

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



# Comportamiento de suelos

DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA



Agustín Demeneghi Colina  
Margarita Puebla Cadena



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

# Comportamiento de suelos

Agustín Demeneghi Colina  
Margarita Puebla Cadena

Profesores del Departamento de Geotecnia  
División de Ingenierías Civil y Geomática  
Universidad Nacional Autónoma de México

Para visualizar la obra  
te sugerimos

Acrobat Reader  
Haz Click

## COMPORAMIENTO DE SUELOS

Demeneghi Colina, Agustín  
Puebla Cadena, Margarita  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería  
2023, 199 págs.

---

## COMPORAMIENTO DE SUELOS

Primera edición impresa Marzo 2019  
Primera edición electrónica de un ejemplar (8 MB) en formato PDF  
Publicado en línea: en agosto de 2023

D.R. © 2023, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Avenida Universidad núm. 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma  
de México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán,  
México, Ciudad de México, Código Postal 04510.

FACULTAD DE INGENIERÍA  
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

---

### UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz  
Diseño editorial : Luis Enrique Vite Rangel

# ÍNDICE

<b>Capítulo 1. Relaciones de fase y clasificación de suelos</b> .....	<b>6</b>
Relaciones de fase .....	6
Granulometría .....	18
Plasticidad .....	20
Sistema Unificado de Clasificación de Suelos .....	23
Referencias .....	27
<b>Capítulo 2. Flujo de agua en suelos</b> .....	<b>28</b>
Capilaridad y proceso de contracción .....	28
Esfuerzos totales, neutros y efectivos .....	34
Ley de Darcy .....	40
Métodos para determinar el coeficiente de permeabilidad .....	43
Ecuación general del flujo de agua en suelos .....	48
Solución gráfica. Redes de flujo .....	50
Solución analítica de la ecuación de flujo .....	64
Referencias .....	64
<b>Anexo 1</b>	
Solución de la ecuación de flujo de agua en suelos, mediante el método del elemento finito .....	66
<b>Anexo 2</b>	
Excavaciones bajo el nivel de agua freática .....	70
<b>Anexo 3</b>	
Gasto de filtración a través de una pared permeable .....	77
<b>Capítulo 3. Incrementos de esfuerzo en la masa de suelo</b> .....	<b>79</b>
Solución de Boussinesq .....	79
Círculo cargado .....	80
Rectángulo cargado .....	87
Referencias .....	88

# ÍNDICE

<b>Capítulo 4. Cálculo de deformaciones en suelos</b> . . . . .	<b>89</b>
Nota preliminar . . . . .	89
Esfuerzo . . . . .	89
Deformación unitaria . . . . .	91
Confinamiento inicial . . . . .	95
Relaciones esfuerzo-deformación en medios granulares . . . . .	95
Fórmulas elásticas . . . . .	106
Suelos friccionantes . . . . .	109
Suelos cohesivos totalmente saturados . . . . .	122
Teoría de la consolidación primaria de Terzaghi . . . . .	131
Teoría de la consolidación secundaria de Zeevaert . . . . .	138
Arcillas sensitivas . . . . .	141
Arcillas no sensitivas . . . . .	160
Suelos cohesivos parcialmente saturados . . . . .	168
Cálculo de la deformación inmediata en una prueba de consolidación . . . . .	176
Giro permanente de un cimiento . . . . .	177
Compresión unidimensional . . . . .	179
Grado de consolidación . . . . .	190
Compresión unidimensional. Deformación unitaria de Cauchy y deformación unitaria de Ludwik . . . . .	192
Cálculo de la deformación inmediata, tomando en cuenta una curva no lineal . . . . .	193
Comentario final . . . . .	195
Referencias . . . . .	195
<b>Anexo 4</b>	
Movimientos permisibles . . . . .	197

# Capítulo 1

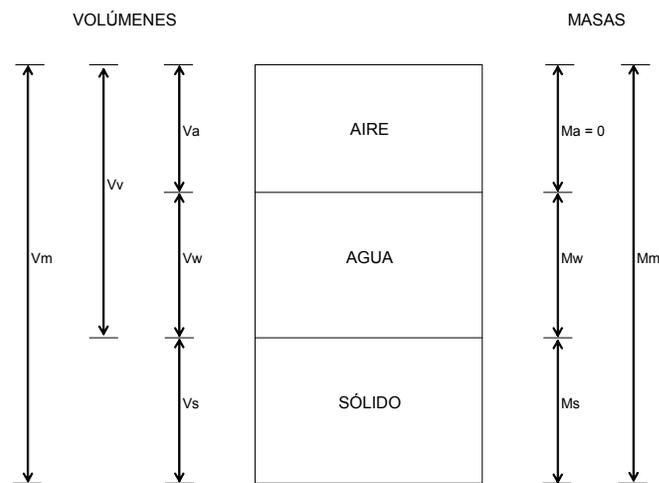
## RELACIONES DE FASE Y CLASIFICACIÓN DE SUELOS

### RELACIONES DE FASE

Un suelo está formado por tres fases:

- Fase sólida, constituida por las partículas minerales
- Fase líquida, formada por agua con sales minerales disueltas
- Fase gaseosa, constituida por el aire

Dividamos estas fases esquemáticamente como se muestra en las figuras 1 y 2. En la figura 1 estamos colocando las masas y en la figura 2 los pesos del suelo.



ESQUEMA DE LAS FASES DE UN SUELO (MASAS)  
FIGURA 1

Definamos a continuación las siguientes cantidades, denominadas propiedades índice de los suelos (véanse las figuras 1 y 2):

*Contenido de agua o humedad,  $w$*

$$w = \frac{M_w}{M_s} \quad (1)$$

O bien

$$w(\%) = \frac{M_w}{M_s} \times 100 \quad (2)$$

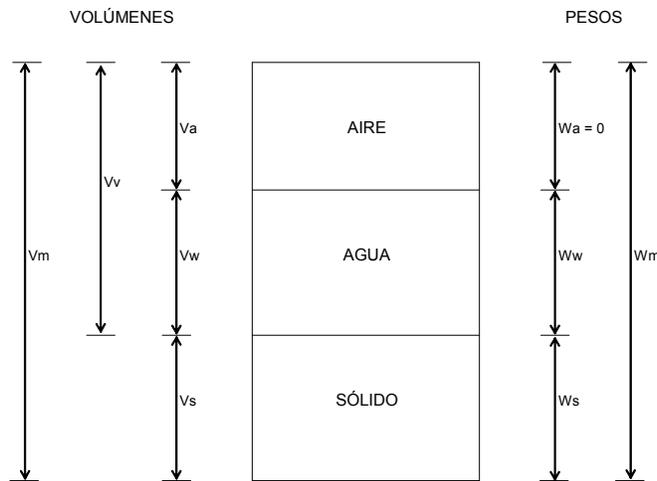
\* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingenierías Civil y Geomática. Facultad de Ingeniería. UNAM

Como

$$W = Mg \quad (3)$$

$$M = \frac{W}{g} \quad (4)$$

donde  $g$  = aceleración de la gravedad, las ecuaciones 1 y 2 las podemos poner



ESQUEMA DE LAS FASES DE UN SUELO (PESOS)  
FIGURA 2

$$w = \frac{\frac{W_w}{g}}{\frac{W_s}{g}} = \frac{W_w}{W_s} \quad (5)$$

$$w(\%) = \frac{W_w}{W_s} \times 100 \quad (6)$$

Relación de vacíos,  $e$

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (7)$$

Porosidad,  $n$

$$n = \frac{V_v}{V_m} \quad (8)$$

O bien

$$n(\%) = \frac{V_v}{V_m} \times 100 \quad (9)$$

Volumen específico,  $v$

$$v = \frac{V_m}{V_s} \quad (10)$$

Grado de saturación,  $S_r$

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} \quad (11)$$

O bien

$$S_r(\%) = \frac{V_w}{V_v} \times 100 \quad (12)$$

Relaciones entre masas y volúmenes  
(Véase la figura 1)

Definimos las siguientes propiedades, usando la masa del suelo

Masa específica,  $\rho$

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (13)$$

Masa específica de los sólidos,  $\rho_s$

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} \quad (14)$$

Masa específica del agua,  $\rho_o$

$$\rho_o = \frac{M_w}{V_w} \quad (15)$$

En esta ecuación 15, la masa del agua  $M_w$  debe estar al nivel del mar y a una temperatura de 4°C. Entonces

$$\rho_o = 1 \frac{Mg}{m^3} \quad (16)$$

Si no se cumplen las condiciones anteriores, la masa específica del agua,  $\rho_w$ , definida como

$$\rho_w = \frac{M_w}{V_w} \quad (17)$$

tiene un valor diferente al dado por la fórmula 16. Sin embargo, la variación de  $\rho_w$  en la naturaleza es pequeña, y puede tomarse para fines prácticos como

$$\rho_w \cong 1 \frac{Mg}{m^3} \quad (18)$$

*Densidad de sólidos o gravedad específica,  $G_s$*

$$G_s = \frac{\rho_s}{\rho_o} \quad (19)$$

*Masa específica húmeda,  $\rho_m$*

$$\rho_m = \frac{M_m}{V_m} \quad (20)$$

*Masa específica seca,  $\rho_d$*

$$\rho_d = \frac{M_s}{V_m} \quad (21)$$

*Relaciones entre pesos y volúmenes*  
(véase la figura 2)

Trabajamos ahora con los pesos del suelo

*Peso específico o peso volumétrico,  $\gamma$*

$$\gamma = \frac{W}{V} \quad (22)$$

*Peso específico de los sólidos,  $\gamma_s$*

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s} \quad (23)$$

*Peso específico del agua,  $\gamma_o$*

$$\gamma_o = \frac{W_w}{V_w} \quad (24)$$

En esta ecuación, la masa del agua debe estar al nivel del mar y a una temperatura de 4°C. Entonces, de acuerdo con 16

$$\rho_o = 1 \frac{Mg}{m^3}$$

El peso específico del agua  $\gamma_o$  es

$$\gamma_o = \frac{W_w}{V_w} = \frac{M_w g}{V_w} = \rho_o g = 1 \frac{Mg}{m^3} \left( 9.81 \frac{m}{s^2} \right) = 9.81 \frac{Mg \cdot m}{m^3 s^2}$$

Pero  $1N = 1kg \cdot \frac{m}{s^2}$

$$\gamma_o = 9.81 \frac{Mg \cdot m}{m^3 s^2} = 9810 \frac{kg \cdot m}{m^3 s^2} = 9810 \frac{N}{m^3}$$

$$\gamma_o = 9.81 \frac{kN}{m^3} \quad (25)$$

Si no se cumplen las condiciones anteriores, el peso específico del agua,  $\gamma_w$ , definido como

$$\gamma_w = \frac{W_w}{V_w} \quad (26)$$

tiene un valor diferente al dado por la fórmula 25. Sin embargo, la variación de  $\gamma_w$  en la naturaleza es pequeña, y puede tomarse para fines prácticos como

$$\gamma_w = 9.81 \frac{kN}{m^3} \quad (27)$$

Usando las ecuaciones 13, 4 y 22

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (13)$$

$$M = \frac{W}{g} \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{W}{V} \quad (22)$$

$$\rho = \frac{\frac{W}{g}}{V} = \frac{W}{gV} = \frac{\gamma}{g} \quad (28)$$

O bien

$$\gamma = \rho g \quad (29)$$

Observamos en las fórmulas 28 y 29 que la densidad específica,  $\rho$ , y el peso específico,  $\gamma$ , están relacionados entre sí mediante la aceleración de la gravedad,  $g$ , la cual puede tomarse, para fines prácticos como  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

Sustituyendo la ecuación 28 en la ecuación 19, la densidad de sólidos queda en función de los pesos específicos de los sólidos y del agua:

$$G_s = \frac{\frac{\gamma_s}{g}}{\frac{\gamma_o}{g}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_o} \quad (30)$$

*Peso específico húmedo,  $\gamma_m$*

$$\gamma_m = \frac{W_m}{V_m} \quad (31)$$

*Peso específico seco,  $\gamma_d$*

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V_m} \quad (32)$$

*Compacidad relativa,  $D_r$*

$$D_r = \frac{e_{\max} - e_{nat}}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{\gamma_{d \max} - \gamma_{d \min}}{\gamma_{d \max} - \gamma_{d \min}} \quad (33)$$

Algunas relaciones entre propiedades índice se presentan a continuación.

$$S_r e = w G_s \quad (34)$$

$$n = \frac{e}{1+e} \quad (35)$$

$$v = 1+e \quad (36)$$

$$\gamma_d = \frac{\gamma_m}{1+w} \quad (37)$$

$$\gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w \quad (38)$$

$$\gamma_d = \frac{G_s \gamma_w}{1+e} \quad (39)$$

$$\gamma_m = \frac{G_s + S_r e}{1+e} \gamma_w \quad (40)$$

## EJEMPLOS

[En algunos de los siguientes ejemplos se hace unitaria una cantidad de alguna fase del suelo. Esto es válido porque, como suponemos un material homogéneo, las relaciones entre las fases se cumplen para cualquier cantidad de dicho material.]

*Ejemplo*

En una muestra de suelo parcialmente saturado se conocen

$$V_m = 50 \text{ cm}^3$$

$$W_m = 95 \text{ g}$$

$$W_s = 75 \text{ g}$$

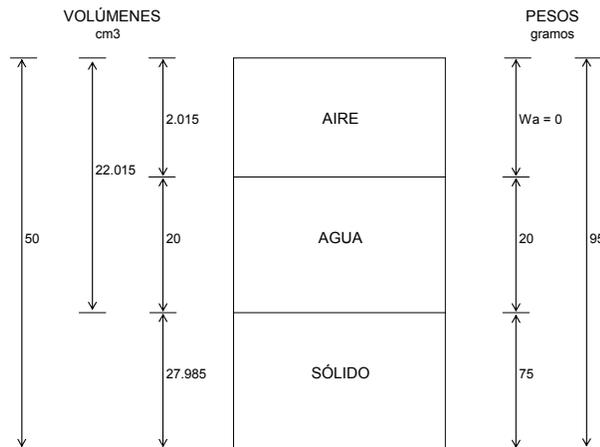
$$G_s = 2.68$$

(g = gf = gramos fuerza)

Encuentre: w, e, n,  $S_r$ ,  $\gamma_m$  y  $\gamma_d$

*Solución*

Nos auxiliamos del diagrama esquemático de la figura E-1



EJEMPLO  
ESQUEMA DE LAS FASES DE UN SUELO (PESOS)  
FIGURA E-1

El peso del agua:  $W_w = 95 - 75 = 20 \text{ g}$   
Obtenemos el volumen de sólidos  $V_s$

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s} \quad (\text{ec 23})$$

$$G_s = \frac{\frac{\gamma_s}{g}}{\frac{\gamma_o}{g}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_o} \quad (\text{ec 30})$$

Despejamos  $V_s$

$$V_s = \frac{W_s}{\gamma_s} = \frac{W_s}{G_s \gamma_o} \quad (41)$$

$$V_s = \frac{75}{2.68(1)} = 27.985 \text{ cm}^3$$

$$V_w = \frac{W_w}{\gamma_w} = \frac{20}{1} = 20 \text{ cm}^3$$

$$V_v = 50 - 27.985 = 22.015 \text{ cm}^3$$

$$V_a = 22.015 - 20 = 2.015 \text{ cm}^3$$

$$w = \frac{W_w}{W_s} = \frac{20}{75} = 0.267 = 26.7\% \quad (\text{ec 5})$$

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{22.015}{27.985} = 0.787 \quad (\text{ec 7})$$

$$n = \frac{V_v}{V_m} = \frac{22.015}{50} = 0.4403 = 44.03\% \quad (\text{ec 8})$$

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} = \frac{20}{22.015} = 0.908 = 90.8\% \quad (\text{ec 11})$$

$$\gamma_m = \frac{W_m}{V_m} = \frac{95}{50} = 1.9 \text{ g/cm}^3 \quad (\text{ec 31})$$

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V_m} = \frac{75}{50} = 1.5 \text{ g/cm}^3 \quad (\text{ec 32})$$

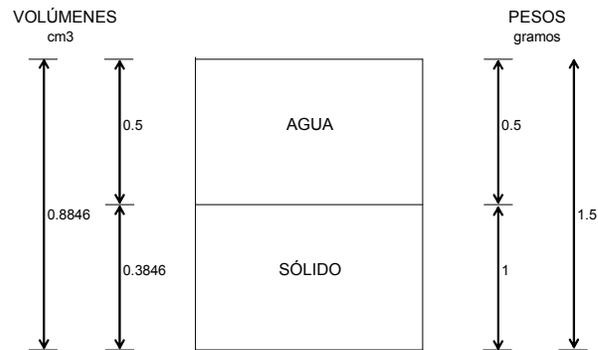
### Ejemplo

Un suelo totalmente saturado tiene un contenido de agua  $w = 50\%$  y una densidad de sólidos  $G_s = 2.6$ . Obtener la relación de vacíos,  $e$ , y el peso volumétrico saturado  $\gamma_{\text{sat}}$ .

### Solución

Nos auxiliamos del diagrama de la figura E-2. Hacemos el peso de sólidos  $W_s = 1$  g. El volumen de sólidos vale (ecuación 41)

$$V_s = \frac{W_s}{G_s \gamma_o} = \frac{1}{2.6(1)} = 0.3846 \text{ cm}^3$$



EJEMPLO  
ESQUEMA DE LAS FASES DE UN SUELO (PESOS)  
FIGURA E-2

El peso del agua

$$W_w = wW_s = 0.5(1) = 0.5g$$

El volumen de agua

$$V_w = \frac{W_w}{\gamma_w} = \frac{0.5}{1} = 0.5cm^3$$

De acuerdo con la figura E-2

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{0.5}{0.3846} = 1.3 \quad (\text{ec 7})$$

$$\gamma_m = \frac{W_m}{V_m} = \frac{1.5}{0.8846} = 1.696g/cm^3 \quad (\text{ec 31})$$

O bien, usando las ecuaciones 34 y 38

$$S_r e = wG_s = 0.5(2.6) = 1.3$$

$$\gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.6 + 1.3}{1 + 1.3} (1) = 1.696g/cm^3$$

#### Ejemplo

Un suelo tiene un peso específico seco  $\gamma_d = 14 \text{ kN/m}^3$  y una densidad de sólidos  $G_s = 2.6$ . Obtener el peso específico saturado  $\gamma_{sat}$ .

#### Solución

Usamos la expresión 39

$$\gamma_d = \frac{G_s \gamma_w}{1 + e}$$

Despejamos e

$$e = \frac{G_s \gamma_w}{\gamma_d} - 1$$

$$e = \frac{2.6(9.81)}{14} - 1 = 0.8219$$

Sustituimos en la ecuación 38

$$\gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.6 + 0.8219}{1 + 0.8219} = 1.878 \text{ kN} / \text{m}^3$$

**Ejemplo**

Deducir la fórmula 34

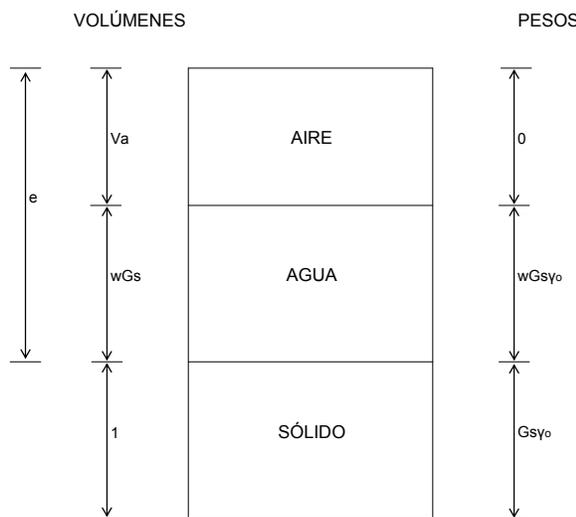
$$S_r e = w G_s$$

**Solución**

Hacemos  $V_s = 1$  en el diagrama de la figura E-3. De las ecuaciones 23 y 30

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s}$$

$$G_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_o}$$



(Cs Clasificación de Suelos. Figuras 1010)

EJEMPLO  
FIGURA E-3

Despejamos  $W_s$

$$W_s = G_s \gamma_o V_s \tag{42}$$

Por lo tanto

$$W_s = G_s \gamma_o$$

$$w = \frac{W_w}{W_s} \tag{ec 5}$$

$$W_w = wW_s = wG_s \gamma_o$$

$$\gamma_o = \frac{W_w}{V_w} \quad (\text{ec 24})$$

$$V_w = \frac{W_w}{\gamma_o} = wG_s$$

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (\text{ec 7})$$

$$V_v = eV_s = e$$

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} \quad (\text{ec11})$$

$$S_r = \frac{wG_s}{e}$$

$$S_r e = wG_s$$

Que es la ecuación 34.

#### *Ejemplo*

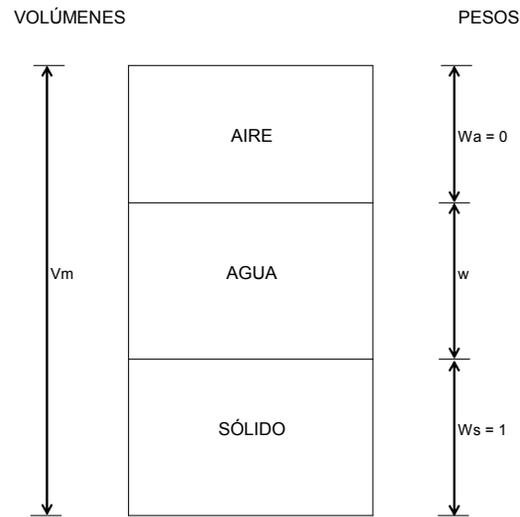
Demostrar la ecuación 37

$$\gamma_d = \frac{\gamma_m}{1 + w}$$

#### *Solución*

Nos auxiliamos del diagrama de la figura E-4. Hacemos  $W_s = 1$ .

$$w = \frac{W_w}{W_s} \quad (\text{ec 5})$$

EJEMPLO  
FIGURA E-4

$$W_w = wW_s = w \quad (\text{figura E-4})$$

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V_m} \quad (\text{ec 32})$$

$$\gamma_d = \frac{1}{V_m} \quad (\text{A})$$

$$\gamma_m = \frac{W_m}{V_m} \quad (\text{ec 31})$$

$$W_m = W_s + W_w = 1 + w \quad (\text{figura E-4})$$

$$\gamma_m = \frac{1 + w}{V_m} \quad (\text{B})$$

Dividimos la ecuación A entre la ecuación B

$$\frac{\gamma_d}{\gamma_m} = \frac{\frac{1}{V_m}}{\frac{1 + w}{V_m}}$$

$$\gamma_d = \frac{\gamma_m}{1 + w}$$

Que es la ecuación 37.

## GRANULOMETRÍA

El comportamiento de los suelos depende en forma significativa del tamaño de sus granos. Así, las gravas y las arenas tienen un comportamiento diferente de suelos muy finos como las arcillas. Por lo tanto, es importante determinar el tamaño de las partículas del terreno, lo cual se lleva a cabo a partir de un análisis granulométrico, con el cual se obtiene la granulometría del suelo.

*Análisis granulométrico*

Una muestra de suelo que se obtiene en el campo se seca al horno y se somete a un proceso de cribado, haciéndolo pasar por mallas de diferentes tamaños. En la tabla 1 se muestran las mallas que se emplean con frecuencia en la práctica (Juárez Badillo y Rico, 1976).

Conociendo el peso retenido en cada una de las mallas, se puede obtener la curva granulométrica del suelo, que consiste en trazar en el eje de las abscisas el diámetro de la abertura de la malla, en escala logarítmica, y en el eje de las ordenadas el porcentaje que pasa dicha malla. En el ejemplo de la tabla 2 se ilustra la forma de obtener la curva granulométrica de un suelo.

TABLA 1  
ABERTURA DE LAS MALLAS (Juárez Badillo y Rico, 1976)

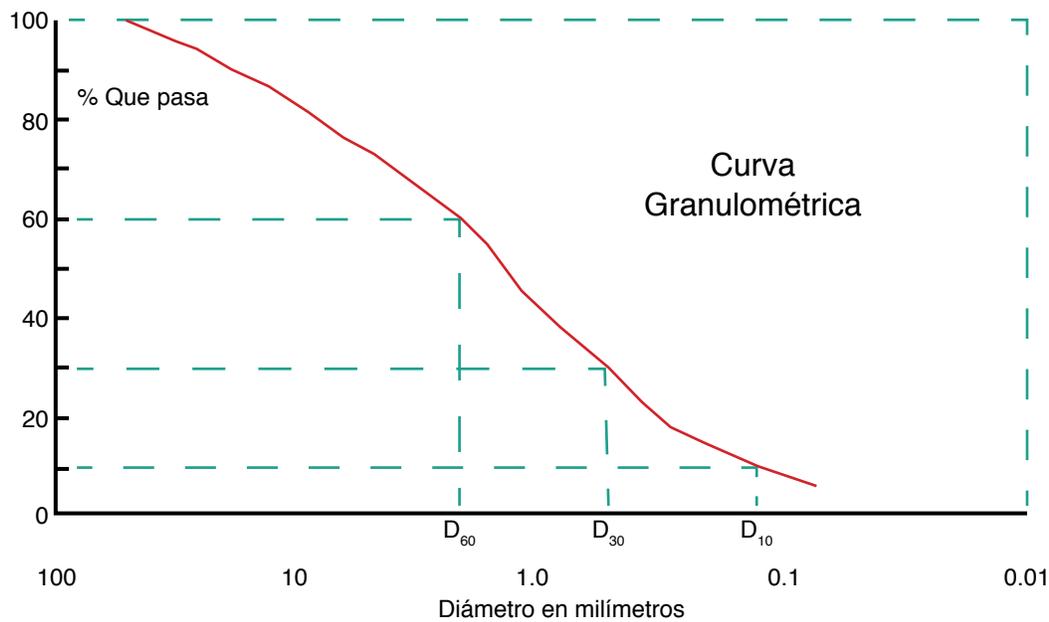
Tyler estándar		U.S. Bureau of Standards	
Malla	Abertura mm	Número	Abertura mm
3"	76.2	4"	101.6
2"	50.8	2" *	50.8
—	26.67	1" *	25.4
—	18.85	3/4" *	19.1
—	13.33	1/2" *	12.7
—	9.423	3/8" *	9.52
3	6.680	1/4"	6.35
4	4.699	4 *	4.76
6	3.327	6	3.36
8	2.362	8	2.38
9	1.981	10*	2.00
10	1.651	12	1.68
14	1.168	16	1.19
20	0.833	20 *	0.840
28	0.589	30	0.590
35	0.417	40 *	0.420
48	0.295	50	0.297
60	0.246	60 *	0.250
65	0.208	70	0.210
100	0.147	100 *	0.149
150	0.104	140	0.105
200	0.074	200 *	0.074
270	0.053	270	0.053
400	0.038	400	0.037

TABLA 2  
ANÁLISIS GRANULOMÉTRICO

Malla N°	Abertura mm	Peso retenido g	Peso total g	Porcentaje retenido	Porcentaje acumulado	Porcentaje que pasa
2"	50.8	0	200	0	0	100
1"	25.4	12	200	6	6	94
3/4"	19.1	6	200	3	9	91
1/2"	12.7	8	200	4	13	87
3/8"	9.52	8	200	4	17	83
1/4"	6.35	12	200	6	23	77
4	4.76	8	200	4	27	73
10	2	28	200	14	41	59
20	0.84	40	200	20	61	39
40	0.42	28	200	14	75	25
60	0.25	17	200	8.5	83.5	16.5
100	0.149	11	200	5.5	89	11
200	0.074	10	200	5	94	6
Charola		12	200	6	100	0
	Sumas	200		100		

(Cs Clasificación de Suelos. Figuras)

En la figura 3 se exhibe la curva granulométrica del suelo de la tabla 2.



Curva Granulométrica  
Figura 3

Se define  $D_P$  como el diámetro de una partícula, tal que  $P$  en porcentaje de los granos de dicho suelo son menores que  $D_P$ . Así,  $D_{60}$  es el diámetro de una partícula, tal que el 60% de los granos del suelo son menores que  $D_{60}$ . En la figura 3 se muestran  $D_{60}$ ,  $D_{30}$  y  $D_{10}$  del suelo de la tabla 2, los cuales valen

$$D_{60} = 2.15 \text{ mm}$$

$$D_{30} = 0.55 \text{ mm}$$

$$D_{10} = 0.13 \text{ mm}$$

Se definen los coeficientes de uniformidad y curvatura de la siguiente forma:

*Coeficiente de uniformidad  $C_u$*

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} \quad (43)$$

Suelos muy uniformes tienen valores de  $C_u$  ligeramente mayores que 1, mientras que suelos bien graduados exhiben magnitudes grandes de  $C_u$ .

*Coeficiente de curvatura,  $C_c$*

$$C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{60} \times D_{10}} \quad (44)$$

Suelos bien graduados muestran valores de  $C_c$  comprendidos entre 1 y 3.

Para el ejemplo de la tabla 2 y figura 3 obtenemos

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} = \frac{2.15}{0.13} = 16.54$$

$$C_c = \frac{0.55^2}{2.15 \times 0.13} = 1.082$$

Observamos que se trata de un suelo bien graduado.

## PLASTICIDAD

El concepto de plasticidad de una muestra remoldeada de suelo se utiliza para fines de clasificación de suelos finos (suelos cuyas partículas son menores que la malla N° 200 (0.074 mm de abertura)).

Se dice que un cuerpo exhibe un comportamiento plástico cuando presenta las siguientes características:

- Se le aplica una carga y el cuerpo se deforma; al remover dicha carga la deformación no se recupera, es decir, el cuerpo presenta una deformación irre recuperable
- La deformación ocurre a volumen constante
- El cuerpo se deforma sin desmoronarse ni agrietarse

<i>Característica</i>	Se comporta como suspensión	Se conduce como fluido viscoso	Comportamiento plástico	Al perder agua reduce su volumen	Al perder agua no reduce su volumen
<b>Estado</b>	<b>Líquido</b>	<b>Semilíquido</b>	<b>Plástico</b>	<b>Semisólido</b>	<b>Sólido</b>
		Límite líquido		Límite plástico	Límite de contracción

→ Humedad disminuye

ESTADOS DE CONSISTENCIA DE UN SUELO FINO  
REMOLDEADO AL IR PERDIENDO AGUA  
FIGURA 4

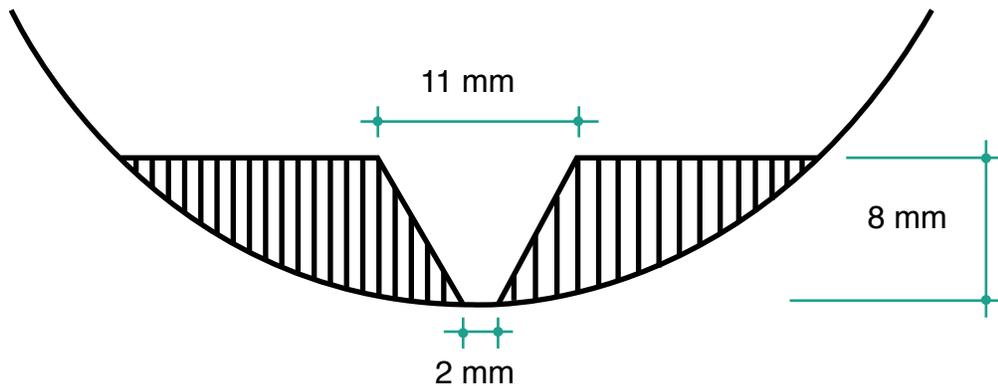
Consideremos una muestra remoldeada de suelo fino, y agreguémosle agua hasta formar una suspensión con dicho suelo. Permitamos a continuación que la muestra vaya perdiendo agua, como se indica en la figura 4. El suelo remoldeado pasará por los siguientes estados de consistencia:

- 1) Estado líquido. El material se comporta como una suspensión
- 2) Estado semilíquido. El material se conduce como un fluido viscoso
- 3) Estado plástico. El suelo exhibe un comportamiento plástico
- 4) Estado semisólido. Se comporta como un sólido, pero al perder agua se contrae
- 5) Estado sólido. Se conduce como sólido, pero al perder agua ya no se reduce su volumen

Distinguimos los siguientes límites entre los estados (figura 4), conocidos como límites de consistencia o límites de Atterberg:

- a) Límite líquido (LL). Contenido de agua correspondiente a la frontera entre el estado semilíquido y el estado plástico
- b) Límite plástico (LP). Contenido de agua correspondiente a la frontera entre los estados plástico y semisólido
- c) Límite de contracción (LC). Contenido de agua correspondiente a la frontera entre los estados semisólido y sólido

[El límite líquido se obtiene con un procedimiento basado en la Copa de Casagrande, que es un recipiente de bronce o latón con un tacón solidario del mismo material (figura 5); el tacón y la copa giran en torno a un eje fijo unido a la base. Una excéntrica hace que la copa caiga periódicamente, golpeándose contra la base del dispositivo, que es hule duro o micarta 221. La altura de caída en la copa es de 1 cm. La copa es esférica, con radio interior de 54 mm, espesor 2 mm y peso  $200 \pm 20$  g incluyendo el tacón. Sobre la copa se coloca el suelo y se procede a hacerle una ranura trapecial con las dimensiones mostradas en la figura 5. La copa se sostiene con la mano izquierda, con el tacón hacia arriba y el ranurador se pasa a través de la muestra, manteniéndolo normal a su superficie, a lo largo del meridiano que pasa por el centro del tacón, con un movimiento de arriba hacia abajo. La prueba se ejecuta en un cuarto húmedo. El límite líquido se obtiene como el contenido de agua del suelo para el que la ranura se cierra a lo largo de 1.27 cm (1/2"), con 25 golpes en la copa (Juárez Badillo y Rico, 1976). En el límite líquido la resistencia al corte del terreno es de  $25 \text{ g/cm}^2$ .]



COPA DE CASAGRANDE  
FIGURA 5

[El límite plástico se determina formando rollitos de 3 mm de diámetro (1/8"), sobre una hoja de papel totalmente seca o sobre una placa de vidrio. Cuando los rollitos llegan a los 3 mm, se doblan y presionan, constituyendo una pastilla que vuelva a rolarse, hasta que en los 3 mm justos ocurra el desmoronamiento o agrietamiento del suelo, en tal momento se obtendrá rápidamente su contenido de agua, que es el límite plástico (Juárez Badillo y Rico, 1976).]

A la diferencia entre el límite líquido y el límite plástico se le denomina *índice de plasticidad* o *índice plástico*

$$\text{Índice plástico} = IP = LL - LP \quad (45)$$

Un suelo fino muy arcilloso exhibe un límite líquido y un índice plástico relativamente altos. Así, si este suelo está totalmente saturado y se encuentra normalmente consolidado, tenderá a presentar una baja resistencia y una alta compresibilidad, mientras que si pierde humedad sufrirá una fuerte contracción. Si a su vez, a partir de un grado de saturación bajo, se incrementa el contenido de agua, el suelo tenderá a expandirse.

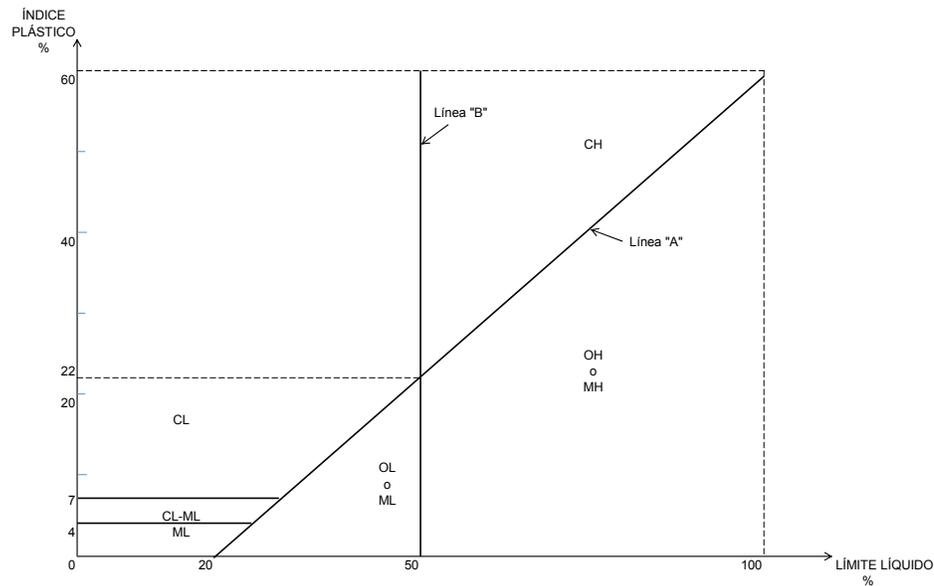
Por el contrario, un suelo fino no plástico tiene un límite líquido relativamente bajo, y un índice plástico muy bajo o nulo. No muestra además tendencia a cambiar de volumen al variar su humedad.

Como ya señalamos, se ha observado que a medida que aumenta el límite líquido, se acrecienta la compresibilidad de un suelo fino normalmente consolidado.

Por las razones expuestas en los párrafos anteriores, el límite líquido y el índice plástico se usan para fines de clasificación de suelos finos.

La Carta de Plasticidad (figura 6) se utiliza para clasificar suelos finos. Se usan los siguientes símbolos

- C = arcilla
- M = limo
- L = baja compresibilidad
- H = alta compresibilidad
- O = suelo con fuerte contenido de materia orgánica



CARTA DE PLASTICIDAD  
FIGURA 6

Distinguimos en la figura 6 los siguientes grupos:

- Arcilla de mediana plasticidad y baja compresibilidad (CL)
- Limo de baja plasticidad y baja compresibilidad (ML)
- Arcilla de alta plasticidad y alta compresibilidad (CH)
- Limo de mediana plasticidad y alta compresibilidad (MH)
- Suelo fino con alto contenido de materia orgánica de baja compresibilidad (OL)
- Suelo fino con alto contenido de materia orgánica de alta compresibilidad (OH)
- Suelo fino arcillolimoso de baja compresibilidad (símbolo doble: CL-ML)

Observamos que la ecuación de la línea "A" es (figura 6)

$$\frac{IP_A - 0}{LL - 20} = \frac{22 - 0}{50 - 20}$$

$$IP_A = \frac{22}{30}(LL - 20) = 0.7333(LL - 20) \quad (46)$$

#### SISTEMA UNIFICADO DE CLASIFICACIÓN DE SUELOS (SUCS)

El Sistema Unificado de Clasificación de Suelos (SUCS) divide a las partículas de los suelos en gruesas y finas.

La frontera entre partículas gruesas y partículas finas es la malla N° 200 (0.074 mm de abertura)

Así, las partículas gruesas tienen un diámetro mayor que 0.074 mm, mientras que las partículas finas tienen un diámetro menor que 0.074 mm.

El tamaño máximo de las partículas gruesas es 7.62 cm (3 pulgadas). Tamaños de partículas mayores que 7.62 cm se consideran fragmentos de roca.

Las partículas gruesas a su vez se dividen en gravas y arenas. La frontera entre las gravas y las arenas es la malla N° 4 (4.76 mm de abertura).

Así, las gravas tienen un diámetro mayor que 4.76 mm, mientras que las arenas tienen un diámetro menor que 4.76 mm.

Designemos    G = por ciento de grava  
                      S = por ciento de arena  
                      F = por ciento de finos

Consideremos a continuación un suelo que no contiene fragmentos de roca. Entonces  $G + S + F = 100\%$

Establezcamos las siguientes condiciones:

Si  $G + S > 50\%$             se trata de un suelo grueso  
 Si  $F > 50\%$                  se trata de un suelo fino

El SUCS distingue las siguientes categorías: suelos gruesos y suelos finos.

### Suelos gruesos

En las tablas 3 y 4 se exhiben los grupos del SUCS para las gravas y para las arenas, respectivamente.

TABLA 3  
 SISTEMA UNIFICADO DE CLASIFICACIÓN DE SUELOS (SUCS)  
 GRAVAS

<i>Suelo</i>	<i>Símbolo SUCS</i>	<i>Requisitos</i>
Grava bien graduada	GW	$F < 5\%$ , $G > S$ $C_u > 4$ y $1 < C_c < 3$
Grava mal graduada	GP	$F < 5\%$ , $G > S$ $C_u < 4$ ó $C_c < 1$ ó $C_c > 3$
Grava limosa	GM	$F = M$ ; $12\% < F < 50\%$
Grava arcillosa	GC	$F = C$ ; $12\% < F < 50\%$
Grava bien graduada, poco limosa	GW-GM	$5\% < F < 12\%$ ; $F = M$ $C_u > 4$ y $1 < C_c < 3$
Grava mal graduada, poco limosa	GP-GM	$5\% < F < 12\%$ ; $F = M$ $C_u < 4$ ó $C_c < 1$ ó $C_c > 3$

Grava bien graduada, poco arcillosa	GW-GC	5% < F < 12%; F = C C <sub>u</sub> > 4 y 1 < C <sub>c</sub> < 3
Grava mal graduada, poco arcillosa	GP-GC	5% < F < 12%; F = C C <sub>u</sub> < 4 ó C <sub>c</sub> < 1 ó C <sub>c</sub> > 3

TABLA 4  
SISTEMA UNIFICADO DE CLASIFICACIÓN DE SUELOS (SUCS)  
ARENAS

Suelo	Símbolo SUCS	Requisitos
Arena bien graduada	SW	F < 5%, S > G C <sub>u</sub> > 6 y 1 < C <sub>c</sub> < 3
Arena mal graduada	SP	F < 5%, S > G C <sub>u</sub> < 6 ó C <sub>c</sub> < 1 ó C <sub>c</sub> > 3
Arena limosa	SM	F = M; 12% < F < 50%
Arena arcillosa	SC	F = C; 12% < F < 50%
Arena bien graduada, poco limosa	SW-SM	5% < F < 12%; F = M C <sub>u</sub> > 6 y 1 < C <sub>c</sub> < 3
Arena mal graduada, poco limosa	SP-SM	5% < F < 12%; F = M C <sub>u</sub> < 6 ó C <sub>c</sub> < 1 ó C <sub>c</sub> > 3
Arena bien graduada, poco arcillosa	SW-SC	5% < F < 12%; F = C C <sub>u</sub> > 6 y 1 < C <sub>c</sub> < 3
Arena mal graduada, poco arcillosa	SP-SC	5% < F < 12%; F = C C <sub>u</sub> < 6 ó C <sub>c</sub> < 1 ó C <sub>c</sub> > 3

### Suelos finos

Los suelos finos (F > 50%) se clasifican utilizando la Carta de Plasticidad (figura 6). Los grupos de suelos son los mismos que vimos en el inciso sobre Plasticidad, los cuales reproducimos a continuación:

- Arcilla de mediana plasticidad y baja compresibilidad (CL)
- Limo de baja plasticidad y baja compresibilidad (ML)
- Arcilla de alta plasticidad y alta compresibilidad (CH)
- Limo de mediana plasticidad y alta compresibilidad (MH)
- Suelo fino con alto contenido de materia orgánica de baja compresibilidad (OL)
- Suelo fino con alto contenido de materia orgánica de alta compresibilidad (OH)
- Suelo fino arcillolimoso de baja compresibilidad (símbolo doble: CL-ML)

Otros parámetros que se emplean para clasificar suelos finos son (Whitlow, 1994)

Índice de liquidez, IL

$$IL = \frac{w - LP}{LL - LP} = \frac{w - LP}{IP} \quad (47)$$

Actividad,  $Act$

$$Act = \frac{IP}{\% \text{partículas de arcilla} < 2 \mu m} \quad (48)$$

## EJEMPLOS

En los siguientes ejemplos el peso indicado se refiere al *peso total* del suelo en estado seco. En todos los casos se pide la clasificación de acuerdo al Sistema Unificado de Clasificación de Suelos (SUCS).

### Ejemplo

Clasifique el siguiente suelo:

- Retenido en la malla N° 4: 10%
- Pasa la malla N° 4 y es retenido en la malla N° 200: 60%
- Pasa malla N° 200: 30%

En la curva granulométrica:  $C_u = 4$ ,  $C_c = 2$

En la fracción fina:  $LL = 40\%$ ,  $LP = 25\%$

### Solución

$G = 10\%$ ,  $S = 60\%$ ,  $F = 30\%$

$IP = 40 - 25 = 15\%$

Anotando el punto en la Carta de Plasticidad (figura 6), apreciamos que le corresponde el símbolo parcial CL.

Como  $F < 30\%$ , se trata de un suelo grueso. Como  $S > G$ , se trata de una arena (S). Como  $F = C$ ;  $12\% < F < 50\%$ , de acuerdo con la tabla 4, el símbolo SUCS es **SC** (arena arcillosa).

### Ejemplo

Clasifique el siguiente suelo:

- Pasa la malla N° 4: 100%
- Pasa malla N° 200: 86%

En la fracción fina:  $LL = 150\%$ ,  $LP = 58\%$

### Solución

$F = 80\%$ , se trata de un suelo fino

$IP = 150 - 58 = 92\%$

Usando la ecuación 46

$$IP_A = \frac{22}{30}(LL - 20) = 0.7333(LL - 20)$$

$$IP_A = \frac{22}{30}(150 - 20) = 95.33\%$$

Como  $IP_A > IP$ , en la Carta de Plasticidad el punto del suelo queda por debajo de la línea "A", por lo tanto el símbolo SUCS es **MH** (limo de mediana plasticidad y de alta compresibilidad).

**Ejemplo**

Clasificar el suelo de la tabla 2 y de la figura 3, considerando que la fracción fina es una arcilla CL.

**Solución**

Habíamos obtenido:

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} = \frac{2.15}{0.13} = 16.54$$

$$C_c = \frac{0.55^2}{2.15 \times 0.13} = 1.082$$

De la tabla 2:

Por ciento que pasa la malla 2": 100%

Por ciento que pasa la malla N° 4: 73%

Por ciento que pasa la malla N° 200: 6%

Por lo tanto:  $G = 100 - 73 = 27\%$ ,  $S = 73 - 6 = 67\%$ ,  $F = 6\%$ .

Como  $S > G$ , se trata de una arena

De la tabla 4

$5\% < F < 12\%$ ;  $F = C$

$C_u > 6$  y  $1 < C_c < 3$

Por lo tanto, el símbolo SUCS es **SW-SC** (arena poco arcillosa, bien graduada)

Ciudad Universitaria, D F, septiembre de 2010

**REFERENCIAS**

Juárez Badillo, E y Rico, A, *Mecánica de Suelos*, tomo I, Limusa, México, D F, 1976

Whitlow, R, *Fundamentos de Mecánica de Suelos*, CECSA, México, D F, 1994

(Cs Clasificación de Suelos 160501)

# Capítulo 2

## FLUJO DE AGUA EN SUELOS

### CAPILARIDAD Y PROCESO DE CONTRACCIÓN

La capilaridad es un fenómeno debido a la atracción existente entre las moléculas de un líquido y a la atracción existente entre las moléculas de un líquido y un sólido. Los efectos capilares tienen influencia en el comportamiento de los suelos, especialmente en el de los suelos finos, en los cuales juegan un papel fundamental. Es debido a ellos que se presentan ascensiones capilares en los suelos que pueden alcanzar varios metros de altura, así como presiones en el agua que están por debajo de la presión atmosférica (presiones negativas). El fenómeno capilar es uno de los principales responsables del proceso de contracción de suelos finos y juega un papel muy importante en las operaciones de compactación de suelos.

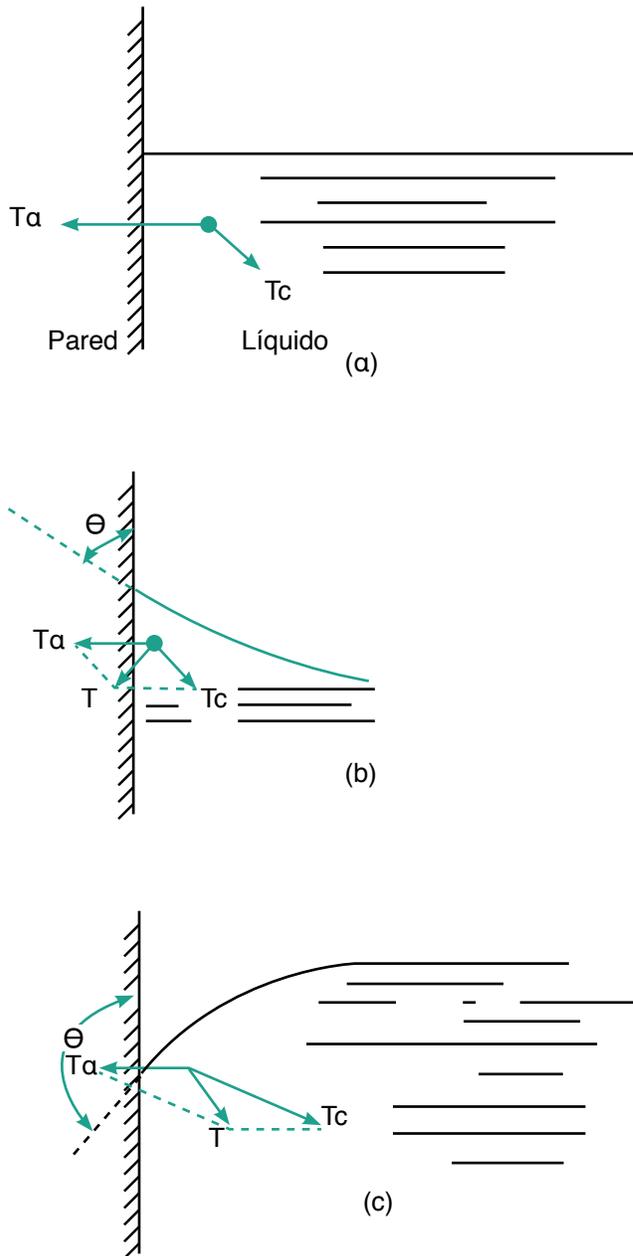
Entre otros efectos importantes en el fenómeno capilar, existe una fuerza de atracción entre las moléculas del agua, a la cual en física se denomina cohesión. También se presenta una fuerza de atracción entre las moléculas del agua y las de un sólido en contacto con ella, a la cual se le llama adherencia. Estas fuerzas son las responsables del fenómeno de tensión superficial, que se presenta en la superficie de los líquidos y por el cual se tiene que aplicar una cierta fuerza para que penetre un objeto dentro del líquido. En el agua se ha encontrado experimentalmente que la tensión superficial tiene una magnitud del orden de 0.073 N/m.

El fenómeno de ascensión capilar que ocurre en tubos de pared delgada, en los cuales las fuerzas moleculares predominan sobre las fuerzas gravitacionales, es debido a la tensión superficial. En estas condiciones, se llama capilaridad al fenómeno que consiste en el ascenso o descenso de un líquido colocado entre dos paredes separadas entre sí apenas una fracción de milímetro; sin embargo, la capilaridad se hace también notar en tubos de hasta 2.5 cm de diámetro (Mosqueira, 1960).

Para ilustrar la forma como ocurre el fenómeno capilar, consideremos las moléculas cercanas a la superficie de un líquido y a las paredes de un recipiente o a un sólido inmerso en el líquido. Estas moléculas son atraídas por fuerzas de cohesión, debidas a otras moléculas del líquido, y por fuerzas de adherencia ejercidas por las moléculas de la pared. En la figura 1 se presenta un líquido en contacto con la pared de un sólido. El punto representa una molécula de agua cerca de la superficie del líquido y de la pared, el vector  $T_a$  la fuerza de adherencia entre la molécula y la pared, y el vector  $T_c$  la fuerza de cohesión entre la molécula y el líquido. La resultante de estas fuerzas puede hallarse por los métodos usuales de suma de vectores (Sears, 1958). Si las fuerzas de adherencia y cohesión tienen las magnitudes relativas indicadas en la figura 1b, la fuerza resultante  $T$  queda en la dirección mostrada y puesto que un líquido puede estar en equilibrio sólo cuando la fuerza en su superficie forma un ángulo recto con dicha superficie en cualquier punto, la tangente a la superficie en el punto de contacto es perpendicular a la resultante. El ángulo  $\alpha$  se denomina ángulo de contacto, el cual entre agua y vidrio limpios tiene un valor muy cercano a cero; sin embargo, pequeñas cantidades de impurezas puede dar lugar a grandes variaciones en el mismo.

---

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingenierías Civil y Geomática. Facultad de Ingeniería. UNAM



FUERZAS DE ATRACCIÓN MOLECULAR  
FIGURA 1

*Equilibrio de fuerzas en un menisco*

Establezcamos el equilibrio de fuerzas verticales en el menisco de la figura 2

$$- u_a (\pi D^2/4) + u_w (\pi D^2/4) + T_s \cos \alpha (\pi D) = 0$$

$$(u_a - u_w) = \frac{4 T_s \cos \alpha}{D} \quad (1)$$

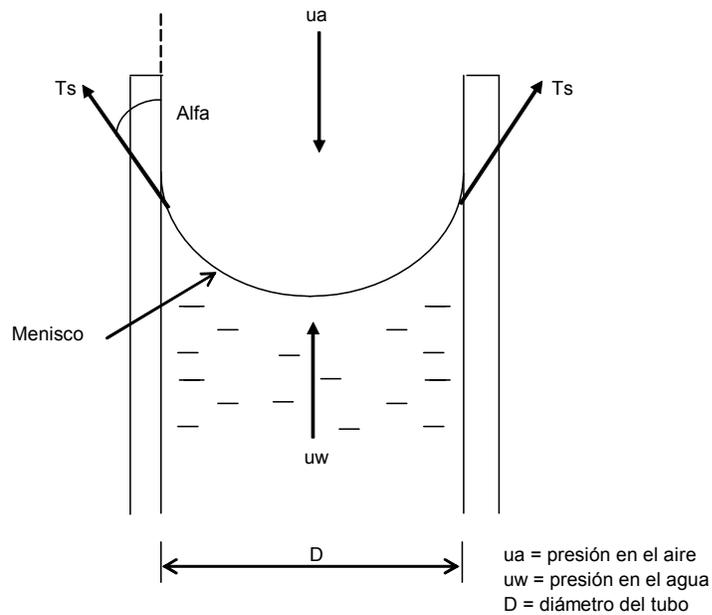
$u_a$  = presión en el aire, kPa

$u_w$  = presión en el agua, kPa

$T_s$  = tensión superficial, N/m

$\alpha$  = ángulo de contacto entre el agua y la pared del tubo capilar

$D$  = diámetro del tubo, m



TENSIÓN SUPERFICIAL  
FIGURA 2

*Altura capilar*

Sea un tubo capilar como el mostrado en la figura 3. Empleando el teorema de Bernoulli entre las elevaciones C y B

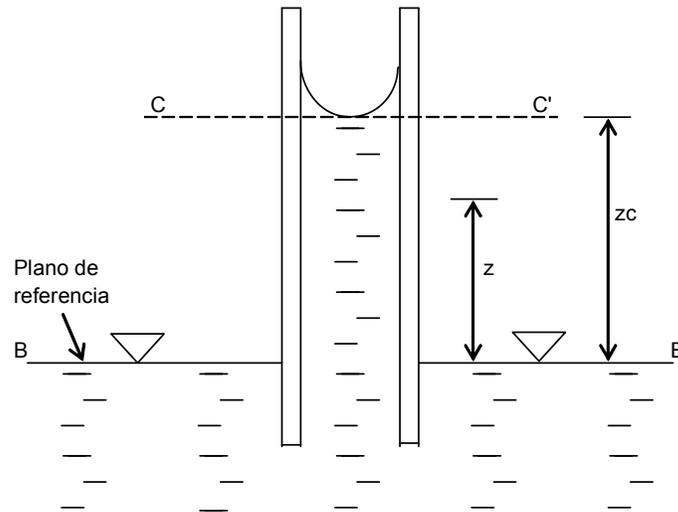
$$z_c + u_{wc}/\gamma_w = z_b + u_{wb}/\gamma_w \quad (2)$$

Tomando la elevación B-B' como plano de referencia:  $z_b = 0$ ,  $u_{wb}/\gamma_w = 0$ . Reemplazando en la ecuación 2

$$z_c + u_{wc}/\gamma_w = 0$$

$$z_c = - u_{wc}/\gamma_w \quad (3)$$

$$u_{wc} = - z_c \gamma_w \quad (4)$$



(Cs Flujo de Agua Figuras)

ALTURA CAPILAR  
FIGURA 3

Por otra parte, a la altura del menisco (ecuación 1)

$$(u_{ac} - u_{wc}) = \frac{4 T_s \cos \alpha}{D} \quad (5)$$

A la elevación C-C',  $u_{ac} = 0$ ; usando la ecuación 4

$$u_{wc} = - z_c \gamma_w$$

Sustituyendo en la ecuación 5

$$z_c \gamma_w = \frac{4 T_s \cos \alpha}{D}$$

$$z_c = \frac{4 T_s \cos \alpha}{\gamma_w D} \quad (6)$$

La ecuación 6 proporciona la altura de ascensión capilar  $z_c$  de un tubo de diámetro  $D$ .

