UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA SUPERIOR

Francisco Barrera García
Francisco Barrera del Rayo

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO FACULTAD DE INGENIERÍA

ÁLGEBRA SUPERIOR

Francisco Barrera García
Francisco Barrera del Rayo

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

Para visualizar la obra te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

BARRERA GARCÍA, Francisco
BARRERA DEL RAYO, Francisco
Álgebra Superior
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2023, 657 p.

Álgebra Superior

Primera edición electrónica de un ejemplar (10 MB) Formato PDF
Publicado en línea el 30 de agosto de 2023

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

ISBN: 978-607-30-7935-8

Hecho en México.

Unidad de Apoyo Editorial
Cuidado de la edición: Elvia Angélica Torres Rojas
Diseño editorial: Nismet Díaz Ferro

INTRODUCCIÓN

La presente obra fue elaborada con la intención de ofrecer a los estudiantes un material escrito que les pueda facilitar el estudio y la comprensión de los conceptos fundamentales del Álgebra Superior.

El libro está formado por cinco capítulos: 1. Números reales, 2. Números complejos, 3. Polinomios, 4. Sistemas de ecuaciones lineales y 5. Matrices y determinantes. En cada uno de ellos, se presentan los conceptos teóricos de la manera más sencilla posible, buscando facilitar su comprensión, pero sin perder formalidad y rigor matemático. Se incluyen también una gran cantidad de ejercicios resueltos donde se explica, en forma detallada, cada uno de los pasos realizados en la resolución del problema, con la finalidad de que al estudiante le resulte sencillo comprenderlos y asimile con ello más fácilmente los conceptos teóricos presentados. Al final de cada capítulo se incluye una extensa serie de ejercicios propuestos, todos con respuesta, con la idea de que el estudiante los resuelva, reafirme los conceptos estudiados, adquiera un aprendizaje más sólido del Álgebra Superior y ponga a prueba sus conocimientos.

Es importante señalar que buena parte de los ejercicios resueltos y propuestos incluidos en la obra, han sido tomados o rediseñados de exámenes colegiados departamentales que fueron aplicados en nuestra facultad desde 1980, el resto han sido creados por sus servidores. Es necesario entonces reconocer el trabajo de muchos profesores que participaron en el diseño de tales ejercicios y que en la actualidad algunos de ellos ya no laboran en la facultad, o bien, ya no se encuentran entre nosotros.

A pesar de que esta obra fue elaborada pensando en proporcionar un material escrito que fuese de gran ayuda para los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra de nuestros planes de estudio, también se pensó en los profesores que la imparten, presentándoles un trabajo que les puede resultar muy útil en la preparación de sus clases, o bien, en la conformación de las tareas que les dejen a sus alumnos.

Queremos expresar nuestro agradecimiento al *M.I. Gerardo Ruíz Solorio*, secretario general y a la *Lic. Patricia Eugenia García Naranjo*, jefa de la Unidad de Apoyo

Editorial, ambos de nuestra facultad, por todas las facilidades y el apoyo que nos brindaron a lo largo de todo el tiempo que tomó el proceso de captura, revisión y preparación de la versión final de esta obra. Queremos también manifestar nuestro agradecimiento al *Ing. Jaime Érik Castañeda de Isla Puga*, coordinador de Matemáticas, por su decidido apoyo para que pudiéramos trabajar en la escritura de este libro.

Apreciamos y queremos agradecer en todo lo que vale y en todo lo que fue el gran trabajo realizado por la *Lic. Elvia Angélica Torres Rojas* en la revisión de la captura, corrección de estilo, cuidado de la edición y todo el trabajo editorial que implicó el llevar a buen término la conclusión de este libro. Muchas gracias, *Angélica*, por todo su profesionalismo, gran compromiso y buena disposición durante todo este tiempo que hemos trabajado juntos.

Queremos agradecer profundamente todo el empeño, dedicación y esmero con que realizó la captura de este libro la *Srta. María Guadalupe Martínez Dávalos*, quien con su gran entusiasmo y compromiso hizo posible la culminación de esta obra. Ya suman muchos, muchos años en los que hemos trabajado juntos y siempre con gran ánimo y buena disposición a la tarea, hemos logrado llevar a buen puerto los objetivos propuestos. Mil gracias, *Lupita*, ¡por todo su apoyo!

Finalmente, queremos agradecer también a la *LDG Nismet Díaz Ferro* por el diseño editorial de esta obra, quien con su gran calidad en el trabajo que realiza ha transformado, mejorado y modernizado el diseño de los libros que publica nuestra facultad. Gracias, *Nismet*, por su profesionalismo.

Conscientes de que todo trabajo es perfectible, mucho agradeceremos todas las observaciones y comentarios que tengan a bien hacernos, los usuarios de la obra, con el fin de mejorar futuras ediciones y que estas resulten de mayor utilidad. Todos sus comentarios siempre serán bien recibidos.

FRANCISCO BARRERA GARCÍA
FRANCISCO BARRERA DEL RAYO
Ciudad Universitaria, Ciudad de México, abril de 2023

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 NÚMEROS REALES 1

Números naturales ($\mathbb{N}$) 3
Adición en $\mathbb{N}$ 4
Propiedades de la adición en $\mathbb{N}$ 5
Multiplicación en $\mathbb{N}$ 6
Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{N}$ 7
Distributividad 7
Orden en $\mathbb{N}$ 7
Relación “menor o igual que” y “mayor o igual que” 7
Tricotomía 8
Propiedades de las desigualdades en $\mathbb{N}$ 8
Inducción matemática 8
Números enteros ($\mathbb{Z}$) 26
Igualdad de números enteros 28
Adición en $\mathbb{Z}$ 28
Multiplicación en $\mathbb{Z}$ 28
Propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ 29
Sustracción en $\mathbb{Z}$ 30
Orden en $\mathbb{Z}$ 31
Tricotomía en $\mathbb{Z}$ 31
Propiedades de las desigualdades en $\mathbb{Z}$ 31
Números racionales ($\mathbb{Q}$) 32
Igualdad de números racionales 34
Adición en $\mathbb{Q}$ 35
Multiplicación en $\mathbb{Q}$ 35
Propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{Q}$ 35
Sustracción en $\mathbb{Q}$ 36
División en $\mathbb{Q}$ 37
Orden en $\mathbb{Q}$ 37
Propiedades de las desigualdades en $\mathbb{Q}$ 38
Propiedad de la densidad en $\mathbb{Q}$ 38
Expresión decimal de un número racional 39

Números reales (ℝ) 45
Números algebraicos. 49
Números trascendentes 50
Adición en ℝ 50
Propiedades de la adición en ℝ. 52
Sustracción en ℝ 52
Multiplicación en ℝ 52
Propiedades de la multiplicación en ℝ 53
División en ℝ 53
Cota superior 54
Cota inferior 54
Elemento máximo 54
Elemento mínimo. 55
Supremo 55
Ínfimo 56
Teorema de completitud de ℝ 58
Valor absoluto 58
Propiedades del valor absoluto 59
Solución de desigualdades e inecuaciones 59
Ejercicios propuestos 80
Respuestas a los ejercicios propuestos 92

CAPÍTULO 2 NÚMEROS COMPLEJOS 99

Forma binómica de los números complejos 103
Igualdad en ℂ 104
Adición en ℂ 104
Multiplicación en ℂ. 105
Propiedades de la adición y la multiplicación en ℂ 106
Sustracción en ℂ 107
Conjugado de un número complejo 108
Propiedades del conjugado de un número complejo 108
División en ℂ 109
Plano complejo o diagrama de Argand 116
Forma polar o trigonométrica de los números complejos 118
Igualdad. 126
Multiplicación 127
División 127

Potencias de un número complejo en forma polar 128
Raíces de un número complejo en forma polar. 129
Forma exponencial o de Euler de los números complejos 141
Igualdad. 144
Multiplicación. 145
División 146
Potencias de un número complejo en forma exponencial. 147
Raíces de un número complejo en forma exponencial 148
Ecuaciones con números complejos. 153
Ejercicios propuestos. 171
Respuestas a los ejercicios propuestos. 182

CAPÍTULO 3 POLINOMIOS 194

Definición de polinomio 195
Grado de un polinomio 196
Igualdad de polinomios 196
Adición de polinomios 198
Propiedades de la adición 199
Sustracción de polinomios. 200
Multiplicación de un polinomio por un escalar. 201
Propiedades de la multiplicación de un polinomio por un escalar. 202
Multiplicación de polinomios 202
Propiedades de la multiplicación. 204
Distributividad 204
División de polinomios. 206
Algoritmo de la división 208
Divisibilidad 209
Teorema del residuo 211
Teorema del factor. 212
División sintética 212
Raíces de un polinomio. 220
Teorema fundamental del álgebra. 222
Factorización completa de un polinomio 223
Raíces racionales de un polinomio 227
Gráfica de un polinomio. 233
Cotas de las raíces de un polinomio 242
Raíces complejas conjugadas de un polinomio 242

Raíces irracionales conjugadas de un polinomio 243
Regla de los signos de Descartes 243
Raíces nulas de un polinomio 245
Cambio de variable 254
Ejercicios propuestos 288
Respuestas a los ejercicios propuestos 302

CAPÍTULO 4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 324

Ecuación lineal 325
Solución de una ecuación 325
Sistema de ecuaciones lineales 326
Solución de un sistema de ecuaciones 327
Sistema homogéneo de ecuaciones lineales 327
Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales 328
Sistemas de ecuaciones equivalentes 331
Transformaciones elementales 332
Método de Gauss 332
Grados de libertad de un sistema de ecuaciones 337
Aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales en la solución de problemas. 375
Ejercicios propuestos 394
Respuestas a los ejercicios propuestos 417

CAPÍTULO 5 MATRICES Y DETERMINANTES 430

Definición de matriz 432
Orden de una matriz 433
Igualdad de matrices 435
Operaciones con matrices y sus propiedades. 435
Adición de matrices 435
Propiedades de la adición 437
Sustracción de matrices 437
Multiplicación de un escalar por una matriz 439
Propiedades de la multiplicación por un escalar 440
Multiplicación de matrices 440
Propiedades de la multiplicación 446

Matriz identidad 447
Matriz inversa 449
Propiedades de la inversa de una matriz 449
Cálculo de la matriz inversa mediante transformaciones elementales 450
Ecuaciones matriciales 458
Representación y resolución matricial de los sistemas de ecuaciones. 479
Tipos especiales de matrices 485
Matriz triangular. 486
Propiedades de las matrices triangulares superiores 487
Matriz diagonal 488
Operaciones con matrices diagonales 489
Matriz escalar 492
Matriz transpuesta 493
Propiedades de la transposición de matrices 495
Matriz simétrica 495
Propiedades de las matrices simétricas 497
Matriz antisimétrica 497
Propiedades de las matrices antisimétricas 499
Matriz ortogonal. 502
Propiedades de las matrices ortogonales 505
Matriz conjugada 505
Propiedades de la conjugación de matrices 506
Matriz real 507
Propiedades de las matrices reales 507
Matriz imaginaria 508
Propiedades de las matrices imaginarias 508
Matriz conjugada transpuesta 508
Propiedades de la conjugada transpuesta de una matriz 510
Matriz hermitiana. 511
Propiedades de las matrices hermitianas 512
Matriz antihermitiana 513
Propiedades de las matrices antihermitianas 514
Matriz unitaria 515
Propiedades de las matrices unitarias. 517
Traza de una matriz. 520
Propiedades de la traza de una matriz 520
Potencia de una matriz 524
Propiedades de la potencia de una matriz 527
Determinantes 532

Propiedades de los determinantes 536
Métodos para el cálculo de determinantes 541
Regla de Sarrus. 541
Desarrollo por cofactores o desarrollo de Laplace 546
Condensación pivotal (Regla de Chiò) 555
Método de la matriz triangular (Método de Gauss). 558
Cálculo de la inversa de una matriz por medio de la adjunta 581
Regla de Cramer 594
Ejercicios propuestos. 616
Respuestas a los ejercicios propuestos. 642

BIBLIOGRAFÍA. 656

CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES

Los antecedentes históricos de los números naturales datan de los inicios de la humanidad, el hombre ha sentido la necesidad de contar, ya sea el número de integrantes de su grupo, sus utensilios u objetos, los frutos que recolectaba, los animales que cazaba, etc.

Los testimonios más antiguos de que se tiene registro del conteo que hicieron nuestros antepasados, datan de alrededor de unos 40,000 a.C. Estos hallazgos se han dado principalmente en el continente africano, aunque también en otras partes del mundo. Tal vez, el más importante de ellos es el hueso de Ishango cuya antigüedad es de unos 20,000 a.C. Este hueso, que es el peroné de un babuino, tiene incrustado en uno de sus extremos un pedazo de cuarzo afilado, con el cual, se cree que se hacían las marcas que el hueso muestra en su superficie. En principio se pensaba que este hueso se usaba para llevar el conteo de algo; sin embargo, dado que el hueso tiene una serie de muescas talladas en tres secciones divididas, entonces algunos científicos han sugerido que dichas agrupaciones de muescas van más allá de un simple conteo. Actualmente, el hueso de Ishango se encuentra exhibido en el museo del Real Instituto Belga de Ciencias Naturales. Este hueso fue encontrado en lo que antiguamente se llamaba el Congo Belga y hoy es la República Democrática del Congo.

El concepto de número se ha desarrollado muy lentamente a lo largo de la evolución de la mente humana. Los números naturales son los primeros que el hombre inventó, su nombre seguramente proviene debido a que estos números son los que aparecen por primera vez en el proceso natural de contar o numerar objetos.

Los números naturales fueron concebidos por muchas civilizaciones en todo el mundo, en diferentes momentos en la historia de la humanidad y empleando diferentes símbolos para representarlos.

Fue en Mesopotamia, alrededor del año 4,000 a.C., en las culturas babilónicas, asirias y sumerias cuando vuelven a aparecer vestigios de registro de números, grabados en tablillas de arcilla en forma de cuñas, la llamada escritura cuneiforme. Este sistema de numeración fue adoptado más tarde, aunque con símbolos diferentes, en la Grecia Antigua y en la antigua Roma. De manera independiente, en otras culturas como la China y la Maya también se tienen vestigios del manejo de los números y su representación con símbolos.

En la India se hicieron grandes y valiosas aportaciones matemáticas a la humanidad. Los indios fueron los que inventaron los números que usamos hoy en día, los llamados números arábigos, los cuales llevan este nombre por ser los árabes quienes los divulgaron en occidente.

ÍNDICE

1

2

3

4

5

Fue el matemático alemán Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), quien realizó importantes aportaciones a la fundamentación teórica y rigurosa de los diferentes sistemas de numeración, desde los naturales hasta los reales. Años más tarde, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), conocido por sus aportaciones a la lógica matemática y a la teoría de números, publicó en 1889 sus famosos cinco postulados, con los cuales define de manera axiomática al conjunto de los números naturales.

Números naturales $(\mathbb{N})$

Es el conjunto ordenado de números formado por:

$$\mathbb{N} = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ n, \ldots \,\}$$

Postulados de Peano (1889)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se define a partir de los siguientes cinco postulados:

1) El 1 es un número natural, esto es:

$$1 \in \mathbb{N}$$

2) Todo número natural n tiene un siguiente n^*, esto es:

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ existe un único $n^* \in \mathbb{N}$, llamado el siguiente n.

3) El 1 no es el siguiente de ningún número natural, lo que significa que 1 es el primer número natural, esto es:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n^* \neq 1$

4) Dos números naturales diferentes tienen siempre diferentes siguientes. Si dos números naturales tienen el mismo siguiente, en realidad se trata del mismo número, esto es:

Si $m,\ n \in \mathbb{N}$ y $m^* = n^*$, entonces $m = n$.

5) Todo subconjunto A de $\mathbb{N}$, para el cual se cumpla que: contenga al número 1 y que dado un elemento cualquiera de A, su siguiente también pertenece al mismo conjunto A, entonces A es el mismo conjunto $\mathbb{N}$. Simbólicamente esto se establece de la siguiente manera:

Todo subconjunto A de $\mathbb{N}$ que cumpla las propiedades:

a) $1 \in A$

b) Si $k \in A$ implica que $k^* \in A$

es el mismo conjunto $\mathbb{N}$.

Este último postulado es conocido como principio de inducción matemática y da sustento teórico al método de demostración por inducción matemática.

Nota: Hay autores que consideran al cero como el primer número natural; en tal caso, algunos de los enunciados de los cinco postulados requieren ser ajustados con esta posibilidad. No hay consenso en si el cero es o no un número natural; sin embargo, cualquiera que sea la postura que se adopte, esta debe ser consistente con toda la construcción que se haga de los sistemas de numeración.

Adición en $\mathbb{N}$

La adición en los números naturales se define de la siguiente manera:

a) $n+1=n^* \quad ; \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

b) $n+m^*=(n+m)^* \quad ; \quad \forall\ n,\ m \in \mathbb{N}$

EJERCICIO 1.1 Haciendo uso de la definición, obtenga $7+3$.

SOLUCIÓN:

Para sumar aplicando la definición, lo que debemos hacer es expresar los sumandos como se indica en la segunda parte de la definición, tantas veces como sea necesario, hasta lograr que los números que se suman queden expresados como se establece en la primera parte de ella. Dado que se sabe que todo número más uno es igual a su siguiente, y como el conjunto de los números naturales es un conjunto ordenado, entonces se llegará al resultado de la suma al obtener los siguientes que quedaron planteados al final del proceso.

Sigamos el procedimiento descrito para sumar $7+3$. Expresamos $7+3$ como se indica en la segunda parte de la definición:

$$7+3 = 7+2^* = (7+2)^*$$

Aplicando la segunda parte de la definición a los números dentro del paréntesis, se tiene:

$$7+3 = (7+1^*)^*$$

de donde se llega a:

$$7+3 = [(7+1)^*]^*$$

De la primera parte de la definición, se obtiene:

$$7+3 = [(7^*)^*]^*$$

como $7^* = 8$, entonces:

$$7+3 = [(8)^*]^*$$

como $8^* = 9$

$$7+3 = 9^*$$

finalmente:

$$7+3 = 10$$

Propiedades de la adición en $\mathbb{N}$

$\forall\ m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$

1)	$(m+n) \in \mathbb{N}$	Cerradura
2)	$m+(n+p) = (m+n)+p$	Asociatividad
3)	$m+n = n+m$	Conmutatividad
4)	Si $m+p = n+p$, entonces $m=n$	Cancelación

Nota: Es importante destacar el hecho que, dentro de las propiedades de la adición en $\mathbb{N}$, no se incluye la existencia del elemento idéntico, pues este resulta ser el número cero, y como este número no lo estamos considerando dentro del conjunto, entonces es claro que esta propiedad no puede ser incluida.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Multiplicación en $\mathbb{N}$

La multiplicación en los números naturales se define de la siguiente manera:

1) $n \bullet 1 = n \quad ; \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

2) $n \bullet m^* = \left(n \bullet m \right) + n \quad ; \quad \forall\ m,\ n \in \mathbb{N}$

EJERCICIO 1.2 Haciendo uso de la definición, obtenga $5 \bullet 3$.

SOLUCIÓN:

Para multiplicar aplicando la definición, lo que debemos hacer es expresar los factores como se indica en la segunda parte de la definición, tantas veces como sea necesario, hasta lograr que los números que se multiplican queden expresados como se establece en la primera parte de ella. Una vez que se llega a esta condición, se aplica la primera parte de la definición y, a lo que se llega, es que la multiplicación queda expresada como una suma, la cual podemos realizar en forma directa, o bien, si se quiere, se podría sumar aplicando la definición dada de la adición; lo cual resultaría muy tardado y laborioso.

Expresemos $5 \bullet 3$ como se indica en la segunda parte de la definición:

$$5 \bullet 3 = 5 \bullet 2^* = \left(5 \bullet 2 \right) + 5$$

Aplicando la segunda parte de la definición a los números dentro del paréntesis, se tiene:

$$5 \bullet 3 = \left(5 \bullet 1^* \right) + 5$$

Continuando con los números dentro del paréntesis y aplicando la segunda parte de la definición, tenemos:

$$5 \bullet 3 = \left[\left(5 \bullet 1 \right) + 5 \right] + 5$$

Aplicando ahora la primera parte de la definición a los números dentro de los paréntesis circulares, se tiene:

$$5 \bullet 3 = 5 + 5 + 5$$

Multiplicar $5 \bullet 3$ equivale a sumar tres veces 5. Suma que daremos en forma directa, esto es:

$$5 \bullet 3 = 15$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5 6

Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{N}$

$\forall\ m, n, p \in \mathbb{N}$

1)	$(m \bullet n) \in \mathbb{N}$	Cerradura
2)	$m \bullet (n \bullet p) = (m \bullet n) \bullet p$	Asociatividad
3)	$m \bullet n = n \bullet m$	Conmutatividad
4)	$\forall\ m \in \mathbb{N}\ ;\ \exists\ 1 \in \mathbb{N} \mid m \bullet 1 = 1 \bullet m = m$	Elemento idéntico
5)	Si $m \bullet p = n \bullet p$, entonces $m = n$	Cancelación

Distributividad

$\forall\ m, n, p \in \mathbb{N}$

$m \bullet (n + p) = m \bullet n + m \bullet p$

Orden en $\mathbb{N}$

Sean m y n dos números naturales cualesquiera. Se dice que $m < n$, si y solo si, existe un número $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$.

Sean m y n dos números naturales cualesquiera. Se dice que $n > m$, si y solo si, $m < n$.

Relación "menor o igual que" y "mayor o igual que"

Sean m y n dos números naturales cualesquiera. Se tiene que:

$m \leq n$ si $m < n$ o si $m = n$

$m \geq n$ si $m = n$ o si $m > n$

Tricotomía

$\forall\ m,\ n \in \mathbb{N}$ se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:

1) $m > n$

2) $m = n$

3) $m < n$

Propiedades de las desigualdades en $\mathbb{N}$

$\forall\ m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$

1) Si $m < n$, entonces $m + p < n + p$

2) Si $m < n$, entonces $m \bullet p < n \bullet p$

3) Si $m < n$ y $n < p$, entonces $m < p$

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Resulta difícil establecer con precisión cuándo se usó por primera vez el método de inducción matemática para realizar alguna demostración, pero existen evidencias que, desde tiempos muy antiguos, las ideas principales de este método fueron utilizadas, tal es el caso de la demostración que hizo Euclides (325 a.C.-265 a.C.), en el año 300 a.C., sobre la existencia de un número infinito de números primos. Muchos siglos después, alrededor del año 1000 d.C., el matemático e ingeniero persa Al-Karají (953-1029), utilizó un método que incluye los pasos principales de la inducción matemática, en su obra *Al-Fakhri*, para probar el teorema del binomio y la generación de sus coeficientes (triángulo de Pascal). Posteriormente, 149 años después, el matemático iraquí Samau'al Al-Maghribi (1130-1180), escribió un tratado matemático llamado *El brillante en álgebra*, donde extendió los trabajos de Al-Karají sobre el teorema del binomio, siendo su demostración el ejemplo más completo de inducción matemática de los tiempos antiguos. En ninguno de estos trabajos se empleó el método de inducción matemática como lo aplicamos actualmente.

En 1575, el matemático italiano Francesco Maurolico (1494-1575), en su publicación *Arithmeticorum libri duo*, realizó el primer uso conocido del método de inducción matemática para demostrar que la suma de los n primeros enteros impares es igual a n^2.

El matemático francés Blaise Pascal (1623-1662), en su libro *Traité du triangle arithmétique* publicado en 1654, hace uso del método de demostración de inducción matemática. Otro matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), contribuyó en forma importante al desarrollo de la inducción matemática, pues utilizó ampliamente su método del descenso infinito, el cual es una variante del principio de inducción matemática.

El matemático inglés, nacido en la India, Augustus de Morgan (1806-1871), en 1838 definió de manera rigurosa el concepto de inducción matemática y fue él quien le dio ese nombre. Finalmente, con los trabajos de Richard Dedekind (1831-1916) y Giuseppe Peano (1858-1932), se establece de manera definitiva el tratamiento sistemático y riguroso que se usa hoy en día para realizar demostraciones por inducción matemática.

Después de esta reseña histórica, hablemos ahora del método de inducción matemática. Lo que podemos decir de este método, es que nos sirve para demostrar la validez de una infinidad de proposiciones matemáticas, pero también debemos dejar en claro que este no es un método general, es decir, con inducción matemática no podemos demostrar todo tipo de proposiciones, el método tiene limitaciones y estas limitaciones son las siguientes:

1. Solo podemos demostrar proposiciones que involucren una sola variable.
2. Esa variable, solamente puede tomar valores naturales.

El sustento teórico en el que se fundamentan las demostraciones por inducción matemática es el quinto postulado de Peano. De acuerdo con este quinto postulado, el método de inducción matemática consta, esencialmente, de dos pasos.

Si queremos demostrar que la proposición $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales, entonces debemos seguir los siguientes pasos:

1. Verificar que $P(1)$ es verdadera, es decir, que la proposición se cumple cuando $n = 1$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

2. Suponemos que si la proposición $P(k)$ es verdadera, donde k representa un valor cualquiera de n (hipótesis de inducción), entonces se debe cumplir que $P(k+1)$ también lo es (tesis de inducción).

Finalmente, de 1 y 2 debemos concluir que la proposición $P(n)$ es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ilustremos lo anterior realizando algunos ejercicios.

EJERCICIO 1.3 Empleando el método de demostración por inducción matemática, demuestre la validez de la siguiente proposición:

$$3+5+7+\ldots+(2n+1) = n(n+2) \quad ; \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Se debe verificar que la proposición se cumple para el menor valor que puede tomar la variable, en este caso para $n = 1$.

$$3 = 1(1+2) \quad \Rightarrow \quad 3 = 3 \qquad \therefore \text{ sí se cumple}$$

2) Se supone que la proposición se cumple para $n = k$.

$$3+5+7+\ldots+(2k+1) = k(k+2) \quad \text{.................................. } (1) \text{ Hipótesis}$$

Se acepta que la proposición se cumple para $n = k+1$.

$$3+5+7+\ldots+\left[2(k+1)+1\right] = (k+1)(k+1+2)$$

$$3+5+7+\ldots+(2k+3) = (k+1)(k+3) \quad \text{...................................} (2) \text{ Tesis}$$

Cuando la expresión que se pretende demostrar es una igualdad, en la cual el miembro izquierdo es una suma de “n” términos, entonces se recomienda sumar, en ambos lados de la hipótesis, el término siguiente. Al sumar en la hipótesis dicho término, entonces en el miembro izquierdo de la igualdad se tendrán los mismos sumando que se tienen en el lado izquierdo de la tesis y, si la hipótesis es verdadera, entonces los miembros derechos de la hipótesis más su siguiente y el de la tesis deberán ser iguales. Si esto se cumple, quedará completa la demostración.

Conviene aclarar que, la recomendación de sumar a la hipótesis su término siguiente para llegar a la tesis, solo aplica cuando la expresión que se pretende demostrar es de este tipo, es decir, una igualdad donde se tenga una suma de "n" términos. Para otro tipo de proposiciones a demostrar por inducción matemática, el artificio algebraico será diferente.

Siguiendo la recomendación, sumaremos a la hipótesis su término siguiente, esto es $(2k+3)$.

$$3+5+7+\ldots+(2k+1)+(2k+3)=k(k+2)+(2k+3)$$

$$3+5+7+\ldots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+2k+3$$

$$3+5+7+\ldots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+4k+3$$

Factorizando el miembro derecho, tenemos:

$$3+5+7+\ldots+(2k+1)+(2k+3)=(k+1)(k+3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Como la expresión (3) resulta ser igual a la tesis, entonces se completa la demostración.

EJERCICIO 1.4 Con el método de inducción matemática, demuestre que:

$$4+10+18+\ldots+n(n+3)=\frac{n(n+1)(n+5)}{3} \quad ; \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n=1$

$$4=\frac{1(2)(6)}{3} \quad \Rightarrow \quad 4=4 \quad \therefore \text{ cumple}$$

2) Para $n=k$

$$4+10+18+\ldots+k(k+3)=\frac{k(k+1)(k+5)}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \text{ Hipótesis}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Para $n = k + 1$

$$4 + 10 + 18 + \ldots + (k+1)(k+4) = \frac{(k+1)(k+2)(k+6)}{3} \quad \ldots. (2) \quad \text{Tesis}$$

Sumando a (1) su término siguiente, tenemos:

$$\begin{aligned}
4 + 10 + 18 + \ldots + k(k+3) + (k+1)(k+4) &= \frac{k(k+1)(k+5)}{3} + (k+1)(k+4) \\
&= \frac{k(k+1)(k+5) + 3(k+1)(k+4)}{3} \\
&= \frac{(k+1)\left[k(k+5) + 3(k+4)\right]}{3} \\
&= \frac{(k+1)\left(k^2 + 8k + 12\right)}{3} \\
4 + 10 + 18 + \ldots + k(k+3) + (k+1)(k+4) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+6)}{3} \qquad \ldots (3)
\end{aligned}$$

Como la expresión (3) resulta igual a la tesis, entonces queda esto demostrado (QED).

EJERCICIO 1.5 Demuestre, por inducción matemática, la validez de la siguiente proposición:

$$1 + 2 \bullet 2 + 3 \bullet 2^2 + \ldots + n \bullet 2^{n-1} = 1 + (n-1)\,2^n \; ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n = 1$

$$1 = 1 + (1-1)\,2^1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

2) Para $n = k$

$$1 + 2 \bullet 2 + 3 \bullet 2^2 + \ldots + k \bullet 2^{k-1} = 1 + (k-1)\,2^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \;\; \text{Hipótesis}$$

Para $n = k + 1$

$$1 + 2 \bullet 2 + 3 \bullet 2^2 + \ldots + (k+1)\,2^k = 1 + (k)\,2^{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \;\; \text{Tesis}$$

Sumando a la hipótesis su término siguiente, tenemos:

$$1+2\bullet 2+3\bullet 2^2+\ldots+k\bullet 2^{k-1}+(k+1)\,2^k=1+(k-1)\,2^k+(k+1)\,2^k$$

$$=1+\left[(k-1)+(k+1)\right]\,2^k$$

$$=1+2k\bullet 2^k$$

$$1+2\bullet 2+3\bullet 2^2+\ldots+k\bullet 2^{k-1}+(k+1)\,2^k=1+(k)\,2^{k+1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Como la hipótesis más su término siguiente resultó igual a la tesis, entonces QED.

EJERCICIO 1.6 Empleando inducción matemática demuestre que:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad ; \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n=1$

$$\frac{1}{4}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}=\frac{1}{4} \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

2) Para $n=k$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1) Hipótesis}$$

Para $n=k+1$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2) Tesis}$$

sumando a la hipótesis su término siguiente, tenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Al sumar términos semejantes en el lado derecho de la igualdad, se llega a:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}=1-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$$

Finalmente, por propiedades de los exponentes:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Como la expresión (3) resultó igual a la tesis, entonces QED.

EJERCICIO 1.7 Demuestre, por medio de inducción matemática, la validez de la siguiente proposición:

$$(-1)+(-1)^{2}+(-1)^{3}+\ldots+(-1)^{n}=\frac{(-1)^{n}-1}{2} \quad ; \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n=1$

$$-1=\frac{(-1)^{1}-1}{2} \quad \Rightarrow \quad -1=-1 \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

2) Para $n=k$

$$(-1)+(-1)^{2}+(-1)^{3}+\ldots+(-1)^{k}=\frac{(-1)^{k}-1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)\ \text{Hipótesis}$$

Para $n=k+1$

$$(-1)+(-1)^{2}+(-1)^{3}+\ldots+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}-1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)\ \text{Tesis}$$

Sumando a la hipótesis su término siguiente, tenemos:

$$
\begin{aligned}
(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^k+(-1)^{k+1} &= \frac{(-1)^k-1}{2}+(-1)^{k+1}\\
&= \frac{1}{2}(-1)^k-\frac{1}{2}+(-1)^{k+1}\\
&= \frac{1}{2}(-1)^k+(-1)(-1)^k-\frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{1}{2}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)(-1)(-1)^k-\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}(-1)^{k+1}-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^k+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}-1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Como la expresión (3) resulta igual a la tesis, entonces QED.

EJERCICIO 1.8 Demuestre por inducción matemática que:

$$\frac{1}{2\bullet 5}+\frac{1}{5\bullet 8}+\frac{1}{8\bullet 11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}\ ; \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n=1$

$$\frac{1}{2\bullet 5}=\frac{1}{6\,(1)+4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{10}=\frac{1}{10} \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

2) Para $n=k$

$$\frac{1}{2\bullet 5}+\frac{1}{5\bullet 8}+\frac{1}{8\bullet 11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{6k+4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)\ \text{Hipótesis}$$

Para $n = k+1$

$$\frac{1}{2\bullet 5}+\frac{1}{5\bullet 8}+\frac{1}{8\bullet 11}+\ldots+\frac{1}{\left[3\left(k+1\right)-1\right]\left[3\left(k+1\right)+2\right]}=\frac{k+1}{6\left(k+1\right)+4}$$

$$\frac{1}{2\bullet 5}+\frac{1}{5\bullet 8}+\frac{1}{8\bullet 11}+\ldots+\frac{1}{\left(3k+2\right)\left(3k+5\right)}=\frac{k+1}{6k+10}$$ .... (2) Tesis

Sumando a (1) su término siguiente, tenemos:

$$\frac{1}{2\bullet 5}+\frac{1}{5\bullet 8}+\frac{1}{8\bullet 11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{k}{6k+4}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k\left(3k+5\right)+2}{2\left(3k+2\right)\left(3k+5\right)}$$

$$=\frac{3k^2+5k+2}{2\left(3k+2\right)\left(3k+5\right)}$$

$$=\frac{\left(3k+2\right)\left(k+1\right)}{2\left(3k+2\right)\left(3k+5\right)}$$

$$\frac{1}{2\bullet 5}+\frac{1}{5\bullet 8}+\frac{1}{8\bullet 11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{k+1}{6k+10}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Como la expresión (3) resultó igual a la tesis, entonces QED.

EJERCICIO 1.9 Demuestre, por inducción matemática, la validez de la siguiente proposición:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+\left(2n-1\right)^2=\frac{n\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}{3}\ ;\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n=1$

$$1^2=\frac{1\left[\left(2(1)\right)-1\right]\left[\left(2(1)\right)+1\right]}{3}\quad\Rightarrow\quad 1=1\quad\therefore\ \text{cumple}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

2) Para $n = k$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} \quad \text{................ (1) Hipótesis}$$

Para $n = k+1$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} \quad \text{......... (2) Tesis}$$

Sumando a la hipótesis su término siguiente, tenemos:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 - k + 6k + 3)}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Como la expresión (3) es igual a la tesis, entonces QED.

EJERCICIO 1.10 Utilice el método de inducción matemática para demostrar que:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\bullet\ldots\bullet\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1 \quad ; \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n = 1$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right) = 1+1 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2 \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

2) Para $n = k$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\bullet\ldots\bullet\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1 \quad \text{.......................... (1) Hipótesis}$$

Para $n = k+1$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\bullet\ldots\bullet\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+2 \quad \text{.......................... (2) Tesis}$$

Multiplicando la hipótesis por el término siguiente, tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\bullet\ldots\bullet\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= (k+1)+1$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\bullet\ldots\bullet\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Como la expresión (3) es igual a la tesis, entonces QED.

EJERCICIO 1.11 Empleando el método de inducción matemática, demuestre que:

$$n^2+18 < n^3 \quad ; \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad n > 3$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n = 4$

$$4^2 + 18 < 4^3 \quad \Rightarrow \quad 34 < 64 \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

2) Para $n = k$

$$k^2 + 18 < k^3 \quad \text{.................... (1) Hipótesis}$$

Para $n = k + 1$

$$(k+1)^2 + 18 < (k+1)^3 \quad \text{.................... (2) Tesis}$$

Sumando a la hipótesis $2k + 1$, buscando completar el trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos:

$$k^2 + 2k + 1 + 18 < k^3 + 2k + 1$$

$$(k+1)^2 + 18 < k^3 + 2k + 1 \quad \text{.................... (3)}$$

De las expresiones (2) y (3) se tiene que:

$$k^3 + 2k + 1 < (k+1)^3 \quad \text{.................... (4)}$$

Finalmente, de las expresiones (3) y (4) al aplicar la propiedad de transitividad se llega a:

$$(k+1)^2 + 18 < (k+1)^3$$

Con lo cual se concluye que la tesis es válida, por lo tanto, QED.

EJERCICIO 1.12 Con el método de inducción matemática, demuestre la validez de la siguiente proposición:

$$2^n > n^2 \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad n > 5$$

SOLUCIÓN:

1) Para $n = 6$

$2^6 > 6^2 \quad \Rightarrow \quad 64 > 36 \quad \therefore$ cumple

2) Para $n = k$

$2^k > k^2$ .... (1) Hipótesis

Para $n = k + 1$

$2^{k+1} > (k+1)^2$ .... (2) Tesis

Multiplicando la hipótesis por 2, tenemos:

$$2 \bullet 2^k > 2k^2$$

$2^{k+1} > 2k^2$ .... (3)

De las expresiones (2) y (3), considerando que k debe tomar valores mayores a 5, se tiene que:

$2k^2 > (k+1)^2$ .... (4)

Finalmente, de las expresiones (3) y (4) al aplicar la propiedad de transitividad se llega a:

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

Con lo cual se concluye que la tesis es válida, por lo tanto, QED.

EJERCICIO 1.13 Demuestre por inducción matemática que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

1) Para $n = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} < 2\sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad 1 < 2 \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

2) Para $n = k$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1) Hipótesis}$$

Para $n = k + 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2) Tesis}$$

Sumando a la hipótesis su término siguiente, tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

De las expresiones (2) y (3) se puede plantear que:

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

Veamos si lo planteado en (4) es verdadero. Multiplicando en ambos lados de (4) por $\sqrt{k+1}$, tenemos:

$$\sqrt{k+1}\left(2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) < \left(2\sqrt{k+1}\right)\sqrt{k+1}$$

$$2\sqrt{k+1}\sqrt{k} + 1 < 2(k+1)$$

$$2\sqrt{(k+1)k} + 1 < 2k + 2$$

Restando 1 en ambos lados, tenemos:

$$2\sqrt{k^2+k} \; < \; 2k+1$$

Dado que k solo puede tomar valores positivos, entonces podemos elevar al cuadrado en ambos lados:

$$\left(2\sqrt{k^2+k}\right)^2 \; < \; (2k+1)^2$$

$$4\left(k^2+k\right) \; < \; 4k^2+4k+1$$

$$4k^2+4k \; < \; 4k^2+4k+1$$

$$0 \; < \; 1$$

Con lo cual podemos afirmar que lo propuesto en (4) es verdadero.

Finalmente, de las expresiones (3) y (4) al aplicar la propiedad de transitividad se llega a:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$$

Con lo cual se concluye que la tesis es válida, por lo tanto, QED.

EJERCICIO 1.14 Empleando inducción matemática, demuestre que $n^3 - n + 3$ es divisible entre 3, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN:

Si $n^3 - n + 3$ es divisible entre 3, significa que si efectuamos la división de $n^3 - n + 3$ entre 3, el cociente (el resultado de la división) es un número que pertenece al conjunto de los números naturales. De acuerdo con esto, el problema lo podemos plantear de la siguiente manera:

$$\frac{n^3 - n + 3}{3} \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1) Para $n = 1$

$$\frac{1^3 - 1 + 3}{3} \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{3} \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 1 \in \mathbb{N} \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

2) Para $n = k$

$$\frac{k^3 - k + 3}{3} \in \mathbb{N} \quad \text{.................... (1) Hipótesis}$$

Para $n = k + 1$

$$\frac{(k+1)^3 - (k+1) + 3}{3} \in \mathbb{N} \quad \text{.................... (2) Tesis}$$

Para completar la demostración, lo que se hará es demostrar que la tesis es cierta apoyándonos en la hipótesis. Para ello, se desagregará la tesis, de forma tal que una parte de ella sea precisamente la hipótesis y la otra será analizada para determinar si resulta o no divisible entre 3. Después de esto se concluirá con la demostración.

Al desarrollar el binomio al cubo de la tesis, se tiene:

$$\frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - (k+1) + 3}{3} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{k^3 + 3k^2 + 3k - k + 3}{3} \in \mathbb{N}$$

Separando la fracción en dos sumandos:

$$\frac{k^3 - k + 3}{3} + \frac{3k^2 + 3k}{3} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{k^3 - k + 3}{3} + \frac{3(k^2 + k)}{3} \in \mathbb{N}$$

De estos dos sumandos, el primero por hipótesis se acepta que es divisible entre 3 y el segundo es evidente que también lo es, ya que todo número multiplicado por 3 es divisible entre 3; con ello se llega a que se tiene la suma de dos números naturales que, evidentemente, es otro número natural. Con esto se concluye que la tesis es cierta y, por consiguiente, la hipótesis también lo es, por lo tanto, QED.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 1.15 Demuestre por inducción matemática que $3^{2n+1} + 1$ es divisible entre 4, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN:

Lo anterior lo podemos plantear como:

$$\frac{3^{2n+1} + 1}{4} \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1) Para $n = 1$

$$\frac{3^3 + 1}{4} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \frac{28}{4} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 7 \in \mathbb{N} \;\therefore\; \text{cumple}$$

2) Para $n = k$

$$\frac{3^{2k+1} + 1}{4} \in \mathbb{N} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(1) Hipótesis}$$

Para $n = k + 1$

$$\frac{3^{2(k+1)+1} + 1}{4} \in \mathbb{N} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(2) Tesis}$$

Demostrando la validez de la tesis apoyándonos en la hipótesis, tenemos:

$$\frac{3^{2k+3} + 1}{4} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{3^2 \bullet 3^{2k+1} + 1}{4} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{9 \bullet 3^{2k+1} + 1}{4} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{(1+8) \bullet 3^{2k+1} + 1}{4} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{3^{2k+1} + 8 \bullet 3^{2k+1} + 1}{4} \in \mathbb{N}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Separando la fracción en dos sumandos:

$$\frac{3^{2k+1}+1}{4}+\frac{8\bullet 3^{2k+1}}{4}\in \mathbb{N}$$

El primer sumando por hipótesis se acepta que es divisible entre 4 y el segundo también lo es, ya que todo número multiplicado por 8 es divisible entre 4 y dada la cerradura de la adición en $\mathbb{N}$, entonces se concluye que la tesis es verdadera y, por lo tanto, queda demostrado la validez de la proposición.

EJERCICIO 1.16 Demuestre por inducción matemática la validez de la siguiente proposición:

$$\text{sen}\left(\theta+n\pi\right)=\left(-1\right)^{n}\text{sen}\,\theta\;;\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}$$

SOLUCIÓN:

Para realizar esta demostración se hará uso de la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}\left(A+B\right)=\text{sen}\,A\,\cos B+\cos A\,\text{sen}\,B$$

Si consideramos el caso particular cuando $B=\pi$, tenemos:

$$\text{sen}\left(A+\pi\right)=\text{sen}\,A\,\cos\pi+\cos A\,\text{sen}\,\pi$$

como $\cos\pi=-1$ y $\text{sen}\,\pi=0$, entonces:

$$\text{sen}\left(A+\pi\right)=-\,\text{sen}\,A\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\mathrm{I})$$

Procedamos a la demostración teniendo presente la identidad (I).

1) Para $n=1$

$$\text{sen}\left(\theta+1\pi\right)=\left(-1\right)^{1}\text{sen}\,\theta$$

$$\text{sen}\left(\theta+\pi\right)=-\,\text{sen}\,\theta$$

De (I) se tiene que:

$$-\,\text{sen}\,\theta=-\,\text{sen}\,\theta\quad\therefore\quad\text{cumple}$$

2) Para $n = k$

$$\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = (-1)^k \operatorname{sen}\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \text{ Hipótesis}$$

Para $n = k + 1$

$$\operatorname{sen}\left[\theta + (k+1)\pi\right] = (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \text{ Tesis}$$

Multiplicando la hipótesis por -1 , tenemos:

$$(-1)\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = (-1)(-1)^k \operatorname{sen}\theta$$

$$-\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\theta$$

Aplicando la identidad (I) en el primer miembro de la igualdad, tenemos:

$$\operatorname{sen}(\theta + k\pi + \pi) = (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\left[\theta + (k+1)\pi\right] = (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Como la expresión (3) resultó igual a la tesis, entonces QED.

NÚMEROS ENTEROS $(\mathbb{Z})$

Los números enteros positivos y negativos, son el resultado natural de las operaciones de adición y sustracción. Su empleo, aunque con diferentes notaciones y representaciones, se remonta a la antigüedad. Resulta difícil precisar cuándo se utilizaron por primera vez los números negativos; sin embargo, las evidencias más antiguas de que se tiene registro son los ábacos que usaban los chinos para realizar sus cuentas, aproximadamente en el siglo V d.C. Estos ábacos incluían números positivos y números negativos, estos últimos los representaban con fichas rojas. Desde entonces se le suele llamar números rojos cuando se tienen pérdidas o deudas.

El número cero apareció en Mesopotamia hacia el siglo III a.C.; sin embargo, su uso era únicamente como un dígito sin contenido.

Los griegos, antes de nuestra era, utilizaban magnitudes negativas en sus teoremas del álgebra geométrica, en el producto de binomios y otras propiedades algebraicas.

Se le atribuye al matemático y astrónomo de la India Brahmagupta (¿598-660?), el diferenciar los números positivos y los negativos, que interpretaba como débito y crédito, respectivamente. También hace uso del cero y lo maneja ya con entidad propia, no solo como carencia de una cantidad o para representar otros números, por ejemplo 307, sino lo define como el resultado de sustraer un número de sí mismo y establece reglas aritméticas para operar el cero y los números negativos. En su famosa obra Brahmasfuta-Siddhanta, escrita en verso en el año 628, hace importantes contribuciones tanto a las matemáticas como a la astronomía. Este libro influyó notablemente en los matemáticos árabes de épocas posteriores, quienes llevaron estos conocimientos a occidente.

La notación y uso de los símbolos $(+)$ y $(-)$ se debe al matemático alemán Michael Stifel (1487-1567). Antes de él, se usaba la letra P para representar los números positivos y la m para los negativos.

Aproximadamente hasta el siglo XVI se empieza a operar con los números negativos y no es sino hasta el siglo XVIII cuando se generaliza su uso.

El matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576), en su libro Ars Magna publicado en 1545, hizo un estudio exhaustivo de los números negativos que él llamaba números “falsos”, pero se debe a las aportaciones que realizó el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), en su libro Anteitung Zur Algebra publicado en 1770, el manejo formal y su uso generalizado.

La letra Z que se utiliza para representar a los números enteros proviene de la palabra alemana “Zhalen” que significa números.

El conjunto de los números enteros está formado por el conjunto de los números naturales (los enteros positivos), el cero y los enteros negativos (los inversos aditivos de los enteros positivos), esto es:

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

La definición de los números enteros a partir de los números naturales, se da como aquel conjunto de números que se obtienen mediante la diferencia de dos números naturales, esto es:

$$\mathbb{Z} = \{ x \mid x = a - b \text{ donde } a, b \in \mathbb{N} \}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Igualdad de números enteros

Sean $x = a - b$, $y = c - d$ dos números enteros cualesquiera, donde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Se dice que los números x, y son iguales si se cumple que:

$$x = y \quad \text{si} \quad a - b = c - d$$

esto es:

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad a + d = c + b$$

Adición en $\mathbb{Z}$

Sean $x = a - b$, $y = c - d$ dos números enteros cualesquiera, donde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. La adición $x + y$ se define como:

$$x + y = (a - b) + (c - d)$$

de donde:

$$x + y = (a + c) - (b + d)$$

Multiplicación en $\mathbb{Z}$

Sean $x = a - b$, $y = c - d$ dos números enteros cualesquiera, donde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. La multiplicación $x \bullet y$ se define como:

$$x \bullet y = (a - b) \bullet (c - d)$$

$$x \bullet y = ac - ad - bc + bd$$

Finalmente:

$$x \bullet y = (ac + bd) - (ad + bc)$$

Como puede apreciarse, la multiplicación de números enteros queda definida como la diferencia de dos números naturales. Esta diferencia puede dar como resultado un número positivo o negativo, según sean los números enteros que se multiplican. Sin embargo, para efectos prácticos, la multiplicación de números enteros nunca se realiza aplicando la definición, por lo que, cuando multiplicamos dos números enteros, debemos tener presente siempre la regla de los signos para la multiplicación. Esta regla establece que, si los números que se multiplican tienen el mismo signo, entonces el resultado es un número positivo; en cambio, si los números que se multiplican tienen signos diferentes, el resultado será un número negativo.

Propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}$

$$\forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$$

1) Cerradura:

$$(x+y) \in \mathbb{Z}$$

$$(x \bullet y) \in \mathbb{Z}$$

2) Asociatividad:

$$x + (y+z) = (x+y) + z$$

$$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$$

3) Conmutatividad:

$$x + y = y + x$$

$$x \bullet y = y \bullet x$$

4) Elemento idéntico:

$x + 0 = x$; cero es el elemento idéntico para la adición.

$1 \bullet x = x$; uno es el elemento idéntico para la multiplicación.

5) Elementos inversos:

$$\forall\ x \in \mathbb{Z}\ ;\ \exists -x \in \mathbb{Z} \mid x + (-x) = 0$$

Para el caso de la multiplicación en el conjunto de los números enteros, no existen los inversos multiplicativos.

6) Cancelación:

Si $x + z = y + z$, entonces $x = y$

Si $x \bullet z = y \bullet z$, entonces $x = y$ siempre que $z \neq 0$

7) Distributividad:

$$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$$

Sustracción en $\mathbb{Z}$

Sean x, y dos números enteros cualesquiera. La sustracción $x - y$ se define como:

$$x - y = x + (-y)$$

donde:

x es el minuendo.

y es el sustraendo.

La sustracción de dos números enteros se define como la suma del minuendo más el inverso aditivo del sustraendo, esto es, la suma del minuendo más el sustraendo cambiado de signo. Al resultado de la sustracción se le llama resta o diferencia.

EJERCICIO 1.17 Realice las siguientes sustracciones de números enteros, siguiendo la definición:

a) $(6) - (15)$

b) $(3) - (-7)$

c) $(-8) - (5)$

d) $(-6) - (-10)$

SOLUCIÓN:

Lo que se hará para realizar las sustracciones aplicando la definición es expresarla como una suma cambiando de signo al sustraendo y, posteriormente, efectuar la adición correspondiente, esto es:

a) $(6)-(15) = (6)+(-15) = -9$

b) $(3)-(-7) = (3)+(7) = 10$

c) $(-8)-(5) = (-8)+(-5) = -13$

d) $(-6)-(-10) = (-6)+(10) = 4$

Orden en $\mathbb{Z}$

Sean $x,\ y$ dos números enteros cualesquiera. Se dice que:

1) $x < y$ si existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $x + a = y$

2) $x > y$ si $y < x$

Tricotomía en $\mathbb{Z}$

$\forall\ x,\ y \in \mathbb{Z}$ se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:

1) $x > y$

2) $x = y$

3) $x < y$

Propiedades de las desigualdades en $\mathbb{Z}$

$\forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$

1) Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$

2) Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $x \bullet z < y \bullet z$

Si $x < y$ y $z < 0$, entonces $x \bullet z > y \bullet z$

3) Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$

Es importante hacer notar lo que se plantea en la propiedad número dos. En la primera parte de ella se establece que, al multiplicar en ambos lados de una desigualdad por un número positivo, el sentido de esta se conserva; en tanto que, si en la desigualdad se multiplica en ambos lados de ella por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Números racionales $(\mathbb{Q})$

La palabra racional es un adjetivo que alude a una fracción, a una parte de un todo, a un fragmento.

El concepto de fracción surge de manera intuitiva cuando se pretende dividir una unidad, un objeto o algo, en partes que pueden ser del mismo tamaño, o bien, en porciones distintas.

Se considera que fue la civilización egipcia la primera que utilizó las fracciones y realizó cálculos con ellas. Se estima que el conocimiento y el manejo de las fracciones por parte de los egipcios data de alrededor de 3000 años antes de la era cristiana; sin embargo, el vestigio más antiguo que se conserva, donde se da testimonio del manejo de las fracciones por parte de los egipcios, es el papiro Rhind o también conocido como el papiro de Ahmes, que fue escrito a mediados del siglo XVI a.C. El papiro contiene 87 problemas matemáticos, dentro de los cuales se incluye el manejo de las fracciones, con una especie de tabla de equivalencias, con las cuales expresaban una parte o fracción como la suma de fracciones con numerador uno. Por ejemplo, se expresa la fracción $\frac{2}{47}$ como:

$$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$$

Además de los egipcios, los babilonios, los griegos y los chinos también conocían y hacían uso de las fracciones, aunque con concepciones un tanto distintas. Los griegos, por ejemplo, consideraban a los números racionales como una razón, es decir, como una división entre dos números enteros, pero sin darles identidad propia.

Los romanos también utilizaron las fracciones unitarias, es decir, aquellas con numerador uno.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Fueron los matemáticos de India quienes hicieron aportaciones importantes en el manejo de los números racionales. El matemático y astrónomo indio Aryabhata (476-550), formalizó las reglas para realizar operaciones con números fraccionarios.

Posteriormente, el también matemático y astrónomo indio Brahmagupta (¿598-660?), en su obra Brahmasfuta-Siddhanta, profundiza en las aportaciones de Aryabhata, dando reglas para operar, de manera combinada, las fracciones. Algunos siglos después, el último de los matemáticos clásicos de la India Bhaskaracharya (1114-1185), sistematiza y amplía las reglas para operar los números racionales, siendo su trabajo el origen de las reglas con que operamos las fracciones hoy día.

Los matemáticos árabes dieron un impulso al manejo de los números racionales, a ellos se debe la barra horizontal para separar el numerador y denominador en las fracciones; sin embargo, fue el matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1240), también conocido como Fibonacci y considerado el matemático occidental de mayor talento en la Edad Media, quien introdujo y popularizó, en el siglo XIII, el uso de dicha barra horizontal en Europa.

A finales del siglo XVI, el matemático e ingeniero belga Simon Stevin (1548-1620), desarrolló y divulgó el uso de las fracciones decimales, expresadas en décimas, centésimas, milésimas, etc., con poco éxito dada la complejidad de su escritura.

A principios del siglo XVII, los números decimales se empezaron a utilizar como los usamos en la actualidad, separando con un punto o una coma, la parte entera de la parte decimal.

Finalmente, en 1792, el uso de los números decimales se generalizó en casi todos los países, al adoptarse el sistema métrico decimal.

El conjunto de los números racionales está formado por aquellos números que pueden ser expresados como el cociente de dos números enteros, esto es:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{a}{b} \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

En la fracción $\frac{a}{b}$ se tiene que:

a es el numerador.

b es el denominador.

La letra $\mathbb{Q}$ que utilizamos para representar a los números racionales, proviene de la palabra italiana “Quoziente” que significa cociente.

Resulta interesante detenernos un poco para reflexionar sobre el nombre que llevan las partes de la fracción $\frac{a}{b}$. Empecemos con la letra "b" llamada denominador, la cual proviene del verbo denominar, cuyo significado es nombrar, dar nombre; entonces el denominador es el que le da nombre a las fracciones, esto es, medios, tercios, cuartos, quintos, etc. La letra "a" llamada numerador, es un adjetivo cuyo significado es numerar, el que numera, es decir, el que numera las fracciones, por ejemplo, un quinto, dos quintos, tres quintos, cuatro quintos, etc.

Todo número entero a puede escribirse como $\frac{a}{1}$, esto es, los números enteros pueden ser expresados como el cociente de dos enteros, entonces, todo número entero es un número racional, por lo tanto, el conjunto de los números enteros es un subconjunto de los racionales, esto es:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Igualdad de números racionales

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales cualesquiera, donde $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}$ con b y $d \neq 0$. Se dice que $\frac{a}{b}$ es igual $\frac{c}{d}$ si se cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

Adición en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales cualesquiera, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con b y $d \neq 0$. La adición $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Multiplicación en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales cualesquiera, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con b y $d \neq 0$. La multiplicación $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{Q}$

$\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$

1) Cerradura:

$$(x + y) \in \mathbb{Q}$$

$$(x \bullet y) \in \mathbb{Q}$$

2) Asociatividad:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

3) Conmutatividad:

$$x + y = y + x$$
$$x \bullet y = y \bullet x$$

4) Elemento idéntico:

$x + 0 = x$; cero es el elemento idéntico para la adición en $\mathbb{Q}$.

$1 \bullet x = x$; uno es el elemento idéntico para la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

5) Elementos inversos:

$$\forall\ x \in \mathbb{Q};\ \exists -x \in \mathbb{Q} \mid x + (-x) = 0$$

$$\forall\ x \in \mathbb{Q} \text{ con } x \neq 0\ ;\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{Q} \mid x \bullet x^{-1} = 1$$

6) Cancelación:

sí $x + z = y + z$, entonces $x = y$

sí $x \bullet z = y \bullet z$, entonces $x = y$ siempre que $z \neq 0$

7) Distributividad:

$$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$$

Sustracción en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales cualesquiera, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con b y $d \neq 0$. La sustracción $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

La definición que se da para la sustracción de números racionales está en términos de la suma del sustraendo más el inverso aditivo del minuendo, por lo que, para restar dos números racionales, se debe seguir la regla definida para la adición en $\mathbb{Q}$, pero teniendo presente en el desarrollo el signo menos del minuendo.

División en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales cualesquiera, con $\frac{c}{d} \neq 0$. La división $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c}$$

donde:

$\frac{a}{b}$ es el dividendo

$\frac{c}{d}$ es el divisor

La definición que se da para la división de números racionales está en térmicos de la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Orden en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales cualesquiera, donde $b,\ d \in \mathbb{Z}^+$. Se dice que:

1) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $ad < bc$

2) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$

Propiedades de las desigualdades en $\mathbb{Q}$

$\forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{Q}$

1) Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$

2) Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $x \bullet z < y \bullet z$

Si $x < y$ y $z < 0$, entonces $x \bullet z > y \bullet z$

3) Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$

Aunque podría considerarse evidente que estas propiedades también se cumplen cuando son planteadas en términos de la relación mayor que, se considera importante hacer énfasis en ello, por ejemplo, para el caso de la primera propiedad se plantearía:

1) Si $x > y$, entonces $x + z > y + z$. De igual forma se pueden plantear las otras dos propiedades en términos de la relación mayor que.

Propiedad de la densidad en $\mathbb{Q}$

$\forall\ x,\ y \in \mathbb{Q}$, con $x < y$, existe un número $z \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$x < z < y$$

Esta propiedad de densidad podría ser aplicada entre x y z dado que $x < z$ y ambos son números racionales. Con este principio, podríamos estar aplicando dicha propiedad indefinidamente y llegaríamos a la conclusión de que entre dos números racionales cualesquiera, siendo uno menor que el otro, existen una infinidad de números racionales entre ellos, sin importar qué tan próximos son uno del otro. Por esto se puede afirmar que los números racionales son un conjunto denso.

Expresión decimal de un número racional

TEOREMAS:

1) Todo número racional tiene una expresión decimal periódica.
2) Toda expresión decimal periódica representa a un número racional.

EJERCICIO 1.18 Exprese los siguientes números decimales como el cociente de dos números enteros:

a) $2.58333\ldots$

b) $5.8148148148\ldots$

c) $3.727272\ldots$

d) 5.28

SOLUCIÓN:

a) Un procedimiento que se puede seguir es el siguiente:

Exprese el número dado de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = 2.58333\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Identifique primeramente el periodo, es decir, el dígito o grupo de dígitos que se repiten indefinidamente a la derecha del punto decimal. Si existen dígitos que no pertenecen al periodo, multiplique en ambos lados de la expresión (1), por 10 o alguno de sus múltiplos, según sea necesario, de forma tal que dichos dígitos pasen a la izquierda del punto decimal. En nuestro ejercicio, el 58 no pertenece al periodo, por lo que multiplicaremos por 100 para pasarlo a la izquierda del punto decimal.

$$100\,\frac{a}{b} = 258.3333\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Multiplicar por 10 o alguno de sus múltiplos, de forma tal que pasemos a la izquierda del punto decimal un periodo completo. Como nuestro periodo en este caso es de un dígito, entonces multiplicaremos por 10 en ambos lados de la expresión (2):

$$10\left(100\,\frac{a}{b}\right) = 2583.3333\,...$$

$$1000\,\frac{a}{b} = 2583.3333\,... \qquad \text{...}(3)$$

Restemos a (3) la expresión (2):

$$1000\,\frac{a}{b} - 100\,\frac{a}{b} = 2583.3333\ldots - 258.3333\ldots$$

de donde:

$$900\,\frac{a}{b} = 2325$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2325}{900}$$

al reducir esta fracción a su mínima expresión se llega a:

$$\frac{a}{b} = \frac{31}{12}$$

Le queda al lector comprobar que:

$$\frac{31}{12} = 2.583333\ldots$$

Cuando en una expresión decimal periódica, a la derecha del punto decimal, se tiene un número o más que no pertenecen al periodo, se dice entonces que se tiene una expresión decimal periódica mixta.

En nuestro ejercicio el número $2.583333\ldots$ es una expresión decimal periódica mixta.

b) $\frac{a}{b} = 5.8148148148\,...$ ....(1)

Se trata también de una expresión decimal periódica mixta con un dígito que no pertenece al periodo. Multiplicando en ambos lados de (1) por 10, tenemos:

$$10\,\frac{a}{b} = 58.148148148\,... \qquad \text{..}(2)$$

Como el periodo es de tres dígitos, entonces multiplicaremos por 1000 en ambos lados de (2):

$$1000\left(10\ \frac{a}{b}\right) = 58\,148.148\,148\,148\ \ldots$$

$$10\,000\ \frac{a}{b} = 58\,148.148\,148\,148\ \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Restando a (3) la expresión (2), tenemos:

$$10\,000\ \frac{a}{b} - 10\ \frac{a}{b} = 58\,148.148\,148\,148\ldots - 58.148\,148\,148\ldots$$

$$9\,990\ \frac{a}{b} = 58\,090$$

$$\frac{a}{b} = \frac{58\,090}{9\,990}$$

reduciendo a su mínima expresión se llega a:

$$\frac{a}{b} = \frac{157}{27}$$

c) $\frac{a}{b} = 3.72\,72\,72\ldots$ .... (1)

En este caso todos los dígitos que están a la derecha del punto decimal forman parte del periodo, cuando esto sucede, se dice que se tiene una expresión decimal periódica pura.

Como el periodo es de dos dígitos, entonces multiplicaremos en ambos lados de (1) por 100:

$$100\ \frac{a}{b} = 372.72\,72\,72\ \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Restando a (2) la expresión (1), tenemos:

$$100\ \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 372.72\,72\,72\ldots - 3.72\,72\,72\ldots$$

$$99\ \frac{a}{b} = 369$$

$$\frac{a}{b} = \frac{369}{99}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

reduciendo a su mínima expresión se llega a:

$$\frac{a}{b} = \frac{41}{11}$$

d) $\frac{a}{b} = 5.28$ ....(1)

El número 5.28 también es periódico pues lo podemos escribir como:

$$\frac{a}{b} = 5.28000\ldots$$

A números como 5.28 se les conoce como expresión decimal exacta.

Para obtener lo que se pide para este tipo de números, simplemente se multiplica por 10 o por uno de sus múltiplos, de tal forma que se pasen todos los dígitos diferentes de cero a la izquierda del punto decimal. En nuestro caso se multiplicará por 100 en ambos lados de la expresión (1):

$$\begin{aligned} 100\,\frac{a}{b} &= 528 \\ \frac{a}{b} &= \frac{528}{100} \end{aligned}$$

reduciendo a su mínima expresión se llega a:

$$\frac{a}{b} = \frac{132}{25}$$

EJERCICIO 1.19 Exprese los siguientes números decimales como el cociente de dos enteros:

a) $0.1111\ldots$

b) $0.3333\ldots$

c) $0.9999\ldots$

d) Dé una justificación al resultado obtenido en el inciso c).

SOLUCIÓN:

a) $\frac{a}{b} = 0.1111\ldots$ ....(1)

Multiplicando por 10 en ambos lados de (1):

$$10\,\frac{a}{b} = 1.1111\ldots \qquad \ldots\ldots(2)$$

Restando a (2) la expresión (1), tenemos:

$$10\,\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 1.1111\ldots - 0.1111\ldots$$

$$9\,\frac{a}{b} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{9}$$

b) $\frac{a}{b} = 0.3333\ldots$ ....(1)

Multiplicando por 10 en ambos lados de (1):

$$10\,\frac{a}{b} = 3.3333\ldots \qquad \ldots\ldots(2)$$

Restando a (2) la expresión (1), tenemos:

$$10\,\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 3.3333\ldots - 0.3333\ldots$$

$$9\,\frac{a}{b} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

c) $\frac{a}{b} = 0.9999\ldots$ ....(1)

Multiplicando por 10 en ambos lados de (1):

$$10\,\frac{a}{b} = 9.9999\ldots \qquad \ldots\ldots(2)$$

Restando a (2) la expresión (1), tenemos:

$$10\,\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 9.9999\ldots - 0.9999\ldots$$

$$9\,\frac{a}{b} = 9$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = 1$$

Hemos llegado a la conclusión que:

$$0.9999\ldots = 1$$

Esto es, que $0.9999\ldots$ y 1 representan al mismo número.

d) Presentaremos a continuación algunas justificaciones de este resultado.

Primera justificación:

En el inciso a) de este ejercicio se llegó a la conclusión que:

$$\frac{1}{9} = 0.1111\ldots$$

Multiplicando en ambos lados por 9, tenemos:

$$9\left(\frac{1}{9}\right) = 9\,(0.1111\ldots)$$

$$1 = 0.9999\ldots$$

Segunda justificación:

En el inciso b) de este ejercicio se llegó a la conclusión que:

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

Multiplicando en ambos lados por 3, tenemos:

$$3\left(\frac{1}{3}\right) = 3\,(0.3333\ldots)$$

$$1 = 0.9999\ldots$$

Tercera justificación:

Valiéndonos de los conceptos de sucesión, serie y límite, se tiene que:

$$0.9999\ldots = \lim_{n\to\infty} \underbrace{0.999\ldots9}_{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 1$$

Además de estas tres justificaciones existen otras más.

Números reales $(\mathbb{R})$

El origen de los números reales está directamente ligado al surgimiento de los números irracionales. Estos números aparecen en la historia de las matemáticas vinculados a la geometría.

Previo al florecimiento de las matemáticas helénicas, en Egipto y Babilonia surgen dos problemas geométricos cuya solución es reconocida hoy día como dos de los números irracionales más antiguos y notables.

El primero es el número que surge de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, que dio origen al número π y, el segundo, es la relación pitagórica en los triángulos rectángulos, donde surgió el número $\sqrt{2}$. Se tiene un vestigio, en una tablilla de arcilla, que se conserva actualmente en la Universidad de Yale en Estados Unidos, donde se da, en escritura cuneiforme, una buena aproximación del valor de $\sqrt{2}$. Surgían, en esos tiempos, los primeros indicios de este tipo de números, pero aún no se identificaban como tales.

Se atribuye a Hípaso de Metaponto (S. VI a.C. - S. V a.C.), miembro de la escuela pitagórica, el haber descubierto los números irracionales, que llamaron alogos.

Los pitagóricos basaban su filosofía en la sentencia "Todo es número". Proclamaban que todo número era racional, creían que el número era un ente perfecto que gobernaba el universo y todo lo que en él existía. Afirmaban, y estaban convencidos de ello, que la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera es siempre un número racional, lo cual manifestaban con la sentencia “Todos segmentos son conmensurables”, es decir, que se puede encontrar una unidad común a ambas longitudes, siendo estas entonces múltiplos de esa unidad.

No existe consenso en las fuentes en cuanto a cuál fue el primer número irracional que encontró Hípaso. Unas fuentes lo atribuyen a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lados uno, es decir, $\sqrt{2}$. La diagonal de este cuadrado es inconmensurable con respecto a sus lados. Otras fuentes afirman que el primer número que encontró Hípaso fue $\sqrt{5}$, el cual está asociado a que la longitud de una las diagonales de un pentágono regular, es inconmensurable con respecto a uno de sus lados. La razón de la diagonal entre uno de sus lados da origen al llamado número de oro, o también conocido como razón áurea; este número es:

$$\frac{d}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

donde: $d \rightarrow$ es la longitud de la diagonal.

$\ell \rightarrow$ es la longitud de un lado.

Independientemente de cuál de estos dos números fue el que encontró Hípaso, el hecho de que cualquiera de ellos no pueda ser expresado con el cociente de dos números enteros, provocó el rechazo por parte de Pitágoras (569 a.C.-475 a.C.), aludiendo a que este número no era perfecto y, por lo tanto, no debía existir. La aparición de este tipo de números derrumbaba por completo toda la teoría pitagórica. La sorpresa y preocupación llegó a tal punto que decidieron mantener en secreto la existencia de estos números.

Los números irracionales permanecieron en secreto, hasta que el filósofo, matemático y astrónomo griego Eudoxo de Cnido (390 a.C.-337 a.C.), volvió hacer referencia de ellos en su teoría de la proporcionalidad, donde habla de las cantidades continuas.

Tres siglos después de su descubrimiento, el matemático y geómetra griego Euclides (325 a.C.-270 a.C.), en su obra *Los elementos*, retoma los números irracionales en el libro número 10 y presenta la demostración, por reducción al absurdo, que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Se debe al matemático francés René Descartes (1596-1650), el término “número real”. En los trabajos que desarrolló Descartes en la búsqueda y obtención de las raíces de ecuaciones polinomiales, llamó números imaginarios, a las raíces que surgían de extraer la raíz cuadrada de un número negativo y llamó números reales a las raíces que no eran de este tipo.

La evolución de los números reales siguió avanzando, contribuyendo a su desarrollo un gran número de matemáticos destacados como Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy, Weierstrass y Riemann. Finalmente, la definición formal y rigurosa de los números reales se dio de dos formas distintas. La primera de ellas la estableció el matemático ruso, aunque posteriormente adquirió la nacionalidad alemana, Georg Cantor (1845-1918), valiéndose de la teoría de conjuntos, los encajamientos sucesivos, cardinales finitos e infinitos, en 1871. La segunda definición formal la dio el matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916), en un artículo que publicó en 1872, valiéndose de las llamadas cortaduras de Dedekind, caracterizando a los números reales como un cuerpo ordenado y completo.

El conjunto de los números racionales estudiados hasta ahora, cumplen una propiedad muy importante, la densidad en $\mathbb{Q}$. Esta propiedad nos puede hacer creer que al ser $\mathbb{Q}$ un conjunto denso, entonces todos los puntos de la recta numérica están ocupados por dicho conjunto de números; sin embargo, existen números que no son racionales y tienen una representación en dicha recta, por ejemplo, el número $\sqrt{2}$. A continuación, demostraremos que $\sqrt{2}$ no puede ser representado como el cociente de dos números enteros, es decir, demostraremos que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Antes de proceder a esta demostración enunciaremos el siguiente lema:

Lema:
El cuadrado de un número par es un número par y el cuadrado de un número impar es un número impar.

Procedamos ahora a la demostración.

Partamos de la siguiente hipótesis:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, esto es:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{donde} \quad p,\ q \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad q \neq 0$$

La fracción $\frac{p}{q}$ está reducida a su mínima expresión, si no lo estuviera, dividiríamos numerador y denominador entre su factor común hasta lograrlo.

Partiendo de este supuesto, tenemos:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

elevando al cuadrado:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2q^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

de (1) se puede apreciar que p^2 es un número par, lo cual implica que p es par.

Si p es un número par, entonces lo podemos expresar como:

$$p = 2n \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$(2n)^2 = 2q^2$$

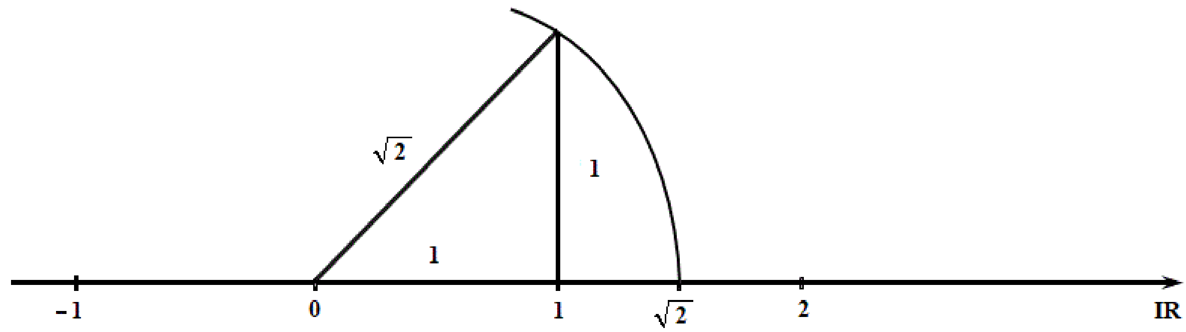
$$4n^2 = 2q^2$$

$$q^2 = 2n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

de (3) se aprecia que q^2 es par, lo cual implica que q es un número par.

Se tiene que p y q son números pares, entonces ambos tienen como factor común a 2, por lo que la fracción $\frac{p}{q}$ no se encuentra reducida a su mínima expresión, lo cual contradice nuestra hipótesis, por lo tanto, se puede concluir que $\sqrt{2}$ no es un número racional, esto es, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Con esto se completa la demostración.

Como se puede apreciar en la siguiente gráfica, $\sqrt{2}$ sí puede ser representado en la recta numérica:



A los números que no pueden ser expresados como el cociente de dos enteros le llamaremos números irracionales, que representaremos con $\mathbb{Q}'$. Como ejemplo de este tipo de números tenemos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $1+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{7}$, e , π , etc.

Richard Dedekind (1831–1916) demostró que existen más números irracionales que racionales.

El conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ se define como la unión de los números racionales con los números irracionales, esto es:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

De acuerdo con la construcción que se tiene hasta este momento, se tiene que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Números algebraicos

Son aquellos números reales que son solución de alguna ecuación polinómica, cuyos coeficientes son números racionales.

De acuerdo con esta definición los números racionales son números algebraicos; sin embargo, también hay números irracionales que son algebraicos como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $3-\sqrt{11}$, $2+\sqrt{13}$, etc.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Números trascendentes

Son los números reales que no son solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales. Números como e, π, e^{π}, π^{e}, $2^{\sqrt{3}}$, etc.

Todo número trascendente es un número irracional, pero no todo número irracional es trascendente.

Adición en $\mathbb{R}$

Sean a y b dos números reales cualesquiera. La adición de los números a y b asocia un único número real llamado suma que denotamos por $a + b$.

Al efectuar la adición de números reales, se deben tener presentes las reglas de los signos para la suma:

1. Si los números que se suman tienen signos iguales, se suman los valores absolutos de dichos números y la suma debe tener el mismo signo que los sumandos.

2. Si los números que se suman tienen signos distintos, entonces deberán restarse los valores absolutos de dichos números y la suma debe tener el signo del sumando con el mayor valor absoluto.

El hecho de que los números irracionales formen parte del conjunto de los números reales, complica en forma importante la realización de las operaciones cuando en ellas intervienen números irracionales, pues estos, al expresarlos en forma decimal, poseen infinitas cifras decimales (infinito número de dígitos a la derecha del punto decimal) que no tienen un periodo definido.

Algunas operaciones con números irracionales son sencillas de realizar, por ejemplo, $\sqrt{2}\ \sqrt{2} = 2$; sin embargo, otras como:

* $\sqrt{2} + \sqrt{5}$
* $2\sqrt{2}$
* $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$
* $\pi + \sqrt{3}$
* $\pi\sqrt{13}$
* $\dfrac{2}{\pi}$
* $3 - \sqrt{7}$
* $e\,\pi$
* $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

Presentan serias dificultades para obtener su valor. Ante este tipo de operaciones solo tenemos dos posibilidades:

1) Dejar las operaciones indicadas, es decir, no realizarlas.

2) Realizarlas con valores aproximados, es decir, decidir cuántas cifras decimales tomaremos a la derecha del punto decimal y realizar así la operación, conscientes de que llegaremos a una respuesta también aproximada. El número de cifras decimales que debemos tomar para realizar las operaciones dependerá del uso que le vayamos a dar a los resultados.

Cada uno de los conjuntos de números anteriormente definidos, como ya se hizo notar, son subconjuntos de los números reales y, por lo tanto, todas las propiedades que satisfacen dichos conjuntos también se cumplen en los números reales, por ello y con el fin de simplificar un poco la construcción de los números reales, algunas de las propiedades solo serán citadas por su nombre y no se hará un planteamiento formal de ellas, pues esto ya se hizo con los otros sistemas de numeración.

Hay conceptos que no se han definido previamente y propiedades que tienen los números reales que no se cumplen en ninguno de sus subconjuntos. En estos casos, se tendrá cuidado de dar las definiciones formales y las propiedades serán dadas también de manera formal.

Hecha la aclaración previa y haciendo caso de ella, tenemos:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Propiedades de la adición en $\mathbb{R}$

1. Cerradura.
2. Asociatividad.
3. Conmutatividad.
4. Elemento idéntico.
5. Elementos inversos.
6. Cancelación.

Sustracción en $\mathbb{R}$

Sean a y b dos números reales cualesquiera. La sustracción de a menos b se define como:

$$a - b = a + (-b)$$

La sustracción se define como la suma del minuendo más el inverso aditivo del sustraendo.

Multiplicación en $\mathbb{R}$

Sean a y b dos números reales cualesquiera. La multiplicación de los números a y b asocia un único número real llamado producto que denotamos por $a \cdot b$, o también, $a \times b$ o simplemente por ab.

Para multiplicar números reales, se multiplican sus valores absolutos y para determinar el signo del producto, se siguen las reglas de los signos para el caso de la multiplicación:

1) Si ambos números tienen el mismo signo, entonces el producto es positivo.

2) Si los números tienen signos distintos, esto es, uno es positivo y el otro negativo, entonces el producto es negativo.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{R}$

1. Cerradura.
2. Asociatividad.
3. Conmutatividad.
4. Elemento idéntico.
5. Elementos inversos, siempre y cuando el número sea diferente de cero.
6. Cancelación, siempre y cuando el número que se cancela sea diferente de cero.
7. Distributividad, al considerar la adición y la multiplicación simultáneamente.

División en $\mathbb{R}$

Sean a y b dos números reales cualesquiera, con $b \neq 0$. La división de a entre b se define como:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a\,b^{-1}$$

Como la división se define en términos de un producto, entonces para determinar el signo del cociente, se siguen las reglas de los signos definidas para la multiplicación.

Siguiendo con las propiedades de los números reales, podemos señalar que se trata de un conjunto ordenado, es decir, se pueden definir también las relaciones “menor que” y “mayor que”. Se cumple la propiedad de la tricotomía y las propiedades de las desigualdades, tal cual como fueron planteadas para los números racionales. Una propiedad muy importante que tienen los números reales y que no cumplen los otros conjuntos de números, es la propiedad de la completitud. Para poder enunciar esta propiedad, es necesario definir los siguientes conceptos:

Cota superior

Llamaremos cota superior de un conjunto de números, a cualquier número no superado por ninguno de los elementos del conjunto. Simbólicamente esto se define como:

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que b es una cota superior de A, si se cumple que:

$$x \leq b \quad ; \quad \forall\, x \in A$$

De acuerdo con esta definición, todo conjunto de números que esté acotado superiormente tiene una infinidad de cotas superiores.

Cota inferior

Llamaremos cota inferior de un conjunto de números, a cualquier número que no supera a ninguno de los elementos del conjunto. Simbólicamente esto se define como:

Sea B un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que c es una cota inferior de B, si se cumple que:

$$x \geq c \quad ; \quad \forall\, x \in B$$

Todo conjunto de números que esté acotado inferiormente tiene una infinidad de cotas inferiores.

Elemento máximo

Llamaremos elemento máximo de un conjunto de números, a un número que sea cota superior del conjunto y además pertenezca al mismo conjunto. Simbólicamente esto se define como:

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que M es el elemento máximo de A, si se cumple que:

1) $x \leq M \quad ; \quad \forall\, x \in A$

2) $M \in A$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

No todos los conjuntos de números que están acotados superiormente tienen elemento máximo. Si existe, dicho elemento máximo es único.

Elemento mínimo

Llamaremos elemento mínimo de un conjunto de números, a un número que sea cota inferior del conjunto y además pertenezca al mismo conjunto. Simbólicamente esto se define como:

Sea B un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que m es el elemento mínimo de B, si se cumple que:

1) $x \geq m \quad ; \quad \forall\, x \in B$

2) $m \in B$

No todos los conjuntos de números que están acotados inferiormente tienen elemento mínimo. Si existe, dicho elemento mínimo es único.

Supremo

Llamaremos supremo de un conjunto de números a la menor de las cotas superiores de dicho conjunto. Simbólicamente esto se define como:

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que s es el supremo de A, si se cumple que:

1) $x \leq s \; ; \quad \forall\, x \in A$

2) Si $b \in \mathbb{R}$ y $x \leq b$; $\forall\, x \in A$, entonces $s \leq b$

El supremo de un conjunto de números es la menor de las cotas superiores y dicho elemento puede o no pertenecer al mismo conjunto.

Ínfimo

Llamaremos ínfimo de un conjunto de números a la mayor de las cotas inferiores de dicho conjunto. Simbólicamente esto se define como:

Sea B un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que i es el ínfimo de B, si se cumple que:

1) $x \geq i \; ; \qquad \forall \; x \in B$

2) Si $c \in \mathbb{R}$ y $x \geq c \; ; \; \forall \; x \in B$, entonces $i \geq c$

El ínfimo de un conjunto de números es la mayor de las cotas inferiores y dicho elemento puede o no pertenecer al mismo conjunto.

EJERCICIO 1.20 Sea el conjunto

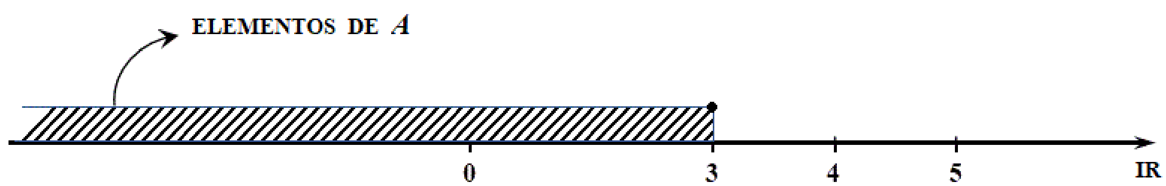
$$A = \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \text{ con } x \leq 3 \right\}$$

Obtenga, si existen, del conjunto A :

a) Dos de sus cotas superiores.
b) Su elemento máximo.
c) El supremo.

SOLUCIÓN:

a) Para facilitar la comprensión del ejercicio, representemos gráficamente al conjunto A :



Como puede apreciarse en la gráfica, los elementos del conjunto A son todos los números reales menores o iguales a 3, el 3 pertenece al conjunto A .

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Los números 4 y 5 son dos cotas superiores del conjunto A, pues no son superados por ninguno de los elementos del conjunto. El número 3.1 también es cota superior de A, incluso el 3 es otra cota superior de A, pues cumple con la definición de no ser superado por ninguno de los elementos del conjunto. En este último caso, el número 3 es igualado por un elemento del conjunto, que es el mismo 3; lo iguala, pero no lo supera, por lo tanto, 3 sí es cota superior del conjunto A.

b) La definición del elemento máximo establece que este elemento debe ser cota superior del conjunto y además pertenecer al mismo conjunto. Es evidente que el número 3 cumple con las dos características, es cota superior y pertenece al conjunto, por lo tanto, 3 es el elemento máximo.

c) El supremo es la menor de las cotas superiores, la cual puede o no pertenecer al mismo conjunto. En este caso, el número 3 es también la menor de las cotas superiores y, por lo tanto, 3 es el supremo del conjunto A.

EJERCICIO 1.21 Sea el conjunto:

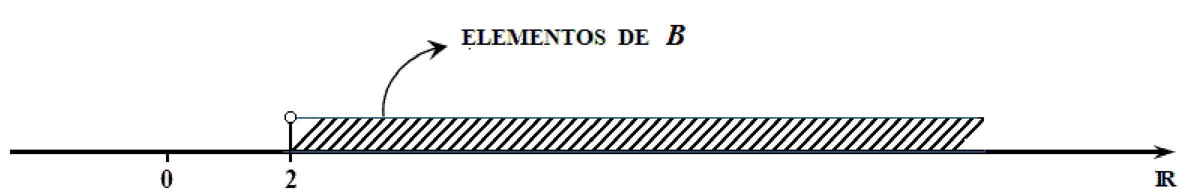
$$B = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \text{ con } x > 2 \}$$

Obtenga, si existe, del conjunto B :

a) Dos de sus cotas inferiores.
b) Su elemento mínimo.
c) El ínfimo.

SOLUCIÓN:

a) Gráficamente el conjunto B es:



Los números 0 y 2 son dos cotas inferiores del conjunto B, pues ninguno de ellos supera a los elementos de B.

b) Elemento mínimo debe ser un número tal, que además de ser cota inferior debe pertenecer al conjunto. El número 2 es la mayor de todas las cotas inferiores de B, pero no pertenece a dicho conjunto, por lo tanto, el conjunto B no tiene elemento mínimo.

c) El ínfimo es la mayor de las cotas inferiores del conjunto, la cual puede o no pertenecer al conjunto. En este caso, es evidente que 2 es el ínfimo de B.

Teorema de completitud de $\mathbb{R}$

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que esté acotado superiormente tiene un supremo que pertenece a $\mathbb{R}$.

Como una consecuencia de este teorema, se puede deducir también que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que esté acotado inferiormente tiene un ínfimo que pertenece a $\mathbb{R}$.

El teorema de completitud también se conoce como teorema de continuidad, pues este teorema le atribuye al conjunto de los números reales una propiedad de continuidad que, entre otras cosas, garantiza que los números reales "ocupan" o "llenan" completamente la recta numérica, es decir, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos de la recta, esto es, a cada número real le corresponde un punto en la recta y viceversa, a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Valor absoluto

Sea x un número real. El valor absoluto de x es un número real no negativo que representamos con $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$

3) $|-x| = |x|$

4) $|x - y| = |y - x|$

5) $|xy| = |x| \bullet |y|$

6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$

7) $|x|^n = |x^n|$; $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ o $n = 0$

8) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Solución de desigualdades e inecuaciones

Cuando se tiene una ecuación se establece una relación de igualdad entre dos expresiones, pero en el caso de las desigualdades, lo que se tiene es una relación donde intervienen los símbolos $>$, $<$, $\geq$ o $\leq$. Estas relaciones pueden ser numéricas, por ejemplo, $3 < 7$ o $-5 > -10$, o bien, algebraicas como: $2x + 1 < 3x - 5$ o $x^2 - x - 6 > 0$. Cuando se tienen desigualdades algebraicas o también llamadas inecuaciones, es posible obtener los valores que las satisfacen, es decir, los valores de la variable para los cuales la desigualdad resulta cierta o verdadera. Al conjunto de valores que satisfacen una desigualdad, se le llama conjunto solución.

Existen diferentes tipos de desigualdades y para cada uno de ellos, el camino que permite llegar a la solución es distinto, por ejemplo, cuando se tienen desigualdades de primer grado, lo que se busca es tratar de despejar la incógnita, valiéndose de las propiedades de las desigualdades que han sido enunciadas. Para otro tipo de desigualdades, como las de cociente, de segundo grado, con valor absoluto, etc., el procedimiento cambia, según sea la desigualdad que pretendamos resolver.

A continuación, se resolverán algunos ejercicios con la idea de mostrar el camino, o los caminos, que se pueden seguir al resolver una desigualdad o inecuación.

EJERCICIO 1.22 Resuelva la siguiente desigualdad:

$$\frac{3x-5}{2}+\frac{1}{3}<\frac{x-4}{3}-\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN:

Con el fin de simplificar las fracciones, multiplicaremos en ambos lados de la desigualdad por 6.

$$\begin{aligned} 6\left(\frac{3x-5}{2}+\frac{1}{3}\right) &< \left(\frac{x-4}{3}-\frac{1}{2}\right)6 \\ 9x-15+2 &< 2x-8-3 \\ 9x-13 &< 2x-11 \end{aligned}$$

sumando 13 en ambos lados, tenemos:

$$\begin{aligned} 9x-13+13 &< 2x-11+13 \\ 9x &< 2x+2 \end{aligned}$$

sumando $-2x$ en ambos lados, se tiene:

$$\begin{aligned} 9x-2x &< 2x-2x+2 \\ 7x &< 2 \end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{1}{7}$ en ambos lados:

$$x<\frac{2}{7}$$

Entonces, el conjunto solución de la desigualdad planteada es: todos los valores de $x \in \mathbb{R}$, tales que $x < \frac{2}{7}$.

