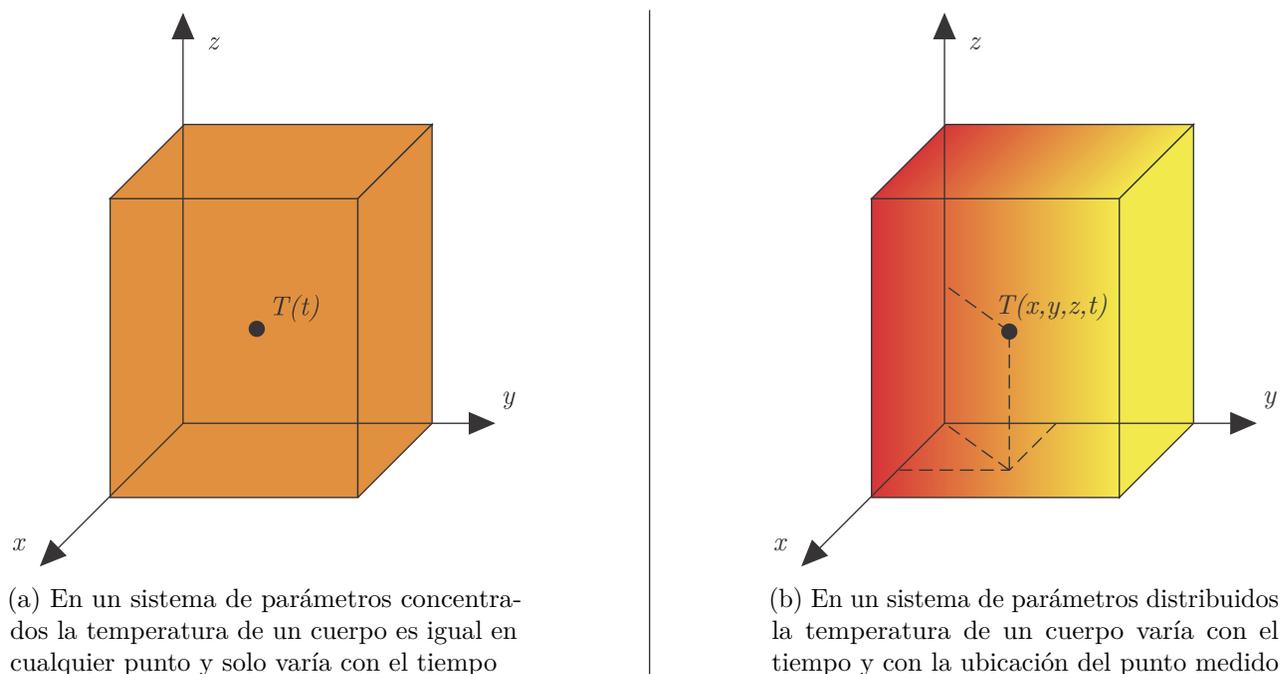


Figura 2.4 Comportamiento de la temperatura en sistemas de parámetros concentrados y distribuidos

Es posible expresar y analizar los mecanismos de transferencia de calor en términos de resistencias (exceptuando la radiación) y capacitancias. La resistencia se puede definir de la forma siguiente:

$$R = \frac{\text{Diferencia de temperatura}}{\text{Tasa de flujo de calor}}$$

$$R = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} [K/W] \quad (2.25)$$

Que despejando para el caso de la conducción 2.3 es:

$$R_k = \frac{L}{kA} \quad (2.26)$$

Y para el caso de la convección 2.5 es:

$$R_c = \frac{1}{hA} \quad (2.27)$$

Para la radiación no es posible expresar una resistencia constante por la naturaleza de la ecuación 2.14.

Para el caso de la capacitancia térmica, esta se define como:

$$C = \frac{\text{Cambio en el calor almacenado}}{\text{Cambio en la temperatura}}$$

Y se puede obtener conociendo la masa de la sustancia  $m$  [kg] y el calor específico de la sustancia  $c$   $\left[\frac{J}{kg \text{ } ^\circ C}\right]$

$$C = mc \left[\frac{J}{^\circ C}\right] \quad (2.28)$$

Dado que los fenómenos de transferencia de calor y las resistencias térmicas que se derivan de ellos solo permiten conocer el índice de transferencia de calor en función de las temperaturas de distintos cuerpos, es muy importante notar cómo la capacitancia térmica ayuda a terminar de conocer la dinámica en las temperaturas, para un modelo en parámetros concentrados, el cambio en la temperatura de un cuerpo “a” se expresa como

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{\dot{Q}_a}{C_a} \quad (2.29)$$

donde  $\frac{dT_a}{dt}$  es la razón de cambio en la temperatura con respecto al tiempo;  $\dot{Q}_a$  es el índice de transferencia de calor que recibe el cuerpo “a”, un valor positivo indicaría que recibe energía y un valor negativo indicaría que la pierde;  $C_a$  es la capacitancia térmica del cuerpo “a”.

## 2.2. Elementos del sistema térmico y sus características

### 2.2.1. Lámpara de halógeno

[Kane y Sell, 2001][van den Hoek, *et al.*, 2010] El sistema cuenta con una lámpara de halógeno (Figura 2.5) de 20 Watts, 12 Volts, de la marca Philips, de forma T3 y conector de pines G4 (la distancia entre los pines es de 4 mm). Uno de los termopares se coloca tocando el vidrio de la lámpara para medir su temperatura durante el proceso. Para el modelo es importante saber de qué forma emite calor la lámpara, y las medidas del vidrio que la rodean (véase la Figura 2.6). Para este modelo se considera que el vidrio tiene forma de un cilindro hueco con tapas de grosor de 0.5 mm arriba y abajo. La parte inferior del vidrio que se usa para sellar el filamento con los sellos de molibdeno también se considera más adelante multiplicando el volumen del vidrio por una constante  $F_v$ .



Figura 2.5 Fotografía de la lámpara de halógeno

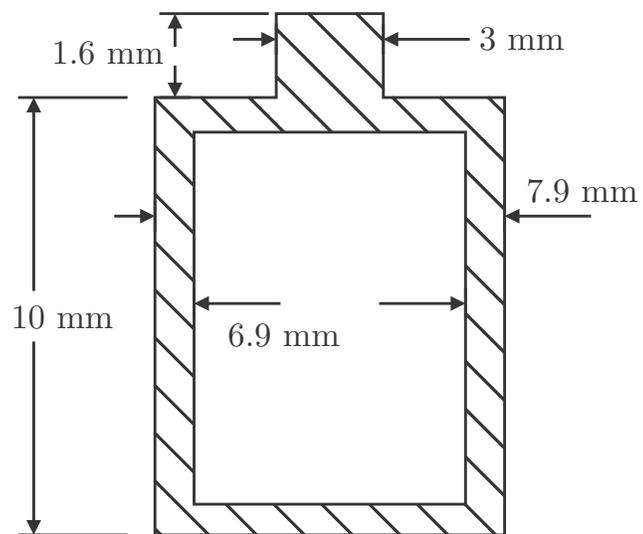


Figura 2.6 Dimensiones del vidrio de la lámpara de halógeno

Las lámparas de halógeno son lámparas incandescentes que existen como alternativa a las tradicionales bombillas de vacío. Para que el tungsteno produzca luz debe calentarse a temperaturas altas, a partir de 2300K El problema de las bombillas de vacío es que al calentarse el tungsteno a temperaturas mayores a 2800K, éste se evapora y la más mínima cantidad de oxígeno o agua reacciona con él, generando óxidos y ennegreciendo la superficie de la bombilla. La solución que ofrecen las lámparas de halógeno es, en vez de mantener la lámpara en vacío, llenarla de algún gas noble y una cantidad de halógeno. Esto tiene dos efectos principales:

- Un ciclo reversible (formando haluros) que permite al tungsteno evaporarse pero logrando que después, las partículas regresen al filamento.
- Al rellenar con gases la bombilla hay un aumento en la presión, y esto reduce la cantidad de tungsteno que se evapora del filamento.

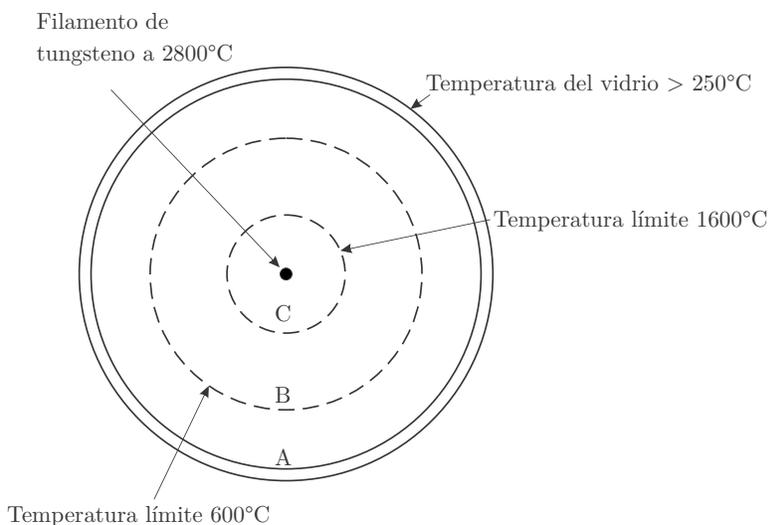


Figura 2.7 Regiones de temperatura en una lámpara de halógeno [Kane y Sell, 2001]

La acción básica de una lámpara de halógeno es su habilidad de producir un ciclo regenerativo de tungsteno que toma lugar cuando el tungsteno evaporado abandona, y luego vuelve al filamento sin haberse condensado sobre la relativamente fría pared de la bombilla. Entre el filamento y la pared de la bombilla existen tres regiones de interés significativas que se ilustran en la Figura 2.7. La primera región "A", es donde los átomos de tungsteno que se han evaporado del filamento caliente se mueven hacia la pared de la bombilla, donde se combinarán con átomos de yodo para formar ioduro de tungsteno. La temperatura en la pared de la bombilla debe estar entre 250 °C y 600°C para que la reacción funcione, y es donde la mayor parte de los átomos que se han evaporado del filamento caliente se combinarán con el yodo para formar ioduros de tungsteno estables. En la región media, "B", entre 600°C y 1600°C, la mayor parte de las reacciones son reversibles. Ahí, los ioduros de tungsteno son capaces de recombinarse o descomponerse. En la región central, "C", con temperaturas que van de entre 1600°C hasta la temperatura del filamento a aproximadamente 2800°C, los ioduros son forzados a disociarse en átomos de tungsteno y yodo. Algunos de los átomos de tungsteno migrarán para formar ioduro de tungsteno de nuevo, pero la mayor parte de los otros se redepositarán en el filamento. El ciclo funciona de forma similar con bromo, cloro y al menos teóricamente, con el flúor. Pero a distintas temperaturas de recombinación y disociación.

Para conocer el calor emitido por la lámpara de halógeno es necesario conocer o tener una idea de los coeficientes de emisividad del tungsteno.

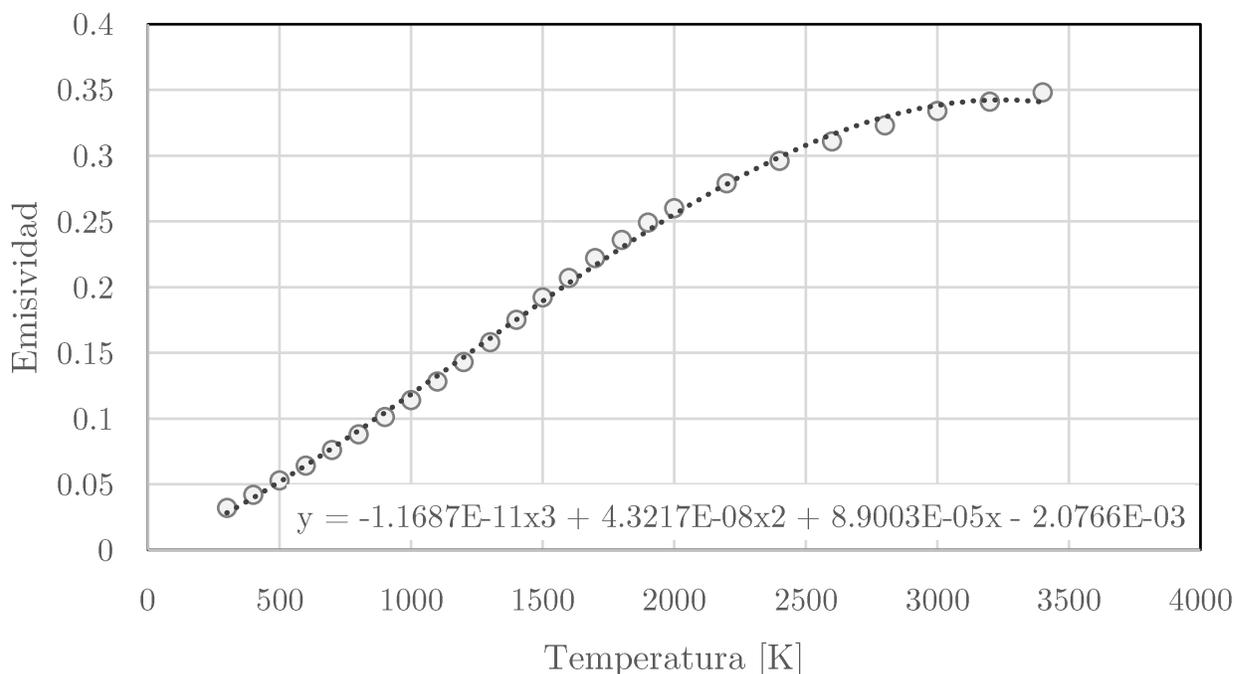


Figura 2.8 Emisividad total del tungsteno, [Wensel y Roeser, 1978]

Con los valores de emisividad graficados en la Figura 2.8 se puede conseguir un estimado de la cantidad de calor radiada por el filamento apoyándonos en la ley de Stefan-Boltzmann.

### Temperatura de color

La temperatura del filamento no debe confundirse con la temperatura de color. La temperatura de color se mide en K, se usa para describir el color emitido por un cuerpo negro ideal a esa temperatura. Generalmente se usa para describir el color de una lámpara [Hyde, *et al.*, 1916], de forma que los tonos rojos tienen menor temperatura de color y los azules mayor temperatura de color. Alternativamente, también se suele decir que una luz es cálida cuando su temperatura de color es menor y que es fría cuando su temperatura de color es mayor, asociando el término “cálido” a los tonos que se acercan más al rojo.

### Calentamiento del filamento de tungsteno

La cantidad de calor que disipa el tungsteno se puede calcular con la **ley de Joule** (o efecto Joule), pues la lámpara de halógeno se puede considerar un elemento puramente resistivo por el cual circula una corriente eléctrica:

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (2.30)$$

en donde  $P$  es la potencia, o calor sobre segundo, disipado por el elemento resistivo,  $R$  es la resistencia del elemento,  $I$  la corriente que circula a través del elemento y  $V$  el voltaje entre las terminales del elemento. [Boylestad, 2002]

El voltaje que se aplica a la resistencia es controlable y puede ser conocido en cualquier momento, sin embargo para conocer la resistencia de cualquier material con un área transversal uniforme, en este caso el filamento de tungsteno, es necesario conocer 4 factores[Boylestad, 2002]:

- Material (en particular su resistividad  $\rho$ )
- Longitud  $l$
- Área transversal  $A$
- Temperatura del material (T)

La resistencia está relacionada con los demás factores por:

$$R = \rho(T) \frac{l}{A} \quad (2.31)$$

La resistividad se puede relacionar con la temperatura a través de una función no lineal en ciertos rangos de temperatura. Para el tungsteno la resistividad se puede expresar con la gráfica 2.9

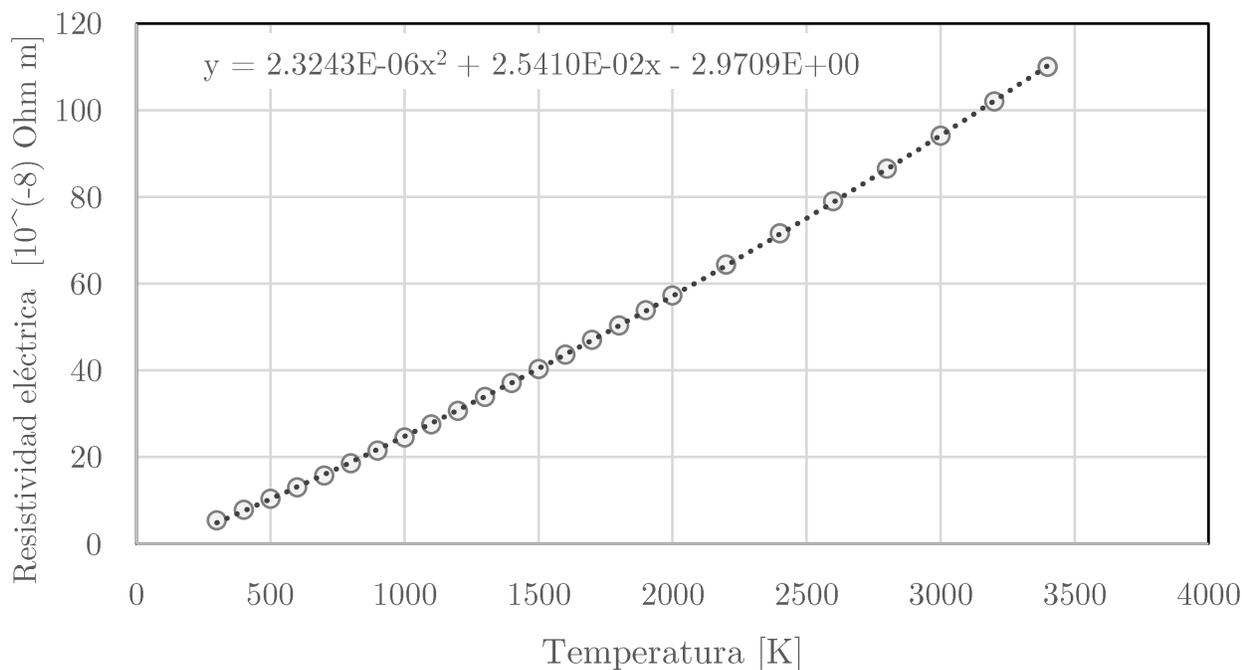


Figura 2.9 Resistividad eléctrica del tungsteno [Desai, *et al.*, 1984]

### 2.2.2. Radiación sobre el vidrio de la lámpara

Algunos materiales que se pueden usar para construir una lámpara de halógeno son comúnmente vidrio de cuarzo o aluminosilicato de acuerdo con [van den Hoek, *et al.*, 2010], por sus características que les permiten soportar las presiones de los gases en el interior y su resistencia a la temperatura. Para el modelo del sistema se podría considerar que una parte de la energía irradiada por el filamento de tungsteno es absorbida por el vidrio, esa sería la porción de la radiación que no atraviesa al vidrio. Para el caso de nuestra lámpara cualquiera de ambos materiales es prácticamente transparente por los motivos que se mencionan a continuación:

Para un vidrio tan delgado el cuarzo se puede considerar prácticamente transparente debido a lo siguiente: De acuerdo con [Beder, *et al.*, 1971] el coeficiente de absorción del cuarzo para ondas electromagnéticas con longitudes de onda entre 0.2 y 3 micrómetros es menor a  $1[\text{cm}^{-1}]$ , según la ley de Beer, dados el coeficiente de absorción  $k_\lambda$  y el grosor  $L$ , la proporción de la irradiancia espectral que logra atravesar un medio absorbente es:

$$\frac{I_{\lambda,L}}{I_{\lambda,0}} = e^{-k_\lambda L} \quad (2.32)$$

que para la lámpara de este sistema será al menos  $e^{-1[\text{cm}^{-1}]0.05[\text{cm}]} = 0.95$ . Esto significa que la radiación absorbida por el vidrio es menor al 5 % de la radiación incidente, por esto se puede considerar que el vidrio de cuarzo es transparente frente a longitudes de onda entre 0.2 y 3 micrómetros.

