



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“ANÁLISIS DE MÉTODOS  
PARA EL CÁLCULO DE  
VELOCIDADES MEDIAS EN  
CAUCES NATURALES”**

**T E S I S  
P R O F E S I O N A L  
Q U E P A R A O B T E N E R E L  
T I T U L O D E I N G E N I E R O C I V I L  
P R E S E N T A**

*FERNANDO ROLDÁN  
CHANONA*



**DIRECTOR DE TESIS**  
M. en I Manuel García Flores

México, D.F. julio de 2006



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCIÓN  
FING/DCTG/SEAC/UTIT/043/06

Señor  
FERNANDO ROLDÁN CHANONA  
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M.I. MANUEL GARCÍA FLORES, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

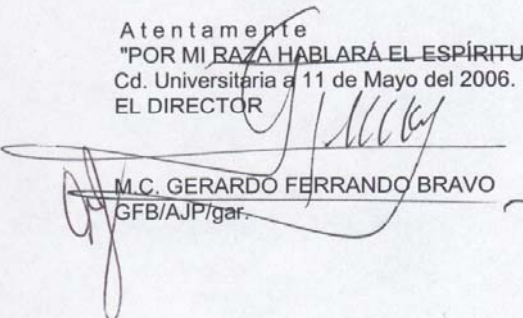
**"ANÁLISIS DE MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE VELOCIDADES MEDIAS EN CAUCES NATURALES"**

- I. INTRODUCCIÓN
- II. ONDULACIONES EN CAUCES ALUVIALES
- III. MÉTODO DE WANG Y WHITE (1993)
- IV. MÉTODO DE WU Y WANG (1999)
- V. MÉTODO DE WHITE, PARIS Y BETTESS (1980, 1982).
- VI. MÉTODO DE BROWNLIE (1983)
- VII. MÉTODO DE NNADI Y WILSON (1995)
- VIII. COMPARACIÓN DE MÉTODOS Y CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cd. Universitaria a 11 de Mayo del 2006.  
EL DIRECTOR

  
M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO  
GFB/AJP/gar.



A ti, mamá

Por todo tu apoyo y cariño.

A mis hermanos Erick y Rodrigo

Por estar ahí y creer.

A los de Esgrima de Prepa 6

Por ser mi válvula de escape.

A Andrés

Por haberme soportado toda la carrera y ser mi amigo.

A Manolo

No sólo por ser un excelente maestro, sino también un amigo extraordinario.

A Sofia

Por todo lo que me has dado.

Agradezco al Instituto de Ingeniería, UNAM, por permitirme utilizar un extracto de la investigación sobre resistencia al flujo en cauces naturales, que está a cargo del M. en I. Manuel García Flores, a quien agradezco de manera especial por ser un verdadero tutor y amigo para mí, ya que sin su apoyo y enseñanza cotidiana no hubiera sido posible la elaboración de esta tesis.

---

---

## ÍNDICE

	Página
I. INTRODUCCIÓN.....	1
II. ONDULACIONES EN CAUCES ALUVIALES .	9
II.1. REGÍMENES DEL LECHO .....	9
II.2. CRITERIOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL RÉGIMEN DE UN LECHO.....	14
II.2.1 Liu (1957).....	14
II.2.2. Albertson, Simons y Richardson (1958)	17
II.2.3 Garde y Ranga Raju (1963).....	18
II.2.4 Cruickshank y Maza (1973) .....	19
II.2.5 Swamee y Ohja (1994) .....	22
II.3 CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDULACIONES DEL LECHO	
II.3.1 Yalin .....	24
II.3.1.1 Cálculo de la altura de las ondulaciones del lecho, $H$	24
II.3.1.2 Cálculo de la longitud de las ondulaciones del lecho, $\lambda$	26
II.3.2 Yalin y Karahan (1979) .....	27
III. MÉTODO DE WANG Y WHITE (1993).....	31
III.1 PRESENTACIÓN .....	31
III.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS .....	42
III.3.1 Cauce natural .....	42
III.3.2 Canal de laboratorio .....	44
III.4 TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ y $R/D_{50}$ .....	46
III.5 COMENTARIOS .....	50
IV. MÉTODO DE WU Y WANG (1999).....	57
IV.1 PRESENTACIÓN .....	57
IV.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS .....	61
IV.3.1 Cauce natural .....	61
IV.3.2 Canal de laboratorio .....	63
IV.5 COMENTARIOS .....	68
V. MÉTODO DE WHITE, PARIS Y BETTESS (1980, 1982).	71
V.1 PRESENTACIÓN .....	71

---

V.2	PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO. ....	74
V.3	EJEMPLOS NUMÉRICOS.....	75
V.3.1	Cauce natural .....	75
V.3.2	Canal de laboratorio .....	76
V.4	TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ y $R/D_{50}$ .....	76
VI.	MÉTODO DE BROWNLIE (1983).....	<b>81</b>
VI.1	PRESENTACIÓN .....	81
VI.3	EJEMPLOS NUMÉRICOS.....	92
VI.3.1	Canal natural.....	92
V.3.2	Cauce de Laboratorio.....	94
VI.4	TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ y $R/D_{50}$ .....	95
VI.4.1	Determinación del intervalo de pendientes en el que el método es múltiplemente valuado. ....	96
VI.4.1.1-	Los efectos producidos por la viscosidad del agua son despreciables.....	96
VI.4.1.2-	Los efectos producidos por la viscosidad del agua son importantes. ....	97
VI.5	COMENTARIOS .....	101
VII.	MÉTODO DE NNADI Y WILSON (1995).....	103
VII.1	PRESENTACIÓN .....	103
VII.2	PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO .....	105
VII.3	EJEMPLOS NUMÉRICOS.....	106
VII.3.1	Canal natural.....	106
VII.3.2	Cauce de laboratorio.....	106
VII.4	TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ y $R/D_{50}$ .....	107
VII.5	COMENTARIOS .....	109
VIII.	COMPARACIÓN DE MÉTODOS Y CONCLUSIONES	111
	BIBLIOGRAFÍA.....	117

---

---

---

## I. INTRODUCCIÓN.

Una de las tareas principales de la ingeniería de ríos consiste, sin lugar a dudas, en calcular la cantidad de agua que determinada corriente fluvial lleva en la unidad de tiempo, y la velocidad media con que esa corriente se desplaza, y el procedimiento seguro para ello está en aforar dicha corriente o flujo de agua. El método clásico para el aforo de corrientes fluviales se fundamenta en el empleo de molinetes o medidores de corriente. En ese método, en el sitio deseado, se elige una sección transversal al cauce del arroyo o río que interesa aforar, denominada sección de aforos, la cual se escoge normal al flujo de las aguas o al lecho, de ser posible en un tramo recto y estrecho del curso del río, cuya pendiente se precisa. Así, conocida la geometría de la sección transversal escogida, para cada elevación de la superficie libre del agua que ahí se fije, se determinan el tirante y los demás elementos geométricos de la sección, como su área hidráulica, perímetro mojado y ancho de la superficie libre del agua, y se mide la velocidad de la corriente en varios puntos específicos del área hidráulica. Posteriormente, con base en las mediciones realizadas y en la ecuación de continuidad, se puede calcular no sólo el volumen de agua que pasa por la sección de aforos en la unidad de tiempo, llamado gasto o caudal de la corriente fluvial,  $Q$ , sino también la correspondiente rapidez media con que el agua cruza por esa sección, o sea la magnitud de la velocidad media de la corriente fluvial,  $U$ , conocida comúnmente como velocidad media del flujo. Asimismo, con toda esa información y conocidas también las características del material que constituye el cauce o lecho del río, se pueden determinar otros parámetros hidráulicos significativos y de gran utilidad en la ingeniería de ríos, como los números de Froude y los de Reynolds.

---

---



Si el aforo de una corriente fluvial es sistemático, frecuente, por tiempo suficientemente largo y para un intervalo amplio de gastos o de elevaciones de la superficie libre del agua, se logra no sólo conocer la variación de tirantes, de velocidades y de gastos conforme transcurre el tiempo, sino también trazar con precisión el hidrograma de esa corriente y otras curvas importantes, como la de elevaciones contra gastos.

Desgraciadamente, por varias razones, como corriente efímera, premura del estudio o por carencia de recursos económicos o técnicos, no siempre se puede medir en el curso de agua y sitio deseados; o bien, se cuenta con registros históricos o datos de aforos de la corriente que nos incumbe, pero suele acontecer que esa información es insuficiente, poco o nada confiable y, a pesar de ello, se requiere de la curva de elevaciones contra gastos o, por lo menos, del gasto correspondiente a la elevación de la superficie del agua de mayor interés para un proyecto determinado. Por ello, una de las labores cardinales de la ingeniería de ríos consiste en estimar, o mejor dicho, en pronosticar, para diferentes elevaciones de la superficie libre del agua en la sección transversal seleccionada en el cauce deseado, la magnitud de la velocidad media del flujo y el gasto correspondiente que, de llegar a ocurrir, pasaría por esa sección.

En la hidráulica fluvial, a lo largo de varias décadas, se ha estudiado la resistencia que los cauces naturales ofrecen al flujo de las aguas. La tarea no ha sido nada fácil, ya que en un fondo móvil, como en un lecho arenoso, la rugosidad varía según los regímenes del flujo y los del lecho, pues una vez que el paso de las aguas inicia el arrastre o transporte de las arenas que constituyen el lecho, se originan y evolucionan ondulaciones en la superficie del mismo, conocidas también como formas del fondo, las que a su vez modifican las características del flujo. Si bien las mediciones en laboratorio se dificultan, sobre todo cuando el régimen del flujo es supercrítico y con transporte intenso de partículas, la misma tarea en campo se torna titánica. No obstante, se han realizado muchas investigaciones en campo y laboratorio, se han desarrollado teorías sobre la resistencia al flujo en cauces naturales, y así se han establecido abundantes métodos para estimar la velocidad media de los escurrimientos que tienen lugar en esos cauces.

Sin embargo, aún se desconoce la ley que gobierna la resistencia al flujo en cauces aluviales. No existe una ley aceptada por todos, ya que, bajo las mismas condiciones, los diversos métodos o criterios existentes dan también a resultados distintos, pues no todos ellos conducen a pronósticos acertados; algunos métodos ni siquiera pronostican bien dentro del intervalo en el que supuestamente rigen, o bien, dan resultados absurdos y, otros, a lo más, únicamente logran describir los datos que fundamentaron su formulación.

---

---

Así, al estudiar determinada corriente fluvial que no ha sido aforada, y ante la diversidad de criterios o métodos que se han publicado en las últimas cinco décadas, surge rápidamente la pregunta ¿Qué criterio o método lleva, bajo igualdad de condiciones, a pronósticos más acertados de la velocidad media del flujo y, por consiguiente, del gasto?, o bien, ¿Cómo seleccionar el criterio o método más adecuado? Responder a cualquiera de estas interrogantes es fundamental para el diseño y construcción de obras fluviales, principalmente de las inaplazables, de las que ya no pueden esperar. De aquí nace la necesidad de investigar en este campo de la fluvial, para buscar, seleccionar y evaluar objetivamente los métodos seleccionados para el cálculo de la velocidad media del flujo en cauces naturales. Así, agotada la búsqueda sobre el tema, el trabajo total de esta investigación lo forma la evaluación de los métodos seleccionados, ya que se requiere de una metodología tal que permita, por un lado, el análisis objetivo de la bondad y alcance real de cada método y, por otro, la comparación equitativa de los mismos.

Afortunadamente esa metodología existe y es eficaz, pero es muy laboriosa y requiere de habilidad y experiencia, ya que la manera de evaluar cada método consiste en transformarlo y reducirlo, cuando ello es posible, a una sola ecuación adimensional, es decir, a una ecuación que contenga sólo parámetros adimensionales, entre los cuales tienen que figurar necesariamente los siguientes tres parámetros adimensionales característicos: el número de Froude del grano,  $F_D$ , la pendiente de energía,  $S$ , y el recíproco de la rugosidad relativa,  $R/k_s$ , siendo  $R$  es el radio hidráulico de la sección y  $k_s$  la rugosidad equivalente a los granos de arena utilizados por Nikuradse. Sin embargo, en lugar  $k_s$  se puede manejar un diámetro característico del material del cauce,  $D$ , esto es  $R/D$ ; o también, en vez del radio hidráulico,  $R$ , se puede utilizar el tirante o profundidad del agua en la sección,  $d$ , y emplear entonces la llamada profundidad o sumersión relativa,  $d/D$ , según convenga, pues estos son los parámetros adimensionales sugeridos por Cholley y Cunge (ref 5) para estudiar la pérdida de energía en función de la velocidad media del flujo, ya que son los que se obtienen al transformar la siguiente ecuación de Keulegan

$$U = 5.756U_* \log\left(12.27 \frac{R}{k_s}\right) \quad (1.1)$$

siendo

- $U$       velocidad media del flujo, en m/s.
- $U_*$     velocidad de fricción o velocidad asociada al esfuerzo tangencial o cortante, en m/s, definida como

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R S}{\rho}} = \sqrt{g R S} \quad (1.2)$$

- $\tau_0$  esfuerzo tangencial medio que produce el flujo en el fondo y paredes del canal, en  $N/m^2$ .
- $\rho$  densidad del fluido, en  $Ns^2/m^4$ .
- $\gamma$  peso específico del fluido, en  $N/m^3$ .
- $g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ .
- $R$  radio hidráulico de la sección transversal del canal, en m.
- $k_s$  rugosidad equivalente a los granos de arena de Nikuradse, en m.
- $S$  pendiente del cauce.

La ec (1.1) goza de aceptación general, pues se fundamenta en la teoría de la capa límite de Prandtl y en la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl- von Kármán, y corresponde a la integración realizada por Keulegan para el caso de flujo permanente, uniforme, turbulento y libre de sedimentos en canales trapeciales de fronteras fijas y rugosas. Asimismo, hay que recordar que, en flujo uniforme, son iguales la pendiente del cauce, la del agua y la de la energía.

Si en la ec (1.1) se sustituye la ec (1.2), resulta

$$U = 5.756 \sqrt{g R S} \log \left( 12.27 \frac{R}{k_s} \right) \quad (1.3)$$

Para lograr la transformación de la ecuación de Keulegan en función de los parámetros adimensionales indicados, basta con dividir ambos miembros de la ec (1.3) entre  $\sqrt{g k_s}$  y así, al simplificar y ordenar convenientemente, se obtiene

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{g k_s}} = \left[ 5.756 \sqrt{\frac{R}{k_s}} \log \left( 12.27 \frac{R}{k_s} \right) \right] \sqrt{S} \quad (1.4)$$

y de acuerdo con lo explicado anteriormente, la ec (1.4) también se puede escribir como

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{g D}} = \left[ 5.756 \sqrt{\frac{R}{D}} \log \left( 12.27 \frac{R}{D} \right) \right] \sqrt{S} \quad (1.5)$$

Si en el plano  $(S, F_D)$  los ejes coordenados siguen una ley logarítmica, al dibujar en dicho sistema coordenado la variación de  $F_D$  en función de  $S$  que expresa la ec (1.5), manteniendo constante el valor de  $R/D$ , se obtiene una línea recta. Si en ese mismo plano se dibuja también la ecuación adimensional a la que se logró reducir cierto método de fondo móvil, el diagrama resultante permite visualizar y analizar rápida y objetivamente cada método, ya que de esa manera se puede ver claramente, respecto

---

de un fondo plano y rígido, la forma como cambia, en un fondo móvil, la velocidad media del flujo en función de la pendiente de energía, como se ilustra en la fig 1.1, en la que se observa, por un lado, que parte de la energía se utiliza para vencer la resistencia de superficie o de grano ( $S'$ ) y el resto para vencer la resistencia de forma ( $S''$ ) y, por el otro, salta a la vista que las velocidades medias de los escurrimientos que tienen lugar en un fondo móvil y ondulado son, por lo general, mucho menores que las que se presentarían en un fondo fijo y plano. Además, si en ese sistema coordenado se dibujan también las ecuaciones adimensionales transformadas de otros métodos, la comparación entre ellos también es rápida y objetiva, pero sobre todo permite ver claramente, y por ende analizar, las situaciones o condiciones en las que los pronósticos serían poco o nada acertados y hasta absurdos, lo que ayuda a discernir la bondad de cada método y a delimitar su alcance real.

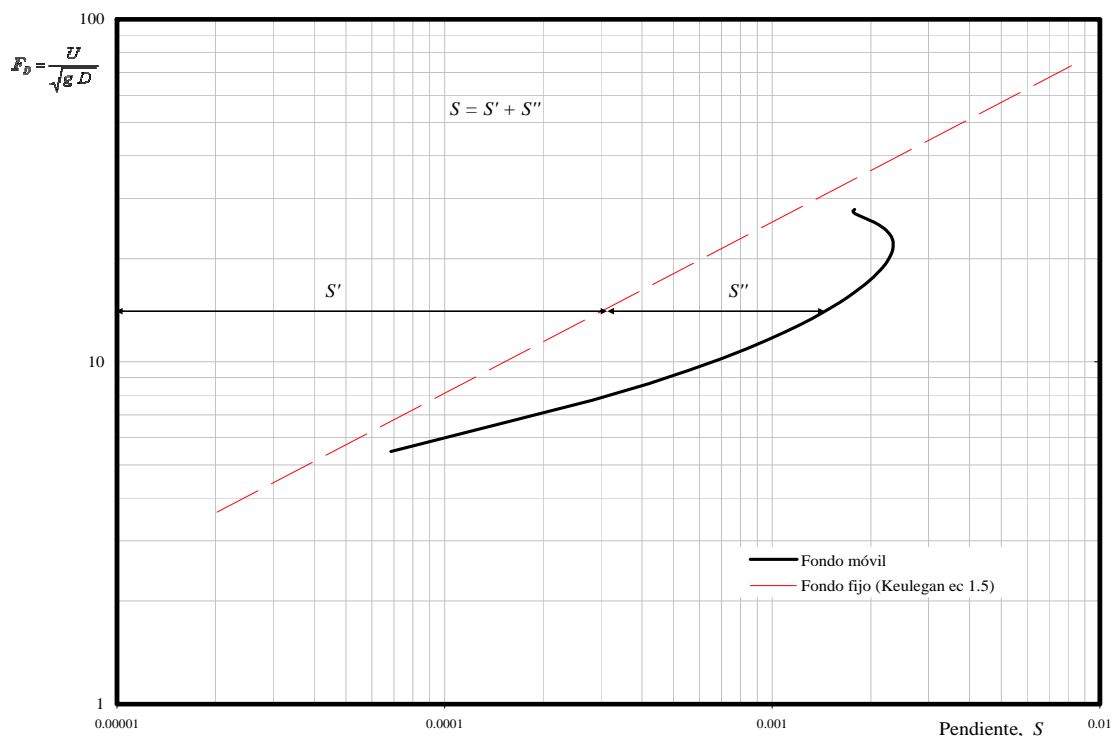


Fig 1.1 Relación entre la velocidad media del flujo y la pérdida de carga en cauces aluviales.

Para conseguir el objetivo mencionado, se procedió a una investigación sobre la resistencia al flujo en cauces naturales, investigación que se realizó a lo largo de varios años en el Instituto de Ingeniería, UNAM, y fue dirigida por el M. en I. Manuel García Flores, experto en hidráulica fluvial y director de esta tesis, pues dicho Instituto está editando el Manual de Ingeniería de Ríos, y los métodos seleccionados formarán parte del capítulo 9 de ese manual.

Considero que como becario del Instituto, tuve el privilegio de colaborar en esa investigación, la cual cubrió varias etapas, pero se puede decir que se iniciaba con la exploración bibliográfica, con la

búsqueda de métodos en *Journals*, en memorias de congresos o en libros, para estudiarlos y hacer una selección. Luego, los criterios o métodos seleccionados se traducían, se resumían y se capturaban en *Word*, presentando sus fundamentos, procedimiento de cálculo y un ejemplo numérico. Pero muchos de los autores, infortunadamente, no presentaban explícitamente el procedimiento de cálculo de su método o un ejemplo numérico del cual pudiera inferirse dicho procedimiento, y en esos casos había que deducirlo y probarlo con ejemplos numéricos, empleando para ello datos de campo o laboratorio. Hecho esto, se pasaba a la segunda etapa, o sea a la transformación de la formulación de cada método en función de parámetros adimensionales, tratando de reducirla a una sola ecuación adimensional en la que figuraran necesariamente los tres parámetros adimensionales mencionados ( $S$ ,  $F_D$  y  $R/D$ ). Logrado esto, la tercera etapa consistía en dibujar la ecuación adimensional obtenida en el plano o sistema coordenado ( $S$ ,  $F_D$ ), para su análisis y evaluación.

Este trabajo de tesis es parte de esa extensa investigación sobre la resistencia al flujo, es un extracto de varios métodos, pero principalmente de los que me fueron asignados por el investigador, y digo extracto porque, por ejemplo, además de los diagramas que se presentan aquí, se elaboraron muchos más para poder estudiar el comportamiento y la sensibilidad de cada método a la variación de algunos de sus parámetros.

Para comprender cómo la rugosidad de un cauce aluvial varía según las características de éste y las del flujo de agua, en el capítulo I se describen y clasifican los diferentes regímenes del lecho, pues una vez que el paso de las aguas inicia el arrastre o acarreo de las partículas sedimentarias que constituyen el fondo, se originan y evolucionan ondulaciones en la superficie del mismo, conocidas también como formas del fondo, las que a su vez modifican el flujo de agua. Además, se presentan criterios sencillos para el cálculo de las características de tales ondulaciones, y para la predicción del régimen del lecho.

Existe una gran variedad de métodos para el cálculo de la velocidad media en canales naturales, y tales métodos se clasifican en dos grupos: los que separan la resistencia al flujo en componentes y los que no la separan (refs 7, 11, 12, 13 y 14). Entre los métodos seleccionados que separan la resistencia al flujo, aquí se presentan dos: En el capítulo II se estudia el método de Wang y White, que es modificación del método de Engelund (ref 7), y pretende ser una generalización de éste, ya que demuestran que el diagrama de Engelund queda contenido en el realizado por ellos. En el capítulo III se expone el método Wu y Wang. Estos autores desarrollaron su método con base en una buena cantidad de datos de campo y laboratorio, pero no obtenidos por ellos sino por otros autores.

De los métodos que no separan la resistencia al flujo, aquí se muestran tres. El de White, Paris y Bettes se trata en el capítulo IV. La formulación de este método la hicieron con base en sus resultados experimentales en laboratorio. En el capítulo V, se estudia el método de Brownlie, el cual tiene en cuenta la viscosidad cinemática del fluido y se fundamenta en datos de campo y laboratorio. Por último, en el capítulo VI, se presenta el método de Nnadi y Wilson, el cual se apoya en los resultados que lograron estos autores, al experimentar con arenas en un conducto a presión, tratando de precisar las condiciones para el régimen de transición, es decir para el cambio del régimen de dunas al de fondo plano con transporte.

Cada método está estructurado de la manera siguiente: presentación y marco teórico del método; procedimiento de cálculo, ejemplos numéricos; transformación y reducción del sistema de ecuaciones del método a una sola ecuación adimensional, cuando ello es posible, en términos de los parámetros adimensionales mencionados; diagramas adimensionales y algunos comentarios al método.

Por último, en el Capítulo VII, se presentan la comparación y análisis de los diagramas obtenidos y las conclusiones.

## II. ONDULACIONES EN CAUCES ALUVIALES

### II.1. REGÍMENES DEL LECHO

En canales con lechos arenosos o erosionables, cuando la capacidad de arrastre del flujo,  $\tau_0 = \gamma R S$ , rebasa un cierto valor límite,  $\tau_c$  (ref 9), que pueden resistir las partículas que constituyen el cauce, se inicia el movimiento de éstas. Si esto ocurre, la superficie del fondo del canal así como la superficie del agua pueden asumir diversas formas, dependiendo de las características hidráulicas de la corriente y de las del material del cauce. Simons y Richardson (refs 24 y 25), después de varios experimentos con arenas en un canal de pendiente variable, de 45.7 m longitud, de sección transversal rectangular de 2.44 m de ancho y 0.61 m de altura, observaron que las ondulaciones que pueden formarse en un lecho arenoso, tenían lugar conforme se incrementaba el número de Froude de la corriente,  $F$ , definido éste como

$$F = \frac{U}{\sqrt{g d}} \quad (2.1)$$

donde

- $F$  número de Froude del flujo de agua, adimensional.
  - $U$  velocidad media del flujo, en m/s.
  - $g$  aceleración debida a la fuerza de gravedad, en  $m/s^2$
  - $d$  tirante o profundidad del agua, en m.
- 
-

Las diferentes configuraciones u ondulaciones que se llegan a formar en un fondo móvil, se pueden definir o clasificar según sus características y las del flujo que las originan. A tales clasificaciones o descripciones se les denomina formas del fondo o regímenes del lecho. Simons y Richardson dieron una descripción completa de los diferentes regímenes del lecho que observaron en cauces arenosos y los clasificaron de la manera siguiente (véase fig 2.1):

- Régimen inferior

1. Fondo plano sin arrastre de sedimentos.
2. Rizos (Sólo si el material es menor de 0.5 mm, pero otros autores han encontrado valores mayores que éste. Davis (1982) localizó el límite en 0.7 mm).
3. Dunas con rizos sobrepuestos.
4. Dunas.

- Régimen de transición (Lavado o barrido de las dunas).

- Régimen superior

5. Fondo plano con arrastre de sedimentos.
6. Ondas estacionarias.
7. Antidunas.

Estos regímenes del lecho están listados en su orden de ocurrencia, conforme se incrementa el número de Froude,  $F$ , o la potencia de la corriente,  $\tau_0 U$ ; es decir, al considerar un fondo con una granulometría determinada, se pasa sucesivamente de la configuración de fondo plano sin arrastre o transporte de sedimentos hasta la de antidunas. No necesariamente se presentan todos los tipos de configuraciones. Puede ocurrir que de un lecho con dunas, se pase a un lecho con ondas estacionarias, sin pasar por un fondo plano con transporte de sedimentos. Los esquemas idealizados de estas configuraciones se presentan en la fig 2.1, esos esquemas muestran también la forma que adquiere la superficie libre del agua en cada tipo de régimen.

En el **régimen inferior**, el flujo es lento o subcrítico, el transporte de sedimentos es relativamente pequeño, las ondas de la superficie libre del agua no están en fase con las del lecho, y la resistencia al flujo es alta, aumentando a medida que se avanza de fondo plano a dunas; además, en este régimen, las ondulaciones de la superficie del agua no permiten conocer la configuración del fondo, salvo si el tirante es comparativamente pequeño.



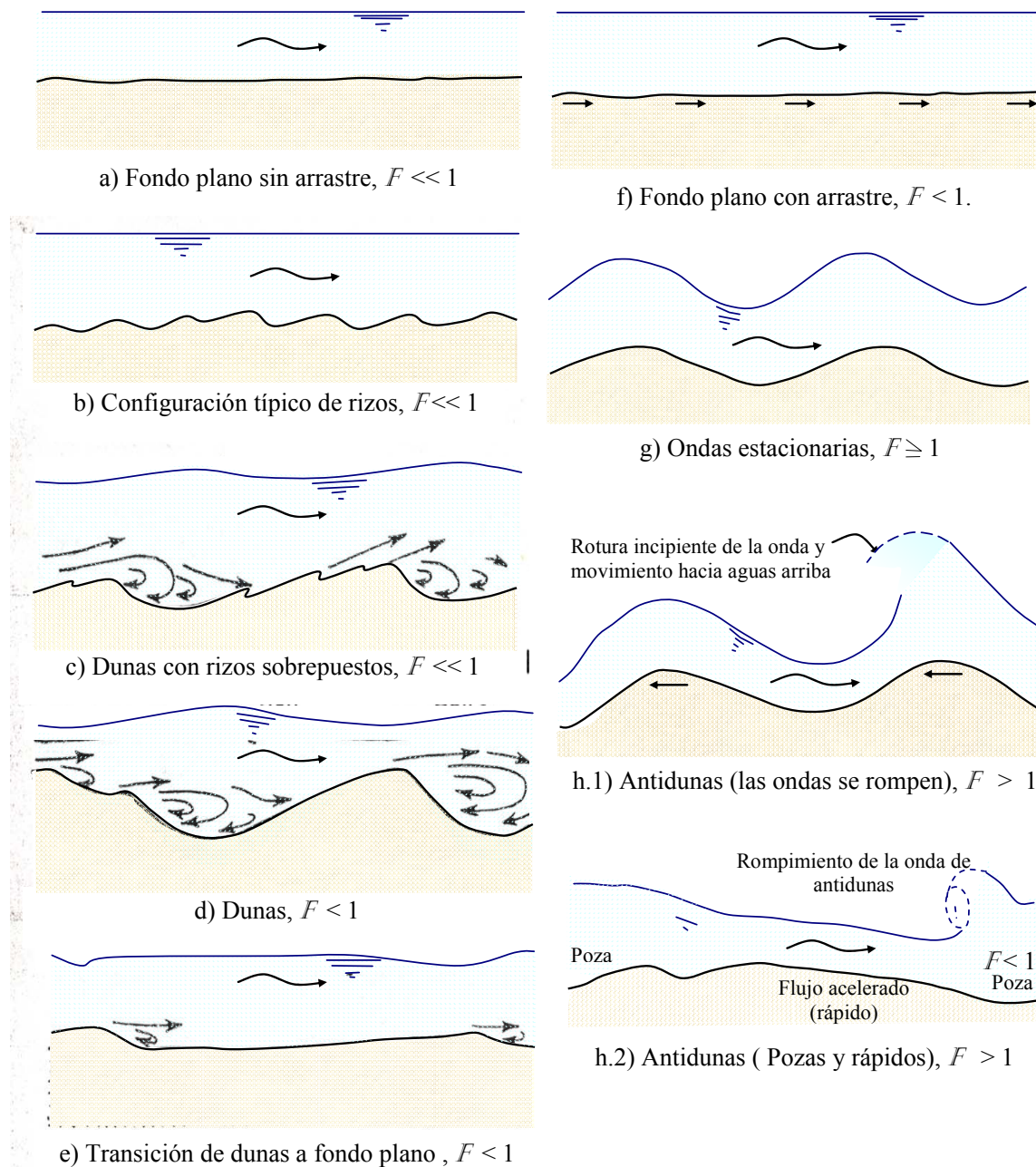


Fig 2.1 Formas de la rugosidad del fondo en canales aluviales, según Simons y Richardson (1961)

En el **régimen superior**, las rugosidades máximas que se pueden alcanzar son menores que las máximas que se presentan en el régimen inferior. Asimismo, en el régimen superior las ondas de la superficie libre del agua están en fase con las ondulaciones del lecho. Si las ondas de la superficie del agua permanecen en su sitio y no se rompen, aunque eventualmente sean barridas, se está en el régimen de ondas estacionarias; por el contrario, cuando las ondas de la superficie del agua tienden a avanzar

hacia aguas arriba y se rompen, y se observa que las ondulaciones del lecho tienen un movimiento aparente hacia aguas arriba, se está en el régimen de antidunas.

En el **régimen de transición**, la velocidad del flujo oscila demasiado y rápidamente, pero el escurrimiento sigue siendo subcrítico, por lo que el transporte de sedimentos crece o decrece, según aumente o disminuya la velocidad del flujo, por lo que se puede pasar de una configuración típica de régimen inferior a una de régimen superior, es decir de dunas a fondo plano con transporte y viceversa. Por consiguiente, la resistencia al flujo también oscila entre los valores correspondientes a las configuraciones o formas que tienen lugar en el lecho.

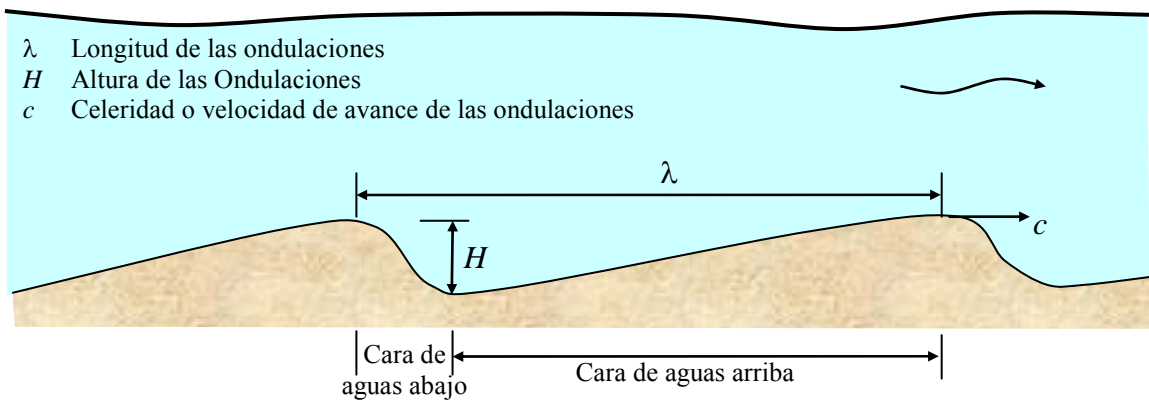
A continuación se describen sucintamente algunas características de cada una de las configuraciones del lecho, según Simons y Richardson:

**Fondo plano sin transporte de sedimentos:** Es una condición en la que el lecho es fácilmente alterable. El calificativo de “plano” fue utilizado para destacar que no se trataba de un fondo hidráulicamente liso.

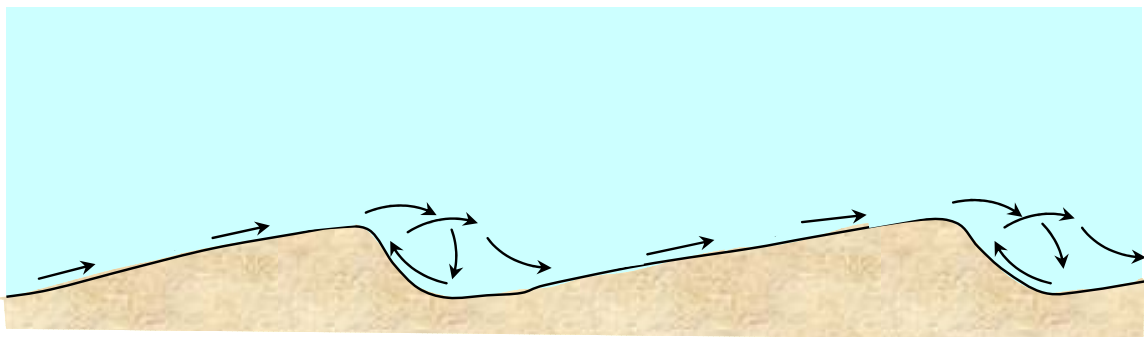
**Rizos:** Son ondulaciones pequeñas, uniformes en tamaño y longitud, semejantes a la forma triangular, con pendiente suave en la cara de aguas arriba y, en la cara de aguas abajo tiene el ángulo de reposo del material. En este régimen del lecho, el coeficiente de rugosidad de Manning,  $n$ , puede variar entre 0.02 y 0.028, y las partículas son arrastradas en el fondo principalmente. Cuando el material está formado con arena muy fina, no es posible regresar del régimen de rizos al de fondo plano. Si el material tiene un diámetro mayor de 0.5 mm, no se forman rizos. Si este es el caso, se pasa entonces directamente de un fondo plano al régimen de dunas. Sin embargo, otros autores, como Davies (1982), han observado la formación de rizos en arenas más gruesas, pero con diámetros menores o iguales a 0.7 mm (ref 1).

**Dunas con rizos sobrepuestos:** Las dunas son ondulaciones comparativamente mucho mayores que los rizos, tanto en longitud ( $\lambda$ ) como en altura ( $H$ ). En este tipo de régimen se originan y desarrollan rizos sobre las dunas.

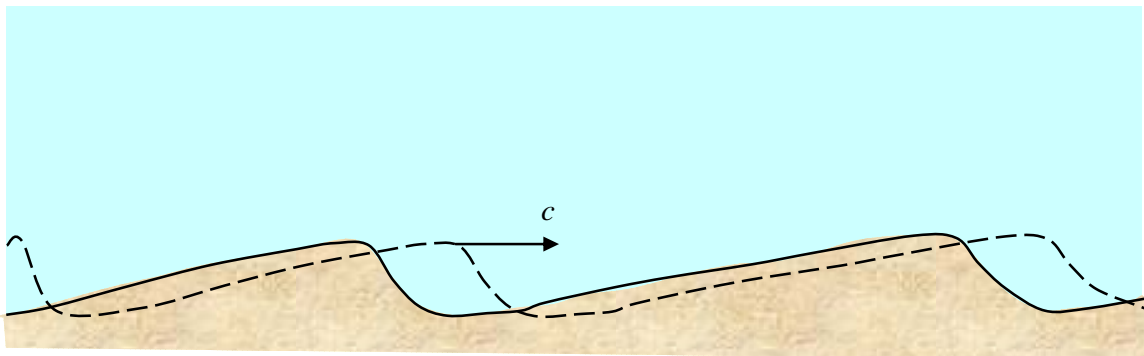
**Dunas:** Al incrementarse la capacidad de arrastre del flujo, desaparecen los rizos y quedan sólo las ondulaciones mayores, las dunas, y al igual que los rizos, son semejantes a la forma triangular, y su distribución en el fondo es más irregular. El coeficiente de rugosidad de Manning,  $n$ , aumenta y puede variar entre 0.018 y 0.033. Al disminuir el número de Froude de la corriente, se puede retornar a un fondo plano si el material es grueso, o a un fondo con rizos si el material es arena fina. En un fondo



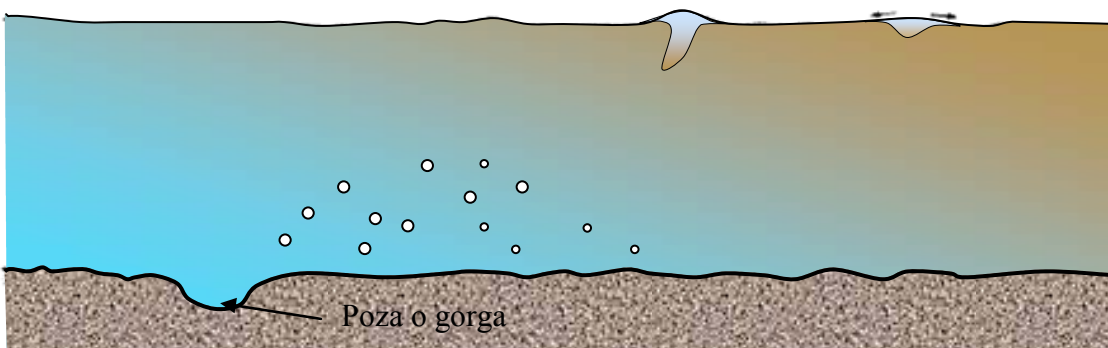
a) Características de las ondulaciones o formas del fondo.



b) Arrastre o transporte de partículas del lecho.



c) Desplazamiento de las dunas ( $c$ , celeridad).



d) Fases de la evolución de un *Kolk*.

Fig 2.2 Ondulaciones en cauces aluviales.

con dunas se forman vórtices de diferentes tamaños de eje vertical, como los *kolks* (ref 18), que se inician al pie del talud de la cara de aguas abajo de las dunas y que se disipan en la superficie en forma de borbotones. Esos vórtices erosionan el lecho y levantan gran cantidad de partículas arenosas del fondo, las que durante cierto tiempo son transportadas en suspensión, fig 2.2.

**Ondas estacionarias:** son ondulaciones simétricas en el lecho, como la forma sinusoidal, y permanecen virtualmente estacionadas, sin tendencia a romperse o a emigrar, pero existe transporte de sedimentos, desplazándose las partículas hacia aguas abajo. Además, la superficie libre del agua es prácticamente paralela a las ondulaciones del lecho y está en fase con ellas todo el tiempo. El coeficiente de rugosidad de Manning varía entre 0.011 y 0.016.

**Antidunas:** son ondulaciones simétricas en el lecho, como la forma sinusoidal, que avanzan lentamente hacia aguas arriba, en sentido contrario al del flujo, aunque existe transporte de sedimentos hacia aguas abajo. Las antidunas siguen un proceso cíclico de formación: crecimiento, que ocurre a medida que se trasladan hacia aguas arriba; destrucción y barrido, que dura de 0.5 a 2 minutos, en éste proceso se libera gran cantidad de sedimentos que quedan en suspensión. Además, la superficie libre del agua es aproximadamente paralela a las ondulaciones del lecho y está en fase con ellas, excepto cuando sucede la rotura en la vena líquida, provocada, tal vez, por cambios locales en el régimen del flujo (ref 15). El coeficiente de rugosidad de Manning varía entre 0.011 y 0.022.

## II.2. CRITERIOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL RÉGIMEN DE UN LECHO

Con el fin de conocer o pronosticar el tipo de configuración que, bajo ciertas condiciones, tiene lugar en un lecho aluvial, se han propuesto varios criterios o métodos, algunos de ellos sencillos y otros complicados. Los criterios sencillos no requieren del cálculo o conocimiento de la velocidad media del flujo. Por el contrario, los métodos complicados necesitan conocer o estimar dicha velocidad, por ello, estos métodos son en realidad método de resistencia al flujo, que permiten calcular la velocidad media de la corriente y el tipo de régimen, como los que se presentan en los capítulos III a VII. Por tanto a continuación se presentan algunos criterios sencillos que se han establecido en la hidráulica fluvial.

