



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**La función de Green de la
Elastodinámica en medios
estratificados con el número
de onda discreto**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniera Geofísica

P R E S E N T A

Frida Lizbeth Martínez Reyes

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco José Sánchez Sesma



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023

Agradecimientos

Séneca en Cartas a Lucilio dice “Todas las cosas, Lucilio, en realidad nos son ajenas, sólo el tiempo es bien nuestro: la naturaleza nos puso en posesión de esta única cosa, fugaz, resbaladiza ...Y es tanta la necedad de los mortales, que todos nos creemos obligados al agradecimiento por aquellas cosas pequeñas y despreciables, de cuya pérdida nos podemos recuperar, pero no nos creemos en deuda por haber recibido el tiempo que es la única que, ni agradeciéndola, podríamos ganar de nuevo”, sé que no puedo devolver los momentos que me han regalado a ninguno de los que menciono, pero sepan valoro cada segundo que me han brindado.

Expreso no solo mi gratitud hacia mi asesor, el Dr. Francisco José Sánchez Sesma por compartir su conocimiento, apoyo y paciencia constante conmigo, sino también mi profunda admiración hacia su trabajo y su incansable entusiasmo. En él he encontrado la pasión por el aprendizaje en persona, un gran amigo y el mejor de los maestros.

Al Dr. Luis Eduardo Pérez Rocha porque desde la primera clase que tuve con él, mi visión del mundo cambió, por ser un amigo increíble y un ejemplo a seguir. Al Dr. Josué Tago Pacheco por sus enseñanzas, comentarios y sugerencias, quedan pendientes algunas comparaciones de interés.

A mi papá Adalberto Martínez Gómez por enseñarme a dudar de lo establecido, a mi mamá Dora Lilia Reyes Cortes por predicar con el ejemplo la tenacidad y a ambos por darme autonomía desde la infancia, apoyo incondicional y ser mi motor principal.

A mi hermano Alexis Daniel del Refugio Martínez Reyes que es la persona más congruente, noble y creativa que conozco, por estar conmigo en cada paso que doy.

A Valeria por darme siempre una perspectiva más humana, por alentarme a probar cosas nuevas, su confianza, su amistad y ser un pilar en mi vida.

A Lorena Galán por ser mi segunda mamá, mi entrenadora, amiga y un ejemplo de disciplina y determinación, por darme su apoyo y confiar en mis capacidades incluso más de lo que yo lo hago.

A mis amigos: Cayetano por enseñarme a creer y a aprender de las personas y a Luis por ser el mejor equipo siempre.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, por ser parte de mi identidad, por ser objetivo y camino, porque desde pequeña, antes de entender que era, yo quería ser parte de ella.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Dirección de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la UNAM. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida dentro del Proyecto PAPIIT-IN107720 Caracterización y Aplicación de Campos Difusos en Configuraciones Irregulares.

Resumen

En este trabajo se estudian los campos de desplazamientos generados por fuentes puntuales y explosivas en medios elásticos estratificados y en el semiespacio. El objetivo es calcular las correspondientes soluciones fundamentales o funciones de Green de la elastodinámica a partir de la solución de Stokes (1849) para el espacio completo en coordenadas esféricas. El cálculo de las funciones de Green involucradas utiliza la simetría que se tiene en un sistema cilíndrico de referencia en torno al eje vertical. Se parte de la descripción de Aki y Richards (2002) que se basa en la formulación con potenciales de Knopoff (1964) y se aprovechan algunos resultados de Sánchez-Sesma et al. (2011). Se espera que la exploración que aquí se hace, para cambiar el sistema de referencia en las formulaciones para casos sencillos como fuerza concentrada y explosión en un espacio infinito, y los casos correspondientes para estratos, sirva de base para futuras investigaciones. Para este fin, se generan herramientas de cálculo computacional que permiten obtener la respuesta dinámica ante dichas fuentes. De particular interés es el método del número de onda discreto propuesto por Bouchon y Aki (1977) para calcular de manera eficiente las integrales necesarias para desplazamientos y esfuerzos en el dominio del número de onda radial. Los resultados temporales son producidos mediante el análisis de Fourier, a través del algoritmo FFT.

Abstract

This work delves with the fields of displacements generated by point and explosive sources in stratified elastic media and in the underlying half-space. The aim is to calculate the corresponding elastodynamic Green's functions from the Stokes (1849) solution for the full-space in spherical coordinates. The calculation of the Green functions involved in the process exploits the symmetry in a cylindrical reference system around the vertical axis. It is based on the description by Aki and Richards (2002) which is based on the formulation with potentials by Knopoff (1964). Some results by Sánchez-Sesma et al. (2011) are used. It is hoped that the exploration made here of the formulations to change the reference system for simple cases, such as concentrated force and explosion in an infinite space, and the corresponding cases for strata, will serve as a basis for future research. To this end, computational calculation tools are generated that allow to obtain the dynamic response to these sources. Of particular interest is the discrete wavenumber method proposed by Bouchon and Aki (1977) to efficiently calculate the integrals needed for displacements and stresses in the radial wavenumber domain. The temporal results are produced by Fourier analysis, through the FFT algorithm.

