



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELADO Y ESTIMACIÓN DE SEÑALES
FOTOACÚSTICAS: UN ENFOQUE DE SISTEMAS
DINÁMICOS**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Eléctrico Electrónico

P R E S E N T A

Adrian Ginez Alvarez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Roberto Giovanni Ramírez Chavarría



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024

«Douter de tout ou tout croire sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.»

Henri Poincaré

Agradecimientos

A mi familia, por el apoyo que me ha brindado en cada etapa de mi vida.

A mis amigos y compañeros, por el tiempo y las experiencias que compartimos.

A mi asesor, por su paciencia y su motivación.

Esta tesis fue realizada gracias al:

Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PA-PIIT) a través del proyecto UNAM-PAPIIT TA101423

Índice general

Índice de figuras	X
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Objetivos	1
1.3. Motivación	2
1.4. Estado del arte	2
1.5. Contribuciones	5
1.6. Estructura de la tesis	5
2. Marco teórico	7
2.1. El efecto fotoacústico	7
2.1.1. Problema inverso fotoacústico	8
2.1.2. Coeficiente de absorción	9
2.2. Modelo en espacio de estados	9
2.2.1. Estabilidad	10
2.3. Diferencias finitas centrales	10
2.4. Identificación de subespacios	12
2.4.1. N4SID	13
2.5. Descenso del gradiente	14
2.6. Regularización	14
2.7. Correlación de Pearson	15
3. Diseño y prueba de identificación	17
3.1. Planteamiento del problema	17
3.2. Metodología	17
3.3. Modelo en espacio de estados	18
3.4. Estimación paramétrica	21
3.5. Esquema de identificación	22
3.6. Generación de señales fotoacústicas	23
3.7. Simulación	23
3.7.1. Generación y reconstrucción de señales fotoacústicas	23
3.7.2. Señales de error	24

4. Resultados	27
4.1. Discretización 1	27
4.1.1. Perfil 1	29
4.1.2. Perfil 2	38
4.2. Discretización 2	41
4.2.1. Perfil 1	42
4.2.2. Perfil 2	45
4.3. Reconstrucción de imagen	49
5. Conclusiones	55
Bibliografía	56

Índice de figuras

1.1. Esquema del efecto fotoacústico y generación de imagen.	2
1.2. Representación teórica del método <i>time reversal</i>	3
1.3. Representación del método <i>back-projection</i> para un arreglo circular. . .	4
2.1. Representación del efecto fotoacústico.	7
3.1. Representación de la discretización.	19
3.2. Diagrama del esquema de identificación.	23
3.3. Diagrama de la reconstrucción de imagen.	24
4.1. (a) Serie de pulsos del láser. (b) Pulso del láser.	28
4.2. Polos de la matriz A.	29
4.3. Estimación del perfil de absorción.	30
4.4. Error de estimación del perfil de absorción.	30
4.5. Estimación de la señal fotoacústica.	31
4.6. Error de estimación de la señal fotoacústica.	31
4.7. Señal fotoacústica recuperada.	32
4.8. Estimación del perfil de absorción.	32
4.9. Error de estimación del perfil de absorción.	33
4.10. Estimación de la señal fotoacústica.	33
4.11. Error de estimación de la señal fotoacústica.	34
4.12. Estimación del perfil de absorción.	34
4.13. Error de estimación del perfil de absorción.	35
4.14. Estimación de la señal fotoacústica.	35
4.15. Error de estimación de la señal fotoacústica.	36
4.16. Señal fotoacústica recuperada.	36
4.17. Estimación del perfil de absorción.	37
4.18. Error de estimación del perfil de absorción.	37
4.19. Estimación de la señal fotoacústica.	38
4.20. Error de estimación de la señal fotoacústica.	38
4.21. Estimación del perfil de absorción.	39
4.22. Error de estimación del perfil de absorción.	39
4.23. Estimación de la señal de fotoacústica.	40
4.24. Error de estimación de la señal fotoacústica.	40
4.25. Señal fotoacústica recuperada.	41

4.26. Polos de la matriz A	42
4.27. Estimación del perfil de absorción.	43
4.28. Error de estimación del perfil de absorción.	43
4.29. Estimación de la señal fotoacústica.	44
4.30. Error de estimación de la señal de medición.	44
4.31. Señal fotoacústica recuperada.	45
4.32. Estimación del perfil de absorción.	45
4.33. Error de estimación del perfil de absorción.	46
4.34. Estimación de la señal fotoacústica.	46
4.35. Error de estimación de la señal fotoacústica.	47
4.36. Señal fotoacústica recuperada.	47
4.37. Estimación del perfil de absorción.	48
4.38. Error de estimación del perfil de absorción.	48
4.39. Estimación del perfil de absorción.	49
4.40. Error de estimación del perfil de absorción.	50
4.41. Estimación de la señal fotoacústica.	50
4.42. Error de estimación de la señal fotoacústica.	51
4.43. Señal fotoacústica recuperada.	51
4.44. Sinograma de la imagen reconstruida.	52
4.45. (a) Cabeza fantasma de Shepp-Logan. (b) Imagen resultante de la aplicación del esquema de identificación.	53

Índice de tablas

3.1. Parámetros requeridos para la estimación.	22
4.1. Parámetros de simulación del modelo.	27
4.2. Parámetros de simulación de la prueba.	27
4.3. Parámetros de simulación del modelo.	41
4.4. Parámetros de simulación de la prueba.	42
4.5. Parámetros de simulación del modelo.	49
4.6. Parámetros de simulación de la prueba.	49
4.7. Similitud entre la imagen de prueba y la imagen reconstruida.	52

1 Introducción

1.1. Presentación

Una metodología muy común para el estudio de sistemas dinámicos es a través de modelos matemáticos basados en la información que se dispone sobre ellos. De manera que, en función del desconocimiento parcial o total del sistema, se dice que son modelos de caja gris o caja negra, respectivamente. La finalidad de un modelo es obtener una respuesta similar a la del sistema real ante la misma señal de entrada, permitiendo así realizar distintas simulaciones antes de aplicar un algoritmo directamente al sistema real. En el presente trabajo se utiliza un modelo lineal e invariante en el tiempo discretizado en el espacio de estados cuyos parámetros, para simular mediciones, son conocidos en su totalidad. Posteriormente, bajo el conocimiento de la señal de entrada, las mediciones y algunos parámetros del modelo discreto, se realiza una identificación de subespacios para dichos datos y así obtener un modelo capaz de generar una señal de salida que se aproxime a las mediciones, además de estimar los estados y los parámetros desconocidos del sistema.

1.2. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son estimar los estados de un sistema que representa el efecto fotoacústico, estimar la señal medible y los parámetros necesarios para reconstruir su perfil de absorción, mediante la identificación de subespacios, y como objetivo final, generar una imagen fotoacústica. En principio, el modelo se plantea en el espacio de estados discreto, teniendo la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\y_k &= Cx_k,\end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{2N_z \times 2N_z}$ rige el comportamiento del sistema, $B \in \mathbb{R}^{2N_z \times 1}$ contiene información del perfil de absorción, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2N_z}$ determina el estado medible, $x_k \in \mathbb{R}^{2N_z \times 1}$ es el vector de estados, $N_z \in \mathbb{N}$, u_k es el vector de señal de entrada y y_k es el vector de señal de salida.

1.3. Motivación

El efecto fotoacústico consiste en exponer una muestra capaz de absorber energía óptica ante un láser a tal grado que su temperatura aumente provocando que se expanda y la búsqueda natural del equilibrio térmico con el ambiente provoque su contracción, de manera que en el medio se generan perturbaciones en forma de ondas las cuales son captadas por un arreglo de detectores de ultrasonido cercanos a la muestra, estos envían información hacia una computadora encargada de realizar una reconstrucción de la absorción óptica para generar una imagen fotoacústica [1], Figura 1.1. El perfil de absorción óptica proporciona información sobre la distribución de cromóforos en la muestra que permiten la detección de estructuras internas. Por lo tanto, dicho perfil es un objetivo clave en la reconstrucción de imágenes fotoacústicas en conjunto con la señal de presión medida.

Aunque en la práctica es posible tener acceso a los parámetros de la muestra o a las características del láser para desarrollar un modelo simple sin la necesidad de hacer estimaciones, la fotoacústica presenta un proceso irreversible que es la atenuación acústica a causa de la entropía, esto se traduce en una pérdida de información de la imagen que afecta su reconstrucción [1], es así como surge la búsqueda por abordar el efecto fotoacústico desde un punto de vista de sistemas dinámicos mediante un modelo en el espacio de estados que permita realizar la estimación de la señal fotoacústica de la muestra y la reconstrucción de su perfil de absorción a fin de apoyar y mejorar el proceso de generación de imágenes. Considerando que se tiene acceso a la señal del láser y a las mediciones de la señal fotoacústica, esta última es utilizada como referencia para evaluar la salida estimada por el modelo.

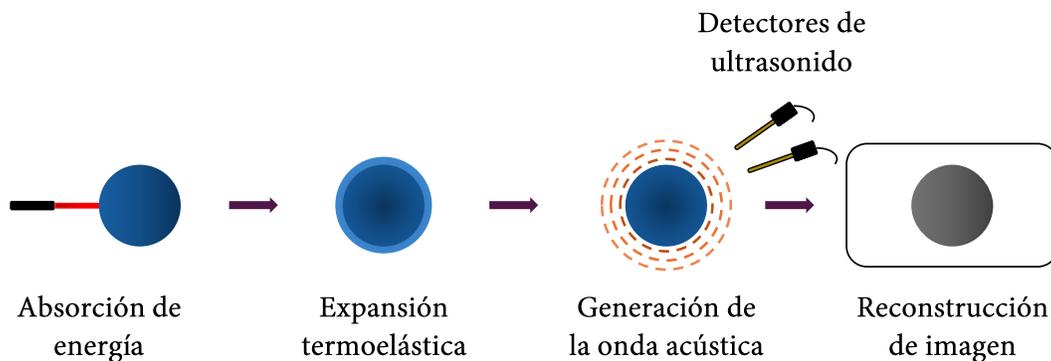


Figura 1.1: Esquema del efecto fotoacústico y generación de imagen.

1.4. Estado del arte

El campo de investigación de la fotoacústica tiene dos enfoques principales que son la espectroscopía y la obtención de imágenes [2]. La obtención de imágenes fotoacústicas basa su atractivo en permitir visualizar estructuras internas de una muestra

sin la necesidad de realizar un proceso invasivo. Sin embargo, depende de la absorción óptica del medio, es decir, las estructuras con baja absorción óptica presentan dificultades para ser detectadas.

La obtención de imágenes fotoacústicas se mantiene como un problema abierto debido a los distintos resultados que presentan las diferentes técnicas de detección y los distintos resultados de los algoritmos de reconstrucción, permitiendo identificar algunas estructuras dependiendo de la técnica y el algoritmo que se utilicen. Dichos algoritmos se plantean como un problema inverso, ya que a partir de las mediciones se busca obtener una imagen de la muestra que brinde información sobre los materiales que la conformen y su distribución. Existen dos métodos principales que dan solución al problema inverso (considerando constante la velocidad del sonido en el medio de propagación): el método de *time reversal* y el método de *back-projection*.

El método de *time reversal* consiste en una solución numérica que parte de plantear una superficie de observación arbitraria S con origen en x_S que encierra una muestra cuya fuente de generación fotoacústica se encuentra en x_0 , Figura 1.2. Las ondas de presión que viajan desde la superficie de la muestra hasta la superficie de observación, transcurrido un tiempo t_{m-s} , son devueltas en orden inverso a su detección dado que, en un medio no disipativo, para cada onda de sonido que diverge de una fuente, teóricamente existe un conjunto de ondas que pueden seguir el camino de vuelta [3], haciendo posible identificar la fuente y realizar la reconstrucción de la imagen para cada punto en la muestra capaz de absorber energía óptica.

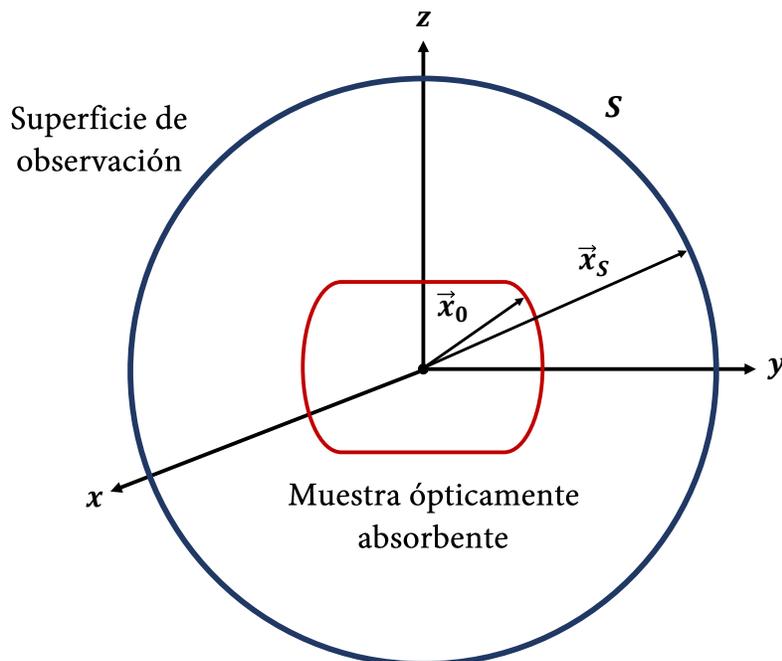


Figura 1.2: Representación teórica del método *time reversal*.

Por otro lado, el método de *back-projection* parte de formar una superficie de observación mediante un arreglo de detectores de ultrasonido que encierran a la muestra, Figura 1.3. Teniendo como base el retardo temporal entre un punto de interés en el espacio de la imagen (un píxel) y la posición de cada sensor (x_s, y_s) , la reconstrucción consiste en obtener los valores de cada píxel en la imagen a partir de la suma de las contribuciones de todas las señales fotoacústicas recibidas en diferentes sensores a través de una línea de proyección de valor R con ángulo θ_i , sin considerar el tiempo, asumiendo que las señales provienen de fuentes puntuales (x_i, y_i) .

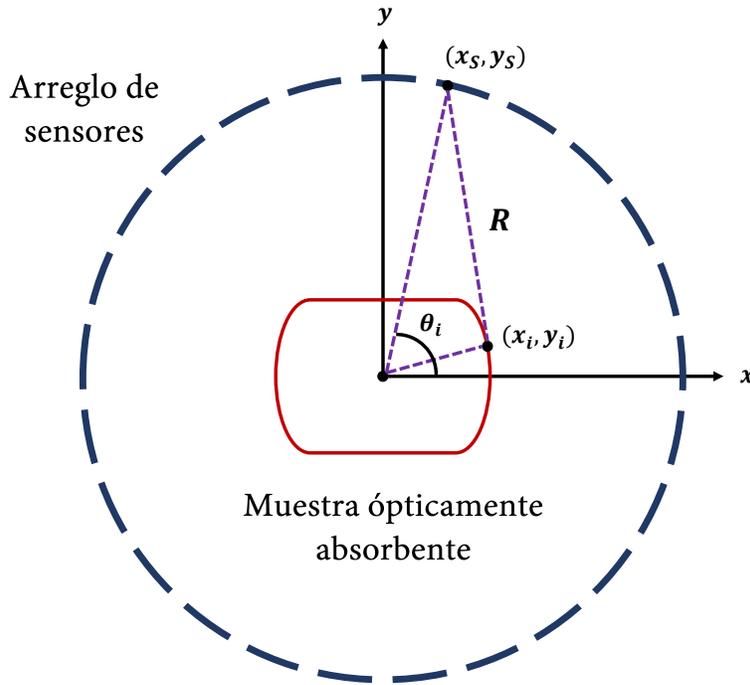


Figura 1.3: Representación del método *back-projection* para un arreglo circular.

En el ámbito de sistemas dinámicos y teoría de control, en [4] se propone un observador adaptable que estima la evolución temporal de una señal en función de las mediciones disponibles. El observador modifica sus parámetros de manera que la estimación se ajusta mejor a los datos observados. El planteamiento del problema consiste en realizar una discretización de la ecuación de onda para una dimensión y un arreglo matricial en el espacio de estados para resolver el problema de fuente inversa sin utilizar técnicas de regularización, dando lugar a un modelo discreto MIMO (*multiple-input multiple-output*) lineal e invariante en el tiempo.

Un modelo más claro, que además se enfoca en el efecto fotoacústico, se presenta en [1], donde los autores proponen un modelo en espacio de estados discreto lineal e invariante en el tiempo (LIT) SISO (*single-input single-output*) que describe la propagación de la luz y el sonido en medios con atenuación acústica. La propuesta parte de la discretización de la ecuación de Stokes para una dimensión separando parámetros

del modelo y parámetros de la muestra en la matriz de estado y la matriz de entrada respectivamente. Además, proponen un algoritmo para obtener el perfil de absorción a partir de mediciones utilizando una matriz de convolución y diferentes técnicas de regularización. Los resultados de las simulaciones sugieren que la representación en espacio de estados puede ser una herramienta útil para mejorar la precisión en la reconstrucción de las imágenes fotoacústicas. Sin embargo, mencionan que no cuentan con un trabajo similar para comparar el alcance de su propuesta.

El problema de la estimación de señales fotoacústicas radica en desarrollar un método preciso y eficiente para determinar la distribución espacial de las estructuras internas de una muestra a partir de las ondas acústicas generadas por pulsos de luz láser. Este proceso implica formular un modelo matemático que describa la generación y propagación de las ondas acústicas y validar los resultados obtenidos mediante comparaciones con modelos teóricos o datos experimentales.

1.5. Contribuciones

A raíz de la investigación y los resultados presentados en capítulos posteriores se obtiene:

- una alternativa a la estimación del perfil de absorción en presencia de ruido en los datos de medición;
- una estimación confiable de la señal fotoacústica en presencia de ruido en los datos de medición;
- una demostración de la ayuda que proporciona la identificación de subespacios en modelos de caja gris en presencia de ruido en los datos de medición;
- un enfoque matemático diferente para el campo de la fotoacústica.

1.6. Estructura de la tesis

El segundo capítulo expone el marco teórico, donde se abordan los conceptos utilizados para la estimación de señales fotoacústicas de este trabajo, dichos conceptos están relacionados con el efecto fotoacústico, los sistemas dinámicos y la identificación de subespacios.

El tercer capítulo presenta una explicación sobre la integración de los conceptos del marco teórico, así como la implementación del modelo en espacio de estados para realizar simulaciones y estimaciones.

En el cuarto capítulo se muestran las señales fotoacústicas obtenidas en los experimentos realizados, las señales de error asociadas y la reconstrucción de una imagen de prueba que simula las estructuras internas de una muestra.

Finalmente, en el quinto capítulo se discuten los resultados de las simulaciones y las ideas para el trabajo a futuro, dando lugar a las conclusiones de la tesis.

2 Marco teórico

En este capítulo se abordan los conceptos fundamentales que sustentan la solución del trabajo, con el fin de tener una base teórica que facilite la comprensión del planteamiento y desarrollo en el capítulo siguiente. Primero se aborda la teoría relacionada con el efecto fotoacústico y el espacio de estados; posteriormente, se expone el método de diferencias finitas centrales para aproximar ecuaciones diferenciales; y finalmente, se presenta la teoría sobre identificación de subespacios, la cual representa una parte fundamental en la estimación de las señales de este trabajo.

