



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Estimación del exceso de
presión en un capilar sanguíneo
producido por una estenosis
mediante el empleo del análisis
integral**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Silva González Ricardo Aldahir

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Monsivais Montoliu Ian Guillermo



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023

「全ての存在は滅びるようにデザインされている。生と死を繰り返す螺旋に。。。私たちは囚われ続けている。これは呪いか。それとも、罰か。不可解なパズルを渡した神にいつか、私たち弓を引くのだろうか。」

Agradecimientos

- A mi madre, porque sin ella el llegar a estudiar una licenciatura no hubiera podido ser posible, agradezco mucho cada sacrificio y cada esfuerzo que hiciste para que yo pudiera presentar esta tesis.
- A mis hermanos por estar siempre a mi lado en los momentos más felices y tristes, siempre valoraré mucho su apoyo incondicional fraternal.
- A mi padre por su apoyo a lo largo de esta travesía llamada ingeniería.

Los quiero a todos.

Índice general

1. Introducción	1
2. Modelo físico	4
3. Método de solución	13
4. Simulación	26
4.0.1. Punto de separación	56
4.0.2. Resultados del punto de separación	60
5. Conclusiones	71
Apéndice A. Adimensionalización	74
Bibliografía	80

1 Introduccion

En medicina existe una enfermedad que aqueja a la población, no solo de México si no mundial. Múltiples efectos colaterales son desencadenadas a partir de esta enfermedad llamada “estenosis”. En la literatura médica, la estenosis es definida como: “ Estrechez patológica, congénita o adquirida, de un orificio o conducto orgánico. Se aplica, en general, a cualquier víscera del organismo, pero habitualmente a arterias, válvulas cardiacas, vía aérea, tubo digestivo, vías biliares y pancreáticas y sistema urinario.” [1] En la presente tesis se abordará el caso de la estenosis en un capilar sanguíneo. Por lo que se definirá como la física del problema a todo aquello que esté relacionado con las variables, modelado y geometría de la estenosis planteada en lenguaje matemático.

Continuando con el análisis de la estenosis como un problema de salud pública. Actualmente la estenosis carotídea es la tercera causa de muerte entre la población, además de la primera causa en incapacidad prolongada severa. [2] La estenosis carotídea es una enfermedad causada cuando existe una acumulación de placas¹ (depósitos de grasa) y estas a su vez bloquean el flujo de sangre.

Hasta este punto se conoce a la estenosis como un problema grave de salud pública,

¹sustancia pegajosa que se acumula en el interior de las arterias

sin embargo, ¿cuál es la importancia de estudiar este problema de salud? La respuesta no es tan simple, debido a que, al ser una enfermedad que es la tercera causa de muerte entre la población primero hay que conocer las complicaciones que conlleva el padecer una estenosis, ya que, el principal riesgo de muerte que ocurre es debido a un accidente cerebrovascular de los cuales los síntomas abarcan desde un entumecimiento repentino en el rostro o en las extremidades, hasta una muerte repentina que se conoce como “Muerte súbita” [3].

Siguiendo el hilo del párrafo anterior. Algunos investigadores han sugerido, en el estudio de estenosis, que después del punto de separación de la capa límite hay recirculación de la sangre [4] haciendo que este fenómeno sea notablemente nocivo en la salud, esto debido a que se produce un efecto de succión que a la larga de los ciclos cardiacos, puede hacer que se rompa la pared de la arteria por fatiga. Por lo tanto, la presente tesis es un preámbulo para el estudio de este problema que aqueja no solo a la población mexicana, si no a la mundial.

Ahora bien, al ser un problema en capilares sanguíneos, que son los responsables de la oxigenación de los tejidos, y además del intercambio de materiales de oxigenación entre ellos. El suponer un aumento de presión local, podría tener un efecto de adición para que pueda darse la hipertensión, la cual puede causar que la sangre no logre esa composición en forma de "spray" [5] que es necesaria para la transferencia del O₂ en los tejidos y por lo tanto una precaria oxigenación de estos. Por lo que la investigación de los fenómenos de estenosis en el cuerpo humano es de suma importancia, no solo para comprender la física del problema y atacarlo, si no al mismo tiempo poder desarrollar medicamentos que permitan que la estenosis no ocurra o, en su defecto,

hacer que el cuerpo humano se adapte a ella en dado caso de ya presentar el problema mediante el uso de medicamentos.

Finalmente, una de las grandes interrogantes que surgen al momento del estudio de estenosis es su impacto en magnitudes físicas siendo la presión la que se ve más afectada. Sin embargo, para llegar a la determinación de la variación de presión de manera analítica no es una tarea sencilla debido a las principales dificultades que se tienen para determinar un campo de velocidades del flujo sanguíneo, así como una aproximación de las ecuaciones generales de los fluidos que ayuden a determinar , de manera fehaciente, la presión en exceso debido a una estenosis. Es por eso que se analizará del fenómeno para poder discriminar variables y abordar este tema desde un punto de vista que sea más sencillo de analizar la variación de presión en la estenosis. Dicho lo anterior y a manera de preludeo para la escritura de la presente tesis, la hipótesis principal de nuestro problema es que la presión, al haber una constricción y una reducción de área a lo largo del volumen de control, aumente. Por lo que para demostrar la aseveración anterior, haremos uso del análisis integral de las ecuaciones, a las cuales posteriori haremos mención como N-S, las ecuaciones de Navier-Stokes.

2 Modelo físico

La física del problema es una parte fundamental para el desarrollo del modelo matemático, ya que provee información sobre las condiciones de frontera y factores geométricos que son necesarios para llegar a la solución. Motivo por el cual, se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales con el fin de representar de manera adecuada la forma geométrica del problema. A priori se sabe que la geometría del sistema es un “tubo”, en este caso capilar sanguíneo, para mayor referencia observe la figura [2.1](#).

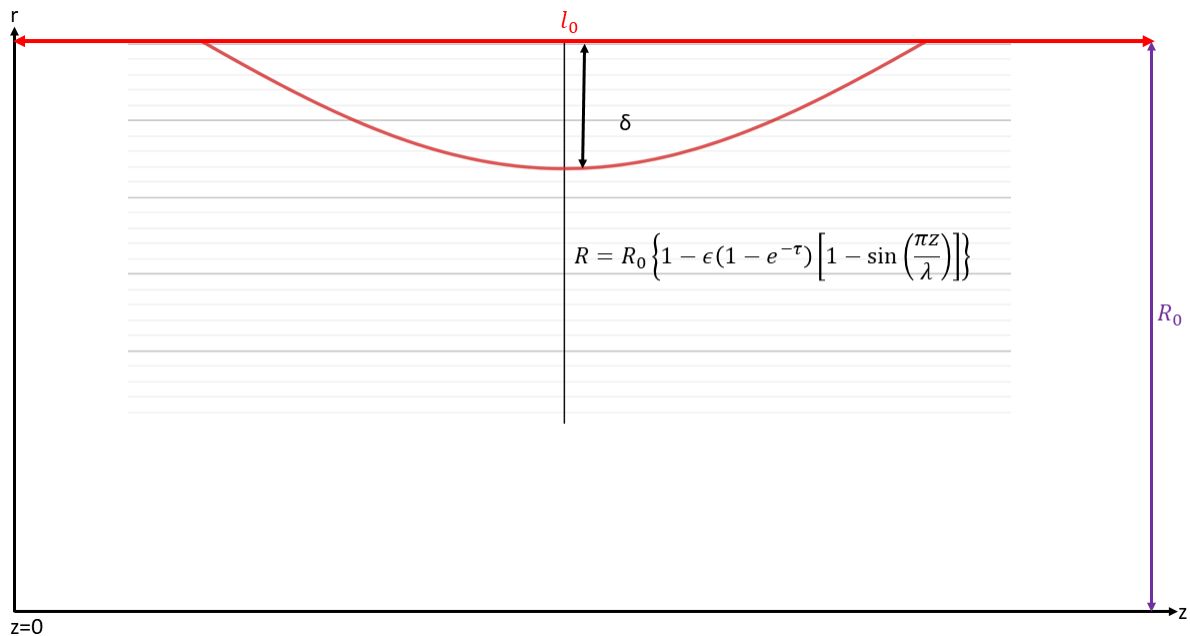


Figura 2.1: Geometría de la estenosis.

Donde:

- l_0 : Largo de la estenosis, a posteriori será una longitud característica para el análisis dimensional del fenómeno.
- δ : Amplitud de la estenosis, definida del 0 al punto máximo de la concavidad de la misma.
- R_0 : Radio del capilar sanguíneo.

En la figura [2.1](#) se aprecia que, la estenosis está definida con parámetros geométricos (l_0 y δ), los cuales son longitudes características de longitud y amplitud respectivamente, mismas que serán de mucho apoyo al problema en la adimensionalización de las ecuaciones. En primera instancia, el tener variable adimensionales ayuda en el análisis de magnitud que se estará presentando en el presente planteamiento.

Por último cabe resaltar que la la representación geométrica de la estenosis se describe a través de una función en términos de las coordenadas radial y longitudinal del tubo, como se muestra en Middleman [\[6\]](#) al no tener una geometría que asemeje una estenosis, la figura se tiene que "aproximar" por medio de una función, para lo cual se utilizó la función de Middleman [\[6\]](#) y además se buscó en la literatura funciones que pudieran llegar a describir una constricción o estenosis en el capilar sanguíneo. Para lo cual se usó de apoyo la función de un artículo de la "Usha Martin University" [\[7\]](#), usando como parámetro estas 2 funciones y obedeciendo a la geometría del problema presentado en la figura [2.1](#) se construyó la función que da como resultado la geometría de la estenosis.

Dicho lo anterior, se considera un flujo axisimétrico, es decir, las derivadas con respecto a θ son simplificadas a 0 ($\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$). Lo anterior debido a que la directriz de estudio son las coordenadas radial y axial. Por tal motivo las ecuaciones de conservación adoptan la siguiente forma, en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot v = 0; \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

Ecuación de momentum

Dirección radial (r):

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right\} \quad (2.2)$$

Componente axial (z):

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (2.3)$$

Una vez que se tiene definida la geometría del problema y el marco de referencia, queda por definir a la estenosis como una función. Por lo que se propone la ecuación [2.4](#) como modelo propio realizado con las aportaciones de los artículos anteriormente citados [6](#) [7](#), mismo que puede ser visto en la figura [2.1](#).

Cabe resaltar que la ecuación está propuesta para que haya dependencia de 2 variables, la temporal y la espacial. Motivo por el cual nuestro radio estará variando tanto en el tiempo como en el espacio (z).

$$R = R_0 \left\{ 1 - \epsilon(1 - e^{\frac{t}{T}}) \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi z}{\lambda} \right) \right] \right\} \quad (2.4)$$

Esta ecuación solo es valida para cierto intervalo de valores, esto es debido a que la estenosis no está dada a lo largo de todo el capilar sanguíneo si no solo una sección del mismo, es por este motivo que se definieron con anterioridad los parametros geométricos que apoyan a esta conjetura $d \leq z \leq l_o$.

A continuación es necesario definir los parámetros adimensionales, mismos que nos ayudarán más adelante para la simplificación de algunos términos usando análisis de orden de magnitud. Con esta simplificación, el problema debería de ser más digerible y fácil de entender a posteriori.

Por lo que la ecuación [2.4](#) será el punto de inicio del planteamiento, además de apoyarse en la ecuación del radio variable de Middleman [\[6\]](#) para el análisis integral de la presión a lo largo de la estenosis. De lo anteriormente dicho, los parámetros geométricos estarán definidos por las siguientes variables:

Parametros geométricos, adimensionales:

$$\epsilon = \frac{\delta}{R_0} \quad (2.5)$$

$$\lambda = \frac{l_0}{R_0} \quad (2.6)$$

Parámetros adimensionales, en relación con las variables del marco de referencia:

$$s \equiv \frac{r}{\epsilon R_0} \quad (2.7)$$

La ecuación [2.7](#) es un parámetro el cual será de ayuda para adimensionalizar la variable "r" en las ecuaciones de momentum.

$$\zeta \equiv \frac{z}{\lambda R_0} \quad (2.8)$$

Para la velocidad, promedio:

$$U_0 = \frac{Q}{\pi R_0^2} \quad (2.9)$$

Para la velocidad en el eje axial (z):

$$\check{u}_z = \frac{u_z}{U_0} \quad (2.10)$$

Para la velocidad en el eje radial (r):

$$\check{u}_r = \frac{u_r}{V_0} \quad (2.11)$$

Finalmente, para la presión, la relación está definida por:

$$\check{p} \equiv \frac{p}{\Pi} \quad (2.12)$$

De las ecuaciones anteriormente definidas se puede comenzar con la adimensionalización de las ecuaciones de movimiento, por lo que se puede definir a la ecuación de continuidad de la siguiente manera:

$$\left(\frac{U_0 \epsilon}{\lambda V_0} \right) \frac{\partial \check{u}_z}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial (s \check{u}_r)}{\partial s} = 0 \quad (2.13)$$

Gracias a esta ecuación se puede hacer un análisis de orden de magnitud, llegando a la conclusión que el parámetro V_0 está relacionado a otros parámetros adimensionales.

$$V_0 = \frac{\epsilon U_0}{\lambda} \quad (2.14)$$

Siguiendo la misma lógica de adimensionalizar las ecuaciones, se procede a hacer lo mismo con la ecuación de conservación de momentum en [2.3](#).

$$\frac{\epsilon^2 \rho R_0 U_0}{\mu \lambda} \left(\check{u}_r \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} + \check{u}_z \frac{\partial \check{u}_r}{\partial \zeta} \right) = - \left(\frac{\epsilon^2 R_0 \Pi}{\lambda \mu U_0} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} \right) + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 \check{u}_z}{\partial \zeta^2} \right) \quad (2.15)$$

Debido a que el procedimiento es demasiado largo, el desarrollo de este mismo se anexa en el capítulo " Apéndice" para su posterior consulta.

Como se puede observar en la ecuación [A.15](#), el coeficiente del término convectivo es un coeficiente entre el largo de la estenosis l_0 y el ancho de la estenosis (δ), por lo que, se considera que la variación entre ancho y largo es realmente muy pequeña lo cual significa que el largo de la estenosis es más grande en relación a su grosor.

Dicho lo anterior y continuando con el análisis adimensional de la ecuación de conservación de momentum en el eje radial se puede escribir de la siguiente manera.

$$\frac{\epsilon^2 \rho U_0 R_0}{\mu \lambda} \left(\check{u}_r \frac{\partial \check{u}_r}{\partial s} + \check{u}_z \frac{\partial \check{u}_r}{\partial \zeta} \right) = - \left(\frac{\lambda R_0 \Pi}{\mu U_0} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \check{u}_r) \right] + \left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2} \right) \frac{\partial^2 \check{u}_r}{\partial \zeta^2} \quad (2.16)$$

En consiguiente, usando la simplificación propuesta en la ecuación 1-2.5 del libro Middleman [\[6\]](#). Se reduce la ecuación [2.16](#), usando un parámetro de presión característico a lo largo de un tubo, suponiendo flujo de Poiseuille.

$$\frac{\epsilon^2 \rho R_0 U_0}{\mu \lambda} \left(\check{u}_r \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} + \check{u}_z \frac{\partial \check{u}_z}{\partial \zeta} \right) = - \left(\frac{\epsilon^2 R_0 \Pi}{\lambda \mu U_0} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} \right) \quad (2.17)$$

En el lado izquierdo de la ecuación aparece el número de Reynolds, recordando que su definición es la siguiente: $Re \equiv \frac{\rho U_0 R_0}{\mu}$. Por el anterior motivo, en la ecuación

[2.17](#) se puede sustituir el coeficiente del primer término por el número de Reynolds.

Ahora bien, de lo anterior se concluye que del lado izquierdo existen 2 escenarios posibles:

1. El número de Reynolds es del orden de la unidad o menor, aquí comienza la suposición de "Creeping flow" o flujo reptante.
2. Debido a las consideraciones usadas en la adimensionalización de la ecuación de continuidad y considerando que el coeficiente $\frac{\epsilon}{\lambda}$ es muy pequeño, se puede concluir que el lado izquierdo de la ecuación [2.17](#) desaparece.

Por lo que la ecuación se puede reescribir de la siguiente manera:

$$0 = -\frac{\epsilon^2 R_0 \Pi}{\lambda \mu U_0} \left(\frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} \right) \quad (2.18)$$

En la ecuación [2.18](#) se puede observar un caso similar al que se observó en la ecuación de continuidad, por lo que usando el mismo argumento donde el coeficiente del primer término es unitario, se llega a una conclusión sobre la variable Π , por lo que se puede definir de la siguiente manera:

$$\Pi = \frac{\lambda \mu U_0}{\epsilon^2 R_0} \quad (2.19)$$

Siguiendo la misma lógica donde el coeficiente del primer término es la unidad, se puede reescribir la ecuación [2.18](#) de la siguiente manera:

$$0 = -\frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} \right) \quad (2.20)$$

Con lo anteriormente mencionado se puede concluir la parte del análisis de la ecuación de conservación de momentum en el eje z adimensional. Sin embargo, queda pendiente el análisis de la ecuación de conservación de momentum en el eje radial. Mismo que se hará a continuación.

La forma de la ecuación de conservación de momentum radial está definida de la siguiente manera:

$$\frac{\epsilon^2 \rho U_0 R_0}{\mu \lambda} \left(\check{u}_z \frac{\partial \check{u}_r}{\partial s} + \check{u}_z \frac{\partial \check{u}_r}{\partial \zeta} \right) = - \left(\frac{\lambda R_0 \Pi}{\mu U_0} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \check{u}_r) \right] + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \check{u}_r}{\partial \zeta^2} \quad (2.21)$$

Como se puede observar en la ecuación [A.6](#) del apéndice, el término de difusión se termina simplificando a 0 debido a que la relación $\frac{\epsilon}{\lambda}$ es muy pequeña.

Por lo que, nuevamente se pueden analizar 2 casos donde el Reynolds es la clave para la simplificación de la ecuación, haciendo 2 casos de analisis:

1. El Reynolds es alto
2. El Reynolds es bajo

Debido a que para el intercambio de materiales para la debida oxigenación de los tejidos la velocidad que se debe de mantener en el capilar sanguíneo debe ser baja [5](#) se analizará el caso donde el Reynolds es bajo. Por lo que el coeficiente del lado izquierdo se hace muy pequeño y en consiguiente se puede reducir a 0 el lado izquierdo de la ecuación [2.21](#) lo cual simplifica permite reescribir la ecuación [2.21](#) de la siguiente manera:

$$0 = - \frac{\lambda R_0 \Pi}{\mu U_0} \left(\frac{\partial \check{p}}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \check{u}_r) \right] \quad (2.22)$$

Recordemos que el término difusivo se simplificó debido a la relación $(\frac{\epsilon}{\lambda})^2$. Si retomamos la definición de la variable Π en la ecuación 2.19 se puede sustituir esta variable adimensional relacionada a la presión y a un número de Reynolds bajo, esta misma variable se puede sustituir en la ecuación 2.22, por lo que ahora la expresión se puede simplificar aún más para su análisis.

$$0 = -\frac{\partial \check{p}}{\partial s} + \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \check{u}_r) \right] \right\} \quad (2.23)$$

En la ecuación 2.23 se observa nuevamente la relación $\frac{\epsilon}{\lambda}$, por lo que se puede simplificar y el análisis se vuelve más sencillo, ya que, el único término que no desaparece es el término relacionado a la presión con respecto a su dirección, por lo que, la presión es independiente de la posición en dirección radial.

3 Método de solución

Ahora bien, una vez definida la física del problema y conociendo que el objetivo de la presente tesis es conocer la diferencia de presión cuando se presenta una estenosis se tiene que hacer uso de una solución conocida como "Teoría de lubricación". La cual es usada cuando la presión de un problema es desconocida.

Dicho lo anterior como contexto, el método que se usará para la solución numérica de dichas ecuaciones es la aproximación de "Von Karman y Pholhausen" [8]. Dicha técnica propone una variable de similaridad, la cual está relacionada directamente con el campo de velocidades y depende de la coordenada a analizar (en este caso, la coordenada radial).

El capítulo anterior donde se definió la física del problema se hablaba de un análisis de orden de magnitud, esto con el fin de simplificar, en la medida de lo posible, las variables que no son de importancia para el presente análisis. Por lo que para trabajar con el método de "Von Karman y Pholhausen" se usarán las ecuaciones de continuidad y conservación de forma diferencial. Respetando la simplificación geométrica desarrollada en la ecuación 2.21, la ecuación 2.3, se puede integrar desde el inicio de la estenosis hasta el final, con el fin de obtener el exceso de presión.