### II.2.1 Liu (1957).

Con base en los conceptos de capa límite y de flujo de fluidos en dos fases o estratificados, Liu buscó definir la condición de inicio de formación de rizos en lechos arenosos. Para ello, Liu hizo una analogía entre el desarrollo de las inestabilidades que sufre la intercara del flujo de dos fluidos estratificados, y la formación de rizos en lechos arenosos, fig 2.3.

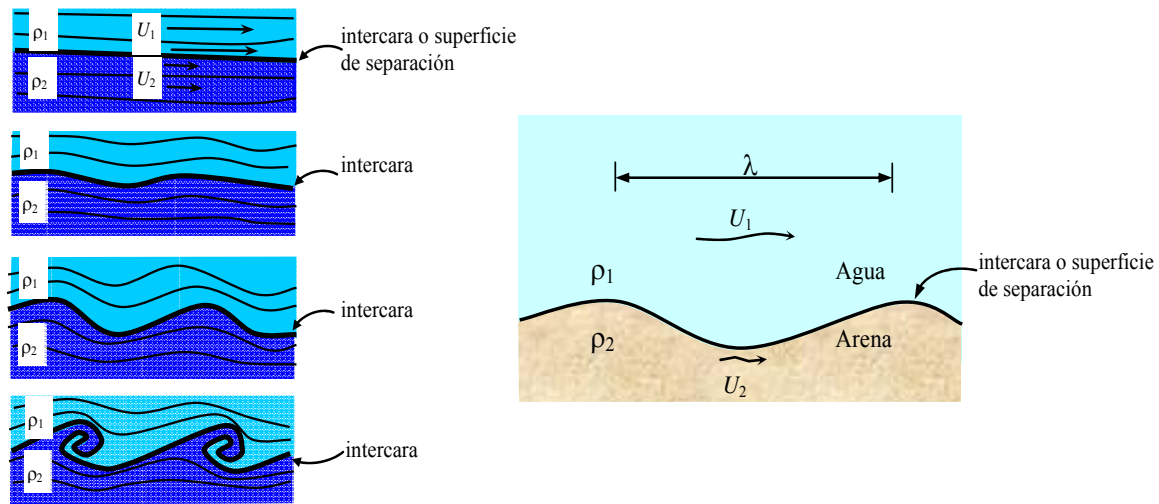


Fig 2.3 Analogía entre el desarrollo de inestabilidades en dos fluidos estratificados y la formación de ondulaciones en lechos arenosos, según Liu (1957)

Liu consideró que en la intercara o frontera entre el agua y el material del lecho existen inestabilidades, que dan lugar a las ondulaciones del lecho. Al analizar las fuerzas que actúan sobre una partícula que está apunto de moverse, o en estado de movimiento incipiente, Liu encontró que la formación de rizos depende de los parámetros adimensionales  $R_*$  y  $U_*/\omega_{50}$ , los cuales se definen de la siguiente manera:

$$R_* = \frac{U_* D_{50}}{\nu} \quad (2.4)$$

donde

$R_*$  número de Reynolds asociado al esfuerzo cortante y al tamaño de las partículas, utilizado por Shields.

$U_*$  velocidad de fricción o relacionada al esfuerzo cortante, en m/s.

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g d S} \quad (2.4)$$

en la que

$\tau_0$  esfuerzo tangencial medio que produce el flujo en el fondo y paredes del canal, en  $N/m^2$ .

$\rho$  densidad del fluido, en  $Ns^2/m^4$ .

$g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ .

$d$  tirante del flujo, en m.

$S$  pendiente del lecho.

$D_{50}$  diámetro de la curva granulométrica característica tal que el 50% de las partículas son menores que él, en m.

$\nu$  viscosidad cinemática del fluido,  $m^2/s$ .

$$\omega_{50} = F_1 (S_s - 1) g D_{50} \quad (2.2)$$

siendo

$\omega_{50}$  velocidad de caída de los sedimentos de tamaño  $D_{50}$ , según Rubey, en m/s.

$S_s$  densidad relativa del sedimento.

$F_1$  factor adimensional, definido como

$$F_1 = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{(S_s - 1) g D_{50}^3}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{(S_s - 1) g D_{50}^3}} \quad (2.3)$$

Liu realizó seis ensayos en un canal de laboratorio de sección rectangular de 0.3 m de ancho, 0.6 m de altura y 12.2 m de longitud. Con base en sus resultados y en 67 datos de campo y laboratorio de otros autores, Liu elaboró el diagrama que se presenta en la fig 2.4, la cual permite conocer las condiciones que se requieren para el inicio de la formación de rizados.

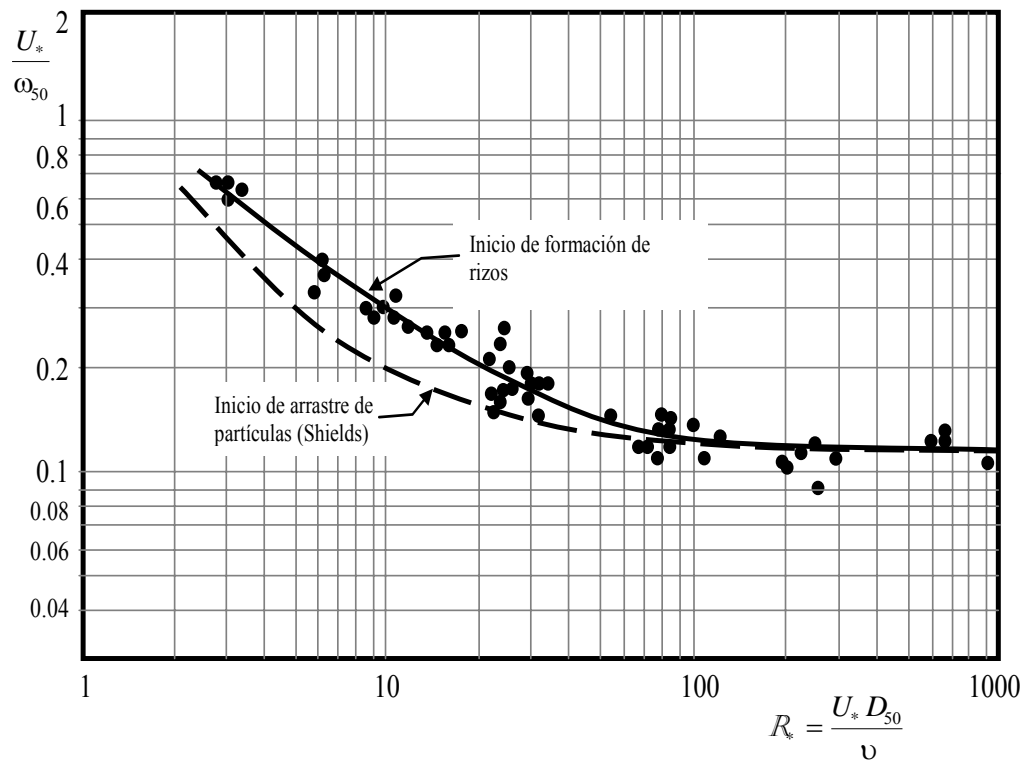


Fig 2.4 Criterio de formación de rizados, según Liu (1957)

A continuación se indica el intervalo de los datos utilizados por Liu.

Tamaño de los sedimentos  $0.205 < D_{50} < 10.56 \text{ mm}$

Densidad relativa de los sedimentos  $1.03 < S_s < 2.7$

Temperatura del agua	$9.5 < T < 30.5 \text{ } ^\circ\text{C}$
Velocidad de caída de las partículas de tamaño $D_{50}$	$0.024 < \omega_{50} < 0.95 \text{ m/s}$
Velocidad a cortante	$0.008 < U_* < 0.12 \text{ m/s}$
Esfuerzo cortante que produce el flujo en el fondo	$0.0065 < \tau_0 < 1.47 \text{ kg/m}^2$

De acuerdo con estos datos y el diagrama de la fig 2.4, se observa que la formación de rizos ocurre con partículas mayores de 0.7 mm. Sin embargo, esta incongruencia fue explicada por Albertson, Simons y Richardson, como se indica a continuación.

### II.2.2. Albertson, Simons y Richardson (1958)

Estos autores apoyaron las ideas y el diagrama de Liu, fig 2.4, ya que, según ellos, dicho diagrama muestra claramente tanto el movimiento incipiente de partículas como el inicio de la formación de rizos.

Albertson *et al.* especularon sobre la posibilidad de relaciones similares para otros regímenes del lecho, tales como las dunas y antidunas. Con base en sus resultados experimentales y utilizando los datos de otros autores, Albertson *et al.* elaboraron el diagrama de la fig 2.5 expresando sus resultados como Liu, pero indicando que el eje de las abscisas también se puede expresar en términos de la relación que existe entre el diámetro de las partículas,  $D_{50}$ , y el espesor de la subcapa viscosa,  $\delta'$ , es decir de  $D_{50}/\delta'$ , ya que

$$\delta' = \frac{11.6 \nu}{U_*} \tag{2.5}$$

por lo que

$$\frac{D_{50}}{\delta'} = \frac{1}{11.6} \frac{U_* D_{50}}{\nu} = \frac{R_*}{11.6} \tag{2.6}$$

El diagrama de Albertson *et al.*, fig 2.5, comprende el de Liu e indica además el inicio o los límites de los regímenes de dunas, transición y antidunas, y estos límites, según se observa en el diagrama de la fig 2.5, tienden a converger, conforme se incrementa el valor de  $R_*$ , hacia un valor constante. Este diagrama permite explicar que, efectivamente, con partículas sedimentarias mayores de 0.7 mm, no tiene lugar la formación de rizos, sino otras formas o regímenes del lecho.

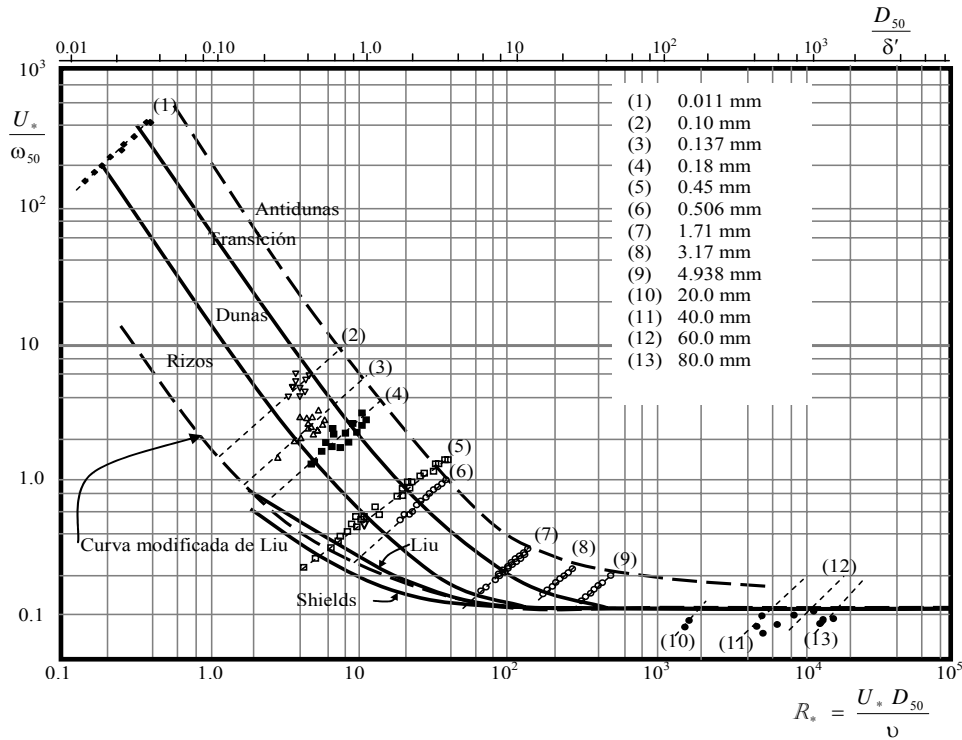


Fig 2.5 Rugosidad en cauces aluviales, según Albertson *et al* (1958)

### II.2.3 Garde y Ranga Raju (1963)

Garde y Ranga Raju demostraron, con base en el análisis dimensional, que la ley de resistencia al flujo para canales aluviales se podía expresar como

$$\frac{U}{\Delta^{1/2} \sqrt{g D_{50}}} = \phi \left[ \frac{R}{D_{50}}, \frac{S}{\Delta} \right] \quad (2.7)$$

siendo

$$\Delta = \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} = S_s - 1$$

Los límites de los diferentes regímenes del lecho los definieron en función únicamente de los parámetros adimensionales  $R/D_{50}$  y  $S/\Delta$ , es decir sin necesidad de conocer la velocidad media del flujo, lo cual tiene grandes ventajas prácticas. En la fig 2.6, se presenta el diagrama que obtuvieron basándose en una gran cantidad de datos de campo y laboratorio:



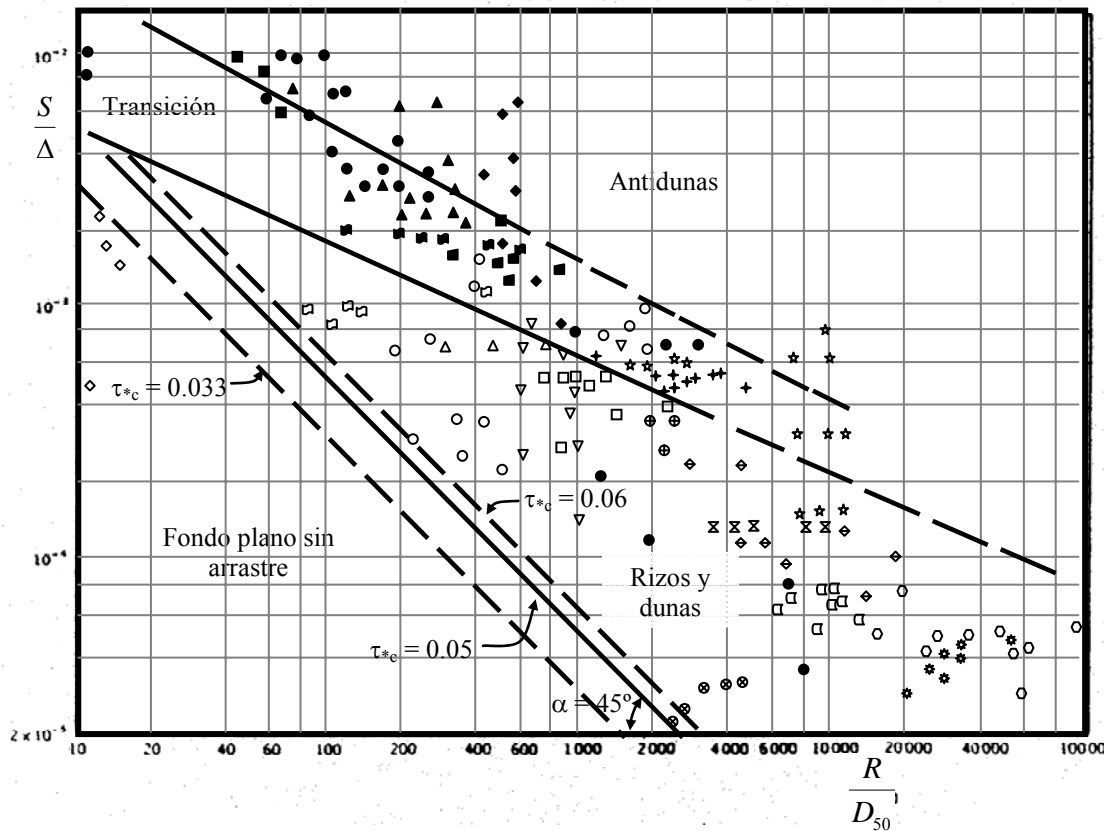


Fig 2.6 Regímenes del lecho en cauces aluviales, según Garde y Ranga Raju (1963)

En la fig 2.6, la línea de frontera entre la región de fondo plano sin transporte y la de rizos y dunas puede recorrerse, si se considera que no siempre se cumple que  $\tau_{*c} = 0.05$ , ya que según el diagrama de Shields,  $0.033 < \tau_{*c} < 0.06$  cuando  $R_{*c} > 2$ .

Garde y Ranga Raju recomendaron usar con reservas su diagrama (fig 2.6) cuando la sección transversal del río sea muy variable o cuando cambie mucho el tirante a lo largo de su curso, ya que en tales casos pueden ocurrir configuraciones múltiples o diferentes regímenes.

#### II.2.4 Cruickshank y Maza (1973)

Estos autores establecieron dos ecuaciones para la determinación de la velocidad media del flujo (ref 7), una de ellas para el régimen inferior y, la otra para el régimen superior. Para saber cual de ellas utilizar en determinadas condiciones, establecieron dos inecuaciones para definir el tipo de régimen y, por consiguiente, la ecuación por utilizar. A continuaciones presentan las inecuaciones que permiten discernir entre el régimen inferior o el superior:

$$\text{Si } \frac{1}{S} \geq 70 \left( \frac{d}{D_{84}} \right)^{0.350} \quad \text{El régimen es inferior} \quad (2.12)$$

$$\text{Si } \frac{1}{S} \leq 55 \left( \frac{d}{D_{84}} \right)^{0.382} \quad \text{El régimen es superior} \quad (2.13)$$

Cruickshank y Maza indicaron que sus fórmulas son válidas cuando  $0.2 < D_{50} < 2 \text{ mm}$  y  $1.2 < \sigma_g < 2.5$ .

Con el fin de ver la manera como se comportan los límites definidos por las ecs (2.12) y (2.13), Gabriel Atala (ref 1) elaboró la fig 2.7, en la que se observa que cuando  $d/D_{84} < 1875.97$  el método exhibe claramente las regiones del régimen inferior y superior, marcando una región de transición muy delgada entre ambos regímenes. Pero cuando  $d/D_{84} > 1875.97$ , hay absurdos, ya que al invertirse la posición de los límites, se define una región en la que ocurren simultáneamente el régimen inferior y el superior. Otra forma de visualizar y confirmar esto, consiste en dibujar los límites establecidos por Cruickshank y Maza en el diagrama de Garde y Ranga Raju, como lo hizo García Flores (ref 15), para lo cual expresó las ecs (2.12) y (2.13) de Cruickshank y Maza en la forma siguiente

$$\text{Si } \frac{S}{\Delta} \leq \frac{1}{\Delta \left[ 70 \left( \frac{d}{D_{84}} \right)^{0.350} \right]} \quad \text{El régimen es inferior} \quad (2.14)$$

$$\text{Si } \frac{S}{\Delta} \geq \frac{1}{\Delta \left[ 55 \left( \frac{d}{D_{84}} \right)^{0.382} \right]} \quad \text{El régimen es superior} \quad (2.15)$$

En la fig 2.8, se puede observar que, en efecto, el criterio de Cruickshank y Maza define una zona de transición muy delgada, y cuando  $d/D \leq 1875.97$  las rectas que delimitan la transición se invierten, o sea el límite superior de la transición queda por debajo del límite inferior de la transición, lo que es absurdo; además, al comparar esta zona de transición con la que definen Garde y Ranga Raju en su diagrama, se puede inferir, según García Flores, que el criterio de Cruickshank - Maza viene a ser como un caso particular en dicho diagrama, ya que la zona de transición es excesivamente angosta.

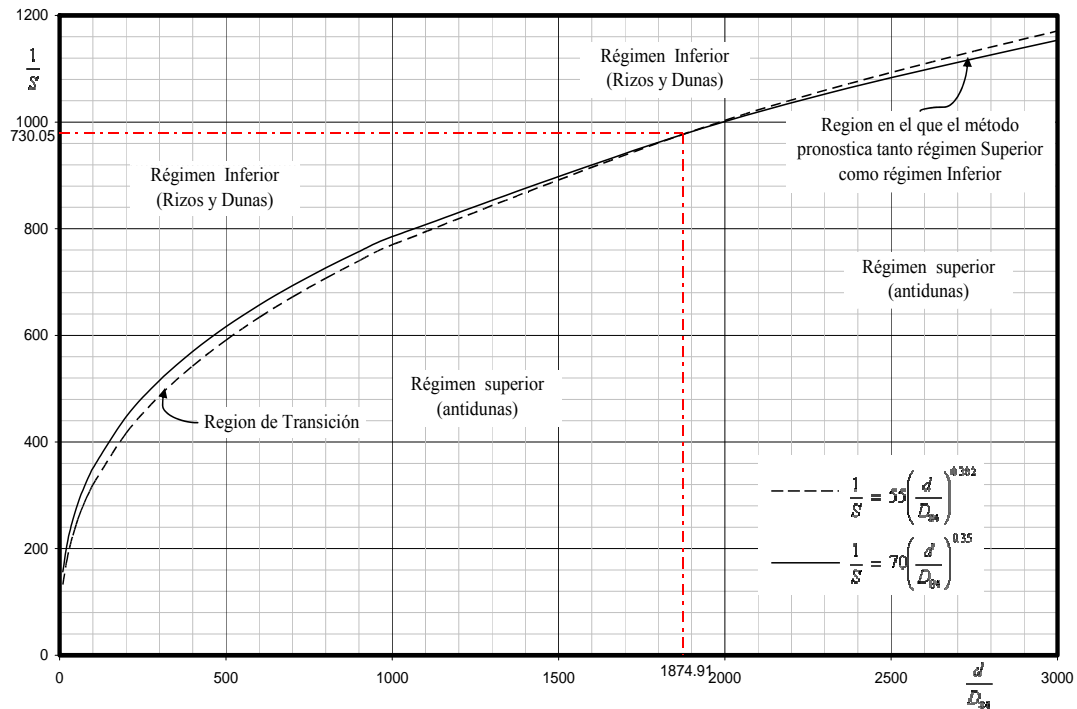


Fig 2.7 Ambigüedades del método de Cruickshank-Maza en el pronóstico del régimen del lecho, según Atala (ref 1).

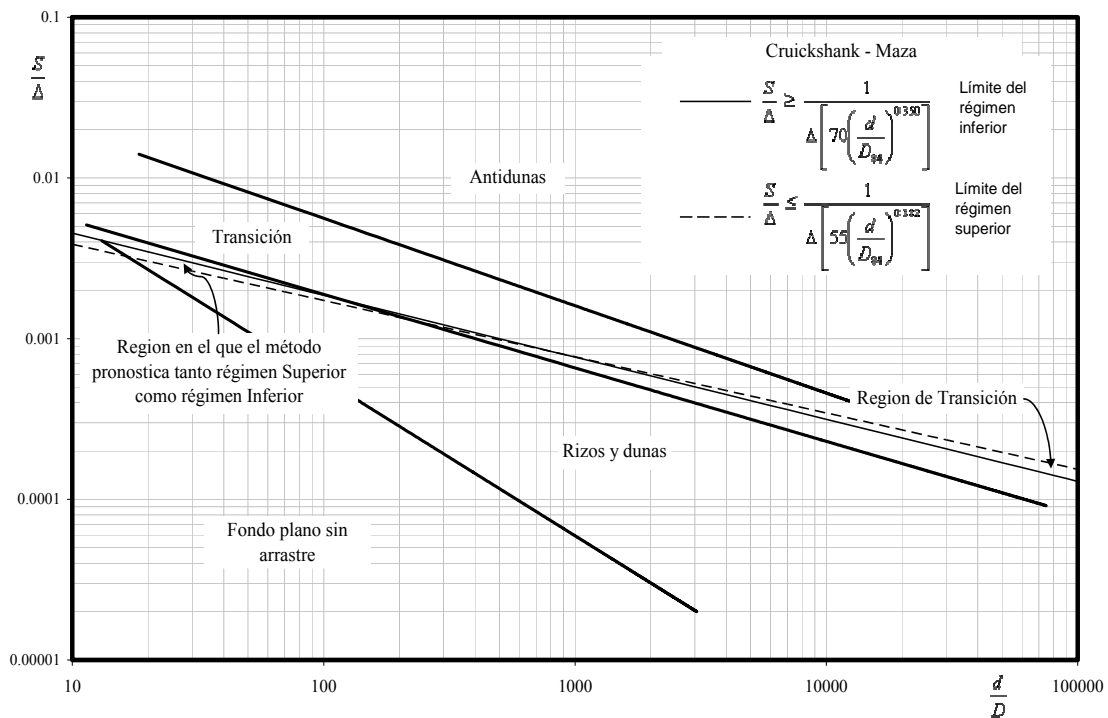


Fig 2.8 Comparación del criterio de Cruickshank – Maza en el diagrama de Garde y Ranga Raju para la determinación de los regímenes del lecho, según García Flores (ref 15).

II.2.5 Swamee y Ohja (1994)

Para determinar los límites entre los diferentes regímenes del lecho, Prabhata K. Swamee y Chandra Shekhar P. Ojha, ref 26, utilizaron los parámetros adimensionales del diagrama de Shields,  $\tau_*$  y  $R_*$ , pero relacionándolos entre ellos para establecer dos nuevos parámetros adimensionales: el diámetro adimensional,  $D_*$ , y el esfuerzo cortante adimensional,  $T_*$ , los cuales definieron de la manera siguiente:

$$D_* = \left( \frac{R_*^2}{\tau_*} \right)^{1/3} = D_{50} \left[ \frac{g(Ss-1)}{v^2} \right]^{1/3} \quad (2.11)$$

$$T_* = (R_* \tau_*)^{2/3} = R S \left[ \frac{\sqrt{g}}{(Ss-1)v} \right]^{2/3} \quad (2.12)$$

Después de analizar datos de campo, encontraron que era complicado el establecer los límites entre los regímenes del lecho en términos de  $T_*$  y  $D_*$ , ya que en algunos casos, dichos límites se entrecruzaban y esto daba lugar a equívocos por las ambigüedades. Por ello, se dieron a la tarea de ajustar adecuadamente las líneas que definen los límites entre los diferentes regímenes del lecho. Este ajuste lo hicieron con la ayuda de otro parámetro, al que denominaron parámetro de demarcación,  $\lambda$ , y que definieron como:

$$\lambda = \frac{N_C}{N_T + N_F} \quad (2.13)$$

donde

- $N_C$  número de casos pronosticados correctamente.
- $N_T$  número total de casos para una configuración del lecho o tipo de régimen en particular.
- $N_F$  número de casos pronosticados erróneamente.

Al maximizar dicho parámetro para cada una de las formas del fondo o regímenes del lecho, obtuvieron la siguiente ecuación para delimitar los diferentes regímenes del lecho

$$T_{*frontera} = k_1 \left[ 1 + \left( \frac{D_*}{k_2} \right)^{k_3} \right]^{k_4} \quad (2.14)$$

en la que  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  son parámetros cuyos valor dependen según el régimen del lecho, véase la tabla 2.1.

Tabla 2.1 Valores de los Parámetros  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ , según Swamee y Ohja

Límite entre	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
Fondo plano sin transporte y rizos	0.18	1	6.5	0.1
Rizos y dunas	0.8	0.8	6.5	0.1
Dunas y transición	1.35	0.6	6.5	0.1
Transición y Fondo plano con transporte	6.5	6	6.5	0.1
Fondo plano con transporte y ondas estacionarias	8	5.5	6.5	0.1
Ondas estacionarias y antidunas	9.5	5	10	0.1
Antidunas, rápidos y pozas	15	6	10	0.1

Con base en la ec (2.14) y los valores de la tabla 2.1, Swamee y Ohja dibujaron el diagrama que se presenta en la fig 2.9. En ese diagrama, muestran también la curva de Shields, la cual formularon como

$$T_* = 0.243 \left[ 1 + \left( \frac{D_*}{13} \right)^{1.25} \right]^{0.8} \quad (2.15)$$

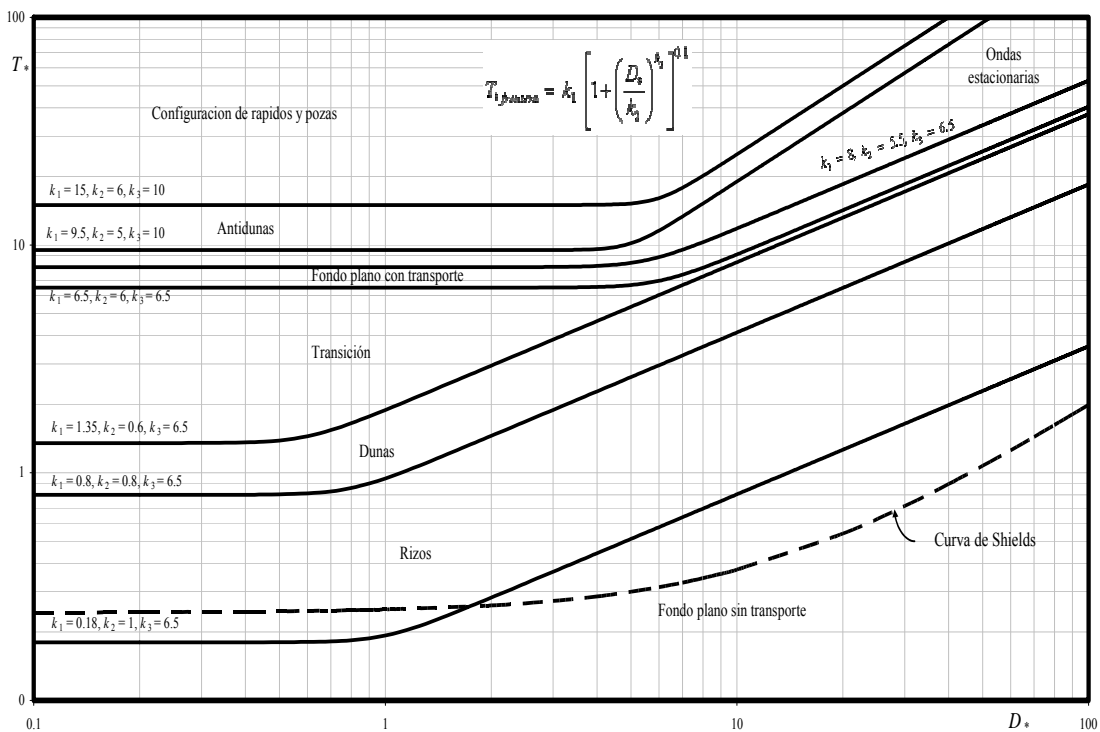


Fig 2.9 Clasificación de las configuraciones del lecho, según Swamee y Ohja.

El intervalo de los datos utilizados por Swamee y Ohja fue:

Gasto:	$0.003 \text{ m}^3/\text{s} \leq Q \leq 486.8 \text{ m}^3/\text{s}$
Ancho del canal:	$0.267 \text{ m} \leq B \leq 140.210 \text{ m}$
Tirante del flujo:	$0.13 \text{ m} \leq d = R \leq 2.591 \text{ m}$
Pendiente:	$0.00005 \leq S \leq 0.027$

Tamaño del sedimento:	$0.01 \text{ mm} \leq D_{50} \leq 20.20 \text{ mm}$
Desviación estándar:	$1.00 \text{ mm} \leq \sigma \leq 13.83 \text{ mm}$
Concentración de sólidos:	$0.00 \text{ ppm} \leq C \leq 111000.00 \text{ ppm}$
Temperatura:	$14.3 \text{ °C} \leq T^{\circ} \leq 26.5 \text{ °C}$

Por último, conviene destacar que en el diagrama de la fig 2.9, la línea que marca la frontera entre el fondo plano sin transporte y el régimen de rizos es, efectivamente, la curva de inicio de arrastre hallada por ellos para material no uniforme, mientras que la curva de Shields lo es para material uniforme.

### II.3 CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDULACIONES DEL LECHO

La resistencia al flujo no sólo está en función de las formas del fondo o de las ondulaciones del lecho, sino también de sus dimensiones geométricas, es decir de la altura y longitud de tales configuraciones, denominadas características de las ondulaciones del lecho. Existen diversos criterios para conocer la altura y longitud de las ondulaciones del fondo, algunos sencillos y otros complicados. Los criterios sencillos no requieren de conocer la velocidad media del flujo y son los que se presentan a continuación

#### II.3.1 Yalin

Yalin (1964) estableció ecuaciones para determinar la altura,  $H$ , y la longitud,  $\lambda$ , de rizos y dunas. Para ello partió del hecho de que en un cauce arenoso, al estar sujeto a la acción de un flujo permanente, subcrítico, uniforme y capaz de arrastra los sedimentos del cauce, se desarrollan ondulaciones en el fondo, y consideró como hipótesis que la velocidad con la que se desplazan esas ondulaciones es comparativamente despreciable, en relación con la velocidad media del flujo, y que al desplazarse conservan su forma.

##### II.3.1.1 Cálculo de la altura de las ondulaciones del lecho, $H$ .

Yalin utilizó gran cantidad de datos de campo y laboratorio, y dibujó valores de  $d/d_c$  contra  $H/d_c$ , siendo  $d_c$  el tirante del flujo asociado al esfuerzo cortante crítico,  $\tau_c$ . A los puntos así definidos les ajustó una curva, fig 2.10. La ecuación de la curva ajustada resultó ser

$$\frac{H}{d_c} = \frac{1}{6} \left( \frac{d}{d_c} - 1 \right) \quad (2.16)$$

Para determinar la relación  $d/d_c$ , se parte de la definición del esfuerzo cortante producido por el flujo

$$\tau_0 = g d S \quad (2.17)$$

que para la condición crítica de arrastre o de movimiento incipiente de las partículas, se escribe como

$$\tau_c = g d_c S \quad (2.18)$$

Así, al dividir miembro a miembro la ec (2.17) entre la (2.18), resulta

$$\frac{\tau_0}{\tau_c} = \frac{d}{d_c} \quad (2.19)$$

en la que  $\tau_c$  se tiene que determinar conforme al criterio establecido por Yalin y Karahan, o bien, en lugar de emplear su diagrama, se pueden usar las ecuaciones que ajustó García Flores (ref 9).

El intervalo de los datos experimentales empleados fue el siguiente:

$$0.137 < D_{50} < 2.45 \text{ mm}$$

$$0.0132 < d < 0.925 \text{ m}$$

$$10^{-5} < S < 1.4 \times 10^{-2}$$

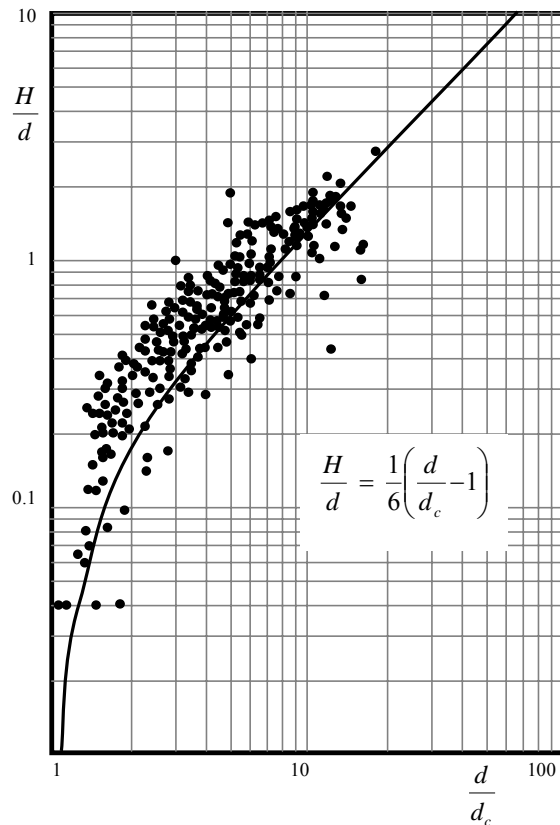


Fig 2.10 Correlación entre los parámetros  $d/d_c$  y  $H/d_c$ , según Yalin (1964)

II.3.1.2 Cálculo de la longitud de las ondulaciones del lecho,  $\lambda$

Yalin observó que, al establecer ciertas condiciones de flujo, se inicia el arrastre y el proceso de formación y desarrollo de las ondulaciones del fondo, hasta que éstas alcanzan un desarrollo tal, que sus características prácticamente no se modifican, a menos que ocurra un cambio en las condiciones del flujo. De acuerdo con esto, y con el fin de obtener relaciones para el cálculo de  $\lambda$ , Yalin consideró, con base en el análisis dimensional, que

$$\frac{\lambda}{D_{50}} = \phi_{23} \left( \bar{R}_*, \frac{\bar{d}}{D_{50}} \right) \quad (2.20)$$

Para verificar esto, recopiló datos de diversos autores y dibujó valores  $d/D_{50}$  contra  $\frac{d}{D_{50}} \sqrt{\frac{\lambda}{D_{50}}}$ , fig 2.11. Al analizar las tendencias de los puntos así definidos, obtuvo las siguientes ecuaciones:

Para dunas:

$$\frac{d}{D_{50}} \sqrt{\frac{\lambda}{D_{50}}} = 2.25 \left[ \frac{d}{D_{50}} \right]^{3/2} \quad (2.21)$$

Para rizos:

$$\frac{d}{D_{50}} \sqrt{\frac{\lambda}{D_{50}}} = 31.6 \frac{d}{D_{50}} \quad (2.22)$$

y del análisis de ellas concluyó que:

- Las dunas se forman con valores grandes de  $R_*$ , asociados a sedimentos de tamaño  $D_{50} > 0.38$  mm, y la longitud de las mismas se puede estimar de la relación siguiente

$$\frac{\lambda}{d} = 5 \quad (2.23)$$

- Los rizos se forman con valores pequeños de  $R_*$ , asociados a sedimentos de tamaño  $D_{50} < 0.19$  mm, y su longitud se puede calcular de la siguiente expresión

$$\frac{\lambda}{D_{50}} = 1000 \quad (2.24)$$



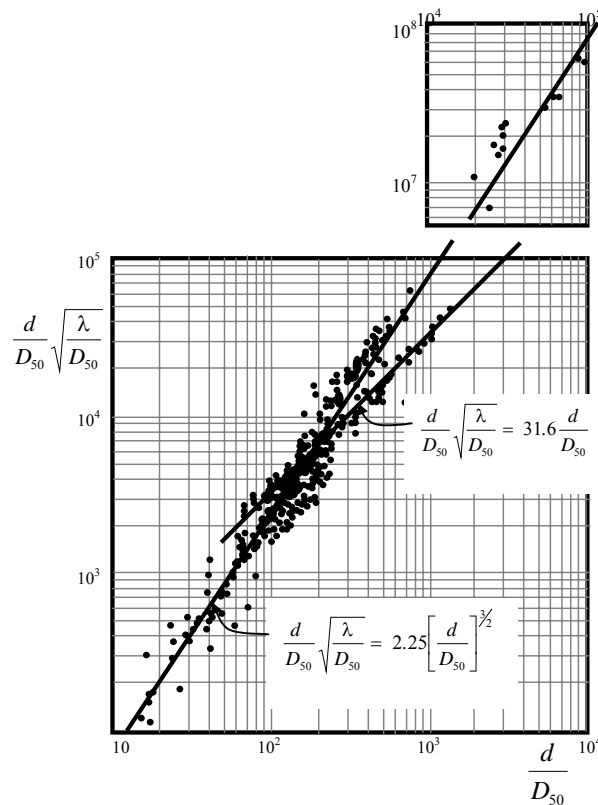


Fig 2.11. Correlación entre los parámetros  $d/D_{50}$  y  $\frac{d}{D_{50}} \sqrt{\frac{\lambda}{D_{50}}}$ , según Yalin (1964).

El intervalo de los datos utilizados por Yalin fue:

Pendiente del canal	$0.0005 < S < 0.0035$
Tirante del escurrimiento	$0.023 < d < 0.221 \text{ m}$
Tamaño de los sedimentos del lecho	$D_{50} = 0.14 \text{ mm}, D_{90}/D_{10} = 1.5$
Densidad relativa del sedimento	$S_s = 1.5$

### II.3.2 Yalin y Karahan (1979)

Con el fin de estudiar la esbeltez de las dunas del lecho,  $H/\lambda$ , Yalin y Karahan analizaron datos experimentales de diversos autores. Observaron que cuando la relación de ancho a tirante del canal,  $B/d$ , era menor de 5, y el número de Reynolds,  $R_*$ , menor de 25, la esbeltez de la duna depende sólo de  $R_*$ . Por otro lado, cuando  $B/d > 5$  y  $R_* > 25$ ,  $H/\lambda$  depende de la relación de esfuerzos tangenciales,  $\tau_0/\tau_c$ , y del tirante relativo,  $d/D_{50}$ . De acuerdo con estas observaciones, Yalin y Karahan

experimentaron, con diferentes materiales y relaciones de  $d/D_{50}$ . Los resultados de sus experimentos los dibujaron relacionando el parámetro  $\tau_0/\tau_c$  contra  $H/\lambda$ , fig 2.12.

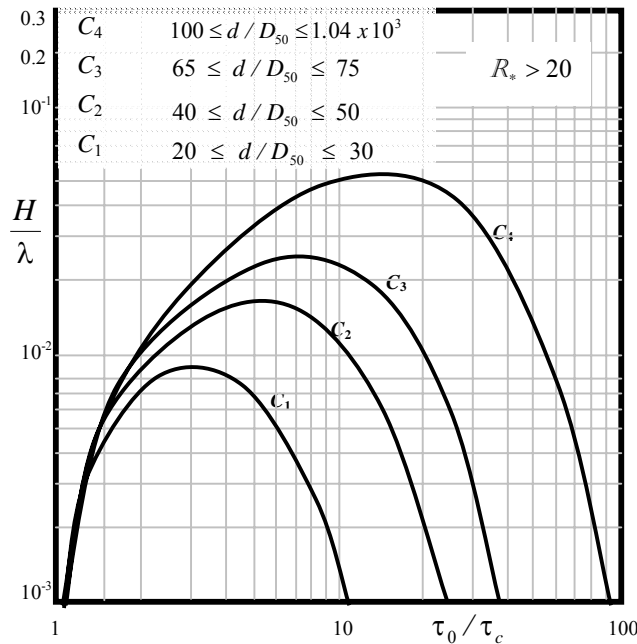


Fig 2.12 Relación entre  $\tau_0/\tau_c$  y  $H/\lambda$ , para distintos intervalos de  $d/D_{50}$ , según Yalin y Karahan (1979).