2.1. El efecto fotoacústico

El efecto fotoacústico es la generación de ondas de presión acústica tras exponer una muestra capaz de absorber energía óptica ante un láser provocando una expansión termoelástica, Figura 2.1.

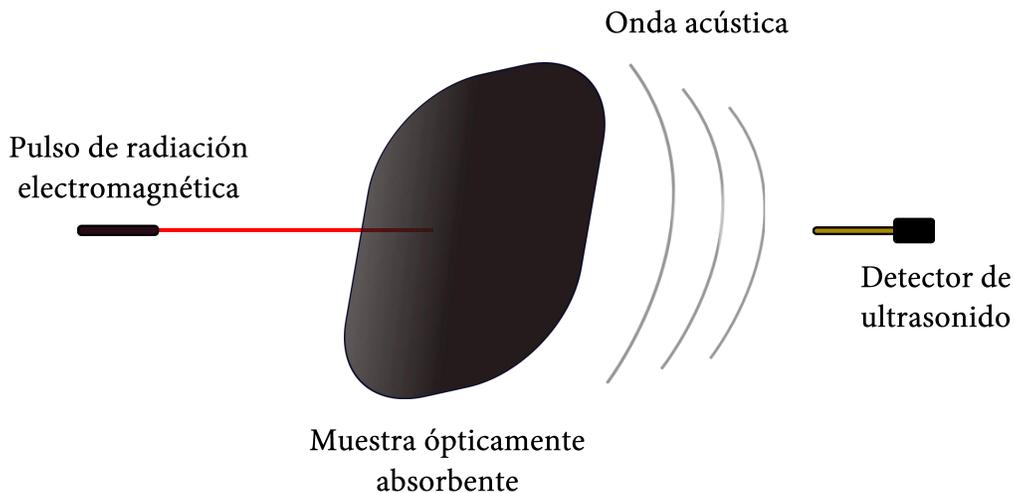


Figura 2.1: Representación del efecto fotoacústico.

Bajo la consideración de que el medio de propagación de la onda de presión acústica se comporta como un fluido ideal, la generación y la propagación de la onda se describen a través del acoplamiento de la ecuación de difusión de calor para la variación de temperatura $T(x, t)$, Ec.(2.1), y la ecuación de onda de presión acústica

$p(x, t)$, Ec.(2.2),

$$\left(\chi \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) T(x, t) = -\frac{1}{\rho_0 C_p} H(x, t), \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{1}{K_T \rho_0} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x, t) = -\frac{\beta}{K_T} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(x, t), \quad (2.2)$$

donde, para la muestra, χ es la difusividad térmica, C_p es el calor específico, β es el coeficiente de expansión térmica, K_T es la compresibilidad isotérmica y ρ_0 es la densidad de masa del medio de propagación no perturbado. Mientras que $H(x, t)$ es una función de calentamiento que describe la densidad de energía óptica absorbida por unidad de tiempo a determinada profundidad [1], puede escribirse como el producto de una función dependiente de la posición en el espacio $R(x)$ y una función dependiente del tiempo $i(t)$,

$$H(x, t) = R(x)i(t), \quad (2.3)$$

donde $R(x)$ es la absorción de energía óptica e $i(t)$ es el perfil temporal de iluminación.

Partiendo de la condición de confinamiento, que implica el tiempo de difusión térmica τ_{th} es mucho mayor al tiempo del pulso del láser τ_p , el calentamiento de la muestra se debe únicamente a la absorción óptica y sugiere que el volumen calentado no puede liberar su exceso de temperatura a través del proceso de excitación [2], entonces el acoplamiento de (2.1) y (2.2) da como resultado la ecuación (2.4) para una onda acústica:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(x, t) = -\frac{\beta}{C_p} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde c_0 es la velocidad del sonido en el medio de propagación. De acuerdo con [2] para c_0^2 se tiene la siguiente relación:

$$c_0^2 = \left(K_T \rho_0 - \frac{\beta^2 T_0}{C_p} \right)^{-1}.$$

Por otro lado, partiendo de la suposición de que en presencia de atenuación, los cambios de densidad en el fluido no reaccionan inmediatamente a los cambios de presión, sino después de cierto tiempo de relajación τ , el acoplamiento de (2.1) y (2.2) dan como resultado la ecuación de Stokes (2.5) que describe la propagación y atenuación de la onda acústica en función de la profundidad y el tiempo,

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 p(x, t)}{\partial t \partial x^2} = -\frac{\beta}{C_p} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}. \quad (2.5)$$

2.1.1. Problema inverso fotoacústico

El problema inverso fotoacústico consiste en reconstruir la distribución inicial de presión dentro de una muestra a partir de las mediciones de las señales fotoacústicas generadas, el objetivo es estimar la distribución espacial de absorción óptica dentro

de la muestra. El problema inverso se plantea como un problema de valor inicial, considerando una superficie de observación S donde se mide el conjunto de valores de presión $p(x_S, t)$; siendo $p(x_S, t)$ una condición de frontera [2]. De forma matemática:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 p(x, t)}{\partial t \partial x^2} &= 0 \quad ; \quad t \geq 0, \\ p(x', 0) &= f(x') \quad ; \quad \left. \frac{\partial p(x', t)}{\partial t} \right|_{t_0}, \\ p(x_S, t) &= g(x_S, t) \quad \text{para } x_S \in S \quad ; \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Dada la velocidad del sonido en el medio c_0 , el tiempo de relajación τ y el conjunto de valores límite $g(x_S, t)$, el objetivo es encontrar el valor inicial $f(x')$, que representa la distribución inicial de presión.

2.1.2. Coeficiente de absorción

Considerando un medio homogéneo, la absorción de energía óptica $R(x)$ puede expresarse como

$$R(x) = \chi \mu e^{-\mu x}, \quad (2.6)$$

donde μ es el coeficiente de absorción del material de la muestra y χ es la fluencia de la luz láser en la superficie de la muestra. El término $e^{-\mu x}$ representa la disminución en la irradiancia de la intensidad láser dentro a través de x .

2.2. Modelo en espacio de estados

El espacio de estados es una representación matemática que permite describir y analizar sistemas dinámicos así como sus variables internas en el tiempo, ya sea continuo o discreto. La representación para un sistema discreto en espacio de estados es la siguiente:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (2.7)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad (2.8)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de salida, $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de transmisión directa, $x_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector de señal de entrada y $y_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector de señal de salida.

El sistema se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones de estado, las cuales son un conjunto de ecuaciones diferenciales que relacionan las derivadas de las variables de estado con las entradas del sistema. Mientras que, las variables de estado son las variables mínimas necesarias para describir completamente el comportamiento de un sistema.

2.2.1. Estabilidad

El concepto de estabilidad para un sistema en espacio de estados se refiere a la capacidad del sistema a regresar a un punto de equilibrio después de ser afectado por una perturbación. Un sistema en tiempo discreto bajo el criterio BIBO (*Bounded Input, Bounded Output*) estable consiste en si existe un número real Z tal que para cualquier secuencia de entrada acotada $\{x_k\}$, la correspondiente secuencia de salida $\{y_k\}$ también está acotada y satisface que $|y_k| \leq n \cdot Z$, donde n es una constante que acota la secuencia de entrada, es decir, $|x_k| \leq n$ para todo k y para n finito.

Por otro lado, para determinar si el sistema es asintóticamente estable, es decir, la respuesta es acotada y tiende a un punto de equilibrio, los valores propios λ_i de la matriz A deben estar dentro del círculo unitario en el plano complejo, satisfaciendo

$$|\lambda_i| < 1. \quad (2.9)$$

La estabilidad asintótica es un criterio más riguroso que implica un comportamiento más predecible del sistema a través del tiempo.

2.3. Diferencias finitas centrales

El método de diferencias finitas utiliza la serie de Taylor para aproximar operadores diferenciales en operadores en diferencias finitas [5].

Teorema de Taylor. Si $f \in C^n[a, b]$ y $f^{n+1}(x)$ existe en $\langle a, b \rangle$. Sea $x_0 \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b] \exists \zeta(x)$ entre x_0 y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.10)$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

es un polinomio de grado n alrededor de x_0 y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \quad (2.11)$$

es el error de truncamiento asociado a $P_n(x)$.

Si $x = x_0 + h$, $h > 0$, el polinomio P_n y el residuo R_n se reescriben como

$$P_n(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} \quad (2.12)$$

$$R_n(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}h^{(n+1)} \quad (2.13)$$

Partiendo de (2.10) para orden $n = 1$ se tiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi(x))h^2}{2!}, \quad x_0 < \xi(x) < x_0 + h. \quad (2.14)$$

Despejando la primera derivada de la función,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \left(\frac{f''(\xi(x))h}{2!} \right) \quad (2.15)$$

se encuentra la primera aproximación de la derivada y el error de truncamiento

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{G}(h) = -\frac{f''(\xi)h}{2!}. \quad (2.17)$$

Ahora, al definir $x = x_0 - h$, $h > 0$, para la ecuación (2.14), la aproximación de la primera derivada y el error de truncamiento son

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{G}(h) = \frac{f''(\xi_1)h}{2!}. \quad (2.19)$$

Es posible realizar una aproximación relacionando los tres puntos, x_0 , $x_0 + h$ y $x_0 - h$. Sumando las ecuaciones (2.15), (2.18) y (2.19) y despejando para $f'(x_0)$ tenemos

$$f'(x_0) + \mathcal{G}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \frac{h}{2} (f''(\xi_1) - f''(\xi)), \quad (2.20)$$

donde $x_0 - h < \xi_1 < x_0 < \xi < x_0 + h$. Por lo que la aproximación de la primera derivada por diferencias finitas centrales es

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \quad (2.21)$$

Aplicando el teorema de Taylor para $n = 3$, considerando el punto x_0 , entonces

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_{(x_0+h)})}{4!}(x-x_0)^4. \quad (2.22)$$

- Para $x = x_0 + h$, la ecuación (2.22) queda como

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^4(\xi_{(x_0+h)}). \quad (2.23)$$

- Para $x = x_0 - h$, la ecuación (2.22) queda como

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^4(\xi_{(x_0-h)}). \quad (2.24)$$

Sumando la diferencia finita progresiva (2.23) y la diferencia finita regresiva (2.24):

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2f''(x_0) + 2\frac{h^4}{4!} [f^4(\xi_{(x_0+h)}) + f^4(\xi_{(x_0-h)})], \quad (2.25)$$

de donde es posible despejar $f''(x_0)$ para obtener su aproximación por diferencias finitas centrales:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \quad (2.26)$$

2.4. Identificación de subespacios

La identificación de sistemas aborda el problema de construir modelos matemáticos cuando se dispone de escasa información del sistema y cuando se conocen sus propiedades o algunos parámetros. Los modelos de identificación de subespacios tienen una validez y un rango de trabajo limitados y, en algunos casos, no tienen significado físico directo. Sin embargo, son relativamente fáciles de obtener y de utilizar [6]. Los algoritmos de identificación de subespacios no identifican modelos de entrada-salida, sino que identifican modelos de entrada-estado-salida.

Las matriz Hankel es la base de los algoritmos de identificación de subespacios, ya que esta matriz puede construirse fácilmente a partir de los datos de entrada-salida disponibles. Las matriz Hankel en bloque se define como:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i-1} & h_i & \dots & h_{i+j-2} \\ h_i & h_{i+1} & \dots & h_{i+j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2i-1} & h_{2i} & \dots & h_{2i+j-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p \\ H_f \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

donde $H_p \in \mathbb{R}^{li \times j}$, $H_f \in \mathbb{R}^{li \times j}$, cuyos subíndices p y f denotan datos pasados y futuros, respectivamente. La secuencia de datos de las mediciones de la entrada y de la salida son ordenados en matrices Hankel en bloque U y Y . El número de filas de bloque i es un índice suficientemente grande definido por el usuario, es decir, debe ser al menos mayor que el orden máximo del sistema que se desea identificar [6]. Mientras que el número de columnas j indica el número de mediciones.

2.4.1. N4SID

El algoritmo N4SID (*Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification*) estima un modelo en espacio de estados con la estructura de (2.7) y (2.8) utilizando el vector de entrada y el vector de salida. La estimación parte de construir una matriz Hankel en bloque para la entrada, la salida y el estado del sistema siguiendo la estructura de (2.27). Además, para la salida es importante generar la proyección del espacio de salida futuro Y_f en el espacio de salida pasado Y_p ,

$$\mathcal{O}_i = \frac{Y_f}{Y_p}, \quad (2.28)$$

donde \mathcal{O}_i es la proyección oblicua del espacio de salida. A continuación, se requiere una descomposición en valores singulares (SVD, *Singular Value Decomposition*) de \mathcal{O}_i , para estimar el orden del modelo en espacio de estados, siguiendo:

$$W_1 \mathcal{O}_i W_2 = U S V^T, \quad (2.29)$$

donde W_1 y W_2 son matrices de ponderación de los valores singulares, $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices ortonormales, y $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal de valores singulares.

Por otro lado, la matriz de observabilidad extendida, $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$, definida como

$$\Gamma_i = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{i-1}]^T, \quad (2.30)$$

y la secuencia de estados estimados $\hat{X}_i = (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+j-1})$, se tiene que la proyección \mathcal{O}_i es igual al producto de ambas,

$$\mathcal{O}_i = \Gamma_i \hat{X}_i. \quad (2.31)$$

Siguiendo la SVD en (2.29), mediante los valores singulares de \mathcal{O}_i es posible reconstruir Γ_i , ya que el espacio de salida guarda relación con el espacio de entrada, siendo entonces:

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U S^{1/2}, \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{i-1} = \Gamma_i. \quad (2.33)$$

La estimación de \hat{X}_i se calcula mediante:

$$\hat{X}_i = \Gamma_i^* \mathcal{O}_i, \quad (2.34)$$

donde el símbolo $*$ denota la pseudo-inversa de la matriz de observabilidad. En cada instante de tiempo, se elimina la última fila de Γ_i hasta llegar a Γ_{i-1} . Partiendo de esta última, la secuencia siguiente de estados, $\hat{X}_{i+1} = (\hat{x}_{i+1} \quad \hat{x}_{i+2} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+j})$, se determina de la siguiente manera:

$$\hat{X}_{i+1} = \Gamma_{i-1}^* \mathcal{O}_{i+1}, \quad (2.35)$$

donde O_{i-1} , se forma desplazando la primera fila de bloque de Y_f a la última fila de Y_p siguiendo la estructura de (2.27) para la salida y .

Al recuperar la matriz de observabilidad y la secuencia de estados, la estimación de las matrices del sistema en espacio de estados se realiza a través de la formulación del siguiente problema lineal:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_i \\ U_{i|i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

donde $Y_{i|i}$ es una matriz de Hankel en bloque con solo una fila de salidas, W es el ruido de proceso y V es la perturbación de la medición [7]. Bajo la consideración de que W y V son secuencias de ruido blanco con media cero, no correlacionadas con los estados del sistema, la solución de (2.36) para las matrices de espacio de estados se plantea como una aproximación de mínimos cuadrados:

$$\min_{\hat{\mathcal{L}}} \left\| \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix} - \hat{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \hat{X}_i \\ U_{i|i} \end{bmatrix} \right\|_F^2, \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Las matrices de espacio de estados no se calculan en sus formas canónicas (con un número mínimo de parámetros), sino como matrices de espacio de estados completas [8].

2.5. Descenso del gradiente

El descenso del gradiente es un algoritmo de optimización que busca estimar los valores de los parámetros que minimizan una función de costo $J(\theta)$. De manera iterativa se ajustan los valores de θ en la dirección que más reduce a la función de costo. En otras palabras, se calcula el gradiente de la función con respecto a θ y se actualizan sus valores siguiendo:

$$\theta = \theta - \alpha \nabla J(\theta), \quad (2.39)$$

donde α es la tasa de aprendizaje, que determina el tamaño del ajuste en cada iteración.

2.6. Regularización

La regularización es una técnica para reducir la incertidumbre en la estimación de parámetros, evitando el sobreajuste en modelos derivados de mediciones. También permite fijar valores previamente conocidos de los parámetros del modelo para mantener una validez física.

La regularización modifica una función de costo añadiendo un término de penalización. De esta manera, θ se obtiene minimizando la siguiente función:

$$\hat{V}_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) + \frac{1}{N} \lambda \theta^T R \theta, \quad (2.40)$$

donde N es el número de datos de medición, $\varepsilon(k, \theta)$ es el error de predicción entre la medición y la estimación del modelo, λ es una constante positiva que equilibra el sesgo (error sistemático) y la varianza (incertidumbre en las estimaciones): cuanto mayor sea el valor de λ , mayor será el sesgo y menor la varianza de θ , y R es una matriz positiva definida que permite mantener el modelo estable y añadir información conocida sobre los parámetros [9].

2.7. Correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson (PC, *Pearson Correlation*) mide el grado de correlación entre una imagen objetivo y una reconstruida, en un rango de -1 a 1 [10]. Las imágenes se tratan como matrices de píxeles, donde cada píxel tiene un valor que representa su color o intensidad. Cuando más próximo sea el valor a 1, significa que hay una relación perfecta entre las imágenes, cuando un píxel en una imagen tiene un valor alto (o más bajo), el píxel correspondiente en la otra imagen también tiene un valor alto (o más bajo), y viceversa.

El coeficiente de PC se define como:

$$PC = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A \sigma_B}, \quad (2.41)$$

donde A es la imagen objetivo, B la imagen reconstruida, COV indica la covarianza y σ la desviación estándar.

Durante este capítulo, se han sentado las bases teóricas necesarias para comprender y abordar el problema planteado en este trabajo. Se ha explorado el efecto fotoacústico y el espacio de estados, se ha analizado el método de diferencias finitas centrales como herramienta para la aproximación de ecuaciones diferenciales, y se ha presentado la teoría de identificación de subespacios, crucial para la estimación de las señales en estudio. En el capítulo siguiente se detallará la relación de los conceptos anteriores para la construcción de un esquema de trabajo que permita la estimación de señales fotoacústicas y la reconstrucción de imágenes.

3 Diseño y prueba de identificación

En el presente capítulo se aterriza el problema a resolver, así como la metodología utilizada para obtener los resultados mostrados en el siguiente capítulo. Los conceptos en el marco teórico son relacionados hasta plantear un esquema de identificación que permite realizar diferentes pruebas fotoacústicas.

3.1. Planteamiento del problema

Dadas las secuencias de mediciones de entrada y salida,

$$\begin{aligned} u &= [u_0 \quad \dots \quad u_f], \\ y &= [y_0 \quad \dots \quad y_f], \end{aligned}$$

donde f es el número de mediciones obtenidas tras realizar un experimento del efecto fotoacústico, Figura 2.1, se busca estimar la señal de onda de presión y generada por una muestra ópticamente absorbente y estimar su perfil de absorción μ , para generar una imagen fotoacústica, en otras palabras, se busca resolver el problema inverso fotoacústico.

3.2. Metodología

El primer paso para estimar la señal de presión es plantear un modelo en espacio de estados que describa el efecto fotoacústico utilizando (2.5). Posteriormente, mediante identificación de subespacios, y aprovechando la estructura del modelo para disminuir el número de elementos a determinar en (2.37), se genera un modelo con matriz estimada que será utilizado para simular la obtención de \hat{y} con entrada u y adicionalmente los estados \hat{x} . La validación de la matriz estimada dependerá del error entre la señal de medición y la señal de salida del modelo. Por otro lado, la obtención del perfil de absorción $\hat{\mu}$ partirá de dicha matriz y de utilizar (2.6). La validación del perfil se realizará mediante la reconstrucción de una imagen con diferentes perfiles de absorción estimados.