Por lo que de la ecuación [2.3](#) se puede integrar término a término desde 0 hasta donde termina la estenosis, por lo que la función estaría definida de la siguiente manera, recordando que estamos en coordenadas cilíndricas:

$$\int_0^{R(z)} r(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r}) dr = \frac{1}{2} \int_0^{R(z)} r u_z^2 dr \quad (3.1)$$

El segundo término de la ecuación de conservación de momentum:

$$\int (r u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}) dr = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \int_0^{R(z)} r u_z^2 dr \quad (3.2)$$

Finalmente, el término del lado derecho de la ecuación [2.3](#):

$$\rho \frac{d}{dz} \int_0^{R(z)} r u_z^2 dr = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dz} + \mu R \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{R(z)} \quad (3.3)$$

En la ecuación [3.3](#) nótese que la presión es resultado de una derivada total, esto es debido a que como se está integrando a lo largo del eje radial y los límites de integración son a lo largo de ese eje, la derivada se vuelve una derivada total.

Por lo que para continuar el método de "Von Karman y Pholhausen" es menester el uso de un campo de velocidades que contemple una variable de similaridad, es decir, una variable que dependa de la coordenada a analizar y que en este caso será la coordenada radial, siempre guardando una proporción entre el máximo tamaño y el mínimo. Por lo que se define el campo de velocidades de la siguiente manera:

$$\frac{u_z}{U(z)} = 1 + a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad (3.4)$$

Donde:

$$\eta = \frac{r}{R(z)} \quad (3.5)$$

Y $U(z)$ es la velocidad a lo largo del centro de la línea de flujo. Lo anteriormente descrito se acomoda para que para cada componente de velocidad a lo largo del eje axial, esté siempre dividida entre una velocidad característica, la cual es $U(z)$ misma que describe la velocidad máxima en un flujo de Poiseuille.

Ahora que se ha definido el campo de velocidades, se necesitan condiciones de frontera para poder aplicar el método numérico a la ecuación, como este método es muy extenso se describirá en el anexo en la sección "Método de solución". Por consiguiente se llega a la solución de los coeficientes que anteceden a las letras griegas η .

Por lo anterior, se se deben cumplir los siguientes criterios de condiciones de frontera

1. Condición de no deslizamiento
2. Condición de simetría
3. El perfil de velocidades en el centro de la línea de flujo es un flujo de Poiseuille
4. Se cumple la ecuación de conservación de momentum axial a lo largo de la frontera, pared del capilar sanguíneo

Desarrollando la primera condición, de no deslizamiento, donde la velocidad a lo largo de la pared de la estenosis es 0:

$$0 = 1 + a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad (3.6)$$

Segunda condición

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \\
 &= \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{1}{R} = 0 \\
 u_z &= U(z) (1 + a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4) \\
 \frac{du_z}{d\eta} &= U (a + 2b\eta + 3c\eta^2 + 4d\eta^3)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como la condición de simetría se da a lo largo del eje z' , se debe de evaluar en $\eta = 0$, por lo que se hace evidente que $a = 0$.

Tercera condición:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -2 \frac{U(z)}{R^2(z)} \\
 U(z) &= u_z (r = 0) \\
 u_z &= \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \\
 \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\Delta P}{4\mu L} \left(-\frac{2r}{R^2} \right) \\
 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -2 \frac{\Delta P}{4\mu L} \left(\frac{R^2}{R^2} \right) = -2 \frac{U(z)}{R^2} \\
 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -2 \frac{U(z)}{R^2}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se observa que la igualdad del flujo de Poiseuille está alineada con la suposición en el centro de la geometría, se puede continuar ahora llevando esa igualdad a la ecuación

3.4, sabiendo que $a=0$, por lo que:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_z}{U(z)} &= 1 + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \\
 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \eta \frac{1}{R}} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \eta^2} = -2U(z)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por otra parte, en el perfil:

$$\begin{aligned}
 u_z &= U(z) [1 + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4] \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \eta} &= U(z) [2b\eta + 3c\eta^2 + 4d\eta^3] \\
 \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} &= U(z) [2b + 6c\eta + 12d\eta^2] \\
 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \Big|_{\eta=0} \right) &= U(z)(2b) = -2U(z) \\
 \therefore b &= -1
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por lo que si sustituimos los valores de los coeficientes a y b , en la ecuación **3.6**, se

obtiene la ecuación: $c = -d$. Por lo que la última condición, se sustituye y se obtiene:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{r}{R}; r = R; \eta = 1 \\
0 &= -\frac{dp}{dz}\Big|_{R=1}; \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
u_z &= U(z) [1 - \eta^2 + c(\eta^3 - \eta^4)] \\
\frac{\partial u}{\partial R} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial R} \\
0 &= -\frac{dp}{dz} + \mu \left(\frac{1}{\eta R} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \frac{1}{R} \\
0 &= -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{\eta R^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R \eta \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
0 &= -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right) \\
0 &= -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{\eta R^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial u_z}{\partial \eta} &= U(z) [-2\eta + c(3\eta^2 - 4\eta^3)] \\
\eta \frac{\partial u_z}{\partial \eta} &= U(z) [-2\eta^2 + c(3\eta^3 - 4\eta^4)] \\
\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right) &= U(z) [-4\eta + c(9\eta^2 - 16\eta^3)] \\
0 &= -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{R^2} [-4 + c(9\eta - 16\eta^2)] \\
0 &= -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu U(z)}{R^2(z)} [-4 - 7c] \\
0 &= -\frac{\Phi + 4}{7}; \Phi = \frac{R^2}{\mu U(z)} \frac{dp}{dz}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Por lo que los coeficientes son del orden de:

1. $a = 0$

2. $b = -1$

3. $c = -d$

$$4. c = -\frac{\Phi+4}{7}$$

Donde Φ es un es un gradiente adimensional de presión, resultado de la última condición de frontera.

$$\Phi \equiv \frac{R^2}{\mu U} \frac{dp}{dz} \quad (3.12)$$

Nótese que en la ecuación [3.12](#) es muy notoria la dependencia del perfil de velocidades a la cordenada radial. Esto permitirá en el futuro poder tener una dependencia no solo con variables de similitud si no con la forma geométrica del problema planteado, es decir de $R(z)$ propuesto.

Por consiguiente, para poder simplificar el análisis es necesario el uso de la ecuación de continuidad en forma integral, lo anterior para simplificar $U(z)$, la cual es la velocidad en el centro del perfil de velocidades.

$$Q = \int_0^{R(z)} 2\pi r u_z(r) dr \quad (3.13)$$

Por lo que si se sustituye en la ecuación [3.4](#), además de considerar la ecuación de continuidad del componente axial y se sustituye la ecuación [3.4](#) en [3.3](#), además de la ecuación [3.13](#), esto con el fin de llegar a una ecuación donde el gradiente de presión quede explícito, sin embargo, el término no lineal, del lado izquierdo de la ecuación [3.3](#) impide obtener una solución analítica al problema planteado, por lo que se debe usar otro método para poder llegar a una solución numérica lo cual se puede lograr aproximando el comportamiento del fluido a un flujo de Poiseuille.

$$u_z = 2\bar{U}(1 - \eta^2) \quad (3.14)$$

Además de la definición de gasto volumétrico a través de esa región:

$$Q = \pi R^2 \bar{U} \quad (3.15)$$

Por lo que al final se obtiene la ecuación con el gradiente de presión explícito, obteniéndose la forma:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{5432\rho Q^2}{1575\pi^2 R^5} \frac{dR}{dz} - \frac{8\mu Q}{\pi R^4} \quad (3.16)$$

La ecuación anterior nos ayuda para poder llegar a una forma en la que el perfil de velocidades dependa del radio propuesto en la ecuación [2.4](#), además de las variables de similitud, lo anterior como causa para un análisis más simplificado a posteriori.

Para el análisis posterior, se cambiará la definición de Reynolds por la más usada en flujo en tuberías.

$$Re_0 = \frac{\rho \bar{U}_0 R_0}{\mu} \quad (3.17)$$

Pérdida de presión a lo largo de la estenosis

El objetivo de la presente tesis es determinar si el exceso de presión causado por una constricción, en este caso de estudio una estenosis, es perjudicial para la salud humana. Además de medir numéricamente si esta presión es demasiada alta o pequeña en función de una presión humana normal (80 diástole /120 sístole mmHg) [9](#).

Por lo anterior se debe recordar que si no se tuviera la constricción/estenosis este sería un caso en el que se pudiera usar el flujo de Poiseuille para resolver analíticamente la caída de presión en el ducto/arteria. Por lo que para lograr determinar el exceso de presión en la constricción se puede apoyar en la suposición que el flujo sigue

la ley de Poiseuille en cada punto a través del eje axial.

$$p(z_1) - p(z_2) = \frac{8\mu Q}{\pi R^4}(z_2 - z_1) \quad (3.18)$$

Por lo que ahora para determinar el exceso de presión se hará uso de la expresión de la presión total, ecuación 3.16, y la presión debido a la ley de Poiseuille, ecuación 3.18.

$$-\left(\frac{dP}{dz}\right)_{exceso} = -\left(\frac{dP}{dz}\right)_{Total} - \left(-\frac{dP}{dz}\right)_{Poiseuille} \quad (3.19)$$

Por lo anterior, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Delta P_{ex} = \int_{z_1}^{z_2} -\frac{dp}{dz} dz - \frac{8\mu Q}{\pi R_0^4}(z_2 - z_1) \quad (3.20)$$

Si se sustituye la ecuación 3.18 y 3.16 en 3.20, se obtiene la siguiente expresión, la cual está referenciada al marco de referencia axial.

$$\Delta P_{ex} = \frac{5432\rho Q}{1575\pi^2} \int_{z_1}^{z_2} (1/R^5) \frac{dR}{dz} dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{8\mu Q}{\pi R^4} dz - \frac{8\mu Q}{\pi R^4}(z_2 - z_1) \quad (3.21)$$

Ahora bien, hasta este punto, hemos considerado R como una variable más, sin embargo no hemos sustituido su valor en las ecuaciones que se han planteado a lo largo del presente planteamiento, por lo que si sustituimos la ecuación 2.4 en 3.21, notamos que para que el análisis sea más sencillo, es necesario adimensionalizar la integral y dejar todo en términos de variables no dimensionales para simplificar, a posteriori, los límites superiores e inferiores de la integral.

Por lo que, adimensionalizado la ecuación y realizando las simplificaciones algebraicas, resulta en la expresión:

$$\frac{\pi R_0^3 P_{ex}}{8\mu Q} = -\frac{679}{3150} Re_0 \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^5 d\left(\frac{R}{R_0}\right) + \int_{\frac{z_1}{R_0}}^{\frac{z_2}{R_0}} \left(\frac{R_0}{R}\right)^4 d\left(\frac{z}{R_0}\right) - \frac{z_2 - z_1}{R_0} \quad (3.22)$$

La ecuación anterior y apoyándose en la física del problema, figura 2.1. Se observa que el marco de referencia fue escogido de esa manera para que la función sea simétrica con respecto al eje radial.

De lo anterior se puede concluir que lo que pasa del lado izquierdo, también ocurre del lado derecho.

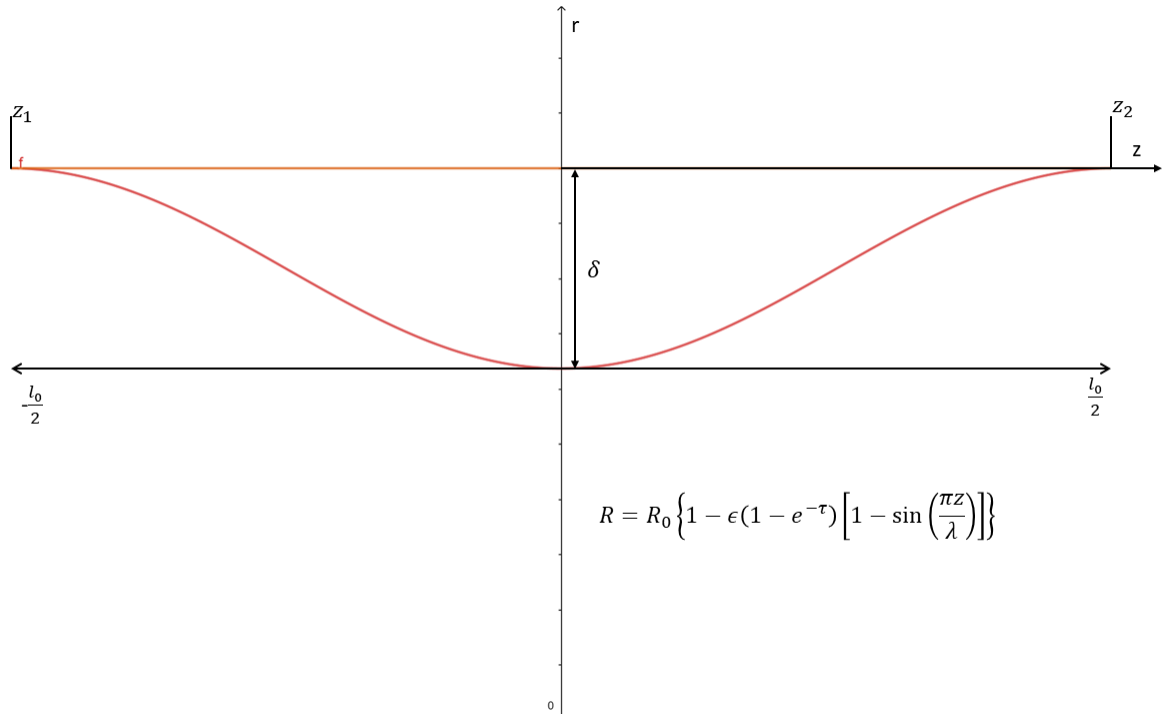


Figura 3.1: Simetría de la estenosis

Si se toma en cuenta que la estenosis es simétrica, la expresión 3.22 se puede simplificar aún más.

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi R_0^3 P_{ex}}{8\mu Q} = & -\frac{679}{3150} [1 + \sin(\pi\tau)] \int_{\frac{z_1}{R_0}}^{\frac{z_2}{R_0}} \left(\frac{1}{1 - \epsilon(1 - e^{-\tau}) [1 + \sin(\pi\zeta)]} \right)^5 d\zeta \dots \\
 & \dots + \lambda(1 + \sin(\pi\zeta)) \int_{\frac{z_1}{R_0}}^{\frac{z_2}{R_0}} \left[\left(\frac{1}{1 - \epsilon(1 - e^{-\tau}) [1 - \sin(\pi\zeta)]} \right)^4 \right]
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

La expresión anterior es resultado de la simplificación por simetría con base en la figura 3.1. Sin embargo, aún se debe tomar en cuenta la adimensionalización realizada

en la ecuación 2.15 y 2.16. En conclusión y tomando en consideración las adimensionalizaciones mencionadas, la expresión puede aún simplificarse aún más. Por lo que si se cambian los límites de integración por la adimensionalización propuesta:

$$\begin{aligned} \blacksquare \zeta_1 &= \frac{z_1}{\lambda R_0} \therefore \zeta_1 = -\frac{1}{2} \\ \blacksquare \zeta_2 &= \frac{z_2}{\lambda R_0} \therefore \zeta_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo que si se sustituye la ecuación 3 en 3.22 se obtiene una expresión mucho más simplificada, la cual es un apoyo para la evaluación de la integral y por consiguiente la evaluación de la presión en exceso entre el inicio de la estenosis y el final. Con base en este análisis también se puede obtener el punto de separación, el cual se analizará más adelante en la presente tesis.

Finalmente, la expresión toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\pi R_0^3 P_{ex}}{8\mu Q} &= -\frac{679}{3150} [1 + \sin(\pi\tau)] \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 - \epsilon(1 - e^{-\tau})[1 + \sin(\pi\zeta)]} \right)^5 d\zeta \dots \\ &\dots + \lambda(1 + \sin(\pi\zeta)) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{1 - \epsilon(1 - e^{-\tau})[1 - \sin(\pi\zeta)]} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Punto de separación y perfil de velocidades en la estenosis

En la ecuación 3.24 se llegó a la expresión a resolver, por métodos numéricos, del exceso de presión, sin embargo, aún se puede continuar este caso de estudio a fin de averiguar los puntos de separación de la capa límite de la sangre en relación con la estenosis. Para lo cual nos apoyaremos en la premisa que en donde el punto de separación ocurre, el esfuerzo cortante es 0, es decir, no hay esfuerzos en la pared y en este caso, en la arteria.

Para lo cual, se llega a la conclusión:

$$(T_{rz})_{r=R} = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)_{r=R} = 0 \quad (3.25)$$

Por otro lado si se toma la ecuación 1-4.31 de la referencia principal de esta tesis [6] se puede utilizar para llegar a la expresión del perfil de velocidades en la estenosis y se adecua el modelo matemático para ser usado en la presente tesis:

$$\frac{Re_0}{\lambda} R(\zeta)^{-1} \frac{dR}{d\zeta} = 20.45 \quad (3.26)$$

Por lo que si se opera la expresión anterior y se considera la regla de la cadena para poder llegar a los valores que la expresión anterior considera:

$$\frac{d^2 R}{d\zeta^2} - R(\zeta)^{-1} \left(\frac{dR}{d\zeta} \right)^2 = 0 \quad (3.27)$$

En consecuencia, si se sustituye la ecuación [2.4] en la ecuación [3.27], se obtiene la ecuación a resolver para el punto de separación del fluido.

$$0 = \sin(\pi\zeta) - \epsilon(1 - e^{-\tau})\sin(\pi\zeta) + \epsilon(1 - e^{-\tau}) \quad (3.28)$$

Por otro lado, si se sustituye la ecuación [3.5] con los valores de frontera propuestos, es decir donde la estenosis termina y donde la estenosis alcanza el valor de valle ($\eta = \frac{1}{2}$ y $\eta = 0$), en la ecuación [3.4], se puede obtener el perfil de velocidades de la estenosis.

Por lo tanto, haciendo el algebra correspondiente, se obtiene la siguiente ecuación:

Para $\eta = \frac{1}{2}$:

$$u^* = \frac{3}{2} [1 - \epsilon(1 - e^{-\tau}) \{1 - \sin(\pi\zeta)\}]^{-2} \quad (3.29)$$

Para $\eta = 0$

$$u^* = 2 [1 - \epsilon(1 - e^{-\tau}) \{1 - \sin(\pi\zeta)\}]^{-2} + Re_0 [1 - \epsilon(1 - e^{-\tau}) \{1 - \sin(\pi\zeta)\}]^{-3} \quad (3.30)$$

En la ecuación [3.29](#) y [3.30](#) podemos observar una peculiaridad del modelo que se está analizando. La velocidad del fluido, en este caso de estudio sangre, depende de las condiciones geométricas, es decir, si la concavidad de la estenosis es casi similar al largo del radio propuesto, el perfil de velocidades alcanza su punto máximo.

4 Simulación

En la sección anterior se observó que se llegó a las ecuaciones a resolver para poder observar resultados numéricos tangibles. Sin embargo para poder plasmar los resultados, es necesario el uso de softwares que resuelvan numéricamente la ecuación planteada.

Como primera instancia, el modelo numérico de la presión en exceso se debe resolver por el método "Simpson 3/8". Por lo que se hace uso del software 'Matlab' para la programación del código el cual permitirá obtener una gráfica en la cual se podrá observar el comportamiento de la presión en exceso, ecuación [3.24](#)

Por otro lado, con el fin de simular condiciones reales de una estenosis, se toman los siguientes datos publicados en una revista médica [\[10\]](#), por lo que para efectos de la simulación se toman en cuenta los siguientes parámetros numéricos:

- $\tau = 0.1$, la cual se variará hasta llegar al 1, ya que, en el 1 ya no se observarán variaciones por haber alcanzado el estado estacionario.
- $\epsilon = 0.1$. Este valor es de suma importancia, ya que, es una variable que contiene información geométrica de la estenosis, al ser la hipótesis que el exceso de presión varía en función de las condiciones geométricas, es necesario variar este valor

para conocer su impacto en el exceso de presión.

- $\lambda = 10$, es importante recalcar que por la relación que guarda ϵ con λ , este factor se debe de variar con cuidado, siempre teniendo en cuenta que λ debe ser mayor a ϵ en un factor de aproximadamente 10, de lo contrario, el modelo no sería válido.
- $R_0 = 5 \times 10^{-6} [m]$, radio promedio de un capilar sanguíneo.
- $\rho = 1066 [\frac{kg}{m^3}]$, densidad de la sangre, dato extraído de la misma revista médica.
- $\mu = 3.5 \times 10^{-3} [\frac{Pa}{s}]$, dato extraído de la misma revista médica.
- $v_{capilar} = 0.00033 [\frac{m}{s}]$, dato extraído de la misma revista médica.