Apreciamos que la altura de ascensión del agua es función inversa del diámetro del tubo capilar.

### Ejemplo

Calcular la altura capilar en una arcilla, considerando un diámetro promedio de los huecos  $D = 3 \mu\text{m}$ , una tensión superficial  $T_s = 0.073 \text{ N/m}$ , un ángulo de contacto  $\alpha = 0$  y un peso volumétrico del agua  $\gamma_w = 9.81 \text{ kN/m}^3$ .

### Solución

La altura capilar está dada por (ecuación 6)

$$z_c = \frac{4 T_s \cos \alpha}{\gamma_w D}$$

Sustituyendo valores

$$z_c = \frac{4(0.073)(1)}{9810(0.000003)} = 9.92 \text{ m}$$

La altura capilar se puede encontrar, en forma aproximada, en función de la relación de vacíos  $e$  y del diámetro efectivo  $D_{10}$  (Whitlow, 1994), de la siguiente forma: de la ecuación 6

$$z_c = \frac{4T_s \cos \alpha}{\gamma_w D}$$

$$T_s = 0.073 \text{ N/m} = 0.073 \times 10^{-6} \text{ kN/mm}$$

$$\cos \alpha \approx 1$$

$$\gamma_w = 9.81 \times 10^{-9} \text{ kN/mm}^3$$

$$D \approx e D_{10}$$

Sustituyendo en la ecuación 6

$$z_c = \frac{29}{eD_{10}} = \frac{C}{eD_{10}} \quad (6a)$$

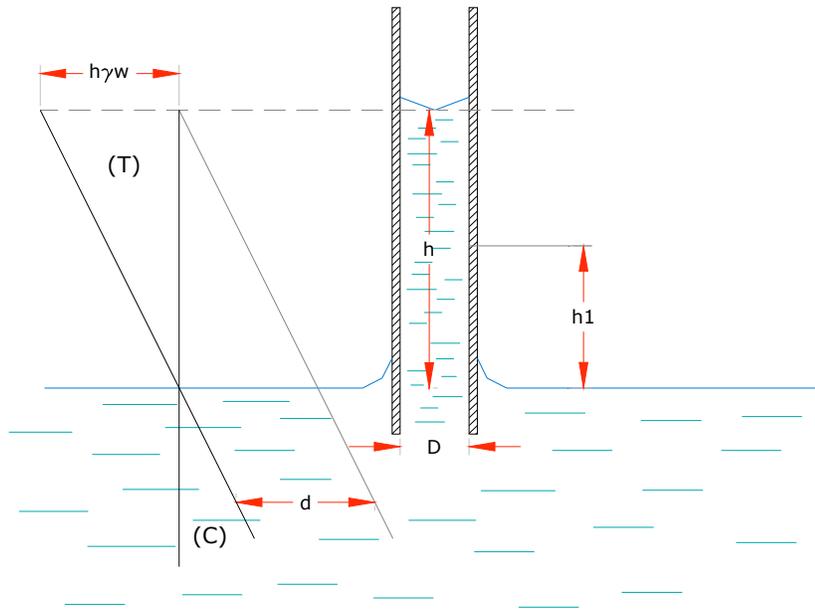
En la práctica se usa el siguiente intervalo de valores de  $C$

$$10 < C < 40 \text{ mm}^2$$

En la ecuación 6a el diámetro efectivo  $D_{10}$  debe estar en milímetros y el coeficiente  $C$  en  $\text{mm}^2$ . La magnitud de  $z_c$  en la ecuación 6a queda entonces en milímetros.

Consideremos el tubo capilar de la figura 3. De acuerdo con la ecuación 4, la presión hidráulica a la elevación C-C' es negativa y vale  $u_{wc} = -z_c \gamma_w$ . La presión en el agua a la elevación B-B' vale  $u_{wb} = 0$ . Usando el teorema de Bernoulli a cualquier altura  $z$  dentro del tubo capilar, encontramos que la presión en el agua es negativa y vale  $-z \gamma_w$ . Por lo tanto, la presión hidráulica tiene una variación lineal que va

de cero en el nivel B-B' a  $-z_c \gamma_w$  en el nivel C-C'. En la figura 4 se exhibe la variación de la presión hidráulica en el tubo capilar. Observamos que la presión en el agua tiene una variación lineal, con magnitud igual a cero al nivel de la superficie exterior, con valores negativos (tensiones) arriba de este nivel y con valores positivos (compresiones) abajo del mismo.



DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN UN TUBO CAPILAR VERTICAL  
FIGURA 4

A pesar de la geometría irregular de los huecos en un suelo, el fenómeno físico por la capilaridad es similar al expuesto en los párrafos anteriores para tubos capilares de sección circular constante. Por lo tanto, en los suelos se presentan ascensiones capilares del agua del mismo, que dependen del tamaño de los huecos del terreno (y por ende del tamaño de las partículas sólidas del mismo). Como ejemplo, en la tabla 1 se muestran magnitudes de ascensión capilar para diferentes clases de suelo (Das, 2001).

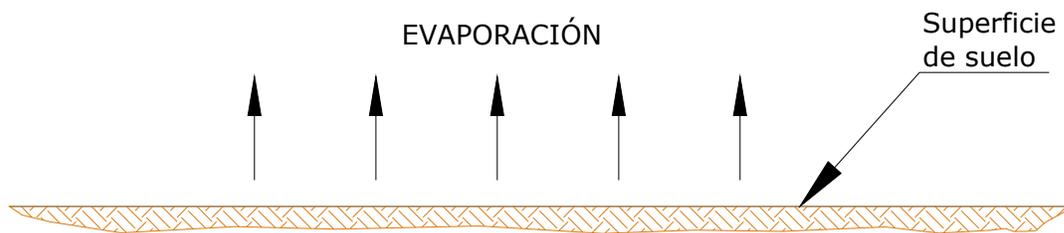
TABLA 1  
RANGO APROXIMADO DE ASCENSIÓN CAPILAR EN SUELOS

Tipo de suelo	Rango de ascensión capilar m
Arena gruesa	0.1 – 0.15
Arena fina	0.3 – 1.2
Limo	0.75 – 7.5
Arcilla	7.5 – 20

(Das, 2001)

De acuerdo con lo anterior, el agua en el subsuelo puede estar comprendida en general en tres diferentes zonas (figura 4A): (a) la zona de saturación bajo el nivel de aguas freáticas (NAF), en la cual el suelo está totalmente saturado y el agua se encuentra sometida a esfuerzos normales de compresión

(presiones por arriba de la presión atmosférica: esfuerzos normales positivos), (b) la zona de saturación por capilaridad arriba del NAF, en la que el suelo está totalmente saturado y el agua se encuentra sometida a esfuerzos por abajo de la presión atmosférica (esfuerzos normales de tensión, esfuerzos negativos), y (c) la zona en la cual el terreno se encuentra parcialmente saturado, arriba de la zona de saturación, en la que el agua está sujeta a esfuerzos por abajo de la presión atmosférica.



(C) Suelo parcialmente saturado

(b) Suelo totalmente saturado por capilaridad arriba del NAF (presiones negativas en el agua)



(c) Suelo totalmente saturado bajo el NAF (presiones positivas en el agua)

#### PRESENCIA DEL AGUA EN EL SUBSUELO FIGURA 4A

El nivel de agua freática (NAF) o nivel freático se define como el lugar geométrico de todos los puntos en los cuales el agua se encuentra a una presión igual a la presión atmosférica. Dado que en ingeniería civil es común tomar como origen de presiones a la presión atmosférica, es decir, considerar a la presión atmosférica como una presión igual a cero, en el NAF al agua le corresponde una presión nula (Deméneghi y coautores, 1989).

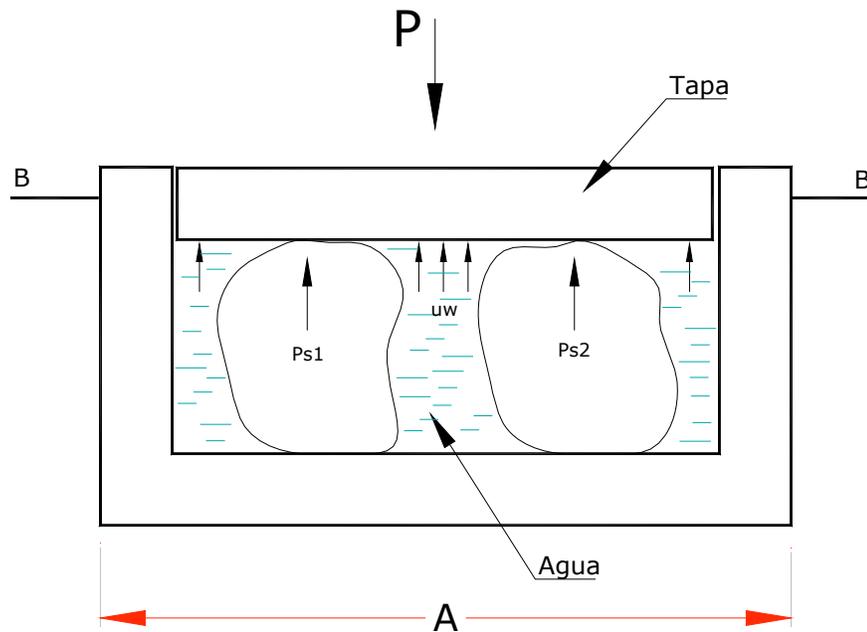
#### ESFUERZOS TOTALES, NEUTROS Y EFECTIVOS

Sea un elemento dentro de una masa de suelo y consideremos el estado de esfuerzos que existe en él. Debido a peso propio, se presentan en el elemento esfuerzos normales de compresión, tanto en la dirección vertical como en la horizontal. Por otra parte, si se construye una obra de ingeniería habrá un incremento de esfuerzos en el elemento, debidos a la acción de dicha obra. Cabe señalar que es de fundamental importancia en mecánica de suelos determinar tanto los esfuerzos en el suelo debidos a peso propio, como los incrementos de esfuerzo producidos por la presencia de la obra de ingeniería.

En este inciso veremos el estado de esfuerzo debido únicamente a peso propio del terreno, para la condición de un medio seminfinito, con superficie horizontal.

En una masa de suelo se presentan en general esfuerzos normales de compresión, los cuales se consideran como esfuerzos normales positivos. Además, en ingeniería civil se toma a la presión atmosférica como origen de presiones; por lo tanto, esfuerzos normales de compresión mayores que la presión atmosférica se toman como positivos, y, por lo mismo, esfuerzos normales menores que la presión atmosférica se consideran negativos.

Consideremos un sistema de dos partículas de suelo dentro de un émbolo, como el indicado en la figura 5, el cual está sometido a una carga  $P$  en su parte superior, encontrándose además lleno de agua sujeta a una presión  $u_w$  al nivel B-B'.



PRESIONES EN SUELOS TOTALMENTE SATURADOS  
FIGURA 5

Al nivel B-B' la carga  $P$  es igual a la suma de las siguientes fuerzas (figura 5)

$$P = P_s + u_w (A - A_s) \quad (7)$$

$$\text{donde } P_s = P_{s1} + P_{s2}$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

siendo  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$  las áreas de contacto de las partículas 1 y 2 con la tapa, al nivel B-B'. Dividiendo la ecuación 7 entre  $A$

$$\frac{P}{A} = \frac{P_s}{A} + u_w \left( 1 - \frac{A_s}{A} \right) \quad (8)$$

Definamos la presión total vertical y la presión efectiva vertical de la siguiente forma

$$\text{Presión total vertical} = p_v = \frac{P}{A} \quad (9)$$

$$\text{Presión efectiva vertical} = p_v' = \frac{P_s}{A} \quad (10)$$

Reemplazando en la ecuación 8

$$p_v = p_v' + u_w \left( 1 - \frac{A_s}{A} \right) \quad (11)$$

Las áreas de contacto entre las partículas y la tapa,  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ , son pequeñas, por lo que el cociente  $A_s/A$  es de baja magnitud y puede despreciarse, con lo que la ecuación 11 queda

$$p_v = p_v' + u_w \quad (12)$$

En una masa de suelo se presenta un fenómeno físico similar al del émbolo con sus partículas, por lo que la ecuación 12 se emplea en mecánica de suelos para determinar la relación entre la presión total vertical  $p_v$ , la presión efectiva vertical  $p_v'$  y la presión hidráulica  $u_w$ , en suelos totalmente saturados.

El esfuerzo que se presenta en los contactos de las partículas con la tapa del modelo (figura 5), o entre las partículas del suelo,  $\sigma_P$ , que se define como

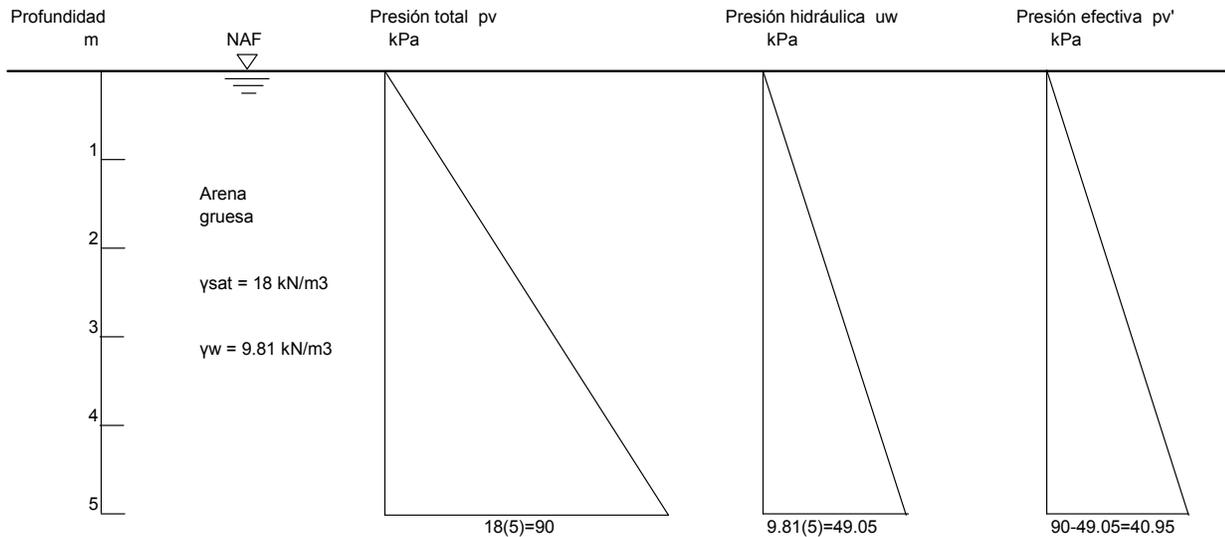
$$\sigma_P = \frac{P_s}{A_s} \quad (13)$$

es en general alto y difícil de evaluar, por la dificultad de conocer en la naturaleza, tanto la fuerza como el área de contacto entre las partículas. Por esta razón, para estudiar los fenómenos que ocurren en una masa de suelo se prefiere trabajar con la presión efectiva vertical  $p_v'$ , como se definió con la ecuación 10, la cual se obtiene como se verá en los siguientes párrafos.

En la práctica, la presión total vertical  $p_v$  se puede calcular con relativa facilidad en un medio seminfinito; la presión neutra o presión hidráulica  $u_w$ , en suelos totalmente saturados, se puede valorar utilizando el principio de los vasos comunicantes de la hidráulica, en caso de que el agua del suelo se encuentre en una condición hidrostática; si existe una condición hidrodinámica, ocasionada por diversos fenómenos, como artesianismo, bombeo del agua del subsuelo u otros, la presión neutra se puede estimar en el campo con el uso de piezómetros. Aun cuando el peso volumétrico del agua es función de varios factores, como la temperatura, la aceleración de la gravedad en el sitio, u otros, usaremos para fines prácticos un  $\gamma_w = 9.81 \text{ kN/m}^3$ .

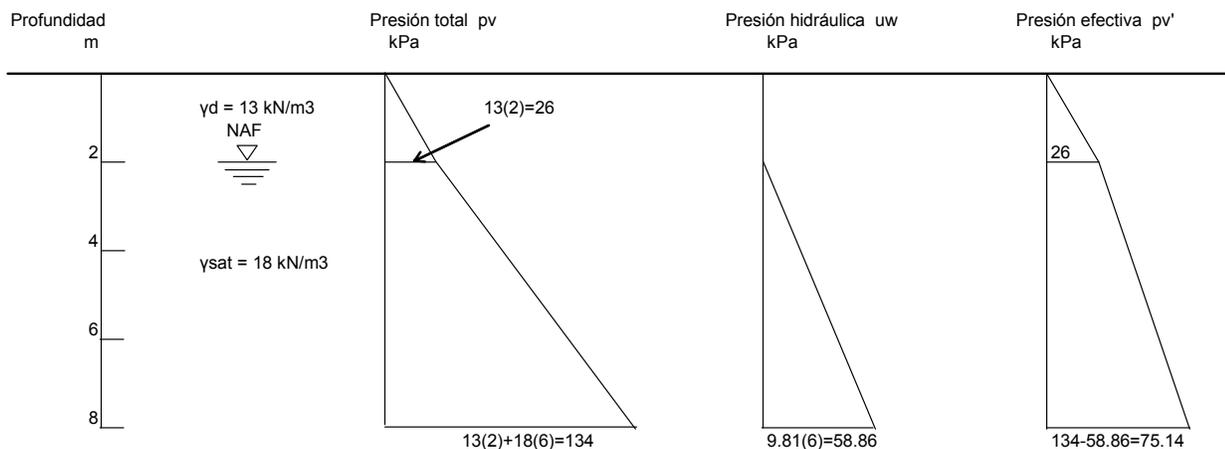
La presión efectiva vertical  $p_v'$  se puede entonces calcular empleando la ecuación 12

$$p_v' = p_v - u_w \quad (14)$$



DIAGRAMAS DE PRESIÓN VERTICAL  
FIGURA 6

Para ilustrar la forma de computar las presiones verticales en los suelos, consideremos un sedimento de arena gruesa, el cual el nivel de agua freática (NAF) se encuentra en la superficie del terreno. El suelo tiene un peso volumétrico saturado  $\gamma_{sat} = 18 \text{ kN/m}^3$  (figura 6). A 5 m de profundidad la presión total vertical vale  $18(5) = 90 \text{ kN/m}^2 = 90 \text{ kPa}$ ; suponiendo que el agua se encuentra en una condición hidrostática, y utilizando el principio de los vasos comunicantes, la presión neutra o presión en el agua vale  $9.81(5) = 49.05 \text{ kPa}$ . Empleando la ecuación 14 obtenemos la presión efectiva vertical a 5 m de profundidad:  $p_v' = 90 - 49.05 = 40.95 \text{ kPa}$ . En la figura 6 se exhibe la variación de las presiones total, neutra y efectiva con la profundidad.



DIAGRAMAS DE PRESIÓN VERTICAL  
FIGURA 7

Consideremos ahora otro depósito de la misma arena, en el cual el NAF se encuentra a 2 m de profundidad (figura 7). Consideremos además que la arena está seca arriba del NAF, y que tiene un peso volumétrico seco de  $13 \text{ kN/m}^3$ . Los diagramas de presión total, presión neutra y presión efectiva se muestran en la figura 7, calculados hasta una profundidad de 8 m. Por definición del nivel de agua freática (NAF), la presión hidráulica a 2 m de profundidad vale cero, y luego aumenta linealmente con la

profundidad (suponiendo una condición hidrostática). A manera de ejemplo, las presiones a 8 m de profundidad son

$$p_{v8} = 13(2) + 18(6) = 134 \text{ kPa}$$

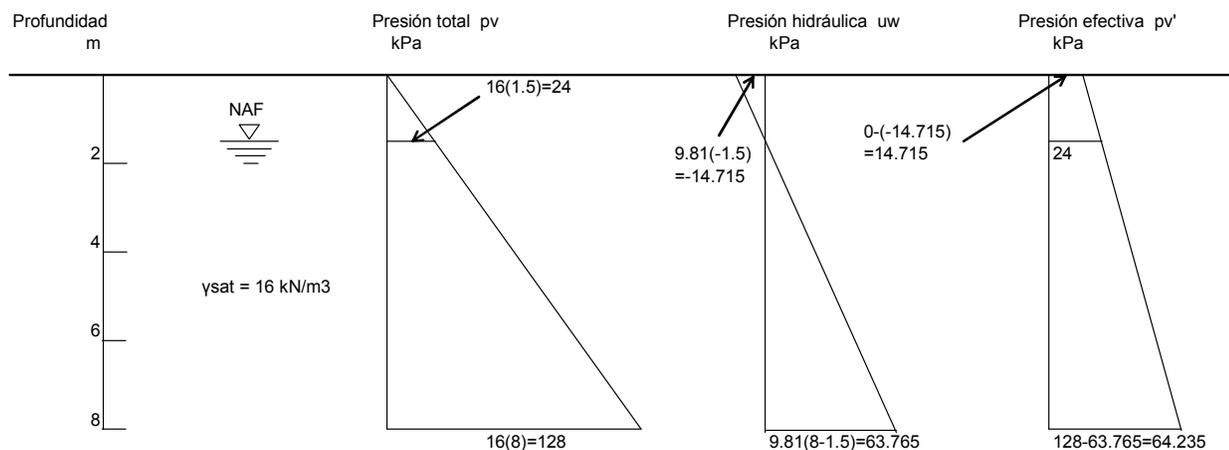
$$u_{w8} = 9.81(6) = 58.86 \text{ kPa}$$

$$p_{v8}' = 134 - 58.86 = 75.14 \text{ kPa}$$

Si el agua del suelo está en una condición hidrostática, la presión efectiva vertical se puede obtener también usando en los cálculos el peso volumétrico sumergido  $\gamma' = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_w$ , para las elevaciones bajo el NAF. Así

$$p_{v8}' = 13(2) + (18 - 9.81)(6) = 75.14 \text{ kPa}$$

En suelos finos, como comentamos en párrafos anteriores, el fenómeno capilar juega un papel importante, que ocasiona ocurra una ascensión del agua, cuya magnitud depende del tamaño de las partículas del suelo. Como ejemplo, consideremos una arcilla de peso volumétrico saturado  $16 \text{ kN/m}^3$ , en el cual el NAF se encuentra a 1.5 m de profundidad. Supongamos que por capilaridad el agua asciende hasta la superficie. Del nivel freático hacia arriba el agua está sujeta a presiones menores que la atmosférica, por lo que en esta zona la presión en el agua es negativa. Bajo el NAF el agua soporta presiones mayores que la atmosférica, siendo éstas positivas. Los diagramas de presión total, neutra y efectiva se exhiben en la figura 8. A continuación presentamos los cálculos para diferentes niveles:



DIAGRAMAS DE PRESIÓN VERTICAL  
FIGURA 8

Profundidad igual a cero:  $p_{v0} = 0$ ;  $u_{w0} = 9.81(-1.5) = -14.715 \text{ kPa}$ ;  $p_{v0}' = 0 - (-14.715) = 14.715 \text{ kPa}$

Profundidad igual a 1.5 m:  $p_{v1.5} = 16(1.5) = 24 \text{ kPa}$ ;  $u_{w1.5} = 0$ ;  $p_{v1.5}' = 24 - 0 = 24 \text{ kPa}$

Profundidad igual a 8 m:  $p_{v8} = 16(8) = 128 \text{ kPa}$ ;  $u_{w8} = 9.81(8 - 1.5) = 63.765 \text{ kPa}$ ;  $p_{v8}' = 128 - 63.765 = 64.235 \text{ kPa}$

En la figura 8 se muestran los diagramas de presiones total, hidráulica y efectiva.

En este ejemplo estamos suponiendo que el suelo se encuentra totalmente saturado por capilaridad hasta la superficie.

En la naturaleza, la condición del agua en la zona arriba del NAF puede variar apreciablemente durante todo año. Así, en época de lluvias el suelo puede estar totalmente saturado debido a la alta precipitación pluvial, mientras que en la temporada de estiaje el terreno puede estar con un grado de saturación bajo cerca de la superficie, debido al fenómeno de evapotranspiración; más abajo puede estar parcialmente saturado y cerca del NAF totalmente saturado. Por esta razón, conviene en la práctica suponer la condición más desfavorable durante la vida útil de una obra de ingeniería, y calcular los diagramas de presión para esta situación.

En ocasiones puede ocurrir que en el campo el agua esté en una condición hidrodinámica diferente a la hidrostática. El flujo hidrodinámico puede ocurrir cuando se extrae por bombeo el agua del subsuelo, o cuando se presenta el fenómeno de artesianismo. En estos casos, la estimación de la presión en el agua se realiza con la colocación de piezómetros, que son instrumentos que consisten en tubos abiertos que se introducen en el subsuelo, y permiten el libre acceso del agua por su extremo inferior y la medición del nivel del agua en su porción superior. En la figura 9 se exhibe un piezómetro abierto tipo Casagrande (Santoyo y Contreras, 2001).

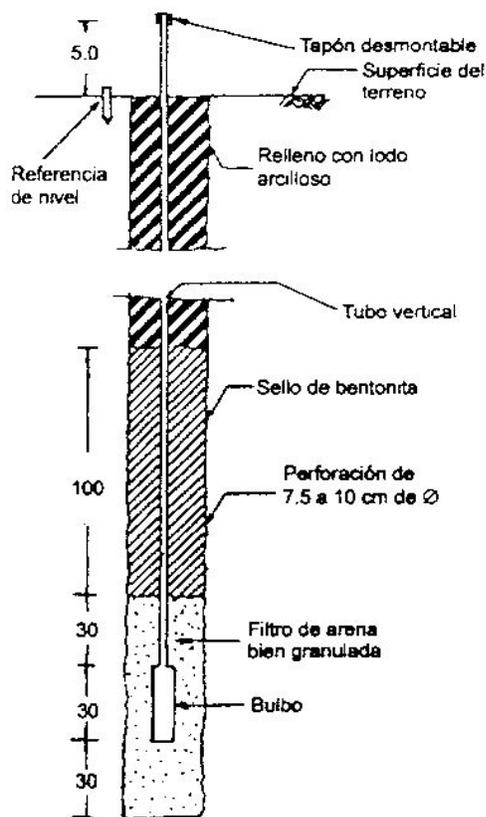


Figura sin escala  
Anotaciones en cm

### PIEZÓMETRO FIGURA 9

(Santoyo y Contreras, 2001)

## LEY DE DARCY

*Carga hidráulica*

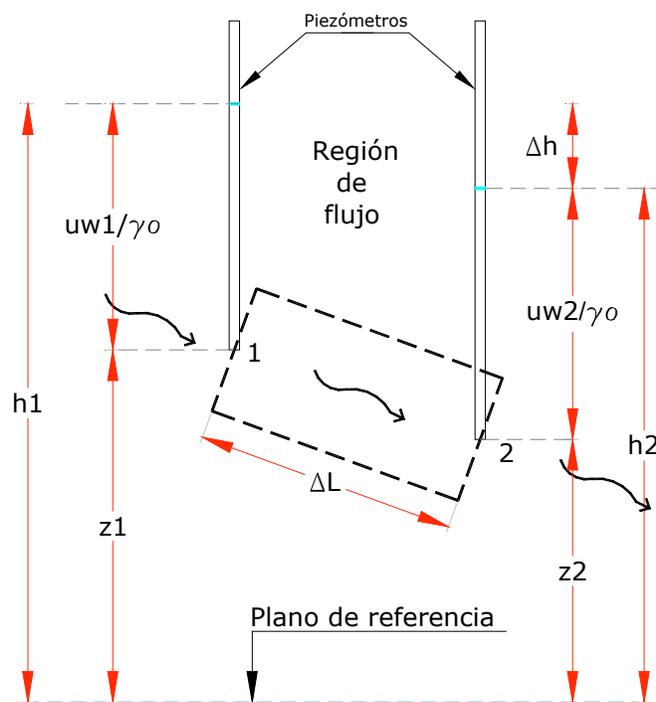
Sea una región de flujo como la mostrada en la figura 10. Definimos la carga hidráulica en un punto de dicha región como la suma de la carga de posición, más la carga de presión, más la carga de velocidad, es decir

$$h = z + u_w/\gamma_w + v^2/2g \quad (15)$$

La velocidad del agua en el subsuelo en general es pequeña, y suele despreciarse el término de la carga de velocidad; así, la ecuación 15 queda

$$h = z + u_w/\gamma_w \quad (16)$$

Instalemos dos piezómetros en los extremos del elemento de suelo mostrado en la figura 10. En el punto 1 el agua ascenderá hasta una altura que depende de la carga de presión en dicho punto. En el punto 2 el agua asciende a una altura menor, debido a la disipación de energía por calor debido a la fricción entre agua y partículas del suelo.



ELEMENTO DE SUELO EN UNA REGIÓN DE FLUJO  
FIGURA 10

Si llamamos  $u_{w1}$  a la presión en el agua en el punto 1, la altura a la que asciende el agua en el piezómetro, medida desde el punto 1, valdrá  $u_{w1}/\gamma_w$ , la cual se conoce como carga de presión y se expresa en metros de columna de agua. Tracemos un plano de referencia y midamos la distancia vertical entre éste y el punto 1; a esta altura se le conoce como carga de posición del punto 1. Como indicamos antes, a la suma de las cargas de presión y de posición (despreciando la carga de velocidad) se le denomina carga hidráulica (o altura piezométrica).

Por lo tanto, la carga hidráulica en el punto 1 es

$$h_1 = z_1 + u_{w1}/\gamma_w$$

En el punto 2

$$h_2 = z_2 + u_{w2}/\gamma_w$$

De acuerdo con el teorema de Bernoulli, la carga hidráulica en el punto 1 será igual a la carga hidráulica en el punto 2 más la pérdida de carga hidráulica  $\Delta h$  por disipación de energía

$$h_1 = h_2 + \Delta h \quad (17)$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 \quad (18)$$

#### Gradiente hidráulico

El gradiente hidráulico,  $i_{1-2}$ , entre los puntos 1 y 2 se define como el cociente entre la pérdida de carga hidráulica entre dichos puntos y la longitud entre ellos, medida ésta en la dirección del flujo. Así, en la región de flujo de la figura 10, el gradiente hidráulico entre los puntos 1 y 2 vale (Deméneghi y coautores, 1989)

$$i_{1-2} = \frac{\Delta h}{\Delta L} \quad (19)$$

Como señalamos antes, en mecánica de suelos, en general el flujo que ocurre en el subsuelo es del tipo laminar; sólo en condiciones muy particulares se llega a presentar flujo turbulento.

#### Ley de Darcy

Para flujo laminar, Henri Darcy encontró que la velocidad de descarga en el terreno es proporcional al gradiente hidráulico, es decir

$$v \approx i \quad (20)$$

$$v = ki \quad (21)$$

En la ecuación 21,  $k$  es un coeficiente de proporcionalidad, y se conoce como *coeficiente de conductividad hidráulica* o *coeficiente de permeabilidad*. La fórmula 21 es justamente la ley de Darcy.

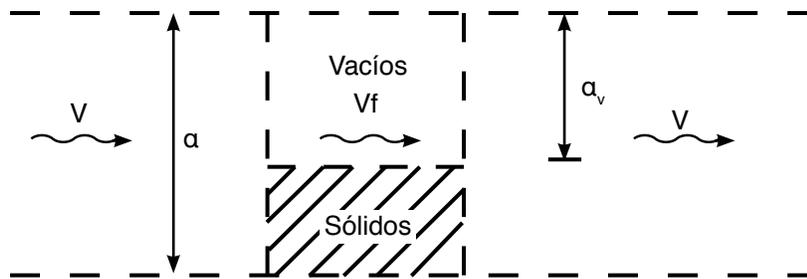
En la ecuación 21 la variable  $v$  es la velocidad de descarga, que se obtiene al dividir el gasto de descarga entre el área total transversal del elemento (en dirección normal a las líneas de flujo). De hecho, la velocidad de descarga no mide la velocidad real del agua, pues para su determinación no se emplea el área de los vacíos del suelo. Para hacer una estimación más realista de la velocidad del agua

se obtiene la velocidad de filtración, la cual es el cociente del gasto de descarga entre el área de los vacíos del suelo. De acuerdo con la figura 11

$$v_f = \frac{q}{a_v}$$

$$q = av = a_v v_f$$

$$v_f = \frac{a}{a_v} v$$



VELOCIDAD DE FILTRACIÓN  
FIGURA 11

Tomando un espesor unitario en dirección normal al papel (figura 11)

$$\frac{V_v}{V_m} = \frac{a_v}{a} = n = \frac{e}{1+e} \quad (b)$$

donde  $n$  = porosidad  
 $e$  = relación de vacíos

Por lo tanto

$$v_f = \frac{1}{n} v = \frac{1+e}{e} v \quad (22)$$

Conociendo entontes la velocidad de descarga,  $v$ , y la porosidad,  $n$ , o la relación de vacíos,  $e$ , se puede estimar la velocidad de filtración, la cual es una medida aproximada de la velocidad real del agua en el suelo.

## MÉTODOS PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD

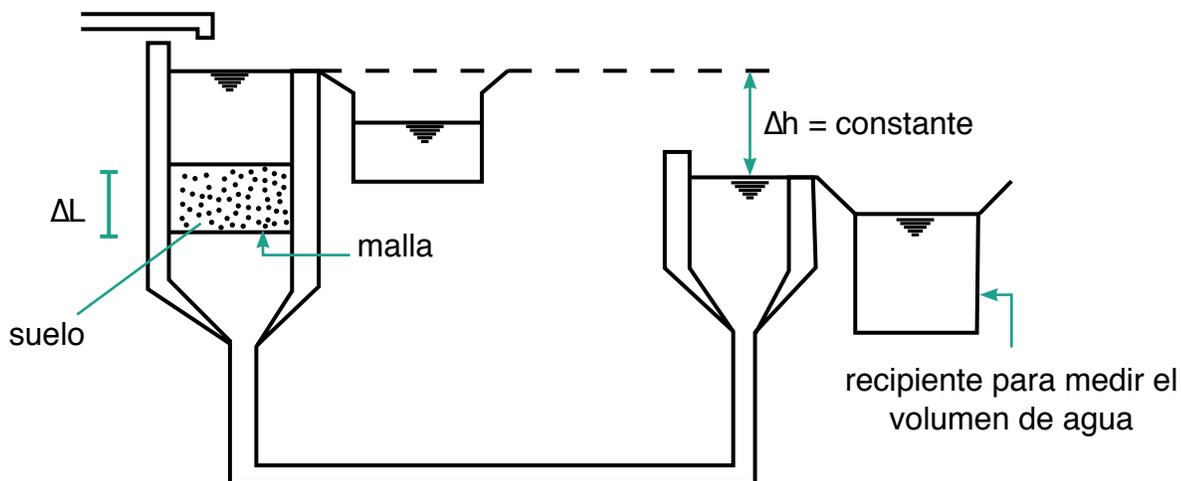
Los procedimientos para determinar el coeficiente de conductividad hidráulica o coeficiente de permeabilidad,  $k$ , del suelo se dividen en: (1) métodos directos, y (2) métodos indirectos.

## 1) Métodos directos

- a) Permeámetro de carga constante
- b) Permeámetro de carga variable
- c) Prueba de bombeo en el campo

*Permeámetro de carga constante*

Sea el espécimen de suelo con área transversal  $A$  y longitud  $\Delta L$  mostrado en la figura 12, el cual se somete a una pérdida de carga hidráulica  $\Delta h$  como se indica en la figura, y se mide en un recipiente el volumen de agua  $V$  que pasa en un tiempo  $t$ .



PERMEÁMETRO DE CARGA CONSTANTE  
FIGURA 12

El gasto es

$$q = \frac{V}{t}$$

$$q = \frac{V}{t}$$

$$V = qt$$

Empleando la ley de Darcy

$$V = Avt = Akit \quad (23)$$

Pero

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L}$$

Sustituyendo en la ecuación 23

$$V = Ak \frac{\Delta h}{\Delta L} t$$

$$k = \frac{V\Delta L}{(\Delta h)At} \quad (24)$$

Este tipo de pruebas sólo pueden hacerse en materiales permeables como gravas y arenas, para que el volumen de agua en el recipiente no tenga tiempo de sufrir evaporación.

#### *Permeámetro de carga variable*

El permeámetro de carga variable se emplea en suelos de pequeñas partículas, como las arenas finas, las arenas limosas y los limos arenosos. En éste se mide la cantidad de agua que atraviesa la muestra de suelo por la diferencia de niveles en un tubo alimentador, como se exhibe en la figura 13. Así, usando la ley de Darcy

$$q = \frac{dV}{dt} = Av = Aki$$

$$dV = kiAdt \quad (25)$$

En el tiempo dt habrá ocurrido un desplazamiento vertical  $d(\Delta h)$ , por lo que

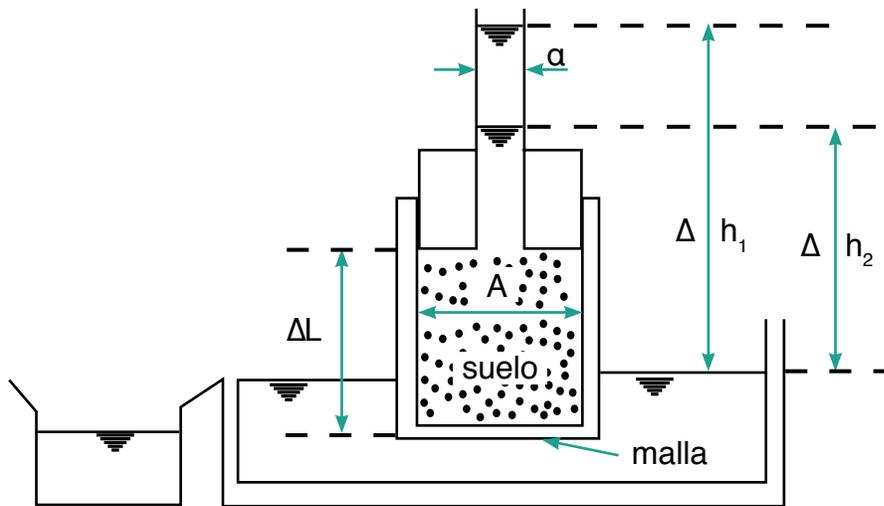
$$dV = -ad(\Delta h) \quad (26)$$

Igualamos los volúmenes dados por las ecuaciones 25 y 26

$$Aki dt = -ad(\Delta h) \quad (27)$$

Pero

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L}$$



PERMEÁMETRO DE CARGA VARIABLE  
FIGURA 13

Reemplazando en la ecuación 27, e integrando

$$-a \int_{\Delta h_1}^{\Delta h_2} \frac{d(\Delta h)}{\Delta h} = \frac{kA}{\Delta L} \int_0^t dt$$

$$k = \frac{a\Delta L}{At} \ln\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right) \quad (28)$$

Como  $\ln x = 2.3 \log_{10} x = 2.3 \log x$

$$k = \frac{2.3a\Delta L}{At} \log\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right) \quad (29)$$

#### Prueba de bombeo en el campo

La obtención de la permeabilidad en el campo en forma directa se puede llevar a cabo mediante la ejecución de pruebas de bombeo. Este procedimiento tiene la ventaja de que involucra una gran masa de suelo, por lo que el coeficiente de permeabilidad encontrado es representativo de un volumen grande del terreno.

Consideremos el pozo de la figura 14 (Zeevaert, 1973). El gasto de bombeo  $q$  vale

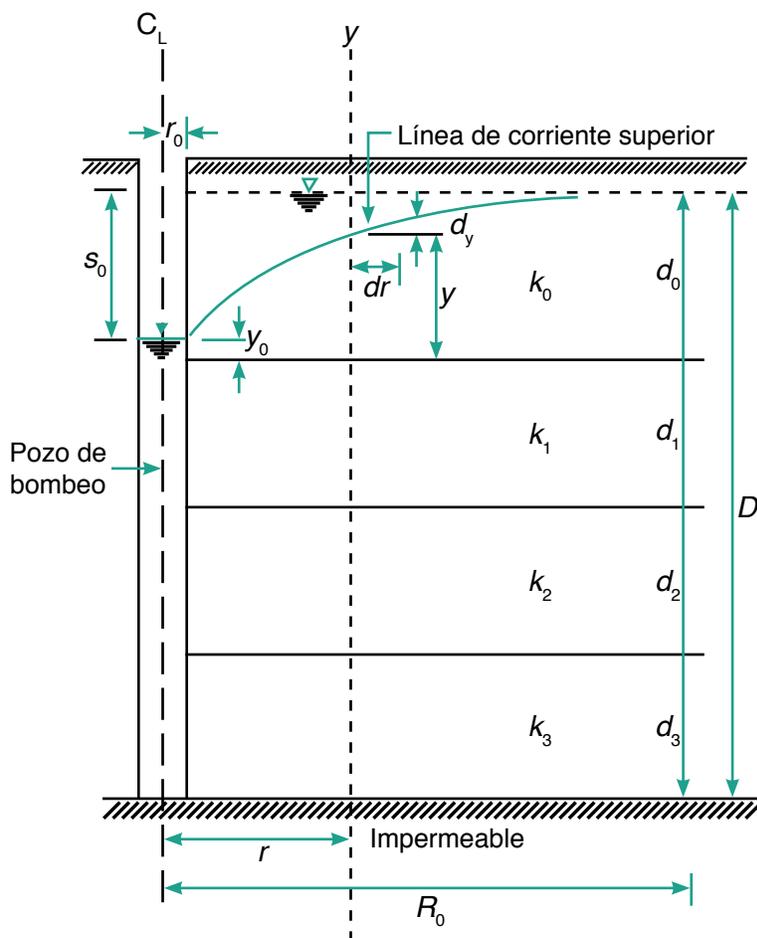
$$q = 2\pi r y k_0(dy/dr) + 2\pi r d_1 k_1(dy/dr) + 2\pi r d_2 k_2(dy/dr) + \dots$$

Integrando

$$q \int (dr/r) = 2\pi k_0 \int y dy + 2\pi d_1 k_1 \int dy + 2\pi d_2 k_2 \int dy + \dots + C \tag{30}$$

Tenemos las siguientes condiciones de frontera (figura 14): para  $r = R_0$ ,  $y = d_0$ . Reemplazando en la ecuación 30

$$C = q \ln R_0 - \pi k_0 d_0^2 - 2\pi d_0 \sum k_i d_i$$



POZO DE BOMBEO  
FIGURA 14

(Zeevaert, 1973)

Es decir

$$q \ln (R_0/r) = \pi k_0 (d_0^2 - y^2) + 2\pi (d_0 - y) \sum k_i d_i \tag{31}$$

Consideremos un pozo de bombeo con flujo confinado ( $k_o = 0$ ) y un solo estrato permeable, de coeficiente de permeabilidad  $k$  y espesor  $d$ . La ecuación 31 queda

$$q \ln (R_o/r) = 2\pi (d_o - y) k d$$

Tomemos dos puntos a distancias  $r_1$  y  $r_2$  del pozo ( $r_1 < r_2$ ,  $y_1 < y_2$ ). Reemplazando en la ecuación anterior

$$q \ln (R_o/r_1) = 2\pi (d_o - y_1) k d \quad (32)$$

$$q \ln (R_o/r_2) = 2\pi (d_o - y_2) k d \quad (33)$$

Restando la ecuación 33 de la ecuación 32, y despejando  $k$

$$k = \frac{q \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}{2\pi d (y_2 - y_1)} \quad (34)$$

La fórmula 34 permite calcular el coeficiente de permeabilidad  $k$  de un acuífero de espesor  $d$ , con mediciones en dos piezómetros ( $r_1$ ,  $y_1$ ) y ( $r_2$ ,  $y_2$ ).

## 2) Métodos indirectos

### *Cálculo a partir de la curva granulométrica*

Allen Hazen encontró que para filtros de arena limpia, el coeficiente de permeabilidad se puede expresar como

$$k = CD_{10}^2 \quad (35)$$

donde  $k$  = coeficiente de permeabilidad, cm/s

$D_{10}$  = diámetro efectivo, cm

Esta fórmula fue obtenida mediante experimentación con arenas uniformes con un  $D_{10}$  comprendido entre 0.1 y 3 mm.

En estos suelos el valor de  $C$  fluctúa entre 41 y 146; en general se acepta un valor medio  $C = 116$ .

La ecuación 35 sólo sirve para dar un valor grosero del coeficiente de permeabilidad en arenas.

En la tabla 2 se presentan magnitudes del coeficiente de permeabilidad  $k$  para diferentes suelos (Das, 2001)

TABLA 2  
MAGNITUDES DEL COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD VERTICAL

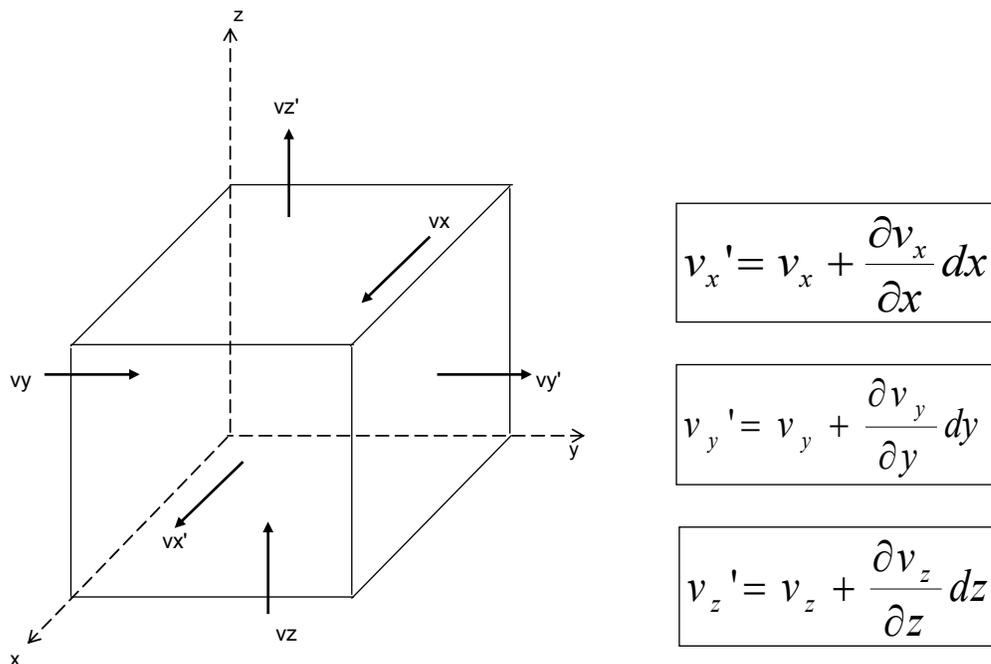
Tipo de suelo	$k_z$
	cm/s
Grava limpia	> 1.0
Arena limpia, mezcla de arena y grava limpias	1.0 a $10^{-3}$
Arena fina, limo, mezcla de arena, limo y arcilla	$10^{-3}$ a $10^{-7}$
Arcilla homogénea	< $10^{-7}$

(Das, 2001)

### ECUACIÓN GENERAL DEL FLUJO DE AGUA EN SUELOS

En este inciso obtendremos la fórmula general hidrodinámica que rige el flujo permanente de agua a través de medios porosos, en un suelo totalmente saturado, suponiendo válida la ley de Darcy.

Consideremos una región de flujo en un suelo, y tomemos un elemento de suelo dentro de ella (figura 15). Denominemos  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  a las velocidades del agua en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.



ELEMENTO DE SUELO EN UNA REGIÓN DE FLUJO PERMANENTE  
FIGURA 15

El gasto de entrada al elemento es (Deméneghi y coautores, 1989)

$$v_x dydz + v_y dx dz + v_z dx dy \quad (36)$$

El gasto de salida

$$v_x' dydz + v_y' dx dz + v_z' dx dy$$

$$\left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy \quad (37)$$

Aceptando que no hay pérdida de masa de agua dentro del elemento, y que tampoco existe variación de volumen del mismo, el gasto de entrada debe ser igual al gasto de salida. Por lo tanto, podemos igualar las expresiones 36 y 37

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (38)$$

A la expresión 38 se le conoce como ecuación de continuidad del gasto.

Consideremos válida la ley de Darcy ( $v = k i$ ), y que

$$i_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ etcétera}$$

$$v_x = k_x i_x = k_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = k_y i_y = k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (39)$$

$$v_z = k_z i_z = k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

Reemplazando las ecuaciones 39 en la ecuación de continuidad 38

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (40)$$

Consideremos que la permeabilidad se mantiene constante en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , entonces  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  son constantes, y

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (41)$$

Trabajando únicamente con flujo bidimensional en dirección  $xy$ , es decir, suponiendo que la componente de la velocidad en la dirección  $z$ ,  $v_z$ , es nula

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (42)$$

Aceptando ahora la condición de isotropía, es decir, que la permeabilidad en la dirección x,  $k_x$ , es igual a la permeabilidad en la dirección y,  $k_y$ ,  $k_x = k_y = k$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (43)$$

A esta última expresión se le conoce en matemáticas como la ecuación de Laplace, la cual rige el flujo de agua bidimensional, en un medio poroso homogéneo e isótropo.

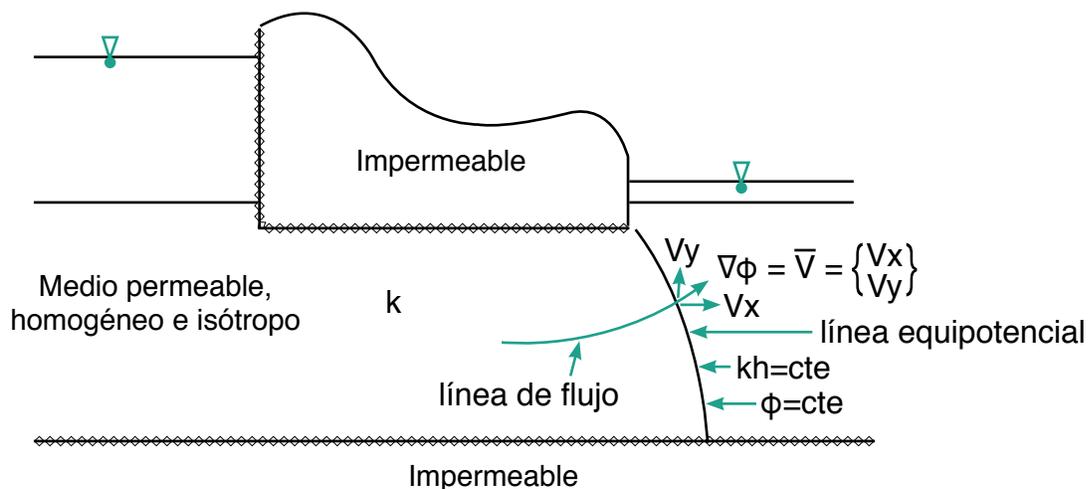
La fórmula 43 se puede poner  $\nabla^2 h = 0$ , donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Las ecuaciones 40 a 43 se pueden resolver con los siguientes procedimientos: (a) solución gráfica, (b) solución analítica, y (c) solución numérica.

#### SOLUCIÓN GRÁFICA. REDES DE FLUJO

Sea el vertedor de demasías de la figura 16. A esta estructura la consideramos impermeable. Supongamos además que el vertedor se desplanta sobre un suelo permeable, homogéneo e isótropo. Debido a que la carga hidráulica es mayor del lado de aguas arriba, el agua fluye de izquierda a derecha en la figura.



LÍNEA EQUIPOTENCIAL Y LÍNEA DE FLUJO  
FIGURA 16

Además, la carga hidráulica irá variando, de valores grandes del lado izquierdo a valores menores de lado derecho, pues el flujo va disipando energía por fricción entre el agua y las partículas de suelo.

Por lo anterior, podemos considerar que la carga hidráulica  $h$  es una función escalar que depende de la posición del punto en la región de flujo. Vemos entonces que tenemos una transformación de un espacio de dos dimensiones (las coordenadas del punto) a otro de una dimensión (la función  $h$ ). Es decir, se trata de una función escalar  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , en la cual el dominio son las coordenadas del punto y el codominio es el valor de  $h$  en dicho punto (Deméneghi y coautores, 1989). En general, la magnitud de  $h$  la desconocemos en la región de flujo, salvo en las fronteras, donde con frecuencia se conoce.

Supongamos que podemos trazar una curva que una los puntos en los cuales  $h$  es constante; sea esta línea la curva 1 (figura 16). Si en la curva 1  $h$  es constante, en un medio homogéneo e isótropo lo es también el producto  $kh$ , pues  $k$  es constante en todo el medio permeable. Denominemos  $\varphi$  a la función  $kh$ . En los puntos donde  $kh = \text{cte}$

$$\varphi(x, y) = k h(x, y) = \text{cte}$$

El gradiente de  $\varphi$  es

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j = \frac{\partial(kh)}{\partial x} i + \frac{\partial(kh)}{\partial y} j$$

$$\nabla \varphi = k \frac{\partial h}{\partial x} i + k \frac{\partial h}{\partial y} j \quad (44)$$

Pero, por la ley de Darcy

$$v_x = k_x i_x = k_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = k_y i_y = k_y \frac{\partial h}{\partial y}$$

Por lo tanto

$$\nabla \varphi = v_x i + v_y j \quad (45)$$

Observamos que el vector gradiente es igual al vector velocidad del agua. Además, en matemáticas se demuestra que el vector gradiente  $\nabla \varphi$  es perpendicular a las líneas  $\varphi = \text{cte}$  (Apostol, 1969).

A las líneas  $\varphi = \text{cte}$  se les denomina líneas equipotenciales y a las trayectorias del agua se les llama líneas de flujo.

Por lo anterior, vemos que las líneas de flujo deben ser perpendiculares a las líneas equipotenciales.

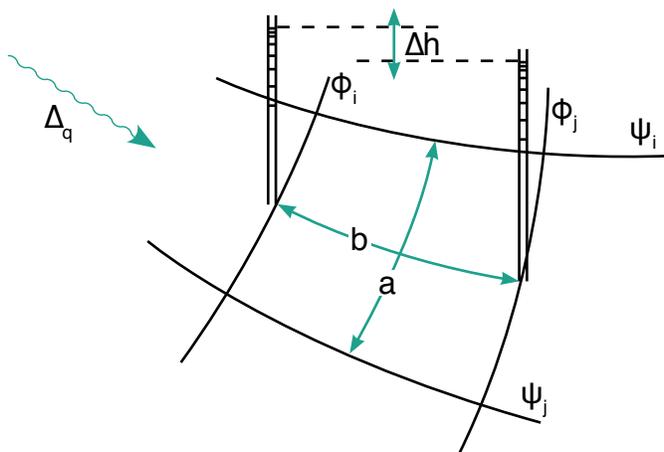
De acuerdo con lo tratado en los párrafos precedentes, vimos que se distinguen dos clases de curvas en una región de flujo: las líneas equipotenciales y las líneas de flujo: al conjunto formado por ambas se le conoce como red de flujo. Las primeras son aquellas en las cuales la altura piezométrica es constante, es decir, la energía del agua es constante en cada una de estas curvas. Las líneas de flujo representan la trayectoria física del agua en la región de flujo.

¿Cómo se pueden trazar las dos familias de curvas de la red de flujo? Para su trazo establecemos las siguientes dos condiciones adicionales (Juárez Badillo y Rico, 1969)

- Dibujar las líneas de flujo de manera que el gasto,  $\Delta q$ , que pase por el canal formado entre cada dos de ellas sea el mismo.
- Dibujar las líneas equipotenciales de manera que la caída de carga hidráulica,  $\Delta h$ , entre cada dos de ellas sea la misma

Supongamos que hemos trazado una red de flujo que satisface las condiciones (a) y (b) y tomemos un elemento limitado por dos equipotenciales  $\phi$  y dos líneas de flujo  $\psi$  (figura 17). Denominemos canal de flujo al espacio comprendido entre dos líneas de flujo; el gasto que pasa a través de él vale (considerando un ancho unitario en dirección perpendicular al papel)

$$\Delta q = aki$$



CANAL DE FLUJO  
FIGURA 17

(Juárez Badillo y Rico, 1969)

Pero  $i = \frac{\Delta h}{b}$ , siendo  $\Delta h$  la pérdida de carga hidráulica entre dos equipotenciales consecutivas. Por lo tanto

$$\Delta q = ak \frac{\Delta h}{b} \quad (46)$$

El gasto a través de toda la región de flujo, dado que por hipótesis  $\Delta q$  es igual en cada uno de los canales de flujo, valdrá

$$q = n_f \Delta q = n_f ak \frac{\Delta h}{b} \quad (47)$$

donde  $n_f$  es el número total de canales de flujo.