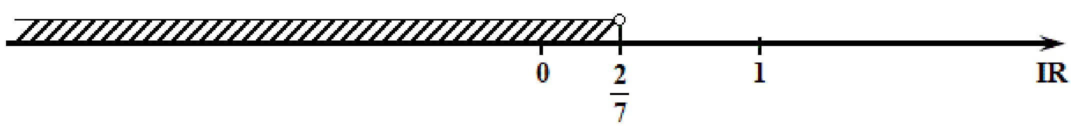
Existen varias formas de expresar al conjunto solución de una desigualdad, algunas de ellas son:

$$\left(-\infty \, , \, \frac{2}{7} \right)$$

$$\left\{ x \,\middle|\, x < \frac{2}{7} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x \in \left(-\infty \, , \, \frac{2}{7} \right)$$

Gráficamente:



EJERCICIO 1.23 Obtenga el conjunto solución de la desigualdad:

$$\frac{5x - 3}{x + 3} > 2 \quad \text{con} \quad x \neq -3$$

SOLUCIÓN:

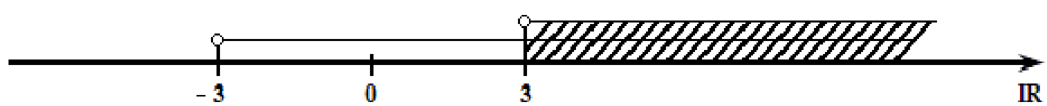
Para llegar al conjunto solución, lo que se intentará es despejar la incógnita. Para ello, lo que debemos hacer es multiplicar en ambos lados de la desigualdad por el término $x + 3$; sin embargo, este término puede ser positivo o negativo, dependiendo del valor que tome x, por tal razón, en el despeje pretendido, debemos de considerar ambas posibilidades:

Caso 1: Si $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

Como estamos considerando que $x + 3$ es un término positivo, entonces al multiplicar en ambos lados de la desigualdad por dicho término, el sentido de la desigualdad no cambia, tenemos entonces que:

$$
\begin{aligned}
(x+3)\,\frac{5x-3}{x+3} &> 2(x+3) \\
5x-3 &> 2x+6 \\
5x &> 2x+9 \\
5x-2x &> 9 \\
3x &> 9 \\
x &> 3
\end{aligned}
$$

Como $x+3>0$ implica $x>-3$ y por otro lado llegamos a que $x>3$, entonces se tiene que la solución para el caso 1 viene dado por:



Con lo cual, la solución al caso 1 es:

$$x \in (3,\ \infty)$$

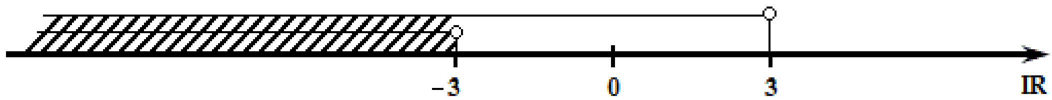
Caso 2: Si $x+3<0 \Rightarrow x<-3$

Como ahora el término $x+3$ se está considerando negativo, entonces al multiplicar en ambos lados de la desigualdad por dicho término, el sentido de esta cambia, esto es:

$$
\begin{aligned}
(x+3)\,\frac{5x-3}{x+3} &< 2(x+3) \\
5x-3 &< 2x+6 \\
5x &< 2x+9 \\
3x &< 9 \\
x &< 3
\end{aligned}
$$

Como $x+3<0$ implica $x<-3$ y por otro lado llegamos a que $x<3$, entonces se tiene que la solución para el caso 2 viene dado por:

ÍNDICE
1
2
3
4
5



Entonces la solución al caso 2 es:

$$x \in (-\infty ,\ -3)$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada viene dada por la unión de los dos conjuntos solución, la solución del caso 1, unión, la solución del caso 2, esto es:

$$\{ x \mid 3 < x < \infty \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} \} \cup \{ x \mid -\infty < x < -3 \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} \}$$

o simplemente, con notación de intervalos:

$$(3,\ \infty) \cup (-\infty ,\ -3)$$

EJERCICIO 1.24 Obtenga el conjunto solución que satisface a la siguiente desigualdad:

$$\frac{3-2x}{x+1} > 2 \qquad \text{con} \qquad x \neq -1$$

SOLUCIÓN:

Otra forma de resolver este tipo de desigualdades es la siguiente:

Agrupando los términos en un solo lado de la desigualdad, tenemos:

$$\frac{3-2x}{x+1} - 2 > 0$$

al efectuar la resta, se tiene:

$$\frac{(3-2x)-2(x+1)}{x+1} > 0$$

simplificando:

$$\frac{1-4x}{x+1} > 0$$

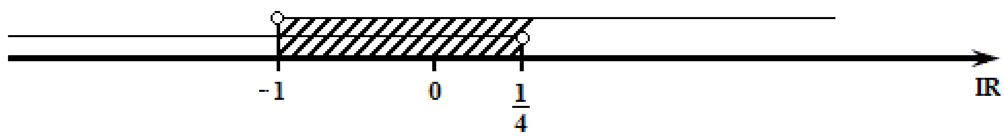
Para que el cociente de dos expresiones sea positivo, ambos términos deben ser positivos, o bien, ambos términos negativos. Considerando las dos posibilidades, tenemos:

Caso 1:

$$1-4x>0 \;\Rightarrow\; 1>4x \;\Rightarrow\; x<\frac{1}{4}$$

$$x+1>0 \;\Rightarrow\; x>-1$$

Gráficamente:



Entonces la solución al caso 1 es:

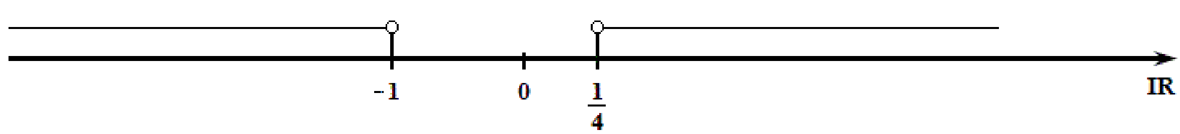
$$\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$$

Caso 2:

$$1-4x<0 \;\Rightarrow\; 1<4x \;\Rightarrow\; x>\frac{1}{4}$$

$$x+1<0 \;\Rightarrow\; x<-1$$

Gráficamente:



Solución al caso 2: $\varnothing$

Con lo cual, la solución a la desigualdad planteada vendría dada por:

$$\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)\cup\ \varnothing$$

que es igual a:

$$\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$$

EJERCICIO 1.25 Resuelva la desigualdad:

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

SOLUCIÓN:

Para resolver desigualdades de segundo grado, es necesario expresar al polinomio en forma factorizada, esto es:

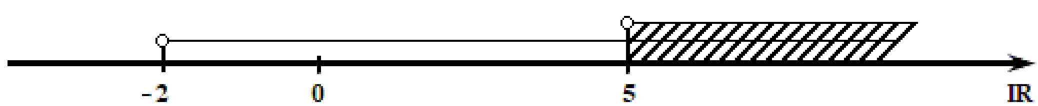
$$(x+2)(x-5) > 0$$

Dado que el producto de los dos factores debe ser positivo, entonces ambos factores deben ser positivos, o bien, ambos negativos. Considerando las dos posibilidades, tenemos:

Caso 1:

$$x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2$$
$$x - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 5$$

Gráficamente:



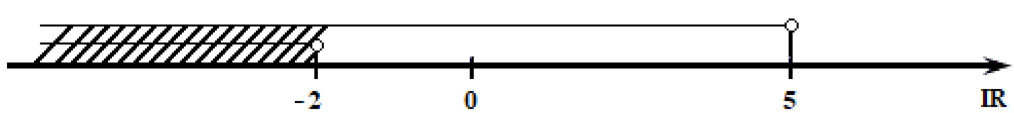
Con lo cual, la solución al caso 1 es:

$$5 < x < \infty$$

Caso 2:

$$x + 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2$$
$$x - 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 5$$

Gráficamente:



Solución al caso 2:

$$-\infty < x < -2$$

Con lo cual, la solución a la desigualdad planteada es:

$$(5,\ \infty) \cup (-\infty,\ -2)$$

EJERCICIO 1.26 Determine los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

$$2x^2 + 4x + 3 < x\,(x+8)$$

SOLUCIÓN:

Simplificando la desigualdad, tenemos:

$$2x^2 + 4x + 3 < x^2 + 8x$$

agrupando todos los términos en el primer miembro de la desigualdad, se tiene:

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

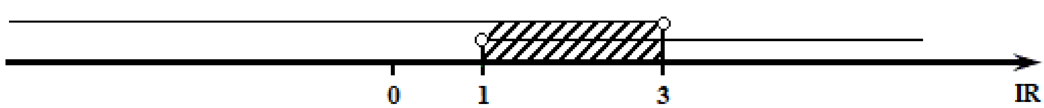
factorizando:

$$(x-1)\,(x-3) < 0$$

Se tiene que el producto de los factores debe ser negativo, por lo que dichos factores deben tener diferente signo. Esto nos lleva a considerar los siguientes dos casos:

Caso 1:
$$x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$$
$$x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 3$$

Gráficamente:

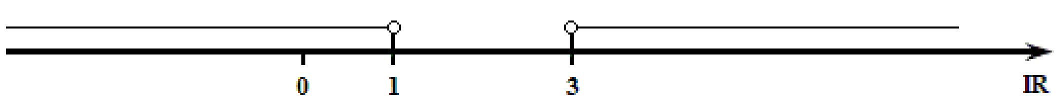


Con lo cual, la solución al caso 1 es:

$$1 < x < 3$$

Caso 2:
$$x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$$
$$x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3$$

Gráficamente:



La solución al caso 2: $\varnothing$

Como la solución a la desigualdad planteada viene dada por la unión de los conjuntos solución, entonces:

$$(1,\ 3) \cup \varnothing$$

que es igual a:

$$x \in (1,\ 3)$$

EJERCICIO 1.27 Obtenga el conjunto solución de la siguiente desigualdad:

$$|4x-5| \le 6$$

SOLUCIÓN:

Cuando se tiene que resolver una desigualdad con valor absoluto de la forma:

$$|ax+b| < c \quad \text{con} \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ c > 0$$

esta desigualdad es equivalente a:

$$-c < ax+b < c$$

Esto es, para resolver una desigualdad con valor absoluto y signo "menor que", lo que procede es hacer comprender lo que está dentro del valor absoluto entre $-c$ y c, conservando el signo "menor que". Posteriormente, se resuelve la doble desigualdad, la cual puede hacerse por separado, es decir, se resuelven las desigualdades $-c < ax+b$ y $ax+b<c$, o bien, manteniendo la doble desigualdad, de tal forma que se llegue a su solución. En cualquiera de los dos casos que se elija, debe tenerse presente que, la solución de la desigualdad planteada viene dada por la intersección de los dos conjuntos solución obtenidos.

Conviene aclarar que, el principio definido aplica de la misma manera cuando en la desigualdad interviene el signo $\le$.

Ilustraremos a continuación ambos procedimientos.

Método 1: Manteniendo la doble desigualdad.

Como se describió renglones arriba, lo que está dentro del valor absoluto, se hace comprender, para este caso, entre -6 y 6, esto es:

$$-6 \leq 4x - 5 \leq 6$$

Lo que se buscará es ir despejando la x que se tiene en la parte central de la doble desigualdad.

Sumando 5, tenemos:

$$5 - 6 \leq 4x - 5 + 5 \leq 6 + 5$$

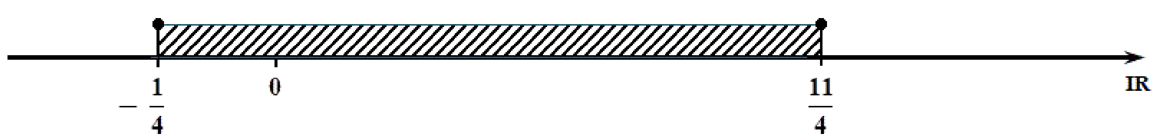
$$-1 \leq 4x \leq 11$$

multiplicando por $\frac{1}{4}$:

$$-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{11}{4}$$

Con lo cual, se ha llegado a la solución de la desigualdad planteada.

Ilustrando gráficamente la solución, tenemos:



Método 2: Separando la doble desigualdad.

Se parte de:

$$\underbrace{-6 \leq \overbrace{4x - 5}^{}}_{1^a.\ \text{Desigualdad}}\overbrace{\leq 6}^{2^a.\ \text{Desigualdad}}$$

Resolviendo por separado:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

1ª. Desigualdad:

$$-6 \leq 4x - 5$$

sumando 5, tenemos:

$$5 - 6 \leq 4x - 5 + 5$$

$$-1 \leq 4x$$

multiplicando por $\frac{1}{4}$:

$$x \geq -\frac{1}{4}$$

Con lo cual, la solución a la 1ª desigualdad es:

$$\left[-\frac{1}{4}, \ \infty\right)$$

2ª. Desigualdad:

$$4x - 5 \leq 6$$

Resolviendo, tenemos:

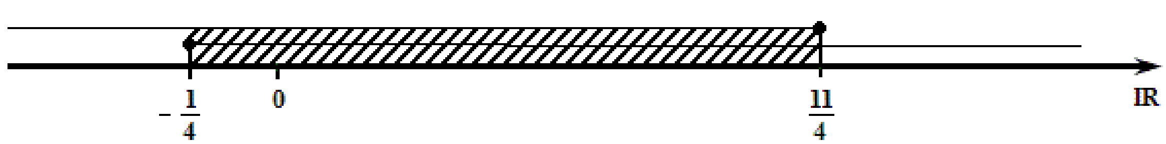
$$4x \leq 11$$

$$x \leq \frac{11}{4}$$

De donde, la solución a la 2ª desigualdad es:

$$\left(-\infty, \ \frac{11}{4}\right]$$

Como fue señalado, cuando se separan las dos desigualdades, el conjunto solución de la desigualdad planteada viene dado por la intersección de los dos conjuntos solución. Obteniendo dicha intersección gráficamente, tenemos:



ÍNDICE
1
2
3
4
5

De donde, el conjunto solución de la desigualdad planteada es:

$$x \in \left[-\frac{1}{4}, \quad \frac{11}{4} \right]$$

Que evidentemente es el mismo conjunto solución que se obtuvo con el método 1.

Es importante y conveniente hacer la siguiente aclaración: para una desigualdad tan sencilla como la que se resolvió en este ejercicio, resulta mucho más rápido y simple resolver la desigualdad por el método 1; sin embargo, cuando la desigualdad se complica, entonces las cosas cambian, es decir, el método 2 es la mejor opción. Se deja a criterio del lector, la decisión de cuándo usar uno o el otro método.

EJERCICIO 1.28 Determine el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se satisface la siguiente desigualdad:

$$\left| -5x + 9 \right| > 3$$

Cuando se tiene que resolver una desigualdad con valor absoluto de la forma:

$$\left| ax + b \right| > c \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

esta desigualdad es equivalente a:

$$ax + b > c \quad \text{o} \quad ax + b < -c$$

Esto es, para resolver una desigualdad con valor absoluto y signo "mayor que", lo que procede es hacer comprender lo que está dentro del valor absoluto entre $-c$ y c, conservando el signo "mayor que", esto es, $-c > ax + b > c$. Se resuelve la doble desigualdad como tal, o bien, por separado, como se ilustró en el ejercicio anterior, pero ahora el conjunto solución de la desigualdad planteada viene dado por la unión de los dos conjuntos solución.

Resolviendo la desigualdad, tenemos que:

$$-3 > -5x + 9 > 3$$

sumando -9, tenemos:

$$-12 > -5x > -6$$

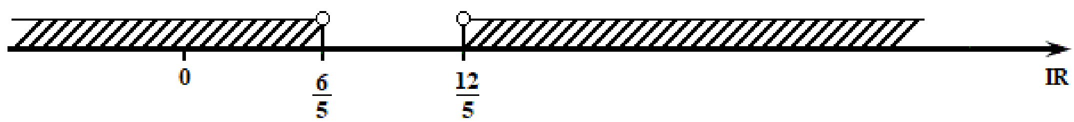
multiplicando por -1, recuérdese que, al multiplicar en una desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia, entonces:

$$12 < 5x < 6$$

multiplicando por $\dfrac{1}{5}$:

$$\frac{12}{5} < x < \frac{6}{5}$$

Gráficamente:



Con lo cual, la solución a la desigualdad planteada es:

$$\left(-\infty,\ \frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{12}{5},\ \infty\right)$$

EJERCICIO 1.29 Resuelva la desigualdad:

$$|5x-2| < 2x+3$$

SOLUCIÓN:

En este ejercicio, la x aparece tanto dentro como fuera del valor absoluto; sin embargo, el método para llegar a la solución es el mismo que se siguió en el ejercicio 1.27, esto es:

$$\underbrace{-(2x+3) < \mathrlap{\overbrace{\phantom{5x-2 < 2x+3}}^{\text{2ª. Desigualdad}}}5x-2}_{\text{1ª. Desigualdad}} < 2x+3$$

Resolviendo ambas desigualdades, tenemos:

1ª. Desigualdad:

$$-(2x+3) < 5x-2$$

$$-2x-3 < 5x-2$$

sumando 2, tenemos:

$$-2x-1 < 5x$$

sumando $2x$:

$$-1 < 7x$$

multiplicando por $\frac{1}{7}$, se llega a:

$$x > -\frac{1}{7}$$

Entonces la solución a la 1ª desigualdad es:

$$\left(-\frac{1}{7},\ \infty\right)$$

2ª. Desigualdad:

$$5x-2 < 2x+3$$

sumando 2, tenemos:

$$5x < 2x+5$$

sumando $-2x$:

$$3x < 5$$

multiplicando por $\frac{1}{3}$:

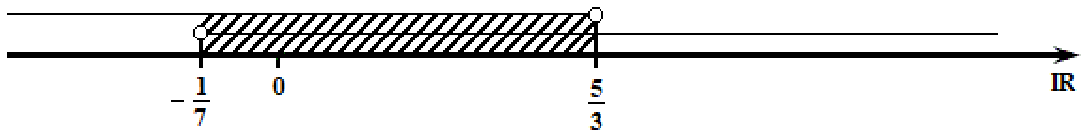
$$x < \frac{5}{3}$$

Con lo cual, la solución a la 2ª desigualdad es:

$$\left(-\infty,\ \frac{5}{3}\right)$$

Dado que se trata de un valor absoluto y signo $<$, entonces la solución a la desigualdad planteada viene dada por la intersección de los dos conjuntos solución obtenidos.

Gráficamente:



Por lo tanto, la solución es:

$$\left(-\frac{1}{7}, \ \frac{5}{3} \right)$$

EJERCICIO 1.30 Obtenga el intervalo de valores de x para los cuales se satisface la siguiente desigualdad:

$$|\, x + 3 \,| \ < \ |\, 2x - 1 \,|$$

SOLUCIÓN:

Este ejercicio donde se tienen dos valores absolutos, lo resolveremos de dos maneras distintas.

Método 1:

Multiplicando en ambos lados de la desigualdad por $\dfrac{1}{|\,2x-1\,|}$, tenemos:

$$\frac{1}{|\,2x-1\,|} \ |\,x+3\,| < |\,2x-1\,| \ \frac{1}{|\,2x-1\,|} \qquad \text{con} \qquad x \neq \frac{1}{2}$$

simplificando:

$$\frac{|x+3|}{|2x-1|} \ < \ 1$$

por propiedades del valor absoluto, se tiene:

$$\left| \frac{x+3}{2x-1} \right| < 1 \qquad \text{con} \qquad x \neq \frac{1}{2}$$

aplicando el criterio establecido, tenemos:

$$\underbrace{-1 < \overbrace{\frac{x+3}{2x-1} < 1}^{2^{a}.\ \text{Desigualdad}}}_{1^{a}.\ \text{Desigualdad}}$$

Resolviendo ambas desigualdades, tenemos:

1ª Desigualdad:

$$\frac{x+3}{2x-1} > -1$$

Como se trata de un cociente con x en el denominador, entonces se tienen que analizar dos casos:

Caso 1: Si $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Multiplicando en ambos lados por $2x-1$, tenemos:

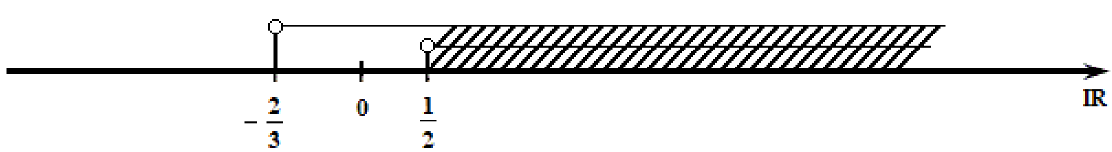
$$(2x-1)\,\frac{x+3}{2x-1} > -1\,(2x-1)$$

$$x+3 > -2x+1$$

$$3x > -2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

Como $2x-1 > 0$ implica $x > \frac{1}{2}$ y por otro lado llegamos a que $x > -\frac{2}{3}$, entonces se tiene que la solución para el caso 1 viene dada por:



Con lo cual, la solución al caso 1 es:

$$x \in \left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$$

Caso 2: Si $2x - 1 < 0 \;\Rightarrow\; x < \dfrac{1}{2}$

Como ahora el término $2x - 1$ se está considerando negativo, entonces al multiplicar en ambos lados de la desigualdad por dicho término, el sentido de esta cambia, esto es:

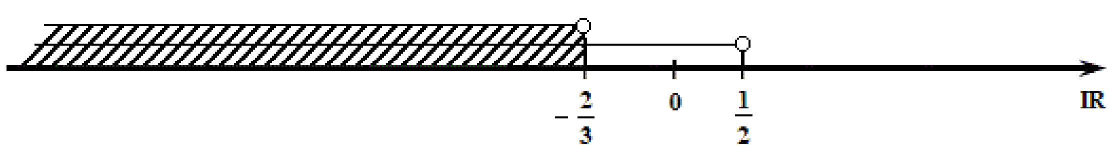
$$(2x-1)\,\frac{x+3}{2x-1} < -1\,(2x-1)$$

$$x + 3 < -2x + 1$$

$$3x < -2$$

$$x < -\frac{2}{3}$$

Para que $2x - 1 < 0$ se tiene que $x < \dfrac{1}{2}$ y por otro lado llegamos a que $x < -\dfrac{2}{3}$, entonces la solución para el caso 2 viene dada por:



Entonces la solución al caso 2 es:

$$x \in \left(-\infty \,,\; -\frac{2}{3} \right)$$

Con lo cual, la solución a la 1ª desigualdad es:

$$\left(-\infty \,,\, -\frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{2} \,,\, \infty \right)$$

2ª Desigualdad:

$$\frac{x+3}{2x-1} < 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

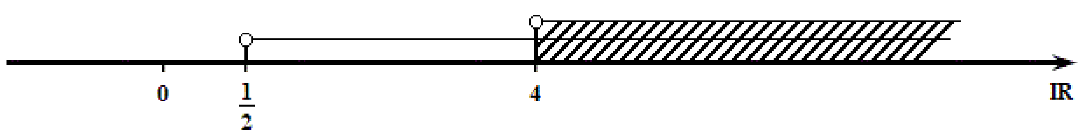
Analicemos para esta desigualdad sus dos casos.

Caso 3: Si $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

Multiplicando en ambos lados por $2x - 1,$ tenemos:

$$\begin{aligned}(2x-1)\,\frac{x+3}{2x-1} &< 1\,(2x-1)\\ x+3 &< 2x-1\\ x &> 4\end{aligned}$$

Con lo cual, la solución al caso 3 viene dada por:



Entonces la solución al caso 3 es:

$$x \in (4,\ \infty)$$

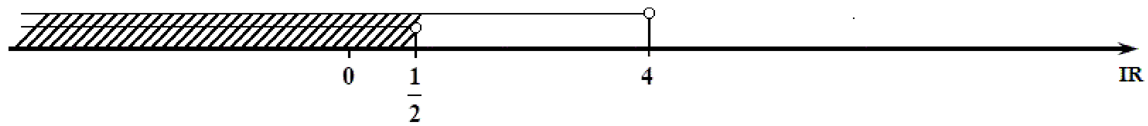
Caso 4: Si $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

Multiplicando en ambos lados por $2x - 1$ y cambiando el sentido de la desigualdad, tenemos:

$$\begin{aligned}(2x-1)\,\frac{x+3}{2x-1} &> 1\,(2x-1)\\ x+3 &> 2x-1\\ x &< 4\end{aligned}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Con lo cual, la solución al caso 4, viene dada por:



Entonces la solución al caso 4 es:

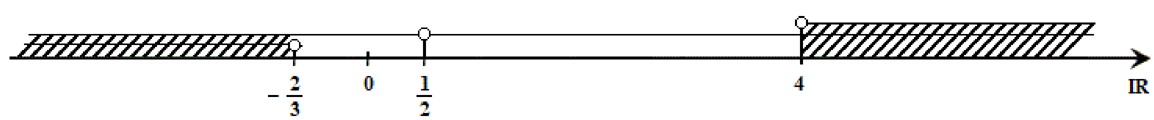
$$x \in \left(-\infty \, , \, \frac{1}{2} \right)$$

Por lo tanto, la solución a la 2ª desigualdad es:

$$\left(-\infty \, , \, \frac{1}{2} \right) \cup (4 \, , \, \infty)$$

Dado que modificamos la desigualdad original a una desigualdad con valor absoluto con el signo "menor que", entonces la solución final a la desigualdad planteada vendrá dada por la intersección de los conjuntos solución de la primera y segunda desigualdad:

Obteniendo dicha intersección en forma gráfica, tenemos:



Como puede apreciarse fácilmente en la gráfica, la solución a la desigualdad planteada es:

$$\left(-\infty \, , \, -\frac{2}{3} \right) \cup (4 \, , \, \infty)$$

Método 2: La desigualdad a resolver es:

$$|\, x + 3 \,| < |\, 2x - 1 \,|$$

Dado que se tienen dos términos que siempre serán positivos sin importar los valores que tome x, entonces podemos elevar al cuadrado en ambos lados de la desigualdad y el sentido de esta no cambia:

$$|x+3|^2 < |2x-1|^2$$

por propiedades del valor absoluto, se tiene que:

$$\left|(x+3)^2\right| < \left|(2x-1)^2\right|$$

Como se tienen los valores absolutos de binomios al cuadrado, entonces dichos binomios siempre serán positivos para toda x, por lo que tales valores absolutos pueden eliminarse, con lo cual la desigualdad queda como:

$$(x+3)^2 < (2x-1)^2$$

desarrollando los cuadrados, tenemos:

$$x^2+6x+9 < 4x^2-4x+1$$

simplificando se llega a:

$$3x^2-10x-8 > 0$$

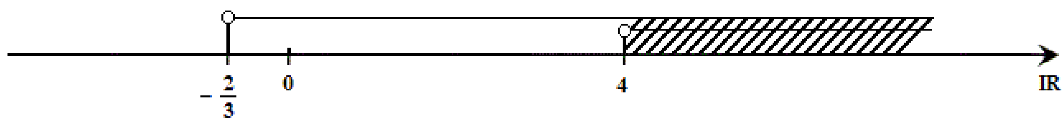
al factorizar se tiene:

$$(x-4)(3x+2) > 0$$

analizando los dos casos posibles, tenemos:

Caso 1: $$\begin{aligned} x-4 &> 0 \quad \Rightarrow \quad x > 4 \\ 3x+2 &> 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Gráficamente:

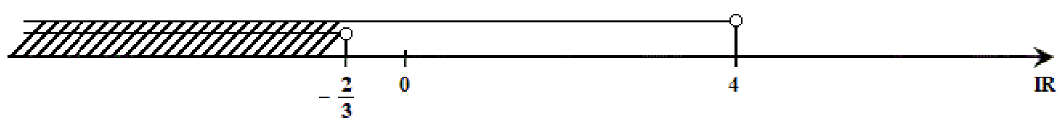


Con lo cual, la solución al caso 1 es:

$$x \in (4 , \ \infty)$$

Caso 2:
$$\begin{aligned} x - 4 &< 0 \quad \Rightarrow \quad x < 4 \\ 3x + 2 &< 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Gráficamente:



Con lo cual, la solución al caso 2 es:

$$x \in \left(-\infty , \ -\frac{2}{3} \right)$$

La solución a la desigualdad planteada viene dada por la unión de los dos conjuntos solución, esto es:

$$\left(-\infty , \ -\frac{2}{3} \right) \cup (4 , \ \infty)$$

Evidentemente, esta solución es exactamente la misma que la obtenida con el método 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Empleando la definición de la adición y la multiplicación en los números naturales, calcule:

a) $2+3$

b) $5+4$

c) $7 \bullet 3$

d) $4 \bullet 4$

e) $5 \bullet 4 \bullet 1$

2. Dadas las siguientes proposiciones, escriba en el paréntesis correspondiente una V si la expresión es verdadera o una F si es falsa.

a) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ .... ( )

b) Para toda $x,\ y \in \mathbb{Q}'$, $x+y \in \mathbb{Q}'$ .... ( )

c) Para toda $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, $x+(y \bullet z)=(x+y)\bullet(x+z)$ .... ( )

d) Para toda $x,\ y \in \mathbb{N}$, $x-y \in \mathbb{N}$ .... ( )

e) Para toda $x,\ y,\ z \in \mathbb{Q}$, si $x<y$, entonces $xz<yz$ .... ( )

f) Para toda $x,\ y \in \mathbb{Q}$, con $x<y$, siempre existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x<z<y$ .... ( )

3. Determine por medio de inducción matemática, cuáles de las siguientes sumas de n términos son válidas $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

a) $3+7+11+\ldots+4n-1 = n(2n+1)$

b) $4+8+12+\ldots+4n = 2n(n+1)$

c) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

d) $2+5+8+\ldots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

e) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

f) $3+3^2+3^3+\ldots+3^n=\dfrac{3}{2}(3^n-1)$

g) $7+7^2+7^3+\ldots+7^n=\dfrac{7(7^n-1)}{6}$

h) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=3n-2$

i) $\dfrac{1}{2}(2)+\dfrac{2}{2}(3)+\dfrac{3}{2}(4)+\ldots+\dfrac{n}{2}(n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

j) $\dfrac{1}{1(2)}+\dfrac{1}{2(3)}+\dfrac{1}{3(4)}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{(n+1)}$

k) $\dfrac{1}{(1)(3)}+\dfrac{1}{(3)(5)}+\dfrac{1}{(5)(7)}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

l) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$

m) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

n) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

o) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{1}{n^2+2}$

p) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

q) $2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\ldots+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}\right)$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

r) $4+2+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{4}{2^{n-1}} = 8\left(1-\frac{1}{2^{n}}\right)$

s) $1\bullet 2+3\bullet 4+5\bullet 6+\ldots+(2n-1)(2n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

t) $1\bullet 3+2\bullet 4+3\bullet 5+\ldots+n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

u) $a^{0}+a^{1}+a^{2}+\ldots+a^{n-1} = \frac{1-a^{n}}{1-a}$

4. Mediante inducción matemática, demuestre que los siguientes productos de n términos son válidos $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

a) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right) = \frac{n+1}{2n}$ con $n > 1$

b) $\left(\frac{4}{4-1}\right)\left(\frac{9}{9-1}\right)\left(\frac{16}{16-1}\right)\ldots\left(\frac{n^{2}}{n^{2}-1}\right) = \frac{2n}{n+1}$ con $n > 1$

5. Demuestre mediante inducción matemática, la validez de las siguientes proposiciones $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $n(a+b) = na+nb$

b) $(ab)^{n} = a^{n}b^{n}$

c) $(-1)^{n}(-1)^{n+1} = -1$

d) $\cos((2n-1)\pi) = -1$

e) $|a|^{n} = |a^{n}|$

6. Demuestre que son válidas las siguientes proposiciones con desigualdad $\forall\ n \in \mathbb{N}$, con el método de inducción matemática:

a) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 3 - \dfrac{1}{n}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 > \dfrac{n^4}{4}$

c) $(1)(2)(3)\ldots(n) > 2^n$; con $n > 3$

d) $n + 5 < 2^n$; con $n > 3$

e) $3^n > 2^n + 3$; con $n \geq 2$

f) $\dfrac{2-n}{3} + 2 < 2n$; con $n > 1$

g) $(-1)(a+2)^n < \left(-na^2 - na - 1\right)$; con $n \geq 3$

h) $(3n)! > 2^{6n-4}$

7. Empleando el método de inducción matemática, demuestre que las expresiones dadas son divisibles entre el número que se indica $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

a) $n(n+1)$ es divisible entre 2

b) $n^2 + 5n$ es divisible entre 2

c) $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8

d) $2^{4n} - 1$ es divisible entre 15

e) $n^5 - n$ es divisible entre 5 ; con $n > 1$

f) $n^3 + 2n$ es divisible entre 3

g) $7^{2n-1} + 1$ es divisible entre 8

h) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es divisible entre 13

i) $n\left(3n^3 + 1\right)$ es divisible entre 2

j) $n\left(2n^2-3n+1\right)$ es divisible entre 6 ; con $n>1$

k) $10^n+(3)(4)^{n+2}+5$ es divisible entre 9

l) $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ es divisible entre 3

m) $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible entre 9

8. Demuestre por inducción matemática que, para todo número impar, el número n^2-1 es divisible entre 8.

9. Pruebe por inducción matemática que la siguiente expresión es válida.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

10. Determine, si existe, la expresión como cociente de dos enteros $\frac{a}{b}$ de los siguientes números expresados en forma decimal. En caso afirmativo, obtenga su mínima expresión, en caso contrario, explique por qué no existe.

a) $0.12345678910111213...$

b) $1.1234\overline{34}$

c) $103.34121212\overline{12}$

d) $3.14159265359\ldots$

e) $3.99999\overline{9}$

f) $-13.523\overline{523}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

g) $2.3121212\overline{12}$

h) $2.117\,\overline{17}$

i) $1.1010010001\ldots$

j) $-1.13249\,\overline{49}$

k) $2.1234\,\overline{1234}$

11. Demuestre que, entre dos números racionales, siendo uno menor que el otro, siempre existe otro número racional.

12. Aplicando el algoritmo de la división, determine dos números $m,\ n \in \mathbb{Z}$, de tal manera que $23 = 7m + n$.

13. Ordene de menor a mayor las siguientes secuencias de números:

a) $\frac{1}{2},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{18}{2},\quad \frac{7}{18},\quad \frac{1}{3},\quad 3,\quad -\frac{17}{4}$

b) $\frac{5}{2},\quad -\frac{5}{8},\quad -\frac{13}{6},\quad \frac{10}{3},\quad \frac{4}{7},\quad -\frac{199}{7},\quad 1.\overline{98}$

c) $\sqrt{2},\quad \frac{6}{2},\quad \pi,\quad \frac{57}{20},\quad \frac{26}{32},\quad -\frac{3}{256},\quad -\frac{1}{7},\quad \sqrt{5}$

14. Sean los conjuntos

$$A = \{\, x \mid x \leq 0,\ x \in \mathbb{R} \,\} \quad ; \qquad B = \{\, x \mid 2 < x < 5,\ x \in \mathbb{R} \,\}$$

En caso de existir, obtenga una cota superior, el máximo y el supremo para los siguientes casos:

a) Para A.

b) Para B.

c) Para $A \cup B$.

15. Sean los conjuntos

$$C = \{ x \mid x \leq 4 , \ x \in \mathbb{R} \} \ ; \qquad D = \{ x \mid 1 < x < 2 , \ x \in \mathbb{R} \}$$

En caso de existir, determine un elemento del conjunto C para cada uno de los siguientes casos, que sea:

a) Cota superior de D.

b) Cota inferior de D.

c) Supremo de D.

d) Máximo de D.

16. Sea el conjunto P de números primos comprendidos entre cero y diez. Indique, en caso de existir, una cota superior, una cota inferior, el supremo, el máximo y el mínimo.

17. Para cada una de las siguientes desigualdades, obtenga el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que las satisfacen:

a) $x + x < x - x$

b) $\frac{3x - 2}{4} + 1 < 2x + \frac{1}{2}$

c) $\dfrac{2x+3}{5} - \dfrac{1}{3} > \dfrac{x-1}{6}$

d) $\dfrac{4}{x+2} \leq 8$; con $x \neq -2$

e) $\dfrac{5}{x-1} < 1$; con $x \neq 1$

f) $3 + \dfrac{2-x}{x} < 7$; con $x \neq 0$

g) $(1-4x)^{-1} < 0$; con $x \neq \dfrac{1}{4}$

h) $\dfrac{5}{2x+3} > 0$; con $x \neq -\dfrac{3}{2}$

i) $\dfrac{2x}{x+1} < 1 - \dfrac{1}{x+1}$; con $x \neq -1$

j) $\dfrac{4x}{3x+3} - \dfrac{x+3}{3(x+1)} \geq 3$; con $x \neq -1$

k) $\dfrac{3x}{6-3x} + 1 > 3$; con $x \neq 2$

l) $\dfrac{-x-3}{x+1} + 1 > 4$; con $x \neq -1$

m) $\dfrac{3x+8}{2x-3} < 4$; con $x \neq \dfrac{3}{2}$

n) $\dfrac{3}{x-2} < 4 - \dfrac{1}{2-x}$; con $x \neq 2$

o) $\dfrac{1}{x} + x \geq 2$; con $x > 0$

p) $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)(-3) - 2 > -8$; con $x \neq 1$

18. De las siguientes desigualdades de segundo grado, obtenga su conjunto solución:

a) $0 < x^2 + 2x$

b) $x^2 - 2x \leq 35$

c) $x^2 + x > 6$

d) $x^2 > x + 2$

e) $2x^2 + x - 2 > x^2 + 2x$

f) $(3x-1)(2x+4) > (3x-1)(x+5)$

g) $x^2 + x - 2\left(x^2 + 3x\right) > 0$

h) $(x-1)(x+1) > 1$

i) $(x+2)^2 > x(x-3)$

j) $\dfrac{2}{x^2 - a^2} > -\dfrac{3}{x^2 - a^2}$ con $x \neq \pm a$

k) $\dfrac{-(15x - 4)}{x + 3} < 10 - \dfrac{2}{2x + 6}$ con $x \neq -3$

l) $|x^2 - 4| > 0$

m) $|x - 2| \leq |x^2 + 4x - 12|$

n) $-|3 - x| > -|-4x^2 + 11x + 3|$

o) $|2x^2 - x - 3| \leq |10x - 15|$

p) $|x^2 - x - 2| \leq |5x + 5|$

q) $\left|\dfrac{1}{x + 1}\right| \left|\dfrac{2x^2 + 4x + 2}{3}\right| < 1$ con $x \neq -1$

19. Determine el conjunto de valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades con valor absoluto:

a) $-|2x + 3| < 7$

b) $|-x| \leq 10$

c) $2|2x - 3| < |x + 10|$

d) $|9 - 2x| < |3x + 1|$

e) $|2x+3| \leq x+4$

f) $|1-x| \geq |3+x|$

g) $2x > |x+2|$

h) $|x-1| \leq 2|x+1|$

i) $2|x-3| - 3 > -\frac{2}{3}|x-3| - 2$

j) $|x+2| \geq -2x$

k) $\frac{1}{5}|2x-4| + \frac{3}{5} < x$

l) $\frac{|x+2|}{2} < |x|$

m) $\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1$ con $x \neq -1$

n) $\left|\frac{5}{2x-3}\right| < 1$ con $x \neq \frac{3}{2}$

o) $\left|\frac{10}{x}\right| - 2 < 0$ con $x \neq 0$

p) $-\frac{|3x-2|}{3} > -\frac{x}{3}$

q) $\left| \dfrac{x}{x+4} \right| < 4 \quad \text{con} \quad x \neq -4$

r) $\left| \dfrac{2x-3}{x} \right| \leq 1 \quad \text{con} \quad x \neq 0$

s) $\left| \dfrac{x-5}{x+3} \right| < 2 \quad \text{con} \quad x \neq -3$

t) $\left| \dfrac{4-x}{x+2} \right| \leq 2 \quad \text{con} \quad x \neq -2$

u) $\left| x - \dfrac{1}{2} \right| > 2$

v) $\left| \dfrac{2}{x-2} \right| \geq 2 \quad \text{con} \quad x \neq 2$

w) $\left| \dfrac{3x}{x+2} \right| > 4 \quad \text{con} \quad x \neq -2$

x) $\left| \, |3-x| - 12 \right| < 6$

y) $\left| \dfrac{1}{1+x} \right| < \left| \dfrac{1}{1-x} \right| \quad \text{con} \quad x \neq \pm 1$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. a) 5

b) 9

c) 21

d) 16

e) 20

2. a) F

b) F

c) F

d) F

e) F

f) V

3. a) sí cumple

b) sí cumple

c) sí cumple

d) sí cumple

e) sí cumple

f) sí cumple

g) sí cumple

h) no cumple

i) sí cumple

j) sí cumple

k) sí cumple

l) sí cumple

m) sí cumple

n) sí cumple

o) no cumple

p) sí cumple

q) sí cumple

r) sí cumple

s) sí cumple

t) sí cumple

u) sí cumple

10. a) No existe, es un irracional

b) $\frac{5561}{4950}$

c) $\frac{170513}{1650}$

d) No existe, es un irracional, se trata del número π .

e) 4

f) $-\frac{13510}{999}$

g) $\frac{763}{330}$

h) $\frac{1048}{495}$

i) No existe, es un irracional.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

j) $-\dfrac{112117}{99000}$

k) $\dfrac{21232}{9999}$

12. $m = 3, \quad n = 2$

13. a) $-\dfrac{17}{4}, \quad \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{7}{18}, \quad \dfrac{3}{7}, \quad \dfrac{1}{2}, \quad 3, \quad \dfrac{18}{2}$

b) $-\dfrac{199}{7}, \quad -\dfrac{13}{6}, \quad -\dfrac{5}{8}, \quad \dfrac{4}{7}, \quad 1.\overline{98}, \quad \dfrac{5}{2}, \quad \dfrac{10}{3}$

c) $-\dfrac{1}{7}, \quad -\dfrac{3}{256}, \quad \dfrac{13}{16}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{5}, \quad \dfrac{57}{20}, \quad \dfrac{6}{2}, \quad \pi$

14. a) cota superior $= 0$ máximo $= 0$ supremo $= 0$

b) cota superior $= 5$ máximo $= \nexists$ supremo $= 5$

c) cota superior $= 5$ máximo $= \nexists$ supremo $= 5$

Nota: En el caso de las cotas superiores las respuestas no son únicas.

15. a) 2

b) 1

c) 2

d) No existe

Nota: En los incisos a) y b) las respuestas no son únicas.

16. Cota superior = 7 Cota inferior = 2

Supremo = 7 Máximo = 7

Mínimo = 2

17. a) $(-\infty, 0)$

b) $(0, \infty)$

c) $\left(-\frac{13}{7}, \infty\right)$

d) $(-\infty, -2) \cup \left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$

e) $(-\infty, 1) \cup (6, \infty)$

f) $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$

g) $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

h) $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$

i) $(-1, 0)$

j) $[-2, -1)$

k) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

l) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

m) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (4, \infty)$

n) $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

o) $(0, \infty)$

p) $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

18. a) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

b) $[-5, 7]$

c) $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

d) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

e) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

f) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$

g) $(-5, 0)$

h) $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$

i) $\left(-\frac{4}{7}, \infty\right)$

j) $(-\infty, -|a|) \cup (|a|, \infty)$

k) $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

l) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

m) $(-\infty, -7) \cup (-5, \infty)$

n) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$

o) $[-6, 4]$

p) $[-3, 7]$

q) $\left(-\frac{5}{2}, -1\right) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

19. a) $(-\infty, \infty)$

b) $[-10, 10]$

c) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{3}\right)$

d) $(-\infty, -10) \cup \left(\frac{8}{5}, \infty\right)$

e) $\left[-\frac{7}{3}, 1\right]$

f) $(-\infty, -1]$

g) $(2, \infty)$

h) $(-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$

i) $\left(-\infty, \frac{21}{8}\right) \cup \left(\frac{27}{8}, \infty\right)$

j) $\left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$

k) $(1, \infty)$

l) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty)$

m) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

n) $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

o) $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

p) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

q) $\left(-\infty, -\frac{16}{3}\right) \cup \left(-\frac{16}{5}, \infty\right)$

r) $[1, 3]$

s) $(-\infty, -11) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

t) $(-\infty, -8] \cup [0, \infty)$

u) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

v) $[1, 2) \cup (2, 3]$

w) $(-8, -2) \cup \left(-2, -\frac{8}{7}\right)$

x) $(-15, -3) \cup (9, 21)$

y) $(0, 1) \cup (1, \infty)$

CAPÍTULO 2

NÚMEROS COMPLEJOS

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Los antecedentes históricos de los números complejos datan del siglo I de nuestra era. La primea referencia escrita de la raíz cuadrada de un número negativo quedó registrada en el libro *Estereometría*, escrito por el matemático e ingeniero griego Herón de Alejandría (10-75? d.C.), alrededor del año 50.

Herón se planteó el problema de calcular la altura de una pirámide truncada de base cuadrada de ciertas dimensiones; después de realizar sus cálculos, llegó al número $\sqrt{-63}$, que lo desconcertó y decidió modificar el resultado a $\sqrt{63}$, sin entender bien a bien qué estaba sucediendo.

Un caso similar se encontró el matemático griego Diofanto de Alejandría (se cuenta con muy poca información sobre su fecha de nacimiento y muerte, se sabe que vivió hasta los 84 años gracias a un epitafio redactado en su tumba en forma de problema. Se piensa que vivió en el siglo III). En su obra *Aritmética*, escrita aproximadamente en el año 275 d.C., Diofanto se planteó el problema de calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo de área igual a 7 unidades cuadradas y perímetro igual a 12 unidades. Después de plantearse las ecuaciones correspondientes y hacer algunos cálculos, llegó a la ecuación:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0$$

cuyas soluciones son números complejos. Diofanto escribió que dicha ecuación no podía resolverse a menos que se modificara el coeficiente de la x de cierta forma, pero siguiendo sus instrucciones, aún así, la ecuación sigue teniendo soluciones complejas. El problema quedó sin solución.

Después de Diofanto, el problema de calcular la raíz cuadrada de un número negativo quedó en el olvido, simplemente esta posibilidad quedaba rechazada.

Varios siglos después fueron los matemáticos de la India, quienes retomaron el tema y plantearon algunos razonamientos con los cuales daban cierta explicación sobre este problema. En el libro *Ganita Sara Sangraha* (compendio de la esencia de la matemática), escrito por el matemático Mahavira alrededor del año 850, estableció el siguiente razonamiento para el manejo de las raíces de cantidades negativas: "Como en la naturaleza de las cosas, una cantidad negativa no es un cuadrado, por tanto, no puede tener raíz cuadrada".

Tres siglos después, el matemático y astrónomo indio Bhaskara Acharia (1114-1185), en su libro *Bijaganita*, que es un tratado de Álgebra escrito alrededor del año 1150, establece lo siguiente: "El cuadrado de un número, positivo o negativo, es positivo; la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; no existe raíz cuadrada de un número negativo ya que un número negativo no es un cuadrado".

Fue en Italia cuando los matemáticos se deciden a estudiar más a fondo los números complejos. La motivación real de entenderlos viene del estudio de las ecuaciones cúbicas.

Fue hasta el año 1545 que el matemático, físico, astrónomo y filósofo italiano Gerolamo Cardano (1501-1576), publicó su obra *Ars Magna* (El gran arte), el cual describe un método para resolver ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grado. En esta obra introdujo por primera vez los números de la forma $a+\sqrt{-1}\,b$ en el álgebra, con a y b reales. Esta obra se convertiría en el mayor tratado de álgebra desde los tiempos antiguos. Es digno de reconocer que el mismo Cardano reconocía en su libro que el primero en llegar a la fórmula con que se resuelven las ecuaciones de tercer grado fue Scipione del Ferro (1465-1526), alrededor del año 1515, y que el que llegó a plantear el método para resolver las ecuaciones de cuarto grado fue un discípulo suyo: Lodovico Ferrari (1522-1565).

Además del problema de la solución de las ecuaciones de tercer grado donde surgen los números complejos, Cardano en el mismo libro *Ars Magna*, se plantea el siguiente problema: "Encuentre dos números cuya suma sea 10 y su producto sea 40" Esto es:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ xy &= 40 \end{aligned}$$

Al resolver este problema llegó a que su solución era:

$$5 + \sqrt{-15} \qquad \text{y} \qquad 5 - \sqrt{-15}$$

De nueva cuenta vuelven a aparecer los números complejos.

En 1572, el matemático e ingeniero italiano Rafael Bombelli (1526-1572), publica su libro *El Álgebra*, donde desarrolló las reglas para la aritmética de los números complejos, que él llamó

ÍNDICE
1
2
3
4
5

cantidades salvajes. Estableció las reglas para la adición, la sustracción y la multiplicación. El término *imaginario* para este tipo de números lo acuñó René Descartes (1596-1650), en su libro *Discurso del Método* publicado en 1637.

Fue el matemático y físico suizo Leonhard Paul Euler (1707-1783), quien en 1777 propuso utilizar la letra i para representar $\sqrt{-1}$.

La representación gráfica de los números complejos de la forma $a+bi$ fue propuesta por dos matemáticos aficionados, en forma independiente. El primero en hacerlo fue el matemático noruego-danés Caspar Wessel (1745-1818), que en 1796 escribió su primer y único documento matemático, donde propuso la representación gráfica de los números complejos, pero lo hizo mediante un segmento dirigido. Este documento fue publicado hasta 1799. Posteriormente, en 1806 el matemático francés, nacido en Suiza, Jean Robert Argand (1768-1822), publicó un documento titulado: "Ensayo sobre una forma de representar las cantidades imaginarias mediante construcciones geométricas". En este artículo, Argnad da una representación geométrica de los números complejos como un punto en el plano, que desde entonces, a este plano se le conoce como Diagrama de Argand o, también, como plano de Argand.

En 1831, el matemático, astrónomo y físico alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), publicó un trabajo en donde expone con toda claridad las propiedades de los números de la forma $a+bi$. En este trabajo Gauss renombró a los llamados números imaginarios como números complejos. A partir de esta publicación, los ahora llamados números complejos ocuparon un lugar importante dentro del álgebra.

A continuación, se resolverá una ecuación de segundo grado, cuya solución son números complejos que tienen tanto su parte real como su parte imaginaria. A partir de estas soluciones, se dará la definición de los números complejos en su forma binómica.

Sea la ecuación:

$$z^2-2z+2=0$$

Al resolver esta ecuación por fórmula, tenemos:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

Con lo cual, las dos soluciones de la ecuación son:

$$z_1 = 1 + \sqrt{-1}$$

$$z_2 = 1 - \sqrt{-1}$$

Se observa que ambas soluciones están compuestas por dos términos, el primero que es un número real y el segundo que es la raíz cuadrada de un número real negativo. Este tipo de números conforman el llamado conjunto de los números complejos. Al número $\sqrt{-1}$ se le representa con la letra i, esto es:

$$i = \sqrt{-1}$$

Con lo cual, las soluciones de la ecuación de segundo grado planteada pueden ser expresadas como:

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = 1 - i$$

Al conjunto de los números complejos lo representaremos con $\mathbb{C}$.

Forma binómica de los números complejos

$$\boxed{\mathbb{C} = \left\{ z \;\middle|\; z = a + bi \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}}$$

Para $z = a + bi$ se pueden presentar los siguientes casos:

- ❖ Si $a = 0$, entonces $z = bi$. En este caso, se dice que z es un imaginario puro.
- ❖ Si $b = 0$, entonces $z = a$. En este caso, z es un número real.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Todo número real a puede ser expresado como $a + 0i$, con lo cual, todo número real es un número complejo, por lo tanto, el conjunto de los números reales es un subconjunto de los números complejos, esto es:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Igualdad en $\mathbb{C}$

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera. Se tiene que:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Adición en $\mathbb{C}$

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera. La adición $z_1 + z_2$ se define como:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

EJERCICIO 2.1 Sean $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$, $z_3 = -3i$ y $z_4 = 4$. Realice las adiciones siguientes:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 + z_3$

c) $z_3 + z_4$

d) $z_2 + z_4$

SOLUCIÓN:

a) $z_1 + z_2 = (-3 + 4i) + (5 - 2i) = 2 + 2i$

b) $z_1 + z_3 = (-3 + 4i) + (-3i) = -3 + i$

c) $z_3 + z_4 = -3i + 4 = 4 - 3i$

d) $z_2 + z_4 = (5 - 2i) + 4 = 9 - 2i$

Multiplicación en $\mathbb{C}$

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera. La multiplicación $z_1 \cdot z_2$ se define como:

$$z_1 \bullet z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJERCICIO 2.2 Sean $z_1 = 7 - i$, $z_2 = -3 - 2i$ y $z_3 = -4i$. Realice las multiplicaciones siguientes:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_2 \cdot z_3$

c) $z_3 \cdot z_1$

SOLUCIÓN:

Antes de realizar las multiplicaciones indicadas, es conveniente señalar que, no resulta práctico tratar de aplicar la definición tal cual como fue dada, en lugar de ello, lo que se recomienda es efectuar las multiplicaciones como el producto de binomios. Siguiendo la recomendación se tendría:

a) $z_1 \cdot z_2 = (7 - i)(-3 - 2i) = 7(-3 - 2i) - i(-3 - 2i)$

$z_1 \cdot z_2 = -21 - 14i + 3i + 2i^2$

como $i^2 = -1$, entonces:

$z_1 \cdot z_2 = -23 - 11i$

b) $z_2 \cdot z_3 = (-3 - 2i)(-4i) = 12i + 8i^2 = -8 + 12i$

c) $z_3 \cdot z_1 = (-4i)(7 - i) = -28i + 4i^2 = -4 - 28i$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{C}$

$\forall\ z_1\ ,\ z_2\ ,\ z_3 \in \mathbb{C}$

1) Cerradura:

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$$

2) Asociatividad:

$$z_1 + \left(z_2 + z_3 \right) = \left(z_1 + z_2 \right) + z_3$$

$$z_1 \cdot \left(z_2 z_3 \right) = \left(z_1 z_2 \right) \cdot z_3$$

3) Conmutatividad:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

4) Elemento idéntico:

$z_1 + 0 = z_1$; cero es el elemento idéntico para la adición.

$z_1 \cdot 1 = z_1$; uno es el elemento idéntico para la multiplicación.

5) Elementos inversos:

$$\forall\ z_1 \in \mathbb{C}\ ;\ \exists -z_1 \in \mathbb{C} \,\middle|\, z_1 + -z_1 = 0$$

$$\forall\ z_1 \in \mathbb{C} \text{ con } z_1 \neq 0\ ;\ \exists\ z_1^{\ 1} \in \mathbb{C} \,\middle|\, z_1 \cdot z_1^{\ 1} = 1$$

6) Cancelación:

Si $z_1 + z_2 = z_3 + z_2$, entonces $z_1 = z_3$

Si $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_2$, entonces $z_1 = z_3$ siempre que $z_2 \neq 0$

7) Distributividad:

$$z_1 \cdot \left(z_2 + z_3 \right) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Sustracción en $\mathbb{C}$

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos cualesquiera. La sustracción $z_1 - z_2$ se define como:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

EJERCICIO 2.3 Sean $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -4 + 5i$ y $z_3 = -6i$. Realice las sustracciones siguientes:

a) $z_1 - z_2$

b) $z_2 - z_1$

c) $z_2 - z_3$

d) $z_3 - z_1$

SOLUCIÓN:

a) $z_1 - z_2 = (3 - 2i) - (-4 + 5i) = (3 - (-4)) + (-2i - 5i)$

$z_1 - z_2 = 7 - 7i$

b) $z_2 - z_1 = (-4 + 5i) - (3 - 2i) = (-4 - 3) + (5i - (-2i))$

$z_2 - z_1 = -7 + 7i$

Dado que $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$, entonces es claro que la sustracción no es conmutativa.

c) $z_2 - z_3 = (-4 + 5i) - (-6i) = -4 + 11i$

d) $z_3 - z_1 = (-6i) - (3 - 2i) = -3 - 4i$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Conjugado de un número complejo

Sea $z = a + bi$ un número complejo cualquiera. El conjugado de z, que representamos con $\overline{z}$, se define como:

$$\overline{z} = a - bi$$

De acuerdo con la definición, conjugar un número complejo consiste en cambiar de signo la parte imaginaria.

Propiedades del conjugado de un número complejo

$\forall\ z_1\ ,\ z_2 \in \mathbb{C}$

1) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ si $z_2 \neq 0$

4) $\overline{(\overline{z}_1)} = z_1$

5) $z_1 = \overline{z}_1 \Leftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}$

6) $z_1 + \overline{z}_1 \in \mathbb{R}$

7) $z_1 \cdot \overline{z}_1 \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 2.4 Si $z_1 = -1 + 2i$ y $z_2 = 3 + i$, obtenga:

a) $z_1 + \overline{z}_1$

b) $z_2\ \overline{z}_2$

c) $\overline{\left(z_1 - z_2 \right)}$

d) El conjugado de z_1^2

SOLUCIÓN:

a) $z_1 + \overline{z}_1 = \left(-1+2i\right) + \overline{\left(-1+2i\right)} = \left(-1+2i\right) + \left(-1-2i\right) = -2$

Como lo establece la propiedad 6 del conjugado de los números complejos, la adición de un complejo más su conjugado siempre da por resultado un número real.

b) $z_2\, \overline{z}_2 = \left(3+i\right) \overline{\left(3+i\right)} = \left(3+i\right)\left(3-i\right) = \left(3\right)^2 - \left(i\right)^2 = 9+1 = 10$

Con este inciso se muestra el cumplimiento de la propiedad 7 del conjugado de los números complejos; la multiplicación de un complejo por su conjugado siempre da por resultado un número real.

c) $\overline{\left(z_1 - z_2 \right)} = \overline{\left(\left(-1+2i\right) - \left(3+i\right) \right)} = \overline{\left(-4+i\right)} = -4-i$

d) $\overline{\left(z_1^2 \right)} = \overline{\left(\left(-1+2i\right)^2 \right)} = \overline{\left(1-4i+4i^2\right)} = \overline{\left(-3-4i\right)} = -3+4i$

División en $\mathbb{C}$

Sean $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$ dos números complejos cualesquiera con $z_2 \neq 0$. La división $\dfrac{z_1}{z_2}$ se define como:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \bullet z_2^{-1}$$

Si deseamos obtener z_2^{-1} que se usa en la definición de la división, tenemos:

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Como $z_2 = c + di$ con $z_2 \neq 0$, entonces:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{c + di}$$

si multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de z_2, se tiene:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{c - di}{(c + di)(c - di)} = \frac{c - di}{c^2 - (di)^2}$$

$$z_2^{-1} = \frac{c - di}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$

entonces:

$$z_2^{-1} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i$$

con lo cual, la definición de la división quedaría como:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i \right)$$

que se aprecia un tanto complicada. Debido a esto, para simplificar la división de números complejos, lo que se recomienda es multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador. Al hacer esta multiplicación, lo que se logra es remplazar el denominador complejo por un número real. Recuérdese que la multiplicación de un número complejo por su conjugado da por resultado un número real (ver la propiedad 7 del conjugado de un número complejo).

EJERCICIO 2.5 Sean $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - i$ y $z_3 = 2i$

a) Obtenga $\frac{z_1}{z_2}$ y $\frac{z_2}{z_1}$

b) Calcule $\frac{z_2}{z_3}$

c) Compruebe que $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

d) Obtenga el número complejo z, si se sabe que su recíproco es igual a $1-2i$.

SOLUCIÓN:

a) Obtengamos $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{4-i} = \frac{2+3i}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+2i+12i+3i^2}{4^2-(i)^2} = \frac{5+14i}{16+1} = \frac{5+14i}{17}$$

$$\therefore \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

Obteniendo ahora $\dfrac{z_2}{z_1}$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4-i}{2+3i} = \frac{4-i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{8-12i-2i+3i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{5-14i}{4-9i^2} = \frac{5-14i}{13}$$

$$\therefore \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i$$

Evidentemente, como era de esperarse, $\dfrac{z_1}{z_2} \neq \dfrac{z_2}{z_1}$.

b) Calculemos ahora:

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{4-i}{2i} = \frac{4-i}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} = \frac{(4-i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{-8i + 2i^2}{-4i^2} = \frac{-2-8i}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{z_2}{z_3} = -\frac{1}{2} - 2i$$

c) Comprobar que: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

En el inciso a) obtuvimos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{5}{17} - \frac{14}{17}i \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Ahora obtengamos:

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{\overline{(2+3i)}}{\overline{(4-i)}} = \frac{2-3i}{4+i} = \frac{2-3i}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i}$$

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{(2-3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{8-2i-12i+3i^2}{4^2-(i)^2} = \frac{5-14i}{16+1}$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{5}{17} - \frac{14}{17}i \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

de (1) y (2) se tiene que:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

Lo cual comprueba la validez de la propiedad 3 del conjugado de un número complejo.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

d) En este inciso se nos pide obtener el número complejo cuyo recíproco es igual a $1-2i$. De acuerdo con esto, tenemos que:

$$\frac{1}{z} = 1-2i \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{1-2i}$$

efectuando la división, tenemos:

$$z = \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2}$$

$$z = \frac{1+2i}{1-4i^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1+2i}{5}$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

EJERCICIO 2.6 Con los números complejos:

$$z_1 = 1+i \;, \quad z_2 = 1-i \;, \quad z_3 = -1-i \;, \quad z_4 = i \quad \text{y} \quad z_5 = -i$$

realice las siguientes operaciones:

a) $\overline{z}_1 \cdot z_3 - \dfrac{4\left(z_2 + \overline{z}_5\right)}{z_1\, z_2} + z_4$

b) $\dfrac{\overline{\left(z_1 + z_2 + z_3\right)} \cdot z_5}{\left(z_4\right)^3} - \overline{\left(\dfrac{1}{z_4}\right)}$

c) $\dfrac{\left(z_1 z_3 - z_2 z_3 - z_1 z_4 + z_2 z_4\right) \cdot \overline{z}_5}{z_3 z_4 - \left(z_4\right)^2} + \overline{\left(\dfrac{z_2}{\overline{z}_1}\right)} \cdot z_3$

d) $\left(z_4\right)^{23}$

e) $\left(z_5\right)^{115}$

f) $\left(z_4\right)^{7367}$

SOLUCIÓN:

a) $$\overline{z}_1 \cdot z_3 - \frac{4\left(z_2 + \overline{z}_5\right)}{z_1\, z_2} + z_4 = \overline{(1+i)}(-1-i) - \frac{4\left[(1-i) + \overline{(-i)}\right]}{(1+i)(1-i)} + i$$

$$= (1-i)(-1-i) - \frac{4\left[(1-i)+i\right]}{1-i^2} + i = \left(-1 - i + i + i^2\right) - \frac{4\,(1)}{2} + i$$

$$= (-1-1) - 2 + i = -4 + i$$

$$\therefore \quad \overline{z}_1 \cdot z_3 - \frac{4\left(z_2 + \overline{z}_5\right)}{z_1\, z_2} + z_4 = -4 + i$$

b) $$\frac{\overline{\left(z_1 + z_2 + z_3\right)} \cdot z_5}{\left(z_4\right)^3} - \overline{\left(\frac{1}{z_4}\right)}$$

$$= \frac{\overline{\left[(1+i) + (1-i) + (-1-i)\right]}\,(-i)}{(i)^3} - \overline{\left(\frac{1}{i}\right)}$$

$$= \frac{\overline{(1-i)}\,(-i)}{(i)^2\, i} - \frac{1}{-i} = \frac{(1+i)(-i)}{(-1)\, i} + \frac{1}{i}$$

$$= \frac{(1+i)(-i)}{-i} + \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = (1+i) + \frac{-i}{-(i)^2}$$

$$= (1+i) + \frac{-i}{1} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{\left(z_1 + z_2 + z_3\right)} \cdot z_5}{\left(z_4\right)^3} - \overline{\left(\frac{1}{z_4}\right)} = 1$$

c) $$\frac{\left(z_1 z_3 - z_2 z_3 - z_1 z_4 + z_2 z_4\right) \cdot \overline{z}_5}{z_3 z_4 - \left(z_4\right)^2} + \overline{\left(\frac{z_2}{\overline{z}_1}\right)} \cdot z_3$$

En este tipo de ejercicios, en ocasiones, es conveniente detenerse un momento para observar y analizar la expresión, antes de proceder a la sustitución de los valores de los complejos que intervienen en la operación, con la finalidad de poder determinar si es posible hacer algunas simplificaciones en la expresión. Este ejercicio es uno de esos casos donde sí es posible hacer algunas simplificaciones. Veamos el procedimiento.

Factorizando en el numerador y denominador del primer sumando, tenemos:

$$= \frac{\left[\left(z_1 - z_2 \right) z_3 + \left(-z_1 + z_2 \right) z_4 \right] \cdot \overline{z}_5}{\left(z_3 - z_4 \right) \cdot z_4} + \overline{\left(\frac{z_2}{\overline{z}_1} \right)} \cdot z_3$$

en el primer sumando factorizamos un signo menos en el numerador y en el segundo sumando aplicamos la conjugación, con lo cual se llega a:

$$= \frac{\left[\left(z_1 - z_2 \right) z_3 - \left(z_1 - z_2 \right) z_4 \right] \cdot \overline{z}_5}{\left(z_3 - z_4 \right) \cdot z_4} + \frac{\overline{z}_2}{\overline{\left(\overline{z}_1 \right)}} \left(z_3 \right)$$

Factorizando $\left(z_1 - z_2 \right)$ en el numerador del primer sumando y simplificando la doble conjugación del segundo sumando, tenemos:

$$= \frac{\left(z_1 - z_2 \right)\left(z_3 - z_4 \right) \overline{z}_5}{\left(z_3 - z_4 \right) z_4} + \frac{\overline{z}_2 \, z_3}{z_1}$$

simplificando $\left(z_3 - z_4 \right)$, tenemos:

$$= \frac{\left(z_1 - z_2 \right) \overline{z}_5}{z_4} + \frac{\overline{z}_2 \, z_3}{z_1}$$

sustituyendo los valores de los complejos, se tiene:

$$= \frac{\left[(1+i)-(1-i) \right] \overline{(-i)}}{i} + \frac{\overline{(1-i)}(-1-i)}{1+i}$$

$$= \frac{(2i)\, i}{i} + \frac{(1+i)(-1-i)}{1+i}$$

$$= 2i + (-1-i) = -1+i$$

$$\therefore \frac{(z_1 z_3 - z_2 z_3 - z_1 z_4 + z_2 z_4) \cdot \overline{z}_5}{z_3 z_4 - (z_4)^2} + \left(\frac{z_2}{\overline{z}_1} \right) \cdot z_3 = -1+i$$

d) $(z_4)^{23} = (i)^{23} = (i)^{22}(i) = (i^2)^{11}(i) = (-1)^{11}(i)$

$(z_4)^{23} = (-1)\, i = -i$

e) $(z_5)^{115} = (-i)^{115} = (-i)^{114}(-i) = \left[(-i)^2 \right]^{57}(-i) = (-1)^{57}(-i)$

$(z_5)^{115} = -1(-i) = i$

f) $(z_4)^{7367} = (i)^{7367} = (i)^{7366}(i) = \left[(i)^2 \right]^{3683}(i) = (-1)^{3683}(i)$

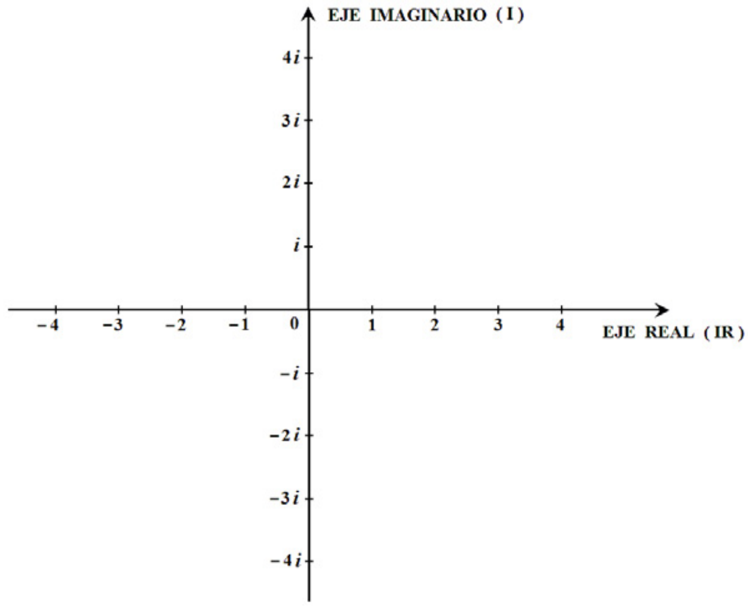
$(z_4)^{7367} = (-1)\, i = -i$

PLANO COMPLEJO O DIAGRAMA DE ARGAND

Los números complejos pueden ser representados gráficamente en el Plano Complejo, también llamado Diagrama de Argand, el cual está formado por dos ejes ortogonales entre sí, donde el eje horizontal es el eje real y el eje vertical es el eje imaginario. Los números complejos quedan representados gráficamente como puntos en el plano complejo, cada número corresponde a un punto del plano complejo y viceversa, cada punto del plano corresponde a un número complejo.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

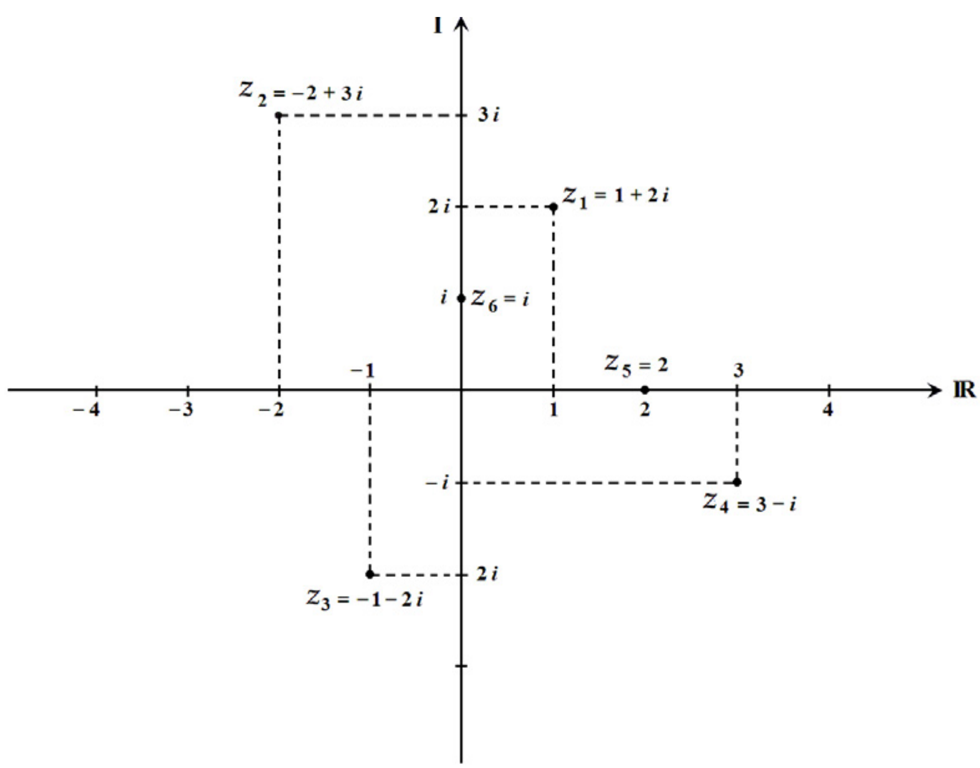
Diagrama de Argand



EJERCICIO 2.7 Represente gráficamente los siguientes números complejos:

$$z_1 = 1 + 2i \qquad z_4 = 3 - i$$
$$z_2 = -2 + 3i \qquad z_5 = 2$$
$$z_3 = -1 - 2i \qquad z_6 = i$$

SOLUCIÓN:

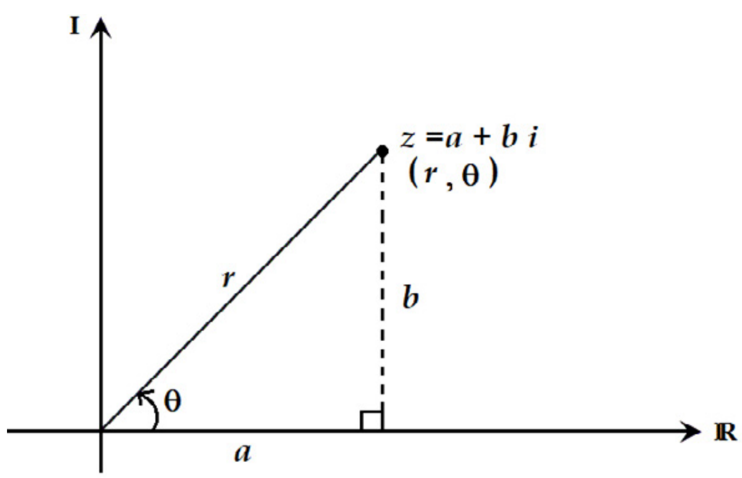


ÍNDICE
1
2
3
4
5

Forma polar o trigonométrica de los números complejos

Además de la forma binómica, existen otras maneras de representar a los números complejos, una de ellas es la llamada forma polar o trigonométrica. Los números complejos son utilizados en muchos campos de la física y la ingeniería. En ocasiones, para el planteamiento de ciertos problemas, o bien, en el estudio de fenómenos físicos, es conveniente o incluso necesario emplear la forma polar de los números complejos. Esta forma de expresarlos nos permitirá extraer la raíz enésima de un número complejo distinto de cero, nos facilitará también la realización de las operaciones de multiplicación, división y la obtención de la potencia enésima. Sin embargo, es conveniente señalar que las operaciones de adición y sustracción se complican tanto en la forma polar, que resulta preferible transformar los números que se operan a la forma binómica y realizar así la operación y, en caso de ser necesario, transformar el resultado a la forma polar.

Como se ha mencionado, la representación gráfica de un número complejo en el Plano de Argand, corresponde a un punto en dicho plano, ubicado a partir de los valores de a y b que lo conforman $(a+bi)$; sin embargo, dicho punto también puede ser ubicado en forma inequívoca, si se considera una longitud r, que corresponde a la distancia que hay entre el origen del sistema de referencia y el punto que representa al complejo, además del ángulo que forma dicho segmento con la parte positiva del eje real, midiendo este ángulo en sentido antihorario, es decir, en sentido contrario a la dirección en que se mueven las manecillas de un reloj. De acuerdo con esto, tenemos:



De la figura tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Como $z = a + bi$, al sustituir (1) y (2), tenemos:

$$z = r\cos\theta + (r\operatorname{sen}\theta)\,i$$

de donde:

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

si al factor $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ lo abreviamos como $\operatorname{cis}\theta$, entonces:

$$z = r\operatorname{cis}\theta$$

Forma polar o trigonométrica de los números complejos

La notación polar o trigonométrica del número complejo $z = a + bi$ es:

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r\operatorname{cis}\theta$$

Donde:

$r \rightarrow$ es el valor absoluto, módulo o radio

$\theta \rightarrow$ es el argumento

si $0° \leq \theta < 360°$ se le llama argumento principal

De la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

también se tiene que:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

A las expresiones (1), (2), (3) y (4) se les llama ecuaciones de transformación y con ellas podemos pasar un número complejo de su forma binómica a la polar o viceversa.

EJERCICIO 2.8 Transforme los números complejos dados de la forma binómica a la polar o viceversa, según corresponda:

a) $z_1 = 2 + 2i$

b) $z_2 = -1 + \sqrt{3}\ i$

c) $z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\ i$

d) $z_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i$

e) $z_5 = -3i$

f) $z_6 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 135°$

g) $z_7 = \sqrt{3}\ \text{cis}\ 240°$

h) $z_8 = 2\ \text{cis}\ 330°$

i) $z_9 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 45°$

j) $z_{10} = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 405°$

SOLUCIÓN:

a) $z_1 = 2 + 2i$ en este caso $a = 2$ y $b = 2$, por lo que:

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{2} = \tan^{-1}(1) = 45°$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

de donde:

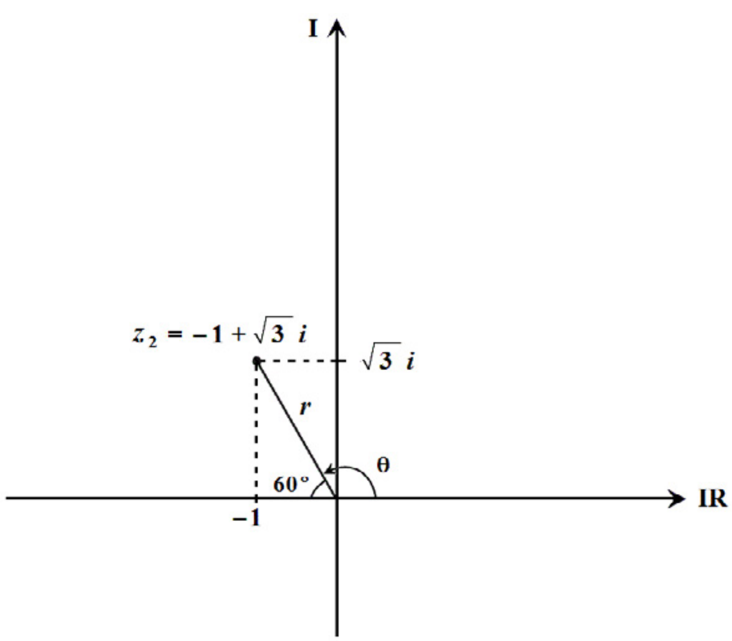
$$z_1 = 2\sqrt{2}\ \text{cis}\ 45°$$

b) $z_2 = -1+\sqrt{3}\ i \quad \Rightarrow \quad a = -1$ y $b = \sqrt{3}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1} = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -60°$$

El valor calculado de θ resultó ser $-60°$; sin embargo, para poder dar el valor de θ en su argumento principal es muy importante ubicar al número complejo en el Plano de Argand y con ello determinar en qué cuadrante está localizado, con esto podremos saber si los $-60°$ deberán ser restados a $180°$, o bien, a $360°$. Veamos lo anterior en la siguiente gráfica.



Como se puede apreciar, z_2 se encuentra en el segundo cuadrante, por lo tanto, el valor de θ buscado viene dado por la diferencia de $180° - 60°$, esto es, $\theta = 120°$.

$$\therefore \quad z_2 = 2\ \text{cis}\ 120°$$

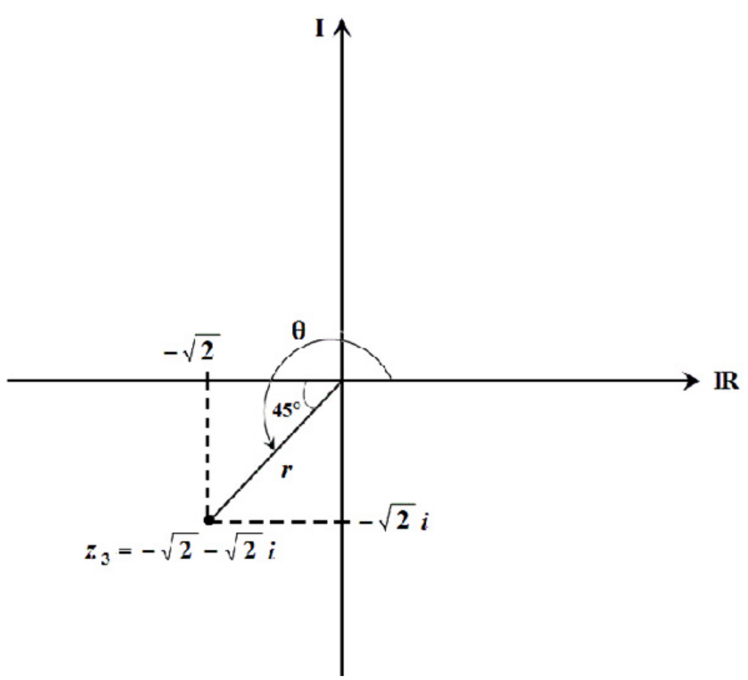
c) $z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i \quad \Rightarrow \quad a = -\sqrt{2} \quad$ y $\quad b = -\sqrt{2}$

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \tan^{-1}(1) = 45°$$

Dado que en z_3 tanto la parte real como la parte imaginaria son negativas, entonces z_3 está ubicado en el tercer cuadrante, por lo tanto, el valor de θ deberá estar comprendido entre 180 y 270 grados.

Gráficamente:



De la gráfica se aprecia que $\theta = 180° + 45° = 225°$, por lo tanto, z_3 en su forma polar es:

$$z_3 = 2 \text{ cis } 225°$$

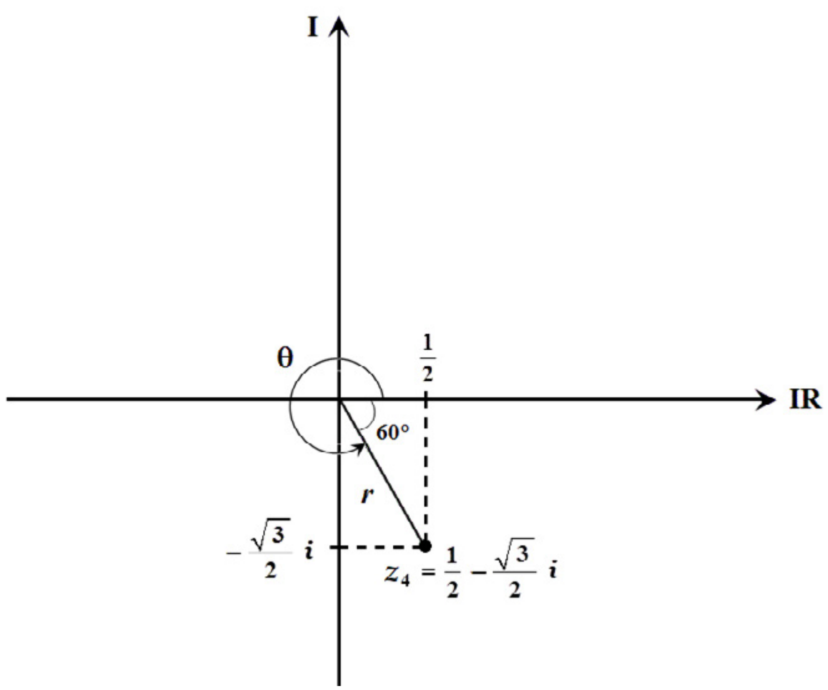
ÍNDICE
1
2
3
4
5

d) $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -60°$$

Al ubicar el número z_4 en forma gráfica, tenemos:



En la gráfica se observa que z_4 está ubicado en el cuarto cuadrante y, por lo tanto, el ángulo θ viene dado por $\theta = 360° - 60° = 300°$, con lo cual z_4 en forma polar es:

$$z_4 = 1 \text{ cis } 300°$$

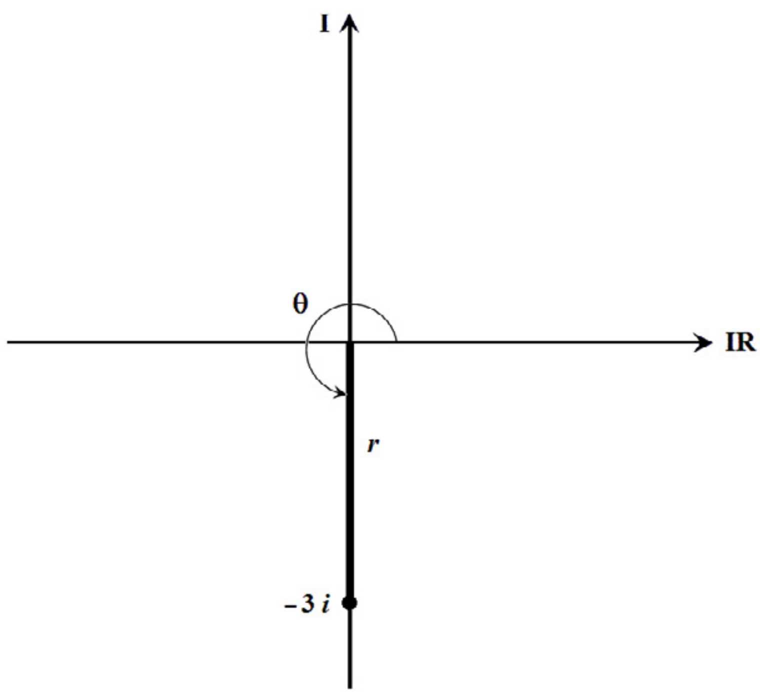
e) $z_5 = -3i \quad \Rightarrow \quad a = 0$ y $b = -3$

$$r = \sqrt{(-3)^2} = 3$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-3}{0}$$

Como la división entre cero no está definida, entonces no se puede obtener este ángulo con la fórmula.

En estos casos, lo que procede es ubicar el complejo z_5 en forma gráfica y con ello determinar el ángulo θ, como se muestra a continuación:



En la gráfica se observa claramente que el valor de θ es $270°$, por lo que z_5 en forma polar es:

$$z_5 = 3 \text{ cis } 270°$$

f) En los incisos anteriores se hizo la transformación de la forma binómica a la forma polar, en este inciso y los siguientes, se hará la transformación de complejos dados en forma polar para obtenerlos en su forma binómica.

$$z_6 = \sqrt{2} \text{ cis } 135°$$

Haciendo uso de las ecuaciones de transformación (1) y (2) dadas anteriormente, tenemos:

$$a = \sqrt{2}\,\cos 135° = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$$

$$b = \sqrt{2}\,\text{sen}\,135° = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$\therefore \qquad z_6 = -1 + i$$

g) $z_7 = \sqrt{3}\,\text{cis}\,240°$

$$a = \sqrt{3}\,\cos 240° = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = \sqrt{3}\,\text{sen}\,240° = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \qquad z_7 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i$$

h) $z_8 = 2\,\text{cis}\,330°$

$$a = 2\cos 330° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$b = 2\,\text{sen}\,330° = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore \qquad z_8 = \sqrt{3} - i$$

i) $z_9 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,45°$

$$a = \sqrt{2}\,\cos 45° = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$b = \sqrt{2}\ \text{sen } 45° = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$\therefore \qquad z_9 = 1 + i$$

j) $\quad z_{10} = \sqrt{2}\ \text{cis } 405°$

$$a = \sqrt{2}\ \cos 405° = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$b = \sqrt{2}\ \text{sen } 405° = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$\therefore \qquad z_{10} = 1 + i$$

Como podemos darnos cuenta, los complejos z_9 y z_{10} resultan ser el mismo número complejo, como podemos ver, para ambos números el radio es el mismo; sin embargo, los ángulos difieren en $360°$, es decir, el ángulo de z_{10} se obtiene de sumar una vuelta completa al ángulo de z_9. De acuerdo con esto, podemos afirmar que dos números complejos en su forma polar son iguales, si y solo si, tienen radios iguales y el ángulo de uno de ellos se obtiene a partir del otro, al sumarle o restarle vueltas completas. Esta afirmación se cumple, siempre y cuando, los radios de dichos números sean diferentes de cero.

Igualdad

Sean $z_1 = r_1\ \text{cis}\,\theta_1$ y $z_2 = r_2\ \text{cis}\,\theta_2$ dos números complejos cualesquiera con r_1 y r_2 distintos de cero. Se dice que:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + k\,360° \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Antes de dar las definiciones de las operaciones de los números complejos en su forma polar, conviene hacer hincapié, en que dada la dificultad que se tiene para sumar y restar dos números complejos en su forma polar, se omiten estas dos operaciones y, por lo tanto, se inicia con la definición de la multiplicación.

Multiplicación

Sean $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ y $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$ dos números complejos cualesquiera. La multiplicación $z_1 \cdot z_2$ se define como:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 \text{ cis } \theta_1 \right) \left(r_2 \text{ cis } \theta_2 \right) = r_1 r_2 \text{ cis } \left(\theta_1 + \theta_2 \right)$$

EJERCICIO 2.9 Sean $z_1 = 2 \text{ cis } 120°$, $z_2 = 3 \text{ cis } 90°$ y $z_3 = 4 \text{ cis } 315°$. Realice las multiplicaciones siguientes:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_1 \cdot z_3$

SOLUCIÓN:

a) $z_1 \cdot z_2 = \left(2 \text{ cis } 120° \right) \left(3 \text{ cis } 90° \right) = 6 \text{ cis } 210°$

b) $z_1 \cdot z_3 = \left(2 \text{ cis } 120° \right) \left(4 \text{ cis } 315° \right) = 8 \text{ cis } 435°$

En este caso, el ángulo obtenido es mayor a $360°$, por lo que, para dar el resultado con su argumento principal, debemos restar tantas vueltas completas como sea necesario al ángulo obtenido, hasta lograr que este sea menor a $360°$.

$$z_1 \cdot z_3 = 8 \text{ cis } \left(435° - 360° \right) = 8 \text{ cis } 75°$$

División

Sean $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ y $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$ con $r_2 \neq 0$ dos números complejos cualesquiera. La división $\dfrac{z_1}{z_2}$ se define como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \text{ cis } \theta_1}{r_2 \text{ cis } \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ cis } \left(\theta_1 - \theta_2 \right)$$

Cuando se realiza la división de dos números complejos en forma polar, puede suceder que el ángulo que resulte de la diferencia de $\theta_1 - \theta_2$ sea un ángulo negativo. Si esto sucede, entonces lo que se tiene que hacer es sumar a dicho ángulo $360°$, tantas veces como sea necesario, hasta lograr que el ángulo sea positivo y quede en su argumento principal, esto es, $0° \leq \theta < 360°$.

EJERCICIO 2.10 Sean $z_1 = 8 \text{ cis } 150°$, $z_2 = 4 \text{ cis } 60°$ y $z_3 = 2 \text{ cis } 210°$. Obtenga:

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$

b) $\dfrac{z_1}{z_3}$

SOLUCIÓN:

a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{8 \text{ cis } 150°}{4 \text{ cis } 60°} = \dfrac{8}{4} \text{ cis } (150° - 60°) = 2 \text{ cis } 90°$

b) $\dfrac{z_1}{z_3} = \dfrac{8 \text{ cis } 150°}{2 \text{ cis } 210°} = 4 \text{ cis } (-60°)$

Al sumar $360°$ al ángulo negativo obtenido, tenemos que:

$$\frac{z_1}{z_3} = 4 \text{ cis } 300°$$

Potencias de un número complejo en forma polar

Sea $z = r \text{ cis } \theta$ un número complejo cualquiera y sea n un número natural. La potencia enésima de z se define como:

$$z^n = (r \text{ cis } \theta)^n = r^n \text{ cis } n\theta$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 2.11 Sea $z = 2 \text{ cis } 240°$. Obtenga z^5.

SOLUCIÓN:

$$z^5 = \left(2 \text{ cis } 240°\right)^5 = 2^5 \text{ cis } 5\left(240°\right) = 32 \text{ cis } 1200°$$

En este caso, al ángulo que resulta se le deberán restar 3 vueltas completas, es decir, $3\left(360°\right) = 1080°$, con lo cual se obtiene:

$$z^5 = 32 \text{ cis } \left(1200° - 1080°\right) = 32 \text{ cis } 120°$$

Raíces de un número complejo en forma polar

Sea $z = r \text{ cis } \theta$ un número complejo cualquiera con $z \neq 0$ y sea n un número natural. Las raíces enésimas de z están dadas por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + k\left(360°\right)}{n}$$

donde: $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

Si se extrae la raíz enésima de un número complejo distinto de cero, se obtienen exactamente n raíces, cada una de ellas resulta ser distinta de las otras. Las n raíces del número complejo z se obtendrán dándole a k los valores de $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ en la fórmula anterior.

Debemos tener presente que $\sqrt[n]{r}$ nos representa la raíz real enésima positiva de r.

Para comprobar que se han obtenido correctamente las raíces de un número complejo z, será suficiente con tomar cualquiera de ellas y elevarla a la enésima potencia y, si se obtiene el número complejo z, entonces sabremos que nuestro resultado es correcto.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 2.12 Obtenga $\sqrt[5]{z}$ si se tiene que $z=-32$.

SOLUCIÓN:

Para poder extraer la raíz quinta de z que nos solicitan, es necesario que dicho número complejo esté dado en su forma polar; sin embargo, en el enunciado del ejercicio, z está expresado en forma binómica, por lo que en primera instancia procederemos a su transformación y después a la obtención de la raíz quinta que se nos pide.

Como $z=-32=32 \text{ cis } 180°$, entonces:

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32 \text{ cis } 180°} = \sqrt[5]{32} \text{ cis } \frac{180°+k(360°)}{5}$$

$$\sqrt[5]{z} = 2 \text{ cis } \frac{180° + k(360°)}{5}$$

donde k tomará los valores de 0, 1, 2, 3 y 4.

Para $k=0$:

$$z_1 = 2 \text{ cis } \frac{180° + 0(360°)}{5} = 2 \text{ cis } 36°$$

Para $k=1$:

$$z_2 = 2 \text{ cis } \frac{180° + 1(360°)}{5} = 2 \text{ cis } 108°$$

Para $k=2$:

$$z_3 = 2 \text{ cis } \frac{180° + 2(360°)}{5} = 2 \text{ cis } 180°$$

Para $k=3$:

$$z_4 = 2 \text{ cis } \frac{180° + 3(360°)}{5} = 2 \text{ cis } 252°$$

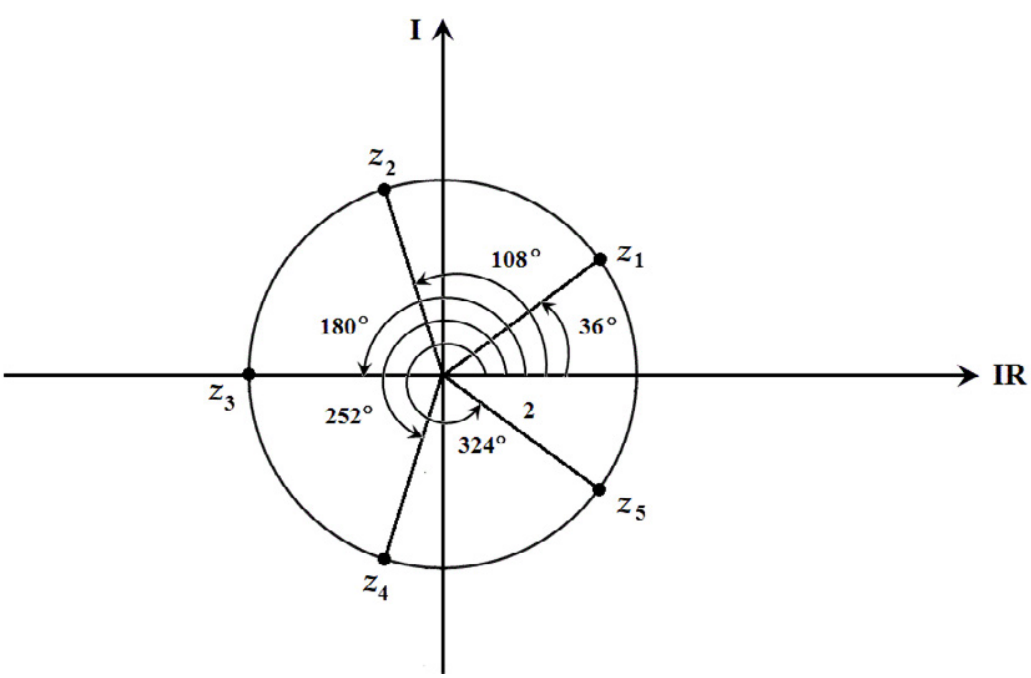
Para $k=4$:

$$z_5 = 2 \text{ cis } \frac{180° + 4(360°)}{5} = 2 \text{ cis } 324°$$

Como se puede observar las cinco raíces tiene radio igual a 2, es decir, todas las raíces tienen el mismo radio, además, el ángulo de cada una de las raíces se obtiene al sumar $72°$ al ángulo de la primera raíz, después, los mismos $72°$ al ángulo de la segunda raíz y así sucesivamente. Estos $72°$ que se suman en cada una de las raíces, se obtuvieron al dividir $360°$ entre el índice del radical, esto es, como se trata de una raíz quinta, entonces se dividió $360°$ entre 5. El ángulo de la primera raíz se obtiene al dividir el ángulo dado en z entre el índice del radical, en nuestro ejemplo, $180°$ entre 5, que da $36°$.

En general, si se quiere obtener la raíz enésima de un número complejo $z = r \text{ cis } \theta$, el radio de las n raíces se obtiene al calcular $\sqrt[n]{r}$, recuérdese que el radio de las n raíces es el mismo para todas ellas. El valor del ángulo de la primera raíz se obtiene al dividir θ entre el índice del radical, esto es, θ entre n. Los ángulos de las siguientes raíces se obtienen al sumar al ángulo de la primera raíz, el ángulo que resulta de dividir θ entre n, esto es, si θ_1 es el ángulo de la primera raíz, entonces el ángulo de la segunda raíz $\theta_2 = \theta_1 + \theta/n$, el ángulo de la tercera raíz sería $\theta_3 = \theta_2 + \theta/n$ y así sucesivamente, hasta completar las n raíces.