A la familia de curvas de la fig 2.12, Yalin y Karahan le ajustaron una ecuación del tipo exponencial

$$\frac{H}{\lambda} = 0.0127 \frac{\tau_0}{\tau_c} \exp\left(-\frac{\tau_0}{\tau_c} \frac{1}{k_1}\right) \quad (2.25)$$

donde  $\tau_c$  se calcula con el criterio de Yalin y Karahan, o bien, directamente, con las ecuaciones que ajustó García Flores (ref 9), y  $k_1$  es un parámetro que depende del valor de  $d/D_{50}$ , esto es:

Si $20 \leq d/D_{50} \leq 30$	$k_1 = 2.03$
Si $40 \leq d/D_{50} \leq 50$	$k_1 = 3.85$
Si $65 \leq d/D_{50} \leq 75$	$k_1 = 5.78$
Si $d/D_{50} \geq 100$	$k_1 = 12.84$

Los datos utilizados por Yalin y Karahan se encuentran entre los siguientes intervalos:

Tirante o profundidad	$0.02 < d < 0.11 \text{ m}$
Tirante relativo	$20 < d/D_{50} < 85$
Altura de dunas	$0.003 < H < 0.047 \text{ m}$

Longitud de las dunas	$0.44 < \lambda < 1.46 \text{ m}$
Número de Reynolds (ec 2.4)	$20.5 < R_* < 75.0$
Esbeltez de las dunas	$0.0016 < H/\lambda < 0.042$
Relación de esfuerzos	$1.2 < \tau_0/\tau_c < 32.58$
Pendiente	$0.004 < S < 0.0085$
Baquelita	$D_{50} = 1 \text{ mm}$ y $\gamma_s = 1600 \text{ kg/m}^3$ , en 104 ensayos
Arena	$D_{50} = 1.1 \text{ mm}$ y $\gamma_s = 2650 \text{ kg/m}^3$ , en 18 ensayos
Poliestireno	$D_{50} = 1.54 \text{ mm}$ y $\gamma_s = 1050 \text{ kg/m}^3$ , en 1 ensaye





### III. MÉTODO DE WANG Y WHITE (1993).

#### III.1 PRESENTACIÓN

Con el fin de estudiar y completar el régimen de transición del método de Engelund (ref 7), Shiqiang Wang y William Rodney White (ref 27) analizaron los datos de Gilbert (1914), Guy *et al.* (1966), Brownlie (1981), Willis *et al.* (1972) y Yin Yi (1989), así como información de los ríos Yangtze y Amarillo, y también experimentaron en laboratorio (Universidad Tsinghua, Bejín China y Wallingford, Inglaterra).

Al igual que Engelund, Wang y White separaron la resistencia al flujo, pero no en términos de la pendiente de energía,  $S$ , sino del radio hidráulico relacionado con la rugosidad del fondo,  $R_b$ , y para ello emplearon, como Engelund, el parámetro adimensional de Shields,  $\tau_*$ , es decir el esfuerzo cortante adimensional asociado con la resistencia total del fondo, esto es

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma)D_{50}} = \frac{\gamma R_b S}{(\gamma_s - \gamma)D_{50}} = \frac{R_b S}{(S_s - 1)D_{50}} \quad (3.1)$$

donde

- $\tau_*$  esfuerzo cortante adimensional o parámetro de Shields.
  - $\tau_0$  esfuerzo cortante producido por el flujo, en  $\text{N/m}^2$ .
  - $\gamma$  y  $\gamma_s$  peso específico del agua y del sedimento, respectivamente, en  $\text{N/m}^3$ .
  - $R_b$  radio hidráulico asociado con la resistencia del fondo, según Einstein (refs 6 y 7), en m.
  - $S$  pendiente del cauce.
  - $D_{50}$  diámetro característico de las partículas sedimentarias, en m.
-

$S_s$  densidad relativa de las partículas sedimentarias.

Análogamente, el esfuerzo cortante adimensional asociado con la resistencia de grano,  $\tau'_*$ , que expresaron como

$$\tau'_* = \frac{\tau'_0}{(\gamma_s - \gamma) D_{50}} = \frac{\gamma R'_b S}{(\gamma_s - \gamma) D_{50}} = \frac{R'_b S}{(S_s - 1) D_{50}} \quad (3.2)$$

en la que  $R'_b$  es el radio hidráulico del fondo correspondiente a la rugosidad debida a los granos, según Einstein (refs 6 y 7), en m.

Del análisis de sus propios datos y de los recopilados por ellos, Wang y White dibujaron, igual que Engelund, valores de  $\tau'_*$  contra  $\tau_*$  para cada uno de los regímenes del lecho, figs 3.1 y 3.2. Así, observaron que la relación entre  $\tau'_*$  y  $\tau_*$ , para los diferentes configuraciones del fondo, dependía del parámetro

$$D_* = D_{50} \left( \frac{g (S_s - 1)}{v^2} \right)^{1/3} \quad (3.3)$$

y que los regímenes inferior y superior eran independientes de  $R/D$  (fig 3.1), pero no el régimen de transición, el cual resultó ser dependiente tanto de  $R/D$  como de  $D_*$ , fig 3.2.

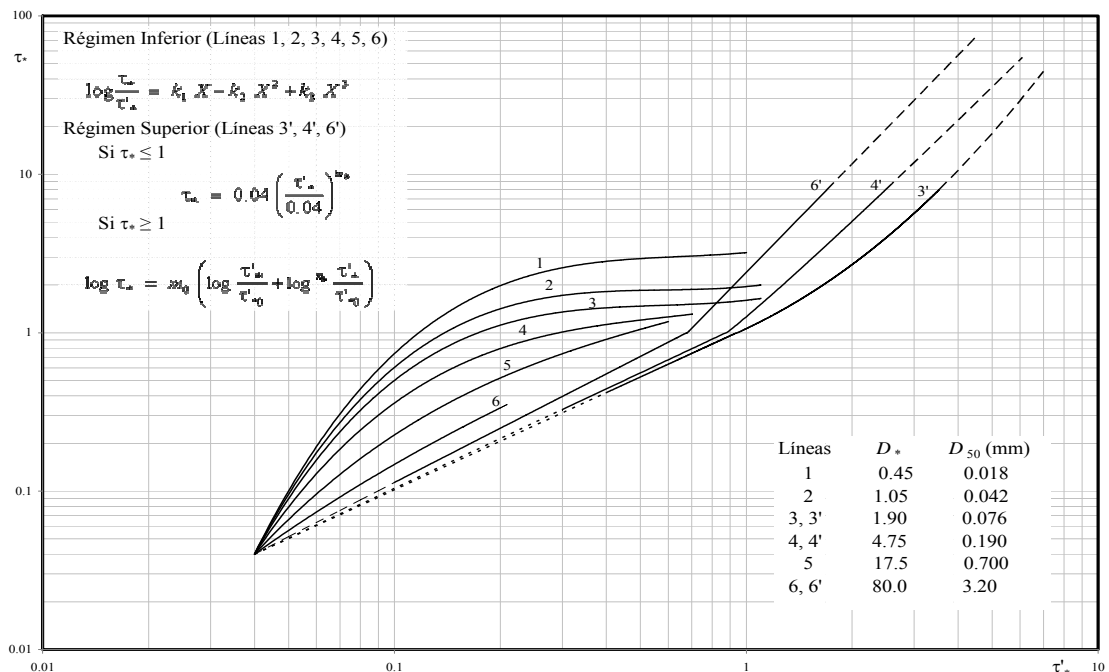


Fig 3.1 Relación de  $\tau'_*$  contra  $\tau_*$ , para varios valores de  $D_*$ . Regímenes Inferior y Superior, según Wang y White.

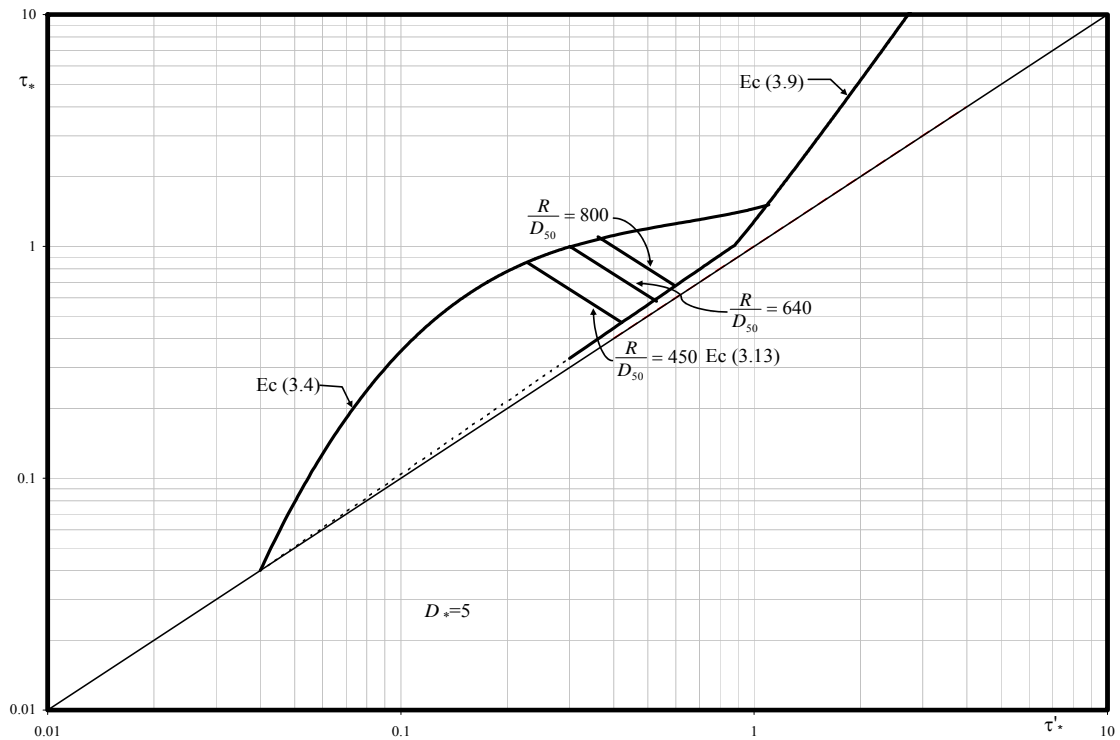


Fig 3.2 Relación de  $\tau'_{*}$  contra  $\tau_{*}$ , para  $D_{*} =$  constante y  $R/D_{50}$  variable. Régimen de Transición, según Wang y White.

A continuación se presentan las ecuaciones que propusieron para los diferentes regímenes del lecho.

Si se verifica que

$$10 \leq R_b / D_{50} \leq 120000$$

$$0.018 \text{ mm} \leq D_{50} \leq 28.65 \text{ mm}$$

$$\tau'_{*} > 0.04$$

gobiernan las ecuaciones siguientes:

**-Para Régimen Inferior** (fig 3.1):

$$\log \frac{\tau_{*}}{\tau'_{*}} = k_1 X - k_2 X^2 + k_3 X^3 \quad (3.4)$$

siendo

$$X = \log \left( \frac{\tau'_{*}}{0.04} \right) \quad (3.5)$$

y los valores de  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  se determinan según el valor del parámetro  $D_{*}$ , es decir:

$$\text{Si } D_{*} \leq 80$$

$$\log k_1 = 0.513 - 0.123 \log(D_{*}) - 0.141 \log^2(D_{*}) \quad (3.6a)$$



$$\log k_2 = 0.560 - 0.065 \log(D_*) - 0.218 \log^2(D_*) \quad (3.7a)$$

$$\log k_3 = 0.017 - 0.035 \log(D_*) - 0.273 \log^2(D_*) \quad (3.8a)$$

Si  $D_* \geq 80$

$$k_1 = 0.586 \quad (3.6b)$$

$$k_2 = 0.443 \quad (3.7b)$$

$$k_3 = 0.092 \quad (3.8b)$$

- **Para Régimen Superior** (fig 3.1):

Si  $\tau_* \leq 1$

$$\tau_* = 0.04 \left( \frac{\tau'_*}{0.04} \right)^{m_0} \quad (3.9a)$$

Si  $\tau_* \geq 1$

$$\log \tau_* = m_0 \left( \log \frac{\tau'_*}{\tau'_{*0}} + \log^{n_0} \frac{\tau'_*}{\tau'_{*0}} \right) \quad (3.9b)$$

en la que

$$\tau'_{*0} = 0.68 + 0.32 \exp(-0.1 D_*) \quad (3.10)$$

$$m_0 = \frac{1.4}{\log \left( \frac{\tau'_{*0}}{0.04} \right)} \quad (3.11)$$

$$n_0 = 1 + 4.874 \exp(-0.79 D_*) \quad (3.12)$$

- **Para Régimen de Transición** (fig 3.2):

$$\tau_* = \frac{\tau'_{*c}{}^E \tau_{*c}}{\tau_*'{}^E} \quad (3.13)$$

donde

$$E = 0.51 - 0.51 \left\{ \frac{1 - \exp[-1.09 (D_* - 5.5)]}{1 + \exp[-1.09 (D_* - 5.5)]} \right\} \quad (3.14)$$

pero la ec (3.13) se verifica sólo si  $D_* < 7$ , y esto es muy importante tenerlo en cuenta, ya que para valores mayores la ec (3.13) tiende a indeterminarse.

Además, Wang y White encontraron que, en los regímenes inferior y superior, el factor de fricción,  $f$ , expresado como

$$f = 8 \left( \frac{U_*'}{U} \right)^2 \quad (3.15)$$

se incrementaba conforme aumentaba el esfuerzo cortante adimensional  $\tau_*'$ . Por el contrario, en el régimen de transición, el valor de  $f$  decrecía al aumentar el valor de  $\tau_*'$ ; pero se tornaba constante si  $R_b/D_{50} > 10\,000$  (fig 3.3).

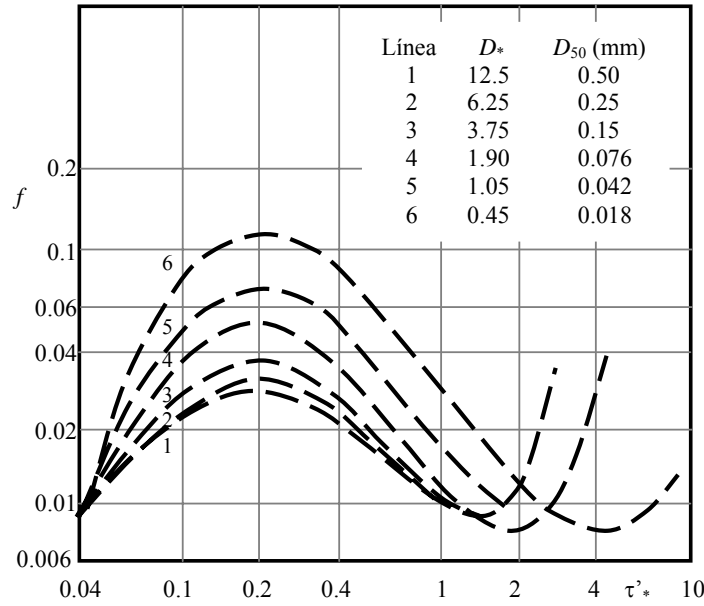


Fig 3.3 Relación de  $f$  contra  $\tau_*'$ , para  $D_*$  variable, en canales naturales, según Wang y White.

Con el fin de conocer el valor de  $f$ , para cualquier tipo de configuración o régimen del lecho, Wang y White propusieron la siguiente ecuación:

$$\log f = -2.05 + k_4 X + k_5 X^2 + k_6 X^3 + k_7 X^4 \quad (3.16)$$

donde

$$X = \log \left( \frac{\tau_*'}{0.04} \right) \quad (3.5)$$

$$k_4 = 2.75 - 2.95 \log(D_*) + 1.15 \log^3(D_*) \quad (3.17)$$

$$k_5 = -1.76 + 5.57 \log(D_*) - 2.51 \log^3(D_*) \quad (3.18)$$

$$k_6 = -0.678 - 4.49 \log(D_*) + 2.08 \log^3(D_*) \quad (3.19)$$

$$k_7 = 0.459 + 1.28 \log(D_*) - 0.496 \log^3(D_*) \quad (3.20)$$

La ec (3.16) se comprueba si  $R_b/D_{50} > 10\,000$  y  $D_{50} < 0.8$  mm.

Por otro lado, para el cálculo de la velocidad media del flujo, Wang y White utilizaron también la ecuación de Keulegan empleada por Engelund, pero la escribieron como

$$U = 5.75 \sqrt{g R'_b S} \log \frac{11 R'_b}{k'_s} \quad (3.21)$$

donde  $k'_s$  es la rugosidad equivalente asociada al tamaño de los granos, y encontraron que toma los valores siguientes:

$$\text{Si } D_{50} > 0.1 \text{ mm} \quad k'_s = D_{65} \quad (3.22a)$$

$$\text{Si } D_{50} \leq 0.1 \text{ mm} \quad k'_s = 0.5 D_{65} \quad (3.22b)$$

Ya que se conoce la velocidad media del flujo,  $U$ , para determinar el tipo de régimen del lecho, se calcula primero el Froude del grano,  $F_D$ , es decir

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} \quad (3.23)$$

y este valor se compara con el número de Froude crítico de frontera tocante al tamaño de los granos,  $F_{RD}$ , que Wang y White expresaron como:

$$F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{50}}} \quad (3.24)$$

en la que  $U_c$  es la velocidad media crítica de frontera, y sugirieron dos formas para el cálculo de  $F_{RD}$ . La primera de ellas es independiente de  $D^*$ , fig 3.4, esto es:

$$\text{Si } \frac{R}{D_{50}} \leq 10\,000 \quad F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{50}}} = 2.8 \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.3} \quad (3.25a)$$

$$\text{Si } \frac{R}{D_{50}} > 10\,000 \quad F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{50}}} = 44.4 \quad (3.25b)$$

La segunda forma depende tanto de  $D^*$  como de  $R/D_{35}$ , y es más adecuada para granos finos:

$$F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{35}}} = k \left( \frac{R}{D_{35}} \right)^m \quad (3.26)$$

donde

$$\text{Si } 1 < D_* \leq 20 \text{ y } \frac{R}{D_{35}} \geq 11\,000 D_*^{(-0.074 - 0.041 D_*)}$$

$$k = 2.65 (0.1 D_*)^{(-0.084 - 0.04 D_*)} \quad (3.27a)$$

$$m = 0.32 (0.1 D_*)^{(0.048 + 0.025 D_*)} \quad (3.28a)$$

$$\text{Si } D_* \geq 20 \text{ y } \frac{R}{D_{35}} \geq 740$$

$$k = 1.436 \quad (3.27b)$$

$$m = 0.4706. \quad (3.28b)$$

Por último, al comparar  $F_D$  contra  $F_{RD}$ , se conoce el tipo de régimen, ya que

Si  $F_D < F_{RD}$  el régimen es inferior o de transición

Si  $F_D > F_{RD}$  el régimen es superior

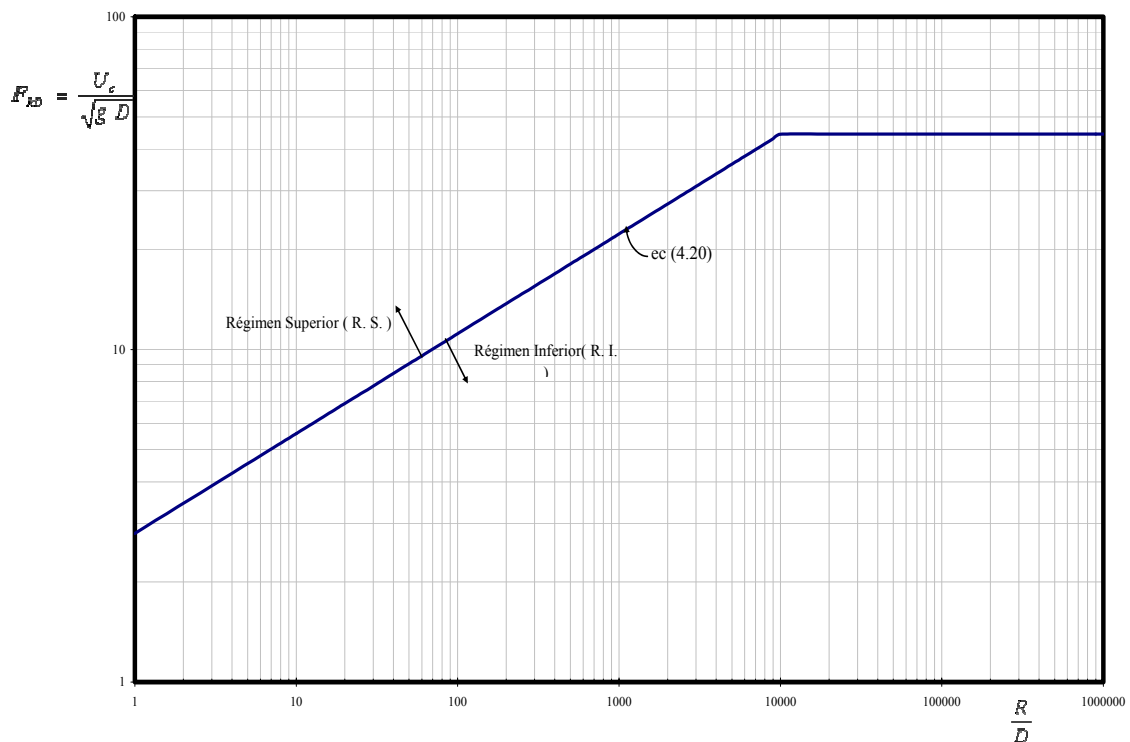


Fig 3.4 Límite o frontera superior del régimen de transición, según Wang y White.

### III.2 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO

Wang y White no especificaron ningún procedimiento de cálculo. Sin embargo, con base en el método de Engelund y teniendo en cuenta los parámetros propuestos por ellos, García Flores (ref 12) sugiere el siguiente procedimiento

i) Calcular

$$D_* = D_{50} \left( \frac{g (S_s - 1)}{v^2} \right)^{1/3}$$

ii) Obtener

$$\frac{R}{D_{50}}$$

iii) Evaluar

$$\tau_* = \frac{\gamma R S}{(\gamma_s - \gamma) D_{50}} = \frac{R S}{(S_s - 1) D_{50}}$$

iv) Estimar el valor de  $\tau'_*$ , suponiendo un tipo de régimen, ya que si  $0.1135 \leq \tau_* \leq 1.05615$ , el parámetro  $\tau'_*$  puede tomar varios valores, según el tipo de régimen del lecho, por lo que se necesita conocer dicho régimen; pero si no se conoce éste, como sucede en la práctica, hay que suponerlo y, al final, verificarlo

- Si se supone que **el régimen es inferior**, el valor de  $\tau'_*$  se determina de la ec(3.4):

$$\log \frac{\tau_*}{\tau'_*} = k_1 X - k_2 X^2 + k_3 X^3$$

en la que  $k_1, k_2, k_3$  y  $X$  se obtiene de las ecs (3.5 a 3.8)

- Si se supone que **el régimen es superior**, el valor de  $\tau'_*$  se calcula de las ecs (3.9), esto es:

Si  $\tau_* \leq 1$

$$\tau_* = 0.04 \left( \frac{\tau'_*}{0.04} \right)^{m_0}$$

Si  $\tau_* \geq 1$

$$\log \tau_* = m_0 \left( \log \frac{\tau'_*}{\tau'_{*0}} + \log n_0 \frac{\tau'_*}{\tau'_{*0}} \right)$$

donde los valores de  $\tau'_{*0}, m_0$  y  $n_0$ , se determinan con las ecs (3.10) a (3.12), y  $X$  está definido por la ec (3.5).

- Si se supone que **el régimen es de transición**, suposición que sólo puede hacerse si  $D_* < 7$ , se procede de la siguiente manera:

El valor de  $\tau'_*$  se estima de la ec (3.13), es decir:

$$\tau_* = \frac{\tau'_{*c}{}^E \tau_{*c}}{\tau'^E}$$

para lo cual se tienen que valuar primero los siguientes parámetros:

a) Calcular

$$E = 0.51 - 0.51 \left[ \frac{1 - \exp(-1.09 (D_* - 5.5))}{1 + \exp(-1.09 (D_* - 5.5))} \right]$$

b) Obtener el valor de  $U_c$ , a partir de las ecs (3.25) ó de la ec (3.26), según las condiciones que se verifiquen; por ejemplo:

$$\text{Si } \frac{R}{D_{50}} \leq 10000$$

$$F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{50}}} = 2.8 \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.3}$$

$$\text{Si } \frac{R}{D_{50}} > 10000$$

$$F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{50}}} = 44.4$$

c) Determinar  $\tau'_{*c}$ : Este cálculo se fundamenta en las ecs (3.15) y (3.16), que para la condición crítica de frontera de régimen, se escriben como:

$$f_c = 8 \left( \frac{U_*}{U_c} \right)^2 = 8 \left( \frac{\sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}}}{U_c} \right)^2 = 8 \frac{\tau_c}{\rho U_c^2} \quad (3.29)$$

y

$$\log f_c = -2.05 + k_4 X_c + k_5 X_c^2 + k_6 X_c^3 + k_7 X_c^4 \quad (3.30)$$

siendo

$$X_c = \log \left( \frac{\tau'_{*c}}{0.04} \right) \quad (3.31)$$

y

$$\tau_c = \tau_{*c} (\gamma_s - \gamma) D_{50} \quad (3.32)$$

en la que

Si  $\tau_{*c} \leq 1$

$$\tau_{*c} = 0.04 \left( \frac{\tau'_{*c}}{0.04} \right)^{m_0} \quad (3.33a)$$

Si  $\tau_{*c} \geq 1$

$$\log \tau_{*c} = m_0 \left( \log \frac{\tau'_{*c}}{\tau'_{*0}} + \log^{n_0} \frac{\tau'_{*c}}{\tau'_{*0}} \right) \quad (3.33b)$$

y los valores de  $\tau'_{*0}$ ,  $m_0$  y  $n_0$ , se determinan con las ecs (3.10) a (3.12).

Al sustituir la ec (3.29) en la (3.30) se obtiene que

$$\log \left( 8 \frac{\tau_c}{\rho U_c^2} \right) = -2.05 + k_4 X_c + k_5 X_c^2 + k_6 X_c^3 + k_7 X_c^4 \quad (3.34)$$

y la ec (3.34) se puede reescribir, considerando la ec (3.32), de la siguiente manera

$$\log \left( 8 \frac{\tau_{*c} (\gamma_s - \gamma) D_{50}}{\rho U_c^2} \right) = -2.05 + k_4 X_c + k_5 X_c^2 + k_6 X_c^3 + k_7 X_c^4 \quad (3.35)$$

Al tomar en cuenta las dos posibles condiciones que puede asumir el valor de  $\tau_{*c}$ , ecs (3.33), la ec (3.35) se convierte en

Si  $\tau_{*c} \leq 1$

$$\log \left( 8 \frac{0.04 \left( \frac{\tau'_{*c}}{0.04} \right)^{m_0} (\gamma_s - \gamma) D_{50}}{\rho U_c^2} \right) = -2.05 + k_4 X_c + k_5 X_c^2 + k_6 X_c^3 + k_7 X_c^4 \quad (3.36a)$$

Si  $\tau_{*c} \geq 1$

$$\log \left( 8 \frac{10^{\left[ m_0 \left( \log \frac{\tau'_{*c}}{\tau'_{*0}} + \log^{n_0} \frac{\tau'_{*c}}{\tau'_{*0}} \right) \right] (\gamma_s - \gamma) D_{50}}{\rho U_c^2} \right) = -2.05 + k_4 X_c + k_5 X_c^2 + k_6 X_c^3 + k_7 X_c^4 \quad (3.36b)$$

Para calcular el parámetro  $\tau'_{*c}$ , se escoge una de las ecs (3.36), y dado que  $\tau'_{*c}$  se encuentra de manera implícita en ellas, el cálculo tiene que hacerse mediante un proceso iterativo de

aproximaciones sucesivas. Una vez determinado el valor de  $\tau'_{*c}$ , se calcula el parámetro  $\tau_{*c}$  con las ecs (3.33), según el caso. Hecho esto, se verifica si el  $\tau_{*c}$  calculado satisface la condición en la que rige la ecuación seleccionada. Si no se verifica, entonces el cálculo se hace, de manera análoga, empleando la otra ecuación (3.36), la que necesariamente se verificará. Una vez precisado el valor de  $\tau'_{*c}$ , se continua con el procedimiento para conocer  $\tau'_{*}$ .

f) Evaluar el valor de  $\tau'_{*}$

$$\tau'_{*} = \frac{\tau'_{*c} \tau_{*c}^{1/E}}{\tau_{*}^{1/E}} \quad (3.37)$$

v) Determinar  $R'$  a partir de la ec.(3.2), o sea

$$R' = \tau'_{*} \frac{(S_s - 1) D_{50}}{S} \quad (3.38)$$

vi) Calcular  $U$

$$U = 5.75 \sqrt{g R' S} \log \left( \frac{11 R'}{\kappa'_s} \right)$$

donde  $\kappa'_s$  se valúa de las ecs (3.22)

vii) Obtener  $F_D$

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{g D_{50}}}$$

viii) Determinar  $F_{RD}$ , a partir de las ecs (3.25) ó de la ec (3.26), según las condiciones que se verifiquen; por ejemplo:

$$\text{Si } \frac{R}{D_{50}} \leq 10000$$

$$F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{50}}} = 2.8 \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.3}$$

$$\text{Si } \frac{R}{D_{50}} > 10000$$

$$F_{RD} = \frac{U_c}{\sqrt{g D_{50}}} = 44.4$$

ix) Comprobar el tipo de régimen

Si  $F_D < F_{RD}$  es régimen inferior o de transición.

Si  $F_D > F_{RD}$  es régimen superior.



Si el régimen calculado difiere del régimen supuesto, hay que regresar al paso iv) y suponer otro régimen.

En el caso de que se compruebe que  $F_D < F_{RD}$ , hay que discernir de cuál de los dos regímenes se trata, es decir, para determinar si es régimen inferior o de transición, se tiene que calcular el valor de  $\tau^*$  tanto para el régimen inferior como para el de transición, y se comparan dichos valores, esto es:

- Si  $\tau^*_{inferior} < \tau^*_{transición}$  es régimen inferior.  
 Si  $\tau^*_{inferior} > \tau^*_{transición}$  es régimen de transición.

### III.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

#### III.3.1 Cauce natural

Se desea estimar la velocidad media de una corriente fluvial, cuyo material del cauce tiene las siguientes características: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.75$  mm y  $\sigma_g = 3.2$ ; la temperatura del agua es de 20 °C, la pendiente del lecho es  $S = 1.51 \times 10^{-4}$ , la sección transversal es muy ancha ( $R = d$ ), y el tirante es  $d = 6.28$  m.

-Solución

i) Se calcula

$$D_* = (0.75 \times 10^{-3}) \left( \frac{9.80665(1.65)}{(1.00667 \times 10^{-6})^2} \right)^{1/3} = 18.8859$$

El valor de  $v$  se tomó de la tabla 7.2 del Manual de Ingeniería de Ríos “Origen y Propiedades de los Sedimentos” (ref 10). Para una temperatura de 20 °C,  $v = 1.00667 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

ii) Se obtiene

$$\frac{R}{D_{50}} = \frac{6.28}{0.75 \times 10^{-3}} = 8373.33333$$

iii) Se evalúa

$$\tau_* = \frac{6.28(1.15 \times 10^{-4})}{1.65(0.75 \times 10^{-3})} = 0.7663$$

iv) Se estima  $\tau'_*$ , suponiendo un tipo de régimen

- Si se supone **régimen inferior**

a) Se determinan los coeficientes  $k_1, k_2, k_3$

$$\text{Como } D_* = 18.8859 \leq 80$$

$$\log k_1 = 0.513 - 0.123 \log(18.8859) - 0.141(\log(18.8859))^2$$

$$k_1 = 1.3378$$

$$\log k_2 = 0.56 - 0.065 \log(18.8859) - 0.218 (\log(18.8859))^2$$

$$k_2 = 1.3244$$

$$\log k_3 = 0.017 - 0.035 \log(18.8859) - 0.273 (\log(18.8859))^2$$

$$k_3 = 0.3371$$

b) Se calcula  $\tau'_*$

$$\log \frac{0.7662}{\tau'_*} = 1.3378 \log \left( \frac{\tau'_*}{0.04} \right) - 1.3244 \log \left( \frac{\tau'_*}{0.04} \right)^2 + 0.3371 \log \left( \frac{\tau'_*}{0.04} \right)^3$$

$$\tau'_* = 0.32281$$

v) Se determina  $R'$

$$R' = \frac{0.32281(1.65)(0.75 \times 10^{-3})}{0.000151} = 2.6456 \text{ m}$$

vi) Se calcula

$$U = 5.75 \sqrt{9.80665 (2.6456)(0.000151)} \log \left( \frac{11 (2.6295)}{0.00011741} \right) = 1.6947 \frac{m}{s^2}$$

El valor de  $D_{65}$ , se calcula a partir de las características granulométricas del cauce, utilizando la ec. (7.92) del capítulo 7 del Manual de Ingeniería de Ríos “*Origen y Propiedades de los Sedimentos*” (ref 10)

$$D_n = D_{50} (\sigma_g)^{Z_n}$$

donde  $Z_n$  es una variable aleatoria estándar, con distribución normal, con media igual a 0 desviación estándar igual a 1

$$D_{65} = 0.00075 (3.2)^{0.38532} = 0.0011741 \text{ m}$$

vii) Se obtiene

$$F_D = \frac{1.6947}{\sqrt{9.80665 (0.00075)}} = 18.4972$$

viii) Se determina

$$\text{Como } \frac{R}{D_{50}} = 8373.333 \leq 10000$$

$$F_{RD} = 2.8 (8373.333)^{0.3} = 42.07533$$

ix) Se comprueba el tipo de régimen

Si  $F_D < F_{RD}$  es régimen inferior o de transición.

Si  $F_D > F_{RD}$  es régimen superior.

Como  $F_D < F_{RD}$  el flujo se encuentra en régimen inferior o de transición, por consiguiente, se tiene que calcular  $\tau'_*$  para ambos regímenes y compararlos

Si  $\tau'^{*inferior} < \tau'^{*transición}$  es régimen inferior.

Si  $\tau'^{*inferior} > \tau'^{*transición}$  es régimen de transición.

- Para calcular  $\tau'^{*transición}$ , se procede de la siguiente manera:

a) Se evalúa

$$E = 0.51 - 0.51 \left[ \frac{1 - \exp(-1.09(18.8859 - 5.5))}{1 + \exp(-1.09(18.8859 - 5.5))} \right] = 4.6986 \times 10^{-7}$$

Como el valor de  $D_* > 7$ , el valor de  $E$  es muy pequeño, por lo tanto no se puede determinar el valor de  $\tau'^{*transición}$ , y el régimen supuesto se verifica, es decir el régimen es inferior. Por tanto, la velocidad media de la corriente fluvial es

$$U = 1.6947 \frac{m}{s^2}$$

### III.3.2 Canal de laboratorio

Datos:

Material del fondo o lecho: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.25$  mm y  $\sigma_g = 1.48$ . La pendiente del canal es  $S = 2.5 \times 10^{-4}$ , la temperatura del agua es de 18 °C, la sección transversal es rectangular y el radio hidráulico asociado a la rugosidad del lecho es  $R_b = 0.48$  m.

-*Solución:* Se procede de manera análoga que en el ejemplo anterior. A continuación sólo se indica la solución y los valores de los parámetros correspondientes, así como la forma de discernir el régimen:

i)  $D_* = 6.0929$

ii)  $R/D_{50} = 1612$

iii)  $\tau_* = 0.2442$

iv) Suponiendo Régimen Inferior se obtiene que,  $\tau'_* = 0.08425$

v)  $R' = 0.1391$  m

vi)  $U = 0.3952$  m/s

vii)  $F_D = 7.9826$

viii)  $F_{RD} = 25.6665$

Como  $F_D = 7.9826 < F_{RD} = 25.6665$  el flujo se encuentra en régimen inferior o de transición, por consiguiente, se tiene que calcular  $\tau'_*$  para ambos regímenes y compararlos.

- Para calcular  $\tau'^{*}_{transición}$ , se procede de la siguiente manera:

a) Se calcula

$$E = 0.51 - 0.51 \left[ \frac{1 - \exp(-1.09(6.0929 - 5.5))}{1 + \exp(-1.09(6.0929 - 5.5))} \right] = 0.35071$$

b) Se obtiene el valor de  $U_c$ , a partir de las ecs (3.25) ó de la ec (3.26), según las condiciones que se verifiquen

$$\text{Como } \frac{R}{D_{50}} = 1612 \leq 10000$$

$$U_c = 2.8(1612)^{0.3} \sqrt{9.80665(0.00025)} = 1.27086 \frac{m}{s}$$

c) Se determina  $\tau'^{*}_c$ :

Suponiendo que  $\tau^*_{*c} \leq 1$ , se tiene que

$$\tau'_{*0} = 0.68 + 0.32 \exp(-0.1(6.0929)) = 0.8539$$

$$m_0 = \frac{1.4}{\log\left(\frac{0.8539}{0.04}\right)} = 1.05311$$

$$k_4 = 2.75 - 2.95 \log(6.0929) + 1.15 \log^3(6.0929) = 0.9906$$

$$k_5 = -1.76 + 5.57 \log(6.0929) - 2.51 \log^3(6.0929) = 1.3982$$

$$k_6 = -0.678 - 4.49 \log(6.0929) + 2.08 \log^3(6.0929) = -3.1964$$

$$k_7 = 0.459 + 1.28 \log(6.0929) - 0.496 \log^3(6.0929) = 1.2238$$

por lo que

$$\log \left( 8 \frac{0.04 \left( \frac{\tau'_{*c}}{0.04} \right)^{1.05311} (25950.995 - 99792.83) 0.00025}{998.60 (1.27086)^2} \right) = -2.05 + 0.9906 X_c + 1.3982 X_c^2 - 3.1964 X_c^3 + 1.2238 X_c^4$$

donde

$$X_c = \log\left(\frac{\tau'_{*c}}{0.04}\right)$$

El valor de  $\tau'^{*}_c$  es

$$\tau'^{*}_c = 0.6331$$

Una vez determinado  $\tau'^{*}_c$  se verifica si se satisface la condición en la que rige la ecuación seleccionada.

$$\tau_{*c} = 0.04 \left( \frac{0.6331}{0.04} \right)^{1.05311} = 0.7332$$

como  $\tau_{*c} \leq 1$  se verifica que la ecuación utilizada es la correcta.

f) Se evalúa

$$\tau'_* = \frac{0.6331(0.7332)^{1/0.35071}}{(0.2442)^{1/0.35071}} = 14.5736$$

g) Se compara

$$\tau'^*_{\text{transición}} = 14.5736 > \tau'^*_{\text{inferior}} = 0.085429$$

por tanto, el régimen supuesto se verifica, es decir se trata de régimen inferior. Por tanto, la velocidad media de la corriente es

$$U = 0.3952 \frac{m}{s}$$

#### III.4 TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ Y $R/D_{50}$

Para transformar y reducir el método de Wang y White a una ecuación adimensional, se procede de la siguiente manera (ref 14):

Se despeja  $R'$  de la ec (3.2)

$$R' = \frac{\tau'_* (S_s - 1) D_{50}}{S} \quad (3.38)$$

se sustituye la ec (3.31) en la ec (3.21)

$$U = 5.75 \sqrt{g \tau'_* (S_s - 1) D_{50}} \log \left( 11 \frac{\tau'_* (S_s - 1) D_{50}}{S k'_s} \right) \quad (3.39)$$

por último, se dividen ambos miembros de la ec (3.39) entre  $\sqrt{g D_{50}}$

$F_D = \frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = 5.75 \sqrt{\tau'_* (S_s - 1)} \log \left( 11 \frac{\tau'_* (S_s - 1) D_{50}}{S k'_s} \right)$	(3.40)
--	--------

donde  $\tau'_*$  depende del tipo de régimen, ecs (3.4), (3.9) y (3.13). En las figs (3.5) a (3.10), se observa la forma como varía la resistencia al flujo, según el tipo de régimen, y la sensibilidad del método de Wang y White a la variación de los parámetros  $D_*$  y  $R/D$ .

