



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MÉTODO DE EULER PARA  
APROXIMAR LA SOLUCIÓN DE  
LA ECUACIÓN DE MUSKAT EN  
YACIMIENTOS QUE PRODUCEN  
CON EMPUJE DE GAS EN SOLUCIÓN**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A**

Jair Barreto Olivares

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Fernando Samaniego Verduzco



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024

## Contenido

Introducción.....	1
Capítulo 1. Estado del arte y Antecedente Fundamental .....	3
Antecedente Fundamental .....	5
Capítulo 2. Evaluación de Aproximaciones y Método Propuesto .....	8
Antecedentes matemáticos y métodos numéricos .....	8
Métodos y Aproximaciones para el Problema de Empuje por Gas en Solución .....	31
Aproximación de Craft y Hawkins.....	35
Aproximación de Garaicochea y Bashbush.....	40
Método de Aproximación Propuesto .....	45
Método de Schilthuis .....	52
Método de Turner.....	58
Método de Tracy .....	65
Método de Pirson .....	74
Resultados .....	81
Capítulo 3. Análisis de las propiedades PVT, permeabilidades relativas en el comportamiento del empuje por gas en solución .....	94
Efecto de los cambios de presión en las soluciones de empuje por gas en solución .....	96
Efecto de cambios en la viscosidad del aceite .....	99
Efecto de cambios en la relación de solubilidad.....	102
Efecto del factor de volumen de gas .....	104
Efecto del factor de volumen del aceite.....	106
Relación de permeabilidades relativas aceite-gas .....	108
Capítulo 4. Discusiones.....	116
Discusión #1.....	9616
Discusión #2.....	121
Conclusiones.....	124
Nomenclatura .....	126
Referencias .....	128
Apéndices.....	132

## **Agradecimientos**

Quiero expresar mi más sincera gratitud y reconocimiento a mi director de tesis, el Ing. Roberto Padilla Sixto, por su invaluable apoyo además de su rigurosa guía, con la cual se ha desarrollado este documento. Agradezco profundamente su continuo interés en mantener un legado académico, así como su confianza al compartir conmigo parte de sus vastos conocimientos y responsabilidades; nunca podré compensar el tiempo que me ha dedicado en la construcción de este documento, lo que refleja casi seis años de estudio bajo su tutela, especialmente el último año de dedicación completa, con reuniones en línea que comenzaban por la tarde y se extendían hasta la medianoche.

Inculcó en mí una forma de trabajar y de pensar que prioriza el pensamiento ético, racional y científico. Agradezco el hecho de que, aunque no era un alumno regular, me dio la oportunidad de demostrar y desarrollar mi potencial. Hoy, gracias a su guía, puedo decir con certeza, que gran parte de mis conocimientos rigurosos en Ingeniería Petrolera los adquirí bajo su exigente enseñanza.

Ahora comprendo la importancia de que profesores expertos impartan clases en la universidad; existen muchos factores e intereses, pero debe mantenerse siempre en claro que, la formación de profesionales de alto nivel no solo es conveniente, sino indispensable para la universidad, el país y la sociedad.

Gracias por sus palabras de aliento y su apoyo incondicional a lo largo de las vicisitudes del destino. Agradezco su amistad y expreso mi más profundo respeto.

También agradezco a los miembros de mi comité de tesis, a los excelentes profesores:

Presidente. Fís. Gustavo Mendoza Romero  
Vocal. Dr. Fernando Samaniego Verduzco  
Secretario. Dr. Erick Emanuel Luna Rojero  
1er. Suplente. Dr. Gorgonio Fuentes Cruz  
2do. Suplente. Ing. Leonardo Cruz Espinosa

Así mismo, al Dr. Fernando Samaniego Verduzco y a la M.I. Berenice Anell Martínez Cabañas, mis más sinceros agradecimientos por el gran apoyo administrativo y académico que me permitió finalizar este trabajo.

Agradezco a la UNAM y me considero afortunado de representar su nombre.

No puedo dejar de mencionar a mi compañero de estudio y amigo, con el cual inicié este proyecto y el cual no logró culminar, José Luis Bautista Sánchez.

Quiero expresar un agradecimiento infinito a mi madre, Midia Olivares Sánchez, por el apoyo incondicional que solo una madre puede ofrecer a su hijo. A mi hermano, Daniel Barreto Olivares, por ser mi compañero de vida y mi mejor amigo. También quiero agradecer a Inocencio, Javier, Verónica y Maricela Barreto, mi pequeña gran familia, así como a Juan, Jorge, Esmeralda, Karol y Jesús.

**Dedico este trabajo en memoria de mi abuela, Josefina Padilla Aguilar.**

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento hacia mí mismo y hacia Dios, por nunca abandonarme, por mantener siempre la disciplina, determinación y la convicción en todo lo que me he propuesto, incluso cuando nadie más creía en mí.

Jair Barreto Olivares  
Junio, 2024

## Introducción

En esta tesis, con base en el método de Euler, se presenta una nueva aproximación numérica a la solución de la ecuación de balance de materia propuesta por Muskat<sup>1</sup> en 1949 para evaluar el comportamiento de yacimientos que producen por empuje de gas en solución; cabe señalar que el método propuesto produce muy buenos resultados, los que también son comparados con los correspondientes de usar métodos clásicos como son: Schilthuis<sup>2</sup> (1936), Tarner<sup>3</sup> (1945), Tracy<sup>4</sup> (1955) y Pirson<sup>5</sup> (1958).

Se realiza un análisis integral que va permitir a los lectores razonar sobre la aplicabilidad y las limitaciones de los diversos métodos empleados para predecir el comportamiento de yacimientos que producen bajo estas condiciones, y más adelante, poder extenderlo a yacimientos que presentan drene gravitacional. El objetivo fundamental del presente trabajo está dirigido a disminuir la complejidad en la solución numérica de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden de Muskat para el cálculo de la  $S_o$  con presión promedio. Si bien, esta ecuación diferencial define el comportamiento promedio de los sistemas que producen bajo condiciones de flujo gas-aceite en yacimientos homogéneos, no resulta ser un problema fácil de entender, por el contrario, es complejo, pero cuya solución es posible aproximarla utilizando métodos numéricos tradicionales, en este caso particular, siguiendo la idea del procedimiento propuesto por Craft & Hawkins<sup>6</sup> en 1958 y retomado posteriormente por Garaicochea – Bashbush<sup>7</sup> en 1983. Con lo antes señalado, en esta tesis a la base de la aproximación numérica se le denomina como método de Euler-Garaicochea (Barreto-Padilla, 2023)<sup>8</sup>.

Muskat señala que en Estados Unidos para 1930 los yacimientos que producían exclusivamente con la energía natural eran prácticamente nulos, ya que el producir los yacimientos de esta forma resulta ser una estrategia agresiva, es decir, una administración deficiente, lo que elimina la posibilidad de que se presenten efectos positivos para la recuperación de aceite; esto es, el desarrollo de campos con pocos pozos productores y gastos desmedidos. Cabe señalar que en el país todos los yacimientos de aceite producen por empuje de gas en solución, por lo que analizar este mecanismo natural de producción reviste gran importancia. En la medida que se extrae de manera abrupta el aceite y el gas, no se propicia que los acuíferos activos aporten un mantenimiento de presión, y menos aún por drene gravitacional, el cual prácticamente se convierte en un enemigo a causa de su mal entendimiento. De esta forma, el drene por gravedad tiene relevancia cuando los yacimientos se explotan con una administración altamente eficiente, con gastos de producción controlados en yacimiento con condiciones petrofísicas favorables; esto es consistente con lo señalado por Padilla (1996, 2000, 2002, 2004, 2009, 2014)<sup>9-15</sup>. Conforme a lo anterior, en el Capítulo 1, se presenta el Estado de Arte con énfasis en el antecedente

fundamental, la ecuación de Muskat. En el Capítulo 2, denominado como Evaluación de Aproximaciones y Método Propuesto, se muestran las bases matemáticas para la solución de ecuaciones por aproximaciones numéricas. Se presentan las bases de la propuesta de solución denominada como “Método de Euler-Garaicochea”, el que tiene como base el método de Euler. Se lleva a cabo un trabajo de análisis, selección y optimización de métodos numéricos para llegar a una propuesta justificada, lo que permite de una manera sencilla y práctica establecer una solución aproximada a la ecuación de Muskat, la que resulta útil y con aplicación directa a problemas de campo.

Asimismo, y para efectos de comparación, se presentan casos de libro utilizando los métodos de Schilthuis, Tarner, Tracy y Pirson, válidos también para yacimientos que producen por empuje de gas en solución, cuyos resultados se comparan con los obtenidos de los procedimientos de Craft y Hawkins, Garaicochea-Bashbush y el método propuesto en la presente tesis. Cabe señalar que los resultados del método propuesto son altamente consistentes con todos los métodos de balance de materia. Los procedimientos, son explicitados en el documento y en los Apéndices A-D de esta tesis. Cabe resaltar que aproximaciones como la propuesta, resultan ser muy útiles cuando se dispone de grandes cantidades de información; sin embargo, si se dispone de poca información, cualquier método de balance de materia, y en específico en método de Tarner, es recomendado para su uso.

En el Capítulo 3 cuyo título es: análisis de las propiedades PVT, permeabilidades relativas en el comportamiento del empuje por gas en solución, en el cual se presenta un estudio de sensibilidad de parámetros, se estudia el efecto que provoca la variación de las propiedades del fluido producido, así como el uso de correlaciones para el cálculo de la relación de las permeabilidades relativas. Esto permite tomar consideraciones pertinentes respecto a las desviaciones en la solución. En el Capítulo 4, se presentan dos discusiones, destacando: las estrategias de producción, una crítica y propuesta a la administración de yacimientos nacional, los principales yacimientos de aceites de México conforme a sus tendencias de producción, el cotejo con yacimientos y curvas de producción presentadas en yacimientos que produjeron por empuje de gas en solución en E.U; así mismo, se justifica la hipótesis de que los principales yacimientos de aceite de México han producido solo, o en mayor medida, por empuje de gas en solución. Finalmente, se presenta una sección con las conclusiones más importantes derivadas del presente trabajo, y de las referencias utilizadas. Asimismo, en el Apéndice E se presenta el código general recomendado para implementarse en Excel.

# Capítulo 1

## Estado del Arte y Antecedente Fundamental

Coleman et al.<sup>16</sup> intentaron predecir el comportamiento de un yacimiento de aceite a través de una relación matemática entre la presión del yacimiento, la cantidad de aceite y gas producida, el volumen de aceite y gas del yacimiento, y las propiedades de los fluidos. Schilthuis introdujo el principio de aceite activo, y con esto presentó una ecuación de balance de materia que se utiliza hoy en día. Wyckoff-Botset<sup>17</sup> publicaron los resultados de un estudio experimental acerca del flujo de mezclas gas-aceite a través del medio poroso; a partir de estos experimentos, Muskat-Meres<sup>18</sup> desarrollaron un sistema de ecuaciones para predecir el comportamiento del flujo de fluidos heterogéneos a través del medio poroso. Hassler et al.<sup>19</sup> realizaron investigaciones sobre la recuperación de aceite en areniscas bajo empuje por gas en solución. Muskat-Botset<sup>20</sup> también investigaron el flujo de gas-líquido en arenas. Dunlap<sup>21</sup>-Leverett<sup>22</sup> analizaron las ecuaciones de Muskat-Meres incluyendo el flujo simultáneo de aceite, gas y agua en medios arenosos no consolidados. Buckley & Leverett<sup>23</sup> describen el mecanismo y las ventajas del agua sobre el gas como agente de desplazamiento; así mismo, describen algunas de las características del desplazamiento del aceite ya sea por gas o por agua, señalan que en determinadas condiciones, sobre todo con tasas de producción muy bajas y en arenas altamente permeables, la segregación vertical provocada por las fuerzas de gravedad pueden sobreponerse al mecanismo de gas en solución, dando lugar a la formación en la parte superior de una estructura una zona de gas libre, que en realidad son zonas de mayor saturación de gas y menor saturación de aceite que las existentes en la parte inferior del yacimiento.

Evinger & Muskat<sup>24</sup> desarrollaron un método que permite calcular los coeficientes de productividad de formaciones productoras a partir del conocimiento de las condiciones del yacimiento. Old<sup>25</sup> identifica y determina la magnitud de la invasión de agua, y con esto la estimación de las reservas de aceite y el comportamiento de la presión. Craze-Buckley<sup>26</sup> analizaron ciento tres yacimientos con el fin de analizar el efecto del espaciamiento entre pozos, muchos de ellos productores por empuje de gas en solución. Muskat y Tarner desarrollaron modelos para predecir el comportamiento de yacimientos con empuje por gas en solución, ambos consideran gradientes de presión y saturación pequeños en el yacimiento, despreciando los efectos gravitacionales y capilares. Cardwell-Parsons<sup>27</sup> desarrollaron una teoría para calcular el gasto de producción de yacimientos que producen sólo por drene gravitacional. Terwilliger<sup>28</sup> realizó experimentos de drene por gravedad en condiciones de presión constante, encontrando una correspondencia entre el modelo de Buckley-Leverett y los datos experimentales; en el modelo considera efectos capilares. Asimismo, Welge<sup>29</sup> desarrolló un método simplificado para calcular la recuperación de aceite en

casos en que el mecanismo de producción era el drene por gravedad a presión constante. Arps-Roberts<sup>30</sup> presentaron información estadística mostrando los efectos de la relación de permeabilidades relativas, densidad del aceite y la relación de solubilidad del gas en el aceite en la recuperación primaria en yacimientos produciendo por empuje por gas en solución. Matthews-Lefkovits<sup>31</sup> desarrollaron un modelo para predecir el comportamiento de pozos que producen sólo por drene gravitacional. Shreve-Welch<sup>32</sup> establecen un método para predecir el comportamiento de yacimientos sujetos a drene gravitacional. Higgins<sup>33</sup> confirmó que la aplicación de los métodos de Tarnier y de Muskat para predecir el comportamiento de los yacimientos por EGS requieren el conocimiento de las propiedades fisicoquímicas de las fases de aceite y gas, así como la relación entre el coeficiente de permeabilidad relativa y la saturación, concluyendo que estas no siempre pueden obtenerse con la precisión deseada, analizando las desviaciones en las propiedades señaladas con el fin de determinar el grado en que éstos parámetros afectan el cálculo de la recuperación de aceite. Wahl et al.<sup>34</sup> establecieron una serie de cartas que pueden utilizarse para la estimación de la recuperación final en yacimientos con empuje por gas en solución.

Martin<sup>35,36</sup> extendió la aplicación del modelo de Muskat a cualquier punto del yacimiento, y concluyó que el modelo es válido siempre y cuando los gradientes de presión y saturación en el yacimiento sean pequeños. Sheldon et al.<sup>37</sup> basado en la ecuación de Buckley-Leverett modeló el problema del contraflujo para fluidos distribuidos inicialmente en condiciones de no equilibrio. Templeton et al.<sup>38</sup> realizó trabajos experimentales sobre la segregación con contraflujo, encontraron que las funciones dependientes de saturación cambian a lo largo del proceso de segregación. Dykstra<sup>39</sup> publicó un método para calcular las propiedades de los fluidos y la composición de las fases de los sistemas sometidos a la inyección de gas, lo anterior para investigar la viabilidad de los proyectos de inyección de gas. King-Stiles<sup>40</sup> determinaron que la saturación de aceite residual después de la invasión de gas en núcleos de arenisca altamente permeables que contienen agua connata, puede ser extremadamente baja (5%), identificando bajas saturaciones residuales de aceite en experimentos con drene gravitacional. Richardson-Blackwell<sup>41</sup> desarrollaron un modelo para el avance del contacto gas-aceite usando la teoría de Buckley-Leverett y el enfoque de Welge para resolver las discontinuidades de la saturación; en donde el proceso de drene del aceite en la región invadida por el gas fue modelado según las teorías de Cardwell-Parsons. Dumoré-Schols<sup>42</sup> en un estudio realizado en un yacimiento del Este de Texas, hallaron que la eficiencia de desplazamiento del drene gravitacional fue del orden del 87%. Dykstra<sup>43</sup> amplió la teoría de Cardwell-Parsons, permitiendo una saturación crítica de gas al principio del proceso de drene por gravedad, presenta una ecuación para calcular la recuperación de aceite con el tiempo.

Con base en información sintética establecida de usar modelos de simulación de diferencias finitas en medios homogéneos, Camacho-Raghavan<sup>44</sup> presentan



resultados para evaluar el comportamiento de pozos de yacimientos produciendo únicamente bajo empuje de gas en solución; Ambastha-Aziz<sup>45</sup> analiza el fenómeno de segregación gravitacional en el comportamiento de yacimientos con empuje de gas en solución, evaluando el efecto del tamaño de bloques como del paso de tiempo, de donde presentan un modelo (x,y) para estimar el espesor de la capa de gas. Asimismo, de-Lima-Rodríguez<sup>46</sup> presentan un modelo unidimensional vertical (z) para el problema de drene gravitacional en yacimientos con empuje de gas en solución inicialmente bajosaturado, definiendo una expresión para  $dS_o/dp$  bajo segregación total; en este mismo sentido, Padilla-Camacho<sup>9,12</sup> presentan expresiones para evaluar la velocidad del frente de saturación de gas  $v(z, t)$  y la variación de la saturación de aceite con presión promedio en yacimientos que producen bajo efectos combinados de empuje por gas en solución y efectos gravitacionales, lo anterior en un sistema bidimensional cilíndrico (r, z).

Cabe señalar que dada la complejidad de entender el fenómeno de drene gravitacional en el yacimiento, el objetivo de la presente tesis también es documentar y analizar el comportamiento de yacimientos homogéneos que producen únicamente por empuje por gas en solución, de donde se propone una nueva aproximación numérica como una solución a la ecuación diferencial ordinaria de primer orden de Muskat,  $dS_o/dp=f(S_o,p)$ , la cual no incluye efectos de drene gravitacional ni efectos capilares, y cuya aproximación será abordada en el Capítulo 2.

Muskat señala con respecto a la clasificación de la energía de los yacimientos y los mecanismos de producción, que la recuperación de los yacimientos está determinada en gran medida por la naturaleza de la energía disponible para transportar el aceite del yacimiento hacia los pozos, y por la forma en que se utiliza esta energía durante la explotación. Así mismo, señala que, en la práctica, las condiciones no suelen ser tales que, un yacimiento de aceite pueda describirse a lo largo de su explotación por un tipo de mecanismo de producción único. También describe los principales tipos de energía para la producción de aceite: 1) energía de compresión del aceite y el agua dentro de la sección productora de la roca del yacimiento; 2) la energía gravitacional del aceite en las partes superiores de la formación, en comparación con la que se encuentra a mayor profundidad; 3) la energía de compresión y disolución del gas disuelto en el aceite (y también en el agua) en el estrato productor o en las zonas de gas libre suprayacentes a la sección saturada de aceite, y por último, 4) la energía de compresión de los acuíferos de los yacimientos contiguos y en intercomunicación con la roca petrolífera.

También presenta la siguiente definición, “los yacimientos productores por empuje por gas en solución son aquellos en los que la principal fuente de energía para la expulsión del aceite procede de una fase gaseosa y el aceite producido se sustituye por gas”. De esta forma, la energía del gas disuelto en el aceite se pone a disposición

cuando el gas se libera de la solución y se expande en el lugar o mientras avanza hacia las regiones de baja presión que rodean los pozos productores; por lo tanto, un yacimiento que produce por empuje de gas en solución (solución gas-drive o SGD) es aquel en el que la principal fuente de energía utilizada para inducir el flujo de aceite hacia los pozos productores es la asociada al gas disuelto en el aceite. Si inicialmente no hay casquete de gas, el mecanismo se denomina como empuje por gas en solución. Si el yacimiento contiene una capa de gas de magnitud apreciable y la producción está controlada de tal manera que permita la expansión de la capa de gas sin una liberación directa del gas de la capa de gas; el mecanismo se conoce a menudo como un empuje por expansión del casquete de gas. Así mismo concluye que el proceso de drene por gravedad, en condiciones ideales, puede dar lugar a recuperaciones de aceite muy superiores a las que se observan habitualmente en los yacimientos con empuje por gas en solución.

Garaicochea-Basbush señalan que una vez iniciada en el yacimiento la liberación del gas disuelto en el aceite, al alcanzarse la presión de saturación, el mecanismo de desplazamiento del aceite se deberá primordialmente al empuje del gas disuelto liberado. El gas liberado no fluye inicialmente hacia los pozos, sino que se acumula en forma de pequeñas burbujas aisladas, las cuales, debido al abatimiento de la presión del yacimiento, llegan a formar posteriormente una fase continua, lo que permitirá el flujo de gas hacia los pozos.

Para lograr los objetivos y alcances de la presente tesis, se parte del entendimiento de la ecuación de balance de materia de Muskat, la que se expresa de la siguiente forma,

$$\frac{dS_o}{dp} = \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{S_o B_g}{B_o} \frac{dR_s}{dp} \right) + \left( \frac{S_o k_g \mu_o}{B_o k_o \mu_g} \frac{dB_o}{dp} \right) - \left( \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g} \frac{dB_g}{dp} \right) \right]}{\left( 1 + \frac{k_g \mu_o}{k_o \mu_g} \right)} \right\} \quad (1.1)$$

La ec.(1.1) también es derivada por Martin<sup>36</sup> a partir de la ecuación de difusión considerando las fases gas-aceite,

$$\frac{dS_o}{dp} = \frac{S_o}{B_o} B_o' + \frac{\lambda_o}{\lambda t} c_t, \quad (1.2)$$

en donde,  $\lambda_o = k_o \mu_o / \mu_g$ ,  $\lambda_g = k_g \mu_g / \mu_g$ ,  $\lambda_t = \lambda_o + \lambda_g$  y  $c_t = (S_o B_g / B_o) R_s' - (S_o / B_o) B_o' - (S_g / B_g) B_g'$ ,  $R_s'$ ,  $B_g'$  y  $B_o'$  son las derivadas de  $R_s$ ,  $B_g$  y  $B_o$  con respecto a la presión ( $p$ ).

Resolviendo la ecuación 1.1 se determinará la variación de la saturación de aceite en función de la presión promedio, la cual se desarrolla en el Apéndice A, mientras que las variables se definen en la Nomenclatura.

El yacimiento se modela como un sistema equivalente a un tanque uniforme, lo cual implica considerar al yacimiento como un espacio homogéneo; es decir, una entidad uniforme en donde no se consideran las complejidades y variaciones que realmente existen en un yacimiento. Asimismo, considera que la extracción de fluidos se realiza de manera uniforme en todo el yacimiento.

Por otro lado, Muskat respecto a los efectos del drene por gravedad señala que, el drene por gravedad es un fenómeno común en yacimientos con empuje por gas en solución, con un relieve estructural apreciable y cuando la producción no es demasiado grande; sin embargo, la fuerza de la gravedad no representará un factor importante en el mecanismo directo de expulsión del aceite a menos que las diferenciales de presión en el yacimiento sean comparables a la altura equivalente de una columna de aceite de la misma altura que la sección productora de aceite y que por otra parte, cuando la acción de la gravedad se aprovecha para inducir la segregación del gas y la expansión del casquete de gas con el consiguiente drenaje de aceite hacia abajo, puede ser importante para conseguir recuperaciones de aceite mayores que las que se pueden obtener con el simple mecanismo de empuje por gas en solución. El autor señala que para 1949 todos los yacimientos descubiertos contenían gas disuelto, y muchos de estos contenían más gas del que puede mantenerse disuelto en el aceite incluso a la presión inicial antes de la explotación.

En este mismo sentido, Padilla<sup>47</sup> señala que para que el mecanismo de segregación actúe de forma favorable, es necesario restringir el ritmo de producción a valores muy bajos; sin embargo, si la permeabilidad vertical es alta en formaciones con espesores grandes, aun considerando aceites de bajo encogimiento, no se debe menospreciar el fenómeno de segregación gravitacional, a pesar de que los gastos sean altos. Asimismo, señala que, durante el proceso de explotación, por efectos del contraflujo gas-aceite, en menor o mayor medida se va a desarrollar una capa de gas en la cima de la formación, lo que es resultado de la segregación del gas liberado del aceite por el efecto de la variación de presión con profundidad, así como de la posición de los pozos productores.

Lo anterior da como resultado que la presión de saturación se alcance más rápidamente en la parte superior del yacimiento. También concluye que, desafortunadamente el drene gravitacional es un fenómeno de desplazamiento a tiempos largos, altamente sensible al gasto de producción, a la permeabilidad vertical y al relieve estructural; y que la posibilidad de favorecer su efecto positivo, se supeditará a una muy buena administración de los yacimientos, y en este sentido si podría redundar en un aumento de las recuperaciones de aceite.

## Capítulo 2

### Evaluación de Aproximaciones y Método Propuesto

La ecuación de Muskat (ver ec.1.1) es una ecuación diferencial ordinaria de 1er orden, y desde su formulación, el autor propone la utilización de métodos numéricos específicos como el de Runge-Kutta (R-K) o Milne, para aproximar su solución. Esta elección está justificada debido a que resolver ecuaciones diferenciales de este tipo requiere un alto nivel de competencia matemática. La ecuación podría plantearse en diferentes formas para su solución; sin embargo, como se mencionó previamente, el manejo matemático y las herramientas necesarias deben ser rigurosas para considerar la búsqueda de una posible solución analítica. La ecuación en sí misma presenta complejidad, y durante su desarrollo se tomaron en cuenta consideraciones que, aunque limitan el modelo, posibilitan obtener una solución aproximada. De no haberse tomado estas consideraciones, es probable que la ecuación no pudiera ser aproximada, ni siquiera numéricamente, quedando sólo como una expresión teórica. Por ello, es fundamental encontrar un equilibrio entre las consideraciones y la búsqueda de soluciones.

Como se verá más adelante, buscar aproximaciones a la solución de la ecuación de Muskat involucra la obtención de derivadas de las propiedades PVT, por lo cual Garaicochea y Bashbush (G-B) obtienen dichas derivas por medio de cambios; por otro lado, Craft y Hawkins (C-H), mantienen los valores de las derivadas constantes, grafican las propiedades PVT y de cada curva calculan sus pendientes correspondientes, tomando en cuenta el valor inicial y el valor final de la propiedad. En relación a lo antes mencionado, y para sintetizar el cálculo de las derivadas utilizando decrementos o incrementos, se debe considerar que esto implica limitaciones debido al error que se produce por el tamaño de los mismos, ya que el error puede acumularse a medida que se utilizan decrementos más grandes; sin embargo, esta técnica también tiene beneficios, ya que permite obtener valores numéricos para las derivadas sin tener que recurrir a métodos más complejos, tal como la obtención de polinomios representativos de las propiedades PVT con respecto a la presión y luego derivarlos.

Es importante recordar que la derivación por decrementos es una técnica para calcular la derivada de una función en un punto determinado, esta es similar a la derivación por incrementos. Para el problema de estudio, los decrementos se hacen en función de presión. Se sigue el mismo proceso que en la derivación por incrementos, donde se selecciona un punto de interés  $x_0$  en el dominio de la función  $f(x)$ , y se selecciona un pequeño decremento  $h(\Delta p)$  en  $x$ , de manera que  $x_{0-h}$  sigue estando dentro del dominio de la función. Luego se utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función en el punto  $x_0$ ; es claro que la derivación por

decrementos sólo es una aproximación de la derivada real de la función en un punto determinado.

De acuerdo con Granville<sup>48</sup>, el problema fundamental del cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de cómo varía el valor de una función al variar la variable independiente. La investigación de problemas que trataban de magnitudes que variaban de una manera continua, llevó a Newton al descubrimiento de los principios fundamentales del cálculo infinitesimal. Granville señala que el incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial del valor final. Un incremento de  $x$  se representa por el símbolo  $\Delta x$ . Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo (decremento), según la variable aumente o disminuya al cambiar de valor. De esta forma,

$\Delta y$       *significa incremento de  $y$ ,*

y

$\Delta f(x)$     *significa incremento de  $f(x)$ ;*

sí en  $y = f(x)$ , la variable independiente  $x$  toma un incremento  $\Delta x$ , entonces  $\Delta y$  indicará el incremento correspondiente de la función  $f(x)$  o sea, de la variable dependiente  $y$ . El incremento  $\Delta y$  siempre ha de contarse desde el valor inicial definido de  $y$ , que corresponde al valor inicial arbitrariamente fijado de  $x$  desde el cual se cuenta el incremento  $\Delta x$ . Por ejemplo, si se considera la función  $y = x^2$  y si tomamos  $x = 10$  como valor inicial de  $x$ , esto fija  $y = 100$  como valor inicial de  $y$ .

- Supongamos que  $x$  aumenta hasta  $x = 12$ , es decir,  $\Delta x = 2$ ; entonces,  $y$  aumenta hasta  $y = 144$ , y  $\Delta y = 44$
- Si se supone que  $x$  decrece hasta  $x = 9$ , es decir,  $\Delta x = -1$ ; entonces,  $y$  decrece hasta  $y = 81$ , y  $\Delta y = -19$

En este ejemplo  $y$  aumenta cuando  $x$  aumenta,  $y$  decrece cuando  $x$  decrece. Los valores correspondientes de  $\Delta x$  y  $\Delta y$  tienen un mismo signo. Puede acontecer que  $y$  decrezca cuando  $x$  aumenta, o viceversa;  $\Delta x$  y  $\Delta y$  tendrán entonces signos contrarios. Si retomamos la función anterior  $y = x^2$ , suponiendo que  $x$  tiene un valor inicial fijo, después se le asigna un incremento  $\Delta x$ , entonces  $y$  tomará un incremento correspondiente  $\Delta y$ , se tendrá,

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x * \Delta x + (\Delta x)^2,$$

por lo que al restar la función original  $y = x^2$  a lo anterior tenemos

$$\Delta y = 2x * \Delta x + (\Delta x)^2,$$

lo que nos da el incremento  $\Delta y$  en función de  $x$  y  $\Delta x$

Ahora, para hallar la razón de los incrementos  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , se debe dividir el incremento  $\Delta y$  en función de  $x$  y  $\Delta x$ , como sigue:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Para ejemplificar, si  $x = 4$ , es claro que para  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ , aplicando límites, se tiene que,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

En la siguiente tabla se observa cómo se comporta la razón de los incrementos de  $x$  y de  $y$  cuando el incremento de  $x$  decrece.

Valor inicial de $x$	Valor final de $x$	Incremento $\Delta x$	Valor inicial de $y$	Valor final de $y$	Incremento $\Delta y$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	4.1	0.1	16	16.81	0.81	8.1
4	4.01	0.01	16	16.0801	0.0801	8.01

Se pone de manifiesto que al decrecer  $\Delta x$  también disminuye  $\Delta y$ , mientras que la razón de los dos incrementos  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  toma los valores sucesivos 8.1 y 8.01; esta sucesión de valores significa que podemos hacer que el valor de la razón  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  sea tan próximo a 8 como deseemos, con sólo tornar a  $\Delta x$  suficientemente pequeña. La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función, al incremento de la variable independiente, cuando ésta tiende a cero. Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función tiene derivada. Dada la función,

$$(1) \quad y = f(x),$$

y considerando un valor inicial fijo de  $x$ , y dando a  $x$  un incremento  $\Delta x$ ; entonces se obtiene para la función  $y$  un incremento  $\Delta y$ , siendo el valor final de la función,

$$(2) \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Para hallar el incremento de la función, restarnos (1) de (2), se obtiene,

$$(3) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

dividiendo los dos miembros por  $\Delta x$ , resulta,

$$(4) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

El límite del segundo miembro cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  es por definición, la derivada de  $f(x)$ , o sea,  $\frac{dy}{dx}$ , esto es,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

de la ec.(4) se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Puesto que  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son cantidades finitas y tienen valores definidos, la expresión  $\Delta y/\Delta x$  es una fracción. Esencialmente, para hallar la recta tangente en un punto  $P$ , se reduce a establecer su pendiente en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la recta secante que pasa por  $P$  y por otro punto cercano de la curva, ver figura 2.1. Si  $(c, f(c))$  es el punto de tangencia y  $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$  es el otro punto de la gráfica de  $f$ , la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos está dada por,  $m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{(c+\Delta x)-c} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$ .

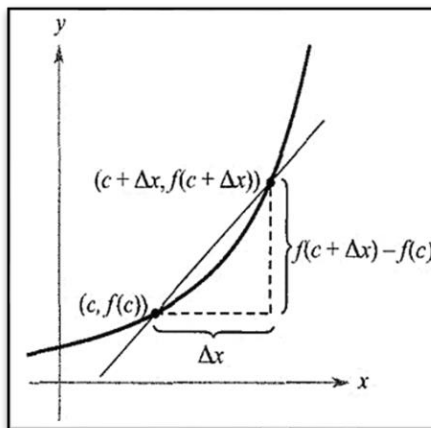


Figura 2.1 La recta secante que pasa por  $(c, f(c))$  y  $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ . Extraída de Larson et al<sup>49</sup>.

El término de la derecha es un cociente incremental (o de incrementos). El denominador  $\Delta x$  es el cambio (o incremento) en  $x$  y el numerador  $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$  es el cambio (o incremento) en  $y$ . De acuerdo con Larson<sup>49</sup>, con este procedimiento se pueden obtener aproximaciones más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto  $P$  de tangencia, tal como se muestra en la figura 2.2.

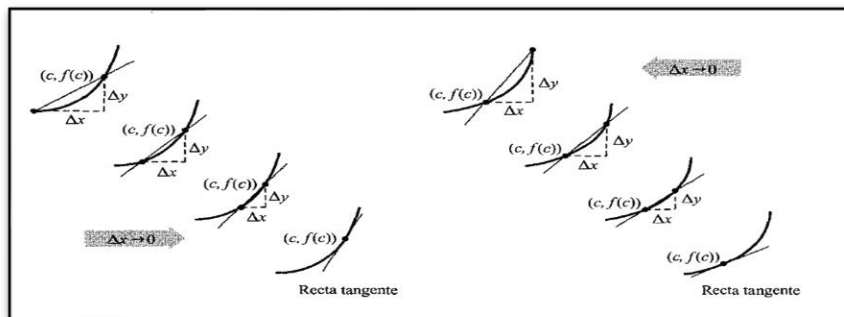


Figura 2.2 Aproximaciones a la recta tangente. Extraída de Larson et al<sup>49</sup>.

Stewart<sup>50</sup> señala que una tangente a una curva, es una recta que toca la curva. En otras palabras, una recta tangente debe tener la misma dirección que la curva en el punto de contacto. Una recta secante significa cortar, es una recta que cruza una curva más de una vez, como se ve en la figura 2.3. Cuanto más cercana sea  $Q$  a  $P$ , más cercana será  $x$  a 1 y más cercana será  $m_{PQ}$  a 2. Decimos que la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes, expresada como el  $\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m$ .

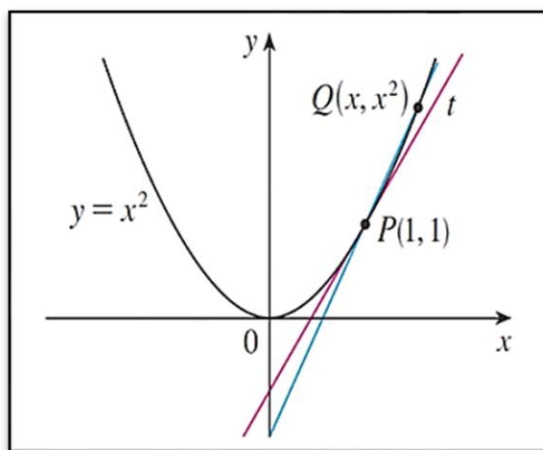


Figura 2.3 Pendiente de la recta tangente. Extraída de Stewart<sup>50</sup>.

Por otro lado, el método de Euler es un método numérico utilizado para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Este método es relativamente simple y es útil en algunos casos para resolver ecuaciones diferenciales que no tienen solución analítica conocida. Se basa en la idea de que la pendiente de la solución en un punto dado de la curva es aproximadamente igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Por lo tanto, si se conoce la pendiente en un punto, se puede aproximar el valor de la función en el siguiente punto utilizando la ecuación diferencial. Dado un punto inicial  $(x_0, y_0)$  y una ecuación



diferencial  $\frac{dy}{dx} = f(x)$ , el método de Euler aproxima el valor de la solución en el siguiente punto  $x_1$  con el siguiente planteamiento,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

de la siguiente forma,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

donde  $f(x, y)$  es la ecuación diferencial,  $h$  es el tamaño del paso entre los puntos  $x_0$  y  $x_1$  por lo tanto  $y_1$  es la aproximación de la solución en el punto  $x_1$ . Este proceso se repite iterativamente para aproximar la solución en puntos sucesivos,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

en donde  $x_{n+1} = x_n + h$

El método de Euler como se dijo, es un método simple, pero puede requerir tamaños de paso pequeños para obtener resultados precisos. A pesar de lo antes señalado, este método no es recomendable para ecuaciones diferenciales de orden superior o para ecuaciones diferenciales que tienen soluciones oscilatorias o caóticas. Sin embargo, es útil para solucionar problemas simples.

De acuerdo a Press et al.<sup>51</sup>, existen varias razones por las que el método de Euler no se recomienda para uso práctico, entre otras,

- el método no es muy preciso cuando se compara con otros métodos más avanzados, que se ejecutan con un tamaño de paso equivalente.
- tampoco es muy estable, ya que el error llega a ser importante.

Como señalan Burden y Faires<sup>52</sup>, el método de Euler es la técnica de aproximación más elemental para resolver problemas de valores iniciales. Aunque rara vez se utiliza en la práctica, la sencillez de su derivación puede servir para ilustrar las técnicas de construcción de algunas técnicas más avanzadas, sin la engorrosa álgebra que las acompaña. El objetivo del método de Euler es obtener aproximaciones al problema de valor inicial bien planteado. Retomando a Burden y Faires, señalan que, aunque el método de Euler no es lo suficientemente preciso como para justificar su uso, en la práctica es lo suficientemente elemental como para analizar el error que se produce de su aplicación. Por consiguiente, si se reduce el tamaño del paso de tiempo, las aproximaciones serán más precisas.

En los métodos de segundo orden, el error de truncamiento local es  $O(h^2)$ , y el costo es de dos evaluaciones de la función por paso de tiempo. El método Runge-Kutta de orden cuatro requiere cuatro evaluaciones por paso, y el error de truncamiento local es  $O(h^4)$ . Burden y Faires citan a Butcher<sup>53</sup>, el cual ha establecido la relación entre

el número de evaluaciones por paso de tiempo y el orden del error de truncamiento local, el que se muestra en la figura 2.4. Esta tabla indica porque, los métodos de orden inferior a cinco con un tamaño de paso de tiempo menor, se utilizan preferentemente respecto a los métodos de orden superior que utilizan un tamaño de paso de tiempo mayor.

Evaluaciones por paso	2	3	4	$5 \leq n \leq 7$	$8 \leq n \leq 9$	$10 \leq n$
Mejor error de truncamiento local posible	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

Figura 2.4 Error de truncamiento y tamaño de paso de tiempo. Extraída de Burden y Faires<sup>52</sup>.

En este mismo documento, Burden y Faires, señalan que el método Runge-Kutta (R-K) de cuarto orden requiere cuatro evaluaciones por paso, mientras que el método de Euler requiere de una evaluación. Una medida de comparación de los métodos de R-K de orden inferior se describe a continuación. Para que el método de R-K de cuarto orden se mas optimo, debe dar respuestas más precisas que el método de Euler con un cuarto del tamaño del paso. Del mismo modo, para que el método R-K de cuarto orden sea superior a los métodos R-K de segundo orden, que requieren dos evaluaciones por paso, debería dar más precisión con un tamaño de paso  $h$  que un método de segundo orden con un tamaño de paso  $h/2$ .

### Comparación de los métodos

A continuación, se ilustra la superioridad del método R-K de cuarto orden para un problema de valor inicial; ver ejemplo propuesto por Burden y Faires para comparar los métodos numéricos. Sea  $\dot{y} = y - t^2 + 1$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0.5$

El método de Euler con  $h = 0.025$ , el método del punto medio con  $h = 0.05$  y el método Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.1$ , se comparan en los puntos de malla comunes de estos métodos 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5. Cada uno de estos métodos requiere 20 evaluaciones de funciones para determinar los valores enumerados en la figura 2.5. Para este ejemplo, el método de cuarto orden es claramente más preciso. Greenbaun y Chartier<sup>54</sup> señalan que el método de punto medio requiere dos evaluaciones de funciones por paso de tiempo en lugar de una, tal como en el método de Euler. Por lo tanto, cada paso de tiempo relacionado al orden del método numérico, toma relevancia si es posible emplear un paso de tiempo significativamente mayor( $h$ ).

ti	Exacta	Euler	Punto Medio	R.-K. cuarto orden
0	0.5	0.5	0.5	0.5
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983
0.3	10,150,706	1.0089334	1.0147254	1.0150701
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384

Figura 2.5 Comparación de métodos numéricos. Extraída de Burden y Faires<sup>52</sup>.

Press<sup>51</sup> en referencia a los métodos numéricos señala que, un alto orden no siempre significa una alta precisión. Un R-K de cuarto orden, generalmente es mejor al de segundo orden.

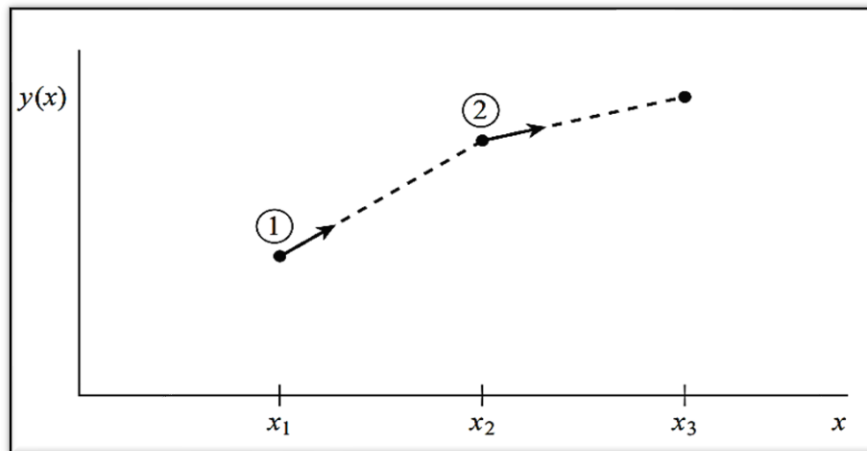


Figura 2.6 Ilustración del método de Euler. Extraída de Press, et al<sup>51</sup>.

Press reitera que el método de Euler es más sencillo y menos preciso para integrar una EDO. La derivada en el punto inicial de cada intervalo se extrapola para encontrar el siguiente valor de la función, el cual tiene una precisión de primer orden. Greenbaum y Chartier señalan que, al discutir este método, Euler señala que el error en cada paso tiempo puede hacerse arbitrariamente pequeño, eligiendo pasos de tiempo suficientemente pequeños. También observó que los errores pueden acumularse a medida que se avanza en un intervalo. Fue Cauchy<sup>55</sup>, quien aportó una prueba rigurosa de la convergencia del método.

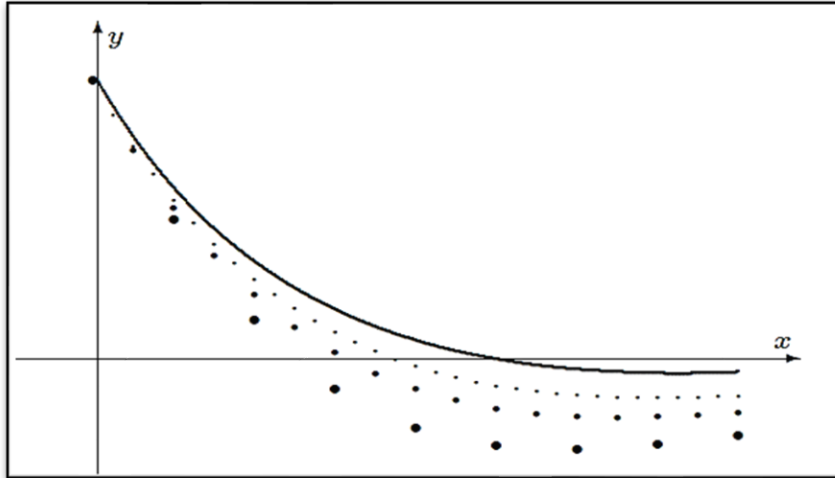


Figura 2.7 Ilustración del método de Euler y sus desviaciones por diversos tamaños de paso, Extraída de Press, et al<sup>51</sup>.

De la figura 2.7 para un caso de estudio, se puede observar el comportamiento del método de Euler, la solución exacta (línea continua) y los tres conjuntos de resultados (puntos grandes, medianos y pequeños), utilizando respectivamente 8 pasos de tiempo de tamaño 0.2, 16 de tamaño 0.1 y 32 de tamaño 0.05; en conclusión, se puede observar que, conforme el tamaño de paso es más pequeño, el resultado se aproxima a la solución exacta.

Tanto el método de Euler como el de R-K, son métodos que pueden resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, recordando que el orden de una ecuación diferencial viene determinado por el orden de la derivada más grande de la ecuación.

Billo<sup>56</sup> señala que el método de Euler es sencillo en concepto, pero no tiene la precisión suficiente para ser útil, pero este puede modificarse para obtener mayor precisión. El método R-K, del que existen diversas variantes, es el método de elección habitual. Retomando nuevamente a Press, et al., señala que R-K solía ser lo que se utilizaba cuando

- No se sabía nada mejor
- Se tenía un problema intransigente en el que Bulirsch-Stoer fallaba
- Se tenía un problema trivial en el que la eficiencia computacional no preocupaba.

Sin embargo, los avances en el desarrollo del método de R-K de orden superior, han hecho que este compita con los otros métodos.

## Método del punto medio

El método de R-K de segundo orden también conocido como método de Heun o Método del punto medio, es un método numérico utilizado para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Press señala que se obtiene una precisión de segundo orden mediante el uso de la derivada inicial en cada paso para encontrar un punto a mitad del intervalo, y luego usando la derivada del punto medio en toda la amplitud del intervalo.

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2$$

Donde:

- $x_n, y_n =$  son las coordenadas  $x$  y la solución aproximada de  $y$  en el paso  $n$ .
- $h =$  es el tamaño del paso, que es la distancia entre dos puntos  $x_n$  consecutivos.
- $f(x_n, y_n) =$  es la función que describe la ecuación diferencial en el punto  $(x_n, y_n)$ .
- $k_1 =$  es la pendiente en el punto  $(x_n, y_n)$ , es decir, el valor de  $f(x_n, y_n)$  multiplicado por el tamaño del paso  $h$ .
- $x_n + \frac{h}{2} =$  es el punto intermedio entre  $x_n$  y  $x_{n+1}$
- $y_n + k_1/2 =$  es una estimación intermedia de  $y$  en el punto  $x_n + h/2$  usando la pendiente  $k_1$ .
- $k_2 =$  es la pendiente en el punto intermedio  $x_n + h/2, y_n + k_1/2$ , es decir, el valor de  $f(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$  multiplicado por el tamaño del paso  $h$ .
- $y_{n+1} =$  es el valor aproximado de  $y$  en el siguiente punto  $x_{n+1}$ , que se calcula a partir de la estimación intermedia de  $y$  en  $x_n + h/2$  usando la pendiente  $k_2$

En la figura 2.8, los puntos llenos representan los valores finales de la función, mientras que los puntos vacíos representan los valores de la función que se descartan una vez que sus derivadas han sido calculadas y utilizadas.

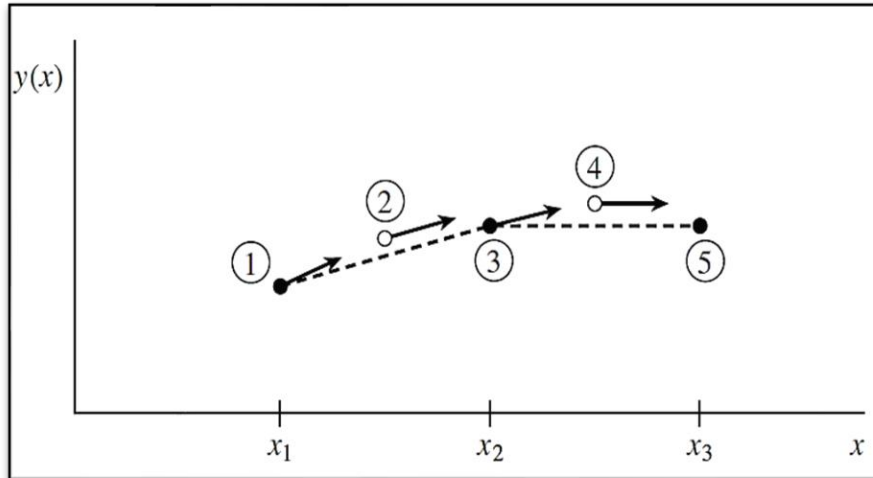


Figura 2.8 Ilustración del método del Punto medio. Extraída de Press, et al. Numerical recipes the art of scientific computing Third edition,2007.

El método de R-K de cuarto orden requiere cuatro evaluaciones del lado derecho por paso de tiempo ( $h$ ). Este método es mejor al del punto medio, como se puede observar en la figura 2.9.

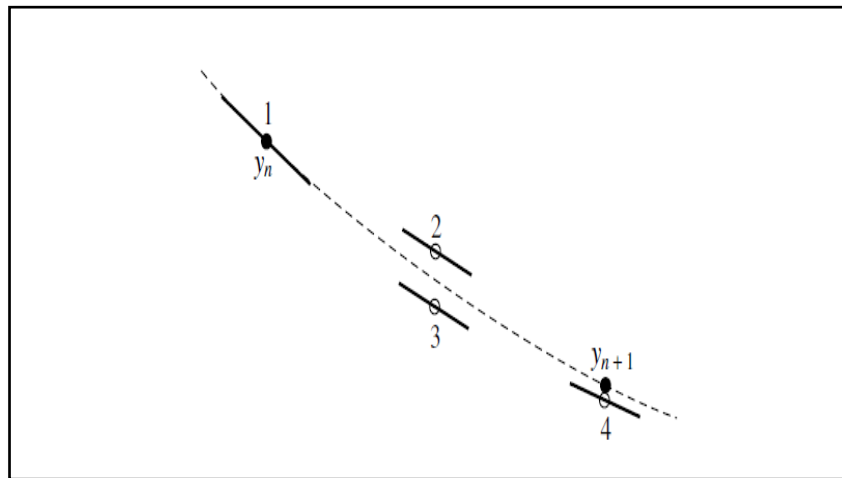


Figura 2.9 Ilustración del método de Runge Kutta de Cuarto orden. Extraída de Press, et al. Numerical recipes the art of scientific computing Third edition,2007.

En cada paso, la derivada se evalúa cuatro veces, una en el punto inicial, dos en los puntos medios de prueba y otra en el punto final de prueba. A partir de estas derivadas se calcula el valor final de la función mostrado como un punto lleno.