Al representar gráficamente las 5 raíces obtenidas, se tiene:



Como se puede observar, las 5 raíces quedan representadas por 5 puntos sobre una circunferencia de radio 2 con centro en el origen del sistema de referencia. El ángulo que se tiene entre raíz y raíz es de $72°$.

EJERCICIO 2.13 Sean:

$$z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\,135° \qquad z_2 = \sqrt{2}\ \text{cis}\,315°$$

$$z_3 = 2\ \text{cis}\,30° \qquad z_4 = 1\ \text{cis}\,120°$$

Determine los valores de z que se obtienen al realizar las operaciones indicadas en cada uno de los siguientes incisos:

a) $$z = \sqrt[4]{\left(\frac{z_1 + \overline{z}_2}{z_3\ z_4}\right)^5}$$

b) $$z^3 = \frac{\left[\left(\overline{z_1\ z_2}\right) z_4\right]^4}{z_3}$$

SOLUCIÓN:

a) Como $$z = \sqrt[4]{\left(\frac{z_1 + \overline{z}_2}{z_3\ z_4}\right)^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Lo que haremos es realizar por separado las operaciones que se tienen en el radicando y posteriormente se sustituirán los resultados en la expresión (1).

Realicemos en primera instancia $z_1 + \overline{z}_2$.

Como se mencionó anteriormente, la adición de complejos en forma polar resulta muy complicada, razón por la cual, se hará la transformación de z_1 y z_2 a la forma binómica y después de conjugar z_2, se obtendrá la suma. El resultado que se obtenga se transformará a la forma polar.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Al transformar z_1 y z_2 se llega a:

$$z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 135° \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \sqrt{2}\ \cos 135° = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \\ \\ b = \sqrt{2}\ \text{sen}\ 135° = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad z_1 = -1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 315° \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \sqrt{2}\ \cos 315° = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \\ \\ b = \sqrt{2}\ \text{sen}\ 315° = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad z_2 = 1 - i$$

como $\overline{z}_2 = 1 + i$, entonces:

$$z_1 + \overline{z}_2 = (-1 + i) + (1 + i) = 2i$$

llevando este resultado a la forma polar, tenemos:

$$z_1 + \overline{z}_2 = 2\ \text{cis}\ 90° \quad \text{.......................................} (2)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$z_3\ z_4 = (2\ \text{cis}\ 30°)(1\ \text{cis}\ 120°) = 2\ \text{cis}\ 150° \quad \text{.......................} (3)$$

con los resultados obtenidos en (2) y (3), se tiene que:

$$\frac{z_1 + \overline{z}_2}{z_3\ z_4} = \frac{2\ \text{cis}\ 90°}{2\ \text{cis}\ 150°} = 1\ \text{cis}\ (-60°) = 1\ \text{cis}\ 300°$$

elevando a la quinta potencia, tenemos:

$$\left(\frac{z_1 + \overline{z}_2}{z_3\ z_4}\right)^5 = (1\ \text{cis}\ 300°)^5 = 1\ \text{cis}\ 5\,(300°) = 1\ \text{cis}\ 1500°$$

restando vueltas completas se llega a:

$$\left(\frac{z_1 + \overline{z}_2}{z_3 \; z_4} \right)^5 = 1 \text{ cis } 60° \quad \text{...}(4)$$

Al sustituir (4) en (1), se tiene que:

$$z = \sqrt[4]{\left(\frac{z_1 + \overline{z}_2}{z_3 \; z_4} \right)^5} = \sqrt[4]{1 \text{ cis } 60°} = 1 \text{ cis } \frac{60° + k\,(360°)}{4}$$

al dar a k los valores de $0,\ 1,\ 2$ y $3,$ se llega a:

$$z_1 = 1 \text{ cis } 15°$$

$$z_2 = 1 \text{ cis } 105°$$

$$z_3 = 1 \text{ cis } 195°$$

$$z_4 = 1 \text{ cis } 285°$$

b) Se tiene que: $z^3 = \dfrac{\left[\overline{\left(z_1 \; z_2 \right)} \; z_4 \right]^4}{z_3}$ ....(5)

Como se hizo en el inciso anterior, se procederá a realizar las operaciones por separado:

$$z_1 \; z_2 = \left(\sqrt{2} \text{ cis } 135° \right)\left(\sqrt{2} \text{ cis } 315° \right) = 2 \text{ cis } 450°$$

$$z_1 \; z_2 = 2 \text{ cis } 90°$$

como $z_1 \; z_2 = 2\,i$, entonces:

$$\overline{z_1 \; z_2} = -2i \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1 \; z_2} = 2 \text{ cis } 270°$$

con lo cual:

$$\overline{\left(z_1 \; z_2 \right)} \; z_4 = \left(2 \text{ cis } 270° \right)\left(1 \text{ cis } 120° \right) = 2 \text{ cis } 390°$$

$$\therefore \quad \overline{\left(z_1 \; z_2 \right)} \; z_4 = 2 \text{ cis } 30°$$

elevando a la cuarta potencia este resultado se tiene que:

$$\left[\overline{\left(z_1 \; z_2 \right)} \; z_4 \right]^4 = \left(2 \text{ cis } 30° \right)^4 = 2^4 \text{ cis } 4 \left(30° \right)$$

$$\therefore \quad \left[\overline{\left(z_1 \; z_2 \right)} \; z_4 \right]^4 = 16 \text{ cis } 120° \quad \text{...(6)}$$

sustituyendo (6) en (5), además del valor de z_3, tenemos:

$$z^3 = \frac{16 \text{ cis } 120°}{2 \text{ cis } 30°} = 8 \text{ cis } 90°$$

extrayendo raíz cúbica:

$$z = \sqrt[3]{8 \text{ cis } 90°} = 2 \text{ cis } \frac{90° + k\left(360° \right)}{3}$$

de donde se obtiene:

$$z_1 = 2 \text{ cis } 30°$$

$$z_2 = 2 \text{ cis } 150°$$

$$z_3 = 2 \text{ cis } 270°$$

A manera de un complemento de la forma polar de los números complejos, en el siguiente ejercicio mostraremos cómo obtener el conjugado de un número sin tener que transformarlo a su forma binómica. Además, se mostrará cómo debemos interpretar y manejar un número complejo con radio negativo.

EJERCICIO 2.14 Obtenga lo que se indica en casa inciso.

a) Si $z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } 45°$, obtenga $\overline{z}_1$.

b) Si $z_2 = 3 \text{ cis } 210°$, obtenga $\overline{z}_2$.

c) Si $z_3 = 5 \text{ cis } 120°$, obtenga $\overline{z}_3$.

d) Si $z_4 = -2 \text{ cis } 60°$, obtenga la expresión de z_4, pero con valor de radio positivo.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

e) Si $z_5 = -7 \text{ cis } (-150°)$, obtenga la expresión de z_5 con radio y ángulo positivos.

f) Si $z_6 = -8 \text{ cis } (-240°)$, obtenga la expresión de z_6 con radio y ángulo positivos.

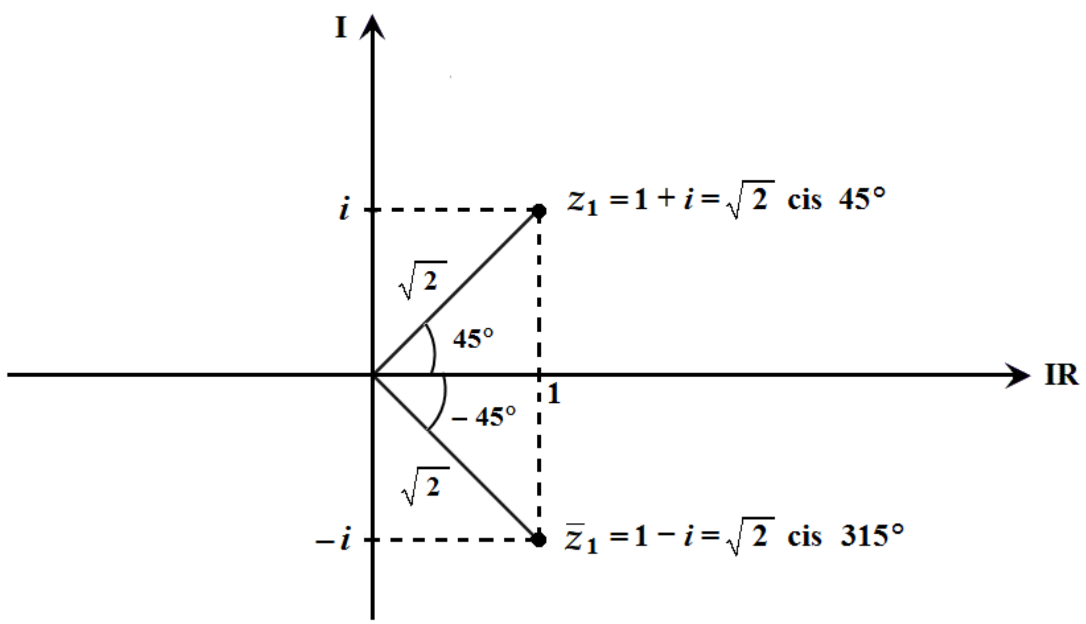
SOLUCIÓN:

a) Obtengamos primeramente el conjugado de z_1 transformándolo a su forma binómica y después lo haremos en forma polar directamente.

Como $z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } 45° = 1 + i$

entonces: $\overline{z}_1 = 1 - i$

Graficando z_1 y su conjugado:



El conjugado de un número complejo se obtiene al cambiar de signo la parte imaginaria. Como se puede apreciar en la gráfica, un número complejo y su conjugado resultan ser simétricos con respecto al eje real, lo que implica que el ángulo que forma el radio del complejo, medido a partir del eje real, es el mismo, pero uno medido en sentido positivo y el otro en sentido negativo. Obsérvese que el radio para ambos números es el mismo. De acuerdo con esto, para obtener el conjugado de un número complejo dado en forma polar, será suficiente con calcular correctamente el ángulo que corresponda al simétrico, con respecto al eje real, del punto que representa al complejo, sin importar en qué cuadrante se encuentre ubicado dicho complejo. El radio no cambia.

De la gráfica se puede apreciar que:

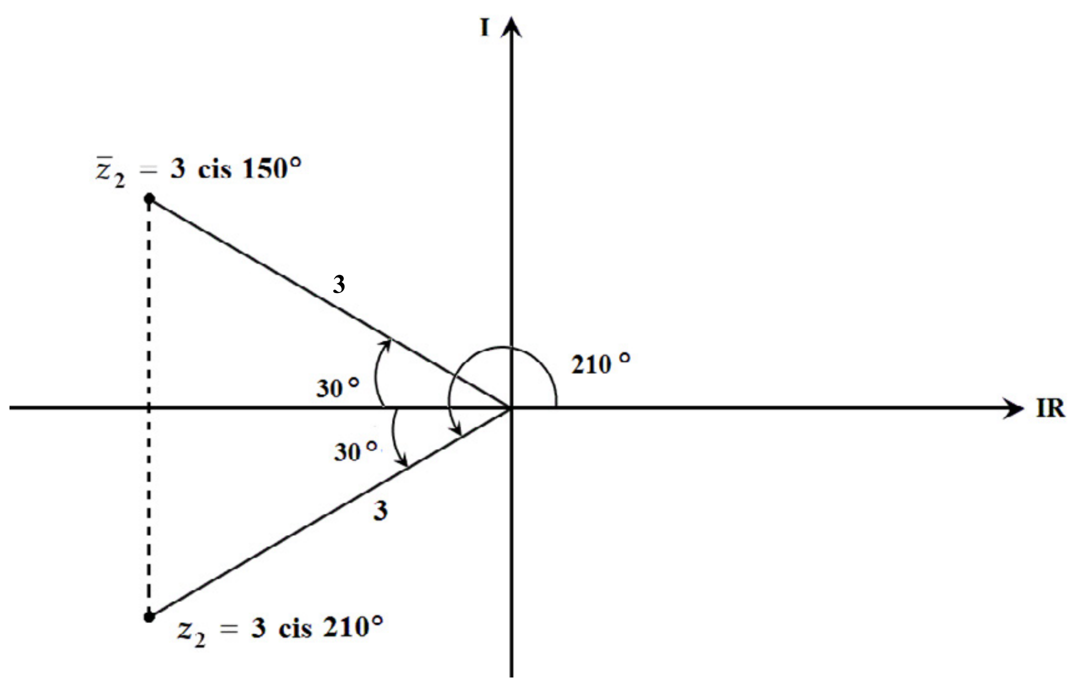
$$\bar{z}_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-45°\right)$$

llevando el ángulo negativo a su argumento principal, tenemos:

$$\bar{z}_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-45° + 360°\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 315°$$

b) $z_2 = 3\ \text{cis}\ 210°$

Gráficamente tenemos que:

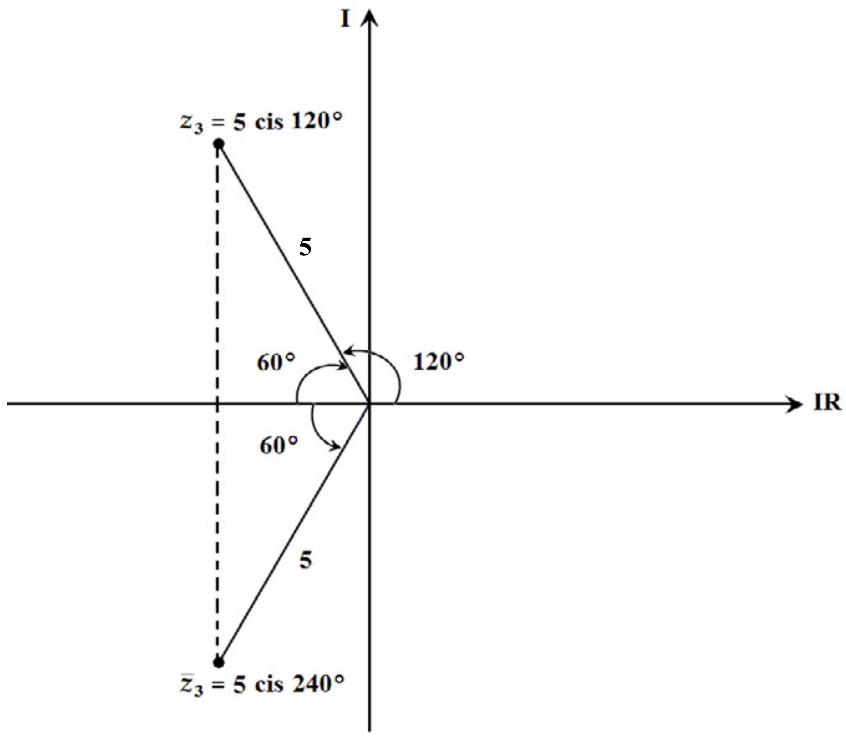


En este caso, como se puede apreciar en la gráfica, el conjugado de z_2 viene dado por:

$$\bar{z}_2 = 3\ \text{cis}\left(180° - 30°\right) = 3\ \text{cis}\ 150°$$

c) $z_3 = 5\ \text{cis}\ 120°$

Gráficamente tenemos que:



De acuerdo con la gráfica, el conjugado de z_3 viene dada por:

$$\bar{z}_3 = 5 \text{ cis} \left(180° + 60° \right) = 5 \text{ cis } 240°$$

En estos tres incisos, el complejo conjugado se obtuvo con apoyo de las gráficas; sin embargo, con la práctica esto se puede hacer directamente sin necesidad de la gráfica. Se invita al lector a internarlo.

d) Se nos pide dar la expresión de z_4, pero con valor de radio positivo, si:

$$z_4 = -2 \text{ cis } 60°$$

Como se dijo anteriormente, el radio de un número complejo dado en forma polar, siempre debe ser un valor positivo, por tratarse de una distancia; sin embargo, en z_4 el radio dado es negativo. Esto lo podríamos interpretar como el producto de dos números complejos, uno de ellos dado en forma binómica y el otro en forma polar, como se muestra a continuación:

$$z_4 = -2 \text{ cis } 60° = \left(-1 \right) \left(2 \text{ cis } 60° \right)$$

como $-1 = 1 \text{ cis } 180°$, entonces:

$$z_4 = \left(1 \text{ cis } 180°\right)\left(2 \text{ cis } 60°\right)$$
$$\therefore \quad z_4 = 2 \text{ cis } 240°$$

esto es:

$$z_4 = -2 \text{ cis } 60° = 2 \text{ cis } 240°$$

Como podemos darnos cuenta, el transformar un radio negativo a uno positivo en un número complejo, equivale simplemente a sumar $180°$ al ángulo del complejo dado con radio negativo y, con ello, ya podemos expresar al complejo con su radio positivo.

e) $z_5 = -7 \text{ cis } \left(-150°\right)$

En este número complejo tanto el radio como el ángulo son negativos. Podemos entonces proceder primero a cambiar el radio negativo a uno positivo y, posteriormente, en caso de ser necesario, transformar el ángulo negativo a uno con valor positivo, o bien, proceder a la inversa, es decir, transformar primero el ángulo negativo a uno positivo y, posteriormente, pasar de un radio negativo a uno positivo. El orden en que se hagan estas transformaciones no modifica el resultado final. Hagamos las transformaciones siguiendo ambos caminos.

Transformemos primero el radio negativo a uno positivo, sumando $180°$ al ángulo del número complejo, con lo cual se tiene:

$$z_5 = -7 \text{ cis } \left(-150°\right) = 7 \text{ cis } \left(-150° + 180°\right) = 7 \text{ cis } 30°$$

Como podemos darnos cuenta, al transformar el radio negativo a uno positivo sumando $180°$ al ángulo dado en el número complejo, fue suficiente para pasar también de un ángulo negativo a uno positivo, con lo cual, queda terminado nuestro proceso. Tenemos ya un número complejo con radio y ángulo positivos.

Sigamos ahora el otro procedimiento, es decir, transformemos primero el ángulo negativo a uno positivo y después nos ocupamos del radio negativo. Recordemos que el ángulo negativo lo

ÍNDICE 1 2 3 4 5

podemos transformar a uno positivo en su argumento principal, sumando vueltas completas, esto es:

$$z_5 = -7 \text{ cis } (-150°) = -7 \text{ cis } (-150° + 360°) = -7 \text{ cis } 210°$$

Ahora, transformaremos el radio negativo a uno positivo:

$$z_5 = -7 \text{ cis } 210° = 7 \text{ cis } (210° + 180°) = 7 \text{ cis } 390°$$

restando una vuelta completa, tenemos:

$$z_5 = 7 \text{ cis } (390° - 360°)$$

$$\therefore \quad z_5 = 7 \text{ cis } 30°$$

Al ver estos dos procedimientos, es claro que el primero de ellos resulta mucho más eficiente que el segundo, por lo tanto, cuando se tengan radios y ángulos negativos, es conveniente primero transformar el radio y ver si con dicha transformación el ángulo resulta positivo, de ser así, terminó nuestro trabajo; en caso contrario, se tendrán que sumar vueltas completas al ángulo hasta lograr que sea positivo.

f) $z_6 = -8 \text{ cis } (-240°)$

Siguiendo la recomendación hecha en el inciso anterior, transformaremos primero el radio negativo a uno positivo.

$$z_6 = -8 \text{ cis } (-240°) = 8 \text{ cis } (-240° + 180°) = 8 \text{ cis } (-60°)$$

En este caso, después de la transformación del radio, el ángulo aún continúa negativo, por lo que será necesario sumar una vuelta completa, esto es:

$$z_6 = 8 \text{ cis } (-60°) = 8 \text{ cis } (-60° + 360°)$$

$$\therefore \quad z_6 = 8 \text{ cis } 300°$$

FORMA EXPONENCIAL O DE EULER DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El matemático, físico y filósofo Leonhard Paul Euler (Basilea, Suiza, 1707-1783), estableció y demostró la siguiente fórmula:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Esta fórmula puede ser demostrada mediante el desarrollo en serie de Maclaurin de las funciones e^{x}, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ .Valiéndonos de la fórmula anterior, se tiene que:

La notación exponencial o de Euler del número complejo $z = r\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)$ es:

$$z = re^{\theta i}$$

dado que $e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

Donde:

$r \rightarrow$ es el valor absoluto, módulo o radio.

$\theta \rightarrow$ es el argumento y debe ser expresado en radianes.

si $0 \leq \theta < 2\pi$ se le llama argumento principal.

De acuerdo con lo anterior, si se conoce un número complejo dado en su forma polar, entonces para expresarlo en su forma exponencial, será suficiente con transformar el ángulo θ , dado en grados, a radianes. El radio del número complejo sigue siendo el mismo. Para pasar de la forma exponencial a la polar, se tendrá que transformar el ángulo θ de radianes a grados.

EJERCICIO 2.15 Transforme los números complejos dados de la forma polar a la exponencial o viceversa, según corresponda.

a) $z_1 = 2 \text{ cis } 30°$

b) $z_2 = 3 \text{ cis } 45°$

c) $z_3 = 1 \text{ cis } 75°$

d) $z_4 = 5 \text{ cis } 324°$

e) $z_5 = 7\, e^{\frac{13\pi}{12} i}$

f) $z_6 = 4\, e^{\frac{19\pi}{15} i}$

g) $z_7 = 6\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

h) $z_8 = 6\, e^{\frac{9\pi}{4} i}$

SOLUCIÓN:

a) $z_1 = 2 \text{ cis } 30°$ como $30° = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow z_1 = 2\, e^{\frac{\pi}{6} i}$

b) $z_2 = 3 \text{ cis } 45°$ como $45° = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow z_2 = 3\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

c) $z_3 = 1 \text{ cis } 75°$ como $75° = 30° + 45°$, entonces :

$$75° = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\therefore \quad z_3 = 1\, e^{\frac{5\pi}{12} i}$$

d) $z_4 = 5 \text{ cis } 324°$

Para transformar un ángulo cualquiera de grados a radianes, puede usarse la siguiente relación de equivalencia:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

con lo cual, se tiene que:

$$324° = 324 \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

que, al simplificar, se llega a:

$$324° = \frac{9\pi}{5}$$

$$\therefore \quad z_4 = 5\,e^{\frac{9\pi}{5}i}$$

e) $z_5 = 7\,e^{\frac{13\pi}{12}i}$

Se nos pide ahora transformar el complejo dado en forma exponencial a su forma polar.

Para pasar un ángulo dado en radianes a grados, simplemente hay que sustituir π por $180°$ y efectuar las operaciones indicadas, esto es:

$$\frac{13\pi}{12} = \frac{13\,(180°)}{12} = 195°$$

por lo que:

$$z_5 = 7 \text{ cis } 195°$$

f) $z_6 = 4\,e^{\frac{19\pi}{15}i}$ como:

$$\frac{19\pi}{15} = \frac{19\,(180°)}{15} = 228°$$

$$\therefore \quad z_6 = 4 \text{ cis } 228°$$

g) $z_7 = 6\,e^{\frac{\pi}{4}i}$ como sabemos que $\frac{\pi}{4} = 45°$, entonces

$z_7 = 6 \text{ cis } 45°$

h) $z_8 = 6\,e^{\frac{9\pi}{4}i}$ se tiene que:

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{9\,(180°)}{4} = 405°$$

Como el ángulo obtenido es mayor a $360°$, entonces al restar una vuelta completa se llega a que:

$$\frac{9\pi}{4} = 405° - 360° = 45°$$

$$\therefore \quad z_8 = 6 \text{ cis } 45°$$

Al observar los resultados obtenidos en los incisos g) y h), podemos llegar a la conclusión de que z_7 y z_8 son números iguales, esto es:

$$6\,e^{\frac{\pi}{4}i} = 6\,e^{\frac{9\pi}{4}i}$$

De lo anterior, se puede llegar a establecer la igualdad de dos números complejos en forma exponencial de la siguiente manera:

Igualdad

Sean $z_1 = r_1\,e^{\theta_1 i}$ y $z_2 = r_2\,e^{\theta_2 i}$ dos números complejos cualesquiera con r_1 y r_2 distintos de cero. Se tiene que:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + k\,2\pi \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sumar o restar dos números complejos en su forma exponencial, resulta muy complicado y totalmente impráctico, razón por la cual, en casi todos los textos que tratan el tema, omiten dar las definiciones de estas operaciones. Si se requiere sumar o restar dos números complejos dados en forma exponencial, la recomendación es transformar dichos números a su forma binómica, sumarlos o restarlos, según sea el caso y, si el resultado se requiere en forma exponencial, entonces deberá ser transformado. Hecha esta aclaración, entonces las definiciones de las operaciones en forma exponencial se darán a partir de la multiplicación.

Multiplicación

Sean $z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$ y $z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$ dos números complejos cualesquiera. La multiplicación $z_1 \cdot z_2$ se define como:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{\theta_1 i} \right)\left(r_2 e^{\theta_2 i} \right) = r_1 r_2 e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$$

EJERCICIO 2.16 Sean $z_1 = 4e^{\frac{\pi}{5} i}$, $z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2} i}$ y $z_3 = 3e^{\frac{2\pi}{3} i}$. Realice las multiplicaciones siguientes:

a) $z_1 \cdot z_3$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $z_2 \cdot z_3$

SOLUCIÓN:

a) $z_1 \cdot z_3 = \left(4e^{\frac{\pi}{5} i} \right)\left(3e^{\frac{2\pi}{3} i} \right) = 12\, e^{\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} \right) i} = 12\, e^{\frac{13\pi}{15} i}$

b) $z_1 \cdot z_2 = \left(4e^{\frac{\pi}{5} i} \right)\left(2e^{\frac{3\pi}{2} i} \right) = 8\, e^{\left(\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{2} \right) i} = 8\, e^{\frac{17\pi}{10} i}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) $z_2 \cdot z_3 = \left(2e^{\frac{3\pi}{2}i}\right)\left(3e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = 6e^{\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = 6e^{\frac{13\pi}{6}i}$

Como en este último producto el ángulo obtenido es mayor a 2π, entonces se restará una vuelta completa al ángulo para obtener el ángulo principal, esto es:

$$z_2 \cdot z_3 = 6e^{\left(\frac{13\pi}{6}-2\pi\right)i} = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$$

División

Sean $z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$ y $z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$ con $r_2 \neq 0$ dos números complejos cualesquiera. La división $\frac{z_1}{z_2}$ se define como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{\theta_1 i}}{r_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$$

Al igual que cuando se definió la división de números complejos en su forma polar, puede suceder que el ángulo que resulta de la diferencia de $\theta_1 - \theta_2$ sea un ángulo negativo. En este caso, lo que se tiene que hacer es sumar 2π a dicho ángulo, tantas veces como sea necesario, hasta lograr que el ángulo sea positivo y que quede en su argumento principal, es decir, entre 0 y 2π.

EJERCICIO 2.17 Sea $z_1 = 4e^{\frac{4\pi}{3}i}$ y $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$. Obtenga:

a) $\frac{z_1}{z_2}$

b) $\frac{z_2}{z_1}$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

SOLUCIÓN:

a) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\,e^{\frac{4\pi}{3}i}}{2\,e^{\frac{\pi}{6}i}} = 2\,e^{\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)i} = 2\,e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

b) $$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\,e^{\frac{\pi}{6}i}}{4\,e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \frac{1}{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)i} = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{7\pi}{6}i}$$

Al sumar 2π al ángulo negativo obtenido, se tiene que:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{2}\,e^{\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)i} = \frac{1}{2}\,e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

Potencias de un número complejo en forma exponencial

Sea $z = r\,e^{\theta i}$ un número complejo cualquiera y sea n un número natural. La potencia enésima de z se define como:

$$z = \left(r\,e^{\theta i}\right)^n = r^n\,e^{n\theta i}$$

EJERCICIO 2.18 Sea $z = 3\,e^{\frac{5\pi}{6}i}$. Obtenga z^4.

SOLUCIÓN:

$$z^4 = \left(3\,e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^4 = 3^4\,e^{4\left(\frac{5\pi}{6}\right)i} = 81\,e^{\frac{20\pi}{6}i} = 81\,e^{\frac{10\pi}{3}i}$$

Como el ángulo que se obtiene es mayor a 2π, entonces se le restará, en este caso, una vuelta completa, es decir, 2π.

$$z^4 = 81\,e^{\left(\frac{10\pi}{3}-2\pi\right)i} = 81\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Raíces de un número complejo en forma exponencial

Sea $z = r\,e^{\theta i}$ un número complejo cualquiera con $z \neq 0$ y sea n un número natural. Las raíces enésimas de z están dadas por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,e^{\theta i}} = \sqrt[n]{r}\; e^{\left(\frac{\theta + k(2\pi)}{n}\right)i}$$

donde: $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n-1$

EJERCICIO 2.19 Obtenga $\sqrt[4]{z}$ si se tiene que $z = 16\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

SOLUCIÓN:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\,e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \sqrt[4]{16}\; e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + k(2\pi)}{4}\right)i} = 2\,e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + k(2\pi)}{4}\right)i}$$

De acuerdo con la definición, k tomará los valores de $0,\ 1,\ 2$ y 3

Para $k = 0$:

$$z_1 = 2\,e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 0(2\pi)}{4}\right)i} = 2\,e^{\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}i} = 2\,e^{\frac{2\pi}{12}i} = 2\,e^{\frac{\pi}{6}i}$$

Para $k = 1$:

$$z_2 = 2\,e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 1(2\pi)}{4}\right)i} = 2\,e^{\frac{\frac{8\pi}{3}}{4}i} = 2\,e^{\frac{8\pi}{12}i} = 2\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

Para $k = 2$:

$$z_3 = 2\,e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2(2\pi)}{4}\right)i} = 2\,e^{\frac{\frac{14\pi}{3}}{4}i} = 2\,e^{\frac{14\pi}{12}i} = 2\,e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

Para $k = 3$:

$$z_4 = 2\,e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 3(2\pi)}{4}\right) i} = 2\,e^{\frac{\frac{20\pi}{3}}{4} i} = 2\,e^{\frac{20\pi}{12} i} = 2\,e^{\frac{5\pi}{3} i}$$

Obsérvese que todas las raíces obtenidas tienen el mismo radio y el ángulo de cada una de ellas se obtiene al sumar $\frac{\pi}{2}$ a cada uno de los ángulos, empezando con la primera raíz.

Cabe hacer notar que, si se siguiera el mismo procedimiento de ir asignando valores a k y se tratase de calcular una quinta raíz cuando $k = 4$, el resultado que se obtendría sería otra vez z_1.

EJERCICIO 2.20 Sean:

$$z_1 = e^{\frac{3\pi}{2} i} \qquad\qquad z_2 = \sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4} i}$$

$$z_3 = e^{\pi i} \qquad\qquad z_4 = \sqrt{2}\; e^{\frac{3\pi}{4} i}$$

Determine los valores de z que se obtienen al realizar las operaciones indicadas en cada uno de los siguientes incisos:

a) $$z = \frac{\overline{z}_3\left(z_2\, z_4\right)^3}{\left(z_1^6 + z_2\right)^4}$$

b) $$z^5 = \frac{z_1\, z_3\left(z_2\, z_4\right)^5}{\left(z_2 + z_3\right)^9}$$

SOLUCIÓN:

a) Como $z = \dfrac{\overline{z}_3\left(z_2\, z_4\right)^3}{\left(z_1^6 + z_2\right)^4}$ ....(1)

Lo que haremos es realizar por separado las operaciones que se tienen en la fracción y posteriormente se sustituirán los resultados en la expresión (1).

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Tenemos que:

$$z_2\, z_4 = \left(\sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4} i}\right)\left(\sqrt{2}\; e^{\frac{3\pi}{4} i}\right) = 2\, e^{\pi i}$$

elevando al cubo, tenemos:

$$\left(z_2\, z_4\right)^3 = \left(2\, e^{\pi i}\right)^3 = 8\, e^{3\pi i} = 8\, e^{\pi i}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\bar{z}_3 = \overline{\left(e^{\pi i}\right)} \qquad \text{como} \quad e^{\pi i} = -1\,, \quad \text{entonces}$$

$$\bar{z}_3 = \overline{\left(-1\right)} = -1$$

de donde se tiene que:

$$\bar{z}_3\left(z_2\, z_4\right)^3 = \left(e^{\pi i}\right)\left(8\, e^{\pi i}\right) = 8\, e^{2\pi i} = 8 \quad \text{.................................(2)}$$

Desarrollando ahora el denominador de (1), tenemos:

$$z_1^6 = \left(e^{\frac{3\pi}{2} i}\right)^6 = e^{6\left(\frac{3\pi}{2}\right) i} = e^{9\pi i} = e^{\pi i} = -1$$

con lo que:

$$z_1^6 + z_2 = \left(-1\right) + \left(\sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4} i}\right)$$

como $z_2 = \sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4} i} = \sqrt{2}\,\operatorname{cis} 45^\circ = 1 + i$, entonces:

$$z_1^6 + z_2 = \left(-1\right) + \left(1 + i\right) = i$$

con lo cual:

$$\left(z_1^6 + z_2\right)^4 = \left(i\right)^4 = \left(i^2\right)^2 = \left(-1\right)^2 = 1 \quad \text{.................................(3)}$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$z = \frac{8}{1} \qquad \therefore \qquad z = 8$$

b) Como $z^5 = \dfrac{z_1\, z_3 \left(z_2\, z_4\right)^5}{\left(z_2 + z_3\right)^9}$ ....(4)

Al igual que en el inciso anterior, se realizarán las operaciones por separado y sustituiremos los resultados en la expresión (4).

Entonces se tiene que:

$$z_1\, z_3 = \left(e^{\frac{3\pi}{2}i}\right)\left(e^{\pi i}\right) = e^{\frac{5\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$z_2\, z_4 = \left(\sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(\sqrt{2}\; e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) = 2\, e^{\pi i}$$

con lo cual:

$$\left(z_2\, z_4\right)^5 = \left(2\, e^{\pi i}\right)^5 = 32\, e^{5\pi i} = 32\, e^{\pi i}$$

entonces se tiene que:

$$z_1\, z_3 \left(z_2\, z_4\right)^5 = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)\left(32\, e^{\pi i}\right) = 32\, e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad \text{.............................(5)}$$

Desarrollando ahora el denominador de (4), tenemos:

$$z_2 + z_3 = \left(\sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4}i}\right) + \left(e^{\pi i}\right)$$

como:

$$z_2 = \sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\;\operatorname{cis} 45° = 1 + i$$

$$z_3 = e^{\pi i} = 1 \operatorname{cis} 180° = -1$$

entonces:

$$z_2 + z_3 = \left(1 + i\right) + \left(-1\right) = i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

con lo cual, se tiene que:

$$\left(z_2 + z_3 \right)^9 = (i)^9 = (i)^8 (i) = \left(i^2 \right)^4 (i) = 1(i) = i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (4), tenemos:

$$z^5 = \frac{32\, e^{\frac{3\pi}{2} i}}{i} \quad ; \quad \text{como} \quad 32\, e^{\frac{3\pi}{2} i} = -32\, i$$

entonces:

$$z^5 = \frac{-32\, i}{i} \quad \Rightarrow \quad z^5 = -32$$

con lo cual, tenemos que:

$$z = \sqrt[5]{-32} \qquad \text{como} \qquad -32 = 32\, e^{\pi i}$$

entonces:

$$z = \sqrt[5]{32\, e^{\pi i}} = \sqrt[5]{32}\ e^{\frac{\pi + k(2\pi)}{5} i} = 2\, e^{\frac{\pi + k(2\pi)}{5} i}$$

donde k tomará los valores de $0,\ 1,\ 2,\ 3$ y 4.

Para $k = 0$:

$$z_1 = 2\, e^{\frac{\pi + 0(2\pi)}{5} i} = 2\, e^{\frac{\pi}{5} i}$$

Para $k = 1$:

$$z_2 = 2\, e^{\frac{\pi + 1(2\pi)}{5} i} = 2\, e^{\frac{3\pi}{5} i}$$

Para $k = 2$:

$$z_3 = 2\, e^{\frac{\pi + 2(2\pi)}{5} i} = 2\, e^{\pi i}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Para $k = 3$:

$$z_4 = 2\,e^{\frac{\pi + 3(2\pi)}{5}i} = 2\,e^{\frac{7\pi}{5}i}$$

Para $k = 4$:

$$z_5 = 2\,e^{\frac{\pi + 4(2\pi)}{5}i} = 2\,e^{\frac{9\pi}{5}i}$$

Ecuaciones con números complejos

Cuando se tiene una ecuación con números complejos, en la cual se tiene una sola incógnita, una alternativa para obtener su solución es tratar de despejar la incógnita y dejarla en términos de los otros elementos que intervienen en la ecuación. Deberá tenerse especial cuidado de que los pasos efectuados en el despeje sean válidos dentro del álgebra de los números complejos. Si el despeje de la incógnita puede lograrse, entonces la solución de la ecuación se obtiene al realizar todas las operaciones que quedaron indicadas en el segundo miembro de la ecuación. En caso de que la incógnita no sea posible despejarla, entonces se tendrá que recurrir a algún otro método de solución, que evidentemente dependerá de las características de la ecuación que se pretenda resolver. En este caso, no se tiene un método general que se pueda recomendar.

EJERCICIO 2.21 Obtenga los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen a la ecuación:

$$3z_2 - z_1 = \frac{z_3}{z_4\, z^{\frac{3}{2}}}$$

donde:

$$z_1 = \sqrt{3} + i \qquad\qquad z_2 = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_3 = 8 \text{ cis } 70° \qquad\qquad z_4 = 1 \text{ cis } 10°$$

SOLUCIÓN:

Al despejar z en la ecuación se llega a:

$$z^{\frac{3}{2}} = \frac{z_3}{(3z_2 - z_1)\,z_4} \quad \text{...(1)}$$

realizando las operaciones que se tienen en el denominador, tenemos:

$$3z_2 - z_1 = 3\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right) - \left(\sqrt{3} + i\right)$$

como $e^{\frac{\pi}{6}i} = 1 \text{ cis } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, entonces:

$$3z_2 - z_1 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\sqrt{3} + i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

transformando este resultado a su forma polar:

$$3z_2 - z_1 = 1 \text{ cis } 30°$$

con lo cual:

$$(3z_2 - z_1)\,z_4 = (1 \text{ cis } 30°)(1 \text{ cis } 10°) = 1 \text{ cis } 40° \quad \text{.............................(2)}$$

sustituyendo (2) y z_3 en (1), tenemos:

$$z^{\frac{3}{2}} = \frac{8 \text{ cis } 70°}{1 \text{ cis } 40°} = 8 \text{ cis } 30°$$

de donde se tiene que:

$$z = \sqrt[3]{(8 \text{ cis } 30°)^2} = \sqrt[3]{64 \text{ cis } 60°}$$

$$z = \sqrt[3]{64} \text{ cis } \frac{60° + k(360°)}{3} = 4 \text{ cis } \frac{60° + k(360°)}{3}$$

Para $k = 0$:

$$z_1 = 4 \text{ cis } \frac{60°}{3} = 4 \text{ cis } 20°$$

Para $k = 1$:

$$z_2 = 4 \text{ cis } \frac{60° + 1(360°)}{3} = 4 \text{ cis } 140°$$

Para $k = 2$:

$$z_3 = 4 \text{ cis } \frac{60° + 2(360°)}{3} = 4 \text{ cis } 260°$$

EJERCICIO 2.22 Obtenga los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen a la ecuación:

$$\frac{z^{\frac{5}{3}} z_1 - \overline{z}_2}{z_3^4 + z_4} = 1$$

donde:

$$z_1 = 6e^{\frac{2\pi}{3}i} \qquad z_2 = 1 - 2i$$

$$z_3 = \text{cis } 225° \qquad z_4 = 4 \text{ cis } 90°$$

SOLUCIÓN:

Despejando z de la ecuación, tenemos:

$$z^{\frac{5}{3}} z_1 - \overline{z}_2 = z_3^4 + z_4$$

$$z^{\frac{5}{3}} z_1 = z_3^4 + z_4 + \overline{z}_2$$

$$\therefore \quad z^{\frac{5}{3}} = \frac{z_3^4 + z_4 + \overline{z}_2}{z_1} \quad \text{.......................................(1)}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

realizando las operaciones que se tienen en el numerador, tenemos:

$$z_3^4 + z_4 + \overline{z}_2 = \left(1 \text{ cis } 225°\right)^4 + \left(4 \text{ cis } 90°\right) + \overline{\left(1 - 2i\right)}$$

$$= \left(1 \text{ cis } 900°\right) + \left(4i\right) + \left(1 + 2i\right)$$

$$= \left(1 \text{ cis } 180°\right) + \left(1 + 6i\right)$$

$$= \left(-1\right) + \left(1 + 6i\right)$$

$$\therefore \quad z_3^4 + z_4 + \overline{z}_2 = 6i \quad \text{...(2)}$$

sustituyendo (2) y z_1 en (1), se tiene:

$$z^{\frac{5}{3}} = \frac{6i}{6e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{6 \text{ cis } 90°}{6 \text{ cis } 120°}$$

$$z^{\frac{5}{3}} = 1 \text{ cis } \left(90° - 120°\right) = 1 \text{ cis } \left(-30°\right)$$

$$\Rightarrow \quad z^{\frac{5}{3}} = 1 \text{ cis } 330°$$

de donde se tiene que:

$$z = \sqrt[5]{\left(1 \text{ cis } 330°\right)^3} = \sqrt[5]{1 \text{ cis } 990°}$$

$$z = \sqrt[5]{1 \text{ cis } 270°} = \sqrt[5]{1} \text{ cis } \frac{270° + k\left(360°\right)}{5}$$

$$z = 1 \text{ cis } \frac{270° + k\left(360°\right)}{5}$$

donde k tomará los valores de $0, 1, 2, 3$ y $4.$

Para $k = 0$:

$$z_1 = 1 \text{ cis } \frac{270°}{5} = 1 \text{ cis } 54°$$

Para $k = 1$:

$$z_2 = 1 \text{ cis } \frac{270° + 1(360°)}{5} = 1 \text{ cis } 126°$$

Para $k = 2$:

$$z_3 = 1 \text{ cis } \frac{270° + 2(360°)}{5} = 1 \text{ cis } 198°$$

Para $k = 3$:

$$z_4 = 1 \text{ cis } \frac{270° + 3(360°)}{5} = 1 \text{ cis } 270°$$

Para $k = 4$:

$$z_5 = 1 \text{ cis } \frac{270° + 4(360°)}{5} = 1 \text{ cis } 342°$$

EJERCICIO 2.23 Obtenga el número complejo z que satisface a la siguiente ecuación:

$$2\,\overline{z} = 4z + \text{cis } 30° \left(\frac{5}{2} e^{2\pi i} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\, e^{\frac{3\pi}{2} i} \right) (1 - i)^6$$

SOLUCIÓN:

Agrupando las z y factorizando $\frac{5}{2}$, tenemos:

$$2\,\overline{z} - 4z = \text{cis } 30° \left[\frac{5}{2} \left(e^{2\pi i} - \sqrt{3}\, e^{\frac{3\pi}{2} i} \right) \right] (1 - i)^6$$

como:

$$e^{2\pi i} = 1$$

$$\sqrt{3}\; e^{\frac{3\pi}{2} i} = -\sqrt{3}\, i$$

$$1 - i = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 315°$$

sustituyendo tenemos:

$$2\,\bar{z} - 4z = \text{cis}\ 30° \left[\frac{5}{2} \left(1 - \left(-\sqrt{3}\, i \right) \right) \right] \left(\sqrt{2}\ \text{cis}\ 315° \right)^{6}$$

$$2\,\bar{z} - 4z = \text{cis}\ 30° \left[\frac{5}{2} \left(1 + \sqrt{3}\, i \right) \right] \left(8\ \text{cis}\ 90° \right)$$

$$2\,\bar{z} - 4z = \text{cis}\ 30° \left[\frac{5}{2} \left(2\ \text{cis}\ 60° \right) \right] \left(8\ \text{cis}\ 90° \right)$$

$$2\,\bar{z} - 4z = \text{cis}\ 30° \left(5\ \text{cis}\ 60° \right) \left(8\ \text{cis}\ 90° \right)$$

multiplicando todos los factores, tenemos:

$$2\,\bar{z} - 4z = 40\ \text{cis}\ 180°$$

de donde:

$$\bar{z} - 2z = 20\ \text{cis}\ 180°$$

Si $z = a + bi \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = a - bi$ y como $20\ \text{cis}\ 180° = -20$, entonces al sustituir,

tenemos:

$$\left(a - bi \right) - 2\left(a + bi \right) = -20$$

$$-a - 3bi = -20$$

por igualdad de complejos tenemos que:

$$a = 20$$

$$b = 0$$

Por lo tanto, el número complejo z buscado es:

$$z = 20$$

EJERCICIO 2.24 Determine los valores de a y b de los números complejos $z_1 = a + 2i$ y $z_2 = 2 + bi$ que satisfacen la siguiente igualdad:

$$z_1\, z_3 + z_2\, z_4 = z_5$$

donde:

$$z_3 = \text{cis}\left(-270°\right), \qquad z_4 = \sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4}i} \qquad \text{y} \qquad z_5 = \sqrt{8}\; e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$z_1\, z_3 = \left(a + 2i\right)\left(\text{cis}\left(-270°\right)\right) = \left(a + 2i\right)\left(\text{cis}\, 90°\right) = \left(a + 2i\right)\left(i\right) = -2 + ai$$

$$z_2\, z_4 = \left(2 + bi\right)\left(\sqrt{2}\; e^{\frac{\pi}{4}i}\right) = \left(2 + bi\right)\left(1 + i\right) = \left(2 - b\right) + \left(2 + b\right)i$$

como $z_5 = \sqrt{8}\; e^{\frac{5\pi}{4}i} = -2 - 2i$, sustituyendo en la igualdad planteada, tenemos:

$$\left(-2 + ai\right) + \left[\left(2 - b\right) + \left(2 + b\right)i\right] = -2 - 2i$$

agrupando, tenemos:

$$\left(-2 + 2 - b\right) + \left(a + 2 + b\right)i = -2 - 2i$$

por igualdad de complejos, se tiene:

$$\begin{cases} -2 + 2 - b = -2 & \Rightarrow \quad b = 2 \\ a + 2 + b = -2 & \Rightarrow \quad a = -6 \end{cases}$$

con lo cual, los complejos z_1 y z_2 son:

$$z_1 = -6 + 2i$$

$$z_2 = 2 + 2i$$

EJERCICIO 2.25 Para la siguiente igualdad:

$$(2 + 2i)\,x + y \operatorname{cis} 270° = 2\,e^{\frac{\pi}{3}i}$$

obtenga los valores de $x,\ y \in \mathbb{R}$ que la satisfacen.

SOLUCIÓN:

Como en el primer miembro de la igualdad se tiene que realizar una suma y posteriormente establecer una igualdad, entonces se expresarán los números complejos en su forma binómica.

$$(2 + 2i)\,x + y\,(-i) = 1 + \sqrt{3}\;i$$

agrupando términos y factorizando, tenemos:

$$(2x) + (2x - y)\;i = 1 + \sqrt{3}\;i$$

por igualdad de complejos, se tiene:

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ 2x - y = \sqrt{3} \end{cases} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{2}$$

sustituyendo $x = \dfrac{1}{2}$ en la segunda ecuación:

$$1 - y = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad y = 1 - \sqrt{3}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 2.26 Obtenga los valores de $x, y \in \mathbb{R}$, con los cuales se satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{4e^{\pi i}\left(-8xe^{2\pi i}+12ye^{\frac{3\pi}{2}i}\right)}{(-2)(4\text{ cis }60°)}=\sqrt{3}+i$$

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$4e^{\pi i}=-4 \qquad e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$$

$$e^{2\pi i}=1 \qquad \sqrt{3}+i=2\text{ cis }30°$$

sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\frac{-4\left[-8x(1)+12y(-i)\right]}{(-2)(4\text{ cis }60°)}=2\text{ cis }30°$$

$$\frac{-4\left[-8x-12yi\right]}{(-2)(4\text{ cis }60°)}=2\text{ cis }30°$$

de donde:

$$32x+48yi=(2\text{ cis }30°)(-2)(4\text{ cis }60°)$$

$$32x+48yi=(8\text{ cis }90°)(2\text{ cis }180°)$$

$$32x+48yi=16\text{ cis }270°$$

$$32x+48yi=-16i$$

por igualdad de complejos, se tiene que:

$$\begin{cases}32x=0\\48y=-16\end{cases} \quad \therefore \quad x=0, \quad y=-\frac{1}{3}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 2.27 Obtenga los valores de z que satisfacen a la siguiente ecuación:

$$z^2 + (1+i)\, z + 5i = 0$$

SOLUCIÓN:

Como se trata de una ecuación de segundo grado, entonces se empleará la fórmula general, esto es:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{..(1)}$$

para la ecuación a resolver, se tiene que:

$$a = 1\,, \qquad b = 1+i \qquad \text{y} \qquad c = 5i$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$z = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4(1)(5i)}}{2(1)}$$

desarrollando, tenemos:

$$z = \frac{(-1-i) \pm \sqrt{(1+2i-1) - 20i}}{2}$$

$$z = \frac{(-1-i) \pm \sqrt{-18i}}{2}$$

$$z = \frac{(-1-i) \pm \sqrt{18 \text{ cis } 270°}}{2}$$

como:

$$\sqrt{18 \text{ cis } 270°} = \begin{cases} \sqrt{18} \quad \text{cis } 135° = -3 + 3i \\ \\ \sqrt{18} \quad \text{cis } 315° = 3 - 3i \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

entonces:

$$z = \frac{(-1-i) \pm \begin{cases} -3+3i \\ 3-3i \end{cases}}{2} \quad \text{...(2)}$$

analizando todas las posibilidades que se pueden tener, tenemos:

Con el signo positivo:

$$z_1 = \frac{(-1-i)+(-3+3i)}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$$

$$z_2 = \frac{(-1-i)+(3-3i)}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

Con el signo negativo:

$$z_3 = \frac{(-1-i)-(-3+3i)}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$z_4 = \frac{(-1-i)-(3-3i)}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$$

Como se puede apreciar, se llega a las mismas soluciones si se toma el signo positivo o el signo negativo del $\pm$ en la expresión (2), por lo que, para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado, en la expresión (2), será suficiente con considerar uno de los dos signos, el positivo o el negativo.

Por lo tanto, los valores de z que satisfacen a la ecuación son:

$$z_1 = -2+i$$

$$z_2 = 1-2i$$

EJERCICIO 2.28 Obtenga los valores de z que satisfacen la siguiente ecuación:

$$-iz^2 + (-1+4i)z + (-1-5i) = 0$$

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

para esta ecuación:

$$a = -i\,, \qquad b = -1 + 4i \qquad \text{y} \qquad c = -1 - 5i$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$z = \frac{-(-1 + 4i) \pm \sqrt{(-1 + 4i)^2 - 4(-i)(-1 - 5i)}}{2(-i)}$$

desarrollando, tenemos:

$$z = \frac{(1 - 4i) \pm \sqrt{(1 - 8i - 16) + (4i)(-1 - 5i)}}{-2i}$$

$$z = \frac{(1 - 4i) \pm \sqrt{(-15 - 8i) + (-4i + 20)}}{-2i}$$

$$z = \frac{(1 - 4i) \pm \sqrt{5 - 12i}}{-2i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Si quisiéramos transformar el complejo $5 - 12i$ que está dentro del radical, nos encontraríamos con que el ángulo θ no es un ángulo exacto, por lo que, en este caso, procederemos de la siguiente forma para obtener dicha raíz cuadrada.

Partiendo del hecho de que al extraer la raíz cuadrada de un número, lo que se obtiene son dos números, tales que, al ser elevados al cuadrado, nos da por resultado dicho número, entonces podemos plantear que:

$$(a + bi)^2 = 5 - 12i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

desarrollando el binomio, tenemos:

$$a^2 + 2abi - b^2 = 5 - 12i$$

agrupando:

$$\left(a^2 - b^2\right) + 2abi = 5 - 12i$$

por igualdad de complejos, tenemos:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ 2ab = -12 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

de (4): $$a = -\frac{6}{b} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

sustituyendo en (3):

$$\left(-\frac{6}{b}\right)^2 - b^2 = 5$$

$$\frac{36}{b^2} - b^2 = 5$$

multiplicando por b^2 en ambos lados, tenemos:

$$36 - b^4 = 5b^2$$

$$b^4 + 5b^2 - 36 = 0$$

si suponemos que $b^2 = t$, entonces la ecuación nos queda como:

$$t^2 + 5t - 36 = 0$$

$$(t - 4)(t + 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -9 \end{cases}$$

dado que t debe ser positiva pues es igual a b^2, tenemos que $t_1 = 4$ es el único valor que cumple; $t = -9$ se descarta.

Sustituyendo el valor de $t = 4$ en el cambio de variable, se tiene:

$$b^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad b = \pm 2$$

sustituyendo en (5), tenemos que:

$$a = \pm 3$$

con los valores de a y b obtenidos, se tienen cuatro números complejos que podrían ser las raíces cuadradas del número $5 - 12i$. Estos números son:

$$\begin{array}{r} 3 + 2i \\ 3 - 2i \\ -3 + 2i \\ -3 - 2i \end{array}$$

Para determinar cuáles de ellos son realmente las raíces, tendríamos que elevarlos al cuadrado y ver con cuáles obtenemos $5 - 12i$.

$$\begin{array}{rcccl} (3 + 2i)^2 & = & 9 + 12i - 4 & = & 5 + 12i \\ (3 - 2i)^2 & = & 9 - 12i - 4 & = & 5 - 12i \qquad \text{cumple} \\ (-3 + 2i)^2 & = & 9 - 12i - 4 & = & 5 - 12i \qquad \text{cumple} \\ (-3 - 2i)^2 & = & 9 + 12i - 4 & = & 5 + 12i \end{array}$$

con lo anterior, se tiene que:

$$\sqrt{5 - 12i} = \begin{cases} z_{\mathrm{I}} = 3 - 2i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ z_{\mathrm{II}} = -3 + 2i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7) \end{cases}$$

Al sustituir (6) y (7) en (2) se llegaría a las soluciones de la ecuación planteada.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Sustituyendo (6) en (2), tenemos:

$$z = \frac{(1-4i) \pm (3-2i)}{-2i}$$

con el signo positivo, tenemos que:

$$z_1 = \frac{(1-4i)+(3-2i)}{-2i} = \frac{4-6i}{-2i}$$

dividiendo, tenemos:

$$z_1 = \frac{4-6i}{-2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

con el signo negativo, se tiene:

$$z_2 = \frac{(1-4i)-(3-2i)}{-2i} = \frac{-2-2i}{-2i}$$

dividiendo, tenemos:

$$z_2 = \frac{-2-2i}{-2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

Sustituyendo (7) en (2), tenemos:

$$z = \frac{(1-4i) \pm (-3+2i)}{-2i}$$

con el signo positivo, tenemos que:

$$z_3 = \frac{(1-4i)+(-3+2i)}{-2i} = \frac{-2-2i}{-2i}$$

dividiendo:

$$z_3 = \frac{-2-2i}{-2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

con el signo negativo, se tiene:

$$z_4 = \frac{(1-4i)-(-3+2i)}{-2i} = \frac{4-6i}{-2i}$$

dividiendo:

$$z_4 = \frac{4-6i}{-2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

Como se puede apreciar, con los valores de $3-2i$ y $-3+2i$ se llegan a las mismas soluciones, por lo tanto, las soluciones a la ecuación planteada son:

$$z_1 = 3+2i$$

$$z_2 = 1-i$$

EJERCICIO 2.29 Obtenga la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1+i)\,x - i\,y = -i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ (2+3i)\,x + (1-i)\,y = i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con coeficientes complejos, se puede aplicar cualquiera de los métodos conocidos para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas con coeficientes reales, es decir, los métodos de sumas y restas, igualación, sustitución, por medio de determinantes y también empleando el método de eliminación de Gauss. El método que decidamos utilizar debe ser aquel que más facilite la obtención de la solución del sistema y esta decisión dependerá de las características que presente el sistema que queremos resolver. En este ejercicio en particular, aplicaremos el método de sustitución, dada la facilidad que se tiene de despejar "y" de la ecuación (1).

De (1) se tiene que:

$$y = \frac{-i - (1+i)x}{-i}$$

multiplicando por (-1) numerador y denominador, tenemos:

$$y = \frac{i + (1+i)x}{i}$$

realizando la división, se tiene:

$$y = \frac{i + (1+i)x}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{1 - i(1+i)x}{1}$$

$$y = 1 + (1-i)x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sustituyendo (3) en (2), tenemos:

$$(2+3i)x + (1-i)\left[1 + (1-i)x\right] = i$$

$$(2+3i)x + (1-i) + (1-i)^2 x = i$$

factorizando x :

$$\left[(2+3i) + (1-i)^2\right]x = i - (1-i)$$

$$\left[(2+3i) + (1-2i-1)\right]x = -1 + 2i$$

$$(2+i)x = -1 + 2i$$

$$x = \frac{-1+2i}{2+i}$$

realizando la división:

$$x = \frac{-1+2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{-2+i+4i+2}{4+1}$$

$$x = \frac{5i}{5} \qquad \therefore \quad x = i \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

sustituyendo (4) en (3), tenemos:

$$y = 1 + (1-i)(i) = 1 + i + 1$$

$$\therefore \quad y = 2 + i$$

con lo cual, la solución al sistema de ecuaciones es:

$$x = i$$

$$y = 2 + i$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ubique en el plano de Argand el número complejo dado o el resultado de las operaciones indicadas:

a) $3 + 4i$

b) $-4 - i$

c) $(2 \text{ cis } 30°)^2$

d) $(5 \text{ cis } 215°)(2 \text{ cis } 45°)$

e) $3 \text{ cis } 600°$

f) i^{125}

g) $\dfrac{2 + 25i}{6 + i}$

h) $\dfrac{\sqrt{-36}\,\sqrt{-49}}{\sqrt{-9}}$

2. Transforme los números complejos dados, de binómica a polar o viceversa, según corresponda:

a) $4 + 3i$

b) $\sqrt{3} - i$

c) $-2 - 2\sqrt{3}\, i$

d) $3 - 3\sqrt{3}\, i$

e) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i$

f) $0 \text{ cis } 20°$

g) $6 \text{ cis } 150°$

h) $\sqrt{3} \text{ cis } 30°$

i) $8 \text{ cis } 1260°$

3. Obtenga el número conjugado correspondiente sin realizar ninguna transformación:

a) $-2 - i$

b) $3 \text{ cis } 123°$

c) $-\sqrt{2} \text{ cis } 336°$

d) $4\, e^{\frac{3\pi}{7} i}$

e) $e^{-\frac{3\pi}{4} i}$

4. Transforme de polar a exponencial o viceversa, según sea el caso:

a) $4\, e^{\frac{\pi}{2} i}$

b) $6\, e^{\frac{2\pi}{3} i}$

c) $e^{\frac{15\pi}{6} i}$

d) $3\,e^{\frac{3\pi}{2}i}$

e) $20 \operatorname{cis} 330°$

f) $\operatorname{cis} 750°$

g) $\sqrt{3}\ \operatorname{cis} 210°$

5. Determine las raíces enésimas indicadas y represéntelas en el plano de Argand:

a) $\sqrt[3]{1}$

b) $\sqrt[5]{1+i}$

c) $\sqrt[4]{81 \operatorname{cis} 120°}$

d) $\sqrt[3]{-\dfrac{4}{1-\sqrt{3}\ i}}$

e) $\sqrt[6]{-64}$

6. Realice las siguientes operaciones:

a) $\left[-\dfrac{1}{(i)^3}\right]^2$

b) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis} 180°\right)\left(\sqrt{3}+3\,i\right)}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) $$\frac{\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}\right)(-i)}{(\,2 \text{ cis } 180° + 1 + i\,)}$$

d) $$\frac{(5-7i)\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)}{(\,6 \text{ cis } 270°\,)}$$

7. Obtenga los valores de a y/o $b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $a \text{ cis } 45° = 1 - bi$

b) $i^{30} + (a + 3i)\left(7e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)\overline{(4 \text{ cis } 135°)} = (3 + bi)\, i^{40}$

c) $\dfrac{a^2 + b^2 i}{-1 - \sqrt{3}\, i} - 2 \text{ cis } 210° = 0$

d) $2i\left(a\, e^{bi}\right) = 2 \text{ cis } 120°$

e) $(1 + 2i)\, a + (3 - 5i)\, b = 1 - 3i$

f) $(2a - b) - 10 - 4bi = 16i$

g) $2i\left(a\, e^{bi}\right) = 2 \text{ cis } 720°$

h) $\left(\dfrac{1}{2} \text{ cis } 720°\right) a + 2e^{\frac{3}{2}\pi i} = \dfrac{2 \text{ cis } 60°\left(1 - \sqrt{3}\, i\right) + (8 - 8i)\, a}{4a\,(\text{ cis } 180° + 2\,)} + 2e^{\pi i}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

i) $\left(2+2i\right)a+b\operatorname{cis}1860° = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

j) $\dfrac{\left(a-bi\right)\left(a+bi\right)}{\left(a+bi\right)^2} = \dfrac{4\operatorname{cis}120°}{a+bi}$

k) $\dfrac{2}{a}i+bi-2 = 3i-\dfrac{3}{a}+b$

l) $\dfrac{1}{a\operatorname{cis}30°} = \dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}i$

m) $\dfrac{\left(a\operatorname{cis}b\right)^6}{\left(3\operatorname{cis}210°\right)+\left(3\operatorname{cis}90°\right)} = \left(a\operatorname{cis}b\right)^2\ 27e^{\frac{5}{18}\pi i}$

8. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $a\,e^{bi} = \left(2z_1-z_3+z_4\right)\overline{z}_2$

b) $\left(a+bi\right)^2 = \dfrac{z_1^4}{z_3^3}$

con: $z_1 = -2+2i \qquad z_2 = 3\operatorname{cis}300°$

$z_3 = 4e^{\frac{1}{3}\pi i} \qquad z_4 = 8-4i$

9. Determine $z \in \mathbb{C}$ si se sabe que $w = 2\operatorname{cis}87°$ es una de sus raíces quintas y calcule las otras 4 raíces.

10. Obtenga dos números complejos que la diferencia entre ellos sea un número real, su suma tiene como parte real a 1 y su producto es $-7+i$.

11. Sea el complejo $z=(3-6i)(2-ni)$

Determine el valor de $n \in \mathbb{R}$ de tal forma que:

a) z sea un número real.

b) z sea un número imaginario puro.

12. Si $3 \text{ cis } 40°$ es el vértice de un pentágono regular. Determine los otros vértices y el número complejo cuyas raíces son dichos vértices.

13. Para cada una de las ecuaciones, obtenga el o los valores de $z \in \mathbb{C}$ que la satisfacen:

a) $$z^{-\frac{3}{2}} = \frac{z_1 z_2 - z_3}{z_1^2 - 8z_3} + z_2$$

con: $z_1 = -2\sqrt{3} \text{ cis } 30°$, $z_2 = \frac{1}{2} e^{\pi i}$ y $z_3 = \sqrt{3} \text{ cis } 90°$

b) $$z^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(3e^{\pi i} - \overline{(-3+4i)}\right)^3}{\text{cis } 135° \left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\, i\right)}$$

c) $$z^{\frac{1}{3}} = \left| \frac{(3 \text{ cis } 60.5°)(2 \text{ cis } 15.5°)}{4 \text{ cis } 31°} \right| (16 \text{ cis } 300°)^{\frac{1}{4}}$$

d) $$z^3 = \frac{\left(-1+\sqrt{3}\, i\right)(-2)(4 \text{ cis } 30°)}{4\left(1+\sqrt{3}\, i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cis } 45°\right)\left(e^{\frac{\pi}{4} i}\right)^{-1}}$$

e) $z^{\frac{3}{2}}(1+i) = \dfrac{3 \text{ cis } 180° - \overline{(-3-16i)}}{\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right) i^{17}}$

f) $\dfrac{z^3}{\sqrt{18} \text{ cis } 45° - \overline{(3+i)}} = \dfrac{-4i}{2\left(i^{21}\right)(2 \text{ cis } 60°)^3}$

g) $\left(4 e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) z^4 - \left(\sqrt{2} \text{ cis } 45°\right) = \left(3 e^{\pi i}\right) z^4 - \overline{(-2+3i)}$

h) $\sqrt[3]{8z} = \dfrac{(-2+2i)\left(6 e^{-\frac{3}{2}\pi i}\right)(-i)}{\sqrt{8} \text{ cis } 75°}$

i) $3 e^{\frac{1}{6}\pi i} - \left(\sqrt{3} + i\right) = \dfrac{8 \text{ cis } 70°}{(\text{cis } 10°)\, z^{\frac{3}{2}}}$

j) $\left(e^{\frac{1}{12}\pi i}\right)^2 \left(\dfrac{4 \text{ cis } 75°}{2 e^{\frac{1}{4}\pi i}}\right) - \overline{\left(-1+\sqrt{3}\, i\right)} = -z^{\frac{1}{3}}$

k) $i^4 = \dfrac{\overline{(\text{cis } 180°)} - \overline{\left(e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)}}{(1+i)\left(\sqrt{2} \text{ cis } 45°\right) z^{\frac{2}{3}}}$

l) $z_1 \left(z z_3\right)^2 + z_4 = z_1 + z_2$

con: $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$, $z_2 = 2 \text{ cis } 135°$, $z_3 = 5 e^{\pi i}$ y $z_4 = -50 i$

m) $$z^{3} = \frac{\left(9\, e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)\left(6 \text{ cis } 120°\right)}{-\left(-1+i+i^{3}+i^{5}\right)\left(\sqrt{2} \text{ cis } 45°\right)}$$

n) $$z^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(3\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)\left(2 \text{ cis } 180°\right)}{-\left(i+i^{2}+i^{3}+i^{4}+i^{5}+i^{6}\right)}$$

o) $$3\bar{z} = 4z + \left(\frac{2}{3} \text{ cis } 40°\right)\left(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\, i\right)^{3}\left(3 \text{ cis } 335°\right)$$

p) $$\frac{0.5\, z^{3}}{8\, e^{\frac{4}{3}\pi i}} + \frac{2 \text{ cis } 300°}{-4+0i} = 0$$

q) $$\left(-3-2i\right) z = \frac{e^{2\pi i}+\sqrt{8} \text{ cis } 45°}{-z^{2}}$$

r) $$z^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(3\sqrt{3}\, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)\left(-1+\sqrt{3}\, i\right)}{\left(-1+i\right)+\left(\sqrt{2} \text{ cis } 225°\right)}$$

s) $$\frac{z^{\frac{2}{3}} \cdot z_1 + z_2}{z_3} = z_4^{2}$$

con: $z_1 = \sqrt{12} \text{ cis } 30°, \quad z_2 = 2 \text{ cis } 240°, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$ y $z_4 = 2\, e^{\frac{9}{4}\pi i}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

t) $$z(i) = \sqrt{\frac{z\left[\overline{(-1+i)\left(\sqrt{2}\;e^{\frac{1}{4}\pi i}\right)}\right]}{(-2\operatorname{cis}270°)^3}}$$

u) $$\frac{5z^{\frac{2}{3}}}{z_1 \cdot z_2 \cdot (3-i)} = \left(\frac{10\operatorname{cis}315°}{z_3} + \frac{z_2}{z_4}\right)^3$$

con: $z_1 = \sqrt{2}\;e^{\frac{7}{4}\pi i}$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 2\operatorname{cis}135°$ y $z_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$

b) $z^2 + (5+4i)z + 10i = 0$

c) $z^2 + (-3-i)z + (2+6i) = 0$

d) $z^2 - iz - (1+i) = 0$

15. Obtenga un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado:

$$z^2 = \overline{z}$$

16. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\begin{cases} (2+i)x + 2y = 1 + 7i \\ (1-i)x + iy = 0 \end{cases}$$

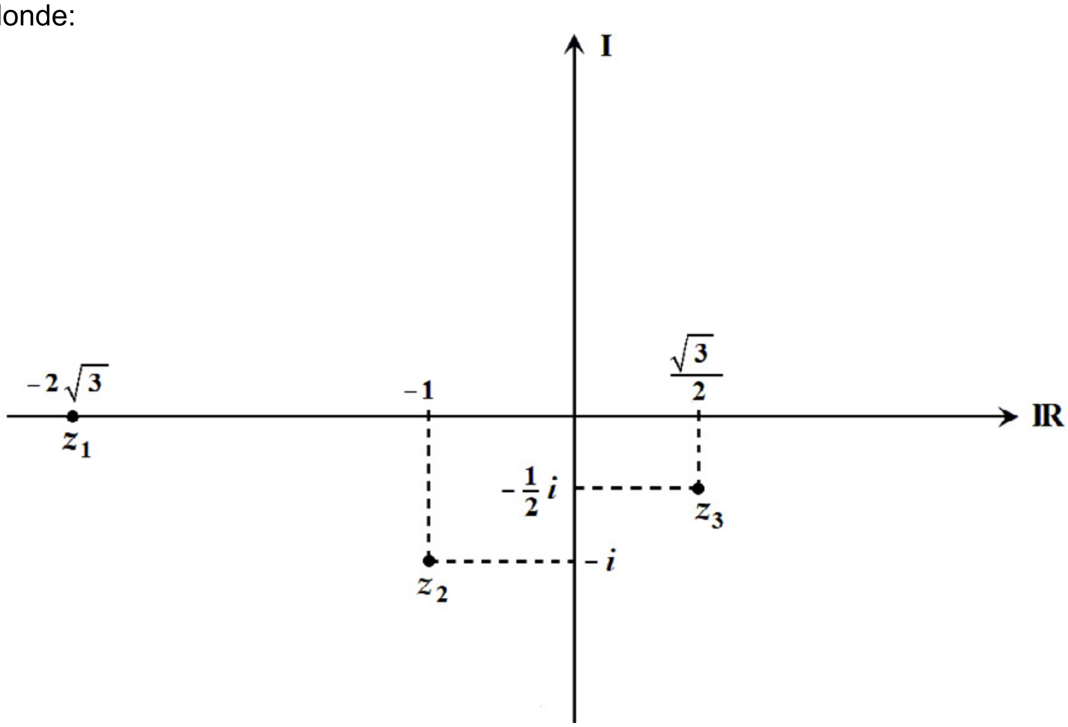
b) $$\begin{cases} (1+i)x - iy = 2 + i \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$$

c) $\begin{cases} (3-i)\,x + (-1+2i)\,y = 8+4i \\ (-1+5i)\,x + (1+i)\,y = -5+9i \end{cases}$

17. Para la ecuación:

$$\frac{z^{\frac{3}{2}}\left(z_1 + z_2^{\,2}\right)}{z_3} = 32\,e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

donde:



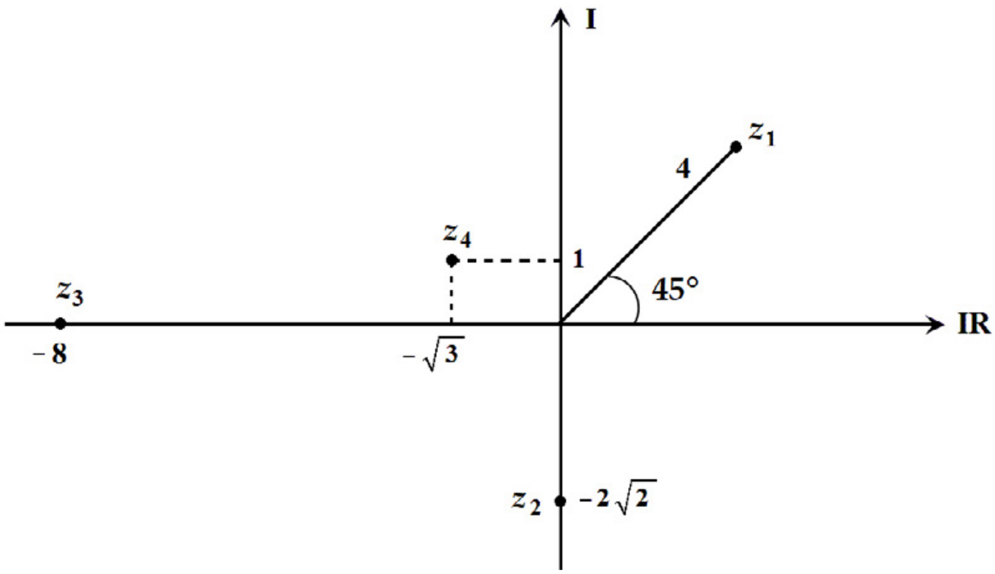
a) Obtenga el o los valores de $z \in \mathbb{C}$ que la satisfacen. Exprese su respuesta en forma polar.

b) Represente en un diagrama de Argand el o los resultados obtenidos en el inciso anterior.

18. Sea la siguiente ecuación con números complejos:

$$\frac{z\,\overline{z}_3}{z_1 + z_2} = z_4^{\,3}$$

donde:



Obtenga en forma polar, el valor de $z \in \mathbb{C}$ que satisface a la ecuación.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. a) $3 + 4i$

   b) $-4 - i$

   c) $4 \text{ cis } 60°$

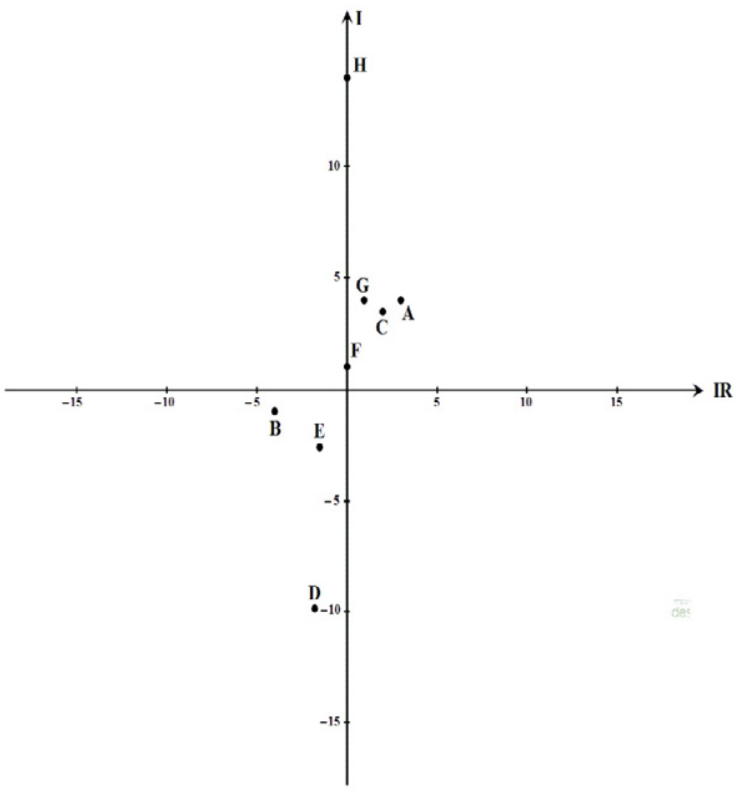
   d) $10 \text{ cis } 260°$

   e) $3 \text{ cis } 240°$

   f) i

   g) $1 + 4i$

   h) $14i$



2. a) $5 \text{ cis } 36.86°$

   b) $2 \text{ cis } 330°$

   c) $4 \text{ cis } 240°$

   d) $6 \text{ cis } 300°$

   e) $8 \text{ cis } 45°$

   f) $0 + 0i$

   g) $-3\sqrt{3} + 3i$

h) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

i) -8

3. a) $-2+i$

b) $3 \text{ cis } 237°$

c) $\sqrt{2} \text{ cis } 204°$

d) $4\,e^{\frac{11\pi}{7}i}$

e) $e^{\frac{3\pi}{4}i}$

4. a) $4 \text{ cis } 90°$

b) $6 \text{ cis } 120°$

c) $1 \text{ cis } 90°$

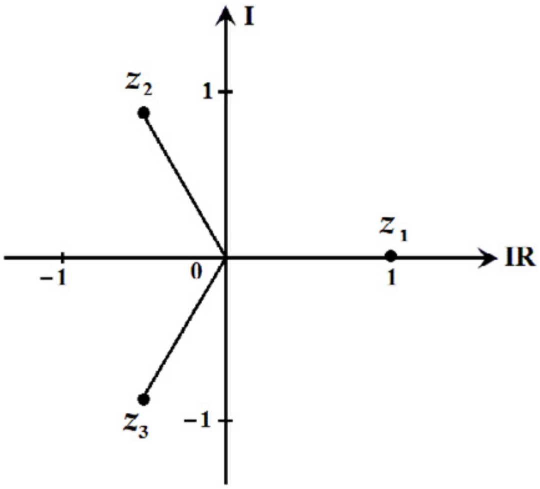
d) $3 \text{ cis } 270°$

e) $20\,e^{\frac{11\pi}{6}i}$

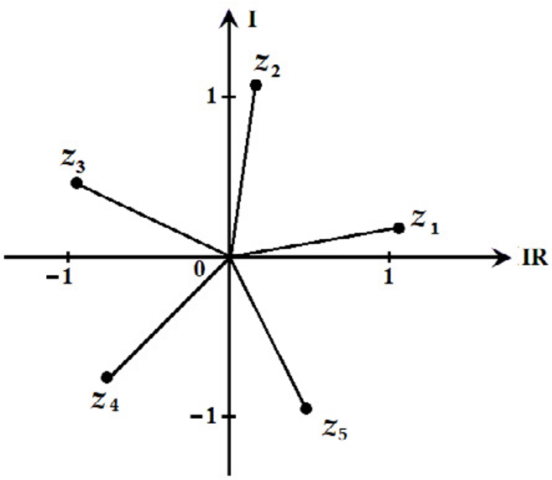
f) $e^{\frac{\pi}{6}i}$

g) $\sqrt{3}\,e^{\frac{7\pi}{6}i}$

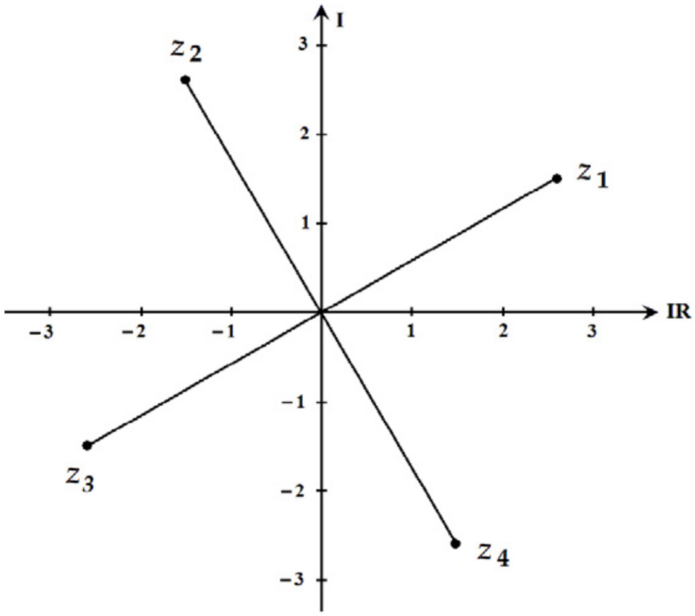
5. a) $\begin{cases} z_1 = 1 \text{ cis } 0° \\ z_2 = 1 \text{ cis } 120° \\ z_3 = 1 \text{ cis } 240° \end{cases}$



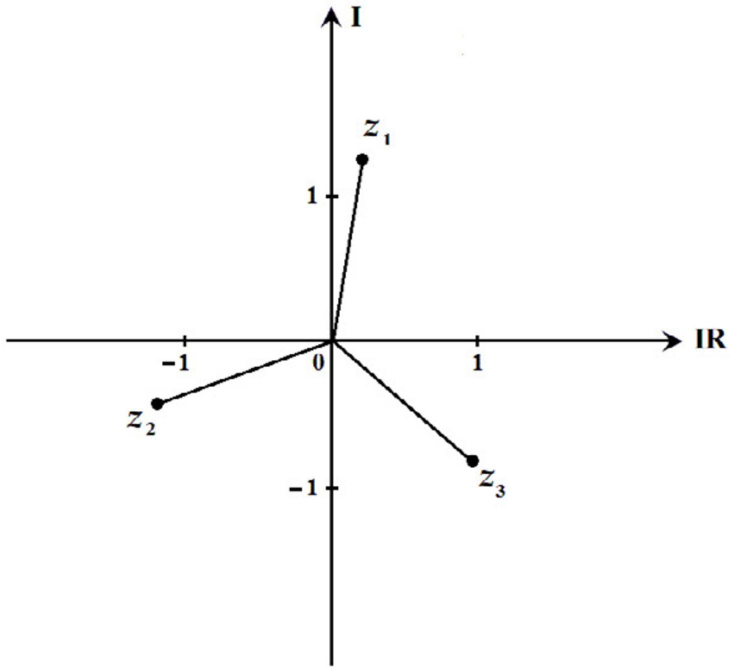
b) $\begin{cases} z_1 = \sqrt[10]{2} \text{ cis } 9° \\ z_2 = \sqrt[10]{2} \text{ cis } 81° \\ z_3 = \sqrt[10]{2} \text{ cis } 153° \\ z_4 = \sqrt[10]{2} \text{ cis } 225° \\ z_5 = \sqrt[10]{2} \text{ cis } 297° \end{cases}$



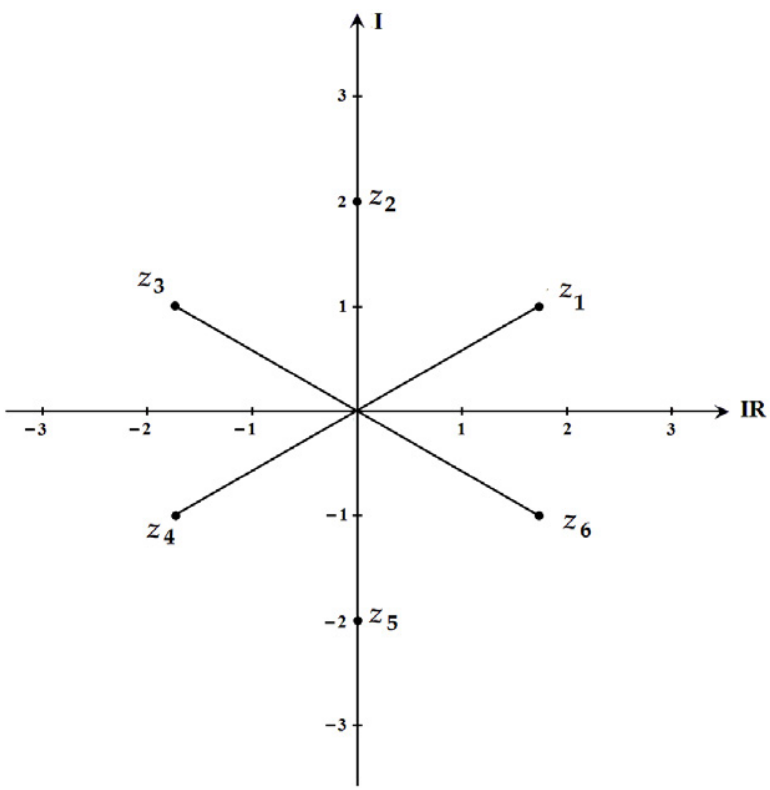
c) $\begin{cases} z_1 = 3 \text{ cis } 30° \\ z_2 = 3 \text{ cis } 120° \\ z_3 = 3 \text{ cis } 210° \\ z_4 = 3 \text{ cis } 300° \end{cases}$



d) $\begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{2} \text{ cis } 80° \\ z_2 = \sqrt[3]{2} \text{ cis } 200° \\ z_3 = \sqrt[3]{2} \text{ cis } 320° \end{cases}$



e) $\begin{cases} z_1 = 2 \text{ cis } 30° \\ z_2 = 2 \text{ cis } 90° \\ z_3 = 2 \text{ cis } 150° \\ z_4 = 2 \text{ cis } 210° \\ z_5 = 2 \text{ cis } 270° \\ z_6 = 2 \text{ cis } 330° \end{cases}$



6. a) -1

b) $\begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis } 60° \\ z_2 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis } 150° \\ z_3 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis } 240° \\ z_4 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis } 330° \end{cases}$

c) -1

d) $-2 + \frac{1}{3}i$

7. a) $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a = \frac{1}{7} \\ b = 84 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{6}\pi + 2\pi n\ ; \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

e) $\begin{cases} a = -\frac{4}{11} \\ b = \frac{5}{11} \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

f) $\begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{1}{2}\pi + 2\pi n \; ; \; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

h) $a = \pm\sqrt{2}$

i) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases}$

k) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

l) $a = 2\sqrt{3}$

m) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 50°, \; 140°, \; 230°, \; 320° \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} a = 12 \\ b = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a = 1, \ -1 \\ b = 0 \end{cases}$

9. $z = 32 \text{ cis } 75°$ y $\begin{cases} w_1 = 2 \text{ cis } 15° \\ w_2 = 2 \text{ cis } 87° \\ w_3 = 2 \text{ cis } 159° \\ w_4 = 2 \text{ cis } 231° \\ w_5 = 2 \text{ cis } 303° \end{cases}$

10. $z_1 = -2 + i \qquad z_2 = 3 + i$

11. a) $n = -4$

b) $n = 1$

12. a) $z = 243 \text{ cis } 200°$

b) $\sqrt[5]{z} = \begin{cases} z_1 = 3 \text{ cis } 40° \\ z_2 = 3 \text{ cis } 112° \\ z_3 = 3 \text{ cis } 184° \\ z_4 = 3 \text{ cis } 256° \\ z_5 = 3 \text{ cis } 328° \end{cases}$

13. a) $\begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{16} \text{ cis } 0° \\ z_2 = \sqrt[3]{16} \text{ cis } 120° \\ z_3 = \sqrt[3]{16} \text{ cis } 240° \end{cases}$

b) $\begin{cases} z_1 = 4 \text{ cis } 60° \\ z_2 = 4 \text{ cis } 180° \\ z_3 = 4 \text{ cis } 300° \end{cases}$

c) $\begin{cases} z_1 = 27 \text{ cis } 45° \\ z_2 = 27 \text{ cis } 135° \\ z_3 = 27 \text{ cis } 225° \\ z_4 = 27 \text{ cis } 315° \end{cases}$

d) $\begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \text{ cis } 90° \\ z_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \text{ cis } 210° \\ z_3 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \text{ cis } 330° \end{cases}$

e) $\begin{cases} z_1 = 4 \text{ cis } 0° \\ z_2 = 4 \text{ cis } 120° \\ z_3 = 4 \text{ cis } 240° \end{cases}$

f) $\begin{cases} z_1 = 1 \text{ cis } 30° \\ z_2 = 1 \text{ cis } 150° \\ z_3 = 1 \text{ cis } 270° \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

g) $\begin{cases} z_1 = 1 \text{ cis } 0° \\ z_2 = 1 \text{ cis } 90° \\ z_3 = 1 \text{ cis } 180° \\ z_4 = 1 \text{ cis } 270° \end{cases}$

h) -27

i) $\begin{cases} z_1 = 4 \text{ cis } 20° \\ z_2 = 4 \text{ cis } 140° \\ z_3 = 4 \text{ cis } 260° \end{cases}$

j) 64

k) $\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{2} \text{ cis } 67.5° \\ z_2 = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{2} \text{ cis } 247.5° \end{cases}$

l) $\begin{cases} z_1 = 1 \text{ cis } 67.5° \\ z_2 = 1 \text{ cis } 247.5° \end{cases}$

m) $\begin{cases} z_1 = 3 \text{ cis } 10° \\ z_2 = 3 \text{ cis } 130° \\ z_3 = 3 \text{ cis } 250° \end{cases}$

n) $\begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{18} \text{ cis } 0° \\ z_2 = \sqrt[3]{18} \text{ cis } 120° \\ z_3 = \sqrt[3]{18} \text{ cis } 240° \end{cases}$

o) $z = -64 - \dfrac{64}{7}\sqrt{3}\, i$

p) $\begin{cases} z_1 = 2 \text{ cis } 60° \\ z_2 = 2 \text{ cis } 180° \\ z_3 = 2 \text{ cis } 300° \end{cases}$

q) $\begin{cases} z_1 = 1 \text{ cis } 0° \\ z_2 = 1 \text{ cis } 120° \\ z_3 = 1 \text{ cis } 240° \end{cases}$

r) $\begin{cases} z_1 = 3 \text{ cis } 40° \\ z_2 = 3 \text{ cis } 160° \\ z_3 = 3 \text{ cis } 280° \end{cases}$

s) $\begin{cases} z_1 = 1 \text{ cis } 90° \\ z_2 = 1 \text{ cis } 270° \end{cases}$

t) $\dfrac{1}{4}\, i$

u) $\begin{cases} z_1 = 64 \text{ cis } 135° \\ z_2 = 64 \text{ cis } 315° \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

14. a) $\begin{cases} z_1 = -2 + i \\ z_2 = 1 - 2i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z_1 = -1 - 2i \\ z_2 = -4 - 2i \end{cases}$

c) $\begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = 3 - i \end{cases}$

d) $\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$

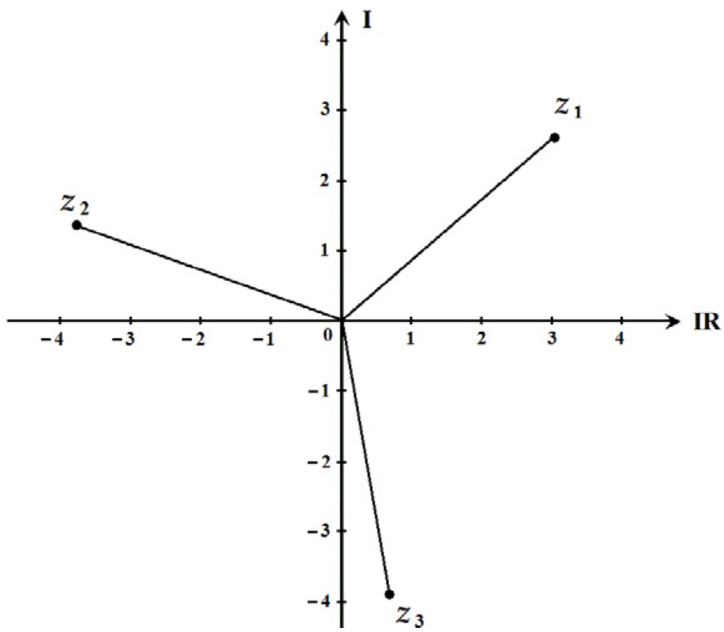
15. $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \text{ cis } 120° \\ z_3 = 3 \text{ cis } 240° \\ z_4 = 1 \text{ cis } 0° \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} x = 1 + i \\ y = 2i \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{6}{13} - \dfrac{9}{13}\, i \\ y = -\dfrac{16}{13} + \dfrac{11}{13}\, i \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 + i \\ y = 1 - i \end{cases}$

17. $\begin{cases} z_1 = 4 \text{ cis } 40° \\ z_2 = 4 \text{ cis } 160° \\ z_3 = 4 \text{ cis } 280° \end{cases}$



18. $-2\sqrt{2}\, i$

CAPÍTULO 3

POLINOMIOS

El estudio de los polinomios se puede plantear desde diferentes enfoques. Uno de ellos es considerar a los polinomios como expresiones algebraicas formadas a partir de la unión de una o varias variables y números, empleando únicamente las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, así como exponentes enteros no negativos. Como ejemplos de ellos, tenemos:

$3x^2 - 4x^2 + x - 5$ polinomio con una variable

$4xy^2 - 3x^2y^3 + 2xy$ polinomio con dos variables

Es importante señalar que, para que estas expresiones sean consideradas como polinomios se deberá tener un número finito de términos.

Otro enfoque para el estudio de los polinomios, en particular los de una sola variable, es considerarlos como funciones y no como expresiones.

También se puede hablar de las ecuaciones polinómicas de una sola variable; sin embargo, el enfoque que nosotros les daremos a los polinomios será consideraros como funciones.

Con este enfoque, la definición de un polinomio es:

Definición de polinomio

Un polinomio en x es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo, los a_i son los coeficientes del polinomio con $a_i \in \mathbb{C}$, a_n se le llama coeficiente principal y a_0 se le conoce como término independiente.

Grado de un polinomio

Se define como grado de un polinomio al exponente mayor al que aparece elevada la variable en el polinomio, siendo su coeficiente diferente de cero. Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces representamos el grado de $p(x)$ de la siguiente manera:

$$g_r(p) = n$$

EJERCICIO 3.1 Determine el grado de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = 5x^4 + 2x^3 - 3$

b) $q(x) = x^6 + 1$

c) $h(x) = 7$

d) $f(x) = 0$

SOLUCIÓN:

a) $g_r(p) = 4$

b) $g_r(q) = 6$

c) $g_r(h) = 0$

d) $f(x) = 0$ Este polinomio se le conoce como polinomio nulo y es el único polinomio que no tiene grado asociado.

