



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“DETERMINACIÓN DE LA DEFORMACIÓN VOLUMÉTRICA, PARA  
EL CÁLCULO DE LAS EXPANSIONES, RECOMPRESIONES Y  
COMPRESIONES DE LOS ESTRATOS DE SUELO MEDIANTE UN  
PROGRAMA DE CÓMPUTO”**

**T E S I S**  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
I N G E N I E R O C I V I L  
P R E S E N T A :  
V I D A L L Ó P E Z R A M O S



DIRECTOR DE TESIS: M.I. CARMELINO ZEA CONSTANTINO

CIUDAD UNIVERSITARIA

MÉXICO, D.F. 2006



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
FING/DCTG/SEAC/UTIT/ 165/02

Señor  
**VIDAL LÓPEZ RAMOS**  
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **M.I. CARMELINO ZEA CONSTANTINO**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como **TESIS** de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

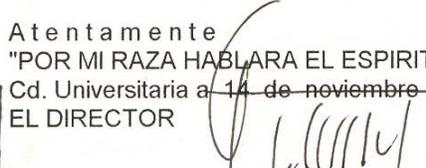
**"DETERMINACIÓN DE LA DEFORMACIÓN VOLUMÉTRICA, PARA EL CÁLCULO DE LAS EXPANSIONES, RECOMPRESIONES Y COMPRESIONES DE LOS ESTRATOS DE SUELO MEDIANTE UN PROGRAMA DE COMPUTO"**

- INTRODUCCIÓN**
- I. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO**
  - II. ESFUERZOS EN LA MASA DE SUELO**
  - III. DEFORMABILIDAD DE LOS ESTRATOS**
  - IV. PROGRAMA DE COMPUTADORA**
  - V. EJEMPLOS NUMÉRICOS**
  - VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

Ruego a ustedes cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo les recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberán prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria a 14 de noviembre de 2002.  
EL DIRECTOR

  
M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO  
GFB/GMP/mstg

**Este trabajo está dedicado a mi familia.**

**A mi mamá Gloria**

*Por su gran ejemplo, su amor incondicional, su comprensión, por siempre confiar en mí y no dudar que lo lograría.*

**A mi papá Maurilio**

*Por ser mi amigo, por el gran apoyo en los momentos más difíciles y de dudas, siempre dándome ánimo y consejos. Gracias papá por hacerme el hombre que hoy soy.*

**A mis hermanas**

*Por ser mis guías para lograr todas las cosas que me propongo, por orientarme y por ser mis confidentes, gracias hermanitas por todo el cariño que me regalan.*

**Y a mis Sobrinos**

*Que son la motivación de mi vida.*

**Gracias por ayudarme a cumplir este sueño...**

## ***RECONOCIMIENTOS***

Este trabajo ha sido posible gracias a los enormes apoyos, recomendaciones y aliento que he recibido.

Agradezco a mi *Facultad de Ingeniería*, a mi *Universidad* y a todos mis *profesores* de quienes adquirí los conocimientos para llegar a este lugar.

En especial, agradezco profundamente al *M.I. Carmelino Zea Constantino* maestro y director de esta tesis, por las incontables horas de discusión, orientación y dedicación pedagógica para la elaboración de este trabajo.

Le doy las gracias a los profesores *Ing. Marcos Trejo Hernández, M.I. Miguel Ángel Rodríguez Vega, M.I. Enrique Cesar Valdez* y *M.I. Hugo Sergio Haas Mora*, Sinodales de esta tesis, por la revisión y observaciones a este trabajo.

Hago una mención especial y respetuosa para agradecer al *M.I. Enrique Cesar Valdez* su apoyo solidario y valioso tiempo dedicado para compartirme consejos y experiencias que me han permitido dar un sentido y trascendencia en las actividades que me desempeño.

Hago un reconocimiento y agradecimiento especial a mis amigos que a lo largo de la carrera me acompañaron, aconsejaron y apoyaron.

Finalmente, dejo constancia de mi deuda con todas aquellas personas que de manera directa o indirecta han posibilitado mi superación personal con la conclusión de esta tesis.

*A Dios.*

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
I CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO	3
I.1 ESTADO DE ESFUERZOS EN EL ENTORNO DE UN PUNTO	4
I.2 ESTADO DE DEFORMACIONES EN EL ENTORNO DE UN PUNTO	19
I.3 ELASTICIDAD LINEAL	27
II ESFUERZOS EN LA MASA DE SUELO	51
II.1 TEORÍA DE LOS ESFUERZOS EFECTIVOS	52
II.2 ESFUERZOS GEOESTÁTICOS	56
II.3 ESFUERZOS INDUCIDOS POR LAS CARGAS APLICADAS	61
III DEFORMABILIDAD DE LOS ESTRATOS	66
III.1 DEFORMABILIDAD DE LOS SUELOS GRUESOS	67
III.2 COMPRESIBILIDAD DE LOS SUELOS FINOS SATURADOS	77
IV PROGRAMA DE COMPUTADORA	89
IV.1 ASPECTOS GENERALES	90
IV.2 MANUAL DEL PROGRAMA	93
V EJEMPLOS NUMÉRICOS	96
V.1 DATOS GENERALES	97
V.2 CIMENTACIÓN PARCIALMENTE COMPENSADA	103
V.3 CIMENTACIÓN TOTALMENTE COMPENSADA	110
VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	114
ANEXOS	117
BIBLIOGRAFÍA	142

# **INTRODUCCIÓN**

## **INTRODUCCIÓN**

La deformabilidad de los estratos de suelo es un término introducido por el Doctor Leonardo Zeevaert para designar la característica de los materiales que componen el subsuelo de ser deformados al aplicarles las solicitaciones a las que van a estar sometidos durante la vida útil de una obra civil.

El concepto de deformabilidad permite en primera instancia tener una idea de las emersiones que va a sufrir un suelo fino saturado al ser excavado para alojar un cajón de cimentación y los asentamientos posteriores que se van a presentar al construir la superestructura. En segundo lugar es un cálculo que se requiere previo a los análisis de interacción suelo-estructura, lo cual queda fuera de los alcances de este trabajo.

En la currícula de la carrera de ingeniero civil este tópico se contempla dentro de la materia de “Comportamiento de los Suelos” ya que es de suma importancia para que los alumnos adquieran las habilidades que se requieren para el estudio del comportamiento de las cimentaciones.

## **OBJETIVO**

Al desarrollar un programa de computadora para el análisis de la deformabilidad de los suelos lo que se pretende es que a nivel escolar tanto profesores como alumnos cuenten con una herramienta que les facilite el manejo de los conceptos desarrollados en clase y a nivel profesional que el analista de mecánica de suelos posea un instrumento de trabajo que le permita llevar a cabo el estudio de varias alternativas de solución de su cimentación lo cual sería muy difícil realizar con un simple calculadora de bolsillo que se traduce en un ahorro en tiempos y costos.

# **I. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO**

## I.1 ESTADO DE ESFUERZOS EN EL ENTORNO DE UN PUNTO

### I.1.1 Definiciones básicas y convención de signos

En ocasiones es conveniente, como en Mecánica de Suelos, considerar los esfuerzos de compresión como positivos; esta convención se adoptará en este texto. Los esfuerzos normales y cortantes actuantes en un elemento se muestran en la figura I.1.1.1, nótese que todos los esfuerzos tienen signo positivo.

Los esfuerzos normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son positivos cuando se encuentran aplicados hacia la superficie.

La notación para los esfuerzos cortantes  $\tau_{ij}$  es la siguiente:  $\tau_{ij}$  es el esfuerzo cortante que actúa en la dirección  $j$  en el plano normal al eje  $i$ .

La convención de signos para los esfuerzos cortantes es la siguiente: El esfuerzo cortante es positivo cuando se dirige en una dirección cartesiana negativa mientras actúa en un plano positivo, separado una distancia diferencial del cartesiano paralelo a él.

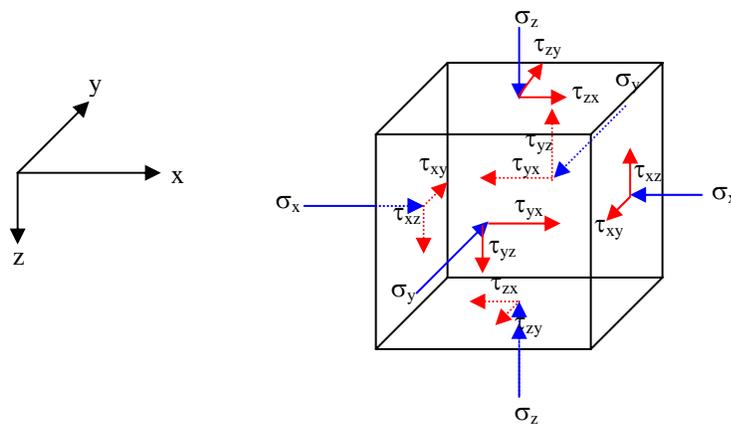


Fig. I.1.1.1 Elemento diferencial de suelo sometido a esfuerzos

El equilibrio requiere que:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned}$$

### I.1.2 Componentes de los esfuerzos en cualquier plano

Haciendo referencia a la figura I.1.2.1 las componentes de los esfuerzos  $S_{nx}$ ,  $S_{ny}$  y  $S_{nz}$  con dirección normal  $n$  pueden ser expresados en términos de esfuerzos en  $x$ ,  $y$  y  $z$  como:

$$\begin{bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(n_x) \\ \cos(n_y) \\ \cos(n_z) \end{bmatrix} \quad (I.1.2.1)$$

En donde  $\cos(n_x)$  es el coseno del ángulo entre las direcciones  $n$  y  $x$ , similarmente para  $\cos(n_y)$  y  $\cos(n_z)$ .

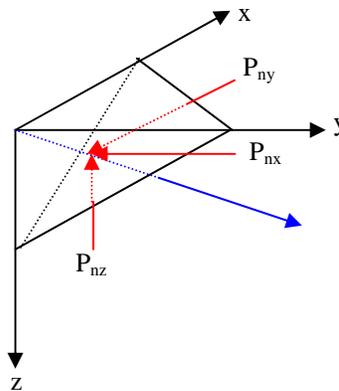


Fig. I.1.2.1 Tetraedro diferencial de suelo

### I.1.3 Transformación de ejes

Si se escoge un nuevo sistema de ejes coordenados  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , las componentes del esfuerzo en este nuevo sistema se relacionan con sus componentes en el sistema original  $x$ ,  $y$ ,  $z$  como sigue:

$$S_1 = A S A^T \quad (I.1.3.1)$$

Donde :

$S_1$  es la matriz de esfuerzos on respecto a los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,

$S$  es la matriz de esfuerzos con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,

$A$  es la matriz de transformación al sistema principal de referencia.

$$A = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix} \quad (I.1.3.2)$$

$A^T$  es la transpuesta de  $A$ .

### I.1.4 Esfuerzos principales

Es posible demostrar que existe un sistema de ejes coordenados para el cual todos los esfuerzos cortantes valen cero y que los esfuerzos normales tienen sus valores extremos. Los tres planos perpendiculares mutuamente para que este condición exista son llamados *Planos principales*, y los esfuerzos normales que actúan sobre esos planos son los *esfuerzos principales*.

Los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ ; máximo, intermedio y menor esfuerzo respectivamente, pueden ser obtenidos resolviendo la ecuación:

$$\sigma_i^3 - J_1\sigma_i^2 + J_2\sigma_i - J_3 = 0 \quad (I.1.4.1)$$

En donde:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta \quad (I.1.4.2)$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad (I.1.4.3)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \quad (I.1.4.4)$$

$J_1$  o  $\Theta$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  son conocidos también como el primero, el segundo y el tercer esfuerzos invariantes, es decir constantes, independientes del sistema coordenado.

En términos de los esfuerzos principales:

$$J_1 = \Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (I.1.4.5)$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (I.1.4.6)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (I.1.4.7)$$

Las direcciones de los vectores normales a los planos principales están dadas por:

$$\cos(n_i, x) = \frac{A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}} \quad (I.1.4.8)$$

$$\cos(n_i, y) = \frac{B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}} \quad (I.1.4.9)$$

$$\cos(n_i, z) = \frac{C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}} \quad (I.1.4.10)$$

En donde:

$$A_i = (\sigma_y - \sigma_i)(\sigma_z - \sigma_i) - \tau_{zy}\tau_{yz}$$

$$B_i = \tau_{zy}\tau_{xz} - \tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_i)$$

$$C_i = \tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i)$$

Y  $\sigma_i$  son los esfuerzos principales ( $i=1, 2, 3$ )

### I.1.5 Esfuerzo cortante máximo

El esfuerzo cortante máximo ocurre en un plano cuyo normal forma un ángulo de  $45^\circ$  con las direcciones de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ .

El esfuerzo cortante máximo,  $\tau_{m\acute{a}x}$  en un punto esta dado por:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (I.1.5.1)$$

### I.1.6 Esfuerzos octaédricos

Los esfuerzos normales octaédricos  $\sigma_{oct}$  y el esfuerzo cortante octaédrico  $\tau_{oct}$  en un punto son los esfuerzos actuantes en los ocho planos de un octaedro imaginario alrededor del punto, los versores de las caras del octaedro tienen componentes  $i, j, k$  de  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  con relación a la dirección de los esfuerzos principales. Las magnitudes de los esfuerzos octaédricos son:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\theta}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (I.1.6.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (I.1.6.2)$$

### I.1.7 Sistema bidimensional de esfuerzos

Muchas situaciones en mecánica de suelos pueden ser tratadas como problemas bidimensionales, en los que los esfuerzos aplicados en un plano son los únicos que necesitan ser considerados. El caso más importante es el *estado plano de deformaciones*, en el cual el esfuerzo en una dirección (generalmente el eje  $y$ ) vale cero. Otro tipo de problemas son los que involucran las condiciones del *estado de esfuerzos plano*, en los cuales el esfuerzo principal intermedio es igual ya sea al esfuerzo principal mayor o al esfuerzo principal menor.

En situaciones de esfuerzos bidimensionales, las relaciones entre los esfuerzos se simplifican considerablemente en comparación con el caso general en tres dimensiones. Haciendo referencia a la figura I.1.7.1 los esfuerzos en un plano que forman un ángulo  $\theta$  con la dirección del eje  $z$  son:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\cos 2\theta + \tau_{xz}\text{sen}2\theta \quad (I.1.7.1)$$

$$\tau_{\theta} = \tau_{xz}\cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\text{sen}2\theta \quad (I.1.7.2)$$

Los esfuerzos principales están dados por:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \pm \frac{1}{2} \left( (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I.1.7.3)$$

Los planos principales están inclinados con un ángulo:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \quad (I.1.7.4)$$

y

$\theta_1 + 90^\circ$  en el eje z

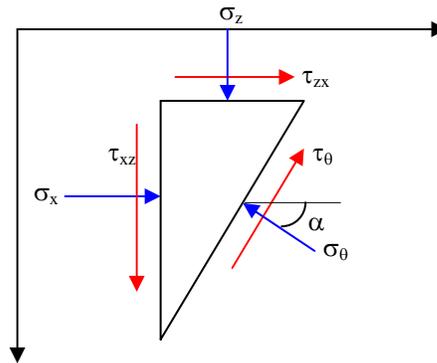


Fig. I.1.7.1 Elemento bidimensional sometido a esfuerzos

El máximo esfuerzo cortante ocurre en los planos con una inclinación de  $45^\circ$  con respecto a los planos principales y su magnitud es:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left( (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I.1.7.5)$$

Se debe resaltar que el signo del esfuerzo cortante es opuesto en los dos planos, de acuerdo a la convención de signos adoptada.

### I.1.8 El círculo de esfuerzos de Mohr

No es simple dibujar los círculos de Mohr que representan el caso general en tres dimensiones, esfuerzos cortantes y normales actuando en todas las caras de un elemento diferencial. Por esta razón existen dos casos simplificados que se pueden representar con tres círculos de Mohr. El primero consiste en un elemento diferencial

cúbico en el que actúan únicamente esfuerzos normales sobre todas sus caras. El segundo caso consiste en el mismo elemento diferencial con esfuerzos normales en dos pares de caras paralelas y opuestas y esfuerzos normales y cortantes actuando en todas las demás caras. El primer caso se representa en la figura I.1.8.1, en la que se muestra al elemento diferencial sometido a esfuerzos compresivos en todas sus caras (a) y el diagrama de los círculos de Mohr para este elemento (b), se puede comprobar que las condiciones de esfuerzo en cualquier plano caen dentro del área sombreada.

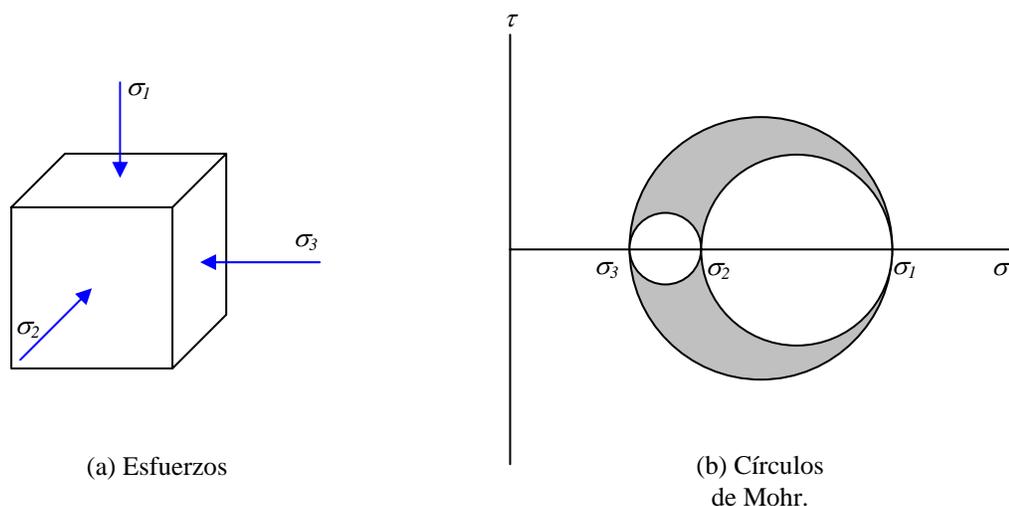


Fig. I.1.8.1 elemento cúbico con los esfuerzos principales actuando en sus caras

El caso 2 se representa en la figura I.1.8.2, nuevamente en este caso los esfuerzos en todos los planos dentro del elemento caen en el área sombreada. La secuencia para dibujar los círculos consiste en localizar los puntos de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zy}$ , y  $\sigma_y, \tau_{yz}$  después se dibuja el círculo I que pasa a través de  $\sigma_z, \tau_{zy}$ , y  $\sigma_y, \tau_{yz}$  y tiene centro en  $\tau = 0$ , con este círculo obtenemos los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , como el tercer esfuerzo principal es conocido los círculos II y III se pueden dibujar.

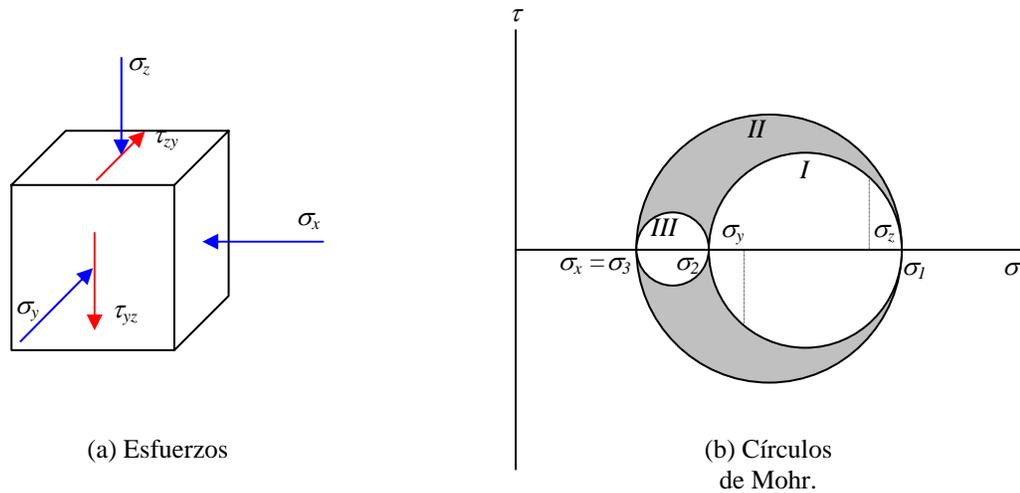


Fig. I.1.8.2 elemento cúbico con esfuerzos normales en todas sus caras y esfuerzos cortantes en dos pares de caras opuestas

Una solución geométrica para esfuerzos en cualquier dirección está dada por el círculo de esfuerzos de Mohr, mostrado en la figura I.1.8.3, para un sistema de esfuerzos en dos dimensiones. El círculo es dibujado en relación con un sistema de ejes ortogonales, uno para los esfuerzos normales ( $\sigma$ ) y el otro para los esfuerzos cortantes ( $\tau$ ). La escala en estos ejes debe ser la misma.

Si los esfuerzos principales,  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , se conocen el círculo se puede dibujar y su centro se encuentra en  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$  y tiene radio igual a  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

Si los esfuerzos normal y cortante se conocen, el círculo se puede dibujar con centro en  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$  y pasa a través de los puntos  $(\sigma_x, \tau_{xz})$  y  $(\sigma_z, -\tau_{xz})$ .

El radio del círculo se construye de la misma manera que el máximo esfuerzo cortante ( $\tau_{max}$ ) ecuación (I.1.7.5).

El ángulo  $2\theta_1$  es dos veces el ángulo entre los ejes  $x$  y  $z$  y los ejes correspondientes a la dirección de los esfuerzos principales (ejes 1 y 3 de la figura I.1.8.3).

La dirección de rotación del radio desde su posición original hasta donde el círculo interseca el eje de esfuerzos normales tiene el mismo sentido angular que la dirección de rotación para los ejes  $x$ - $z$  para convertirse en los ejes principales 1-3.

Los esfuerzos en cualquier otra dirección  $x'$ ,  $z'$  pueden ser determinados similarmente dibujando un diámetro que pase a través del centro del círculo en un ángulo  $2\theta'$  con respecto del eje describiendo las condiciones de esfuerzos en los ejes  $x$  y  $z$ , en donde  $\theta'$  es el ángulo entre los ejes  $x$  y  $z$  y los ejes  $x'$  y  $z'$ .

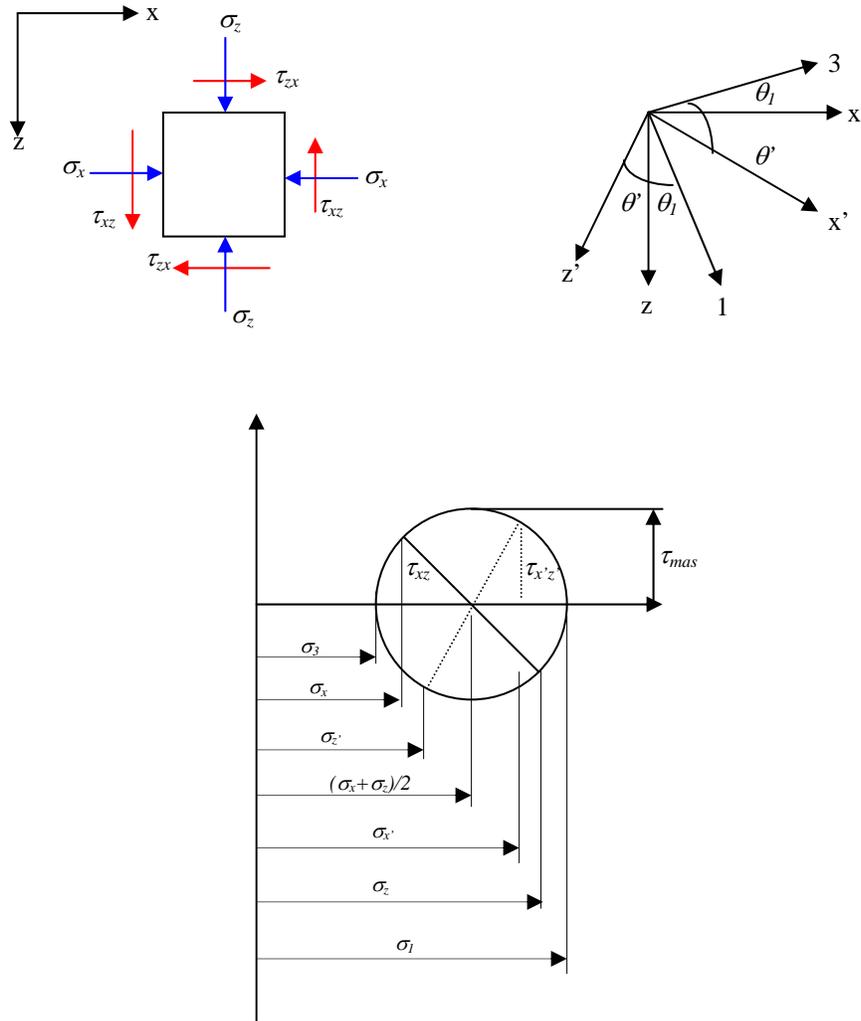


Fig. I.1.8.3 Círculo de Mohr para el caso bidimensional

Debe notarse que los esfuerzos cortantes son considerados positivos si tienden a producir un giro en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a un punto fuera del elemento en el plano en el que actúan figura I.1.8.4. Esta convención se deriva de la desarrollada previamente para condiciones en tres dimensiones.



Fig. I.1.8.4 Convención de signos para el cortante

### I.1.9 Construcción polar

La construcción polar es una forma de unir los esfuerzos en un punto del plano físico (figura I.1.9.1b) al diagrama de esfuerzos del círculo de Mohr (figura I.1.9.1a). El polo  $P$ , es el punto en el círculo tal que los esfuerzos normales y cortantes en cualquier plano  $\alpha$  (perpendicular al plano físico) están dados por la intersección del círculo de Mohr con una línea que pasa a través de  $P$  paralela al plano  $\alpha$ . Por ejemplo los esfuerzos en el plano vertical y en el plano horizontal son como los indicados en la figura I.1.9.1<sup>a</sup>. El plano principal mayor tiene un ángulo de inclinación  $\beta$  respecto de la horizontal.

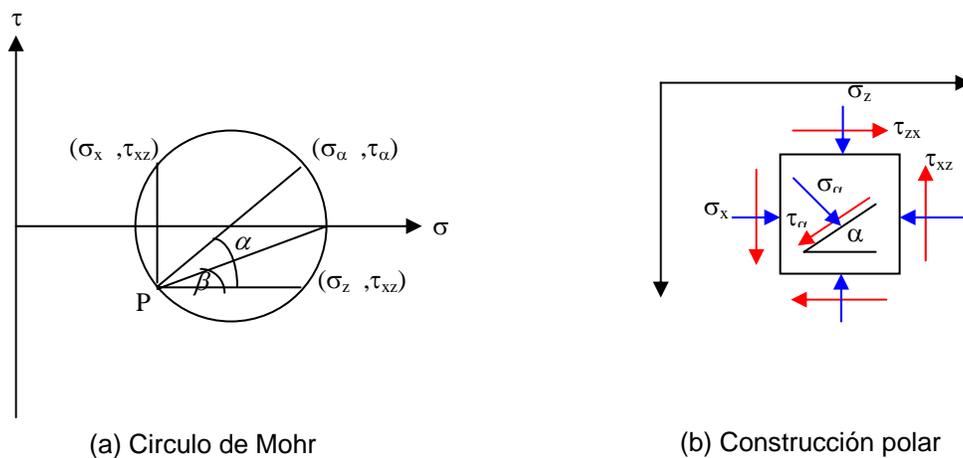


Fig. I.1.9.1 Método del Polo

### I.1.10 Ecuaciones de equilibrio

#### a) Coordenadas cartesianas

Considerando el que elemento de la figura I.1.10.1 está en equilibrio en el sistema cartesiano obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - X = 0 \quad (I.1.10.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - Y = 0 \quad (I.1.10.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - Z = 0 \quad (I.1.10.3)$$

En donde  $X, Y, Z$  son las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen en las direcciones  $x, y, z$ .

Tomando en cuenta la aceleración de la gravedad y la dirección  $z$  vertical.  $X$  y  $Y$  son cero y  $Z$  es el peso unitario,  $\gamma$ , del material.

#### b) Coordenadas cilíndricas

Considerando en equilibrio el elemento en el sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, z, \theta)$  mostrado en la figura I.1.10.2, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (I.1.10.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (I.1.10.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0 \quad (I.1.10.6)$$

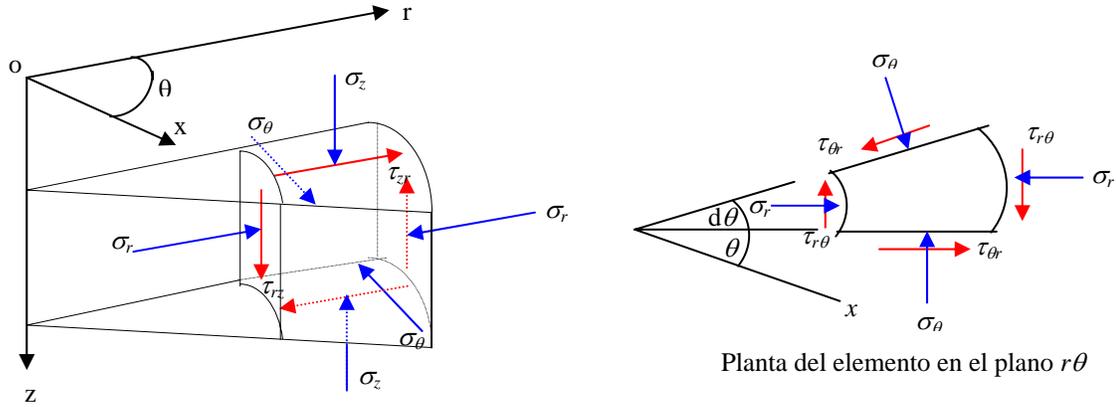


Fig. I.1.10.1 Elemento diferencial en coordenadas cilíndricas

Con simetría axial esto se convierte en:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1.1.10.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (1.1.10.8)$$

**c) Coordenadas esféricas**

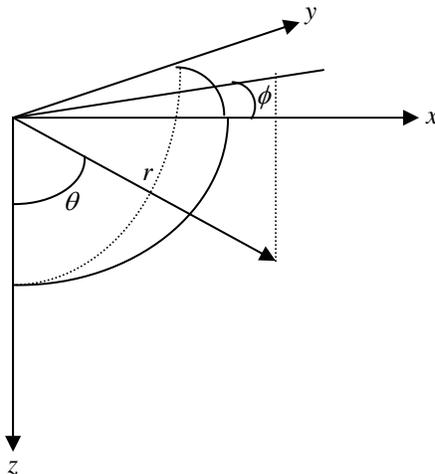


Fig. I.1.10.2 Coordenadas esféricas

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta + \tau_{r\theta} \cot \theta}{r} = 0 \quad (1.1.10.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\phi) \cot \theta}{r} = 0 \quad (1.1.10.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\theta\phi} \cot \theta}{r} = 0 \quad (1.1.10.11)$$

Para el caso de la simetría esférica las expresiones anteriores se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad (1.1.10.12)$$

## I.2 ESTADO DE DEFORMACIONES EN EL ENTORNO DE UN PUNTO

### I.2.1 Definiciones básicas

Considerando, primero, el caso de deformaciones bidimensional, figura I.2.1.1, las deformaciones normales  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_z$  se definen como:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial \rho_x}{\partial x} \quad (I.2.1.1)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\partial \rho_z}{\partial z} \quad (I.2.1.2)$$

en donde  $\rho_x$  y  $\rho_z$  son los desplazamientos en la dirección  $x$  y la dirección  $z$ . Una deformación normal positiva corresponde a una disminución de la longitud.