## Método de R-K de cuarto orden

El método de R-K de *cuarto orden* utiliza una combinación de cuatro pendientes en diferentes puntos para aproximar la solución de una ecuación diferencial de *primer orden*. El desarrollo de este método se puede escribir de la siguiente manera:

1. Se define la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

2. Se define un punto  $(x_0, y_0)$  desde el cual se desea aproximar la solución.
3. Se define un tamaño de paso  $h$ .
4. Se calculan los valores de  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n), \\k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3),\end{aligned}$$

5. Se utiliza la combinación lineal de estos valores para calcular la aproximación, y en el siguiente paso:

$$y_{n+1} = y_n + (1/6) * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

6. Se repiten los pasos 4 y 5 para los siguientes valores de  $x$  hasta alcanzar el valor deseado.

Con respecto al método de R-K de cuarto orden, utiliza una combinación ponderada de cuatro aproximaciones lineales para estimar la solución en el siguiente paso de tiempo. Esto significa que el método de cuarto orden tiene una mayor capacidad para capturar la complejidad y la no linealidad de las EDO; cada aproximación lineal se calcula utilizando una pendiente diferente de la curva de la solución en el paso de tiempo actual, para este caso de presión en donde el tiempo está implícito. Como se sabe, para algunos problemas específicos, un método de primer orden, como el método de Euler, puede ser adecuado, mientras que, para otros problemas, son necesarios métodos de orden superior, como el método de R-K de cuarto orden o incluso métodos de orden superior. Es claro que el método de Euler, es uno de los métodos numéricos más simples para resolver EDO de primer orden, el método se basa en la aproximación de la solución en cada paso.

## Sensibilidad por Cambios de Presión en la Evaluación de la Solución Numérica de la Ecuación de Muskat

Craft y Hawkins (C-H) en su libro, presentan una forma de aproximar de manera numérica la ecuación diferencial de Muskat, y señala que se obtendrán mejores resultados en comparación de su método, esto es, si se utilizan valores en la mitad del intervalo de la caída de presión. Es decir, se hace referencia al método del punto medio, idea que fue retomada por G-B. Existe un detalle importante referente al método de aproximación de C-H, quienes hacen ver en apariencia, que la forma que ellos proponen para aproximar la ecuación de Muskat y sus resultados, se aproximan a los resultados obtenidos por Turner, situación que sólo es válida para los primeros intervalos de estudio, que en gran medida tiene que ver con los intervalos de presión utilizados, así como el cálculo de las derivadas, lo que se evaluará más adelante.

Adicional a lo antes señalado, C-H re-promedian los valores de saturación obtenidos; es decir, que se obtiene una saturación promedio para el intervalo de presión en estudio, la cual a su vez se promedia, y esta nueva saturación resulta en la saturación objetivo. Esto no ser muy claro, y se anticipa que este procedimiento tiene problemas. Así mismo, C-H hacen uso de un valor constante para las pendientes correspondientes a las derivadas del  $B_o$ ,  $R_s$  y  $B_g$ . A continuación, se muestran los efectos de obtener la solución de la ecuación de Muskat bajo estas consideraciones. En la figura 2.10 se comparan los resultados obtenidos de usar la aproximación de C-H y la aproximación por R-K; se observan los efectos de utilizar únicamente las saturaciones de aceite re-promediadas en la solución, así como los cambios de presión.

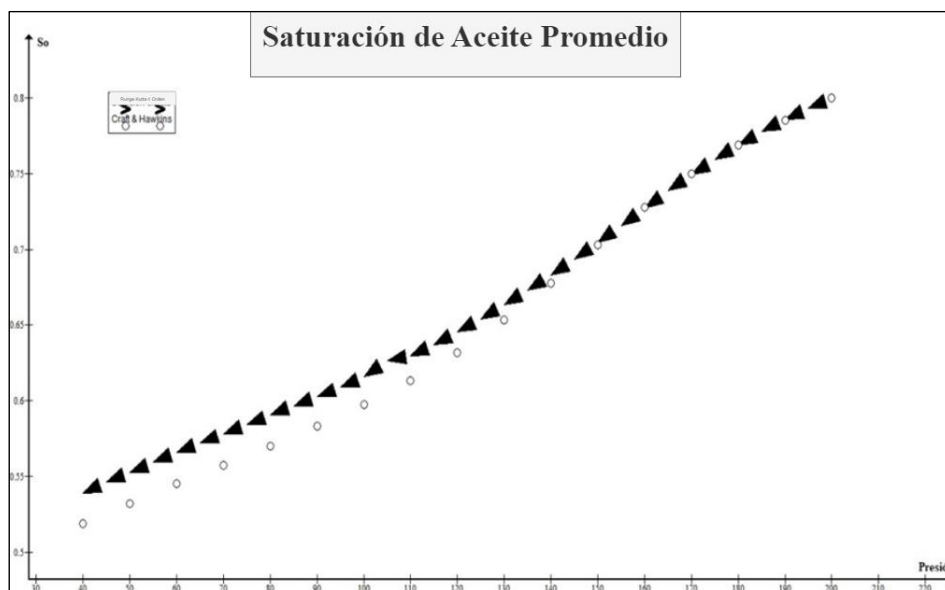


Figura 2.10 Efecto del paso implementado por Craft y Hawkins de repromediar las Saturaciones en la solución de la ecuación diferencial de Muskat caso G.



El mantener los valores de las derivadas constantes para las propiedades PVT, propicia que en la solución también existan desviaciones en los valores numéricos obtenidos, lo que se pueden observar en la figura 2.11.

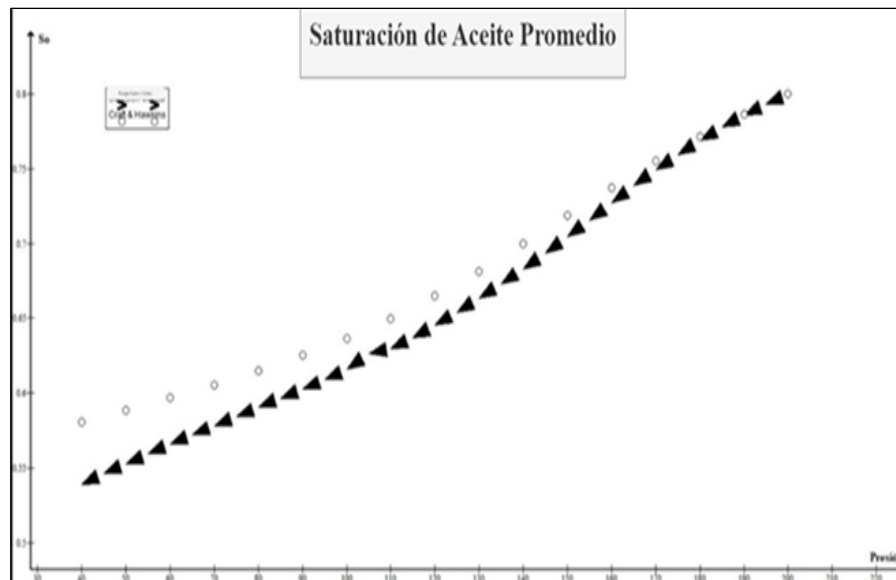


Figura 2.11 Efecto del paso implementado por Craft y Hawkins de repromediar las Saturaciones, más el uso de derivadas constantes en la solución de la ecuación diferencial de Muskat caso G.

Se debe tener claro que hay factores ajenos a la aproximación que pueden afectar los resultados, como es la obtención de las permeabilidades relativas. Se pueden distinguir al menos tres factores propios del método de aproximación propuesta por C-H, los que generan desviaciones con respecto a la aproximación por R-K:

- Uso de saturaciones de aceite re-promediadas
- Derivadas fijas
- Decrementos de presión grandes,  $> 1 \text{ Kg/cm}^2$

Por lo antes mencionado, y observado la figura 2.10 y 2.11, se observa que el método de aproximación de C-H presenta problemas respecto a la exactitud. En las figuras 2.12 a 2.14 se pueden observar las aproximaciones de C-H, así como de G-B. Estos último mencionan que es importante considerar para todas las aproximaciones para la solución de la ecuación de Muskat, es que sólo se puede considerar el error que se comete al suponer que la saturación de aceite es igual a la existente al principio del periodo; esto es, cambios de presión pequeños, menores de  $10 \text{ kg/cm}^2$ . La solución requiere del conocimiento de la saturación de aceite promedio en cada decremento de presión.

Desde su publicación, la ecuación de Muskat incluye las formas de aproximar la solución numéricamente, y es claro que las presiones deberían ser pequeñas; este proceso resultar algo sencillo actualmente, pero para los años de 1940 o 1980, esto era un impedimento que obligaba a los ingenieros a buscar otras alternativas como son las soluciones de Turner o Schiltsuis, procedimientos de balance de materia iterativos. El método de R-K es una de las opciones propuestas por Muskat para aproximar la solución de su ecuación. La solución de C-H, así como la de G-B toman un procedimiento similar con sus propias adaptaciones para aproximar la solución.

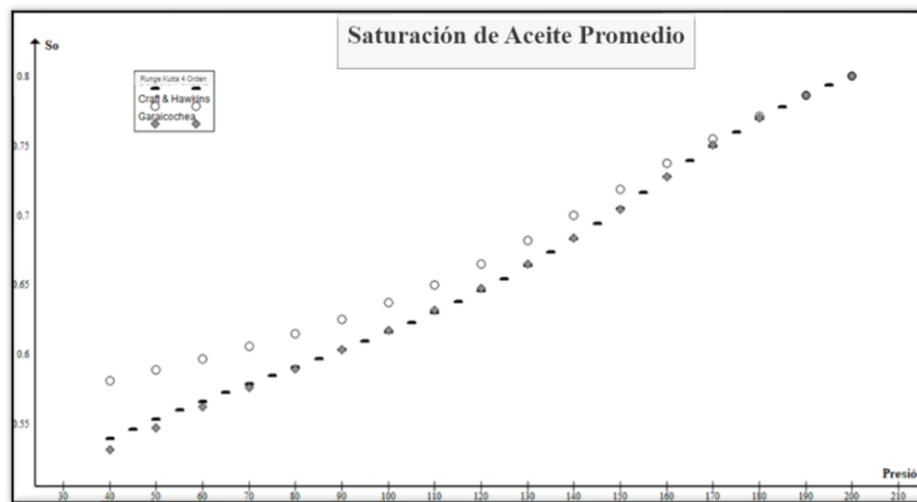


Figura 2.12 Comparación de las aproximaciones, por Garaicochea y Basbush, y Craft y Hawkins, caso G.

La aproximación de G-B, claramente corrige los problemas de la aproximación de C-H, por lo que se plantea el uso de valores promedio para compensar los decrementos de presión. Por ejemplo, para el caso G, descrito más adelante, se puede observar, que la solución se obtiene con 20 intervalos de presión, mientras que por R-K son aproximadamente 2000; aunque esta solución presenta ventajas, el error respecto de las soluciones de balance de materia y la aproximación de pendientes no es importante. En las figuras 2.13, 2.14 y 2.15, se muestra la comparación de las dos soluciones: C-H y G-B para visualizar su desviación respecto a la solución de R-K de cuarto orden. Cabe mencionar que la aproximación por R-K está validada con los métodos de balance de materia.

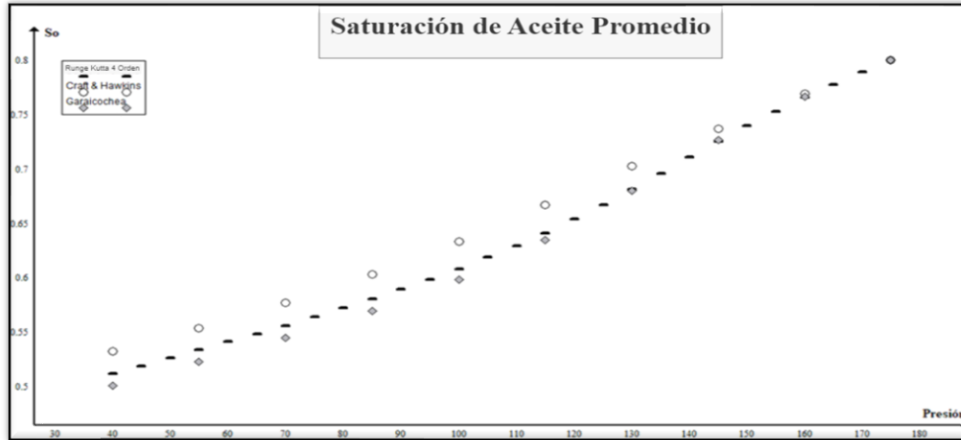


Figura 2.13 Comparación de las aproximaciones, por Garaicochea y Basbush, y Craft y Hawkins, caso C.

En referencia a estos métodos de aproximación, se puede deducir que es natural que se tengan errores en las aproximaciones, esto si no se cuentan con las herramientas adecuadas; en este sentido, C-H no contaban con las herramientas computacionales actuales; sin embargo, G-B (1984), con una diferencia de treinta años; tampoco tuvo disponibilidad de computadoras y procesadores.

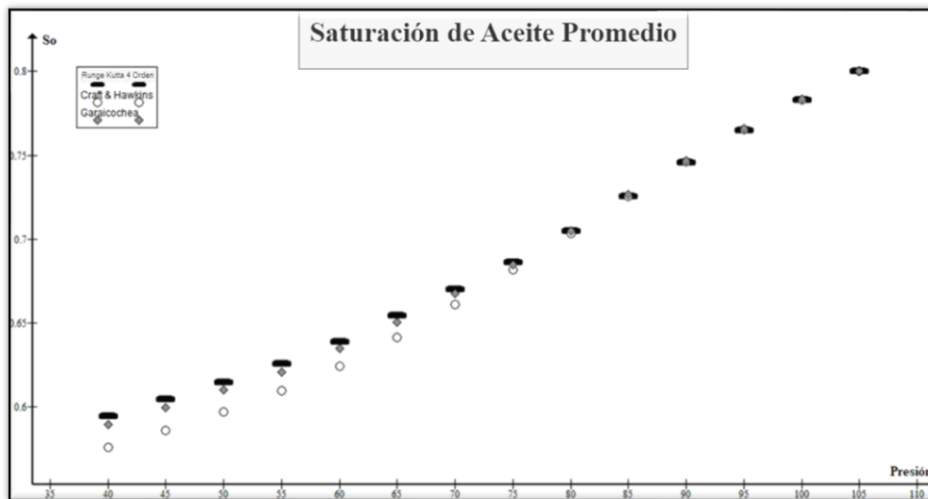


Figura 2.14 Figura 2.13 Comparación de las aproximaciones, por Garaicochea y Basbush, y Craft y Hawkins, caso P.

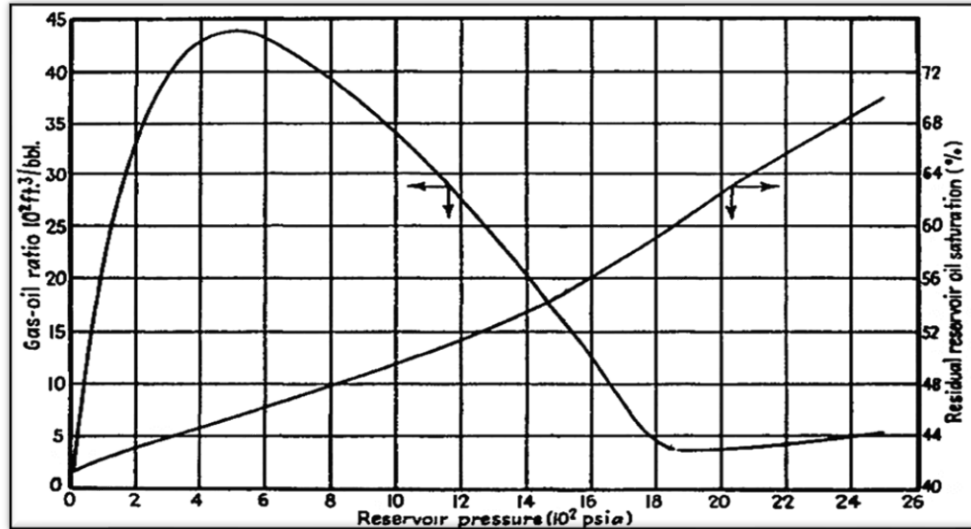


Figura 2.15 Comportamiento de la relación gas-aceite vs. Presión. Extraída de Muskat,1949).

La aproximación de G-B puede presentar entre 1 y 5% de diferencia con respecto a la solución por R-K, mientras que los resultados de los métodos de balance de materia presentan resultados idénticos. El problema de los métodos de aproximación es que los errores son acumulativos. En los primeros intervalos, el error será irrelevante y no existirá una diferencia importante entre las soluciones. En esta tesis, se estableció un método de aproximación numérica denominada como pendientes; esta solución en comparación a los métodos de aproximación propuestos por C-H y de G-B, la que presenta un mayor equilibrio en cuanto a precisión, y aún más es de fácil aplicación.

Las bases de su formulación consisten en el uso de pendientes para la aproximación de las derivadas, y así mismo en el método de Euler para obtener una solución numérica que aproxime el resultado de la ecuación diferencial de Muskat. El problema que describe el cambio de saturación respecto a una presión promedio de interés, presenta un comportamiento muy amigable; una curva suave, que no presentan cambios bruscos ni picos, tal como se puede observar en la figura 2.15. Esta es la razón por el cual el uso del método de Euler es útil para dar solución a este tipo de problemas.

Se ha demostrado que el método de C-H presenta una aproximación que se aleja de la solución de R-K (validada por los métodos de balance de materia), tal como se pudo comprobar en las figuras 2.10 a 2.14. A continuación se ilustra la superioridad del método R-K para un problema de valor inicial; este ejemplo fue tomado del documento de Burden-Faires<sup>52</sup> a modo de comparar los métodos numéricos:  $\dot{y} = y - t^2 + 1$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0.5$

El método de Euler con  $h = 0.025$ , el método del punto medio con  $h = 0.05$  y el método Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.1$  se comparan en los puntos comunes de estos métodos 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5. Estas técnicas requieren 20 evaluaciones de funciones para determinar los valores enumerados en la figura 2.5. Como se puede observar el método de R-K de cuarto orden es claramente mejor.

Si bien, este ejemplo demuestra que el método de R-K genera valores más cercanos a la solución exacta, Greenbaun y Chartier señalan que el método de punto medio requiere dos evaluaciones de funciones por paso de tiempo, en lugar de una del método de Euler. Lo mismo aplica para el método de cuarto orden, el cual requiere de cuatro evaluaciones en lugar de una del método de Euler, tal como se observó en la figura 2.9. En términos prácticos, y derivado de lo anterior, se puede decir que para seleccionar un modelo con un orden "n", este puede seleccionarse considerando el tamaño de paso de tiempo a utilizar. Para el ejemplo mostrado se comparan los siguientes elementos:

- Método de Euler,  $h = 0.025$ ,
- Método del punto medio,  $h = 0.05$
- Método Runge-Kutta de cuarto orden,  $h = 0.1$

Cada uno de estos métodos requiere 20 evaluaciones de funciones para determinar los valores entre 0.1 y 0.5, es por tal motivo que para este ejemplo es más útil el método de cuarto orden puesto que se hace uso de la misma cantidad de evaluaciones y se obtienen resultados más precisos; pero como se ha mencionado, el método a usar depende del problema a analizar. La ecuación de Muskat no es tan simple como el problema aquí presentado, y el hecho de requerir mayor información implica una interpolación, ergo, una cantidad considerablemente de datos y cálculos para dar solución a un intervalo de presión.

Adicionalmente existe una limitante, que como fue señalado por G-B, quienes afirman que sólo se puede considerar como despreciable el error que se comete al suponer que la  $S_0$  es igual a la existente al principio del periodo, esto si se consideran cambios de presión  $<10 \text{ Kg/cm}^2$ . Para aproximar la solución de la ecuación de Muskat, por necesitar de un valor pivote, el tamaño de los cambios de presión deberá ser menor a  $10 \text{ Kg/cm}^2$ . Como se demostrará más adelante, el cambio de presión más adecuado está entre 1 y  $5 \text{ Kg/cm}^2$ . Asimismo, para consolidar los resultados del método propuesto, el que está basado en el método de Euler de pendientes, se comparan con los resultados de la aproximación de R-K de cuarto orden.

Como se puede observar en la figura 2.16, la desviación de la aproximación del método propuesto en comparación a la aproximación de cuarto orden es despreciable. Así mismo, en la tabla 2.1 para cambios de presión de  $1 \text{ Kg/cm}^2$ , se pueden ver los valores aproximados, tanto para el método de cuarto orden como para el de

pendientes, los cuales se comparan tomando como referencia el método de R-K, el cual se evalúa para cambios de presión de  $0.1 \text{ Kg/cm}^2$ , y que se usa también para validar la respuesta de los métodos de balance de materia, con cambios de presión de la misma magnitud.

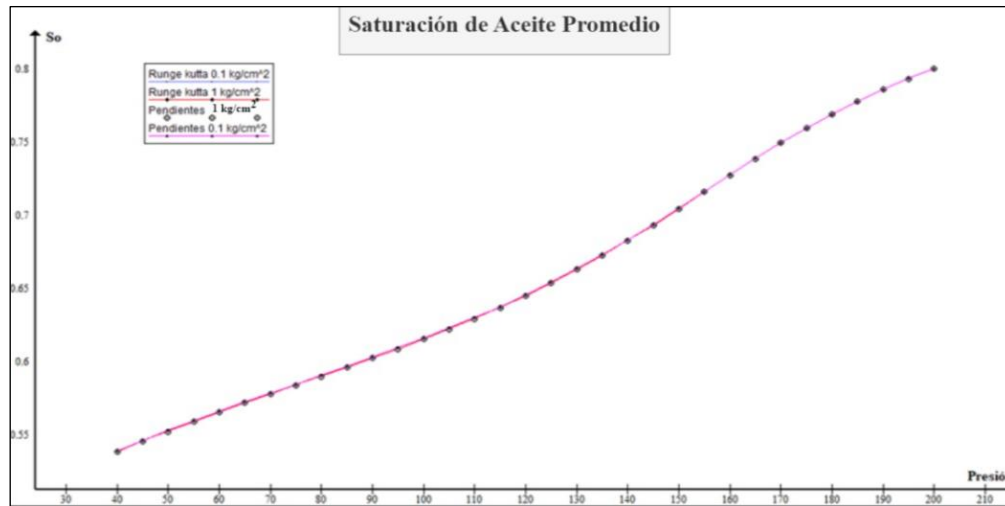


Figura 2.16 Comparación de la solución de pendientes y la solución de cuarto orden, caso G.

**Tabla 2.1 Comparación del error, Caso G**

Presión	R-K 4º orden $0.1 \text{ kg/cm}^2$	R-K 4º orden $1 \text{ kg/cm}^2$	Pendientes $1 \text{ kg/cm}^2$	Error R-K $1 \text{ kg/cm}^2$	Error Pendientes $1 \text{ kg/cm}^2$
200	0.800000	0.800000	0.800000	0.000000	0.000000
195	0.793527	0.793522	0.793516	0.000006	0.000013
190	0.786274	0.786275	0.786263	0.000002	0.000013
185	0.778147	0.778120	0.778100	0.000034	0.000060
180	0.769170	0.769177	0.769147	0.000008	0.000031
175	0.759505	0.759561	0.759520	0.000073	0.000019
170	0.749459	0.749457	0.749405	0.000002	0.000073
165	0.738876	0.738804	0.738739	0.000097	0.000185
160	0.727660	0.727620	0.727543	0.000055	0.000161
155	0.716125	0.715992	0.715904	0.000185	0.000309
150	0.704638	0.704492	0.704395	0.000207	0.000344
145	0.693543	0.693322	0.693220	0.000318	0.000465
140	0.683099	0.682823	0.682718	0.000404	0.000558
135	0.673144	0.672625	0.672519	0.000771	0.000928
130	0.663420	0.663039	0.662934	0.000574	0.000733
125	0.654136	0.653638	0.653533	0.000762	0.000922
120	0.645415	0.644967	0.644864	0.000693	0.000853
115	0.637312	0.636920	0.636818	0.000614	0.000775
110	0.629849	0.629379	0.629278	0.000746	0.000906
105	0.622737	0.622303	0.622203	0.000696	0.000857
100	0.615956	0.615496	0.615396	0.000747	0.000908

95	0.609402	0.608545	0.608447	0.001406	0.001567
90	0.603001	0.602508	0.602410	0.000817	0.000981
85	0.596701	0.596141	0.596042	0.000937	0.001103
80	0.590462	0.589970	0.589871	0.000834	0.001002
75	0.584331	0.584023	0.583923	0.000527	0.000697
70	0.578253	0.577756	0.577655	0.000859	0.001034
65	0.572137	0.571817	0.571714	0.000560	0.000739
60	0.565871	0.565380	0.565276	0.000867	0.001052
55	0.559428	0.559031	0.558924	0.000709	0.000899
50	0.552793	0.552293	0.552183	0.000905	0.001104
45	0.545966	0.545605	0.545492	0.000661	0.000868
40	0.538950	0.538446	0.538329	0.000936	0.001153

Esta validación implicó el procesamiento de una gran cantidad de información mediante la programación del código, lo que permitió realizar miles iteraciones en los balances de materia. Respecto al método de R-K de cuarto orden, si se resuelve con cambios pequeños de presión, es indispensable interpolar los valores PVT, por lo que es recomendable que la información se interpole previamente, se ordene y después se agrupe. Para realizar una prueba con esta cantidad de información, se requiere de una computadora con suficiente memoria RAM no menor a 8 GB, puesto que, a la fecha, las hojas de cálculo con esta cantidad de información, consumen grandes recursos computacionales, y es probable que, por la cantidad de información procesada, las hojas de cálculo fallen. Es evidente que la selección del tamaño de los cambios de presión y el método de aproximación numérica, va a depender de las herramientas a utilizar. En esta tesis se propone el uso de hojas de cálculo, puesto que estas herramientas están disponibles en cualquier computadora. Cabe señalar que para procesar los resultados mostrados en la tabla 2.1, implicó una cantidad importante de tiempo.

El método de cuarto orden resuelto para  $h= 0.1 \text{ kg/cm}^2$  implica interpolar los datos PVT a  $0.05 \text{ kg/cm}^2$  para obtener los valores de las derivadas en los puntos  $y_i-(h/2)$  y  $y_i+(h/2)$ . Con lo antes señalado, se espera clarificar la problemática, de lo contrario, se tiene que retomar los antecedentes antes plasmados. Regresando a la tabla 2.1, se presentan los resultados para la aproximación por método de R-K de cuarto orden, así como el método de pendientes con cambios de  $1 \text{ Kg/cm}^2$ . Estas aproximaciones se presentan con el fin de comparar y aportar una metodología de solución más sencilla de aplicar, que la solución por R-K con cambios de presión de  $0.1 \text{ Kg/cm}^2$ . Derivada de esta comparación se presentan las siguientes observaciones:

- La aproximación propuesta implica menores cálculos, puesto que esta se basa en el método de Euler. Estrictamente, Barreto y Padilla<sup>8</sup> lo denominan como método de Euler-Garaicochea.

- Se demuestra que la variación entre usar decrementos de presión de 1 Kg/cm<sup>2</sup> y 0.1 kg/cm<sup>2</sup> es despreciable, tanto para la solución por R-K, como para la aproximación propuesta.
- Al aplicar el método propuesto con cambios de presión de 1 Kg/cm<sup>2</sup>, se puede disminuir diez veces menos la cantidad de información a procesar y la cantidad de cálculos, esto en comparación con cambios de presión de 0.1 kg/cm<sup>2</sup>.
- Aplicar el método propuesto implica una sola aproximación para un punto de interés, en comparación de las cuatro aproximaciones para R-K de cuarto orden.

De los resultados presentados anteriormente, se demuestra que la aplicación del método propuesto es viable y ofrece buenos resultados para cambios de presión entre los 0.1 kg/cm<sup>2</sup> y 1 kg/cm<sup>2</sup>. Así mismo se muestra que los cambios de presión de 1 kg/cm<sup>2</sup> son la mejor opción, ya que presenta una clara eficiencia al comparar los resultados obtenidos, con la cantidad de cálculos y de información necesaria para dar solución, remarcando que la información interpolada claramente es diez veces menor en comparación del uso de cambios de presión de 0.1 Kg/cm<sup>2</sup>. Como ya se comentó anteriormente, el método de R-K de cuarto orden implica cuatro aproximaciones para un mismo punto, mientras que el método de Euler sólo uno, es por esto que el aplicar el método propuesto se vuelve relevante, ya que a través de este se pueden obtener resultados con buena precisión con pocos cálculos.

Mas adelante se hablará de dos grupos, el grupo uno está conformado por las aproximaciones a la solución de la ecuación de Muskat, y los del grupo dos, conformado por los métodos de balance de materia; es importante esta agrupación, ya que agiliza algunos planteamientos. Se ha descrito el motivo por el cual las aproximaciones del grupo uno presenta limitaciones en cuanto al tamaño de los cambios de presión; por otra parte, los métodos del grupo dos, permiten utilizar decrementos grandes sin afectar sus resultados. A continuación, se presentan los resultados de las aproximaciones del grupo uno al utilizar diferentes cambios de presión. Hay que recalcar que, aunque se utilicen los mismos cambios de presión para todas las aproximaciones, los métodos necesitan un numero diferente de aproximaciones para un mismo punto, es decir mayor cantidad de datos interpolados y mayor cantidad de operaciones. En la figura 2.17 se observa la tendencia de referencia (línea continua) para validar las aproximaciones (R-K de cuarto orden con cambios de presión de 0.1 kg/cm<sup>2</sup>). Se observa que el método por C-H es el que presenta una mayor diferencia con respecto a las otras aproximaciones. Por otro lado, se puede apreciar que el método que arroja resultados más aproximados es R-K con cambios de 10 kg/cm<sup>2</sup>, después le siguen el método de G-B y el método de Euler. No existe duda que R-K arroja mejores resultados. Debe recalcar que este método utiliza el doble de información y de aproximaciones que el método de G-B, y a su vez, cuatro veces más información y operaciones que el método de Euler. Es evidente que



el uso de la solución propuesta arroja resultados similares, pero con una cantidad de información considerablemente mucho menor. Así mismo, la aproximación por C-H debe descartarse, ya que las demás aproximaciones presentan mejores resultados. Lo anterior no implica que se menosprecie la aproximación, si no que para este tiempo es posible obtener mejores resultados con otros modelos de aproximación.

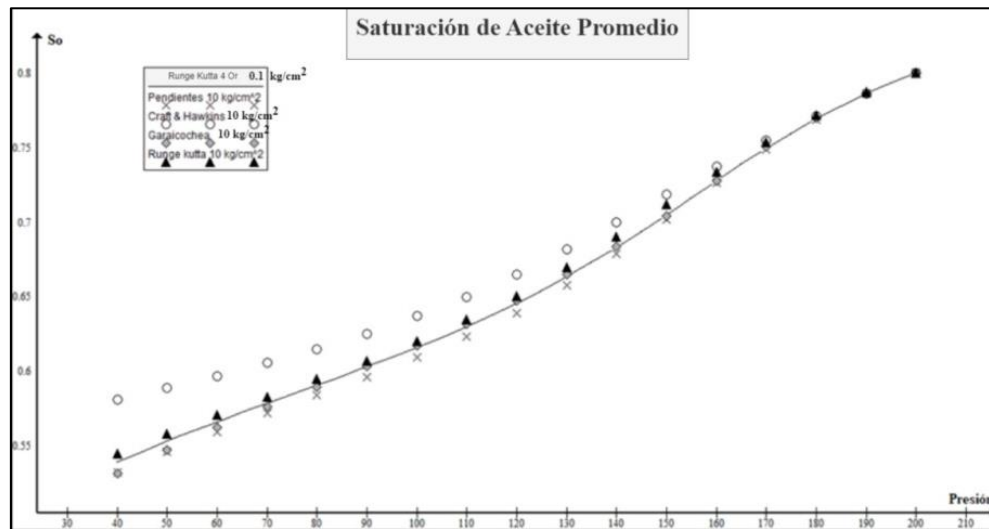


Figura 2.17 Saturación promedio, aproximaciones de la ecuación de Muskat con cambios de presión de  $10 \text{ kg/cm}^2$ .

De la misma figura 2.17, se puede concluir que el uso de cambios de presión de  $10 \text{ kg/cm}^2$  para los métodos utilizados, arrojan resultados aceptables; pero como se ha señalado, no hay que escatimar en los cálculos, y estos resultados pueden mejorarse considerablemente tal como se muestra en la figura 2.18. Se observa que, aunque los cambios de presión disminuyeron, los resultados de la aproximación de C-H muestra mayores desviaciones, no así los demás procedimientos, cuyos resultados son convergentes.

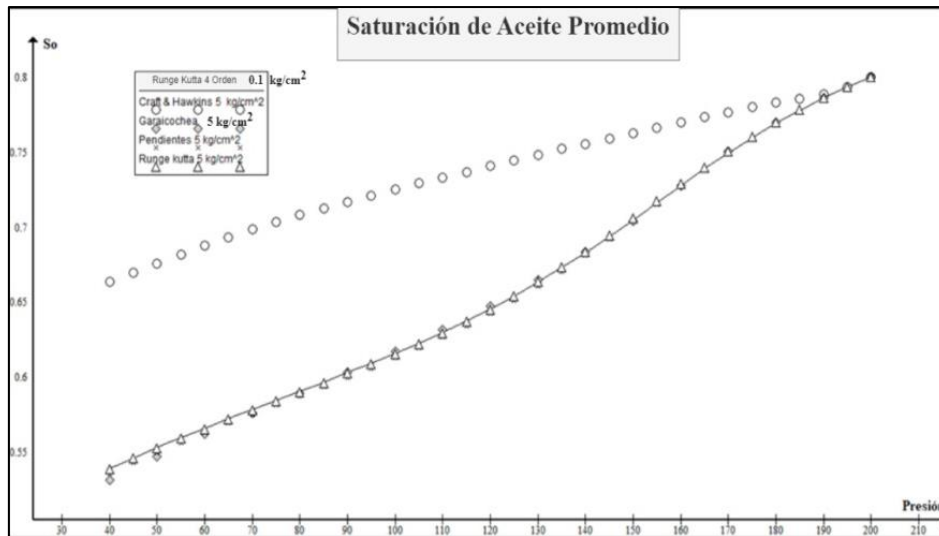


Figura 2.18 Saturación promedio, aproximaciones de la ecuación de Muskat con cambios de presión de 5 kg/cm<sup>2</sup>.

Para las aproximaciones de R-K, G-B y el propuesto, la desviación se disminuyó considerablemente, y prácticamente los resultados son iguales, tal como también se puede observar en la figura 2.19. Derivado de los resultados obtenidos, sugiere que los cambios de presión utilizados para aproximar las soluciones sean máximos de 5 Kg/cm<sup>2</sup>, ya que debajo de este rango se obtienen resultados muy acertados.

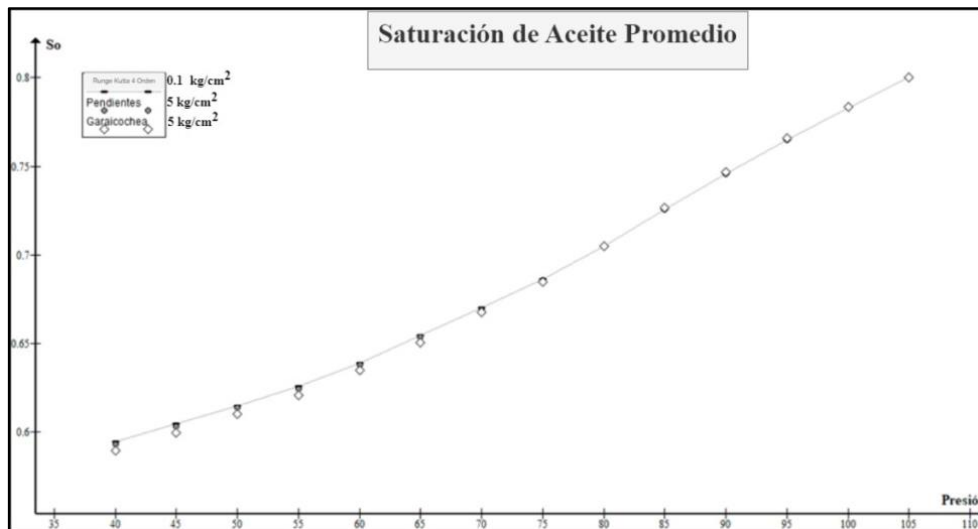


Figura 2.19 Saturación promedio, aproximaciones de la ecuación de Muskat con cambios de presión de 5 Kg/cm<sup>2</sup> caso (P).

## Métodos y Aproximaciones para el Problema de Empuje por Gas en Solución

En esta sección del capítulo se presentan los métodos propuestos para evaluar el comportamiento de yacimientos produciendo por empuje de gas en solución (SGD), así como los métodos de recurrencia para dar aproximación la solución de este problema, estos son:

### Balance de Materia

- Método de Schilthuis
- Método de Tarner
- Método de Tracy
- Método de Pirson

### Ecuación de Muskat

- Aproximación de Craft y Hawkins
- Aproximación de Garaicochea y Bashbush
- Aproximación propuesta (Euler-Garaicochea) o de Barreto-Padilla

Para los métodos de evaluación por balance de materia se consultaron diversas fuentes. Como caso particular, para el método de Tarner no fue posible obtener el documento original, pero a través de la recopilación de información fue posible conocer la naturaleza del método original, el cual consistía en el uso de gráficos para evitar las iteraciones numéricas. Situación similar ocurrió con el método de Schilthuis y también de Tracy. Es importante destacar que en algunas referencias se publicaron los métodos en forma de lista, pero no en forma clara y consistente; por lo que, para esta tesis, se requirió un extenso análisis para descartar errores e inconsistencias. Es algo normal que, en las referencias consultadas, no se presenta el desarrollo y planteamientos de las soluciones.

Otra aportación de presente documento, es proponer los métodos de recurrencia de manera tabular, los cuales se recomiendan sean plasmados en una hoja de cálculo para su aplicación, desde la presión de burbuja hasta la presión de abandono o de interés. Para los métodos de recurrencia para aproximar la solución de la ecuación de Muskat y de los métodos de Balance de Materia antes señalados, se tomó como base el formato presentado tanto en el libro de Garaicochea-Bashbush como de Pirson, los que presentan sus evaluaciones de forma tabular. Esto resultó de gran ayuda para el desarrollo de esta tesis, puesto que ayudó a diferenciar y comprender mejor las soluciones con sus características particulares e identificar errores (humanos) en los cálculos.

## Consideraciones importantes:

La complejidad del flujo multifásico en medios porosos ha dado lugar a la necesidad de formular métodos que se basan en suposiciones e hipótesis, lo que ha permitido obtener soluciones aproximadas. En este capítulo, presenta los métodos de recurrencia en forma tabular para la evaluación de todos los métodos evaluados, utilizando datos de permeabilidades relativas, que en el presente documento y de manera general se utiliza la correlación de Torcaso y Willie<sup>57</sup>, por ser una de las más observadas en la literatura únicamente (en casos reales el uso de correlaciones deberá evaluarse y esto no exime de usar las curvas de permeabilidades relativas). Las consideraciones más importantes de los métodos para evaluar el comportamiento de yacimientos que producen por empuje de gas en solución se listan a continuación:

- Uniformidad del yacimiento. La distribución de la saturación en todo el yacimiento es homogénea, al igual que la porosidad y la permeabilidad efectiva. Por tratarse de un modelo tipo tanque, sus propiedades son las mismas en todo el medio, al igual que las variaciones a causa de la disminución de la presión,
- Presión uniforme en todo el yacimiento. Esto significa que tanto los factores de volumen de gas y aceite, las viscosidades del gas y del aceite, y la solución de gas serán los mismos en todo el yacimiento, como se mencionó anteriormente, por ser un modelo tipo tanque, las alteraciones en sus propiedades a causa del abatimiento de presión serán las mismas para cualquier punto del yacimiento.
- No se consideran fuerzas gravitacionales ni efectos inerciales
- No hay entrada de agua y la producción de agua es nula.
- Saturación de agua inmóvil. Se supone que el empuje por agua no existe por lo mismo no se considera una entrada ni salida del agua. No se forma una fase continua de agua.

Para evaluar los procedimientos se requiere contar con la siguiente información:

- Presión inicial del yacimiento ( $P_i = P_b$ )
- Valores de las propiedades del flujo (aceite y gas):  $B_o$ ,  $R_s$ ,  $B_g$ ,  $\mu_o$ ,  $\mu_g$
- Saturación de agua congénita ( $S_{w_i}$ )
- Relación de permeabilidades relativas,  $\frac{k_{rg}}{k_{ro}}$

Algunas consideraciones particulares utilizadas para evaluar los procedimientos:

- La saturación de agua irreductible,  $S_{wi} = 20\%$  para los casos de estudio
- Saturación de aceite inicial,  $S_{oi} = 80\%$
- Presión inicial del yacimiento,  $P_i = P_b$
- Cálculo de la relación de permeabilidades relativas con Torcaso y Willie
- Abatimiento de presión constantes, por lo que la presión disminuirá homogéneamente y de forma constante
- Presión de abandono de  $40 \text{ Kg/cm}^2$
- El volumen original de aceite se considera como la unidad; es decir, los resultados de saturación y en general los cálculos están presentados de manera fraccional.

En general, y para efectos del estudio del fenómeno de desplazamiento por empuje por gas en solución en el yacimiento, se utilizaron tres tipos de aceite. Los datos PVT fueron obtenidos de los libros de Craft y Hawkins, Garaicochea y Bashbush y de Pirson, correspondiendo a aceites ligero, medio y pesado, respectivamente. En este capítulo sólo se evalúa el aceite intermedio, el que se identifica como caso G al evaluar todos los procedimientos. En la tabla 2.2 se muestran los datos PVT del caso G.

Tabla 2.2 Datos PVT, Caso G

$P \left( \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \right)$	$B_o$	$R_s$	$B_g$	$\frac{\mu_o}{\mu_g}$	$\frac{1}{B_g}$
200	1.440	120.00	0.00650	65.50	153.846
195	1.436	118.25	0.00668	67.10	147.059
190	1.431	116.40	0.00690	68.80	144.928
185	1.426	114.48	0.00720	70.50	138.889
180	1.421	112.50	0.00750	72.20	133.333
175	1.416	110.48	0.00780	73.90	128.205
170	1.410	108.45	0.00810	75.70	123.457
165	1.404	106.41	0.00840	77.50	118.624
160	1.398	104.35	0.00880	79.30	113.636
155	1.392	102.21	0.00920	81.20	108.814
150	1.385	100.05	0.00960	83.10	104.167
145	1.379	97.88	0.01000	85.10	99.701
140	1.372	95.70	0.01050	87.20	95.238
135	1.366	93.47	0.0110	89.40	90.662
130	1.359	91.20	0.0116	91.70	86.207
125	1.352	88.91	0.0123	94.10	81.367
120	1.345	86.60	0.0130	96.70	76.923
115	1.338	84.26	0.0137	99.40	72.833
110	1.331	81.90	0.0145	102.30	68.966
105	1.324	79.52	0.0153	105.40	65.359
100	1.317	77.10	0.0162	108.60	61.728
95	1.310	74.10	0.0171	112.00	58.377
90	1.302	72.20	0.0181	115.60	55.249
85	1.294	69.70	0.0192	119.40	52.029
80	1.286	67.10	0.0204	123.30	49.020
75	1.278	64.46	0.0216	127.40	46.232
70	1.269	61.60	0.0229	131.80	43.668
65	1.260	59.05	0.0244	136.40	41.068
60	1.250	56.10	0.0260	141.20	38.462
55	1.240	53.00	0.0279	146.20	35.907
50	1.229	49.70	0.0300	151.60	33.333
45	1.218	46.20	0.0326	157.30	30.722
40	1.206	42.40	0.0358	163.00	27.933

## Aproximación de Craft y Hawkins

Muskat en 1945, a partir de un balance de materia establece la ecuación para determinar el cambio de  $S_o$  promedio con respecto a la presión promedio, la que se expresa de la siguiente forma (ver ec.1.1 en el Capítulo 1),

$$\frac{dS_o}{dp} = \frac{\frac{S_o B_g}{B_o} \frac{dR_s}{dp} + \frac{S_o k_g \mu_o}{B_o k_o \mu_g} \frac{dB_o}{dp} - \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g} \frac{dB_g}{dp}}{1 + \frac{k_g \mu_o}{k_o \mu_g}},$$

La deducción se presenta en el Apéndice A. Craft & Hawkins agruparon las variables para evaluar la ec.(1.1), y los renombraron como sigue:

$$X(p) = \frac{B_g}{B_o} \frac{dR_s}{dp}; Y(p) = \frac{1}{B_o} \frac{\mu_o}{\mu_g} \frac{dB_o}{dp}; Z(p) = \frac{1}{B_g} \frac{dB_g}{dp}, \quad (2.1)$$

Reescribiendo la ec.(1.1), tenemos:

$$\Delta S_o = \left[ \frac{S_o X(p) + S_o \frac{k_g}{k_o} Y(p) - (1 - S_o - S_w) Z(p)}{1 + \frac{k_g \mu_o}{k_o \mu_g}} \right] \Delta p. \quad (2.2)$$

La ec.(2.2) busca predecir el cambio en la saturación del aceite por una caída de presión,  $\Delta p$ . Las funciones  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  se obtienen a partir de las propiedades del fluido. Los valores de las derivadas  $dR_s/dp$ ,  $dB_o/dp$  y  $dB_g/dp$  se encuentran a partir de las gráficas de  $R_s$ ,  $B_o$  y  $1/B_g$  contra  $p$  y se considera un valor constante. Al calcular  $\Delta S_o$  para cualquier caída de presión,  $\Delta p$ . Los valores de  $S_o$ ,  $X(p)$ ,  $Y(p)$ ,  $Z(p)$ ,  $k_g/k_o$  y  $\mu_o/\mu_g$  correspondientes al principio del intervalo, se pueden utilizar para realizar el cálculo; sin embargo, se obtendrán mejores resultados, si se utilizan valores situados en el valor medio del intervalo de caída de presión; es decir, trabajar con los valores intermedios del intervalo de interés (estas indicaciones son las descritas por Craft y Hawkins). El valor de  $S_o$  a la mitad del intervalo puede estimarse con precisión del valor de  $\Delta S_o$  para el intervalo anterior y el valor de  $k_g/k_o$  utilizado correspondiente al valor de intervalo medio estimado de la saturación de aceite.

Además de la ec.(2.2), se debe calcular la saturación total de aceite. Esto se realiza simplemente multiplicando el valor de  $\Delta S_o/\Delta P$  por la caída de presión,  $\Delta p$ , y luego restando el  $\Delta S_o$  del valor de saturación de aceite que corresponda a la presión

al principio del intervalo de caída de presión, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$S_{oj} = \left[ S_{o(j-1)} - \left( \Delta p \left( \frac{\Delta S_o}{\Delta p} \right) \right) \right], \quad (2.3)$$

En donde  $j$  corresponde al valor de presión al final del incremento y  $j - 1$  a la presión al principio del incremento de presión. Se define el siguiente procedimiento, el que se utiliza para resolver el problema de  $\Delta S_o$  para una  $\Delta p$  determinada:

1. Graficar  $R_s$ ,  $B_o$  y  $1/B_g$  contra presión y determinar la pendiente de cada variable.
2. Resolver la ec.(2.2) para  $\Delta S_o/\Delta p$  utilizando la saturación de aceite que corresponde a la presión inicial de la presión dada  $\Delta p$ . Es decir, la saturación del intervalo anterior al que se está calculando.
3. Estimar  $S_{oj}$  usando la ec.(2.3).
4. Resolver la ec.(2.2) usando la  $S_o$  del paso 3.
5. Determinar un valor promedio de  $\Delta S_o/\Delta p$  a partir de los dos valores calculados en los pasos 2 y 4.
6. Utilizar  $\Delta S_o/\Delta p$  promedio, y resolver para  $S_{oj}$  utilizando la ec.(2.3). Este valor de  $S_{oj}$  se convierte en  $S_{o(j-1)}$  para el siguiente intervalo de caída de presión.
7. Repetir los pasos del 2 al 6 para todas las caídas de presión de interés.

Con el fin de ilustrar este procedimiento, se presenta un ejemplo para el primer intervalo de presión del caso G, el que abarca desde 200 hasta 190 kg/cm<sup>2</sup>.

1. Calcular las derivadas (constantes) de las propiedades PVT,

$$\begin{aligned} \frac{dR_s}{dp} &= \frac{R_{sj} - R_{s(j-1)}}{p_1 - p_2} = \frac{120 - 116.4}{200 - 190} = 0.36 \\ \frac{dB_o}{dp} &= \frac{B_{oj} - B_{o(j-1)}}{p_1 - p_2} = \frac{1.44 - 1.431}{200 - 190} = 0.0009 \\ \frac{dB_g}{dp} &= \frac{B_{gj} - B_{g(j-1)}}{p_1 - p_2} = \frac{0.0065 - 0.0069}{200 - 190} = -4 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Estos valores se mantendrán fijos para todos los intervalos de presión. Una vez obtenido los valores de las pendientes, sustituir en la ec.(2.2).

2. Al sustituir los valores en  $X(p)$ ,  $Y(p)$ , y  $Z(p)$  a una presión de 200 Kg/cm<sup>2</sup>, se tiene:

$$\begin{aligned} X(p)_{\frac{200kg}{cm^2}} &= 0.001625 \\ Y(p)_{\frac{200kg}{cm^2}} &= 0.0409375 \end{aligned}$$



$$Z(p)_{\frac{200kg}{cm^2}} = -2.6 \times 10^{-7}$$

3. Sustituir  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  en la ec.(2.2)

$$\frac{\Delta S_o}{\Delta p} = \left[ \frac{0.8(0.0013) + 0 - 0}{1 + 0} \right] = 0.0013$$

En este paso, al sustituir los valores correspondientes en la ec.(2.2), se tendrán varios parámetros con valores iguales a cero, esto es debido a que las permeabilidades relativas en  $p = 200 \text{ Kg/cm}^2$  son igual a cero, puesto que esta es la presión inicial del yacimiento del caso G; es decir, la presión de burbuja. Por tal motivo, no se ha liberado aun el gas, y por lo tanto,  $S_g = 0$ . Es evidente que esta situación sólo ocurrirá una vez y será para el primer intervalo de presión. Como se sabe, una vez iniciada la declinación de la presión, inicia la liberación de gas, por lo tanto, la saturación de gas es mayor que cero ( $S_g > 0$ ).

4. Obtener  $S_{oj}$

$$S_{oj} = S_{o(j-1)} - \Delta p \left( \frac{\Delta S_o}{\Delta p} \right)$$

$$S_{oj} = 0.8 - 10(0.0013) = 0.787$$

5. Calcular  $\Delta S_o/\Delta p$  usando  $S_{oj}$  del paso 5 así como los nuevos valores obtenidos de  $X(p)$ ,  $Y(p)$ , y  $Z(p)$  correspondientes a  $190 \text{ Kg/cm}^2$

En este nuevo intervalo, ya se ha producido la liberación de gas a causa del abatimiento de presión. Por lo tanto, los parámetros que eran nulos en el intervalo anterior ahora tienen valores distintos de cero para el intervalo actual de presión. Al sustituir estos nuevos valores en la ec.(2.2), se obtiene:

$$X(p)_{\frac{190Kg}{cm^2}} = 0.001880503$$

$$Y(p)_{\frac{190Kg}{cm^2}} = 0.048078267$$

$$Z(p)_{\frac{190Kg}{cm^2}} = -4.14 \times 10^{-7}$$

Una vez obtenido los nuevos valores para  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  se sustituyen en la ec. (2.2), como en el paso 3. Sustituyendo los valores, tenemos que,

$$\frac{\Delta S_o}{\Delta p} = \left[ \frac{0.787(0.0018) + 0.787(1.1154 \times 10^{-5})(0.04807) - (1 - 0.787 - 0.2) - 4.14 \times 10^{-7}}{1 + [(1.1154 \times 10^{-5})(68.1)]} \right] = 0.00148$$

6. Calcular el promedio  $\Delta S_o/\Delta p$

$$\frac{\Delta S_o}{\Delta p} = \frac{(0.0013 + 0.00147996)}{2} = 0.00139$$

7. Calcular  $S_{oj}$  usando  $(\Delta S_o/\Delta p)$  el promedio del paso 6,

$$S_{oj} = S_{o(j-1)} - \Delta p \left( \frac{\Delta S_o}{\Delta p} \right)$$
$$S_{oj} = 0.8 - 10(0.00138998) = 0.78610$$

El valor de  $S_o$  puede utilizarse ahora para calcular la recuperación de aceite que se ha producido hasta una presión de 190 Kg/cm<sup>2</sup>

$$Np = N \left[ 1 - \left( \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right) \frac{B_{oi}}{B_o} \right]. \quad (2.4)$$

Las tablas 2.2a y 2.2.b muestran el procedimiento en forma tabular, lo que permite una mayor facilidad de comprensión de los resultados.