Por otra parte, dado que  $\Delta h$  es igual entre dos equipotenciales consecutivas

$$\Delta h = \frac{\Delta H}{n_e} \quad (48)$$

siendo  $\Delta H$  la pérdida de carga hidráulica en toda la región de flujo, y  $n_e$  el número total de caídas de potencial. Sustituyendo la ecuación 48 en la ecuación 47

$$q = k \frac{a}{b} \Delta H \frac{n_f}{n_e} \quad (49)$$

En la fórmula 49 vemos que, puesto que  $q$ ,  $k$ ,  $\Delta H$ ,  $n_f$  y  $n_e$  son constantes para una red de flujo dada, la relación  $a/b$  debe serlo también. Es decir, para que se satisfagan las condiciones (a) y (b), establecidas anteriormente, se debe cumplir que la relación  $a/b$  sea una constante.

En la práctica, usualmente se emplea una relación  $a/b$  igual a la unidad ( $a/b = 1$ ), dada su implicación en la sencillez del trazo de una red de flujo.

Por lo estudiado anteriormente, podemos establecer que en una red de flujo se debe cumplir que las líneas de flujo sean perpendiculares a las equipotenciales, y que además la relación  $a/b$  (figura 17) sea una constante, de preferencia igual a uno.

De hecho, en la práctica en general no se conoce a priori una red de flujo, pero satisfaciendo los requisitos señalados en el párrafo anterior, se puede trazar por aproximaciones la red de flujo buscada.

Conviene entonces dibujar a tinta las fronteras de la región de flujo y trazar a lápiz una red de flujo preliminar, que se irá ajustando hasta que cumpla los requisitos correspondientes.

A continuación se proporcionan algunas reglas para el trazo de una red de flujo (Casagrande, 1940; Juárez Badillo y Rico, 1969):

- 1) Úsense todas las oportunidades posibles para estudiar la apariencia de redes de flujo bien hechas, tratando después de repetir las sin tener a la vista el modelo, hasta alcanzar dibujos satisfactorios
- 2) Usualmente es suficiente trazar la red con un número de canales comprendido entre cuatro y cinco. El uso de muchos canales dificulta grandemente el trazo y desvía la atención de los aspectos esenciales
- 3) Debe siempre observarse la apariencia de la red en conjunto, sin tratar de corregir detalles hasta que toda ella esté aproximadamente bien trazada
- 4) Frecuentemente hay partes de la red en que las líneas de flujo deben ser aproximadamente recta y paralelas; en este caso los canales son más o menos del mismo ancho y los cuadrados deben resultar muy parecidos. Puede facilitarse el trazo de la red al comenzarla por esa zona
- 5) Las redes de flujo en áreas confinadas, limitadas por fronteras paralelas (especialmente la superior y la inferior) son frecuentemente simétricas y las líneas de flujo y las equipotenciales son entonces de forma parecida a la elíptica
- 6) Un error común en los principiantes es el de dibujar transiciones muy bruscas entre las partes rectas y las curvas de las diferentes líneas. Debe tenerse presente que las transiciones deben ser siempre

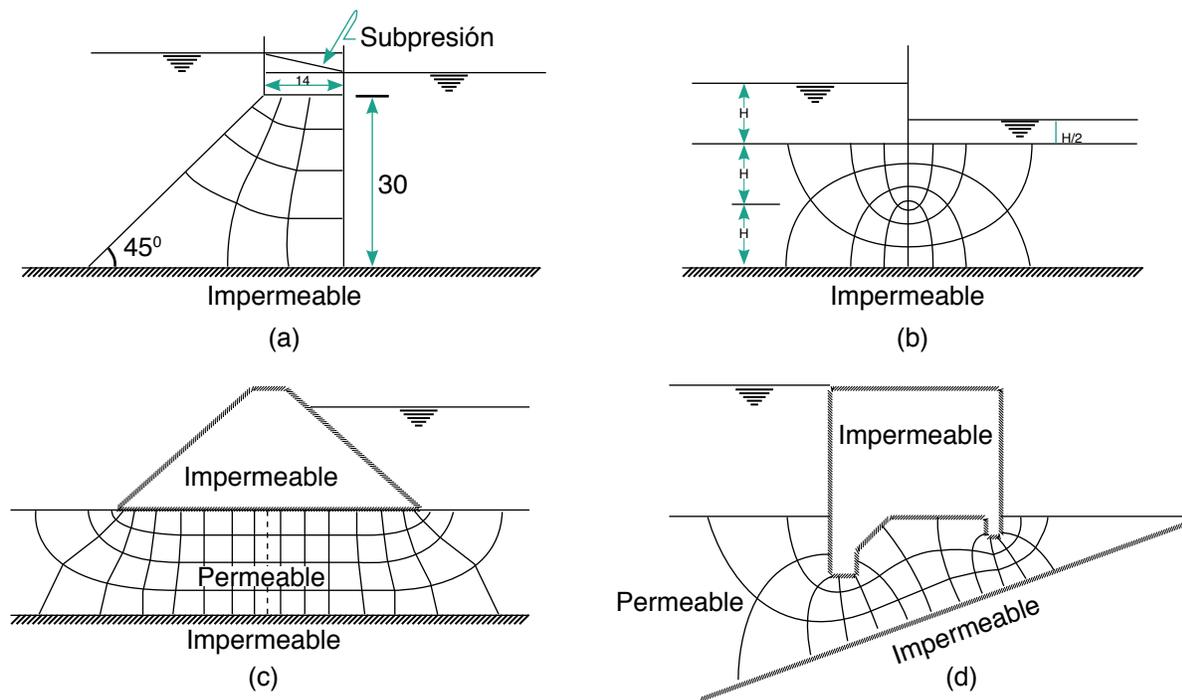
suaves y de forma parabólica o elíptica; el tamaño de los diferentes cuadrados debe ir cambiando también gradualmente

- 7) En general, el primer intento no conduce a una red de cuadrados en toda la extensión de la región de flujo. La caída de potencial entre dos equipotenciales sucesivas correspondientes a un cierto número de canales con el que se intentó la solución no suele ser una parte entera exacta de la pérdida total de potencial, de manera que al terminar la red suele quedar una última hilera de rectángulos entre dos líneas equipotenciales, en la que la caída de carga es una fracción de la  $\Delta h$  que haya prevalecido en el resto de la red. Generalmente esto no es perjudicial para el cálculo de  $n_e$ , estimando qué fracción de caída ha resultado. Si, por razones de presentación, se desea que todas las hileras de cuadrados queden con el mismo  $\Delta h$ , podrá corregirse la red, cambiando el número de canales de flujo, bien sea por interpolación o empezando de nuevo. No debe intentarse convertir la hilera incompleta en una de cuadrados por correcciones puramente gráficas, a no ser que el faltante o sobrante de espacio en la hilera incompleta sea muy pequeño
- 8) Las condiciones de frontera pueden introducir singularidades en la red que se discutirán con más detalle en los párrafos siguientes
- 9) Una superficie de salida en la red, en contacto con el aire, si no es horizontal, nunca será ni línea de flujo ni equipotencial, de manera que los cuadrados limitados por esa superficie no pueden ser completos. Sin embargo, como más adelante se demostrará, estas superficies deben cumplir la condición de que se tengan iguales caídas de posición entre los puntos de ellas cortados por las líneas equipotenciales

Además de las normas anteriores, es conveniente que las líneas de flujo y equipotenciales se dibujen siempre completas. Los principiantes cometen numerosos errores de concepto en la red, por dejar trazos incompletos que, de ser terminados, les hubieran revelado errores en forma muy clara.

En la figura 18 se exhiben redes de flujo para diferentes obras hidráulicas (Juárez Badillo y Rico, 1969).

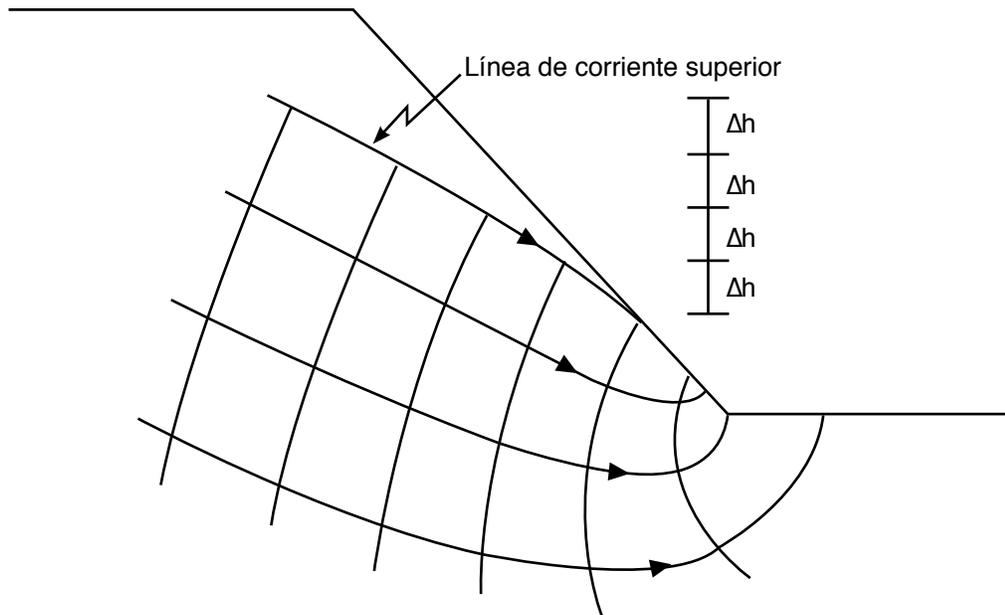
Para determinar las fronteras en una red de flujo conviene recordar que el contacto entre el agua libre y un medio permeable es una línea equipotencial, y que el contacto entre un medio impermeable y un medio permeable es una línea de flujo.



EJEMPLOS DE REDES DE FLUJO  
FIGURA 18

(Juárez Badillo y Rico, 1969)

Hasta aquí hemos visto la forma de trazar redes para un flujo confinado, el cual se presenta cuando las fronteras están bien definidas. En caso contrario, se dice que se trata de un problema de flujo no confinado. Un ejemplo de flujo no confinado es el mostrado en la figura 19, en el cual, además de las condiciones señaladas para flujo confinado, se debe cumplir que la distancia vertical  $\Delta h$  entre dos equipotenciales sucesivas debe ser la misma, dado que este valor corresponde a la pérdida de carga hidráulica entre dos equipotenciales. Ejemplos de flujo no confinado son los que ocurren a través del cuerpo de un talud, en una presa de tierra, etcétera.



FLUJO NO CONFINADO  
FIGURA 19

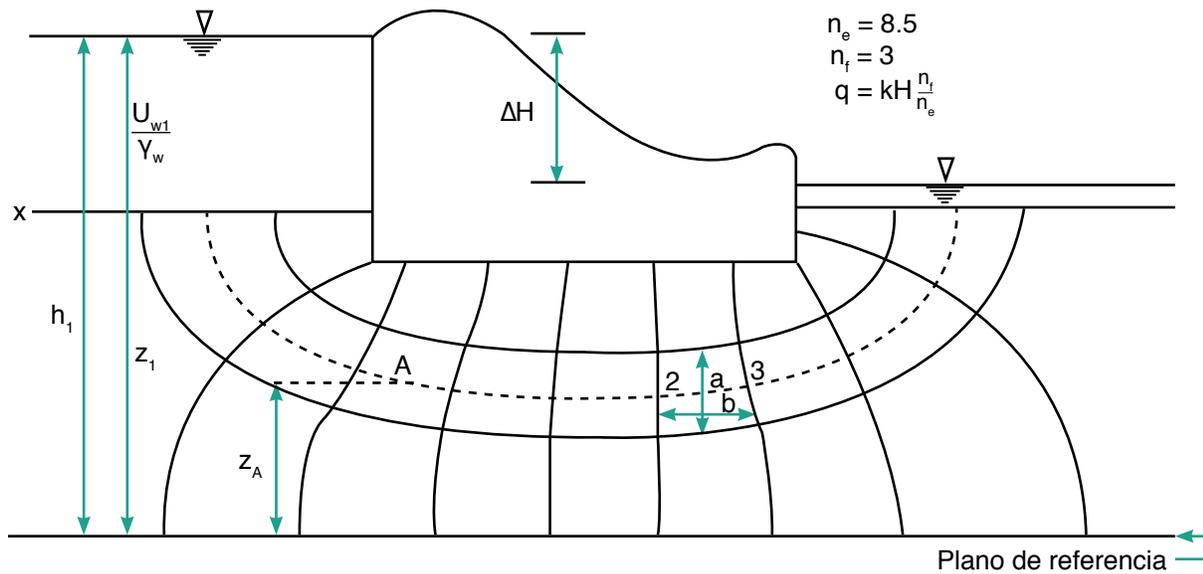
#### Gasto de filtración

Consideremos un vertedor impermeable como el indicado en la figura 20 y supongamos que se desea determinar el gasto de filtración por debajo de él. De acuerdo a la ecuación 49, y dado que en la red de flujo  $a/b = 1$ , el gasto de filtración vale

$$q = k\Delta H \frac{n_f}{n_e} \quad (50)$$

Por lo tanto, para encontrar el gasto de filtración hay que trazar la red de flujo y aplicar la ecuación 50, en la cual vemos que además se requiere conocer el coeficiente de permeabilidad  $k$  del suelo.

Línea de corriente superior

RED DE FLUJO  
FIGURA 20

Tratemos ahora de hallar la presión en el agua en un punto cualquiera de la red de flujo, digamos el punto A (figura 20). Tracemos una línea de flujo paralela a las dos que limitan el punto A, la cual interseca a la horizontal x-x' en el punto 1. Conocemos la altura piezométrica de este punto, que tiene el valor que se indica en la figura. Ahora bien, la altura piezométrica en el punto A será igual a la del punto 1 menos la pérdida de carga hidráulica en el recorrido del agua de 1 a A; así

$$h_A = h_1 - 2.3\Delta h \quad (51)$$

$$\Delta h = \frac{\Delta H}{n_e} \quad (52)$$

Pero

$$h_A = z_A + \frac{u_{wA}}{\gamma_w}$$

Por lo tanto

$$u_{wA} = (h_A - z_A)\gamma_w \quad (53)$$

Aplicando las ecuaciones 51 y 53 podemos calcular la presión en el agua en el punto A.

### Velocidad del agua

Supongamos ahora que deseamos determinar la velocidad del agua en el punto A. Para esto, hallamos primero el gradiente hidráulico en el cuadrado que contiene a dicho punto (figura 20). Por definición de gradiente hidráulico

$$i_A = \frac{\Delta h}{b} \quad (54)$$

La longitud  $b$  se obtiene midiéndola a escala directamente sobre la red de flujo.

Aplicando la ley de Darcy:  $v_A = k i_A$ , con lo cual podemos calcular la velocidad de descarga del agua en el cuadrado que contiene al punto A, la cual se considera representativa de la velocidad de descarga en dicho punto. Como señalamos antes, la velocidad real de las moléculas de agua se obtiene con la velocidad de filtración, dada por la ecuación 22.

### Fuerza de filtración

Otra cantidad importante para fines prácticos que se puede obtener a partir de una red de flujo es la denominada fuerza de filtración, la cual representa físicamente la fuerza que ejerce el agua sobre las partículas sólidas debido al flujo. Al desplazarse una molécula de agua del punto 2 al punto 3 (figura 20), el agua disipa por fricción una energía que está representada por  $\Delta h$  (dado que  $\Delta h$  es una medida indirecta de la disipación de energía por la fuerza de fricción entre agua y sólido). La presión que pierde el agua en un cuadrado vale  $\gamma_w(\Delta h)$ ; esta presión se transmite por fricción a las partículas sólidas, la cual tiene el mismo valor  $\gamma_w(\Delta h)$ . La fuerza de filtración en todo el cuadrado es (figura 20)

$$F_f = \gamma_w(\Delta h)a \quad (55)$$

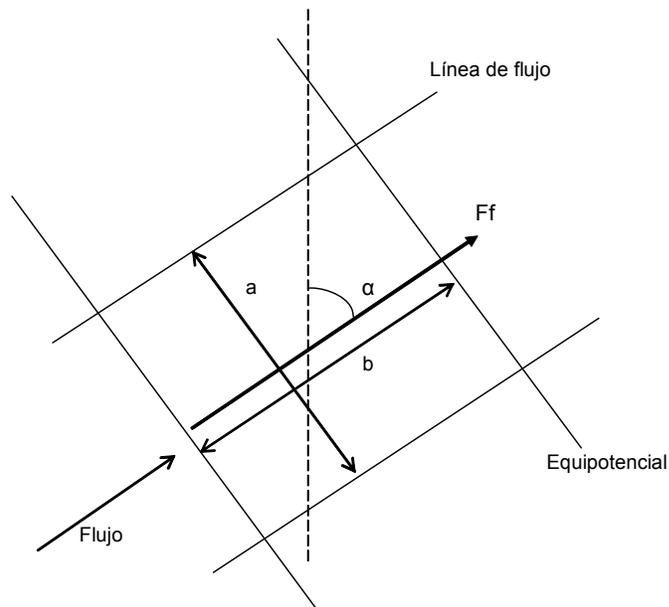
donde  $a$  es el área transversal del elemento. Podemos encontrar también la fuerza de filtración en un cuadrado por unidad de volumen (tomando un ancho unitario en dirección perpendicular al flujo)

$$f_f = \frac{\gamma_w(\Delta h)a}{ab(1)} = \frac{\gamma_w(\Delta h)}{b} = \gamma_w i \quad (56)$$

La determinación de la fuerza de filtración reviste importancia para estimar la posibilidad de erosión interna de limos o arenas en una región de flujo.

### Fenómeno de "ebullición" del suelo

Consideremos el cuadrado de una red de flujo mostrado en la figura 21. Como se presenta flujo ascendente, la proyección vertical de la fuerza de filtración  $F_f$  puede superar el peso sumergido del elemento de suelo, en cuyo caso se produce el fenómeno que se conoce como "ebullición" del suelo.



(Cs Flujo de Agua Figuras)

"EBULLICIÓN" DEL SUELO  
FIGURA 21

La fuerza de filtración por unidad de volumen, usando la ecuación 56, vale (figura 21)

$$f_f = \gamma_w i$$

En todo el cuadrado

$$F_f = \gamma_w i (a)(b)(1)$$

El peso sumergido del elemento es

$$W' = \gamma' (a)(b)(1)$$

El fenómeno de "ebullición" se inicia cuando

$$F_f \cos \alpha = W' \quad (57)$$

Sustituyendo valores en la ecuación 57

$$\gamma_w i (a)(b) \cos \alpha = \gamma' (a)(b)$$

El gradiente crítico, para cuando se inicia la "ebullición", lo despejamos de esta expresión

$$i_{crit} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \frac{1}{\cos \alpha} \quad (58)$$

Si el flujo es vertical,  $\alpha = 0$ , e

$$i_{crit} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \quad (59)$$

### Sección transformada

En la naturaleza los suelos no son isótropos, debido principalmente a los fenómenos de sedimentación y estratificación que se producen al formarse el suelo. Por otra parte, en una obra de tierra la compactación ocasiona también un fenómeno de anisotropía. De esta forma, es común encontrar materiales anisótropos. A continuación veremos que con el artificio de la sección transformada se puede hacer extensiva la solución de la ecuación de Laplace para medios isótropos al problema de los medios anisótropos.

Consideremos una región de flujo en un medio anisótropo en el que  $k_x \neq k_y$ . La ecuación que rige esta clase de flujo es la 42

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (60)$$

Hagamos una transformación de la ordenada  $y$  al valor  $y'$  dado por

$$y' = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} y \quad (61)$$

Obtengamos  $\frac{\partial^2 h}{\partial y'^2}$  en función de  $y'$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y}; \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{\partial h}{\partial y'} \quad (62)$$

Derivamos 62 con respecto a  $y$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial h}{\partial y'} \right)$$

Hagamos

$$B = \frac{\partial h}{\partial y'}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{\partial B}{\partial y} \quad (63)$$

Pero

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y}; \quad \frac{\partial B}{\partial y'} = \frac{\partial^2 h}{\partial (y')^2}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$$

En consecuencia

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial (y')^2} \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$$

Reemplazando en la ecuación 63

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{\partial^2 h}{\partial (y')^2} \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$$

y

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial (y')^2} \quad (64)$$

Sustituyendo la ecuación 64 en la ecuación 60

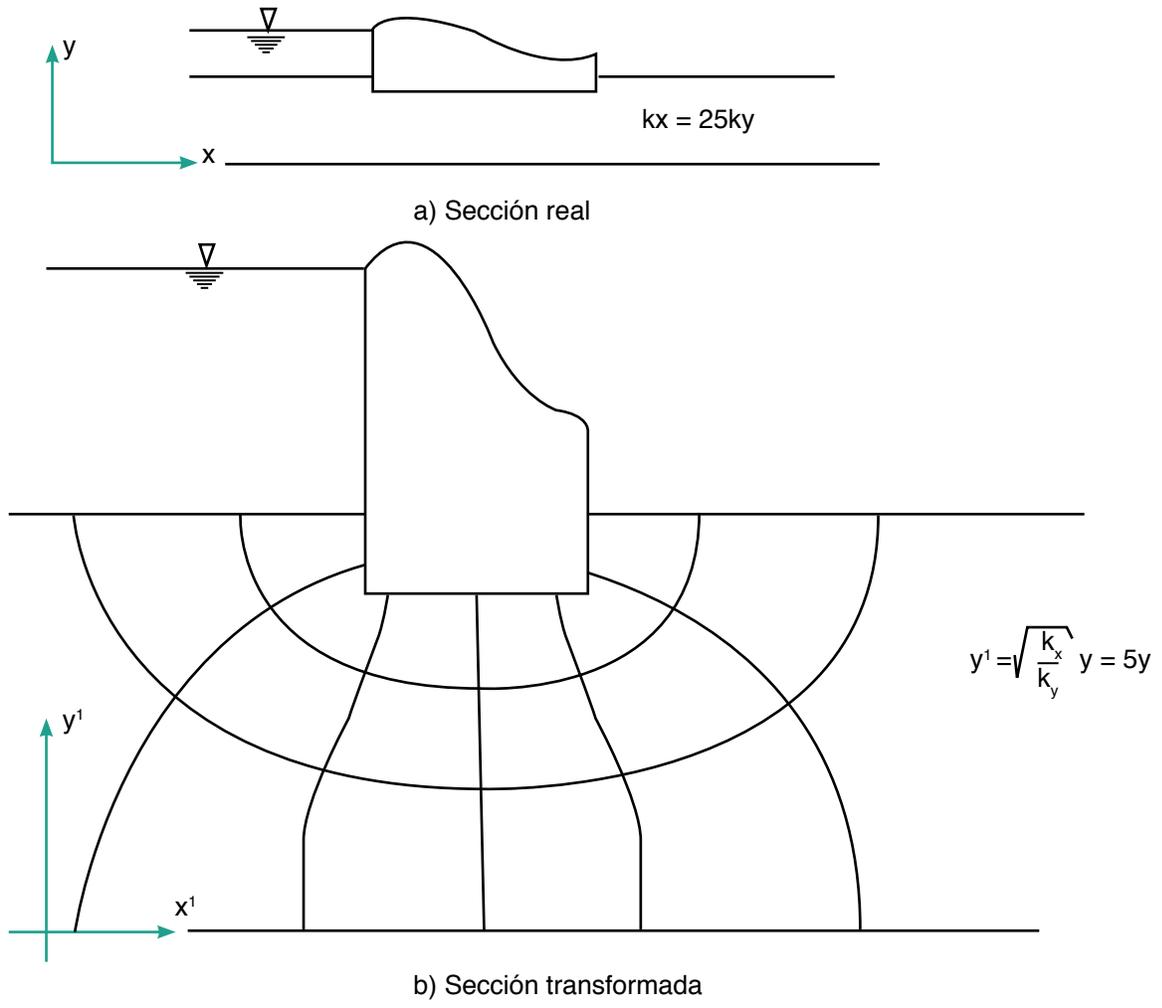
$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial (y')^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial (y')^2} = 0 \quad (65)$$

Pero la 65 es la ecuación de Laplace (fórmula 43), la cual rige el flujo bidimensional a través de un medio homogéneo e isótropo.

Por lo anterior, vemos que haciendo la transformación de la ordenada y al valor de  $y'$ , dado por la expresión 61, la ecuación de flujo bidimensional en un medio anisótropo (fórmula 60) se transforma en la ecuación de Laplace (fórmula 43). Por lo tanto, con esta transformación se puede aplicar todo lo visto para el flujo en un medio isótropo, es decir, se puede usar la teoría de las redes de flujo estudiada en los incisos anteriores para los medios anisótropos.

En la figura 22 se muestra un ejemplo de sección transformada.



SECCIÓN TRANSFORMADA  
FIGURA 22

Para determinar el gasto de filtración en una sección transformada, se procede de acuerdo con lo visto al principio del inciso sobre Ecuación General del Flujo de Agua. El gasto de entrada a un elemento (para flujo bidimensional) está dado por la expresión 36 (con  $v_z = 0$ )

$$dq = v_x dy dz + v_y dx dz \tag{66}$$

Considerando válida la ley de Darcy

$$dq = k_x i_x dydz + k_y i_y dx dz$$

$$dq = k_x \frac{\partial h}{\partial x} dydz + k_y \frac{\partial h}{\partial y} dx dz \quad (67)$$

Por otra parte, en un medio homogéneo e isótropo  $k_x = k_y = k$ , y

$$dq = k \left( \frac{\partial h}{\partial x} dydz + \frac{\partial h}{\partial y} dx dz \right) \quad (68)$$

En un medio anisótropo  $k_x \neq k_y$ ; empleando la transformación (ecuación 61)

$$y' = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} y$$

Arribamos a (ecuación 62)

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{\partial h}{\partial y'}$$

Reemplazando en la fórmula 67

$$dq = k_x \frac{\partial h}{\partial x} dydz + k_y \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{\partial h}{\partial y'} dx dz \quad (69)$$

Pero

$$dy' = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} dy \quad dy = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} dy'$$

Sustituyendo en la ecuación 69

$$dq = k_x \frac{\partial h}{\partial x} \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} dy' dz + k_y \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{\partial h}{\partial y'} dx dz$$

$$dq = \sqrt{k_x k_y} \left( \frac{\partial h}{\partial x} dy' dz + \frac{\partial h}{\partial y'} dx dz \right) \quad (70)$$

Comparando las expresiones 68 y 70 vemos que el cálculo del gasto en la sección transformada se puede hacer en forma análoga al cómputo del gasto en un medio isótropo (usando redes de flujo), con la salvedad de que debe emplearse un coeficiente de permeabilidad equivalente, igual al promedio geométrico de las permeabilidades horizontal y vertical

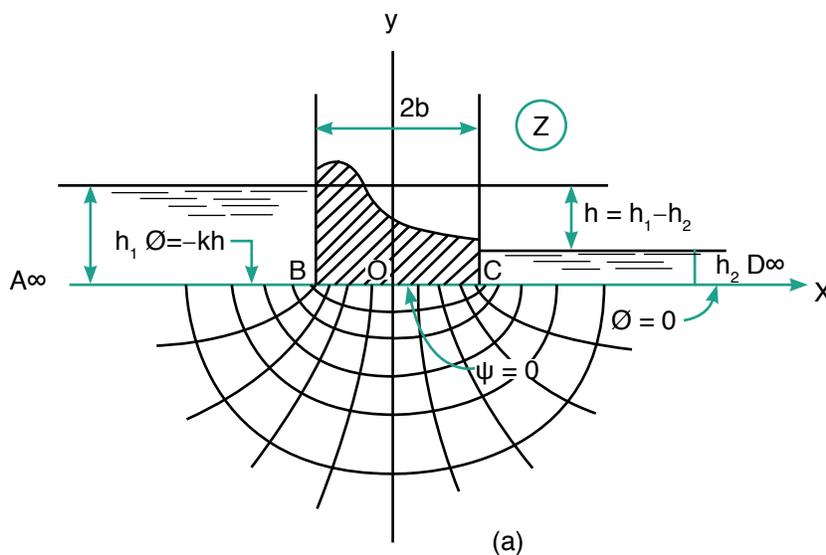
$$k = \sqrt{k_x k_y} \quad (71)$$

## SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE FLUJO

Para las condiciones de frontera mostradas en la figura 23, que consisten en un vertedor impermeable apoyado sobre un medio seminfinito, usando las herramientas matemáticas adecuadas, se obtiene que la solución de la ecuación de Laplace (fórmula 43)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (72)$$

da lugar a dos familias de curvas: las líneas de flujo resultan elipses, y las líneas equipotenciales son hipérbolas, como se indica en la figura 23 (Juárez Badillo y Rico, 1969)



RED DE FLUJO  
FIGURA 23

(Juárez Badillo y Rico, 1969)

## REFERENCIAS

Apostol, T M, *Calculus*, Vol II, 2<sup>nd</sup> ed, Wiley, 1969

Das, B M, *Fundamentos de Ingeniería Geotécnica*, Thomson Learning, 2001

Deméneghi, A, Pozas, M y Puebla, M, *Apuntes de Flujo de Agua en Suelos*, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1989

Juárez Badillo, E y Rico, A, *Mecánica de Suelos*, tomo III, Limusa, México, 1969

Mosqueira, S, *Física General*, Primer Curso, Editorial Patria, 1960

Santoyo, E y Contreras, R, "Estudios Geotécnicos", *Manual de Cimentaciones Profundas*, Soc Mex Mec Suelos, México, D F, 2001

Sears, F W, *Mechanics, Heat and Sound*, Addison-Wesley, 1958

Whitlow, R, *Fundamentos de Mecánica de Suelos*, CECSA, México, D F, 1994

Zeevaert, L, *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973

(Cs Flujo de Agua 160501)

Capítulo 1

Capítulo 2

Anexo 1

Anexo 2

Anexo 3

Capítulo 3

Capítulo 4

Anexo 4

# Anexo 1

## Solución de la ecuación de flujo de agua en suelos, mediante el Método del elemento finito

Consideremos un conjunto de ecuaciones diferenciales dado por

$$\underline{A}(\underline{u}) = 0 \quad (1)$$

en un cierto dominio  $\Omega$ .

Supongamos además que se deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$\underline{B}(\underline{u}) = 0 \quad (2)$$

en la frontera  $\Gamma$ .

El método de residuos ponderados consiste en buscar una solución de la forma (Zienkiewicz, 1977)

$$\int_{\Omega} \underline{v}^T \underline{A}(\underline{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{v}^T \underline{B}(\underline{u}) \, d\Gamma = 0 \quad (3)$$

$\underline{v}$  es un conjunto de funciones que se puede elegir de forma que favorezca la solución de la ec 3.

En nuestro caso, la ecuación diferencial del flujo de agua en suelos es (flujo en dos dimensiones)

$$(\partial/\partial x) [k_x(\partial h/\partial x)] + (\partial/\partial y) [k_y(\partial h/\partial y)] = 0 \quad (4)$$

Podemos hacer

$$\underline{A}(\underline{u}) = (\partial/\partial x) [k_x(\partial h/\partial x)] + (\partial/\partial y) [k_y(\partial h/\partial y)]$$

$$\underline{v}^T = \phi$$

La ec 3 queda

$$\int_A \phi \{ (\partial/\partial x) [k_x(\partial h/\partial x)] + (\partial/\partial y) [k_y(\partial h/\partial y)] \} \, dA = 0 \quad (5)$$

donde  $A$  = área del cuerpo que se está analizando.

Las condiciones de frontera las satisfaremos dando valores conocidos a la altura piezométrica  $h$  en dichas fronteras.

Observamos que

$$\begin{aligned} (\partial/\partial x) [\phi k_x(\partial h/\partial x)] \\ = \phi (\partial/\partial x) [k_x(\partial h/\partial x)] + (\partial\phi/\partial x) k_x (\partial h/\partial x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi (\partial/\partial x) [k_x(\partial h/\partial x)] \\ = (\partial/\partial x) [\phi k_x(\partial h/\partial x)] - k_x (\partial\phi/\partial x) (\partial h/\partial x) \end{aligned}$$

La ec 5 queda

$$\begin{aligned} \int_A \{ (\partial/\partial x) [\phi k_x (\partial h/\partial x)] + (\partial/\partial y) [\phi k_y (\partial h/\partial y)] \} \, dA \\ - \int_A [ k_x(\partial\phi/\partial x)(\partial h/\partial x) + k_y(\partial\phi/\partial y)(\partial h/\partial y) ] \, dA = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Trabajemos con la primera integral de la ec 6. El teorema de la divergencia o teorema de Gauss establece que, en el plano  $xy$

$$\int_A \text{div } \underline{E} \, dA = \int_s (\underline{E} \cdot \underline{n}) \, dS \quad (7)$$

Sean

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \phi v_x \\ \phi v_y \end{bmatrix} \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

$$\text{div } \underline{E} = (\partial/\partial x) (\phi v_x) + (\partial/\partial y) (\phi v_y)$$

Pero

$$v_x = k_x (\partial h/\partial x) \quad \text{y} \quad v_y = k_y (\partial h/\partial y)$$

$$\text{div } \underline{E} = (\partial/\partial x) [\phi k_x(\partial h/\partial x)] + (\partial/\partial y) [\phi k_y(\partial h/\partial y)]$$

$$(\underline{E} \cdot \underline{n}) = \phi v_x n_x + \phi v_y n_y$$

Reemplazando en la ec 7

$$\int_A \{ (\partial/\partial x) [\phi k_x(\partial h/\partial x)] + (\partial/\partial y) [\phi k_y(\partial h/\partial y)] \} \, dA$$

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

$$= \int_S \phi v_x n_x + \phi v_y n_y dS$$

La primera integral de la ec 6 queda

$$\int_A \{ (\partial/\partial x) [\phi k_x (\partial h/\partial x)] + (\partial/\partial y) [\phi k_y (\partial h/\partial y)] \} dA \\ = \int_S \phi (v_x n_x + v_y n_y) dS = \int_S \phi v_n dS$$

En esta última ecuación  $n_x$  y  $n_y$  son los cosenos directores de la normal unitaria  $\underline{n}$  a la frontera y  $v_n = v_x n_x + v_y n_y = \underline{v} \cdot \underline{n}$  es el flujo de agua a lo largo de la normal unitaria hacia fuera, que es especificado por las condiciones de frontera. Como en nuestro caso las condiciones de frontera las manejaremos dando valores a la altura piezométrica  $h$  en dicha frontera, podemos ignorar la primera integral de la ec 6. Así, la ec 6 queda de la siguiente forma

$$\int_A [k_x (\partial\phi/\partial x) (\partial h/\partial x) + k_y (\partial\phi/\partial y) (\partial h/\partial y)] dA = 0 \quad (8)$$

Es decir

$$\int_A [\partial\phi/\partial x \quad \partial\phi/\partial y] \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial y \end{bmatrix} dA = 0 \quad (9)$$

Por otra parte, en el método del elemento finito, el medio continuo se discretiza en elementos, la ec 9 es

$$\sum_e \int_A [\partial\phi/\partial x \quad \partial\phi/\partial y] \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial y \end{bmatrix} dA = 0 \quad (10)$$

donde la sumatoria se refiere a todos los elementos del medio, y la integral se aplica a cada elemento.

Funciones de interpolación. La función desconocida  $\underline{u}$  se estima de la siguiente forma

$$\underline{u} \cong \hat{\underline{u}} = \sum N_i a_i = \underline{N} \underline{a} \quad (11)$$

En flujo de agua requerimos determinar la variación de la altura piezométrica  $h$ , por lo que la función desconocida es justamente  $h$ . De acuerdo con la ec 11, podemos escribir

$$h = \underline{N} \underline{h}^e \quad (12)$$

donde, si el elemento es un triángulo

$$\underline{N} = [N_1, N_2, N_3] = [\xi, \eta, 1-\xi-\eta] \quad (13)$$

$$\underline{h}^e = [h_i, h_j, h_k]^T \quad (14)$$

$$\text{Es decir } h = \xi h_i + \eta h_j + (1-\xi-\eta) h_k \quad (15)$$

$\underline{h}^e$  mide los valores de la altura piezométrica en los vértices del triángulo (fig 1).  $\underline{N}$  es una función de interpolación, para evaluar los valores de  $h$  dentro del elemento. Como  $h$  debe ser igual a  $h_i$ ,  $h_j$  y  $h_k$ , respectivamente, en los vértices del elemento, los valores de  $\xi$ ,  $\eta$  y  $(1-\xi-\eta)$  deben ser unitarios en dichos vértices.

Así, en el nudo  $i$ :  $\xi = 1$ ,  $\eta = 0$ . Sustituyendo en la ec 15:  $h = h_i$ .

En el nudo  $j$ :  $\eta = 1$ ,  $\xi = 0$ . Reemplazando en la ec 15:  $h = h_j$ .

En el nudo  $k$ :  $\xi = \eta = 0$ . Sustituyendo en la ec 15:  $h = h_k$ .

Para el elemento triangular, las coordenadas  $x$  y  $y$  también se pueden representar en términos de coordenadas nodales, usando las mismas funciones de forma (Chandrupatla y Belegundu, 1999); así, de acuerdo con las ecuaciones 12 y 15

$$x = N_1 x_i + N_2 x_j + N_3 x_k = \xi x_i + \eta x_j + (1-\xi-\eta) x_k \quad (16)$$

$$y = N_1 y_i + N_2 y_j + N_3 y_k = \xi y_i + \eta y_j + (1-\xi-\eta) y_k \quad (17)$$

Obtengamos a continuación el vector  $[\partial h/\partial x, \partial h/\partial y]^T$  en función de los valores de  $h$  en los vértices del triángulo  $h_i$ ,  $h_j$  y  $h_k$ .

$$(\partial h/\partial \xi) = (\partial h/\partial x) (\partial x/\partial \xi) + (\partial h/\partial y) (\partial y/\partial \xi)$$

$$(\partial h/\partial \eta) = (\partial h/\partial x) (\partial x/\partial \eta) + (\partial h/\partial y) (\partial y/\partial \eta)$$

Usando las ecuaciones 16 y 17

$$\begin{bmatrix} \partial h/\partial \xi \\ \partial h/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ik} & y_{ik} \\ x_{jk} & y_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial y \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial y \end{bmatrix}$$

donde  $x_{ik} = x_i - x_k$ , etcétera

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} x_{ik} & y_{ik} \\ x_{jk} & y_{jk} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \partial h/\partial x \\ \partial h/\partial y \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial h/\partial \xi \\ \partial h/\partial \eta \end{bmatrix} \quad (19)$$

Derivemos la ec 15

$$\partial h / \partial \xi = h_i - h_k, \quad \partial h / \partial \eta = h_j - h_k$$

$$\begin{bmatrix} \partial h / \partial \xi \\ \partial h / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la ec 19

$$\begin{bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_{jk} & -y_{ik} \\ -x_{jk} & x_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix}$$

donde  $y_{jk} = y_j - y_k$ , etcétera

$$\begin{bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{bmatrix} = \underline{B} \underline{h}^e \quad (20)$$

donde

$$\underline{B} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_{jk} & y_{ki} & y_{ij} \\ x_{kj} & x_{ik} & x_{ji} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Volvamos a la ec 10

$$\Sigma_e \int_A [\partial \phi / \partial x \quad \partial \phi / \partial y] \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial h / \partial x \\ \partial h / \partial y \end{bmatrix} dA = 0 \quad (22)$$

Podemos elegir el valor de  $\phi$  de acuerdo con el procedimiento de Galerkin

$$\phi = \underline{N} \underline{h}^e \quad (23)$$

Procediendo en forma similar que para la altura piezométrica  $h$  (véanse las ecuaciones 12 y 20)

$$\begin{bmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \end{bmatrix} = \underline{B} \underline{h}^e \quad (24)$$

Reemplazando las ecuaciones 20 y 24 en la ec 22

$$\Sigma_e \int_A (\underline{B} \underline{h}^e)^T \underline{k}' (\underline{B} \underline{h}^e) dA = 0$$

Es decir

$$(\underline{h}^e)^T \Sigma_e \int_A (\underline{B}^T \underline{k}' \underline{B}) \underline{h}^e dA = 0 \quad (25)$$

donde

$$\underline{k}' = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

Si se selecciona  $\underline{h}^e$  de tal forma que se cumplan las condiciones de frontera, la ec 25 queda

$$\Sigma_e \int_A \underline{B}^T \underline{k}' \underline{B} dA \underline{h}^e = 0$$

$$\Sigma_e \underline{k}^e \underline{h}^e = 0 \quad (27)$$

$$\text{siendo } \underline{k}^e = \int_A \underline{B}^T \underline{k}' \underline{B} dA \quad (28)$$

Notamos que  $\int_A dA = A^e = |J|/2 = \text{área del elemento } m$ , por lo tanto

$$\underline{k}^e = A^e \underline{B}^T \underline{k}' \underline{B} \quad (29)$$

Sustituyendo las ecuaciones 21 y 26 en la ec 29

$$\underline{k}^e = \frac{k_x}{2|J|} \begin{bmatrix} y_{jk}^2 & y_{ki}y_{jk} & y_{ij}y_{jk} \\ y_{jk}y_{ki} & y_{ki}^2 & y_{ij}y_{ki} \\ y_{jk}y_{ij} & y_{ki}y_{ij} & y_{ij}^2 \end{bmatrix} + \frac{k_y}{2|J|} \begin{bmatrix} x_{kj}^2 & x_{ik}x_{kj} & x_{ji}x_{kj} \\ x_{kj}x_{ik} & x_{ik}^2 & x_{ji}x_{ik} \\ x_{kj}x_{ji} & x_{ik}x_{ji} & x_{ji}^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Si hacemos

$$\underline{K}^E = \Sigma_e \underline{k}^e \quad (31)$$

la ec 27 queda

$$\underline{K}^E \underline{h}^E = 0 \quad (32)$$

siendo  $\underline{h}^E$  el vector de altura piezométrica en los nudos de todos los elementos de la región de flujo.

Como indicamos antes, la región en estudio se divide en elementos. Si éstos son triangulares, para la solución del método se usan las ecuaciones 18, 30, 31 y 32. Se obtiene un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son las magnitudes de la altura piezométrica en los nudos de los elementos. Resolviendo el sistema se determina la variación de  $h$  en toda la región de flujo.

### Ejemplo

Determinar la altura piezométrica  $h$  en el punto 3 de la fig E-1, usando el método del elemento finito.  $h$  vale 1000 cm en los puntos 1 y 2, y 400 cm en los puntos 4 y 5. En el medio permeable  $k_x = k_y = 12 \times 10^{-2}$  cm/s.

**Solución**

Para la solución del problema se aplica la ec 32:  $\underline{K}^E \underline{h}^E = 0$

La numeración de los nudos y las coordenadas de éstos se muestran a continuación

Elemento	i	j	k
1	1	3	2
2	3	4	5
3	1	4	3
4	2	3	5

Ele-mento	$x_i$	$x_j$	$x_k$	$y_i$	$y_j$	$y_k$
	cm	cm	cm	cm	cm	cm
1	0	50	0	0	30	60
2	50	100	100	30	0	60
3	0	100	50	0	0	30
4	0	50	100	60	30	60

Determinemos la matriz  $\underline{k}_1^e$  del elemento 1. Usando la ec 18

$$\underline{J}_1 = \begin{bmatrix} 0-0 & 0-60 \\ 50-0 & 30-60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -60 \\ 50 & -30 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{J}_1| = 3000 \text{ cm}^2$$

Empleando la ec 30, con

$y_{jk} = y_j - y_k = 30 - 60 = -30 \text{ cm}$ , etcétera

$$\underline{k}_1^e = 20 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3400 & -1800 & -1600 \\ -1800 & 3600 & -1800 \\ -1600 & -1800 & 3400 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Procediendo en forma análoga

$$\underline{k}_2^e = 20 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3600 & -1800 & -1800 \\ -1800 & 3400 & -1600 \\ -1800 & -1600 & 3400 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\underline{k}_3^e = 20 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3400 & 1600 & -5000 \\ 1600 & 3400 & -5000 \\ -5000 & -5000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\underline{k}_4^e = 20 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3400 & -5000 & 1600 \\ -5000 & 10000 & -5000 \\ 1600 & -5000 & 3400 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

Aplicando la ec 31  $\underline{K}^E = \sum_e \underline{k}^e$

$$\underline{K}^E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6800 & -1600 & -6800 & 1600 & 0 \\ -1600 & 6800 & -6800 & 0 & 1600 \\ -6800 & -6800 & 27200 & -6800 & -6800 \\ 1600 & 0 & -6800 & 6800 & -1600 \\ 0 & 1600 & -6800 & -1600 & 6800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \times 20 \times 10^{-6}$$

$$(\underline{h}^E)^T = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5]$$

A continuación utilizamos únicamente el tercer renglón de la ec 32:  $\underline{K}^E \underline{h}^E = 0$ , porque el nudo 3 es el único donde h no está preestablecida:

$$-6800h_1 - 6800h_2 + 27200h_3 - 6800h_4 - 6800h_5 = 0$$

Como  $h_1 = h_2 = 1000 \text{ cm}$  y  $h_4 = h_5 = 400 \text{ cm}$ , encontramos  $h_3 = 700 \text{ cm}$ .

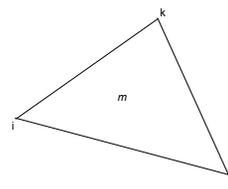
Ciudad Universitaria, D F, noviembre de 2004

**Referencias**

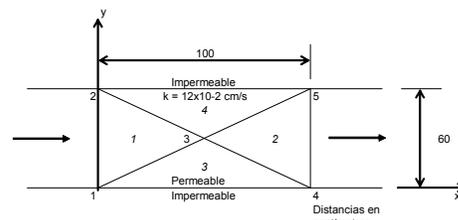
Chandrupatla, T R y Belegundu, A D, *Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería*, Prentice Hall, 1999

Zienkiewicz, O C, *The Finite Element Method*, 3<sup>rd</sup> ed, McGraw-Hill, 1977

(Flujo de Agua. Elemento Finito)



NUMERACIÓN DE NUDOS DEL ELEMENTO m  
FIGURA 1



REGIÓN DE FLUJO. EJEMPLO  
FIGURA E-1

# Anexo 2

## EXCAVACIONES BAJO EL NIVEL DE AGUA FREÁTICA

Consideremos que se requiere realizar una excavación cuyo fondo queda abajo del nivel de agua freática (NAF). En este caso es necesario eliminar el agua del fondo del corte, para realizar las operaciones de construcción “en seco”. El procedimiento para llevar a cabo este propósito depende fundamentalmente de la clase de suelo: si éste es de alta permeabilidad (como una arena o una grava), entonces es necesario abatir el NAF, de tal manera que su superficie quede siempre por abajo del plano del fondo del corte. En cambio, si el subsuelo está formado por un suelo de baja permeabilidad (como un limo arcilloso o una arcilla), no es estrictamente indispensable abatir el NAF, pues éste automáticamente desciende por efecto de la excavación; sin embargo, es usual que en los sedimentos arcillosos se encuentren intercalados lentes de arena o limo arenoso, de permeabilidad mucho mayor que la arcilla, en los cuales se pueden desarrollar altas presiones hidráulicas, lo que puede conducir a una falla del fondo de la excavación por subpresión. A continuación presentamos la forma de trabajar “en seco” para ambos casos.

### *Suelos de alta permeabilidad*

Con el propósito de trabajar “en seco” en la excavación, en materiales de alta permeabilidad se recomienda abatir el nivel de agua freática (NAF) por medio de pozos punta (well points) o pozos profundos (fig 1).

Con la excepción de gravas o arenas bien graduadas en estado compacto, o en suelos cementados, no se recomienda extraer el agua del fondo del corte sin seguir los procedimientos indicados en los párrafos anteriores, pues se puede producir el fenómeno de “ebullición” del suelo, conduciendo a que éste pierda compacidad, lo que ocasiona que el material quede en un estado muy suelto; por lo demás,

con este procedimiento es muy difícil mantener “en seco” el fondo del corte.

### *Suelos de baja permeabilidad*

En suelos arcillosos el nivel de agua freática (NAF) se abate automáticamente con la propia excavación (Juárez Badillo y Rico, 1976). Sea un depósito de arcilla en el que el NAF se encuentra en la superficie del terreno (fig 2), y consideremos que se excava a una profundidad  $H$  en un área muy grande; debido a la baja permeabilidad del suelo, éste no se expande de inmediato, por lo que no se produce cambio en el diagrama de presión efectiva (fig 2). Obtengamos la profundidad  $D$  para la que la presión hidráulica  $u_w$  vale cero; a la profundidad  $D$  la nueva presión total es igual a la presión efectiva inicial (fig 2)

$$\gamma_{\text{sat}}D = \gamma'(H+D)$$

es decir

$$(\gamma_{\text{sat}} - \gamma')D = \gamma'H$$

$$D = \gamma'H/\gamma_w \quad (1)$$

La ec 1 proporciona la profundidad a la que se abate automáticamente el NAF, al hacer un corte de altura  $H$ , en un área de gran extensión (Juárez Badillo y Rico, 1976).

En obras reales no se tienen excavaciones de extensión infinita, pero se presenta un fenómeno similar al descrito en los párrafos anteriores, es decir, ocurre un abatimiento del NAF hasta una cierta profundidad por abajo del fondo del corte. Por esta razón, sólo es necesario usar bombeo de achique en el fondo, para eliminar el agua que escurra por éste.

\* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingenierías Civil y Geomática. Facultad de Ingeniería. UNAM

Sin embargo, es frecuente encontrar en los sedimentos arcillosos estratos intercalados de material permeable (como limo arenoso, arena limosa, arena, etcétera), en los cuales la presión en el agua puede alcanzar altas magnitudes. Si la presión hidráulica en un estrato permeable es mayor que la presión debida al peso propio del suelo comprendido entre el fondo del corte y el nivel superior del estrato permeable (fig 3), se puede presentar una falla por subpresión. Si este es el caso, en la práctica se recomienda abatir la presión hidráulica en el estrato permeable, mediante pozos de bombeo profundo; se instalan además piezómetros para verificar que en el campo, en todo punto y en todo momento, la presión en el agua sea inferior a la presión del suelo.

Por lo anterior, la falla incipiente se presenta cuando (fig 3)

$$\gamma_{\text{sat}} h = \gamma_w h_w$$

$$\text{es decir } h = \gamma_w h_w / \gamma_{\text{sat}}$$

Para que no se presente falla por subpresión, se deberá cumplir que

$$h > \gamma_w h_w / \gamma_{\text{sat}} \quad (2)$$

Como mencionamos antes, cuando el espesor  $h$  sea insuficiente para asegurar la estabilidad, será necesario reducir la carga hidráulica  $h_w$  del estrato permeable, por medio de pozos de alivio (Normas de Cimentaciones, 1985; cap 5).

#### Determinación del gasto en un pozo de bombeo

Consideremos el pozo de la fig 4 (Zeevaert, 1973). El gasto de bombeo  $q$  vale

$$q = 2\pi r \gamma k_o (dy/dr) + 2\pi r d_1 k_1 (dy/dr) + 2\pi r d_2 k_2 (dy/dr) + \dots$$

Integrando

$$q \int (dr/r) = 2\pi k_o \int y dy + 2\pi d_1 k_1 \int dy + 2\pi d_2 k_2 \int dy + \dots + C \quad (3)$$

Tenemos las siguientes condiciones de frontera (fig 4): para  $r = R_s$ ,  $y = d_o$ . Reemplazando en la ec 3

$$C = q \ln R_s - \pi k_o d_o^2 - 2\pi d_o \sum k_i d_i$$

Es decir

$$q \ln (R_s/r) = \pi k_o (d_o^2 - y^2) + 2\pi (d_o - y) \sum k_i d_i \quad (4)$$

El gasto de bombeo en un pozo de radio  $r_o$  lo obtenemos haciendo  $r = r_o$  en la ec 4

$$q = \frac{\pi k_o (d_o^2 - y_o^2) + 2\pi (d_o - y_o) \sum k_i d_i}{\ln (R_s/r_o)} \quad (5)$$

Distinguimos dos casos de interés en sistemas de bombeo:

$$a) \quad k_1 = k_2 = \dots \cong 0 \quad (\text{Flujo no confinado})$$

La ec 5 queda

$$q = \frac{\pi k_o (d_o^2 - y_o^2)}{\ln (R_s/r_o)} \quad (6)$$

La forma del cono de abatimiento se obtiene despejando  $y$  de la ec 4

$$y = \sqrt{d_o^2 - \frac{q \ln (R_s/r)}{\pi k_o}} \quad (7)$$

Si existen varios pozos de bombeo, se puede demostrar que la ordenada del cono de abatimiento vale (Mansur y Kaufman, 1962)

$$y = \sqrt{d_o^2 - \frac{\sum q_j \ln (R_s/r_j)}{\pi k_o}} \quad (8)$$

$$b) \quad k_o \cong 0 \quad (\text{Flujo confinado})$$

La ec 5 queda

$$q = \frac{2\pi (d_o - y_o) \sum k_i d_i}{\ln (R_s/r_o)} \quad (9)$$

La forma del cono de abatimiento se obtiene despejando  $y$  de la ec 4

$$y = d_o - \frac{q \ln (R_s/r)}{2\pi \sum k_i d_i} \quad (10)$$

Si existen varios pozos de bombeo, se puede demostrar que la ordenada del cono de abatimiento vale (Mansur y Kaufman, 1962)

$$y = d_o - \frac{\sum q_j \ln (R_s/r_j)}{2\pi \sum k_i d_i} \quad (11)$$

El radio de influencia  $R_s$  de un pozo de bombeo se puede estimar aproximadamente con la fórmula de Sichardt (Zeevaert, 1973)

$$R_s = C_s s_o \sqrt{k} \quad (12)$$

donde

$R_s$  = radio de influencia del pozo, en centímetros

$s_o$  = nivel dinámico dentro del pozo (distancia vertical entre el nivel piezométrico a una distancia  $R_s$  y el nivel del agua dentro del pozo, fig 4), en centímetros

$k$  = coeficiente de permeabilidad, en cm/s

$C_s$  es un coeficiente, en  $(s/cm)^{1/2}$ , que vale 300 para pozos y 200 para zanjas o líneas de pozos.

Las ecuaciones 5 a 11 son válidas para estratos permeables donde el pozo abarca el espesor completo del estrato. Para casos donde la perforación penetra sólo parte del espesor del estrato, el lector puede consultar el artículo de Mansur y Kaufman (1962).

#### Ejemplo

Para sistema de bombeo de la fig E-1, determinar el gasto de extracción de agua en cada pozo y la ordenada del cono de abatimiento, al centro de la excavación.

#### Solución

De la fig E-1, tomando como plano de referencia el plano de contacto entre arena limosa y roca impermeable:  $y_o = 2$  m,  $d_o = 10$  m,  $r_o = 0.05$  m,  $s_o = 6 + 2 = 8$  m

Aplicando la ec 12

$$R_s = 300(800) \sqrt{1 \times 10^{-2}} = 24\,000 \text{ cm} = 240 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ec 6

$$q = \frac{\pi(1 \times 10^{-4})(10^2 - 2^2)}{\ln(240/0.05)} = 0.00356 \text{ m}^3/\text{s}$$

Utilizando la ec 8

$$y = \sqrt{10^2 - \frac{(2)(0.00356) \ln(240/5)}{\pi(1 \times 10^{-4})}} = 3.5 \text{ m}$$

#### Ejemplo

Para sistema de bombeo de la fig E-2, determinar el gasto de extracción de agua en cada pozo y la presión hidráulica en el estrato permeable, al centro de la excavación. Considerar que la condición inicial es hidrostática.

#### Solución

De la fig E-2, tomando como plano de referencia la frontera inferior del estrato de arena limosa:

$$y_o = 2.7 \text{ m}, d_o = 9.2, r_o = 0.3 \text{ m}, s_o = 9.2 - 2.7 = 6.5 \text{ m}$$

Usamos la fórmula de Sichardt (ec 12) para obtener el radio de influencia

$$R_s = 300(650) \sqrt{10^{-2}} = 19500 \text{ cm} = 195 \text{ m}$$

El gasto lo calculamos con la ec 9

$$q = \frac{2\pi(9.2 - 2.7)(1 \times 10^{-4})(0.2)}{\ln(195/0.3)} = 0.000126 \text{ m}^3/\text{s}$$

La altura piezométrica a la distancia  $r = 9.5$  m la obtenemos con la ec 11

$$y = 9.2 - \frac{(2)(0.000126) \ln(195/9.5)}{2\pi(1 \times 10^{-4})(0.2)} = 3.14 \text{ m}$$

La presión hidráulica en la frontera superior del estrato de arena será  $(3.14 - 0.2)(9.81) = 28.8$  kPa.

La presión vertical sobre el estrato permeable, debida a peso propio del suelo es  $15(3) = 45$  kPa. Dado que  $28.8 < 45$ , debido al bombeo de los dos pozos no se presenta una falla por subpresión.

