



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Simulación numérica de la
propulsión de cuerpos
oscilantes en un fluido
incompresible**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Omar Sánchez Camacho

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Rubén Ávila Rodríguez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Resumen

Facultad de Ingeniería
Departamento de Termofluidos

Que para obtener el título de
Ingeniero mecánico

Simulación numérica de la propulsión de cuerpos oscilantes en un fluido incompresible.

by Omar SÁNCHEZ CAMACHO

En el presente trabajo, se estudia el comportamiento de geometrías bidimensionales deformables que están inmersas en un fluido incompresible a bajos números de Reynolds. Se lleva a cabo el estudio de los patrones de flujo generados alrededor de dos cuerpos deformables: (1) un filamento que oscila de manera similar a como lo hacen las medusas en la naturaleza y (2) un cilindro deformable que va desde una configuración circular hasta una elipsoidal. Ambas geometrías cambian su forma como función del tiempo. Las ecuaciones de Navier-Stokes de forma adimensional se resuelven con el método de Elementos espectrales (SEM), empleando mallas móviles y la formulación ALE. El motivo de esta investigación es conocer bajo qué régimen de flujo las superficies deformables son capaces o no de tener propulsión. Como resultado, se concluye que en el cilindro deformable al incrementar la frecuencia de oscilación su capacidad de tener propulsión también aumenta. Mientras que para el caso del filamento oscilante, la propulsión se debe en gran medida a la diferencia de presiones inducida por el campo de vorticidades sobre las superficie medusa al deformarse.

Agradecimientos

Al Dr. Rubén Ávila Rodríguez, sin su guía y constante ayuda no habría podido terminar el presente trabajo, pero sobre todo no hubiera tenido la oportunidad de aprender todo lo que aprendí.

A mí amigo y compañero José Gilberto Montiel Galindo, cuya ayuda académica y amistad fue determinante para que pudiera terminar esta gran tarea.

A mis padres, Mayra y Humberto, sin ellos simplemente no hubiera podido terminar algo de esto.

A mis tíos, que siempre me han ayudado de la manera que han podido, en especial a mi tío David, mi tío Eder y mi tío Omar.

A mí abuela Chuy, que me ayuda a su manera cada que puede.

Al Ingeniero Amador, que me demostró que hay personas honestas, capaces, rectas y fuertes como él, pero sobre todo éticas, eso sí que es una rareza.

A mis amigos, Luis Ángel Poblett, Juan, Leonardo que siempre se han acordado de mí.

A mi profesor de Básquetbol, Mario Landa, por ser tan buen instructor, pero sobre todo, tan buena persona.

Al Ingeniero Samuel, por su ayuda y consejos.

Y por último, con mención especial a mi amigo Guillermo Toledo, una rareza también. Que a pesar de ser de personalidades tan diferentes, es de las pocas personas con las que verdaderamente me entiendo e identifico.

A TODAS Y CADA UNA DE LAS PERSONAS QUE ME ESTIMAN Y ME HAN AYUDADO, AUNQUE ESTÉN O NO ESCRITAS EN ESTA PÁGINA, SIEMPRE LAS TENDRÉ MUY PRESENTES A USTEDES Y LO QUE HAN HECHO POR MÍ.

 Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
Índice de figuras	XIV
Índice de Tablas	XV
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Importancia	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Estado del Arte	4
1.4. Objetivos y Alcance	5
1.5. Sinopsis del presente trabajo	5
2. MODELO FÍSICO Y ECUACIONES DINÁMICAS	7
2.1. Cuerpo deformable	7
2.1.1. Representación del modelo y condiciones de frontera . . .	7
2.2. Filamento oscilante	10
2.2.1. Representación del modelo y condiciones de frontera . . .	10
2.3. Ecuaciones Dinámicas	12
2.3.1. Cuerpo deformable	12
Expresiones de deformación	12
Expresiones de velocidad de deformación	12
2.3.2. Filamento oscilante	13
Expresiones de deformación	13
Expresiones velocidad de deformación	13

3. MODELO MATEMÁTICO	15
3.1. Cuerpo deformable	15
3.1.1. Ecuaciones de gobierno dimensionales	15
Ecuación de Continuidad	15
Ecuación de Cantidad Movimiento	15
3.1.2. Ecuaciones de gobierno adimensionales	16
Ecuación de Continuidad	16
Ecuación de Cantidad Movimiento	16
3.2. Filamento oscilante	16
3.2.1. Ecuaciones de gobierno dimensionales	16
Ecuación de Continuidad	16
Ecuación de Cantidad Movimiento	16
3.2.2. Ecuaciones de gobierno adimensionales	17
Ecuación de Continuidad	17
Ecuación de Cantidad Movimiento	17
3.3. Condiciones de frontera	17
3.3.1. Cuerpo deformable	17
3.3.2. Filamento oscilante	18
4. MODELO NUMÉRICO	19
4.1. Método de Elementos Espectrales	19
4.1.1. Formulación ALE	20
Planteamiento matemático	21
Condiciones de frontera	23
5. VALIDACIONES Y COMPARACIONES	25
5.1. Análisis de Independencia de malla	27
5.1.1. Cilindro circular fijo	27
5.2. Flujo laminar alrededor de un cilindro circular fijo con número de Reynolds igual a 100	29
5.3. Flujo laminar alrededor de un cilindro circular fijo con número de Reynolds igual a 190	30
5.4. Flujo laminar alrededor de un cilindro elipsoidal fijo con número de Reynolds igual a 1000	31
6. RESULTADOS	33
6.1. Cilindro deformable	33
6.1.1. Análisis de Independencia de malla	34
6.1.2. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds igual a 100 y Amplitud de deformación igual con 0.5	37
Frecuencia de deformación igual a 0.1	37
Frecuencia de deformación igual a 0.5	38
Frecuencia de deformación igual a 1.0	39

6.1.3.	Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds fijado a 10 y con Amplitud de deformación igual con 0.5	41
	Frecuencia de deformación igual a 0.1	41
	Frecuencia de deformación igual a 0.5	42
	Frecuencia de deformación igual a 1.0	43
6.1.4.	Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds fijado a $1E(-4)$ y con Amplitud de deformación igual con 0.5	44
	Frecuencia de deformación igual a 0.1	44
	Frecuencia de deformación igual a 0.5	45
	Frecuencia de deformación igual a 1.0	46
6.2.	Filamento oscilante (Medusa)	47
6.2.1.	Análisis de Independencia de malla	47
6.2.2.	Cálculo de fuerzas hidrodinámicas	49
6.2.3.	Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Filamento oscilante con Amplitud de deformación igual con 0.5 y Frecuencia de deformación igual a $1/2\pi$	50
	Número de Reynolds fijado a 144	50
	Número de Reynolds fijado a 100	53
	Número de Reynolds fijado a 10	55
	Número de Reynolds fijado a $1E(-4)$	57
	Comparación cualitativa de la vorticidad en el filamento con $Re = 10$	59
7.	CONCLUSIONES	63
8.	TRABAJO A FUTURO	65
A.	Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno	67
A.1.	Cuerpo deformable	67
A.1.1.	Ecuación de Continuidad	67
A.1.2.	Ecuación de Cantidad Movimiento	68
	Primera dirección principal \hat{i}_1	69
	Segunda dirección principal \hat{i}_2	70
A.2.	Filamento oscilante	70
A.2.1.	Ecuación de Continuidad	71
A.2.2.	Ecuación de Cantidad Movimiento	71
	Primera dirección principal \hat{i}_1	72
	Segunda dirección principal \hat{i}_2	73

Índice de figuras

2.1. Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Cuerpo deformable (este diagrama no esta a escala).	8
2.2. Ciclo de deformación del cuerpo deformable. Subfigura a) fase de deformación en $t = 0$; b) fase de deformación en $t = \tau/4$; c) fase de deformación en $t = \tau/2$; d) fase de deformación en $t = 3\tau/4$; e) fase de deformación en $t = \tau$. Donde $\tau = (1/f)$ es el periodo de deformación.	9
2.3. Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Filamento oscilante (este diagrama no esta a escala).	10
2.4. Ciclo de deformación del filamento oscilante. Subfigura a) fase de deformación en $t = 0$; b) fase de deformación en $t = \tau/4$ (expansión); c) fase de deformación en $t = \tau/2$; d) fase de deformación en $t = 3\tau/4$ (contracción); e) fase de deformación en $t = \tau$. Donde $\tau = (1/f)$ es el periodo de deformación.	11
3.1. Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Cuerpo deformable. Donde las condiciones iniciales son: $u_1 = 0$; $u_2 = 0$ y $v_{1C} = 0$; $v_{2C} = 0$	18
3.2. Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Filamento oscilante. Donde las condiciones iniciales son: $u_1 = 0$; $u_2 = 0$ y $v_{1F} = 0$; $v_{2F} = 0$	18
5.1. Análisis de independecia de la malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 12 ; Número de macro-elementos: 296 [malla simple]). Subfigura a) malla computacional: vista completa en el cilindro circular fijo; b) malla computacional: vista aumentada en el cilindro circular fijo.	27

5.2.	Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 10, 12 y 14 ; Número de macro-elementos: 296). Subfigura a) gráfica de velocidad contra tiempo en el cilindro circular fijo, estado transitorio; b) gráfica de velocidad contra tiempo en el cilindro circular fijo, estado periódico.	28
5.3.	Comparación de la calle de vortices generada por un cilindro circular fijo para un $Re = 100$. Subfigura a) calle de vortices en un Cilindro circular fijo con $Re = 100$ (Rajani et. al, 2008); b) calle de vortices en un Cilindro circular fijo con $Re = 100$ (SEM).	29
6.1.	Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 12 ; Número de macro-elementos: 296 [Malla simple]). Subfigura a) malla computacional, vista completa del dominio; b) malla computacional, vista aumentada en el Cuerpo deformable.	35
6.2.	Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 10,12 y 14 ; Número de macro-elementos: 296 [Malla simple]). Subfigura a) gráfica de velocidad contra tiempo en el Cuerpo deformable, estado transitorio completo; b) gráfica de velocidad contra tiempo en el Cuerpo deformable, estado transitorio al final de la simulación.	36
6.3.	Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 100, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.1. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable.	37
6.4.	Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 100, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.5. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.	38
6.5.	Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 100, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 1.0. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.	39
6.6.	Coeficiente de arrastre en el tiempo del Cilindro deformable con $f = 0.1$, $f = 0.5$ y $f = 1.0$	40
6.7.	Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 10, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.1. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.	41

6.8. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 10, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.5. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.	42
6.9. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 10, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 1.0. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.	43
6.10. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 1E(-4), Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.1. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable; c) campo de velocidad del Cuerpo deformable (iso-superficies).	44
6.11. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 1E(-4), Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.5. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable; c) campo de velocidad del Cuerpo deformable (iso-superficies).	45
6.12. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 1E(-4), Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 1.0. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable; c) campo de velocidad del Cuerpo deformable (iso-superficies).	46
6.13. Malla computacional del Filamento oscilante (medusa), empleada en el SEM (Grado de interpolación: 12 ; Número de macro-elementos: 141 [Malla simple]). Subfigura a) malla computacional, vista completa del dominio; b) malla computacional, vista aumentada en el filamento oscilante.	47
6.14. Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 10,12 y 14 ; Número de macro-elementos: 141 [Malla simple]). Subfigura a) gráfica de velocidad contra tiempo en el Filamento oscilante (medusa), estado transitorio; b) gráfica de velocidad contra tiempo en el Filamento oscilante (medusa), estado periódico.	48
6.15. Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 144$	51
6.16. Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 144$. Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.	52

6.17. Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 100$	53
6.18. Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 100$. Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.	54
6.19. Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 10$	55
6.20. Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 10$. Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.	56
6.21. Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 1E(-4)$	57
6.22. Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 1E(-4)$. Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.	58
6.23. Medusa en etapa de contracción. Subfigura a) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r \geq 1$ (Gemmell et. al 2021); b) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r = 0.41$ (SEM),	60
6.24. Medusa en etapa de expansion. Subfigura a) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r \geq 1$ (Gemmell et. al 2021); b) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r = 0.41$ (SEM),	61

Índice de Tablas

5.1. Comparación de Coeficientes de arrastre.	29
5.2. Comparación de Coeficientes de arrastre y presión.	30
5.3. Comparación de Coeficientes de arrastre.	31
6.1. Parámetros con los cuales se llevaron acabo las simulaciones del Cuerpo deformable, $Re = 100$	34
6.2. Parámetros con los cuales se llevaron acabo las simulaciones del Cuerpo deformable, $Re = 10$	34
6.3. Parámetros con los cuales se llevaron acabo las simulaciones del Cuerpo deformable, $Re = 1E(-4)$	34

Dedicado

**A MÍ MADRE MAYRA Y A MI PADRE HUMBERTO, QUE
SON MI PRINCIPAL APOYO EN TODOS LOS SENTIDOS
Y A MARCIA, POR SIEMPRE ESTAR.**

GRACIAS TOTALES.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Resumen de capítulo

En este capítulo, se hace una introducción del presente trabajo. Primero se presenta la importancia de esta investigación, después los antecedentes reportados en la literatura, además del estado del arte, seguido de esto, se tratan los objetivos y el alcance de este trabajo, finalmente se hace una sinopsis del trabajo escrito.

1.1. Importancia

Debido a que los seres humanos necesitamos y estamos en búsqueda de medios de transporte cada vez más eficientes, es preciso, incluir nuevas estrategias de propulsión para éstos fines. Procesos tales como la rotación de cuerpos en un fluido, la oscilación virtual así como la inyección y sustracción de chorros sintéticos adquieren un papel crucial en la búsqueda de éstas nuevas estrategias de propulsión, siendo su estudio y comprensión un paso necesario para su asimilación.

En orden de poder implementar estas nuevas estrategias de propulsión se hace uso de un proceso bastante útil que ha dado grandes resultados en distintas disciplinas, es decir, la "Biomimética" o "Biomímesis". Este concepto fue formulado por el ingeniero Otto H. Schmitt (1913-1998) en 1957 (*ver por ejemplo* Bansode et al., 2016) sin embargo, antes de ser planteado el término, a lo largo de la historia han existido varios precursores de este concepto, siendo uno de los más notables Leonardo Da Vinci. En pocas palabras la Biomimética consta

de observar, analizar, entender y replicar la esencia de los sistemas que se encuentran en la naturaleza.

Además, entender los sistemas de propulsión que ha desarrollado la naturaleza no sólo es benéfico para optimizar los medios de transporte masivos con los que cuenta el ser humano, sino que también tienen alto impacto en el área biomédica. En años recientes se han implementado sistemas de propulsión de la naturaleza en micro y nano robots capaces de realizar cirugías a nivel celular y llevar sustancias en proporciones controladas a partes específicas del cuerpo humano, moviéndose a través del torrente sanguíneo (Bunea y Taboryski, 2020), cuestión sumamente difícil o imposible para otros métodos.

Si bien es cierto que el estudio de micro-nadadores a bajo número de Reynolds es altamente relevante, también lo es el estudio de otro tipo de nadadores tales como las medusas. Es importante comprender la propulsión de las medusas a partir de sus movimientos de expansión y contracción, ya que estos nadadores se desplazan con una de las estrategias de propulsión más eficientes del reino animal. Implementar este mecanismo de propulsión tan eficiente en vehículos tripulados y no tripulados sería muy útil en términos de ahorro de energía y combustibles.

1.2. Antecedentes

Los seres vivos a lo largo del tiempo han desarrollado diferentes mecanismos de propulsión con tal de poder satisfacer sus necesidades básicas, tales como desplazarse, alimentarse y sobrevivir.

Tomando en cuenta lo anterior y debido a que la inmensa mayoría de los seres que habitan la tierra son de tamaño microscópico (Becker, Koehler y Stone, 2003), es que se analizan tanto los nadadores como los micro-nadadores. En éste estudio, se considera un «Nadador» como una criatura u objeto que se desplaza deformando su cuerpo de manera periódica (Lauga y Powers 2009). También se debe considerar que los «nadadores» debido al régimen de Reynolds en el que se encuentran $Re \gg 1$ se propulsan en su mayoría mediante las fuerzas de reacción provenientes de los cuerpos y/o fluidos en la vecindad de dicho nadador y dependen en gran medida de la inercia del medio circundante (Huber, Koehler y Yang, 2010). Por otra parte, se tiene presente la definición de (Morán y Posner, 2019) donde se refieren a un «Micro-nadador» como un ente que por su talla, se encuentra en el régimen microscópico y puede autopropulsarse a través de fluidos mediante diversas estrategias. Además, los «micro-nadadores» están inmersos en un régimen de Reynolds de $Re \ll 1$, así que los efectos viscosos son predominantes ante las fuerzas inerciales, de tal forma que el desplazamiento logrado por estos en un fluido depende fundamentalmente

de la configuración geométrica que van adquiriendo mientras cambian de forma (Shapere y Wilczek, 1989). Los micro-nadadores pueden ser de naturaleza artificial u orgánica, cuando son seres biológicos generalmente logran desplazarse por sí mismos mediante el movimiento de extensiones de su cuerpo como cilios o flagelos, mientras que para el caso de los micro-nadadores artificiales o también llamados micro-robots tienen la posibilidad de desplazarse mediante fuerzas de propulsión generadas por reacciones químicas o por la interacción de campos magnéticos; pueden o no contar con partes móviles. En el caso de los micro-nadadores, no hay un convenio universal sobre las estrategias que deben o no tener para ser considerados como tales, tampoco hay un tamaño estricto para estos, pero comúnmente rondan entre los 10 y 15 micrómetros.

Se ha investigado que nadadores como las medusas, y especialmente el caso de las que son oblatas (con un diámetro mayor a su altura) como lo mencionan (Colin et al., 2012; Gemmell et al., 2014, 2015) por su disposición geométrica no se propulsan mediante el mecanismo de Propulsión a chorro como sus contrapartes prolatas (con una altura mayor a su diámetro), sino que lo hacen mediante el arrastre del fluido que se encuentra fuera de su cavidad en forma de campana cuando están en etapa de contracción y la diferencia de presiones que se crea en su superficie al oscilar. El análisis de este tipo de medusas (oblatas) se ha hecho de manera tridimensional, descubriendo que, en la naturaleza al deformar su cuerpo generan vórtices en torno a su superficie (Dabiri et. al, 2005), y también se ha realizado desde un enfoque bidimensional con distintos métodos numéricos, tanto con uno basado en partículas (Rudolf, 2007) como con uno basado en métodos libres de malla (Ávila y Atluri, 2009), donde se analiza la distribución de vorticidad, campo de velocidades, la variación del volumen y el área de la medusa, así como su posible relación con los mecanismos de propulsión y alimentación de dichos organismos.

Para el caso de los micro-nadadores ya se han analizado con anterioridad mecanismos de propulsión mediante el movimiento de cilios (Blake, 1971), movimiento de flagelos (Lauga y Powers 2009), mediante el movimiento de un cuerpo constituido por tres eslabones y dos juntas cinemáticas (Purcell, 1976) y mediante el cambio de forma arbitrario de una esfera deformable (Shapere y Wilczek, 1989). También se ha estudiado de manera próxima pero no idéntica al caso propuesto en el presente trabajo; mediante el estudio analítico del desplazamiento de un esferoide que cambia de forma, yendo desde un esferoide oblato hasta uno prolato, pasando por una esfera casi perfecta (Lighthill, 1952).

1.3. Estado del Arte

Recientemente las estrategias de propulsión de diversos organismos marinos e invertebrados (nadadores) han sido estudiados, entre ellos las Medusas y los Sifonóforos (Dabiri et al., 2021). Estos últimos son criaturas alargadas que generalmente poseen estructuras llenas de fluido que les permiten además de mantenerse suspendidos en un fluido, propulsarse mediante la expulsión de chorros de manera controlada.

Mientras que, las estrategias de propulsión de medusa considerando modelos con 'flips' y sin ellos han sido analizados por (Collin et al., 2012). Además, ha sido investigado el efecto del desprendimiento de vórtices en el nado de estos animales por (Gemmell et al., 2014).

También hay estudios que tratan el campo de presiones sobre la geometría de las medusas y el efecto que tiene en los mecanismos de nado que están emplean, como por ejemplo lo reportado por (Gemmell et al., 2015). Y algo de lo más reciente en este campo, el estudio realizado por (Gemmell et al., 2021) donde analiza el efecto de la llamada 'Rowing propulsion' comparando los patrones de flujo generados por una medusa oblata y prolata.

