



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis numérico de un fluido  
newtoniano que circula en un microcanal  
rectangular de paredes permeables**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

Héctor Emanuel Vázquez Hernández

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Edgar Ali Ramos Gómez



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024**



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Planteamiento del Problema</b>	<b>11</b>
2.1. Ecuaciones para el modelo físico . . . . .	12
2.2. Condiciones de frontera . . . . .	13
2.3. Análisis de Orden de Magnitud . . . . .	15
2.4. Ecuaciones Adimensionales . . . . .	16
2.5. Condiciones de frontera adimensionales . . . . .	17
<b>3. Método Numérico</b>	<b>21</b>
3.1. Formulación Variacional . . . . .	24
3.2. Validación de resultados . . . . .	31
<b>4. Resultados</b>	<b>33</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>A. Adimensionalización de Ecuaciones</b>	<b>65</b>
<b>B. Velocidad <math>u</math></b>	<b>69</b>
<b>C. Formulación Variacional</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



# Agradecimientos

Le agradezco principalmente a Dios por haberme ayudado en este largo camino, y darme las fuerzas necesarias para concluir este proyecto. Por permitirme continuar con nuevas etapas de mi vida y tener a mi lado a tanta gente tan importante que me ayudaron y siguen ayudando en este camino. También le agradezco que, pese a los obstáculos que se presentaron, me ha dado la capacidad y la inteligencia suficiente para superarlos, y poder compartir ahora este logro con mi amada familia y amigos.

Les agradezco con todo el corazón a mis padres, Cristina Hernández y Héctor Vázquez, por apoyarme todos los días, tanto en mi carrera profesional, como en mi crecimiento personal. Por compartirme sus valores, y enseñarme con su propio ejemplo la importancia de trabajar diariamente para cumplir con mis objetivos. Les agradezco su amor, dedicación y empeño que han sido esenciales para formarme como el hombre que soy. Las palabras no bastan para demostrarles todo lo que aprecio su apoyo, siempre estaré agradecido con ustedes.

A mi hermana, mi mejor amiga, que siempre ha estado a mi lado, y me ha dado buenos consejos y me apoyó siempre que la necesitaba. Quien me ayudó a ser paciente y a no desistir pese a los problemas que tuve que enfrentar, y que me enseñó también a trabajar arduamente y no perder nunca la motivación.

Al Doctor Edgar Ali Ramos, le doy muchas gracias por su tiempo, su apoyo y su guía, y por compartirme una parte de su conocimiento para la realización de esta investigación. Por su paciencia y consejos en el desarrollo de la tesis, y por las muchas correcciones y aportaciones para mejorar la calidad de este trabajo.

Le agradezco a la Facultad de Ingeniería y a la Universidad Nacional

Autónoma de México, todos las herramientas, los recursos y el conocimiento que han puesto a disposición de sus estudiantes para nuestra formación académica. Por formar una parte fundamental en mi desarrollo y conocimiento tanto profesional como mental, y darme la preparación necesaria para mi carrera como profesionista.

A mis tías, tíos y abuelos, que forman una parte muy importante de mi vida, y me demostraron su apoyo y orgullo por que pudiera cumplir mis objetivos y llegar hasta este punto de mi vida.

A todas mis amigas y amigos, por sus palabras de ánimo, su estímulo y presencia en mi formación, por compartir buenos momentos, y por seguirme acompañando hasta el día de hoy.

Sin la presencia de todos y cada uno nunca hubiera podido completar ninguno de mis proyectos. Este trabajo se está dedicado a todos ustedes.

Finalmente, quiero agradecer a DGAPA (UNAM) por la infraestructura de tecnología de la información brindada para el desarrollo de esta tesis, ya que la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería obtuvo equipo de cómputo gracias al financiamiento proveniente del proyecto PAPIIT-IA100623 que lleva como nombre “*Estudio teórico y numérico de las ecuaciones diferenciales involucradas en fenómenos eléctricos y electrocinéticos asociados a la micro y nano escala*”.

# Capítulo 1

## Introducción

Los Sistemas Microelectromecánicos (MEMS) son dispositivos de dimensiones del orden de  $10^{-6}$  metros, que integran elementos microfabricados capaces de recibir señales, procesarlas y replicar funciones de sistemas mecánicos macrométricos. Los sistemas microelectromecánicos se utilizan principalmente para el registro de variables físicas del entorno en el que están incorporados, como presión, tensión, posición, temperatura, intensidad luminosa, sonido e incluso presencia de gases y sustancias químicas, [1]. Los dispositivos micrométricos que convierten una energía de entrada (como eléctrica, térmica, magnética o química) y generan una respuesta mecánica se conocen como microactuadores. Algunos mecanismos de accionamiento de los microactuadores, como respuesta a la energía de entrada, son la piezoelectricidad, magnetostática, neumática, expansión térmica, memoria de forma y combustión [2].

Los MEMS se han incorporado recientemente en aparatos electrónicos que van desde celulares y computadoras, hasta en prótesis y dispositivos médicos para el monitoreo de la salud. El desarrollo de esta tecnología se dio con la intención de incorporar varios sistemas, que desempeñen tareas cada vez más complejas, con la posibilidad de miniaturizarlos. Anteriormente se mantenía como concepto general que los MEMS involucraban solo componentes mecánicos y eléctricos micrométricos, sin embargo, esta definición se ha extendido de modo que ahora se consideran de manera general como el conjunto de técnicas y procesos para crear componentes micrométricos [3]. Esta tecnología se utiliza en el desarrollo de sistemas que realicen como

microsensores y microactuadores que registren variables físicas específicas y permitan el intercambio de información o retroalimentación de sistemas, tal que mejoren el desempeño de dispositivos [4, 5].

El comienzo en el desarrollo de esta tecnología surgió como necesidad a experimentar con diferentes condiciones de los fluidos a la vez que se combinen la practicidad, simplicidad y funcionalidad. En diversos artículos científicos y conferencias se aborda la posibilidad de miniaturizar los procesos como los conocemos actualmente, y continuar con un desarrollo hacia obtener productos cada vez más pequeños, hasta ser capaces de interactuar con átomos directamente, como un enfoque puro de la química [6]. Como resultado se crearon diferentes dispositivos que exploran las diferentes etapas de análisis de los fluidos a escalas cada vez más pequeñas hasta llegar a escala micrométrica y que podrían replicarse fácilmente. Recientemente se han aplicado los presentes conocimientos a la microfabricación de elementos, con nuevas tecnologías de la ingeniería aplicada. Los resultados son nuevos dispositivos para el análisis de otros sistemas de dimensiones similares. Estos nuevos desarrollos de dispositivos abarcan hasta el Análisis en Micro-Laboratorios [7], donde se recrean fenómenos físicos que se encuentran en la naturaleza, aprovechando las facilidades de un laboratorio del tamaño de un chip, puesto que los fluidos micrométricos tienden a conservar propiedades como viscosidad y densidad constantes aún si se presentaran variaciones en el ambiente, combinado con la accesibilidad de la microfabricación, se hace posible replicar diversos eventos físicos como la filtración.

Los métodos de manufactura empleados para los MEMS se comparan a la foto impresión utilizada en los chips de circuitos integrados, así como la remoción de material a escalas micrométricas, conocido como micro-mecanizado. Debido a su adelanto y relativa facilidad de fabricación, el método de foto impresión es el más utilizado, puesto que se ha desarrollado ampliamente esta técnica y automatizado para acelerar la producción y disminuir el tiempo de manufactura. Consiste en incidir un haz de luz ultravioleta en una placa de silicio, de modo que se endurezca el material, según el patrón dibujado que se introdujo. Por otro lado, el micromaquinado es un proceso de manufactura que consiste en la remoción de material de una pieza de trabajo, utilizando distintos procedimientos de desprendimiento de material. Un ejemplo de un proceso utilizado para obtener piezas de tales



dimensiones es un método no convencional conocido como Maquinado por Descarga Eléctrica (Electrical Discharge Machinig, EDM). Para este proceso se sumergen la pieza de trabajo y el electrodo en un fluido dieléctrico, sin estar en contacto directo. Posteriormente se aplica una corriente que genera descargas eléctricas, que aumentan hasta más de 8000 °C la temperatura, tal que se genera un canal de plasma entre el cátodo y el ánodo. Posteriormente la corriente es interrumpida, de modo que el canal de plasma se rompe y el material fundido de la superficie se evapora. [8, 9]. En general, los métodos de micromaquinado emplean piezas de dimensiones aún menores que las dimensiones de las piezas que se obtienen, los cuales constituyen el Sistema Microelectromecánico [5, 4].

Una de las aplicaciones principales de los Sistemas Microelectromecánicos es en el desarrollo de sensores. Están presentes en sensores de aceleración, presión, movimiento y estabilidad. Incorporan elementos piezoeléctricos, que detectan variaciones en la posición, que registran y envían una señal de retroalimentación. Debido a su configuración y su disposición representan una ventaja respecto a los anteriores modelos debido a la facilidad de integración y a su confiabilidad frente a antiguos sensores mecánicos [10]. En suma, los sensores son sistemas que a su vez, utilizan subsistemas que trabajan en conjunto para registrar un cambio, o funciones específicas, con la facilidad de integrarlos entre sí y realizar tareas complejas como unión de distintos sistemas simples. Estos subsistemas son principalmente mecánicos y eléctricos, aunque también se han llegado a incorporar recientemente sistemas hidráulicos y ópticos. Estos sensores se han incorporado para detectar caídas súbitas, golpes, desaceleraciones, y en diversos dispositivos de control [11]. Incluso se ha llegado a colocar chips en órganos humanos, como el corazón, los pulmones y el cerebro, para monitorear su correcto desempeño y funciones estables, como la presión arterial, ritmo cardiaco, oxigenación en la sangre, actividad cerebral, entre otras [12]. Por otro lado, también se ha planteado la posibilidad que uno de estos sistemas sustituya el funcionamiento de órganos humanos, ya sea parcial o totalmente. Gracias a la semejanza de trabajo con microcanales de forma natural en el cuerpo humano es que se puede replicar su geometría en algunas zonas específicas, así como adaptarse a los lugares en los que se debe alojar, [12, 13]. Es precisamente en su diseño compacto, versatilidad, bajo peso y costo, y gasto energético mínimo lo que la hace tan importante para los

nuevos sistemas [14].

Las ventajas mencionadas anteriormente se pueden aprovechar ampliamente en la mecánica de fluidos, además de incluir el flujo de fluidos en los sistemas Microelectromecánicos. El área que relaciona los micro-sistemas con los fluidos se conoce como microfluídica, la cual estudia los sistemas microscópicos que manipulan cantidades diminutas de fluido ( $10^{-18}$  a  $10^{-9}$  litros), permitiendo la manipulación, el transporte, la mezcla y la separación de microfluidos en un microchip. Las dimensiones para realizar estos análisis son desde las décimas hasta las centésimas de micrómetros. Esta área se enfoca en la interacción de un pequeño volumen de un fluido que pasa por una red de trabajo [15]. La capacidad de desarrollo en entornos pequeños, a su vez, da como resultado tiempos de estudio más cortos y la capacidad de observar diferentes comportamientos debido a propiedades físicas como la viscosidad y la densidad, con lo que se obtienen flujos distintos a los que se observan a macro-escalas, puesto que a escalas micrométricas las propiedades dominantes son la capilaridad, la tensión superficial y la viscosidad del fluido [16].

A diferencia de flujos macroscópicos donde el flujo es comúnmente turbulento, a escalas micrométricas el flujo tiende a ser laminar, algo que puede significar una ventaja si se desea trabajar en un régimen estacionario, aún a velocidades relativamente altas. Otra característica es que las fuerzas gravitacionales se vuelven despreciables. En flujos de un mayor caudal se considera el efecto de estas fuerzas, mientras que en microfluidos predomina la tensión superficial. Pese a que se observa un comportamiento distinto, siguen siendo válidas las leyes fundamentales de la mecánica de fluidos [17]. Las ecuaciones de continuidad y momentum se siguen cumpliendo, por lo que se puede modelar el comportamiento del fluido en estas escalas, dependiendo del fenómeno físico que se este desarrollando.

En vista del continuo aumento en la demanda de bienes por parte de la sociedad, la comunidad científica ha buscado nuevas estrategias de producción para alcanzar estos requerimientos. Es por eso que se han desarrollado procesos de filtración para eliminar cada vez más contaminantes o defectos en las sustancias de consumo. La filtración es un proceso de separación de partículas mezcladas en un fluido, el cual circula en una tubería por efecto de una fuerza externa. Consiste en depurar o eliminar coloides, o sólidos disueltos en el fluido, con el objetivo de disminuir la concentración de es-

tos elementos en el medio [18]. Puesto que las paredes están hechas de un material poroso semipermeable, es posible separar la solución del soluto. Los medios porosos permiten el paso del fluido, pero filtran las partículas que tienen un tamaño superior al tamaño de poro. Las membranas también son ampliamente utilizadas en la separación de gases, para la recuperación del hidrógeno, en la extracción de dióxido de carbono del metano, en el proceso de mejorar las características del petróleo, purificación de gases, enriquecimiento de oxígeno para combustión, entre otras [19, 20]. También se ha desarrollado procesos de desalinización de agua de mar por medio de ósmosis inversa, como alternativa a los métodos convencionales de obtención de agua. En esencia se separa las sales y sólidos disueltos, con lo que se obtiene dos salidas del sistema de ósmosis. Por un lado se recoge agua dulce para consumo, el producto principal que se busca obtener en el proceso, y por otro lado un fluido concentrado con las sales mezcladas desde un principio, conocido como salmuera [21]. Debido a los beneficios que presentan los procesos de filtración, la obtención de recursos y distintas herramientas útiles para la sociedad, es que se han realizado esfuerzos por seguir desarrollando esta tecnología, de tal manera que ha llegado a reproducirse a escalas micrométricas, con lo que surge la posibilidad de aprovechar las características propias de la microfluídica en los distintos procesos de filtración.

La permeabilidad y selectividad son cualidades muy importantes de las membranas, que son determinadas experimentalmente bajo las condiciones y resultados obtenidos en la práctica. Las propiedades de la membrana se expresan en términos empleados frecuentemente en electroquímica, como los coeficientes de permeabilidad, de transferencia de iones, densidades de carga y resistencia eléctrica, entre otros, [18]. La selección de membranas es un proceso que depende de los resultados deseados en el proceso de filtración. Si se desea hacer un tratamiento de residuos tóxicos, se necesita una capacidad de filtrado rigurosa, por lo que se debe escoger un tamaño de poro adecuado para eliminar las sustancias tóxicas presentes de los elementos aprovechables, [22]. Existen otras condiciones que se deben considerar para ajustar correctamente el proceso de producción, como el esfuerzo cortante en la salida del fluido, necesario para tener una salida más uniforme y continua, presión a través de la membrana, resistencia a la corrosión, mantenimiento, entre otros aspectos, [23, 22]. Existen varios tipos de filtración,

debido al efecto de una presión, que se clasifican según el tamaño de poro de la membrana. Los seis tipos de filtración son: macrofiltración, microfiltración, ultrafiltración, nanofiltración, ósmosis inversa y ósmosis directa [24].

Por otra parte, la perfusión sanguínea es el flujo de sangre local por la red capilar. Es un flujo constante junto con el aporte de oxígeno, nutrientes y electrolitos, de modo que todos los tejidos permanecen constantemente bajo riego sanguíneo, [25]. Este proceso ocurre de manera natural, puesto que está controlado según la necesidad tisular, y la acumulación de dióxido de carbono. Es un medio de transporte por medio de la sangre para que llegue a todos los tejidos. Después de haber sido oxigenada en los pulmones, la sangre se dirige hacia los tejidos, órganos y huesos, hasta las perfusiones, que son como microcanales donde ocurre el intercambio de oxígeno hacia los dichos tejidos, [26]. Los capilares tienen una longitud desde 0.3 hasta 1 mm. Esto significa que tarda muy poco tiempo en estas zonas, considerando que la sangre se desplaza a 0.3 mm/s en promedio, tarda de uno a tres segundos en realizar el aporte de nutrientes y expulsar dióxido de carbono, [27].

Haciendo una analogía con el proceso de intercambio que surge en los capilares sanguíneos es que se plantea la posibilidad de diseñar un microcanal por el que circule un fluido en dirección longitudinal del canal, por donde se va filtrando una cantidad del mismo en dirección transversal a través de las paredes. Para continuar con la semejanza de los capilares sanguíneos, el microcanal es de dimensiones similares, con paredes permeables, y una velocidad del fluido que circula aproximadamente igual al de la sangre en los capilares. Debido al fluido que se filtra por las paredes del microcanal es que el gasto volumétrico a la salida respecto al de entrada es menor, puesto que el flujo a la entrada es igual a la suma del fluido que sale en dirección longitudinal, más el flujo que se filtra por las paredes. La cantidad de fluido que se filtra depende de la permeabilidad del material que sea seleccionado, y por consiguiente es lo que define la cantidad de flujo que se tiene a la salida en dirección longitudinal del canal.

Debido a las condiciones fisiológicas, la analogía no es exactamente igual a las perfusiones sanguíneas, puesto que la velocidad en estas zonas es aproximadamente de un tercio de los resultados obtenidos en este ejercicio. Además, la longitud de los capilares es tan pequeña que el tiempo que tarda la sangre en pasar es de uno hasta tres segundos como máximo. Aunque

no se comparan en condiciones exactamente iguales con los capilares donde ocurren la perfusión, es decir, el flujo sanguíneo lento y continuo, sirve como una analogía para un estudio posterior con parámetros similares. Sin embargo, se sienta un precedente para aplicaciones de esta índole, con los avances tecnológicos y de manufactura expuestos en este trabajo.

Tomando en cuenta los comentarios anteriores, este trabajo pretende estudiar el flujo de un fluido newtoniano que circula en un microcanal rectangular con paredes permeables considerando condiciones de deslizamiento. Cabe aclarar que este es un problema puramente hidrodinámico, por lo tanto, el objetivo es obtener el campo de presiones y los perfiles de velocidad en las direcciones longitudinal y transversal. Para este fin, las ecuaciones de la mecánica de fluidos que se resolverán en este problema, son las de continuidad y de momentum en las direcciones  $x$  y  $y$ , las cuales se presentan de manera adimensional y se reescriben en su forma variacional para poder adaptarlas a FreeFem++, un software de uso libre que nos permite obtener la solución a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, obteniendo resultados que se presentan gráficamente con la finalidad de hacer una comparación cualitativa y cuantitativa de distintas condiciones en las propiedades de permeabilidad y deslizamiento en las paredes del microcanal. De esta manera, este estudio pretende contribuir a la aplicación futura en distintos proyectos y áreas de investigación en la industria, lo cual, se mencionó previamente en el estado del arte.