La deformación angular  $\gamma_{xz}$  es el cambio angular en el ángulo recto en un material y se relaciona con los desplazamientos  $\rho_x$  y  $\rho_z$  con la siguiente expresión:

$$\gamma_{xy} = -\frac{\partial \rho_x}{\partial z} - \frac{\partial \rho_z}{\partial x} \quad (I.2.1.3)$$

Una deformación angular positiva representa un incremento en el ángulo recto y una deformación angular negativa representa una disminución en el ángulo recto.

Considerando los planos  $xy$  y  $yz$  similares, los seis componentes de deformación están relacionados con los desplazamientos  $\rho_x$ ,  $\rho_y$ ,  $\rho_z$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  como:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial \rho_x}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = -\frac{\partial \rho_x}{\partial y} - \frac{\partial \rho_y}{\partial x} \quad (1.2.1.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \rho_y}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = -\frac{\partial \rho_y}{\partial z} - \frac{\partial \rho_z}{\partial y} \quad (1.2.1.5)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\partial \rho_z}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = -\frac{\partial \rho_z}{\partial x} - \frac{\partial \rho_x}{\partial z} \quad (1.2.1.6)$$

Como para  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

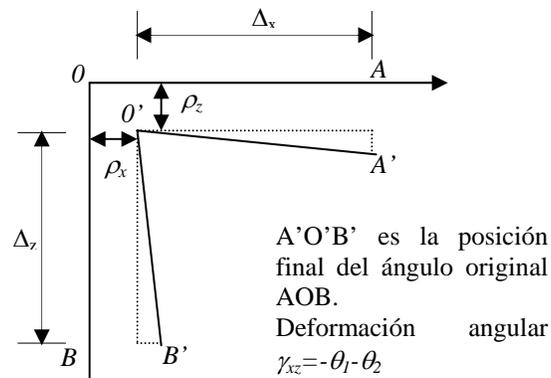


Fig. I.2.1.1 Concepto de deformación angular unitaria

## I.2.2 Deformaciones en un plano

Considerando nuevamente deformaciones en dos dimensiones, la deformación normal  $\varepsilon_\theta$  en un plano inclinado un ángulo  $\theta$  con respecto al eje x es

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xz}}{2} \text{sen} 2\theta \quad (1.2.2.1)$$

y la deformación angular es

$$\gamma_\theta = \gamma_{xz} \cos 2\theta - (\varepsilon_x - \varepsilon_z) \text{sen} 2\theta \quad (1.2.2.2)$$

Cabe notar que las dos expresiones anteriores corresponden a las de los esfuerzos normales y cortantes, excepto por el factor en el último término.

### I.2.3 Transformación de ejes

Si se escoge un nuevo sistema de referencia,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , las componentes de deformación en este nuevo sistema se relacionan con las del sistema original como sigue.

$$D_1 = A D^T A \quad (1.2.3.1)$$

En dónde  $D$  es la matriz de deformaciones en el sistema original

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.2.3.2)$$

$D_1$  es la matriz de deformaciones en el sistema  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

$A$  es la matriz transformación del sistema.

$A^T$  es la matriz transpuesta de  $A$ .

En operaciones con matrices es conveniente usar doble subíndice y definir  $\gamma_{ij}$  como  $\varepsilon_{ij}$ , entonces la matriz de deformaciones es:

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.3.4)$$

### I.2.4 Deformaciones principales

Análogamente a los planos principales de esfuerzo, existen tres planos principales de deformaciones. En los cuales las deformaciones angulares valen cero y las deformaciones normales son las principales. Las deformaciones principales mayor y menor son respectivamente, la deformación mas grande y la deformación más pequeña en un punto. Para un material isotrópico y elástico, los planos principales de deformación coinciden con los planos principales de esfuerzo.

Las deformaciones principales se pueden determinar, en forma similar a los esfuerzos principales, como las raíces de la ecuación.

$$\varepsilon_i^3 - I_1 \varepsilon_i^2 + I_2 \varepsilon_i - I_3 = 0 \quad (I.2.4.1)$$

En dónde

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (I.2.4.2)$$

$$I_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \frac{\gamma_{yz}^2}{4} - \frac{\gamma_{zx}^2}{4} \quad (I.2.4.3)$$

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x \gamma_{yz}^2}{4} - \frac{\varepsilon_y \gamma_{zx}^2}{4} - \frac{\varepsilon_z \gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}}{4} \quad (I.2.4.4)$$

$I_1, I_2, I_3$  son deformaciones invariantes similares a los esfuerzos invariantes.

En sistemas bidimensionales las deformaciones principales  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  se obtienen como sigue

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \gamma_{xz}^2} \quad (I.2.4.5)$$

y los planos principales están inclinados un ángulo  $\theta_1$  con respecto a los ejes x y z, en dónde.

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\gamma_{xz}}{\varepsilon_x - \varepsilon_z} \quad (1.2.4.6)$$

### I.2.5 Máxima deformación angular

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (1.2.5.1)$$

En donde  $\varepsilon_1$  = deformación principal máxima  
 $\varepsilon_3$  = deformación principal mínima

$\gamma_{\max}$  ocurre en un plano cuyo versor forma un ángulo de  $45^\circ$  con las direcciones de  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .

### I.2.6 Circulo de deformaciones de Mohr

El círculo de deformaciones Mohr provee una solución gráfica en cualquier dirección. En la figura I.2.6.1 los ejes 1-3 representan los ejes principales, x-z los ejes horizontal y vertical y x'-z' los ejes con un ángulo de inclinación  $\theta'$  con respecto de los ejes x-z.

El diámetro del círculo es igual a la máxima deformación angular.

$$\gamma_{\max} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \gamma_{xz}^2} \quad (1.2.6.1)$$

La construcción del polo descrita para el círculo de Mohr para esfuerzos puede ser adaptada para el caso de deformaciones.

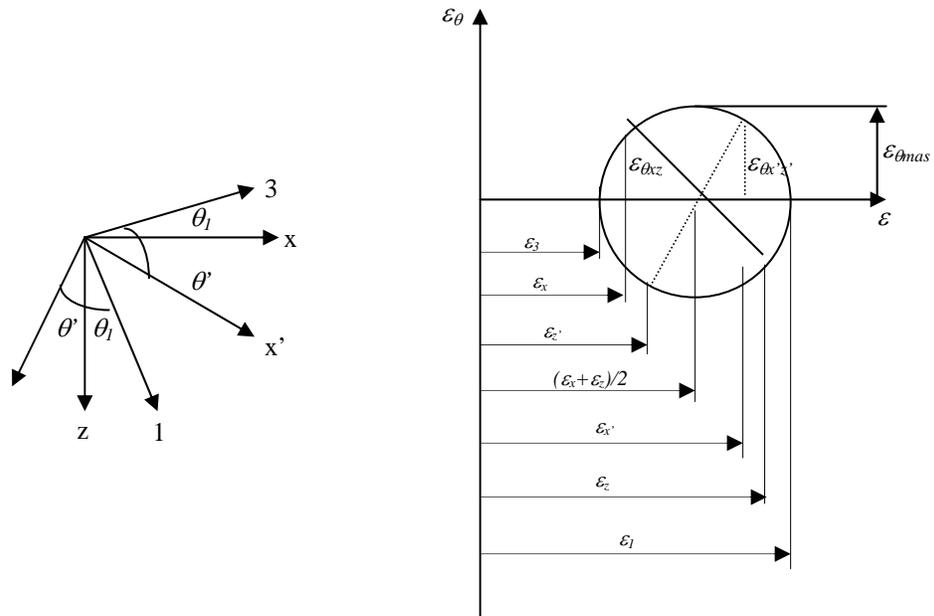


Fig. I.2.6.1 Círculo de Mohr para el caso bidimensional de deformaciones

## I.2.7 Relación deformación-desplazamiento y ecuaciones de compatibilidad

### a) Coordenadas cartesianas

Las relaciones deformación-desplazamiento están por las ecuaciones I.2.1.4, I.2.1.5, I.2.1.6. Ya que las seis componentes de deformación se derivan de tres desplazamientos no son independientes una de otra. Se pueden derivar seis expresiones adicionales conocidas como ecuaciones de compatibilidad como sigue:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (I.2.7.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.2.7.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (1.2.7.3)$$

$$2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1.2.7.4)$$

$$2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1.2.7.5)$$

$$2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1.2.7.6)$$

### **b) Coordenadas cilíndricas**

Las relaciones deformación-desplazamiento son:

$$\varepsilon_r = -\frac{\partial \rho_r}{\partial r} \quad \gamma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \rho_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \rho_\theta}{\partial r} + \frac{\rho_\theta}{r} \quad (1.2.7.7)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\rho_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} \quad \gamma_{\theta z} = -\frac{\partial \rho_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_z}{\partial \theta} \quad (1.2.7.8)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\partial \rho_z}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = -\frac{\partial \rho_z}{\partial r} - \frac{\partial \rho_r}{\partial z} \quad (1.2.7.9)$$

**c) Coordenadas esféricas**

Las relaciones deformación- desplazamiento son:

$$\varepsilon_r = -\frac{\partial \rho_r}{\partial r} \quad \gamma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \rho_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \rho_\theta}{\partial r} + \frac{\rho_\theta}{r} \quad (1.2.7.10)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\rho_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} \quad \gamma_{\theta\phi} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_\phi}{\partial \theta} + \frac{\rho_\phi \cot \theta}{r} \quad (1.2.7.11)$$

$$\varepsilon_\phi = -\frac{\rho_r}{r} - \frac{\rho_\theta}{r} \cot \theta \quad \gamma_{\phi r} = -\frac{\partial \rho_\phi}{\partial r} + \frac{\rho_\phi}{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho_\phi}{\partial \phi} \quad (1.2.7.12)$$

### I.3 ELASTICIDAD LINEAL

La elasticidad lineal es la parte de la mecánica de los continuos que estudia el comportamiento de los sólidos cuyas propiedades son independientes del tiempo, también lo son durante el intervalo en que las deformaciones producidas en los medios continuos son recuperables al cesar el esfuerzo que las produce.

El concepto de medio continuo es una idealización que se hace para los materiales reales, suponiendo que éstos están formados por una masa continua sin huecos o separaciones en su interior.

#### I.3.1 Ley de Hooke

La ley de Hooke expresa una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones. El factor de proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones recibe el nombre de Módulo de elasticidad o Módulo de Young ( $E$ ).

Para un material elástico sometido a un estado de esfuerzos uniaxial, la curva esfuerzo-deformación es una línea recta con pendiente igual al módulo de elasticidad del material figura I.3.1.1

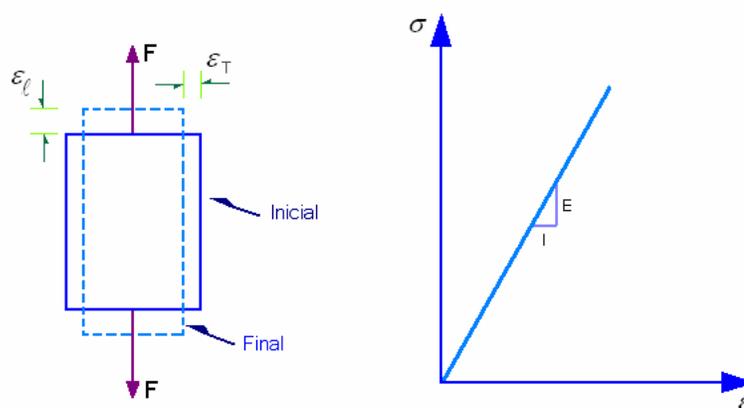


Fig. I.3.1.1 Deformaciones producidas por esfuerzos aplicados

Matemáticamente la ley de Hooke se puede escribir como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.3.1.1)$$

Donde:

$\sigma$  : Esfuerzo normal

$\varepsilon$  : Deformación unitaria

$E$  : Módulo de elasticidad del material

El módulo de elasticidad depende de muchos factores, siendo los más importantes el tipo de material, temperatura y velocidad de carga. Dado que la deformación unitaria es adimensional las unidades del módulo de elasticidad son unidades de esfuerzo.

Puede afirmarse que la mayoría de los materiales usados por el ingeniero tienen un comportamiento elástico lineal para niveles de esfuerzo sumamente bajos. Sin embargo, cuando los niveles de esfuerzo aplicados son considerables, el comportamiento del material deja de ser elástico lineal, no pudiéndose describir su comportamiento a partir de la teoría de la elasticidad lineal.

Es un hecho experimental que al someter un cuerpo sólido a un estado de esfuerzos uniaxial, éste experimenta deformaciones longitudinales en la dirección del esfuerzo normal aplicado. Sin embargo, se observa también que el cuerpo se contrae o se expande, dependiendo de si el esfuerzo normal aplicado fue de tensión o de compresión, como puede verse en la figura anterior. La relación entre la deformación unitaria transversal ( $\varepsilon_t$ ) y la deformación unitaria longitudinal ( $\varepsilon_l$ ) con signo negativo, se conoce como relación de Poisson.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} \quad (1.3.1.2)$$

Donde:

$\nu$ : Relación de Poisson

$\varepsilon_t$ : Deformación unitaria transversal

$\varepsilon_l$ : Deformación unitaria longitudinal

El signo negativo que aparece en la expresión 1.3.1.2, obedece al hecho de que si el esfuerzo normal aplicado es de tensión, la deformación en la dirección de ese esfuerzo será positiva, mientras que la deformación transversal será negativa si el material se contrae, por lo tanto, la relación de Poisson será positiva. Si el esfuerzo normal aplicado es de compresión, la deformación en la dirección del esfuerzo normal es de signo negativo, en tanto que la deformación transversal es positiva debido a que el material se expande; por consiguiente, la relación de Poisson resulta positiva. Lo anterior nos permite concluir que la relación de Poisson definida de acuerdo con en la expresión 1.3.1.2 siempre será positiva.

En la tabla 1.3.1.1 se presentan algunos valores típicos de la relación de Poisson para diferentes materiales, obtenidos en el rango elástico.

<b>Material</b>	<b>Relación de Poisson</b>
	$\nu$
Acero	0.25-0.33
Aluminio	0.34
Vidrio	0.2-0.31
Plomo	0.44
Corcho	0.0
Caucho	0.5
Concreto	0.2
Arena compacta	0.25
Arcilla muy compresible	0.35-0.43

Tabla I.3.1.1 Valores de la relación de Poisson

### **I.3.2 Ley de Hooke generalizada**

Considérese un cuerpo sólido sometido a un estado de esfuerzos triaxial tal como se ilustra en la figura I.3.2.1. Para calcular las deformaciones que se generan en el cuerpo por efecto de los esfuerzos aplicados es necesario aplicar el principio de superposición, el cual establece que el esfuerzo o la deformación resultante en un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas es la suma algebraica de los esfuerzos producidos por cada una de las fuerzas aplicadas en forma individual. Este principio tiene validez únicamente cuando existe una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones, de otra manera no sería aplicable.

Tomando en cuenta lo anterior, supongamos inicialmente que el cuerpo está sometido a un esfuerzo normal de tensión  $\sigma_x$ , por lo tanto, se trata de un estado de esfuerzos uniaxial, el cual produce alargamientos en la dirección de esfuerzo aplicado y acortamientos o contracciones en las direcciones y y z figura 1.3.2.1; las deformaciones en las direcciones x, y y z son, respectivamente:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x; \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad (1.3.2.1)$$

Cuando se aplica el esfuerzo normal  $\sigma_y$  en forma individual se tiene:

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y \quad (1.3.2.2)$$

Finalmente, para  $\sigma_z$  se obtiene:

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon; \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (1.3.2.3)$$

La deformación resultante en una dirección específica es la suma algebraica de cada una de las deformaciones producidas en esa dirección por todos los esfuerzos aplicados en forma individual. Así, para la dirección x se tiene:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x)_T &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \varepsilon_x \\ (\varepsilon_x)_T &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \end{aligned} \quad (1.3.2.4)$$

Análogamente, para las direcciones y y z se obtiene:

$$(\varepsilon_y)_T = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \varepsilon_y \quad (1.3.2.5)$$

$$(\varepsilon_z)_T = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \varepsilon_z \quad (1.3.2.6)$$

Cada una de las literales que aparecen en las expresiones 1.3.2.4, 1.3.2.5 y 1.3.2.6 tienen el significado dado con anterioridad.

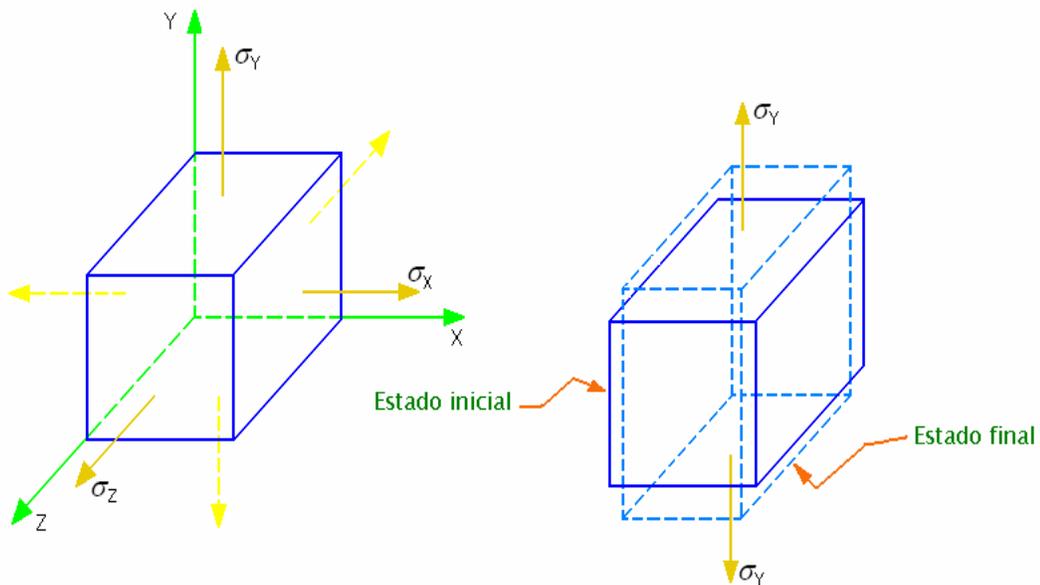


Fig. 1.3.2.1 Estado inicial y final de un elemento diferencial sometido a esfuerzos normales

Las ecuaciones 1.3.2.4 a 1.3.2.6 se conocen como Ley de Hooke generalizada. También adoptan el nombre de ecuaciones constitutivas para medios elástico-lineales homogéneos e isótropos. El concepto de homogeneidad implica que las

propiedades mecánicas (módulo de Young  $E$  y relación de Poisson  $\nu$ ) de los medios elásticos son las mismas en cualquier punto del medio, mientras que la isotropía supone que la micro-estructura del material está constituida de elementos orientados aleatoriamente, lo cual elimina la existencia de direcciones preferenciales en propiedades mecánicas. En otras palabras, la isotropía significa que las propiedades mecánicas de los medios elásticos son iguales en cualquier dirección.

Si se quiere expresar los esfuerzos en función de las deformaciones se procede como sigue:

Las ecuaciones 1.3.2.4, 1.3.2.5 y 1.3.2.6 se escriben como:

$$\begin{aligned}\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z &= E\varepsilon_x \\ -\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z &= E\varepsilon_y \\ -\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z &= E\varepsilon_z\end{aligned}\tag{1.3.2.7}$$

En forma matricial quedan:

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}\tag{1.3.2.8}$$

Las ecuaciones 1.3.2.8 serán resueltas para  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , usando el método de Cramer.

Para calcular el valor de  $\sigma_x$  es necesario evaluar el determinante de la matriz de coeficientes así como el determinante de una nueva matriz, la cual se forma intercambiando la primera columna de la matriz de coeficientes por el valor de términos independientes.

El determinante de la matriz de coeficientes se calcula como:

$$D = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \frac{1}{E} (1 - 2\nu^3 - 3\nu^3) = \frac{1}{E} (1 - \nu)^2 (1 + 2\nu) \quad (1.3.2.9)$$

El determinante de la nueva matriz es

$$D_x = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & -\nu & -\nu \\ \varepsilon_y & 1 & -\nu \\ \varepsilon_z & -\nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \varepsilon_x (1 - \nu^2) + \nu (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_z) - \nu (-\nu \varepsilon_y - \varepsilon_z)$$

$$= \varepsilon_x (1 - \nu^2) + \nu \varepsilon_y + \nu^2 \varepsilon_z + \nu^2 \varepsilon_y + \nu \varepsilon_z$$

$$D_x = \varepsilon_x (1 - \nu^2) + \nu \varepsilon_y (1 + \nu) + \nu \varepsilon_z (1 + \nu) \quad (1.3.2.10)$$

El valor de  $\sigma_x$  se calcula como:

$$\sigma_x = \frac{D_x}{D} \quad (1.3.2.11)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E[\varepsilon_x(1-\nu^2) + \nu\varepsilon_y(1+\nu) + \nu\varepsilon_z(1+\nu)]}{(1+\nu)(1+\nu)(1-2\nu)} \\
&= \frac{E[\varepsilon_x(1-\nu) + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z]}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
&= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_x(1-\nu+2\nu-2\nu) + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\
&= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_x(1-2\nu) + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} J_1
\end{aligned} \tag{1.3.2.12}$$

Donde:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Donde  $J_1$  es el primer invariante del tensor de deformaciones  $[E_{ij}]$ . El nombre de invariante obedece al hecho de que la suma de las deformaciones lineales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  permanece constante al cambiar el sistema de referencia, ya que son cantidades que dependen únicamente del estado de deformaciones en el punto.

Tomando en cuenta que el módulo de rigidez del material puede ser expresado en función del módulo de elasticidad y de la relación de Poisson como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.3.2.13}$$

Donde:

$G$  : Módulo de rigidez del medio

$E$  : Módulo de elasticidad del medio

$\nu$  : Relación de Poisson

Y haciendo

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.3.2.14)$$

Donde:

$\lambda$  Constante de Lamé

La ecuación 1.3.2.12 puede escribirse de la forma

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda J_1 \quad (1.3.2.15)$$

Procediendo en forma similar para  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  se obtiene:

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda J_1 \quad (1.3.2.16)$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda J_1 \quad (1.3.2.17)$$

Si el medio es homogéneo e isótropo, es decir, sus propiedades son las mismas en cualquier dirección, las ecuaciones 1.3.2.15, 1.3.2.16 y 1.3.2.17 se pueden escribir como:

$$\sigma = 2G\varepsilon_l + \lambda J_1 \quad (1.3.2.18)$$

Donde:

$\sigma$  : Esfuerzo normal cuya dirección coincide con la del vector  $\bar{n}$

$\varepsilon_i$  : Deformación lineal con dirección establecida por el vector  $\bar{n}$

$\bar{n}$  : Vector normal a un plano cualquiera

La expresión 1.3.2.18 representa la ecuación constitutiva de los medios elásticos lineales en los cuales la relación entre esfuerzos y deformaciones se establece en función de dos constantes elásticas, el módulo de rigidez ( $G$ ) y la constante de Lamé ( $\lambda$ ).

En el caso de que se tenga un estado general de esfuerzos, referido a un sistema cartesiano, la ecuación constitutiva 1.3.2.18 puede manejarse de la manera siguiente:

El tensor esfuerzo en un sistema de referencia cartesiano queda representado por un arreglo matricial de la forma.

$$[T_{jk}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yx} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.3.2.19)$$

Recordando que el esfuerzo normal  $\sigma$  puede calcularse como:

$$\sigma = \bar{S} \cdot \bar{n} \quad (1.3.2.20)$$

Donde:

$\bar{S}$  Vector esfuerzo actuante en un plano cuya normal es el vector  $\bar{n}$

Además, el vector esfuerzo  $\bar{S}$  está relacionado con el tensor esfuerzo  $[T_{jk}]$  en la forma.

$$S = [T_{jk}] \bar{n} \quad (1.3.2.21)$$

Sustituyendo la ecuación 1.3.2.19 en 1.3.2.21 se obtiene:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (1.3.2.22)$$

Donde:

$$l = \cos \alpha$$

$$m = \cos \beta; \quad \bar{n} = l_i + m_j + n_k$$

$$n = \cos \gamma$$

Haciendo la multiplicación de matrices expresada en la ecuación 1.3.2.22 se llega a:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= (\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n) \bar{i} \\ &+ (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n) \bar{j} \\ &+ (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) \bar{k} \end{aligned} \quad (1.3.2.23)$$

Sustituyendo la ecuación 1.3.2.23 en la 1.3.2.20 y efectuando operaciones se obtiene:

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} l m + 2\tau_{xz} l n + 2\tau_{yz} m n \quad (1.3.2.24)$$

Procedimiento de la misma forma para la deformación lineal  $\varepsilon_l$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + 2\gamma_{xz} ln + 2\gamma_{yz} mn \quad (1.3.2.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.3.2.24 y 1.3.2.25 en la 1.3.2.18

$$\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn = 2G(\varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn) + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Si multiplicamos el término  $\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$  por la identidad  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , éste no se altera, quedando la ecuación anterior.

$$\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn = 2G(\varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} ln + \gamma_{yz} mn) + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)(l^2 + m^2 + n^2) = A$$

Desarrollando el segundo miembro de la ecuación

$$A = l^2[\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x] + m^2[\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y] + n^2[\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z] + lm\gamma_{xy}(2G) + ln\gamma_{yz}(2G) + mn\gamma_{yz}(2G)$$

Para que exista igualdad entre el primer y segundo miembro de la ecuación, necesariamente los coeficientes de  $l^2$ ,  $m^2$ ,  $n^2$ ,  $lm$ ,  $ln$ ,  $mn$ , deben ser iguales. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z \end{aligned} \quad (1.3.2.26)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Las ecuaciones 1.3.2.26 son las relaciones constitutivas de un material elástico lineal en un marco de referencia cartesiano.

Si se quiere expresar las ecuaciones 1.3.2.26 en función de las componentes volumétricas y distorsional de los tensores de esfuerzo  $[T_{jk}]$  y deformación  $[E_{jk}]$  se procede como sigue:

En el sistema de referencia principal el tensor de deformación  $[E_{jk}]$  adopta la forma.

$$[E_{jk}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1.3.2.27)$$

Mientras que el tensor esfuerzo  $[T_{jk}]$  queda como,

$$[T_{jk}] = \begin{bmatrix} \lambda J_1 + 2G\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda J_1 + 2G\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda J_1 + 2G\varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1.3.2.28)$$

El tensor de deformaciones puede ser expresado en sus componentes volumétricas y distorsional como.

$$[E_{jk}] = [E_v] + [E_o] \quad (1.3.2.29)$$

Donde:

$E_v$  Componente volumétrica del tensor de deformaciones  $[E_{jk}]$

$E_o$  Componente distorsional del tensor de deformaciones  $[E_{jk}]$

Matricialmente el tensor  $[E_v]$  se expresa por:

$$[E_v] = \frac{J_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.2.30)$$

En tanto que el tensor  $[E_o]$  por

$$[E_o] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \frac{J_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \frac{J_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \frac{J_1}{3} \end{bmatrix} \quad (1.3.2.31)$$

Procediendo en forma similar con el tensor de esfuerzos  $[T_{jk}]$  se obtiene,

$$[T_{jk}] = [T_v] + [T_o] \quad (1.3.2.32)$$

Donde:

$[T_v]$  Componente volumétrica del tensor de deformaciones  $[T_{jk}]$

$[T_o]$  Componente distorsional del tensor de deformaciones  $[T_{jk}]$

En forma matricial,  $[T_v]$  y  $[T_o]$  toman la forma

$$[T_v] = \begin{bmatrix} \frac{3\lambda + 2G}{3} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda + 2G}{3} J_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda + 2G}{3} J_1 \end{bmatrix} \quad (1.3.2.33)$$

$$[T_o] = \begin{bmatrix} 2G \left( \varepsilon_1 - \frac{J_1}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 2G \left( \varepsilon_2 - \frac{J_1}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 2G \left( \varepsilon_3 - \frac{J_1}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (1.3.2.34)$$

Comparando la ecuación 1.3.2.30 con la 1.3.2.33, se deduce que,

$$[T_v] = (3\lambda + 2G)[E_v] \quad (1.3.2.35)$$

Y al comparar la ecuación 1.3.2.31 con la 1.3.2.34 se llega a que

$$[T_o] = 2G[E_o] \quad (1.3.2.36)$$

Estas últimas expresiones, 1.3.2.35 y 1.3.2.36, permiten concluir que en materiales homogéneos, isótropos y sin esfuerzos residuales, las componentes volumétricas y distorsional de los tensores de esfuerzo  $[T_{jk}]$  y deformación  $[E_{jk}]$  están relacionadas de manera directamente proporcional si el material es elástico lineal.