Por otra parte, los micro-nadadores se han investigado desde distintos enfoques en los últimos años, por ejemplo en geometrías variadas pero rígidas (Daddi-Moussa-Ider, Nasouri, Vilfan y Golestanian, 2021), mediante el estudio de la condición llamada "Ruptura de simetría" como requerimiento para encontrar estrategias de propulsión óptimas (Qiu et al., 2022).

De manera contraria se han analizado mediante la propuesta de geometrías axisimétricas que favorecen la velocidad de desplazamiento de los micro-nadadores (Guo et al., 2021). Dichos organismos también han estudiado desde un enfoque orientado a la optimización y el control de sus mecanismos de nado (Condat, 2015).

Además, han sido estudiados también micro-nadadores 'artificiales' y sus posibles mecanismos de propulsión de trayectoria helicoidal, como lo reporta (Keaveny et al., 2008).

Por otro lado, una publicación muy reciente investiga el tema de los micro-nadadores desde un enfoque bastante singular, ya que (Mathijssen et al., 2015) analiza el transporte de partículas debido al flujo creado por los micro-nadadores autopulsados.

1.4. Objetivos y Alcance

En este estudio, se busca comprender las estrategias de propulsión de nadadores y micro-nadadores a bajos números de Reynolds, con geometrías deformables y saber si son capaces o no de tener propulsión. Se presentan dos casos donde se estudian tanto el campo de vorticidades como la distribución de esfuerzos cortantes viscosos sobre la superficie de geometrías deformables bidimensionales: un Filamento oscilante (Medusa) contenido en una cavidad cerrada y un Cilindro deformable dentro de un canal; la deformación de ambos cuerpos es función del tiempo. Para el caso del cilindro se considera que su geometría cambia de manera periódica desde una configuración circular a una elipsoidal, mientras que el filamento oscila de manera similar a cómo lo hacen las medusas en la naturaleza. Estos cuerpos están inmersos en un fluido incompresible cuyo régimen de flujo es laminar. Las ecuaciones adimensionales, no estacionarias de Navier-Stokes y para dos dimensiones, se resuelven con el método numérico de Elementos espectrales considerando mallas móviles y la formulación ALE.

El objetivo de esta investigación es analizar las estrategias de propulsión de nadadores y micro-nadadores; proponiendo cuerpos deformables que oscilan en un fluido a bajo número de Reynolds y determinar si son capaces o no de tener propulsión.

1.5. Sinopsis del presente trabajo

En el capítulo 2 (Modelo Físico) se presenta esquemáticamente el problema, dando una breve descripción de las características físicas y del movimiento propio de cada caso. En el capítulo 3 (Modelo Matemático) se presentan las ecuaciones de gobierno y condiciones de frontera que rigen el problema. En el capítulo 4 (Modelo Numérico) se da una descripción breve del Método de Elementos Espectrales y su aplicación en este estudio. En el capítulo 5 (Validaciones y Comparaciones) se hacen las correlaciones necesarias con la literatura teniendo como objetivo validar el Método de Elementos Espectrales (SEM) usado en el presente trabajo. En el capítulo 6 (Resultados) se muestran los resultados obtenidos. En el capítulo 7 (Conclusiones) se presentan las conclusiones del trabajo. Finalmente en el capítulo 8 (Trabajo a futuro) se propone el curso de la investigación en un futuro y se hace una breve explicación de los posibles trabajos a desarrollar.

CAPÍTULO 2

MODELO FÍSICO Y ECUACIONES DINÁMICAS

Resumen de capítulo

En este capítulo, primero se exponen los modelos físicos mediante diagramas y las ecuaciones dinámicas de los casos de estudio: 1) Cuerpo deformable y 2) Filamento oscilante (Medusa). Además, se tratan a detalle los mecanismos y etapas de deformación de cada caso. También se presenta una breve descripción gráfica de las condiciones de frontera (para una explicación detallada, ver capítulo 3).

2.1. Cuerpo deformable**2.1.1. Representación del modelo y condiciones de frontera**

El Modelo físico del cilindro deformable consiste de una velocidad de corriente libre que va de izquierda a derecha e impacta al cilindro, mientras éste se deforma periódicamente como función del tiempo (ver figura 2.1).

El ciclo de deformación consta de dos etapas (ver figura 2.2): la primera (figura 2.2a) va desde una configuración circular hasta una elipsoidal (figura 2.2b) con eje mayor en la dirección ' x_2 ' alcanzando una elongación máxima y regresando a la configuración del círculo base (figura 2.2c), la segunda etapa (figura 2.2d) consta de ir de este círculo base a una elipse con eje mayor en la dirección ' x_1 ', y de manera similar a la primera etapa regresa al círculo base (figura 2.2e) después de llegar a una máxima elongación en x_1 .

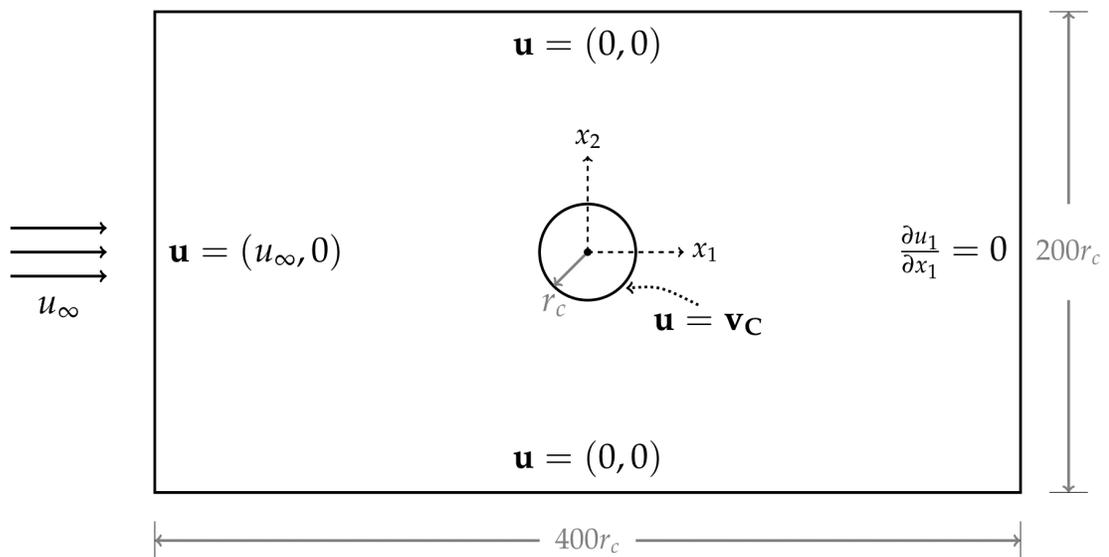


FIGURA 2.1: Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Cuerpo deformable (este diagrama no esta a escala).

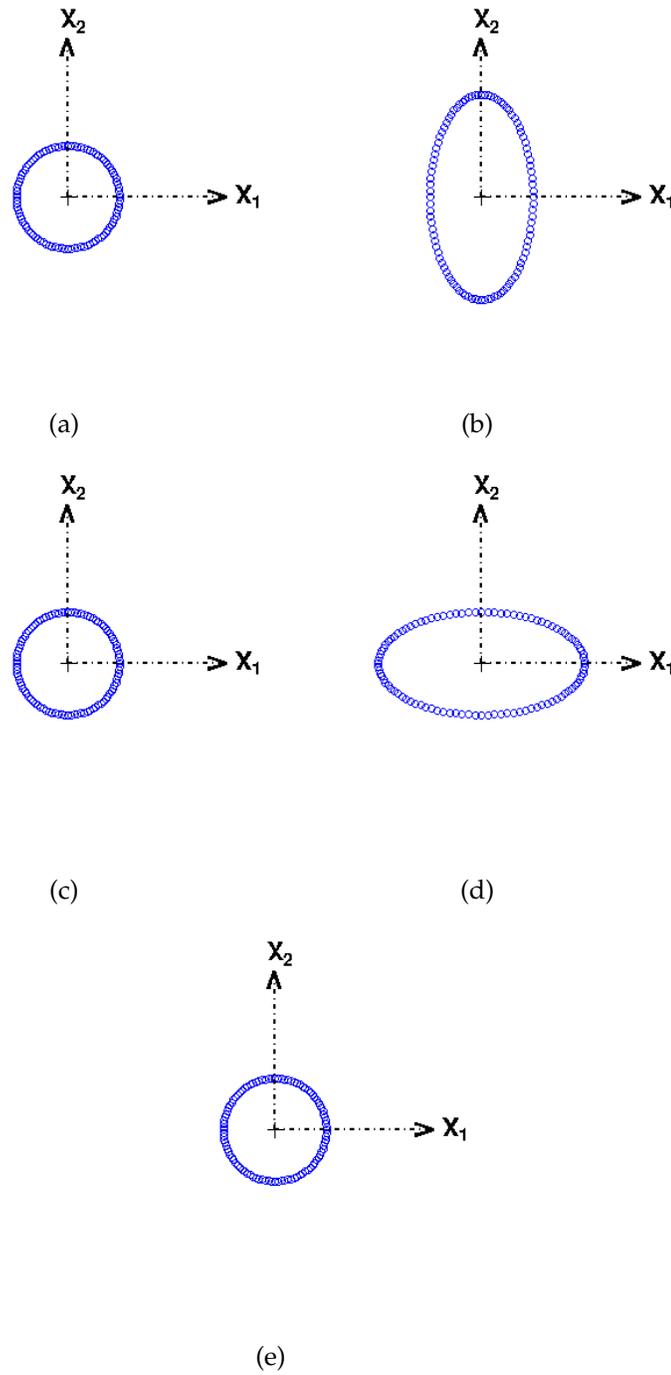


FIGURA 2.2: Ciclo de deformación del cuerpo deformable. Subfigura a) fase de deformación en $t = 0$; b) fase de deformación en $t = \tau/4$; c) fase de deformación en $t = \tau/2$; d) fase de deformación en $t = 3\tau/4$; e) fase de deformación en $t = \tau$. Donde $\tau = (1/f)$ es el periodo de deformación.

2.2. Filamento oscilante

2.2.1. Representación del modelo y condiciones de frontera

El modelo físico del filamento oscilante es un modelo simplificado de la sección transversal de una medusa oblata (Ávila y Atluri, 2009). Oscila de manera similar a como lo hacen estos organismos en la naturaleza. El filamento está inmerso en un fluido estático, este fluido está confinado en una cavidad circular cuyo radio es 100 veces el radio del filamento (ver figura 2.3).

El ciclo de deformación del filamento oscilante se compone de dos etapas principales (ver figura 2.4). La primera etapa (figura 2.4a) va desde una configuración inicial o base (sin deformación alguna) hasta una llamada 'expansión' (figura 2.4b) alcanzando un diámetro máximo (en la dirección ' x_1 ') y una altura mínima (en la dirección ' x_2 '), y regresando a la configuración base (figura 2.4c). La segunda etapa va desde la configuración base (final de la primera etapa figura 2.4d) hasta una llamada 'Contracción' (figura 2.4e) donde alcanza un diámetro mínimo (en la dirección ' x_1 ') y una altura máxima (en la dirección ' x_2 '), para finalmente regresar a la configuración base y repetir el ciclo de deformación.

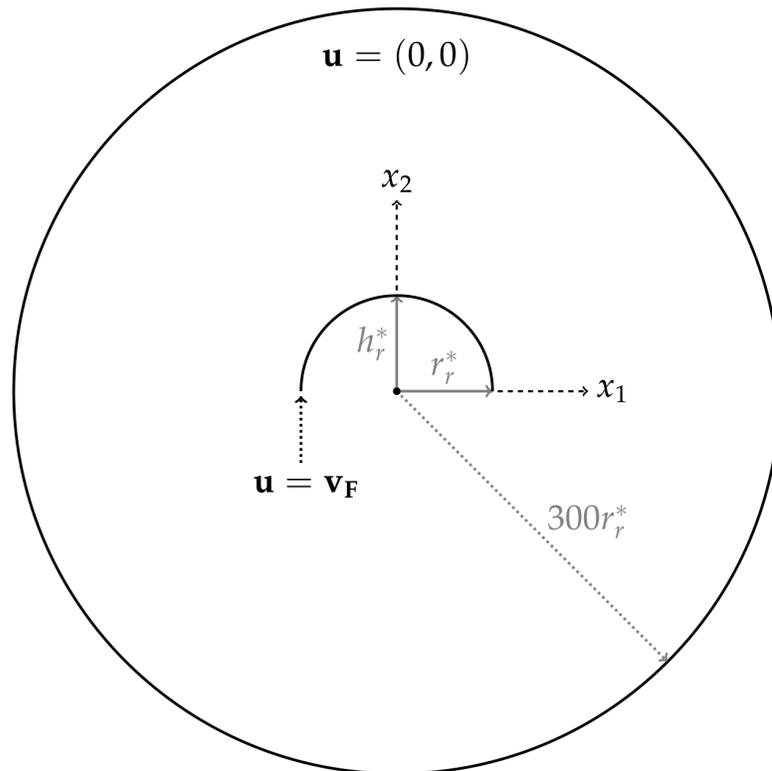


FIGURA 2.3: Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Filamento oscilante (este diagrama no está a escala).

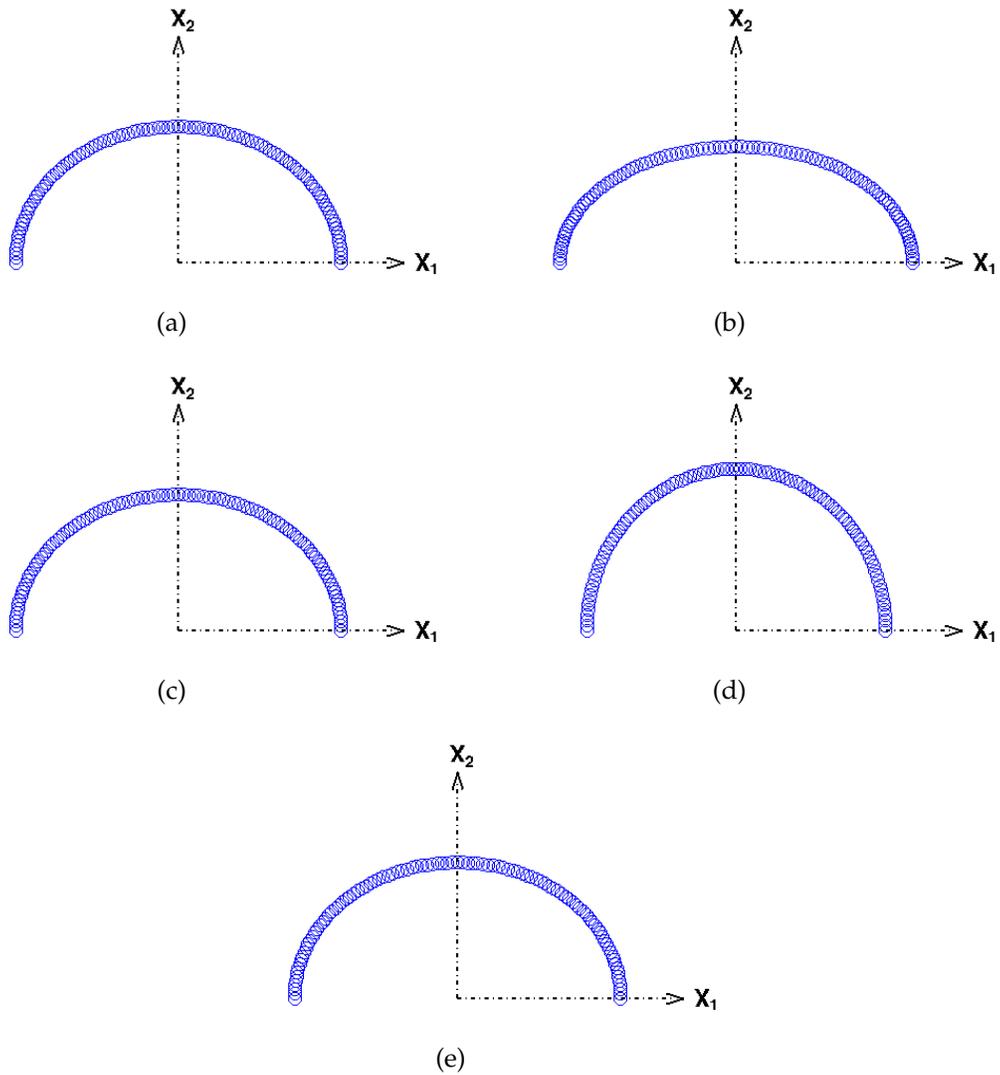


FIGURA 2.4: Ciclo de deformación del filamento oscilante. Subfigura a) fase de deformación en $t = 0$; b) fase de deformación en $t = \tau/4$ (expansión); c) fase de deformación en $t = \tau/2$; d) fase de deformación en $t = 3\tau/4$ (contracción); e) fase de deformación en $t = \tau$. Donde $\tau = (1/f)$ es el periodo de deformación.

2.3. Ecuaciones Dinámicas

2.3.1. Cuerpo deformable

Expresiones de deformación

Las siguientes expresiones son las ecuaciones dinámicas con las cuales se logró el movimiento del cuerpo deformable. Las ecuaciones 2.1-2.4 son las ecuaciones de deformación del cuerpo.

En el eje x_1 :

$$x_1 = (a + (b - a) \cdot (\sin(\omega \cdot t))) \cdot [\sin \theta] \quad (2.1)$$

$$x_2 = a \cdot [\cos \theta] \quad (2.2)$$

y deformación en el eje x_2 :

$$x_1 = a \cdot [\cos \theta] \quad (2.3)$$

$$x_2 = (a + (b - a) \cdot (\sin(\omega \cdot t))) \cdot [\sin \theta] \quad (2.4)$$

Donde: a es el semi-eje en x_1 , b es el semi-eje en x_2 , ω es la velocidad angular, r_c es el radio del círculo unitario (o base), f es la frecuencia y A la amplitud de deformación. Además: $a = r_c$, $b = r_c + A$, $\omega = 2\pi \cdot f$ y $r_c = 0.5$.

Expresiones de velocidad de deformación

Mientras que las ecuaciones 2.5-2.8, son las velocidades de deformación del cuerpo deformable, además de ser estas las que se programaron para lograr el movimiento de la malla.

En el eje x_1 :

$$v_{1C} = ((b - a) \cdot (\cos(\omega \cdot t))) \cdot [\sin \theta] \quad (2.5)$$

$$v_{2C} = 0 \quad (2.6)$$

y en el eje x_2 :

$$v_{1C} = 0 \quad (2.7)$$

$$v_{2C} = ((b - a) \cdot (\cos(\omega \cdot t))) \cdot [\sin \theta] \quad (2.8)$$

2.3.2. Filamento oscilante

Expresiones de deformación

Las siguientes expresiones son las ecuaciones dinámicas con las cuales se logró el movimiento del filamento oscilante (medusa). Las ecuaciones 2.9-2.10 son las ecuaciones de deformación del filamento.

$$x_1^* = r^*(t^*) \cdot [\cos(\theta)] \quad (2.9)$$

$$x_2^* = h^*(t^*) \cdot [\sin(\theta)] \quad (2.10)$$

Donde: t^* es el tiempo adimensional, ω es la velocidad angular, $r^*(t^*)$ es radio adimensional de la medusa, $h^*(t^*)$ es la altura adimensional de la medusa, $V^*(t^*)$ es el volumen adimensional de la medusa, todos como función del tiempo adimensional.

Además:

$$r^*(t^*) = r_r^* + \gamma \sin^3(t^*) + \phi \sin(t^*)$$

$$h^*(t^*) = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{V^*(t^*)}{r^*(t^*)^2}$$

$$\gamma = 0.3, \phi = 0.7, r_r^* = 12$$

$$t^* = \omega \cdot t$$

$$V^*(t^*) = V_r^* + \sin(t^* + \epsilon t^*)$$

$$V_r^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r_r^{*2} h_r^* \right) \omega = 2\pi \cdot f$$

$$h_r^* = 10$$

$$\epsilon = 2/3$$

Expresiones velocidad de deformación

Mientras que las ecuaciones 2.11-2.12, son las velocidades de deformación del filamento oscilante, además de ser estas las que se programaron para lograr el movimiento de la malla.

$$v_{1F}^* = (\cos(t^*)(\phi + 3\gamma \cdot \sin^2(t^*))) \cdot [\cos(\theta)] \quad (2.11)$$

$$v_{2F}^* = \frac{d(h^*(t^*))}{d(t^*)} \cdot [\sin(\theta)] \quad (2.12)$$

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

Resumen de capítulo

En este capítulo, primero se presentan las ecuaciones de gobierno para cada caso de estudio, de manera dimensional y adimensional (ver apéndice A). Después se tratan de manera detallada las condiciones de frontera e iniciales, con ayuda de diagramas del dominio empleado para el análisis de ambos casos de estudio.

