



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Rediseño y evaluación
de un prototipo de péndulo
de Furuta**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Eléctrico Electrónico

P R E S E N T A

Marco Antonio Chávez Contreras

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Paul Rolando Maya Ortiz



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a mis padres la señora Rosa y el señor Juan, a mi hermano Luis por siempre apoyarme y ayudarme a lograr terminar mis estudios de licenciatura, también quiero agradecer a mi asesor y a mis compañeros de laboratorio que siempre me apoyaron cuando lo necesité y gracias a ellos logré terminar este trabajo y por último a mis compañeros que a lo largo de la licenciatura compartieron aula conmigo y me apoyaron a través de las materias.

Índice

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Marco Teórico	1
1.2 Estado del Arte	3
1.3 Objetivos.....	4
1.4 Contribuciones.....	5
1.5 Estructura de la tesis	5
Capítulo 2: Evaluación del prototipo de péndulo de Furuta	7
2.1 Características del prototipo	7
2.1.1 Motor.....	7
2.1.2 Encoder	8
2.1.3 Microcontrolador	8
2.1.4 Etapa de potencia	9
2.1.5 Partes mecánicas	9
2.2 Evaluación de los componentes	10
2.3 Evaluación de funcionamiento del sistema completo	14
Capítulo 3: Soluciones al diseño y componentes del péndulo de Furuta	17
3.1 Solución de lectura de la posición del péndulo	17
3.2 Solución a los problemas del motor	19
3.3 Solución de problemas mecánicos y de diseño	21
3.4 Solución de problemas de microcontrolador.....	24
3.5 Versión final del prototipo	25
Capítulo 4: Modelado y análisis del péndulo de Furuta	27
4.1 Modelo matemático y linealización	27
4.2 Análisis de estabilidad del sistema en lazo abierto.....	31
4.3 Diseño del controlador.....	37
Capítulo 5: Resultados.....	47
5.1 Controlador implementado en la simulación del sistema.....	47
5.2 Controlador implementado en el sistema físico	55
5.3 Comparación de los resultados de la simulación y el sistema físico ...	61
Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones	63

Anexos 64

- 1. Código de Matlab para linealizar el sistema 64
- 2. Código de la función que describe el comportamiento del sistema. 66
- 3. Código de aplicación del controlador al sistema..... 67

Referencias..... 68

Índice de Figuras

Ilustración 1 Modelo esquemático del péndulo (Valera, Vallés, & Cardo, 2002)	1
Ilustración 2 Prototipo original a modificar (Estopier, 2020)	7
Ilustración 3 Motor se CD NISCA.....	8
Ilustración 4 Encoder EB2CWZ6C.....	8
Ilustración 5 Microcontrolador C2000	9
Ilustración 6 Driver controlador del motor	9
Ilustración 7 Péndulo y Brazo del sistema	10
Ilustración 8 Programa en Simulink para probar el funcionamiento del encoder.	11
Ilustración 9 Diagrama de conexiones Arduino y Encoder.....	12
Ilustración 10 Programa que controla la velocidad de giro del motor.....	13
Ilustración 11 Diagrama de conexiones Arduino, driver y motor.....	13
Ilustración 12 Diagrama de bloques simulación sistema completo	14
Ilustración 13 Diagrama de conexiones completo.....	15
Ilustración 14 Nuevo encoder	17
Ilustración 15 Motor JGA 25-370	20
Ilustración 16 Driver L298N	21
Ilustración 17 Correcciones a los acoples del motor con las piezas mecánicas	22
Ilustración 18 Rueda acoplada al brazo	23
Ilustración 19 Vista lateral de la versión final del prototipo	25
Ilustración 20 Vista superior de la versión final del prototipo	26
Ilustración 21 Grafica de los polos y ceros del sistema en lazo abierto	32
Ilustración 22 Polos y ceros del sistema 2 en lazo abierto.....	33
Ilustración 23 Comportamiento del brazo en el punto de operación.	34
Ilustración 24 Comportamiento del péndulo en el punto de operación.	34
Ilustración 25 Comportamiento del brazo en el punto de equilibrio del origen.	35
Ilustración 26 Comportamiento del péndulo en el punto de equilibrio del origen.	35
Ilustración 27 Comportamiento del brazo iniciando fuera de los puntos de equilibrio.....	36
Ilustración 28 Comportamiento del péndulo iniciando fuera del punto de equilibrio.....	36
Ilustración 29 Diagrama de bloques de la simulación del sistema en lazo cerrado.	49
Ilustración 30 Posiciones del brazo con el control diseñado Con polos reales negativos.....	49

Ilustración 31 Posición del péndulo con el control diseñado con polos reales negativos.....	50
Ilustración 32 Señal de control.....	50
Ilustración 33 Posición del brazo con el control LQR.....	52
Ilustración 34 Posición del péndulo con el control LQR.....	52
Ilustración 35 Señal de control LQR.....	52
Ilustración 36 Posición del brazo con el controlador con dos polos complejos conjugados.....	53
Ilustración 37 Posición del péndulo con el controlador con dos polos complejos conjugados.....	54
Ilustración 38 Señal de control con dos polos complejos conjugados.	54
Ilustración 39 Programa para monitorear los datos en tiempo real.....	56
Ilustración 40 Posición del péndulo en el prototipo prueba 1.....	57
Ilustración 41 Posición del brazo en el prototipo prueba 1.....	58
Ilustración 42 Señal de control en porcentaje prueba 1.....	58
Ilustración 43 Señal de control en volts prueba 1.....	59
Ilustración 44 Posición del péndulo prueba 2.....	60
Ilustración 45 Posición del brazo en el prototipo prueba 2.....	60
Ilustración 46 Señal de control en porcentaje prueba 2.....	61
Ilustración 47 Señal de control en Volts prueba 2.....	61

Índice de Tablas

Tabla 1 Parámetros del brazo y del péndulo	10
Tabla 2 Características del encoder nuevo.....	18
Tabla 3 Características del motor nuevo	20
Tabla 4 Valores de los parámetros utilizados.	28
Tabla 5 Conexiones del prototipo	57

Capítulo 1. Introducción

1.1 Marco Teórico

El péndulo rotacional invertido o de Furuta fue creado por el Dr. K. Furuta del Instituto de Tecnología de Tokio en 1992. Es un sistema subactuado de dos grados de libertad, al primero se le llama brazo (actuado) y al segundo se le llama péndulo (libre), donde ambos se mueven de manera rotacional. El objetivo de control de dicho sistema es lograr mantener el péndulo en la posición vertical por medio del movimiento rotacional del brazo (Valera, Vallés, & Cardo, 2002).

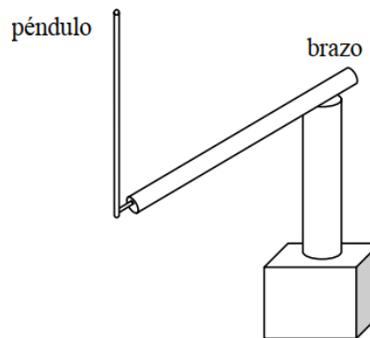


Ilustración 1 Modelo esquemático del péndulo (Valera, Vallés, & Cardo, 2002)

El estudio del péndulo de Furuta es importante debido a que su modelo tiene diversas aplicaciones, algunos ejemplos son el control de satélites, la estabilización de aviones ante la presencia de flujo de aire turbulento o la estabilización de la cabina de un barco; además, es posible aplicar teoría de control lineal y no lineal, lo cual lo hace muy versátil y útil en la enseñanza de la teoría de control (Medina Cervantes, Gallardo Sánchez, Villafuerte Díaz, & Mejía Sánchez, 2017).

De acuerdo con la Real Academia Española un prototipo se define como “*Ejemplar original o primer molde en que se fabrica una figura u otra cosa*” (Real Academia Española, 2023). En este trabajo se aborda el concepto de un prototipo físico y funcional de un péndulo rotacional invertido, construido con materiales accesibles para su uso en las materias del departamento de Control y Robótica de la Facultad de Ingeniería.

Por otra parte, se puede ampliar la definición de prototipo como un modelo que puede ser modificado de manera sencilla de un sistema previamente estudiado en el cual se incluye la interfaz, el funcionamiento de las entradas y las salidas (Salazar, 2012).

Finalmente, en este trabajo se considerará un prototipo como un modelo construido con las medidas reales y los materiales finales con el fin de comprobar

su funcionamiento y poder ser utilizado en el estudio de los problemas de control (Salazar, 2012).

Los prototipos se realizan con el objetivo de tener un objeto físico representativo de un sistema, para tener una idea de su funcionamiento y llevar a cabo pruebas, con el objetivo de aprender de él y, en caso de ser necesario, se pueda mejorar su desempeño. Así, un prototipo es un experimento con la finalidad de verificar una hipótesis y su solución (ThinkersCo, 2020). De un prototipo funcional se espera que sea operativo de manera autónoma, es decir, una vez se ejecuta la rutina de inicio con el sistema en sus condiciones iniciales específicas el sistema debe poder funcionar con una ley de control diseñada para lograr el objetivo de control, se deben poder medir y monitorizar las variables de interés del sistema y se debe poder monitorear sus valores en tiempo real en la computadora con la que se controla el sistema con el fin de poder analizar los datos y también se deben almacenar para que al final de la ejecución se puedan analizar los datos obtenidos y de esa manera corroborar el correcto funcionamiento del prototipo.

Por otra parte, se deben analizar los datos obtenidos con el fin de mejorar el diseño del prototipo y obtener el mejor funcionamiento posible o en su caso las correcciones que sean necesarias para poder ser utilizado como material de laboratorio de las asignaturas del Departamento de Control y Robótica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El proceso general para construir un prototipo empieza invariablemente con comprender el problema que se quiere resolver, se debe dar una propuesta de solución al problema identificado. Teniendo la solución del problema lista, se debe pasar a la etapa de construcción del prototipo. Como en todo experimento se deben realizar pruebas de funcionamiento y, por último, en caso de ser necesario, se deben realizar las mejoras pertinentes (Universidad Europea, 2022).

De manera muy generalizada se pueden agrupar los prototipos en dos grupos: (1) modelos 3D realizados a través de algún software especializado en una computadora y (2) modelos de alta fidelidad. Los primeros se consideran de baja fidelidad debido a que solamente se realizan en una computadora y no contienen toda la información del modelo y los segundos se consideran de alta fidelidad porque se construyen con los materiales definitivos y deben tener todas las características importantes del modelo final (Universidad Europea, 2022).

El primer paso en el diseño de un prototipo, como se mencionó anteriormente, es comprender el problema que se quiere solucionar, es decir la fase de investigación en la cual es necesario recabar toda la información relacionada con los fenómenos físicos que están presentes en el problema que se

resuelve. En el caso de este trabajo se cuenta con el modelo matemático que describe el comportamiento del péndulo de Furuta, el cual ha sido ampliamente estudiado por diversas contribuciones disponibles en la literatura.

Se realiza el análisis de la información obtenida en la fase de conocimiento del problema, en este caso el análisis del sistema y su modelo matemático, después se propone una solución al problema, se realiza el boceto del prototipo para tener una idea de los materiales de construcción y la forma de construcción para poder aplicar la solución propuesta al modelo, ya sea físico o digital.

Una vez analizada la información y se tiene el boceto del prototipo, se realiza un modelo computacional en tres dimensiones del sistema o, en su defecto, el diseño para la construcción física del mismo. En particular, para esta tesis el prototipo inicial fue diseñado en un trabajo presentado anteriormente (Estopier, 2020) por lo cual este paso ya se encuentra cubierto.

En este trabajo se comienza con el análisis del modelo del sistema desde un punto de vista diferente al presentado en (Estopier, 2020) y con la parte de realizar las pruebas al prototipo. Dependiendo del resultado de dichas pruebas se deberán realizar las correcciones pertinentes para poder tener un funcionamiento adecuado del mismo, por lo tanto, se puede decir que los primeros pasos de la construcción del prototipo han sido cubiertos.

Únicamente se utiliza el modelo físico del sistema, el cual se conecta a una interfaz en la computadora con el objetivo de poder observar el comportamiento de éste y poder verificar si cumple con el objetivo de control. En el trabajo previo que se realizó en el laboratorio (Estopier, 2020) se muestra cómo se construyó todo el sistema físico del péndulo de Furuta.

1.2 Estado del Arte

En los últimos años se han publicado diferentes trabajos que abordan el control del péndulo rotacional invertido. Todos ellos tienen enfoques muy diferentes y resuelven el problema de control con diversas técnicas de control, como se mencionó anteriormente el péndulo de Furuta es ampliamente estudiado debido a la diversidad de esquemas de control que se pueden aplicar sobre él y a que su construcción es sencilla y puede ser realizada con materiales de bajo costo.

Como ejemplo de lo anterior es el trabajo (Prado, Herrera, & Menéndez, 2020) donde se utiliza un esquema de control robusto basado en un modelo no lineal para el control de un péndulo rotacional invertido, utiliza un sistema de conmutación inteligente para cambiar el controlador después de que alza el péndulo desde la posición inferior hasta una región cercana al punto de equilibrio

superior en el cual se debe mantener el péndulo, dicho controlador tiene múltiples acciones de control para garantizar la robustez del sistema y el buen funcionamiento ante las perturbaciones externas y limitantes de los actuadores, el controlador fue probado en un modelo experimental físico y en simulaciones.

Otro ejemplo más complejo se encuentra en (Acosta, Noguera, Pacheco, & Sanjuan, 2021). En este artículo se trabaja con el péndulo de Furuta, donde se realizaron dos modelos matemáticos: uno a partir de las ecuaciones de movimiento del sistema obtenidas por el método de Euler-Lagrange y otro por un modelo de caja negra entrenando una Red Neuronal para un Modelo Autorregresivo de Media móvil con Entrada Externa, NNARMAX por sus siglas en inglés. El trabajo incluye el modelado del sistema, la estructura y el método de entrenamiento para el modelo de red neuronal y los resultados de las simulaciones de los modelos ya controlados.

Como último ejemplo se tomará la tesis (Bellati, Cancela, & Pérez, 2021) en este trabajo se realiza la construcción de un prototipo de un péndulo de Furuta para un laboratorio similar a este caso de estudio, utiliza dos leyes de control diferentes, la primera es un controlador estabilizante que se encarga de mantener al péndulo en su posición invertida y la segunda es un controlador swing up que es el encargado de llevar al péndulo de la posición de reposo a la posición invertida, de igual manera se cuenta con un control supervisor que se encarga de realizar el cambio entre los dos controladores.

Existen muchos trabajos más en los que se utiliza o se construye algún modelo del péndulo rotacional invertido ya sea físico o en un ambiente de simulación, sin embargo, el problema se aborda desde puntos de vista diferentes y se realizan diferentes tipos de controladores. La mayor parte de trabajos se centran justamente en diseñar controladores para mantener al péndulo en su posición invertida y/o en diseñar también controladores para llevar el péndulo de la posición de reposo a la posición invertida. Son pocos los trabajos que hacen énfasis en la construcción de un prototipo funcional.

Para el prototipo empleado en este trabajo, se diseñó un controlador lineal por asignación de polos. Para ello, se muestra que el sistema es de estado completamente controlable, por lo que los polos de lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier lugar del plano complejo, además se mide y retroalimenta todo el vector de estado. (Ogata, 1998)

1.3 Objetivos

- Reacondicionar el prototipo físico del péndulo de Furuta.
- Analizar y simular el modelo matemático del sistema.

- Diseñar algoritmos de control y aplicarlos a los modelos tanto físico y simulado.
- Comparar los resultados físicos y simulados.

1.4 Contribuciones

El péndulo rotacional invertido, como se mencionó anteriormente, es ampliamente utilizado en el estudio del control automático de sistemas físicos, debido a esto se han realizado diversos trabajos acerca del péndulo de Furuta uno de ellos se presenta en (Estopier, 2020) en el cual se realizó un modelo físico del péndulo. El sistema dejó de funcionar debido a que algunos de sus componentes se dañaron y otros presentaron desgaste físico. Además, se consideró importante mejorar la electrónica para aumentar la robustez y confiabilidad.

Así, se reemplazó uno de los sensores de rotación del modelo físico por uno con una resolución más apropiada para la aplicación, de igual manera se decidió cambiar el microcontrolador que se utiliza para la adquisición de datos por uno de más bajo costo y programación más sencilla.

El microcontrolador que se decidió utilizar fue un TM4C123G, debido a que sus características lo hacían el adecuado para el proyecto. Además, se decidió separar el sistema en dos etapas la etapa de adquisición de datos y la etapa del monitoreo en tiempo real. Para ello se decidió utilizar el microcontrolador que ya se tenía únicamente para graficar los datos en el software de Matlab ya que cuenta con librerías de soporte para la tarjeta y eso hace que el manejo de los datos y la visualización en tiempo real sea más sencillo.

Para complementar el trabajo se realizó una investigación sobre los prototipos, cómo se deben de construir y las características que deben de tener con el fin de justificar que todos los cálculos realizados en el presente trabajo son basados en este prototipo de péndulo de Furuta en específico.

1.5 Estructura de la tesis

El presente trabajo de investigación se divide en 6 capítulos:

Capítulo 1. Introducción. Se abordan los conceptos importantes para el desarrollo de la tesis, algunos enfoques que se han trabajado anteriormente con el péndulo de Furuta, se define el concepto de prototipo, las etapas de desarrollo de los prototipos y las contribuciones de este trabajo.

Capítulo 2. Evaluación del prototipo del péndulo de Furuta. En este capítulo se explican los componentes más importantes que se utilizan en el prototipo del péndulo con el que se trabaja, se realizan las pruebas a los componentes y las

pruebas de funcionamiento del sistema completo para evaluar si el funcionamiento es correcto o no.

Capítulo 3. Soluciones de diseño y componentes del prototipo. Este capítulo se enfoca en abordar los problemas de los componentes identificados en el capítulo anterior dando la mejor solución posible, así como dar la solución más sencilla y económica posible a los problemas de diseño del sistema.

Capítulo 4. Modelado y análisis del péndulo de Furuta. A lo largo de este capítulo se estudia el modelo del péndulo, se realiza una linealización de este en el punto de equilibrio inestable, se realiza un análisis del sistema y se diseña una ley de control simple para poder mantener el péndulo en su posición superior.

Capítulo 5. Resultados. En este capítulo se presentan los resultados obtenidos tanto en la simulación del sistema con el control implementado, como en el prototipo físico del péndulo de Furuta. También se realiza una comparación de los resultados obtenidos en la simulación y en el sistema físico.

Capítulo 6. Conclusiones. Se realiza un análisis del trabajo de forma general en el que se determina si se logró el cumplimiento de los objetivos, las complicaciones que se presentaron y el trabajo a futuro que se puede realizar en la plataforma.

Capítulo 2: Evaluación del prototipo de péndulo de Furuta

2.1 Características del prototipo

Para poder realizar la evaluación del prototipo de (Estopier, 2020) es necesario realizar pruebas de funcionamiento de los actuadores, sensores, microcontrolador y partes mecánicas utilizados en el prototipo, así como dar una breve explicación de las características físicas del mismo.



Ilustración 2 Prototipo original a modificar (Estopier, 2020)

En la *Ilustración 2* se muestra el prototipo original con el que se contaba en el laboratorio, el cual es la base para este trabajo y es al que se le realizarán las modificaciones correspondientes para poder dejarlo funcional, ya que, el prototipo actual no mide de manera correcta la posición del péndulo y existe un roce dentro del motor al girar, el objetivo es que se pueda seguir utilizando para probar leyes de control en él.

2.1.1 Motor

Se utiliza un motor de corriente directa de doble flecha marca NISCA modelo NA4056A. Es un motor de 24 volts, par de 25.56 mili-Newtons por metro, velocidad máxima de 3,506 revoluciones por minuto, corriente máxima de 0.648 amperes, la potencia de salida promedio es de 9.38 watts. El motor se muestra en la *Ilustración 3*.



Ilustración 3 Motor se CD NISCA

2.1.2 Encoder

Para realizar la medición de las posiciones, tanto del brazo como del péndulo es necesario utilizar codificadores o encoders. El prototipo tiene montados dos encoders iguales de la marca OMRON modelo E6B2CWZ6C como se muestra en la *Ilustración 4*. De acuerdo con la hoja de datos proporcionada por la marca OMRON, la resolución de estos encoders es de 2,000 pulsos por revolución es decir, de 0.18 grados.