La exitancia (o irradiancia) espectral máxima que podría emitir un cuerpo a cierta temperatura es la del cuerpo negro, que puede obtenerse con la ley de [Planck, 1914] como

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left[ \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \right] \quad (2.33)$$

Donde  $h = 6.626069 \times 10^{-34}[\text{J} \cdot \text{s}]$  es la constante de Planck,  $c = 299,792,458[\text{m}/\text{s}]$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $k_B = 1.38065 \times 10^{-23}[\text{J}/\text{K}]$  es la constante de Boltzmann

La irradiancia espectral del tungsteno se puede calcular multiplicando la irradiancia del cuerpo negro por la emisividad espectral del tungsteno, pero puesto que la irradiancia espectral de un cuerpo negro en longitudes de onda menores a  $0.2 \mu\text{m}$  y mayores a  $3 \mu\text{m}$  es pequeña en comparación a la irradiancia en temperaturas entre 0.2 y  $3 \mu\text{m}$ , como se observa en la Figura 2.10, se considera que el vidrio es completamente transparente en este sistema.

En el caso del aluminosilicato, de acuerdo con [Lind y Rusin, 1978], este material tiene una transmitancia frente a la luz solar mayor a 0.9 cuando su grosor es de 0.1 pulgadas (2.54 mm), que es un grosor 5 veces mayor al del vidrio de nuestra lámpara. Observando que la radiación espectral que percibimos del sol, aún después de que la atmósfera filtre una parte de ella, sigue teniendo una magnitud muy alta para distintas longitudes de onda entre los 0.3 y  $2.5 \mu\text{m}$  [Çengel, 2011] podemos decir que en general, la transmitancia del vidrio de la lámpara será también muy alta frente a la radiación emitida por el filamento de tungsteno si su material es aluminosilicato.

### 2.2.3. Radiación sobre las paredes de MDF

En el caso de la radiación entre el filamento y las paredes de MDF se tiene un escenario en el que se puede simplificar tanto la absorptividad de las paredes como el factor de visión entre el filamento

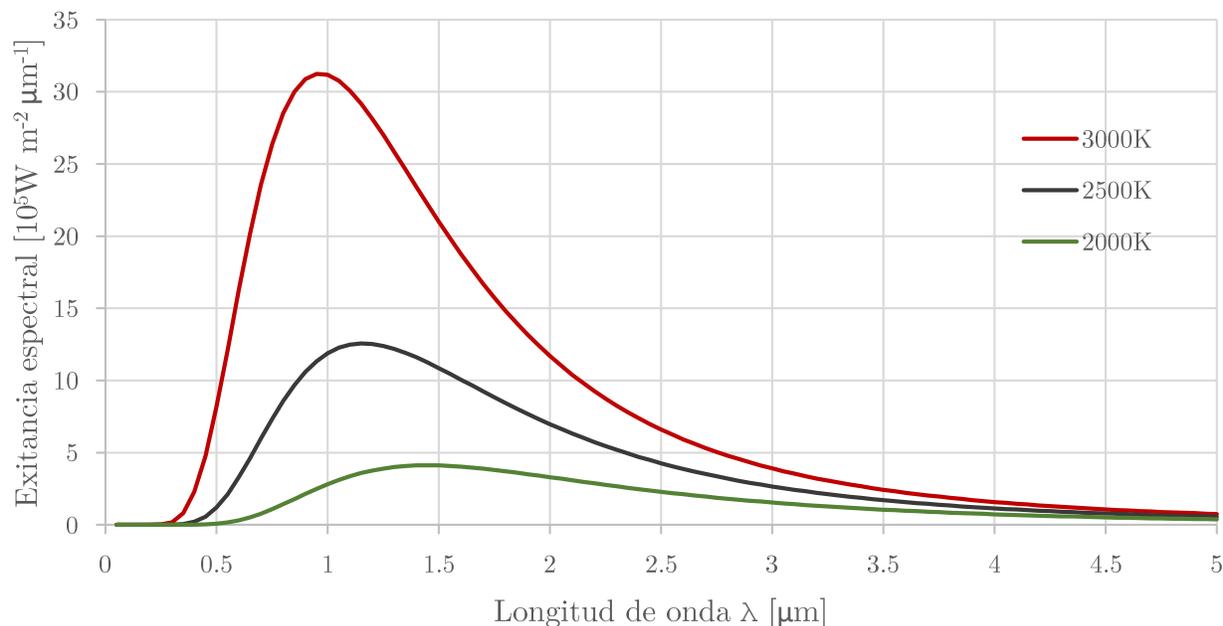


Figura 2.10 Radiación de un cuerpo negro a distintas temperaturas y longitudes de onda

y las paredes. Cuando se tiene un objeto pequeño contenido en una cavidad grande, se tiene que la radiación entre el objeto pequeño y el cuerpo que lo rodea es:

$$\dot{Q}_{12} = A_1 \sigma \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.34)$$

En este caso,  $A_1$  representaría el área del filamento,  $\epsilon_1$  la emisividad del tungsteno,  $T_1$  y  $T_2$  la temperatura del filamento y la temperatura de las paredes respectivamente, en Kelvin.

Aún cuando la sonda pueda estar muy cerca de la lámpara, no hay una cantidad significativa de calor que se transfiera a ella por radiación, debido a que la emisividad del acero inoxidable pulido es aproximadamente 0.17, y como consecuencia de la **ley de Kirchhoff para radiación térmica** su absorptividad también será muy baja; sumado a esto, la sonda es un cuerpo que también se puede considerar pequeño desde la perspectiva de las paredes de MDF, por lo que solo una mínima cantidad de la luz que reflejen las paredes incidiría sobre el sensor, la mayor parte incidirá nuevamente en las paredes [Çengel, 2011].

#### 2.2.4. Sensor de temperatura IFM TD2231

El sensor TD2231 (Figura 2.11) es uno de los elementos más importantes y notorios de este sistema, se trata de un sensor industrial de grado alimenticio, su transductor de temperatura es un RTD Pt1000. El sensor está hecho para trabajar con un rango de medición de -10 a 150°C. Cuenta con un display de 4 dígitos que permite visualizar el valor de temperatura y da una señal de salida acondicionada para una corriente de 4-20 mA que por sí misma sería compatible para funcionar con controladores industriales, aunque en este caso se acondiciona de nuevo en el circuito impreso para dar una salida de voltaje. Como característica adicional, el dispositivo es compatible con con la tecnología IO-Link que está estandarizada en la IEC 61131-9.



Figura 2.11 Fotografía del sensor TD2231

De acuerdo con el fabricante, el material del termopozo (cubierta) es acero 316L. La parte que estará más cerca de la lámpara de halógeno es el extremo de la sonda donde se encuentra contenido el Pt1000. Pt1000 que tiene un rango de medición entre  $-10$  y  $150^{\circ}\text{C}$ .

Algunas características que son de importancia para el modelo son la longitud, grosor y radio del termopozo, pues el cuerpo de la sonda se puede considerar como un cilindro hueco de acero 316L con una tapa en uno de sus extremos, como se ve representado en la Figura 2.12.

Algunas de estas medidas se pueden encontrar en la hoja de datos del fabricante, excepto por el grosor, el cual para sensores parecidos de fabricantes de otras marcas puede tener valores alrededor de  $0.5$  [mm]. Es posible que el grosor del tubo cilíndrico no sea el mismo que el grosor de la tapa inferior, por ejemplo, en el estándar PTC (*Performance Test Code*) 19.3 de la ASME (American Society of Mechanical Engineers) concerniente al diseño de termopozos se les diferencia como “grosor de pared” y “grosor de la punta”, pero en este modelo se asumirá que tienen el mismo valor.

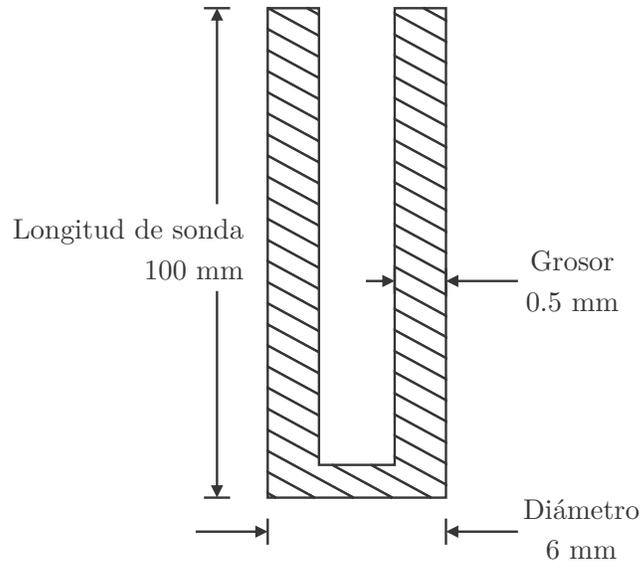


Figura 2.12 Medidas de la sonda de acero del sensor TD2231

### 2.2.5. Termopares tipo K

La medición de temperatura para el vidrio, aire y las paredes de MDF se realiza con termopares tipo K (Figura 2.13). En el circuito impreso se acondiciona su salida, usando el circuito integrado AD8495 para tener una salida de  $\frac{5mV}{^{\circ}C}$  y posteriormente se escala el voltaje con un amplificador operacional para dar una salida en el rango de 0-5 Volts.

Al ser menos voluminosos, los termopares dan una medición de temperatura mucho más rápida que el sensor TD2231, la sensibilidad de los termopares como transductores es debida al **efecto Seebeck**, donde se genera una diferencia de potencial entre dos puntos de un alambre que se encuentren a distintas temperaturas.



Figura 2.13 Fotografía de un termopar tipo K

### Efecto Seebeck

[Reed, 1999] El efecto Seebeck es la generación de una Fuerza electromotriz (FEM) entre pares de puntos de cualquier material eléctricamente conductor debido a una diferencia de temperatura entre ellos.

El efecto Seebeck está principalmente influido, además de por las temperaturas, por el Coeficiente Absoluto de Seebeck,  $\sigma(T)$ , cuyas unidades están en [Volts/Unidad de Temperatura], y se define sobre cualquier región termoelectricamente homogénea de un material conductor individual delgado por:

$$\sigma(T) = dE/dT \quad (2.35)$$

Este coeficiente permite conocer el incremento de FEM entre pares de puntos, sin importar la distancia, entre los que la diferencia de temperatura es  $\Delta T = (T_2 - T_1)$  con la ecuación 2.36

$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \sigma(T) dT = E(T_2) - E(T_1) \quad (2.36)$$

que se representa de forma gráfica en la Figura 2.14

Para algún material específico se podrían realizar mediciones para obtener una curva que describa el coeficiente de Seebeck en función de distintas temperaturas, el coeficiente de Seebeck se puede expresar como un polinomio que tenga validez en cierto dominio de temperaturas, de forma que:

$$p_\sigma(T) \approx \sigma(T) \quad (2.37)$$

Y podemos nombrar la integral indefinida de ese polinomio como  $P_\sigma(T)$ . Usando las ecuaciones 2.36 y 2.37 podemos llegar a que:

$$\Delta E \approx P_\sigma(T_2) - P_\sigma(T_1) \quad (2.38)$$

Si pudiéramos medir la FEM entre ambos puntos y se conociera la temperatura  $T_1$  se tendría que

$$P_\sigma(T_2) \approx \Delta E + P_\sigma(T_1) \quad (2.39)$$

donde al conocer completamente el lado derecho de la ecuación,  $T_2$  se puede calcular, por ejemplo, con algún método numérico.

Es notorio que en el escenario anterior donde el alambre es de un solo material, el efecto Seebeck solo produciría una FEM relevante si tuviéramos posibilidad de medir el voltaje entre dos puntos: en uno a temperatura conocida, y en otro, que se posiciona en contacto con la temperatura de interés. Normalmente no es práctico tomar medidas de voltaje en el punto sensible a temperatura  $T_2$ , por lo que una mejor idea es usar alambres de características distintas. Cualquier par de materiales conductores y termoelectricamente disimilares acoplados en una interfaz es un **termopar**.

De la Figura 2.15, la FEM que se genera en los extremos es:

$$\Delta E = \int_{T_0}^{T_1} \sigma_C(T) dT + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_B(T) dT + \int_{T_2}^{T_1} \sigma_A(T) dT + \int_{T_1}^{T_0} \sigma_C(T) dT$$

Donde  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$  son las curvas que describen el coeficiente de Seebeck (curvas de Seebeck) para los materiales A y B respectivamente, y  $\sigma_C$  la que lo describe para el material de las extensiones. Por las propiedades de las integrales definidas se puede llegar a la simplificación

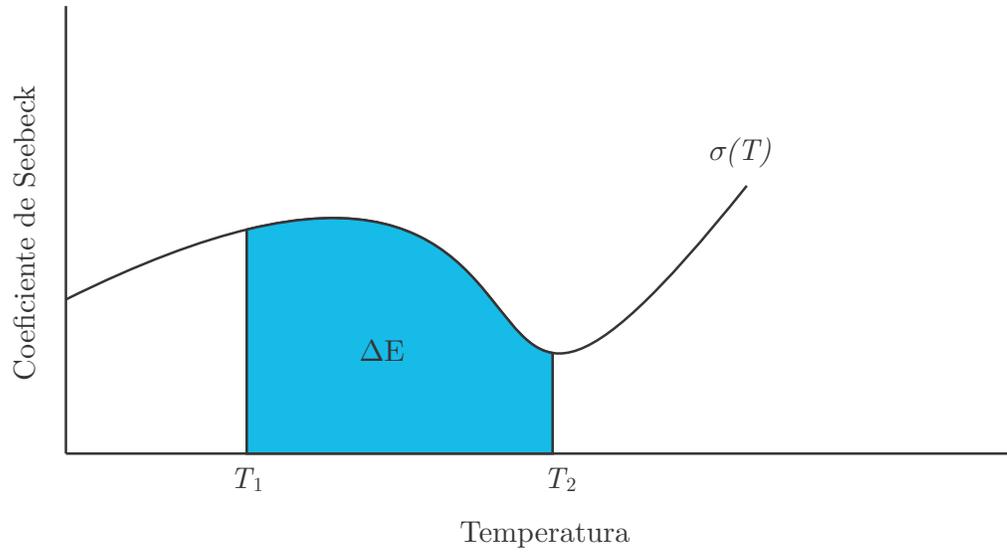


Figura 2.14 Efecto Seebeck. La FEM generada por el efecto Seebeck es una integral definida del coeficiente de Seebeck

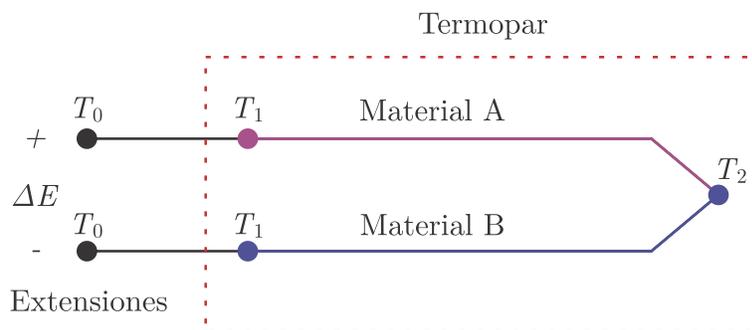


Figura 2.15 Representación básica de un termopar

$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_B(T) dT + \int_{T_2}^{T_1} \sigma_A(T) dT = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_B(T) - \sigma_A(T) dT \quad (2.40)$$

Al tener esta agrupación de coeficientes se produce un coeficiente “combinado” que permite conocer la temperatura en  $T_2$ , dado que se conozca de antemano la temperatura en  $T_1$ . Anteriormente se fijaban los puntos a  $T_1$  a una temperatura conocida que podía ser la de un baño helado a 0 °C, actualmente, esto no es necesario porque la temperatura  $T_1$  se puede conocer con un sensor auxiliar (por ejemplo un RTD) y ser compensada en un proceso conocido como **compensación de unión fría**. En el caso de nuestro circuito impreso, este proceso lo realiza el componente AD8495, que cuenta con un sensor interno, la compensación está especificada para temperaturas ambiente entre 0 y 50 °C y es óptima a 25°C. Cabe mencionar que para la medición de temperatura, el componente AD8495 debe “conocer” la curva de Seebeck característica de un termopar tipo K (Figura 2.16).

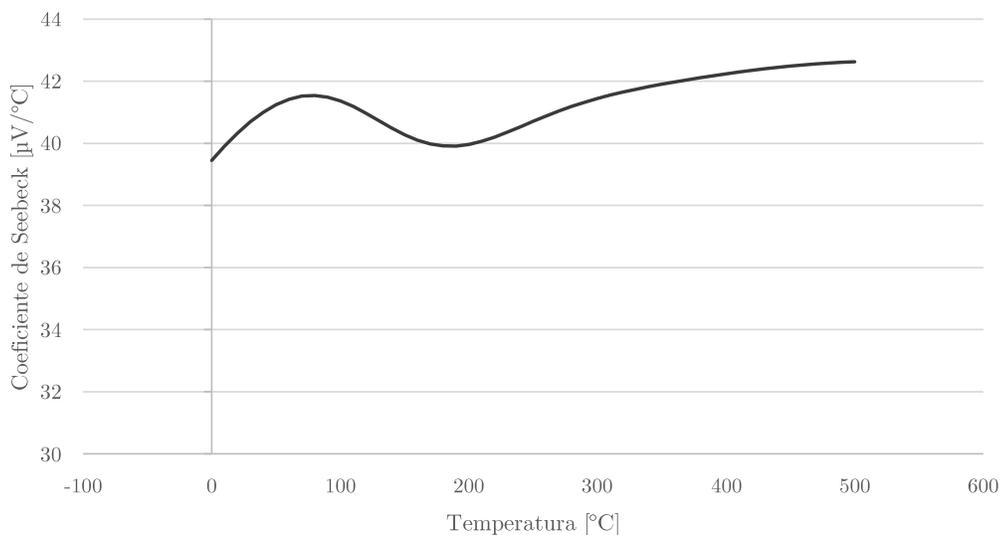


Figura 2.16 Curva de Seebeck del termopar tipo K para 0 a 500°C [Burns, *et al.*, 1993]



## Capítulo 3

# Desarrollo del modelo matemático

En este capítulo se hace uso de la teoría recabada en el capítulo 2 para desarrollar y obtener el modelo matemático en parámetros concentrados de la plataforma de transferencia de calor mostrada en la Figura 1.1.

A continuación, en la sección 3.1 se describen los elementos del sistema y la dinámica que existe entre ellos a grandes rasgos; posteriormente en la sección 3.2 se definen propiedades físicas y medidas geométricas que se utilizarán más adelante para la obtención de las dinámicas en las secciones 3.3 y 3.4. Finalmente, con las dinámicas descritas se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales en la sección 3.5. Adicionalmente se ilustra una analogía de este sistema a un circuito eléctrico en la sección 3.6.