### 1.3.3 Módulo de compresibilidad volumétrica

Considérese un pequeño cubo, como parte integrante de un cuerpo deformable, sometido a un estado de esfuerzos triaxial tal como se muestra en la figura I.3.3.1

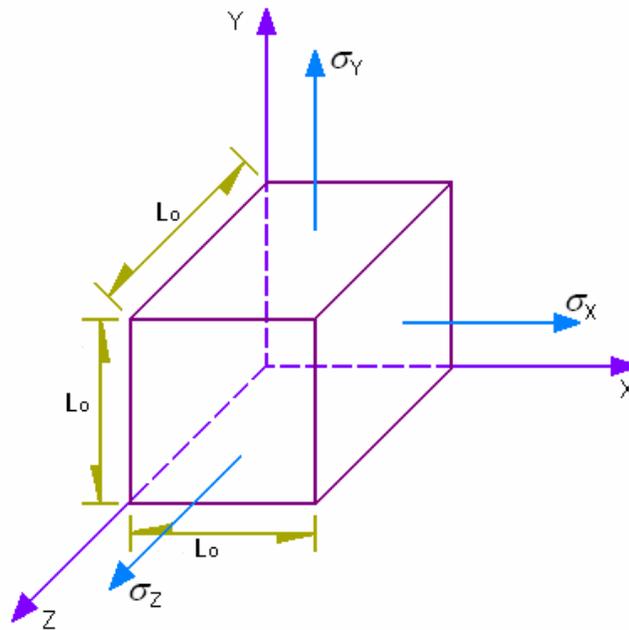


Fig. I.3.3.1 Elemento diferencial para explicar el concepto de módulo volumétrico

Dado que únicamente actúan esfuerzos normales en el cubo, las deformaciones totales que experimentará el elemento serán a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ ; esto es,  $\Delta L_x$ ,  $\Delta L_y$ ,  $\Delta L_z$ . Estas deformaciones provocan un cambio de volumen, el cual se puede cuantificar como.

$$\Delta V = V_f - V_o$$

Donde:

$\Delta V$  Cambio de volumen que sufre el elemento

$V_o$  Volumen inicial

$V_f$  Volumen final

Puesto que el volumen final,  $V = (L_o + \Delta L_x)(L_o + \Delta L_y)(L_o + \Delta L_z)$  y el volumen inicial,  $V_o = L_o^3$ , entonces.

$$\Delta V = (L_o + \Delta L_x)(L_o + \Delta L_y)(L_o + \Delta L_z) - L_o^3 \quad (1.3.3.1)$$

Operando la ecuación 1.3.3.1

$$\begin{aligned} \Delta V &= (L_o + L_o \varepsilon_x)(L_o + L_o \varepsilon_y)(L_o + L_o \varepsilon_z) - L_o^3 \\ \Delta V &= L_o^3 (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - L_o^3 \end{aligned}$$

por definición de deformación volumétrica unitaria ( $\varepsilon_v$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{\Delta V}{V_o} = L_o^3 \frac{[(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1]}{L_o^3} \\ \varepsilon_v &= (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \\ \varepsilon_v &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) + (\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z) \end{aligned} \quad (1.3.3.2)$$

Tomando en cuenta que en la Teoría de la elasticidad lineal es usual trabajar con deformaciones longitudinales ( $\varepsilon$ ) menores de 0.01, entonces podemos despreciar los

Productos de deformaciones que aparecen en la expresión 1.3.3.2, reduciéndose a

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.3.3.3)$$

Tomando en cuenta la ley de Hooke generalizada, la deformación volumétrica se puede expresar en función de los esfuerzos y las constantes elásticas de un material. Sustituyendo las ecuaciones 1.3.2.4, 1.3.2.5 y 1.3.2.6 en la 1.3.3.3, se obtiene.

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \varepsilon_v &= \frac{1}{E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \end{aligned}$$

dividiendo los dos miembros de esta última ecuación entre 3 y llamando a

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \sigma_m$$

el esfuerzo normal medio, se llega a:

$$\varepsilon_v = \frac{3\sigma_m}{E} (1 - 2\nu) \quad (1.3.3.4)$$

O bien

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K}$$

Donde:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

La cantidad  $K$  recibe el nombre de módulo de compresibilidad volumétrica.

### 1.3.4 Interpretación Física del Módulo de Poisson

Consideremos un elemento diferencial que sufre una cierta deformación, pero que su volumen no cambia, entonces  $\varepsilon_v = 0$ . Aplicando la ecuación 1.3.3.3 se obtiene

que  $\nu = \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, en materiales que se deforman pero que no cambian de volumen (llamados materiales incompresibles), la relación de Poisson vale 0.5.

Apliquemos a un elemento diferencial esfuerzos de compresión isotrópicos, es decir  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ . Supongamos que  $\nu > 0.5$ ; de la ecuación 1.3.3.4 se observa que se obtendría que  $\varepsilon_v > 0$ , lo cual no puede ocurrir porque estaría presentando un aumento de volumen cuando estamos sometiendo al elemento a esfuerzos de compresión. Por lo tanto, en general  $\nu$  debe ser menor o igual que 0.5.

Sometamos a un elemento diferencial a un esfuerzo de tensión  $\sigma_y$  con  $\sigma_x = \sigma_z = 0$ , la deformación  $\varepsilon_x$  vale:  $\varepsilon_x = \frac{-\nu}{E} \sigma_y$ ; supongamos que  $\nu$  es negativo, esto implica que el cuerpo sufrirá un alargamiento en la dirección  $x$ , lo cual en general no ocurre en los materiales usados por el ingeniero civil, por lo tanto,  $\nu$  no puede ser negativo.

De lo tratado en los párrafos anteriores podemos concluir que los límites entre los que varía  $\nu$  en materiales comunes en ingeniería son:

$$0 \leq \nu \leq 0.5$$

### I.3.5 Energía de deformación elástica para esfuerzos uniaxial

En mecánica, la energía se define como la capacidad de realizar trabajo, mientras que éste es el producto de una fuerza y la distancia recorrida en la dirección de la misma. Las cargas que actúan sobre un material deformable se desplazan ciertas distancias a medida que el material experimenta deformaciones. Por lo tanto, cuando se aplican cargas a un cuerpo deformable se realiza trabajo sobre él mismo y éste absorbe energía. La energía que un cuerpo absorbe como resultado de su deformación bajo carga, se llama energía de deformación. Si al suprimir la carga, la energía de deformación se recupera totalmente, entonces adopta el nombre de energía de deformación elástica.

Considérese un elemento infinitesimal sometido a un estado de esfuerzos uniaxial, tal como se muestra en la figura I.3.5.1a. Sobre la cara derecha o izquierda del elemento infinitesimal actúa una fuerza  $\sigma_x dy dz$ .

Esta fuerza provoca un alargamiento en el elemento igual a  $\varepsilon_x dx$ , siendo  $\varepsilon_x$  la deformación lineal en la dirección  $x$ . Si se trata de un material elástico lineal, el esfuerzo es proporcional a la deformación, figura I.3.5.1b. Por lo tanto, si el elemento se encuentra inicialmente libre de esfuerzos, la fuerza que actúa finalmente en él varía linealmente desde cero hasta su valor total. La fuerza media que experimenta el elemento mientras ocurre la deformación es  $\frac{\sigma_x dy dx}{2}$ . Esta

fuerza media multiplicada por la distancia en que actúa es el trabajo realizado en el elemento. Por consiguiente, la energía de deformación elástica se puede calcular como:

$$dU = \left[ \frac{1}{2} \sigma_x \, dy \, dz \right] (\varepsilon_x \, dx)$$

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \, dV \quad (1.3.5.1)$$

Donde  $dV$  es el volumen del elemento diferencial.

Se define como densidad de energía de deformación ( $U_o$ ) a la energía de deformación por unidad de volumen. Es decir.

$$\frac{dU}{dV} = U_o = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} \quad (1.3.5.2)$$

Esta última ecuación representa el área bajo la curva esfuerzo deformación, figura 1.3.5.1b.

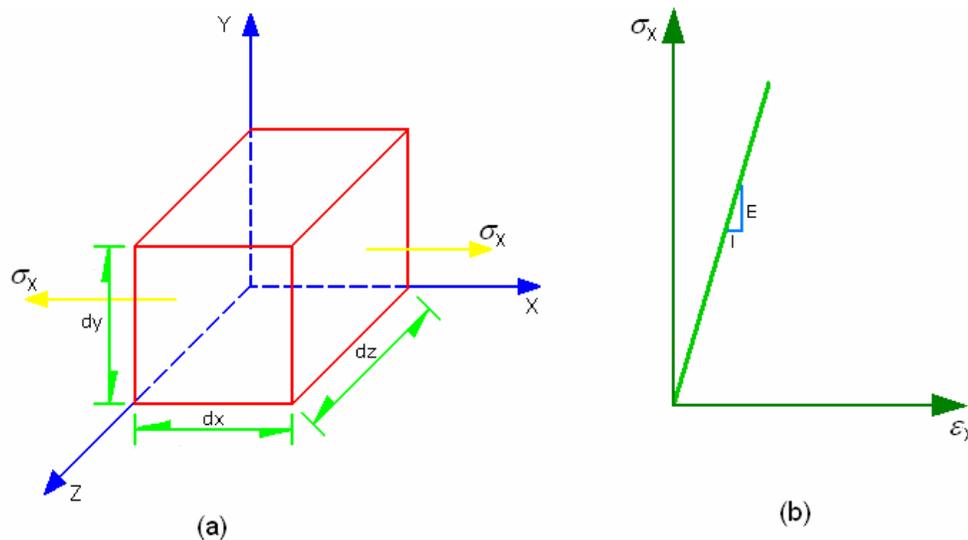


Fig. 1.3.5.1 Curva esfuerzo-deformación

El área bajo la parte lineal de la curva uniaxial esfuerzo-deformación es una medida de la capacidad del material para almacenar energía elástica. Esta medida recibe el nombre de módulo de *RESILENCIA*.

$$R = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma \, d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_p \varepsilon_p = \frac{\sigma_p^2}{2E} \quad (1.3.5.3)$$

Donde  $R$  es el módulo de *resilencia* y  $\sigma_p$  es el esfuerzo en el límite de proporcionalidad, como puede observarse en la figura I.3.5.2.

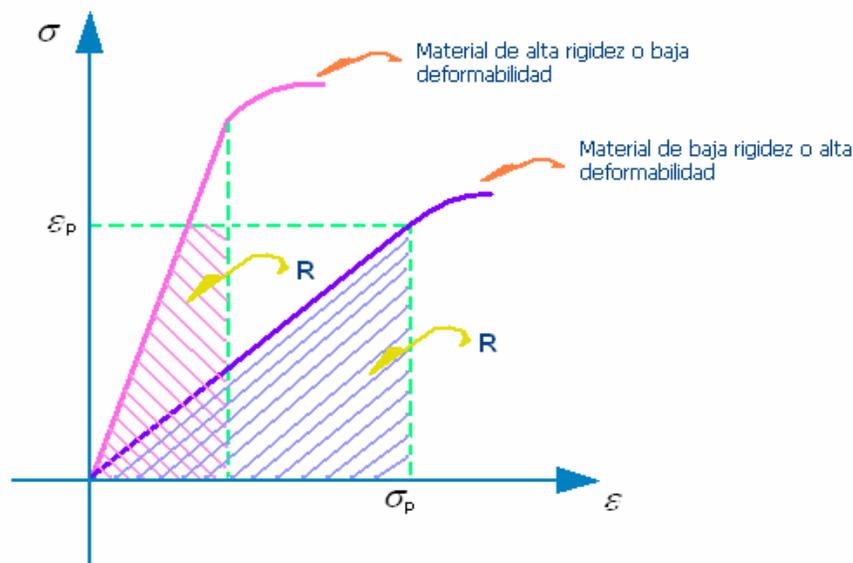


Fig. I.3.5.2 Curva esfuerzo-deformación para explicar el concepto de energía elástica

En la figura anterior se ilustra el caso de un material de bajo módulo de elasticidad ( $E_1$ ) y alto módulo de resiliencia ( $R_1$ ), así como el de un material de alto módulo de elasticidad  $E_2$  y bajo módulo de resiliencia ( $R_2$ ).

Se define como módulo de tenacidad al área bajo toda la curva esfuerzo-deformación (figura I.3.5.3). Representa una medida de la energía de deformación por unidad de volumen necesaria para llevar a la falla (por ruptura) un material. El módulo de tenacidad ( $T$ ) se puede calcular como:

$$T = \int_0^{\varepsilon_r} \sigma \, d\varepsilon \quad (1.3.5.4)$$

Donde  $\varepsilon_r$  es la deformación a la ruptura del material.

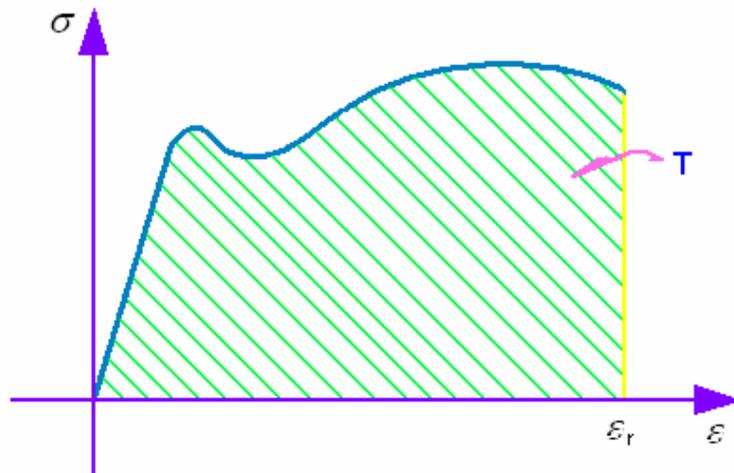


Fig. I.3.5.3 Concepto de módulo de tenacidad

## **II. ESFUERZOS EN LA MASA DE SUELO**

## II.1 TEORÍA DE LOS ESFUERZOS EFECTIVOS

### II.1.1 Estudio de las presiones en suelos

Antes de establecer más detalladamente la relación entre las variables que aparecen en la fórmula (II.1.1.1), resulta necesario hacer un análisis adicional sobre la naturaleza de las presiones que se manejan en el fenómeno de la consolidación y, en general, en todos los problemas de la Mecánica de Suelos.

Considérese dos partículas sólidas en contacto sobre una superficie plana de área  $A_s$ , representativa de las áreas de contacto en toda la masa de suelo. A esas dos partículas corresponde un área tributaria media  $A$ , también representativa de la situación de las partículas en toda la masa figura II.1.1.1

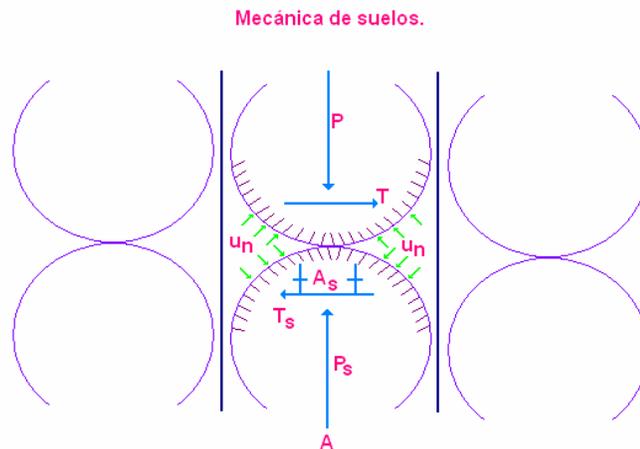


Fig. II.1.1.1 Equilibrio de las fuerzas actuantes en dos partículas en contacto, representativas de una masa de suelo.

Puede definirse la relación de áreas de contacto como:

$$a = \frac{A_s}{A} \quad (\text{II.1.1.2})$$

Si la fuerza total normal al plano de contacto es  $\mathbf{P}$  y la cortante total es  $\mathbf{T}$ , los esfuerzos totales, normales y cortantes, se definen como:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (\text{II.1.1.3})$$

$$\tau = \frac{T}{A}$$

Los esfuerzos en la superficie interfacial son diferentes a los anteriores y, de acuerdo con un criterio semejante, se definen como:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} \quad (\text{II.1.1.4})$$

$$\tau_s = \frac{T_s}{A_s}$$

$\mathbf{P}_s$  y  $\mathbf{T}_s$  son las fuerzas normal y tangencial actuantes entre las dos partículas sólidas.

Considérese el equilibrio en la dirección normal al plano de contacto.

$$P = P_s + (A - A_s) u_n \quad (\text{II.1.1.5})$$

$u_n$ , en la ecuación anterior, es la presión en el agua intersticial.

Dividiendo los dos miembros por  $A$  y teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, puede escribirse:

$$\frac{P}{A} = \frac{P_s}{A_s} \frac{A_s}{A} + \left(1 - \frac{A_s}{A}\right) \bar{u}_n \quad (\text{II.1.1.6})$$

$$\therefore \bar{\sigma} = \sigma_s a + (1 - a) \bar{u}_n$$

Por otra parte, si se define la presión intergranular,  $\sigma_g$ , como:

$$\sigma_g = \frac{P_s}{A} \quad (\text{II.1.1.7})$$

La ecuación II.1.1.5 conduce, con las manipulaciones anteriores a:

$$\sigma = \sigma_g + (1 - a) \bar{u}_n \quad (\text{II.1.1.8})$$

Considerando ahora el equilibrio paralelo al plano de contacto, se tiene:

$$T = T_s$$

De donde, de acuerdo con lo anterior:

$$\tau = a \tau_s \quad (\text{II.1.1.9})$$

La ecuación II.1.1.8 necesita un comentario adicional que tenga en cuenta los problemas prácticos del ingeniero. Los datos normales de un problema que requiera el cálculo de presiones sobre el suelo son la carga total aplicada y el área total del suelo que toma esa carga. En otras palabras, se conocen  $P$  y  $A$ , pero generalmente no puede obtenerse en forma simple  $A_s$ . Como consecuencia, el valor de  $a$  que aparece en la ecuación II.1.1.8 no suele poder calcularse numéricamente en la práctica. Sin embargo, en suelos dicho valor es sumamente

pequeño y en la gran mayoría de los casos, despreciable. Entonces la ecuación II.1.1.8 se reduce a:

$$\sigma = \sigma_g + u_n \quad (\text{II.1.1.10})$$

## II.2 ESFUERZOS GEOESTÁTICOS

Los esfuerzos en el interior de un suelo están producidos por las cargas exteriores aplicadas al mismo y por el peso del propio suelo. El sistema de esfuerzos debido a las cargas aplicadas suele ser bastante complicado. El sistema de esfuerzos correspondiente al peso propio del suelo también puede ser complicado. Sin embargo, existe un caso habitual en el que el peso del suelo da lugar a un sistema de esfuerzos muy sencillo: cuando la superficie del terreno es horizontal y cuando la naturaleza del suelo varía muy poco en dirección horizontal. Este caso se presenta frecuentemente, en especial en suelos sedimentarios. En tal caso, los esfuerzos se denominan **geostáticos**.

### II.2.1 Esfuerzos geostáticos verticales

En el caso que acabamos de describir, no existen esfuerzos tangenciales sobre planos verticales y horizontales trazados a través del suelo. De aquí que el esfuerzo vertical geostático a cualquier profundidad puede calcularse simplemente considerando el peso de suelo por encima de dicha profundidad.

Así pues, si el peso específico del suelo,  $\gamma_m$ , es constante con la profundidad,  $z$ , entonces:

$$\sigma_v = z\gamma_m \quad (\text{II.2.1.1})$$

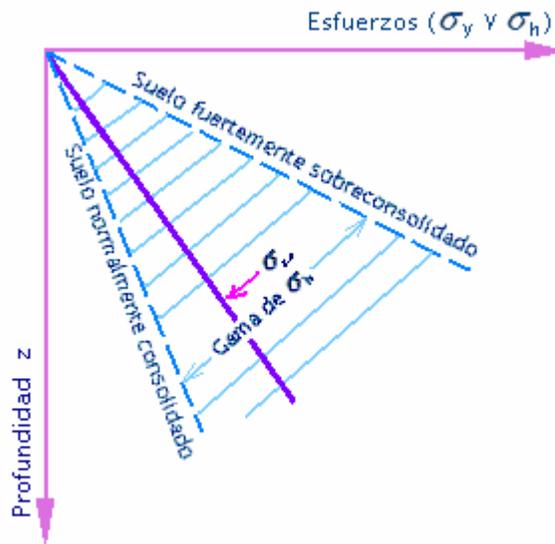


Fig. II.2.1.1 Esfuerzos Geostáticos en un Suelo con Superficie Horizontal

En este caso, el esfuerzo vertical variará linealmente con la profundidad, como se indica en la figura II.2.1.1.

Por supuesto el peso específico no es una constante con la profundidad. Generalmente un suelo resultará cada vez más compacto al aumentar la profundidad debido a la compresión originada por los esfuerzos geostáticos. Si el peso específico del suelo varía de forma continua con la profundidad, los esfuerzos verticales pueden calcularse por medio de la integral.

$$\sigma_v = \int_0^z \gamma \, dz \quad (\text{II.2.1.2})$$

Si el suelo está formado por “*n*” estratos y tanto el peso específico de cada estrato,  $\gamma_{mi}$ , es diferente como su espesor,  $\Delta z_i$ , los esfuerzos verticales pueden calcularse adecuadamente por medio de la sumatoria.

$$\sigma_v = \sum_{i=1}^n (\gamma_m \Delta z)_i \quad (\text{II.2.1.3})$$

### II.2.2 Presiones en el agua subterránea

Las condiciones de presión a las que puede estar sometida el agua subterránea básicamente pueden ser de dos tipos: a) hidrostáticas o b) hidrodinámicas.

Si las condiciones son hidrostáticas el cálculo de las presiones del agua,  $u_h$ , puede llevarse a cabo por medio de la siguiente expresión:

$$u_h = z_w \gamma_w \quad (\text{II.2.2.1})$$

Siendo  $\gamma_w$  el peso volumétrico del agua y  $z_w$  la profundidad a la cual se quiere calcular la presión medida desde la superficie libre del agua denominada nivel de aguas freáticas (NAF).

Si las condiciones son hidrodinámicas las presiones del agua subterránea deben medirse en el lugar por medio de piezómetros instalados a diferentes profundidades (anexo A) y/o por medio de la solución de la red de flujo (anexo B).

Los esfuerzos efectivos de campo podrán así calcularse considerando la ecuación:

$$\sigma' = \sigma_v - u_n \quad (\text{II.2.2.2})$$

### II.2.3 Esfuerzos geostáticos horizontales

La relación entre los esfuerzos horizontales y verticales se expresa por un coeficiente denominado *coeficiente de esfuerzo lateral* o *de presión lateral* y se designa por el símbolo  $K$ :

$$K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}$$

(II.2.3.1)

Esta definición de  $K$  se emplea indiferentemente de que los esfuerzos sean geostáticos o no.

Incluso en el caso de que los esfuerzos sean geostáticos, el valor de  $K$  puede variar entre amplios límites, según que el suelo resulte comprimido o expandido en dirección horizontal, bien por las fuerzas de la naturaleza o de los trabajos del hombre.

Frecuentemente tiene interés la magnitud del esfuerzo geostático horizontal en el caso especial en el que no se haya producido deformación lateral en el terreno. En este caso se habla del *coeficiente de presión lateral en reposo* y se designa por el símbolo  $K_0$ .

En los suelos sedimentarios están formados por la acumulación de sedimentos de abajo a arriba. Al continuar aumentando el espesor de sedimentos, se produce una compresión vertical del suelo a todos los niveles debido al aumento del esfuerzo vertical. Al producirse la sedimentación, generalmente en una zona bastante extensa, no existe razón por la cual deba tener lugar una compresión horizontal apreciable. Por esta razón, se llega lógicamente a la conclusión de que

en un suelo sedimentario el esfuerzo total horizontal debe ser menor que el vertical. Para un depósito de arena formado de esta manera,  $K_0$  suele tener un valor comprendido entre 0.4 y 0.5.

Por otro lado, existe evidencia de que el esfuerzo horizontal puede ser superior al vertical si un depósito sedimentario ha tenido una carga importante en el pasado. En efecto, los esfuerzos horizontales quedaron “congelados” cuando el suelo estuvo cargado con un espesor mayor de tierras que el actual y no se disiparon al suprimirse esta carga. En este caso,  $K_0$  puede alcanzar valores de hasta 3.

En la fig. II.2.1.1 se ha representado la gama de variación de los esfuerzos horizontales para el estado en reposo.

## **II.3 INCREMENTOS DE ESFUERZOS INDUCIDOS POR LAS CARGAS APLICADAS**

Las cargas aplicadas al terreno de cimentación inducen incrementos de esfuerzos en la masa de suelo que deben ser evaluados previamente al cálculo de hundimientos o emersiones del suelo.

Existen soluciones para estudiar una gran variedad de casos que toman en cuenta el tipo de carga (puntual, linealmente distribuida, uniformemente distribuida, triangular, etc.), la forma de la distribución del área cargada (circular, triangular, rectangular, poligonal, etc.), la dirección de la carga (vertical, horizontal, etc.), el grado de homogeneidad e isotropía del terreno, sin embargo para fines de este trabajo sólo se describirá la solución de Damy-Casales para los:

---

### **MEDIOS DE BOUSSINESQ, WESTERGAARD Y FRÖHLICH, SOBRE SUPERFICIES POLIGONALES, CARGADAS CON FUERZAS VERTICALES UNIFÓRMENTE REPARTIDAS.**

---

#### **III.3.1 Integración sobre polígonos**

La solución exacta para un polígono de forma cualquiera, con carga uniforme vertical fue aportación del Ingeniero Julio Damy Ríos+. A continuación se expondrá en que consiste dicha integración.

Consideremos el polígono de la figura III.3.1.1, se desea obtener el esfuerzo  $\sigma_z$  en un punto que se encuentra a una profundidad  $z$  bajo el punto  $O$ .

Si conocemos la integral de  $\sigma_z$  sobre un triángulo de forma cualquiera para un punto situado a una profundidad  $z$  bajo uno de sus vértices, podemos conocer la integral sobre el polígono, ya que será la suma algebraica de las contribuciones de cada uno de los triángulos.

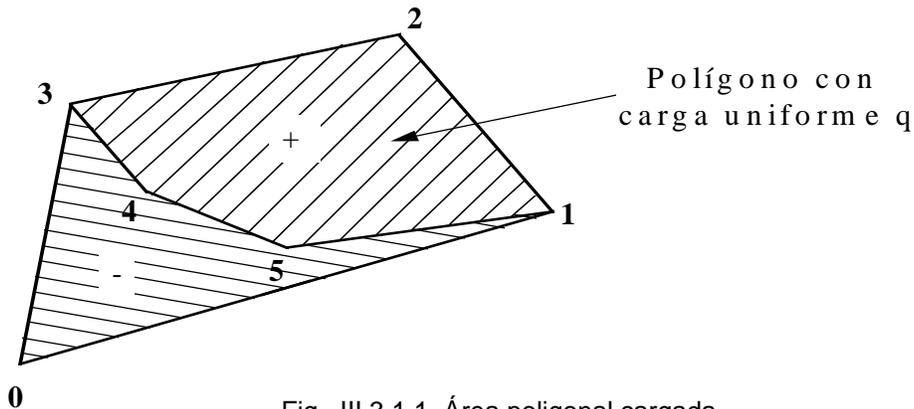


Fig. III.3.1.1 Área poligonal cargada

Obsérvese que la numeración de los nudos debe seguir el sentido antihorario.

### III.3.2 Integración sobre un triángulo cualquiera

A continuación se describen las etapas previas de cálculo para obtener la contribución de cada triángulo. Figura III.3.2.1.

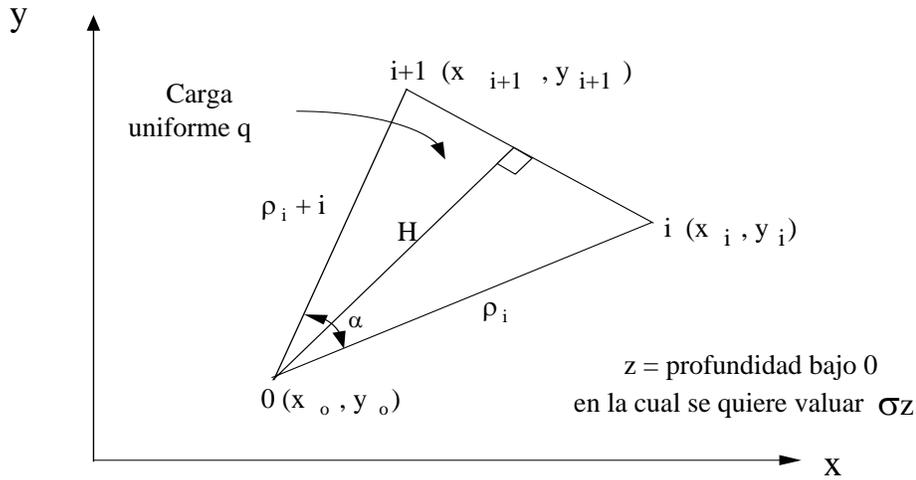


Fig. III.3.2.1 Integración sobre un triángulo

$$x'_j = x_j - x_o; \quad y'_j = y_j - y_o, \quad (j = i, \quad i+1) \quad (III.3.2.1)$$

$$F = x'_i y'_{i+1} - x'_{i+1} y'_i \quad (\text{el valor absoluto de } F \text{ es el doble del área}) \quad (III.3.2.2)$$

- a) Si  $F = 0$ , se trata de un triángulo de área nula, que no contribuye a la integración.
- b) Si  $F > 0$  entonces;  $S = +1$  (el triángulo contribuye positivamente a la integral).
- c) Si  $F < 0$  entonces;  $S = -1$  (contribución negativa del triángulo).

$$L = \sqrt{(x'_{i+1} - x'_i)^2 + (y'_{i+1} - y'_i)^2} \quad (III.3.2.3)$$

$$C_1 = [x'_i (x'_{i+1} - x'_i) + y'_i (y'_{i+1} - y'_i)] / F \quad (III.3.2.4)$$

$$C_2 = [x'_{i+1} (x'_{i+1} - x'_i) + y'_{i+1} (y'_{i+1} - y'_i)] / F \quad (\text{III.3.2.5})$$

Nota:  $C_2 - C_1 = L^2 / F$

$$A = \frac{zL}{|F|} \quad (\text{III.3.2.6})$$

$$G = A^2 + 1 \quad (\text{III.3.2.7})$$

Una vez ejecutadas las etapas previas de cálculo, se aplican las siguientes fórmulas según la ecuación básica que se haya usado; la notación es la misma para todas las fórmulas.

### 1. Ecuación de Boussinesq

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \tan^{-1}[C_2] - \tan^{-1}(C_1) - \tan^{-1}(B_2) + \tan^{-1}(B_1) + \frac{(B_2 + B_1)}{G} \right]$$

Donde:

$$B_i = \frac{AC_i}{\sqrt{G + C_i^2}} \quad (i = 1, 2)$$

## 2. Ecuación de Westergaard

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \tan^{-1}(C_2) - \tan^{-1}(C_1) - \tan^{-1}(W_2) + \tan^{-1}(W_1) \right]$$

Donde:

$$W_i = \frac{K A C_i}{\sqrt{K^2 A^2 + 1 + C_i^2}} \quad (i = 1, 2)$$

## 3. Ecuación de Fröhlich.

a)  $\chi = 2$

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi\sqrt{G}} \left[ \tan^{-1}(J_2) - \tan^{-1}(J_1) \right]$$

Donde:

$$J_i = \frac{C_i}{\sqrt{G}} \quad (i = 1, 2)$$

b)  $\chi = 4$

$$\sigma_z = \frac{q}{4\pi G} \left[ M \left( \tan^{-1}(J_2) - \tan^{-1}(J_1) \right) + N_2 - N_1 \right]$$

Donde:

$$M = \frac{2G + A^2}{\sqrt{G}} \quad N_i = \frac{A^2 C_i}{G + C_i^2} \quad (i = 1, 2)$$

### **III. DEFORMABILIDAD DE LOS ESTRATOS**

### III DEFORMABILIDAD DE LOS ESTRATOS

En general se pueden reconocer en los suelos tres tipos básicos de comportamiento mecánico esfuerzo-deformación, los cuales son: el comportamiento elástico, el plástico y el viscoso.