## Capítulo 2

# Planteamiento del Problema

En la Figura 2.1, podemos apreciar el esquema del modelo físico a estudiar. Tal y como se puede observar en la geometría del esquema, se adopta un sistema 2D de coordenadas rectangulares  $(x, y)$  con el origen en la entrada del microcanal, donde  $x$  representa la dirección longitudinal, mientras que la coordenada  $y$  es la dirección transversal. En este trabajo, se asu-

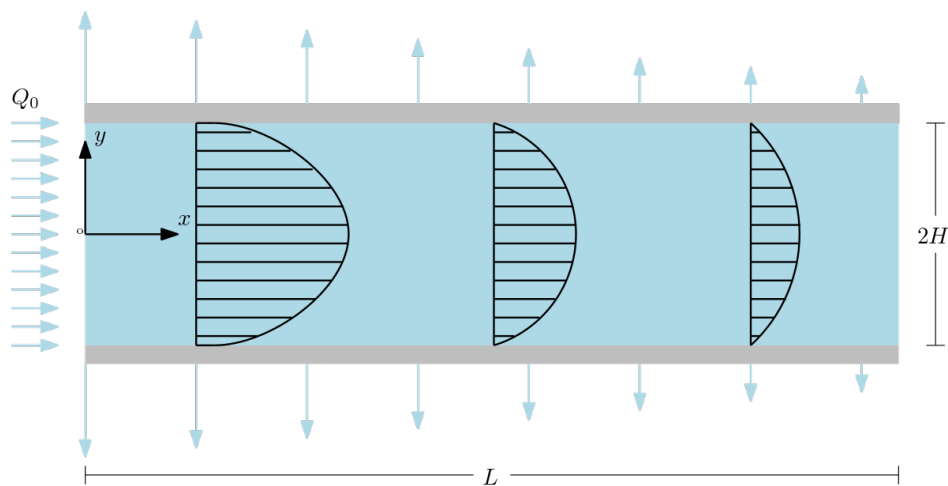


Figura 2.1: Fluido Newtoniano que circula en un microcanal rectangular, con flujo filtrándose por las paredes.

me que un fluido newtoniano esta circulando en un microcanal rectangular con paredes permeables. El microcanal se encuentra caracterizado por las siguientes dimensiones geométricas: la altura media del canal, representada por  $H$  y la longitud como  $L$ , donde la longitud es superior a la altura del microcanal:  $L \gg H$ . De esta manera, el anterior aspecto geométrico define un microcanal muy grande y el espesor de las paredes es mucho más pequeño que cualquier otra dimensión geométrica. Considerando que el sistema cuenta con paredes permeables, en el esquema se puede apreciar como el perfil de velocidades, el cual fue previamente alimentado por un caudal de entrada  $Q_0$ , en la dirección longitudinal es mayor a la entrada con respecto a la salida, como consecuencia de la fuga en la dirección transversal. Otro aspecto a considerar es que por tratarse escalas del orden de las micras, se considera que puede existir deslizamiento por parte del fluido en las paredes del microcanal.

## 2.1. Ecuaciones para el modelo físico

Tomando en cuenta los comentarios anteriores, las ecuaciones en variables físicas que definen el comportamiento de un fluido newtoniano que circula en un microcanal rectangular con paredes permeables son las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en  $x$  y  $y$ . Considerando que se analiza un flujo estacionario, incompresible, completamente desarrollado, laminar con condición de simetría en el centro del microcanal, se definen de la siguiente manera las ecuaciones:

Ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

Ecuaciones de momentum en  $x$  y  $y$ ,

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.3)$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente.  $p$  representa la presión. También,  $\rho$  y  $\eta$  son la densidad



y la viscosidad, respectivamente. En el presente trabajo, asumimos a las propiedades como uniformes, es decir, serán constantes y no cambian por alguna influencia física. Para poder resolver el anterior sistema de ecuaciones diferenciales parciales, en donde se tienen tres incógnitas, con la obtención del perfil de velocidades en ambas direcciones, así como el campo de presiones, se requiere de condiciones de frontera con la finalidad de obtener una solución particular al presente problema.

## 2.2. Condiciones de frontera

Es importante mencionar que la temperatura, aunque es un factor importante en problemas de microfluídica, se considera constante para el presente análisis, por lo que no se toma en cuenta en las ecuaciones, y las propiedades del fluido como la densidad y la viscosidad tienen variaciones insignificantes, tal que no se ven afectados los resultados obtenidos, de modo que estos valores también permanecen constantes.

Para las ecuaciones descritas anteriormente en variables físicas, se establecen las siguientes condiciones de frontera en variables físicas:

$$u(x=0, y) = \frac{Q_0}{2HW}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (2.4)$$

$$u(x, y = \pm H) = -s\eta \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (2.5)$$

$$v(x=0, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (2.6)$$

$$v(x, y = 0) = 0, \quad \text{y} \quad v(x, y = \pm H) = \kappa \Delta p. \quad (2.7)$$

La importancia física de las condiciones de frontera (2.4)-(2.7) se encuentra basada en las siguientes consideraciones. La primera y segunda expresión de (2.4) representan la velocidad característica de entrada en términos del caudal al inicio del microcanal y la condición de un flujo totalmente desarrollado en la dirección  $x$  a la salida del microcanal, respectivamente. En el caso de la velocidad  $u$  se determina a partir del caudal  $Q$  que se define como el producto de la velocidad del fluido en dirección longitudinal por el área transversal  $A$ . Para determinar el caudal a la entrada del microcanal se integra la velocidad  $u$  a la entrada por el diferencial

de área, para considerar las variaciones de la velocidad en la determinación del caudal  $Q_0$ , definido por  $Q_0 = \int u \, dA$ . La primera expresión de la ecuación (2.5) representa el efecto del deslizamiento en las paredes internas del microcanal [28], el cual es controlado por la longitud de deslizamiento  $\lambda$ , definido por el producto del coeficiente de deslizamiento  $s$  y la viscosidad  $\eta$ . A esta expresión se le conoce como la ley de deslizamiento lineal de Navier, [29, 30]. La definición del parámetro  $s$  varía inversamente a la variación de la presión  $p$ , [31], tal y como se muestra en la siguiente expresión

$$s = Ae^{-\epsilon p},$$

donde  $A$  es el coeficiente de deslizamiento a presión nula,  $\epsilon$  es el parámetro de caída exponencial, y  $p$  la presión. Debido a la dependencia de la presión, podemos asegurar que el deslizamiento ocurre cuando la presión es relativamente grande. La distancia de deslizamiento gráficamente podría representarse como un perfil de velocidades de un canal de dimensiones más grandes. La separación entre las paredes de el canal real y el canal de referencia se conoce como longitud de deslizamiento. Cuando el valor del parámetro  $\lambda = 0$ , la velocidad  $u$  en las paredes es igual a cero, por la condición de no deslizamiento,

$$u(y = \pm H) = 0.$$

Por otro lado, la segunda expresión de la ecuación (2.5) define la condición de simetría hidrodinámica, debido a que solo vamos a analizar la mitad de la altura  $2H$  del microcanal. Además, la ecuación (2.6) considera que la velocidad en la dirección transversal a la entrada del microcanal, así como su derivada al final del microcanal es igual a cero. Finalmente, la ecuación (2.7) describe que nuevamente la velocidad en la dirección transversal en el centro del microcanal es igual a cero, mientras que la última expresión determina que las paredes son permeables, y este efecto se verá reflejado por el coeficiente de permeabilidad  $\kappa$  y la caída de presión  $\Delta p = p - p_0$ , donde  $p_0$  es la presión en la región exterior al microcanal, [21].

El sistema de ecuaciones (2.1)-(2.3) junto con las condiciones de frontera (2.4)-(2.7), se pueden reescribir de manera adimensional. La principal razón de esta transformación es identificar los parámetros físicos más importantes. Por tal motivo, a continuación se propone el siguiente análisis de orden de magnitud.

### 2.3. Análisis de Orden de Magnitud

Partiendo de la definición de la ecuación de continuidad (2.1), se debe cumplir que ambos términos deben ser del mismo orden de magnitud, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}.$$

La anterior ecuación puede reescribirse en términos de los valores característicos de las variables de velocidad  $u$  y  $v$ , y de la posición  $x$  y  $y$ , como:

$$\frac{u_c}{L} \sim \frac{v_c}{H},$$

entonces se puede definir la velocidad  $v_c$  en función de las variables características  $u_c$ ,  $H$  y  $L$ ,

$$v_c \sim \frac{u_c H}{L} \quad (2.8)$$

Continuando con este análisis de orden de magnitud, ahora se analiza a la presión con ayuda de la ecuación (2.2), en donde se comparan la caída de la presión en la dirección longitudinal con los efectos viscosos en la dirección transversal,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

por lo que en términos de los parámetros característicos, se observa que

$$\frac{\Delta p_c}{L} \sim \eta \frac{u_c}{H^2},$$

y despejando la caída de presión característica en el sistema,

$$\Delta p_c \sim \frac{\eta u_c L}{H^2}. \quad (2.9)$$

Con base en el análisis anterior, se pueden obtener las siguientes variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_c}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c} \quad \text{y} \quad \tilde{p} = \frac{p - p_0}{\Delta p_c}, \quad (2.10)$$

donde  $u_c$ ,  $v_c$  y  $\Delta p_c$  están definidas por

$$u_c \sim \frac{Q_0}{2HW}, \quad v_c \sim \frac{u_c H}{L} \quad \text{y} \quad \Delta p_c \sim \frac{\eta u_c L}{H^2}$$

En resumen, los parámetros de longitud adimensionales se definen por el valor máximo que puede tomar la variable, según la geometría del canal. Para la variable  $x$  que define la posición longitudinal, el máximo valor que puede tomar es de la longitud  $L$  del microcanal, mientras que para la posición transversal  $y$ , medida desde el centro del canal, el valor máximo que debe tomar es  $H$ , es decir, la mitad de la altura total del microcanal. En el caso de la velocidad en dirección longitudinal  $\tilde{u}$ , se establece por definición que la velocidad característica  $u_c$  es la que define el caudal de entrada del fluido. La velocidad característica  $v_c$  se expresa en función de la velocidad  $u_c$ , y de las longitudes características  $L$  y  $H$ . De igual manera, para la presión se define el valor característico  $\Delta p_c$  en función de los valores característicos  $u_c$ ,  $L$ ,  $H$  mencionados arriba, y la viscosidad cinemática del fluido  $\eta$ , como se define en base a las características propias del fluido y de la geometría del microcanal.

## 2.4. Ecuaciones Adimensionales

Con ayuda del análisis de orden de magnitud de la sección anterior, se llegaron a las variables adimensionales de la ecuación (2.10), permitiendo la adimensionalización de las ecuaciones (2.1)-(2.3), las cuales tienen la siguiente forma:

Ecuación adimensional de continuidad

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0. \quad (2.11)$$

Ecuación adimensional de momentum en  $X$

$$\varepsilon Re \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \quad (2.12)$$

Ecuación adimensional de momentum en  $Y$

$$\varepsilon^3 Re \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right). \quad (2.13)$$

El procedimiento algebraico de la adimensionalización se puede consultar en el Apéndice A. De las ecuaciones adimensionales (2.11)-(2.13), se

pueden definir los siguientes parámetros adimensionales:

$$\varepsilon = \frac{H}{L}, \quad Re = \frac{\rho u_c H}{\eta}, \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\kappa \eta}{H} \quad (2.14)$$

El parámetro  $\varepsilon$  conocido como la esbeltez, relaciona la altura media  $H$  del microcanal con la longitud total  $L$ . El número de Reynolds adimensional  $Re$  es un parámetro conocido, utilizado ampliamente en la mecánica de fluidos para caracterizar el flujo del fluido en función de la densidad  $\rho$ , la velocidad característica  $u_c$ , la altura media  $H$  y la viscosidad cinemática  $\eta$ . El parámetro  $\beta$  representa el coeficiente de filtración adimensional, que relaciona la permeabilidad característica de la membrana  $\kappa$ , la viscosidad  $\eta$  y la altura media del microcanal  $H$ .

## 2.5. Condiciones de frontera adimensionales

Por otro lado, las condiciones de frontera en variables físicas dadas por las ecuaciones (2.4)-(2.7), pueden ser transformadas en su forma adimensional con ayuda de las variables adimensionales de la siguiente forma:

$$\int_0^1 \tilde{u}(X=0, Y) dY = 1, \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right|_{X=1} = 0, \quad (2.15)$$

$$\tilde{u}(X, Y = \pm 1) = -\delta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}, \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad (2.16)$$

$$\tilde{v}(X=0, Y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right|_{X=1} = 0, \quad (2.17)$$

$$\tilde{v}(X, Y=0) = 0, \quad \text{y} \quad \tilde{v}(X, Y = \pm 1) = \frac{\beta}{\varepsilon^2} \tilde{p}. \quad (2.18)$$

De las condiciones de frontera adimensionales, se define el parámetro adimensional para el deslizamiento  $\delta$ , definido por

$$\delta = \frac{\lambda}{H} = \frac{s\eta}{H}.$$

Los valores que pueden tomar las variables adimensionales van del cero al uno, donde cero es el valor más alejado de la variable característica,

Parámetro	Valor
$H$	50-200 $\mu m$ , [17]
$L$	$10^{-2}$ $m$ , [17]
$\rho$	$\sim 10^3$ $kg/m^3$ , [32]
$\eta$	$1,002 \times 10^3$ $kg/m s$ [32]
$\lambda$	$2 \times 10^{-6} - 5 \times 10^{-8}$
$\kappa$	$\sim 1 \times 10^{-12}$

Cuadro 2.1: Propiedades geométricas y físicas

y uno es cuando toma el valor de esa variable. En algunos casos el valor máximo de la variable es superior a su valor característico, por lo que la variable adimensional tendrá un valor superior a 1, principalmente para las variables que describen el comportamiento del fluido, como las velocidades  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$ , y la presión  $\tilde{p}$ .

Tal y como se puede ver en las ecuaciones adimensionales (2.11)-(2.13), juunto a sus respectivas condiciones de frontera (2.15)-(2.18), las ecuaciones van acompañadas de parámetros adimensionales, los cuales están definidos por medio de sus propiedades en variables físicas. Por tal motivo, se muestra en la Tabla 2.1 algunas propiedades físicas para poder sustituirlos en los parámetros adimensionales y generar la Tabla 2.2. En esta última tabla se muestran los valores que toman los parámetros adimensionales, con las condiciones de análisis de esta tesis de licenciatura. En el estudio de la microfluídica el número de Reynolds es del orden de  $Re \sim 10^{-2}$  aproximadamente [32], sin embargo, también se pueden obtener mayores o iguales a la unidad, tal y como sucedió en el presente análisis. Ahora bien, en el estudio numérico se vario al número de  $Re$  de .1 a 1, y los resultados fueron prácticamente los mismos, por lo que se estableció el valor de este parámetro  $Re = 1$ . Además, se debe cumplir que la relación entre la altura media del microcanal y la longitud total (esbeltez  $\varepsilon$ ) sea menor que 1, es decir  $\varepsilon \ll 1$ , o bien,  $L \gg H$ . Igualmente, el parámetro  $\beta$  debe ser del orden del cuadrado de la esbeltez  $\varepsilon$ ,  $\beta \sim \varepsilon^2$ . Como máximo, la relación entre los parámetros adimensionales  $\beta$  y el cuadrado de la esbeltez  $\varepsilon$  debe ser aproximadamente  $\frac{\beta}{\varepsilon^2} \sim 0.3$ .

Parámetro adimensional	Valor
$\beta$	$\sim 10^{-5} - 10^{-8}$
Re	$\sim 1$
$\varepsilon$	$\sim .01$

Cuadro 2.2: Valores de los parámetros adimensionales

Un aspecto que se debe de resaltar en esta tesis, es que a diferencia de otros trabajos que se encuentran en la literatura y en la que definen la velocidad  $\tilde{u}$  con un valor numérico, aquí se presenta a la velocidad en la dirección longitudinal en términos del caudal de entrada, integrando todos los valores de la velocidad desde el centro hasta las paredes del microcanal. En la entrada del canal,  $x = 0$ , la integral de la velocidad es igual a 1,

$$\int_0^1 \tilde{u} dY = 1. \quad (2.19)$$

También, la velocidad en dirección longitudinal  $\tilde{u}$  en las paredes ahora se representa en forma diferencial, debido a la hipótesis de deslizamiento en las paredes que se analiza en el presente trabajo. Finalmente, la velocidad de filtrado del fluido  $\tilde{v}$ , o la velocidad del permeado en las paredes se analiza en función de los parámetros adimensionales involucrados en el sistema. Esta es la velocidad que se da en dirección transversal, y depende de la variación de la presión y la relación del coeficiente de filtración  $\beta$  con el cuadrado de la esbeltez  $\varepsilon$  del microcanal.

Tal y como se comentó en la introducción, se hará uso del software de uso libre FreeFem++ para resolver el sistema de ecuaciones adimensionales junto a sus respectivas condiciones de frontera, mediante la técnica de elemento finito. Sin embargo, para este fin, se requiere garantizar la convergencia para las variables adimensionales  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  y  $\tilde{p}$ , y para ello se debe de considerar la parte temporal en las ecuaciones de momentum, quedando el sistema de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad (2.20)$$

A diferencia de las ecuaciones 2.2 y 2.3, en las ecuaciones adimensionales de momentum  $x$  y  $y$ , previo al término convectivo se añade la variación

de la velocidad en el tiempo. Aunque se estableció previamente que el flujo es estacionario, es preciso incluir la parte temporal, multiplicado por los mismos parámetros adimensionales que el término convectivo en estas ecuaciones para poder diferenciar la solución actual de la solución en un tiempo anterior. Este punto quedará definido de mejor manera en el siguiente capítulo.

Ecuación adimensional de Momentum en  $X$ :

$$\varepsilon \text{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \varepsilon \text{Re} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \quad (2.21)$$

Ecuación adimensional de Momentum en  $Y$ :

$$\varepsilon^3 \text{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \varepsilon^3 \text{Re} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right). \quad (2.22)$$

Finalmente, y a pesar de colocar la parte temporal en las ecuaciones adimensionales (2.20)-(2.22), las condiciones de frontera (2.15)-(2.18), siguen siendo las mismas. Lo único que se va a considerar con la parte temporal de las nuevas ecuaciones de momentum son condiciones iniciales que se le debe de asignar al código numérico para garantizar y ayudar a la convergencia del método numérico.



## Capítulo 3

# Método Numérico

Para la solución numérica del problema es preciso emplear un programa computacional que sea capaz de resolver el problema de microfluídica del presente trabajo, con las condiciones de frontera especificadas en el capítulo anterior. Existen muchos programas dedicados a la de mecánica de fluidos, que fácilmente nos permiten obtener los resultados gráficos y numéricos. La mayoría están diseñados para ingresar únicamente los parámetros y condiciones específicas de cada problema, sin explicar el funcionamiento del sistema, ni las ecuaciones involucradas para la solución, por lo que este trabajo opta por la solución de las ecuaciones de continuidad y momentum con las condiciones de frontera expuestas, con un software de licencia libre, que nos permita obtener los mismos resultados.