### 3.1. Elementos relevantes y materiales

Los componentes y elementos que forman parte del sistema térmico son:

- Sensor IFM TD2231 de salida 4-20 mA y medición de -10 a 150°C. Su transductor es el RTD Pt1000 en el interior de la sonda. El cuerpo metálico de la sonda afecta significativamente la dinámica del sistema.
- Termopares tipo K. Permiten una medición de -50 a 400°C, están acondicionados con el circuito AD8495 y un amplificador operacional para dar una salida de 0-5 Volts. Se usan para medir las temperaturas del vidrio de la lámpara, el aire al interior de la estructura y las paredes de MDF.
- Lámpara de halógeno de 20 Watts con alimentación a 12 Volts. Es el principal actuador del sistema, su activación provoca que el filamento en su interior se caliente por efecto Joule de forma que la lámpara transmite calor al sistema por conducción, convección y radiación.
- Ventilador de golpe radial de 50 mm con alimentación a 12 Volts. Su activación se considera como una perturbación al sistema.
- Estructura de madera MDF. Se considera que las 6 paredes que rodean al sistema son parte de la dinámica.
- Aire en el interior de la estructura.
- Aire del ambiente (al exterior de la estructura).

- Micrómetro de profundidad con rango de 0 a 2 pulgadas y precisión de 0.00005 pulgadas.

### 3.1.1. Consideraciones y descripción de las partes que integran al sistema

Para el desarrollo del modelo que emulará el funcionamiento del sistema real, este modelo debe ser un modelo de parámetros concentrados, de forma que los mecanismos de transferencia de calor no estarán expresados de forma tridimensional ni usarán ecuaciones con derivadas parciales; además, todo a lo que a continuación se le llame cuerpo tiene al menos una capacitancia térmica y transfiere calor a otros cuerpos del sistema a través de resistencias térmicas, exceptuando dos escenarios en las que por simplicidad en vez de resistencias se expresa directamente el índice de transferencia de calor. Estos casos son la transferencia por radiación y el arreglo de resistencias desarrollado en la sección 3.4.4.

Para construir el modelo de este sistema térmico como un modelo de parámetros concentrados se toman las siguientes consideraciones:

1. La lámpara de halógeno produce calor, al aplicarse voltaje en sus terminales el filamento de tungsteno se calienta por efecto Joule.
2. La acción del ventilador de golpe radial afecta al sistema aumentando la velocidad del aire y provocando convección forzada, pero no se considera el cuerpo del ventilador como parte del sistema, y por la complejidad del efecto de convección, tampoco se considera como actuador en este trabajo.
3. El micrómetro de profundidad se puede usar para modificar la distancia de separación entre la lámpara y la sonda, pero esta distancia se mantiene constante mientras el proceso esté encendido.
4. Más allá de permitir variar la distancia, el micrómetro de profundidad no afecta la dinámica del sistema.
5. Los termopares tipo K no afectan la dinámica del sistema.
6. La sonda del sensor TD2231 forma parte del modelo, se modela como un cuerpo de acero 316L dividido en tres secciones
  - a) La primera sección es la más cercana al vidrio de la lámpara y cuenta con su propia capacitancia térmica.
  - b) La segunda sección considera la parte cercana a la primera sección, que también presenta variaciones de temperatura pero no tan altas como en la primera sección. Cuenta con su propia capacitancia térmica.
  - c) La tercera sección es la más alejada, se considera que siempre se mantiene a temperatura ambiente por lo que no es necesario considerar que tiene una capacitancia térmica. La segunda sección le transfiere calor por conducción.
7. La lámpara de halógeno forma parte del modelo, se modela como un cuerpo de tungsteno conectado por una resistencia térmica a un cuerpo de vidrio.
8. El aire en el interior de la estructura forma parte del modelo, solo se modela el cuerpo de aire que está cercano a la lámpara y la sonda para aproximarse mejor a la temperatura de su respectivo termopar.

9. Se considera que las 6 paredes son un cuerpo de MDF y que el aire en su interior no se mezcla con el aire del exterior.
10. La temperatura del ambiente es independiente del calor que se le transfiera.

### 3.1.2. Descripción de la transferencia de calor entre los elementos del modelo

Los cuerpos del sistema térmico interactúan transfiriendo calor de las siguientes formas:

1. El filamento de tungsteno transfiere calor por convección al vidrio.
2. El filamento de tungsteno transfiere calor por radiación a las paredes de MDF.
3. La radiación máxima del filamento a la sonda es tan pequeña (máximo  $0.018[W]$ ) que se desprecia.
4. El vidrio transfiere calor por convección al aire.
5. El vidrio transfiere calor por conducción a la sonda cuando está en pleno contacto.
6. Una parte del aire más cercana al vidrio y que está a su misma temperatura transfiere calor por convección a la sonda.
7. El aire transfiere calor por convección a las paredes de MDF.
8. La primera sección de la sonda transfiere calor por convección al aire.
9. La primera sección de la sonda transfiere calor por conducción a la segunda sección.
10. La segunda sección de la sonda transfiere calor por convección al aire
11. La segunda sección de la sonda transfiere calor por conducción a la tercera sección.
12. Las paredes de MDF transfieren calor por convección al aire del exterior.

### 3.1.3. Variables de índice de transferencia de calor entre cuerpos del sistema

De los enunciados en la sección 3.1.2, se expresa el índice de transferencia de calor positivo de un cuerpo “a” a un cuerpo “b” del sistema con las variables de la Tabla 3.1

Cuerpo A	Cuerpo B						
	Filamento	Vidrio	Aire	Sonda Sección 1	Sonda Sección 2	Paredes de MDF	Temperatura ambiente
Filamento	0	$\dot{Q}_{Conv, fv}$	0	0	0	$\dot{Q}_{Rad, fp}$	0
Vidrio	$-\dot{Q}_{Conv, fv}$	0	$\dot{Q}_{Conv, va}$	$\dot{Q}_{Cond, vs}$	0	0	0
Aire	0	$-\dot{Q}_{Conv, va}$	0	$\dot{Q}_{Conv, acs} - \dot{Q}_{Conv, sa}$	$-\dot{Q}_{Conv, ta}$	$\dot{Q}_{Conv, ap}$	0
Sonda sección 1	0	$-\dot{Q}_{Cond, vs}$	$\dot{Q}_{Conv, sa} - \dot{Q}_{Conv, acs}$	0	$\dot{Q}_{Cond, st}$	0	0
Sonda sección 2	0	0	$\dot{Q}_{Conv, ta}$	$-\dot{Q}_{Cond, st}$	0	0	$\dot{Q}_{Conv, tamb}$
Paredes de MDF	$-\dot{Q}_{Rad, fp}$	0	$-\dot{Q}_{Conv, ap}$	0	0	0	$\dot{Q}_{Conv, pamb}$
Temperatura ambiente	0	0	0	0	$-\dot{Q}_{Conv, tamb}$	$-\dot{Q}_{Conv, pamb}$	0

Tabla 3.1 Índices de transferencia de calor entre cuerpos del sistema

La Tabla 3.1 indica la transferencia de calor entre cuerpos del sistema, pero se necesita completar la dinámica con el efecto del actuador de la lámpara de halógeno. Este efecto es la disipación de calor por efecto Joule en el filamento de tungsteno, a la que llamamos  $P_f$  y se describirá más adelante en

3.4.1. De forma **completa**, el índice de transferencia de calor que recibe cada cuerpo lo representamos en las ecuaciones 3.1

$$\dot{Q}_p = \dot{Q}_{\text{Conv},ap} - \dot{Q}_{\text{Conv},pamb} + \dot{Q}_{\text{Rad},fp} \quad (3.1a)$$

$$\dot{Q}_a = -\dot{Q}_{\text{Conv},ap} + \dot{Q}_{\text{Conv},ta} + \dot{Q}_{\text{Conv},sa} - \dot{Q}_{\text{Conv},acs} + \dot{Q}_{\text{Conv},va} \quad (3.1b)$$

$$\dot{Q}_t = -\dot{Q}_{\text{Conv},tamb} + \dot{Q}_{\text{Cond},st} - \dot{Q}_{\text{Conv},ta} \quad (3.1c)$$

$$\dot{Q}_s = -\dot{Q}_{\text{Cond},st} + \dot{Q}_{\text{Conv},acs} - \dot{Q}_{\text{Conv},sa} + \dot{Q}_{\text{Cond},vs} \quad (3.1d)$$

$$\dot{Q}_v = -\dot{Q}_{\text{Cond},vs} - \dot{Q}_{\text{Conv},va} + \dot{Q}_{\text{Conv},fv} \quad (3.1e)$$

$$\dot{Q}_f = P_f - \dot{Q}_{\text{Rad},fp} - \dot{Q}_{\text{Conv},fv} \quad (3.1f)$$

## 3.2. Propiedades de los elementos

En esta sección se definen los valores constantes de los elementos que se usarán en el modelo, estos valores se conforman de propiedades físicas encontradas en la literatura y de valores geométricos medidos, fijados a consideración para el análisis u obtenidos de las especificaciones de los componentes. Todos estos valores se sustituirán en las secciones 3.3 y 3.4 para la obtención de resistencias y capacitancias térmicas, así como la descripción de otras dinámicas del sistema.

### 3.2.1. Propiedades físicas de los materiales

Las propiedades físicas relevantes de los materiales del sistema a temperatura ambiente están expresadas en la Tabla 3.2. Estos datos se obtuvieron de una revisión de las siguientes fuentes:

- Las propiedades del cuarzo se tomaron de [Lide, 1991]
- Las propiedades del MDF varían dependiendo del fabricante. Aunque está construido de distintos tipos de maderas, su densidad suele aproximarse a la de la maderas duras, por la similitud que tienen las capacitancias y conductividades de distintos tipos de maderas en este caso se usarán los valores de las maderas duras mencionadas en [Bergman, *et al.*, 2011].
- Para las propiedades del aire a temperatura ambiente, el rango de coeficientes de convección térmica se obtuvo de [SolidWorks-Knowledge-Base, 2024] y las otras propiedades de [Bergman, *et al.*, 2011]
- Para las propiedades del acero 316L, estas se asumieron como las del acero 316 descritas en [Bergman, *et al.*, 2011], el motivo es que la composición es prácticamente idéntica y su principal diferencia es la cantidad máxima de carbón en la aleación; 0.03 % para el acero 316L y 0.08 % para el acero 316.
- Las propiedades del tungsteno se tomaron de [Bergman, *et al.*, 2011] y su emisividad total a 3000 K de [Lide, 1991].

	Cuarzo	Aire	Acero 316L	MDF	Tungsteno
Densidad $\rho \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$\rho_v = 2200$	$\rho_a = 1.1614$	$\rho_s = 8238$	$\rho_p = 720$	$\rho_f = 19300$
Conductividad térmica $k \left[ \frac{W}{K \cdot m} \right]$	$k_v = 1.381$	$k_a = 0.026$	$k_s = 13.4$	$k_p = 0.16$	$k_f = 174$
Calor específico $c_p \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right]$	$c_v = 753$	$c_a = 1007$	$c_s = 468$	$c_p = 1255$	$c_f = 132$
Coefficiente de convección térmica $h_c \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$	-	$5 \leq h_a \leq 25$	-	-	-
Coefficiente de emisividad $e$ ó $\epsilon \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$	-	-	-	-	$e_f = \epsilon_f = 0.336$

Tabla 3.2 Propiedades de los materiales

### 3.2.2. Medidas de los elementos del sistema

Las dimensiones de los elementos del sistema representan un papel muy importante tanto para obtener valores concretos de los índices de transferencia de calor, como para obtener los valores de capacitancia térmica; también fueron necesarias las medidas del filamento para calcular el calor generado en la lámpara por efecto Joule. Estos valores se presentan en las tablas a continuación:

Filamento de Tungsteno		
Medida	Descripción	Valor
$r_f$	Radio del filamento	$55 \times 10^{-6} [m]$
$r_{\text{espira},f}$	Radio de espiras del filamento	$450 \times 10^{-6} [m]$
$h_{\text{cilindro},f}$	Altura del “cilindro” de Tungsteno	$3.5 \times 10^{-3} [m]$
$\text{Vol}_f$	Volumen ocupado por todo el filamento Ecuación de volumen de un toroide $\times 20$	$20 \times 2 \times \pi r_f^2 r_{\text{espira},f}^2 [m^3]$
$m_f$	Masa del filamento de Tungsteno	$\text{Vol}_f \times \rho_f [kg]$
$A_f$	Área del “cilindro” de Tungsteno	$2\pi r_{\text{espira},f} h_{\text{cilindro},f} [m^2]$

Tabla 3.3 Medidas del filamento de tungsteno

Vidrio de lámpara (cuarzo)		
Medida	Descripción	Valor
$w_v$	Grosor del vidrio	$0.5 \times 10^{-3} [m]$
$h_v$	Altura del “cilindro” de vidrio	$10 \times 10^{-3} [m]$
$r_{v,\text{ext}}$	Radio externo del vidrio Ecuación de volumen de un toroide $\times 20$	$3.95 \times 10^{-3} [m]$
$r_{v,\text{int}}$	Radio interno del vidrio	$r_{v,\text{ext}} - w_v$
$r_{vs}$	Radio del área de contacto entre el vidrio y la sonda Veces que es mayor el volumen	$1.5 \times 10^{-3} [m]$
$F_v$	real del vidrio al de un cilindro hueco considerando la parte inferior de la lámpara	2.1
$\text{Vol}_v$	Volumen del vidrio	$((\pi r_{v,\text{ext}}^2 - \pi r_{v,\text{int}}^2) \times (h_v - w_v) + 2 \times \pi r_{v,\text{ext}}^2 w_v) \times F_v [m^3]$
$m_v$	Masa del vidrio	$\text{Vol}_v \rho_v [kg]$
$A_{v,\text{int}}$	Área entre el vidrio y el gas inerte en el interior	$2\pi r_{v,\text{int}} h_v + 2\pi r_{v,\text{int}}^2$
$A_{vs}$	Área de la zona de contacto entre el vidrio y la sonda	$\pi r_{vs}^2 [m^2]$

Tabla 3.4 Medidas del vidrio de la lámpara

Sonda de acero 316L		
Medida	Descripción	Valor
$r_s$	Radio de la sonda	$3 \times 10^{-3}[m]$
$w_s$	Grosor de la lámina de la sonda	$1 \times 10^{-3}[m]$
$l_i$	Longitud de instalación del transmisor TD2231	$0.1[m]$
$l_s$	Longitud de la sección que contiene al sensor Pt1000	$35 \times 10^{-3}[m]$
$l_t$	Longitud de la segunda sección de la sonda	$30 \times 10^{-3}[m]$
$l_{vs}$	Longitud al centro de la sección 1	$l_s/2$
$l_{st}$	Longitud entre el centro de la sección 1 y el centro de la sección 2	$(l_s + l_t)/2$
$l_{tamb}$	Longitud entre el centro de la sección 2 y el exterior del sistema	$l_i - l_s - l_t/2$
$m_s$	Masa de la primera sección de la sonda	$Vol_s \rho_s [kg]$
$m_t$	Masa de la segunda sección de la sonda	$Vol_t \rho_s [kg]$
$Vol_s$	Volumen de la primera sección de la sonda	$\pi(r_s^2 - (r_s - w_s)^2 \times (l_s - w_s) + w_s \pi r_s^2)[m^3]$
$Vol_t$	Volumen de la segunda sección de la sonda	$\pi(r_s^2 - (r_s - w_s)^2) \times l_t [m^3]$
$A_{st}$	Área transversal (horizontal) de la sonda	$\pi(r_s^2 - (r_s - w_s)^2)[m^2]$
$A_s$	Área de contacto entre la primera sección de la sonda con el aire	$2\pi r_s l_s$
$A_t$	Área de contacto de la segunda sección con el aire	$2\pi r_s l_t$
$A_{sac}$	Área de contacto entre la sonda y el aire cercano a la lámpara	$\pi r_s^2$

Tabla 3.5 Medidas de la sonda TD2231

Aire a 3.5cm de la sonda		
Medida	Descripción	Valor
$l_a$	Distancia al termopar que mide la temperatura del aire	$0.035[m]$
$Vol_a$	Volumen de una esfera de radio $l_a$	$\pi(l_a)^3 [m^3]$
$m_a$	Masa de la esfera de radio $l_a$	$Vol_a \rho_a [m^3]$

Tabla 3.6 Medidas consideradas para el aire

Paredes de MDF		
Medida	Descripción	Valor
$w_p$	Grosor de las paredes de MDF	$0.003[m]$
$l_p$	Longitud de las paredes de MDF	$0.2[m]$
$Vol_p$	Volumen total de las paredes de MDF	$6l_p^2 w_p [m^3]$
$m_p$	Masa total de las paredes de MDF	$Vol_p \rho_p [kg]$
$A_p$	Área de contacto entre las paredes y el aire del interior	$6l_p^2 [m^2]$

Tabla 3.7 Medidas para las paredes de MDF

### 3.2.3. Coeficientes de convección aproximados

Los coeficientes de convección pueden describirse como función de la temperatura y la geometría de los elementos, sin embargo, la mayor parte de las fórmulas empíricas o semiempíricas que se pudieron

encontrar para calcularlos son en general útiles para cuerpos de mayor tamaño y no para los que forman parte de este sistema. A continuación se definen los coeficientes que deben conocerse para calcular la transferencia de calor por convección usando valores estimados, tomando en cuenta que la convección natural del aire típicamente tiene coeficientes entre 5 y 25. En el caso del valor  $Nu_{vas}$  se le asignó un valor estimado de 60, de la misma manera, debido a la dificultad de encontrar una fórmula que funcionara con las geometrías de este sistema.

Coeficientes de convección		
Coeficiente	Descripción	Valor
$h_{va}$	Entre el vidrio y el aire. Su resistencia se obtiene en la sección 3.4.3	–
$h_{sa}$	Entre la sonda y el aire	$6[W/m^2\text{°C}]$
$h_{pa}$	Entre la pared de MDF y el aire	$6[W/m^2\text{°C}]$
$h_{pamb}$	Entre la pared de MDF y el exterior	$10[W/m^2\text{°C}]$
$Nu_{vas}$	Número de Nusselt entre el vidrio, aire y la sonda	60

Tabla 3.8 Coeficientes de convección

### 3.3. Obtención de resistencias y capacitancias térmicas

Retomando lo explicado en la sección 2.1.6, es notorio que una gran parte del modelo de parámetros concentrados se puede describir con dos elementos principales que son **resistencias y capacitancias térmicas**.

Si existe transferencia de calor entre dos regiones “a” y “b”, podemos expresar el índice de transferencia de calor  $\dot{Q}$  con la ecuación de alguno de los tres modos de transferencia de calor.

- Si es por conducción:

$$\dot{Q}_{\text{Cond,ab}} = \frac{k_m A_m}{L_m} (T_a - T_b) \quad (3.2)$$

donde  $k_m$  es la conductividad térmica del material a través del cual se propaga el calor,  $A_m$  su área perpendicular a la dirección de la transferencia de calor y  $L_m$  la distancia entre “a” y “b” que normalmente es el grosor del material.

El valor de la resistencia es

$$R_{ab} = \frac{L_m}{k_m A_m} \quad (3.3)$$

- Si es por convección:

$$\dot{Q}_{\text{Conv,ab}} = h_f A_s (T_a - T_b) \quad (3.4)$$

en donde  $h_f$  es el coeficiente de convección del fluido y  $A_s$  el área de la superficie.