Con los datos anteriores, se arma el código de Matlab, el cual contempla que el valor que va a variar es τ .

```

1      r=0.9; %Es la tau
2      l=20; %Es lambda
3      g=0.7; %Es epsilon en nuestro problema
4      t=g*(1-exp(-r)); %Es el tiempo
5      R0=5*10^-6;
6      V=0.00033;
7      d=1066;
8      m=3.5*10^-3;
9      Re=(V*2*R0*d)/m;
10     f=@(x)-(679/3150)*Re*(1-g*(1-exp(-r))*(1-sen(pi*x))).^-5

```

```

11     +1*((1-g*(1-exp(-r))*(1-sen(pi*x))).^-4-1);
12     a=-1/2;
13     b=1/2;
14     k=100;
15     n=3*k;
16     h=(b-a)/n;
17     A=0;
18     for i=1:k
19         A=A+(3*h/8)*(f(a)+3*f(a+h)+3*f(a+2*h)+3*f(a+3*h));
20         a=a+3*h;
21     end
22     fprintf('El valor de la integral es: %f \n',A);

```

Con los datos anteriores se puede obtener un número de Reynolds. Es importante recalcar que para la solución de la ecuación de exceso de presión, es importante conocer este número, ya que, la ecuación está en función del Reynolds.

$$Re_0 = \frac{2v\rho R_0}{\mu} = \frac{2[(0.00033[\frac{m}{s}])(1066[\frac{kg}{m^3}])(5 \times 10^{-6}[m])]}{3.5 \times 10^{-3}[\frac{Pa}{s}]} = 0.0010[1] \quad (4.1)$$

De la ecuación anterior se puede concluir que el fluido tiene un comportamiento de flujo de Stokes o 'creeping flow', por lo que las fuerzas inerciales son más pequeñas que las fuerzas viscosas y que las fuerzas debido a la presión. Esto cobra sentido, ya que, en los capilares sanguíneos la velocidad debe ser baja para que el oxígeno sea residenciado hacia los tejidos, esto es importante debido a que para las personas que sufren hipertensión este procedimiento se ve interrumpido y los medicamentos que les son suministrados solo engañan al cuerpo para que este proceso se siga llevando a cabo. Sin embargo, en una persona sana, la sangre al momento de entrar en un capilar

sanguíneo sufre un efecto de 'spray', este efecto le permite al oxígeno penetrar en el tejido, oxigenándolo de manera adecuada. Por otro lado, en personas que sufren de hipertensión esta transformación no puede ser llevada de manera adecuada y por eso es necesario la administración de medicamentos que inhiban la capacidad del cuerpo de detectar que este proceso no se está llevando a cabo de manera adecuada.

Regresando al planteamiento del problema, se tiene una limitante. Dicha limitación recae en la premisa del creeping flow per se, es decir, cuando el Reynolds es mayor a 1, la ecuación [3.24](#) ya no tiene una convergencia numérica y el modelo diverge. Por consiguiente la siguiente limitación física sería la relación entre las variables geométricas (ecuación [A.6](#)), ya que, ϵ tiene que ser más grande que λ , ya que, al no cumplirse esto, nuevamente el modelo tendrá una divergencia numérica.

Por lo anterior, la simulación numérica estará centrada en probar la relación de la concavidad de la estenosis con un aumento de presión en exceso en el capilar sanguíneo, siempre respetando la relación ϵ - λ , además de tomar en consideración el flujo de Stokes o creeping flow. Por lo tanto, el primer valor que se variará será la condición geométrica ϵ . Esto se hará de un valor de 0.1 a 1 para observar el efecto de la presión en exceso contra ϵ . Para las siguientes gráficas se considera $\lambda = 10$

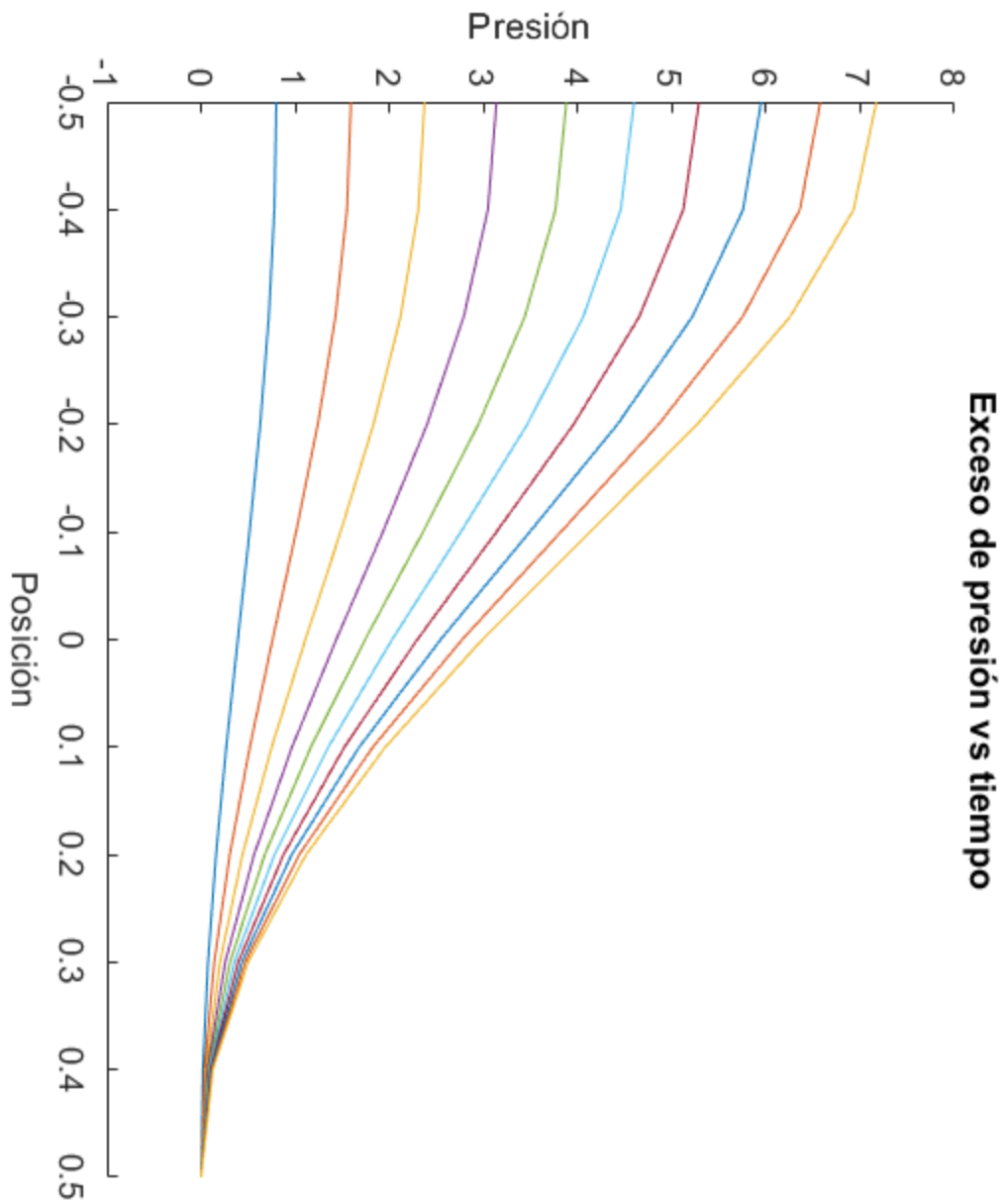


Figura 4.1: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.1$

Como se puede observar en la Figura [4.1](#), la gráfica muestra que a lo largo de la estenosis, al momento de llegar a la mitad, es decir, nuestro 0 en el marco de referencia

la presión que se alcanza es la máxima y cuando la estenosis está llegando a su fin la presión en exceso converge en 0. Lo anterior habla de un comportamiento donde el exceso de presión crece hasta ser máximo a la mitad de la estenosis y conforme se va llegando al final de la misma el exceso de presión es 0, es decir. La presión en el capilar sanguíneo regresa a un flujo de Poiseuille, donde el gradiente de presión obedece, nuevamente a la Ley de Poiseuille

A continuación se continuará variando la condición geométrica ϵ con el fin de aceptar o rechazar la hipótesis planteada con anterioridad, si el exceso de presión depende de estas condiciones o no lo hace.