Ciudad Universitaria, D F, noviembre de 2004

REFERENCIAS

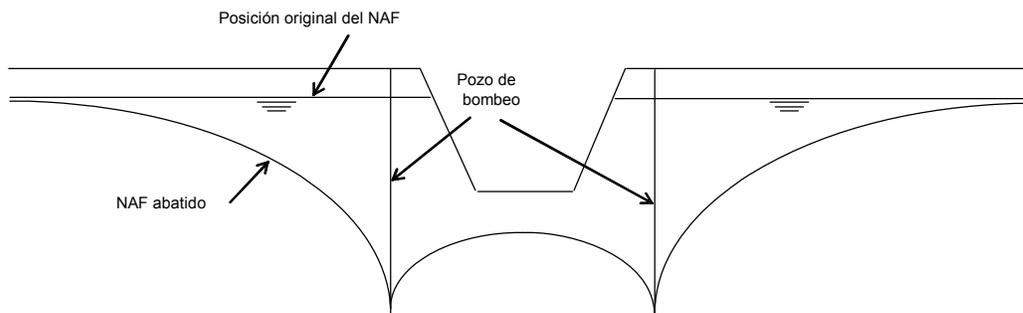
Juárez Badillo, E y Rico, A, *Mecánica de Suelos*, tomo II, Limusa, 1976

Mansur, C I y Kaufman, R I, "Dewatering", cap 3 del libro *Foundation Engineering*, ed por G A Leonards, McGraw-Hill, 1962

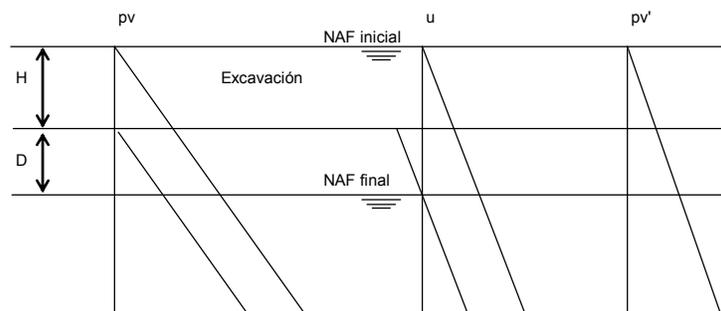
Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Cimentaciones, Gobierno del Distrito Federal, 1987

Zeevaert, L, *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973

(Excavaciones bajo el NAF)



ABATIMIENTO DEL NIVEL DE AGUA FREÁTICA (NAF) MEDIANTE POZOS PUNTA O POZOS PROFUNDOS  
FIGURA 1



ABATIMIENTO DEL NIVEL DE AGUA FREÁTICA (NAF) OCASIONADO POR UNA EXCAVACIÓN  
FIGURA 2

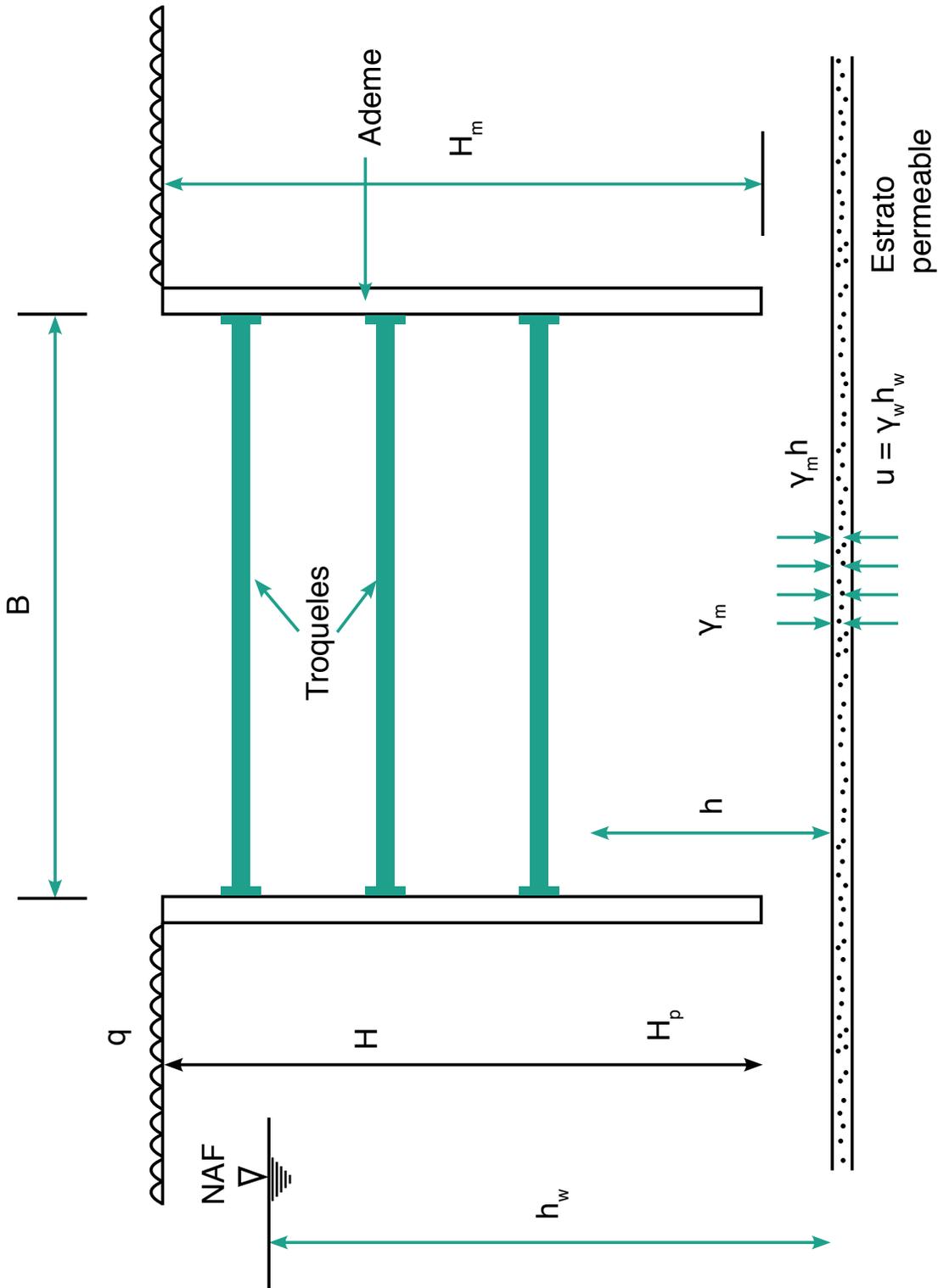
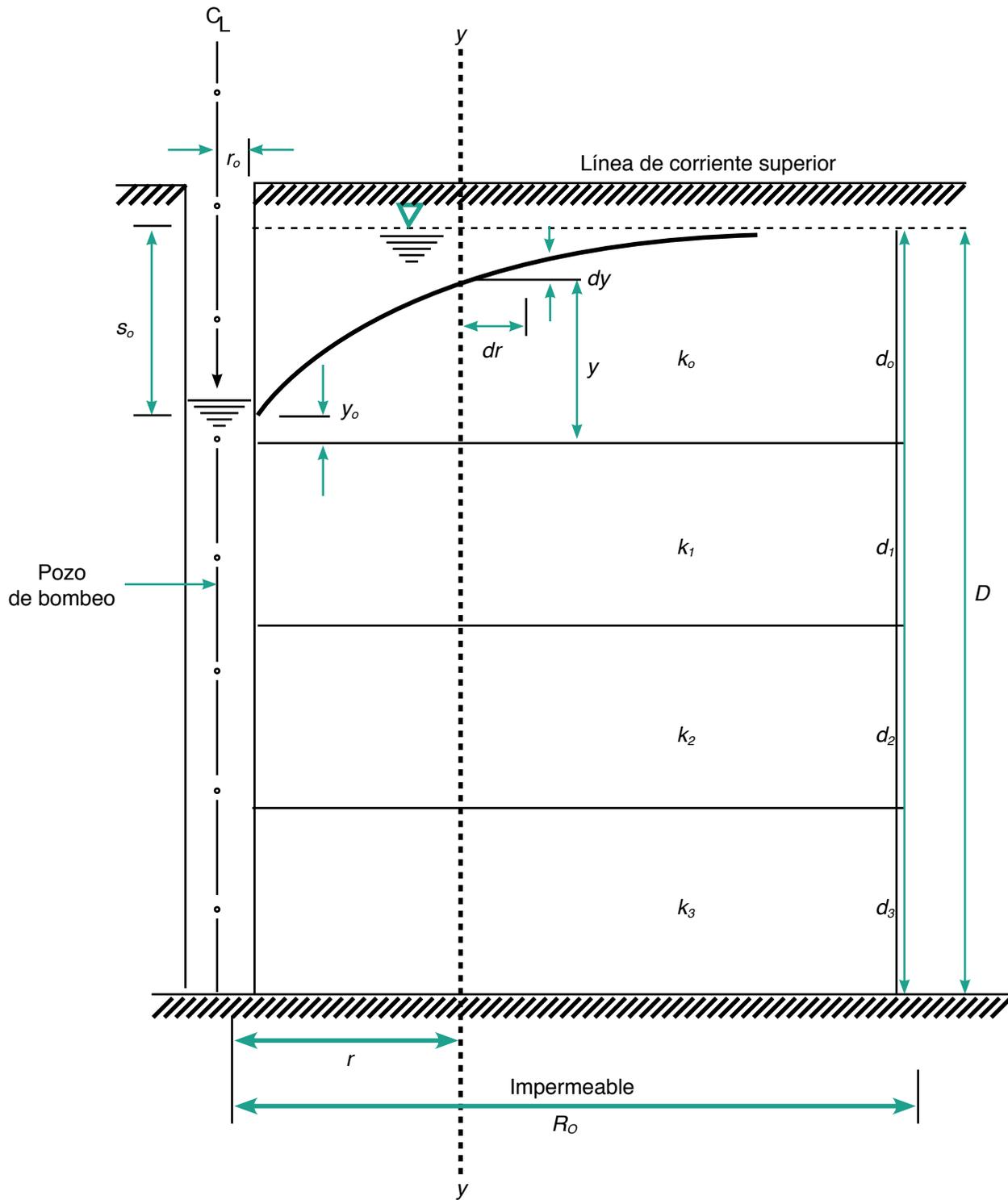


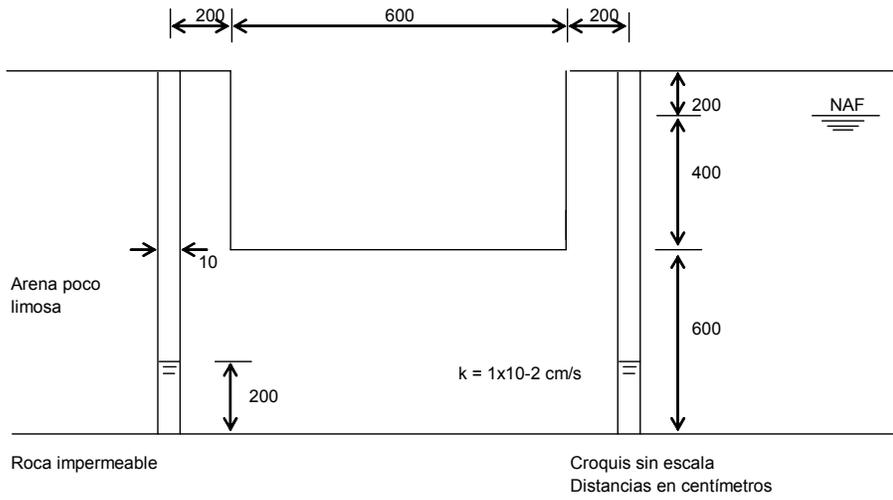
Figura 3

Geometría de la excavación



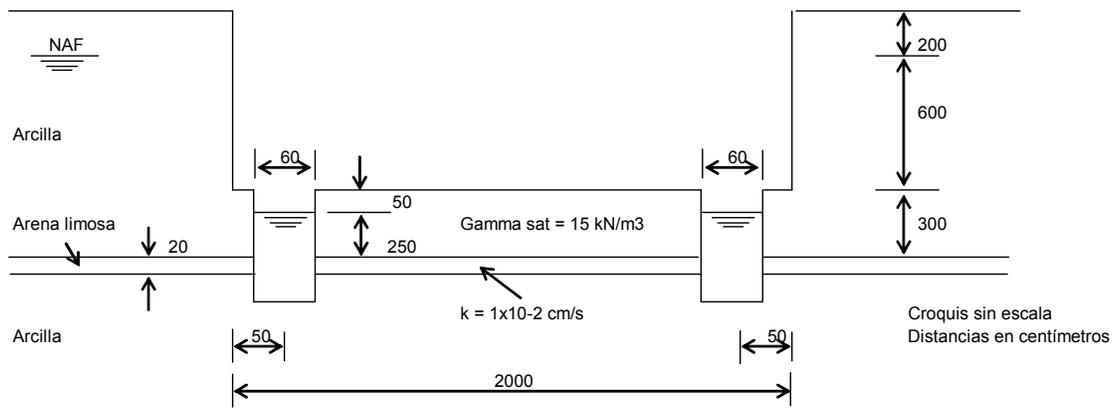
POZO DE BOMBEO  
Figura 4

- Capítulo 1
- Capítulo 2
- Anexo 1
- Anexo 2
- Anexo 3
- Capítulo 3
- Capítulo 4
- Anexo 4



POZOS DE BOMBEO EN UNA EXCAVACIÓN  
FIGURA E-1

(Acistexc11f)



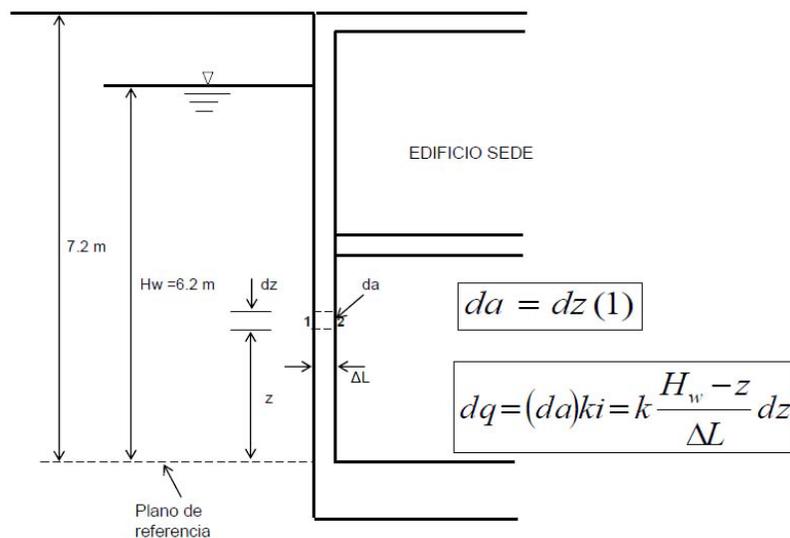
POZOS DE BOMBEO EN UNA EXCAVACIÓN  
FIGURA E-2

# Anexo 3

## GASTO DE FILTRACIÓN A TRAVÉS DE UNA PARED PERMEABLE

Consideremos una pared permeable donde del lado izquierdo existe un tirante de agua  $H_w$ , y del lado derecho el tirante es nulo (figura 1). La carga hidráulica en el punto 1 es

$$h_1 = H_w$$



PARED SOMETIDA A UN TIRANTE DE AGUA DEL LADO IZQUIERDO  
FIGURA 1

Mientras que en el punto 2

$$h_2 = z$$

El gradiente hidráulico entre los puntos 1 y 2 toma el valor

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta L} = \frac{H_w - z}{\Delta L}$$

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingenierías Civil y Geomática. Facultad de Ingeniería. UNAM

siendo  $\Delta L$  = espesor del muro de acompañamiento

El gasto a la elevación  $z$  vale

$$dq = vda = vdz(1) = kidz = k \frac{H_w - z}{\Delta L} dz$$

donde  $v$  = velocidad de descarga del agua

El gasto total de filtración a través de la pared lo obtenemos integrando esta última expresión

$$q = \int_0^{H_w} k \frac{H_w - z}{\Delta L} dz = -\frac{k}{\Delta L} \int_0^{H_w} (H_w - z)(-1) dz = -\frac{k}{\Delta L} \left[ \frac{(H_w - z)^2}{2} \right]_0^{H_w}$$

$$q = -\frac{k}{\Delta L} \left[ 0 - \frac{H_w^2}{2} \right]$$

$$q = \frac{1}{2} \frac{kH_w^2}{\Delta L} \quad (1)$$

[ $q$  en  $m^3/s/m$ ]

La ecuación 1 proporciona el gasto por unidad de longitud que pasa a través de una pared permeable de espesor  $\Delta L$ , sometida a un tirante de agua  $H_w$  en una de sus caras.

Ciudad Universitaria, D F, julio de 2015

(Gasto a través de una pared permeable)

# Capítulo 3

## INCREMENTOS DE ESFUERZO EN LA MASA DE SUELO

### SOLUCIÓN DE BOUSSINESQ

En 1885 Boussinesq obtuvo la distribución de esfuerzos ocasionada por una carga concentrada  $P$  aplicada en la superficie de un medio seminfinito, homogéneo, isótropo y linealmente elástico (figura 1). Los esfuerzos normales y cortante a la profundidad  $z$  están dados por

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^5 \psi}{z^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi z^2} \left[ 3 \cos^5 \psi \operatorname{sen}^2 \psi - (1 - 2\nu) \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \right] \quad (2)$$

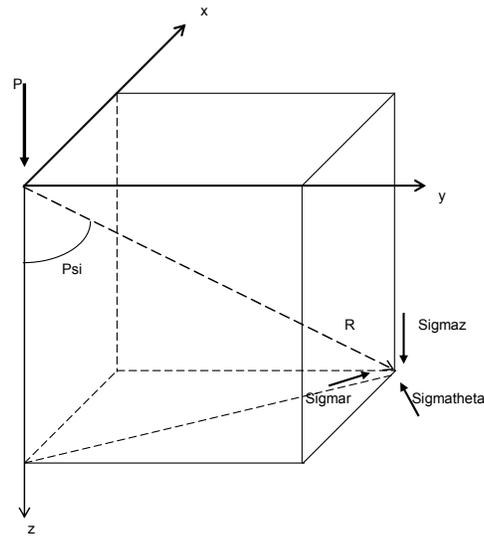
$$\sigma_\theta = - (1 - 2\nu) \frac{P}{2\pi z^2} \left[ \cos^3 \psi - \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \right] \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = \frac{3P}{2\pi z^2} \cos^4 \psi \operatorname{sen}^3 \psi \quad (4)$$

$\nu$  = relación de Poisson del medio

---

\* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingenierías Civil y Geomática. Facultad de Ingeniería. UNAM



INCREMENTOS DE ESFUERZO POR CARGA VERTICAL CONCENTRADA  
FIGURA 1

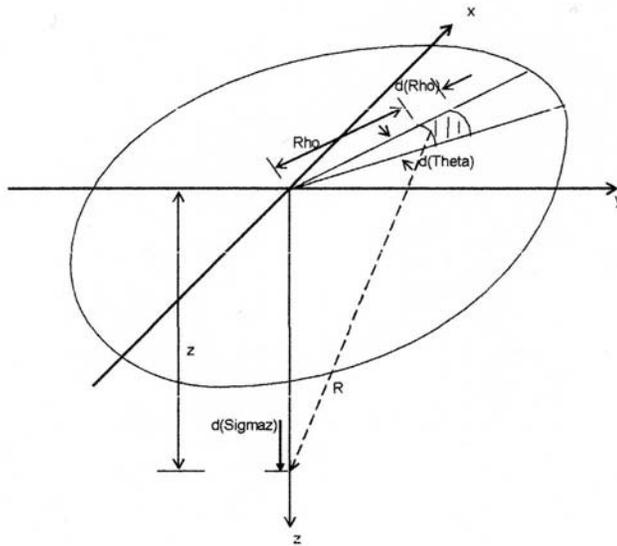
### CÍRCULO CARGADO

Los esfuerzos producidos por un círculo sometido a una carga uniforme  $q$  a una profundidad  $z$  los obtenemos integrando la solución de Boussinesq para carga concentrada (figura 2). Así, para el esfuerzo normal vertical bajo el centro del círculo (figuras 2 y 3)

$$d\sigma_z = \frac{3dP}{2\pi} \frac{z^3}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3z^3(q\rho d\rho d\theta)}{2\pi(\rho^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\sigma_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{z^3 q}{2\pi} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\sigma_z = q \left[ 1 - \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (5)$$

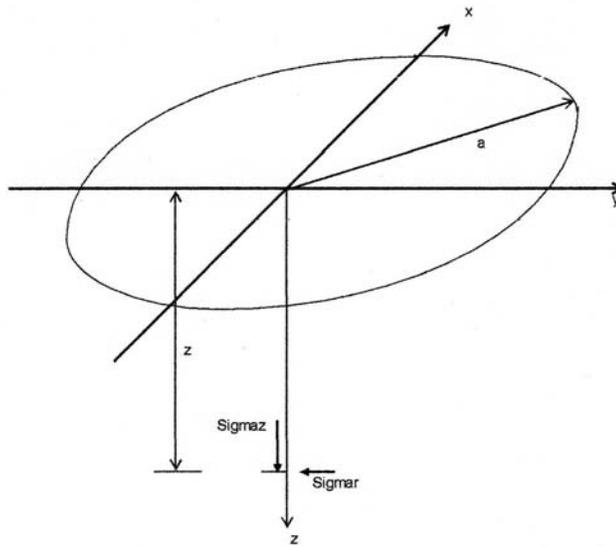


DETERMINACIÓN DEL ESFUERZO NORMAL VERTICAL BAJO EL  
CENTRO DE UN CÍRCULO CARGADO  
FIGURA 2

Procediendo en forma análoga (Yoder, 1959) obtenemos el esfuerzo normal radial (horizontal) bajo el centro del círculo (figura 3)

$$\sigma_r = \frac{q}{2} \left[ 1 + 2\nu - \frac{2(1+\nu)z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (6)$$

$$\sigma_r = \frac{q}{2} \left[ 1 + 2\nu - \frac{2(1+\nu)z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (6)$$



ESFUERZOS NORMALES VERTICAL Y HORIZONTAL BAJO EL  
CENTRO DE UN CÍRCULO CARGADO  
FIGURA 3

(Csincreff)

### Ejemplo

Determinar los esfuerzos normales vertical  $\sigma_z$  y horizontal (radial)  $\sigma_r$ , a una profundidad de 5 m, bajo el centro de un tanque circular de radio igual a 8 m, desplantado en la superficie del terreno, que transmite a éste una presión media de 90 kPa. Considere en el terreno de cimentación una relación de Poisson  $\nu = 0.3$ .

### Solución

Empleando las ecuaciones 5 y 6, con  $q = 90$  kPa,  $a = 8$  m,  $\nu = 0.3$ ,  $z = 5$  m, obtenemos

$$\sigma_z = 76.60 \text{ kPa}, \sigma_r = 16.69 \text{ kPa}$$

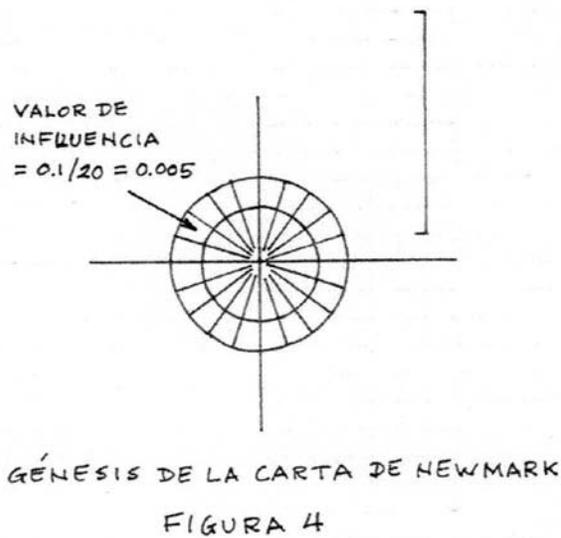
(Cscircargado)

### Carta de Newmark

De la ecuación 5 despejamos el cociente ( $a/z$ ):

$$\frac{a}{z} = \sqrt{\frac{1}{(1 - \sigma_z/q)^{2/3}} - 1} \quad (7)$$

Hagamos  $\sigma_z/q = 0.1$  en la ecuación 7: obtenemos  $a/z = 0.27$ . Demos un valor fijo a  $z$ , digamos  $z = 4$  cm, y tracemos un círculo de radio  $a = 0.27z = 0.27(4) = 1.08$  cm (figura 4). Bajo el centro de este círculo, a la profundidad  $z = 4$  cm, el esfuerzo normal vertical  $\sigma_z = 0.1 q$ . Por ejemplo, si  $q = 20$  kPa, el esfuerzo a  $z = 4$  cm es  $\sigma_z = 0.1(20) = 2$  kPa.



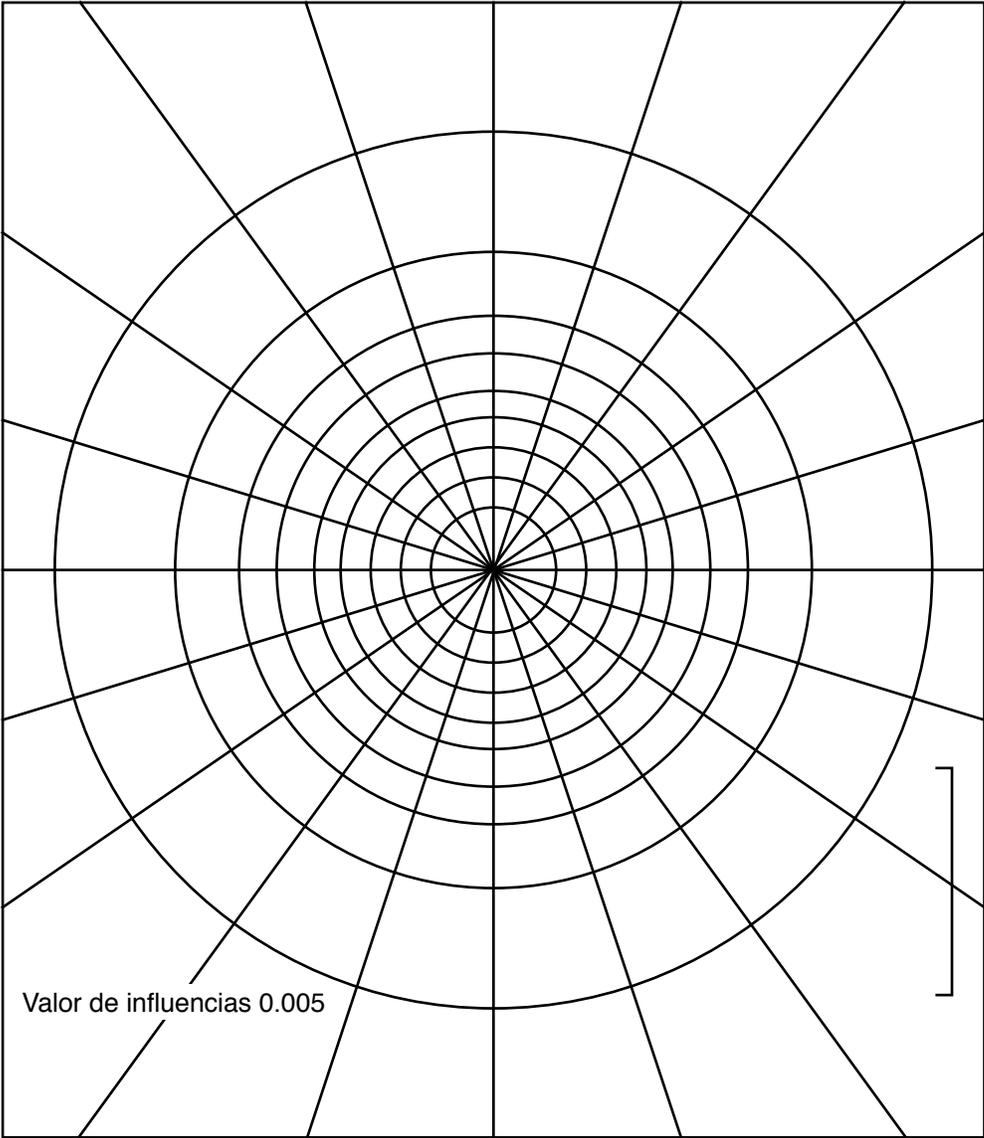
Hagamos  $\sigma_z/q = 0.2$  en la ecuación 7: obtenemos  $a/z = 0.40$ . Sea  $z = 4$  cm, y tracemos un círculo de radio  $a = 0.4z = 0.4(4) = 1.6$  cm (figura 4). Bajo el centro de este círculo, a la profundidad  $z = 4$  cm, el esfuerzo  $\sigma_z = 0.2q$ .

En la figura 4 vemos que cada faja o corona ocasiona un esfuerzo  $\sigma_z/q = 0.1$  bajo el centro del círculo. Si dividimos cada corona como es usual en 20 segmentos, apreciamos que cada segmento produce un incremento de esfuerzo igual a  $0.1/20 = 0.005$  de la presión  $q$  aplicada en la superficie.

Trazamos a continuación las circunferencias correspondientes a magnitudes del cociente  $\sigma_z/q$  de 0.3, 0.4, ... , 0.9, como se indica en la figura 5 (la relación  $a/z \rightarrow \infty$  para  $\sigma_z/q \rightarrow 1$ ). A este gráfico se conoce como *carta de Newmark*, y se usa para calcular el esfuerzo  $\sigma_z$  a la profundidad  $z$  ocasionado por un área cargada de cualquier forma, utilizando el siguiente procedimiento: el área se dibuja a la misma escala de la carta de Newmark; este dibujo se coloca sobre la carta haciendo coincidir el centro de ésta con el punto donde se desea conocer el esfuerzo  $\sigma_z$ ; se cuenta el número  $N$  de segmentos que cubre el área en cuestión. El esfuerzo  $\sigma_z$  vale

$$\sigma_z = N I q \quad (8)$$

donde  $q$  = presión vertical aplicada en el área en cuestión  
 $I$  = valor de influencia de cada segmento de la carta (usualmente  $I = 0.005$ )



CARTA DE NEWMARK  
Figura 5

**Ejemplo**

Hallar el esfuerzo normal vertical  $\sigma_z$  a la profundidad de 6 m, bajo el centro de un rectángulo sometido a una carga uniforme de 50 kPa en su superficie. El rectángulo tiene un ancho de 10 m y una longitud de 20 m.

**Solución**

Usamos la carta de Newmark de la figura 5. La correspondencia de la carta al prototipo la hacemos de la siguiente forma

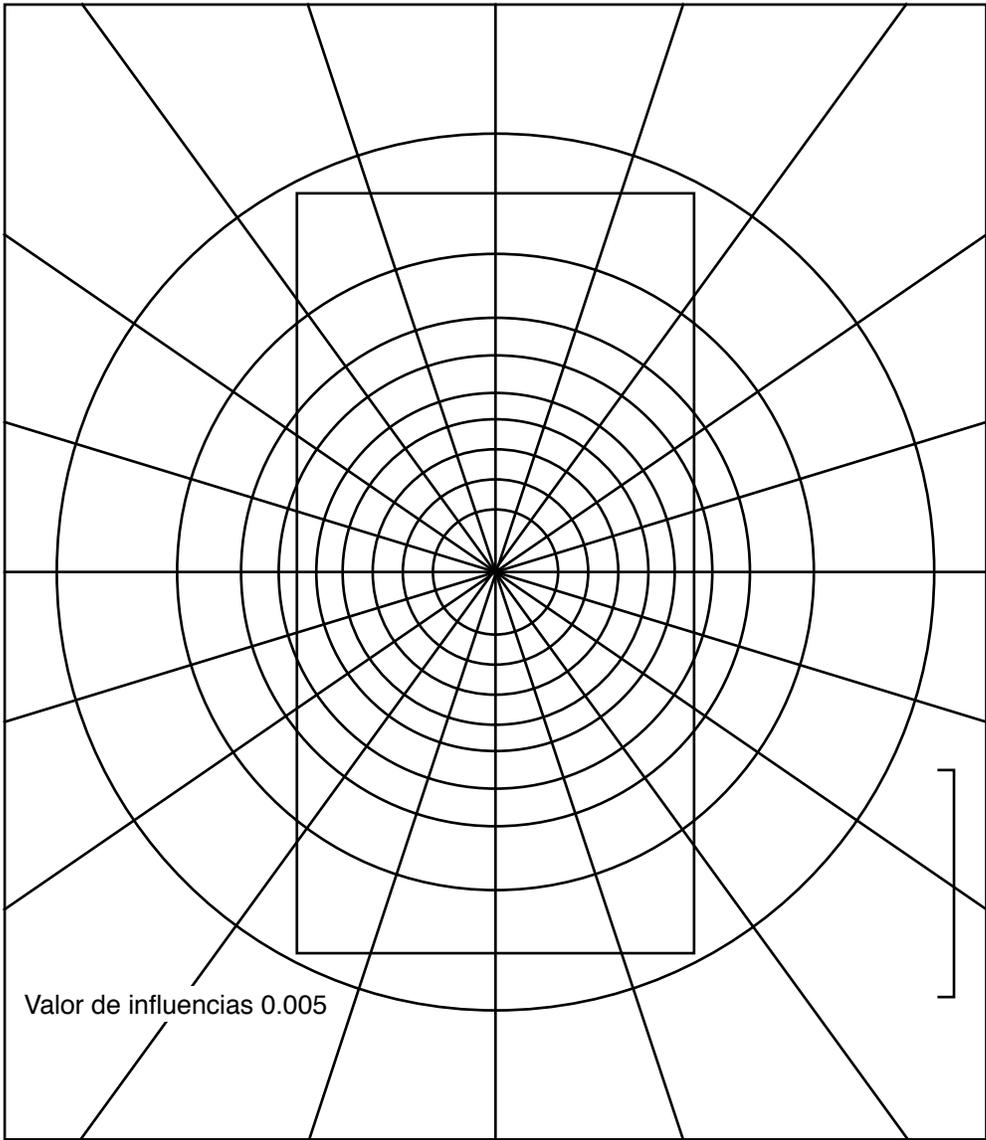
z prototipo 6 m	z carta 4 cm
B prototipo 10 m	B carta x
	$x = 4(10)/6 = 6.67 \text{ cm}$

z prototipo 6 m	z carta 4 cm
L prototipo 20 m	L carta x
	$x = 4(20)/6 = 13.33 \text{ cm}$

Dibujamos un rectángulo con  $B = 6.67 \text{ cm}$  y  $L = 13.33 \text{ cm}$  y lo colocamos sobre la carta de Newmark, haciendo coincidir los centros del rectángulo y de la carta (figura E-1). Contamos el número de segmentos:  $N = 144$ . Usando la ecuación 8

$$\sigma_z = N I q = (144)(0.005)(50) = 36 \text{ kPa}$$

-----



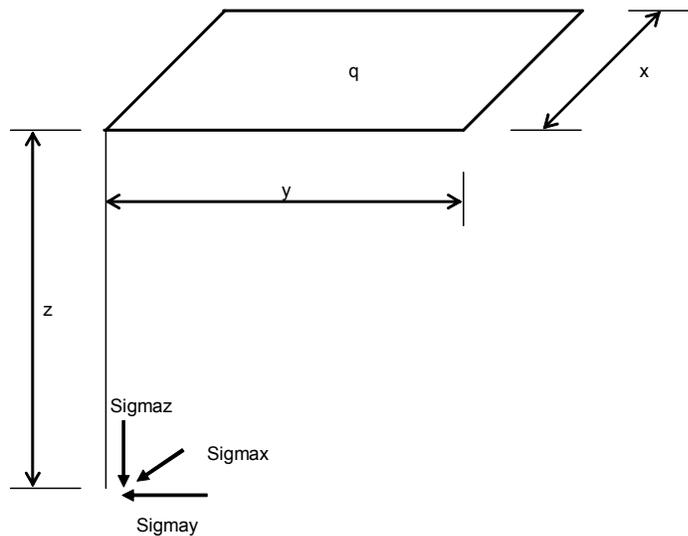
CARTA DE NEWMARK  
Figura E-1

## RECTÁNGULO CARGADO

Los esfuerzos normales bajo la esquina de un rectángulo cargado valen:

Esfuerzo normal vertical  $\sigma_z$ , figura 6 (Damy, 1985)

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right] \quad (9)$$



INCREMENTOS DE ESFUERZO BAJO LA ESQUINA DE UN RECTÁNGULO CARGADO

FIGURA 6

(Csincreff)

Esfuerzos normales horizontales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , figura 6 (Dashkó y Kagán, 1980)

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{xB}{yz} \right) \right] \quad (10)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right] \quad (11)$$

$$B = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (12)$$

**Ejemplo**

Un edificio con losa de cimentación desplantada superficialmente, de dimensiones 10 por 20 m en planta, transmite una presión media al terreno de 50 kPa. Hallar los esfuerzos normales  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , a la profundidad de 6 m. Considerar en el terreno de cimentación  $\nu = 0.3$ .

**Solución**

Las ecuaciones 9 a 11 proporcionan esfuerzos bajo la esquina de un rectángulo. Para hallar los esfuerzos bajo el centro, dividimos el área del rectángulo en cuatro, quedando  $x = 10/2 = 5$  m,  $y = 20/2 = 10$  m; con estas cantidades y  $q = 50$  kPa,  $z = 6$  m,  $\nu = 0.3$ , utilizamos las ecuaciones 9 a 11, obtenemos los esfuerzos bajo la esquina de la cuarta parte del área

$$\sigma_z' = 9.09 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x' = 2.13 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y' = 0.80 \text{ kPa}$$

Los esfuerzos bajo el centro los determinamos multiplicando por cuatro estos valores

$$\sigma_z = 36.36 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 8.52 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 3.20 \text{ kPa}$$

(Csesfmasuelo)

-----

**REFERENCIAS**

Boussinesq, J, Application des potentiels á l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, París, 1885

Damy, J, "Integración de las ecuaciones de Boussinesq, Westergaard y Fröhlich, sobre superficies poligonales de cualquier forma, cargadas con fuerzas verticales uniformemente repartidas", Rev Ingeniería, Vol LV, N° 1: 82-86, 1985

Dashkó, R E y Kagán, A A, *Mecánica de Suelos en la Práctica de la Geología Aplicada a la Ingeniería*, Cap 2, MIR, Moscú, 1980

Yoder, E J, *Principles of Pavement Design*, Wiley, 1959

(Cs incrementos de esfuerzo 120801)

# Capítulo 4

## CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN SUELOS

### NOTA PRELIMINAR

Se presentan en este capítulo procedimientos para calcular deformaciones en los suelos. El capítulo inicia con el estudio de la mecánica de medios granulares. Un medio granular tiene la característica de que su rigidez aumenta con la presión de confinamiento. Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas para el cálculo de las relaciones esfuerzo-deformación tienen que tomar en cuenta explícitamente este efecto. Esta técnica tiene la ventaja adicional de que el número de propiedades de deformación se reduce a un mínimo.

En los incisos siguientes las ecuaciones constitutivas propuestas para medios granulares se aplican al cálculo de las deformaciones de suelos friccionantes, de suelos colapsables, de suelos cohesivos totalmente saturados y de suelos cohesivos parcialmente saturados (constituidos éstos principalmente por arcillas expansivas).

Cabe aclarar que la aplicación de la mecánica de medios granulares al cómputo de las deformaciones de los suelos en la naturaleza arroja resultados aproximados, pues un medio granular es un modelo, mientras que un suelo real sólo se parece al modelo. Sin embargo, para fines de aplicación los resultados son satisfactorios para la mayoría de los casos de la práctica de la ingeniería.

Hemos considerado únicamente el comportamiento de un medio granular en un estado relativamente alejado del estado de falla del material. En consecuencia, el cálculo de las deformaciones es válido para esfuerzos menores que aproximadamente la mitad del esfuerzo de colapso del suelo.

### ESFUERZO

Consideremos un elemento de material sometido al sistema de cargas indicado en la figura 1. Consideremos las caras del elemento paralelas a los planos  $xy$  y  $yz$  (figura 2); para las fuerzas y áreas usaremos la siguiente convención de signos: las fuerzas son positivas si tienen el mismo sentido del eje al que son paralelas. Para las áreas utilizamos el sentido del vector normal a la cara externa: si el vector normal tiene el mismo sentido del eje al cual es paralelo, el área es positiva. Tomemos como ejemplo la cara superior: la fuerza  $\Delta N_z$  es positiva y el área  $\Delta A_z$  es también positiva, como se aprecia en la figura 2.

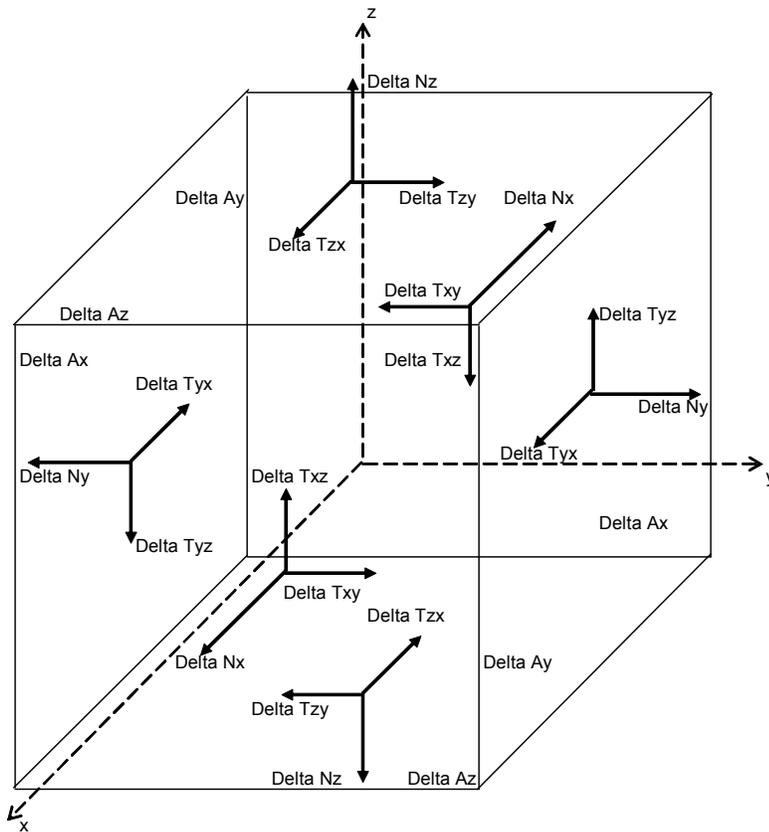
Veamos el concepto de esfuerzo en mecánica de suelos. En la cara superior del elemento, el esfuerzo normal medio  $\sigma_z$  lo definimos de la siguiente forma

$$\sigma_z = \frac{\Delta N_z}{\Delta A_z} \quad (1)$$

---

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingenierías Civil y Geomática. Facultad de Ingeniería. UNAM

Dado que  $\Delta N_z > 0$  y  $\Delta A_z > 0$ , cuando el elemento está sometido a tensión el esfuerzo  $\sigma_z$  es negativo en la cara superior del elemento (figuras 1 y 2). En la cara inferior (figura 2) el esfuerzo normal medio está dado también por la ecuación 1; como  $\Delta N_z < 0$  y  $\Delta A_z < 0$ , el esfuerzo  $\sigma_z$  es también negativo. En cambio, si la fuerza  $\Delta N_z < 0$  en la cara superior, entonces el esfuerzo normal  $\sigma_z$  es *positivo* (ecuación 1); es decir, si el elemento está sometido a *compresión*, el esfuerzo normal es *positivo*; esta es la convención de signos que se emplea en mecánica de suelos: en un cuerpo sujeto a fuerzas de *compresión* el esfuerzo normal es *positivo*. Lo mismo ocurre en la cara inferior del elemento.



SISTEMA DE FUERZAS ACTUANDO EN PLANOS PERPENDICULARES A LOS EJES COORDENADOS  
FIGURA 1

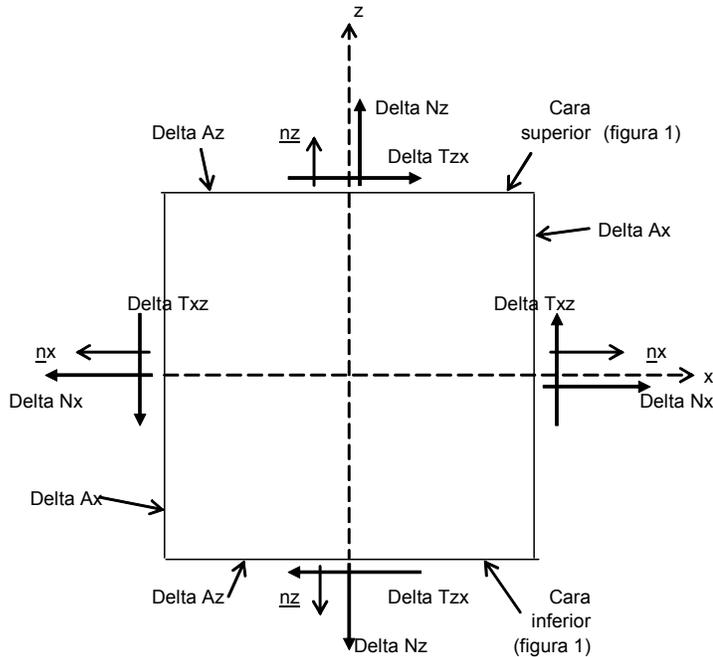
Definamos a continuación el esfuerzo cortante medio  $\tau_{zx}$  en la cara superior (figura 2)

$$\tau_{zx} = - \frac{\Delta T_{zx}}{\Delta A_z} \tag{2}$$

El esfuerzo cortante medio  $\tau_{zy}$  en la cara superior se define (figura 1)

$$\tau_{zy} = - \frac{\Delta T_{zy}}{\Delta A_z} \tag{3}$$

En las caras paralelas al plano yz (figura 1) los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$ , y en las caras paralelas al plano xz (figura 1) los esfuerzos  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$  y  $\tau_{yz}$ , se obtienen usando un criterio similar al dado por las ecuaciones 1, 2 y 3.



FUERZAS ACTUANDO EN PLANOS PERPENDICULARES  
A LOS EJES z Y x  
FIGURA 2

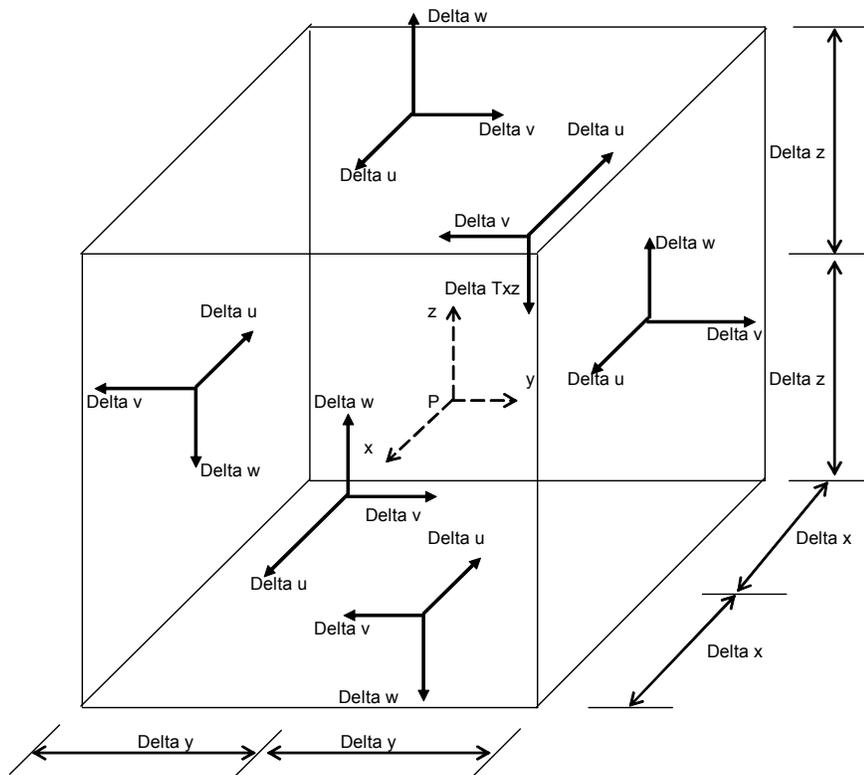
(Cs Deformaciones de Suelos Figuras)

## DEFORMACIÓN UNITARIA

Consideremos un elemento de material que sufre el estado de deformación indicado en la figura 3, en el entorno del punto P. Estudiemos la deformación de la cara superior del elemento, en la dirección del eje z. Definimos la deformación unitaria longitudinal media de la siguiente forma (figuras 3 y 4)

$$\varepsilon_z = - \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (4)$$

Dado que  $\Delta w > 0$  y  $\Delta z > 0$ , la deformación unitaria longitudinal media  $\varepsilon_z$  es negativa en la cara superior del elemento. En la cara inferior (figuras 3 y 4) la deformación unitaria longitudinal media está dada también por la ecuación 4; como  $\Delta w < 0$  y  $\Delta z < 0$ , la deformación unitaria  $\varepsilon_z$  es también negativa. En cambio, supongamos que  $\Delta w < 0$  en la cara superior (figuras 3 y 4), entonces la deformación unitaria longitudinal  $\varepsilon_z$  es positiva (ecuación 4). Es decir, si el elemento sufre una *compresión*, la deformación unitaria longitudinal es *positiva*; esta es la convención de signos que se usa en mecánica de suelos: si el elemento se *comprime*, la deformación unitaria longitudinal es *positiva*.



ESTADO DE DEFORMACIÓN EN DIRECCIONES PARALELAS A LOS EJES COORDENADOS FIGURA 3

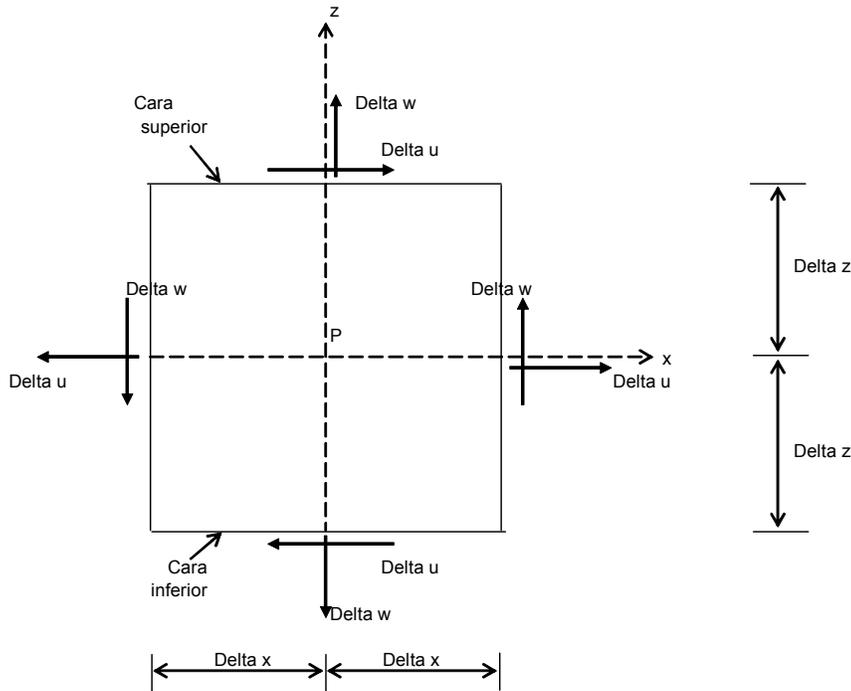
Definamos a continuación la deformación unitaria angular (o transversal) media  $\epsilon_{zx}$  en la cara superior del elemento, en la dirección del eje z (figuras 3 y 4)

$$\epsilon_{zx} = - \frac{\Delta u}{\Delta z} \tag{5}$$

En forma análoga, la deformación unitaria angular  $\epsilon_{zy}$  se define

$$\epsilon_{zy} = - \frac{\Delta v}{\Delta z} \tag{6}$$

En las direcciones de los ejes x y y (figura 3), las deformaciones unitarias  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{xz}$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_{yx}$  y  $\epsilon_{yz}$ , se definen usando expresiones similares a las ecuaciones 4, 5 y 6.



ESTADO DE DEFORMACIÓN EN DIRECCIONES PARALELAS  
A LOS EJES z Y x  
FIGURA 4

(Cs Deformaciones de Suelos Figuras)

La deformación del ángulo recto es

$$\gamma_{zx} = \epsilon_{zx} + \epsilon_{xz} \quad (7)$$

Si no existe rotación del cuerpo  $\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz}$ , y

$$\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} \quad (8)$$

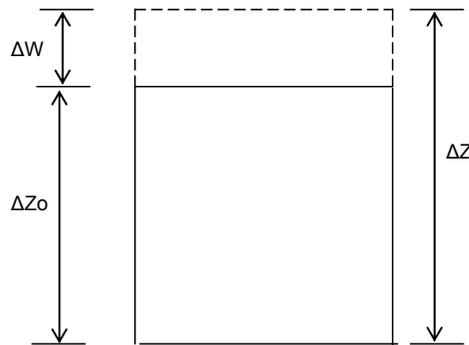
Si se mantiene horizontal la base del elemento, entonces el desplazamiento horizontal  $\Delta u$  es la suma de los desplazamientos del eje z y del eje x. Por lo tanto, en este caso, la deformación  $\gamma_{zx}$  es

$$\gamma_{zx} = - \frac{\Delta u}{\Delta z} \quad (9)$$

El resto de las deformaciones angulares  $\gamma_{zy}$  y  $\gamma_{xy}$  se obtiene en forma análoga.

Supongamos que la deformación  $\Delta w$  en la cara superior (figura 3) ocurre gradualmente (figura 5). Para una distancia  $\Delta z$  la deformación unitaria diferencial vale

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta w)}{\Delta z} \quad (10)$$



DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DE SUELO  
DE ESPESOR INICIAL  $\Delta Z_0$   
FIGURA 5

Pero (figura 5)

$$\Delta z = \Delta z_0 + \Delta w$$

$$d(\Delta z) = d(\Delta z_0) + d(\Delta w) = d(\Delta w)$$

Sustituyendo en la ecuación 10

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} \quad (11)$$

En forma análoga, si en la cara superior (figuras 3 y 4) el desplazamiento horizontal  $\Delta u$  ocurre gradualmente, la deformación angular diferencial es, de acuerdo con la ecuación 9

$$d\gamma_{zx} = -\frac{d(\Delta u)}{\Delta z} \quad (12)$$

El resto de las deformaciones unitarias diferenciales se obtiene en forma similar.

## CONFINAMIENTO INICIAL

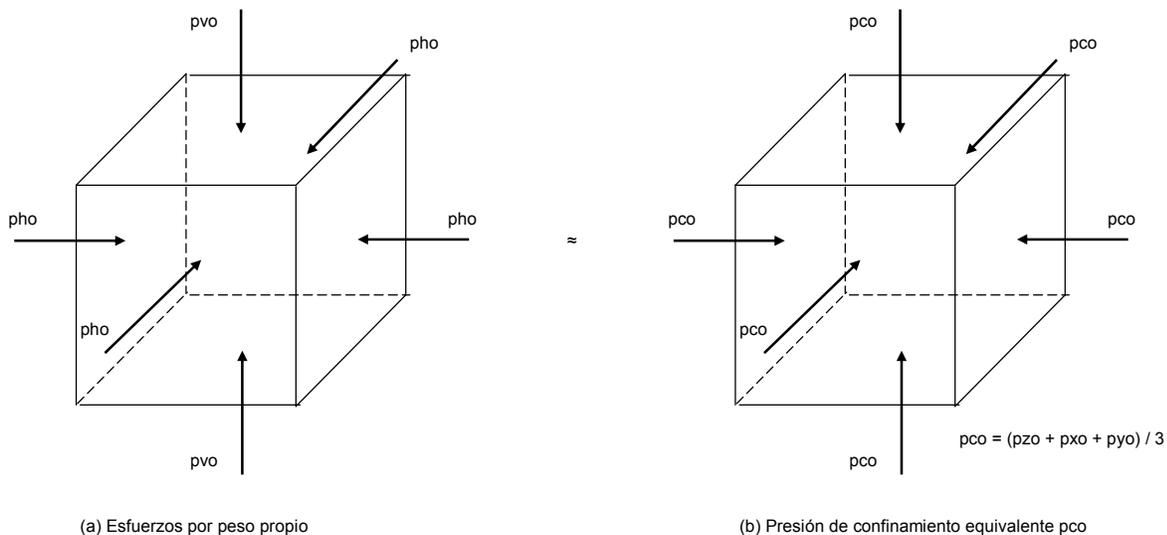
Consideremos un elemento de suelo sometido al estado de esfuerzo por peso propio mostrado en la figura 6. La presión de confinamiento promedio inicial, por peso propio del terreno, vale

$$p_{co} = (p_{vo} + p_{ho} + p_{ho}) / 3$$

Si  $p_{ho} = K_o p_{vo}$ , donde  $K_o$  es el coeficiente de presión en reposo del suelo, entonces

$$p_{co} = (1/3)(1 + 2K_o) p_{vo} \quad (13)$$

Por otra parte, si el suelo tiene una cierta cohesión o cementación, podemos considerar que esta se debe a una presión de confinamiento interno intrínseca, la cual denominaremos  $p_{cie}$ .