La resistencia se obtiene como

$$R_{ab} = \frac{1}{h_f A_s} \quad (3.5)$$

- Si es por radiación:

$$\dot{Q}_{\text{Rad,ab}} = A_a F_{ab} \epsilon_a \alpha_b \sigma (T_a^4 - T_b^4) \quad (3.6)$$

donde  $A_a$  es el área superficial de “a”,  $F_{ab}$  es el factor de visión de “a” hacia “b”,  $\epsilon_a$  es la emisividad de “a”,  $\alpha_b$  es la absorptividad de “b” y  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

En el caso de la transferencia por conducción y convección se puede terminar por expresar el índice de transferencia de calor como  $\dot{Q}_{ab} = \frac{T_a - T_b}{R_{ab}}$

Ahora bien, para obtener la capacitancia térmica de un cuerpo “a” se puede usar la ecuación expresada anteriormente en la ecuación 2.28 multiplicando la masa con el calor específico, la masa se puede obtener con el volumen  $\text{Vol}_a$  y densidad  $\rho_a$  del cuerpo como

$$m_a = \rho_a \text{Vol}_a \quad (3.7)$$

y sustituyendo en la ecuación 2.28 se tiene

$$C_a = m_a c_a \left[ \frac{J}{^\circ C} \right] = \rho_a \text{Vol}_a c_a \quad (3.8)$$

Así se puede obtener la capacitancia para los distintos cuerpos, en todos los casos se hace uso de la ecuación 3.7 pero por simplicidad solo expresaremos la capacitancia con la masa y el calor específico. La obtención del volumen en algunos casos puede ser más elaborada y se define en la sección 3.2.2

### 3.3.1. Resistencias térmicas

Muchos de los valores de resistencia los podemos obtener directamente con ayuda de lo anterior, siguiendo la notación de la Tabla 3.1 se expresa la resistividad térmica entre un cuerpo “a” y un cuerpo “b” del sistema como  $R_{ab}$ . Principalmente se necesita conocer áreas y longitudes, que se definen en la sección 3.2.2, coeficientes de convección que se encuentran en la Tabla 3.8 y conductividades térmicas de la Tabla 3.2.

- Resistencia del vidrio de la lámpara  $R_{vv}$  Describe la resistencia que hay en el vidrio entre la zona interior y la exterior de la lámpara de halógeno. Es necesaria para el análisis en estado estacionario y se incluye en  $R_{fv}$ . Aunque el vidrio tiene la forma de un cilindro con tapas, se aproxima su valor como si fuera una pared plana, donde el área total es el área de la superficie interior.

$$R_{vv} = \frac{w_v}{k_v A_{v,\text{int}}} = 1.2418 \left[ \frac{^\circ C}{W} \right] \quad (3.9)$$

- Resistencia de la primera sección de la sonda al aire  $R_{sa}$  Describe el calor que la primera sección de la sonda (la región “sensible”) transfiere al aire por convección. Se calcula con el área de la primera sección y el coeficiente de convección del aire alrededor de la sonda.

$$R_{sa} = \frac{1}{A_s h_{sa}} = 252.6269 \left[ \frac{^\circ C}{W} \right] \quad (3.10)$$

- Resistencia de la primera a la segunda sección de la sonda  $R_{st}$  Describe la transferencia de calor por conducción de la primera sección de la sonda a la segunda. Se calcula con el área transversal de la sonda, la distancia del centro de la primera sección al centro de la segunda sección y la conductividad térmica del acero 316L.

$$R_{st} = \frac{l_{st}}{A_{st}k_s} = 280.7346 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right] \quad (3.11)$$

- Resistencia de la segunda sección de la sonda al aire  $R_{ta}$  Describe la transferencia de calor por convección entre la segunda sección de la sonda y el aire. Se calcula con el área de la segunda sección y el coeficiente de convección del aire alrededor de la sonda.

$$R_{ta} = \frac{1}{A_t h_{sa}} = 294.7314 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right] \quad (3.12)$$

- Resistencia de la segunda sección de la sonda a la sección a temperatura ambiente. Describe la transferencia de calor por conducción entre la segunda sección de la sonda y una tercera sección que por estar alejada de la lámpara ya se considera que está a temperatura ambiente. Se calcula con la distancia entre la segunda y tercera sección, el área de la sección transversal y la conductividad térmica del acero 316L.

$$R_{tamb} = \frac{l_{tamb}}{A_{st}k_s} = 431.8994 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right] \quad (3.13)$$

- Resistencia entre el aire y las paredes de MDF  $R_{ap}$  Describe la transferencia de calor por convección entre el y las paredes de MDF. Se calcula con el área de las 6 paredes de MDF y el coeficiente de convección del aire cercano a las paredes.

$$R_{ap} = \frac{1}{A_p h_{pa}} = 0.6944 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right] \quad (3.14)$$

- Resistencia de las paredes de MDF  $R_{pp}$  Describe la transferencia de calor por conducción entre la parte interior y exterior de las paredes de MDF. Se calcula con el área de las 6 paredes, el grosor del MDF y la conductividad térmica del MDF.

$$R_{pp} = \frac{w_p}{k_p A_p} = 0.0781 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right] \quad (3.15)$$

- Resistencia entre el interior de la pared de MDF y el exterior a temperatura ambiente  $R_{pamb}$  Describe la transferencia de calor entre el interior de las paredes y el aire del exterior que se encuentra a temperatura ambiente. Se calcula con el área de las 6 paredes y el coeficiente de convección del aire en el exterior, y además, se le suma la resistencia  $R_{pp}$  para considerar la resistencia del grosor de las paredes.

$$R_{pamb} = \frac{1}{A_p h_{pamb}} + R_{pp} = 0.4948 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right] \quad (3.16)$$

### 3.3.2. Otras resistencias térmicas

Otras resistencias importantes que requieren un análisis un poco más profundo son:

- Resistencia entre el filamento y el exterior del vidrio  $R_{fv}$ . Describe la transferencia de calor del filamento al exterior del vidrio con una sola resistencia. Se obtiene con un análisis en estado estacionario en la sección 3.4.2.
- Resistencia entre el exterior del vidrio y el aire  $R_{va}$ . Describe la transferencia de calor por convección entre el vidrio de la lámpara y el aire en el interior de la plataforma. Se obtiene con un análisis en estado estacionario en la sección 3.4.3
- Resistencias entre el vidrio, el aire cercano (o aire caliente) y el sensor  $R_{acs,int}$ ,  $R_{acs,ext}$ ,  $R_{s,int}$ ,  $R_{s,ext}$  y  $R_{ss}$ . Se desarrolla con un arreglo de resistencias y toma en cuenta la separación entre el vidrio de la lámpara y el sensor. Esto se describe en la sección 3.4.4. Estas resistencias corresponden a las transferencias de calor  $\dot{Q}_{Conv,acs}$  y  $\dot{Q}_{Cond,vs}$ , es importante notar que el calor fluye a través de un arreglo que no se puede representar con resistencias únicas de la notación  $R_{ab}$

### 3.3.3. Capacitancias térmicas

Las capacitancias térmicas se obtienen a continuación, su obtención requiere los valores de calor específico de la Tabla 3.2 y las medidas en la sección 3.2.2.

- Capacitancia del filamento  $C_f$ . La capacitancia del filamento se obtiene con la masa aproximada del filamento y el calor específico del tungsteno. El valor original de la capacitancia del filamento sería considerablemente pequeña a comparación de las capacitancias de todos los demás cuerpos

$$C_f = m_f c_f = 6.254 \times 10^{-7} \left[ \frac{J}{^\circ C} \right] \quad (3.17)$$

Por el valor tan pequeño de esta capacitancia se podría considerar simplemente que es mucho menor que las demás sin necesidad de llegar a un valor tan específico, debido a que la velocidad de respuesta en el filamento de cualquier forma será mucho más rápida que en todos los demás cuerpos. Usar específicamente el valor obtenido puede incluso generar errores de simulación dependiendo del método numérico, por lo que es necesario expresarla con un valor mayor en la simulación. Otra alternativa es ajustar su valor para contemplar hasta cierto punto los efectos de capacitancia de los pines de la lámpara y la base de cerámica.

- Capacitancia del vidrio  $C_v$ . Se obtiene multiplicando la masa del vidrio (cuarzo) por su calor específico. Un punto importante es que el vidrio no es justamente un cilindro, sino que la zona inferior en la que se sella la lámpara se tiene un volumen (y por lo tanto masa) adicional. Esta cantidad adicional se consideró previamente al multiplicar el volumen por una constante  $F_v$

$$C_v = m_v c_v = 0.5547 \left[ \frac{J}{^\circ C} \right] \quad (3.18)$$

- Capacitancia de la primera sección del sensor  $C_s$ . Es la capacitancia en la parte del sensor que está más cercana a la lámpara, la temperatura almacenada en esta capacitancia se considera que

es la misma que la medida por el componente Pt1000 en el interior de la sonda. Para considerar los materiales en el interior de la sonda se multiplica el volumen del acero por una constante  $F_s$  en la sección 3.2.2

$$C_s = m_s c_s = 1.4444 \left[ \frac{J}{^\circ C} \right] \quad (3.19)$$

- Capacitancia de la segunda sección del sensor  $C_t$  Es una capacitancia de la segunda sección de la sonda. Esta segunda sección ayuda a considerar la parte a menor temperatura que está cerca del sensor Pt1000 pero no lo suficiente para afectarlo directamente. De la misma forma que con  $C_s$ , se considera que el volumen está multiplicado por  $F_s$

$$C_t = m_t c_s = 1.1991 \left[ \frac{J}{^\circ C} \right] \quad (3.20)$$

- Capacitancia del aire  $C_a$  Para que represente la temperatura del aire a una distancia de 3.5 [cm], se considera el cuerpo del aire como una esfera de aire de radio de 3.5 [cm]. Se calcula la masa de esa esfera de aire y se multiplica por su calor específico para obtener su capacitancia

$$C_a = m_a c_a = 0.1575 \left[ \frac{J}{^\circ C} \right] \quad (3.21)$$

- Capacitancia de las paredes de MDF  $C_p$  Se obtiene multiplicando la masa de las seis paredes de MDF por el calor específico del MDF

$$C_p = m_p c_p = 650.5920 \left[ \frac{J}{^\circ C} \right] \quad (3.22)$$

## 3.4. Obtención de otras dinámicas

### 3.4.1. Disipación de calor en el filamento de tungsteno

La resistencia eléctrica del filamento  $R_f(T_f)$  se obtiene a partir de la ecuación 2.31

$$R = \frac{\rho l}{A} \quad (3.23)$$

donde  $l$  es la longitud del alambre,  $A$  su área transversal y  $\rho$  la resistividad eléctrica del material. La longitud  $l_f$  y el radio del filamento  $r_f$  son valores conocidos de mediciones en la Tabla 3.3, el área transversal se puede obtener como  $A_{t,f} = \pi \times r_f^2$ , y la resistividad eléctrica del tungsteno se obtiene de [Desai, *et al.*, 1984] como  $\rho_{e,f} = (0.000002324296133T_f^2 + 0.025409706621387T_f - 2.97091378161673)10^{-8}$ , con lo que se puede calcular:

$$R_f = \frac{\rho_{e,f} l_f}{A_{t,f}} \quad (3.24)$$

La potencia disipada por el filamento  $P_f$  se obtiene de la ley de Joule en conjunto con la ley de Ohm:

$$P_f = \frac{V_f^2}{R_f} = \frac{(\text{Señal de actuador de lámpara} \times \frac{\text{Voltaje máximo}}{\text{Señal máxima}} [V])^2}{R_f} \quad (3.25)$$

En donde  $V_f$  es el voltaje entre las terminales del filamento y la señal de actuador de lámpara es un valor de 0 a 100 que envía el controlador. El voltaje máximo en este caso es el nominal de la lámpara de 12 Volts, el cual corresponde a la señal máxima de 100 definida programáticamente en el PAC.

Reemplazando los nombres de las variables en el mismo orden para abreviar la ecuación tenemos:

$$P_f = \frac{(u \times \frac{V_{\text{máx}}}{u_{\text{máx}}})^2}{R_f} \quad (3.26)$$

### 3.4.2. Resistencia térmica entre el filamento y el exterior del vidrio

Al interior de una lámpara de halógeno está el filamento de tungsteno y un gas inerte, comúnmente xenón o kriptón, con una pequeña cantidad de algún halógeno, como yodo o bromo. La presión al interior de la lámpara es alta para dificultar la evaporación de las partículas de tungsteno. La transferencia de calor entre el tungsteno y el vidrio ocurre por lo tanto principalmente por convección, sin embargo, las fórmulas empíricas para calcular convección que se encuentran en la literatura de transferencia de calor son insuficientes para espacios pequeños con presiones y temperaturas tan variantes como las que puede haber en el interior de la lámpara de halógeno. Con estas consideraciones dicha resistencia térmica se calcula analizando la transferencia de calor en estado estacionario y asumiendo que se mantendrá constante. Para obtener la resistencia de esta manera se midieron las condiciones de estado estacionario con la lámpara encendida al 100% y una separación entre la sonda y el vidrio de la lámpara de  $d = 0.5[cm]$

En estado estacionario, la resistencia del filamento a la parte externa del vidrio es:

$$R_{fv} = \frac{T_{f,ss} - T_{v,int,ss}}{\dot{Q}_{Conv,fv,ss}} + R_{vv} \quad (3.27)$$

En donde el subíndice  $ss$  indica un valor medido o calculado para estado estacionario,  $R_{vv}$  es la resistencia entre el interior y el exterior del vidrio y  $T_{v,int}$  es la temperatura del vidrio en su lado interno.

La temperatura del filamento se estima de acuerdo a la literatura como  $T_{f,ss} = 2750[^\circ C]$ , la temperatura al exterior del vidrio se mide directamente con uno de los termopares, obteniendo  $T_{v,ss} = 292.4[^\circ C]$  y la temperatura al interior del vidrio se estima que será solo  $10^\circ C$  mayor, por lo que  $T_{v,int,ss} = 302.4[^\circ C]$ . La resistencia  $R_{vv}$  se calcula con la geometría y características del vidrio de cuarzo en la ecuación 3.9. El valor restante  $\dot{Q}_{Conv,fv,ss}$  se obtiene de saber que por la ley de la conservación de la energía, la potencia disipada por la resistencia eléctrica del tungsteno debe ser igual al calor que el tungsteno transfiere a sus alrededores, eso es, por convección al vidrio y por radiación a las paredes de MDF. Reordenando lo expresado:

$$\dot{Q}_{Conv,fv,ss} = P_{f,ss} - \dot{Q}_{Rad,fp,ss} \quad (3.28)$$

$P_{f,ss}$  es la potencia disipada por el filamento en estado estacionario. Evaluando para un voltaje de 12[V] y a la temperatura  $T_{f,ss}$  con la función conocida de la resistencia eléctrica  $R_f(T_f)$  se obtiene un resultado muy cercano al indicado por el fabricante, eso es  $P_{f,ss} \approx 20[W]$ .  $Q_{Rad,fp,ss}$  se calcula con la ecuación de Stefan-Boltzmann, asumiendo que todo el calor que irradie el filamento desde su superficie será recibido por las paredes de MDF que para este experimento estuvieron a temperatura  $T_{p,ss} = 32.24[^\circ C]$ . La superficie del filamento que irradia calor hacia afuera se estima como si fuera la superficie de un cilindro sólido multiplicada por un factor menor a 1 para tomar en cuenta que no se trata de un cilindro sólido (de área  $A_f = 2\pi r_{\text{espira},f} h_{\text{cilindro},f}$ ), por la longitud de los espacios huecos entre espiras del filamento se estima que este factor debería ser aproximadamente de 0.6.

$$\dot{Q}_{Rad,fp,ss} = \sigma e_f A_f (T_{f,ss}^4 - T_{p,ss}^4) \times F_f \quad (3.29)$$

De esta forma, en la ecuación 3.28 queda expresada  $\dot{Q}_{Conv,fv,ss}$  en términos de funciones y valores conocidos por lo que también se puede obtener  $R_{fv}$  de la ecuación 3.27.

### 3.4.3. Resistencia térmica entre el exterior del vidrio y el aire

Otro valor importante que se obtiene del análisis en estado estacionario es el de la convección, aquí se asume que la resistencia por convección entre el vidrio y el aire siempre será la misma. Partiendo de que en estado estacionario, el calor que se le transfiere al vidrio es el mismo que el vidrio transfiere al aire tenemos que:

$$\dot{Q}_{Conv,va,ss} = \dot{Q}_{Conv,fv,ss} \quad (3.30)$$

Y aprovechando que este es un valor conocido que hemos obtenido de los experimentos, podemos llegar a un valor constante de resistencia por convección con:

$$R_{va} = \frac{T_{v,ss} - T_{a,ss}}{\dot{Q}_{Conv,va,ss}} \quad (3.31)$$

donde la temperatura del aire en estado estacionario  $T_{a,ss} = 40[^\circ C]$  es un valor que se obtiene de la medición de su termopar en el mismo experimento de la sección 3.4.2.

### 3.4.4. Resistencia entre el vidrio, el aire cercano y el sensor

Para el aire que se encuentra muy cercano al vidrio y al sensor se toma una consideración especial para calcular la resistividad. Debido a que la distancia de separación de la lámpara se puede modificar con el micrómetro de profundidad, existen dos escenarios: uno donde la transferencia de calor a la sonda es por conducción del vidrio y convección del aire y otro donde únicamente existe convección entre el aire y la sonda. Estas diferencias se aprecian en la Figura 3.1. Este es un comportamiento importante de modelar, pues de no considerarse se asumiría que el calor en esta interacción proviene directamente de la capacitancia del vidrio.

Esta situación se modeló con resistencias en paralelo, que consideran la resistividad del aire cercano en función de la distancia entre el vidrio y la sonda como se observa en la Figura 3.2.