Contenido

Agradecimientos	2
Resumen	3
Abstract	4
Capítulo 1: Introducción	9
1.1 Antecedentes.....	9
1.2 Objetivos.....	10
1.3 Justificación y alcance	10
Capítulo 2: Marco teórico	12
2.1 Fundamentos de la Elastodinámica	12
2.1.1 Deformaciones	12
2.1.2 Esfuerzos.....	14
2.2 Ecuación de movimiento	18
2.3 Ley Hooke generalizada	19
2.4 Ecuación de Navier-Cauchy	20
2.5 Ecuaciones de onda	21
2.5.1 Ondas de cuerpo: P y S	21
2.5.2 Ondas superficiales	22
2.6 Función de Green	28
2.6.1 Función de Green Caso 1D	29
2.6.2 Función de Green Caso 2D	31
2.7 Método del Número de Onda Discreto (DWN).....	32
Capítulo 3: Formulación del problema	38
3.1 Fuerza puntual	38
3.1.1 Caso en medio estratificado	40
3.1.2 Caso del espacio infinito	45
3.2 Fuente explosiva.....	51
3.2.1 Caso del semiespacio	51
3.2.2 Caso en un medio estratificado	54
3.3 Matriz global	56
3.3.1 Caso plano (P-SV)	56

3.3.2 Caso antiplano (SH).....	58
Capítulo 4. Solución numérica: Ejemplos.....	60
4.1 Fuente puntual	60
4.1.1 Fuente puntual en semiespacio	60
4.1.2 Fuerza puntual en medio estratificado	73
4.1.2.1 Calibración en medio estratificado	80
4.1.3 Fuerza puntual en medio estratificado con aumento de velocidad	82
4.2 Fuente explosiva.....	85
4.2.1 Comparación solución exacta contra método del DWN.....	85
4.2.2 Fuente explosiva en semiespacio	89
Capítulo 5. Discusión de resultados.....	91
Capítulo 6. Conclusiones y perspectivas	92
Referencias.....	93

Índice de figuras

Figura 2.1: La deformación dentro de un medio continuo incrementa a partir de un desplazamiento entre dos puntos de dicho cuerpo.....	14
Figura 2.2: Se indica la parte de un sólido sometida a un campo de fuerzas que ejerce la porción restante. En un punto de la sección transversal se muestra la fuerza resultante ΔF en el área asociada ΔA y el vector normal \mathbf{n}	15
Figura 2.3: Esfuerzos positivos en la cara 1 y el vector normal asociado.....	16
Figura 2.4: Áreas respectivas de cada cara del Tetraedro de Cauchy y vector esfuerzo en cara oblicua. ...	16
Figura 2.5: Momento alrededor del eje \mathbf{x}_3 en sentido horario y antihorario en un cuerpo. Si el tensor de esfuerzo no fuera simétrico, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, surgiría un momento neto.	17
Figura 2.6: Geometría para ondas superficiales propagándose en un plano vertical que contiene la fuente. Ondas de Rayleigh (P-SV) aparecen en la componente radial y vertical. Ondas de Love (SH) aparecen en la componente transversal. (Stein).....	24
Figura 2.7: Modelo de Love para explicar ondas superficiales SH, $\beta_2 > \beta_1$	25
Figura 2.8: Estrato sobre una base rígida.	26
Figura 2.9: Interpretación física del método DWN.....	33
Figura 2.10: Sismogramas sintéticos mediante solución exacta y método el DWN. Izquierda: Cálculo empleando una $L=250.0$ y $TW=50$. Derecha: Cálculo empleando una $L=100.0$ y $TW=50$	36
Figura 3.1: 1) Fuerza aplicada en un punto ξ . 2a) y 2b) Desplazamiento longitudinal y transversal respectivamente.....	39
Figura 3.2: N capas paralelas planas soportadas sobre el semiespacio.	40
Figura 3.3: Fuente puntual vertical en espacio infinito.	46
Figura 3.4: Fuentes puntuales horizontales en un espacio infinito.	49
Figura 3.5: Diagrama de rayos debido a una fuente explosiva en el semiespacio.	53
Figura 4.1: Arreglo de 11 detectores paralelo al eje z con x y y contantes.	61
Figura 4.2: Respuesta G_{xz} y G_{zx} ante una fuerza aplicada en el origen de coordenadas, con un arreglo de 11 detectores a una profundidad constante a lo largo del eje x	63
Figura 4.3: Respuesta de G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} ante una fuerza aplicada en el origen de coordenadas, con un arreglo de 11 detectores a una profundidad constante a lo largo del eje x	64
Figura 4.4: Esquema del arreglo de receptores en el semiespacio, la fuente se encuentra a 10 metros de profundidad (Sainos, 2018).	67
Figura 4.5: Componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. a) Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y	