Para esta aproximación, se distingue el repromedio de la saturación de aceite como se muestra en la columna 14. Recordemos que para 1958, el uso de computadoras estaba limitado y resultaba importante simplificar las operaciones, tal que los intervalos de presión tenían que ser grandes. Así también, el cálculo de las derivadas por medio de incrementos o decrementos, se utiliza para aproximar la derivada de una función en un punto dado; tal que, mientras más pequeño sea el valor de  $h$  utilizado (magnitud del intervalo de presión), la aproximación será más precisa.

Cabe mencionar que este método puede presentar problemas de precisión si se elige un valor de  $h$  muy pequeño o muy grande, por lo que es importante seleccionar un valor adecuado. En algunos casos, es posible que el valor de la derivada no se aproxime de manera adecuada utilizando incrementos, especialmente en puntos de la función donde hay discontinuidades o cambios bruscos en la curva. Este método mantiene constantes los valores de las derivadas para las propiedades PVT, tal como se señala en el paso 1. Posteriormente, resultado de las columnas 13 y 14, la columna 15 se toma como la saturación promedio, y con esta, se concluye el cálculo. En el procedimiento original, el valor de permeabilidades relativas se obtiene de gráficas.

En esta tesis, las columnas 17 a 20 fueron adicionadas a la solución, por sí solas calculan el valor de la relación de permeabilidades relativas y pertenecen a Corey<sup>64</sup>. Estas columnas no se encuentran en la aproximación de C-H y sustituyen el uso de las curvas de permeabilidades relativas.

Tabla 2.2a Método de Recurrencia, aproximación por Craft y Hawkins

					$\Delta R_s/\Delta p$	$\Delta B_o/\Delta p$	$\Delta B_g/\Delta p$	(4/2) * (6)	(1/2) * (5) * (7)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P (Kg/cm^2)$	$B_o$	$R_s$	$B_g$	$\mu o/\mu g$	$dR_s/dp$	$dB_o/dp$	$dB_g/dp$	$X(p)$	$Y(p)$
200	1.44	120	0.0065	65.5	0.36	0.0009	-4E-05	0.001625	0.0409375
195									
190	1.431	116.4	0.0069	68.8	0.39	0.001	-6E-05	0.0018805	0.04807827
185									
180	1.421	112.5	0.0075	72.2	0.405	0.0011	-0.00006	0.00213758	0.05589022
175									
170	1.41	108.45	0.0081	75.7	0.41	0.0012	-7E-05	0.00235532	0.06442553
165									
160	1.398	104.35	0.0088	79.3	0.43	0.0013	-8E-05	0.00270672	0.07374106
155									
150	1.385	100.05	0.0096	83.1	0.435	0.0013	-9E-05	0.00301516	0.078
145									
140	1.372	95.7	0.0105	87.2	0.45	0.0013	-0.00011	0.00344388	0.08262391
135									
130	1.359	91.2	0.0116	91.7	0.46	0.0014	-0.00014	0.00392642	0.09446652
125									
120	1.345	86.6	0.013	96.7	0.47	0.0014	-0.00015	0.00454275	0.10065428
115									
110	1.331	81.9	0.0145	102.3	0.48	0.0014	-0.00017	0.00522915	0.10760331
105									
100	1.317	77.1	0.0162	108.6	0.49	0.0015	-0.00019	0.00602733	0.12369021
95									
90	1.302	72.2	0.0181	115.6	0.51	0.0016	-0.00023	0.00708986	0.14205837
85									
80	1.286	67.1	0.0204	123.3	0.55	0.0017	-0.00025	0.00872473	0.16299378
75									
70	1.269	61.6	0.0229	131.8	0.55	0.0019	-0.00031	0.00992514	0.19733649
65									
60	1.25	56.1	0.026	141.2	0.64	0.0021	-0.0004	0.013312	0.237216
55									
50	1.229	49.7	0.03	151.6	0.73	0.0023	-0.00058	0.01781937	0.28371033
45									
40	1.206	42.4	0.0358	163.5	0.755	0.00242	-0.00058	0.02241211	0.32808458

Tabla 2.2b Método de Recurrencia, aproximación por Craft y Hawkins

(12) - (( $\Delta p$ ) * 13)			15 - (( $\Delta p$ ) * 14)	(15)/(1 - $S_{wi}$ )	16 <sup>4</sup>	(1 - 16) <sup>2</sup>	(1 - 16 <sup>2</sup> )	(18 * 19)/(17)
12	13	14	15	16	17	18	19	20
<i>Soj</i>	$\Delta s_o/\Delta p$	$\frac{\Delta s_o}{\Delta p \text{ prom}}$	<i>Soj prom</i>	<i>S</i>				<i>Kro/Krg</i>
0.8	0.0013		0.8	1	1	0.00E+00	0.00000	0.00000
		0.0014465						
0.787	0.001593		0.785535	0.98191875	0.92961306	3.27E-04	0.03584	0.00001
		0.0016625						
0.77107001	0.0018785		0.76891002	0.96113752	0.85337935	1.51E-03	0.07621	0.00013
		0.00191556						
0.75228504	0.00216862		0.74975444	0.93719305	0.77146502	3.94E-03	0.12167	0.00062
		0.00221666						
0.73059886	0.00251775		0.72758789	0.90948486	0.68419814	8.19E-03	0.17284	0.00207
		0.0024426						
0.70542133	0.00266855		0.70316184	0.8789523	0.59684455	1.47E-02	0.22744	0.00558
		0.00253982						
0.6787358	0.00263703		0.67776366	0.84720458	0.5151731	2.33E-02	0.28224	0.01279
		0.0024507						
0.65236549	0.00236159		0.65325664	0.8165708	0.44460606	3.36E-02	0.33321	0.02522
		0.00216009						
0.62874961	0.00186948		0.63165571	0.78956964	0.38865277	4.43E-02	0.37658	0.04291
		0.00184393						
0.61005479	0.00152777		0.6132164	0.7665205	0.34521933	5.45E-02	0.41245	0.06513
		0.00158983						
0.59477709	0.00133573		0.59731812	0.74664765	0.31078698	6.42E-02	0.44252	0.09139
		0.00141957						
0.58141984	0.00124931		0.58312242	0.72890303	0.2822793	7.35E-02	0.46870	0.12203
		0.0013053						
0.56892673	0.00119103		0.57006945	0.71258681	0.25784049	8.26E-02	0.49222	0.15770
		0.00125289						
0.55701647	0.00120048		0.55754056	0.6969257	0.23590977	9.19E-02	0.51429	0.20025
		0.00125953						
0.54501168	0.00126618		0.54494524	0.68118155	0.2153037	1.02E-01	0.53599	0.25304
		0.00130147						
0.53234991	0.00134342		0.5319305	0.66491312	0.19546077	1.12E-01	0.55789	0.32048
		0.00131316						
0.51891575	0.00132485		0.51879888					

### Aproximación de Garaicochea y Bashbush

Garaicochea y Bashbush, presentan un método numérico de segundo orden o punto medio de aproximación similar al propuesto por Craft y Hawkins, realizando algunas modificaciones, como, la eliminación del paso 7 y el cálculo de derivadas por medio de incrementos. En comparación a la aproximación por C-H, G-B interpolaron los datos PVT para obtener los valores correspondientes en intervalos de 5 Kg/cm<sup>2</sup>. De esta manera, se eliminaron los pasos para obtener el valor promedio de  $\Delta S_o/\Delta p$  y resolver la

ec.(2.2) para el intervalo de interés, utilizando los valores PVT ( $B_o$ ,  $R_s$  y  $B_g$ ) evaluados en el punto medio del intervalo. Por ejemplo:

Valor inicial: 200 Kg/cm<sup>2</sup>

Punto medio: 195 Kg/cm<sup>2</sup>

Valor de interés: 190 Kg/cm<sup>2</sup>

Procedimiento para el cálculo de  $S_o$  promedio:

1. Determinar la pendiente de  $R_s$ ,  $B_o$  y  $B_g$  para cada intervalo de interés.
2. Resolver la ec.(2.1) para  $\Delta S_o / \Delta p$  utilizando la saturación de aceite correspondiente a la presión inicial de la presión dada  $\Delta p$ ; es decir, la saturación del intervalo anterior al que se está calculando, con los valores PVT ( $R_s$ ,  $B_o$  y  $B_g$ ) pertenecientes al punto medio del intervalo como se ilustró anteriormente
3. Estimar  $S_{o,j}$  usando la ec.(2.2)
4. Repetir los pasos del 2 al 3 para todas las caídas de presión de interés.

Cálculo para el primer intervalo de 200 - 190 Kg/cm<sup>2</sup>

1. Calcular las derivadas por decrementos

$$\frac{dR_s}{dp} = \frac{R_{s_j} - R_{s_{(j-1)}}}{p_1 - p_2} = \frac{120 - 116.4}{200 - 190} = 0.36$$

$$\frac{dB_o}{dp} = \frac{B_{o_j} - B_{o_{(j-1)}}}{p_1 - p_2} = \frac{1.44 - 1.431}{200 - 190} = 0.0009$$

$$\frac{dB_g}{dp} = \frac{B_{g_j} - B_{g_{(j-1)}}}{p_1 - p_2} = \frac{0.0065 - 0.0069}{200 - 190} = -4 \times 10^{-5}$$

2. Sustituir en la ec.(2.2)

3. Calcular  $\Delta S_o / \Delta p$  usando  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  a 195 kg/cm<sup>2</sup> (punto medio). Al sustituir tenemos varios parámetros igual a cero, esto es porque las permeabilidades relativas en  $p = 200$  kg/cm<sup>2</sup> son igual a cero, porque no se ha iniciado la liberación del gas; por lo tanto, la  $S_g = 0$ .

$$X(p)_{\frac{195 \text{ Kg}}{\text{cm}^2}} = \frac{0.8(0.0068)(0.36)}{1.436} = 0.00170$$

$$Y(p)_{\frac{195 \text{ Kg}}{\text{cm}^2}} = \frac{0.8(67.1)(0.0009)}{(0.0068)} = 0.04205$$

$$Z(p)_{\frac{195 \text{ Kg}}{\text{cm}^2}} = \frac{-4 * 10^{-5}}{(0.0068)} = -0.00598$$

Sustituyendo en la ec.(2.2),

$$\frac{\Delta S_o}{\Delta p} = \left[ \frac{0.8(0.0017) + 0 - 0}{1 + 0} \right] = 0.01339$$

4. Obtener  $S_{oj}$

$$S_{oj} = S_{o(j-1)} - \Delta p \left( \frac{\Delta S_o}{\Delta p} \right)$$

$$S_{oj@190 \frac{kg}{cm^2}} = 0.8 - 10(0.00133) = 0.78660$$

5. Repetir los pasos del 2 al 3 para el siguiente intervalo de presión. Calcular  $\Delta S_o/\Delta p$  usando el  $S_{oj}$  del paso 3,  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  correspondientes a  $185 \text{ kg/cm}^2$ . En este punto ya existe liberación del gas, por lo tanto, los parámetros anteriores ya tienen un valor. Sustituyendo valores en la ec.(2.2) se tienen:

$$X(p)_{@185 \frac{kg}{cm^2}} = 0.0020$$

$$Y(p)_{@185 \frac{kg}{cm^2}} = 0.04943$$

$$Z(p)_{@185 \frac{kg}{cm^2}} = -0.00833$$

Resolviendo en la ec.(2.2),

$$\frac{\Delta S_o}{\Delta p} = \left[ \frac{0.7866(0.002) + 0.7866(9.965E - 06)(0.04943) - (1 - 0.7866 - 0.2)(-0.00833)}{1 + (9.965 \times 10^{-6}(70.5))} \right]$$

$$= 0.016598$$

6. Obtener  $S_{oj}$

$$S_{oj} = S_{o(j-1)} - \Delta p \left( \frac{\Delta S_o}{\Delta p} \right)$$

$$S_{oj@180 \frac{kg}{cm^2}} = 0.786602786 - 10(0.016598) = 0.7700048$$

En la tabla 2.3, se muestra el método de recurrencia.

Tabla 2.3a Método de recurrencia de Garaicochea y Bashbush

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p$ (Kg /cm <sup>2</sup> )	$B_o$	$R_s$	$B_g$	$\mu_o$ / $\mu_g$	$\frac{dR_s}{dp}$	$\frac{dB_o}{dp}$	$\frac{dB_g}{dp}$	$X(p)$ (4/2) * (6)	$Y(p)$ (1/2) * (5) * (7)	$Z(p)$ (1/4) * 8
200	1.44	120	0.0065	65.5						
195	1.436	118.25	0.00668	67.1	0.3600	0.0009	-4E-05	0.00167465	0.04205432	-0.00598802
190	1.431	116.4	0.0069	68.8						
185	1.426	114.48	0.0072	70.5	0.3900	0.001	-6E-05	0.00196914	0.04943899	-0.00833333
180	1.421	112.5	0.0075	72.2						
175	1.416	110.48	0.0078	73.9	0.4050	0.0011	-0.00006	0.00223093	0.05740819	-0.00769231
170	1.41	108.45	0.0081	75.7						
165	1.404	106.41	0.00843	77.5	0.4100	0.0012	-7E-05	0.00246175	0.06623932	-0.00830368
160	1.398	104.35	0.0088	79.3						
155	1.3915	102.21	0.00919	81.2	0.4300	0.0013	-8E-05	0.00283989	0.07586058	-0.00870511
150	1.385	100.05	0.0096	83.1						
145	1.3785	97.85	0.01003	85.1	0.4350	0.0013	-9E-05	0.00316507	0.0802539	-0.00897308
140	1.372	95.7	0.0105	87.2						
135	1.3655	93.47	0.01103	89.4	0.4500	0.0013	-0.00011	0.00363493	0.08511168	-0.0099728
130	1.359	91.2	0.0116	91.7						
125	1.352	88.91	0.01229	94.1	0.4600	0.0014	-0.00014	0.00418151	0.09744083	-0.01139138
120	1.345	86.6	0.013	96.7						
115	1.338	84.26	0.01373	99.4	0.4700	0.0014	-0.00015	0.00482294	0.10400598	-0.01092498
110	1.331	81.9	0.0145	102.3						
105	1.324	79.52	0.0153	105.4	0.4800	0.0014	-0.00017	0.00554683	0.11145015	-0.01111111
100	1.317	77.1	0.0162	108.6						
95	1.31	74.1	0.01713	112	0.4900	0.0015	-0.00019	0.0064074	0.12824427	-0.01109165
90	1.302	72.2	0.0181	115.6						
85	1.294	69.7	0.01922	119.4	0.5100	0.0016	-0.00023	0.00757512	0.14763524	-0.0119667
80	1.286	67.1	0.0204	123.3						
75	1.278	64.46	0.02163	127.4	0.5500	0.0017	-0.00025	0.00930869	0.16946792	-0.01155802
70	1.269	61.6	0.0229	131.8						
65	1.26	59.05	0.02435	136.4	0.5500	0.0019	-0.00031	0.01062897	0.20568254	-0.01273101
60	1.25	56.1	0.026	141.2						
55	1.24	53	0.02785	146.2	0.6400	0.0021	-0.0004	0.01437419	0.24759677	-0.01436266
50	1.229	49.7	0.03	151.6						
45	1.218	46.2	0.03255	157.3	0.7300	0.0023	-0.00058	0.01950862	0.29703612	-0.01781874
40	1.206	42.4	0.0358	163.5						

Continuación Tabla 2.3b Método de recurrencia de Garaicochea y Bashbush

12	13	14	15	16	17	18	19	20
<i>Soj</i>	$\frac{\Delta s_o}{\Delta p}$ (12) - (( $\Delta p$ ) * 13)	$\frac{\Delta s_o}{\Delta p}$ <i>prom</i>	<i>Soj prom</i> 15 - (( $\Delta p$ ) * 14)	(15)/(1 - <i>Swi</i> )	16 <sup>4</sup>	(1 - 16) <sup>2</sup>	(1 - 16 <sup>2</sup> )	<i>kg/ko</i> (18 * 19)/(17)
0.8	0.0013		0.8	1	1	0.00E+00	0.00000	0.00000
		0.0014465						
0.787	0.001593		0.785535	0.98191875	0.92961306	3.27E-04	0.03584	0.00001
		0.0016625						
0.77107001	0.0018785		0.76891002	0.96113752	0.85337935	1.51E-03	0.07621	0.00013
		0.00191556						
0.75228504	0.00216862		0.74975444	0.93719305	0.77146502	3.94E-03	0.12167	0.00062
		0.00221666						
0.73059886	0.00251775		0.72758789	0.90948486	0.68419814	8.19E-03	0.17284	0.00207
		0.0024426						
0.70542133	0.00266855		0.70316184	0.8789523	0.59684455	1.47E-02	0.22744	0.00558
		0.00253982						
0.6787358	0.00263703		0.67776366	0.84720458	0.5151731	2.33E-02	0.28224	0.01279
		0.0024507						
0.65236549	0.00236159		0.65325664	0.8165708	0.44460606	3.36E-02	0.33321	0.02522
		0.00216009						
0.62874961	0.00186948		0.63165571	0.78956964	0.38865277	4.43E-02	0.37658	0.04291
		0.00184393						
0.61005479	0.00152777		0.6132164	0.7665205	0.34521933	5.45E-02	0.41245	0.06513
		0.00158983						
0.59477709	0.00133573		0.59731812	0.74664765	0.31078698	6.42E-02	0.44252	0.09139
		0.00141957						
0.58141984	0.00124931		0.58312242	0.72890303	0.2822793	7.35E-02	0.46870	0.12203
		0.0013053						
0.56892673	0.00119103		0.57006945	0.71258681	0.25784049	8.26E-02	0.49222	0.15770
		0.00125289						
0.55701647	0.00120048		0.55754056	0.6969257	0.23590977	9.19E-02	0.51429	0.20025
0.54501168	0.00126618		0.54494524	0.68118155	0.2153037	1.02E-01	0.53599	0.25304
		0.00130147						
0.53234991	0.00134342		0.5319305	0.66491312	0.19546077	1.12E-01	0.55789	0.32048
		0.00131316						
0.51891575	0.00132485		0.51879888					

Garaicochea y Bashbush señalan que la ecuación de Muskat puede integrarse numéricamente suponiendo que el cambio de las propiedades físicas de los fluidos con la declinación de la presión permanece constante dentro de un intervalo pequeño de presión. Para este intervalo, se obtienen las cantidades diferenciales correspondientes como valores de la pendiente de las curvas de estas propiedades contra la presión. Para minimizar los errores inherentes a este tipo de integración, las propiedades de los fluidos que dependen de la presión, se toman en el punto medio de cada decremento de presión. Para propósitos de cálculo, se emplea en el decremento de presión considerado, el valor de la relación de kg/ko que corresponde al inicio del decremento.



Como se mencionó anteriormente, la integración numérica de una ecuación diferencial implica plantear suposiciones y considerar sus limitaciones. En el caso de Craft y Hawkins, así como de Garaicochea y Bashbush, es probable que estos enfrentaran dificultades para encontrar una solución precisa utilizando métodos numéricos por la limitante tecnológica. Para evitar lidiar con los problemas asociados con la integración numérica, Garaicochea y Bashbush utilizaron las propiedades de los fluidos que dependen de la presión en el punto medio de cada decremento de presión. Anteriormente, Craft y Hawkins reconocieron este problema, e intentaron abordarlo promediando las saturaciones; aunque esta no es la mejor opción para su fecha, fue un gran aporte que redujo el número de cálculos necesarios al reducir significativamente los elementos que lo conforman, evitando la interpolación y minimizando los cálculos requeridos, como se puede ver en la Tabla 2.2.

En el método de evaluación de Garaicochea y Bashbush, de las columnas 17 a la 20, no están desarrolladas o explícitamente publicadas para la obtención de la relación de permeabilidades relativas mediante la correlación de Torcaso y Willie. Después de analizar el texto original y estudiar las correlaciones más comunes, se llegó a la conclusión de que la obtención de los datos de permeabilidades relativa podría haberse obtenido mediante esta correlación o alguna otra que se desprende de ella.

Esta aproximación proporciona resultados numéricos aceptables para evaluar el efecto del empuje por gas en solución. Aunque la solución por Runge Kutta de cuarto orden es más precisa y adecuada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, su mayor cantidad de operaciones plantea desafíos. Por lo tanto, se presenta a continuación una propuesta que busca equilibrar precisión y optimización en los cálculos para la aproximación de la solución en el campo.

### **Método de Aproximación Propuesto**

Las metodologías analizadas para dar solución a la ecuación de Muskat son las propuestas por Craft y Hawkins y posteriormente modificada por Garaicochea y Bashbush, con énfasis en la obtención de las derivadas; el primero utiliza el método de Euler con una adaptación que “promedia” las saturaciones promedio calculadas usando un valor constante de las derivadas, mientras que el segundo utiliza el método del punto medio, aplicando el concepto de decrementos en la obtención de las derivadas. Con base a lo anterior, se propone una nueva metodología de aproximación presentada por Barreto y Padilla<sup>8</sup>, que optimiza las operaciones y permite abordar el problema de una forma sencilla y práctica, sin perder de vista el error derivado de usar métodos numéricos. Se retoma el método de Euler y se combina con el uso de decrementos para la obtención de derivadas. Para la derivación se selecciona un punto de interés  $x_0$  en el dominio de la función  $f(x)$  y se define un decremento pequeño  $h(\Delta p)$  en  $x$ , de manera que  $x_{0-h}$  está

dentro del dominio de la función. De la ec.(1.1), la formulación explícita general para la aproximación propuesta está dada por,

$$S_{o_{n+1}} = S_{o_n} - \left[ h \left( \frac{\frac{S_o B_g (R_{s_j} - R_{s_{j-1}})}{B_o} + \frac{S_o \lambda_g (B_{o_j} - B_{o_{j-1}})}{B_o \lambda_o} - \frac{S_g (B_{g_j} - B_{g_{j-1}})}{B_g}}{1 + \frac{\lambda_g}{\lambda_o}} \right) \right] \quad (2.5)$$

dónde  $h \in [1,5]$ .

Así, dado un punto inicial  $(x_0, y_0)$ , el método de Euler aproxima el valor de la solución en el siguiente punto  $x_1$ , esto es,  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ , en donde:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  y  $h$  es el tamaño del cambio entre los puntos  $x_0$  y  $x_1$ . Este proceso se repite para aproximar la solución en los siguientes puntos sucesivos:  $x_{n+1} = x_n + h$  ;  $y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n)$ , con  $h = p_1 - p_2$ ,  $x_n = p_n$  y  $y_n = S_{o_n}$ . Cabe señalar que los resultados obtenidos con el método de aproximación propuesto son de aplicación directa a problemas de campo, además de ser consistentes con todos los métodos de balance de materia<sup>2,3,4,5,58,59,60,61</sup>.

Una característica importante del método propuesto es que se utilizan intervalos de presión mucho más pequeños con valores que pueden ir de  $\Delta p = 1-5 \text{ kg/cm}^2$ . Para el ejemplo que se presenta a continuación, se aplican cambios de presión de  $5 \text{ kg/cm}^2$  por cuestiones de espacio, pero se recomienda que el cambio de presión utilizado sea de  $1 \text{ kg/cm}^2$ .

Procedimiento para el cálculo de  $S_o$  promedio:

1. Calcular las derivadas de las propiedades PVT, por medio de decrementos.

$$\frac{dR_s}{dp} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta R_s}{\Delta p} \cong \frac{R_{s_1} - R_{s_{j-1}}}{p_1 - p_2} = \frac{120 - 116.4}{200 - 199} = 3.6$$

$$\frac{dB_o}{dp} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta B_o}{\Delta p} \cong \frac{B_{o_j} - B_{o_{(j-1)}}}{p_1 - p_2} = \frac{1.44 - 1.431}{200 - 199} = 0.009$$

$$\frac{dB_g}{dp} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta B_g}{\Delta p} \cong \frac{B_{g_j} - B_{g_{(j-1)}}}{p_1 - p_2} = \frac{0.0065 - 0.0069}{200 - 199} = -0.0004$$

2. Sustituir los valores obtenidos y los datos PVT en la ec.(2.1).

3. Calcular  $\Delta S_o / \Delta p$  usando  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  a  $195 \text{ kg/cm}^2$ .

Al sustituir tenemos varios parámetros igual a cero esto es porque las permeabilidades relativas en  $p = 200 \text{ Kg/cm}^2$  son igual a cero porque no se ha iniciado la liberación del gas por lo tanto la  $S_g = 0$ .

$$X(p)_{\frac{195Kg}{cm^2}} = \frac{0.8(0.0068)(0.36)}{1.436} = 0.00170$$

$$Y(p)_{\frac{195Kg}{cm^2}} = \frac{0.8(67.1)(0.0009)}{(0.0068)} = 0.04205$$

$$Z(p)_{\frac{195Kg}{cm^2}} = \frac{-4 \times 10^{-5}}{(0.0068)} = -0.00598$$

Sustituyendo en la ec.(2.2),

$$\frac{\Delta S_o}{\Delta p} = \left[ \frac{0.8(0.0017) + 0 - 0}{1 + 0} \right] = 0.01339$$

4. Obtener  $S_{oj}$

$$S_{oj} = S_{o(j-1)} - \Delta p \left( \frac{\Delta S_o}{\Delta p} \right)$$

$$S_{oj@190 \frac{kg}{cm^2}} = 0.8 - 10(0.00133) = 0.78660$$

5. Repetir los pasos del 2 al 3 para el siguiente intervalo de presión.

Calcular  $\Delta S_o/\Delta p$  usando el  $S_{oj}$  del paso 3 y  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  correspondientes a 185 Kg/cm<sup>2</sup>. En este punto ya existe liberación del gas, por lo tanto, los parámetros anteriores ya tienen un valor. Sustituyendo los valores en la ec. (2.2) se tiene que:

$$X(p)_{@185 \frac{kg}{cm^2}} = 0.0020$$

$$Y(p)_{@185 \frac{kg}{cm^2}} = 0.04943$$

$$Z(p)_{@185 \frac{kg}{cm^2}} = -0.00833$$

Resolviendo en la ec.(2.2)

$$\frac{\Delta S_o}{\Delta p} = \left[ \frac{0.7866(0.002) + 0.7866(9.965E - 06)(0.04943) - (1 - 0.7866 - 0.2)(-0.00833)}{1 + (9.965 * 10^{-6}(70.5))} \right]$$

$$= 0.016598$$

6. Obtener  $S_{oj}$

$$S_{oj} = S_{o(j-1)} - \Delta p \left( \frac{\Delta S_o}{\Delta p} \right)$$

$$S_{oj@180 \frac{kg}{cm^2}} = 0.786602786 - 1(0.016598) = 0.7700048$$

En la tabla 2.4 se presentan los resultados en intervalos de 5 Kg/cm<sup>2</sup> de presión, pero es muy importante señalar que estos datos fueron filtrados de la prueba realizada para intervalos de 1 Kg/cm<sup>2</sup>.

Esta aproximación en comparación a los procedimientos propuestos por C-H y G-B, utiliza intervalos de presión más pequeños con valores de  $\Delta p=0.1, 0.5$  o 1 Kg/cm<sup>2</sup>, por lo que la evaluación obtenida por este método tiene una mayor cantidad de intervalos. No se considera el valor de las derivadas constantes, es indispensable la interpolación.

En resumen, este método necesita datos PVT interpolados para las presiones con las que se busque trabajar: 0.1, 0.5 o 1 Kg/cm<sup>2</sup> (tal como sucede con el método de G-B) y resolver intervalo por intervalo (como lo resuelve C-H). De esta forma, se elimina el cálculo de saturaciones repromediadas, que es el objetivo de utilizar intervalos de presión pequeños; además de que las derivadas:  $X(p)$ ,  $Y(p)$  y  $Z(p)$  no se mantendrán constantes, por lo que deben calcularse para cada intervalo de presión (ver ec. 2.1).

Tabla 2.4a Aproximación por el Método Propuesto

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$B_o$	$R_s$	$B_g$	$\mu_o/\mu_g$	$dR_s/dp$	$dB_o/dp$	$dB_g/dp$	$X(p)$ (4/2) * (6)	$Y(p)$ (1/2) * (5) * (7)
200	1.44	120	0.0065	65.5					
195	1.436	118.25	0.00668	67.1	0.35655	0.00088	0.000877563	0.000877563	0.001341876
190	1.431	116.4	0.0069	68.8	0.37698	0.00103	0.001029456	0.001029456	0.001431905
185	1.426	114.48	0.0072	70.5	0.38889	0.00100	0.000996614	0.000996614	0.001531185
180	1.421	112.5	0.0075	72.2	0.40019	0.00098	0.000984087	0.000984087	0.00162844
175	1.416	110.48	0.0078	73.9	0.40540	0.00107	0.001067038	0.001067038	0.00170045
170	1.41	108.45	0.0081	75.7	0.40678	0.00124	0.00123576	0.00123576	0.001755948
165	1.404	106.41	0.00843	77.5	0.40829	0.00118	0.001181923	0.001181923	0.001816232
160	1.398	104.35	0.0088	79.3	0.41773	0.00124	0.001236548	0.001236548	0.00191887
155	1.3915	102.21	0.00919	81.2	0.43167	0.00132	0.001315886	0.001315886	0.0020474
150	1.385	100.05	0.0096	83.1	0.43269	0.00130	0.001295907	0.001295907	0.002119082
145	1.3785	97.85	0.01003	85.1	0.43428	0.00130	0.001300487	0.001300487	0.0021972
140	1.372	95.7	0.0105	87.2	0.43901	0.00130	0.001302144	0.001302144	0.002300323
135	1.3655	93.47	0.01103	89.4	0.45002	0.00129	0.001290935	0.001290935	0.002451322
130	1.359	91.2	0.0116	91.7	0.45605	0.00133	0.001334115	0.001334115	0.002587347
125	1.352	88.91	0.01229	94.1	0.45924	0.00142	0.001416606	0.001416606	0.002735154
120	1.345	86.6	0.013	96.7	0.46460	0.00140	0.001395462	0.001395462	0.002902481
115	1.338	84.26	0.01373	99.4	0.46884	0.00140	0.001401544	0.001401544	0.003070361
110	1.331	81.9	0.0145	102.3	0.47756	0.00140	0.00139836	0.00139836	0.003280477
105	1.324	79.52	0.0153	105.4	0.46252	0.00141	0.001405015	0.001405015	0.003331863
100	1.317	77.1	0.0162	108.6	0.54771	0.00138	0.001381578	0.001381578	0.004154023
95	1.31	74.1	0.01713	112	0.53337	0.00147	0.001468673	0.001468673	0.004251379
90	1.302	72.2	0.0181	115.6	0.37737	0.00163	0.001631732	0.001631732	0.003165537
85	1.294	69.7	0.01922	119.4	0.53873	0.00160	0.0015964	0.0015964	0.004777976
80	1.286	67.1	0.0204	123.3	0.51170	0.00158	0.001582668	0.001582668	0.004796087
75	1.278	64.46	0.02163	127.4	0.55318	0.00167	0.001672928	0.001672928	0.005476396
70	1.269	61.6	0.0229	131.8	0.55061	0.00181	0.001813621	0.001813621	0.005749766
65	1.26	59.05	0.02435	136.4	0.52335	0.00186	0.001864587	0.001864587	0.005792397
60	1.25	56.1	0.026	141.2	0.61368	0.00202	0.002016031	0.002016031	0.00722928
55	1.24	53	0.02785	146.2	0.63193	0.00206	0.002063288	0.002063288	0.007948149
50	1.229	49.7	0.03	151.6	0.67499	0.00222	0.002218818	0.002218818	0.009116882
45	1.218	46.2	0.03255	157.3	0.72410	0.00225	0.002253439	0.002253439	0.010578119
40	1.206	42.4	0.0358	163.5	0.77340	0.00246	0.002455424	0.002455424	0.01238742

Tabla 2.4b Aproximación por el Método Propuesto

11	12	13	14	15	16	17	18
$Z(P)$ $(1/4) * 8$	$Soj$	$\Delta so/\Delta p$	$(12)/(1 - Swf)$	$14^4$	$(1 - 12)^2$	$(1 - 12^2)$	$kg/ko$ $(18 * 19)/(17)$
0.00000000	0.80000	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0
1.86045E-08	0.79340	0.001373	0.991750	0.967405	0.000068	0.016433	1.15623E-06
2.96069E-07	0.78626	0.001481	0.982827	0.933058	0.000295	0.034051	1.07622E-05
1.35023E-06	0.77809	0.001721	0.972615	0.894879	0.000750	0.054020	4.52693E-05
4.19149E-06	0.76913	0.001844	0.961413	0.854358	0.001489	0.075685	0.000131901
1.12692E-05	0.75949	0.001973	0.949366	0.812334	0.002564	0.098704	0.000311523
2.77929E-05	0.74937	0.002066	0.936706	0.769864	0.004006	0.122581	0.000637862
5.11271E-05	0.73868	0.002180	0.923354	0.726896	0.005875	0.147418	0.00119141
9.5703E-05	0.72747	0.002288	0.909333	0.683741	0.008221	0.173114	0.002081331
0.000172608	0.71581	0.002340	0.894760	0.640953	0.011075	0.199405	0.003445666
0.000270966	0.70428	0.002277	0.880350	0.600650	0.014316	0.224984	0.005362348
0.000409093	0.69318	0.002177	0.866480	0.563683	0.017828	0.249212	0.007881784
0.000587244	0.68258	0.002094	0.853221	0.529965	0.021544	0.272013	0.011057804
0.000805996	0.67237	0.001989	0.840457	0.498955	0.025454	0.293633	0.01497962
0.001112826	0.66277	0.001903	0.828461	0.471074	0.029426	0.313652	0.019592175
0.001549016	0.65335	0.001839	0.816691	0.444868	0.033602	0.333015	0.025153569
0.001949286	0.64467	0.001677	0.805843	0.421698	0.037697	0.350617	0.031342913
0.002440704	0.63662	0.001568	0.795779	0.401023	0.041706	0.366736	0.038140635
0.002983877	0.62908	0.001472	0.786348	0.382349	0.045647	0.381656	0.045564285
0.003621222	0.62200	0.001375	0.777501	0.365429	0.049506	0.395492	0.053578632
0.004248196	0.61519	0.001390	0.768991	0.349691	0.053365	0.408653	0.062363168
0.005397494	0.60824	0.001320	0.760299	0.334146	0.057457	0.421946	0.072554037
0.007032253	0.60219	0.001208	0.752742	0.321059	0.061137	0.433380	0.082524842
0.008073776	0.59583	0.001282	0.744783	0.307694	0.065136	0.445298	0.094265011
0.009360343	0.58966	0.001200	0.737069	0.295143	0.069133	0.456729	0.106981806
0.011481738	0.58371	0.001216	0.729637	0.283418	0.073096	0.467630	0.120606344
0.014529576	0.57744	0.001231	0.721804	0.271442	0.077393	0.478999	0.136570985
0.017317975	0.57150	0.001214	0.714378	0.260442	0.081580	0.489664	0.15338065
0.021846316	0.56506	0.001293	0.706330	0.248903	0.086242	0.501099	0.173625811
0.026040897	0.55871	0.001292	0.698391	0.237900	0.090968	0.512250	0.195874191
0.032818609	0.55197	0.001351	0.689965	0.226626	0.096121	0.523948	0.222228105
0.03901742	0.54528	0.001366	0.681597	0.215830	0.101380	0.535425	0.25150136
0.04999391	0.53811	0.001450	0.672640	0.204707	0.107164	0.547555	0.286646301

La Tabla 2.4 detalla el procedimiento aplicado en un caso específico. Después de revisar las soluciones de C-H y G-B, se identificaron oportunidades de optimización. Se propone un método práctico y más preciso para su aplicación en el campo, aprovechando las capacidades actuales de los procesadores. Este método se basa en la aproximación de la solución en cada cambio de presión utilizando la información de la derivada en ese punto, lo cual, aunque simple y fácil de implementar, puede acumular un error significativo en cada cambio de presión.

Aunque el método de Euler de primer orden generalmente no es adecuado para ecuaciones diferenciales que requieren alta precisión, se logró optimizar su aplicación para este caso de estudio dada la suavización del comportamiento de la curva de  $S_o$  vs  $p$ . Aunque en la literatura se sugieren métodos de Runge-Kutta de orden superior, la comparación entre la aproximación propuesta y la aproximación por Runge Kutta muestra resultados idénticos, demostrando la viabilidad y eficiencia de la implementación adecuada del método de Euler en este caso específico.

Para obtener una evaluación óptima para todas las aproximaciones antes señaladas, es necesario obtener y generar la interpolación de los datos PVT a la presión correspondiente; se recomienda que los decrementos de presión sean de 5  $\text{kg/cm}^2$  como máximo para obtener resultados óptimos. Usar cambios de presión dentro del rango de 1  $\text{kg/cm}^2$  a 0.1  $\text{kg/cm}^2$  proporcionará resultados con una variación mínima entre ellas. El lector puede utilizar la disminución que considere pertinente, aunque no debe perder de vista que al disminuir la presión a cambios de 0.1  $\text{kg/cm}^2$ , se verá reflejado en diez veces más el número de valores que necesitará interpolar para cada propiedad PVT; característica que también se verá reflejada en los cálculos.

El método propuesto da buenos resultados para intervalos de 1 a 5  $\text{kg/cm}^2$  y presenta diferencias significativas con respecto a las anteriores. Elimina el cálculo final de presiones promedio utilizado por C-H, así como el uso de valores medios implementado por G-B, además, permite incorporar diversas correlaciones para el cálculo de permeabilidades relativas, como las correlaciones señaladas en esta tesis. Esta solución ofrece la capacidad de abordar problemas complejos con cálculos simples y eficientes, lo que facilita la extensión de la investigación a otros mecanismos, como el empuje por gas en solución junto con el drene por gravedad.

Se aclara que en el presente trabajo se utilizaron curvas de permeabilidades relativas de libro y se diseñó un código adicional para introducirlas en el cálculo. Este código registra los valores de permeabilidades relativas de manera constante para todos los intervalos de presión, lo que simplifica la aplicación de las curvas correspondientes al yacimiento. Sin este código, sería necesario sustituir manualmente los valores de permeabilidades relativas para cada saturación, utilizando el valor inmediato anterior como pivote. El código, por su simplicidad, no se presenta.

### Método de Schilthuis

El método de Schilthuis<sup>2,5,7,58,59,60,61</sup> está basado en la ecuación general de balance de materia que se reduce a la siguiente ecuación para un yacimiento volumétrico saturado, dada por:

$$N = \left[ \frac{Np[B_o + B_g(R_p - R_s)]}{B_o - B_{oi} + B_g(R_{si} - R_s)} \right] \quad (2.6)$$

En esta ecuación las variables son función sólo de la presión del yacimiento. Para usar la ec.(2.6) como una herramienta de predicción de  $Np$  (producción acumulada de aceite), se debe desarrollar un método para estimar  $R_p$  (relación gas-aceite producido acumulado). El método de Schilthuis utiliza relación gas-aceite dada por:

$$GOR = R_s + \frac{k_g \mu_o B_o}{k_o \mu_g B_g} \quad (2.7)$$

El primer término en el lado izquierdo de la ec.(2.7) representa la producción de gas respecto a la producción de aceite, mientras que el primer término del lado derecho es la relación de solubilidad del gas en el aceite, y el segundo término es una relación del flujo de gas con respecto al aceite en términos de las movilidades.

Para calcular  $GOR$  con la ec.(2.7), se requiere información de permeabilidades relativas al gas y al aceite. Esta información no se conoce normalmente. La siguiente ecuación representa la saturación de la fase líquida,

$$S_L = S_w + (1 - S_w) \left[ 1 - \frac{Np}{N} \right] \frac{B_o}{B_{oi}} \quad (2.8)$$



En donde  $S_L$  es la saturación total del líquido, y se puede escribir como:  $S_L = S_w + S_o$  ó  $S_L = 1 - S_g$ . La solución de este conjunto de ecuaciones para obtener los valores de producción requiere un procedimiento de ensaye y error hasta cumplir con la siguiente igualdad,

$$\left[ \frac{Np}{N} [B_o + B_g(R_p - R_s)] \right] \frac{1}{B_o - B_{oi} + B_g(R_{si} - R_s)} - 1 = 0, \quad (2.9)$$

Procedimiento para el cálculo de  $S_o$  promedio:

1. Suponer un valor para una producción incremental de aceite ( $\Delta Np/N$ ) que ocurra para una caída de presión promedio del yacimiento ( $\Delta p$ ).
2. Determinar la producción acumulada de aceite a la presión  $p_j = p_{j-1} - \Delta p$  sumando todos los incrementos de producción anteriores a la suposición, durante la actual caída de presión. El subíndice  $j - 1$ , se refiere a las condiciones al principio de la caída de presión y  $j$  a las condiciones al final de la caída de presión,

$$\frac{Np}{N} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{Np}{N} \right), \quad (2.10)$$

3. Con  $Np/N$ , determinar la saturación de líquidos ( $S_L$ ), utilizando la ec.(2.8) para la presión de interés.
4. Con el valor de saturación de líquidos obtenido ( $S_L$ ), determinar el valor de la relación de permeabilidades,  $k_g/k_o$ . Las permeabilidades relativas para este método fueron obtenidas mediante la correlación de Torcaso y Willie.
5. Usando la relación de permeabilidades, calcular  $GOR_i$ ,

$$GOR = R_s + \frac{k_g \mu_o B_o}{k_o \mu_g B_g}, \quad (2.7)$$

6. Calcular el incremento de la producción de gas,  $\Delta Gp/N$ ,

$$\frac{\Delta Gp}{N} = \frac{\Delta Np}{N} \left( \frac{GOR_{(j-1)} + GOR_{(j)}}{2} \right), \quad (2.11)$$

7. Calcular la producción acumulada de gas a la presión de interés,

$$\frac{Gp}{N} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{Gp}{N} \right), \quad (2.12)$$

8. Calcular la relación gas-aceite producido,  $R_p$ ,

$$R_p = \frac{G_p}{N_p} = \frac{\frac{G_p}{N}}{\frac{N_p}{N}}, \quad (2.13)$$

9. Evaluar los valores obtenidos con la ec.(2.13),

$$\left[ \frac{\frac{N_p}{N} [B_t + B_g(R_p - R_s)]}{B_t - B_{ti}} \right] = 1, \quad (2.14)$$

Previamente, se define una tolerancia. Los resultados deben aproximarse a cero de acuerdo con esta tolerancia en las iteraciones. (de la ecuación 2.9 al operarse en hojas de cálculo se vio que implicaba menores errores si la igualdad se despejaba y se trabajaba con la unidad en lugar de cero). Si se cumple esta igualdad, el valor establecido de  $\Delta N_p/N$  es correcto y podemos continuar con los siguientes intervalos. Sin embargo, si no se cumple, es necesario proponer un nuevo valor de  $\Delta N_p/N$  e iniciar todos los pasos anteriores hasta que se satisfaga la igualdad o el valor se aproxime a 1, dependiendo de la tolerancia establecida.

Ejemplo para el cálculo de  $S_o$  promedio:

1. Suponer un valor para una producción incremental de aceite  $\Delta N_p/N$ . Para el primer intervalo se propone que el valor sea 0.01 o valores diferentes que cero o la unidad cuando se trabaje en las hojas de cálculo,

$$\Delta N_p/N = 0.0075400$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{N_p}{N} \right),$$

2. Realizar la suma para obtener la producción acumulada de aceite,

$$\sum_{j=1}^n 0.0075400 + 0 = 0.0075400$$

3. Con el  $N_p/N$ , determinar la saturación de líquidos sustituyendo en la ec.(2.8),

$$S_L = \left[ 0.2 + (1 - 0.2) \left[ 1 - 0.00754 \right] \frac{1.4260}{1.440} \right] = 0.9862$$

$$S_o = (0.9862 - 0.2) = 0.7862$$

4. Obtener el valor de  $k_g/k_o$  (ver capítulo 3),

$$\frac{k_g}{k_o} = 1.07932 \times 10^{-5}$$

5. Encontrar el valor de GOR,

$$GOR_i = 116.40 + [(1.07932 \times 10^{-5})(68.8)(206.66)] = 116.553$$

6. Sustituir  $GOR_i$  en la ec.(2.11),

$$\frac{\Delta Gp}{N} = 0.00754 \left( \frac{120 + 116.553}{2} \right) = 0.89181$$

7. Calcular la producción acumulada de gas a la presión de interés,

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{Gp}{N} \right) = 0 + 0.89181$$

8. Calcular  $Rp$ ,

$$R_p = \frac{Gp}{Np} = \frac{\frac{Gp}{N}}{\frac{Np}{N}} = \frac{0.89181}{0.0075400} = 118.2767$$

9. Comprobar si el cálculo es correcto para el primer intervalo de interés (=1),

$$\left[ \frac{0.00754[68.8 + 0.0069(118.2767 - 120)]}{1.4508 - 1.44} \right] = 1.00089$$

Como se observa, el resultado se aproxima a 1, con un error del 0.0899%. Por lo tanto, se puede continuar iterando o detener la iteración según convenga o según la tolerancia definida.

En la tabla 2.5 se muestra el método de Schilthuis, la principal suposición del método y de los balances de materia estudiados, es que el yacimiento es volumétrico; es decir, que no hay entrada de masa en este (agua o gas). Para fines prácticos este método se basa principalmente en suponer un valor de la diferencia de producción para cada periodo de cambio de presión.

Se considera que el yacimiento es cerrado; es decir  $N = 1$ , por lo que, al multiplicar la producción de forma fraccional por la reserva de aceite, obtenemos el valor real de la producción en unidades de volúmenes.  $\Delta Np/N$  indica la cantidad de aceite producido en referencia a las reservas. La suma de la producción desde un punto inicial a un periodo de producción es la producción acumulada ( $Np$ ).

En la columna 7 de la tabla 2.5, se observa la variación de  $\Delta Np/N$ ; esta columna es la que tendrá que modificarse de forma iterativa hasta cumplir con la tolerancia establecida, como se demuestra en la columna 18. Con respecto a las otras columnas, son datos y operaciones aritméticas que dependen de los datos PVT, tal como en el método Tarner, con excepción de las columnas 10, 11 y 12, las cuales son los resultados de saturación de aceite, saturación de líquido y la relación de permeabilidades. La diferencia más importante del método, es el planteamiento o el uso de  $\Delta Np/N$  en la solución, ya que Tarner utiliza  $\Delta Np$ . Para ambos casos se consideró  $N = 1$ , lo que resulta en una igualdad; además que se utilizan 4 columnas menos en los cálculos.