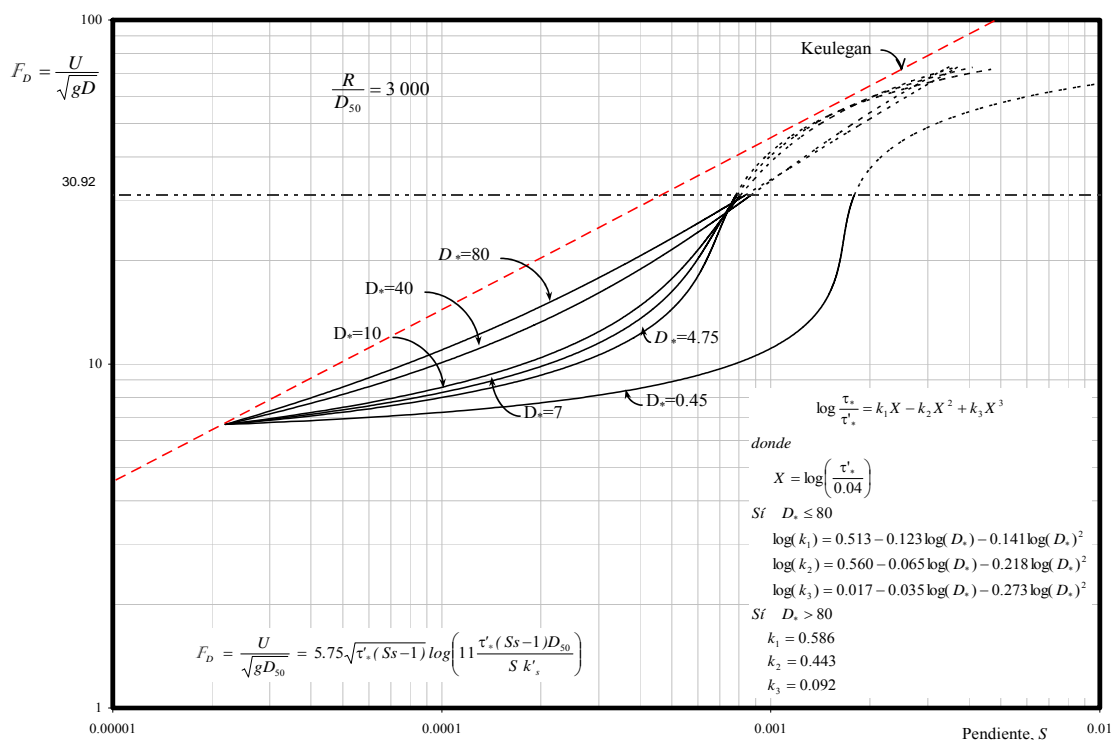


Fig 3.5 Método de Wang y White en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación de  $D_*$ , para  $R/D$  constante. Régimen Inferior, según García Flores (ref 14)

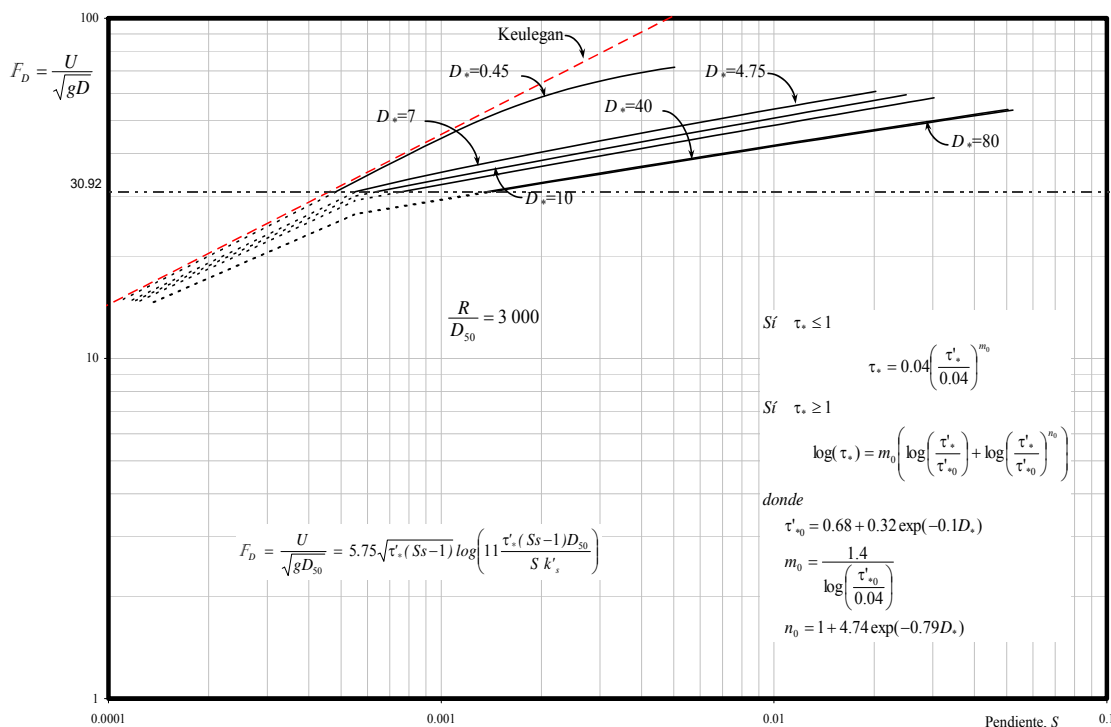


Fig 3.6 Método de Wang y White en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación de  $D_*$ , para  $R/D$  constante. Régimen Superior, según García Flores (ref 14)

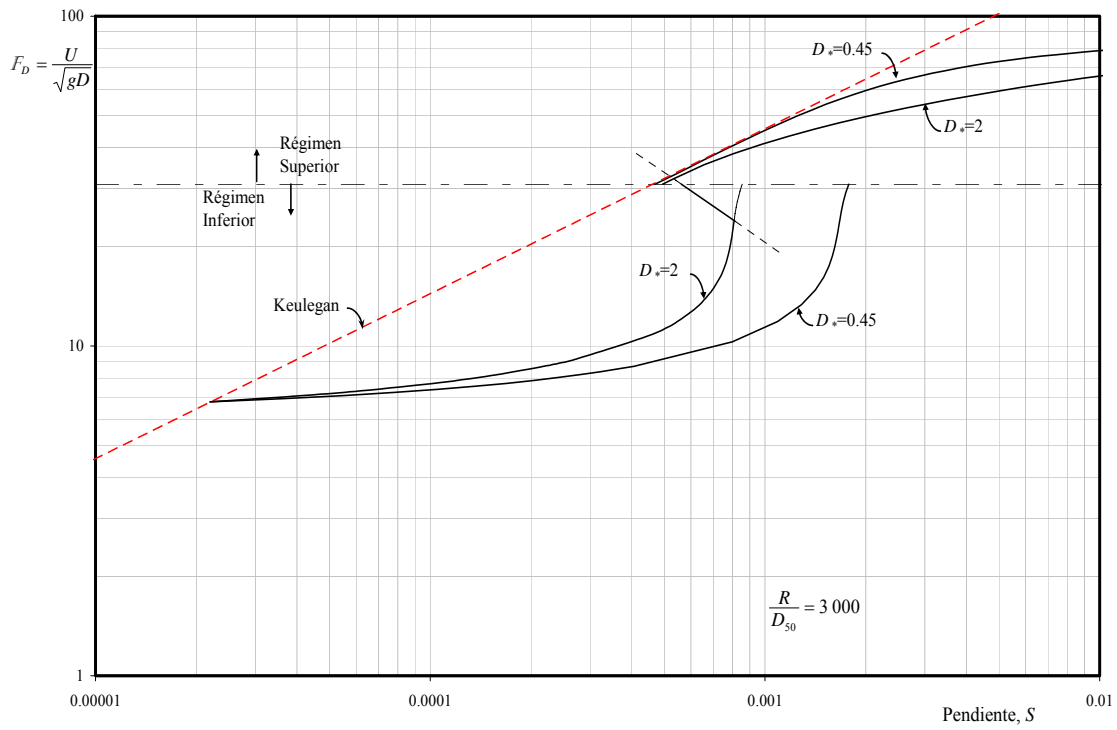


Fig 3.7 Método de Wang y White en el plano  $(S, F_d)$ , según García Flores (ref 14).

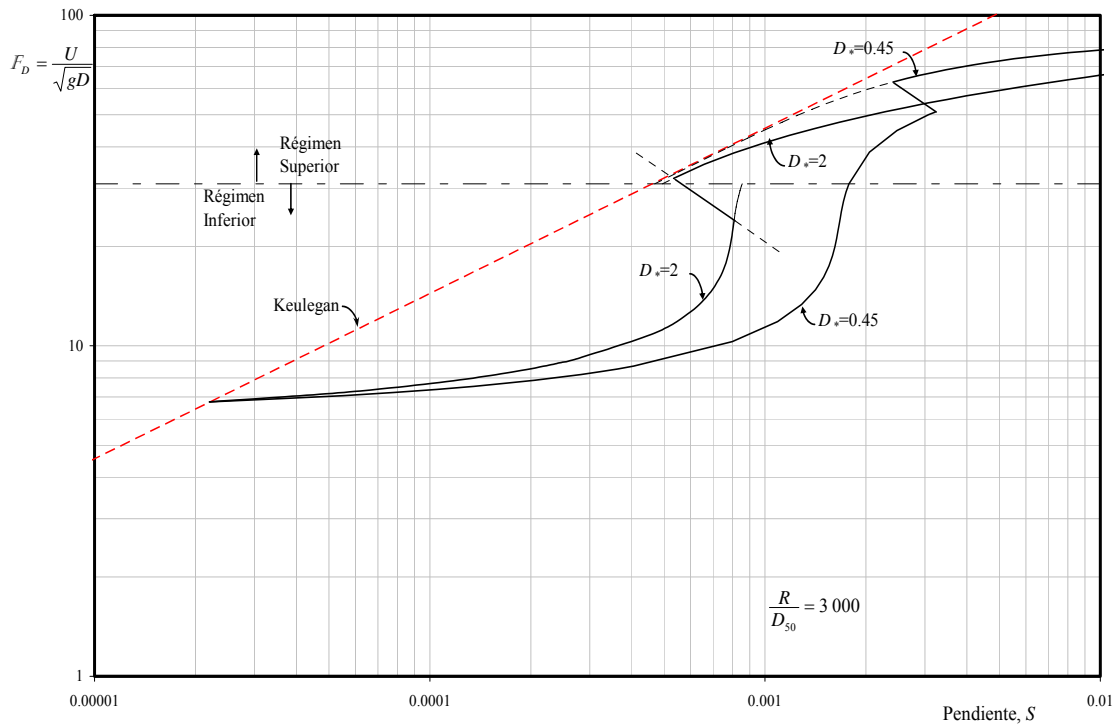


Fig 3.8 Método de Wang y White en el plano  $(S, F_d)$ , según García Flores (ref 14).



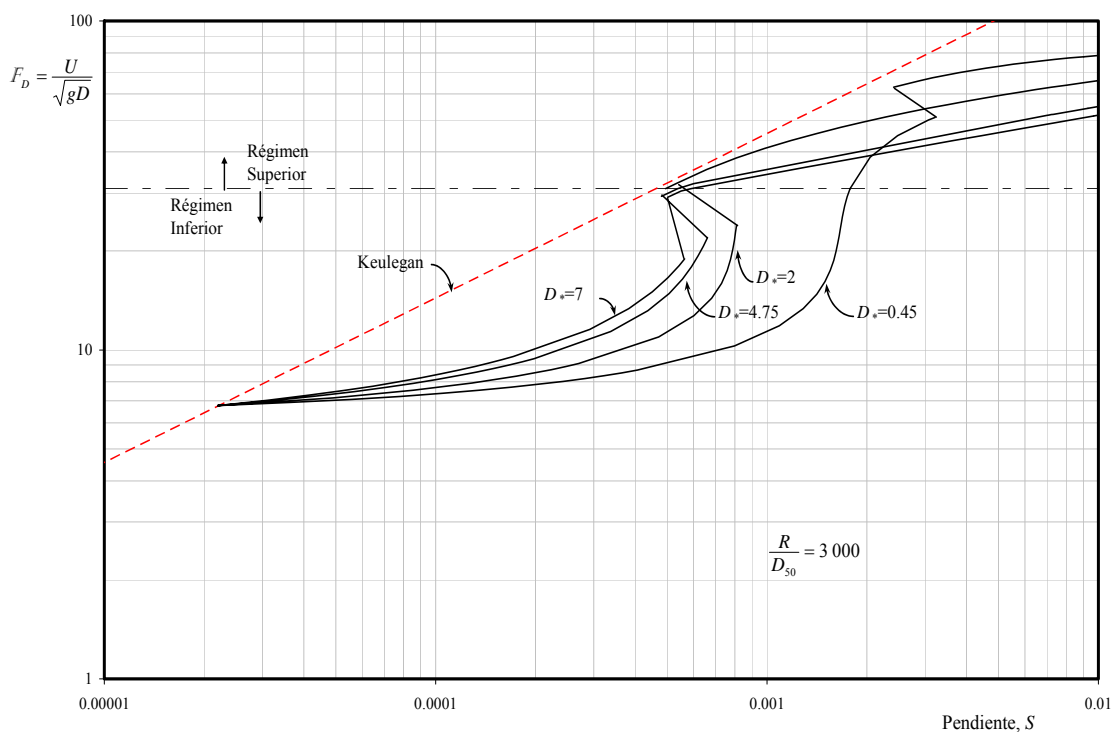


Fig 3.9 Método de Wang y White en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación de  $D^*$ , para  $R/D$  constante. Regímenes inferior, de transición y superior, según García Flores (ref 14).

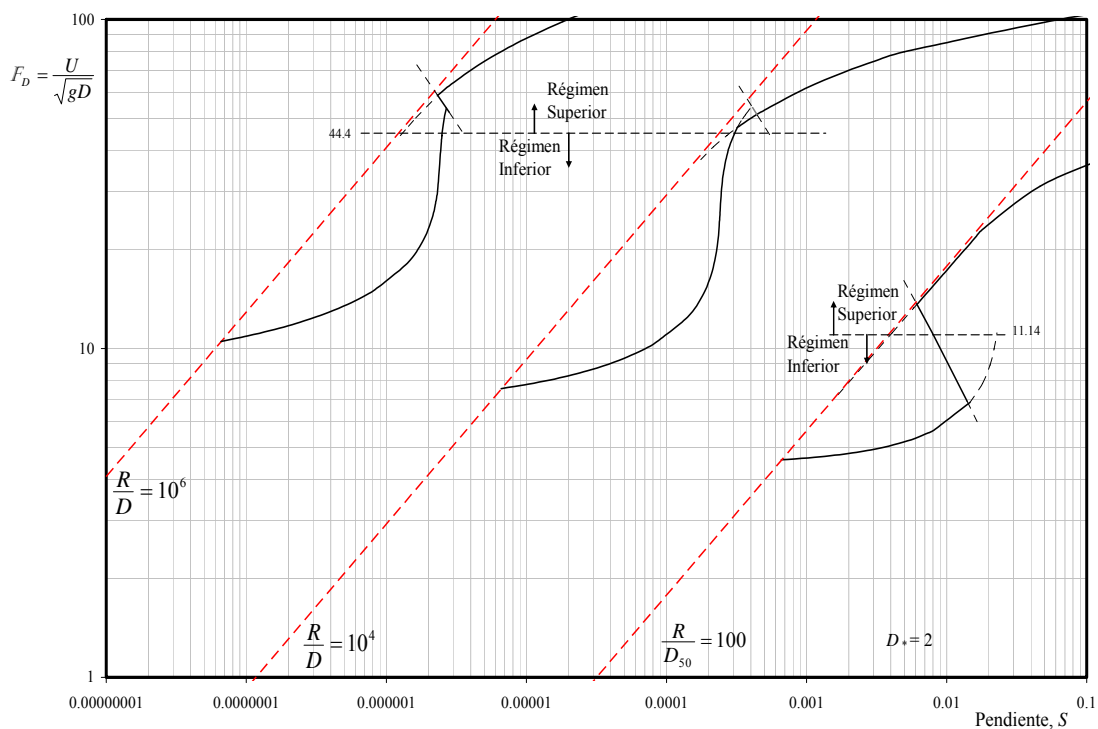


Fig 3.10 Método de Wang y White en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación de  $R/D$ , para  $D^*$  constante, según García Flores (ref 14).

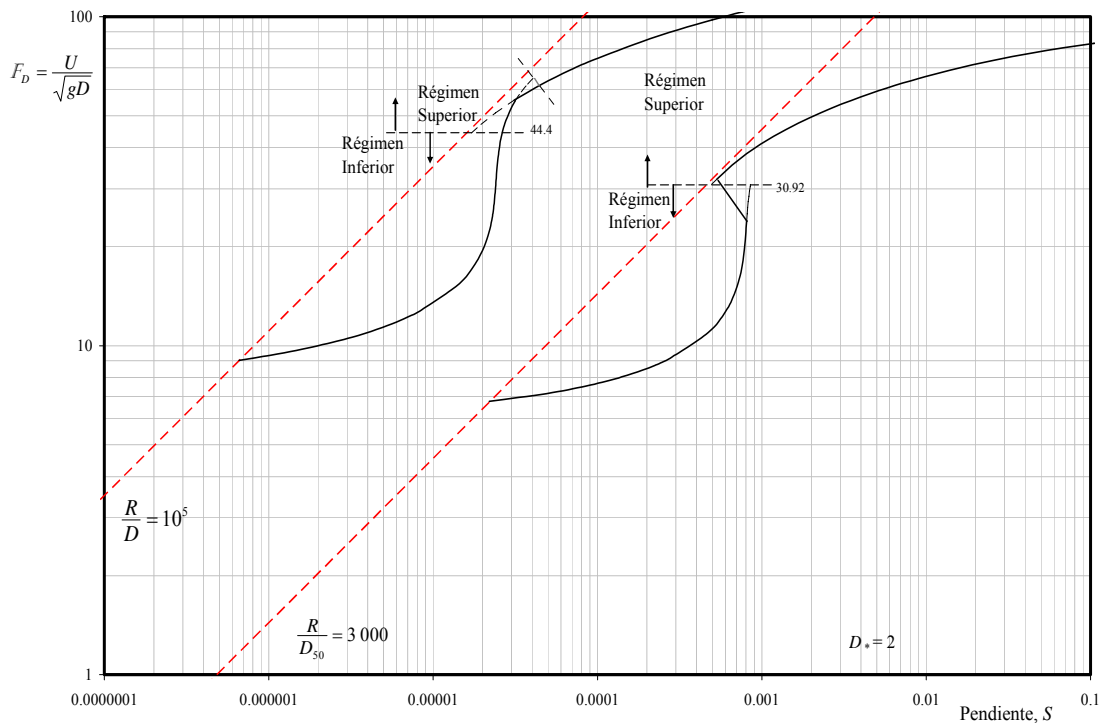


Fig 3.11 Método de Wang y White en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación de  $R/D$ , para  $D_*$  constante., según García Flores (ref 14).

### III.5 COMENTARIOS

A continuación se presentan los comentarios y críticas de García Flores al método de Wang y White, con base en la transformación que realizó, figs (3.5) a (3.18):

Por la naturaleza de las ecuaciones propuestas por Wang y White, el empleo de su método es muy complejo. En efecto, con base en el procedimiento de cálculo sugerido por García Flores (ref 14), se observa que es muy complicado y laborioso, incluso si se programa en hoja electrónica de cálculo, ya que la determinación de ciertos parámetros, para poder definir otros, no es de forma explícita, y las ecuaciones no son lineales ni sencillas, lo que las torna poco prácticas. Sin embargo, se podría argumentar que esto no importa si el método es bueno o más preciso, y para demostrarlo se suele comparar los métodos como se presenta en las figuras (3.12) a (3.17), de las que se puede inferir que el método de Engelund es como un caso particular del de Wang y White, o que el de ellos es más general o complementa al de Engelund. Pero, esta forma de juzgar o evaluar métodos no es la adecuada, (refs 5, 7 y 14), sino comparándolos en el sistema coordenado  $(S, F_D)$ , como se presenta en las figs (3.5) a (3.11).

De acuerdo con lo que indican las figs (3.5) y (3.6), el método es muy sensible a la variación del parámetro  $D^*$ . En el caso del régimen inferior, la resistencia al flujo disminuye conforme aumenta  $D^*$  o tamaño de las partículas sedimentarias. Por el contrario, en situaciones de régimen superior, la resistencia al flujo crece al aumentar el valor del parámetro  $D^*$ . En régimen de transición, la variación del parámetro  $D^*$  no sólo ocasiona desplazamiento de la recta que define el régimen, sino también un cambio en la pendiente de dicha recta (fig 3.9).

Para dibujar el método transformado al plano  $(S, F_D)$ , la frontera entre regímenes está definida por las ecs (3.25) ó la ec (3.26), según las condiciones que se verifiquen (línea horizontal punteada en la fig 3.7). Así, el método presenta discontinuidades notables, ya que se presentan transiciones bruscas de un régimen a otro, y hay casos en los que no es posible definir el régimen de transición, fig 3.7, que era el objetivo de los autores del artículo.

Por otro lado, si se considera como frontera entre regímenes los puntos de intersección entre ellos, o sea cuando  $\tau^*$  del régimen inferior es igual al de transición, y cuando el  $\tau^*$  de éste es igual al de régimen superior, se quitan las discontinuidades, pero los cambios siguen siendo muy bruscos, fig 3.8. Esta extrapolación para encontrar soluciones, sería absurda respecto a sus fronteras, ya que la transición queda por arriba del inicio del régimen superior. Es más, existen casos en los que hay una aparente continuidad entre los regímenes inferior y superior, sin embargo, el régimen de transición también ocurre por arriba del régimen superior, lo que no es lógico, figs 3.10 y 3.11. Por ejemplo, en la fig 3.16 se puede ver que si  $D^* = 4.75$ , existen valores de  $R/D$  para los cuales el régimen de transición existe, pero es absurdo, ya que queda por encima del régimen superior.

Independientemente de la forma como se definan los límites entre los regímenes del lecho, las fig 3.7 a 3.11 muestran claramente que el método es múltiplemente valuado, es decir para una  $S$  dada, se pronostican distintas velocidades en diferentes regímenes.

En la fig 3.18 se presenta una comparación de los límites entre el régimen superior y el de transición, calculados con las ecs (3.25), que son independientes de  $D^*$ , o con la ec (3.26). Se observa que, efectivamente, la ec (3.26) parece funcionar mejor para partículas sedimentarias finas. Sin embargo, el intervalo de datos para el que rige la ec (3.26) es más pequeño, haciendo que su aplicación sea más reducida. Además, se nota que, para el límite definido por la ec (3.26), cuanto más grande es el tamaño del sedimento, tanto más se desplaza hacia arriba la frontera definida por  $F_{RD}$ .

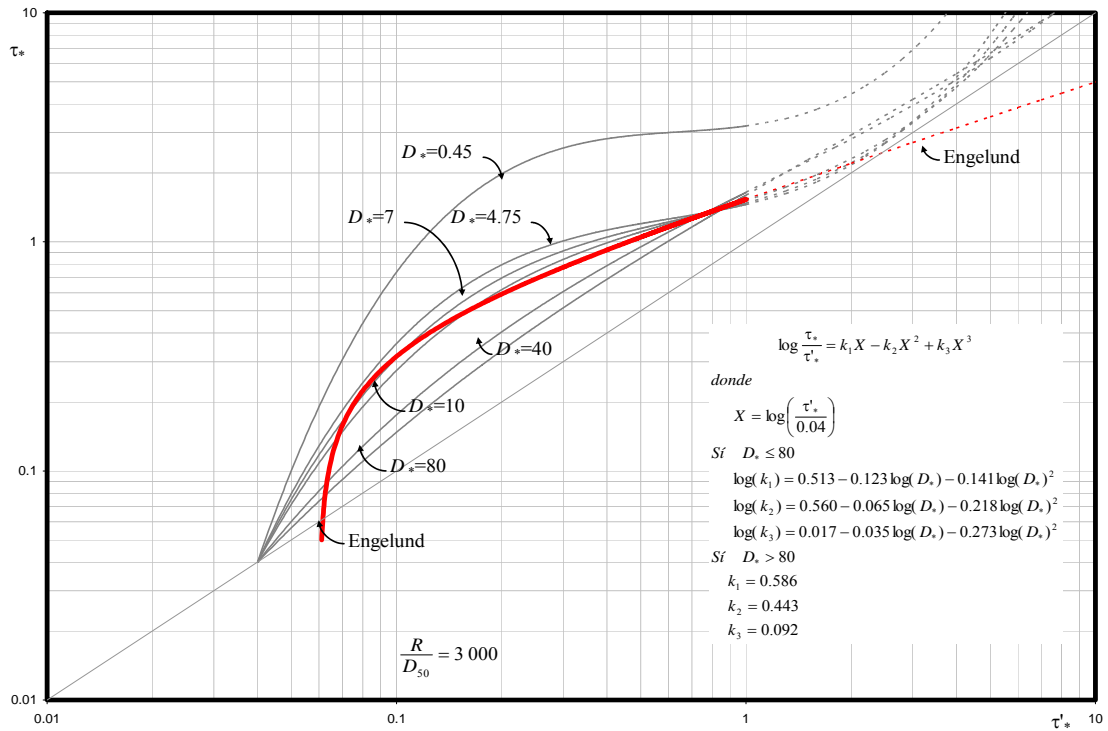


Fig 3.12 Comparación de la función de Wang y White con la de Engelund, para el Régimen Inferior, según García Flores (ref 12).

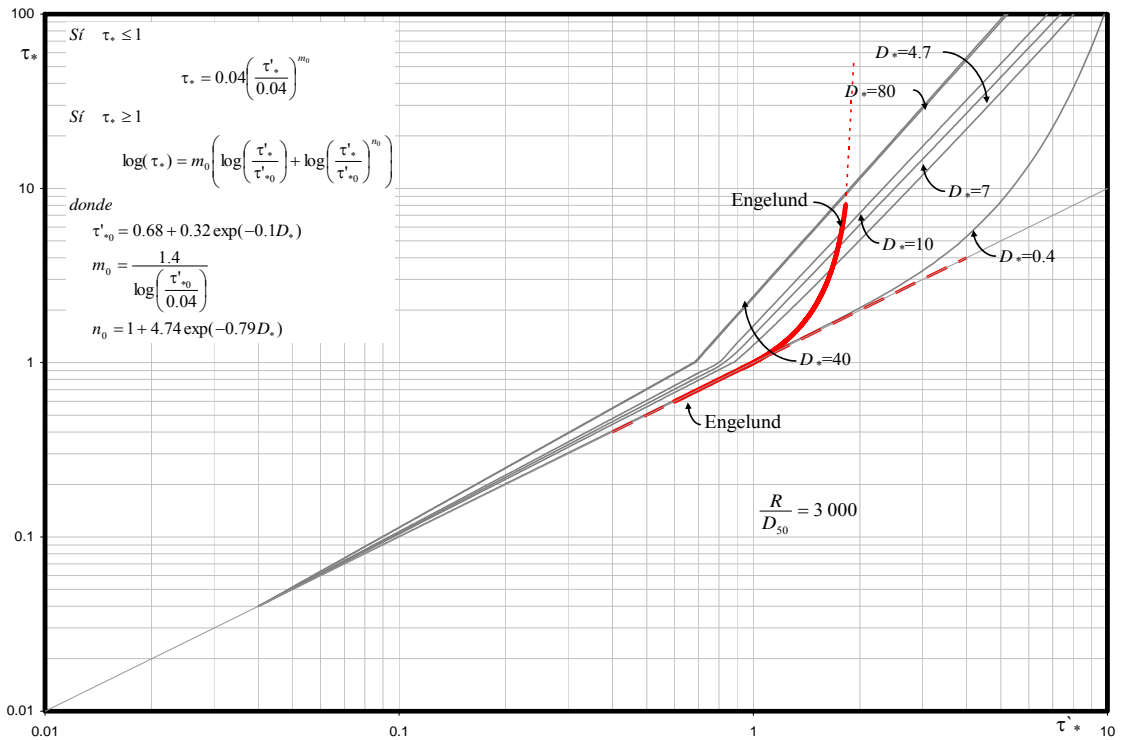


Fig 3.13 Comparación de la función de Wang y White con la de Engelund, para el Régimen Superior, según García Flores (ref 12).

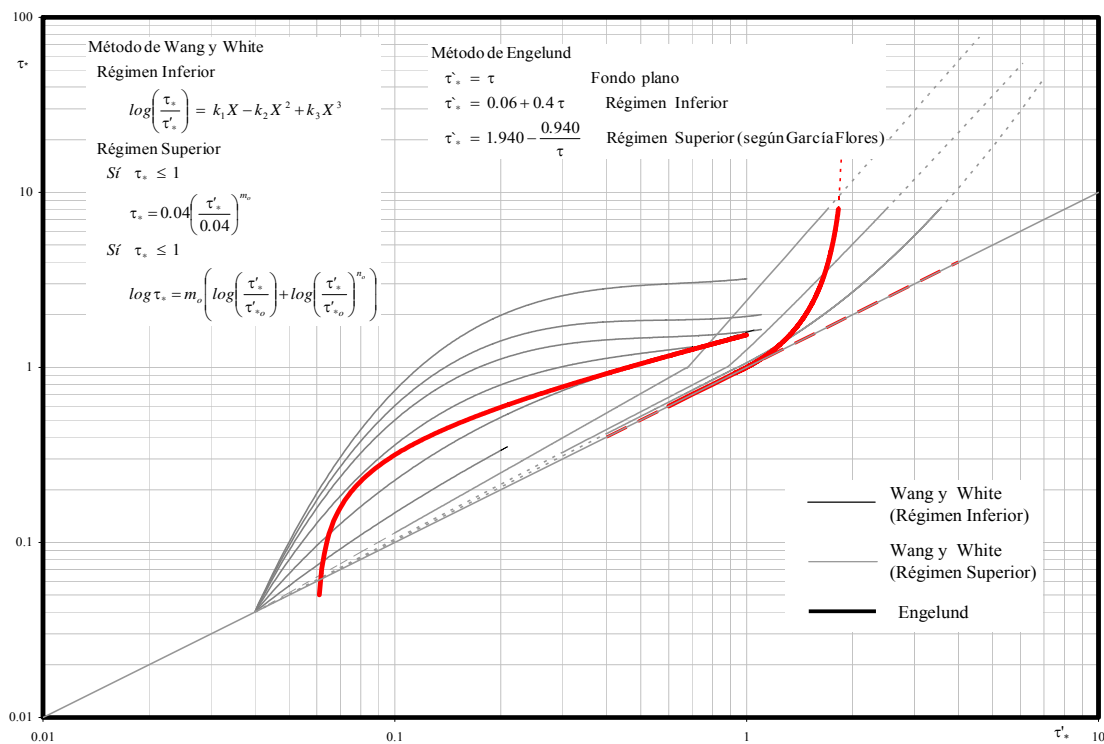


Fig 3.14 Comparación de la función de Wang y White con la de Engelund, para el Régimen Inferior y el Superior, según García Flores (ref 12)

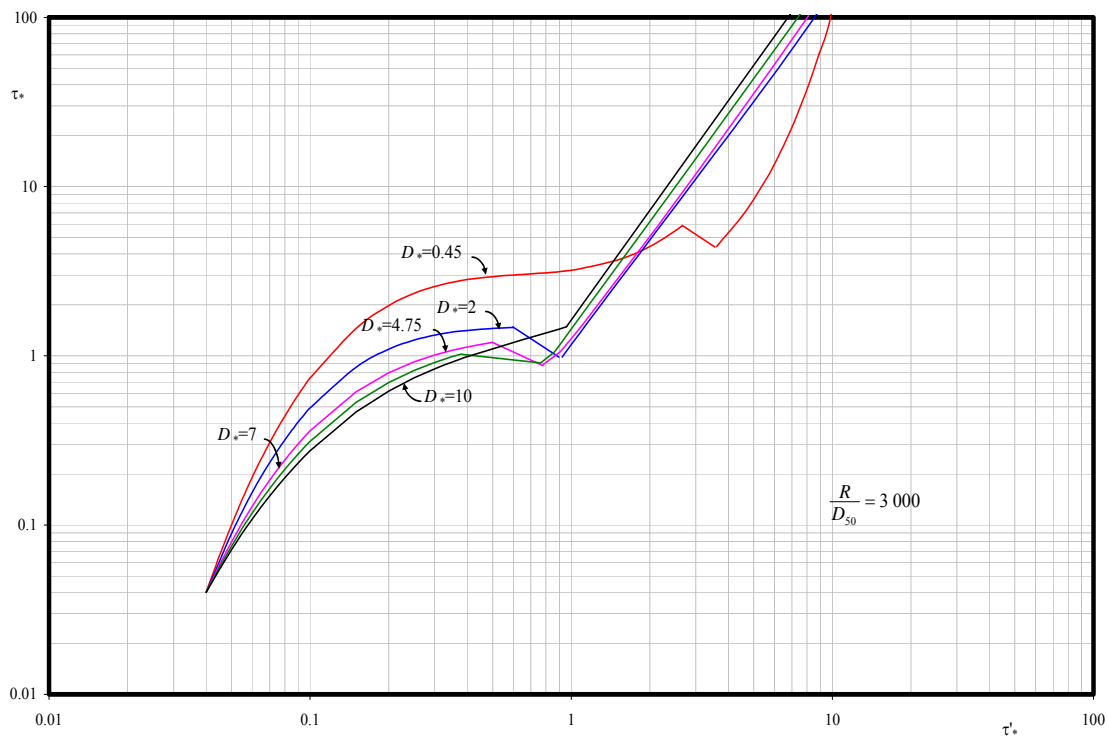


Fig 3.15 Variación de la función  $\tau_*$  de Wang y White para Régimen de Transición, para  $R/D$  constante y distintos valores de  $D_*$ , según García Flores (ref 12)

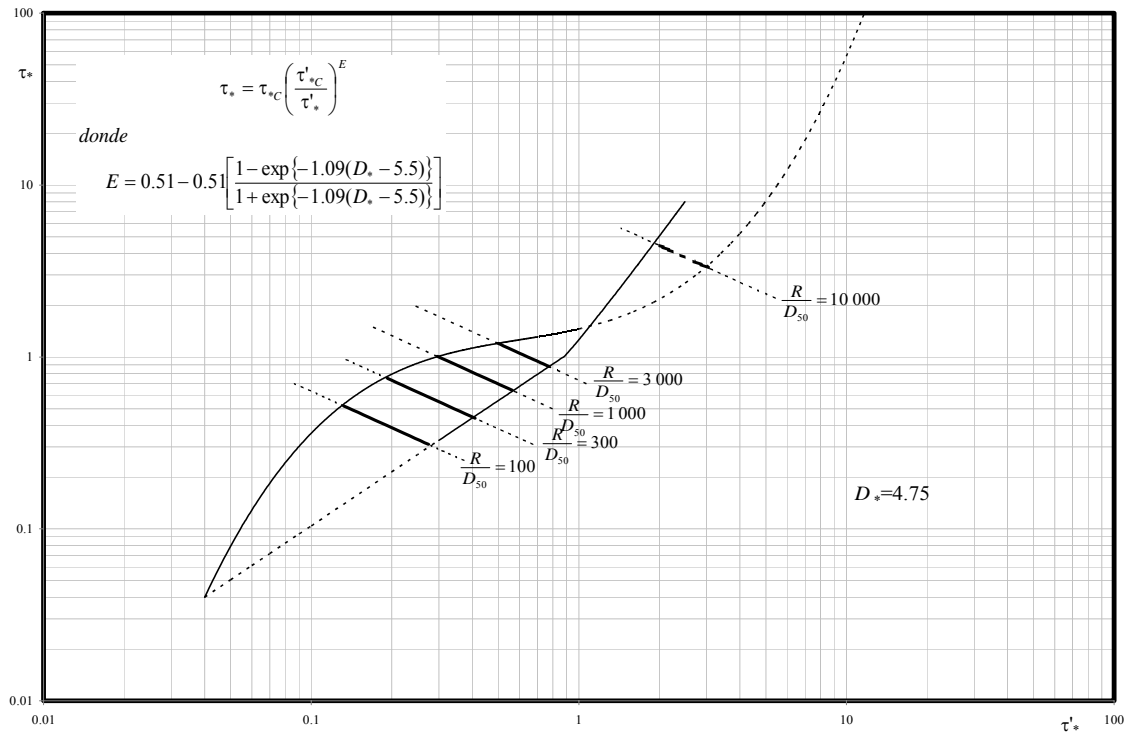


Fig 3.16 Variación de la función  $\tau_*$  de Wang y White para Régimen de Transición, para  $D_*$  constante y distintos valores de  $R/D$ , según García Flores (ref 12)

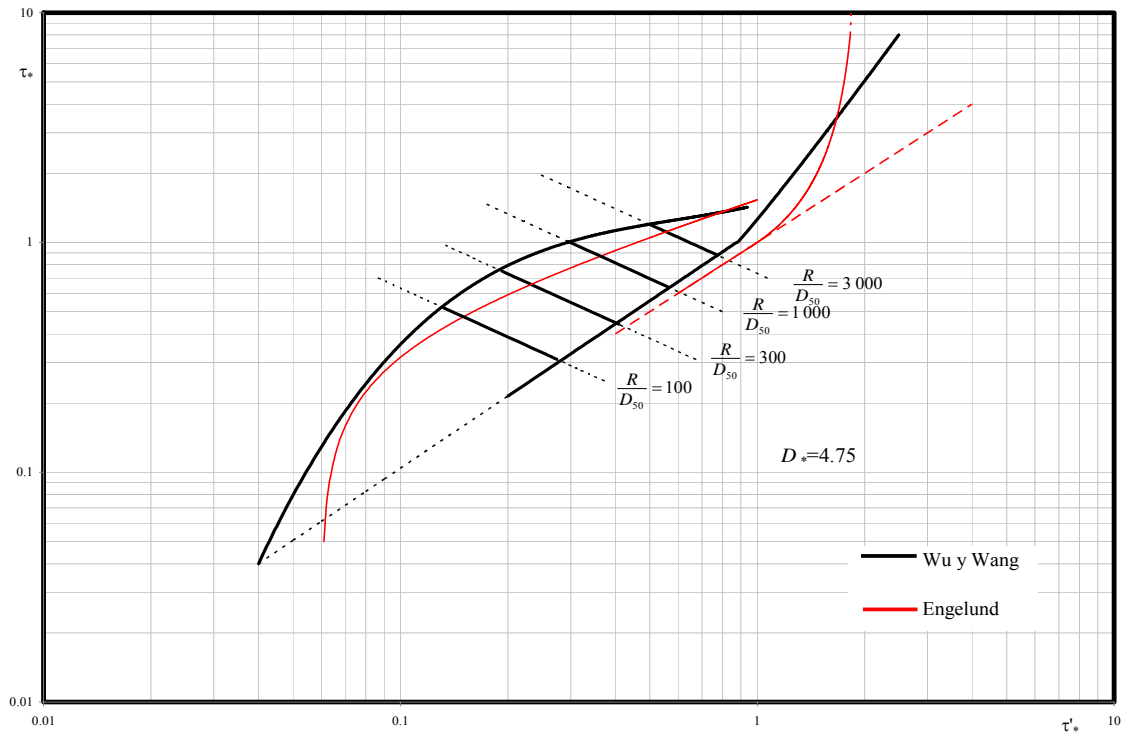


Fig 3.17 Comparación de la función de Wang y White con la de Engelund, para el Régimen Superior, según García Flores (ref 12).

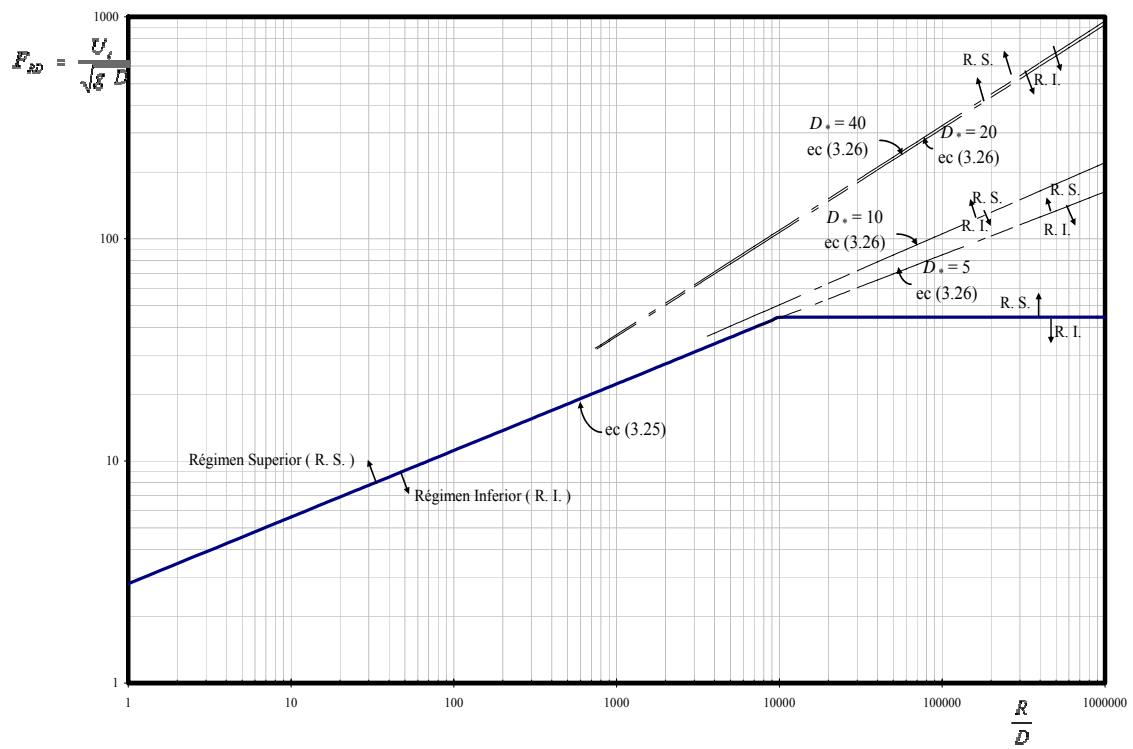


Fig 3.18 Comportamiento de las diferentes formulaciones de Wang y White para la determinación del tipo de régimen, según García Flores (ref 12).