3.3. Modelo en espacio de estados

A fin de evitar confusiones con la notación en espacio de estados, se define z como la profundidad en el detector de ultrasonido, por lo que N_z representa el número de divisiones en el detector y Δ_z el espaciamiento entre cada división, Figura 3.1.

La ecuación de Stokes unidimensional para medios con atenuación acústica, Ec.(2.5), es reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 p(z, t)}{\partial t \partial z^2} = -\frac{\beta}{C_p} \frac{\partial H(z, t)}{\partial t}, \quad (3.1)$$

donde $p(z, t)$ representa la presión local en z , c_0 es la velocidad del sonido en el medio de propagación, τ es el tiempo de relajación y β el coeficiente de expansión térmica de la muestra. A partir de ella, cada una de las derivadas en (3.1) es aproximada siguiendo (2.21) y (2.26) de acuerdo a su orden.

Mediante diferencias finitas centrales de segundo orden para el primer término del lado izquierdo,

$$\frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial z^2} \approx \frac{1}{\Delta_z^2} (p(z_{n-1}, t) - 2p(z_n, t) + p(z_{n+1}, t)). \quad (3.2)$$

El conjunto de presiones locales en z en el tiempo $t = k\Delta_t$, siendo Δ_t el valor de discretización temporal, se define el vector $p_k \in \mathbb{R}^{N_z \times 1}$, donde:

$$p_k = \begin{bmatrix} p_0(z_0, t) \\ p_1(z_1, t) \\ \vdots \\ p_{N_z-1}(z_{N_z-1}, t) \end{bmatrix}; \quad k = N_z - 1. \quad (3.3)$$

Los coeficientes en (3.2) son ordenados en una matriz $G \in \mathbb{R}^{N_z \times N_z}$ de la siguiente manera:

$$G = \frac{1}{\Delta_z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

por lo que, la discretización espacial de la variación de presión en el detector se aproxima como:

$$\frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial z^2} \approx G p_k. \quad (3.5)$$

Continuando con p_k , mediante diferencias finitas centrales de segundo orden, la evolución de la presión a lo largo del tiempo en el segundo término se expresa de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial t^2} \approx -\frac{1}{c_0^2 \Delta_t^2} (p_{k+1} - 2p_k + p_{k-1}). \quad (3.6)$$

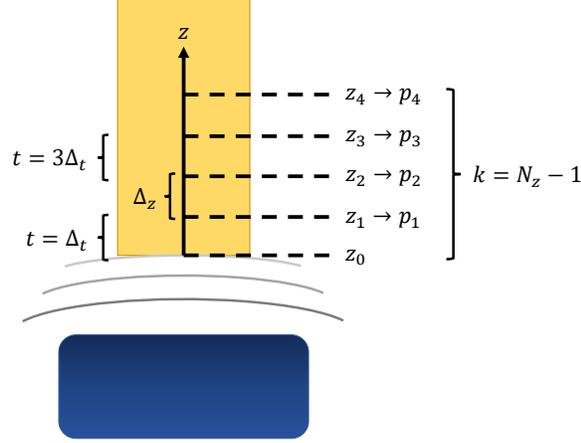


Figura 3.1: Representación de la discretización.

Utilizando diferencias finitas centrales, una de primer orden en tiempo, Ec. (3.7), y una de segundo orden en profundidad, Ec. (3.5),

$$\frac{\partial p(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta_t} (p_{k+1} - p_{k-1}), \quad (3.7)$$

el tercer término que representa la secuencia de generación de presiones a lo largo del tiempo es discretizado como:

$$\tau \frac{\partial^3 p(z, t)}{\partial t \partial z^2} \approx \tau \frac{1}{2\Delta_t} G(p_{k+1} - p_{k-1}). \quad (3.8)$$

Recordando a (2.3), para el lado derecho de (3.1), la absorción de energía óptica $R(z)$ sigue a (2.6). Al considerar un detector de ultrasonido no homogéneo, el coeficiente de absorción varía en función del espacio, es decir $\mu(z)$, brindando la posibilidad de discretizar como $\mu_n = \mu(z_n)$ con $n \in \mathbb{N}$, además se define el término $a_n = e^{-\mu_n \Delta z}$ como la atenuación de la intensidad láser entre las divisiones en z . Entonces,

$$\mu_n = \begin{bmatrix} \mu(z_0) \\ \mu(z_1) \\ \vdots \\ \mu(z_{N_z-1}) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

De esta manera, todos los elementos $\mu_n \in \mathbb{R}^{N_z \times 1}$ describen el perfil de absorción discretizado del detector.

Por otro lado, el perfil de iluminación temporal $i(t)$ es discretizado del siguiente modo:

$$i_k = \begin{bmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 a_0 \\ \vdots \\ a_{N_z-2} a_{N_z-3} \dots a_1 a_0 \end{bmatrix} i_s, \quad (3.10)$$

donde i_s es la intensidad continua del láser en la superficie del detector y el vector $i_k \in \mathbb{R}^{N_z \times 1}$ representa la intensidad del láser en cada punto z_n .

Mediante (3.9) y (3.10) se discretiza la función de calentamiento, $h_k \in \mathbb{R}^{N_z \times 1}$, siendo

$$h_k \approx \chi \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 a_0 \\ \vdots \\ \underbrace{\mu_{N_z-1} a_{N_z-2} a_{N_z-3} \dots a_1 a_0}_m \end{bmatrix} i_s, \quad (3.11)$$

$$h_k \approx \chi m i_s. \quad (3.12)$$

La aproximación de la derivada temporal por diferencias finitas centrales de primer orden utilizando (3.12) es:

$$-\frac{\beta}{C_p} \frac{\partial h_k}{\partial t} \approx -\underbrace{\frac{\beta \chi}{C_p \Delta_t} m}_r \underbrace{(i_s - i_{s-1})}_{u_k}. \quad (3.13)$$

Simplificando la notación de la expresión anterior,

$$-\frac{\beta}{C_p} \frac{\partial h_k}{\partial t} \approx r u_k. \quad (3.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.8) y (3.14) en (3.1), y agrupando los coeficientes como matrices $M \in \mathbb{R}^{N_z \times N_z}$ para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \overbrace{\left(-\frac{1}{c_0^2 \Delta_t^2} I + \frac{\tau}{2 \Delta_t} G \right)}^{M_1} p_{k+1} + \overbrace{\left(G + \frac{2}{c_0^2 \Delta_t^2} I \right)}^{M_2} p_k + \overbrace{\left(-\frac{1}{c_0^2 \Delta_t^2} I - \frac{\tau}{2 \Delta_t} G \right)}^{M_3} p_{k-1} &= r u_k, \\ M_1 p_{k+1} + M_2 p_k + M_3 p_{k-1} &= r u_k, \end{aligned} \quad (3.15)$$

se obtiene una ecuación lineal que relaciona los perfiles de presión p_k , p_{k-1} y p_{k+1} con la entrada u_k , que representa la generación de presiones ante la señal del láser. Despejando en (3.15) a la presión futura p_{k+1} ,

$$p_{k+1} = \overbrace{\left(-M_1^{-1} M_2 \right)}^{A_{11}} p_k + \overbrace{\left(-M_1^{-1} M_3 \right)}^{A_{12}} p_{k-1} + \overbrace{M_1^{-1} r}_{f} u_k,$$

$$p_{k+1} = A_{11}p_k + A_{12}p_{k-1} + fu_k. \quad (3.16)$$

se plantea un modelo en espacio de estados definiendo al vector de estados $x_k \in \mathbb{R}^{2N_z \times 1}$ como

$$x_k = \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} p_{k+1} \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} u_k, \quad (3.18)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (3.19)$$

donde A_{11} y $A_{12} \in \mathbb{R}^{N_z \times N_z}$, $A \in \mathbb{R}^{2N_z \times 2N_z}$, $f \in \mathbb{R}^{N_z \times 1}$ y $B \in \mathbb{R}^{2N_z \times 1}$.

Dado que las mediciones son obtenidas por el detector en la superficie ($z = 0$), para completar el modelo se define la siguiente ecuación de salida:

$$y_k = Cx_k, \quad (3.20)$$

donde $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2N_z}$ con $C(1,1) = 1$ y el resto del vector son ceros. Además, contemplando ruido de proceso w_k y perturbaciones en la medición v_k , el modelo lineal discreto en espacio de estados es representado por las siguientes ecuaciones:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (3.21)$$

$$y_k = Cx_k + v_k, \quad (3.22)$$

siendo y_k la señal fotoacústica. Sin embargo, no es posible construir de forma directa a la matriz de entrada B , ya que su relación con el perfil de absorción en (3.12) requiere que el vector μ_n sea conocido previamente.

3.4. Estimación paramétrica

Partiendo del supuesto de conocer los parámetros de discretización del modelo y los parámetros de la muestra, ambos condensados en la Tabla 3.1, así como de tener un conjunto de mediciones de una señal fotoacústica $y(k) = [y(k_0), y(k_1), \dots, y(k_f)]'$ y de la señal del láser $u(k) = [u(k_0), u(k_1), \dots, u(k_f)]'$ asociada, se plantea la estimación de los parámetros en la matriz B mediante identificación de subespacios, concretamente a través del algoritmo N4SID y los parámetros son ajustados a través del método de descenso del gradiente por mínimos cuadrados.

Parámetro	Unidades
Δ_z	[m]
N_z	[u]
Δ_t	[s]
τ	[s]
χ	[u]
c_0	[m/s]
β/c_0	[u]

Tabla 3.1: Parámetros requeridos para la estimación.

Como paso previo a la identificación, es necesario definir una matriz de entrada estimada $\hat{B} \in \mathbb{R}^{2N_z \times 1}$ siendo:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{f} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Extrayendo el vector \hat{f} de (3.23) y recordando el valor de r en (3.13),

$$\hat{f} = M_1^{-1} \hat{r}, \quad (3.24)$$

$$\hat{f} = M_1^{-1} \left(-\frac{\beta\chi}{C_p\Delta_t} \hat{m} \right). \quad (3.25)$$

Despejando \hat{m} de la ecuación anterior,

$$\hat{m} = -\frac{C_p\Delta_t}{\beta\chi} M_1 \hat{f}, \quad (3.26)$$

es posible extraer el perfil de absorción estimado $\hat{\mu}_n \in \mathbb{R}^{N_z \times 1}$ de (3.11) siguiendo:

$$\hat{\mu}_n = \frac{\hat{m}_n}{\prod_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i}. \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) permite visualizar que la reconstrucción de $\hat{\mu}_n$ depende completamente de la identificación de subespacios, que a su vez depende de la calidad de las mediciones disponibles.

3.5. Esquema de identificación

Se considera que la generación de señales fotoacústicas (ver Figura 1.1) es un proceso controlado que comienza con una muestra no exitada por el láser, de modo que las condiciones iniciales en el experimento son nulas, es decir, $x_0 = 0$.

La estimación de la matriz \hat{B} requiere la construcción de la matriz A y de la matriz C para utilizar identificación de subespacios y así asegurar que los valores

determinados por el algoritmo guarden sentido físico con el efecto fotoacústico.

La implementación de N4SID y su corrección por descenso del gradiente y regularización es realizada en MATLAB™ R2023b, utilizando un conjunto de datos entrada-salida $[u_k \ y_k]$ para formar las matrices Hankel en bloques, este conjunto es considerado como datos experimentales. El modelo de matriz estimada sigue la estructura de (3.21) y (3.22), el cual es reescrito de la siguiente manera:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + \hat{B}u + w_k, \quad (3.28)$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k + v_k, \quad (3.29)$$

donde $\hat{B} \in \mathbb{R}^{2N_z \times 1}$ es inicializada en $\hat{B} = 0$ y $\hat{x}_0 = 0$.

Tras resolver (2.37) para \hat{B} , siendo en ese punto la única incógnita ($D = 0$), los valores de la matriz de entrada son ajustados de acuerdo con (2.39) debido a la presencia de ruido en las mediciones, el cual fue considerado como ruido blanco $\mathcal{N}(0, 0.25)$ y $w_k = 0$.

3.6. Generación de señales fotoacústicas

A partir de la matriz \hat{B} obtenida en la sección anterior, el modelo de matriz estimada es simulado con u_k para genera la señal fotoacústica estimada \hat{y}_k .

3.7. Simulación

La señal fotoacústica estimada \hat{y}_k y la reconstrucción del perfil de absorción $\hat{\mu}_n$ de la muestra siguen el flujo de trabajo expuesto en la Figura 3.2.

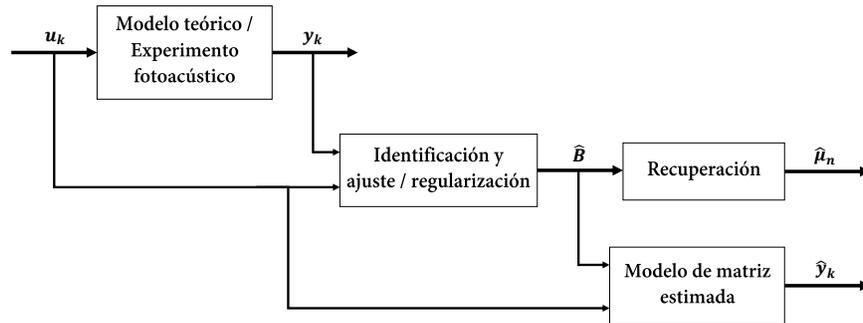


Figura 3.2: Diagrama del esquema de identificación.

3.7.1. Generación y reconstrucción de señales fotoacústicas

El atractivo del efecto fotoacústico se encuentra en la posibilidad de generar una imagen de la muestra a partir de ondas acústicas. Por lo cual, empleando una imagen

de prueba conformada por diferentes perfiles de absorción y haciendo uso del modelo descrito por (3.21) y (3.22), son generadas señales fotoacústicas y_k asociadas a su correspondiente μ_n extraído de la imagen, Figura 3.3.

Mediante este proceso son generados diferentes conjuntos de datos experimentales para poder seguir el esquema de identificación y la estimación paramétrica, detallados en este capítulo. Una vez obtenidos todos los perfiles de absorción $\hat{\mu}_n$, la imagen de prueba es reconstruida.

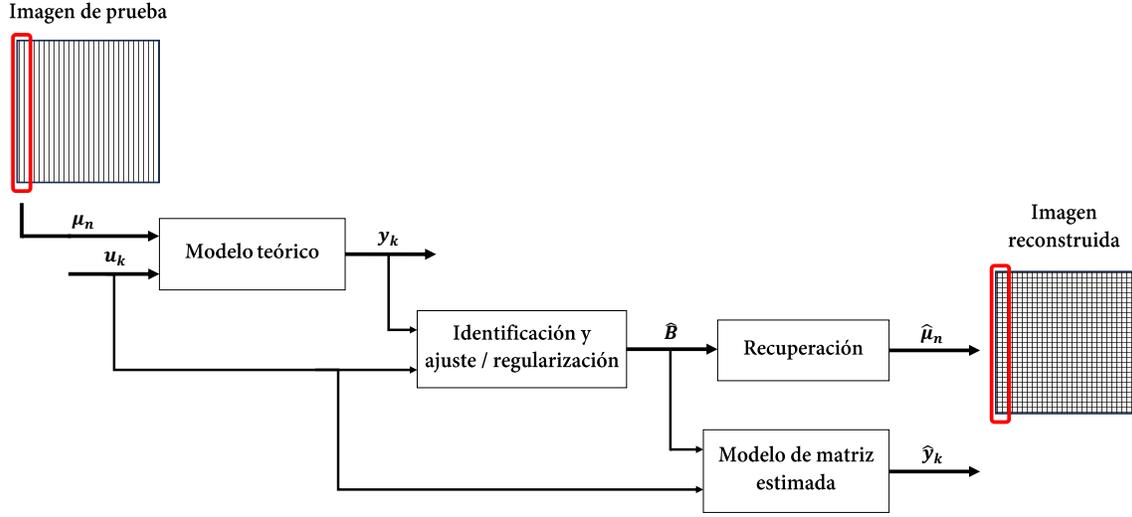


Figura 3.3: Diagrama de la reconstrucción de imagen.

3.7.2. Señales de error

La validación de cada una de las estimaciones en este trabajo depende del comportamiento del error entre valores teóricos y los generados por el modelo de matriz estimada, Ec. (3.28) y Ec. (3.29). Entonces

$$e_y = y_k - \hat{y}_k, \quad (3.30)$$

representa el error entre la señal fotoacústica generada por μ_n y la señal fotoacústica generada por $\hat{\mu}_n$. Por otra parte,

$$e_\mu = \mu_n - \hat{\mu}_n, \quad (3.31)$$

representa el error entre un perfil de absorción conocido y un perfil de absorción recuperado de \hat{B} .

El problema inverso fotoacústico, bajo el planteamiento de este capítulo, es considerado resuelto si

$$e_\mu \rightarrow 0, \quad (3.32)$$

$$e_y \rightarrow 0, \quad (3.33)$$

o bien, cuando

$$\|e_\mu\| \approx 0, \quad (3.34)$$

$$\|e_y\| \approx 0. \quad (3.35)$$

Mientras que (3.32) y (3.33) implican que el error disminuye con cada iteración, tanto (3.34) como (3.35) implican que el error mantiene un comportamiento periódico, pero su magnitud es despreciable y no afecta de forma significativa al valor estimado.

En este capítulo, se ha concretado la solución propuesta para el problema inverso fotoacústico y se ha descrito detalladamente la metodología empleada para obtener los resultados que se presentarán en el siguiente capítulo. Esta estructuración del problema y la metodología utilizada sientan las bases para una ejecución efectiva de los experimentos necesarios para validar el esquema de identificación.

4 Resultados

El presente capítulo tiene por objetivo mostrar la generación y estimación de señales fotoacústicas a partir del modelo discreto LIT mediante diferentes experimentos. Se presenta la ubicación de los polos de la matriz de estado para cada discretización, además para cada perfil de absorción se realiza una comparación entre la señal fotoacústica experimental y la señal estimada, así como del error entre ambas. Los parámetros de las discretizaciones 1 y 2 son tomados de [1], mientras que la imagen de prueba es generada mediante la función *phantom()* de MATLAB™. En todas las simulaciones se contempla ruido blanco en la medición $\mathcal{N}(0, 0.25)$ y $w_k = 0$.

4.1. Discretización 1

Los datos de simulación para los experimentos de esta sección son condensados en la Tabla 4.1 y en la Tabla 4.2 considerando un tiempo de muestreo t_s de 0.1[s].