Tabla 2.5a Método de Schilthuis

1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma(7)$	$(Swi + Soi * (-8) * (2)/Bot)$
$P (Kg/cm^2)$	$Bo$	$Rs$	$Bg$	$\mu o/\mu g$	$Bo/Bg$	$\Delta Np/N$	$Np/N$	<b>SL</b>
200	1.44	120	0.0065	65.5	214.9700			
195	1.436	118.25	0.00668	67.1	207.3913	0.00533	0.00533	0.99352
190	1.431	116.4	0.0069	68.8	198.0555	0.00563	0.01097	0.98627
185	1.426	114.48	0.0072	70.5	189.4666	0.00682	0.01779	0.97812
180	1.421	112.5	0.0075	72.2	181.5384	0.00787	0.02566	0.96917
175	1.416	110.48	0.0078	73.9	174.0740	0.00877	0.03444	0.95956
170	1.41	108.45	0.0081	75.7	166.5480	0.00877	0.04321	0.94948
165	1.404	106.41	0.00843	77.5	158.8636	0.00953	0.05275	0.93885
160	1.398	104.35	0.0088	79.3	151.4145	0.01027	0.06302	0.92771
155	1.3915	102.21	0.00919	81.2	144.2708	0.01057	0.07359	0.91615
150	1.385	100.05	0.0096	83.1	137.4376	0.01048	0.08408	0.90473
145	1.3785	97.85	0.01003	85.1	130.6666	0.01014	0.09423	0.89366
140	1.372	95.7	0.0105	87.2	123.7987	0.00938	0.10361	0.88323
135	1.3655	93.47	0.01103	89.4	117.1551	0.00908	0.11270	0.87310
130	1.359	91.2	0.0116	91.7	110.0081	0.00838	0.12108	0.86358
125	1.352	88.91	0.01229	94.1	103.4615	0.00791	0.12899	0.85421
120	1.345	86.6	0.013	96.7	97.4508	0.00703	0.13602	0.84557
115	1.338	84.26	0.01373	99.4	91.7931	0.00628	0.14231	0.83754
110	1.331	81.9	0.0145	102.3	86.5359	0.00567	0.14798	0.83000
105	1.324	79.52	0.0153	105.4	81.2962	0.00511	0.15310	0.82294
100	1.317	77.1	0.0162	108.6	76.4740	0.00480	0.157904	0.81612
95	1.31	74.1	0.01713	112.0	71.9337	0.00504	0.162951	0.80918
90	1.302	72.2	0.0181	115.6	67.3257	0.00321	0.166167	0.80310
85	1.294	69.7	0.01922	119.4	63.0392	0.00370	0.169874	0.79674
80	1.286	67.1	0.0204	123.3	59.0846	0.003476	0.173351	0.790563
75	1.278	64.46	0.02163	127.4	55.41484	0.003203	0.176554	0.784607
70	1.269	61.6	0.0229	131.8	51.7453	0.003049	0.179604	0.778373
65	1.26	59.05	0.02435	136.4	48.07692	0.002630	0.182235	0.772429
60	1.25	56.1	0.026	141.2	44.52423	0.002728	0.184964	0.765991
55	1.24	53	0.02785	146.2	40.96666	0.002645	0.187609	0.759641
50	1.229	49.7	0.03	151.6	37.41935	0.002595	0.190204	0.752905
45	1.218	46.2	0.03255	157.3	33.68715	0.002576	0.192781	0.746213
40	1.206	42.4	0.0358	163.5	214.9700	0.002645	0.195426	0.739059

Tabla 2.5b Método de Schilthuis

9 - Swi	10/(1 - Swi)	Torcaso	3 + (5 * 12 * 6)	7 * ((3 + 13)/2.0)	Σ(14)	15/8	2 + (4 * (Rsi - 3))	
10	11	12	13	14	15	16	17	18
So	S*	Kro/Krg	Ri	ΔGP/N	Gp/N	RP	Bt	Validación
0.8							1.4400	
0.7935	0.99190	1.09203E-06	118.266	0.63537	0.63537	119.132876	1.4477	0
0.7863	0.98285	1.0724E-05	116.553	0.66198	1.29734448	118.2471768	1.4558	0
0.7781	0.97265	4.50774E-05	115.109	0.79073	2.08807479	117.3205157	1.4657	0
0.7692	0.96147	0.000131242	114.295	0.90289	2.990962578	116.5176612	1.4773	0
0.7596	0.94946	0.000309636	114.634	1.00449	3.995455447	115.9946177	1.4903	0
0.7495	0.93685	0.000633147	116.793	1.01486	5.010312531	115.9375892	1.5036	0
0.7389	0.92357	0.001180508	121.647	1.13686	6.147172119	116.5310015	1.5186	0
0.7277	0.90964	0.00205743	130.269	1.29428	7.441450575	118.0679653	1.5357	0
0.7162	0.89520	0.003396788	143.973	1.44967	8.891116805	120.8048683	1.5550	0
0.7047	0.88093	0.005272569	163.262	1.61128	10.50239676	124.8978508	1.5765	0
0.6937	0.86708	0.007757141	188.577	1.78538	12.28778013	130.3926657	1.6007	0
0.6832	0.85405	0.010833944	219.143	1.91280	14.20057667	137.0452439	1.6272	0
0.6731	0.84139	0.014660235	255.724	2.15695	16.35752294	145.1369646	1.6581	0
0.6636	0.82947	0.019163747	297.079	2.31690	18.67442236	154.2239147	1.6931	0
0.6542	0.81778	0.024593969	343.501	2.53369	21.20811002	164.4077338	1.7341	0
0.6456	0.80697	0.030646198	393.207	2.59053	23.79863692	174.9517139	1.7792	0
0.6375	0.79693	0.037303647	445.606	2.63515	26.43378747	185.7442838	1.8287	0
0.6300	0.78752	0.044582544	500.549	2.68491	29.11869607	196.763637	1.8835	0
0.6229	0.77868	0.052449984	557.910	2.70546	31.82415717	207.8648026	1.9433	0
0.6161	0.77017	0.061082079	616.380	2.82064	34.64479437	219.4038064	2.0120	0
0.6092	0.76148	0.071089933	682.992	3.27933	37.92412367	232.7321341	2.0963	0
0.6031	0.75392	0.080893186	744.870	2.29582	40.21994075	242.0444863	2.1672	0
0.5967	0.74596	0.092443921	812.828	2.88714	43.10707868	253.7584071	2.2608	0
0.5906	0.73824	0.104955802	882.894	2.94784	46.05492258	265.6739588	2.3652	0
0.5846	0.73081	0.118365361	955.441	2.94453	48.99945386	277.5311912	2.4793	0
0.5784	0.72297	0.134076715	1040.853	3.04418	52.04363296	289.7678268	2.6064	0
0.5724	0.71554	0.150626703	1122.184	2.84533	54.88896369	301.1980402	2.7441	0
0.5660	0.70750	0.170552121	1213.887	3.18733	58.07629013	313.9865613	2.9114	0
0.5596	0.69956	0.192450823	1305.748	3.33251	61.40880504	327.3224859	3.1060	0
0.5529	0.69114	0.218381452	1405.968	3.51898	64.92778932	341.3571086	3.3380	0
0.5462	0.68277	0.247191001	1501.182	3.74468	68.67246565	356.2199675	3.6202	0
0.5391	0.67383	0.281733866	1594.148	4.09394	72.76640707	372.3470439	3.9841	0

## Método de Tarner

El método de Tarner<sup>3, 5,7,58,59,60,61</sup> (1945), puede resolverse mediante un enfoque de ensayo y error y se fundamentan en la ecuación general de balance de materia de Schilthuis, la cual está descrita en la ec.(2.6)

$$N = \left[ \frac{N_p [B_o + B_g (R_p - R_{so})]}{B_o - B_{oi} + B_g (R_{si} - R_s)} \right],$$

La ec.(2.15) donde se muestra  $N_b$ , representa el volumen de las reservas para una  $p_b$ , y se puede escribir de la siguiente forma,

$$N_b = \left[ \frac{N_p [B_t + B_g (R_p - R_{si})]}{B_t - B_{ti}} \right], \quad (2.15)$$

Por lo tanto  $G_p$  que representa la producción de gas acumulada se puede escribir como,

$$G_p = \left[ \frac{Nb[(B_t - B_{ti}) - N_p(B_t - R_{si}B_g)]}{B_g} \right], \quad (2.16)$$

Que a su vez se puede definir,

$$R_p \times N_p = G_p, \quad (2.17)$$

Sustituyendo el término de la derecha de la ec. (2.16) en al ec. (2.17), tenemos,

$$R_p * N_p = \left[ \frac{Nb[(B_t - B_{ti}) - N_p(B_t - R_{si}B_g)]}{B_g} \right], \quad (2.18)$$

La Saturación de aceite promedio de acuerdo a Turner para un yacimiento que produce bajo el efecto del empuje de gas en solución se puede escribir como sigue,

$$S_o = \left[ \frac{\left(1 - \frac{N_p}{N}\right) B_o (1 - S_w)}{B_{oi}} \right], \quad (2.19)$$

Si se supone que  $Nb = 1 \text{ m}^3$ , entonces  $N_p$  representa la recuperación de aceite en términos fraccionales. Tomando en cuenta estas consideraciones, las ecuaciones (2.16) y (2.19) se pueden escribir respectivamente, como:

$$G_p = \left[ \frac{[(B_t - B_{ti}) - N_p(B_t - R_{si}B_g)]}{B_g} \right], \quad (2.20)$$

$$S_o = \left[ \frac{(1 - N_p) B_o (1 - S_w)}{B_{oi}} \right], \quad (2.21)$$

Procedimiento de cálculo:

1. Identificar los intervalos de interés y definir un  $\Delta p$  (Cambio de presión) en el yacimiento. Proponer un valor de  $\Delta N_p$  (incremento en la producción acumulada de aceite) correspondiente al periodo de explotación de interés.

2. Calcular el valor  $Np$ . Este valor representa la suma de la producción inicial y la producción acumulada hasta alcanzar una presión de interés, tal como se describe en la ec.(2.22)

$$Np = \sum_0^J \Delta Np, \quad (2.22)$$

3. Aplicar la ec.(2.18) para obtener el valor de  $G_p$  a la presión final del periodo considerado.

4. Calcular el valor de  $S_o$  utilizando la ec.(2.19) para la presión de interés durante el período considerado.

5. Determinar, utilizando el valor calculado de  $S_o$ , la relación de permeabilidades relativas (kg/ko) mediante la correlación de Torcaso y Willie.

Ejemplo del procedimiento para el cálculo de  $S_o$  promedio:

1. Definir  $\Delta P$ .

$$\Delta p = 10 \text{ kg/cm}^2$$

2. Calcular  $B_{ti}$ .

$$B_{ti} = 1.431 + 0.0069(120 - 116.4) = 1.45584$$

3. Se propone arbitrariamente un valor inicial de  $Np$ , comenzando con  $Np = 0.01$ . Es crucial considerar que este proceso implica ensaye y error, por lo que el número de iteraciones variará según el nivel de precisión requerido.

$$Np = \sum_0^J \Delta Np = 0.010970526 \quad (2.22)$$

En el caso del primer intervalo, la suma de  $Np$  es igual al valor propuesto de  $Np$ . Sin embargo, para los intervalos subsecuentes, se deben sumar los valores correspondientes de  $Np$ .

6. Calcular  $G_p$  con el valor propuesto de  $Np$ .

$$G_p = \left[ \frac{(1.44 - 1.45584) - 0.010970526(1.45584 - (120 \times 0.0069))}{0.0069} \right] = 1.2974$$

7. Calcular  $S_o$  con la ec.(2.19).



$$S_o = \left[ \frac{(1 - 0.010970526)1.431(1 - 0.2)}{1.44} \right] = 0.7863$$

8. Calcular (Solo si se aplican correlaciones para la obtención de kg/ko) y sustituir el valor de la relación de permeabilidades relativas kg/ko.

$$\frac{kr_g}{kr_o} = 1.0722 \times 10^{-5}$$

9. Con la ec.(2.6) calcular  $GOR$ .

$$GOR = 116.4 + [(1.07222 * 10^{-5})(68.8)(207.3913)] = 116.553$$

10. Con la  $GOR$  obtenida para el intervalo de interés estimar una  $GOR$  promedio.

$$GOR_{promedio} = \frac{116.553 + 120}{2} = 118.2764$$

Para el cálculo anterior, al tratarse del intervalo inicial, se considera la igualdad  $R_{si} = GOR$ .

12. Calcular el valor de  $\Delta Np$ .

Para este ejemplo, dado que es el primer cambio de presión,  $\Delta Np = Np$ . Para los siguientes decrementos,  $\Delta Np$  se calcula de la siguiente manera,

$$\Delta Np = Np_{n+1} - Np_n$$

donde  $n+1$  representa la presión de interés y  $n$  la presión anterior. Por ejemplo, en el segundo cambio de presión de 195 a 190 Kg/cm<sup>2</sup>.

Presión en  $n+1 = 190$  Kg/cm<sup>2</sup>

Presión  $n = 195$  Kg/cm<sup>2</sup>

11. Con el valor de  $GOR$  calculado obtener  $\Delta Gp$ .

$$\Delta Gp = GOR * \Delta Np$$

12. Calcular  $Gp$ .

Para el primer decremento,  $\Delta Gp = Gp$ . Para los siguientes intervalos, se debe sumar el  $Gp$  previamente calculado al nuevo valor de  $Gp$  obtenido, como sigue,

$$Gp = \Delta Gp_{n+1} + Gpn$$

13. Restar el Gp obtenido en el paso 6 del Gp calculado en el paso 12. El resultado de esta resta debe aproximarse a cero, y se debe considerar una tolerancia. Si no se cumple con la tolerancia predefinida, se deberán repetir nuevamente todos los pasos descritos anteriormente. El número de veces que se debe repetir todo el procedimiento dependerá de esta tolerancia.

$$\text{Validación} = Gp(\text{paso 6}) - Gp(\text{paso 12}) = 0$$

En la tabla 2.6 se presenta el método de Tarner para el cálculo de la saturación promedio en yacimientos que producen por efecto del empuje de gas en solución. Es importante tener en cuenta que la precisión de la solución depende de la tolerancia establecida en la validación (columna 22) y que esto puede variar según el programa de cálculo utilizado o los criterios del analista. Este procedimiento se automatizó y se presenta en los Apéndices. Como parte del desarrollo, se usaron cambios de presión de 0.1 Kg/cm<sup>2</sup> y otros valores, por lo que es necesario automatizar el procedimiento.

Las soluciones de los métodos usados en esta tesis proporcionan resultados idénticos. En esta tesis se lograron optimizar las soluciones. Asimismo, se identificaron publicaciones como las de Higgins<sup>33,61,62</sup>, quienes exploraron alternativas para abordar el problema del empuje del gas en solución, buscando superar las limitaciones tecnológicas a las que se enfrentaban y proporcionando contribuciones muy útiles para sus tiempos. Sin embargo, también se encontraron publicaciones actuales<sup>63</sup> que profundizan en estas teorías clásicas.

Tabla 2.6a Aproximación por Turner

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$B_o$	$R_s$	$B_g$	$B_t$	$\Delta Np$ supuesto	$B_t - B_{ti}$	$R_{si} \times B_g$	5-8	6X9	$G_p$
200	1.440	120.00	0.00650	1.44000						
195	1.436	118.25	0.00668	1.44769	0.00533	0.0077	0.8016	0.6461	0.0034	0.6354
190	1.431	116.40	0.00690	1.45584	0.01097	0.0158	0.8280	0.6278	0.0069	1.2973
185	1.426	114.48	0.00720	1.46574	0.01780	0.0257	0.8640	0.6017	0.0107	2.0881
180	1.421	112.50	0.00750	1.47725	0.02567	0.0373	0.9000	0.5773	0.0148	2.9910
175	1.416	110.48	0.00780	1.49026	0.03445	0.0503	0.9360	0.5543	0.0191	3.9955
170	1.410	108.45	0.00810	1.50356	0.04322	0.0636	0.9720	0.5316	0.0230	5.0103
165	1.404	106.41	0.00843	1.51856	0.05275	0.0786	1.0116	0.5070	0.0267	6.1472
160	1.398	104.35	0.00880	1.53572	0.06303	0.0957	1.0560	0.4797	0.0302	7.4415
155	1.392	102.21	0.00919	1.55499	0.07360	0.1150	1.1028	0.4522	0.0333	8.8911
150	1.385	100.05	0.00960	1.57652	0.08409	0.1365	1.1520	0.4245	0.0357	10.5024
145	1.379	97.85	0.01003	1.60066	0.09424	0.1607	1.2036	0.3971	0.0374	12.2878
140	1.372	95.70	0.01050	1.62715	0.10362	0.1872	1.2600	0.3672	0.0380	14.2006
135	1.366	93.47	0.01103	1.65813	0.11270	0.2181	1.3236	0.3345	0.0377	16.3575
130	1.359	91.20	0.01160	1.69308	0.12109	0.2531	1.3920	0.3011	0.0365	18.6744
125	1.352	88.91	0.01229	1.73410	0.12900	0.2941	1.4748	0.2593	0.0334	21.2081
120	1.345	86.60	0.01300	1.77920	0.13603	0.3392	1.5600	0.2192	0.0298	23.7986
115	1.338	84.26	0.01373	1.82871	0.14231	0.3887	1.6476	0.1811	0.0258	26.4338
110	1.331	81.90	0.01450	1.88345	0.14799	0.4435	1.7400	0.1435	0.0212	29.1187
105	1.324	79.52	0.01530	1.94334	0.15310	0.5033	1.8360	0.1073	0.0164	31.8242
100	1.317	77.10	0.01620	2.01198	0.15790	0.5720	1.9440	0.0680	0.0107	34.6448
95	1.310	74.10	0.01713	2.09627	0.16295	0.6563	2.0556	0.0407	0.0066	37.9241
90	1.302	72.20	0.01810	2.16718	0.16617	0.7272	2.1720	-0.0048	-0.0008	40.2199
85	1.294	69.70	0.01922	2.26077	0.16987	0.8208	2.3064	-0.0456	-0.0078	43.1071
80	1.286	67.10	0.02040	2.36516	0.17335	0.9252	2.4480	-0.0828	-0.0144	46.0549
75	1.278	64.46	0.02163	2.47933	0.17655	1.0393	2.5956	-0.1163	-0.0205	48.9995
70	1.269	61.60	0.02290	2.60636	0.17960	1.1664	2.7480	-0.1416	-0.0254	52.0436
65	1.260	59.05	0.02435	2.74413	0.18224	1.3041	2.9220	-0.1779	-0.0324	54.8890
60	1.250	56.10	0.02600	2.91140	0.18496	1.4714	3.1200	-0.2086	-0.0386	58.0763
55	1.240	53.00	0.02785	3.10595	0.18761	1.6660	3.3420	-0.2361	-0.0443	61.4088
50	1.229	49.70	0.03000	3.33800	0.19020	1.8980	3.6000	-0.2620	-0.0498	64.9278
45	1.218	46.20	0.03255	3.62019	0.19278	2.1802	3.9060	-0.2858	-0.0551	68.6725
40	1.206	42.40	0.03580	3.98408	0.19543	2.5441	4.2960	-0.3119	-0.0610	72.7664

Tabla 2.6b Aproximación por Tarner

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$S_o$	kg/ko	$\mu\text{o}/\mu\text{g}$	Bo/Bg	15x14x13	GOR (16 + 3)	GOR promedio	$\Delta Np$ supuesto	$\Delta Gp$	Gp	Validación
0.8000	0	65.50								
0.7935	1.0934E-06	67.10	214.9701	0.0158	118.2658	119.1329	0.005333	0.63537	0.63537	0
0.7863	1.0725E-05	68.80	207.3913	0.1530	116.5530	117.4094	0.005638	0.66198	1.29734	0
0.7781	4.5077E-05	70.50	198.0556	0.6294	115.1094	115.8312	0.006826	0.79073	2.08807	0
0.7692	0.00013124	72.20	189.4667	1.7953	114.2953	114.7024	0.007871	0.90289	2.99096	0
0.7596	0.00030962	73.90	181.5385	4.1540	114.6340	114.4647	0.008775	1.00449	3.99546	0
0.7495	0.00063313	75.70	174.0741	8.3432	116.7932	115.7136	0.008770	1.01486	5.01031	0
0.7389	0.00118051	77.50	166.5480	15.2374	121.6474	119.2203	0.009535	1.13686	6.14717	0
0.7277	0.00205741	79.30	158.8636	25.9193	130.2693	125.9583	0.010275	1.29428	7.44145	0
0.7162	0.00339678	81.20	151.4146	41.7630	143.9730	137.1212	0.010572	1.44967	8.89112	0
0.7047	0.00527248	83.10	144.2708	63.2123	163.2623	153.6177	0.010488	1.61128	10.50240	0
0.6937	0.00775714	85.10	137.4377	90.7271	188.5771	175.9197	0.010148	1.78538	12.28778	0
0.6832	0.01083405	87.20	130.6667	123.4434	219.1434	203.8603	0.0093829	1.91280	14.20058	0
0.6731	0.01466023	89.40	123.7987	162.2537	255.7237	237.4336	0.0090844	2.15695	16.35752	0
0.6636	0.01916371	91.70	117.1552	205.8786	297.0786	276.4012	0.0083824	2.31690	18.67442	0
0.6542	0.02459394	94.10	110.0081	254.5910	343.5010	320.2898	0.0079106	2.53369	21.20811	0
0.6456	0.03064711	96.70	103.4615	306.6070	393.2070	368.3540	0.0070327	2.59053	23.79864	0
0.6375	0.03730366	99.40	97.4508	361.3460	445.6060	419.4065	0.0062830	2.63515	26.43379	0
0.6300	0.04458257	102.30	91.7931	418.6495	500.5495	473.0777	0.0056754	2.68491	29.11870	0
0.6229	0.05245009	105.40	86.5359	478.3905	557.9105	529.2300	0.0051121	2.70546	31.82416	0
0.6161	0.06108268	108.60	81.2963	539.2801	616.3801	587.1453	0.0048040	2.82064	34.64479	0
0.6092	0.07108998	112.00	76.4740	608.8917	682.9917	649.6859	0.0050476	3.27933	37.92412	0
0.6031	0.08089322	115.60	71.9337	672.6702	744.8702	713.9309	0.0032157	2.29582	40.21994	0
0.5968	0.09244394	119.40	67.3257	743.1279	812.8279	778.8491	0.0037069	2.88714	43.10708	0
0.5906	0.10495575	123.30	63.0392	815.7937	882.8937	847.8608	0.0034768	2.94784	46.05492	0
0.5846	0.11836519	127.40	59.0846	890.9809	955.4409	919.1673	0.0032035	2.94453	48.99945	0
0.5784	0.13407627	131.80	55.4148	979.2530	1040.8530	998.1469	0.0030498	3.04418	52.04363	0
0.5724	0.15062595	136.40	51.7454	1063.1338	1122.1838	1081.5184	0.0026309	2.84533	54.88896	0
0.5660	0.17055076	141.20	48.0769	1157.7865	1213.8865	1168.0351	0.0027288	3.18733	58.07629	0
0.5596	0.19245076	146.20	44.5242	1252.7477	1305.7477	1259.8171	0.0026452	3.33251	61.40881	0
0.5529	0.21838138	151.60	40.9667	1356.2682	1405.9682	1355.8580	0.0025954	3.51898	64.92779	0
0.5462	0.24719092	157.30	37.4194	1454.9822	1501.1822	1453.5752	0.0025762	3.74468	68.67247	0
0.5391	0.28173378	163.00	33.6872	1551.7475	1594.1475	1547.6648	0.0026452	4.09393	72.76640	0

## Método de Tracy

En 1955 Tracy<sup>4, 5,7,58,59,60,61</sup>, se basó en la EBM desarrollada por Schilthuis, y presentó el siguiente método para predecir el comportamiento de los yacimientos que producen por el efecto del empuje de gas en solución. Partiendo de la ec.(2.6),

$$N = \frac{Np(B_o - R_s B_g) + Gp B_g}{B_o - B_{oi} + B_g(R_{si} - R_s)},$$

en donde  $Np$  y  $Gp$  están multiplicados por factores que son funciones de presión. Estos factores se definen como  $\phi n$  y  $\phi g$ ,

$$\phi n_2 = \frac{B_o - R_s B_g}{B_o - B_{oi} + B_g(R_{si} - R_s)}, \quad (2.23)$$

$$\phi g_2 = \frac{B_g}{B_o - B_{oi} + B_g(R_{si} - R_s)}, \quad (2.24)$$

Sustituyendo las ecs.(2.23) y (2.24) en la ec.(2.6), se obtiene,

$$N = Np\phi n + Gp\phi g, \quad (2.25)$$

Haciendo uso de las siguientes consideraciones:

$$\Delta Np_2 = \Delta Np + Np_1, \quad (2.26)$$

$$\Delta Gp = \Delta Np * \overline{GOR}_c, \quad (2.27)$$

$$Gp_2 = Gp_1 + \Delta Gp, \quad (2.28)$$

De donde se llega a la siguiente expresión,

$$\Delta Np = \frac{1 - (Np\phi n_2 + Gp\phi g_2)}{(\overline{GOR})\phi g_2 + \phi n_2}, \quad (2.28)$$

Procedimiento de cálculo:

1. Suponer un valor para la Relación Gas-Aceite ( $GOR$ ) para el final del periodo de explotación considerado ( $GOR_2$ ).

2. Calcular la  $GOR$  promedio.

$$\overline{GOR} = \frac{GOR_1 + GOR_2}{2}, \quad (2.29)$$

3. Calcular haciendo uso de las ecs.(2.21) y (2.22), los valores de  $\phi n_2$  y  $\phi g_2$ .

4. Calcular por medio de la ec.(2.27) el valor de  $\Delta Np$  para el intervalo considerado.

5. Obtener mediante la ec.(2.25) el valor de  $Np_2$ .

6. Calcular con ayuda de la ec.(2.30) el valor de  $S_{o2}$ ."

$$S_{o2} = \frac{\left(1 - \frac{Np}{N}\right) B_o (1 - S_{wi})}{B_{oi}}, \quad (2.30)$$

7. Haciendo uso de la correlación de Torcaso y Willie, obtener el valor de la relación  $kg/k_o$ .

$$kg = \left(\frac{S_o}{1 - S_{wi}}\right)^4, \quad (2.31)$$

$$k_o = \left(\frac{1 - S_o}{1 - S_{wi}}\right)^2 \left(1 - \left[\frac{S_o}{1 - S_{wi}}\right]^2\right), \quad (2.32)$$

8. Calcular con ayuda de la ec.(2.7) el valor de  $GOR_2$ , utilizando los valores de las propiedades de los fluidos a una  $p_2$

$$GOR_2 = R_s + \left(\frac{kg}{k_o}\right) \left(\frac{\mu_o}{\mu_g}\right) \left(\frac{B_o}{B_g}\right), \quad (2.7)$$

9. El valor obtenido de  $GOR_2$  se compara con el supuesto en el paso 1. Si estos valores cumplen con el error establecido, se continúa con el proceso para el siguiente período. En caso contrario, se asume un nuevo valor de  $GOR$  y se repite el procedimiento hasta lograr la aproximación requerida.

10. Para comprobar los cálculos, obtener  $\overline{GOR}$  (calculada),  $\Delta Gp$  y  $Gp$  aplicando las ecs.(2.29), (2.33) y (2.24), respectivamente. Luego, determine el valor de  $N$  con ayuda de la ec.(2.29). Este valor debe ser aproximadamente igual a uno, y se debe establecer una tolerancia previamente.

$$\overline{GOR}_c = \frac{GOR_{c1} + GOR_{c2}}{2}, \quad (2.29)$$

$$Gp = \sum \Delta Gp, \quad (2.33)$$

$$N = Np\phi n + Gp\phi g, \quad (2.24)$$

A continuación, se ejemplifica el procedimiento de solución del método de Tracy para el primer periodo del caso (G). En la tabla 2.8 se presenta el método. Los datos que se utilizarán son los siguientes:

<b><i>p</i></b>	<b><i>Bo</i></b>	<b><i>Rs</i></b>	<b><i>Bg</i></b>	<b><math>\mu_o/\mu_g</math></b>
200	1.440	120	0.00650	65.5
195	1.436	118.25	0.00668	67.1

1. Se supone que, para el primer periodo, una Relación Gas-Aceite, GORs1, es igual a la Relación de Solubilidad inicial Rsi, con un valor de 120. También se supone que, para el segundo periodo de explotación, GORs2 es de 118.1712.

2. Calcular la  $\overline{GOR}$  para el periodo 1 y 2 de explotación.

$$\overline{GOR} = \frac{120 + 118.1712}{2} = 119.0856$$

3. Calcular  $\phi g_2$  y  $\phi n_2$ .

$$\phi n_2 = \frac{1.436 - (0.00668)(118.25)}{(1.436 - 1.440) + 0.00668(120 - 118.25)} = 79.9873$$

$$\phi g_2 = \frac{0.00668}{(1.436 - 1.440) + 0.00668(120 - 118.25)} = 0.86866$$

4. Calcular  $\Delta Np$  para el segundo intervalo de producción.

$$\Delta Np_1 = \frac{1 - [(0 \times 79.9873) + (0.8607 \times 0)]}{[(119.0856) \times 0.8607] + 79.9873} = 0.0054$$

5. Calcular  $Np_2$ .

$$Np_2 = 0.0054 + 0 = 0.0054$$

6. Calcular el valor de  $S_{o_2}$ .

$$S_{o_2} = \frac{(1 - 0.0054)(1.436)(1 - 0.2)}{1.440} = 0.7934$$

7. Haciendo uso de la correlación de Torcaso y Willie, obtener la relación de permeabilidades  $krg/kro$  para cada periodo de explotación.

$$Kro_1 = \left( \frac{0.8}{1 - 0.2} \right)^4 = 1$$

$$Krg_1 = \left( \frac{1 - 0.8}{1 - 0.2} \right)^2 \left( 1 - \left[ \frac{0.8}{1 - 0.2} \right]^2 \right) = 0$$

$$\frac{Krg_1}{Kro_1} = 0$$

$$Kro_2 = \left( \frac{0.7934}{1 - 0.2} \right)^4 = 0.9674$$

$$Krg_2 = \left( \frac{1 - 0.7934}{1 - 0.2} \right)^2 \left( 1 - \left[ \frac{0.7934}{1 - 0.2} \right]^2 \right) = 1.1553 * 10^{-6}$$

$$\frac{Krg_2}{Kro_2} = 1.1528 * 10^{-6}$$

8. Calcular la relación Gas-Aceite para cada periodo de explotación. A esta relación se le denominará como  $GOR_c$ , aplicando la ec.(2.6).

$$GOR_{c1} = 120 + (0)(65.5) \left( \frac{1.440}{0.00650} \right) = 120$$

$$GOR_{c2} = 118.25 + (1.1553 * 10^{-6})(67.1) \left( \frac{1.436}{0.00668} \right) = 118.26576$$

9. Calcular el promedio de las Relaciones Gas-Aceite calculadas para los periodos 1 y 2.

$$\overline{GOR}_c = \frac{120 + 118.2663}{2} = 119.1331$$

10. Realizar la comprobación mediante el cálculo de  $\Delta Gp$ ,  $Gp$  y  $N$ .

$$\Delta Gp = (119.1331)(0.0054) = 0.6528$$



$$Gp = 0 + 0.6528$$

$$N = (0.6528 \times 0.8607) + (0.0054 \times 9.9873) = 1.0002$$

11. Si el valor de N difiere de 1 o no se cumple la tolerancia, se debe proponer una nueva GOR para el periodo de explotación calculado.

En este apartado, es conveniente adaptar la validación de forma que el valor de N se ajuste a 0, debido a las características del programa de cálculo. Se observó que el error se reduce al buscar que la diferencia tienda a cero y no a uno.

$$N = ((0.6528 * 0.8607) + (0.0054 * 79.9873)) - 1 = 0.0002$$

En tabla 2.7 se presenta el método de Tracy. Al igual que los métodos de Schilthuis y de Tarner. El método de Tracy también es un método de ensaye y error, con la diferencia de que no varía la  $\Delta Np$  sino la GOR de forma iterativa. Otra diferencia importante entre el método de Tracy y los correspondientes de Schilthuis, Tarner y Pirson, es la necesidad de calcular  $\phi_n$  y  $\phi_g$ , lo cual se observa claramente en las columnas 9 y 10. Al igual que en las demás soluciones por balance de materia aquí analizadas, se considera al yacimiento cerrado; es decir,  $N=1$ . En las columnas 11 y 12 se encuentran los valores supuestos de  $GOR$  y  $\overline{GOR}$ ; estos valores se utilizan para realizar el cálculo del valor de  $\Delta Np$ . Estos resultados se encuentran en la columna 17, en donde se muestra la diferencia de producción y el valor calculado de  $GOR$  y  $\overline{GOR}$ . Con estos valores, se obtiene el valor de  $\Delta Gp$  y  $Gp$ . Si no se cumple la tolerancia, se debe proponer otro valor de GOR. Estos resultados se pueden observar en las columnas 28 a la 33.

Al determinar el comportamiento futuro de un yacimiento mediante la EBM, es común estimar el aumento de la producción de aceite para cada disminución de presión a través de ensaye y error. El método de Tracy destaca al determinar la GOR, logrando soluciones con pocas iteraciones y aunque presenta más columnas en la solución, esto se debe a la agrupación de la información y a la adición de la correlación de Torcaso y Willie para la relación de permeabilidades relativas. A pesar de tener más columnas en comparación a los métodos analizados, requiere menos cálculos por columna. Aunque la aproximación de Tracy puede considerarse menos atractiva debido a sus mayores columnas, demuestra resultados idénticos a los métodos anteriormente analizados.

Tabla 2.7a Aproximación por Tracy

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$B_o$	$R_s$	$B_g$	$B_g(R_{si} - R_s)$	$B_o - B_{oi}$	5 + 6	$R_s * B_g$	$\frac{\phi n}{(2 - B)}$
200	1.440	120.00	0.00650	0.00000	0.000	0.00000	0.78000	
195	1.436	118.25	0.00668	0.01169	-0.004	0.00769	0.78991	84.01691
190	1.431	116.40	0.00690	0.02484	-0.009	0.01584	0.80316	39.63636
185	1.426	114.48	0.00720	0.03974	-0.014	0.02574	0.82426	23.37415
180	1.421	112.50	0.00750	0.05625	-0.019	0.03725	0.84375	15.49664
175	1.416	110.48	0.00780	0.07426	-0.024	0.05026	0.86174	11.02865
170	1.410	108.45	0.00810	0.09356	-0.030	0.06355	0.87845	8.36370
165	1.404	106.41	0.00843	0.11456	-0.036	0.07856	0.89704	6.45290
160	1.398	104.35	0.00880	0.13772	-0.042	0.09572	0.91828	5.01170
155	1.392	102.21	0.00919	0.16349	-0.049	0.11499	0.93931	3.93243
150	1.385	100.05	0.00960	0.19152	-0.055	0.13652	0.96048	3.10958
145	1.379	97.85	0.01003	0.22186	-0.061	0.16036	0.98174	2.47415
140	1.372	95.70	0.01050	0.25515	-0.068	0.18715	1.00485	1.96180
135	1.366	93.47	0.01103	0.29263	-0.075	0.21813	1.03097	1.53364
130	1.359	91.20	0.01160	0.33408	-0.081	0.25308	1.05792	1.18966
125	1.352	88.91	0.01229	0.38210	-0.088	0.29410	1.09270	0.88167
120	1.345	86.60	0.01300	0.43420	-0.095	0.33920	1.12580	0.64623
115	1.338	84.26	0.01373	0.49071	-0.102	0.38871	1.15689	0.46593
110	1.331	81.90	0.01450	0.55245	-0.109	0.44345	1.18755	0.32349
105	1.324	79.52	0.01530	0.61934	-0.116	0.50334	1.21666	0.21326
100	1.317	77.10	0.01620	0.69498	-0.123	0.57198	1.24902	0.11885
95	1.310	74.10	0.01713	0.78627	-0.130	0.65627	1.26933	0.06197
90	1.302	72.20	0.01810	0.86518	-0.138	0.72718	1.30682	-0.00663
85	1.294	69.70	0.01922	0.96677	-0.146	0.82077	1.33963	-0.05560
80	1.286	67.10	0.02040	1.07916	-0.154	0.92516	1.36884	-0.08954
75	1.278	64.46	0.02163	1.20133	-0.162	1.03933	1.39427	-0.11187
70	1.269	61.60	0.02290	1.33736	-0.171	1.16636	1.41064	-0.12144
65	1.260	59.05	0.02435	1.48413	-0.180	1.30413	1.43787	-0.13639
60	1.250	56.10	0.02600	1.66140	-0.190	1.47140	1.45860	-0.14177
55	1.240	53.00	0.02785	1.86595	-0.200	1.66595	1.47605	-0.14169
50	1.229	49.70	0.03000	2.10900	-0.211	1.89800	1.49100	-0.13804
45	1.218	46.20	0.03255	2.40219	-0.222	2.18019	1.50381	-0.13109
40	1.206	42.40	0.03580	2.77808	-0.234	2.54408	1.51792	-0.12261

Tabla 2.7b Aproximación por Tracy

10	11	12	13	14	15	16	17
$\phi g$ 4/7	GOR (Supuesta)	GOR (Promedio)	$(12 * 10) + 9$	$Np_{i-1} * \phi n_i$ (9 * 17)	$Gp_{i-1} * \phi g_i$ (10 *)	14 + 15	$\frac{\Delta Np}{(1.0 - 16)/13}$
	120.00000		0.00000				
0.86866	118.17125	119.08562	187.46189	0.00000	0.00000	0.00000	0.00533
0.43561	115.91098	117.04111	90.62018	0.21144	0.27683	0.48827	0.00565
0.27968	115.76881	115.83989	55.77188	0.25668	0.36317	0.61985	0.00682
0.20134	112.64569	114.20725	38.49139	0.27580	0.42041	0.69622	0.00789
0.15521	116.25343	114.44956	28.79184	0.28332	0.46458	0.74790	0.00876
0.12745	115.15568	115.70456	23.11009	0.28809	0.50923	0.79732	0.00877
0.10730	123.09411	119.12490	19.23518	0.27887	0.53762	0.81649	0.00954
0.09193	128.57250	125.83331	16.58016	0.26440	0.56520	0.82960	0.01028
0.07992	145.49058	137.03154	14.88398	0.24788	0.59480	0.84267	0.01057
0.07032	159.95832	152.72445	13.84907	0.22888	0.62527	0.85415	0.01053
0.06255	191.06963	175.51398	13.45174	0.20816	0.65736	0.86553	0.01000
0.05610	215.58940	203.32952	13.36954	0.18467	0.68830	0.87297	0.00950
0.05057	258.68277	237.13609	13.52493	0.15894	0.71827	0.87721	0.00908
0.04584	293.67406	276.17842	13.84839	0.13409	0.74988	0.88397	0.00838
0.04179	345.40598	319.54002	14.23495	0.10676	0.78047	0.88723	0.00792
0.03833	391.13470	368.27034	14.76036	0.08337	0.81304	0.89641	0.00702
0.03532	447.16780	419.15125	15.27116	0.06338	0.84065	0.90403	0.00628
0.03270	497.86230	472.51505	15.77386	0.04604	0.86439	0.91043	0.00568
0.03040	552.66693	525.26461	16.17958	0.03156	0.88521	0.91677	0.00514
0.02832	620.91471	586.79082	16.73833	0.01820	0.90194	0.92014	0.00477
0.02610	672.69469	646.80470	16.94498	0.00979	0.90437	0.91416	0.00507
0.02489	756.91608	714.80538	17.78536	-0.00108	0.94434	0.94326	0.00319
0.02342	809.12224	783.01916	18.28048	-0.00924	0.94178	0.93254	0.00369
0.02205	889.09450	849.10837	18.63350	-0.01521	0.95017	0.93496	0.00349
0.02081	951.73096	920.41273	19.04328	-0.01939	0.95837	0.93898	0.00320
0.01963	1032.30694	992.01895	19.35560	-0.02144	0.96196	0.94052	0.00307
0.01867	1143.92570	1088.11632	20.18028	-0.02450	0.97209	0.94759	0.00260
0.01767	1200.38586	1172.15578	20.57051	-0.02583	0.96960	0.94376	0.00273
0.01672	1315.51068	1257.94827	20.88767	-0.02621	0.97067	0.94447	0.00266
0.01581	1381.08957	1348.30013	21.17334	-0.02590	0.97071	0.94481	0.00261
0.01493	1495.02846	1438.05902	21.33897	-0.02494	0.96967	0.94473	0.00259
0.01407	1548.40899	1521.71873	21.29084	-0.02364	0.96693	0.94329	0.00266

Tabla 2.7c Aproximación por Tracy

18	19	20	21	22	23	24	25
$Np = \sum \Delta Np$	$1 - Np$	$Bo/Boi$	$\frac{So}{0.8 * 19 * 20}$	$\frac{S}{21/0.8}$	$1 - 22^2$	$(1 - 22)^2$	$\frac{kg}{(23 * 24)}$
0.00000	1.00000	1.00000	0.80000	1.00000	0.00000	0.00000	0
0.00533	0.99467	0.99722	0.79352	0.99190	0.00007	0.01613	1.0576E-06
0.01098	0.98902	0.99375	0.78627	0.98284	0.00029	0.03403	1.0024E-05
0.01780	0.98220	0.99028	0.77812	0.97265	0.00075	0.05395	4.0343E-05
0.02569	0.97431	0.98681	0.76916	0.96145	0.00149	0.07561	0.00011233
0.03445	0.96555	0.98333	0.75957	0.94946	0.00255	0.09852	0.00025164
0.04322	0.95678	0.97917	0.74948	0.93685	0.00399	0.12231	0.00048774
0.05276	0.94724	0.97500	0.73885	0.92356	0.00584	0.14703	0.00085906
0.06303	0.93697	0.97083	0.72771	0.90964	0.00817	0.17256	0.00140899
0.07360	0.92640	0.96632	0.71616	0.89519	0.01098	0.19863	0.00218176
0.08414	0.91586	0.96181	0.70471	0.88088	0.01419	0.22404	0.0031789
0.09413	0.90587	0.95729	0.69374	0.86718	0.01764	0.24800	0.00437502
0.10363	0.89637	0.95278	0.68323	0.85404	0.02130	0.27062	0.00576552
0.11271	0.88729	0.94826	0.67311	0.84138	0.02516	0.29208	0.00734846
0.12109	0.87891	0.94375	0.66358	0.82947	0.02908	0.31198	0.0090725
0.12901	0.87099	0.93889	0.65421	0.81776	0.03321	0.33127	0.01100194
0.13603	0.86397	0.93403	0.64558	0.80697	0.03726	0.34880	0.0129963
0.14232	0.85768	0.92917	0.63755	0.79693	0.04124	0.36490	0.01504733
0.14799	0.85201	0.92431	0.63001	0.78751	0.04515	0.37982	0.01714919
0.15314	0.84686	0.91944	0.62291	0.77864	0.04900	0.39372	0.01929179
0.15791	0.84209	0.91458	0.61613	0.77016	0.05283	0.40685	0.02149205
0.16298	0.83702	0.90972	0.60917	0.76146	0.05690	0.42018	0.02390876
0.16617	0.83383	0.90417	0.60314	0.75392	0.06055	0.43160	0.02613446
0.16986	0.83014	0.89861	0.59678	0.74598	0.06453	0.44352	0.02861938
0.17335	0.82665	0.89306	0.59060	0.73825	0.06851	0.45499	0.0311734
0.17655	0.82345	0.88750	0.58465	0.73081	0.07246	0.46592	0.03376145
0.17962	0.82038	0.88125	0.57837	0.72296	0.07675	0.47733	0.03663687
0.18222	0.81778	0.87500	0.57245	0.71556	0.08091	0.48798	0.03948139
0.18495	0.81505	0.86806	0.56600	0.70750	0.08555	0.49944	0.04272865
0.18761	0.81239	0.86111	0.55964	0.69956	0.09027	0.51062	0.04609241
0.19022	0.80978	0.85347	0.55290	0.69112	0.09540	0.52235	0.04983382
0.19281	0.80719	0.84583	0.54620	0.68275	0.10065	0.53385	0.05373173
0.19547	0.80453	0.83750	0.53903	0.67379	0.10641	0.54601	0.05810163

Tabla 2.7d Aproximación por Tracy

26	27	28	29	30	31	32	33
$k_o$ (22 <sup>4</sup> )	$k_g/k_o$	<i>GOR</i> (Calculada)	<i>GOR</i> (Promedio)	$\Delta G_p$ (29 * 19)	$G_p = \sum \Delta G_p$	$N$ (9 * 18) + (31 * 10)	<i>E</i> (%)
1.00000	0	120.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.96800	1.0925E-06	118.26576	119.13288	0.63550	0.63550	1.00022	0.02190
0.93310	1.0743E-05	116.55329	117.40952	0.66301	1.29852	1.00091	0.09062
0.89502	4.5075E-05	115.10938	115.83134	0.78953	2.08805	0.99998	0.00163
0.85451	0.00013146	114.29825	114.70382	0.90527	2.99332	1.00079	0.07891
0.81266	0.00030965	114.63412	114.46619	1.00224	3.99556	1.00002	0.00226
0.77034	0.00063315	116.79331	115.71372	1.01482	5.01038	1.00001	0.00102
0.72755	0.00118075	121.65045	119.22188	1.13743	6.14781	1.00010	0.00993
0.68466	0.00205794	130.27575	125.96310	1.29460	7.44241	1.00012	0.01226
0.64220	0.00339733	143.97971	137.12773	1.44948	8.89188	1.00008	0.00813
0.60211	0.00527962	163.34691	153.66331	1.61829	10.51018	1.00070	0.06953
0.56550	0.00773648	188.36543	175.85617	1.75798	12.26816	1.00021	0.02140
0.53200	0.01083752	219.18416	203.77480	1.93615	14.20432	1.00024	0.02374
0.50116	0.01466299	255.75416	237.46916	2.15597	16.36029	1.00015	0.01529
0.47337	0.01916567	297.09923	276.42669	2.31609	18.67638	1.00010	0.00953
0.44720	0.02460177	343.58171	320.34047	2.53773	21.21411	1.00026	0.02650
0.42406	0.03064704	393.21535	368.39853	2.58540	23.79951	1.00003	0.00345
0.40335	0.03730572	445.62608	419.42072	2.63593	26.43544	1.00006	0.00598
0.38462	0.04458734	500.59447	473.11028	2.68657	29.12201	1.00011	0.01105
0.36758	0.05248322	558.21363	529.40405	2.72317	31.84518	1.00065	0.06472
0.35183	0.06108706	616.42407	587.31885	2.80211	34.64729	1.00007	0.00714
0.33619	0.07111626	683.21719	649.82063	3.29205	37.93935	1.00040	0.03988
0.32308	0.08089114	744.85315	714.03517	2.27814	40.21748	0.99994	0.00612
0.30967	0.09241867	812.62495	778.73905	2.87376	43.09124	0.99963	0.03699
0.29704	0.10494848	882.83675	847.73085	2.95885	46.05010	0.99989	0.01060
0.28525	0.11835878	955.39137	919.11406	2.94518	48.99527	0.99991	0.00866
0.27318	0.13411265	1041.11549	998.25343	3.06764	52.06291	1.00038	0.03762
0.26217	0.15059699	1121.97408	1081.54478	2.80888	54.87179	0.99968	0.03187
0.25056	0.17053056	1213.74017	1167.85712	3.19267	58.06446	0.99979	0.02077
0.23949	0.19246048	1305.81062	1259.77539	3.34923	61.41370	1.00008	0.00812
0.22815	0.21842279	1406.22491	1356.01776	3.53434	64.94803	1.00032	0.03179
0.21729	0.24727956	1501.70344	1453.96417	3.76588	68.71391	1.00062	0.06150
0.20611	0.28189477	1590.28577	1545.99461	4.11756	72.83147	1.00091	0.09098

## Método de Pirson

En 1949 Pirson<sup>5</sup> escribió la EBM en forma de Diferencias Finitas para aproximar el comportamiento de los yacimientos que producen por empuje de gas en solución. A partir del planteamiento de la ecuación de Schiluis, presentó la siguiente ecuación.

$$1 = \frac{Np[B_o + B_g(Rs_i - Rs)]}{B_g(Rs_i - Rs) - (B_{oi} - B_o)}, \quad (2.34)$$

Partiendo de la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión.

$$\Delta Np^{n+1} = \frac{(1 - Np) \left[ \Delta \left( \frac{B_o}{B_g} - Rs \right)^{n+1} \right] - B_{oi} \left[ \Delta \left( \frac{1}{B_g} \right)^{n+1} \right]}{\left( \frac{B_o}{B_g} - Rs \right)^{n+1} + \overline{GOR}}, \quad (2.35)$$

Procedimiento de cálculo:

1. Calcular las siguientes relaciones (en estas se realizan las operaciones correspondientes al periodo actual y el anterior).

$$\Delta \left( \frac{B_o}{B_g} - Rs \right)^{n+1} = \left( \frac{B_o}{B_g} - Rs \right)^{n+1} - \left( \frac{B_o}{B_g} - Rs \right)^n, \quad (2.36)$$

$$\Delta \left( \frac{1}{B_g} \right)^{n+1} = \frac{1}{B_g^{n+1}} - \frac{1}{B_g^n}, \quad (2.37)$$

2. Suponer un valor de  $\Delta Np$ .

3. Calcular la producción acumulada de aceite.

$$Np = \sum \Delta Np, \quad (2.38)$$

4. Dado que el yacimiento se trata como un tanque cerrado sin entrada de materia adicional, se asume que su volumen es equivalente a la unidad. A este valor se le resta la producción acumulada para determinar el valor de  $S_o$ .

$$S_o = (1 - S_w) \left[ (1 - Np) \left( \frac{B_o}{B_{oi}} \right) \right], \quad (2.39)$$

5. Calcular los valores de las permeabilidades relativas al aceite y al gas utilizando la correlación de Torcaso y Willie.

$$k_g = \left( \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right)^4 ; \quad (2.31)$$

$$k_o = \left( \frac{1 - S_o}{1 - S_{wi}} \right)^2 \left( 1 - \left[ \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right]^2 \right), \quad (2.32)$$

6. Calcular la relación gas-aceite ( $GOR$ ).

$$GOR = R_s + \frac{k_g \mu_o B_o}{k_o \mu_g B_g}, \quad (2.7)$$

7. Calcular la relación gas-aceite promedio para el periodo actual y el anterior.

$$\overline{GOR} = \frac{GOR_1 + GOR_2}{2}, \quad (2.29)$$

8. Con los valores obtenidos, calcular la diferencia de producción para el periodo de estudio. Una vez realizado el cálculo, comparar el valor obtenido con el propuesto y determinar la diferencia que existe entre estos valores. La diferencia debe cumplir con la tolerancia.

$$\Delta Np^{n+1} = \frac{(1 - Np) \left[ \Delta \left( \frac{B_o}{B_g} - R_s \right)^{n+1} \right] - B_{oi} \left[ \Delta \left( \frac{1}{B_g} \right)^{n+1} \right]}{\left( \frac{B_o}{B_g} - R_s \right)^{n+1} + \overline{GOR}}, \quad (2.40)$$

El proceso de solución mediante el método de Pirson se ejemplificará a continuación. Los datos que se utilizan son los siguientes:

<b>P</b>	<b>Bo</b>	<b>Rs</b>	<b>Bg</b>	<b>μo/μg</b>
200	1.440	120	0.00650	65.5
195	1.436	118.25	0.00668	67.1

1. Obtener los valores de las ecs. (2.36) y (2.37).

$$\Delta \left( \frac{B_o}{B_g} - R_s \right)^{n+1} = \left( \frac{1.436}{0.00668} - 118.25 \right) - \left( \frac{1.440}{0.00650} - 120 \right) = -8.6120$$

$$\Delta \left( \frac{1}{B_g} \right)^{n+1} = \frac{1}{0.00668} - \frac{1}{0.00650} = -6.7873$$

2. El valor de  $\Delta Np$  para el primer periodo es cero, es decir, cuando la presión es la inicial. Para el segundo periodo, cuando  $p = 195 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\Delta Np = 0.0057104$ .

3. Dado que solo se ha producido un cambio ( $\Delta Np$ ) en este periodo, el valor de la producción acumulada será igual.

$$\sum \Delta Np = 0.0057104$$

4. Calcular el valor de la saturación de aceite.

$$S_{oi-1} = (1 - 0.2) \left[ (1 - 0) \left( \frac{1.440}{1.440} \right) \right] = 0.8$$

$$S_{oi} = (1 - 0.2) \left[ (1 - 0.0057104) \left( \frac{1.436}{1.440} \right) \right] = 0.7932$$

5. Calcular el valor de las permeabilidades relativas al aceite y al gas para el valor de  $S_o$  obtenido. En el caso de  $S_o = 0.8$ , la permeabilidad relativa del aceite se considera igual a la unidad, mientras que la del gas se establece en cero, dado que para este periodo se supone que no hay presencia de gas todavía.

$$k_g = \left( \frac{0.7932}{1 - 0.2} \right)^4 = 1.211 \times 10^{-6}$$

$$k_o = \left( \frac{1 - 0.7932}{1 - 0.2} \right)^2 \left( 1 - \left[ \frac{0.7932}{1 - 0.2} \right]^2 \right) = 0.966539$$

6. Calcular la relación gas-aceite para ambos valores de saturación.

$$GOR_{i-1} = 120 + \frac{1.440}{0.00650} \times 65.5 \times \frac{0}{1} = 120$$

$$GOR_i = 118.5 + \frac{1.436}{0.00668} \times 67.1 \times \frac{1.211 \times 10^{-6}}{0.966539} = 118.2677$$

7. Calcular la relación gas-aceite promedio.

$$\overline{GOR} = \frac{120 + 118.2677}{2} = 119.1338$$

8. Aplicar la ec.(2.35) para calcular  $\Delta Np^{n+1}$ .



$$\Delta Np^{n+1} = \frac{(1 - 0.0057104)[-8.6120] - 1.440[-6.6873]}{\left(\frac{1.436}{0.00668} - 118.25\right) + 119.1338} = 0.0057104$$

9. Verificar que el valor calculado y el supuesto cumplan con la tolerancia.

En la tabla 2.8, se muestra el método de recurrencia para la aproximación con diferencias finitas de Pirson, al expresar la ecuación de balance de materia en diferencias finitas, emplea un método de ensaye y error. En este proceso, se supone y calcula el valor del incremento de producción  $\Delta Np$  en un intervalo de presión determinado, iterando hasta que el valor supuesto y calculado converjan o cumplan con la tolerancia. A diferencia de otros métodos, Pirson no solo supone un valor de  $\Delta Np$ , sino que también lo calcula durante el proceso de iteración. Este enfoque hace que el método sea relativamente corto, requiriendo pocas iteraciones para lograr convergencia.

Los métodos utilizados para calcular el efecto de empuje por gas en solución se basan en ecuaciones diferenciales, lo que implica determinar incrementos de producción. Sin embargo, presentan la desventaja de acumular errores y requerir ajustes iterativos en los EBM. Además, los métodos diferenciales asumen la continuidad lineal de las propiedades de los fluidos en un intervalo seleccionado, lo que exige intervalos de presión pequeños al emplear la ecuación de Muskat, como ya se verificó.

Los métodos de balance de materia, identificados como el grupo 2, ofrecen una aplicación más sencilla en comparación con las aproximaciones derivadas de la ecuación de Muskat (grupo 1).