#### IV. MÉTODO DE WU Y WANG (1999).

##### IV.1 PRESENTACIÓN

Con base en datos de campo y laboratorio de otros autores, Weiming Wu y Sam S. Y. Wang (ref 30) desarrollaron un procedimiento para calcular el coeficiente de fricción de Manning,  $n$ , en función de un coeficiente empírico de rugosidad,  $A$ . Su método es válido para los regímenes inferior y de transición.

Al igual que otros autores, Wu y Wang relacionaron el coeficiente de rugosidad de Manning, con un diámetro característico del sedimento,  $D_{50}$ , y un coeficiente empírico,  $A$ , es decir

$$n = \frac{(D_{50})^{1/6}}{A} \quad (4.1)$$

donde el coeficiente  $A$  toma en cuenta tanto la forma y distribución de las partículas que constituyen el cauce, como las configuraciones del lecho y las condiciones del flujo. Wu y Wang consideraron que

$$\frac{A}{\sqrt{g}} = \phi \left( \frac{\tau'_b}{\tau_{c50}}, F, \frac{D_{50}}{R_b} \right) \quad (4.2)$$

siendo

$D_{50}$  diámetro de la curva granulométrica característica tal que el 50% de las partículas son menores que él, en m.

$R_b$  radio hidráulico asociado con la resistencia del lecho, según Einstein, en m.

$F$  número de Froude de la corriente, definido como

---



---

$$F = \frac{U}{\sqrt{g R_b}} \quad (4.3)$$

$\tau_{c50}$  esfuerzo cortante crítico adimensional de Shields. Wu y Wang propusieron calcularlo mediante el ajuste de la curva de Shields realizado por Chien y Wan (1983):

$$\begin{aligned} \text{Si } D_* < 1.5 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.126 D_*^{-0.44} \\ \text{Si } 1.5 \leq D_* < 10 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.131 D_*^{-0.55} \\ \text{Si } 10 \leq D_* < 20 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.0685 D_*^{-0.27} \\ \text{Si } 20 \leq D_* < 40 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.0173 D_*^{0.19} \\ \text{Si } 40 \leq D_* < 150 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.0115 D_*^{0.30} \\ \text{Si } 150 \leq D_* & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.052 \end{aligned} \quad (4.4)$$

en la que

$\gamma$  y  $\gamma_s$  peso específico del agua y del sedimento, respectivamente, en  $\text{N/m}^3$ .

$D_*$  diámetro adimensional, definido como:

$$D_* = D_{50} \left[ \frac{(S_s - 1)g}{v^2} \right]^{1/3} \quad (4.5)$$

y  $\tau'_b$  es el esfuerzo cortante tocante a la resistencia de grano, en  $\text{N/m}^2$ , definido como

$$\tau'_b = \gamma R'_b S \quad (4.6)$$

Asimismo, el esfuerzo cortante producido por el flujo,  $\tau_b$ , lo expresaron

$$\tau_b = \gamma R_b S \quad (4.7)$$

Para definir la relación entre  $\tau'_b$  y  $\tau_b$ , Wu y Wang separaron la resistencia al flujo con base en la ecuación de Manning, la cual escribieron de la siguiente manera

$$U = \frac{1}{n} R_b^{2/3} S^{1/2} \quad (4.8)$$

y

$$U = \frac{1}{n'} R_b^{1/2/3} S^{1/2} \quad (4.9)$$

siendo  $n'$  el coeficiente de rugosidad debida al tamaño de los granos. Este coeficiente lo definieron para fondo plano sin transporte como

$$n' = \frac{(D_{50})^{1/6}}{20} \quad (4.10)$$

Al dividir miembro a miembro la ec (4.8) entre la ec (4.9), y tomando en cuenta las ecs (4.6) y (4.7), demostraron que

$$\tau'_b = \left(\frac{n'}{n}\right)^{3/2} \tau_b \quad (4.11)$$

Adicionalmente, Wu y Wang definieron un parámetro de transporte de sedimentos,  $T$ :

$$T = \frac{\tau'_b}{\tau_{c50}} \quad (4.12)$$

Al dibujar los valores de  $T$  contra  $A/(g^{1/2} F^{1/3})$ , para el intervalo  $1 \leq T \leq 55$ , encontraron, por medio de una regresión, que

$$\log\left(\frac{A}{g^{1/2} F^{1/3}}\right) = 0.911 - 0.273 \log(T) - 0.051 \log^2(T) + 0.135 \log^3(T) \quad (4.13)$$

donde los regímenes del lecho quedan definidos en los intervalos siguientes:

Si $T < 1$	régimen de fondo plano sin transporte.
Si $1 \leq T < 9$	régimen de rizos y dunas.
Si $9 \leq T \leq 55$	régimen de transición.
Si $55 < T$	régimen superior.

#### INTERVALO DE LOS DATOS

Velocidad media de la corriente:	$0.14 \text{ m/s} \leq U \leq 2.88 \text{ m/s}$
Tirante:	$0.01 \text{ m} \leq d = R \leq 17.28 \text{ m}$
Pendiente:	$0.00002 \leq S \leq 0.031$
Número de Froude:	$0.07 \leq F \leq 1.42$
Diámetro medio del sedimento:	$0.04 \text{ mm} \leq D_{50} \leq 67.5 \text{ mm}$
Concentración de sólidos:	$0 \text{ kg/m}^3 \leq C \leq 52.3 \text{ kg/m}^3$

IV.2 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO

Wu y Wang no propusieron un procedimiento de cálculo, pero con base en los parámetros propuestos por ellos, García Flores (ref 12) sugiere el siguiente procedimiento

i) Calcular  $\tau_b = \gamma R_b S$

ii) Determinar  $n' = \frac{D_{50}^{1/6}}{20}$

iii) Evaluar  $D_* = D_{50} \left( \frac{g(S_s - 1)}{v^2} \right)^{1/3}$

iv) Obtener  $\tau_{c50}$  como ellos indican, o bien, se puede utilizar la ecuación propuesta por García Flores (ref 9), es decir

Si  $3.460007 \leq D_* \leq 182.011861$

$$\tau_{c50} = \left\{ \frac{0.2061}{D_*^{0.9690}} + 0.0947 \exp \left\{ - \left[ \frac{44.6685}{D_*} \right]^{0.5170} \right\} \right\} (\gamma_s - \gamma) D_{50} \quad (4.14a)$$

Si  $D_* \geq 182.011861$

$$\tau_{c50} = 0.06 (\gamma_s - \gamma) D_{50} \quad (4.14b)$$

v) Proponer un valor de  $n$  que sea mayor que  $n'$

vi) Obtener  $\tau'_b = \tau_b \left( \frac{n'}{n} \right)^{3/2}$

vii) Evaluar  $T = \frac{\tau'_b}{\tau_{c50}}$

viii) Determinar el tipo de régimen

Si $T < 1$	fondo plano sin transporte.
Si $1 \leq T < 9$	rizos y dunas.
Si $9 \leq T \leq 55$	transición.
Si $55 < T$	superior.

ix) Calcular  $U = \frac{1}{n} R_b^{2/3} S^{1/2}$

x) Valuar  $F = \frac{U}{\sqrt{g R_b}}$

xi) Obtener  $A$  de la ecuación (4.12)

$$A = \sqrt{g} \sqrt[3]{F} 10^{(0.911 - 0.273 \log(T) - 0.051 \log^2(T) + 0.135 \log^3(T))} \quad (4.15)$$

$$n = \frac{D_{50}^{1/6}}{A}$$

xii) Determinar

Si este valor de  $n$  difiere del propuesto, se regresa al paso v) y se propone otro valor de  $n$ . Este procedimiento iterativo se repite hasta que se verifique que sean iguales el valor propuesto y el calculado.

### IV.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

#### IV.3.1

#### Cauce natural

Se desea estimar la velocidad media de una corriente fluvial, cuyo material del cauce tiene las siguientes características: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.75$  mm y  $\sigma_g = 3.2$ ; la temperatura del agua es de 20 °C, la pendiente del lecho es  $S = 1.51 \times 10^{-4}$ , la sección transversal es muy ancha ( $R = d$ ), y el tirante es  $d = 6.28$  m.

*-Solución*

i) Se calcula

$$\tau_b = 998.401 (6.28) (0.000151) = 0.9468 \frac{N}{m^2}$$

ii) Se determina

$$n' = \frac{(0.75 \times 10^{-3})^{1/6}}{20} = 0.01500$$

iii) Se evalúa

$$D_* = 0.75 \times 10^{-3} \left( \frac{9.80665 (1.65)}{(1.00667 \times 10^{-6})^2} \right)^{1/3} = 18.8859$$

El valor de  $v$  se tomó de la tabla 7.2 del Manual de Ingeniería de Ríos “*Origen y Propiedades de los Sedimentos*” (ref 10). Para una temperatura de 20 °C,  $v = 1.00667 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

iv) Se obtiene  $\tau_{c50}$  como ellos indican, o bien, utilizando la ecuación propuesta por García Flores (ref 9), es decir

Dado que  $3.460007 < D_* = 18.8859 < 182.01161$

$$\tau_c = \left\{ \frac{0.2061}{18.8859^{0.9690}} + 0.0947 \exp \left\{ - \left[ \frac{44.6685}{18.8859} \right]^{0.5170} \right\} \right\} (2650 - 998.20) 0.75 \times 10^{-3}$$

$$\tau_c = 0.03838 \frac{N}{m^2}$$

El valor de  $\rho$  se tomó de la tabla 7.2 del Cap 7 del Manual de Ingeniería de Ríos (ref 10). Para una temperatura de 20 °C,  $\rho = 998.20 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$

v) Se propone un valor de  $n$

$$n = 0.020$$

vi) Se calcula

$$\tau'_b = 0.9467 \left( \frac{0.015}{0.02} \right)^{3/2} = 0.6149 \frac{N}{m^2}$$

vii) Se evalúa

$$T = \frac{0.6149}{0.03838} = 16.02136$$

viii) Se determina el tipo de régimen:

Como  $9 \leq T = 16.02136 \leq 55$  el lecho está en régimen de transición

ix) Se calcula

$$U = \frac{1}{0.02} (6.28)^{2/3} (0.000151)^{1/2} = 2.09137 \frac{m}{s}$$

x) Se valúa

$$F = \frac{2.09137}{\sqrt{9.80665 (6.28)}} = 0.26650$$

xi) Se obtiene  $A$  de la ecuación (4.4)

$$A = \sqrt{9.80665} \sqrt[3]{0.26650} 10^{(0.911 - 0.273 \log(16.02136) - 0.051 \log^2(16.02136) + 0.135 \log^3(16.02136))}$$

$$A = 11.18037 \frac{m}{s}$$

xii) Se determina

$$n = \frac{(0.75 \times 10^{-3})^{1/6}}{11.18037} = 0.02696$$

Si este valor de  $n$  difiere del propuesto, se regresa al paso v y se propone este valor calculado. Este procedimiento iterativo se repite hasta que se verifique que sean iguales el valor propuesto y el calculado.

Tabla 4.1 EJEMPLO NUMÉRICO, CANAL DE LABORATORIO,  $d = 6.28$  y  $D_{50} = 0.75$  mm

$n$ propuesto	$\tau'_b$	$T$	Régimen	$U$	$F$	$A$	$n$ calculado
0.02000	0.61490	16.02136	Transición	2.09137	0.26650	11.18037	0.02696
0.02696	0.39289	10.23678	Transición	1.55146	0.19770	9.62577	0.03131
0.03131	0.31386	8.17772	Rizos y Dunas	1.33573	0.17021	9.14980	0.03294
0.03294	0.29087	7.57872	Rizos y Dunas	1.26969	0.16179	9.02325	0.03341
0.03341	0.28486	7.42205	Rizos y Dunas	1.25213	0.15955	8.99125	0.03352
0.03352	0.28334	7.38260	Rizos y Dunas	1.24768	0.15899	8.98327	0.03355
0.03355	0.28297	7.37277	Rizos y Dunas	1.24658	0.15885	8.98128	0.03356
0.03356	0.28292	7.37155	Rizos y Dunas	1.24644	0.15883	8.98104	0.03356
0.03356	0.28289	7.37078	Rizos y Dunas	1.24635	0.15882	8.98088	0.03356

Por lo tanto, la velocidad media de la corriente es

$$U = 1.24635 \text{ m/s}$$

y el régimen del lecho es Rizos y Dunas

#### IV.3.2 Canal de laboratorio

Datos:

Material del fondo o lecho: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.25$  mm y  $\sigma_g = 1.48$ . La pendiente del canal es  $S = 2.5 \times 10^{-4}$ , la temperatura del agua es de 18 °C, la sección transversal es rectangular y el radio hidráulico asociado a la rugosidad del lecho es  $R_b = 0.48$  m.

-Solución

i)  $\tau_b = 0.1006 \text{ N/m}^2$

ii)  $n' = 0.0125$

iii)  $D_* = 6.0929$

iv)  $\tau_{c50} = 0.01715 \text{ N/m}^2$

Tabla 4.2 EJEMPLO NUMÉRICO, CANAL DE LABORATORIO,  $d = 0.403$  y  $D_{50} = 0.25$  mm

$n$ propuesto	$\tau'_b$	$T$	Régimen	$U$	$F$	$A$	$n$ calculado
0.02000	0.04971	2.89837	Rizos y Dunas	0.43133	0.21697	11.52987	0.02177
0.02177	0.04377	2.55241	Rizos y Dunas	0.39629	0.19934	11.55704	0.02172
0.02172	0.04393	2.56144	Rizos y Dunas	0.39722	0.19981	11.55602	0.02172
0.02172	0.04392	2.56110	Rizos y Dunas	0.39718	0.19979	11.55606	0.02172
0.02172	0.04392	2.56111	Rizos y Dunas	0.39719	0.19979	11.55606	0.02172

Por lo tanto, la velocidad media de la corriente es

$$U = 0.39719 \text{ m/s}$$

y el régimen del lecho es Rizos y Dunas



IV.4 TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS  $S$ ,  $F_D$  Y  $R/D_{50}$

Para transformar y reducir el método de Wu y Wang a una ecuación adimensional, se procede de la siguiente manera (ref 14):

Se sustituye la ec (4.1) en la ec (4.8)

$$U = \frac{A}{D_{50}^{1/6}} R_b^{2/3} S^{1/2} \quad (4.16)$$

después, la ec (4.15) se sustituye en la ec. (4.16)

$$U = \frac{R_b^{2/3}}{D_{50}^{1/6}} S^{1/2} \sqrt{g} F^{1/3} 10^{(0.911-0.273 \log(T)-0.051 \log^2(T)+0.135 \log^3(T))} \quad (4.17)$$

se dividen ambos miembros de la ec. (4.17) entre  $\sqrt{g D_{50}}$ , y se reordenan coeficientes

$$\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = \left( \frac{R_b}{D_{50}} \right)^{2/3} S^{1/2} F^{1/3} 10^{(0.911-0.273 \log(T)-0.051 \log^2(T)+0.135 \log^3(T))} \quad (4.18)$$

se sustituye la ec (4.3) en la ec (4.18)

$$\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = \left( \frac{R_b}{D_{50}} \right)^{2/3} S^{1/2} \left( \frac{U}{\sqrt{g R_b}} \right)^{1/3} 10^{(0.911-0.273 \log(T)-0.051 \log^2(T)+0.135 \log^3(T))} \quad (4.19)$$

se multiplican ambos miembros de la ec (4.19) por  $(\sqrt{g} / U)^{1/3}$ , y se reducen términos semejantes

$$\left( \frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} \right)^{2/3} \left( \frac{1}{D_{50}} \right)^{1/6} = \left( \frac{R_b}{D_{50}} \right)^{2/3} \left( \frac{1}{R_b} \right)^{1/6} S^{1/2} 10^{(0.911-0.273 \log(T)-0.051 \log^2(T)+0.135 \log^3(T))} \quad (4.20)$$

por último, se despeja  $\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}}$  de la ec (4.20)

$$\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = \left( \frac{R_b}{D_{50}} \right)^{3/4} S^{3/4} \left[ 10^{(0.911-0.273 \log(T)-0.051 \log^2(T)+0.135 \log^3(T))} \right]^{3/2} \quad (4.21)$$

Si ambos eje coordenados siguen una ley logarítmica, al dibujar la función en tal plano no se obtendrían líneas rectas como podría inferirse de observar sólo la ec (4.21), ya que, si se toman logaritmos en ambos miembros de dicha ecuación, el exponente de la pendiente,  $S$ , sería 1, es decir  $S$  sería una función lineal, pero esta linealidad es aparente, ya que la ec (4.21) depende del parámetro  $T$ ,

el que a su vez es función de  $S$ . En efecto, el parámetro  $T$  está definido por la ecuación (4.3), la cual al tener en cuenta la ec (4.10), se escribe como

$$T = \frac{\tau_b \left( \frac{n'}{n} \right)^{3/2}}{\tau_{c50}} \quad (4.22)$$

se sustituye la ec (4.6) en la ec (4.22)

$$T = \frac{\gamma R_b S \left( \frac{n'}{n} \right)^{3/2}}{\tau_{c50}} \quad (4.23)$$

después, en la ec (4.23) se sustituyen las ecs (4.5) y (4.1)

$$T = \frac{\gamma R_b S \left( \frac{A}{20} \right)^{3/2}}{\tau_{c50}} \quad (4.24)$$

se sustituye la ec (4.15) en la ec (4.24)

$$T = \frac{\gamma R_b S \left( \sqrt{g} \sqrt[3]{F} 10^{(0.911-0.273 \log(T)-0.051 \log^2(T)+0.135 \log^3(T))} \right)^{3/2}}{20^{3/2} \tau_{c50}} \quad (4.25)$$

por último, se despeja  $S$  de la ec (4.25):

$$S = \frac{20^{3/2} \tau_{c50} T}{\gamma R_b \left( \sqrt{g} \sqrt[3]{F} 10^{(0.911-0.273 \log(T)-0.051 \log^2(T)+0.135 \log^3(T))} \right)^{3/2}} \quad (4.26)$$

Así, al resolver simultáneamente las ecs (4.21) y (4.26), se obtiene la transformación, fig (4.1) a (4.5).

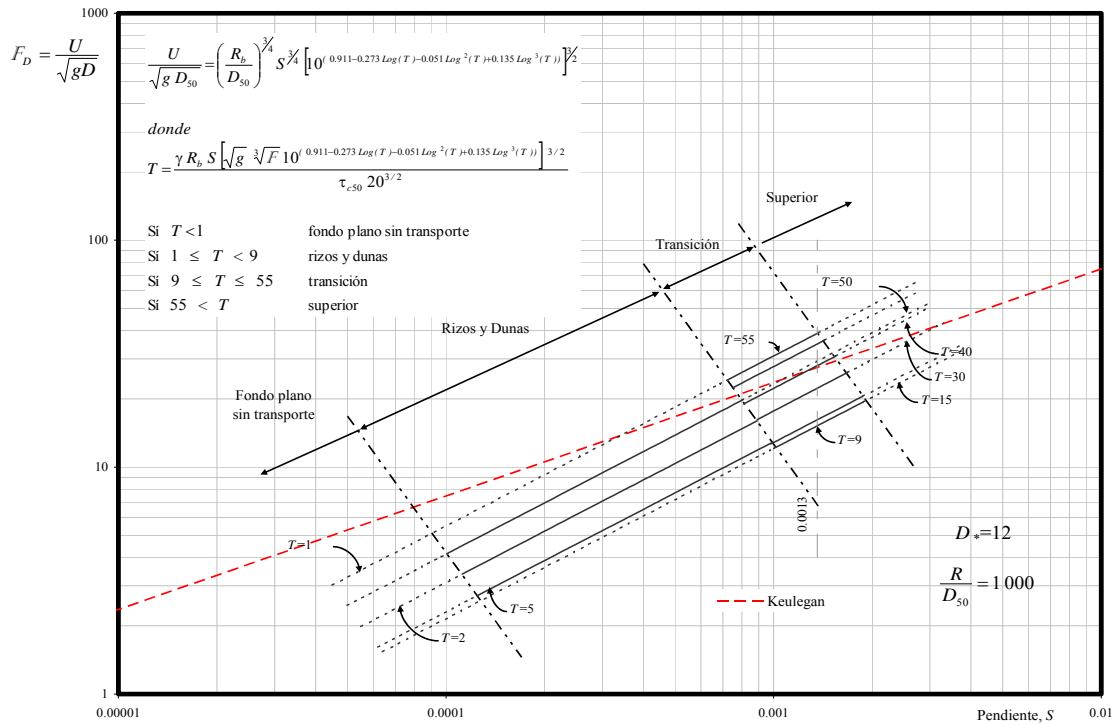


Fig 4.1 Método de Wu y Wang: Variación y delimitación del parámetro  $T$  en el plano  $(S, F_D)$ , según García Flores (ref 14)

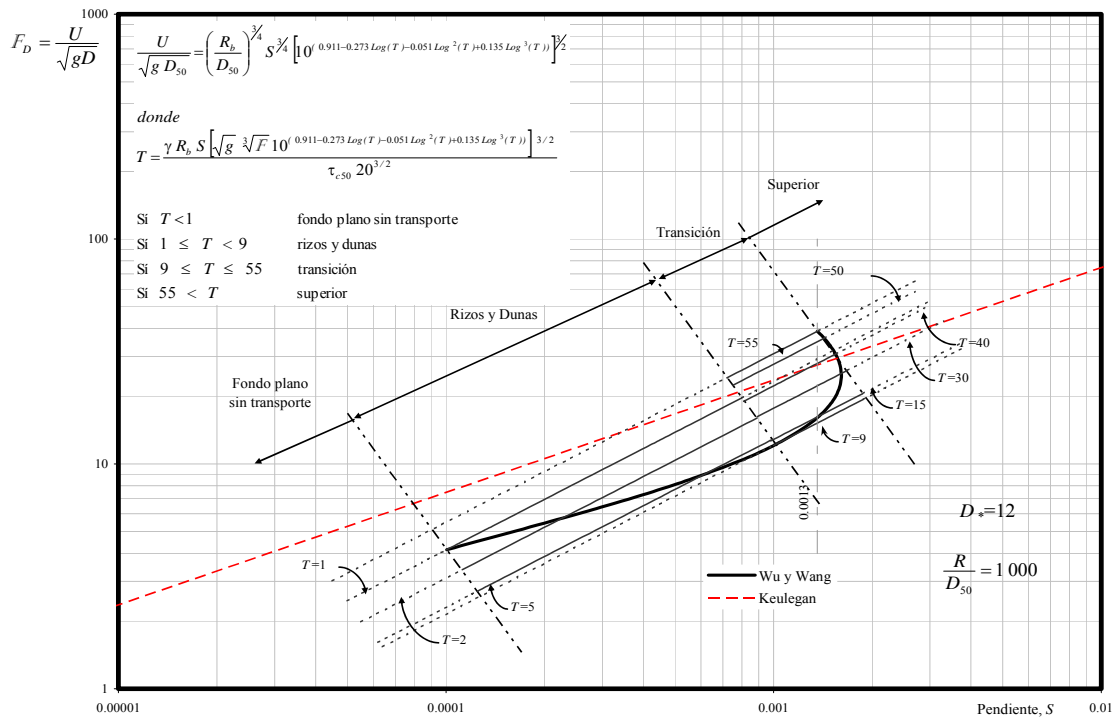


Fig 4.2 Método de Wu y Wang en el plano  $(S, F_D)$ , para  $R/D$  y  $D_*$  constantes (material relativamente fino), según García Flores (ref 14)

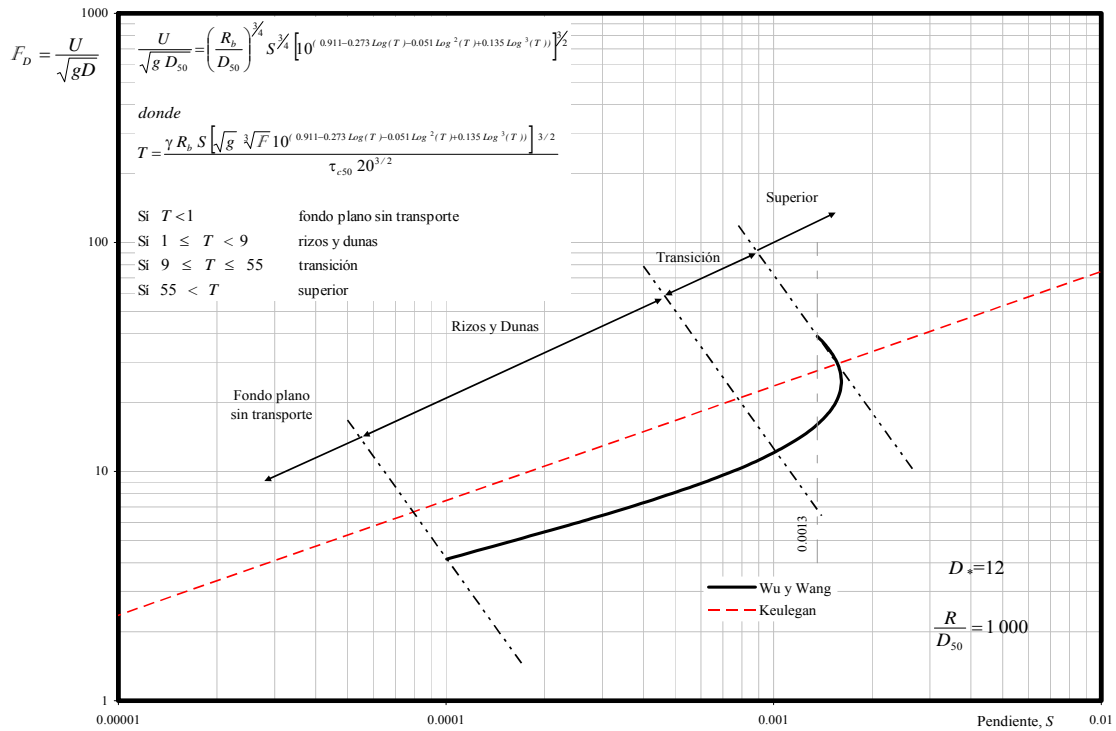


Fig 4.3 Método de Wu y Wang en el plano  $(S, F_D)$ , para  $R/D_{50} = 1000$  y  $D_* = 12$ , según García Flores (ref 14)

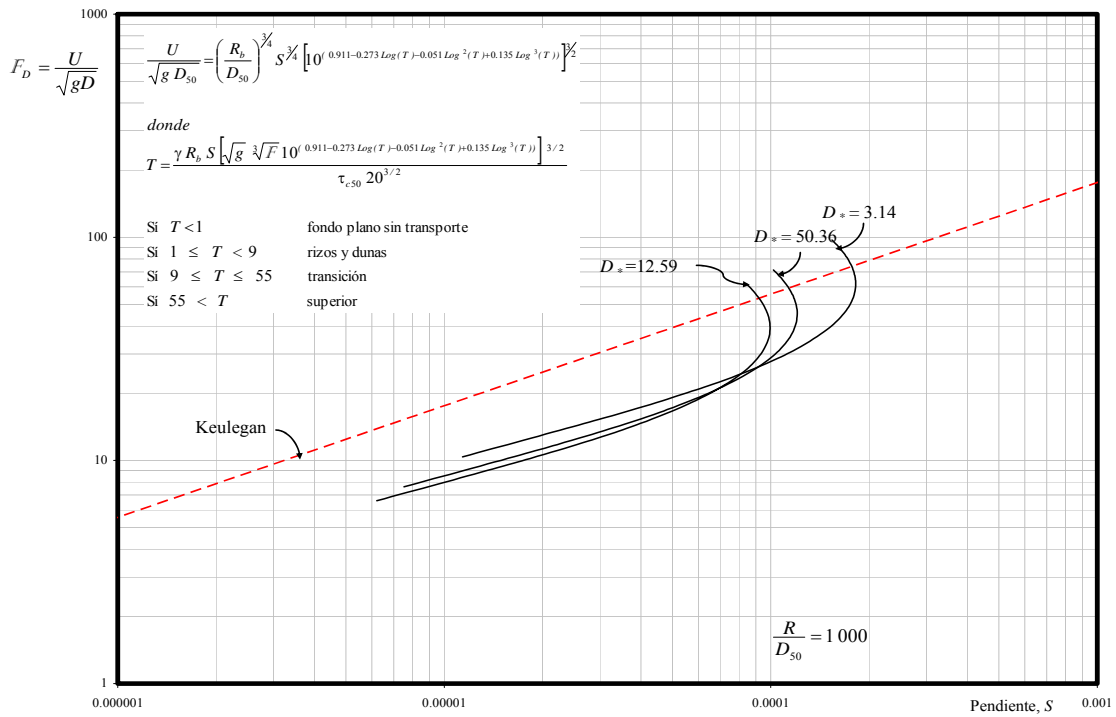


Fig 4.4 Método de Wu y Wang en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación del parámetro  $D_*$ , según García Flores (ref 14).

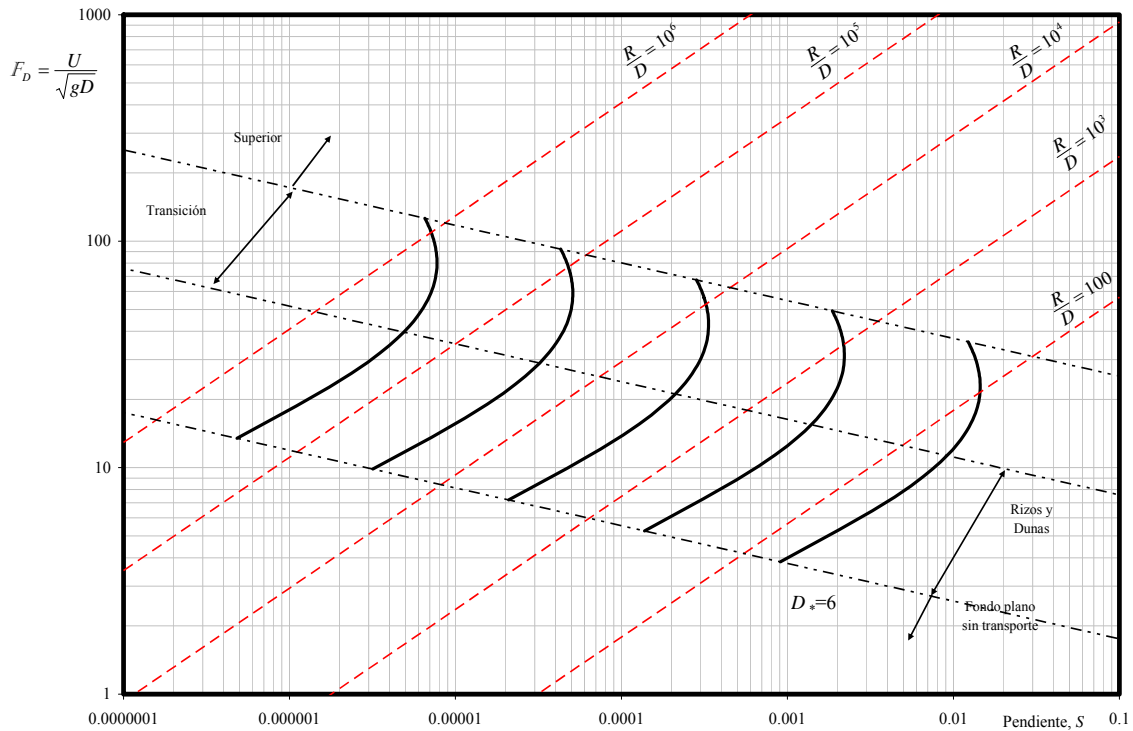


Fig 4.5 Método de Wu y Wang en el plano  $(S, F_D)$ , para material relativamente fino, según García Flores (ref 14)

#### IV.5 COMENTARIOS

En la discusión del método, elaborada por Willi H. Hager y Giuseppe Del Giudice (ref 16), estos autores proponen una forma simplificada de la ecuación (4.4)

$$\frac{A}{\sqrt{g} \sqrt[3]{F}} = \frac{7.4(1 + 0.067T)}{T^{1/3}} \quad (4.27)$$

y, también otro ajuste a la curva de Shields (Fig 4.6)

$$\begin{aligned} \text{Si } D_* < 15 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.120 D_*^{-1/2} \\ \text{Si } 15 \leq D_* \leq 150 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.020 D_*^{1/6} \\ \text{Si } D_* > 150 & \quad \frac{\tau_{c50}}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} = 0.052 \end{aligned} \quad (4.28)$$

En la fig (4.6) se comparan los tres ajustes a la curva de Shields. Se nota claramente que el mejor ajuste es el de García Flores.

A continuación se presentan los comentarios y críticas de García Flores al método de Wu y Wang, con base en la transformación que realizó, figs (4.1) a (4.8):

El método pronostica, para el régimen inferior y un valor fijo de  $R/D$ , un ligerísimo incremento de la resistencia al flujo conforme aumenta la pendiente del cauce, pues la línea casi va paralela a la de Keulegan. La mayor resistencia se presenta en el punto en el que se cambia del régimen inferior al de transición. Por el contrario, para el régimen de transición el método pronostica un descenso fuerte en la resistencia al flujo, figs (4.2 y 4.3). Además, en éstas figuras se observa que el método exhibe, en el régimen de transición, un intervalo en el que la solución no es única, sino múltiple; la pendiente en la que inicia este intervalo es la correspondiente al valor de  $T = 55$ .

La fig (4.5) indica que, en general, la resistencia al flujo crece conforme se acrecienta el valor de  $R/D$ .

Por otro lado, el método es sensible a la variación del parámetro  $\tau_{c50}$ , fig (4.4), y por lo tanto a la forma de calcularlo, figs (4.7) y (4.8). En otras palabras, el método puede pronosticar velocidades más grandes o más pequeñas dependiendo del valor de  $\tau_{c50}$ .

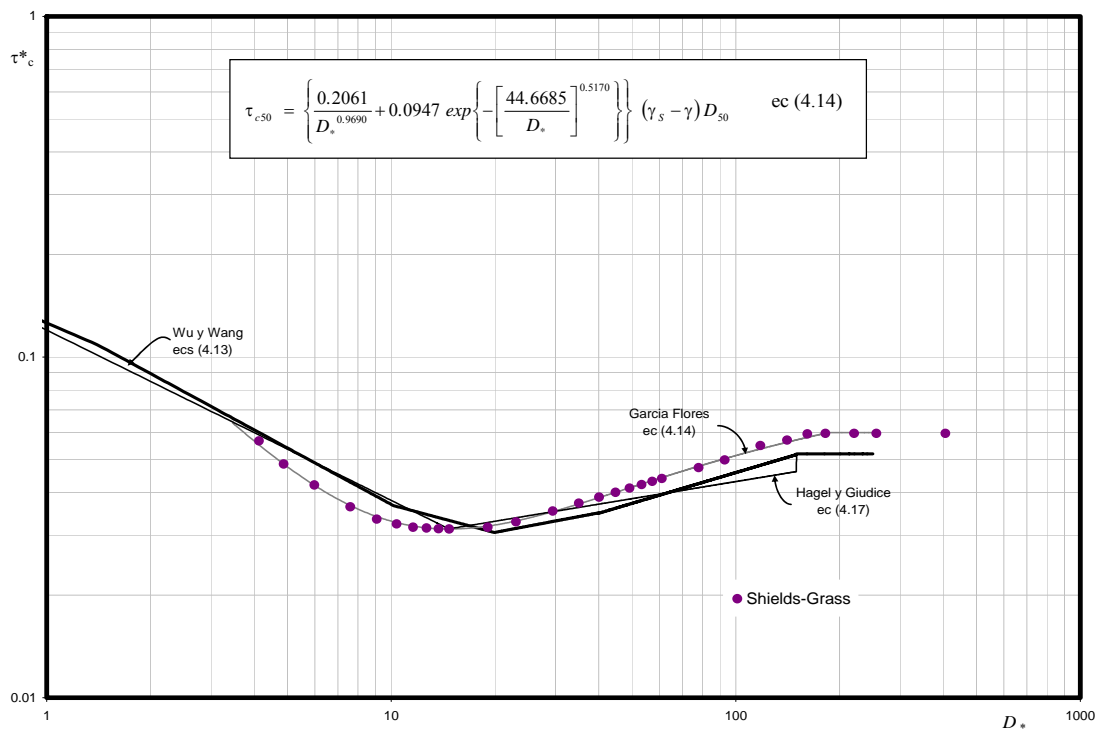


Fig 4.6 Comparación de criterios para la determinación de la condición de movimiento incipiente o inicio de arrastre, según García Flores (ref 12)

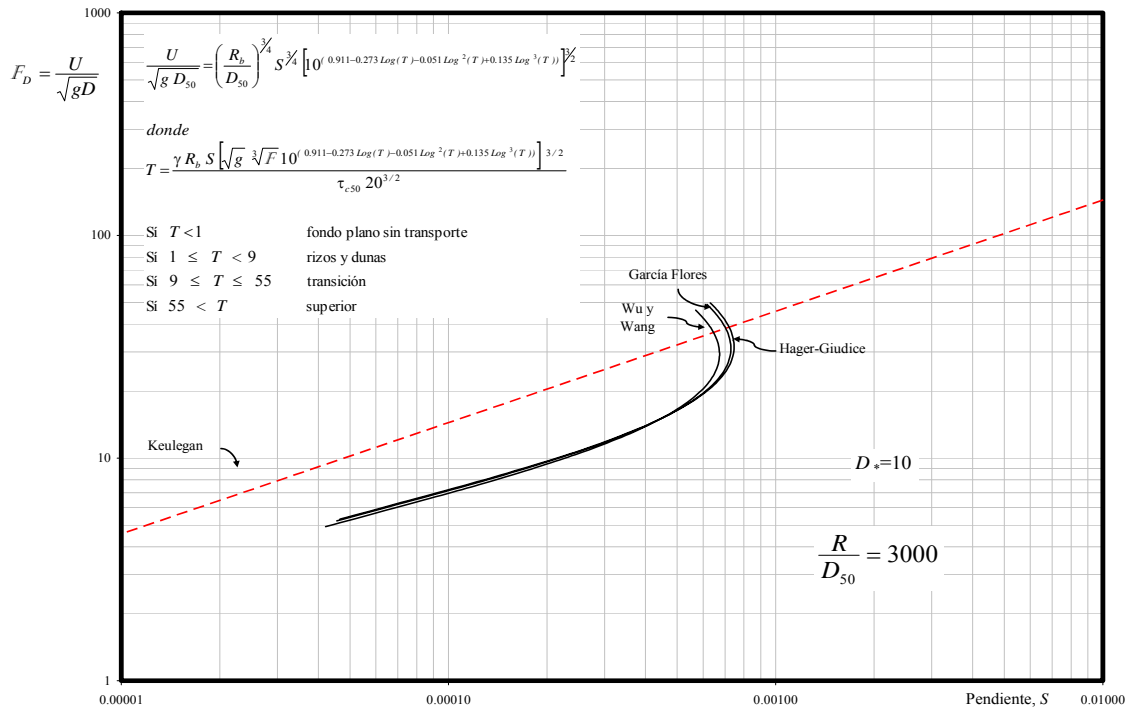


Fig 4.7 Método de Wu y Wang en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la forma de cálculo de  $\tau_{c50}$  según García Flores (ref 14).

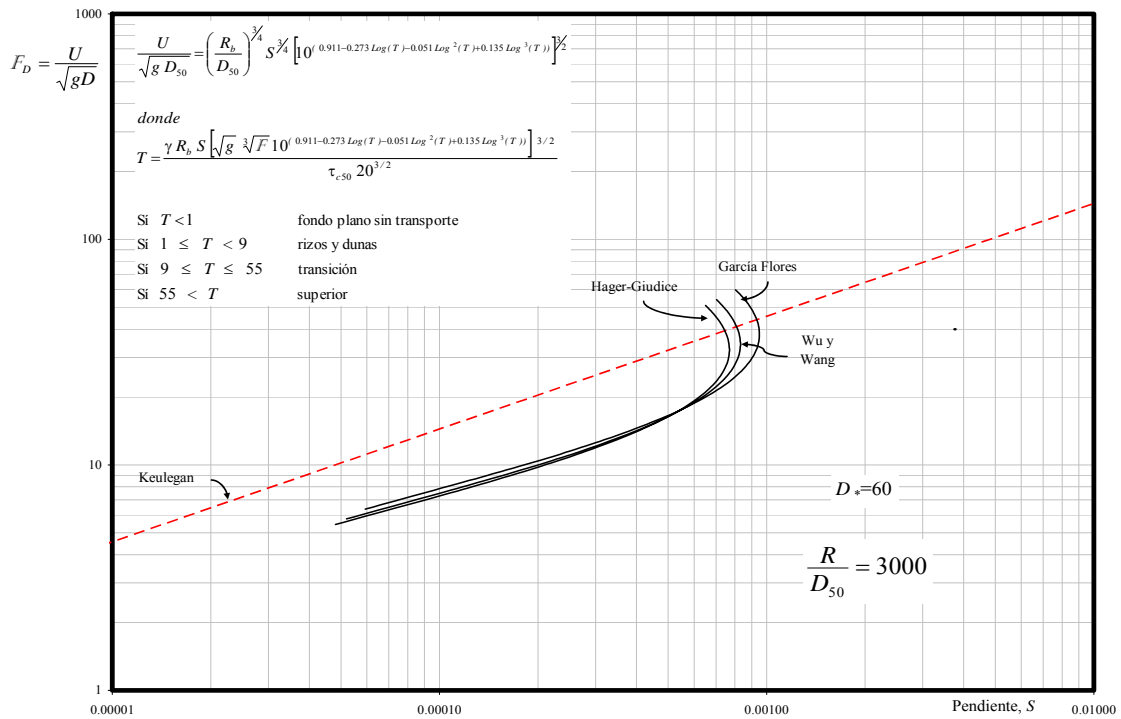


Fig 4.8 Método de Wu y Wang en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la forma de cálculo de  $\tau_{c50}$  según García Flores (ref 14).