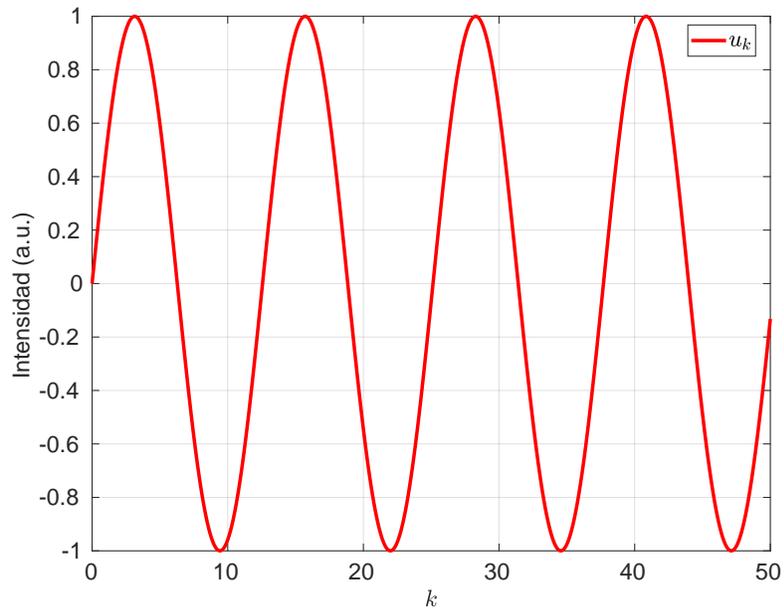
Parámetro	Valor
Δ_t	$1 \times 10^{-9}[s]$
Δ_z	$3 \times 10^{-6}[m]$
N_z	20

Tabla 4.1: Parámetros de simulación del modelo.

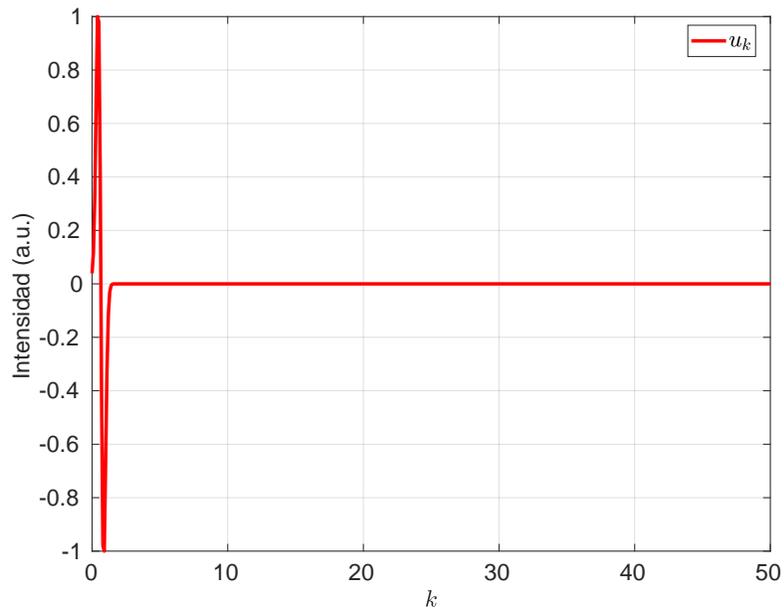
Parámetro	Valor
t_f	50[s]
u_k	$\sin(0.5t_s)$
i_k	$f(k 6, 2)$
x_k	0
τ	$77 \times 10^{-12}[s]$
χ	0.03
c_0	1500[m/s]
β/c_0	1/1

Tabla 4.2: Parámetros de simulación de la prueba.

Mientras que las señales de entrada u_k empleadas en las simulaciones de las siguientes pruebas son mostradas en la Figura 4.1.



(a) $u_k = \sin(0.5t_s)$.



(b) $u_k = i_s - i_{s-1}$.

Figura 4.1: (a) Serie de pulsos del láser. (b) Pulso del láser.

Los ubicación de los polos de la matriz A , para los valores de discretización seleccionados, son presentados en la Figura 4.2. Estos muestran que el sistema es estable al estar dentro del círculo unitario, pero sus valores de magnitud cercanos a 1 implican que la respuesta del sistema es lenta y sensible al ruido, además de presentar oscilaciones y tender lentamente a su estado estable.

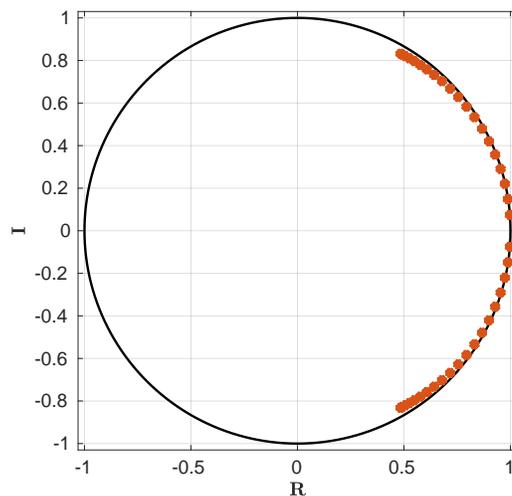


Figura 4.2: Polos de la matriz A .

4.1.1. Perfil 1

Experimento 1

Siguiendo el esquema de identificación, con un conjunto de datos de entrada u_k generados por una señal senoidal que representa la exposición de la muestra ante una serie de pulsos del láser (ver Figura 4.1a) durante el tiempo de simulación t_f , la reconstrucción del perfil de absorción para $N_z = 20$ es mostrada en la Figura 4.3. En ella se observa que el coeficiente de absorción en las diferentes capas de la discretización es muy alto, lo cual implica que las estructuras internas en las capas 5, 10 y 15 son las más sencillas de identificar en caso de contar únicamente con $\hat{\mu}_n$.

A pesar de que la Figura 4.3 sugiera una reconstrucción del perfil de absorción bastante atractiva, el valor de los coeficientes en $\hat{\mu}_n$ sobrepasan el valor real durante las primeras siete capas y posteriormente están un par de unidades por debajo en las demás capas, Figura 4.4. Entonces, bajo el criterio de (3.34) se valida la estimación de $\hat{\mu}_n$ para una excitación constante de la muestra.

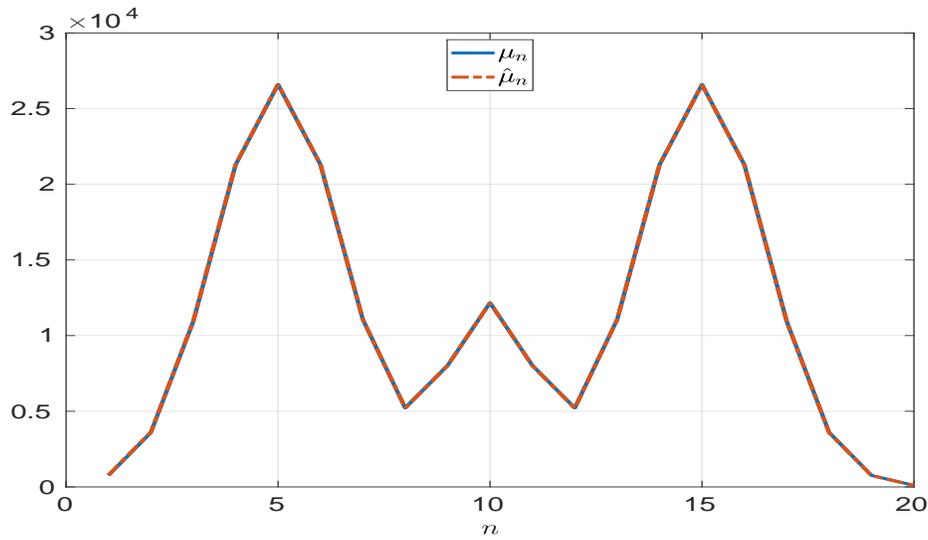


Figura 4.3: Estimación del perfil de absorción.

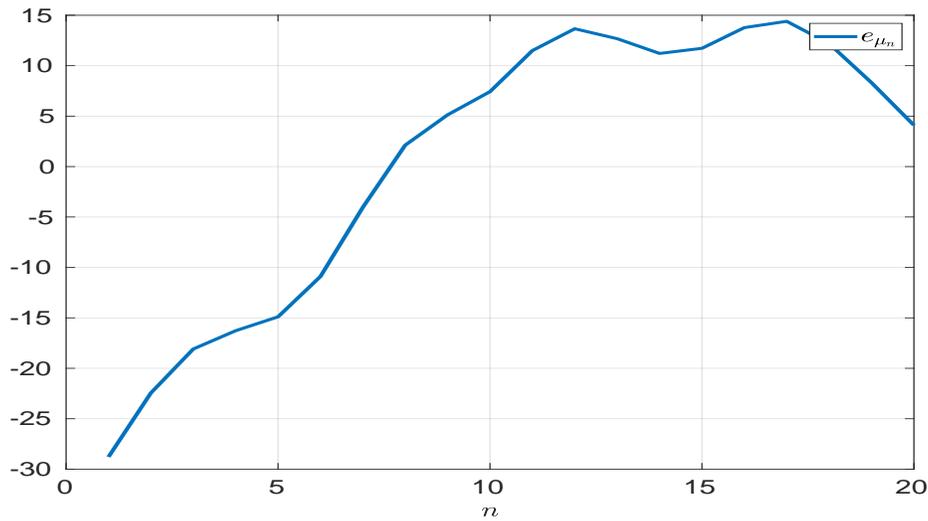


Figura 4.4: Error de estimación del perfil de absorción.

La señal fotoacústica generada por el modelo de matriz estimada es mostrada en la Figura 4.5, teniendo un comportamiento muy similar a y_k . Sin embargo, la Figura 4.6 muestra que existe un error entre las señales fotoacústicas con un comportamiento periódico debido a u_k y a e_{μ_n} . Por ende, la estimación es validada bajo el criterio de (3.35).

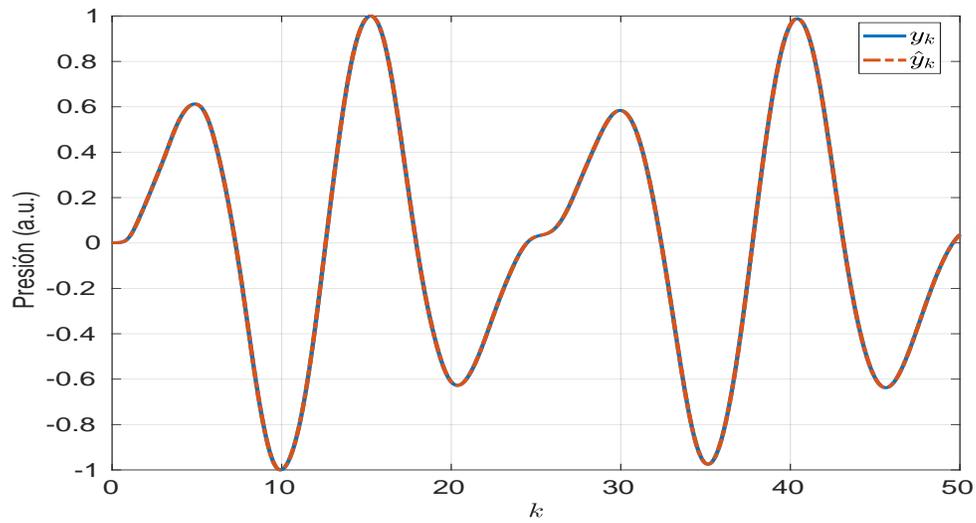


Figura 4.5: Estimación de la señal fotoacústica.

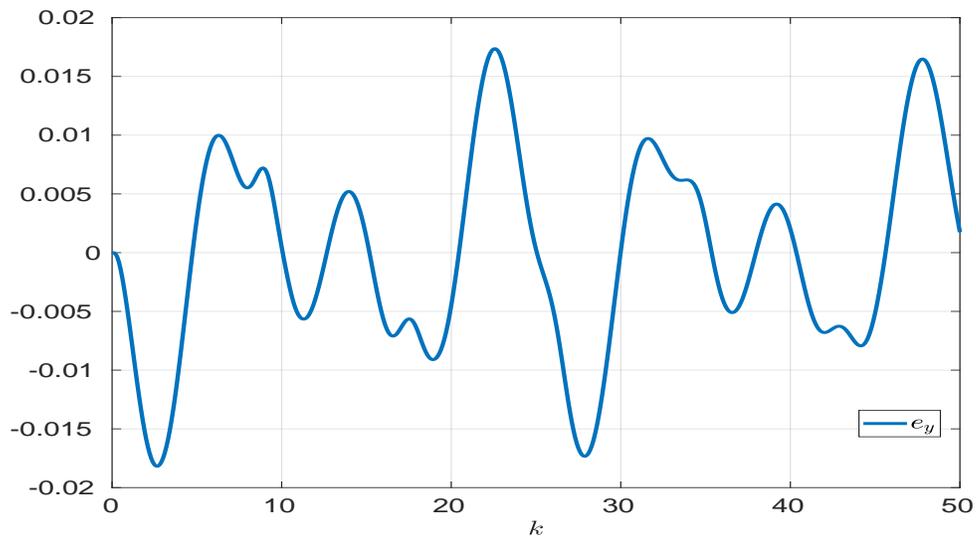


Figura 4.6: Error de estimación de la señal fotoacústica.

Las señales de error mostradas hasta ahora tienen como base una señal ideal, por ello la señal fotoacústica a partir de mediciones y_k utilizada para la estimación de \hat{B} es mostrada en la Figura 4.7, a fin de apreciar que, tanto $\hat{\mu}_n$ como \hat{y}_k son recuperados con bastante detalle en presencia de ruido debido a la SNR (*Signal-to-Noise Ratio*) de 43.3443[*dB*].

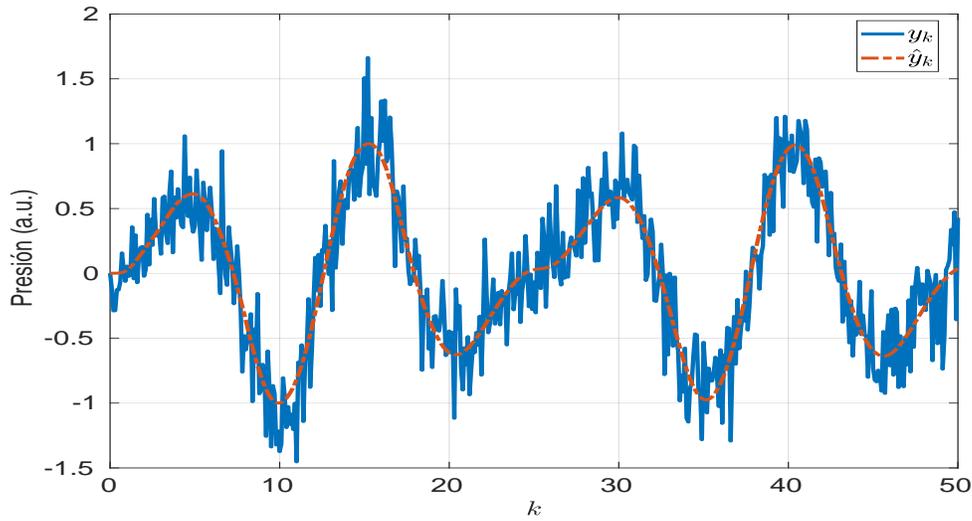


Figura 4.7: Señal fotoacústica recuperada.

Regularización

Mediante la regularización de los datos ajustados por descenso del gradiente, para $\lambda = 11$ y $R = I \in \mathbb{R}^{2N_z \times 2N_z}$, la estimación del perfil de absorción parece no mejorar en la Figura 4.8. Sin embargo, en la Figura 4.9 se aprecia una disminución significativa de e_{μ_n} , de manera que la regularización es una herramienta adicional para el esquema de identificación siempre y cuando los datos de medición no estén altamente corrompidos por ruido.

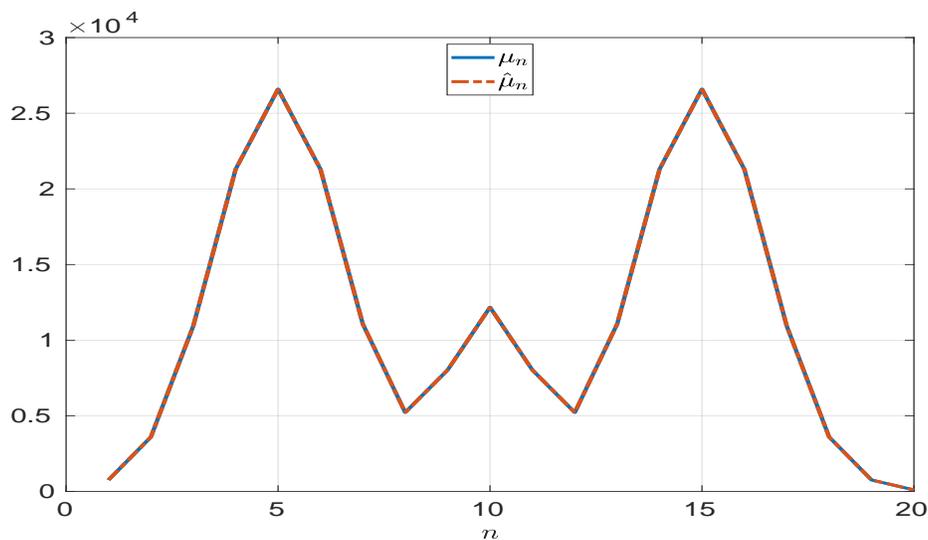


Figura 4.8: Estimación del perfil de absorción.

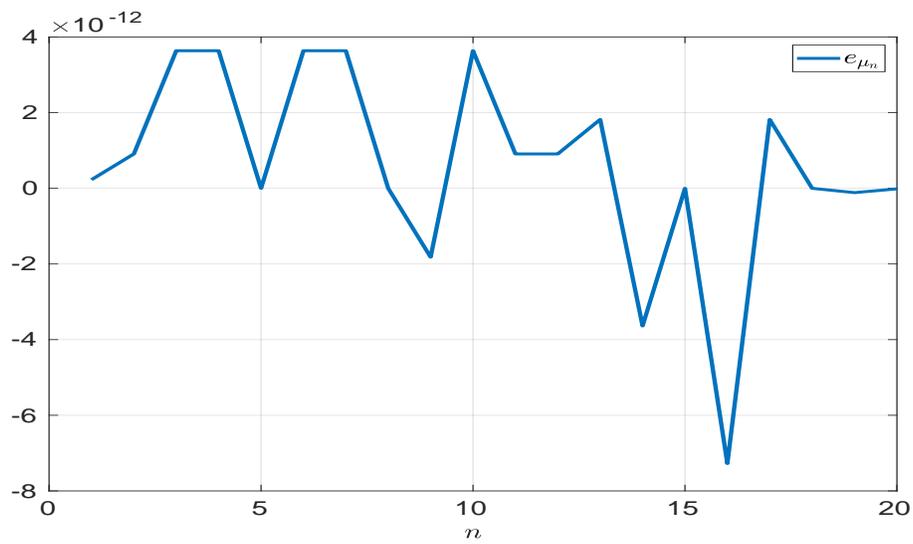


Figura 4.9: Error de estimación del perfil de absorción.

Como es de esperarse, la señal fotoacústica generada a partir de un μ_n con error $e_{\mu_n} \approx 0$ también es estimada con alta precisión tal como se observa en las Figuras 4.10 y 4.11.