ESTADO DE ESFUERZO POR PESO PROPIO  
FIGURA 6

La presión de confinamiento inicial  $p_{beo}$  será la suma de la presión de confinamiento intrínseca,  $p_{cie}$ , más la presión externa por peso propio,  $p_{co}$ , es decir

$$p_{beo} = p_{cie} + p_{co} \quad (14)$$

## RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN EN MEDIOS GRANULARES

### Ecuación de Juárez Badillo

Juárez Badillo (1965) utiliza la siguiente expresión para el cálculo de la deformación volumétrica de los materiales

$$dV/V = -\gamma (d\sigma/\sigma) \quad (15)$$

donde

$V$  = volumen de un elemento de suelo

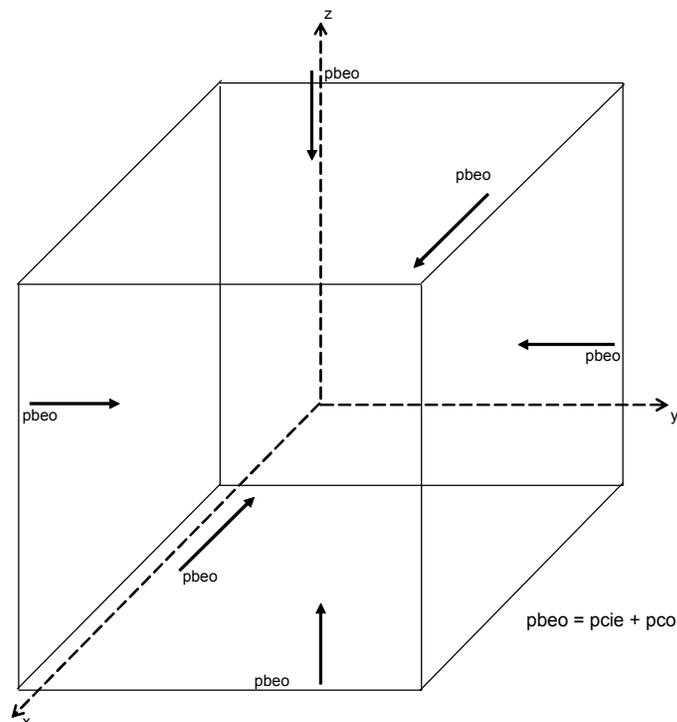
$\sigma$  = esfuerzo isotrópico sobre el elemento de suelo

$\gamma$  = parámetro que mide la compresibilidad volumétrica del material

Vemos que en la expresión anterior, tanto la deformación como el esfuerzo se “normalizan”. A continuación, extenderemos el concepto de normalización para aplicarlo al cálculo de la deformación de un medio granular.

### Efecto de los incrementos de esfuerzo

Imaginemos un elemento de suelo a una profundidad  $z$ , sujeto al estado de esfuerzo mostrado en la figura 7a. Al construir una obra de ingeniería se incrementan los esfuerzos sobre un elemento de suelo (figura 7b), donde  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son los incrementos de esfuerzo normal ocasionados por la presencia de la obra de ingeniería.



(a) Presión de confinamiento inicial  
 $p_{beo} = p_{cie} + p_{co}$

ESTADO DE ESFUERZO EN UN ELEMENTO DE SUELO  
FIGURA 7

Supongamos por un momento que el confinamiento inicial  $p_{beo}$  (ecuación 2) se mantiene constante. Demos incrementos de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  (figura 7b); podemos usar entonces una variante de la ley de Hooke para el cálculo de la deformación unitaria

$$\varepsilon_z \cong (1/E_s) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]^r \quad (16)$$

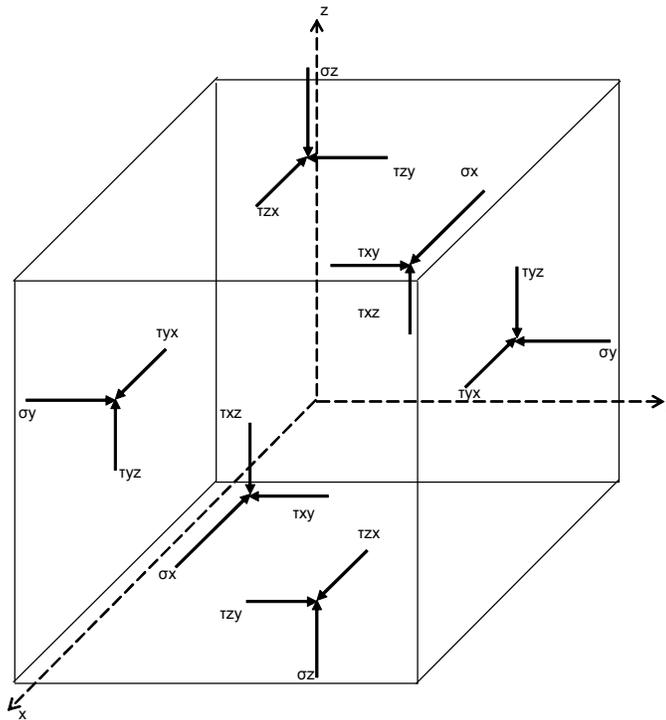
donde  $E_s$  es el módulo de deformación del suelo,  $\nu$  es la relación de Poisson y  $r$  un exponente que depende de la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria del suelo.

La ecuación 16 puede quedar

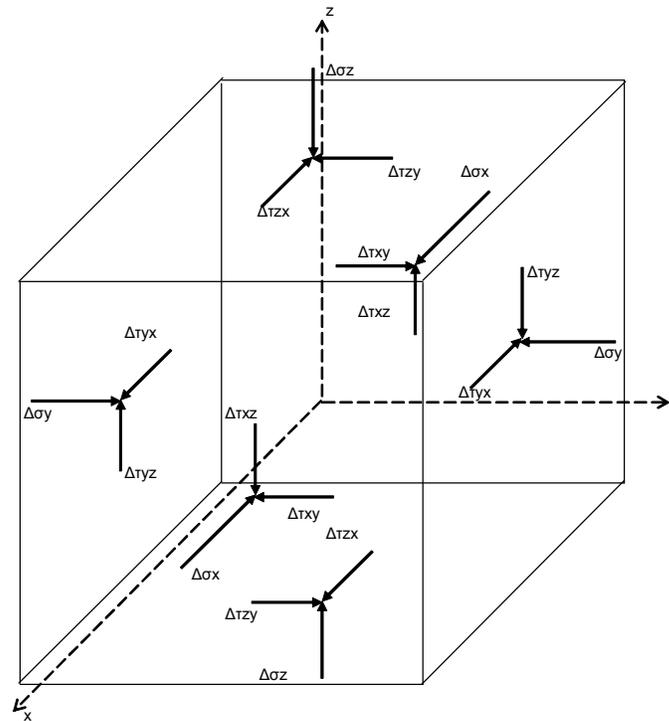
$$\varepsilon_z \cong (1/E_s) (\sigma_H)^r \quad (17)$$

siendo

$$\sigma_H = \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (18)$$



(b) Incrementos de esfuerzo por una obra de ingeniería



(c) Incrementos diferenciales de esfuerzo

(Cs Deformaciones de Suelos Figuras)

ESTADO DE ESFUERZO EN UN ELEMENTO DE SUELO  
FIGURA 7

### Efecto de la presión de confinamiento

Por otra parte, como mencionamos antes, la deformación es función inversa del esfuerzo de confinamiento. Veamos a continuación cómo tomar en cuenta este efecto. Consideremos un elemento de suelo sometido a una presión de confinamiento inicial  $p_{be0}$ ; demos incrementos de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  sobre el cuerpo, tal como se ilustra en la figura 7b. Estos incrementos de esfuerzo ocasionan que la presión de confinamiento  $p_{be0}$  aumente en una cantidad  $\sigma_c$ , dando lugar a un nuevo valor de  $p_{be}$ , que vale

$$p_{be} = p_{be0} + \sigma_c \quad (19)$$

En términos generales, en mecánica de suelos se acepta que  $\sigma_c$  es igual al incremento de esfuerzo normal en el plano octaédrico, o sea, que es igual al promedio de los incrementos de esfuerzo

$$\sigma_c = (1/3) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (20)$$

### Ecuaciones constitutivas para el cálculo de los incrementos de deformación de un elemento de suelo

Consideremos el estado de esfuerzo de un elemento de suelo mostrado en la figura 7.

El incremento de deformación longitudinal unitaria en dirección del eje  $z$ ,  $\Delta\epsilon_z$ , debido a los incrementos diferenciales de esfuerzo indicados en la figura 7c, lo podemos obtener con la siguiente ecuación constitutiva

$$\Delta \varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{(\sigma_H/p_a)^f (\Delta \sigma_H/p_a)}{[(p_{be0} + \sigma_c + \Delta \sigma_c/2) / p_a]^s} \quad (21)$$

O bien, dado que (ecuación 5)

$$\varepsilon_z = - \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$\frac{\Delta(\Delta w)}{\Delta z} = - \frac{1}{A} \frac{(\sigma_H/p_a)^f (\Delta \sigma_H/p_a)}{[(p_{be0} + \sigma_c + \Delta \sigma_c/2) / p_a]^s} \quad (22)$$

Para la deformación angular podemos usar la siguiente expresión

$$\Delta \gamma_{zx} = \frac{1}{\Gamma} \frac{(\tau_{zx}/p_a)^f (\Delta \tau_{zx}/p_a)}{[(p_{be0} + \sigma_c + \Delta \sigma_c/2) / p_a]^s} \quad (23)$$

O bien (ecuación 9)

$$\frac{\Delta(\Delta u)}{\Delta z} = - \frac{1}{\Gamma} \frac{(\tau_{zx}/p_a)^f (\Delta \tau_{zx}/p_a)}{[(p_{be0} + \sigma_c + \Delta \sigma_c/2) / p_a]^s} \quad (24)$$

El resto de los incrementos de deformación unitaria  $\Delta \varepsilon_x$ ,  $\Delta \gamma_{xy}$ , etcétera, se obtiene siguiendo un procedimiento similar.

#### *Ecuaciones constitutivas cuando los incrementos de esfuerzo son proporcionales a la sobrecarga por una obra de ingeniería*

Con frecuencia los incrementos de esfuerzo en un elemento de suelo son proporcionales a la sobrecarga de una obra de ingeniería. Por ejemplo, cuando se construye un edificio, a cierta profundidad se producen incrementos de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  y  $\tau_{xy}$ , los cuales son proporcionales a la sobrecarga  $q$  ocasionada por la presencia del inmueble.

Sea un elemento de suelo a la profundidad  $z$  sujeto a incrementos de esfuerzo por una obra de ingeniería. Suponiendo que el espesor  $\Delta z_0$  de dicho elemento es suficientemente pequeño para que la relación entre el incremento de esfuerzo horizontal y el incremento de esfuerzo vertical sea constante, tenemos entonces que

$$a_1 = \sigma_x / \sigma_z \quad a_2 = \sigma_y / \sigma_z \quad (25)$$

$$\sigma_x = a_1 \sigma_z \quad \sigma_y = a_2 \sigma_z \quad (26)$$

Sustituyendo las ecuaciones 25 y 26 en la ecuación 16

$$\varepsilon_z \cong (1/E_s) \{ \sigma_z [1 - \nu (a_1 + a_2)] \}^f \quad (27)$$

$$\varepsilon_z \cong (1/E_s) (f \sigma_z)^f \quad (28)$$

siendo

$$f = 1 - \nu (a_1 + a_2) \quad (29)$$

La presión de confinamiento sobre el elemento vale (ecuación 19)

$$p_{be} = p_{beo} + \sigma_c \quad (30)$$

donde (ecuación 20)

$$\sigma_c = (1/3) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

Para fines prácticos podemos sustituir la cantidad de (1/3) por coeficientes, es decir

$$\sigma_c = b_1 \sigma_z + b_2 (\sigma_x + \sigma_y) \quad (31)$$

donde, dada la experiencia actual  $b_1 = 1/3$  y  $b_2 = 1/3$ .

Reemplazando las ecuaciones 26 en la ecuación 31

$$\sigma_c = C \sigma_z \quad (32)$$

siendo

$$C = b_1 + b_2 (a_1 + a_2) \quad (33)$$

Sustituyendo en la ecuación 30

$$p_{be} = p_{beo} + C \sigma_z \quad (34)$$

Para el caso de esfuerzo cortante, definamos

$$a_3 = \frac{T_{zx}}{\sigma_z} \quad (35)$$

$$p_{be} = p_{beo} + (C/a_3) T_{zx} \quad (36)$$

Demos ahora incrementos diferenciales de esfuerzo al elemento (figura 7c). Con los resultados anteriores, podemos plantear una ecuación constitutiva general, en la que la deformación unitaria longitudinal diferencial sea directamente proporcional a la variante de la ley de Hooke dada por la ecuación 28, e inversamente proporcional a la presión de confinamiento dada por la ecuación 34, es decir (Deméneghi, 2008)

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{(f \sigma_z / p_a)^r d(f \sigma_z / p_a)}{[(p_{beo} + C \sigma_z) / p_a]^s} \quad (37)$$

Pero (ecuación 11)

$$d\varepsilon_z = - \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} \quad (38)$$

Es decir

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \frac{1}{A} \frac{(f \sigma_z / p_a)^r d(f \sigma_z / p_a)}{[(p_{beo} + c \sigma_z) / p_a]^s} \quad (39)$$

donde  $A$  es el módulo de rigidez del suelo, y  $r$  y  $s$  son exponentes que dependen del tipo de suelo.  $p_a$  = presión atmosférica = 101.3 kPa, que se introduce con el fin de que el módulo  $A$  sea adimensional (véase Janbu, 1963).

Para la deformación angular proponemos la siguiente ecuación

$$d\gamma_{zx} = \frac{1}{\Gamma} \frac{(\tau_{zx}/p_a)^r d(\tau_{zx}/p_a)}{[p_{beo} + (c/a_3) \tau_{zx}] / p_a]^s} \quad (40)$$

Pero (ecuación 12)

$$d\gamma_{zx} = - \frac{d(\Delta u)}{\Delta z} \quad (41)$$

Por lo tanto

$$\frac{d(\Delta u)}{\Delta z} = - \frac{1}{\Gamma} \frac{(\tau_{zx}/p_a)^r d(\tau_{zx}/p_a)}{[p_{beo} + (c/a_3) \tau_{zx}] / p_a]^s} \quad (42)$$

Las demás deformaciones unitarias diferenciales  $d\varepsilon_x$ ,  $d\gamma_{xy}$ , etcétera, se obtienen siguiendo un procedimiento análogo.

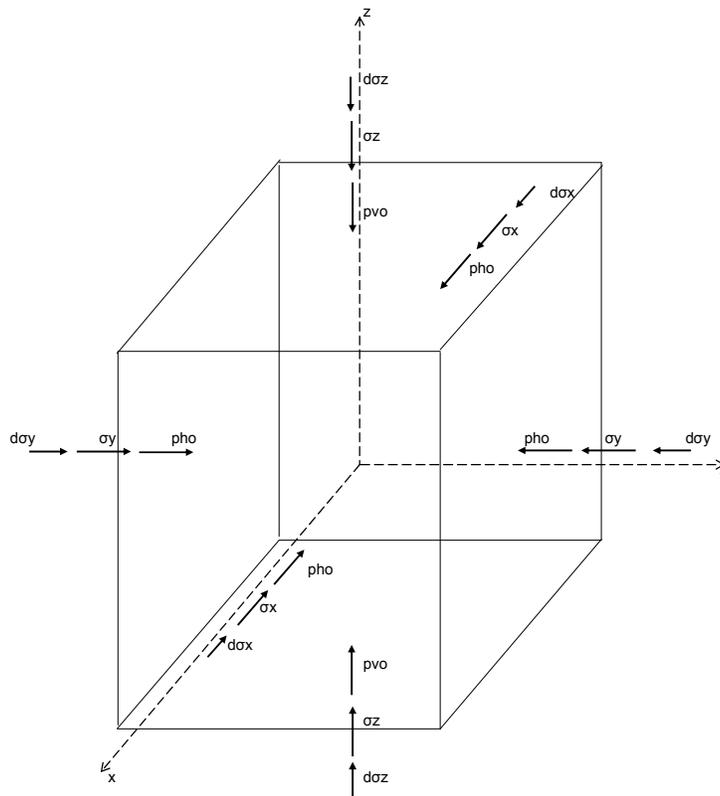
Volviendo a la expresión 37, en la mayoría de los suelos podemos considerar para fines prácticos  $r \approx 0$ , por lo que dicha ecuación constitutiva la podemos plantear también de la siguiente forma (Deméneghi, 2008)

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{[d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)]}{p_a} \left( \frac{p_{co} + \frac{\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y}{3}}{p_a} \right)^s \quad (43)$$

← Ley de Hooke

← Confinamiento

Observamos en la ecuación 43 que, como ocurre en la naturaleza, la deformación unitaria del suelo es función directa de los incrementos de esfuerzo y función inversa de la presión de confinamiento (figura 8).



ESTADO DE ESFUERZO EN UN ELEMENTO DE SUELO  
FIGURA 8

Pero

$$\left[ d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y) \right] = d\sigma_z \left[ 1 - \nu \left( \frac{d\sigma_x}{d\sigma_z} + \frac{d\sigma_y}{d\sigma_z} \right) \right] = d\sigma_z [1 - \nu(a_1 + a_2)] = fd\sigma_z \quad (44)$$

$$a_1 = \frac{d\sigma_x}{d\sigma_z} \cong \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = cte$$

$$a_2 = \frac{d\sigma_y}{d\sigma_z} \cong \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = cte$$

$$f = 1 - \nu(a_1 + a_2) = 1 - \nu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \right) \quad (45)$$

$$p_{co} + \frac{\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y}{3} = p_{co} + \frac{1}{3}\sigma_z \left( 1 + \frac{\sigma_x}{\sigma_z} + \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) = p_{co} + \frac{1}{3}\sigma_z + \frac{1}{3}\sigma_z(a_1 + a_2)$$

$$p_{co} + \frac{\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y}{3} = p_{co} + b_1\sigma_z + b_2\sigma_z(a_1 + a_2) = p_{co} + \sigma_z[b_1 + b_2(a_1 + a_2)] = p_{co} + c\sigma_z \quad (46)$$

$$c = b_1 + b_2(a_1 + a_2) = b_1 + b_2 \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \quad (47)$$

$$b_1 \cong \frac{1}{3}, \quad b_2 \cong \frac{1}{3}$$

La ecuación 43 queda

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{Ap_a^{1-s}} \frac{fd\sigma_z}{(p_{co} + c\sigma_z)^s} \quad (48)$$

Pero (ecuación 11)

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta w)}{\Delta z} = -\frac{d(\Delta z)}{\Delta z}$$

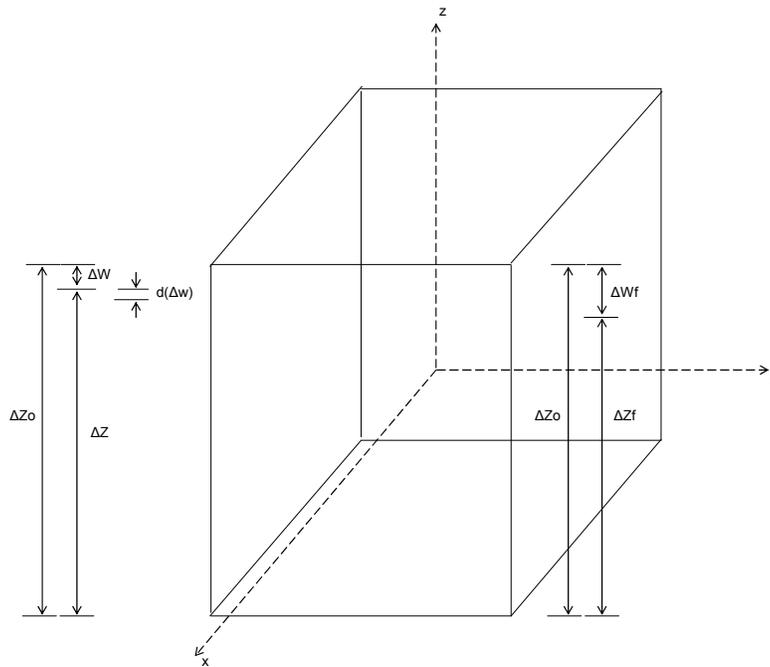
$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{Ap_a^{1-s}} \frac{fd\sigma_z}{(p_{co} + c\sigma_z)^s}$$

Integremos esta última expresión. Al aumentar el esfuerzo normal vertical de 0 a  $\sigma_z$ , la altura del elemento se reduce de la altura inicial  $\Delta z_o$  a la altura final  $\Delta z_f$  (figura 9). Por lo tanto, debemos integrar esta ecuación de  $\Delta z_o$  a  $\Delta z_f$  el primer miembro y de 0 a  $\sigma_z$  el segundo miembro, es decir

$$\int_{\Delta z_o}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{Ap_a^{1-s}} \int_0^{\sigma_z} \frac{fd\sigma_z}{(p_{co} + c\sigma_z)^s}$$

$$\ln \Delta z \Big|_{\Delta z_o}^{\Delta z_f} = -\frac{f}{cAp_a^{1-s}} \left[ \frac{(p_{co} + c\sigma_z)^{1-s}}{1-s} \right]_0^{\sigma_z}$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = \exp \left\{ -\frac{f \left[ (p_{co} + c\sigma_z)^{1-s} - (p_{co})^{1-s} \right]}{cAp_a^{1-s}} \right\}_0^{\sigma_z} \quad (49)$$



DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DE SUELO  
FIGURA 9

Pero, de acuerdo con la figura 9

$$\Delta z_f = \Delta z_o + \Delta w_f$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = 1 + \frac{\Delta w_f}{\Delta z_o}$$

$$\Delta w_f = \left( \frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} - 1 \right) \Delta z_o \quad (50)$$

Reemplazando la ecuación 49 en la 50

$$\Delta w_f = \left\{ \exp \left\{ - \frac{f \left[ (p_{co} + c \sigma_z)^{1-s} - (p_{co})^{1-s} \right]}{(1-s) c A p_a^{1-s}} \right\} - 1 \right\} \Delta z_o \quad (51)$$

De acuerdo con la convención de signos de la figura 9, el valor de  $\Delta w_f$  dado por la ecuación 51 da siempre negativo. Para tener una magnitud positiva de la deformación del elemento, hagamos

$$\Delta \delta_P = - \Delta w_f$$

La expresión 51 queda

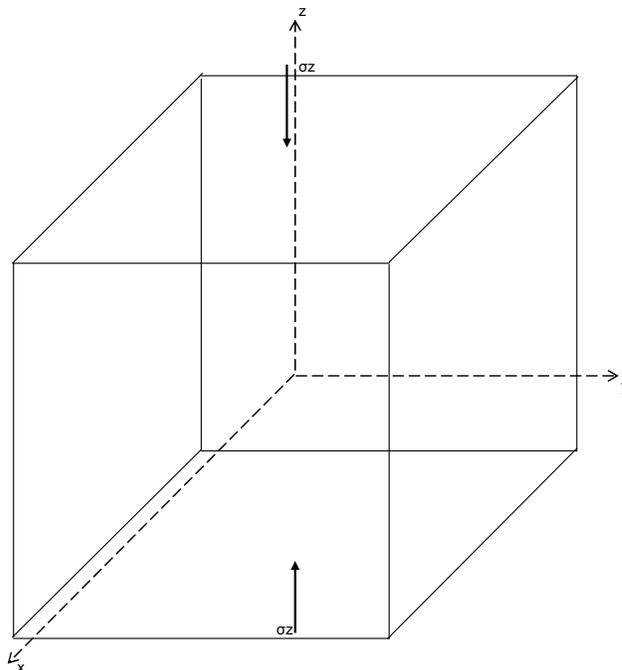
$$\Delta\delta_z = \left\{ 1 - \exp \left\{ - \frac{f \left[ (p_{co} + c\sigma_z)^{1-s} - (p_{co})^{1-s} \right]}{(1-s)cAp_a^{1-s}} \right\} \right\} \Delta z_o \quad (52)$$

La ecuación 52 proporciona la deformación de un elemento de suelo de espesor inicial  $\Delta z_o$ , sometido a incrementos de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , ocasionados por una obra de ingeniería.

### Compresión unidimensional

En ocasiones la deformación más significativa de un suelo es la vertical, siendo las deformaciones y los esfuerzos laterales pequeños. En este caso, podemos suponer que el incremento de deformación vertical se debe sólo al incremento de esfuerzo vertical  $\sigma_z$  (figura 10). Se puede usar entonces la siguiente ecuación constitutiva

$$\Delta\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{(\Delta\sigma_z/p_a)}{[(p_{veo} + \sigma_z + \Delta\sigma_z/2)/p_a]^s} \quad (53)$$



INCREMENTO DE ESFUERZO VERTICAL POR UNA OBRA DE INGENIERÍA  
FIGURA 10

O bien, dado que (ecuación 4)

$$\varepsilon_z = - \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$\frac{\Delta(\Delta w)}{\Delta Z} = - \frac{1}{A} \frac{(\Delta \sigma_z / p_a)}{[(p_{veo} + \sigma_z + \Delta \sigma_z / 2) / p_a]^s} \quad (54)$$

Siendo

$$p_{veo} = p_{cie} + p_{vo} \quad (55)$$

Si aplicamos un incremento diferencial de esfuerzo  $d\sigma_z$ , la ecuación constitutiva es

$$d\varepsilon_z = - \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z / p_a}{[(p_{veo} + \sigma_z) / p_a]^s} \quad (56)$$

Pero (ecuación 11)

$$d\varepsilon_z = - \frac{d(\Delta Z)}{\Delta Z}$$

Es decir

$$\frac{d(\Delta Z)}{\Delta Z} = - \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z / p_a}{[(p_{veo} + \sigma_z) / p_a]^s} \quad (57)$$

## FÓRMULAS ELÁSTICAS

Presentamos a continuación algunas fórmulas obtenidas de la teoría de la elasticidad, que se pueden usar, en forma aproximada, para calcular deformaciones verticales en los suelos.

### Ley de Hooke

$$\varepsilon_z = (1/E) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (58)$$

### Fórmula de Schleicher

Asentamiento bajo la esquina de un rectángulo de ancho  $x$  y largo  $y$  (figura 11a), fórmula de Schleicher (Terzaghi, 1943)

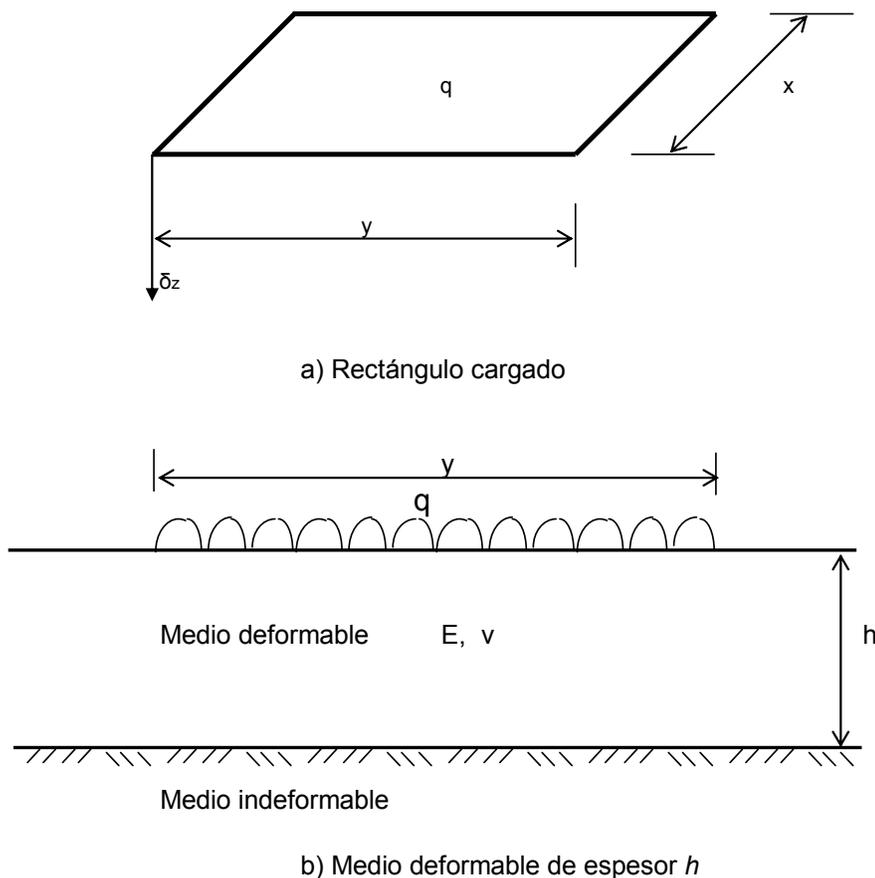
$$\delta_z = \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ y \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} + x \ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right] \quad (59)$$

**Fórmula de Steinbrenner**

Cuando el medio elástico tiene un espesor  $h$  (figura 11b), el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme  $q$ , está dado por la fórmula de Steinbrenner (Terzaghi, 1943)

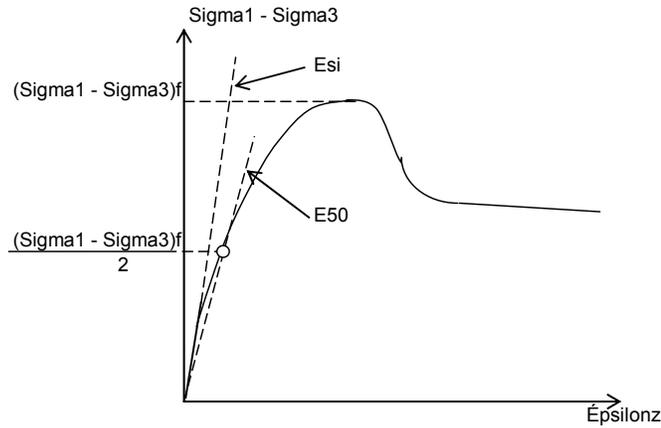
$$\delta_z = \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ y \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{y^2 + h^2}}{y(x + A)} + x \ln \frac{(y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + h^2}}{x(y + A)} \right] + \frac{q(1-\nu-2\nu^2)}{2\pi E} h \tan^{-1} \frac{xy}{hA} \quad (60)$$

$$A = (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2} \quad (61)$$



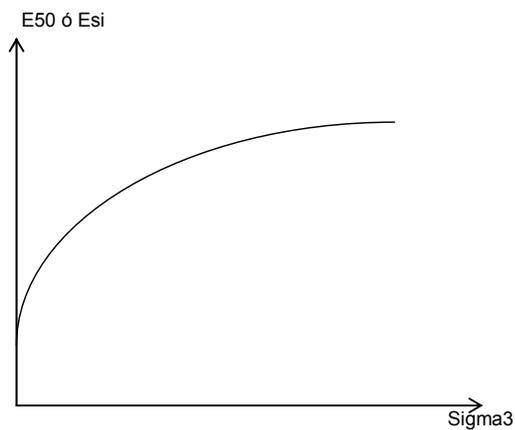
DEFORMACIÓN BAJO LA ESQUINA DE UN  
RECTÁNGULO CARGADO  
FIGURA 11

En la práctica se usan las ecuaciones 58, 59 ó 60, haciendo  $E = E_s$ , siendo  $E_s$  el módulo de deformación del suelo. El módulo  $E_s$  se puede obtener a partir de los resultados de una prueba de compresión triaxial (figura 12). Como  $E_s$  se puede usar el módulo tangente inicial  $E_{si}$  o el módulo  $E_{50}$  (figura 12), que corresponde al 50% del esfuerzo desviador de falla.



MÓDULO  $E_{50}$  Y MÓDULO TANGENTE INICIAL  $E_{si}$   
FIGURA 12

La rigidez de un suelo es función de la presión de confinamiento. En la figura 13 se muestra la variación de  $E_{50}$  ó  $E_{si}$  con el confinamiento  $\sigma_3$ .



VARIACIÓN DEL MÓDULO  $E_{50}$  Ó DEL MÓDULO TANGENTE INICIAL  $E_{si}$   
CON LA PRESIÓN DE CONFINAMIENTO  
FIGURA 13

## SUELOS FRICCIONANTES

Veremos a continuación la forma de determinar la deformación vertical ocasionada por una carga repartida aplicada en la superficie de un depósito de suelo friccionante.

Podemos usar las ecuaciones 43 y 48 para el cálculo de la deformación vertical de un elemento de suelo de espesor  $\Delta z_0$ , que corresponden a ecuaciones constitutivas para un medio granular:

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{[d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)]}{p_a} \left( \frac{p_{co} + \frac{\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y}{3}}{p_a} \right)^s \leftarrow \text{Ley de Hooke} \quad (43)$$

$\left( \frac{p_{co} + \frac{\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y}{3}}{p_a} \right)^s \leftarrow \text{Confinamiento}$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{Ap_a^{1-s}} \frac{fd\sigma_z}{(p_{co} + c\sigma_z)^s} \quad (48)$$

Pero (ecuación 11)

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta w)}{\Delta z} = -\frac{d(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{Ap_a^{1-s}} \frac{fd\sigma_z}{(p_{co} + c\sigma_z)^s}$$

Integremos esta última expresión. Al aumentar el esfuerzo normal vertical de 0 a  $\sigma_z$ , la altura del elemento se reduce de la altura inicial  $\Delta z_0$  a la altura final  $\Delta z_f$  (figura 9). Por lo tanto, debemos integrar esta ecuación de  $\Delta z_0$  a  $\Delta z_f$  el primer miembro y de 0 a  $\sigma_z$  el segundo miembro, es decir

$$\int_{\Delta z_0}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{Ap_a^{1-s}} \int_0^{\sigma_z} \frac{fd\sigma_z}{(p_{co} + c\sigma_z)^s}$$

$$\ln \Delta z \Big|_{\Delta z_0}^{\Delta z_f} = -\frac{f}{cAp_a^{1-s}} \left[ \frac{(p_{co} + c\sigma_z)^{1-s}}{1-s} \right]_0^{\sigma_z}$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_0} = \exp \left\{ -\frac{f \left[ (p_{co} + c\sigma_z)^{1-s} - (p_{co})^{1-s} \right]}{cAp_a^{1-s}} \right\}_0^{\sigma_z} \quad (\text{ecuación 49})$$

Pero, de acuerdo con la figura 9

$$\Delta z_f = \Delta z_0 + \Delta w_f$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = 1 + \frac{\Delta w_f}{\Delta z_o}$$

$$\Delta w_f = \left( \frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} - 1 \right) \Delta z_o \quad (\text{ecuación 50})$$

Reemplazando la ecuación 49 en la 50

$$\Delta w_f = \left\{ \exp \left\{ - \frac{f \left[ (p_{co} + c \sigma_z)^{1-s} - (p_{co})^{1-s} \right]}{(1-s) c A p_a^{1-s}} \right\} - 1 \right\} \Delta z_o \quad (\text{ecuación 51})$$

De acuerdo con la convención de signos de la figura 9, el valor de  $\Delta w_f$  dado por la ecuación 51 da siempre negativo. Para tener una magnitud positiva de la deformación del elemento, hagamos

$$\Delta \delta_P = - \Delta w_f$$

La expresión 51 queda

$$\Delta \delta_z = \left\{ 1 - \exp \left\{ - \frac{f \left[ (p_{co} + c \sigma_z)^{1-s} - (p_{co})^{1-s} \right]}{(1-s) c A p_a^{1-s}} \right\} \right\} \Delta z_o \quad (62)$$

La ecuación 62 permite calcular la deformación vertical de un elemento de suelo friccionante de espesor  $\Delta z_o$ , sujeto a incrementos de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ . En suelos friccionantes el exponente  $s$  es del orden de 0.5. Por lo tanto, para evaluar la deformación de un estrato de suelo friccionante procedemos como se indica a continuación.

El coeficiente  $K_o$  se calcula con la siguiente expresión (Mayne y Kulhawy, 1982)

$$K_o = (1 - \text{sen } \varphi^*) (\text{OCR})^{\text{sen } \varphi^*} \quad (63)$$

donde  $\varphi^*$  es el ángulo de fricción interna y OCR es la relación de preconsolidación del suelo en el campo.

La relación de Poisson  $\nu$  se obtiene

$$\nu = K_o / (1 + K_o) \quad (64)$$

El módulo de rigidez promedio  $A_m$  del suelo se determina a partir del número de golpes de la prueba de penetración estándar (SPT), con la siguiente expresión aproximada

$$A_m = 26.25 N^{1.125} \quad (65)$$

El módulo desfavorable se calcula en función del nivel de confianza  $\alpha$  con

$$A = A_m C \quad (66)$$

donde

$$C = \exp \left[ -0.784 t_\alpha \sqrt{1.00758 + 0.0152 (\ln N - 2.976)^2} \right] \quad (67)$$

$t_\alpha$  es una variable  $t$  de Student, cuyos valores en función de  $\alpha$  se muestran en la tabla 1. Cabe aclarar que existe una probabilidad  $\alpha$  de que el módulo  $A$  del suelo sea menor que el valor dado por la ecuación 66.

TABLA 1  
VARIABLE ALEATORIA  $t$  DE STUDENT

Nivel de Confianza $\alpha$	$t_\alpha$
%	
2.5	1.978
5	1.657
10	1.288
15	1.041
20	0.844
25	0.676
30	0.526
40	0.254
50	0

Por otra parte, el asentamiento de un cimiento sobre un suelo friccionante se puede calcular en forma aproximada usando las ecuaciones de la teoría de la elasticidad (ecuaciones 58 a 60), con  $E = E_s$ , siendo  $E_s$  el módulo de deformación del suelo.

#### Ley de Hooke

$$\varepsilon_z = (1/E_s) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (68)$$

O bien

$$\Delta\delta_z = (\Delta z_0/E_s) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (69)$$

Una forma aproximada de tomar en cuenta el fenómeno del incremento del módulo de deformación del suelo  $E_s$  con el confinamiento consiste en el empleo del criterio de Janbu (1963; citado por Duncan y Chang, 1970), que establece que el módulo  $E_s$  está dado por (véase la figura 13)

$$E_s = E_{s0} + K p_a \left( \frac{p_{cm}}{p_a} \right)^n \quad (70)$$

donde

$E_{s0}$  = módulo de deformación para un confinamiento efectivo igual a cero

$K$  = coeficiente que depende de la compacidad del suelo (tabla 2)

$n$  = exponente que es función de la compacidad del suelo (tabla 2)

$p_a$  = presión atmosférica = 101.3 kPa = 10.3 t/m<sup>2</sup>

$p_{cm}$  = presión media de confinamiento

TABLA 2  
PROPIEDADES DE DEFORMACIÓN EN SUELOS FRICCIONANTE. FÓRMULA DE JANBU

Estado	D <sub>r</sub>	N	q <sub>c</sub> kg/cm <sup>2</sup>	n	Normalmente cargado	Precargado
					K	
Muy suelto	< 0.2	< 4	< 20	0.65	< 110	< 330
Suelto	0.2-0.4	4-10	20-40	0.65-0.62	110-225	330-675
Medianamente compacto	0.4-0.6	10-30	40-120	0.62-0.58	225-615	675-1845
Compacto	0.6-0.8	30-50	120-400	0.58-0.55	615-1000	1845-3000
Muy compacto	> 0.8	> 50	> 400	0.55	> 1000	> 3000

D<sub>r</sub> = compacidad relativa

N = número de golpes en la prueba de penetración estándar

q<sub>c</sub> = resistencia en la punta del cono holandés

#### Fórmula de Schleicher

Asentamiento bajo la esquina de un rectángulo de ancho  $x$  y largo  $y$  (figura 11a), fórmula de Schleicher (Terzaghi, 1943)

$$\delta_z = \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ y \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} + x \ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right] \quad (71)$$

#### Fórmula de Steinbrenner

Cuando el medio elástico tiene un espesor  $h$  (figura 11b), el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme  $q$ , está dado por la fórmula de Steinbrenner (Terzaghi, 1943)

$$\delta_z = \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ y \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{y^2 + h^2}}{y(x+A)} + x \ln \frac{(y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + h^2}}{x(y+A)} \right] \\ + \frac{q(1-\nu-2\nu^2)}{2\pi E} h \tan^{-1} \frac{xy}{hA} \quad (72)$$

$$A = (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2} \quad (73)$$

El módulo  $E_s$  se puede obtener de manera aproximada con las fórmulas de Schmertmann o de Denver, las cuales se presentan a continuación.

Schmertmann *et al* (1978) establecen las siguientes relaciones entre el módulo de deformación  $E_s$  y la resistencia en la punta del cono holandés  $q_c$

$$\text{Para una zapata cuadrada: } E_s = 2.5q_c \quad (74)$$

$$\text{Para una zapata corrida: } E_s = 3.5q_c \quad (75)$$

Denver (1985) propone las siguientes expresiones

$$E_s = F \sqrt{q_c/q_0} \quad (76)$$

donde  $F = 8 \text{ MPa}$  y  $q_0 = 1 \text{ Mpa}$

$$E_s = C \sqrt{N} \quad (77)$$

donde  $C = 7 \text{ MPa}$ .

Además, existen criterios empíricos para calcular el asentamiento bajo el centro de un cimiento apoyado sobre un suelo friccionante que se extiende a gran profundidad. A continuación se mencionan dos de ellos.

#### *Fórmula de Burland y Burbidge (1985)*

Para una arena normalmente cargada, el asentamiento bajo el centro de un cimiento de planta rectangular, está dado por

$$\delta_z = q B^{0.7} I_c \quad (78)$$

$\delta_z$  = hundimiento, en milímetros

$$I_c = 1.17/N^{1.4} \quad (79)$$

$q$  = presión de contacto, en kPa

$B$  = ancho de la cimentación, en metros

#### *Fórmula estadística (Deméneghi, 2003)*

$$\delta_z = D C' \quad (80)$$

$$D = 1.34 q B^{0.7} N^{-1.37} \quad (81)$$

$$C' = \exp \left[ 0.784 t_{\alpha} \sqrt{1.00758 + 0.0152 (\ln N - 2.976)^2} \right] \quad (82)$$

$\delta_z$  = hundimiento, en milímetros

$q$  = presión de contacto, en kPa

$B$  = ancho del cimiento, en metros

$N$  = número de golpes de la prueba de penetración estándar (SPT)

$t_{\alpha}$  = variable aleatoria con distribución  $t$  de Student, cuyos valores se muestran en la tabla 1, en función del nivel de confianza  $\alpha$

Cabe aclarar que existe una probabilidad  $\alpha$  de que el asentamiento del cimiento sea mayor que el valor dado por la ecuación 80.

*Influencia de la posición del nivel de agua freática (NAF).* Dado que la deformación de un suelo totalmente saturado depende de la presión efectiva entre los granos, cuando el terreno se encuentra bajo el NAF, para el cálculo de asentamientos se debe emplear  $p_{vo}'$  (presión efectiva) en vez de  $p_{vo}$  (presión total). Si el procedimiento no permite tomar en cuenta en forma explícita este efecto, para cuando el NAF se encuentre por arriba del nivel de desplante del cimiento, el asentamiento para esta condición se obtiene en forma aproximada multiplicando por 1.35 el hundimiento obtenido sin considerar la presencia del NAF.

**Ejemplo**

Calcular el asentamiento de la zapata rectangular de concreto reforzado de la figura E-1.

Columna de 25 por 30 cm. Zapata de 1.7 por 2 m; espesor losa zapata = 30 cm. Profundidad de desplante = 60 cm

$\Sigma Q' = 630 \text{ kN}$

Utilizar los siguientes procedimientos:

- Método no lineal, con  $r=0$  y  $s = 0.5$ ; con  $\alpha = 20\%$  y  $\alpha = 50\%$
- Ley de Hooke
- Fórmula de Schleicher
- Fórmula de Steinbrenner
- Fórmula de Burland y Burbidge
- Fórmula estadística, con  $\alpha = 20\%$  y  $\alpha = 50\%$
- Fórmula de Janbu

Para el cómputo del módulo de deformación  $E_s$  del suelo usar la fórmula de Denver (ecuación 77).

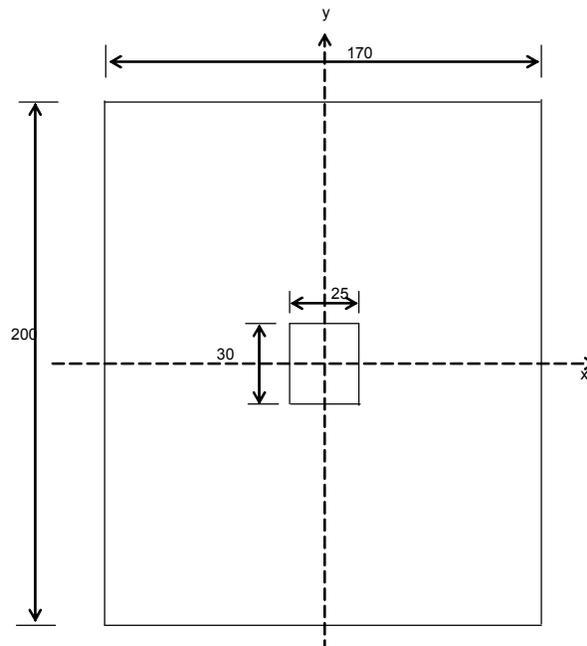
Considerar: (i) que el nivel de agua freática (NAF) se encuentra muy profundo, y (ii) que el NAF se encuentra al nivel de la superficie del terreno.

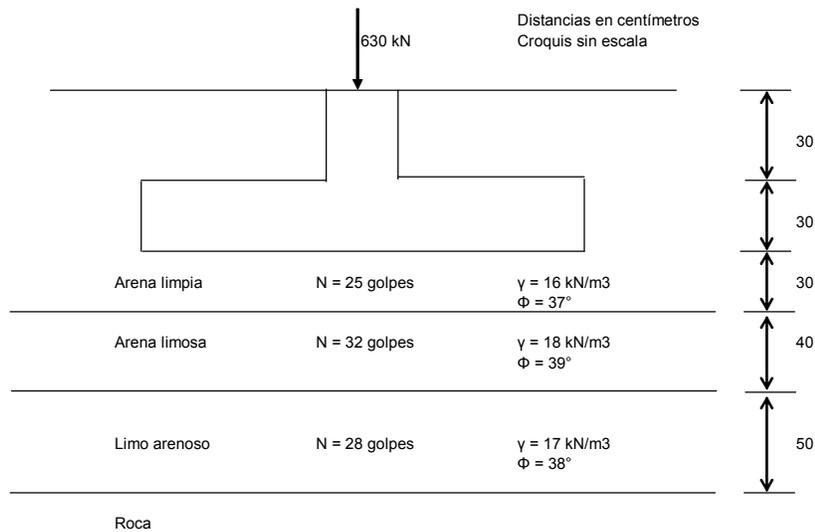
**Solución**

(i) NAF muy profundo

(a) Método no lineal

$\alpha = 20\%$



EJEMPLO  
FIGURA E-1

(Cs Deformaciones de Suelos Figuras)

La determinación de los incrementos de esfuerzo se lleva a cabo usando la presión de contacto entre suelo y cimentación, que en este caso vale  $q = 197.35 \text{ kPa}$ .

En la tabla E-1 se exhibe el cómputo de las deformaciones de los tres estratos de suelo. Las presiones por peso propio y los incrementos de esfuerzo se obtienen a la mitad de cada estrato. Se usaron las ecuaciones 57 a 62. Para  $\alpha = 20\%$ , de la tabla 1:  $t_\alpha = 0.844$ ; con este valor se calculan los módulos de rigidez  $A$  del suelo. Se halló un asentamiento total  $\delta_z = 4.18 \text{ mm}$ . Para  $\alpha = 50\%$  (hundimiento promedio) se usa un procedimiento similar y se halla  $\delta_z = 2.15 \text{ mm}$ . Como ilustración, presentamos la evaluación de la deformación del estrato 1':

$$K_o = (1 - \sin 37^\circ)(1)^{\tan 37^\circ} = 0.398 \quad (\text{ec } 63)$$

$$\nu = 0.398 / (1 + 0.398) = 0.285 \quad (\text{ec } 64)$$

$$A_m = 26.25 N^{1.125} = 26.25(25)^{1.125} = 981.32 \quad (\text{ec } 65)$$

Para  $\alpha = 20\%$ ,  $t_\alpha = 0.844$

$$C = \exp \left[ -0.784(0.844) \sqrt{1.00758 + 0.0152(\ln 25 - 2.976)^2} \right] = 0.514 \quad (\text{ec } 67)$$

$$A = A_m C = 981.32(0.514) = 504.40 \quad (\text{ec } 66)$$

Usando las ecuaciones 45, 47 y 62

$$f = 1 - \nu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \right)$$

$$f = 1 - 0.285 \left( \frac{117.05 + 119.40}{196.71} \right) = 0.658$$

$$c = b_1 + b_2 \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z}$$

$$c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1117.05 + 119.40}{196.71} = 0.734$$

$$\Delta\delta_z = \left\{ 1 - \exp \left\{ - \frac{f \left[ (p_{co} + c\sigma_z)^{1-s} - (p_{co})^{1-s} \right]}{(1-s)cA p_a^{1-s}} \right\} \right\} \Delta z_o$$

$$\Delta\delta_z = \left\{ 1 - \exp \left\{ - \frac{0.658 \left[ (7.185 + 0.734(196.71))^{1-0.5} - (7.185)^{1-0.5} \right]}{(1-0.5)(0.734)(504.92)(101.3)^{1-0.5}} \right\} \right\} (0.3) = 0.001018m$$

TABLA E-1. NAF MUY PROFUNDO

 $\alpha = 20\%$ 

Estrato	A	$p_{vo}$ kPa	$K_o$	$v$	$p_{co}$ kPa	$\sigma_z$ kPa	$\sigma_x$ kPa	$\sigma_y$ kPa	c	f	$\Delta\delta_z$ mm
1'	504.92	12	0.398	0.285	7.185	196.71	117.05	119.40	0.734	0.658	1.02
2	665.95	18	0.371	0.270	10.448	180.11	53.09	47.82	0.520	0.848	1.36
3	573.39	25.85	0.384	0.278	15.240	134.84	15.81	11.33	0.400	0.944	1.80
										Suma	4.18

## (b) Ley de Hooke

En la tabla E-2 se muestra el cálculo de las deformaciones de los tres estratos. Para encontrar  $E_s$  se usó la fórmula de Denver (ecuación 77). Se empleó la ecuación 69. Se encontró un asentamiento  $\delta_z = 4.37$  mm.

Como ilustración, presentamos la evaluación de la deformación del estrato 1':

$$E_s = 7 \sqrt{25} = 35 \text{ MPa} = 35000 \text{ kPa}$$

$$\Delta\delta_z = (0.3/35000) [196.71 - 0.285(117.05+119.40)] = 0.001108 \text{ m}$$

TABLA E-2

## LEY DE HOOKE

Estrato	$h_o$ m	$E_s$ kPa	$\sigma_z$ kPa	$\sigma_x$ kPa	$\sigma_y$ kPa	$\Delta\delta_z$ mm
1'	0.3	35000	196.71	117.05	119.40	1.11
2	0.4	39598	180.11	53.09	47.82	1.54
3	0.5	37040	134.84	15.81	11.33	1.72
					Suma	4.37

## (c) Fórmula de Schleicher

Se aplica la ecuación 71. El módulo  $E_s$  se obtiene como un promedio ponderado de los tres valores de la tabla E-2,  $E_{sm} = 37383$  kPa. La relación de Poisson se determina con un promedio ponderado de las magnitudes de la tabla E-1, es decir  $v_m = 0.277$ . Como la ecuación 65 arroja el asentamiento bajo una esquina, el área se divide entre 4, y el hundimiento calculado se multiplica por 4. Sustituyendo valores en la ecuación 65, con  $x = 1.7/2 = 0.85$  m,  $y = 2/2 = 1$  m:  $\delta_z' = 2.52$  mm,  $\delta_z = 4(2.52) = 10.08$  mm.

$$\delta_z' = \frac{197.35(1-0.277^2)}{\pi(37383)} \left[ (1) \ln \frac{0.85 + \sqrt{0.85^2 + 1^2}}{1} + (0.85) \ln \frac{1 + \sqrt{0.85^2 + 1^2}}{0.85} \right] = 0.00252m$$

## (d) Fórmula de Steinbrenner

Se aplica la ecuación 72. El módulo  $E_s$  se obtiene como un promedio ponderado de los tres valores de la tabla E-2,  $E_{sm} = 37383$  kPa. La relación de Poisson se determina con un promedio ponderado de las magnitudes de la tabla E-1, es decir  $\nu_m = 0.277$ . Como la ecuación 66 arroja el asentamiento bajo una esquina, el área se divide entre 4, y el hundimiento calculado se multiplica por 4. Sustituyendo valores en la ecuación 65, con  $x = 1.7/2 = 0.85$  m,  $y = 2/2 = 1$  m,  $h = 1.2$  m:  $\delta_z' = 1.09$  mm,  $\delta_z = 4(1.09) = 4.36$  mm.

$$A = (0.85^2 + 1^2 + 1.2^2)^{1/2} = 1.7783m$$

$$\delta_z = \frac{197.35(1-0.277^2)}{\pi(37383)} \left[ (1) \ln \frac{(0.85 + \sqrt{0.85^2 + 1^2})\sqrt{1^2 + 1.2^2}}{1(0.85 + 1.7783)} + (0.85) \ln \frac{(1 + \sqrt{0.85^2 + 1^2})\sqrt{0.85^2 + 1.2^2}}{0.85(1 + 1.7783)} \right]$$

$$+ \frac{197.35(1-0.277-2(0.277)^2)}{2\pi(37383)} (1.2) \tan^{-1} \frac{0.85(1)}{1.2(1.7783)} = 0.00109m$$

## (e) Fórmula de Burland y Burbidge

Se usan las ecuaciones 79 y 78, con un promedio ponderado de  $N = 28.58$  golpes. Se halla  $\delta_z = 3.06$  mm.

$$I_c = 1.17/(28.58)^{1.4} = 0.01071$$

$$\delta_z = 197.35(1.7)^{0.7}(0.01071) = 3.063 \text{ mm}$$

## (f) Fórmula estadística

Se emplean las ecuaciones 80 a 82, con  $N = 28.58$  golpes. Para  $\alpha = 20\%$ ,  $t_\alpha = 0.844$  (tabla 1) se obtiene  $D = 3.88$  mm,  $C' = 1.94$ ,  $\delta_z = 7.54$  mm. Para  $\alpha = 50\%$  se usa un procedimiento similar y se halla  $\delta_z = 3.88$  mm.

$$D = 1.34 q B^{0.7} N^{-1.37} = 1.34(197.35)(1.7)^{0.7}(28.58)^{-1.37} = 3.88 \text{ mm}$$

$$C' = \exp[0.784(0.844) \sqrt{1.00758 + 0.0152(\ln 25 - 2.976)^2}] = 1.944$$

$$\delta_z = D C' = 3.88(1.944) = 7.543 \text{ mm}$$

## (g) Fórmula de Janbu

Usamos la ecuación 70

$$E_s = E_{s0} + K p_a \left( \frac{p_{cm}}{p_a} \right)^n$$

$$E_{s0} = 0$$

En la tabla E-2' se muestran los cálculos para hallar el asentamiento de la zapata.

TABLA E-2'  
MÉTODO DE JANBU

Estrato	K	$p_{vo}$ kPa	$K_o$	$v$	$p_{co}$ kPa	$\sigma_z$ kPa	$\sigma_x$ kPa	$\sigma_y$ kPa	$p_{cm}$ kPa	$n$	$\Delta\delta_z$ mm
1'	517.5	12	0.398	0.285	7.185	196.71	117.05	119.40	50.38	0.628	0.86
2	653.5	18	0.371	0.270	10.448	180.11	53.09	47.82	33.67	0.577	1.28
3	576	25.85	0.384	0.278	15.240	134.84	15.81	11.33	20.82	0.623	1.88
										$\delta_z =$	4.02

$$p_{cm} = p_{co} + \frac{\Delta p_c}{2} = p_{co} + \frac{1}{6}(\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

Los valores de  $K$  y  $n$  se obtienen de la tabla 2, en función de número de golpes,  $N$ , de la prueba SPT.