Igualdad de polinomios

Sean $p(x)$ y $g(x)$ dos polinomios del mismo grado, donde:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Se tiene que:

$$p(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i \quad \forall\ i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

De acuerdo con la definición anterior, dos polinomios son iguales, si y solo si, tienen el mismo grado y son iguales los coeficientes de potencias iguales de x.

EJERCICIO 3.2 Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, con los cuales los polinomios $p(x)$ y $g(x)$ son iguales, si:

$$p(x) = ax^3 + (2b-2)x^2 + (2b+4c+6)x + 9$$

$$g(x) = (2x-3)^2$$

SOLUCIÓN:

Desarrollando el binomio al cuadrado que define a $g(x)$, tenemos:

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

como $p(x)$ y $g(x)$ deben ser iguales, se tiene:

$$ax^3 + (2b-2)x^2 + (2b + 4c + 6)x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$$

por igualdad de polinomios se llega al sistema:

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2b - 2 = 4 \\ 2b + 4c + 6 = -12 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se llega a:

$$a = 0, \quad b = 3 \quad \text{y} \quad c = -6$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Adición de polinomios

Sean los polinomios:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

La adición de $p(x) + g(x)$ se define como:

$$p(x) + g(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Es importante señalar que, en esta definición, los polinomios $p(x)$ y $g(x)$ pueden ser de diferente grado. En este caso, las potencias que no aparecen en cualquiera de ellos se consideran con coeficiente cero.

La adición de dos polinomios es una operación que resulta muy simple de realizar, lo que se debe hacer es identificar términos semejantes, es decir, aquellos que tienen la misma potencia y se deberán sumar sus coeficientes. Aquellos sumandos que no tengan términos semejantes deberán ser incluidos en el resultado de la operación, es decir, en la suma.

EJERCICIO 3.3 Con los polinomios dados, efectuar las sumas indicadas:

$$p(x) = -3x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 6$$

$$g(x) = 7x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 3x + 2$$

$$h(x) = x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4$$

a) $p(x) + g(x)$

b) $g(x) + h(x)$

c) $h(x) + g(x) + h(x)$

SOLUCIÓN:

a) Sumando términos semejantes, tenemos:

$$p(x)+g(x) = -3x^5+(4+7)x^4+(-3+2)x^3-8x^2+(2+3)x+(-6+2)$$

$$p(x)+g(x) = -3x^5+11x^4-x^3-8x^2+5x-4$$

b) $$g(x)+h(x) = x^6+2x^5+(7-4)x^4+(2-3)x^3+(-8+2)x^2+(3-1)x+(2+4)$$

$$g(x)+h(x) = x^6+2x^5+3x^4-x^3-6x^2+2x+6$$

c) $$p(x)+g(x)+h(x) = x^6+(-3+2)x^5+(4+7-4)x^4+(-3+2-3)x^3+$$
$$(-8+2)x^2+(2+3-1)x+(-6+2+4)$$

$$p(x)+g(x)+h(x) = x^6-x^5+7x^4-4x^3-6x^2+4x$$

Propiedades de la adición

Sean $p(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tres polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$.

1) Cerradura:
La adición de dos polinomios da por resultado otro polinomio llamado suma.

2) Asociatividad:

$$p(x)+[g(x)+h(x)] = [p(x)+g(x)]+h(x)$$

3) Conmutatividad:

$$p(x)+g(x) = g(x)+p(x)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

4) Elemento idéntico:

Existe un polinomio $f(x)$ con el cual se cumple que:

$$p(x) + f(x) = p(x)$$

El polinomio nulo $f(x) = 0$ es el elemento idéntico para la adición.

5) Elementos inversos:

$\forall \; p(x)$, existe un polinomio $-p(x)$, tal que:

$$p(x) + [-p(x)] = f(x)$$

siendo $f(x)$ el elemento idéntico.

6) Cancelación:

Si $p(x) + g(x) = h(x) + g(x)$, entonces $p(x) = h(x)$

Sustracción de polinomios

Sean $p(x)$ y $g(x)$ dos polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$. La sustracción $p(x) - g(x)$ se puede definir como:

$$p(x) - g(x) = p(x) + [-g(x)]$$

La sustracción de polinomios se está definiendo como la adición del polinomio $p(x)$ más el inverso aditivo de $g(x)$, es decir, como la adición del minuendo más el inverso aditivo del sustraendo, obteniendo por resultado la resta o diferencia.

Como la sustracción se está definiendo en términos de una suma, entonces dicha operación se realiza de la misma forma que la adición, es decir, obteniendo, en este caso, la resta de los coeficientes de los términos semejantes.

EJERCICIO 3.4 Si $p(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5$ y $g(x) = -4x^3 + 8x^2 - x + 2$, obtenga $p(x) - g(x)$.

SOLUCIÓN:

Como $p(x) - g(x) = p(x) + [-g(x)]$ y dado que el inverso aditivo de $g(x)$ es:

$$-g(x) = 4x^3 - 8x^2 + x - 2$$

entonces:

$$p(x) - g(x) = (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5) + (4x^3 - 8x^2 + x - 2)$$

$$\therefore \quad p(x) - g(x) = 6x^4 + x^3 - 6x^2 + x - 7$$

Multiplicación de un polinomio por un escalar

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 x$ un polinomio cualquiera y sea el escalar $\alpha \in \mathbb{C}$. La multiplicación $\alpha p(x)$ se define como:

$$\alpha p(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$

EJERCICIO 3.5 Sean el polinomio $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 + 4$ y el escalar $\alpha = -2$. Obtenga $\alpha p(x)$.

SOLUCIÓN:

$$\alpha p(x) = -2\,(3x^5 - 2x^3 + x^2 + 4)$$

$$\therefore \quad \alpha p(x) = -6x^5 + 4x^3 - 2x^2 - 8$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Propiedades de la multiplicación de un polinomio por un escalar.

Sean $p(x)$ y $g(x)$ dos polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. $\alpha\left[\beta p(x)\right] = (\alpha\beta)\, p(x)$

2. $\alpha\left[p(x) + g(x)\right] = \alpha\, p(x) + \alpha\, g(x)$

3. $(\alpha + \beta)\, p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$

4. $1 \cdot p(x) = p(x)$

Multiplicación de polinomios

Sean los polinomios:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

La multiplicación $p(x) \cdot g(x)$ se define como:

$$p(x) \cdot g(x) = p(x)\left(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right)$$

$$p(x) \cdot g(x) = p(x)\, b_m x^m + p(x)\, b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + p(x)\, b_1 x + p(x)\, b_0$$

con lo cual, el producto $p(x) \cdot g(x)$ se obtiene al realizar las multiplicaciones de $p(x)$ por cada uno de los monomios indicados y después sumar términos semejantes.

La definición anterior está basada en la aplicación de la propiedad de distributividad. Cuando se desea multiplicar dos polinomios, el método consiste en multiplicar cada uno de los términos del primer polinomio, por todos y cada uno de los términos del segundo polinomio; el proceso de multiplicación termina al sumar términos semejantes.

EJERCICIO 3.6 Obtenga $p(x) \cdot g(x)$ si:

$$p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4$$

$$g(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$$

SOLUCIÓN:

Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot g(x) &= \left(2x^4 - 3x^2 + 4\right)\left(3x^3 - x^2 + 2x - 1\right) \\ &= 2x^4\left(3x^3 - x^2 + 2x - 1\right) + \left(-3x^2\right)\left(3x^3 - x^2 + 2x - 1\right) + \\ &\quad 4\left(3x^3 - x^2 + 2x - 1\right) \end{aligned}$$

desarrollando los productos indicados, tenemos:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot g(x) &= \left(6x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 2x^4\right) + \left(-9x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 3x^2\right) + \\ &\quad \left(12x^3 - 4x^2 + 8x - 4\right) \end{aligned}$$

sumando términos semejantes, se llega a:

$$p(x) \cdot g(x) = 6x^7 - 2x^6 - 5x^5 + x^4 + 6x^3 - x^2 + 8x - 4$$

Propiedades de la multiplicación

Sean $p(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tres polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$.

1. **Cerradura:**
   La multiplicación de dos polinomios da por resultado otro polinomio llamado producto.

2. **Asociatividad:**
$$p(x) \cdot [\, g(x)\; h(x) \,] = [\, p(x)\; g(x) \,] \cdot h(x)$$

3. **Conmutatividad:**
$$p(x)\; g(x) = g(x)\; p(x)$$

4. **Elemento idéntico:**
   Existe un polinomio $f(x)$ con el cual se cumple que:
$$p(x)\; f(x) = p(x)$$
   El polinomio $f(x) = 1$ es el elemento idéntico para la multiplicación.

Si se consideran simultáneamente las operaciones de adición y multiplicación, entonces se cumple la siguiente propiedad:

Distributividad

Sean $p(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tres polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Se tiene que:

$$p(x) \cdot [\, g(x) + h(x) \,] = [\, p(x)\; g(x) \,] + [\, p(x)\; h(x) \,]$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 3.7 Sean los polinomios:

$$p(x) = x^2 - x + 2$$

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$h(x) = x^3 - 2$$

Obtenga el polinomio $f(x)$ que viene dado por:

$$f(x) = 2x^3\left[\,g(x) - p(x)\,\right] + h(x)\left[\,2p(x) + g(x)\,\right]$$

SOLUCIÓN:

Dado que las operaciones a realizar para obtener al polinomio $f(x)$ resultan un tanto extensas, se realizarán por partes dichas operaciones y los resultados obtenidos serán sustituidos en la expresión que define a $f(x)$. Se tiene que:

$$f(x) = 2x^3\left[\,g(x) - p(x)\,\right] + h(x)\left[\,2p(x) + g(x)\,\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Desarrollando $2x^3\left[\,g(x) - p(x)\,\right]$, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x^3\left[\,g(x) - p(x)\,\right] &= 2x^3\left[\left(x^3 - 2x^2 + x - 3\right) - \left(x^2 - x + 2\right)\right] \\ &= 2x^3\left(x^3 - 3x^2 + 2x - 5\right) \\ 2x^3\left[\,g(x) - p(x)\,\right] &= 2x^6 - 6x^5 + 4x^4 - 10x^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Desarrollando $h(x)\left[\,2p(x) + g(x)\,\right]$, tenemos:

$$\begin{aligned} h(x)\left[\,2p(x) + g(x)\,\right] &= \left(x^3 - 2\right)\left[\,2\left(x^2 - x + 2\right) + \left(x^3 - 2x^2 + x - 3\right)\right] \\ &= \left(x^3 - 2\right)\left[\left(2x^2 - 2x + 4\right) + \left(x^3 - 2x^2 + x - 3\right)\right] \\ &= \left(x^3 - 2\right)\left(x^3 - x + 1\right) \end{aligned}$$

ÍNDICE

1

2

3

4

5

Al desarrollar la multiplicación, se tiene:

$$\begin{aligned} h(x)\left[2p(x)+g(x)\right] &= x^3\left(x^3-x+1\right)+(-2)\left(x^3-x+1\right) \\ &= \left(x^6-x^4+x^3\right)+\left(-2x^3+2x-2\right) \end{aligned}$$

$$h(x)\left[2p(x)+g(x)\right] = x^6-x^4-x^3+2x-2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$f(x) = \left(2x^6-6x^5+4x^4-10x^3\right)+\left(x^6-x^4-x^3+2x-2\right)$$

$$\therefore \quad f(x) = 3x^6-6x^5+3x^4-11x^3+2x-2$$

División de polinomios

La división de polinomios es un proceso muy parecido al que se realiza cuando se dividen dos números enteros. Se tiene un dividendo, un divisor, un cociente y un residuo.

$$\begin{array}{r|l} & q(x) \\ \cline{2-2} g(x) & p(x) \\ & \quad r(x) \end{array}$$

donde:

$p(x) \rightarrow$ Dividendo

$g(x) \rightarrow$ Divisor

$q(x) \rightarrow$ Cociente

$r(x) \rightarrow$ Residuo

Cuando se quiere dividir dos polinomios, es importante siempre ordenar el dividendo y el divisor en potencias decrecientes de la variable. En el caso de que en el dividendo falten algunas potencias, estas deberán ser escritas con coeficiente cero.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

El proceso se inicia al colocar en el cociente el primer término que se tiene en el dividendo, pero restándole el grado del divisor. Se procede con la división como si se tratase de una división de números enteros, con la única diferencia de que, en lugar de restar al dividendo lo que resulta del producto del primer término del cociente por el divisor, a dicho producto se le cambia de signo y en lugar de efectuar una diferencia, lo que se hace es una suma de términos. Este proceso continúa hasta llegar al polinomio llamado residuo, el cual puede ser cero, o bien, un polinomio de menor grado que el del divisor.

División de polinomios

Sean $p(x)$ y $g(x)$ dos polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$, con $g(x) \neq 0$. La división $p(x) \div g(x)$ se define como:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Los polinomios $p(x)$ y $g(x)$ pueden ser de cualquier grado, incluso, que $g(x)$ sea de grado mayor que $p(x)$. En este caso, la división de $p(x) \div g(x)$ nos lleva a un proceso que no termina y el resultado de la división resulta ser una serie, es decir, una suma infinita de términos. Cuando el grado de $p(x)$ es mayor o igual al grado de $g(x)$, entonces al realizar la división se garantiza la existencia de los polinomios $q(x)$ y $r(x)$, siendo estos polinomios únicos para cualquier división.

La división de polinomios también puede ser presentada a través de un teorema llamado Algoritmo de la división.

Algoritmo de la división

> Sean $p(x)$ y $g(x)$ dos polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$, con $g(x) \neq 0$. Existen dos polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, tales que:
>
> $$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$
>
> donde $r(x) = 0$, o bien, $r(x)$ es de menor grado que el de $g(x)$. El polinomio $q(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $g(x)$.

A continuación, se ilustrará mediante un ejemplo, el método que se sigue para realizar la división de dos polinomios.

EJERCICIO 3.8 Sean:

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$$

$$g(x) = x^2 - x + 2$$

Obtenga $p(x) \div g(x)$

SOLUCIÓN:

Como el polinomio $p(x)$ carece de término de segundo grado, entonces este será escrito con coeficiente cero.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 4 \\ \hline
x^2 - x + 2 & x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 3 \\
 & \underline{-x^4 + x^3 - 2x^2} \\
 & -2x^3 - 2x^2 \\
 & \underline{2x^3 - 2x^2 + 4x} \\
 & -4x^2 + 5x \\
 & \underline{4x^2 - 4x + 8} \\
 & x + 5
\end{array}$$

Se multiplica $x^2\left(x^2 - x + 2\right)$, se cambia de signo el producto y se suman los términos.

Se multiplica $-2x\left(x^2 - x + 2\right)$, se cambia de signo el producto y se suman los términos.

Se multiplica $-4\left(x^2 - x + 2\right)$, se cambia de signo el producto y se suman los términos.

Obsérvese que el residuo $r(x) = x + 5$ es de menor grado que el divisor $g(x) = x^2 - x + 2$.

El resultado de la división se puede expresar de las siguientes dos formas:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \text{ es decir:}$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 + x - 3}{x^2 - x + 2} = \left(x^2 - 2x - 4\right) + \frac{x + 5}{x^2 - x + 2}$$

o también como $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$, esto es:

$$p(x) = \left(x^2 - x + 2\right)\left(x^2 - 2x - 4\right) + (x + 5)$$

En algunas ocasiones, al dividir $p(x) \div g(x)$ el residuo de la división resulta ser igual a cero, esto es, $r(x) = 0$. En estos casos, se dice que $p(x)$ es divisible entre $g(x)$, o también, se dice que $g(x)$ es un factor de $p(x)$, como lo establece la siguiente definición.

Divisibilidad

Definición:

Sean $p(x)$ y $g(x)$ dos polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$, con $g(x) \neq 0$. Se dice que $g(x)$ es un factor de $p(x)$, si existe un polinomio $q(x)$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, para el cual se cumple que:

$$p(x) = g(x)\, q(x)$$

se dice también que $p(x)$ es divisible entre $g(x)$.

EJERCICIO 3.9 Sean:

$$p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 6$$

$$g(x) = x + 3$$

Obtenga $p(x) \div g(x)$

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 2x^2 + 3x - 2 \\
\hline
x+3 & x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 6 \\
 & \underline{-x^4 - 3x^3} \\
 & \quad -2x^3 - 3x^2 \\
 & \quad \underline{2x^3 + 6x^2} \\
 & \qquad 3x^2 + 7x \\
 & \qquad \underline{-3x^2 - 9x} \\
 & \qquad\quad -2x - 6 \\
 & \qquad\quad \underline{2x + 6} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

Como el residuo de la división es cero, entonces podemos decir que el polinomio $p(x)$ es divisible entre $g(x)$ y también que $g(x)$ es un factor de $p(x)$. De lo anterior, podemos expresar al polinomio $p(x)$ como:

$$p(x) = q(x)\,g(x)$$

esto es:

$$p(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 3x - 2\right)(x+3)$$

Teorema del residuo

> Sea $p(x)$ un polinomio cualquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$. Si se divide $p(x)$ entre $x-c$, entonces el residuo de la división es igual a $p(c)$.

EJERCICIO 3.10 Sean $p(x)=2x^3-x^2+4x-5$ y $g(x)=x-2$. Obtenga de dos formas distintas el residuo que resulta de dividir $p(x)\div g(x)$.

SOLUCIÓN:

Un camino para obtener el residuo que nos solicitan es realizar la división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+3x+10 \\ \cline{2-2}
x-2 & 2x^3-x^2+4x-5 \\
 & \underline{-2x^3+4x^2} \\
 & \qquad\quad 3x^2+4x \\
 & \qquad\ \ \underline{-3x^2+6x} \\
 & \qquad\qquad\quad 10x-5 \\
 & \qquad\qquad\ \underline{-10x+20} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 15
\end{array}
$$

Por lo tanto, el residuo $r(x)=15$

El otro camino es haciendo uso del teorema del residuo. En este caso $c=2$, con lo cual:

$$r(x) = p(2)$$

esto es:

$$r(x)=p(2)=2(2)^3-(2)^2+4(2)-5=16-4+8-5=15$$

$$\therefore \quad r(x)=15$$

Del teorema del residuo que fue enunciado anteriormente, lo importante no es el poder calcular el residuo de la división al valuar el polinomio con el valor de "c" correspondiente; mucho más importante que el mero cálculo de residuos, son las implicaciones que tiene este teorema. Una de ellas es el teorema del factor que enunciaremos a continuación. Estos dos teoremas nos servirán de base para la obtención de las raíces de un polinomio. De esto se hablará un poco más adelante.

Teorema del factor

Sea $p(x)$ un polinomio cualquiera con coeficientes en $\mathbb{C}$.

$x - c$ es un factor de $p(x)$, si y solo si, $p(c) = 0$

El teorema del factor nos permite determinar, cuándo una expresión de la forma $x - c$ es factor de un polinomio y, como este es de primer grado, entonces estaríamos en la posibilidad de expresar a todo polinomio como el producto de sus factores lineales.

En el ejercicio 3.9 se ilustra este teorema.

División sintética

La división sintética es un método simplificado para realizar la división de un polinomio $p(x)$ entre otro de la forma $x - c$.

A la división sintética también se le conoce como el método de Ruffini, en honor al matemático, filósofo y médico italiano Paolo Ruffini (1765-1822), quien fue el creador de este método simplificado de división.

Se describirán a continuación los pasos a seguir para realizar este tipo de división.

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$

Paso 1:

Se escriben los coeficientes de $p(x)$ y el valor de c, en un arreglo como el que se muestra a continuación. Si el polinomio $p(x)$ carece de algunas potencias, se deberán escribir ceros para las potencias faltantes.

$$\begin{array}{c|cccccc|l} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \longrightarrow \text{1er. renglón} \\ c & & & & & & & \longrightarrow \text{2o. renglón} \\ \hline & & & & & & & \longrightarrow \text{3er. renglón} \end{array}$$

Paso 2:

Se baja el coeficiente a_n en la primera posición del tercer renglón del arreglo y se multiplica dicho coeficiente por el calor de c, esto es, ca_n, colocando el resultado debajo del coeficiente a_{n-1} en el segundo renglón de la división, como se ilustra a continuación:

$$\begin{array}{c|cccccc|l} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \longrightarrow \text{1er. renglón} \\ c & & ca_n & & & & & \longrightarrow \text{2o. renglón} \\ \hline & a_n & & & & & & \longrightarrow \text{3er. renglón} \end{array}$$

Paso 3:

Se realiza la suma de $a_{n-1} + ca_n$ y el resultado se escribe en el tercer renglón, como se indica:

$$\begin{array}{c|cccccc|l} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \longrightarrow \text{1er. renglón} \\ c & & ca_n & & & & & \longrightarrow \text{2o. renglón} \\ \hline & a_n & a_{n-1} + ca_n & & & & & \longrightarrow \text{3er. renglón} \end{array}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Paso 4:

Se multiplica a continuación el resultado de la suma de $a_{n-1} + ca_n$ por c y el producto se coloca debajo de a_{n-2} en el segundo renglón de la división. Se procede a sumar $a_{n-2} + c\left(a_{n-1} + ca_n\right)$, colocando el resultado en el tercer renglón.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \quad \longrightarrow \text{1er. renglón} \\
c & & ca_n & c\left(a_{n-1} + ca_n\right) & & & \quad \longrightarrow \text{2o. renglón} \\
\hline
 & a_n & \left(a_{n-1} + ca_n\right) & a_{n-2} + c\left(a_{n-1} + ca_n\right) & & & \quad \longrightarrow \text{3er. renglón}
\end{array}
$$

Paso 5:

Continuar este proceso hasta llegar a la última suma con el coeficiente a_0. El resultado que se obtiene de esta última suma es el residuo de la división.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \longrightarrow \text{1er. renglón} \\
c & & ca_n & c\left(a_{n-1}+ca_n\right) & & & \text{último producto por } c & \longrightarrow \text{2o. renglón} \\
\hline
 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{a_n \quad \left(a_{n-1}+ca_n\right) \quad a_{n-2}+c\left(a_{n-1}+ca_n\right)}_{\text{COCIENTE } = \, q(x)}} & & & \text{Residuo} = r(x) & \longrightarrow \text{3er. renglón}
\end{array}
$$

En el tercer renglón tendremos que el último número es el residuo de la división, el resto de los números corresponden a los coeficientes del cociente, el cual será de un grado menor que $p(x)$.

EJERCICIO 3.11 Empleando la división sintética, obtenga $\dfrac{p(x)}{g(x)}$ si:

$$p(x) = x^5 - x^4 + 3x^2 - 2x - 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

y $g(x)$ es igual a:

a) $g(x) = x + 2$

b) $g(x) = x + 1$

c) $g(x) = x - 2$

d) $g(x) = x - 1$

SOLUCIÓN:

Como el polinomio $g(x)$ en todos los incisos es de la forma $x - c$, entonces es posible aplicar la división sintética.

a) Obsérvese que el polinomio $p(x)$ carece de la potencia cúbica, por lo que al plantear la división sintética, el coeficiente que corresponde a x^3, deberá ser cero.

Como en este inciso $g(x) = x + 2$, entonces el valor de c será -2, pues $g(x) = x - (-2)$. Por lo tanto, la división sintética queda como:

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & -1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\
-2 & & -2 & 6 & -12 & 18 & -32 \\
\hline
 & 1 & -3 & 6 & -9 & 16 & \boxed{-33} \longrightarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

COEFICIENTES DEL COCIENTE

Con lo cual, el resultado de la división es:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \left(x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 9x + 16\right) + \frac{-33}{x+2}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Es importante resaltar el hecho que, cuando se realiza una división sintética, y de acuerdo con el teorema del residuo, lo que se está obteniendo también es el valor del polinomio $p(x)$ valuado con el valor de c, esto es:

$$p(-2) = -33$$

Dicho en otros términos, cuando realizamos una división sintética, además de realizar una división de polinomios, lo que se está obteniendo son los valores del polinomio para ciertos valores de x, es decir, se están obteniendo puntos de la gráfica del polinomio.

b) Si $g(x) = x+1$, entonces $c = -1$, con lo cual tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\
-1 & & -1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 & \boxed{2}
\end{array}$$

entonces:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \underbrace{\left(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 3\right)}_{q(x)} + \frac{2}{x+1}$$

Obsérvese que el grado del cociente $q(x)$ es un grado menor que $p(x)$.

Para esta división sintética se tiene que:

$$p(-1) = 2$$

c) Si $g(x) = x-2$, entonces en este caso $c = 2$. Realizando la división sintética, tenemos:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

	1	-1	0	3	-2	-1
2		2	2	4	14	24
	1	1	2	7	12	$\boxed{23}$

con lo cual:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \left(x^4 + x^3 + 2x^2 + 7x + 12\right) + \frac{23}{x-2}$$

y también:

$$p(2) = 23$$

d) Si $g(x) = x - 1$, entonces $c = 1$, con lo cual:

	1	-1	0	3	-2	-1
1		1	0	0	3	1
	1	0	0	3	1	$\boxed{0}$

entonces:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = x^4 + 3x + 1$$

además, que:

$$p(1) = 0$$

En este último inciso se ha llegado a un resultado muy importante, el residuo de la división es igual a cero, esto tiene varias implicaciones:

1. El polinomio $p(x)$ es divisible entre $g(x)$. Se dice en estos casos que la división de $\frac{p(x)}{g(x)}$ es una división exacta.

2. El polinomio $g(x)$ es un factor de $p(x)$, por lo que $p(x)$ se puede expresar como:

$$p(x) = q(x)\,g(x)$$

3. Si el residuo de la división sintética es cero, entonces hemos encontrado lo que se conoce como "raíz de un polinomio", que en este caso es el valor de c, es decir, 1 es una raíz de $p(x)$. A las raíces de los polinomios también se les conoce como los "ceros" del polinomio.

4. Puesto que se obtuvo que $p(1) = 0$, en términos de la gráfica del polinomio, cuando la raíz del polinomio es un número real, esto implica que se tiene un punto de corte entre la gráfica del polinomio y el eje de las abscisas. De esto se hablará con mayor profundidad y a mayor detalle un poco más adelante.

La división sintética no solo se puede utilizar con números reales, también puede ser empleada con números complejos, como se ilustrará en el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 3.12 Con los polinomios dados en cada inciso, obtenga $\frac{p(x)}{g(x)}$ mediante división sintética.

a) $p(x) = 4x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4$

$g(x) = x - i$

b) $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 4$

$g(x) = x - (1 - i)$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) $p(x) = ix^5 - (-1-i)x^4 + (-3+i)x^2 + (4+2i)x + (5-3i)$

$g(x) = x - (-1+i)$

SOLUCIÓN:

a)

	4	0	-2	3	-2	0	4
i		$4i$	-4	$-6i$	$6+3i$	$-3+4i$	$-4-3i$
	4	$4i$	-6	$3-6i$	$4+3i$	$-3+4i$	$\boxed{-3i}$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \left(4x^5 + 4ix^4 - 6x^3 + (3-6i)x^2 + (4+3i)x + (-3+4i)\right) + \frac{-3i}{x-i}$$

b)

	1	-3	0	2	-4
$1-i$		$1-i$	$-3+i$	$-2+4i$	$4+4i$
	1	$-2-i$	$-3+i$	$4i$	$\boxed{4i}$

Con lo cual tenemos:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \left(x^3 + (-2-i)x^2 + (-3+i)x + 4i\right) + \frac{4i}{x-(1-i)}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & i & 1+i & 0 & -3+i & 4+2i & 5-3i \\
-1+i & & -1-i & 0 & 0 & 2-4i & -4+8i \\
\hline
 & i & 0 & 0 & -3+i & 6-2i & \boxed{1+5i}
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \left(i\,x^4 + (-3+i)\,x + (6-2i) \right) + \frac{1+5i}{x-(-1+i)}$$

Raíces de un polinomio

A cada polinomio $p(x)$ de grado mayor o igual a uno, se le puede asociar una ecuación polinomial $p(x) = 0$, donde las soluciones de estas ecuaciones resultan ser las raíces del polinomio $p(x)$. A las raíces de un polinomio, también se les conoce como los "ceros" del polinomio.

La obtención de la solución de las ecuaciones polinomiales con una incógnita ha sido el centro de interés de los matemáticos desde la antigüedad. En el papiro del Rhind, uno de los documentos más antiguos con textos matemáticos, que data del año 1650 a.C. y escrito por el escriba Ahmes, se muestra un método de resolución general de ecuaciones de primer grado.

En el caso de las ecuaciones de segundo grado, se tienen evidencias de que los babilonios, aproximadamente en el año 1600 a.C., ya conocían un método para resolver ecuaciones de segundo grado. Este conocimiento pasó a los egipcios y los griegos. Fue Diofanto de Alejandría (¿325-409? d.C.), no se tiene certeza de los años en que vivió, considerado el padre del Álgebra, quien dio el mayor impulso al problema de la solución de ecuaciones de segundo grado; sin embargo, se le atribuye al matemático de la India Bhaskara II (1114-1185) la fórmula general tal cual la conocemos hoy día. La fórmula aparece en su libro *Siddhanta Shiromani*, escrito en el año 1150.

Al parecer, partes de sus libros provienen de matemáticos anteriores a él, por lo que se tienen ciertas dudas en cuanto a la originalidad de su aportación.

Se atribuye al matemático italiano Niccoló Fontana (1449-1557), más conocido como Tartaglia, la fórmula general para resolver ecuaciones de tercer grado, aunque existen dudas de su autoría.

Fue el matemático italiano Lodovico Ferrari (1522-1565), quien dedujo el método general para la resolución de las ecuaciones de cuarto grado.

Se tuvieron muchos esfuerzos infructuosos, de matemáticos reconocidos, por encontrar la fórmula general para la solución de las ecuaciones de quinto grado, pero no fue hasta que el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), demostró que no pueden existir fórmulas para obtener la solución de una ecuación de quinto o de mayor grado, en términos de sus coeficientes.

A pesar de la dificultad que representa obtener las raíces de un polinomio, siendo este de cuarto, quinto o mayor grado, el objetivo de esta parte del capítulo es mostrar dos técnicas que resultan muy útiles para obtener dichas raíces.

Definición:
Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado mayor o igual a uno.

Se dice que x es una raíz de $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$

El teorema fundamental del álgebra está relacionado con el estudio de los polinomios de variable compleja. Este teorema establece la existencia de raíces complejas en todo polinomio de grado mayor o igual a uno. Los orígenes de este teorema se remontan a los trabajos realizados por el matemático árabe Al-Khwarizmi (780-850 d.C.), alrededor del año 800 sobre ecuaciones.

Aproximadamente ocho siglos después, el matemático francés Albert Girard (1595-1632), en 1629 publica el libro *L'invention Nouvelle en L'Algèbre*, donde asegura, por primera vez, que todo polinomio de grado "n" tiene exactamente "n" raíces. A partir de entonces, se hicieron varios intentos fallidos por demostrar el teorema fundamental del álgebra.

El primer intento riguroso por demostrarlo, lo realizó el matemático Francés Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), quien en 1746 publicó una demostración usando un método constructivo; sin embargo, a pesar de ser un intento brillante y novedoso, dicha demostración presentó fallas de rigor matemático que hacían incompleta la demostración. De este intento, tuvieron que pasar 100 años, durante los cuales la matemática se desarrolló enormemente y surgieron tres grandes matemáticos, el suizo Leonhard Euler (1707-1783), el francés Josep-Louis Lagrange (1736-1813) y el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), conocido como el príncipe de las matemáticas. Estos tres matemáticos hicieron importantes esfuerzos en demostrar el Teorema fundamental del álgebra; sin embargo, fue Gauss quien, con apenas 22 años, en su tesis doctoral presentada en 1799, hizo tal demostración.

Leonhard Euler, en 1749, publica una demostración incompleta del teorema, basándose en una técnica de factorización de polinomios.

En 1772, Lagrange hizo algunas observaciones a la demostración planteada por Euler e hizo otra demostración del teorema; sin embargo, esta también resultó incompleta. El matemático suizo Jean Robert Argand (1768-1822), 15 años después de la demostración hecha por Gauss, en 1814 dio una demostración del teorema bastante simple, ingeniosa e inobjetable.

En 1816, Gauss da una segunda demostración del teorema, la cual es también completamente correcta y, en este mismo año da una tercera demostración, valiéndose de conceptos de la topología. Finalmente, en 1849, Gauss presenta una demostración general del teorema.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $p(x)$ de grado mayor o igual a uno, con coeficientes complejos, tiene al menos una raíz compleja.

Derivado de este teorema se tiene el siguiente:

Teorema:

Todo polinomio $p(x)$ con coeficientes complejos de grado n, con $n \geq 1$, tiene exactamente n raíces

Puede suceder que un polinomio tenga una raíz que se repite k veces, en este caso, dicha raíz debe contabilizarse k veces, es decir, las n raíces a las que se refiere el teorema anterior, no necesariamente tienen que ser raíces diferentes.

Factorización completa de un polinomio

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos de grado mayor o igual a uno, definido como:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{con} \quad a_n \neq 0$$

entonces, $p(x)$ puede ser expresado en forma factorizada como:

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son raíces de $p(x)$.

Al coeficiente a_n de la variable de mayor exponente se le conoce como coeficiente principal de $p(x)$.

De acuerdo con el teorema anterior, todo polinomio $p(x)$ de grado mayor o igual a uno, puede ser expresado como el producto de sus factores lineales, multiplicando dichos factores por el coeficiente principal.

La factorización completa de un polinomio es única, lo que sí puede cambiar es el orden en que se multiplican los factores.

EJERCICIO 3.13 Obtenga un polinomio $p(x)$ de sexto grado cuyas raíces sean:

$\alpha_1 = 1$	$\alpha_3 = i$	$\alpha_5 = 2$
$\alpha_2 = -1$	$\alpha_4 = -i$	$\alpha_6 = 2$

SOLUCIÓN:

De acuerdo con el teorema del factor y el teorema de factorización completa de un polinomio, el polinomio $p(x)$ que buscamos viene dado por:

$$p(x) = a_n (x-1)(x+1)\ (x-i)(x+i)\ (x-2)(x-2)$$

Cada uno de los factores se obtiene a partir de las raíces dadas.

Como en el enunciado del problema no se especifica nada sobre el coeficiente principal a_n, entonces a_n podría tomar cualquier valor. Si hacemos que $a_n = 1$, entonces $p(x)$ queda como:

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)(x-2)^2$$

Desarrollando los productos de binomios conjugados y el binomio al cuadrado, tenemos:

$$p(x) = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-4x+4\right)$$

de donde:

$$p(x) = \left(x^4-1\right)\left(x^2-4x+4\right)$$

$$p(x) = x^6 - 4x^5 + 4x^4 - x^2 + 4x - 4$$

Este polinomio $p(x)$ que obtuvimos, da respuesta a nuestro ejercicio; sin embargo, no es el único polinomio de sexto grado al que podemos llegar. Si nos pidieran otro polinomio de sexto grado que cumpla con las condiciones del problema, entonces sería suficiente con asignarle a a_n un valor diferente de uno, esto es, si hacemos $a_n = 2$, entonces se tendría el polinomio:

$$h(x) = 2(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)(x-2)(x-2)$$

que al desarrollar todos los productos, se llega a que:

$$h(x) = 2\left(x^6 - 4x^5 + 4x^4 - x^2 + 4x - 4\right)$$

$$\therefore \quad h(x) = 2x^6 - 8x^5 + 8x^4 - 2x^2 + 8x - 8$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Es evidente que $h(x) = 2p(x)$, pero $p(x)$ y $h(x)$ son polinomios distintos, ambos de sexto grado con las mismas raíces; sin embargo, sus gráficas son diferentes.

EJERCICIO 3.14 Sea el polinomio:

$$p(x) = x^6 + 2x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 8x + 12$$

Determine cuáles de los valores dados son raíces de $p(x)$.

$a)$ 2	$c)$ -1	$e)$ -2
$b)$ 1	$d)$ 3	$f)$ i

SOLUCIÓN:

Para determinar si un número es o no raíz de un polinomio, lo podemos hacer por varios caminos distintos, uno de ellos es por división sintética. Si al realizar la división se obtiene que el residuo es cero, entonces podemos concluir que el valor probado es raíz del polinomio, en caso de que el residuo sea diferente de cero, entonces dicho valor no es raíz. Otra alternativa sería aplicando la definición de raíz de un polinomio, es decir, valuando el polinomio con el valor deseado, si $p(\alpha) = 0$, entonces α es raíz del polinomio.

En este ejercicio aplicaremos las dos opciones.

a) Por división sintética:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & -6 & -6 & 5 & -8 & 12 \\
2 & & 2 & 8 & 4 & -4 & 2 & -12 \\
\hline
 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces 2 es raíz de $p(x)$.

b) Por definición de raíz de un polinomio:

$$p(1) = (1)^6 + 2(1)^5 - 6(1)^4 - 6(1)^3 + 5(1)^2 - 8(1) + 12$$

$$p(1) = 0$$

$\therefore$ 1 sí es raíz de $p(x)$.

c) Por división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 2 & -6 & -6 & 5 & -8 & 12 \\
-1 & & -1 & -1 & 7 & -1 & -4 & 12 \\
\hline
 & 1 & 1 & -7 & 1 & 4 & -12 & \boxed{24}
\end{array}$$

Como el residuo es diferente de cero, entonces -1 no es raíz de $p(x)$.

d) Por definición de raíz:

$$p(3) = (3)^6 + 2(3)^5 - 6(3)^4 - 6(3)^3 + 5(3)^2 - 8(3) + 12$$

$$p(3) = 729 + 486 - 486 - 162 + 45 - 24 + 12$$

$$p(3) = 600 \neq 0 \qquad \therefore \quad 3 \text{ no es raíz.}$$

e) Por división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 2 & -6 & -6 & 5 & -8 & 12 \\
-2 & & -2 & 0 & 12 & -12 & 14 & -12 \\
\hline
 & 1 & 0 & -6 & 6 & -7 & 6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\therefore$ -2 sí es raíz de $p(x)$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

f) Por definición de raíz:

$$p(i) = (i)^6 + 2(i)^5 - 6(i)^4 - 6(i)^3 + 5(i)^2 - 8(i) + 12$$

$$p(i) = -1 + 2i - 6 + 6i - 5 - 8i + 12$$

$$p(i) = 0$$

$\therefore$ i sí es raíz de $p(x)$.

Ahora que ya sabemos cómo determinar si un número es o no raíz de un polinomio, entonces la pregunta sería: ¿y cómo puedo saber cuáles son los números que debo probar? Existe un teorema que nos permite identificar qué números son los que debemos considerar para iniciar nuestra búsqueda. Este teorema resulta de mucha ayuda, pues nos permite identificar un conjunto finito de números que podrían ser raíces del polinomio; sin embargo, este teorema solo es aplicable a polinomios con coeficientes enteros. Aunque se verá más adelante que este teorema también es aplicable si el polinomio tiene coeficientes racionales.

Raíces racionales de un polinomio

Teorema:

Sea:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

un polinomio con coeficientes enteros de grado mayor o igual a uno, donde $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si el número racional $\frac{p}{q}$, reducido a su mínima expresión, es raíz de $p(x)$, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n.

Sobre este teorema es importante destacar lo siguiente:

1. El teorema no garantiza que un polinomio con coeficientes enteros necesariamente deba tener raíces racionales. Lo que sí nos proporciona son los elementos para determinar los números racionales que podrían ser raíces del polinomio, en caso de tenerlas.

2. El teorema tampoco nos proporciona un método para obtener las raíces racionales de un polinomio. El procedimiento que se sigue es un método de prueba y error mediante el uso de la división sintética y el teorema del residuo, que permite determinar cuál de los números probado es o no raíz del polinomio.

   Es importante resaltar el hecho de que, cuando un número es identificado como raíz del polinomio mediante el procedimiento descrito, dicho número no puede ser descartado como posible raíz nuevamente, dada la posibilidad de la repetición de raíces en un polinomio.

EJERCICIO 3.15 Obtenga las raíces del polinomio:

$$p(x) = 3x^5 - 5x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 4x - 4$$

SOLUCIÓN:

Lo primero que tenemos que hacer es obtener todas las posibles raíces racionales del polinomio. Para ello, se obtendrán primero los posibles numeradores (P.N.), tanto positivos como negativos, es decir, los factores del término independiente, en este caso los factores de 4, esto es:

$$\text{P.N.} \pm (1,\ 2,\ 4)$$

Los posibles denominadores (P.D.) serán todos los factores, positivos y negativos, del coeficiente a_n, es decir, los factores del coeficiente de la variable de mayor exponente, en este caso factores de 3, esto es:

$$\text{P.D.} \pm (1,\ 3)$$

Las posibles raíces racionales (P.R.R.) del polinomio $p(x)$, serán todos los posibles cocientes que se pueden obtener al dividir los posibles numeradores entre todos los posibles denominadores, esto es:

$$(\text{P.R.R.}) \pm \left(1,\ \frac{1}{3},\ 2,\ \frac{2}{3},\ 4,\ \frac{4}{3}\right)$$

Ahora que ya tenemos las posibles raíces racionales del polinomio $p(x)$, lo que sigue será ir probando cada una de ellas mediante división sintética. Recuérdese que el valor probado será raíz del polinomio, siempre y cuando, el residuo de la división sea igual a cero.

A manera de recomendación, se sugiere llevar cierto orden en los intentos con las posibles raíces racionales. Pruebe primero con los números enteros positivos, empezando con el menor de ellos, después intente con los enteros negativos y finalmente pruebe con los números fraccionarios.

No olvide que se pueden tener raíces repetidas, si un número resultó raíz, intente de nuevo con él para determinar si se trata de una raíz repetida o no.

Un poco más adelante se darán más elementos que orienten y faciliten, de manera más eficiente, la búsqueda y obtención de las raíces de un polinomio.

Continuando con el ejercicio y atendiendo a la recomendación hecha, tenemos:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & -5 & -7 & 9 & 4 & -4 \\
1 & & 3 & -2 & -9 & 0 & 4 \\
\hline
 & 3 & -2 & -9 & 0 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Como el residuo es igual a cero, entonces $\alpha_1 = 1$ es raíz de $p(x)$.

Por el teorema del factor, $(x-1)$ es un factor de $p(x)$, con lo cual $p(x)$ se puede expresar como:

$$p(x) = q_1(x)(x-1)$$

Al polinomio $q_1(x)$ se le conoce como polinomio reducido y su grado es menor en una unidad que el polinomio $p(x)$. Los coeficientes de $q_1(x)$ corresponden a los números del tercer renglón de la división sintética, con lo cual se tiene que:

$$q_1(x) = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$$

Las raíces de $q_1(x)$ son las cuatro raíces que nos falta obtener del polinomio $p(x)$.

Obsérvese que para el polinomio $q_1(x)$ los coeficientes a_n y a_0 son 3 y 4 respectivamente, con lo cual, las posibles raíces racionales para $q_1(x)$ son exactamente las mismas que se obtuvieron para $p(x)$, por lo que 1 vuelve a ser una posible raíz de $q_1(x)$, es decir, a pesar de que 1 fue raíz de $p(x)$, también podría serlo para $q_1(x)$.

Continuando con el ejercicio, obtengamos las cuatro raíces restantes de $p(x)$, utilizando para ello los coeficientes del polinomio reducido $q_1(x)$.

Probemos el siguiente número entero positivo:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -2 & -9 & 0 & 4 \\
2 & & 6 & 8 & -2 & -4 \\
\hline
 & 3 & 4 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 2
$$

Con lo que $(x-2)$ es otro factor de $p(x)$ y este puede ser expresado como:

$$p(x) = q_2(x)(x-1)(x-2)$$

donde:

$$q_2(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$$

Para continuar con la obtención de las raíces de $p(x)$, debemos utilizar los polinomios reducidos que vayan surgiendo, hasta que este sea de segundo grado y obtengamos las raíces faltantes mediante factorización, por despeje o aplicando la fórmula para ecuaciones de segundo grado.

Probemos ahora el siguiente número entero positivo, es decir, 4.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & & 12 & 64 & 252 \\ \hline & 3 & 16 & 63 & \boxed{250} \end{array}$$

Como el residuo es diferente de cero, entonces 4 no es raíz de $p(x)$.

De las posibles raíces racionales obtenidas para $p(x)$, ya hemos probado todos los valores enteros positivos, entonces, de acuerdo con la recomendación hecha, pasaremos a probar los valores enteros negativos. Iniciemos con -1:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & & -3 & -1 & 2 \\ \hline & 3 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = -1$$

Con lo cual, el polinomio reducido es:

$$q_3(x) = 3x^2 + x - 2$$

Como $q_3(x)$ ya es un polinomio de segundo grado, entonces obtengamos las raíces faltantes por factorización. Si la factorización de $q_3(x)$ no resultara fácil, entonces tendríamos que aplicar la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

Aplicando el método de las tijeras de factorización, tenemos:

$$q_3(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{ccccc} 3x & & -2 & — & -2x \\ & \times & & & \\ x & & 1 & — & \dfrac{3x}{x} \end{array}$$

entonces:

$$q_3(x) = (3x - 2)(x + 1)$$

si igualamos a cero cada factor, se tiene que:

$$3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3} \qquad \therefore \quad \alpha_4 = \frac{2}{3}$$

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \qquad \therefore \quad \alpha_5 = -1$$

con lo cual, las raíces de $p(x)$ son:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -1, \quad \alpha_4 = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \alpha_5 = -1$$

Obsérvese que -1 es una raíz que se repite, en este caso se dice que -1 es una raíz de multiplicidad dos.

Si en el enunciado del ejercicio nos hubieran pedido expresar el polinomio $p(x)$ como el producto de sus factores lineales, entonces se tendrían las siguientes dos posibilidades:

Primera posibilidad:

Con las raíces obtenidas y de acuerdo con el teorema de factorización completa de un polinomio, tenemos que:

$$p(x) = 3(x-1)(x-2)(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)$$

Segunda posibilidad:

Al multiplicar el coeficiente 3 de la variable de mayor exponente por el cuarto factor, tenemos:

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+1)(3x-2)(x+1)$$

Gráfica de un polinomio

El trazo de la gráfica de un polinomio resulta de mucha utilidad para comprender mejor el concepto de raíz de un polinomio, cuando esta es un número real. Si una de las raíces de un polinomio $p(x)$ es un número real, entonces dicho valor resulta ser la abscisa al origen del polinomio $p(x)$, es decir, la raíz nos representa un punto de intersección de la gráfica del polinomio con el eje x. Como la gráfica de un polinomio se traza en el plano real xy, entonces las raíces complejas del polinomio no se ven reflejadas en dicha gráfica.

La gráfica de un polinomio $p(x)$ de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con coeficientes reales, tiene las siguientes características:

1. Si $p(x) = a_0$, es decir, si $p(x)$ es igual a una constante, entonces su gráfica es una línea recta horizontal que corta al eje y en el punto $(0, a_0)$.

2. Si $p(x) = a_1 x + a_0$, es decir, si $p(x)$ es un polinomio de primer grado, entonces su gráfica es una línea recta con cierta inclinación.

3. Si $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, es decir, si $p(x)$ es un polinomio de segundo grado, entonces su gráfica será una parábola cuya concavidad dependerá del signo del coeficiente a_2. Si $a_2 > 0$, entonces la parábola será cóncava hacia arriba y si $a_2 < 0$, la parábola será cóncava hacia abajo.

4. Si $p(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual a tres, entonces su gráfica resulta ser una curva suave, continua y sin esquinas.

Las gráficas de los polinomios de grado $n \geq 3$ tienen dos ramas, que llamaremos rama izquierda y rama derecha.

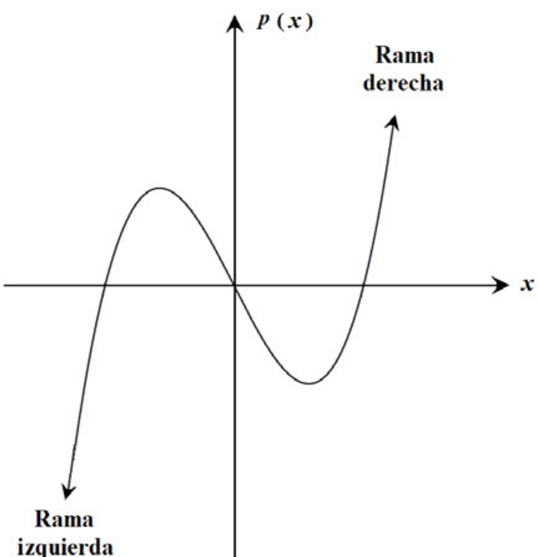


FIGURA 1

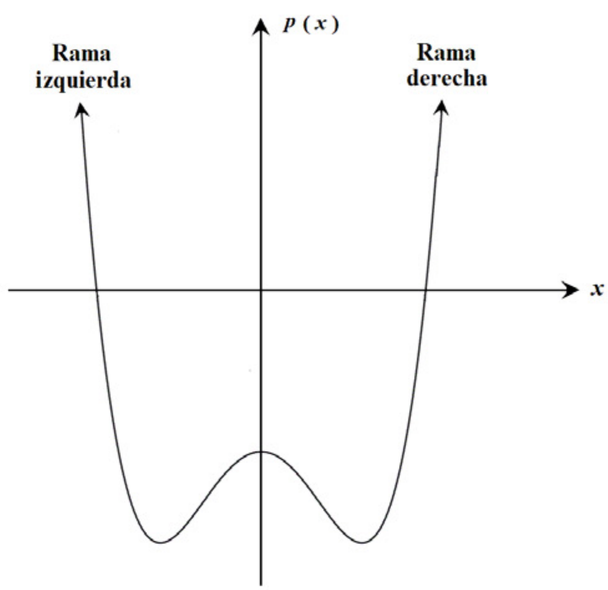


FIGURA 2

Si $p(x)$ es un polinomio de grado impar, entonces sus dos ramas apuntan en direcciones opuestas, como se ilustra en la figura 1. Si la rama de la izquierda apunta hacia abajo, entonces la rama de la derecha debe apuntar hacia arriba y viceversa.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Si $p(x)$ es un polinomio de grado par, entonces sus dos ramas apuntan en la misma dirección, como se ilustra en la figura 2. En este caso, ambas ramas apuntan hacia arriba; sin embargo, ambas ramas podrían apuntar hacia abajo, todo dependerá del signo del coeficiente a_n. Si $a_n > 0$, entonces ambas ramas apuntarán hacia arriba, si $a_n < 0$ ambas ramas apuntarán hacia abajo.

La forma que presenta la gráfica de un polinomio de grado $n \geq 3$, queda determinada por el término de mayor grado, esto es, por el término $a_n x^n$. Si el valor de $|x|$ crece indefinidamente, entonces el $|a_n x^n|$ también crece indefinidamente y este término se hará más grande que la suma de todos los otros términos del polinomio; por consiguiente, la forma que toma la gráfica del polinomio $p(x)$, queda determinada por la forma que tomaría un polinomio cuyo único término fuera $a_n x^n$. De lo anterior y como una conclusión general sobre la gráfica de un polinomio $p(x)$ de grado $n \geq 3$, podemos afirmar lo siguiente:

a) Si n es par y $a_n > 0$, entonces la gráfica de $p(x)$ tendrá sus dos ramas apuntando hacia arriba.

b) Si n es par y $a_n < 0$, entonces la gráfica de $p(x)$ tendrá sus dos ramas apuntando hacia abajo.

c) Si n es impar, entonces la gráfica $p(x)$ tendrá una de sus ramas apuntando hacia abajo y la otra hacia arriba.

Otro aspecto que debemos cuidar al trazar la gráfica de un polinomio es cuando se tienen raíces repetidas. Supongamos que el polinomio $p(x)$ tiene como factor a $(x - \alpha)^m$, donde α es un número real y m es un entero positivo, entonces la gráfica $p(x)$ presenta las siguientes características:

- Si m es par, la gráfica de $p(x)$ toca al eje x en el valor de α, pero no lo cruza. Véanse las figuras 3 y 4.

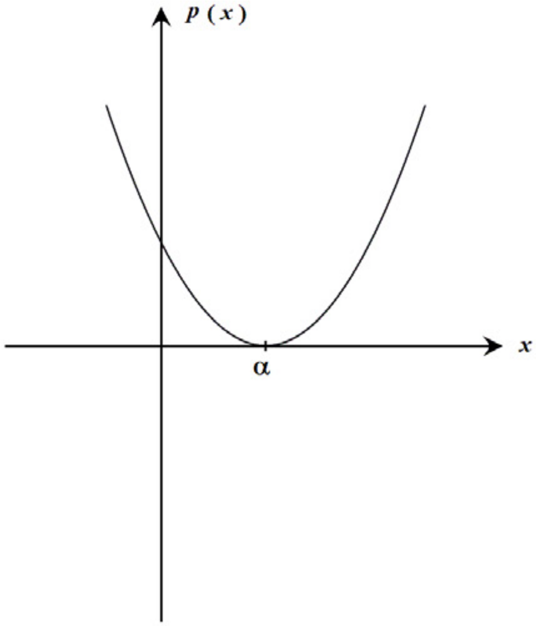


FIGURA 3

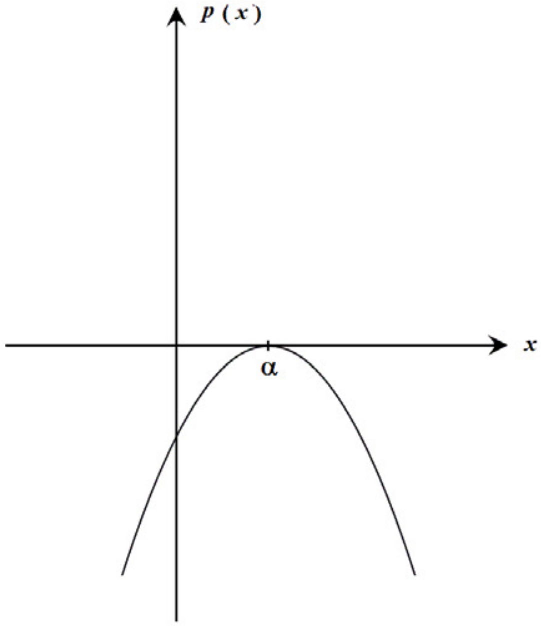


FIGURA 4

- Si m es impar, la gráfica de $p(x)$ cruza al eje x justo en el valor de α. Véanse las figuras 5 y 6.

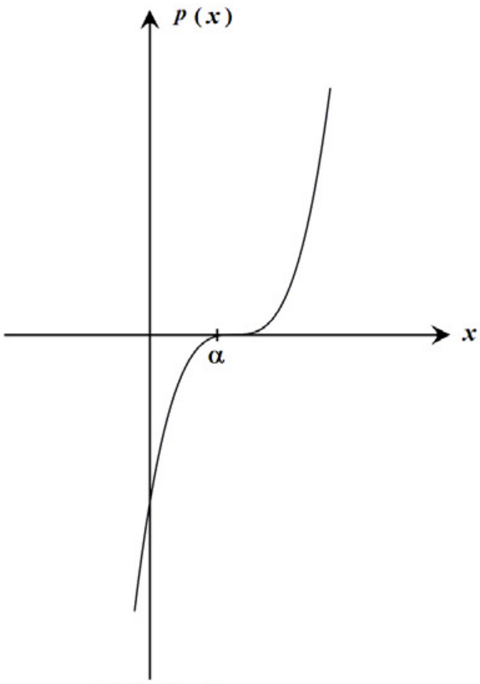


FIGURA 5

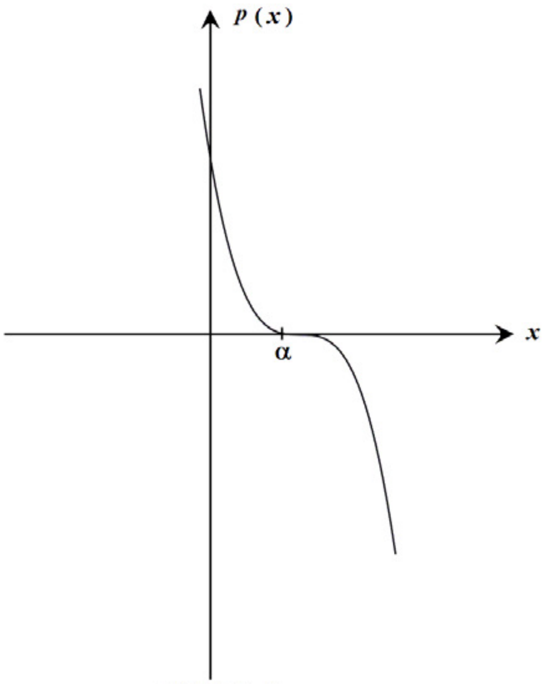


FIGURA 6

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Un aspecto más que puede resultar de mucha utilidad al trazar la gráfica de un polinomio es el punto donde la gráfica corta al eje y, es decir, la ordenada al origen $(0, b)$. Con este punto y las raíces más cercanas al origen de coordenadas, podemos darnos una idea muy clara de cómo iniciar el trazo de la gráfica del polinomio; siempre y cuando, el polinomio no tenga como una de sus raíces a cero. Si así fuera, entonces lo que podemos hacer es determinar las coordenadas de un punto de la gráfica, por ejemplo, cuando $x = 1$ o $x = -1$ y, con ese punto y las raíces cercanas, podríamos iniciar con el trazo de la gráfica del polinomio.

Cuando queremos trazar la gráfica de un polinomio $p(x)$, debemos tomar en cuenta los siguientes aspectos que nos podrían ser de mucha utilidad.

1) Fíjese en el grado del polinomio y en el signo del coeficiente de la variable de mayor exponente. Estos dos datos nos proporcionan mucha información acerca de la forma que puede tener la gráfica del polinomio.

2) Obtenga todas las raíces reales del polinomio $p(x)$. Estas raíces serán los puntos de corte o contacto de la gráfica del polinomio con el eje x.

3) Determine la ordenada al origen de $p(x)$. Punto de corte del polinomio con el eje y.

4) Fíjese si se tienen raíces repetidas y si esta repetición es par o impar. En caso de que así sea, asegúrese de que el trazo de la gráfica en dichas raíces corresponda con el número de repetición que se tenga.

5) En caso de ser necesario, apóyese en los puntos obtenidos de la gráfica cuando se hacen divisiones sintéticas con el polinomio $p(x)$. Las divisiones sintéticas que se realizan con los polinomios reducidos, no corresponden con puntos de la gráfica del polinomio $p(x)$.

6) Con todos los elementos anteriores, trace la gráfica del polinomio $p(x)$, cuidando que su trazo corresponda a una curva suave y continua.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 3.16 Sea el polinomio:

$$p(x) = x^6 - x^5 - 14x^4 + 8x^3 + 64x^2 - 16x - 96$$

a) Obtenga las raíces de $p(x)$.

b) Trace, en forma aproximada, la gráfica de $p(x)$.

SOLUCIÓN:

a) Obtengamos las posibles raíces racionales de $p(x)$:

$$\text{P.N.} \pm (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32,\ 48,\ 96)$$

$$\text{P.D.} \pm (1)$$

$$\text{P.R.R.} \pm (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32,\ 48,\ 96)$$

Probando las posibles raíces con división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & -1 & -14 & 8 & 64 & -16 & -96 \\
1 & & 1 & 0 & -14 & -6 & 58 & 42 \\
\hline
 & 1 & 0 & -14 & -6 & 58 & 42 & \boxed{-54}
\end{array}$$

Por lo tanto, 1 no es raíz.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

	1	-1	-14	8	64	-16	-96	
2		2	2	-24	-32	64	96	
	1	1	-12	-16	32	48	0	$\Rightarrow \alpha_1 = 2$
2		2	6	-12	-56	-48		
	1	3	-6	-28	-24	0		$\Rightarrow \alpha_2 = 2$
3		3	18	36	24			
	1	6	12	8	0			$\Rightarrow \alpha_3 = 3$
-2		-2	-8	-8				
	1	4	4	0				$\Rightarrow \alpha_4 = -2$
-2		-2	-4					
	1	2	0					$\Rightarrow \alpha_5 = -2$
-2		-2						
	1	0						$\Rightarrow \alpha_6 = -2$

De las seis raíces de $p(x)$, el 2 se repite con multiplicidad par y el -2 se tiene en tres ocasiones, es decir, es una raíz con multiplicidad impar.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) En relación con el trazo de la gráfica de $p(x)$, podemos señalar lo siguiente:

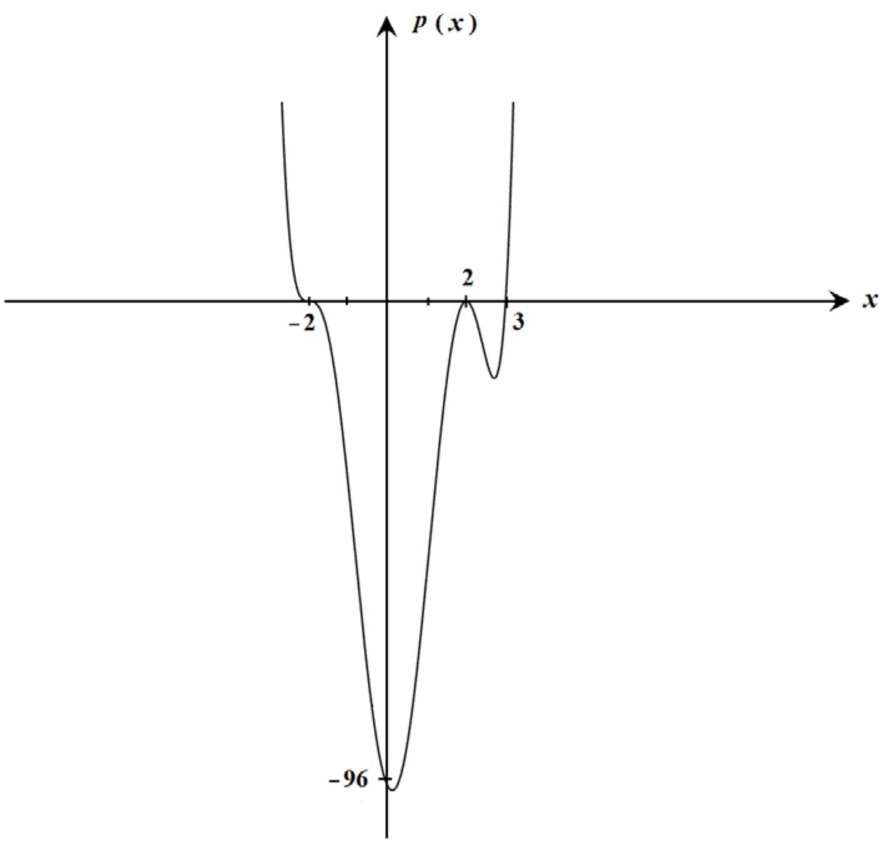
1) Como el grado de $p(x)$ es par y a_n es positivo, entonces ambas ramas de la gráfica apuntan hacia arriba.

2) La ordenada al origen es -96.

3) En la raíz -2, por tener multiplicidad impar, se tendrá un punto de tangencia con corte.

4) En la raíz 2, por tener multiplicidad par, se tendrá un punto de tangencia sin cruce.

Con estos elementos podemos trazar, en forma aproximada y con cierta facilidad, la gráfica de $p(x)$.



Nota: La escala utilizada en los ejes cartesianos es distinta.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

En esta tarea de obtener las raíces de un polinomio, lo que tenemos hasta ahora, es el teorema con el cual podemos determinar las posibles raíces racionales de un polinomio y la división sintética que nos permite identificar si un número es o no raíz. Este método de prueba y error es muy útil; sin embargo, existen algunos teoremas que nos pueden facilitar la búsqueda y obtención de las raíces de un polinomio. A continuación, enunciaremos dichos teoremas.

Teorema:

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si a y b son dos números reales con $a < b$ y $p(a)$, $p(b)$ tienen signos contrarios, entonces $p(x)$ tiene por lo menos una raíz real α entre a y b.

Dado que las gráficas de los polinomios con coeficientes reales son curvas continuas, esta condición obliga a que la gráfica de $p(x)$ cruce al eje x en algún punto entre a y b.

El intervalo donde se encuentran las raíces de un polinomio con coeficientes reales se puede reducir si somos capaces de obtener las cotas superior e inferior de dichas raíces. Esta posibilidad de acotar superior e inferiormente el intervalo puede resultar de mucha utilidad, pues además de reducirlo, también nos da la posibilidad de eliminar algunas de las posibles raíces, sin que estas sean probadas con división sintética.

Para determinar las cotas superior e inferior de las raíces de un polinomio, se usa la división sintética. Recuérdese que los números que se tienen en el tercer renglón de la división sintética son los coeficientes del cociente, además del residuo de la división.

Cotas de las raíces de un polinomio

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales y cuyo coeficiente principal a_n sea positivo.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{con} \quad a_n > 0$$

Al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$ mediante división sintética, se tiene que:

1) Si $\alpha > 0$ y no existen números negativos en el tercer renglón de la división sintética, entonces α es cota superior de las raíces reales de $p(x)$.

2) Si $\alpha < 0$ y los números del tercer renglón son alternadamente positivos y negativos, entonces α es cota inferior de las raíces reales de $p(x)$. Los ceros en este tercer renglón podrán considerarse positivos o negativos, según convenga, con el fin de lograr los signos alternados.

Cuando un polinomio tiene coeficientes reales, o bien coeficientes racionales, las raíces complejas y las raíces irracionales de cierta forma, siempre se presentan por pares, una conjugada de la otra como se establece en el siguiente teorema.

Raíces complejas conjugadas de un polinomio

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

Si $\alpha = a + bi$ con $b \neq 0$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\overline{\alpha} = a - bi$ también es raíz de $p(x)$.

Como una consecuencia inmediata de este teorema, se tiene otro que establece lo siguiente:

Teorema:

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado impar, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz real.

Cuando un polinomio tiene coeficientes racionales, entonces las raíces irracionales también se presentan por pares como lo establece el siguiente teorema.

Raíces irracionales conjugadas de un polinomio

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes racionales.

Si el número $a + b\sqrt{c}$ es raíz de $p(x)$, siendo a, b y c números racionales y $\sqrt{c}$ un irracional, entonces $a - b\sqrt{c}$ es también raíz de $p(x)$.

Regla de los signos de Descartes

La regla de los signos de Descartes fue propuesta por el filósofo, matemático y físico francés René Descartes (1596-1650), considerado el padre de la Geometría Analítica. En 1637, Descartes publica su obra *Géométrie*, un breve tratado incluido en el *Discurso del Método*, donde enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos de Descartes. En 1707, el inglés Isaac Newton (1642-1727) reformuló dicha regla, aunque tampoco dio una demostración de esta. Durante casi dos siglos, los matemáticos de la época intentaron demostrarla sin éxito. Finalmente, en 1828, el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) la demuestra de manera general.

Esta regla nos permite obtener información muy valiosa en cuanto al número de raíces reales positivas y negativas de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales. Este teorema de la regla de los signos de Descartes no nos da información sobre qué números son o podrían ser raíces del polinomio, más bien nos proporciona información sobre cuántas raíces reales positivas o negativas podría tener el polinomio $p(x)$.

El teorema establece tres condiciones para poder ser aplicado:

1. El polinomio $p(x)$ debe tener coeficientes reales.

2. El polinomio $p(x)$ debe estar ordenado en potencias decrecientes de la variable. Las potencias con coeficiente cero se omiten al escribir el polinomio.

3. El término independiente del polinomio debe ser distinto de cero, esto es, $a_0 \neq 0$.

Esta regla se basa en contar los cambios de signo en los coeficientes de los polinomios $p(x)$ y $p(-x)$, es decir, en el número de cambios de signo en coeficientes consecutivos de ambos polinomios. Los cambios de signo en $p(x)$, nos indicarán el número máximo de raíces reales positivas que puede tener $p(x)$, en tanto que, el número de cambios de signo en $p(-x)$, nos indica el número máximo de raíces reales negativas que puede tener $p(x)$. Lo anterior queda expresado en el siguiente teorema.

TEOREMA (Regla de los signos de Descartes)

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales ordenado en potencias decrecientes de la variable.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{con} \quad a_0 \neq 0$$

1) El número de raíces rales positivas de $p(x)$ es igual al número de cambios de signo en $p(x)$, o menor que este número en un número par.

2) El número de raíces reales negativas de $p(x)$ es igual al número de cambios de signo en $p(-x)$, o menor que este número en un número par.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

RAÍCES NULAS DE UN POLINOMIO

Si en un polinomio $p(x)$ se tiene que su término independiente es igual a cero, esto es, $a_0 = 0$, entonces dicho polinomio tendrá raíces nulas. En este caso, $p(x)$ tendrá tantas raíces nulas como el menor exponente de la variable con coeficiente diferente de cero. De lo anterior, podemos concluir que todo polinomio cuyo término independiente sea diferente de cero, esto es, $a_0 \neq 0$, no tendrá raíces nulas

EJERCICIO 3.17 Obtenga las raíces del polinomio:

$$p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3$$

SOLUCIÓN:

Dado que en $p(x)$ su término independiente es igual a cero, entonces podemos afirmar que $p(x)$ tiene raíces nulas. Dado que la menor potencia de x es 3, entonces $p(x)$ tendrá 3 raíces nulas.

Factorizando x^3 en $p(x)$, tenemos:

$$p(x) = x^3 (x^2 + x - 2)$$

de donde:

$$p(x) = x^3 (x - 1)(x + 2)$$

la x^3 podemos expresarla como:

$$p(x) = x\ x\ x\ (x - 1)(x + 2)$$

o bien:

$$p(x) = (x - 0)(x - 0)(x - 0)(x - 1)(x + 2)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

con lo cual, las raíces de $p(x)$ son:

$$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_4 = 1$$

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_5 = -2$$

$$\alpha_3 = 0$$

EJERCICIO 3.18 Sea el polinomio:

$$p(x) = x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 10x^4 - 31x^3 + 13x^2 + 28x - 20$$

a) Aplique la regla de los signos de Descartes y dé toda la información posible en cuanto al número de raíces positivas, negativas y complejas de $p(x)$.

b) Obtenga las raíces de $p(x)$.

c) Trace, en forma aproximada, la gráfica de $p(x)$.

SOLUCIÓN:

a) Dado que $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, ordenando en potencias decrecientes de la variable y su término independiente es diferente de cero, entonces es aplicable la regla de los signos de Descartes.

Determinemos primero el número de cambios de signo en $p(x)$.

$$p(x) = x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 10x^4 - 31x^3 + 13x^2 + 28x - 20$$

Se tienen 5 cambios de signo, en consecuencia, en $p(x)$ se pueden tener 5, 3 o 1 raíces reales positivas.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Determinemos ahora el número de cambios de signo en $p(-x)$.

$$p(-x) = (-x)^7 - 3(-x)^6 + 2(-x)^5 + 10(-x)^4 - 31(-x)^3 + 13(-x)^2 + 28(-x) - 20$$

de donde:

$$p(-x) = -x^7 - 3x^6 - 2x^5 + 10x^4 + 31x^3 + 13x^2 - 28x - 20$$

Se tienen 2 cambios de signo, entonces en $p(x)$ se pueden tener 2 o ninguna raíz negativa.

Para poder dar toda la información posible sobre las raíces de $p(x)$, debemos tener en cuenta que la suma de las raíces positivas, negativas y complejas, siempre deberá ser igual a 7, puesto que el grado de $p(x)$ es 7. Entonces, para determinar el número posible de raíces complejas, se obtiene la diferencia entre 7 y la suma de las posibles raíces positivas y negativas.

De acuerdo con todo lo anterior, la información solicitada en cuanto al número de raíces reales positivas, negativas y complejas, la podemos dar en la siguiente tabla:

	$1a.$	$2a.$	$3a.$	$4a.$	$5a.$	$6a.$
Raíces $\mathbb{R}^+$	5	3	1	5	3	1
Raíces $\mathbb{R}^-$	2	2	2	0	0	0
Raíces complejas	0	2	4	2	4	6
Total	7	7	7	7	7	7

Para la elaboración de esta tabla, se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Colocar en la primera columna de las posibilidades, el número de cambios de signo detectados en $p(x)$ y $p(-x)$, y completar, de ser el caso, con el número de raíces complejas, de tal manera que la suma de todas ellas dé el total de raíces que puede tener el polinomio $p(x)$.

2. Formar las siguientes alternativas, reduciendo las posibles raíces reales positivas de dos en dos hasta donde sea posible, pero sin modificar el número de las posibles raíces reales negativas. Esta reducción del número de raíces positivas deberá verse compensado con el incremento del número de las posibles raíces complejas, de tal manera que siempre se tenga el mismo número total de raíces.

3. Concluido el paso anterior, se deberá colocar de nueva cuenta, como siguiente posibilidad, el número inicial de raíces reales positivas, pero ahora reduciendo el número de las posibles raíces reales negativas, también de dos en dos, hasta donde sea posible, completando el total con el número de raíces complejas.

4. Las últimas alternativas que aparecen en la tabla, se deberán obtener al reducir, de dos en dos, tanto las posibles raíces positivas, como las negativas.

b) Para obtener las raíces de $p(x)$, debemos obtener primero los posibles numeradores, los posibles denominadores y las posibles raíces racionales de $p(x)$.

Posibles numeradores: $\pm(1, 2, 4, 5, 10, 20)$

Posibles denominadores: $\pm(1)$

Posibles raíces racionales: $\pm(1, 2, 4, 5, 10, 20)$

De acuerdo con la información que se tiene en la tabla de la regla de los signos de Descartes, $p(x)$ tiene por lo menos una raíz positiva, entonces empezaremos a probar con los valores positivos.

Probando con 1, tenemos:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & -3 & 2 & 10 & -31 & 13 & 28 & -20 \\
1 & & 1 & -2 & 0 & 10 & -21 & -8 & 20 \\
\hline
 & 1 & -2 & 0 & 10 & -21 & -8 & 20 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Dado que existen números negativos en el tercer renglón de la división sintética, entonces 1 no es cota superior de las raíces de $p(x)$, por lo que pueden existir otras raíces positivas mayores que 1.

Probando con 2, pero considerando los coeficientes del polinomio reducido, tenemos:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & -2 & 0 & 10 & -21 & -8 & 20 \\
2 & & 2 & 0 & 0 & 20 & -2 & -20 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 10 & -1 & -10 & \boxed{0}
\end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 2$$

Como en la tabla de la regla de los signos de Descartes se tiene que raíces reales positivas pueden ser 1, 3 o 5 y dado que hasta el momento tenemos dos raíces positivas, entonces debe existir por lo menos una raíz positiva más. Dado que 2 no resulta ser cota superior, entonces probaremos con 4.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 10 & -1 & -10 \\
4 & & 4 & 16 & 48 & 232 & 924 \\
\hline
 & 1 & 4 & 16 & 58 & 231 & \boxed{914}
\end{array}$$

El 4 no resultó ser raíz de $p(x)$, pero sí una cota superior de sus raíces, por lo que 5, 10 y 20 se descartan como posibles raíces de $p(x)$. Ante esto, podemos asegurar que $p(x)$ tiene raíces repetidas. Probemos con 1 de nueva cuenta:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 10 & -1 & -10 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 11 & 10 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 11 & 10 & \boxed{0}
\end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 1$$

El 1 además de ser raíz de $p(x)$, también resulta ser cota superior, por lo que 2 se descarta como raíz repetida.

Veamos ahora si $p(x)$ tiene raíces negativas.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & 11 & 10 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 10 & \boxed{0} \end{array} \qquad \Rightarrow \alpha_4 = -1$$

De acuerdo con la tabla de la regla de los signos, $p(x)$ debe tener otra raíz negativa y como -1 no es cota inferior, entonces probaremos con -2:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 10 \\ -2 & & -2 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} \end{array} \qquad \Rightarrow \alpha_5 = -2$$

$p(x)$ solo podía tener hasta dos raíces negativas, las cuales ya obtuvimos; sin embargo, puede resultar de interés señalar que -2, además de ser raíz, también resulta ser una cota inferior de las raíces de $p(x)$.

Las últimas dos raíces faltantes las obtendremos directamente del polinomio reducido $q(x)$.

$$q(x) = x^2 - 2x + 5$$

Aplicando la fórmula general, tenemos:

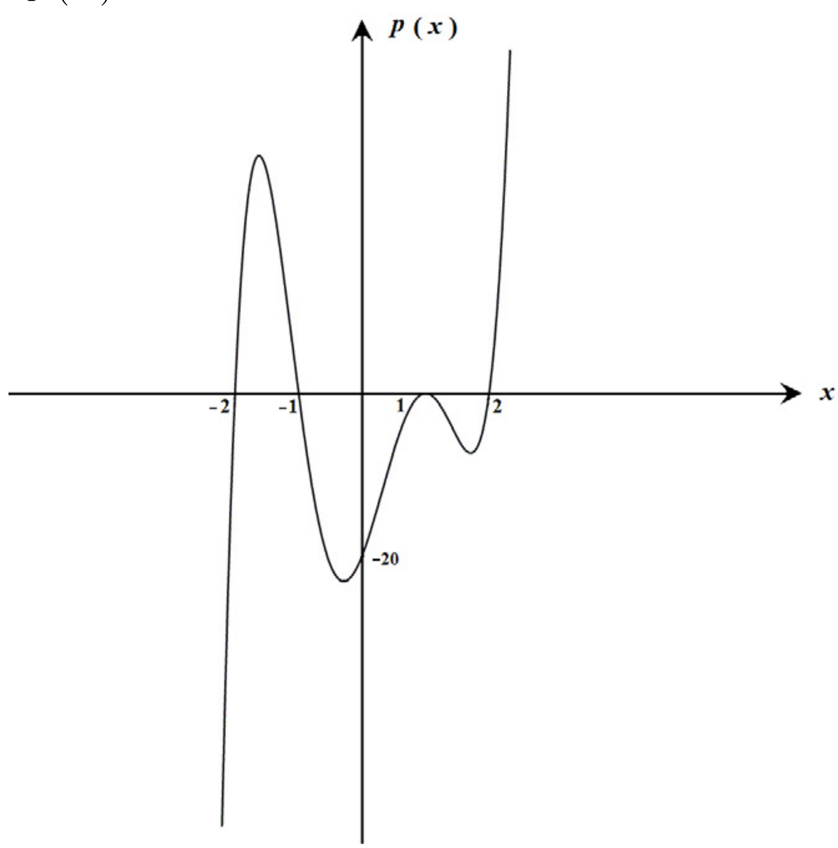
$$q(x) = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$x = 1 \pm 2i \qquad \therefore \qquad \begin{aligned} \alpha_6 &= 1 + 2i \\ \alpha_7 &= 1 - 2i \end{aligned}$$

Con lo cual, las raíces de $p(x)$ son:

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = -1, \quad \alpha_5 = -2, \quad \alpha_6 = 1 + 2i, \quad \alpha_7 = 1 - 2i$

c) Gráfica de $p(x)$



EJERCICIO 3.19 Obtenga las raíces del polinomio:

$$h(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 4$$

Si se sabe que i y $-\sqrt{2}$ son dos de sus raíces.

SOLUCIÓN:

Resolveremos este ejercicio por dos métodos distintos.

MÉTODO 1:

Dado que $h(x)$ tiene coeficientes reales, entonces $-i$ también es raíz de $h(x)$.

Por otro lado, dado que $h(x)$ también tiene coeficientes racionales, entonces $\sqrt{2}$ es otra de sus raíces.

Como ya se conocen 4 de las 5 raíces de $h(x)$, entonces aplicaremos la técnica conocida para obtener la raíz faltante.

Analizando los cambios de signo en $h(x)$, tenemos:

$$h(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 4$$

con lo cual, $h(x)$ podría tener 4, 2 o ninguna raíz positiva; pero como ya conocemos que $\sqrt{2}$ es raíz de $h(x)$, entonces necesariamente $h(x)$ debe tener otra raíz positiva.

Las posibles raíces racionales de $h(x)$ son:

$$\pm\,(1,\ 2,\ 4)$$

al probar con 2, tenemos:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -2 & -1 & 2 & -2 & 4 \\
2 & & 2 & 0 & -2 & 0 & -4 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & \boxed{0}
\end{array} \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ es raíz}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Finalmente, las raíces de $h(x)$ son:

$$\alpha_1 = i, \qquad \alpha_2 = -i, \qquad \alpha_3 = \sqrt{2} \qquad \alpha_4 = -\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \alpha_5 = 2$$

MÉTODO 2:

En este segundo método, lo que se hará es aplicar la división sintética con las raíces ya conocidas de $h(x)$: i, $-i$, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, para obtener un polinomio reducido de primer grado y con él obtener la raíz faltante.

Dado que el polinomio $h(x)$ es de quinto grado, este segundo método no resulta muy práctico; sin embargo, se decidió mostrarlo, pues en otros problemas con características similares, podría ser importante tener presente esta otra alternativa de solución.

Al realizar las divisiones sintéticas con las cuatro raíces conocidas, tenemos:

$$\begin{array}{r|cccccc l}
 & 1 & -2 & -1 & 2 & -2 & 4 & \\
i & & i & -1-2i & 2-2i & 2+4i & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2+i & -2-2i & 4-2i & 4i & \boxed{0} & \Rightarrow \alpha_1 = i \\
-i & & -i & 2i & 2i & -4i & & \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & 4 & \boxed{0} & & \Rightarrow \alpha_2 = -i \\
\sqrt{2} & & \sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & -4 & & & \\
\hline
 & 1 & -2+\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & \boxed{0} & & & \Rightarrow \alpha_3 = \sqrt{2} \\
-\sqrt{2} & & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & & & & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} & & & & \Rightarrow \alpha_4 = -\sqrt{2}
\end{array}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

De donde, el polinomio reducido es:

$$q(x) = x - 2 \qquad \text{si} \qquad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \qquad\qquad \therefore \quad \alpha_5 = 2$$

CAMBIO DE VARIABLE

Cuando un polinomio tiene coeficientes reales y todas sus raíces son complejas, entonces la técnica aplicada hasta ahora, de las posibles raíces racionales de un polinomio y la división sintética, no nos permiten obtener dichas raíces. En estos casos se puede utilizar el cambio de variable, el cual nos permite modificar la expresión de un polinomio a una nueva forma de expresión, pero con otra variable, con la cual sí es posible obtener sus raíces. Esta técnica del cambio de variable consiste en suponer una nueva variable, que deberá ser igual a la variable original, pero elevada a la menor potencia, diferente de cero, de las que aparecen en el polinomio inicial.

No en todos los polinomios con raíces complejas es posible aplicar la técnica del cambio de variable. Uno de los casos más simples donde sí es posible aplicarla, son los polinomios llamados bicuadrados.

Un polinomio de la forma:

$$p(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

se le llama polinomio bicuadrado. Estos polinomios tienen la característica de carecer de potencias impares.

Las raíces de estos polinomios se pueden obtener aplicando el cambio de variable:

$$w = x^2$$

con el cual, el polinomio $p(x)$ se transforma en un polinomio de la forma:

$$p(w) = aw^2 + bw + c$$

cuyas raíces pueden obtenerse aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado. Por cada una de las raíces de $p(w)$, se obtendrán dos raíces de $p(x)$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Además de los polinomios bicuadrados, se tienen otros tipos de polinomios en los cuales también se puede aplicar el cambio de variable, como ejemplo de ellos, tenemos:

$$h(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$$

si se hace $w = x^2$, entonces se obtiene:

$$h(w) = aw^3 + bw^2 + cw + d$$

o también:

$$g(x) = ax^9 + bx^6 + cx^3 + d$$

con $w = x^3$, se obtiene:

$$g(w) = aw^3 + bw^2 + cw + d$$

Obsérvese que el cambio de variable propuesto en cada uno de los ejemplos anteriores, w se hace igual a la menor potencia de x, diferente de cero, del polinomio en x correspondiente.

EJERCICIO 3.20 Obtenga las raíces del polinomio:

$$f(x) = x^6 + 4x^4 + 16x^2 + 64$$

SOLUCIÓN:

Aplicando la regla de los signos de Descartes a $f(x)$, observamos que no presenta ningún cambio de signo, lo cual significa que $f(x)$ no tiene raíces reales positivas.

Obteniendo $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^6 + 4(-x)^4 + 16(-x)^2 + 64$$

$$f(-x) = x^6 + 4x^4 + 16x^2 + 64$$

$f(-x)$ tampoco presenta cambios de signo, por lo que $f(x)$ no tiene raíces reales negativas. En consecuencia, podemos concluir que $f(x)$ no tiene raíces reales y, por lo tanto, todas sus raíces son complejas.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Aplicando el cambio de variable, tenemos:

Haciendo $w = x^2$, el polinomio $f(x)$ se transforma a:

$$f(w) = w^3 + 4w^2 + 16w + 64$$

$f(w)$ tampoco presenta cambios de signo, por lo que no tiene raíces positivas; sin embargo, veamos lo que sucede con $f(-w)$:

$$f(-w) = -w^3 + 4w^2 - 16w + 64$$

entonces $f(w)$ tiene 3 o 1 raíces negativas, es decir, por lo menos una de las raíces de $f(w)$ es negativa.

Las posibles raíces racionales de $f(w)$ son:

$$\pm(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64)$$

al probar con -4, tenemos:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 4 & 16 & 64 \\
-4 & & -4 & 0 & -64 \\
\hline
 & 1 & 0 & 16 & \boxed{0}
\end{array} \quad \Rightarrow \quad w_1 = -4$$

de donde:

$$q(w) = w^2 + 16 \quad ; \quad w^2 + 16 = 0$$

$$w^2 = -16 \quad ; \quad w = \pm\sqrt{-16} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} w_2 = 4i \\ w_3 = -4i \end{array}$$

Regresando a la variable original, tenemos:

Para $w_1 = -4$ y dado que $x^2 = w$, se tiene:

$$x^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \quad \therefore \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 2i \\ \alpha_2 &= -2i \end{aligned}$$

Para $w_2 = 4i$:

$$x^2 = 4i \quad ; \quad x = \sqrt{4i} = \sqrt{4 \operatorname{cis} 90°} \quad \therefore \quad \begin{aligned} \alpha_3 &= 2 \operatorname{cis} 45° \\ \alpha_4 &= 2 \operatorname{cis} 225° \end{aligned}$$

Para $w_3 = -4i$:

$$x^2 = -4i \quad ; \quad x = \sqrt{-4i} = \sqrt{4 \operatorname{cis} 270°} \quad \therefore \quad \begin{aligned} \alpha_5 &= 2 \operatorname{cis} 135° \\ \alpha_6 &= 2 \operatorname{cis} 315° \end{aligned}$$

Con lo cual, las raíces de $f(x)$ son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2i & \alpha_3 &= 2 \operatorname{cis} 45° & \alpha_5 &= 2 \operatorname{cis} 135° \\ \alpha_2 &= -2i & \alpha_4 &= 2 \operatorname{cis} 225° & \alpha_6 &= 2 \operatorname{cis} 315° \end{aligned}$$

EJERCICIO 3.21 Obtenga las raíces del polinomio:

$$p(x) = x^9 - x^6 + x^3 - 1$$

SOLUCIÓN:

Aplicando la regla de los signos de Descartes, tenemos

$$p(x) = x^9 - x^6 + x^3 - 1$$

$p(x)$ tiene 3 o 1 raíces positivas, es decir, por lo menos una de las raíces de $p(x)$ es positiva.

$$p(-x) = -x^9 - x^6 - x^3 - 1$$

entonces $p(x)$ no tiene raíces negativas.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Del anterior análisis, podemos concluir que $p(x)$ podría tener 6 u 8 raíces complejas. Apliquemos el cambio de variable para obtenerlas.

Si hacemos $w = x^3$, tenemos:

$$p(w) = w^3 - w^2 + w - 1$$

Las posibles raíces racionales de $p(w)$ son ± 1, con lo cual se tiene que:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array} \quad \Rightarrow \quad w_1 = 1$$

de donde:

$$q(w) = w^2 + 1 \qquad ; \qquad w^2 + 1 = 0$$

$$w^2 = -1 \qquad ; \qquad w = \pm\sqrt{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} w_2 = i \\ w_3 = -i \end{array}$$

Regresando a la variable original, tenemos:

Para $w_1 = 1$:

$$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1 \operatorname{cis} 0°} \qquad \therefore \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \operatorname{cis} 0° \\ \alpha_2 = 1 \operatorname{cis} 120° \\ \alpha_3 = 1 \operatorname{cis} 240° \end{array}$$

Para $w_2 = i$:

$$x^3 = i \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1 \operatorname{cis} 90°} \qquad \therefore \quad \begin{array}{l} \alpha_4 = 1 \operatorname{cis} 30° \\ \alpha_5 = 1 \operatorname{cis} 150° \\ \alpha_6 = 1 \operatorname{cis} 270° \end{array}$$

Para $w_3 = -i$:

$$x^3 = -i \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1 \operatorname{cis} 270°} \quad \therefore \quad \begin{aligned} \alpha_7 &= 1 \operatorname{cis} 90° \\ \alpha_8 &= 1 \operatorname{cis} 210° \\ \alpha_9 &= 1 \operatorname{cis} 330° \end{aligned}$$

$p(x)$ tuvo una raíz real y ocho complejas.

EJERCICIO 3.22 Sea el polinomio:

$$g(x) = 2x^5 - 2ix^4 + 4x^3 - 4ix^2 - 16x + 16i$$

Exprese a $g(x)$ como el producto de sus factores lineales, si se sabe que $(x - i)$ es uno de ellos.

SOLUCIÓN:

Dado que $(x - i)$ es un factor de $g(x)$, entonces i es una de sus raíces. Al efectuar la división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -2i & 4 & -4i & -16 & 16i \\ i & & 2i & 0 & 4i & 0 & -16i \\ \hline & 2 & 0 & 4 & 0 & -16 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = i$$

El polinomio reducido es:

$$q(x) = 2x^4 + 4x^2 - 16$$

$q(x)$ resultó ser un polinomio bicuadrado, por lo tanto, haremos un cambio de variable para obtener las otras cuatro raíces.

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Si $w = x^2$, tenemos que:

$$q(w) = 2w^2 + 4w - 16$$

al factorizar $q(w)$, se tiene:

$$q(w) = (w+4)(2w-4)$$

de donde:

$$w + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 = -4$$

$$2w - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 2$$

Regresando a la variable original, tenemos:

Para $w_1 = -4$:

$$x^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \qquad \therefore \quad \alpha_2 = 2i$$

$$\alpha_3 = -2i$$

Para $w_2 = 2$:

$$x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \qquad \therefore \quad \alpha_4 = \sqrt{2}$$

$$\alpha_5 = -\sqrt{2}$$

Con lo cual, $g(x)$ expresado como el producto de sus factores lineales, considerando que $a_n = 2$, será:

$$g(x) = 2(x-i)(x-2i)(x+2i)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$$

EJERCICIO 3.23 Sea el polinomio:

$$p(x) = x^4 - kx^3 + x^2 + 12x - 12$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha = 2$ sea raíz de $p(x)$.

b) Con el valor de k obtenido en el inciso anterior, aplique la regla de los signos de Descartes y dé toda la información posible acerca de las raíces $p(x)$.

c) Obtenga las raíces de $p(x)$.

SOLUCIÓN:

a) Dado que 2 debe ser raíz de $p(x)$, entonces al realizar la división sintética con 2, el residuo debe ser igual a cero.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -k & 1 & 12 & -12 \\
2 & & 2 & 4-2k & 10-4k & 44-8k \\
\hline
 & 1 & 2-k & 5-2k & 22-4k & \boxed{32-8k=0}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 8k = 32 \qquad \therefore \quad k = 4$$

b) Con el valor de $k = 4$ sustituido en $p(x)$, aplicaremos la regla de los signos.

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12$$

$$p(-x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12$$

Elaborando la tabla, tenemos:

Raíces $\mathbb{R}^+$	3	1
Raíces $\mathbb{R}^-$	1	1
Raíces complejas	0	2
Total	4	4

Como se puede apreciar en la tabla, $p(x)$ tiene por lo menos una raíz positiva y una negativa.

c) Las posibles raíces racionales de $p(x)$ son:

$$\text{P.R.R.} \pm (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12)$$

Tomaremos $\alpha = 2$ que nos dicen que es raíz y realizaremos la división sintética para ir reduciendo el grado a $p(x)$.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & 1 & 12 & -12 \\
2 & & 2 & -4 & -6 & 12 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 6 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 0 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \quad \alpha_1 = 2 \\
\\
\Rightarrow \quad \alpha_2 = 2
\end{array}$$

con la cual, el polinomio reducido es:

$$q(x) = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \qquad \therefore \quad \begin{array}{l} \alpha_3 = \sqrt{3} \\ \alpha_4 = -\sqrt{3} \end{array}$$

EJERCICIO 3.24 Sean los polinomios:

$$p(x) = x^3 + ax^2 - 4x + 4\sqrt{5}\,b$$

$$g(x) = x^3 + ax^2 - 9x + 9\sqrt{5}\,b$$

a) Obtenga los valores de a y $b \in \mathbb{R}$, si se sabe que $\left(x - 2\sqrt{5}\right)$ es factor de ambos polinomios.

b) Exprese al polinomio $g(x)$ como el producto de sus factores lineales.