FreeFem++ es un software de licencia libre capaz de obtener la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden por medio del método de elementos finitos. En el programa se introducen las ecuaciones y condiciones de frontera específicas para cada problema, para la resolución del problema físico. Se define el dominio de análisis denominado comunmente por  $\Omega$ , con lo que se la región interna de análisis definida por la frontera  $\Gamma$ , o bien, un modelo simple semejante a la geometría que se desea analizar. Posteriormente se debe definir la malla sobre la superficie de análisis, que es la división del modelo en fragmentos más pequeños para tener una mejor definición de los resultados y un análisis más preciso, donde la suma de los elementos finitos constituyen el modelo completo. De ahí parte el concepto de refinamiento de malla, donde se incluyen más

elementos en el análisis, por lo tanto el modelo se divide en partes más pequeñas para su análisis, y se obtiene como resultado un valor más cercano al real. En ocasiones no es necesario incrementar el número de elementos para el análisis, puesto que esto significa incrementar el tiempo que tarda el servidor en resolver el problema, así como el costo. Por eso es necesario efectuar un análisis de malla para determinar si es necesario hacer el refinamiento. La malla que se selecciona nos permite asignar un valor numérico para cada variable una posición específica, formando una matriz de datos que el sistema resuelve con un resolutor lineal.

El análisis del problema comienza recreando la superficie que se va a analizar. Se debe definir un área de control por la que se aplican las distintas condiciones de frontera que se desean analizar, para obtener los valores correspondientes. Al tratarse de un problema simétrico respecto al plano central en  $x = 0$ , podemos recurrir a un análisis más simplificado, que estudia la parte superior del problema. Por igual de condiciones, en la parte inferior se tiene el mismo comportamiento. El ejercicio se sitúa a la entrada del microcanal en la parte superior, de modo que la pared de abajo es el eje que corresponde con el centro del canal, la pared derecha es la salida del canal, la parte superior corresponde a la pared permeable donde se tiene un flujo de permeado, y la pared izquierda es la entrada del sistema, por donde ingresa el fluido al microcanal. El sentido de desplazamiento del fluido va de izquierda a derecha.

La función ‘square’ que genera automáticamente una malla de elementos triangulares en un dominio rectangular de las dimensiones especificadas por el usuario. Para facilitar el análisis es posible definir con otras dos variables las dimensiones que se ingresen a la función, de modo que se pueda modificar la longitud del canal, así como el ancho, independientemente. Posteriormente en la instrucción se especifican el número de elementos por pared, o divisiones, que se precisan para el análisis. Igualmente es posible crear esta característica por medio de una variable, para modificarla fácilmente, e incrementar el número de elementos para un análisis más detallado.

La malla seleccionada para la solución del problema tiene 20000 elementos que, como se observa en la Figura 3.1, concentra una mayor cantidad de elementos en la parte izquierda. Se desarrolló de esta manera para tener la máxima definición posible en esta zona que corresponde a la entrada

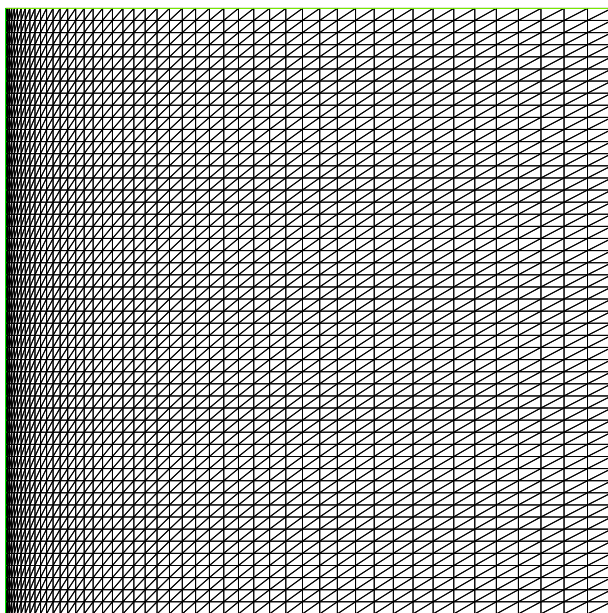


Figura 3.1: Malla.

del sistema, puesto que con una menor cantidad de elementos su comportamiento no era homogéneo, y en algunos casos los resultados no siempre tendían a ser lineales, Al aumentar la resolución en la entrada, se solucionó este problema. En la zona de la derecha no fue necesario aumentar la cantidad de elementos, porque los resultados no presentan este problema, y aumentar los elementos significaría aumentar innecesariamente el tiempo de procesamiento. La función para generar la malla queda en función de las variables enteras  $x$  y  $y$ , que especifican las dimensiones del dominio donde se aplica la malla. Además de definir el número de elementos, se estableció en el compilador que la diferencia entre el valor anterior y actual de todas las variables debe converger a  $1 \times 10^{-12}$ , para minimizar el error de los resultados y obtener una mejor definición de la solución.

### 3.1. Formulación Variacional

Para el análisis en FreeFem++ se debe incluir una variable temporal, para que el sistema pueda diferenciar entre los resultados obtenidos de la solución actual, por ejemplo  $u^{n+1}$ , de una solución anterior  $u^n$ . El tiempo característico se obtiene a partir de la longitud  $L$  del canal y la velocidad característica en esta dirección  $u_c$ ,

$$t_c = \frac{L}{u_c} \quad (3.1)$$

con lo que se obtiene el parámetro que describe el tiempo desde la entrada al sistema  $X = 0$  hasta la salida  $X = 1$ . Este valor es diferente de la tiempo real, puesto que no considera las variaciones de la velocidad  $\tilde{u}$ , se basa únicamente en la velocidad característica  $u_c$  que se obtiene con el caudal de entrada. Este parámetro sirve únicamente como referencia para el programa, entonces no afecta los resultados finales.

Para que el programa pueda solucionar las ecuaciones de continuidad y momentum en  $x$  y  $y$ , se deben introducir las ecuaciones adimensionales en su forma variacional o débil, que es una forma alternativa de escribir las mismas ecuaciones de forma integral, dando lugar a ecuaciones que se tratan mediante los métodos del álgebra lineal para un espacio vectorial.

Para ello es necesario hacer uso de las fórmulas de Green, que parten

del teorema de la divergencia. La forma de estas fórmulas es

$$\iint_{\Omega} (\nabla f) \eta \, d\Omega = - \iiint_{\Omega} f (\nabla \eta) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\bar{n} f) \eta \, dS \quad (3.2)$$

$$\iint_{\Omega} f \nabla g \, d\Omega = - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, d\Omega + \int_{\Gamma} f \nabla g \cdot \bar{n} \, dS \quad (3.3)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones lineales,  $\eta$  es una función auxiliar, las integrales de superficie  $\Omega$  se establecen en el dominio bidimensional de  $x$  y  $y$ , y las integrales de línea indican las condiciones sobre la frontera  $\Gamma$ .

Como se mencionó anteriormente, el flujo Poiseuille que se plantea para este estudio establece que el flujo es laminar en estado estable. La condición de entrada para este tipo de problemas puede estar en términos de la velocidad del fluido o de la presión de entrada. Como el valor de la presión no la conocemos, la velocidad es el valor de entrada, y la presión es la variable que se obtendrá con la resolución del problema. Esto significa que las condiciones iniciales se establecen en cuanto a la velocidad de entrada, por lo que los términos de las integrales de línea sobre la frontera  $\Gamma$  son igual a cero para este caso. Entonces las fórmulas de Green de la divergencia que se utilizan para el presente análisis son

$$\iint_{\Omega} (\nabla f) \eta \, d\Omega = - \iiint_{\Omega} f (\nabla \eta) \, d\Omega \quad (3.4)$$

$$\iint_{\Omega} f \nabla g \, d\Omega = - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, d\Omega \quad (3.5)$$

Finalmente, para la formulación variacional es necesario establecer un número de variables auxiliares igual al número de variables que se obtendrán con la solución, o bien, igual al número de ecuaciones que componen el sistema de ecuaciones que se debe resolver. En este caso, las variables son las velocidades  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$ , y la presión  $\tilde{p}$ , por lo que se establecen las tres variables auxiliares  $u_a$ ,  $v_a$  y  $p_a$ . Estas variables auxiliares se multiplican por cada una de las ecuaciones para el modelo físico. La velocidad auxiliar  $u_a$  se multiplica por la ecuación de momentum en  $X$ , la velocidad auxiliar  $v_a$  por la ecuación de momentum en  $Y$ , y la presión auxiliar  $p_a$  por la ecuación de continuidad.

El procedimiento completo para escribir las ecuaciones para el modelo físico en su forma variacional comienza con la ecuación de continuidad. Una vez que la ecuación está igualada a cero se efectúa la integral de superficie en el dominio de  $\Omega$ , y se multiplican las derivadas parciales de las velocidades  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$  con respecto a  $X$  y  $Y$  por la variable auxiliar correspondiente. En este caso, la variable auxiliar es la presión  $p_a$ . Con el fin de relacionar las tres ecuaciones con las tres variables se agrega el último término  $p$  multiplicado por el factor de escala  $\xi$ , cuyo valor es de  $1 \times 10^{-12}$ , el cual es muy cercano al cero, por lo que no afecta los resultados de la ecuación de continuidad.

$$\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) + \xi \tilde{p} \right] p_a d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Este último término también se multiplica por la presión auxiliar y se integra en el dominio de  $\Omega$ . Entonces, la ecuación de continuidad en forma variacional queda de la siguiente manera.

$$\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) \right] p_a d\Omega + \iint_{\Omega} \xi \tilde{p} p_a d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

La ecuación de Momentum en  $X$  comienza igualando la ecuación a cero, por lo que los términos del lado derecho de la igualdad pasan al lado izquierdo con signo contrario. La ecuación se multiplica por  $u_a$  y se integra en  $\Omega$ . Los términos de la ecuación de Momentum en  $X$  adimensional son del orden de los términos adimensionales que los multiplican.

$$\begin{aligned} & O(\varepsilon \text{Re}) \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) \right] u_a d\Omega \\ & + \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} u_a d\Omega - O(\varepsilon^2) \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right] u_a d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

La ecuación de momentum en  $X$  en su forma variacional se expresa con la función “*convect*” sumando todos los términos de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
& O(\varepsilon \text{Re}) \iint_{\Omega} \frac{\tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} u_a \, d\Omega \\
& + O(\varepsilon \text{Re}) \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], \Delta t, \tilde{u}^n) u_a \, d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \tilde{p}^{n+1} \frac{\partial u_a}{\partial X} \, d\Omega + O(\varepsilon^2) \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} \frac{\partial u_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \frac{\partial u_a}{\partial Y} \, d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}^{n+1}}{\partial \vec{n}} u_a \, d\Omega = 0 \tag{3.9}
\end{aligned}$$

El procedimiento para escribir en su forma débil la ecuación de momentum en  $Y$  se muestra en el apéndice C, por lo que la ecuación queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
& O(\varepsilon^3 \text{Re}) \iint_{\Omega} \frac{\tilde{v}^{n+1}}{\Delta t} v_a \, d\Omega \\
& + O(\varepsilon^3 \text{Re}) \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], \Delta t, \tilde{v}^n) v_a \, d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \tilde{p}^{n+1} \frac{\partial v_a}{\partial Y} \, d\Omega + O(\varepsilon^4) \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}^n}{\partial X} \frac{\partial v_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}^n}{\partial Y} \frac{\partial v_a}{\partial Y} \, d\Omega = 0 \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Al introducir las ecuaciones para el modelo físico en el programa para su solución también es posible observar la representación gráfica de los resultados que arroja el sistema con dicho análisis. Como se puede notar, el movimiento del fluido corresponde con los resultados esperados para un problema semejante. Primeramente para la presión, observamos que a la entrada se tiene un valor mayor que a la salida, con lo que se origina el desplazamiento del fluido. Las ecuaciones observadas en el capítulo anterior especificaban la variación de presión únicamente en dirección de la coordenada longitudinal  $x$ . No existe variación de la presión en dirección de la coordenada transversal  $y$ . La representación gráfica de la caída de presión corresponde con estos parámetros correctamente.

La velocidad en dirección longitudinal  $\tilde{u}$ , describe a la entrada un perfil de velocidades determinado por la ecuación B.42 que se muestra más adelante. La figura 3.3 muestra los resultados que se obtienen con el parámetro

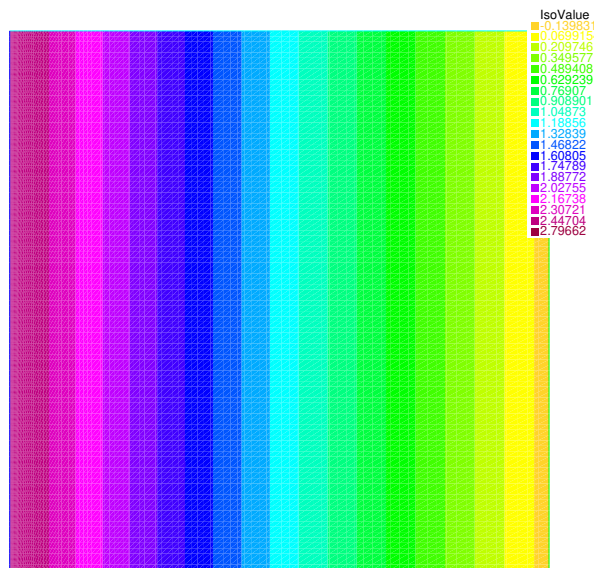
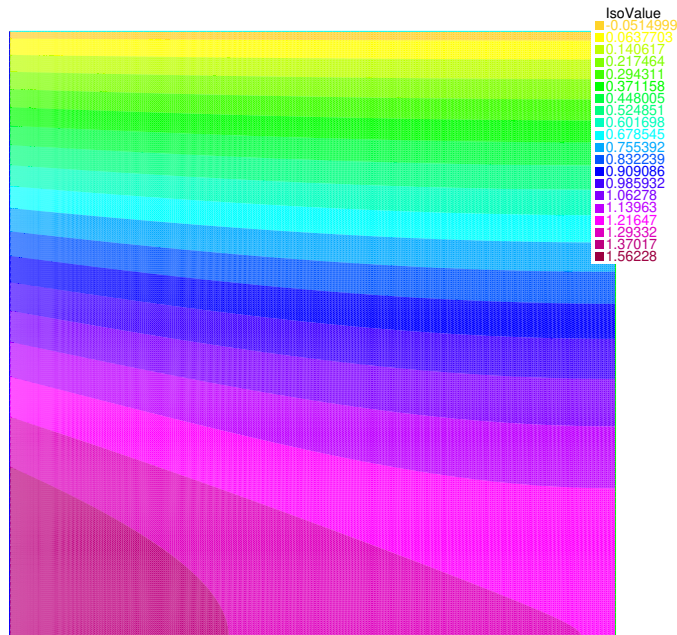


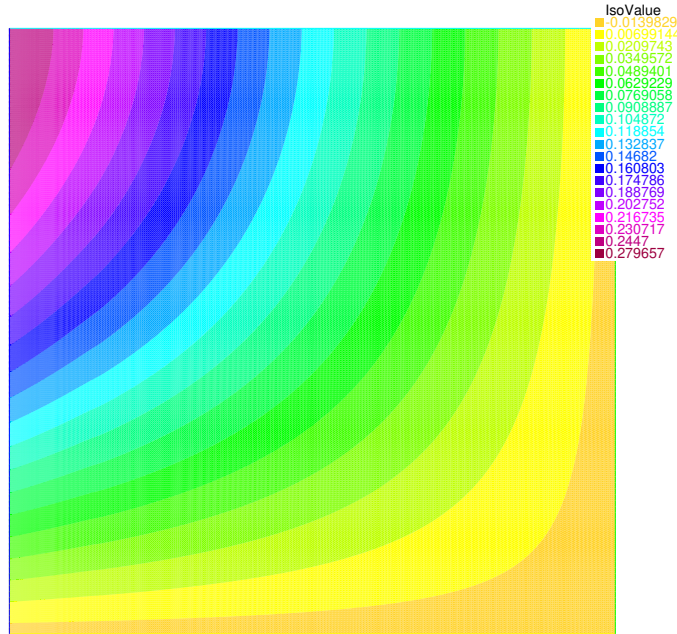
Figura 3.2: Presión



Figura 3.3: Velocidad  $\tilde{u}$ 

de deslizamiento  $\delta = 0,01$  y el coeficiente de filtración  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ , los valores más altos respectivamente considerados en este estudio. En otras palabras, la velocidad  $\tilde{u}$  del fluido en contacto con las paredes es diferente de cero. La figura comprueba efectivamente los resultados del análisis con la variación del parámetro de deslizamiento. Además se observan también las condiciones de frontera que, a la entrada del microcanal, caudal  $Q$  es el máximo, así como en el centro del microcanal, en  $Y = 0$ , la velocidad  $\tilde{u}$  es máxima.

La figura 3.4 muestra la variación de la velocidad  $\tilde{v}$ , con  $\delta = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . La variación de la velocidad en dirección transversal es directamente proporcional a la variación del coeficiente de filtración  $\beta$ , como se puede notar en dicha representación. El valor más grande de la velocidad  $\tilde{v}$  se da a la entrada, por lo que cumple con el comportamiento señalado en las ecuaciones y las condiciones de frontera expuestas. Además

Figura 3.4: Velocidad  $\tilde{v}$ 

se observa como el valor de la velocidad disminuye conforme se acerca el fluido a la salida del microcanal, por lo que coincide con el comportamiento esperado para este problema. Como indica las condiciones de frontera para la velocidad  $\tilde{v}$ , la velocidad en el centro del microcanal  $Y = 0$  es igual a cero  $\tilde{v} = 0$ . El análisis que se centra en las paredes, en  $Y = 1$ , muestra que la variación de la velocidad depende únicamente de la coordenada longitudinal  $X$ , tal como apuntan las condiciones de frontera para esta variable. Pese a todo, el valor de la velocidad  $\tilde{v}$  es muy pequeño, por lo que la variación de la velocidad  $\tilde{u}$  respecto a su valor máximo sin deslizamiento y sin filtración por las paredes es semejante a los resultados que se obtienen con la máxima filtración y deslizamiento.

### 3.2. Validación de resultados

La figura 3.5 presenta los perfiles de la velocidad  $u$  para la coordenada transversal  $X = 0,5$ , el parámetro de deslizamiento  $\delta = 0$  y coeficiente de filtración  $\beta = 1 \times 10^{-5}$  que se obtienen para 5000, 20000, 45000 y 80000 elementos. El análisis de malla nos permite tener una idea precisa de la diferencia que habría comparado los resultados obtenidos con el tamaño de malla utilizado, así como determinar si es necesario hacer el estudio con un mallado que nos permita obtener una mejor definición de los resultados. Sin embargo, como notamos en la imagen, los resultados son prácticamente iguales desde que tenemos 5000 elementos, por lo tanto no habría una diferencia significativa entre los resultados observados con estos distintos tamaños de malla.