Tabla 2.8a Aproximación con diferencias finitas por Pirson

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$B_o$	$R_s$	$B_g$	$\mu_o/\mu_g$	$1/B_g$	$\left(\frac{B_o}{B_g}\right) - R_s$	$\Delta\left(\frac{B_o}{B_g}\right) - R_s$	$\Delta(1/B_g)$	$(2/4) * 5$
200	1.440	120.00	0.00650	65.50	153.8462	101.5385	0.0000	0.00000	14510.7692
195	1.436	118.25	0.00668	67.10	147.0588	92.9265	-8.6120	-6.78733	14169.9412
190	1.431	116.40	0.00690	68.80	144.9275	90.9913	-1.9352	-2.13129	14268.5217
185	1.426	114.48	0.00720	70.50	138.8889	83.5756	-7.4157	-6.03865	13962.9167
180	1.421	112.50	0.00750	72.20	133.3333	76.9667	-6.6089	-5.55556	13679.4933
175	1.416	110.48	0.00780	73.90	128.2051	71.0585	-5.9082	-5.12821	13415.6923
170	1.410	108.45	0.00810	75.70	123.4568	65.6241	-5.4344	-4.74834	13177.4074
165	1.404	106.41	0.00843	77.50	118.6240	60.1380	-5.4860	-4.83283	12907.4733
160	1.398	104.35	0.00880	79.30	113.6364	54.5136	-5.6244	-4.98760	12597.8864
155	1.392	102.21	0.00919	81.20	108.8139	49.2046	-5.3091	-4.82244	12294.8640
150	1.385	100.05	0.00960	83.10	104.1667	44.2208	-4.9837	-4.64726	11988.9063
145	1.379	97.85	0.01003	85.10	99.7009	39.5577	-4.6631	-4.46577	11695.9472
140	1.372	95.70	0.01050	87.20	95.2381	34.9667	-4.5910	-4.46280	11394.1333
135	1.366	93.47	0.01103	89.40	90.6618	30.3287	-4.6379	-4.57626	11067.6065
130	1.359	91.20	0.01160	91.70	86.2069	25.9552	-4.3736	-4.45493	10743.1293
125	1.352	88.91	0.01229	94.10	81.3670	21.0981	-4.8570	-4.83993	10351.7657
120	1.345	86.60	0.01300	96.70	76.9231	16.8615	-4.2366	-4.44389	10004.7308
115	1.338	84.26	0.01373	99.40	72.8332	13.1908	-3.6707	-4.08986	9686.6133
110	1.331	81.90	0.01450	102.30	68.9655	9.8931	-3.2977	-3.86769	9390.4345
105	1.324	79.52	0.01530	105.40	65.3595	7.0159	-2.8772	-3.60604	9120.8889
100	1.317	77.10	0.01620	108.60	61.7284	4.1963	-2.8197	-3.63108	8828.7778
95	1.310	74.10	0.01713	112.00	58.3771	2.3740	-1.8223	-3.35128	8565.0905
90	1.302	72.20	0.01810	115.60	55.2486	-0.2663	-2.6403	-3.12850	8315.5359
85	1.294	69.70	0.01922	119.40	52.0291	-2.3743	-2.1080	-3.21948	8038.6889
80	1.286	67.10	0.02040	123.30	49.0196	-4.0608	-1.6865	-3.00953	7772.7353
75	1.278	64.46	0.02163	127.40	46.2321	-5.3754	-1.3146	-2.78752	7527.3786
70	1.269	61.60	0.02290	131.80	43.6681	-6.1852	-0.8098	-2.56396	7303.6769
65	1.260	59.05	0.02435	136.40	41.0678	-7.3046	-1.1195	-2.60036	7058.0698
60	1.250	56.10	0.02600	141.20	38.4615	-8.0231	-0.7185	-2.60622	6788.4615
55	1.240	53.00	0.02785	146.20	35.9066	-8.4758	-0.4527	-2.55490	6509.4434
50	1.229	49.70	0.03000	151.60	33.3333	-8.7333	-0.2576	-2.57331	6210.5467
45	1.218	46.20	0.03255	157.30	30.7220	-8.7806	-0.0473	-2.61137	5886.0645
40	1.206	42.40	0.03580	163.00	27.9330	-8.7128	0.0678	-2.78901	5491.0056

Tabla 2.8c Aproximación con diferencias finitas por Pirson Finitas

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Delta NP$ (Supuesta)	$Np = \sum \Delta NP$	$1 - Np$	$Bo/Boi$	$13 * 14$	$\frac{So}{(1 - Sw)/15}$	$\frac{S}{16/(1.0 - 16)}$	$\frac{kg}{(1 - 17^2)(1 - 17)^2}$	$\frac{ko}{17^4}$	$kg/ko$
0	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.8000	1.00000	0	1	0
0.00571	0.00571	0.99429	0.99722	0.99153	0.7932	0.99153	1.2111E-06	0.96653899	1.2531E-06
0.00555	0.01126	0.98874	0.99375	0.98256	0.7861	0.98256	1.0508E-05	0.93206143	1.1274E-05
0.00710	0.01836	0.98164	0.99028	0.97210	0.7777	0.97210	4.2828E-05	0.89298507	4.7961E-05
0.00817	0.02652	0.97348	0.98681	0.96063	0.7685	0.96063	0.00011964	0.85158055	0.00014049
0.00908	0.03561	0.96439	0.98333	0.94832	0.7587	0.94832	0.00026892	0.80876156	0.0003325
0.00905	0.04466	0.95534	0.97917	0.93544	0.7483	0.93544	0.00052086	0.7657004	0.00068024
0.00983	0.05449	0.94551	0.97500	0.92187	0.7375	0.92187	0.00091658	0.72223627	0.00126909
0.01057	0.06506	0.93494	0.97083	0.90767	0.7261	0.90767	0.0015015	0.67875455	0.00221214
0.01079	0.07585	0.92415	0.96632	0.89302	0.7144	0.89302	0.00231769	0.63598369	0.00364426
0.01062	0.08647	0.91353	0.96181	0.87864	0.7029	0.87864	0.00335797	0.59599506	0.00563422
0.01006	0.09653	0.90347	0.95729	0.86488	0.6919	0.86488	0.00460031	0.55953623	0.00822165
0.00947	0.10601	0.89399	0.95278	0.85178	0.6814	0.85178	0.00603018	0.52638668	0.0114558
0.00902	0.11503	0.88497	0.94826	0.83919	0.6714	0.83919	0.00764855	0.4959498	0.01542202
0.00829	0.12331	0.87669	0.94375	0.82737	0.6619	0.82737	0.00940075	0.46860051	0.02006133
0.00782	0.13113	0.86887	0.93889	0.81577	0.6526	0.81577	0.01135408	0.44286138	0.02563800
0.00693	0.13806	0.86194	0.93403	0.80507	0.6441	0.80507	0.01336938	0.42008857	0.03182515
0.00618	0.14424	0.85576	0.92917	0.79514	0.6361	0.79514	0.0154332	0.39974162	0.03860793
0.00558	0.14982	0.85018	0.92431	0.78583	0.6287	0.78583	0.01754398	0.38133782	0.04600639
0.00502	0.15484	0.84516	0.91944	0.77708	0.6217	0.77708	0.01968611	0.36463688	0.05398826
0.00472	0.15956	0.84044	0.91458	0.76865	0.6149	0.76865	0.02189944	0.34907749	0.06273517
0.00495	0.16451	0.83549	0.90972	0.76006	0.6080	0.76006	0.02431238	0.33372984	0.07285047
0.00315	0.16766	0.83234	0.90417	0.75257	0.6021	0.75257	0.02654654	0.32077382	0.0827578
0.00365	0.17131	0.82869	0.89861	0.74467	0.5957	0.74467	0.02904031	0.30751331	0.09443593
0.00342	0.17473	0.82527	0.89306	0.73701	0.5896	0.73701	0.03159341	0.29505657	0.10707578
0.00315	0.17788	0.82212	0.88750	0.72963	0.5837	0.72963	0.0341836	0.28341081	0.12061502
0.00300	0.18088	0.81912	0.88125	0.72185	0.5775	0.72185	0.03705407	0.27151011	0.13647399
0.00259	0.18347	0.81653	0.87500	0.71446	0.5716	0.71446	0.03991358	0.26056489	0.15318098
0.00269	0.18616	0.81384	0.86806	0.70646	0.5652	0.70646	0.04316273	0.24908287	0.17328664
0.00261	0.18877	0.81123	0.86111	0.69856	0.5588	0.69856	0.04652453	0.23813092	0.19537376
0.00256	0.19133	0.80867	0.85347	0.69018	0.5521	0.69018	0.05026495	0.22690652	0.22152272
0.00254	0.19387	0.80613	0.84583	0.68185	0.5455	0.68185	0.05415969	0.21615234	0.25056258
0.00262	0.19649	0.80352	0.83750	0.67294	0.5384	0.67294	0.05852595	0.20507618	0.28538638

Tabla 2.8c Aproximación con diferencias finitas por Pirson Finita

21	22	23	24	25	26	27	28	29
20 * 10	GOR 20 + 3	GOR (Promedio)	23 + 7	13 * 8	Boi * 9	25 - 26	$\Delta Np$ (calculada) 27/24	E (ABS)
0.00000	120.00000	0.00000	101.53846	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-
0.01776	118.26776	119.13388	212.06035	-8.56281	-9.77376	1.21094	0.00571	3.20434E-08
0.16086	116.56086	117.41431	208.40561	-1.91338	-3.06905	1.15567	0.00555	1.21354E-08
0.66967	115.14967	115.85527	199.43082	-7.27963	-8.69565	1.41603	0.00710	4.10924E-08
1.92183	114.42183	114.78575	191.75242	-6.43359	-8.00000	1.56641	0.00817	2.55382E-08
4.46076	114.94076	114.68129	185.73976	-5.69784	-7.38462	1.68678	0.00908	1.37947E-08
8.96383	117.41383	116.17729	181.80137	-5.19169	-6.83761	1.64592	0.00905	1.66438E-08
16.38078	122.79078	120.10230	180.24035	-5.18709	-6.95927	1.77219	0.00983	4.84176E-08
27.86831	132.21831	127.50455	182.01818	-5.25848	-7.18214	1.92366	0.01057	1.58964E-08
44.80569	147.01569	139.61700	188.82158	-4.90634	-6.94431	2.03796	0.01079	3.9717E-08
67.54818	167.59818	157.30693	201.52777	-4.55281	-6.69206	2.13925	0.01062	4.96574E-08
96.16001	194.04001	180.81910	220.37678	-4.21300	-6.43071	2.21770	0.01006	3.93822E-08
130.52888	226.22888	210.13445	245.10111	-4.10434	-6.42643	2.32209	0.00947	1.00002E-08
170.68485	264.15485	245.19187	275.52060	-4.10445	-6.58982	2.48537	0.00902	3.24904E-08
215.52147	306.72147	285.43816	311.39333	-3.83423	-6.41511	2.58087	0.00829	4.09787E-08
265.39852	354.30852	330.51500	351.61313	-4.22011	-6.96950	2.74939	0.00782	4.27051E-08
318.40206	405.00206	379.65529	396.51683	-3.65168	-6.39920	2.74752	0.00693	3.57551E-08
373.98012	458.24012	431.62109	444.81192	-3.14123	-5.88941	2.74817	0.00618	2.11902E-08
432.01998	513.91998	486.08005	495.97315	-2.80367	-5.56948	2.76581	0.00558	2.39825E-08
492.42095	571.94095	542.93046	549.94641	-2.43166	-5.19270	2.76104	0.00502	4.39101E-08
553.87492	630.97492	601.45793	605.65423	-2.36975	-5.22876	2.85901	0.00472	2.8092E-08
623.97091	698.07091	664.52291	666.89693	-1.52249	-4.82584	3.30335	0.00495	7.93471E-08
688.17548	760.37548	729.22320	728.95690	-2.19765	-4.50504	2.30739	0.00317	1.87305E-05
759.14107	828.84107	794.60828	792.23398	-1.74689	-4.63605	2.88917	0.00365	3.74642E-08
832.27167	899.37167	864.10637	860.04558	-1.39181	-4.33372	2.94191	0.00342	4.23971E-08
907.91492	972.37492	935.87330	930.49790	-1.08077	-4.01403	2.93326	0.00315	4.09143E-08
996.76193	1058.36193	1015.36843	1009.18327	-0.66329	-3.69211	3.02882	0.00300	4.32992E-08
1081.16202	1140.21202	1099.28698	1091.98236	-0.91408	-3.74452	2.83044	0.00259	2.26674E-08
1176.34971	1232.44971	1186.33087	1178.30779	-0.58471	-3.75296	3.16825	0.00269	1.6578E-08
1271.77446	1324.77446	1278.61209	1270.13632	-0.36723	-3.67905	3.31182	0.00261	5.02154E-08
1375.77717	1425.47717	1375.12581	1366.39248	-0.20829	-3.70557	3.49728	0.00256	4.32037E-09
1474.82750	1521.02750	1473.25233	1464.47169	-0.03814	-3.76037	3.72223	0.00254	1.2645E-08
1567.05822	1609.45822	1565.24286	1556.53001	0.05448	-4.01617	4.07064	0.00262	3.51263E-09

A continuación, se presentan los resultados obtenidos al evaluar los métodos evaluados:

Grupo 1:

- Método de Craft y Hawkins
- Método de Garaicochea y Bashbush
- Método de Runge-Kutta de cuarto orden
- Método Propuesto

Grupo 2:

- Método de Schilthuis
- Método de Tarner
- Método de Tracy
- Método de Pirson

Para los casos C, G y P, se utilizaron los datos PVT obtenidos de los libros de Garaicochea y Bashbush, Craft y Hawkins, y Pirson, respectivamente. Es importante recordar que tanto la aproximación por Runge-Kutta de cuarto orden, el método propuesto, Craft-Hawkins, y Garaicochea-Bashbush son aproximaciones de la ecuación de Muskat. El primer grupo muestra una mayor sensibilidad a diferentes elementos, como los cambios de presión y la relación de permeabilidades, entre otros, lo que puede causar desviaciones significativas en la aproximación. En contraste, el segundo grupo es más flexible y presenta menos variaciones en sus resultados.

Después del análisis realizado, se concluyó que el objetivo principal de los métodos de balance de materia, ante la falta de herramientas tecnológicas, fue reducir el número de cálculos y operaciones, tal como lo hizo Higgins, en donde compara la solución de Tarner y resuelve la ecuación diferencial de Muskat.

Hoy en día, elegir un método de balance de materia ya no presenta dificultades, ya que las limitaciones tecnológicas de hace 90 años han desaparecido. Cualquiera de los métodos estudiados puede ser utilizado con confianza. Los resultados serán consistentes para todos los métodos si se evalúan correctamente, como se demostrará a continuación.

## Proceso de Interpolación de Datos

Es fundamental realizar la interpolación de los datos PVT con el menor error posible, ya que esto determinará la precisión de la solución. Se evaluaron las siguientes alternativas:

**1. Polinomios particulares de cada propiedad mediante una hoja de cálculo.** Este enfoque mostró errores considerables, ya que los polinomios generados solo representaban los primeros cuatro valores de presión. Para obtener resultados precisos, sería necesario dividir la presión en intervalos más pequeños y generar polinomios para cada intervalo de presión.

**2. Interpolación de Lagrange.** Aunque la obtención de datos es sencilla, este método presenta limitaciones en el número de datos que se pueden interpolar. Para superar esta limitación, se recomienda dividir la información en intervalos más pequeños y realizar la interpolación en cada intervalo. A pesar de esto, la interpolación de Lagrange ofrece resultados con un error despreciable.

**3. Interpolación con Spline.** Este método ofrece flexibilidad en el procesamiento de los datos y no requiere dividir la información en intervalos. Sin embargo, el proceso puede ser un poco más complejo en comparación con otros métodos.

La elección del método dependerá de las necesidades del problema a resolver.

De la evaluación de la ecuación de Muskat obtenida mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con cambios de presión desde 0.1 a 1 Kg/cm<sup>2</sup>, se encontró que el usar 1 Kg/cm<sup>2</sup> genera resultados prácticamente iguales a la solución con 0.1 Kg/cm<sup>2</sup>. La diferencia entre estos cambios de presión repercute en diez veces menos la cantidad de información a interpolar y datos que operar, lo mismo ocurrió con la solución propuesta.

En las aproximaciones de Craft-Hawkins y Garaicochea-Bashbush se presentaron diferentes magnitudes en los cambios de presión para los casos C y P. Como la última presión se fijó a 40 Kg/cm<sup>2</sup>, para fines del cálculo en todos los casos, se tuvieron problemas al querer obtener el valor de saturación correspondientes a la última presión establecida, ya que Craft-Hawkins originalmente utilizan decrementos de presión de 15 Kg/cm<sup>2</sup> y Garaicochea-Bashbush de 10 Kg/cm<sup>2</sup> con solución en los puntos medios, por lo que en algunos casos al dividir la presión del yacimiento en intervalos con estas magnitudes no se llegaba a la presión de interés, si no a valores superiores o inferiores. En las tablas 2.11 a 2.13 se podrá ver los resultados solo hasta donde fue posible dividir la presión con estas magnitudes. A

continuación, se podrá observar que el uso de las aproximaciones de C-H y G-B trae consigo un error considerable, por lo cual, no se recomienda el uso de estas.

Después de evaluar la ecuación de Muskat mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, se encontró que utilizar cambios de presión desde 0.1 kg/cm<sup>2</sup> hasta 1 kg/cm<sup>2</sup> genera resultados idénticos. La diferencia en los cambios de presión resultó en diez veces menos cantidad de información para interpolar, pero sin afectar significativamente la precisión de la aproximación.

Como se mencionó anteriormente, se presentarán los resultados para tres tipos diferentes de aceite (ligero, medio y pesado), denominados C, G y P respectivamente, en referencia a sus datos PVT, y su clasificación está dada según lo recomendado por Garaicochea y Bashbush.

Los valores de  $\Delta Np$ ,  $\Delta Gp$ ,  $Np$  y  $Gp$ , están dados como fracciones de las reservas totales, donde  $N=1$ . Por lo tanto, para dimensionar en un caso real, es necesario multiplicar estos valores por el volumen original.  $Np$  representa la recuperación fraccional de aceite y  $Gp$  la del gas. Se sabe que la aproximación de la ecuación de Muskat proporciona únicamente los valores de saturación promedio a una presión promedio dada.

Para obtener los valores de  $\Delta Np$ ,  $\Delta Gp$  y sus acumulados  $Np$  y  $Gp$  (producción acumulada de aceite y gas, respectivamente), Craft y Hawkins, así como Garaicochea y Bashbush, utilizaron conceptos de balance de materia para calcularlos a partir de la saturación inicial calculada. Esto se realizó mediante las siguientes ecuaciones:

Para la producción acumulada de aceite,

$$Np = N \left( 1.0 - \left( \frac{S_o}{1 - S_w} \right) \left( \frac{B_{oi}}{B_o} \right) \right), \quad (2.41)$$

Para la producción acumulada de gas,

$$Gp = \left[ \frac{Nb[(B_t - B_{ti}) - Np(B_t - R_{si}B_g)]}{B_g} \right]. \quad (2.42)$$

Tabla 2.9 Datos PVT del caso C

<b><i>P</i> (Kg/cm<sup>2</sup>)</b>	<b><i>B<sub>o</sub></i></b>	<b><i>R<sub>s</sub></i></b>	<b><i>B<sub>g</sub></i></b>	<b><math>\mu_o/\mu_g</math></b>	<b><i>1/B<sub>g</sub></i></b>
<b>175</b>	1.496	718.16	0.0011	28.91	949.046
<b>170</b>	1.484	699.67	0.0011	30.22	916.633
<b>165</b>	1.471	681.18	0.0011	31.56	885.689
<b>160</b>	1.459	662.69	0.0012	32.95	855.595
<b>155</b>	1.447	644.20	0.0012	34.42	825.773
<b>150</b>	1.435	625.71	0.0013	35.97	795.657
<b>145</b>	1.423	607.22	0.0013	37.61	764.884
<b>140</b>	1.411	588.73	0.0014	39.33	733.763
<b>135</b>	1.398	570.24	0.0014	41.12	703.010
<b>130</b>	1.386	551.75	0.0015	42.99	673.117
<b>125</b>	1.374	533.26	0.0016	44.92	643.854
<b>120</b>	1.362	514.77	0.0016	46.94	614.777
<b>115</b>	1.350	496.28	0.0017	49.08	585.674
<b>110</b>	1.338	477.79	0.0018	51.32	556.722
<b>105</b>	1.326	459.30	0.0019	53.69	528.180
<b>100</b>	1.313	440.81	0.0020	56.18	500.202
<b>95</b>	1.301	422.32	0.0021	58.79	472.754
<b>90</b>	1.289	403.83	0.0022	61.53	445.826
<b>85</b>	1.276	385.34	0.0024	64.41	419.064
<b>80</b>	1.264	366.85	0.0026	67.42	391.714
<b>75</b>	1.252	348.36	0.0028	70.58	363.533
<b>70</b>	1.240	329.86	0.0030	73.90	335.905
<b>65</b>	1.228	311.37	0.0032	77.39	310.857
<b>60</b>	1.216	292.88	0.0035	81.03	288.978
<b>55</b>	1.204	274.39	0.0038	84.84	265.762
<b>50</b>	1.192	255.90	0.0042	88.83	236.847
<b>45</b>	1.180	237.41	0.0049	93.01	203.990
<b>40</b>	1.168	218.92	0.0056	97.39	177.366



Tabla 2.1 Datos PVT del caso G

<b><math>P</math> (Kg/cm<sup>2</sup>)</b>	<b><math>B_o</math></b>	<b><math>R_s</math></b>	<b><math>B_g</math></b>	<b><math>\mu_o/\mu_g</math></b>	<b><math>1/B_g</math></b>
200	1.440	120.00	0.0065	65.50	153.846
195	1.436	118.25	0.0068	67.10	147.059
190	1.431	116.40	0.0069	68.80	144.928
185	1.426	114.48	0.0072	70.50	138.889
180	1.421	112.50	0.0075	72.20	133.333
175	1.416	110.48	0.0078	73.90	128.205
170	1.410	108.45	0.0081	75.70	123.457
165	1.404	106.41	0.0084	77.50	118.624
160	1.398	104.35	0.0088	79.30	113.636
155	1.392	102.21	0.0092	81.20	108.814
150	1.385	100.05	0.0096	83.10	104.167
145	1.379	97.88	0.0100	85.10	99.701
140	1.372	95.70	0.0105	87.20	95.238
135	1.366	93.47	0.0110	89.40	90.662
130	1.359	91.20	0.0116	91.70	86.207
125	1.352	88.91	0.0123	94.10	81.367
120	1.345	86.60	0.0130	96.70	76.923
115	1.338	84.26	0.0137	99.40	72.833
110	1.331	81.90	0.0145	102.30	68.966
105	1.324	79.52	0.0153	105.40	65.359
100	1.317	77.10	0.0162	108.60	61.728
95	1.310	74.10	0.0171	112.00	58.377
90	1.302	72.20	0.0181	115.60	55.249
85	1.294	69.70	0.0192	119.40	52.029
80	1.286	67.10	0.0204	123.30	49.020
75	1.278	64.46	0.0216	127.40	46.232
70	1.269	61.60	0.0229	131.80	43.668
65	1.260	59.05	0.0244	136.40	41.068
60	1.250	56.10	0.0260	141.20	38.462
55	1.240	53.00	0.0279	146.20	35.907
50	1.229	49.70	0.0300	151.60	33.333
45	1.218	46.20	0.0326	157.30	30.722
40	1.206	42.40	0.0358	163.00	27.933

Tabla 2.10 Datos PVT del caso P

<b><i>P</i> (Kg/cm<sup>2</sup>)</b>	<b><i>B<sub>o</sub></i></b>	<b><i>R<sub>s</sub></i></b>	<b><i>B<sub>g</sub></i></b>	<b><math>\mu_o/\mu_g</math></b>	<b><math>1/B_g</math></b>
<b>105</b>	1.240	87.10	0.0075	75.75	134.144
<b>100</b>	1.232	83.81	0.0079	77.26	125.816
<b>95</b>	1.223	80.63	0.0085	79.38	117.898
<b>90</b>	1.215	77.55	0.0091	81.86	110.251
<b>85</b>	1.206	74.49	0.0097	84.34	102.860
<b>80</b>	1.197	71.34	0.0105	87.01	95.611
<b>75</b>	1.188	68.33	0.0113	89.64	88.554
<b>70</b>	1.179	65.41	0.0123	92.57	81.531
<b>65</b>	1.171	62.10	0.0134	96.81	74.435
<b>60</b>	1.162	58.11	0.0148	102.21	67.635
<b>55</b>	1.153	54.21	0.0164	108.25	61.070
<b>50</b>	1.144	51.00	0.0183	114.95	54.617
<b>45</b>	1.136	47.65	0.0207	123.66	48.331
<b>40</b>	1.127	43.94	0.0237	134.68	42.160

A continuación, se presentan los resultados de todos los métodos mencionados anteriormente, dispuestos en tablas para su comparación y análisis. El propósito de esta sección es mostrar los resultados de todos los métodos y examinar las diferencias, en caso de que las haya.

La Tabla 2.11 presenta los resultados de la saturación promedio calculada para el caso de estudio C, que corresponde a un aceite ligero. Se observa que tanto en las aproximaciones de C-H como en las de G-B se emplearon cambios de presión de 15 Kg/cm<sup>2</sup>. Esta comparación resalta el efecto de los cambios de presión grandes en las soluciones del primer grupo, como se había demostrado anteriormente.

Es importante destacar que, dentro del primer grupo de métodos para aproximar la solución a la ecuación de Muskat, el método propuesto resulta efectivo al utilizar cambios de presión pequeños, como se había anticipado. Se debe recordar que el método de evaluación propuesto permite optimizar la cantidad de operaciones y cálculos necesarios; sin embargo, es importante tener en cuenta que las evaluaciones del grupo 1 también presentan desviaciones debido a los grandes cambios de presión, y que tanto, la solución propuesta como la solución por Runge-Kutta de cuarto orden no son una excepción.

Tabla 2.11 Comparación de resultados  $S_o$  promedio Caso C, para todos los métodos de solución

$P$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	$S_o$ Runge kutta 4	$S_o$ (Propuesta)	$S_o$ (CyH)	$S_o$ (G y B)	$S_o$ (Schilthuis)	$S_o$ (Tarner)	$S_o$ (Tracy)	$S_o$ (Pirson)
175	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
170	0.789238	0.789238			0.789263	0.789263	0.789261	0.789237
165	0.777790	0.777785			0.777837	0.777837	0.777834	0.777781
160	0.765640	0.765626	0.769624661	0.766661	0.765704	0.765704	0.765698	0.765619
155	0.752767	0.752739			0.752844	0.752844	0.752853	0.752732
150	0.739154	0.739107			0.739258	0.739258	0.752853	0.739104
145	0.724834	0.724754	0.737259204	0.726629	0.725004	0.725004	0.739268	0.724769
140	0.709993	0.709846			0.710239	0.710239	0.710155	0.709905
135	0.695003	0.694754			0.695236	0.695236	0.695162	0.694885
130	0.680308	0.679931	0.70268268	0.679728	0.680509	0.680509	0.680438	0.680161
125	0.666224	0.665721			0.666414	0.666414	0.666362	0.666060
120	0.652914	0.652298			0.653074	0.653074	0.653046	0.652741
115	0.640435	0.639724	0.667181802	0.634333	0.640566	0.640566	0.640523	0.640256
110	0.628761	0.627973			0.628870	0.628870	0.628839	0.628578
105	0.617800	0.616953			0.617908	0.617908	0.617867	0.617615
100	0.607450	0.606553	0.633325985	0.598408	0.607580	0.607580	0.607493	0.607260
95	0.597667	0.596725			0.597784	0.597784	0.597683	0.597467
90	0.588439	0.587454			0.588441	0.588441	0.588419	0.588223
85	0.579704	0.578686	0.603169801	0.569606	0.579631	0.579631	0.579660	0.579477
80	0.571317	0.570276			0.571230	0.571230	0.571280	0.571085
75	0.563166	0.562106			0.563135	0.563135	0.563116	0.562931
70	0.555253	0.554167	0.576750938	0.544774	0.555280	0.555280	0.555187	0.555007
65	0.547641	0.546529			0.547624	0.547624	0.547550	0.547381
60	0.540336	0.539202			0.540142	0.540142	0.540226	0.540062
55	0.533142	0.531997	0.553295182	0.522585	0.532818	0.532818	0.533022	0.532866
50	0.525868	0.524711			0.525642	0.525642	0.525746	0.525595
45	0.518520	0.517336			0.517482	0.517482	0.518379	0.518242
40	0.511394	0.510177	0.531920581	0.500744	0.510563	0.510563	0.511237	0.511100

En la figura 2.20, tanto la evaluación por Runge-Kutta de cuarto orden como la solución propuesta dan resultados idénticos a los obtenidos por el balance de materia, que sirven como método de validación. Además, en la figura 2.21 se muestra la producción acumulada de aceite respecto al aceite original en sitio, lo cual evidencia el efecto de los cambios de presión en los resultados. Se observa claramente que las aproximaciones del grupo 1 presentan desviaciones en comparación con las soluciones por balance de materia, que muestran resultados idénticos entre sí.

En la figura 2.20, se pueden observar los diversos resultados obtenidos por los métodos del grupo 1 y grupo 2. Se destaca que las soluciones para los balances de materia muestran una notable similitud, y las pequeñas variaciones se deben al error inherente al proceso de cálculo.

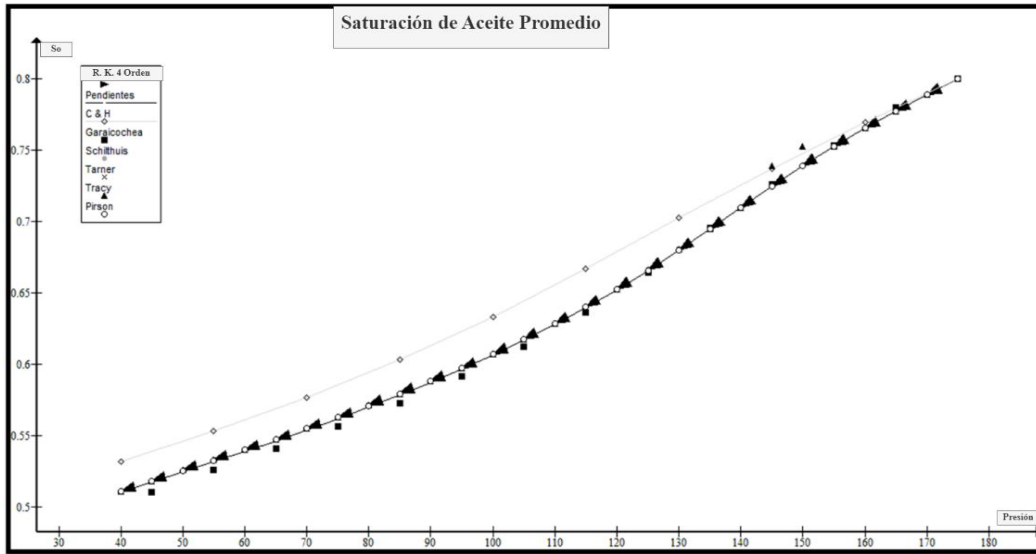


Figura 2.20 Saturación de aceite promedio por todas las soluciones caso C.

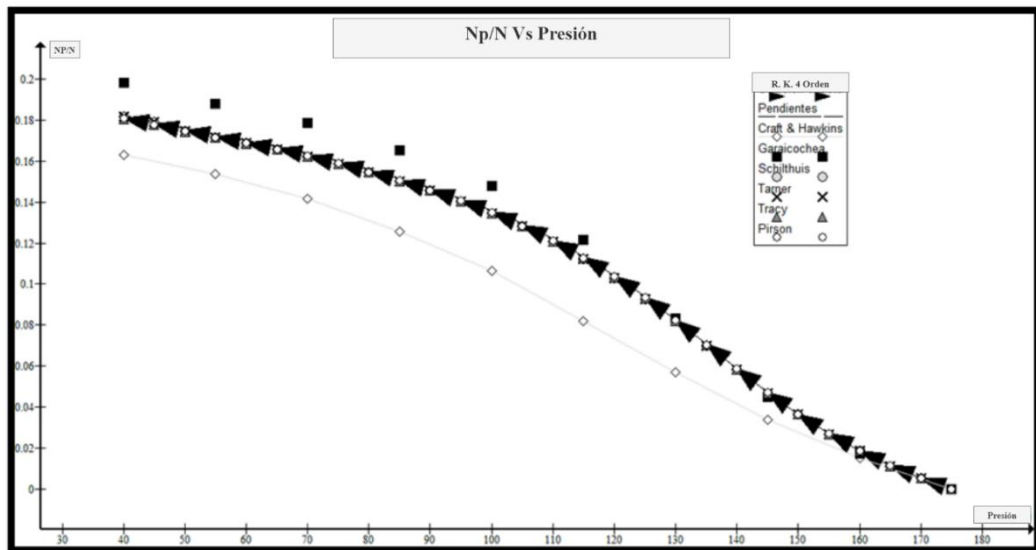


Figura 2.21  $N_p/N$  para todas las aproximaciones caso C.

En la tabla 2.12 se pueden observar los resultados de la producción de aceite debido al abatimiento de presión de 1 kg/cm<sup>2</sup> ( $\Delta Np/N$ ). Asimismo, en la tabla 2.13 se presenta la producción acumulada de aceite para una presión dada ( $Np/N$ ). Se nota que, en los tiempos cortos, es decir, al abatirse la presión después de la presión inicial, es cuando se pueden observar con mayor claridad los efectos del empuje por gas en solución, los cuales disminuyen con el tiempo.

Tabla 2.12 Comparación de resultados  $\Delta Np/N$  caso C

$P$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\Delta Np/N$ (R. K. 4 orden)	$\Delta Np/N$ (Pendientes)	$\Delta Np/N$ (CyH)	$\Delta Np/N$ (G y B)	$\Delta Np/N$ (Schilthuis)	$\Delta Np/N$ (Tarnar)	$\Delta Np/N$ (Tracy)	$\Delta Np$ (Pirson)
175	0	0	-	-	0	0	0	0
170	0.001075	0.001098	-	-	0.001088	0.001088	0.001091	0.001098
165	0.001365	0.001308	-	-	0.001310	0.001310	0.001301	0.001308
160	0.001593	0.001537	-	-	0.001536	0.001536	0.001536	0.001538
155	0.001820	0.001774	-	-	0.001765	0.001765	0.001762	0.001774
150	0.002034	0.002008	-	-	0.001990	0.001990	0.001993	0.002005
145	0.002218	0.002220	-	-	0.002189	0.002189	0.002200	0.002213
140	0.002337	0.002368	-	-	0.002334	0.002334	0.002346	0.002354
135	0.002361	0.002409	-	-	0.002391	0.002391	0.002378	0.002386
130	0.002282	0.002331	-	-	0.002285	0.002285	0.002318	0.002302
125	0.002141	0.002184	-	-	0.002159	0.002159	0.002173	0.002153
120	0.001964	0.002001	-	-	0.001980	0.001980	0.001954	0.001973
115	0.001774	0.001805	-	-	0.001782	0.001782	0.001814	0.001781
110	0.001579	0.001605	-	-	0.001586	0.001586	0.001585	0.001585
105	0.001394	0.001414	-	-	0.001405	0.001405	0.001385	0.001397
100	0.001228	0.001246	-	-	0.001243	0.001243	0.001232	0.001232
95	0.001089	0.001107	-	-	0.001099	0.001099	0.001099	0.001096
90	0.000975	0.000993	-	-	0.001038	0.001038	0.000993	0.000984
85	0.000898	0.000908	-	-	0.000912	0.000912	0.000903	0.000900
80	0.000841	0.000846	-	-	0.000822	0.000822	0.000830	0.000838
75	0.000790	0.000795	-	-	0.000756	0.000756	0.000787	0.000788
70	0.000715	0.000723	-	-	0.000704	0.000704	0.000712	0.000717
65	0.000627	0.000638	-	-	0.000661	0.000661	0.000637	0.000632
60	0.000562	0.000564	-	-	0.000622	0.000622	0.000559	0.000559
55	0.000582	0.000575	-	-	0.000587	0.000587	0.000572	0.000569
50	0.000641	0.000632	-	-	0.000554	0.000554	0.000624	0.000624
45	0.000645	0.000651	-	-	0.000764	0.000764	0.000648	0.000641
40	0.000536	0.000548	-	-	0.000397	0.000397	0.000540	0.000541

Tabla 2.13 Comparación de resultados  $Np/N$  caso C

$P$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$Np/N$ (R. K. 4 orden)	$Np/N$ (Pendientes)	$Np/N$ (CyH)	$Np/N$ (G y B)	$Np/N$ (Schilthuis)	$Np/N$ (Tarnar)	$Np/N$ (Tracy)	$Np/N$ (Pirson)
175	0	0	0	0	0	0	0	0
170	0.005125	0.005095			0.005001	0.005001	0.005066	0.005096
165	0.011267	0.011205			0.011104	0.011104	0.011143	0.011210
160	0.018515	0.018423	0.01495408	0.0172058	0.018328	0.018328	0.018330	0.018431
155	0.026932	0.026820			0.026695	0.026695	0.026673	0.026830
150	0.036511	0.036396			0.036199	0.036199	0.036185	0.036399
145	0.047178	0.047086	0.03392732	0.04481803	0.046761	0.046761	0.046789	0.047065
140	0.058693	0.058667			0.058170	0.058170	0.058258	0.058590
135	0.070587	0.070679			0.070052	0.070052	0.070133	0.070503
130	0.082287	0.082530	0.05679332	0.08306926	0.081728	0.081728	0.081846	0.082220
125	0.093371	0.093764			0.092804	0.092804	0.092891	0.093303
120	0.103615	0.104142			0.103076	0.103076	0.103115	0.103534
115	0.112924	0.113565	0.08207353	0.12137669	0.112385	0.112385	0.112458	0.112828
110	0.121249	0.121988			0.120703	0.120703	0.120776	0.121142
105	0.128611	0.129432			0.128084	0.128084	0.128142	0.128497
100	0.135097	0.135983	0.10632788	0.14797092	0.134614	0.134614	0.134645	0.134976
95	0.140850	0.141786			0.140389	0.140389	0.140409	0.140719

90	0.145998	0.146972			0.145564	0.145564	0.145569	0.145855
85	0.150671	0.151669	0.12582395	0.16546642	0.150356	0.150356	0.150241	0.150511
80	0.154999	0.156015			0.154635	0.154635	0.154529	0.154819
75	0.159056	0.160092			0.158539	0.158539	0.158581	0.158859
70	0.162798	0.163860	0.14152136	0.17859759	0.162158	0.162158	0.162321	0.162593
65	0.166131	0.167222			0.165545	0.165545	0.165666	0.165925
60	0.169053	0.170166			0.168731	0.168731	0.168589	0.168843
55	0.171873	0.172990	0.15355782	0.18827187	0.171737	0.171737	0.171396	0.171639
50	0.174904	0.176026			0.174572	0.174572	0.174401	0.174638
45	0.178149	0.179300			0.179177	0.179177	0.177646	0.177863
40	0.181080	0.182276	0.16300732	0.19813434	0.181735	0.181735	0.180576	0.180796

En cuanto a las soluciones de Craft y Hawkins, así como Garaicochea y Bashbush, se observa una desviación en los últimos intervalos de presión debido al error acumulado. Es importante señalar que para la solución de Craft y Hawkins, los cambios de presión utilizados fueron de 10 Kg/cm<sup>2</sup> en lugar de 15 Kg/cm<sup>2</sup>, lo cual influye en la reducción del error en comparación con la solución original que emplea cambios de presión mayores. Regresando a la figura 2.20, esta muestra las saturaciones promedio obtenidas para todos los métodos, y se confirma que las desviaciones más significativas corresponden a las soluciones del primer grupo.

Se llevaron a cabo varios ensayos para cada una de los métodos de balance de materia, y se comprobó que el efecto de la presión en estas soluciones no resultó tan significativo como en las evaluaciones de la ecuación de Muskat. Como ya se comentó, los cambios de presión mayores a 10 Kg/cm<sup>2</sup>, generan desviaciones considerables en la aproximación de la ecuación de Muskat. También se observó que el método propuesto arroja un error cercano a 0.1%, en relación con los balances de materia. Es necesario tomar en cuenta que el error es acumulativo iteración por iteración, lo que hace que la aplicación de la aproximación propuesta, en comparación con las evaluaciones de Craft y Hawkins, así como de Garaicochea y Bashbush, sea más viable y práctica.

A continuación, se presentan los resultados para los casos G y P, que corresponden a aceites más pesados que el caso C, y se analizan los resultados presentados. Ver figuras 2.22, 2.23 y 2.24.

Como se puede observar en la figura 2.22 y la figura 2.23, las desviaciones en las aproximaciones no son tan grandes en comparación con los resultados mostrados en las figuras 2.20 y 2.21. Esto se debe a que el aceite del caso G es un aceite con una cantidad significativamente menor de gas disuelto que el caso C, el cual se puede considerar un aceite volátil por sus propiedades.

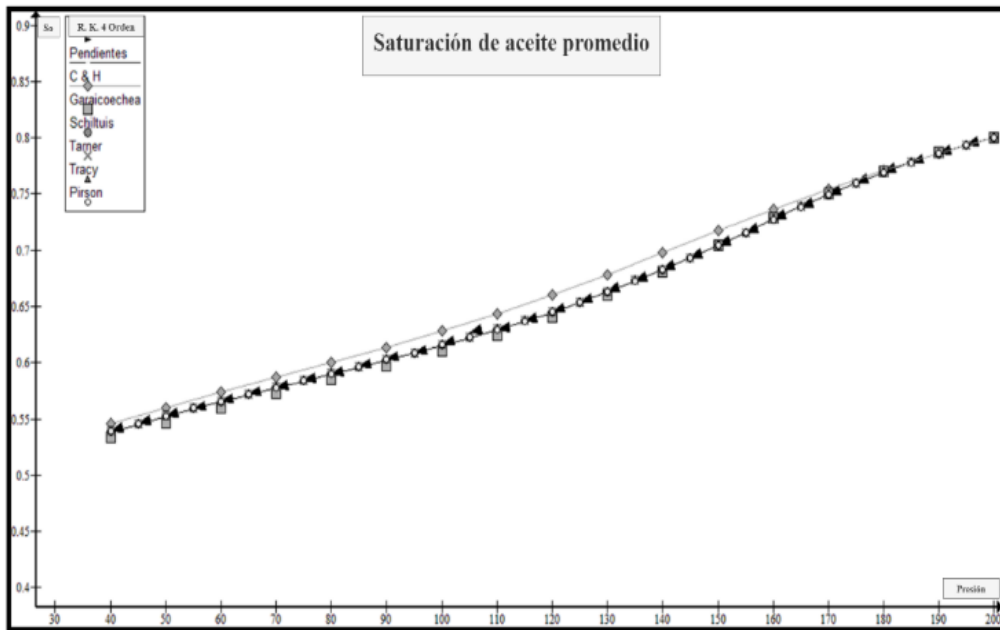


Figura 2.22 Saturación de aceite promedio por todas las aproximaciones caso G.

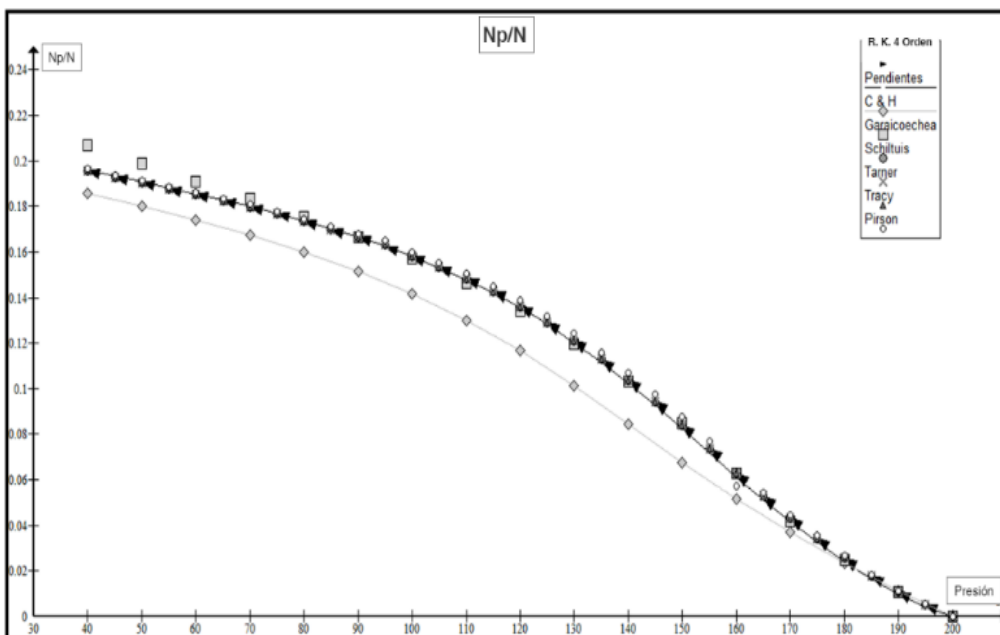


Figura 2.23  $N_p/N$  por todas las aproximaciones caso G, aceite mediano.

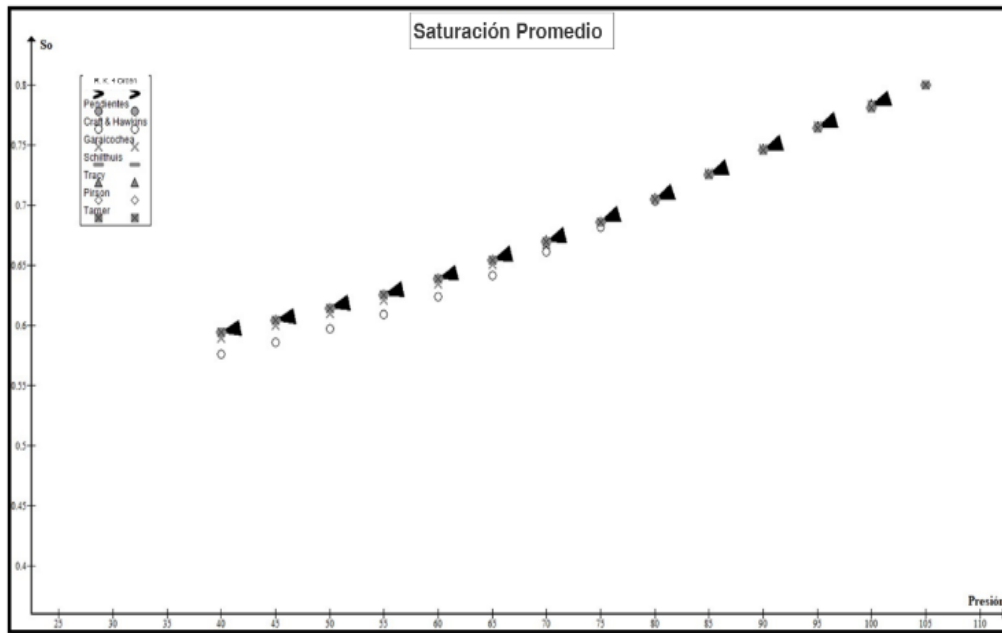


Figura 2.24 Saturación promedio por todas las aproximaciones caso P aceite Pesado.

Para el caso P, que corresponde a un aceite de bajo encogimiento en el cual los cambios de presión se redujeron a 5 kg/cm<sup>2</sup>. Se puede observar en la figura 2.24 y la figura 2.25 que las desviaciones se redujeron significativamente en comparación con el caso C, que es el aceite más ligero. De los resultados obtenidos, se puede concluir que los cambios de presión grandes influyen en las aproximaciones del grupo 1 y que los aceites con una mayor cantidad de gas disuelto pueden presentar mayores desviaciones en tiempos largos.



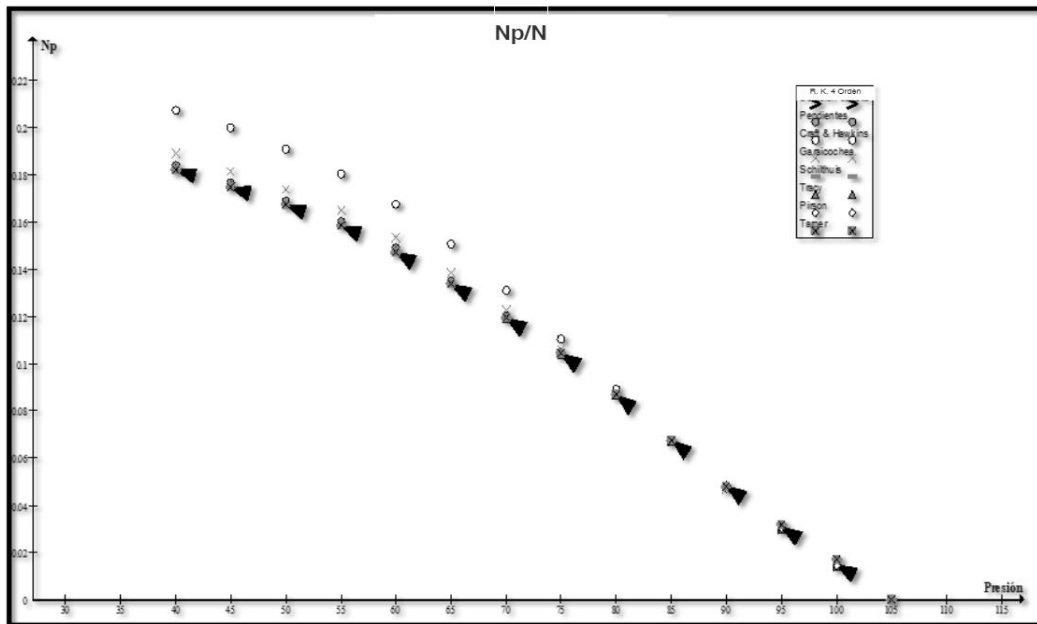


Figura 2.25  $N_p/N$  aceite pesado caso P.

En referencia a la aproximación de C-H, es evidente que la desviación no solo se debe a los cambios grandes de presión, sino a la forma en que se aproxima la solución numérica. Por otro lado, la solución de G-B muestra un mejor resultado debido al uso de cambios de presión más pequeños. En cuanto a las soluciones del grupo 2, se puede observar que no hay variaciones importantes, como ya se verificó.

En conclusión, podemos señalar que los métodos de aproximación de Craft y Hawkins, así como Garaicochea y Bashbush, son buenas aproximaciones, pero en este trabajo se demostró que la aplicación del método de Euler puede arrojar mejores resultados y es más fácil de aplicar. La aplicación del método de Euler fue optimizada, de tal manera que es posible obtener resultados muy aproximados a los obtenidos de aplicar el método de Runge Kutta de cuarto orden, lo que implica disminuir la complejidad del procedimiento.

Las aproximaciones mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden con cambios de presión de  $1 \text{ kg/cm}^2$ , generan resultados muy precisos, pero este requiere cuatro veces más información que el método propuesto, debido a que el método de Euler sólo emplea una aproximación para el cálculo.

### **Capítulo 3. Análisis de las propiedades PVT, permeabilidades relativas en el comportamiento del empuje por gas en solución.**

Desde hace cerca de un siglo, se han identificado y examinado críticos en la investigación del tema de la presente tesis, específicamente en relación con el empuje por gas en solución. En este sentido, se procede a analizar en detalle ciertos aspectos con el objetivo de aportar información relevante para la comprensión y avance en este campo de estudio. Los principales puntos de análisis comprenden:

- Variación en los cambios de presión.
- Variación en los datos PVT.
- Correlaciones para el cálculo de la relación de permeabilidades relativas.
- Efecto del incremento de la permeabilidad relativa al gas.

El propósito de explorar las variaciones en los cambios de presión radica en verificar las posibles desviaciones o alteraciones que estos puedan provocar en los resultados obtenidos mediante aproximaciones numéricas. Si bien este aspecto ha sido previamente abordado en el capítulo 2, en el presente capítulo se presentan de manera concisa los resultados y se reforzarán las observaciones previas. Además, se mostrarán los resultados correspondientes a tres tipos diferentes de aceite (C, G y P), con el fin de determinar si la composición de los mismos influye en las variaciones generadas por los cambios de presión.