3.1. Cuerpo deformable**3.1.1. Ecuaciones de gobierno dimensionales****Ecuación de Continuidad**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.1)$$

Ecuación de Cantidad Movimiento

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.2)$$

3.1.2. Ecuaciones de gobierno adimensionales

Definiendo las variables y parámetros adimensionales:

$$x_1^* = \frac{x_1}{D_c}; x_2^* = \frac{x_2}{D_c}; u_1^* = \frac{u_1}{u_\infty}; u_2^* = \frac{u_2}{u_\infty}; t^* = \frac{t \cdot u_\infty}{D_c}. \quad (3.3)$$

Resultan las siguientes ecuaciones adimensionales (ver apéndice A).

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (3.4)$$

Ecuación de Cantidad Movimiento

Para la primera dirección (x_1):

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (3.5)$$

y para la segunda dirección (x_2):

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (3.6)$$

3.2. Filamento oscilante

3.2.1. Ecuaciones de gobierno dimensionales

Ecuación de Continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.7)$$

Ecuación de Cantidad Movimiento

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.8)$$

3.2.2. Ecuaciones de gobierno adimensionales

Definiendo las variables y parámetros adimensionales propuestos por *Avila y Atluri (2009)*:

$$x_1^* = \frac{x_1}{r_r}; x_2^* = \frac{x_2}{r_r}; u_1^* = \frac{u_1}{r_r \omega}; u_2^* = \frac{u_2}{r_r \omega}$$

Resultan las siguientes ecuaciones adimensionales (ver apéndice A).

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (3.9)$$

Ecuación de Cantidad Movimiento

Para la primera dirección (x_1):

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (3.10)$$

y para la segunda dirección (x_2):

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (3.11)$$

3.3. Condiciones de frontera

3.3.1. Cuerpo deformable

Las condiciones de frontera para el cuerpo deformable son:

- En la entrada, $x_1 = -200r_c$ y $-100r_c \leq x_2 \leq 100r_c$ se estableció $u_1 = 1$ y $u_2 = 0$.
- En la salida, $x_1 = 200r_c$ y $-100r_c \leq x_2 \leq 100r_c$ se estableció $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$.
- En la pared superior, $x_2 = 100r_c$ y $-200r_c \leq x_1 \leq 200r_c$ se estableció $u_1 = 0$ y $u_2 = 0$.
- En la pared inferior, $x_2 = -100r_c$ y $-200r_c \leq x_1 \leq 200r_c$ se estableció $u_1 = 0$ y $u_2 = 0$.
- En el perímetro del cuerpo deformable $u_1 = v_{1C}$ y $u_2 = v_{2C}$ (ver ecuaciones 2.5-2.8).

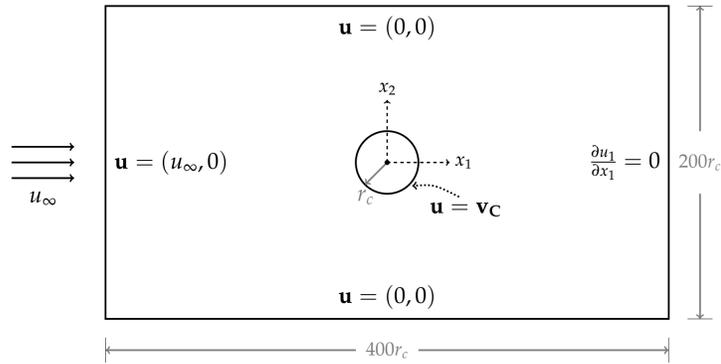


FIGURA 3.1: Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Cuerpo deformable. Donde las condiciones iniciales son: $u_1 = 0$; $u_2 = 0$ y $v_{1C} = 0$; $v_{2C} = 0$

3.3.2. Filamento oscilante

La condiciones de frontera para el Filamento oscilante son:

- En la cavidad circular, $r = 300r_r$ el campo velocidad es $u_1 = 0$ y $u_2 = 0$.
- En el Filamento oscilante, $u_1 = v_{1F}$ y $u_2 = v_{2F}$ (ver ecuaciones 2.11-2.12).

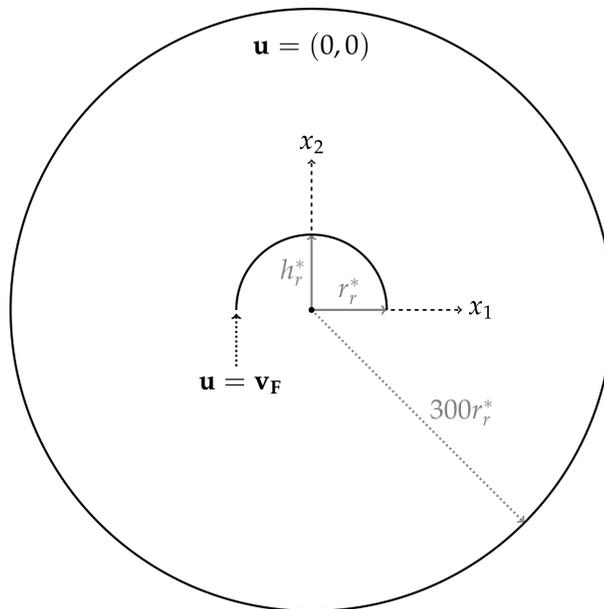


FIGURA 3.2: Dominio en estudio y condiciones de frontera para el análisis del Filamento oscilante. Donde las condiciones iniciales son: $u_1 = 0$; $u_2 = 0$ y $v_{1F} = 0$; $v_{2F} = 0$

CAPÍTULO 4

MODELO NUMÉRICO

Resumen de capítulo

En este capítulo se hace una breve descripción del Método numérico empleado y de la naturaleza del código (Solver) con el que se desarrolló el presente trabajo. Además, se explica de manera muy concisa la formulación ALE usada en esta investigación (aplicada al movimiento de las mallas computacionales) y además de comentar como es que se tratan las condiciones de frontera.

4.1. Método de Elementos Espectrales

Las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensionales para flujo incompresible no estacionario y de manera adimensional se resolvieron mediante el Método numérico de Elementos Espectrales por sus siglas en inglés SEM (Karniadakis, 2005).

EL (SEM) empleado por el Solver, en concreto (Nek5000 v19.9, 2021); Software libre y abierto, tiene una discretización espacial basada en Elementos espectrales (Patera, 1984), que es en esencia, una técnica de residuos ponderados de alto orden similar al Método de elementos finitos.

En otras palabras, para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el Método de Elementos Espectrales (SEM) se considera una malla de K macroelementos que componen al Dominio Computacional. Para el presente trabajo, se elaboraron dos mallas simples, la primera para el análisis del Cuerpo deformable con 296 macroelementos y la segunda para el caso de Filamento oscilante con 141 macroelementos.

Siendo así, es en este dominio donde tanto los campos a solucionar (presión, velocidad, vorticidad) como las geometrías de cada caso, son representadas mediante expansiones polinomiales de orden N , y para solucionar de manera numérica estas expansiones se utilizan polinomios Gauss - Lobatto - Legendre (GLL) como base. De manera que, basta con aumentar el grado del polinomio de interpretación para refinar la malla simple, sin necesidad de generar una nueva malla en cada iteración.

Como ya se mencionó, en el SEM, las soluciones son obtenidas mediante Polinomios de Interpolación de Grado N , que son calculadas en cada uno de los macro-elementos totales E , dichos macro-elementos deformables y hexaedricos (similares aun ladrillo) para 3 dimensiones o cuadrilateros para 2 dimensiones. Siendo una de las principales ventajas del SEM, el poder obtener soluciones de alta exactitud con un número de macro-elementos relativamente pequeño, pues la discretización típica implica un número de elementos E oscilando entre 100 y 1,000,000 de orden N de entre 8 y 16, correspondiendo a un número de entre 512 y 4096 puntos por Elemento.

Otra de las ventajas del Método de elementos espectrales es que presenta una dispersión y dispersión numérica muy pequeña, cuestión que toma mucha importancia en cálculos de Estabilidad y Flujos a alto número de Reynolds por ejemplo (Denville, 2002).

4.1.1. Formulación ALE

Para estudiar los patrones de flujo provocados por la deformación tanto del Cuerpo deformable como del Filamento oscilante, y recordando que cada geometría está contenida un dominio Computacional, es necesario que las mallas se muevan (de aquí el nombre de 'mallas móviles), y en orden de lograr este movimiento se emplea la formulación ALE 'Arbitrary Lagrangian-Eulerian'.

La razón por la que se emplea esta formulación, es que, debido al movimiento del dominio y a la existencia de interfaces y superficies libres no resulta útil emplear únicamente la formulación Lagrangiana o Material ni únicamente la formulación Euleriana o Espacial.

Pues, recordando que tanto en la Mecánica del medio continuo como en la Mecánica de fluidos se suelen usar estas dos descripciones (Notas de Clase EMMC, R. Ávila, 2022) , por una parte las expresiones de la descripción Lagrangiana nos permiten conocer 'la historia' de las propiedades de una partícula de fluido conforme transcurre el tiempo, sin importar por cuál región en el espacio está pasando dicha partícula, que asu vez, salió de una posición determinada en el tiempo igual a cero.

Mientras que por otra parte, las expresiones de la descripción Euleriana nos permiten conocer 'la historia' de las propiedades de una partícula de fluido conforme transcurre el tiempo, en puntos específicos del medio continuo con coordenadas espaciales, sin importar de dónde salió la partícula en estudio.

Siendo así, al combinar estas dos descripciones Lagrangiana y Euleriana es que se pueden obtener resultados muchos más preciosos, dando origen a la formulación ALE, pues se puede usar en los puntos móviles, o mejor dicho en los nodos móviles de la malla (medio continuo) la descripción Lagrangiana o Material, o bien, dichos nodos del medio continuo también pueden quedarse inmóviles, utilizando ahora la descripción Euleriana o Espacial, o una combinación de estos dos casos donde los nodos se mueven arbitrariamente para volverse a reacomodar eventualmente.

Planteamiento matemático

Ahora, para presentar de manera sumamente concisa el planteamiento matemático detrás de la formulación ALE que emplea Solver Nek5000 (basado en lo reportado y analizado por Ho L. W. en 1989) se seguirá el procedimiento descrito por (J. Gilberto, 2022) donde sintetiza lo reportado por (Fisher et al., 2017) y (Donea et al., 2004).

Siendo así, de manera homóloga a como lo hace J. Gilberto (2022), consideramos un campo de velocidades $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ que describe una serie de puntos, en los cuales interesa seguir la evolución de ciertas variables y que a su vez es diferente del campo de partículas materiales. Considerese de manera práctica, que \mathbf{w} es la velocidad de la malla y además la derivada material de una función f :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \quad (4.1)$$

Ahora, asignando a una partícula ficticia la velocidad \mathbf{w} , puede definirse la derivada respecto al tiempo de f , siguiendo la definición de derivada material, de tal manera que:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla f \quad (4.2)$$

La cual recibe el nombre de derivada ALE, nótese que para tomar la forma anterior es necesario que tanto \mathbf{u} como \mathbf{w} no sean iguales entre sí, ni tampoco

nulas. A diferencia del caso donde $\mathbf{w} = 0$ donde la malla está fija, y la derivada ALE resulta de la siguiente manera:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.3)$$

Regrasando así, a la descripción Euleriana o material, pues ahora solo la deriva respecto al tiempo; o bien cuando $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, donde se llega a la descripción Lagrangiana y la derivada Material es lo mismo que la derivada ALE.

Ahora, se expresa la velocidad relativa del medio continuo respecto a la del movimiento del marco de referencia de la malla móvil, denotada por \mathbf{c} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{c} \quad (4.4)$$

Resultando que la derivada ALE y la derivada material están relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \quad (4.5)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w} + \mathbf{c}) \cdot \nabla f \quad (4.6)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla f + \mathbf{c} \cdot \nabla f \quad (4.7)$$

Finalmente:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\delta f}{\delta t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f \quad (4.8)$$

Puesto que la derivada material con respecto al tiempo es inherente a las leyes de conservación, el vínculo entre esta y la derivada ALE es necesaria para expresar las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento en la descripción ALE, para los casos de estudio del presente trabajo.

Condiciones de frontera

Según lo reportado sintetizado por (J. Gilberto, 2022) y por (Donea et al., 2004), la formulación ALE puede manejar superficies materiales con las siguientes condiciones, como se describe en (Donea et al., 2004): ninguna partícula debe ser capaz de cruzar la superficie y, a su vez los esfuerzos deben ser continuos a través de dicha superficie. De manera particular en la interacción entre el fluido y la estructura. En orden de cumplir la primera condición, es necesario que tanto las componentes normales a la superficie de la velocidad del fluido como las de la velocidad de la malla, sean iguales:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \quad (4.9)$$

además, considerando un fluido viscoso, tanto la velocidad de la estructura como la del fluido, deben coincidir en la interface:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad (4.10)$$

Lo anterior es posible colocando dos nodos de la malla en dicha zona: uno de fluido y otro estructural. Sacando provecho a la capacidad de la formulación ALE para mover los nodos de la malla de forma arbitraria e incluso de forma independiente al movimiento del fluido, los nodos que pertenecen al fluido se restringen de tal manera que siempre estén junto con los nodos que pertenecen a la estructura. En orden de lograr lo anterior, se asigna en la interfase, a la velocidad de la malla \mathbf{w} , la velocidad propia de la estructura (velocidad de deformación, ya sea del Cuerpo o deformable o del Filamento oscilante). De tal forma que, durante todo el movimiento, los nodos en la interfaz se mantengan juntos, pues ambos nodos poseen la misma velocidad.

CAPÍTULO 5

VALIDACIONES Y COMPARACIONES

Resumen de capítulo

En este capítulo, se presentan las validaciones y comparaciones del método numérico usado en esta investigación. Se muestran comparaciones cuantitativas y cualitativas, primero de dos casos del flujo a través de un cilindro circular fijo, con su respectivo análisis de malla y un tercer caso del flujo a través de un cilindro elipsoidal fijo.

Para validar el método numérico se llevaron acabo tres diferentes simulaciones:

- Simulación del flujo alrededor de un cilindro circular con número de $Re = 100$ (Rajani et. al, 2008).
- Simulación del flujo alrededor de un cilindro circular fijo con número de Reynolds = 190 (Barkley y Henderson, 1996).
- Simulación del flujo alrededor de un cilindro elipsoidal fijo con número de Reynolds = 1000 (Mittal, 1995).

La expresión matemática empleada para determinar el coeficiente de arrastre por sección (perpendicular al flujo) C_D , fue:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2 \cdot D_c} \quad (5.1)$$

Donde: F_D es la fuerza de arrastre del flujo, ρ es la densidad del fluido, u_∞ es la velocidad de corriente libre y D_c es el diámetro del círculo base (unitario).

Mientras que la expresión matemática usada para determinar el error relativo E_{rel} , fue:

$$E_{rel} = \frac{|V_R - V_{SEM}|}{V_R} \quad (5.2)$$

Donde: V_R es el coeficiente de arrastre por sección (perpendicular al flujo) reportado por Rajani et. al (2008) y V_{SEM} es el coeficiente de arrastre por sección (perpendicular al flujo) obtenido en el presente trabajo.

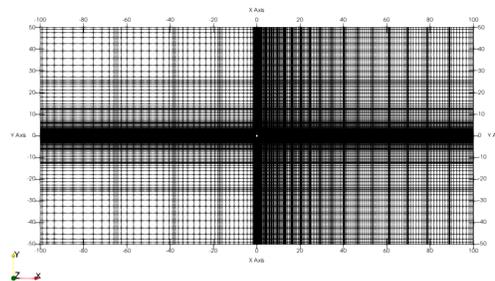
5.1. Análisis de Independencia de malla

5.1.1. Cilindro circular fijo

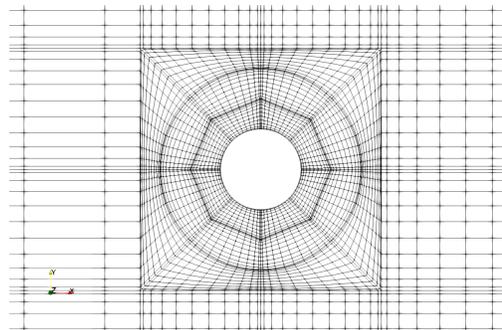
Se realizó un análisis de independencia de malla para el caso del cilindro circular fijo. Para este análisis fue evaluada una malla (296 macro-elementos) con diferentes grados del polinomio de interpolación (GLL): 10, 12 y 14.

Como se puede observar en la figuras 5.3a (transitorio) y 5.3b (estado periódico), la velocidad en el tiempo varía de manera considerable entre 10 GLL (línea azul) y 12 GLL (línea roja), sin embargo entre 12 GLL (línea roja) y 14 GLL (línea verde) la variación es casi nula.

Por lo anterior, es que se seleccionó la malla con el grado de interpolación $GLL = 12$ (ver figura 5.2) para llevar a cabo los cálculos de los casos de validación y comparación donde se tiene un cilindro circular fijo.

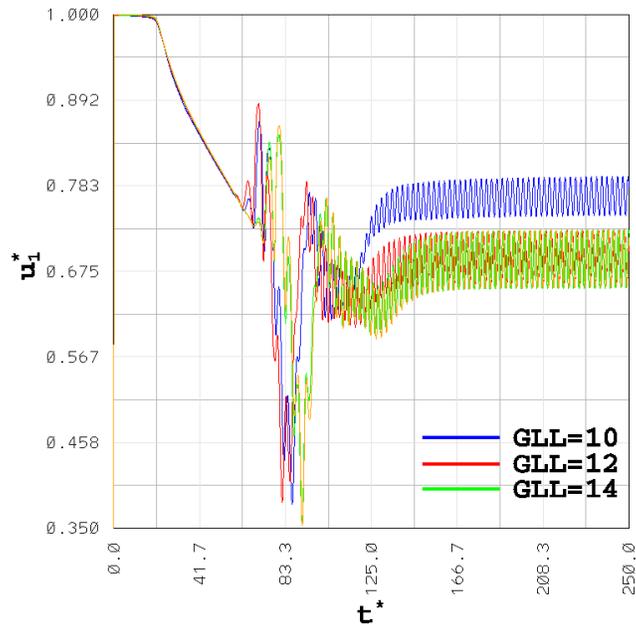


(a)

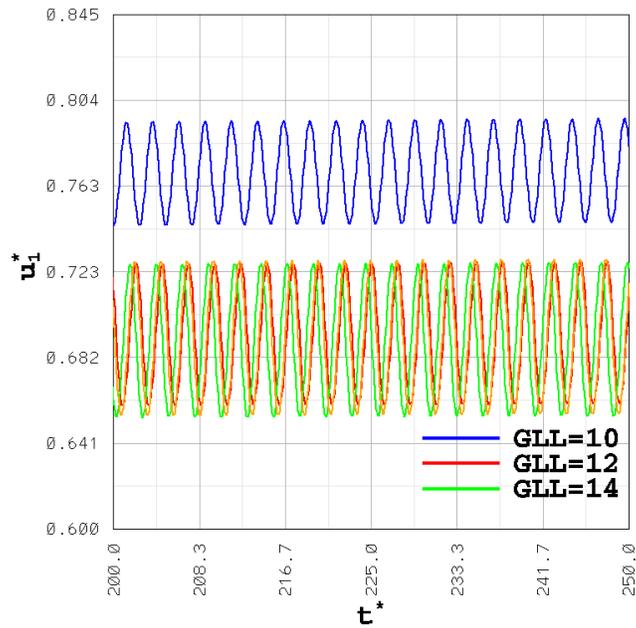


(b)

FIGURA 5.1: Análisis de independencia de la malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 12 ; Número de macro-elementos: 296 [malla simple]). Subfigura a) malla computacional: vista completa en el cilindro circular fijo; b) malla computacional: vista aumentada en el cilindro circular fijo.