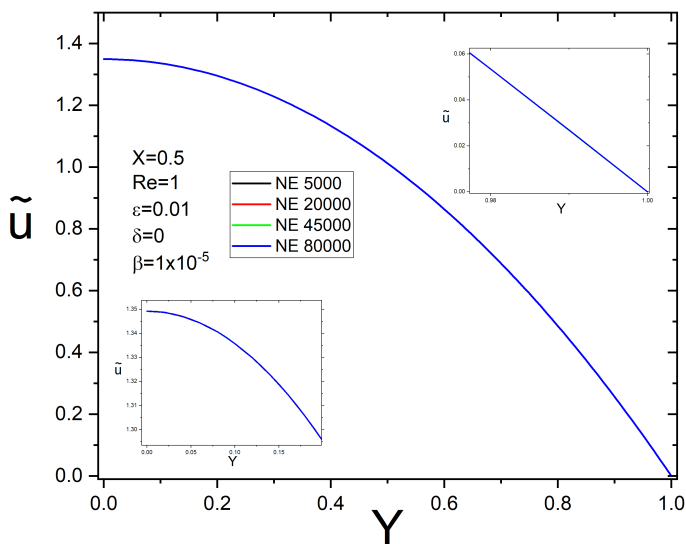


Figura 3.5: Análisis de malla para  $\tilde{u}$

La figura 3.6 presenta los perfiles de la velocidad  $u$  para la coordenada transversal  $Y = 1$ , el parámetro de deslizamiento  $\delta = 0$  y coeficiente de

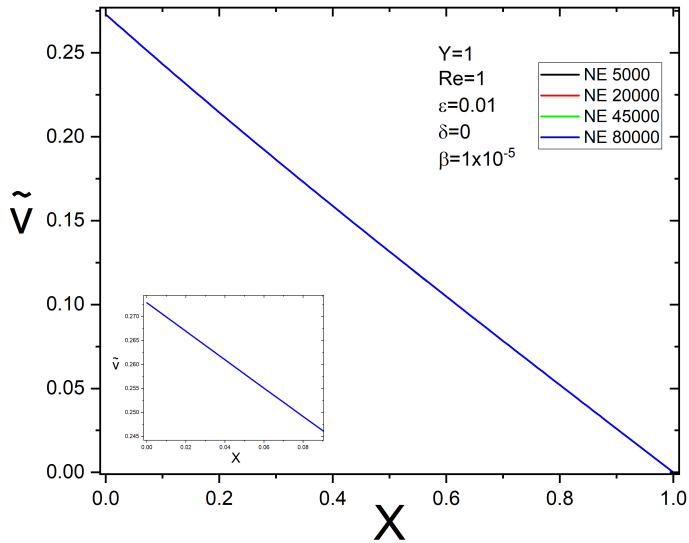


Figura 3.6: Análisis de malla para  $\tilde{v}$

filtración  $\beta = 1 \times 10^{-5}$  que se obtienen para 5000, 20000, 45000 y 80000 elementos. Como se mencionó anteriormente, las variaciones son tan ligeras que no justifican aumentar el número de elementos para el análisis, por lo que se puede obtener resultados precisos para este análisis aún con 5000 elementos. Para este trabajo se decidió trabajar con 20000 elementos, con lo que se obtienen los mismos resultados sin necesidad de aumentar el tiempo de compilación en el servidor, y podemos asegurar que los resultados obtenidos son correctos y nos permitirán obtener resultados reales de las variables de velocidad y presión, así como del comportamiento del fluido en el microcanal, de modo que podremos obtener conclusiones pertinentes al respecto.

## Capítulo 4

# Resultados

Los valores recogidos de las simulaciones hechas se presentan a continuación en las gráficas que correlacionan los valores correspondientes, con la finalidad de observar los efectos esperados con las distintas condiciones propuestas en las posiciones seleccionadas, que nos permitan posteriormente llegar a conclusiones pertinentes sobre el tema. Los valores que permanecen constantes son los que rigen el comportamiento del experimento. Puesto que no se puede variar súbitamente la geometría del microcanal, el parámetro que la caracteriza, la relación entre el ancho y la longitud del mismo, conocido como la esbeltez, permanece en un valor constante para todas las gráficas que se observarán en adelante. Por otro lado, teniendo en cuenta que se desea conocer el comportamiento del fluido variando la posición, permeabilidad de las paredes, y la condición de deslizamiento o no deslizamiento del fluido en esta zona, la velocidad del fluido debe ser siempre la misma. Además de esto, el flujo Newtoniano mantiene las mismas condiciones de operación, como temperatura y presión atmosférica. De este modo, sus propiedades también permanecen constantes, como la viscosidad y densidad. El último parámetro relacionado, una longitud característica, la del microcanal, también permanece constante, por lo tanto, el otro parámetro que no cambia en todo el ejercicio es el número de Reynolds. En adelante se estudiarán los datos obtenidos por medio de las gráficas. En cada una de ellas se abordarán diferentes cuestiones que nos ayudarán a comparar los resultados, y obtener conclusiones pertinentes sobre la validez de las condiciones propuestas. Se abordarán todas ellas, y se especificará la razón por

la que se ven tales resultados. Principalmente se recordará la física del problema, donde se debe cumplir siempre la conservación de masa y energía, junto con las ecuaciones de flujo de fluidos, las Ecuaciones de Continuidad y Momentum en direcciones X Y.

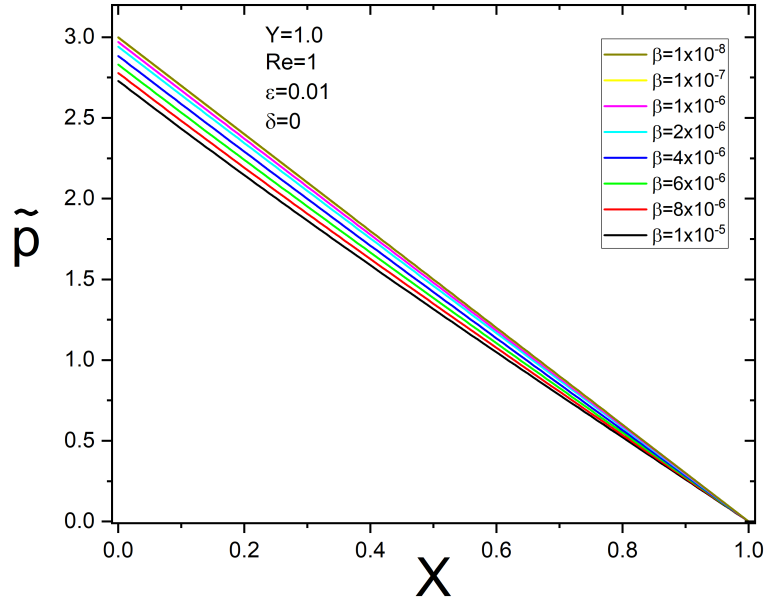


Figura 4.1: Perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ .

En la figura 4.1 se muestran los perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ . Como se observa en la gráfica y en los resultados obtenidos, la presión es una función de la coordenada longitudinal y muestra un comportamiento lineal; es decir, en la entrada del microcanal existe un valor máximo que toma la presión, mientras que en la salida se alcanza

un valor mínimo. Tal y como se expresa en los parámetros adimensionales, se está analizando el caso en las paredes del microcanal ( $Y = 1$ ), donde no hay deslizamiento ( $\delta = 0$ ), y las únicas variaciones que se presentan están en términos del parámetro  $\beta$ , parámetro que analiza el efecto de permear el fluido en la dirección transversal sobre las paredes del sistema. Los perfiles de la presión tienen un comportamiento muy similar entre sí, para los distintos valores de  $\beta$ , desde la entrada del microcanal hasta la salida. Conforme el parámetro adimensional  $\beta$  aumenta, existe una ligera caída en la presión, siendo mucho más notoria en la entrada. Esto se debe a que conforme haya una mayor pérdida de fluido por las paredes del microcanal, habrá una menor cantidad de flujo circulando en la dirección longitudinal, aspecto que propiciará una disminución en la caída en la presión, siendo el caso más extremo cuando  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ , caso en donde existe mayor pérdida de fluido en la dirección transversal. En otras palabras, existe una caída de presión cuando se tiene mayor fluido permeado por las paredes. Cuando el permeado es mínimo, la presión en las paredes es la máxima. Como ya se comentó, para todos los perfiles, el comportamiento es lineal, sin cambios repentinos, lo que nos indica un flujo estacionario, según lo que esperamos para un flujo laminar a bajos números de Reynolds, como consecuencia de la microfluídica.

En la figura 4.2 se muestran los perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ . Notamos que las variaciones en la presión se relacionan con la posición en  $X$ , de modo que existe una función para la posición en  $Y = 0,4$ . El comportamiento nuevamente es de una pequeña caída de presión que depende de la variación del parámetro adimensional  $\beta$ . Con esta gráfica podemos observar que la presión no se ve afectada por la variación de la coordenada transversal  $Y$ , únicamente por la posición en  $X$ . Como se observa, los perfiles de la presión en la coordenada longitudinal en la figura 4.2 tienen un mismo comportamiento, que en la figura 4.1. El valor máximo coincide en ambos casos para la presión adimensional  $\tilde{p}$ . De igual manera, se conserva una relación lineal para todos los casos, con ligeras caídas de presión, que son más notorias en la entrada del microcanal, que en la salida. Además es en este punto donde se obtiene el valor mínimo para este parámetro. Todas las curvas convergen al mismo valor mínimo

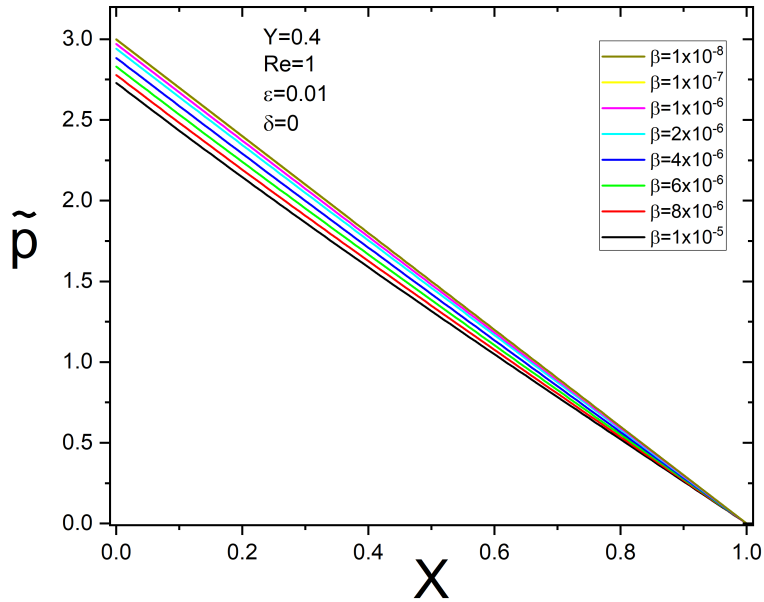


Figura 4.2: Perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ .

en la salida del microcanal.

En la figura 4.3 se muestran los perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para tres posiciones diferentes en la coordenada transversal  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . La presión adimensional  $p$  como función de la coordenada longitudinal  $X$ , tiene el mismo comportamiento para cada valor de  $Y$ . Pese a que en la gráfica se observa una sola recta en color azul, y pudiera interpretarse que la presión en las posiciones seleccionadas siguen el mismo patrón que  $Y = 1$ , y aún en el cuadro donde se agrandan los valores no se nota alguna variación, los valores para cada caso no son exactamente iguales, existe



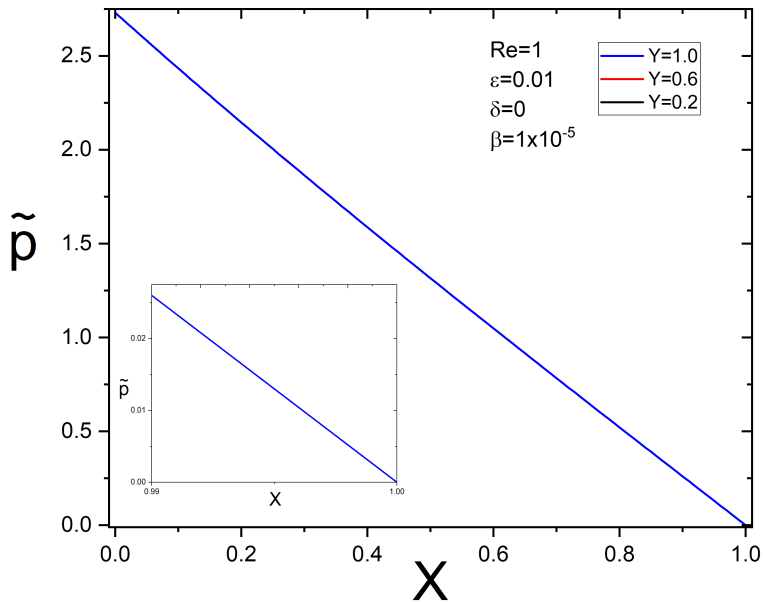


Figura 4.3: Perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para tres posiciones diferentes en la coordenada transversal  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

una ligera caída de presión conforme el fluido se aproxima a las paredes por donde ocurre la filtración. No obstante, la diferencia entre cada valor es muy pequeña, del orden de  $1 \times 10^{-5}$ , tal que en la práctica no se ve una diferencia. Entonces los perfiles de presión para cada valor de  $Y$ , va disminuyendo gradualmente conforme se aproxima a las paredes, pero esta caída de presión es despreciable, por lo que solo se ve una variación real en la coordenada longitudinal  $X$ . El perfil de presión también tiene un comportamiento lineal, con el valor máximo en la entrada, y el valor mínimo a la salida del microcanal. Considerando que el parámetro relacionado con la permeabilidad de la membrana,  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ , el cual es el máximo valor

de  $\beta$ , y aún así no se modifica considerablemente la presión a lo largo de la coordenada transversal, ocurre lo mismo con los demás valores de  $\beta$ , por ser menor el fluido permeado a través de las paredes.

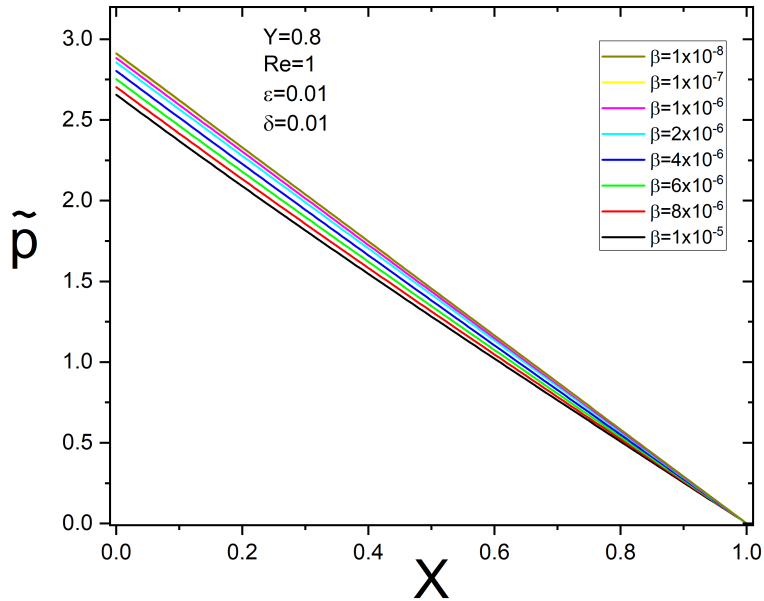


Figura 4.4: Perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,8$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ .

En la figura 4.4 se muestran los perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,8$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ . El comportamiento en la gráfica 4.4 es muy similar al de las gráficas 4.1 y 4.2, mostradas anteriormente. En todos los casos se escogió una posición aleatoria en la coordenada transversal  $Y$ . En este caso se observa la caída de presión conforme se desplaza el fluido por el microcanal, en dirección longitudinal  $X$ , donde nuevamente existe

una relación inversamente proporcional al parámetro  $\beta$  relacionado con la permeabilidad del fluido por las paredes. En la entrada del microcanal es donde se observa el mayor valor, y a la salida se tiene el menor valor de  $\tilde{p}$ . A diferencia de las anteriores figuras 4.1 y 4.2, el valor máximo que se alcanza en esta figura 4.4 es menor comparado con el valor de la condición sin deslizamiento, cuando el valor de  $\delta = 0$ . Sin embargo, los demás factores que determinan su comportamiento son iguales, como en la relación lineal de la presión adimensional  $\tilde{p}$  con la posición longitudinal  $X$ . Igualmente, al mayor valor del parámetro  $\beta$  le corresponde el menor valor de presión  $\tilde{p}$ , puesto que existe una mayor cantidad de fluido permeado por las paredes, y es menor la cantidad de fluido que circula en la dirección longitudinal  $X$ . Este mismo comportamiento se observa conforme el fluido se desplaza en dirección transversal  $Y$ .

En la figura 4.5 se muestran los perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para tres posiciones diferentes en la coordenada transversal  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . La función entre la variable adimensional  $\tilde{p}$  y la coordenada longitudinal  $X$  para los tres distintas posiciones en la coordenada transversal  $Y$ , tiene un comportamiento lineal como se observa en la gráfica. Los tres perfiles para la presión  $\tilde{p}$  tienen el mismo patrón que se observa anteriormente en la figura 4.3, que la diferencia entre cada recta no es notoria a simple vista, aún acercando el rango de la proyección como se ve en el cuadro inferior izquierdo. No obstante, la presión no es exactamente la misma para cada caso, conforme el fluido se aproxima a las paredes la presión disminuye, por lo que el valor mínimo de la presión se encuentra justo en  $Y = 1$ . La variación entre cada perfil graficado es más notoria a la entrada del microcanal, en  $X = 0$ . También presión máxima se encuentra a la entrada del microcanal, y todas las rectas convergen al valor mínimo en la salida del microcanal. Comparado con el caso sin deslizamiento observado en la figura 4.3, la presión máxima en la figura 4.5 es menor, debido a que se está filtrando la máxima cantidad de fluido posible, y que el fluido que se desplaza en dirección longitudinal lo hace con facilidad, gracias al desplazamiento en las paredes. En cuanto a otras características permanecen igual en ambos casos, por ejemplo, la presión mínima se encuentra a la salida del microcanal, y no cambia la presión respecto a la coordenada transversal  $Y$ . Sin embargo, si aumentara

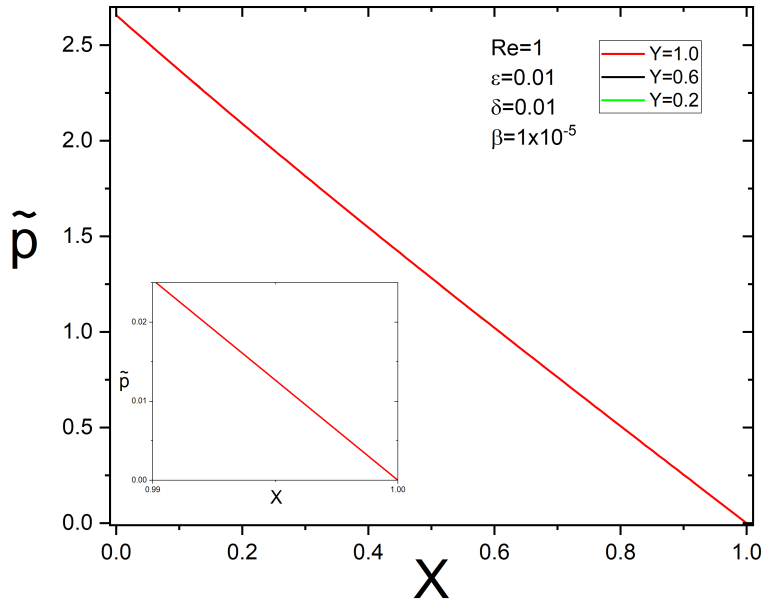


Figura 4.5: Perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para tres posiciones diferentes en la coordenada transversal  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

el parámetro  $\beta$ , relacionado con el flujo permeado a través de las paredes, el valor de  $\tilde{p}$  aumentaría, debido a que se desplaza una mayor cantidad del fluido total en dirección longitudinal.