con AXITRA (línea negra). b) Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados (Sainos, 2018).....	68
Figura 4.6: Componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semiespacio. a) Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con AXITRA (línea negra). b) Mapa de contornos para visualizar el error relativo (Sainos, 2018)	70
Figura 4.7: Componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semiespacio. a) Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con AXITRA (línea negra). b) Mapa de contornos para visualizar el error relativo. (Sainos, 2018)	73
Figura 4.8: Arreglo de 10 detectores en dirección x con z y y constantes en 0.....	74
Figura 4.9: Modelo estratigráfico de dos estratos soportados sobre un semiespacio con propiedades de la Tabla 4.3.	75
Figura 4.10: Sismogramas: G_{xx} , G_{zx} , G_{xz} , G_{zz} , y G_{yy} . En las que las líneas punteadas azul y roja representan las velocidades de onda P y S.	76
Figura 4.11: Arreglo de receptores en dirección x con z y y constantes en 0, para el caso de un estrato sobre un semiespacio con fuente a 50 metros de profundidad.	81
Figura 4.12: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio. La curva de color negro representa el campo de desplazamientos calculado con el código del DWN usando matriz global mientras que la curva en magenta representa el campo de desplazamientos calculado con AXITRA. Sainos (2018).....	82
Figura 4.13: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con AXITRA para el campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z . (Sainos, 2018) ..	82
Figura 4.14: Arreglo de receptores en dirección x con z y y constantes en 0, para el caso de un medio estratificado con aumento de velocidad.....	83
Figura 4.15: Sismogramas: G_{xx} , G_{zx} , G_{xz} , G_{zz} , y G_{yy} . En las que las líneas punteadas azul y roja representan las velocidades de onda P y S.	84
Figura 4.16: Arreglo de detectores en una línea diagonal en un plano paralelo al plano xy	86
Figura 4.17: De lado izquierdo respuesta calculada mediante el DWN y a la derecha respuesta calculada mediante la solución exacta.	88
Figura 4.18: Sobreposición de respuestas dadas por el DWN y la solución exacta.	89
Figura 4.19: Arreglo con detectores a profundidad constante a lo largo del eje x	90
Figura 4.20: Sismogramas obtenidos en las tres componentes.	90

Capítulo 1: Introducción

1.1 Antecedentes

Con el paso del tiempo grandes apasionados del estudio han contribuido al desarrollo de la ciencia. Dejando un legado inmaterial que son sus ecuaciones, gracias a las cuales podemos entender mejor el mundo que habitamos. Mirando al pasado, al año de 1828, nos encontramos con George Green, matemático inglés autodidacta que, en este año publicó su trabajo titulado *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Ensayo sobre la Aplicación de Análisis Matemático a las Teorías de Electricidad y Magnetismo), en el que se encuentran la derivación del Teorema de Green, aplicaciones del mismo y las funciones de Green, siendo de particular interés para propósitos de esta tesis estas últimas.

Dos de los primeros científicos en estudiar el problema de cargas dentro o sobre un cuerpo elástico fueron los matemáticos franceses Gabriel Lamé y Benôit Paul Émile Clapeyron durante la primera mitad del siglo XIX. Poco tiempo después, en 1848, Sir William Thomson, mejor conocido como Lord Kelvin, formuló las expresiones para los desplazamientos provocadas por fuerzas estáticas concentradas en un punto cualquiera en un cuerpo elástico infinito. Solo un año más tarde, Sir George Gabriel Stokes resolvió el problema de las fuerzas actuando en un punto en un medio infinito que varían con el tiempo; esta solución fundamental es de extraordinaria sencillez al expresarse en coordenadas esféricas y es de hecho la función de Green de la elastodinámica. Es pieza crucial del método de elementos de frontera.

A inicios del siglo XX, en 1904 para ser exactos, Sir Horace Lamb llega a la solución fundamental para un semiespacio homogéneo sometido a una carga en superficie, además de ser considerado un precursor del método de la transformada integral para obtener la respuesta dinámica a una carga vertical sobre la superficie de un semiespacio. En 1939 Louis Cagniard logró evaluar las transformadas integrales dobles requeridas en el problema de Lamb, tema que fue retomado en 1960 por Adrian De Hoop quien simplificó este procedimiento por medio de un método que implica el uso de transformadas inversas de Laplace y de la iteración en el plano complejo, por lo que el método recibe el nombre de Cagniard-de Hoop (Aki y Richards, 2002). Recurriendo a esta estrategia tenemos a Pekeris (1955) y a Chi-Chang Chao (1960) que, utilizan el método para obtener soluciones que no requieren de integraciones numéricas para cargas impulsivas para cargas puntuales verticales y horizontales, para relaciones de Poisson $\nu=0.25$, para que Mooney (1974) generalizara los resultados de Pekeris pero con una relación de Poisson arbitraria, pero solo funcionó para la componente horizontal hasta la relación $\nu=0.2631$. Chao (1960) estudió la respuesta dinámica ante cargas tangenciales en la superficie de un semiespacio elástico con un tratamiento un poco las elaborado por la falta de simetría axial del problema, llegando a la solución mediante las transformadas de Laplace y Hankel.