(a)



(b)

FIGURA 5.2: Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 10, 12 y 14 ; Número de macroelementos: 296). Subfigura a) gráfica de velocidad contra tiempo en el cilindro circular fijo, estado transitorio; b) gráfica de velocidad contra tiempo en el cilindro circular fijo, estado periódico.

5.2. Flujo laminar alrededor de un cilindro circular fijo con número de Reynolds igual a 100

Como se puede observar en la figura 5.1, la calle de vortices en un cilindro circular fijo con número de Reynolds igual a 100, tiene una gran similitud tanto en la simulación realizada en este estudio, como en lo reportado por Rajani et. al (2008) en su estudio numérico.

En la figura 5.1, se aprecia el campo de vorticidad, especialmente el desprendimiento de 4 vortices (en rojo sentido anti-horario y en azul sentido horario) que coincide en ambos estudios. Mientras que al comparar los Coeficientes de arrastre, entre el presente trabajo y lo publicado por Rajani et. al (2008), se obtuvo un error relativo de 2,9 (%), ver tabla 5.1.

C_D (Cilindro circular, $Re = 100$)	
Rajani	SEM
1.3353	1.3742

TABLA 5.1: Comparación de Coeficientes de arrastre.

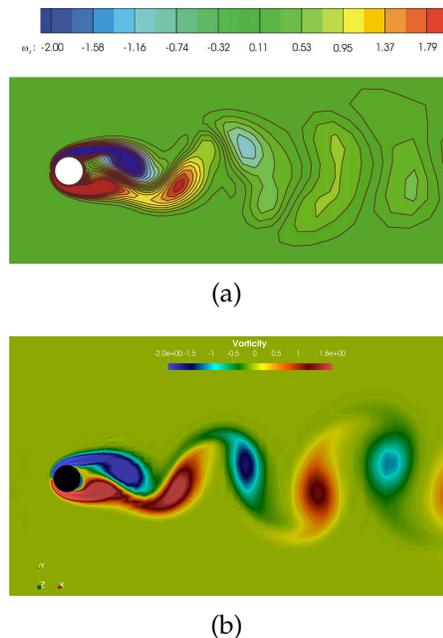


FIGURA 5.3: Comparación de la calle de vortices generada por un cilindro circular fijo para un $Re = 100$. Subfigura a) calle de vortices en un Cilindro circular fijo con $Re = 100$ (Rajani et. al, 2008); b) calle de vortices en un Cilindro circular fijo con $Re = 100$ (SEM).

5.3. Flujo laminar alrededor de un cilindro circular fijo con número de Reynolds igual a 190

Para hacer la comparación tanto de los coeficientes de arrastre (C_D) como de Presión (C_P) ver el tabla 5.2, respecto a lo reportado por Barkley y Henderson (1996), se hizo el cálculo de estos coeficientes de arrastre por sección transversal (normal al flujo) y de presiones, considerando el diámetro del círculo base (unitario) $D_c = 1.0$.

Para determinar el coeficiente de presión C_P , se empleo la expresión matemática:

$$C_p = \frac{p_b - p_\infty}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_\infty^2} \quad (5.3)$$

Donde: p_b es la presión en un punto base ($x_1 = 0.5$ y $x_2 = 0.0$) promediada en el tiempo, p_∞ es la presión en el infinito ($x_1 = -16r_c$ y $x_2 = 0.0$), ρ es la densidad del fluido, y u_∞ es la velocidad de corriente libre.

En la comparación de los Coeficientes en el cilindro circular (tabla 5.2), se obtuvo un error relativo de 1,5 (%) para el caso de los coeficientes de arrastre y 5,8 (%) para el caso del coeficiente de presión. De acuerdo a lo anterior, se puede concluir que los resultados obtenidos con el método numérico son satisfactorios.

C_D (Cilindro circular, $Re = 190$)	
Barkley & Henderson	SEM
1.3442	1.3647
C_P (Cilindro circular, $Re = 190$)	
Barkley & Henderson	SEM
0.9326	0.9822

TABLA 5.2: Comparación de Coeficientes de arrastre y presión.

5.4. Flujo laminar alrededor de un cilindro elipsoidal fijo con número de Reynolds igual a 1000

C_D (Cilindro elipsoidal, $Re = 1000$)	
Mittal	SEM
0.78	0.7455

TABLA 5.3: Comparación de Coeficientes de arrastre.

En la comparación de los Coeficientes de arrastre, entre el presente trabajo y lo publicado por Mittal (1995), se obtuvo un error relativo de 4,4 (%) para el caso del cilindro elipsoidal, ver cuadro 5.2.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS

Resumen de capítulo

En el presente capítulo, se hace un compendio de los resultados obtenidos para los dos casos de estudio de esta investigación. En ambos, además de presentar y analizar resultados tales como los campos de velocidad, presiones y vorticidad así como coeficientes de arrastre y fuerzas hidrodinámicas, también se muestran sus respectivos análisis de malla y discusiones en cada caso. Finalmente, para el caso del Filamento oscilante (medusa) se muestra una comparación de los resultados obtenidos en la presente investigación y un caso de estudio similar reportado en la literatura.

6.1. Cilindro deformable

Los nueve diferentes casos que se presentan a continuación, son resultado de la deformación del Cilindro en las direcciones principales x_1 y x_2 , los nueve casos están inmersos en un flujo con el Número de Reynolds igual con 100, 10 y $1E(-4)$, respectivamente, y amplitud igual a 0.5, el único parámetro que diferencia entre sí a estos casos es la frecuencia de oscilación, siendo 0.1, 0.5 y 1.0 respectivamente.

En la siguiente recopilación de casos, se pueden apreciar las gráficas de la evolución del Coeficiente de arrastre en el tiempo (considerado solo un ciclo de oscilación cuando el flujo ha alcanzado un estado periódico). Las gráficas están divididas en cuatro segmentos que representan $1/4$ del periodo de oscilación, y de acuerdo a las ecuaciones dinámicas expuestas anteriormente, al primer cuarto del periodo se alcanza la máxima elongación en x_2 , a la mitad del periodo se retorna al círculo base, al tercer cuarto se alcanza la máxima deformación en el eje x_1 , y finalmente en el último cuarto se vuelve al círculo base terminando el

Cuerpo deformable			
Caso 1	$Re = 100$	$a = 0.5$	$f = 0.1$
Caso 2	$Re = 100$	$a = 0.5$	$f = 0.5$
Caso 3	$Re = 100$	$a = 0.5$	$f = 1.0$

TABLA 6.1: Parámetros con los cuales se llevaron acabo las simulaciones del Cuerpo deformable, $Re = 100$.

Cuerpo deformable			
Caso 1	$Re = 10$	$a = 0.5$	$f = 0.1$
Caso 2	$Re = 10$	$a = 0.5$	$f = 0.5$
Caso 3	$Re = 10$	$a = 0.5$	$f = 1.0$

TABLA 6.2: Parámetros con los cuales se llevaron acabo las simulaciones del Cuerpo deformable, $Re = 10$.

Cuerpo deformable			
Caso 1	$Re = 1E(-4)$	$a = 0.5$	$f = 0.1$
Caso 2	$Re = 1E(-4)$	$a = 0.5$	$f = 0.5$
Caso 3	$Re = 1E(-4)$	$a = 0.5$	$f = 1.0$

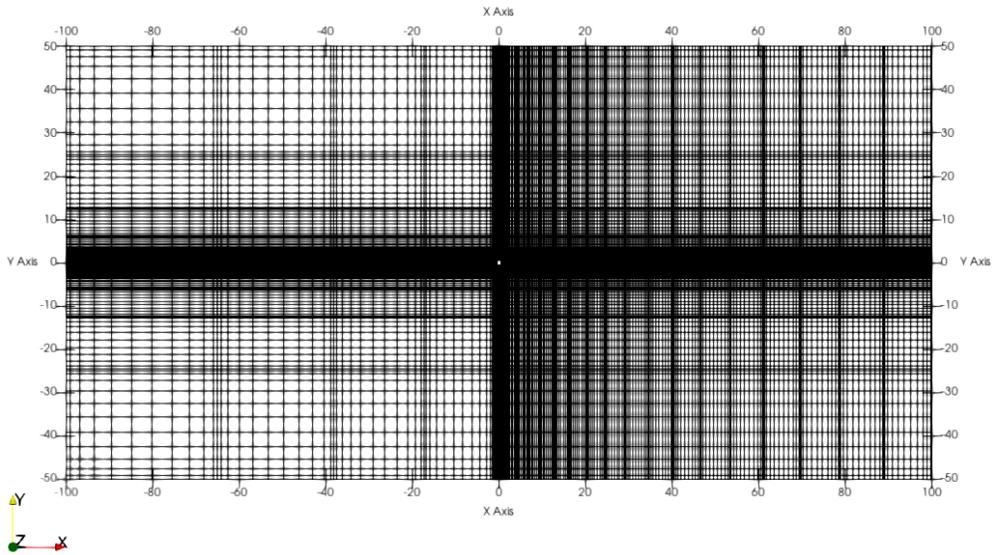
TABLA 6.3: Parámetros con los cuales se llevaron acabo las simulaciones del Cuerpo deformable, $Re = 1E(-4)$.

ciclo de deformación del cilindro.

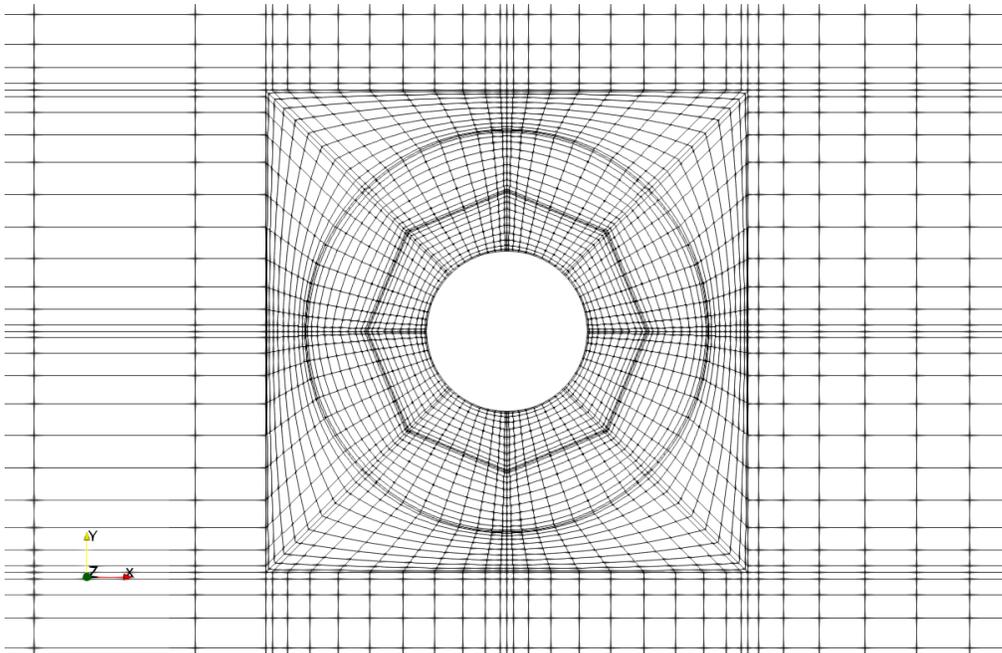
6.1.1. Análisis de Independencia de malla

Se realizó un análisis de independencia de malla para el caso del Cuerpo deformable. Para este análisis fue evaluada una malla (296 macro-elementos) con diferentes grados del polinomio de interpretación (GLL): 10, 12 y 14. Como se puede observar en la figuras 6.2a (transitorio completo) y 6.22b (transitorio al final de la simulación), la velocidad en el tiempo varía en los tres casos: 10 GLL (línea azul), 12 GLL (línea roja) y 14 GLL (línea verde). Sin embargo, a pesar de esta variación, dichos valores oscilan en un rango prácticamente constante.

Por lo anterior y ya que las visualizaciones de los campos de vorticidad son satisfactorias, es que se seleccionó la malla con el grado de interpolación GLL = 12 (ver figura 6.1).

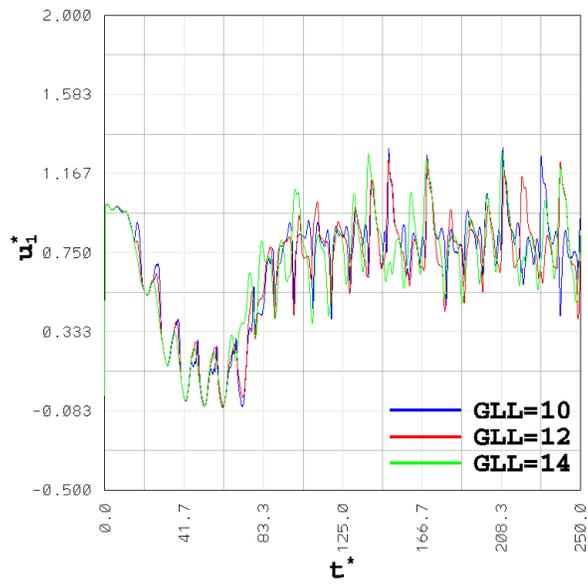


(a)

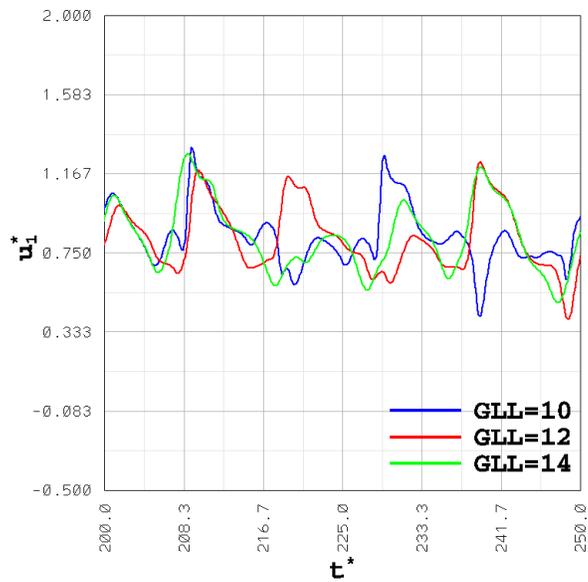


(b)

FIGURA 6.1: Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 12 ; Número de macro-elementos: 296 [Malla simple]). Subfigura a) malla computacional, vista completa del dominio; b) malla computacional, vista aumentada en el Cuerpo deformable.



(a)



(b)

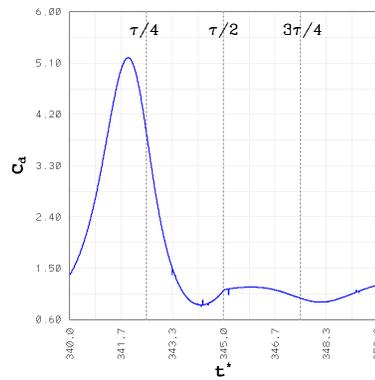
FIGURA 6.2: Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 10,12 y 14 ; Número de macroelementos: 296 [Malla simple]). Subfigura a) gráfica de velocidad contra tiempo en el Cuerpo deformable, estado transitorio completo; b) gráfica de velocidad contra tiempo en el Cuerpo deformable, estado transitorio al final de la simulación.

6.1.2. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds igual a 100 y Amplitud de deformación igual con 0.5

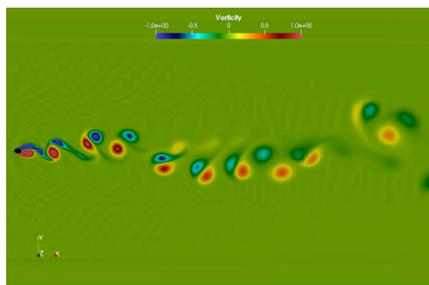
Frecuencia de deformación igual a 0.1

Podemos apreciar en la figura 6.3 que en este caso a baja frecuencia, el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo de 5.192 y uno mínimo de 0.750, de manera que no alcanza valores negativos.

Además, el Coeficiente de arrastre en el tiempo se comporta de tal manera que poco antes de que la superficie deformada sea la máxima y mientras es perpendicular al flujo, el valor del CD tiende a aumentar alcanzando su máximo valor para después comenzar a descender, esto, antes de llegar a la máxima elongación del cilindro que ocurre en el primer cuarto del periodo de deformación.



(a)



(b)

FIGURA 6.3: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 100, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.1. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable.

Frecuencia de deformación igual a 0.5

En este caso, figura 6.4 con frecuencia media el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo de 15.24 y uno mínimo de -2.599, de manera que ya adquiere valores negativos.

El CD se comporta de manera similar al caso anterior, pues el Coeficiente de arrastre en el tiempo llega a su máximo poco antes de que la superficie deformada sea la máxima mientras es perpendicular al flujo, el valor del CD tiende a aumentar alcanzando su máximo valor para después comenzar a descender, esto antes de llegar a la máxima elongación el cilindro que ocurre en el primer cuarto del periodo de deformación.

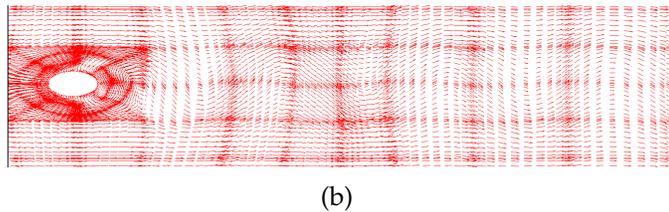
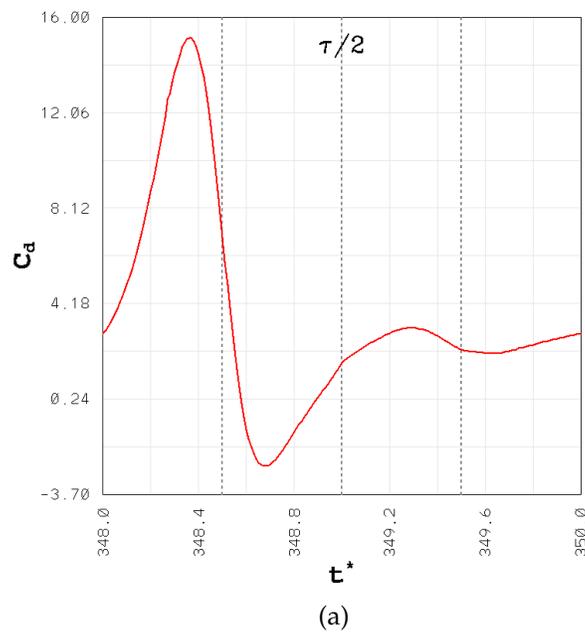
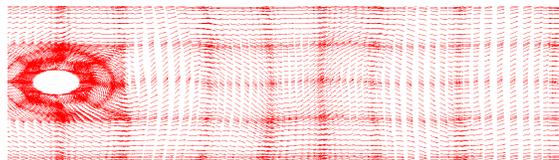
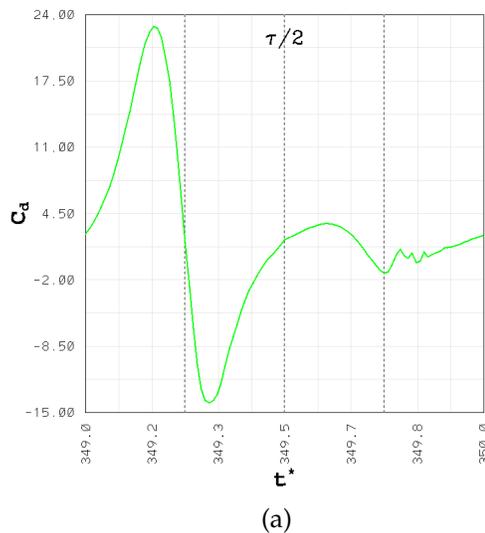


FIGURA 6.4: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 100, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.5. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.

Frecuencia de deformación igual a 1.0

Podemos ver en figura 6.5 la gráfica del CD respecto al tiempo que en este caso a la mayor frecuencia de oscilación, el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo de 22.84 y uno mínimo de -14.06, de manera que a diferencia del caso a frecuencia media, aquí se adquieren valores aún más negativos.