SOLUCIÓN:

a) Dado que $\left(x - 2\sqrt{5}\right)$ es factor de ambos polinomios, entonces al realizar la división sintética con $2\sqrt{5}$ con cada uno de ellos, el residuo debe ser igual a cero.

Con $p(x)$:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & a & -4 & 4\sqrt{5}\,b \\
2\sqrt{5} & & 2\sqrt{5} & 20 + 2\sqrt{5}\,a & 32\sqrt{5} + 20\,a \\
\hline
 & 1 & a + 2\sqrt{5} & 16 + 2\sqrt{5}\,a & \boxed{32\sqrt{5} + 20\,a + 4\sqrt{5}\,b = 0}
\end{array}
$$

se tiene la ecuación:

$$20\,a + 4\sqrt{5}\,b = -32\sqrt{5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Con $g(x)$:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & a & -9 & 9\sqrt{5}\,b \\
2\sqrt{5} & & 2\sqrt{5} & 20 + 2\sqrt{5}\,a & 22\sqrt{5} + 20\,a \\
\hline
 & 1 & a + 2\sqrt{5} & 11 + 2\sqrt{5}\,a & \boxed{22\sqrt{5} + 20\,a + 9\sqrt{5}\,b = 0}
\end{array}
$$

se tiene la ecuación:

$$20\,a + 9\sqrt{5}\,b = -22\sqrt{5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$\begin{cases} 20\,a + 4\sqrt{5}\,b = -32\sqrt{5} \\ 20\,a + 9\sqrt{5}\,b = -22\sqrt{5} \end{cases}$$

multiplicando por (-1) la primera ecuación para usar el método de sumas y restas, tenemos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -20\,a - 4\sqrt{5}\,b = 32\sqrt{5} \\ 20\,a + 9\sqrt{5}\,b = -22\sqrt{5} \end{cases} \\ \hline 5\sqrt{5}\,b = 10\sqrt{5} \end{array} \qquad \therefore \quad b = 2$$

sustituyendo $b = 2$ en la segunda ecuación, se tiene:

$$20\,a + 9\sqrt{5}\,(2) = -22\sqrt{5}$$

$$20\,a + 18\sqrt{5} \quad = -22\sqrt{5}$$

de donde:

$$a = \frac{-22\sqrt{5} - 18\sqrt{5}}{20} = \frac{-40\sqrt{5}}{20} \qquad \therefore \quad a = -2\sqrt{5}$$

b) Para obtener las raíces $g(x)$, sustituiremos los valores de a y b obtenidos en el inciso anterior en $g(x)$.

$$g(x) = x^3 - 2\sqrt{5}\,x^2 - 9x + 9\sqrt{5}\,(2)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = x^3 - 2\sqrt{5}\,x^2 - 9x + 18\sqrt{5}$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

ÍNDICE 1 2 3 4 5

como $2\sqrt{5}$ es raíz, entonces se tiene:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2\sqrt{5} & -9 & 18\sqrt{5} \\
2\sqrt{5} & & 2\sqrt{5} & 0 & -18\sqrt{5} \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0}
\end{array}$$

de donde:

$$q(x) = x^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

con lo cual, las raíces de $g(x)$ son:

$$\alpha_1 = 2\sqrt{5}, \qquad \alpha_2 = 3 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3 = -3$$

entonces:

$$g(x) = \left(x - 2\sqrt{5}\right)(x-3)(x+3)$$

EJERCICIO 3.25 Sea el polinomio:

$$p(x) = 2x^5 + 4x^4 + Ax^3 - 8x^2 - 6x + B$$

a) Determine los valores de A y $B \in \mathbb{R}$, si se sabe que la gráfica de $p(x)$ contiene a los puntos $M(-1, -8)$ y $N(1, -24)$.

b) Con los valores de A y B obtenidos en el inciso anterior, obtenga las raíces de $p(x)$, si se sabe que una de sus raíces es $\boldsymbol{i}$.

SOLUCIÓN:

a) Al valuar el polinomio de $p(x)$ en -1, se tiene que el valor de la función debe ser igual a -8 y al valuarlo en 1, el valor debe ser igual a -24, con lo cual se tiene que:

$$p(-1) = 2(-1)^5 + 4(-1)^4 + A(-1)^3 - 8(-1)^2 - 6(-1) + B = -8$$

$$-2 + 4 - A - 8 + 6 + B = -8$$

de donde:

$$-A + B = -8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

por otro lado:

$$p(1) = 2(1)^5 + 4(1)^4 + A(1)^3 - 8(1)^2 - 6(1) + B = -24$$

$$2 + 4 + A - 8 - 6 + B = -24$$

de donde:

$$A + B = -16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{r} -A + B = -8 \\ A + B = -16 \end{array} \right. \\ \hline 2B = -24 \end{array} \qquad \therefore \quad B = -12$$

al sustituir en la segunda ecuación $B = -12$, tenemos:

$$A - 12 = -16 \qquad \therefore \quad A = -4$$

b) El polinomio $p(x)$ con los valores de A y B obtenidos queda como:

$$p(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 6x - 12$$

Dado que $p(x)$ tiene coeficientes reales y se nos dice que i es raíz, entonces $-i$ es otra de sus raíces.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Efectuemos la división sintética con dichas raíces:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 2 & 4 & -4 & -8 & -6 & -12 \\
i & & 2i & -2+4i & -4-6i & 6-12i & 12 \\
\hline
 & 2 & 4+2i & -6+4i & -12-6i & -12i & \boxed{0} \\
-i & & -2i & -4i & 6i & 12i & \\
\hline
 & 2 & 4 & -6 & -12 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \alpha_1 = i \\
\\
\Rightarrow \alpha_2 = -i
\end{array}
$$

El polinomio reducido es:

$$q_1(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x - 12$$

Al probar con las posibles raíces racionales de $q_1(x)$ se llega a:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 4 & -6 & -12 \\
-2 & & -4 & 0 & 12 \\
\hline
 & 2 & 0 & -6 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad \Rightarrow \alpha_3 = -2
$$

de donde:

$$q_2(x) = 2x^2 - 6 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} \alpha_4 = \sqrt{3} \\ \alpha_5 = -\sqrt{3} \end{array}$$

EJERCICIO 3.26 Sea el polinomio $f(x)$ con coeficientes reales definido por:

$$f(x) = g(x)\ h(x)$$

Si se tiene que:

$$g(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 2x + 4$$

y $h(x)$ es un polinomio de tercer grado con coeficientes reales donde $1 + 2i$ es una de sus raíces y que $h(0) = 5$, exprese al polinomio $f(x)$ como el producto de sus factores lineales.

SOLUCIÓN:

Dado que $f(x)$ está definido como el producto de $g(x)$ por $h(x)$ y estos polinomios son de quinto y tercer grado, respectivamente, entonces $f(x)$ es de octavo grado. Las 8 raíces de $f(x)$ serán las 5 de $g(x)$ y las 3 de $h(x)$; con ellas se obtendrán los 8 factores lineales que necesitamos de $f(x)$.

Obteniendo las raíces de $g(x)$, tenemos:

$$g(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 2x + 4$$

De acuerdo con la regla de los signos de Descartes, $g(x)$ no tiene cambios de signo, por lo que no tiene ninguna raíz positiva.

$$g(-x) = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x + 4$$

Se tienen 5 cambios de signo en $g(-x)$, entonces $g(x)$ puede tener 5, 3 o 1 raíces negativas, es decir, por lo menos una de sus raíces es negativa. Procedamos a obtenerla.

Las posibles raíces racionales de $g(x)$ son:

$$\text{P. R. R.} \pm (1,\ 2,\ 4)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Al realizar la división sintética con -2, tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 2 & 3 & 6 & 2 & 4 \\
-2 & & -2 & 0 & -6 & 0 & -4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow \alpha_1 = -2$$

El polinomio reducido es:

$$q(x) = x^4 + 3x^2 + 2$$

Como se puede apreciar, en $q(x)$ se puede aplicar el cambio de variable y con ello obtener las otras 4 raíces faltantes; sin embargo, en esta ocasión, lo que haremos es factorizar $q(x)$ y con ello obtener sus raíces.

Factorizando, tenemos:

$$q(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

si hacemos que:

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$$

entonces:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} = \pm i \qquad \therefore \qquad \alpha_2 = i$$

$$\alpha_3 = -i$$

$$x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i \qquad \therefore \qquad \alpha_4 = \sqrt{2}\, i$$

$$\alpha_5 = -\sqrt{2}\, i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Obteniendo las raíces de $h(x)$, tenemos:

De $h(x)$ sabemos que es de tercer grado, que tiene coeficientes reales, que $1+2i$ es una de sus raíces y, por lo tanto, $1-2i$ es otra de sus raíces. Se desconoce la tercera raíz; sin embargo, se sabe que $h(0)=5$. Consideremos $\alpha_6 = 1+2i$, $\alpha_7 = 1-2i$ y α_8 las raíces de $h(x)$, desde luego, α_8 es desconocida y la vamos a determinar. Al expresar $h(x)$ como el producto de sus factores lineales, tenemos:

$$h(x) = \left(x-(1+2i)\right)\left(x-(1-2i)\right)\left(x-\alpha_8\right)$$

como $h(0)=5$, entonces:

$$h(0) = (-1-2i)(-1+2i)\left(-\alpha_8\right) = 5$$

de donde:

$$-5\alpha_8 = 5 \qquad \therefore \qquad \alpha_8 = -1$$

Con lo cual, las raíces de $f(x)$ son:

$$\alpha_1 = -2, \qquad \alpha_2 = i, \qquad \alpha_3 = -i, \qquad \alpha_4 = \sqrt{2}\, i$$

$$\alpha_5 = -\sqrt{2}\, i, \qquad \alpha_6 = 1+2i \qquad \alpha_7 = 1-2i \qquad \text{y} \qquad \alpha_8 = -1$$

Finalmente, el polinomio $f(x)$ expresado como el producto de sus factores lineales es:

$$f(x) = (x+2)(x-i)(x+i)\left(x-\sqrt{2}\,i\right)\left(x+\sqrt{2}\,i\right)\left(x-(1+2i)\right)\left(x-(1-2i)\right)(x+1)$$

EJERCICIO 3.27 Obtenga las raíces del polinomio:

$$p(x) = x^7 - 4x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 32x^2 + 24$$

si se sabe que $\left(x-\sqrt{3}\right)$ es uno de sus factores.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

Como $\left(x-\sqrt{3}\right)$ es factor de $p(x)$, entonces $\alpha_1=\sqrt{3}$ es una de sus raíces y dado que $p(x)$ tiene coeficientes enteros, entonces $\alpha_2=-\sqrt{3}$ es otra de sus raíces.

Apliquemos división sintética con estas raíces para llegar a un polinomio reducido de quinto grado.

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 0 & -4 & 8 & 3 & -32 & 0 & 24 \\
\sqrt{3} & & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3+8\sqrt{3} & 24 & -8\sqrt{3} & -24 \\
\hline
 & 1 & \sqrt{3} & -1 & 8-\sqrt{3} & 8\sqrt{3} & -8 & -8\sqrt{3} & \boxed{0} \\
-\sqrt{3} & & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & -8\sqrt{3} & 0 & 8\sqrt{3} & \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & 8 & 0 & -8 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \alpha_1=\sqrt{3} \\
\\
\Rightarrow \alpha_2=-\sqrt{3}
\end{array}
$$

con lo cual el polinomio reducido es:

$$q_1(x)=x^5-x^3+8x^2-8$$

Al aplicar la regla de los signos, se puede apreciar que $q_1(x)$ presenta 3 cambios de signo, lo cual significa que, $q_1(x)$ tiene 3 o 1 raíces positivas, es decir, por lo menos una raíz debe ser positiva.

Por otro lado:

$$q_1(-x)=-x^5+x^3+8x^2-8$$

$q(-x)$ presenta dos cambios de signo, por lo que $q_1(x)$ puede tener 2 o ninguna raíz negativa.

Las posibles raíces racionales de $q_1(x)$ son:

$$\text{P.R.R.} \pm (1, \quad 2, \quad 4, \quad 8)$$

Al probar las posibles raíces se llegó a:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -1 & 8 & 0 & -8 \\
1 & & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & 0 & -8 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 8 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \alpha_3 = 1 \\
\\
\Rightarrow \alpha_4 = -1
\end{array}$$

El nuevo polinomio reducido es:

$$q_2(x) = x^3 + 8$$

si hacemos que:

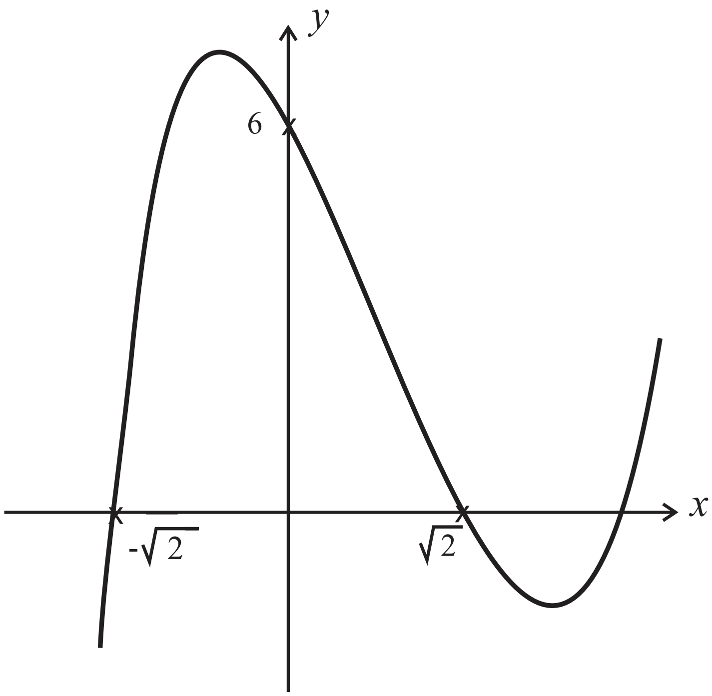
$$x^3 + 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt[3]{-8}$$

transformando el número complejo -8 a su forma polar, tenemos que:

$$x = \sqrt[3]{8 \text{ cis } 180°} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l}
\alpha_5 = 2 \text{ cis } 60° \\
\alpha_6 = 2 \text{ cis } 180° \\
\alpha_7 = 2 \text{ cis } 300°
\end{array}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 3.28 Obtenga el polinomio $f(x)$ de tercer grado, con $a_n = 1$ y cuya gráfica es:



SOLUCIÓN:

De la gráfica se tiene que $\alpha_1 = -\sqrt{2}$ y $\alpha_2 = \sqrt{2}$ son dos de las raíces de $f(x)$; sin embargo, hay una raíz α_3 desconocida que sabemos es positiva. Dado que $a_n = 1$, entonces podemos expresar a $f(x)$ como:

$$f(x) = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \alpha_3\right)$$

desarrollando los productos, tenemos:

$$f(x) = \left(x^2 - 2\right)\left(x - \alpha_3\right)$$

$$f(x) = x^3 - \alpha_3 x^2 - 2x + 2\alpha_3$$

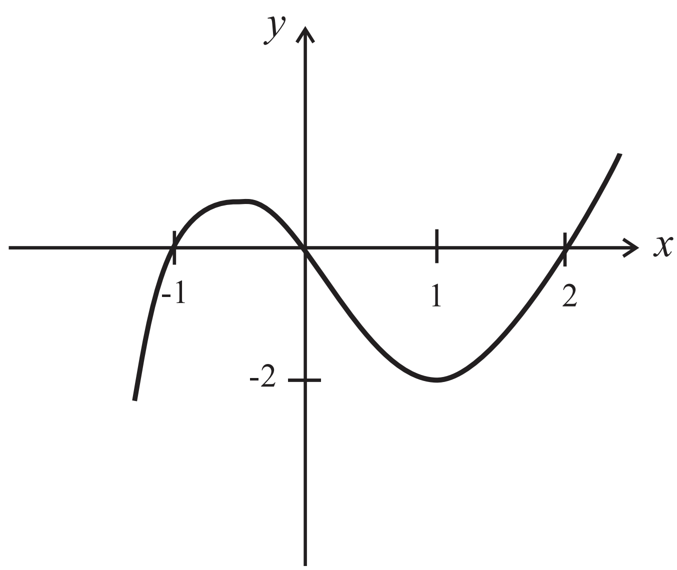
De la gráfica también se puede apreciar que la ordenada al origen es 6 y que este valor corresponde al término independiente de $f(x)$, por lo que:

$$2\alpha_3 = 6 \qquad \therefore \qquad \alpha_3 = 3$$

al sustituir $\alpha_3 = 3$ en $f(x)$ se llega a:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$$

EJERCICIO 3.29 Sean $g(x)$ y $h(x)$ dos polinomios con coeficientes reales. De $g(x)$ se sabe que es de segundo grado, que $g(0) = -3$ y que su gráfica contiene a los puntos $(-2, 5)$ y $(1, -4)$. De $h(x)$ se conoce que $h(1) = -2$ y su gráfica es:



obtenga el polinomio $f(x)$ definido por:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

SOLUCIÓN:

Como el polinomio $f(x)$ que nos piden obtener viene dado por la suma de $g(x)$ más $h(x)$, entonces lo que tenemos que hacer es, con los datos proporcionados, obtener estos dos polinomios.

Obteniendo $g(x)$:

Dado que $g(x)$ es de segundo grado, entonces:

$$g(x) = ax^2 + bx + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Como $g(0) = -3$, entonces $c = -3$

Dado que la gráfica de $g(x)$ contiene a los puntos $(-2, 5)$ y $(1, -4)$, entonces se tiene que:

$$g(-2) = a(-2)^2 + b(-2) - 3 = 5$$

$$\Rightarrow \quad 4a - 2b = 8 \quad \Rightarrow \quad 2a - b = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$g(1) = a(1)^2 + b(1) - 3 = -4$$

$$\Rightarrow \quad a + b = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2) y (3), tenemos:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2a - b = 4 \\ a + b = -1 \end{array} \right. \\ \hline \quad 3a = 3 \end{array} \qquad \therefore \quad a = 1 \quad \text{y} \quad b = -2$$

sustituyendo los valores de a, b y c en (1), tenemos:

$$g(x) = x^2 - 2x - 3$$

Obteniendo $h(x)$:

De la gráfica de $h(x)$ se aprecia que sus raíces son:

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_3 = 2$$

con lo cual, podemos expresar a $h(x)$ como el producto de sus factores lineales, esto es:

$$h(x) = a_3(x+1)(x)(x-2)$$
$$h(x) = a_3(x^2+x)(x-2)$$
$$h(x) = a_3(x^3-2x^2+x^2-2x)$$
$$h(x) = a_3(x^3-x^2-2x)$$

como se dice que $h(1) = -2$, entonces:

$$h(1) = a_3(1-1-2) = -2$$
$$-2a_3 = -2$$
$$\Rightarrow \quad a_3 = 1$$
$$\therefore \quad h(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

como $f(x) = g(x) + h(x)$, entonces:

$$f(x) = (x^2-2x-3) + (x^3-x^2-2x)$$
$$\therefore \quad f(x) = x^3 - 4x - 3$$

EJERCICIO 3.30 Obtenga las raíces del polinomio:

$$p(x) = x^6 - (1+i)x^5 + (7+i)x^4 - (9+7i)x^3 - (18-9i)x^2 + 18ix$$

si se sabe que $P\left(\sqrt{-1}\right) = 0$.

SOLUCIÓN:

Como $p(x)$ carece de término independiente, entonces factoricemos x :

$$p(x) = x\left[x^5 - (1+i)x^4 + (7+i)x^3 - (9+7i)x^2 - (18-9i)x + 18i\right]$$

de donde se tiene que $\alpha_1 = 0$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Trabajemos con el polinomio reducido de quinto grado.

Dado que $P\left(\sqrt{-1}\right)=0$ y $\sqrt{-1}=i$, entonces i es otra de las raíces de $p(x)$. Efectuando la división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -1-i & 7+i & -9-7i & -18+9i & 18i \\ i & & i & -i & 7i & -9i & -18i \\ \hline & 1 & -1 & 7 & -9 & -18 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \alpha_2 = i$$

con lo cual, el nuevo polinomio reducido es:

$$q_1(x)=x^4-x^3+7x^2-9x-18$$

Al aplicar la regla de los signos a $q_1(x)$, se observan 3 cambios de signo, lo cual implica que $q_1(x)$ puede tener 3 o 1 raíces positivas, es decir, por lo menos una raíz es positiva.

Además, se tiene que:

$$q_1(-x)=x^4+x^3+7x^2+9x-18$$

un cambio de signo, por lo tanto, $q_1(x)$ tiene solo una raíz real negativa.

Las posibles raíces racionales $q_1(x)$ son:

$$\text{P.R.R.} \pm (1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18)$$

al probar estos valores con división sintética, se tiene que:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & 7 & -9 & -18 \\
2 & & 2 & 2 & 18 & 18 \\
\hline
 & 1 & 1 & 9 & 9 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & -9 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \quad \alpha_3 = 2 \\[3em]
\Rightarrow \quad \alpha_4 = -1
\end{array}
$$

de donde:

$q_2(x) = x^2 + 9$ si $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$ $\Rightarrow$ $\alpha_5 = 3i$

$\alpha_6 = -3i$

con lo cual, las raíces de $p(x)$ son:

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = -1$, $\alpha_5 = 3i$, y $\alpha_6 = -3i$

EJERCICIO 3.31 Obtenga los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, de los polinomios $p(x)$ y $g(x)$, donde:

$$p(x) = ax^3 - bx^2 - c$$

$$g(x) = (6a + 4b)x - 2c$$

si se sabe que:

- ❖ 1 es raíz de $p(x)$
- ❖ $g\left(\frac{1}{2}\right) = -3$
- ❖ $\frac{1}{2}p(-2) + \frac{1}{4}g(0) = -4$

SOLUCIÓN:

Como 1 es raíz de $p(x)$, entonces se cumple que:

$$p(1) = a(1)^3 - b(1)^2 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad a - b - c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

por otro lado:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = (6a + 4b)\left(\frac{1}{2}\right) - 2c = -3 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b - 2c = -3 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

además:

$$\frac{1}{2}\left[a(-2)^3 - b(-2)^2 - c\right] + \frac{1}{4}\left[-2c\right] = -4$$

$$\frac{1}{2}(-8a - 4b - c) + \left(-\frac{1}{2}c\right) = -4$$

con lo cual:

$$-4a - 2b - c = -4$$

multiplicando por -1 en ambos lados, se tiene:

$$4a + 2b + c = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Hemos llegado a definir el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a - b - c = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3a + 2b - 2c = -3 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 4a + 2b + c = 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

de (1) se tiene que:

$$c = a - b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sustituyendo (4) en (2) y (3) :

$$\begin{cases} 3a + 2b - 2(a-b) = -3 \\ 4a + 2b + (a-b) = 4 \end{cases}$$

de donde:

$$\begin{cases} a + 4b = -3 \\ 5a + b = 4 \end{cases}$$

al resolver este sistema, se llega a:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

sustituyendo a y b en (4), se tiene:

$$c = 2$$

EJERCICIO 3.32 Exprese al polinomio:

$$p(x) = 3x^3 - \left[\left(6 + 3\sqrt{3}\right) + 3i\right]x^2 + \left[6\sqrt{3} + \left(6 + 3\sqrt{3}\right)i\right]x - 6\sqrt{3}\,i$$

como el producto de sus factores lineales, si se sabe que i es una de sus raíces y que $p(2) = 0$.

SOLUCIÓN:

Del enunciado del ejercicio, se sabe que i y 2 son dos de las tres raíces de $p(x)$. Apliquemos división sintética para reducir el grado de $p(x)$ y así poder determinar la raíz faltante.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -6-3\sqrt{3}-3i & 6\sqrt{3}+6i+3\sqrt{3}\,i & -6\sqrt{3}\,i \\
i & & 3i & -6i-3\sqrt{3}\,i & 6\sqrt{3}\,i \\
\hline
 & 3 & -6-3\sqrt{3} & 6\sqrt{3} & \boxed{0} \\
2 & & 6 & -6\sqrt{3} & \\
\hline
 & 3 & -3\sqrt{3} & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \quad \alpha_1 = i \\[4em]
\Rightarrow \quad \alpha_2 = 2
\end{array}
$$

de donde:

$$q(x) = 3x - 3\sqrt{3} \quad \text{si} \quad 3x - 3\sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \quad \alpha_3 = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, $p(x)$ expresado como el producto de sus factores lineales, considerando que $a_3 = 3$, será:

$$p(x) = 3\,(x-i)\,(x-2)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

Obsérvese que al tener $p(x)$ coeficientes complejos, los teoremas de raíces complejas conjugadas y raíces irracionales conjugadas, en este caso no se cumplen; sin embargo, se podría tener un polinomio con coeficientes complejos donde dichos teoremas se cumplan, es decir, el hecho de que un polinomio tenga coeficientes complejos, no impide que dos de sus raíces sean una conjugada de la otra.

EJERCICIO 3.33 Para el polinomio:

$$p(x) = x^7 + i\,x^6 + 2x^5 + 2i\,x^4 - 5x^3 - 5i\,x^2 + Ax + B$$

a) Obtenga los valores de A y $B \in \mathbb{C}$, si se sabe que $-i$ es una de sus raíces y que $p(-1) = 8 - 8i$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) Con los valores de A y B obtenidos en el inciso anterior, obtenga las raíces de $p(x)$, si se sabe que $\left(x-\sqrt{2}\right)$ es uno de sus factores.

SOLUCIÓN:

a) Al realizar la división sintética de $p(x)$ entre $-i$, el residuo debe ser igual a cero.

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrl}
 & 1 & i & 2 & 2i & -5 & -5i & A & B \\
-i & & -i & 0 & -2i & 0 & 5i & 0 & -iA \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 0 & -5 & 0 & A & \boxed{-iA+B=0} \quad \ldots(1)
\end{array}
$$

Por otro lado, como $p(-1)=8-8i$, entonces tenemos que:

$$p(-1)=(-1)^7+i(-1)^6+2(-1)^5+2i(-1)^4-5(-1)^3-5i(-1)^2+A(-1)+B=8-8i$$

simplificando:

$$-1+i-2+2i+5-5i-A+B=8-8i$$

$$2-2i-A+B=8-8i$$

$$\Rightarrow \quad -A+B=6-6i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$(-1)\begin{cases} -iA+B=0 & \ldots\ldots\ldots(1) \\ -A+B=6-6i & \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} iA-B=0 \\ -A+B=6-6i \end{cases}$$

por suma y restas, se llega a:

$$-A+iA = 6-6i$$

$$(-1+i)A = 6-6i$$

$$A = \frac{6-6i}{-1+i} = \frac{-6(-1+i)}{(-1+i)} \qquad \therefore \qquad A = -6$$

al sustituir $A = -6$ en (1) se llega a que:

$$B = -6i$$

b) Si sustituimos $A = -6$ en la división sintética realizada en el inciso anterior, entonces se tiene que el polinomio reducido es:

$$q_1(x) = x^6 + 2x^4 - 5x^2 - 6$$

Como se puede apreciar, al polinomio $q_1(x)$ se le puede aplicar la técnica del cambio de variable para obtener las 6 raíces faltantes; sin embargo, no se hará uso de ella, en su lugar, haremos uso del dato proporcionado en el enunciado, donde se nos indica que $\left(x-\sqrt{2}\right)$ es un factor de $p(x)$.

Las 6 raíces faltantes de $p(x)$ son exactamente las 6 de raíces de $q_1(x)$, por consiguiente, $\sqrt{2}$ debe ser una de las raíces de $q_1(x)$ y como este polinomio tiene coeficientes en $\mathbb{Q}$, entonces $-\sqrt{2}$ es otra de sus raíces. De lo anterior se sigue que $\left(x-\sqrt{2}\right)$ y $\left(x+\sqrt{2}\right)$ son factores de $q_1(x)$ y, por lo tanto, se tiene que:

$$\alpha_2 = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \alpha_3 = -\sqrt{2}$$

$\alpha_1 = -i$ es un dato que se da en el enunciado del ejercicio.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

como:

$$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = x^2 - 2$$

entonces podemos afirmar que $q_1(x)$ es divisible entre $x^2 - 2$.

Si dividimos $q_1(x)$ entre $x^2 - 2$, obtenemos:

$$\frac{q_1(x)}{x^2 - 2} = x^4 + 4x^2 + 3$$

con lo cual, el nuevo polinomio reducido es:

$$q_2(x) = x^4 + 4x^2 + 3$$

factorizando tenemos:

$$q_2(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)$$

si hacemos:

$$\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right) = 0$$

entonces:

con $\quad x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} \alpha_4 = i \\ \alpha_5 = -i \end{array}$

con $\quad x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-3} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} \alpha_6 = \sqrt{3}\, i \\ \alpha_7 = -\sqrt{3}\, i \end{array}$

Finalmente, las raíces de $p(x)$ son:

$$\alpha_1 = -i, \qquad \alpha_2 = \sqrt{2}, \qquad \alpha_3 = -\sqrt{2}, \qquad \alpha_4 = i$$

$$\alpha_5 = -i, \qquad \alpha_6 = \sqrt{3}\, i \qquad \text{y} \qquad \alpha_7 = -\sqrt{3}\, i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 3.34 Sean los polinomios:

$$p(x)=2x^8+(8-i)x^7+(7-4i)x^6+(28-3i)x^5+(-5-12i)x^4+(-20+4i)x^3+(-4+16i)x^2-16x$$

$$g(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 16x$$

Obtenga las raíces de $p(x)$ si se tiene que:

$$\frac{p(x)}{\left(x+\frac{1}{2}i\right)(x-i)} = g(x)$$

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$p(x) = g(x)\left(x+\frac{1}{2}i\right)(x-i)$$

Como $p(x)$ es de octavo grado, entonces tiene 8 raíces, de las cuales 6 de ellas corresponden a las raíces de $g(x)$ y las otras 2 se obtienen de los dos factores que multiplican a $g(x)$.

Obtengamos primero las 6 raíces de $g(x)$.

Factorizando x, tenemos:

$$g(x) = x(x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 4x - 16)$$

de donde:

$$\alpha_1 = 0$$

Aplicando la regla de los signos al polinomio reducido $q_1(x)$ de quinto grado, observamos que solo presenta un cambio de signo, por lo que podemos afirmar que $q_1(x)$ tiene una raíz real positiva.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Veamos lo que sucede con $q_1(-x)$:

$$q_1(-x) = -x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 4x - 16$$

$q_1(-x)$ presenta 4 cambios de signo, por lo que $q_1(x)$ puede tener 4, 2 o 0 raíces reales negativas.

Las posibles raíces racionales de $q_1(x)$ son:

$$\text{P. R.R.} \pm (1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16)$$

Probando estos valores con división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrrrrl}
 & 1 & 4 & 3 & 12 & -4 & -16 & \\
1 & & 1 & 5 & 8 & 20 & 16 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 8 & 20 & 16 & \boxed{0} & \Rightarrow \alpha_2 = 1 \\
-1 & & -1 & -4 & -4 & -16 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & 16 & \boxed{0} & & \Rightarrow \alpha_3 = -1 \\
-4 & & -4 & 0 & -16 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} & & & \Rightarrow \alpha_4 = -4
\end{array}$$

El nuevo polinomio reducido es:

$$q_2(x) = x^2 + 4 \quad \text{si} \quad x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-4} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha_5 = 2i \\ \alpha_6 = -2i \end{array}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Las últimas dos raíces de $p(x)$ se obtendrán de los factores $\left(x+\frac{1}{2}i\right)$ y $(x-i)$.

de $\left(x+\frac{1}{2}i\right)$, se obtiene que $\alpha_7 = -\frac{1}{2}i$

de $(x-i)$, se obtiene que $\alpha_8 = i$

Finalmente, las raíces de $p(x)$ son:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1, \quad \alpha_4 = -4$$

$$\alpha_5 = 2i, \quad \alpha_6 = -2i, \quad \alpha_7 = -\frac{1}{2}i \quad \text{y} \quad \alpha_8 = i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Realice las siguientes operaciones con polinomios:

a) $\left(-2x^3+x^2-2\right)+\left(2x^3-x^2+2\right)$

b) $\left(9x^6-x^5+2x^4-3x^3+\frac{1}{2}x^2-2\right)+\left(\frac{3}{2}x^5+x^3+\frac{1}{2}x^2+2\right)$

c) $\left(\frac{4}{3}x^5+x^4+x^3-3x^2-5\right)-\left(\frac{5}{3}x^4+x^3+4x+1\right)$

d) $\frac{1}{2}\left(8x^7+32x^6+\frac{4}{2}x^5-4x^4-\frac{1}{2}x^2-x-2\right)$

e) $\left(2x^4+x^2+x+1\right)\left(x^5+(1+i)x^3+2\right)$

f) $\left(x^5-x^4+x^3+x^2\right)\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-1\right)$

g) $\dfrac{81x^3-27x^2+9x+3}{9x^2+3x-1}$

h) $\dfrac{x^7-3x^6-6x^5+18x^4+9x^3-27x^2-4x+12}{x^2-5x+6}$

i) $\dfrac{(x-3)(x+2)(x-2)}{(x-3)(-x-1)}(x+1)+(x+9)(x-1)$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

j) $\left(2x^2 - x\right)\left(\dfrac{6x^5 + 5x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2}{2x + 1}\right)$

k) $(x-2)(x+3)(x-i)(x+i)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

l) $-2x\,(x-i)(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

m) $\dfrac{x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12}{(x-2)(x+3)} + \dfrac{x\left(x\left(x\left((x-3)x-5\right)+15\right)+4\right)-12}{(x-1)(x+1)}$

2. Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, de tal forma que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $(x-2)^2(x+a)(cx+b)(x+1) = (2-x)^2\left(x^3 + 3x^2 - x - 3\right)$

b) $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^2\left(6 - 5x + x^2\right)}{-2 + 5x - 4x^2 + ax^3} = x^4 - 9x^2 - 4x + b$

c) $\dfrac{(bx+a)(cx+1)}{(x+2)} + \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-3)} - 1 = \dfrac{8}{x-3} + 2x + \dfrac{3}{x+2}$

d) $\dfrac{1}{x^3}\left(x^2 - 2x - 1\right)x + \left(x^5 + 3x^2 - 1\right) + 1 = 3x^2 + x^5 + \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$

e) $\dfrac{x+a}{x+1} + \dfrac{x+b}{x^2+1} + \dfrac{x+c}{x+2} = \dfrac{-3 + x + 4x^2 + 6x^3 + 2x^4}{(1+x)(2+x)\left(1+x^2\right)}$

3. Evalúe los siguientes polinomios en el valor indicado, haciendo uso de la división sintética:

a) $p(x) = 10x^5 - 8x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x$; $p(2) = ?$

b) $p(x) = 16x^8 - 2x^6 - 248x^4 + 2x^2 - 1$; $p(-2) = ?$

c) $p(x) = x^6 - 2x^4 + 3$; $p(-2) = ?$

d) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$; $p(i) = ?$

e) $p(x) = -x^3 + (4+i)x^2 - (1+3i)x - (2+2i)$; $p(1+i) = ?$

4. Determine los valores de $a,\ b \in \mathbb{C}$ para cada polinomio, si se sabe que una o unas de sus raíces son las que se indican y obtenga el resto de las raíces:

a) $p(x) = x^5 + 5x^4 + 8x^3 + ax + b$ si $\alpha_1 = -2 + i$

b) $h(x) = 3x^5 + 13x^4 + 29x^3 + 31x^2 - ax - b$ si $\alpha_1 = -1 + 2i$

c) $q(x) = x^4 + (1-3i)x^3 - (4-3i)x^2 - (a-6i)x + (b-6i)$ si $\alpha_1 = -2 + 3i$

d) $j(x) = x^3 - 2ax^2 + x + 2$ si $\alpha_1 = 2$

e) $g(x) = ax^4 + ax^3 + ax^2 + x$ si $\alpha_1 = i$

f) $r(x) = 2x^6 + 3x^5 - 10x^4 - 12x^3 - 2x^2 + ax + b$ si $\alpha_1 = i$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

g) $t(x) = x^5 + ax^4 + (-4+i)x^3 + (2+4i)x^2 + (4-2i)x - 4i$ si $\alpha_1 = i$

h) $k(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - 12x^3 + 11x^2 + bx + 24$ si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -2$

i) $s(x) = -2x^3 + ax^2 + bx - 12$ si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -2$

5. Sea $p(x) = x^4 + (1+5i)x^3 - (3-15i)x^2 + (-a+15i)x + (b-10i)$ un polinomio. Calcule los valores de $a, b \in \mathbb{C}$, si se sabe que una de sus raíces es $\alpha_1 = 2 - 5i$.

6. Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar las posibilidades en que se pueden presentar las raíces de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x - 16$

b) $q(x) = 3x^5 - 8x^4 - 8x^3 - 50x^2 - 43x - 10$

c) $w(x) = x^8 + x^4 + 6x^2 + 20$

d) $r(x) = -2x^9 + 2x^7 + 2x^5 + 2x^3 - 16$

e) $h(x) = x^{11} - x^{10} + 2x^9 + x^8 - 6x^4 - 211x^3 + 8x^2 + 8x$

f) $g(x) = \frac{1}{3}x^7 - 2x^5 + 2x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 2x^2$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

7. Dado el polinomio $f(x) = x^3 - bx^2 + cx - 2$. Si se conoce que $f(2) = 12$ y $f(-3) = -8$, calcule los valores de los coeficientes $b, c \in \mathbb{C}$ y obtenga las raíces del polinomio $f(x)$.

8. Sea el polinomio $g(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx + 10$. Si se sabe que al evaluar $g(-3) = 40$ y $g(2) = 60$, determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{C}$ y obtenga las raíces del polinomio $g(x)$.

9. Si el polinomio $p(x) = x^3 + ex^2 + fx - g$ es divisible entre $(x+4)$, $(x-1)$ y $(x+3)$, determine los valores de $e, f, g \in \mathbb{Q}$ y grafique, en forma aproximada, a $p(x)$.

10. Si se sabe que $x - i$ satisface el teorema del factor para el polinomio $p(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 6x^2 + 10x$, determine las raíces de $p(x)$ y grafíquelo de forma aproximada.

11. Determine el polinomio $h(x)$ de grado cinco, de tal forma que cero sea una raíz de multiplicidad dos, su gráfica contenga a los puntos $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 100)$ y el coeficiente de la variable de mayor grado sea 3.

12. Determine el polinomio $g(x)$ de grado seis, tal que cero sea una raíz de multiplicidad tres, su gráfica contenga a los puntos $(1, 4)$, $(-2, 40)$, $(-1, 2)$ y el coeficiente de la variable de cuarto grado sea 2.

13. Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tal que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por los puntos $(-2, -23)$, $(-1, -5)$, $(2, 25)$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

14. Demuestre que el polinomio $p(x) = x^5 + 9x + 2$ tiene exactamente una raíz real.

15. Sean los polinomios:

$$p(x) = -x^6 - (1+i)x^5 - (2+i)x^4 - (4+2i)x^3 + (8-4i)x^2 + 8i\,x$$

$$q(x) = x^4 + (1+2i)x^3 - (2-2i)x^2 - 4i\,x$$

Determine las raíces de $p(x)$ y $q(x)$ si se tiene que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -(x+i)(x-2i)$$

16. Sea el polinomio $f(x) = 4x^7 - 31x^5 + 25x^4 + 21x^3 - 25x^2 + 6x$, donde $f(x) = p(x)\,h(x)$ y $h(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$. Determine $p(x)$ y calcule las raíces de $f(x)$, $p(x)$ y $h(x)$.

17. Obtenga las raíces del polinomio $f(x)$, si: $f(x) = \dfrac{p(x)\ q(x)}{h(x)}$

y se sabe que:

- $p(x)$ es un polinomio de segundo grado, con una raíz de multiplicidad dos e igual a -1 y su término independiente es dos.

- $q(x)$ es un polinomio de cuarto grado, cuyas raíces son $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1 - i$ y $\alpha_4 = 1 + i$ y el coeficiente de la variable de mayor exponente es 4.

- $h(x)$ es un polinomio de tercer grado con coeficientes reales donde $1-i$ es una de sus raíces, su término independiente es igual a 4 y el coeficiente de la variable de mayor exponente es dos.

18. Sea $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + m$ un polinomio. De las siguientes afirmaciones, escriba en el paréntesis correspondiente una V si la proposición es verdadera o una F si es falsa:

1. ( ) Si $m = 0$, entonces el polinomio $f(x)$ tiene únicamente una raíz nula.
2. ( ) Si $m = 1$, entonces todas las raíces del polinomio $f(x)$ son complejas.
3. ( ) Si $m = -1$, entonces el polinomio $f(x)$ solo tiene dos raíces complejas.
4. ( ) Si $m = -7$, entonces un factor del polinomio $f(x)$ es $(x-1)$.
5. ( ) Si $m = 3$, entonces las posibles raíces racionales del polinomio $f(x)$ son: $\pm 1,\ \pm \frac{1}{3},\ \pm 2,\ \pm \frac{2}{3}$.

19. Determine las raíces de cada polinomio y expréselos como el producto de sus factores lineales.

a) $p(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^5 + 8x^4 - \frac{27}{2}x^3 - 9x^2$

b) $q(x) = x^5 - 8x^4 + 36x^3 - 42x^2 - 37x + 50$

c) $h(x) = x^8 + 7x^7 - 11x^6 - 21x^5 + 27x^4 + 21x^3 - 25x^2 - 7x + 8$

d) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 5$

e) $r(x) = x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 15x^3 - 16x^2 - 10x + 12$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

f) $t(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 8x$

g) $s(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x$

h) $k(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 4$

i) $m(x) = 2x^5 - 4x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{2}x^2 - 10x + 3$

j) $n(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6$

k) $b(x) = 16x^6 - 24x^5 + 4x^4 + 6x^3 - 2x^2$

l) $c(x) = x^7 - 6x^6 + 7x^5 + 8x^4 - 6x^3$

m) $d(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4$

n) $u(x) = x^8 - 2x^7 - 9x^6 + 28x^5 - 21x^4 - 98x^3 + 209x^2 + 72x - 180$

o) $v(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

p) $w(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

q) $y(x) = \frac{2}{3}ix^4 - \frac{1}{2}i^3x^3 - \frac{5}{4}ix^2 - i^5x - \frac{1}{6}i$

r) $z(x) = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 4x^3 + x^2$

s) $g(x) = \frac{i}{2}x^5 + \frac{i^9}{4}x^4 - \frac{3i}{4}x^3 + \frac{3i}{4}x^2 + \frac{5}{4}i^3x + \frac{i}{2}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

20. Grafique los siguientes polinomios en forma aproximada y dé una cota superior e inferior de las raíces de cada uno de ellos.

a) $p(x) = x^7 - 3x^6 - x^3 + 3x^2$

b) $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x + 5$

c) $g(x) = x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 20x - 12$

d) $f(x) = x^9 - 4x^8 + x^7 + 6x^6 - x^5 + 4x^4 - x^3 - 6x^2$

e) $h(x) = 3x^7 + 2x^6 + 9x^5 + 6x^4 - 12x^3 - 8x^2$

f) $k(x) = x^7 + 6x^5 - 2x^4 - 27x^3 - 18x^2$

g) $r(x) = x^9 - x^8 - 4x^7 + 4x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 1$

21. Determine las raíces del polinomio $p(x)$ cuya regla de correspondencia es:

$$p(x) = x^7 - 5x^6 + 9x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 80x^2 - 144x + 80$$

sabiendo que $p(x)$ es divisible entre $g(x) = x^2 + 4$.

22. Determine las raíces del polinomio:

$$q(x) = x^5 + (1+2i)x^4 + (-6+2i)x^3 - (14+12i)x^2 - (12+28i)x - 24i$$

si se sabe que $(x+2i)$ es uno de sus factores.

23. De cada uno de los siguientes polinomios, determine sus raíces con los datos proporcionados.

a) $p(x) = x^8 - 7x^7 + 15x^6 - x^5 - 34x^4 + 30x^3$

si $\alpha_1 = \sqrt{2}$

b) $q(x) = x^{11} - 7x^9 - 2x^8 + 13x^7 + 12x^6 - 5x^5 - 10x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 24x$

si $\alpha_1 = i$ y $\alpha_2 = -1 + i$

c) $h(x) = 2x^5 - 4x^4 - 14x^3 + 36x^2 - 36x$

si $\alpha_1 = -i + 1$

d) $r(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x$

si $\alpha_1 = 1 - i$ y $\alpha_2 = -\sqrt{2}$

e) $j(x) = x^6 - 4x^5 + 2x^4 - x^2 + 4x - 2$

si $\alpha_1 = 2 - \sqrt{2}$

f) $r(x) = x^7 + x^6 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x$

si $\alpha_1 = \sqrt{-1}$

g) $w(x) = 2x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 16x$

si $\alpha_1 = 1 + i$

h) $t(x) = 2x^7 - 5x^6 - 6x^5 - 8x^3 + 5x^2$

si $\alpha_1 = -i$

i) $y(x) = 18x^5 - 49x^4 + x^3 + 101x^2 + 23x - 10$

si $\alpha_1 = 2 - i$

j) $u(x) = x^{10} - 3x^9 + 8x^7 - 8x^6 - 4x^5 + 8x^4$

si $\alpha_1 = 1 + i$

k) $v(x) = 3x^6 - x^5 - 9x^4 - 15x^3 + 2x$

si $\alpha_1 = -1 + i$

l) $z(x) = x^9 - (3 - 4i)x^8 + (1 - 12i)x^7 + (7 + 4i)x^6 - (16 - 28i)x^5 +$

$(18 - 64i)x^4 - (16 - 72i)x^3 + (8 - 64i)x^2 + 32ix$

si $\alpha_1 = 1 + i$ y $\alpha_2 = -4i$

m) $n(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 5x^2$

si $\alpha_1 = -i$

n) $c(x) = x^7 - 10x^6 + 37x^5 - 54x^4 - 97x^3 + 346x^2 - 133x + 390$

si $\alpha_1 = i$ y $\alpha_2 = -2$

o) $b(x) = x^5 - \sqrt{2}\,x^4 - x + \sqrt{2}$

si $\alpha_1 = \sqrt{2}$

p) $a(x) = x^7 - (4 + i)x^6 + (1 + 5i)x^5 + (6 - 6i)x^4 - x^3 + (4 + i)x^2 -$

$(1 + 5i)x - (6 - 6i)$

si $\alpha_1 = -1 + i$

ÍNDICE

1

2

3

4

5

q) $g(x) = x^7 - 6x^6 + 12x^5 - 8x^4 + x^3 - 2x^2 - 10x$

si $\alpha_1 = -i$ y $\alpha_2 = 1 - \sqrt{3}$

r) $n(x) = x^7 + 3x^5 - 4x$

si $\alpha_1 = \sqrt{2}i$ y $\alpha_2 = \sqrt{2}i$

s) $m(x) = x^7 - 2x^5 - 7x^3 - 4x$

si $\alpha_1 = i$ y $\alpha_2 = i$

t) $h(x) = x^{27} - 6x^{25} - 27x^{23}$

si $\alpha_1 = -\sqrt{3}i$

24. Obtenga las raíces de los siguientes polinomios haciendo uso del cambio de variable:

a) $q(x) = x^{12} - x^8 + 2x^4 + 4$

b) $p(x) = x^6 - \left(1 + \sqrt{2}\right)x^3 + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $r(x) = 2x^9 + x^6 + x^3 + 2$

d) $g(x) = x^4 + 37x^2 + 36$

e) $j(x) = x^6 + 5x^4 + 5x^2 + 4$

f) $r(x) = x^8 - 2x^6 + 2x^4 - 2x^2 + 1$

g) $f(x) = x^6 + 9x^4 + 24x^2 + 16$

h) $w(x) = 2x^8 + 4x^4 + 2$

i) $t(x) = x^{18} + 2x^{12} - 7x^6 + 4$

25. Dado el polinomio:

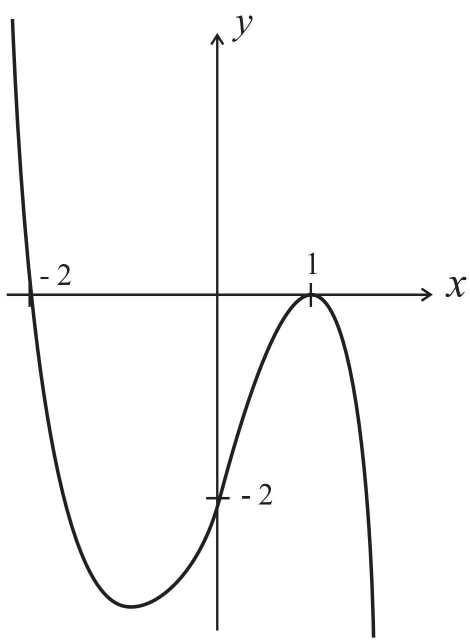
$$p(x) = x^{10} + 4x^8 - 7x^6 - 34x^4 - 24x^2$$

a) Determine la distribución de las posibles raíces de $p(x)$, mediante la regla de los signos de Descartes.

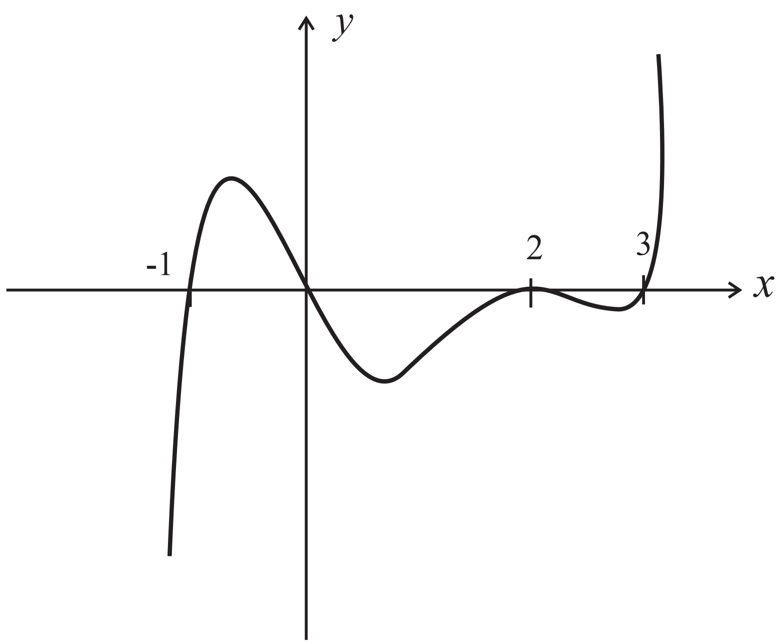
b) Obtenga las posibles raíces racionales de $p(x)$.

c) Exprese al polinomio $p(x)$ como el producto de sus factores lineales, sabiendo que $\alpha_1 = -2i$ y $\alpha_2 = -\sqrt{3}$ son dos de sus raíces.

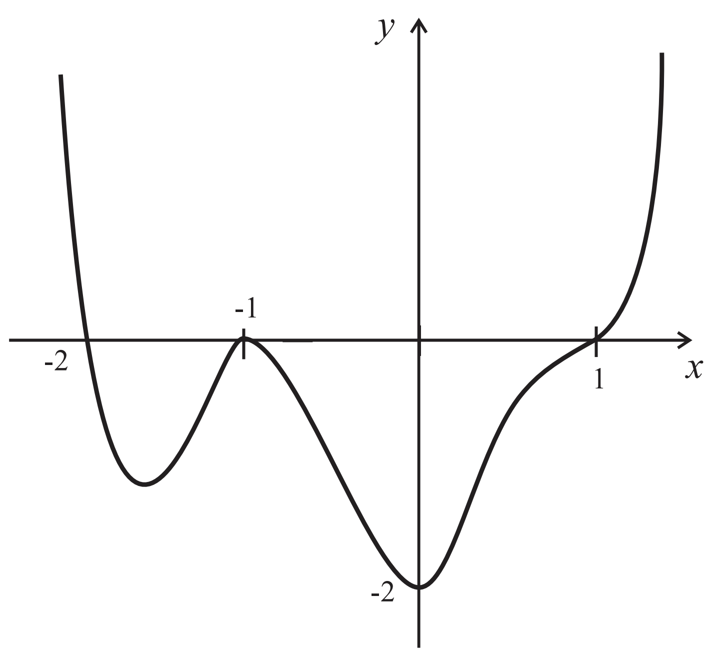
26. Sea el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica se muestra en la figura. Obtenga los valores de los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, que definen al polinomio $p(x)$:



27. Obtenga la regla de correspondencia del polinomio $h(x)$ de quinto grado, si el coeficiente de la variable de mayor exponente es 2 y su gráfica es:



28. Determine el polinomio $q(x)$ de grado sexto, cuya gráfica es la siguiente:



RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. a) 0

b) $9x^6 + \frac{1}{2}x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2$

c) $\frac{4}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^4 - 3x^2 - 4x - 6$

d) $4x^7 + 16x^6 + x^5 - 2x^4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

e) $2x^9 + (3+2i)x^7 + x^6 + (2+i)x^5 + (5+i)x^4 + (1+i)x^3 + 2x^2 + 2x + 2$

f) $x^8 + \frac{1}{2}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^4 - x^3 - x^2$

g) $\frac{36x - 3}{9x^2 + 3x - 1} + 9x - 6$

h) $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$

i) $8x - 5$

j) $6x^6 - x^5 + x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x$

k) $\frac{1}{2}\left(2x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 11x - 6\right)$

l) $-2x^6 + 2ix^5 + 10x^4 - 10ix^3 - 8x^2 + 8ix$

m) $2x^3 - 5x^2 - 5x + 14$

2. a) $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$

3. a) $p(2) = 218$

b) $p(-2) = 7$

c) $p(-2) = 35$

d) $p(i) = 1 + 2i$

e) $p(1+i) = 0$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

4. a) $\begin{cases} a = -9 \\ b = -5 \end{cases}$

$\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2 = -1$ $\quad \alpha_3 = -1$

$\alpha_4 = -2 + i$ $\quad \alpha_5 = -2 - i$

b) $\begin{cases} a = 8 \\ b = 20 \end{cases}$

$\alpha_1 = -1$ $\quad \alpha_2 = -2$ $\quad \alpha_3 = \dfrac{2}{3}$

$\alpha_4 = -1 - 2i$ $\quad \alpha_5 = -1 + 2i$

c) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

$\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2 = \sqrt{2}$ $\quad \alpha_3 = -\sqrt{2}$

$\alpha_4 = -2 + 3i$

d) $\left\{ a = \dfrac{3}{2} \right.$

$\alpha_1 = 2$ $\quad \alpha_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \alpha_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

e) $\{ a = 1$

$\alpha_1 = 0$ $\quad \alpha_2 = -1$ $\quad \alpha_3 = i$

$\alpha_4 = -i$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

f) $\begin{cases} a = -15 \\ b = 10 \end{cases}$

$\alpha_1 = i$ $\quad \alpha_2 = -i$ $\quad \alpha_3 = -2$

$\alpha_4 = \dfrac{1}{2}$ $\quad \alpha_5 = \sqrt{5}$ $\quad \alpha_6 = -\sqrt{5}$

g) $\{ a = -1 - i$

$\alpha_1 = -1$ $\quad \alpha_2 = 2$ $\quad \alpha_3 = i$

$\alpha_4 = \sqrt{2}$ $\quad \alpha_5 = -\sqrt{2}$

h) $\begin{cases} a = -12 \\ b = -14 \end{cases}$

$\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2 = -2$ $\quad \alpha_3 = -4$

$\alpha_4 = 3$ $\quad \alpha_5 = i$ $\quad \alpha_6 = -i$

i) $\begin{cases} a = 4 \\ b = 10 \end{cases}$

$\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2 = -2$ $\quad \alpha_3 = 3$

5. $\begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$

6. a)

$\mathbb{R}^+$	3	1	3	1
$\mathbb{R}^-$	2	0	0	2
$\mathbb{C}$	0	4	2	2
Tr	5	5	5	5

b)

$\mathbb{R}^+$	1	1	1
$\mathbb{R}^-$	4	2	0
$\mathbb{C}$	0	2	4
Tr	5	5	5

c)

$\mathbb{R}^+$	0
$\mathbb{R}^-$	0
$\mathbb{C}$	8
Tr	8

d)

$\mathbb{R}^+$	2	0
$\mathbb{R}^-$	1	1
$\mathbb{C}$	6	8
Tr	9	9

e) Con $\alpha_1 = 0$

$\mathbb{R}^+$	4	2	0	4	4	2	2	0	0
$\mathbb{R}^-$	4	2	0	2	0	4	0	4	2
$\mathbb{C}$	2	6	10	4	6	4	8	6	8
Tr	10	10	10	10	10	10	10	10	10

f) Con $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$

$\mathbb{R}^+$	4	2	0
$\mathbb{R}^-$	1	1	1
$\mathbb{C}$	0	2	4
Tr	5	5	5

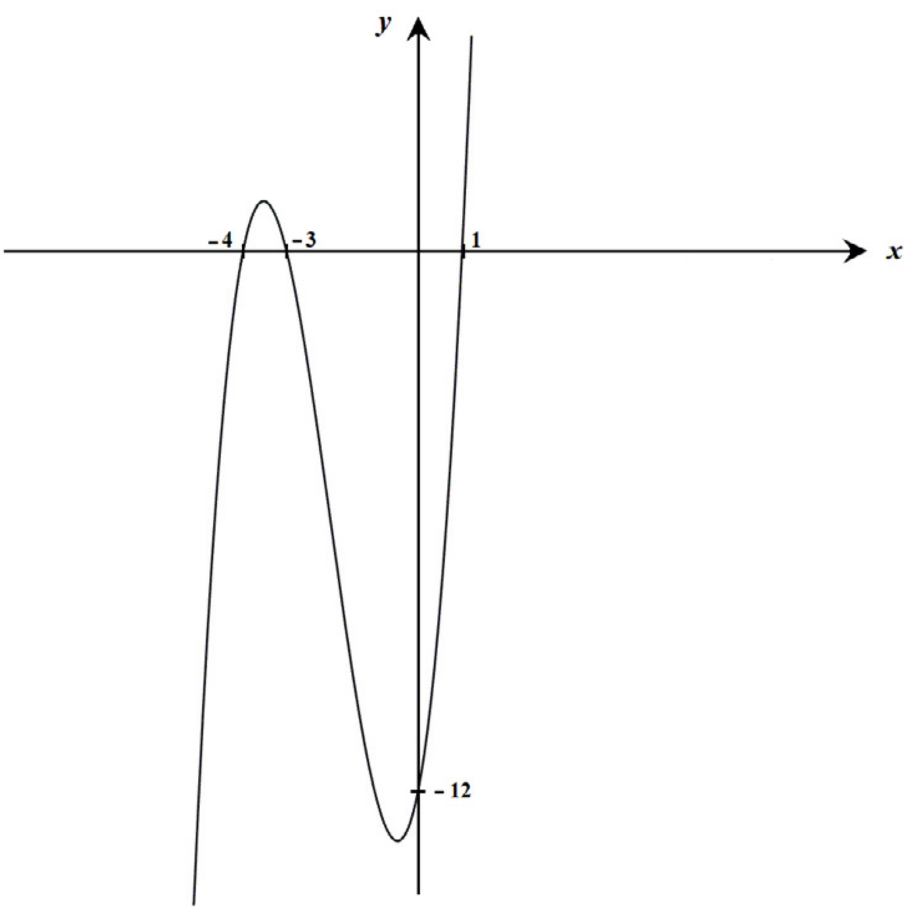
7. $\begin{cases} b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

$\alpha_1 = -2$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = 1$

8. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 11 \end{cases}$

$\alpha_1 = -2$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = 1 - 2i$ $\alpha_4 = 1 + 2i$

9. $\begin{cases} f = 5 \\ g = 12 \\ e = 6 \end{cases}$

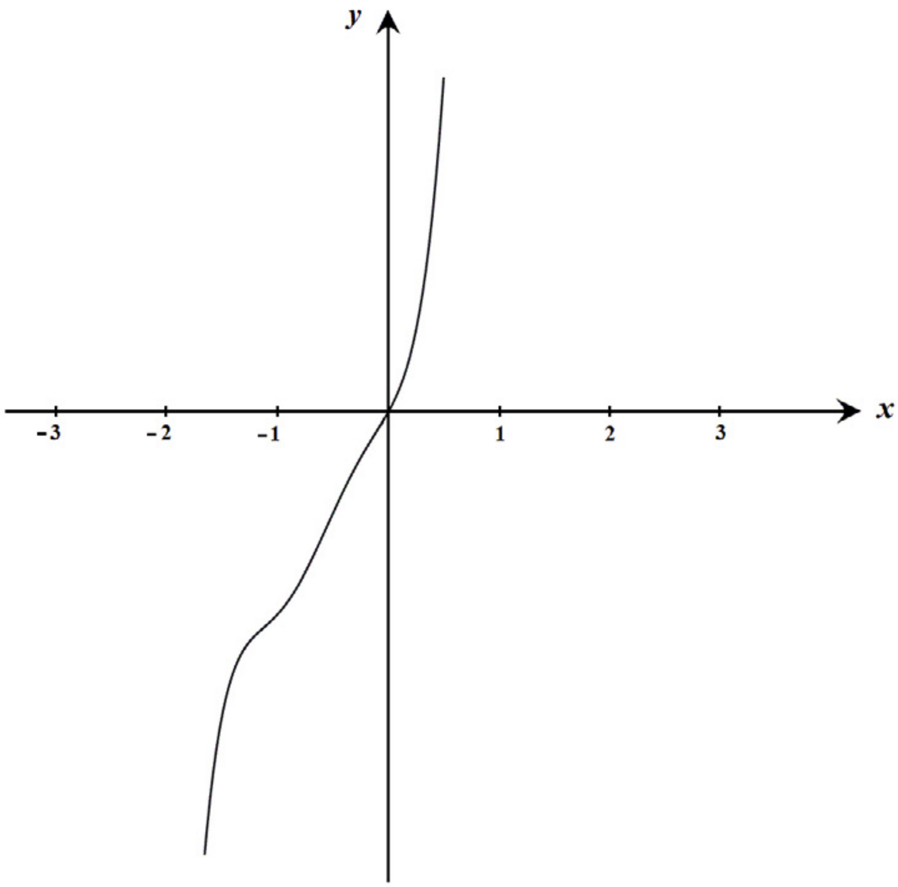


ÍNDICE
1
2
3
4
5

10.

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = i$ $\alpha_3 = -i$

$\alpha_4 = -3 + i$ $\alpha_5 = -3 - i$



11. $h(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

12. $g(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x^3$

13. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

14.

$\mathbb{R}^+$	0
$\mathbb{R}^-$	1
$\mathbb{C}$	4
Tr	5

15.

$p(x)$	$q(x)$
$\alpha_1 = -2i$	$\alpha_1 = 2i$
$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 = -2i$
$\alpha_3 = 1$	$\alpha_3 = -i$
$\alpha_4 = -2$	$\alpha_4 = 0$
	$\alpha_5 = 1$
	$\alpha_6 = -2$

16. $p(x) = 4x^3 - 3x + 1$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$f(x)$	$p(x)$	$h(x)$
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = -1$	$\alpha_1 = -3$
$\alpha_2 = \frac{1}{2}$	$\alpha_2 = \frac{1}{2}$	$\alpha_2 = 1$
$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	$\alpha_3 = 2$
$\alpha_4 = -3$		$\alpha_4 = 0$
$\alpha_5 = 1$		
$\alpha_6 = -1$		
$\alpha_7 = 2$		

17. $\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = i$

18. 1. (F)
    2. (V)
    3. (F)
    4. (V)
    5. (F)

19. a) $p(x) = xx(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+3i)(x-3i)$

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 2$

$\alpha_4 = -\frac{1}{2}$ $\alpha_5 = -3i$ $\alpha_6 = 3i$

b) $q(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3+4i)(x-3-4i)$

$\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = 1$ $\alpha_3 = 2$ $\alpha_4 = 3-4i$

$\alpha_5 = 3+4i$

c) $h(x) = (x+1)(x+1)(x+1)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)(x+8)$

$\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = -1$ $\alpha_4 = 1$

$\alpha_5 = 1$ $\alpha_6 = 1$ $\alpha_7 = 1$ $\alpha_8 = -8$

d) $f(x) = (x+1+2i)(x+1-2i)(x+1)(x+1)$

$\alpha_1 = -1-2i$ $\alpha_2 = -1+2i$ $\alpha_3 = -1$ $\alpha_4 = -1$

e) $r(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

$\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = 1$ $\alpha_3 = 2$ $\alpha_4 = 3$

$\alpha_5 = \sqrt{2}$ $\alpha_6 = -\sqrt{2}$

f) $t(x) = 2x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ $\alpha_3 = 2$

$\alpha_4 = -2i$ $\alpha_5 = 2i$

g) $s(x) = x(x+1)(x-2)(x+i)(x-i)$

$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = -1 \qquad \alpha_3 = 2 \qquad \alpha_4 = -i$

$\alpha_5 = i$

h) $k(x) = (x+1)(x-2)(x+1)(x-2)(x+i)(x-i)$

$\alpha_1 = -1 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_3 = -1 \qquad \alpha_4 = 2$

$\alpha_5 = -i \qquad \alpha_6 = i$

i) $m(x) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1+i)(x-1-i)$

$\alpha_1 = -\frac{3}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_3 = 1 \qquad \alpha_4 = 1-i$

$\alpha_5 = 1+i$

j) $n(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)(x+1+i)(x+1-i)$

$\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = 3 \qquad \alpha_3 = -1-i \qquad \alpha_4 = -1+i$

k) $b(x) = 16\,x\,x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{2} \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}$

$\alpha_5 = 1 \qquad \alpha_6 = \frac{1}{2}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

l) $c(x) = x\,x\,x\,(x+1)(x-3)\left(x-2+\sqrt{2}\right)\left(x-2-\sqrt{2}\right)$

$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = 0 \qquad \alpha_4 = -1$

$\alpha_5 = 3 \qquad \alpha_6 = 2-\sqrt{2} \qquad \alpha_7 = 2+\sqrt{2}$

m) $d(x) = 2(x+1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\alpha_1 = -1 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \alpha_4 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

n) $u(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)(x-1+2i)(x-1-2i)$

$\alpha_1 = -3 \qquad \alpha_2 = -2 \qquad \alpha_3 = -1 \qquad \alpha_4 = 1$

$\alpha_5 = 2 \qquad \alpha_6 = 3 \qquad \alpha_7 = 1-2i \qquad \alpha_8 = 1+2i$

o) $v(x) = (x+1)(x-2)(x-1)$

$\alpha_1 = -1 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_3 = 1$

p) $w(x) = (x+1)(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$

$\alpha_1 = -1 \qquad \alpha_2 = -1 \qquad \alpha_3 = -1$

$\alpha_4 = -1 \qquad \alpha_5 = -1$

q) $y(x) = \frac{2}{3}i\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$

$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{4} \qquad \alpha_3 = -\sqrt{2} \qquad \alpha_4 = \sqrt{2}$

r) $z(x) = x\,x\,(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = -1$

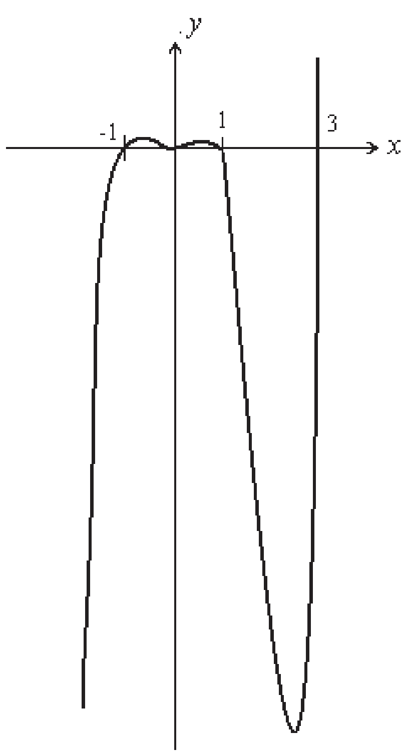
$\alpha_4 = -1$ $\alpha_5 = -1$ $\alpha_6 = -1$

s) $g(x) = \frac{1}{2}\,i\,(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+i)(x-i)$

$\alpha_1 = -2$ $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ $\alpha_3 = 1$

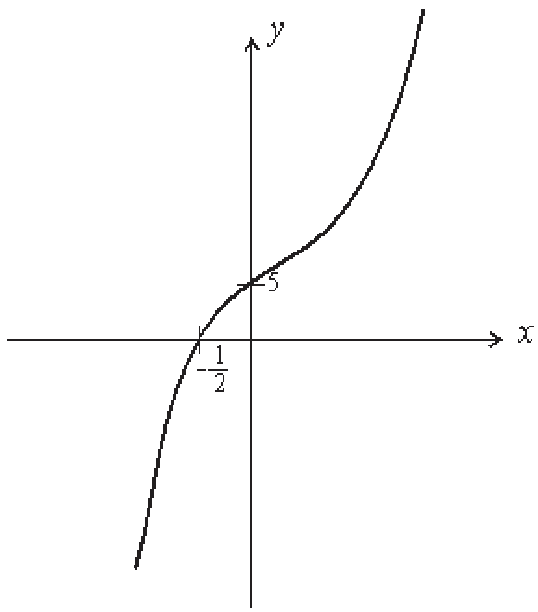
$\alpha_4 = -i$ $\alpha_5 = i$

20. a) una cota inferior: -1 y una cota superior: 3

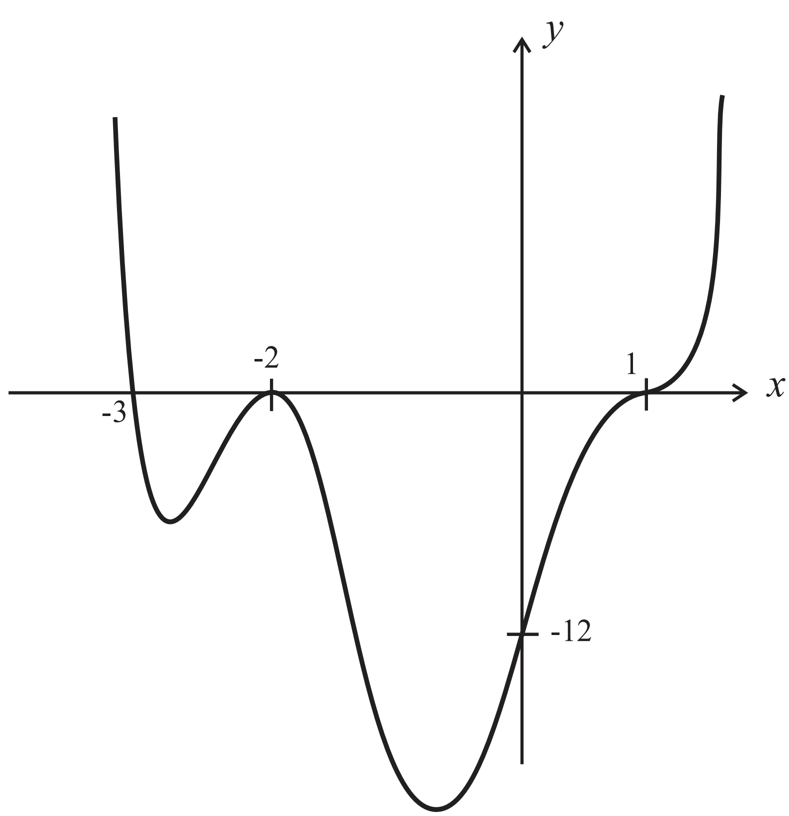


ÍNDICE
1
2
3
4
5

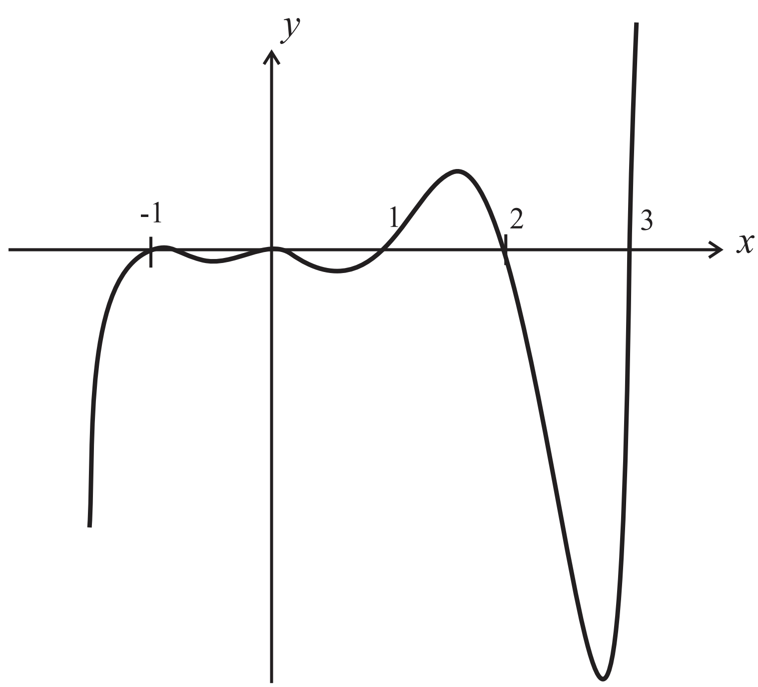
b) una cota inferior: $-\dfrac{1}{2}$ y una cota superior: 1



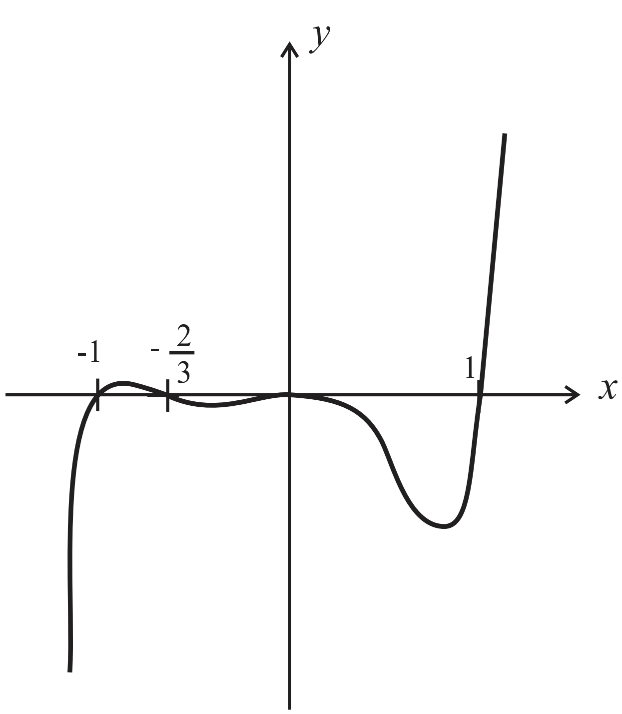
c) una cota inferior: -3 y una cota superior: 1



d) una cota inferior: -1 y una cota superior: 3

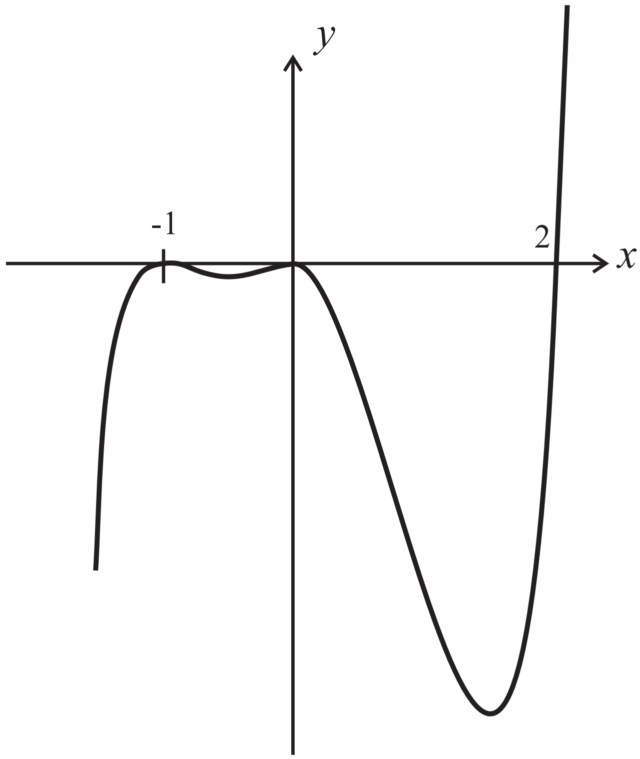


e) una cota inferior: -1 y una cota superior: 1

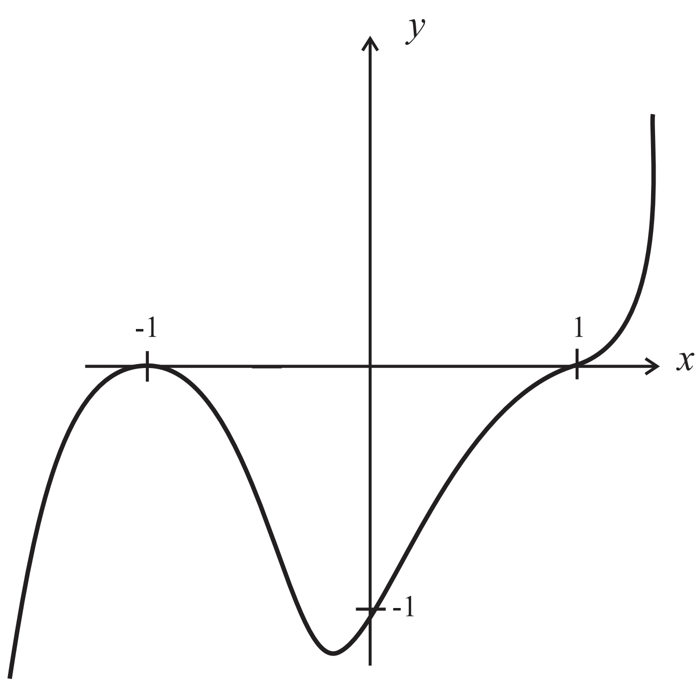


ÍNDICE
1
2
3
4
5

f) una cota inferior: -1 y una cota superior: 2



g) una cota inferior: -1 y una cota superior: 1



21.

$\alpha_1 = -2i$ $\alpha_2 = 2i$ $\alpha_3 = 2 - i$ $\alpha_4 = 2 + i$

$\alpha_5 = -2$ $\alpha_6 = 1$ $\alpha_7 = 2$

22.

$\alpha_1 = -2i$ $\alpha_2 = -1 - i$ $\alpha_3 = -1 + i$

$\alpha_4 = -2$ $\alpha_5 = 3$

23. a)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$ $\alpha_4 = \sqrt{2}$

$\alpha_5 = -\sqrt{2}$ $\alpha_6 = 3$ $\alpha_7 = 2 - i$ $\alpha_8 = 2 + i$

b)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = i$ $\alpha_3 = -i$ $\alpha_4 = -1 + i$

$\alpha_5 = -1 - i$ $\alpha_6 = -2$ $\alpha_7 = 1$ $\alpha_8 = \sqrt{3}$

$\alpha_9 = -\sqrt{3}$ $\alpha_{10} = 2$ $\alpha_{11} = 1$

c)

$\alpha_1 = 1 - i$ $\alpha_2 = 1 + i$ $\alpha_3 = 0$

$\alpha_4 = 3$ $\alpha_5 = -3$

d)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = \sqrt{2}$ $\alpha_3 = -\sqrt{2}$ $\alpha_4 = 1 - i$

$\alpha_5 = 1 + i$ $\alpha_6 = -i$ $\alpha_7 = i$

e)

$\alpha_1 = 2 - \sqrt{2}$ $\alpha_2 = 2 + \sqrt{2}$ $\alpha_3 = -1$

$\alpha_4 = 1$ $\alpha_5 = -i$ $\alpha_6 = i$

f)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = i$ $\alpha_3 = -i$ $\alpha_4 = -2$

$\alpha_5 = 1$ $\alpha_6 = i$ $\alpha_7 = -i$

g)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 2$ $\alpha_3 = -2$ $\alpha_4 = 1 + i$

$\alpha_5 = 1 - i$

h)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = i$ $\alpha_4 = -i$

$\alpha_5 = \frac{1}{2}$ $\alpha_6 = 1-\sqrt{6}$ $\alpha_7 = 1+\sqrt{6}$

i)

$\alpha_1 = 2 - i$ $\alpha_2 = 2 + i$ $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$ $\alpha_4 = \frac{2}{9}$

$\alpha_5 = -1$

j)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$ $\alpha_4 = 0$

$\alpha_5 = 1+i$ $\alpha_6 = 1-i$ $\alpha_7 = -1$ $\alpha_8 = 2$

$\alpha_9 = -\sqrt{2}$ $\alpha_{10} = \sqrt{2}$

k)

$\alpha_1 = -1 + i$ $\alpha_2 = -1 - i$ $\alpha_3 = 0$ $\alpha_4 = \frac{1}{3}$

$\alpha_5 = 1-\sqrt{2}$ $\alpha_6 = 1+\sqrt{2}$

l)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = -2$ $\alpha_3 = 1$ $\alpha_4 = 2$

$\alpha_5 = i$ $\alpha_6 = -i$ $\alpha_7 = 1-i$ $\alpha_8 = 1+i$

$\alpha_9 = -4i$

m)

$\alpha_1 = i$ $\alpha_2 = -i$ $\alpha_3 = 0$ $\alpha_4 = 0$

$\alpha_5 = 2-i$ $\alpha_6 = 2+i$

n)

$\alpha_1 = -2$ $\alpha_2 = i$ $\alpha_3 = -i$ $\alpha_4 = 2-3i$

$\alpha_5 = 2+3i$ $\alpha_6 = 3$ $\alpha_7 = 5$

o)

$\alpha_1 = \sqrt{2}$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = 1$

$\alpha_4 = i$ $\alpha_5 = -i$

p)

$\alpha_1 = -1+i$ $\alpha_2 = -i$ $\alpha_3 = i$ $\alpha_4 = -1$

$\alpha_5 = 1$ $\alpha_6 = 2$ $\alpha_7 = 3$

q)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 1-\sqrt{3}$ $\alpha_3 = 1+\sqrt{3}$ $\alpha_4 = -i$

$\alpha_5 = i$ $\alpha_6 = 2-i$ $\alpha_7 = 2+i$

r)

$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 1$ $\alpha_3 = -1$ $\alpha_4 = -\sqrt{2}i$

$\alpha_5 = -\sqrt{2}i$ $\alpha_6 = \sqrt{2}i$ $\alpha_7 = \sqrt{2}i$

s)

$\alpha_1 = i$ $\alpha_2 = i$ $\alpha_3 = -i$ $\alpha_4 = -i$

$\alpha_5 = 0$ $\alpha_6 = 2$ $\alpha_7 = -2$

t)

$\alpha_{1\ldots 23} = 0$ $\alpha_{24} = -3$ $\alpha_{25} = 3$ $\alpha_{26} = \sqrt{3}i$

$\alpha_{27} = -\sqrt{3}i$

24.

a)

$\alpha_1 = 1 \operatorname{cis} 45°$ $\alpha_2 = 1 \operatorname{cis} 135°$ $\alpha_3 = 1 \operatorname{cis} 225°$ $\alpha_4 = 1 \operatorname{cis} 315°$

$\alpha_5 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 75°$ $\alpha_6 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 165°$ $\alpha_7 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 255°$ $\alpha_8 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 345°$

$\alpha_9 = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 15°$ $\alpha_{10} = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 105°$ $\alpha_{11} = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 195°$ $\alpha_{12} = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} 285°$

b)

$\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{cis} 0°$ $\alpha_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{cis} 120°$ $\alpha_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{cis} 240°$

c)

$\alpha_1 = 1 \operatorname{cis} 60°$ $\alpha_2 = 1 \operatorname{cis} 180°$ $\alpha_3 = 1 \operatorname{cis} 300°$ $\alpha_4 = 1 \operatorname{cis} 94.8°$

$\alpha_5 = 1 \operatorname{cis} 214.8°$ $\alpha_6 = 1 \operatorname{cis} 334.8°$ $\alpha_7 = 1 \operatorname{cis} 25.1°$ $\alpha_8 = 1 \operatorname{cis} 145.1°$

$\alpha_9 = 1 \operatorname{cis} 265.1°$

d)

$\alpha_1 = -6i$ $\alpha_2 = 6i$ $\alpha_3 = i$ $\alpha_4 = -i$

e)

$\alpha_1 = 2 \text{ cis } 90°$ $\alpha_2 = 2 \text{ cis } 270°$ $\alpha_3 = 1 \text{ cis } 60°$ $\alpha_4 = 1 \text{ cis } 240°$

$\alpha_5 = 1 \text{ cis } 120°$ $\alpha_6 = 1 \text{ cis } 300°$

f)

$\alpha_1 = 1 \text{ cis } 0°$ $\alpha_2 = 1 \text{ cis } 180°$ $\alpha_3 = 1 \text{ cis } 0°$ $\alpha_4 = 1 \text{ cis } 180°$

$\alpha_5 = 1 \text{ cis } 45°$ $\alpha_6 = 1 \text{ cis } 225°$ $\alpha_7 = 1 \text{ cis } 135°$ $\alpha_8 = 1 \text{ cis } 315°$

g)

$\alpha_1 = 1 \text{ cis } 90°$ $\alpha_2 = 1 \text{ cis } 270°$ $\alpha_3 = 2 \text{ cis } 90°$ $\alpha_4 = 2 \text{ cis } 90°$

$\alpha_5 = 2 \text{ cis } 270°$ $\alpha_6 = 2 \text{ cis } 270°$

h)

$\alpha_1 = 1 \text{ cis } 45°$ $\alpha_2 = 1 \text{ cis } 135°$ $\alpha_3 = 1 \text{ cis } 225°$ $\alpha_4 = 1 \text{ cis } 315°$

$\alpha_5 = 1 \text{ cis } 45°$ $\alpha_6 = 1 \text{ cis } 135°$ $\alpha_7 = 1 \text{ cis } 225°$ $\alpha_8 = 1 \text{ cis } 315°$

i)

$\alpha_1 = 1 \text{ cis } 0°$ $\alpha_2 = 1 \text{ cis } 0°$ $\alpha_3 = 1 \text{ cis } 60°$ $\alpha_4 = 1 \text{ cis } 60°$

$\alpha_5 = 1 \text{ cis } 120°$ $\alpha_6 = 1 \text{ cis } 120°$ $\alpha_7 = 1 \text{ cis } 180°$ $\alpha_8 = 1 \text{ cis } 180°$

$\alpha_9 = 1 \text{ cis } 240°$ $\alpha_{10} = 1 \text{ cis } 240°$ $\alpha_{11} = 1 \text{ cis } 300°$ $\alpha_{12} = 1 \text{ cis } 300°$

$\alpha_{13} = \sqrt[6]{4} \text{ cis } 30°$ $\alpha_{14} = \sqrt[6]{4} \text{ cis } 90°$ $\alpha_{15} = \sqrt[6]{4} \text{ cis } 150°$ $\alpha_{16} = \sqrt[6]{4} \text{ cis } 210°$

$\alpha_{17} = \sqrt[6]{4} \text{ cis } 270°$ $\alpha_{18} = \sqrt[6]{4} \text{ cis } 330°$

25. a) Considerando el polinomio con la x^2 factorizada.

$\mathbb{R}^+$	1
$\mathbb{R}^-$	1
$\mathbb{C}$	6
Tr	8

b) P.R.R. $\pm \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

c) $p(x) = xx(x+2i)(x-2i)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2i}\right)\left(x+\sqrt{2i}\right)(x+i)(x-i)$

26. $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases}$

27. $h(x) = 2x^5 - 12x^4 + 18x^3 + 8x^2 - 24x$

28. $q(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Desde la antigüedad, la humanidad ha mostrado interés por resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Este interés surge como una necesidad de plantear y resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, cosechas, comercio o distribución de bienes materiales. Los primeros registros que se tienen en tablillas de arcilla o papiros, sobre la solución de ecuaciones e incluso de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, datan del siglo XVII a.C.

En este capítulo nos enfocaremos al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, la obtención de su solución o soluciones, cuando estas existan, y su uso en la solución de problemas de aplicación.

Ecuación lineal

Se define como ecuación lineal una expresión de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

donde:

$$a_1 , a_2 , \ldots , a_n , b \in \mathbb{C}$$

A las literales x_i se les conoce como incógnitas de la ecuación, a los números a_i se les llama coeficientes de las incógnitas y al número b se le conoce como término independiente.

A las expresiones que aparecen en ambos lados del signo de igualdad reciben el nombre de lados o miembros de la ecuación. La expresión que se tiene al lado izquierdo de la igualdad se le llama primer miembro y a la del lado derecho segundo miembro, o bien, simplemente lado izquierdo y lado derecho de la ecuación.

Solución de una ecuación

Se conoce como solución de una ecuación al conjunto de valores que toman las incógnitas, con los cuales se cumple la igualdad. Se dice, en este caso, que dichos valores satisfacen a la ecuación.

En muchos problemas de aplicación se recurre a los sistemas de ecuaciones lineales para plantearlos y resolverlos, por eso resulta necesario e importante el estudio de los sistemas de ecuaciones y poder determinar su solución.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es aquel que agrupa a dos o más ecuaciones lineales que involucran a las mismas incógnitas. En general, un sistema de ecuaciones lineales se define de la siguiente forma:

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y coeficientes complejos es una expresión de la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + \dots + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde los coeficientes a_{ij} y los términos independientes $b_i \in \mathbb{C}$.

Cada uno de los coeficientes del sistema tiene dos subíndices, el primero de ellos nos indica en cuál de las ecuaciones del sistema aparece y el segundo de qué incógnita es coeficiente, así, por ejemplo, el a_{32} es el coeficiente de la segunda incógnita en la tercera ecuación.

Usaremos una llave a la izquierda del sistema de ecuaciones para representarlo, la cual tiene el sentido de que debemos manejar las ecuaciones del sistema en forma simultánea. El uso de esta llave en los sistemas de ecuaciones no es generalizado en los textos que tratan el tema; sin embargo, nosotros lo haremos con la idea de hacer más clara la notación, cuando se aplique el método de solución de sistemas de ecuaciones lineales que trataremos un poco más adelante.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Solución de un sistema de ecuaciones

La solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto ordenado de valores con los cuales se satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Sistema homogéneo de ecuaciones lineales

Cuando en un sistema de ecuaciones lineales todos los términos independientes son iguales a cero, el sistema recibe el nombre de sistema homogéneo.

Un ejemplo de este tipo de sistemas de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Una característica que distingue a este tipo de sistemas de ecuaciones es que siempre tienen solución. En el caso del sistema anterior, una solución sería:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

Conocida como solución trivial del sistema.

A diferencia de los sistemas homogéneos, los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos pueden tener solución o no tenerla. Si la solución de un sistema existe, esta puede ser única, o bien, se podrían tener una infinidad de soluciones.

Los sistemas de ecuaciones pueden ser clasificados de diferentes formas, se tienen sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, homogéneos y no homogéneos, etc.; sin embargo, los sistemas de ecuaciones también se pueden clasificar en función del número de soluciones que admiten, o bien, cuando no la tienen. De acuerdo con esto, se tiene la siguiente clasificación:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

En función de su solución, los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar en:

1) **Sistemas compatibles:** Son aquellos sistemas de ecuaciones que tienen solución. Se pueden tener dos casos:

a) *Sistemas compatibles determinados*: Son aquellos sistemas de ecuaciones que admiten una solución.

b) *Sistemas compatibles indeterminados:* Son aquellos sistemas de ecuaciones que admiten una infinidad de soluciones.

2) **Sistemas incompatibles:** Son aquellos sistemas de ecuaciones que no admiten solución.

EJERCICIO 4.1 Clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones en función del tipo de solución que presentan.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -4x + 2y = 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

Para resolver este sistema de ecuaciones emplearemos el método de sustitución.

Despejando y de la ecuación (1), tenemos:

$$y = 2x + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sustituyendo (3) en (2):

$$-4x + 2(2x+1) = 2$$
$$-4x + 4x + 2 = 2$$
$$2 = 2$$

Se observa que al aplicar el método de solución seleccionado, se llega a la identidad $2 = 2$; sin embargo, lo que se esperaría de la sustitución realizada, es llegar a determinar el valor de x, lo cual no sucedió.

Cuando se llega a una identidad como la anterior al tratar de resolver un sistema de ecuaciones, entonces podemos afirmar que dicho sistema tiene una infinidad de soluciones, pues la identidad $2 = 2$ se satisface para todos los valores de x, y. Gráficamente, este sistema de ecuaciones nos representa dos rectas coincidentes.

Si se quieren obtener algunas de esas soluciones, entonces se deberá suponer el valor de alguna de las incógnitas y obtener el valor de la otra. De esta forma, se podrán obtener tantas soluciones como se quiera.

Algunas soluciones del sistema planteado son:

Si $x = 1$, al sustituir en la ecuación (3), se llega a que $y = 3$, con lo cual:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{es una solución del sistema.}$$

Si $x = -1$, entonces $y = -1$, por lo que:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{es otra solución del sistema.}$$

Dado que el sistema tiene múltiples soluciones, entonces se trata de un sistema compatible indeterminado.

b) El sistema $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$ lo resolveremos por sumas y restas.