La relevancia de las variaciones propuestas en los datos PVT, reside en la comprensión e identificación de la relación entre las propiedades del aceite y sus efectos en la producción del mismo bajo la influencia del empuje por gas en solución. Cabe destacar que la idea de llevar a cabo estas variaciones, se fundamenta en el trabajo presentado por Higgins, enfocado al cálculo de la recuperación de aceite en yacimientos con empuje por gas en solución, específicamente en el método propuesto por Tarner. Higgins también evaluó los errores en los datos PVT y la relación de permeabilidades relativas. Asimismo, señala que un factor determinante para la predicción más realista del comportamiento del yacimiento, radica en el procesamiento de los valores de permeabilidades relativas y su incidencia en la estimación de la recuperación de aceite. En resumen, Higgins empleó la ecuación de Muskat como punto de referencia y validación para el método de Tarner. Para evaluar el impacto de las variaciones en las recuperaciones de aceite calculadas, Higgins utilizó cambios relativamente grandes en las propiedades físicas de los aceites y en las

permeabilidades relativas de la roca del yacimiento. El trabajo de Higgins es de gran relevancia, ya que desarrolló una metodología para analizar las posibles repercusiones en los métodos (balance de materia y aproximaciones numéricas) cuando hay incertidumbre en la información PVT y de permeabilidades relativas.

En el presente documento se tomó como referencia lo señalado por Higgins, pero con un objetivo diferente, es abordar la sensibilidad en los métodos para identificar el efecto del aumento o disminución de la viscosidad del aceite, la relación de solubilidad, el factor de volumen tanto del gas como del aceite, así como las permeabilidades relativas.

Como se ha demostrado previamente, las soluciones basadas en un balance de materia dan buenos resultados indistintamente de los cambios de presión; sin embargo, los problemas surgen cuando existe una limitación en la cantidad de información disponible para su análisis. Esto conlleva a la utilización de un conjunto de datos más reducido y, por lo tanto, los resultados podrían mostrar desviaciones, por lo que no es recomendable restringirlos con un número limitado de intervalos.

Martin en relación con la ecuación de Muskat, menciona que la validez de esta ecuación se encuentra limitada a cambios de presión pequeños, debido a que para resolver la ecuación diferencial se requiere del uso de aproximaciones numéricas. En esta tesis, considera lo señalado por Martin y se ilustra la desviación que puede producirse debido a cambios de presión más grandes. En las soluciones del segundo grupo (balance de materia), se aplicaron cambios de presión de 30 kg/cm<sup>2</sup>, y en algunos casos se obtuvieron resultados satisfactorios. Como se mencionó, esto depende de la cantidad de información utilizada; además de que los balances de materia permiten ajustar sus valores mediante iteraciones para compensar posibles desviaciones.

Con respecto a las aproximaciones de la ecuación de Muskat del grupo 1 (Aproximaciones numéricas), con cambios de presión de 5 kg/cm<sup>2</sup>, se observan errores considerables en los últimos intervalos y, en el caso de la solución de C-H y G-B, las desviaciones son aún más grandes. Se recomienda utilizar presiones entre 0.1 y 1 kg/cm<sup>2</sup> para aproximar numéricamente la ecuación de Muskat.

A pesar de que la mayoría de las correlaciones usadas para el cálculo de permeabilidades relativas en la presente tesis, estas fueron desarrolladas para medios homogéneos. Es importante destacar que estas correlaciones se han incluido en todos los métodos de recurrencia propuestos. No obstante, es esencial tener en cuenta que estas no son las únicas correlaciones disponibles, y su aplicación debe ser analizada con detenimiento antes de emplearlas en un caso

real. Esto no garantiza su aplicabilidad en yacimientos carbonatados fracturados, lo que representa un gran problema.

### Efecto de los cambios de presión en las soluciones de empuje por gas en solución

En este apartado, no se comparan todas las soluciones del grupo 1, ya que anteriormente se dedicó una sección específica para ese propósito. A continuación, se analizará el efecto de los cambios de presión en las soluciones del grupo 1, con énfasis en la solución propuesta, que se basa en el método de Euler, así como en las soluciones del grupo 2. Las gráficas 3.1 a 3.12 representan las variaciones para tres casos de estudio (aceite G, C y P).

Para el caso G, mostradas en las figuras 3.1 a 3.3, se puede observar que no se producen variaciones significativas en las soluciones por balance de materia. Sin embargo, en el caso de la solución propuesta esto no ocurre, y se puede verificar en la figura 3.5, en donde se observan desviaciones importantes a medida que se aumenta la magnitud de los cambios de presión. Con el fin de ilustrar el impacto de utilizar una cantidad reducida de información, se presentan los resultados para tres intervalos de estudio con cambios de presión de  $35 \text{ kg/cm}^2$ , eso se presenta en las figuras 3.4 a 3.7, en donde se muestran las desviaciones. Respecto a lo anterior, los balances de materia no presentan desviaciones importantes para el caso G, a excepción del método propuesto que mostró mayores desviaciones. Las soluciones de balance de materia demostraron no tener problemas con el uso de cambios de presión grandes. Los cambios de presión de  $10 \text{ kg/cm}^2$  para la solución propuesta del grupo 1 arrojaron resultados con desviaciones apenas notables, pero para cambios mayores, los resultados se desviaron completamente. En cuanto al caso P, en donde la presión del yacimiento es la mitad que en el caso G; las desviaciones fueron considerablemente mayores. Por lo tanto, para este caso no fue viable utilizar cambios de presión grandes.

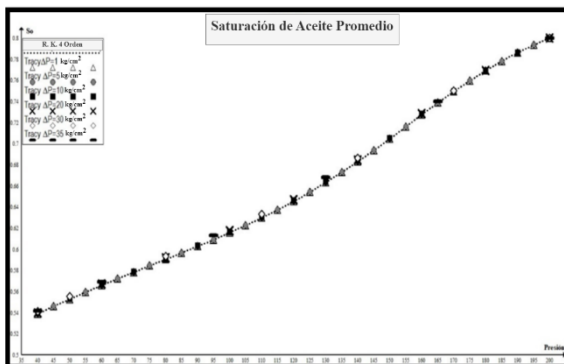


Figura 3.1 Efecto del cambio de presión, en la solución de Tracy para un aceite pesado caso G.

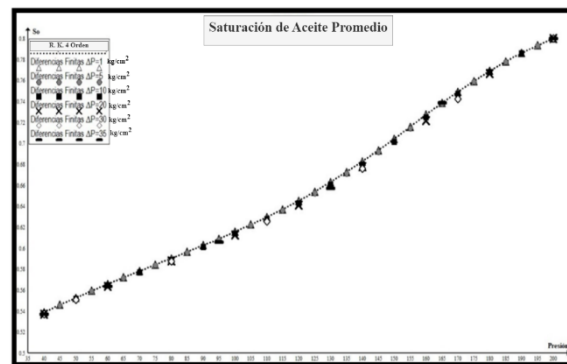


Figura 3.2 Efecto del cambio de presión, en la solución de Pirson para un aceite pesado caso G.

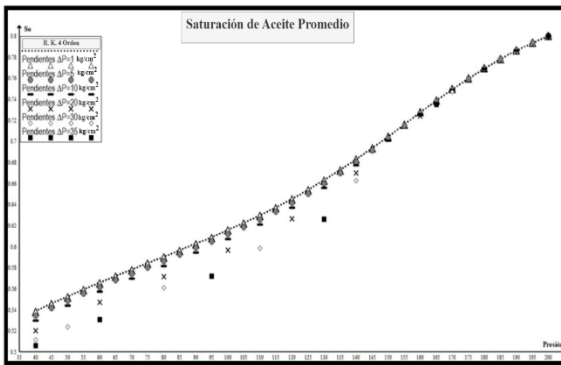


Figura 3.3 Efecto del cambio de presión, en la solución Propuesta “Pendientes” para un aceite pesado caso G.

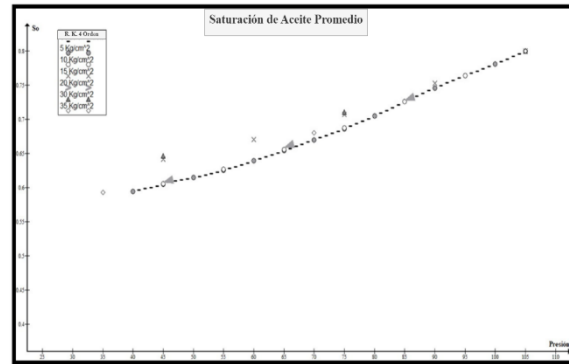


Figura 3.4 Efecto del cambio de presión, en la solución de Tarner para un aceite pesado caso P.

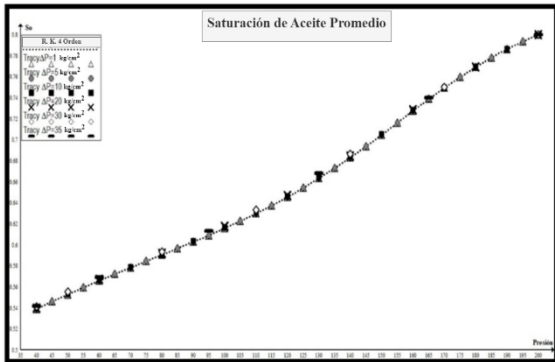


Figura 3.5 Efecto del cambio de presión, en la solución de Tracy para un aceite pesado caso P.

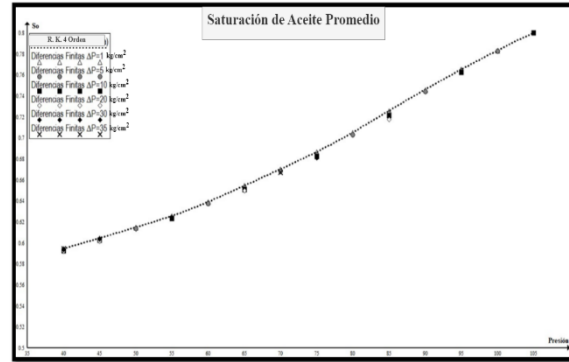


Figura 3.6 Efecto del cambio de la presión, en la solución de Pirson para un aceite pesado caso P.

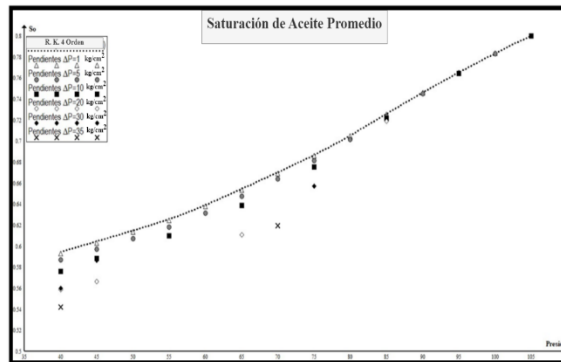


Figura 3.7 Efecto del cambio de la presión, en la solución propuesta “Pendientes” para un aceite pesado caso P.

Para el caso C, como se puede observar en las figuras 3.8, a 3.12, las desviaciones en todas las soluciones del grupo 2, a excepción de la solución de Schilthuis, no fueron significativas. Es importante recordar que este es el aceite más ligero de los tres casos presentados y que mostró comportamientos similares en cuanto a desviación con respecto al caso G. En conclusión, la presión del yacimiento desempeña un papel fundamental en la determinación del tamaño de los cambios de presión que pueden aplicarse.

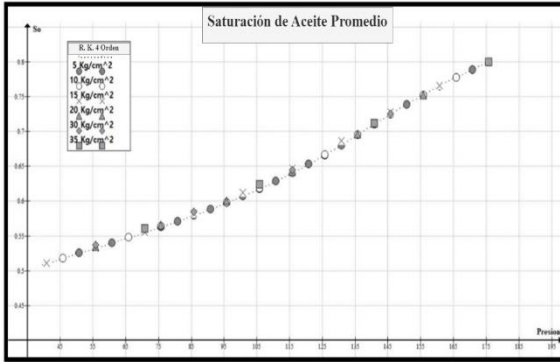


Figura 3.8 Efecto del cambio de la presión, en la solución de Turner para un aceite ligero, caso C.

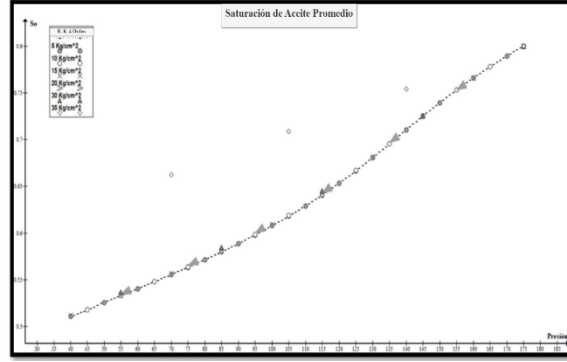


Figura 3.9 Efecto del cambio de la presión en la solución de Schilthuis para un aceite ligero caso C.

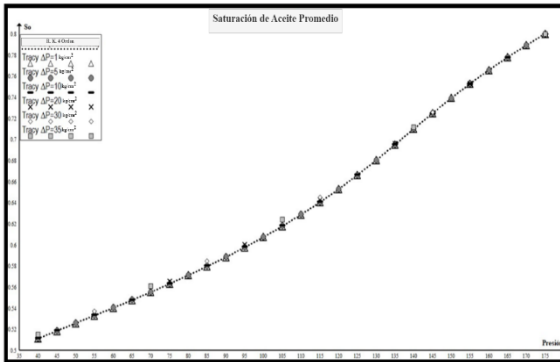


Figura 3.10 Efecto del cambio de la presión en la solución de Tracy para un aceite ligero caso C.

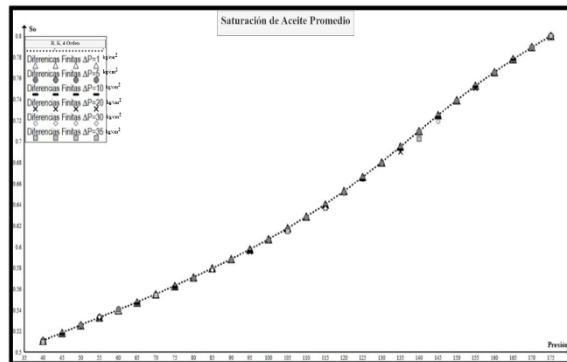


Figura 3.11 Efecto del cambio de presión en la solución de Pirson para un aceite ligero caso C.

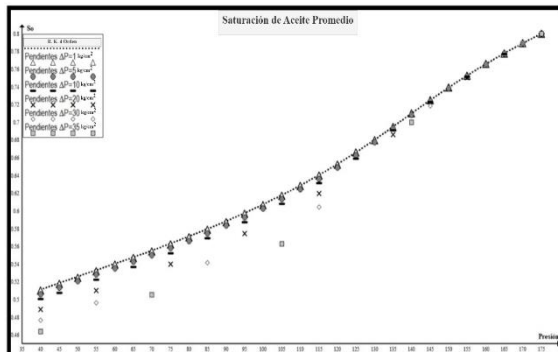


Figura 3.12 Efecto del cambio de presión en la solución Propuesta "Pendientes" para un aceite ligero caso C.

De esta forma, para cualquier solución por balance de materia, se deben considerar al menos 5 intervalos de presión, con el fin de obtener resultados precisos y evitar lo que se observó en la figura 3.4 y en la figura 3.9.

Por otro lado, la solución propuesta, que forma parte de las aproximaciones del grupo 1, sigue un patrón de comportamiento similar. Aunque permite cambios de presión grandes, es preferible utilizar cambios de presión pequeños, ya que esto conduce a resultados más precisos, como se comprobó en el capítulo 2, como se pudo verificar en las figuras 3.3, 3.7 y 3.12.

Es importante destacar que Guerrero<sup>66</sup> (1961) también realizó variaciones en los cambios de presión ( $\Delta P$ ), utilizando valores de  $\Delta P$  de 50, 100, 200, 300, 400 y 500 psi, y obtuvo desviaciones en sus resultados cuando se aplicaron cambios de presión grandes. Estos resultados también fueron confirmados por Apolonio Baca<sup>67</sup> (1967), quien se centró en la programación de la ecuación de Muskat y encontró resultados similares a los presentados anteriormente. Por lo tanto, se recomienda lo siguiente:

- Para la solución propuesta del grupo 1 se recomienda utilizar intervalos de presión preferentemente de 1 a 2 kg/cm<sup>2</sup> y como máximo 5 kg/cm<sup>2</sup>.
- Para las soluciones del grupo dos, se recomienda utilizar intervalos de presión de 5 a 20 kg/cm<sup>2</sup> como máximo,

## **Resultados obtenidos por la variación de las propiedades PVT**

### **Efecto de cambios en la viscosidad del aceite**

Muskat planteo un concepto fundamental que es importante destacar: las propiedades PVT (presión, volumen y temperatura) están interrelacionadas, lo que significa que los cambios en una de estas propiedades pueden influir en las otras. Con el fin de analizar de manera directa el efecto de un parámetro específico, en este caso la viscosidad del aceite, Higgins realizó un procedimiento para modificar esta propiedad de manera arbitraria. El procedimiento consiste en ajustar la viscosidad del aceite multiplicando los valores originales de la relación de viscosidades por un factor uniforme. Esto implica reducir los datos originales en un 25 y 10%, así como aumentarlos en un 5, 10 y 25%. Es importante destacar que este enfoque permite aislar el efecto de la viscosidad del aceite, manteniendo constantes las demás variables. Por ejemplo, al multiplicar por 1.10, se incrementan los valores originales en un 10%, mientras que al multiplicar por 0.75, se reduce la viscosidad en un 25%. Este proceso permite evaluar, cómo cambios específicos en la viscosidad del aceite afectan directamente a otras propiedades.

Este procedimiento se aplica para todas las propiedades PVT. Al aumentar o disminuir la magnitud de una propiedad PVT, el resto no se cambian. Los cálculos se presentan en las figuras 3.13 a 3.15, en donde se aprecia el impacto de las variaciones en la viscosidad sobre el cálculo de la saturación de aceite promedio. Como era de esperarse, cuando hay una menor facilidad de movimiento del aceite, es decir, un aumento en la relación de viscosidades ( $\mu_o/\mu_g$ ), la cantidad de aceite retenido en el yacimiento aumenta. Al principio de la producción, las curvas correspondientes a las variaciones de viscosidad no parecen alejarse significativamente de la solución original, esto se debe a que, al disminuir la presión y liberarse el gas contenido en el aceite, este pierde sus componentes más ligeros, dejando solo los más pesados. Al multiplicar la relación  $\mu_o/\mu_g$  por un valor menor a la unidad, se reduce la viscosidad del aceite, lo que, como se pudo observar, beneficia una mayor recuperación de aceite al disminuir las fuerzas viscosas.

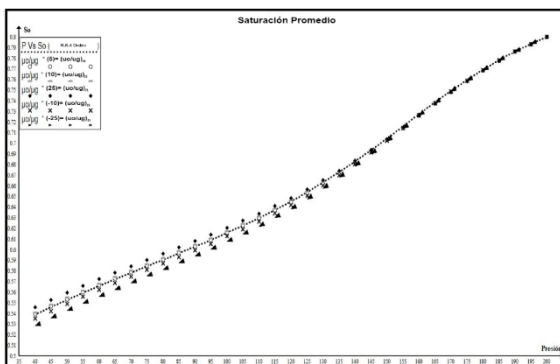


Figura 3.13 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $\mu_o/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso G. Aceite mediano.

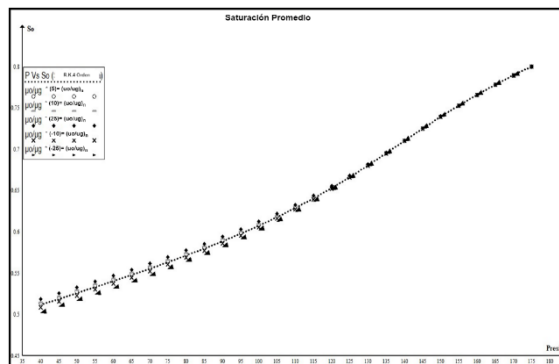


Figura 3.14 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $\mu_o/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso C. Aceite ligero.

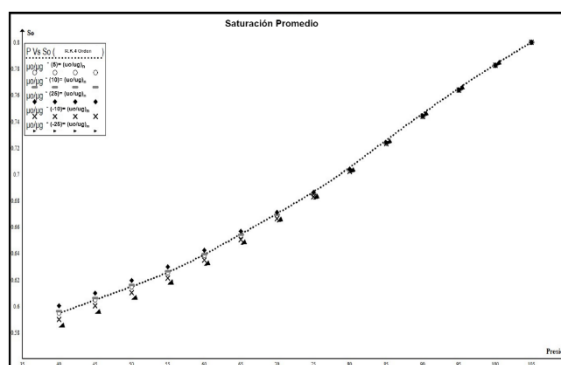


Figura 3.15 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $\mu_o/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso P. Aceite pesado.



En las figuras 3.16, a 3.21, se puede apreciar el efecto de la viscosidad en la recuperación acumulada de aceite ( $N_p/N$ ) y en la recuperación fraccional ( $\Delta N_p/N$ ). Al comienzo de la vida productiva de un yacimiento, la relación de viscosidades tiene poco impacto. Sin embargo, a medida que el gas entra en su fase móvil, al caer abajo de la presión de burbuja, los efectos de la viscosidad se hacen más evidentes; así, al aumentar la viscosidad el gas se libera más lentamente, eso concuerda con lo señalado por Muskat.

En las figuras 3.16 a 3.18, se observa que a una menor viscosidad del aceite se tendrá una mayor recuperación de aceite. Respecto a las figuras 3.19, 3.20 y 3.21, las que muestran el comportamiento de  $\Delta N_p/N$  vs presión, representa la producción de aceite fraccional por caída de presión unitaria, y muestran el comportamiento típico de un yacimiento que produce bajo el efecto del gas en solución. Como se observa, una vez que pasa el pico de producción, la declinación en la producción es abrupta.

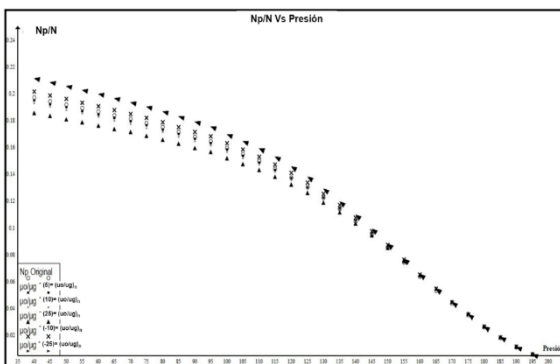


Figura 3.16  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $\mu/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso G. Aceite Mediano.

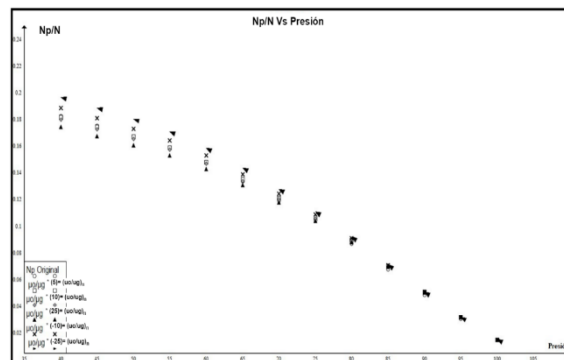


Figura 3.17  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $\mu/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso C. Aceite Ligero.

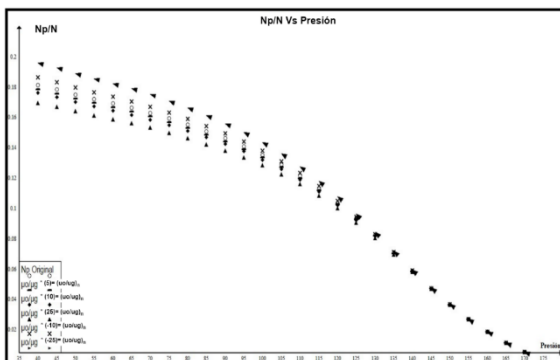


Figura 3.18  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $\mu/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso P. Aceite Pesado.

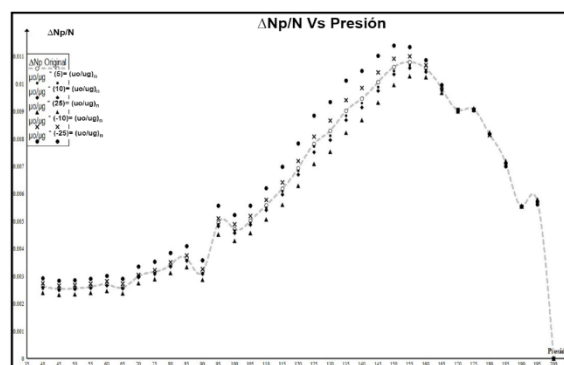


Figura 3.19  $\Delta N_p/N$  obtenida con variaciones en  $\mu/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso G. Aceite Mediano.

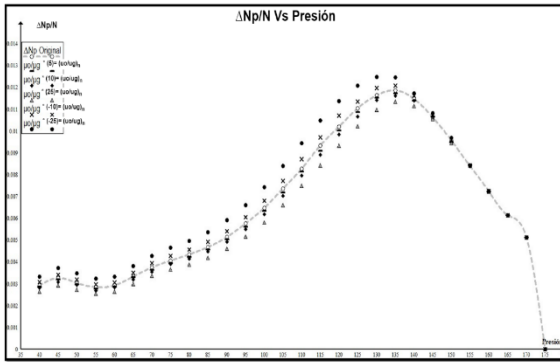


Figura 3.20  $\Delta Np/N$  obtenida con variaciones en  $\mu_o/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso C. Aceite Ligero.

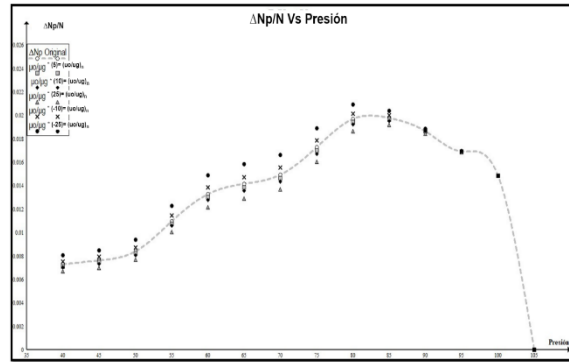


Figura 3.21  $\Delta Np/N$  obtenida con variaciones en  $\mu_o/\mu_g$  (Relación de Viscosidades multiplicada por un factor) Caso P. Aceite Pesado.

### Efecto de cambios en la relación de solubilidad

Se advierte que en las figuras 3.22 a 3.30 se presentan los resultados al variar la relación de solubilidad para cada uno de los casos estudiados (C, G y P). Se observa que la recuperación de aceite aumenta a medida que la relación de solubilidad disminuye. En cuanto a  $\Delta Np/N$ , como se muestra en las figuras 3.28 a 3.30, es evidente que, con altas relaciones de solubilidad, se pueden esperar producciones iniciales muy altas en períodos cortos. Sin embargo, a medida que la presión disminuye y el gas se libera, se inicia un proceso de declinación abrupta.

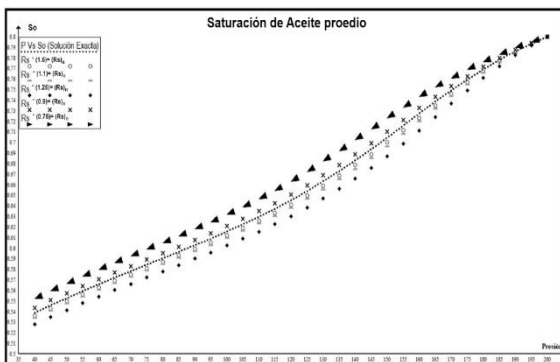


Figura 3.22 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso G. Aceite mediano.

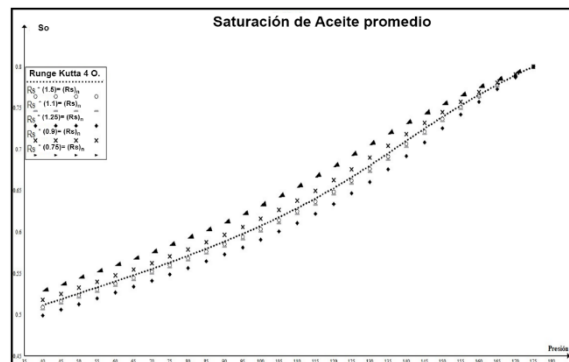


Figura 3.23 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso C. Aceite Ligero.

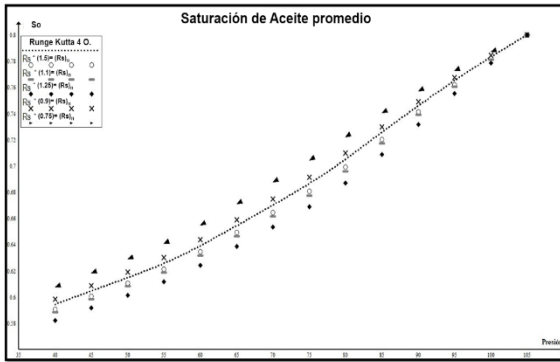


Figura 3.24 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso P. Aceite Pesado.

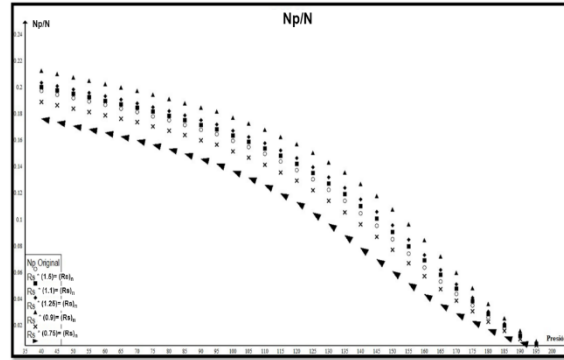


Figura 3.25  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso G. Aceite Mediano.

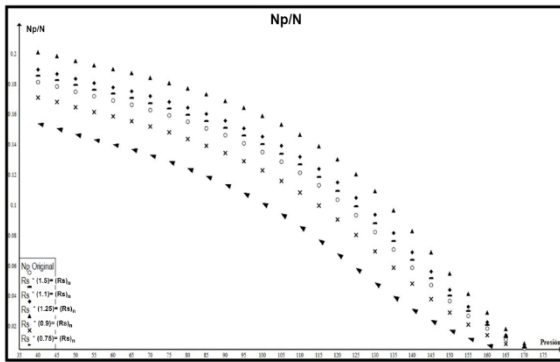


Figura 3.26  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso C. Aceite Ligero.

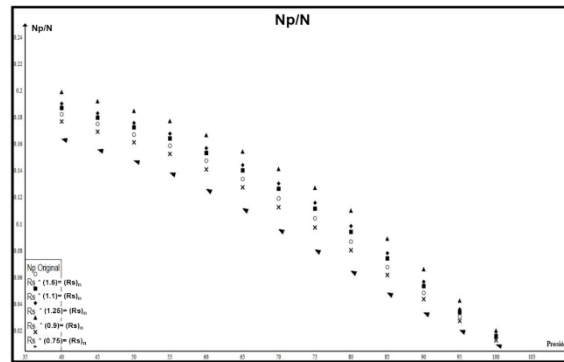


Figura 3.27  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso P. Aceite Pesado.

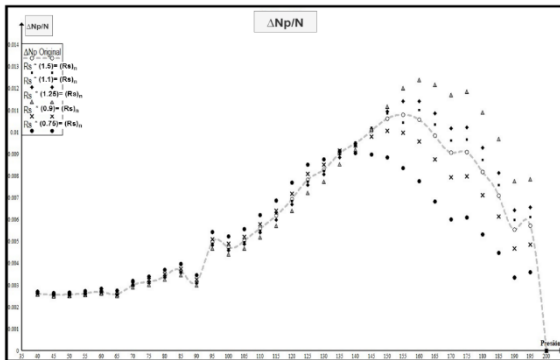


Figura 3.28  $\Delta N_p/N$  obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso G. Aceite Mediano.

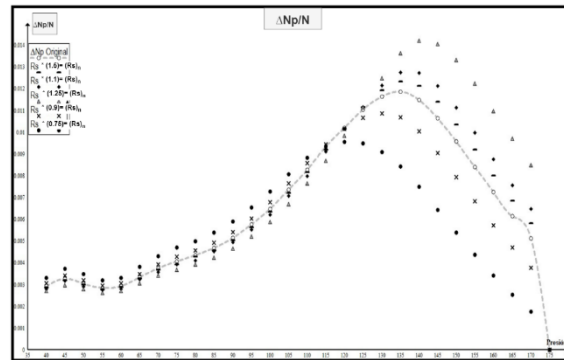


Figura 3.29  $\Delta N_p/N$  obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso C. Aceite Ligero.

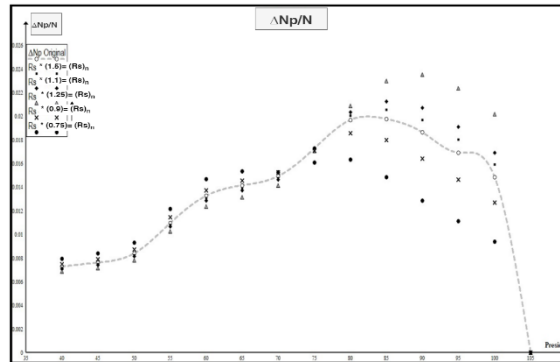


Figura 3.30  $\Delta Np/N$  obtenida con variaciones en  $R_s$  Caso P. Aceite Pesado.

### Efecto del factor de volumen de gas

A continuación, se presentan los resultados de generar variaciones en el factor de volumen del aceite, en las figuras 3.31 a 3.54, se analiza el efecto de la expansión del gas en la producción de aceite. Se observa que una mayor expansión del gas conlleva a una mayor recuperación de aceite en el yacimiento, como se evidencia en las figuras 3.31 a 3.33. Al igual que con los otros parámetros ( $\mu_o$  y  $R_s$ ), el factor de volumen del gas es más relevante al inicio de la vida productiva del yacimiento. En las figuras 3.34 a 3.36, se observa que una menor compresibilidad del gas conduce a una menor producción acumulada de aceite. En las figuras 3.37 a 3.39, se puede observar que una disminución en el efecto del empuje por gas en solución, conlleva a una disminución drástica en la recuperación de aceite. Esto es consistente con la idea de que el gas en solución es fundamental para impulsar la producción de aceite y, cuando se reduce su efecto, la recuperación de aceite se ve disminuida.

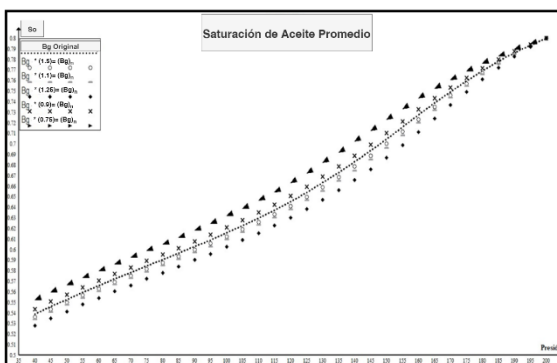


Figura 3.31 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $B_g$  Caso G. Aceite mediano.

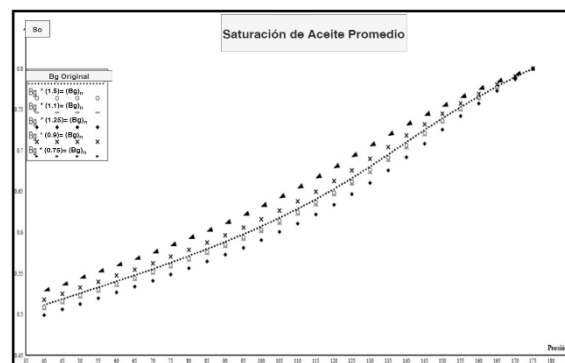


Figura 3.32 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $B_g$  Caso C. Aceite ligero.

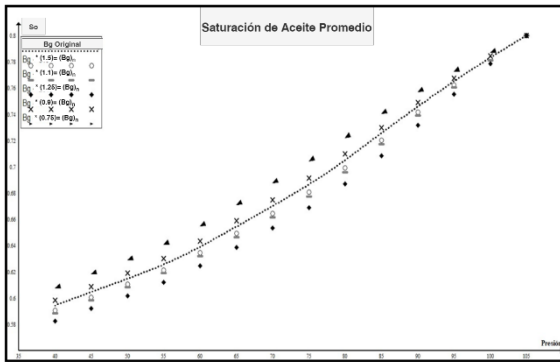


Figura 3.33 Saturación promedio obtenida con variaciones en Bg Caso P. Aceite pesado.

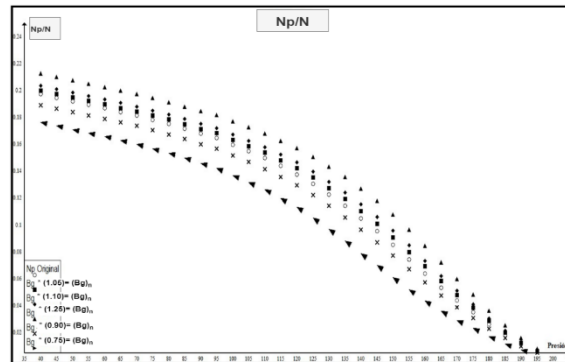


Figura 3.34 Np/N obtenida con variaciones en Bg Caso G. Aceite Ligero.

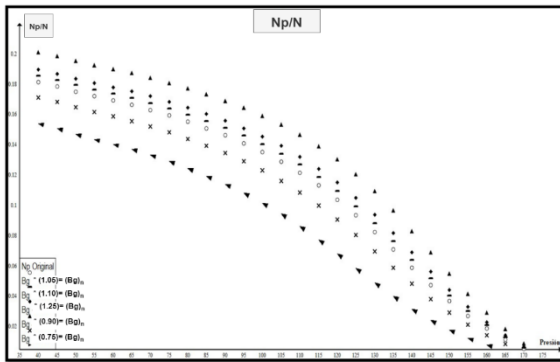


Figura 3.35 Np/N obtenida con variaciones en Bg Caso C. Aceite Ligero.

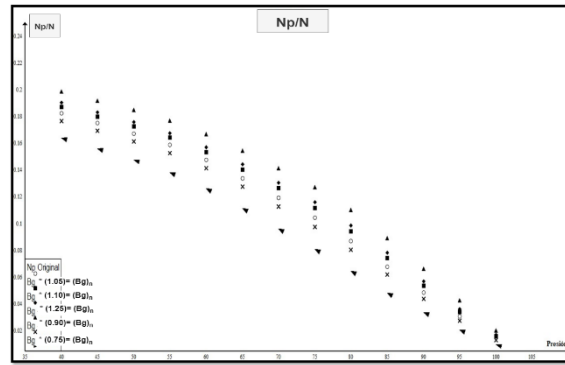


Figura 3.36 Np/N obtenida con variaciones en Bg Caso P. Aceite pesado.

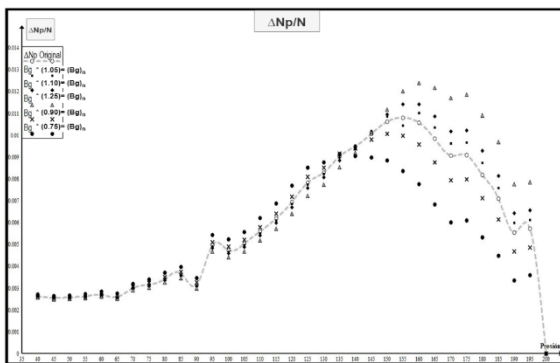


Figura 3.37  $\Delta Np/N$  obtenida con variaciones en Bg Caso G. Aceite Mediano.

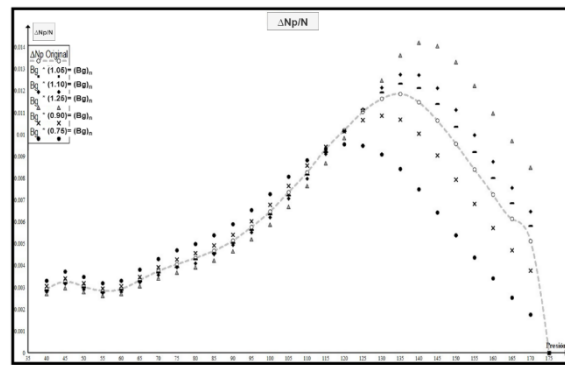


Figura 3.38  $\Delta Np/N$  obtenida con variaciones en Bg Caso C. Aceite Ligero.

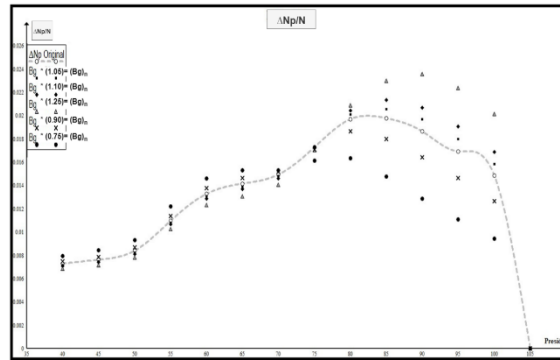


Figura 3.39  $\Delta Np/N$  obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso P. Aceite Pesado.

### Efecto del factor de volumen del aceite

En esta sección se evalúa el efecto de la variación del factor de volumen en la recuperación de aceite para los tres casos (G, C y P). Al igual que en los casos anteriores, la relación de viscosidades, la relación de solubilidad y el factor de volumen del gas permanecen sin cambios. De la figura 3.40 a 3.48, se observa el efecto de la variación de  $B_o$  en la recuperación de aceite. En las figuras 3.43 a 3.48, se verifica que un aumento en  $B_o$  no contribuye a incrementar la recuperación de aceite. En cuanto al comportamiento de  $\Delta Np$ , los efectos de la variación del  $B_o$  se presentan por abajo de  $p_b$ , antes de que comience la declinación en la producción, como se observa en las figuras 3.46 a 3.48. En consecuencia, se puede anticipar que, debido a las diferencias en el encogimiento del aceite, las recuperaciones observadas en los yacimientos que producen por gas en solución mostrarán variaciones.

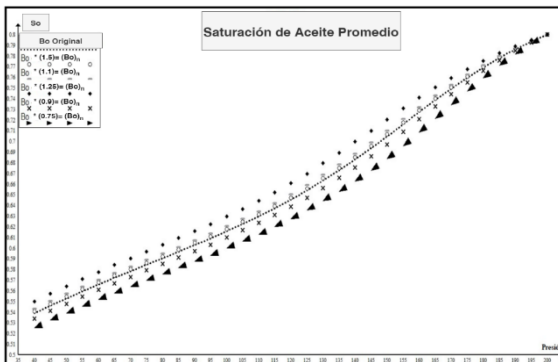


Figura 3.40 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso G. Aceite mediano.

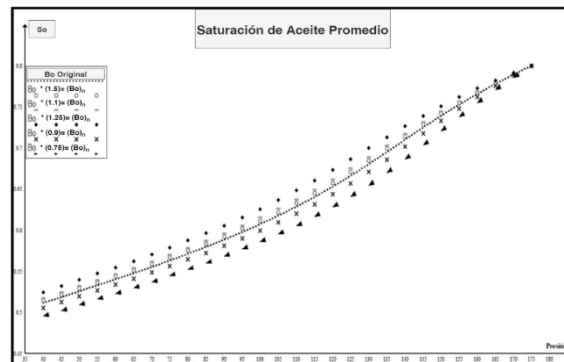


Figura 3.41 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso C. Aceite Ligero.

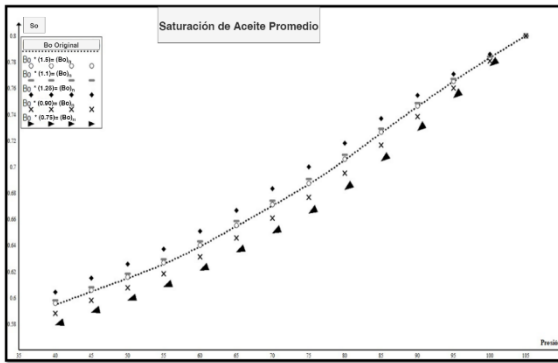


Figura 3.42 Saturación promedio obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso P. Aceite Pesado.

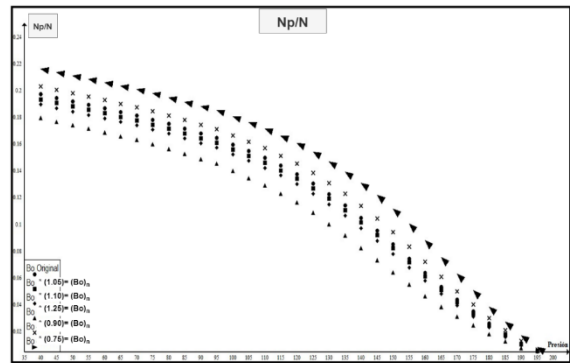


Figura 3.43  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso G. Aceite Mediano.

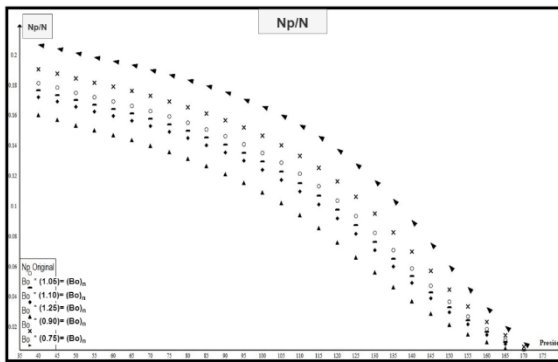


Figura 3.44  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso C. Aceite Ligero.

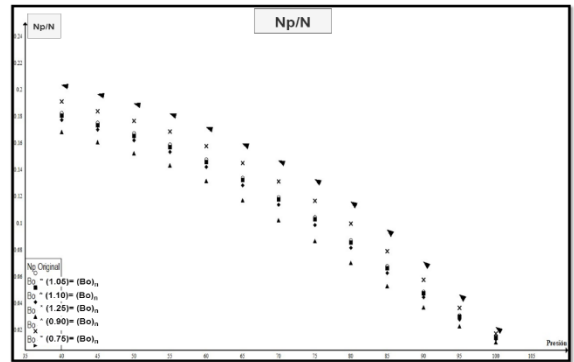


Figura 3.45  $N_p/N$  obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso P. Aceite Pesado.

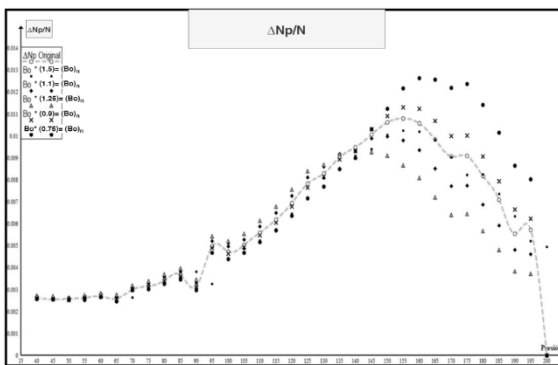


Figura 3.46  $\Delta N_p/N$  obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso G. Aceite Mediano.

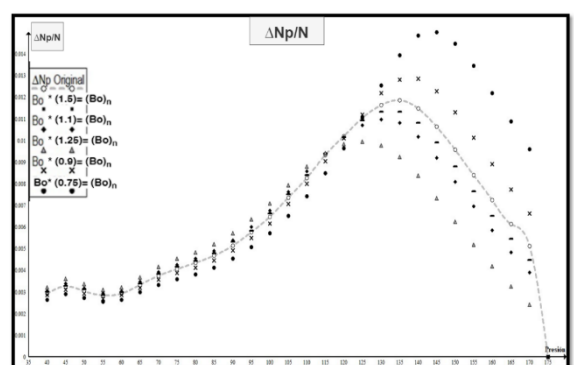


Figura 3.47  $\Delta N_p/N$  obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso C. Aceite Ligero.

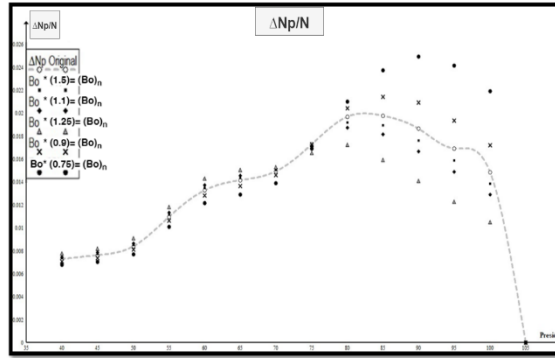


Figura 3.48  $\Delta Np/N$  obtenida con variaciones en  $B_o$  Caso P. Aceite Pesado.

## Relación de permeabilidades relativas aceite-gas

En esta sección, se lleva a cabo una evaluación de la relación de permeabilidades relativas, comparando resultados mediante diferentes correlaciones para su cálculo. Dada la relevancia de los datos de permeabilidades relativas en diversos problemas como el abordado en esta presente tesis, resulta trascendental evaluar su efecto. Lo normal es contar con curvas de mediciones de laboratorio o de correlaciones. Es importante señalar que en todos los métodos analizados en la presente tesis, se incorporaron correlaciones para calcular la relación de permeabilidades relativas. Garaicochea en su aproximación presenta los datos de permeabilidades relativas sin indicar su procedencia. En esta tesis se concluye que utilizó la correlación de Torcaso o alguna correlación derivada de Corey, debido a la aproximación de los resultados determinados en comparación con los obtenidos por G-B. Tanto las propiedades PVT como las permeabilidades relativas son cruciales en la predicción del comportamiento de los yacimientos; por esta razón, en esta tesis se presenta una lista de correlaciones que fueron usadas, y tienen antecedentes de aplicarse en casos reales, sin embargo, su aplicación debe basarse en un análisis técnico riguroso. La ventaja de estas correlaciones, ecs. 3.1 a 3.23, radica en su facilidad de incorporación en cualquiera de los métodos evaluados en esta tesis. Corey<sup>48,49</sup> presentó una correlación para calcular las permeabilidades relativas al aceite y gas:

$$S_{oe} = \left[ \frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{or}} \right], \quad (3.1)$$

$S_{oe}$  = Saturación de aceite efectiva

$$K_{ro} = S_{oe}^4; \quad (3.2)$$

$$K_{rg} = (1 - S_{oe})^2 (1 - S_{oe}^2), \quad (3.3)$$

Torcaso y Wyllie, presentaron la siguiente correlación:



$$Kro = \left[ \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right]^4, \quad (3.4)$$

$$Krg = \left[ 1 - \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right]^2 Kro = \left[ 1 - \left\{ \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right\}^2 \right], \quad (3.5)$$

$$S = \left[ \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right], \quad (3.6)$$

$$\frac{Krg}{Kro} = \frac{(1 - S)^2 (1 - S^2)}{S^4}, \quad (3.7)$$

Mehdi<sup>68</sup> presenta una correlación derivada de Corey, como sigue:

$$Kro = (1 - S)^4, \quad (3.8)$$

$$Krg = S^3(2 - S), \quad (3.9)$$

Tarek presenta la saturación efectiva de cada fase de la siguiente forma:

$$So^* = \left[ \frac{S_o}{1 - S_{wi}} \right], \quad (3.10)$$

$$Sw^* = \left[ \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}} \right], \quad (3.11)$$

$$Sg^* = \left[ \frac{S_g}{1 - S_{wi}} \right], \quad (3.12)$$

en donde:

$So^*$ ,  $Sw^*$  y  $Sg^*$  son la saturación efectiva al aceite, agua y gas, respectivamente, y  $S_{wi}$  es la saturación de agua irreductible o connata. Presentando la siguiente correlación:

$$Kro = (1 - Sg^*)^4, \quad (3.13)$$

$$Krg = Sg^*(2 - Sg^*), \quad (3.14)$$

Frick<sup>69</sup> presentó las siguientes correlaciones, para diversos medios: arenas no consolidadas bien clasificadas;

$$Kro = (So^*)^3, \quad (3.15)$$

$$Krg = (1 - So^*)^3, \quad (3.16)$$

arenas no consolidadas mal clasificadas;

$$Kro = (So^*)^{3.5}, \quad (3.17)$$

$$Krg = (1 - So^*)^2(1 - So^{*1.5}), \quad (3.18)$$

areniscas cementadas, calizas oolíticas y rocas con porosidad vulgar;

$$Kro = (So^*)^4, \quad (3.19)$$

$$Krg = (1 - So^*)^2(1 - So^{*2}), \quad (3.20)$$

Wahl<sup>22</sup> para areniscas presentó la siguiente correlación,

$$\frac{Krg}{Kro} = \varepsilon(0.0435 - 0.04556 \varepsilon), \quad (3.21)$$

en donde:

$$\varepsilon = \frac{1 - Sgc - Sw - So}{So - Sor}, \quad (3.22)$$

Obtención de la relación  $Krg/Kro$  a partir de datos de producción y datos PVT,

$$\frac{Krg}{Kro} = (R - Rs) + \frac{\mu_g B_g}{\mu_o B_o}, \quad (3.23)$$

En la figura 3.49, se muestra el efecto de los cambios de presión al calcular las permeabilidades relativas en la aproximación propuesta en esta tesis, mediante la correlación de Torcaso y Willie. Se observa que los valores calculados por medio de esta correlación presentan ligeras diferencias relacionadas a los cambios de presión.