Además, se sigue un patrón un poco similar a los dos casos anteriores, pero con la diferencia de que los valores extremos adquiridos son mayores, tanto en la región negativa como en la positiva. El Coeficiente de arrastre en el tiempo se comporta de tal forma que poco antes de que la superficie deformada sea la máxima y mientras es perpendicular al flujo, el valor del CD tiende a aumentar alcanzando su máximo valor para después comenzar a descender, esto antes de llegar a la máxima elongación el cilindro que ocurre en el primer cuarto del periodo de deformación.



(b)

FIGURA 6.5: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 100, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 1.0. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.

Como se puede observar en figura 6.6 en las curvas ($C_d - t$) los esfuerzos sobre la geometría deformable y por lo tanto el Coeficiente de arrastre son sensibles a la frecuencia de oscilación. En los tres casos estudiados ($f = 0.1$, $f = 0.5$ y $f = 1.0$) se presenta un incremento en la región negativa conforme el periodo de oscilación disminuye.

Sin embargo, es cierto que al aumentar la frecuencia de oscilación no solo aumenta la región negativa del Coeficiente de arrastre, sino que también aumenta la región positiva. Este comportamiento de la vorticidad está muy relacionado con los esfuerzos sobre la geometría oscilante y a la dirección de la deformación, pues cuando la geometría se deforma en la dirección opuesta al flujo los esfuerzos aumentan y cuando la deformación va en el mismo sentido que el flujo los esfuerzos disminuyen, ya que en esencia los esfuerzos son las derivadas parciales de la velocidad respecto a las direcciones principales (x_1 y x_2 o X y Y).

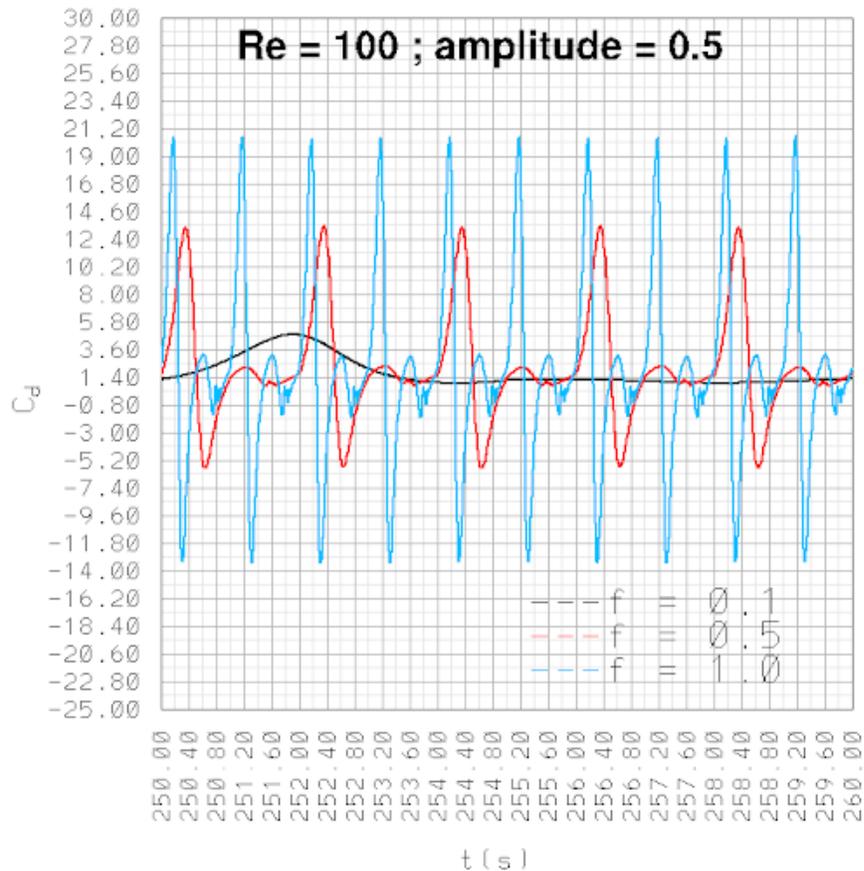


FIGURA 6.6: Coeficiente de arrastre en el tiempo del Cilindro deformable con $f = 0.1$, $f = 0.5$ y $f = 1.0$

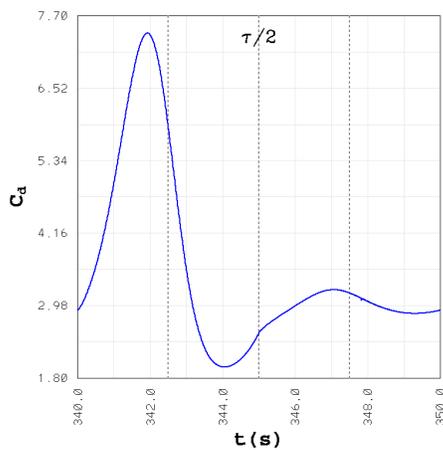
6.1.3. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds fijado a 10 y con Amplitud de deformación igual con 0.5

Frecuencia de deformación igual a 0.1

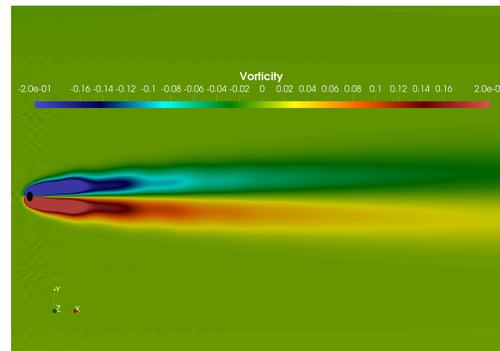
Como se puede ver en la figura 6.7a, para este caso (baja frecuencia, $f = 0.1$) el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo aproximado de 7.418 y uno mínimo de 1.975, de manera que no alcanza valores negativos. Por otra parte, en la imagen 6.7b se puede notar que aún no hay desprendimiento de vorticidades en la superficie del cuerpo deformable.

Además, el Coeficiente de arrastre en el tiempo se comporta de manera similar a los casos anteriores, es decir que poco antes de que la superficie deformada sea la máxima y mientras es perpendicular al flujo, el valor del CD tiende a aumentar alcanzando su máximo valor para después comenzar a descender.

En otras palabras, el cuerpo deformable presenta el mayor valor del Coeficiente de arrastre antes de llegar a su máxima elongación (que ocurre en el primer cuarto del periodo de deformación).



(a)



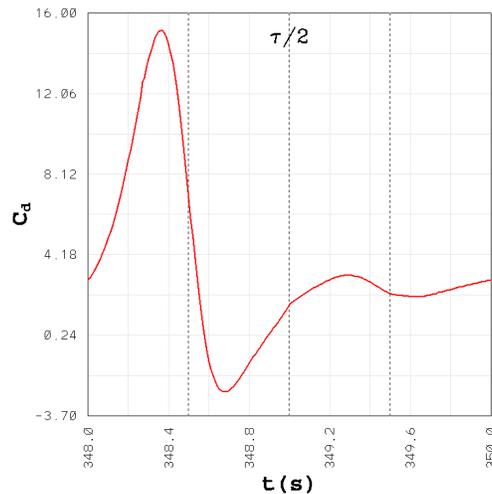
(b)

FIGURA 6.7: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 10, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.1. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.

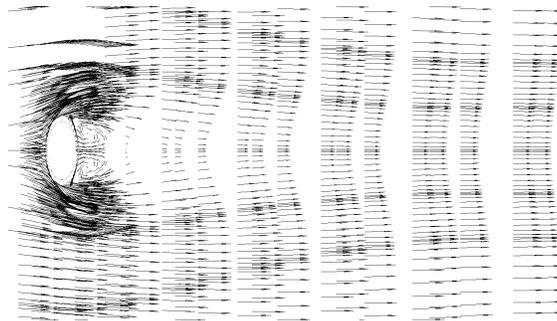
Frecuencia de deformación igual a 0.5

Como se puede ver en la figura 6.8a, para este caso (frecuencia media, $f = 0.5$) el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo aproximado de 15.24 y uno mínimo de -2.599, de manera que ya oscila en valores negativos. Por otra parte, en la imagen 6.8b se puede notar que ya hay formación de vorticidades en la superficie trasera del cuerpo deformable, es decir una zona de recirculación.

Se mantiene la tendencia de los casos anteriores, pues el cuerpo deformable presenta el mayor valor del Coeficiente de arrastre antes de llegar a su máxima elongación (que ocurre en el primer cuarto del periodo de deformación).



(a)



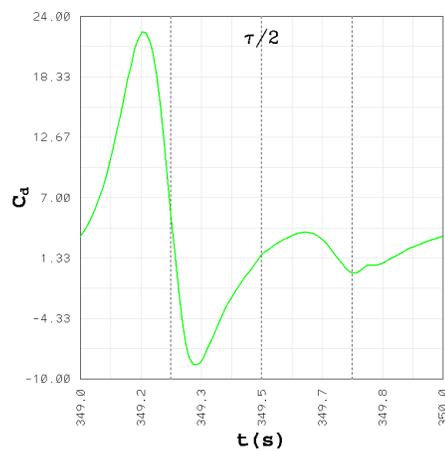
(b)

FIGURA 6.8: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 10, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.5. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.

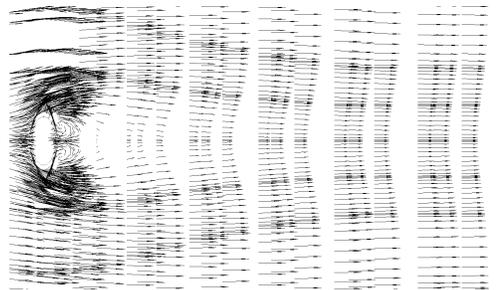
Frecuencia de deformación igual a 1.0

Como se puede observar en la figura 6.9a, para este caso (frecuencia alta, $f = 1.0$) el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo aproximado de 23.00 y uno mínimo de -8.825, de manera que también oscila en valores negativos. Por otra parte, en la imagen 6.9b se puede notar que como en el caso anterior con frecuencia media, también hay formación de vorticidades en la superficie trasera del cuerpo deformable, es decir una zona de recirculación.

Se mantiene la tendencia de todos los casos anteriores, pues el cuerpo deformable presenta el mayor valor del Coeficiente de arrastre antes de llegar a su máxima elongación a lo largo del eje perpendicular al flujo x_2 .



(a)



(b)

FIGURA 6.9: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = 10, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 1.0. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de velocidad del Cuerpo deformable.

6.1.4. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds fijado a $1E(-4)$ y con Amplitud de deformación igual con 0.5

Frecuencia de deformación igual a 0.1

Como se puede ver en la figura 6.10a, para este caso (baja frecuencia, $f = 0.1$) el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo aproximado de $1.209E(5)$ y uno mínimo de $1.02E(5)$, de manera que está lejos de alcanzar valores negativos. Por otra parte, en la imagen 6.10b se puede notar que hay desprendimiento de vórtices en la superficie del cuerpo deformable, de forma simétrica en magnitud a lo largo de la dirección del flujo, pero opuestos en sentido. Mientras que en la imagen 6.10c, se puede observar que el campo de velocidades es simétrico y además conforme se acerca a la superficie del cilindro su magnitud disminuye considerablemente. Además, el Coeficiente de arrastre en el tiempo ya no se comporta de manera similar a todos los casos anteriores, es decir, el cuerpo deformable presenta el mayor valor del Coeficiente de arrastre al mismo tiempo que alcanza su máxima elongación (esto ocurre en el primer cuarto del periodo de deformación).

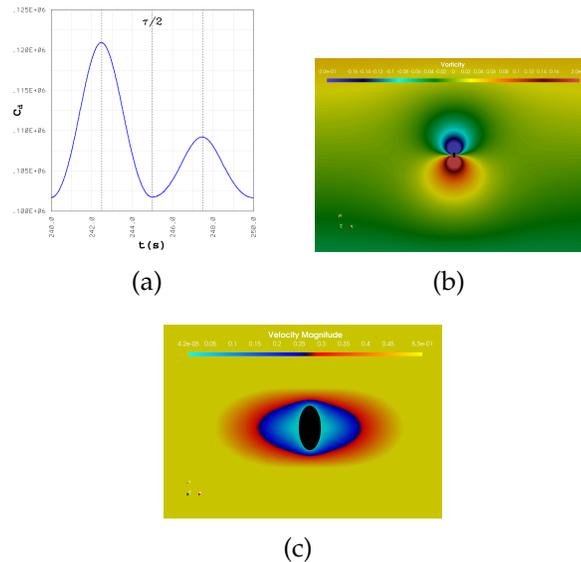


FIGURA 6.10: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = $1E(-4)$, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.1. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable; c) campo de velocidad del Cuerpo deformable (iso-superficies).

Frecuencia de deformación igual a 0.5

Como se puede observar en la figura 6.11a, para este caso (frecuencia media, $f = 0.5$) el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo aproximado de $1.213E(5)$ y uno mínimo de $1.02E(5)$ muy similar al caso anterior con frecuencia baja, de manera que está lejos de alcanzar valores negativos. Por otra parte, en la imagen 6.11b se puede notar que hay desprendimiento de vórtices en la superficie del cuerpo deformable, de forma simétrica en magnitud, pero opuestos en sentido. Mientras que en la imagen 6.11c, se puede observar la misma tendencia que el caso con frecuencia media, pues el campo de velocidades es simétrico y además conforme se acerca a la superficie del cilindro su magnitud disminuye considerablemente. Además, el Coeficiente de arrastre en el tiempo vuelve a tomar la tendencia de que justo cuando la superficie deformada es la máxima y mientras es perpendicular al flujo, el valor del CD tiende a aumentar alcanzando su máximo valor para después comenzar a descender. En otras palabras, el cuerpo deformable presenta el mayor valor del Coeficiente de arrastre antes de alcanzar su máxima elongación (esto ocurre en el primer cuarto del periodo de deformación).

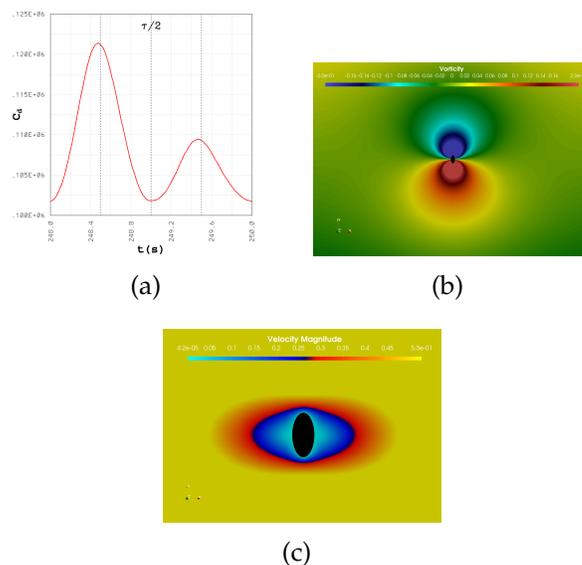


FIGURA 6.11: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = $1E(-4)$, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 0.5. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable; c) campo de velocidad del Cuerpo deformable (iso-superficies).

Frecuencia de deformación igual a 1.0

Como se puede observar en la figura 6.12a, para este caso (frecuencia alta, $f = 1.0$) el Coeficiente de arrastre oscila entre un valor máximo aproximado de $1.217E(5)$ y uno mínimo de $1.02E(5)$ muy similar a los casos anteriores con frecuencia baja y media, de manera que también está lejos de alcanzar valores negativos. Por otra parte, en la imagen 6.12b se puede notar que hay desprendimiento de vórtices en la superficie del cuerpo deformable, de forma simétrica en magnitud, pero opuestos en sentido y adicionalmente se puede notar la aparición de dos vórtices secundarios en este caso. Mientras que en la imagen 6.12c, se puede observar la misma tendencia que el caso con frecuencia media, pues el campo de velocidades es simétrico y además conforme se acerca a la superficie del cilindro su magnitud disminuye considerablemente. Además, el Coeficiente de arrastre en el tiempo presenta la tendencia de que justo cuando la superficie deformada es la máxima y mientras es perpendicular al flujo, el valor del CD tiende a aumentar alcanzando su máximo valor para después comenzar a descender, pero esta vez alcanza el máximo valor antes en comparación con los casos de frecuencia media y baja.

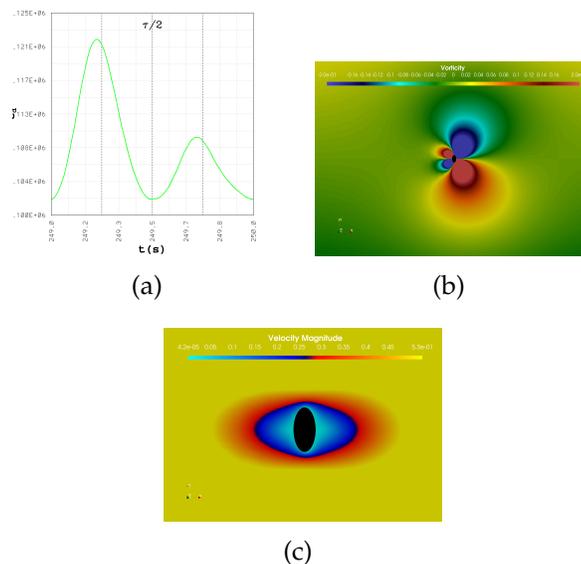


FIGURA 6.12: Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Cilindro deformable con número de Reynolds = $1E(-4)$, Amplitud de deformación = 0.5 y frecuencia de deformación = 1.0. Subfigura a) coeficiente de arrastre en el tiempo del Cuerpo deformable; b) campo de vorticidad del Cuerpo deformable; c) campo de velocidad del Cuerpo deformable (iso-superficies).

6.2. Filamento oscilante (Medusa)

6.2.1. Análisis de Independencia de malla

Se realizó un análisis de independencia de malla para el caso del Filamento oscilante. Para este análisis fue evaluada una malla (141 macro-elementos) con diferentes grados del polinomio de interpolación (GLL): 10, 12 y 14.

Como se puede observar en la figuras 6.14a (estado transitorio) y 6.14b (estado periódico), la velocidad en el tiempo prácticamente no varía en los tres casos: 10 GLL (línea azul), 12 GLL (línea roja) y 14 GLL (línea verde).

Por lo anterior y ya que las visualizaciones de los campos de vorticidad son satisfactorias, así como los tiempos de computo, es que se seleccionó la malla con el grado de interpolación GLL = 12 (ver figura 6.13).

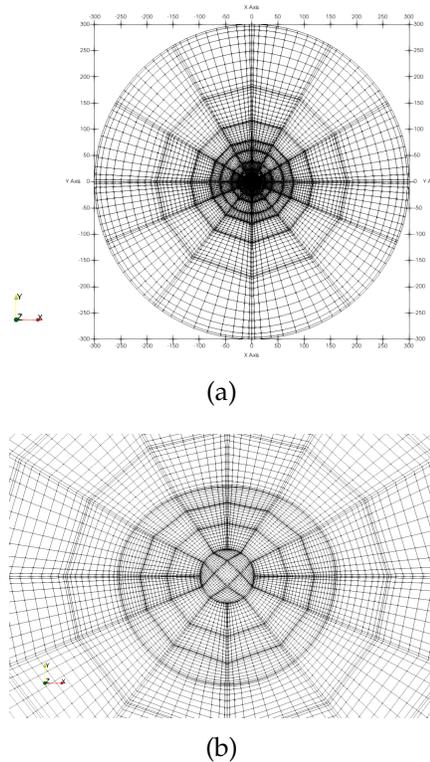


FIGURA 6.13: Malla computacional del Filamento oscilante (medusa), empleada en el SEM (Grado de interpolación: 12 ; Número de macro-elementos: 141 [Malla simple]). Subfigura a) malla computacional, vista completa del dominio; b) malla computacional, vista aumentada en el filamento oscilante.