Ilustración 4 Encoder EB2CWZ6C

2.1.3 Microcontrolador

El microcontrolador utilizado para adquirir los datos de los sensores (encoders) y para mandar la señal de control al motor es el Launchpad TMS320F28379D de Texas Instruments de la familia MCU C2000. Este microcontrolador cuenta con dos módulos para la lectura de encoders, además de contar con pines de salidas digitales y salidas PWM con una velocidad de reloj de 200 MHz, el microcontrolador se muestra en la *Ilustración 5*.



Ilustración 5 Microcontrolador C2000

2.1.4 Etapa de potencia

Para poder controlar la velocidad de giro del motor con la salida PWM del microcontrolador es necesario agregar una etapa de potencia. Para ello se utilizó el controlador MC33926. Con este dispositivo también se puede controlar el sentido de giro del motor. Sus características eléctricas del controlador cumplen con los valores que necesita el motor para funcionar, es decir, voltaje de operación de 5 a 28 volts, corriente máxima de 5 amperes. El controlador se muestra en la *Ilustración 6*.



Ilustración 6 Driver controlador del motor

2.1.5 Partes mecánicas

Las dos partes mecánicas más importantes en el diseño del prototipo son el brazo y el péndulo, que son las dos partes móviles del sistema. Ambos están

construidos en aluminio como se muestra en la *Ilustración 7*, las características tanto del brazo como del péndulo se muestran en la *Tabla 1*.

Parámetro	Brazo	Péndulo
Longitud	0.1729 [m]	0.245[m]
Peso	0.196[kg]	0.032[kg]
Centro de masa	0.1124[m]	0.1256[m]

Tabla 1 Parámetros del brazo y del péndulo

En la *Tabla 1* el peso del brazo es únicamente considerando la construcción de aluminio, el encoder para medir la posición del péndulo se encuentra acoplado en el brazo como se muestra en la *Ilustración 7* y por lo tanto es necesario cuando se realicen los cálculos y pruebas sumar el peso del encoder al peso del brazo.



Ilustración 7 Péndulo y Brazo del sistema

2.2 Evaluación de los componentes

Lo primero que se realizó fue el desmontaje de los componentes del prototipo para verificar cada uno por separado y ver que los tornillos de unión también se encontraran en buen estado, es decir, que ninguno de los componentes estuviera pegado o barrido, posteriormente se continuó con la verificación del funcionamiento de cada componente.

El primer componente al que se le realizaron pruebas de funcionamiento fue al microcontrolador TMS320F28379D. Se desconectaron todos los puertos y se evaluó por separado conectándolo a la computadora. La conexión a la computadora funcionó de manera adecuada, pero al revisar la conexión con el software Matlab, se encontró que su funcionamiento no era el adecuado porque se perdían algunos datos de las lecturas de las posiciones.

Para realizar las pruebas de los componentes por separado y de manera sencilla se decidió utilizar otro microcontrolador que contara con prestaciones similares, conexión directa con el software de Matlab y Simulink y que su programación fuera más fácil. Por estas razones se optó por utilizar un microcontrolador Arduino Mega, ya que tiene conexión directa con Simulink, salidas digitales, salida de PWM y se pueden leer los encoders de forma directa desde Simulink.

Una vez seleccionado el microcontrolador que se utilizaría para realizar las pruebas y la plataforma en la que se implementaría la programación del microcontrolador se codificó un programa en Simulink para poder hacer las pruebas de funcionamiento de los encoders por separado como lo muestra la *Ilustración 8*. El programa se realizó utilizando los bloques que la librería de Arduino en Simulink brinda, en este caso, uno de los bloques es justamente para leer un encoder, por otra parte, se acondicionó la señal entregada por el encoder para convertir los pulsos a grados y visualizarlos en un display.

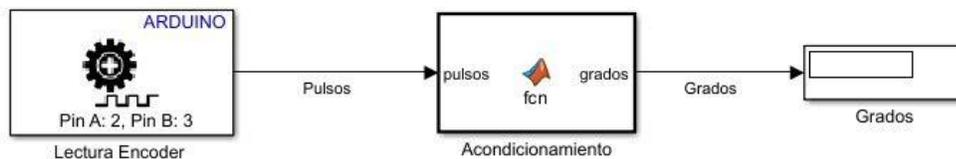


Ilustración 8 Programa en Simulink para probar el funcionamiento del encoder.

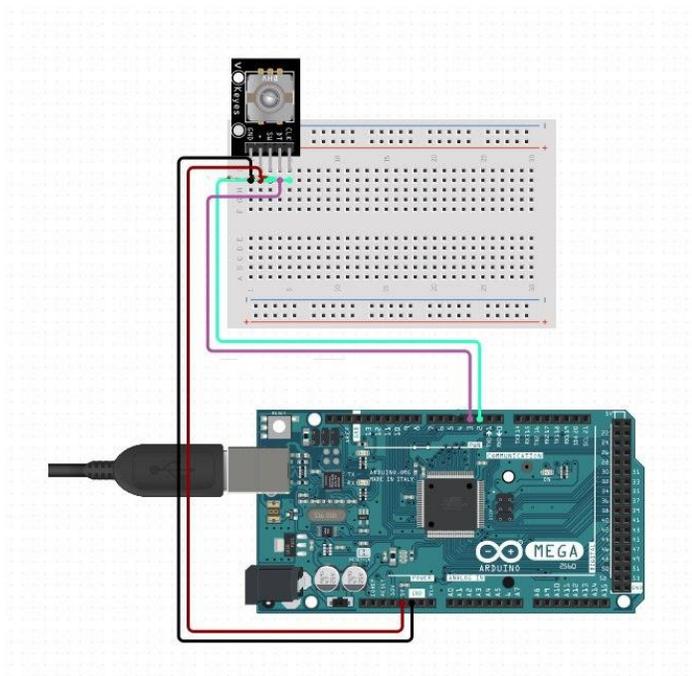


Ilustración 9 Diagrama de conexiones Arduino y Encoder

La *Ilustración 9* muestra las conexiones realizadas entre el Arduino mega y el encoder para poder realizar las pruebas de funcionamiento. Como se puede observar, se conecta el encoder a la alimentación; en dos pines de entrada con interrupción, los canales A y B del mismo.

El encoder montado en el motor que lee la posición del brazo funcionaba correctamente y se podía visualizar la posición en tiempo real. Sin embargo, al realizar las pruebas con el encoder del péndulo se observó que no tomaba las mediciones de manera correcta, algunas veces al girar por completo el eje del encoder marcaba una posición mayor a los 360° y en otras ocasiones las lecturas mostraban una posición menor a los 360° .

Para poder confirmar que el problema estaba en el sensor se decidió realizar otra prueba, pero esta vez conectando los canales de salida del encoder a un osciloscopio para ver cuál es la señal que estaban mandando. Al implementar la prueba se observó que, el codificador era el que tenía el problema, pues la señal no era cuadrada como se esperaba; además de que mandaba una señal aun cuando no se estuviera moviendo. Por lo tanto, se confirmó que el encoder que se utilizaba para medir la posición del péndulo ya no funcionaba y se tenía que reemplazar.

El siguiente componente al que se le realizaron las pruebas de funcionamiento fue al motor de corriente directa y al controlador encargado de controlar la velocidad y el sentido de giro. Para esto en el software de Simulink se

implementó un programa en el que se pudiera controlar la velocidad del motor con una barra deslizable por una salida de PWM y el sentido de giro del motor por medio de un switch conectado a dos salidas digitales como se muestra en la *Ilustración 10*. Las pruebas fueron sin carga.

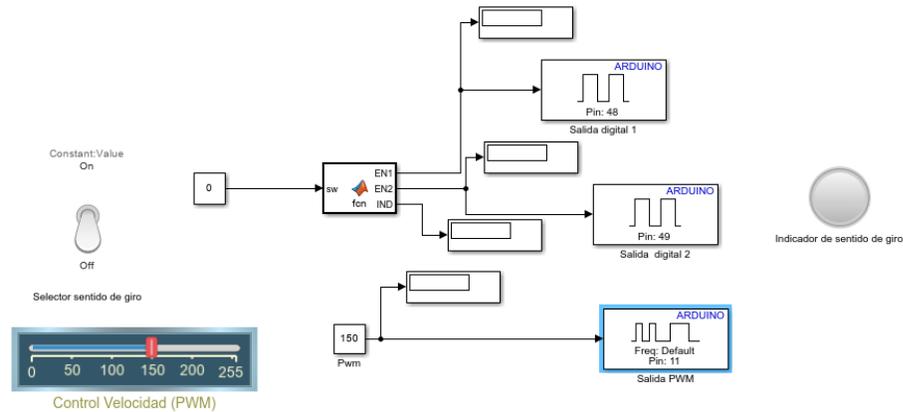


Ilustración 10 Programa que controla la velocidad de giro del motor

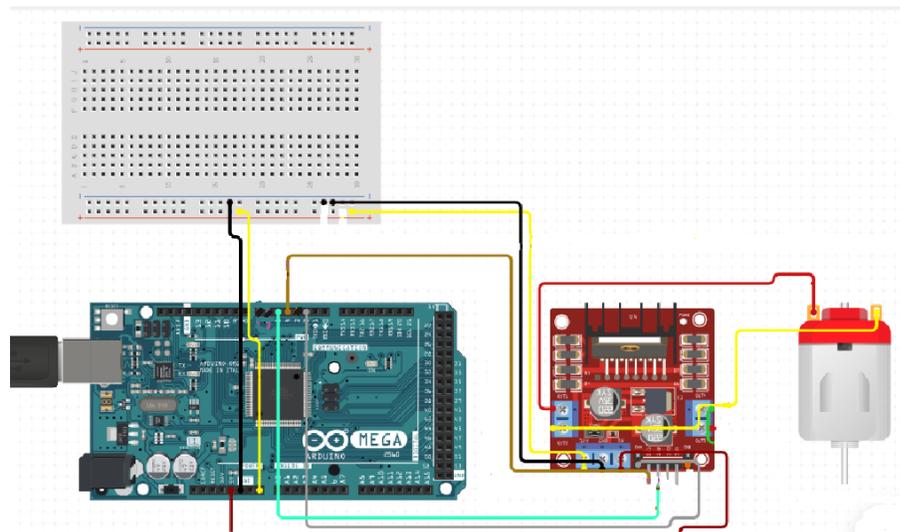


Ilustración 11 Diagrama de conexiones Arduino, driver y motor

En la *Ilustración 11* se muestra el diagrama de conexiones utilizado para probar el motor. Como se muestra, se utilizó un driver para cambiar el sentido de giro del motor y controlar su velocidad por medio de una salida PWM del Arduino.

El resultado de las pruebas sin carga fue que el motor funcionaba adecuadamente, podía girar en ambos sentidos y se podía controlar su velocidad por medio de una señal PWM, sin embargo, se observó que aún sin carga

demandaba una corriente de entre 2-3 amperes a la fuente por lo que se decidió volver a ensamblar todo el sistema para poder realizar las pruebas con todos los elementos y ver si el motor era capaz de mover todo el sistema.

2.3 Evaluación de funcionamiento del sistema completo

Como se mencionó anteriormente, para poder continuar con las pruebas de funcionamiento de los elementos que componen el prototipo de péndulo de Furuta, se volvió a ensamblar todo el sistema con los mismos componentes que se tenían, y solamente se cambió el microcontrolador con el fin de probar que los acoples mecánicos funcionaran adecuadamente y verificar que el motor tenía el par suficiente para mover el sistema.

Una vez que todo el sistema estuviera completamente montado se codificó un programa con el cual se controlaba la posición del brazo para verificar que el motor pudiera mover el brazo con el encoder y el péndulo acoplado. El programa se realizó en Simulink con un control PID como se muestra en la *Ilustración 12*, esto con la finalidad de poder hacer las pruebas.

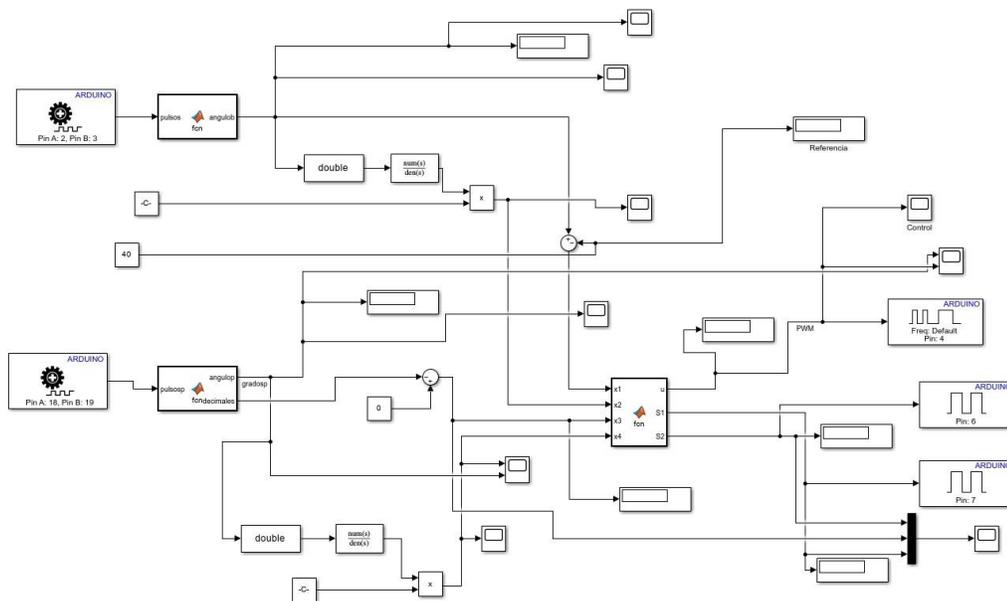


Ilustración 12 Diagrama de bloques simulación sistema completo

Las conexiones de la tarjeta de desarrollo Arduino fueron las siguientes: se conectaron los canales de entrada del encoder que obtiene la posición del brazo a dos pines digitales con interrupción (pines 2 y 3), los canales de entrada del encoder que obtiene la posición del péndulo a los otros dos pines digitales con interrupción (18 y 19), los dos pines de salida digital encargados de dar el sentido de giro del motor (pines 6 y 7) y la salida PWM para controlar la velocidad del motor (pin 4) se conectaron al driver del motor. Así mismo, se utilizó una fuente

para alimentar el driver del motor con 24 Volts y otra fuente para alimentar el encoder con 5 volts. El esquema de las conexiones se muestra a continuación.

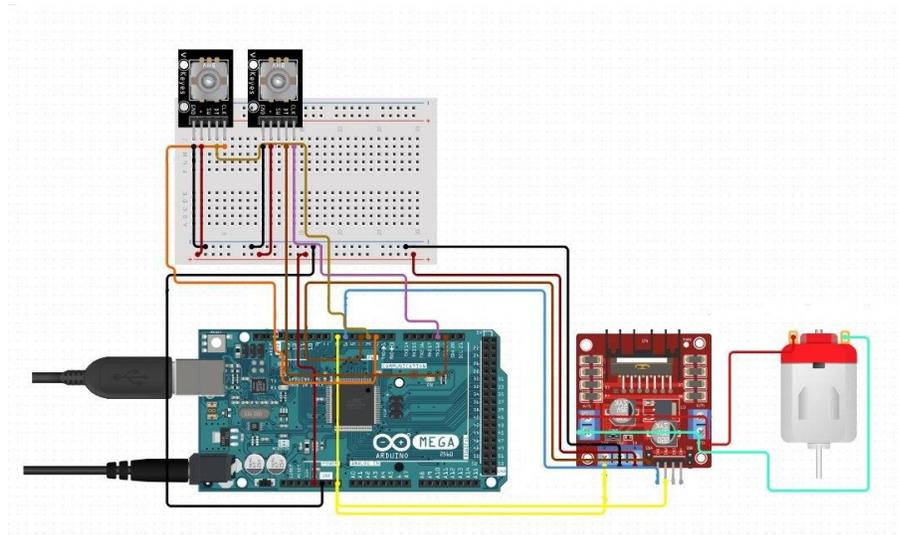


Ilustración 13 Diagrama de conexiones completo

Después de realizar las conexiones como se muestra en la *Ilustración 13* y alimentar tanto el encoder como el motor se ejecutó el programa; se observó que el motor no tenía la fuerza suficiente para hacer avanzar al sistema y que la corriente que utilizaba era de entre 2 y 3 amperes. Como indica la hoja de especificaciones el máximo operacional es de 3 amperes y al funcionar de manera prolongada se calentaba demasiado el driver del motor y el movimiento del brazo era muy lento por lo que tardaba hasta 30 segundos en llevar al sistema de la posición inicial (0°) al setpoint (90°). Para intentar solucionar esto se cambiaron los valores de las ganancias del controlador hasta que se obtuvo una respuesta mejor.

Al realizar las pruebas con diferentes puntos de referencia se observó que mientras menor fuera el valor de la referencia mejor comportamiento se tenía, que mientras mayor fuera el valor de la referencia le costaba más trabajo llegar a dicho valor y finalmente se observó que para valores grandes de referencia (mayores a 150°) el sistema nunca dejaba de oscilar.

Para poder determinar cuál era la causante de este problema, se revisaron los datos del programa en Simulink y se observó que al momento en el que el movimiento del motor tenía que cambiar de sentido se tenía un retraso de hasta 100 milisegundos, se buscó la causa por la cual se tenía dicho retraso y se concluyó que el retraso se debía a la inercia que se generaba en el movimiento del brazo y a que las revoluciones por minuto máximas del motor eran muy altas. Juntando estos dos problemas ocasionaba que le costara mucho trabajo al motor

detenerse y, por lo tanto, se presentaban esos retrasos en el cambio de sentido de giro.

Se realizaron varias pruebas complementarias para intentar mejorar el comportamiento como disminuir el voltaje de la fuente de alimentación o cambiar la referencia por una rampa saturada al valor deseado. En dicha prueba se podía seleccionar el tiempo en el que se quería que se llegara a la referencia, los resultados fueron buenos, pero de igual forma si se aumentaba la velocidad de crecimiento de la rampa el sistema dejaba de funcionar.

Al estar realizando las pruebas y revisando físicamente las partes mecánicas del sistema cuando el motor giraba se observó que el movimiento de la pieza que se utiliza como acople entre el eje del motor y el brazo del sistema giraba con un cierto ángulo de inclinación, como si la pieza o el eje estuviera doblado. Se volvió a desmontar el sistema y se revisaron tanto el acople como el eje del motor y se observó que efectivamente el eje del motor tenía inclinación, esto como consecuencia de que durante los dos años que el prototipo no se utilizó permaneció ensamblado y a como está diseñado el eje del motor soporta todo el peso del encoder que se encuentra en la parte final del brazo. Como resultado de esto el eje se dobló y no funcionaba de manera correcta. Al conectar el motor sin carga este emitía sonidos de rozamiento de las piezas mecánicas dentro del motor.

Capítulo 3: Soluciones al diseño y componentes del péndulo de Furuta

3.1 Solución de lectura de la posición del péndulo

Como se mencionó en el capítulo anterior, el primer componente que se tenía que cambiar fue el encoder modelo E6B2CWZ6C encargado de medir la posición del péndulo, porque no funcionaba correctamente y es uno de los componentes más importantes, ya que mide la variable que se desea controlar.

Para esto, con el fin de evitar modificaciones físicas del sistema, se buscó que el nuevo sensor tuviera las mismas características (conexiones, método de funcionamiento) que el reemplazado. En el caso de la resolución se determinó que al entregar al menos 360 pulsos por vuelta (un pulso cada grado) es suficiente para la aplicación.



Ilustración 14 Nuevo encoder

Revisando las características de algunos modelos de codificadores rotativos se encontraron algunos que cumplían con los requisitos, analizando las diferentes opciones se decidió adquirir el Encoder Incremental LPD3806-600BM mostrado en la *Ilustración 14*. Se seleccionó este modelo debido a que físicamente cumplía con las características necesarias y tenía una resolución adecuada para el propósito de este proyecto, es decir, de al menos un pulso por cada grado.