En la figura 4.6 se muestran los perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . La función de la presión  $\tilde{p}$  guarda una relación lineal que tiene su valor máximo en la entrada, y converge al valor mínimo a la salida del microcanal. El perfil que tiene el valor máximo es el caso sin deslizamiento, y la recta con la menor presión es el caso con

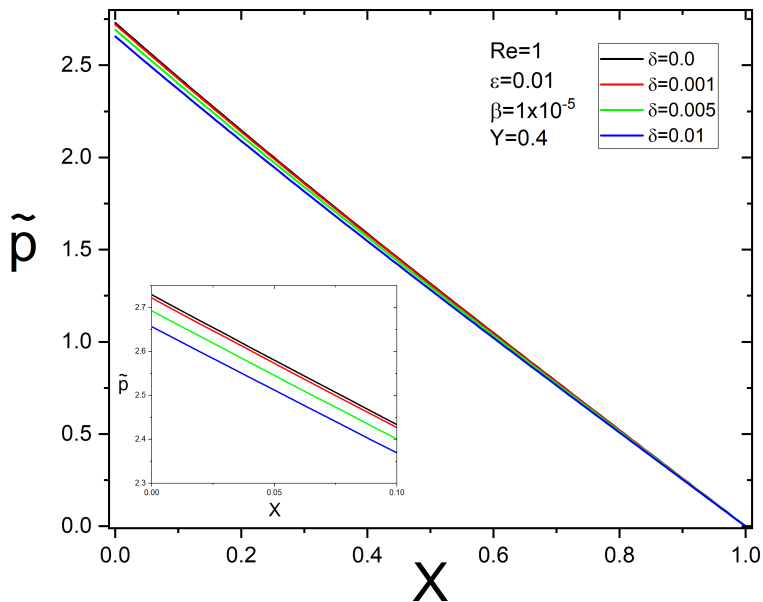


Figura 4.6: Perfiles de la presión adimensional,  $\tilde{p}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

el máximo deslizamiento. Debido a que se están graficando los valores con el máximo valor del parámetro  $\beta$  es que disminuye el valor de la presión máxima para todos los casos. Además de esto, el tener el máximo valor del deslizamiento  $\delta$  hace que el fluido se desplace con mayor facilidad, por lo que con ambas condiciones la presión total observada disminuye. El estar más cerca del centro del microcanal que a las paredes no se nota una diferencia significativa, comparado con la presión en las paredes, cuando  $Y = 1$ . Finalmente, podemos predecir que las gráficas con un menor valor de  $\beta$ , haría que aumentara un poco más el valor máximo a la entrada de todos los perfiles graficados, y estos convergieran igualmente al valor mínimo a

la salida del sistema, con un comportamiento lineal. Debido a que se está desplazando una mayor cantidad de fluido en dirección longitudinal, y es poco el que se filtra por las paredes, es que se observaría este cambio en la presión. Todos estas conductas apoyan los comportamientos observados anteriormente y nos confirman la veracidad de los resultados observados.

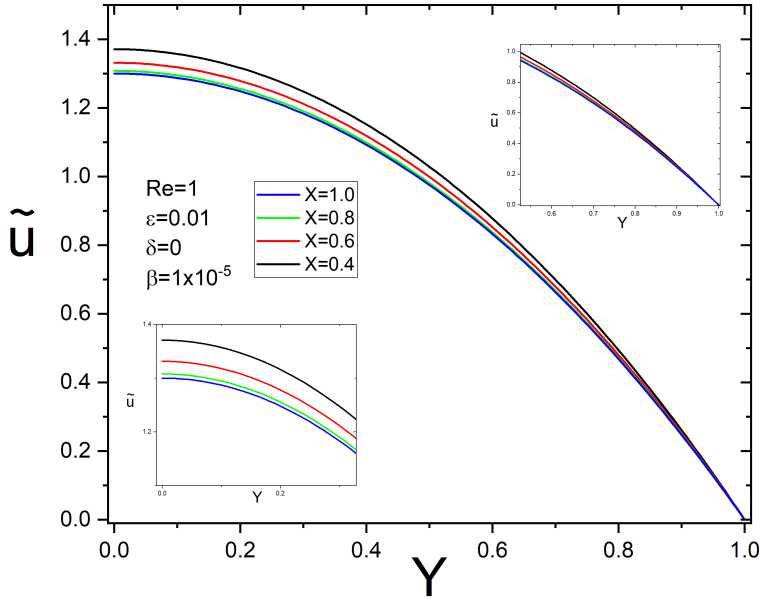


Figura 4.7: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para cuatro posiciones diferentes de la coordenada longitudinal  $X$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

En la figura 4.7 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para cuatro posiciones diferentes de la coordenada longitudinal  $X$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . La relación entre la velocidad  $\tilde{u}$  y la posición  $Y$  mantiene un comportamiento simple,

para todos los valores de la posición longitudinal  $X$ . Se observa la caída de velocidad mientras se analiza el fluido desde el centro del microcanal hasta las paredes, donde se nota que la caída del valor de la velocidad es gradual, hasta llegar al valor mínimo en las paredes del microcanal. La velocidad máxima la encontramos en el centro del microcanal, en  $Y = 0$ , y en la posición más cercana a la entrada del microcanal. Por consiguiente, el valor mínimo de la velocidad se obtiene en la curva que analiza la velocidad en la salida del microcanal. Los resultados concuerdan con lo esperado, que la velocidad máxima se encuentra en la entrada del microcanal, en el centro del mismo. Además notamos como la velocidad disminuye conforme el fluido se aproxima a la salida del microcanal. Como el valor del parámetro de deslizamiento  $\delta = 0$ , todos los perfiles convergen en  $Y = 1$ , donde le corresponde el valor de  $\tilde{u} = 0$ . La caída en la velocidad  $\tilde{u}$  es más notoria a la entrada del microcanal. Considerando que se simularon los perfiles de velocidad con el máximo valor de  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ , el valor de  $\tilde{u}$  sería menor, si se comparara con los resultados obtenidos con un valor de  $\beta$  menor, ya que disminuiría la velocidad  $\tilde{v}$ , pues se estaría filtrando por las paredes una menor cantidad del fluido que entra al sistema, y como consecuencia incrementaría  $\tilde{u}$ .

En la figura 4.8 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $X = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ . Se aprecia la variación de la velocidad  $\tilde{u}$  en función de la posición  $Y$ , con el parámetro de deslizamiento  $\delta = 0$ . Dada esta condición, el valor de la velocidad en las paredes ( $Y = 1$ ), es igual a cero,  $\tilde{u} = 0$ . En cuanto a la posición longitudinal, se analizan los efectos con los valores dados para cada parámetro, en una zona cercana al centro del microcanal, que para fines prácticos se obtienen los mismos valores y la misma conducta. La diferencia entre cada perfil es notoria principalmente en el centro del microcanal, en  $Y = 0$ , donde se notan los efectos de aumentar disminuir el valor del parámetro adimensional  $\beta$ . De todos los ejemplos mostrados, la velocidad máxima se encuentra en el caso en el que  $\beta = 1 \times 10^{-8}$ , es decir, donde se está permeando la menor cantidad de fluido. El perfil con la menor velocidad en el centro del microcanal es cuando  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . En un análisis en la entrada del microcanal,  $X = 0$ , se vería un incremento en la velocidad máxima en el centro del microcanal,

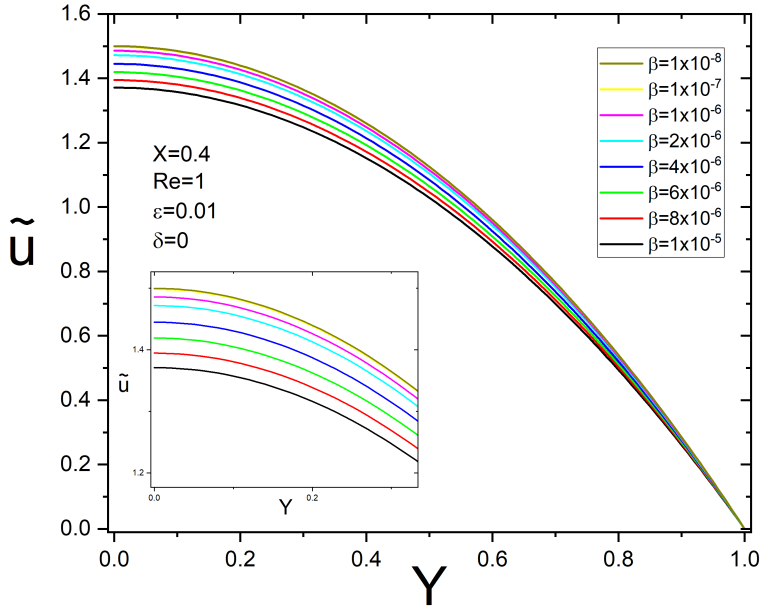


Figura 4.8: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $X = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ .

en  $Y = 0$ , comparado con los valores para esta figura.

En la figura 4.9 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para cuatro posiciones diferentes de la coordenada longitudinal  $X$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . Se presenta la velocidad  $\tilde{u}$  como función de la posiciones transversal  $Y$  principalmente, y como esta se relaciona con la posición longitudinal  $X$ . En el centro del microcanal, en  $Y = 0$  se tiene el valor máximo de  $\tilde{u}$ , siendo el valor máximo de todos los perfiles el más cercano a la entrada del microcanal, y el perfil con la menor velocidad en el centro se encuentra en la salida del sistema en  $X = 1$ , como se observa en el cuadro inferior izquierdo. El cambio o



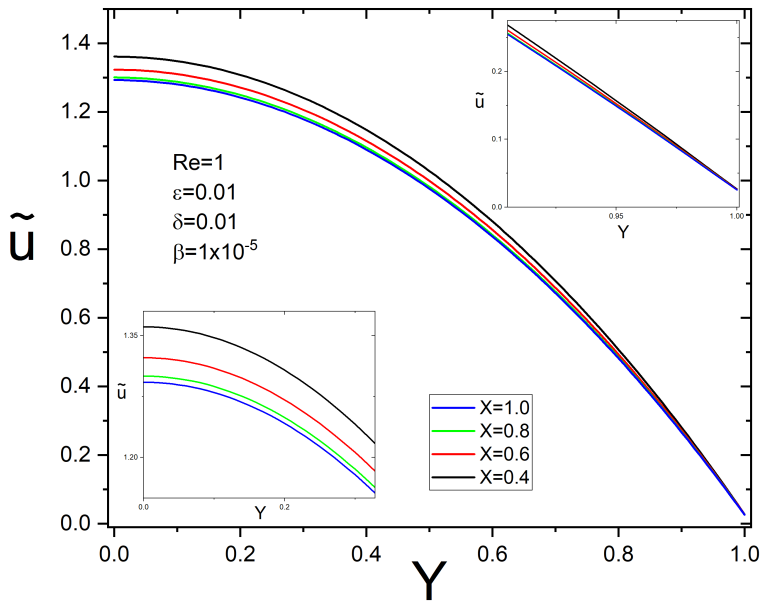


Figura 4.9: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para cuatro posiciones diferentes de la coordenada longitudinal  $X$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

caída en la velocidad es más notorio en las curvas graficadas que están más cerca a la entrada del microcanal, y cuando se acercan a la salida, la caída de velocidad es menor para distintas posiciones de la coordenada  $X$ . Por otro lado, al analizar los efectos en las paredes, con el valor máximo para el parámetro de deslizamiento  $\delta = 0,01$ , la velocidad en  $Y = 1$  es diferente de cero. En la aproximación del cuadro superior derecho que se encuentra dentro de la figura, se observa como el valor para todos los perfiles converge en este punto, pero no llega a ser cero. comparado con la velocidad total  $\tilde{u}$  del fluido es casi despreciable. Sin embargo, sí se modifican los valores de las variables involucradas en el análisis con este cambio de condiciones.

Todas las curvas se encuentran en este punto, por lo que la velocidad a lo largo del eje longitudinal  $X$  cumplen con esta condición. Por efecto de la filtración, la velocidad  $\tilde{u}$  disminuye, conforme el parámetro  $\beta$  aumenta. Entonces, para valores menor de  $\beta$ , la velocidad  $\tilde{u}$  aumentaría respecto a los valores observados en esta figura.

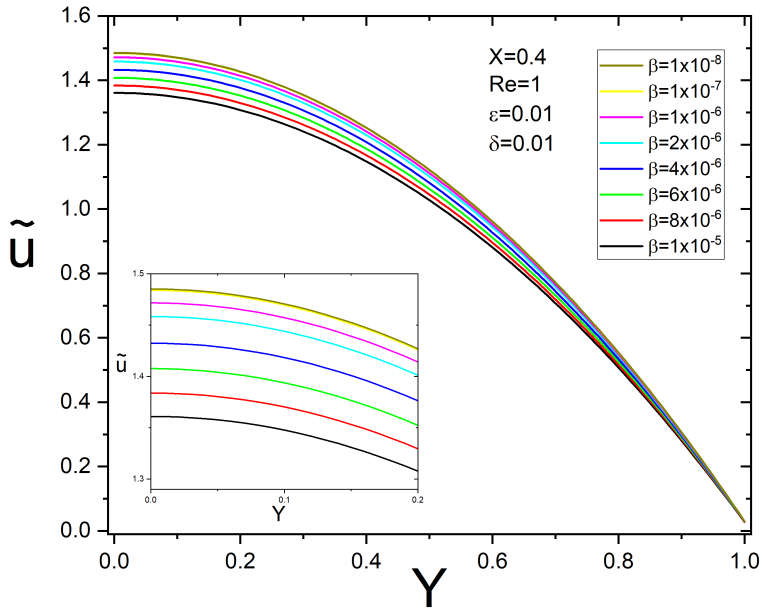


Figura 4.10: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $X = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ .

En la figura 4.10 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $X = 0,4$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ . El comportamiento como se puede ver, se asemeja al que existe en la figura 4.8, con una caída de la velocidad  $\tilde{u}$  para cada valor de  $\beta$ , la cual es evidente en el centro del microcanal, como lo

demuestra el cuadro inferior izquierdo que ofrece una mejor vista de los perfiles de velocidad. La diferencia con la figura 4.8 radica en el cambio de la condición de deslizamiento, con el valor máximo del parámetro  $\delta$ . El resultado es que las curvas graficadas convergen en  $Y = 1$ , donde la velocidad tiende a cero, sin llegar a ese valor, entonces se puede asegurar que se cumple la condición de deslizamiento, y la velocidad  $\tilde{u}$  en las paredes es diferente de cero.

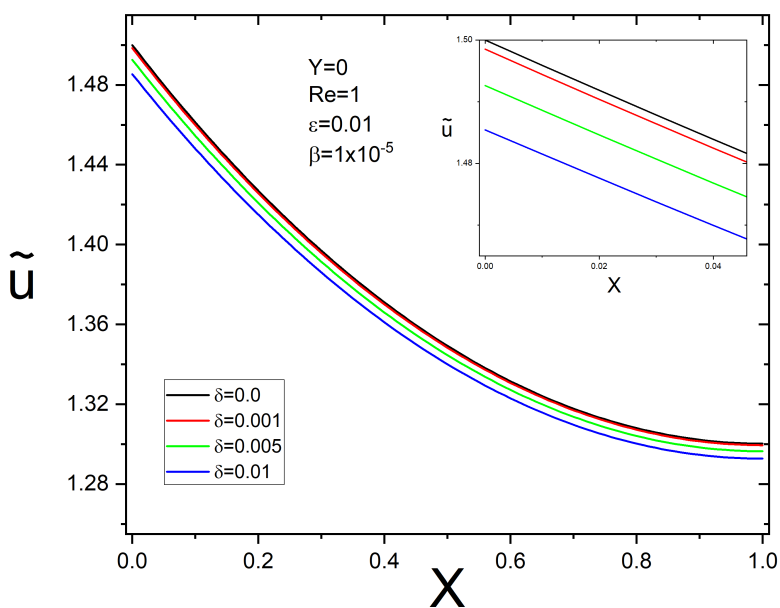


Figura 4.11: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

En la figura 4.11 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 0$ . Los valores de los parámetros adimensionales

$Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . En el centro del microcanal, la velocidad máxima se tiene a la entrada, cuando el parámetro  $\delta = 0$ . El parámetro adimensional  $\beta$  indica que el fluido que se está filtrando por las paredes permeables es el valor máximo para todos los casos estudiados, así que la velocidad  $\tilde{v}$  aumenta en todo el sistema, sobre todo en las zonas más cercanas a las paredes, donde se presenta un deslizamiento en dirección de la coordenada longitudinal  $X$ . En consecuencia, la velocidad  $\tilde{u}$  en el centro del microcanal disminuye con la condición de deslizamiento, y es máximo su valor cuando  $\delta = 0$ . La caída de la velocidad es evidente a la entrada del microcanal, en  $X = 0$ , y permanece esta diferencia constante en todo el recorrido longitudinal dentro del microcanal. A medida que el fluido se desplaza por el microcanal la velocidad disminuye progresivamente, con un comportamiento no lineal, hasta llegar a su valor mínimo a la salida. Como se espera, en  $X = 1$  la velocidad  $\tilde{u}$  es menor que en la entrada, en  $X = 0$ , sin embargo el valor es diferente de cero. El valor de la velocidad adimensional  $\tilde{u}$  es superior a 1, indica que en este punto la velocidad es superior a la velocidad característica.