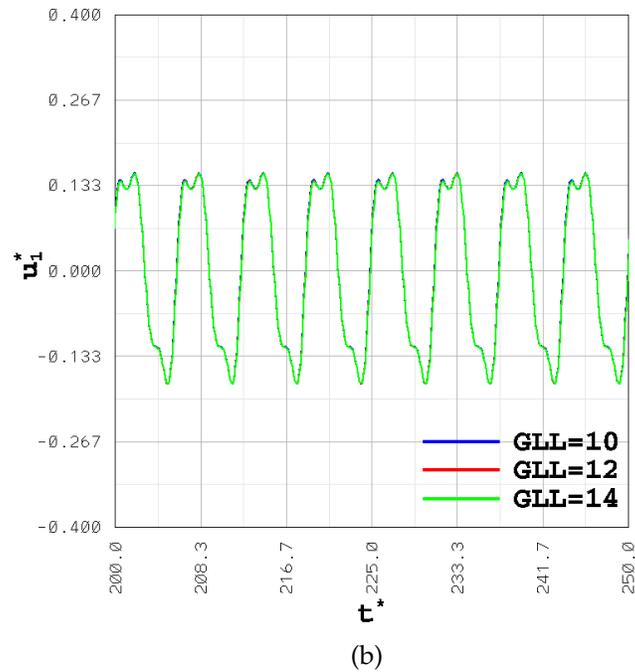
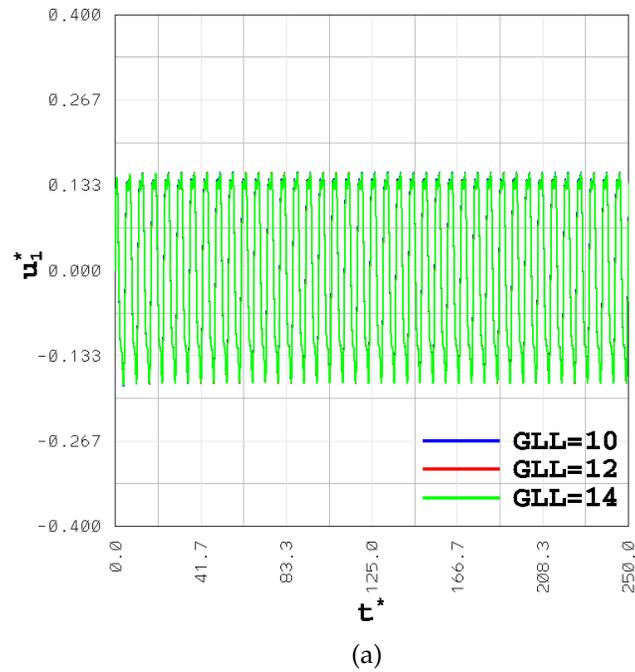


FIGURA 6.14: Análisis de independencia de malla empleada en el SEM (Grado de interpolación: 10,12 y 14 ; Número de macroelementos: 141 [Malla simple]). Subfigura a) gráfica de velocidad contra tiempo en el Filamento oscilante (medusa), estado transitorio; b) gráfica de velocidad contra tiempo en el Filamento oscilante (medusa), estado periódico.

6.2.2. Cálculo de fuerzas hidrodinámicas

Las fuerzas hidrodinámicas F_{x_1} y F_{x_2} fueron calculadas a lo largo de la superficie total del filamento (superficies superior e inferior) mediante el Vector de esfuerzos $\vec{t}^{(\vec{n})}$.

En otras palabras, dichas fuerzas se calcularón mediante el producto punto del tensor de esfuerzos σ_{ij} (esfuerzos cortantes viscosos y presiones) y el vector normal unitario \vec{n} a cada punto sobre la superficie del filamento.

Siendo que el Tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p \delta_{ij} \quad (6.1)$$

y recordando que la ley de Stokes para un fluido Newtoniano incompresible (densidad constante), expresa que los esfuerzos viscosos son proporcionales a la rapidez de deformación:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.2)$$

De tal manera que el Tensor de esfuerzos (cortantes y normales) para un fluido incompresible newtoniano queda definido como:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij} \quad (6.3)$$

Donde: δ_{ij} es la delta de Kronecker, p es un escalar (presión) y μ la viscosidad dinámica del fluido.

Ahora, sabiendo lo anterior el vector de esfuerzos queda expresado como:

$$\vec{t}^{(\vec{n})} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n} \quad (6.4)$$

Finalmente, F_{x_1} y F_{x_2} fueron calculadas mediante las siguientes expresiones:

$$F_{x_1} = \int t_1^{(\vec{n})} dl ; F_{x_2} = \int t_2^{(\vec{n})} dl \quad (6.5)$$

donde: $t_1^{(\vec{n})}$ es la primera componente del vector esfuerzo orientado en la dirección principal \hat{i}_1 , $t_2^{(\vec{n})}$ es la segunda componente del vector esfuerzo orientado en la dirección principal \hat{i}_2 (el filamento esta orientado en esta dirección ¹) y l es el perímetro total del filamento.

¹Para el análisis del caso del Filamento oscilante, se graficó la fuerza hidrodinámica F_{x_2} en el tiempo, debido a que en la dirección \hat{i}_2 está orientada la Medusa y es en esta misma dirección donde sería capaz de tener propulsión mediante su movimiento armónico.

6.2.3. Simulación numérica del flujo laminar alrededor de un Filamento oscilante con Amplitud de deformación igual con 0.5 y Frecuencia de deformación igual a $1/2\pi$

Número de Reynolds fijado a 144

Como se explica en las ecuaciones anteriores para el caso del (filamento oscilante), y concretamente para un $Re = 144$, se ha calculado la fuerza hidrodinámica en la dirección x_2 . Dicha fuerza toma en consideración los esfuerzos cortantes viscosos y las presiones a lo largo de toda la superficie del filamento, por lo que se puede determinar que cuando está fuerza hidrodinámica orientada en el eje vertical adquiere valores positivos el filamento se está teniendo empuje en el sentido positivo de dicho eje, y cuando adquiere valores negativos se puede interpretar que el filamento está frenando (más no retrocediendo).

Lo anterior tiene consistencia cuando se compara la fluctuación de dicha fuerza hidrodinámica (figura 6.15) en el tiempo con el campo de presiones (figura 6.16b). Pues en la gráfica 6.15 se muestra que el valor máximo de la Fuerza hidrodinámica para el filamento ocurre cuando se encuentra a $3\tau/4$ de su periodo de deformación, es decir justo al final de la etapa de contracción, y al comparar esto con el campo de presiones justo en ese momento (imagen 6.16b) se puede observar que hay una diferencia de presiones entre la parte interior-inferior del modelo de la Medusa (presiones positivas) y la parte exterior-superior del filamento (presiones negativas).

Esta diferencia de presiones es lo que permite en gran parte que la Medusa tenga empuje y se propulse a través del fluido, 'jalandose' o siendo succionada en su parte superior por el fluido circundante. También es pertinente señalar que dicha diferencia podría ser, asu vez inducida por el desprendimiento de vórtices sobre la superficie superior del filamento (principalmente), pues como se puede observar en la figura 6.16a, en la región exterior-superior (donde hay una presión negativa) del filamento existe el desprendimiento de dos grandes vórtices anti-simétricos, es decir de magnitud idéntica pero de sentido opuesto.

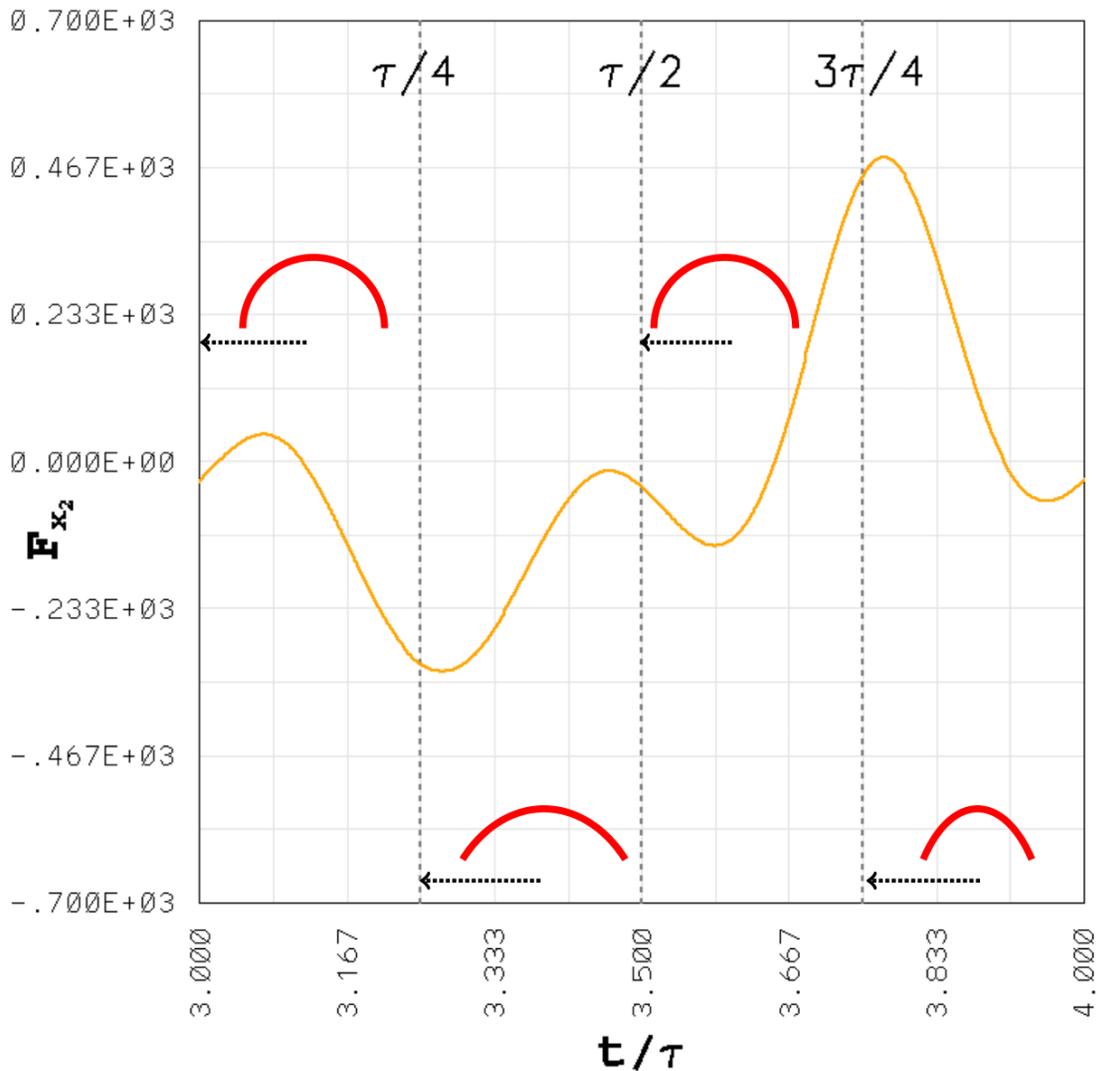
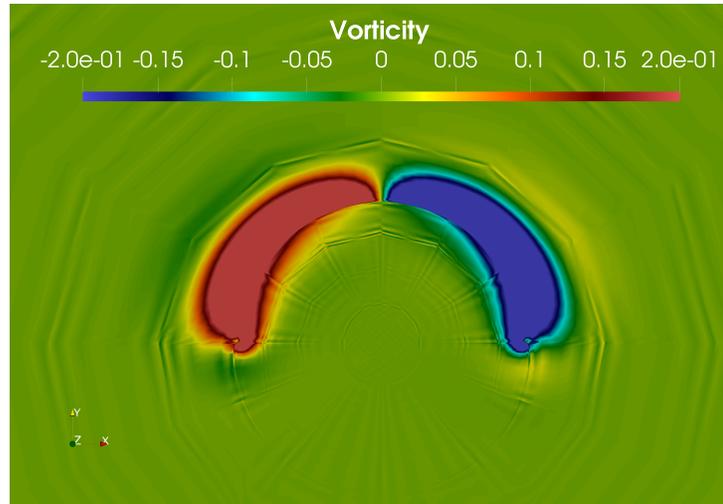
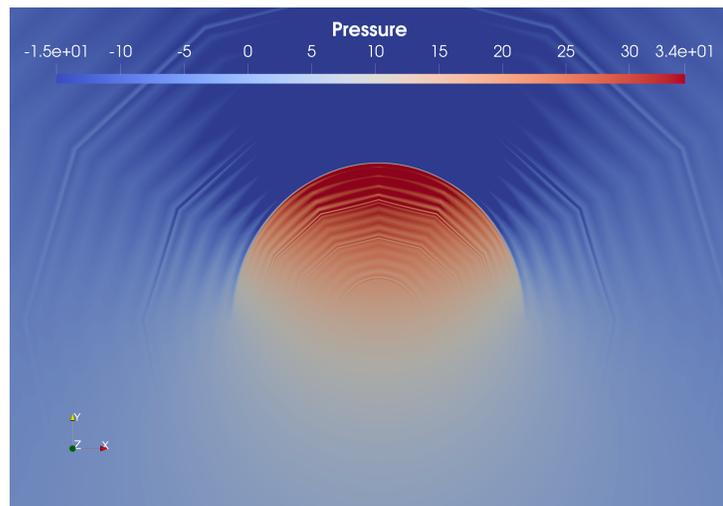


FIGURA 6.15: Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 144$

De manera conjunta el campo de vorticidad en los casos con $Re = 144$ (figura 6.16), $Re = 100$ (figura 6.17), $Re = 10$ (figura 6.18) y $Re = 1E(-4)$ (figura 6.19) muestra una misma tendencia general, la distribución de vórtices es bastante similar. Es decir, del lado superior derecho existe un vórtice negativo (sentido horario) y del lado superior izquierdo existe un vórtice positivo (sentido antihorario). La única característica que no es similar en todos los casos es el campo de presiones, pues con $Re = 1E(-4)$, el campo de presiones (figura 6.19b) adquiere una configuración un poco diferente que puede deberse a que en ese régimen de flujo el fluido es sumamente viscoso y los esfuerzos cortantes toman mayor relevancia ante las presiones.



(a)



(b)

FIGURA 6.16: Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 144$. Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.

Número de Reynolds fijado a 100

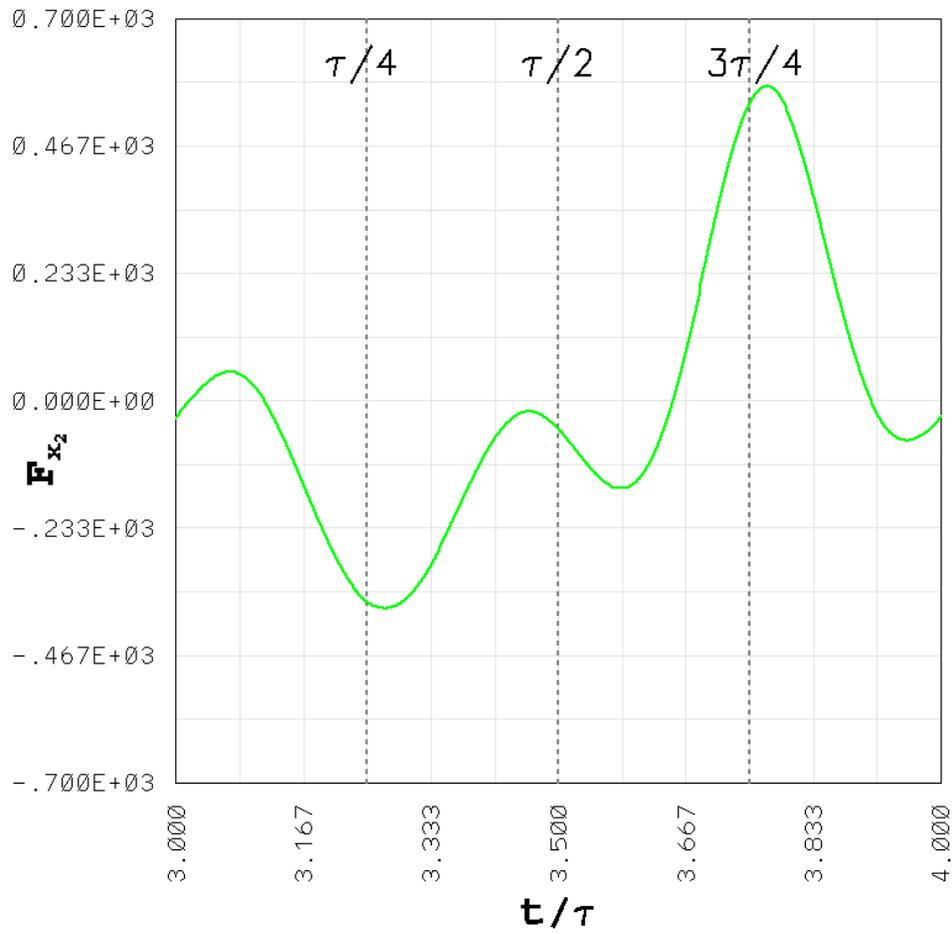


FIGURA 6.17: Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 100$

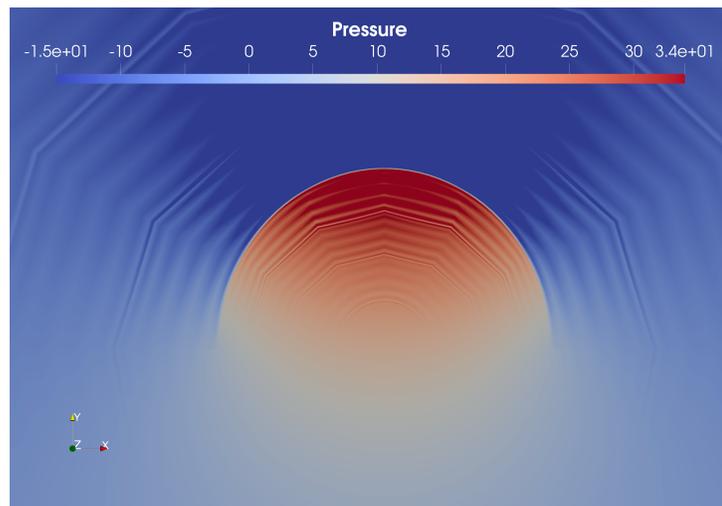
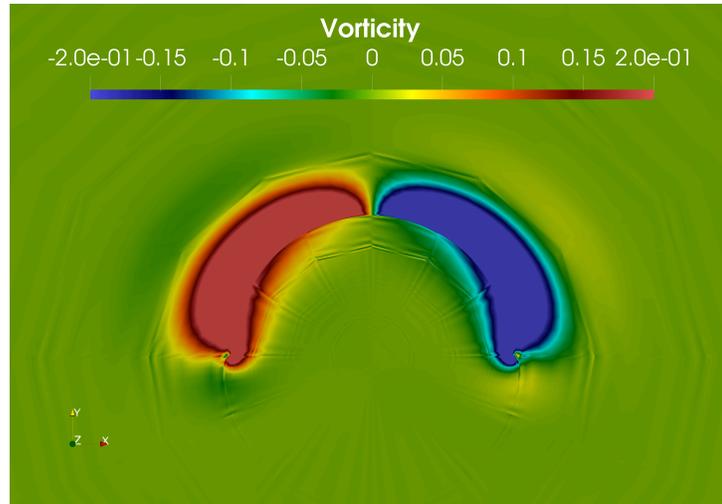


FIGURA 6.18: Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 100$. Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.