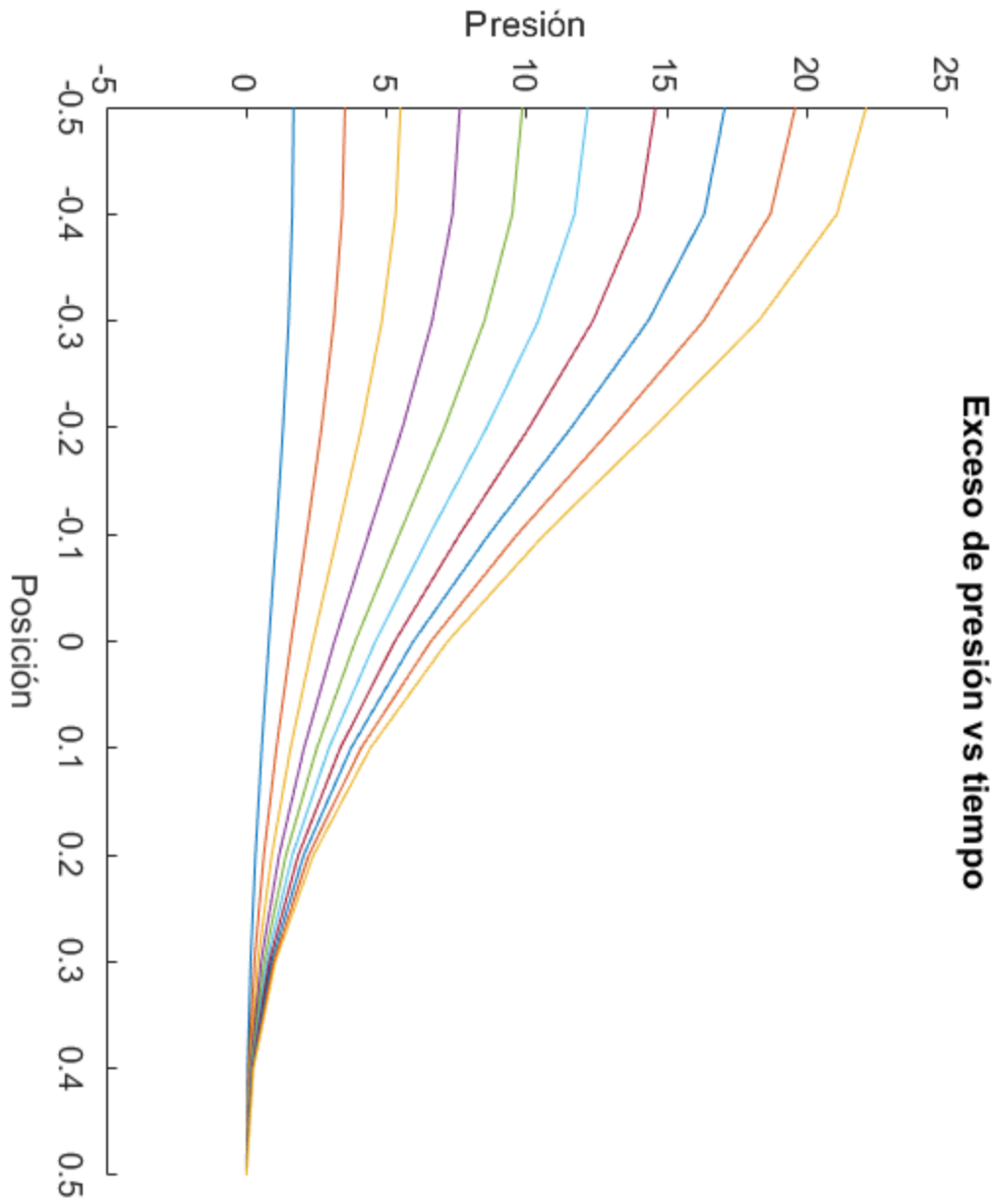


Figura 4.2: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.2$

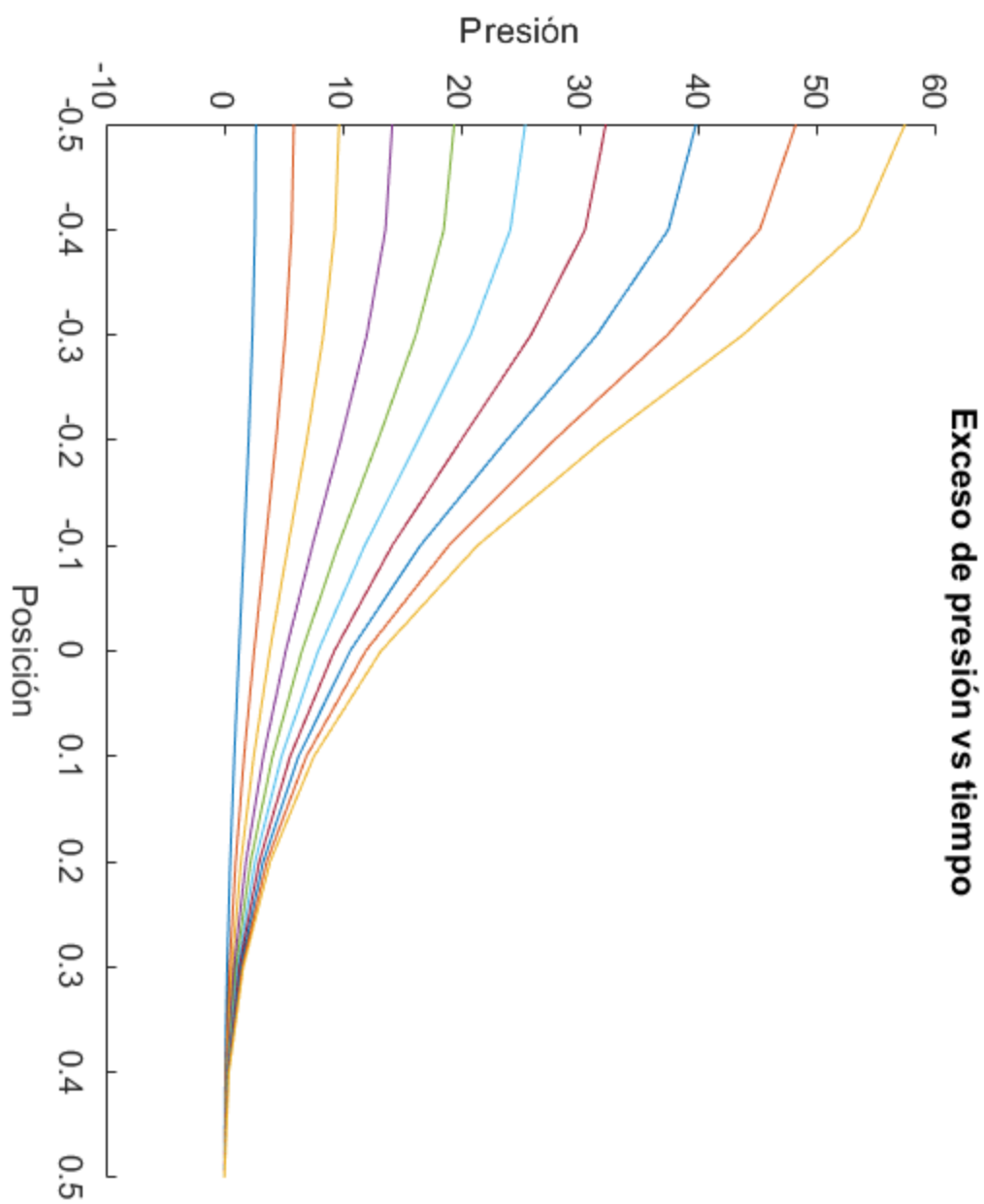


Figura 4.3: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.3$

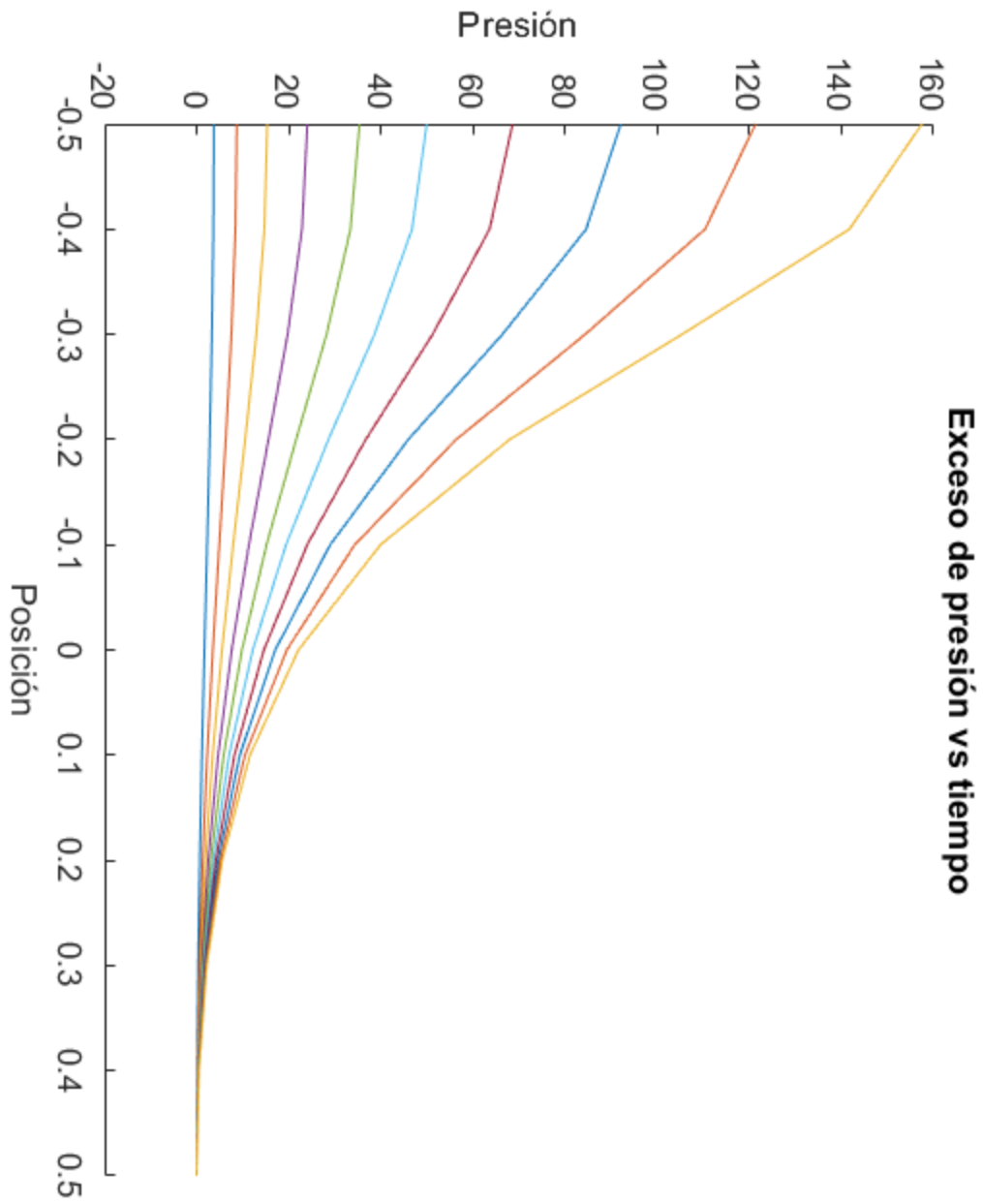


Figura 4.4: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.4$

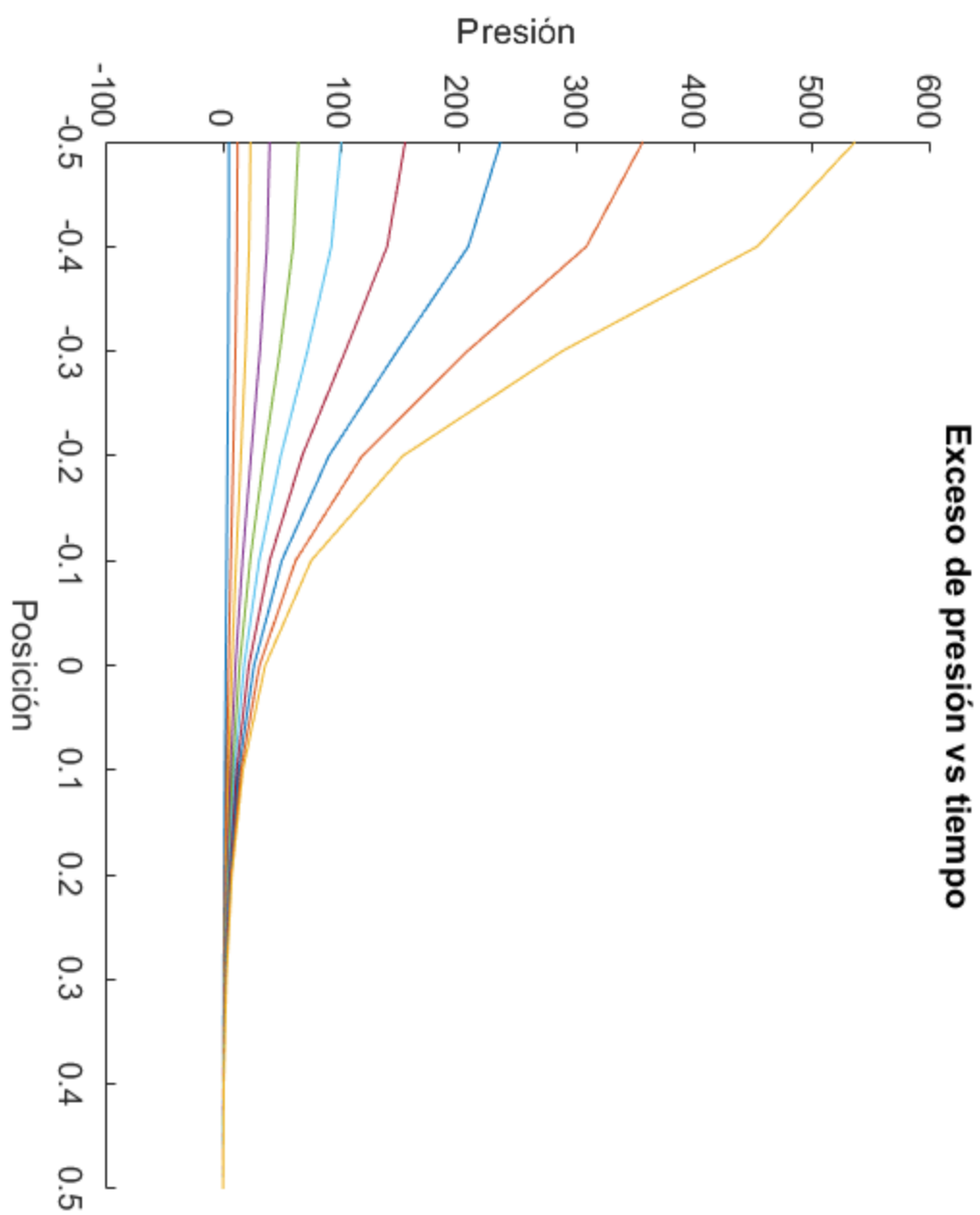


Figura 4.5: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.5$

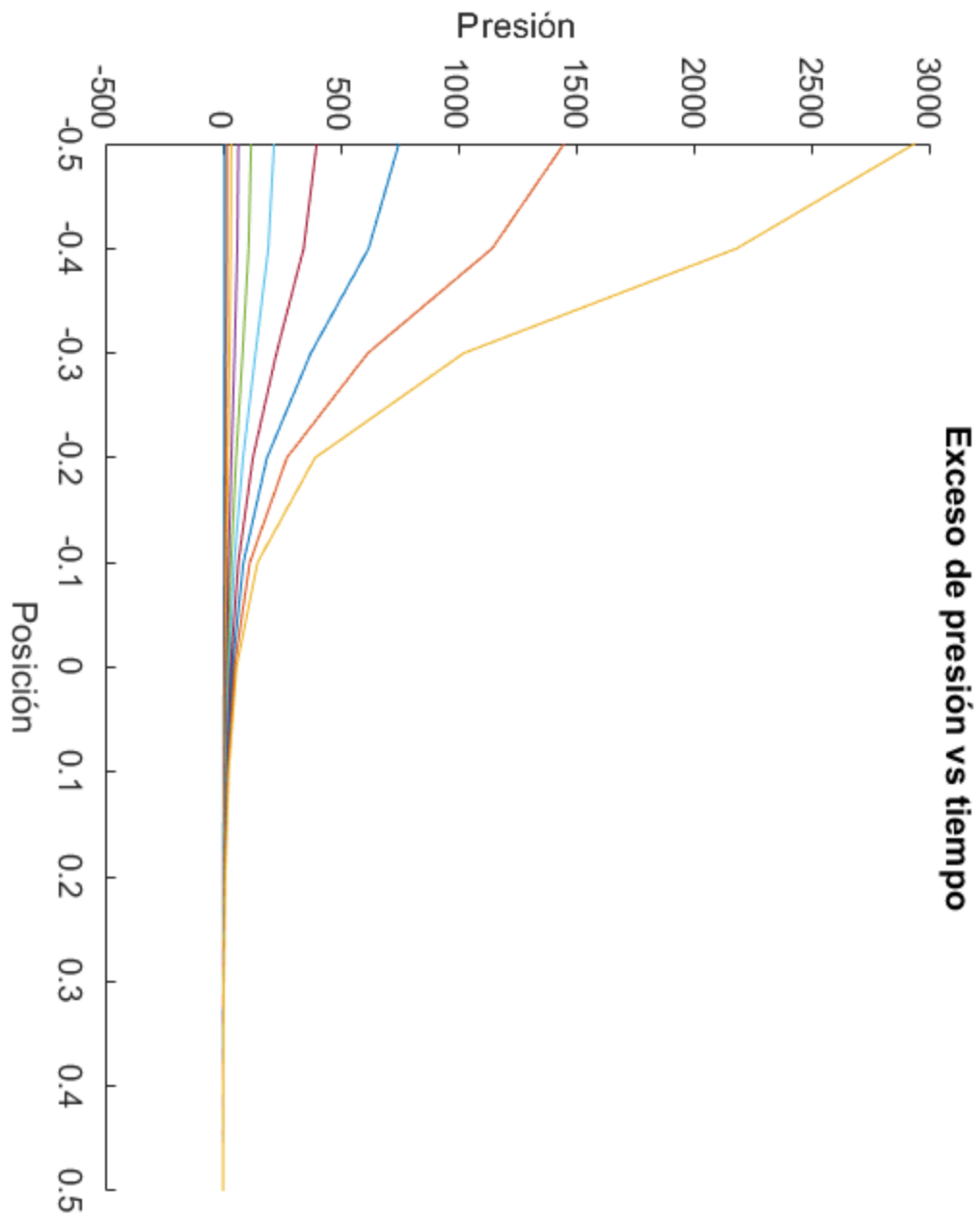


Figura 4.6: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.6$

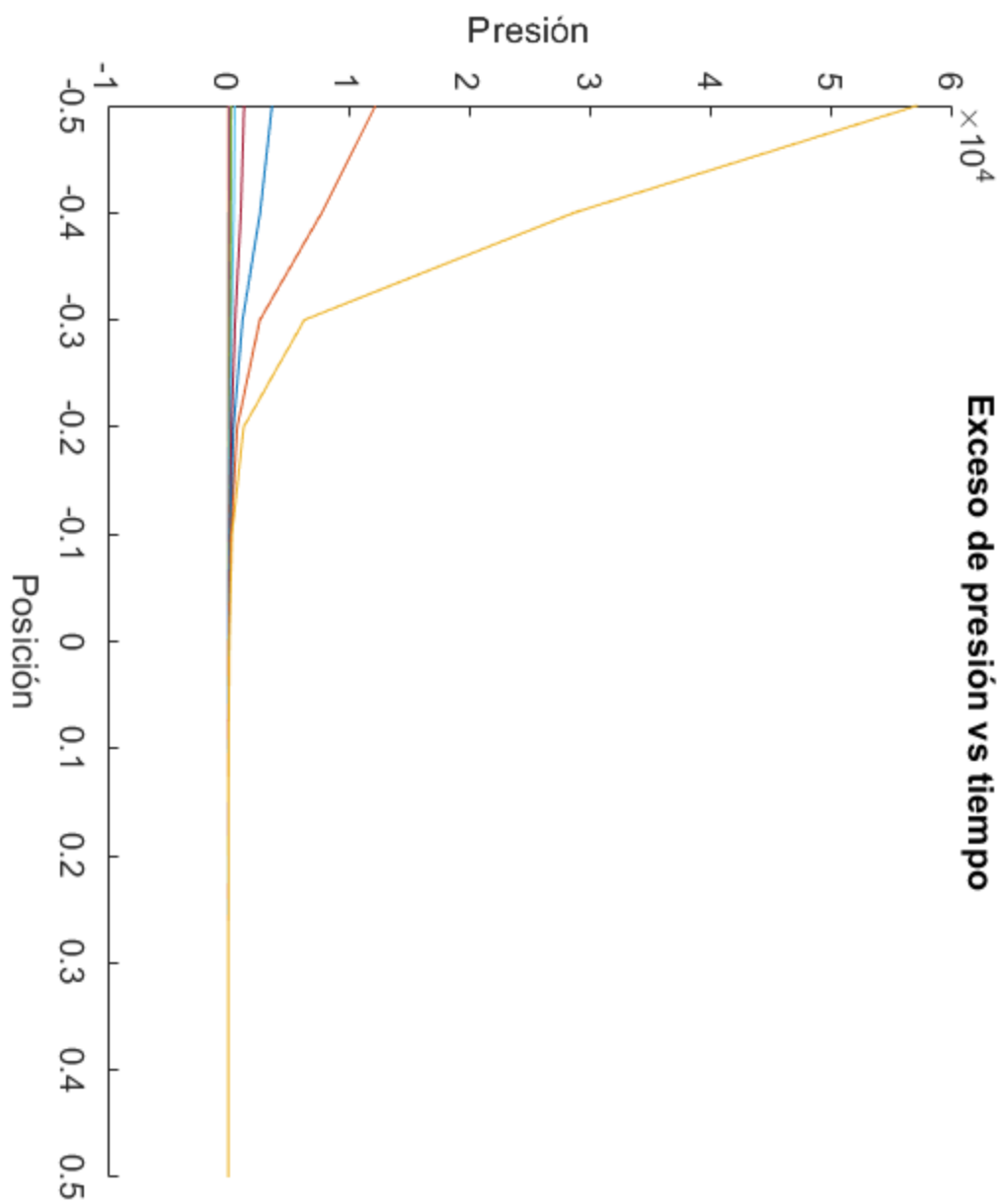


Figura 4.7: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.7$

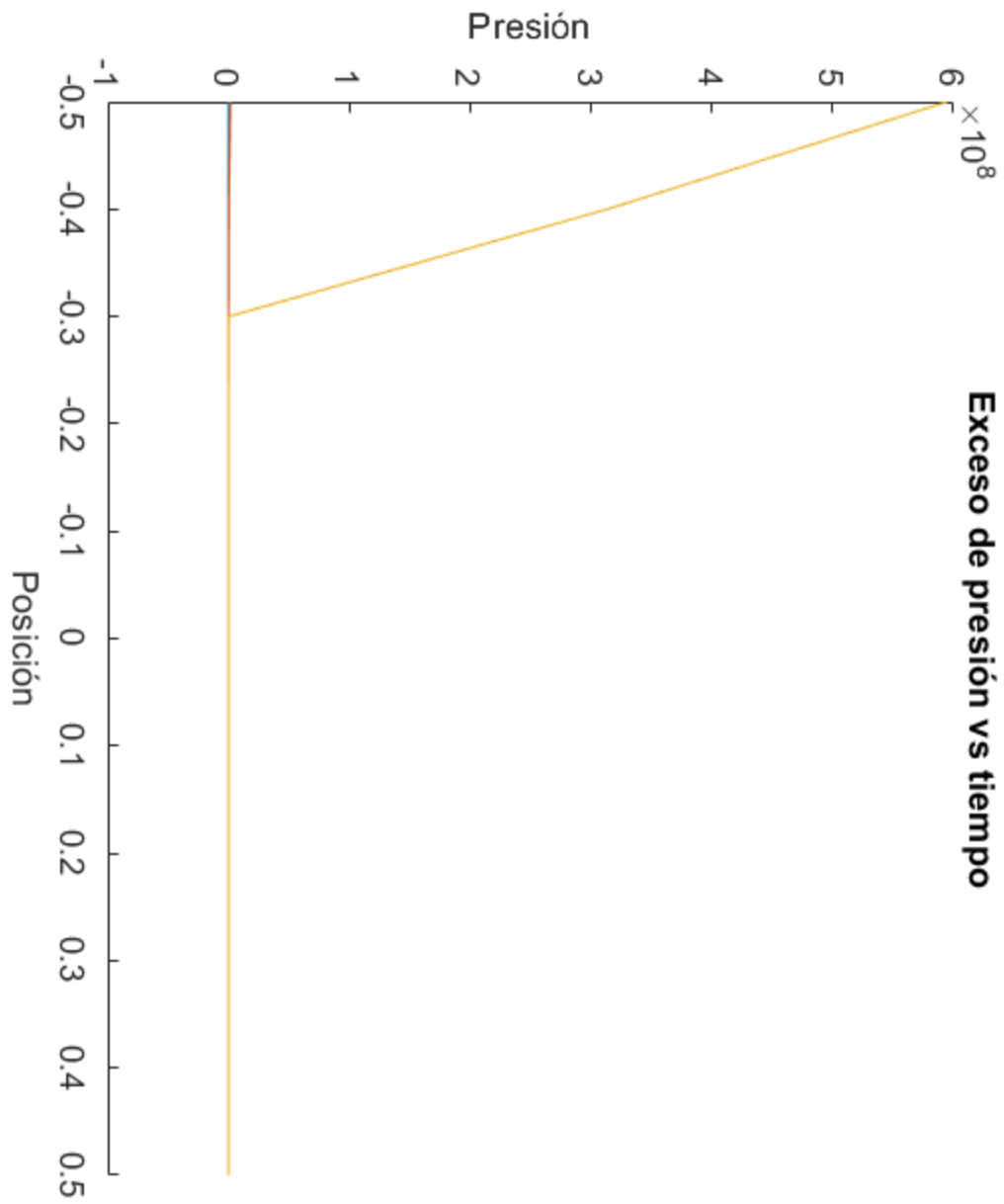


Figura 4.8: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.8$

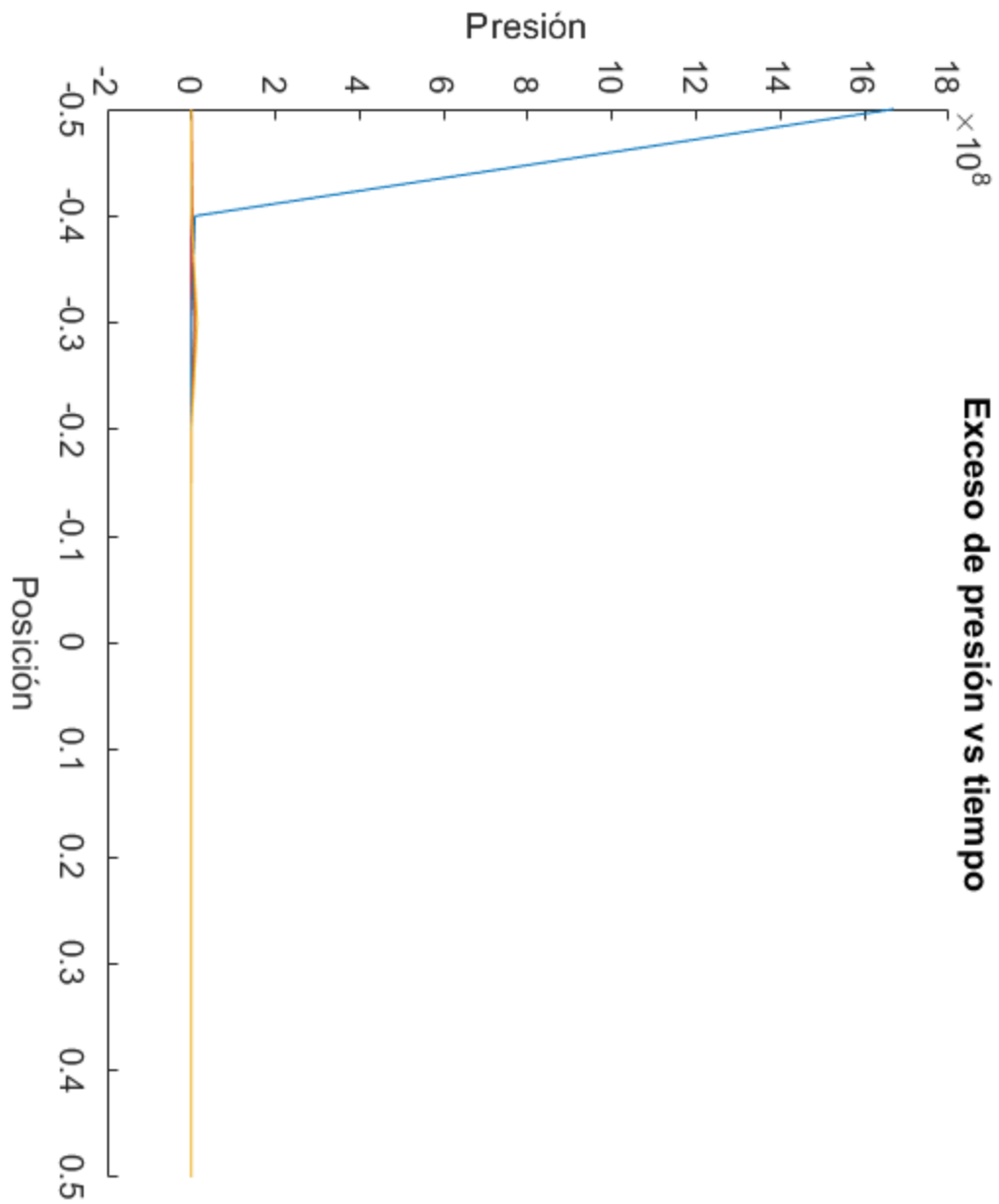


Figura 4.9: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 0.9$

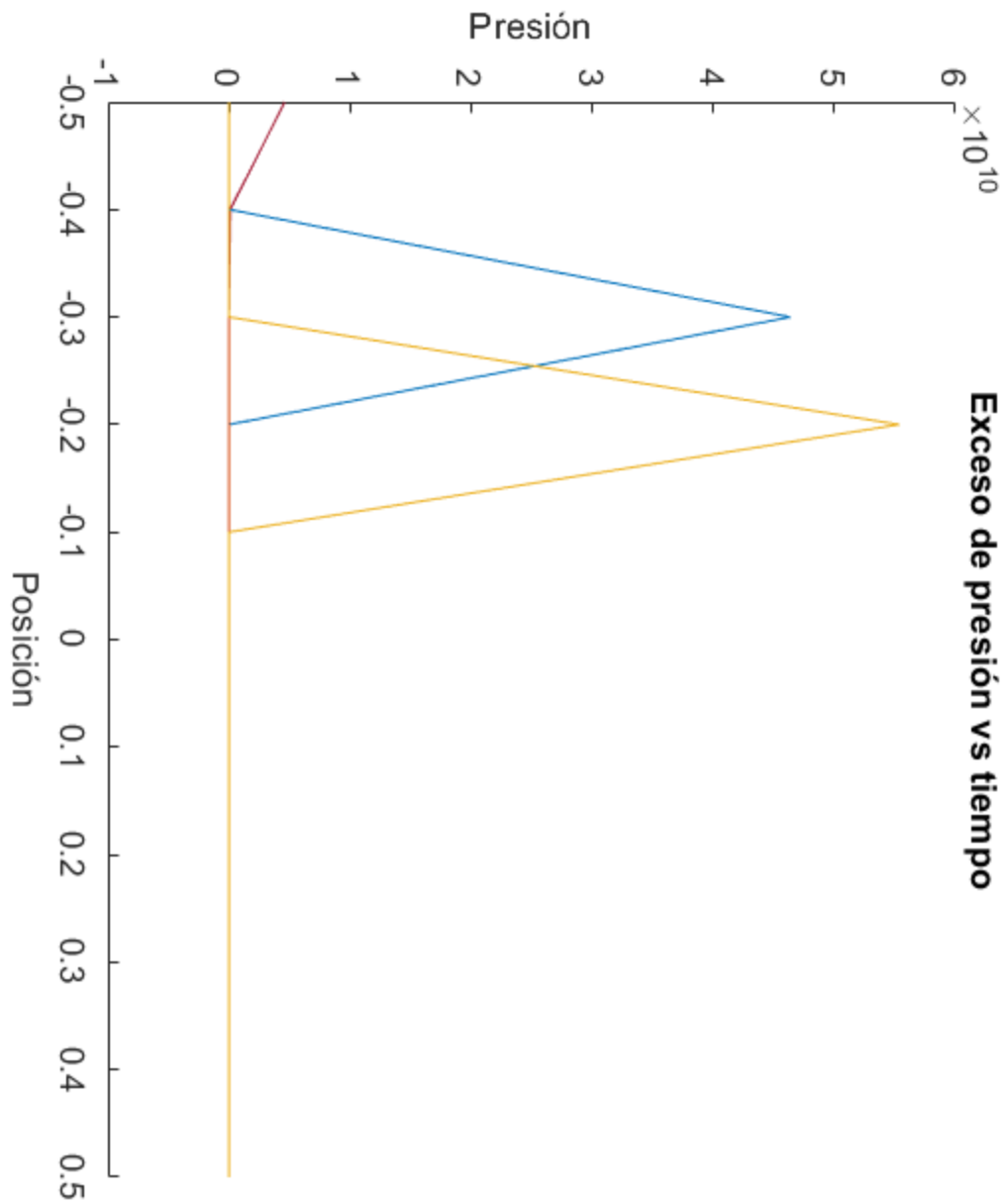


Figura 4.10: Variación de τ de 0 al estado estacionario, $\epsilon = 1$

Con base en las gráficas [4.1](#) a [4.10](#) se observa que el modelo comienza a divergir conforme se aumenta ϵ , esto tiene sentido al introducir la premisa anterior, mientras

más grande sea ϵ , λ también debería de crecer, debido a la condicionante de la relación $\epsilon - \lambda$. Por lo anterior también se puede deducir que el parámetro geométrico ϵ influye mucho en el exceso de presión en la región estenótica, sin embargo, al ser un modelo adimensional estos valores no deben tomarse como valores reales de presión en exceso. Un ejemplo sería que no se puede concluir que para un $\epsilon = 0.6$ la presión en exceso es 3000 [mmHg], esto debido a que debemos de dimensionalizar nuevamente la ecuación para poder dar una conclusión, numérica, de lo que está pasando con el exceso de presión.