Voltaje de funcionamiento	5 a 24 VDC
Resolución	600 Pulsos/rev
Velocidad mecánica máxima	5,000 rev/min
Frecuencia de respuesta eléctrica	20 KHz
Rango de temperatura de operación	-10 a 85 °C
Tamaño del codificador	39 x 35.5 mm
Tamaño del eje	6 x 13 mm
Peso	180 g

Tabla 2 Características del encoder nuevo

En la *Tabla 2* se muestran las características del codificador que se eligió. Como se puede apreciar cuenta con una resolución de 600 pulsos por revolución o un pulso cada 0.6 grados lo cual como se mencionó anteriormente es lo suficiente al poder realizar mediciones al menos de un grado para obtener la posición del péndulo y así se evita que se pierda velocidad en la comunicación de los componentes. También se observa que la alimentación puede ir desde los 5 a los 24 volts de corriente continua ideal para poder seguir utilizando la fuente de 5 volts, el tamaño del eje es idéntico al del codificador que se está reemplazando por lo tanto no se tendrán problemas al realizar el acoplamiento a la plataforma.

Una vez que se contó con el encoder en el laboratorio se corroboró que se pudiera acoplar a la base y al péndulo de forma correcta. El motor se acopló tanto a la base que se encuentra en el brazo del sistema como el eje al péndulo. También se revisó que se pudieran conectar los cables tanto de alimentación como los de los canales de las señales de cuadratura. Una vez comprobado esto, se continuó con la prueba de funcionamiento.

Para la primera prueba de funcionamiento se realizó un programa utilizando los bloques especiales de la librería de Arduino en Simulink para leer los pulsos que manda el codificador. Se rotó 360° el eje del codificador verificando que el programa contabilizará 600 pulsos como lo menciona el fabricante. Posteriormente se realizó la misma prueba rotando el eje a mayor velocidad y de igual manera se obtuvieron los 600 pulsos. También se verificó que al rotar el eje en sentido antihorario el contador disminuyera.

Con los resultados de las pruebas realizadas al nuevo encoder se determinó que funcionaba correctamente y con eso quedaban solucionados los problemas de la lectura de la posición del péndulo, por lo tanto, se podía continuar con

solucionar los demás errores de los otros componentes y del diseño para dejar el sistema funcionando.

3.2 Solución a los problemas del motor

Como se mencionó en la sección anterior el motor tenía que ser reemplazado al ya no contar con el par suficiente para hacer girar todo el sistema. Para la elección se decidió analizar diferentes motores, así como revisar la literatura de proyectos similares.

Revisando el trabajo (Bellati, Cancela, & Pérez, 2021), las características del péndulo son similares a las del prototipo armado en el laboratorio por lo tanto se optó por investigar más a fondo el motor JGA 25-370 empleado en su trabajo para determinar si se puede utilizar en este trabajo y si es que sus características, principalmente el par, los voltajes de operación y la potencia del motor son compatibles con las características de nuestros componentes.

Verificando la información sobre el motor se encontró que la principal diferencia es que es un motor más pequeño y en la estructura no funcionaría tal como está, sería necesario realizarle algunas adaptaciones para que se pueda acoplar a la estructura, por otra parte, una gran diferencia es que este motor cuenta con encoder incluido. Esto significaría remover uno de los acoples mecánicos que tiene el prototipo, ayudando así a reducir posibles problemas de acople.

De igual manera que con el encoder se decidió buscar motores de corriente continua que funcionaran entre 5 y 24 volts con doble flecha, procurando que sus dimensiones fueran muy similares al motor NISCA con el fin de no tener que realizar adaptaciones a la estructura que lo soporta. Al no encontrar motores económicos con las características necesarias para acoplar al prototipo se optó por comprar el motor JGA 25-370 y realizar las adaptaciones mecánicas necesarias para poder acoplar el motor. Dentro de este tipo de motores reductores se cuenta con una variedad de características mecánicas y eléctricas. Las características del motor utilizado se encuentran en la *Tabla 3*.

Voltaje de operación	5-24 VDC
Velocidad sin carga	350 rpm (a 24 V)
Relación de reducción	1:34
Corriente sin carga	150 mA
Velocidad Nominal	170 rpm

Corriente Nominal	2.4 A
Par Nominal	5 Kg.cm
Corriente de bloqueo	5 A
Par de bloqueo	8 kg.cm
Resolución del encoder	341 PPR

Tabla 3 Características del motor nuevo

Realizando la comparativa entre el motor NISCA y el JGA 25-370 se puede observar que la velocidad es considerablemente menor, sin embargo, es suficiente para la aplicación que se le está dando. Otro aspecto muy importante que mejora este motor es el par ya que es considerablemente más grande que el del motor NISCA, esto hace que le sea mucho más fácil al motor mover el sistema. El motor JGA 25-370 se muestra en la *Ilustración 15*.



Ilustración 15 Motor JGA 25-370

Se realizaron pruebas básicas de funcionamiento al motor para comprobar que no fuera una pieza defectuosa. Se conectó primero directamente a la fuente de alimentación y se varió el voltaje para observar cómo cambiaba la velocidad. Después, se realizaron pruebas al encoder que tiene incluido el motor con el mismo programa que se probó el encoder del péndulo.

Después de comprobar que el encoder funcionaba bien y que el motor giraba sin problemas, se decidió conectarlo controlador para controlar la velocidad por medio de una señal PWM y el sentido de giro, pero se tuvo que cambiar el controlador para que soportara la corriente del motor. El driver seleccionado fue el L298N (*Ilustración 16*), el cuál es un puente H que puede controlar dos motores y cumple con las características para utilizarlo con el motor.



Ilustración 16 Driver L298N

Para realizar las pruebas de cambio de sentido de giro, y control de velocidad, se conectaron a la salida del driver L298N los dos cables de alimentación del motor, una señal PWM y dos salidas digitales provenientes del Arduino y los cables de alimentación de la fuente. Al Arduino se conectaron los cables con las señales de los canales A y B del encoder del motor y por último se alimentó el encoder del motor conectando los cables a la fuente de 5 volts. Para ello se utilizó el mismo programa que controla la posición del brazo con una barra deslizante. Para estas pruebas no se realizó el montaje en la plataforma, ya que aún se tenían que realizar algunas adaptaciones para poder ensamblar todo el sistema.

3.3 Solución de problemas mecánicos y de diseño

Para poder realizar las pruebas de todo el prototipo ensamblado era necesario realizar algunos ajustes al diseño de este, principalmente porque el motor era más pequeño y no se podía ajustar en la base. La pieza de acople entre el eje del motor y el brazo tenía que ser más grande y por último se tenía que solucionar el problema de que el eje del motor cargara todo el peso del encoder en el extremo del brazo.

Lo primero que se decidió rediseñar fue la base que soportaba el motor y lo unía a la estructura de aluminio, por simpleza se trabajó con madera, primero se intentó diseñar una pequeña base que se atornillara al motor y a la base superior de aluminio, se realizó una prueba, pero no tenía la fuerza suficiente para detener el motor ya que, para que no estorbara con el giro del motor y con el acople la pieza era muy delgada y frágil.

Analizando el diseño de la base de aluminio y el soporte que sostenía el motor NISCA con el encoder acoplado se observó que los tornillos que sostenían la base se podían reutilizar y se diseñó una pieza de madera en la que el motor se introdujera en el centro a presión y esa pieza se atornillaría a la base de aluminio como estaba la pieza anterior, se diseñó y se colocó para verificar que el motor se mantuviera fijo.

La siguiente pieza que se cambió fue el acople mecánico, ya que el eje del motor JGA 27-350 es considerablemente más delgado que el anterior y no se podía utilizar el acople mecánico que se diseñó para el otro motor. Para esta pieza se utilizó una parte de aluminio de un péndulo que no se utilizaba, se le realizó una perforación del tamaño del eje en la parte inferior y en un costado se le realizó otra perforación para meter un tornillo que sirviera como prisionero para el eje y así asegurar que el eje no se pudiera salir mientras el sistema estaba en funcionamiento.



Ilustración 17 Correcciones a los acoples del motor con las piezas mecánicas

Todas las partes mecánicas que se corrigieron se observan en la *Ilustración 17*, desde la base de madera que se diseñó para fijar el motor a la base del sistema y el nuevo acople diseñado para poder unir el motor al brazo del sistema. Como se observa esta parte ya se encuentra montada en la base del prototipo, y de igual manera el brazo ya se encuentra asegurado al acople que está conectado al motor.

Por último, se buscó la manera de solucionar que el eje no cargara todo el peso del brazo con el encoder y el péndulo para evitar que el eje se torciera. Lo primero que se pensó fue diseñar de nuevo todo el brazo y poner el encoder justo donde se une el motor y el brazo y extender el eje del encoder, pero eso implicaría un coste mayor tanto económico como temporal.

Se analizó la situación y se planteó la hipótesis de que si se le ponía una rueda en el brazo que girara sobre la plataforma justo antes de la parte que sostiene el encoder se podía evitar que el eje resintiera toda la fuerza del peso del encoder junto con el péndulo. Si bien esto agregaría una pequeña fricción al sistema puede que no influya en el resultado, en el capítulo 5 de este trabajo se

hablara sobre los resultados y se comparará los resultados de la simulación como los del sistema real.

Para diseñar la rueda se consideraron materiales de reciclaje, en este caso se utilizó la rueda de una camioneta de juguete que tenía las dimensiones justas para que el brazo pudiera pasar por en medio de la rueda y así la rueda cargara la mayor parte del peso, se le realizó un orificio en el centro justo para que la estructura del brazo pasara y se realizaron las demás pruebas. La rueda acoplada al brazo se muestra en la *Ilustración 18*.



Ilustración 18 Rueda acoplada al brazo

Después de que se elaboraron las piezas que se necesitaban, se realizó el ensamble completo del prototipo para comprobar que todo embonara de forma correcta y todo funcionara bien, se realizó otro programa apoyado con el microcontrolador Arduino para realizar las últimas pruebas y ver que todo funcionaba adecuadamente antes de probar un controlador para el péndulo de Furuta.

Se realizaron pruebas con dos programas, uno que solamente hacia girar el sistema y se podía seleccionar la velocidad y el sentido de giro, esto con el fin de ver que el sistema completo no tardara en hacer el cambio de sentido de giro ya que es muy importante para poder controlar el péndulo y por otra parte ver que la velocidad también se podía mover y corroborar a partir de que valor de PWM se comenzaba a mover el sistema.

La segunda prueba fue comprobar que se podía controlar la posición del brazo y ver cuánto tiempo se tardaba en llegar a la posición deseada. Para ello se utilizó un programa en el cual se obtenía la posición del brazo con el encoder del

motor, se seleccionaba una referencia y por medio de un control PID se calculaba el valor PWM necesario y el sentido en el que se tenía que mover el motor.

3.4 Solución de problemas de microcontrolador

Después de cambiar los componentes (sensores y actuadores) que tenían que ser reemplazados y realizar las piezas necesarias para poder ensamblar el sistema y que este funcionara de manera correcta, se decidió que era necesario seleccionar el microcontrolador con el que se iba a trabajar, si bien para las pruebas se estuvo utilizando un microcontrolador de la familia de Arduino se observó en las últimas pruebas que al ya tener los sensores y actuadores conectados su respuesta era un poco más lenta de lo que se necesitaba y por lo tanto se comenzó a investigar sobre otros microcontroladores.

Analizando a profundidad las posibles causas de que el Arduino no fuera suficiente para poder operar el sistema de forma óptima se llegó a la conclusión de que no era un tema de memoria ni de velocidad de lectura, sino más bien un tema relacionado con la manera en que se detecta la posición de los encoder, ya que para poder leer los flancos ya sean de subida o de bajada con precisión y no perder información se necesitan de las interrupciones del Arduino lo cual consume ciclos de reloj del procesador y hace que se tarde un poco más en responder.

Después de llegar a la conclusión anterior se decidió buscar un microprocesador que tuviera puertos de lectura especiales para encoders y un ambiente de programación amigable, de preferencia que se pudiera programar en un software que no necesite muchos recursos computacionales, con el fin de hacer el prototipo reproducible y que pueda ser utilizado por los alumnos de la Facultad de Ingeniería.

El primero que se revisó fue el EK-TM4C1294XL de Texas Instruments debido a la familiaridad que se tiene con dicho microcontrolador. Al revisar sus especificaciones nos percatamos que solamente tiene la capacidad de leer un encoder con puertos dedicados y el otro encoder se tendría que leer utilizando interrupciones como con el Arduino.

Se investigó otro microcontrolador de Texas Instruments, el TM4C123G, al revisar sus características se encontró que cuenta con puertos especiales para leer dos encoder, puertos de entrada y salida digitales y puertos de salida PWM por lo que cumplía con todas las características que se necesitaban.

Se realizaron las pruebas para hacer funcionar el motor, controlando la velocidad con el módulo PWM, el sentido de giro con las dos salidas digitales y las lecturas de las posiciones de los encoders. Es importante mencionar que al utilizar puertos dedicados para poder leer las señales de los encoder el microcontrolador

almacena tanto la posición como la velocidad sin necesidad de que se realicen conversiones ni derivadas lo cual ayuda a evitar meter errores tanto en las conversiones como en la obtención de la velocidad por medio de un derivador.

Al realizar las pruebas se llegó a la conclusión de que el microcontrolador se podía utilizar sencillamente para el prototipo, ya que su costo es similar al de un Arduino y tiene las herramientas necesarias para la aplicación que se está desarrollando por lo tanto se utilizara el microcontrolador TM4C123G para controlar la posición superior del péndulo de Furuta.

3.5 Versión final del prototipo

La vista lateral de la versión final del prototipo completamente ensamblado se muestra en *Ilustración 19*, donde se puede observar que las partes mecánicas del dispositivo son prácticamente las mismas, los cambios más considerables son las adaptaciones realizadas para poder sujetar el motor a la base del prototipo, de igual manera se pueden observar las conexiones realizadas en la placa PCB para interconectar los sensores y actuadores con los dos microcontroladores.

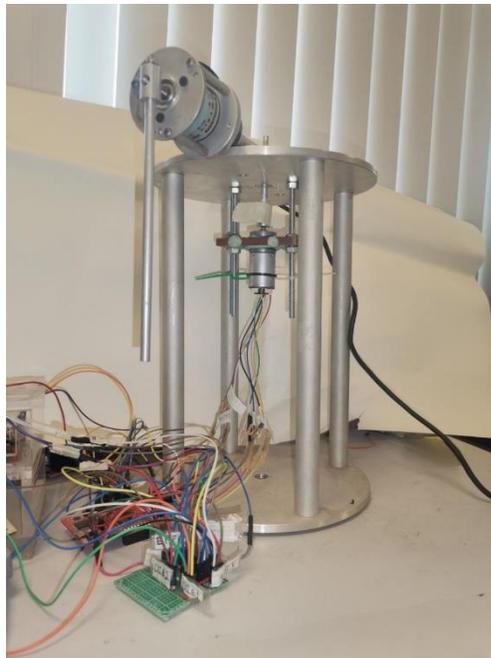


Ilustración 19 Vista lateral de la versión final del prototipo

Por otro parte, en la *Ilustración 20* se muestra la vista superior del prototipo en la cual resalta la adaptación realizada en el brazo del sistema con la rueda que soporta el peso del motor y la unión de las piezas del eje del motor con el brazo del sistema, como se puede observar el brazo puede rotar los 360° y la rueda no tiene ningún obstáculo que le impida girar.



Ilustración 20 Vista superior de la versión final del prototipo

Capítulo 4: Modelado y análisis del péndulo de Furuta

4.1 Modelo matemático y linealización

Para obtener el modelo matemático que describa el comportamiento dinámico del sistema se hicieron algunas consideraciones, el péndulo debe comenzar en el punto de equilibrio inestable, es decir, cuando se encuentra ubicado de forma completamente vertical por lo cual sus condiciones iniciales son cero, el péndulo solamente se mueve una cantidad pequeña de grados y se le puede aplicar una perturbación pequeña de entre 0.5° - 1° mientras está funcionando. (Medina Cervantes, Gallardo Sánchez, Villafuerte Díaz, & Mejía Sánchez, 2017) .

Las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del péndulo rotacional invertido son las siguientes. (Medina Cervantes, Gallardo Sánchez, Villafuerte Díaz, & Mejía Sánchez, 2017).

$$\begin{aligned} & ((\alpha + \beta * \text{sen}(\theta)^2) * \ddot{\varphi} + 2 * \beta * \text{sen}(\theta) * \cos(\theta) * \dot{\varphi} * \dot{\theta} + \gamma * \cos(\theta) * \ddot{\theta} - \dots \\ & \dots - \gamma * \text{sen}(\theta) * \dot{\theta}^2 = \frac{k_t}{R_m} - k_t^2 \dot{\varphi} \end{aligned} \quad \text{Ec. 1}$$

$$\gamma * \cos(\theta) * \ddot{\varphi} + \beta * \ddot{\theta} - \beta * \text{sen}(\theta) * \cos(\theta) * \dot{\varphi}^2 - \delta * \text{sen}(\theta) = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

donde:

- $\alpha = J + \left(\frac{1}{3}m_b + m_p\right)L_b^2$
- $\beta = \frac{1}{3}m_pL_p^2$
- $\gamma = \frac{1}{2}m_pL_bL_p$
- $\delta = \frac{1}{2}m_pgL_p$
- m_b es la masa del brazo
- m_p es la masa del péndulo
- l_b es la longitud del brazo
- l_p es la longitud del péndulo
- g es el valor de la aceleración gravitatoria
- J es el valor de la inercia

- φ es el ángulo de rotación del brazo
- θ es el ángulo de rotación del péndulo

Parámetro	Valor
m_b	0.196 [kg]
m_p	0.027 [kg]
l_b	0.1729 [m]
l_p	0.203 [m]
g	9.8 [m/s ²]
J	$2.47 \cdot 10^{-4}$ [kg*m ²]
b_1	0.0015
b	0.0012
k_t	$7.3827 \cdot 10^{-3}$
R_m	9.6154 [Ω]

Tabla 4 Valores de los parámetros utilizados.

Para que el comportamiento del modelo matemático se asemeje más al comportamiento real del péndulo, se agregaron los términos de la fricción a ambas ecuaciones. Los valores de la fricción se obtuvieron de (Rodamientos Vigo, S.A., 2024). Entonces se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$((\alpha + \beta * \text{sen}(\theta))^2) * \ddot{\varphi} + 2 * \beta * \text{sen}(\theta) * \cos(\theta) * \dot{\varphi} * \dot{\theta} + \gamma * \cos(\theta) * \theta \ddot{\theta} \dots$$

$$\dots - \gamma * \text{sen}(\theta) * \dot{\theta}^2 = \frac{k_t}{R_m} - k_t^2 \dot{\varphi} - b_1 \varphi \quad \text{Ec. 3}$$

$$\gamma * \cos(\theta) * \ddot{\varphi} + \beta * \ddot{\theta} - \beta * \text{sen}(\theta) * \cos(\theta) * \dot{\varphi}^2 - \delta * \text{sen}(\theta) + b \dot{\theta} = 0 \quad \text{Ec. 4}$$

donde:

- b es el coeficiente de fricción viscosa en el encoder del péndulo
- b_1 es el coeficiente de fricción viscosa en el motor

Al definir las siguientes variables de estado.

$$x_1 = \varphi \quad x_2 = \dot{\varphi} \quad x_3 = \theta \quad x_4 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Ec. 5

El modelo se expresa como.

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{\beta * \frac{K_t}{R_m} * U}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \frac{\beta * K_t^2 * \dot{\phi}}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \dots \\ & - \frac{\beta * 2 * \beta * \text{sen}(x_3) * \cos(\theta) * x_2 * x_4}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} + \frac{\beta * \gamma * \text{sen}(x_3) * x_4^2}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \dots \\ & - \frac{\gamma * \cos(x_3) * \beta * \text{sen}(x_3) * \cos(x_3) * x_2^2}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \frac{\gamma * \cos(x_3) * \delta * \text{sen}(x_3)}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \dots \\ & - \frac{\beta * b_1 * x_2}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \frac{\gamma * \cos(x_3) * b * x_4}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} \end{aligned} \quad \text{Ec. 6}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

Ec. 7

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \frac{\gamma * \cos(x_3) * \frac{K_t}{R_m} * U}{(\gamma * \cos(x_3))^2 - (\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta} - \frac{\gamma * \cos(x_3) * K_t^2 * x_2}{(\gamma * \cos(x_3))^2 - (\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta} \\ & - \frac{\gamma * \cos(x_3) * 2 * \beta * \text{sen}(x_3) * \cos(x_3) * x_2 * x_4}{(\gamma * \cos(x_3))^2 - (\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta} + \frac{\gamma * \cos(x_3) * \gamma * \text{sen}(x_3) * x_4^2}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} \\ & - \frac{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta * \text{sen}(x_3) * \cos(x_3) * x_2^2}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \frac{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \delta * \text{sen}(x_3)}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} \\ & - \frac{\gamma * \cos(x_3) * b_1 * x_2}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} - \frac{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * b * x_4}{(\alpha + \beta * \text{sen}(x_3)^2) * \beta - (\gamma * \cos(x_3))^2} \end{aligned} \quad \text{Ec. 8}$$

Que tiene como puntos de equilibrio.

$$X_{1eq} = n, n \in [0, 2\pi][rad]$$

$$X_{2eq} = 0 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$X_{3eq} = m\pi, m \in \mathbb{Z} [rad]$$

$$X_{4eq} = 0 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

En este caso el valor de la posición del brazo no es relevante pues mientras ninguna fuerza externa actúe sobre él se mantendrá en equilibrio sin importar la posición en la que se encuentre, por otra parte, en el caso de las velocidades, como es de esperarse deben de ser cero para que el sistema no se encuentre en movimiento. Por último, se observa que en realidad la posición del péndulo tiene dos puntos de equilibrio uno cuando su valor es π y otro cuando su valor es 0.