Un cuerpo elástico es aquel que al aplicarle un sistema de cargas, se deforma, pero que al retirar las cargas el material regresa a su configuración geométrica inicial. En contraposición el comportamiento plástico se caracteriza porque el cuerpo permanece deformado aún cuando se retiran todas las cargas que lo deformaron.

En los cuerpos viscosos la respuesta del material (o sea sus deformaciones) no solamente depende de la magnitud de los esfuerzos aplicados, sino también del tiempo transcurrido desde la aplicación de la carga; a este tipo de respuesta se le conoce como diferida. Por el contrario en los materiales elásticos o plásticos la respuesta del suelo no depende del tiempo, por lo que se dice que su respuesta es inmediata.

En los suelos finos saturados, por ejemplo, podemos encontrar una combinación de las tres componentes de deformación; o sea, una componente elástica, otra plástica y otra viscoplástica.

Adicionalmente podemos identificar dos maneras en que se deforman los suelos:

- Por "Compresibilidad", cuando se presentan cambios de volumen sin cambios de forma en la masa de suelo y
- Por "Deformabilidad", cuando hay cambios de forma y en menor medida, cambios de volumen. Bajo ciertas condiciones de trabajo en campo, el concepto de deformabilidad se aplica mejor a suelos gruesos y el de compresibilidad a suelos finos saturados.

### **III.1 Deformabilidad de los Suelos Gruesos**

Es importante señalar que en el caso de arenas finas muy sueltas saturadas el problema fundamental, más que el de asentamientos, pudiera ser el de la licuación que sufren estos materiales bajo la combinación de ciertas condiciones en zonas sísmicas o inundables, sin embargo este tema queda fuera del alcance de estas notas.

Para entender el comportamiento de los suelos es necesario apoyarse en modelos que nos acerquen a las magnitudes de los asentamientos esperados, bajo las condiciones analizadas. En ese sentido el modelo elástico lineal ha sido de gran utilidad para el ingeniero de cimentaciones, sin embargo, surge la necesidad de establecer procedimientos que determinen correctamente los parámetros adecuados (veáse por ejemplo, Zeevaert, 1973 y Zea et al, 1998), para no alejarse demasiado de la realidad. A continuación se discuten los que pudieran ser de utilidad para el caso de los suelos gruesos e incluso los finos bajo ciertas consideraciones.

#### **III.1.1 Modelo Elástico**

La teoría de la elasticidad establece relaciones lineales entre los esfuerzos aplicados a un elemento diferencial (Fig. III.1.1.1) y las correspondientes deformaciones (Fig. III.1.2).

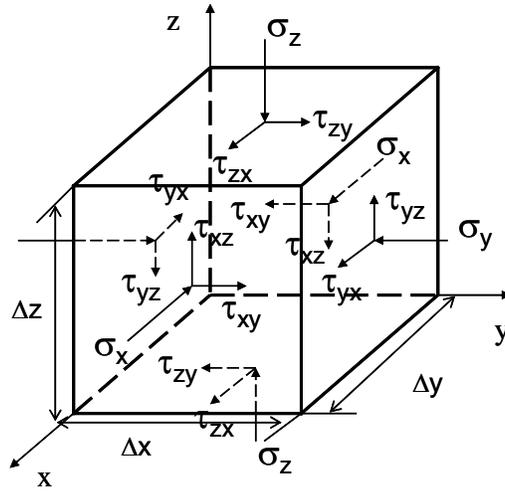
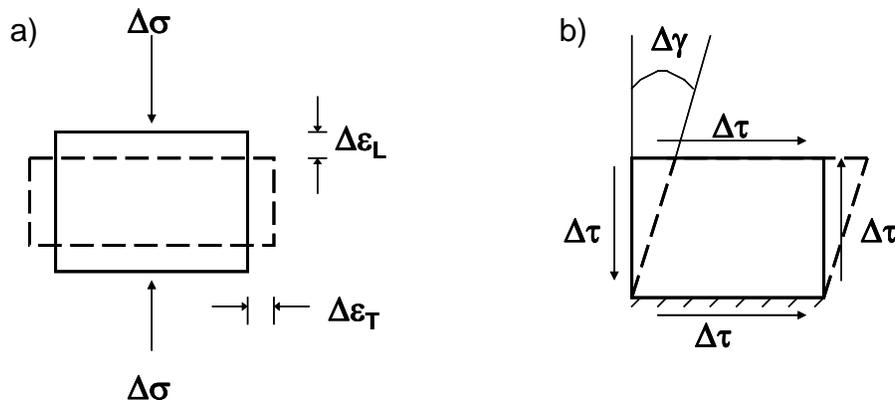


Fig. III.1.1.1 Esfuerzos en el cubo diferencial



- $\Delta\sigma$  Esfuerzo normal aplicado
- $\Delta\epsilon_L$  Deformación lineal longitudinal
- $\Delta\epsilon_T$  Deformación lineal transversal
- $\Delta\tau$  Esfuerzo cortante aplicado
- $\Delta\gamma$  Deformación angular

Fig. III.1.1.2 Deformaciones producidas por esfuerzos aplicados

A partir de la figura anterior, se definen los siguientes parámetros elásticos:

E = MÓDULO DE ELASTICIDAD  
 ν = RELACIÓN DE POISSON

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon_L}, \quad \nu = \frac{\Delta\varepsilon_T}{\Delta\varepsilon_L}$$

G = MÓDULO DE RIGIDEZ AL  
 ESFUERZO CORTANTE

$$G = \frac{\Delta\tau}{\Delta\gamma} = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

Físicamente E y G representan la resistencia que opone el suelo a ser deformado bajo la aplicación de esfuerzos.

Las deformaciones lineales del cubo diferencial de la figura 3.2.1 se obtienen sumando los efectos de los tres esfuerzos normales en las direcciones “x”, “y” y “z”; las deformaciones angulares se obtiene directamente de los esfuerzos cortantes aplicados; las ecuaciones resultantes se presentan a continuación:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

Cabe señalar que este modelo no se puede aplicar directamente al caso de los suelos, porque por un lado no se comporta ni elásticamente ni linealmente y por el otro los parámetros del suelo son función, entre otros factores, del esfuerzo medio aplicado, del tiempo que transcurre a partir de la aplicación de la carga, de la frecuencia de vibración; sin embargo, bajo ciertas consideraciones es posible adaptarlo para el caso que se esté analizando. Para diferenciar la constante E, de su equivalente al caso de suelos se define el “módulo de deformabilidad”,  $M_z$ , como la relación entre las deformaciones lineales verticales y el esfuerzo normal vertical que las produce.

### III.1.2 Modelo Elástico de Revolución

De acuerdo con la génesis de los suelos se puede razonar que sus propiedades varían según la dirección vertical, horizontal u otra cualquiera. Se tendrá entonces un módulo de deformabilidad para la dirección vertical,  $M_z$ , y otro para la horizontal,  $M_h$ ; con esta consideración se tiene un “eje de revolución” en la dirección vertical. Las ecuaciones resultantes se señalan a continuación:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_x &= M_h \Delta\sigma_x - \nu M_h \Delta\sigma_y - \nu M_z \Delta\sigma_z \\ \Delta\varepsilon_y &= M_h \Delta\sigma_y - \nu M_h \Delta\sigma_x - \nu M_z \Delta\sigma_z \\ \Delta\varepsilon_z &= M_z \Delta\sigma_z - \nu M_h \Delta\sigma_y - \nu M_h \Delta\sigma_x\end{aligned}$$

Arreglando las tres últimas expresiones de manera elegante para mostrar la contribución de los esfuerzos en la dirección longitudinal o transversal a la deformación unitaria correspondiente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_x &= \left[ 1 - \nu \left( \frac{\Delta\sigma_y}{\Delta\sigma_x} + \frac{M_z}{M_h} \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_x} \right) \right] M_h \Delta\sigma_x \\ \Delta\varepsilon_y &= \left[ 1 - \nu \left( \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta\sigma_y} + \frac{M_z}{M_h} \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_y} \right) \right] M_h \Delta\sigma_y \\ \Delta\varepsilon_z &= \left[ 1 - \nu \frac{M_h}{M_z} \frac{\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y}{\Delta\sigma_z} \right] M_z \Delta\sigma_z\end{aligned}$$

### III.1.3 Deformación Lateral Restringida

Cuando al material se le restringe la deformación lateral, por ejemplo mediante un anillo muy rígido que lo confine, los esfuerzos laterales quedan en función del esfuerzo vertical; la deformación vertical entonces depende únicamente del esfuerzo vertical y de los valores de los parámetros, por supuesto. La ecuación correspondiente se muestra en la siguiente expresión,

$$\Delta\varepsilon_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} M_z \Delta\sigma_z$$

La expresión anterior se puede simplificar como:

$$\Delta\varepsilon_z = \nu_c M_z \Delta\sigma_z$$

Donde:

$$\nu_c = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$$

El parámetro de confinamiento,  $v_c$ , que resulta de la expresión anterior es función de la relación de Poisson. En la figura III.1.3.1 se observa que si la relación de Poisson es igual a 0.5, que corresponde a un material incompresible, la  $v_c$  vale 0.0; por lo que las deformaciones de un material con estas características serán nulas. Por el contrario si la relación de Poisson es nula, el valor de  $v_c$  es igual a 1.0, quedando las deformaciones verticales directamente proporcionales al esfuerzo; este es el caso de las arcillas donde se han medido relaciones de Poisson a largo plazo muy pequeñas, del orden de 0.16, a lo que corresponde un valor de  $v_c = 0.94$ , prácticamente la unidad. Lo anterior permite para fines prácticos, al menos en el caso reportado, modelar el suelo como si estuviera restringido lateralmente, tal y como lo supuso Terzaghi en el proceso de consolidación unidimensional que se explica más adelante.

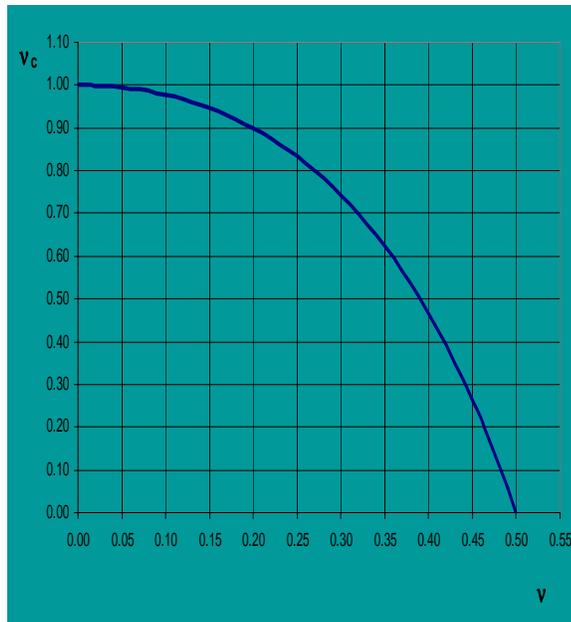


Fig. III.1.3.1  $v_c$  vs  $v$

### III.1.4 Dependencia del Módulo de Deformabilidad con el Esfuerzo Confinante

Como se dijo anteriormente, el módulo de deformabilidad depende de varios factores; entre ellos se encuentra el esfuerzo confinante. El Dr. Leonardo Zeevaert (1973), diseñó una prueba en la cámara triaxial (fotos III.1.4.1), conocida como prueba multitriaxial de deformaciones, para poder evaluar la mencionada dependencia, en la que el suelo puede ser probado con su estado de compacidad natural, o entre los límites del estado más suelto y más compacto; a partir de estudios realizados en varios suelos gruesos encontró una ley fenomenológica que establece la citada relación (Fig. III.1.4.1), la cual se indica en la siguiente ecuación:

$$M_z = C_0 \sigma_c^{-n}$$



Fotos III.1.4.1 Equipo para la prueba multitriaxial de deformaciones

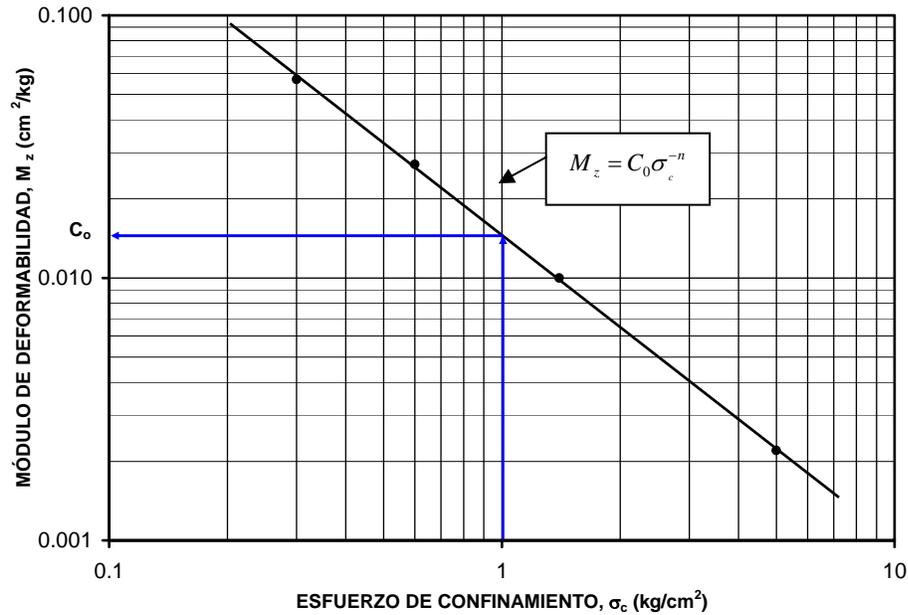


Fig. III.1.4.1 Dependencia del módulo  $M_z$  con el esfuerzo de confinamiento

El parámetro  $C_0$  es igual al módulo de deformabilidad cuando el esfuerzo de confinamiento es igual a la unidad, mientras que el exponente “n” se determina entre dos ciclos de la escala logarítmica del eje de los esfuerzos confinantes como el logaritmo de la relación entre el módulo de deformabilidad del primer ciclo y el módulo de deformabilidad del segundo ciclo. La tabla III.1.4.1 muestra los rangos de variación de estos parámetros en función del estado de compactación del suelo.

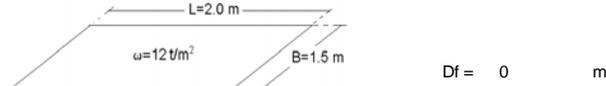
ESTADO DE COMPACTACIÓN	$D_r$	$C_0$	n
MUY SUELTO	0.2	0.01	0.65
SUELTO	0.2- 0.4	0.01- 0.006	0.65- 0.60
SEMICOMPACTO	0.4- 0.6	0.006- 0.003	0.60- 0.50
COMPACTO	0.6- 0.8	0.003- 0.002	0.50- 0.45
MUY COMPACTO	>0.8	<0.002	0.45

Tabla III.1.4.1 Rango de valores de  $C_0$  y n

III.1 DEFORMABILIDAD DE LOS SUELOS GRUESOS

Con estos datos es posible llevar a cabo un análisis preliminar de los asentamientos que va a sufrir una cimentación desplantada en suelo granular como la del ejemplo que se muestra en la tabla III.1.4.2.

SE TRATA DE UNA CIMENTACION DESPLANTADA SUPERFICIALMENTE, CUYAS DIMENSIONES SON: ANCHO B = 1.50 m, LARGO L=2.00 m. LA CIMENTACION TRANSMITE AL SUELO UNA DESCARGA DE 12 t/m<sup>2</sup>, OBTENER CON EL METODO DEL MODULO DE DEFORMABILIDAD Mz LOS ASENTAMIENTOS DE CADA UNO DE LOS ESTRATOS, SUPONER QUE EL ESTRATO DE ARCILLA TIENE UN MODULO DE COMPRESIBILIDAD mv = 0.1 cm<sup>2</sup>/kg, EL NIVEL DE AGUAS FREATICAS SE ENCUENTRA A 1.2 m DE PROFUNDIDAD.



ESTR. No.	PROF. (m)	DESCRIPCIÓN	$\gamma_m$ (t/m <sup>3</sup> )	ESP. H (m)	Z (m)	$\sigma_{vo}$ (t/m <sup>2</sup> )	u (t/m <sup>2</sup> )	$\sigma'_{vo}$ (t/m <sup>2</sup> )	$\sigma'_{vo}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\Delta\sigma_v$ (t/m <sup>2</sup> )	$\Delta\sigma_v$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma'_{vm}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma'_{cm}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	Co	n	Mz ó mv (cm <sup>2</sup> /kg)	$\delta$ (cm)
1	0	ARENA LIMOSA DE COMPACTAD MEDIA	1.6	1.2	0.6	0.96	0	0.96	0.096	9.1	0.91	0.551	0.36733	0.006	0.6	0.01094	1.2
2	1.2	ARCILLA BLANDA	1.2	3	2.7	3.72	1.5	2.22	0.222	8	0.4	0.422	0.28133	-	-	0.10000	12.0
3	5	ARENA LIMOSA COMPACTA.	1.9	2	5.2	7.42	4	3.42	0.342	3	0.3	0.492	0.328	0.003	0.5	0.00524	0.3
$\delta_1 = 13.5$ cm																	

Tabla III.1.4.2 Ejemplo de cálculo de asentamientos en suelo granular

Cabe señalar que el incremento de esfuerzos se calculó al centro de cada estrato, considerando una distribución de esfuerzos mediante la solución de Boussinesq-Damy que se presenta en el capítulo II inciso 3.

## **III.2 Compresibilidad de los Suelos Finos Saturados**

Para estudiar los desplazamientos que sufrirá una estructura desplantada en un suelo fino saturado se requiere considerar en el análisis el procedimiento constructivo de la obra civil por realizarse. En el caso de un cajón de cimentación los trabajos pudieran requerir bombear, excavar por zonas, lastres, etc. Estas acciones pueden tener el objeto de evitar que los sedimentos bajo la excavación se expandan demasiado, con el propósito de limitar las afectaciones a estructuras vecinas y los hundimientos posteriores del suelo, cuando se construya la obra, a valores permisibles.

En efecto, la compresibilidad de un suelo fino, no sólo depende de sus características esfuerzo-deformación-tiempo que se pueden estudiar a través del fenómeno de la consolidación (inciso III.2.2a), sino de la trayectoria de esfuerzos que sufra en el campo durante la construcción y la vida útil de la obra (Zeevaert, 1973). Por eso debemos comenzar estudiando el fenómeno de expansión de los suelos antes que el fenómeno de consolidación.

### **III.2.1 Fenómeno de Expansión de los Suelos**

#### ***a) Módulo de Expansibilidad***

Como se dijo antes, en el caso de cimentaciones compensadas, donde es necesario realizar una excavación, se producen alivios de esfuerzos en los estratos de suelo que producen expansiones elásticas en los estratos.

El módulo de expansibilidad,  $M_e$ , de cada uno de los estratos de suelo, se determina con la siguiente expresión (ref. 1):

$$M_e = \rho_e M_{eo} f_a$$

Donde:

$f_a$  Factor de alteración de las muestras ensayadas

$\rho_e$  Factor que corrige el módulo de deformación unitaria para respuesta elástica  $M_{eo}$  obtenido para descarga total en laboratorio (Zeevaert, 1980), tomando en cuenta que esto último se cumple únicamente para el suelo que se localiza próximo al nivel máximo de excavación, pero en forma parcial para los estratos más profundos. Se puede determinar como:

$$\rho_e = \left( \frac{\Delta\sigma_v}{\sigma_{vo}} \right)^{c-1}$$

Siendo:

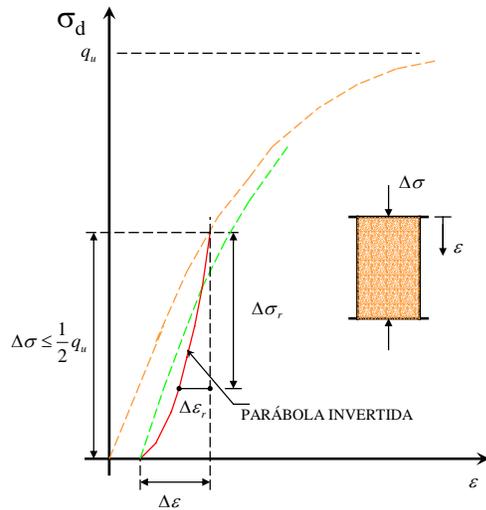
$\Delta\sigma_v$  Alivio de esfuerzo vertical

$\sigma_{vo}$  Esfuerzo efectivo vertical antes de la excavación

$c$  Exponente de expansión obtenido de pruebas de laboratorio como se indica a continuación.

### ***b) Determinación de los Parámetros de Expansión***

Los parámetros de expansión de un suelo fino saturado se obtienen ejecutando pruebas de compresión simple con un ciclo de carga y descarga al 50% del esfuerzo de falla, en muestras inalteradas representativas de los estratos. La figura III.2.1.1 muestra una curva típica esfuerzo-deformación en prueba de compresión simple.



PARA DESCARGA  
TOTAL EL  
MÓDULO DE  
EXPANSIÓN VALE:

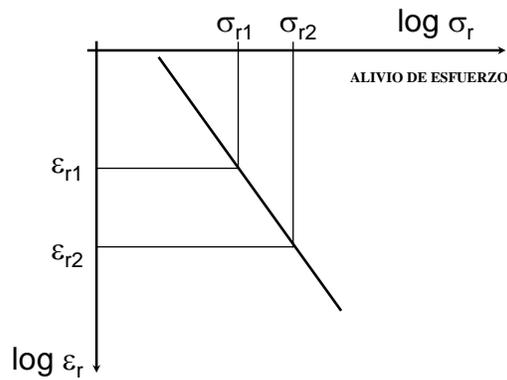
$$M_{eo} = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta \sigma}$$

LA ECUACIÓN DE  
LA PARÁBOLA ES:

$$\Delta \varepsilon_r = a \Delta \sigma_r^c$$

Fig. III.2.1.1 Curva típica esfuerzo-deformación en prueba de compresión simple

En la figura anterior se observa que la curva de expansión es una parábola invertida, siendo su origen el punto donde se inicia la descarga del suelo. El exponente “c”, que define la curvatura de la parábola, se obtiene trasladando el origen de la curva esfuerzo-deformación al origen de la curva de expansión, invirtiendo la dirección de los ejes y graficando los resultados en escala doble logarítmica. En la figura III.2.1.2 se observa que los puntos experimentales se aproximan a una línea recta, siendo el exponente “c” de la parábola, la pendiente de dicha línea en esa gráfica.



$$c = \frac{\log \left( \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \right)}{\log \left( \frac{\sigma_{r2}}{\sigma_{r1}} \right)}$$

Fig. III.2.1.2 Cálculo del parámetro de expansión “c”

### **III.2.2 El Fenómeno de Consolidación**

Las sobrecargas de las estructuras cimentadas en suelos finos saturados inducen la consolidación de estos últimos. En forma clásica el fenómeno se divide en consolidación primaria y consolidación secundaria. La consolidación primaria se genera por un exceso de la presión del agua de poro la cual requiere de tiempos relativamente grandes para su disipación y desalojo retardando el proceso de deformación del suelo. La consolidación secundaria se presenta cuando existe un deslizamiento relativo entre las láminas arcillosas, este fenómeno se denomina “viscosidad intergranular” y tiene importancia, sobre todo, cuando el subsuelo se encuentra altamente estratificado con intercalaciones de material permeable, ya que la consolidación primaria se presenta rápidamente.

#### **a) Módulo de Compresibilidad**

Las recompresiones del suelo, que tienen lugar después de que han sido aliviados esfuerzos en él por las excavaciones para alojar la cimentación, se producen antes o hasta alcanzar el estado de esfuerzo efectivo vertical inicial. En suelos preconsolidados es factible aplicar un incremento de esfuerzo mayor que el esfuerzo vertical efectivo inicial, pero sin rebasar el esfuerzo crítico; en estas condiciones ocurre una compresión adicional de los estratos de suelo involucrados.

El módulo de deformabilidad o compresibilidad que se use en los análisis debe tomar en cuenta tanto el fenómeno de consolidación primaria como el de secundaria.

En análisis tridimensionales, el módulo de deformabilidad de los estratos se calcula con la expresión:

$$M_v = \frac{m'_v [F(T_v) + \beta \log(1 + \xi T_v)] \rho_c f_a}{v_c}$$

Donde:

$F(T_v)$ : Función de Terzaghi del fenómeno primario, dado por:

$$F(T_v) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} e_n^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}}$$

$T_v$  Factor tiempo de Terzaghi dado por:

$$T_v = \frac{c_v t}{L_e^2}$$

Siendo  $c_v$ ,  $m'_v$ ,  $\beta$  y  $\xi$  parámetros de consolidación (incisos siguientes), para el esfuerzo medio de campo.

$t$  Tiempo considerado en el análisis desde la aplicación de la carga.

$L_e$  Longitud efectiva (trayectoria en línea recta que tiene que seguir la molécula de agua más alejada de los estratos drenantes, para ser desalojada por consolidación del estrato de arcilla saturada)

$\rho_c$  Factor de recompresión igual a:

$$\rho_c = \frac{1 + \left( \frac{\Delta \sigma_c}{\sigma_o} \right) \beta \log(1 + \xi T_v)}{1 + \beta \log(1 + \xi T_v)} \rho_e$$

Donde:

$\Delta\sigma_c$ : Incremento de esfuerzo vertical al centro del estrato en cuestión.

$\sigma_o$ : Esfuerzo efectivo vertical inicial.

En el caso de análisis unidimensionales, donde se desprecia el efecto de los esfuerzos laterales, el módulo de compresibilidad de los estratos debe calcularse mediante la siguiente expresión:

$$m_v = m'_v [F(T_v) + \beta \log(1 + \xi T_v)] \rho_c f_a$$

En el caso del fenómeno de la compresión  $\rho_c = 1$

**b) Modelo de Viscosidad Intergranular de Zeevaert**

Para analizar el fenómeno de viscosidad intergranular Zeevaert propone utilizar dos modelos reológicos conectados en serie: el modelo de Kelvin y la unidad "Z" como se muestra en la siguiente figura:

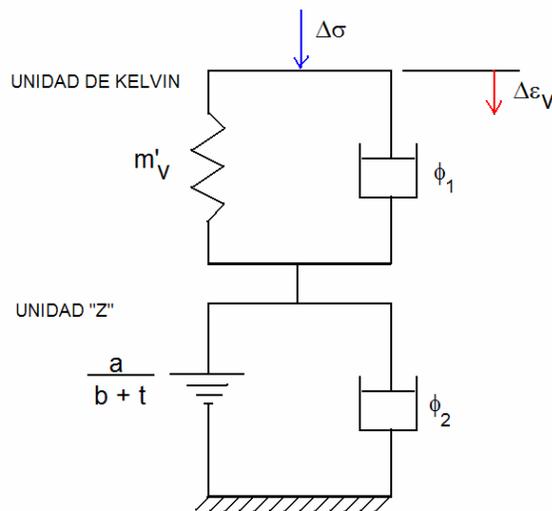


Fig. III.2.2.1 Modelo de Zeevaert de viscosidad intergranular

El modelo de Kelvin es equivalente al modelo de Terzaghi, por lo que con esta parte se toma en cuenta la consolidación primaria. El amortiguador Newtoniano del modelo tiene una fluidez lineal  $\phi_1$  y el elemento resistente cuenta con un módulo de compresibilidad  $m'_v$ .

La unidad Z esta compuesta por un elemento viscoso no lineal y un elemento viscoso lineal conectados en paralelo (el efecto de esta conexión es que la viscosidad lineal retarda el movimiento del elemento viscoso no lineal). La fluidez lineal es  $\phi_2$  y la no lineal que varía con el tiempo "t" es  $\frac{a}{b+t}$ , siendo "a" y "b" dos constantes que se determinan experimentalmente.

La deformación volumétrica,  $\Delta\varepsilon_v$ , para un incremento de esfuerzo vertical constante, se calcula con la siguiente expresión:

$$\Delta\varepsilon_v = m'_v \Delta\sigma_v [F(T_v) + \beta \log(1 + \xi T_v)]$$

Donde:

$m'_v$ : Coeficiente de compresibilidad volumétrica unitario para la compresión primaria.

$\Delta\sigma_v$ : Incremento de esfuerzo aplicado.

$\beta$ : Factor que mide la magnitud relativa del fenómeno viscoso intergranular.

$\xi$ : Factor adimensional que modifica el valor de  $T_v$  en el fenómeno viscoso intergranular.

Los parámetros  $m'_v$ ,  $\beta$ ,  $\xi$  y  $C_v$  se obtienen del ajuste de las curvas de las pruebas de consolidación en muestras inalteradas representativas de los estratos, como una función del nivel de esfuerzos, mediante el procedimiento que se describe a continuación:

### **c) Ajuste de Curvas de Consolidación**

Para el ajuste de las curvas de consolidación es necesario que se defina no sólo la componente primaria sino también la secundaria de cada curva (Figs. III.2.2.2 y III.2.2.3), evitando en todo momento la expansión del suelo debido a una muy pronta saturación del material; para esto último se ha visto en forma práctica que después de aplicar un 20% del esfuerzo vertical efectivo de campo, la muestra ya no se expande al saturarla.

Se definen los siguientes parámetros de ajuste (Fig. III.2.2.3):

$\delta_{0\%}$	Ordenada en el origen de la curva de consolidación.
$t_B$ y $\delta_B$	Punto donde termina la consolidación primaria y continua la secundaria.
$t_F$ y $\delta_F$	Punto más alejado de la zona donde termina la consolidación primaria, sobre el tramo recto (en escala semilogarítmica) de la consolidación secundaria.
$t_{50}$ y $\delta_{50}$	Punto para el 50% de consolidación primaria.
$C_t$	Pendiente del tramo recto (en escala semilogarítmica) de la consolidación secundaria.