Es por eso que se requiere regresar a la ecuación con dimensiones para poder determinar la magnitud del impacto de la presión en el caso de una estenosis, es decir, determinar el impacto que tendría P_{ex} en la ecuación [3.24](#). Por lo anterior se despeja P_{ex} y se toma el código de matlab para poder calcular para cada valor geométrico y temporal el valor de la presión en exceso.

$$P_{ex} = \frac{8\mu QR_s}{\pi R_0^3} \quad (4.2)$$

Donde:

- R_s : Resultado de la simulación numérica.

Por otro lado, al tener Q , se puede utilizar su definición, per se, con los datos obtenidos en la revista médica [10](#) por lo que se puede calcular el gasto volumétrico en el capilar sanguíneo.

$$Q = (\pi) (R_0^2) (v_{capilar}) \quad (4.3)$$

Donde:

- $v_{capilar}$: Velocidad promedio del fluido en los capilares sanguíneos, tomada de la misma revista médica de consulta [\[10\]](#)

Por lo que para cada valor de ϵ , λ y t se tendrá un valor único de Presión en exceso. A continuación las tablas de tiempo vs Presión en exceso en función de la concavidad de la curva, la cual está implícita en la solución numérica.

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.007
0.2	0.013
0.3	0.020
0.4	0.026
0.5	0.032
0.6	0.037
0.7	0.043
0.8	0.048
0.9	0.052
1	0.057

Tabla 4.1: P_{ex} para $\epsilon = 0.1$

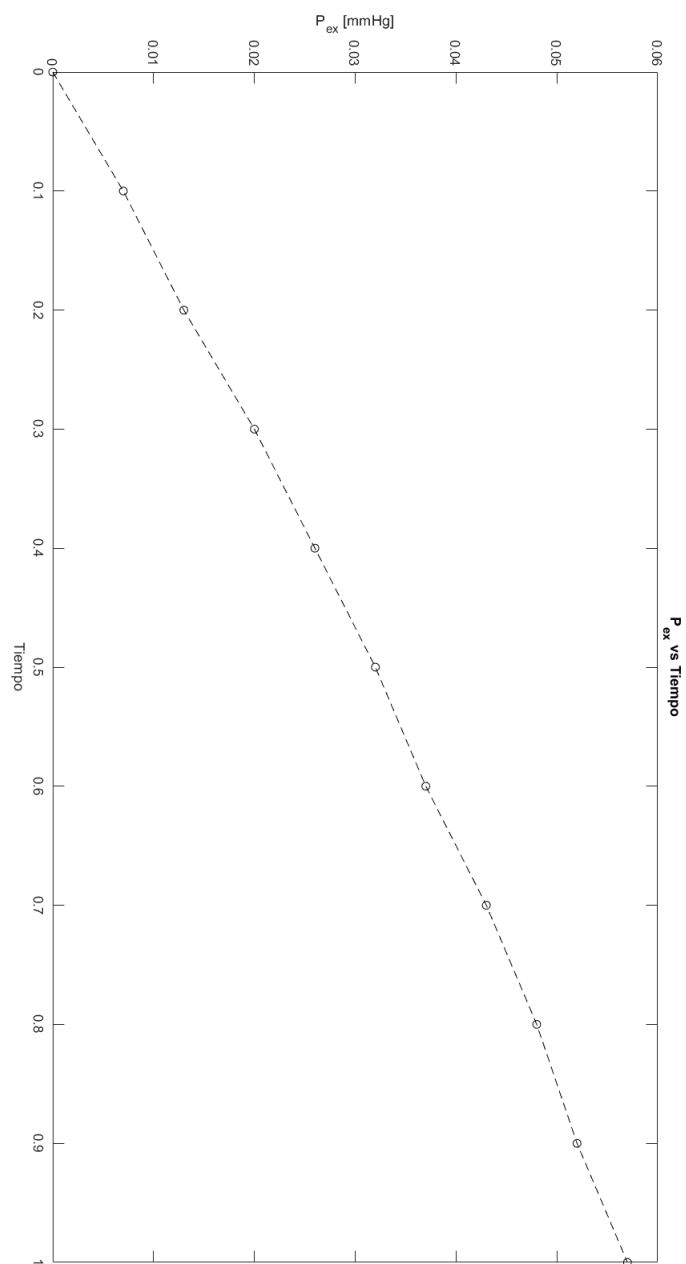


Figura 4.11: P_{ex} vs Tiempo, epsilon=0.1

En la Figura [4.11](#) se observa que la presión tiene un crecimiento que tiende a ser lineal, cabe resaltar que estos datos ya son totalmente dimensionales, por lo que los valores que se observan tienen unidades de mmHg, se elige esta unidad debido a que la presión sanguínea se mide en mmHg.

Por otro lado, la presión en exceso no es lo suficientemente alta para ser de importancia médica, ya que la magnitud de la misma es <1 , el comportamiento de la gráfica de presión en exceso vs tiempo tiende a seguir un comportamiento lineal. Lo cual nos habla de un impacto mínimo debido a la geometría del problema.

En consiguiente, para modificar la geometría es necesario variar el parámetro ϵ y λ con el fin de saber el impacto, en magnitud, de la presión en exceso en el capilar sanguíneo.

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.050
0.2	0.122
0.3	0.230
0.4	0.395
0.5	0.652
0.6	1.066
0.7	1.754
0.8	2.941
0.9	5.077
1	9.129

Tabla 4.2: P_{ex} para $\epsilon = 0.6$

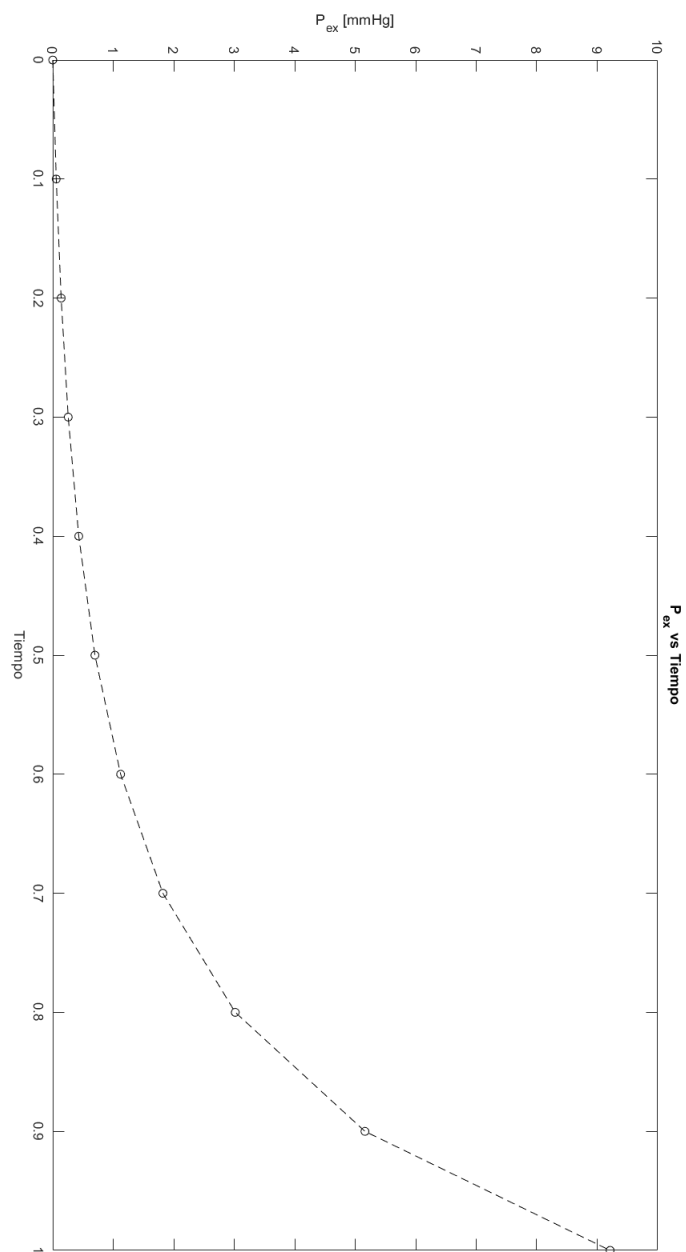


Figura 4.12: P_{ex} vs Tiempo, epsilon=0.6

Como se observa en la Figura 4.12 esta adopta un comportamiento esperado debido al tipo de función que es, al ser esta una gráfica que contempla magnitudes, la conducta de la misma obedece a la ecuación 3.24, es decir, un modelo exponencial.

A continuación se muestra la evolución de la estenosis variando el parámetro de elongación en la solución numérica.

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.014
0.2	0.029
0.3	0.044
0.4	0.060
0.5	0.076
0.6	0.092
0.7	0.109
0.8	0.125
0.9	0.141
1	0.157

Tabla 4.3: P_{ex} para $\epsilon = 0.2$

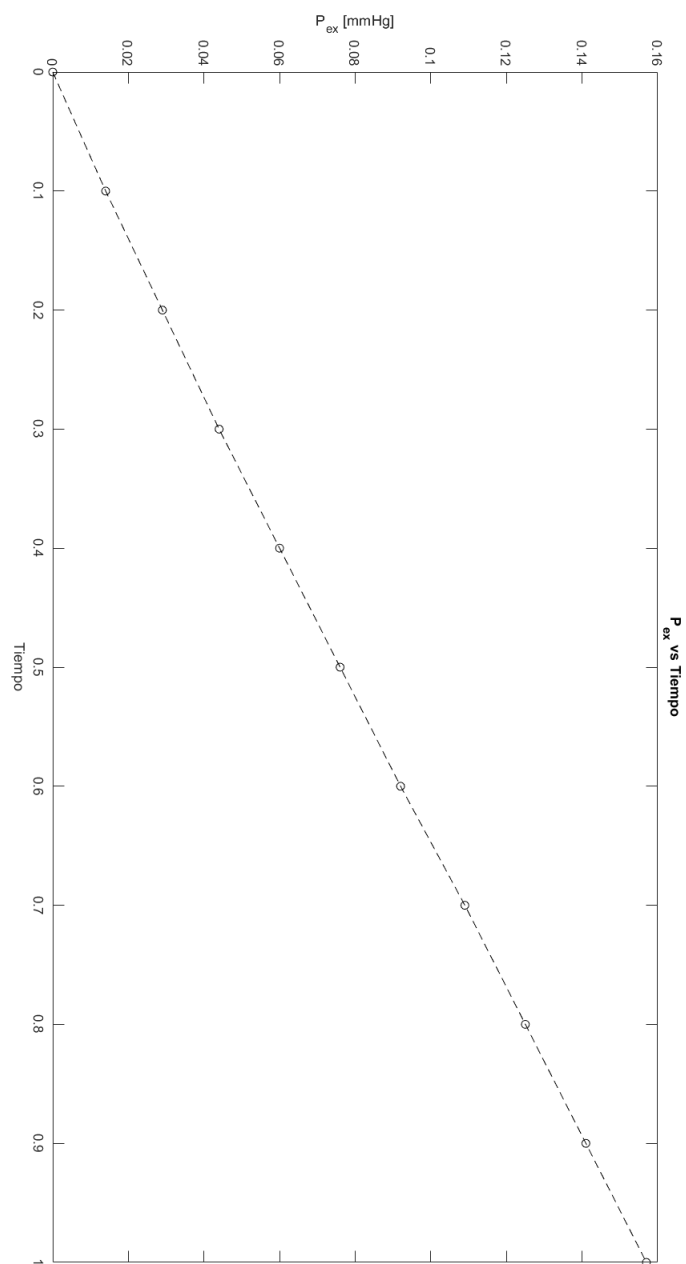


Figura 4.13: P_{ex} vs Tiempo, epsilon=0.2

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.022
0.2	0.047
0.3	0.075
0.4	0.106
0.5	0.140
0.6	0.177
0.7	0.217
0.8	0.261
0.9	0.307
1	0.356

Tabla 4.4: P_{ex} para $\epsilon = 0.3$

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.031
0.2	0.068
0.3	0.114
0.4	0.169
0.5	0.236
0.6	0.317
0.7	0.413
0.8	0.528
0.9	0.663
1	0.822

Tabla 4.5: P_{ex} para $\epsilon = 0.4$

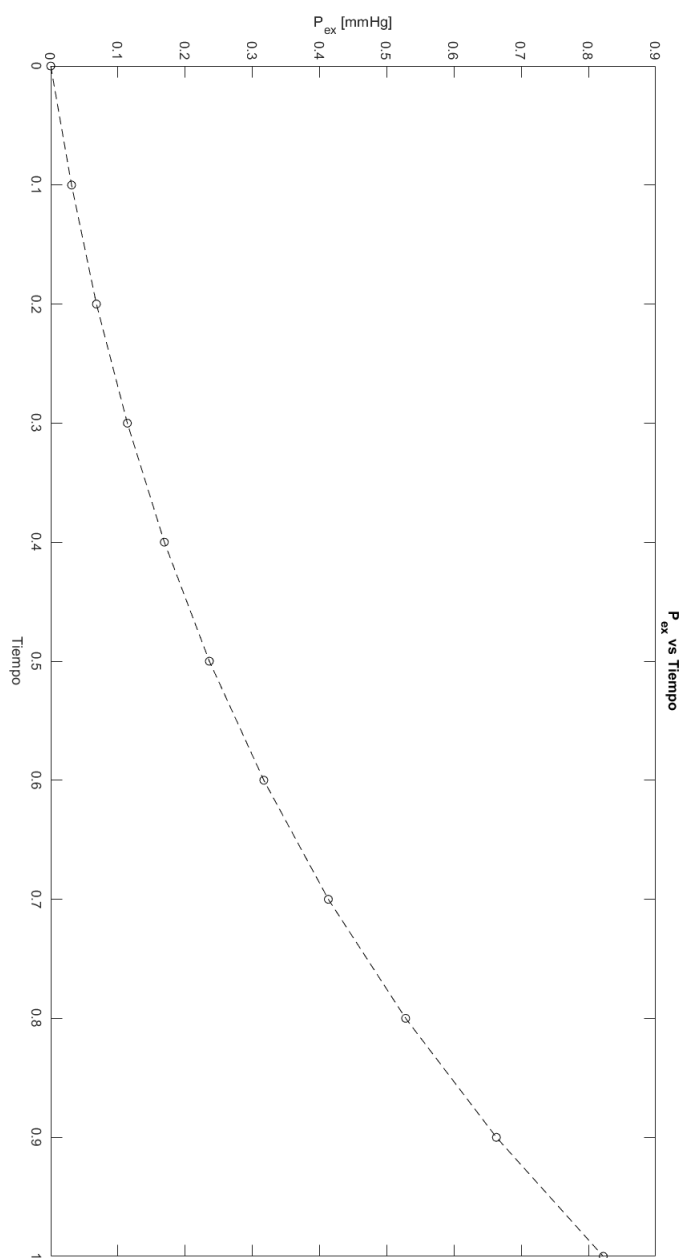


Figura 4.14: P_{ex} vs Tiempo, epsilon=0.4

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.040
0.2	0.093
0.3	0.164
0.4	0.259
0.5	0.389
0.6	0.566
0.7	0.809
0.8	1.143
0.9	1.604
1	2.243

Tabla 4.6: P_{ex} para $\epsilon = 0.5$

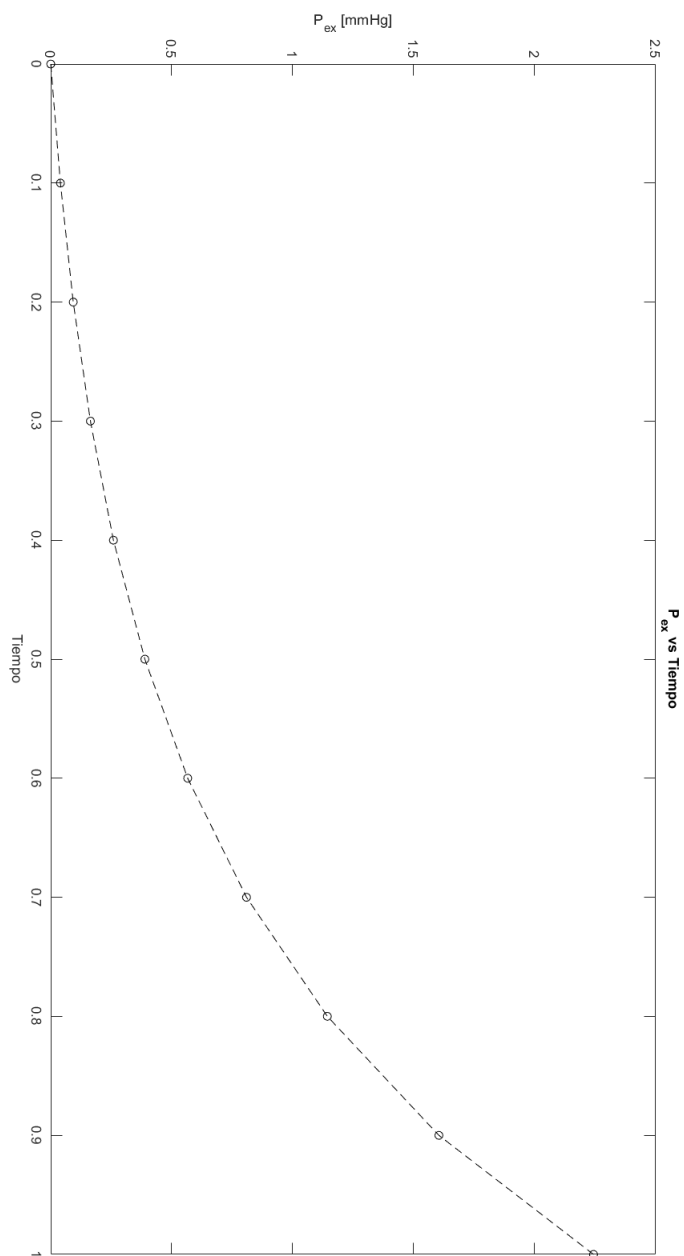


Figura 4.15: P_{ex} vs Tiempo, epsilon=0.5

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.050
0.2	0.122
0.3	0.230
0.4	0.395
0.5	0.652
0.6	1.066
0.7	1.754
0.8	2.941
0.9	5.077
1	9.129