En la Figura 3.2,  $R_{acs,int}$  es la resistencia por convección entre el aire caliente y la parte inferior de la sonda solo en el área donde la sonda puede estar en contacto con el vidrio, cuando el vidrio se encuentra a pleno contacto esta resistencia es 0 y el calor es transferido directamente desde la

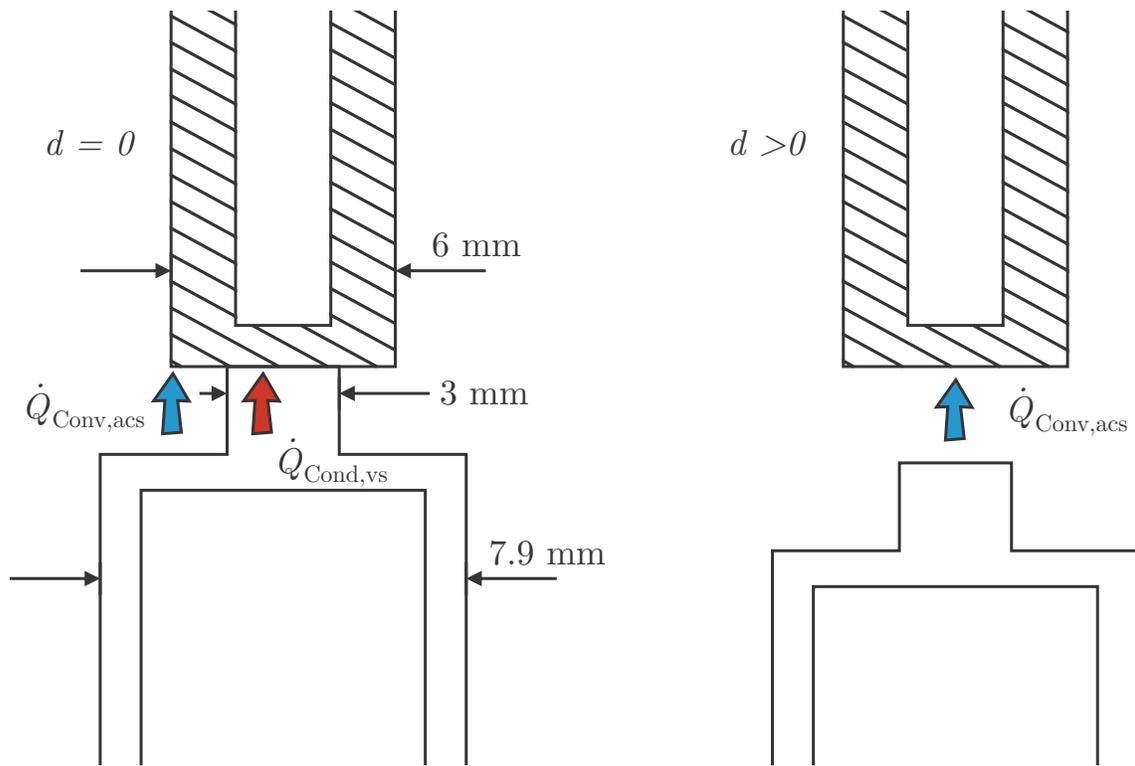
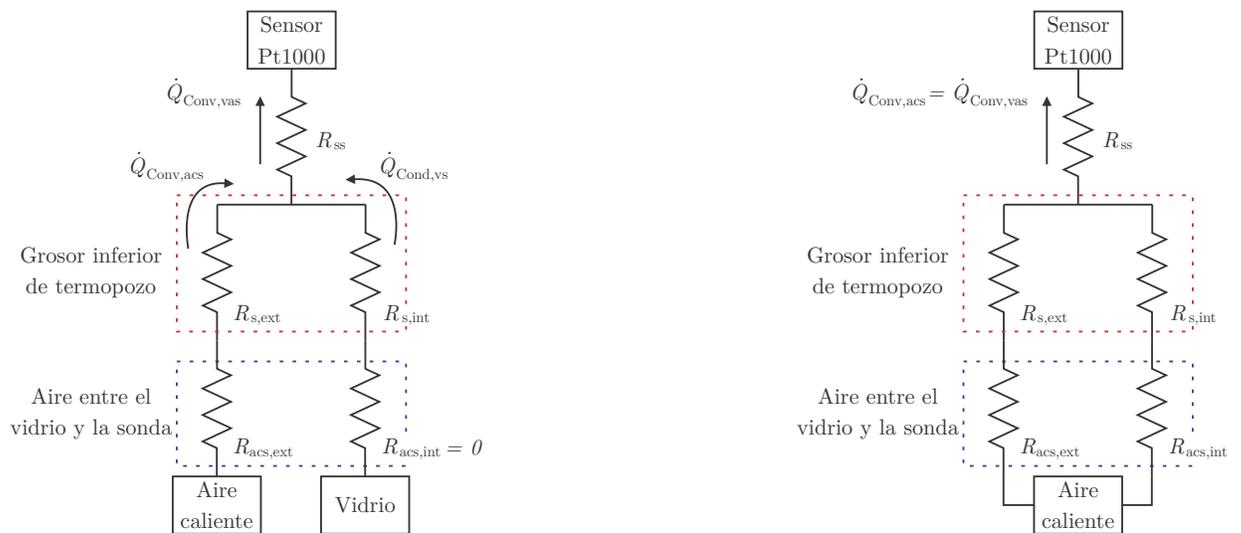


Figura 3.1 El índice de transferencia de calor a la sonda tiene un comportamiento distinto según la distancia



Cuando  $d=0$ , el vidrio transfiere calor al sensor por conducción. Se considera que el vidrio y el aire caliente están a la misma temperatura

Cuando  $d>0$ , el sensor recibe solo calor por convección, y únicamente lo transfiere el aire caliente adyacente al vidrio

Figura 3.2 Representación de la resistencia entre el vidrio, el aire cercano y el sensor

capacitancia térmica del vidrio mientras que a una distancia mayor a cero el calor sería transferido desde la capacitancia térmica del aire;  $R_{acs,ext}$  es la resistencia por convección entre el aire caliente y la parte inferior de la sonda donde la sonda no puede estar en contacto con el vidrio;  $R_{s,int}$  es la resistencia de la pared metálica inferior de la sonda, para el área de la sonda que puede estar en contacto con el vidrio y  $R_{s,ext}$  es también una resistencia para la pared metálica inferior de la sonda, pero solo para el área que no puede estar en contacto con el vidrio; por último,  $R_{ss}$  es la resistencia de la parte lateral de la sonda (verticalmente) hasta el punto donde se asume que se encuentra el centro del sensor Pt1000.

Estas resistencias se obtienen en las ecuaciones 3.32. Las ecuaciones 3.32a y 3.32b representan resistencias por convección, para tomar en cuenta la distancia  $d$  en esas ecuaciones se despeja el coeficiente de convección  $h = \frac{Nu k}{L}$  de la ecuación 2.6 y se sustituye en la ecuación 3.5.

$$R_{acs,int} = \frac{d}{k_a A_{vs} Nu_{vas}} \quad (3.32a)$$

$$R_{acs,ext} = \frac{d + 1.6 \times 10^{-3}}{k_a (A_{sac} - A_{vs}) Nu_{vas}} \quad (3.32b)$$

$$R_{s,int} = \frac{w_s}{A_{vs} k_s} \quad (3.32c)$$

$$R_{s,ext} = \frac{w_s}{(A_{sac} - A_{vs}) k_s} \quad (3.32d)$$

$$R_{ss} = \frac{l_{vs}}{A_{st} k_s} \quad (3.32e)$$

donde  $Nu_{vas}$  es el número de Nusselt entre el vidrio, aire y la sonda,  $k_a$  es la conductividad térmica del aire,  $k_s$  es la conductividad térmica del acero,  $A_{vs}$  es el área del vidrio que puede estar en contacto con el sensor,  $A_{sac}$  es el área en la cara inferior de la sonda,  $A_{st}$  es el área transversal (horizontal) de la sonda,  $w_s$  es el grosor del acero, y  $d$  es la distancia de separación entre la lámpara y la sonda que se ajusta con el micrómetro de profundidad. Estas propiedades y medidas están definidas en la sección 3.2.

La transferencia de calor total se obtiene de las siguientes ecuaciones

$$R_{eq,vas} = \left( \frac{1}{R_{acs,int} + R_{s,int}} + \frac{1}{R_{acs,ext} + R_{s,ext}} \right)^{-1} + R_{ss} \quad (3.33)$$

$$\dot{Q}_{Conv,vas} = \frac{T_v - T_s}{R_{eq,vas}} \quad (3.34)$$

De la ecuación 3.34, podemos observar que se considera que el aire cercano se encuentra a la misma temperatura  $T_v$  que el vidrio. Se considera de esta manera para evitar agregar un estado adicional, pues en el modelo se busca trabajar solo con los estados necesarios para representar significativamente la dinámica del sistema.

En el caso de que la sonda y el vidrio estén en pleno contacto, los índices de transferencia de calor se calcularían con un “divisor de corriente” de la siguiente manera

$$\dot{Q}_{Conv,acs} = [(R_{eq,vas} - R_{ss}) / (R_{acs,ext} + R_{s,ext})] \dot{Q}_{Conv,vas} \quad (3.35)$$

$$\dot{Q}_{\text{Cond},vs} = [(R_{\text{eq},vas} - R_{ss}) / (R_{acs,int} + R_{s,int})] \dot{Q}_{\text{Conv},vas} \quad (3.36)$$

y para  $d > 0$  se tiene simplemente

$$\dot{Q}_{\text{Conv},acs} = \dot{Q}_{\text{Conv},vas} \quad (3.37)$$

$$\dot{Q}_{\text{Cond},vs} = 0 \quad (3.38)$$

Esto generaría dos modelos distintos según la distancia, por lo que se agrega una multiplicación por un parámetro que considere la distancia, este parámetro es  $\left[1 - \frac{d}{d+d_m}\right]$ , donde  $d_m$  es una distancia en la que podemos considerar que la mitad del calor viene del vidrio y la otra mitad del aire cercano, esta distancia, se elige por ahora como  $d_m = 0.5\text{mm}$ .

Así, para usarse en el modelo, los índices de transferencia de calor son, para cualquier  $d \geq 0$

$$\dot{Q}_{\text{Cond},vs} = \left[1 - \frac{d}{d+d_m}\right] \left[\frac{(R_{\text{eq},vas} - R_{ss})}{(R_{acs,int} + R_{s,int})}\right] \dot{Q}_{\text{Conv},vas} \quad (3.39)$$

$$\dot{Q}_{\text{Conv},acs} = \dot{Q}_{\text{Conv},vas} - \dot{Q}_{\text{Cond},vs} \quad (3.40)$$

### 3.4.5. Radiación del filamento a las paredes

Por lo mencionado en las secciones 2.2.2 y 2.2.3 se puede asumir que la radiación del filamento únicamente llega a las paredes de MDF. La radiación del filamento a las paredes se obtiene con la ecuación de radiación de Stefan-Boltzmann, tomando en consideración el factor de visión y la absorptividad se usaría la ecuación 3.6, pero se pueden omitir ambas observando que su valor será prácticamente 1 porque las paredes rodean completamente al filamento y es considerablemente más grande, por lo que incluso si las paredes reflejan la radiación, la mayor parte volverá a incidir sobre ellas. La radiación se obtiene entonces como

$$\dot{Q}_{\text{Rad},fp} = \sigma e_f A_f F_f (T_f^4 - T_p^4) \quad (3.41)$$

donde  $e_f$  es la emisividad del tungsteno,  $A_f$  es el área lateral de un cilindro con el radio y altura del filamento y  $F_f$  es un valor para expresar que el filamento no tiene en realidad el área de un cilindro completo. Para la ecuación anterior las temperaturas deben ser absolutas, pero podemos expresarla en grados Celsius como:

$$\dot{Q}_{\text{Rad},fp} = \sigma e_f A_f F_f ((T_f + T_{\text{abs}})^4 - (T_p + T_{\text{abs}})^4) \quad (3.42)$$

donde  $T_{\text{abs}} = 273.15^\circ\text{C}$  es una constante para pasar de grados Celsius a Kelvin.

## 3.5. Modelo matemático del sistema

La estrategia para integrar el sistema de ecuaciones que permita conocer la temperatura en función del tiempo es:

1. Expresar los **índices de transferencia de calor** sustituyendo las transferencias de calor con **resistencias térmicas** o su respectiva ecuación de radiación, recordando que en general se pueden expresar como  $\dot{Q}_{ab} = \frac{T_a - T_b}{R_{ab}}$
2. Posteriormente, dividir esos índices sobre la **capacitancia térmica** de cada cuerpo para obtener el sistema de ecuaciones final.

El primer paso de expresar los índices de transferencia de calor en términos de valores que se pueden conocer se muestra a continuación para el grupo de ecuaciones 3.1:

- La ecuación 3.1a se desarrolla usando  $R_{ap}$  (ec. 3.14),  $R_{pamb}$  (ec. 3.16) y se sustituye la radiación  $\dot{Q}_{\text{Rad,fp}}$  (ec. 3.41) llegando a

$$\dot{Q}_p = \left( \frac{T_a - T_p}{R_{ap}} \right) - \left( \frac{T_p - T_{amb}}{R_{pamb}} \right) + \sigma e_f A_f F_f \left( (T_{abs} + T_f)^4 - (T_{abs} + T_p)^4 \right) \quad (3.43)$$

- La ecuación 3.1b se desarrolla usando  $R_{ap}$  (ec. 3.14),  $R_{sa}$  (ec. 3.10),  $R_{ta}$  (ec. 3.12),  $R_{va}$  (ec. 3.30) y se sustituye la transferencia de calor  $\dot{Q}_{acs}$  (ec. 3.40) llegando a

$$\begin{aligned} \dot{Q}_a = & \left( \frac{T_p - T_a}{R_{ap}} \right) + \left( \frac{T_s - T_a}{R_{sa}} \right) + \left( \frac{T_t - T_a}{R_{ta}} \right) - \left( \frac{T_v - T_s}{R_{\text{eq,vas}}} \right) \\ & + \left[ 1 - \frac{d}{d + d_m} \right] \left( \frac{(R_{\text{eq,vas}} - R_{ss})(T_v - T_s)}{(R_{acs,int} + R_{s,int})} \right) + \left( \frac{T_v - T_a}{R_{va}} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

- La ecuación 3.1c se desarrolla usando  $R_{st}$  (ec. 3.11),  $R_{ta}$  (ec. 3.12) y  $R_{tamb}$  (ec. 3.13) llegando a

$$\dot{Q}_t = \left( \frac{T_s - T_t}{R_{st}} \right) - \left( \frac{T_t - T_a}{R_{ta}} \right) - \left( \frac{T_t - T_{amb}}{R_{tamb}} \right) \quad (3.45)$$

- La ecuación 3.1d se desarrolla usando  $R_{st}$  (ec. 3.11),  $R_{sa}$  (ec. 3.10) y sustituyendo las transferencias de calor  $\dot{Q}_{\text{Conv,acs}} + \dot{Q}_{\text{Cond,vs}}$  (ec. 3.34) llegando a

$$\dot{Q}_s = \left( \frac{T_v - T_s}{R_{\text{eq,vas}}} \right) - \left( \frac{T_s - T_t}{R_{st}} \right) - \left( \frac{T_s - T_a}{R_{sa}} \right) \quad (3.46)$$

- La ecuación 3.1e se desarrolla usando  $R_{fv}$  (ec. 3.27),  $R_{va}$  (ec. 3.30) y sustituyendo la transferencia de calor  $\dot{Q}_{\text{Cond,vs}}$  (ec. 3.39) llegando a

$$\dot{Q}_v = \left( \frac{T_f - T_v}{R_{fv}} \right) - \left( \frac{T_v - T_a}{R_{va}} \right) - \left[ 1 - \frac{d}{d + d_m} \right] \left( \frac{(R_{\text{eq,vas}} - R_{ss})(T_v - T_s)}{(R_{acs,int} + R_{s,int})} \right) \quad (3.47)$$

- La ecuación 3.1f se desarrolla usando  $R_{fv}$  (ec. 3.14), sustituyendo el calor por efecto Joule  $P_f$  (ec. 3.26) y la radiación  $\dot{Q}_{\text{Rad,fp}}$  (ec. 3.41) llegando a

$$\dot{T}_f = \left( \frac{(\frac{V_{\text{máx}}}{u_{\text{máx}}} u)^2}{R_f C_f} \right) - \sigma e_f A_f F_f \left( \frac{(T_{abs} + T_f)^4 - (T_{abs} + T_p)^4}{C_f} \right) - \left( \frac{T_f - T_v}{R_{fv} C_f} \right) \quad (3.48)$$

Y finalmente, dividiendo sobre las capacitancias, recordando que  $\frac{dT_a}{dt} = \frac{\dot{Q}_a}{C_a}$ , el modelo queda expresado en el sistema de ecuaciones 3.49

$$\dot{T}_p = \left( \frac{T_a - T_p}{R_{ap}C_p} \right) - \left( \frac{T_p - T_{amb}}{R_{pamb}C_p} \right) + \sigma e_f A_f F_f \left( \frac{(T_{abs} + T_f)^4 - (T_{abs} + T_p)^4}{C_p} \right) \quad (3.49a)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_a = & \left( \frac{T_p - T_a}{R_{ap}C_a} \right) + \left( \frac{T_s - T_a}{R_{sa}C_a} \right) + \left( \frac{T_t - T_a}{R_{ta}C_a} \right) - \left( \frac{T_v - T_s}{R_{eq,vas}C_a} \right) \\ & + \left[ 1 - \frac{d}{d + d_m} \right] \left( \frac{(R_{eq,vas} - R_{ss})(T_v - T_s)}{(R_{acs,int} + R_{s,int})C_a} \right) + \left( \frac{T_v - T_a}{R_{va}C_a} \right) \end{aligned} \quad (3.49b)$$

$$\dot{T}_t = \left( \frac{T_s - T_t}{R_{st}C_t} \right) - \left( \frac{T_t - T_a}{R_{ta}C_t} \right) - \left( \frac{T_t - T_{amb}}{R_{tamb}C_t} \right) \quad (3.49c)$$

$$\dot{T}_s = \left( \frac{T_v - T_s}{R_{eq,vas}C_s} \right) - \left( \frac{T_s - T_t}{R_{st}C_s} \right) - \left( \frac{T_s - T_a}{R_{sa}C_s} \right) \quad (3.49d)$$

$$\dot{T}_v = \left( \frac{T_f - T_v}{R_{fv}C_v} \right) - \left( \frac{T_v - T_a}{R_{va}C_v} \right) - \left[ 1 - \frac{d}{d + d_m} \right] \left( \frac{(R_{eq,vas} - R_{ss})(T_v - T_s)}{(R_{acs,int} + R_{s,int})C_v} \right) \quad (3.49e)$$

$$\dot{T}_f = \left( \frac{(\frac{V_{m\acute{a}x}}{u_{m\acute{a}x}} u)^2}{R_f C_f} \right) - \sigma e_f A_f F_f \left( \frac{(T_{abs} + T_f)^4 - (T_{abs} + T_p)^4}{C_f} \right) - \left( \frac{T_f - T_v}{R_{fv}C_f} \right) \quad (3.49f)$$

### 3.6. Analogía eléctrica del modelo de transferencia de calor

Cabe destacar que una forma de representar gráficamente la dinámica de transferencia de calor de una forma reconocible es con una analogía a elementos eléctricos (Figura 3.3) como se muestra en [Robertson y Gross, 1958]. Para la analogía de este modelo existe una equivalencia de propiedades que se ilustra en la Tabla 3.9

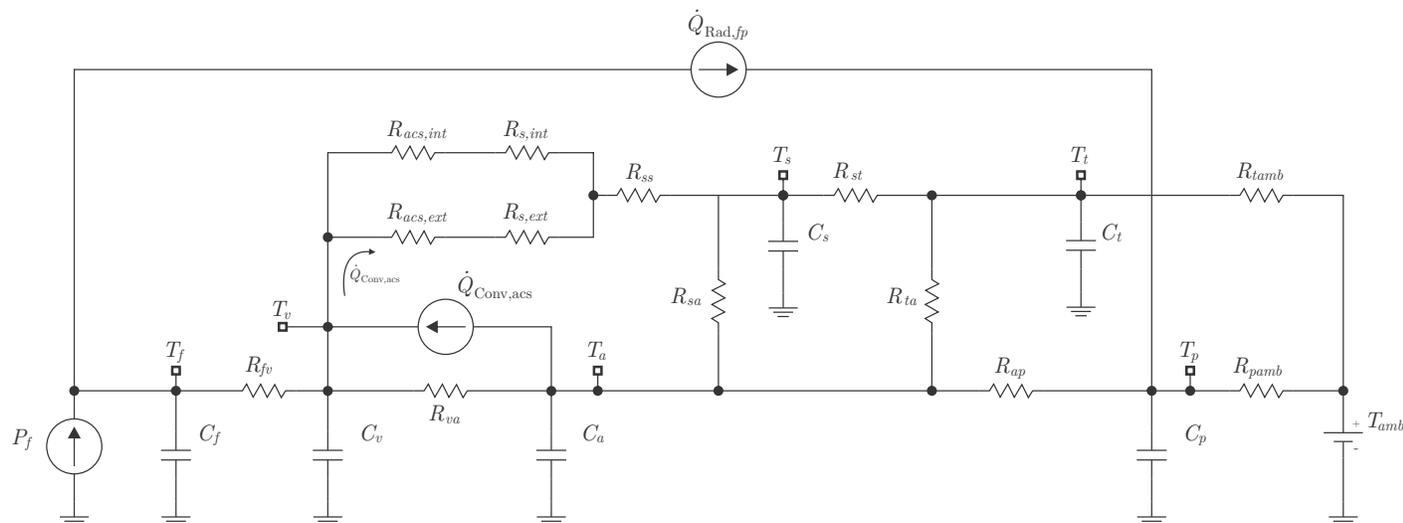


Figura 3.3 Analogía eléctrica del modelo de transferencia de calor

En este caso se hace una equivalencia directa con unidades del Sistema Internacional con el fin de ilustrar la analogía claramente. Es claro que en la realidad no sería práctico replicar el sistema con

Térmico			Eléctrico		
Propiedad	Símbolo	Unidad	Propiedad	Símbolo	Unidad
Temperatura	$T$	$^{\circ}C$	Voltaje	$V$	Volt
Transferencia de calor	$\dot{Q}$	Watt	Corriente	$I$	Ampere
Tiempo	$t$	segundo	Tiempo	$t$	segundo
Resistencia térmica	$R_{ab} = \frac{T_a - T_b}{\dot{Q}_{ab}}$	$\frac{^{\circ}C}{W}$	Resistencia eléctrica	$R = \frac{V}{I_R}$	Ohm
Capacitancia térmica	$C = \frac{\dot{Q}}{(dT/dt)}$	$\frac{J}{^{\circ}C}$	Capacitancia eléctrica	$C = \frac{I_c}{dV/dt}$	Farad

Tabla 3.9 Parámetros y variables análogos entre el modelo térmico y un sistema eléctrico

capacitancias del orden de los farads, pero es interesante notar que en [Robertson y Gross, 1958] se toman consideraciones para trabajar con capacitores pequeños y también se escala el tiempo para obtener una respuesta equivalente de forma más rápida.