## V. MÉTODO DE WHITE, PARIS Y BETTESS (1980, 1982).

### V.1 PRESENTACIÓN

Con el fin de complementar el criterio de Ackers y White (1973), para el cálculo de transporte de sedimentos, William Rodney White, Enio Paris y Roger Bettess (refs 28 y 29) analizaron datos experimentales de canales de laboratorio con fondo arenoso. Con base en estos datos, plantearon que un río ajusta sus características geométricas para maximizar su capacidad de transporte de sedimentos.

White, Paris y Bettess asumieron que la rugosidad del fondo depende del tamaño del material del lecho, por lo que decidieron utilizar el parámetro  $D_*$

$$D_* = D_{35} \left( \frac{g (S_s - 1)}{v^2} \right)^{1/3} \quad (5.1)$$

Con base en el criterio de Ackers y White, asumieron que:

- |    |                      |   |
|----|----------------------|---|
| Si | $D_* < 1$            | el sedimento es fino, aproximadamente 0.04 mm para arenas.  |
| Si | $1 \leq D_* \leq 60$ | el sedimento es intermedio o de transición.                 |
| Si | $D_* > 60$           | el sedimento es grueso, aproximadamente 2.5 mm para arenas. |

Asimismo, definieron que el movimiento de las partículas del fondo está en términos de un número de movilidad,  $F_{gr}$

---

---

$$F_{gr} = \frac{U_*^n}{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}} \left[ \frac{U}{\sqrt{(32) \log_{10} \left( 10 \frac{R}{D_{35}} \right)}} \right]^{1-n} \quad (5.2)$$

donde  $n$  es un parámetro que depende del tamaño del sedimento.

Si  $D_* < 1$

$$n = 1 \quad (5.3a)$$

Si  $D_* < 60$

$$n = 0 \quad (5.3b)$$

Si  $1 \leq D_* \leq 60$

$$n = 1.0 - 0.56 \log(D_*) \quad (5.3c)$$

Por lo tanto, número de movilidad para sedimentos finos,  $F_{fg}$ , es

$$F_{fg} = \frac{U_*}{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}} \quad (5.4)$$

y para sedimentos gruesos,  $F_{cg}$

$$F_{cg} = \frac{U}{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)} \sqrt{(32) \log_{10} \left( 10 \frac{R}{D_{35}} \right)}} \quad (5.5)$$

Por otra parte, White, Paris y Bettess propusieron que el número de movilidad,  $F_{gr}$ , en el caso de movimiento incipiente,  $A$ , es:

Si  $1 \leq D_* \leq 60$  sedimentos intermedios

$$A = \frac{0.23}{\sqrt{D_*}} + 0.14 \quad (5.6a)$$

Si  $D_* > 60$  sedimentos gruesos

$$A = 0.17 \quad (5.6b)$$

Del análisis de los datos de laboratorio, dibujaron valores  $F_{gr}$  contra  $F_{fg}$ , para observar así su sensibilidad a la variación del parámetro  $D_*$ . Así, encontraron que los datos se alejan de la línea  $F_{fg} = F_{gr}$  conforme aumenta el valor  $D_*$ , y a su vez convergen hacia el valor de inicio del movimiento ó valor crítico de Shields, fig 5.1.

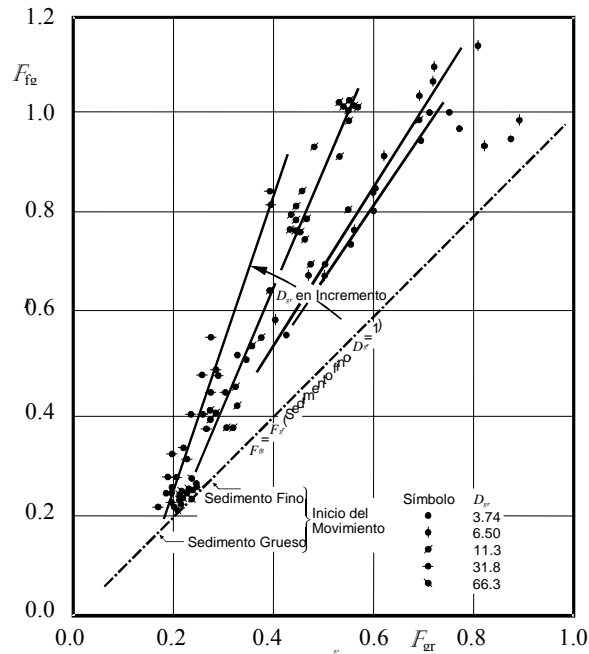


Fig 5.1 Variación de  $F_{fg}$  en función de  $F_{gr}$  para los datos seleccionados

Con base en estas observaciones, White, Paris y Bettess (1980), definieron la siguiente relación:

$$\frac{F_{gr} - A}{F_{fg} - A} = \phi\{D_*\} \quad (5.7)$$

Al dibujar los datos de laboratorio en el plano  $D_*$  contra  $1 - (F_{gr}-A)/(F_{fg}-A)$ , White *et al.* obtuvieron que(fig 5.2):

$$1 - \frac{F_{gr} - A}{F_{fg} - A} = 0.76 \left\{ 1 - \frac{1}{\exp[(\log_{10} D_*)^{1.7}]} \right\} \quad (5.8)$$

la cual rige para  $F < 0.8$ , y  $1 < D_* < 60$ .

#### INTERVALO DE LOS DATOS

Diámetro del sedimento:  $0.04 \text{ mm} \leq D_{35} \leq 68 \text{ mm}$

Diámetro adimensional  $1.007 \leq D_* \leq 1712.323$

Número de Froude:  $F < 0.8$

Densidad relativa del sedimento:  $1.07 \leq S_s < 2.7$

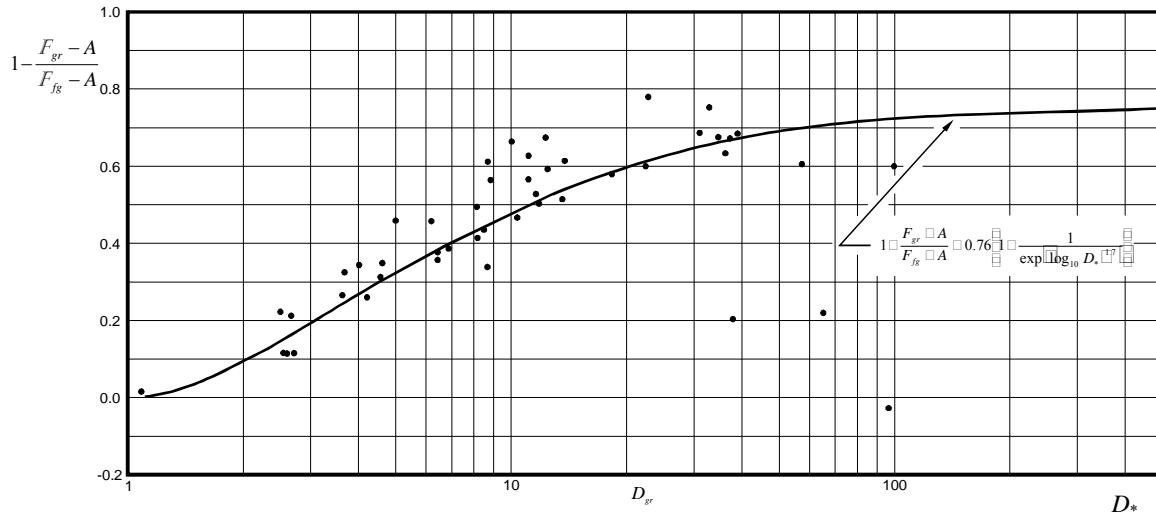


Fig 5.2 Relación de cortantes, basada en el  $D_{35}$  del material original del lecho

V.2 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO.

White Paris y Bettess propusieron el siguiente procedimiento de cálculo

i) Calcular

$$U_* = \sqrt{g R S}$$

ii) Obtener

$$D_* = D_{35} \left( \frac{g (S_s - 1)}{\nu^2} \right)^{1/3}$$

iii) Evaluar los parámetros  $n$  y  $A$

Si  $D_* > 60$

$$n = 0.0 \tag{5.3b}$$

$$A = 0.17 \tag{5.6b}$$

Si  $1 \leq D_* \leq 60$

$$n = 1.0 - 0.56 \log(D_*) \tag{5.3c}$$

$$A = \frac{0.23}{\sqrt{D_*}} + 0.14 \tag{5.6a}$$

iv) Calcular

$$F_{fg} = \frac{U_*}{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}}$$

v) Obtener  $F_{gr}$  a partir de la ec. (5.8)

$$F_{gr} = (F_{fg} - A) \left[ 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right] + A \tag{5.11}$$

vi) Determinar  $U$ , a partir de la ec. (5.2)

$$U = \sqrt{32 \log\left(\frac{10 R}{D_{35}}\right) \left[ \frac{F_{gr} \sqrt{g} D_{35} (S_s - 1)}{U_*^n} \right]^{\frac{1}{1-n}}} \quad (5.12)$$

### V.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS.

#### V.3.1 Cauce natural

Se desea estimar la velocidad media de una corriente fluvial, cuyo material del cauce tiene las siguientes características: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.75$  mm y  $\sigma_g = 3.2$ ; la temperatura del agua es de 20 °C, la pendiente del lecho es  $S = 1.51 \times 10^{-4}$ , la sección transversal es muy ancha ( $R = d$ ), y el tirante es  $d = 6.28$  m.

*-Solución*

El valor de  $D_{35}$ , se calcula a partir de las características granulométricas del cauce, utilizando la ec. (7.92) del capítulo 7 del Manual de Ingeniería de Ríos “*Origen y Propiedades de los Sedimentos*” (ref 10)

$$D_n = D_{50} (\sigma_g)^{Z_n}$$

donde  $Z_n$  es una variable aleatoria estándar, con distribución normal, con media igual a 0 desviación estándar igual a 1

$$D_{35} = 0.00075 (3.2)^{-0.38532} = 0.000479 \text{ m}$$

i) Se calcula

$$U_* = \sqrt{9.80665 (6.28) (0.000151)} = 0.09643 \frac{m}{s}$$

ii) Se obtiene

$$D_* = (0.000479) \left( \frac{9.80665 (1.65)}{(1.00667 \times 10^{-6})^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 12.0618$$

El valor de  $\nu$  se tomó de la tabla 7.2 del Manual de Ingeniería de Ríos “*Origen y Propiedades de los Sedimentos*” (ref 10). Para una temperatura de 20 °C,  $\nu = 1.00667 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

iii) Se evalúan los parámetros  $n$  y  $A$

$$\text{Como } 1 \leq D_* \leq 60$$

$$n = 1 - 0.65 \log(12.0618) = 0.29708$$

y

$$A = \frac{0.23}{\sqrt{12.0618}} + 0.14 = 0.20622$$

iv) Se calcula

$$F_{fg} = \frac{0.09643}{\sqrt{9.806658 (0.479 \times 10^{-3}) (1.65)}} = 1.09535$$

v) Se obtiene  $F_{gr}$  a partir de la ec. (5.8)

$$F_{gr} = (1.09535 - 0.20622) \left[ 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(12.0618)^{1.7})} \right] + 0.20622 = 0.63515$$

vi) Se determinar  $U$ , a partir de la ec. (5.2)

$$U = \sqrt{32 \log\left(\frac{10 (6.28)}{0.479 \times 10^{-3}}\right)} \left[ \frac{0.63515 \sqrt{9.80665 (0.479 \times 10^{-3}) (1.65)}}{(0.09643)^{0.29708}} \right]^{1-0.29708} = 0.50188 \frac{m}{s}$$

### V.3.2 Canal de laboratorio

Datos:

Material del fondo o lecho: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.25$  mm y  $\sigma_g = 1.48$ . La pendiente del canal es  $S = 2.5 \times 10^{-4}$ , la temperatura del agua es de 18 °C, la sección transversal es rectangular y el radio hidráulico asociado a la rugosidad del lecho es  $R_b = 0.48$  m.

-Solución

i)  $U_* = 0.03143$  m/s

ii)  $D_* = 5.2384$

iii)  $n = 0.59724$

$A = 0.2405$

iii)  $F_{fg} = 0.53298$

iv)  $F_{gr} = 0.43627$

v)  $U = 0.22357$  m/s

### V.4 TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ y $R/D_{50}$

Para transformar y reducir el método de White, Paris y Bettes a una ecuación adimensional, se procedió de la siguiente manera (ref 12):



Se reordenan los términos de la ec. (5.12)

$$U = \sqrt{32 \log\left(\frac{10 R}{D_{35}}\right)} \left[ \frac{F_{gr} \sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}}{U_*} \right]^{1-n} \left( \frac{1}{U_*^{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (5.13)$$

después, la ec (5.13) se sustituye en la ec. (5.11)

$$U = \sqrt{32 \log\left(\frac{10 R}{D_{35}}\right)} \left[ \frac{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}}{U_*} \left( (F_{fg} - A) \left[ 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right] + A \right) \right]^{1-n} \left( \frac{1}{U_*^{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (5.14)$$

luego, se sustituye la ec (5.4) en la ec (5.14)

$$U = \sqrt{32 \log\left(\frac{10 R}{D_{35}}\right)} \left[ \frac{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}}{U_*} \left( \left( \frac{U_*}{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}} - A \right) \left[ 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right] + A \right) \right]^{1-n} \left( \frac{1}{U_*^{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (2.15)$$

se reordenan los términos de la ec (5.15)

$$U = \sqrt{32 \log\left(\frac{10 R}{D_{35}}\right)} \left[ \left( 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right) + \frac{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}}{U_*} \left[ 0.76 A - \frac{0.76 A}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right] \right]^{1-n} \left( \frac{1}{U_*^{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (5.16)$$

Al analizar la variación del exponente del término  $1/U_*$ , para los diferentes valores de  $D_*$ , resulta que:

Si  $D_* > 60$ ,  $n = 0$ , por lo que

$$\frac{n-1}{1-n} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

Si  $1 \leq D_* \leq 60$ ,  $n = 1 - 0.56 \log(D_*)$ , con lo que se obtiene que

$$\frac{n-1}{1-n} = \frac{1-0.56 \log(D_*)-1}{1-(1-0.56 \log(D_*))} = -1$$

Por lo tanto, la ec. (2.16) se reescribe como

$$U = \sqrt{32 \log\left(\frac{10 R}{D_{35}}\right)} U_* \left[ \left( 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right) + \frac{\sqrt{g D_{35} (S_s - 1)}}{U_*} \left[ 0.76 A - \frac{0.76 A}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right] \right]^{1-n} \quad (5.17)$$

se sustituye la ec. (5.9) en la ec. (5.17)

$$U = \sqrt{32 \log \left( \frac{10R}{D_{35}} \right)} \sqrt{gRS} \left[ \left( 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right) + \sqrt{\frac{D_{35}(S_s - 1)}{RS}} \left[ 0.76A - \frac{0.76A}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right] \right]^{1-n} \quad (5.18)$$

por último, se dividen ambos miembros de la ec. (5.18) entre  $\sqrt{g D_{35}}$

$$\frac{U}{\sqrt{g D_{35}}} = \sqrt{32 S \left( \frac{R}{D_{35}} \right) \log \left( \frac{10R}{D_{35}} \right)} \left[ \left( 0.24 + \frac{0.76}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right) + \sqrt{\left( \frac{D_{35}}{R} \right) \frac{(S_s - 1)}{S}} \left[ 0.76A - \frac{0.76A}{\exp(\log(D_*)^{1.7})} \right] \right]^{1-n} \quad (5.19)$$

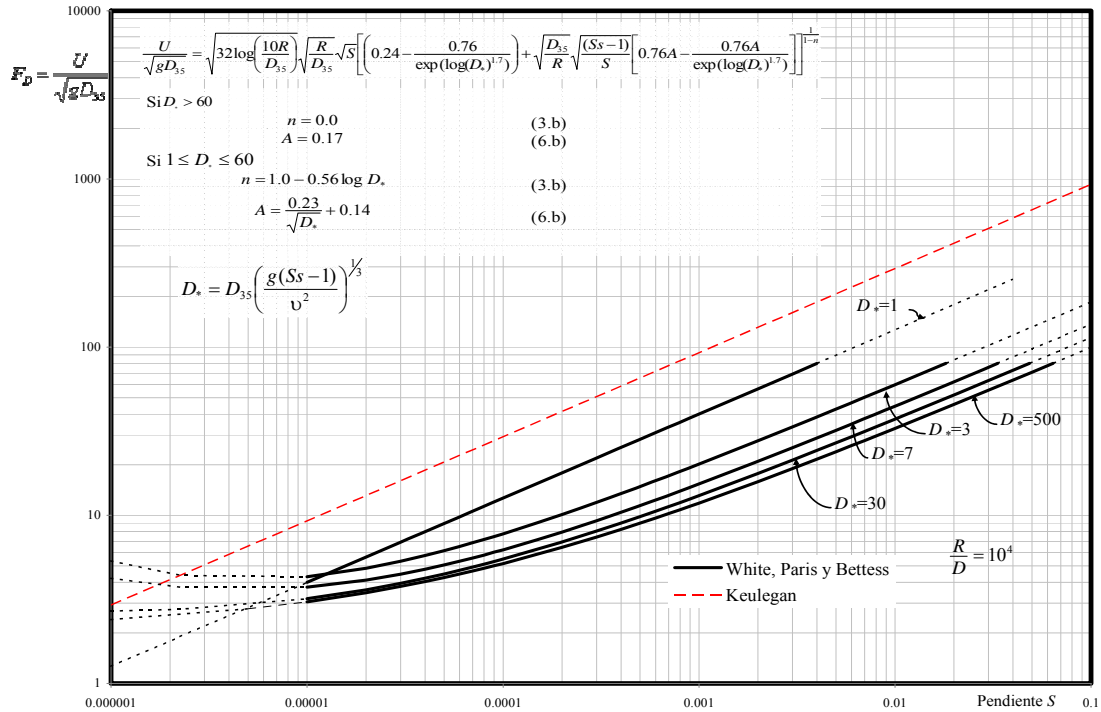


Fig 5.3 Método de White, Paris y Bettess en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación del parámetro  $D_*$ , para  $R/D$  constante, según García Flores (ref 14)

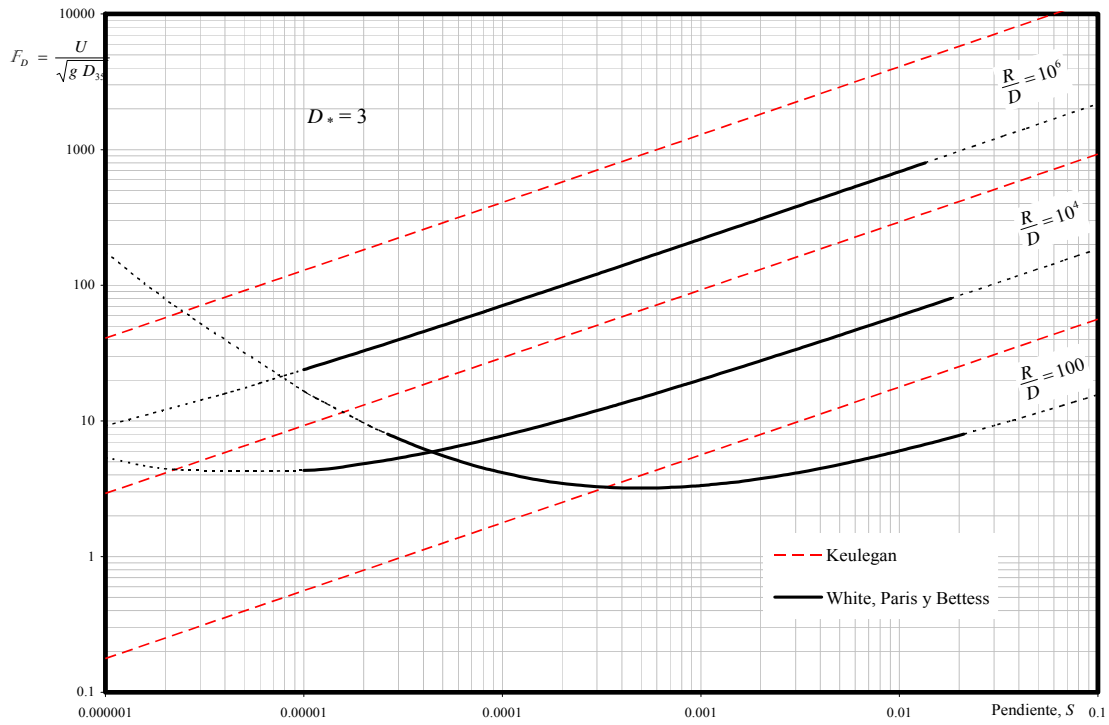


Fig 5.4 Método de White, Paris y Bettess en el plano  $(S, F_D)$ , para material fino, según García Flores (ref 14).

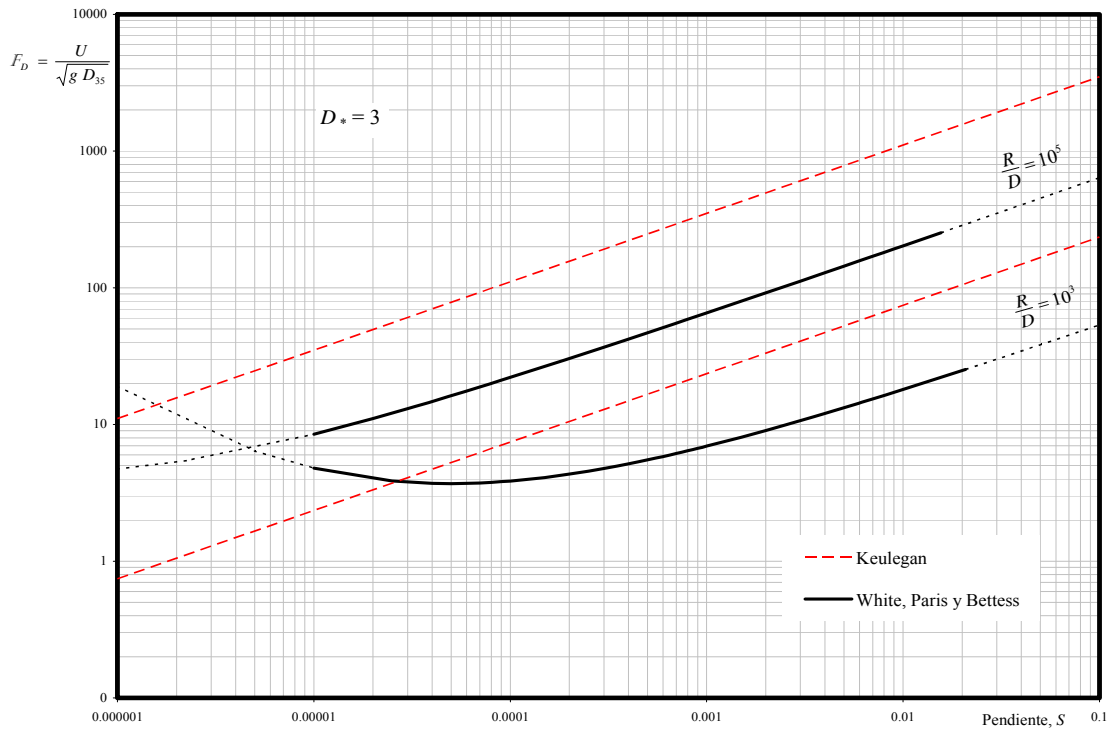


Fig 5.5 Método de White, Paris y Bettess en el plano  $(S, F_D)$ , para material fino, según García Flores (ref 14).

## V.5 COMENTARIOS.

Según Brownlie (ref 3), el método de White, Paris y Bettess funciona bien en el intervalo de dunas, siendo incluso más preciso que el método desarrollado por Engelund. Sin embargo, en otras condiciones de fondo, el método de White, Paris y Bettess tiene un pobre desempeño. Brownlie también criticó que el método sólo es válido en el régimen inferior, ya que sólo se puede utilizar si  $F < 0.8$ .

A continuación se presentan los comentarios y críticas de García Flores al método de White Paris y Bettess, con base en la transformación que realizó, figs (5.3) a (5.5):

El método es muy sensible a la variación del parámetro  $D_*$ , fig (5.3). A mayor valor de  $D_*$ , mayor es la resistencia que pronostica el método, es decir mientras las partículas sedimentarias son más grandes la resistencia aumenta considerablemente, sobre todo cuando  $D_*$  es menor de siete, pues para valores más grandes, los incrementos en la resistencia al flujo son comparativamente mucho más pequeños, y si  $D_*$  es mayor de 60, o sea para partículas gruesas, estos incrementos son prácticamente despreciables.

Además, conforme disminuye el valor de  $D_*$  ó aumenta el valor de la relación  $R/D$ , la línea de White, Paris y Bettess tiende a una recta en dicho plano y prácticamente paralela a la de Keulegan; pero lo contrario ocurre al disminuir el valor de  $R/D$  o al crecer  $D_*$ , ya que línea de White, Paris y Bettess se va curvando y extendiendo hacia la de Keulegan, la cruza y parte de la línea de ellos queda muy por encima de la línea de Keulegan, fig (5.3) a (5.5), lo que es absurdo. Además, en estas figuras se observa que aun cuando se conserva fijo el valor de  $D_*$ , la resistencia al flujo se incrementa fuertemente al aumentar el valor de  $R/D$  y, por consiguiente, las velocidades pronosticadas serán, por lo general, mucho más bajas que las reales.





## VI. MÉTODO DE BROWNLIE (1983).

### VI.1 PRESENTACIÓN

A partir del análisis dimensional y del estudio de regresión de una gran cantidad de datos de campo y laboratorio de otros autores, Brownlie propuso un método para pronosticar velocidades en cauces aluviales (ref 3), que tiene en cuenta la viscosidad cinemática del fluido para definir el tipo de régimen del lecho.

Consideró inicialmente que, en cauces aluviales, el radio hidráulico,  $R$ , era función de ocho variables

$$R = \phi(q, S, g, \rho, \nu, \rho_s, D_{50}, \sigma_g) \quad (6.1)$$

donde:

$R$	radio hidráulico, en m.
$q$	gasto unitario, en $m^3/s/m$ .
$S$	pendiente del cauce.
$\rho$	densidad del fluido, en $Ns^2/m^4$ .
$\nu$	viscosidad cinemática del fluido, en $m^2/s$
$\rho_s$	densidad del sedimento, en $Ns^2/m^4$ .
$D_{50}$	diámetro o tamaño característico del sedimento, en m.
$\sigma_g$	desviación estándar geométrica de los tamaños de las partículas, adimensional.

Mediante el teorema  $\pi$ , y con base tanto en la definición de gasto unitario adimensional,  $q^*$ .

---

$$q_* = \frac{q}{\sqrt{g D_{50}^3}} \quad (6.2)$$

como en la del número de Reynolds,  $R$  :

$$R = \frac{4q}{\nu} \quad (6.3)$$

y en la del parámetro adimensional de Shields,  $\tau_*$ , ec ( 3.1 ), Brownlie expresó la ec (6.1) en la forma

$$\frac{RS}{D_{50}} = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \tau_* = \varphi \left( q_*, S, \sigma_g, R, \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \quad (6.4)$$

Al suponer fluido homogéneo y flujo turbulento, juzgó despreciables para el análisis el número de Reynolds y la relación  $(\rho_s - \rho)/\rho$ , por lo que redujo la ec (6.4) a

$$\frac{RS}{D_{50}} = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \tau_* = \varphi(q_*, S, \sigma_g) \quad (6.5)$$

Para desarrollar una relación específica entre la resistencia al flujo y la rugosidad del lecho, Brownlie utilizó como primera aproximación la ecuación semilogarítmica de Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{2R}{k_s} + 1.74 = 2 \log \frac{14.8R}{k_s} \quad (6.6)$$

Asimismo, observó que la ec (6.6) se ajustaba a una ley de potencias, fig 6.1,

$$\frac{U}{U_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = a \left( \frac{R}{k_s} \right)^{1/6} \quad (6.7)$$

donde  $U_*$  es la velocidad de fricción o asociada al esfuerzo cortante e igual a  $\sqrt{gRS}$ , ec (1.2).

Al reemplazar en la ec (6.7) la rugosidad equivalente a los granos de arena de Nikuradse,  $k_s$ , por la rugosidad debida a las dunas u ondulaciones del lecho,  $k_d$ , y reacomodando términos, Brownlie obtuvo que

$$\left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \tau_* = a^{-0.6} \left( \frac{k_d S}{D_{50}} \right)^{0.1} (q_* S)^{0.6} \quad (6.8)$$

Por otro lado, para el caso de material del cauce con distribución de tamaños del tipo log normal, cualquier diámetro de partícula,  $D_n$ , se puede relacionar con la mediana de los tamaños,  $D_{50}$ , por medio de la expresión (ref 10)

$$D_n = D_{50} \sigma_g^{z_n} \quad (6.9)$$



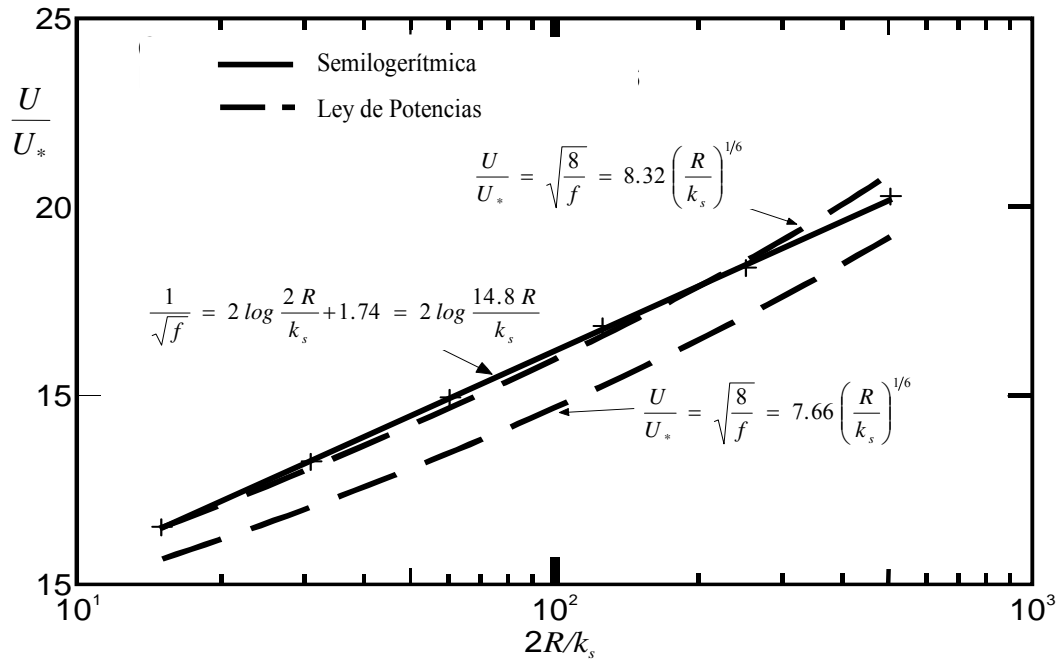


Fig 6.1 Comparación entre las ecs (6.6) y (6.7)

donde  $z_n$  es la variable aleatoria estándar y el subíndice  $n$  indica el porcentaje del peso de los sedimentos o suelo que tiene partículas cuyos tamaños son menores que  $D_n$ . La ec (6.9) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_g^{z_n} = \frac{D_n}{D_{50}} \quad (6.10)$$

Además, con base en el parámetro adimensional de Shields, Brownlie determinó un esfuerzo cortante adimensional para cualquier diámetro de partícula,  $D_n$ , es decir

$$\tau_{*n} = \frac{\gamma RS}{(\gamma_s - \gamma)D_n} = \frac{RS}{(S_s - 1)D_n} \quad (6.11)$$

Al dividir la ecuación de Shields (ec 3.1) entre la ec (6.11), obtuvo al simplificar que

$$\frac{\tau_*}{\tau_{*n}} = \frac{\frac{\gamma RS}{(\gamma_s - \gamma)D_{50}}}{\frac{\gamma RS}{(\gamma_s - \gamma)D_n}} = \frac{D_n}{D_{50}} \quad (6.12)$$

luego, al sustituir la ec (6.10) en la ec (6.12) y reordenando convenientemente los términos, llegó a que

$$\tau_{*n} = \frac{\tau_*}{\sigma_g^{z_n}} \quad (6.13)$$

Con el fin de normalizar el esfuerzo cortante en el lecho, para el caso en que el material del cauce es no uniforme, Brownlie reemplazó en la ec (6.8) el esfuerzo cortante  $\tau_*$  por  $\tau_{*n}$ . Posteriormente, eliminó la rugosidad debida a las ondulaciones o formas del fondo,  $k_d$ , ya que al estar elevada a la potencia 0.1, estimó que no se requería precisar más este parámetro para lograr mayor exactitud en el cálculo de  $\tau_*$ , y consideró que  $k_d/D_{50}$  es proporcional a  $q_*$  y  $S$ , por lo que rescribió la ec (6.8) como

$$\left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \tau_* = w (q_* S)^x S^y \sigma_g^z \quad (6.14)$$

en donde  $w$ ,  $x$ ,  $y$  y  $z$  son constantes. Al tener en cuenta la ec (6.13) en la ec (6.14), ésta se puede escribir de la siguiente manera

$$\left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \tau_{*n} = w (q_* S^{1+(y/x)})^x \quad (6.15)$$

Para encontrar los valores de  $w$ ,  $x$ ,  $y$  y  $z$ , para los regímenes inferior y superior, Brownlie dibujó los datos de otros autores en papel log- log, y observó que seguían una clara tendencia lineal, figs 6.2 y 6.3. Al realizar un ajuste a los datos analizados, encontró que

Para el régimen inferior:

$$\left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \tau_{*n} = 0.3724 q_*^{0.6539} S^{0.74578} \quad (6.16a)$$

Para el régimen superior:

$$\left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \tau_{*n} = 0.2836 q_*^{0.6248} S^{0.7123} \quad (6.16b)$$

Con base en las ecs (6.16) y (6.4), Brownlie propuso, para el cálculo de  $R/D_{50}$ , las siguientes expresiones:

Para el régimen inferior:

$$\frac{R}{D_{50}} = 0.3724 q_*^{0.6539} S^{-0.2542} \sigma_g^{0.1050} \quad (6.17a)$$

Para el régimen superior:

$$\frac{R}{D_{50}} = 0.2836 q_*^{0.6248} S^{-0.2877} \sigma_g^{0.08013} \quad (6.17b)$$

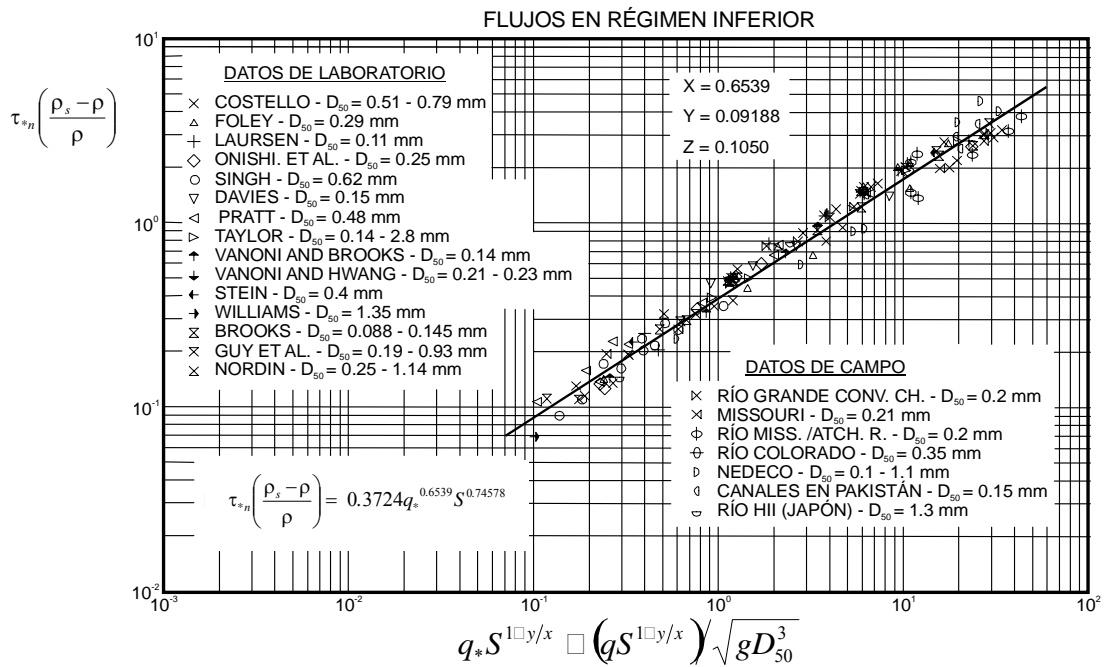


Fig 6.2 Relación entre  $\tau_{*n}$ ,  $q_*$  y  $S$ , para flujo en régimen Inferior: rizos y dunas

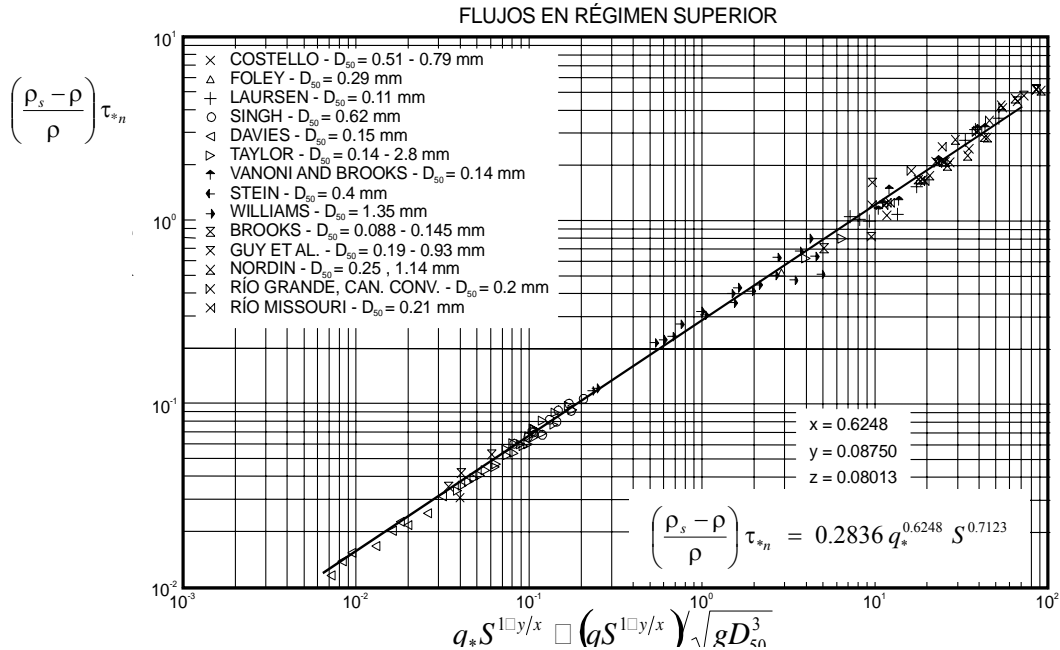


Fig 6.3 Relación entre  $\tau_{*n}$ ,  $q_*$  y  $S$ , para flujo en régimen Superior: fondo plano con movimiento, antidunas y ondas estacionarias

Al despejar el gasto unitario adimensional de las ecs (6.17), y tomar en cuenta la ec (6.2), Brownlie propuso que:

Para el régimen inferior:

$$q = 4.5294 \sqrt{g} \frac{R^{1.5292} S^{0.3887}}{D_{50}^{0.0292} \sigma_g^{0.0292}} \quad (6.18a)$$

Para el régimen superior:

$$q = 7.5153 \sqrt{g} \frac{R^{1.6005} S^{0.4604}}{D_{50}^{0.1005} \sigma_g^{0.12824}} \quad (6.18b)$$

Finalmente, al considerar un canal muy ancho,  $q = U d = U R$ , la ec (6.18) se puede escribir

Para el régimen inferior:

$$U = 4.5294 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.5292} S^{0.3887} \sigma_g^{-0.1606} \quad (6.19a)$$

Para el régimen superior:

$$U = 7.5153 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.19b)$$

Ya conocida la velocidad media del flujo,  $U$ , para determinar el tipo de régimen del lecho, se calcula primero el Froude del grano,  $F_g$ , es decir

$$F_g = \frac{U}{\sqrt{(S_s - 1) g D_{50}}} \quad (6.20)$$

y este valor se compara con el número de Froude crítico asociado al tamaño de los granos,  $F_g^*$ , que Brownlie expresó como:

$$F_g^* = 1.74 S^{-1/3} \quad (6.21)$$

Brownlie definió dos criterios para la determinación de régimen del lecho. El primero es para cuando los efectos producidos por la viscosidad del agua son despreciables, fig 6.4, en la que:

Para  $S \leq 0.006$ :

$$\text{Si } \frac{F_g}{F_g^*} < 1, \text{ el régimen es inferior.}$$

$$\text{Si } \frac{F_g}{F_g^*} \geq 1, \text{ el régimen es superior.}$$

Para  $S > 0.006$ , el régimen siempre es superior.