Tabla 4.7: P_{ex} para $\epsilon = 0.6$

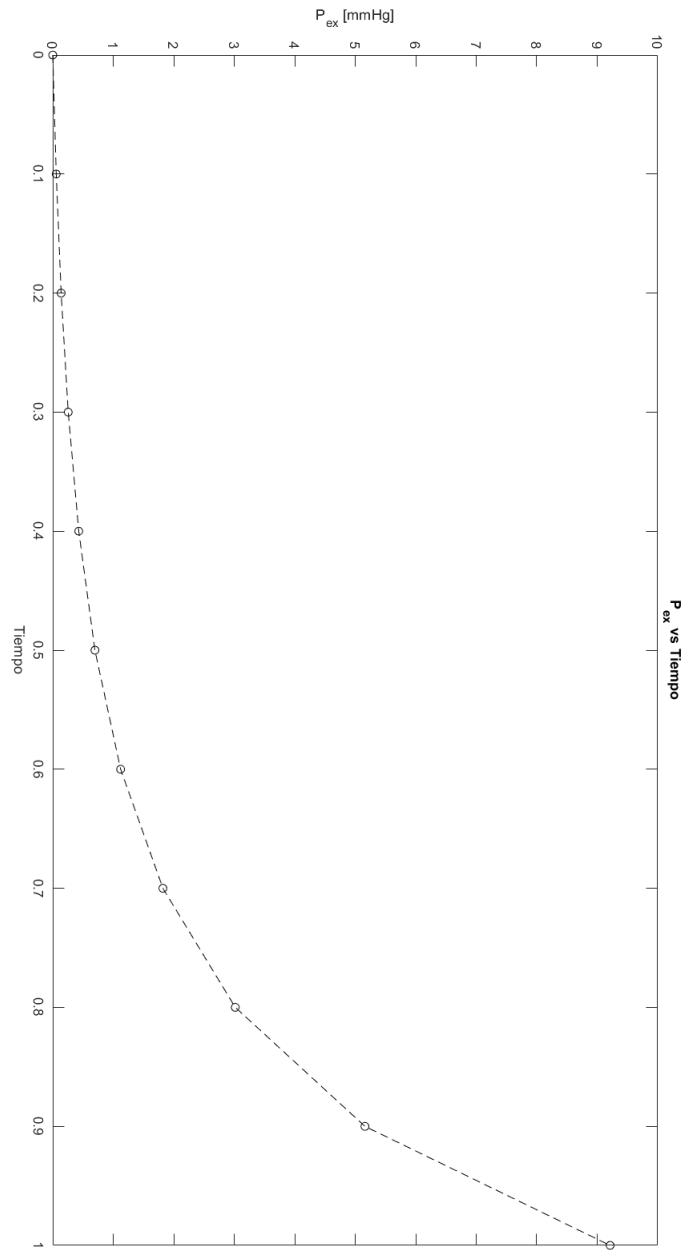


Figura 4.16: P_{ex} vs Tiempo, epsilon=0.6

τ	P_{ex} [mmHg]
0	0
0.1	0.061
0.2	0.158
0.3	0.320
0.4	0.607
0.5	1.144
0.6	2.234
0.7	4.669
0.8	10.889
0.9	30.173
1	112.036

Tabla 4.8: P_{ex} para $\epsilon = 0.7$

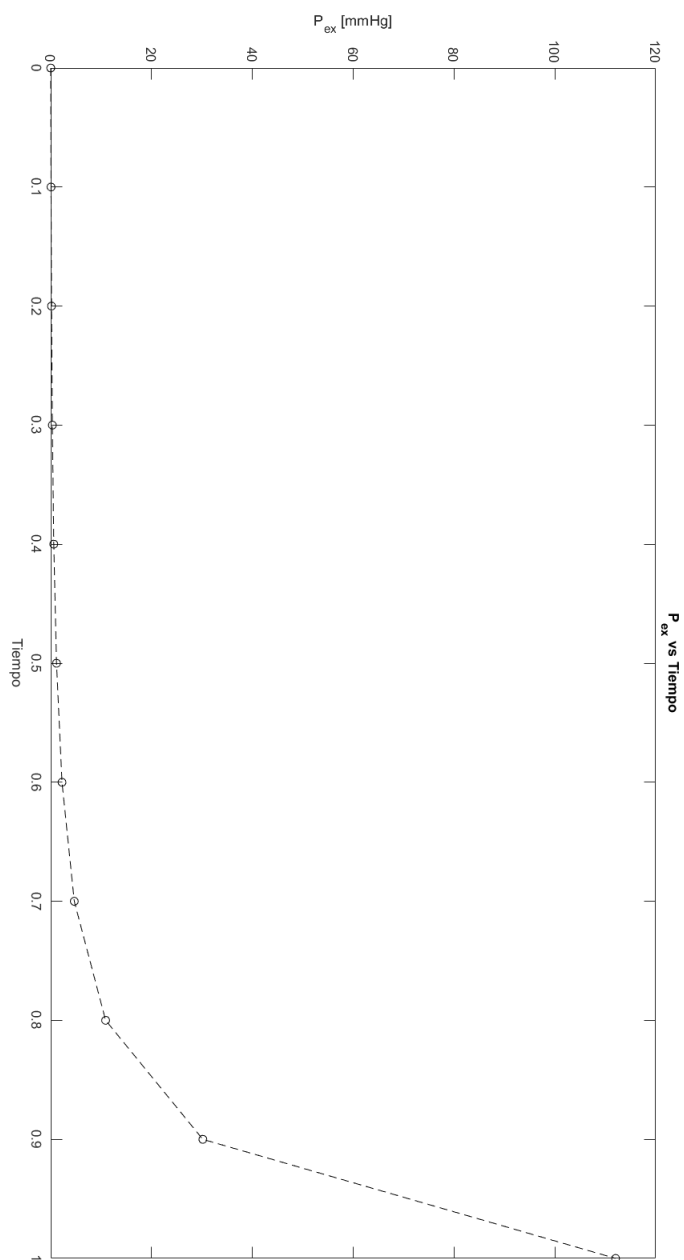


Figura 4.17: P_{ex} vs Tiempo, epsilon=0.7

Como se observa en gráfica 4.17 y tabla 4.7. Cuando $\epsilon = 0.7$ la presión comienza a ser muy alta, es decir, para cuando el tiempo llega al estado totalmente desarrollado, la presión es lo suficientemente alta como para ser sumamente letal para el cuerpo humano. Por lo que el seguir incrementando la concavidad de la curva, ya no tendría mucho sentido debido a que, al momento de estar disminuyendo el área del capilar sanguíneo el Reynolds también aumenta por lo que la aseveración de Creeping flow se pierde, es por eso que el modelo matemático propuesto para este fenómeno solo es válido para Reynolds bajos, antes de que este comience a divergir.

4.0.1. Punto de separación

En la sección anterior se obtuvo la presión en exceso usando el modelo numérico propuesto, esto es importante debido a que se logró apoyar la premisa sobre la concavidad de la curva (a mayor concavidad de la curva, el gradiente de presión es mayor). Ahora bien un dato que también es relevante en el análisis de fluidos es el punto de separación o la separación de la capa límite.

Para poder plasmar analíticamente lo anteriormente mencionado, es necesario apegarnos a la definición de capa límite.

$$T_{rz} = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (4.4)$$

La ecuación anterior se desarrolla a partir de la premisa que en el punto donde la sangre comienza a separarse, por lo que, el cortante en la pared donde r toma el valor de R , es decir en la pared, el cortante debe ser igual a 0.

El desarrollo del algebra se lo dejamos en consulta en el apéndice de la presente

tesis. Sin embargo cabe resaltar que para el cálculo del punto de separación se usa la ecuación [3.4](#), ya que, este campo debe ser derivado con respecto a la dirección radial y ser evaluado donde $r=R$, además de igualar a 0 para que se pueda obtener una ecuación que permita el cálculo de dicho punto.

$$\frac{d^2 R}{d\zeta} - R(\zeta)^{-1} \left(\frac{dR}{d\zeta} \right)^2 = 0 \quad (4.5)$$

Finalmente desarrollando el álgebra con base en la expresión anterior se obtiene la ecuación a resolver con el fin de obtener el punto de separación del fluido.

$$\text{sen}(\pi\zeta) - \epsilon(1 - e^{-\tau}) \text{sen}(\pi\zeta) + \epsilon(1 - e^{-\tau}) = 0 \quad (4.6)$$

De la ecuación [4.6](#) se pueden asignar valores geométricos así como los valores a la variable adimensional ζ con el fin de conocer el valor del punto de separación para cada valor de ϵ . Cabe resaltar que para este ejercicio debe realizarse para cada paso de tiempo desde 0 hasta 1 donde el fluido esté totalmente desarrollado.

La ecuación anterior se debe resolver y buscar los valores de ζ que la hacen 0. Por lo que se utiliza la herramienta de Matlab para programar un solucionador que nos permita conocer los valores anteriormente mencionados.

De la premisa anterior se resalta que al ser una función cíclica (sen) esta puede tener muchas soluciones a lo largo del eje radial, por lo que se discriminaron los resultados que se encuentren fuera del rango de la estenosis, recordando que la estenosis ocupa el intervalo ($\zeta = -\frac{1}{2}, \zeta = \frac{1}{2}$). Finalmente obteniendo los valores del solucionador de ecuaciones, estos deben de evaluarse en la función original para el radio, ecuación [2.4](#).

τ	ζ
0	0
0.1	-0.0031
0.2	-0.0059
0.3	-0.0085
0.4	-0.0109
0.5	-0.013
0.6	-0.015
0.7	-0.0169
0.8	-0.0186
0.9	-0.0201
1	-0.0215

Tabla 4.9: ζ para $\epsilon = 0.1$

Con la tabla [4.9](#) se puede construir una recreación del recorrido del punto de separación conforme va creciendo ϵ de $t=0$ a $t=1$. Por lo que si se sustituye el valor arrojado por programa que soluciona la ecuación [4.6](#), en [2.7](#) se puede obtener las coordenadas exactas del punto de separación para ese tiempo en específico.

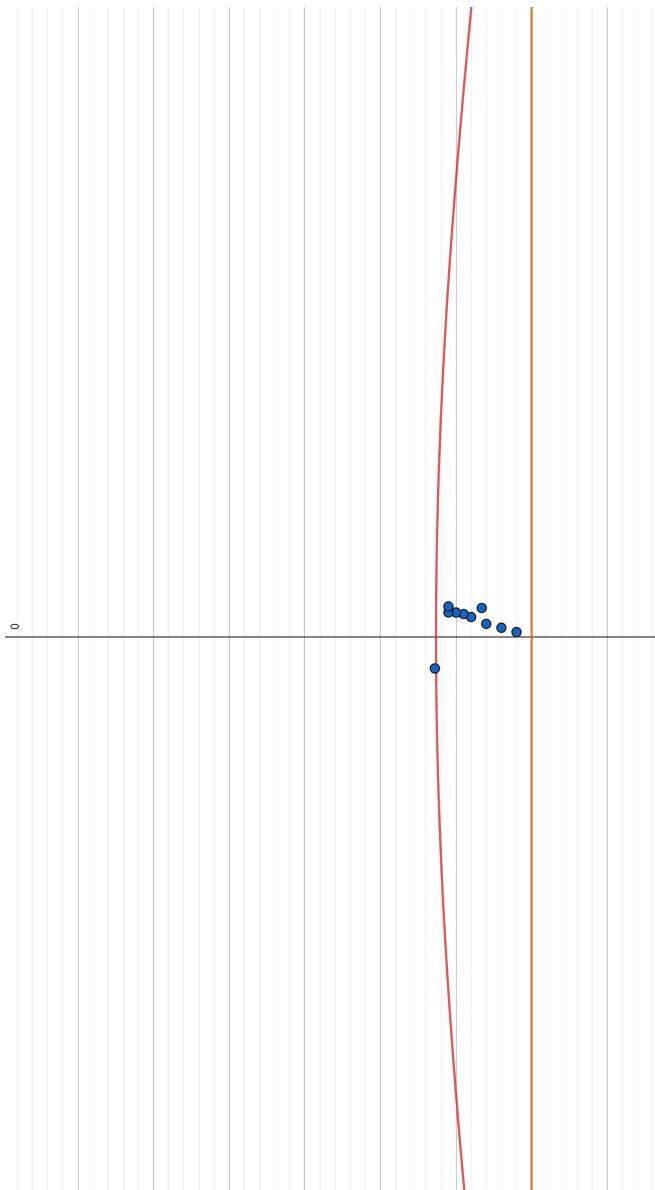


Figura 4.18: Recorrido del punto de corte de $t=0$ a $t=1$.

Como se observa en la Figura [4.18](#), el recorrido del punto de separación en relación al eje de simetría radial de la estenosis. Nótese que nunca cruza al lado derecho del eje de simetría, se mantiene en el lado izquierdo hasta el desarrollo completo de la estenosis. Donde cruza el punto de simetría para situarse en el lado derecho.

Se puede concluir que el punto de separación de la capa límite se encuentra,

generalmente, antes de que la estenosis esté lo más cóncava posible en relación al tiempo.

ζ	Valor de r [10^{-6}]
0	5
-0.0031	4.95
-0.0059	4.95
-0.0085	4.87
-0.0109	4.82
-0.013	4.80
-0.015	4.77
-0.0169	4.74
-0.0186	4.72
-0.0201	4.69
-0.0215	4.67

Tabla 4.10: Valores de la variación del punto de separación, divididos

4.0.2. Resultados del punto de separación

Como se observa en la tabla (4.9), hay un punto donde la presión en exceso es negativa, más específicamente, después del punto de separación. Esto es debido a que el fluido "se está regresando", esto es una prueba de que el fluido está recirculando. La presencia de una recirculación del fluido puede ser nociva para la salud, debido a que significa que esta zona (zona de desprendimiento de la capa límite) representa un efecto de succión en el capilar sanguíneo.

Este efecto de succión es sumamente nocivo para el cuerpo humano debido a que se generan zonas de flujo turbulento, además de generar una mayor presión hacia las paredes del capilar sanguíneo en cuestión, provocando que la estenosis se rompa

provocando un sangrado interno.

τ	P_{ex} [mmHg]
5	0
4.95	-1.8
4.95	-1.8
4.87	-1.3
4.82	-1.9
4.80	-1.7
4.77	-1.9
4.74	-0.8
4.72	-1.6
4.69	-0.2
4.67	-5.69

Tabla 4.11: Exceso de presión para $\epsilon = 0.1$, evaluada en la vecindad del punto de separación de la capa límite

Si se presta atención en la tabla [4.11](#), se puede observar que el exceso de presión se vuelve negativo, recordando un poco al fenómeno de recirculación, sin embargo, no se puede asegurar, con certeza, que la sangre esté recirculando, esto debido a que el modelo [2.15](#) no considera los términos inerciales, por lo que solo se hace una mención más no se afirma que pueda haber recirculación de la sangre. Por lo que será motivo de estudio más adelante.

Por otro lado, surge la pregunta sobre lo que pasaría si el fluido que se está modelando no estuviera restringido sobre ser o no flujo reptante, por lo cual se podría variar el Reynolds, siempre y cuando se respete la condicionante geométrica, ya que, al no respetar la condicionante geométrica, se rompería la simplificación realizada al inicio de la simulación para reducir las ecuaciones de N-S.

A continuación se mostrará una serie de gráficas realizadas con una simulación de

presión contra posición, variando el Reynolds. Esto con el fin de analizar su comportamiento y verificar si el Reynolds tiene algún efecto directo en la presión en exceso para la estenosis.