El clásico problema de Lamb ha dado mucho que hacer a los sismólogos. Basta aquí mencionar la magnífica solución de Johnson (1974) en la que generaliza y reúne la solución del tensor de Green con el método de Cagniard-de Hoop. En 2012 Kausel publicó un amplio recuento de este problema y varios códigos para calcular la solución.

Justo a medio siglo XX, el sismólogo y matemático ruso Vladimir Isaacovich Keilis-Borok contribuye a la solución de Stokes (1849) integrando las expresiones de las fuerzas estáticas concentradas, poniendo estas en términos de la función escalón de Heaviside y su integral. Solo cuatro años más tarde, Leon Knopoff plantea un método matricial para calcular los coeficientes de los esfuerzos y desplazamientos que es apropiado para el cálculo computacional.

En 1972, Takeuchi y Saito de la Universidad de Tokyo, estudian a profundidad las ondas superficiales, proponiendo técnicas numéricas para el cálculo computacional de este tipo de ondas. Años después, en 1981, Bouchon propone una técnica analítica para obtener las funciones de Green, esta considera fuentes distribuidas a intervalos iguales y se basa en la discretización del número de onda llamado el método del número de onda discreto, DWN por sus siglas en inglés. Tsutomu Sasatani en 1984, formula una aproximación para evaluar la respuesta dinámica en un medio estratificado, esta combina las propiedades de reflexión y transmisión de un medio elástico con el DWN. Entre 1994 y 1995 Yoshiaki Hisada publica una serie de tres artículos en los que desarrolla un método para el cálculo de las funciones estáticas y dinámicas de Green en un medio estratificado considerando receptores en profundidad y a profundidades semejantes a las de la excitación. La formulación realizada por Sánchez-Sesma et al. (2011) en la que se calcula la parte imaginaria de la función de Green para una fuerza puntual para el caso 3D de un medio estratificado nos sirve de base para el caso de una fuente volumétrica.

1.2 Objetivos

A partir de la descripción de Aki y Richards (2002) que se basa en la formulación con potenciales de Knopoff (1964), se aprovechan algunos resultados de Sánchez-Sesma et al. (2011) para obtener las soluciones para el cálculo de la respuesta dinámica debido a fuentes puntuales y explosivas. Que en conjunto con el método del número de onda discreto de Bouchon y Aki (1977), se generen programas que permitan calcular dicha respuesta en superficie libre, en un semiespacio y en medios estratificados para casos sencillos.

1.3 Justificación y alcance

El estudio de los medios estratificados sin irregularidad lateral, así como la documentación de estos, es de gran ayuda como un acercamiento inicial ante problemas más complejos. Se sabe que en geofísica y en general en la ciencia es necesario plantear primero los casos más sencillos con la perspectiva de entender las leyes de la naturaleza que rigen y explican el comportamiento del medio. Los resultados de Sánchez-Sesma et al. (2011) son un punto de partida para el análisis de casos generalizados como los propuestos, además de que estos, al tener simetría con el eje vertical nos

brindan la capacidad de disminuir notablemente los cálculos, ya que dada esta condición es posible simplificar los cálculos al resolver una sola integral en el número de onda radial, en lugar de dos en los números de onda horizontales.

Aunado a esto, el uso del método del número de onda discreto permite truncar el número de términos para que converja con la solución analítica además de que la discretización va a depender de la velocidad máxima del medio y la ventana de tiempo requerida. Por otro lado, la formulación de Knopoff (1964) es útil en el cálculo de los coeficientes de esfuerzos y desplazamientos gracias a la estabilidad en altas frecuencias. En la implantación del método de cálculo desarrollado aquí no se hicieron particulares esfuerzos para optimarlo. Posiblemente con mejoras al DWN como uso de cuadraturas adaptativas y métodos iterativos se puedan lograr mejoras sustanciales.

En la formulación utilizada con base en el trabajo realizado por Sánchez-Sesma et al. en el 2011 las fuerzas se imponen como condiciones de frontera en las interfaces, cosa poco usual en códigos más avanzados. Esto dio versatilidad a los cálculos de la función de Green, pero no es práctico para tratar dislocaciones y fuentes volumétricas. La inclusión de estas fuentes en medios estratificados quedará por ahora como pendiente.

Capítulo 2: Marco teórico

Estamos interactuando cada segundo en la vida cotidiana con distintos tipos de ondas, las cuales percibimos con los sentidos. En particular, en los problemas que se abordarán, se tiene interés en las ondas mecánicas, éstas requieren un medio físico por el cual propagarse y dependiendo de las características de este, lo harán de una u otra forma. Las ondas sísmicas entran dentro de esta clasificación.

En este capítulo se establecen las bases necesarias para el correcto planteamiento y resolución de los campos de ondas generados en sólidos elásticos ante la aplicación de fuerzas concentradas. A saber, la función de Green de la Elastodinámica. Varios problemas de esta índole se muestran en el desarrollo de la presente tesis.