Se obtiene la aproximación lineal alrededor del punto

$$X_{op} = [0, 0, \pi, 0]$$

Que físicamente equivale a que el péndulo se encuentre en la posición vertical superior. La posición inicial cero del brazo es una referencia arbitraria predeterminada, se obtiene

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

donde.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta * K_t^2}{\beta * \alpha - \gamma^2} & \frac{\delta * \gamma}{\beta * \alpha - \gamma^2} & -\frac{b * \gamma}{\beta * \alpha - \gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\gamma * K_t^2}{\gamma^2 - \alpha * \beta} & \frac{\delta * \alpha}{\gamma^2 - \alpha * \beta} & -\frac{b * \alpha}{\gamma^2 - \alpha * \beta} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_t * \beta}{R_m(\beta * \alpha - \gamma^2)} \\ 0 \\ \frac{K_t * \gamma}{R_m(\gamma^2 - \alpha * \beta)} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Empleando los datos físicos del sistema se obtiene.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5223 & 14.4858 & -0.7979 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.6673 & 90.6647 & -5.0638 \end{pmatrix}$$

Ec. 9

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3197 \\ 0 \\ 0.4084 \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 10}$$

Posteriormente se obtiene la matriz de transferencia del sistema (Ogata, 1998)

$$H(s) = C(S * I - A)^{-1} * B + D$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.3197 * s^2 + 1.293 * s - 23.15}{s^4 + 5.586 * s^3 - 88.55 * s^2 - 37.82 * s} \\ \frac{0.4084 * s^2}{s^4 + 5.586 * s^3 - 88.55 * s^2 - 37.82 * s} \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 11}$$

4.2 Análisis de estabilidad del sistema en lazo abierto

Una manera de analizar la estabilidad de un sistema en lazo abierto es obtener los polos de la función de transferencia del sistema linealizado. Se dice que el sistema es inestable si alguno de los polos del sistema se encuentra en el semiplano derecho del plano s . (Ogata, 1998).

Para analizar la estabilidad del sistema de lazo abierto se obtienen los polos de la función del sistema y para ello se debe obtener el polinomio característico de la matriz de estado (la matriz A) que, en este caso, es el polinomio que se encuentra en el denominador de las funciones de transferencia. Recordando que se está trabajando con la aproximación lineal del sistema en torno al punto de operación, el polinomio correspondiente es:

$$P_{C_A} = s^4 + 5.586 * s^3 - 88.55 * s^2 - 37.82 * s$$

Para obtener los polos del sistema se obtienen los valores de s para los cuales se cumple que $P_{C_A} = 0$. Para simplificar se utilizó el comando de `eig(A)` en Matlab para resolver dicha ecuación obteniendo los siguientes polos del sistema en lazo abierto.

$$s_1 = 0, s_2 = -12.45, s_3 = 7.28, s_4 = -0.4170$$

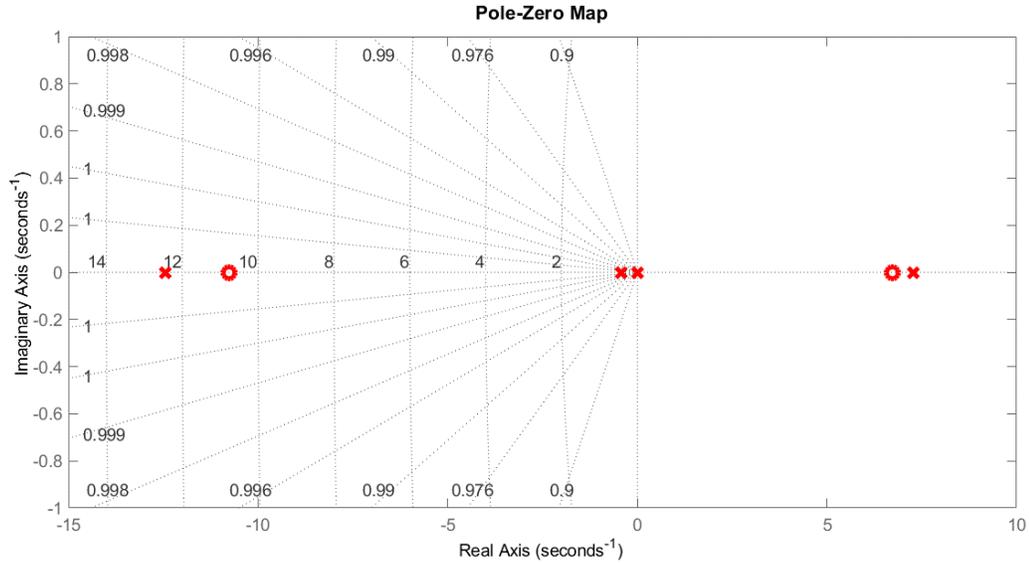


Ilustración 21 Grafica de los polos y ceros del sistema en lazo abierto

En la *Ilustración 21* se puede observar la ubicación de los polos de lazo abierto de forma gráfica (marcadas con x) y los ceros del sistema (marcadas con o). Como se puede observar tanto en el valor numérico como en la gráfica el sistema tiene un polo en el semiplano derecho lo que indica que el sistema es inestable de manera general. Dado que el sistema se linealizó en torno al punto de operación X_{op} , esto significa que el sistema linealizado en ese punto de operación es inestable y que el sistema solo permanecerá en esa posición si inicia allí y si no se aplica ninguna fuerza externa sobre él, en caso contrario el sistema se moverá a otro punto de equilibrio.

Para complementar el análisis de la estabilidad del sistema se realizó la linealización del sistema en el otro punto de equilibrio $X_{eq2} = [0, 0, 0, 0]$ (péndulo abajo) obteniendo las siguientes funciones de transferencia del sistema.

$$H_2(s) = \left(\frac{0.3197 * s^2 + 1.293 * s - 23.15}{s^4 + 5.586 * s^3 + 92.78 * s^2 + 37.82 * s} \right) \frac{0.4084 * s^2}{s^4 + 5.586 * s^3 + 92.78 * s^2 + 37.82 * s} \quad Ec. 12$$

Posteriormente se obtiene el polinomio característico que es el denominador de la función de transferencia anterior.

$$P_{CA2} = s^4 + 5.586 * s^3 + 92.78 * s^2 + 37.82 * s$$

De igual manera se obtienen los valores de s para los cuales se cumple que $P_{CA2} = 0$, por lo tanto, los polos del sistema son.

$$s_1 = 0, s_2 = -2.48 + j9.1618, s_3 = -2.48 - j9.1618, s_4 = -0.4174$$

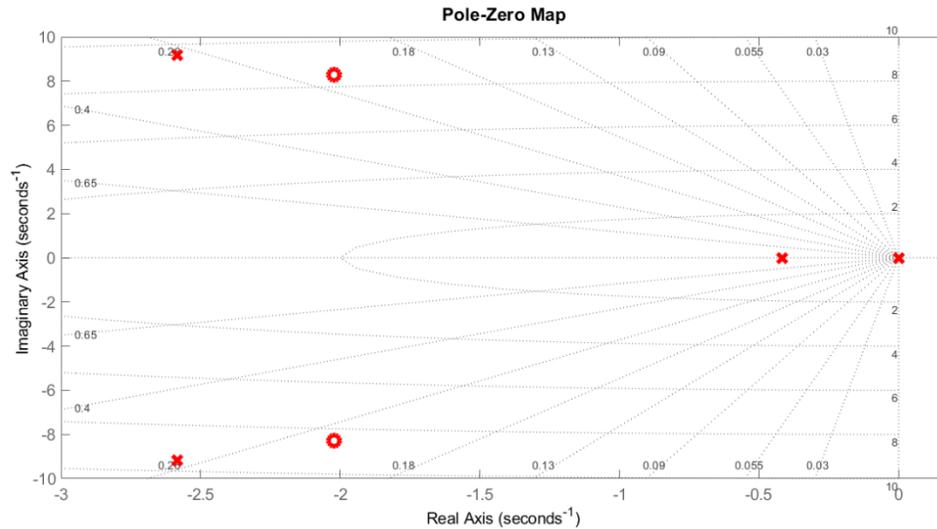


Ilustración 22 Polos y ceros del sistema 2 en lazo abierto

En la *Ilustración 22* se pueden observar los polos del sistema cuando está linealizado en la posición inferior. Como podemos ver, el comportamiento del sistema es estable, ya que sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo. El polo que se encuentra en cero lo que produce son oscilaciones pequeñas en el estado estable pero no hace que el sistema sea inestable.

Para comprobar que nuestra planta se comporta de la forma anteriormente descrita y observar el comportamiento de ambos puntos de equilibrio, se realizó una simulación del sistema no lineal con tres condiciones iniciales diferentes, para observar que cuando el sistema se inicia en cualquiera de los dos puntos de equilibrio se quedara ahí y para cuando el sistema inicie en cualquier punto diferente el sistema tenderá al punto de equilibrio estable.

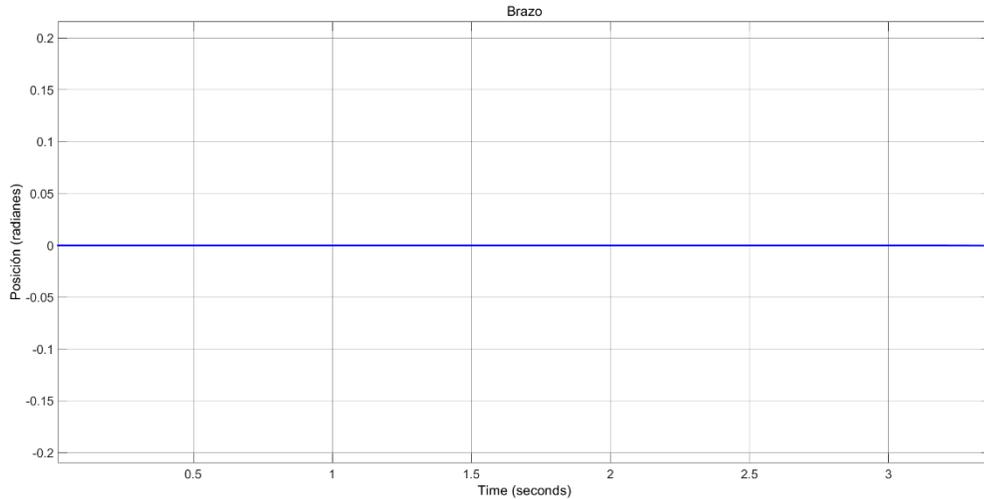


Ilustración 23 Comportamiento del brazo en el punto de operación.

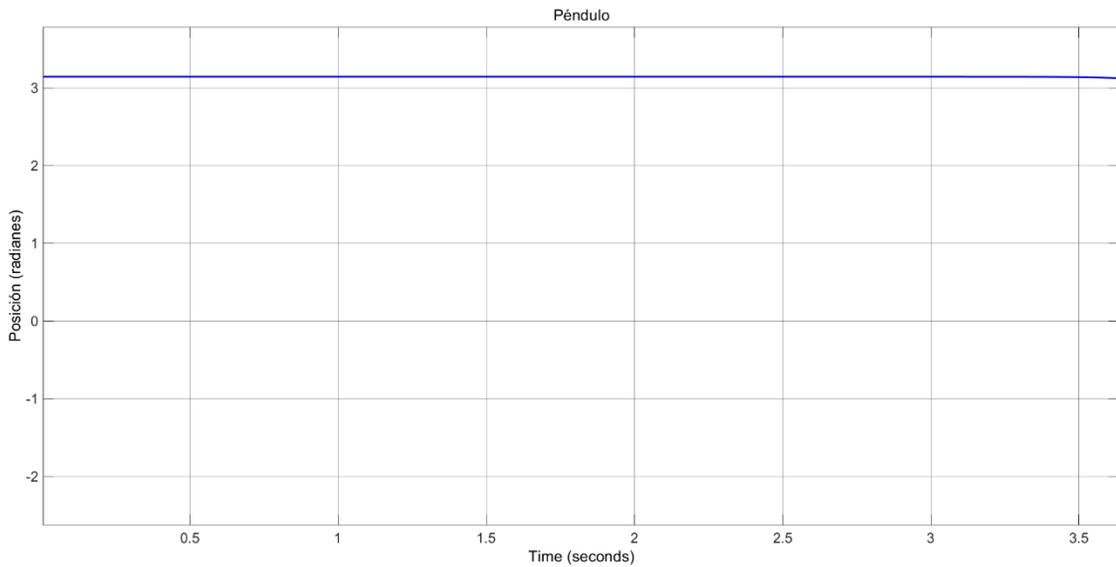


Ilustración 24 Comportamiento del péndulo en el punto de operación.

En la *Ilustración 23* y la *Ilustración 24* se observa que si el sistema inicia en la posición del punto de operación es decir $X_{op} = [0, 0, \pi, 0]$, como se describía anteriormente el sistema se queda estático en ese punto y no se cambia su posición a menos que una fuerza externa actúe sobre él comprobando que es un punto de equilibrio del sistema.

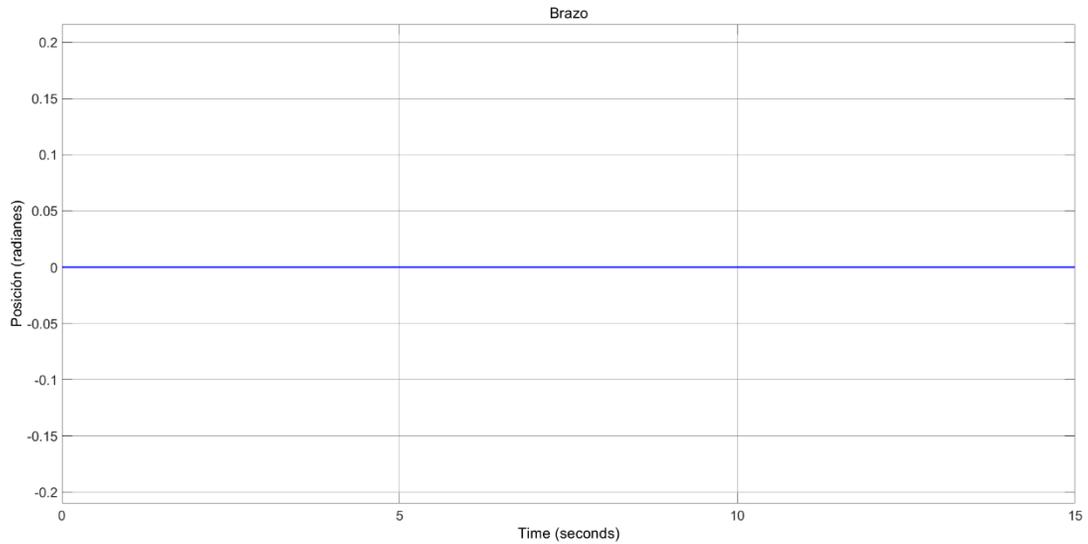


Ilustración 25 Comportamiento del brazo en el punto de equilibrio del origen.

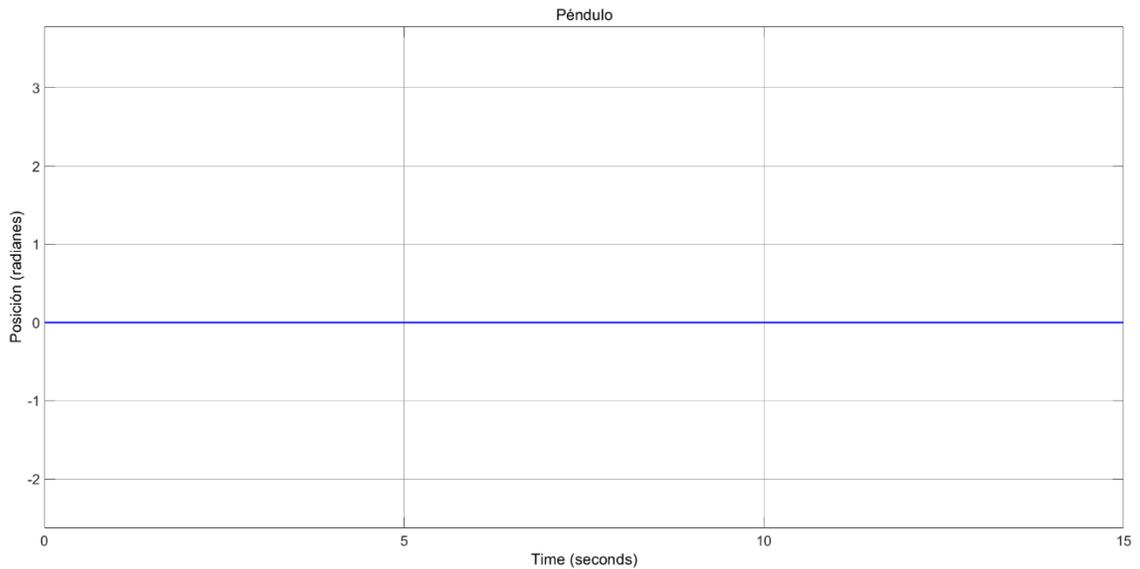


Ilustración 26 Comportamiento del péndulo en el punto de equilibrio del origen.

También se realizó la simulación en el punto de equilibrio del sistema como se muestra en la *Ilustración 25* y en la *Ilustración 26*, de igual manera el sistema permanece en el punto de equilibrio a menos que se aplique una fuerza externa sobre él que lo perturbe, a continuación, se muestra una simulación en la que el sistema inicia en una posición cercana al punto de operación.