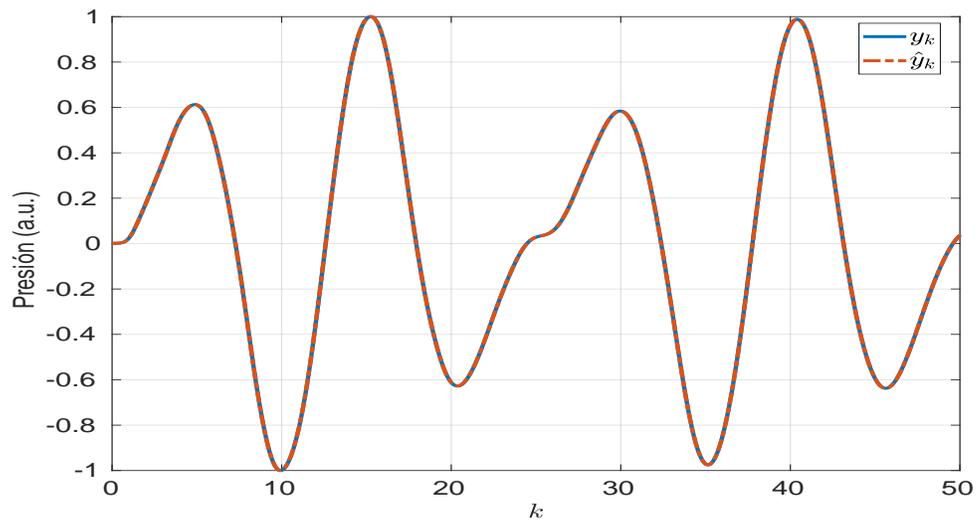


Figura 4.10: Estimación de la señal fotoacústica.

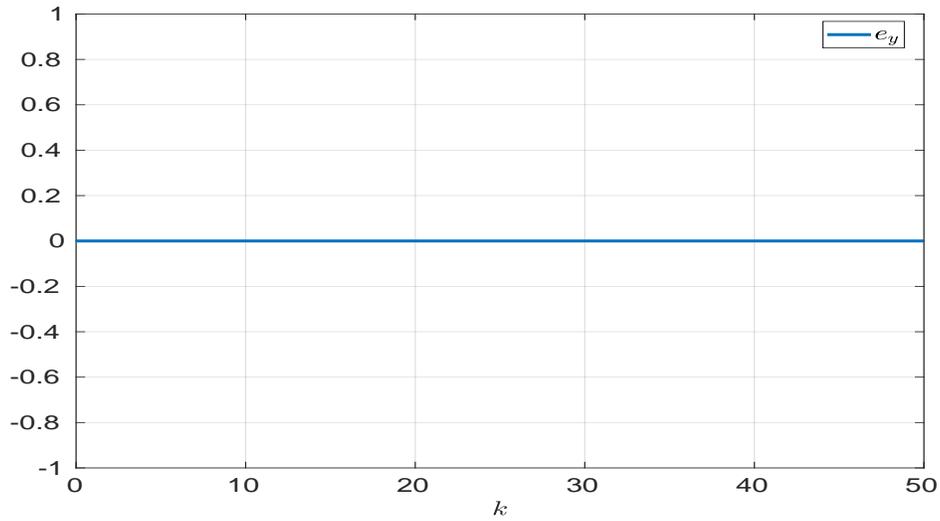


Figura 4.11: Error de estimación de la señal fotoacústica.

Experimento 2

El objetivo de este experimento es mostrar que el modelo en espacio de estados permite simular la respuesta del sistema ante diferentes modulaciones de la señal del láser.

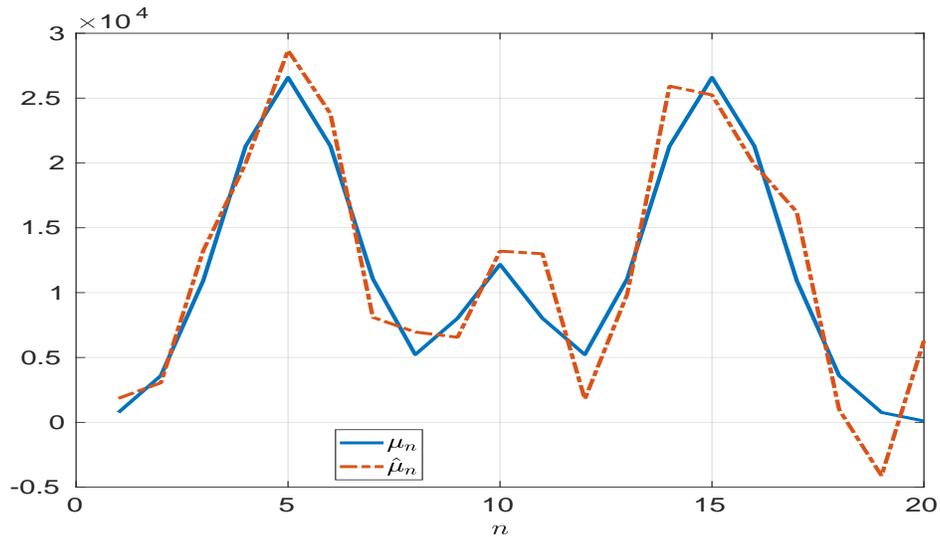


Figura 4.12: Estimación del perfil de absorción.

Tal como se observa en la Figura 4.12 y en la Figura 4.14, la señal u_k , teniendo como base un pulso del láser (ver Figura 4.1b) modelado como una distribución

normal i_k , provoca que la estimación del perfil de absorción de la muestra se vea comprometida en comparación con el experimento anterior, ya que el valor de los coeficientes en todas las capas difieren del valor real y aumenta con la profundidad. Este comportamiento del error se visualiza en la Figura 4.13.

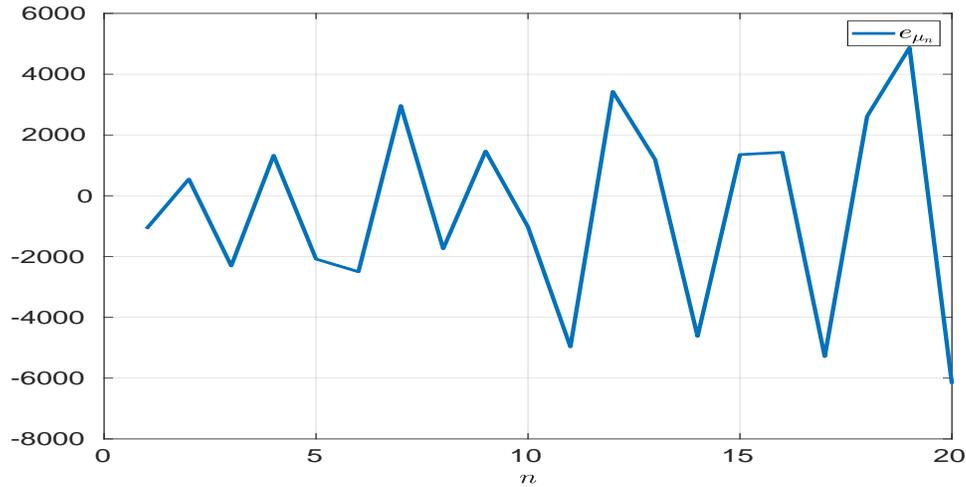


Figura 4.13: Error de estimación del perfil de absorción.

La influencia de $\hat{\mu}_n$ en la generación de \hat{y}_k se puede apreciar mucho mejor en la Figura 4.14, donde la señal estimada presenta constantes sobrepasos con respecto a y_k que son más notorios en la Figura 4.15. Sin embargo, el error disminuye con el tiempo ya que la muestra no es excitada constantemente por el láser.

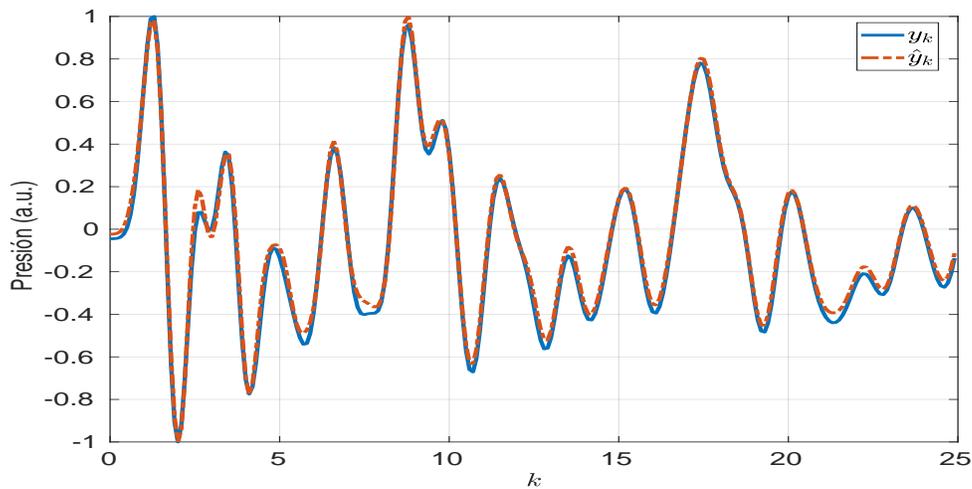


Figura 4.14: Estimación de la señal fotoacústica.

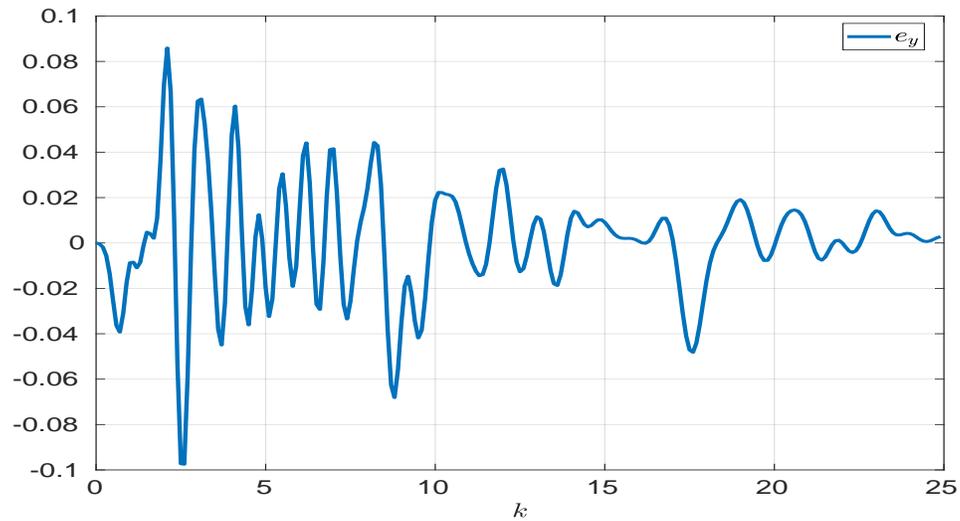


Figura 4.15: Error de estimación de la señal fotoacústica.

Otro motivo por el cual la estimación disminuye su efectividad es la calidad en las mediciones de y_k , pues en la Figura 4.16 es necesario ampliar la señal para observar cómo es afectada por el ruido debido a la disminución de su magnitud, puesto que ahora la SNR es de $2.7247[dB]$. Esto puede arreglarse fácilmente aumentando la intensidad del pulso o mediante una serie de pulsos como entrada al modelo.

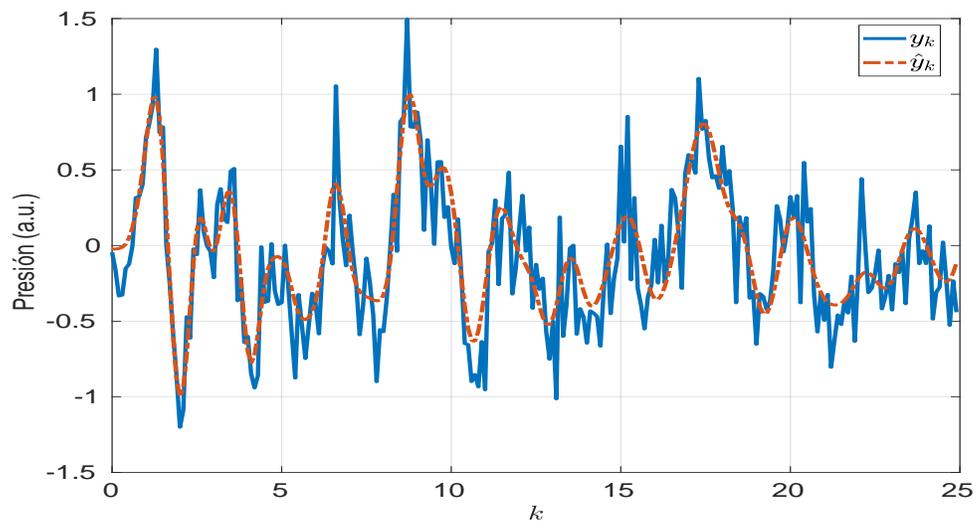


Figura 4.16: Señal fotoacústica recuperada.

Regularización

La aplicación de la regularización con $\lambda = 1$ en los datos generados por el pulso del láser mejora en gran medida la estimación de $\hat{\mu}_n$, tal como se aprecia en las Figuras 4.17 y 4.18, obteniendo resultados similares a los generados por una serie de pulsos. Esto supone un apoyo adicional al experimento fotoacústico en caso de que las muestras no puedan ser excitadas por mucho tiempo.

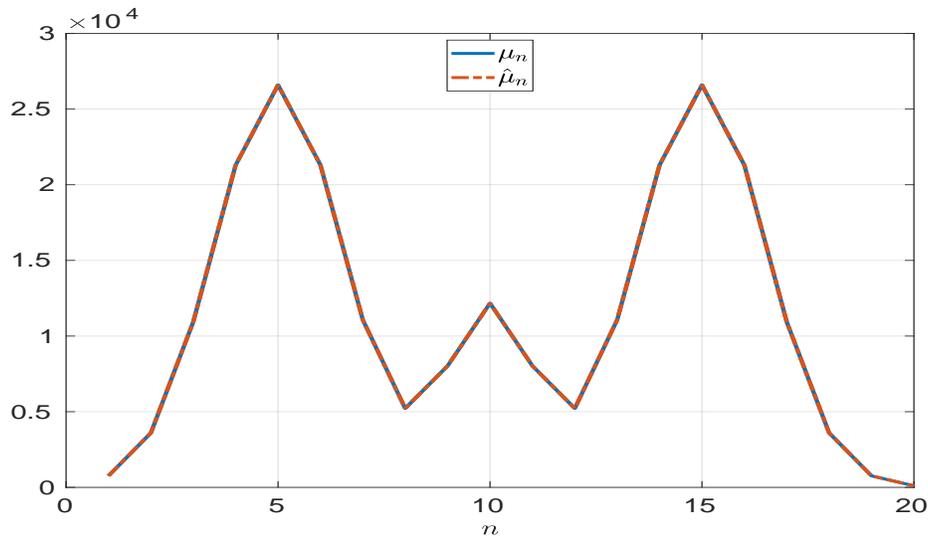


Figura 4.17: Estimación del perfil de absorción.

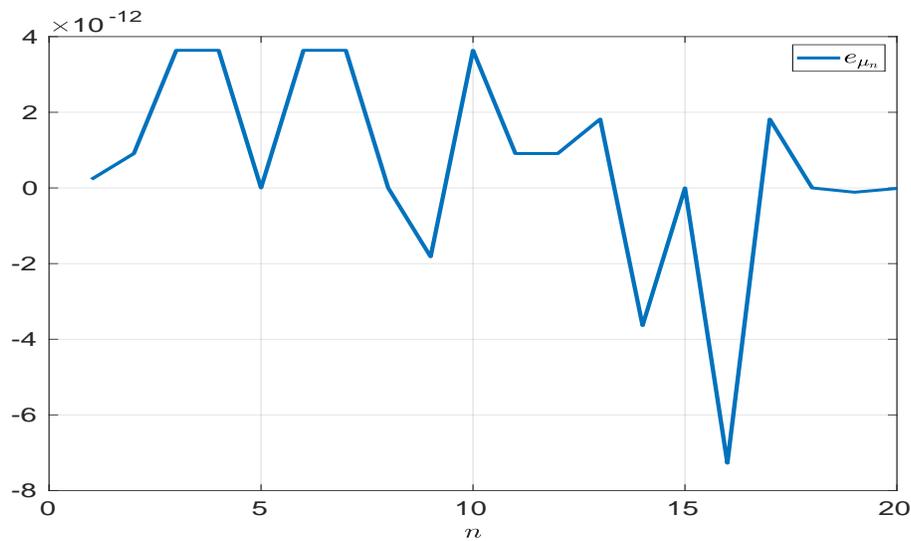


Figura 4.18: Error de estimación del perfil de absorción.

Por otro lado, la estimación de \hat{y}_k de la Figura 4.19 sigue perfectamente a y_k sin presentar sobrepasos. Así mismo, e_{y_k} se mantiene nulo en todo momento de la simulación, Figura 4.20.

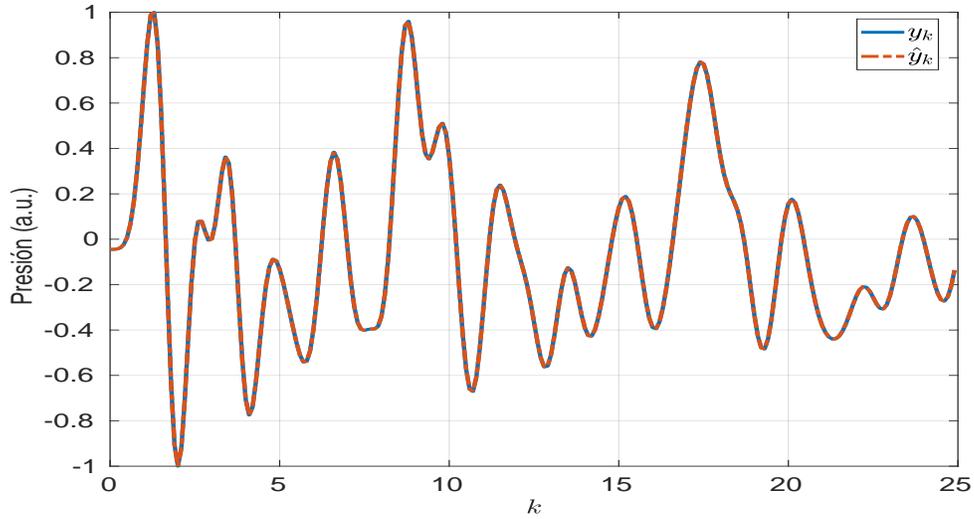


Figura 4.19: Estimación de la señal fotoacústica.

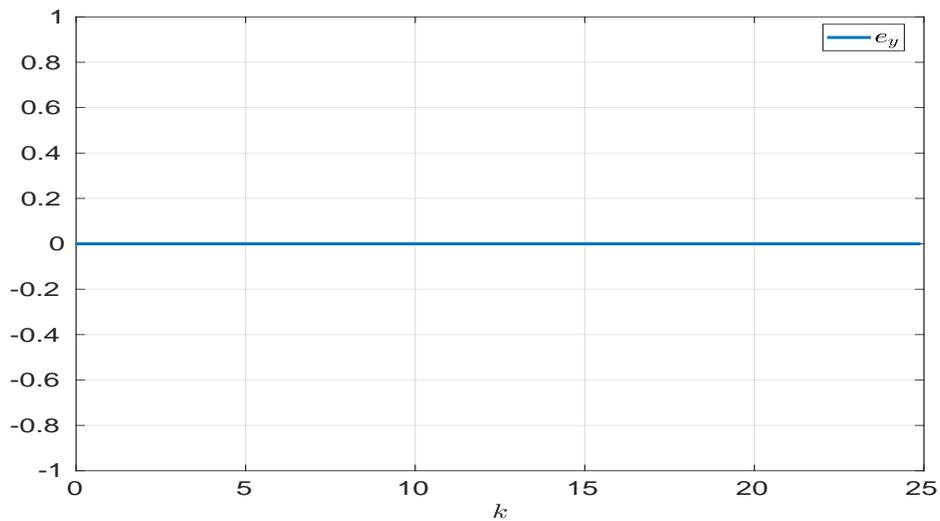


Figura 4.20: Error de estimación de la señal fotoacústica.