2.1 Fundamentos de la Elastodinámica

La Sismología es una ciencia basada en datos llamados sismogramas, que son registros del movimiento del suelo debido a distintas fuentes que liberan energía en este, como desplazamientos de fallas geológicas o explosiones (Aki y Richards, 2002, p.1). La teoría de la elasticidad nos brinda las herramientas matemáticas que relacionan las fuerzas internas del medio que lo deforman, las cuales son necesarias para el análisis de los fenómenos implicados. Estudiamos las ondas sísmicas utilizando conceptos de la mecánica del medio continuo, que describe el comportamiento de un material deformable continuo, en el que la densidad, la rigidez, las fuerzas internas y los desplazamientos pueden considerarse funciones continuas y diferenciables (Stein, 2003, p.38).

Para describir el movimiento en un medio continuo usamos la descripción Lagrangiana ya que enfatiza el estudio de una partícula, o punto material, especificada por su posición original con referencia al tiempo (Aki y Richards, 2002, p.12-13). Este es un sistema natural en Sismología, porque los sismogramas son esencialmente registros del movimiento de una partícula en sensores cerca de la superficie a medida que las ondas pasan (Lay y Wallace, 1995, p.35).

2.1.1 Deformaciones

Un medio puede someterse fundamentalmente a dos tipos de movimiento: traslación y/o rotación, y deformación interna. La deformación dentro del sólido implica variaciones temporales y espaciales del campo de desplazamientos $u(x, t)$.

Consideremos un punto P que pertenece a un medio continuo. En la zona que rodea a este, existirán desplazamientos en las tres direcciones. (Figura 2.1).

$$u_i(P) = u_i(x_1, x_2, x_3), \quad (2.1)$$

Pensemos ahora, en un punto Q , similar a P , que se encuentra a una cierta distancia de este, el desplazamiento es

$$u_i(Q) = u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3), \quad (2.2)$$

Desarrollando el desplazamiento en Q en una serie de Taylor

$$u_i(Q) = u_i(P) + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j + \dots \quad (2.3)$$

Donde se restringe el desarrollo a los primeros dos términos: el campo de desplazamiento en el punto P , y la diferencial total en términos del gradiente del campo en el punto P y los incrementos de la posición. En esta ecuación, denominada de primer orden, los subíndices repetidos implican suma, como en la multiplicación matricial, que aquí es una expresión de la regla de la cadena. Es conveniente reescribir la ecuación 2.3 como

$$u_i(Q) = u_i(P) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(P)}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j(P)}{\partial x_i} \right) dx_j, \quad (2.4)$$

Se define entonces

$$e_{ij}(P) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.5)$$

que es un tensor simétrico, y

$$\omega_{ij}(P) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (2.6)$$

que es un tensor antisimétrico. Por lo que

$$u_i(Q) = u_i(P) + e_{ij}(P) dx_j + \omega_{ij}(P) dx_j. \quad (2.7)$$

Esta descripción del movimiento del punto Q en la vecindad de P es de gran sencillez, puede demostrarse que $u_i(P)$ es una traslación de cuerpo rígido, $\omega_{ij}(P)$ es el tensor de rotación, que representa una rotación de cuerpo rígido y por otra parte $e_{ij}(P)$ es el tensor de deformaciones que denota una deformación volumétrica. Esto puede establecerse a partir de la simetría lo que significa que existe un sistema de referencia ortogonal en el que sólo hay alargamientos y acortamientos implicando un cambio de volumen dado por $e_{kk}(P)V_0$, donde $V_0 = dx_1 dx_2 dx_3$ es el volumen inicial de la partícula. Es claro que $e_{kk}(P) = \text{divergencia del campo de desplazamientos}$.

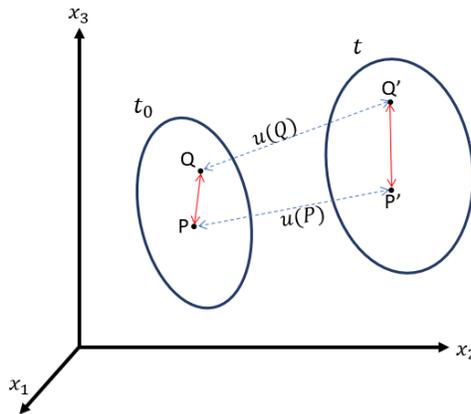


Figura 2.1: La deformación dentro de un medio continuo incrementa a partir de un desplazamiento entre dos puntos de dicho cuerpo.

2.1.2 Esfuerzos

En un objeto pueden actuar dos tipos de fuerza. La primera es la fuerza de cuerpo, que actúa en todos lados dentro del objeto, resultando en una sola que es proporcional al volumen de este. Tal es el caso de las fuerzas gravitatorias o las electromagnéticas. Un segundo tipo es la fuerza de superficie, que actúa, como su nombre lo dice, en la superficie del cuerpo, pero al contrario de la de cuerpo, en diferentes direcciones en diferentes partes, este tipo tiene unidades de fuerza por unidad de área. (Stein, 2003, p.39). Definiremos, entonces, este último tipo entre área como esfuerzo, la cual resulta de utilidad para describir el equilibrio y la manera en que las fuerzas se transmiten en el interior de un sólido.