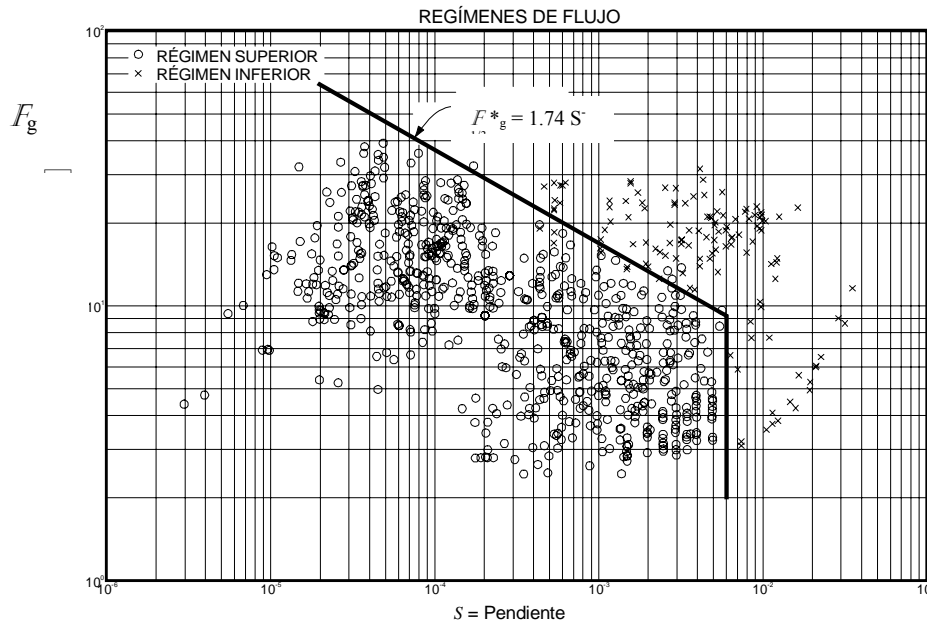


Fig 6.4 Determinación de los regímenes de flujo. Número de Froude del grano,  $F_g$ , en función de la pendiente,  $S$

En el segundo criterio, válido para cuando los efectos producidos por la viscosidad del agua son significativos, Brownlie propuso los límites del régimen de transición como se indica a continuación (figs 6.5 y 6.6):

Límite superior del régimen de transición:

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} < 2$$

$$\log\left(\frac{F_g}{F_g^*}\right) = -0.2026 + 0.07026 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right) + 0.933 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right)^2 \quad (6.22a)$$

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2$$

$$\log\left(\frac{F_g}{F_g^*}\right) = \log 0.8 \quad (6.22b)$$

Límite inferior del régimen de transición:

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} < 2$$

$$\log\left(\frac{F_g}{F_g^*}\right) = -0.02469 + 0.1517 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right) + 0.8381 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right)^2 \quad (6.23a)$$

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2$$

$$\log\left(\frac{F_g}{F_g^*}\right) = \log 1.25 \quad (6.23b)$$

en las que el parámetro  $D_{50}/\delta$  es la razón del tamaño medio de grano y el espesor de la subcapa laminar

$$\frac{D_{50}}{\delta} = \frac{D_{50} U^*}{11.6 v} \quad (6.24)$$

Brownlie asumió que la velocidad del esfuerzo cortante asociado al grano,  $U^*$ , es equivalente a la velocidad del esfuerzo cortante total,  $U_*$ .

Para poder saber en que régimen se encuentra el lecho se tiene que comparar el número de Froude, obtenido con las ecs (6.22) o (6.23), con el calculado utilizando la ec (6.21), es decir

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} < 2$$

El régimen es inferior si 
$$F_g \leq F_g^* 10^{\left[-0.2026 + 0.07026 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right) + 0.933 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right)^2\right]}$$

El régimen es superior si 
$$F_g \geq F_g^* 10^{\left[-0.02469 + 0.1517 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right) + 0.8381 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right)^2\right]}$$

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2$$

El régimen es inferior si 
$$F_g \leq 0.8 F_g^*$$

El régimen es superior si 
$$F_g \geq 1.25 F_g^*$$

en las que

$$F_g^* = 1.74 S^{-1/3} \quad (6.20)$$

#### INTERVALO DE LOS DATOS

Diámetro medio del sedimento:	$0.088 \text{ mm} < D_{50} < 2.8 \text{ mm}$
Gasto unitario:	$0.012 \text{ m}^3/\text{s/m} < q < 40 \text{ m}^3/\text{s/m}$
Pendiente:	$3.0 \times 10^{-6} < S < 3.7 \times 10^{-2}$
Radio hidráulico:	$0.025 \text{ m} < R < 17 \text{ m}$
Temperatura:	$0 \text{ }^\circ\text{C} < T < 63 \text{ }^\circ\text{C}$
Relación ancho – tirante:	$B/d \geq 4$
Desviación estándar geométrica:	$\sigma_g \leq 5$

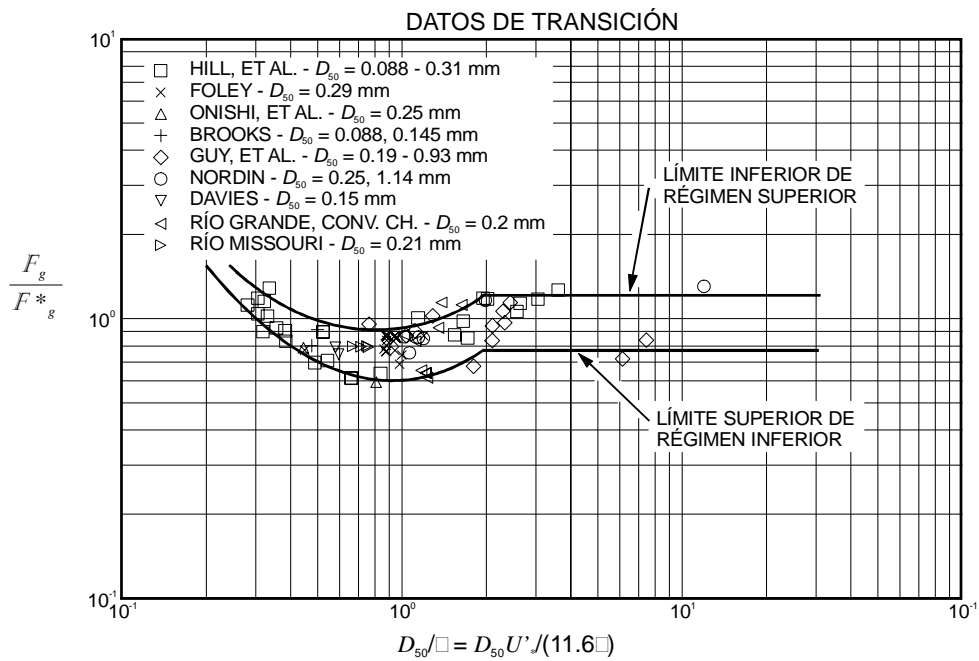


Fig 6.5 Efectos viscosos en la transición del Régimen Inferior al Régimen Superior

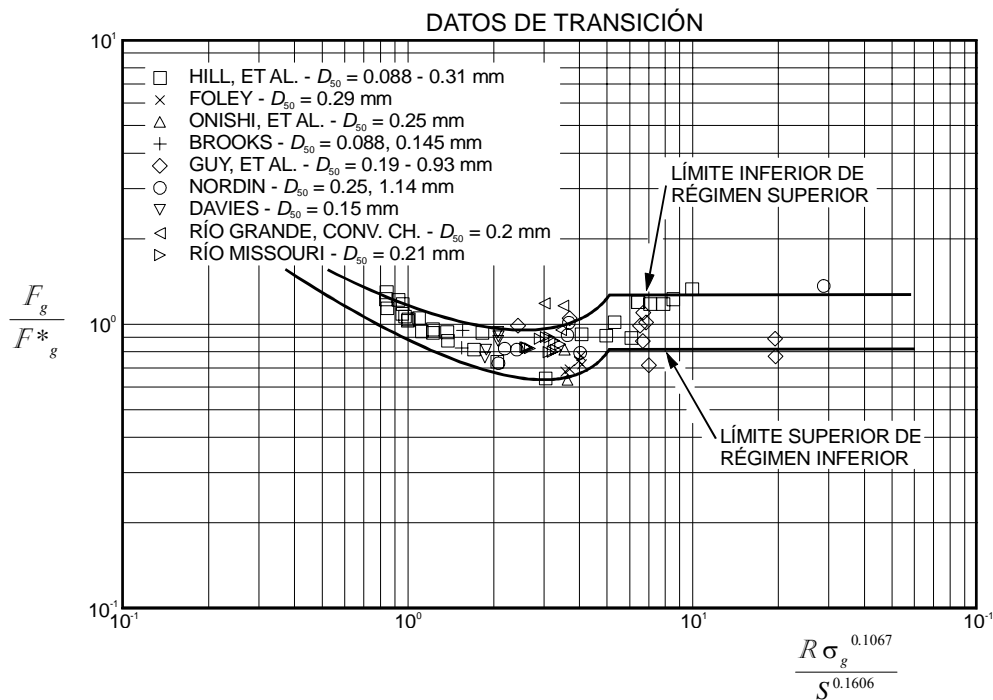


Fig 6.6 Efectos viscosos en la transición del Régimen Inferior al Régimen Superior

VI.2 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO.

Brownlie tampoco propuso un procedimiento de cálculo, pero con base en los parámetros propuestos por ellos, García Flores (ref 12) sugiere los dos siguientes procedimientos:

VI.2.1.-Si los efectos de la viscosidad del agua son despreciables.

i) Comparar el valor de la pendiente

Si  $S \geq 0.006$  el régimen es superior y la velocidad se calcula con la ecuación:

$$U = 7.5153 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.19b)$$

Si  $S < 0.006$ , el régimen puede ser inferior o superior, y se continúa con el paso ii).

ii) Suponer un tipo de régimen y calcular la velocidad con la ecuación correspondiente:

Para el régimen inferior:

$$U = 4.5294 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.5292} S^{0.3887} \sigma_g^{-0.1606} \quad (6.19a)$$

Para el régimen superior:

$$U = 7.5153 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.19b)$$

iii) Determinar

$$F_g = \frac{U}{\sqrt{(S_s - 1) g D_{50}}} \quad (6.21)$$

y

$$F_g^* = 1.74 S^{-1/3} \quad (6.20)$$

iv) Valuar la relación  $\frac{F_g}{F_g^*}$ , y verificar el tipo de régimen

Si  $\frac{F_g}{F_g^*} < 1$  es régimen inferior

Si  $\frac{F_g}{F_g^*} \geq 1$  es régimen superior

Si el régimen determinado concuerda con el supuesto, la velocidad calculada es la correcta, pero si el régimen determinado no concuerda con el supuesto hay que regresar al paso ii) y suponer el otro régimen.



VI.2.2.-Si los efectos de la viscosidad del agua son importantes.

i) Comparar el valor de la pendiente

Si  $S \geq 0.006$  el régimen es superior y la velocidad se calcula con la ecuación:

$$U = 7.5153 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.19b)$$

Si  $S < 0.006$ , el régimen puede ser inferior o superior, y se continúa con el paso ii).

ii) Suponer un tipo de régimen y calcular la velocidad con la ecuación correspondiente

Para el régimen inferior:

$$U = 4.5294 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.5292} S^{0.3887} \sigma_g^{-0.1606} \quad (6.19a)$$

Para el régimen superior:

$$U = 7.5153 \sqrt{g D_{50}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.19b)$$

iii) Determinar

$$F_g = \frac{U}{\sqrt{(S_s - 1) g D_{50}}} \quad (6.21)$$

y

$$F_g^* = 1.74 S^{-1/3} \quad (6.20)$$

iv) Calcular

$$\frac{D_{50}}{\delta} = \frac{D_{50} U^*}{11.6 \nu} \quad (6.24)$$

v) Valuar los  $F_{g(limite)}$  que delimita el régimen de transición

Límite inferior  $F_{g(INFERIOR)}$ :

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} < 2$$

$$F_{g(INFERIOR)} = F_g^* 10^{\left[ -0.2026 + 0.07026 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right) + 0.933 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right)^2 \right]} \quad (6.25a)$$

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2$$

$$F_{g(INFERIOR)} = 0.8 F_g^* \quad (6.25b)$$

Límite superior  $F_{g(SUPERIOR)}$ :

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} < 2$$

$$F_{g(SUPERIOR)} = F_g^* 10^{\left[-0.02469 + 0.1517 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right) + 0.8381 \log\left(\frac{D_{50}}{\delta}\right)^2\right]} \quad (6.26a)$$

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2$$

$$F_{g(SUPERIOR)} = 1.25 F_g^* \quad (6.26b)$$

vi) Verificar el tipo de régimen

Si  $F_g \leq F_{g(INFERIOR)}$  el régimen es inferior.

Si  $F_g \geq F_{g(SUPERIOR)}$  el régimen es superior.

Si  $F_{g(INFERIOR)} \leq F_g \leq F_{g(SUPERIOR)}$  el régimen es de transición

Si se verifica el régimen supuesto, la velocidad calculada es la correcta, pero si el régimen determinado no concuerda con el supuesto hay que regresar al paso ii) y suponer el otro régimen

## VI.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

### VI.3.1 Canal natural

Se desea estimar la velocidad media de una corriente fluvial, cuyo material del cauce tiene las siguientes características: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.75$  mm y  $\sigma_g = 3.2$ ; la temperatura del agua es de 20 °C, la pendiente del lecho es  $S = 1.51 \times 10^{-4}$ , la sección transversal es muy ancha ( $R = d$ ), y el tirante es  $d = 6.28$  m.

*-Solución*

*- Sin tomar en cuenta los efectos producidos por la viscosidad del agua.*

i) Se compara el valor de la pendiente

Como  $S = 1.51 \times 10^{-4} < 0.006$ , el régimen puede ser superior o inferior por lo que hay que ir al paso ii)

ii) Se supone un tipo de régimen y se calcula la velocidad correspondiente

Suponiendo régimen inferior

$$U = 4.5295 \sqrt{(9.80665)(0.75 \times 10^{-3})} \left( \frac{6.28}{0.75 \times 10^{-3}} \right)^{0.5293} (1.51 \times 10^{-4})^{0.3887} 3.2^{-0.1606}$$

$$U = 1.257108026 \frac{m}{s}$$

I.iii) Se determina

$$F_g = \frac{1.2571}{\sqrt{(1.65)(9.80665)(0.75 \times 10^{-3})}} = 11.4114$$

y

$$F_g^* = 1.74 (1.51 \times 10^{-4})^{-1/3} = 32.6756$$

iv) Se valuar la relación  $\frac{F_g}{F_g^*}$ , y se verifica el tipo de régimen

$$\frac{F_g}{F_g^*} = \frac{11.4114}{32.6756} = 0.3492 < 1$$

por tanto, régimen supuesto se verifica, es decir se trata de régimen inferior.

*-Tomando en cuenta los efectos producidos por la viscosidad del agua.*

i) Se compara el valor de la pendiente

Como  $S = 1.51 \times 10^{-4} < 0.006$ , el régimen puede ser superior o inferior por lo que hay que ir al paso ii)

ii) Se supone un tipo de régimen y se calcula la velocidad correspondiente

Si se considera que el régimen es inferior:

$$U = 4.5295 \sqrt{(9.80665)(0.75 \times 10^{-3})} \left( \frac{6.28}{0.75 \times 10^{-3}} \right)^{0.5293} (1.51 \times 10^{-4})^{0.3887} 3.2^{-0.1606}$$

$$U = 1.2571 \frac{m}{s}$$

iii) Se determina

$$F_g = \frac{1.2571}{\sqrt{(1.65)(9.80665)(0.75 \times 10^{-3})}} = 11.4114$$

y

$$F_g^* = 1.74 (1.51 \times 10^{-4})^{-1/3} = 32.6756$$

iv) Se obtiene

$$\frac{D_{50}}{\delta} = \frac{(0.75 \times 10^{-3}) \sqrt{9.80665(6.28)(1.51 \times 10^{-4})}}{11.6(1.00667 \times 10^{-6})} = 6.1936$$

El valor de  $v$  se tomó de la tabla 7.2 del Manual de Ingeniería de Ríos “*Origen y Propiedades de los Sedimentos*” (ref 8). Para una temperatura de 20 °C,  $v = 1.00667 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

v) Se valúa el  $F_{g(\text{limite})}$  que delimita el régimen de transición:  
 Límite inferior del régimen de transición  $F_{g(\text{INFERIOR})}$ :

Dado que  $\frac{D_{50}}{\delta} = 6.193623 \geq 2$

$$F_{g(\text{INFERIOR})} = 0.8(32.6756) = 26.1405$$

vi) Se verifica el tipo de régimen

Como  $F_g = 11.4114 \leq F_{g(\text{INFERIOR})} = 26.14$  el régimen supuesto se verifica, es decir se trata de régimen inferior.

### V.3.2 Cauce de Laboratorio

Datos:

Material del fondo o lecho: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.25 \text{ mm}$  y  $\sigma_g = 1.48$ . La pendiente del canal es  $S = 2.5 \times 10^{-4}$ , la temperatura del agua es de 18 °C, la sección transversal es rectangular y el radio hidráulico asociado a la rugosidad del lecho es  $R_b = 0.48 \text{ m}$ .

-Solución

- Sin tomar en cuenta los efectos producidos por la viscosidad del agua.

i)  $S = 2.5 \times 10^{-4} < 0.006$ , el régimen puede ser superior o inferior por lo que hay que ir al paso ii)

ii)  $U = 0.4178 \text{ m/s}$

iii)  $F_g = 6.569$

$$F_g^* = 27.6208$$

iv)  $F_g/F_g^* = 0.2378 < 1$ , por lo tanto el régimen si es inferior

- Tomando en cuenta los efectos producidos por la viscosidad del agua.

i)  $S = 2.5 \times 10^{-4} < 0.006$ , el régimen puede ser superior o inferior por lo que hay que ir al paso ii)

ii)  $U = 0.4178$  m/s

iii)  $F_g = 6.569$

$$F_g^* = 27.6208$$

iv)  $D_{50}/\delta = 0.64075$

v)  $F_{g(\text{INFERIOR})} = 18.1938$

vi)  $F_g = 6.569 \leq F_{g(\text{INFERIOR})} = 18.1938$ , por lo tanto el régimen si es inferior

#### VI.4 TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ y $R/D_{50}$

Para transformar y reducir el método de Brownlie a una ecuación adimensional, se procedió de la siguiente manera (ref 14):

Dado que las ecs (6.19) prácticamente están en la forma deseada, basta con dividir ambos miembros de

las ecs (6.19) entre  $\sqrt{g D_{50}}$

Para el régimen inferior:

$$\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = 4.5294 \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.5292} S^{0.3887} \sigma_g^{-0.1606} \quad (6.27a)$$

Para el régimen superior:

$$\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = 7.5153 \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.27b)$$

En las ecs (6.27), si se desprecia la viscosidad del agua, el límite entre el régimen inferior y el superior está definido por

$$\text{Si } \frac{F_g}{F_g^*} < 1 \quad \text{el régimen es inferior.}$$

$$\text{Si } \frac{F_g}{F_g^*} \geq 1 \quad \text{el régimen es superior.}$$

siendo

$$F_g = \frac{U}{\sqrt{g(S_s - 1) D_{50}}} \quad (6.21)$$

y

$$F_g^* = 1.74 S^{-1/3} \quad (6.20)$$

Pero si se toma en cuenta la viscosidad del agua, el límite entre el régimen inferior y el superior se establece de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{Si } F_g &\leq F_{g(\text{INFERIOR})} && \text{el régimen es inferior.} \\ \text{Si } F_g &\geq F_{g(\text{SUPERIOR})} && \text{el régimen es superior.} \\ \text{Si } F_{g(\text{INFERIOR})} &\leq F_g \leq F_{g(\text{SUPERIOR})} && \text{el régimen es de transición} \end{aligned}$$

donde  $F_{g(\text{INFERIOR})}$  y  $F_{g(\text{SUPERIOR})}$  están definidos en las ecs (6.25) y (6.26).

#### VI.4.1 Determinación del intervalo de pendientes en el que el método es múltiplemente valuado.

VI.4.1.1- Los efectos producidos por la viscosidad del agua son despreciables.

Para precisar los límites del intervalo de pendientes,  $S_{\text{mín}}$  y  $S_{\text{máx}}$ , en el que el método es múltiplemente valuado, se parte de las ecs (6.19) a (6.21). Para encontrar el límite inferior de dicho intervalo, se dividen ambos miembros de la ec (6.15b) entre  $\sqrt{g(S_s - 1)D_{50}}$ , y se obtiene que

$$F_g = \frac{U}{\sqrt{g(S_s - 1)D_{50}}} = 7.5153 \frac{1}{\sqrt{(S_s - 1)}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.28a)$$

luego, se sustituye en la ec (6.28a) la ec (6.20), ya que en la condición límite se tiene que satisfacer que  $F_g = F_g^*$ , es decir

$$1.74 S^{-1/3} = 7.5153 \frac{1}{\sqrt{(S_s - 1)}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} S^{0.4604} \sigma_g^{-0.12824} \quad (6.29a)$$

Por último, de la ec (6.29a) se despeja la pendiente,  $S$ , para obtener así la función que define el límite inferior del intervalo mencionado, es decir

$$S_{\text{mín}} = \left[ \frac{7.5153}{1.74} \frac{1}{\sqrt{(S_s - 1)}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} \sigma_g^{-0.12824} \right]^{-1.25945} \quad (6.30a)$$

De manera análoga se deduce la ecuación para precisar el límite superior de dicho intervalo, esto es:

$$S_{\text{máx}} = \left[ \frac{4.5294}{1.74} \frac{1}{\sqrt{(S_s - 1)}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.5292} \sigma_g^{-0.1606} \right]^{-1.38504} \quad (6.30b)$$

VI.4.1.2- Los efectos producidos por la viscosidad del agua son importantes.

Como en el caso anterior, se requiere encontrar un par de funciones que definan los límites del intervalo de que se trata,  $S_{\min}$  y  $S_{\max}$ . Para encontrar estos límites, se utilizan las ecs (6.19), (6.20), (6.25) y (6.26), con las que se puede demostrar, procediendo de manera análoga que en el caso anterior, que

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} < 2$$

$$S_{\min} = \left[ \frac{7.5153 \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} \sigma_g^{-0.12824}}{1.74 \sqrt{(S_s - 1)} 10^{\left[ -0.02469 + 0.1517 \log\left( \frac{D_{50}}{\delta} \right) + 0.8381 \log\left( \frac{D_{50}}{\delta} \right)^2 \right]}} \right]^{-1.25945} \quad (6.31a)$$

$$S_{\max} = \left[ \frac{4.5294 \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.5292} \sigma_g^{-0.1606}}{1.74 \sqrt{(S_s - 1)} 10^{\left[ -0.2026 + 0.07026 \log\left( \frac{D_{50}}{\delta} \right) + 0.933 \log\left( \frac{D_{50}}{\delta} \right)^2 \right]}} \right]^{-1.38504} \quad (6.31b)$$

$$\text{Si } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2$$

$$S_{\min} = \left[ \frac{7.5153}{2.175} \frac{1}{\sqrt{(S_s - 1)}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.6005} \sigma_g^{-0.12824} \right]^{-1.25945} \quad (6.32a)$$

$$S_{\max} = \left[ \frac{4.5294}{1.392} \frac{1}{\sqrt{(S_s - 1)}} \left( \frac{R}{D_{50}} \right)^{0.5292} \sigma_g^{-0.1606} \right]^{-1.38504} \quad (6.32b)$$

siendo

$$\frac{D_{50}}{\delta} = \frac{D_{50} U^*}{11.6 \nu} \quad (6.24)$$

La representación gráfica de las ecs (6.27), para diferentes condiciones, se muestra en las figs 6.7 a 6.12.

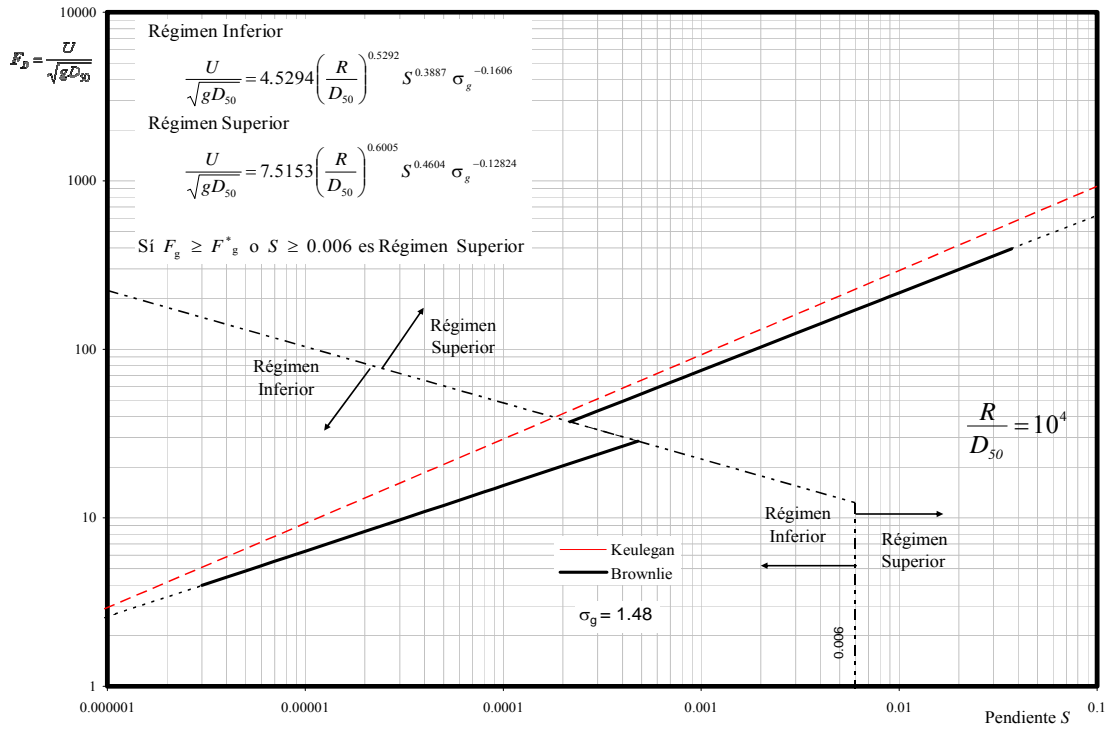


Fig 6.7 Método de Brownlie en el plano  $(S, F_D)$ . Sin considerar la viscosidad del agua, según García Flores (ref 14).

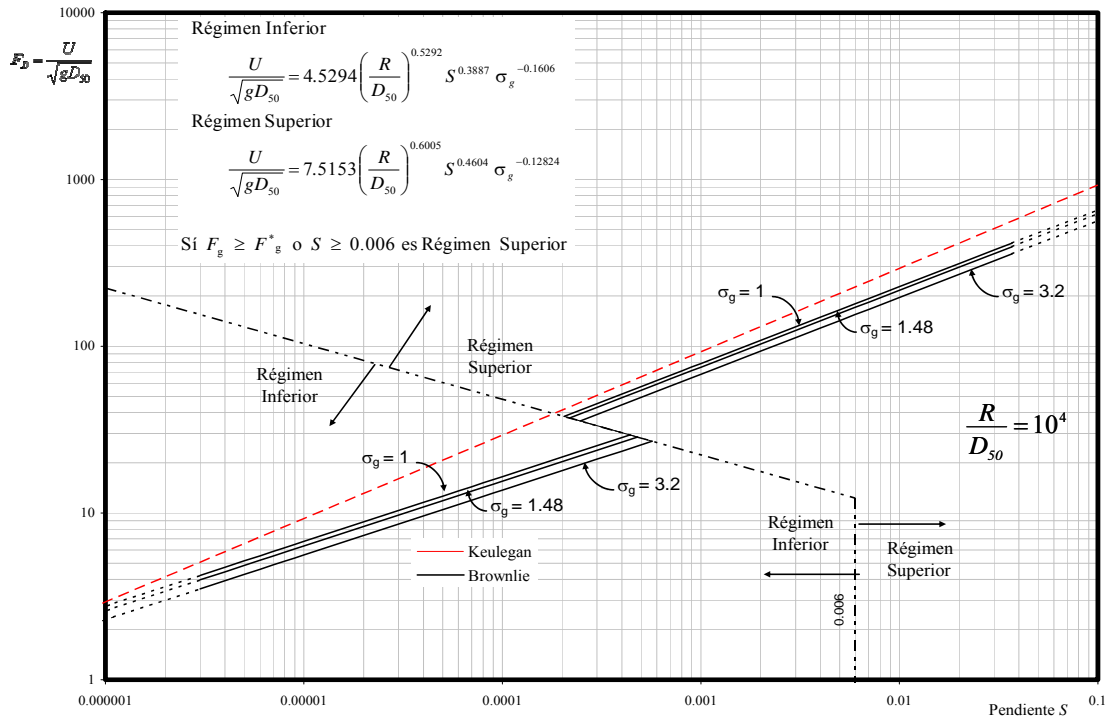


Fig 6.8 Método de Brownlie en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación de  $\sigma_g$ , para  $R/D$  constante. Sin considerar la viscosidad del agua, según García Flores (ref 14).



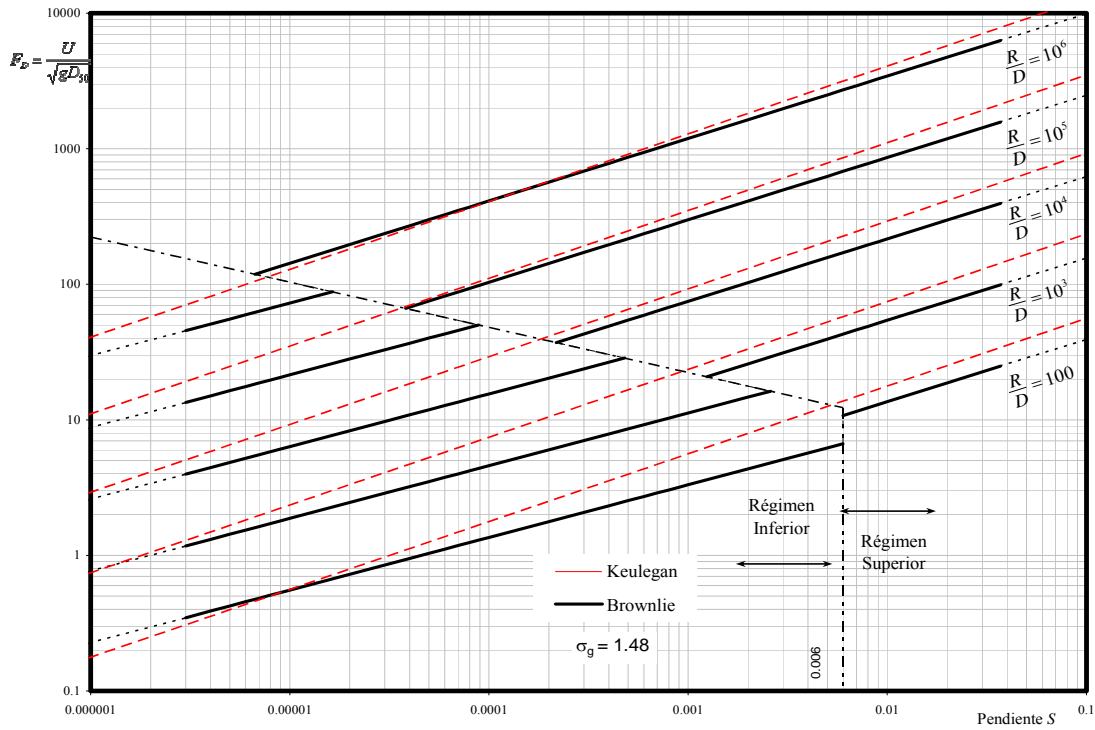


Fig 6.9 Método de Brownlie en el plano  $(S, F_D)$ . Sin considerar la viscosidad del agua, según García Flores (ref 14)

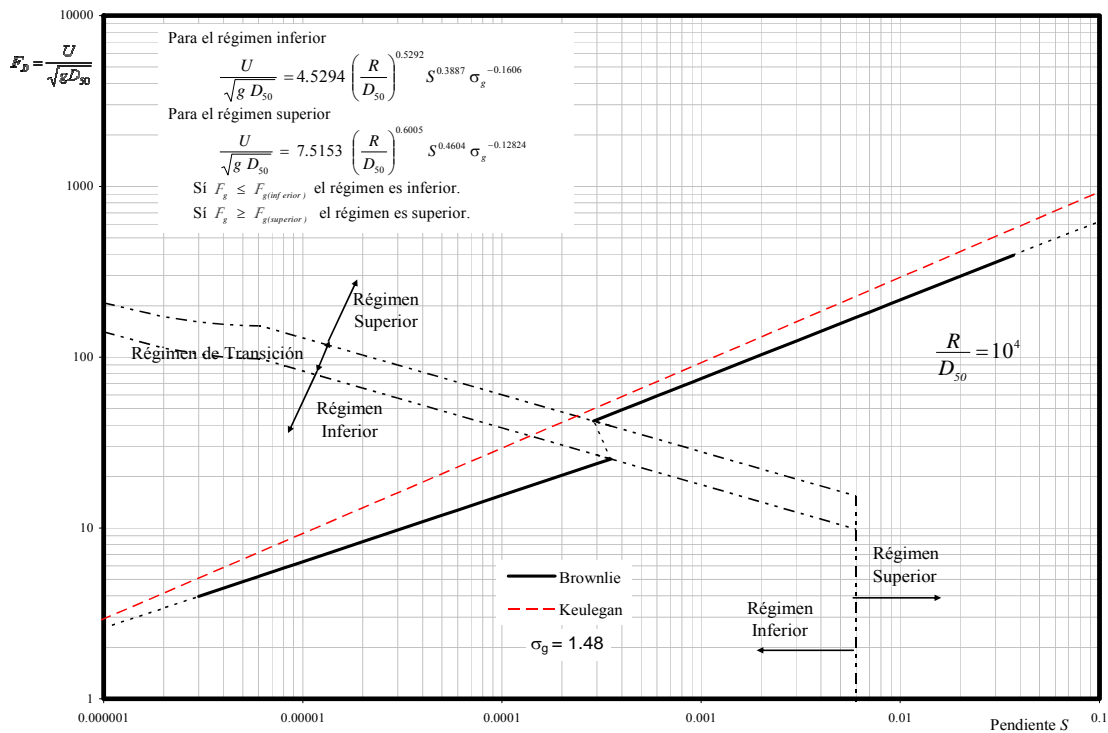


Fig 6.10 Método de Brownlie en el plano  $(S, F_D)$ , considerando la viscosidad del agua, según García Flores (ref 14)

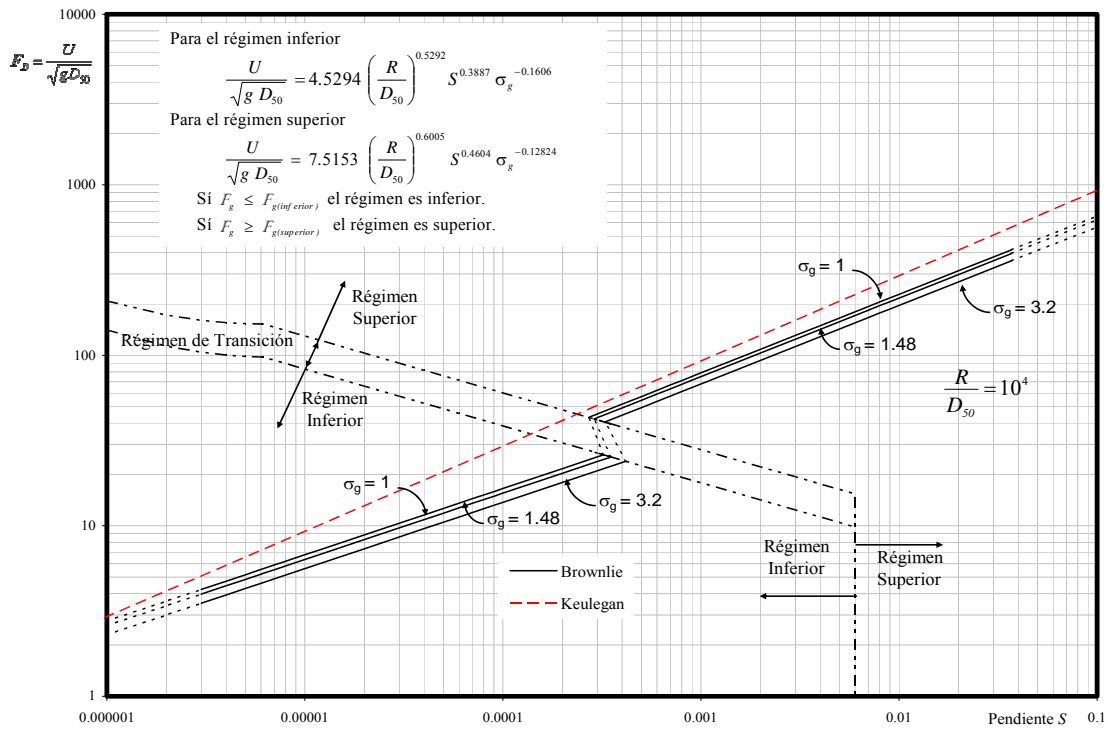


Fig 6.11 Método de Brownlie en el plano  $(S, F_D)$ . Sensibilidad a la variación de  $\sigma_g$ , para  $R/D$  constante, considerando la viscosidad del agua, según García Flores (ref 14)

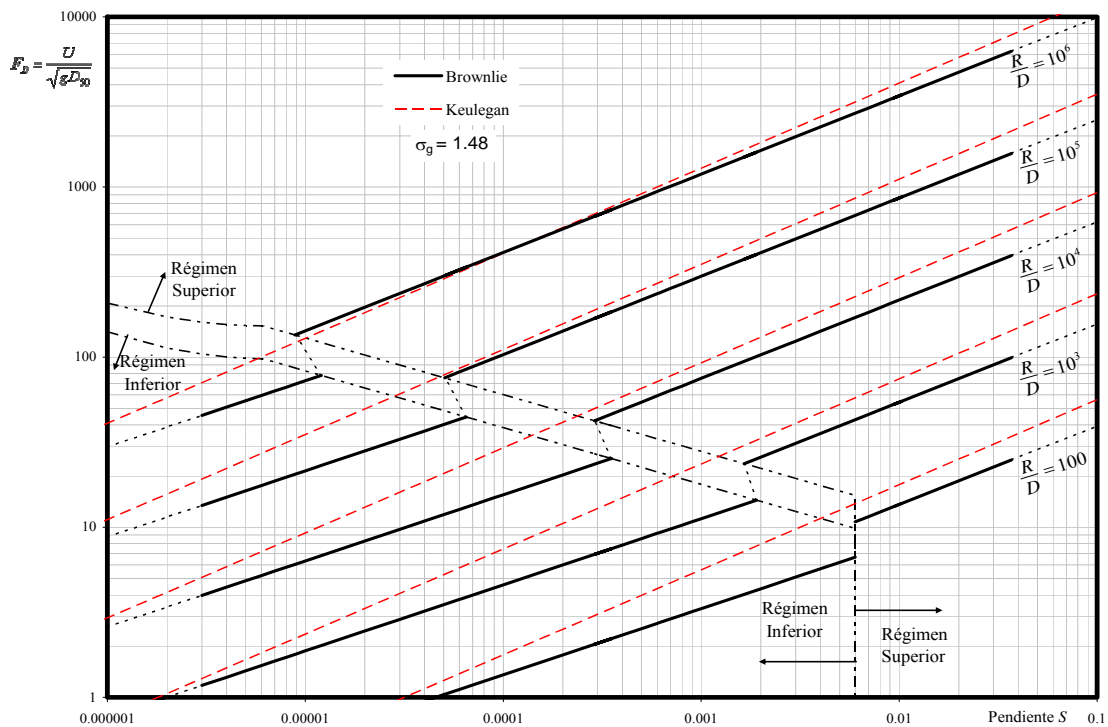


Fig 6.12 Método de Brownlie en el plano  $(S, F_D)$ , considerando la viscosidad del agua, según García Flores (ref 14)

## VI.5 COMENTARIOS

James P. Bennett (ref 2) utilizó el método de Brownlie para compararlo con datos del río Mississippi y del río Grande. Encontró que con los datos del Río Grande, el método de Brownlie subestimaba la velocidad para gastos unitarios mayores de  $0.2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ , mientras que con los del río Mississippi, sobreestimaba el tirante para gastos unitarios mayores de  $20 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ .