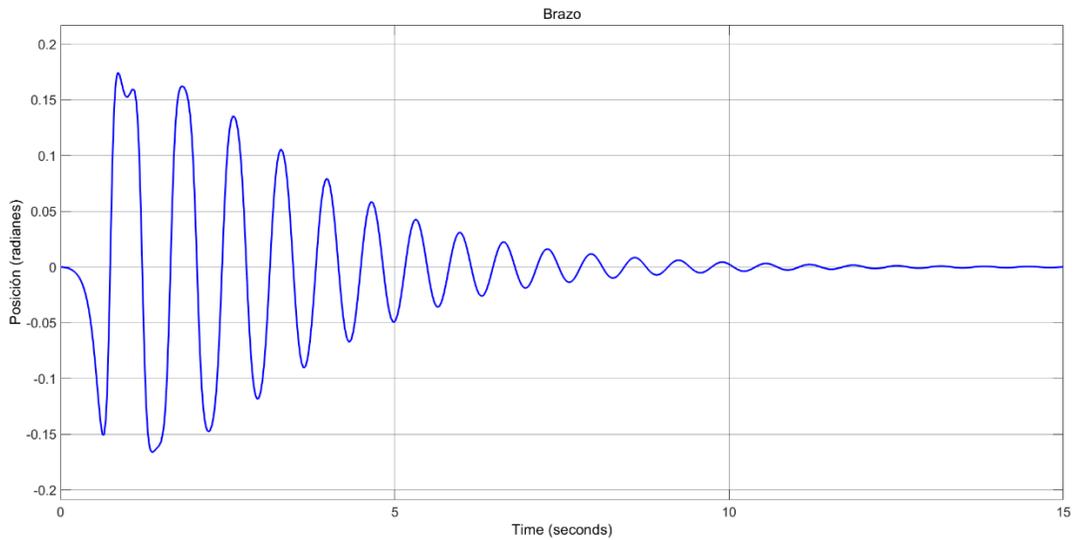


Ilustración 27 Comportamiento del brazo iniciando fuera de los puntos de equilibrio

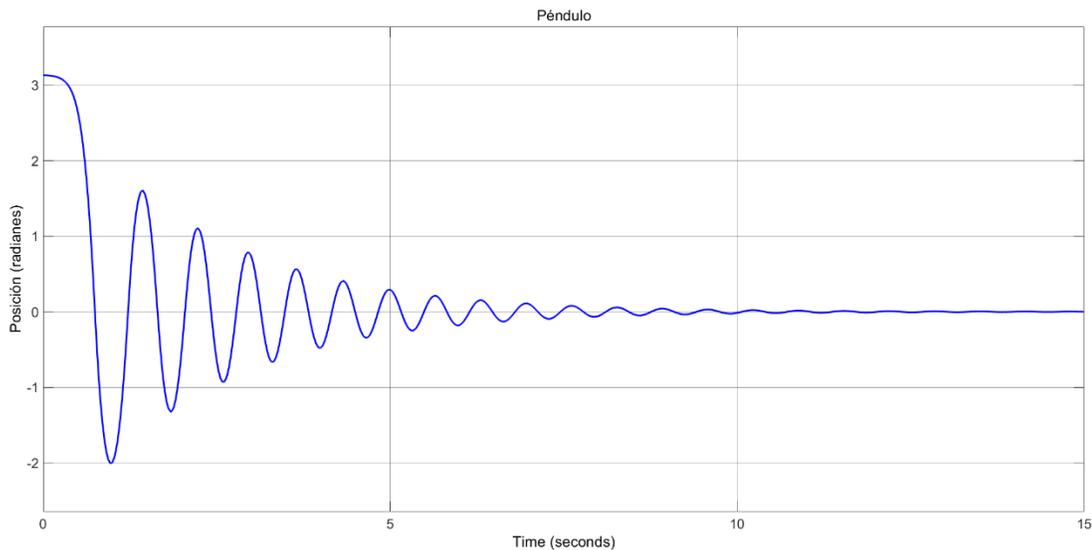


Ilustración 28 Comportamiento del péndulo iniciando fuera del punto de equilibrio.

Como se mencionó anteriormente la *Ilustración 27* y la *Ilustración 28* muestran cómo se comporta el sistema cuando inicia en un punto diferente a alguno de los puntos de equilibrio, en este caso se puede observar que el sistema se dirige a el punto de equilibrio que se encuentra en el origen cuando las condiciones iniciales del sistema $X_0 = [0,0,3.1316,0]$ son muy cercanas al punto de operación. Esto indica que el punto de equilibrio que se encuentra en el origen es asintóticamente estable pues, sin importar en donde inicie el sistema, las trayectorias de la posición del péndulo terminarán llegando al punto de equilibrio estable.

4.3 Diseño del controlador

Para poder diseñar un controlador se debe garantizar que el sistema es controlable, “Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede llevar de cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones en un intervalo de tiempo finito” (Ogata, 1998).

Considere un sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

En donde x es un vector de estado de dimensión n , u es la señal de control (escalar), A es una matriz de coeficientes constantes de $n \times n$ y B es una matriz de coeficientes constantes de $n \times 1$.

Se selecciona la señal de control como

$$u = -Kx \quad (2)$$

A este tipo de esquema se le denomina realimentación del estado. La matriz K de dimensiones $1 \times n$ se le denomina matriz de ganancias de la realimentación de estado. (Ogata, 1998)

Realimentar el sistema con la estructura de las ecuaciones (1) y (2) produce el siguiente sistema en lazo cerrado.

$$y = (A - BK)x(t) \quad (3)$$

La estabilidad y las características de la respuesta transitoria del sistema se pueden determinar mediante los valores característicos de la matriz $A - BK$. De tal forma que el problema de control se centra en elegir una matriz K de manera que la matriz $A - BK$ sea Hurwitz, esto es, que todos los valores propios tengan parte real negativa, para cumplir con la definición de estabilidad de los sistemas. Al problema de ubicar los polos de lazo cerrado en las posiciones deseadas se denomina problema de ubicación de polos. (Ogata, 1998)

Para poder trabajar de una manera más sencilla con el sistema es conveniente transformar el sistema mostrado en la ecuación (1) a la forma canónica controlable, para esto se define una matriz de transformación T de la siguiente manera (Ogata, 1998).

$$T = MW \quad (4)$$

donde M es la matriz de controlabilidad que se construye a partir de la matriz de estados y la matriz de entradas del sistema de la siguiente manera.

$$M = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B], \quad (5)$$

y la matriz W se construye de la siguiente manera.

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Los coeficientes α son los coeficientes del polinomio característico de la matriz de estados del sistema. (Ogata, 1998)

$$|sI - A| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (7)$$

Se puede definir un nuevo vector de estado de la siguiente manera.

$$\bar{x} = T x$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, es decir, el rango de la matriz de controlabilidad es n , existe la inversa de la matriz T y la ecuación (1) se convierte en

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1} A T x + T^{-1} B u \quad (8)$$

La ecuación (8) representa al sistema en la forma canónica controlable lo cual indica que el sistema es de estado completamente controlable y que la matriz de transformación T transforma al sistema a dicha forma. (Ogata, 1998).

Se selecciona el conjunto de valores característicos deseados $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, en este caso la ecuación característica deseada se convierte en

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (9)$$

Si escribimos

$$\bar{K} = K T = [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \dots \ \delta_1] T \quad (10)$$

Cuando se usa $u = -\bar{K}\bar{x} = -K T \bar{x}$ para controlar el sistema obtenido mediante la ecuación (8) la ecuación del sistema se convierte en

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1} A T x + T^{-1} B K T \bar{x}$$

Cuya ecuación característica es

$$|sI - T^{-1} A T + T^{-1} B K T| = 0$$

Esta ecuación característica es la misma que para el sistema definido en la ecuación (1) cuando en la entrada u se utiliza $u = -Kx$, simplificando la ecuación característica de la forma canónica controlable se obtiene que:

$$|sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| = \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n \delta_{n-1} \cdots \delta_1] \right|$$

$$= s^n + (\alpha_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (\alpha_{n-1} + \delta_{n-1})s + (\alpha_n + \delta_n) = 0 \quad (11)$$

Esa es la ecuación característica para el sistema con una realimentación de estados, por lo tanto, debe de ser igual a la ecuación (9) que es la ecuación característica deseada, igualando los coeficientes de las potencias iguales de s obtenemos lo siguiente. (Ogata, 1998)

$$\alpha_1 + \delta_1 = a_1$$

$$\alpha_2 + \delta_2 = a_2$$

$$\alpha_3 + \delta_3 = a_3$$

$$\alpha_4 + \delta_4 = a_4$$

Despejando los valores de las δ de las ecuaciones anteriores y sustituyéndolas en la ecuación (10) obtenemos.

$$K = \bar{K}T^{-1} = [\delta_n \delta_{n-1} \cdots \delta_1]T^{-1}$$

$$= [(a_4 - \alpha_4), (a_3 - \alpha_3), (a_2 - \alpha_2), (a_1 - \alpha_1)]T^{-1} \quad (12)$$

Por lo tanto, si el sistema es de estado completamente controlable se pueden ubicar de manera arbitraria todos los valores característicos seleccionando la matriz K de acuerdo con la ecuación (12) (Ogata, 1998).

Así, el primer paso es construir la matriz de controlabilidad de nuestro sistema para poder determinar si dicha matriz es de rango completo y de esta manera poder garantizar que el modelo matemático del sistema es controlable y por lo tanto se puede diseñar un controlador para lograr mantener el péndulo en su posición superior.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.3197 & -0.4928 & 7.9118 \\ 0.3197 & -0.4928 & 7.9118 & -75.7445 \\ 0 & 0.4084 & -2.2813 & 48.9084 \\ 0.4084 & -2.2813 & 48.9084 & -459.7775 \end{pmatrix}$$

Para las matrices cuadradas de $n \times n$ se puede determinar si son de rango completo calculando su determinante, ya que una matriz cuadrada es de rango completo siempre que su determinante sea diferente de cero, se calculó el determinante de la matriz M con el software Matlab.

$$\det(M) = 89.3723$$

Como el valor del determinante es diferente de cero se puede afirmar que el sistema es controlable en todos sus estados, pero para confirmar esto se utilizó el comando rank de Matlab que nos dice el rango de una matriz. Como resultado nos dio que la matriz de controlabilidad es de rango 4 por lo tanto se confirma que es de rango completo y por lo tanto el sistema es controlable.

Una vez que se confirmó que el sistema es controlable, se procede a desarrollar un controlador para mantener el péndulo en su posición superior. Para este trabajo se consideró diseñar un controlador por asignación de polos como se mencionó anteriormente.

Primero se debe tener el polinomio característico del sistema para estabilizar el sistema, ubicando los polos en los valores deseados. En el apartado anterior trabajamos con el polinomio característico del sistema linealizado en el punto de operación que se quiere estabilizar.

$$P_{C_A} = s^4 + 5.586 * s^3 - 88.55 * s^2 - 37.82 * s$$

El siguiente paso es obtener una matriz de transformación a partir de la cual se pueda transformar el sistema a su forma canónica controlable, para poder obtener el vector de las ganancias que llevarán el sistema a los polos deseados. Como se mencionó en el Capítulo 1 la matriz de transformación T se obtiene de la siguiente manera.

$$T = MW$$

donde M es la matriz de controlabilidad del sistema con el que se está trabajando que ya se obtuvo previamente y la matriz W es una matriz diagonal superior formada con los coeficientes del polinomio característico.

$$W = \begin{pmatrix} -37.82 & -88.55 & 5.58 & 1 \\ -88.55 & 5.58 & 1 & 0 \\ 5.58 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0.32 & -0.49 & 7.91 \\ 0.32 & -0.49 & 7.91 & -75.7445 \\ 0 & 0.41 & -2.28 & 48.91 \\ 0.41 & -2.28 & 48.91 & -459.78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -37.82 & -88.55 & 5.58 & 1 \\ -88.55 & 5.58 & 1 & 0 \\ 5.58 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -23.15 & 1.29 & 0.32 & 0 \\ -0.0005 & -23.15 & 1.29 & 0.32 \\ 0.0002 & 0 & 0.41 & 0 \\ -0.0032 & 0.0002 & 0 & 0.41 \end{pmatrix}$$

Posteriormente se deben seleccionar los polos que se desean en lazo cerrado. Para esto se pueden seleccionar de manera arbitraria o por algún método analítico dependiendo del comportamiento que se espera del sistema. En este caso, se decidió por seleccionar unos polos fueran reales negativos y que sus valores numéricos sean similares dentro de la medida de lo posible.

En la sección anterior donde se analizó la estabilidad del sistema en lazo abierto se calcularon los polos siguientes.

$$s_1 = 0, s_2 = -12.45, s_3 = 7.28, s_4 = -0.4170$$

Debido a que los sistemas más estudiados en la literatura son de segundo orden y que existen varias técnicas para asignar los polos de estos sistemas dependiendo de su frecuencia natural (ω_n) y el factor de amortiguamiento (ζ), se decidió dividir el sistema en dos de segundo orden para obtener por medio de dos valores de factor de amortiguamiento y dos valores de frecuencia natural los polos deseados, las ecuaciones que relacionan estos dos parámetros con los polos son las siguientes.

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\zeta_1 * \omega_{n1} \pm j\omega_{n1}\sqrt{1 - \zeta_1^2}$$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -\zeta_2 * \omega_{n2} \pm j\omega_{n2}\sqrt{1 - \zeta_2^2}$$

Debido a que los polos de lazo abierto del sistema son puramente reales y como se mencionó anteriormente se quiere que los polos de lazo cerrado sean reales negativos, tomando en cuenta que la señal de control deberá de ser mayor para garantizar que los polos de lazo cerrado sean reales con parte negativa, para obtener esa estructura se debe cumplir que $\sqrt{1 - \zeta_1^2}$ y $\sqrt{1 - \zeta_2^2}$ sean números imaginarios para que al multiplicar por $j\omega_{n1}$ y $j\omega_{n2}$ respectivamente el resultado sea un número real y por lo tanto los polos del sistema en lazo cerrado sean puramente reales, por lo tanto, $\zeta_1^2 > 1$ y $\zeta_2^2 > 1$.

Si $\zeta_1 = 2$ y $\omega_{n1} = 2.5$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -2 * 2.5 \pm j2.5\sqrt{1 - 2^2}$$

$$\lambda_1 = -2 * 2.5 + j2.5\sqrt{1 - 4}$$

$$\lambda_1 = -2 * 2.5 + j2.5 * j1.732$$

$$\lambda_1 = -5 - 4.330$$

$$\lambda_1 = -9.330$$

$$\lambda_2 = -2 * 2.4 - j2.5\sqrt{1 - 4}$$

$$\lambda_2 = -2 * 2.5 - j2.5 * j1.732$$

$$\lambda_2 = -5 + 4.330$$

$$\lambda_2 = -0.67$$

Si $\zeta_2 = 1.5$ y $\omega_{n1} = 3$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -1.5 * 3 \pm j3\sqrt{1 - 1.5^2}$$

$$\lambda_3 = -1.5 * 3 + j3\sqrt{1 - 2.25}$$

$$\lambda_3 = -1.5 * 3 + j3 * j1.118$$

$$\lambda_3 = -4.5 - 3.541$$

$$\lambda_3 = -8.041$$

$$\lambda_4 = -1.5 * 3 - j3\sqrt{1 - 2.25}$$

$$\lambda_4 = -1.5 * 3 - j3 * j1.118$$

$$\lambda_4 = -4.5 + 3.541$$

$$\lambda_4 = -0.959$$

Como se puede ver los polos de lazo cerrado son puramente reales igual que los polos de lazo abierto, pero esta vez los cuatro polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo por lo que se puede decir que se garantiza la estabilidad, esto se comprobará más adelante. A continuación, se tiene el polinomio característico deseado a partir de la siguiente expresión.

$$PC_D = (\lambda - (-9.330))(\lambda - (-0.67))(\lambda - (-8.041))(\lambda - (-0.959))$$

$$PC_D = \lambda^4 + 19\lambda^3 + 103.962\lambda^2 + 133.369\lambda + 48.202$$

Posteriormente se debe calcular el vector de ganancias \bar{K} que se obtiene al hacer una resta de los coeficientes del polinomio característico deseado menos los coeficientes del polinomio característico de lazo abierto como se muestra a continuación.

$$\bar{K}_1 = 48.202 - 0 = 48.202$$

$$\bar{K}_2 = 133.369 - (-37.8216) = 171.191$$

$$\bar{K}_3 = 103.962 - (-88.5522) = 192.514$$

$$\bar{K}_4 = 19 - 5.5861 = 13.474$$

$$\bar{K} = [48.202 \quad 171.191 \quad 192.514 \quad 13.474]$$

Por último, se calcula el vector de ganancias K del sistema multiplicando el vector \bar{K} calculado anteriormente por la matriz de transformación, esto con el fin de obtener las ganancias con las cuales podemos estabilizar el sistema en lazo cerrado.

$$K = \bar{K} * T$$

$$K = [-2.0839 \quad -7.5121 \quad 496.8 \quad 38.7252]$$

Para realizar la comprobación de las ganancias que se calcularon se utilizó el comando `acker` de Matlab (Anexos), en donde los argumentos de entrada son la matriz del sistema (A), la matriz de entradas (B) y el vector de los polos deseados, obteniendo como vector de ganancias.

$$K_{acker} = [-2.0824 \quad -7.5119 \quad 496.7984 \quad 38.7249]$$

Con el resultado obtenido en Matlab se puede corroborar que los valores de las ganancias calculados adecuados para estabilizar el sistema al menos analíticamente, ya que, la diferencia entre los valores calculados manualmente y los obtenidos mediante Matlab son casi los mismos, por lo tanto, se puede continuar con la evaluación del controlador en la simulación del sistema para posteriormente implementar el controlador en el prototipo físico.

Con el objetivo de realizar la comparación de cómo se comportan los controladores en el sistema se decidió diseñar otro controlador con la misma técnica, esta vez con una estructura diferente. Se planteó que ahora los polos del

sistema en lazo cerrado sean dos polos reales negativos y dos polos complejos conjugados.

Para lograr que el sistema en lazo cerrado tenga dos polos reales negativos y dos polos complejos conjugados se debe cumplir por una parte que $\sqrt{1 - \zeta_1^2}$ y sea un número imaginario para que al multiplicar por $j\omega_{n1}$ el resultado sea un número real y por lo tanto dos polos del sistema en lazo cerrado sean reales sin parte imaginaria, por lo tanto, $\zeta_1^2 > 1$ y también se debe garantizar que $\sqrt{1 - \zeta_2^2}$ sea un número real para que al multiplicar por $j\omega_{n2}$ el resultado sea imaginario y por lo tanto los otros dos polos sean complejos conjugados, por lo tanto, $\zeta_2^2 < 1$.

Si $\zeta_1 = 1.2$ y $\omega_{n1} = 3$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -1.2 * 3 \pm j3\sqrt{1 - 1.2^2}$$

$$\lambda_1 = -1.2 * 3 + j3\sqrt{1 - 1.44}$$

$$\lambda_1 = -1.2 * 3 + j3 * j0.663$$

$$\lambda_1 = -3.6 - 1.989$$

$$\lambda_1 = -5.589$$

$$\lambda_2 = -1.2 * 3 - j3\sqrt{1 - 1.44}$$

$$\lambda_2 = -1.2 * 3 - j3 * j0.663$$

$$\lambda_2 = -3.6 + 1.989$$

$$\lambda_2 = -1.611$$

Si $\zeta_2 = 0.5$ y $\omega_{n1} = 10$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -0.5 * 10 \pm j10\sqrt{1 - 0.5^2}$$

$$\lambda_3 = -0.5 * 10 + j10\sqrt{1 - 0.25}$$

$$\lambda_3 = -0.5 * 10 + j10 * 0.866$$

$$\lambda_3 = -5 + j8.66$$

$$\lambda_4 = -0.5 * 10 - j10\sqrt{1 - 0.25}$$

$$\lambda_4 = -0.5 * 10 - j10 * 0.866$$

$$\lambda_4 = -5 - j8.66$$

El polinomio característico deseado para poder tener los polos complejos conjugados y los reales negativos es el siguiente.

$$PC_{D2} = \lambda^4 + 17.2\lambda^3 + 180.99\lambda^2 + 810\lambda + 900.35$$

Posteriormente se calculan los coeficientes del vector $\overline{K2}$ para el nuevo polinomio característico.

$$\overline{K2}_1 = 900.35 - 0 = 900.35$$

$$\overline{K2}_2 = 810 - (-37.8216) = 847.8216$$

$$\overline{K2}_3 = 180.99 - (-88.5522) = 269.5420$$

$$\overline{K2}_4 = 17.2 - 5.5861 = 11.6140$$

$$\overline{K2} = [900.35 \quad 847.8216 \quad 269.5420 \quad 11.6140]$$

Por último, se calcula el vector de ganancias $K2$ del sistema multiplicando el vector $\overline{K2}$ calculado anteriormente por la matriz de transformación, esto con el fin de obtener las ganancias con las cuales podemos estabilizar el sistema en lazo cerrado.

$$K2 = \overline{K2} * T$$

$$K2 = [-38.8966 \quad -38.7989 \quad 813.2677 \quad 58.8067]$$

Para realizar la comprobación de las ganancias que se calcularon se utilizó el comando `acker` de Matlab (Anexos), al cual se le pasan como argumento la matriz del sistema (A), la matriz de entradas (B) y el vector de los polos deseados obteniendo como vector de ganancias calculadas con Matlab.

$$K2_{acker} = [-38.8950 \quad -38.7985 \quad 813.2876 \quad 58.8063]$$

Para diseñar un regulador cuadrático lineal es necesario resolver las ecuaciones de Riccati. En el caso de este trabajo se optó por utilizar Matlab para obtener la solución de la ecuación de Riccati en tiempo continuo con el comando `lqr`, el cual además determina la matriz de ganancias de realimentación óptima (Ogata, 1998).

Considerando el problema de determinar el vector de control $u(t)$ óptimo para el sistema mostrado en (1) y el índice de desempeño obtenido mediante (Ogata, 1998).

$$J = \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt \quad (13)$$

En donde Q es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva, R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva y u no está restringida (Ogata, 1998).

Para este trabajo se utilizó como matriz Q una matriz identidad de 4×4 y el valor de $R = 2$. Adicionalmente como argumentos del comando también se utilizan las matrices A y B del sistema.