Pensemos en un sólido sometido a varias fuerzas en el cual realizamos un corte en su interior (Figura 2.2). Defínase el vector esfuerzo como el límite de fuerza por unidad de superficie en cualquier punto en el que el área se vuelve infinitesimal. Como lo muestra la ecuación 2.8, el vector esfuerzo tiene la misma dirección que la fuerza y está asociado al vector normal \vec{n} , porque este depende de la orientación del plano de superficie (Stein, 2003, p.39).

$$t_i^{(\vec{n})} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A}, \quad (2.8)$$

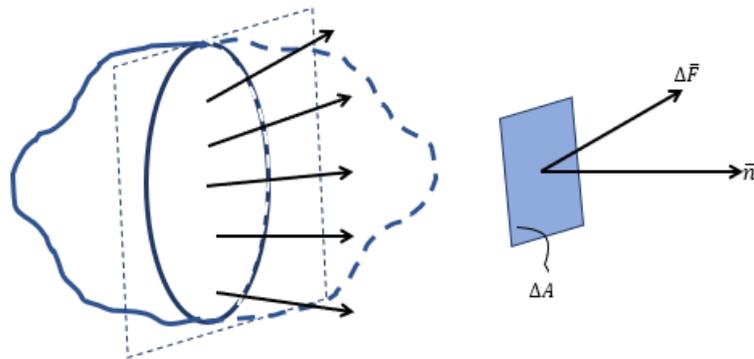


Figura 2.2: Se indica la parte de un sólido sometida a un campo de fuerzas que ejerce la porción restante. En un punto de la sección transversal se muestra la fuerza resultante ΔF en el área asociada ΔA y el vector normal \bar{n} .

El sistema de fuerzas actuando en un cuerpo es descrito por tres vectores esfuerzo. Cada uno actúa en una superficie perpendicular a un eje coordinado y es paralelo al plano definido por los otros dos ejes.

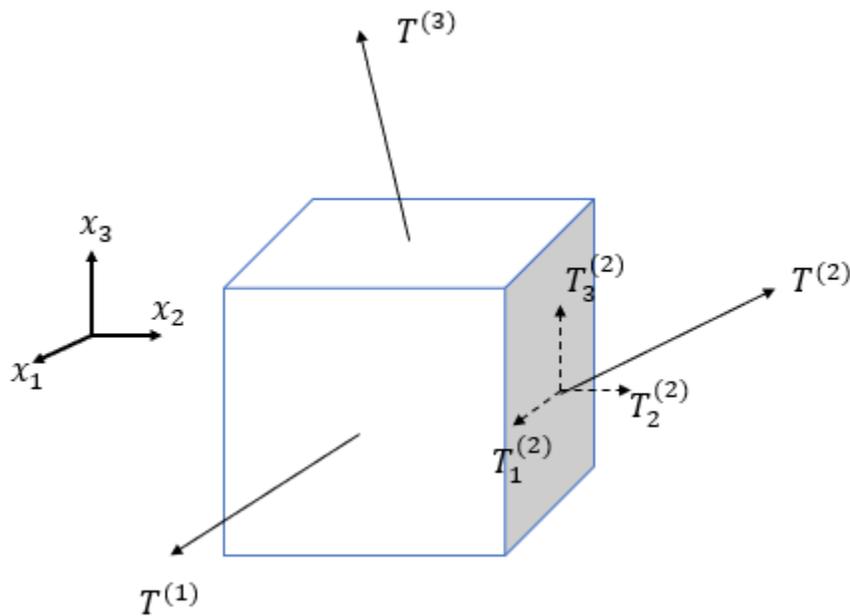


Figura 2.3 Vectores esfuerzo actuando en tres caras de un volumen que son perpendiculares a los ejes coordinados. El superíndice indica la dirección de la normal a la cara en la que actúa T. Se muestran los tres componentes $T_i^{(2)}$ (Stein, 2003, p.39)

El conjunto de nueve términos que describen las fuerzas internas pueden ser agrupados en el tensor esfuerzo, que suele representarse como matriz (Stein, 2003, p.39):

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

El tensor de esfuerzos lo descubrió Cauchy, quien es de hecho el primero que definió los tensores. En este caso el índice i define la cara en donde actúa el esfuerzo, mientras que el j indica la dirección de la fuerza. Podemos decir entonces que

$$\sigma_{ij} = t_j^{(i)}, \quad (2.10)$$

Es a partir de las propiedades de este tensor que se manifiesta el equilibrio. Se dice que una cara j es positiva si su normal coincide con la dirección positiva del eje j y los esfuerzos correspondientes serán positivos si tienen las direcciones de los ejes (Figura 2.4).