En la Figura 3.3 observamos la existencia de “fuentes de calor”, para cada una de ellas conviene explicar lo siguiente:

- $P_f$  es el calor por unidad de tiempo que disipa el filamento por efecto Joule. Se obtiene en la sección 3.4.1
- $\dot{Q}_{\text{Rad},fp}$  es la transferencia por radiación del filamento a la pared. Se obtiene con la ley de Stefan-Boltzmann como  $\dot{Q}_{\text{Rad},fp} = \sigma e_f A_f F_f (T_f^4 - T_p^4)$  como se detalla en la sección 3.4.5.
- $\dot{Q}_{\text{Conv},acs}$ , siguiendo lo explicado en 3.4.4, es el calor que proporciona el aire cercano al vidrio a la sonda.

También se puede observar la existencia de una “fuente de temperatura” para representar la temperatura ambiente, la necesidad de agregarla surge de considerar que, a diferencia de los cuerpos que se modelaron con capacitancias térmicas, la temperatura del aire del exterior es independiente de la cantidad de calor que se le transfiera.

Los símbolos de tierra indican que los valores de temperatura están asociados a un mismo nivel de referencia, en este caso  $0^{\circ}C$ , concordando con la Ley cero de la termodinámica revisada en la sección 2.1.1

## Capítulo 4

# Evaluación y validación

### 4.1. Experimentos en lazo abierto con entrada escalón

Para evaluar el desempeño del modelo matemático realizaron experimentos con 9 distintos escenarios: con el **micrómetro de profundidad** se reguló la distancia entre la lámpara y la sonda a tres distancias distintas, estas fueron de 0, 2 y 5 [mm], con la acción de la lámpara en lazo abierto, trabajando al 25, 50 y 100 %.

Se estableció que los experimentos debían empezar con todos los cuerpos a temperatura ambiente y se tomaron medidas del sensor y termopares mientras:

1. La entrada escalón estuvo activa en la lámpara por 10 minutos
2. Por 10 minutos más mientras la lámpara estaba apagada y el sistema volvía a enfriarse.

En estos experimentos, la adquisición de los datos provenientes de la plataforma térmica se realizó con la configuración de conexiones ilustrada en la Figura 4.1. Los datos se registraron en una gráfica de tendencias con un periodo de muestreo de 5 ms y fueron posteriormente exportados como archivos en formato .csv. Este formato permitió importar los datos en MATLAB - Simulink, para obtener la respuesta simulada usando la misma señal del actuador e intentando mantener las mismas condiciones iniciales.



Figura 4.1 Configuración de equipos para realizar los experimentos

Para mostrar de forma general el desempeño, en cada experimento se graficaron las mediciones de los sensores de temperatura (líneas punteadas) junto con las temperaturas calculadas por el modelo (líneas continuas). Las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 corresponden a experimentos con el actuador encendido al 100%; en las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 el actuador se encendió al 50% y finalmente las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10 corresponden a experimentos con la lámpara encendida al 25%. Para cada grupo de 3 experimentos con la misma señal del actuador, la distancia se incrementó en cada experimento subsecuente.

Se pueden distinguir algunos comportamientos del sistema en los datos medidos. Conforme la distancia de la lámpara aumentaba la temperatura de la sonda disminuía al mismo tiempo que la temperatura del vidrio aumentaba, esto es debido a que la transferencia de calor no ocurría de forma directa. La señal del actuador como es de esperarse aumentaba la temperatura en todas las variables del sistema.

En cuanto a la simulación, es posible observar que la dinámica en general se aproxima bien siguiendo la tendencia de los comportamientos mencionados anteriormente. Se observan también algunos detalles como que en las figuras 4.2, 4.8, 4.9 y 4.10 la temperatura simulada del vidrio se mantuvo por debajo de la medida.

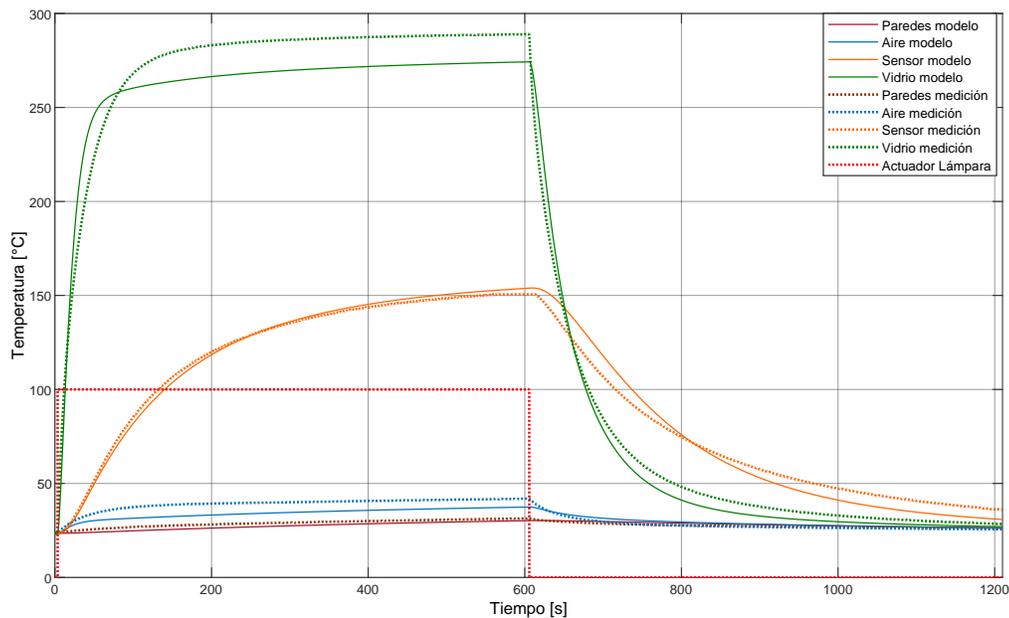


Figura 4.2 Experimento 1 - Actuador encendido al 100% por 10 minutos con la lámpara en contacto con el sensor TD2231

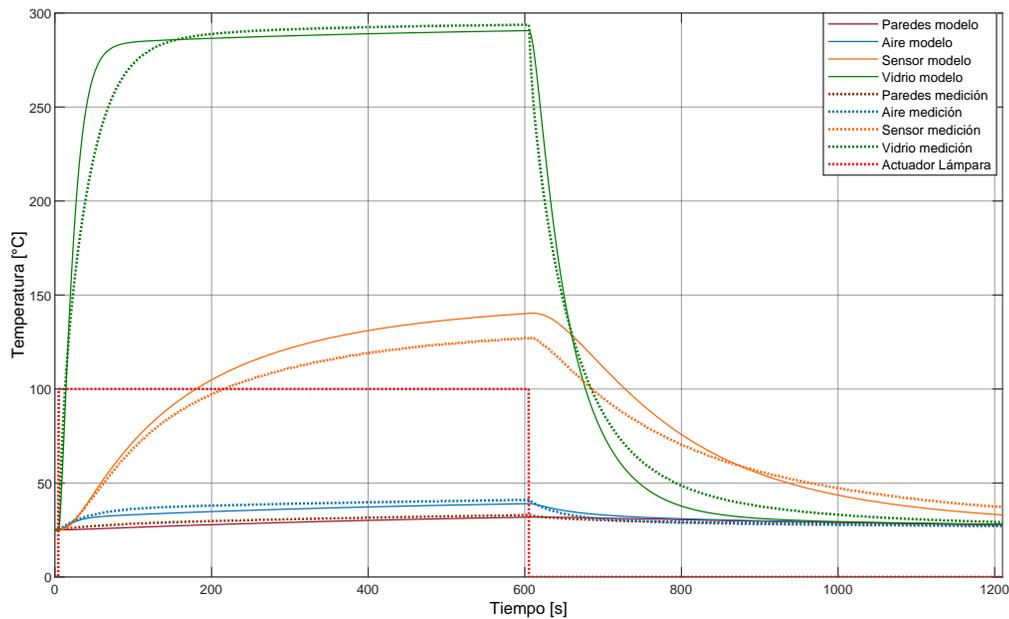


Figura 4.3 Experimento 2 - Actuador encendido al 100% por 10 minutos con la lámpara separada a 2 mm del sensor TD2231

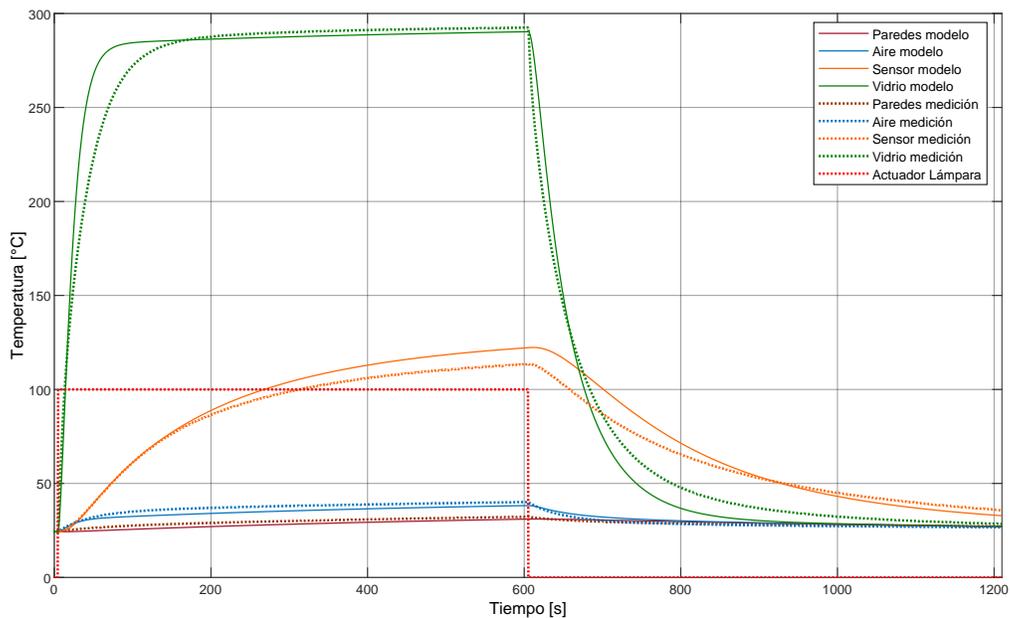


Figura 4.4 Experimento 3 - Actuador encendido al 100 % por 10 minutos con la lámpara separada a 5 mm del sensor TD2231

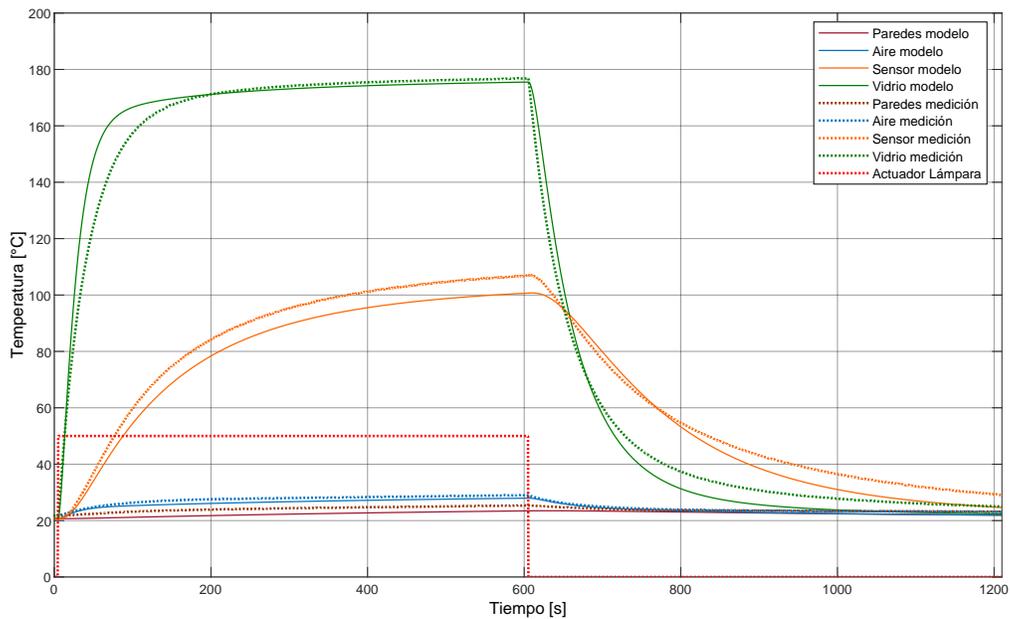


Figura 4.5 Experimento 4 - Actuador encendido al 50 % por 10 minutos con la lámpara en contacto con el sensor TD2231

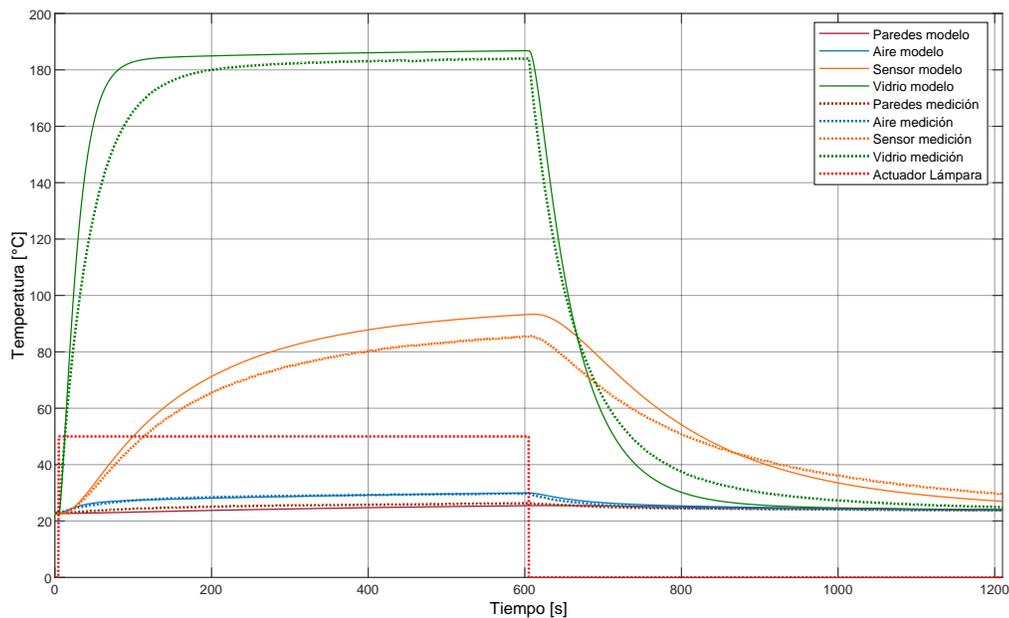


Figura 4.6 Experimento 5 - Actuador encendido al 50 % por 10 minutos con la lámpara separada a 2 mm del sensor TD2231

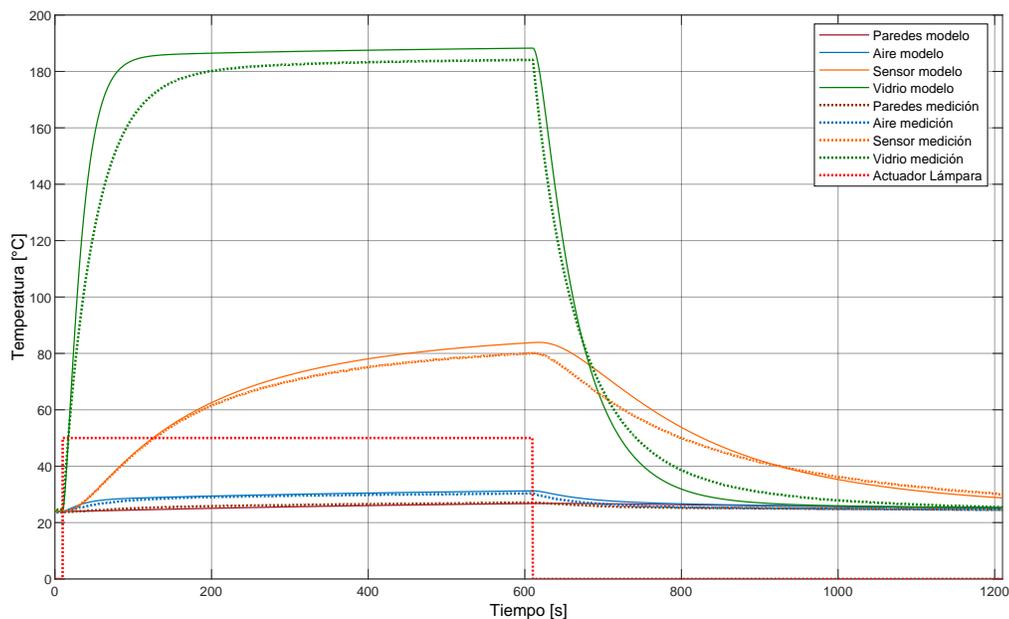


Figura 4.7 Experimento 6 - Actuador encendido al 50 % por 10 minutos con la lámpara separada a 5 mm del sensor TD2231