Se obtuvo la siguiente matriz de ganancias LQR.

$$K_{LQR} = [-0.7071 \quad -4.7793 \quad 491.4876 \quad 40.2425]$$

Capítulo 5: Resultados

5.1 Controlador implementado en la simulación del sistema

El siguiente pasó en este trabajo es la evaluación del controlador diseñado en el Capítulo 4 en simulación, antes de entrar de lleno en las pruebas del controlador en el diagrama de bloques que simula el comportamiento del péndulo de Furuta se consideró pertinente realizar una última prueba analítica, que consiste en comprobar que el sistema realimentado tiene los polos o valores característicos en donde deben estar ubicados debido a los controladores diseñados.

La manera más sencilla de realizar esto de manera analítica es obtener los valores característicos de las matrices.

$$A - BK \text{ y } A - BK2$$

Donde A es la matriz del sistema, B es la matriz de entrada, K es el vector de ganancias calculado en el capítulo anterior para el caso de polos de lazo cerrado reales negativos y K2 es el vector de ganancias calculado para el caso de poner los polos de lazo cerrado como dos reales negativos y dos complejos conjugados, a continuación, se analizarán ambos casos.

Para el primer controlador diseñado ($A - BK$).

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5223 & 14.4858 & -0.7979 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.6673 & 90.6647 & -5.0638 \end{pmatrix} - \dots \\ & \dots - \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3197 \\ 0 \\ 0.4084 \end{pmatrix} [-2.0839 \quad -7.5121 \quad 496.8 \quad 38.7252] \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.661 & 1.8791 & -144.5243 & -13.1770 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.8511 & 2.4007 & -112.2285 & -20.8791 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posteriormente se obtienen los polos del sistema realimentado

$$\lambda_1 = -9.330, \lambda_2 = -8.041, \lambda_3 = -0.964, \lambda_4 = -0.672$$

Como se puede ver los dos primeros polos del sistema realimentado son exactamente iguales a los polos deseados, por lo que se considera que el

controlador funciona de manera correcta, ya se obtiene el mismo valor de los polos del sistema en lazo cerrado que los valores utilizados en el diseño del controlador, por lo tanto, se garantiza que el controlador se diseñó de manera correcta y se pueden realizar las simulaciones del control aplicado al sistema.

Ahora se realizará el mismo análisis para el segundo vector de ganancias calculado, es decir, para la matriz $A - BK_2$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5223 & 14.4858 & -0.7979 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.6673 & 90.6647 & -5.0638 \end{pmatrix} \\
 & - \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3197 \\ 0 \\ 0.4084 \end{pmatrix} [-38.8966 \quad -38.7989 \quad 813.2677 \quad 58.8067] \\
 & = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.4339 & 11.8803 & -245.6877 & -19.5963 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15.8853 & 15.1782 & -241.4734 & -29.0804 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Después se obtienen los polos del sistema realimentado.

$$\lambda_1 = -5.59, \lambda_2 = -1.611, \lambda_3 = -4.99 + j8.66, \lambda_4 = -4.99 - j8.66$$

Posteriormente se implementaron los controladores en una simulación de Simulink con el objetivo de poder observar el comportamiento del sistema con la retroalimentación. El diagrama de bloques de la simulación se muestra en la *Ilustración 29*. Se utilizó el sistema no lineal esto con el fin de comprobar que, aunque el controlador fue diseñado basados en la linealización del sistema en torno al punto de operación, el controlador puede ser utilizado y es funcional en el sistema no lineal. Los códigos de los bloques de función que se observan en la *Ilustración 29* se muestran en los anexos 2. Código de la función que describe el comportamiento del sistema. y 3. Código de aplicación del controlador al sistema.

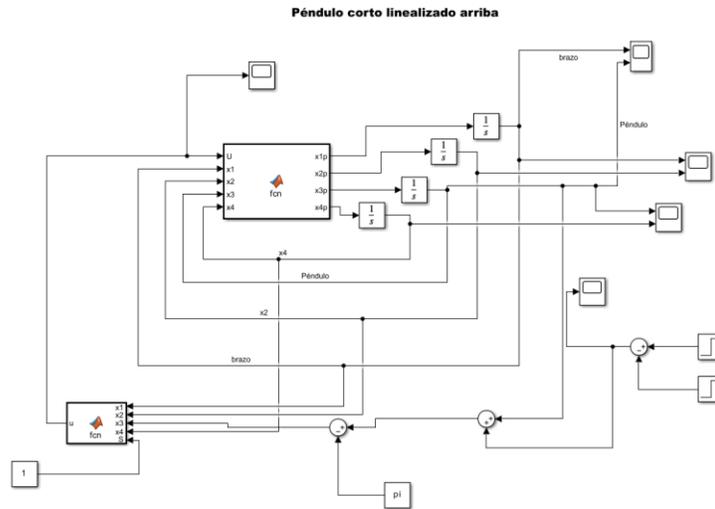


Ilustración 29 Diagrama de bloques de la simulación del sistema en lazo cerrado.

Para realizar las pruebas del controlador diseñado en la simulación se seleccionan las condiciones iniciales del sistema estén cerca del punto de operación. Las condiciones iniciales fueron $X_0 = [0,0,3.1316,0]$, esto con el fin de poder observar si el controlador es capaz de llevar al sistema al punto de operación, adicionalmente a los 4 segundos de que inicia la simulación se introduce, como perturbación, un escalón de 0.1 s de duración y de 0.1 de amplitud, para probar robustez del controlador.



Ilustración 30 Posiciones del brazo con el control diseñado Con polos reales negativos.

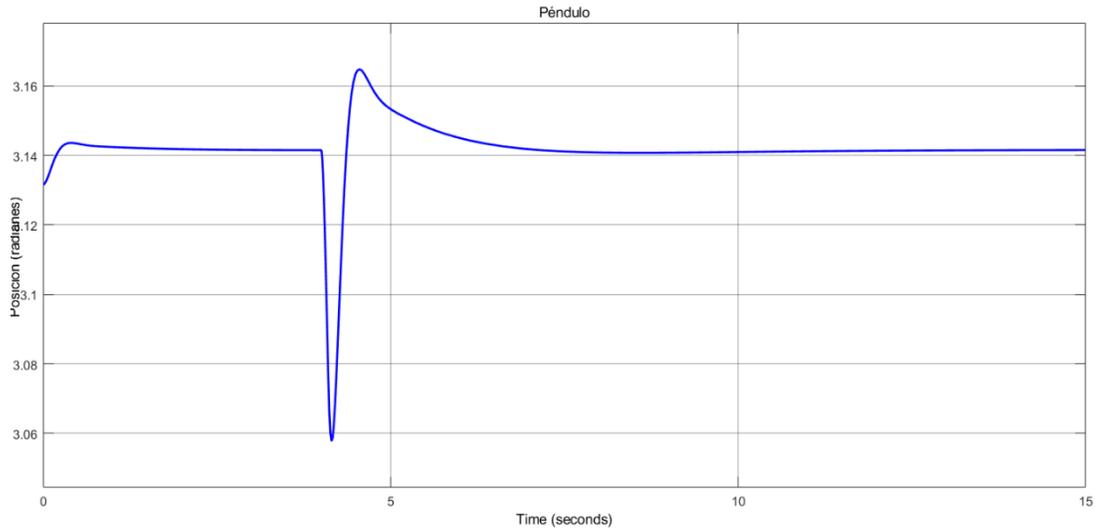


Ilustración 31 Posición del péndulo con el control diseñado con polos reales negativos

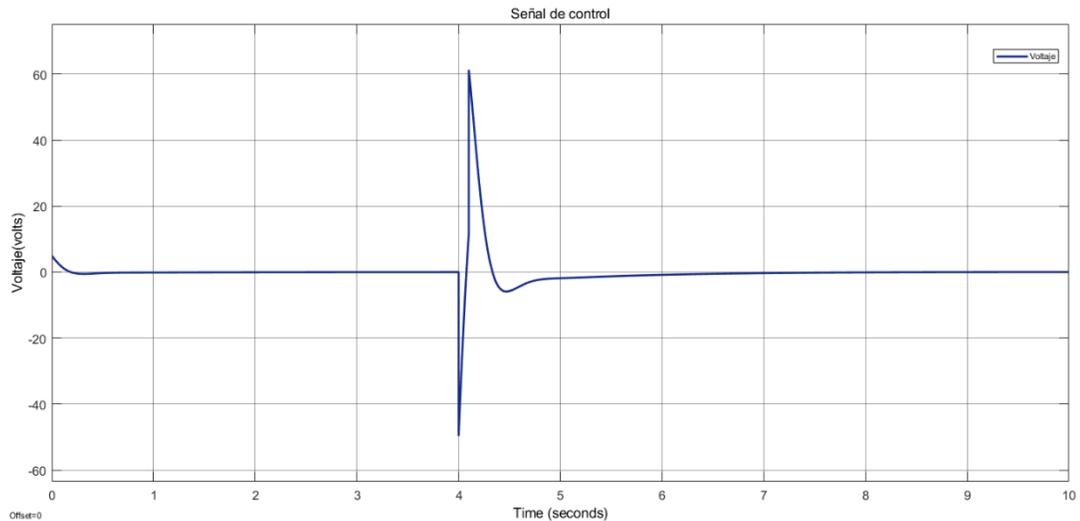


Ilustración 32 Señal de control

La *Ilustración 30*, la *Ilustración 31* y la *Ilustración 32* muestran los resultados obtenidos al evaluar el controlador diseñado en la simulación del sistema. En la primera imagen se muestran las posiciones del brazo y del péndulo en radianes, respectivamente, y en la tercera imagen se muestra el valor de la señal de control en Volts.

Analizando la *Ilustración 30* y la *Ilustración 31* se puede observar que el diseño del controlador permite cumplir con el objetivo de control, ya que el sistema se estabiliza en el punto de operación y también logra estabilizarlo después de que se ha sometido a una perturbación, de igual manera se puede observar que la posición del péndulo regresa al punto de operación en aproximadamente tres

segundo y en la posición del brazo el movimiento es suave, pero de igual manera logra llevarlo a la referencia.

Por otra parte en la *Ilustración 32* se puede observar que la señal de control se dispara a valores cercanos a los 60 volts cosa que en el sistema físico es imposible, por las restricciones de funcionamiento del motor, por lo tanto, se decidió realizar más pruebas con diferentes ganancias para observar su comportamiento, a continuación se analizará otra prueba en la simulación con el control Regulador cuadrático Lineal, LQR por sus siglas en inglés para comparar los resultados con el controlador diseñado.

Para el primer controlador obtenido con el comando LQR ($A - BK_{LQR}$).

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5223 & 14.4858 & -0.7979 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.6673 & 90.6647 & -5.0638 \end{pmatrix} - \dots \\ & \dots - \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3197 \\ 0 \\ 0.4084 \end{pmatrix} [-0.7071 \quad -4.7793 \quad 491.4876 \quad 40.2425] \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.226 & 1.005 & -142.826 & -13.662 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.288 & 1.2846 & -110.058 & -21.498 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Después se obtienen los polos del sistema realimentado con las ganancias del controlador LQR.

$$\lambda_1 = -12.459, \lambda_2 = -7.281, \lambda_3 = -0.3766 + j0.196, \lambda_4 = -0.3766 - j0.196$$

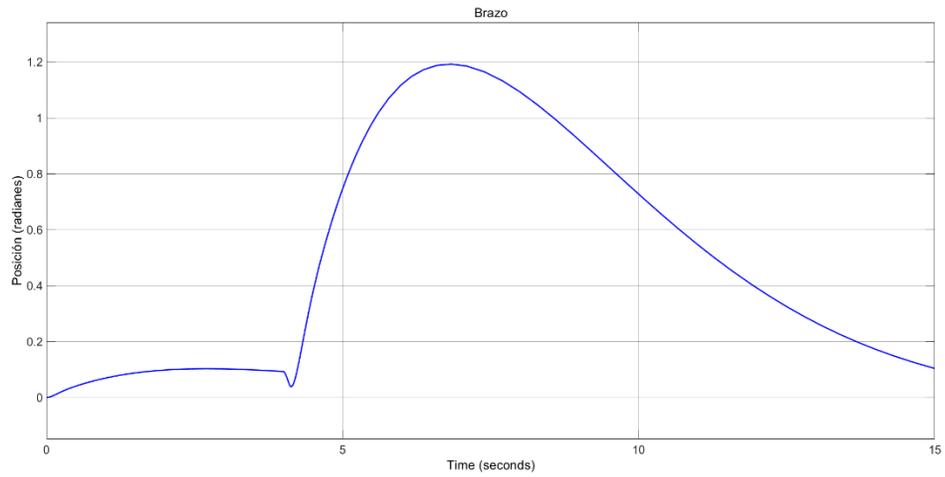


Ilustración 33 Posición del brazo con el control LQR.

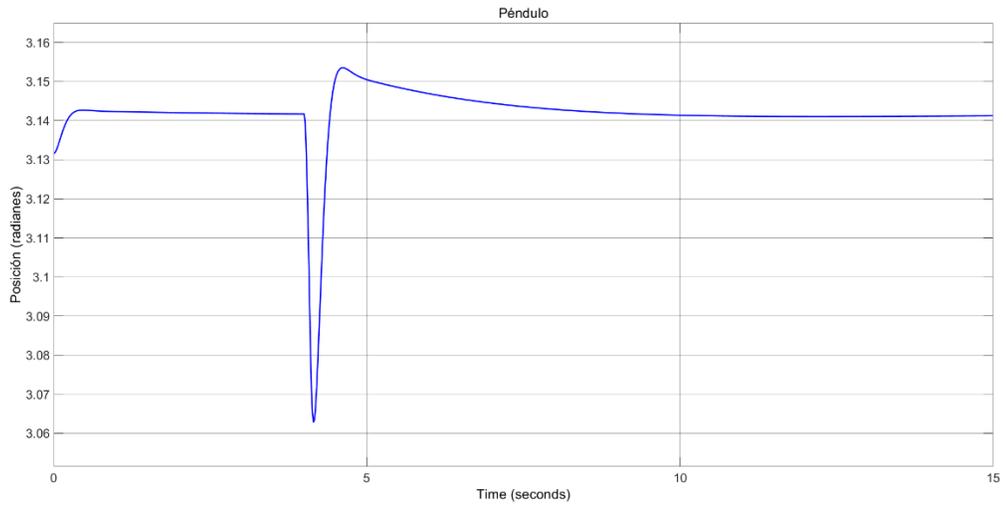


Ilustración 34 Posición del péndulo con el control LQR

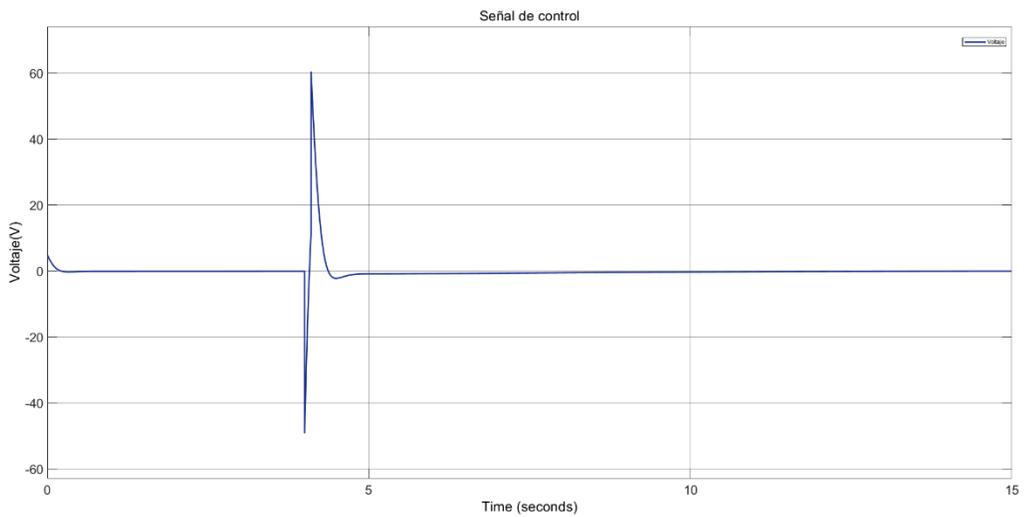


Ilustración 35 Señal de control LQR

En la *Ilustración 33* y la *Ilustración 34* se observa que el comportamiento al momento de estabilizar el sistema en el punto de operación con el control LQR es muy similar al control por asignación de polos con los polos reales negativos, pero se puede observar que se tarda más tiempo en llevar las posiciones tanto del péndulo como del brazo a las referencias, pero en general la estructura de la forma de la respuesta es casi la misma.

Por otra parte, en la *Ilustración 35* se observa que la señal de control disminuye muy poco su valor máximo con respecto a la mostrada en la *Ilustración 32*, esto debido a que como se mencionó anteriormente tarda más tiempo en estabilizar el sistema por lo tanto la señal de control puede ser más suave, pero a pesar de esto el pico en la señal de control esta cercano a los 60 Volts por lo tanto desde el punto de vista teórico tampoco puede ser aplicado físicamente en el sistema.

Por último, se realizó la simulación del control diseñado con dos polos reales negativos y dos polos complejos conjugados para poder realizar una comparación del desempeño de los tres controladores y seleccionar con cual se realizarán las pruebas en el sistema físico.

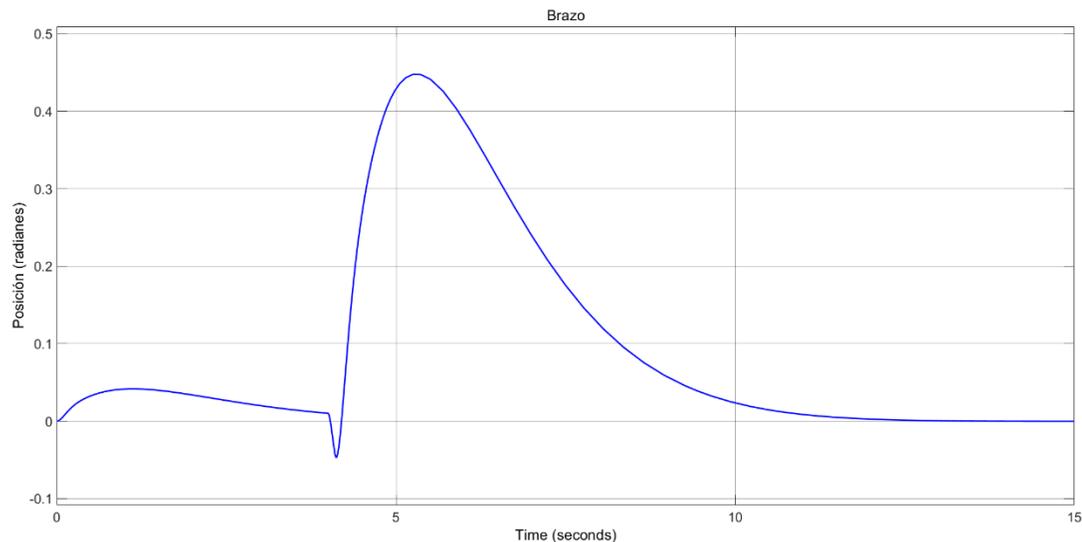


Ilustración 36 Posición del brazo con el controlador con dos polos complejos conjugados

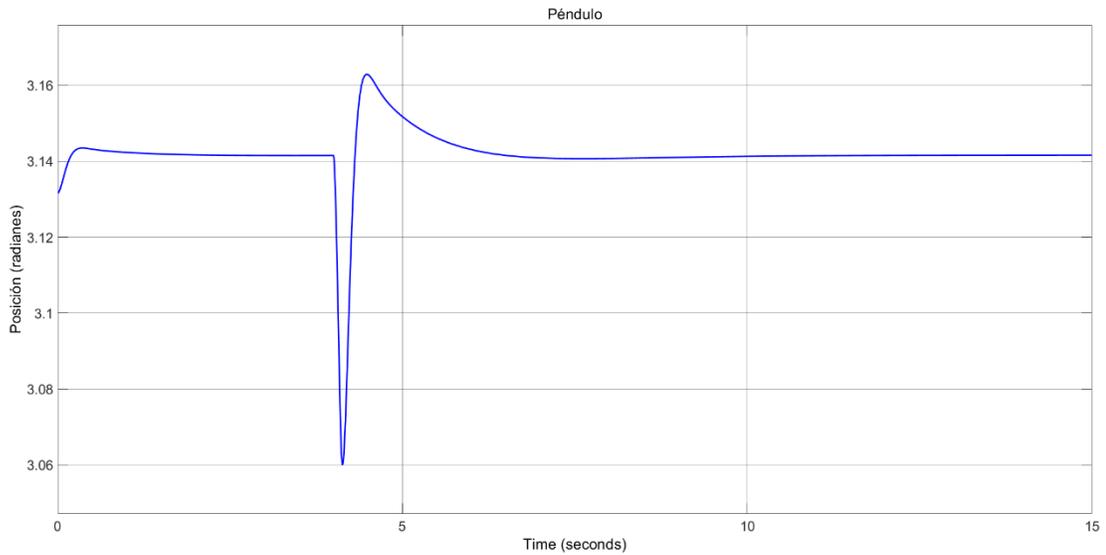


Ilustración 37 Posición del péndulo con el controlador con dos polos complejos conjugados.