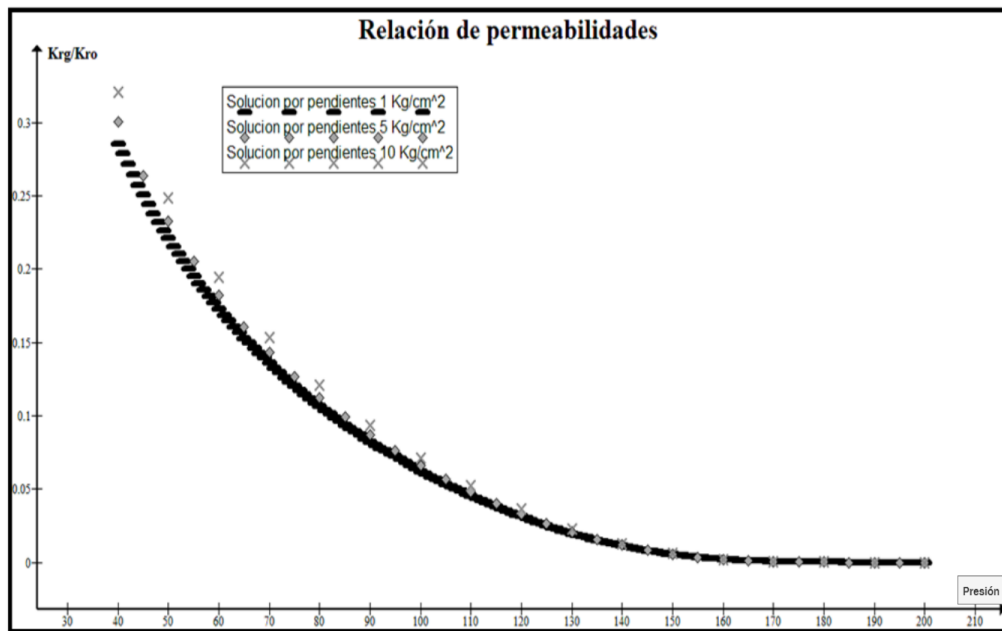


Figura 3.49 Cambios en las permeabilidades relativas calculadas por medio de correlaciones, aplicando la Solución propuesta a causa de los cambios de presión, Caso G.

En la figura 3.50 se aprecia la variación en el valor de la relación de permeabilidades relativas para el caso G, en donde la correlación para porosidad vugular mostró los valores más pequeños de  $K_{rg}/K_{ro}$ . Por otro lado, se sabe que cuanto más cercano es el valor de la relación de permeabilidades relativas a la unidad, los fluidos tienden a desplazarse con la misma facilidad.

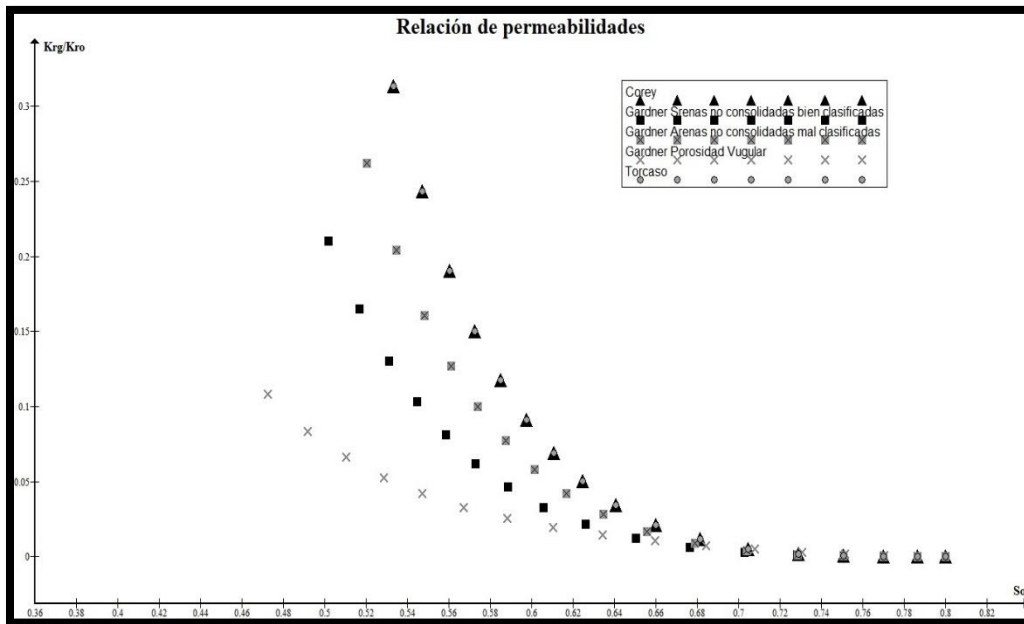


Figura 3.50 Comparación de las diversas correlaciones incorporadas al método de las pendientes, aplicados al caso G de estudio.

Asimismo, se observa que a medida que disminuyen los valores de la relación de permeabilidades relativas, la recuperación de aceite aumenta, como se puede verificar en la figura 3.51. Retomando las figuras 3.49 y 3.50, se observa que en los primeros intervalos de presión, los resultados se aproximan, y a medida que aumenta la saturación del gas, los resultados cambian, dichos resultados resaltan el efecto del gas para períodos de tiempo de intermedios a largos

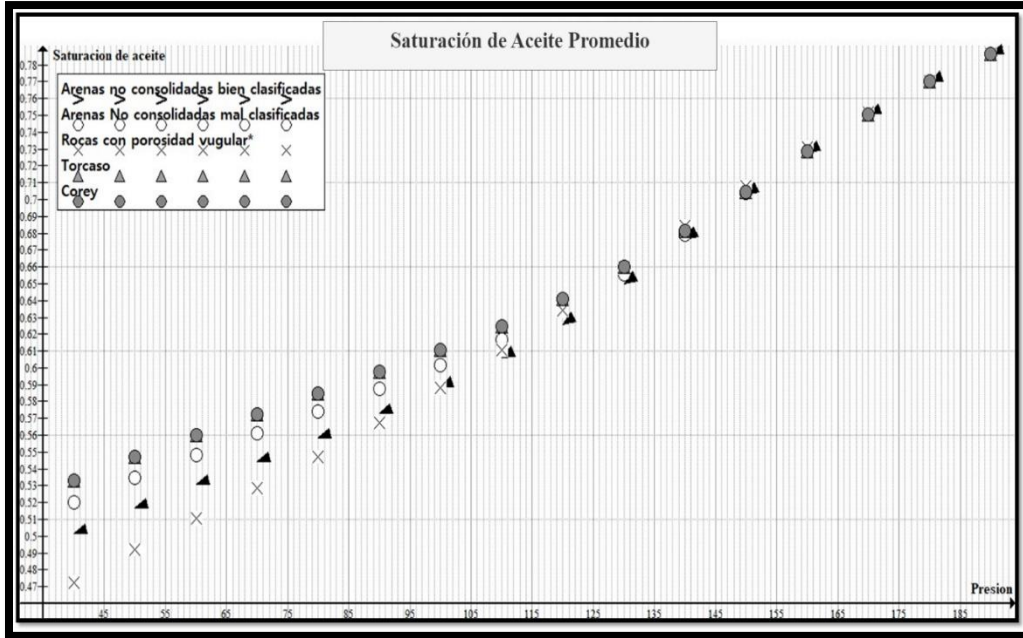


Figura 3.51 Comparación de la aplicación de correlaciones de permeabilidades relativas en la Saturación de aceite promedio, obtenida por la solución de pendientes.

### Multiplicación de permeabilidades relativas por un factor

Los factores multiplicadores son los siguientes: 2, 5, 10, 50 y 100. Para esta comparación se usó la correlación de Torcaso y Willie, calculando la relación de permeabilidades y al valor resultante se le multiplica por el factor. Los resultados se presentan en la figura 3.52 para el caso de estudio G.

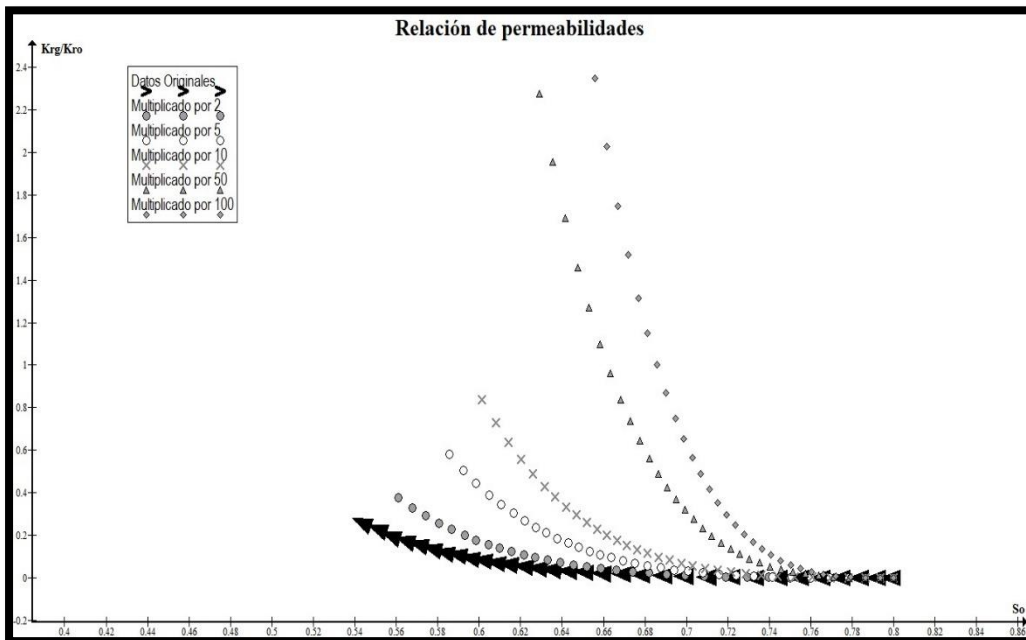


Figura 3.52 Relación de permeabilidades relativas por Torcaso obtenida con variaciones en la relación de permeabilidades. Caso G. Aceite mediano

Como se observa, al multiplicar la relación de permeabilidades relativas por un factor mayor a la unidad, aumenta  $K_{rg}$ ; por lo tanto,  $K_{ro}$  disminuye. A mayor incremento en la relación, la recuperación de aceite es menor, como se puede observar en las figuras 3.53 a 3.55. Asimismo, en estas figuras, se observan los resultados de incrementar la relación de permeabilidades, multiplicando por 100 y la comparación respecto a multiplicar por 50, en donde la diferencia no fue tan grande, comparado al multiplicar por 2, 5 y 10.

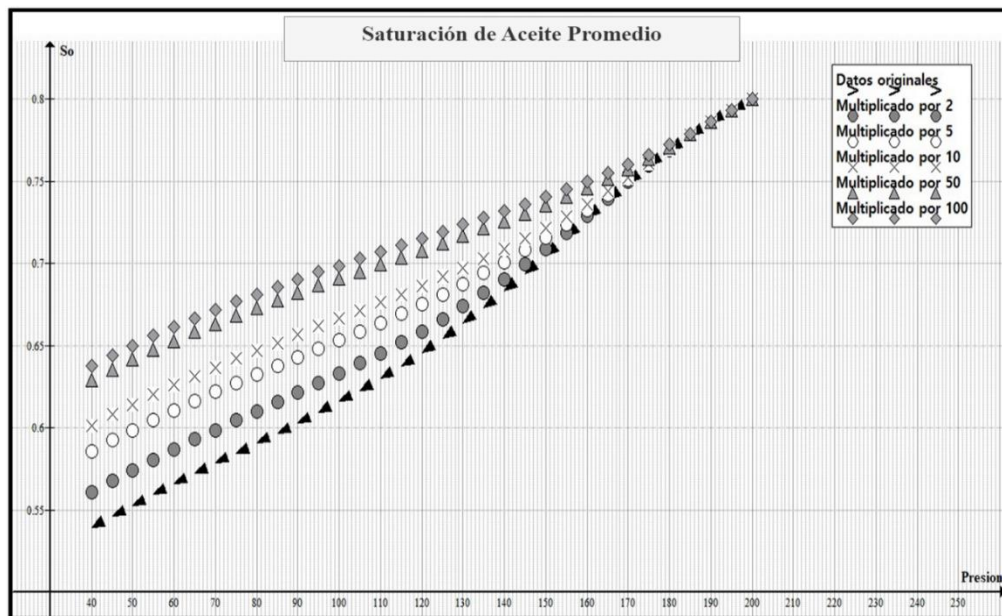


Figura 3.53 Efecto del incremento de la permeabilidad relativa al gas en la Saturación de aceite promedia. Caso G.

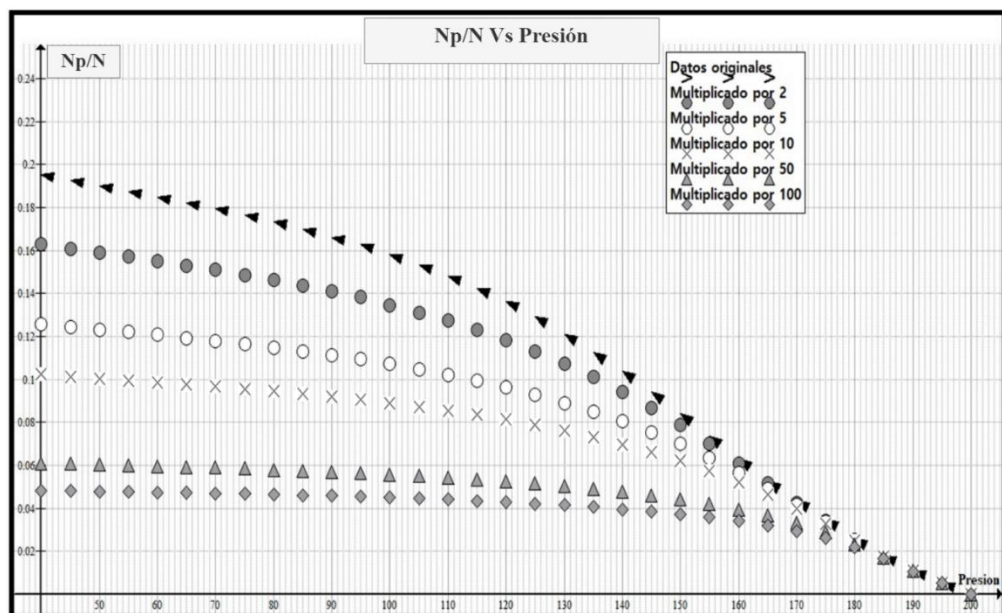


Figura 3.54 Efecto del incremento de la permeabilidad relativa al gas en  $N_p/N$ . Caso G.

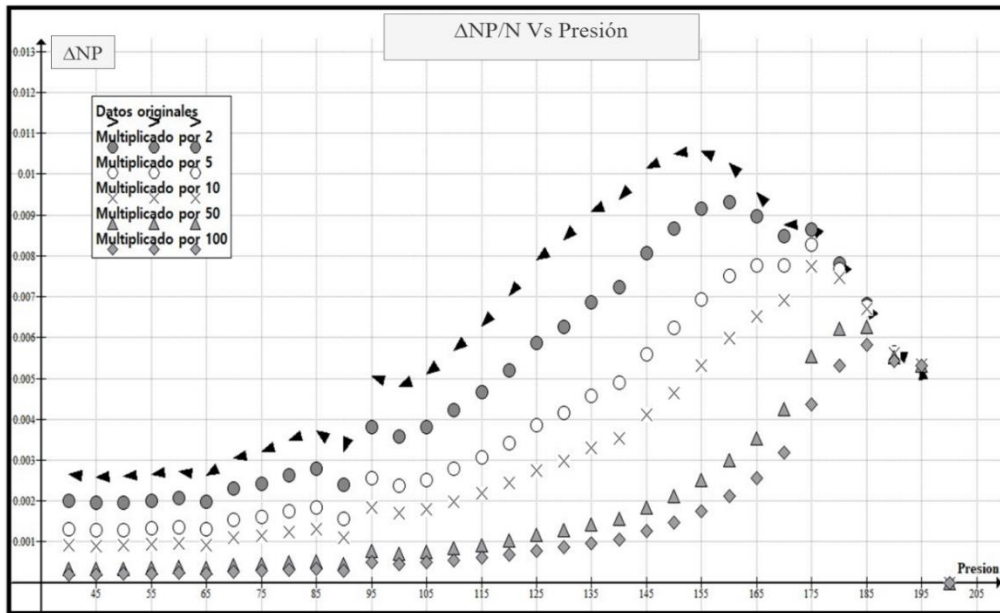


Figura 3.55 Efecto del incremento de la permeabilidad relativa al gas en  $\Delta NP/N$ . Caso G.

Para complementar lo antes estudiado, se procede a aumentar ahora la Permeabilidad relativas al aceite multiplicando por el factor 1/100 y se presentan los resultados en la figura 3.56, en dónde se observa que el aumento en la permeabilidad relativa al aceite, resultó en mayores recuperaciones de este.

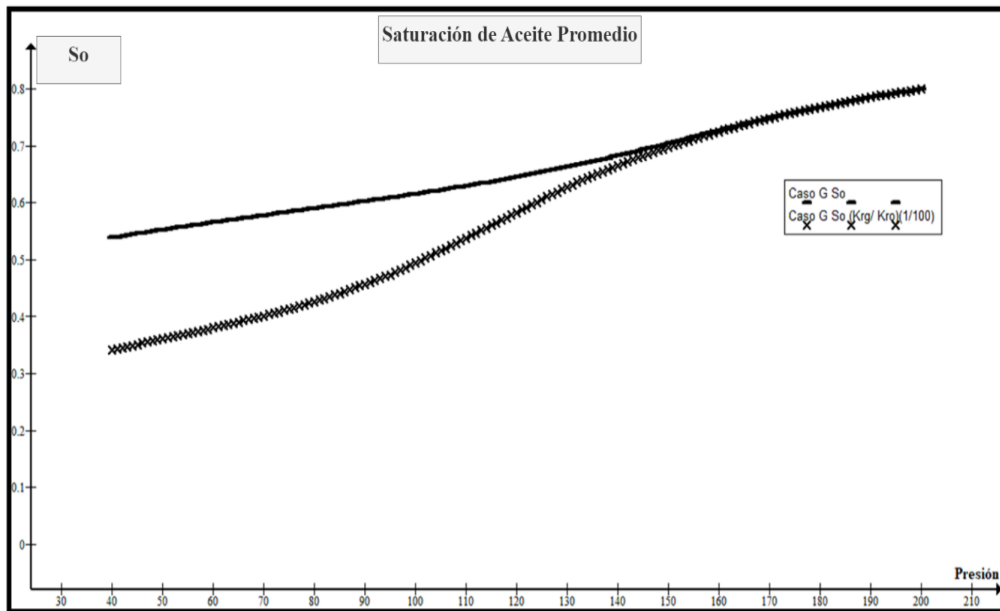


Figura 3.56 Efecto del incremento de la permeabilidad relativa al aceite en la Saturación de aceite promedia. Caso G.

En el informe presentado por la Energy Resources Conservation Board<sup>80</sup>, en el año de 1975 investigan los efectos de los gastos de producción y datos PVT en la recuperación de aceite, de que desprenden las siguientes observaciones y conclusiones:

- La distribución de volúmenes y el efecto de la saturación del gas disuelto liberado en la recuperación de aceite de los yacimientos, puede verse afectada por los gastos de producción, si estos gastos generan grandes variaciones en la presión del yacimiento.
- Al alcanzar la saturación de gas crítica, la eficiencia de desplazamiento del gas en expansión disminuye rápidamente y la RGA aumenta.
- La producción del aceite disminuye a medida que avanza el proceso de explotación del yacimiento, debido a la disminución de la presión, de la permeabilidad efectiva del aceite, y el aumento de su viscosidad.
- Se considera que una mayor cantidad de gas disuelto en el aceite representa mayor energía en el yacimiento y, por lo tanto, una mayor recuperación de aceite. En la práctica esto rara vez sucede, ya que el aumento del gas disuelto genera un mayor encogimiento del aceite, provocando un incremento en la RGA y con esto una reducción en la recuperación de aceite.

En la presente tesis, se observa una disminución en la recuperación de aceite a medida que la permeabilidad relativa al gas aumenta; asimismo, respecto a los efectos viscosos, adquieren mayor relevancia a medida que aumenta la densidad del aceite (ver capítulo 3); esto es consistente con el informe de la ERCB. También se concluye que, al llegar a la presión de burbuja, la fase más eficiente del proceso de empuje por gas en solución es la inicial, la cual puede presentar una cresta de producción a tiempos cortos. La aparición de dicha cresta debe interpretarse como un indicador grave, ya que evidencia que la estrategia de producción es agresiva, y por lo tanto, el yacimiento se encuentra bajo condiciones críticas de producción; es decir, con gastos de producción altos, lo que se verá reflejado en una disminución drástica de la producción de aceite en un periodo de tiempo corto. Una estrategia de producción agresiva genera producciones altas en referencia al potencial del yacimiento, pero dichas producciones no se sostendrán por un largo periodo de tiempo. Por otro lado, se reconoce que los yacimientos de México presentan características particulares, especialmente al tratarse de carbonatos, lo que en algunos casos se puede asociar gastos de producción muy grandes.

## Capítulo 4

### Discusiones

Discusión #1. Blunt<sup>68</sup> señala que, en la ingeniería de yacimientos moderna, el empuje por gas en solución se considera como un mecanismo de recuperación terciaria. Aquí hay que aclarar que los conceptos relacionados con los procesos de recuperación primaria, secundaria y terciaria están bien establecidos dentro del proceso de explotación de los yacimientos. Muskat en los 40's señala que en la industria petrolera existía confusión respecto al uso de los términos relacionados con la energía primaria del yacimiento, y de los procesos de recuperación secundaria.

Es importante destacar que una estrategia de explotación agresiva no es compatible con ningún proceso de explotación (primaria, secundaria o terciaria). Así, en un programa de mantenimiento de presión por inyección de algún fluido, es importante considerar que el efecto de inyectar un fluido, puede ocasionar una reducción en la permeabilidad efectiva al aceite, lo que sin duda tiene un efecto negativo en su recuperación de aceite. De esta forma, es probable que el yacimiento recupere menos aceite del que podría haber recuperado por recuperación primaria. Respecto a lo antes señalado, Muskat afirma que, bajo una estricta regulación de los gastos de producción, la inyección de agua es sumamente favorable, ya que permite el equilibrio entre los volúmenes incorporados y los producidos; asimismo, reporta casos favorables con inyección de gas, aunque no necesariamente en lo económico, ya que la cantidad de gas a inyectar debe ser proporcional al volumen de aceite extraído. Este último punto en la práctica, representa un gran problema.

Bajo estrategias de producción agresivas, es altamente probable que antes de que se presente un mantenimiento de presión en el yacimiento por la inyección de algún fluido, se presente la canalización de este fluido hacia los pozos; esto es un punto crítico en yacimientos carbonatados naturalmente fracturados, lo que va provocar la rápida declinación de la producción.

Muskat señala que las operaciones de recuperación secundaria consisten en la inyección de gas, aire o agua en un yacimiento, después de que este ha alcanzado un estado de agotamiento importante de su energía para la expulsión del aceite, o cuando las tasas de producción se acercan al límite de la operación rentable. La recuperación primaria, o de la energía natural del yacimiento, implica necesariamente la disminución de la presión del yacimiento.

Un yacimiento que produce por empuje de gas en solución, experimenta un agotamiento primario, en donde la energía principal del yacimiento proviene de la liberación de gas del aceite. El empuje por gas en solución no puede ser clasificado



como un mecanismo de recuperación terciaria, ya que por sí solo representa la recuperación primaria o la energía inherente del yacimiento. Cole<sup>61</sup>, sugiere que se puede identificar un yacimiento con empuje por gas en solución por las siguientes características:

- La presión del yacimiento disminuye rápidamente y de manera continua. Esta disminución se atribuye a la ausencia de fluidos externos o un casquete de gas disponibles para reemplazar el gas y el aceite extraídos.
- La falta de un mecanismo de empuje por agua, implica que habrá poca o nula producción de agua con el aceite durante toda la vida productiva del yacimiento.
- Se caracteriza por un rápido incremento en la relación gas-aceite en los pozos. Una vez que la presión del yacimiento cae por debajo de la presión de burbuja, el gas se libera y cuando excede la saturación de gas crítica, el gas comenzará a fluir hacia el pozo junto con el aceite.
- La recuperación de aceite de yacimientos que producen por empuje por gas en solución puede variar entre el 5 y el 30%.

Cole sugiere que los yacimientos que producen por EGS son candidatos para procesos de recuperación secundaria, ya que la baja recuperación de aceite implica que grandes cantidades de aceite permanecen en el yacimiento. Esta idea, ha sido un argumento para promover la implantación de procesos de recuperación secundaria; sin embargo, los procedimientos para recuperar este aceite remanente pueden ser complejos y costosos.

El campo Akal sobresalió a nivel nacional y mundial por la cantidad de aceite que producía diariamente, y es poco probable que esto se repita; por lo que es fundamental reflexionar sobre cómo la administración de yacimientos idealizada se centra en la búsqueda de uno o dos campos que puedan compensar el déficit de la producción nacional. Es fundamental considerar la historia de Estados Unidos, y cómo lograron mantenerse como líderes en la industria durante tanto tiempo, incluso con pozos con una producción promedio de 11.3 bpd, siendo un referente en la industria petrolera. Si se continúa con estrategias de sobre explotación de los yacimientos descubiertos y actualmente productores, se seguirá dejando gran parte del aceite en el subsuelo. Las estrategias de producción agresivas obligan a que los yacimientos produzcan mayoritariamente a causa del empuje por gas en solución, pero tampoco se puede idealizar que nuestros campos son sujetos de efectos gravitacionales favorables y acuíferos activos, lo anterior sin considerar la naturaleza carbonatada de la mayoría de los campos petroleros del país, lo que hace que cualquier proceso alcance un alto grado de complejidad.

Si tomamos en cuenta el inicio y final de la historia de producción de un campo, se podrá observar que la mala administración, acompañada de un programa de recuperación secundaria incompatible, solo traerá pérdidas económicas. Rockefeller señalaba que “el mejor negocio del mundo era el petrolero y el segundo mejor negocio del mundo el petrolero mal gestionado”. Por otro lado, existe un gran potencial y campos por explorar. Difícilmente volveremos a ver campos como Akal o Ku-Maloob-Zaap, por lo que una tarea es indagar en estrategias de explotación diferentes, y hacer uso de los antecedentes técnicos existentes para la mejor toma de decisiones. A continuación, se presentan tres tipos de aceite, los cuales se clasifican como ligero, mediano y pesado (ver C-H<sup>6</sup>): Caso (C): Rsi=721 (scf/stb); Caso (G): Rsi=120 (scf/stb) y Caso (P): Rsi= 87.67 (scf/stb)

Esta información se plasma como la respuesta teórica, la cual está dada por los resultados obtenidos para los tres tipos de aceite (C, G y P). Los resultados se presentan para efectos de comparación y su relación con el comportamiento de producción de datos reales de campos<sup>69</sup>. Las figuras 4.1 a 4.5 presentan el comportamiento de producción normalizada en relación a la disminución de un kilogramo de presión. El patrón observado se caracteriza por un pico inicial seguido de una disminución constante de la producción a medida que la presión disminuye. Es importante destacar que, los datos normalizados coinciden con los patrones observados en los campos Maloob, Ku, Xanab, Zaap y Akal, respectivamente.

Estos datos contribuyen a una mejor comprensión del comportamiento de estos yacimientos. En la figura 4.1 se presenta una comparación entre los tres tipos de aceite estudiados (datos de libro) y el comportamiento del campo Maloob, en donde se identifica una similitud con los datos de producción reales. Esta similitud se reproduce en la figura 4.2, para el campo Ku, así como en los tres campos restantes. Se plantea la hipótesis de que las crestas o picos observados representan los efectos del empuje por gas en solución, resultados de altos gastos de producción, lo que va repercutir en altas tasas de declinación. Es importante destacar que los yacimientos analizados anteriormente, registraron producciones excepcionales en sus picos, lo cual va en contra de uno de los principios fundamentales para que en los yacimientos se pueda propiciar el efecto favorable de drenaje por gravedad o empuje por algún acuífero asociado al yacimiento.

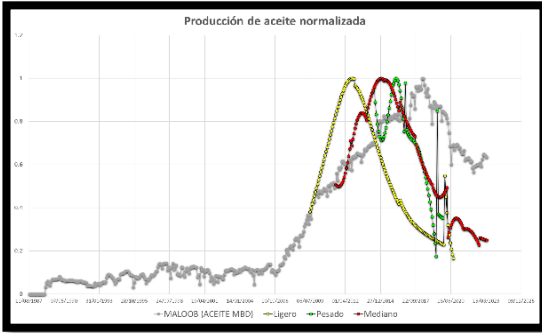


Figura 4.1 Producción normalizada del campo Maloob comparada con la respuesta del método propuesto.

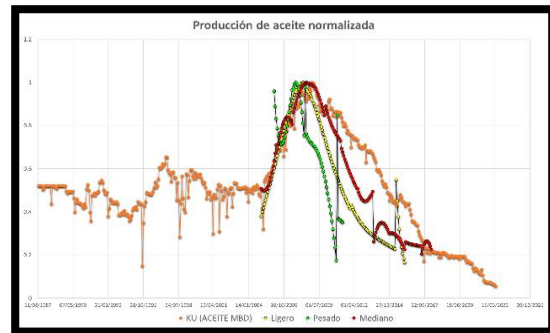


Figura 4.2 Producción normalizada del campo Ku comparada con la respuesta del método propuesto.

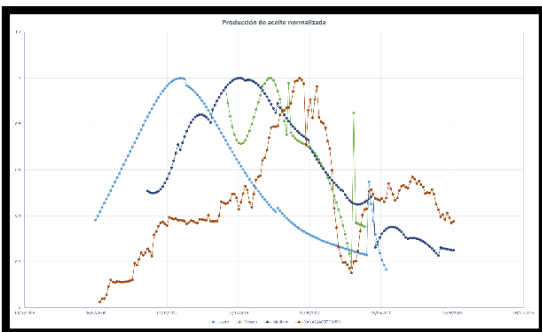


Figura 4.3 Producción normalizada del campo Xanab comparada con la respuesta del método propuesto.

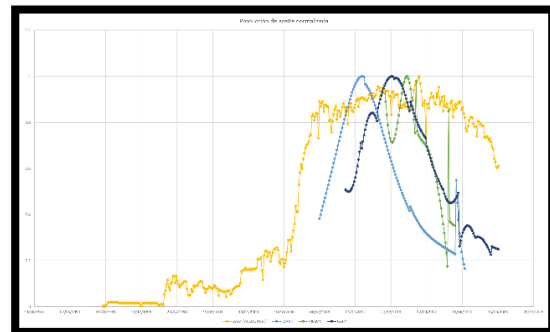


Figura 4.4 Producción normalizada del campo Zaap comparada con la respuesta del método propuesto.

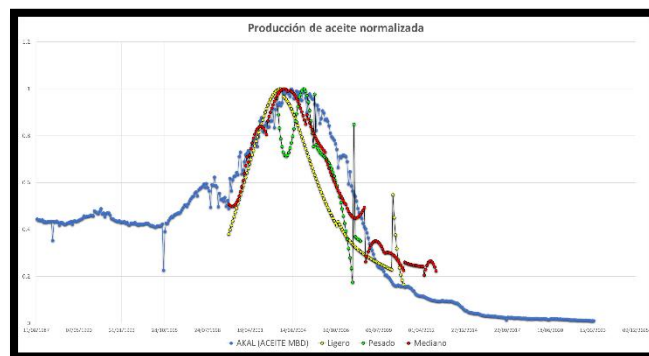


Figura 4.5 Producción normalizada del campo Akal comparada con la respuesta del método propuesto.

A partir de los argumentos anteriores, se plantea la hipótesis de que tanto el campo Akal como el campo Ku produjeron principalmente debido al efecto del empuje por gas en solución; en donde no se debe dejar de mencionar, los altos gastos de producción y un programa de terminación de pozos intensivo. Con lo anterior, es de anticipar lo que podría suceder con los campos Xanab, Maloob y Zaap, que presentan declinaciones con pendientes similares a los observados en los campos Akal y Ku. En la figura 4.6 se presentan evidencias de campos que produjeron por empuje de gas en solución, donde se puede observar un comportamiento idéntico a los campos en discusión y las respuestas teóricas.

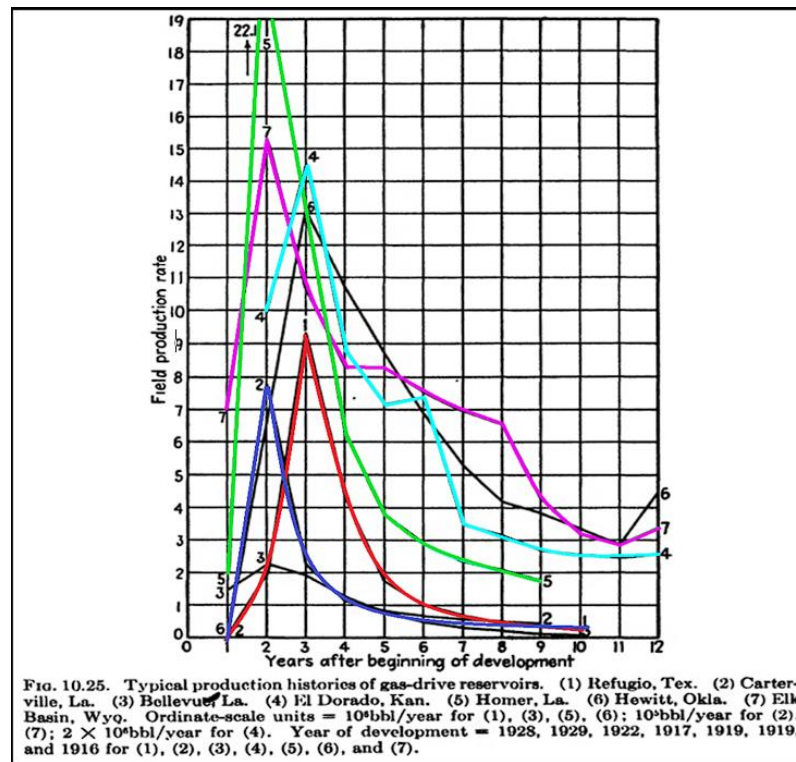


Figura 4.6 Históricos de producción típicos, de yacimientos que producen por empuje de gas en solución. Extraída de Muskat 1949 figura 10.25.

En relación a los campos Xanab y Maloob, es evidente su declinación. La implementación de algún proceso de mantenimiento de presión incompatible, puede representar un déficit importante en los activos y un impacto significativo en la industria petrolera del país. El campo Zaap, aunque muestra una cresta menos pronunciada, su producción ha disminuido en aproximadamente un 40% en apenas cinco años, lo cual es una señal preocupante. Si estos campos continúan en este

ritmo de producción, es probable que para 2029 estén cerca del abandono, similar a lo que ocurre con Akal y Ku.

Muskat señala que para 1930 la tendencia de mantener la presión mediante la inyección de fluidos en las etapas iniciales de un yacimiento era creciente y una práctica común, pero especialmente en aquellos yacimientos que producían por empuje de gas en solución, donde no era perceptible el empuje por agua de manera sustancial, rara vez se mantenía un yacimiento sin intervención a menos que existiesen pruebas contundentes de un empuje de agua completo; para dicha fecha la evaluación del agotamiento natural se basaba más en estimaciones teóricas que en observaciones directas, por lo que esta metodología se considera una práctica de ingeniería eficiente y se debe fomentar en la industria. Cómo se puede observar en México, un siglo después dichas recomendaciones, no se han llevado a la práctica y se ha mantenido una estrategia de producción en términos técnicos deficiente.

Discusión #2. Tracy, Schilthuis y Pirson exploraron alternativas para encontrar soluciones al problema de empuje de gas en solución. Todas estas contribuciones se adaptaron a los límites tecnológicos de su tiempo. En esta tesis, después de estudiar y analizar estas soluciones, se concluye que proporcionan resultados muy precisos. Asimismo, se demostró que estas soluciones implicaban menor complejidad y un procedimiento relativamente simple, pero que se puede percibir complejo por el número de iteraciones, lo que finalmente impacta en una disminución de los errores. Como parte de la evaluación, también se analizó el método propuesto por Olatunde et al.<sup>65</sup>, que, en términos generales, parten de la ecuación de balance de materia que equilibra la producción con la expansión de los fluidos.

Este procedimiento por medio de iteraciones permite encontrar el valor de saturación deseado, usando como variable el valor de  $N_p$ , esta ecuación de balance de materia se opera por medio de la integración de la misma, por medio del uso de una integración trapezoidal, la que por su naturaleza conlleva un error implícito. Su uso trae consigo un error, el cual es ajeno a la operación y se basa en la formulación y planteamiento. Se identificó una posible razón para el uso, por parte de este autor, de la integración trapezoidal, ya que la aplicación de algún otro algoritmo numérico, tal como los métodos de integración de Simpson, implican una cantidad mayor de puntos intermedios de  $N_p$  para permitir el ajuste de la integración, pero como se sabe, esta variable se calcula por medio de iteraciones, por lo que, si se aplicará algún método de Simpson, no sería posible la obtención de múltiples valores de  $N_p$ .

En la presente tesis, se realizaron adaptaciones con referencia a los coeficientes para establecer una metodología derivada del método de Simpson, la que presenta resultados favorables para los valores calculados de  $S_o$ , pero aún con las adaptaciones, los resultados obtenidos mediante la aplicación de los métodos clásicos siguen presentado mejores resultados. Como otra opción, se desarrolló un polinomio tipo, para representar una curva general de  $N_p$ , lo cual implica suposiciones sumamente riesgosas, y del cual no se obtuvieron resultados óptimos, a continuación, se presentan los resultados.

Las figuras 4.6 y 4.7 presenta resultados de Olatunde et al. Se observan desviaciones de los resultados en comparación a la respuesta de un simulador. El modelo de Olatunde se aplicó a los tres aceites estudiados, y se obtuvieron los resultados presentados en las figuras 4.8 a 4.13; al compararlos, se verifica que los modelos de Turner, Tracy, Schiltuis y Pirson presentan mejores resultados. Hay que observar que los resultados de Olatunde se desvían tanto como la aproximación de C-H Por lo tanto, esta denominada “nueva metodología” no se considera de utilidad, ya que se pueden obtener mejores resultados con cualquiera de los modelos usados en la presente tesis, incluso la aproximación propuesta.

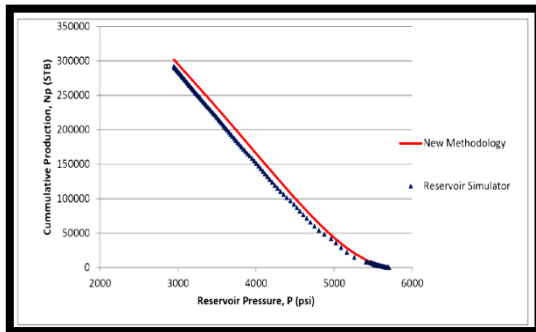


Figura 4.6 Resultados de Olatunde et al.<sup>65</sup> vs. simulador.

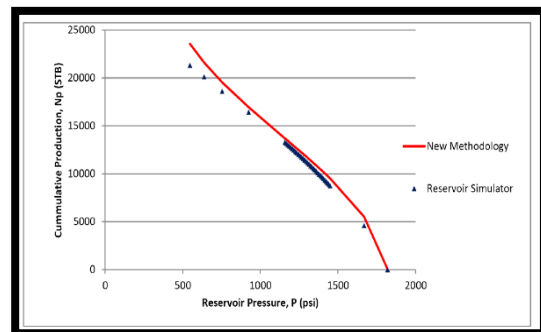


Figura 4.7 Resultados de Olatunde et al.<sup>65</sup> vs. simulador.

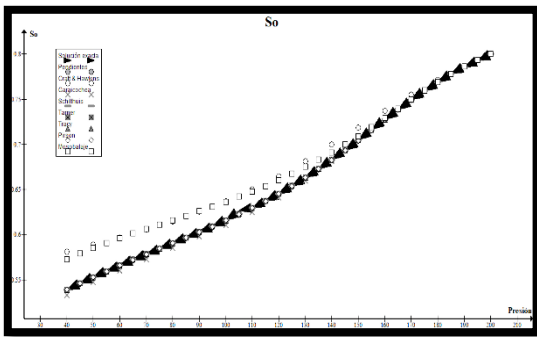


Figura 4.8 Comparación de los métodos para la obtención de saturación de aceite, caso G.

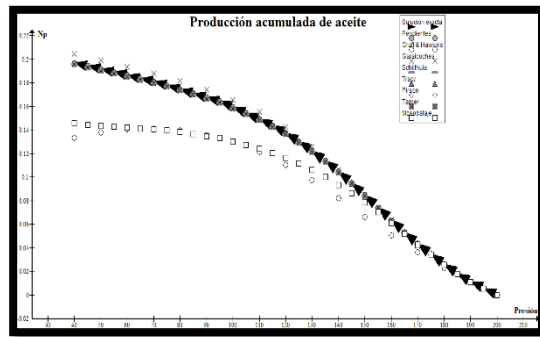


Figura 4.8 Comparación de los métodos para la obtención de producción acumulada de aceite  $N_p$ , caso G.

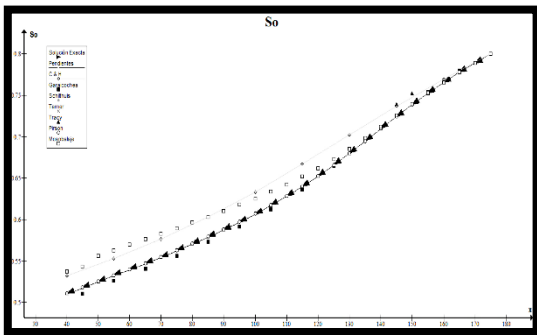


Figura 4.10 Comparación de los métodos para la obtención de saturación de aceite, caso C.

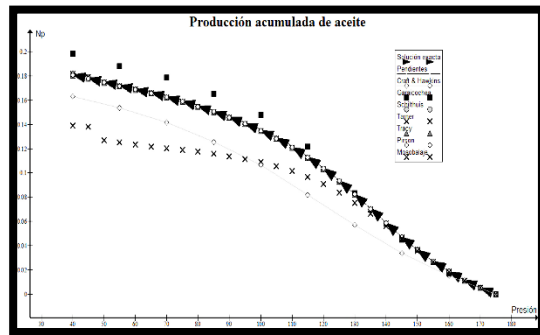


Figura 4.11 Comparación de los métodos para la obtención de producción acumulada de aceite  $N_p$ , caso C.

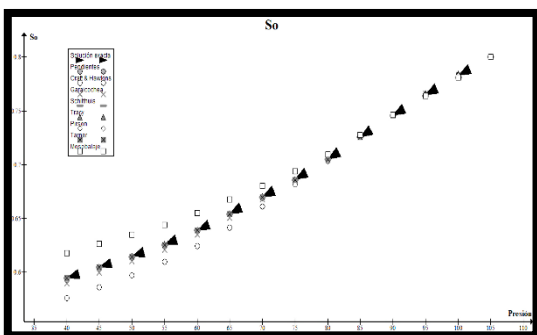


Figura 4.12 Comparación de los métodos para la obtención de saturación de aceite, caso P.

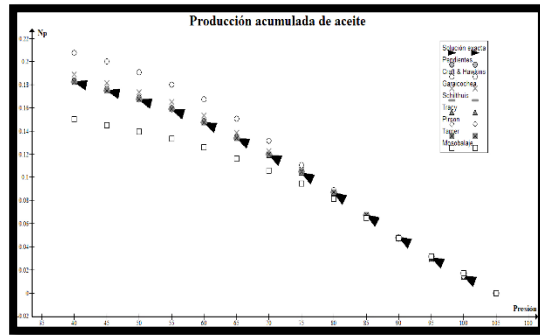


Figura 4.13 Comparación de los métodos para la obtención de producción acumulada de aceite  $N_p$ , caso P.

## Conclusiones

De los resultados alcanzados en el presente trabajo, se presentan las siguientes conclusiones:

1. Se presenta un modelo de aproximación numérica a la solución de la ecuación de Muskat para evaluar el comportamiento de yacimientos que producen por empuje de gas en solución, el cual está basado en la combinación de los métodos de Euler y de Garaicochea, el que produce muy buenos resultados. Estos resultados son comparados con los obtenidos de usar métodos clásicos como los de Schilthuis, Turner, Tracy y Pirson.
2. Se demuestra que la variación entre usar cambios de presión de  $1 \text{ kg/cm}^2$  y  $0.1 \text{ kg/cm}^2$  es despreciable, tanto para la solución usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, como el método de Euler.
3. Al aplicar el método de Euler con cambios de presión de  $1 \text{ kg/cm}^2$  se puede disminuir diez veces menos la cantidad de información a procesar y la cantidad de cálculos en comparación con cambios de presión de  $0.1 \text{ kg/cm}^2$ . También es posible utilizar cambios de presión de  $5 \text{ kg/cm}^2$  como máximo y obtener resultados con ligeras desviaciones.
4. Un proceso de optimización de los métodos numéricos permite el estudio de problemas complejos con procedimientos simples.
5. Cualquiera de los métodos de balance de materia, poniendo especial atención en el valor de tolerancia para la convergencia generan muy buenos resultados. Lo anterior también sucede con las aproximaciones como la propuesta en esta tesis. Asimismo, la aproximación de Olatunde, cuya formulación implica una integración trapezoidal, diverge en los resultados.
6. Los datos de permeabilidades relativas presentadas por G-B para el caso teórico G, muestran un comportamiento similar a los datos obtenidos por la correlación de Torcaso y Willie.
7. La densidad del aceite es la propiedad física de mayor relevancia en la recuperación de aceite, ya que está relacionada directamente con la relación de solubilidad, la viscosidad y la compresibilidad.
8. Los cambios de presión afectan principalmente a las aproximaciones numéricas por la naturaleza del procedimiento, y no así, a los balances de materia.
9. Se verifica que el aumento en la permeabilidad relativa al gas genera una disminución importante en la recuperación de aceite.



10. La aplicación de correlaciones para la obtención de la relación de permeabilidades relativas debe evaluarse antes de su aplicación, ya que los resultados obtenidos podrían no representar el movimiento de los fluidos en el medio poroso.
11. La utilidad de los resultados es proporcional a la calidad de la información procesada, principalmente información de permeabilidades relativas y PVT.
12. La información de permeabilidades relativas es un parámetro fundamental en el estudio del comportamiento de los yacimientos, y siguen siendo una de las principales incógnitas aún por resolver.
13. Con respecto a las pruebas de sensibilidad, la relación de permeabilidades, es la propiedad que mayores desviaciones puede provocar en los resultados obtenidos al aplicar cualquier método o aproximación numérica.
14. Se muestra el comportamiento de producción normalizado de cinco campos del país, cuya tendencia se ajusta al comportamiento teórico de yacimientos que producen por empuje de gas en solución, lo que es consistente con los resultados mostrados en la presente tesis.
15. Los métodos clásicos de balance de materia y el método propuesto, pueden arrojar resultados muy cercanos a los datos de producción reales. La selección de modelos complejos para evaluar el comportamiento de yacimientos, muchas veces no es necesariamente la mejor opción; modelos más simples pueden dar mejores resultados.
16. Los resultados obtenidos en referencia al índice de recuperación por empuje de gas en solución fueron de 20 a 30%.
17. Las estrategias de producción agresivas, no presentan compatibilidad con ningún método de recuperación.
18. Los yacimientos con estrategias de producción basadas exclusivamente en la energía primaria del yacimiento, es una práctica deficiente puesto que la recuperación de aceite se minimiza. Una estrategia de explotación debe considerar un plan integral desde el descubrimiento del yacimiento hasta su abandono. Una vez abatida la energía primaria, toda estrategia de recuperación secundaria y mejorada resultan complejas, caras y con alta incertidumbre.
19. Como se observó, los yacimientos que producen por empuje por gas en solución, como la mayoría de los yacimientos del país, pueden tener cantidades de aceite no recuperado a causa de malas prácticas, por lo que es vital el diseño de estrategias de explotación adecuadas.