(ii) NAF en la superficie del terreno

Únicamente los métodos no lineal y de Janbu permiten utilizar la presión efectiva para el cómputo de las deformaciones; en la tabla E-3 se muestran los cálculos para  $\alpha = 20\%$ ; se obtiene un  $\delta_z = 4.76$  mm y para  $\alpha = 50\%$  (asentamiento promedio)  $\delta_z = 2.46$  mm. En la tabla E-3' se exhiben los cálculos con la fórmula de Janbu. En los demás procedimientos el asentamiento sin NAF se multiplica por 1.35.

TABLA E-3. NO LINEAL. NAF EN LA SUPERFICIE DEL TERRENO  
 $\alpha = 20\%$ 

Es-trato	A	$p_{vo}'$ kPa	$K_o$	$v$	$p_{co}'$ kPa	$\sigma_z$ kPa	$\sigma_x$ kPa	$\sigma_y$ kPa	c	f	$\Delta\delta_z$ mm
1'	504.92	4.642	0.398	0.285	2.780	196.71	117.05	119.40	0.734	0.658	1.10
2	665.95	7.209	0.371	0.270	4.184	180.11	53.09	47.82	0.520	0.848	1.52
3	573.39	10.644	0.384	0.278	6.276	134.84	15.81	11.33	0.400	0.944	2.14
										Suma	4.76

TABLA E-3'. MÉTODO DE JANBU. NAF EN LA SUPERFICIE DEL TERRENO

Estrato	K	$p_{vo}'$ kPa	$K_o$	$v$	$p_{co}'$ kPa	$\sigma_z$ kPa	$\sigma_x$ kPa	$\sigma_y$ kPa	$p_{cm}'$ kPa	$n$	$\Delta\delta_z$ mm
1'	517.5	12	0.398	0.285	2.780	196.71	117.05	119.40	52.44	0.628	0.89
2	653.5	18	0.371	0.270	4.184	180.11	53.09	47.82	36.16	0.577	1.37
3	576	25.85	0.384	0.278	6.276	134.84	15.81	11.33	22.56	0.623	2.18
										$\delta_z =$	4.44

Usamos la ecuación 70

$$E_s = E_{so} + Kp_a \left( \frac{p_{cm}'}{p_a} \right)^n$$

$$E_{so} = 0$$

$$p_{cm}' = p_{co}' + \frac{\Delta p_c}{2} = p_{co}' + \frac{1}{6}(\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

Los valores de  $K$  y  $n$  se obtienen de la tabla 2, en función de número de golpes,  $N$ , de la prueba SPT.

TABLA E-4  
RESULTADOS DEL EJEMPLO

	NAF muy profundo	NAF en la superficie del terreno
Método	$\delta_z$	$\delta_z$
	mm	mm
No lineal		
$\alpha = 50\%$	2.15	2.46
$\alpha = 20\%$	4.18	4.76
Ley de Hooke	4.37	5.90
Schleicher	10.08	13.61
Steinbrenner	4.36	5.89
Burland y Burbidge	3.06	4.13
Fórmula estadística		
$\alpha = 50\%$	3.88	5.24
$\alpha = 20\%$	7.54	10.18
Janbu	4.02	4.44

En la tabla E-4 se exhiben los resultados obtenidos con los diferentes métodos.  
(Defsf151)

### Suelos colapsables

Un suelo colapsable se puede considerar un caso particular de un material friccionante, con una estructura abierta, parcialmente saturado, con una cierta cementación (o cohesión) que se puede perder al aumentar la humedad natural del terreno. En estos suelos la deformación lateral es pequeña, por lo que sólo calculamos la deformación vertical, usando la ecuación 57:

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \frac{1}{A_v} \frac{d\sigma_z/p_a}{[(p_{veo} + \sigma_z) / p_a]^s} \quad (83)$$

Integremos la ecuación 83. Al aumentar el esfuerzo normal vertical de 0 a  $\sigma_z$ , la altura del elemento aumenta de la altura inicial  $\Delta z_o$  a la altura final  $\Delta z_f$  (figura 9). Por lo tanto, debemos integrar la ecuación 83 de  $\Delta z_o$  a  $\Delta z_f$  el primer miembro y de 0 a  $\sigma_z$  el segundo miembro

$$\int_{\Delta z_o}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \int_0^{\sigma_z} \frac{1}{A_v} \frac{d\sigma_z/p_a}{[(p_{veo} + \sigma_z) / p_a]^s}$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = \exp \left[ - \frac{(p_{beo} + C\sigma_z)^{1-s} - (p_{beo})^{1-s}}{(1-s) A_v p_a^{1-s}} \right] \quad (84)$$

Pero (figura 9)

$$\Delta z_f = \Delta z_o + \Delta w$$

$$\Delta z_f / \Delta z_o = 1 + \Delta w / \Delta z_o$$

$$\Delta w / \Delta z_o = \Delta z_f / \Delta z_o - 1 \quad (85)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z_0} = \exp \left[ - \frac{(p_{veo} + \sigma_z)^{1-s} - (p_{veo})^{1-s}}{(1-s) A_v p_a^{1-s}} \right] - 1 \quad (86)$$

El desplazamiento  $\Delta w$  se mide hacia arriba. Para que el desplazamiento hacia abajo sea positivo (como es usual en mecánica de suelos), hagamos  $\Delta \delta_z = - \Delta w$ . La ecuación 86 queda

$$\Delta \delta_z = \left\{ 1 - \exp \left\{ - \frac{(p_{veo} + \sigma_z)^{1-s} - (p_{veo})^{1-s}}{(1-s) A_v p_a^{1-s}} \right\} \right\} \Delta z_0 \quad (87)$$

La ecuación 87 permite calcular la deformación vertical de un elemento de suelo colapsable de espesor  $\Delta z_0$ , sujeto a un incremento de esfuerzo vertical  $\sigma_z$ . En suelos colapsables el exponente  $s$  es del orden de 0.5,  $s \approx 0.5$ .

En la ecuación 87

$$p_{ve} = p_{cie} + p_{vo} \quad (88)$$

En un suelo cementado, la presión de confinamiento interno equivalente  $p_{cie}$  es función del grado de saturación:  $p_{cie} = f(S_r)$ . Así, en un suelo colapsable, para  $S_r = 100\%$ ,  $p_{cie}$  vale cero,  $p_{cie} = 0$ . En cambio, para valores de  $S_r < 100\%$  se puede tener una  $p_{cie}$  relativamente grande.

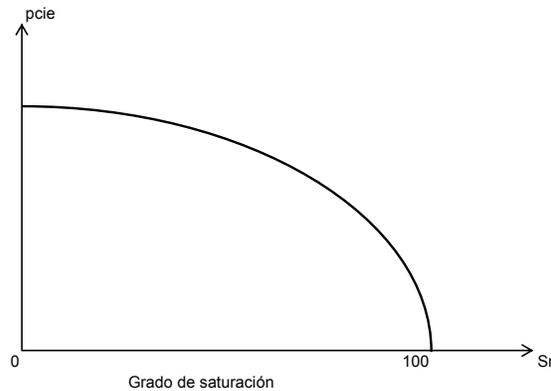
Los valores de  $A_v$  y de  $p_{cie}$  se obtienen mediante pruebas realizadas en el consolidómetro. Se realiza una prueba de consolidación con la humedad natural del suelo. Luego, otra muestra del mismo suelo se satura al 100% y se somete a un ensaye de consolidación. Sean  $(p_{v1}, e_1)$  y  $(p_{v2}, e_2)$  dos puntos de la curva de compresibilidad en la prueba al 100% de saturación; el módulo  $A_v$  se obtiene despejándolo de la ecuación 86

$$A_v = - \frac{(p_{v2})^{1-s} - (p_{v1})^{1-s}}{(1-s) p_a^{1-s} \ln \left( \frac{1+e_2}{1+e_1} \right)} \quad (89)$$

Sean  $(p_{v1}, e_1)$  y  $(p_{v2}, e_2)$  dos puntos de la curva de compresibilidad en el suelo con la humedad natural. La presión de confinamiento interno (debida a la cementación) se halla despejándola de las ecuaciones 87 y 88

$$p_{cie} = \left[ (p_{cie} + p_{v1})^{1-s} - A(1-s) p_a^{1-s} \ln \left( \frac{1+e_2}{1+e_1} \right) \right]^{1/(1-s)} - p_{v2} \quad (90)$$

La ecuación 90 se resuelve por tanteos: se supone un valor de  $p_{cie}$  y se calcula éste con dicha ecuación; el proceso se repite hasta que las magnitudes de  $p_{cie}$  supuesta y calculada sean iguales. El valor de  $p_{cie}$  corresponde al grado de saturación del suelo en estado natural. Se pueden realizar otras pruebas de consolidación variando el grado de saturación; aplicando la ecuación 90 se obtiene la variación de  $p_{cie}$  con el grado de saturación  $S_r$  (figura 14).



VARIACIÓN DE LA PRESIÓN DE CONFINAMIENTO INTERNO EQUIVALENTE CON EL GRADO DE SATURACIÓN  
FIGURA 14

### Ejemplo

Tomando dos puntos de la curva de compresibilidad de pruebas en el consolidómetro, practicadas en un suelo colapsable, se obtienen los siguientes datos (esfuerzos en  $\text{kg/cm}^2$ )

Humedad natural: 1(0.5, 0.662), 2(2.1, 0.6505)

100% saturación: 1(2.1, 0.411), 2(8.5, 0.293)

Hallar las magnitudes de  $A_v$  y de  $p_{cie}$  del suelo. Usar  $s = 0.5$ .

### Solución

Sustituyendo valores en la ecuación 89 (100% saturación), con  $p_a = 1.03 \text{ kg/cm}^2$

$$A_v = 33.09$$

Reemplazando valores en la ecuación 90 (humedad natural), y procediendo por tanteos:

$$p_{cie} = 46 \text{ kg/cm}^2$$

(Cs suelo colapsable)

### Ejemplo

Una zapata de 2 por 3 m en planta, desplantada a 0.8 m de profundidad, que transmite al terreno un incremento neto de presión de 120 kPa, se construye en temporada de estiaje sobre un estrato de limo arenoso cementado (suelo colapsable), de 2 m de espesor bajo el desplante del cimiento. Pruebas realizadas en el limo en época de estiaje arrojaron las siguientes propiedades:  $A_v = 33.09$ ,  $p_{cie} = 4600 \text{ kPa}$ ,  $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$ .

Calcular el asentamiento de la zapata en época de estiaje y el asentamiento en temporada de lluvias, suponiendo que por un deficiente drenaje el suelo se satura al 100% y se pierde el confinamiento interno equivalente.

$$p_a = 101.3 \text{ kPa.}$$

### Solución

Época de estiaje

Obtenemos las siguientes cantidades a la mitad del estrato de limo arenoso:

$$p_{vo} = 17(0.8+1) = 30.6 \text{ kPa}$$

$$p_{ve} = 30.6 + 4600 = 4630.6 \text{ kPa}$$

$$\sigma_z = 92.95 \text{ kPa}$$

Sustituyendo en la ecuación 81:  $\Delta\delta_z = 0.82 \text{ cm}$

Época de lluvias

Por aumento de humedad se pierde el confinamiento interno equivalente, es decir,  $p_{cie} = 0$

$$p_{veo} = 30.6 \text{ kPa}$$

$$\sigma_z = 92.95 \text{ kPa}$$

Sustituyendo en la ecuación 87:  $\Delta\delta_z = 6.60 \text{ cm}$

Observamos que el "colapso" del suelo, por humedecimiento de éste, es de  $6.60 - 0.82 = 5.78 \text{ cm}$

(Cs suelo colapsable)

## SUELOS COHESIVOS TOTALMENTE SATURADOS

Cuando se carga (o descarga) un suelo cohesivo totalmente saturado, debido a su baja permeabilidad, éste sufre una deformación inmediata a volumen constante. Si, como es usual, la carga permanece aplicada sobre el terreno, el agua de los poros del suelo sale lentamente, y se produce una deformación a largo plazo; a la compresión por expulsión de agua se denomina *consolidación primaria*, mientras que a la deformación por el acomodo de las partículas del suelo que “resbalan” unas sobre otras, se le designa como *consolidación secundaria*. En los siguientes incisos estudiaremos estos fenómenos.

### Deformación inmediata (a volumen constante)

La deformación a corto plazo la obtenemos usando la ecuación 39

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \frac{1}{A} \frac{(f \sigma_z / p_a)^r d(f \sigma_z / p_a)}{[(p_{beo} + c \sigma_z) / p_a]^s} \quad (39)$$

Como la deformación ocurre a volumen constante, hacemos  $c = 0$  en la ecuación 39

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \frac{1}{A} \frac{(f \sigma_z / p_a)^r d(f \sigma_z / p_a)}{(p_{beo} / p_a)^s} \quad (91)$$

Integremos la ecuación 91: al aumentar el esfuerzo normal vertical de 0 a  $\sigma_z$ , la altura del elemento se reduce de la altura inicial  $\Delta z_o$  a la altura final  $\Delta z_f$  (figura 9). Por lo tanto, debemos integrar la ecuación 91 de  $\Delta z_o$  a  $\Delta z_f$  el primer miembro y de 0 a  $\sigma_z$  el segundo miembro

$$\int_{\Delta z_o}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \int_0^{\sigma_z} \frac{1}{A} \frac{(f \sigma_z / p_a)^r d(f \sigma_z / p_a)}{(p_{beo} / p_a)^s} \quad (92)$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = \exp \left[ - \frac{(f \sigma_z)^{1+r}}{(1+r) A p_{beo}^s p_a^{1+r-s}} \right] \quad (93)$$

Pero (figura 9)

$$\Delta z_f = \Delta z_o + \Delta w \quad (94)$$

$$\Delta z_f / \Delta z_o = 1 + \Delta w / \Delta z_o$$

$$\Delta w / \Delta z_o = \Delta z_f / \Delta z_o - 1 \quad (95)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z_o} = \exp \left[ - \frac{(f \sigma_z)^{1+r}}{(1+r) A p_{beo}^s p_a^{1+r-s}} \right] - 1 \quad (96)$$

El desplazamiento  $\Delta w$  se mide hacia arriba. Para que el desplazamiento hacia abajo sea positivo (como es usual en mecánica de suelos), hagamos  $\Delta \delta_z = - \Delta w$ . La ecuación 96 queda

$$\Delta\delta_z = \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(f \sigma_z)^{1+r}}{(1+r) A p_{beo}^s p_a^{1+r-s}}\right] \right\} \Delta z_0 \quad (97)$$

La ecuación 97 permite calcular la deformación vertical inmediata de un elemento de suelo cohesivo totalmente saturado de espesor  $\Delta z_0$ , sujeto a incrementos de esfuerzo  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ .

En la ecuación 97

$$f = 1 - v (a_1 + a_2) \quad (\text{ecuación 29})$$

O bien

$$f = 1 - v \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \right) \quad (98)$$

$$p_{beo} = p_{cie} + p_{co} \quad (\text{ecuación 14})$$

$$p_{co} = [(1 + 2K_o)/3] p_{vo} \quad (\text{ecuación 13})$$

En un suelo cohesivo totalmente saturado debemos usar esfuerzos efectivos en vez de esfuerzos totales. La ecuación 14 queda

$$p_{beo} = p_{cie}' + p_{co}' \quad (99)$$

$$p_{co}' = [(1 + 2K_o)/3] p_{vo}' \quad (100)$$

En arcillas totalmente saturadas  $r$  varía entre 0 y 0.2; para fines prácticos se puede usar  $r = 0$ . Además, el exponente  $s$  es cercano a cero en arcillas sensitivas, y del orden de 1 en arcillas no sensitivas.

En la práctica es usual denominar  $A_u$  al módulo  $A$  de la ecuación 97:  $A_u = A$ . Esta propiedad se determina a partir de resultados de pruebas triaxiales no drenadas. Lo despejamos de la ecuación 97

$$A_u = - \frac{(f \sigma_z)^{1+r}}{(1+r) p_{beo}^s p_a^{1+r-s} \ln(1 - \varepsilon_z)} \quad (101)$$

donde

$$\varepsilon_z = \Delta\delta_z / \Delta z_0 \quad (102)$$

#### Ejemplo

En una prueba de compresión triaxial rápida, practicada en una arcilla sensitiva ( $r \approx 0$ ,  $s \approx 0$ ), para  $\sigma_z = 0.40 \text{ kg/cm}^2$  se midió  $\varepsilon_z = 0.025$ . Calcular el módulo  $A_u$  del suelo.

$p_a = 1.03 \text{ kg/cm}^2$ .

#### Solución

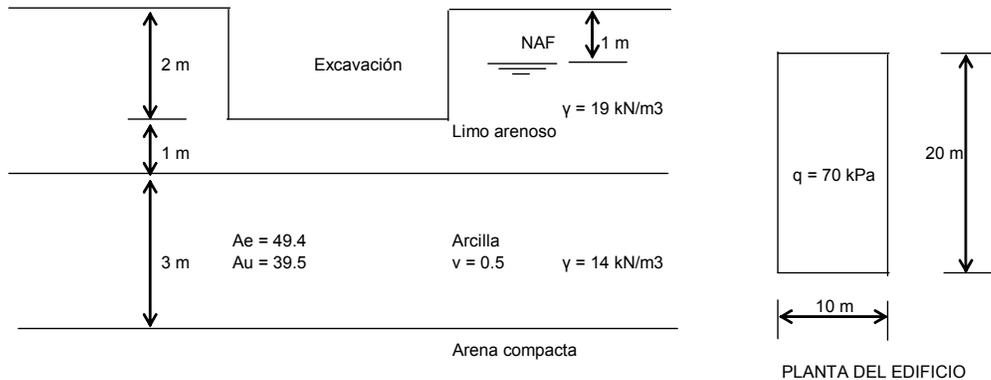
En una prueba de compresión triaxial:  $f = 1$  (ecuación 93). Sustituyendo en la ecuación 96:

$$A_u = - \frac{(0.40)}{1.03 \ln(1 - 0.025)}$$

$$A_u = 15.34$$

**Ejemplo**

Calcular la expansión inmediata por la excavación y el asentamiento inmediato por compresión (debido al incremento neto de carga) del cajón de cimentación de la figura E-2, debidos a los movimientos del estrato de arcilla sensitiva. Usar  $r = s = 0$ ;  $p_a = 101.3$  kPa.



ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES  
FIGURA E-2

**Solución**

Expansión inmediata por excavación

La descarga por la excavación es:  $19(2) = 38$  kPa

Calculamos los decrementos de esfuerzo debidos a la descarga, a la mitad del estrato de arcilla, con una relación de Poisson  $\nu = 0.5$  y  $q = q_{exc} = 38$  kPa

$$\sigma_z = 36.35 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 22.93 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 16.97 \text{ kPa}$$

Aplicamos la ecuación 97 con  $A_u = A_e = 49.4$  (expansión inmediata)

$$f = 1 - 0.5 \left( \frac{22.93 + 16.97}{36.35} \right) = 0.451 \quad (\text{ec } 98)$$

$$\Delta \delta_e = \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{(0.451)(36.35)}{49.4 (101.3)} \right] \right\} (3)$$

$$\Delta \delta_e = 0.00982 \text{ m} = 9.82 \text{ mm}$$

Asentamiento inmediato por compresión

El incremento neto de carga vale:  $q_n = q - p_{vod} = 70 - 38 = 32$  kPa

Calculamos los incrementos de esfuerzo por el incremento neto de carga, a la mitad del estrato, con una relación de Poisson  $\nu = 0.5$  y  $q = q_n = 32$  kPa

$$\sigma_z = 30.61 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 19.31 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 14.29 \text{ kPa}$$

Aplicamos la ecuación 97 con  $A_u = 39.5$

$$\Delta\delta_u = \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(0.451)(30.61)}{39.5 (101.3)}\right] \right\} (3)$$

$$\Delta\delta_u = 0.0103 \text{ m} = 10.3 \text{ mm}$$

(Deformación corto plazo)

---

La deformación inmediata (a volumen constante) de un suelo cohesivo totalmente saturado la podemos valorar también mediante el uso de la ley de Hooke

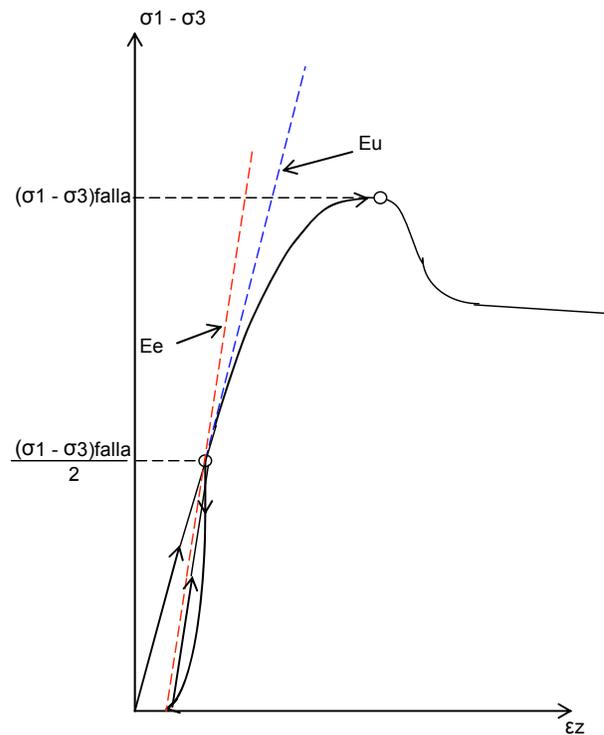
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_u} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (103)$$

donde  $E_u$  es el módulo de deformación en condiciones no drenadas, el cual se obtiene a partir de pruebas de compresión triaxial no consolidadas-no drenadas.

Si el estrato tiene un espesor inicial  $\Delta z_o$ , la deformación a corto plazo del mismo vale, de acuerdo con la ecuación 103

$$\Delta\delta_{zu} = \frac{\Delta z_o}{E_u} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (104)$$

En ocasiones es necesario determinar la expansión inmediata producida por una excavación profunda. En este caso se llevan a cabo pruebas de compresión triaxial de carga-descarga (también llamadas pruebas de “rebote elástico”); la carga se lleva hasta la mitad de la resistencia a la compresión del suelo, y luego se descarga la probeta, como se muestra en la figura 15.



PRUEBA DE CARGA-DESCARGA  
FIGURA 15

### Ejemplo

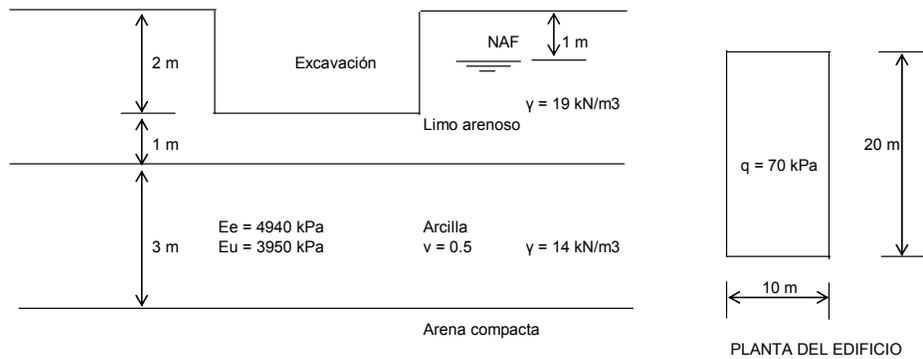
Calcular la expansión inmediata por la excavación y el asentamiento inmediato por compresión (debido al incremento neto de carga) del cajón de cimentación de la figura E-3, debidos a los movimientos del estrato de arcilla sensitiva.

### Solución

Expansión inmediata por excavación

La descarga por la excavación es:  $19(2) = 38$  kPa

Calculamos los decrementos de esfuerzo debidos a la descarga, a la mitad del estrato de arcilla, con una relación de Poisson  $\nu = 0.5$  y  $q = q_{exc} = 38$  kPa



ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES  
EJEMPLO  
FIGURA E-3

$$\sigma_z = 36.35 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 22.93 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 16.97 \text{ kPa}$$

Aplicamos la ecuación 104 con  $E_u = E_e = 4940 \text{ kPa}$  (expansión inmediata)

$$\Delta\delta_{ze} = \frac{3}{4940} [36.35 - 0.5(22.93 + 16.97)] = 0.009960 \text{ m} = 0.996 \text{ cm}$$

Asentamiento inmediato por compresión

El incremento neto de carga vale:  $q_n = q - p_{\text{vod}} = 70 - 38 = 32 \text{ kPa}$

Calculamos los incrementos de esfuerzo por el incremento neto de carga, a la mitad del estrato, con una relación de Poisson  $v = 0.5$  y  $q = q_n = 32 \text{ kPa}$

$$\sigma_z = 30.61 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 19.31 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 14.29 \text{ kPa}$$

Aplicamos la ecuación 104 con  $E_u = 3950 \text{ kPa}$

$$\Delta\delta_{zu} = \frac{3}{3950} [30.61 - 0.5(19.31 + 14.29)] = 0.0105 \text{ m} = 1.05 \text{ cm}$$

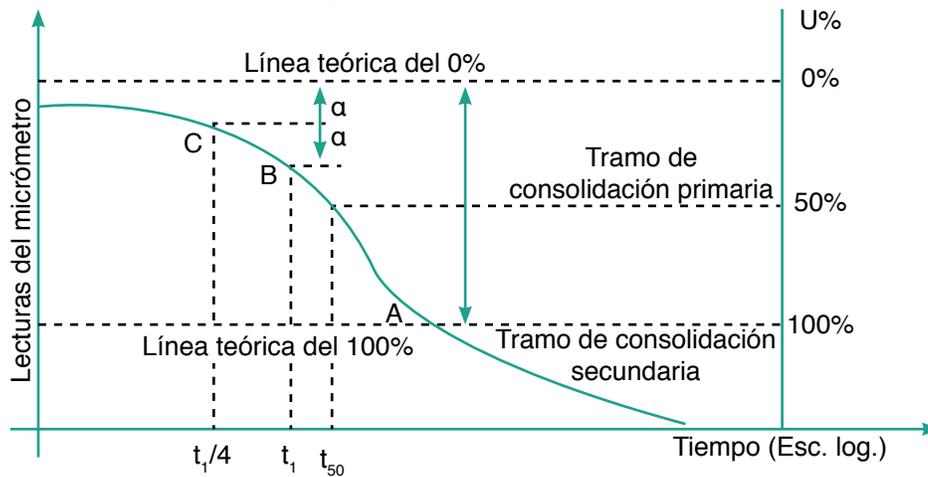
(Deformación corto plazo)

### Deformación a largo plazo

#### PRUEBA DE CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL

Una prueba de consolidación unidimensional consiste en colocar un espécimen de suelo en un anillo que impide la deformación lateral (compresión confinada). Se aplica un incremento de carga y se mantiene sostenido durante un cierto intervalo de tiempo (usualmente un día). Se mide la evolución de la deformación durante este lapso, con lo que se obtiene una curva de consolidación. El proceso se repite para varios incrementos de carga, con lo que se dispone de una curva de consolidación para cada incremento.

En la figura 16 se muestra una curva de consolidación (Juárez Badillo y Rico, 1976).

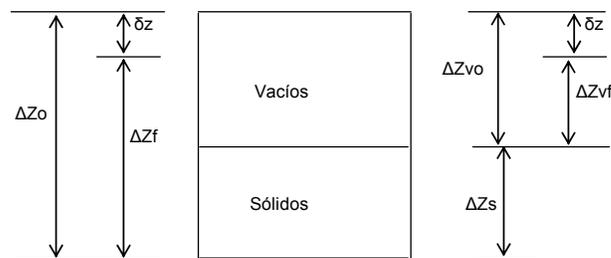


Determinación del 0% y del 100% de consolidación primaria en una curva de consolidación

**DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DE SUELO DE ESPESOR  $\Delta z_0$**

Consideremos un estrato de arcilla de espesor inicial  $\Delta z_0$ , el cual, al ser sometido a un incremento de carga, sufre una deformación vertical  $\Delta \delta_z$  (figura 17), quedando con un espesor final  $\Delta z_f$

$$\Delta \delta_z = \Delta z_0 - \Delta z_f \tag{105}$$



DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DE SUELO  
FIGURA 17

Sus relaciones de vacíos inicial y final son (figura 17)

$$e_o = \Delta z_{vo} / \Delta z_s \tag{106}$$

$$e_f = \Delta z_{vf} / \Delta z_s \tag{107}$$

Supongamos que la compresión vertical se debe únicamente a una reducción de los vacíos del suelo, entonces

$$\Delta z_0 = \Delta z_{vo} + \Delta z_s \tag{108}$$

$$\Delta z_f = \Delta z_{vf} + \Delta z_s \quad (109)$$

Reemplazando las ecuaciones 108 y 109 en la ecuación 105

$$\Delta \delta_z = \Delta z_{v0} - \Delta z_{vf} \quad (110)$$

Sustituyendo las ecuaciones 106 y 107 en la ecuación 110

$$\Delta \delta_z = e_o \Delta z_s - e_f \Delta z_s = \Delta z_s (e_o - e_f)$$

Dividiendo ambos miembros entre  $\Delta z_o$

$$\Delta \delta_z / \Delta z_o = (\Delta z_s / \Delta z_o) (e_o - e_f)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones 108 y 106

$$\Delta \delta_z / \Delta z_o = [\Delta z_s / (\Delta z_{v0} + \Delta z_s)] (e_o - e_f)$$

$$\Delta \delta_z / \Delta z_o = [\Delta z_s / (e_o \Delta z_s + \Delta z_s)] (e_o - e_f)$$

$$\Delta \delta_z / \Delta z_o = [1 / (1 + e_o)] (e_o - e_f)$$

$$\Delta \delta_z = \frac{e_o - e_f}{1 + e_o} \Delta z_o \quad (111)$$

Hagamos  $\Delta e = e_o - e_f$

$$\Delta \delta_z = \frac{\Delta e}{1 + e_o} \Delta z_o \quad (112)$$

La ecuación 112 permite calcular la deformación vertical de un estrato de suelo de espesor inicial  $\Delta z_o$ , en función de su decremento de relación de vacíos y de su relación de vacíos inicial.

### Curva de compresibilidad

Con los resultados de una prueba de consolidación se puede calcular el decremento de relación de vacíos. En efecto, de la ecuación 111

$$e_f = e_o - (\Delta \delta_z / \Delta z_o)(1 + e_o) = e_o(1 - \Delta \delta_z / \Delta z_o) - \Delta \delta_z / \Delta z_o \quad (113)$$

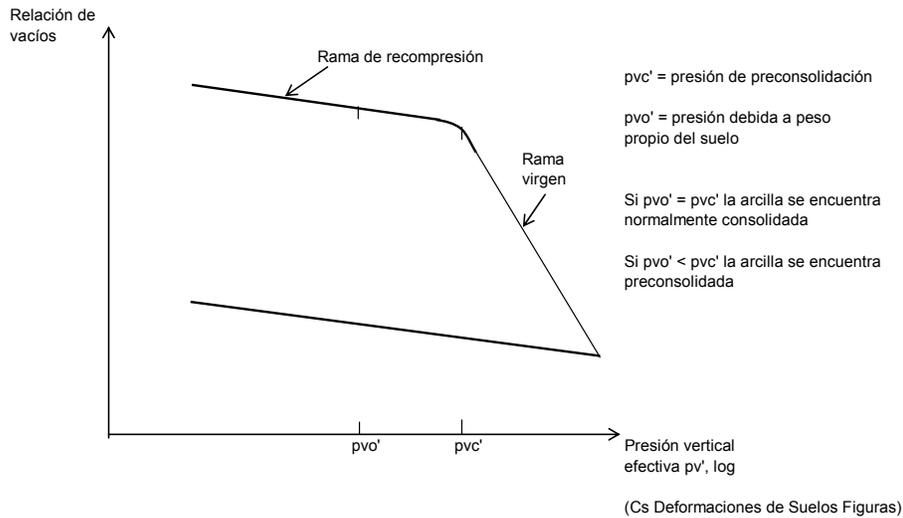
siendo  $\delta_z$  la deformación al final del incremento de carga (después de que se disipó la presión de poro) y  $\Delta z_o$  el espesor del espécimen de suelo en el momento de aplicar la carga.

Usando la ecuación 113 se calcula la relación de vacíos al final de cada incremento de carga, con lo que se obtiene una curva de compresibilidad, como la que se muestra en la figura 18.

En una curva de compresibilidad se puede distinguir si la arcilla se encuentra normalmente consolidada o preconsolidada. En efecto (figura 18)

Si  $p_{vo}' = p_{vc}'$ : la arcilla se encuentra normalmente consolidada

Si  $p_{vo}' < p_{vc}'$ : la arcilla se encuentra preconsolidada



CURVA DE COMPRESIBILIDAD  
FIGURA 18

Tomemos dos puntos de la curva de compresibilidad. Se define el coeficiente de compresibilidad  $a_v$

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta p_v'} \quad (114)$$

Mientras que el coeficiente de compresibilidad volumétrica  $m_v$  es

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_0} \quad (115)$$

La figura 19 muestra curvas de compresibilidad de arcillas de diversas localidades.

Los signos no se distinguen

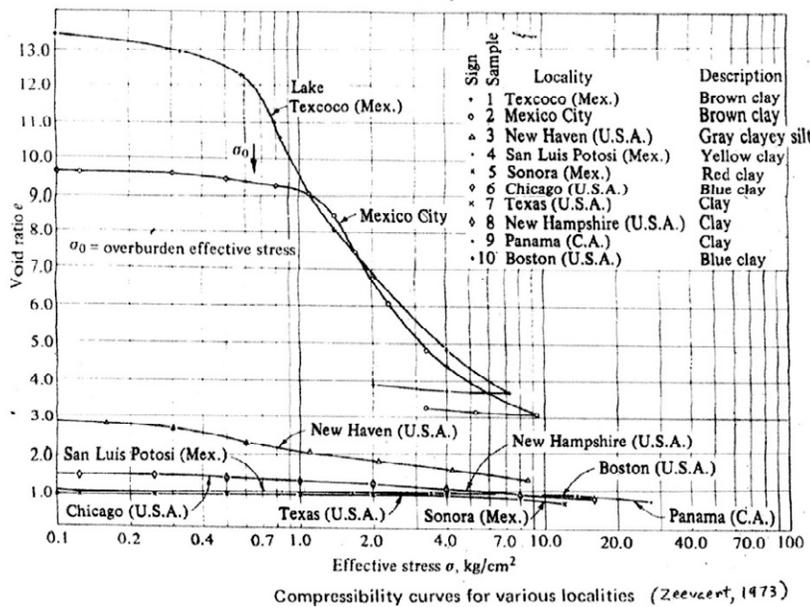


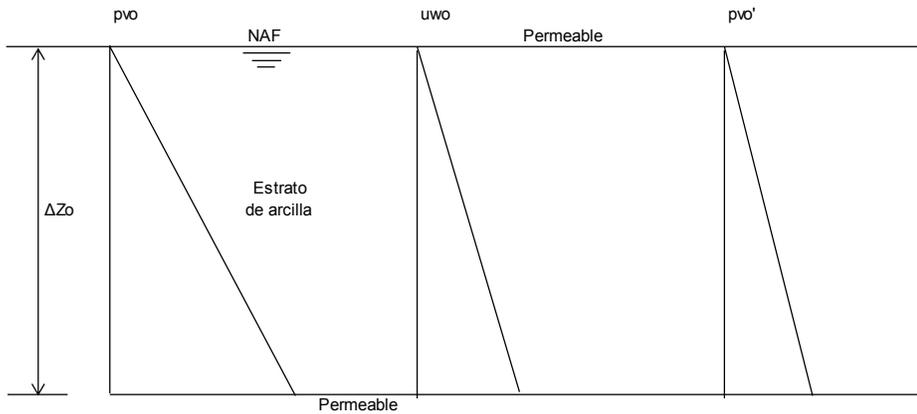
FIGURA 19

TEORÍA DE LA CONSOLIDACIÓN PRIMARIA DE TERZAGHI

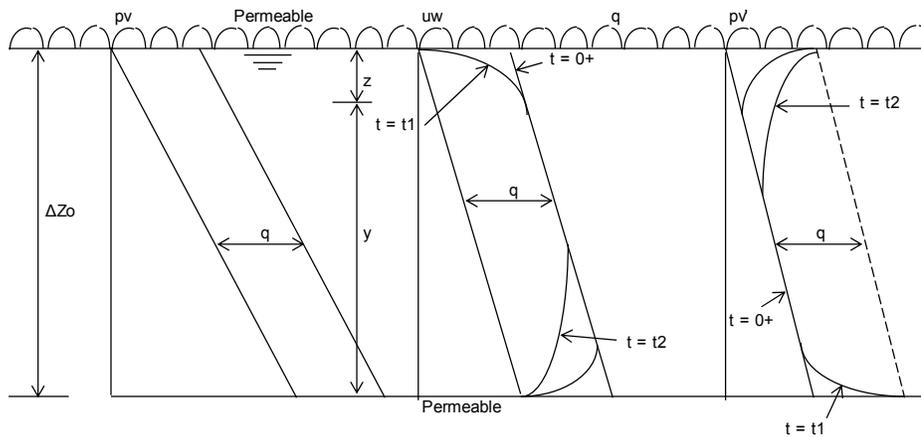
Ecuación diferencial de la consolidación primaria

Sea un estrato de arcilla de espesor  $H$ , con el nivel de agua freática (NAF) en la superficie del terreno (figura 20a). Los diagramas de presión total, hidráulica y efectiva se muestran en la figura 20a. Consideremos que aplicamos una carga unitaria vertical  $q$  en un área suficientemente grande para que el incremento de presión vertical sea constante con la profundidad; supongamos además que se permite el drenaje en la frontera superior del estrato de arcilla. Los diagramas de presión en el suelo quedan como se indica en la figura 20b.

Calculemos los volúmenes de salida  $dV_I$  y de entrada  $dV_{II}$  de un elemento de suelo de espesor  $dz$ , situado a la profundidad  $z$  (figura 21). La curva de variación de la presión hidráulica en un tiempo  $t$  se indica en la figura 21.



a) Diagramas de presión iniciales



b) Diagramas de presión con un incremento de carga repartida q

(Cs Deformaciones de Suelos Figuras)

ESTRATO SOMETIDO A UN INCREMENTO DE CARGA q  
FIGURA 20

Obtengamos el gradiente hidráulico a la profundidad z (punto A, figura 21). La altura piezométrica vale (figura 20b)

$$h = u_w/\gamma_w + y = (u_o + \Delta u_w)/\gamma_w + y$$

$$h = u_{wo}/\gamma_w + (\Delta u_w)/\gamma_w + y$$

Pero  $u_{wo} = \gamma_w (H - y)$

$$h = H - y + (\Delta u_w)/\gamma_w + y$$

$$h = H + (\Delta u_w)/\gamma_w \tag{116}$$

Llamemos  $\Delta u_w$  al incremento de presión hidráulica en el punto A (figura 21)

$$(\Delta u_w)_A = (\Delta u_w)$$

El incremento de presión hidráulica en el punto B vale (figura 21)

$$(\Delta u_w)_B = (\Delta u_w) + [\partial(\Delta u_w)/\partial z] dz$$

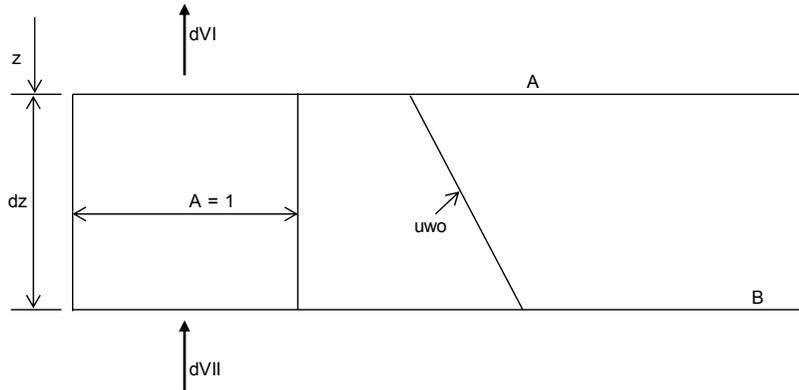


FIGURA 21

El gradiente hidráulico en el punto A (flujo vertical) es

$$i_A = \partial h / \partial z$$

Tomando en cuenta la ecuación 116

$$i_A = (1/\gamma_w) \partial(\Delta u_w) / \partial z$$

El gradiente hidráulico en el punto B es

$$i_B = (1/\gamma_w) (\partial/\partial z) \{ (\Delta u_w) + [\partial(\Delta u_w)/\partial z] dz \}$$

El gasto de salida del elemento (cara I), para un área unitaria en dirección vertical, utilizando la ley de Darcy, vale

$$dV_I/dt = k (1/\gamma_w) \partial(\Delta u_w) / \partial z$$

$$dV_I = k (1/\gamma_w) [\partial(\Delta u_w) / \partial z] dt \quad (117)$$

En forma análoga, el gasto de entrada al elemento (cara II) es

$$dV_{II}/dt = k (1/\gamma_w) (\partial/\partial z) \{ (\Delta u_w) + [\partial(\Delta u_w) / \partial z] dz \}$$

$$dV_{II} = \{ k (1/\gamma_w) (\partial/\partial z) \{ (\Delta u_w) + [\partial(\Delta u_w) / \partial z] dz \} \} dt \quad (118)$$

La diferencia entre el volumen de salida y el de entrada será, restando la ecuación 118 a la 117

$$\Delta dV = dV_I - dV_{II}$$

$$\Delta dV = - (k/\gamma_w) [\partial^2(\Delta u_w) / \partial z^2] dz dt \quad (119)$$

Por otra parte, la deformación vertical del elemento de espesor  $dz$  vale, aplicando la ley de Hooke

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta d\delta}{dz} = \frac{1}{E_s} \sigma_z = m_v \sigma_z$$

$E_s$  es el módulo de deformación del suelo  
 $m_v$  = módulo de compresibilidad volumétrica

$$m_v = \frac{1}{E_s}$$

$$\Delta d\delta_{pt} = m_v \sigma_z dz \quad (120)$$

Y el decremento de volumen, para un área unitaria en dirección vertical

$$\Delta dV = \Delta d\delta_{pt}(A) = \Delta d\delta_{pt}(1) = m_v \sigma_z dz \quad (121)$$

$$\Delta dV = m_v [d(\Delta p_v')] dz$$

$d(\Delta p_v')$  significa el incremento de esfuerzo vertical efectivo en un tiempo  $dt$ .

Por otra parte, en un suelo totalmente saturado se cumple

$$p_v = p_{vo} + q = p_v' + u_w = p_{vo}' + \Delta p_v' + u_{wo} + \Delta u_w$$

$$dp_v = dp_{vo} + dq = 0 = dp_{vo}' + d(\Delta p_v') + du_{wo} + d(\Delta u_w)$$

$$d(\Delta p_v') = - d(\Delta u_w)$$

Pero

$$d(\Delta u_w) = [\partial(\Delta u_w)/\partial t] dt$$

$$d(\Delta p_v') = - [\partial(\Delta u_w)/\partial t] dt$$

Sustituyendo en la ecuación 121

$$\Delta dV = - m_v [\partial(\Delta u_w)/\partial t] dt dz \quad (124)$$

El volumen de agua expulsada del elemento (figura 21) debe ser igual al cambio de volumen del mismo, por lo tanto, las ecuaciones 119 y 124 miden la misma cantidad, y deben ser iguales

$$- (k/\gamma_w) [\partial^2(\Delta u_w)/\partial z^2] dz dt = - m_v [\partial(\Delta u_w)/\partial t] dt dz$$

$$(k/m_v \gamma_w) [\partial^2(\Delta u_w)/\partial z^2] = [\partial(\Delta u_w)/\partial t] \quad (125)$$

$$\text{Sea } c_v = k/m_v \gamma_w \quad (126)$$

A  $c_v$  se le conoce como coeficiente de consolidación del suelo.

$$c_v [\partial^2(\Delta u_w)/\partial z^2] = [\partial(\Delta u_w)/\partial t] \quad (127)$$

La ecuación 127 mide la variación del incremento de presión hidráulica en función de la profundidad y del tiempo, y se conoce como la ecuación diferencial del fenómeno de consolidación primaria para flujo vertical.

#### Solución de la ecuación diferencial de consolidación

Para la solución de la ecuación diferencial de la consolidación

$$c_v [\partial^2(\Delta u_w)/\partial z^2] = [\partial(\Delta u_w)/\partial t] \quad (\text{ecuación 127})$$

se consideran las siguientes condiciones de frontera (figura 20b)

$$\Delta u_w = 0, \text{ para } z = 0 \text{ y } z = 2\Delta z_e, \text{ para todo } t > 0.$$

Con la siguiente condición inicial

$$\Delta u_w = q, \text{ para } t = 0^+, \text{ y } 0 < z < 2\Delta z_e$$

Para estas condiciones, la solución de la ecuación 127 es (Juárez Badillo y Rico, 1976)

$$\Delta u_w = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \text{sen}\left[\frac{(2i+1)\pi z}{2\Delta z_e}\right] \exp\left[-\frac{(2i+1)^2\pi^2 T}{4}\right] \right\} \quad (128)$$

$$\text{donde } T = c_v t / \Delta z_e^2 \quad (129)$$

A  $T$  se le denomina factor tiempo.

#### Grado de consolidación de un estrato de arcilla

La deformación de un "estrato" de espesor  $dz$ , a la profundidad  $z$  vale, para un tiempo  $t = t_1 > 0$  vale (figura 22)

$$\Delta d\delta_{p_t} = m_v \sigma_z dz = m_v dp_v' dz$$

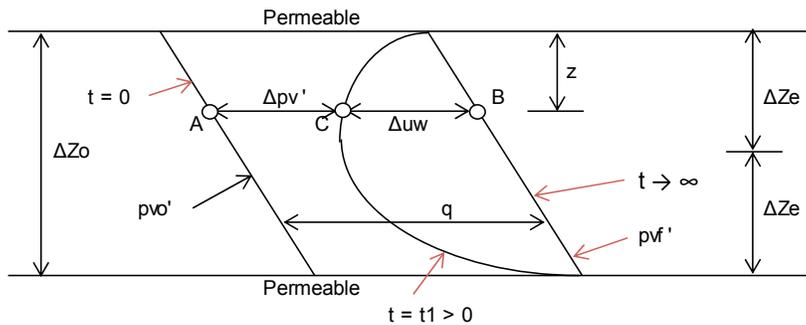
$$\Delta d\delta_{p_t} = m_v (q - \Delta u_w) dz$$

Mientras que la deformación de todo el estrato de espesor  $\Delta z_o$ , para un tiempo  $t = t_1 > 0$  es

$$\Delta \delta_{p_t} = \int \Delta d\delta_{p_t} = \int_0^{\Delta z_o} m_v (q - \Delta u_w) dz$$

Para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ ,  $\Delta u_w$  tiende a cero, y la deformación de todo el estrato toma el valor

$$\Delta \delta_p = \int_0^{\Delta z_o} m_v (q) dz = m_v q \Delta z_o = m_v q (2\Delta z_e)$$



(Cs Deformaciones de Suelos Figuras)

GRADO DE CONSOLIDACIÓN DE UN ESTRATO DE ARCILLA DE ESPESOR  $\Delta Z_0$   
FIGURA 22

Se define el grado o porcentaje de consolidación de un estrato de arcilla de espesor  $\Delta z_0 = 2\Delta z_e$  de la siguiente forma (figura 22)

$$U(\%) = \frac{\Delta \delta_{Pt}}{\Delta \delta_P} \times 100 = \frac{\int_0^{2\Delta z_e} m_v (q - \Delta u_w) dz}{m_v q (2\Delta z_e)} \times 100 = \frac{\int_0^{2\Delta z_e} (q - \Delta u_w) dz}{q (2\Delta z_e)} \times 100 \quad (131)$$

$$U(\%) = (100) \{1 - [1/q(2\Delta z_e)] \int_0 (\Delta u_w) dz\} \quad (132)$$

Tomando en cuenta la ecuación 128

$$\int_0 (\Delta u_w) dz = q \int_0^{2\Delta z_e} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{(2i+1)\pi z}{2\Delta z_e} \right] \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\}$$

$$\int_0 (\Delta u_w) dz = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{(2i+1)\pi z}{2\Delta z_e} \right] \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\}$$

Integramos un término de la serie

$$\left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\} \times \left\{ \frac{2\Delta z_e}{(2i+1)\pi} \cos \left[ \frac{(2i+1)\pi z}{2\Delta z_e} \right] \right\}$$

Valuemos los límites de la integral de este último factor

$$-\cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{z}{\Delta z_e}\right]_0^{2\Delta z_e} = -[\cos(2i+1)\pi - \cos 0] = -(-1-1) = 2$$

$$\int_0^{\Delta z_e} (\Delta u_w) dz = q (2\Delta z_e) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \exp\left[-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4}\right]$$

Sustituyendo en la ecuación 132

$$U(\%) = (100) \left[ 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \exp\left[-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4}\right] \right] \quad (133)$$

En la ecuación 133 observamos que el porcentaje de consolidación de un estrato depende únicamente del factor tiempo:  $U = f(T)$ . En la tabla 3 se muestran los valores de  $U$  en función de  $T$  (Juárez Badillo y Rico, 1976).

La deformación del estrato, debida a consolidación primaria se calcula

$$\Delta \delta_{pt} = U(\Delta \delta_p) = m_v \sigma_z \Delta z_o (U)$$

donde  $\sigma_z$  es el incremento de esfuerzo a la mitad del estrato de espesor  $\Delta z_o$ .

TABLA 3  
RELACIÓN TEÓRICA U(%)-T

U(%)	T
0	0
10	0.008
15	0.018
20	0.031
25	0.049
30	0.071
35	0.096
40	0.126
45	0.159
50	0.197
55	0.238
60	0.287
65	0.342
70	0.405
75	0.477
80	0.565
85	0.684
90	0.848
95	1.127
100	≈ 2

(Tomada de Juárez Badillo y Rico, 1976)

### TEORÍA DE LA CONSOLIDACIÓN SECUNDARIA DE ZEEVAERT

Consideremos el modelo de viscosidad intergranular de la figura 23 (unidad Z; Zeevaert, 1986), que consiste en un amortiguador  $N$  con coeficiente de fluidez  $\Phi_N$  y otro amortiguador 2 cuya fluidez disminuye con el tiempo.

En el amortiguador  $N$

$$\dot{\varepsilon}_N = \Phi_N \sigma_N \quad (134)$$

En el amortiguador 2

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{a}{b+t} \sigma_2 \quad (135)$$

Por equilibrio

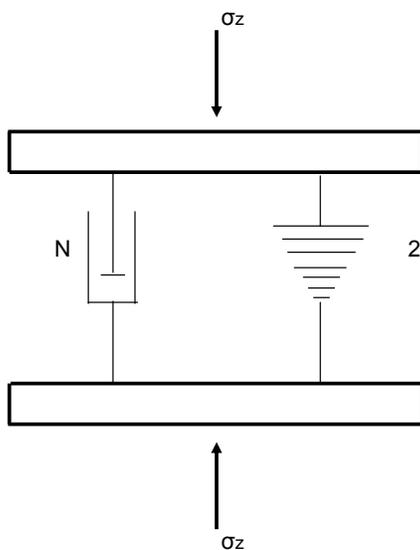
$$\sigma_z = \sigma_N + \sigma_2 \quad (136)$$

Como los amortiguadores están en paralelo

$$\dot{\varepsilon}_{St} = \dot{\varepsilon}_N = \dot{\varepsilon}_2 \quad (137)$$

Sustituyendo en la ecuación 136

$$\sigma_z = \frac{1}{\Phi_N} \dot{\varepsilon}_N + \frac{b+t}{a} \dot{\varepsilon}_2$$



MODELO DE VISCOSIDAD INTERGRANULAR. UNIDAD Z (Zeevaert, 1986)  
FIGURA 23

$$\sigma_z = \left( \frac{1}{\Phi_N} + \frac{b+t}{a} \right) \cdot \varepsilon_{St}$$

$$\dot{\varepsilon}_{St} = \frac{a}{\frac{a}{\Phi_N} + b + t} \sigma_z \quad (138)$$

Considerando  $\sigma_z = \text{constante}$ , integramos la ecuación 138

$$\varepsilon_{St} = a\sigma_z \ln \left( b + t + \frac{a}{\Phi_N} \right) \Big|_0^t$$

$$\varepsilon_{St} = a\sigma_z \ln \left( \frac{b + t + \frac{a}{\Phi_N}}{b + \frac{a}{\Phi_N}} \right) \quad (139)$$

En el modelo de Newton, de acuerdo con las ecuaciones 134 y 138

$$\sigma_N = \frac{1}{\Phi_N} \cdot \varepsilon_{St} = \frac{\frac{a}{\Phi_N}}{\frac{a}{\Phi_N} + b + t} \sigma_z$$

Para  $t = 0 \rightarrow \sigma_N = \sigma_z$ , de donde  $b = 0$

Reemplazando en la ecuación 139

$$\varepsilon_{St} = a\sigma_z \ln \left( \frac{t + \frac{a}{\Phi_N}}{\frac{a}{\Phi_N}} \right) \quad (140)$$

Por otra parte  $\ln x = 2.3 \log_{10} x = 2.3 \log x$

Tomando en cuenta un gran número de modelos Z en serie

$$\varepsilon_{St} = 2.3\bar{a}\sigma_z \log \left( 1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a} t \right) \quad (141)$$

Pero

$$\varepsilon_{St} = \frac{\Delta\delta_{St}}{\Delta z_o}$$

Por lo tanto

$$\Delta\delta_{St} = 2.3\bar{a}\sigma_z(\Delta z_o)\log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a}t\right) \quad (142)$$

O bien, haciendo

$$m_t = \frac{1}{E_{cs}} = 2.3\bar{a} \quad (143)$$

$$\Delta\delta_{St} = m_t\sigma_z(\Delta z_o)\log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a}t\right) \quad (144)$$

$$\Delta\delta_{St} = \frac{1}{E_{cs}}\sigma_z(\Delta z_o)\log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a}t\right) \quad (145)$$

Sea

$$C_t = m_t\sigma_z(\Delta z_o) = \frac{1}{E_{cs}}\sigma_z(\Delta z_o) \quad (146)$$

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a}t\right) \quad (147)$$

La ecuación 147 la podemos poner de la siguiente forma

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a} \frac{C_v}{(\Delta z_e)^2} \frac{(\Delta z_e)^2}{C_v} t\right)$$

Pero (ecuación 129)

$$T = \frac{C_v t}{(\Delta z_e)^2}$$

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a} \frac{(\Delta z_e)^2}{C_v} T\right)$$

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log(1 + \xi T) \quad (148)$$

donde

$$\xi = \frac{\bar{\Phi}_N (\Delta z_e)^2}{\bar{a} C_v} \quad (149)$$

Cabe señalar que

$\bar{\Phi}_N = \Sigma \Phi_N$  = fluidez del agua de los macroporos, en todo el elemento

$\bar{a} = \Sigma a$  = fluidez del agua de los microporos, en todo el elemento

### ARCILLAS SENSITIVAS

Las arcillas sensitivas exhiben una estructura floculenta. La curva de compresibilidad en estos suelos se muestra en la figura 24.

La deformación a largo plazo de un estrato de arcilla sensitiva se obtiene con la siguiente expresión

$$\Delta \delta_t = \Delta \delta_{Pt} + \Delta \delta_{St} \quad (150)$$

donde  $\Delta \delta_{Pt}$  = deformación por consolidación primaria y  $\Delta \delta_{St}$  = deformación por consolidación secundaria.