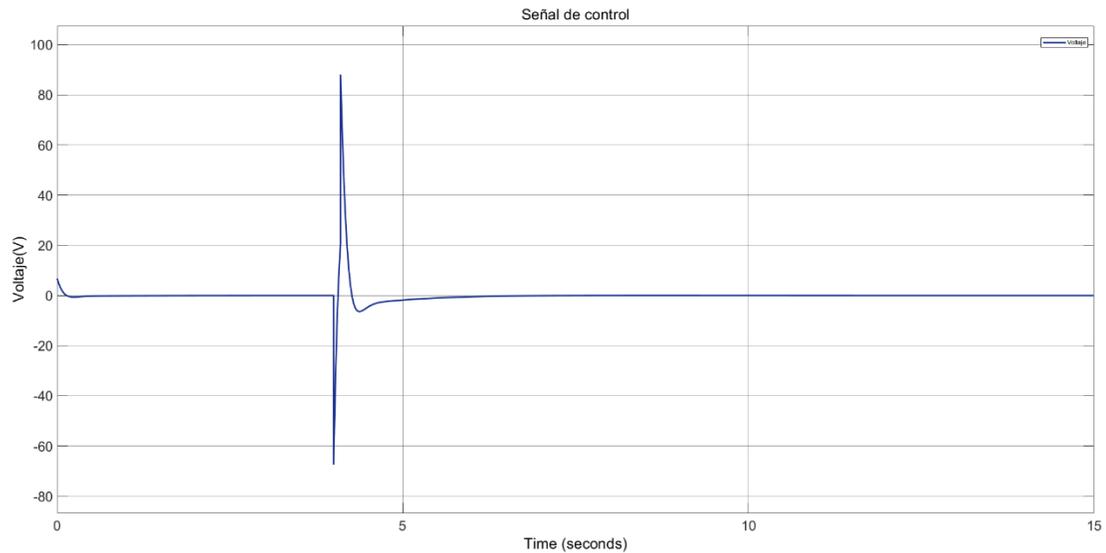


Ilustración 38 Señal de control con dos polos complejos conjugados.

En la *Ilustración 36* y la *Ilustración 37* se puede observar que, a diferencia del comportamiento observado en los dos controladores anteriores, con estas ganancias el sistema tiene oscilaciones antes de llegar al estado estable o en este caso a la referencia, también se puede observar que a diferencia de los controladores anteriores tarda menos tiempo en llegar a la referencia del brazo, pero tarda un poco más en llegar a la posición de referencia del péndulo.

De igual manera en la *Ilustración 38* se pueden observar las oscilaciones características de la estructura del control diseñado, este comportamiento afecta directamente a la amplitud de la señal de control, comparada con las señales de control de los otros dos controladores es muy evidente que la amplitud se dispara

a más de 80 volts y es la señal de mayor amplitud de las tres y el cambio en el comportamiento no es muy superior a los otros dos controladores.

Por último se analizó a detalle el comportamiento mostrado en las simulaciones de los tres controladores con el objetivo de seleccionar el control que se implementará en el prototipo físico, tomando como principal característica la amplitud de la señal de control y dejando un poco de lado la velocidad de la respuesta, ya que la diferencia en la velocidad de respuesta no es tanta como para ser tomada como una consideración importante al momento de seleccionar el controlador que será implementado en el prototipo.

Tomando en cuenta esas consideraciones se decidió implementar el controlador con los polos de lazo cerrado reales negativos, a pesar de que no es la señal de control con menor amplitud de voltaje es el comportamiento más equilibrado de los tres, ya que está directamente relacionado que tan rápido se puede lograr llevar el sistema al punto de operación con la magnitud de la señal de control, mientras más rápido se llegue a la posición de referencia mayor es la magnitud de la señal de control necesaria.

Con los resultados observados en las simulaciones se podría llegar a la conclusión de que ninguno de los controladores diseñados puede mantener el péndulo en su punto de equilibrio, esto debido a la magnitud de la señal de control que teóricamente es necesaria para lograr este comportamiento pero se sabe que el comportamiento puede ser diferente entre las simulaciones y los dispositivos físicos por esta razón en la siguiente sección se analizarán los resultados de realizar las pruebas del controlador en el prototipo físico.

5.2 Controlador implementado en el sistema físico

Como se mencionó anteriormente uno de los objetivos de este trabajo era reacondicionar el prototipo de péndulo de Furuta con el objetivo de que quedara completamente funcional y que se pudieran observar sus variables de estado (posiciones y velocidades) en tiempo real, esto con el objetivo de poder ver el comportamiento del sistema físicamente y poder tener sus datos almacenados y poder trabajar con ellos, en esta sección se mostrarán los datos obtenidos en dos pruebas realizadas en el prototipo con el controlador con polos reales negativos y se realizará el análisis de los mismos.

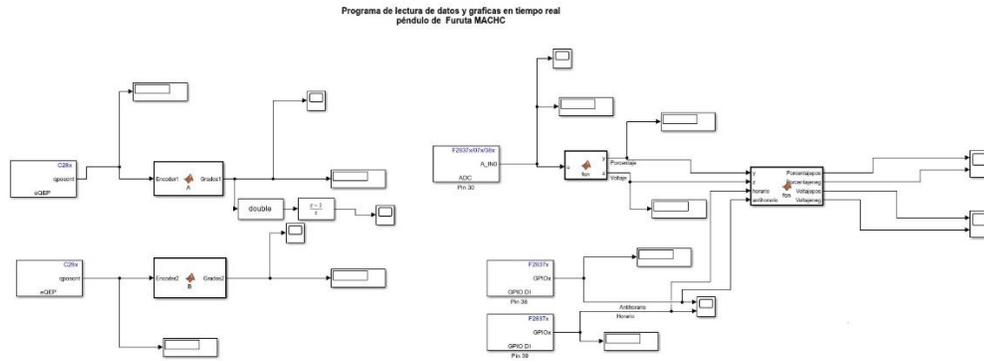


Ilustración 39 Programa para monitorear los datos en tiempo real

La *Ilustración 39* muestra el programa realizado en Simulink para poder leer tanto las señales de entrada como las de salida para poder realizar el monitoreo de los datos en tiempo real, la parte izquierda muestra la posición en grados tanto del péndulo como del brazo y la parte derecha es la encargada de acondicionar la señal de control (PWM) que sale del otro microcontrolador para poder graficar la señal de control, así como saber el sentido de giro del motor.

Puerto PCB	Conexión	Función
A3	Cable alimentación	+5V
A4	Alimentación encoder Brazo cable azul	+5V
A5	Alimentación encoder péndulo cable blanco DB9	+5V
D2	Alimentación GND	GND
D3	GND C2000	GND
D4	GND TIVA	GND
D5	GND Fuente	GND
D6	GND encoder Brazo	GND
D7	GND encoder Péndulo	GND
G3	Cable amarillo del motor	Encoder Brazo Fase A
H3	PD6 TIVA	Encoder Brazo Fase A
I3	QEPB1 C2000	Encoder Brazo Fase A
L3	Cable verde del motor	Encoder Brazo Fase B
M3	PD7 TIVA	Encoder Brazo Fase B
N3	QEPB2 C2000	Encoder Brazo Fase B
G5	Cable morado PCB DB9	Encoder Péndulo Fase A
H5	PC5 TIVA	Encoder Péndulo Fase A
I5	QEPA2 C2000	Encoder Péndulo Fase A
L5	Cable gris PCB DB9	Encoder Péndulo Fase B
M5	QEPA1 C2000	Encoder Péndulo Fase B
N5	PC6 TIVA	Encoder Péndulo Fase B
M9	ENA Driver motor	PWM
N9	PF2 TIVA	PWM
E10	PIN 30 C2000	PWM

A12	IN2 Driver motor	Señal digital 1
B12	PF1 TIVA	Señal digital 1
C12	PIN 38 C2000	Señal digital 1
G12	IN1 Driver Motor	Señal digital 2
H12	PF3 TIVA	Señal digital 2
I12	PIN 39 C2000	Señal digital 2

Tabla 5 Conexiones del prototipo

La *Tabla 5* muestra todas las conexiones que se realizan para hacer funcionar el prototipo, para simplificar las conexiones y poder utilizar los dos diferentes microcontroladores se utilizó una tarjeta PCB para poder realizar las interconexiones de una manera más sencilla y con mayor orden, en la *Tabla 4* se especifica el puerto de la tarjeta PCB, el otro lugar al que se conecta el cable y la función de estos.

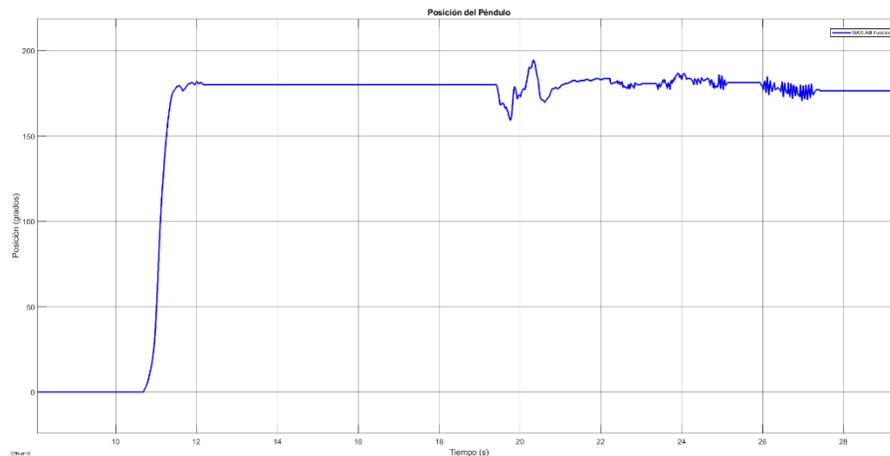


Ilustración 40 Posición del péndulo en el prototipo prueba 1

En la *Ilustración 40* se muestra la posición del péndulo en la primera prueba realizada sobre la plataforma experimental, como se puede observar el sistema comienza en el punto de equilibrio estable, posteriormente de manera manual se coloca el péndulo en la posición superior (180°) y se enciende el controlador, después se le da un pequeño golpe (perturbación) esperando que se pueda volver a estabilizar el sistema, como se puede ver el sistema presenta algunas oscilaciones pero después se estabiliza en el punto de operación, después de unos cuantos segundos se logra el objetivo, esto aun a pesar de todas las variables que no se pueden controlar y las adecuaciones mecánicas que se tuvieron que realizar.

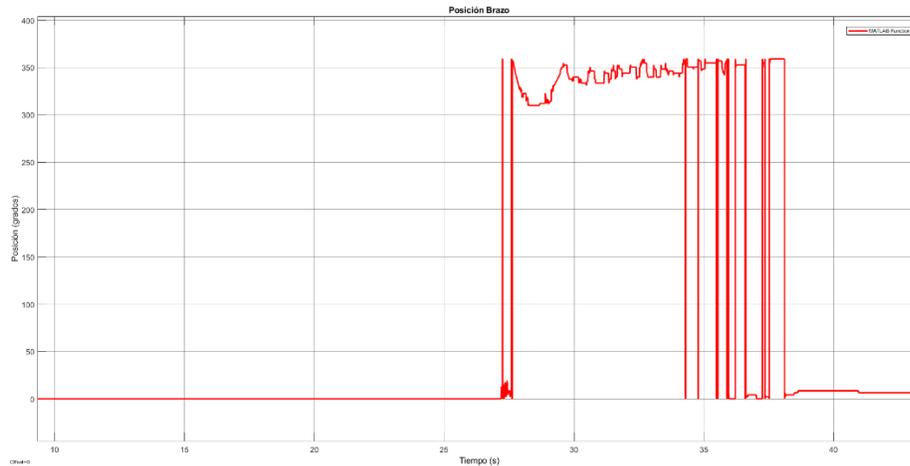


Ilustración 41 Posición del brazo en el prototipo prueba 1

La *Ilustración 41* muestra la posición del brazo a lo largo del tiempo, se puede observar que el brazo regresa de la posición de 0° a 360° esto debido a la configuración de la lectura de los datos pero únicamente indica que el sistema giro en contra de las manecillas del reloj unos cuantos grados, se observa que tiene oscilaciones como la posición del péndulo pero termina por llegar a la referencia de la posición y deja de moverse cuando ambas posiciones se encuentran en la referencia.

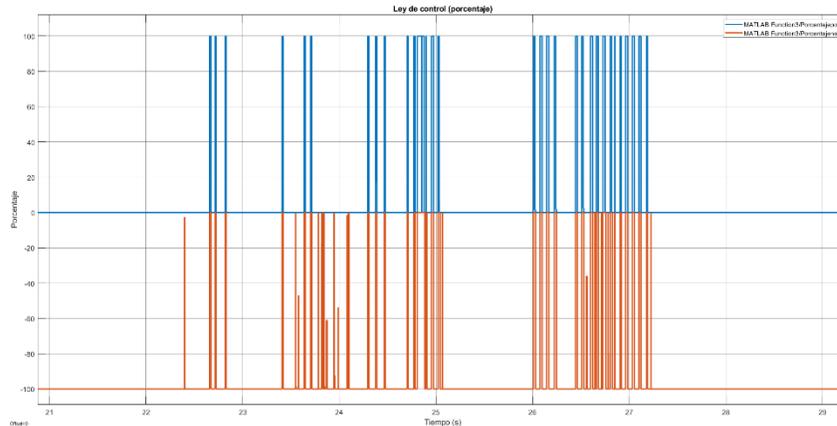


Ilustración 42 Señal de control en porcentaje prueba 1

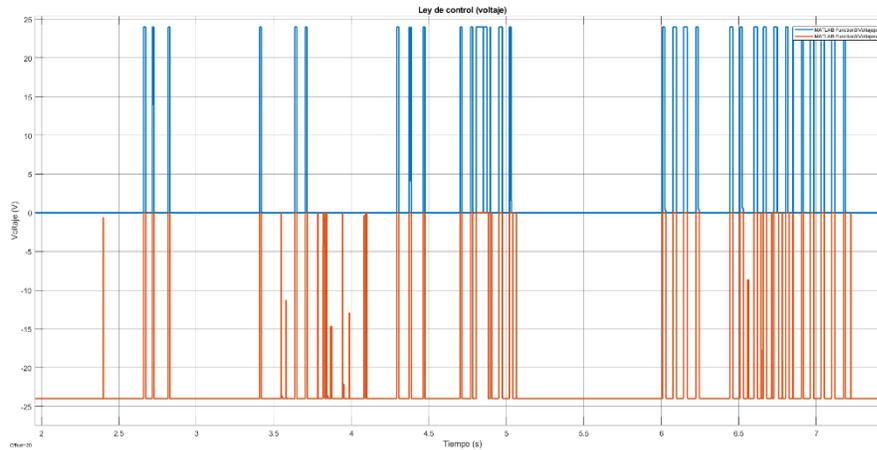


Ilustración 43 Señal de control en volts prueba 1

La *Ilustración 42* y en la *Ilustración 43* muestran la señal de control en porcentaje del valor máximo de voltaje que es de 25 volts y su valor en volts respectivamente, primero se explicará que es lo que se ve la gráfica y como fue acondicionada la señal. Para que fuera más sencillo visualizar el sentido de giro del motor la señal se dividió en dos señales dependiendo del sentido de giro del motor, el sentido de giro en la dirección de las manecillas del reloj es la señal de color azul y el sentido antihorario es la señal roja.

Como se puede ver la señal de control prácticamente es un control on-off pues la señal pasa de su valor máximo en el sentido horario a su valor máximo en sentido antihorario, lo que realmente hace la acción de control es el cambio de sentido, a pesar de esto se pudo observar que al final cuando logra estabilizar el sistema la señal de control se apaga por lo tanto cumple el objetivo de control.

Como se mencionó en el Capítulo 3 para poder monitorear el sistema en tiempo real se utilizan dos microcontroladores, el primero es el encargado de procesar las señales de entrada y de implementar la señal de control que llega al driver para controlar la velocidad y el sentido de giro del motor y el segundo es el encargado de graficar todas las señales en tiempo real en Simulink. Debido a esto se tienen que acondicionar las señales que para poder ser graficadas, principalmente la señal de control, por ese motivo es que se decidió dividir en dos señales así como hacer la conversión del valor PWM a voltaje y a porcentaje para poder analizar los datos obtenidos.

Con el objetivo de observar si es posible implementar diferentes leyes de control en el prototipo se decidió implementar también la otra ley de control diseñada con dos polos reales negativos y dos polos complejos conjugados en lazo cerrado, para ver si el comportamiento se podía mejorar o por el contrario no se podía controlar el sistema.

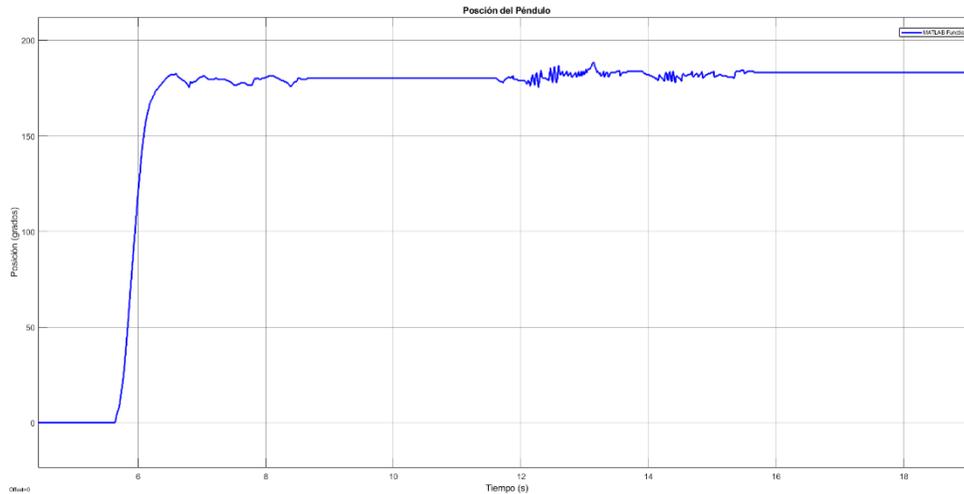


Ilustración 44 Posición del péndulo prueba 2

En la *Ilustración 44* se puede observar que el comportamiento del sistema ante el nuevo controlador es muy similar, pues logra llevar el sistema al equilibrio sin muchas complicaciones, esto es muy importante pues se comprobó que el sistema es controlable ante diferentes técnicas y que no fue una coincidencia que el controlador anterior haya funcionado, si bien el comportamiento podía mejorar es un buen resultado que el sistema se pueda controlar mediante diferentes diseños de controladores.

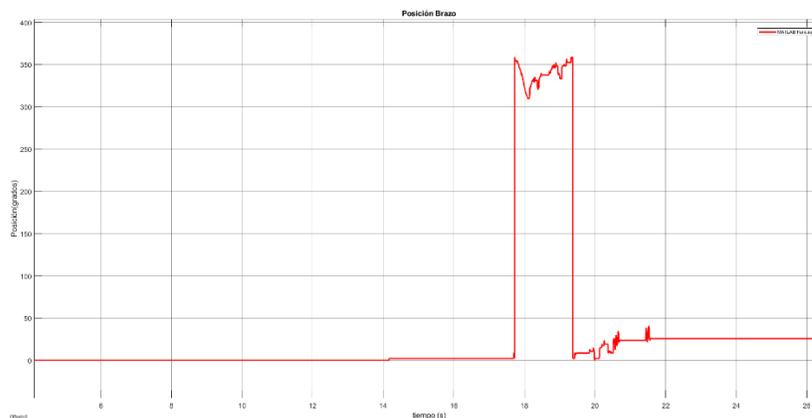


Ilustración 45 Posición del brazo en el prototipo prueba 2

En la *Ilustración 45* se observa la posición del brazo para el segundo experimento, en este caso se cambió el valor de referencia de dicha posición de 0° a 25° con el objetivo de comprobar que la posición del brazo podía ser seleccionada de manera arbitraria sin afectar el funcionamiento del prototipo, de manera similar se observa que al inicio tiene más oscilaciones para lograr estabilizar la posición del péndulo y luego lleva al brazo a su referencia.