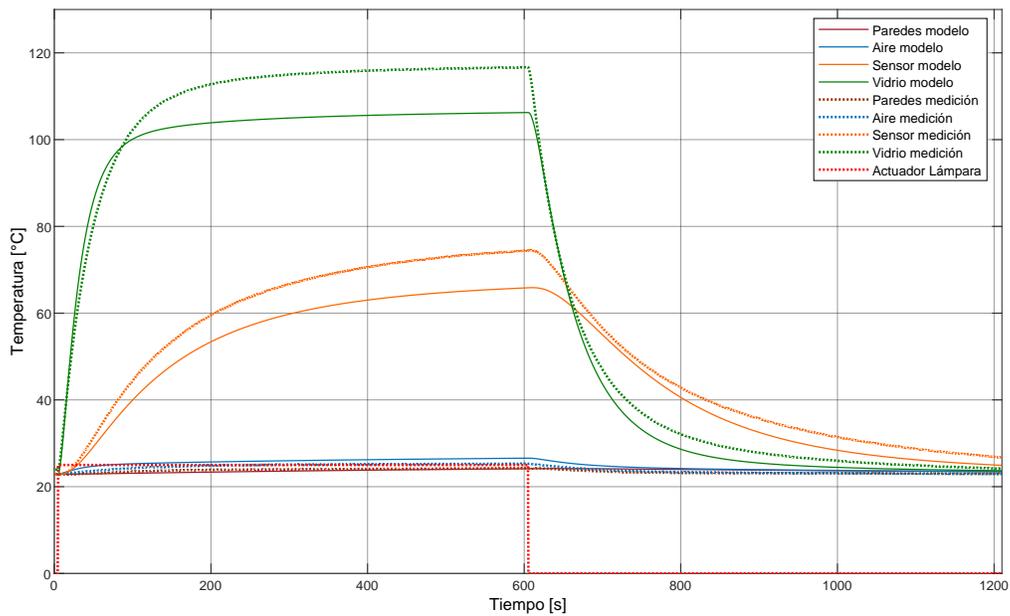


Figura 4.8 Experimento 7 - Actuador encendido al 25 % por 10 minutos con la lámpara en contacto con el sensor TD2231

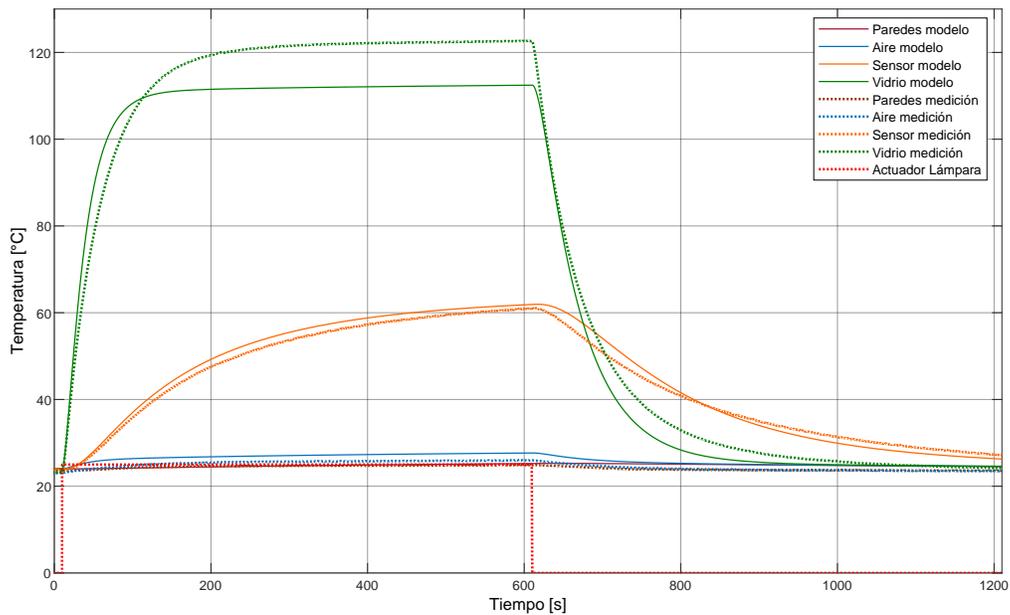


Figura 4.9 Experimento 8 - Actuador encendido al 25 % por 10 minutos con la lámpara separada a 2 mm del sensor TD2231

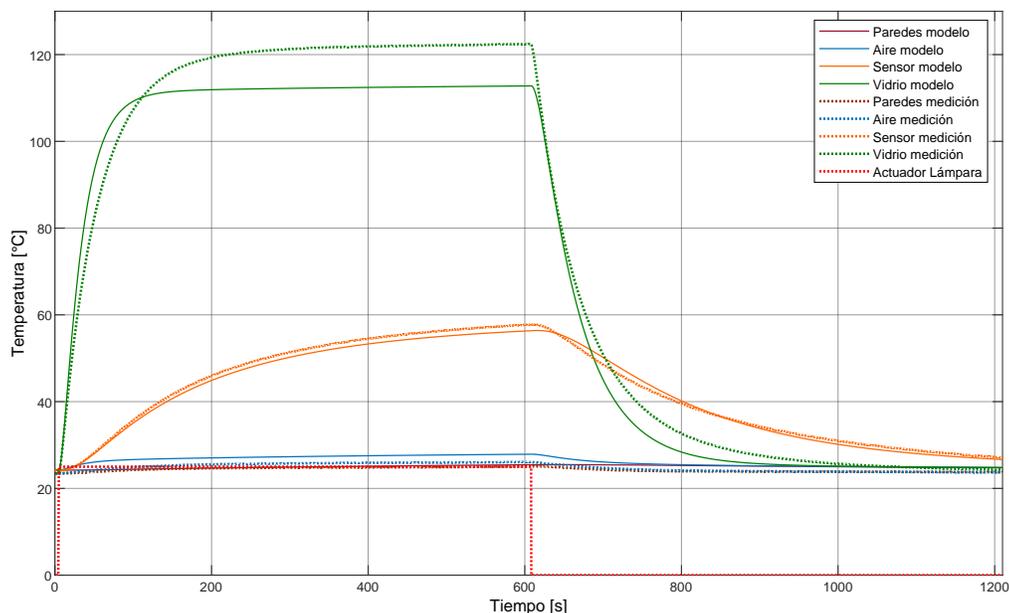


Figura 4.10 Experimento 9 - Actuator encendido al 25 % por 10 minutos con la lámpara separada a 5 mm del sensor TD2231

## 4.2. Experimento con señal variante en el tiempo

Adicionalmente a los experimentos de 4.1 se realizó uno adicional para probar el comportamiento del modelo con una entrada más dinámica, en este caso proveniente del controlador PI del proceso real.

A través del software *Studio 5000 Logix Designer* se programó el PAC *ControlLogix L81E*, sintonizando el bloque PID y configurando la rutina del controlador como se muestra en las Figuras 4.11 y 4.12 respectivamente. Se usaron los valores  $K_p = 5$ ,  $K_i = 0.012$ ,  $K_d = 0$  y el punto de operación fue con la temperatura de la sonda en  $80^{\circ}\text{C}$ . Con ayuda del mismo software se configuró una gráfica de tendencias con un periodo de muestreo de 5 ms para registrar la temperatura en los sensores y la señal del actuator. A continuación se activó el controlador con la plataforma encendida, se exportaron los datos medidos a un archivo csv y se tomó la acción del controlador como entrada del modelo en MATLAB Simulink, obteniéndose los resultados de la Figura 4.13

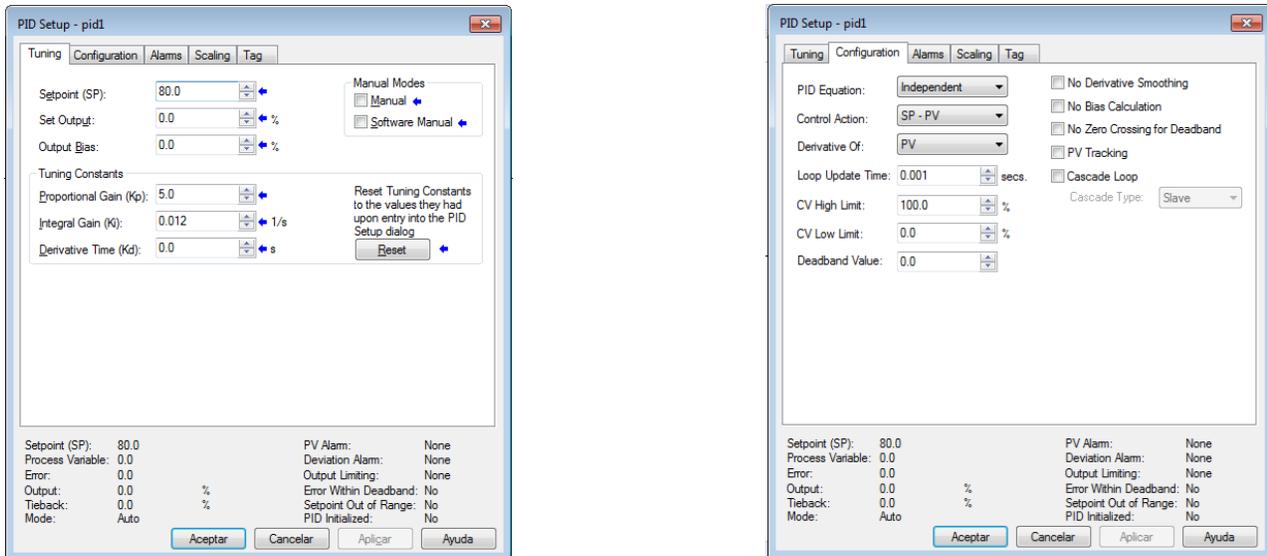


Figura 4.11 Sintonización del bloque PID en software *Studio 5000 Logix Designer*

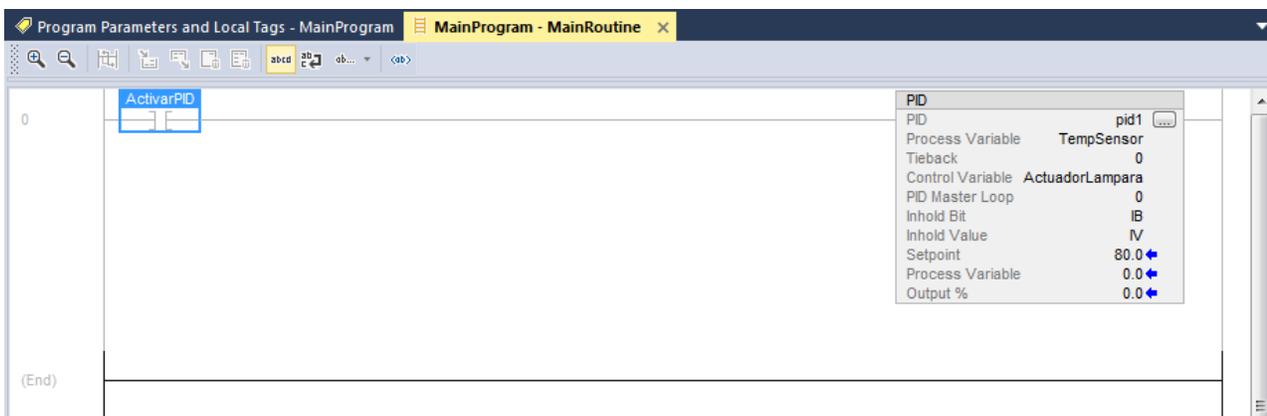


Figura 4.12 Rutina ladder para acción con controlador PID

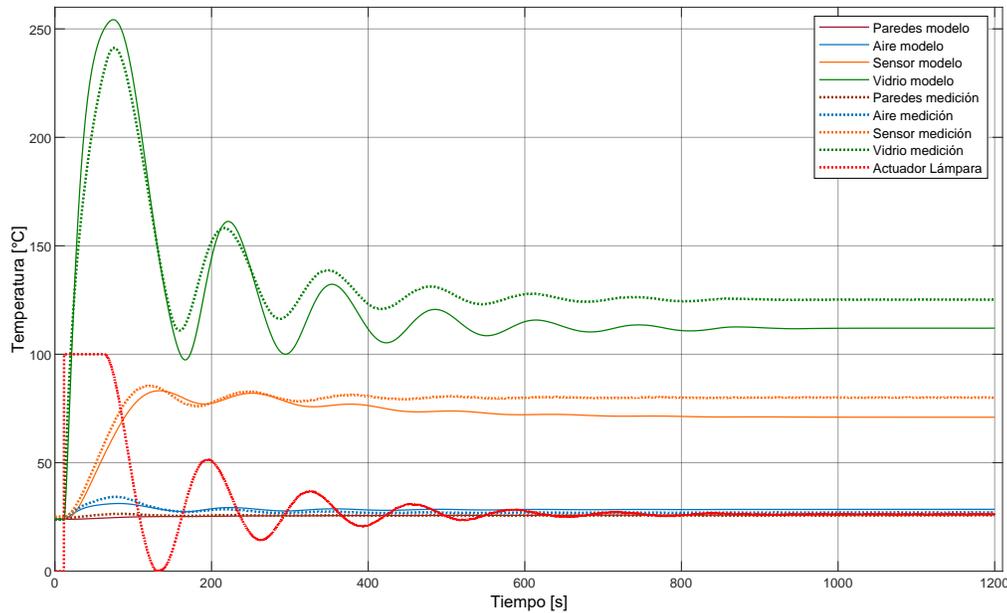


Figura 4.13 Prueba con señal de controlador PID en el sistema real; en la simulación se aplicó la misma entrada que se generó para controlar al sistema real.

### 4.3. Validación

#### 4.3.1. Métrica de validación: coeficiente de variación de la raíz del error cuadrático medio

Algunos indicadores de desempeño frecuentemente utilizados para evaluar modelos predictivos son el Error absoluto medio (MAE, por sus siglas en Inglés) y la Raíz del error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en Inglés). En este caso, la cuantificación del error se basará en el RMSE, los motivos son que este error parte de la desviación estándar que es una medida de dispersión ampliamente utilizada en estadística, además de que, a comparación del MAE, tiene una mayor sensibilidad a errores grandes, lo cual usualmente ayuda a comparar diferencias de desempeño de modelos. [Chai y Draxler, 2014] [Weisstein, 2023].

$$\begin{aligned}
 \text{RMSE} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{Error}_i)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{i,\text{medida}} - T_{i,\text{simulada}})^2}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Con el fin de expresar esta métrica en un diagrama de bloques en MATLAB - Simulink, sería conveniente obtener esta misma expresión de forma continua. Sabiendo que los tiempos de muestreo son muy pequeños en estos experimentos, la suma de Riemann (donde  $\Delta x = (b - a)/n$ ) ([Stewart, 2015]) expresada en la ecuación 4.2 permite partir de la ecuación 4.1 para desarrollar el RMSE con integrales en las ecuaciones 4.3

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \quad (4.2a)$$

$$\approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{b-a}{n} \quad (4.2b)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{i,\text{medida}} - T_{i,\text{simulada}})^2 (t_f - t_0) = \int_{t_0}^{t_f} (T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{simulada}}(t))^2 dt \quad (4.3a)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{i,\text{medida}} - T_{i,\text{simulada}})^2 = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} (T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{simulada}}(t))^2 dt \quad (4.3b)$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{i,\text{medida}} - T_{i,\text{simulada}})^2} = \sqrt{\frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} (T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{simulada}}(t))^2 dt} \quad (4.3c)$$

donde  $t_0$  es el tiempo inicial y  $t_f$  el tiempo final de cada experimento. Si tomamos  $t_0 = 0$  podemos concluir que para nuestro caso se cumple lo establecido en la ecuación 4.4

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{simulada}}(t))^2 dt} \quad (4.4)$$

Es evidente que el rango en el que varía la temperatura no siempre es el mismo para los distintos elementos y experimentos, por lo que para comparar los desempeños del modelo en distintas condiciones no se puede usar el error RMSE, ya que su valor está directamente en unidades de grados Celsius. Una forma de hacer que este valor de error sea relativo y comparable entre experimentos es usar el coeficiente de variación del error RMSE, este valor se denota como  $\text{CV}(\text{RMSE})$  y se usa por protocolos y organizaciones globales como una métrica del desempeño para modelos que buscan predecir el consumo de energía en edificios [Hong, *et al.*, 2016], [ASHRAE, 2014].

Esta métrica se define como  $\text{CV}(\text{RMSE}) = \frac{\text{RMSE}}{\bar{y}_{\text{medida}}}$  donde  $\bar{y}_{\text{medida}}$  es el promedio de los datos medidos. En este caso no es conveniente usar directamente el promedio de la temperatura medida en el denominador ya que la ubicación del 0 en la escala tiene un gran impacto en la cuantificación del error, es notorio que un error de la misma cantidad de temperatura sería mucho menor midiéndose en Kelvin que en grados Celsius.

Para que esta métrica sea significativa medimos el error refiriéndonos al cambio con respecto a la temperatura medida inicial, y por simplicidad se mantiene la métrica con signo positivo en la ecuación 4.5.

$$\text{CV}(\text{RMSE}) = \left| \frac{\text{RMSE}}{\bar{T}_{\text{medida}} - T_{\text{medida}}(0)} \right| \quad (4.5)$$

El valor del RMSE en el numerador se mantiene sin cambios:

$$\begin{aligned}
\text{RMSE} &= \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [(T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{medida}}(0)) - (T_{\text{simulada}}(t) - T_{\text{medida}}(0))]^2 dt} \\
&= \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{medida}}(0) - T_{\text{simulada}}(t) + T_{\text{medida}}(0)]^2 dt} \\
&= \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{simulada}}(t))^2 dt}
\end{aligned}$$

De la misma forma que en la ecuación 4.4, el valor de  $\bar{T}_{\text{medida}}$  se puede expresar usando integrales como se muestra en la ecuación 4.7

$$\bar{T}_{\text{medida}} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} T_{\text{medida}}(t) dt \quad (4.7)$$

Con lo que finalmente podemos expresar el CV(RMSE) de forma continua como

$$\text{CV(RMSE)} = \left| \frac{1}{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} T_{\text{medida}}(t) dt - T_{\text{medida}}(0)} \right| \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (T_{\text{medida}}(t) - T_{\text{simulada}}(t))^2 dt} \quad (4.8)$$

Las ventajas de definir el error de esta manera son que el valor del error es relativo, representativo de un periodo de tiempo, y no depende de la escala de temperatura.

### Error CV(RMSE) para los experimentos con entrada escalón

Por las diferencias que se observaron en los experimentos durante el encendido y apagado de la lámpara, la medición del error se separó en esos dos casos para distinguir la cantidad de error en ambos eventos. Los resultados están representados en la Figura 4.14 donde del lado izquierdo se tabuló el CV(RMSE) durante los 10 minutos que la lámpara estuvo encendida mientras que del lado derecho se tabularon los resultados durante los 10 minutos que la lámpara estaba apagada. Las tablas tienen el estilo de un mapa de calor para distinguir visualmente el grado de error en cada experimento.