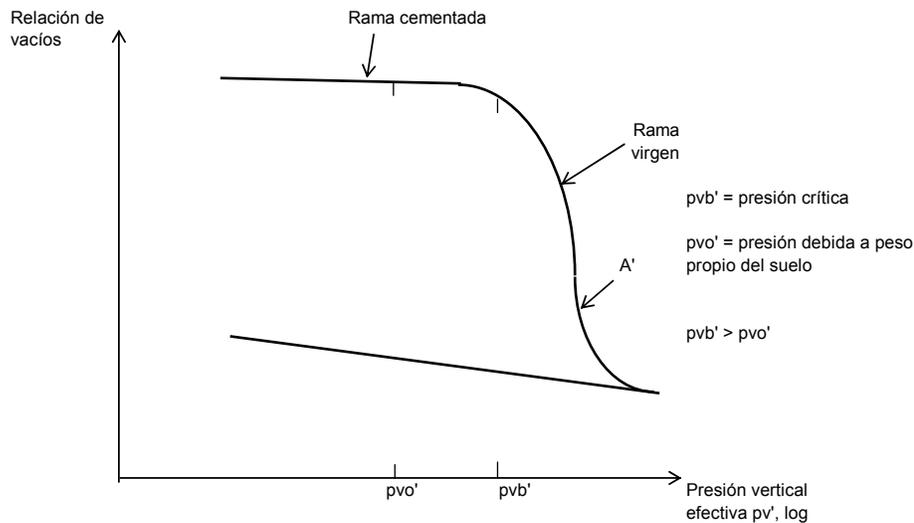
La deformación por consolidación primaria se calcula

$$\Delta \delta_{Pt} = \Delta \delta_P U \quad (151)$$

siendo  $\Delta \delta_P$  la deformación al término de la consolidación primaria y  $U$  el grado de consolidación (tabla 3);  $U$  a su vez es función del factor tiempo  $T$ , que vale

$$T = \frac{c_v t}{(\Delta z_e)^2} \quad (152)$$

$c_v$  = coeficiente de consolidación,  $\Delta z_e$  = espesor efectivo de drenaje del estrato y  $t$  = tiempo después de aplicada la carga al estrato



CURVA DE COMPRESIBILIDAD  
ARCILLA SENSITIVA  
FIGURA 24

Definimos además los módulos de deformación

$$E_p = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{\Delta \delta_p} = \frac{1}{m_v} \quad (153)$$

$m_v$  = coeficiente de compresibilidad volumétrica en consolidación primaria

$$E_{cs} = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{C_t} = \frac{1}{m_t} \quad (154)$$

$m_t$  = coeficiente de compresibilidad volumétrica en consolidación secundaria

De las expresiones anteriores despejamos  $\Delta \delta_p$  y  $C_t$

$$\Delta \delta_p = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_p} \quad (155)$$

$$C_t = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_{cs}} \quad (156)$$

En función del tipo de curva, las propiedades de deformación  $c_v$ ,  $\xi$ ,  $E_p$  y  $E_{cs}$  se obtienen a partir de los resultados de pruebas de consolidación unidimensional practicadas en muestras inalteradas obtenidas del estrato de arcilla sensitiva.

Ya con estas propiedades, la deformación del estrato de suelo en el campo se calcular usando la ecuación 150. O bien, reemplazando las ecuaciones 148 y 151 en la ecuación 150

$$\Delta \delta_t = \Delta \delta_p U + C_t \log(1 + \xi T) \quad (157)$$

También

$$\Delta\delta_i = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_p} U + \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_{cs}} \log(1 + \xi T) \quad (158)$$

En los siguientes incisos veremos la forma de determinar las propiedades de deformación para curvas tipo I, tipo II y para suelos con cavidades.

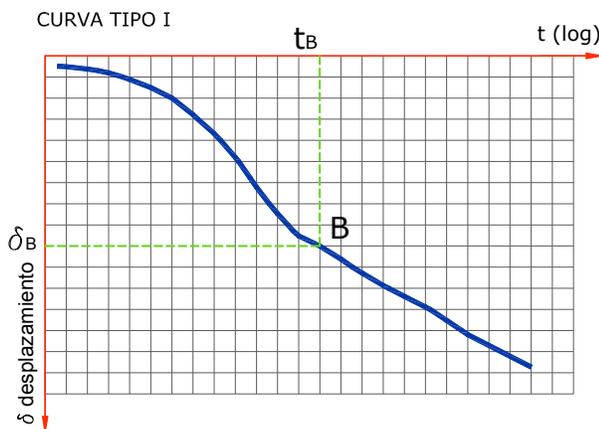
#### Curva de consolidación tipo I

La obtención de propiedades mecánicas de curvas tipo I es como sigue. Sea una curva tipo I (figura 25); en esta clase de curvas el módulo  $\xi = 5$  (Zeevaert, 1986). En la curva de consolidación se toman dos puntos para tiempos grandes. En la recta de consolidación secundaria, usando la ecuación 157

$$\Delta\delta_{i2} - \Delta\delta_{i1} = C_i \log\left(\frac{1 + \xi T_2}{1 + \xi T_1}\right)$$

$$\Delta\delta_{i2} - \Delta\delta_{i1} \cong C_i \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = C_i \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \quad (159)$$

$$C_i \cong \frac{\Delta\delta_{i2} - \Delta\delta_{i1}}{\log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)} \quad (160)$$



CURVA DE CONSOLIDACIÓN TIPO I  
FIGURA 25

Por otra parte, para  $U = 100\%$ ,  $T \approx 2$

Sea  $\Delta\delta_B$  = deformación correspondiente al 100% de consolidación primaria.

Reemplazando en la ecuación 157

$$\Delta\delta_B = \Delta\delta_p + C_t \log[1 + 5(2)]$$

$$\Delta\delta_p = \Delta\delta_B - 1.04C_t \quad (161)$$

$E_p$  se obtiene de la ecuación 153

$$E_p = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{\Delta\delta_p} = \frac{1}{m_v} \quad (162)$$

Para  $U = 50\%$ ,  $T = 0.197$

$$\Delta\delta_{50} = \frac{\Delta\delta_p}{2} + C_t \log[1 + 5(0.1972)]$$

$$\Delta\delta_{50} = \frac{\Delta\delta_p}{2} + 0.298C_t \quad (163)$$

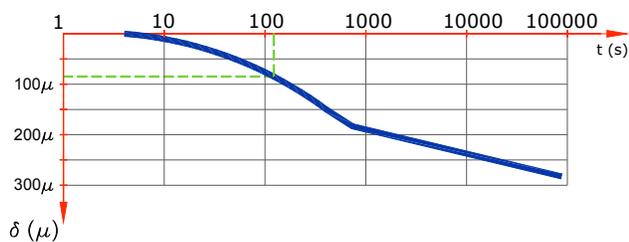
Para  $U = 50\%$ ,  $T = 0.197$ ; sustituyendo en la ecuación 152

$$c_v = \frac{0.197(\Delta z_e)^2}{t_{50}} \quad (164)$$

$t_{50}$  lo medimos directamente en la curva de consolidación con  $\Delta\delta_{50}$ .

### Ejemplo

Sea la curva de consolidación de la figura E-4 (Zeevaert, 1973), para la cual:  $p_{vo}' = 0.8 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 0.3 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\Delta z_o = 1.675 \text{ cm}$ . Determinar las propiedades  $E_p$ ,  $E_{cs}$  y  $c_v$ .



CURVA DE CONSOLIDACIÓN. EJEMPLO  
FIGURA E-4

### Solución

En la curva de la figura E-4 medimos

$$\Delta\delta_B = 0.0185 \text{ cm}$$

$$t_B = 750 \text{ s}$$

$$\Delta\delta_{t1} = 0.025 \text{ cm}, t_1 = 17\,000 \text{ s}$$

$$\Delta\delta_{t2} = 0.028 \text{ cm}, t_2 = 80\,000 \text{ s}$$

Reemplazando en las ecuaciones 160 y 154

$$C_i \cong \frac{0.028 - 0.025}{\log\left(\frac{80000}{17000}\right)} = 0.00446 \text{ cm}$$

$$E_{cs} = \frac{0.3(1.675)}{0.00446} = 112.67 \text{ kg/cm}^2$$

Reemplazamos en las ecuaciones 161 y 162

$$\Delta\delta_P = 0.0185 - 1.04(0.00446) = 0.01386 \text{ cm}$$

$$E_P = \frac{0.3(1.675)}{0.01386} = 36.26 \text{ kg/cm}^2$$

Sustituyendo en la ecuación 163

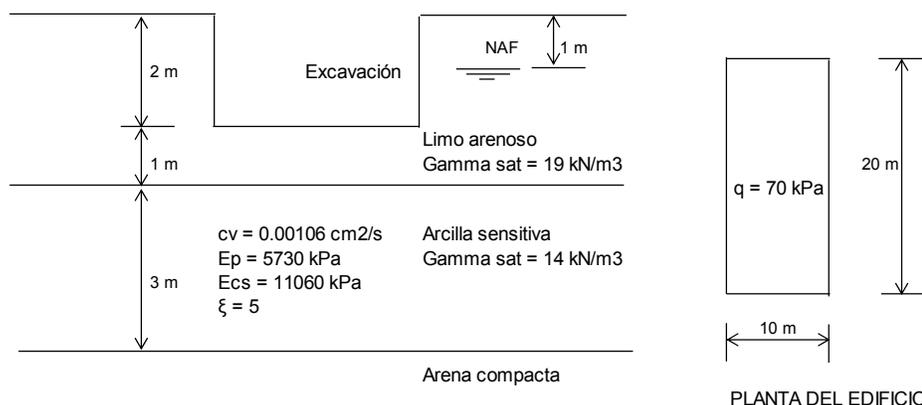
$$\Delta\delta_{50} = 0.00693 + 0.298(0.00446) = 0.00826 \text{ cm}$$

En la curva de consolidación medimos:  $t_{50} = 130 \text{ s}$ . Reemplazamos en la ecuación 164

$$c_v = \frac{0.197(0.8375)^2}{130} = 0.001063 \text{ cm}^2/\text{s}$$

### Ejemplo

Para el cajón de cimentación mostrado en la figura E-5, calcular los asentamientos diferidos a 6 meses y a un año, después de construido el inmueble, debidos a la consolidación del estrato de arcilla sensitiva.



ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES. EJEMPLO  
FIGURA E-5

### Solución

El incremento neto de carga vale:  $q_n = 70 - 19(2) = 32 \text{ kPa}$ . El incremento de esfuerzo normal vertical a la mitad del estrato es

$$\sigma_z = 30.607 \text{ kPa}$$

Usamos la ecuación 158

$$\Delta\delta_t = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_p}U + \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_{cs}}\log(1 + \xi T)$$

Tiempo igual a 6 meses

$$t = 6 \text{ meses} = 6(30)(86400) = 15\,552\,000 \text{ s}$$

Utilizamos la ecuación 152

$$T = \frac{0.00106(15552000)}{(150)^2} = 0.7327$$

$$U = 86.5\%$$

$$\Delta\delta_t = \frac{30.607(3)}{5730}(0.865) + \frac{30.607(3)}{11060}\log(1 + 5(0.7327)) = 0.01386 + 0.00555 = 0.0194m$$

Tiempo igual a un año:

$$t = 365.25(86400) = 31\,557\,600 \text{ s}$$

$$T = \frac{0.00106(31557600)}{(150)^2} = 1.487$$

$$U = 97.1\% \text{ (tabla 1)}$$

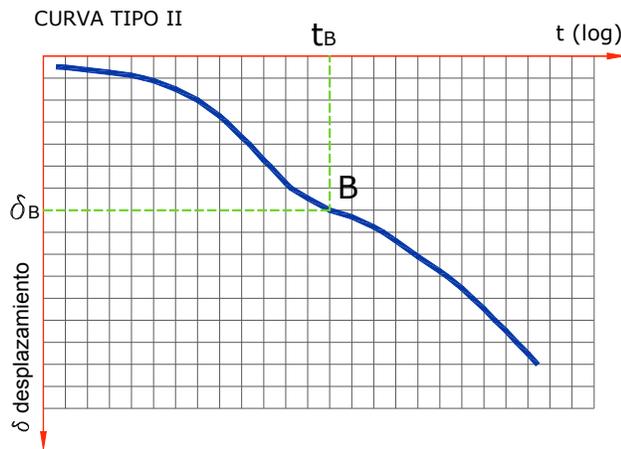
Sustituimos en la ecuación 158

$$\Delta\delta_t = \frac{30.607(3)}{5730}(0.971) + \frac{30.607(3)}{11060}\log(1 + 5(1.487)) = 0.01556 + 0.00769 = 0.0232m$$


---

### Curva de consolidación tipo II

La obtención de propiedades mecánicas de curvas tipo II es como sigue. Sea una curva tipo II (figura 26)



CURVA DE CONSOLIDACIÓN TIPO II  
FIGURA 26

Primeramente hallamos la deformación  $C_i$  con la expresión 160

$$C_i \cong \frac{\delta_{i2} - \delta_{i1}}{\log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)} \quad (165)$$

La ecuación 157 se puede poner

$$\Delta\delta_i = \Delta\delta_p U + C_i \log(1 + \xi T) \quad (\text{ecuación 157})$$

$$\Delta\delta_i = \Delta\delta_p U + C_i \log\left[1 + \left(\frac{\xi c_v}{(\Delta z_e)^2}\right) t\right]$$

$$\Delta\delta_i = \Delta\delta_p U + C_i \log\left[1 + \frac{t}{\left(\frac{(\Delta z_e)^2}{\xi c_v}\right)}\right]$$

$$\Delta\delta_i = \Delta\delta_p U + C_i \log\left[1 + \frac{t}{\tau_{II}}\right] \quad (166)$$

siendo

$$\tau_{II} = \frac{(\Delta z_e)^2}{\xi c_v} \quad (167)$$

Sea el punto  $(t_B, \delta_B)$  el punto donde termina la consolidación primaria ( $U = 1$ ), y  $(t_F, \delta_F)$  el punto correspondiente al máximo tiempo medido. Entonces

$$\Delta\delta_F - \Delta\delta_B = C_t \log \frac{1 + \frac{t_F}{\tau_{II}}}{1 + \frac{t_B}{\tau_{II}}}$$

$$\Delta\delta_F - \Delta\delta_B = C_t \log \frac{\tau_{II} + t_F}{\tau_{II} + t_B}$$

Despejamos  $\tau_{II}$

$$\tau_{II} = \frac{t_F - t_B \left( 10^{\frac{\Delta\delta_F - \Delta\delta_B}{C_t}} \right)}{10^{\frac{\Delta\delta_F - \Delta\delta_B}{C_t}} - 1} \quad (168)$$

Calculamos  $\Delta\delta_p$  con la ecuación 166, usando las coordenadas del punto B

$$\Delta\delta_B = \Delta\delta_p + C_t \log \left[ 1 + \frac{t_B}{\tau_{II}} \right]$$

$$\Delta\delta_p = \Delta\delta_B + C_t \log \left[ 1 + \frac{t_B}{\tau_{II}} \right] \quad (169)$$

Como una primera aproximación, con  $\Delta\delta_p/2$ , ( $U = 50\%$ ), medimos  $t_{50}$  en la curva de consolidación; calculamos  $c_v$  despejándolo de la ecuación 152 (con  $T = 0.197$ ) y  $\xi$  despejándolo de la ecuación 167

$$c_v = \frac{T(\Delta z_e)^2}{t_{50}} = \frac{0.197(\Delta z_e)^2}{t_{50}} \quad (170)$$

$$\xi = \frac{(\Delta z_e)^2}{\tau_{II} c_v} \quad (171)$$

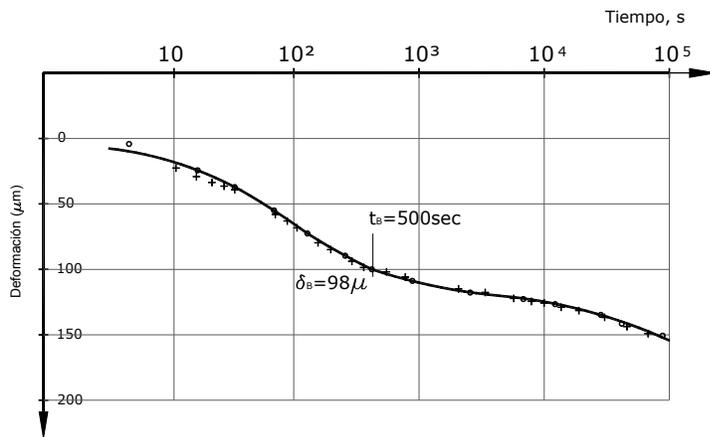
Ahora

$$\delta_{50} = \frac{\delta_p}{2} + C_t \log(1 + 0.197\xi) \quad (172)$$

La ecuación 172 se aplica repetidamente para medir  $t_{50}$  en la curva de consolidación, calculando  $c_v$  y  $\xi$  hasta que la magnitud de  $\delta_{50}$  no cambie entre dos iteraciones sucesivas.

### Ejemplo

Obtener las propiedades de deformación de la arcilla sensitiva tipo II de la figura E-6 (Zeevaert, 1986);  $p_{v0}' = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 0.5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\Delta z_0 = 2.086 \text{ cm}$ .



CURVA DE CONSOLIDACIÓN TIPO II (Zeevaert, 1986)  
FIGURA E-6

### Solución

En la curva de la figura E-6 medimos

$$\delta_B = 98 \mu\text{m} = 0.098 \text{ mm} = 0.0098 \text{ cm}$$

$$t_B = 500 \text{ s}$$

$$\delta_{t1} = 0.0130 \text{ cm}, t_1 = 15\,100 \text{ s}$$

$$\delta_{t2} = \delta_F = 0.0153 \text{ cm}, t_2 = t_F = 100\,000 \text{ s}$$

Sustituimos en las ecuaciones 165, 154 y 168

$$C_i \cong \frac{0.0153 - 0.0130}{\log\left(\frac{100000}{15100}\right)} = 0.0028 \text{ cm}$$

$$E_{cs} = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{C_i} = \frac{1}{m_t}$$

$$E_{cs} = \frac{0.5(2.086)}{0.0028} = 372.5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{II} = \frac{t_F - t_B \left( 10^{\frac{\Delta\delta_F - \Delta\delta_B}{C_i}} \right)}{10^{\frac{\Delta\delta_F - \Delta\delta_B}{C_i}} - 1}$$

$$\tau_{II} = \frac{100000 - 500 \left( 10^{\frac{0.0153 - 0.0098}{0.0028}} \right)}{10^{\frac{0.0153 - 0.0098}{0.0028}} - 1} = 592 \text{ s}$$

Calculamos  $\Delta\delta_P$  con la ecuación 169

$$\Delta\delta_p = \Delta\delta_B + C_i \log\left[1 + \frac{t_B}{\tau_{II}}\right]$$

$$\Delta\delta_p = 0.0098 + 0.0028 \log\left[1 + \frac{500}{592}\right]$$

$$= 0.009056 \text{ cm}$$

y  $E_p$  con la igualdad 153

$$E_p = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{\Delta\delta_p} = \frac{1}{m_v}$$

$$E_p = \frac{0.5(2.086)}{0.009056} = 115.17 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Como una primera aproximación, con  $\Delta\delta_p/2 = 0.004528$  cm, en la figura E-3 medimos:  $t_{50} = 38$  s. Reemplazando en las expresiones 170 y 171

$$c_v = \frac{T(\Delta z_e)^2}{t_{50}} = \frac{0.197(\Delta z_e)^2}{t_{50}}$$

$$c_v = \frac{0.197(1.043)^2}{38} = 0.00564 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

$$\xi = \frac{(\Delta z_e)^2}{\tau_{II} c_v}$$

$$\xi = \frac{(1.043)^2}{592(0.00564)} = 0.3242$$

Ahora (ecuación 172)

$$\Delta\delta_{50} = \frac{\Delta\delta_p}{2} + C_i \log(1 + 0.197\xi)$$

$$\Delta\delta_{50} = \frac{0.009056}{2} + 0.0028 \log(1 + 0.197(0.3242)) = 0.004603 \text{ cm}$$

Volvemos a la curva de consolidación y medimos  $t_{50} = 40$  s

$$c_v = \frac{0.197(1.043)^2}{40} = 0.005358 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

$$\xi = \frac{(1.043)^2}{592(0.005358)} = 0.343$$

Sustituyendo en la ecuación 172

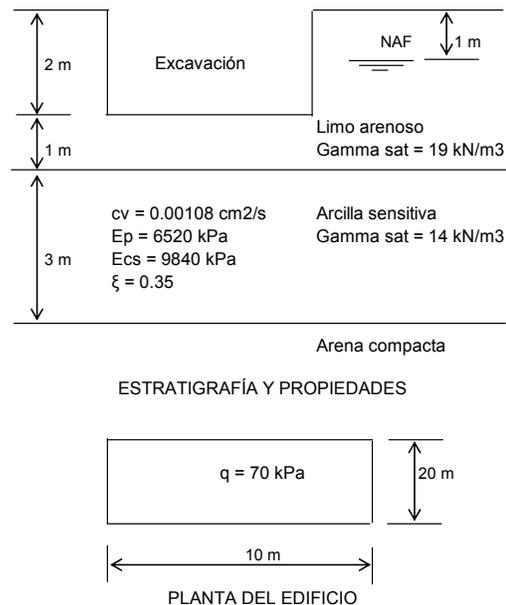
$$\Delta\delta_{50} = \frac{0.009056}{2} + 0.0028 \log(1 + 0.197(0.343)) = 0.004608 \text{ cm}$$

$$\Delta\delta_{50} = 0.004608 \text{ cm} \cong 0.004603 \text{ cm}$$

Por lo tanto, las propiedades de deformación son:  $E_p = 115.17 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_{cs} = 372.5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $c_v = 0.005358 \text{ cm}^2/2$ ,  $\xi = 0.343$ . O bien:  $m_v = 1/E_p = 8.68 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ ,  $m_t = 1/E_{cs} = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{kg}$ .

### Ejemplo

Para el cajón de cimentación mostrado en la figura E-7, calcular los asentamientos diferidos a 6 meses y a un año, después de construido el inmueble, debidos a la consolidación del estrato de arcilla sensitiva.



### EJEMPLO. CÁLCULO DE ASENTAMIENTO. CURVA DE CONSOLIDACIÓN TIPO II FIGURA E-7

#### Solución

El incremento neto de carga vale:  $q_n = 70 - 19(2) = 32 \text{ kPa}$ . El incremento de esfuerzo normal vertical a la mitad del estrato es

$$\sigma_z = 30.607 \text{ kPa}$$

Usamos la ecuación 158

$$\Delta\delta_i = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_p} U + \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_{cs}} \log(1 + \xi T)$$

Tiempo igual a 6 meses

$$t = 6 \text{ meses} = 6(30)(86400) = 15\,552\,000 \text{ s}$$

Con la igualdad 152

$$T = \frac{c_v t}{(\Delta z_e)^2} = \frac{0.00108(15552000)}{(150)^2} = 0.746$$

$$U = 86.9\%$$

$$\Delta\delta_{6 \text{ meses}} = \frac{30.607(3)}{6520}(0.869) + \frac{30.607(3)}{9840} \log(1 + 0.35(0.746)) = 0.01224 + 0.000940 = 0.01318m$$

Tiempo igual a cinco años:

$$t = 5(365.25)(86400) = 157788000 \text{ s}$$

$$T = \frac{c_v t}{(\Delta z_e)^2} = \frac{0.00108(157788000)}{(150)^2} = 7.57 > 2$$

$$U = 100\%$$

$$\Delta\delta_{5 \text{ años}} = \frac{30.607(3)}{6520}(1) + \frac{30.607(3)}{9840} \log(1 + 0.35(7.57)) = 0.01408 + 0.005246 = 0.01933m$$

### Suelos con cavidades

La ecuación 147 se puede poner de la siguiente forma

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{a} t\right) \quad (\text{ecuación 147})$$

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \quad (173)$$

donde

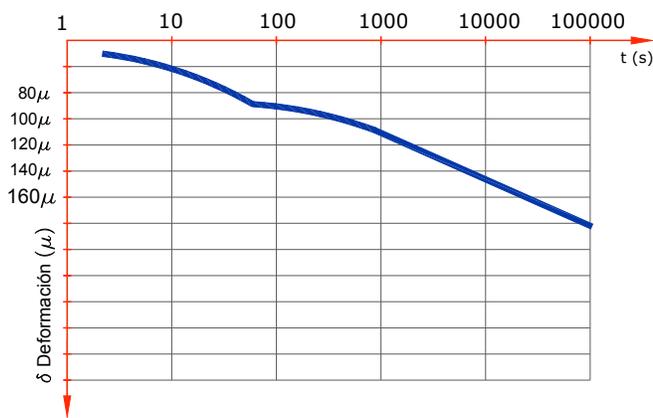
$$\tau = \frac{a}{\bar{\Phi}_N} \quad (174)$$

En suelos con cavidades, la consolidación primaria ocurre rápidamente (figura 27), por lo que la ecuación 150 queda

$$\Delta\delta_t = \Delta\delta_p + C_i \log\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \quad (175)$$

O bien, tomando en cuenta la ecuación 156

$$\Delta\delta_t = \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_p} + \frac{\sigma_z(\Delta z_o)}{E_{cs}} \log\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \quad (176)$$



CURVA DE CONSOLIDACIÓN. SUELO CON CAVIDADES  
FIGURA 27

$C_i$  es la deformación entre dos ciclos consecutivos del tiempo, en el tramo recto de la consolidación secundaria, dibujada ésta en escala semilogarítmica (logaritmo en base 10).  $C_i$  se puede obtener también como la pendiente del tramo recto; así, si  $(t_1, \Delta\delta_{s1})$  y  $(t_2, \Delta\delta_{s2})$  son dos puntos en dicho tramo, entonces, de acuerdo con la ecuación 175

$$\Delta\delta_{s2} - \Delta\delta_{s1} = C_i \log \frac{1 + \frac{t_2}{\tau}}{1 + \frac{t_1}{\tau}} \cong C_i \log \frac{t_2}{t_1}$$

$$C_i \cong \frac{\delta_{i2} - \delta_{i1}}{\log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)} \quad (177)$$

En la ecuación 175 despejamos  $\tau$

$$\tau = \frac{t}{\frac{\Delta\delta_t - \Delta\delta_p}{C_i} - 1} \quad (178)$$

En este tipo de depósitos requerimos relacionar el tiempo de consolidación en el laboratorio  $T_{lab}$  con el tiempo de consolidación en el campo  $T_{cpo}$ , para lo cual procedemos de la siguiente forma: En la teoría de la consolidación se demuestra que la fluidez del agua libre del suelo  $\bar{\Phi}_N$  vale (Zeevaert, 1973)

$$\bar{\Phi}_N = 2m_v \frac{c_v}{(\Delta z_e)^2}$$

Por otra parte, considerando las siguientes relaciones

$$a = \frac{m_t}{2.3}$$

$$\tau = \frac{a_v}{\bar{\Phi}_N}$$

Arribamos a la siguiente expresión

$$\tau = \frac{m_t}{4.6m_v} \frac{(\Delta z_e)^2}{c_v} = \frac{E_p}{4.6E_{cs}} \frac{(\Delta z_e)^2}{c_v}$$

Observamos que, considerando en un suelo constantes las propiedades  $E_p$ ,  $E_{cs}$  y  $c_v$ , entonces el tiempo,  $\tau$ , depende del espesor de la muestra en el laboratorio o del espesor del estrato en el sitio, es decir, en el consolidómetro

$$\tau_{lab} = \frac{E_p}{4.6E_{cs}} \frac{(\Delta z_{econ})^2}{c_v}$$

y en el campo

$$\tau_{cpo} = \frac{E_p}{4.6E_{cs}} \frac{(\Delta z_{ecpo})^2}{c_v}$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{\tau_{cpo}}{\tau_{lab}} = \frac{(\Delta z_{ecpo})^2}{(\Delta z_{elab})^2}$$

Es decir

$$\tau_{cpo} = \frac{(\Delta z_{ecpo})^2}{(\Delta z_{elab})^2} \tau_{lab} \quad (179)$$

Sea

$$\tau_{cs}' = \frac{\tau_{lab}}{(\Delta z_{elab})^2} \quad (180)$$

Entonces

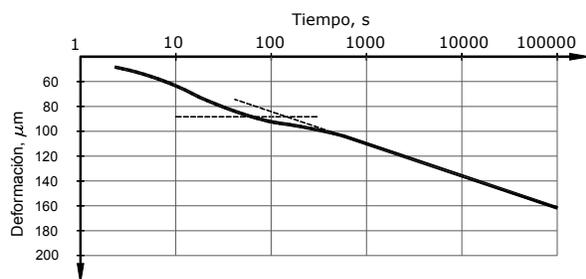
$$\tau_{cpo} = \tau_{cs}' (\Delta z_{epo})^2 \quad (181)$$

Así, la deformación del estrato de suelo *in situ* la obtenemos con la ecuación 176

$$\Delta \delta_t = \frac{\sigma_z (\Delta z_o)}{E_p} + \frac{\sigma_z (\Delta z_o)}{E_{cs}} \log \left( 1 + \frac{t}{\tau_{cpo}} \right) \quad (182)$$

### Ejemplo

Obtener las propiedades de deformación de la arcilla sensitiva con cavidades de la figura E-8 (Zeevaert, 1973);  $p_{vo}' = 0.42 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_z = 0.38 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\Delta z_o = 2.0 \text{ cm}$ .



CURVA DE CONSOLIDACIÓN. SUELOS CON CAVIDADES (Zeevaert, 1973)  
FIGURA E-8

### Solución

En la curva de la figura E-8 medimos

$$\Delta \delta_P = 88 \mu\text{m} = 0.088 \text{ mm} = 0.0088 \text{ cm}$$

$$\Delta \delta_{t1} = 0.0140 \text{ cm}, t_1 = 7000 \text{ s}$$

$$\Delta \delta_{t2} = 0.0160 \text{ cm}, t_2 = 30000 \text{ s}$$

Usamos las ecuaciones 153, 177 y 154

$$E_p = \frac{0.38(2)}{0.0088} = 86.36 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$C_t \cong \frac{0.0160 - 0.0140}{\log \left( \frac{30000}{7000} \right)} = 0.00316 \text{ cm}$$

$$E_{cs} = \frac{0.38(2)}{0.00316} = 240.51 \frac{kg}{cm^2}$$

Para  $t_1 = 7000$  s (ecuación 178)

$$\tau = \frac{t}{10^{\frac{\Delta\delta_t - \Delta\delta_p}{C_r} - 1}}$$

$$\tau_{lab} = \frac{7000}{10^{\frac{0.0140 - 0.0088}{0.00316} - 1}} = 162.07s$$

Para  $t_2 = 30000$  s

$$\tau_{lab} = \frac{30000}{10^{\frac{0.0160 - 0.0088}{0.00316} - 1}} = 158.73s$$

Promediamos los dos valores anteriores

$$\tau_{lab} = 160.4 \text{ s}$$

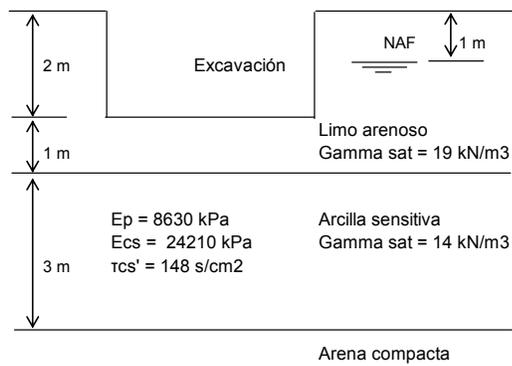
Reemplazando en la ecuación 180

$$\tau_{cs}' = \frac{\tau_{lab}}{(\Delta z_{elab})^2}$$

$$\tau_{cs}' = \frac{160.4}{1^2} = 160.4 \frac{s}{cm^2}$$

### Ejemplo

Para el cajón de cimentación mostrado en la figura E-9, calcular el asentamiento 50 años después de construido el inmueble, debido a la consolidación del estrato de arcilla sensitiva.



## ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES

EJEMPLO. CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO. SUELO CON CAVIDADES  
FIGURA E-9*Solución*

El incremento neto de carga vale:  $q_n = 70 - 19(2) = 32$  kPa. El incremento de esfuerzo normal vertical a la mitad del estrato es

$$\sigma_z = 30.607 \text{ kPa}$$

$$\text{Tiempo } t = 50(365.25)(86400) = 1\,577\,880\,000 \text{ s}$$

Usamos las igualdades 181 y 182

$$\tau_{cpo} = \tau_{cs} \left( \Delta z_{cpo} \right)^2 = 148(150)^2 = 3330000 \text{ s}$$

$$\Delta \delta_{50 \text{ años}} = \frac{30.607(3)}{8630} + \frac{30.607(3)}{24210} \log \left( 1 + \frac{1577880000}{3330000} \right) = 0.01064 + 0.01015 = 0.02079 \text{ m}$$

*Correlaciones estadísticas*

En la tabla 4 se proporcionan valores estadísticos de los módulos de deformación a largo plazo de la arcilla de la ciudad de México, en función del nivel de confianza  $\alpha$ , los cuales deben usarse únicamente para fines preliminares de análisis.

TABLA 4  
VALORES ESTADÍSTICOS DE MODULOS DE DEFORMACIÓN A LARGO PLAZO  
ARCILLA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

$\alpha$	$E_p$	$E_{cs}$	$c_v$
%	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup> /s
2.5	19.24	---	0.00729
5	30.13	16.60	0.00666
10	42.70	54.38	0.00594
15	51.18	79.88	0.00545
20	57.91	100.14	0.00506
25	63.69	117.52	0.00473
30	68.88	133.13	0.00443
40	78.26	161.32	0.00389
50	87.02	187.67	0.00338

### Tramo virgen

En el tramo virgen se han roto los contactos entre las partículas, y el fenómeno que se manifiesta de manera significativa es el de la consolidación primaria, aunque en ocasiones se hace necesario tomar en cuenta la deformación por consolidación secundaria. Además, en esta rama, la rigidez del suelo se incrementa con la presión vertical de confinamiento. La ecuación constitutiva que usamos es la 57:

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z/p_a}{[(p_{veo} + \sigma_z) / p_a]^s} \quad (57)$$

donde

$$p_{veo} = p_{cie} + p_{vo}' = p_{vo}' \quad (\text{ecuación 55})$$

En el tramo virgen  $s \approx 1$ . Integrando la ecuación 57 con  $s = 1$ :

$$\delta_P = \left[ 1 - \left( \frac{p_{vo}' + \sigma_z}{p_{vo}'} \right)^{-1/A} \right] \Delta z_o \quad (183)$$

La evolución del asentamiento la obtenemos con la expresión

$$\delta_t = \delta_P U \quad (184)$$

donde  $U$  = grado de consolidación primaria, que es función del factor tiempo  $T$ :

$$T = \frac{C_v t}{(\Delta z_e)^2} \quad (185)$$

La deformación por consolidación secundaria es

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{p_{vo}' + \sigma_z}{p_{vo}'} \right)^{(-1/A_{cs})} \right] \Delta Z_o \quad (186)$$

La predicción de la evolución del asentamiento por compresión secundaria se realiza de manera análoga al tratamiento en arcillas sensitivas.

Las propiedades de deformación para la consolidación primaria se hallan a partir de los resultados de una prueba de consolidación, de donde se miden  $\delta_p$  y  $t_{50}$ . Para la consolidación primaria,  $A'$  y  $c_v$  se despejan de las ecuaciones 183 y 185..

$$A' = - \frac{\ln \left( \frac{p_{vo}' + \sigma_z}{p_{vo}'} \right)}{\ln (1 - \delta_p / \Delta Z_o)} \quad (187)$$

O bien, si  $(p_{v1}', e_1)$  y  $(p_{v2}', e_2)$  son dos puntos ( $p_{v2}' > p_{v1}'$ ) sobre la rama virgen (correspondientes a consolidación primaria), entonces  $A'$  vale

$$A' = - \frac{\ln \left( \frac{p_{v2}'}{p_{v1}'} \right)}{\ln \left( \frac{1+e_2}{1+e_1} \right)} \quad (188)$$

$$c_v = \frac{0.197 (\Delta Z_e)^2}{t_{50}} \quad (189)$$

Para la consolidación secundaria

$$A_{cs} = - \frac{\ln \left( \frac{p_{vo}' + \sigma_z}{p_{vo}'} \right)}{\ln (1 - C_t / \Delta Z_o)} \quad (190)$$

El cómputo del resto de los parámetros de consolidación secundaria se hace en forma similar a lo visto en arcillas sensitivas para el tramo cementado.

#### Ejemplo

En una prueba de consolidación practicada en una arcilla normalmente consolidada se obtuvieron las siguientes cantidades:  $\delta_p = 0.14$  cm,  $t_{50} = 620$  s, para los esfuerzos:  $p_{vo}' = 2.84$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_z = 2.84$  kg/cm<sup>2</sup>;  $\Delta Z_o = 3.81$  cm, muestra drenada por ambas caras. Considerando únicamente el fenómeno de consolidación primaria, calcular las propiedades  $A'$  y  $c_v$ .

#### Solución

Usamos la ecuación 188

$$A' = \frac{\ln\left(\frac{2.84 + 2.84}{2.84}\right)}{\ln(1 - 0.14/3.81)} = 18.5$$

y la ecuación 189

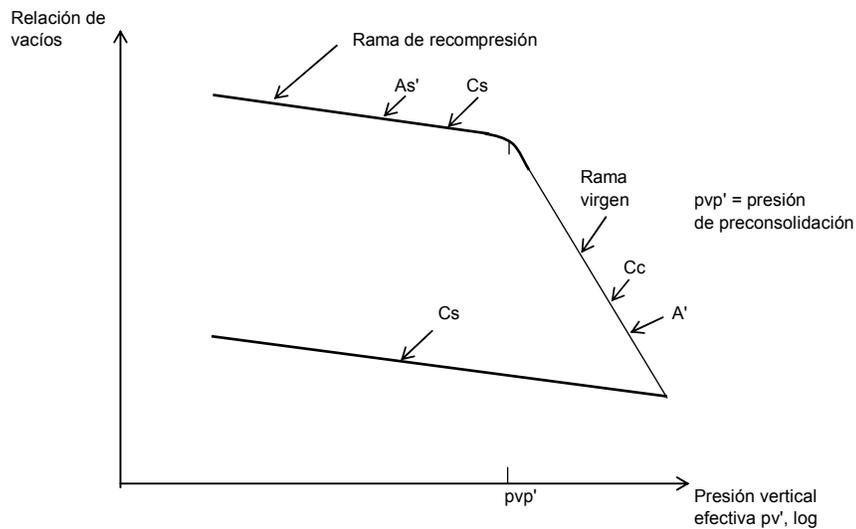
$$c_v = \frac{0.197 (1.905)^2}{620} = 0.00115 \text{ cm}^2/\text{s}$$

### ARCILLAS NO SENSITIVAS

Esta clase de suelo exhibe una estructura dispersa.

Para el cómputo de las deformaciones a corto plazo usamos las ecuaciones 97 a 100, empleando  $r = 0$  y  $s = 1$ , o bien la ecuación 104.

En la figura 28 se exhibe una curva de compresibilidad de una arcilla no sensitiva, obtenida a partir de una prueba de consolidación unidimensional.



( $C_s$  Deformaciones de Suelos Figuras)

CURVA DE COMPRESIBILIDAD  
ARCILLA NO SENSITIVA  
FIGURA 28

Arcilla preconsolidada

Para la estimación de la deformación diferida, usamos la ecuación constitutiva (ecuación 57)

$$\frac{d(\Delta Z)}{\Delta Z} = - \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z/p_a}{[(p_{veo} + \sigma_z) / p_a]^s} \quad (57)$$

En arcillas preconsolidadas el exponente  $s \approx 1$ . La ecuación 57 queda

$$\frac{d(\Delta Z)}{\Delta Z} = - \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z}{p_{veo} + \sigma_z} \quad (191)$$

$$p_{veo} = p_{cie} + p_{vo}' \quad (192)$$

Integremos la ecuación 192. Al aumentar esfuerzo de 0 a  $\sigma_z$ , el elemento disminuye su espesor de  $\Delta Z_o$  a  $\Delta Z_f$ . Por lo tanto, debemos integrar de  $\Delta Z_o$  a  $\Delta Z_f$  el primer miembro y de 0 a  $\sigma_z$  el segundo miembro:

$$\int_{\Delta Z_o}^{\Delta Z_f} \frac{d\Delta Z}{\Delta Z} = \int_0^{\sigma_z} - \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z}{p_{ve} + \sigma_z}$$

$$\frac{\Delta Z_f}{\Delta Z_o} = \frac{p_{ve} + \sigma_z}{p_{ve}} \quad (193)$$

$$\Delta \delta_z = \left[ 1 - \left( \frac{p_{ve} + \sigma_z}{p_{ve}} \right)^{(-1/A)} \right] \Delta Z_o \quad (194)$$

La ecuación 194 proporciona la deformación vertical a largo plazo, de un elemento de suelo de espesor  $\Delta Z_o$ , sometido a un incremento de esfuerzo normal  $\sigma_z$ .

La deformación al término de la consolidación primaria es

$$\Delta \delta_P = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{(-1/A_s')} \right] \Delta Z_o \quad (195)$$

y la deformación por consolidación secundaria

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{(-1/A_{cs})} \right] \Delta Z_o \quad (196)$$

La determinación de propiedades en análoga a como procedimos para una arcilla normalmente consolidada. Los módulos  $A_s'$ ,  $c_v$  y  $A_{cs}$  valen (considerando  $p_{cie} = 0$ ):



Para fines preliminares de análisis se pueden usar las siguientes magnitudes obtenidas a partir de datos estadísticos

$$A_s' = \frac{2491.5}{IP + 12.12 + 25.16t_\alpha \sqrt{1.00885 + \frac{(IP - 34.469)^2}{31027}}} \quad (201)$$

$$A' = \frac{757.3}{IP + 28.79 + 23.43t_\alpha \sqrt{1.00637 + \frac{(IP - 35.099)^2}{54414}}} \quad (202)$$

donde  $IP$  es el índice plástico, en por ciento, y  $t_\alpha$  es una variable  $t$  de Student, cuyos valores en función del nivel de confianza  $\alpha$  aparecen en la tabla 5. Para fines preliminares se puede usar  $15\% \leq \alpha \leq 30\%$ .

TABLA 5  
MAGNITUDES DE LA VARIABLE ALEATORIA  $t_\alpha$

Nivel de confianza $\alpha$	Módulo $A_s'$	Módulo $A'$
%	Variable aleatoria $t_\alpha$	
2.5	1.982	1.975
5	1.659	1.654
10	1.289	1.287
15	1.041	1.040
20	0.845	0.844
25	0.677	0.676
30	0.526	0.526
40	0.254	0.254
50	0	0

Por otra parte, el índice de compresibilidad,  $C_c$ , es la pendiente de la recta en la rama virgen (figura 28)

$$C_c = \frac{e_1 - e_2}{\log \frac{p_2}{p_1}} = \frac{\Delta e}{\log \frac{p_2}{p_1}} \quad (203)$$

siendo  $(p_{v1}', e_1)$  y  $(p_{v2}', e_2)$  dos puntos de la recta del tramo virgen.

El índice de descarga,  $C_s$ , es la pendiente de la recta en el tramo de recompresión o en el tramo de descarga (figuras 28 y 29)

$$C_s = \frac{e_1 - e_2}{\log \frac{p_2}{p_1}} = \frac{\Delta e}{\log \frac{p_2}{p_1}} \quad (204)$$

siendo  $(p_{v1}', e_1)$  y  $(p_{v2}', e_2)$  dos puntos de la recta de la rama de recompresión o de la rama de descarga.

La deformación de un elemento de suelo de espesor  $\Delta z_o$ , en la rama virgen, se puede obtener reemplazando la ecuación 203 en la ecuación 112

$$\Delta \delta_z = \frac{C_c (\Delta z_o)}{1 + e_o} \log \frac{p_{vo}' + \sigma_z}{p_{vo}'} \quad (205)$$

Y en la rama de recompresión sustituyendo la ecuación 202 en la 112

$$\Delta \delta_z = \frac{C_s (\Delta z_o)}{1 + e_o} \log \frac{p_{vo}' + \sigma_z}{p_{vo}'} \quad (206)$$

Para el cálculo de la deformación a largo plazo de un estrato de arcilla preconsolidada, totalmente saturada, es usual utilizar los resultados de pruebas de consolidación unidimensional, practicadas sobre muestras inalteradas extraídas del estrato de suelo. En ocasiones la estimación de la compresión se acerca en forma más o menos satisfactoria a la compresión que sufre el estrato en el campo.

Sin embargo, otras veces ocurre que la deformación de la arcilla en el campo es menor que la deformación estimada con los resultados del ensaye de consolidación unidimensional. La causa de esta diferencia es la siguiente: una arcilla preconsolidada tiene almacenada energía de deformación que acumuló debido a la mayor carga que tuvo que soportar durante su historia geológica. Cuando, debido a la presencia de una obra de ingeniería, ocurre en el suelo un incremento significativo de esfuerzo desviador, se perturba la estructura del terreno y se libera parte de esta energía de deformación, lo que da lugar a que la arcilla tienda a sufrir cierta expansión. Como consecuencia de este fenómeno, se presenta una reducción en el incremento de presión de poro en el campo.

En una prueba de consolidación en el laboratorio, el incremento de esfuerzo desviador es relativamente pequeño, y usualmente es menor que el aumento del esfuerzo desviador en el campo, por lo que incremento de presión de poro en el campo es menor que el aumento de presión de poro en el consolidómetro, lo que a su vez da lugar a que la compresión *in situ* sea menor que la compresión del suelo en el laboratorio. Por esta razón, Skempton y Bjerrum (1957) utilizan esta diferencia en el incremento de presión de poro para valuar la compresión de la arcilla en el campo, como veremos a continuación.

La deformación en consolidación unidimensional vale

$$\Delta \delta_{Pcon} = m_v (\Delta z_o) \sigma_z$$

siendo  $m_v$  el coeficiente de compresibilidad volumétrica del suelo. En el consolidómetro el incremento de presión de poro, en el momento de aplicar la carga,  $\Delta u_{Wcon} = \sigma_z$ , por lo que

$$\Delta \delta_{Pcon} = m_v (\Delta z_o) (\Delta u_{Wcon}) \quad (207)$$

Por otra parte, el incremento de presión de poro en el campo es función del incremento de esfuerzo desviador, es decir

$$\Delta u_{Wcpo} = \sigma_3 + A_{Ske} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

es decir

$$\Delta u_{wcpo} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + A_{Ske} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \quad (208)$$

donde  $A_{Ske}$  es el coeficiente de presión de poro de Skempton (1953), cuyos valores, para condiciones de trabajo, se exhiben en la tabla 6.

TABLA 6  
VALORES DEL COEFICIENTE  $A_{Ske}$  EN CONDICIONES DE TRABAJO  
(Skempton y Bjerrum, 1957)

Tipo de arcilla	$A_{Ske}$
Arcilla blanda muy sensitiva	> 1
Arcilla normalmente consolidada	½ a 1
Arcilla preconsolidada	¼ a ½
Arcilla arenosa fuertemente preconsolidada	0 a ¼

Skempton y Bjerrum consideran que el asentamiento en el campo se puede calcular con la ecuación 191, sustituyendo el incremento de presión de poro en el sitio, es decir

$$\Delta \delta_{Pcpo} = m_v (\Delta z_o) (\Delta u_{wcpo}) \quad (209)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones 209 y 207

$$\frac{\Delta \delta_{Pcpo}}{\Delta \delta_{Pcon}} = \frac{\Delta u_{wcpo}}{\Delta u_{wcon}} = \frac{A_{Ske} \sigma_z + \frac{(1 - A_{Ske})(\sigma_x + \sigma_y)}{2}}{\sigma_z} = \mu \leq 1$$

$$\mu = \frac{A_{Ske} \sigma_z + \frac{(1 - A_{Ske})(\sigma_x + \sigma_y)}{2}}{\sigma_z} \quad (210)$$

Es decir

$$\Delta \delta_{Pcpo} = \mu (\Delta \delta_{Pcon}) \quad (211)$$

donde

$$\Delta \delta_{Pcon} = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{\frac{1}{A_s'}} \right] \Delta z_o \quad (212)$$

Para el fenómeno de consolidación secundaria no es necesario hacer esta corrección.

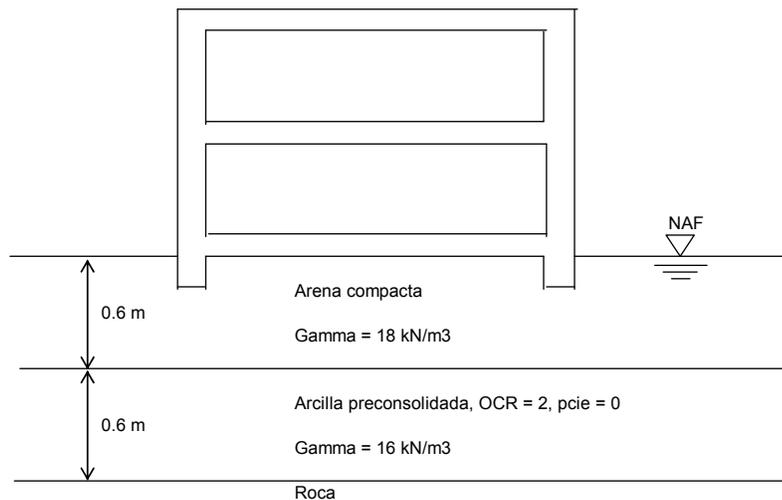
**Ejemplo**

Calcular el asentamiento para una vida útil de 50 años, bajo el centro de la losa de cimentación de la estructura de la figura E-10. La losa tiene 8 por 16 m en planta, y transmite al terreno una presión media de 80 kPa.

Se realizó una prueba triaxial rápida, sobre una probeta de suelo inalterado. Para un esfuerzo desviador  $(\sigma_1 - \sigma_3) = 0.4 \text{ kg/cm}^2$ , se midió una deformación unitaria  $\epsilon_u = 0.8\%$ .

Se practicó además una prueba de consolidación sobre una muestra inalterada extraída del estrato de arcilla preconsolidada. Las coordenadas de dos puntos en la rama de recompresión de la curva de compresibilidad son:  $(0.281 \text{ kg/cm}^2, 1.061)$ ,  $(1.217 \text{ kg/cm}^2, 1.024)$ .  $c_v = 0.00086 \text{ cm}^2/\text{s}$ . En esta arcilla el fenómeno de consolidación secundaria es pequeño y se puede despreciar para fines prácticos.

Considerar en la arcilla  $A_{Ske} = 1/3$



DEFORMACIÓN DE UNA ARCILLA PRECONSOLIDADA  
FIGURA E-10

**Solución**

a) Corto plazo

$$E_u = \frac{0.4}{0.008} = 50 \text{ kg/cm}^2 \cong 5000 \text{ kPa}$$

Asentamiento inmediato

Los incrementos de esfuerzo normal, a la mitad del estrato de arcilla valen (utilizando  $\nu = 0.5$ , volumen constante)

$$\sigma_z = 79.61 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 64.87 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 57.68 \text{ kPa}$$

Utilizamos la ley de Hooke (ecuación 104)

$$\Delta \delta_{zu} = \frac{\Delta z_o}{E_u} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta\delta_{zu} = \frac{0.6}{5000} [79.61 - 0.5(64.87 + 57.68)] = 0.0022m = 2.2mm$$

b) Largo plazo

Para obtener  $A_s'$  usamos la ecuación 198

$$A_s' = - \frac{\ln\left(\frac{1.217}{0.281}\right)}{\frac{1+1.024}{\ln\left(\frac{1}{1+1.061}\right)}} = 80.91$$

$$p_{vo}' = (18-9.81)(0.6) + (16-9.81)(0.3) = 6.771 \text{ kPa}$$

Los incrementos de esfuerzo normal, a la mitad del estrato de arcilla valen (utilizando  $v = 0.5$ , volumen constante)

$$\sigma_z = 79.61 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 64.87 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 57.68 \text{ kPa}$$

Usando la ecuación 210

$$\mu = \frac{A_{Ske}\sigma_z + \frac{(1-A_{Ske})(\sigma_x + \sigma_y)}{2}}{\sigma_z}$$

$$\mu = \frac{\frac{1}{3}(79.61) + \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)(64.87 + 57.68)}{2}}{79.61} = 0.846$$

Reemplazamos en las ecuaciones 212 y 211

$$\Delta\delta_{Pcon} = \left[ 1 - \left( \frac{6.771 + 79.61}{6.771} \right)^{-\frac{1}{80.91}} \right] (0.6) = 0.0186m = 1.86cm$$

$$\Delta\delta_{Pcpo} = \mu(\Delta\delta_{Pcon}) = 0.846(1.86) = 1.57cm$$

$$t = 20 \text{ años} = 631152000 \text{ s}$$

$T = C_v t / (\Delta z_e)^2 = 0.00086(631152000)/30^2 = 603 > 2$ . Por lo tanto ya se completó la consolidación primaria y

$$\delta_{20 \text{ años}} = 1.57 \text{ cm}$$

(Arcilla preconsolidada)

Tramo virgen

Se procede en forma similar al tramo virgen de arcillas sensitivas.

## SUELOS COHESIVOS PARCIALMENTE SATURADOS

Las deformaciones de una arcilla se deben a: (a) incrementos de esfuerzos ocasionados por la construcción de una obra de ingeniería (incrementos por carga externa), y (b) variaciones de la succión dentro del suelo.

Las deformaciones producidas por incrementos de carga externa se obtienen usando las herramientas que proporciona la mecánica de suelos, tomando en cuenta que las propiedades mecánicas dependen de la succión, y que ésta puede variar con el tiempo.

Los cambios de la succión pueden ocasionar además que varíe el espesor de la doble capa eléctrica que rodea a las partículas de arcilla, o que las moléculas de agua penetren dentro de las propias partículas. Estos fenómenos, que denominaremos absorción de agua, dan lugar a hinchamiento o contracción del suelo. Las deformaciones por cambios en la succión son función de la mineralogía de las partículas de arcilla; por ejemplo, son de mayor magnitud cuando el mineral es montorilonita.

Es importante destacar que la deformación de la arcilla es la suma algebraica de la compresión por el incremento de carga externa más la deformación por absorción de moléculas de agua.

Un ejemplo de suelos cohesivos parcialmente saturados lo constituyen las arcillas expansivas, las cuales en temporada de lluvias pueden sufrir fuertes expansiones y en temporada de estiaje pueden experimentar contracciones por una disminución de su humedad.

## a) Deformación ocasionada por incrementos de esfuerzo externos

La deformación de un elemento de suelo parcialmente saturado, ocasionada por incrementos de esfuerzo debidos a una obra de ingeniería se puede calcular con la ecuación constitutiva 39

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \frac{1}{A} \frac{(f \sigma_z / p_a)^r d(f \sigma_z / p_a)}{[(p_{beo} + c \sigma_z) / p_a]^s} \quad (213)$$

En suelos parcialmente saturados la presión de confinamiento inicial  $p_{beo}$  está dada por

$$p_{beo} = p_{cie} + p_{co} + \Delta p_{cs}$$

$$p_{beo} = p_{cie} + p_{co} + b_5 p_a (p_s / p_a)^n \quad (214)$$

donde  $p_s$  = succión en el suelo, y  $b_5$  y  $n$  son parámetros que toman en cuenta que los efectos de la presión externa y de la succión no son necesariamente iguales. Para fines prácticos  $b_5 \approx 1$  y  $n \approx 0.75$

Además, en esta clase de suelo:  $r \approx 0$  y  $s \approx 1$ . Para el tramo de recompresión, hagamos  $A = A_s$ . La ecuación 213 queda

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = - \frac{1}{A} \frac{d(f \sigma_z)}{p_{beo} + c \sigma_z}$$

Integrando

$$\Delta \delta_z = \left[ 1 - \left( \frac{p_{beo} + c \sigma_z}{p_{beo}} \right)^{-f/c A_s} \right] \Delta z_o \quad (215)$$

La ecuación 215 proporciona la deformación vertical a largo plazo, en el tramo de recompresión, de un elemento de suelo de espesor  $\Delta z_o$ , sometido a incrementos de esfuerzo normal externos  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ .

En arcillas expansivas, para presiones verticales netas o succiones muy grandes, el suelo se puede deformar dentro del tramo virgen de la curva de compresibilidad. Conviene entonces obtener la ecuación correspondiente a este tramo virgen. Procediendo en forma análoga al tramo de recompresión, para la rama virgen obtenemos

$$\Delta \delta_z = \left[ 1 - \left( \frac{p_{beo} + c \sigma_z}{p_{beo}} \right)^{-f/c A_{vr}} \right] \Delta z_o \quad (216)$$

donde  $A_{vr}$  es el módulo de rigidez correspondiente al tramo virgen.