Multiplicando la primera ecuación por -2, tenemos:

$$(-2)\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 6y = -2 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones se llega a:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x - 6y = -2 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases} \\ \hline 0 = 1 \end{array}$$

Hemos llegado a una inconsistencia del sistema. No existen valores de x, y que satisfacen a la ecuación $0 = 1$, lo que implica que dicho sistema de ecuaciones no admite solución y, por lo tanto, se trata de un sistema incompatible. Gráficamente, este sistema de ecuaciones nos representa dos rectas paralelas no coincidentes.

c) El sistema $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ también lo resolveremos por sumas y restas.

Multiplicando la primera ecuación por 3, tenemos:

$$(3)\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 6y = -9 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sumando ambas ecuaciones se llega a:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -3x + 6y = -9 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \\ \hline 5y = -5 \end{array} \qquad \therefore \quad y = -1$$

sustituyendo $y = -1$ en la segunda ecuación, tenemos:

$$3x - (-1) = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

En este caso, el método empleado nos condujo directamente a la solución del sistema, lo cual implica que dicho sistema admite una sola solución, es decir, se trata de un sistema compatible determinado. Gráficamente, este sistema de ecuaciones nos representa dos rectas que se intersecan en un punto y las coordenadas de dicho punto de intersección nos representan la solución del sistema.

En este ejercicio se ejemplificaron los tres tipos de sistemas de ecuaciones que se pueden tener de acuerdo con el tipo de solución que presentan.

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución, aunque tengan distinto número de ecuaciones.

Uno de los objetivos de este capítulo es obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Existen varios métodos con los cuales se puede resolver un sistema de ecuaciones; sin embargo, nosotros nos enfocaremos en el llamado Método de Gauss, el cual está basado en la aplicación de las transformaciones elementales sobre un sistema de ecuaciones, que conduce a sistemas equivalentes.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Las transformaciones elementales a las que hacemos referencia son las siguientes:

Transformaciones elementales

Las transformaciones elementales son las siguientes:

1) Se puede intercambiar el orden de las ecuaciones de un sistema o, también, el orden de las incógnitas.

2) Se puede multiplicar una ecuación del sistema por una constante diferente de cero.

3) Se puede multiplicar una ecuación del sistema por una constante cualquiera y sumarla a otra ecuación, reemplazando esta última por el resultado obtenido.

Es conveniente enfatizar que la aplicación de estas transformaciones elementales sobre un sistema de ecuaciones, no modifica su solución.

MÉTODO DE GAUSS

Los antecedentes históricos del llamado Método de Gauss datan del siglo III a.C., los chinos usaban un método casi idéntico para resolver sistemas de ecuaciones. De China pasó a Babilonia, Grecia, la India y a Europa.

Se le atribuye a Issac Newton el haber inventado el Método de Gauss para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, pues fue él quien lo presentó por primera vez en su formulación moderna, aunque no lo quiso publicar; sin embargo, este método de eliminación de incógnitas lo popularizó Gauss, quien lo utilizó, entre otras cosas, para determinar la órbita del asteroide Ceres a través del método de mínimos cuadrados en 1801. El método lleva su nombre, no por haberlo inventado, sino por haberlo utilizado y popularizado.

El Método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales dado, a otro sistema equivalente que esté en su forma escalonada, en el cual, cada una de las ecuaciones del sistema tenga una incógnita menos que la anterior. Este escalonamiento se deberá lograr aplicando las transformaciones elementales en el sistema, hasta conseguir, cuando sea posible, que la última ecuación del sistema quede con una sola incógnita. Se determina el valor de esta incógnita y después, mediante una sustitución regresiva, se determina el valor del resto de las incógnitas.

Ilustremos este método mediante los siguientes ejemplos.

EJERCICIO 4.2 Aplicando el Método de Gauss, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 2y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ 2x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

Lo primero que haremos es intercambiar la primera y la tercera ecuación, dado que el coeficiente de x en la tercera ecuación es uno y eso nos permitirá eliminar la incógnita x en la segunda y tercera ecuación con mayor facilidad. La forma en que representaremos gráficamente esta transformación es:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

Para eliminar la incógnita x de la segunda ecuación, multiplicaremos por -2 la primera y la sumaremos a la segunda, la cual será remplazada por la suma obtenida. Esta transformación la representaremos gráficamente como se ilustra:

$$(-2)\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 3y - 3z = -12 \\ 3x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

Eliminaremos la incógnita x de la tercera ecuación, multiplicando por -3 la primera y la sumaremos a la tercera.

$$(-3)\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 3y - 3z = -12 \\ 3x + 2y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 3y - 3z = -12 \\ 5y - 7z = -24 \end{cases}$$

Multiplicaremos por $\frac{1}{3}$ la segunda ecuación, con la finalidad de que el coeficiente de y sea igual a uno y nos resulte más fácil eliminar la y de la tercera ecuación. Esta transformación la representaremos gráficamente de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 3y - 3z = -12 \\ 5y - 7z = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ y - z = -4 \\ 5y - 7z = -24 \end{cases}$$

Multiplicaremos por -5 la segunda ecuación y la sumaremos a la tercera.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$(-5)\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ y - z = -4 \\ 5y - 7z = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ y - z = -4 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

Con esta última transformación hemos llevado el sistema de ecuaciones dado a su forma escalonada. Como se puede apreciar, en la tercera ecuación del sistema solo se tiene a z como única incógnita, con lo cual, su valor se puede determinar fácilmente.

De la tercera ecuación se tiene que:

$$z = 2$$

sustituyendo $z = 2$ en la segunda ecuación, se tiene que:

$$y - 2 = -4 \quad \Rightarrow \quad y = -2$$

sustituyendo $y = -2$ y $z = 2$ en la primera ecuación, tenemos:

$$x - (-2) + 2(2) = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

con lo cual, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

b) El sistema por resolver es:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ 2x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Como se puede apreciar, en este sistema de ecuaciones, ninguna de las x tiene coeficiente uno, con lo cual no resulta tan fácil o directo la eliminación de las x. Se podrían eliminar las x si usamos para ello números fraccionarios y la tercera transformación elemental; sin embargo, existe otra alternativa que nos puede simplificar las cosas y esta es, el intercambiar el orden de las incógnitas. Así, si intercambiamos la x con la z, el sistema queda:

$$\begin{cases} z - 2y + 4x = 7 \\ 2z + y + 3x = 4 \\ 3z - 4y + 2x = 1 \end{cases}$$

Teniendo el sistema expresado de esta forma, el escalonamiento resulta mucho más sencillo. Se hará ahora el escalonamiento, indicando únicamente en forma gráfica, todas las transformaciones que se apliquen con el fin de simplificar el procedimiento seguido.

$$(-3)\ (-2)\begin{cases} z - 2y + 4x = 7 \\ 2z + y + 3x = 4 \\ 3z - 4y + 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)\begin{cases} z - 2y + 4x = 7 \\ 5y - 5x = -10 \\ 2y - 10x = -20 \end{cases}$$

$$(-2)\begin{cases} z - 2y + 4x = 7 \\ y - x = -2 \\ 2y - 10x = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - 2y + 4x = 7 \\ y - x = -2 \\ -8x = -16 \end{cases}$$

Se llegó al sistema escalonado, donde el valor de x se obtiene fácilmente de la tercera ecuación y, al hacer la sustitución regresiva en las otras dos ecuaciones, la solución del sistema planteado es:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Los dos sistemas de ecuaciones que se resolvieron en el ejercicio anterior resultaron ser compatibles determinados; sin embargo, como ya quedó establecido, existen sistemas de ecuaciones compatibles indeterminados, es decir, aquellos que tienen una infinidad de soluciones. Antes de realizar un ejercicio con este tipo de sistemas, presentaremos el concepto de grados de libertad de un sistema de ecuaciones.

Grados de libertad de un sistema de ecuaciones

Cuando al concluir el escalonamiento de un sistema de ecuaciones, se observa que el sistema equivalente se redujo a un sistema que contenga más incógnitas que ecuaciones, sin presentar ninguna inconsistencia, entonces podemos concluir que se trata de un sistema compatible indeterminado con cierto grado de libertad. Se entiende como grado de libertad de un sistema de ecuaciones, al número que se obtiene de restar al número de incógnitas el número de ecuaciones una vez terminado el escalonamiento. Este número nos indica a cuántas incógnitas les tenemos que dar valor para poder llegar a una de las soluciones del sistema.

EJERCICIO 4.3 Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, obtenga su solución general y dos soluciones particulares.

a) $$\begin{cases} 3x + 2y - z = -2 \\ 2x - y + 4z = 1 \\ 9x - y + 11z = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

a) El sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = -2 \\ 2x - y + 4z = 1 \\ 9x - y + 11z = 1 \end{array} \right.$$

Podemos apreciar que en este sistema de ecuaciones ninguna de las x tiene coeficientes uno, como se presentó en el inciso b) del ejercicio anterior; sin embargo, en lugar de intercambiar el orden de las incógnitas como se hizo en dicho ejercicio, ahora haremos uso de la siguiente alternativa:

$$(-1)\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = -2 \\ 2x - y + 4z = 1 \\ 9x - y + 11z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow (-9)(-2)\left\{ \begin{array}{l} x + 3y - 5z = -3 \\ 2x - y + 4z = 1 \\ 9x - y + 11z = 1 \end{array} \right.$$

$$(-4)\left\{ \begin{array}{l} x + 3y - 5z = -3 \\ -7y + 14z = 7 \\ -28y + 56z = 28 \end{array} \right. \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right)\left\{ \begin{array}{l} x + 3y - 5z = -3 \\ -7y + 14z = 7 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 3y - 5z = -3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y - 2z = -1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{array} \right.$$

Hemos concluido el escalonamiento y como se puede apreciar, el sistema equivalente se redujo a un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se tienen más incógnitas que ecuaciones, con lo cual podemos concluir que se trata de un sistema compatible indeterminado, con un grado de libertad. Este grado de libertad se obtuvo de restar al número de incógnitas, el número de ecuaciones $\left(3-2 = 1 \right)$.

De acuerdo con la definición dada, el tener un grado de libertad, significa que debemos suponer el valor de una de las incógnitas para llegar a una de las soluciones del sistema. Si en lugar de asignar a una de las incógnitas un valor particular, es decir, cualquier valor numérico, le asignamos un valor genérico, por ejemplo k, entonces lo que se obtendría sería la solución general del sistema en términos del parámetro k.

De esta forma se tiene que:

de (2):

$$y = 2z - 1$$

si hacemos que $z = k$, entonces:

$$y = 2k - 1$$

sustituyendo $z = k$ y $y = 2k - 1$ en (1), tenemos:

$$x + 3\left(2k - 1\right) - 5\left(k\right) = -3$$

$$x + k - 3 = -3 \qquad \therefore \qquad x = -k$$

con lo cual, la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} x = -k \\ y = 2k - 1 \\ z = k \end{cases}$$

Como en el enunciado del ejercicio nos piden, además de la solución general del sistema, dos soluciones particulares, lo que haremos es asignarle a k dos valores cualesquiera, por ejemplo:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Si $k = 0$, entonces una solución particular del sistema es:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si $k = 1$, entonces la segunda solución particular del sistema es:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones homogéneo con la característica de tener más ecuaciones que incógnitas, que como ya sabemos, este tipo de sistemas siempre tienen solución y, de acuerdo con el enunciado del ejercicio, debe tratarse de un sistema compatible indeterminado. Procedamos al escalonamiento del sistema.

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (-3)(1)(-2)\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$(-1)(1)\left\{\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ -4y - 7z = 0 \\ 4y + 7z = 0 \\ -4y - 7z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x + y + 2z = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -4y - 7z = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 0 = 0 & \\ 0 = 0 & \end{array}\right.$$

El sistema equivalente resultó ser un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Obtengamos su solución general y las dos soluciones particulares que se nos pide.

De (2): se tiene que:

$$y = -\frac{7}{4}z$$

si hacemos que $z = 4k$ con el propósito de eliminar de y las fracciones, tenemos:

$$y = -\frac{7}{4}(4k) \quad \Rightarrow \quad y = -7k$$

sustituyendo $y = -7k$ y $z = 4k$ en (1), se tiene:

$$x + (-7k) + 2(4k) = 0$$

$$x + k = 0 \qquad \therefore \quad x = -k$$

con lo cual, la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} x = -k \\ y = -7k \\ z = 4k \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Obtengamos las dos soluciones particulares asignándole a k dos valores distintos:

Si $k = 1$, entonces una solución particular es:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \\ z = 4 \end{cases}$$

Si $k = -1$, entonces la segunda solución particular es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \\ z = -4 \end{cases}$$

EJERCICIO 4.4 Obtenga, en caso de que exista, la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2w = 5 \\ 2x + y - z + 2w = -5 \\ 4x - 3y + 5z + 6w = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

a) El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Procedamos a realizar el escalonamiento:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & -2 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c}(-3)(-2)\end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & -2 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(-1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ & - & 7y & - & 3z & = & -8 \\ & - & 7y & - & 3z & = & -7 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ & - & 7y & - & 3z & = & -8 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Hemos llegado a una inconsistencia en el sistema equivalente, lo que implica que el sistema no admite solución y, por lo tanto, se trata de un sistema incompatible.

b) El sistema a resolver es:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & + & 2w & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & + & 2w & = & -5 \\ 4x & - & 3y & + & 5z & + & 6w & = & 7 \end{array}\right.$$

Se trata de un sistema que tiene tres ecuaciones con cuatro incógnitas, esto es, se tienen más incógnitas que ecuaciones. En términos generales, cuando sucede esto, lo más común es pensar que se trata de un sistema compatible indeterminado; sin embargo, para poder afirmarlo, es necesario realizar el escalonamiento del sistema y asegurarse de que el sistema equivalente no presente ninguna inconsistencia. En caso de presentarla, el sistema será incompatible.

Procedamos entonces al escalonamiento del sistema:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$(-4)(-2)\begin{cases} x - 2y + 3z + 2w = 5 \\ 2x + y - z + 2w = -5 \\ 4x - 3y + 5z + 6w = 7 \end{cases} \Rightarrow (-1)\begin{cases} x - 2y + 3z + 2w = 5 \\ 5y - 7z - 2w = -15 \\ 5y - 7z - 2w = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2w = 5 \\ 5y - 7z - 2w = -15 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

De nueva cuenta se llegó a una inconsistencia en el sistema equivalente, por lo tanto, se trata de un sistema incompatible, es decir, no admite solución.

El método de eliminación de Gauss también puede ser utilizado cuando los coeficientes del sistema de ecuaciones son números complejos. A continuación, se desarrollarán dos ejercicios donde se ilustra cómo resolver este tipo de sistemas.

EJERCICIO 4.5 Obtenga la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + (1-i)\,y + 2i\,z = -2+3i \\ i\,x + (1+i)\,y + (-1-i)\,z = -3i \\ (1+i)\,x + 2i\,y + (3-i)\,z = 8+4i \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Procedamos al escalonamiento del sistema:

$$(-1)(-i)\quad\left\{\begin{array}{l} x + (1-i)\,y + 2i\,z = -2+3i \\ i\,x + (1+i)\,y + (-1-i)\,z = -3i \\ (1+i)\,x + 2i\,y + (3-i)\,z = 8+4i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + (1-i)\,y + 2i\,z = -2+3i \\ (1-i)\,z = 3-i \\ i\,x + (-1+3i)\,y + (3-3i)\,z = 10+i \end{array}\right.$$

$$(-i)\quad\left\{\begin{array}{l} x + (1-i)\,y + 2i\,z = -2+3i \\ i\,x + (-1+3i)\,y + (3-3i)\,z = 10+i \\ (1-i)\,z = 3-i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x + (1-i)\,y + 2i\,z = -2+3i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ (-2+2i)\,y + (5-3i)\,z = 13+3i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \\ (1-i)\,z = 3-i & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3) \end{array}\right.$$

de (3) se tiene que:

$$z = \frac{3-i}{1-i}$$

realizando la división:

$$z = \frac{3-i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i-i+1}{2} = \frac{4+2i}{2}$$

$$\therefore\quad z = 2+i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sustituyendo (4) en (2), tenemos:

$$(-2+2i)\,y + (5-3i)(2+i) = 13+3i$$

$$(-2+2i)\,y + (13-i) = 13+3i$$

$$(-2+2i)\,y = 4i$$

$$y = \frac{4i}{-2+2i} \bullet \frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{8-8i}{8}$$

$$\therefore \quad y = 1-i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (1): tenemos:

$$x + (1-i)(1-i) + 2i\,(2+i) = -2+3i$$

$$x + (-2i) + (-2+4i) = -2+3i$$

$$x - 2 + 2i = -2+3i$$

$$\therefore \quad x = i$$

por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = i \\ y = 1-i \\ z = 2+i \end{cases}$$

EJERCICIO 4.6 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1-i)\,x + (-1+2i)\,y + (-1-i)\,z + (-2-2i)\,w = -8i \\ (-2+i)\,x + (-3-i)\,y + (i)\,z + (5+i)\,w = 14+4i \end{cases}$$

si se sabe que $x,\ y,\ z,\ w \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

Dado que en el enunciado se establece que las incógnitas del sistema deben ser números reales, entonces el procedimiento a seguir para llegar a la solución del sistema será:

1) Desarrollar las multiplicaciones de los coeficientes con las incógnitas en ambas ecuaciones del sistema.

2) Agrupar las partes reales y las partes imaginarias.

3) Por igualdad de números complejos, generar un nuevo sistema de ecuaciones.

4) Resolver el nuevo sistema de ecuaciones para llegar a la solución del sistema original.

PASO 1:

$$\begin{cases} x - ix - y + 2iy - z - iz - 2w - 2iw = -8i \\ -2x + ix - 3y - iy + iz + 5w + iw = 14 + 4i \end{cases}$$

PASO 2:

$$\begin{cases} (x - y - z - 2w) + (-x + 2y - z - 2w)i = -8i \\ (-2x - 3y + 5w) + (x - y + z + w)i = 14 + 4i \end{cases}$$

PASO 3:

$$\begin{cases} x - y - z - 2w = 0 \\ -x + 2y - z - 2w = -8 \\ -2x - 3y + 5w = 14 \\ x - y + z + w = 4 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Paso 4:

$$(-1)\,(2)\,(1)\quad\left\{\begin{array}{l} x - y - z - 2w = 0 \\ -x + 2y - z - 2w = -8 \\ -2x - 3y + 5w = 14 \\ x - y + z + w = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \quad (5)\quad \left\{\begin{array}{l} x - y - z - 2w = 0 \\ y - 2z - 4w = -8 \\ -5y - 2z + w = 14 \\ 2z + 3w = 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x - y - z - 2w = 0 \\ y - 2z - 4w = -8 \\ -12z - 19w = -26 \\ 2z + 3w = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \quad (6)\quad \left\{\begin{array}{l} x - y - z - 2w = 0 \\ y - 2z - 4w = -8 \\ 2z + 3w = 4 \\ -12z - 19w = -26 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x - y - z - 2w = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ y - 2z - 4w = -8 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \\ 2z + 3w = 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3) \\ -w = -2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4) \end{array}\right.$$

de (4):

$$w = 2$$

sustituyendo en (3):

$$2z + 3(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

sustituyendo z y w en (2):

$$y - 2(-1) - 4(2) = -8 \quad \Rightarrow \quad y = -2$$

sustituyendo y, z y w en (1):

$$x-(-2)-(-1)-2(2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

con lo cual, la solución del sistema original es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \\ w = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 4.7 Obtenga los valores de los coeficientes a, b y c del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = -1 \\ ax - by - cz = -3 \\ -ax - by + cz = 7 \end{cases}$$

si se sabe que su solución es $x=2$, $y=-1$, $z=1$. Exprese, además, dicho sistema de ecuaciones.

SOLUCIÓN:

Sustituyendo los valores de x, y, z en el sistema, tenemos:

$$\begin{cases} 2a - b + c = -1 \\ 2a + b - c = -3 \\ -2a + b + c = 7 \end{cases}$$

haciendo el escalonamiento, se tiene:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\begin{array}{c} (1)\,(-1) \\ \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} 2a - b + c &=& -1 \\ 2a + b - c &=& -3 \\ -2a + b + c &=& 7 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \left(\dfrac{1}{2}\right) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right) \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} 2a - b + c &=& -1 \\ 2b - 2c &=& -2 \\ 2c &=& 6 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a - b + c &=& -1 \\ b - c &=& -1 \\ c &=& 3 \end{array} \right.$$

con lo cual, los coeficientes buscados son:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& 2 \\ c &=& 3 \end{array} \right.$$

por lo tanto, el sistema buscado es:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y + 3z &=& -1 \\ -x - 2y - 3z &=& -3 \\ x - 2y + 3z &=& 7 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 4.8 Determine, si existen, el o los valores de k para que el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - y + 2z &=& 3 \\ x - 2y - 2z &=& 0 \\ x - y + kz &=& 2 \end{array} \right.$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sea:

a) Compatible indeterminado.

b) Incompatible.

c) Compatible determinado.

SOLUCIÓN:

En este tipo de ejercicios, donde una o varias k aparecen como coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones e incluso como términos independientes, generalmente, el procedimiento a seguir para resolverlos es realizar el escalonamiento del sistema y, una vez que se haya logrado, se procede a dar respuesta a los diferentes incisos planteados en el ejercicio.

Siguiendo entonces la recomendación, procedamos a realizar el escalonamiento.

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x - y + kz = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-1) & (-4) \\ & + \\ + & \end{matrix} \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 4x - y + 2z = 3 \\ x - y + kz = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 7y + 10z = 3 \\ y + (k+2)z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ (-7) \\ + \end{matrix} \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ y + (k+2)z = 2 \\ 7y + 10z = 3 \end{cases}$$

$$(-1)\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ y + (k+2)z = 2 \\ (-7k-4)z = -11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 & \ldots\ldots (1) \\ y + (k+2)z = 2 & \ldots\ldots (2) \\ (7k+4)z = 11 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Como ya tenemos escalonado el sistema, entonces procedamos a responder cada inciso.

a) Se nos pide en este inciso, determinar el o los valores k, con los cuales el sistema resulta ser compatible indeterminado. Recordemos que un sistema de ecuaciones será compatible indeterminado si, una vez terminado el escalonamiento, el sistema equivalente tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que, en nuestro ejercicio, lo que debemos buscar, son los valores de k con los cuales se reduce una o más ecuaciones del sistema.

Como se puede apreciar en nuestro sistema escalonado, no existen valores de k con los cuales, por lo menos una ecuación del sistema se reduzca a $0 = 0$, por lo tanto, la respuesta a este inciso es:

No existen valores de k con los cuales el sistema sea compatible indeterminado.

b) En este inciso nos piden obtener el valor de k con el cual el sistema es incompatible, es decir, que no tenga solución. Para que esto suceda, debemos determinar para qué valor de k se presenta una inconsistencia en el sistema.

De la ecuación (3), tenemos:

$$(7k + 4)\,z = 11$$

Si $k = -\dfrac{4}{7}$, entonces:

$$\begin{aligned}\left[7\left(-\frac{4}{7}\right) + 4\right] z &= 11\\ (-4 + 4)\,z &= 11\\ 0 &= 11\end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema es incompatible para:

$$k = -\frac{4}{7}$$

c) Generalmente, en este tipo de ejercicios, el inciso donde se pide determinar los valores de k con los cuales el sistema es compatible determinado, se responde hasta el último, ya que su

ÍNDICE 1 2 3 4 5

respuesta se obtiene de excluir del conjunto de los números reales, los valores de k que dan respuesta a los otros dos incisos. Siguiendo este criterio, la respuesta es:

$$\forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq -\frac{4}{7}$$

EJERCICIO 4.9 Para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y - kz = -1 \\ x - ky - z = -1 \\ kx - y - z = 2 \end{cases}$$

determine el o los valores de $k \in \mathbb{R}$, para los cuales el sistema sea:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

SOLUCIÓN:

Como ya se ha citado, procederemos primero a realizar el escalonamiento.

$$(-k)\,(-1)\begin{cases} x - y - kz = -1 \\ x - ky - z = -1 \\ kx - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow (1)\begin{cases} x - y - kz = -1 \\ (1-k)\,y + (k-1)\,z = 0 \\ (k-1)\,y + \left(k^2-1\right)z = k+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - kz = -1 \\ (1-k)\,y + (k-1)\,z = 0 \\ \left(k^2 + k - 2\right)z = k+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - kz = -1 & \ldots\ldots (1) \\ (1-k)\,y + (k-1)\,z = 0 & \ldots\ldots (2) \\ (k-1)\,(k+2)\,z = k+2 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Hemos concluido el escalonamiento del sistema, entonces daremos respuesta a los incisos, pero, por facilidad, responderemos primero el inciso $c)$, después el inciso $b)$ y por último el inciso $a)$.

c) Recordemos, el sistema se hace incompatible si se presenta una inconsistencia en el mismo.

De la ecuación (3), tenemos que:

Si $k = 1$, entonces se llega a:

$$0 = 3$$

por lo tanto, el sistema es incompatible si $k = 1$.

b) Para responder este inciso, lo que buscamos es el o los valores de k con los cuales se reduzca, por lo menos, una ecuación en el sistema escalonado.

En la ecuación (3) podemos observar que:

Si $k = -2$, entonces se llega a:

$$0 = 0$$

por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado si $k = -2$.

a) La respuesta a este inciso, la obtenemos al descartar, de los números reales, los valores de k que dan respuesta a los otros incisos.

De esta forma, el sistema es compatible determinado:

$$\forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq 1 \quad \text{y} \quad k \neq -2$$

EJERCICIO 4.10 Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y - kz = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ -x + 2y = k \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Obtenga los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el sistema sea:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

SOLUCIÓN:

Procedamos al escalonamiento.

$$\begin{cases} 2x - y - kz = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ -x + 2y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (1)(-2) \\ + \\ + \end{matrix} \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x - y - kz = 0 \\ -x + 2y = k \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \\ (-1) \\ + \end{matrix} \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ y + (4-k)z = -2 \\ y - 2z = k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 1 \quad \ldots\ldots (1) \\ y + (4-k)z = -2 \quad \ldots\ldots (2) \\ (k-6)z = k+3 \quad \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Responderemos en el siguiente orden los incisos: $c)$, $b)$ y $a)$.

c) De la ecuación (3) se tiene que,

si $k = 6$, entonces se llega a:

$$0 = 9$$

por lo tanto, el sistema es incompatible si:

$$k = 6$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) Para dar respuesta a este inciso, se requiere encontrar un valor de k con el cual se elimine, por lo menos, una ecuación del sistema, pero, como se puede apreciar en el sistema escalonado dicho valor no existe, por lo tanto, la respuesta a este inciso es:

No existen valores de k que hagan al sistema compatible indeterminado.

a) De acuerdo con las respuestas obtenidas en los incisos anteriores, el sistema es compatible determinado.

$$\forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq 6$$

EJERCICIO 4.11 Para cada uno de los incisos, determine el o los valores de k de tal manera que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} k\,x_1 - x_3 = -2 - 2x_2 \\ 2x_2 + 6 = 6x_3 \\ x_2 + k\,x_3 = 1 - 2x_1 \end{cases}$$

sea:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

SOLUCIÓN:

Agrupemos de un lado las incógnitas y del otro los términos independientes y procedamos al escalonamiento del sistema.

$$\begin{array}{c} (2) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array} \begin{cases} k\,x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_2 - 6x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + k\,x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k\,x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + k\,x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(-k)\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2kx_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4 \end{array}\right. \Rightarrow (k-4)\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 = -3 \\ (4-k)x_2 + \left(-k^2-2\right)x_3 = -k-4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 = -3 \\ \left[(-3k+12) + \left(-k^2-2\right)\right]x_3 = 8-4k \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \end{array}\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 = -3 \\ \left(-k^2-3k+10\right)x_3 = 8-4k \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 = -3 \\ \left(k^2+3k-10\right)x_3 = 4k-8 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + kx_3 = 1 & \ldots\ldots (1) \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 = -3 & \ldots\ldots (2) \\ (k+5)\,(k-2)\,x_3 = 4k-8 & \ldots\ldots (3) \end{array}\right.$$

Respondamos ahora a los diferentes incisos en el orden más conveniente.

c) Con $k = -5$ el sistema resulta incompatible, pues al sustituir este valor en la ecuación (3) se llega a $0 = -28$.

b) Con $k = 2$ el sistema resulta compatible indeterminado, pues al sustituir este valor en la ecuación (3) se llega a $0 = 0$.

a) $\forall\ k \in \mathbb{R}$ con $k \neq -5$ y $k \neq 2$ el sistema resulta compatible determinado.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 4.12 Para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + ky - 5z = 0 \\ 2x + 4y + kz = 0 \end{cases}$$

determine el o los valores de k que hacen al sistema compatible indeterminado.

SOLUCIÓN:

Realicemos el escalonamiento del sistema.

$$\begin{array}{c} (-2)(-1) \\ + \\ + \end{array} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + ky - 5z = 0 \\ 2x + 4y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ (2) \\ (-k+1) \end{array} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ (k-1)y - 3z = 0 \\ 2y + (k+4)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ + \end{array} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ (2k-2)y - 6z = 0 \\ (-2k+2)y + (-k+1)(k+4)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ (2k-2)y - 6z = 0 \\ \left[(-k+1)(k+4) - 6\right]z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ (k-1)y - 3z = 0 \\ (-k^2 - 3k - 2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ (k-1)y - 3z = 0 \\ (k^2 + 3k + 2)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ (k-1)\, y - 3z = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ (k+1)(k+2)\, z = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

De la ecuación (3) se puede apreciar que:

con $k=-1$ y $k=-2$ el sistema es compatible indeterminado.

EJERCICIO 4.13 Para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 3 \\ 3x + \alpha y - 3z = -\alpha \\ -x + z = -1 \end{cases}$$

obtenga el o los valores de α que hacen al sistema compatible indeterminado, obtenga su solución general y una particular.

SOLUCIÓN:

Procedamos al escalonamiento del sistema.

$$(1)(-3) \begin{cases} x + y + \alpha z = 3 \\ 3x + \alpha y - 3z = -\alpha \\ -x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z = 3 \\ (\alpha - 3)\, y + (-3\alpha - 3)\, z = -\alpha - 9 \\ y + (\alpha + 1)\, z = 2 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$(-\alpha+3)\begin{cases} x + y + \alpha z = 3 \\ y + (\alpha+1) z = 2 \\ (\alpha-3) y + (-3\alpha-3) z = -\alpha-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z = 3 \\ y + (\alpha+1) z = 2 \\ \left[(-\alpha+3)(\alpha+1)+(-3\alpha-3)\right] z = -3\alpha-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 3 \\ y + (\alpha+1) z = 2 \\ (-\alpha^2-\alpha) z = -3\alpha-3 \end{cases}$$

Con $\alpha = -1$ el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \quad \dots\dots\dots (1) \\ y = 2 \quad \dots\dots\dots (2) \\ 0 = 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

El sistema equivalente escalonado se redujo a dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo tanto, con $\alpha = -1$ el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad.

Obteniendo la solución general del sistema, tenemos:

si hacemos $z = k$, de la ecuación (1), se tiene:

$$x + 2 - k = 3 \quad \Rightarrow \quad x = k + 1$$

de donde, la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = 2 \\ z = k \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

una solución particular, si hacemos $k = 0$, sería:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 4.14 Determine, si existen, el o los valores de k para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + ky - \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + kz = 0 \end{cases}$$

sea:

a) Compatible determinado.
b) Incompatible.
c) Compatible indeterminado.

SOLUCIÓN:

Realicemos el escalonamiento del sistema.

$$\begin{array}{c} (2) \\ (2) \\ (2) \end{array} \begin{cases} kx - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + ky - \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2kx - y - z = 0 \\ -x + 2ky - z = 0 \\ -x - y + 2kz = 0 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$(2k)(-1)\begin{cases} -x - y + 2kz = 0 \\ -x + 2ky - z = 0 \\ 2kx - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1)\begin{cases} -x - y + 2kz = 0 \\ (2k+1)y + (-2k-1)z = 0 \\ (-2k-1)y + \left(4k^2-1\right)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (-1) \\ \\ \left(\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\begin{cases} -x - y + 2kz = 0 \\ (2k+1)y + (-2k-1)z = 0 \\ \left(4k^2-2k-2\right)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2kz = 0 \\ (2k+1)y + (-2k-1)z = 0 \\ \left(2k^2-k-1\right)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2kz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1) \\ (2k+1)y + (-2k-1)z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2) \\ (k-1)(2k+1)z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Respondiendo a los incisos en el orden más conveniente, tenemos:

c) En la ecuación (3) se tiene que:

$$\text{si} \quad k = 1 \quad \text{o} \quad k = -\frac{1}{2}$$

se reduce la ecuación y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Los sistemas homogéneos siempre tienen solución, por lo tanto, no existen valores de k que hagan al sistema incompatible.

a) $\forall\ k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado.

EJERCICIO 4.15 Determine los valores de a y b para los cuales el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + az = 1 \\ x + y + 3z = b \end{cases}$$

es compatible indeterminado.

SOLUCIÓN:

Procedamos al escalonamiento del sistema.

$$\begin{matrix}(-1)\ (-2)\end{matrix}\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + az = 1 \\ x + y + 3z = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + (a-4)z = -5 \\ -y + z = b-3 \end{cases}$$

$$(-1)\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = b-3 \\ -y + (a-4)z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 & \ldots\ldots (1) \\ -y + z = b-3 & \ldots\ldots (2) \\ (a-5)z = -b-2 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

En la ecuación (3) se puede apreciar que si $a = 5$ y $b = -2$, entonces dicha ecuación se reduce a $0 = 0$, con lo cual el sistema resulta ser compatible indeterminado.

EJERCICIO 4.16 Determine el o los valores de $k \in \mathbb{R}$, para los cuales el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 3i\,k \\ x + y + k\,z = 3i \\ x + 2y + 3z = 6i \end{cases}$$

sea:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

c) Incompatible.

SOLUCIÓN:

Escalonando el sistema, tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 3i\,k \\ x + y + k\,z = 3i \\ x + 2y + 3z = 6i \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c}(-1)\\ + \\ + \end{array}\begin{cases} x + 2y + 3z = 6i \\ x + y + k\,z = 3i \\ x + y + z = 3i\,k \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}\begin{cases} x + 2y + 3z = 6i \\ -y + (k-3)z = -3i \\ -y - 2z = 3i\,k - 6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6i \\ -y + (k-3)z = -3i \\ y + 2z = 6i - 3i\,k \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ + \end{array}\begin{cases} x + 2y + 3z = 6i \\ y + 2z = 6i - 3i\,k \\ -y + (k-3)z = -3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6i \\ y + 2z = 6i - 3i\,k \\ (k-1)z = 3i - 3i\,k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6i & \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ y + 2z = 3i(2-k) & \dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ (k-1)z = 3i(1-k) & \dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

Respondiendo a los incisos en el orden más conveniente, tenemos:

c) No existen valores de k con los cuales se genere una inconsistencia en el sistema, por lo tanto, no existen valores de k que hagan al sistema incompatible.

b) Si $k = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

a) $\forall\ k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

EJERCICIO 4.17 Obtenga la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 3 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{4}{z} = -1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Es conveniente aclarar que este sistema de ecuaciones no es lineal; sin embargo, mediante un cambio de variables, lo podemos transformar a un sistema lineal. Se resuelve este sistema por el método de Gauss y, con los valores obtenidos, se regresa a la variable original, para obtener la solución del sistema planteado.

De acuerdo con lo anterior, se harán los siguientes cambios de variables:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$a = \frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$b = \frac{1}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$c = \frac{1}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Con estos cambios de variable, el sistema original se transforma a:

$$\begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ 2a + b - 4c = -1 \\ 3a + b + c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

escalonando el sistema, tenemos:

$$(-3)\,(-2)\begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ 2a + b - 4c = -1 \\ 3a + b + c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ (4) \\ (-3) \end{array}\begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ 3b - 8c = -7 \\ 4b - 5c = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ 12b - 32c = -28 \\ -12b + 15c = \frac{39}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \left(\frac{1}{4}\right) \\ \left(-\frac{1}{17}\right) \end{array}\begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ 12b - 32c = -28 \\ -17c = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ 3b - 8c = -7 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Haciendo una sustitución regresiva, se llega a:

$$\begin{cases} a = 1 & \dots\dots\dots\dots\dots (4) \\ b = -1 & \dots\dots\dots\dots\dots (5) \\ c = \dfrac{1}{2} & \dots\dots\dots\dots\dots (6) \end{cases}$$

Al sustituir (4), (5) y (6) en (1), (2) y (3), se llega a que la solución del sistema original es:

$$\begin{array}{lcl} x = \dfrac{1}{a} & \Rightarrow & x = \dfrac{1}{1} = 1 \\ y = \dfrac{1}{b} & \Rightarrow & y = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ z = \dfrac{1}{c} & \Rightarrow & z = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{array} \quad \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 4.18 Sean los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\mathrm{I)} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + az = -11 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases} \qquad \mathrm{II)} \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 4x + 8y - 6z = 2 \\ 3x + 6y + az = 0 \end{cases}$$

Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$, tal que ambos sistemas tengan la misma solución.

SOLUCIÓN:

El procedimiento que seguiremos para resolver este ejercicio será:

1) Llevar a su forma escalonada ambos sistemas de ecuaciones.

2) Despejar z de la tercera ecuación de ambos sistemas escalonados.

3) Hacer $z = z$ con la intención de obtener el valor de a buscado.

4) Sustituir el valor de a obtenido en uno de los dos sistemas escalonados, con el propósito de obtener la solución de dicho sistema de ecuaciones.

5) Verificar que la solución obtenida del sistema resuelto sea también solución del otro sistema.

Escalonemos el sistema (I) :

$$(-2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & az & = & -11 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{r} \\ (2) \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & - & y & + & (a-2)z & = & -23 \\ & & 2y & - & 5z & = & -11 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & - & y & + & (a-2)z & = & -23 \\ & & & & (2a-9)z & = & -57 \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{III})$$

de la última ecuación se tiene que:

$$z = \frac{-57}{2a-9} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Escalonando el sistema (II) :

$$(-3)(-4)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 4x & + & 8y & - & 6z & = & 2 \\ 3x & + & 6y & + & az & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{r} \\ (3) \\ (-4) \end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 4y & - & 14z & = & -34 \\ & & 3y & + & (a-6)z & = & -27 \end{array}\right.$$

$$(1)\left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 9 \\ 12y - 42z & = & -102 \\ -12y + (-4a+24)z & = & 108 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & 9 \\ 12y - 14z & = & -102 \ldots (\text{IV}) \\ (-4a-18)z & = & 6 \end{array}\right.$$

de la última ecuación se tiene que:

$$z = \frac{6}{-4a-18} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

igualando (1) y (2) se tiene:

$$\frac{-57}{2a-9} = \frac{6}{-4a-18} \quad \Rightarrow \quad -57(-4a-18) = 6(2a-9)$$

$$228a + 1026 = 12a - 54$$

$$216a = -1080 \qquad \therefore\ a = -5 \qquad \ldots\ldots (3)$$

sustituyendo (3) en (1) :

$$z = \frac{-57}{2(-5)-9} = \frac{-57}{-19} \qquad \therefore \qquad z = 3$$

con este valor de $z = 3$ al sustituirlo en (III), se llega a que la solución del sistema (I) es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

que resulta ser también la solución al sistema (II), considerando el valor obtenido de $a = -5$. Se deja al lector verificar que la solución del sistema (I) es también la solución del sistema (II).

Hasta el momento, se han realizado varios ejercicios en los cuales se ilustra, de diversas formas y con distintos grados de dificultad, cómo es empleado el método de eliminación de Gauss en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, e incluso, en sistemas no lineales como en el ejercicio 4.17.

En los ejercicios siguientes, mostraremos otro tipo de sistemas de ecuaciones no lineales, en los cuales también es posible aplicar el método de Gauss.

EJERCICIO 4.19 Empleando el método de Gauss, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\,P_1(x) - P_2(x) + P_3(x) = 3x^2 - 3x \\ P_1(x) + 2\,P_2(x) - P_3(x) = x + 9 \\ 3\,P_1(x) - 2\,P_2(x) - 3\,P_3(x) = -5x + 3 \end{cases}$$

donde $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ son polinomios en x de grado menor o igual a dos.

SOLUCIÓN:

Antes de proceder a resolver el sistema de ecuaciones, es conveniente hacer las siguientes aclaraciones:

1) A pesar de que no se trata de un sistema de ecuaciones lineales, el método de eliminación de Gauss también puede ser utilizado para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones.

2) Las operaciones de adición y multiplicación de un polinomio por un escalar que se utilizan en este ejercicio son los usuales.

3) Las transformaciones elementales usadas en el método de eliminación de Gauss son también aplicables en este tipo de ejercicios y, evidentemente, no alteran la solución del sistema.

Una vez hechas las aclaraciones pertinentes, procedamos al escalonamiento del sistema:

$$\begin{cases} 2P_1(x) - P_2(x) + P_3(x) = 3x^2 - 3x \\ P_1(x) + 2P_2(x) - P_3(x) = x + 9 \\ 3P_1(x) - 2P_2(x) - 3P_3(x) = -5x + 3 \end{cases}$$

$$(-3)(-2)\begin{cases} P_1(x) + 2P_2(x) - P_3(x) = x + 9 \\ 2P_1(x) - P_2(x) + P_3(x) = 3x^2 - 3x \\ 3P_1(x) - 2P_2(x) - 3P_3(x) = -5x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1(x) + 2P_2(x) - P_3(x) = x + 9 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ -5P_2(x) + 3P_3(x) = 3x^2 - 5x - 18 & \ldots\ldots\ldots (2) \\ -8P_2(x) = -8x - 24 & \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Dado que en la ecuación (3) solo quedó como única incógnita el polinomio $P_2(x)$, entonces lo obtendremos directamente.

De (3), tenemos:

$$-8P_2(x) = -8x - 24$$

$$P_2(x) = \frac{-8x - 24}{-8} \qquad \therefore \qquad P_2(x) = x + 3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

sustituyendo (4) en (2), se tiene:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$-5(x+3)+3P_3(x)=3x^2-5x-18$$

$$P_3(x)=\frac{\left(3x^2-5x-18\right)+5(x+3)}{3}$$

$$P_3(x)=\frac{3x^2-3}{3} \qquad \therefore \quad P_3(x)=x^2-1 \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (1), tenemos:

$$P_1(x)+2(x+3)-\left(x^2-1\right)=x+9$$

$$P_1(x)+\left(-x^2+2x+7\right)=x+9$$

$$P_1(x)=(x+9)-\left(-x^2+2x+7\right)$$

$$\therefore \quad P_1(x)=x^2-x+2$$

con lo cual, la solución del sistema es:

$$P_1(x)=x^2-x+2$$

$$P_2(x)=x+3$$

$$P_3(x)=x^2-1$$

EJERCICIO 4.20 Empleando el método de Gauss, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones con vectores:

$$\begin{cases} 2\bar{u}-\bar{v}+3\bar{w}=(-2,0,16) \\ -\bar{u}+2\bar{v}-2\bar{w}=(5,2,-13) \\ 3\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}=(-5,4,9) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Realicemos el escalonamiento del sistema:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,\overline{u} - \overline{v} + 3\,\overline{w} = (-2,\ 0,\ 16) \\ -\overline{u} + 2\,\overline{v} - 2\,\overline{w} = (5,\ 2,\ -13) \\ 3\,\overline{u} - \overline{v} + \overline{w} = (-5,\ 4,\ 9) \end{array}\right.$$

$$(3)\,(2)\ \left\{\begin{array}{l} -\overline{u} + 2\,\overline{v} - 2\,\overline{w} = (5,\ 2,\ -13) \\ 2\,\overline{u} - \overline{v} + 3\,\overline{w} = (-2,\ 0,\ 16) \\ 3\,\overline{u} - \overline{v} + \overline{w} = (-5,\ 4,\ 9) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\overline{u} + 2\,\overline{v} - 2\,\overline{w} = (5,\ 2,\ -13) \\ 3\,\overline{v} - \overline{w} = (8,\ 4,\ -10) \\ \left(\frac{1}{5}\right)\quad 5\,\overline{v} - 5\,\overline{w} = (10,\ 10,\ -30) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\overline{u} + 2\,\overline{v} - 2\,\overline{w} = (5,\ 2,\ -13) \\ 3\,\overline{v} - \overline{w} = (8,\ 4,\ -10) \\ \overline{v} - \overline{w} = (2,\ 2,\ -6) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\overline{u} + 2\,\overline{v} - 2\,\overline{w} = (5,\ 2,\ -13) \\ (-3)\quad \overline{v} - \overline{w} = (2,\ 2,\ -6) \\ 3\,\overline{v} - \overline{w} = (8,\ 4,\ -10) \end{array}\right.$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\begin{cases} -\overline{u} + 2\,\overline{v} - 2\,\overline{w} = (5,\ 2,\ -13) & \dots\dots\dots\ (1) \\ \overline{v} - \overline{w} = (2,\ 2,\ -6) & \dots\dots\dots\ (2) \\ 2\,\overline{w} = (2,\ -2,\ 8) & \dots\dots\dots\ (3) \end{cases}$$

De (3), tenemos:

$$\overline{w} = \frac{1}{2}(2,\ -2,\ 8) \quad \therefore \quad \overline{w} = (1,\ -1,\ 4) \quad \dots\dots\dots\ (4)$$

sustituyendo (4) en (2), tenemos:

$$\overline{v} - (1,\ -1,\ 4) = (2,\ 2,\ -6)$$

$$\overline{v} = (2,\ 2,\ -6) + (1,\ -1,\ 4) \quad \therefore \quad \overline{v} = (3,\ 1,\ -2) \dots\dots\dots\ (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (1), se tiene:

$$-\overline{u} + 2(3,\ 1,\ -2) - 2(1,\ -1,\ 4) = (5,\ 2,\ -13)$$

$$\overline{u} = 2(3,\ 1,\ -2) - 2(1,\ -1,\ 4) - (5,\ 2,\ -13)$$

$$\overline{u} = (6,\ 2,\ -4) + (-2,\ 2,\ -8) + (-5,\ -2,\ 13)$$

$$\therefore \quad \overline{u} = (-1,\ 2,\ 1)$$

con lo cual, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} \overline{u} = (-1,\ 2,\ 1) \\ \overline{v} = (3,\ 1,\ -2) \\ \overline{w} = (1,\ -1,\ 4) \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

APLICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En esta sección del capítulo lo que se hará es resolver problemas planteados con palabras, definidos a través de un enunciado, donde se describen situaciones en las que intervienen cantidades conocidas (llamadas datos del problema) y cantidades desconocidas (llamadas incógnitas) relacionadas entre sí. El objetivo central de esta sección es que el estudiante tenga la posibilidad de enfrentar este tipo de retos, el que empiece a familiarizarse con el modelado matemático de problemas, es decir, que el alumno vaya aprendiendo a pasar del lenguaje escrito al lenguaje matemático, el poder traducir lo escrito con palabras en una ecuación o en un conjunto de ecuaciones lineales que representen adecuadamente el problema planteado. Desafortunadamente la adquisición de esta habilidad representa para los alumnos, y tal vez para la mayoría de las personas, una de las mayores dificultades. A pesar de ello, se debe enfrentar el reto adoptando una actitud positiva y mostrar buena disposición a la tarea.

No existen fórmulas mágicas e infalibles que aseguren que se tendrá éxito en la resolución de problemas planteados con palabras, muchos autores han escrito sobre el tema y a lo más que han llegado es al planteamiento de una serie de pasos, sugerencias y recomendaciones que pueden ayudar a resolver este tipo de problemas; sin embargo, son solo eso, simples recomendaciones.

A continuación, daremos nuestra recomendación en cuanto a los pasos que se sugiere seguir para plantear y resolver este tipo de problemas:

1) Leer el enunciado tantas veces como sea necesario hasta lograr entender completamente el problema, distinguir con claridad los datos y las incógnitas de este.

2) En caso de ser posible, elaboremos un dibujo o tracemos un croquis que represente al problema. En caso de no serlo, entonces agrupemos los datos y reescribámoslos para tenerlos todos a la vista, o bien, elaboremos una tabla donde se integren todos ellos. Esta acción nos permitirá tener a primera vista toda la información necesaria. El dibujo o croquis y los datos a la vista, nos ayudará a comprender mejor el problema.

3) Identificar las incógnitas del problema y representarlas con literales.

4) Plantear el modelo matemático que represente al problema. Cuidar que, en el planteamiento de las ecuaciones, sean tomadas en cuenta todas las relaciones establecidas entre las

incógnitas del problema. En nuestro caso, este modelo matemático deberá ser un sistema de ecuaciones lineales.

5) Resolver el sistema de ecuaciones. Si el sistema está bien planteado, entonces al resolverlo se estará resolviendo el problema.

6) Verificar que la solución obtenida satisface todas las condiciones del problema. Si es así, felicidades, el problema quedó resuelto. En caso contrario, iniciar de nuevo con el procedimiento desde el punto uno, sin perder la calma ni darse por vencido.

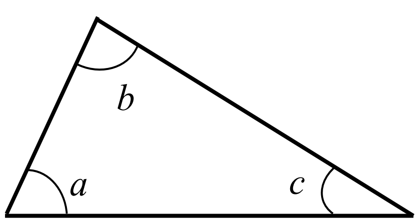
Al igual como lo que sucede con otras habilidades humanas, por ejemplo, tocar el piano con maestría, convertirse en un nadador de alto rendimiento, ser una destacada bailarina, etc., para lograr tener la habilidad de resolver problemas de este tipo, se requiere de mucha práctica, mientras más ejercicios se resuelvan, mayores serán las posibilidades de tener éxito en este reto. Recuérdese, la práctica hace al maestro.

Resolvamos a continuación algunos ejercicios de este tipo y pongamos en práctica las recomendaciones.

EJERCICIO 4.21 El mayor de los ángulos interiores de un triángulo es $35°$ más grande que el ángulo menor. La diferencia entre el ángulo mayor y el mediano es igual al menor menos $20°$. Determine el valor de cada ángulo.

SOLUCIÓN:

Lo primero que haremos es trazar una figura que permita identificar los ángulos del triángulo en función de su tamaño y representar cada uno de ellos con una literal. Una vez hecho esto, procederemos al planteamiento de las ecuaciones que modelan al problema.



$\boldsymbol{a} \longrightarrow$ ángulo mayor

$\boldsymbol{b} \longrightarrow$ ángulo mediano

$\boldsymbol{c} \longrightarrow$ ángulo menor

Hay un dato que no se da en el enunciado del ejercicio; sin embargo, es por todos sabido que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $180°$, con esto estableceremos nuestra primera ecuación del sistema. Las otras dos, quedarán definidas siguiendo las indicaciones que se dan en el enunciado. De acuerdo con esto y los datos del problema, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ a = c + 35 \\ a - b = c - 20 \end{cases}$$

agrupando las incógnitas, tenemos:

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ a \quad\; - c = 35 \\ a - b - c = -20 \end{cases}$$

Una vez que se tiene generado el sistema de ecuaciones, lo usual es proceder a su escalonamiento para obtener su solución; sin embargo, dadas las características que se tienen en el sistema, en este caso, es suficiente con sumar la primera y la tercera ecuación para obtener el valor de uno de los ángulos buscados. Con este valor conocido, se pueden calcular los otros dos. Se tiene entonces que:

$$\begin{array}{l} (1) \\ \\ + \\ \end{array} \begin{cases} a + b + c = 180 \\ a \quad\; - c = 35 \\ a - b - c = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 180 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ a \quad\; - c = 35 & \ldots\ldots\ldots (2) \\ 2a \qquad\quad = 160 & \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

de (3) tenemos:

$$a = 80°$$

sustituyendo a en (2), se tiene:

$$80 - c = 35 \quad \Rightarrow \quad c = 80 - 35 \qquad \therefore \quad c = 45°$$

sustituyendo a y c en (1) se llega a:

$$80 + b + 45 = 180 \quad \Rightarrow \quad b = 55°$$

por lo tanto, los ángulos del triángulo son:

$a = 80° \rightarrow$ ángulo mayor

$b = 55° \rightarrow$ ángulo mediano

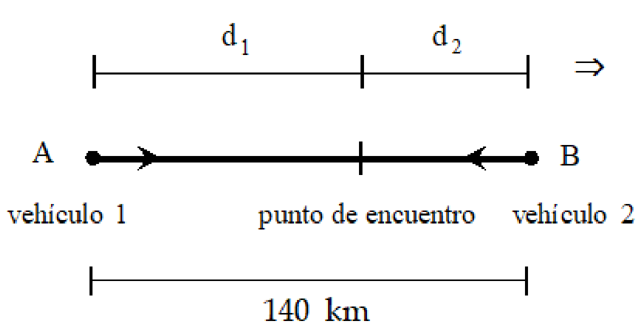
$c = 45° \rightarrow$ ángulo menor

EJERCICIO 4.22 Dos vehículos parten a su encuentro al mismo tiempo, desde dos ciudades A y B que distan entre sí $140\ \mathrm{km}$. El tiempo que les toma encontrarse en la carretera es de 40 minutos. Sin embargo, si ambos vehículos salen al mismo tiempo desde la ciudad donde se encuentran, pero en la misma dirección, entonces al vehículo que parte de la ciudad A le tomará alcanzar al que sale de la ciudad B, 4 horas y 40 minutos. Determine la velocidad a la que son conducidos cada vehículo.

SOLUCIÓN:

En este ejercicio son dos las incógnitas y se describen dos situaciones diferentes, de cada una de ellas se deberá generar una ecuación, formándose así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Situación (1) :



$$\Rightarrow \quad d_1 + d_2 = 140 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$t_{\text{encuentro}} = 40 \text{ min} = \frac{2}{3}\ \mathrm{h}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sabemos que:

$$v = \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad d = t\,v$$

Vehículo 1:

$$d_1 = t\,v_1 \quad \text{como} \quad t = \frac{2}{3}\,h \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{2}{3}\,v_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Vehículo 2:

$$d_2 = t\,v_2 \quad \text{como} \quad t = \frac{2}{3}\,h \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{2}{3}\,v_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

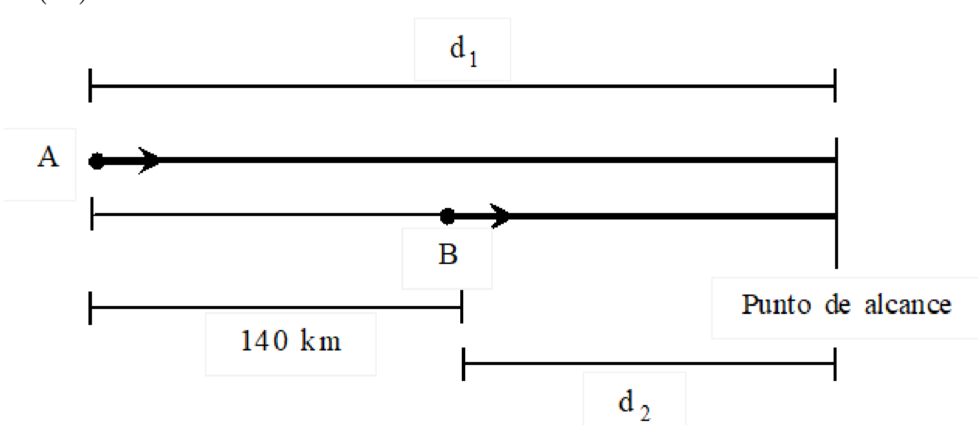
sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\frac{2}{3}\,v_1 + \frac{2}{3}\,v_2 = 140$$

$$2\,v_1 + 2\,v_2 = 420$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + v_2 = 210 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Situación (2) :



$$t_{\text{alcance}} = 4 \;\text{ y }\; 40 \text{ min} = 280 \text{ min} = \frac{14}{3}\,h$$

de la figura se tiene que:

$$d_1 = 140 + d_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

como $d = t\,v$, entonces:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Vehículo 1:

$$d_1 = \frac{14}{3} v_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vehículo 2:

$$d_2 = \frac{14}{3} v_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

sustituyendo (6) y (7) en (5), tenemos:

$$\frac{14}{3} v_1 = 140 + \frac{14}{3} v_2$$

$$\frac{14}{3} v_1 - \frac{14}{3} v_2 = 140$$

$$14 v_1 - 14 v_2 = 420$$

$$v_1 - v_2 = 30 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

con las ecuaciones (4) y (8) se forma el sistema:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 210 \\ v_1 - v_2 = 30 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$v_1 = 120 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_2 = 90 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

que son las velocidades buscadas.

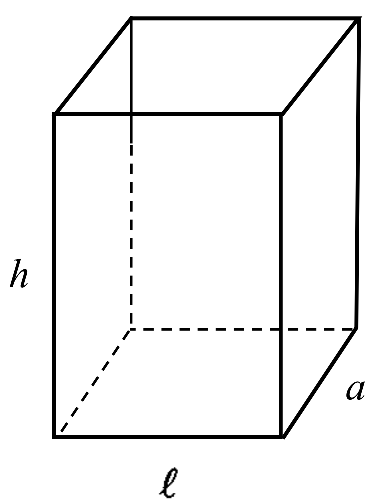
ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 4.23 Determine el volumen de un prisma rectangular, el cual cumple con que cinco veces el largo, más dos veces el ancho, menos tres veces la altura es igual a $8\ \text{cm}$. El doble de la altura, más el largo, menos el ancho es igual a $13\ \text{cm}$. Tres veces el ancho, menos dos veces la altura, más el doble del largo es igual a $5\ \text{cm}$.

SOLUCIÓN:

En este ejercicio nos piden calcular el volumen del prisma; sin embargo, para poderlo obtener es necesario calcular sus tres dimensiones. Tenemos entonces tres incógnitas y se describen tres relaciones entre ellas, lo cual nos llevará a plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

La figura que representa al problema es:



ℓ : Largo

a : Ancho

h : Altura

$$V = \ell\, a\, h \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

El sistema que representa al problema es:

$$\begin{cases} 5\ell + 2a - 3h = 8 \\ \ell - a + 2h = 13 \\ 2\ell + 3a - 2h = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad (-2)\,(-5)\begin{cases} \ell - a + 2h = 13 \\ 5\ell + 2a - 3h = 8 \\ 2\ell + 3a - 2h = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (5) \\ \\ (-7) \end{array}\left\{\begin{array}{rl} \ell - a + 2h &= 13 \\ 7a - 13h &= -57 \\ 5a - 6h &= -21 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{r} (1) \\ + \end{array}\left\{\begin{array}{rl} \ell - a + 2h &= 13 \\ 35a - 65h &= -285 \\ -35a + 42h &= 147 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \ell - a + 2h &= 13 \\ 35a - 65h &= -285 \\ -23h &= -138 \end{array}\right.$$

Se calcula el valor de h y al hacer una sustitución regresiva en el sistema escalonado, se llega a que su solución es:

$$h = 6\text{ cm}, \quad a = 3\text{ cm}, \quad \text{y} \quad \ell = 4\text{ cm}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (1), se llega a que el volumen del prisma es:

$$\text{V} = (4)(3)(6) = 72\text{ cm}^3$$

EJERCICIO 4.24 Un estudiante tiene 26 libros de matemáticas en su librero. Los libros son de Álgebra, Cálculo, Geometría y Trigonometría. Se sabe que el doble de los libros de Álgebra menos los de Trigonometría es igual al doble de los de Geometría. El cuádruple de los libros de Trigonometría son dos libros menos de los que suman el triple de los de Cálculo más los de Geometría. Finalmente, se sabe que tiene un libro más de Álgebra que de los que tiene de Cálculo. Se desea saber cuántos libros tiene de cada materia.

SOLUCIÓN:

En este ejercicio el hacer algún tipo de dibujo o croquis no ayuda a comprender mejor el problema, por lo que se procederá al planteamiento directo de las ecuaciones, siguiendo cada una de las relaciones descritas entre los libros. De esta forma, el sistema de ecuaciones que representa al problema es:

A	$\rightarrow$	Número de libros de Álgebra
C	$\rightarrow$	Número de libros de Cálculo
G	$\rightarrow$	Número de libros de Geometría
T	$\rightarrow$	Número de libros de Trigonometría

$$\begin{cases} A + C + G + T = 26 \\ 2A - T = 2G \\ 4T + 2 = 3C + G \\ A = C + 1 \end{cases}$$

ordenando tenemos:

$$(-1)(-2)\begin{cases} A + C + G + T = 26 \\ 2A - 2G - T = 0 \\ 3C + G - 4T = 2 \\ A - C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ (-1) \\ \\ (-1) \end{array}\begin{cases} A + C + G + T = 26 \\ -2C - 4G - 3T = -52 \\ 3C + G - 4T = 2 \\ -2C - G - T = -25 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{r}
\\
(-1)\\
\\
+\\
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rcl}
A + C + G + T &=& 26\\
2C + 4G + 3T &=& 52\\
3C + G - 4T &=& 2\\
2C + G + T &=& 25
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
(-1)\\
+\\
(-1)
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rcl}
A + C + G + T &=& 26\\
2C + 4G + 3T &=& 52\\
3C + G - 4T &=& 2\\
-3G - 2T &=& -27
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
A + C + G + T &=& 26\\
2C + 4G + 3T &=& 52\\
C - 3G - 7T &=& -50\\
3G + 2T &=& 27
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
(-2)\\
+\\
\\
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rcl}
A + C + G + T &=& 26\\
C - 3G - 7T &=& -50\\
2C + 4G + 3T &=& 52\\
3G + 2T &=& 27
\end{array}
\right.
$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ (-3)
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rcrcrcl}
A + C & + & G & + & T & = & 26 \\
C & - & 3G & - & 7T & = & -50 \\
 & & 10G & + & 17T & = & 152 \\
 & & 3G & + & 2T & = & 27
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ (-3) \\ \\
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rcrcrcl}
A + C & + & G & + & T & = & 26 \\
C & - & 3G & - & 7T & = & -50 \\
 & & G & + & 11T & = & 71 \\
 & & 3G & + & 2T & = & 27
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcl}
A + C & + & G & + & T & = & 26 \\
C & - & 3G & - & 7T & = & -50 \\
 & & G & + & 11T & = & 71 \\
 & & & - & 31T & = & -186
\end{array}
\right.
$$

De donde se llega a que el número de libros de cada materia es:

$A = 8$	Libros de Álgebra
$C = 7$	Libros de Cálculo
$G = 5$	Libros de Geometría
$T = 6$	Libros de Trigonometría

EJERCICIO 4.25 La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 18. Si el segundo y el tercer dígito se intercambian, el número resultante es mayor al original en 36 unidades. Si el primer y tercer dígito se intercambian, el nuevo número es 99 unidades menor que el original. Determine el número original.

SOLUCIÓN:

En este ejercicio lo que haremos es ir explicando cada una de las tres ecuaciones que representan al problema.

Ecuación 1:

Supongamos que el número de tres cifras que buscamos lo representamos como:

$$x \quad y \quad z$$

Se nos dice que la suma de los tres dígitos es igual a 18, esto nos lleva a la ecuación:

$$x + y + z = 18 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Ecuación 2:

La descripción para generar esta ecuación nos indica que, si intercambiamos el segundo y el tercer dígito, entonces el número resultante es mayor al original en 36 unidades. Al hacer el intercambio indicado, el número sería:

$$x \quad z \quad y$$

Recuérdese que el primer dígito nos indica cuántas centenas tiene el número, el segundo, cuántas decenas y el último, cuántas unidades; de esta forma, el número con el intercambio hecho, lo podemos expresar como:

$$x \; z \; y = 100x + 10z + y$$

Como se nos dice que este número es mayor al original en 36 unidades, entonces le tendríamos que restar 36 para que sea igual al número original. De acuerdo con esto, la ecuación 2 sería:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$100x + 10z + y - 36 = \underbrace{100x + 10y + z}_{\text{Número original}}$$

Agrupando y simplificando, llegamos a:

$$9y - 9z = -36$$

$$y - z = -4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ecuación 3:

Para esta tercera y última ecuación, en el enunciado se establece que, si el primer y tercer dígito se intercambian, el nuevo número es menor en 99 unidades que el original. Con el intercambio realizado, el número sería:

$$z \quad y \quad x$$

Si este número es 99 unidades menor que el original, entonces le tendríamos que sumar 99 para que resulte igual a él, esto es:

$$100z + 10y + x + 99 = \underbrace{100x + 10y + z}_{\text{Número original}}$$

Al agrupar y simplificar, se llega a:

$$99x - 99z = 99$$

$$x - z = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Se han generado las tres ecuaciones del sistema, con lo cual, el modelo matemático que representa al problema es:

$$(-1)\begin{cases} x + y + z = 18 \\ \quad\; y - z = -4 \\ x \quad\;\; - z = 1 \end{cases} \quad +$$

Al realizar el escalonamiento, tenemos

$$(1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 18 \\ & & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & - & 2z & = & -17 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 18 \\ & & y & - & z & = & -4 \\ & & & - & 3z & = & -21 \end{array}\right.$$

de donde:

$$z = 7\,, \qquad y = 3\,, \qquad x = 8$$

con lo cual, el número buscado es:

$$837$$

EJERCICIO 4.26 Para un proyecto del gobierno de México se distribuyeron $1\,360\,000$ dólares entre 100 científicos de tres grupos de investigación A, B, y C. Cada científico del grupo de investigación A recibió $20\,000$ dólares, los del grupo B, $8\,000$ y los del grupo C, $10\,000$. Además, se sabe que el grupo de investigación A tiene el doble de investigadores que los del grupo B.

¿Cuántos científicos pertenecen a cada grupo?

SOLUCIÓN:

En este ejercicio procederemos directamente al planteamiento del sistema de ecuaciones.

$x \longrightarrow$ Número de científicos en el grupo A

$y \longrightarrow$ Número de científicos en el grupo B

$z \longrightarrow$ Número de científicos en el grupo C

$$\left(\frac{1}{2\ 000}\right)\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 100 \\ 20\ 000\,x + 8\ 000\,y + 10\ 000\,z &=& 1\ 360\ 000 \\ x &=& 2\,y \end{array}\right.$$

escalonando tenemos:

$$\begin{array}{c}(-1)\ (-10)\end{array}\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 100 \\ 10\,x + 4\,y + 5\,z &=& 680 \\ x - 2\,y &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-1) \end{array}\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 100 \\ -6\,y - 5\,z &=& -320 \\ -3\,y - z &=& -100 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 100 \\ 6\,y + 5\,z &=& 320 \\ 3\,y + z &=& 100 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \ \end{array}\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 100 \\ 3\,y + z &=& 100 \\ 6\,y + 5\,z &=& 320 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 100 \\ 3\,y + z &=& 100 \\ 3\,z &=& 120 \end{array}\right.$$

Al resolver el sistema se llega a:

$z = 40$ Número de científicos en el grupo C

$y = 20$ Número de científicos en el grupo B

$x = 40$ Número de científicos en el grupo A

EJERCICIO 4.27 En un laboratorio se tienen tres soluciones de cierto ácido. La primera solución contiene ácido al 10%, la segunda al 30% y la tercera al 50%. Un químico desea emplear las tres soluciones para obtener 50 litros de una solución que contenga 32% del ácido. Si se desea que la cantidad a usarse de la solución al 50%, sea el doble de la solución al 30%, ¿cuántos litros debe usar de cada solución?

SOLUCIÓN:

Identifiquemos las incógnitas y plantearemos directamente el modelo matemático que representa al problema.

x → Número de litros de ácido al 10%

y → Número de litros de ácido al 30%

z → Número de litros de ácido al 50%

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 0.1x + 0.3y + 0.5z = 0.32(50) \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow (10)\begin{cases} x + y + z = 50 \\ \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y + \frac{5}{10}z = 16 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

$$(-1)\begin{cases} x + y + z = 50 \\ x + 3y + 5z = 160 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1)\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 2y + 4z = 110 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\begin{array}{l} \\ \left(\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{5}\right) \end{array} \begin{cases} x + y + z = 50 \\ 2y + 4z = 110 \\ 5z = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 50 \\ y + 2z = 55 \\ z = 22 \end{cases}$$

de donde, la solución al problema es:

$x = 17$ Litros de ácido al $10\,\%$

$y = 11$ Litros de ácido al $30\,\%$

$z = 22$ Litros de ácido al $50\,\%$

EJERCICIO 4.28 Una compañía de ensamblado de computadoras tiene cuatro cadenas para dicha labor. En una hora, la cadena cuatro tiene una producción igual a la de la primera más una unidad, mientras que la primera, a su vez ensambla lo que la segunda más una unidad. Por su parte, la segunda produce lo que la tercera más tres unidades y la producción de la cuarta menos la de la tercera es igual a cinco unidades. ¿Cuántas unidades completas debe producir como mínimo cada cadena en una hora, si cada una de ellas debe ensamblar al menos una para no parar la producción?

SOLUCIÓN:

Identifiquemos las incógnitas y plantearemos directamente el modelo matemático que representa al problema.

$x_1 \longrightarrow$ Número de computadoras producidas en la cadena 1

$x_2 \longrightarrow$ Número de computadoras producidas en la cadena 2

$x_3 \longrightarrow$ Número de computadoras producidas en la cadena 3

$x_4 \longrightarrow$ Número de computadoras producidas en la cadena 4

El modelo matemático es:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_4 & = & x_1 + 1 \\ x_1 & = & x_2 + 1 \\ x_2 & = & x_3 + 3 \\ x_4 - x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

agrupando y ordenando el sistema, se tiene:

$$\begin{array}{c} (-1) \\ + \\ \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & & -\ x_4 & = & -1 \\ x_1 & -\ x_2 & & & = & 1 \\ & x_2 & -\ x_3 & & = & 3 \\ & & -\ x_3 & +\ x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

escalonando el sistema, tenemos:

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ + \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & & -\ x_4 & = & -1 \\ & -\ x_2 & & +\ x_4 & = & 2 \\ & x_2 & -\ x_3 & & = & 3 \\ & & -\ x_3 & +\ x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ + \\ \end{array}\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & & -\ x_4 & = & -1 \\ & -\ x_2 & & +\ x_4 & = & 2 \\ & & -\ x_3 & +\ x_4 & = & 5 \\ & & -\ x_3 & +\ x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad - x_4 = -1 \\ \quad - x_2 \qquad\quad + x_4 = 2 \\ \qquad\qquad - x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Al término del escalonamiento, nos damos cuenta de que se trata de un sistema compatible indeterminado, es decir, un sistema que tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo tanto, es un problema que tiene múltiples soluciones; sin embargo, de todas ellas, solo hay una que cumple con todas las condiciones establecidas, aquella que no implica el paro de la producción, que no admite soluciones fraccionarias o negativas, la que cumple con el mínimo establecido.

Del sistema escalonado se llega a que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 - 1 \\ x_2 &= x_4 - 2 \\ x_3 &= x_4 - 5 \end{aligned}$$

en la última de estas tres ecuaciones, nos damos cuenta que el menor valor que puede tomar x_4 es 6. Con este valor se llega a que la solución del problema es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 4 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Recuérdese que esta es la producción de computadoras completas en cada una de las líneas de producción en una hora de trabajo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones lineales de acuerdo con el número de soluciones que admite.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \\ 3x + 5y - 3z = -1 \\ 3x + 7y + z = 1 \end{cases}$$

2. En caso de existir, determine la solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} -5x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 6y = -15 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 1 = x - \dfrac{y-1}{-1} \\ x - \dfrac{-y-1}{-1} = -(-y+1) \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

d) $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ -3x - y + 3z = -2 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 3y - 4z = 15 \\ -7x - 4y + 4z = 2 \\ -5x - y + 2z = -5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -6x - 4y + 6z = 34 \\ 3x - 5y - 7z = -1 \\ -x - 7y - 6z = 10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x + 4y - z = 11 \\ -5x + y + z = -1 \\ -x - 3z = 9 \\ -4x - 3y + 2z = -12 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ -3x + 6y + 3z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

i) $\begin{cases} -2x + 4y + 4z = -8 \\ x - y - z = 2 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 5y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ -4x - 10y - 2z = -6 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3y - 3z = 6 \\ x - y + 4z = -3 \\ -2x - 4y - 2z = -6 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 3y - 3z = 6 \\ x - y + 4z = -3 \\ -2x - 4y - 2z = 6 \end{cases}$

m) $\begin{cases} -2x - 8y - 4z = 2 \\ -2x - 5y - 4z = 0 \\ -13x - 40y - 26z = 3 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 3 \\ -x - 2y + z = -5 \\ -2x - 4y + 2z = -6 \end{cases}$

o) $$\begin{cases} 5y - 4z = -3 \\ x - 3y - 3z = -4 \\ -2x + 21y - 6z = 0 \\ x + 2y - 7z = -7 \end{cases}$$

p) $$\begin{cases} x - y + z - w = 2 \\ 2x + 2y + 2z + 2w = 0 \\ 5x - 4y + 6z + 3w = -6 \\ -3x + 5y - 2z - 2w = 5 \end{cases}$$

q) $$\begin{cases} -x + 4y - 4z - 2w = 13 \\ 3x + y + z + 5w = 9 \\ 2x - y - 4z - w = 12 \\ -4x - 5y + 2z - 4w = -26 \end{cases}$$

r) $$\begin{cases} -y - 2z - 2w = 0 \\ x - 2z + 2w = -2 \\ -x + y + z = 2 \\ 3x - 4y - 8z - 2w = -6 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

s) $\begin{cases} -4x - 2y \qquad - 4w = -4 \\ x + y + z + 2w = 1 \\ -y - 2z - 2w = 0 \\ 3x + 2y + z + 4w = 3 \end{cases}$

t) $\begin{cases} 4x \qquad + 4z + 4w = 2 \\ -2y + 2z - w = -1 \\ 4x - 2y + 6z + 3w = 0 \\ 2x + 2y \qquad + 3w = 3 \end{cases}$

u) $\begin{cases} \dfrac{7x - 9y}{2} - \dfrac{2x + 4}{2} = -15 \\ 5\left(x - 1 + y\right) = 25 \end{cases}$

v) $\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{2} + \dfrac{y - 3}{3} = \dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5} + \dfrac{y - 1}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$

w) $\begin{cases} \dfrac{x - y - 1}{x + y + 1} = -5 \\ \dfrac{x + y - 1}{x - y + 1} = -\dfrac{3}{7} \end{cases}$

x) $$\begin{cases} x - \dfrac{y+z}{2} = 2 \\ y - \dfrac{x+z}{4} = -1 \\ z - \dfrac{y-x}{2} = 8 \end{cases}$$

3. Determine si los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos admiten soluciones distintas de la trivial, en caso afirmativo, obtenga la solución general y una solución particular diferente de la trivial.

a) $$\begin{cases} 8x - 6y + 10z = 0 \\ 12x - 9y + 15z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x - 5z = 0 \\ -5x - 2y + 2z = 0 \\ -7x + 5y - 6z = 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ -2x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

d) $$\{\, x - 2y - 4z = 0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

e) $\begin{cases} -5x + 4y + 7z = 0 \\ 5x - 5y - 3z = 0 \\ 6x + 4y + 4z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3x = 5y + 5z \\ 3x = -7y - z \\ -7x = -7y - 2z \end{cases}$

4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, realizando un cambio de variable:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 6 \\ -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3}{z} = -6 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{z} = 4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{5}{z} = 6 \end{cases}$

c) $$\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 0 \\ -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 2 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{4}{z} = -4 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{z} = 3 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{4}{z} = -8 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} = -5 \end{cases}$$

5. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathrm{L}: \begin{cases} 4x - 6y + 2z = 0 \\ x - 5y = 0 \\ 5x - 4y + bz = 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor de $b \in \mathbb{R}$, para que el sistema homogéneo admita únicamente la solución trivial.

b) Determine la solución general del sistema para $b = 3$.

6. Para los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determine los valores de $k \in \mathbb{R}$, para que el sistema sea: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ -x + 2y - kz = 3 \\ 2kx - 2y + 2z = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + z = k \\ 2x + y + kz = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ x + 3y + (k+4)z = 1 \\ x + (k+2)y + 5z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y - 2z = 1 \\ x + y + 2kz = -k \\ x + 5y - 2z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -4z = k \\ -x + y + kz = -2 \\ x - y + 4z = 3 \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

f) $$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + ky - 5z = 3 \\ 2x + 4y + kz = 3 \end{cases}$$

g) $$\begin{cases} kx + y + z + w = 1 \\ x + ky + z + w = 1 \\ x + y + kz + w = 1 \\ x + y + z + kw = 1 \end{cases}$$

h) $$\begin{cases} x + y + kz = 3 \\ x + ky + z = 3 \\ kx + y + z = 3 \end{cases}$$

i) $$\begin{cases} kx + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ x + 3y + 7z = 0 \end{cases}$$

j) $$\begin{cases} 2x - y - kz = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ -x + 2y = k \end{cases}$$

k) $\begin{cases} x + y + kz = k \\ 2x + 2y + 2kz = 2k \\ 3x + y + 3kz = 3k \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 6y + kz = k-6 \\ 2x + 4y + (k-3)z = k-7 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x + 6y - 3z + 12w = 6 \\ x + 7y - 4z + 11w = k \\ 2x + y - z - w = -1 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 8y + 12z = k+6 \\ 3x + 6y + 9z = 8-k \end{cases}$

o) $\begin{cases} x + 2y + z = 2k \\ x + ky + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

p) $$\begin{cases} kx + ky + kz = 3 \\ kx + ky + kz = 0 \\ kx + ky + kz = 1 \end{cases}$$

q) $$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \\ 3x + (k+2)y + (k-1)z = -1 \\ -2y - (k+3)z = -4 \end{cases}$$

r) $$\begin{cases} (8k+16)x - 4y + 8z + 4w = 8 \\ 18x + 6z + 3w = 12 \\ 4x - y + 2z + w = 1 \\ 8x + 6z + 2w = -2 \end{cases}$$

s) $$\begin{cases} k^2x + ky + kz = 1 \\ kx + y + kz = 2k \\ -x + ky + k^2z = -k^2 \end{cases}$$

t) $$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + k^2 z = 3 \\ x + 4y - 3z = k+6 \end{cases}$$

7. Determine la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\begin{cases} (1+i)z + w = 0 \\ iz + w = -i \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} (1+i)z - iw = 1+i \\ (2+i)z + (2-i)w = 4+4i \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x + iz + (1+i)w = 2i \\ 2x + z + (1-i)w = -i \\ x + iz + w = 2+i \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 2ix + (1+i)z + iw = -2-i \\ (2-2i)x + (2+i)z + (1-i)w = 4+i \\ x + (1+i)z + (1+i)w = i \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

e) $\begin{cases} i\,x + (1+i)\,z + (2-2i)\,w = 3 + 8i \\ 2\,i\,x - i\,z + (1+i)\,w = -3 + 3\,i \\ (1+i)\,x + (1-i)\,z + (3\,i)\,w = -8 + 3\,i \end{cases}$

f) $\begin{cases} (2+i)\,x + (1-2\,i)\,z + 2\,i\,w = -2 \\ (3-i)\,x + (2-i)\,z + 3\,i\,w = 2 - i \\ (-1-i)\,x + (3-i)\,z + (1-2\,i)\,w = 4 - 5\,i \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + z - w = 1 + 2\,i \\ 2\,x - z + 3\,w = 6 + i \\ x - z - w = -3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + 2\,z - 3\,w = -3 + 5\,i \\ 2\,x - z + w = 1 + i \\ x - 2\,z - 2\,w = -2 + 7\,i \end{cases}$

8. Obtenga los valores de $a \in \mathbb{R}$, que hacen que el siguiente sistema de ecuaciones sea: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

$$\begin{cases} a\,x + y + z = a \\ x + a\,y + z = a^2 \\ x + y + a\,z = a^3 \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

9. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 2b + 2 \\ x + 2y - 3z = a \\ 2x + y - z = b \end{cases}$$

Determine la relación que deben tener a y $b \in \mathbb{R}$, para que el sistema sea compatible.

10. Sean los sistemas de ecuación lineales:

$$A: \begin{cases} 3x + 4y + 3z = -1 \\ x - 2y + 3z = -11 \\ 3x + y + kz = -9 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} x - 2y + 3z = -11 \\ 4x + 2y + 5z = -10 \\ -3y + 2z = -10 \end{cases}$$

Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$, para que los sistemas A y B sean equivalentes.

11. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}\,\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3 \\ 4\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = a \\ 6\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9 \end{cases}$$

Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$, si se sabe que $\beta = 180°$.

12. Determine los valores de los ángulos α, β y γ, que satisfacen al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + 2\cos\beta - \tan\gamma = 2 \\ \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta + \tan\gamma = 0 \\ 3\operatorname{sen}\alpha - 2\cos\beta + 2\tan\gamma = 1 \end{cases}$$

13. Sean los planos π_1, π_2 y π_3 cuyas ecuaciones se dan. Determine las coordenadas del punto P que pertenece simultáneamente a dichos planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad 2x + 2y + 10z = 20 \\ \pi_2 &: \quad x + y + z = 2 \\ \pi_3 &: \quad 3x + 3y - z = -2 \end{aligned}$$

14. Sean los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{L:} \begin{cases} 2x - 5y + 7z = 10 \\ -x + ay + 5z = 6 \\ x + 3y - 2z = -6 \end{cases} \qquad \text{S:} \begin{cases} 4x - y + 5z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - az = -2 \end{cases}$$

Determine el valor $a \in \mathbb{R}$, tal que ambos sistemas tengan la misma solución.

15. Determine los valores de a y $b \in \mathbb{R}$, para que los sistemas Q y P tengan el mismo conjunto solución.

$$\text{Q:} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay - z = 9 \\ -x - 2y + z = -6 \end{cases} \qquad \text{P:} \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ x + by + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

16. Determine los valores que deben tomar $a, b, c \in \mathbb{R}$, para que la solución del siguiente sistema de ecuaciones sea: $x = 2$, $y = -2$, $z = -1$

$$\begin{cases} 2ax + by - cz = 2 \\ ax - 2by + 3cz = 2 \\ \frac{1}{2}ax - by + cz = 3 \end{cases}$$

17. Obtenga los polinomios $q(x)$, $p(x)$ y $f(x)$ que satisfacen a cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Nota: Emplee el método de Gauss para obtener la solución.

a) $$\begin{cases} 3q(x) + 3p(x) = 3x^2 \\ -q(x) + 2p(x) = -x^2 - 3x - 3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2q(x) + p(x) - 3f(x) = -2x^2 - 4x - 3 \\ -q(x) + 2p(x) + f(x) = 3x^2 + x - 1 \\ q(x) - p(x) + 2f(x) = x^2 + 5x \end{cases}$$

18. Obtenga los vectores $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, que satisfacen los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\begin{cases} 3\bar{x} - \bar{y} = (2, -1, 3) \\ \bar{x} - 4\bar{y} = (-3, -4, 1) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \bar{x} + 2\bar{y} + \bar{z} = (-1, -2, 2) \\ \bar{x} - \bar{y} + 2\bar{z} = (2, 5, 3) \\ 2\bar{x} + \bar{y} - \bar{z} = (1, -1, 1) \end{cases}$$

19. Laura vendió 120 prendas de ropa entre camisas, pantalones y blusas. Se sabe que la suma de las camisas más los pantalones es el doble que el número de blusas, las camisas cuestan $\$25$, las blusas $\$30$ y los pantalones $\$50$. Si lo que recibió por la venta fueron $\$4200$, ¿cuántas piezas de cada prenda vendió?

20. Una tienda de deportes se especializa en vender artículos de fútbol, básquetbol y tenis. En el almacén se sabe que el 60% de los artículos de fútbol más el 50% de los artículos de básquetbol representan el 30% del total del inventario. El 70% de los artículos de básquetbol más el 60% de los de tenis representan la mitad del total de los artículos disponibles. Si hay 40 artículos más de básquetbol que de los de fútbol, determine el número de artículos disponibles en el almacén de cada tipo.

21. La suma de las edades de Alejandra y Bruno es igual a la edad de Carlos más 15 años y 3 meses, la suma de las edades de Alejandra y Carlos es 24 años y 9 meses, además se sabe que la suma del doble de la edad de Bruno más la de Carlos es igual a 52 años y 3 meses, ¿qué edades tienen Alejandra, Bruno y Carlos? (Dé la respuesta en años y meses).

22. Un albañil compró el día lunes medio litro de pintura, 4 kg de cemento y 3 kg de yeso por $\$102$. El miércoles compró un litro de pintura, 3 kg de cemento y 2 kg de yeso por $\$112$ y el viernes, por $\$79$, compró un cuarto de litro de pintura, 2 kg de cemento y 5 kg de yeso. ¿Cuánto cuesta el medio litro de pintura, el kilogramo de cemento y el kilogramo de yeso?

23. Determine los valores de los ángulos interiores de un triángulo, si se conoce que la suma de los dos primeros ángulos es la mitad del tercero y además que el segundo es el doble del primero.

24. Se compraron 17 kg de fruta entre manzanas, peras y mangos, pagándose en total $\$478$. Se sabe que el precio por kilogramo de manzana es $\$17$, de la pera es de $\$30$ y del mango $\$48$. Si el número de kilos de manzanas es igual a un kilo menos de lo que suman los kilos comprados de peras y mangos. ¿Cuántos kilogramos se compraron de cada fruta?

25. Una fábrica produce 3 tipos de productos. Para producir cada tipo se usan tres máquinas; el número de horas dedicado a la producción de cada tipo se presenta en la siguiente tabla:

Máquina	Tipos de productos		
	A	B	C
1	3	2	3
2	1	3	4
3	2	7	2

El número de horas de producción a la semana es de 35 en la máquina 1, de 27 en la máquina 2 y de 46 en la máquina 3. Determine cuántos productos de cada tipo se fabrican a la semana, si por lo menos debe producirse un producto de cada tipo.

26. En un grupo de Álgebra hay 43 alumnos de 17, 18 y 19 años. Los alumnos que acaban de cumplir la mayoría de edad son el doble de los que la cumplieron el año pasado. Si se sabe que el número de los alumnos menores de edad más 2 veces los que tienen 19 años es igual a los que tienen 18 años más 7, ¿cuántos alumnos hay que tengan 17, 18 o 19 años?

ÍNDICE

1

2

3

4

5

27. Un acuario tiene tres tipos de especies de peces: payaso, beta y dorado, a los cuales se les proporciona tres tipos de alimento. Cada pez payaso consume a la semana 2 unidades de alimento A, 3 del B y una del C. Cada pez beta consume a la semana 3 unidades del alimento A, 5 del B y 2 del C. Para un pez dorado su consumo semanal es una unidad del alimento A, 3 del B y 4 del C. Cada semana proporcionan al acuario 108 unidades del alimento A, 199 del alimento B y 127 del alimento C. Si los peces consumen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden vivir en el acuario?

28. El ángulo interior α de un triángulo excede en $45°$ al ángulo γ. La diferencia entre el ángulo α menos el β es igual a γ menos $30°$. ¿De qué tipo de triángulo se trata? ¿Cuánto mide cada ángulo interior?

29. Determine dos números cuya suma sea 1 y cuya diferencia, el primero menos el segundo, sea -1.

30. Hugo trabaja en una empresa donde gana a la semana el doble que su esposa más $\$1000$. Si Hugo aporta el 30% de su salario para los gastos del hogar y su esposa un 80% y se sabe que el gasto semanal es $\$1700$ y el resto lo ahorran para comprarse un automóvil, ¿cuántas semanas tardarán Hugo y su esposa para comprarse un carro con valor de $\$200\,100$?

31. En una fábrica se tienen 90 obreros en 3 sindicatos. El doble de obreros del primer sindicato menos los del segundo más los del tercero, suman 50 obreros. Si se restan los obreros del tercer sindicato al total de obreros de los otros dos sindicatos, se obtiene 10 obreros. ¿Cuántos obreros pertenecen a cada sindicato?

32. Determine un número de dos cifras donde la suma de ellas sea 9 y que el dígito de las unidades sea el doble del dígito de las decenas.

33. Paco y su padre se llevan 25 años. Calcule la edad de ambos, sabiendo que dentro de 15 años la edad del padre será el doble de la de Paco.

34. Paulina y Luisa fueron de compras en el Buen Fin. Paulina compró un pantalón de $\$420$ y una camisa de $\$240$; Luisa, un suéter de $\$280$ y unos zapatos de $\$600$. Después de aplicar los descuentos, Paulina pagó $\$504$ y Luisa $\$644$. Calcule los porcentajes de descuento aplicados, sabiendo que el porcentaje aplicado a los pantalones y al suéter era el mismo, y el aplicado a la camisa y a los zapatos también.

35. En un grupo de alumnos, la materia de matemáticas la aprobaron el 62.5% de las alumnas y el 80% de los alumnos, mientras que la asignatura de historia la reprobaron el 22.5% de las alumnas y el 40% de los alumnos. Calcule el número de alumnas y de alumnos que hay en el grupo, si el total de aprobados es de 37 en matemáticas y 40 en historia.

36. Determine la cantidad de animales que hay en una granja, si se conoce que la suma del total de avestruces y de cebras es 52 y la de sus patas es 150. También se sabe que cada día entre los gansos y los patos comen $16.2\ \mathrm{kg}$ de comida. Por cada 6 patos hay un ganso y se sabe que un ganso come el triple de lo que come un pato al día. Un pato en promedio necesita $50\ \mathrm{g}$ de comida cada 8 horas. Se ha observado que la tercera parte de los conejos escapan al comedero de avestruces y cebras, lo que supone el doble de animales en dicho comedero.

37. Dos números enteros tienen una relación de 1 a 2. Si el menor de ellos aumenta en 12 unidades y el mayor disminuye en 9 unidades, entonces la relación se invierte. Determine los dos números enteros.

38. Karla tiene 21 años más que Luis, si la edad de Karla se divide entre el doble de la de Luis, el cociente es 2 y el residuo 3. Determine las edades de ambos.

39. Sea x un número de dos cifras, donde la suma de ellas es 9. Si la cifra de las decenas se aumenta en a unidades y la cifra de las unidades se disminuye en a unidades, las cifras de x se intercambian. Determine el número x que se obtiene con el valor positivo más pequeño que puede tomar a.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

40. Hugo, Paco y Luis se comieron una pizza de 12 rebanadas. Entre Hugo y Luis comieron dos rebanadas más de las que comió Paco, si Luis comió una rebanada más de las que comió Hugo, determine cuántas rebanadas comió cada uno de ellos.

41. En una familia, la suma de las edades actuales de los 3 integrantes es de 90 años. Dentro de 15 años, la edad del hijo será la mitad de la que tendrá su madre. Si el padre es cinco años mayor que la madre, ¿qué edad tiene cada uno actualmente?

42. En un establo que tiene caballos y patos, hay un total de 25 cabezas y 86 patas. ¿Cuántos caballos y patos hay?

43. En una bolsa hay 281 pesos en monedas de 2, 5 y 10 pesos. Si en total son 51 monedas y se sabe que el número de monedas de 10 es el doble que las monedas de 5 más una, calcule el número de monedas de cada tipo.

44. En una familia cada hermano tiene el doble de hermanas que de hermanos y cada hermana tiene el mismo número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas son?

45. En una frutería un señor compra un jugo combinado, el de naranja cuesta $\$25$ el litro y el de zanahoria cuesta $\$15$ el medio litro. Él pagó $\$28$ por un litro de jugo combinado. ¿Qué cantidad de jugo compró de naranja y de zanahoria?

46. En una fábrica de metal, se tienen 3 tipos de láminas con diferente composición:

    1. La primera con $2\ \mathrm{kg}$ hierro, $6\ \mathrm{kg}$ níquel y $4\ \mathrm{kg}$ de bronce.
    2. La segunda con $3\ \mathrm{kg}$ hierro, $8\ \mathrm{kg}$ níquel y $3\ \mathrm{kg}$ de bronce.
    3. La tercera con $10\ \mathrm{kg}$ hierro, $4\ \mathrm{kg}$ níquel y $6\ \mathrm{kg}$ de bronce.

    Un cliente ha solicitado una lámina con la siguiente composición: $4.5\ \mathrm{kg}$ de hierro, $6.5\ \mathrm{kg}$ de níquel y $4\ \mathrm{kg}$ de bronce. ¿Cuántos kilogramos de cada lámina se deben tomar para fabricar una nueva lámina con la composición señalada por el cliente?

ÍNDICE

1

2

3

4

5

47. Determine los coeficientes del polinomio de tercer grado cuya gráfica contiene a los puntos

$$(1,\ 1),\ (2,\ -3),\ \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\ (-1,\ 3).$$

48. Un granjero fue a comprar gallinas, cerdos y vacas, gastando $\$100\,000$ en total. El costo unitario de cada animal es: gallina $\$100$, cerdo $\$1\,000$ y vaca $\$8\,000$. Si compró 100 animales en total, ¿cuántos animales de cada especie compró, si debe comprar al menos uno de cada especie?