## Nomenclatura

- $B_o$  = factor de volumen del aceite ( $m^3_o @ c.y.$ ) / ( $m^3_o @ c.s.$ )
- $B_{oi}$  = Factor de volumen del aceite a presión inicial del yacimiento ( $m^3_o @ c.y.$ ) / ( $m^3_o @ c.s.$ )
- $B_g$  = factor de volumen del gas ( $m^3_g @ c.y.$ ) / ( $m^3_g @ c.s.$ )
- $B_{gi}$  = Factor de volumen del gas a la presión inicial del yacimiento ( $m^3_g @ c.y.$ ) / ( $m^3_g @ c.s.$ )
- $B_t$  = factor de volumen de la fase de gas y aceite ( $m^3_{o+g} @ c.y.$ ) / ( $m^3_o @ c.s.$ )
- $c$  = Compresibilidad ( $kg/cm^2$ )<sup>-1</sup>
- $k$  = Permeabilidad absoluta (Darcy)
- $k_{ro}$  = Permeabilidad relativa al aceite (Darcy)
- $k_{rg}$  = Permeabilidad relativa al gas (Darcy)
- $m$  = Relación del Volumen original del gas al volumen original de aceite ( $m^3_g @ c.y.$ ) / ( $m^3_o @ c.s.$ )
- $mNBoi$  = Volumen de poros ocupado por la capa de gas a una presión inicial
- $m_o$  = masa de aceite en el yacimiento por unidad de volumen
- $m_w$  = masa de agua en el yacimiento por unidad de volumen
- $m_g$  = masa de gas en el yacimiento por unidad de volumen
- $mgd$  = Masa de gas disuelto en el agua y el aceite es
- $mgf$  = Masa de gas libre
- $N$  = Volumen original de aceite ( $m^3_o @ c.s.$ )
- $NBoi$  = Volumen original de aceite en sitio ( $m^3_o @ c.y.$ )
- $N_r$  = volumen de aceite remanente en el yacimiento ( $m^3_o @ c.y.$ )
- $NR_{si}$  = Volumen de gas inicial en solución ( $m^3_g @ c.y.$ )
- $N_p$  = Producción acumulada de aceite ( $m^3_o @ c.s.$ )
- $GB_{gi}$  = Volumen inicial de la capa de gas ( $m^3_g @ c.y.$ )
- $G_r$  = volumen de gas remanente en el yacimiento ( $m^3_g @ c.y.$ )
- $G_p$  = Producción acumulada de gas ( $m^3_g @ c.s.$ )
- $\Delta N_p$  = Producción de aceite por cada  $kg/cm^2$  de presión abatido ( $m^3_o @ c.s.$ )
- $\Delta G_p$  = Producción de gas por cada  $kg/cm^2$  de presión abatido ( $m^3_g @ c.s.$ )
- $p_i$  = Presión inicial ( $kg/cm^2$ )
- $p_b$  = Presión de burbuja ( $kg/cm^2$ )
- $q_g$  = Producción de gas ( $m^3_g / día$ )
- $q_o$  = Producción de aceite ( $m^3_o / día$ )
- $q_{gdisuelto}$  = Producción de gas disuelto liberado ( $m^3_g / día$ )
- $q_{glibre}$  = Producción de gas libre ( $m^3_g / día$ )
- $R$  = Relación ·gas aceite instantánea GOR ( $m^3_g / m^3_o$ )

- $R_s$  = Relación de solubilidad ( $m^3_g / m^3_o$ )
- $R_{si}$  = Solubilidad del gas a la presión del yacimiento original ( $m^3_g / m^3_o$ )
- $S_f$  = Saturación de la fase f: aceite, gas o agua
- $t$  = Tiempo (días)
- $\mu_f$  = Viscosidad de la fase f: aceite o gas (Poises)
- $V$  = Volumen ( $m^3$ )
- $V_{or}$  = Volumen de aceite residual ( $m^3$ )
- $V_p$  = Volumen de poros ( $m^3$ )
- $W_e$  = Entrada acumulativa de agua al yacimiento ( $m^3$ )
- $\Delta p$  = diferencia de presión ( $kg/cm^2$ )
- $\rho$  = Densidad ( $gr/cm^3$ )
- $\emptyset$  = Porosidad

## Referencias

1. Muskat, M.: Physical Principles of Oil Production, McGraw-Hill Book Company, Inc.1949.
2. Schilthuis.: "Active Oil and Reservoir Energy". Trans. AIME., 1936.
3. Turner, J.: "How Different Size Gas Cap and Pressure Maintenance Programs After Amount of Recoverable Oil," Oil Weekly, 1945.
4. Tracy.: "Simplified Form of the Material Balance Equation", Trans. AIME., 1955.
5. Pirson.: Oil Reservoir Engineering, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1958.
6. Craft, B. C. y Hawkins, M.F.: Applied Petroleum Reservoir Engineering, McGraw-Hill Book Co., 1958.
7. F. Garaicochea, J. Bashbush, Apuntes de comportamiento de los yacimientos, División de ingeniería en ciencias de la tierra departamento de explotación del petróleo, (1984)
8. Barreto O. J, Padilla S. R.: "Aproximación a la Solución de la EBM de Muskat para Yacimiento Produciendo por Empuje de Gas en Solución con Base en el Método de Euler-Garaicochea", Jornadas Técnicas de la AIPM Delegación México, 2023
9. Padilla S. R. et al.: "Comportamiento del Frente de Saturación en Yacimientos Sujetos a Efectos Combinados de Segregación y Empuje de Gas en Solución", Trabajo aprobado para publicación en 10/96 en memorias del XXI Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, UDLA, Cholula Puebla México, Octubre 17-19, p.7-12, 1996.
10. Padilla S. R. et al.: "Inflow Performance Relationships under Gravity Segregation for Solution Gas-Drive Reservoirs", ETCE 2000 and OMAE 2000 "Energy for the New Millenium", New Orleans, Louisiana USA, February, 14-17, 2000.
11. Padilla S. R. et al.: "On the Decline Curve Behavior with Multiphase Flow and Gravitational Effects in Homogeneous Reservoirs", Paper presented at the 9th Latin American Congress in Heat and Mass Transfer – LATCYM 2002, held in San Juan Puerto Rico, October 20-22, 2002.
12. Padilla S. R. et al.: "Reservoir Performance under Solution Gas-Drive and Gravity Drainage", Paper SPE 92186 presented at the SPE International Petroleum Conference in México, Puebla México, November 7-9, 2004.
13. Padilla S. R. et al.: "Inflow Performance Relationships under Gravity Segregation for Solution Gas-Drive Reservoirs", Journal of Energy Resources Technology of ASME, V. 131/033102-1, September 2009.
14. Padilla S. R. et al.: "Inflow Performance Relationship Equation for Solution Gas-drive Reservoirs under Gravity Segregation", Paper SPE 169333,

- presented at the SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference held in Maracaibo, Venezuela, May 21–23, 2014.
15. Padilla S. R. et al.: “Comportamiento de Presiones y Productividad Bajo Efectos de Alta Saturación de Gas en el Yacimiento”, CMP 2014, Acapulco Guerrero, México, Julio 4-7, 2014.
  16. Coleman, H. D. Wilde, Jr. and T. V. Moore.: “Quantitative Effects of Gasoil Ratios on Decline of Average Rock Pressure”, Trans. AIME., 1930.
  17. R. D. Wyckoff, H. G. Botset.: “The Flow of Gas-Liquid Mixtures Through Unconsolidated Sands”, 1936.
  18. M. Muskat, M. W. Merres.: “The Flow of Heterogeneous Fluids Through Porous Media”, Journal of Applied Physics, 1936.
  19. G. L. Hassler, R. R. Rice, E. H. Leeman.: “Investigations on the Recovery of Oil from Sandstones by Gas Drive” Trans, AIME, 1936.
  20. M. Muskat, R.D. Wyckoff, H.G. Botset, M.W. Meres.: “Flow of Gas-Liquid Through Sands”, Trans. AIME, 1937.
  21. E. N. Dunlap.: “Influence of Connate Water on Permeability of Sands to Oil” Trans. AIME., 1938.
  22. M. C. Leverett, W. B. Lewis.: “Steady Flow of Gas-Oil-Water Mixtures Through unconsolidated Sands”, Trans. AIME, 1939.
  23. Buckley, S.E., Leverett, M.C.: "Mechanism of Fluid Displacement in Sands," Trans., AIME, 1942.
  24. H. H. Evinger, M. M. Muskat.: “Calculation of Theoretical Productivity Factor”, Journal of Applied Physics, 1941.
  25. R. E. Old, Jr., “Analysis of Reservoir Performance”, AIME, 1942.
  26. Buckley, S. E., & Craze, R. C., “The Development And Control Of Oil Reservoirs. American Petroleum Institute.”, (1943).
  27. Cardwell, W.T. and Parsons, R.L.: "Gravity Drainage Theory," Trans., AIME 1949.
  28. Terwilliger, et al.: "An Experimental and Theoretical Investigation of Gravity Drainage Performance," AIME, 1951.
  29. Welge, H.J.: "A Simplified Method for Computing Oil Recoveries by Gas or Water Drive," AIME, 1952.
  30. Arps. J.J. and Roberts. T.G., “The Effect of the Relative Permeability Ratio, the Oil gravity. and the Solution Gas-Oil Ratio on the Primary Recovery From a Depletion Type Reservoir.”, AIME, 1955.
  31. Matthews, C.S. and Lefkovits, H.C.: "Gravity Drainage Performance of Depletion-Type Reservoirs in the Stripper Stage," AIME, 1956.

32. Shreve and Welch, Jr.: "Gas Drive and Gravity Drainage Analysis for Pressure Maintenance Operation," AIME, 1956.
33. R. V. Higgins.: "Calculating Oil Recoveries for Solution-gas-drive Reservoirs: Evaluation of Permissible Errors in P. V. T. Data and  $k_g / k_o$  Ratios", United States Department of the Interior, 1956.
34. Wahl. W.L., Mullins L.P. and Elfrink, E.B.: "Estimation of ultimate recovery from solution gas-drive", AIME, (1958).
35. Martin, J.C.: "Some Mathematical Aspects of Two-Phase Flow with Applications to Floodings and Gravity Segregation Problems," 1958.
36. Martin, J.: "Simplified Equations of Flow in Gas Drive Reservoirs and the Theoretical Foundation of Multiphase Pressure Buildup Analyses," Trans, AIME 1956.
37. Sheldon, J.W., Zondek, B. and Cardwell, W.T.: "One-Dimensional, Incompressible, Noncapillary, Two-Phase Flow in a Porous Medium", AIME 1959.
38. Templeton, E.E., Nielsen, R.F. and Stahl, C.D.: "A Study of Gravity Counterflow Segregation," SPEJ, 1962.
39. Dykstra, H., and Mueller, T. D.: "Calculation of Phase Composition and Properties for Lean- or Enriched-Gas Drive", 1965.
40. R. L. King, J. H. Stiles.: "A Reservoir Study of the Hawking Woodbine Field", SPE 2972, 1970.
41. Richardsom, J.G., and Blackwell, R.J.: "Use of Simple Mathematical Models for Predicting Reservoir Behavior," 1971.
42. J. M. Dumore, R. S. Schols.: "Drainage Capillary-Pressure Functions and The Influence of Connate Water", Soc. of Pet. Eng. J. 1974.
43. Dykstra, H.: "The Prediction of Oil Recovery by Gravity Drainage", 1978.
44. R.G. Camacho, Raghavan.: "Performance of Wells in Solution-Gas-Drive Reservoirs", spe, 1989.
45. Ambastha, K. Aziz.: "Material Balance Calculations for Solution-Gas-Drive Reservoirs With Gravity Segregation", Stanford U., 1987.
46. P N. De Lima.: "A Model for the Performance of Solution Gas-Drive Reservoirs with Gravity Segregation", Petrobras, 1992.
47. Padilla S. R.: Comunicación personal, 2023.
48. W. A. Granville.: " Cálculo diferencial e integral", Limusa, 1995.
49. R.E. Larson.: " Cálculo y Geometría Analítica", McGraw-Hill Book Co, 1999.
50. J. Stewart.: " Cálculo. Conceptos y contextos de una variable", cuarta edición, Cengage Learning Editores, 2010.
51. W.H. Press, et al.: " Numerical recipes in C. the art of scientific computing", Cambridge University Press, 1997.

52. R. L. Burden y J. D. Faires.: "Numerical Analysis, 9th Edition" Brooks Cole, 2010.
53. Butcher, J. C.: "The non-existence of ten stage eighth order explicit Runge-Kutta methods", 1985.
54. A. Greenbaum y T. P. Chartier.: "Numerical Methods Design, Analysis, and Computer Implementation of Algorithms" Princeton University Press, 2012.
55. Chabert, J. L. (Ed.) (1999).: "A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip" New York: Springer, 1994.
56. Billo.: "Excel for scientists and engineers numerical methods" Wiley Interscience, 2007.
57. Torcaso, M.A. y Wyllie, M. R.: "A Comparison of Calculated kg/ko Ratios with a Correlation of Field Data". Trans. AIME, 1958.
58. Tarek A.: "Reservoir engineering handbook", 4th ed, 2010.
59. Slider, H.: "Worldwide practical petroleum reservoir engineering methods", Tulsa, Oklahoma, 1983.
60. Escobar, F.: "Fundamentos de Ingenieria de Yacimientos", Libro, 2012.
61. Cole, F.: "Reservoir Engineering Manual", Dallas, Texas, 1961.
62. Higgins, R . V . y Leighton.: "Computer programs for tarner cal culations of gas drive oil recovery by analytical or iterative method", United states department of the interior, 1960.
63. Higgins, R . V . y Leighton.: "Quick , nongraphical , noniterative method for gas drive predictions short Turner", United states department of the interior, 1960.
64. Corey, Rathjens, Henderson y Wylli.: "three phase relative permeability", Gulf research & development, 1956.
65. Olatunde, Mosobalaje, C. Y. y Seteyeobot.: "A New Solution Methodology to the Material Balance Equation, for Saturated Reservoirs", Covenant University, 2015.
66. Guerrero, E.T.: "How to find performance and ultimate oil recovery of a depletion type pool using the Muskat material balance approach", 1961.
67. Baca, P.: "Prediction of the performance of a solution gas drive reservoir by Muskat's equation", 1967.
68. Blunt, M.: "Reservoir Engineering vol 2", Imperial College London, UK, (2017)
69. CNH, Datos de producción de campos A y B. <https://produccion.hidrocarburos.gob.mx/>, Comisión Nacional de Hidrocarburos, México, 2023.

## Apéndices

### Apéndice A. Desarrollo de la Ecuación de Muskat

Para describir el volumen de aceite y gas que se encuentra en el yacimiento para una  $S_o$  y  $S_g$  cuando la  $p = p_b$ , escribimos las siguientes ecuaciones:

$$N_r = \frac{V_p S_o}{B_o} \quad (A-1)$$

$$G_r = \frac{V_p S_o R_s}{B_o} + \frac{V_p S_g}{B_g} \quad (A-2)$$

en dónde  $N_r$  y  $G_r$  representan el volumen de aceite y gas remanente en el yacimiento @cs, respectivamente. Factorizando  $V_p$  de la ec.(A1-2) se tiene,

$$G_r = V_p \left[ \frac{S_o R_s}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right] \quad (A-3)$$

Las ecs. (A1-2) y (A1-3) representan el volumen de gas disuelto y el volumen de gas libre remanente @c.s., respectivamente. Diferenciando las ecuaciones (A-1) y (A1-3) respecto a la presión, tenemos:

$$\frac{dN_r}{dp} = V_p \left[ \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right] \quad (A-4)$$

$$\frac{dG_r}{dp} = V_p \left[ \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} + \frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} + \frac{1}{B_g} \frac{dS_g}{dp} - \frac{S_g}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} \right] \quad (A1-5)$$

Dividiendo (A1-4) entre (A1-5),

$$\frac{dG_r}{dN_r} = \frac{V_p \left[ \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} + \frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} + \frac{1}{B_g} \frac{dS_g}{dp} - \frac{S_g}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} \right]}{V_p \left[ \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right]} \quad (A-6)$$

Agrupando los valores de saturación en términos de  $S_o$ . Sabemos que  $S_g = (1 - S_o - S_w)$ , por lo tanto,

$$\frac{1}{B_g} \frac{dS_g}{dp} = \left[ \frac{1}{B_g} \frac{d(1 - S_o - S_w)}{dp} \right] \quad (A-7)$$



Para el desarrollo de la ecuación se considera un medio volumétrico sin entrada de agua, por esto la saturación de agua se considera como irreductible, podemos decir que  $S_w = \text{cte}$  para todos los periodos de explotación. De lo anterior, la ecuación (A1-7) se reescribe como,

$$\frac{1}{B_g} \frac{dS_g}{dp} = \left[ -\frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} \right] \quad (\text{A-8})$$

Sustituyendo la ecuación (A1-8) en la ecuación (A1-6), y escribiéndola en términos de  $S_o$ , tenemos,

$$\frac{dG_r}{dN_r} = \frac{\left[ \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} + \frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} - \frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} - \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} \right]}{\left[ \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right]} \quad (\text{A-9})$$

La relación gas-aceite (GOR) producida a una presión considerada es,

$$R = \frac{\Delta G_p}{\Delta N_p} \frac{\Delta G_r}{\Delta N_r} \quad (\text{A-10})$$

Se sabe por definición que esta relación también se puede escribir de la siguiente forma,

$$R = R_s + \frac{K_{rg} \mu_o B_o}{K_{ro} \mu_g B_g} \quad (\text{A-11})$$

Igualando esta ecuación con (A1-9),

$$R_s + \frac{K_{rg} \mu_o B_o}{K_{ro} \mu_g B_g} = \frac{\left[ \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} + \frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} - \frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} - \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} \right]}{\left[ \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right]} \quad (\text{A-12})$$

Agrupando términos:

$$R_s + \frac{K_{rg} \mu_o B_o}{K_{ro} \mu_g B_g} = B \quad (\text{A-13})$$

$$\frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} = A \quad (\text{A-14})$$

$$\frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} = E \quad (\text{A-15})$$

$$\frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} = C \quad (\text{A-16})$$

$$\frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} = D \quad (\text{A-17})$$

Multiplicando A por B,

$$\left( R_s + \frac{K_{rg} \mu_o B_o}{K_{ro} \mu_g B_g} \right) \left( \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right) \quad (\text{A-18})$$

Sustituyendo (A1-18) en (A1-12) y simplificando,

$$\begin{aligned} & R_s \left( \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right) + \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \left( \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \right) \\ &= \left[ \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} + \frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} - \frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} - \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

Escribiendo E, C y D al lado derecho,

$$R_s \left( \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right) + \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \left( \frac{dS_o}{dp} - \frac{S_o}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \right) - \frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} + \frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} + \frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} \quad (\text{A-20})$$

Agrupando términos semejantes y simplificando:

$$\begin{aligned} & R_s \left( \frac{1}{B_o} \frac{dS_o}{dp} \right) - \frac{R_s}{B_o} \frac{dS_o}{dp} - R_s \left( \frac{S_o}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} \right) + \frac{S_o R_s}{B_o^2} \frac{dB_o}{dp} + \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \left( \frac{dS_o}{dp} \right) \\ & - \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \frac{S_o}{B_o} \frac{dB_o}{dp} + \frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} = \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} - \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

$$\frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \left( \frac{dS_o}{dp} \right) + \frac{1}{B_g} \frac{dS_o}{dp} = \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} - \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} + \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \frac{S_o}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \quad (\text{A-22})$$

$$\frac{1}{B_g} \left( \frac{dS_o}{dp} \right) \left( \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} + 1 \right) = \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} - \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} + \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \frac{S_o}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \quad (\text{A-23})$$

$$\frac{1}{B_g} \left( \frac{dS_o}{dp} \right) = \frac{\left( \frac{S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp} \right) - \left( \frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g^2} \frac{dB_g}{dp} \right) + \left( \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} \frac{1}{B_g} \frac{S_o}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \right)}{\left( \frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} + 1 \right)} \quad (\text{A-24})$$

Multiplicando ambos lados por  $B_g$ ,

$$\frac{dS_o}{dp} = \frac{\left(\frac{B_g S_o}{B_o} \frac{dR_s}{dp}\right) - \left(\frac{(1 - S_o - S_w)}{B_g} \frac{dB_g}{dp}\right) + \left(\frac{K_{rg} \mu_o S_o}{K_{ro} \mu_g B_o} \frac{dB_o}{dp}\right)}{\left(\frac{K_{rg} \mu_o}{K_{ro} \mu_g} + 1\right)} \quad (\text{A-25})$$

## Apéndice 2. Desarrollo de la Ecuación de Muskat a partir de la Ecuación de Difusividad en Coordenadas Radiales (Martin)

Se considera un volumen de control el cual contiene  $S_w$ ,  $S_o$  y  $S_g$ . La masa de aceite en el yacimiento por unidad de volumen está dada por,

$$m_o = \frac{\phi S_o}{B_o} \rho_o \quad (\text{B-1})$$

de manera similar, para la masa de agua en el yacimiento por unidad de volumen,

$$m_w = \frac{\phi S_w}{B_w} \rho_w \quad (\text{B-2})$$

El gas existe en dos fases, una fase libre y otra disuelta en el agua y el aceite. La masa de gas libre se define como,

$$m_{gF} = \frac{\phi S_g}{B_g} \rho_g \quad (\text{B-3})$$

La masa de gas disuelto en el agua y el aceite,

$$m_{gD} = \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \rho_g + \frac{\phi R_{sw} S_w}{B_w} \rho_w \quad (\text{B-4})$$

por la tanto, la masa de gas se presenta como,

$$m_g = m_{gF} + m_{gD} \quad (\text{B-5})$$

Sustituyendo las ecs.(A2-3) y (A2-4) en (A2-5) se tiene,

$$m_g = \frac{\phi S_g}{B_g} \rho_g + \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \rho_g + \frac{\phi R_{sw} S_w}{B_w} \rho_w \quad (\text{B-6})$$

Para representar el movimiento de cada fase a través del medio poroso, se hace uso de la ecuación de Darcy:

$$\rho_o v_o = \frac{k_o}{\mu_o B_o} \rho_o \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) \quad (\text{B-7})$$

$$\rho_w v_w = \frac{k_w}{\mu_w B_w} \rho_w \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) \quad (\text{B-8})$$

$$\rho_g v_g = \frac{k_g}{\mu_g B_g} \rho_g \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{R_s k_o}{\mu_o B_o} \rho_g \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \rho_g \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) \quad (\text{B-9})$$

La forma general de la ecuación de continuidad para flujo radial está dada por,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-rv_x \rho_x) = \frac{\partial m}{\partial t} \quad (\text{B-10})$$

Para obtener la ecuación de continuidad de la fase aceite, combinamos las ecs.(B-9) y (B-6) de la siguiente forma,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{k_o}{\mu_o B_o} \rho_o \right) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi \rho_o S_o}{B_o} \right) \quad (\text{B-11})$$

Ya que la densidad se considera a condiciones estándar, se elimina como constante, de donde,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right) \quad (\text{B-12})$$

De manera similar para el agua,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{k_w}{\mu_w B_w} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_w}{B_w} \right) \quad (\text{B-13})$$

Para el gas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ r \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] + \left[ r \left( \frac{R_s k_o}{\mu_o B_o} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] + \left[ r \left( \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] \right\} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{S_o R_s}{B_o} \right) + \left( \frac{S_w R_{sw}}{B_w} \right) + \left( \frac{S_g}{B_g} \right) \right] \quad (\text{B-14})$$

La ecuación (A2-11) puede expandirse como,

$$\frac{1}{r} \left( \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \left( \frac{1}{r} r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right) \quad (\text{B-15})$$

Simplificando,

$$\left[ \frac{1}{r} \left( \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] + \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) \right] = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right) \quad (\text{B-16})$$

Se considera que  $k_o$  es función de  $S_o$  y  $S_w$ , mientras que  $\mu_o$ , y  $B_o$ , son funciones que dependen de la presión. Utilizando la regla de la cadena para expandir el segundo término de la ec.(A2-16) se obtiene la siguiente igualdad,

$$\left[ \frac{1}{r} \left( \frac{k_o}{\mu_o B_o} \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} \right] + \left[ \frac{\partial P}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_o B_o} \right) \frac{\partial k_o}{\partial S_o} \frac{\partial S_o}{\partial r} \right] + \left[ \frac{\partial P}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_o B_o} \right) \frac{\partial k_o}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial r} \right] + \left[ \frac{\partial P}{\partial r} k_o \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\mu_o B_o} \right) \frac{\partial P}{\partial r} \right] = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right)$$

Si suponemos que  $\left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)^2$  y los productos de los gradientes de presión y gradientes de saturación,  $\frac{\partial P}{\partial r} / \frac{\partial S_o}{\partial r}$  y  $\frac{\partial S_o}{\partial r} / \frac{\partial S_w}{\partial r}$  son despreciables, las ecuaciones para el aceite agua y gas, se escriben como:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \phi \frac{\mu_o B_o}{k_o} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right) \quad (\text{B-17})$$

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \phi \frac{\mu_w B_w}{k_w} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_w}{B_w} \right) \quad (\text{B-18})$$

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \phi \left( \left( \frac{k_o R_s}{\mu_o B_o} \right) + \left( \frac{k_w R_{sw}}{\mu_w B_w} \right) + \left( \frac{k_g}{\mu_g B_g} \right) \right)^{-1} \times \left( \frac{\partial R_s S_o}{\partial t B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} + \frac{S_g}{B_g} \right) \quad (\text{B-19})$$

Expandiendo las derivadas parciales con respecto al tiempo de las ecs.(A2-12) a (A2-14), la ecuación para aceite se escribe como,

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \phi \frac{\mu_o B_o}{k_o} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_o}{B_o} \right) \frac{\partial P}{\partial t} = \phi \frac{\mu_o B_o}{k_o} \left[ \frac{1}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + S_o \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{B_o} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \right]$$

Las derivadas parciales con respecto a la presión se denotarán como  $B_o'$ ,  $S_o'$ , etc., de donde,

$$\frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{B_o} \right) = \frac{\partial}{\partial P} (B_o^{-1}) = -\frac{1}{B_o^2} \frac{\partial B_o}{\partial P}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \phi \frac{\mu_o B_o}{k_o} \left( \frac{S_o'}{B_o} - \frac{S_o B_o'}{B_o^2} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$

Reescribiendo las ecuaciones para las fases de aceite y agua:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \phi \frac{\mu_o}{k_o} \left( S_o' - \frac{S_o B_o'}{B_o} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B-20})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \phi \frac{\mu_w}{k_w} \left( S_w' - \frac{S_w B_w'}{B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B-21})$$

Para la fase del gas, expandiendo el lado derecho de la ec.(2-14),

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] = \left( \phi \frac{R_s k_o}{\mu_o B_o} + \frac{R_{sw} k_w}{\mu_w B_w} + \frac{k_g}{\mu_g B_g} \right)^{-1} \times \frac{\partial P}{\partial t} \left( \frac{R_s S_o'}{B_o} + \frac{S_o R_s'}{B_o} - \frac{R_s S_o B_o'}{B_o^2} + \frac{R_{sw} S_w'}{B_w} + \frac{S_w R_{sw}'}{B_w} + \frac{R_{sw} S_w B_w'}{B_w^2} + \frac{S_g'}{B_g} - \frac{S_g B_g'}{B_g^2} \right) \quad (\text{B-22})$$

en donde:  $\lambda_o = \frac{k_o}{\mu_o}$  (B-23),  $\lambda_w = \frac{k_w}{\mu_w}$  (B-24) y  $\lambda_g = \frac{k_g}{\mu_g}$  (B-25)

Sustituyendo la ec.(A2-23) en (A2-20), se obtiene la ecuación para la fase de aceite; de igual forma, la ec.(A2-24) en (A2-21), la ecuación para la fase de agua, y la ec.(A2-25) en (A2-22), la ecuación para la fase del gas, respectivamente, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \phi \lambda_o \left( S_o' - \frac{S_o B_o'}{B_o} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B-26})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \phi \lambda_w \left( S_w' - \frac{S_w B_w'}{B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B-27})$$

$$X \frac{\partial P}{\partial t} \left( \frac{R_s S'_o}{B_o} + \frac{S_o R'_s}{B_o} - \frac{R_s S_o B'_o}{B_o^2} + \frac{R_{sw} S'_w}{B_w} + \frac{S_w R_{sw}}{B_w} + \frac{R_{sw} S'_w B'_w}{B_w^2} + \frac{S'_g}{B_g} - \frac{S_g B'_g}{B_g^2} \right) = \left( \phi \frac{R_s \lambda_o}{B_o} + \frac{R_{sw} \lambda_w}{B_w} + \frac{\lambda_g}{B_g} \right)^{-1} \quad (\text{B-28})$$

Igualando los términos del lado derecho de las ecs.(B-26) y (B-27), y simplificando, se tiene,

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left( S'_o - \frac{S_o B'_o}{B_o} \right) \frac{\partial P}{\partial t} = \phi \left( S'_w - \frac{S_w B'_w}{B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B-29})$$

De igual forma, igualando y simplificando los términos del lado derecho de las ecuaciones para las fases de aceite y gas (ecs. B-26 y B-28),

$$\left( S'_o - \frac{S_o B'_o}{B_o} \right) \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_o B_g} \right) = \left( \frac{S_o R'_s}{B_o} + \frac{S_w R_{sw}}{B_w} + \frac{1}{B_g} \left( S'_g - \frac{S_g B'_g}{B_g} \right) \right)$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $B_g$  se obtiene,

$$\left( S'_o - \frac{S_o B'_o}{B_o} \right) \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_o} \right) = \left( \frac{S_o R'_s B_g}{B_o} + \frac{S_w R_{sw} B_g}{B_w} + S'_g - \frac{S_g B'_g}{B_g} \right) \quad (\text{B-30})$$

Para un sistema trifásico se considera que,

$$S_g + S_w + S_o = 1 \quad (\text{B-31})$$

Diferenciando la ec.(A2-31) con respecto a la presión,

$$S'_o + S'_w + S'_g = 0 \quad (\text{B-32})$$

Se sabe que la movilidad total de un sistema trifásico, es la suma de las movilidades de cada fase, tal que,

$$\lambda_t = \lambda_o + \lambda_w + \lambda_g \quad (\text{B-33})$$

Sustituyendo las ecs.(A2-32) y (A2-33) en (A2-30), se obtiene,

$$\begin{aligned} & \left( S'_o - \frac{S_o B'_o}{B_o} \right) \left( \frac{\lambda_t - \lambda_o + \lambda_w}{\lambda_o} \right) + \frac{S_o B'_o}{B_o} + \frac{S_w B'_w}{B_w} \\ & = \frac{S_o R'_s B_g}{B_o} + \frac{S_w R_{sw} B_g}{B_w} - S'_o + \frac{S_o B'_o}{B_o} - S'_w \frac{S_w B'_w}{B_w} - \frac{S_g B'_g}{B_g} \end{aligned} \quad (\text{B-34})$$

Sustituyendo (A2-29) en (A2-34) se tiene,

$$\left( S'_o - \frac{S_o B'_o}{B_o} \right) \left( \frac{\lambda_t}{\lambda_o} \right) = \frac{S_o R'_s B_g}{B_o} - \frac{S_o B'_o}{B_o} + \frac{S_w R_{sw} B_g}{B_w} - \frac{S_w B'_w}{B_w} - \frac{S_g B'_g}{B_g} \quad (\text{B-35})$$

Para un sistema multifásico, la compresibilidad total se define como,

$$c_t = S_o c_o + S_w c_w + S_g c_g \quad (\text{B-36})$$

Para la compresibilidad de la fase de aceite, agua y gas:

$$c_o = -\frac{1}{B_o} (B'_o - R'_s B_g) \quad (\text{B-37})$$

$$c_w = -\frac{1}{B_w} (B'_w - R'_{sw} B_g) \quad (\text{B-38})$$

$$c_g = -\frac{B'_g}{B_g} \quad (\text{B-39})$$

Sustituyendo (A2-37) a (A2-39) en (A2-36),

$$c_t = \frac{S_o R'_s B_g}{B_o} - \frac{S_o B'_o}{B_o} + \frac{S_w R'_{sw} B_g}{B_w} - \frac{S_w B'_w}{B_w} - \frac{S_g B'_g}{B_g} \quad (\text{B-40})$$

Por último, la ec.(A2-40) se sustituye en (A2-35), de donde se llega a la ecuación que describe el cambio de saturación con respecto a presión presentada por Martin<sup>36</sup>,

$$\frac{\partial S_o}{\partial P} = \frac{S_o B'_o}{B_o} + \left( \frac{\lambda_o}{\lambda_t} \right) c_t \quad (\text{B-41})$$

### Apéndice C. EBM Presentada por Schiltuis

Schiltuis en 1941 presento el concepto de balance de materia dado por un volumen inicial que es igual al volumen remanente más el volumen producido. El volumen total de hidrocarburos en el sistema está dado por,

$$NBoi + mNBoi = (Vp)(1 - Swi) \quad (\text{C-1})$$

el que representa el volumen inicial de aceite más el volumen inicial del casquete de gas, en donde Vp representa el volumen poroso,

$$Vp = \emptyset Vroca \quad (\text{C-2})$$

El volumen inicial del casquete de gas se puede escribir de la siguiente forma,

$$mNBoi = GBgi \quad (\text{C-3})$$

m se define como,

$$m = \frac{\text{Volumen inicial de la capa de gas}}{\text{Volumen original de aceite en sitio}} = \frac{GBgi}{NBoi} \quad (\text{C-4})$$

De la ec.(C-1),

$$Vp = \frac{NBoi(1 + m)}{1 - Swi} \quad (\text{C-5})$$

Por otra parte, el volumen de aceite original, el volumen de la capa de gas inicial, el volumen de aceite remanente; el volumen de la capa de gas y el volumen de gas disuelto liberado a una presión dada, están dadas respectivamente por:

- volumen de aceite original =  $NBoi$
- volumen de la capa de gas inicial =  $mNBoi$
- volumen de aceite remanente =  $(N-Np)Bo$
- volumen de la capa de gas a una presión dada =  $\left[\frac{mNBoi}{Bg_i}\right]Bg$

Así mismo, el volumen de gas disuelto liberado, es igual a él volumen de gas inicial en solución menos el volumen de gas producido, menos volumen de gas remanente en solución, de donde,

$$[[NRsi] - [NpRp] - (N - Np)Rs]Bg$$

De lo anterior, el volumen inicial que es igual al volumen remanente más el volumen producido,

$$NBoi + mNBoi = (N - Np)Bo + \left[\frac{mNBoi}{Bg_i}\right]Bg + [[NRsi] - [NpRp] - (N - Np)Rs]Bg \quad (C-6)$$

La expresión anterior indica un equilibrio de volúmenes, en donde el volumen total, está representado como el volumen que se ha extraído del sistema, más el volumen remanente, en donde:

Bg= factor de volumen del gas a una presión dada (m

Bgi= factor de volumen del gas a la presión inicial del yacimiento

Bo= factor de volumen del aceite a una presión dada

Boi = factor de volumen del aceite a presión inicial del yacimiento

mNBoi = volumen poroso ocupado por la capa de gas a una presión inicial

N= volumen original de aceite

NBoi = volumen poroso ocupado por el aceite original en sitio a una presión inicial

Np= producción acumulada de aceite

NRsi= volumen de gas inicial en solución

NpRp= volumen de gas producido

Rp= relación de la producción acumulada de aceite y gas

Rs= factor de solubilidad al periodo de producción a una presión dada

Bg= factor de volumen del gas a una presión dada

Rsi= solubilidad del gas a la presión del yacimiento original



## Apéndice D. Ecuación de la Relación Gas-Aceite Instantánea (RGA instantánea)

La relación gas-aceite instantánea está dada por relación de la producción de gas y aceite,

$$R = \frac{q_g}{q_o} \quad (D-1)$$

La producción total de gas se conforma tanto por el gas libre que fluye en el yacimiento, como del gas disuelto en el aceite que se pudiera liberar bajo las condiciones de presión y temperatura; por lo tanto, la producción de gas es igual a la producción de gas libre más la producción de gas disuelto liberado, tal que:

$$q_g = q_{gl} + q_{gd} \quad (D-2)$$

$$q_{gd} = q_o R_s \quad (D-3)$$

Sustituyendo las ecs.(A4-2) y (A4-3) en (A4-1),

$$R = \frac{q_{gl} + q_o R_s}{q_o} = \frac{q_{gl}}{q_o} + R_s \quad (D-4)$$

De acuerdo a la ecuación de Darcy para flujo radial:

$$q_{gl} = C \frac{kk_{rg}h}{\mu_g B_g \log \frac{r_e}{r_w}} (P_{ws} - p_{wf}) \quad (D-5)$$

$$q_o = C \frac{kk_{ro}h}{\mu_o B_o \log \frac{r_e}{r_w}} (P_{ws} - p_{wf}) \quad (D-6)$$

Sustituyendo las ecs.(A4-5) y (A4-6) en (A4-4),

$$R = \frac{k_{rg} \mu_o B_o}{k_{ro} \mu_g B_g} + R_s \quad (D-7)$$

la cual representa la relación de gas-aceite producida a un tiempo dado.

# Apéndice E. Metodología de Cálculo para los Métodos de Balance de Materia

## Primer Método

1. Capturar los datos PVT y completar las columnas correspondientes.
2. El Método de Tarner implica variaciones en  $N_p$ , por lo tanto, este valor debe proponerse entre el rango de 0 a 1, tal como se observa en las figs. E-1 y E-2 Se sugiere evitar el valor de la unidad, ya que se presentan problemas debido a que el número de iteraciones aumenta y los resultados no convergen.

	Pressure (psia)	Bo(bbl/stb)	Rso (scf/stb)	Bg(bbl/scf)	Bt	Np supuesta	Rt-Bt 5-bt	Rel X Bg
29	200	1.44	120.00	0.00650	1.44000	0.10000	0.0077	0.8016
30	195	1.436	118.25	0.00668	1.44769	0.10000	0.0158	0.8280
31	190	1.431	116.60	0.00690	1.45584	0.10000	0.0257	0.8640
32	185	1.426	114.48	0.00720	1.46574	0.10000	0.0373	0.9000
33	180	1.421	112.50	0.00750	1.47725	0.10000	0.0503	0.9360
34	175	1.416	110.48	0.00780	1.49026	0.10000	0.0636	0.9720
35	170	1.41	108.45	0.00810	1.50356	0.10000	0.0786	1.0116
36	165	1.404	106.41	0.00843	1.51856	0.10000	0.0957	1.0560
37	160	1.398	104.35	0.00880	1.53572	0.10000	0.1150	1.1028
38	155	1.3915	102.21	0.00919	1.55499	0.10000	0.1365	1.1520
39	150	1.385	100.05	0.00960	1.57652	0.10000	0.1607	1.2036
40	145	1.3785	97.85	0.01003	1.60056	0.10000	0.1872	1.2600
41	140	1.372	95.70	0.01050	1.62715	0.10000	0.2181	1.3236
42	135	1.3655	93.47	0.01103	1.65813	0.10000	0.2531	1.3920
43	130	1.359	91.20	0.01160	1.69308	0.10000	0.2911	1.4676
44	125	1.352	88.91	0.01229	1.73410	0.10000	0.3392	1.5600
45	120	1.345	86.60	0.01300	1.77920	0.10000	0.3887	1.6676
46	115	1.338	84.25	0.01375	1.82871	0.10000	0.4435	1.7940
47	110	1.331	81.90	0.01450	1.88345	0.10000	0.5033	1.8360
48	105	1.324	79.52	0.01530	1.94334	0.10000	0.5720	1.9440
49	100	1.317	77.10	0.01620	2.01198	0.10000		

Figura E-1. Solución 1 para el método de Tarner paso 1.

	So	Krg/Kro	μo/μg	R0/Rg	15x14x13	R (16+3)	Rpromedio 5-8	Np supuesta	ΔGp 19*18	Gp	Validación 11-21
29	0.8000	0.000000	65.5								
30	0.7180	0.003149	67.1	214.9701	45.4272	163.6772	141.8386	0.100000	14.18386	14.18386	-22.7047
31	0.7155	0.003489	68.8	207.3913	49.7813	166.1813	164.9293	0.000000	0.000000	14.18386	-20.9873
32	0.7130	0.003855	70.5	198.0556	53.8288	168.3088	167.2451	0.000000	0.000000	14.18386	-18.9659
33	0.7105	0.004249	72.2	189.4667	58.1304	170.6304	169.4696	0.000000	0.000000	14.18386	-16.9159
34	0.7080	0.004673	73.9	181.5385	62.6967	173.1767	171.9036	0.000000	0.000000	14.18386	-14.8466
35	0.7050	0.005223	75.7	174.0741	68.8305	177.2805	175.2286	0.000000	0.000000	14.18386	-12.9000
36	0.7020	0.005821	77.5	166.5480	75.1348	181.5448	179.4126	0.000000	0.000000	14.18386	-10.8781
37	0.6990	0.006469	79.3	158.8636	81.4995	185.8495	183.6971	0.000000	0.000000	14.18386	-8.7580
38	0.6958	0.007232	81.2	151.4146	88.9197	191.1297	188.4896	0.000000	0.000000	14.18386	-6.5918
39	0.6925	0.008062	83.1	144.2708	96.6585	196.7085	193.9191	0.000000	0.000000	14.18386	-4.3851
40	0.6893	0.008954	85.1	137.4377	104.8400	202.6900	199.6993	0.000000	0.000000	14.18386	-2.1242
41	0.6860	0.009941	87.2	130.6667	113.2709	208.9709	205.8304	0.000000	0.000000	14.18386	0.1433
42	0.6828	0.010999	89.4	123.7987	121.7344	215.2044	212.0876	0.000000	0.000000	14.18386	2.5590
43	0.6795	0.012143	91.7	117.1552	130.4515	221.6515	218.4280	0.000000	0.000000	14.18386	5.0379
44	0.6760	0.013476	94.1	110.0081	139.5016	228.4116	225.0315	0.000000	0.000000	14.18386	7.6360
45	0.6725	0.014922	96.7	103.4615	149.2870	235.8870	232.1493	0.000000	0.000000	14.18386	10.2223
46	0.6690	0.016487	99.4	97.4508	159.6994	243.9594	239.9232	0.000000	0.000000	14.18386	12.8081
47	0.6655	0.018179	102.3	91.7931	170.7050	252.6050	248.2822	0.000000	0.000000	14.18386	15.4096
48	0.6620	0.020006	105.4	86.5359	182.4693	261.9893	257.2971	0.000000	0.000000	14.18386	18.0128

Figura E-2. Solución 1 para el método de Tarner paso 2.

3. En los métodos de balance de materia, existe una columna denominada como validación, la cual hace referencia a la tolerancia. Esta tolerancia se observa en la celda AB de la fig. E-3. Para el método de Tarner, esta columna debe ser igual a cero, lo que se logra restando el valor de la columna 11 del valor de la columna 21 de la figs. E-1 a E-3. Retomando la fig. E-2, se puede observar que la validación para el método de Tarner no cumple con esta condición, por lo tanto, es necesario proceder a realizar más iteraciones hasta cumplir con la tolerancia, tal como se muestra en la fig. E-3.

4. Para iniciar las iteraciones del primer abatimiento de presión, se debe acceder a la pestaña de *herramientas* de Excel y seleccionar la opción de *datos*; una vez desplegadas las herramientas, dentro de la sección *datos* se debe elegir la opción *análisis de hipótesis*, tal como se muestra en la fig. E-4.

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														
31														
32														
33														
34														
35														
36														
37														
38														
39														
40														
41														
42														
43														
44														
45														
46														
47														
48														

Figura E-3. Solución 1 para el método de Tarner paso 3.

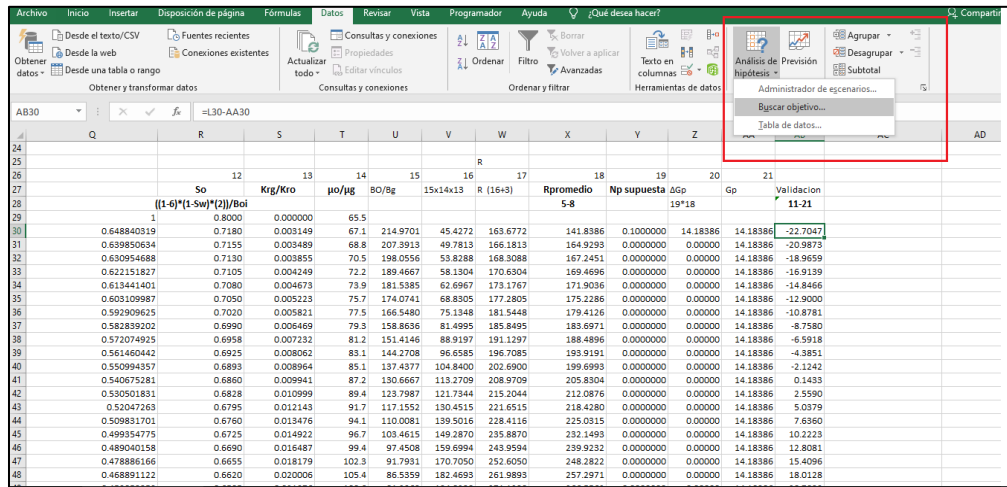


Figura E-4. Solución 1 para el método de Tarner paso 4.

5. Retomando la fig. E-4, al seleccionar *buscar objetivo*, se despliega un cuadro con tres parámetros. En primer lugar, la opción *definir celda*, en la que se debe seleccionar la celda de validación correspondiente al periodo de interés (celda AB30 de la fig. E-4). De lo contrario, sustituir por la celda correspondiente. Para el segundo parámetro, *con el valor*, se debe ingresar el valor que se está buscando. Para el método de Tarner, *el valor* debe ser igual a cero. Finalmente, en el tercer parámetro, *cambiando la celda*, se debe seleccionar la casilla correspondiente a la Np propuesta, que es el parámetro que cambiará iterativamente hasta que se cumpla la tolerancia. Después de configurar estos parámetros, se debe seleccionar *aceptar* para iniciar el cálculo. Este proceso se ilustra en las figs. E-5 y E-6

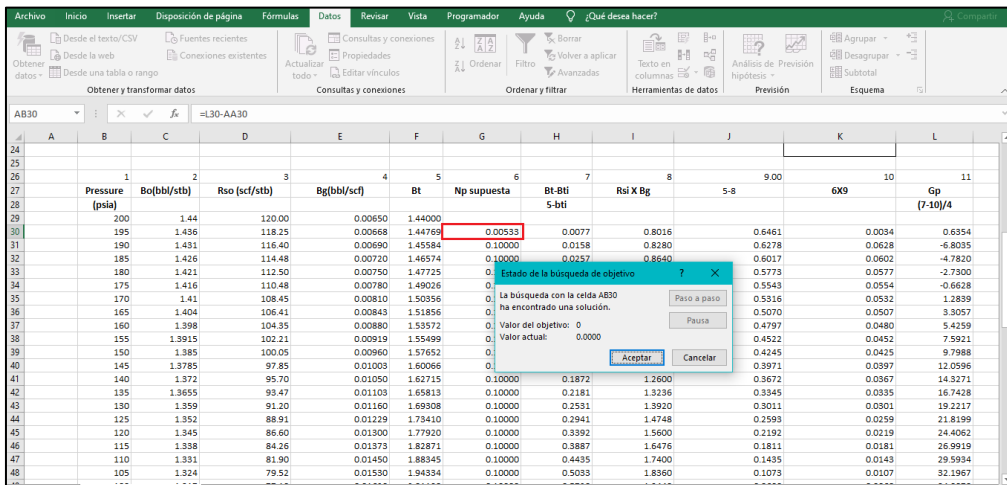


Figura E-5. Solución 1 para el método de Tarner paso 5.

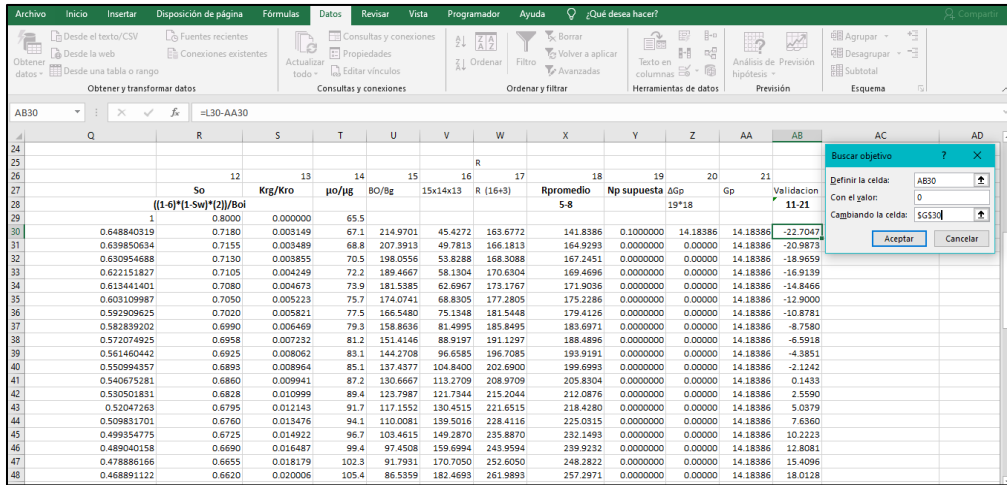


Figura E-6. Solución 1 para el método de Tarner paso 6.

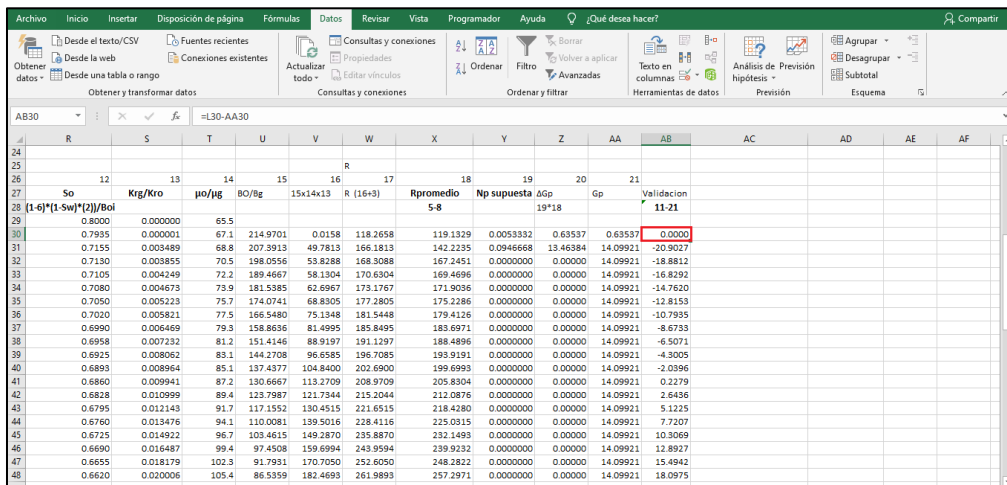


Figura E-7. Solución 1 para el método de Tarner paso 7.

Una vez cumplida la validación, se observará que las iteraciones terminan, y con esto se obtiene un valor de Np que cumple con las condiciones requeridas, lo que concluye el procedimiento para este primer abatimiento de presión. Como se puede observar, la celda de validación ahora muestra cero, lo que indica que el cálculo se ha realizado de manera correcta al cumplir con la tolerancia establecida. Este proceso se repetirá para los demás intervalos de interés, como se muestra en la figura E-7.

## Guía para automatizar el primer método

Se presenta un macro para automatizar los cálculos de balance de materia. Para su uso, es necesario adaptarlo a las celdas correspondientes y borrar las líneas subrayadas que describen la función de cada línea. El texto debe copiarse y pegarse tal cual se presenta:

"Sub unkilo() (nombre del Macro)

Dim N, filco, colco, filnp, colnp As Integer (Declaración de variables, borrar este texto)

N = 200 (Presión inicial, sustituir por la del caso a estudiar)

filco = 31 (Tanto filco como colco representan la ubicación de la primer celda de la primer validación o el primer intervalo)

colco = 28

filnp = 31 (Tanto filnp como colnp representan la ubicación de la primer celda del Delta NP, este valor es el que ira variando)

colnp = 7

Do Until N <= 39 (Presión de abandono, sustituir por la del caso a estudiar)

Application.CutCopyMode = False

Application.CutCopyMode = False

Application.CutCopyMode = False

Cells(filco, colco).GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Cells(filnp, colnp)

(Del renglón anterior el texto GoalSeek Goal:=0 representa que la validación debe ser igual a 0 por lo tanto para los otros métodos se recomienda que la validación no sea igual a 1 y se busque validación igual a 0 como se comentó en el capítulo dos esto con el fin de que los cálculos se realicen si tanta demora, el buscar la unidad trae problemas de iteración.)

N = N - 1

filco = filco + 1

filnp = filnp + 1

Loop

MsgBox "fin de la iteracion"

Application.ScreenUpdating = True

End Sub