Número de Reynolds fijado a 10

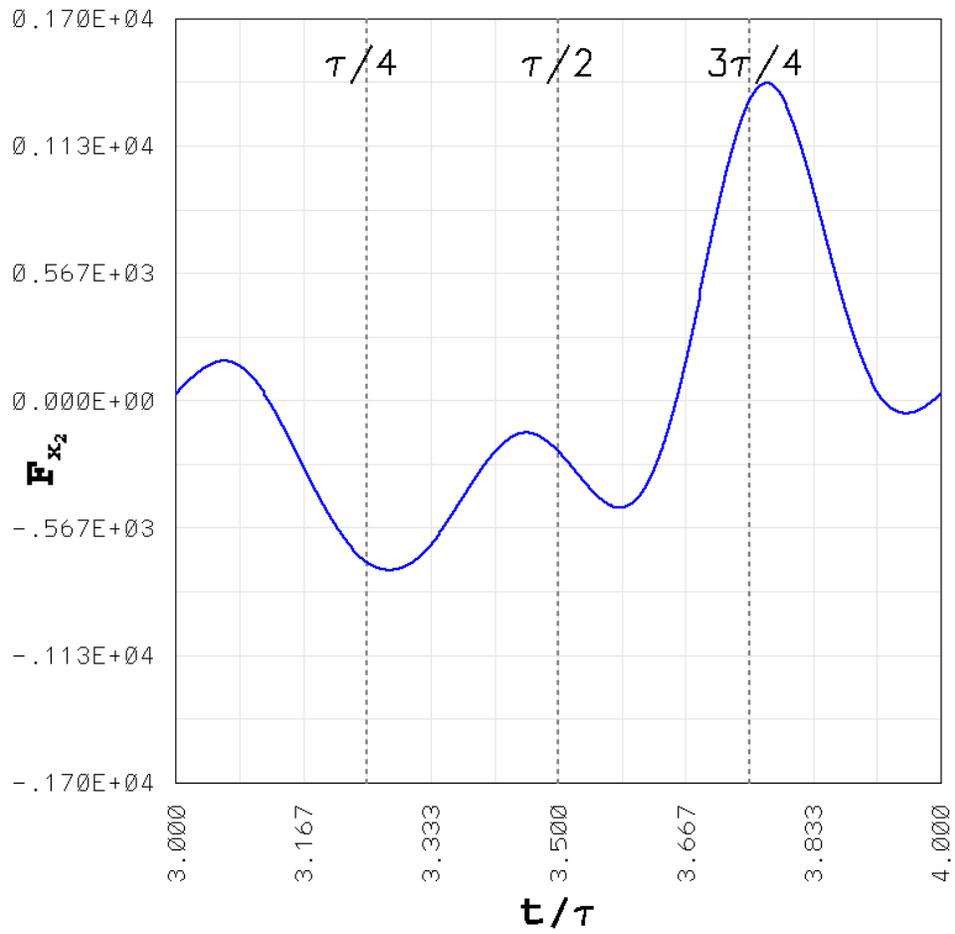
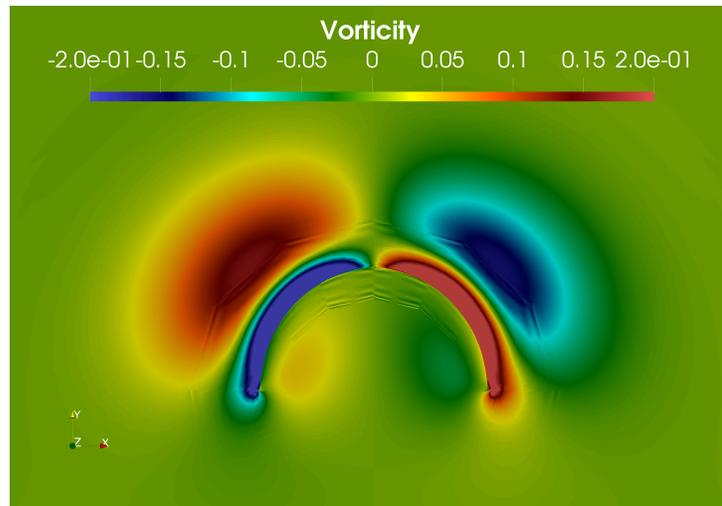
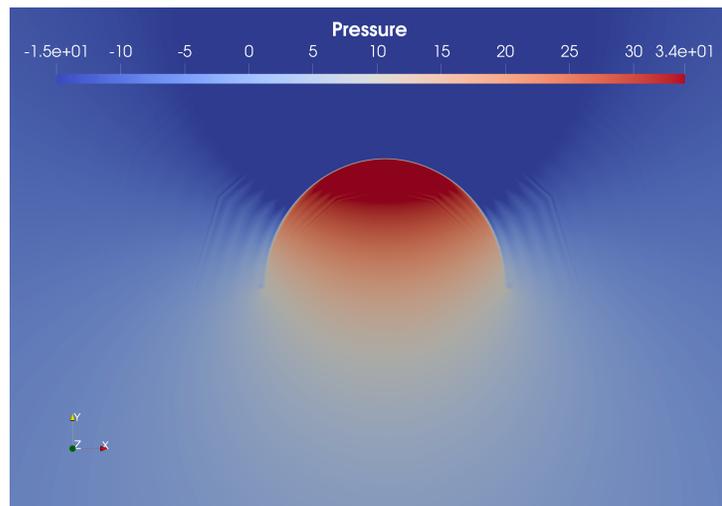


FIGURA 6.19: Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 10$



(a)



(b) C

FIGURA 6.20: Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 10$.
Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.

Número de Reynolds fijado a $1E(-4)$

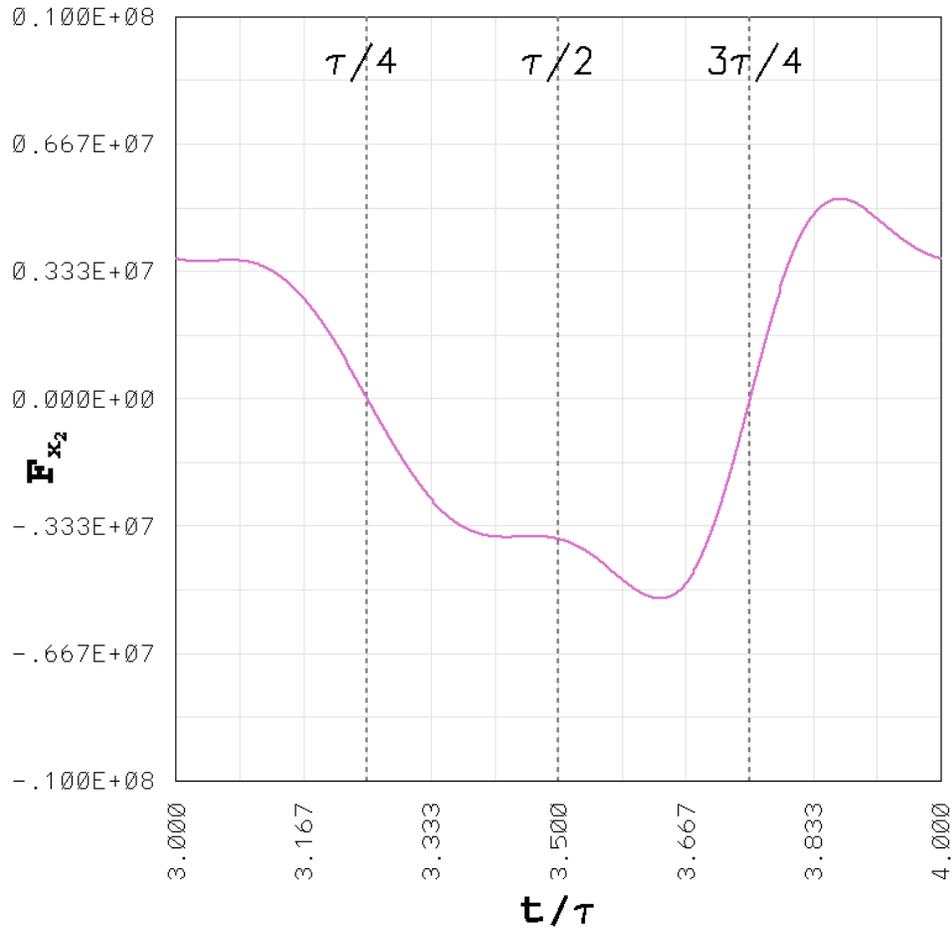
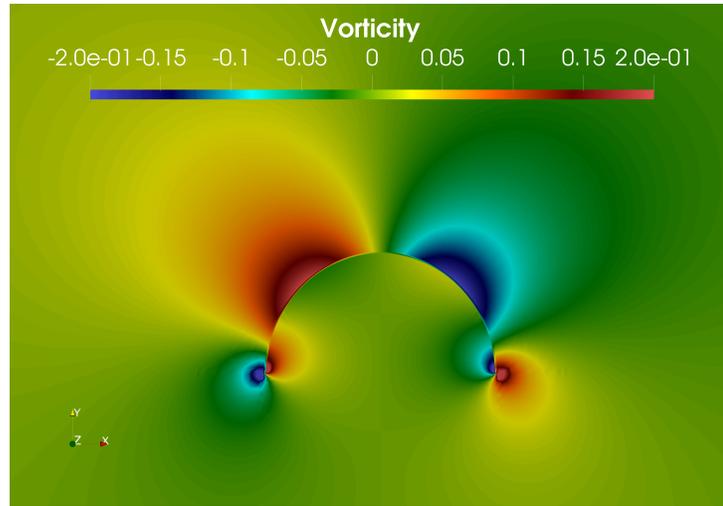
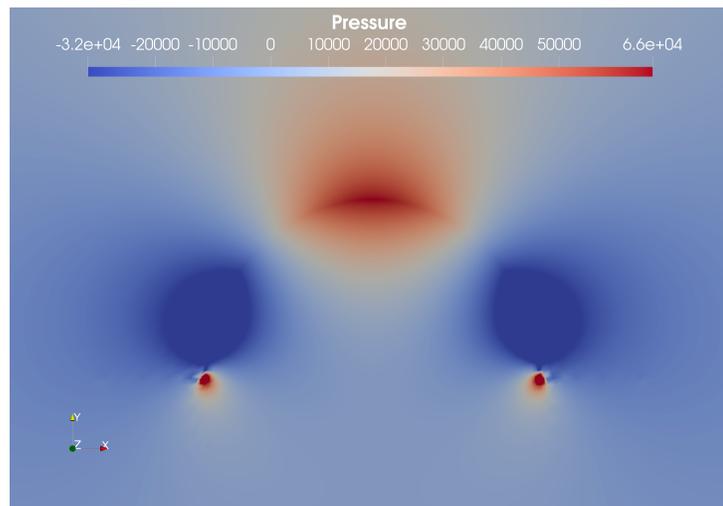


FIGURA 6.21: Fuerza de empuje en el eje x_2 contra el tiempo; Filamento oscilante; $Re = 1E(-4)$



(a)



(b)

FIGURA 6.22: Filamento oscilante en etapa de contracción; $Re = 1E(-4)$. Subfigura a) campo de vorticidad; b) Campo de presiones.

Comparación cualitativa de la vorticidad en el filamento con $Re = 10$

A continuación se presentan algunos resultados del presente trabajo para el modelo simplificado de la medusa en contraste con lo reportado por Dabiri y Gemmel (2021).

Parámetros para el Filamento oscilante que simula el nado de una medusa:

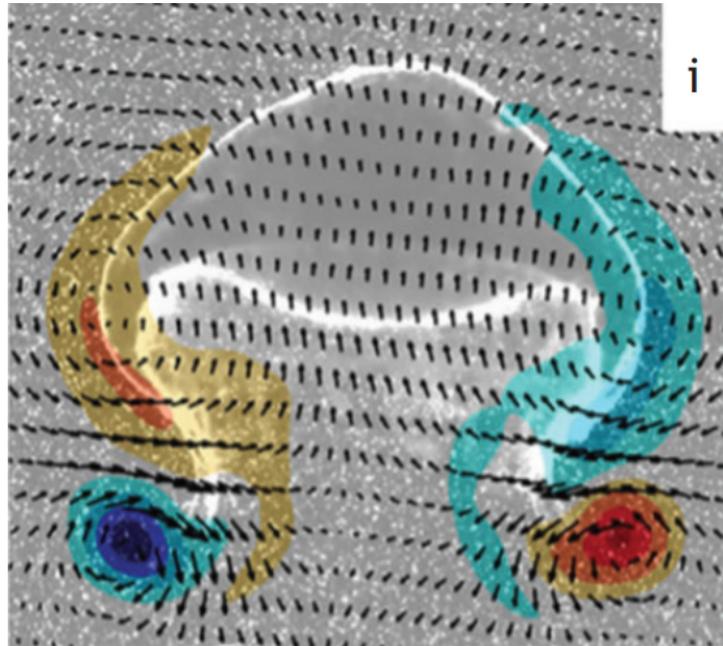
- $Re = 10, A = 1.0, f = 1/2\pi$ y $f_r = 0.41$
- $f_r = h_r/2r_r$

donde: A es amplitud, f es frecuencia, $f_r = h_r/2r_r$ es la relación de aspecto de la medusa, h_r es la altura de la medusa y r_r es el radio de la misma.

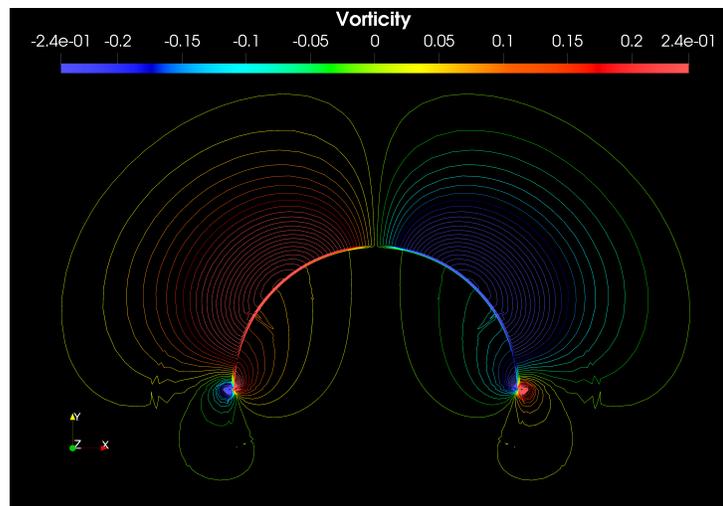
Se puede observar que los sentidos y ubicaciones de los vórtices creados en esta etapa de expansión de la Medusa y que fueron obtenidos en el presente trabajo [6.20b y 6.21b], coinciden con los obtenidos por Dabiri y Gemmel (2021) [6.2a y 6.21a].

Ahora, analizando la deformación (figura 6.21) del filamento podemos notar que cuando la Medusa está en etapa de Contracción, se forman vórtices debido a esta oscilación del filamento, cabe destacar que los vórtices creados en la zona exterior del filamento en forma de campana tienen un papel crucial en el mecanismo de propulsión, pues estos inducen diferencias de presión que a su vez pueden provocar que el fluido fuera de esta cavidad (de la Medusa) sea arrastrado permitiendo su desplazamiento en el fluido.

De manera similar en la etapa de contracción (figura 6.20), los vórtices sobre la superficie de la geometría coinciden, sin embargo es necesario aclarar que debido a la naturaleza oblata de la medusa (del presente trabajo) en contraste con la forma prolata de la reportada por Dabiri y Gemmel (2021) no hay vórtices que se desprenden por la Propulsión a chorro, pues las medusas oblatas no se impulsan mediante este mecanismo según lo reportado Dabiri et. al (2015), donde plantea que sus mecanismos de desplazamiento podrían estar más basados en las diferencias de presiones sobre su superficie y el campo de vorticidades.

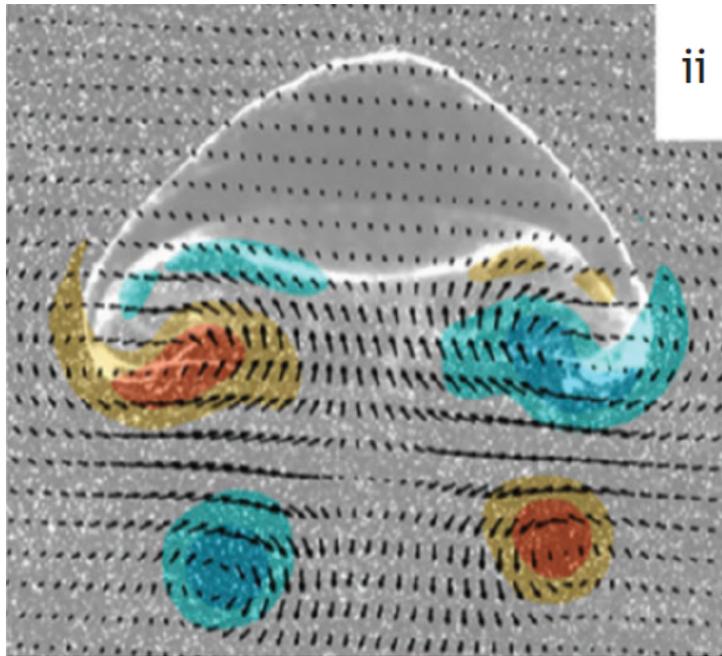


(a)

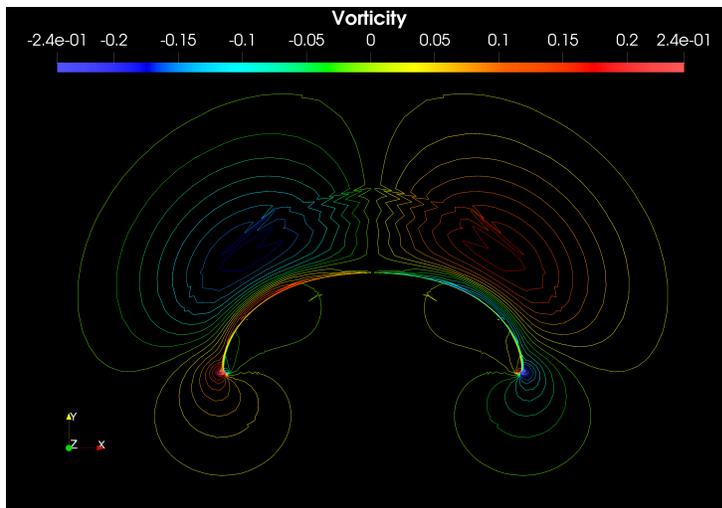


(b)

FIGURA 6.23: Medusa en etapa de contracción. Subfigura a) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r \geq 1$ (Gemell et. al 2021); b) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r = 0.41$ (SEM),



(a)



(b)

FIGURA 6.24: Medusa en etapa de expansion. Subfigura a) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r \geq 1$ (Gemmell et. al 2021); b) campo de vorticidad. $Re = 10$ y $f_r = 0.41$ (SEM),

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

Resumen de capítulo

En éste capítulo, se concluye en base a los resultados obtenidos en cada caso de estudio y al análisis de los mismos, mencionado entre otras cosas, los patrones de flujo que se presentaron en cada caso con las diferentes frecuencias de deformación y variaciones del número de Reynolds. Además se presentan algunos porcentajes de cambio y comparaciones entre casos.

De acuerdo al análisis de resultados anterior, se puede concluir que tanto los esfuerzos cortantes como las presiones a lo largo del Cuerpo deformable (cilindro), así como el Campo de Vorticidad se ven influenciados por la frecuencia de oscilación. Conforme más incrementa la frecuencia de oscilación desde 0.1, pasando por 0.5 y hasta 1.0 los Coeficientes de arrastre promedio en el tiempo, tienden a oscilar cada vez más en la región negativa, a excepción de los casos con $Re = 1E(-4)$, ya que los valores de los coeficientes de arrastre máximos sí mantienen la tendencia de aumentar conforme se aumenta la frecuencia de oscilación, es decir los valores positivos se hacen más positivos con el aumento de la frecuencia, sin embargo en el caso de los valores negativos del coeficiente de arrastre, si cambian con el aumento de la frecuencia pero nunca alcanzan valores negativos.

Por otro lado, la distribución de Vorticidad tiende a cambiar también conforme el periodo de oscilación disminuye y el número de Reynolds se mantiene fijo, pues los vórtices comienzan a desprenderse cada vez con mayor frecuencia del cuerpo y ser arrastrados por la corriente libre, esto para los casos con número de Reynolds igual a 100 y 10.

En el caso con $Re = 1E(-4)$, la vorticidad presenta un comportamiento especial, ya en los tres casos con frecuencia de oscilación desde 0.1, pasando por 0.5 y hasta 1.0 hay dos pares de vórtices principales, que van cambiando de posición en función de la deformación del cuerpo: el primer par se conforma por un vórtice en sentido positivo y otro en sentido negativo, ambos de mayor tamaño respecto a los que conforman el segundo par de vórtices, que son, también uno negativo y otro positivo. La relación de tamaño del primer par de vórtices respecto al segundo par se va modificando, pues el primer par de vórtices (en los tres casos a diferentes frecuencias 0.1, 0.5 y 1.0) siempre es de mayor tamaño, sin embargo, cada que aumenta la frecuencia de oscilación también va aumentando el tamaño del segundo par de vórtices progresivamente, aumentando en magnitud pero conservando el sentido (horario o antihorario).