#### b) Deformación por absorción de agua dentro de las partículas del suelo

Por otra parte, la plasticidad de los suelos da lugar a que además de la deformación debida a un cambio en el esfuerzo desviador, se presente una deformación adicional producida por la absorción de moléculas de agua dentro de las partículas sólidas del suelo y por la variación del espesor de la doble capa eléctrica que rodea a las partículas. Dado que este fenómeno depende de la cantidad de agua del suelo, y ésta a su vez es función de la propia succión, la deformación volumétrica debida a absorción se puede calcular con la siguiente ecuación constitutiva

$$\frac{dV}{V} = - \frac{1}{B_a} \frac{d(b_4 p_s)}{p_c + b_4 p_s} \quad (217)$$

donde

$V$  = volumen del elemento de suelo

$$b_4 \approx 1$$

$$p_c = p_{co} + \sigma_c \quad (218)$$

$$\sigma_c = (1/3) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (219)$$

Al variar la succión de  $p_{so}$  a  $p_{sf}$  ( $p_{so} < p_{sf}$ ) un elemento de suelo disminuye su volumen de  $V_o$  a  $V_f$ . Por lo tanto, debemos integrar la ecuación 217 de  $V_o$  a  $V_f$  el primer miembro y de  $p_{so}$  a  $p_{sf}$  el segundo miembro

$$\int_{V_0} \frac{dV}{V} = \int_{p_{so}} \frac{1}{B_a} \frac{d(b_4 p_s)}{p_c + b_4 p_s}$$

$$\frac{V_f}{V_0} = \left( \frac{p_c + b_4 p_{sf}}{p_c + b_4 p_{so}} \right)^{-1/B_a} \quad (220)$$

La deformación volumétrica unitaria  $\varepsilon_{va}$  se define

$$\varepsilon_{va} = \Delta V/V_0 = (V_0 - V_f)/V_0 = 1 - V_f/V_0$$

$$\varepsilon_{va} = 1 - \left( \frac{p_c + b_4 p_{sf}}{p_c + b_4 p_{so}} \right)^{-1/B_a} \quad (221)$$

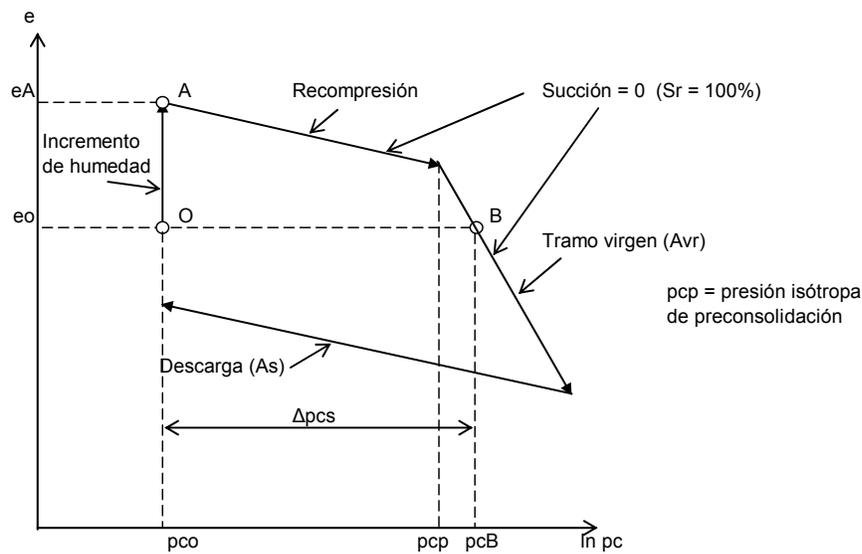
La ecuación 221 proporciona la deformación volumétrica unitaria (contracción o expansión) de un elemento de suelo de volumen inicial  $V_0$ , al variar la succión de  $p_{so}$  a  $p_{sf}$ . Si  $\varepsilon_{va}$  es positiva, el elemento se contrae, mientras que si  $\varepsilon_{va}$  es negativa, el elemento se hincha. En la práctica  $b_4 \cong 1$ .

La magnitud de la succión en el subsuelo se puede obtener mediante ensayos de campo o pruebas de laboratorio, practicadas éstas en muestras inalteradas extraídas del terreno. Las pruebas de laboratorio se llevan a cabo variando la succión y midiendo las deformaciones del suelo; con los resultados de estos ensayos sirven para determinar los parámetros  $b_5$  y  $n$  de la ecuación 214.

En forma aproximada, la succión de campo se puede estimar mediante una prueba de saturación y carga usando el consolidómetro. El ensaye consiste en colocar una muestra de suelo con su humedad natural en el odómetro. Se le aplica la presión total vertical inicial de campo  $p_{v0}$  y se determina su relación de vacíos  $e_0$ . Este punto lo anotamos en un diagrama  $e-p_c$ , siendo  $p_c$  la presión media de confinamiento sobre el espécimen de suelo (punto O, figura 30). Luego se acrecienta la humedad de la arcilla hasta que ésta se sature totalmente (punto A, figura 30); se obtiene la relación de vacíos del suelo saturado  $e_A$ . A continuación se incrementa el esfuerzo vertical hasta que se alcance o supere la relación de vacíos  $e_0$  (punto B, figura 30).

Con esta prueba se pueden determinar los parámetros  $p_{so}$ ,  $B_a$ ,  $A_s$  y  $A_{vr}$ . En efecto, de acuerdo con la figura 30

$$\Delta p_{cs} = b_5 p_a (p_{so}/p_a)^n$$



(Cs Deformaciones de Suelos Figuras)

CURVA DE COMPRESIBILIDAD  
DETERMINACIÓN DE LOS MÓDULOS  $A_s$ ,  $A_{vr}$  Y  $B_a$   
FIGURA 30

Es decir

$$p_{so} = p_a (\Delta p_{cs}/b_5 p_a)^{1/n} \tag{222}$$

$B_a$  lo despejamos de la ecuación 221, y sustituimos valores entre los puntos O y A

$$B_a = - \frac{\ln \left( \frac{p_{co}}{p_{co} + b_4 p_{so}} \right)}{\ln \left( \frac{1 + e_A}{1 + e_o} \right)} \tag{223}$$

Para fines preliminares de análisis se puede usar el siguiente valor de  $B_a$

$$B_a = \frac{1410}{IP - 10} \tag{224}$$

donde IP = índice plástico del suelo, en por ciento.

El módulo  $A_s$  lo obtenemos despejándolo de la ecuación 215 (véase además la figura 30)

$$A_s = - \frac{f \ln \left( \frac{p_{beo} + C \sigma_z}{p_{beo}} \right)}{c \ln (1 - \delta_z/\Delta z_o)} \tag{225}$$

$$p_{beo} = p_{cie} + p_{co}$$

El módulo  $A_s$  conviene obtenerlo en la rama de descarga. Sean  $(p_{c1}, e_1)$  y  $(p_{c2}, e_2)$  dos puntos en dicha rama ( $p_{c2} > p_{c1}$ ). Entre los puntos 1 y 2

$$A_s = - \frac{3(1-K_o)}{(1+K_o)} \frac{\ln \left( \frac{p_{cie} + p_{c2}}{p_{cie} + p_{c1}} \right)}{\ln \left( \frac{1+e_2}{1+e_1} \right)} \quad (226)$$

Como

$$\frac{f}{c} = \frac{3(1-K_o)}{(1+K_o)} \quad (227)$$

Y, como es usual en arcillas parcialmente saturadas,  $p_{cie} = 0$ , la ecuación 226 queda

$$A_s = - \frac{3(1-K_o)}{(1+K_o)} \frac{\ln \left( \frac{p_{c2}}{p_{c1}} \right)}{\ln \left( \frac{1+e_2}{1+e_1} \right)} \quad (228)$$

Sean  $(p_{c1}, e_1)$  y  $(p_{c2}, e_2)$  dos puntos en el tramo virgen ( $p_{c2} > p_{c1}$ ). Entonces

$$A_{vr} = - \frac{3(1-K_o)}{(1+K_o)} \frac{\ln \left( \frac{p_{c2}}{p_{c1}} \right)}{\ln \left( \frac{1+e_2}{1+e_1} \right)} \quad (229)$$

Como señalamos en párrafos anteriores, la deformación de una arcilla se obtiene como la suma algebraica de la compresión por cambio de volumen más la deformación por absorción de agua.

La compresión por incrementos de esfuerzo externos en el tramo de recompresión se determina con la ecuación 215

$$\Delta \delta_z = \left[ 1 - \left( \frac{p_{beo} + c \sigma_z}{p_{beo}} \right)^{-f/cA_s} \right] \Delta Z_o \quad (230)$$

Si el estado de esfuerzo cae en la rama virgen (ecuación 216)

$$\Delta \delta_z = \left[ 1 - \left( \frac{p_{beo} + c \sigma_z}{p_{beo}} \right)^{-f/cA_{vr}} \right] \Delta Z_o \quad (231)$$

donde

$$c = b_1 + b_2 \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \quad (232)$$

$$f = 1 - v \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \quad (233)$$

La deformación por absorción de agua dentro de las partículas del suelo se halla con la ecuación 221

$$\varepsilon_{va} = 1 - \left( \frac{\rho_c + b_4 \rho_{sf}}{\rho_c + b_4 \rho_{so}} \right)^{-1/Ba} \quad (234)$$

siendo

$$\rho_c = \rho_{co} + \sigma_c \quad (235)$$

$$\sigma_c = (1/3) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (236)$$

En ingeniería de cimentaciones interesa conocer la deformación unitaria lineal vertical  $\varepsilon_{za}$ , la cual la obtenemos de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{va} \cong \varepsilon_{xa} + \varepsilon_{ya} + \varepsilon_{za}$$

Si no hay grietas en el subsuelo  $\varepsilon_{xa} \cong \varepsilon_{ya} \cong 0$  y  $\varepsilon_{za} \cong \varepsilon_{va}$

Si hay grietas en una dirección  $\varepsilon_{ya} \cong 0$ ,  $\varepsilon_{xa} \cong \varepsilon_{za}$  y  $\varepsilon_{za} \cong \varepsilon_{va}/2$

Si hay grietas en dos direcciones  $\varepsilon_{xa} \cong \varepsilon_{ya} \cong \varepsilon_{za}$  y  $\varepsilon_{za} \cong \varepsilon_{va}/3$

Como ya señalamos antes, la deformación de un suelo cohesivo parcialmente saturado es igual a la suma algebraica de las deformaciones por incrementos de esfuerzo externos y por absorción de moléculas de agua.

### Ejemplo

En un ensaye de saturación y carga practicado en el consolidómetro, se obtuvieron los siguientes datos:  $p_{vo} = 0.125 \text{ kg/cm}^2$ ,  $e_o = 1.208$ ,  $e_A = 1.449$ ,  $p_{vB} = 1.9 \text{ kg/cm}^2$ ,  $e_B = 1.2$ ,  $p_{vp} = 0.9 \text{ kg/cm}^2$ .

En la rama de descarga: 1 (0.593, 1.041), 2 (1.217, 1.023). En el tramo virgen: 1 (2.777, 1.146), 2 (5.898, 1.002).

Determinar la succión inicial y las propiedades  $B_a$ ,  $A_s$  y  $A_{vr}$ .

Considerar  $K_o = 0.7$ ,  $b_4 = b_5 = 1$ ,  $n = 0.75$ ,  $p_a = 1.03 \text{ kg/cm}^2$ .

### Solución

$$p_{co} = (1+2K_o) p_{vo} / 3 = (1+2(0.7))(0.125)/3 = 0.1 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{cB} = (1+2K_o) p_{vB} / 3 = (1+2(0.7))(1.9)/3 = 1.52 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Delta p_{cs} = p_{cB} - p_{co} = 1.52 - 0.1 = 1.42 \text{ kg/cm}^2$$

Sustituimos en las ecuaciones 222, 223, 228 y 229

$$p_{so} = 1.03 (1.42/(1)(1.03))^{1/0.75} = 1.58 \text{ kg/cm}^2$$

$$B_a = - \frac{\ln \left( \frac{0.1}{0.1 + (1)1.58} \right)}{\ln \left( \frac{1 + 1.449}{1 + 1.208} \right)} = 27.24$$

En la rama de descarga

$$A_s = - \frac{3(1-0.7)}{(1+0.7)} \frac{\ln \left( \frac{1.217}{0.593} \right)}{\ln \left( \frac{1+1.023}{1+1.041} \right)} = 42.97$$

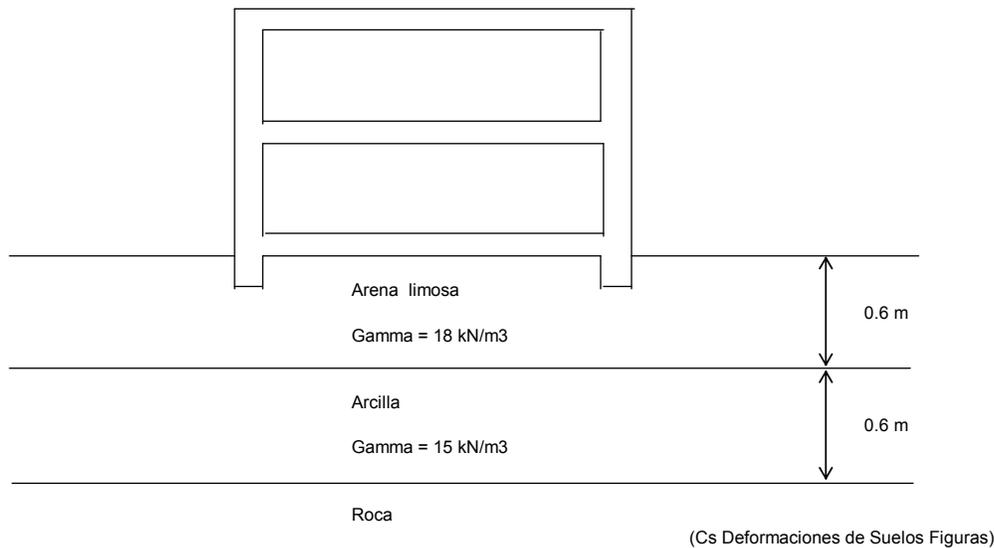
En la rama virgen

$$A_{vr} = - \frac{3(1-0.7)}{(1+0.7)} \frac{\ln \left( \frac{5.898}{2.777} \right)}{\ln \left( \frac{1+1.002}{1+1.146} \right)} = 5.74$$

### Ejemplo

Una vivienda apoyada en una losa de cimentación de 8 por 16 m en planta, que transmite una presión media al terreno de 25 kPa, se construye en temporada de estiaje, cuando la succión en la arcilla vale  $(u_a - u_w) = p_s = 820$  kPa. Al pasar a la temporada de lluvias, al término de ésta, la succión se reduce a 60 kPa. La estratigrafía se muestra en la figura E-11. Considerar en la arcilla las siguientes propiedades:  $A_s = 39.8$ ,  $A_{vr} = 5.2$ ,  $B_a = 31.7$ ,  $n = 0.75$ ,  $OCR = 8$ ,  $K_o = 0.68$ ,  $b_4 = b_5 = 1$ ,  $v = 0.40$ ,  $p_{cie} = 0$ ,  $p_a = 101.3$  kPa,  $p_{vp} = 90$  kPa.

Calcular los movimientos de la losa de cimentación al pasar de la temporada de estiaje a la época de lluvias.



### EXPANSIÓN DE UN ESTRATO DE ARCILLA FIGURA E-11

#### Solución

La presión vertical inicial (por peso propio) a la mitad del estrato vale

$$p_{vo} = 18(0.6) + 15(0.3) = 15.3 \text{ kPa}$$

Los incrementos de esfuerzo, a la mitad del estrato, producidos por la estructura valen

$$\sigma_z = 24.88 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 17.50 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 16.77 \text{ kPa}$$

Reemplazamos en las ecuaciones 232 y 233

$$c = 1/3 + (1/3) \frac{17.50 + 16.77}{24.88} = 0.792$$

$$f = 1 - 0.4 \frac{17.50 + 16.77}{24.88} = 0.449$$

$$p_{co} = \frac{1 + 2(0.68)}{3} (15.3) = 12.036 \text{ kPa}$$

$$p_{cp} = \frac{1 + 2(0.68)}{3} (90) = 70.8 \text{ kPa}$$

El mayor asentamiento ocurre al término de la temporada de lluvias, cuando se presenta la succión menor (60 kPa). Reemplazando en las ecuaciones 214 y 219

$$p_{beo} = 0 + 12.036 + (1)(101.3) (60/101.3)^{0.75} = 80.43 \text{ kPa}$$

$$\sigma_c = (24.88 + 17.50 + 16.77)/3 = 19.72 \text{ kPa}$$

$$p_{beo} + \sigma_c = 80.43 + 31.54 = 100.15 \text{ kPa}$$

Como  $p_{beo} + \sigma_c > p_{cp}$ , el asentamiento por incrementos de carga externa se presenta en la rama virgen. Sustituyendo valores en la ecuación 215

$$\Delta\delta_z = \left[ 1 - \left( \frac{80.43 + (0.792)(24.88)}{80.43} \right)^{(-0.449/0.792(5.2))} \right] (60) = 1.42 \text{ cm}$$

Deformación de la arcilla por absorción de agua. Al pasar la succión de 820 a 60 kPa, las partículas de arcilla absorben agua, lo que produce una expansión del suelo, cuyo cálculo se exhibe a continuación. Sustituyendo en las ecuaciones 219, 218 y 221

$$\sigma_c = 19.72 \text{ kPa}$$

$$p_c = 12.036 + 19.72 = 31.756 \text{ kPa}$$

$$\varepsilon_{va} = 1 - \left( \frac{31.756 + (1)60}{31.756 + (1)(820)} \right)^{(-1/31.7)} = -0.0728$$

Consideramos que no hay grietas en el subsuelo:

$$\varepsilon_{za} \cong \varepsilon_{va} = -0.0728$$

La expansión por absorción de agua es (levantamiento del suelo)

$$\delta_{za} = -0.0728(60) = -4.37 \text{ cm}$$

Al término de la temporada de lluvias, el movimiento de la estructura es igual a la suma algebraica del asentamiento por incrementos de carga externa más la expansión por absorción de agua, es decir

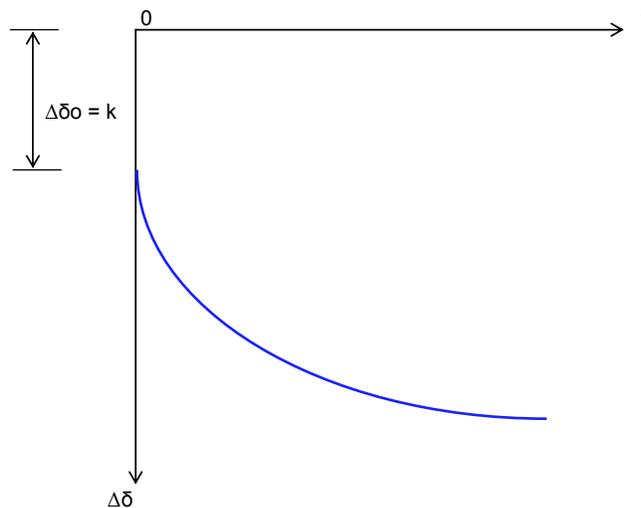
$$\delta = 1.42 - 4.37 = -2.95 \text{ cm}$$

El estrato de arcilla experimenta una expansión neta de  $-2.95 \text{ cm}$  al pasar de la época de estiaje a la temporada de lluvias.

(Defscps5)

### CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN INMEDIATA EN UNA PRUEBA DE CONSOLIDACIÓN

Consideramos que al inicio de la consolidación primaria la curva es similar a una parábola (figura 31).



CURVA DE CONSOLIDACIÓN. DEFORMACIÓN INMEDIATA  
FIGURA 31

Sea  $\Delta\bar{\delta}_o$  la deformación inmediata y  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  dos puntos de la parábola, antes del 50% de la consolidación primaria. Entonces

$$(y_1 - k)^2 = 4p(x_1 - h) = 4px_1$$

$$(y_2 - k)^2 = 4p(x_2 - h) = 4px_2$$

Dividimos miembro a miembro

$$\frac{(y_1 - k)^2}{(y_2 - k)^2} = \frac{x_1}{x_2}$$

De esta ecuación despejamos  $k = \Delta\bar{\delta}_o$ , con  $x_1 = t_1$ ,  $y_1 = \bar{\delta}_1$ ,  $x_2 = t_2$ ,  $y = \bar{\delta}_2$

$$\Delta\bar{\delta}_o = \frac{\Delta\delta_1 t_2 - \Delta\delta_2 t_1 \pm \sqrt{(\Delta\delta_1 t_2 - \Delta\delta_2 t_1)^2 - (t_2 - t_1)((\Delta\delta_1)^2 t_2 - (\Delta\delta_2)^2 t_1)}}{t_2 - t_1}$$

$$\Delta\bar{\delta}_o = \frac{t_2 \Delta\delta_1 - t_1 \Delta\delta_2 - (\Delta\delta_2 - \Delta\delta_1) \sqrt{t_1 t_2}}{t_2 - t_1} \quad (237)$$

La ecuación 237 proporciona la deformación inmediata en una prueba de consolidación unidimensional.

(Memoria de cálculo 130302.xls)

#### GIRO PERMANENTE DE UN CIMIENTO

El giro permanente de un cimiento está dado por (Zeevaert, 1973)

$$\theta_d = \theta_{ep} - \theta_e \quad (238)$$

El giro elastoplástico de un cimiento de planta circular es

$$\theta_{ep} = \frac{3(1-\nu)M}{8G_{ep}R^3} \quad (239)$$

y el giro elástico

$$\theta_e = \frac{3(1-\nu)M}{8G_e R^3} \quad (240)$$

Es decir

$$\theta_d = \frac{3(1-\nu)M}{8G_e R^3} \left( \frac{G_e}{G_{ep}} - 1 \right) \quad (241)$$

Sea

$$\kappa_{ep} = \frac{G_e}{G_{ep}} \quad (242)$$

Por lo tanto

$$\theta_d = \theta_e (\kappa_{ep} - 1) \quad (243)$$

O bien

$$\theta_d = \frac{3(1-\nu)M}{8G_e R^3} (\kappa_{ep} - 1) \quad (244)$$

Como

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (245)$$

entonces

$$\kappa_{ep} = \frac{E_e}{E_{ep}} \quad (246)$$

El valor de  $\kappa_{ep}$  se puede obtener mediante pruebas dinámicas de compresión, obteniendo las deformaciones elásticas y plásticas producidas por ciclos de esfuerzos sobre probetas de suelo (Zeevaert, 1973).

Por ejemplo, en la arcilla de la ciudad de México, los módulos dinámicos valen  $G_e \approx 3300$  kPa y  $G_{ep} \approx 2700$  kPa y  $\kappa_{ep} \approx 1.22$

El giro permisible es

$$\theta_{permisible} (\%) = \frac{100}{100 + 3h_c} \quad (247)$$

$h_c$  = altura de la construcción

## COMPRESIÓN UNIDIMENSIONAL

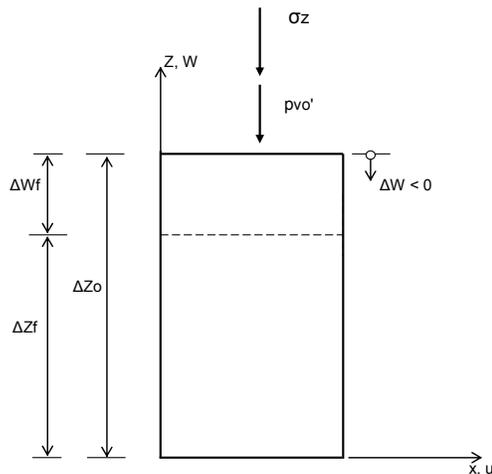
Consideremos un elemento de arcilla preconsolidada totalmente saturada, sometida a una prueba de consolidación unidimensional, como se muestra en la figura 32. Denominemos con  $p_{veo}$  al confinamiento inicial vertical y a  $\sigma_z$  el incremento de esfuerzo normal vertical sobre el elemento.

El confinamiento inicial vertical  $p_{veo}$  está dado por

$$p_{veo} = p_{cie} + p_{vo}' \quad (248)$$

donde  $p_{cie}$  es la presión de confinamiento equivalente a la cementación del suelo (en caso que la hubiera), y  $p_{vo}'$  es la presión normal vertical efectiva inicial sobre el elemento.

Debido al incremento de esfuerzo vertical  $\sigma_z$  sobre el espécimen de suelo, éste sufre una deformación vertical  $\Delta w_f$  como se indica en la figura 32.



INCREMENTO DE ESFUERZO NORMAL,  $\Sigma_z$ , SOBRE UN ELEMENTO DE SUELO DE ESPESOR INICIAL  $\Delta z_o$   
FIGURA 32

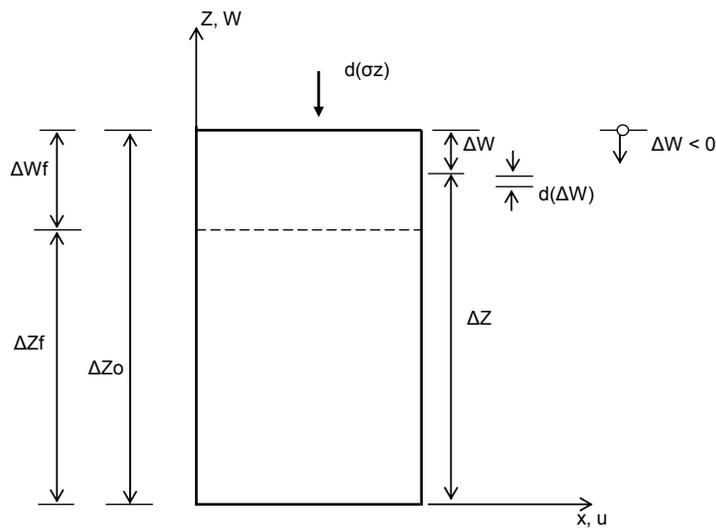
*Deformación unitaria de Cauchy*

$$\varepsilon_z = -\frac{\Delta w_f}{\Delta z_o} \quad (249)$$

Demos ahora un incremento de esfuerzo diferencial  $d\sigma_z$  como se indica en la figura 33. Proponemos la siguiente ecuación constitutiva para el cálculo de la deformación unitaria en compresión no confinada

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{\frac{d\sigma_z}{p_a}}{\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_a}\right)^s} \quad (250)$$

donde  $p_a$  = presión atmosférica = 101.3 kPa,  $A$  es un coeficiente que mide la rigidez del material, y  $s$  es un exponente que depende del tipo de suelo. En arcillas totalmente saturadas  $s \approx 1$ ; reemplazando este valor en la ecuación 250



INCREMENTO DIFERENCIAL DE ESFUERZO VERTICAL  
FIGURA 33

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z}{p_{veo} + \sigma_z} \quad (251)$$

Integrando

$$\varepsilon_z = \frac{1}{A} \int_0^{\sigma_z} \frac{d\sigma_z}{p_{veo} + \sigma_z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{A} \ln\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right) = \frac{2.3}{A} \log\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right)$$

$$\Delta w_f = -\frac{2.3\Delta z_o}{A} \log\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right)$$

$$\Delta\delta_z = -\Delta w_f$$

$$\Delta\delta_z = \frac{2.3\Delta z_o}{A} \log\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right) \quad (252)$$

Por otra parte

$$\Delta\delta_z = \frac{C_c\Delta z_o}{1+e_o} \log\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right) \quad (253)$$

Comparando las ecuaciones 252 y 253 vemos que son iguales, con

$$\frac{2.3\Delta z_o}{A} = \frac{C_c\Delta z_o}{1+e_o} \quad (254)$$

$$\frac{2.3}{A} = \frac{C_c}{1+e_o}$$

#### *Deformación unitaria de Ludwik*

Definamos la diferencial de deformación unitaria vertical  $d\varepsilon_z$  de la siguiente forma

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta w)}{\Delta z} \quad (255)$$

De acuerdo con la figura 33

$$\Delta z = \Delta z_o + \Delta w$$

$$d(\Delta z) = d(\Delta z_o) + d(\Delta w) = d(\Delta w)$$

Reemplazando en la ecuación 255

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} \quad (256)$$

Demos ahora un incremento de esfuerzo diferencial  $d\sigma_z$  como se indica en la figura 33. Proponemos la siguiente ecuación constitutiva para el cálculo de la deformación unitaria en compresión no confinada

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{\frac{d\sigma_z}{p_a}}{\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_a}\right)^s} \quad (257)$$

donde  $p_a$  = presión atmosférica = 101.3 kPa,  $A$  es un coeficiente que mide la rigidez del material, y  $s$  es un exponente que depende del tipo de suelo. En arcillas totalmente saturadas  $s \approx 1$ ; reemplazando este valor en la ecuación 240

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z}{p_{veo} + \sigma_z} \quad (258)$$

Sustituyendo la ecuación 256 en la ecuación 258, e integrando

$$\int_{\Delta z_o}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{A} \int_0^{\sigma_z} \frac{d\sigma_z}{p_{veo} + \sigma_z}$$

Es decir

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = \left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right)^{\frac{1}{A}} \quad (259)$$

Por otra parte, de acuerdo con la figura 33

$$\Delta z_f = \Delta z_o + \Delta w_f$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = 1 + \frac{\Delta w_f}{\Delta z_o}$$

$$\Delta w_f = \left(\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} - 1\right) \Delta z_o \quad (260)$$

Reemplazando la ecuación 259 en la ecuación 260

$$\Delta w_f = \left[\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right)^{\frac{1}{A}} - 1\right] \Delta z_o \quad (261)$$

De acuerdo con la convención de signos de la figura 33, el valor de  $\Delta w_f$  dado por la ecuación 261 da siempre negativo. Para tener una magnitud positiva de la deformación del elemento, hagamos  $\Delta \delta_P = -\Delta w_f$ , donde  $\Delta \delta_P$  es la deformación al término de la consolidación primaria del elemento de suelo. La expresión 261 queda

$$\Delta\delta_p = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{-\frac{1}{A}} \right] \Delta z_o \quad (262)$$

La ecuación 262 permite calcular la deformación  $\Delta\delta_p$ , en compresión confinada, de un elemento de suelo de espesor inicial  $\Delta z_o$ , sometido a un incremento de esfuerzo vertical  $\sigma_z$ .

#### Determinación del módulo de rigidez A

El módulo de rigidez A lo obtenemos despejándolo de la ecuación 262

$$A = - \frac{\log\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right)}{\log\left(1 - \frac{\Delta\delta_p}{\Delta z_o}\right)} \quad (263)$$

donde  $\log x = \log_{10} x$

Por otra parte, es usual calcular la relación de vacíos en una prueba de consolidación. El módulo A se puede obtener en función de dicha relación de vacíos, de la siguiente forma

$$\Delta\delta_p = \frac{\Delta e}{1 + e_o} \Delta z_o = \frac{e_o - e_f}{1 + e_o} \Delta z_o$$

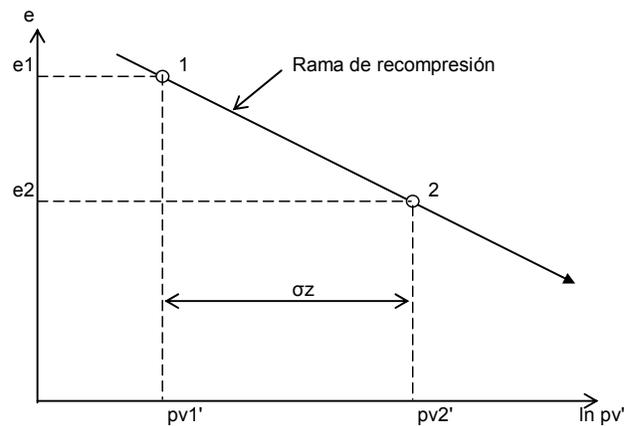
$$1 - \frac{\Delta\delta_p}{\Delta z_o} = \frac{1 + e_f}{1 + e_o} \quad (264)$$

Si, como es común, en arcillas preconsolidadas la presión equivalente debida a la cementación entre partículas es cercana a cero:  $p_{cie} \approx 0$ , la presión  $p_{veo} \approx p_{vo}'$ . Tomando en cuenta además la ecuación 264 en la ecuación 263, el módulo A queda

$$A = - \frac{\log\left(\frac{p_{v2}'}{p_{v1}'}\right)}{\log\left(\frac{1 + e_f}{1 + e_o}\right)} \quad (265)$$

La expresión 265 se puede utilizar para determinar el módulo de rigidez en la rama de recompresión,  $A_s'$ . En efecto, sean  $P_1(p_{v1}', e_1)$  y  $P_2(p_{v2}', e_2)$  dos puntos (figura 34) en dicha rama ( $p_{v2}' > p_{v1}'$ ), entonces

$$A_s' = - \frac{\log\left(\frac{p_{v2}'}{p_{v1}'}\right)}{\log\left(\frac{1 + e_2}{1 + e_1}\right)} \quad (266)$$



DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE RIGIDEZ  
FIGURA 34

Un procedimiento similar se usa para obtener el módulo de rigidez,  $A'$ , en la rama virgen.

#### Ejemplo

En una prueba de consolidación, practicada en una arcilla normalmente consolidada, para  $\Delta Z_0 = 1.605$  cm,  $p_{v0}' = 1$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_z = 1$  kg/cm<sup>2</sup>, se obtuvieron los siguientes resultados:

t	$\Delta \delta$
min	mm
0	0
0.04	0.121
0.25	0.233
0.5	0.302
1	0.39
2.25	0.551
4	0.706
6.25	0.859
9	0.97
12.25	1.065
16	1.127
25	1.205
36	1.251
64	1.3
100	1.327
360	1.401
1440	1.482

Determinar los módulos de rigidez  $A_p$  y  $A_{cs}$ , y el coeficiente de consolidación  $c_v$ .  
(Nota: Ejemplo tomado de Whitlow, 1994)

**Solución**

En la figura E-12 se muestra la curva de consolidación del suelo. Se observa que es suelo tipo I ( $\xi = 5$ ). De esta curva tomamos los siguientes valores:

Puntos	t min	t s	$\Delta\delta$ mm	$\Delta\delta$ cm
1	0.5	30	0.302	0.0302
2	2.25	135	0.551	0.0551
B	30	1800	1.224	0.1224
E	100	6000	1.327	0.1327
F	1440	86400	1.482	0.1482

La deformación inmediata la obtenemos con la ecuación 237

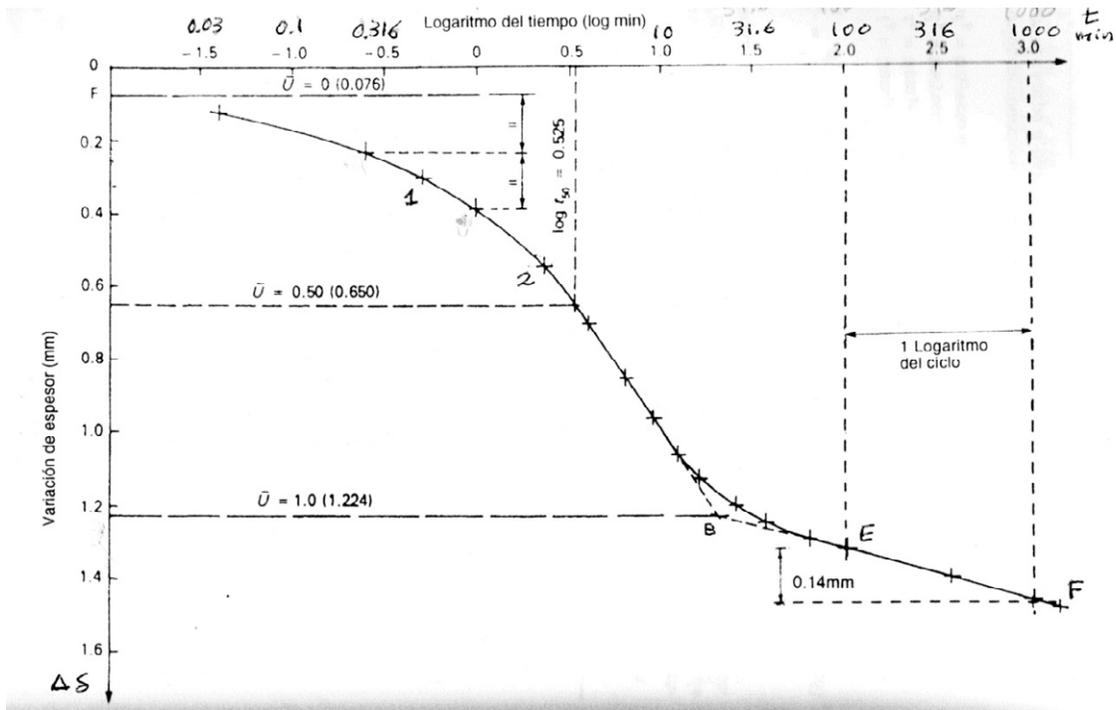
$$\Delta\delta_o = \frac{t_2\Delta\delta_1 - t_1\Delta\delta_2 - (\Delta\delta_2 - \Delta\delta_1)\sqrt{t_1t_2}}{t_2 - t_1} \quad (237)$$

$$\Delta\delta_o = \frac{135(0.302) - 30(0.551) - (0.551 - 0.302)\sqrt{30(135)}}{135 - 30} = 0.07994mm = 0.007994cm$$

Usamos las ecuaciones 160 y 161

$$C_i = \frac{\Delta\delta_{tF} - \Delta\delta_{tE}}{\log\left(\frac{t_F}{t_E}\right)}$$

$$C_i = \frac{1.482 - 1.327}{\log\left(\frac{86400}{6000}\right)} = 0.13381mm = 0.013381cm$$



CURVA DE CONSOLIDACIÓN (Whitlow, 1994)  
FIGURA E-12

$$\Delta\delta_p = (\Delta\delta_B - \Delta\delta_o) - 1.04C_t$$

$$\Delta\delta_p = (1.224 - 0.07994) - 1.04(0.13381) = 1.0049\text{mm} = 0.10049\text{cm}$$

$A_p$  y  $A_{cs}$  los encontramos con la ecuación 263

$$A_p = -\frac{\log\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right)}{\log\left(1 - \frac{\Delta\delta_p}{\Delta z_o}\right)}$$

$$A_p = -\frac{\log\left(\frac{1+1}{1}\right)}{\log\left(1 - \frac{0.10049}{1.605}\right)} = 10.72$$

$$A_{cs} = -\frac{\log\left(\frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}}\right)}{\log\left(1 - \frac{C_t}{\Delta z_o}\right)}$$

$$A_{cs} = -\frac{\log\left(\frac{1+1}{1}\right)}{\log\left(1 - \frac{0.013381}{1.605}\right)} = 82.79$$

Cálculo de  $c_v$

Usamos las ecuaciones 163 y 164

$$\Delta\delta_{50} = \Delta\delta_o + \frac{\Delta\delta_p}{2} + 0.298C_i$$

$$\Delta\delta_{50} = 0.07994 + \frac{1.0049}{2} + 0.298(0.13381) = 0.6223\text{mm} = 0.06223\text{cm}$$

En la curva de consolidación de la figura E-12 medimos:  $t_{50} = 3.22$  min

$$c_v = \frac{0.197\left(\frac{1.605}{2}\right)^2}{193.2} = 6.567 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 / \text{s}$$

(Memoria de cálculo escuela 130303.xls)

### Ejemplo

Calcular el asentamiento inmediato y el asentamiento a largo plazo, bajo el centro de la losa de cimentación de la estructura de la figura E-13. La losa tiene 8 por 16 m en planta, y transmite al terreno un incremento de presión media de 80 kPa. Considerar una vida útil de la estructura de 50 años.

En una prueba triaxial no drenada, para un esfuerzo desviador  $(\sigma_1 - \sigma_3) = 0.4$  kg/cm<sup>2</sup>, se midió una deformación unitaria  $\epsilon_z = 0.8\%$

En una prueba de consolidación unidimensional se obtuvieron las siguientes propiedades:  $A_p = 80.91$ ,  $A_{cs} = 640$ ,  $c_v = 0.00086$  cm<sup>2</sup>/s,  $A_{ske} = 1/3$

### Solución

$$E_u = \frac{0.4}{0.008} = 50 \text{ kg} / \text{cm}^2 \cong 5000 \text{ kPa}$$

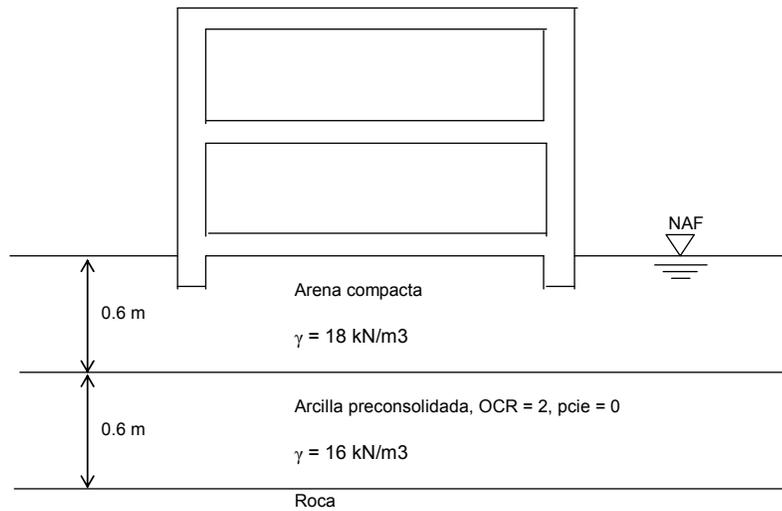
### Asentamiento inmediato

Los incrementos de esfuerzo normal, a la mitad del estrato de arcilla valen (utilizando  $v = 0.5$ , volumen constante)

$$\sigma_z = 79.61 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 64.87 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 57.68 \text{ kPa}$$



ARCILLA PRECONSOLIDADA  
FIGURA E-13

Utilizamos la ley de Hooke (ecuación 104)

$$\Delta\delta_{zu} = \frac{\Delta z_o}{E_u} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\Delta\delta_{zu} = \frac{0.6}{5000} [79.61 - 0.5(64.87 + 57.68)] = 0.0022m = 2.2mm$$

Asentamiento a largo plazo

$$p_{vo}' = (18 - 9.81)(0.6) + (16 - 9.81)(0.3) = 6.771 \text{ kPa}$$

$$\Delta\delta_t = (\Delta\delta)_{Pt} + (\Delta\delta)_{St}$$

$$\Delta\delta_{Pt} = (\Delta\delta)_{Pcpo} U$$

$$\Delta\delta_{Pcpo} = \mu(\Delta\delta_{Pcon})$$

$$\Delta\delta_{Pcon} = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{-\frac{1}{A_p}} \right] (\Delta z_o)$$

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log(1 + \xi T)$$

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{-\frac{1}{A_{cs}}} \right] (\Delta z_o)$$

$$\Delta \delta_t = (\Delta \delta)_{pcpo} U + C_t \log(1 + \xi T)$$

Usando la ecuación 210

$$\mu = \frac{A_{ske} \sigma_z + \frac{(1 - A_{ske})(\sigma_x + \sigma_y)}{2}}{\sigma_z}$$

$$\mu = \frac{\frac{1}{3}(79.61) + \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)(64.87 + 57.68)}{2}}{79.61} = 0.846$$

Reemplazamos en las ecuaciones 212 y 211

$$\Delta \delta_{pcon} = \left[ 1 - \left( \frac{6.771 + 79.61}{6.771} \right)^{-\frac{1}{80.91}} \right] (0.6) = 0.0186m = 1.86cm$$

$$\Delta \delta_{pcpo} = \mu(\Delta \delta_{pcon}) = 0.846(1.86) = 1.57cm$$

$$t = 50 \text{ años} = 50(365.25)(86400) = s$$

$T = c_v t / (\Delta z_e)^2 = 0.00086(1577880000)/60^2 = 376.94 > 2$ . Por lo tanto ya se completó la consolidación primaria y

$$\Delta \delta_{Pt} = (\Delta \delta)_{pcpo} U = 1.57(1) = 1.57cm$$

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{6.771 + 79.61}{6.771} \right)^{-\frac{1}{640}} \right] (0.6) = 0.002382m$$

$$\Delta \delta_{St} = 0.002382 \log(1 + 5(376.94)) = 0.007802m$$

$$\Delta \delta_{50años} = 1.57 + 0.78 = 2.35cm$$

(Arcilla preconsolidada 130501)

GRADO DE CONSOLIDACIÓN

Consideremos el estrato de arcilla saturada de la figura 35, el cual se ha consolidado para un tiempo  $t = t$ . La deformación de un elemento de suelo de espesor  $dz$  vale

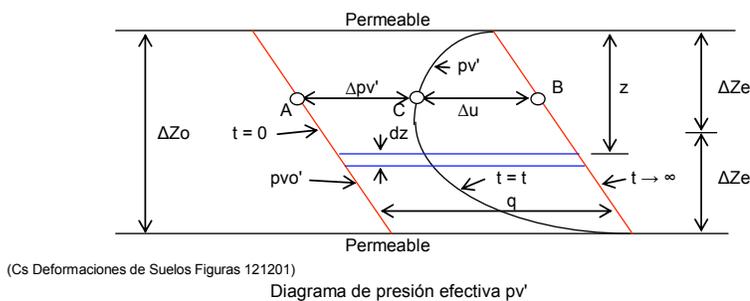
$$d(\Delta\delta_z)_{Pt} = m_v(q - \Delta u_w)dz$$

La deformación de todo el estrato de espesor  $\Delta z_o = 2\Delta z_e$  es

$$(\Delta\delta_z)_{Pt} = \int_0^{2\Delta z_e} m_v(q - \Delta u_w)dz$$

Para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ , todo el incremento de carga  $q$  lo toma la estructura sólida del suelo, y el diagrama de presión efectiva es el mostrado en la figura 36. La deformación de un elemento de suelo de espesor  $dz$  vale ahora

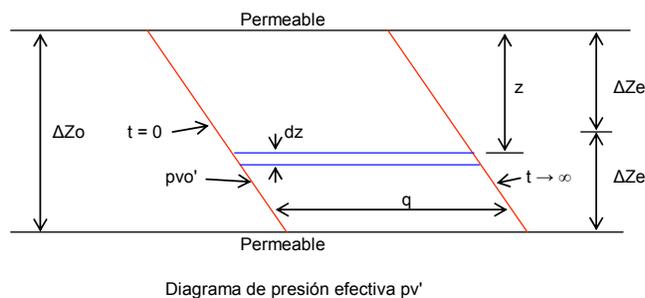
$$d(\Delta\delta_z)_P = m_v q dz$$



DEFORMACIÓN DE UN ESTRATO DE ESPESOR  $\Delta z_o$   
PARA UN TIEMPO  $t = t$   
FIGURA 35

La deformación de todo el estrato de espesor  $\Delta z_o = 2\Delta z_e$ , al término de la consolidación primaria vale

$$(\Delta\delta_z)_P = \int_0^{2\Delta z_e} m_v q dz = m_v q (2\Delta z_e)$$



DEFORMACIÓN DE UN ESTRATO DE ESPESOR  $\Delta z_0$   
 PARA UN TIEMPO  $t = t$   
 FIGURA 36

Definimos el grado de consolidación del estrato de espesor  $\Delta z_0$  de la siguiente forma

$$U = \frac{(\Delta \delta_z)_{Pt}}{(\Delta \delta_z)_P}$$

Es decir

$$U = \frac{\int_0^{2\Delta z_e} m_v (q - \Delta u_w) dz}{m_v q (2\Delta z_e)} = \frac{\int_0^{2\Delta z_e} (q - \Delta u_w) dz}{q (2\Delta z_e)} = 1 - \frac{\int_0^{2\Delta z_e} \Delta u_w dz}{q (2\Delta z_e)} \quad (267)$$

Tomando en cuenta la ecuación 128

$$\Delta u_w = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{z}{\Delta z_e} \right] \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\} \quad (268)$$

donde

$$T = \frac{c_v t}{(\Delta z_e)^2} \quad (269)$$

A  $T$  se le denomina factor tiempo.

Por otra parte

$$\int_0^{2\Delta z_e} \Delta u_w dz = q \int_0^{2\Delta z_e} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{z}{\Delta z_e} \right] \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\} dz$$

$$\int_0^{2\Delta z_e} \Delta u_w dz = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \left[ -\frac{2\Delta z_e}{(2i+1)\pi} \cos \left[ \frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{z}{\Delta z_e} \right] \right] \right\} \quad (270)$$

Pero

$$-\cos \left[ \frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{z}{\Delta z_e} \right] = -[\cos(2i+1)\pi - \cos 0] = -(-1 - 1) = 2$$

Reemplazando en la ecuación 270

$$\int_0^{2\Delta z_e} \Delta u_w dz = q (2\Delta z_e) \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\}$$

Sustituyendo en la ecuación 267

$$U = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\} \quad (271)$$

O bien

$$U(\%) = (100) \left\{ 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} \exp \left[ -\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4} \right] \right\} \right\} \quad (272)$$

En la ecuación 272 observamos que el porcentaje de consolidación de un estrato depende únicamente del factor tiempo:  $U = f(T)$ . En la tabla 3 se muestran los valores de  $U$  en función de  $T$  (Juárez Badillo y Rico, 1976).

#### COMPRESIÓN UNIDIMENSIONAL. DEFORMACIÓN UNITARIA DE CAUCHY Y DEFORMACIÓN UNITARIA DE LUDWIK

De acuerdo con Cauchy

$$\varepsilon_z = -\frac{\Delta w}{\Delta z_o}$$

Usando la ley de Hooke

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E} d\sigma_z \quad (273)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z$$

$$-\frac{\Delta w}{\Delta z_o} = \frac{1}{E} \sigma_z$$

$$\Delta w = -\frac{\Delta z_o}{E} \sigma_z$$

$$\Delta \delta_z = -\Delta w$$

$$\Delta \delta_z = \frac{\Delta z_o}{E} \sigma_z \quad (274)$$

De acuerdo con Ludwik

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta w)}{\Delta z} = -\frac{d(\Delta z)}{\Delta z}$$

Usando la ley de Hooke

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z}{p_a} \quad (275)$$

$$-\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{A} \frac{d\sigma_z}{p_a}$$

$$\int_{\Delta z_o}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{A} \int_0^{\sigma_z} \frac{d\sigma_z}{p_a}$$

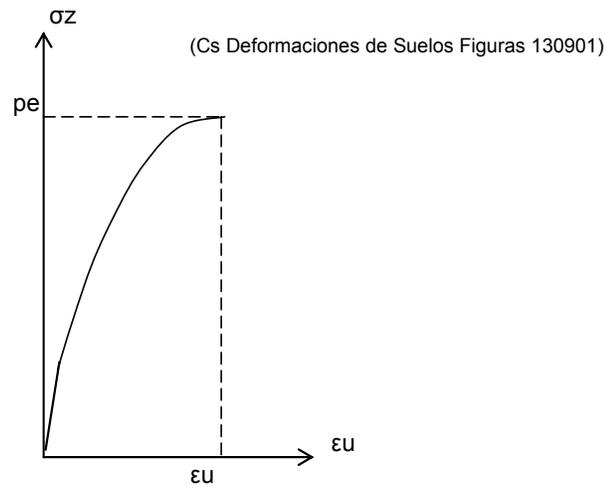
$$\Delta z_f = \Delta z_o + \Delta w, \quad \Delta w < 0$$

$$\Delta \delta_z = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_z}{Ap_a}\right) \right] \Delta z_o \quad (276)$$

#### CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN INMEDIATA, TOMANDO EN CUENTA UNA CURVA NO LINEAL

Consideremos la curva esfuerzo-deformación unitaria de la figura 37. Podemos proponer la siguiente ecuación constitutiva

$$d\varepsilon_u = \frac{1}{A_u^*} \left( \frac{f\sigma_z}{p_e} \right)^r d\left( \frac{f\sigma_z}{p_e} \right) \quad (277)$$



CURVA ESFUERZO-DEFORMACIÓN UNITARIA NO LINEAL  
FIGURA 37

$$\varepsilon_u = \frac{1}{A_u^*(1+r)} \left( \frac{f\sigma_z}{p_e} \right)^{r+1}$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{A_u} \left( \frac{f\sigma_z}{p_e} \right)^{r+1}$$

$$A_u = A_u^*(1+r)$$

$$\varepsilon_u = -\frac{\Delta w}{\Delta z_o}$$

$$\Delta \delta_u = -\Delta w$$

$$\Delta \delta_u = \frac{\Delta z_o}{A_u} \left( \frac{f\sigma_z}{p_e} \right)^{1+r} \quad (278)$$

O bien

$$\varepsilon_u = \frac{1}{A_u} \left( \frac{f\sigma_z}{p_e} \right)^{1+r} \quad (279)$$

Despejamos  $A_u$  de la ecuación 278

$$A_u = \frac{\Delta z_o}{\Delta \delta_u} \left( \frac{f \sigma_z}{p_e} \right)^{1+r} \quad (280)$$

También

$$A_u = \frac{1}{\varepsilon_u} \left( \frac{f \sigma_z}{p_e} \right)^{1+r} \quad (281)$$

### COMENTARIO FINAL

Queremos insistir, y como señalamos al principio de este capítulo, que los procedimientos aquí presentados son aproximados, pues un suelo real es similar, pero no igual al modelo de un medio granular. No obstante, los cálculos resultan satisfactorios para la mayoría de los casos de la práctica de la ingeniería.

Ciudad Universitaria, agosto de 2013

### REFERENCIAS

Burland, J B y Burbidge, M C, "Settlement of foundations on sand and gravel", *Proc Inst Civ Engrs*, part I: 1325-1381, 1985

Deméneghi, A, "Cálculo de asentamientos en arenas", *Revista de la Soc Mex Mec Suelos*, 2003

Deméneghi, A, "Cálculo del asentamiento de un cimiento en arena", XXIV Reunión Nal Mec Suelos, Vol 2: 301-305, Aguascalientes, Ags, Soc Mex Mec Suelos, 2008

Denver, H, "Settlement calculation for footings on sand", *XI Int Conf Soil Mech Found Eng*, vol 4: 2183-2190, San Francisco, 1985

Juárez Badillo, E y Rico, A, *Mecánica de Suelos*, tomo I, Limusa, 1976

Mayne, P W y Kulhawy, F H, "K<sub>o</sub>-OCR relationships in soil", *Jour Geot Eng Div*, ASCE, Vol 108, N° GT6: 851-872, junio 1982

Schmertmann, J H, Hartman, J P y Brown, P R, "Improved strain influence factor diagrams", *Jour Geot Eng Div*, ASCE, GT8, agosto 1978

Skempton, A W, "The pore pressure coefficients A and B", *Géotechnique*, 4: 143-147, 1954

Skempton, A W y Bjerrum, L, "A contribution to the settlement analysis of foundations in clay", *Géotechnique*, 7(4), 168-178, 1957

Terzaghi, K, *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, 1943

Whitlow, R, *Fundamentos de Mecánica de Suelos*, CECSA, México, D F, 1994

Zeevaert, L, *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973

Zeevaert, L, "Consolidation in the intergranular viscosity of highly compressible soils", *Consolidation of Soils: Testing and Evaluation*, ASTM, STP 892: 257-281. R N Yong y F C Townsend eds, Filadelfia, 1986

(Cs Deformaciones en Suelos 151101)

# Anexo 4

## MOVIMIENTOS PERMISIBLES

TABLA 3.1  
ASENTAMIENTOS PERMISIBLES

Asentamiento total permisible de la cimentación de una estructura, de tal forma que no se presente daño funcional en las siguientes instalaciones o elementos:

Obras de drenaje	15 a 30 cm
Accesos a la estructura	30 a 60 cm
Muros de mampostería	2.5 a 5 cm
Marcos estructurales de concreto o acero	5 a 10 cm
Losas o cajones de cimentación	7.5 a 30 cm

Los valores mayores son para asentamientos en terrenos de cimentación homogéneos y estructuras de buena calidad de construcción. Los valores menores son para asentamientos en terrenos de cimentación con estratigrafía errática y estructuras de regular calidad de construcción.

Tomado de Sowers (1962)

TABLE 6-10. LIMITING SETTLEMENTS (55-60)

Type of movement	Limiting factor	Maximum settlement
Total settlement.....	Drainage	6 to 12 in.
	Access	12 to 24 in.
	Probability of nonuniform settlement:	
	Masonry walled structure	1 to 2 in.
Tilting.....	Framed structures	2 to 4 in.
	Smokestacks, silos, mats	3 to 12 in.
	Stability against overturning	Depends on height and width
	Tilting of smokestacks, towers	0.004 <i>b</i>
	Rolling of trucks, etc.	0.01 <i>L</i>
	Stacking of goods	0.01 <i>L</i>
	Machine operation—cotton loom	0.003 <i>L</i>
	Machine operation—turbogenerator	0.0002 <i>L</i>
	Crane rails	0.003 <i>L</i>
	Differential movement..	Drainage of floors
High continuous brick walls		0.0005 to 0.001 <i>L</i>
One-story brick mill building, wall cracking		0.001 to 0.002 <i>L</i>
Plaster cracking (gypsum)		0.001 <i>L</i>
Reinforced-concrete building frame		0.0025 to 0.004 <i>L</i>
Reinforced-concrete building curtain walls		0.003 <i>L</i>
Steel frame, continuous		0.002 <i>L</i>
Simple steel frame		0.005 <i>L</i>

NOTE: *L* = distance between adjacent columns that settle different amounts, or between any two points that settle differently. Higher values are for regular settlements and more tolerant structures. Lower values are for irregular settlements and critical structures.



### *COMPORTAMIENTO DE SUELOS*

se publicó digitalmente en el repositorio de la Facultad de Ingeniería en abril de 2023. Primera edición electrónica de un ejemplar (8 MB) en formato PDF.

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Helvetica y Helvetica Neue con sus respectivas variantes.