49. Un camión lleva costales de cemento de 2 pesos distintos. El costal grande tiene un peso de 50 kg, mientras que los pequeños un 30% menos. Se sabe que el número de costales pequeños es cuatro veces el total de los costales grandes y que el peso total de la carga es 2.28 toneladas. Determine cuántos costales de cada tamaño transporta.

50. Pepe tiene el doble de edad que la suma de las edades de sus dos hijos. La diferencia de edad entre sus dos hijos hoy es de n años. Hace exactamente n años, Pepe tenía el triple de la suma de las edades de sus hijos, en ese entonces. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de sus dos hijos, la suma de edades de los tres será 150 años. ¿Qué edad tienen actualmente?

51. Javier y Arturo son amigos, ambos acordaron reunirse en un punto entre sus hogares, cada uno sale de su casa en auto al mismo tiempo. Javier conduce a 100 km/h promedio y Arturo a una velocidad promedio de 80 km/h y recorrió 30 km menos que Javier. ¿Cuánto tiempo tardaron en reunirse? ¿Qué distancia hay entre sus casas?

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $x = -2 , \quad y = 1 , \quad z = 0$ El sistema es compatible determinado.

2. a) $x = 0 , \quad y = 2$

b) Incompatible.

c) $x = 4 , \quad y = 2$

d) $x = 3 , \quad y = -1 , \quad z = 2$

e) $x = 2 , \quad y = -3 , \quad z = 1$

f) $x = 0 , \quad y = -4 , \quad z = 3$

g) $x = 0 , \quad y = 2 , \quad z = -3$

h) $x = k - 1 , \quad y = 0 , \quad z = k \quad ; \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$ Solución general.

i) $x = 0 , \quad y = k , \quad z = -k - 2 \quad ; \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$ Solución general.

j) $x = 4 + 2k , \quad y = -1 - k , \quad z = k \quad ; \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$ Solución general.

k) $x = -1 - 3k , \quad y = 2 + k , \quad z = k \quad ; \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$ Solución general.

l) Incompatible.

m) Incompatible.

n) Incompatible.

o) Incompatible.

p) $x = 2, \quad y = 1, \quad z = -1, \quad w = -2$

q) $x = 3, \quad y = 2, \quad z = -2, \quad w = 0$

r) $x = -2k - 2, \quad y = -2k, \quad z = 0, \quad w = k \; ; \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$ Solución general.

s) $x = 1 + k_1, \quad y = -2k_1 - 2k_2, \quad z = k_1, \quad w = k_2 \,; \quad \forall\, k_1$ y $k_2 \in \mathbb{R}$ Solución general.

t) Incompatible.

u) $x = 2, \quad y = 4$

v) $x = 3, \quad y = 1$

w) $x = 2, \quad y = -4$

x) $x = 6, \quad y = 2, \quad z = 6$

3. a) Solución general:

$$x = \frac{3}{4} k_1 - \frac{5}{4} k_2, \quad y = k_1, \quad z = k_2 \quad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Solución particular:

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = 1, \quad z = 0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

c) Solución general:

$x = -12k$, $y = 7k$, $z = k$ $\forall\ k \in \mathbb{R}$

Solución particular:

$x = -12$, $y = 7$, $z = 1$

d) Solución general:

$x = 2k_1 + 4k_2$, $y = k_1$, $z = k_2$ $\forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Solución particular:

$x = 6$, $y = 1$, $z = 1$

e) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

f) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

4. a) $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{3}$

b) $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

c) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$

d) $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$ La respuesta no es única.

5. a) $\forall\ b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 3$

b) $x = 5k$, $y = k$, $z = -7k$; $\forall\ k \in \mathbb{R}$

6. a) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: No existen valores de } k. \\ \text{Compatible indeterminado: No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible: } \forall\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 0 \\ \text{Compatible indeterminado: No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible: } k = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 1 \text{ y } k \neq -2 \\ \text{Compatible indeterminado: } k = 1 \\ \text{Incompatible: } k = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 1 \\ \text{Compatible indeterminado: } k = 1 \\ \text{Incompatible: No existen valores de } k. \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq -4 \\ \text{Compatible indeterminado: No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible: } k = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq -1 \text{ y } k \neq -2 \\ \text{Compatible indeterminado: } k = -1 \\ \text{Incompatible: } k = -2 \end{cases}$

$$\text{g)}\ \begin{cases} \text{Compatible determinado:} & \forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq 1 \quad \text{y} \quad k \neq -3 \\ \text{Compatible indeterminado:} & k = 1 \\ \text{Incompatible:} & k = -3 \end{cases}$$

$$\text{h)}\ \begin{cases} \text{Compatible determinado:} & \forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq 1 \quad \text{y} \quad k \neq -2 \\ \text{Compatible indeterminado:} & k = 1 \\ \text{Incompatible:} & k = -2 \end{cases}$$

$$\text{i)}\ \begin{cases} \text{Compatible determinado:} & \forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq 2 \\ \text{Compatible indeterminado:} & k = 2 \\ \text{Incompatible:} & \text{No existen valores de } k. \end{cases}$$

$$\text{j)}\ \begin{cases} \text{Compatible determinado:} & \forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq 6 \\ \text{Compatible indeterminado:} & \text{No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible:} & k = 6 \end{cases}$$

$$\text{k)}\ \begin{cases} \text{Compatible determinado:} & \text{No existen valores de } k. \\ \text{Compatible indeterminado:} & \forall\ k \in \mathbb{R} \\ \text{Incompatible:} & \text{No existen valores de } k. \end{cases}$$

$$\text{l)}\ \begin{cases} \text{Compatible determinado:} & \forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad k \neq 9 \\ \text{Compatible indeterminado:} & k = 9 \\ \text{Incompatible:} & \text{No existen valores de } k. \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

m) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: No existen valores de } k. \\ \text{Compatible indeterminado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \\ \text{Incompatible: No existen valores de } k. \end{cases}$

n) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: No existen valores de } k. \\ \text{Compatible indeterminado: } k = 2 \\ \text{Incompatible: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 2 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 2 \\ \text{Compatible indeterminado: No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible: } k = 2 \end{cases}$

p) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: No existen valores de } k. \\ \text{Compatible indeterminado: No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible: } \forall\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$

q) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 2 \text{ y } k \neq -5 \\ \text{Compatible indeterminado: } k = 2 \\ \text{Incompatible: } k = -5 \end{cases}$

r) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 0 \\ \text{Compatible indeterminado: No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible: } k = 0 \end{cases}$

s) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 0 \text{ y } k \neq 1 \\ \text{Compatible indeterminado: No existen valores de } k. \\ \text{Incompatible: } k = 0 \text{ y } k = 1 \end{cases}$

t) $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ k \in \mathbb{R} \text{ con } k \neq 3 \text{ y } k \neq -3 \\ \text{Compatible indeterminado: } k = 3 \\ \text{Incompatible: } k = -3 \end{cases}$

7. a) $z = i$, $w = 1 - i$

b) $z = 1 + i$, $w = 1 + i$

c) $x = -1$, $z = -1 - 2i$, $w = 1 + 2i$

d) $x = i$, $z = -i$, $w = i$

e) $x = i$, $z = 2i$, $w = 3i$

f) $x = 1 + i$, $z = 1 - i$, $w = i$

g) $x = 1 + i$, $z = 2 + i$, $w = 2$

h) $x = i$, $z = -i$, $w = 1 - 2i$

ÍNDICE

1

2

3

4

5

8. $\begin{cases} \text{Compatible determinado: } \forall\ a \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad a \neq 1 \quad \text{y} \quad a \neq -2 \\ \text{Compatible indeterminado: } \quad a = 1 \\ \text{Incompatible: } \quad a = -2 \end{cases}$

9. $a = b + 1$

10. $k = 4$

11. $a = 2$

12. $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ \gamma = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$

13. $P(1, \ -1, \ 2)$

14. $a = 0$

15. $a = 3$ y $b = 2$ Ejercicio con múltiples soluciones

16. $a = 1, \quad b = 3, \quad c = 4$

17. a) $\begin{cases} q(x) = x^2 + x + 1 \\ p(x) = -x - 1 \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) $\begin{cases} q(x) = x - 1 \\ p(x) = x^2 - 1 \\ f(x) = x^2 + 2x \end{cases}$

18. a) $\begin{cases} \overline{x} = (1, 0, 1) \\ \overline{y} = (1, 1, 0) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \overline{x} = (1, 1, 1) \\ \overline{y} = (-1, -2, 0) \\ \overline{z} = (0, 1, 1) \end{cases}$

19. $\begin{cases} 40 \text{ camisas} \\ 40 \text{ pantalones} \\ 40 \text{ blusas} \end{cases}$

20. $\begin{cases} 80 \text{ fútbol} \\ 120 \text{ básquetbol} \\ 160 \text{ tenis} \end{cases}$

21. $\begin{cases} \text{Alejandra} & 10 \text{ años} & 6 \text{ meses} \\ \text{Bruno} & 19 \text{ años} & 0 \text{ meses} \\ \text{Carlos} & 14 \text{ años} & 3 \text{ meses} \end{cases}$

22. $\begin{cases} \$\,30 & 1/2 \text{ litro de pintura} \\ \$\,12 & \text{kilogramo de cemento} \\ \$\,8 & \text{kilogramo de yeso} \end{cases}$

23. $\begin{cases} \alpha = 20° \\ \beta = 40° \\ \gamma = 120° \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8 \text{ kg de manzana} \\ 5 \text{ kg de pera} \\ 4 \text{ kg de mango} \end{cases}$

25. $\begin{cases} 7 \text{ productos tipo } A \\ 4 \text{ productos tipo } B \\ 2 \text{ productos tipo } C \end{cases}$

26. $\begin{cases} 7 \text{ de } 17 \text{ años} \\ 24 \text{ de } 18 \text{ años} \\ 12 \text{ de } 19 \text{ años} \end{cases}$

27. $\begin{cases} 15 \text{ peces payaso} \\ 20 \text{ peces beta} \\ 18 \text{ peces dorado} \end{cases}$

28. $\begin{cases} \alpha = 75° \\ \beta = 75° \\ \gamma = 30° \end{cases}$ Se trata de un triángulo isósceles

ÍNDICE 1 2 3 4 5

29. $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

30. Tardan 87 semanas

31. $\begin{cases} \text{Sindicato } 1: 20 \text{ obreros} \\ \text{Sindicato } 2: 30 \text{ obreros} \\ \text{Sindicato } 3: 40 \text{ obreros} \end{cases}$

32. 36

33. $\begin{cases} \text{Paco } 10 \text{ años} \\ \text{Padre } 35 \text{ años} \end{cases}$

34. $\begin{cases} \text{El descuento del pantalón y del suéter es: } 20\,\% \\ \text{El descuento de la camisa y los zapatos es: } 30\,\% \end{cases}$

35. $\begin{cases} 40 \text{ alumnas} \\ 15 \text{ alumnos} \end{cases}$

36. $\begin{cases} 29 \text{ avestruces} \\ 23 \text{ cebras} \\ 72 \text{ patos} \\ 12 \text{ gansos} \\ 156 \text{ conejos} \end{cases}$ El total 292 animales

37. $\begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases}$

38. $\begin{cases} \text{Karla} \quad 27 \text{ años} \\ \text{Luis} \quad 6 \text{ años} \end{cases}$

39. $\begin{cases} a = 1 \\ \text{El número} \quad x = 45 \end{cases}$

40. $\begin{cases} \text{Hugo} \quad 3 \text{ rebanadas} \\ \text{Paco} \quad 5 \text{ rebanadas} \\ \text{Luis} \quad 4 \text{ rebanadas} \end{cases}$

41. $\begin{cases} \text{Hijo} \quad 11 \text{ años} \\ \text{Madre} \quad 37 \text{ años} \\ \text{Padre} \quad 42 \text{ años} \end{cases}$

42. $\begin{cases} 18 \text{ caballos} \\ 7 \text{ patos} \end{cases}$

43. $\begin{cases} 19 \text{ de } \$10 \\ 9 \text{ de } \$5 \\ 23 \text{ de } \$2 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 3 \text{ hermanos} \\ 4 \text{ hermanas} \end{cases}$

45. $\begin{cases} \frac{2}{5} \text{ litro de naranja} \\ \frac{3}{5} \text{ litro de zanahoria} \end{cases}$

46. $\begin{cases} 3 \text{ kg de la primera lámina} \\ 7 \text{ kg de la segunda lámina} \\ 5 \text{ kg de la tercer lámina} \end{cases}$

47. $p(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1$

48. $\begin{cases} 70 \text{ gallinas} \\ 21 \text{ cerdos} \\ 9 \text{ vacas} \end{cases}$

49. $\begin{cases} 48 \text{ costales pequeños} \\ 12 \text{ costales grandes} \end{cases}$

50. $\begin{cases} \text{Padre} & 50 \text{ años} \\ \text{Hijo mayor} & 15 \text{ años} \\ \text{Hijo menor} & 10 \text{ años} \end{cases}$

51. $\begin{cases} 90 \text{ minutos} \\ 270 \text{ km} \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

CAPÍTULO 5

MATRICES Y DETERMINANTES

Los antecedentes históricos de las matrices y los determinantes se le atribuyen a la cultura china desde el año 300 a.C. Se han encontrado cañas de bambú con cálculos relacionados al planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones. Estos cálculos se hacían con los coeficientes de las incógnitas restando filas y columnas, de esta forma se encontraba la solución a dichos sistemas de ecuaciones.

Se cuenta también con un documento escrito que data del año 300 a.C. cuyo autor es Jiuzhang Suanshu. Este libro consta de 9 capítulos y en el capítulo séptimo intitulado “Ni mucho ni poco”, aparece por primera vez el concepto de determinante.

La mayoría de los historiadores coinciden en que la teoría de los determinantes la desarrolló el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en 1693; sin embargo, hay quienes consideran que dicha teoría la desarrolló primero el matemático japonés Seki Kowa (1642-1708) en 1683.

El matemático francés Agustín Louis Cauchy (1786-1856) fue el primero en emplear el término determinante con su significado moderno. Se encargó de realizar una síntesis de los conocimientos anteriores, aunque también contribuyó al desarrollo de la teoría de los determinantes con aportaciones propias. En 1812 publicó un artículo con la fórmula y demostración del determinante de un producto.

El matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) fue el primero en usar el término matriz. Definió este concepto como un arreglo rectangular de elementos en 1850.

El matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) afirma que la idea de matriz es anterior al concepto de determinante, aunque históricamente el orden fue inverso. La idea de matriz se vincula a los cuadros mágicos que estudiaban los chinos antes de nuestra era. En 1858, Cayley publicó un escrito titulado *Memorias sobre la teoría de matrices* que contiene la primera definición abstracta de matriz. Define las operaciones de adición y multiplicación de matrices, la multiplicación de una matriz por un escalar y matriz inversa, es decir, creó el álgebra de las matrices. Asimismo, definió la igualdad de matrices y la matriz nula, entre otros conceptos fundamentales.

Hay muchos otros matemáticos sobresalientes que contribuyeron al desarrollo de la teoría de las matrices y los determinantes, entre ellos podemos mencionar al matemático francés Pierre de Laplace (1749-1827), el matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851), el matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752), el matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), el matemático francés Pierre Frederic Sarrus (1789-1861), el geodesista alemán Wilhelm Jordan (1842-1899), entre otros matemáticos más.

Hemos hecho aquí una reseña histórica breve que nos da una idea de cómo fueron evolucionando estos conceptos a través del tiempo.

Definición de matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en forma de renglones y columnas de la forma:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{N}$

Se dice que la matriz A consta de m renglones y n columnas.

Las matrices se pueden expresar en forma abreviada y su definición se puede dar, en forma alternativa, de la siguiente manera.

Una matriz A es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en forma de renglones y columnas de la forma:

$$\mathrm{A} = \left[a_{ij} \right]$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

donde:

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, m \quad \text{con} \quad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$j = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n$$

El término a_{ij} representa a un elemento genérico de la matriz A. Los subíndices nos indican qué posición ocupa dentro del arreglo. De acuerdo con esto, el elemento a_{34} se encuentra en el renglón 3 y la columna 4.

Orden de una matriz

El orden o tamaño de una matriz queda definido por el número de renglones y columnas que la conforman y se denota por $m \times n$.

Para el caso de la matriz A de la definición, se dice que es de orden $m \times n$, es decir, que la matriz A está conformada por m renglones y n columnas.

EJERCICIO 5.1 Determine el orden de las matrices dadas:

a) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

La matriz A tiene 3 renglones y 2 columnas, por lo tanto, su orden es de 3×2.

b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

El orden de la matriz B es 3×3. Cuando el número de renglones es igual al número de columnas, se dice que la matriz es cuadrada.

Cuando una matriz es cuadrada, su orden puede expresarse simplemente, para el caso de nuestro ejemplo, como: B es una matriz cuadrada de orden 3.

c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$ Matriz renglón

El orden de la matriz C es de 1×5. Cualquier matriz que solo tenga un renglón, sin importar el número de columnas que contenga, se le llama matriz renglón.

d) $D = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ Matriz columna

El orden de la matriz D es 3×1.

Cualquier matriz que contenga una sola columna, sin importar el número de renglones que tenga, se le llama matriz columna.

Igualdad de matrices

Sean $A = \left[a_{ij} \right]$ y $B = \left[b_{ij} \right]$ dos matrices del mismo orden. Se dice que:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \;; \qquad \forall\, i\,,\, j$$

De acuerdo con la anterior definición, dos matrices son iguales si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Que sean del mismo orden, y
2. Que los elementos correspondientes sean a su vez iguales.

OPERACIONES CON MATRICES Y SUS PROPIEDADES

A continuación, daremos las definiciones de las operaciones que pueden realizarse con matrices y las propiedades que satisfacen cada una de ellas.

Adición de matrices

Sean $A = \left[a_{ij} \right]$ y $B = \left[b_{ij} \right]$ dos matrices del mismo orden. Se tiene que la suma de ellas $A + B$ es una nueva matriz:

$$C = \left[c_{ij} \right]$$

tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \;; \qquad \forall\, i\,,\, j$$

Para que dos matrices puedan sumarse, es requisito indispensable que las matrices a sumar sean del mismo orden, de ser así, se dice que las matrices son conformables para la adición, es decir, que dichas matrices se pueden sumar.

De acuerdo con la definición, para obtener la matriz suma, se suman los elementos correspondientes de ambas matrices a sumar.

EJERCICIO 5.2 Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

obtenga $A + B$.

SOLUCIÓN:

Como ambas matrices son del mismo orden, entonces se pueden sumar.

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+(-2) & -5+1 & 2+0 \\ 1+(-3) & 3+(-6) & -1+(-4) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

La adición de matrices satisface las siguientes propiedades.

Propiedades de la adición

Sean A, B y C tres matrices cualesquiera del mismo orden. La adición de matrices satisface las siguientes propiedades:

1) CONMUTATIVIDAD:

$$A + B = B + A$$

2) ASOCIATIVIDAD:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

3) ELEMENTO IDÉNTICO:

$$\exists\ 0 \mid A + 0 = A$$

donde 0 es la matriz nula o matriz cero, del mismo orden que la matriz A y cuyos elementos son todos iguales a cero.

4) ELEMENTOS INVERSOS:

Dada la matriz A, existe una matriz única $-A$, tal que:

$$A + (- A) = 0$$

donde 0 es el elemento idéntico.

5) CANCELACIÓN:

Si $A + B = B + C$, entonces $A = C$

Sustracción de matrices

Sean $A = \left[a_{ij} \right]$ y $B = \left[b_{ij} \right]$ dos matrices del mismo orden. Se tiene que la resta de ellas $A - B$ es una nueva matriz:

$$C = \left[c_{ij} \right]$$

tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \ ; \qquad \forall\ i, j$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

EJERCICIO 5.3 Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

obtenga $A - B$.

SOLUCIÓN:

Como ambas matrices son del mismo orden, entonces se pueden restar.

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-2 & -1-3 \\ 2-(-1) & 3-(-5) \\ -2-0 & 1-2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A - B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Cuando dos matrices pueden restarse, se dice que son conformables para la sustracción.

Multiplicación de un escalar por una matriz

Sean la matriz $A = \left[a_{ij} \right]$ de cualquier orden y sea el escalar $k \in \mathbb{C}$. El producto kA se define como:

$$kA = \left[k\, a_{ij} \right] \; ; \qquad \forall \; i \, , \; j$$

De acuerdo con esta definición, multiplicar una matriz por un escalar es igual a multiplicar el escalar k por todos y cada uno de los elementos de la matriz.

EJERCICIO 5.4 Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y el escalar} \quad k = -2$$

obtenga kA.

SOLUCIÓN:

$$kA = -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de un escalar por una matriz satisface las siguientes propiedades.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Propiedades de la multiplicación por un escalar

Sean A y B dos matrices cualesquiera del mismo orden y sean α y $\beta \in \mathbb{C}$ dos escalares. Se tiene que:

1) $\alpha\left(A + B\right) = \alpha A + \alpha B$

2) $\left(\alpha + \beta\right) A = \alpha A + \beta A$

3) $\alpha\left(\beta A\right) = \left(\alpha \beta\right) A$

4) $1 \bullet A = A$

Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices no sigue las mismas reglas que se utilizan para sumar o restar matrices, es decir, la multiplicación de matrices no se define como la multiplicación de los elementos correspondientes de ambas matrices. La definición de la multiplicación de matrices tiene su origen en la representación matricial de un sistema de ecuaciones.

No siempre es posible multiplicar dos matrices. Para poder realizar esta operación se requiere del cumplimiento de cierta condición que describiremos a continuación.

Para que la multiplicación de dos matrices A y B pueda efectuarse, esto es, AB, es requisito indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B. En este caso, se dice que las matrices A y B son conformables para la multiplicación AB, es decir, A y B sí se pueden multiplicar.

La definición de la multiplicación de matrices es la siguiente.

Definición

Sean la matriz $\mathrm{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ de orden $m \times n$ y la matriz $\mathrm{B} = \left[\, b_{ij} \,\right]$ de orden $n \times q$. Se tiene que el producto de ellas AB es una nueva matriz $\mathrm{C} = \left[\, c_{ij} \,\right]$ de orden $m \times q$, definida por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \qquad \text{donde :} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, m \\ j = 1, 2, 3, \ldots, q \end{array}$$

En forma sencilla podemos determinar si dos matrices se pueden o no multiplicar y también podemos saber cuál es el orden de la matriz producto C. Véase el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & & \mathrm{B} & = & \mathrm{C} \\ m \times n & & n \times q & & m \times q \end{array}$$

Si el valor de n es igual, entonces A y B se pueden multiplicar.

Los valores de m y q nos indican el orden de la matriz C.

De la definición, el elemento c_{ij} de la matriz producto C, ubicado en el renglón i y la columna j, se obtiene multiplicando cada elemento del renglón i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumando dichos productos.

Una manera práctica de acordarse cómo se realiza la multiplicación de matrices es recordar que los elementos de la matriz producto C, se obtienen de multiplicar los renglones de A por las columnas de B.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

El ejercicio que realizaremos a continuación se hará en forma esquemática, con la idea de ilustrar, lo más claro posible, la forma en que se realiza la multiplicación de matrices.

EJERCICIO 5.5 Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

obtenga AB.

SOLUCIÓN:

Lo primero que debemos hacer es verificar si las matrices A y B se pueden multiplicar.

$$\underset{2\times 3}{A} \qquad \underset{3\times 2}{B} \quad = \quad \underset{2\times 2}{C}$$

Por ser iguales, entonces sí se pueden multiplicar.

La matriz producto C será de 2×2

Como ahora sabemos que la matriz producto C es de orden 2×2, entonces suponemos que:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Obteniendo los elementos de la matriz C, recordando que estos se calculan al multiplicar los renglones de A por las columnas de B. De esta forma tenemos:

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 3(1) + (-1)(2) + 2(6) = 13$$

Renglón 1 de A por la columna 1 de B.

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3(-2) + (-1)(3) + 2(-1) = -11$$

Renglón 1 de A por la columna 2 de B.

$$C_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4(1) + 1(2) + 5(6) = 36$$

Renglón 2 de A por la columna 1 de B.

$$C_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 4(-2) + 1(3) + 5(-1) = -10$$

Renglón 2 de A por la columna 2 de B.

Ahora, lo que tenemos que hacer es colocar cada elemento obtenido en el lugar que le corresponde dentro de la matriz C, con lo cual tenemos que:

$$C = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ 36 & -10 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, la forma en que se resolvió este ejercicio no es la manera en que debemos realizar la multiplicación de matrices, se hizo de esta forma únicamente con fines de explicación. La multiplicación de matrices deberá ser una operación que realicemos mentalmente, el proceso de sumar los productos de renglones por columnas se debe hacer en la mente y debemos escribir los elementos obtenidos, directamente en la matriz producto.

EJERCICIO 5.6 Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtenga:

a) AC b) BC c) DC

d) DE e) CA f) BA

SOLUCIÓN:

a) $$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{2 \times 4 \qquad 4 \times 2}$$ Conformables

b) $BC = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{2 \times 2 \qquad 4 \times 2}$$ No conformables

Las matrices B y C no son conformables para la multiplicación, por lo tanto, la operación no se puede realizar.

c) $DC = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{1 \times 4 \qquad 4 \times 2}$$ Conformables

d) $DE = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{1 \times 4 \qquad 4 \times 4}$$ Conformables

e) $$CA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & -7 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4×2 $\quad$ 2×4 $\quad$ Conformables

Compárese el resultado que se obtuvo en este inciso con el obtenido en el inciso a), obsérvese que el resultado de multiplicar AC en el inciso a) fue una matriz de 2×2, en tanto que, cuando multiplicamos CA en este inciso, la matriz resultante fue de orden 4×4, con estos resultados, es evidente que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

f) $$BA = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×4 $\quad$ Conformables

La multiplicación de matrices satisface las siguientes propiedades.

Propiedades de la multiplicación

Sean A, B y C matrices cualesquiera conformables para las operaciones indicadas a continuación y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. La multiplicación de matrices cumple con las siguientes propiedades:

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $A(B+C) = AB + AC$

3) $(A + B)C = AC + BC$

4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

5) $A0 = 0$, $0A = 0$, donde 0 es la matriz cero.

Es conveniente hacer hincapié en que la multiplicación de matrices en general no es conmutativa, como se hizo ver en el inciso e) del ejercicio anterior; sin embargo, hay casos especiales donde la conmutatividad sí se cumple. De estos casos hablaremos un poco más adelante.

MATRIZ IDENTIDAD

Llamaremos matriz identidad a toda matriz cuadrada de orden $n \times n$, y la representaremos como I_n, a aquella matriz donde todos sus elementos son iguales a cero, excepto aquellos donde los subíndices i, j son iguales, que tomarán el valor de uno. De acuerdo con esto, tenemos que:

$$I_1 = [1]$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

De acuerdo con lo anterior, podemos dar la siguiente definición de matriz identidad.

Definición

Se llama matriz identidad a toda matriz cuadrada de orden $n \times n$, que representaremos con I_n, a aquella matriz definida como:

$$\mathrm{I}_n = \left[a_{ij} \right] \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

La matriz identidad, además de ser el elemento idéntico multiplicativo para las matrices cuadradas, dicha matriz tiene un papel muy importante dentro del álgebra de las matrices, pues juega un papel similar al que tiene el número 1 en las operaciones con números reales.

De acuerdo con lo antes señalado, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema

Si A es una matriz de orden $m \times n$ con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

1) $\mathrm{I}_m \mathrm{A} = \mathrm{A}$
2) $\mathrm{A}\mathrm{I}_n = \mathrm{A}$

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $\mathrm{I}_m = \mathrm{I}_n$ y, por lo tanto, I_n resulta ser el elemento idéntico multiplicativo.

Hemos señalado que para el caso de las matrices cuadradas existe el elemento idéntico multiplicativo, podríamos entonces hacernos la siguiente pregunta: ¿para toda matriz cuadrada existe su inverso multiplicativo? La respuesta es no, esta propiedad resulta más restrictiva que la del elemento idéntico. La existencia de los inversos multiplicativos está limitado solo para las matrices cuadradas que sea invertibles. De acuerdo con esto, tenemos la siguiente definición.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que A es una matriz invertible, si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada matriz inversa de A y que representaremos con A^{-1}, tal que:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que A es una matriz no singular si existe A^{-1}, en caso contrario se dice que A es singular.

La inversa de una matriz satisface las siguientes propiedades.

Propiedades de la inversa de una matriz

Sea A y B dos matrices no singulares cualesquiera del mismo orden y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

1) A^{-1} es única

2) $\left(A^{-1} \right)^{-1} = A$

3) $(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4) $(\alpha B)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$, si $\alpha \neq 0$

5) $\left(A^{T} \right)^{-1} = \left(A^{-1} \right)^{T}$ donde A^{T} es la matriz transpuesta de A.

Con relación a estas propiedades de la inversa que acabamos de enunciar, se harán las siguientes dos observaciones.

Observación 1:

La propiedad 3 se puede generalizar de la siguiente forma:

Si las matrices $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son matrices no singulares del mismo orden, entonces:

$$\left(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n\right)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Observación 2:

La propiedad 5 hace referencia a un concepto aún no tratado a estas alturas del capítulo, se refiere al concepto de transpuesta de una matriz, lo cual se verá un poco más adelante; sin embargo, se decidió incluir esta propiedad con la intención de presentar las propiedades de la inversa de una matriz un poco más completas. En cuanto el lector estudie el concepto de transpuesta de una matriz, entenderá fácilmente esta propiedad.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA MEDIANTE TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Este método nos permite calcular la matriz inversa A^{-1}, a partir de la matriz A. Para lograrlo, se debe considerar un arreglo matricial, donde en el lado izquierdo del arreglo se debe colocar a la matriz A y en el lado derecho a la matriz identidad, del mismo orden que A, como se muestra en el siguiente esquema:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$$

El método consiste en aplicar transformaciones elementales, por renglón, en ambos lados del arreglo, de tal forma que se vaya modificando a la matriz A hasta lograr que en su lugar quede la matriz identidad. Todas las transformaciones elementales que son aplicadas a la matriz A, para hacer que se convierta en la matriz identidad, deberán ser aplicadas también a la matriz identidad que se encuentra en el lado derecho del arreglo. Al terminar este proceso, se

ÍNDICE
1
2
3
4
5

tendrá en el lado izquierdo del arreglo a la matriz identidad y en el lado derecho a la matriz A^{-1}. Véase el siguiente esquema:

$$\left.\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \\ \vdots \qquad \vdots \\ \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]\end{array}\right\}\quad \text{Aplicación de transformaciones elementales por renglón en ambos lados del arreglo.}$$

Es importante hacer notar que, si al aplicar este método para obtener A^{-1} se llega a un renglón de puros ceros en el lado izquierdo del arreglo, entonces eso significará que la matriz A no tiene inversa, es decir, que A es una matriz singular.

EJERCICIO 5.7 Obtenga la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Plantearemos el arreglo matricial y aplicaremos el método descrito.

$$\begin{array}{c} (-1) \\ \\ + \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1}_{A} & & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{I} & & & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (-2)\,(-1)\,(1) \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} + \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} + \\ (1) \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \left| \underbrace{\begin{array}{cccc} 4 & 2 & -3 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}}_{A^{-1}} \right.\right]$$

de donde:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 4 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobando el resultado obtenido, tenemos que:

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 4 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$A^{-1}A = I \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

Se deja al lector verificar que se cumple también que:

$$A\,A^{-1} = I$$

Para obtener A^{-1} en este ejercicio, se aplicaron ciertas transformaciones elementales; sin embargo, se hubiera podido seguir un camino distinto al que seguimos en el ejercicio, es decir, se podrían haber aplicado diferentes transformaciones elementales y llegar a obtener A^{-1} por caminos distintos, pero, sin importar el camino elegido, el resultado siempre debe ser el mismo, esto es, la inversa de una matriz no cambia, independientemente de los pasos realizados en el procedimiento. La matriz inversa es única.

EJERCICIO 5.8 Obtenga, de ser posible, la inversa de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{-1\quad 1\quad 2}}^{B}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad 0}}^{I}} \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow (1)(-2)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$(1)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Obsérvese que, en este ejercicio, en el tercer renglón del lado izquierdo del último arreglo matricial obtenido, se tiene que dicho renglón es de ceros (véase el renglón marcado con la flecha), lo cual implica que no será posible transformar a la matriz B en la matriz identidad. Cuando esto sucede en el procedimiento, entonces podemos afirmar que B^{-1} no existe, es decir, que la matriz B es singular, no tiene inversa. Recuérdese que no toda matriz cuadrada tiene inversa.

Podemos entonces señalar que este método nos permite obtener la inversa de una matriz, cuando esta exista, pero también el método nos permite determinar cuándo una matriz no tiene inversa.

EJERCICIO 5.9 Obtenga la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & -i \\ 2i & 1 & i \\ 2 & -2i & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

La matriz que tenemos que invertir tiene como elementos números complejos; sin embargo, el método descrito para obtener la inversa de una matriz es general, es decir, lo podemos aplicar sin importar que los elementos de la matriz A sean complejos. Aplicando el método tenemos:

$$\begin{array}{c} \\ (-2) \\ + \\ \left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{A}\ \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{I} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 2i & 1 & i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3i & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} (-i) \\ + \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3i & 2 & -1 & 0 \\ i & 1 & -i & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 & -\frac{i}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ + \\ (3) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 & \frac{i}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} + \\ (i) \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & \frac{3i}{2} \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 & \frac{i}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \left(\frac{1}{i}\right) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -i & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & \frac{3i}{2} \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 & \frac{i}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\mathrm{I}}\right|\left.\underbrace{\begin{array}{ccc} -i & -i & -1 \\ -1 & -1 & \frac{3i}{2} \\ i & 0 & \frac{1}{2} \end{array}}_{\mathrm{A}^{-1}}\right]$$

Con lo cual, la matriz A^{-1} es:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -i & -i & -1 \\ -1 & -1 & \frac{3i}{2} \\ i & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2i & 2i & 2 \\ 2 & 2 & -3i \\ -2i & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Comprobando el resultado:

$$\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{A} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2i & 2i & 2 \\ 2 & 2 & -3i \\ -2i & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 & -i \\ 2i & 1 & i \\ 2 & -2i & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

con lo cual, queda comprobado el resultado.

El lector puede comprobar que:

$$A\,A^{-1} = I$$

Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación planteada con matrices donde la incógnita es también una matriz. Para resolver este tipo de ecuaciones se procede de la misma manera como si estuviésemos resolviendo una ecuación planteada con números, es decir, se busca despejar la incógnita y expresarla en términos de los otros elementos que intervienen en la ecuación. Es muy importante tener cuidado que los pasos efectuados en el despeje resulten válidos en el álgebra de las matrices.

Debemos tener siempre presente que la multiplicación de matrices no es conmutativa, por lo cual, si se requiere multiplicar una ecuación por una matriz determinada, debemos hacerlo en ambos miembros de la ecuación por el mismo lado, además, sabemos que la división de matrices no está definida, por lo que, si una matriz multiplica a la incógnita y tal matriz es no singular, entonces la forma de proceder para simplificar el término es multiplicar por la inversa de dicha matriz en ambos miembros de la ecuación, pero del mismo lado donde aparece la referida matriz.

Existen ecuaciones matriciales donde la matriz incógnita no puede ser despejada, lo cual no implica necesariamente que dicha ecuación matricial no tenga solución. Hay ecuaciones de este tipo que sí pueden ser resueltas y mostraremos, en los ejercicios resueltos, cómo hacerlo.

Finalmente, debemos señalar que al igual como sucede con las ecuaciones planteadas con números, se tienen ecuaciones matriciales que admiten solución única, múltiples soluciones, o bien, que no admiten solución.

A continuación, realizaremos algunos ejercicios donde se muestra la forma en que se resuelven estas ecuaciones.

EJERCICIO 5.10 Obtenga la matriz X que satisface a la ecuación:

$$A\,X\,B + 2\,C - A = X\,B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

De acuerdo con la recomendación planteada, despejaremos la incógnita de la ecuación. Para lograr el despeje, lo primero que haremos es agrupar en el primer miembro de la ecuación, los términos que involucran a X y, en el segundo miembro, los términos que no la tienen. De esta forma, se tiene que:

$$A\,X\,B + 2\,C - A = X\,B$$

$$A\,X\,B - X\,B = A - 2\,C$$

El paso siguiente sería factorizar el término $X\,B$ hacia el lado derecho; sin embargo, si lo hacemos directamente llegaríamos a lo siguiente:

$$\left(A - 1 \right) XB = A - 2\,C \quad \rightarrow \quad \text{Factorización incorrecta}$$

Como la operación $\left(A - 1 \right)$ no está definida en el álgebra matricial, entonces tenemos que incluir la matriz I en el segundo sumando del primer miembro, como se muestra a continuación y posteriormente factorizar.

$$AXB - I\,X\,B = A - 2\,C$$

$$\left(A - I \right) XB = A - 2\,C$$

De esta forma la operación $(A - I)$ sí se puede realizar y la factorización es correcta. Continuando con el despeje, premultiplicaremos en ambos lados de la ecuación por el término $(A - I)^{-1}$.

$$\underbrace{(A - I)^{-1}(A - I)}_{I}\, X B = (A - I)^{-1}(A - 2C)$$

$$I X B = (A - I)^{-1}(A - 2C)$$

$$X B = (A - I)^{-1}(A - 2C)$$

Posmultiplicaremos ahora por B^{-1} en ambos lados:

$$X \underbrace{B\, B^{-1}}_{I} = (A - I)^{-1}(A - 2C)\, B^{-1}$$

$$\therefore \quad X = (A - I)^{-1}(A - 2C)\, B^{-1} \quad \text{.....................(1)}$$

Hemos concluido con el despeje de la matriz incógnita y lo que resta sería realizar las operaciones indicadas para obtener la matriz buscada.

Efectuando operaciones, tenemos:

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

al obtener $(A - I)^{-1}$ se llega a que:

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{..} \quad (2)$$

por otro lado:

$$A - 2C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

se tiene además que:

$$\text{si} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), tenemos:

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & -16 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -28 & -16 \\ 36 & 18 \end{bmatrix}$$

simplificando se llega a que:

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -14 & -8 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.11 Obtenga la matriz X que satisface a la ecuación:

$$XA - 3B = XB - A^2 - 2B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Agrupando de un solo lado los términos que contienen X, tenemos:

$$X A - 3B = XB - A^2 - 2B$$

$$XA - XB = -A^2 - 2B + 3B$$

factorizando a X y sumando términos semejantes, se tiene:

$$X(A - B) = -A^2 + B$$

posmultiplicando en ambos miembros por $(A - B)^{-1}$, tenemos:

$$X\underbrace{(A-B)(A-B)^{-1}}_{I} = \left(-A^2 + B\right)(A-B)^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \left(-A^2 + B\right)(A-B)^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

realizando operaciones, se tiene:

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-A^2 + B = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Al calcular la inversa de $(A - B)$ se llega a:

$$(A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.12 Obtenga la matriz X que satisface a la ecuación:

$$B^{-1} X (AB + I) = \left(A^{-1} B \right)^{-1} - B^{-1} X (I - BA)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Despejando a la matriz X, tenemos:

$$B^{-1} X (AB + I) = \left(A^{-1} B \right)^{-1} - B^{-1} X (I - BA)$$

$$B^{-1} X (AB + I) + B^{-1} X (I - BA) = \left(A^{-1} B \right)^{-1}$$

$$B^{-1} X \left[(AB + I) + (I - BA) \right] = B^{-1} \left(A^{-1} \right)^{-1}$$

$$B^{-1} X (AB + 2I - BA) = B^{-1} A$$

$$\underbrace{BB^{-1}}_{I} X (AB + 2I - BA) = \underbrace{BB^{-1}}_{I} A$$

$$X (AB + 2I - BA) = A$$

$$X \underbrace{(AB + 2I - BA) (AB + 2I - BA)^{-1}}_{I} = A (AB + 2I - BA)^{-1}$$

$$\therefore \quad X = A (AB + 2I - BA)^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Realizando operaciones, tenemos:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2I = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$AB + 2I - BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

como

$$\left(AB + 2I - BA \right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

sustituyendo la matriz A y (2) en (1), tenemos:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.13 Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ -i & 2-i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -i & -i \\ i & i \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz X con la cual se satisface la ecuación:

$$AXB - C\left(D - XB \right) = -2DC$$

SOLUCIÓN:

Como se puede apreciar en el enunciado, las matrices dadas tienen por elementos números complejos, lo cual no modifica en forma alguna el procedimiento a seguir en la solución de la ecuación, la única modificación que se tiene con respecto a los ejercicios anteriores, es que ahora tenemos que operar números complejos.

Procedamos al despeje de la matriz incógnita X.

$$A X B - C(D - X B) = -2 D C$$

$$A X B - C D + C X B = -2 D C$$

$$A X B + C X B = -2 D C + C D$$

$$(A + C) X B = -2 D C + C D$$

$$\underbrace{(A + C)^{-1}(A + C)}_{I} X B = (A + C)^{-1}(-2 D C + C D)$$

$$X B = (A + C)^{-1}(-2 D C + C D)$$

$$X \underbrace{B B^{-1}}_{I} = (A + C)^{-1}(-2 D C + C D) B^{-1}$$

$$\therefore \quad X = (A + C)^{-1}(-2 D C + C D) B^{-1} \quad \ldots \quad (1)$$

Realizando operaciones, tenemos:

$$A + C = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ -i & 2-i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i & -i \\ i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

al calcular la inversa de $(A + C)$, se obtiene:

$$(A + C)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

además:

$$DC = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & -i \\ i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} -i & -i \\ i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

estos dos resultados eran de esperarse, pues la matriz $D = i\,I$, con lo cual $DC = CD$.

Tenemos entonces que:

$$-2DC + CD = -2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots (3)$$

$$\text{si} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) tenemos:

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 16 & 6 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.14 Obtenga la matriz X que satisface la siguiente ecuación:

$$2\,B\,X^{-1}A^{-1} - (A\,X)^{-1} = (B - I)\,A^{-1}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 1 \\ 1 & i & -2 \\ 2 & 1 & 3i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Realizando el despeje de la matriz X, tenemos:

$$2\,B\,X^{-1}A^{-1} - (A\,X)^{-1} = (B - I)\,A^{-1}$$

De las propiedades de la inversa de una matriz sabemos que:

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Aplicando esta propiedad al primer sumando de la ecuación, tenemos:

$$2\,B\,(A\,X)^{-1} - (A\,X)^{-1} = (B - I)\,A^{-1}$$

$$(2\,B - I)\,(A\,X)^{-1} = (B - I)\,A^{-1}$$

$$\underbrace{(2\,B - I)^{-1}\,(2\,B - I)}_{I}\,(A\,X)^{-1} = (2\,B - I)^{-1}\,(B - I)\,A^{-1}$$

$$(A\,X)^{-1} = (2\,B - I)^{-1}\,(B - I)\,A^{-1}$$

Aplicando de nueva cuenta la propiedad de la inversa antes señalada, tenemos:

$$X^{-1}A^{-1} = (2\,B - I)^{-1}\,(B - I)\,A^{-1}$$

$$X^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I} = (2B - I)^{-1}(B - I)\underbrace{A^{-1}A}_{I}$$

$$X^{-1} = (2B - I)^{-1}(B - I)$$

invirtiendo en ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$\left(X^{-1}\right)^{-1} = \left[(2B - I)^{-1}(B - I)\right]^{-1}$$

$$X = (B - I)^{-1}\left[(2B - I)^{-1}\right]^{-1}$$

$$\therefore\ X = (B - I)^{-1}(2B - I) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

realizando operaciones:

$$B - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

al invertir la matriz $(B - I)$, se obtiene:

$$(B - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

además:

$$2B - I = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \ldots\ldots \quad (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.15 Sea la ecuación matricial:

$$A\,X\,D - C = B\,X\,D$$

donde:

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Si se sabe que $A - B = D^{-1}$, obtenga la matriz X que satisface la ecuación dada.

SOLUCIÓN:

Despejando la matriz X, tenemos:

$$A\,X\,D - C = B\,X\,D$$

$$A\,X\,D - B\,X\,D = C$$

$$(A - B)\,X\,D = C$$

como $(A - B) = D^{-1}$, entonces:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$D^{-1}\,X\,D = C$$

$$\underbrace{D\;D^{-1}}_{I}\,X\,D = D\,C$$

$$X\,D = D\,C$$

$$X\,\underbrace{D\;D^{-1}}_{I} = D\,C\,D^{-1}$$

$$X = D\,C\,D^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

realizando operaciones, tenemos:

$$D\,C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$X = I\,D^{-1}$$

$$X = D^{-1}$$

como $D\,C = I$, entonces $C = D^{-1}$, con lo cual se tiene que:

$$X = C$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 5.16 Obtenga la matriz X, si existe, que satisface la ecuación:

$$XA + B^{-1}C = BXA + BD$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} I_2, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Al tratar de despejar la matriz X, se llega a:

$$XA + B^{-1}C = BXA + BD$$

$$XA - BXA = BD - B^{-1}C$$

$$IXA - BXA = BD - B^{-1}C$$

$$(I - B)XA = BD - B^{-1}C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

como $B = \frac{1}{3} I$, entonces:

$$I - B = I - \frac{1}{3} I = \frac{2}{3} I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sustituyendo (2) en (1) : tenemos:

$$\frac{2}{3} IXA = BD - B^{-1}C$$

$$\frac{2}{3} XA = BD - B^{-1}C$$

$$2XA = 3\left(BD - B^{-1}C\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Como A no es una matriz cuadrada, entonces no podemos continuar con el despeje de la matriz X, es decir, en esta ecuación la matriz X no puede ser despejada; sin embargo, la ecuación sí tiene solución. En estos casos, lo que tenemos que hace es determinar cuál debe ser el orden de la matriz X, para que las operaciones que se tengan que realizar con ella sean factibles, además, debemos de cuidar también, que las matrices que se tienen en ambos lados de la igualdad resulten del mismo orden, una vez realizadas las operaciones indicadas.

Procedamos entonces a realizar el análisis de los órdenes de las matrices que intervienen en la ecuación (3) y determinemos a su vez, cuál debe ser el orden de la matriz X.

$$2\underset{2\times 1}{X}\underset{1\times 2}{A} = 3\underbrace{\left(BD - B^{-1}C \right)}_{2\times 2}$$

donde:

$$2XA = 3BD - 3B^{-1}C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

El orden de la matriz X debe ser 2×1, su número de columnas tiene que ser 1, para que la multiplicación XA se pueda realizar y su número de renglones tendrá que ser 2, para que el producto XA resulte una matriz de orden 2×2, al igual que la matriz que se obtiene en el segundo miembro de la igualdad. De esta forma hemos determinado que la matriz X debe ser una matriz de orden 2×1, cuyos elementos no conocemos y queremos determinar.

Si hacemos $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, entonces podemos efectuar las operaciones indicadas en la ecuación (3). Para realizarlas debemos tomar en cuenta lo siguiente:

como $\quad B = \frac{1}{3} I \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = 3I$

con lo cual tenemos que:

$$3\,B\,D = 3\left(\frac{1}{3}\,I\right)D = I\,D = D$$

$$3\,B^{-1}\,C = 3\,(\,3\;I\,)\,C = 9\,I\,C = 9\,C$$

entonces:

$$3\,B\,D - 3\,B^{-1}\,C = D - 9\,C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\,4\,)$$

sustituyendo A, X y (4) en (3), tenemos:

$$2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 2\,a & -a \\ 2\,b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\,a & -2\,a \\ 4\,b & -2\,b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

por igualdad de matrices se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 4\,a = 4 \\ -2\,a = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = 1 \\ \left.\begin{array}{r} 4\,b = -8 \\ -2\,b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b = -2 \end{array}\right.$$

por lo tanto, la matriz X buscada es $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Para finalizar este ejercicio, queremos hacer hincapié en que a pesar de que la matriz incógnita X no fue posible despejarla, la ecuación matricial planteada sí se pudo resolver.

EJERCICIO 5.17 Sea la ecuación matricial:

$$A\,X = B\,X + C\,D$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si se sabe que esta ecuación tiene múltiples soluciones, obtenga dos de ellas.

SOLUCIÓN:

Despejando la matriz X, tenemos:

$$A\,X = B\,X + C\,D$$

$$A\,X - B\,X = C\,D$$

$$(A - B)\,X = C\,D \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\underbrace{(A - B)^{-1}(A - B)}_{I}X = (A - B)^{-1}\,C\,D$$

$$X = (A - B)^{-1}\,C\,D \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

En este despeje todo parece estar bien, dado que la matriz $(A - B)$ es una matriz cuadrada y suponemos que $(A - B)^{-1}$ existe; sin embargo, al tratar de obtenerla, nos encontramos que dicha matriz no existe, esto es:

$$(A - B)^{-1} \text{ no existe, pues } \operatorname{Det}(A - B) = 0$$

Al no existir $(A - B)^{-1}$, entonces los pasos realizados después de la expresión (1), no son válidos, esto es, en esta ecuación la matriz X no puede ser despejada, por lo tanto, el despeje mostrado en la expresión (2) es incorrecto.

Para poder resolver este ejercicio, debemos partir de la expresión (1), donde los pasos realizados para llegar a ella son todos válidos.

Lo que debemos hacer es determinar el orden que debe tener la matriz X y a partir de eso, proceder como se hizo en el ejercicio anterior para obtener la solución de la ecuación.

Determinemos el orden de la matriz X partiendo de la expresión (1).

$$\underset{3 \times 3}{(A - B)} \; \underset{3 \times 1}{X} = \underset{3 \times 1}{CD}$$

Como la matriz X es de orden 3×1 y con elementos desconocidos, entonces consideramos a la matriz X como:

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

realizando operaciones, tenemos:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \ldots\ldots \quad (4)$$

$$CD = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

sustituyendo (3), (4) y (5) en (1), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ 3a + 2b - c \\ a + 4b - 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

por igualdad de matrices surge el sistema:

$$\begin{cases} a = 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6) \\ 3a + 2b - c = 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7) \\ a + 4b - 2c = -8 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8) \end{cases}$$

sustituyendo (6) en (7) y (8) tenemos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 6 + 2b - c = 1 \\ 2 + 4b - 2c = -8 \end{cases}$$

de donde:

$$(-2)\begin{cases} a = 2 \\ 2b - c = -5 \\ 4b - 2c = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b - c = -5 \Rightarrow c = 2b+5 \;\ldots\ldots\; (9) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como podemos ver, se trata de un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad, lo cual implica que debemos asignar valor a una de las incógnitas para llegar a la solución del sistema. Sin embargo, como nos piden obtener dos soluciones, entonces:

SOLUCIÓN 1:

Si $b = 1$, de (9) se tiene que $c = 7$, con lo cual:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN 2:

Si $b = -1$, de (9) se tiene que $c = 3$, entonces:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Los valores dados a $"b"$ son arbitrarios y podríamos obtener tantas soluciones a la ecuación matricial planteada, como nosotros quisiéramos.

Representación y resolución matricial de los sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones pueden ser representados matricialmente, lo cual nos permite resolver tales sistemas mediante el planteamiento y solución de una ecuación matricial, como se ilustrará a continuación.

Consideremos al siguiente sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Aplicando las definiciones de multiplicación e igualdad de matrices, este sistema de ecuaciones lo podemos representar matricialmente de la siguiente forma:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathrm{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathrm{B}}$$

Donde:

A: es la matriz de coeficientes

X: es la matriz de incógnitas

B: es la matriz de términos independientes

Con lo cual, el sistema de ecuaciones queda representado mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\mathrm{A\,X} = \mathrm{B}$$

Si el sistema de ecuaciones es cuadrado, es decir, que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas, entonces A es una matriz cuadrada y, si existe A^{-1}, entonces la solución del sistema se puede obtener de la siguiente forma:

$$\mathrm{A\,X} = \mathrm{B}$$

$$\underbrace{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

de donde, la solución al sistema se obtiene al multiplicar la inversa de la matriz A por la matriz de términos independientes.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Es importante señalar que, A^{-1} existirá, siempre y cuando, el sistema de ecuaciones que pretendamos resolver sea compatible determinado, es decir, que dicho sistema admita solo una solución.

Este método de solución de sistemas de ecuaciones se puede extender a sistemas compatibles indeterminados, como se mostrará un poco más adelante.

Apliquemos el método a un sistema compatible determinado.

EJERCICIO 5.18 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

El sistema de ecuaciones lo podemos representar como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

esto es:

$$AX = B$$

de donde se tiene que:

$$X = A^{-1}B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

al obtener la inversa de la matriz A, se llega a:

si $\quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

sustituyendo A^{-1} y B en (1), tenemos:

$$\mathrm{X} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 22 \\ -11 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

con lo cual la solución al sistema es:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

A continuación, mostraremos cómo aplicar este método de solución a un sistema compatible indeterminado.

EJERCICIO 5.19 Obtenga dos soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z - w = 1 \\ x + 3y - z + 2w = 3 \\ -2x - 5y + 2z - 3w = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Como podemos apreciar, este sistema de ecuaciones no es cuadrado, se trata de un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, esto es, se tienen más incógnitas que ecuaciones, entonces se puede suponer de antemano que el sistema es compatible indeterminado. Efectivamente, si escalonáramos el sistema, llegaríamos a la conclusión de que se trata de un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.

Como el sistema tiene un grado de libertad, lo que tenemos que hacer es pasar una de las incógnitas del lado de los términos independientes, puede ser cualquiera de ellas. Si elegimos pasar la incógnita w, entonces el sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 1 + w \\ x + 3y - z = 3 - 2w \\ -2x - 5y + 2z = -1 + 3w \end{cases}$$

de donde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 + w \\ 3 - 2w \\ -1 + 3w \end{bmatrix}$$

como:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

y dado que la solución del sistema viene dada por la expresión:

$$X = A^{-1} B$$

entonces, sustituyendo tenemos:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + w \\ 3 - 2w \\ -1 + 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + w) + (-1 + 3w) \\ 2(3-2w) + (-1 + 3w) \\ (1+w) + 5(3-2w) + 4(-1 + 3w) \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4w \\ 5 - w \\ 12 + 3w \end{bmatrix}$$

con lo cual, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= 4w \\ y &= 5 - w \\ z &= 12 + 3w \end{aligned}$$

Como en el enunciado nos piden obtener dos soluciones del sistema, tenemos:

SOLUCIÓN 1:

Si $w = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 15 \\ w = 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN 2:

Si $w = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \\ z = 9 \\ w = -1 \end{cases}$

En este ejercicio se decidió tomar como variable libre a w, por lo que las incógnitas x, y, z quedaron en términos de w; sin embargo, se puede elegir cualquier incógnita como variable libre, pasarla del lado de los términos independientes, hacer los cálculos correspondientes y la solución general obtenida quedaría en función de la incógnita elegida.

En caso de que el sistema de ecuaciones tenga dos o más grados de libertad, se sigue el mismo procedimiento mostrado en el ejercicio, pasando del lado de los términos independientes todas las variables libres.

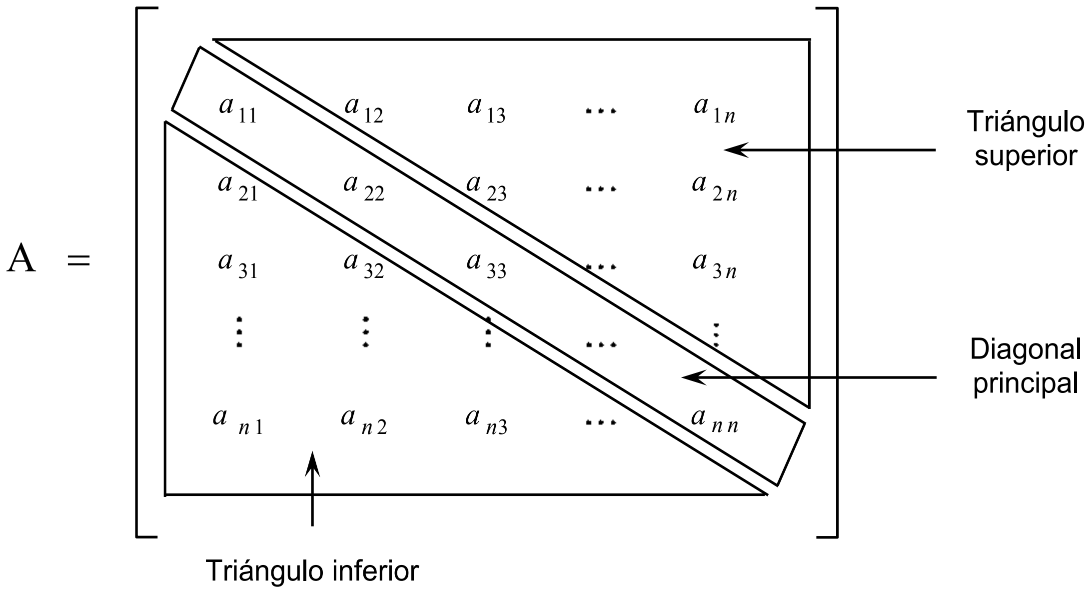
TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Existen varios tipos especiales de matrices que por su importancia en problemas de aplicación y debido a las propiedades que presentan, reciben nombres específicos. Podemos identificar dos grupos de este tipo de matrices:

a) El primer grupo, que aplica para matrices cuadradas, se caracteriza por la naturaleza y disposición de los elementos que las conforman, en función de tres regiones que se identifican en toda matriz cuadrada.

   Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Las regiones son:

ÍNDICE
1
2
3
4
5



b) El segundo grupo, se identifica por ciertas matrices que resultan de la aplicación de una operación sobre una matriz, que podría ser cuadrada o no cuadrada, así como, de ciertos tipos de matrices especiales que se obtienen al aplicar varias de estas operaciones.

A continuación, se definirán estos tipos de matrices especiales y se enunciarán sus propiedades.

1) Matriz triangular. Se tienen dos tipos de matrices triangulares:

1.1) *Matriz triangular superior:* Es aquella matriz cuadrada $A = \left[\, a_{ij} \,\right]$ donde $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Ejemplos de matrices triangulares superiores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

De acuerdo con la definición, una matriz triangular superior es aquella matriz cuadrada donde todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal, es decir, los elementos que corresponden al triángulo inferior deben ser todos nulos. Los elementos de la diagonal principal y del triángulo superior pueden tomar cualquier valor, para ellos no se tiene ninguna restricción.

1.2) *Matriz triangular inferior:* Es aquella matriz cuadrada $\mathrm{A} = \left[\, a_{i\,j} \,\right]$ donde

$a_{i\,j} = 0$ si $i < j$.

Ejemplos de matrices triangulares inferiores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la definición, una matriz triangular inferior es aquella matriz cuadrada donde todos los elementos que están por arriba de la diagonal principal, es decir, los elementos que corresponden al triángulo superior deben ser todos nulos. Los elementos de la diagonal principal y del triángulo inferior pueden tomar cualquier valor, para ellos no se tiene ninguna restricción.

Las matrices triangulares superiores e inferiores cumplen con las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices triangulares superiores

Sean A y B dos matrices triangulares superiores del mismo orden y $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

a) $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ es una matriz triangular superior.

b) αA es una matriz triangular superior.

c) $A B$ es una matriz triangular superior.

Estas mismas propiedades se cumplen también para matrices triangulares inferiores.

2) **Matriz diagonal.** Es aquella matriz cuadrada $A = \left[a_{ij} \right]$ donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Las matrices diagonales tienen la característica de ser matrices triangulares superiores y al mismo tiempo son matrices triangulares inferiores, esto es, una matriz diagonal es aquella matriz en la cual, todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son nulos. A este tipo de matrices se les representa de la siguiente forma:

$$A = \operatorname{diag}\left(a_{11} \, , \, a_{22} \, , \, a_{33} \, , \, \dots , \, a_{nn} \right)$$

Con esta forma de representación de las matrices diagonales, los números que se dan en el paréntesis son los elementos que están en la diagonal principal, los triángulos superior e inferior tienen elementos nulos. Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$A = \operatorname{diag}\left(1 , \, 3 \right) \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \operatorname{diag}\left(-1 , \, 4 , \, 2 \right) \qquad \Rightarrow \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \operatorname{diag}(5, 0, 3, -7) \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Las operaciones con matrices diagonales resultan muy simples de efectuar, a continuación, mostraremos algunas de ellas.

Operaciones con matrices diagonales

Sea A y B dos matrices diagonales cualesquiera de orden $n \times n$, donde:

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

$$B = \operatorname{diag}(b_{11}, b_{22}, b_{33}, \ldots, b_{nn})$$

y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

a) $A + B = \operatorname{diag}(a_{11} + b_{11}, a_{22} + b_{22}, a_{33} + b_{33}, \ldots, a_{nn} + b_{nn})$

b) $A - B = \operatorname{diag}(a_{11} - b_{11}, a_{22} - b_{22}, a_{33} - b_{33}, \ldots, a_{nn} - b_{nn})$

c) $\alpha A = \operatorname{diag}(\alpha a_{11}, \alpha a_{22}, \alpha a_{33}, \ldots, \alpha a_{nn})$

d) $A B = \operatorname{diag}(a_{11} b_{11}, a_{22} b_{22}, a_{33} b_{33}, \ldots, a_{nn} b_{nn})$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

e) $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \frac{1}{a_{33}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$ siempre y cuando A sea una matriz no singular.

Ilustraremos lo anterior con el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 5.20 Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y el escalar $\alpha = 2$. Obtenga:

a) $A + B$

b) $B - A$

c) αA

d) $A B$

e) $B A$

f) A^{-1}

SOLUCIÓN:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\alpha\, A = 2 \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

d) $A\,B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $B\,A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Como podemos darnos cuenta, el resultado obtenido en los incisos d) y e) es el mismo, lo que nos indica que la multiplicación de matrices diagonales es conmutativa, sin importar las matrices que se multipliquen.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

f) Si $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

entonces se tiene que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3) **Matriz escalar.** Es aquella matriz cuadrada $A = \left[a_{ij} \right]$ donde

$a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y

$a_{ij} = \alpha$ si $i = j$ con $\alpha \in \mathbb{C}$

Ejemplos de matrices escalares:

$$\begin{bmatrix} 3i & 0 \\ 0 & 3i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Algunas características importantes que podemos destacar de las matrices escalares son:

a) Como puede apreciarse en la definición, una matriz escalar es una matriz diagonal, donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

b) Dado que toda matriz escalar es una matriz diagonal, entonces todas las propiedades y características de las marices diagonales se cumplen también para las matrices escalares.

c) Toda matriz identidad, de cualquier orden, es una matriz escalar donde $\alpha = 1$.

d) Toda matriz nula que sea cuadrada, es también es una matriz escalar. En este caso $\alpha = 0$.

e) Toda matriz escalar es una matriz triangular superior y también una matriz triangular inferior.

4) Matriz transpuesta. Se llama matriz transpuesta de A, y se representa con A^{T}, a aquella matriz que se obtiene al cambiar los renglones de la matriz original en las columnas de la matriz transpuesta o viceversa, esto es:

Sea $\mathrm{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ una matriz cualquiera de orden $m \times n$. Se tiene que su correspondiente matriz transpuesta es $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \left[\, a_{ji} \,\right]$ de orden $n \times m$.

Obsérvese que el orden de la matriz original y la de su transpuesta cambia, esto es, si A es de orden $m \times n$, entonces A^{T} es de orden $n \times m$. Evidentemente, si A es una matriz cuadrada, entonces el orden de su transpuesta no cambia.

EJERCICIO 5.21 Obtenga la transpuesta de las matrices dadas:

a) $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 4 \\ 3i & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \\ 5 & 8 & -6 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

a) Si $\underset{2 \times 3}{A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 4 \\ 3i & -5 & 1 \end{bmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \underset{3 \times 2}{A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3i \\ 1+i & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}$

Obsérvese que los renglones de la matriz A son las columnas de A^T y que su orden cambia.

b) Si $\underset{1 \times 4}{B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \underset{4 \times 1}{B^T = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}$

c) Si $\underset{3 \times 3}{C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \\ 5 & 8 & -6 \end{bmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \underset{3 \times 3}{C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 9 & 8 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Al ser C una matriz cuadrada, entonces el orden de C y su transpuesta es el mismo.

La transposición de matrices cumple con las siguientes propiedades.

Propiedades de la transposición de matrices

Sea A y B dos matrices cualesquiera con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

a) $\left(A^T \right)^T = A$

b) $\left(\alpha A \right)^T = \alpha A^T$

c) Si A y B son matrices del mismo orden, entonces
$\left(A + B \right)^T = A^T + B^T$

d) Si A y B son conformables para la multiplicación, entonces
$\left(AB \right)^T = B^T A^T$

5) Matriz simétrica. Una matriz cuadrada A es simétrica, si se cumple que:

$$A = A^T$$

EJERCICIO 5.22 Determine si las matrices dadas son simétricas:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 8 & -2i & 3 & 1+i \\ -2i & 2 & i & 5 \\ 3 & i & 0 & -4 \\ 1+i & 5 & -4 & 1-2i \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

a) Si $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

como $A = A^T$, entonces A es simétrica.

b) Si $B = \begin{bmatrix} 8 & -2i & 3 & 1+i \\ -2i & 2 & i & 5 \\ 3 & i & 0 & -4 \\ 1+i & 5 & -4 & 1-2i \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 8 & -2i & 3 & 1+i \\ -2i & 2 & i & 5 \\ 3 & i & 0 & -4 \\ 1+i & 5 & -4 & 1-2i \end{bmatrix}$

como $B = B^T$, entonces B es simétrica.

Podemos identificar una matriz simétrica a simple vista, si los elementos que están en posiciones simétricas, respecto a la diagonal principal, son iguales. En forma equivalente, podríamos identificar a una matriz simétrica, si los elementos que están en el triángulo superior son iguales, en forma simétrica, a los que están en el triángulo inferior. Esto es, como si la diagonal principal actuara como un espejo.

Las matrices simétricas tienen las siguientes propiedades.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Propiedades de las matrices simétricas

Sea A y B dos matrices simétricas y $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

a) $A + B$ es una matriz simétrica.

b) $A - B$ es una matriz simétrica.

c) αA es una matriz simétrica.

d) Si A es una matriz simétrica no singular, entonces A^{-1} es una matriz simétrica.

e) AB es una matriz simétrica, si y solo si, $AB = BA$.

f) La adjunta de una matriz simétrica es también una matriz simétrica (la definición de matriz adjunta se verá un poco más adelante).

Además de estas propiedades, se tiene el siguiente teorema relativo a las matrices simétricas.

Teorema

Sea A una matriz cuadrada cualquiera con elementos en $\mathbb{C}$. Se tiene que:

$$A + A^T \quad \text{es una matriz simétrica}$$

6) Matriz antisimétrica. Una matriz cuadrada A es antisimétrica, si se cumple que:

$$A = -A^T$$

EJERCICIO 5.23 Determine si las matrices dadas son antisimétricas:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3i & -1+5i \\ -7 & 0 & -6 & 1+i \\ -3i & 6 & 0 & 2 \\ 1-5i & -1-i & -2 & 0 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

a) Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

entonces $-A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

como $A = -A^T$, entonces A es antisimétrica.

b) Si

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3i & -1+5i \\ -7 & 0 & -6 & 1+i \\ -3i & 6 & 0 & 2 \\ 1-5i & -1-i & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -3i & 1-5i \\ 7 & 0 & 6 & -1-i \\ 3i & -6 & 0 & -2 \\ -1+5i & 1+i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

entonces $-B^T = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3i & -1+5i \\ -7 & 0 & -6 & 1+i \\ -3i & 6 & 0 & 2 \\ 1-5i & -1-i & -2 & 0 \end{bmatrix}$

como $B = -B^T$, entonces B es antisimétrica.

Podemos identificar una matriz antisimétrica a simple vista, si los elementos de la diagonal principal son todos nulos y, además, si los elementos que están en posiciones simétricas, respecto a la diagonal principal, son uno el negativo del otro, o bien, si los elementos de la diagonal principal son todos nulos y, además, si los elementos que están en el triángulo superior están cambiados de signo, en forma simétrica, a los que están en el triángulo inferior.

Un dato digno de ser señalado es que toda matriz cuadrada nula es la única matriz que resulta ser simétrica y antisimétrica simultáneamente.

Las matrices antisimétricas tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices antisimétricas

Sean A y B dos matrices antisimétricas y $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

a) $A + B$ es una matriz antisimétrica.

b) $A - B$ es una matriz antisimétrica.

c) αA es una matriz antisimétrica.

d) La traza de una matriz antisimétrica siempre es igual a cero. (El concepto de traza se verá un poco más adelante).

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Además de estas propiedades, se tienen los siguientes teoremas relativos a las matrices antisimétricas.

Teoremas

Sea A una matriz cuadrada cualquiera con elementos complejos. Se tiene que:

a) $A - A^T$ es una matriz antisimétrica.

b) Toda matriz cuadrada se puede descomponer como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$A = M + N$$

donde:

$$M = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \quad \text{y} \quad N = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

EJERCICIO 5.24 Obtenga la descomposición de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2i & 10 \\ -4i & 8i & 0 \\ 4 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

SOLUCIÓN:

La composición solicitada sería:

$$A = M + N$$

donde M una matriz simétrica y N es una matriz antisimétrica. Se tiene que:

$$M = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \quad \text{y} \quad N = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

obteniéndolas tenemos:

$$M = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6 & 2i & 10 \\ -4i & 8i & 0 \\ 4 & -2 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4i & 4 \\ 2i & 8i & -2 \\ 10 & 0 & 12 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2i & 14 \\ -2i & 16i & -2 \\ 14 & -2 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad M = \begin{bmatrix} 6 & -i & 7 \\ -i & 8i & -1 \\ 7 & -1 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz simétrica}$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6 & 2i & 10 \\ -4i & 8i & 0 \\ 4 & -2 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -4i & 4 \\ 2i & 8i & -2 \\ 10 & 0 & 12 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6i & 6 \\ -6i & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 3i & 3 \\ -3i & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz antisimétrica}$$

con lo cual, la descomposición solicitada es:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -i & 7 \\ -i & 8i & -1 \\ 7 & -1 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3i & 3 \\ -3i & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Haremos la comprobación al sumar las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2i & 10 \\ -4i & 8i & 0 \\ 4 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

que resulta ser la misma matriz A que nos dan en el enunciado del ejercicio.

7) Matriz ortogonal. Una matriz cuadrada A es ortogonal, si se cumple que:

$$A\,A^T = A^T A = I$$

esto implica entonces que:

$$A^T = A^{-1}$$

De acuerdo con lo anterior, si se tiene una matriz ortogonal, entonces para obtener su correspondiente matriz inversa, será suficiente con transponerla.

EJERCICIO 5.25 Determine si las matrices dadas son ortogonales:

a) $$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

b) $$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) $$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Para determinar si una matriz A es o no ortogonal, lo que tenemos que hacer es verificar si la multiplicación de la matriz con su transpuesta da por resultado la matriz identidad, es decir, debemos comprobar que:

$$A\,A^T = A^T A = I$$

a) Si $$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

entonces tenemos que:

$$A\,A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

además, se tiene que:

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dado que se cumple que $A\ A^T = A^T A = I$, entonces A es una matriz ortogonal.

b) Si $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

entonces:

$$B\ B^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = I$$

El lector puede verificar que $B^T B = I$, con lo cual podemos concluir que B es una matriz ortogonal.

c) Si $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

entonces:

$$C\ C^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C\ C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

El lector puede verificar que $C^T C = I$, con lo cual podemos concluir que C es una matriz ortogonal.

Las matrices ortogonales tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices ortogonales

a) Toda matriz ortogonal tiene inversa.

b) La inversa de una matriz ortogonal es también ortogonal.

c) La matriz identidad de cualquier orden es ortogonal.

d) El producto de dos matrices ortogonales del mismo orden es una matriz ortogonal.

e) La transpuesta de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.

f) El determinante de toda matriz ortogonal es 1 o -1. (El concepto de determinante de una matriz se verá un poco más adelante).

8) Matriz conjugada. Sea $A = \left[a_{ij} \right]$ una matriz de orden $m \times n$ con elementos complejos. La matriz conjugada de A, que representamos con $\bar{A}$, es una matriz de orden $m \times n$ $\bar{A} = \left[\bar{a}_{ij} \right]$, donde $\bar{a}_{ij}$ es el conjugado de a_{ij}.

EJERCICIO 5.26 Obtenga la matriz conjugada de las matrices dadas.

a) $A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & -5+2i \\ 3 & -7i \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 1+i & 3i \\ -1-i & 4i & 2 \\ -5i & 0 & 2+2i \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Para obtener la conjugada de una matriz, lo que tenemos que hacer es obtener el complejo conjugado de cada uno de los elementos de la matriz dada. De esta forma tenemos que:

a) Si $A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & -5+2i \\ 3 & -7i \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ -i & -5-2i \\ 3 & 7i \end{bmatrix}$

b) Si $B = \begin{bmatrix} 6 & 1+i & 3i \\ -1-i & 4i & 2 \\ -5i & 0 & 2+2i \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1-i & -3i \\ -1+i & -4i & 2 \\ 5i & 0 & 2-2i \end{bmatrix}$

La conjugación de matrices tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de la conjugación de matrices

Sean A y B dos matrices cualesquiera con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

a) $\overline{\left(\bar{A}\right)} = A$

b) $\overline{\left(\alpha\ A\right)} = \bar{\alpha}\ \bar{A}$

c) Si A y B son del mismo orden, entonces $\overline{\left(A + B\right)} = \bar{A} + \bar{B}$

d) Si A y B son del mismo orden, entonces $\overline{\left(A - B\right)} = \bar{A} - \bar{B}$

e) Si A y B son conformables para la multiplicación, entonces $\overline{(AB)} = \bar{A}\ \bar{B}$

f) Si A es una matriz no singular, entonces $\overline{\left(A^{-1}\right)} = \left(\bar{A}\right)^{-1}$

g) $\overline{\left(A^{T}\right)} = \left(\bar{A}\right)^{T}$

h) $Tr\left(\bar{A}\right) = \overline{Tr\left(A\right)}$, donde $Tr\left(\bar{A}\right)$ significa la traza de la matriz conjugada de A. (El concepto de traza se verá un poco más adelante).

9) Matriz real. Es aquella matriz A, de cualquier orden con elementos en $\mathbb{C}$, para la cual se cumple que:

$$A = \bar{A}$$

De acuerdo con esta definición, es claro que una matriz real es aquella en la cual todos sus elementos son números reales.

Las matrices reales tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices reales

Sean A y B dos matrices reales cualesquiera. Se tiene que:

a) $A + B$ es una matriz real, si su suma puede obtenerse.

b) $A\,B$ es una matriz real, si A y B son conformables para la multiplicación.

c) $A + \bar{A}$ es una matriz real.

10) Matriz imaginaria. Es aquella matriz A, de cualquier orden con elementos en $\mathbb{C}$, para la cual se cumple que:

$$A = -\bar{A}$$

De acuerdo con esta definición, se tiene que una matriz imaginaria es aquella en la cual todos sus elementos son imaginarios puros, o bien, cero.

Ejemplos de matrices imaginarias:

$$A = \begin{bmatrix} 3i & -i & 2i \\ -5i & 0 & 4i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices imaginarias tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices imaginarias

Sean A y B dos matrices imaginarias cualesquiera. Se tiene que:

a) $A + B$ es una matriz imaginaria, si su suma puede obtenerse.

b) $A\,B$ es una matriz real, si A y B son conformables para la multiplicación.

c) $A - \bar{A}$ es una matriz imaginaria.

11) Matriz conjugada transpuesta. Sea A una matriz de cualquier orden con elementos en $\mathbb{C}$. Se llama conjugada transpuesta de A, y se presenta con A^*, a aquella matriz que se obtiene al conjugar y transponer la matriz original, esto es:

$$A^* = \left(\bar{A}\right)^T$$

Además, de acuerdo con las propiedades de la conjugación de matrices, sabemos que:

$$A^* = \left(\bar{A}\right)^T = \overline{\left(A^T\right)}$$

Lo cual implica que, para obtener la conjugada transpuesta de una matriz, es indistinto que se conjugue primero y después se transponga, o bien, primero transponer y después conjugar.

EJERCICIO 5.27 Obtenga la conjugada transpuesta de las matrices dadas.

a) $A = \begin{bmatrix} 1-i & 3i & 2 \\ -2+i & 0 & -i \\ -3 & 5+i & i \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3-i & 4 & -1-i \\ 6i & 2-i & -7i \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Únicamente por claridad y mejor comprensión del ejercicio, se harán por separado las dos operaciones en ambos incisos; es decir, primero se efectuará la conjugación de la matriz y después se obtendrá la transpuesta de la matriz ya conjugada. Evidentemente, ambas operaciones se pueden efectuar en un solo paso.

a) Si $A = \begin{bmatrix} 1-i & 3i & 2 \\ -2+i & 0 & -i \\ -3 & 5+i & i \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} 1+i & -3i & 2 \\ -2-i & 0 & i \\ -3 & 5-i & -i \end{bmatrix}$

entonces:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1+i & -2-i & -3 \\ -3i & 0 & 5-i \\ 2 & i & -i \end{bmatrix}$$

b) Si $B = \begin{bmatrix} 3-i & 4 & -1-i \\ 6i & 2-i & -7i \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{B} = \begin{bmatrix} 3+i & 4 & -1+i \\ -6i & 2+i & 7i \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

entonces:

$$B^* = \begin{bmatrix} 3+i & -6\,i \\ 4 & 2+i \\ -1+i & 7\,i \end{bmatrix}$$

Obsérvese que en el inciso a), la matriz A es cuadrada, con lo cual, A^* es del mismo orden que A; sin embargo, en el inciso b), la matriz B es de orden 2×3, en tanto que B^* es de orden 3×2. Cuando la matriz original no es cuadrada, el orden de su conjugada transpuesta cambia.

La conjugada transpuesta de matrices tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de la conjugada transpuesta de una matriz

Sean A y B dos matrices cualesquiera con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

a) $\left(A^* \right)^* = A$

b) $\left(\alpha A \right)^* = \bar{\alpha} A^*$

c) Si A y B son del mismo orden, entonces $\left(A + B \right)^* = A^* + B^*$

d) Si A y B son del mismo orden, entonces $\left(A - B \right)^* = A^* - B^*$

e) Si A y B son conformables para la multiplicación, entonces $\left(A\,B \right)^* = B^*\,A^*$

f) $\left(A^{-1} \right)^* = \left(A^* \right)^{-1}$

12) Matriz hermitiana. Sea A una matriz cuadrada con elementos en $\mathbb{C}$. Se dice que A es una matriz hermitiana si se cumple que:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$$

EJERCICIO 5.28 Determine si la matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2-4i & 3i \\ 2+4i & 0 & 5 \\ -3i & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

es hermitiana.

SOLUCIÓN:

Si $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2-4i & 3i \\ 2+4i & 0 & 5 \\ -3i & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 7 & 2+4i & -3i \\ 2-4i & 0 & 5 \\ 3i & 5 & 8 \end{bmatrix}$

transponiendo $\bar{\mathrm{A}}$, tenemos que:

$$\mathrm{A}^* = \begin{bmatrix} 7 & 2-4i & 3i \\ 2+4i & 0 & 5 \\ -3i & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

como $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$, entonces A es hermitiana.

Las matrices hermitianas reciben este nombre en honor al matemático Francés Charles Hermite (1822-1901). Sus aportaciones más importantes fueron en el desarrollo de la teoría de las formas algebraicas, la teoría aritmética de las formas cuadráticas y la teoría de las funciones elípticas y abelianas. Fue el primero en demostrar que el número e es trascendente y no la raíz de una ecuación polinómica con coeficientes racionales. Demostró también que los valores característicos o valores propios de una matriz hermitiana siempre son números reales.

Podemos identificar una matriz hermitiana a simple vista, si los elementos que están en posiciones simétricas respecto a la diagonal principal son complejos conjugados. En forma equivalente, podríamos identificar a una matriz hermitiana, si los elementos que están en el triángulo superior son los conjugados, en forma simétrica, a los que están en el triángulo inferior.

Otra característica importante de las matrices hermitianas es que los elementos de la diagonal principal deben ser números reales.

Las matrices hermitianas tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices hermitianas

Sean A y B dos matrices hermitianas y $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar. Se tiene que:

a) $A + B$ es una matriz hermitiana.

b) $A - B$ es una matriz hermitiana.

c) αA es una matriz hermitiana.

d) Si A es una matriz hermitiana no singular, entonces A^{-1} es una matriz hermitiana.

e) $A B$ es una matriz hermitiana, si y solo si, $A B = B A$.

f) Toda matriz real simétrica es una matriz hermitiana.

Además de estas propiedades, se tiene el siguiente teorema relativo a las matrices hermitianas.

Teorema

Sea A una matriz de cualquier orden con elementos en $\mathbb{C}$. Se tiene que:

a) $\mathrm{A}\ \mathrm{A}^*$ es una matriz hermitiana.

b) $\mathrm{A}^*\ \mathrm{A}$ es una matriz hermitiana.

c) $\mathrm{A} + \mathrm{A}^*$ es una matriz hermitiana, si y solo si, A es cuadrada.

13) Matriz antihermitiana. Sea A una matriz cuadrada con elementos en $\mathbb{C}$. Se dice que A es una matriz antihermitiana si se cumple que:

$$\mathrm{A} = -\mathrm{A}^*$$

EJERCICIO 5.29 Determine si la matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3i & 1+i & 3+2i \\ -1+i & 2i & -7 \\ -3+2i & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

es antihermitiana.

SOLUCIÓN:

Si $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3i & 1+i & 3+2i \\ -1+i & 2i & -7 \\ -3+2i & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} -3i & 1-i & 3-2i \\ -1-i & -2i & -7 \\ -3-2i & 7 & 0 \end{bmatrix}$

transponiendo $\overline{\mathrm{A}}$, tenemos:

ÍNDICE 1 2 3 4 5

$$A^* = \begin{bmatrix} -3i & -1-i & -3-2i \\ 1-i & -2i & 7 \\ 3-2i & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A^* = \begin{bmatrix} 3i & 1+i & 3+2i \\ -1+i & 2i & -7 \\ -3+2i & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

como $A = -A^*$, entonces A es antihermitiana.

Podemos identificar una matriz antihermitiana a simple vista, si los elementos que están en posiciones simétricas respecto a la diagonal principal son números complejos que en su parte real solo difieren en signo y sus partes imaginarias son iguales. Además, los elementos que están en la diagonal principal deben ser imaginarios puros o cero.

Las matrices antihermitianas tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices antihermitianas

Sean A y B dos matrices antihermitianas y $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar. Se tiene que:

a) $A + B$ es una matriz antiherrmitiana.

b) $A - B$ es una matriz antihermitiana.

c) αA es una matriz antihermitiana.

d) $i A$ es una matriz hermitiana.

e) Toda matriz real antisimétrica es una matriz antihermitiana.

Además de estas propiedades, se tiene el siguiente teorema relativo a las matrices antihermitianas.

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de cualquier orden con elementos en $\mathbb{C}$. Se tiene que:

$A - A^*$ es una matriz antihermitiana.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

14) Matriz unitaria. Una matriz cuadrada A con elementos en $\mathbb{C}$ es unitaria, si se cumple que:

$$\mathrm{A\,A^{*} = A^{*}A = I}$$

esto implica entonces que:

$$\mathrm{A^{*} = A^{-1}}$$

De acuerdo con lo anterior, si se tiene una matriz unitaria, entonces para obtener su correspondiente matriz inversa, será suficiente con obtener su conjugada transpuesta.

EJERCICIO 5.30 Determine si las matrices dadas son unitarias.

a) $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 1 & -1-i \end{bmatrix}$ b) $\mathrm{B} = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 4+3i & 4 & -2+6i \\ 4 & 4-3i & -2-6i \\ -2+6i & -2-6i & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Para determinar si una matriz A es o no unitaria, lo que tenemos que hacer es verificar si la multiplicación de A por su conjugada transpuesta da por resultado la matriz identidad, es decir, debemos comprobar que:

$$\mathrm{A\,A^{*} = A^{*}A = I}$$

a) Si $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 1 & -1-i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{A^{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ i & -1-i \end{bmatrix}$

con lo cual:

$$\mathrm{A^{*}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -i & -1+i \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A\,A^{*} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 1 & -1-i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -i & -1+i \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = I$$

además, tenemos que:

$$A^{*}\,A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -i & -1+i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 1 & -1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = I$$

como se cumple que $A\,A^{*} = A^{*}\,A = I$, entonces A es una matriz unitaria.

b) Si

$$B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4+3i & 4 & -2+6i \\ 4 & 4-3i & -2-6i \\ -2+6i & -2-6i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{B} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4-3i & 4 & -2-6i \\ 4 & 4+3i & -2+6i \\ -2-6i & -2+6i & 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual:

$$B^{*} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4-3i & 4 & -2-6i \\ 4 & 4+3i & -2+6i \\ -2-6i & -2+6i & 1 \end{bmatrix}$$

$$BB^{*} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4+3i & 4 & -2+6i \\ 4 & 4-3i & -2-6i \\ -2+6i & -2-6i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4-3i & 4 & -2-6i \\ 4 & 4+3i & -2+6i \\ -2-6i & -2+6i & 1 \end{bmatrix}$$

al multiplicar se tiene que:

$$B\,B^* = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = I$$

El lector puede comprobar que $B^* B = I$, con lo cual podemos concluir que B es una matriz unitaria.

Las matrices unitarias tienen las siguientes propiedades.

Propiedades de las matrices unitarias

a) Toda matriz unitaria tiene inversa.
b) La inversa de una matriz unitaria es también unitaria.
c) La matriz identidad de cualquier orden es unitaria.
d) El producto de dos matrices unitarias del mismo orden es una matriz unitaria.
e) La conjugada transpuesta de una matriz unitaria es una matriz unitaria.

Las matrices unitarias, al igual que otras incluidas en esta clasificación, tienen otro tipo de propiedades que no fueron incorporadas, pues tienen que ver con temas de Álgebra Lineal.

Con las matrices unitarias daremos por concluida la definición de los diferentes tipos de matrices especiales, reiterando que estas matrices fueron definidas, dada su importancia en problemas de aplicación en diferentes ramas del conocimiento, como la matemática misma, la física y, desde luego, la ingeniería.

A continuación, se harán algunos ejercicios donde se haga uso de estos tipos de matrices y sus propiedades.

EJERCICIO 5.31 Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden con elementos en $\mathbb{C}$. Demuestre que si:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) A es simétrica, entonces BAB^T es una matriz simétrica.

b) B es antisimétrica, entonces B^3 es una matriz antisimétrica.

c) Si A y B son matrices simétricas, entonces $A+B$ es una matriz simétrica.

SOLUCIÓN:

a) Para determinar si la matriz BAB^T es simétrica, siendo A simétrica, lo que se debe cumplir es que:

$$\left(BAB^T\right)^T = BAB^T$$

tenemos entonces que:

$$\left(BAB^T\right)^T = \left(B^T\right)^T A^T B^T \qquad \text{por la propiedad de la transposición de un producto.}$$

$$= BA^TB^T \qquad \text{dada la doble transposición de una matriz.}$$

$$= BAB^T \qquad \text{dado que } A \text{ es una matriz simétrica.}$$

$\therefore$ BAB^T es una matriz simétrica.

b) Para que B^3 sea una matriz antisimétrica, siendo B antisimétrica, lo que se debe cumplir es que:

$$\left(B^3\right)^T = -B^3$$

tenemos entonces que:

$$\left(B^3\right)^T = \left(B\,B\,B\right)^T \qquad \text{dada la definición de potencia de una matriz.}$$

$$= B^T B^T B^T \qquad \text{por la propiedad de la transposición de un producto.}$$

$$= (-B)(-B)(-B) \qquad \text{dado que } B \text{ es antisimétrica.}$$

$$= -B^3$$

$\therefore$ B^3 es una matriz antisimétrica.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) Para que la matriz $A + B$ sea simétrica, siendo A y B matrices simétricas, lo que se debe cumplir es que:

$$(A + B)^T = A + B$$

tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= A^T + B^T && \text{por la propiedad de la transposición de una suma .} \\ &= A + B && \text{dado que } A \text{ y } B \text{ son matrices simétricas .} \end{aligned}$$

$\therefore \quad A + B$ es una matriz simétrica.

EJERCICIO 5.32 Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden con elementos en $\mathbb{C}$, donde A es una matriz hermitiana y B una matriz antihermitiana. Demuestre que $(A + iB)$ es una matriz hermitiana.

SOLUCIÓN:

La matriz $(A + iB)$ será hermitiana si se cumple que:

$$(A + iB)^* = A + iB$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} (A + iB)^* &= A^* + (iB)^* && \text{por la propiedad de la conjugada transpuesta de una suma .} \\ &= A + (-i)B^* && \text{dado que } A \text{ es hermitiana y la propiedad de la conjugada} \\ & && \text{transpuesta de una matriz multiplicada por un escalar .} \\ &= A + (-i)(-B) && \text{dado que } B \text{ es antihermitiana .} \\ &= A + iB \end{aligned}$$

$\therefore \quad A + iB$ es una matriz hermitiana .

ÍNDICE
1
2
3
4
5

TRAZA DE UNA MATRIZ

El concepto de traza de una matriz se define únicamente para matrices cuadradas. Este concepto se define como la suma de los elementos de la diagonal principal, como se establece en la siguiente definición.

Definición

Sea $A = \left[a_{ij} \right]$ una matriz cuadrada de cualquier orden con elementos en $\mathbb{C}$. Se llama traza de A, y se representa con $\mathrm{Tr}(A)$, al número:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

siendo n el orden de la matriz A.

La traza de una matriz tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de la traza de una matriz

Sean A, B y C tres matrices cuadradas del mismo orden con elementos en $\mathbb{C}$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

1) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

2) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \, \mathrm{Tr}(A)$

3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

4) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$

5) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(A^{T}\right)$

6) $\mathrm{Tr}(\bar{A}) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$

EJERCICIO 5.33 Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

a) Calcule la traza de A y B.

b) Si $\alpha = -3$, compruebe que $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$.

c) Compruebe que $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.

d) Compruebe que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

e) Compruebe que $\mathrm{Tr}(\bar{B}) = \overline{\mathrm{Tr}(B)}$.

SOLUCIÓN:

a) Como la traza de una matriz se define como la suma de los elementos de la diagonal principal, entonces tenemos que:

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2 + (-5) = -2$$

$$\mathrm{Tr}(B) = i + 3 + (1+i) = 4 + 2i$$

b) Si $\alpha = -3$, entonces:

$$\alpha A = -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -9 & -6 & 0 \\ -12 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

con lo cual:

$$\operatorname{Tr}(\alpha A) = (-3) + (-6) + (15) = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

como $\operatorname{Tr}(A) = -2$, entonces:

$$\alpha \operatorname{Tr}(A) = -3(-2) = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

de (1) y (2) se concluye que:

$$\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr}(A)$$

c) Debemos comprobar que:

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$$

tenemos que:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & -4+i \end{bmatrix}$$

con lo cual:

$$\operatorname{Tr}(A+B) = (1+i) + 5 + (-4+i) = 2+2i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

como $\operatorname{Tr}(A) = -2$ y $\operatorname{Tr}(B) = 4+2i$, entonces:

$$\operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) = (-2) + (4+2i) = 2+2i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

de (3) y (4) se concluye que:

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$$

d) Debemos comprobar que:

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

se tiene que:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+i & -2 & 2+2i \\ -4+3i & 9 & 5 \\ -12+4i & 7 & -5i \end{bmatrix}$$

entonces:

$$Tr(AB) = (6+i) + 9 + (-5i) = 15-4i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

por otro lado:

$$BA = \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+i & 3-i & -5+2i \\ 11 & 9 & -9 \\ 6+4i & -1+i & -1-5i \end{bmatrix}$$

como era de esperarse $AB \neq BA$, pero:

$$Tr(BA) = (7+i) + 9 + (-1-5i) = 15-4i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

de (5) y (6) concluimos que:

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

e) Debemos comprobar que:

$$Tr(\bar{B}) = \overline{Tr(B)}$$

se tiene que:

Si $\quad B = \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$

entonces:

$$\mathrm{Tr}\left(\bar{B}\right) = \left(-i\right) + 3 + \left(1 - i\right) = 4 - 2i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(7\right)$$

como $\mathrm{Tr}\left(B\right) = 4 + 2i$, entonces:

$$\overline{\mathrm{Tr}\left(B\right)} = \overline{\left(4 + 2i\right)} = 4 - 2i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(8\right)$$

de $\left(7\right)$ y $\left(8\right)$ se concluye que:

$$\mathrm{Tr}\left(\bar{B}\right) = \overline{\mathrm{Tr}\left(B\right)}$$

Potencia de una matriz

La potencia entera no negativa de una matriz solo se define para matrices cuadradas. Para calcular la potencia enésima de una matriz, debemos multiplicar la matriz por sí misma tantas veces como indica su exponente, esto es:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^2 &= A\,A \\ A^3 &= A\,A\,A \\ &\vdots \\ A^n &= \underbrace{A\,A\,A\,\ldots\,A}_{n\ \text{Factores}} \end{aligned}$$

La definición formal de la potencia de una matriz es la siguiente.