4.1.2. Perfil 2

Considerando que la muestra tiene un perfil de absorción como el de la Figura 4.21, las mediciones de la señal fotoacústica son afectadas en gran medida por el

ruido dando lugar a una estimación poco confiable para μ_n y para y_k , tal como se observa en la Figura 4.22 y en la Figura 4.24, respectivamente. Sin embargo, se aprecia cómo el modelo mantiene la física del fenómeno puesto que los valores de μ_n implican que las estructuras internas de la muestra tienen una menor capacidad de absorción óptica dando lugar a la generación de una señal fotoacústica con una amplitud muy pequeña.

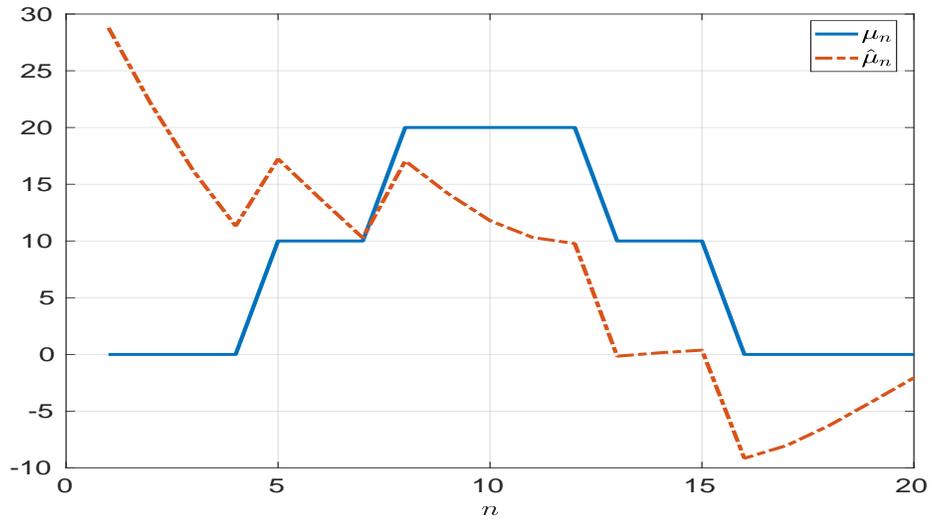


Figura 4.21: Estimación del perfil de absorción.

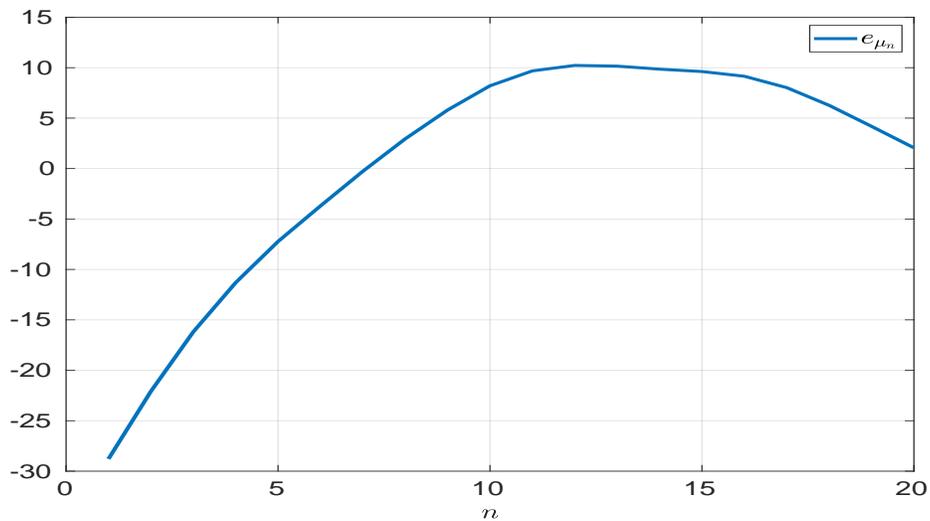


Figura 4.22: Error de estimación del perfil de absorción.

En la Figura 4.23, la señal \hat{y}_k presenta una diferencia bastante notoria frente a y_k debido a los valores de los coeficientes en $\hat{\mu}_n$ los cuales indican que solamente hay absorción antes de la capa quince (ver Figura 4.21) provocando una pérdida en la información de las estructuras dentro de la muestra.

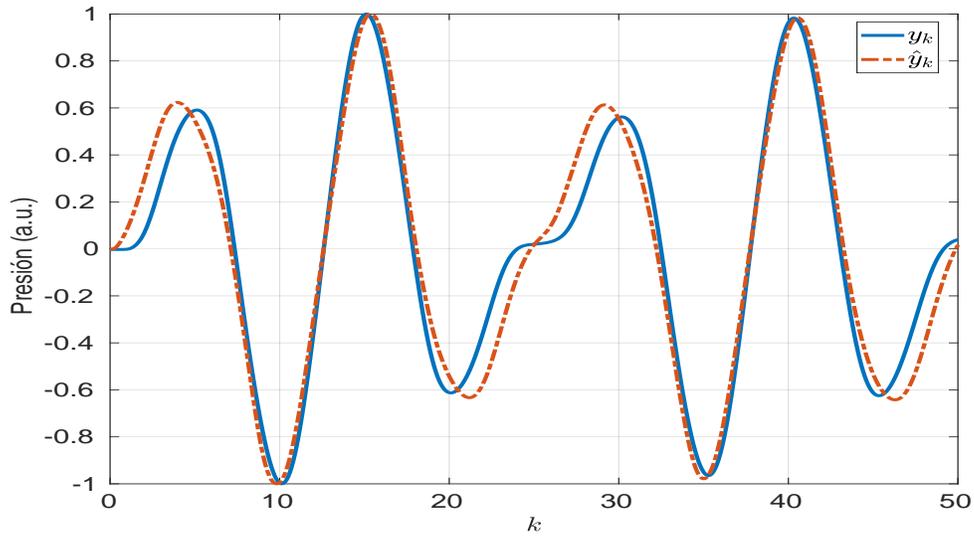


Figura 4.23: Estimación de la señal de fotoacústica.

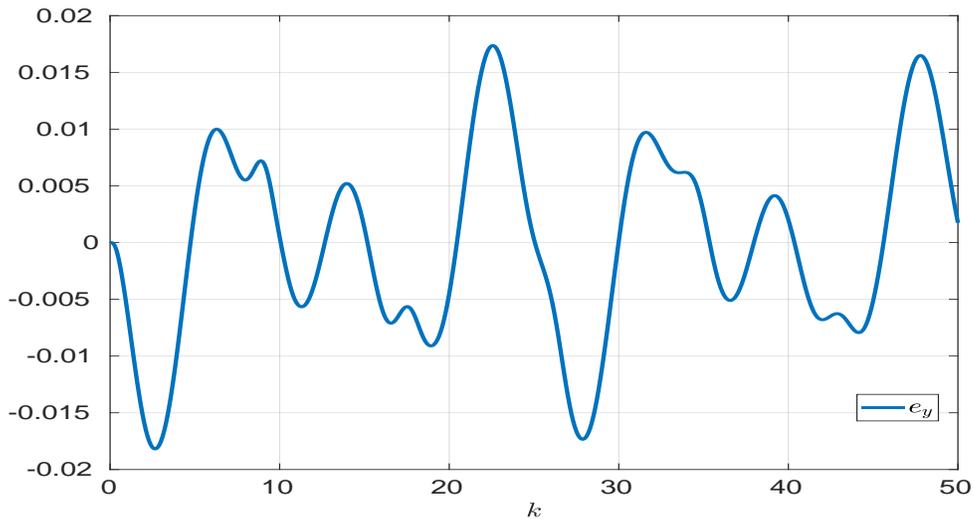


Figura 4.24: Error de estimación de la señal fotoacústica.

En la Figura 4.25 se observa cómo \hat{y} tiende a ser la envolvente de la señal con ruido, lo cual implica que el esquema de identificación requiere un cierto grado de calidad en los datos de medición.

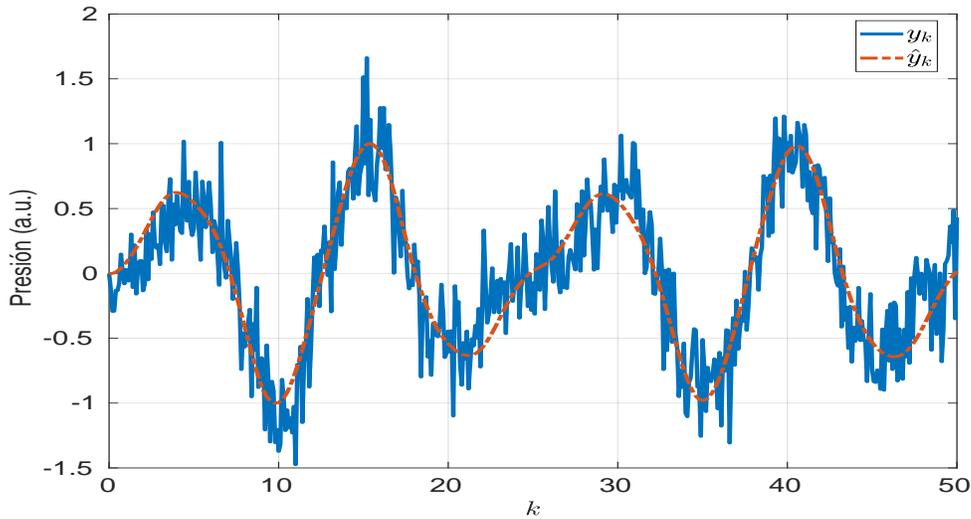


Figura 4.25: Señal fotoacústica recuperada.

Todo lo anterior se explica a partir del valor de la SNR en y_k , cuyo valor es de $-16.4595[dB]$. Al ser tan alta la presencia del ruido en las mediciones, por sí sola, la identificación por subespacios requiere filtrar los datos para mejorar la estimación inicial. Sin embargo, en la siguiente sección se demostrará que modificar la discretización del modelo puede hacer frente a una señal a ruido negativa.

4.2. Discretización 2

Las simulaciones para esta discretización únicamente se realizan con datos de una señal senoidal (ver Figura 4.1a) debido a la calidad en la estimación del perfil de absorción en comparación con los datos obtenidos con la distribución normal. Además, el tiempo de simulación es aumentado con la finalidad de observar la respuesta periódica del sistema, Tabla 4.4.

Por otro lado, el aumento de N_z , Tabla 4.3, da lugar a que los polos de la matriz A , mostrados en la Figura 4.26, se encuentren muy cercanos al círculo unitario provocando que la respuesta del sistema es aún más sensible al ruido y con mayor número de oscilaciones en comparación con la discretización 1.

Parámetro	Valor
Δ_t	$1 \times 10^{-9}[s]$
Δ_z	$20 \times 10^{-6}[m]$
N_z	100

Tabla 4.3: Parámetros de simulación del modelo.

Parámetro	Valor
t_f	400[s]
u_k	$\sin(0.5t_s)$
x_k	0
τ	77×10^{-12} [s]
χ	0.03
c_0	1500[m/s]
β/c_0	1/1

Tabla 4.4: Parámetros de simulación de la prueba.

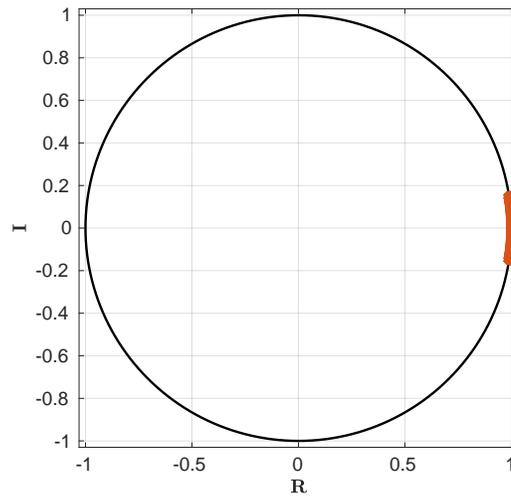


Figura 4.26: Polos de la matriz A.

4.2.1. Perfil 1

Empleando un perfil de absorción suave y de menor amplitud, respecto al perfil del Experimento 1, en la Figura 4.27 se aprecia una estimación bastante buena ante el aumento de profundidad y la disminución de la separación entre capas. Además, la Figura 4.28 respalda la afirmación anterior gracias a que la magnitud máxima que alcanza el error es despreciable, pero es importante señalar el ligero aumento que se presenta a partir de la capa ochenta, lo cual implica que la estimación se ve afectada por la acumulación del error de capas anteriores.

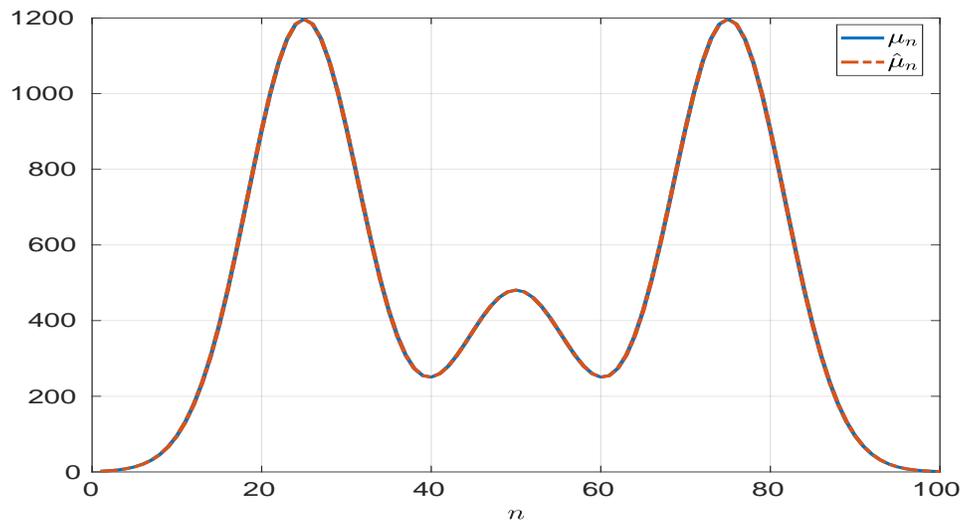


Figura 4.27: Estimación del perfil de absorción.

De cualquier manera, la estimación de $\hat{\mu}_n$ es validada bajo el criterio de 3.34.

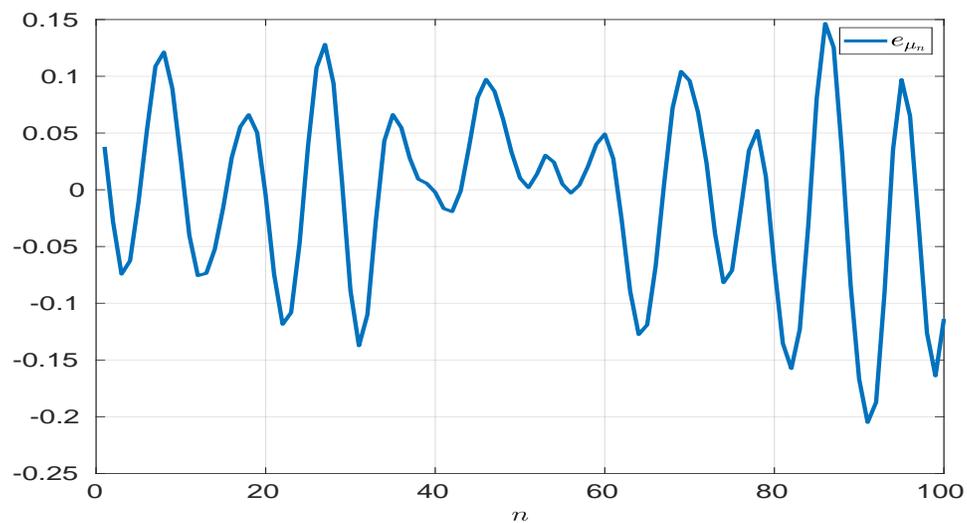


Figura 4.28: Error de estimación del perfil de absorción.

Por otro lado, la Figura 4.29 demuestra que la respuesta del sistema es más lenta y con un ligero aumento en oscilaciones, pero \hat{y}_k mantiene una buena aproximación de y_k .

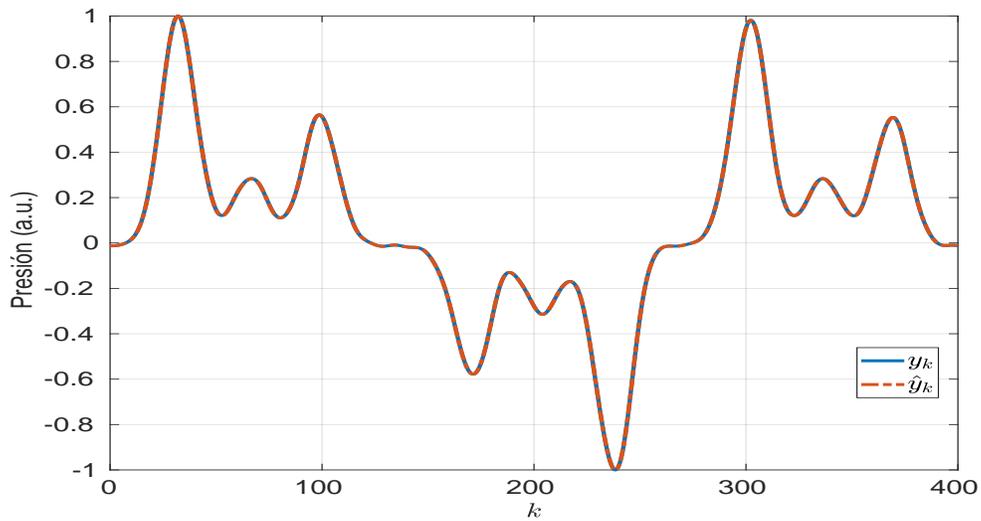


Figura 4.29: Estimación de la señal fotoacústica.

En cuanto a la evolución del error entre las señales fotoacústicas, mostrado en la Figura 4.30, e_y tiene un comportamiento periódico de magnitud cercana a cero que puede ser corregido filtrando las mediciones, o bien, puede considerarse un error despreciable.

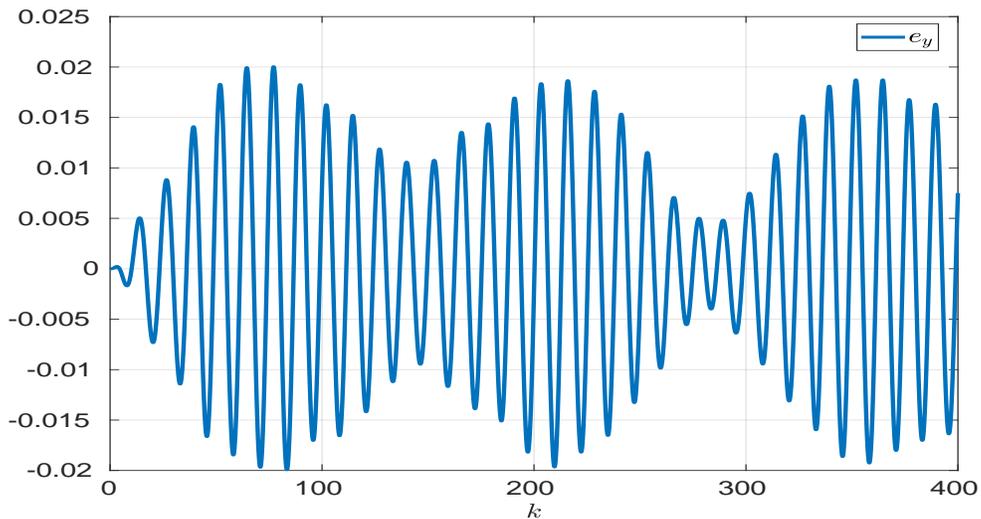


Figura 4.30: Error de estimación de la señal de medición.