En la figura 4.12 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 0,5$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . En este punto, la relación de la velocidad  $\tilde{u}$  con la posición  $X$  no permanece constante para los valores de  $\delta$ , como se observa en los tres cuadros que agrandan la figura para observar el comportamiento de los perfiles. En la entrada del microcanal, en  $X = 0$ , la velocidad  $\tilde{u}$  es máxima para todos los casos. Cuando no se tiene deslizamiento, el parámetro  $\delta = 0$ , y la velocidad  $\tilde{u}$  es la máxima de todos los perfiles que se muestran, mientras el caso con el máximo deslizamiento  $\delta = 0,01$  le corresponde la menor velocidad. Conforme el fluido se desplaza e incrementa el valor de la coordenada longitudinal  $X$ , los perfiles se van invirtiendo de orden. Aproximadamente a la mitad del microcanal se encuentra el punto donde se cruzan estos perfiles. En el cuadro superior derecho se observa la conducta descrita. A la salida la velocidad  $\tilde{u}$  es la mínima. Su valor adimensional se aproxima a la unidad. La velocidad  $\tilde{u}$  en este punto es diferente de cero. En este punto, el caso con el máximo deslizamiento,  $\delta = 0,01$ , es la máxima velocidad de todos los perfiles, y la mínima velocidad  $\tilde{u}$  se presenta cuando no hay deslizamiento,  $\delta = 0$ . Esta

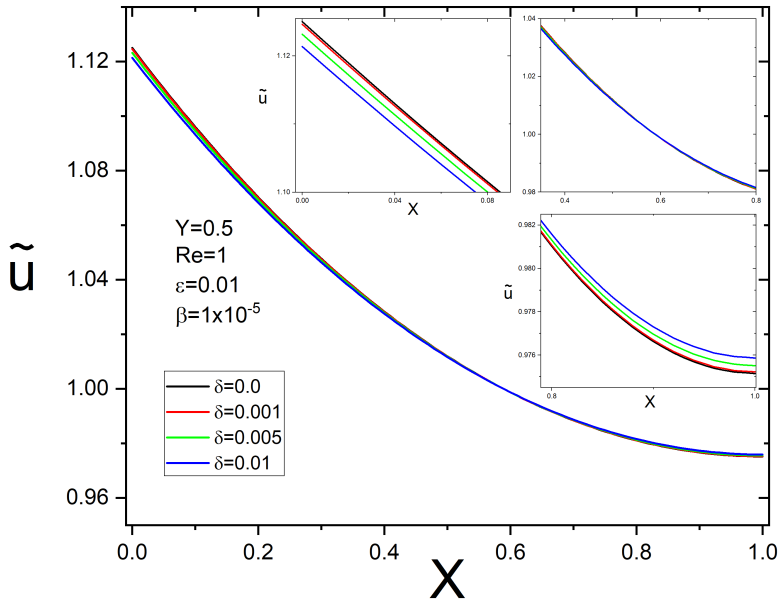


Figura 4.12: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 0,5$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

conducta se debe a que la velocidad  $\tilde{u}$  en las paredes es cero para  $\delta = 0$ , contrario al caso para  $\delta = 0,01$ , donde la velocidad depende del valor del parámetro de desplazamiento en las paredes  $\delta$ .

En la figura 4.13 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . En el análisis de  $\tilde{u}$  en función de la coordenada longitudinal  $X$ , se observa que la velocidad a la entrada tiene aproximadamente el mismo valor que en la salida del microcanal. Para  $\delta = 0$  el comportamiento es lineal. Se cumple que la velocidad tiene el

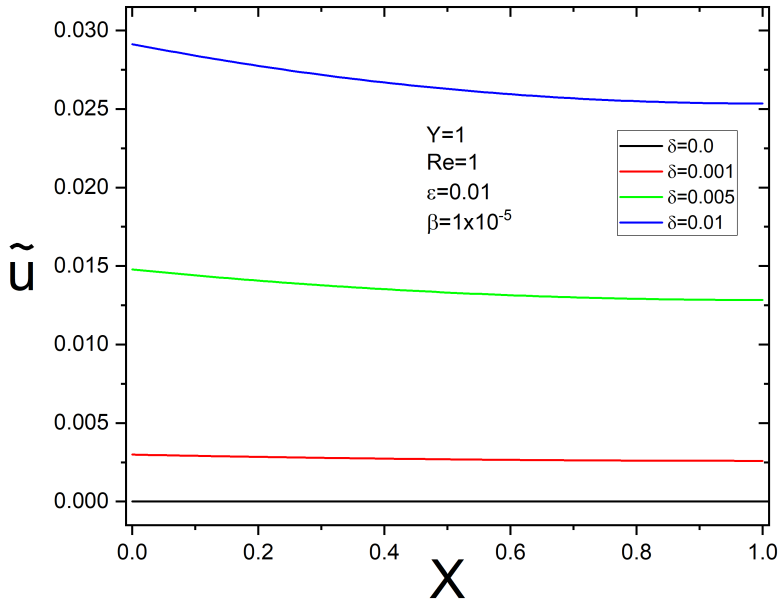


Figura 4.13: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{u}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

mismo valor en todo el microcanal. Para  $\delta = 0$ , la velocidad  $\tilde{u} = 0$ . Para los demás valores de  $\delta$ , se puede notar que la velocidad del fluido a la entrada es ligeramente superior que en la salida. Primeramente, se puede apreciar que los valores que toma  $\tilde{u}$  son pequeños comparados con los resultados obtenidos para la misma variable en  $Y = 0$ , donde llega a su valor máximo. Esto se debe a que se estudia la velocidad del fluido que está justo en contacto con las paredes del microcanal, en  $Y = 1$ . Sin embargo, esta conducta indica que sí existe una contribución en la velocidad  $\tilde{u}$  en dirección longitudinal  $X$  debido a la variación del parámetro de deslizamiento  $\delta$ , que se vuelve más relevante conforme incrementa. Su comportamiento es similar

a los vistos anteriormente para la misma variable, donde su valor máximo se encuentra a la entrada, y disminuye progresivamente hasta llegar a su valor mínimo a la salida.

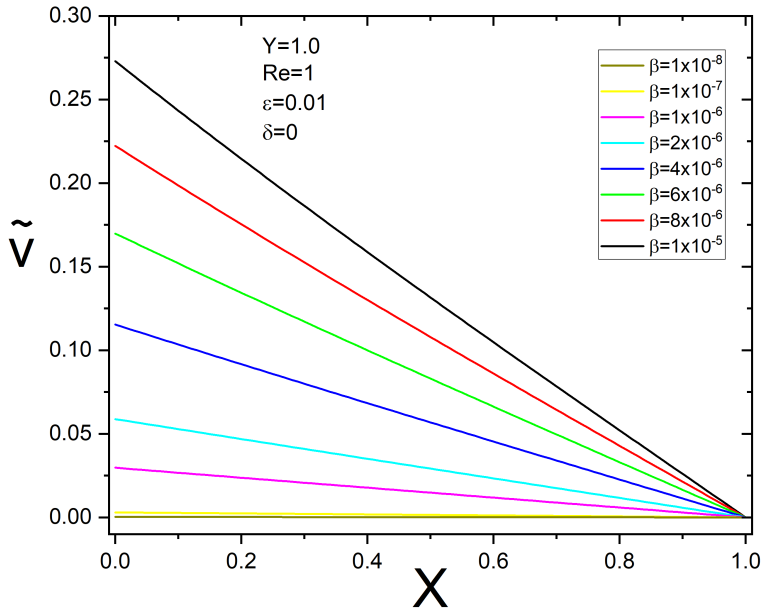


Figura 4.14: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\epsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ .

En la figura 4.14 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\epsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ . La velocidad en dirección transversal  $\tilde{v}$  en función de la coordenada longitudinal  $X$  presenta una relación lineal para todos los valores de  $X$ , donde el valor máximo de  $\tilde{v}$  para todos los perfiles se encuentra en la entrada, en  $X = 0$ , y disminuye hasta su valor máximo

cuando  $X = 1$ . En este punto convergen todos los perfiles de  $\tilde{v}$ . Los perfiles de la velocidad presentan una caída notoria especialmente a la entrada. De todos los casos analizados, es para  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ , el valor máximo que se relaciona con la permeabilidad de las paredes permeables, el que tiene el mayor valor de la velocidad en dirección transversal  $\tilde{v}$ . El menor valor de  $\tilde{v}$  le corresponde al perfil con el menor valor de  $\beta = 1 \times 10^{-8}$ . El análisis se efectuó justo en las paredes del microcanal ( $Y = 1$ ) donde se observa el efecto de la filtración, y la velocidad del fluido dependiendo del parámetro  $\beta$ . El efecto del parámetro  $\delta = 0$  ocasiona que la velocidad  $\tilde{u}$  sea igual a 0 en  $Y = 1$ , y en consecuencia la velocidad  $\tilde{v}$  en las paredes es máxima.

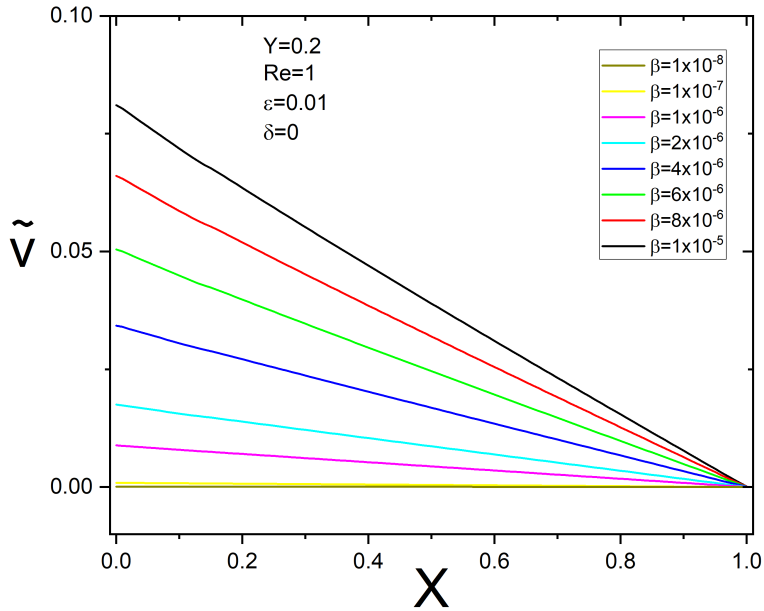


Figura 4.15: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,2$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\epsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ .



En la figura 4.15 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,2$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0$ . El rango de los valores que se presentan disminuyen considerablemente conforme se desplaza la zona de análisis desde las paredes y se aproxima hacia el centro del microcanal. La conducta de los perfiles de la velocidad  $\tilde{v}$  es semejante para todos los valores de la coordenada transversal  $Y$ . En la entrada se tiene la velocidad máxima, y la caída de los valores de la velocidad más evidente. El valor máximo de  $\beta$  le corresponde el perfil con la máxima velocidad  $\tilde{v}$  a la entrada. La velocidad para los valores más pequeños de  $\beta$  incluidos en el estudio permanece aproximadamente en el mismo valor mínimo en la entrada que en la salida. Debido al valor mínimo del parámetro  $\beta$  que se relaciona con la permeabilidad, la cantidad del fluido que se filtra por las paredes es casi nula, y por lo tanto existe muy poca influencia reflejada para la velocidad  $\tilde{v}$ . A la salida del sistema todos los perfiles convergen en el valor mínimo. La relación entre estas variables,  $\tilde{v}$  y  $X$ , tienden a un comportamiento lineal también cuando se aproximan al centro del microcanal.

En la figura 4.16 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para seis posiciones diferentes en la coordenada transversal  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . El comportamiento para distintos valores de la posición en la coordenada transversal  $Y$ , mantienen el mismo comportamiento observado en las anteriores gráficas. La velocidad  $\tilde{v}$  tiene su valor máximo en la entrada. En esta zona, conforme se acerca hacia las paredes, la velocidad transversal  $\tilde{v}$  aumenta. La velocidad máxima para  $\tilde{v}$  se presenta en  $X = 0$  y  $Y = 1$ , mientras que en el centro del microcanal, en  $Y = 0$ , tiene su valor mínimo. Este último caso presenta la misma velocidad desde la entrada hasta la salida del microcanal. También es en la salida del sistema,  $X = 1$ , donde todos los perfiles graficados convergen en el mismo valor mínimo. Cuando no existe deslizamiento en las paredes como lo indica el parámetro  $\delta = 0$ , la velocidad  $\tilde{v}$  tiene su valor máximo, comparado con los otros caso con deslizamiento, cuando  $\delta \neq 0$ , especialmente cuando su valor es máximo, en  $\delta = 0,01$ .

En la figura 4.17 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores

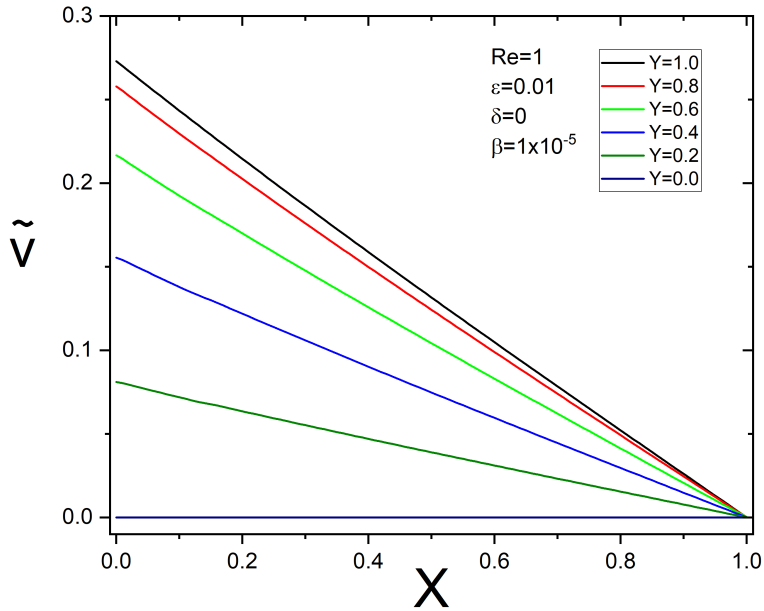


Figura 4.16: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para seis posiciones diferentes en la coordenada transversal  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . La relación que se observa para los valores propuestos del parámetro  $\delta$  que define el deslizamiento tienen un comportamiento muy similar entre sí. Todos los perfiles graficados se aproximan en la salida del microcanal, así como en la entrada con valores muy cercanos entre sí, tal que en el cuadro inferior derecho se acercan los perfiles para observar como la caída en la velocidad es casi imperceptible. Centrándose en el cuadro que agranda los valores, el perfil con la velocidad máxima le corresponde al valor de  $\delta = 0$ , cuando no hay deslizamiento. Como se observa, el flujo que se está filtrando por las paredes indicado con el

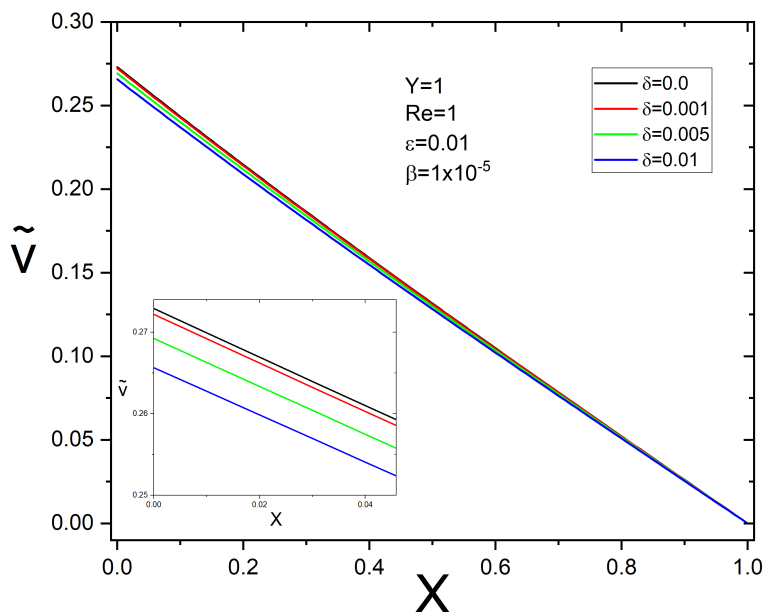


Figura 4.17: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

parámetro  $\beta$  es el máximo incluido, igual a  $1 \times 10^{-5}$ , por lo que la velocidad del fluido filtrado es la máxima posible para este estudio. La gráfica nos demuestra que la velocidad en dirección transversal  $\tilde{v}$  se ve afectada por la condición de deslizamiento en las paredes, determinada por  $\delta$ , evidente en la entrada del fluido al microcanal, hasta la salida, donde tienen el mismo valor de velocidad  $\tilde{v}$ .

En la figura 4.18 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ . El comportamiento de la velocidad es igual

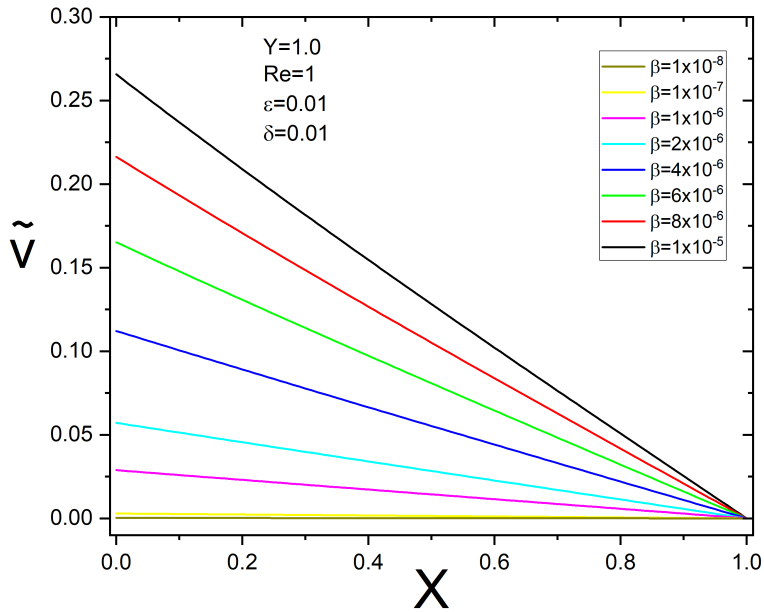


Figura 4.18: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 1,0$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\epsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ .

al que se observa en la figura 4.14, que muestra los perfiles de la velocidad para distintos valores de  $\beta$  para el mismo valor de la coordenada transversal  $Y = 1$ , con la diferencia que varía el parámetro  $\delta$ , que ahora en lugar de ser 0 tiene el valor máximo, de  $\delta = 0,01$ . La única diferencia que se observa es que los valores de la velocidad a la entrada, así como la caída de velocidad entre cada uno de los perfiles de velocidad, son menores para todos los casos. El perfil más notorio es el superior, para el valor de  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ , que tiene un valor inferior, comparado con el valor de la velocidad  $\tilde{v}$  para el mismo valor de  $\beta$  y  $X$ . La diferencia mostrada es muy poco perceptible. Excepto por estas conductas mencionadas, coincide con los otros rasgos de

comportamiento característicos de la variable adimensional en cuestión.