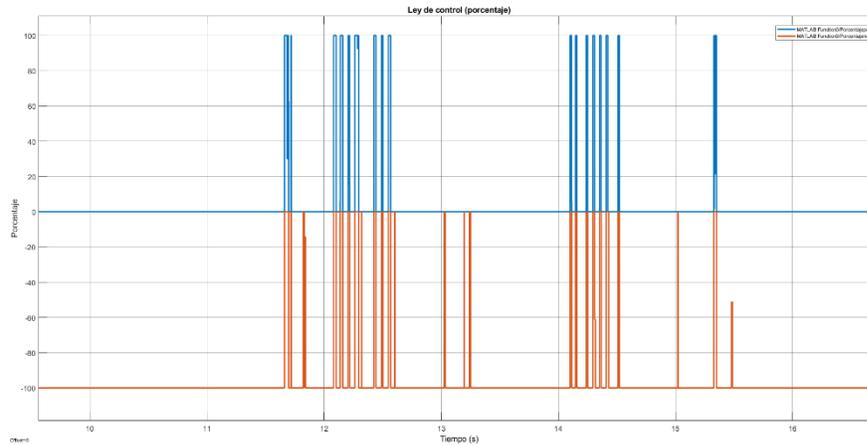


Ilustración 46 Señal de control en porcentaje prueba 2

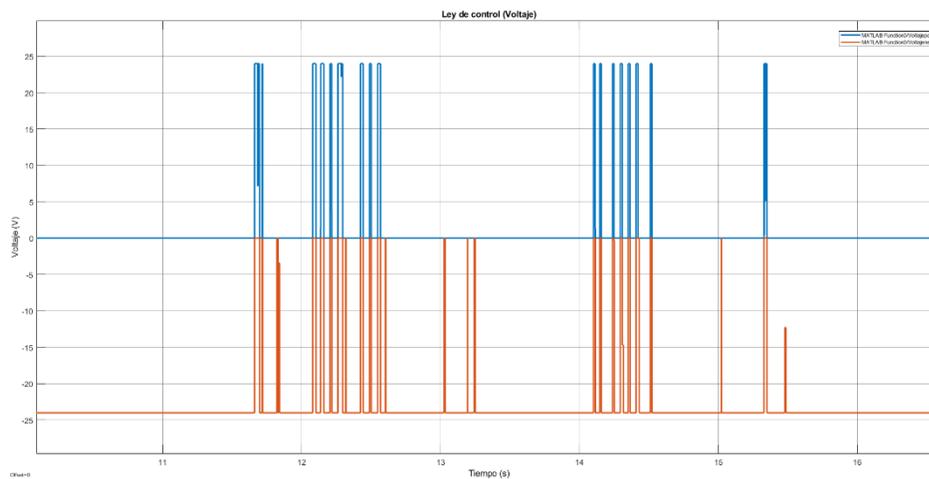


Ilustración 47 Señal de control en Volts prueba 2

Por otra parte en la *Ilustración 46* y la *Ilustración 47* se puede observar que la señal de control de igual manera tiene un comportamiento muy similar a la prueba anterior y esto es debido a que el sistema necesita hacer el cambio de sentido de giro muy rápido y el torque del motor a su máxima velocidad de movimiento es suficiente para hacer que el péndulo se levante y por medio del cambio de sentido de giro logra estabilizar el sistema, aunque mecánicamente se puede concluir que esta ley de control es más desgastante para los componentes pues se observa que los cambios de sentido ocurren con más frecuencia al igual que la disminución de la amplitud de su valor máximo a estar apagado lo que ocasiona un mayor desgaste en el motor y las partes mecánicas.

5.3 Comparación de los resultados de la simulación y el sistema físico

En este apartado se realizará un análisis de los resultados obtenidos en la simulación del sistema y los resultados obtenidos en el prototipo físico explicando

cuáles son sus diferencias, similitudes y si se cumplió el objetivo de control en ambos casos.

La principal diferencia en el comportamiento del sistema físico y de la simulación que salta a la vista es que el comportamiento del péndulo es diferente en ambos casos puesto que en las simulaciones el sistema llega al punto de referencia sin hacer oscilaciones o con muy pocas mientras que en el prototipo el sistema tarda bastante en llegar al equilibrio y tiene muchas oscilaciones, lo cual también es visible en las señales de control.

Justamente en la señal de control se puede observar el comportamiento tan diferente que tiene la simulación con el sistema físico, ya que en las simulaciones la señal de control dura muy poco tiempo y cumple con su objetivo mientras que en el sistema físico tarda bastante tiempo en lograr estabilizar el sistema por lo que el control se mantiene activo por mucho tiempo, otra diferencia notable en la señal de control es la amplitud de la misma. En las simulaciones se observó que la amplitud de la señal de control estaba entre los 60 en los 120 volts para los diferentes controladores diseñados, mientras que en el prototipo físico se tiene la limitante de que el valor de voltaje máximo al que funciona el motor son 24 volts.

Como se mencionó en el apartado 5.1 de este trabajo si solamente se hubiera analizado la parte teórica del sistema se tendría la conclusión de que ninguno de los controladores diseñados se podría implementar en el sistema físico y que no lograrían cumplir con el objetivo de control. Sin embargo, al implementar los controladores en el sistema se observó un comportamiento completamente diferente ya que si se logró cumplir con el objetivo de control.

En resumen, el resultado anterior explica las diferencias en el comportamiento entre las simulaciones y el sistema físico. En las simulaciones, el sistema se estabiliza más rápido porque la señal de control no está limitada a un valor de voltaje como si fuera un sistema ideal. Por otro lado, en el sistema físico, la señal de control parece cambiar solo la dirección de giro del motor debido a que se necesita todo el torque disponible para levantar el péndulo nuevamente.

Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones

Con base en los resultados presentados en el capítulo 5 se observa que se cumplió con los objetivos propuestos en el inicio de este, se logró reacondicionar el prototipo de péndulo rotacional invertido con el que se cuenta en el laboratorio de manera que sea funcional y se pueda utilizar con diferentes leyes de control.

Por otra parte, en el Capítulo 4 de este trabajo se presenta el análisis del modelo matemático que describe el comportamiento del sistema, se realizó la linealización de éste en torno al punto de operación para por último realizar el diseño de una ley de control para estabilizar el sistema en un punto de operación determinado, cumpliendo con otros de los objetivos planteados, en el Capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos al realizar las pruebas de los controladores diseñados en las simulaciones y en el sistema físico y la comparación de los mismos.

Anteriormente se mencionaron algunas oportunidades de mejora que tiene el prototipo de péndulo de Furuta, esto también es parte importante del trabajo, ya que, en el Capítulo 1 se menciona que una de las partes más importantes en el diseño y construcción de prototipos es la mejora continua del mismo a partir de los datos obtenidos después de realizar las pruebas correspondientes, aunque el prototipo cumple con los objetivos de este trabajo aún existen mejoras que se pueden aplicar las cuales se mencionaran a continuación como un posible trabajo futuro.

La principal mejora que se le puede realizar al prototipo es en el diseño, como se mencionó anteriormente el diseño de las partes mecánicas se tuvo que modificar un poco para poder reacondicionar el prototipo y que este fuera funcional, pero la solución que se encontró puede ser temporal y no es estéticamente agradable además de que afecta un poco en el funcionamiento del prototipo, por lo cual, se hace la sugerencia de que se modifique el diseño del brazo del prototipo y de los acoples del motor y el brazo para que el encoder que mide la posición del péndulo se encuentre justamente en la unión entre el brazo y el motor, con esto se evitará que el brazo cargue con todo el peso del encoder en el extremo final y evitará que se dañe el eje del motor además que disminuirá la inercia del movimiento del brazo del motor lo que hará que sea más sencillo aplicarle una ley de control.

Anexos

1. Código de Matlab para linealizar el sistema

```
syms x1 x2 x3 x4 U
mb = 0.196;      %masa del brazo en [Kg]
lb = 0.1729;    %longitud del brazo en[m]
mp = 0.027;    %Masa del péndulo corto en[Kg]
lp = 0.203;    %Longitud del péndulo corto en[m]
g = -9.8;      %[m*s2]
J = 2.47*10^-4; %[Kg*m^2]
b = 0.0015;    % Coeficiente de fricción 1
b1 = 0.0012;   % Coeficiente de fricción 2
rm = 9.6154;   %[Ohm];
kt = 7.3827*10^-3;
alpha=J+(1/3*mb+mp)*lb^2;
beta=1/3*mp*lp^2;
gamma=1/2*mp*lp*lb;
delta=1/2*mp*g*lp;
%Definición de las funciones
c3=cos(x3);
s3=sin(x3);
aux1=(beta*(alpha+beta*(s3^2))-(gamma*c3)^2);
aux2=(alpha+beta*(s3^2));
f1= x2;
f2=((kt*beta*U)/(rm*aux1))-((kt^2*beta*x2)/aux1)-
((2*beta^2*s3*c3*x2*x4)/aux1)+((gamma*beta*s3*x4^2)/aux1)-((beta*b1*x2)/aux1)-
((beta*s3*c3*gamma*c3*x2^2)/aux1)-
((delta*s3*gamma*c3)/aux1)+((b*gamma*c3*x4)/aux1);
f3=x4;
f4=((aux2*beta*s3*c3*(x2^2))/aux1)+((aux2*delta*s3)/aux1)-
((aux2*b*x4)/aux1)-
((gamma*c3*kt*U)/(rm*aux1))+((gamma*c3*(kt^2)*x2)/aux1)+((gamma*c3*b1*x2)/aux1)+
((gamma*c3*2*beta*s3*c3*x2*x4)/aux1)-((gamma*s3*gamma*c3*(x4^2))/aux1);
%derivadas parciales

f1x1=diff(f1,x1);
f1x2=diff(f1,x2);
f1x3=diff(f1,x3);
f1x4=diff(f1,x4);
f1U=diff(f1,U);
f2x1=diff(f2,x1);
f2x2=diff(f2,x2);
f2x3=diff(f2,x3);
f2x4=diff(f2,x4);
f2U=diff(f2,U);
f3x1=diff(f3,x1);
f3x2=diff(f3,x2);
f3x3=diff(f3,x3);
f3x4=diff(f3,x4);
f3U=diff(f3,U);
f4x1=diff(f4,x1);
f4x2=diff(f4,x2);
f4x3=diff(f4,x3);
f4x4=diff(f4,x4);
f4U=diff(f4,U);
```

```

% funciones evaluadas, se utiliza el comando subs para sustituir el valor
% simbolico de las variables por su valor númerico en el punto de
% equilibrio, y el comando vpa para que se obtenga el resultado en decimal
% con 6 cifras despues del punto

Vx1 = pi/2; % valor a sustituir en x1
Vx2 = 0; % valor a sustituir en x2
Vx3 = pi; % valor a sustituir en x3
Vx4 = 0; % vaor a sustituir en x4

f1x1eval=double(vpa(subs(f1x1,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f1x2eval=double(vpa(subs(f1x2,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f1x3eval=double(vpa(subs(f1x3,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f1x4eval=double(vpa(subs(f1x4,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f1Ueval=double(vpa(subs(f1U,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f2x1eval=double(vpa(subs(f2x1,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f2x2eval=double(vpa(subs(f2x2,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f2x3eval=double(vpa(subs(f2x3,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f2x4eval=double(vpa(subs(f2x4,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f2Ueval=double(vpa(subs(f2U,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f3x1eval=double(vpa(subs(f3x1,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f3x2eval=double(vpa(subs(f3x2,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f3x3eval=double(vpa(subs(f3x3,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f3x4eval=double(vpa(subs(f3x4,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f3Ueval=double(vpa(subs(f3U,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f4x1eval=double(vpa(subs(f4x1,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f4x2eval=double(vpa(subs(f4x2,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f4x3eval=double(vpa(subs(f4x3,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f4x4eval=double(vpa(subs(f4x4,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
f4Ueval=double(vpa(subs(f4U,[x1,x2,x3,x4],[Vx1,Vx2,Vx3,Vx4]),6));
% Se realizan las matrices

A = [f1x1eval f1x2eval f1x3eval f1x4eval;
     f2x1eval f2x2eval f2x3eval f2x4eval;
     f3x1eval f3x2eval f3x3eval f3x4eval;
     f4x1eval f4x2eval f4x3eval f4x4eval];

B = [f1Ueval;
     f2Ueval;
     f3Ueval;
     f4Ueval];

C = [1 0 0 0;
     0 0 1 0];

D = [0;
     0];

%Funciones de transferencia
Sys=ss(A,B,C,D);

```

```

Gs=tf(Sys);
% CONTROLADOR
syms Ld
MCo=ctrb(A,B); %Matriz de Controlabilidad
DetMCo=det(MCo); %Determinante de la matriz de
Controlabilidad.
RMCo=rank(MCo); %Rango de la matriz de Controlabilidad.
MCA=(Ld*eye(4))-A; %Matriz caracteristica de A
PC=expand(vpa(det(MCA),4)); %Polinomio caracteriztico de la matriz A
disp("El polinomio caracteriztico de A es:")
disp(PC); %Muestra el polinomio caracteristico de la
matriz A
w=[-37.8216 -88.5522 5.586 1;
-88.5522 5.586 1 0;
5.586 1 0 0;
1 0 0 0];
T2=MCo*w;
T2i=inv(T2);
Ab2=T2i*A*T2;
PCD1=vpa(Ld^4+19*Ld^3+103.962*Ld^2+133.369*Ld+48.202); %Polinomio
caracteristico deseado 1
disp("El primer polinomio caracteriztico deseado es:")
disp(PCD1); %Muestra el polinomio
caracteristico deseado
kb1=[48.202 133.369+37.822 103.962+88.552 19-5.586];%Matriz de ganancias K
barra
kb2=[900.35 810+37.822 180.99+88.552 17.2-5.586];%Matriz de ganancias K
barra
k1=kb1*T2i; %Obtención de la matriz de
ganancias K
disp("Las ganancias calculadas (Ogata) son:");
disp(k1);
disp("Las ganancias calculadas (Ogata) son CC:");
k2=kb2*T2i;
disp(k2);
P1=[-9.330 -0.67 -8.041 -0.959]; %Vector con los polos deseados del sistema
P2=[-5.589 -1.611 -5+8.66i -5-8.66i]; %Vector con los polos deseados del
sistema
kp1=acker(A,B,P1); %Cálculo de las ganancias por
el método de acker para los polos deseados.
disp("Las ganancias calculadas con matlab son(acker):");
disp(kp1);
kp2=acker(A,B,P2); %Cálculo de las ganancias por
el método de acker para los polos deseados.
disp("Las ganancias calculadas con matlab son(acker):");
disp(kp2);

```

2. Código de la función que describe el comportamiento del sistema.

```
function [x1p,x2p,x3p,x4p] = fcn(U,x1,x2,x3,x4)
```

```
mb=0.196; %masa del brazo en [Kg]
lb=0.1729;%longitud del brazo en[m]
```

```

g=-9.8; %[m*s2]
J = 2.47*10^-6; %[Kg*m^2]
b = 0.00015; %coeficiente de fricción del péndulo aproximado
b1= 0.0012; %coeficiente de fricción del brazo aproximado
rm = 9.6154; %[Ohm]
% km = 7.3827*10^-3;
kt = 7.3827*10^-3;
%Para el péndulo corto

mp=0.027; %masa del péndulo corto en[Kg]
lp=0.203; %longitud del péndulo corto en[m]

%Para el péndulo largo

% mp=0.032; %masa del péndulo largo en[Kg]
% lp=0.245; %longitud del péndulo largo en[m]

%Simplificaciones
alpha=J+(1/3*mb+mp)*lb^2;
beta=1/3*mp*lp^2;
gamma=1/2*mp*lp*lb;
delta=1/2*mp*g*lp;

%Definición de las funciones
c3=cos(x3);
s3=sin(x3);
aux1=(beta*(alpha+beta*(s3^2))-(gamma*c3)^2);
aux2=(alpha+beta*(s3^2));
x1p= x2;
x2p=((kt*beta*U)/(rm*aux1))-((kt^2*beta*x2)/aux1)-
((2*beta^2*s3*c3*x2*x4)/aux1)+((gamma*beta*s3*x4^2)/aux1)-((beta*b1*x2)/aux1)-
((beta*s3*c3*gamma*c3*x2^2)/aux1)-
((delta*s3*gamma*c3)/aux1)+((b*gamma*c3*x4)/aux1);
x3p=x4;
x4p=((aux2*beta*s3*c3*(x2^2))/aux1)+((aux2*delta*s3)/aux1)-((aux2*b*x4)/aux1)-
((gamma*c3*kt*U)/(rm*aux1))+((gamma*c3*(kt^2)*x2)/aux1)+((gamma*c3*b1*x2)/aux1)+
((gamma*c3^2*beta*s3*c3*x2*x4)/aux1)-((gamma*s3*gamma*c3*(x4^2))/aux1);

```

3. Código de aplicación del controlador al sistema.

```

function u = fcn(x1,x2,x3,x4,S)
switch S
case 1
%Ganancias calculadas por mi con polos complejos conjugados
k1=6.2247;
k2=14.4246;
k3=-681.1815;
k4=-58.8270;
case 2
%Ganancias LQR
k1=0.7071;
k2=4.7473;
k3=-491.4876;
k4=-40.2425;

```

```

case 3
%Ganancias calculadas por mi con polos reales
    k1=34.5619;
    k2=36.3961;
    k3=-917.3937;
    k4=-78.4734;
otherwise
    k1=0;
    k2=0;
    k3=0;
    k4=-0;
end
u = k1*x1+k2*x2+k3*x3+k4*x4; % Ganancias

```

Referencias

- Acosta, D., Noguera, J., Pacheco, J., & Sanjuan, M. (2021). Neural network ARMAX model for a Furuta Pendulum. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, vol 29, 668-682.
- Bellati, A., Cancela, F., & Pérez, N. (2021). *Construcción y Control del Péndulo de Furuta*. Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería .
- Estopier, J. (2020). *Construcción, validación y control de un péndulo de Furuta*. Ciudad de México: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México .
- Medina Cervantes, J., Gallardo Sánchez, J., Villafuerte Díaz, R., & Mejía Sánchez, E. (2017). Desarrollo de un péndulo de Furuta. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, 3.
- Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderna* (Tercera ed.). (M. Martínez, Trad.) Estado de México, México: Pearson Education.
- Prado, A., Herrera, M., & Menéndez, O. (2020). Levantamiento Inteligente y Estabilización Robusta de un Sistema de Péndulo Invertido Rotatorio via Control Predictivo Basado en Modelo No-lineal y Tubos. *Revista Politécnica*, 45(1), 49-64.
- Real Academia Española. (22 de 01 de 2023). *Diccionario de la lengua española*. Obtenido de <https://dle.rae.es/prototipo>
- Rodamientos Vigo, S.A. (30 de Mayo de 2024). *Rodavigo*. Obtenido de <https://rodavigo.net/catalogos/FAG/01%20Rodamientos%20de%20bolas/FAG%2004%20Datos%20de%20los%20rodamientos.pdf>

Salazar, E. (2012). Prototipo, el Contexto y la Ingeniería del Software. *Ingeniería del Software*, 1-12.

ThinkersCo. (29 de Diciembre de 2020). *ThinkersCo*. Obtenido de Tipologías de prototipo: <https://thinkersco.com/comunidad/blog/tipologias-de-prototipo/>

Universidad Europea. (22 de Abril de 2022). *Universidad Europea*. Obtenido de ¿Qué es un prototipo y para qué sirve?: <https://universidadeuropea.com/blog/que-es-prototipo/>

Valera, A., Vallés, M., & Cardo, M. (2002). Desarrollo y Control de un Péndulo de Furuta. *Universidad Politécnica de Valencia*, 1-7.