Debido a la disminución en la magnitud de μ_n , el valor de la SNR es de $29.7101[dB]$. Esto indica una buena calidad de las mediciones, pero el ruido gana un poco más de presencia en comparación con el experimento 1, Figura 4.31.

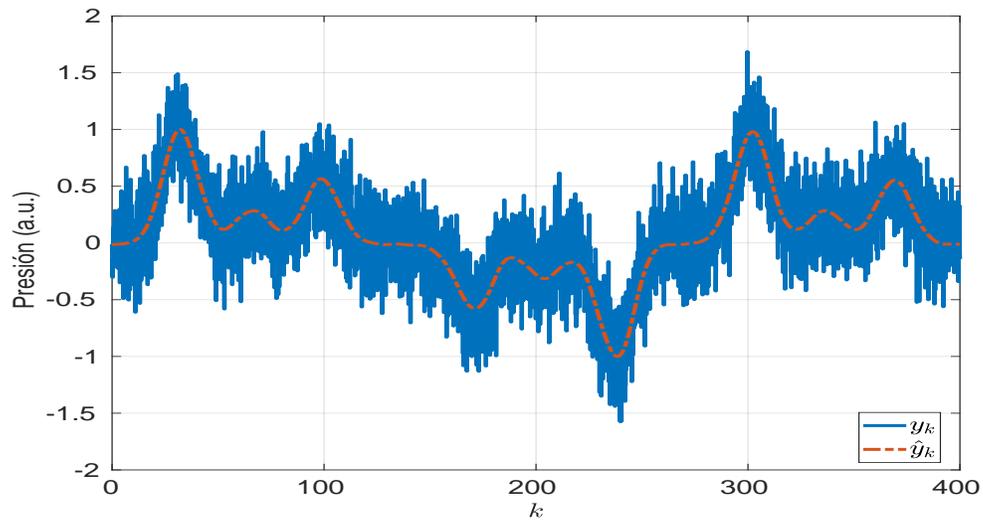


Figura 4.31: Señal fotoacústica recuperada.

4.2.2. Perfil 2

En esta prueba se utiliza el mismo perfil de absorción que el de la Figura 4.21 con la finalidad de mostrar cómo la discretización del detector reduce el efecto del ruido y cómo utilizando las mediciones de y_k de la Figura 4.25 puede mejorarse la estimación de μ_n frente al valor de SNR.

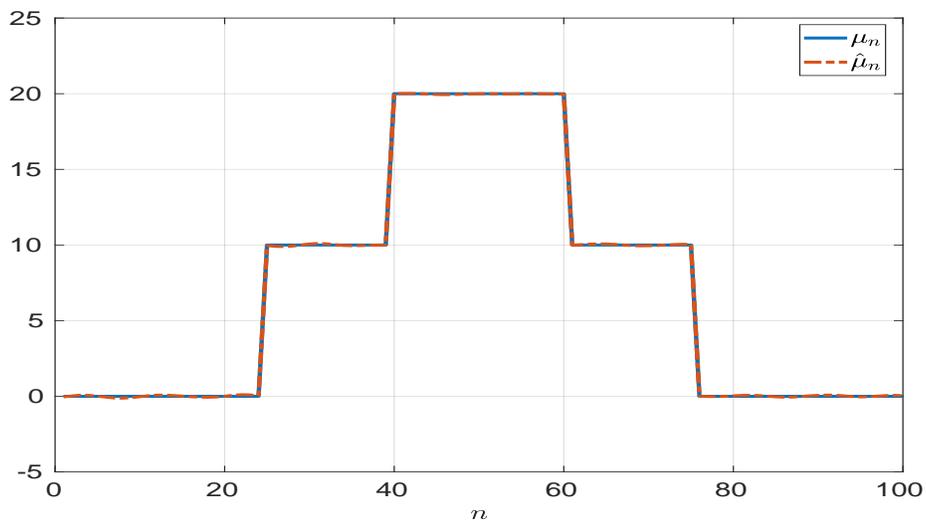


Figura 4.32: Estimación del perfil de absorción.

La Figura 4.32 es el resultado de modificar tanto el modelo teórico como el modelo

de matriz estimada con los datos de las Tablas 4.3 y 4.4. La estimación, tomando como referencia el Detector 1 para el mismo μ_n , mejora considerablemente, aunque con varias oscilaciones tal como se observa en la Figura 4.33.

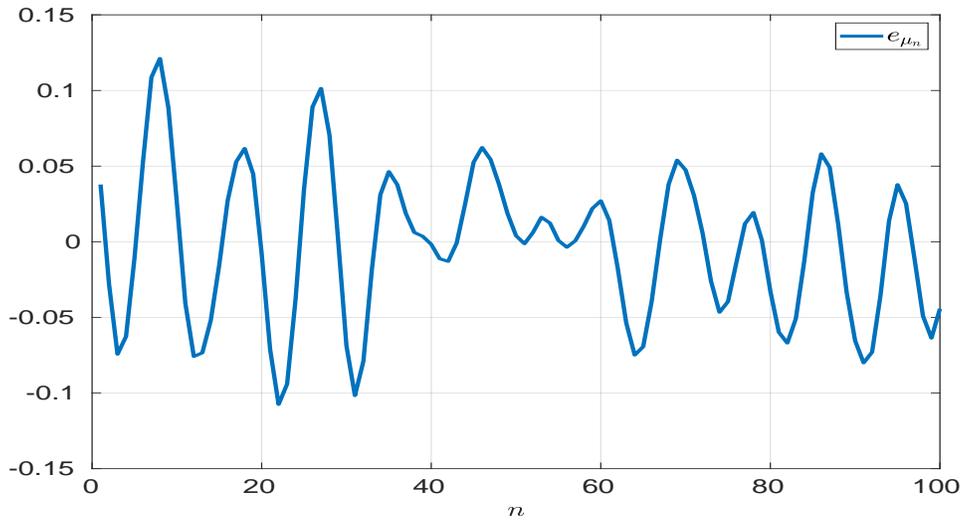


Figura 4.33: Error de estimación del perfil de absorción.

Una vez más se aprecia cómo el perfil de absorción influye en la amplitud de la señal, ya que en la Figura 4.34 el comportamiento de \hat{y}_k es similar al de la Figura ???. Por ende, el error en la Figura 4.35 no puede ser despreciado con facilidad puesto que la SNR es de $-1.8271[dB]$.

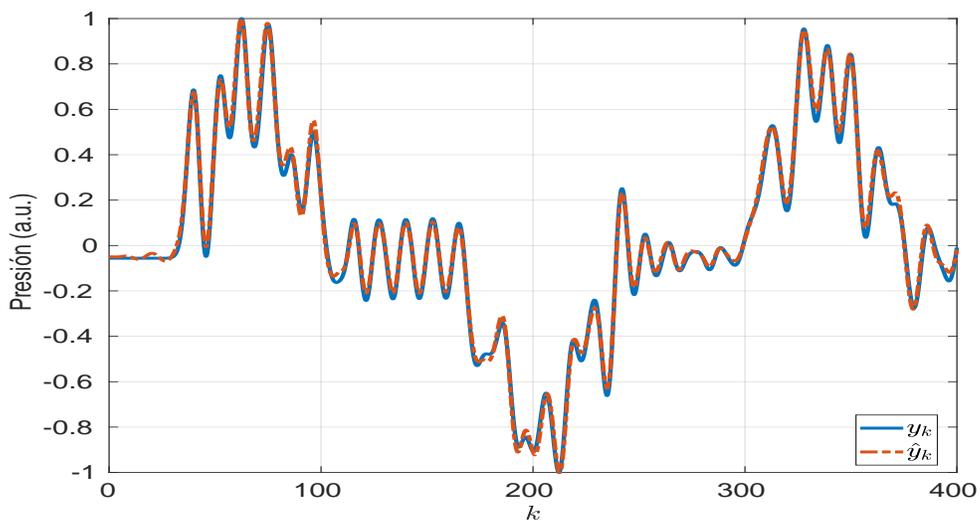


Figura 4.34: Estimación de la señal fotoacústica.

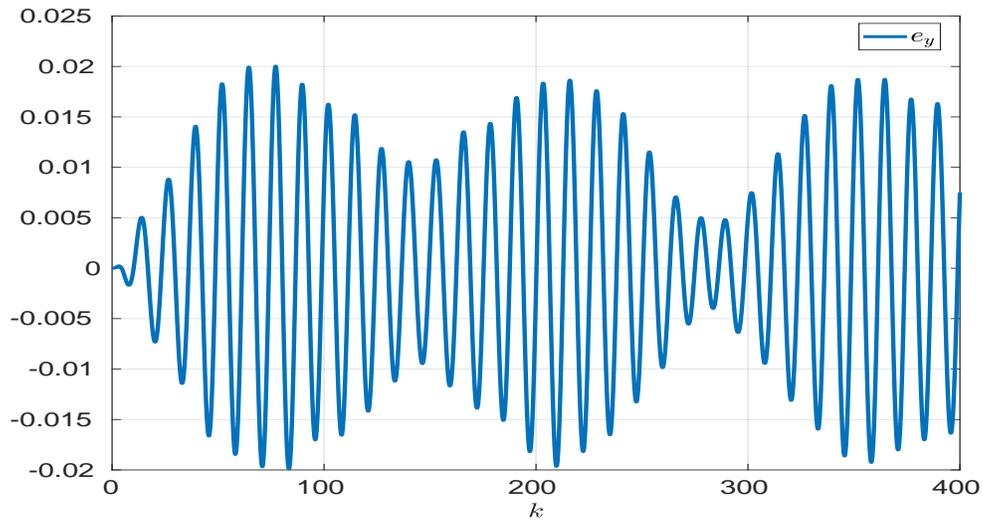


Figura 4.35: Error de estimación de la señal fotoacústica.

Sin embargo, esta prueba permite mostrar el alcance del esquema de identificación y recuperar una señal fotoacústica ante el ruido sin la necesidad de filtrar las mediciones, tal como se aprecia en la Figura 4.36.

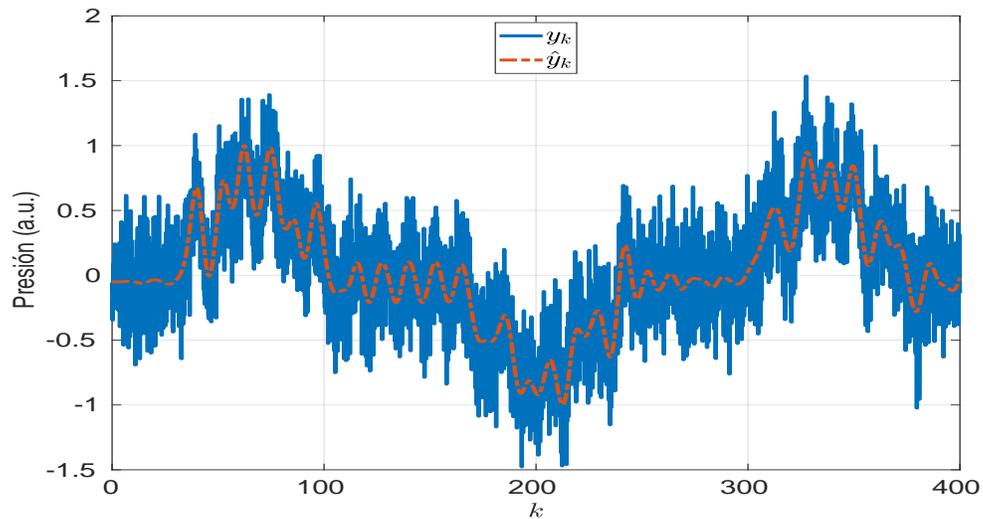


Figura 4.36: Señal fotoacústica recuperada.

Por otra parte, realizando un experimento más realista al tomar las mediciones y_k de la Figura 4.25 y manteniendo la nueva discretización en el modelo de matriz estimada, la Figura 4.37 muestra una estimación del perfil de absorción muy buena

para las capas posteriores a la capa cuarenta y algunas complicaciones en las capas previas, como se observa en la Figura 4.38.

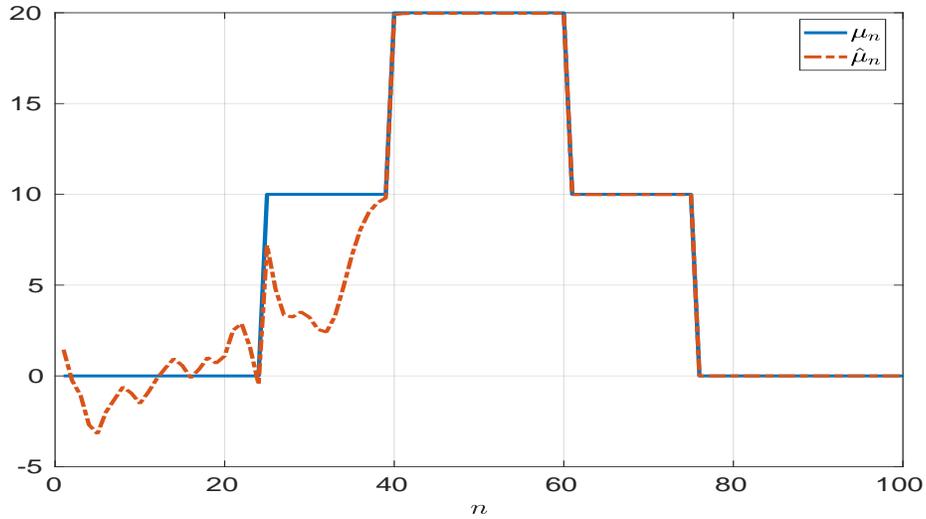


Figura 4.37: Estimación del perfil de absorción.

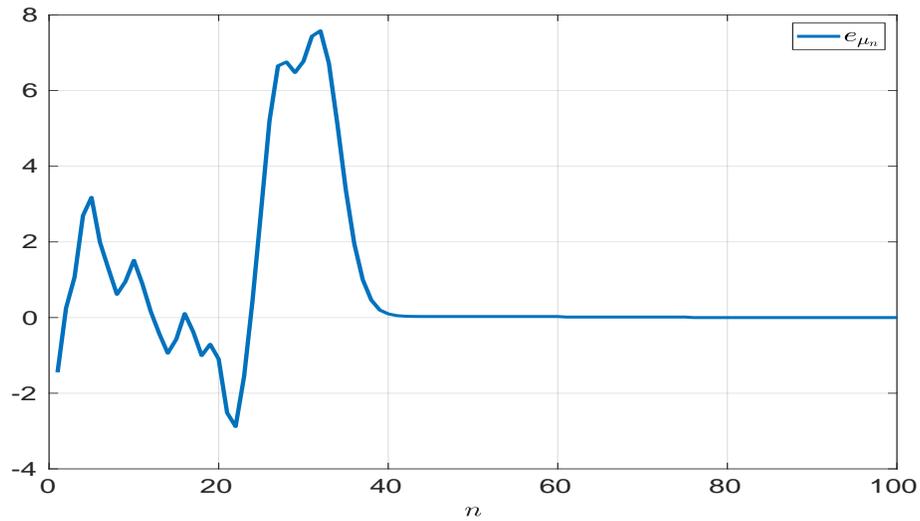


Figura 4.38: Error de estimación del perfil de absorción.

Recordando que las mediciones tienen una SNR de $-16.4595[dB]$, los resultados obtenidos al modificar únicamente el modelo para la estimación son bastante relevantes y dejan a la vista la importancia de la selección de N_z y Δ_z .

4.3. Reconstrucción de imagen

La prueba final de este trabajo consiste en simular la generación de una imagen fotoacústica a partir de un conjunto de datos entrada-salida bajo las mismas condiciones de ruido planteadas al inicio del capítulo y siguiendo el proceso detallado en 3.7.1. Los parámetros de simulación son presentados en las Tablas 4.5 y 4.6.

Parámetro	Valor
Δ_t	$2 \times 10^{-9}[s]$
Δ_z	$3 \times 10^{-6}[m]$
N_z	40

Tabla 4.5: Parámetros de simulación del modelo.

Parámetro	Valor
t_f	110[s]
u_k	$\sin(0.5t_s)$
x_k	0
τ	$77 \times 10^{-12}[s]$
χ	0.03
c_0	1500[m/s]
β/c_0	1/1

Tabla 4.6: Parámetros de simulación de la prueba.

Manteniendo la secuencia de las pruebas mostradas hasta el momento, en la Figura 4.39 se presenta el perfil de absorción y su estimación correspondiente al μ_n número veinte de la imagen a reconstruir. Donde, a pesar de que dicho perfil presenta variaciones en cada capa, es posible la identificación de múltiples estructuras gracias a una buena aproximación de los valores de $\hat{\mu}_n$.

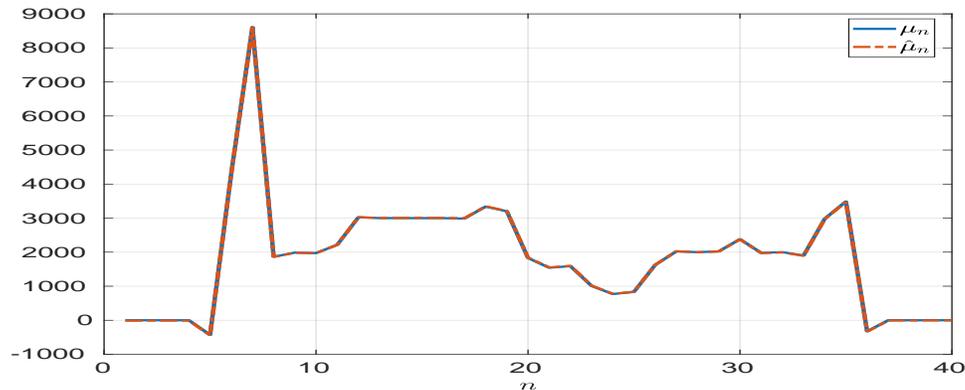


Figura 4.39: Estimación del perfil de absorción.

Por su puesto, la presencia de ruido provoca el error de estimación mostrado en la Figura 4.40, el cual tiene una magnitud mucho menor a la de los perfiles y que disminuyó ligeramente en cada capa. De esta manera, los valores de $\hat{\mu}$ son considerados como validos para poder reconstruir la imagen.