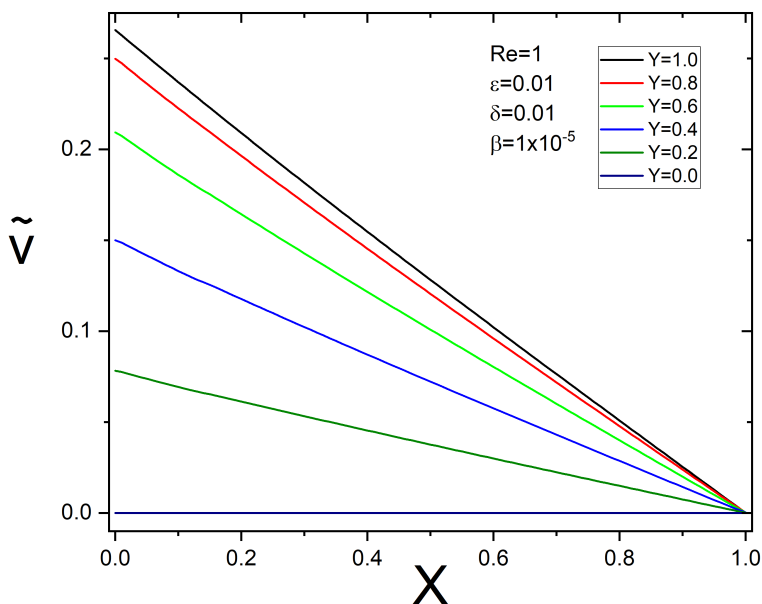


Figura 4.19: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para seis diferentes posiciones de la coordenada transversal,  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\epsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

En la figura 4.19 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para seis diferentes posiciones de la coordenada transversal,  $Y$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\epsilon = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . A diferencia de la figura 4.16, el parámetro  $\delta$  relacionado con el deslizamiento es diferente de cero, por lo que toma el máximo valor incluido en este caso de estudio,  $\delta = 0,01$ . El comportamiento es similar, como se ha observado en los casos que se varía únicamente el parámetro  $\beta$ , con un valor máximo a la entrada, y una caída de presión conforme incrementa la variable de la coordena-

da transversal  $Y$ , con lo que se demuestra que la velocidad en dirección transversal es menor conforme se acerca el punto de análisis al centro del microcanal. En  $Y = 0$  para todos los valores de  $X$  se mantiene la velocidad  $\tilde{v}$  en el mismo valor. Para los demás perfiles, la velocidad es máxima a la entrada del microcanal, y en  $X = 1$  convergen todos los perfiles en el mínimo valor. Comparando la figura 4.16 con esta figura 4.19, se observa una mínima diferencia, respecto al valor máximo que toma la variable  $\tilde{v}$ , el cual es inferior en este último caso, debido a que el fluido circula con mayor facilidad a lo largo de la coordenada longitudinal  $X$ , gracias al deslizamiento que se encuentra en las paredes, lo cual incrementa el valor de la velocidad longitudinal  $\tilde{u}$ , y en consecuencia disminuye el valor máximo de la velocidad en dirección transversal  $\tilde{v}$ . La velocidad de filtración del fluido sigue siendo la máxima, puesto que el parámetro que incluye la filtración en el análisis tiene su máximo valor:  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . Para menores valores de  $\beta$ , se observaría una caída en todos los perfiles de velocidad  $\tilde{v}$ .

En la figura 4.20 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,2$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ . En una posición más cercana al centro del microcanal, el valor de la velocidad  $\tilde{v}$  disminuye respecto a su valor máximo que se encuentra en las paredes del microcanal. Cuando se estudian los efectos de variar el parámetro  $\beta$  en una misma posición se observa nuevamente que en la entrada se encuentra el máximo valor de la velocidad  $\tilde{v}$ . Conforme continúa el flujo hacia la salida, va cayendo en una relación que esencialmente es lineal. En la salida se encuentra el valor mínimo para esta variable, donde convergen todos los perfiles. El efecto de aumentar el parámetro de deslizamiento  $\delta$  se ve reflejado en el valor máximo de la velocidad a la entrada, y de ahí en adelante disminuye hasta su valor mínimo a la salida. El caso que presenta la máxima velocidad a la entrada le corresponde al parámetro  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ , que nos indica que la velocidad de permeado es la máxima. Para menores valores de  $\beta$ , se va notando una caída de la velocidad a la entrada, hasta converger en el valor mínimo a la salida. Para el menor valor de  $\beta$ , la velocidad es mínima a lo largo de todo el microcanal.

En la figura 4.21 se muestran los perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para cuatro valores

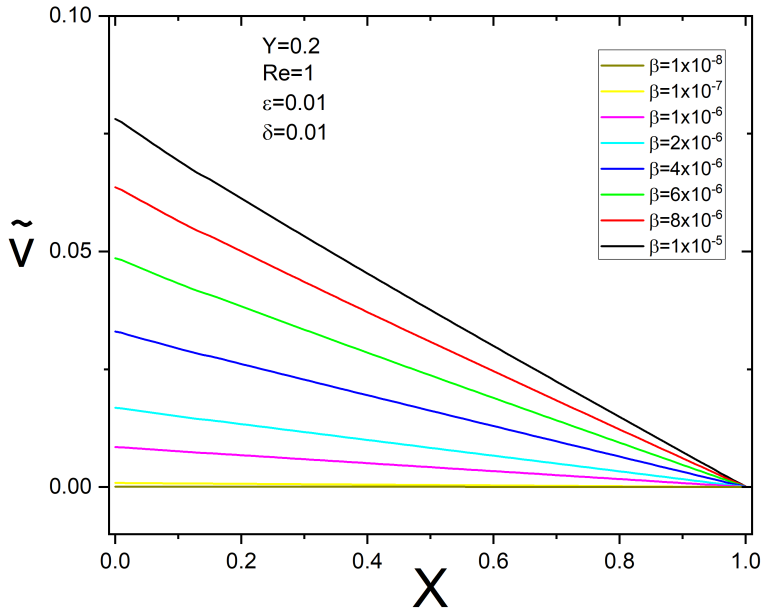


Figura 4.20: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada longitudinal,  $X$ , para ocho valores diferentes de  $\beta$ , en  $Y = 0,2$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\delta = 0,01$ .

diferentes de  $\delta$ , en  $X = 0,8$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ . La relación entre la velocidad transversal  $\tilde{v}$  y la coordenada transversal  $Y$  para una posición dada en la coordenada longitudinal, presenta un comportamiento no lineal, que va incrementando conforme el fluido se acerca a las paredes del microcanal. Cuando  $Y = 0$ , en el centro del microcanal, todos los perfiles de la variable de la velocidad  $\tilde{v}$  tiene su mínimo valor. Conforme  $Y$  incrementa, los perfiles divergen hasta llegar a su valor máximo en las paredes. El perfil que se observa en la parte superior es el que no incluye deslizamiento en las paredes, según el parámetro  $\delta = 0$ . El perfil que tiene la menor velo-

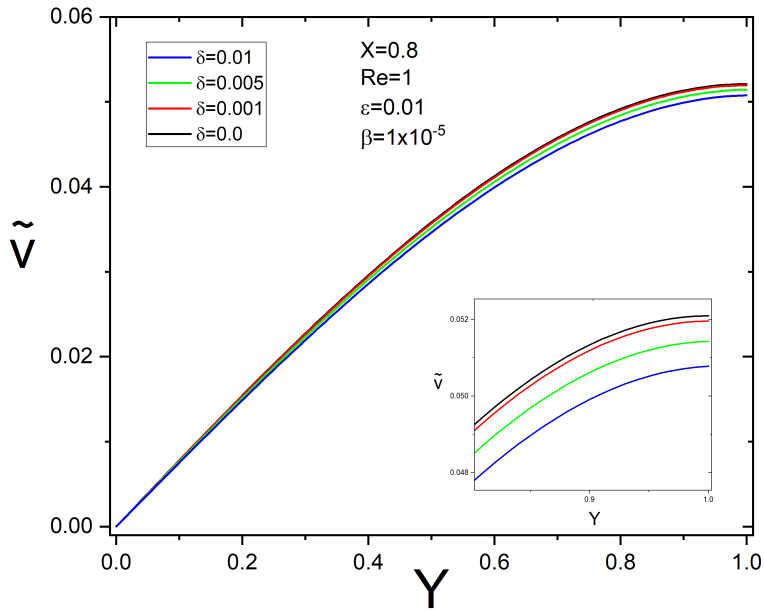


Figura 4.21: Perfiles de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , como una función de la coordenada transversal,  $Y$ , para cuatro valores diferentes de  $\delta$ , en  $X = 0,8$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  y  $\beta = 1 \times 10^{-5}$ .

En el estudio de esta figura 4.21 se efectuó en una posición cercana a la pared en  $Y = 1$  es el análisis realizado con el máximo valor de la variable  $\delta = 0,01$ . La relación inversamente proporcional indica que a un mayor valor de deslizamiento determinado con un mayor valor del parámetro de deslizamiento  $\delta$  se obtendrá como resultado una menor velocidad en dirección transversal  $\tilde{v}$ . El análisis se puede considerar en dos partes debido a su comportamiento. Cuando  $Y$  tiene sus valores más cercanos al centro del microcanal la velocidad tiene un comportamiento casi lineal. Cuando los valores de la coordenada se acercan a las paredes del microcanal, los perfiles tienden a un comportamiento no lineal, hasta llegar a su valor máximo en  $Y = 1$ .



la salida del sistema. Para valores más cercanos a la entrada del microcanal, se observaría que los valores máximos a los que tiende la variable de la velocidad  $\tilde{v}$  serían superiores, comparados con los obtenidos para este caso de estudio.

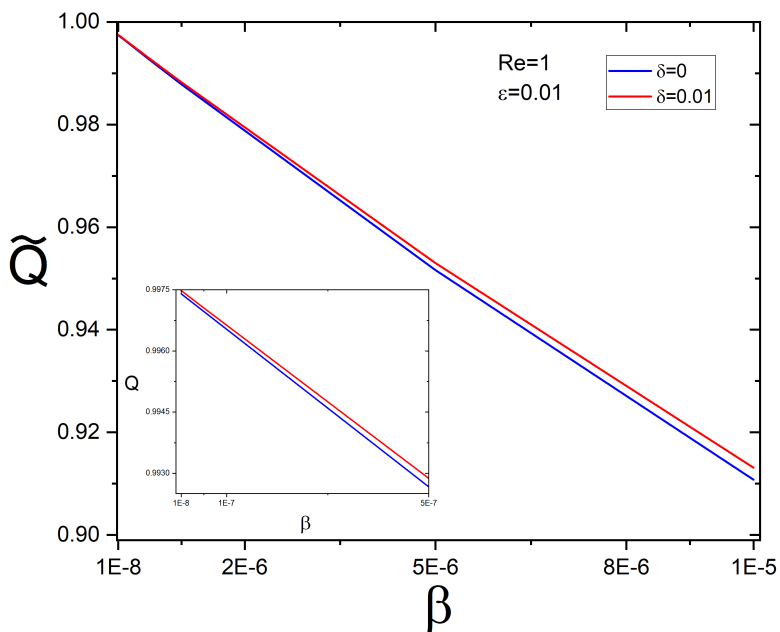


Figura 4.22: Perfiles del caudal adimensional,  $\tilde{Q}$ , como una función del valor de la permeabilidad,  $\beta$ , para dos valores diferentes de  $\delta$ . Los valores de los parámetros adimensionales  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ .

En la figura 4.22 se muestran los perfiles del caudal adimensional,  $\tilde{Q}$ , como una función del valor de la permeabilidad,  $\beta$ , para dos valores diferentes de  $\delta$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $Re = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ . En la figura se observa una variación debido a la condición de deslizamiento. Se aprecia una diferencia en el gasto volumétrico para los dos casos opuestos de la condición de deslizamiento, los valores máximos y mínimos:  $\delta = 0,01$  y  $\delta = 0$ . Como se observa en el perfil del caudal  $\tilde{Q}$ ,

cuando se compara el gasto volumétrico en dirección longitudinal contra el volumen permeado en dirección transversal, se observa una relación inversamente proporcional. Para un valor mínimo de permeado se tiene el máximo gasto volumétrico, y para el máximo permeado le corresponde el gasto mínimo. El comportamiento es aproximadamente lineal, como se observa en los resultados graficados. Comparando ambos perfiles, se observa que el caso con el máximo deslizamiento tiene un caudal ligeramente mayor que el caso sin deslizamiento. Para los valores menores del parámetro  $\beta$  la diferencia es imperceptible, pero según incrementa  $\beta$ , los perfiles indican que se tiene el mínimo caudal, y la diferencia es evidente, lo que indica que cuando el fluido permeando por las paredes es mínimo, el caudal es el mismo, ya sea que se incluya la condición de deslizamiento,  $\delta \neq 0$ , o que el parámetro de deslizamiento se igual a cero,  $\delta = 0$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

Para el presente trabajo de tesis, se hace uso de las ecuaciones de momentum acopladas con la ecuación de continuidad en dos dimensiones. La metodología utilizada consistió en la adimensionalización del sistema de ecuaciones con ayuda de un análisis de orden de magnitud. Tomando en cuenta que las ecuaciones son altamente no lineales por los términos convectivos, se propone resolver el sistema de ecuaciones mediante la técnica de elemento finito. Para este fin, se hace uso del software de uso libre FreeFem++.

Tal y como se puede apreciar en los resultados, los parámetros adimensionales más relevantes son  $\beta$  y  $\delta$ , donde el primero representa el permeado del fluido a través de las paredes del microcanal en la dirección transversal, mientras que el segundo término, representa el efecto del deslizamiento sobre las paredes del microcanal, afectando al flujo únicamente en la dirección longitudinal del fluido.

Como se observó en las ecuaciones de momentum y sus respectivas condiciones de frontera, la velocidad en la dirección transversal tiene una gran relación con la caída de la presión en la dirección longitudinal, ya que esta variable está relacionada con el parámetro adimensional  $\beta$ . En este sentido, a mayores valores de este parámetro junto a la caída de presión, produce un mayor permeado del flujo en esta dirección. Cabe destacar que la caída de presión no se ve influenciada por el parámetro  $\delta$ .

Tomando en cuenta los comentarios anteriores, en el desarrollo del presente trabajo se lograron obtener resultados satisfactorios para el análisis

numérico de un fluido que circula en un microcanal con las condiciones establecidas de fluido permeado por las paredes y el deslizamiento sobre las mismas, donde al ir aumentando el coeficiente de deslizamiento  $\delta$ , el flujo volumétrico  $\tilde{Q}$  incrementa, porque mantienen una relación directa proporcional con la velocidad longitudinal  $\tilde{u}$ .

Otro aspecto a resaltar, es que existe balance de masa en el flujo que circula por el microcanal, ya que cuando la velocidad en dirección longitudinal  $\tilde{u}$  aumenta como una consecuencia del incremento en el coeficiente de deslizamiento adimensional  $\delta$ , disminuye la velocidad transversal  $\tilde{v}$ , y existe una menor cantidad de fluido permeando por las paredes.

Como una conclusión final, se pretende trabajar en el futuro con estas mismas ecuaciones, pero ahora considerando que el fluido no es newtoniano, lo que permitiría considerar a la viscosidad con una variable y no como una constante, dándole mucho mayor realidad a un flujo sanguíneo que circula por un capilar, para posteriormente analizar distintos problemas hemodinámicos en el tratamiento de algunas enfermedades vasculares.

## Apéndice A

# Adimensionalización de Ecuaciones

### Ecuación de Continuidad

Comenzando por definir los parámetros adimensionales que han de ser usados para expresar las ecuaciones de continuidad y momentum

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L}, & Y &= \frac{y}{H}, & \tilde{u} &= \frac{u}{u_c}, \\ \tilde{v} &= \frac{v}{v_c} & \text{y} & & \tilde{p} &= \frac{p}{\Delta p_c}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

y del análisis de orden de magnitud se puede notar el valor de la velocidad característica  $u_c$ .

$$u_c \sim \frac{Q_0}{A} \tag{A.2}$$

Expresando el área transversal del microcanal en dimensionas físicas

$$\frac{Q_0}{A} = \frac{Q_0}{2HW} \tag{A.3}$$

Entonces a partir de la misma ecuación de continuidad expresada anteriormente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{A.4}$$

y con el análisis de orden de magnitud sabemos que ambos términos de la ecuación deben ser del mismo orden para que se cumpla la condición de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A.5})$$

Podemos expresar la misma ecuación en función de sus valores característicos.

$$\begin{aligned} u &\sim u_c, & v &\sim v_c, \\ x &\sim L, & y &\sim H \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Entonces la ecuación queda de la siguiente manera

$$\frac{u_c}{L} \sim \frac{v_c}{H} \quad (\text{A.7})$$

de modo que el valor de la velocidad característica  $v_c$  es

$$v_c = \frac{u_c H}{L} \quad (\text{A.8})$$

Expresando la ecuación de continuidad A.4 en función de los parámetros característicos A.1

$$\frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{v_c}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo el término A.8

$$\frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{u_c H}{L} \frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Simplificando y factorizando los términos comunes

$$\frac{u_c}{L} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Para simplificar la ecuación se puede expresar sin el factor que multiplica al término entre paréntesis, con lo que la ecuación de continuidad adimensional queda:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = 0 \quad (\text{A.12})$$

## Ecuación de Momentum en $x$

Para la adimensionalización de las ecuaciones de momentum debemos definir primeramente las presiones adimensional  $\tilde{p}$  y característica  $\Delta p_c$

$$\Delta p_c \sim \frac{\eta u_c L}{H^2}, \quad \tilde{p} = \frac{p - p_0}{\Delta p_c} \quad (\text{A.13})$$

La ecuación de momentum en  $x$  se definen como:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

expresada en función de los valores característicos A.6 y A.13

$$\rho \left( u_c \tilde{u} \frac{u_c}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + v_c \tilde{v} \frac{u_c}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\Delta p_c}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \eta \left( \frac{u_c}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial L^2} + \frac{u_c}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo  $v_c$  y factorizando los términos comunes, entonces

$$\rho \frac{u_c^2}{L} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\Delta p_c}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \eta \frac{u_c}{H^2} \left( \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $\frac{L}{\Delta p}$

$$\frac{L}{\Delta p} \rho \frac{u_c^2}{L} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \frac{L}{\Delta p} \eta \frac{u_c}{H^2} \left( \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

sustituyendo la definición de  $\Delta p$  de A.13 se pueden simplificar los términos del lado derecho de la ecuación.

$$\frac{\rho u_c H}{\eta} \frac{H}{L} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \left( \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

Finalmente se sustituyen los parámetros adimensionales

$$\text{Re} = \frac{\rho u_c H}{\eta} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \quad (\text{A.19})$$

La ecuación de momentum en  $x$  adimensional es

$$\varepsilon \text{Re} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \quad (\text{A.20})$$

**Ecuación de Momentum en  $y$** 

La definición de la ecuación de momentum en  $y$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.21})$$

se expresa en función de los valores característicos A.6 y A.13

$$\rho \left( u_c \tilde{u} \frac{v_c}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + v_c \tilde{v} \frac{v_c}{H} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\Delta p_c}{H} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} + \eta \left( \frac{v_c}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{v_c}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo A.8 y simplificando

$$\rho \frac{u_c^2 H}{L^2} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\Delta p_c}{H} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} + \eta \frac{v_c}{H^2} \left( \frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.23})$$