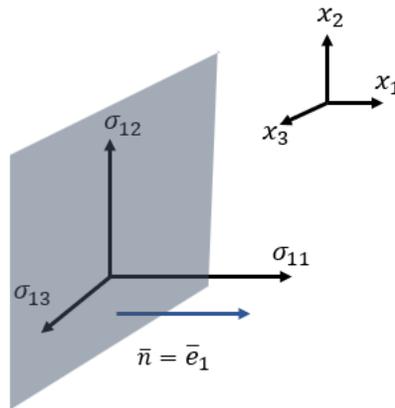


Figura 2.4: Esfuerzos positivos en la cara 1 y el vector normal asociado.

Consideremos un tetraedro infinitesimal recto de volumen dV con áreas ΔA , ΔAn_1 , ΔAn_2 y ΔAn_3 (Figura 2.5).

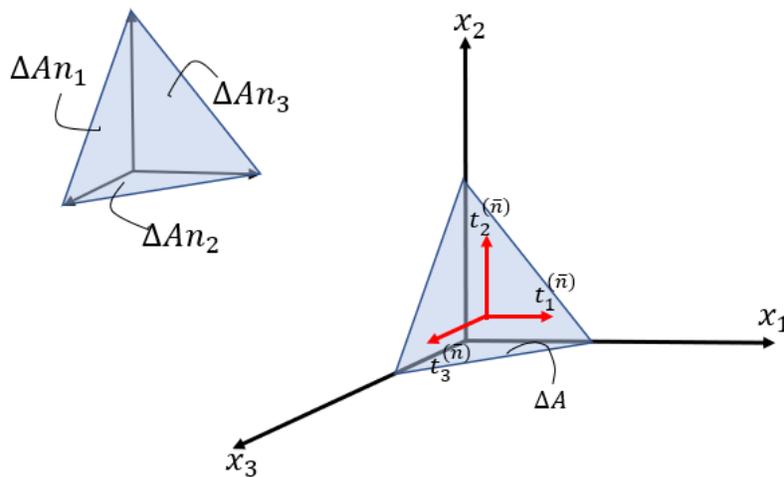


Figura 2.5: Áreas respectivas de cada cara del Tetraedro de Cauchy y vector esfuerzo en cara oblicua.

Estableciendo el equilibrio en la dirección de x_1 se tiene que

$$t_1^{(n)} \Delta A = \sigma_{11} \Delta A n_1 + \sigma_{21} \Delta A n_2 + \sigma_{31} \Delta A n_3, \quad (2.11)$$

Que al dividir entre ΔA queda $t_1^{(n)} = \sigma_{i1} n_i$, por lo que generalizando en las tres direcciones se llega a

$$t_j^{(n)} = \sigma_{ij} n_i, \quad (2.12)$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de Cauchy, cuya importancia radica en que relaciona los componentes del tensor de esfuerzo con el vector de esfuerzo en una dirección arbitraria.

Estudiemos ahora el equilibrio en el interior de un medio continuo, para esto consideremos el momento τ_3 sobre el eje x_3 en la cara de un cubo infinitesimal con lados dx_1 , dx_2 , a lo largo de los ejes coordenados (Figura 2.6). Si el momento es nulo, el bloque no girará si aún no lo está haciendo.

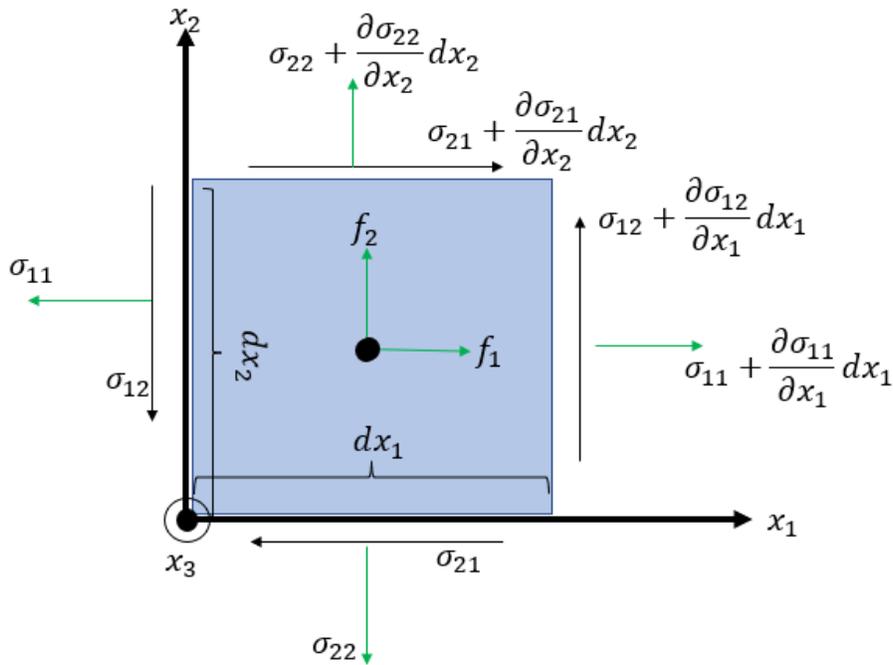


Figura 2.6: Momento alrededor del eje x_3 en sentido horario y antihorario en un cuerpo. Si el tensor de esfuerzo no fuera simétrico, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, surgiría un momento neto (Stein, 2003, p.41).