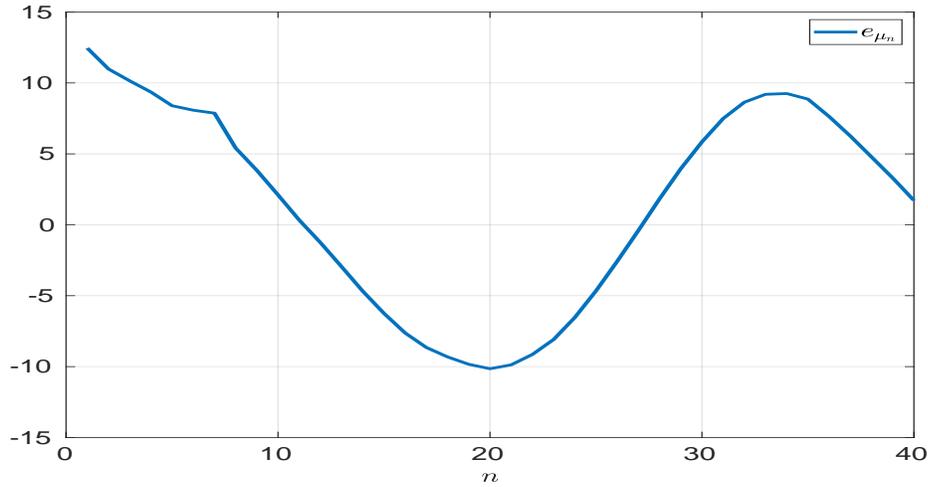


Figura 4.40: Error de estimación del perfil de absorción.

En cuanto a la señal fotoacústica generada, en la Figura 4.41 se observa una buena respuesta ante una excitación constante de la muestra. Aunque en este ejemplo pueda parecer que la generación de \hat{y}_k es innecesaria para la imagen, realmente actua como primer indicador de valides para $\hat{\mu}_n$ ya que la única información del experimento con la que se cuenta, de forma práctica, son las mediciones de y_k .

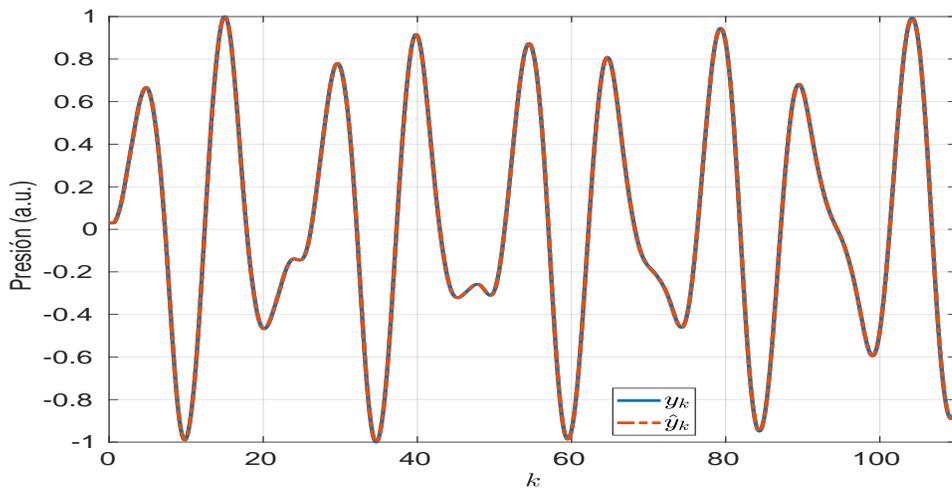


Figura 4.41: Estimación de la señal fotoacústica.

En la Figura 4.42 se observa que el error de estimación de la señal fotoacústica puede ser despreciado debido a la magnitud que mantiene a lo largo del tiempo de simulación.

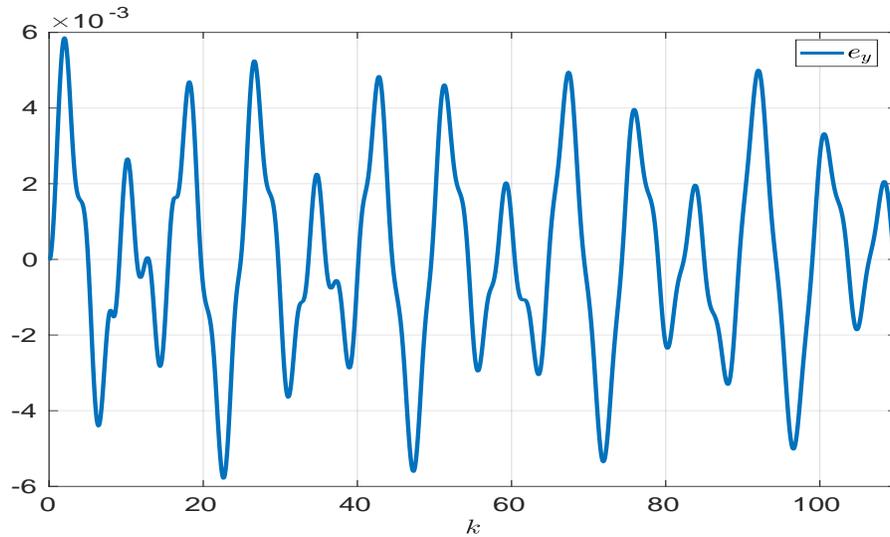


Figura 4.42: Error de estimación de la señal fotoacústica.

Por otro lado, recordando que las pruebas de identificación son realizadas bajo la presencia de ruido en la medición, la Figura 4.43 muestra a la señal fotoacústica recuperada ante una SNR de 28.9367[dB]. Corroborando una vez más que una SNR positiva implica una estimación bastante confiable del esquema de identificación.

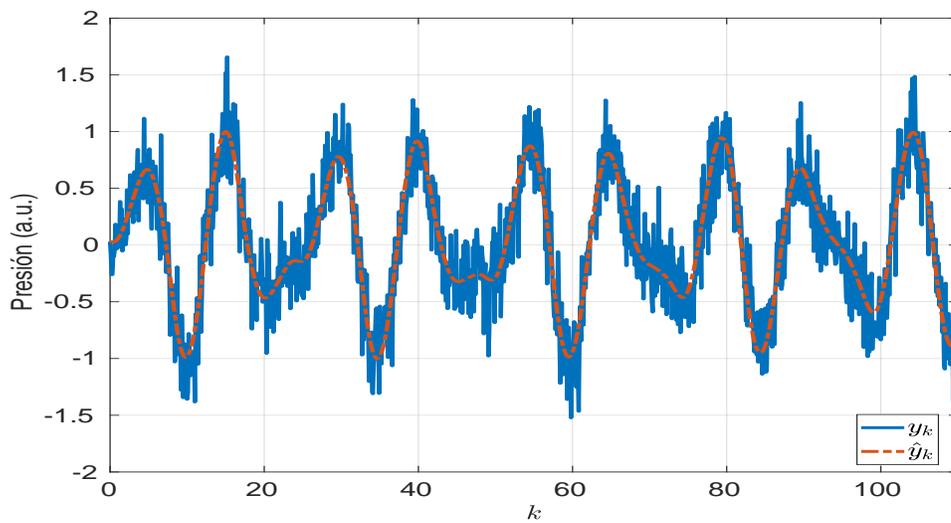


Figura 4.43: Señal fotoacústica recuperada.

Continuando con el proceso explicado en 3.7.1 para la reconstrucción de la imagen a partir del resto de perfiles de absorción en la Figura 4.45a, se obtiene la Figura 4.45b. A simple vista puede inferirse que el esquema de identificación reconstruyó completamente a la imagen de prueba, pero es importante recordar que tanto la discretización como el ruido en las mediciones arrastran consigo un error que afecta la calidad de la imagen.

Con el objetivo de determinar la similitud entre las imágenes en la Figura 4.45, se obtuvo el MSE (*Mean Squared Error*) entre ellas y tras normalizarlo en función del rango de intensidad de los píxeles, el porcentaje de similitud es del 99.93 %, indicando que las estimaciones han sido satisfactorias.

Mediante el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson como otro indicador de la calidad de la reconstrucción, el resultado obtenido es de 0.9999, lo cual implica una alta similitud entre las intensidades de los píxeles en las dos imágenes. Esto corrobora el porcentaje obtenido por el MSE. Los valores de similitud entre las imágenes son condensados en la Tabla 4.7.

Medición	Valor
MSE	99.93 %
PC	0.9999

Tabla 4.7: Similitud entre la imagen de prueba y la imagen reconstruida.

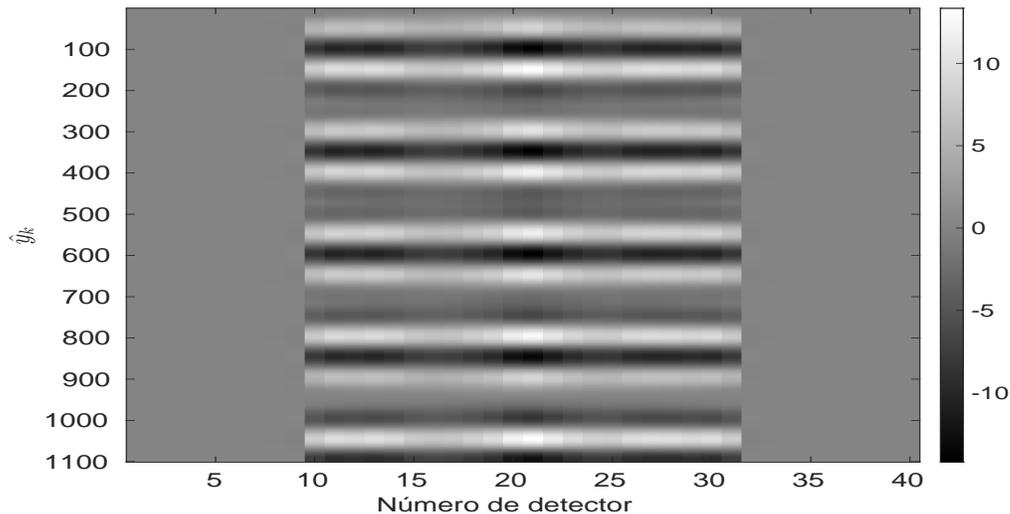
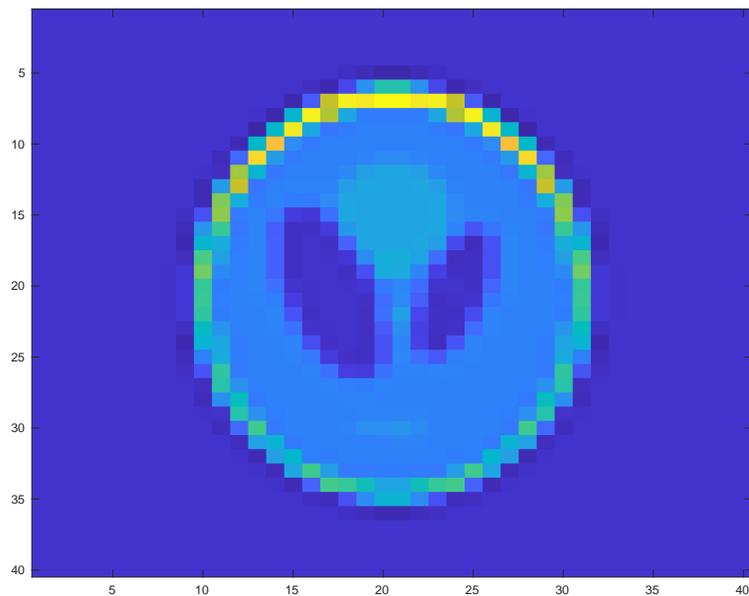
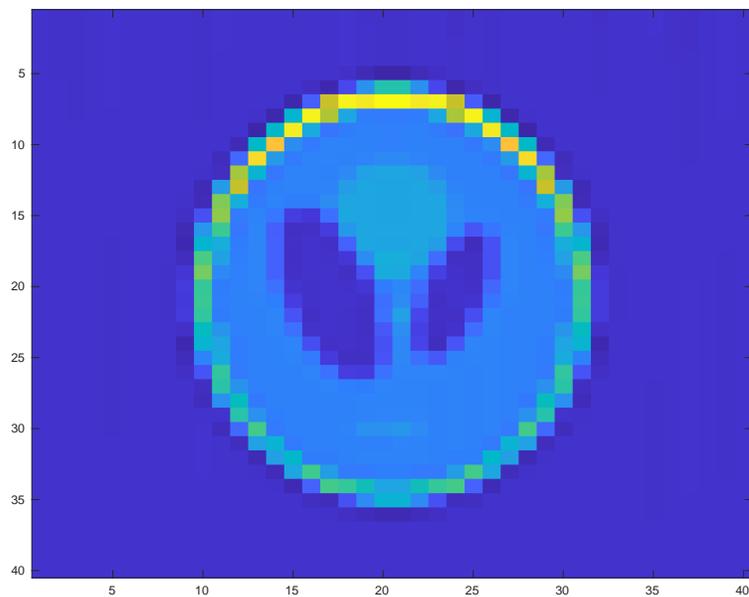


Figura 4.44: Sinograma de la imagen reconstruida.

La Figura 4.44 muestra las señales fotoacústicas estimadas asociadas a cada perfil de absorción en 4.45b. Los valores en escala de grises corresponden a la amplitud de \hat{y}_k .



(a) Imagen de prueba.



(b) Imagen reconstruida.

Figura 4.45: (a) Cabeza fantasma de Shepp-Logan. (b) Imagen resultante de la aplicación del esquema de identificación.

A lo largo de este capítulo se realizaron diferentes pruebas enfocadas en la generación y estimación de señales fotoacústicas utilizando el modelo discreto LIT y el esquema de identificación. Este análisis experimental proporciona información crucial para validar la solución y entender su comportamiento y aplicación en situaciones de ruido en los datos de medición, al grado de poder reconstruir una imagen. Esto sienta las bases para las conclusiones en el siguiente capítulo.

5 Conclusiones

En este trabajo se presentó una solución al problema inverso fotoacústico desde un enfoque de sistemas dinámicos para la reconstrucción de imágenes. Dicha solución partió del planteamiento de un modelo LIT en espacio de estados basado en la ecuación de Stokes (2.5), ya que describe la propagación y la atenuación de la onda acústica, dotando al modelo de un buen grado de representación física del efecto fotoacústico mediante el método de discretización de diferencias finitas centrales. Posteriormente, tras analizar los parámetros desconocidos en el modelo y la disponibilidad de datos experimentales, se utilizó la identificación de subespacios para obtener una aproximación de los parámetros, dado que las matrices no se calculan en sus formas canónicas fue posible fijar la matriz de estado y la matriz de salidas. Mediante el algoritmo del descenso del gradiente, los parámetros fueron reajustados hasta conseguir una respuesta similar a las mediciones. Sin embargo, dependiendo de la modulación de la señal del láser, fue necesario regularizar los parámetros para compensar efectos del ruido en la estimación.

Una vez completado el modelo con una matriz de entrada estimada, se plantearon diferentes escenarios para validar la solución propuesta. Desde tener una muestra con un alto nivel de absorción óptica y cuya señal fotoacústica generada no es críticamente afectada por el ruido, hasta tener una muestra con poca absorción óptica y una alta presencia de ruido. Adicionalmente, se realizó la reconstrucción de una imagen, con un alto valor de similitud, y se generaron sus señales fotoacústicas asociadas a cada perfil de absorción.

Con base en los resultados obtenidos se demostró que la identificación de subespacios es una herramienta sumamente útil cuando se trabaja con un modelo de caja gris en espacio de estados, ya que disminuye el número de iteraciones que el algoritmo realiza para estimar parámetros. Además, los valores obtenidos permiten, independientemente del número de estados o del perfil de absorción de la muestra, tener una estimación de μ_n y y_k bastante satisfactoria, siempre y cuando la SNR del conjunto de mediciones sea positiva. En caso de ser negativa, se ha mencionado que modificar los parámetros de discretización en el modelo o filtrar los datos son una solución para tener la menor pérdida de información posible, especialmente cuando se busca generar una imagen fotoacústica.

Por otro lado, tal como se abordó en el capítulo 2, la identificación de subespacios puede ser utilizada cuando se trabaja únicamente con mediciones, pero la representación en el espacio de estados perderá sentido físico. En otras palabras, podría generarse un modelo para cada y_k , pero el esquema de identificación en este trabajo no es aplicable para recuperar el perfil de absorción.

Por supuesto, todos los experimentos realizados en el capítulo anterior pueden llegar a ser considerados como resultados teóricos hasta que el esquema de identificación sea evaluado con datos reales de un experimento fotoacústico. En este sentido, destacan tres áreas de oportunidad para mejorar dicho esquema. La primera es determinar un equilibrio entre la discretización espacial y el tiempo de exposición al láser, ya que en la práctica no hay forma de comparar el perfil de absorción estimado con la distribución real de las estructuras internas de una muestra. La segunda es modificar el modelo mediante otro algoritmo de identificación, o bien, plantear una transformación que permita reducir el orden de las matrices y con ello disminuir el costo computacional en la reconstrucción de imágenes. Como última área de oportunidad, y un enfoque que en principio pueda aprovechar la representación en espacio de estados para atacar el problema fotoacústico, es el planteamiento de un observador adaptable cuya ley de adaptación se centre en los parámetros de la matriz B , permitiendo así una estimación y reconstrucción durante la realización de un experimento fotoacústico.

Finalmente, el trabajo ofrece una visión diferente al campo de la fotoacústica, esperando ser de apoyo en la mejora de la calidad en la reconstrucción de imágenes a través de la estimación de parámetros y la generación de señales desde un enfoque de sistemas dinámicos, evitando así procesos invasivos en el ámbito biomédico. Además, propone un cambio en el planteamiento del proceso fotoacústico, ya que se pueden simplificar operaciones numéricas utilizando matrices, volviendo incluso más claro el procedimiento algebraico y dando lugar a prácticas de control de sistemas.

Bibliografía

- [1] O. Lang, P. Kovács, C. Motz, M. Huemer, T. Berer, and P. Burgholzer, “A linear state space model for photoacoustic imaging in an acoustic attenuating media,” *Inverse Problems*, vol. 35, no. 1, p. 015003, 2019.
- [2] G. M. R. Veloz, *Novel reconstruction algorithm for photoacoustic imaging: toward the quantitative imaging*. PhD thesis, Universidad de Guanajuato, 2023.
- [3] E. Bossy, K. Daoudi, A. C. Boccara, M. Tanter, J. F. Aubry, G. Montaldo, and M. Fink, “Time reversal of photoacoustic waves,” *Applied Physics Letters*, vol. 89, no. 18, p. 184108, 2006.
- [4] H. Kunze, S. Asiri, C. Zayane-Aissa, and T.-M. Laleg-Kirati, “An adaptive observer-based algorithm for solving inverse source problem for the wave equation,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, p. 796539, 2015.
- [5] L. L. Romero, Z. C. Aliaga, and J. C. Vergara, *El método de diferencias finitas. Teoría y práctica*. Fondo Editorial UPAO, 2019.
- [6] P. V. Overschee and B. D. Moor, *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [7] A. Pérez-Pacheco, R. G. Ramírez-Chavarría, R. M. Quispe-Siccha, and M. P. Colín-García, “Dynamic modeling of photoacoustic sensor data to classify human blood samples,” *Medical & Biological Engineering & Computing*, vol. 62, no. 2, pp. 389–403, 2024.
- [8] P. Van Overschee and B. De Moor, “N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems,” *Automatica*, vol. 30, no. 1, pp. 75–93, 1994.
- [9] “Regularized estimates of model parameters - MATLAB & simulink - MathWorks.” <https://la.mathworks.com/help/ident/ug/regularized-estimates-of-model-parameters.html>. Accessed: 2024-3-28.
- [10] J. Prakash, A. S. Raju, C. B. Shaw, M. Pramanik, and P. K. Yalavarthy, “Basis pursuit deconvolution for improving model-based reconstructed images in photoacoustic tomography,” *Biomed. Opt. Express*, vol. 5, no. 5, pp. 1363–1377, 2014.