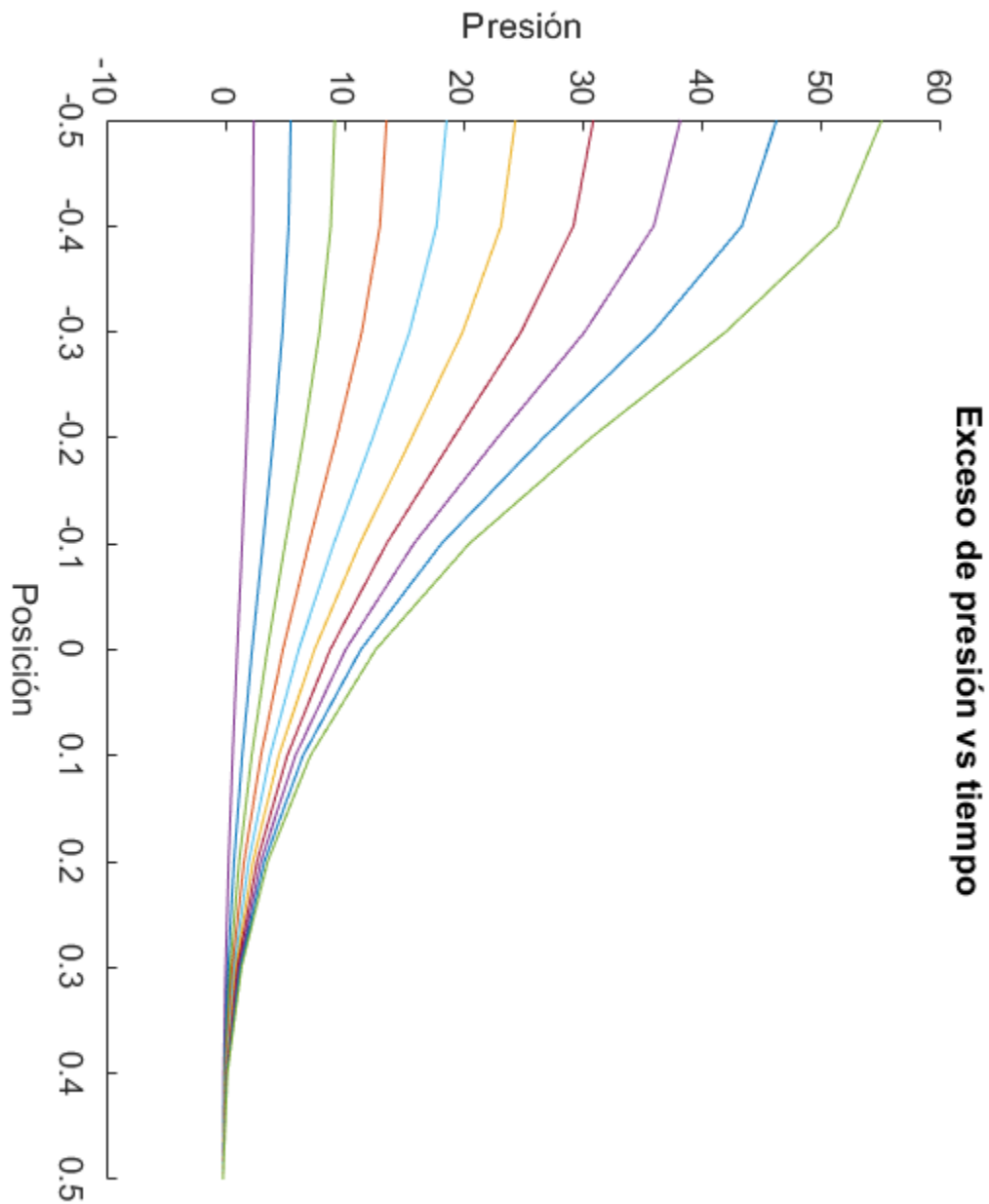
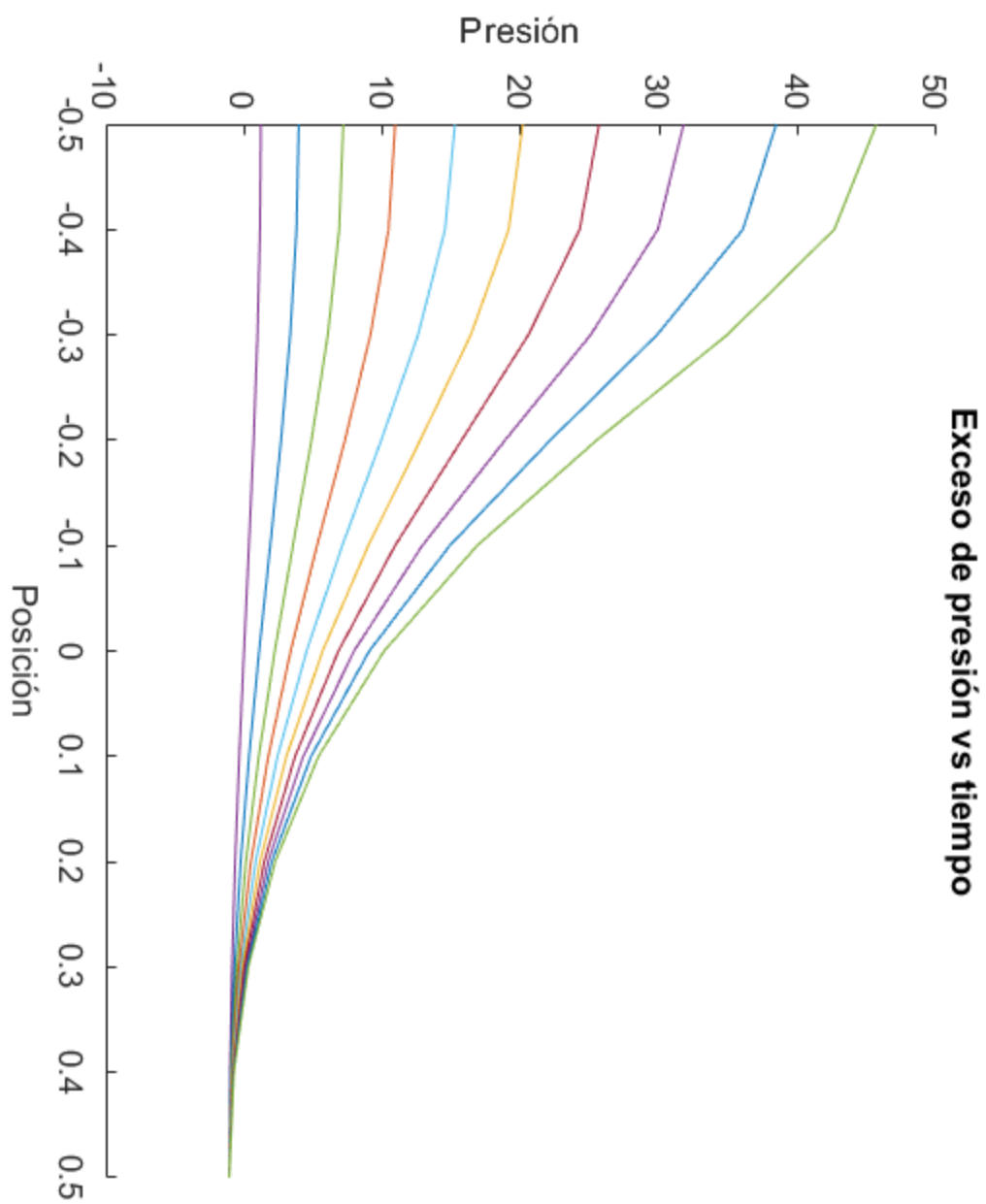
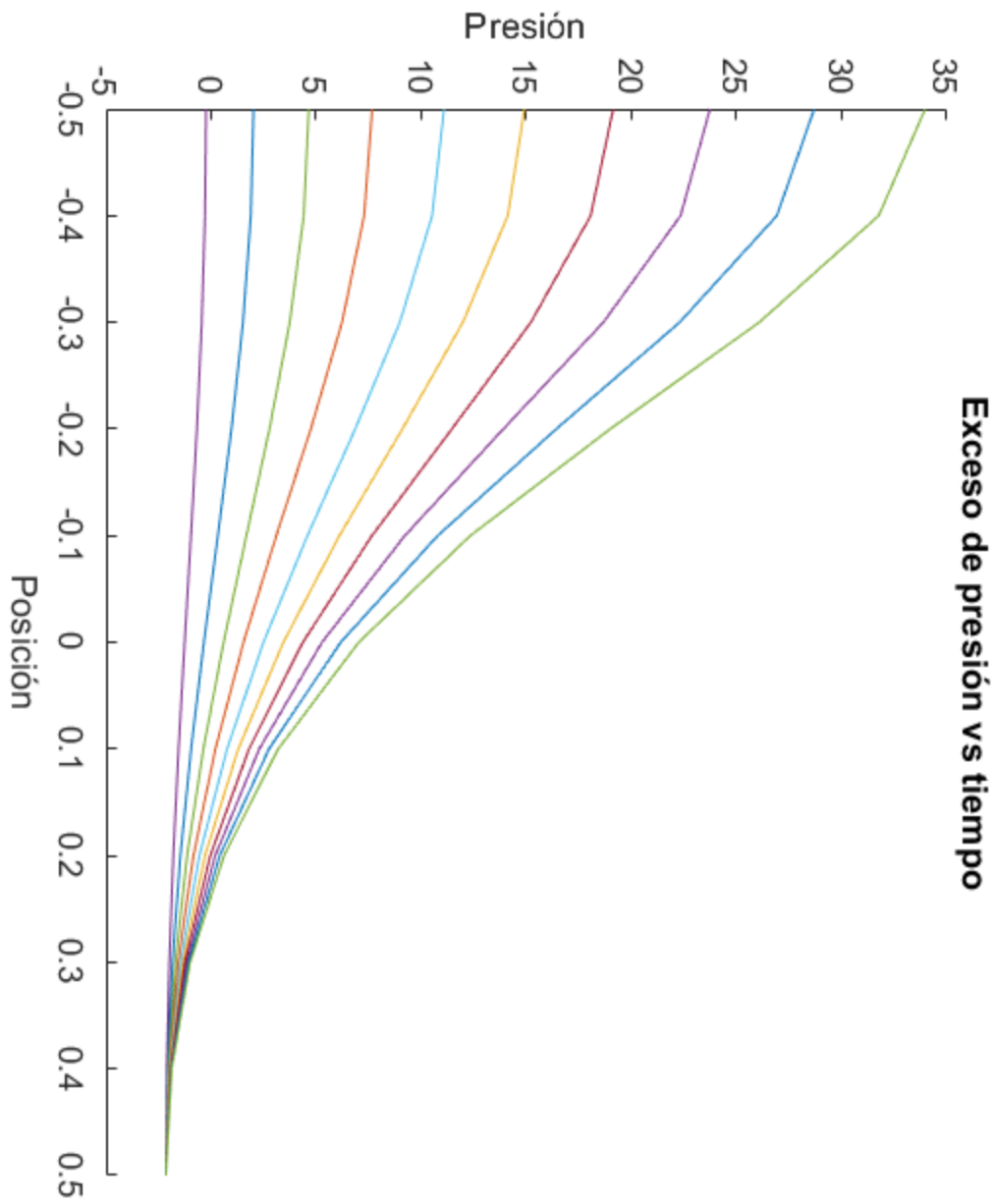
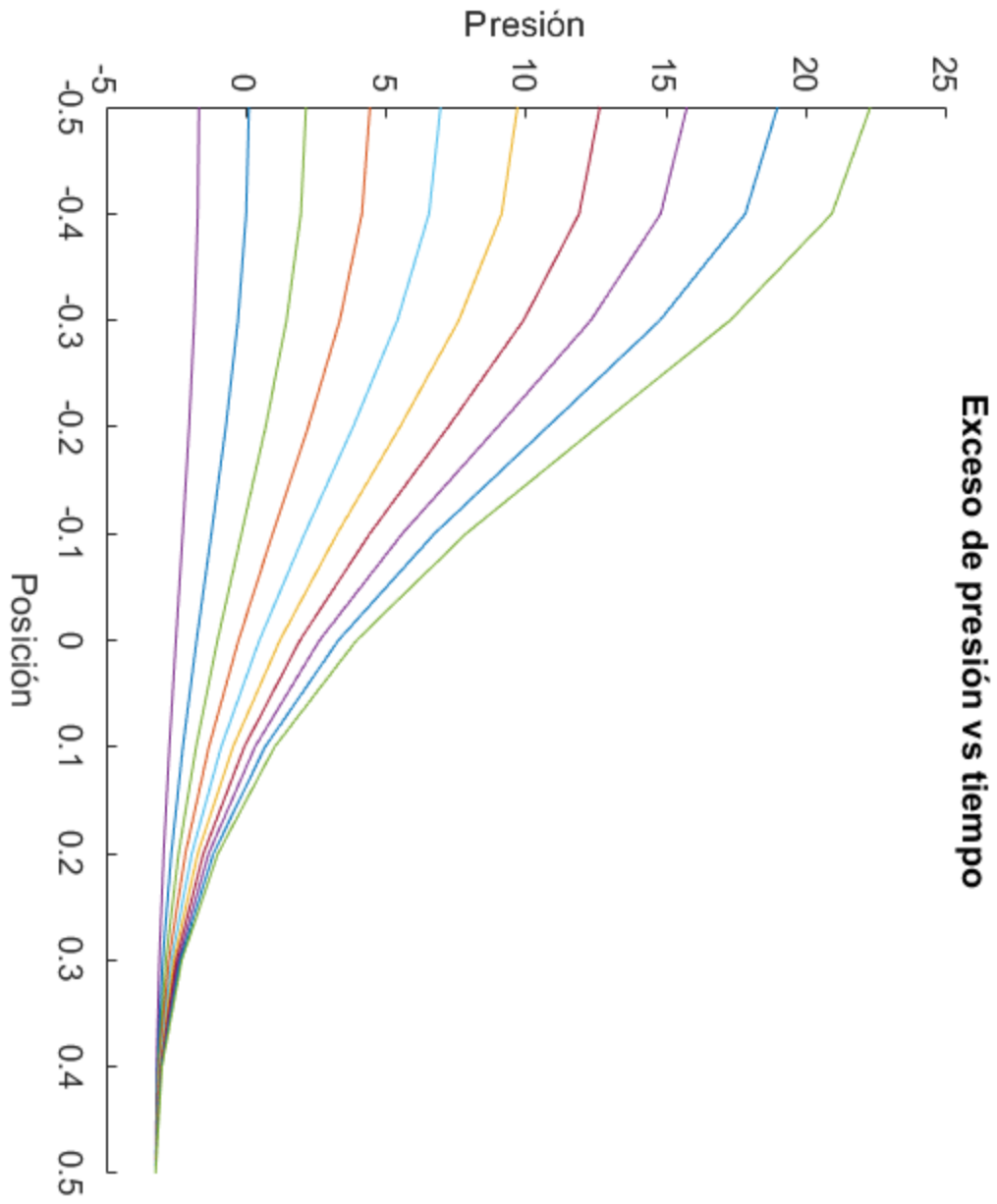
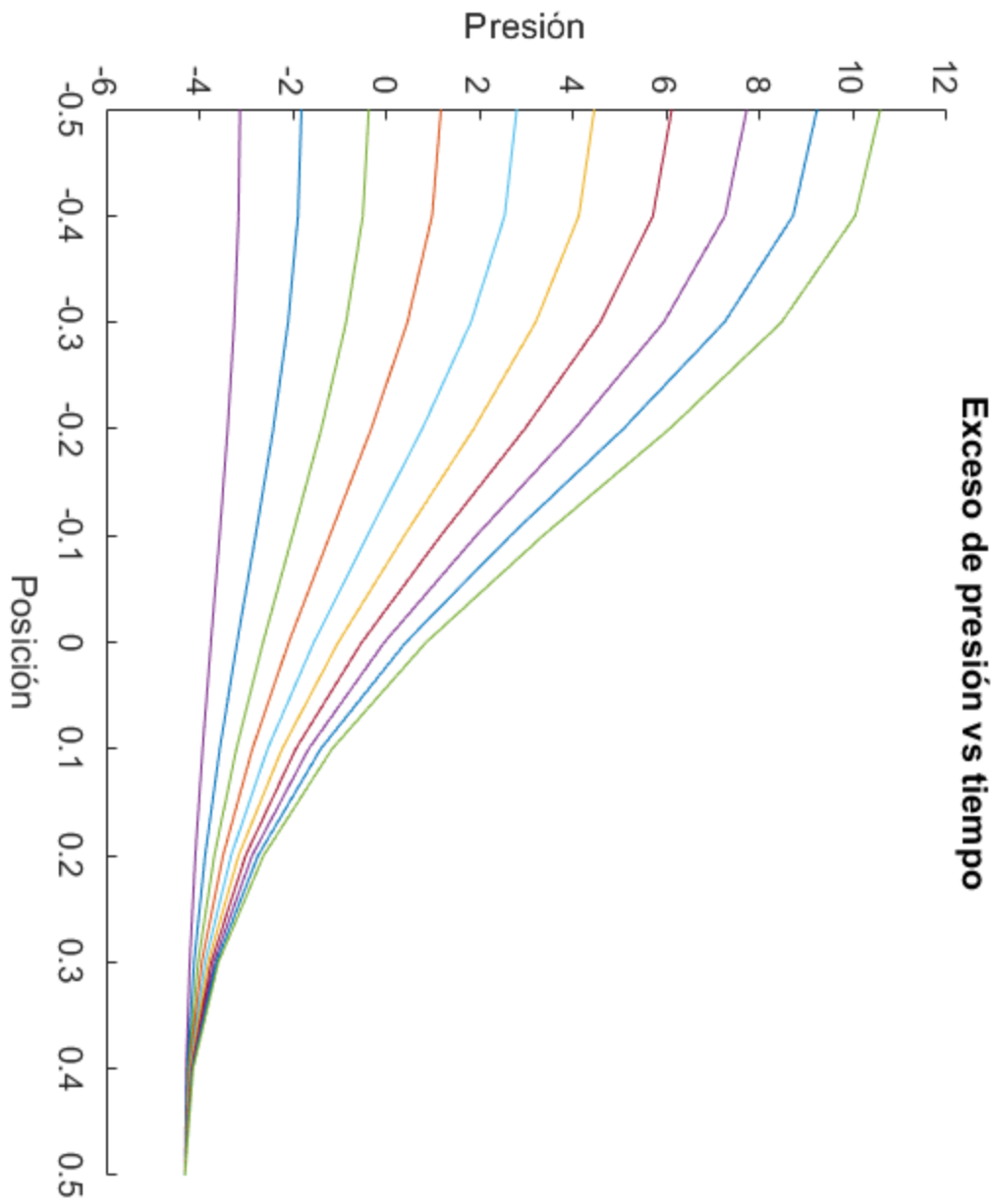