A continuación se presentan los comentarios y críticas de García Flores al método de Brownlie, con base en los diagramas que elaboró, figs (6.7) a (6.12):

En la fig 6.7 se observa que tanto la rama del régimen inferior como la del superior quedan debajo de la línea de Keulegan, lo que, por lo general, es lógico, pues ello significa que, bajo las mismas condiciones, en un cauce aluvial o fondo móvil, la resistencia al flujo es mayor que en un fondo rígido, y por ello las velocidades que pronostica Brownlie son menores que las que se estiman con la ecuación de Keulegan (ec 1.5). Además, La resistencia al flujo es más grande en el régimen inferior que en el superior, y en ambos regímenes la resistencia aumenta conforme crece la pendiente de energía, correspondiendo los mayores aumentos al régimen inferior. Asimismo, se nota claramente, por un lado, que la transición, cuando se ignora la viscosidad del agua (figs 6.7 a 6.9), es brusca, discontinua y no delimita una región o franja donde podría tener lugar el régimen de transición, como en las figs 6.10 a 6.12; por el otro, también es notable la zona donde se traslapan los regímenes del lecho, o sea el intervalo de pendientes de energía en el que, para una pendiente dada en dicho intervalo, se pueden pronosticar dos velocidades distintas, ya que es posible satisfacer en ese intervalo tanto las condiciones del régimen inferior como las del superior, y la amplitud de tal intervalo es mayor cuando no se tiene en cuenta a la viscosidad del agua.

La fig 6.8 muestra la sensibilidad del método de Brownlie al parámetro  $\sigma_g$ , y en ella se nota bien que cuanto más grande es la desviación estándar geométrica de los tamaños de las partículas que constituyen el lecho, tanto mayor es la resistencia al flujo; o sea que, bajo igualdad de condiciones, la velocidad media del flujo es menor en un cauce constituido por partículas de muy diferentes tamaños que en uno formado por granos de tamaño uniforme, y que cuanto más extendida sea la granulometría de un cauce, tanto menor será la velocidad media del flujo.

Los efectos de la variación del parámetro  $R/D_{50}$  se presentan en la fig 6.9, donde se observa que, bajo igualdad de condiciones y en situaciones de régimen inferior, conforme crece  $R/D_{50}$ , aumenta la

resistencia al flujo. Sin embargo, lo contrario ocurre en el régimen superior, ya que al crecer  $R/D_{50}$ , disminuye dicha resistencia, y se observa que si el parámetro  $R/D_{50}$  crece más allá de cierto límite, existe un amplio intervalo de pendientes en el que se pronostican no sólo velocidades iguales a las que se obtienen con la ecuación de Keulegan, sino mayores, pues parte de la rama del régimen superior queda por arriba de la línea de Keulegan. En esas situaciones el método sobreestimaría las velocidades. De ahí la necesidad de conocer detalladamente los intervalos de los datos sobre los que se fundamenta una fórmula o método, ya que ello ayuda a establecer bien los límites donde rige realmente, y así evitar situaciones o extrapolaciones que conduzcan a pronósticos absurdos o erróneos.

Además, como el valor del parámetro  $R/D_{50}$  aumenta al crecer el tirante o al disminuir  $D_{50}$ , o bien, el valor de  $R/D_{50}$  disminuye al decrecer el tirante o al aumentar el  $D_{50}$ , la fig 6.9 permite analizar también la susceptibilidad del método de Brownlie a la variación del tirante o a la del  $D_{50}$ . Así, por ejemplo, bajo igualdad de condiciones y en situaciones de régimen inferior, conforme disminuye el diámetro  $D_{50}$  de la granulometría del cauce, se agranda el parámetro  $R/D_{50}$ , aumentando así la resistencia al flujo. Pero lo contrario sucede en el régimen superior, ya que al disminuir el  $D_{50}$ , disminuye dicha resistencia, y se observa que si el  $D_{50}$  empequeñece más allá de cierto límite, existe un amplio intervalo de pendientes en el que se pronostican no sólo velocidades iguales a las que se obtienen con la ecuación de Keulegan, sino mayores, pues parte de la rama del régimen superior queda por arriba de la línea de Keulegan. Análogamente, en régimen inferior, conforme el tirante crece, se agranda el valor del parámetro  $R/D_{50}$  y aumenta la resistencia..., etc.



## VII. MÉTODO DE NNADI Y WILSON (1995).

### VII.1 PRESENTACIÓN

Con el fin de estudiar las formas del fondo, en especial durante el cambio de régimen de dunas a fondo plano, o sea la transición, Fidelia N. Nnadi y Kenneth C. Wilson (ref 22) realizaron experimentos en un conducto a presión con flujos que arrastraban el material de un lecho arenoso. Como resultado de su trabajo, establecieron expresiones sencillas y similares a la ecuación de Keulegan (1938). Dichas expresiones tienen como particularidad que, los datos con los que fueron calibradas, corresponden a valores grandes de  $\tau_*$ , es decir muy por arriba de la curva de inicio de arrastre de Shields.

Nnadi y Wilson, con base en sus datos experimentales, concluyeron que en el régimen de fondo plano con arrastre, la rugosidad efectiva,  $k$ , se incrementa conjuntamente con  $\tau_0$ , ocasionado esto por los efectos intergranulares en las capas de sedimentos que se encuentra en movimiento. También, observaron que la relación entre coeficiente de rugosidad efectiva y el diámetro de partícula,  $k/D$ , aumentaba junto con el parámetro de Shields,  $\tau_*$ . A su vez, observaron que la relación entre la velocidad media del flujo de agua y velocidad asociada al esfuerzo tangencial o cortante,  $U/U_*$ , dependía de la pendiente,  $S$ , y de la densidad relativa del material cauce,  $S_s$ , pero que era independiente del diámetro de las partículas,  $D$ .

Según Nnadi y Wilson, el régimen de fondo plano con arrastre o transporte de partículas es muy similar al flujo de agua en fondo fijo y rugoso, y que la transición de fondo plano sin transporte a fondo plano con transporte es análoga también a la que tiene lugar en fondo fijo, o sea a la transición de pared

---

---

lisa a rugosa. De acuerdo con esto, para el cálculo de la velocidad media del flujo en cauces aluviales, parten de la ecuación de Keulegan, ec (7.1), que es la integración de la ley universal de velocidades en flujo turbulento y fronteras rugosas de Prandtl – Kármán.

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{R_b}{k}\right) + B_1 \quad (7.1)$$

en la que  $R_b$  es el radio hidráulico asociado a la rugosidad del lecho, en m;  $\kappa$  es la constante adimensional de Kármán,  $\kappa = 0.4$  ;  $k$  es la altura de la rugosidad o rugosidad equivalente que, como otros autores, consideraron que  $k = 2D$ , siendo  $D$  el diámetro de las partículas, en m;  $B_1$  parámetro adimensional que depende varios factores, entre ellos la forma de la sección transversal del canal, que para el caso de canal infinitamente ancho,  $B_1 = 6.0$ .

$$\frac{U}{U_*} = 2.5 \ln \frac{R_b}{2D} + 6.0 \quad (7.2)$$

Al sumar a ambos miembros de la ec (7.2) el término  $2.5 \ln[S/(S_s - 1)]$ , se obtiene

$$\frac{U}{U_*} + 2.5 \ln\left(\frac{S}{S_s - 1}\right) = 2.5 \ln\left[\frac{R_b}{D} \left[\frac{S}{S_s - 1}\right]\right] + 4.3 \quad (7.3)$$

El parámetro de Shields lo expresaron también como

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{\rho g (S_s - 1) D} = \frac{S R_b}{(S_s - 1) D_{50}} \quad (7.4)$$

por lo que la ec (7.3) se puede escribir

$$\frac{U}{U_*} + 2.5 \ln\left(\frac{S}{S_s - 1}\right) = 2.5 \ln(\tau_*) + 4.3 \quad (7.5)$$

o bien

$$\frac{U}{U_*} = 2.5 \ln(\tau_*) + 4.3 - 2.5 \ln\left(\frac{S}{S_s - 1}\right) \quad (7.6)$$

que rige para régimen inferior.

Para la determinación de la relación de velocidades para el régimen superior, Nnadi y Wilson partieron de la ec. (7.3), y sustituyeron  $k$  por  $k = (1/2) \delta_s$ , siendo  $\delta_s$  el espesor de la capa en movimiento:

$$\frac{U}{U_*} = 2.5 \ln\left(\frac{R_b}{\delta_s}\right) + 7.7 \quad (7.7)$$

Previamente, Nnadi y Wilson (1992) presentaron que el valor de la relación  $\delta_s/R_b$  se podía calcular de la expresión:

$$\frac{\delta_s}{R_b} = \left[ (\bar{C} \tan \phi')^{-1} \right] \left[ \frac{S}{(S_s - 1)} \right] = 7.5 \left[ \frac{S}{(S_s - 1)} \right] \quad (7.8)$$

Al sustituir la ec (7.8) en la ec. (7.7), se obtiene que para el régimen Superior:

$$\frac{U}{U_*} + 2.5 \ln \left( \frac{S}{S_s - 1} \right) = 2.7 \quad (7.9)$$

o sea

$$\frac{U}{U_*} = 2.7 - 2.5 \ln \left( \frac{S}{S_s - 1} \right) \quad (7.10)$$

Nnadi y Wilson indicaron el factor de fricción en régimen de fondo plano con arrastre de partículas es mayor que en fondo plano sin arrastre, y consideraron que la transición entre los regímenes inferior y superior es de manera súbita, es decir, que no se presenta el régimen de transición. Para distinguir entre los dos regímenes, utilizaron el parámetro de Shields, esto es

Si  $\tau_* < 1$ , el régimen es Inferior.

Si  $\tau_* > 1$ , el régimen es Superior.

#### INTERVALO DE LOS DATOS:

Estos autores no presentaron sus datos experimentales. Se sabe que utilizaron arenas (0.4 – 1.1 mm), pero no dieron sus características, ni la de los flujos estudiados, ni gráficos o diagramas.

#### VII.2 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO

Nnadi y Wilson no propusieron ningún procedimiento de cálculo. Sin embargo, utilizando sus expresiones se propone el siguiente procedimiento:

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{\rho g (S_s - 1) D} = \frac{S R_b}{(S_s - 1) D}$$

i) Calcular

ii) Determinar el tipo de régimen

Si  $\tau_* < 1$ , el régimen es Inferior.

Si  $\tau_* > 1$ , el régimen es Superior.

iii) Obtener  $U$

Para el régimen Inferior:

$$\frac{U}{U_*} = 2.5 \ln(\tau_*) + 4.3 - 2.5 \ln \left( \frac{S}{S_s - 1} \right) \quad (7.6)$$



y para el régimen Superior:

$$\frac{U}{U_*} = 2.7 - 2.5 \ln\left(\frac{S}{S_s - 1}\right) \quad (7.10)$$

donde

$$U_* = \sqrt{g R_b S} \quad (7.11)$$

### VII.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

#### VII.3.1 Canal natural

Se desea estimar la velocidad media de una corriente fluvial, cuyo material del cauce tiene las siguientes características: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.75$  mm y  $\sigma_g = 3.2$ ; la temperatura del agua es de 20 °C, la pendiente del lecho es  $S = 1.51 \times 10^{-4}$ , la sección transversal es muy ancha ( $R = d$ ), y el tirante es  $d = 6.28$  m.

-Solución

i) Calcular

$$\tau_* = \frac{6.28 (0.000151)}{1.65 (0.75 \times 10^{-3})} = 0.7663$$

ii) Determinar el tipo de régimen

Si  $\tau_* < 1$  es régimen Inferior

Si  $\tau_* \geq 1$  es régimen Superior

Ya que  $\tau_* = 0.7663 < 1$  el régimen es Inferior

iii) Obtener  $U$

Para el régimen Inferior:

$$U = \sqrt{9.80665 (6.28)(0.000151)} \left[ 2.5 \ln(0.7662868687) + 4.3 - 2.5 \ln\left(\frac{0.000151}{1.65}\right) \right]$$

$$U = 2.5923 \frac{m}{s}$$

#### VII.3.2

#### Cauce de laboratorio

Datos:

Material del fondo o lecho: No cohesivo y de densidad relativa  $S_s = 2.65$ ; los tamaños de las partículas que lo constituyen siguen una distribución log-normal, con  $D_{50} = 0.25$  mm y  $\sigma_g = 1.48$ . La pendiente

del canal es  $S = 2.5 \times 10^{-4}$ , la temperatura del agua es de 18 °C, la sección transversal es rectangular y el radio hidráulico asociado a la rugosidad del lecho es  $R_b = 0.48$  m.

-Solución

i)  $\tau_* = 0.2442$

ii) Como  $\tau_* = 0.2442 < 1$  el régimen es Inferior

iii)  $U = 0.7155$  m/s

#### VII.4 TRANSFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $S$ , $F_D$ y $R/D_{50}$

Para transformar y reducir el método de Nnadi y Wilson a una ecuación adimensional, se procedió de la siguiente manera (ref 14):

Para el régimen inferior, se despeja la velocidad media del flujo,  $U$ , de la ec (7.6)

$$U = U_* \left[ 2.5 \ln(\tau_*) + 4.3 - 2.5 \ln\left(\frac{S}{S_s - 1}\right) \right] \quad (7.12)$$

al considerar las leyes de los logaritmos, la ec (7.12) se puede escribir

$$U = U_* \left[ 2.5 \ln\left(\tau_* \frac{S_s - 1}{S}\right) + 4.3 \right] \quad (7.13)$$

luego, al tener en cuenta la ec (7.4) en la ec (7.13)

$$U = U_* \left[ 2.5 \ln\left(\frac{R}{D_{50}}\right) + 4.3 \right] \quad (7.14)$$

después, se sustituye la ec. (7.11) en la ec. (7.14)

$$U = \sqrt{g R S} \left[ 2.5 \ln\left(\frac{R}{D_{50}}\right) + 4.3 \right] \quad (7.15)$$

por último, se dividen ambos miembros de la ec. (7.15) entre  $\sqrt{g D_{50}}$

$\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = \sqrt{\frac{R}{D_{50}}} \sqrt{S} \left[ 2.5 \ln\left(\frac{R}{D_{50}}\right) + 4.3 \right] \quad (7.16)$
---

En forma análoga, se realiza la transformación para el caso de régimen superior, obteniendo la siguiente expresión

$\frac{U}{\sqrt{g D_{50}}} = \sqrt{\frac{R}{D_{50}}} \sqrt{S} \left[ 2.5 \ln\left(\frac{S_s - 1}{S}\right) + 2.7 \right] \quad (7.17)$
--

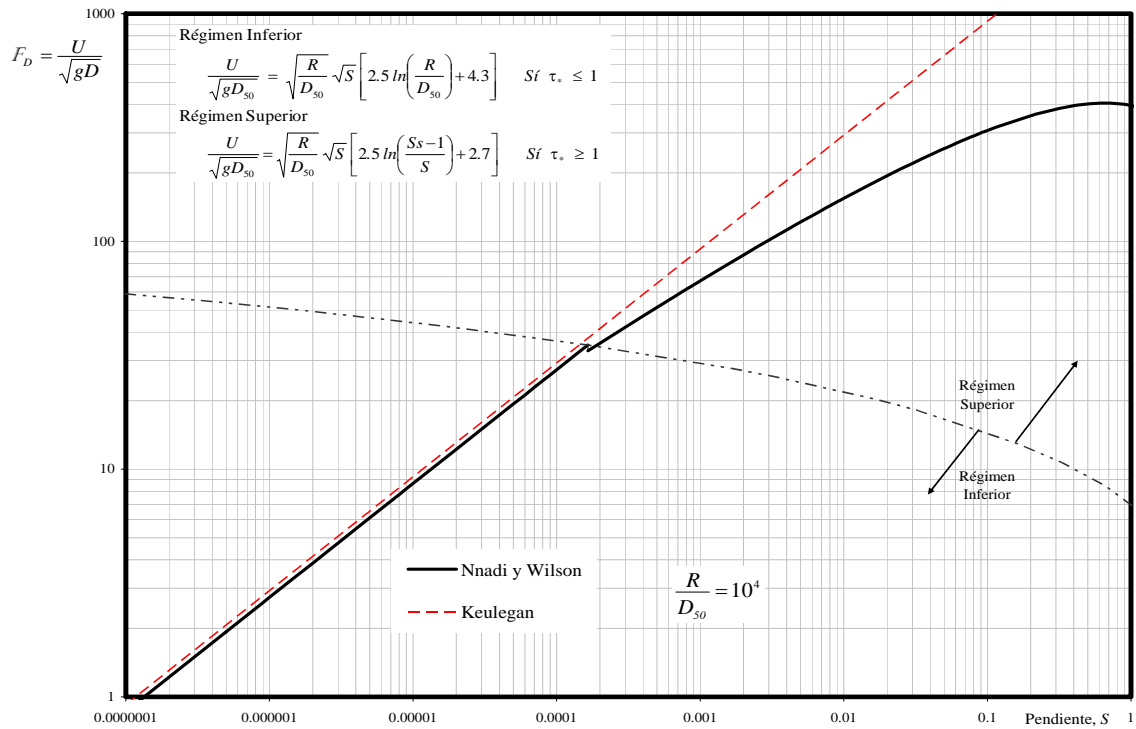


Fig 7.1 Método de Nnadi y Wilson en el plano  $(S, F_D)$ , según García Flores (ref 14).

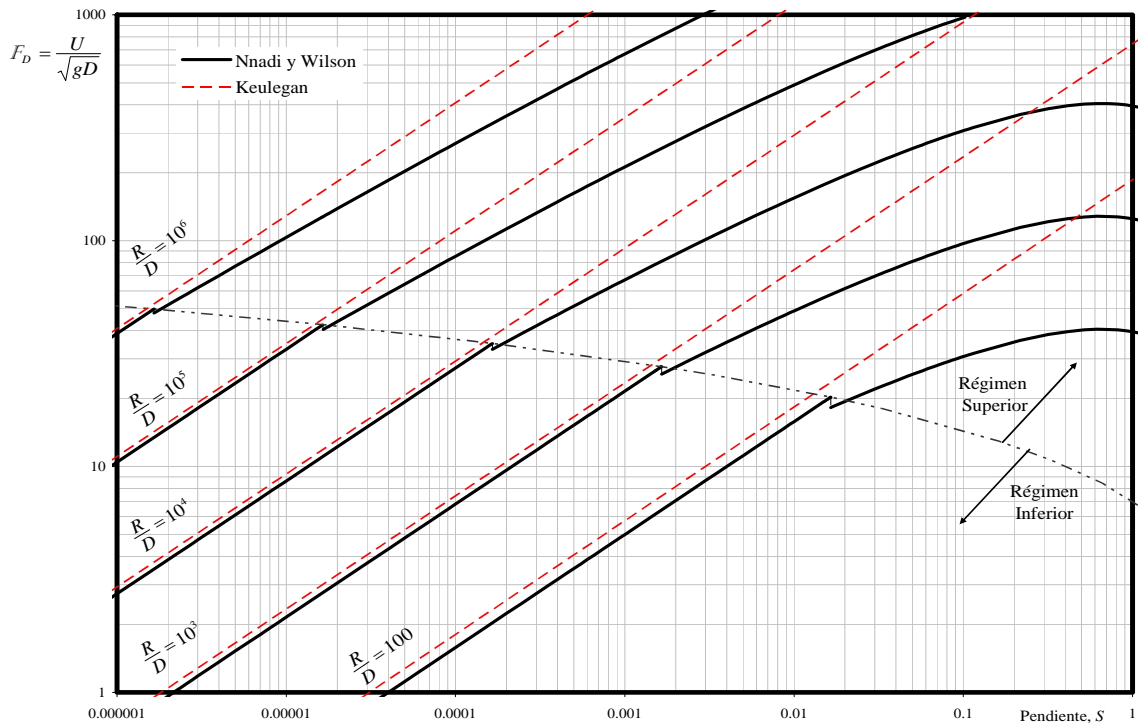


Fig 7.2 Método de Nnadi y Wilson en el plano  $(S, F_D)$ , para diferentes valores de  $R/D$ , según García Flores (ref 14).

## VII.5 COMENTARIOS

A continuación se presentan los comentarios y críticas de García Flores al método de Nnadi y Wilson, con base en la transformación que realizó, figs (7.1) a (7.2):

El objetivo del artículo de Nnadi y Wilson era estudiar la transición entre régimen inferior y superior. Dicho objetivo no se cumplió, ya que los autores definieron dicha transición como brusca. En las figs 7.1 y 7.2 se observa que el cambio de un régimen a otro, provoca una discontinuidad. Esta discontinuidad es menor mientras mayor es la relación  $R/D$ , pero no se define una región de transición. Además, se puede ver que al aumentar la relación  $R/D$ , la resistencia disminuye en ambos regímenes.

La rama del régimen inferior queda ligeramente por debajo de la línea de Keulegan cuando  $R/D$  es menor de mil, y para valores mayores coincide poco más o menos con la de Keulegan, por lo que, en general, los pronósticos en este tipo de régimen serán erróneos, ya que en este régimen del lecho las formas del fondo, según ellos, casi no ofrecen resistencia al flujo y, por consiguiente, las velocidades calculadas con el método de Nnadi y Wilson serán mucho mayores que las reales y muy similares a las pronosticadas por Keulegan. Sin embargo, en el régimen superior ocurre lo contrario, pues dicha resistencia crece al decrecer el valor de  $R/D$ , y si este valor no cambia, la resistencia al flujo también crece conforme aumenta la pendiente.





## VIII. COMPARACIÓN DE MÉTODOS Y CONCLUSIONES

A fin de contrastar resultados, la velocidad media del flujo en los canales de los ejemplos planteados, que fue calculada empleando los métodos presentados, se muestra en las tablas 8.1 y 8.2, en las que se indica también la magnitud real de dicha velocidad, medida en el sitio, y el tipo de régimen observado, lo que permite conocer el porcentaje de error en la velocidad calculada o pronosticada por cada método.

Se observa en la tabla 8.1 que para el canal natural, los métodos más precisos o acertados fueron el de Wu y Wang y el de Brownlie, y que los menos exactos o que pronostican con mayor error fueron el de Nnadi y Wilson y el White, Paris y Bettess. Para el caso del canal de laboratorio, tabla 8.2, los métodos subestimaron la velocidad media, por lo menos en un 23%, siendo el menos preciso el de White, Paris y Bettess, con casi el -60 % de error en su pronóstico, y es el único de los métodos presentados en que sus autores establecieron un procedimiento de cálculo.

Sin embargo, cuando no se conocen valores reales o medidos ni el tipo de régimen, como ocurre normalmente en la práctica, ¿cómo saber qué métodos pronosticarán más acertadamente la velocidad media del flujo en un cauce bajo estudio, y cuál de esos métodos es el mejor? Para esto se suele dar como norma que se utilicen únicamente los métodos que rigen en dicho cauce y, por ende, los que se fundamentan en condiciones o datos iguales o muy parecidos a los del cauce que interesa, de aquí la importancia de que los autores de una fórmula o método establezcan bien sus restricciones y el intervalo en el que fluctuaron sus datos. Aunque esta norma es condición necesaria, no es suficiente para garantizar buenos pronósticos. Los resultados en las tablas 8.1 y 8.2 son prueba de esto, pues hay

---

---

CAPÍTULO VIII COMPARACIÓN DE MÉTODOS Y CONCLUSIONES

diferencias grandes, y eso que estas tablas ponen a la vista tan solo una pequeña muestra de los muchos métodos o fórmulas existentes (refs 6, 11 a 14). Todavía más, aun cuando se cuenta con cierta información o datos reales, como la indicada en las tablas 8.1 y 8.2, surge la pregunta ¿las diferencias en la estimación de la velocidad o en los porcentajes de error se mantienen para otras condiciones o tipos de régimen?

Tabla 8.1 Magnitud de la velocidad media del flujo de agua en el canal natural de los ejemplos ( $S = 0.000151$ ,  $R/D = 8373.33$ ), según los métodos presentados.

Método	Velocidad Media, $U$ (m/s)	Froude de grano, $F_D$	Error (%)	Régimen
Wang y White (1993)	1.5757	18.3731	27.07	Inferior
Wu y Wang (1999)	1.2456	14.524	0.4516	Rizos y Dunas
White, Paris y Bettess (1982)	0.50188	7.315	-59.52	Inferior
Brownlie (1983) I. Sin efectos viscosidad	1.2571	14.6582	1.38	Inferior
Brownlie (1983) II. Con efectos viscosidad	1.2571	14.6582	1.38	Inferior
Nnadi y Wilson (1995)	2.5923	30.2269	109.05	Inferior
<b>Medición in situ</b>	<b>1.24</b>	<b>14.4587</b>	<b>0.0</b>	<b>Inferior</b>

Tabla 8.2 Magnitud de la velocidad media del flujo de agua en el canal de laboratorio de los ejemplos ( $S = 0.00025$ ,  $R/D = 1920$ ), según los métodos presentados.

Método	Velocidad Media, $U$ (m/s)	Froude de grano, $F_D$	Error (%)	Régimen
Wang y White (1993)	0.4275	8.6338	-23.43	Inferior
Wu y Wang (1999)	0.39719	8.0217	-28.85	Inferior
White, Paris y Bettess (1982)	0.22357	4.5152	-59.95	Inferior
Brownlie (1983) I. Sin efectos viscosidad	0.4178	8.4379	-25.17	Inferior
Brownlie (1983) II. Con efectos viscosidad	0.4178	8.4379	-25.17	Inferior
Nnadi y Wilson (1995)	0.7155	14.4503	28.16	Inferior
<b>Medición in situ</b>	<b>0.5583</b>	<b>11.2755</b>	<b>0.0</b>	<b>Inferior</b>



Una respuesta racional y objetiva a las interrogantes planteadas se obtiene utilizando los diagramas ( $S$ ,  $F_D$ ). En las figs (8.1) a (8.3) se presenta la comparación de los métodos expuestos, y en ellas se observa que, efectivamente, en el régimen inferior, los métodos de Wang y White, Brownlie, y Wu y Wang dan resultados muy similares, pero no siempre, sino sólo bajo ciertas condiciones o para determinar valores de  $S$  y  $R/D$ . Además, los diagramas permiten explicar el porqué en régimen inferior el método de White, Paris y Bettess pronostica velocidades tan bajas, y el de Nnadi y Wilson velocidades tan altas. Para el régimen superior, el método de Wang y White es el que estima la mayor resistencia al flujo o mayor pérdida de carga, por lo que, en general, pronosticará las velocidades más bajas, en tanto que el de Nnadi y Wilson tiende a pronósticos similares si los valores de  $R/D$  son menores de 100, fig 8.3; además, también en esta figura es notable el corrimiento y traslapo de los regímenes del lecho conforme cambia el valor de  $R/D$ , ya que hay situaciones o condiciones en que mientras para unos autores el régimen es inferior, para otros es superior o también de transición. El diagrama de la fig 8.3, a diferencia de los mostrados en las figs 8.1 y 8.2, se elaboró con datos distintos a los de los ejemplos vistos; sin embargo, con él solo hubiera bastado para analizar los resultados, explicar las discrepancias amplias y conocer las condiciones en las que las soluciones o pronósticos serían evidentemente erróneos.

Lamentablemente, las diferencias tan grandes en la estimación de la velocidad media del flujo, que pueden darse de un criterio a otro, indican que los métodos y fórmulas existentes no siempre conducen a pronósticos atinados. Efectivamente, al no existir todavía la ley universal de resistencia al flujo que permita predecir confiada y acertadamente la velocidad media de una corriente fluvial, esta tarea seguirá siendo todo un arte, pues se requiere, entre otras cosas, de conocimiento y experiencia.

Sin embargo, para inexpertos o expertos, se recomienda el empleo de los diagramas ( $S$ ,  $F_D$ ), pues se ha visto que tales diagramas son de gran utilidad o ayuda, ya que revelan, por un lado, el comportamiento de cada método en los diferentes regímenes del lecho, lo que permite visualizar y analizar eficaz y rápidamente las posibles soluciones; por el otro, facilitan la comparación general y objetiva de dos o más métodos entre sí, y no únicamente el contrastar resultados o casos particulares, como en las tablas 8.1 y 8.2. Además, tales diagramas sirven no sólo para explicar las soluciones o pronósticos ambiguos, que satisfacen ciertas condiciones en más de un régimen, sino también para conocer, y así evitar o rechazar, situaciones absurdas o ilógicas. Todo esto permite advertir los alcances reales de cada método, y delimitar correctamente las fronteras donde rige.

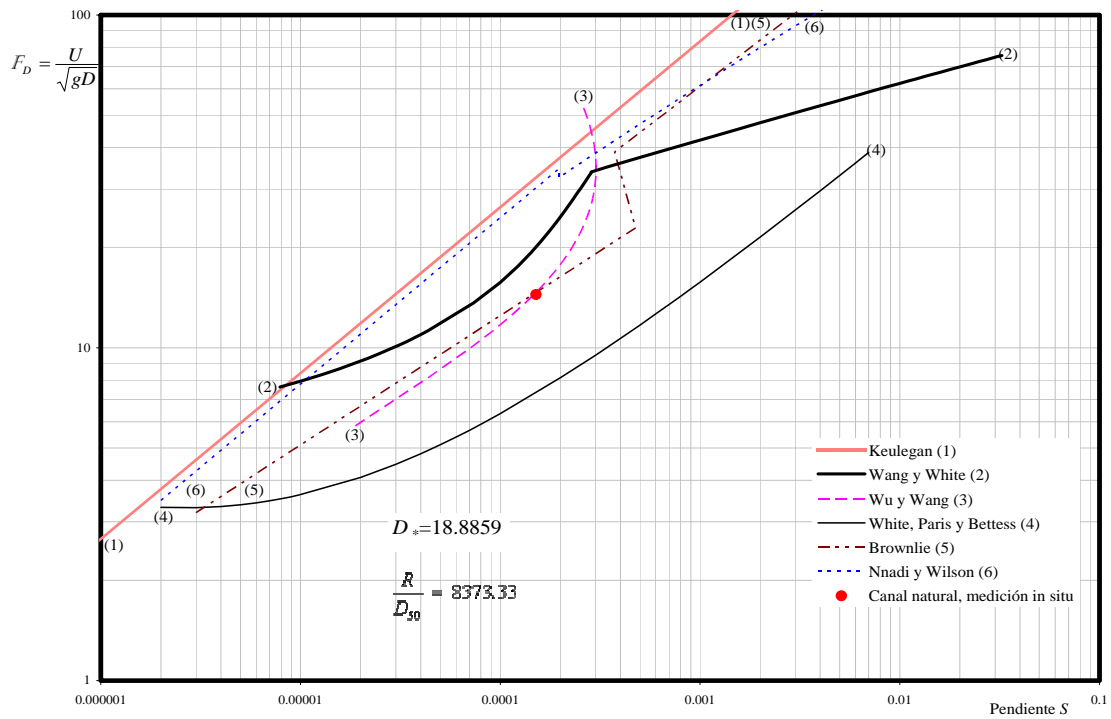


Fig 8.1 Comparación de métodos en el plano  $(S, F_D)$ , para  $R/D$  constante, canal natural, según García Flores (ref 14).

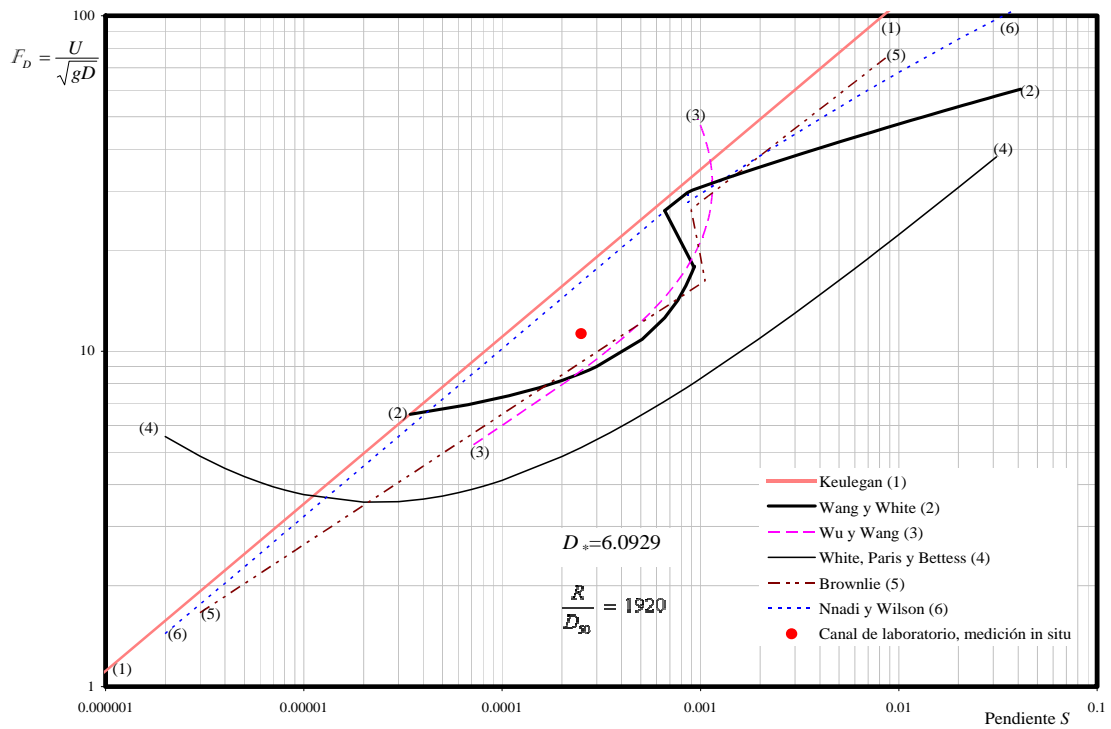


Fig 8.2 Comparación de los métodos en el plano  $(S, F_D)$ , para  $R/D$  constante, canal de laboratorio, según García Flores (ref 14).

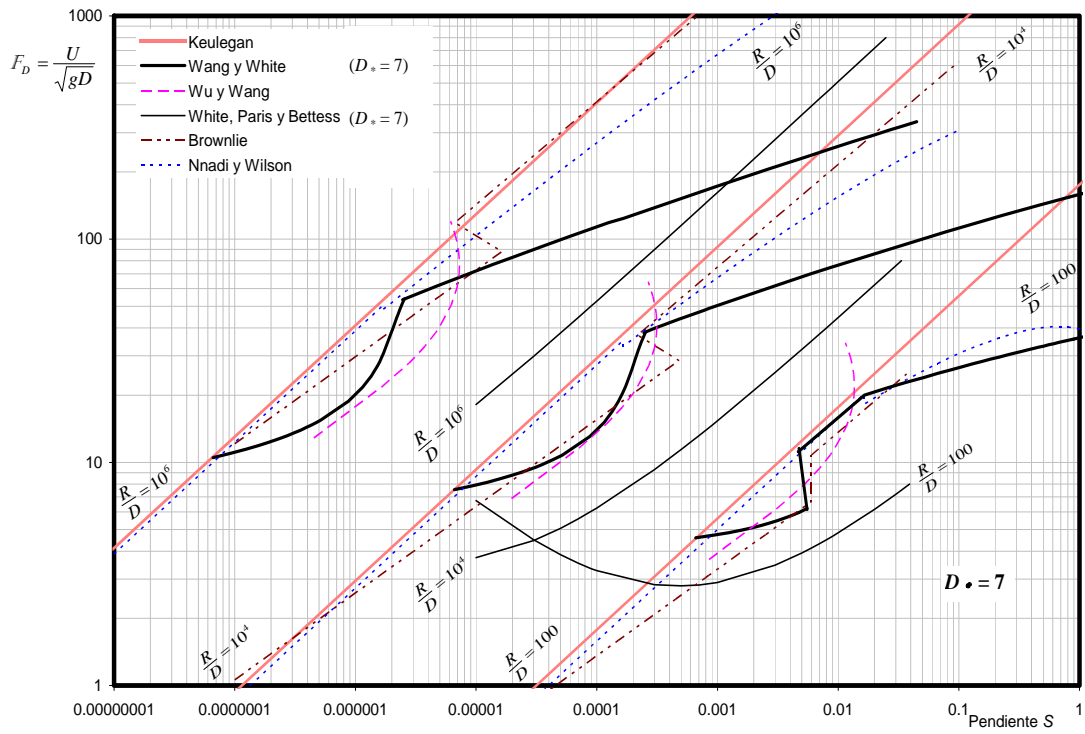


Fig 8.3 Comparación de los métodos en el plano  $(S, F_D)$ , para distintos valores de  $R/D$ , según García Flores (ref 14)





---

---

## BIBLIOGRAFÍA.

- 1) Atala, Gabriel. Tesis de Maestría: *Configuración de lechos arenosos. Estado del Arte*. Postgrado de Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, México (1989).
  - 2) Benett, S. y Best, J. *Discussion of Bed-Load Motion at High Shear stress: Dune Washout and Plane- Bed Flow* by Nnadin-Wilson, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE (Abril 1997).
  - 3) Brownlie, W. R. *Flow Depth in Sand-Bed Channels*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol 109, No 7, (Julio 1983).
  - 4) Bruschin, J. *Discussion of Flow Depth in Sand-Bed Channels* by Brownlie, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE.
  - 5) Chollet, J.P. y Cunge, J.A. *New Interpretation of Some Head Loss – Flow Velocity Relationships for Deformable Movable Beds*, journal of the IAHR, Vol. 17, No 1 (1979).
  - 6) Einstein, H.A. y Barbarossa, N.L. *River Channel Roughness*, Transactions, ASCE, Vol. 117, (1952)
  - 7) García Flores, M. *Fricción en Cauces Arenosos. Estado del Arte*. Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, México (Octubre, 1982).
  - 8) García F., Manuel y Martínez A., Armando. *Estudio Preliminar sobre Fluidificación de Lechos Arenosos Sujetos a Oleaje*. Series del Instituto de Ingeniería, No. 492, México (Junio, 1985).
  - 9) García Flores, M y Maza, A. *Inicio de Movimiento y Acorazamiento*. Capitulo 8 del Manual de Ingeniería de Ríos, Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No 592, México (Agosto 1997).
  - 10) García Flores, M y Maza, A. *Origen y Propiedades de los Sedimentos*. Capitulo 7 del Manual de Ingeniería de Ríos, Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No 601, México (Enero 1998).
  - 11) García Flores, M. *Evaluación de Métodos para el Cálculo de Velocidades Medias en Cauces Aluviales. Parte 1*. Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 85 pp (Diciembre 2003).
  - 12) García Flores, M. *Evaluación de Métodos para el Cálculo de Velocidades Medias en Cauces Aluviales. Parte 2*. Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 94 pp (Diciembre 2003).
- 
-

- 13) García Flores, M. *Evaluación de Métodos para el Cálculo de Velocidades Medias en Cauces Aluviales. Parte 3*. Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 94 pp (Diciembre 2004).
  - 14) García Flores, M. *Evaluación de Métodos para el Cálculo de Velocidades Medias en Cauces Aluviales. Parte 4*. Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 105 pp (Diciembre 2004).
  - 15) García Flores, M. *Ondulaciones en cauces aluviales*. Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, (Diciembre 2005).
  - 16) Hagger, W. y Giudice, G. *Discussion of Movable Bed Roughness in Alluvial Rivers* by Wu-Wang, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE (Julio 2001).
  - 17) Helwa, M. *Discussion of Flow Depth in Sand-Bed Channels* by Brownlie, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE.
  - 18) Levi, Enzo. *El agua según la Ciencia. Evolución de la Hidráulica. Volumen II*, Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No D-24, México (Octubre 1986).
  - 19) Maza, J., et al. *Manual de Diseño de Obras Civiles. Hidrotecnia. Hidráulica. A.2.11 Hidráulica Fluvial*. Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Investigaciones Eléctricas, México, (1981).
  - 20) Maza, A y García Flores, M. *Hidrodinámica. Bases para Hidráulica Fluvial*, Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No. D-20, México (Mayo 1984).
  - 21) Maza, A. y García, M. *Transporte de Sedimentos* Capitulo 10 del Manual de Ingeniería de Ríos, Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No 584, México (Diciembre 1996).
  - 22) Nnadin, F. y Wilson, K. *Bed-Load Motion at High Shear stress: Dune Washout and Plane- Bed Flow*, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, vol 121, No 3 (Marzo 1995).
  - 23) Nnadin, F. y Wilson, K. *Closure of Bed-Load Motion at High Shear stress: Dune Washout and Plane- Bed Flow*, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE (Abril 1997).
  - 24) Simons, D. y Richardson, E. *Forms o Bed Roughness in Alluvial Channels*, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, vol 87, No 3, (Mayo, 1961).
- 
-

- 
- 
- 25) Simons, D. y Richardson, E. *Closure of Forms o Bed Roughness in Alluvial Channels*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol 88, No 4, (Julio, 1962).
  - 26) Swamee, P. y Ohja, C. *Criteria for Evaluating Flow Classes in Alluvial Channels*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol 120, No 5 (Mayo 1994).
  - 27) Wang, S y White, W. *Alluvial Resistance in Transition Regime*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol 119, No 6 (Junio 1993).
  - 28) White, W., Bettis, R. y Paris, E. *The Frictional Characteristics of Alluvial Streams: a New Approach*, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2 (Septiembre 1980).
  - 29) White, W., Bettis, R. y Paris, E. *Analytical Approach to River Régime*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol 108, No HY10 (Octubre 1982).
  - 30) Wu, W. y Wang, S. *Movable Bed Roughness in Alluvial Rivers*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol 125, No 12 (Diciembre 1999).
  - 31) Wu, W. y Wang, S. *Closure of Movable Bed Roughness in Alluvial Rivers*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE (Julio 2001).
- 
-