Ahora, analizando los valores máximos y mínimos (promediados en el tiempo) de los coeficientes de arrastre, podemos observar que para los casos a frecuencia máxima, de 1.0 a los diferentes números de Reynolds, se presentan los siguientes porcentajes de cambio: el Coeficiente de agarraste máximo entre el caso con $Re = 100$ ($C_d = 22.84$) y $Re = 10$ ($C_d = 23.0$), presenta un aumento del 0.7(%), mientras que el Coeficiente de agarraste mínimo entre el caso con $Re = 100$ ($C_d = -14.06$) y $Re = 10$ ($C_d = -8.825$), presenta un aumento del 37.23 (%), ahora el Coeficiente de agarraste máximo entre el caso con $Re = 10$ ($C_d = 23.00$) y $Re = 1E(-4)$ ($C_d = 1.217E5$), presenta un aumento del 5.29E5(%), mientras que el Coeficiente de agarraste mínimo entre el caso con $Re = 10$ ($C_d = -8.825$) y $Re = 1E(-4)$ ($C_d = 1.02E5$), presenta un aumento del 1.156E6 (%).

Para el caso de la Medusa oblata simulada mediante el Filamento oscilante, se puede concluir gracias al análisis de del Campo de Vorticidad y de Presiones, que cuando la Medusa está en etapa de contracción, existen diferencias de presiones y estas a su vez podrían ser inducidas por el desprendimiento de vórtices sobre la superficie de la medusa. Además, según el análisis de las fuerzas hidrodinámicas sobre el filamento, se sugiere que estas diferencias de presiones podrían ser la razón principal que provoca que el fluido circundante al filamento sea el que lo arrastre o succione por momentos, permitiendo así la Propulsión de la Medusa.

CAPÍTULO 8

TRABAJO A FUTURO

Resumen de capítulo

Aquí se hace un pequeño análisis y en base a este, se sugiere para cada caso, posibles líneas de investigación que se pueden trabajar en un futuro y algunos detalles a considerar en éstas.

Para trabajos futuros sería conveniente optimizar el presente modelo propuesto del cuerpo deformable o bien, analizar un micro-nadador existente de tal forma que se puedan determinar de manera cualitativa y cuantitativa las estrategias de propulsión de ese nuevo organismo en estudio y aplicarlas en orden de mejorar el presente caso. Pues en este estudio se analizó que los esfuerzos sobre el cuerpo deformable también se modifican dependiendo el sentido de esta aceleración respecto a la dirección de flujo, siendo está relación de la distribución de Vorticidad, la frecuencia de oscilación y los esfuerzos cortantes y presiones sobre la superficie la razón ínfima por la que el cuerpo pudiera o no tener propulsión.

Por lo anterior, modificando las ecuaciones dinámicas cuidadosamente se podría mejorar notablemente el modelo.

Mientras que para el caso del filamento oscilante, sería conveniente modelar la medusa de manera tridimensional y así, obtener resultados mucho más cercanos a la realidad, además de agregar las protuberancias características de varias especies de medusas en la naturaleza, contribuyendo a un modelo aún más realista y preciso; dichas protuberancias en la literatura especializada son conocidas como 'flips' y ayudan a la medusa a potenciar la formación de vórtices mientras oscila en un fluido, incrementando también su capacidad de tener

propulsión.

Por otro lado, con los flujos base generados a partir del conjunto de simulaciones numéricas del flujo a través de los cuerpos oscilantes en un fluido incompresible, se podría realizar un Análisis de Inestabilidad lineal en un futuro, donde se estudien a fondo los modos de estas geometrías deformables en el tiempo a diferentes números de Reynolds y variando tanto la frecuencia de oscilación como la amplitud de la misma, llegando incluso a considerar el efecto de la parte térmica en flujos a bajo régimen de Reynolds.

APÉNDICE A

Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno

A.1. Cuerpo deformable

En orden de adimensionalizar las ecuaciones de gobierno que se resolvieron para el caso del Cuerpo deformable, se proponen los siguientes parámetros y variables adimensionales; de manera similar a como lo plantea Montiel (2022):

$$x_1^* = \frac{x_1}{D_c}; x_2^* = \frac{x_2}{D_c}; u_1^* = \frac{u_1}{u_\infty}; u_2^* = \frac{u_2}{u_\infty}; t^* = \frac{t \cdot u_\infty}{D_c}. \quad (\text{A.1})$$

Donde: x_1 y x_2 son las posiciones a lo largo de las direcciones principales \hat{i}_1 e \hat{i}_2 respectivamente, D_c es el diámetro del cilindro circular base (unitario), u_1 y u_2 son las componentes del vector velocidad del fluido orientadas en las direcciones principales \hat{i}_1 e \hat{i}_2 , u_∞ es la velocidad de corriente libre y t es el tiempo. Además, para este caso se considera la definición convencional del número de Reynolds ($Re = u_\infty D_c / \nu$), donde ν es la viscosidad cinemática del fluido.

A.1.1. Ecuación de Continuidad

Ecuación dimensional de Continuidad para un fluido incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Calculando la divergencia del vector \vec{u} en la ecuación (A.2), resulta:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.4) las variables adimensionales:

$$\frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_1^* D_c)} + \frac{\partial(u_2^* u_\infty)}{\partial(x_2^* D_c)} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Extrayendo y factorizando los valores constantes de las derivadas parciales en la ecuación anterior:

$$\frac{u_\infty}{D_c} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando toda la ecuación anterior por $\left(\frac{D_c}{u_\infty}\right)$:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Definiendo el operador Nabla adimensional como:

$$\vec{\nabla}^* = \frac{\partial}{\partial x_1^*} \hat{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \hat{i}_2 \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, resulta la ecuación adimensional de Continuidad para un fluido incompresible:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (\text{A.8})$$

A.1.2. Ecuación de Cantidad Movimiento

Ecuación dimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible (despreciando las fuerzas de cuerpo, gravedad):

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (\text{A.9})$$

Partiendo de la ecuación dimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible (A.9), podemos descomponer y desarrollar dicha ecuación en cada una de las direcciones principales, resultando para la dirección principal \hat{i}_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

y para la segunda dirección principal \hat{i}_2 :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

Primera dirección principal \hat{i}_1

Primero se trabajara con la expresión correspondiente a la primera dirección. Sustituyendo en la ecuación (A.10) las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(\frac{t^* D_c}{u_\infty})} + (u_1^* u_\infty) \frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_1^* D_c)} + (u_2^* u_\infty) \frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_2^* D_c)} = \\ - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial(x_1^* D_c)} \right] + \nu \left[\frac{\partial^2(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_1^* D_c)^2} + \frac{\partial^2(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_2^* D_c)^2} \right] \end{aligned} \quad (A.12)$$

Extrayendo y factorizando los valores constantes de las derivadas parciales en la ecuación anterior:

$$\frac{u_\infty^2}{D_c} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right) = - \frac{1}{\rho D_c} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1^*} \right) + \frac{\nu u_\infty}{D_c^2} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (A.13)$$

Multiplicando toda la ecuación anterior por $(\frac{D_c}{u_\infty^2})$:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = - \frac{1}{\rho u_\infty^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1^*} \right) + \frac{\nu}{u_\infty D_c} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (A.14)$$

Ahora, si se lleva acabo el análisis de unidades del factor $(1/\rho u_\infty^2)$ que aparece en el miembro derecho de la ecuación anterior, resultan las unidades (m^2/N) , que son el inverso de las unidades de la Presión p . Por lo tanto, si se incluye en la derivada parcial dicho factor, se puede notar que este en realidad se trata de una variable adimensional. Quedando definida la presión adimensional como:

$$p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2} \quad (A.15)$$

De manera que:

$$\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left(\frac{p}{\rho u_\infty^2} \right) = \frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} \quad (A.16)$$

Por otro lado, si se analiza el factor $(\nu/u_\infty D_c)$ que también aparece en el miembro derecho de la ecuación (A.14), fácilmente se puede notar que se trata del inverso del Número de Reynolds, pues $Re = u_\infty D_c / \nu$, por lo tanto:

$$\frac{\nu}{u_\infty D_c} = \frac{1}{Re} \quad (A.17)$$

Finalmente, reescribiendo la ecuación (A.14) considerando la presión adimensional y el termino inverso del número de Reynolds, resulta la ecuación adimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible en la primera dirección principal \hat{i}_1 :

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (\text{A.18})$$

Segunda dirección principal \hat{i}_2

El procedimiento para obtener la ecuación adimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible en la segunda dirección principal \hat{i}_2 , es homologo a como se realizó el procedimiento para la primera dirección principal \hat{i}_1 , solo se que esta vez se debe considerar la componente velocidad u_2 y la derivada parcial de la presión respecto x_2 , es decir: $\partial p / \partial x_2$.

Resultando la siguiente expresión:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (\text{A.19})$$

A.2. Filamento oscilante

En orden de adimensionalizar las ecuaciones de gobierno que se resolvieron para el caso del Filamento oscilante, se proponen los siguientes parámetros y variables adimensionales (Ávila y Atluri, 2009):

$$x_1^* = \frac{x_1}{r_r}; x_2^* = \frac{x_2}{r_r}; u_1^* = \frac{u_1}{r_r \omega}; u_2^* = \frac{u_2}{r_r \omega}; t^* = \omega t; p^* = \frac{p}{\rho r_r^2 \omega^2}. \quad (\text{A.20})$$

Donde: x_1 y x_2 son las posiciones a lo largo de las direcciones principales, \hat{i}_1 e \hat{i}_2 respectivamente, r_r es el radio adimensional de la medusa (filamento), u_1 y u_2 son las componentes del vector velocidad del fluido orientadas en las direcciones principales \hat{i}_1 e \hat{i}_2 , $\omega = 2\pi/P$ es la frecuencia del movimiento periódico de propulsión, P es el periodo de dicho movimiento (oscilación) y t es el tiempo. Además, debido a que en este caso el fluido esta confinado en una cavidad circular rígida y por lo tanto no existe una velocidad de corriente libre, no se considera la definición convencional del número de Reynolds, por lo que se propone una redefinición de este, siendo $Re = r_r^2 \omega / \nu$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido.

A.2.1. Ecuación de Continuidad

Ecuación dimensional de Continuidad para un fluido incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Calculando la divergencia del vector \vec{u} en la ecuación (A.21), resulta:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.4) las variables adimensionales:

$$\frac{\partial(u_1^* r_r \omega)}{\partial(x_1^* r_r)} + \frac{\partial(u_2^* r_r \omega)}{\partial(x_2^* r_r)} = 0 \quad (\text{A.23})$$

Extrayendo y factorizando los valores constantes de las derivadas parciales en la ecuación anterior:

$$\omega \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Multiplicando toda la ecuación anterior por $\left(\frac{1}{\omega}\right)$:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (\text{A.25})$$

Definiendo el operador Nabla adimensional como:

$$\vec{\nabla}^* = \frac{\partial}{\partial x_1^*} \hat{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \hat{i}_2 \quad (\text{A.26})$$

Finalmente, resulta la ecuación adimensional de Continuidad para un fluido incompresible:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (\text{A.27})$$

A.2.2. Ecuación de Cantidad Movimiento

Ecuación dimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible (despreciando las fuerzas de cuerpo, gravedad):

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (\text{A.28})$$

Partiendo de la ecuación dimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible (A.28), podemos descomponer y desarrollar dicha ecuación en cada una de las direcciones principales, resultando para la dirección principal \hat{i}_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{A.29})$$

y para la segunda dirección principal \hat{i}_2 :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{A.30})$$

Primera dirección principal \hat{i}_1

Primero se trabajara con la expresión correspondiente a la primera dirección. Sustituyendo en la ecuación (A.29) las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_1^* r_r \omega)}{\partial \left(\frac{t^*}{\omega} \right)} + (u_1^* r_r \omega) \frac{\partial(u_1^* r_r \omega)}{\partial(x_1^* r_r)} + (u_2^* r_r \omega) \frac{\partial(u_1^* r_r \omega)}{\partial(x_2^* r_r)} = \\ -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p^* \rho r_r^2 \omega^2}{\partial(x_1^* r_r)} \right] + \nu \left[\frac{\partial^2(u_1^* r_r \omega)}{\partial(x_1^* r_r)^2} + \frac{\partial^2(u_1^* r_r \omega)}{\partial(x_2^* r_r)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Extrayendo y factorizando los valores constantes de las derivadas parciales en la ecuación anterior:

$$r_r \omega^2 \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right) = -r_r \omega^2 \left(\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} \right) + \frac{\nu \omega}{r_r} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (\text{A.32})$$

Multiplicando toda la ecuación anterior por $\left(\frac{1}{r_r \omega^2} \right)$:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{r_r^2 \omega} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (\text{A.33})$$

Ahora, si se analiza el factor $\nu/r_r^2 \omega$ que aparece en el miembro derecho de la ecuación (A.33), fácilmente se puede determinar que se trata del inverso del Número de Reynolds, pues $Re = r_r^2 \omega / \nu$, por lo tanto:

$$\frac{\nu}{r_r^2 \omega} = \frac{1}{Re} \quad (\text{A.34})$$

Finalmente, reescribiendo la ecuación (A.33) considerando el termino reciproco del número de Reynolds, resulta la ecuación adimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible en la primera dirección principal \hat{i}_1 :

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (\text{A.35})$$

Segunda dirección principal \hat{i}_2

El procedimiento para obtener la ecuación adimensional de Cantidad de movimiento para un fluido incompresible en la segunda dirección principal \hat{i}_2 , es homólogo a como se realizó el procedimiento para la primera dirección principal \hat{i}_1 , solo se que esta vez se debe considerar la componente velocidad u_2 y la derivada parcial de la presión respecto x_2 , es decir: $\partial p / \partial x_2$.

Resultando la siguiente expresión:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{x_2^{*2}} \right) \quad (\text{A.36})$$

Bibliografía

- [1] Daddi-Moussa-Ider, A., Nasouri, B., Vilfan, A., & Golestanian, R. (2021). Optimal swimmers can be pullers, pushers or neutral depending on the shape. *Journal of Fluid Mechanics*, 922.
- [2] Barkley, D., & Henderson, R. D. (1996). Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 322, 215-241.
- [3] Mittal, R. (1995). Study of flow past elliptic and circular cylinders using direct numerical simulation. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [4] Purcell, E. M. (1977). Life at low Reynolds number. *American journal of physics*, 45(1), 3-11.
- [5] Gemmell, B. J., Dabiri, J. O., Colin, S. P., Costello, J. H., Townsend, J. P., & Sutherland, K. R. (2021). Cool your jets: biological jet propulsion in marine invertebrates. *Journal of Experimental Biology*, 224(12), jeb222083.
- [6] Wu, M. H., Wen, C. Y., Yen, R. H., Weng, M. C., & Wang, A. B. (2004). Experimental and numerical study of the separation angle for flow around a circular cylinder at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 515, 233-260.
- [7] Bunea, A. I., & Taboryski, R. (2020). Recent advances in microswimmers for biomedical applications. *Micromachines*, 11(12), 1048.
- [8] Karniadakis, G. E., Karniadakis, G., & Sherwin, S. (2005). Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics. Oxford University Press on Demand.

- [9] Avila, R., & Atluri, S. N. (2009). Numerical solution of non-steady flows, around surfaces in spatially and temporally arbitrary motions, by using the MLPG method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, 54(1), 15.
- [10] Colin, S. P., Costello, J. H., Dabiri, J. O., Villanueva, A., Blottman, J. B., Gemmell, B. J., & Priya, S. (2012). Biomimetic and live medusae reveal the mechanistic advantages of a flexible bell margin. *PloS one*, 7(11), e48909.
- [11] Lighthill, M. J. (1952). On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers. *Communications on pure and applied mathematics*, 5(2), 109-118.
- [12] Deville, M.O. and P.F. Fischer and E.H. Mund. High-order methods for incompressible fluid flow. Cambridge University Press, 2002. doi.org/10.1017/CBO9780511546792.
- [13] Rajani, B. N., Kandasamy, A., & Majumdar, S. (2009). Numerical simulation of laminar flow past a circular cylinder. *Applied Mathematical Modelling*, 33(3), 1228-1247.
- [14] Bansode, S. S., Hiremath, R. B., Kolgiri, S., & Deshmukh, R. A. (2016). Biomimetics and its applications-a review. *Int J Emerg Technol Adv Eng*, 6(6), 63-72.
- [15] Bunea, A. I., & Taboryski, R. (2020). Recent advances in microswimmers for biomedical applications. *Micromachines*, 11(12), 1048.
- [16] Becker, L. E., Koehler, S. A., & Stone, H. A. (2003). On self-propulsion of micro-machines at low Reynolds number: Purcell's three-link swimmer. *Journal of fluid mechanics*, 490, 15-35.
- [17] Lauga, E., & Powers, T. R. (2009). The hydrodynamics of swimming micro-organisms. *Reports on progress in physics*, 72(9), 096601.
- [18] Huber, G., Koehler, S. A., & Yang, J. (2011). Micro-swimmers with hydrodynamic interactions. *Mathematical and computer modelling*, 53(7-8), 1518-1526.
- [19] Moran, J., & Posner, J. (2019). Microswimmers with no moving parts. *Physics today*, 72(5), 44-50.
- [20] Shapere, A., & Wilczek, F. (1989). Geometry of self-propulsion at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 198, 557-585.
- [21] Colin, S. P., Costello, J. H., Dabiri, J. O., Villanueva, A., Blottman, J. B., Gemmell, B. J., & Priya, S. (2012). Biomimetic and live medusae reveal the mechanistic advantages of a flexible bell margin. *PloS one*, 7(11), e48909.

- [22] Gemmell, B. J., Costello, J. H., & Colin, S. P. (2014). Exploring vortex enhancement and manipulation mechanisms in jellyfish that contributes to energetically efficient propulsion. *Communicative & integrative biology*, 7(4), e29014.
- [23] Gemmell, B. J., Colin, S. P., Costello, J. H., & Dabiri, J. O. (2015). Suction-based propulsion as a basis for efficient animal swimming. *Nature communications*, 6(1), 8790.
- [24] Dabiri, J. O., & Gharib, M. (2003). Sensitivity analysis of kinematic approximations in dynamic medusan swimming models. *Journal of Experimental Biology*, 206(20), 3675-3680.
- [25] Dabiri, J. O., Colin, S. P., Costello, J. H., & Gharib, M. (2005). Flow patterns generated by oblate medusan jellyfish: field measurements and laboratory analyses. *Journal of Experimental Biology*, 208(7), 1257-1265.
- [26] Rudolf, D. T. (2007). Animating jellyfish through numerical simulation and symmetry exploitation (Doctoral dissertation, University of Saskatchewan).
- [27] Blake, J. R. (1971). A spherical envelope approach to ciliary propulsion. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(1), 199-208.
- [28] Nasouri, B., Vilfan, A., & Golestanian, R. (2021). Minimum dissipation theorem for microswimmers. *Physical Review Letters*, 126(3), 034503.
- [29] Qiu, J., Marchioli, C., & Zhao, L. (2022). A review on gyrotactic swimmers in turbulent flows. *Acta Mechanica Sinica*, 38(8), 722323.
- [30] Guo, H., Zhu, H., Liu, R., Bonnet, M., & Veerapaneni, S. (2021). Optimal slip velocities of micro-swimmers with arbitrary axisymmetric shapes. *Journal of Fluid Mechanics*, 910, A26.
- [31] Keaveny, E. E., & Maxey, M. R. (2008). Spiral swimming of an artificial micro-swimmer. *Journal of fluid Mechanics*, 598, 293-319.
- [32] Mathijssen, A. J., Pushkin, D. O., & Yeomans, J. M. (2015). Tracer trajectories and displacement due to a micro-swimmer near a surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 773, 498-519.
- [33] Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J. P., & Rodríguez-Ferran, A. (2004). Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. *Encyclopedia of computational mechanics*.
- [34] Fischer, P., Schmitt, M., & Tomboulides, A. (2017). Recent developments in spectral element simulations of moving-domain problems. *Recent progress and modern challenges in applied mathematics, modeling and computational science*, 213-244.

- [35] Ho, L. W. (1989). A Legendre spectral element method for simulation of incompressible unsteady viscous free-surface flows (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
- [36] Patera, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, 54(3), 468-488.
- [37] NEK5000 Version v19.0 Release 2021. Argonne National Laboratory, Illinois.
- [38] Montiel Galindo, J. G. (2022). Análisis del flujo alrededor de un perfil aerodinámico con movimiento oscilatorio y transferencia de calor.