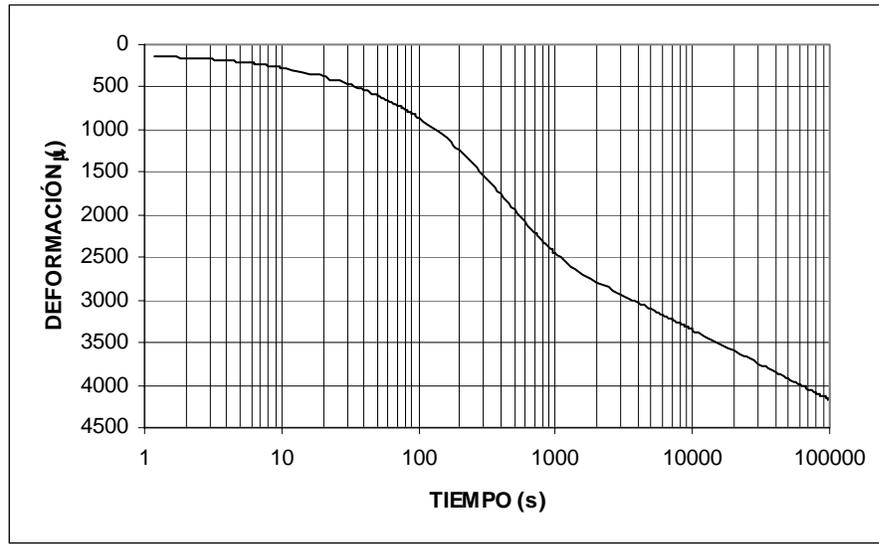


Fig. III.2.2.2 Curva de consolidación Tipo I

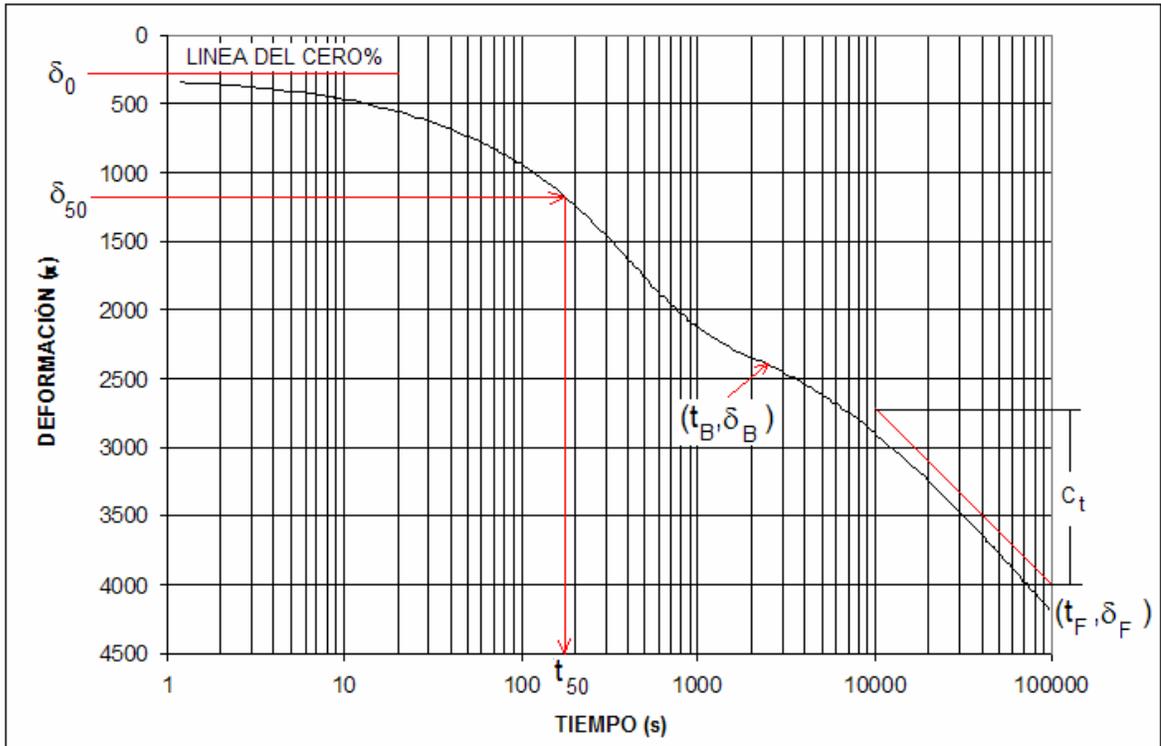


Fig. III.2.2.3 Curva de consolidación Tipo II y parámetros de ajuste

Para el ajuste de los puntos experimentales se deben proponer valores iniciales de los parámetros de ajuste y graficar la curva teórica correspondiente, cuya ecuación es:

$$\delta = 2\left(\frac{1}{2}\delta_v - \delta_o\right)F(T_v) + C_t \text{Log}(1 + \xi T_v) + \delta_o$$

Donde:

$$\frac{1}{2}\delta_v = \frac{1}{2}(\delta_B - \delta_o) + C_t \text{Log}\left(1 + \frac{t_B}{\tau}\right) + \delta_o$$

Siendo:

$$\tau = \frac{e^a t_F - t_B}{1 - e^a}$$

Con:

$$a = \frac{2.3(\delta_B - \delta_F)}{C_t}$$

Y:

$$\xi = 5 \quad (\text{Para curvas tipo I})$$

$$\xi = \left(\frac{H_i}{2}\right)^2 c_v \tau \quad (\text{Para curvas tipo II})$$

Siendo  $H_i$  la altura inicial de la probeta antes de aplicar el incremento de esfuerzo y:

$$c_v = \frac{0.2\left(\frac{H_i}{2}\right)^2}{t_{50}}$$

Una vez encontrado el mejor ajuste, por corrección de los valores inicialmente propuestos, los parámetros de consolidación se calculan como:

$$m'_v = \frac{2\left(\frac{1}{2}\delta_v - \delta_o\right)}{H_i \Delta\sigma_v}$$

Y:

$$\beta = \frac{C_t}{m'_v H_i \Delta\sigma_v}$$

Donde  $\Delta\sigma_v$  es el incremento de esfuerzo vertical.

A continuación se presenta, en la siguiente tabla III.2.2.1, un ejemplo de ajuste:

**TABLA III.2.2.1 Determinación De Los Parámetros De Consolidación Con El Modelo De Zeevaert**

OBRA:	-	$\sigma_{vi} =$	1.0900	kg/cm <sup>2</sup>			
LOC.:	-	$\Delta\sigma_v =$	0.9300	kg/cm <sup>2</sup>			
SONDEO:	SM-1	$H_i =$	1.7542	cm			
MUESTRA:	M-39						
PROF.:	25.20-26.10	M					
FECHA	DIAS	HORA	HORA	TIEMPO	TIEMPO	MICROM.	DEFORM.
Día-mes-año	TRANSC.	-----	CORREG.	min	s	mm	micras
20-Oct-03	-----	09:30 a.m.	09:30 a.m.	-----	-----	17.522	-----
	-----		-----	0.083	5	17.320	202
	-----		-----	0.17	10	17.245	277
	-----		-----	0.25	15	17.180	342
	-----		-----	0.5	30	17.020	502
	-----		-----	1	60	16.800	722
	-----		-----	2	120	16.492	1030
	-----		-----	4	240	16.122	1400
	-----		-----	8	480	15.682	1840
	-----		-----	15	900	15.400	2122
	-----		-----	30	1800	15.200	2322
	-----		-----	60	3600	15.003	2519
	-----		-----	120	7200	14.698	2824
21-Oct-03	1	10:10 a.m.	10:10 a.m.		88800	13.438	4084

**AJUSTE:**

DEFORMACION AL CERO :

$\delta_0\% = 20$   $\mu\text{m}$

PUNTO DE INFLEXIÓN:

$\delta_B = 2500$   $\mu\text{m}$

$t_B = 3500$  s

PUNTO

FINAL:

$\delta_F = 4200$   $\mu\text{m}$

$t_F = 100000$  s

PENDIENTE SECUNDARIA FINAL:

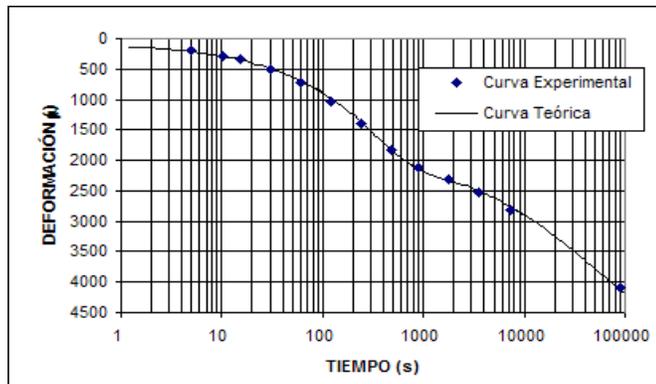
$C_t = \delta_2 - \delta_1 = 1500$   $\mu\text{m}$

TIEMPO AL 50% DE CONSOLIDACIÓN PRIMARIA

$1/2\delta_v = 1061.24$   $\mu\text{m}$

$t_{50} = 150$  s

$\delta_{50c} = 1084.30$   $\mu\text{m}$



LOS PARÁMETROS SON:

$a = -2.61$

$\tau = 4162.64$

PARA EL  $\sigma_m = 1.55500$  kg/cm<sup>2</sup>

$m_v = 0.12765$  cm<sup>2</sup>/kg

$c_v = 0.00103$  cm<sup>2</sup>/seg

$\beta = 0.72029$

$\xi = 0.18017$

$m_t = 0.091945$  cm<sup>2</sup>/kg

## **IV. PROGRAMA DE COMPUTADORA**

## IV. DESARROLLO DEL PROGRAMA

### IV.1 Aspectos Generales

#### IV.1.1 Plataforma Visual Basic

El programa de computadora que se desarrolló para resolver el problema de la compresibilidad de los suelos fue escrito en lenguaje de programación Visual Basic.

El Visual Basic es un sistema diseñado para crear aplicaciones con interfaz gráfica utilizando un lenguaje de alto nivel, sus características principales son:

1. Una biblioteca que da soporte a los objetos de Windows tales como ventanas, cajas de dialogo, cajas de texto, hojas de cálculo, etc.
2. El control llamado *Microsoft Common Dialog* que permite utilizar las cajas de dialogo más comunes como: Abrir, Guardar, Imprimir, Color y Fuente.
3. Un entorno que permite desarrollar las aplicaciones incluyendo: un editor de texto, un intérprete, un depurador, un examinador de objetos, un explorador de proyectos, un compilador, etc.
4. El editor de textos permite visualizar la sintaxis de las sentencias de programación, como una ayuda para corregir errores.
5. Un paquete para el desarrollo de programas que incluye: asistentes para aplicaciones, barras de herramientas, formularios de datos, empaquetado y distribución, interfaz pública de controles, páginas de propiedades, objetos

de datos, generador de clases, diseñador de complementos y migración de documentos.

En la referencia 1 se puede encontrar un listado más desarrollado de las características de Visual Basic 6, así como sus requerimientos de hardware y software.

### IV.1.2 Diagrama de Flujo

Para desarrollar el programa de computadora, se elaboró el diagrama de flujo que se muestra en la figura IV.2.1. Con base en dicho diagrama y a una versión en EXCELL (ref. 8), se procedió a la programación correspondiente, empleando los objetos y las subrutinas necesarias tratando de que el programa fuera lo más amigable posible para el usuario.

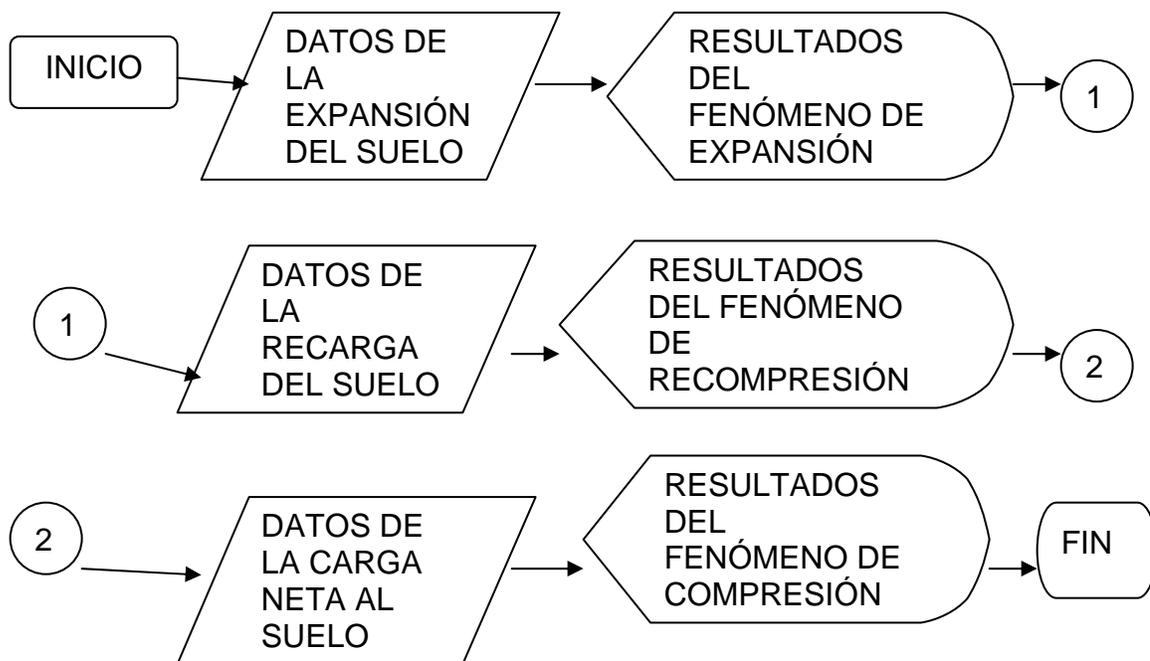


Fig. IV.2.1 Diagrama de flujo para el programa "VOLUM"

### IV.1.3 Listado del programa

En la figura IV.2.1 Se presenta el listado del programa que aparece en la pantalla de la computadora en la plataforma de VISUAL BASIC con la opción de cascada. Por razones de espacio no se desglosa todo el listado pero el lector puede consultarlo en el disco anexo.

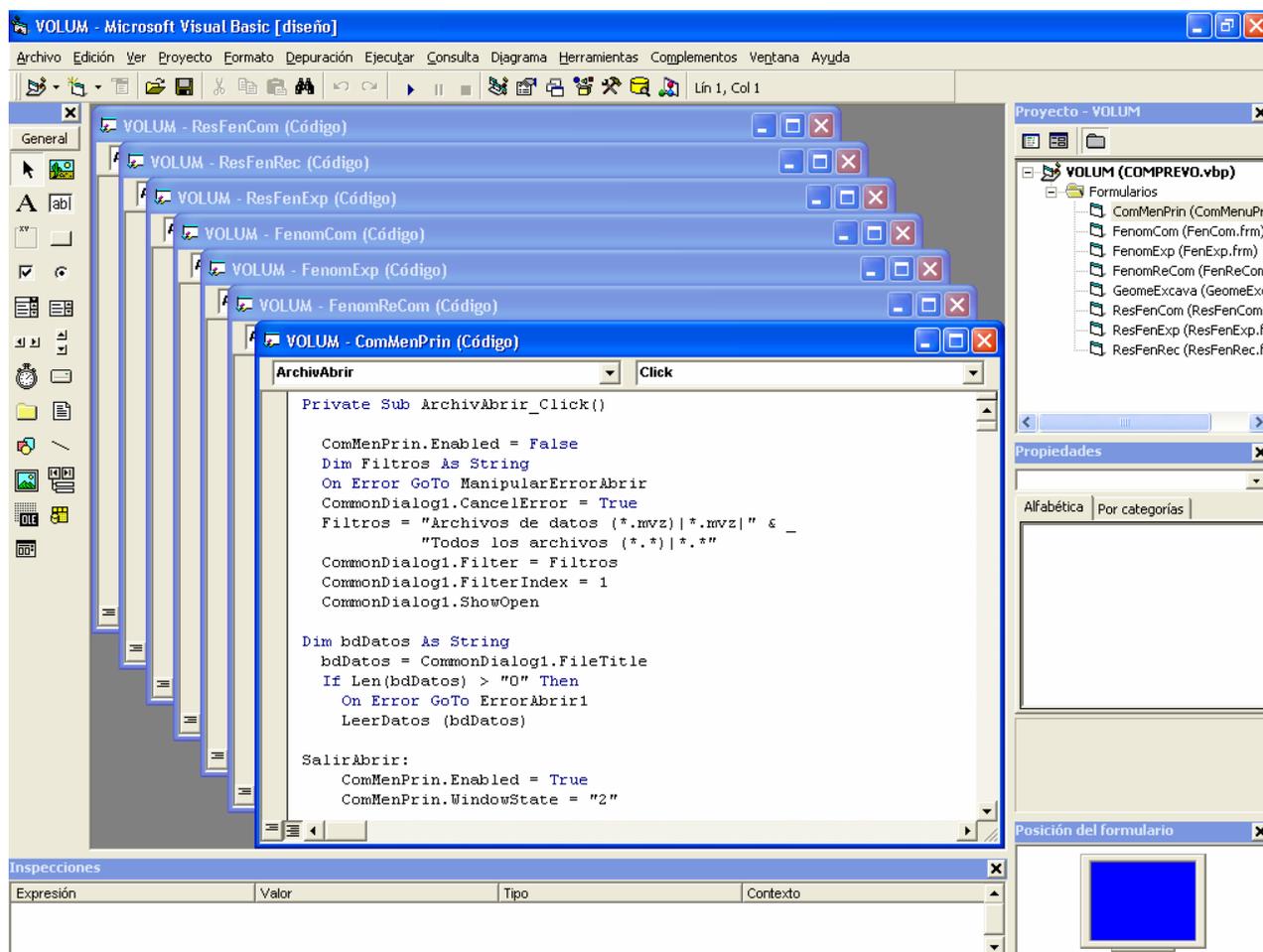


Fig. IV.2.1 Listado del programa VOLUM

## IV.2 Manual del Usuario

### IV.2.1 Requerimientos de Cómputo

Para instalar el programa de cómputo, se requiere contar con:

- a) Computadora Pentium II o superior
- b) Ambiente Windows 98 o superior
- c) Lectora de CD

### IV.2.2 Instalación

Simplemente se introduce el CD de instalación del programa en la lectora y se corre el programa INSTALAR que viene incluido; el paquete de instalación contiene una guía para elegir las diferentes opciones de instalación.

### IV.2.3 Uso Del Programa

Pasos a seguir:

- a) Se corre el programa “VOLUM” desde ambiente Windows, apareciendo en pantalla el recuadro de inicio con el menú principal (Fig. IV.2.1).



Fig. IV.2.1 Menú principal

En esta sección se introducen los datos generales del problema como son: El título de la “Obra”, la “Descarga total de la estructura”, etc.

- b) Las opciones del menú principal pueden ser activadas por medio del ratón o del teclado (Tecla ALT seguida de la letra de inicio de alguna opción).
- c) Con las opciones “Fenómeno de Expansión”, “Fenómeno de Recompresión” y “Fenómeno de Compresión” del menú principal se introducen los datos de las pruebas de laboratorio y estratigrafía y propiedades del suelo obtenidas en campo. Con estas mismas opciones se puede llevar a cabo el análisis de dichos fenómenos (Fig. IV.2.2).



Fig. IV.2.2 Sub-menú “Fenómeno de Expansión” opción “Resultados”

- d) Con la opción Archivo se pueden “Grabar” los datos en memoria de disco o salir del programa.



Fig. IV.2.2 Sub-menú “Archivo- Salvar” opción “Guardar Como”

Para mejorar comprensión del funcionamiento del programa en el capítulo V se incluyen 2 ejemplos que tratan las cimentaciones parcialmente y totalmente compensadas, respectivamente.

## **V. EJEMPLOS NUMÉRICOS**

## V. EJEMPLOS NUMÉRICOS

El objetivo de plantear los siguientes ejemplos es establecer una metodología que muestre como se resuelven con la herramienta de cálculo de Zeevaert mediante el uso del programa de cómputo que se desarrolló para este fin.

### V.1 Datos Generales

Para los dos casos analizados la estratigrafía y propiedades del suelo se muestran en las figuras V.1.1 a V.1.5. Cabe señalar que lo más recomendable es contar con una gráfica de parámetros de consolidación para cada estrato, sin embargo, éste no fue el caso, por lo que se interpolarán los resultados de las curvas de parámetros donde si fue posible obtenerlos a los estratos donde no se pudo realizar la prueba de consolidación de la siguiente manera:

FIGURA (m)	ESTRATO(S)	PROFUNDIDAD (m)
-	A	0.00-1.80
5.1	B	1.80-3.00
	C	3.00-4.90
	D	4.90-6.80
5.2	E	6.80-8.00
	F	8.00-9.20
	G	9.20-12.00
	H	12.00-14.80
5.3	I	14.80-18.80
	J	18.80-20.60
5.4	K a M	20.60-23.60

Los diagramas de esfuerzos verticales totales y efectivos así como el de esfuerzos neutros en el agua se muestran en la figura V.1.6

Por otro lado, la superestructura tiene un área en planta de  $240 \text{ m}^2$  en un predio rectangular de 20 m de longitud por 12 m de ancho. Para la condición de carga muerta más carga viva media, la descarga a cimentación resultó de  $8 \text{ t/m}^2$ , sin incluir el peso de la cimentación. Para ésta última se adoptará una descarga de  $0.5 \text{ t/m}^2$  por metro de profundidad de desplante. Se considerará también que en los dos casos que se analizan a continuación la excavación para alojar el cimiento se hará en dos etapas marcadas como I y II en la figura V.1.7

V.1 DATOS GENERALES DE LOS EJEMPLOS NÚMERICOS

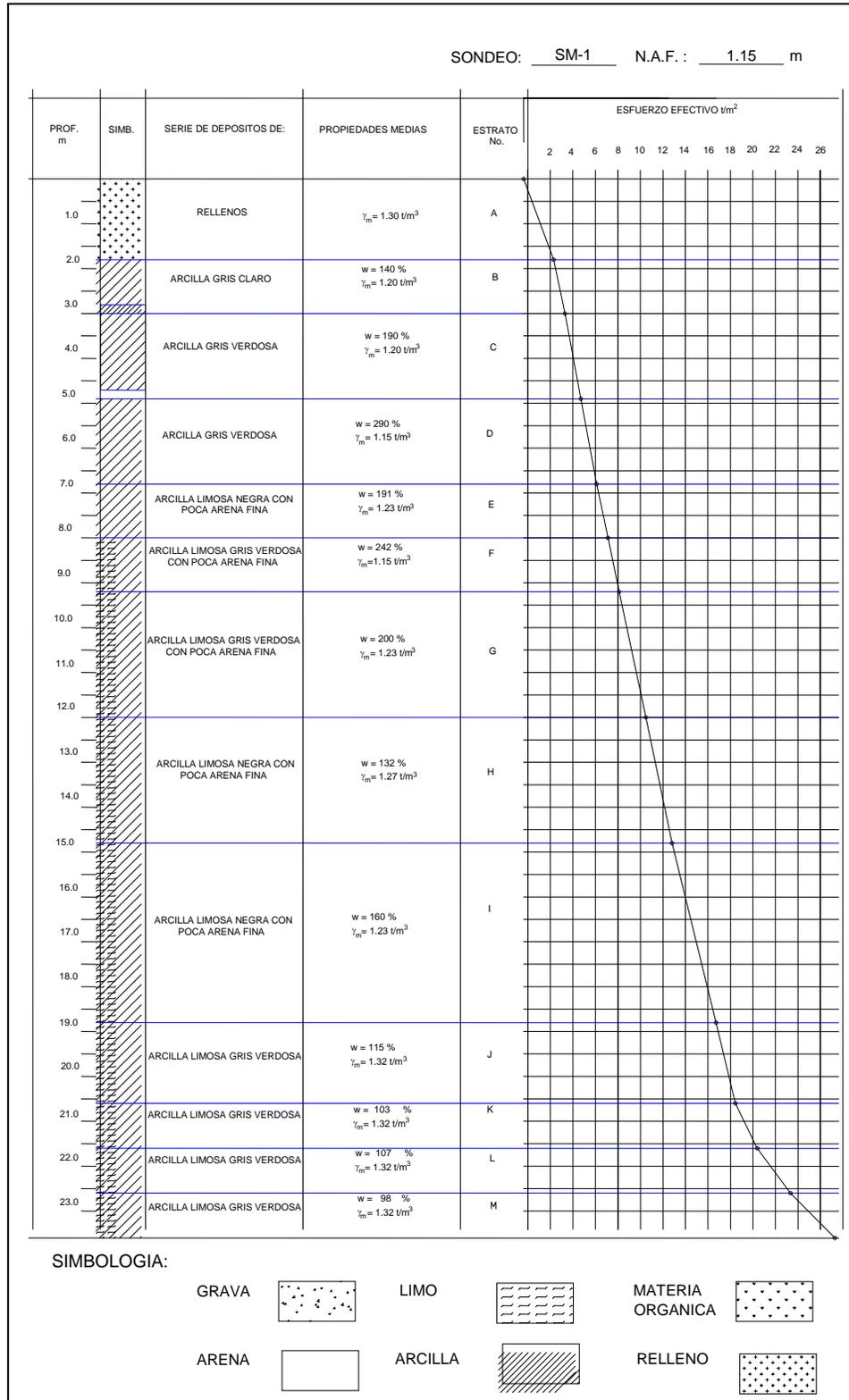


Fig. V.1.1 Perfil Estratigráfico

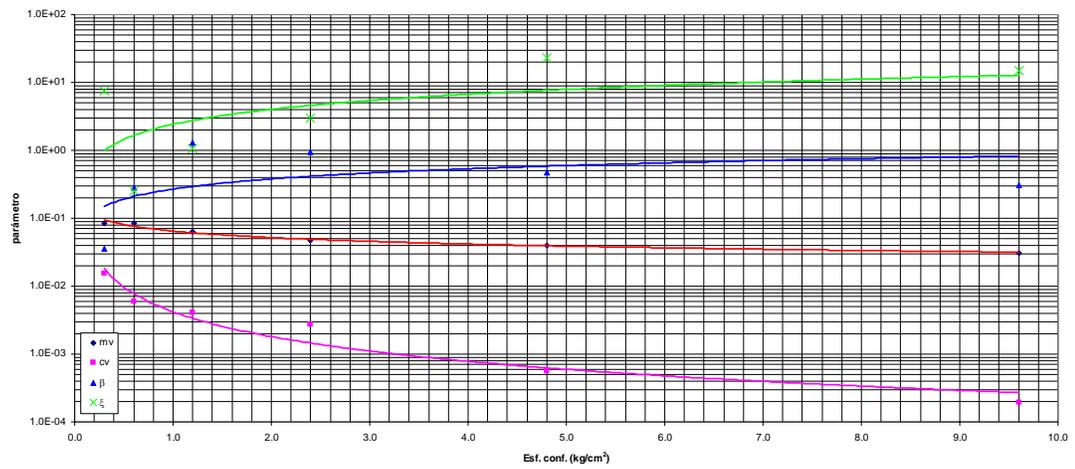


Fig. V.1.2 Parámetros de consolidación para los estratos B, C y D

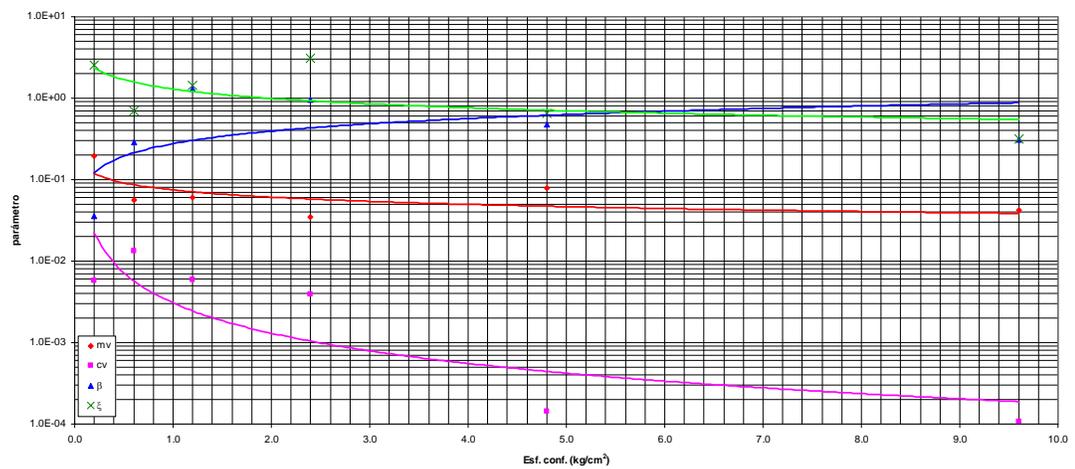


Fig. V.1.3 Parámetros de consolidación para los estratos E a H

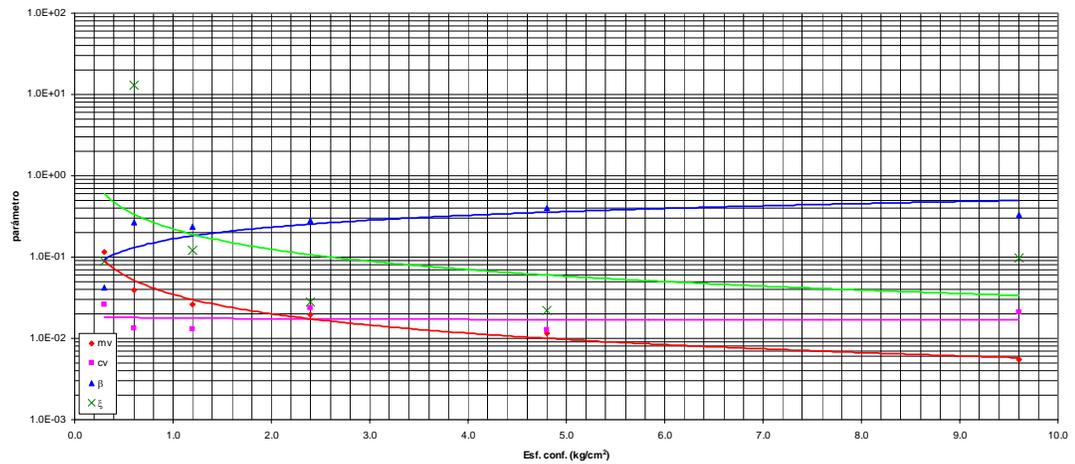


Fig. V.1.4 Parámetros de consolidación para los estratos I y J

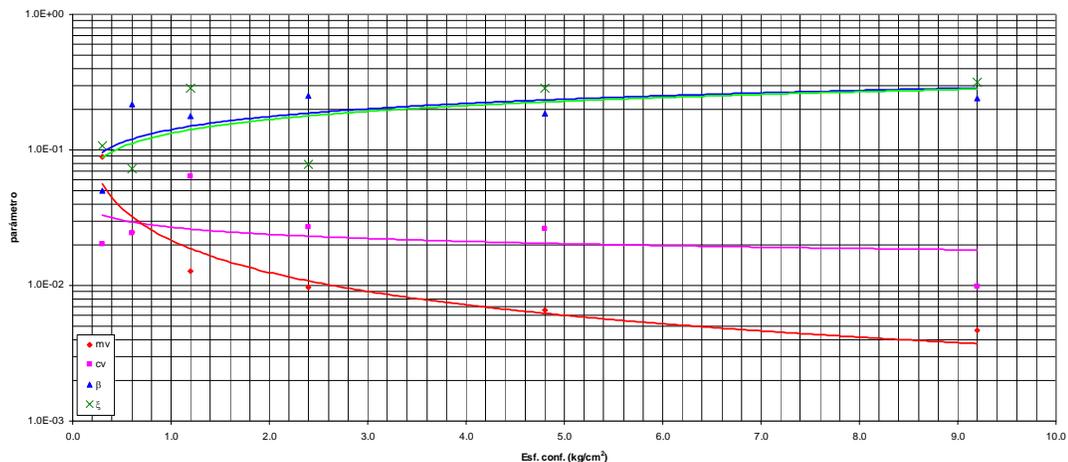


Fig. V.1.5 Parámetros de consolidación para los estratos K a M

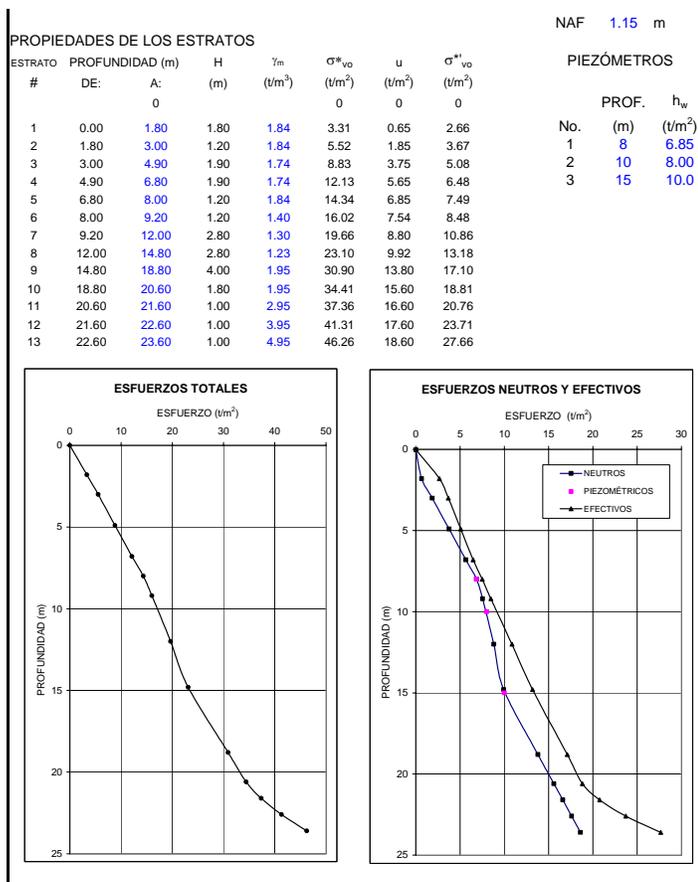
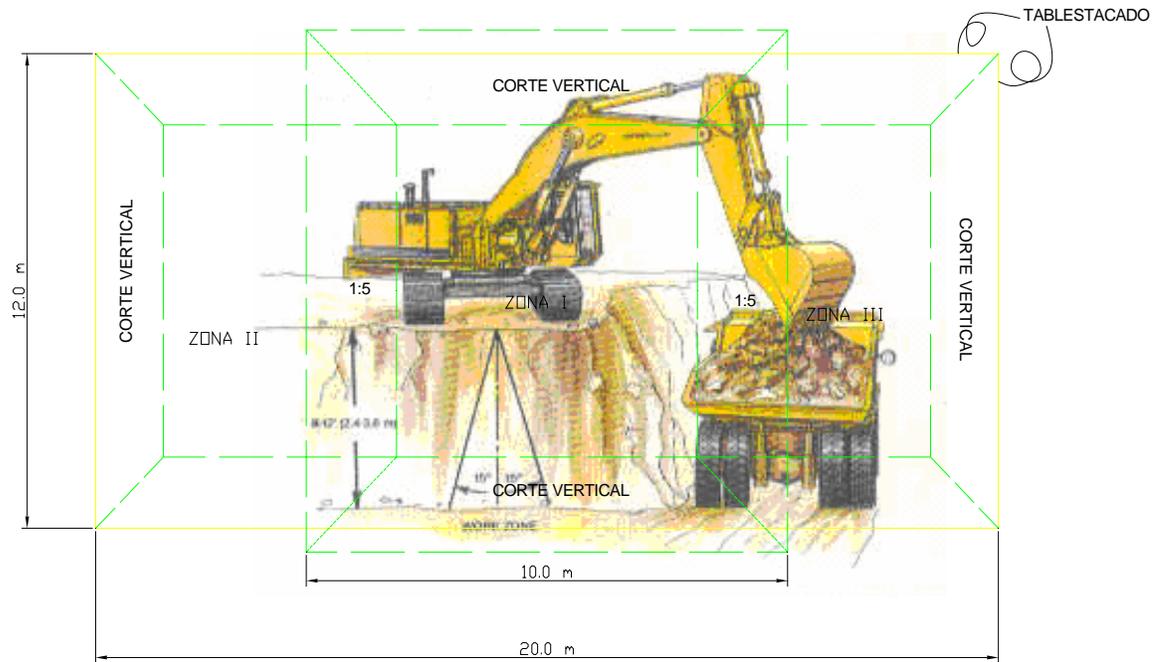