DEFINICIÓN

Sea A una matriz cuadrada de cualquier orden con elementos en $\mathbb{C}$ y sea n un número entero no negativo. Se llama potencia enésima de A, y se representa con A^n, a la matriz definida por:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^0 &= \mathrm{I} \\ \mathrm{A}^n &= \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{n-1} \qquad \text{para} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

La definición de potencia de una matriz resulta ser una definición recursiva, es decir, que puede repetirse o aplicarse tantas veces como sea necesario. Ilustremos esto mediante el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 5.34 Si A es una matriz cuadrada, aplicando la definición, desarrolle A^4.

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{n-1}$$

en nuestro caso $n = 4$, entonces:

$$\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}\,\mathrm{A}^3$$

aplicando de nueva cuenta la definición a A^3, tenemos:

$$\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}\,\mathrm{A}^2\right)$$

aplicándola ahora a A^2, tenemos:

$$A^4 = A\left(A\left(A\,A^1\right)\right)$$

finalmente, aplicando la definición a A^1:

$$A^4 = A\left(A\left(A\left(A\,A^0\right)\right)\right)$$

dado que $A^0 = I$, entonces:

$$A^4 = A\left(A\left(A\left(A\,I\right)\right)\right)$$

con lo cual:

$$A^4 = A\left(A\left(A\left(A\right)\right)\right)$$

Como la multiplicación de matrices cumple con la propiedad de asociatividad, entonces podemos prescindir de los paréntesis, con lo cual:

$$A^4 = A\,A\,A\,A$$

EJERCICIO 5.35 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, obtenga A^3 como se indica:

a) $A^3 = A\,A\,A = \left(A\,A\right)A = A^2\,A$

b) $A^3 = A\,A\,A = A\left(A\,A\right) = A\,A^2$

SOLUCIÓN:

Como sabemos, la multiplicación de matrices en general no es conmutativa, con lo cual, podríamos suponer que $A^2A \neq A\,A^2$; sin embargo, dada la asociatividad de matrices, se tiene que:

$$\left(A\,A\right)A = A\left(A\,A\right)$$

$$A^2A = A\,A^2$$

como lo comprobaremos en este ejercicio.

a) Obteniendo $A^2 A$:

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A^2 A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

b) Obteniendo ahora $A\,A^2$:

$$A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

de (1) y (2) se concluye que:

$$A^2 A = A\,A^2$$

La potencia enésima de una matriz tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de la potencia de una matriz

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden con elementos en $\mathbb{C}$. Sean m y n dos números enteros no negativos y $\alpha \in \mathbb{C}$ un escalar. Se tiene que:

1) $A^m A^n = A^{m+n}$

2) $\left(A^m\right)^n = \left(A^n\right)^m = A^{m\,n}$

3) $\left(\alpha A\right)^n = \alpha^n A^n$

4) $\left(A^n\right)^T = \left(A^T\right)^n$, donde A^T es la transpuesta de A.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

5) Si A es una matriz no singular, entonces $\left(A^{-1}\right)^{n} = \left(A^{n}\right)^{-1}$, donde A^{-1} es la inversa de A.

6) Si $AB = BA$, entonces $(AB)^{n} = A^{n} B^{n}$.

EJERCICIO 5.36 Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

compruebe que:

a) $\left(A^{2}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{2}$

b) $\left(A^{-1}\right)^{2} = \left(A^{2}\right)^{-1}$

c) $BC = CB$

d) $(BC)^{2} = B^{2} C^{2}$

SOLUCIÓN:

a) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo cual:

$$\left(A^2\right)^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

por otro lado, tenemos que:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\left(A^T\right)^2 = \left(A^T\right)\left(A^T\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \ldots (2)$$

de (1) y (2) se concluye que:

$$\left(A^2\right)^T = \left(A^T\right)^2$$

b) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ resulta que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

entonces:

$$\left(A^{-1}\right)^2 = \left(A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -6 & 9 & -8 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \ldots (3)$$

en el inciso a) se obtuvo que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si se obtiene la inversa A^2, se llega a:

$$\left(A^2\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -6 & 9 & -8 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

con lo cual, de (3) y (4) se puede concluir que:

$$\left(A^{-1}\right)^2 = \left(A^2\right)^{-1}$$

c) Comprobemos que $BC = CB$:

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots (5)$$

por otro lado:

$$C\,B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

de (5) y (6) se concluye que $B\,C = C\,B$.

d) Como se cumple que $B\,C = C\,B$, entonces se debe cumplir que $(B\,C)^2 = B^2\,C^2$. Se tiene que:

$$(BC)^2 = (BC)(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 28 & 77 \\ 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \ldots (7)$$

obteniendo B^2 y C^2, tenemos:

$$B^2 = B\,B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = C\,C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual se tiene que:

$$B^2 C^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 28 & 77 \\ 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \ldots\ldots (8)$$

de (7) y (8) se concluye que:

$$(BC)^2 = B^2 C^2$$

Determinantes

El concepto de determinante solo está definido para matrices cuadradas. A cada matriz cuadrada se le puede asociar un número único llamado el determinante de la matriz. Si A es una matriz cuadrada, el determinante de A lo representaremos con $\det(A)$, o también, lo podemos representar con dos barras paralelas verticales, esto es, $|A|$. Es importante no confundir esta notación con el símbolo de valor absoluto de un número real, dado que el determinante de una matriz puede ser un número positivo, negativo o cero.

Se pueden seguir dos métodos diferentes para realizar el estudio de los determinantes, uno es el método deductivo que parte de principios generales para llegar a conclusiones particulares y, otro, es el método inductivo que utiliza premisas particulares para llegar a conclusiones generales.

El primero de estos dos métodos parte de la definición general del concepto de determinante, la cual requiere del manejo de conceptos no tratados en este libro, como permutaciones, permutaciones de clase par o impar, factorial de un número, del manejo de símbolos como $\sum_{k=1}^{n!}$ y $\prod_{i=1}^{n}$, lo cual dificulta al estudiante, con mucha frecuencia la comprensión del concepto de determinante de una matriz. Por esta razón, tomamos la decisión de optar por el método inductivo para introducir el concepto de determinante que, estamos convencidos, facilita su comprensión.

Siguiendo este principio inductivo, partiremos de la definición del determinante de una matriz de orden 1×1, después de 2×2, de 3×3, etc. Utilizaremos el principio de inducción para establecer un método que nos permita calcular determinantes de orden n a partir de determinantes de orden menor. De esta forma, y partiendo del hecho de que todas las matrices que manejaremos en esta sección serán cuadradas, tenemos:

Si $\mathrm{A} = \left[a_{ij} \right]$ es una matriz cuadrada de orden 1, entonces el determinante A se define como:

$$\det(\mathrm{A}) = \det\left[a_{11} \right] = \left| a_{11} \right| = a_{11}$$

Si $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2, entonces el determinante de A se define como:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

Obsérvese que en esta definición, el determinante de una matriz de 2×2 resulta ser igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

Si $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A se define como:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} \\ - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} \end{array}$$

Obsérvese que en esta definición se tienen seis términos, tres con signo positivo y tres con signo negativo. Además, cada uno de estos seis términos consta de tres factores, donde cada producto está formado por un elemento de cada renglón y un elemento de cada columna.

Si retomamos la definición anterior y agrupamos los términos de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} \\ - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} \end{array}$$

podríamos entonces factorizar los elementos del primer renglón de la matriz, de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\left(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}\right) \\ + a_{13}\left(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}\right) \end{array}$$

Obsérvese que dentro de los paréntesis se tiene la diferencia de dos productos, exactamente igual a la definición que se dio para determinantes de 2×2. Recuérdese, el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal segundaria. Si aplicamos esta definición obtendríamos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Es decir, podemos expresar el determinante de una matriz de 3×3 en términos de determinantes de 2×2.

Cada uno de estos determinantes de 2×2 puede obtenerse quitando, de la matriz original, el renglón y la columna del factor que multiplica a cada determinante, esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

En el procedimiento que acabamos de describir, se tomó la decisión de factorizar los elementos del primer renglón; sin embargo, también podríamos haber factorizado los elementos del segundo renglón o del tercero y llegar a expresiones totalmente similares a la anterior. Lo mismo que se puede hacer con los renglones de la matriz, lo podemos hacer con sus columnas, lo que implica que un determinante de 3×3 lo podemos expresar en términos de cualquier renglón o de cualquier columna de la matriz.

A esta forma de calcular un determinante de 3×3 se le conoce como desarrollo de Laplace o desarrollo por cofactores. Este método para el cálculo de determinantes es aplicable para matrices de orden n, con $n > 1$.

Este método de cofactores es aplicable a matrices cuadradas de cualquier orden; sin embargo, si el orden de la matriz es grande, por ejemplo, de orden 5, entonces el cálculo del determinante implica calcular 5 determinantes de orden 4 y, si el orden de la matriz es mayor, entonces este método resulta totalmente impráctico. Dado que el método consiste en multiplicar los elementos de un renglón o de una columna por sus respectivos cofactores, entonces el método se simplifica cuando el renglón o la columna elegida tenga el mayor número de ceros.

Los renglones o las columnas de una matriz pueden ser modificadas sin alterar el valor de su determinante y estas modificaciones se pueden utilizar para lograr que el renglón o la columna tenga el mayor número de ceros posible y con ello simplificar el procedimiento para el cálculo del determinante. Estas modificaciones se pueden lograr si se hace uso de las propiedades de los determinantes. A continuación, enunciaremos estas propiedades.

Propiedades de los determinantes

Sea $\mathrm{A} = \left[a_{ij} \right]$ una matriz cuadrada con elementos en $\mathbb{C}$. Se tiene que:

1) Si A es una matriz donde todos los elementos de un renglón o de una columna son todos nulos, entonces el $\det(\mathrm{A}) = 0$.

2) Si dos líneas (renglones o columnas) paralelas de A son iguales o proporcionales, entonces $\det(\mathrm{A}) = 0$.

3) Si en A se intercambian dos líneas paralelas (dos renglones o dos columnas), entonces el determinante cambia de signo.

4) El $\det(\mathrm{A})$ no cambia, si a una de sus líneas se les suma el resultado de otra línea paralela multiplicada por una constante.

5) Si se obtiene una matriz B a partir de A al multiplicar los elementos de una de sus líneas por un número $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\det(\mathrm{B}) = \alpha \det(\mathrm{A})$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

6) El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.

$$\det(A) = \det\left(A^T\right)$$

7) Si A es una matriz no singular, entonces el determinante A^{-1} es igual al recíproco del determinante de A.

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

8) Si la matriz A tiene un factor común a todos sus elementos, entonces el determinante de A será igual al producto de dicho factor común, elevado a la potencia n siendo n el orden de la matriz, por el determinante de la matriz factorizada.

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

9) Si A y B son del mismo orden, entonces el determinante de su producto es igual al producto de sus determinantes.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

10) Si A y B son del mismo orden, entonces el determinante de AB es igual al determinante de BA.

$$\det(AB) = \det(BA)$$

11) Si A es una matriz triangular (superior o inferior), entonces el determinante de A es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

EJERCICIO 5.37 Si se tiene que $\det(A) = 3$ y el $\det\left(AB^{-1}\right) = 2\det\left(A^T\right)$, calcule el $\det(B)$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

Este ejercicio se resuelve haciendo uso de las propiedades de los determinantes. Partiremos de la expresión:

$$\det\left(AB^{-1}\right) = 2\det\left(A^{T}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

de acuerdo con las propiedades de los determinantes, se tiene que:

$$\det\left(AB^{-1}\right) = \det(A)\det\left(B^{-1}\right)$$

$$\det(A) = \det\left(A^{T}\right)$$

sustituyendo en (1) se tiene:

$$\det(A)\det\left(B^{-1}\right) = 2\det(A)$$

como $\det(A) = 3$, entonces:

$$3\det\left(B^{-1}\right) = 6$$

como $\det\left(B^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(B)}$, entonces:

$$\frac{3}{\det(B)} = 6$$

$$\therefore \quad \det(B) = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 5.38 Sea el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ 3 & e & 6 \end{vmatrix} = 12$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & b & 4c \\ 1 & 2 & 4d \\ 1 & \frac{e}{3} & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & (e-2) & (6-d) \\ 1 & 2 & d \\ a & b & c \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio, debemos identificar qué modificaciones se hacen al determinante original para llegar al determinante que debemos calcular. Una vez identificadas tales modificaciones, se determina cómo alteran estas el valor del determinante y con ello se puede dar la respuesta correcta.

a) Debemos calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & 4c \\ 1 & 2 & 4d \\ 1 & \frac{e}{3} & 8 \end{vmatrix}$$

Al comparar este determinante con el original, nos damos cuenta de que el tercer renglón está multiplicado por $\frac{1}{3}$, entonces se tiene:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ \left(\frac{1}{3}\right) 3 & e & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ 1 & \frac{e}{3} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(12) = 4$$

Ahora, para llegar al determinante que deseamos calcular, debemos multiplicar la tercera columna por 4, con lo cual se llega a:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ 1 & \frac{e}{3} & 2 \end{vmatrix} \\ \hphantom{a\ b\ }(4) \end{array} = \begin{vmatrix} a & b & 4c \\ 1 & 2 & 4d \\ 1 & \frac{e}{3} & 8 \end{vmatrix} = 4\,(4) = 16$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & b & 4c \\ 1 & 2 & 4d \\ 1 & \frac{e}{3} & 8 \end{vmatrix} = 16$$

b) El determinante que queremos calcular es:

$$\begin{vmatrix} 2 & (e-2) & (6-d) \\ 1 & 2 & d \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Partiendo del determinante original, la primera transformación que podemos identificar es multiplicar el segundo renglón por (-1) y sumarlo al tercer renglón. Esta transformación de multiplicar y sumar no altera el valor del determinante, con lo cual tenemos que:

$$\begin{array}{c} \\ (-1) \\ + \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ 3 & e & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ 2 & (e-2) & (6-d) \end{vmatrix} = 12$$

Ahora, para llegar al determinante que deseamos calcular, debemos intercambiar el primer renglón con el tercero, pero este intercambio cambia de signo el valor del determinante, entonces se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & d \\ 2 & (e-2) & (6-d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & (e-2) & (6-d) \\ 1 & 2 & d \\ a & b & c \end{vmatrix} = (-1)\,12 = -12$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & (e-2) & (6-d) \\ 1 & 2 & d \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$$

Métodos para el cálculo de determinantes

Existen varios métodos para calcular el determinante de una matriz, algunos de estos métodos resultan muy prácticos y rápidos cuando el orden de la matriz es pequeño, pero cuando el orden de la matriz aumenta, estos métodos ya no son aplicables, o bien, se complican demasiado. Es el caso de la regla de Sarrus y el método de cofactores; sin embargo, existen otros métodos que son de aplicación general, que se valen de las propiedades de los determinantes para simplificar su cálculo. Es el caso de los métodos de condensación pivotal y el de la matriz triangular. Estos dos métodos resultan muy prácticos para calcular el determinante de matrices de orden superior. Entendiendo por matrices de orden superior las de 4×4 o mayor.

A continuación, describiremos estos cuatro métodos para el cálculo de determinantes.

1) Regla de Sarrus

Este método solo es aplicable a matrices de orden 2×2 y 3×3. El método lleva este nombre en honor al matemático francés Pierre Fréderic Sarrus (1798-1861), quien en el año de 1833 publica un artículo en el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, titulado “Nuevo método para la resolución de ecuaciones", donde introduce un nuevo método sencillo y práctico para calcular el determinante de una matriz de orden 3. Para el caso de matrices de orden 2, el método consiste en efectuar el producto de los elementos de la diagonal principal, al cual se le asocia un signo positivo, y a este se le resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria, el cual lleva asociado un signo negativo. Esto se ilustra mediante el siguiente esquema:

$$(-)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$(+)$$

Obsérvese que cuando la diagonal es descendente, el producto lleva asociado un signo positivo y cuando la diagonal es ascendente, el producto lleva asociado un signo negativo.

EJERCICIO 5.39 Aplicando la regla de Sarrus, calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-4)(4) - (6)(-1) = -16 + 6$$

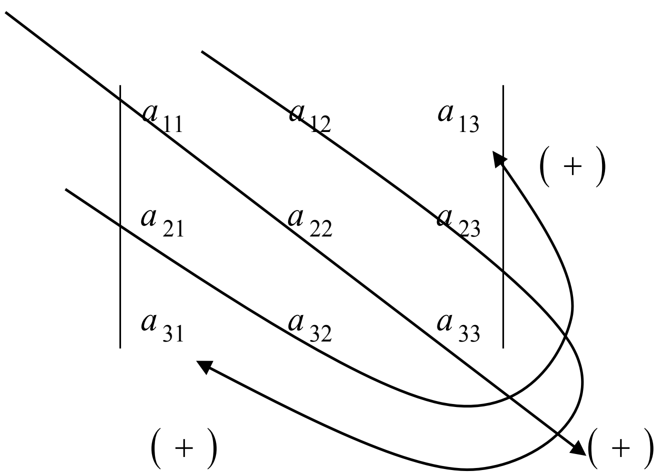
$$\therefore \quad \det(A) = -10$$

Para el caso de matrices de orden 3, el método consiste en multiplicar los elementos de la diagonal principal y sumarle los productos de las dos diagonales paralelas (arriba y abajo de la diagonal principal), multiplicados por su vértice opuesto. A la suma de estos productos se restan los productos de la diagonal secundaria y de las dos diagonales paralelas a ella, multiplicados por su vértice opuesto. Los productos de la diagonal

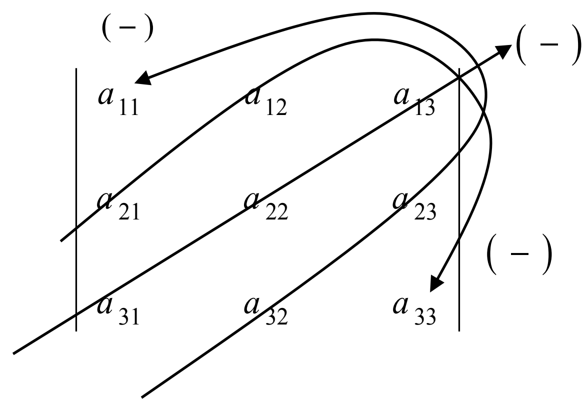
ÍNDICE
1
2
3
4
5

principal y sus paralelas llevan asociado un signo positivo, y los productos de la diagonal secundaria y sus paralelas llevan asociados un signo negativo.

Lo anterior lo podemos visualizar esquemáticamente en los siguientes diagramas:



Productos de la diagonal principal y sus paralelas con su signo positivo asociado.

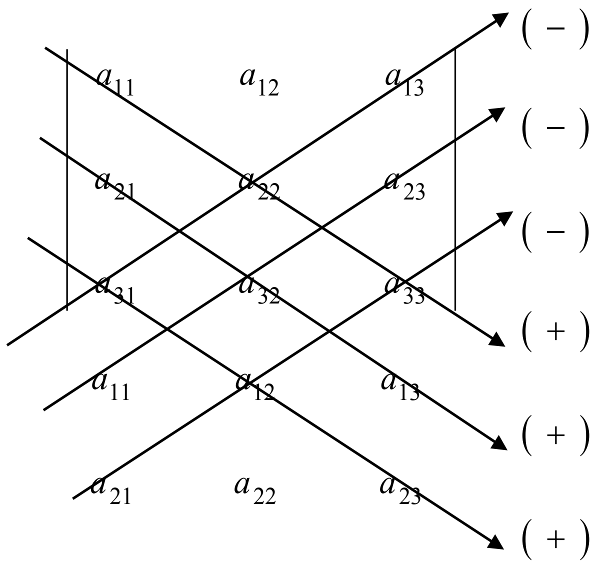


Productos de la diagonal secundaria y sus paralelas con su signo negativo asociado.

Siguiendo este procedimiento, entonces se tiene que el determinante de una matriz de orden 3 es igual a:

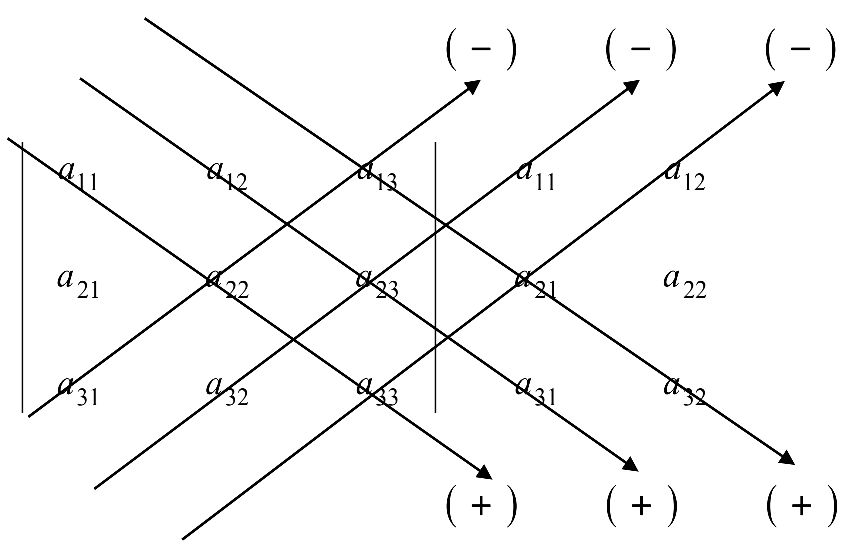
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} \\ -\,a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} \end{array}$$

Otra forma alternativa para comprender fácilmente la regla de Sarrus, aplicada a matrices de orden 3, consiste en agregar los dos primeros renglones de la matriz abajo del tercero, definiendo con ello un arreglo rectangular de 5 renglones. Se identifican 6 diagonales, las primeras 3 corresponden a la diagonal principal y las dos diagonales paralelas a ella y, las otras 3, a la diagonal secundaria y sus dos paralelas. Se multiplican los elementos de estas diagonales, teniendo en cuanta que los productos con dirección descendente llevan asociado un signo positivo y los de dirección ascendente un signo negativo, como se muestra en la siguiente figura:



El valor del determinante se obtiene al sumar estos 6 productos.

El procedimiento que acabamos de describir es totalmente equivalente si en lugar de agregar los dos primeros renglones debajo de la matriz, se agregan las dos primeras columnas a la derecha de ella. Se respeta la convención de los signos de los productos descendentes y ascendentes, y de igual forma, el valor del determinante viene dado por la suma de estos productos. Véase la siguiente figura:



ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 5.40 Aplicando la regla de Sarrus, calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Calcularemos el determinante de la matriz A siguiendo los dos procedimientos descritos, agregando los dos primeros renglones y después agregando las dos primeras columnas.

Agregando renglones:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & (-) & \\ & 2 & -1 & 5 & (-) & \\ \det(A) = & -1 & 3 & -2 & (-) & = (2)(3)(4)+(-1)(1)(5)+(1)(-1)(-2) \\ & 1 & 1 & 4 & & -\ (1)(3)(5)-(2)(1)(-2)-(-1)(-1)(4) \\ & 2 & -1 & 5 & (+) & \\ & -1 & 3 & -2 & (+) & \\ & & & & (+) & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = 24 - 5 + 2 - 15 + 4 - 4$$

$$\therefore \quad \det(A) = 6$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Agregando columnas:

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad\qquad (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc}
2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\
-1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\
1 & 1 & 4 & 1 & 1
\end{array}\right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (+)\ \ (+)\ \ (+)
\end{array}
\begin{array}{l}
= (2)(3)(4) + (-1)(-2)(1) + (5)(-1)(1) \\
- (1)(3)(5) - (1)(-2)(2) - (4)(-1)(-1)
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = 24 + 2 - 5 - 15 + 4 - 4$$

$$\therefore \quad \det(A) = 6$$

2) Desarrollo por cofactores o desarrollo de Laplace

Este método es aplicable a matrices cuadradas de orden n, con $n > 1$. El método se debe al matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), quien planteó y demostró en 1772 el llamado teorema de Laplace, mediante el cual se puede calcular el determinante de una matriz, sin recurrir a la definición establecida por Leibniz. El método esencialmente está basado en la descomposición del determinante de una matriz, en la suma de determinantes de menor orden, asociados a un renglón o a una columna de la matriz original.

El método de cofactores para el cálculo del determinante de una matriz cuadrada está basado en dos conceptos esenciales, el “menor” y el “cofactor” de un elemento. Todos los elementos de una matriz tienen un menor y un cofactor asociados. A continuación, definiremos estos dos conceptos.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Definición

Sea $A = \left[a_{ij} \right]$ una matriz cuadrada de orden n, con $n > 1$ y elementos en $\mathbb{C}$.

1) Se define el menor del elemento a_{ij}, y se representa con M_{ij}, al determinante de la matriz que se obtiene al eliminar en A el renglón i y la columna j.

2) El cofactor del elemento a_{ij}, lo representaremos con $\operatorname{cof} a_{ij}$ y se define como:

$$\operatorname{cof} a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Obsérvese que el cofactor de un elemento se define como el producto del signo $(-1)^{i+j}$ por el menor de dicho elemento. Es claro que dicho signo será positivo, si $i + j$ es un número par y, será negativo, si $i + j$ es impar, esto es:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i+j \quad \text{es par} \\ -1 & \text{si} \quad i+j \quad \text{es impar} \end{cases}$$

EJERCICIO 5.41 Para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Obtenga:

a) El menor del elemento a_{22}.

b) El menor del elemento a_{34}.

c) El cofactor del elemento a_{14}.

d) El cofactor del elemento a_{42}.

SOLUCIÓN:

a) Recordemos que el menor del elemento a_{22} es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar en A el renglón 2 y la columna 2, esto es:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\mathrm{M}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 15 + 30 + 9 = 63$$

entonces, el menor del elemento a_{22} es:

$$\mathrm{M}_{22} = 63$$

b) Obteniendo el menor del elemento a_{34} :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

con lo cual:

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 5 - 24 + 2 = -17$$

por lo tanto, el menor del elemento a_{34} es:

$$M_{34} = -17$$

c) Obteniendo el cofactor del elemento a_{14} :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sabemos que $\operatorname{cof}\ a_{14} = (-1)^{1+4}\ M_{14}$, entonces:

$$\operatorname{cof}\ a_{14} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(2+5+24) = -31$$

$$\therefore \quad \operatorname{cof}\ a_{14} = -31$$

d) Obteniendo el cofactor del elemento a_{42} :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\operatorname{cof}\ a_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1-3+24+2+12-3)$$

$$\therefore \quad \operatorname{cof}\ a_{42} = 31$$

Cuando se calcula el cofactor de un elemento, debemos identificar primero el menor de dicho elemento y este determinante se multiplica por 1 o -1, según la suma de $i+j$ sea par o impar, respectivamente. Una manera fácil de recordar si $(-1)^{i+j}$ es 1 o -1 es dándose cuenta de que los signos $+$ y $-$ quedan distribuidos en la matriz A alternadamente, como si se tratase de un tablero de ajedrez, quedando entonces como sigue:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Con esto sabremos si al menor le corresponde un signo $+$ o $-$, según la ubicación del elemento a_{ij} dentro de la matriz.

Como quedó establecido al inicio del desarrollo de este tema, el determínate de una matriz cuadrada, por el método de cofactores, viene dado al sumar los productos de los elementos de un renglón o de una columna cualquiera por sus respectivos cofactores, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema

Si A es una matriz cuadrada de orden n, con $n > 1$, entonces el $\det(\mathrm{A})$ se obtiene al sumar los productos de los elementos de cualquier renglón o columna, por sus respectivos cofactores.

Este mismo teorema lo podemos enunciar en forma alternativa, de la siguiente manera.

Teorema

Si $A = \left[a_{ij} \right]$ es una matriz cuadrada de orden n, con $n > 1$, entonces el $\det(A)$ se obtiene indistintamente por:

1) Desarrollo en cofactores por el renglón i:

$$\det(A) = a_{i1} \operatorname{cof} a_{i1} + a_{i2} \operatorname{cof} a_{i2} + \ldots + a_{in} \operatorname{cof} a_{in}$$

o bien

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \operatorname{cof} a_{ik}$$

2) Desarrollo en cofactores por la columna j:

$$\det(A) = a_{1j} \operatorname{cof} a_{1j} + a_{2j} \operatorname{cof} a_{2j} + \ldots + a_{nj} \operatorname{cof} a_{nj}$$

o bien

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof} a_{kj}$$

El método de cofactores se simplifica, si elegimos el renglón o la columna con el mayor número de ceros, dado que, si el elemento es cero, entonces el producto con su cofactor es igual a cero, lo cual reduce los cálculos.

EJERCICIO 5.42 Aplicando el método de cofactores, calcule el determinante de las matrices dadas, seleccionando para el cálculo un renglón y después una columna para cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

a) La recomendación sugiere elegir el renglón o la columna con el mayor número de ceros; sin embargo, dado que la matriz A no tiene ningún elemento nulo, entonces es indistinto elegir cualquier renglón o columna.

Haciendo el cálculo con el renglón 3, tenemos:

$$\det(A) = 4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 4(-2-1) + 1(-1)(1-3) + (-2)(-1-6)$$

$$\det(A) = 4(-3) + (-1)(-2) + (-2)(-7)$$

$$\det(A) = -12 + 2 + 14$$

$$\therefore \quad \det(A) = 4$$

Haciendo el cálculo, pero ahora con la segunda columna, tenemos:

$$\det(A) = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 2(-1)(-6+4) + 1(2-4) + 1(-1)(1-3)$$

$$\det(A) = -2(-2) + 1(-2) + (-1)(-2)$$

$$\det(A) = 4 - 2 + 2$$

$$\therefore \quad \det(A) = 4$$

Evidentemente el resultado es el mismo, dado que el determinante de una matriz es único. No importa el renglón o la columna que se haya elegido.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) Para el cálculo del determinante de la matriz B, observamos que la mejor opción es elegir el renglón 4 y la columna 1, dado que son las opciones que tienen el mayor número de ceros.

Haciendo el cálculo con el renglón 4, tenemos:

$$\det(B) = (-3)(-1)^{6}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{8}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Para el cálculo de los determinantes de 3×3, aplicaremos la regla de Sarrus.

$$\det(B) = (-3)(-2-4-3+12) + 2(12-1-4)$$

$$\det(B) = (-3)(3) + 2(7)$$

$$\therefore \quad \det(B) = 5$$

Haciendo el mismo cálculo, pero ahora con la columna 1, tenemos:

$$\det(B) = 2(-1)^{2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{4}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus, tenemos:

$$\det(B) = 2(12+3-18) + (-1)(2-12-9+8)$$

$$\det(B) = 2(-3) + (-1)(-11)$$

$$\therefore \quad \det(B) = 5$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

3) Condensación pivotal (Regla de Chio)

Este método es aplicable a matrices cuadradas de orden n, con $n > 1$. El método se le atribuye al matemático italiano Felice Chiò (1813-1871), quien publicó en 1853 un artículo titulado *Disertación sobre funciones conocidas como resultantes o determinantes*, donde plantea un método para el cálculo de determinantes que simplifica, de manera significativa, el método de cofactores.

El método de condensación pivotal consiste en hacer ceros todos los elementos de algún renglón o de alguna columna, excepto uno de ellos, al que llamaremos pivote. Por facilidad en los cálculos, se recomienda que el elemento seleccionado como pivote sea 1 o -1. Los ceros en la línea elegida (renglón o columna), se logran mediante la aplicación reiterada de la propiedad 4 de los determinantes (ver propiedades), que como sabemos, no altera el valor de este. Una vez logrado lo anterior, aplicamos el método de cofactores, seleccionando la línea que ha sido modificada. De esta forma, evitamos calcular los cofactores de los elementos iguales a cero y se logra reducir el cálculo del determinante original a otro de un orden menor $(n-1)$. Se puede aplicar reiteradamente este procedimiento al determinante de orden menor, hasta llegar a un determinante de orden 3, o bien, si se prefiere, hasta uno de orden 2, a los cuales se les puede aplicar la Regla de Sarrus.

EJERCICIO 5.43 Empleando el método de condensación pivotal, calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

Debemos elegir un renglón o una columna para hacer ceros todos sus elementos, excepto el pivote. La línea por seleccionar deberá ser aquella que contenga el mayor número de ceros y de preferencia que incluya un 1 o un -1.

Al observar la matriz A, podemos apreciar que el renglón 2 o la columna 5 son las mejores opciones, pues contienen cada una de ellas dos ceros, además, en ambas líneas se tienen dos unos. En este caso entonces, es indistinto seleccionar cualquiera de ellas. Optaremos por elegir la columna 5 y tomaremos el elemento a_{15} como pivote. Mediante la aplicación de la propiedad 4 de los determinantes, haremos ceros los elementos a_{25} y a_{45}.

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (-1)(-2) \\ + \\ \quad + \\ \\ \\ \end{array}$$

entonces:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando el método de cofactores con la columna 5, tenemos que:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\det(A) = (1)(-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

simplificando:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Para calcular este determinante de cuarto orden, elegiremos la columna 2 y el elemento a_{42} como pivote. Haciendo ceros en esta columna, tenemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ (1)(-2) \end{array}$$

de donde se obtiene:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 5 & -4 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando el método de cofactores con la columna 2, tenemos:

$$\det(A) = (1)(-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

simplificando y calculando el determinante de orden 3 aplicando la regla de Sarrus, tenemos:

$$\det(A) = 12 - 48 + 60$$

$$\therefore \quad \det(A) = 24$$

4) MÉTODO DE LA MATRIZ TRIANGULAR (MÉTODO DE GAUSS)

Este método es aplicable a matrices cuadradas de orden n, con $n > 1$. Al método de la matriz triangular también se le conoce como el método de Gauss, debido al método que él planteó en la solución de sistemas de ecuaciones mediante su escalonamiento. Dado que una matriz triangular es una matriz escalonada, entonces la idea central de este método consiste en transformar la matriz original en una matriz triangular, puede ser triangular superior o inferior, según convenga de acuerdo con las características de la matriz dada que nos facilite este propósito. Este método de la matriz triangular para el cálculo de determinantes no es más que una generalización del método de condensación pivotal.

El cálculo del determinante de una matriz triangular resulta muy sencillo, pues su valor es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema

Si $A = [\, a_{ij} \,]$ es una matriz triangular superior o inferior, entonces:

$$\det(A) = a_{11}\; a_{22}\; a_{33} \cdots a_{nn}$$

EJERCICIO 5.44 Usando el método de la matriz triangular, calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Para decidir si llevamos la matriz dada a una matriz triangular superior o inferior, lo que debemos hacer es fijarnos en cuántos ceros hay en cada uno de los triángulos de la matriz y decidir, en función de ello, si nos conviene transformar la matriz original en una matriz triangular superior o inferior. Dado que la matriz A tiene más ceros en el triángulo inferior, entonces nos conviene transformar A en una matriz triangular superior, es decir, hacer que el triángulo inferior contenga puros ceros.

Para dar mayor claridad al procedimiento, resaltaremos la diagonal principal con una línea diagonal, lo cual, evidentemente no es necesario, pero consideramos que esto ayuda a comprender mejor el método.

$$\begin{array}{c} \\ + \\ (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (-3)(-1) \\ + \\ \\ +\quad + \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\begin{array}{c} \\ (3)\,(-1) \\ + \\ + \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ (1) \\ \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & 23 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \left(\frac{13}{2}\right) \\ + \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & 23 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \left(-\frac{2}{19}\right) \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{19} \end{vmatrix}$$

Hemos llegado a la matriz triangular superior, con lo cual, según el método, el determinante de la matriz A se obtiene al multiplicar los elementos de la diagonal principal, esto es:

$$\det(\mathrm{A}) = (1)(1)(2)\left(-\frac{19}{2}\right)\left(-\frac{18}{19}\right)$$

$$\therefore \quad \det(\mathrm{A}) = 18$$

Hemos definido el concepto de determinante de una matriz y sus propiedades, y se presentaron cuatro métodos para el cálculo de determinantes. Estamos entonces en condiciones de enunciar el siguiente teorema, que resulta fundamental cuando se habla de la existencia de la inversa de una matriz.

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de orden n con elementos en $\mathbb{C}$. Se tiene que:

$$\mathrm{A}^{-1} \text{ existe, si y solo si, } \det(\mathrm{A}) \neq 0$$

EJERCICIO 5.45 Determine si la matriz:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 \operatorname{cis} 45° & 1 + i \\ 4\, e^{\frac{5}{4}\pi i} & -2 - 2i \end{bmatrix}$$

es singular.

SOLUCIÓN:

Debemos recordar que una matriz singular es aquella que no tiene inversa, es decir, cuyo determinante es igual a cero. Calculemos el determinante de A; para ello, transformaremos los números complejos a su forma polar, dado que el cálculo del determinante implica la multiplicación de ellos. Tenemos entonces que:

$$1 + i = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 45°$$

$$4e^{\frac{5\pi}{4}i} = 4\ \text{cis}\ 225°$$

$$-2 - 2i = 2\sqrt{2}\ \text{cis}\ 225°$$

con lo cual:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2\ \text{cis}\ 45° & \sqrt{2}\ \text{cis}\ 45° \\ 4\ \text{cis}\ 225° & 2\sqrt{2}\ \text{cis}\ 225° \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 4\sqrt{2}\ \text{cis}\ 270° - 4\sqrt{2}\ \text{cis}\ 270°$$

$$\det(A) = -4\sqrt{2}\ i - \left(-4\sqrt{2}\ i\right)$$

$$\det(A) = -4\sqrt{2}\ i + 4\sqrt{2}\ i = 0$$

$$\therefore \quad \det(A) = 0$$

como $\det(A) = 0$, entonces A es una matriz singular.

EJERCICIO 5.46 Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ m & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcule el cofactor de m.

b) Determine para qué valores de m existe A^{-1}.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

a) Tenemos que:

$$\operatorname{cof}(m) = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3+1)$$

$$\therefore \quad \operatorname{cof}(m) = -2$$

b) Sabemos que para que exista A^{-1}, el $\det(A) \neq 0$, entonces calculando el determinante de A aplicando la regla de Sarrus, tenemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3m + 6 + m - 12$$

$$\det(A) = -2m - 6$$

para que $\det(A) \neq 0$, entonces:

$$m \neq -3$$

con lo cual, A^{-1} existe $\forall\, m \in \mathbb{R}$ con $m \neq -3$.

EJERCICIO 5.47 Calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} a & 2a & 3a & 4a & 5a \\ 2a & a & a & a & a \\ 3a & a & a & a & a \\ 4a & a & a & a & a \\ 5a & a & a & a & a \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio iniciaremos aplicando la propiedad 8 de los determinantes, que establece lo siguiente:

$$\det(\alpha B) = \alpha^n \det(B) \quad \text{donde } n \text{ es el orden de la matriz } B.$$

de donde se tiene:

$$\det(B) = a^5 \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1) \\ + \end{array}$$

aplicando la propiedad 4 de los determinantes, tenemos:

$$\det(B) = a^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

empleando el método de cofactores en el renglón 5, se obtiene:

$$\det(\mathrm{B}) = a^5(1)(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

en este determinante de 4×4 que debemos calcular, observamos que los renglones 2, 3 y 4 son iguales y, de acuerdo con la propiedad 2, dicho determinante es igual a cero, con lo cual:

$$\det(\mathrm{B}) = a^5(1)(0)$$

$$\therefore \quad \det(\mathrm{B}) = 0$$

EJERCICIO 5.48 Obtenga el valor de $b \in \mathbb{R}$, con el cual el determinante de la matriz A es igual a 27.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Aplicaremos el método de condensación pivotal para resolver el ejercicio.

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1)\,(-b) \\ + \\ + \quad + \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1-b & 1-b \end{vmatrix}$$

Aplicando el método de cofactores con la columna 1, tenemos:

$$\det(\mathrm{A}) = (1)\,(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & b-1 & 0 \\ b-1 & 0 & 0 \\ 1-b & 1-b & 1-b \end{vmatrix}$$

simplificando y aplicando de nueva cuenta cofactores, pero ahora con el renglón 2, tenemos:

$$\det(\mathrm{A}) = (1)\,(b-1)\,(-1)^3 \begin{vmatrix} b-1 & 0 \\ 1-b & 1-b \end{vmatrix}$$

de donde:

$$\det(\mathrm{A}) = -(b-1)\,(b-1)\,(1-b)$$

si multiplicamos el signo negativo por el tercer factor, se tiene que:

$$\det(\mathrm{A}) = (b-1)\,(b-1)\,(b-1)$$

simplificando y como el determinante de A debe ser igual a 27, se tiene:

$$(b-1)^3 = 27$$

de donde:

$$b-1 = 3$$

$$\therefore \quad b = 4$$

EJERCICIO 5.49 Sea la matriz

$$H = \begin{bmatrix} w & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine los valores de x y w para que

$$\mathrm{Tr}(H) = \det(H)$$

SOLUCIÓN:

Calculando la traza de H, tenemos:

$$\mathrm{Tr}(H) = w + x + 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Calculemos ahora del determinante de H aplicando el método de cofactores con la columna 2.

$$\det(H) = (-1)(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} w & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \quad + \quad (1)$$

aplicando la transformación indicada y simplificando, tenemos:

$$\det(H) = (-1)\begin{vmatrix} w & x+1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$$

aplicando cofactores con la columna 3, se tiene:

$$\det(H) = (-1)(1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} w & x+1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

de donde:

$$\det(H) = (-1)(-w-2x-2)$$

$$\Rightarrow \quad \det(H) = w+2x+2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

igualando (1) y (2), tenemos:

$$w+x+3 = w+2x+2$$

$$x+3 = 2x+2$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

Como w se simplificó en la ecuación, entonces w puede tomar cualquier valor, por lo tanto, los valores de x y w buscados, son:

$$x = 1$$

$$\forall\ w \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 5.50 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 4 \\ a & 0 & b & c \end{bmatrix}$$

Obtenga los valores de a, b y c para los cuales se cumple simultáneamente que $\mathrm{Tr}(A) = -1$, el cofactor del elemento a_{14} sea igual a 6 y el $\det(A) = 4$.

SOLUCIÓN:

Dado que la $\mathrm{Tr}(A)$ debe ser igual a -1, calculándola tenemos:

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2 + (-5) + c = -1$$

de donde se obtiene que:

$$c = 1$$

calculando el cofactor del elemento a_{14}, tenemos:

$$\mathrm{cof}\ a_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = 6$$

aplicando el método de cofactores con la segunda columna, se tiene:

$$\mathrm{cof}\ a_{14} = (-1)(2)(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ a & b \end{vmatrix} = 6$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

desarrollando tenemos:

$$2\,(-2b + 5a) = 6$$

$$\Rightarrow \quad 5a - 2b = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

calculando el determinante de A por cofactores con el renglón 2, tenemos:

$$\det(A) = 2\,(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

aplicando la regla de Sarrus:

$$\det(A) = 2\,(-5c + 8a + 2b - 5a + 4c - 4b)$$

$$\det(A) = 2\,(3a - 2b - c)$$

Como $\det(A) = 4$ y $c = 1$, entonces se llega a:

$$6a - 4b - 2 = 4$$

$$6a - 4b = 6$$

$$3a - 2b = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

resolviendo simultáneamente (1) y (2), tenemos:

$$\begin{cases} 5a - 2b = 3 \\ 3a - 2b = 3 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

con lo cual, los valores pedidos son:

$$a = 0, \qquad b = -\frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad c = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 5.51 Obtenga el valor de x para que el determinante de la matriz A sea igual a uno, si

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Aplicando el método de cofactores en el renglón 5, tenemos:

$$\det\left(\mathrm{A}\right) = \left(-1\right)\left(-1\right)^{8} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ \\ \\ \end{matrix}$$

aplicando la transformación indicada y simplificando, tenemos:

$$\det\left(\mathrm{A}\right) = \left(-1\right) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

aplicando ahora el método de cofactores, pero en la columna 4, se tiene:

$$\det(A) = \underbrace{(-1)(1)(-1)^5}_{1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

calculando el determinante de 3×3 con la regla de Sarrus, tenemos:

$$\det(A) = -x - 1$$

como se nos dice que el $\det(A) = 1$, entonces:

$$-x - 1 = 1$$

$$\therefore \quad x = -2$$

EJERCICIO 5.52 Calcule el $\det\left(A^{-1}\right)$, si se sabe que:

$$A = BC$$

donde:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Sabemos que:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

como $A = BC$, entonces:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(BC)}$$

por propiedades de los determinantes tenemos que:

$$\det(BC) = \det(B)\ \det(C)$$

además:

$$\det\left(C^{T}\right) = \det(C)$$

con lo cual:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(B)\ \det\left(C^{T}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

Calculando el determinante de la matriz B, tenemos:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2)(2)(2) = 16 \ \ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Calculando ahora el determinante C^{T} aplicando el método de condensación pivotal, tenemos:

$$\det\left(C^{T}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ (-2)\ (-1) \\ + \end{array}$$

aplicando las transformaciones indicadas:

$$\det\left(C^{T}\right)=\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

aplicando el método de cofactores en la columna 3, se tiene:

$$\det\left(C^{T}\right)=(1)(-1)^{5}\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

aplicando la regla de Sarrus y simplificando:

$$\det\left(C^{T}\right)=(-1)(-3+2+3-6)=(-1)(-4)$$

$$\Rightarrow \det\left(C^{T}\right)=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{(16)(4)}$$

$$\therefore \det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{64}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 5.53 Calcule el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Aplicando el método de condensación pivotal, tenemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ (-1-x)(-1) \end{array}$$

aplicando las transformaciones indicadas, se llega a:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -x & -x & (-1-x)(1-z)+1 \\ 0 & -x & 0 & z \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

simplificando:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -x & -x & z - x + xz \\ 0 & -x & 0 & z \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 - z \end{vmatrix}$$

aplicando el método de cofactores con la columna 1, tenemos:

$$\det(A) = (1)(-1)^5 \begin{vmatrix} -x & -x & z - x + xz \\ -x & 0 & z \\ 0 & z & z \end{vmatrix}$$

aplicando la regla de Sarrus y simplificando, se tiene:

$$\det(A) = (-1)\left[-xz(z - x + xz) - x^2 z + xz^2\right]$$

$$\det(A) = (-1)\left(-xz^2 + x^2 z - x^2 z^2 - x^2 z + xz^2\right)$$

simplificando:

$$\det(A) = (-1)\left(-x^2 z^2\right)$$

$$\therefore \quad \det(A) = x^2 z^2$$

o también:

$$\det(A) = (xz)^2$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIO 5.54 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Obtenga los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, que satisfacen la ecuación $\det\left(A - \lambda I_3 \right) = 0$.

b) Comprobar que la matriz A satisface la ecuación matricial:

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_3 = 0$$

donde 0 en la ecuación representa la matriz nula.

SOLUCIÓN:

a) Obteniendo la matriz $A - \lambda I_3$:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

calculando el determinante $A - \lambda I_3$ e igualándolo a cero, tenemos:

$$\det\left(A - \lambda I_3 \right) = 0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al aplicar la regla de Sarrus se llega a:

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + 3(-1-\lambda) + (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 14 - 16 + 8\lambda - 3 - 3\lambda + 1 - \lambda = 0$$

simplificando:

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 4\lambda - 4 = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4\right] = 0$$

$$(1-\lambda)\left(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-4\right) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-6\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

factorizando:

$$(1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$$

por lo tanto, los valores que satisfacen la ecuación $\det\left(A - \lambda I_3\right) = 0$, son:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = -2$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) Antes de dar respuesta a este inciso, desarrollemos el producto indicado en la ecuación (1).

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-6\right)=0$$

$$\lambda^2-\lambda-6-\lambda^3+\lambda^2+6\lambda=0$$

ordenando y simplificando, tenemos:

$$-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6=0$$

multiplicando por -1, se llega a:

$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

A esta ecuación (2) se le conoce como ecuación característica, la cual tiene relación con temas muy importantes de Álgebra Lineal.

Comparemos la ecuación (2) con la ecuación dada en el inciso b) del enunciado:

$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$A^3-2A^2-5A+6I_3=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es evidente a simple vista que se trata de ecuaciones completamente similares; sin embargo, la primera de ellas es una ecuación polinomial y la segunda, una ecuación matricial. Estas dos ecuaciones están relacionadas a través de un teorema del Álgebra Lineal, el cual no enunciaremos por no ser parte central de la temática de este libro. Lo que resulta importante es darnos cuenta de que los conceptos que se estudian en Álgebra son completamente útiles y necesarios para la generación y construcción de otras teorías, tanto de la misma matemática, como de otras ramas del conocimiento.

Regresando a nuestro ejercicio, comprobemos que la matriz A satisface la ecuación (3). Calculemos primeramente las potencias de la matriz A.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \ldots (4)$$

$$A^3 = A^2\,A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{bmatrix} \ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (3), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 2 & 2 \\ 14 & 0 & 22 \\ 6 & -2 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -5 & 20 \\ 15 & 10 & -5 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 0$$

al efectuar las operaciones se llega a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, se comprueba que la matriz A satisface a la ecuación (3).

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ POR MEDIO DE LA ADJUNTA

En una sección anterior de este capítulo, se vio cómo obtener la inversa de una matriz por medio de transformaciones elementales, método conocido con el nombre de Gauss-Jordan. Ahora presentaremos un nuevo método para obtener la inversa de una matriz mediante el uso de determinantes. Este método está basado en el concepto de la adjunta de una matriz, la cual se define como la matriz de cofactores de su transpuesta, como se establece en la siguiente definición.

Definición

Sea $\mathrm{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ una matriz cuadrada de orden n con elementos en $\mathbb{C}$. La matriz adjunta de A, que representamos con $\mathrm{Adj}\,(\mathrm{A})$, se define como:

$$\mathrm{Adj}\,(\mathrm{A}) = \left[\mathrm{cof}\,\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)\right] = \left[\mathrm{cof}\,(\mathrm{A})\right]^{\mathrm{T}}$$

La adjunta de A es igual a la matriz de cofactores de A^{T}.

Un teorema importante relativo a la adjunta de una matriz es el que se enuncia a continuación.

Teorema

Para toda matriz cuadrada A de orden n con elementos en $\mathbb{C}$, se tiene que:

$$\mathrm{A}\,(\mathrm{Adj}\,(\mathrm{A})) = (\mathrm{Adj}\,(\mathrm{A}))\,\mathrm{A} = \det\,(\mathrm{A})\,\mathrm{I}_n$$

Como consecuencia de este teorema, se llega al siguiente corolario.

Corolario

Si $\det\,(\mathrm{A}) \neq 0$, entonces:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det\,(\mathrm{A})}\,\mathrm{Adj}\,(\mathrm{A})$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

La fórmula anterior nos proporciona un método para calcular la inversa de una matriz mediante el uso de los determinantes; sin embargo, debemos señalar que este método no resulta práctico, si el orden de la matriz es superior a 3×3. En tal caso, es más recomendable emplear el método de transformaciones elementales, pues este método implica un procedimiento más corto, desde el punto de vista operativo.

La trascendencia del método de la inversa de una matriz por medio de la adjunta no es desde el punto de vista práctico, sino más bien, desde el punto de vista teórico-conceptual, pues este método nos proporciona una fórmula directa para obtener A^{-1} en términos de A, es decir, nos permite conocer la estructura interna de la inversa de una matriz.

A continuación, mostraremos cómo se obtiene la inversa de una matriz por medio de su adjunta. Decidimos obtener la inversa de una matriz de 4×4 para mostrar lo operativo del método.

EJERCICIO 5.55 Empleando el método de la adjunta, obtenga la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Lo primero que se sugiere hacer, es calcular el determinante de A, si este es diferente de cero, entonces podemos afirmar que A^{-1} existe y se puede proceder a su obtención.

Para el cálculo del $\det(A)$, emplearemos el método de condensación pivotal.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\det(A) = \left|\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ + \\ + \\ (1)\,(-1) \end{array}$$

aplicando las transformaciones indicadas, se llega a:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{cccc} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

aplicando el método de cofactores con la columna 2, se tiene:

$$\det(A) = (1)(-1)^6 \left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right|$$

aplicando la regla de Sarrus, tenemos:

$$\det(A) = 1\,(-2 + 2 - 2 - 4 - 1 - 2)$$

$$\therefore \quad \det(A) = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

como $\det(A) \neq 0$, entonces A^{-1} existe.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Obteniendo A^T :

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, obtendremos todos los cofactores de A^T y emplearemos la regla de Sarrus para calcular los menores de cada cofactor.

$$\operatorname{cof} a_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 = -2$$

$$\operatorname{cof} a_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2 - 1 + 2) = -3$$

$$\operatorname{cof} a_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 = -1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\operatorname{cof}\ a_{14} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1+2) = -1$$

$$\operatorname{cof}\ a_{21} = (-1)^{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-2+2-2) = 2$$

$$\operatorname{cof}\ a_{22} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4-2 = -6$$

$$\operatorname{cof}\ a_{23} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2-1-2) = 1$$

$$\operatorname{cof}\ a_{24} = (-1)^{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2-2-4 = -8$$

$$\operatorname{cof}\ a_{31} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$$

$$\operatorname{cof} a_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2 + 2 + 2) = -6$$

$$\operatorname{cof} a_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\operatorname{cof} a_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(1 + 2 + 2) = -5$$

$$\operatorname{cof} a_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1 + 2 + 2) = -3$$

$$\operatorname{cof} a_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0$$

$$\operatorname{cof} a_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1 - 2) = 3$$

$$\operatorname{cof}\ a_{44} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-2-2 = -6$$

Al colocar cada cofactor en su lugar respectivo, se llega a que la adjunta de A es:

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & -8 \\ -1 & -6 & 4 & -5 \\ -3 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

como $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sustituyendo (1) y (2) en (3), se tiene que:

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & -8 \\ -1 & -6 & 4 & -5 \\ -3 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

o también:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.56 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \operatorname{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b & c \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule el determinante de la matriz A.

b) Obtenga los valores de a, b y c que completan la adjunta de A.

SOLUCIÓN:

a) Aplicando el método de cofactores con la columna 4, tenemos:

$$\det(A) = (1)(-1)^{8} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore \quad \det(A) = 1$$

b) Obteniendo A^{T}, tenemos:

$$A^{T} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando los cofactores de A^{T} que corresponden a los valores de a, b y c que deseamos obtener, se tiene:

$$a = \operatorname{cof}\ a_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(0) = 0 \qquad \therefore \quad a = 0$$

$$b = \operatorname{cof}\ a_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \therefore \quad b = -4$$

$$c = \operatorname{cof}\ a_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) = 0 \qquad \therefore \quad c = 0$$

al sustituir los valores de a, b y c obtenidos, se tiene que la adjunta de la matriz A es:

$$\operatorname{Adj}(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.57 Obtenga la matriz X que satisface a la ecuación:

$$\mathrm{AXC}^{\mathrm{T}} + \operatorname{Adj}(\mathrm{C}) = \left(\operatorname{Tr}(\mathrm{A})\right)\mathrm{B} + \det(\mathrm{B})\,\mathrm{X}$$

donde:

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_4\ , \quad \mathrm{B} = \operatorname{diag}(1,\ 2,\ -1,\ 2) \quad \text{y} \quad \mathrm{C} = \operatorname{diag}(-1,\ -1,\ 2,\ 1)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

Calculando la $\mathrm{Tr}\,(A)$, el $\det\,(B)$ y la $\mathrm{Adj}\,(C)$ que intervienen en la ecuación:

$$\text{como} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\,(A) = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{al ser} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(B) = -4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{tenemos que} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de la $\mathrm{Adj}\,(C)$, usaremos la expresión:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det\,(C)}\ \mathrm{Adj}\,(C)$$

de donde:

$$\mathrm{Adj}\,(C) = \det\,(C)\ C^{-1}$$

por ser C una matriz diagonal, entonces se tiene que:

$$\det(C) = 2$$

y $$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual, se tiene que:

$$\operatorname{Adj}(C) = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(3)$$

La ecuación matricial que se pide resolver es:

$$AXC^T + \operatorname{Adj}(C) = (\operatorname{Tr}(A))B + \det(B)X$$

sustituyendo (1) y (2), se tiene:

$$AXC^T + \operatorname{Adj}(C) = 4B - 4X$$

como $A = I$, entonces:

$$IXC^T + \operatorname{Adj}(C) = 4B - 4X$$

$$XC^T + \operatorname{Adj}(C) = 4B - 4X$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

despejando la matriz X, tenemos:

$$\begin{aligned} XC^{T} + 4X &= 4B - \operatorname{Adj}(C) \\ X\left(C^{T} + 4I\right) &= 4B - \operatorname{Adj}(C) \\ X\left(C^{T} + 4I\right)\left(C^{T} + 4I\right)^{-1} &= \left(4B - \operatorname{Adj}(C)\right)\left(C^{T} + 4I\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad X = \left(4B - \operatorname{Adj}(C)\right)\left(C^{T} + 4I\right)^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Calculando por separado los elementos que intervienen en (4), tenemos:

$$4B - \operatorname{Adj}(C) = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 4B - \operatorname{Adj}(C) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Por otro lado:

$$C^{T} + 4I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\Rightarrow \quad C^T + 4I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\left(C^T + 4I \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (4), tenemos:

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer

La regla de Cramer es un método que nos permite obtener la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado, mediante el uso de determinantes. Este método se le atribuye al matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752), quien publicó la regla en 1750 en su libro titulado *Introducción al análisis de líneas curvas algebraicas*. En 1748, dos años antes de la publicación de la obra de Cramer, se publicó el libro *Tratado de Álgebra* del matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746), dos años después de su muerte. En dicho tratado, Maclaurin usó el método para resolver un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas; sin embargo, fue Cramer quien popularizó el método y por esa razón lleva su nombre.

La regla de Cramer puede ser utilizada para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas; sin embargo, este método resulta muy laborioso para sistemas con más de tres ecuaciones. En general, el método de eliminación de Gauss resulta mucho más eficiente que la regla de Cramer.

La regla de Cramer se establece a través del siguiente teorema.

Teorema

Sea el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema.

Si $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, entonces la solución única del sistema viene dada por la expresión:

$$x_i = \frac{\det(\mathrm{A}_i)}{\det(\mathrm{A})}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

donde:

x_i es la incógnita que se desea calcular.

A_i es la matriz que se obtiene al reemplazar la columna i de A por la columna de términos independientes.

EJERCICIO 5.58 Empleando la regla de Cramer, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

En primera instancia, debemos calcular el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, para saber si es o no aplicable la regla de Cramer. Se tiene que:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando la regla de Sarrus, tenemos:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 9 + 6 + 3 - 2 = -5$$

como el $\det(A) \neq 0$, entonces es aplicable la regla de Cramer. Obteniendo la solución del sistema, tenemos:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -9 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3 + 10 + 27 - 15 - 9 - 6}{-5} = \frac{10}{-5} = -2$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -9 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9 + 12 + 45 - 54 - 9 + 10}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -9 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5 - 18 - 9 + 6 + 15 - 9}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2$$

por lo tanto, la solución es:

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 2$$

EJERCICIO 5.59 Empleando la regla de Cramer, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3w = 16 \\ 2x + 3y - 2z - w = -5 \\ 3x + 2z - 2w = 13 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes del sistema aplicando el método de condensación pivotal, tenemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \quad\quad + \\ (2)\ (-3) \end{matrix}$$

aplicando las transformaciones indicadas, se tiene:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

aplicando el método de cofactores con la columna 2, tenemos:

$$\det(\mathrm{A}) = (1)(-1)^{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-6-6+10+15+2-12)$$

$$\therefore \quad \det(\mathrm{A}) = 3$$

como el $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, entonces es aplicable la regla de Cramer.

Al aplicar la regla de Cramer a este sistema de ecuaciones, se tienen que calcular 5 determinantes de orden 4, el primero es de la matriz de coeficientes y 4 más que corresponden a los determinantes asociados a las incógnitas. En aras de simplificar el desarrollo del ejercicio, se omitirá el procedimiento del cálculo de los determinantes asociados a cada una de las incógnitas. De esta forma, se tiene que:

$$x = \frac{\det(\mathrm{A}_x)}{\det(\mathrm{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 16 & -2 & 1 & -3 \\ -5 & 3 & -2 & -1 \\ 13 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\det(\mathrm{A}_y)}{\det(\mathrm{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -1 \\ 3 & 13 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 16 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 13 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$w = \frac{\det(A_w)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 16 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

Con lo cual, la solución del sistema es:

$$x = 1$$
$$y = -2$$
$$z = 2$$
$$w = -3$$

Con la realización de este ejercicio, a pesar de haber simplificado el procedimiento, resulta evidente que la regla de Cramer, para sistemas de ecuaciones cuadrados de orden 4 o mayores, es completamente ineficiente. Para este tipo de sistemas de ecuaciones, resulta mucho más simple y sencillo emplear el método de eliminación de Gauss. Vayamos un poco más allá con la regla de Cramer. Como lo establece el Teorema, la Regla de Cramer solo es aplicable si el $\det(A) \neq 0$. ¿Qué sucede si tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y el $\det(A) = 0$?

Se pueden presentar dos posibilidades:

1) El sistema de ecuaciones será compatible indeterminado, si todos los determinantes asociados a las incógnitas A_i son también iguales a cero.

2) El sistema de ecuaciones será incompatible, si al menos uno de los determinantes asociados a las incógnitas A_i es diferente de cero.

Ilustremos esto mediante el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 5.60 Determine si los siguientes sistemas de ecuaciones son compatibles indeterminados o incompatibles, mediante el uso de determinantes.

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + y - 3z = -3 \\ -4x - y - 5z = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) Calculemos primero el determinante de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 12 + 2 + 4 - 10 - 3 = 0$$

$$\therefore \quad \det(A) = 0$$

Veamos ahora cómo resultan los determinantes asociados a las incógnitas:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{dado que las columnas 1 y 3 son iguales.}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\det\left(A_y\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \\ -4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{dado que las columnas } 2 \text{ y } 3 \text{ son iguales.}$$

$$\det\left(A_z\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

dado que es igual al determinante de la matriz de coeficientes.

Como el determinante de la matriz de coeficientes es cero, al igual que todos los determinantes asociados a las incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado, es decir, este sistema tiene muchas soluciones.

b) Calculando el determinante de la matriz de coeficientes, tenemos:

$$\det\left(A\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 - 3 - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \det\left(A\right) = 0$$

calculando los determinantes asociados a las incógnitas, se tiene:

$$\det\left(A_x\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 4 - 1 = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Como el determinante de la matriz de coeficientes fue igual a cero y el determinante asociado a "x" diferente de cero, entonces ya podemos concluir que este sistema de ecuaciones es incompatible, es decir, no tiene solución. Veamos cómo resultan los otros dos determinantes asociados a "y" y "z", por simple curiosidad.

$$\det\left(A_y\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 + 4 - 3 + 2 + 16 = 5$$

$$\det\left(A_z\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 - 6 + 4 = 3$$

En este sistema de ecuaciones, el único determinante igual a cero fue el de la matriz de coeficientes.

Sigamos profundizando un poco más con el uso de la regla de Cramer. Si tenemos que obtener la solución general de un sistema con más incógnitas que ecuaciones, es decir, un sistema compatible indeterminado, ¿es posible utilizar la regla de Cramer para tal propósito? La respuesta es afirmativa y mostraremos cómo hacerlo en el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 5.61 Obtenga la solución general y una particular del siguiente sistema de ecuaciones compatible indeterminado, usando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x + y - 2z + w = 2 \\ -x + 2y + z + w = 0 \\ 2x - y - z - 2w = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Dado que el sistema tiene 3 ecuaciones con 4 incógnitas, lo que debemos hacer es pasar una de las incógnitas, cualquiera de ellas, del lado de los términos independientes. Si pasamos w, tenemos:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 - w \\ -x + 2y + z = -w \\ 2x - y - z = 4 + 2w \end{cases}$$

de esta forma, tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, donde los términos independientes quedan en función de w. Aplicando la regla de Cramer, se tiene:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 + 8 - 1 + 1 = 6$$

obteniendo los valores de las incógnitas x, y, z, tenemos:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 - w & 1 & -2 \\ -w & 2 & 1 \\ 4 + 2w & -1 & -1 \end{vmatrix}}{6}$$

$$x = \frac{-2(2-w) + (4+2w) - 2w + 4(4+2w) - w + (2-w)}{6}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

simplificando se llega a:

$$x = \frac{8w + 18}{6} \quad \therefore \quad x = \frac{4w + 9}{3}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - w & -2 \\ -1 & -w & 1 \\ 2 & 4 + 2w & -1 \end{vmatrix}}{6}$$

$$y = \frac{w + 2(2 - w) + 2(4 + 2w) - 4w - (2 - w) - (4 + 2w)}{6}$$

simplificando:

$$y = \frac{-2w + 6}{6} \quad \therefore \quad y = \frac{-w + 3}{3}$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 - w \\ -1 & 2 & -w \\ 2 & -1 & 4 + 2w \end{vmatrix}}{6}$$

$$z = \frac{2(4 + 2w) - 2w + (2 - w) - 4(2 - w) + (4 + 2w) - w}{6}$$

simplificando:

$$z = \frac{6w + 6}{6} \qquad \therefore \qquad z = w + 1$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4w + 9}{3} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\[2ex] y = \dfrac{-w + 3}{3} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\[2ex] z = w + 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Para obtener una solución particular del sistema, debemos asignarle un valor cualquiera a w. Por facilidad haremos que $w = 0$, que al sustituirlo en (1), (2) y (3), tenemos que:

$$x = 3\,, \qquad y = 1 \qquad \text{y} \qquad z = 1$$

por lo tanto, una solución particular del sistema sería:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ w = 0 \end{cases}$$

Se deja al lector verificar que esta solución satisface a todas las ecuaciones del sistema original.

EJERCICIO 5.62 Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas x_1, x_2 y x_3 mediante la regla de Cramer, se tiene que:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Obtenga:

a) El valor de a.

b) El valor de x_3.

SOLUCIÓN:

a) Para poder obtener el valor de a solicitado, primeramente, debemos calcular el valor del determinante de la matriz de coeficientes del sistema. Para ello, apoyándonos en los determinantes asociados x_1 y x_2 formaremos el $\det(A)$ y realizaremos su cálculo. Se tiene entonces que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 4 + 8 - 8 - 2 = 6$$

sustituyendo ese valor en la expresión que define a x_1, tenemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{6} = 1$$

de donde:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

calculando el determinante, se tiene:

$$4 - 4 + 2a - 4 - 4a + 2 = 6$$

$$-2a - 2 = 6$$

$$-2a = 8$$

$$\therefore \quad a = -4$$

b) Sabemos que:

$$x_3 = \frac{\det\left(A_3\right)}{\det\left(A\right)}$$

Valiéndonos de los $\det\left(A_1\right)$, $\det\left(A_2\right)$ y sustituyendo el valor de a, tenemos que:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2 - 16 - 2 - 4 + 4 + 4}{6} = \frac{-12}{6}$$

$$\therefore \quad x_3 = -2$$

EJERCICIO 5.63 De un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, después de aplicar la regla de Cramer, se obtuvo que:

$$x = \frac{\det\left(A_x\right)}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix}}{-7} = -1$$

Obtenga:

a) El valor de a.

b) El valor de z.

SOLUCIÓN:

a) De la expresión que define a y, se sabe que:

$$\det\left(A\right) = -7$$

de la expresión de x, se llega a:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -7$$

desarrollando el determinante, tenemos:

$$-8 - 1 + 2a^2 - 4 - 2a - 2a = -7$$

$$2a^2 - 4a - 13 = -7$$

$$2a^2 - 4a - 6 = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\left(a-3\right)\left(a+1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

de la expresión que define a y, sabemos que:

$$y = \frac{\det\left(A_y\right)}{-7} = -1$$

de donde se deduce que:

$$\det\left(A_y\right) = 7$$

entonces:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = 7$$

desarrollando el determinante, tenemos:

$$-8 + 1 + 2a^2 - 4 + 2a - 2a = 7$$

$$2a^2 - 11 = 7$$

$$2a^2 = 18$$

$$a^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ \\ a_2 = -3 \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

de (1) y (2) se concluye que:

$$a = 3$$

b) Sabemos que:

$$z = \frac{\det\left(A_z\right)}{\det\left(A\right)}$$

considerando el $\det\left(A\right)$, $\det\left(A_y\right)$ y sabiendo que $a = 3$ y $\det\left(A\right) = -7$, se tiene:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{12 - 2 + 9 - 2 + 9 - 12}{-7} = \frac{14}{-7}$$

$$\therefore \quad z = -2$$

EJERCICIO 5.64 Para la ecuación matricial:

$$A\,X = B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

aplicando la regla de Cramer, determine el valor de x_4, si se sabe que:

$$x_1 = \frac{8}{\det(A)} = 2$$

SOLUCIÓN:

Como $\frac{8}{\det(A)} = 2 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 4$

sabemos que:

$$x_4 = \frac{\det\left(A_4\right)}{\det(A)} = \frac{\det\left(A_4\right)}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

calculando $\det\left(A_4\right)$, tenemos:

$$\det\left(A_4\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

aplicando cofactores con la columna 3, se tiene:

$$\det\left(A_4\right) = 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

aplicando cofactores una vez más con la columna 4 y simplificando, tenemos:

$$\det\left(A_4\right) = (2)(-1)(-1)^7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(6-4) = 4$$

$$\Rightarrow \quad \det\left(A_4\right) = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$x_4 = \frac{4}{4} \qquad \therefore \quad x_4 = 1$$

EJERCICIO 5.65 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \left[2\det\left(A^{-1}\right)\right]x + \left[54\det(3A)^{-1}\right]y = \det\left(A^T B\right) \\ \left[\det\left(A^T\right)\right]x + \left[24\det\left(A^T B\right)^{-1}\right]y = 2\det\left(B^T A^T\right) \end{cases}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3i & 2+4i \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3-6i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

Calculando los determinantes de las matrices A y B, tenemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -40+3-6+45-4+4$$

$$\therefore \quad \det(A) = 2$$

como B es una matriz triangular, entonces:

$$\det(B) = 6$$

calculando los coeficientes de x, y y el término independiente de la primera ecuación, tenemos:

$$2\det\left(A^{-1}\right) = \frac{2}{\det(A)} = \frac{2}{2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$54\det(3A)^{-1} = \frac{54}{\det(3A)} = \frac{54}{3^3\det(A)} = \frac{54}{27(2)} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\det\left(A^T B\right) = \det\left(A^T\right)\det(B) = \det(A)\det(B) = 2(6) = 12 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

calculando los coeficientes de x, y y el término independiente de la segunda ecuación, tenemos:

$$\det\left(A^T\right) = \det(A) = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$24 \det\left(A^T B\right)^{-1} = \frac{24}{\det\left(A^T B\right)} = \frac{24}{\det\left(A^T\right)\det(B)}$$

$$= \frac{24}{\det(A)\det(B)} = \frac{24}{2(6)} = \frac{24}{12}$$

$$\therefore \quad 24 \det\left(A^T B\right)^{-1} = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$2 \det\left(B^T A^T\right) = 2 \det\left(B^T\right)\det\left(A^T\right) = 2 \det(B)\det(A)$$

$$2 \det\left(B^T A^T\right) = 2(6)(2) = 24 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

sustituyendo (1), (2) y (3) en la primera ecuación y (4), (5) y (6) en la segunda, se llega al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$$

aplicando el método de eliminación de Gauss, tenemos:

$$\begin{array}{l} (-2) \\ \quad + \end{array} \begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 12 - y$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Obtengamos la solución general del sistema y una solución particular.

si $y = k \Rightarrow x = 12 - k$

$$\therefore \begin{cases} x = 12 - k \\ \\ y = k \end{cases}$$ solución general del sistema

si $k = 2$, entonces :

$$\therefore \begin{cases} x = 10 \\ \\ y = 2 \end{cases}$$ una solución particular del sistema

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Realice las siguientes operaciones y dé el orden de la matriz resultante, en caso de no ser posible realizar la operación, indique el porqué.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & i \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & i \end{bmatrix}$$

a) $A + AE$

b) $D - 4G$

c) $A + B$

d) $FC + B$

e) $CH + 2D$

f) HC

g) GCH

h) HDC

i) GF

j) $-AEF$

k) A^{-1}

l) $G^{-1}G$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

2. Determine los valores de a, b y $c \in \mathbb{R}$, que satisface a cada una de las siguientes igualdades:

a) $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a+b & b \\ c & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -c & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$

b) $a\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\frac{b}{2}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & 5c \\ 0 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $-\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b-c & c-b \\ c-a & a-c \end{bmatrix}$

3. Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & b & 2 \\ b & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ y $C=3I_3$,

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Determine el valor de $b \in \mathbb{R}$, para que se cumpla la igualdad $CA=B$.

4. Obtenga la inversa de cada una de las siguientes matrices, empleando el método de transformaciones elementales.

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Obtenga el producto AB.

b) ¿Puede decirse que la matriz A es la inversa de B?, ¿por qué?

6. Determine si la matriz A es singular:

$$A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi i}{4}} & \sqrt{2}\ \text{cis}\ 315° \\ 2 + 2i & 1 - i \end{bmatrix}$$

7. Determine todas las matrices X, que conmutan con la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Nota: $XE = EX$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

8. Determine todas las matrices X, para las cuales se satisface la condición:

$$XA = AX$$

si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. Obtenga, si existe, la matriz X que satisface la ecuación:

$$-D + XAB = C$$

donde:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

10. Dadas las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

obtenga la matriz Y que satisface la ecuación

$$YAB - C^{-1} = -BAY$$

11. Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual no existe la inversa de M y calcule la matriz inversa para todos los demás valores de a.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & a & 2 \end{bmatrix}$$

12. Determine el o los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que exista la matriz inversa de M.

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & x \\ x & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

13. Sea la matriz

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ -1 & a & a \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

Obtenga:

a) Los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz D sea no singular.

b) La inversa de D, si $a = 1$.

14. Determine, en caso de que exista, la inversa de la matriz:

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 - i & -1 + 2i \\ 1 & 2 & -2 + i \\ -1 & -2 + i & 2 - 2i \end{bmatrix}$$

15. Expense matricialmente los siguientes sistemas de ecuaciones y obtenga su solución mediante la resolución de una ecuación matricial.

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

16. Determine, en caso de ser posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación:

$$\mathrm{A\,X\,A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Obtenga la matriz X que satisface la ecuación:

$$-\mathrm{A\,X\,B} + 2\,\mathrm{A\,C} = 2\,\mathrm{C}$$

Si

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

18. Calcule la potencia que se pide para cada una de las matrices dadas:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ Calcular A^3

b) $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ Calcular M^5

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ Calcular C^3

19. Determine si es válida la igualdad:

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2$$

si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

20. Determine si se cumplen las siguientes igualdades, si se sabe que A y B son matrices cuadradas de orden n.

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

21. Para la ecuación matricial:

$$\frac{1}{6} CX (A - B)(A + B) = \left(A^2 - B^2\right) C$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Despeje la matriz X .

b) Obtenga la matriz X que la satisface.

22. Determine, si existe, la matriz X que satisface la ecuación

$$A^2 X - ABX - BAX + B^2 X = I_3$$

si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

23. Determine las matrices X y Y que satisfacen a cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} X + 2Y = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ -X + Y = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$

b)
$$\begin{cases} X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 2X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ X + 2Y = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

24. Determine los valores que pueden tomar $a, b, c \in \mathbb{C}$, para que la matriz A sea una matriz antihermitiana.

$$A = \begin{bmatrix} a + i & 2 - i \\ b & c \end{bmatrix}$$

25. Determine si la matriz M es ortogonal.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

26. Determine si la matriz M es hermitiana.

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 3 & 2 - i & 5 \\ 2 + i & -6 & 2i \\ 5 & -2i & 1 - i \end{bmatrix}$$

27. Sean A, B, C y D matrices no singulares de orden $n \times n$ con elementos en $\mathbb{R}$. Determine si se cumple la siguiente igualdad:

$$\left[\mathrm{A} \left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}} + \mathrm{C} \right) \mathrm{D}^{\mathrm{T}} \right]^{*} = \bar{\mathrm{D}}\, \bar{\mathrm{B}}\, \mathrm{A}^{*} + \bar{\mathrm{D}}\, \mathrm{C}^{*} \mathrm{A}^{*}$$

28. Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Determine, empleando propiedades de las matrices, si se cumple la siguiente igualdad:

$$\left[\bar{\alpha} \left(\mathrm{A} + \mathrm{B} \right)^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{C}\,\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \right) \mathrm{A}^{*} \right]^{*} = \alpha \mathrm{A} \bar{\mathrm{B}} \mathrm{C}^{*} \left(\bar{\mathrm{A}} + \bar{\mathrm{B}} \right)$$

29. Para la matriz

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 + i & 4 & z \\ -5i & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

determine:

a) Los valores x, y, $z \in \mathbb{C}$ con los que M es hermitiana.

b) Una matriz S simétrica con $s_{21} = 1$, $s_{13} = 0$ y una matriz A hermitiana con $a_{32} = 0$, tales que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$.

30. Exprese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2+6i & 5+3i \\ 9-i & 4-2i \end{bmatrix}$$

como la suma de dos matrices B y C, donde B es una matriz hermitiana y C una matriz antihermitiana.

31. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 3 & b & 0 \end{bmatrix}$$

Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, para que la matriz A sea:

a) Simétrica.

b) Antisimétrica.

32. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Determine una matriz B tal que $A+B$ sea una matriz simétrica y simultáneamente $A-B$ sea una matriz antisimétrica.

33. Sean las matrices A y B. Determine los números $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $A+B$ sea una matriz hermitiana.

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i & 4-3i \\ 1 & 5 & 2-3i \\ 2+3i & 2+i & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & c & 2 \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

34. Sea $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obtenga la matriz A con la cual se cumple que:

$$(AB)^* = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35. Obtenga la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$A^T X C = A^{-1} - B^2 C$$

donde:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 3 & -i \end{bmatrix}$$

Se sabe que A es una matriz ortogonal.

36. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 4i & 3+5i \\ 2 & -i \end{bmatrix}$$

Determine la matriz X que satisface la ecuación

$$\left(A X^{-1}\right)^{-1} + \det\left(\bar{B}\right) C = -X A^* + i\, tr(D)\, I_2$$

Nota: La matriz A es unitaria.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

37. Determine la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial:

$$C X^{-1} = C A^{-1} B^{-1} C^{-1} B^{T}$$

si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

38. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -18 & 7 & -14 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Determine la matriz M que satisface a la ecuación:

$$A^{T} M B = C$$

39. Determine la matriz X que satisface a la ecuación:

$$A B X - \frac{1}{2} A X A^{T} \bar{A} = B^{T}$$

donde: $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

40. Determine la matriz X que satisface a la ecuación:

$$A X = B X + C^{T} D$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

41. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1+2i & 2-3i \\ 2i & -1-i \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} i & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2i \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -10 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

h) $H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 6 & -5 \\ 12 & 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

i) $K = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 & 1 & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 1 \\ a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\ a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a \end{bmatrix}$ con $a = 1 + i$

j) $J = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & w \\ 0 & 2 & x & y & z \\ 0 & 0 & 3 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 4 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i^2 \end{bmatrix}$

k) $L = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

42. Si el $\det(A) = 5$ y $\det(B) = 2$, calcule el valor de la siguiente expresión:

$$\det\left(A^T\right)\det\left(B^{-1}\right) + \det\left(B^T\right)\det\left(A^{-1}\right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

43. Si el $\det(A) = 5$ y el $\det\left(AB^{-1}\right) = 10 \det\left(A^{T}\right)$, obtenga el $\det(B)$.

44. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & d & c \\ a & b & 1 \\ f & 3 & e \end{bmatrix}$, si sabe que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ c & 2 & d \\ e & f & 3 \end{vmatrix} = 3$$

45. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{bmatrix}$. Si $|A| = -2$, calcule el valor de la siguiente expresión:

$$\left|2A^{-1}A^{T}\right| + \begin{vmatrix} 2a & c & 3b \\ 2d & f & 3e \\ 2g & m & 3h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c+2b \\ d & e & f+2e \\ g & h & m+2h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

46. Calcule el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 & 1+i \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ i & 1+i & -i & i \\ 1 & -2i & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

47. Determine el o los valores de $x \in \mathbb{R}$, según corresponda, con los cuales las siguientes matrices son singulares.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2-x \\ 1+x & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x & x+1 \\ -x+2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \\ 1 & x & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ -1 & 2 & 1-x \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-x \\ 2-x & 0 & -1 \\ 1 & -x & 0 \end{bmatrix}$

48. Calcule el determinante y la traza de la matriz M.

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -b+1 \\ 1 & -a+1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

49. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine los valores de λ de tal manera que se cumpla que el $\det\left(A - \lambda I_3\right) = 0$.

50. Obtenga el o los valores de $a \in \mathbb{C}$, para que el determinante tome el valor señalado:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ a & 2 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$

51. Calcule el determinante de las siguientes matrices donde $a \in \mathbb{C}$.

a) $M = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & 2a \\ a & a & a & 2a & 3a \\ a & a & 2a & 3a & 4a \\ a & 2a & 3a & 4a & 5a \end{bmatrix}$

b) $N = \begin{bmatrix} a & 2a & 3a & 4a & -5a \\ 2a & a & 2a & 3a & 4a \\ 2a & 3a & a & 2a & 3a \\ 2a & 3a & 4a & a & 2a \\ -2a & -3a & -4a & -5a & a \end{bmatrix}$

52. Sean a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, calcule $\det(F)$.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 5 & a & -2 \\ 3 & 0 & b & -6 \\ 0 & 2 & c & 0 \\ -2 & 0 & d & 4 \end{bmatrix}$$

53. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4x \end{bmatrix}$

y D, donde esta última es de orden 2×2, tal que $\operatorname{tr}(D) = -6$. Determine el valor de $x \in \mathbb{R}$, para que se cumpla que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(C + D)$.

54. Sea la matriz

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & w & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & t \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Determine los valores de w y t para que:

$$\operatorname{tr}(F) = -2 \det(F)$$

55. Determine la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$E + XB = \operatorname{tr}(\bar{A}) \operatorname{diag}(1, 2) CD$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} i & -\frac{4}{3} - \frac{1}{3} i \\ 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{3} i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

56. Sean las matrices:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine la matriz X que satisface a la ecuación:

$$UX + \operatorname{tr}(W) R = \left(X^T V\right)^T + \det(R) W$$

57. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine la matriz X que satisface a la ecuación:

$$-AX \det(D) B = \operatorname{tr}(D) C + X$$

58. Obtenga la matriz X que satisfaga la ecuación matricial:

$$\frac{1}{2}\,A^{-1}X + B + \det\left(C^{-1}\right) I_2 = I_2$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & i^4 \\ i^6 & i^8 \end{bmatrix}$$

59. Obtenga la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$B^T A B + \frac{\det\left(A^{-1}\right)}{\operatorname{tr}(C)}\,X = C$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 2i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -i & i \\ i & 1+i \end{bmatrix}$$

60. Obtenga la matriz X que satisface la ecuación:

$$XA^2 - \operatorname{tr}(X)\,D = XBC + \operatorname{tr}(D)\,X + \det(A)\,XE$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 19 & 25 \\ 2 & 31 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

61. Sea la ecuación matricial:

$$XAB + C^* = -BAX - \operatorname{tr}(A)\,\bar{D}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Determine la matriz X que satisface la ecuación dada.

62. Dadas las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz X que satisface la ecuación:

$$\left(\frac{1}{2} X^{T} + \frac{i}{2} C^{*} \right)^{T} = \frac{1}{\frac{1}{2} \det\left(2 D^{-1} \right)} D^{-1}$$

63. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3+i & 0 & -1 \\ 2-i & 3 & 1 \\ 3+i & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2+i & 0 & -1 \\ 2-i & 4 & 1 \\ 3+i & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Determine la matriz $E = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ que satisface la siguiente ecuación:

$$\left[(A - B)^{-1} C \right]^{*} = \det(D)\, E$$

64. Sean las matrices:

$$X = \begin{bmatrix} 5i & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -i^{2} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2-i & -1 & -i \\ 2 & 2 & 3i \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga los valores que deben tomar $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, para que se cumpla la siguiente ecuación:

$$\operatorname{tr}(X)(X - Y)W^{*} = (4 + 5i)\begin{bmatrix} a + bi \\ ci \\ d \end{bmatrix}$$

65. Obtenga la adjunta de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 1+i & 2i \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ i & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & i & 1 \end{bmatrix}$

h) $H = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

66. Sea la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Obtenga los valores α, β y $\gamma \in \mathbb{R}$, para que simultáneamente el $\det(B) = 4$, el cofactor del elemento $b_{14} = -22$ y la $\operatorname{tr}(B) = 15$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

67. Sea el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & y & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ x & 0 & y & 3 \end{vmatrix} = -9$$

Obtenga los valores de $x,\ y \in \mathbb{R}$, tales que el cofactor $a_{23} = -4$.

68. Obtenga la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$\frac{1}{\det(B)} \operatorname{Adj}(B) + \left(B X^{-1}\right)^{-1} + \left(X^T A^*\right)^T + \operatorname{tr}(A) A^3 = \bar{A} X$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

69. Determine la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$\operatorname{tr}(A) X + \frac{1}{\det(B)} \operatorname{Adj}(B) A^* = B^{-1} A X - C X$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3i & 2 \end{bmatrix}$$

70. Al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas $x,\ y,\ z$, mediante la regla de Cramer, se tiene que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) Obtenga el valor de a.

b) Determine el valor de y.

71. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, mediante la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x - y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + y = 4 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \\ -3x + 2y + 2z = -13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ y + z - w = 1 \\ x + y - 3w = -2 \\ -x - y + z + w = -1 \end{cases}$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2\,i & -2\,i \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 2 & -4 & -12+i \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

c) No es posible, no tienen el mismo orden.

d) $\begin{bmatrix} 11 \\ 8+i \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2+i \\ 8 & -2 & 4\,i \\ 2 & -3 & -2+3\,i \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 3\,i \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 16 & -8 & 8\,i \\ 22 & -11 & 11\,i \\ -8 & 4 & -4\,i \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 8-8\,i \end{bmatrix}$

i) No es posible, no son conformables.

j) $\begin{bmatrix} -1 & -10 & -1 \\ -i & 5i & -4i \end{bmatrix}$

k) $-\dfrac{1}{3i}\begin{bmatrix} -i & -2 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.

a) $a = -22\,, \qquad b = -11\,, \qquad c = -\dfrac{11}{2}$

b) $a = 2\,, \qquad b = 0\,, \qquad c = 1$

c) $a = 0\,, \qquad b = 0\,, \qquad c = 0$

3. $b = 2$

4.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\dfrac{7}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{5}{4} & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{4} \end{bmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) No, porque ninguna de las dos matrices es cuadrada y, por lo tanto, ninguna tiene inversa.

6. Sí es singular.

7. $X = \begin{bmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \forall\, c, d \in \mathbb{R}$ o también $X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a-d & d \end{bmatrix} \quad \forall\, a, d \in \mathbb{R}$

8. $X = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -2f & e \end{bmatrix} \qquad \forall\, a, e, f \in \mathbb{R}$

9. $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

10. $Y = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $a = 3, \quad M^{-1} = \frac{1}{a-3}\begin{bmatrix} a+1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{a-4}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

12. $x \in \mathbb{R} - \{-3, \ 1\}$

13.

a) $a \in \mathbb{R} - \{0, \ -1\}$

b) $D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $N = \begin{bmatrix} -i & 1+2i & i \\ 1 & -i & 1-i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. $X = \begin{bmatrix} -19 & -9 & -3 \\ -12 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

18.

a) $A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -11 & 2 \end{bmatrix}$

b) $M^5 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

c) $C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. Sí cumple como un caso particular. En general $A^2 + B^2 \neq (A + B)^2$

20.

a) No se cumple. Nota: Las igualdades planteadas en este ejercicio se cumplirán únicamente en el caso de que $AB = BA$.

b) No se cumple.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

21.

a) $X = 6C^{-1}\left(A^2 - B^2\right) C(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}$

b) $X = \begin{bmatrix} 22 & 12 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$

22. $X = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

23.

a) $\begin{cases} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) $\begin{cases} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ \\ Y = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{cases}$

24. $a = xi \;\; ; \;\; x \in \mathbb{R}, \quad b = -2 - i, \quad c = yi \;\; ; \;\; y \in \mathbb{R}$

25. M sí es ortogonal.

26. M no es hermitiana.

27. Sí se cumple.

28. Sí se cumple.

29.

a) $x = 1 - i, \qquad y = 5i, \qquad z = 2$

b) $\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5i \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, pueden variar los elementos de la diagonal principal. La solución no es única.

30.

$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 + 2i \\ 7 - 2i & 4 \end{bmatrix}$ y $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 6i & -2 + i \\ 2 + i & -2i \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

31.

a) $a \in \mathbb{R}$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 3$

b) $a = 0$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 3$

32. $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

33. $a = 1 - i$, $b = 2$, $c = 1 + 2i$

34. $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}$$

35. $$\mathrm{X} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} i & 2 \\ 3 & -i \end{bmatrix}$$

36. $$\mathrm{X} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -9i & 18 \\ -2 & -i \end{bmatrix}$$

37. $$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 32 & -10 & 6 \\ -34 & 10 & -8 \\ 14 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

38. $$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

39. $$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

40. $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -\dfrac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

41.

a) $|A| = -12$

b) $|B| = -5 - 7i$

c) $|C| = -3$

d) $|D| = 3 + 2i$

e) $|E| = -2$

f) $|F| = 1$

g) $|G| = 10$

h) $|H| = 0$

i) $|K| = 0$

j) $|J| = -24$

k) $|L| = -70$

42. $\dfrac{29}{10}$

43. $\det(B) = \dfrac{1}{10}$

44. $|A| = -3$

45. -4

46. $|A| = -8$

47.

a) $x = 0, 1$

b) $x = 1, -2$

c) $x = 1, -1$

d) $x = 2, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

e) $x = 0, 1, 2$

48. $\det(M) = a^2 b^2$
$\operatorname{tr}(M) = a + 4$

49. $\lambda = 2, 5$

50.

a) $a = 0, \pm\sqrt{3}\, i$

b) $a = -2$

51.

a) $\det(M) = a^5$

b) $\det(N) = 106\, a^5$

52. $|F| = 0$

53. $x = 3$

54. $w \in \mathbb{R}\ , \qquad t = 5 - w$

55. $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

56. $X = \begin{bmatrix} 7 & 29 \\ -2 & -20 \end{bmatrix}$

57. $X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

58. $X = \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ -11 & -11 \end{bmatrix}$

59. $X = \begin{bmatrix} -2+3i & -2+3i \\ -2-i & -5-i \end{bmatrix}$

60. $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

61. $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

62. $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

63. $E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

64. $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$ y $d = 2$

65.

a) $\text{ADJ}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\text{ADJ}(B) = \begin{bmatrix} 2i & -2 \\ -1-i & -i \end{bmatrix}$

c) $\text{ADJ}(C) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\text{ADJ}(D) = \begin{bmatrix} -i & -1 & -i \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -i & 1 \end{bmatrix}$

e) $\text{ADJ}(E) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

f) $\text{ADJ}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 8 & -6 \\ 0 & 12 & -8 & 6 \\ 18 & -12 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

g) $\text{ADJ}(G) = \begin{bmatrix} -i & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

h) $\text{ADJ}(H) = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 & 8 & -8 \\ -4 & 4 & -4 & -4 & 4 \\ 20 & -16 & 16 & 8 & -16 \\ -8 & 4 & -4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

66. $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$

67. $x = 1$, $y = 1, 3$

68. $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

69. $X = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

70.

a) $a = -5$

b) $y = 2$

71.

a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -1 \\ w = 1 \end{cases}$

BIBLIOGRAFÍA

AYRES, F. (1992). *Álgebra Moderna*, México: Mc Graw Hill.

CÁRDENAS, et al. (1990). *Álgebra Superior*, 2a. ed., México: Trillas.

ZILL, D.G., Dewar, J.M. (1992), *Álgebra y Trigonometría*, 2a. ed., México: Mc Graw Hill.

LEMING, W., Varberg, D. (1991). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, 3a. ed., México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

PETERSON, J., Hashisaki, J. (1988). *Teoría de la Aritmética*, México: Limusa.

SMITH, S.A., et al. (1997). *Álgebra y Trigonometría*, EUA: Addison-Wesley Iberoamericana.

SOLAR, E., Speziale, L. (1993). *Álgebra I*, 2a. ed., México: Limusa-Facultad de Ingeniería.

SPIEGEL, M.R. (2003). *Álgebra Superior*, México: Mc Graw Hill.

SWOKOWSKI, E.W. (1996). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, 3a. ed., México: Grupo Editorial Iberoamericana.

REES, P.K., Sparks, F.W., Sparks, Ch., *Álgebra*, 10a. ed., México, Mc Graw Hill, 1991.

udae
PUBLICACIONES FI

Álgebra Superior
se publicó digitalmente en el repositorio
de la Facultad de Ingeniería en agosto de 2023.
Primera edición electrónica de un ejemplar
(10 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron
a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la
Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas
utilizadas fueron Arial, Times New Roman
y Source Serif Pro con sus
respectivas variantes.