CV(RMSE) en encendido - vidrio			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.1044	0.04843	0.06333
2	0.1015	0.07359	0.05019
5	0.09306	0.07821	0.05077

CV(RMSE) en apagado - vidrio			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.0308	0.03962	0.02734
2	0.04231	0.04161	0.03929
5	0.03703	0.04019	0.04045

CV(RMSE) en encendido - sensor			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.1762	0.08454	0.02024
2	0.03755	0.1419	0.1314
5	0.04578	0.06042	0.08557

CV(RMSE) en apagado - sensor			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.09392	0.07477	0.07969
2	0.07531	0.1384	0.139
5	0.04219	0.1098	0.1304

CV(RMSE) en encendido - aire			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.5303	0.1691	0.33
2	0.544	0.04357	0.1973
5	0.7887	0.1265	0.1844

CV(RMSE) en apagado - aire			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.413	0.1492	0.1076
2	0.3882	0.1062	0.1373
5	0.6817	0.2172	0.1123

CV(RMSE) en encendido - pared			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.3465	0.5683	0.3029
2	0.3884	0.4186	0.2961
5	0.2669	0.2379	0.3051

CV(RMSE) en apagado - pared			
d [mm]	Señal del actuador		
	25%	50%	100%
0	0.6185	0.5819	0.2078
2	0.5828	0.1941	0.2149
5	1.112	0.4437	0.1617

Figura 4.14 Errores CV(RMSE) en los distintos experimentos con entrada escalón

En la Figura 4.14 se puede observar una tendencia a que los errores sean mayores cuando la lámpara se activaba al 25% y es notorio sobre todo para los resultados del aire y la pared. En esos casos se puede relacionar la magnitud del error con una menor variación de temperatura dado que el tipo de métrica tiende a magnificar el error cuando la variación de los datos es pequeña. Sin embargo también es posible observar en las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10 que la temperatura simulada del vidrio se aproxima menos en comparación a otros experimentos, esto podría explicarse en parte debido a que la obtención de algunas resistencias relacionadas a la convección partieron del escenario en estado estacionario con la activación de la lámpara al 100% en las secciones 3.4.3 y 3.4.2, por lo que posiblemente haya una menor validez cuando el actuador recibe un estímulo menor y el sistema está a temperaturas más bajas.

También se puede apreciar que las temperaturas del aire y de las paredes tienen en general valores más altos de error. Esto tiene sentido ya que las variaciones de temperatura son menores y las mediciones dependen grandemente de la temperatura ambiente y de fenómenos complejos de

convección; en el caso del aire, las mediciones dependen además de la distancia de su termopar a la lámpara de halógeno.

### Error CV(RMSE) para el experimento con señal variante en el tiempo

Para este experimento, los valores de CV(RMSE) están descritos en la Tabla 4.1. Los valores de error al igual que con los experimentos usando entrada escalón, fueron menores para la temperatura del vidrio y la sonda. Como se observa en la Figura 4.13, el error en la temperatura de la sonda y el vidrio aumentó cuando la señal de control se estabilizó alrededor del 25 % lo cual coincide con el experimento de la Figura 4.8 en donde las temperaturas simuladas se mantenían considerablemente por debajo de los valores medidos.

	CV(RMSE)
Temperatura del vidrio	0.1204
Temperatura del sensor TD2231	0.1309
Temperatura del aire	0.3522
Temperatura de las paredes de MDF	0.2524

Tabla 4.1 Errores CV(RMSE) para el experimento con señal de controlador PI

#### 4.3.2. Validación con coeficiente de variación de la raíz del error cuadrático medio

Habiendo obtenido las cantidades de error en CV(RMSE) representadas en la Figura 4.14, para determinar que el modelo sea suficientemente representativo, se define un valor máximo de 0.2 (o 20 %), que es el valor de CV(RMSE) con el que un modelo de simulación debe cumplir para ser aceptable en [ASHRAE, 2014]. Bajo estas condiciones verificamos que, en los experimentos realizados, el modelo realizado tiene un comportamiento aceptable para conocer la temperatura del sensor y del vidrio, aunque no así para la temperatura del aire y las paredes.

## 4.4. Discusión

Tras una revisión de la literatura y los antecedentes teóricos necesarios, en este trabajo se logró obtener un modelo matemático representado en parámetros concentrados para la plataforma experimental de transferencia de calor. Tras realizar una comparación de los valores medidos y simulados en los experimentos propuestos usando la métrica CV(RMSE), se concluyó que el modelo matemático representa suficientemente la dinámica del vidrio y la sonda de temperatura, que son los elementos con la dinámica de mayor interés en la plataforma experimental. El modelo se puede utilizar satisfactoriamente para simular la respuesta frente a distintas señales de la lámpara lo cual resultará de ayuda para agilizar la interacción con la plataforma. Contar con el modelo permite además realizar implementaciones que partan de él como pueden ser algoritmos de control basados en modelo o el desarrollo de un gemelo digital como se expuso previamente en la motivación.

Es importante notar que aunque la estimación de la temperatura de las paredes y del aire no entraban en los límites definidos previamente para una simulación aceptable, los valores de temperatura en general no se alejaban por más de un par de grados. Este error en parte se puede atribuir a que

son variables que dependen grandemente de que la temperatura ambiente se mantenga constante y de que el ajuste en la electrónica sea muy exacto, pues durante un experimento las variaciones de temperatura son muy pequeñas y la métrica del CV(RMSE) amplificará la percepción de ese error.

El desarrollo de este trabajo demuestra la utilidad del modelado en los sistemas de transferencia de calor. Un análisis partiendo de la física en el que se consideren las propiedades de los materiales y los mecanismos de transferencia de calor da información valiosa de ellos. Tomando las consideraciones adecuadas se puede obtener una representación suficiente sin la necesidad de realizar un modelado en parámetros distribuidos, una gran ventaja de este enfoque es la facilidad de representar el sistema de una forma entendible y en este sentido, la representación en la analogía eléctrica resulta de gran ayuda para visualizar las dinámicas de forma gráfica.

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones

El modelo matemático obtenido, definido con un sistema de parámetros concentrados en el sistema de ecuaciones 3.49, es satisfactorio como modelo de simulación para la dinámica de temperatura en la sonda y la lámpara de halógeno, que son las dos variables de mayor interés del sistema en cuestión. El modelo es un avance en el desarrollo de la plataforma experimental y da la posibilidad de evaluar estrategias de control por medio de la simulación de forma más rápida antes de trabajar directamente con la plataforma física.

En este trabajo se consideran los tres mecanismos de transferencia de calor, así como la naturaleza de la resistencia y capacitancia térmica; integrar este conocimiento ayuda a tener un mejor entendimiento de las dinámicas de transferencia de calor y puede brindar un punto de partida al trabajar con estos sistemas en la industria.

La revisión de literatura sobre termopares y el efecto Seebeck demuestra que estos dan una lectura prácticamente inmediata y ayuda a confirmar la confiabilidad del acondicionamiento que el componente AD8495 realiza sobre los termopares tipo K.

Usar el CV(RMSE) como métrica de validación mostró ser realmente útil en este modelo y podría aplicarse para otros trabajos en los que se desee saber qué tan efectivo es un modelo para simular un sistema; tiene ventajas sobre métricas más populares como los errores RMSE o MAE, pues permite contrastar el desempeño en distintos estados y experimentos con un error relativo, representativo de un periodo de tiempo e independiente de la escala de temperatura.

Finalmente, se logró implementar el modelo en el controlador *ControlLogix L81E*, definiéndolo en una rutina de texto estructurado (ST) en la cual el sistema de ecuaciones se integra numéricamente usando el método de Euler con un paso fijo de 10 ms. El método numérico se resuelve en el mismo controlador y esto da la posibilidad de interactuar con el modelo en el mismo entorno en el que se configuró la plataforma física.

## 5.2. Trabajo futuro

Contar con el modelo abre la posibilidad de que en trabajos futuros este sea utilizado para desarrollar implementaciones de control basadas en modelo (por ejemplo de linealización con colocación de polos, basados en pasividad y adaptables) y contrastar su desempeño con otro tipo de algoritmos de control que no necesariamente requieran del modelo como el PID y sus variantes o por modos deslizantes.

El modelo puede ser aprovechado para trabajar sobre el desarrollo de un gemelo digital que favorezca la interacción entre la simulación y la plataforma y les provea de un flujo de datos bidireccional. Dado que el modelo se programó en el mismo controlador del proceso físico es posible definir este flujo de datos directamente en el controlador, pero resultaría más conveniente un software dedicado en el que se pueda modificar y visualizar esa interacción con mayor agilidad y que se comunique al controlador haciendo uso, por ejemplo, del estándar OPC (*Open Platform Communications*) como es el caso del software de simulación de sistemas dinámicos EmulPro que se desarrolló en el Laboratorio de Automatización de la Facultad de Ingeniería.

Para continuar mejorando al modelo, puede ser de ayuda representar también el efecto del ventilador como actuador de forma que la acción de este se pueda simular.

# Referencias

- [ASHRAE, 2014] ASHRAE (2014). *Ashrae Guideline 14-2014: Measurement of Energy, Demand and Water Savings*. ASHRAE guideline. American Society of Heating, Refrigerating, and Air-Conditioning Engineers <https://books.google.com.mx/books?id=zlJkAQAACAAJ>. (Citado en páginas 62 y 65.)
- [Balamuralithara y Woods, 2009] Balamuralithara, B. & Woods, P. C. (2009). Virtual laboratories in engineering education: The simulation lab and remote lab. *Computer Applications in Engineering Education*, 17(1), 108–118, <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/cae.20186> <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cae.20186>. (Citado en página 4.)
- [Beder, et al., 1971] Beder, E., Bass, C. D., & Shackelford, W. L. (1971). Transmissivity and absorption of fused quartz between 0.22  $\mu$  and 3.5  $\mu$  from room temperature to 1500 degrees c. *Applied optics*, 10 10, 2263–8 <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:27003492>. (Citado en página 25.)
- [Bergman, et al., 2011] Bergman, T., Lavine, A., & Incropera, F. (2011). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 7th Edition*. John Wiley & Sons, Incorporated. (Citado en páginas 9, 10, 13, 14, 15, 16, 18 y 37.)
- [Boylestad, 2002] Boylestad, R. (2002). *Introductory Circuit Analysis (10th Ed.)*. Prentice Hall College Div. (Citado en página 24.)
- [Burns, et al., 1993] Burns, G. W., Scroger, M. G., Strouse, G. F., Croarkin, M. C., & Guthrie, W. F. (1993). *Temperature electromotive force reference functions and tables for the letter designated thermocouple types based on the ITS 90*. Technical report, Gaithersburg, MD <https://doi.org/10.6028/NIST.MONO.175>. (Citado en página 31.)
- [Çengel, 2011] Çengel, Y. (2011). *Transferencia de Calor y Masa*. McGraw-Hill Interamericana de España S.L. (Citado en páginas 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 25 y 26.)
- [Chai y Draxler, 2014] Chai, T. & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (rmse) or mean absolute error (mae)? – arguments against avoiding rmse in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 1247–1250, <https://doi.org/10.5194/gmd-7-1247-2014> <https://gmd.copernicus.org/articles/7/1247/2014/>. (Citado en página 61.)
- [Churchill y Bernstein, 1977] Churchill, S. W. & Bernstein, M. (1977). A Correlating Equation for Forced Convection From Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Crossflow. *Journal of Heat Transfer*, 99(2), 300–306, <https://doi.org/10.1115/1.3450685> <https://doi.org/10.1115/1.3450685>. (Citado en página 14.)
- [Churchill y Chu, 1975] Churchill, S. W. & Chu, H. H. (1975). Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18(11), 1323–1329, [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0017-9310\(75\)90243-4](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0017-9310(75)90243-4) <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931075902434>. (Citado en página 15.)
- [Day, et al., 2013] Day, J. C., Zemler, M. K., Traum, M. J., & Boetcher, S. K. S. (2013). Laminar Natural Convection From Isothermal Vertical Cylinders: Revisiting a Classical Subject. *Journal of Heat Transfer*, 135(2), 022505, <https://doi.org/10.1115/1.4007421> <https://doi.org/10.1115/1.4007421>. (Citado en página 15.)

- [Desai, *et al.*, 1984] Desai, P. D., Chu, T. K., James, H. M., & Ho, C. Y. (1984). Electrical resistivity of selected elements. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 13(4), 1069–1096, <https://doi.org/10.1063/1.555723> <https://doi.org/10.1063/1.555723>. (Citado en páginas 24 y 44.)
- [Errandonea, *et al.*, 2020] Errandonea, I., Beltrán, S., & Arrizabalaga, S. (2020). Digital twin for maintenance: A literature review. *Computers in Industry*, 123, 103316, <https://doi.org/10.1016/j.compind.2020.103316> <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166361520305509>. (Citado en página 1.)
- [Gibbins y Perkin, 2013] Gibbins, L. & Perkin, G. (2013). Laboratories for the 21st century in STEM higher education: a compendium of current UK practice and an insight into future directions for laboratory-based teaching and learning [https://repository.lboro.ac.uk/articles/book/Laboratories\\_for\\_the\\_21st\\_century\\_in\\_STEM\\_higher\\_education\\_a\\_compendium\\_of\\_current\\_UK\\_practice\\_and\\_an\\_insight\\_into\\_future\\_directions\\_for\\_laboratory-based\\_teaching\\_and\\_learning/9488411](https://repository.lboro.ac.uk/articles/book/Laboratories_for_the_21st_century_in_STEM_higher_education_a_compendium_of_current_UK_practice_and_an_insight_into_future_directions_for_laboratory-based_teaching_and_learning/9488411). (Citado en página 4.)
- [González-Salgado, 2021] González-Salgado, U. (2021). Rediseño y control de una plataforma experimental para procesos de transferencia de calor. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, CDMX. (Citado en páginas 2 y 4.)
- [Hecht y Zajac, 2002] Hecht, E. & Zajac, A. (2002). *Optics (4th Ed.)*. McGraw-Hill Series in Chemical Engineering. Addison Wesley, Amsterdam. (Citado en página 17.)
- [Hermundsdottir y Aspelund, 2021] Hermundsdottir, F. & Aspelund, A. (2021). Sustainability innovations and firm competitiveness: A review. *Journal of Cleaner Production*, 280, 124715, <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.124715> <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652620347594>. (Citado en página 2.)
- [Hong, *et al.*, 2016] Hong, T., Kim, C.-J., Jeong, J., Kim, J., Koo, C., Jeong, K., & Lee, M. (2016). Framework for approaching the minimum cv(rmse) using energy simulation and optimization tool. *Energy Procedia*, 88, 265–270, <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2016.06.157>. CUE 2015 - Applied Energy Symposium and Summit 2015: Low carbon cities and urban energy systems <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1876610216302284>. (Citado en página 62.)
- [Hyde, *et al.*, 1916] Hyde, E., Cady, F., & Forsythe, W. (1916). “color temperature” scales for tungsten and carbon. *Journal of the Franklin Institute*, 181(3), 418–420, [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(16\)90266-7](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(16)90266-7) <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003216902667>. (Citado en página 23.)
- [Jamwal, *et al.*, 2021] Jamwal, A., Agrawal, R., Sharma, M., Kumar, V., & Kumar, S. (2021). Developing a sustainability framework for industry 4.0. *Procedia CIRP*, 98, 430–435, <https://doi.org/10.1016/j.procir.2021.01.129>. The 28th CIRP Conference on Life Cycle Engineering, March 10 – 12, 2021, Jaipur, India <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212827121001591>. (Citado en página 2.)
- [Kane y Sell, 2001] Kane, R. & Sell, H. (2001). *Revolution in Lamps: A Chronicle of 50 Years of Progress*. River Publishers. (Citado en páginas 20 y 22.)
- [Kritzinger, *et al.*, 2018] Kritzinger, W., Karner, M., Traar, G., Henjes, J., & Sihn, W. (2018). Digital twin in manufacturing: A categorical literature review and classification. *IFAC-PapersOnLine*, 51(11), 1016–1022, <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.08.474>. 16th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2018 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896318316021>. (Citado en página 1.)
- [Kulacki, 2008] Kulacki, F. (2008). *Handbook of Thermal Science and Engineering (1st Ed.)*, (pp. 220–222). (Citado en página 1.)

- [Kulakowski, *et al.*, 2007] Kulakowski, B. T., Gardner, J. F., & Shearer, J. L. (2007). *Thermal Systems*, (pp. 198–218). Cambridge University Press, 3 edition. (Citado en página 19.)
- [Lide, 1991] Lide, D., Ed. (1991). *Handbook of Chemistry and Physics. 72nd ed.* CRC Press. (Citado en página 37.)
- [Lind y Rusin, 1978] Lind, M. A. & Rusin, J. M. (1978). Heliostat glass survey and analysis. <https://doi.org/10.2172/6438800> <https://www.osti.gov/biblio/6438800>. (Citado en página 25.)
- [Macías-Bejarano, 2018] Macías-Bejarano, C. (2018). Dise~no y desarrollo de una plataforma experimental para evaluar estrategias de control en procesos térmicos industriales. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, CDMX. (Citado en páginas 2 y 4.)
- [McAdams, 1985] McAdams, W. (1985). *Heat Transmission*. McGraw-Hill Series in Chemical Engineering. Krieger Pub Co. (Citado en páginas 17 y 18.)
- [Planck, 1914] Planck, M. (1914). *The Theory of Heat Radiation, 1991*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications. (Citado en página 25.)
- [Rasheed, *et al.*, 2020] Rasheed, A., San, O., & Kvamsdal, T. (2020). Digital twin: Values, challenges and enablers from a modeling perspective. *IEEE Access*, 8, 21980–22012, <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2970143>. (Citado en página 1.)
- [Reed, 1999] Reed, R. (1999). *Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook*. Measurement, instrumentation, and sensors handbook. CRC Press LLC. (Citado en página 29.)
- [Robertson y Gross, 1958] Robertson, A. F. & Gross, D. (1958). An electrical-analog method for transient heat-flow analysis. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, 61, 105 <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:54820311>. (Citado en páginas 51 y 52.)
- [Rockwell-Automation, 2023] Rockwell-Automation (2023). *Revista Automation Today - América Latina (Ed. 58)*. (Citado en página 1.)
- [SolidWorks-Knowledge-Base, 2024] SolidWorks-Knowledge-Base (2024). Convection. [https://help.solidworks.com/2021/english/SolidWorks/cworks/c\\_convection.htm](https://help.solidworks.com/2021/english/SolidWorks/cworks/c_convection.htm). Accessed: 2024-04-21. (Citado en página 37.)
- [Somefun, *et al.*, 2021] Somefun, O. A., Akingbade, K., & Dahunsi, F. (2021). The dilemma of pid tuning. *Annual Reviews in Control*, 52, 65–74, <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.05.002> <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578821000407>. (Citado en página 1.)
- [Stewart, 2012] Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas (7a. ed.)*. Cengage Learning Editores <https://books.google.com.mx/books?id=c6UPnQAACAAJ>. (Citado en página 18.)
- [Stewart, 2015] Stewart, J. (2015). *Single Variable Calculus*. Cengage Learning <https://books.google.com.mx/books?id=Xy3aBAAAQBAJ>. (Citado en página 61.)
- [van den Hoek, *et al.*, 2010] van den Hoek, W. J., Luijks, G. M. J. F., & Hoelen, C. G. H. (2010). *Lamps*. John Wiley & Sons, Ltd [https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/14356007.a15\\_115.pub3](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/14356007.a15_115.pub3). (Citado en páginas 20 y 25.)
- [Weisstein, 2023] Weisstein, E. W. (2023). Root-mean-square. <https://mathworld.wolfram.com/Root-Mean-Square.html>. Accessed: 2023-08-08. (Citado en página 61.)
- [Wensel y Roeser, 1978] Wensel, H. & Roeser, W. (1978). *Handbook of Chemistry and Physics. 49th ed.* CRC Press. (Citado en página 23.)

[Çengel y Boles, 2011] Çengel, Y. & Boles, M. (2011). *Thermodynamics. An Engineering Approach. 7th ed.* McGraw-Hill Education. (Citado en páginas 9, 10 y 17.)