Fig. V.1.6 Diagramas de esfuerzos totales, neutros y efectivos

## ÁREA DE EXCAVACIÓN



## PLANTA

Fig. V.1.7 Zonas de excavación

## V.2 Cimentación Parcialmente Compensada

Tomando en cuenta las características de compresibilidad del suelo bajo la cimentación, así como, las descargas de la superestructura y su cimiento, además de considerar que no toda la profundidad del cajón se ocuparía para alojar un estacionamiento subterráneo, la experiencia en la ingeniería práctica recomienda que no se aplique una descarga neta mayor de  $1.5 \text{ t/m}^2$ , con objeto de que el hundimiento total máximo esperado no supere el límite de 30 cm que marcan las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Cimentaciones del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, para estructuras sin colindancias. De acuerdo con lo anterior la compensación parcial será de  $6.5 \text{ t/m}^2$  más el peso de la cimentación. La profundidad de desplante del cimiento,  $D_f$ , tiene que cumplir la siguiente condición:

$$6.5 + 0.5D_f = \sigma'_v + s$$

Donde:

- $\sigma'_v$ : Esfuerzo efectivo a nivel de desplante de la cimentación
- s: Subpresión hidráulica suponiendo cajón estanco

A la profundidad de 5.0 m el esfuerzo efectivo vertical, de acuerdo con la figura V.1.6 vale  $5.15 \text{ t/m}^2$  y la presión del agua es igual a  $3.85 \text{ t/m}^2$  y se verifica la anterior condición.

Para el cálculo de influencias por alivio de esfuerzo debido a la excavación, la zona I se dividió en 25 placas como se muestra en la figura 5.9; así mismo, para el cálculo de influencias por compresión del suelo, el área total se dividió también en 25 placas como se muestra en la figura V.2.2

En la figura V.2.3 se muestra el diagrama de influencias medias de esfuerzo tanto para el fenómeno de expansión como para el de compresión. En este caso el diagrama correspondiente al fenómeno de recompresión es numéricamente igual al de expansión, por ser una cimentación parcialmente compensada.

En las figuras V.2.4 a V.2.10 se presentan los resultados del análisis efectuado con el programa VOLUM, donde se observa que tanto la expansión como el hundimiento total son menores que los límites antes fijados. Además se indican los valores de los módulos de compresibilidad a ser usados en el análisis de interacción suelo-estructura, por ejemplo. Cabe señalar en cuanto al cálculo que las figuras V.1.1 y V.1.2 quedan descartadas por corresponder a estratos por encima del nivel de desplante.

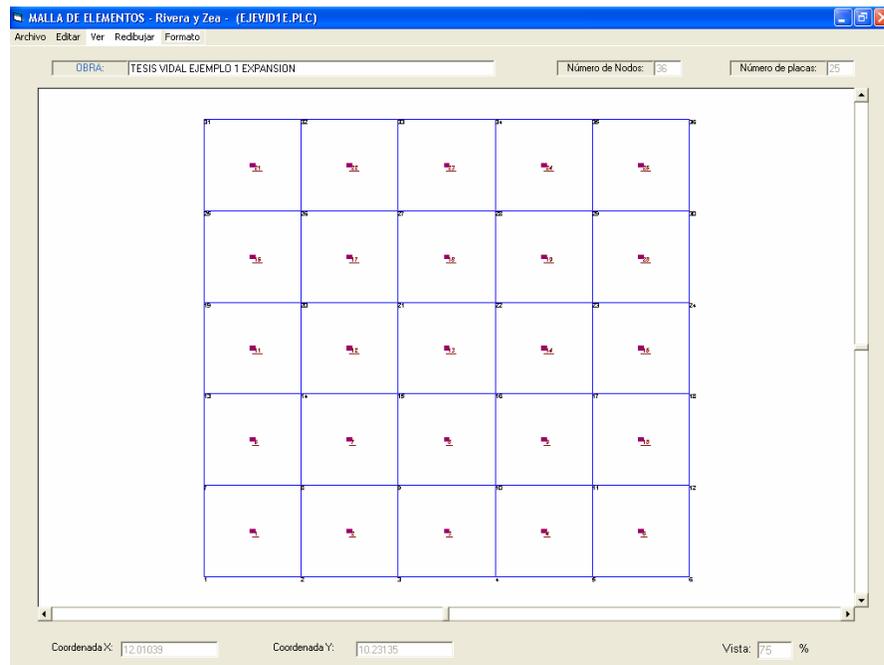


Fig. V.2.1 Mallado de la zona I en la etapa de excavación para el cálculo de Influencias

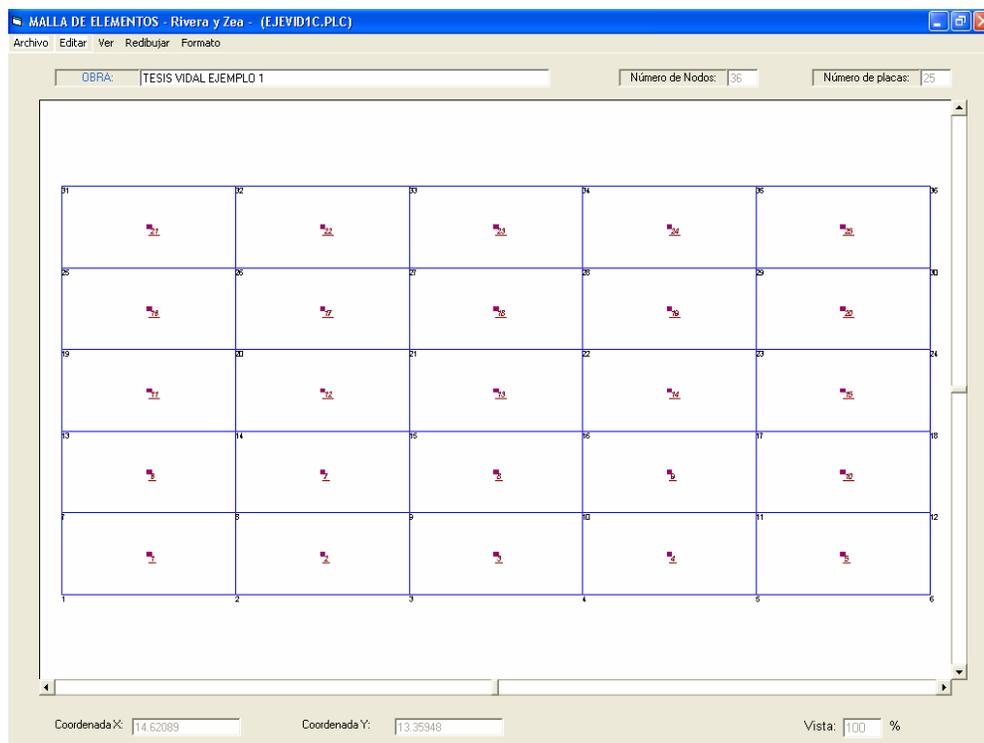


Fig. V.2.2 Mallado de la zona total para el cálculo de Influencias por compresión

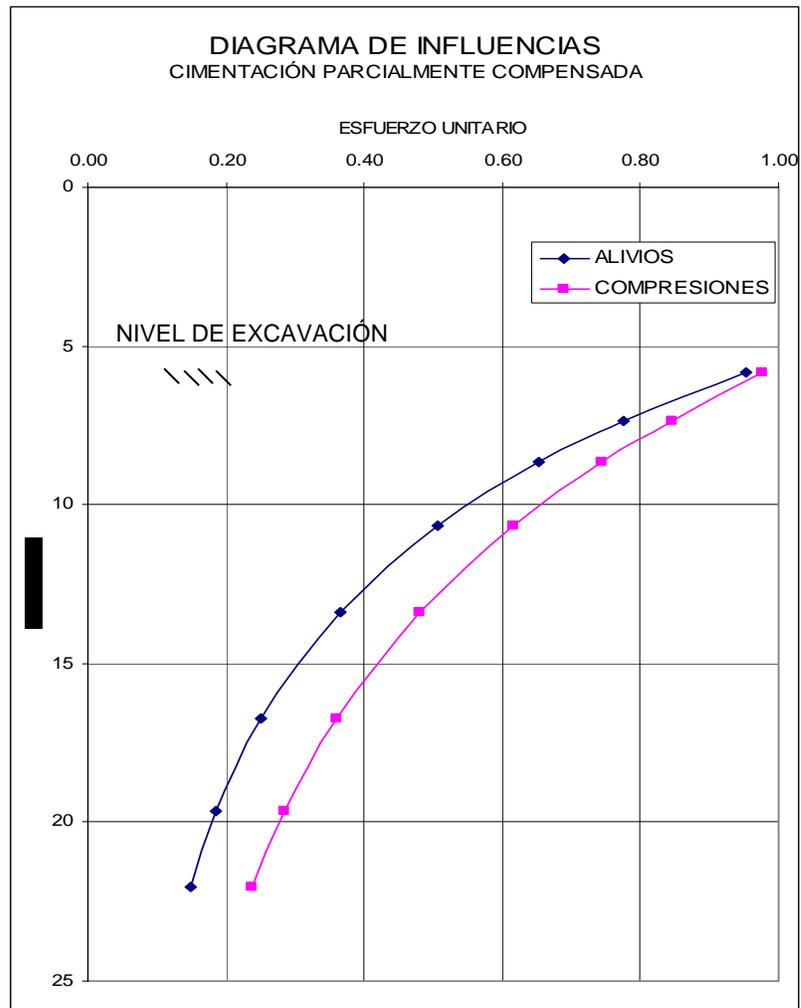


Fig. V.2.3 Diagrama de influencias medias para expansión, recompresión y compresión



Fig. V.2.4 Datos generales de la cimentación

V.2 CIMENTACIÓN PARCIALMENTE COMPENSADA

**Fenómeno de Expansión**  
 Aceptar Cancelar

OBRA: Ejemplo 1.- Cimentación Parcialmente Compensada

ESTRATO	Espesor	Esfuerzo efectivo vertical de campo	Abatimiento de la presión del agua	Alivio unitario de esfuerzo, $l_{exp}$	Módulo de expansión total, $M_{eo}$	Exponente de expansión, $c$
Número	(cm)	( $t/m^2$ )	( $t/m^2$ )	(adim.)	( $cm^2/kg$ )	(adim.)
1	180	5.816	3.85	0.95303	.015	1.71
2	120	6.986	3.85	0.77523	.013	1.61
3	120	7.985	3.34	.65248	.010	1.61
4	140	9.04	2.64	.56	.010	1.21
5	140	10.23	1.8	.47	.010	1.21
6	140	11.441	0.96	.4	.010	1.22
7	140	12.603	0.12	.335	.010	1.22
8	400	15.144		.25034	.010	1.57
9	180	17.959		.18617	.010	1.57
10	100	19.289		.162	.010	1.57
11	100	20.239		.14875	.010	1.57
12	100	21.189		.1	.010	1.57
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						

Fig. V.2.5 Datos para el análisis del fenómeno de expansión

**Módulos de expansión**  
 Archivo Aceptar

OBRA: Ejemplo 1.- Cimentación Parcialmente Compensada

Esfuerzo total a nivel de desplante = 9  $t/m^2$       Factor de alteración de las muestras = 0.9

Esfuerzo efectivo a nivel de desplante = 5.15  $t/m^2$

Estrato bajo la profundidad de desplante	Espesor, H	Esf. efect. inicial al centro	Abatimiento de la presión del agua	Alivio unitario de esfuerzo, $l_q$	Módulo de expansión total, $M_{eo}$	Exponente de expansión, $c$	Alivio de esfuerzo	Esfuerzo efectivo final por exp.	Factor de corrección por alivio parcial	Módulo de expansión, $M_{et}$	Expansión
No.	(cm)	( $t/m^2$ )	( $t/m^2$ )	(adim.)	( $cm^2/kg$ )	(adim.)	( $t/m^2$ )	( $t/m^2$ )	(adim.)	( $m^2/t$ )	(cm)
1	180	5.816	3.85	0.95303	.015	1.71	1.0581045	4.7578955	0.298217	0.000050	0.077
2	120	6.986	3.85	0.77523	.013	1.61	0.1424345	6.8435655	0.093052	0.000002	0.002
3	120	7.985	3.34	.65248	.010	1.61	720000000000	7.964728	0.026111	0.000000	0.000
4	140	9.04	2.64	.56	.010	1.21	0.244	8.796	0.468335	0.000020	0.014
5	140	10.23	1.8	.47	.010	1.21	0.6205	9.6095	0.555139	0.000073	0.043
6	140	11.441	0.96	.4	.010	1.22	1.1	10.341	0.597371	0.000164	0.083
7	140	12.603	0.12	.335	.010	1.22	1.60525	10.99775	0.635499	0.000305	0.129
8	400	15.144		.25034	.010	1.57	1.289251	13.854749	0.245559	0.000126	0.114
9	180	17.959		.18617	.010	1.57	0.9587755	17.0002245	0.188208	0.000097	0.029
10	100	19.289		.162	.010	1.57	0.8343	18.4547	0.166927	0.000086	0.013
11	100	20.239		.14875	.010	1.57	0.7660625	19.4729375	0.154704	0.000080	0.011
12	100	21.189		.1	.010	1.57	0.515	20.674	0.120184	0.000062	0.006
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											

Expansión total del subsuelo = 0.521 cm

Fig. V.2.6 Resultados del análisis del fenómeno de expansión

**Fenómeno de Recompresión**  
 Aceptar Cancelar

OBRA: Ejemplo 1.- Cimentación Parcialmente Compensada

Estrato bajo la profundidad de desplante	Distancia efec. recorrida por el agua	Influencia de esfuerzo vertical, Irec.	Esf. Efect. vertical medio	Módulo compresibil. primaria, mv	Coefficiente de consolidación cv	$\beta$	$\xi$
Número	(cm)	(adim.)	(kg/cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> /kg)	(cm <sup>2</sup> /s)	(adim.)	(adim.)
1	300	0.97529	0.915	0.085	0.00769	0.2405	1.5592
2	120	0.84671	1.065	0.0565	0.0122	0.3175	0.8098
3	120	0.743	1.131	0.0573	0.01088	0.3204	0.9380
4	200	0.66	1.177	0.058	0.00971	0.3229	1.0521
5	140	0.58	1.222	0.0587	0.00847	0.3256	1.1732
6	140	0.51	1.264	0.0594	0.00727	0.3282	1.2907
7	210	0.45	1.302	0.0601	0.00614	0.3307	1.4007
8	580	0.35958	1.547	0.0246	0.01525	0.2472	0.1009
9	480	0.28404	1.828	0.0230	0.01788	0.2584	0.0781
10	300	0.253	1.959	0.0111	0.0429	0.2196	0.1677
11	200	0.23636	2.054	0.0108	0.03985	0.2255	0.1506
12	100	0.15	2.135	0.0106	0.03651	0.2319	0.1318
13							
14							

Fig. V.2.7 Datos para el análisis del fenómeno de recompresión

**Módulos de Recompresión**  
 Archivo Aceptar

OBRA: Ejemplo 1.- Cimentación Parcialmente Compensada

Factor de alteración de las muestras = 0.9  
 Hundimientos a un tiempo de: 15 años  
 Descarga total de la estructura + cimentación = 10.5 t/m<sup>2</sup>  
 Descarga de recompresión a nivel de desplante = 9 t/m<sup>2</sup>

Estrato	Longitud efectiva	Influencia de esfuerzo vertical	mv	cv	$\beta$	$\xi$	Incremento de esfuerzo vertical	Esfuerzo vertical medio	Tv	Kvo	$\rho$	F(Tv)	Módulo de recomp. mvr	Hundimiento por recomp.
No.	(cm)	(adim.)	(cm <sup>2</sup> /kg)	(cm <sup>2</sup> /s)	(adim.)	(adim.)	(t/m <sup>2</sup> )	(t/m <sup>2</sup> )	(adim.)	(adim.)	(adim.)	(adim.)	(m <sup>3</sup> /t)	(cm)
1	300	0.97529	0.085	0.00769	0.2405	1.5592	1.058	5.287	40.419	0.434	0.228	1.000	0.000000	0.000
2	120	0.84671	0.0565	0.0122	0.3175	0.8098	0.142	6.915	400.770	0.798	0.053	1.000	0.000000	0.000
3	120	0.743	0.0573	0.01088	0.3204	0.9380	0.020	7.975	357.408	0.810	0.014	1.000	0.000000	0.000
4	200	0.66	0.058	0.00971	0.3229	1.0521	0.244	8.918	114.830	0.673	0.285	1.000	0.000000	0.000
5	140	0.58	0.0587	0.00847	0.3256	1.1732	0.621	9.920	204.421	0.775	0.328	1.000	0.000000	0.000
6	140	0.51	0.0594	0.00727	0.3282	1.2907	1.100	10.891	175.459	0.774	0.365	1.000	0.000105	0.068
7	210	0.45	0.0601	0.00614	0.3307	1.4007	1.605	11.800	65.861	0.651	0.421	1.000	0.001380	0.783
8	580	0.35958	0.0246	0.01525	0.2472	0.1009	1.289	14.499	21.444	0.124	0.221	1.000	0.000219	0.284
9	480	0.28404	0.0230	0.01788	0.2584	0.0781	0.959	17.480	36.710	0.152	0.165	1.000	0.000147	0.068
10	300	0.253	0.0111	0.0429	0.2196	0.1677	0.834	18.872	225.482	0.349	0.126	1.000	0.000062	0.014
11	200	0.23636	0.0108	0.03985	0.2255	0.1506	0.766	19.856	471.266	0.419	0.111	1.000	0.000055	0.012
12	100	0.15	0.0106	0.03651	0.2319	0.1318	0.515	20.932	1,727.069	0.547	0.079	1.000	0.000044	0.006
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														

Hundimiento por recompresión = 1.235 cm

Fig. V.2.8 Resultados del análisis del fenómeno de recompresión

V.2 CIMENTACIÓN PARCIALMENTE COMPENSADA

**Fenómeno de Compresión**  
 Aceptar Cancelar

OBRA: Ejemplo 1.- Cimentación Parcialmente Compensada

Estrato bajo la profundidad de desplante	Esf. medio vertical al centro	Módulo compresibilid. primaria, mv	Coefficiente de consolidación cv	$\beta$	$\xi$
Número	(t/m <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> /kg)	(cm <sup>2</sup> /s)	(adim.)	(adim.)
1	0.655	.0830	.00582	.3768	.3258
2	0.762	.0570	.01132	.3194	.8952
3	0.854	.0577	.01018	.3219	.0066
4	0.954	.0584	.00895	.3246	1.1267
5	1.067	.0593	.00755	.3276	1.2634
6	1.182	.0601	.00611	.3307	1.4035
7	1.294	.0582	.00573	.3745	1.5549
8	1.541	.0241	.01605	.2506	.0940
9	1.817	.0227	.01849	.2610	.0728
10	1.948	.0109	.04102	.2232	.1571
11	2.042	.0107	.03811	.2288	.1408
12	2.130	.0105	.03537	.2341	.1253
13					
14					

Fig. V.2.9 Datos para el análisis del fenómeno de compresión

**Módulos de Compresión**  
 Archivo Aceptar

OBRA: Ejemplo 1.- Cimentación Parcialmente Compensada

Descarga total de la estructura + cimentación = 10.5 t/m<sup>2</sup>  
 Descarga de recompresión = 9 t/m<sup>2</sup>  
 Descarga neta = 1.5 t/m<sup>2</sup>

Esfuerzo total a nivel de desplante = 9 t/m<sup>2</sup>  
 Esfuerzo efectivo a nivel de desplante = 5.15 t/m<sup>2</sup>  
 Factor de alteración de las muestras = 0.9

Hundimientos a un tiempo de: 15 años

Estrato	mv	cv	$\beta$	$\xi$	Incremento de esfuerzo vertical	Esfuerzo vertical medio	Tv	Kvo	F(Tv)	Módulo de compresión, mvc	Hundimiento por compresión	Módulo de compresión total	Hundimiento total
No.	(cm <sup>2</sup> /kg)	(cm <sup>2</sup> /s)	(adim.)	(adim.)	(t/m <sup>2</sup> )	(t/m <sup>2</sup> )	(adim.)	(adim.)	(adim.)	(m <sup>2</sup> /t)	(cm)	(m <sup>2</sup> /t)	(cm)
1	.0830	.00582	.3768	.3258	1.463	0.655	30.590	0.392	1.000	0.010397	2.738	0.001485	2.738
2	.0570	.01132	.3194	.8952	1.270	0.762	371.862	0.806	1.000	0.009265	1.412	0.001324	1.412
3	.0577	.01018	.3219	.0066	1.115	0.854	334.413	0.163	1.000	0.006039	0.808	0.000863	0.808
4	.0584	.00895	.3246	1.1267	0.990	0.954	105.843	0.675	1.000	0.008805	1.220	0.001258	1.220
5	.0593	.00755	.3276	1.2634	0.870	1.067	182.217	0.774	1.000	0.009470	1.153	0.001353	1.153
6	.0601	.00611	.3307	1.4035	0.765	1.182	147.463	0.767	1.000	0.009555	1.023	0.001455	1.091
7	.0582	.00573	.3745	1.5549	0.675	1.294	61.463	0.743	1.000	0.009132	0.863	0.002487	1.645
8	.0241	.01605	.2506	.0940	0.539	1.541	22.569	0.124	1.000	0.002438	0.526	0.000536	0.809
9	.0227	.01849	.2610	.0728	0.426	1.817	37.962	0.150	1.000	0.002350	0.180	0.000462	0.248
10	.0109	.04102	.2232	.1571	0.380	1.948	215.601	0.344	1.000	0.001319	0.050	0.000242	0.064
11	.0107	.03811	.2288	.1408	0.355	2.042	450.689	0.414	1.000	0.001362	0.048	0.000242	0.060
12	.0105	.03537	.2341	.1253	0.225	2.130	1,673.142	0.544	1.000	0.001459	0.033	0.000246	0.039
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													

Hundimiento por compresión = 10.054 cm  $\Sigma$  = 11.287 cm  
 Hundimiento por recompresión = 1.235 cm  
 Hundimiento total = 11.289 cm

Fig. V.2.10 Resultados del análisis del fenómeno de compresión

### V.3 Cimentación Totalmente Compensada

En este caso la profundidad de desplante del cimiento,  $D_f$ , debe cumplir la siguiente condición:

$$8.0 + 0.5D_f = \sigma'_v + s$$

A la profundidad de 6.25 m el esfuerzo efectivo vertical es igual a 6.15 t/m<sup>2</sup> y la presión del agua es igual a 5.10 t/m<sup>2</sup> y se verifica, aproximadamente, la anterior condición.

En la figura V.3.1 se muestra el diagrama de influencias de esfuerzo tanto para el fenómeno de expansión como para el de recompresión. En este caso el diagrama correspondiente al fenómeno de compresión es nulo.

En la figuras V.3.2 a V.3.6 se presentan los resultados del análisis efectuado con el programa VOLUM, donde se observa que tanto la expansión como el hundimiento total son menores que los límites antes fijados por el RCDF y sus NTCDCC. Además se indican los valores de los módulos de compresibilidad a ser usados en un análisis de interacción suelo-estructura, por ejemplo.