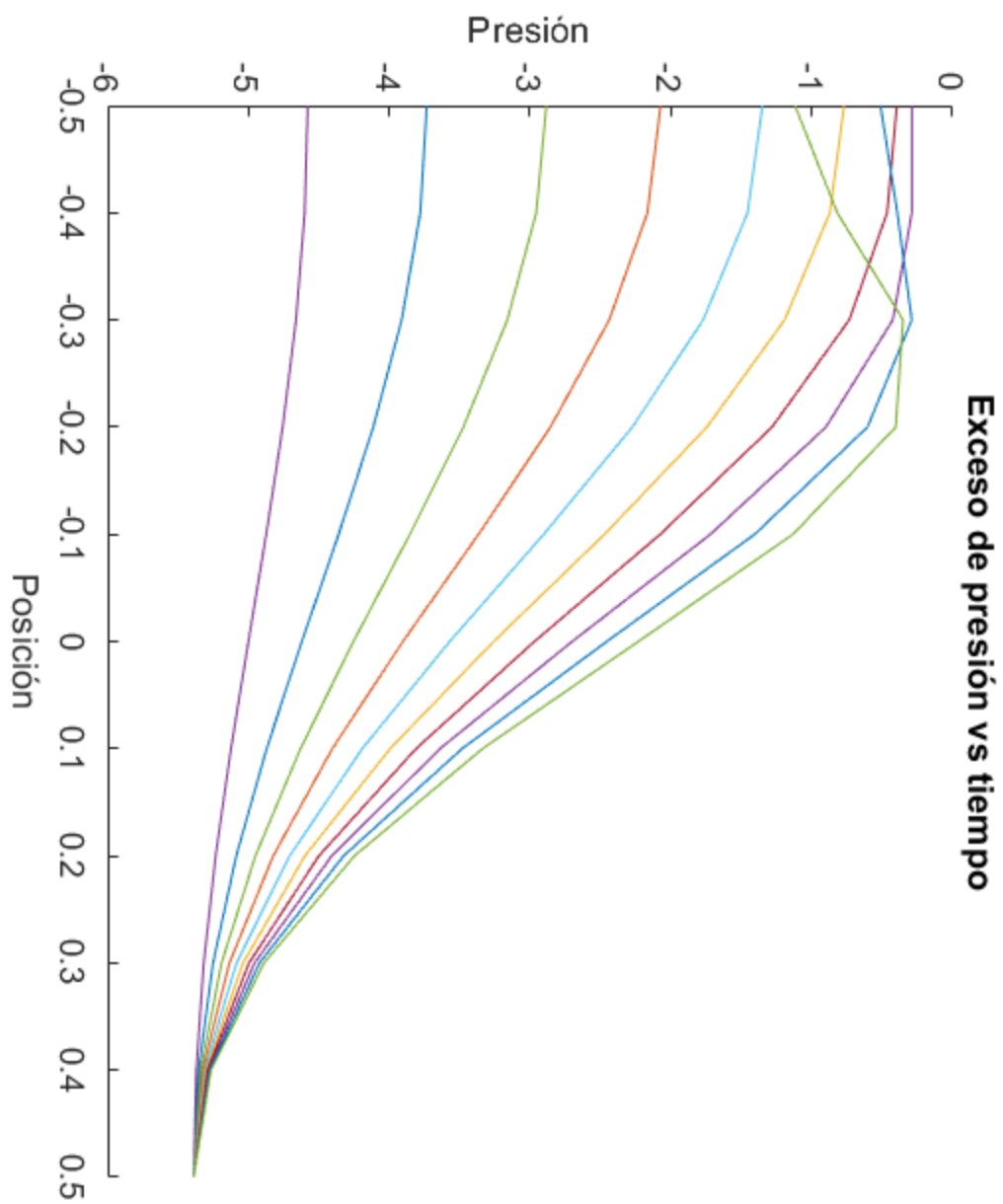
Figura 4.19: $Re=1$

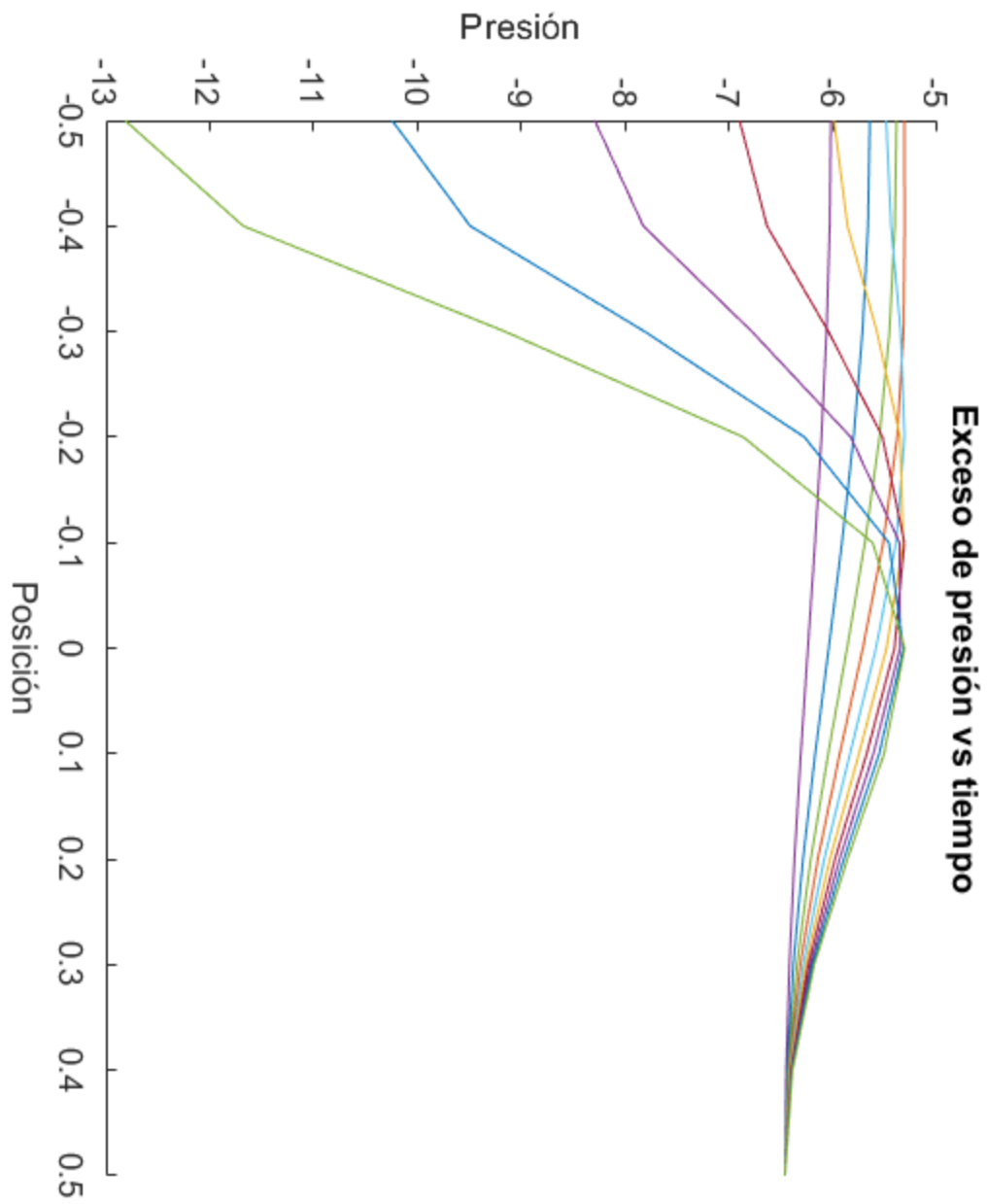
Figura 4.20: $Re=5$

Figura 4.21: $Re=10$

Figura 4.22: $Re=15$

Figura 4.23: $Re=20$

Figura 4.24: $Re=25$

Figura 4.25: $Re=30$

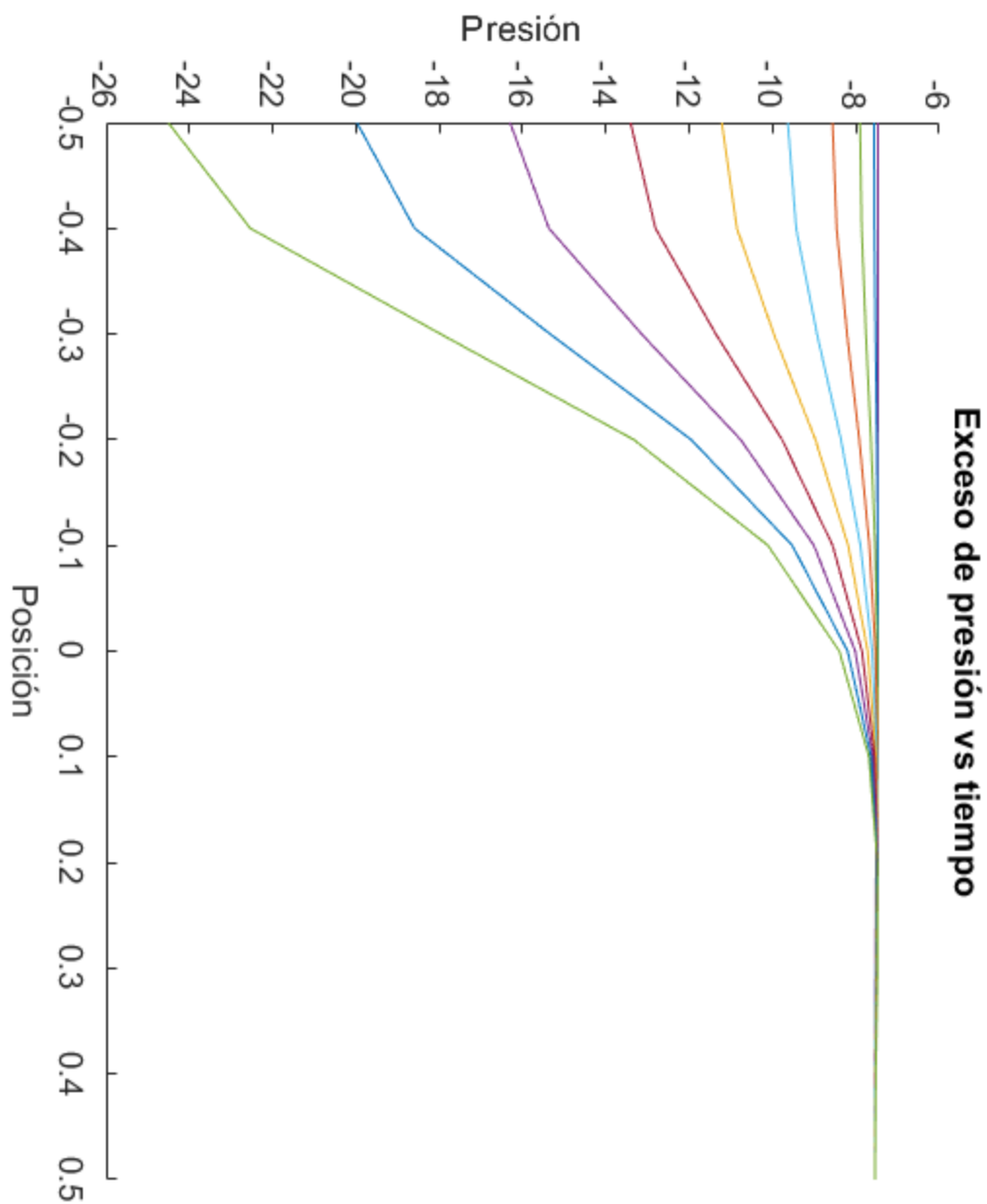


Figura 4.26: $Re=35$

Como se puede observar en las Figuras [4.19](#) a [4.26](#), mientras el Reynolds incrementa, la presión adimensional tiende a ser negativa, lo cual apoya la aseveración

anterior sobre el fenómeno de recirculación. Sin embargo, se reitera que no es posible aseverar de manera contundente que el fenómeno de recirculación se manifiesta en el fenómeno estudiado. Por lo que será motivo de estudio para un modelo posteriori.

5 Conclusiones

Como se planteó en la hipótesis y en los objetivos, se esperaba que la presión en exceso creciera mientras más grande fuese el taponamiento del capilar. Esto se traduciría en un impacto mayor en la variable de la presión arterial normal. Como se puede deducir de la interpretación de las gráficas, esta presión en exceso va en aumento cuando el taponamiento del capilar es mayor siendo su mayor incremento cuando $\epsilon = 0.7$.

Por otro lado, aunque pareciese que esto no le impacta directamente a la presión del cuerpo, si le impacta a la presión local, siendo esta de menos de 10 mmHg. Siguiendo este mismo hilo el incremento de la presión desde $\epsilon=0.1$ cuando τ llega a 1, es de aproximadamente del 1% por lo que es un incremento considerable, ya que, al considerar también el radio del capilar que es del orden de $5 \mu\text{m}$ estas secciones del volumen de control son tan pequeñas que el aumento de presión de al menos 1 mmHg podría a llegar a ser nocivo.

Otra de las hipótesis que se tenían es que la física del problema estaba relacionada con la geometría y esto es cierto, ya que, en las gráficas se logra ver un aumento de la presión en exceso mientras la concavidad de la estenosis aumenta, por lo que también

queda demostrado que el factor geométrico es crítico en el estudio del presente caso de tesis, ya que, al verse aumentada la variable geométrica (ϵ y λ), la presión en exceso aumenta también con ellas. Esto también podría llegar a la aceptación de que el fenómeno de la estenosis es sensible a las condiciones iniciales. Lo anteriormente mencionado se apoya en las gráficas 4.8 a 4.9. En las cuales se observa que si se varían las condiciones geométricas iniciales $\epsilon = 0.1$ a $\epsilon = 1$, el método numérico usado para obtener las gráficas “Simpson 3/8” comienza a divergir y a no encontrar una solución lógica para ese número, encontrando valores demasiado elevados y haciendo que el número de Reynolds se salga del rango de valores en donde la solución numérica es válida. Lo cuál es un indicio de sensibilidad a las condiciones iniciales.

Luego entonces, y ahora poniendo sobre la mesa el análisis del número de Reynolds, este resultó que obedecía a la lógica de los fluidos es decir, a un Reynolds bajo significa que la velocidad del fluido es baja y la viscosidad es alta lo cual tiene mucho sentido físico, ya que, se ha encontrado que la mayoría de los fluidos corporales como la sangre y la natación de los espermatozoides [11] siguen un patrón de flujo reptante o “Creeping flow”. Cabe resaltar que al mismo tiempo se apoya esta teoría debido a que para el correcto intercambio del oxígeno en los tejidos, una velocidad baja en la sangre es requerida para que este intercambio se dé de manera adecuada.

Aunado al párrafo anterior se sigue la misma lógica en las simulaciones numéricas. Encontrando que para Reynolds mayores a 1, la simulación empezaba a divergir y a no encontrar valores donde la presión se estabilizara en un ciclo cardíaco. Por lo que queda demostrada la sensibilidad a las condiciones iniciales, además de la restricción explicada para Reynolds bajos.

Finalmente, para la simplificación del término temporal. Se toma un tiempo muy pequeño. Esto quiere decir que la estenosis no está desarrollada y el tiempo de muestreo es menor al tiempo de desarrollo de la estenosis. Por lo que se puede inferir de una manera humilde pero no contundente, debido a la simplificación de los términos convectivos, que hay un efecto de recirculación en la sangre. Sin embargo, la presente tesis puede ser un parteaguas para el análisis a posteriori con una estenosis totalmente desarrollada con términos temporales, así como la inclusión de los términos convectivos teniendo una geometría (relación $\frac{\epsilon}{\lambda}$) un poco más compleja de la considerada en el presente trabajo.

A Adimensionalización

Ecuación de continuidad adimensional: Como el parámetro ζ está relacionado directamente con la longitud característica λ , U_0 es una velocidad característica en el eje axial, V_0 una velocidad característica en el eje radial, ϵ una longitud característica en el eje radial, además de que la variable adimensional "s" está relacionada con la variable "r", por lo que se puede sustituir de manera inmediata en la ecuación.

$$\frac{\partial(U_0\check{u}_z)}{\partial(\lambda\zeta)} + \frac{1}{s} \frac{\partial(V_0s\check{u}_r)}{\partial(\epsilon s)} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Por lo que, si se simplifica los factores de la ecuación, se llega directamente a la ecuación adimensional para la ecuación de continuidad:

$$\frac{U_0}{\lambda} \frac{\partial\check{u}_z}{\partial\zeta} + \frac{V_0}{\epsilon s} \frac{\partial(s\check{u}_r)}{\partial s} = 0 \quad (\text{A.2})$$

O también se puede escribir de la siguiente manera, dejando el segundo término sin coeficiente. Reescribiendo la ecuación:

$$\left(\frac{U_0\epsilon}{\lambda V_0}\right) \frac{\partial\check{u}_z}{\partial\zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial(s\check{u}_r)}{\partial s} = 0 \quad (\text{A.3})$$

En esta sección se debe de hacer un análisis de orden de magnitud, por lo que si se analiza, más detalladamente, el coeficiente " $\frac{U_0\epsilon}{\lambda V_0}$ ", se tienen 3 posibilidades: que el coeficiente sea menor a 1, que el coeficiente sea 1 y que el coeficiente sea mayor a 1.

Por lo que siguiendo la premisa del criterio de adimensionalización de las ecuaciones, deben ser del orden de la unidad, debido a como se está eligiendo la adimensionalización de las mismas. Por lo que se puede analizar el coeficiente del término diferencial $\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \zeta}$. Si es muy grande, en consecuencia, $\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \zeta}$ debe ser muy pequeño para que se respete la igualdad de la ecuación [A.3](#), el cual se tendría que igualar al negativo del término $\frac{1}{s} \frac{\partial (s \tilde{u}_r)}{\partial s}$, sin embargo, para esta conjetura es necesario que la variación en la dirección de interés (eje axial) sea pequeña, sin embargo esta suposición no apoya la observación a la cual se quiere llegar. Por otro lado, si el coeficiente es pequeño el producto entre el coeficiente y la diferencial del primer término de la ecuación [A.3](#) es menor a la unidad, lo cual deriva que el segundo término también. En consecuencia eso también es una contradicción al planteamiento, debido a que se espera que la velocidad varíe en el eje radial y al ser un coeficiente pequeño este es despreciable para el análisis o igual a 0.

Por lo que si se sigue el sentido de este razonamiento, el único razonamiento que es lógico, es que el coeficiente de la ecuación sea 1, por lo que:

$$\frac{U_0 \epsilon}{\lambda V_0} = 1 \quad (\text{A.4})$$

Este planteamiento permite definir la velocidad en el eje radial (V_0), ya que, al ser el primer término diferencial igual a la unidad, el segundo término de la ecuación debe ser igual a -1, por lo que se puede igualar el coeficiente del primer término a 1, para definir la velocidad en el eje radial.

$$V_0 = \frac{\epsilon U_0}{\lambda} \quad (\text{A.5})$$

Es aquí donde el análisis debe de tomar una importancia de orden de magnitud. Por lo que si se evalúa la ecuación de continuidad para una variación en R_0 demasiado pequeña, es decir $\delta = R_0\epsilon$ y $l_0 = \lambda R_0$ eso permite reescribir la ecuación y la relación entre δ y l_0 de una manera conveniente para que haya una simplificación significativa de términos, esto con el fin de que ayude a sintetizar el análisis del problema.

$$\frac{\epsilon R_0}{\lambda R_0} \ll 1 \quad (\text{A.6})$$

Por lo que se sigue, de manera inmediata que la relación $\frac{\epsilon}{\lambda}$ es menor a 1. Esto es demasiado importante, ya que, se puede despreciar su valor numérico con fines de simplificación, por consecuencia el valor del coeficiente $\frac{V_0}{U_0}$ es menor a 1.

$$\frac{V_0}{U_0} \ll 1 \quad (\text{A.7})$$

Por lo que si se continua con la adimensionalización de las ecuaciones de N-S, es necesario continuar con la ecuación de conservación de momentum, la adimensionalización de las ecuaciones apoyará a hacer un análisis de magnitud y así poder simplificar el análisis del problema estudiado en la presente tesis.

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{(\partial z)^2} \right] + \rho g_z \quad (\text{A.8})$$

En la ecuación anterior, se puede notar que el marco de referencia del problema es considerando el eje radial, por lo que las fuerzas debido a la gravedad, serán despreciadas.

Continuando con el analisis adimensional de las ecuaciones de Navier Stokes y

como están definidas las ecuaciones [2.16](#) y [2.15](#), se puede utilizar la definición de estas para poder adimensionalizar la ecuación anterior, por lo que podemos separar la ecuación en 2 partes, el lado derecho y el lado izquierdo, del signo de igual.

Lado izquierdo:

$$\rho \left(\check{u}_r \left(\frac{V_0 U_o}{\epsilon R_0} \right) \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} + \check{u}_z \left(\frac{U_0^2}{\lambda} \right) \frac{\partial \check{u}_z}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{A.9})$$

Lado derecho:

$$= - \left(\frac{\Pi}{\lambda R_0} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} + \mu \left[\left(\frac{1}{\epsilon R_0^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \left(U_0 s \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} \right) + \left(\frac{U_0}{\lambda R_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \check{u}_z}{\partial \zeta^2} \right] \quad (\text{A.10})$$

Si se acomodan ambos lados de la ecuación, podemos llegar a la forma.

$$\frac{\rho U_0 R_0 \epsilon^2}{\lambda \mu} \left(\check{u}_r \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} + \check{u}_z \frac{\partial \check{u}_z}{\partial \zeta} \right) = - \left(\frac{\Pi \epsilon^2 R_0}{\lambda \mu U_0} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} \right) + \left(\frac{\epsilon}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial^2 \check{u}_z}{\partial \zeta^2} \quad (\text{A.11})$$

De la ecuación [A.6](#), se encuentra descrito que la relación entre $\frac{\epsilon}{\lambda}$, es una relación muy pequeña, por lo que su valor es del orden de milésimas, por esta razón se puede despreciar sus efectos como coeficiente y despreciar todos los términos que estén multiplicados por dicha relación. Y como se puede notar, en la ecuación [A.10](#), se tiene la relación épsilon-lambda, sin embargo, está elevada al cuadrado. Por lo que un término que es pequeño elevado a una potencia, en magnitud, es más pequeño. Debido a lo anterior, el término difusivo se puede simplificar.

Recordando:

$$Re = \frac{\rho R_o U_0}{\mu} \quad (\text{A.12})$$

Por lo que si se sustituye la ecuación [A.12](#) en [A.11](#), se puede observar que el Reynolds aparece en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\frac{\epsilon^2}{\lambda} Re(\check{u}_r \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s} + \check{u}_z \frac{\partial \check{u}_r}{\partial \zeta}) \quad (\text{A.13})$$

Nuevamente haciendo uso del estudio de orden de magnitud, se puede simplificar el lado izquierdo de la ecuación, recordando que para efectos de la presente tesis, el Reynolds será considerado como "Creeping flow", por lo que el valor de Reynolds se mantendrá en valores bajos, sin embargo, si que se puede simplificar otra parte de la ecuación y esa es la relación ϵ - λ , al ser un coeficiente muy pequeño, el lado izquierdo de la ecuación puede ser simplificado para poder trabajar con el gradiente de presión, del lado derecho.

$$0 = -\left(\frac{\Pi \epsilon^2 R_0}{\lambda \mu U_0}\right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \check{u}_z}{\partial s}\right) \quad (\text{A.14})$$

En esta parte conviene detenerse a analizar de nueva cuenta la igualdad que se tiene en la ecuación [A.14](#). Si se igualan ambos terminos, los coeficientes deben ser iguales para que la ecuación tenga sentido, luego entonces se puede despejar el coeficiente adimensional para la presión (Π).

$$\frac{\Pi \epsilon^2 R_0}{\lambda \mu U_0} = 1 \quad (\text{A.15})$$

Otra premisa que apoya la igualación de ambos coeficientes a 1 es la razón de la dependencia de u_z con el eje radial, ya que, de cualquier otra manera la presión no estaría variando a lo largo de la coordenada radial y esto es importante debido a que el objetivo de la presente tesis, es determinar esa presión.

$$\Pi = \frac{\lambda \mu U_0}{\epsilon^2 R_0} \quad (\text{A.16})$$

Por lo que la ecuación [A.15](#) se vuelve:

$$0 = -\frac{\partial \check{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (\text{A.17})$$

Ahora bien, para la adimensionalización de la ecuación de momentum en el eje radial, se toma como partida la ecuación [2.2](#), la cual se puede adimensionalizar de manera directa sustituyendo los coeficientes adimensionales, previamente definidos.

$$\rho \left(\frac{V_0^2}{\epsilon R_0} \check{u}_r \frac{\partial \check{u}_r}{\partial s} + \frac{U_0 V_0}{\lambda R_0} \check{u}_z \frac{\partial \check{u}_r}{\partial \zeta} \right) = -\frac{\Pi}{\epsilon R_0} \frac{\partial \check{p}}{\partial s} + \frac{\mu V_0}{\epsilon^2 R_0^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \check{u}_r) \right] + \left(\frac{\epsilon}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial^2 \check{u}_r}{\partial \zeta^2} \right\} \quad (\text{A.18})$$

Nuevamente se observa la relación [A.6](#), por lo que el término difusivo puede ser despreciado. Por lo que se puede reacomodar la ecuación,

$$\frac{\epsilon^2 \rho U_0 R_0}{\mu \lambda} \left(\check{u}_r \frac{\partial \check{u}_r}{\partial s} + \frac{\partial \check{u}_r}{\partial \zeta} \right) = -\frac{\lambda R_0 \Pi}{\mu U_0} \frac{\partial \check{p}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \check{u}_r) \right] \quad (\text{A.19})$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, en el lado izquierdo se puede usar la definición de Reynolds para poder hacer un análisis de orden de magnitud. Por lo que para el caso que nos atañe en la presente tesis, se considera un Reynolds bajo. Por lo tanto al tener nuevamente la relación [A.6](#), se puede despreciar el lado izquierdo de la ecuación. Luego entonces se puede utilizar la definición de la presión adimensional (ecuación [A.16](#)), ya que, se está suponiendo el mismo caso donde el Reynolds es bajo.

$$0 = \frac{\partial \check{p}}{\partial s} + \left(\frac{\epsilon}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \check{u}_r) \right] \quad (\text{A.20})$$

Como se observa en la ecuación anterior, nuevamente se hace presente la relación epsilon-lambda, por lo que podemos simplificar completamente el segundo término

de la ecuación anterior. Por lo que se puede concluir que en el eje radial la presión es independiente de la posición.

Bibliografía

- [1] C. U. de Navarra, “Estenosis,” *Diccionario médico*, 2023.
- [2] J. B. Mompó, “En la estenosis carotídea asintomática salvo excepciones el tratamiento médico es el más adecuado,” *El Servier Doyma*, 2014.
- [3] N. L. Christensen, R. Carter-Storch, R. Bakkestrøm, . Dahl, and J. S., “Sudden cardiac death in asymptomatic aortic stenosis: Is the valve to blame? case reports,” *BJM Journals*, 2016.
- [4] A. Javadzadegan, A. Yong, M. Chang, A. Ng, J. Yiannikas, M. Ng, M. Behnia, and L. Kritharides, “Flow recirculation zone length and shear rate are differentially affected by stenosis severity in human coronary arteries,” *American Physiological Society*, 2013.
- [5] MedlinePlus, “Gas exchange,” *MedlinePlus*, 2022.
- [6] S. Middleman, *Modeling Axisymmetric Flows Dynamics of Films, Jets, and Drops*. Academic Press, Inc., 1995.

- [7] A. Bhatnagar, S. Agarwal, R. K. Shrivastav, and J. Pal, *Effect of Time Dependent Stenosis on Blood Flow through an Arterial Segment*. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2021.
- [8] V. Kot, “Karman–pohlhausen method: Critical analysis and new solutions for the boundary layer on a plane plate,” *Springer*, 2022.
- [9] CDC, “High blood pressure symptoms and causes,” *CDC Journal*, 2017.
- [10] E. Connect, “Apuntes de fisiología: la función circulatoria,” *Elsevier*, 2019.
- [11] M. Ibrahim, “Adaptive simulations to pressure distribution for creeping motion of carreau nanofluid with variable fluid density effects: Physiological applications,” *Thermal Science and Engineering Progress*, 2022.