# Apéndice B

## Velocidad $u$

### Sin condición de deslizamiento

La definición del caudal de entrada es igual al producto de la velocidad del fluido por el área de entrada, cuyas dimensiones son conocidas, se desarrolla el siguiente análisis. Las dimensiones del microcanal para la entrada, como se observa en la figura 2.1, son  $2H$  para la altura, y  $W$  para la anchura del microcanal con dimensiones rectangulares. Entonces, la definición del caudal  $Q_0$  es

$$Q_0 = \int u dA \quad (\text{B.1})$$

$$Q_0 = \int u (2 dyW) \quad (\text{B.2})$$

$$Q_0 = 2W \int_0^H u dy \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales propuestos en la tabla 2.1

$$Q_0 = 2Wu_c \int_0^1 \tilde{u}H dY \quad (\text{B.4})$$

$$Q_0 = 2HWu_c \int_0^1 \tilde{u} dY \quad (\text{B.5})$$

Volviendo a la definición del caudal  $Q = u A$ , si  $A = 2H W$ , entonces  $Q_0 = 2WHu_c$ , por lo que se simplifica de ambos lados de la ecuación y obtenemos la condición que describe la velocidad en el microcanal en su forma integral a la entrada del microcanal ( $X = 0$ ).

$$\int_0^1 \tilde{u} dY = 1 \quad (\text{B.6})$$

La presión se expresa como función de la coordenada longitudinal  $X$ , por lo que la velocidad en dirección longitudinal  $\tilde{u}$  depende de la variación de la presión  $\tilde{p}$  respecto a  $X$ .

$$\tilde{p}X = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \quad (\text{B.7})$$

Puesto que la variación de la presión  $\tilde{p}$  respecto a la posición  $X$  es constante.

$$\tilde{p}X = C \quad (\text{B.8})$$

Integrando la variación de la velocidad y la constante  $C$

$$\iint \frac{d}{dY} \left( \frac{d\tilde{u}}{dY} \right) dY dY = C \iint dY dY \quad (\text{B.9})$$

$$\int \frac{d\tilde{u}}{dY} dY = \int (C_1 Y + C_2) dY \quad (\text{B.10})$$

$$\tilde{u}(Y) = \frac{C_1}{2} Y^2 + C_2 Y + C_3 \quad (\text{B.11})$$

Para determinar los coeficientes, se hace uso de las siguientes condiciones

$$\left. \frac{d\tilde{u}}{dY} \right|_{Y=0} = 0 \quad (\text{B.12})$$

Junto con la condición de no deslizamiento en las paredes

$$\tilde{u}(Y = 1) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\left. \frac{d\tilde{u}}{dY} \right|_{Y=0} = C_1 Y + C_2 \quad (\text{B.14})$$

$$\left. \frac{d\tilde{u}}{dY} \right|_{Y=0} = C_1(0) + C_2 = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{B.16})$$

Sustituyendo en la ecuación B.13

$$\tilde{u}(Y = 1) = \frac{C_1}{2}(1) + C_2(1) + C_3 \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{C_1}{2} + C_3 = 0 \quad (\text{B.18})$$

Entonces

$$C_3 = -\frac{C_1}{2} \quad (\text{B.19})$$

La ecuación de la velocidad  $\tilde{u}$  queda en términos de  $C_1$

$$\tilde{u}(Y) = \frac{C_1}{2}Y^2 - \frac{C_1}{2} \quad (\text{B.20})$$

O bien

$$\tilde{u}(Y) = \frac{C_1}{2}(Y^2 - 1) \quad (\text{B.21})$$

En la función B.6 establecida para la velocidad se sustituye  $\tilde{u}(Y)$  expresada en B.21, de modo que se tiene

$$\int_0^1 \left[ \frac{C_1}{2}(Y^2 - 1) \right] dY = 1 \quad (\text{B.22})$$

Evaluando la integral

$$\frac{C_1}{2} \int_0^1 (Y^2 + 1) dY = 1 \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{C_1}{2} \left[ \frac{Y^3}{3} - Y \right]_0^1 = 1 \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{C_1}{2} \left[ \frac{1}{3} - 1 \right] = 1 \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{C_1}{2} \left[ -\frac{2}{3} \right] = 1 \quad (\text{B.26})$$

Despejando, obtenemos finalmente el valor del coeficiente  $C_1$

$$C_1 = -3 \quad (\text{B.27})$$

Por lo tanto, los valores de los coeficientes son

$$C_1 = -3 \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{3}{2} \qquad (\text{B.28})$$

Sustituyendo en la ecuación B.21

$$\tilde{u}(Y) = \frac{3}{2} (1 - Y^2) \qquad (\text{B.29})$$

### Con condición de deslizamiento

Si se incluye la condición con deslizamiento, la ecuación B.13 se sustituye por la siguiente condición que expresa un diferencial de deslizamiento cuando el fluido está en contacto con las paredes  $Y = 1$ , junto con la condición B.12

$$\tilde{u}(Y = 1) = -\delta \left. \frac{d\tilde{u}}{dY} \right|_{Y=1} \qquad (\text{B.30})$$

La velocidad  $\tilde{u}(Y)$  tiene la forma de la ecuación B.11, y se cumple la condición B.14, por lo tanto  $C_2 = 0$  como en B.16. Entonces la función  $\tilde{u}(Y)$  es

$$\tilde{u}(Y) = \frac{C_1}{2} Y^2 + C_3 \qquad (\text{B.31})$$

Haciendo uso de la condición de deslizamiento B.30

$$-\delta \frac{d}{dY} \left( \frac{C_1}{2} Y^2 + C_3 \right) \Big|_{Y=1} = \frac{C_1}{2} (1) + C_3 \qquad (\text{B.32})$$

$$-\delta (C_1 Y) \Big|_{Y=1} = \frac{C_1}{2} + C_3 \qquad (\text{B.33})$$

$$-\delta C_1 = \frac{C_1}{2} + C_3 \qquad (\text{B.34})$$

Despejando  $C_3$  en término de  $C_1$

$$C_3 = -\delta C_1 + \frac{C_1}{2} = -C_1 \left( \delta + \frac{1}{2} \right) \qquad (\text{B.35})$$

Sustituyendo en la ecuación B.31, en términos de  $C_1$

$$\tilde{u}(Y) = \frac{C_1}{2} Y^2 - \delta C_1 - \frac{C_1}{2} \qquad (\text{B.36})$$

$$\tilde{u}(Y) = -\frac{C_1}{2} (1 + 2\delta - Y^2) \quad (\text{B.37})$$

Notamos que en la ecuación B.37 se incluye el término  $2\delta$ , que modifica la velocidad  $\tilde{u}$ . Sustituyendo B.37 en B.6,

$$\int_0^1 \left[ -\frac{C_1}{2} (1 + 2\delta - Y^2) \right] dY = 1 \quad (\text{B.38})$$

$$-\frac{C_1}{2} \left[ (1 + 2\delta)Y - \frac{Y^3}{3} \right]_0^1 = 1 \quad (\text{B.39})$$

Evaluando la integral

$$-\frac{C_1}{2} \left[ 2\delta - \frac{2}{3} \right] = 1 \quad (\text{B.40})$$

Obtenemos el valor de  $C_1$

$$C_1 = -\frac{3}{1 + 3\delta} \quad (\text{B.41})$$

Finalmente se sustituye en la ecuación B.36

$$\tilde{u}(Y) = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 3\delta} [1 + 2\delta - Y^2] \quad (\text{B.42})$$

Se puede comprobar que el resultado obtenido es correcto, si se sustituye  $\delta = 0$ , con lo que se obtiene el mismo resultado que la condición de no deslizamiento, obtenida en la ecuación B.29.



## Apéndice C

# Formulación Variacional

En los términos convectivos que observamos la necesidad de incluir el término temporal para escribir estos términos como la razón de cambio en el tiempo de la velocidad  $\tilde{u}$  actual y anterior, multiplicada por la variable auxiliar  $u_a$ .

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) \quad (\text{C.1})$$

Si reescribimos el término temporal como una diferencia finita

$$\frac{u^{n+1}}{\Delta \tau} + \frac{u^n}{\Delta \tau} + \left( \tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right) \quad (\text{C.2})$$

Y agrupando los términos

$$\frac{u^{n+1}}{\Delta \tau} + \frac{1}{\Delta \tau} \left( \tilde{u}^n - \Delta \tau \left( \tilde{u}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} + \tilde{v}^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \right) \right) \quad (\text{C.3})$$

Al escribir los términos convectivos de esta forma podemos hacer uso de la función `convect` que se encuentra en el programa de FreeFem. La parte convectiva de la ecuación momentum en  $X$  se introduce al software de la siguiente manera

$$O(\varepsilon \text{Re}) \iint_{\Omega} \frac{u^{n+1}}{\Delta \tau} d\Omega + O(\varepsilon \text{Re}) \iint_{\Omega} \frac{1}{\Delta \tau} \text{convect}([\tilde{u}^n, \tilde{v}^n], \Delta, \tilde{u}^n) d\Omega \quad (\text{C.4})$$

El segundo término, el término que involucra la derivada de la presión respecto a  $X$ , cambia del producto de la divergencia de una función por una función auxiliar, a la integral de la variación de la variable auxiliar  $u_a$  multiplicada por la presión  $p$ , según la fórmula de Green 3.4, mencionada arriba.

$$\iint_{\Omega} u_a \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} d\Omega = \iint_{\Omega} \tilde{p} \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} \right) d\Omega \quad (\text{C.5})$$

Para el último término se utiliza la fórmula de Green 3.5 que establece que la doble integral del producto de una función por la divergencia de otra función es igual a la doble integral del producto escalar de la divergencia de ambas funciones

$$O(\varepsilon^2) \iint_{\Omega} u_a \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \right) d\Omega = O(\varepsilon^2) \iint_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial X} \frac{\partial u_a}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial Y} \frac{\partial u_a}{\partial Y} d\Omega = 0 \quad (\text{C.6})$$



# Bibliografía

- [1] Robert Bogue. Recent developments in mems sensors: A review of applications, markets and technologies. *Sensor review*, 33(4):300–304, 2013.
- [2] Jack W Judy. Microactuators. In *MEMS*, pages 751–803. Elsevier, 2006.
- [3] Jack W Judy. Microelectromechanical systems (mems): fabrication, design and applications. *Smart materials and Structures*, 10(6):1115, 2001.
- [4] Vikas Choudhary and Krzysztof Iniewski. *Mems: fundamental technology and applications*. CRC Press, 2017.
- [5] SM Spearing. Materials issues in microelectromechanical systems (mems). *Acta materialia*, 48(1):179–196, 2000.
- [6] Richard P Feynman. There’s plenty of room at the bottom. *Resonance*, 16(9):890–905, 2011.
- [7] P Abgrall and AM Gue. Lab-on-chip technologies: making a microfluidic network and coupling it into a complete microsystem—a review. *Journal of micromechanics and microengineering*, 17(5):R15, 2007.
- [8] Abhinav Kumar, Manjesh Kumar, Anupam Alok, HNS Yadav, and Manas Das. Fabrication of microtool for micromachining: A review. *Materials Today: Proceedings*, 47:3911–3918, 2021.

- [9] KH Ho and ST Newman. State of the art electrical discharge machining (edm). *International journal of machine tools and manufacture*, 43(13):1287–1300, 2003.
- [10] Meena Gupta, Dinesh Bhatia, and Prakash Kumar. Chapter 3 - micro electrical mechanical system (mems) sensor technologies. In Meena Gupta, Dinesh Bhatia, and Prakash Kumar, editors, *Modern Intervention Tools for Rehabilitation*, pages 25–44. Academic Press, 2023.
- [11] Taras Petruk, Vasyl Teslyuk, and Mykhaylo Melnyk. Optimization of the accelerometer design using ansys. In *2016 XII International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH)*, pages 37–39. IEEE, 2016.
- [12] Marina Macías Silva. De la ficción a la realidad: órganos-en-chips al servicio de la ciencia y la medicina. *Revista odontológica mexicana*, 20(2):74–75, 2016.
- [13] Eugenia Corvera. La microfluídica puede permitir grandes avances en la medicina y otras áreas: Eugenia corvera, 2020. Seminario del Departamento de Fisicoquímica.
- [14] Keya Sanyal and Kalyan Biswas. Structural design and optimization of mems based capacitive accelerometer. In *2017 Devices for Integrated Circuit (DevIC)*, pages 294–298. IEEE, 2017.
- [15] David Fernandez Rivas. Microfluidos: Nuevas fronteras. *Revista Cubana de física*, 28(1), 2011.
- [16] Bastian E Rapp. *Microfluidics: modeling, mechanics and mathematics*. Elsevier, 2022.
- [17] George Karniadakis, Ali Beskok, and Narayan Aluru. *Microflows and nanoflows: fundamentals and simulation*, volume 29. Springer Science & Business Media, 2006.
- [18] Enrico Drioli and Lidietta Giorno. *Encyclopedia of membranes*. Springer, 2018.

- [19] AC Puleo, Donald R Paul, and SS Kelley. The effect of degree of acetylation on gas sorption and transport behavior in cellulose acetate. *Journal of Membrane Science*, 47(3):301–332, 1989.
- [20] Hussein Mehdizadeh. *Modeling of transport phenomena in reverse osmosis membranes*. PhD thesis, 1990.
- [21] Muhammad Qasim, Mohamed Badrelzaman, Noora N Darwish, Naif A Darwish, and Nidal Hilal. Reverse osmosis desalination: A state-of-the-art review. *Desalination*, 459:59–104, 2019.
- [22] Yuying Qi, Donghao Li, Shixuan Zhang, Fengxiang Li, and Tao Hua. Electrochemical filtration for drinking water purification: A review on membrane materials, mechanisms and roles. *Journal of Environmental Sciences*, 2023.
- [23] Graeme Pearce. Introduction to membranes: Membrane selection. *Filtration and Separation*, 44(3):35–37, 2007.
- [24] Nidal Hilal, Ahmad Fauzi Ismail, Takeshi Matsuura, and Darren Oatley-Radcliffe. *Membrane characterization*. Elsevier, 2017.
- [25] Beren Ataç, Ilka Wagner, Reyk Horland, Roland Lauster, Uwe Marx, Alexander G Tonevitsky, Reza P Azar, and Gerd Lindner. Skin and hair on-a-chip: in vitro skin models versus ex vivo tissue maintenance with dynamic perfusion. *Lab on a Chip*, 13(18):3555–3561, 2013.
- [26] Achilles J Pappano and Withrow Gil Wier. *Cardiovascular physiology-E-book: Mosby physiology monograph series*. Elsevier Health Sciences, 2018.
- [27] Richard N Mitchell and Frederick J Schoen. Blood vessels. *Robbins and Cotran: Pathologic Basis of Disease.(8th edition)* Saunders Elsevier, Philadelphia, US, pages 516–17, 2010.
- [28] Kostas D Housiadas. Viscoelastic poiseuille flows with total normal stress dependent, nonlinear navier slip at the wall. *Physics of Fluids*, 25(4), 2013.

- [29] WR Schowalter. The behavior of complex fluids at solid boundaries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29:25–36, 1988.
- [30] Claude Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. éditeur inconnu, 1822.
- [31] Pandelitsa Panaseti, Kostas D Housiadas, and Georgios C Georgiou. Newtonian poiseuille flows with pressure-dependent wall slip. *Journal of Rheology*, 57(1):315–332, 2013.
- [32] Ronald F Probstein. *Physicochemical hydrodynamics: an introduction*. John Wiley & Sons, 2005.
- [33] Dan Zhang. *Advanced mechatronics and MEMS devices*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2012.
- [34] Curtis D Chin, Vincent Linder, and Samuel K Sia. Lab-on-a-chip devices for global health: Past studies and future opportunities. *Lab on a Chip*, 7(1):41–57, 2007.
- [35] Joel Voldman, Martha L Gray, and Martin A Schmidt. Microfabrication in biology and medicine. *Annual review of biomedical engineering*, 1(1):401–425, 1999.
- [36] Grzegorz Wałowski. Assessment of gas permeability coefficient of porous materials. *Journal of Sustainable Mining*, 16(2):55–65, 2017.
- [37] Yukihiro Yoshimura, Yuji Hiramatsu, Yukio Sato, Satoshi Homma, Yoshiharu Enomoto, Yuji Kikuchi, and Yuzuru Sakakibara. Activated neutrophils and platelet microaggregates impede blood filterability through microchannels during simulated extracorporeal circulation. *The Annals of thoracic surgery*, 75(4):1254–1260, 2003.
- [38] Lili Li, Haiyang Zhang, Muhammad Mubashar, Liang Chen, Shaozhe Cheng, and Xuezhi Zhang. Parallel filtration for solid-liquid separation: A case study of highly-efficient algal removal under parallel configuration driven by magnetic force. *Separation and Purification Technology*, 310:123098, 2023.

- [39] Ebrahim Yarali, Mohammad Ali Farajzadeh, Reza Noroozi, Ali Dabagh, Mohammad J Khoshgoftar, and Mohammad J Mirzaali. Magnetorheological elastomer composites: Modeling and dynamic finite element analysis. *Composite Structures*, 254:112881, 2020.
- [40] W Michael Lai, Dnavier1822memoireavid Rubin, and Erhard Krempf. *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2009.
- [41] C Pozrikidis. Flow through a permeable tube. In *Heat Transfer and Fluid Flow in Biological Processes*, pages 239–272. Elsevier, 2015.
- [42] RA Mamigonyan and Yu V Gutin. Creation of a new generation of micro-and ultra-filtration units for separation of aggressive waste water. *Chemical and petroleum engineering*, 39(7-8):442–445, 2003.
- [43] Carl Fredrik Berg. Permeability description by characteristic length, tortuosity, constriction and porosity. *Transport in porous media*, 103(3):381–400, 2014.
- [44] Ju Hun Yeon, Hyun Ryul Ryu, Minhwan Chung, Qing Ping Hu, and Noo Li Jeon. In vitro formation and characterization of a perfusable three-dimensional tubular capillary network in microfluidic devices. *Lab on a Chip*, 12(16):2815–2822, 2012.
- [45] Tawfik Abdo Saleh and Vinod Kumar Gupta. *Nanomaterial and polymer membranes: synthesis, characterization, and applications*. Elsevier, 2016.
- [46] Shuaiwen Li, Zihui Chen, Feng Yang, and Wanqing Yue. Emerging two-dimensional materials for analytical lab-on-chip platforms: A review of electrochemical and optical biosensor. *Microchemical Journal*, page 109247, 2023.
- [47] Shuai Xia, Meijun Liu, Haiyang Yu, and Donglei Zou. Pressure-driven membrane filtration technology for terminal control of organic dbps: A review. *Science of The Total Environment*, page 166751, 2023.
- [48] Ping Cui and Sicen Wang. Application of microfluidic chip technology in pharmaceutical analysis: A review. *Journal of pharmaceutical analysis*, 9(4):238–247, 2019.

- [49] Kaixuan Sun, Yifei Tang, Yan Huang, Yuchao Zhao, Xinmin Jie, Yabin Zhang, and Qinglin Huang. Fabrication of hydrophobic pi nanofibrous membrane with controllable pore structures. *Journal of Environmental Chemical Engineering*, page 111197, 2023.
- [50] Bochao Xu, Wa Gao, Baoqiang Liao, and Walter Turek. The influence of temperature on dynamic membrane structure. *Journal of Membrane Science*, page 122121, 2023.
- [51] J Paulo Davim. *Machining and machine-tools: research and development*. Elsevier, 2013.
- [52] SP Leo Kumar, J Jerald, S Kumanan, and R Prabakaran. A review on current research aspects in tool-based micromachining processes. *Materials and Manufacturing Processes*, 29(11-12):1291–1337, 2014.