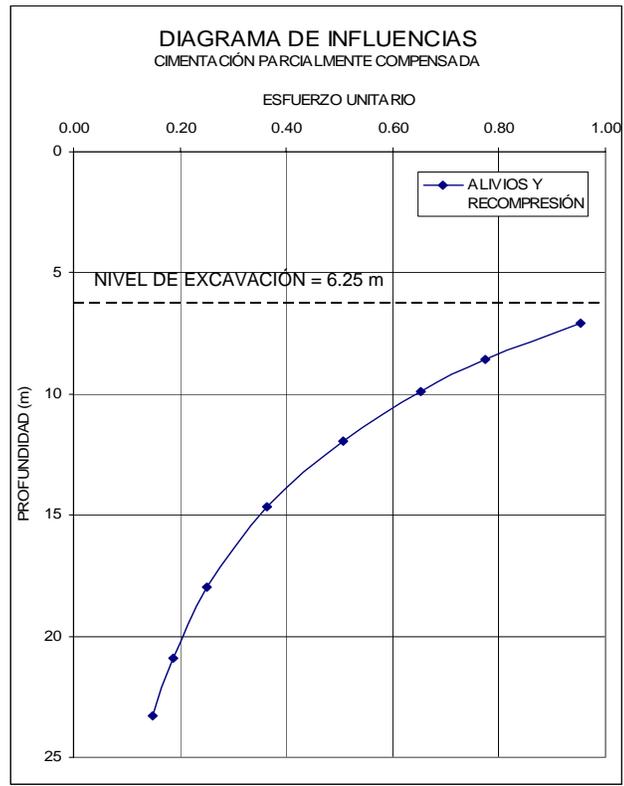


Fig. V.3.1 Diagrama de influencias medias para expansión, recompresión



Fig. V.3.2 Datos generales de la cimentación

**Fenómeno de Expansión**  
 Aceptar Cancelar  
 OBRA: Ejemplo 2.- Cimentación Totalmente Compensada

ESTRATO	Espesor	Esfuerzo efectivo vertical de campo	Abatimiento de la presión del agua	Alivio unitario de esfuerzo, $l_{exp}$	Módulo de expansión total, Meo	Exponente de expansión, c
Número	(cm)	(t/m <sup>2</sup> )	(t/m <sup>2</sup> )	(adm.)	(cm <sup>2</sup> /kg)	(adm.)
1	55	6.354	5.068	.99999	.015	1.71
2	120	6.986	5.013	.94619	.013	1.61
3	120	7.985	4.443	.80235	.010	1.61
4	140	9.04	3.663	.67563	.010	1.21
5	140	10.23	2.733	.56525	.010	1.21
6	140	11.441	1.788	.47554	.010	1.22
7	140	12.603	.825	.4076	.010	1.22
8	400	15.144	.363	.29336	.010	1.57
9	180	17.959	.223	.21461	.010	1.57
10	100	19.289	.156	.18718	.010	1.57
11	100	20.239	.082	.17051	.010	1.57
12	100	21.189		.15524	.010	1.57
13						
14						

Fig. V.3.3 Datos para el análisis del fenómeno de expansión

**Módulos de expansión**  
 Archivo Aceptar  
 OBRA: Ejemplo 2.- Cimentación Totalmente Compensada

Esfuerzo total a nivel de desplante = 11.25 t/m<sup>2</sup>      Factor de alteración de las muestras = 0.9  
 Esfuerzo efectivo a nivel de desplante = 6.15 t/m<sup>2</sup>

Estrato bajo la profundidad de desplante	Espesor, H	Esf. efect. inicial al centro	Abatimiento de la presión del agua	Alivio unitario de esfuerzo, $l_q$	Módulo de expansión total, Meo	Exponente de expansión, c	Alivio de esfuerzo	Esfuerzo efectivo final por exp.	Factor de corrección por alivio parcial	Módulo de expansión, Me	Expansión
No.	(cm)	(t/m <sup>2</sup> )	(t/m <sup>2</sup> )	(adm.)	(cm <sup>2</sup> /kg)	(adm.)	(t/m <sup>2</sup> )	(t/m <sup>2</sup> )	(adm.)	(m <sup>2</sup> /t)	(cm)
1	55	6.354	5.068	.99999	.015	1.71	1.0819385	5.2720615	0.284525	0.000037	0.023
2	120	6.986	5.013	.94619	.013	1.61	0.8060685	6.1799315	0.267860	0.000024	0.030
3	120	7.985	4.443	.80235	.010	1.61	0.4914525	7.4935475	0.182564	0.000009	0.010
4	140	9.04	3.663	.67563	.010	1.21	92124500000	8.5478755	0.542676	0.000032	0.034
5	140	10.23	2.733	.56525	.010	1.21	0.7432875	9.4867125	0.576593	0.000061	0.054
6	140	11.441	1.788	.47554	.010	1.22	1.136571	10.304429	0.601685	0.000115	0.086
7	140	12.603	.825	.4076	.010	1.22	1.68174	10.92126	0.642041	0.000212	0.136
8	400	15.144	.363	.29336	.010	1.57	1.441164	13.702836	0.261655	0.000103	0.136
9	180	17.959	.223	.21461	.010	1.57	1.0968515	16.8621485	0.203209	0.000083	0.036
10	100	19.289	.156	.18718	.010	1.57	0.995157	18.293843	0.184574	0.000079	0.017
11	100	20.239	.082	.17051	.010	1.57	0.9666365	19.2723635	0.176633	0.000080	0.015
12	100	21.189		.15524	.010	1.57	0.954726	20.234274	0.170863	0.000084	0.015
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											

Expansión total del subsuelo = 0.592 cm

Fig. V.3.4 Resultados del análisis del fenómeno de expansión

**Fenómeno de Recompresión**  
 Aceptar Cancelar

OBRA: Ejemplo 2.- Cimentación Totalmente Compensada

Estrato bajo la profundidad de desplante	Distancia efec. recorrida por el agua	Influencia de esfuerzo vertical, frec.	Esf. Efect. vertical medio	Módulo compresibil. primaria, mv	Coefficiente de consolidación cv	$\beta$	$\xi$
Número	(cm)	(adim.)	(kg/cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> /kg)	(cm <sup>2</sup> /s)	(adim.)	(adim.)
1	175	0.9999	1.083	.0850	.00643	.2733	.5954
2	120	0.97102	1.158	.0563	0.01251	.3168	.7787
3	120	0.86596	1.231	.0572	0.01108	.3199	.9186
4	200	0.76422	1.280	.0579	0.00977	0.3228	1.0462
5	140	0.66842	1.320	.0587	0.00845	0.3256	1.1749
6	140	0.58598	1.356	.0595	0.00720	0.3284	1.2976
7	210	0.51550	1.379	0.0601	0.00607	0.3308	1.4073
8	580	0.40704	1.597	0.0246	0.01525	0.2472	0.1010
9	480	0.31953	1.864	0.0230	0.01788	0.2584	0.0781
10	300	0.28509	1.988	0.0111	0.04292	0.2196	0.1678
11	200	0.26338	2.074	0.0108	0.03993	0.2253	0.1510
12	100	0.24435	2.159	0.0106	0.03696	0.2310	0.1343
13							
14							
15							
16							

Fig. V.3.5 Datos para el análisis del fenómeno de recompresión

**Módulos de Recompresión**  
 Archivo Aceptar

OBRA: Ejemplo 2.- Cimentación Totalmente Compensada

Factor de alteración de las muestras = 0.9

Hundimientos a un tiempo de: 15 años

Descarga total de la estructura + cimentación = 11.125 t/m<sup>2</sup>

Descarga de recompresión a nivel de desplante = 11.125 t/m<sup>2</sup>

Estrato	Longitud efectiva	Influencia de esfuerzo vertical	mv	cv	$\beta$	$\xi$	Incremento de esfuerzo vertical	Esfuerzo vertical medio	Tv	Kvo	$\rho$	F(Tv)	Módulo de recomp. mvr	Hundimiento por recomp.
No.	(cm)	(adim.)	(cm <sup>2</sup> /kg)	(cm <sup>2</sup> /s)	(adim.)	(adim.)	(t/m <sup>2</sup> )	(t/m <sup>2</sup> )	(adim.)	(adim.)	(adim.)	(adim.)	(m <sup>3</sup> /t)	(cm)
1	175	0.9999	.0850	.00643	.2733	.5954	1.082	5.813	99.319	0.486	0.211	1.000	0.000000	0.000
2	120	0.97102	.0563	0.01251	.3168	.7787	0.806	6.583	410.954	0.794	0.165	1.000	0.000000	0.000
3	120	0.86596	.0572	0.01108	.3199	.9186	0.491	7.739	363.978	0.808	0.106	1.000	0.000000	0.000
4	200	0.76422	.0579	0.00977	0.3228	1.0462	0.492	8.794	115.540	0.673	0.337	1.000	0.000000	0.000
5	140	0.66842	.0587	0.00845	0.3256	1.1749	0.743	9.858	203.938	0.775	0.345	1.000	0.000000	0.000
6	140	0.58598	.0595	0.00720	0.3284	1.2976	1.137	10.873	173.770	0.773	0.368	1.000	0.000000	0.000
7	210	0.51550	0.0601	0.00607	0.3308	1.4073	1.682	11.762	65.110	0.651	0.428	1.000	0.000571	0.458
8	580	0.40704	0.0246	0.01525	0.2472	0.1010	1.441	14.423	21.444	0.124	0.236	1.000	0.000140	0.253
9	480	0.31953	0.0230	0.01788	0.2584	0.0781	1.097	17.411	36.710	0.152	0.178	1.000	0.000104	0.067
10	300	0.28509	0.0111	0.04292	0.2196	0.1678	0.995	18.791	225.588	0.349	0.139	1.000	0.000050	0.016
11	200	0.26338	0.0108	0.03993	0.2253	0.1510	0.967	19.756	472.212	0.419	0.127	1.000	0.000053	0.016
12	100	0.24435	0.0106	0.03696	0.2310	0.1343	0.955	20.712	1,748.356	0.548	0.113	1.000	0.000059	0.016
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														

Hundimiento por recompresión = 0.826 cm

Fig. V.3.6 Resultados del análisis del fenómeno de recompresión

## **VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

## VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se elaboró un programa de computadora para el análisis de la deformabilidad de los suelos que resulta una herramienta poderosa en la práctica de la ingeniería geotécnica cotidiana para llevar a cabo los análisis de los desplazamientos del suelo de cimentación como son expansiones y hundimientos que se van a presentar al construir una obra de ingeniería civil durante su construcción y vida útil. El desarrollo de este escrito nos permite llegar al las conclusiones y recomendaciones que se describen a continuación:

1. El diseño del programa de computadora va dirigido al personal académico, a los alumnos que cursan las materias de “Comportamiento de Suelos” y “cimentaciones” y en especial gente que se dedique al diseño de cimentaciones, en donde se calcularán las deformaciones del suelo al estar sometido a solicitaciones durante la construcción de la obra y su vida útil.
2. Con el programa VOLUM es posible calcular los módulos de compresibilidad de los estratos, los cuáles no sólo dependen de los resultados de las pruebas llevadas a cabo en el laboratorio sino que se ven muy influidos por la planeación de la construcción de la cimentación, tanto en las etapas de excavación como en las de recarga y compresión del suelo, como se muestra en los ejemplos numéricos que se presentan en el capítulo V de este trabajo.
3. Una vez conocidos los valores de la compresibilidad de los estratos es posible modelar el suelo mediante otros programas de computadora como los de interacción suelo-estructura o de elemento finito, para conocer la configuración de expansiones y hundimientos de la cimentación, así como las presiones de contacto en la interfaz suelo-cimiento, con objeto de llevar

a cabo las revisiones correspondientes a los estados límite de servicio de la estructura y su cimentación. Mediante el programa VOLUM se puede determinar la expansión media y el promedio de los asentamientos del cimiento, que servirán también para verificar los resultados posteriormente calculados con el programa de interacción o de elemento finito.

4. Cabe señalar finalmente que el programa de computadora que aquí se presenta es una primera versión de un proyecto más ambicioso a futuro donde se pretende integrar entre otros aspectos: el modelado en planta de la excavación y de la cimentación, el cálculo de influencias, la determinación de los abatimientos hidrodinámicos durante la excavación y el bombeo, la interpolación de parámetros de consolidación, etc.

# **ANEXOS**

## **A.I PIEZÓMETROS**

La determinación “*in situ*” de las presiones neutrales en un problema de gran trascendencia en los aspectos prácticos de la Mecánica de Suelos, pues, según ya se vio, ese concepto juega un papel fundamental en las actuales teorías, sobre todo en Consolidación y en Resistencia al Esfuerzo Cortante de los suelos; la aplicación de tales teorías a los problemas prácticos exige entonces el efectuar mediciones directas que permitan evaluar la presión neutral en el caso particular que se trate.

Los piezómetros son los aparatos cuya función es medir la presión neutral en el suelo en un punto determinado, a una cierta profundidad. El principio con el que trabaja es, simplemente, el hecho conocido según el cual la presión que pueda existir en el agua en el extremo inferior de un tubo puede equilibrarse con una cierta columna de agua actuante en dicho tubo.

Un piezómetro es, pues, un tubo con extremo inferior poroso, que se coloca en el suelo a la profundidad a que se desee medir la presión en el agua. Si el nivel de equilibrio del agua en el tubo es igual al nivel natural representado por el nivel freático, querrá decir que, en el punto medido, la presión en el agua es la correspondiente a la condición hidrostática.

Una altura de la columna equilibrante mayor que el nivel de aguas freáticas indicará la existencia de una presión en exceso de la hidrostática, que podrá calcularse automáticamente del desnivel observado en la columna de agua. Similarmente, una presión en el agua, menor que la hidrostática, quedará indicada por un menor nivel de la columna piezométrica respecto al nivel freático.

El uso de piezómetros en el campo ha permitido seguir de cerca los procesos de consolidación inducidos por la aplicación superficial de cargas, bombeo de mantos acuíferos, evaporación superficial, etc.

### ***A.I.1 Diseño e instalación de piezómetros para medida de presiones neutrales en suelos plásticos***

Las indicaciones que siguen para resolver el importante problema práctico del diseño, construcción e instalación de un piezómetro en arcilla son debidas a la experiencia del Dr. Casagrande.

### **A.I.2 Diseño y construcción de la celda porosa**

La celda porosa está constituida por un tubo de 60 cm de longitud, perforado para permitir la entrada del agua. El diámetro interior del tubo puede ser de 2.5 cm. El extremo inferior del tubo se sella con hule y el superior se conecta a un tubo que será de 1.3 cm ( ½ pulgada) de diámetro, con un empaque también sellado con hule; el tubo deberá ser de una longitud suficiente para que sobresalga a la superficie.

Para instalar el tubo se deberá proceder de la siguiente manera:

1. Prepárese una sección de tubo de impermeable, hule o neopreno, de 10 cm de longitud, 1 cm de diámetro interior y 8mm de espesor.
2. Con una navaja se afila el exterior del extremo del tubo y se lubrica con agua.
3. Este extremo se inserta en el tubo impermeable mencionado en 1, un **trecho** de 2 ó 3 cm.
4. El tubo impermeable se inserta en el extremo superior del tubo poroso tanto como sea posible (aproximadamente unos 7 cm).
5. Ayudándose con un movimiento de tornillo, el tubo se introduce ahora otros 7 cm dentro del tubo impermeable.

Si todo el conjunto quedó bien instalado debe resultar imposible deshacerlo con las fuerzas de las manos. Se requiere un esfuerzo considerable ayudarse con un torniquete.

### **A.I.3 Diseño y construcción de un apisonador**

Un apisonador apropiado puede hacerse con un tramo de 1 m de tubo de acero, de unos 4 cm de diámetro exterior y 1.5 cm de diámetro interior, si se usa ademe de 5 cm en la perforación y tubo será de 1.3 cm. En el extremo inferior lleva un anillo de extensión con fondo plano. El apisonador se maneja con cable de acero desde la superficie y tiene por función compactar *in situ* los sellos de bentonita que se colocarán y centrar el tubo serán durante la colocación de esos sellos. Es importante que todas las partes del apisonador que puedan tocar al tubo sean lisas, para evitar romper.

### **A.I.4 Instalación del piezómetro**

La instalación del piezómetro se realizará de la siguiente manera:

- 1.-** Debe ejecutarse un sondeo adecuado hasta el nivel a explorar siendo recomendable y económico, un ademe de 5 cm de diámetro. La sección inferior del ademe debe ser por lo menos de 3 cm de longitud, sin uniones y sin zapata de ataque en su extremo inferior. Los últimos tres metros de ademe deben hincarse sin recurrir a ningún lavado o inyección de agua. Todo esto asegurará un buen contacto entre el final del ademe y el suelo.
- 2.-** El interior del ademe debe lavarse hasta el fondo, reemplazando después toda el agua de lavado por agua limpia; esto se logra invirtiendo el flujo del agua en la bomba de inyección y usando el tubo de inyección como de toma, colocándolo algunos centímetros sobre el fondo del sondeo; el ademe debe mantenerse lleno de agua, echando agua clara hasta que toda el agua turbia haya sido extraída.
- 3.-** En ese momento el ademe debe elevarse 60 cm; esto se hará preferentemente con un gato, inmediatamente antes de vaciar la arena. Después de elevarse el ademe se vacía en el pozo arena saturada para llenar el fondo del pozo ya no ademado; una arena lavada y cribada por mallas comprendidas entre la No. 20 y la No. 40 es apropiada para estos usos. El nivel alcanzado por la arena en el pozo podrá verificarse con el apisonador, para tener la seguridad de que no se sobrepasen los 60 cm indicados.
- 4.-** El tubo se conecta a un tanque pequeño, se sumerge la celda porosa en el pozo algunos metros y se aplica un vacío al tanque; así se logra saturar todo el piezómetro con agua proveniente del pozo; cuando en el tanque aparece algo de agua se hace cesar la acción del vacío. Mientras la celda se hace bajar al fondo del pozo debe mantenerse algo de exceso de carga de agua en ella, para asegurar un pequeño flujo hacia fuera durante la colocación. La ubicación definitiva de la celda debe verificarse con el apisonador.
- 5.-** Cuando la celda porosa descansa sobre la arena en el fondo del pozo, el ademe debe extraerse otros 60 cm, que corresponden a la longitud de la celda. El espacio así formado en torno a la celda debe llenarse vaciando en el pozo más arena saturada, hasta cubrir precisamente los 60 cm.
- 6.-** Mientras el ademe se extrae otros 30 cm, hasta su posición final, ese espacio debe irse llenando con más arena saturada.
- 7.-** De inmediato se vacía suficiente arena saturada dentro del ademe como para llenar el tramo inferior de 1 m. Esta arena debe apisonarse dando 10 golpes con el apisonador dejando caer desde una altura de 15 cm. El objeto de esta arena es contrarrestar las presiones de expansión de la bentonita, que se colocará en seguida.
- 8.-** Después de haber sido preparada hasta una consistencia ligeramente arriba de su límite plástico, la bentonita debe arrojarse al pozo, formando bolas de 1 cm de diámetro aproximado. Un sello efectivo se forma con 5 capas compactadas, de unos 7 cm cada una. Entre cada dos capas debe colocarse una capa de 2 cm de gravilla redondeada de 1 cm, para evitar que el apisonador se pegue al compactar la capa de bentonita. El conjunto de las 5 capas de bentonita compactadas debe tener un espesor de unos 35-40 cm, aproximadamente.

**9.-** Sobre el sello de bentonita se depositan otros 60 cm de arena, bien compactada con el apisonador.

**10.-** Otro sello de bentonita igual al tratado en 8 puede ponerse sobre la capa de arena indicada en 9.

**11.-** Sobre el segundo sello de bentonita se coloca otro metro de arena y el resto del pozo puede quedar abierto o ser tapado con tierra.

En la figura A.1 se muestra el esquema en conjunto de un piezómetro.

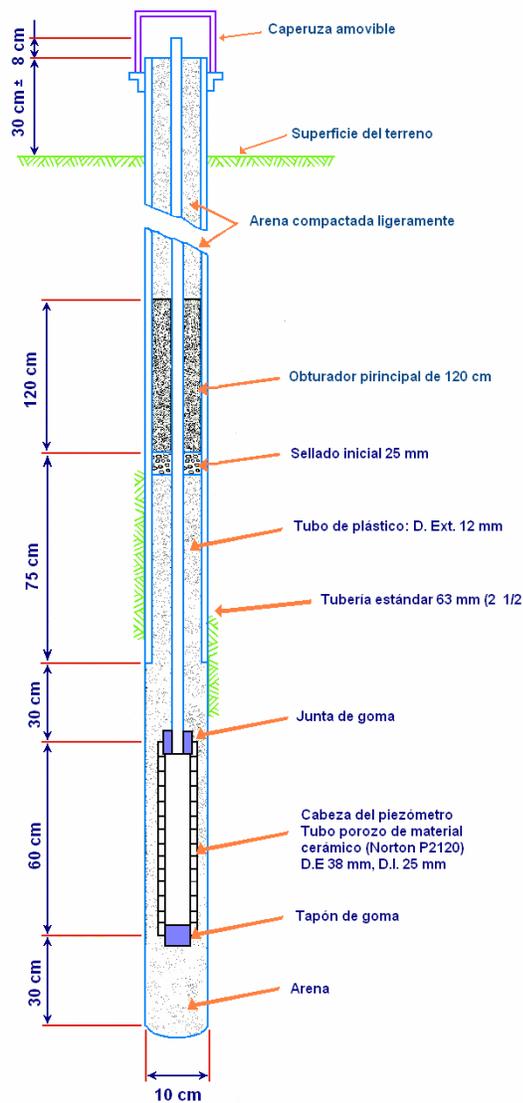


Fig. A.1 Piezómetro de Casagrande

### **A.I.5 Mediciones**

El nivel del agua en el tubo cuanto está debajo de los niveles que permitan lecturas directas puede determinarse por métodos eléctricos.

En la superficie del terreno se instala un óhmetro cuyas terminales se juntan cuidando el aislamiento mutuo en un solo cable de un diámetro suficientemente pequeño para que pueda pasar a través del tubo. El cable debe ser bastante flexible y para facilitar el descenso a través del tubo debe lastrarse con pequeñas masas de plomo colocadas de trecho en trecho. Generalmente esto se logra enrollando lámina de plomo en torno al cable en secciones de unos 2 ó 3 cm, espaciados otros 2 ó 3cm.

En el extremo inferior del cable debe colocarse un taquete de hule a través del cual pasan las 2 terminales del óhmetro ya sin recubrimiento protector; la función del taquete es impedir un falso contacto. Cuando las terminales desnudas tocan el nivel del agua se cierra el circuito alimentado por las baterías del óhmetro, lo cual se pone de manifiesto en la superficie por un salto franco de la aguja del aparato. Es recomendable recubrir las terminales con grasa a fin de impedir la adherencia del agua que formando una película entre ambas no permita verificar el contacto elevando y bajando el dispositivo varias veces.

Cuando las condiciones del presión del agua del subsuelo sean tales que el agua se derrame en la superficie, las presiones pueden medirse con un manómetro de Bourdon instalado como sigue:

**1.- Con el nivel del agua en el extremo del tubo se agrega a éste un tubo de hule resistente de 1 cm de diámetro y 60 cm de longitud.**

**2.- La terminal del manómetro de Bourdon se empapa con hule líquido, a efecto de impedir fugas y el tubo de hule se conecta al manómetro.**

**3.- En seguida deben sellarse las conexiones del tubo de hule con el tubo y con el manómetro, por medio de alambre suave de cobre enrollado.**

**4.- El manómetro se fija de manera que su centro no esté más alto que extremo superior del tubo. Cuando la presión del manómetro baje a cero, éste debe quitarse y las lecturas deberán hacerse directamente.**

### B.I.1 PERMEABILIDAD DE LOS SUELOS

La permeabilidad de un suelo se refiere a su capacidad para permitir el paso de una corriente de agua a través de su masa.

Cuando el ingeniero geotecnista prevea que se presentará un flujo de agua dentro de la masa del suelo de su obra, es conveniente que garantice que el agua fluya bajo el régimen laminar a velocidades relativamente pequeñas, de lo contrario se presentará el fenómeno conocido como régimen turbulento caracterizado por la generación de vórtices que se presentan por la fricción entre las moléculas del agua cuando éstas rebasan cierta velocidad de desplazamiento; este comportamiento puede generar, entre otros riesgos, el arrastre de granos de suelo que tiene como consecuencia la formación de tubos dentro de la masa de suelo, efecto conocido como tubificación. Las figuras B.I.1.1 y B.I.1.2 muestran esquemáticamente los dos tipos de comportamiento.

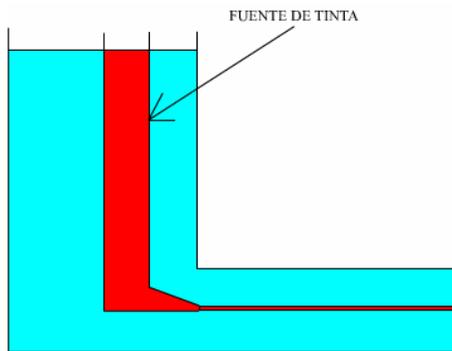


Fig. B.I.1.1. Flujo laminar

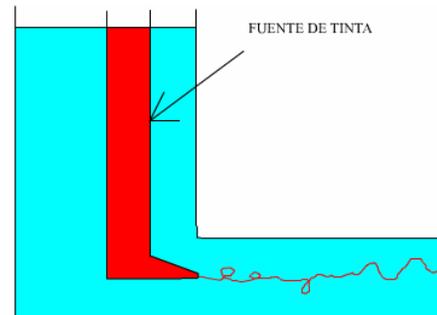


Fig. B.I.1.2 Flujo turbulento

#### B.I.1.1 Gradiente Hidráulico

El gradiente hidráulico es una medida de la energía que impulsa al agua a moverse dentro del suelo.

La figura B.I.1.1 muestra un suelo dentro de un tubo de cierto diámetro; el agua se desplaza dentro del espécimen a una velocidad media " $v$ ", pasando de la sección 1 a la sección 2, recorriendo la distancia " $L$ "; despreciando la carga de velocidad, la carga hidráulica en cualquiera de las dos secciones es:

$$h_i = z_i + \frac{p_i}{\gamma_w} \quad (\text{B.I.1.1})$$

Y de acuerdo con la ecuación de Bernoulli de la energía, se tiene:

$$h_1 = h_2 + h \quad (\text{B.I.1.2})$$

De donde:

$$h = h_1 - h_2 \quad (\text{B.I.1.3})$$

Siendo “ $h$ ” la pérdida de carga hidráulica que tiene lugar cuando el agua pasa de la sección 1 a la sección 2.

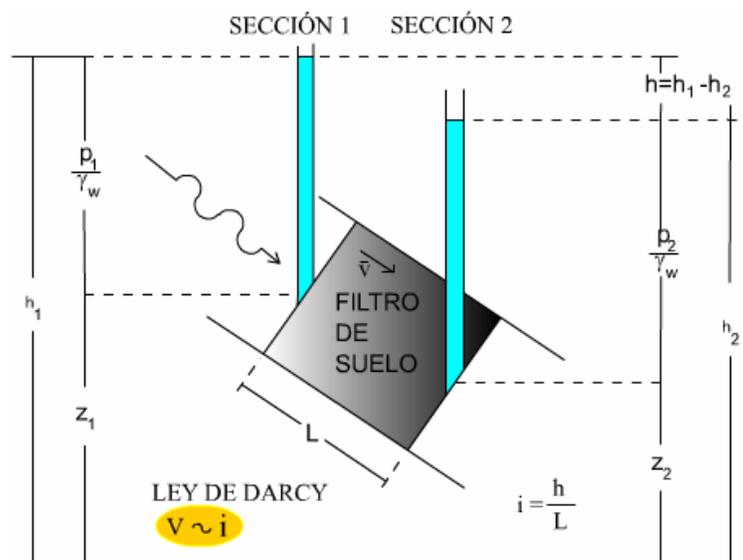


Fig. B.I.1.1 Gradiente hidráulico y Ley de Darcy

Finalmente, el gradiente hidráulico, “ $i$ ” es un concepto adimensional y representa la pérdida de carga hidráulica por unidad de longitud, esto es:

$$i = \frac{h}{L} \quad (\text{B.I.1.4})$$

## B.1.2 LEY DE DARCY

En 1856 Darcy descubrió que la velocidad media con la que el agua fluye dentro de una región de flujo es directamente proporcional al gradiente hidráulico.

En la figura B.1.2.1 se muestra esquemáticamente el comportamiento del agua al variar su velocidad; si el agua parte de velocidades relativamente bajas, en la zona I (laminar), a velocidades mayores en la zona II (transición) cambia a régimen turbulento en el punto B, siguiendo la trayectoria inferior que se indica hasta alcanzar el punto C (correspondiente a la velocidad crítica superior,  $v_{cs}$ ); en cambio, si se parte de velocidades correspondientes a la zona III (turbulenta) a velocidades menores en la zona de transición, el agua cambia su comportamiento a régimen laminar en el punto "A" (correspondiente a la velocidad crítica inferior,  $v_{ci}$ ), siguiendo la trayectoria superior que se indica

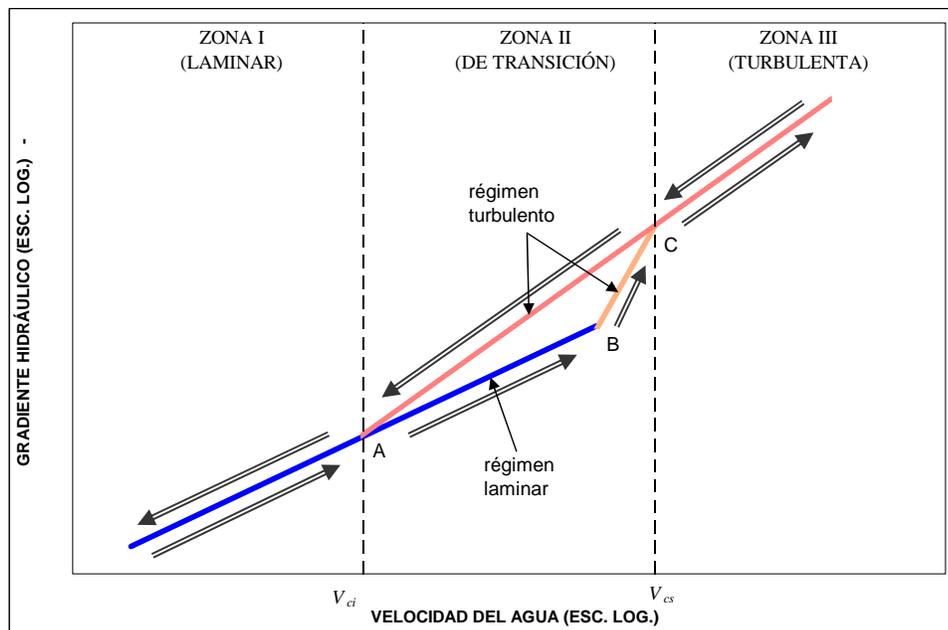


Figura B.1.2.1 Variación de la velocidad en función del gradiente hidráulico

### B.I.3 COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD

De la figura B.I.2.1 se deduce que en régimen laminar, la ley de Darcy es:

$$v = k i \tag{B.I.3.1}$$

Siendo  $k$  una constante de proporcionalidad, conocida como coeficiente de permeabilidad.

En virtud de que el gradiente hidráulico es un concepto adimensional, el coeficiente de permeabilidad tiene dimensiones de velocidad, siendo numéricamente igual a la velocidad media del agua cuando el gradiente hidráulico es igual a uno; físicamente representa la “facilidad” (inverso de la resistencia) con que el agua fluye a través del suelo.

En la figura B.I.2.1 el volumen de agua que atraviesa el suelo en la unidad de tiempo, esto es el gasto,  $Q$ , puede expresarse a partir de la ecuación 1.5, como:

$$Q = kAi \tag{B.I.3.2}$$

Siendo  $A$  el área de la sección.

En la siguiente tabla B.I.3.1 se muestra el rango de valores de  $k$  de acuerdo con el tipo de suelo:

k en cm/s =	10 <sup>+2</sup>	GRAVAS LIMPIAS		MUY BUEN DRENAJE
	10 <sup>+1</sup>			
	10 <sup>0</sup>			
	10 <sup>-1</sup>			
	10 <sup>-2</sup>	ARENAS LIMPIAS MEZCLAS GRAVA-ARENA	ARCILLAS FISURADAS Y	BUEN DRENAJE
	10 <sup>-3</sup>			
	10 <sup>-4</sup>			
	10 <sup>-5</sup>	ARENAS MUY FINAS, LIMOS Y	ALTERADAS	MAL DRENAJE
	10 <sup>-6</sup>	ARENAS LIMOSAS		
	10 <sup>-7</sup>	LIMOS ARCILLOSOS		
	10 <sup>-8</sup>	ARCILLAS		
	10 <sup>-9</sup>	(NO FISURADAS)		

Tabla B.I.3.1 Valores de  $k$  según el tipo de suelo

## B.II PRINCIPIOS TEÓRICOS

### B.II.1 Ecuación Diferencial del Flujo de Agua

La ecuación diferencial del flujo de agua en suelos se determina estableciendo las siguientes hipótesis:

- El suelo está saturado
- Las moléculas del agua y los granos del suelo son incompresibles
- El régimen es establecido
- La estructura interna del suelo no se modifica debido al flujo
- El agua se mueve dentro de la masa del suelo en régimen laminar

A partir de las hipótesis anteriores y considerando un volumen de control dado por el elemento diferencial de la figura B.II.1.1, teniendo en cuenta que el gasto que entra tiene que ser igual a la que sale (régimen establecido), se puede plantear la siguiente expresión:

$$v_x dydz + v_y dx dz + v_z dx dy = \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy \quad (\text{B.II.1.1})$$

Reduciendo y eliminando términos semejantes se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.II.1.2})$$

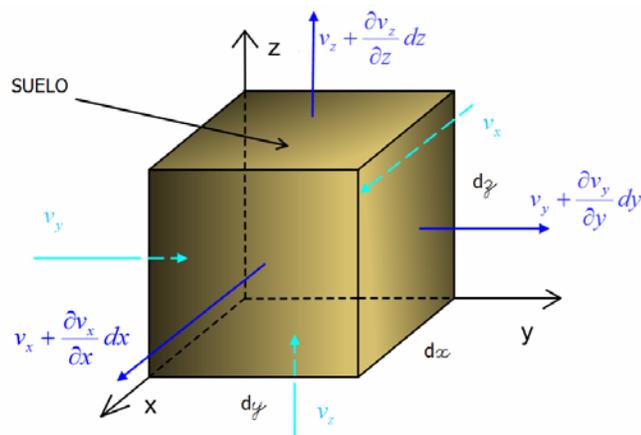


Fig. B.II.1.1 Condiciones de velocidad del agua en las caras de un elemento de suelo

Por otro lado la velocidad del agua a través de cada una de las caras del elemento diferencial, de acuerdo con la ley de Darcy, se puede determinar como:

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{B.II.1.3})$$

$$v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{B.II.1.4})$$

$$v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{B.II.1.5})$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en la B.II.1.2, resulta:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.II.1.6})$$

La anterior expresión es la ecuación diferencial del flujo de agua en suelos.

En el caso de flujo bidimensional, donde el gasto a través de la cara “z” es nulo, se tiene:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.II.1.7})$$

## **B.II.2 ECUACIÓN DE LAPLACE**

Si el suelo es homogéneo e isótropo, entonces se resulta que  $k_x = k_y$ , de donde:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \nabla^2 h = 0 \quad (\text{B.II.2.1})$$

Que es la ecuación de Laplace.

### B.II.2.1 Líneas de Flujo

Una de las soluciones de la ecuación de Laplace,  $\psi = cte.$ , define las trayectorias que describe el agua al atravesar el suelo, es llamada la "función de flujo" y está conformada de tal manera que las velocidades del agua en direcciones "x" y "y" son:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{B.II.2.1.1})$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{B.II.2.1.2})$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (\text{B.II.2.1.3})$$

Pero también:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (\text{B.II.2.1.4})$$

De donde:

$$v_y dx - v_x dy = 0 \quad (\text{B.II.2.15})$$

Sustituyendo B.II.2.1.1 y B.II.2.1.2 en B.II.2.1.5 se tiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0 \quad (\text{B.II.2.1.6})$$

La expresión  $d\psi$  es la diferencial total de la función  $\psi$ .

De la última ecuación se deduce que la familia infinita de curvas  $\psi = cte.$  (solución a  $d\psi = 0$ ) constituyen las trayectorias del agua a través de la región de flujo y son denominadas líneas de flujo o de corriente.

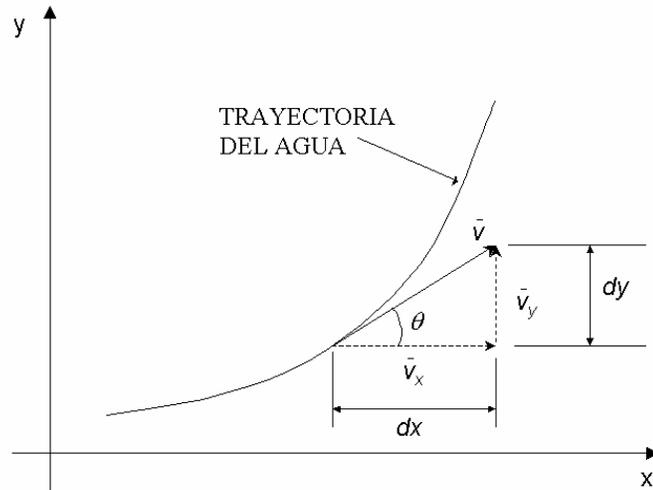


Fig. B.II.2.1.1 Interpretación física de la curva  $\psi = cte.$

### B.II.2.2 Líneas Equipotenciales

Otra de las soluciones de la ecuación de Laplace es la denominada la función potencial, definida como:

$$\phi = -c_1 h + c_2 \quad (\text{B.II.2.2.1})$$

Es tal que para  $\phi = cte.$ , necesariamente  $h = cte.$ , esto último define una familia de curvas caracterizadas porque en cada una de ellas los puntos dentro de la región de flujo presentan el mismo potencial o la misma carga hidráulica (carga de posición más carga de presión), a estas curvas se les denomina líneas equipotenciales.

Derivando B.II.2.2.1 con respecto a "x" y "y", respectivamente se tiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -c_1 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{B.II.2.2.2})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -c_1 \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{B.II.2.2.3})$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.3 y 2.4 en 2.16 y 2.17 se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{c_1}{k_x} v_x \quad (\text{B.II.2.2.4})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{c_1}{k_y} v_y \quad (\text{B.II.2.2.5})$$

Si se escoge  $c_1=k_x=k_y$  y de acuerdo con la ecuaciones 2.9 y la 2.10:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{B.II.2.2.6})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{B.II.2.2.7})$$

Estas últimas expresiones son denominadas condiciones de Cauchy-Riemann.

Derivándolas con respecto a "x" y "y" se obtienen las expresiones:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.II.2.2.8})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.II.2.2.9})$$

De donde se deduce que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = \nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{B.II.2.2.10})$$

También derivando la 2.18 y la 2.19 pero ahora para la función  $\psi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.II.2.2.11})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.II.2.2.12})$$

Se deduce que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{B.II.2.2.13})$$

O sea las funciones  $\psi$  y  $\phi$  cumplen la ecuación de Laplace.

En el caso anisótropo, de las ecuaciones 2.18 y 2.19:

$$v_x = \frac{k_x}{c_1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{B.II.2.2.14})$$

$$v_y = \frac{k_y}{c_1} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{B.II.2.2.15})$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en la 2.2:

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.II.2.2.16})$$

En el caso de que se presente un gasto adicional,  $q$ , debido por ejemplo a bombeo:

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + q = 0 \quad (\text{B.II.2.2.17})$$

La expresión anterior se conoce como ecuación de Helmholtz.

### B.III MÉTODOS DE SOLUCIÓN

En los casos sencillos donde la región de flujo no presente estratificación los métodos más útiles son el directo y el gráfico, de otra manera los métodos numéricos como el de diferencias finitas o el de elemento finito deben ser usados. En este trabajo sólo se describirá el método gráfico.

#### B.III.1 MÉTODO GRÁFICO

##### B.III.1.1 La Red de Flujo

En la figura B.III.1.1 se muestra una porción de una red de flujo delimitada por las líneas de flujo  $\psi_1$  y  $\psi_2$  y por las líneas equipotenciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . El gasto  $\Delta q$  que pasa por el canal entre las dos líneas de flujo, de acuerdo con la ley de Darcy vale:

$$\Delta q = k \Delta b \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (3.2.1)$$

Siendo:

- $k$  Coeficiente de permeabilidad en la región de flujo
- $\Delta b$  Ancho medio del canal de flujo en la región mostrada
- $\Delta h$  Caída de potencial entre las dos líneas equipotenciales
- $\Delta l$  Longitud media recorrida por el agua entre las dos líneas de flujo

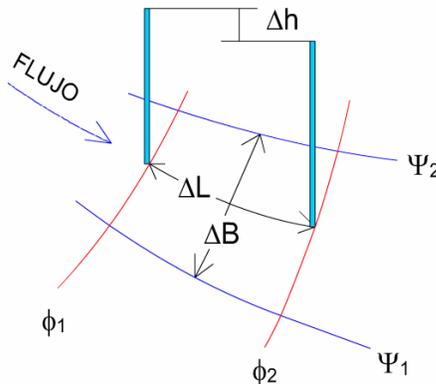


Fig. B.III.1.1.1 Porción de una región de flujo

Por otro lado la pérdida de carga total en toda la zona de flujo puede evaluarse con la siguiente expresión:

$$h = n_e \Delta h \quad (3.2.2)$$

Siendo  $n_e$  número de caídas de potencial en toda la región de flujo.

Despejando  $\Delta h$  de la fórmula anterior y sustituyendo en la expresión 3.2.1 resulta:

$$\Delta q = k \frac{\Delta b}{\Delta l} \frac{1}{n_e} \quad (3.2.3)$$

Adicionalmente el gasto total  $q$  en toda la zona de flujo puede determinarse como:

$$q = n_f \Delta q \quad (3.2.4)$$

Donde  $n_f$  número total de canales de flujo de la red.

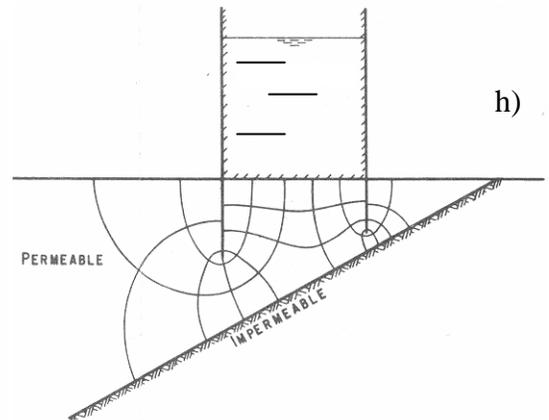
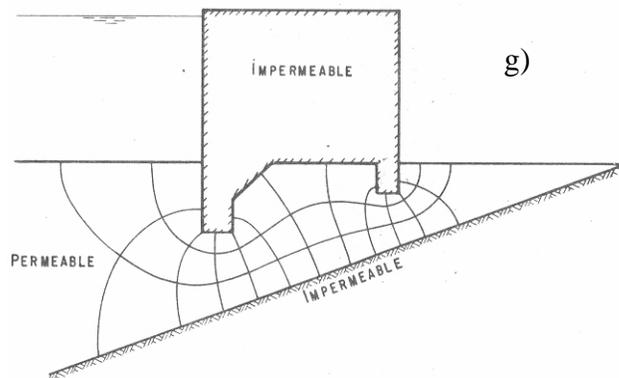
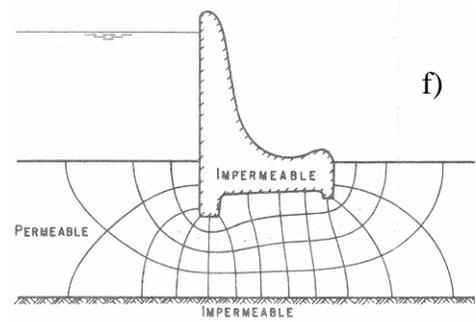
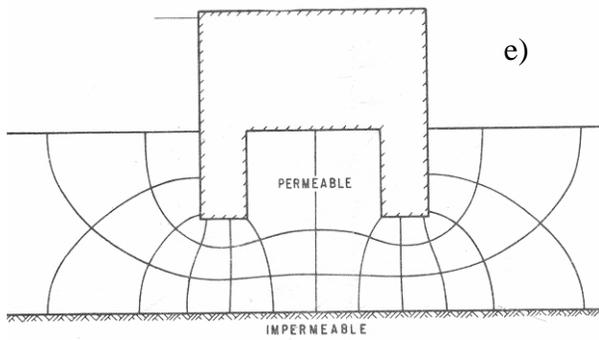
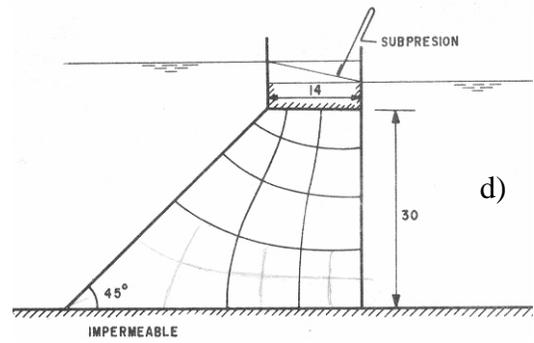
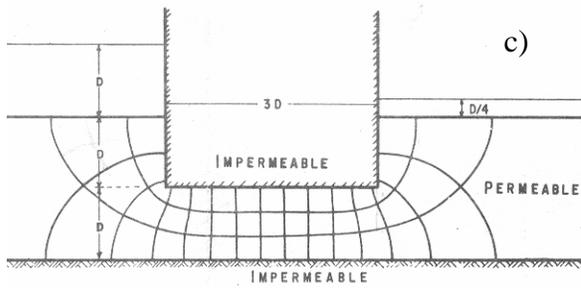
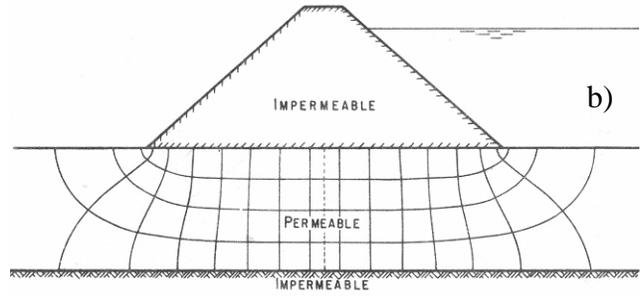
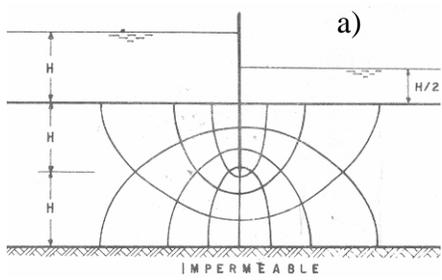
Sustituyéndola fórmula anterior en la ecuación 3.2.3 se obtiene:

$$q = kh \frac{n_f}{n_e} \frac{\Delta b}{\Delta l} \quad (3.2.5)$$

Si se construye una red donde el cociente  $\Delta b/\Delta l$  sea la unidad, el trazo de la red se obtiene mediante figuras geométricas conocidas como *cuadrados curvilíneos* que cumplen con las propiedades mencionadas anteriormente. En este sentido, para el trazo a mano de la red de flujo es importante tomar en cuenta los consejos de Arturo Casagrande que se resumen a continuación:

### **Resumen de Consejos de Arturo Casagrande para el Trazo de Redes de Flujo**

1. *Estudiar la apariencia de redes de flujo bien hechas (Fig. 3.3)*
2. *Usar el menor número de canales posible*
3. *Observar la apariencia de la red en conjunto*
4. *Comenzar el trazo en zonas donde las líneas puedan ser rectas y paralelas*
5. *En redes de flujo simétricas las formas de las líneas de flujo son elípticas*
6. *No dibujar transiciones bruscas entre zonas rectas y curvas*
7. *No intentar corregir la última hilera de cuadrados curvilíneos incompleta por correcciones locales, es preferible empezar de nuevo con otro número de canales de flujo.*
8. *Tomar en cuenta los cuadrados singulares que deban aparecer (Figura 3.4)*
9. *Una superficie de salida en la red, en contacto con aire, si no es horizontal, nunca es línea de flujo ni equipotencial.*



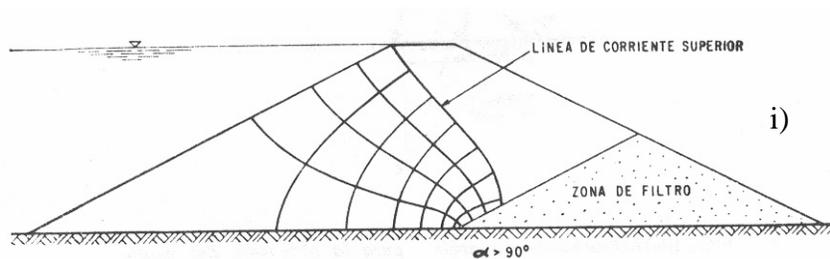


Fig. B.III.1.1.2 Ejemplos de redes de flujo

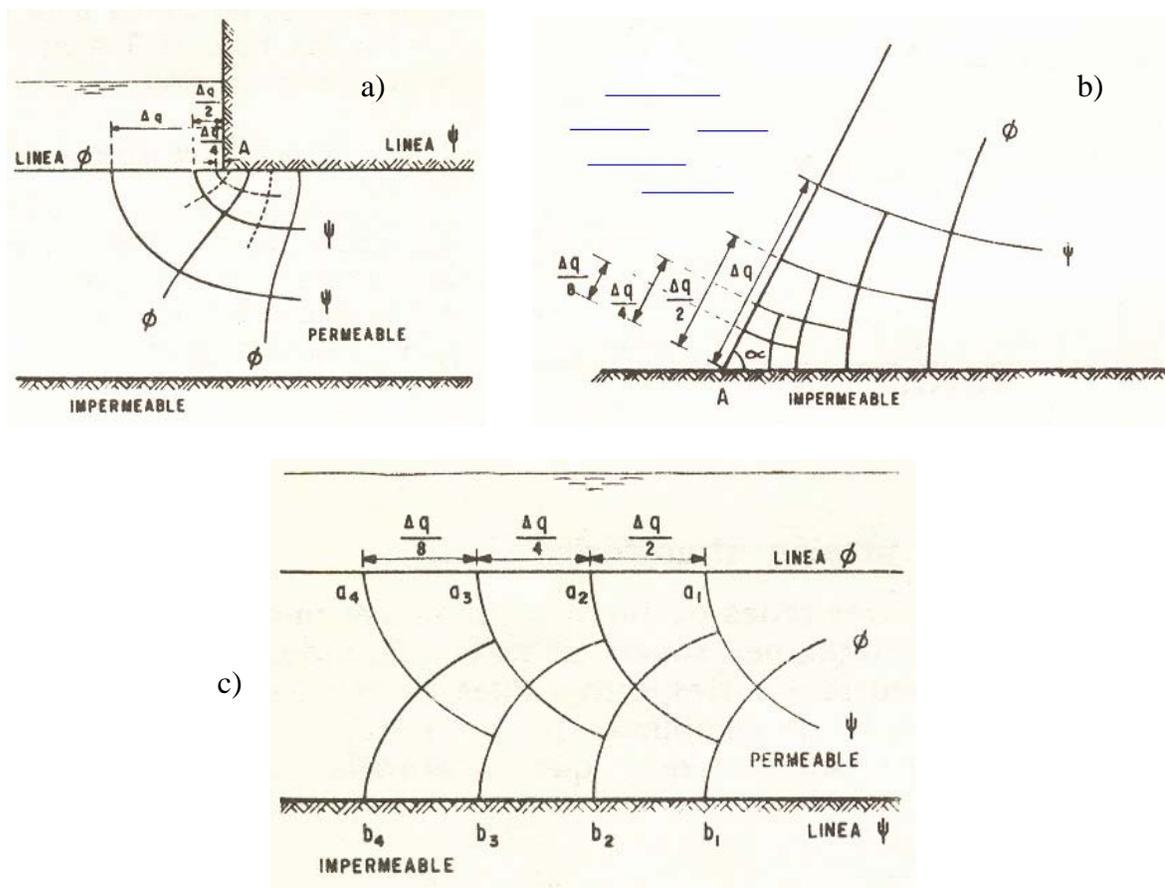


Fig. B.III.1.1.3 Cuadrados singulares

- a) Ángulo entre una línea  $\psi$  y una  $\phi$  de  $180^\circ$
- b) Ángulo entre una línea  $\psi$  y una  $\phi$  menor de  $90^\circ$
- c) Cuadrado al infinito

Es importante señalar que la línea de corriente superior que se genera en la sección de una presa de materiales controlados, en la zona del corazón, debe ser determinada a partir de las condiciones de entrada y salida de la presa como las que se muestran en la presa de la figura 3.3i, considerando que las intersecciones de las líneas equipotenciales y la línea de corriente superior se encuentran separadas una distancia vertical,  $h$ , constante, como se indica en la figura 3.5. También se debe tener en cuenta que a la entrada el contacto entre la línea de corriente superior y el talud de aguas arriba es a  $90^\circ$  y los puntos sobre la línea de corriente superior tienen una carga de presión nula.

Para la determinación geométrica de la línea de corriente superior es necesario aplicar alguna técnica como las descritas en la referencia 6, lo cual se deja fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, en el inciso III.4.1 se trata este tema mediante el método del elemento finito.

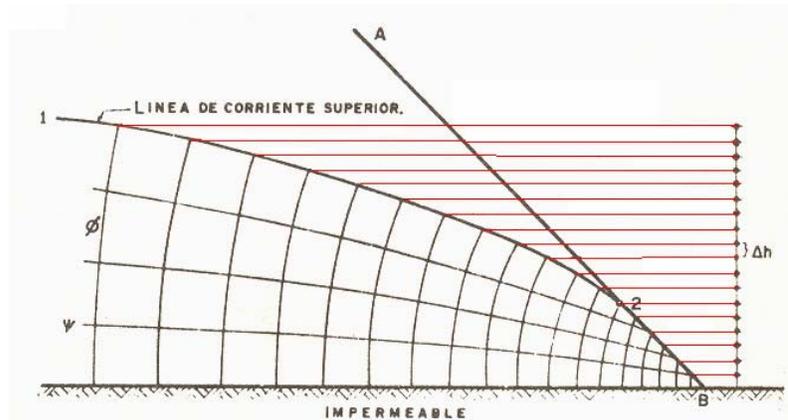


Fig. B.III.1.1.4 Condiciones en la línea de corriente superior hacia aguas abajo

### **B.III.2.A PRESIONES, VELOCIDADES Y GRADIENTES HIDRÁULICOS**

Para el cálculo de las presiones hidrodinámicas, velocidad, gradientes hidráulicos, y fuerzas de filtración en una región de flujo, una vez trazada la red mediante cuadrados curvilíneos, la pérdida de carga total,  $h$ , entre los tirantes aguas arriba y aguas abajo, se divide entre el número de caídas de potencial,  $n_e$ , obteniéndose el valor de  $\Delta h$  como se muestra en la figura 3.6.

Para determinar la presión hidrodinámica dentro del suelo se mide la "altura de presión" del punto de interés a la marca de la línea equipotencial correspondiente, como en el punto 1 de la figura 3.6), o se interpola con las dos marcas que correspondan (puntos 2, 3 y 4).

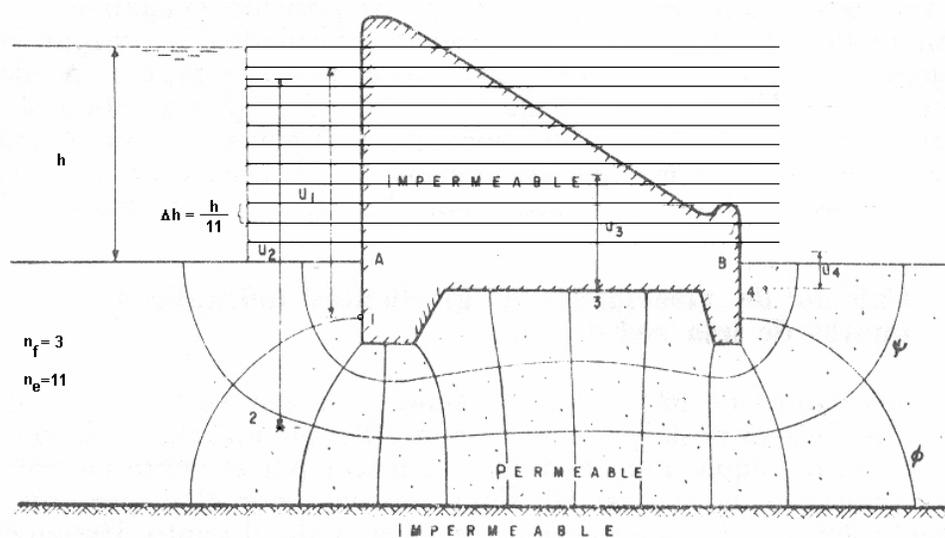


Figura B.III.2.1A Cálculo de las presiones en el agua

Para obtener el gradiente hidráulico en los puntos de una región de flujo es conveniente considerar los centros de los cuadrados curvilíneos para los cuales la caída entre dos equipotenciales de la red es  $\Delta h$ , y la longitud media recorrida por el agua,  $\Delta l$ , estará entre las dos líneas de flujo correspondientes, de donde el gradiente hidráulico podrá evaluarse con la ecuación:

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (3.2.6)$$

Para calcular la velocidad en cada punto se multiplica el gradiente hidráulico obtenido en el paso anterior por el coeficiente de permeabilidad.

### B.III.2.B EL PROBLEMA DE LA TUBIFICACIÓN

Es importante mencionar que el flujo de agua tiene un efecto sobre los granos del que está constituido el suelo, hasta tal punto que a una cierta condición los granos pueden ser arrastrados provocando el fenómeno conocido como tubificación. Para estudiar este fenómeno existen dos métodos: el primero se basa en el concepto de factor de seguridad,  $FS$ , el cual puede calcularse con la expresión:

$$FS = \frac{h_p}{h} \quad (3.2.7)$$

Donde:

$$h_p = \frac{D \gamma'_m}{m \gamma_w} \quad (3.2.8)$$

Siendo:

- D Profundidad de empotramiento del dentellón aguas abajo (Fig. 3.7)
- $\gamma'_m$  Peso específico sumergido del suelo
- $\gamma_w$  Peso específico del agua,  $\gamma$ :

$$m = \frac{h_a}{h} \quad (3.2.9)$$

- $h_a$  Carga hidrodinámica promedio en el dentellón aguas abajo y
- $h$  Carga hidráulica en la entrada aguas arriba.

Para que no exista riesgo de tubificación generalmente se exige que el factor de seguridad sea superior a 3.

El segundo criterio es comparar los gradientes hidráulicos dentro de la región de flujo con el valor crítico,  $i_c$ , que produce tubificación, el cual es igual a la unidad. Si en alguna zona dentro de la masa del suelo el gradiente hidráulico es superior a ese valor existe riesgo de tubificación.

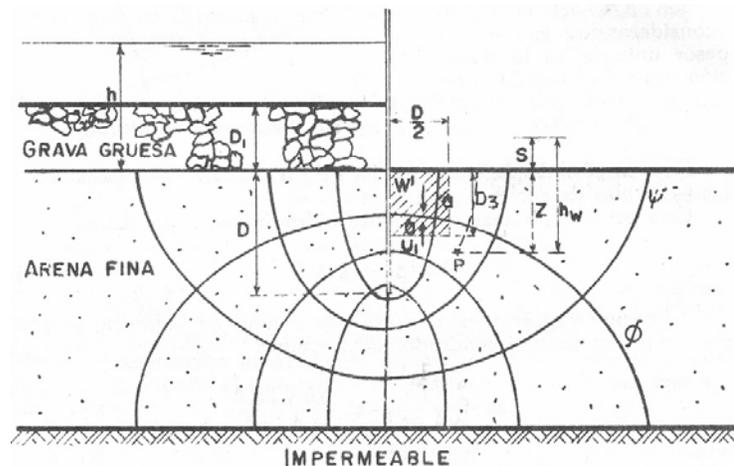


Fig. B.III.2.1B El problema de la tubificación

### B.III.3 LA SECCIÓN TRANSFORMADA

La sección transformada permite reducir al caso de un suelo isótropo un suelo anisótropo en el que la permeabilidad en la dirección horizontal  $k_x$  es diferente a la permeabilidad en la dirección vertical  $k_y$ . Se trata de un simple artificio matemático transformando el sistema de coordenadas de manera conveniente como el caso que se muestra en la figura 3.8, en donde se transforma la coordenada  $y$  a otra  $y'$ , mediante la siguiente expresión:

$$y' = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} y \quad (3.2.10)$$

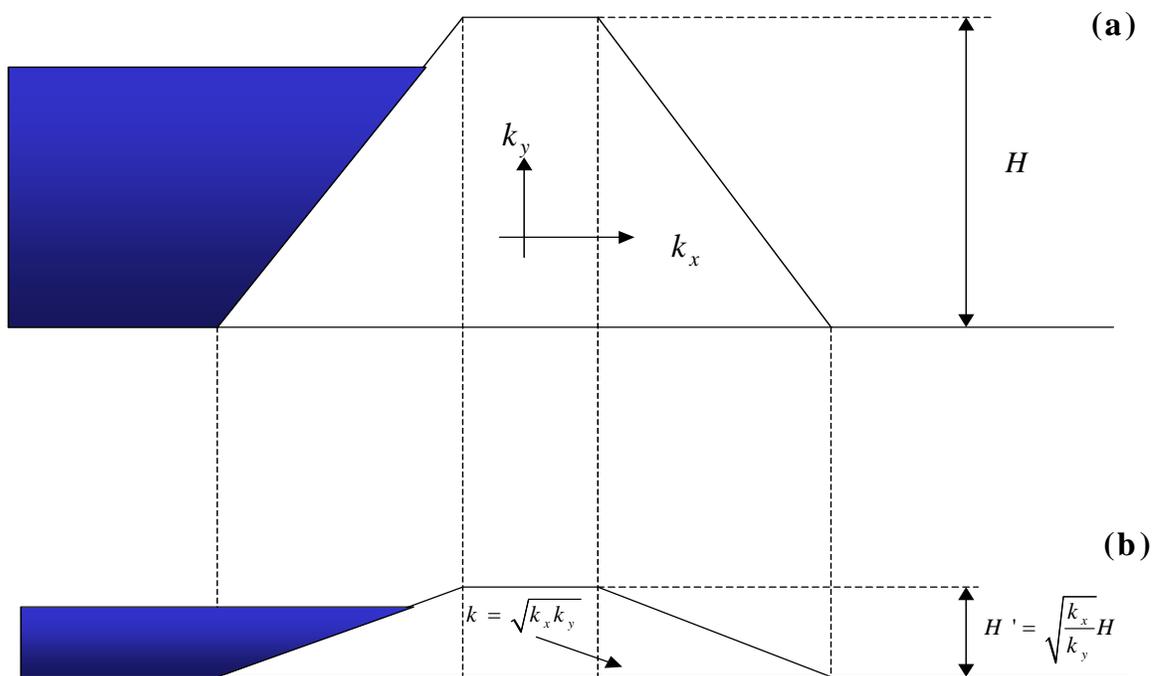


Fig. B.III.3.1 La Sección Transformada

Una vez resuelta para el caso homogéneo la parte (b) de la figura 3.2.7, obteniéndose las líneas de flujo y equipotenciales correspondientes, se aplica la transformación inversa de la ecuación 3.2.10 para dichas líneas.

## **BIBLIOGRAFÍA**

## BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Mecánica de Suelos, Juárez Badillo E. y Rico Rodríguez A. Tomos I, II y III, Ed. LIMUSA, 1974.
2. Interacción Suelo - Estructura de Cimentación. L. Zeevaert. Editorial Limusa, México, 1980.
3. Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions. L. Zeevaert. Van Nostrand Reinhold 2ª Ed. 1983.
4. Apuntes de mecánica del medio continuo. Agustín Deméneghi Colina. Roberto Magaña del Toro. Héctor Sanginés García. Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México, D.F. 2000.
5. Visual Basic 6, Ceballos Sierra F. J. Ed. Alfaomega ra-ma, 2000.
6. Flujo de agua a través de suelos, Flores Berrones R. 2000.
7. Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones. DDF 2004.
8. Metodología para la Determinación de la Compresibilidad Volumétrica de un Suelo Fino Saturado con Ayuda de Programas de Computadora, Memorias de la XIX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Puebla 98. pag. 198 a 203. Zea et Al.