Consideremos una fuerza f_i en el centro del bloque y recordando que un momento es el producto de una fuerza aplicada a una cierta distancia, los esfuerzos cortantes σ_{21} y σ_{12} que actúan en las caras a lo largo de los ejes x_1 y x_2 , no contribuyen. Los esfuerzos restantes causan momentos iguales al producto del brazo de palanca y las tracciones, el componente de esfuerzo multiplicado por el área de la cara. Así, el momento total será la suma de las tracciones de corte en las otras dos caras (Stein, 2003, p.41).

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_1 dx_2 - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_2 - \\
& - \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \frac{dx_2}{2} + \sigma_{11} dx_2 \frac{dx_2}{2} + \\
& + \left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \frac{dx_1}{2} - \sigma_{22} dx_1 \frac{dx_1}{2} + f_2 dx_1 dx_2 \frac{dx_1}{2} - f_1 dx_1 dx_2 \frac{dx_2}{2},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dividiendo entre el área y considerando que dx_1 y dx_2 tienden a cero, tenemos que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Generalizando, queda demostrada la propiedad de simetría del tensor de esfuerzo

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{2.14}$$

2.2 Ecuación de movimiento

Podemos ahora describir las fuerzas actuando en la superficie de un material en términos de esfuerzos haciendo uso de la segunda Ley de Newton en la que $F = ma$, la cual es el primer acercamiento a las ecuaciones que describen la propagación de ondas sísmicas.

Consideremos una fuerza que actúa sobre un cubo infinitesimal de densidad ρ , cuyas dimensiones son dx_1 , dx_2 y dx_3 . La fuerza neta será entonces $f_i dx_1 dx_2 dx_3$, donde f_i es la fuerza por unidad de volumen en el centro del bloque. Por lo tanto, la fuerza total será la fuerza neta más las que actúan dentro del material (fuerzas de cuerpo).

Pensemos en una fuerza que actúa en la dirección x_1 y un vector $\bar{n} = (-1, 0, 0)$. De manera que tendremos

$$\begin{aligned}
& -\sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{12} dx_1 dx_3 \\
& + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \sigma_{13} dx_1 dx_2 \\
& + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 \\
& = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Haciendo las sumas correspondientes y dividiendo entre el volumen $dx_1 dx_2 dx_3$, tenemos

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{2.16}$$

Que se puede generalizar como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{2.17}$$

Que es la ecuación de equilibrio dinámico.

2.3 Ley Hooke generalizada

La ley de Hooke establece la proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones. De manera sencilla se tiene que

$$F = k\delta, \quad (2.18)$$

donde se establece que la fuerza aplicada es igual al producto de la rigidez del resorte k por su desplazamiento δ . Esta expresión puede dividirse entre el área de la sección transversal A y se introduce la longitud original L , de tal manera que $\frac{F}{A} = \frac{kL}{A} \frac{\delta}{L}$, así se tiene

$$\sigma = E\epsilon, \quad (2.19)$$

donde E es el módulo de elasticidad o módulo de Young, el cual es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en que se aplica una fuerza.

Recordemos que la deformación requiere ser descrita mediante un tensor de deformaciones y, por otro lado, los esfuerzos internos por el tensor de esfuerzos. Estos son, están relacionados por ecuaciones lineales, que son las ecuaciones constitutivas que caracterizan el comportamiento de un sólido elástico lineal. De forma general

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}, \quad (2.20)$$

donde c_{ijkl} es el tensor de Hooke con las constantes elásticas para el punto P dado. Para materiales isotropos adquiere la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2.21)$$

donde λ y μ son constantes de Lamé. λ no tiene significado físico simple, pero funciona muy bien para simplificar la Ley de Hooke y μ representa el módulo cortante o rigidez, que es una medida de resistencia de los materiales al corte.

Es conveniente por motivos experimentales expresar la ley de Hooke en términos del módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson mediante:

$$e_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}, \quad (2.22)$$

donde el módulo de elasticidad

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (2.23)$$

y considerando

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.24)$$

Siendo el coeficiente de Poisson representado por ν que es la relación entre la deformación transversal y la axial cuando se aplica un esfuerzo uniaxial. Es adimensional y tiene un valor máximo de 0.5. Este valor es aplicable únicamente para fluidos, para el que $\mu = 0$. El corcho tiene valores cercanos a cero y el hule a 0.5 y para muchos materiales terrestres va de 0.2 a 0.4. Se dice que un sólido de Poisson tiene $\nu = 0.25$. Las arcillas del valle de México suelen tener valores de 0.499. Algunos materiales artificiales pueden presentar valores negativos, estos han sido denominados anticaucho, materiales dilatacionales o auxéticos. El nombre anticaucho surge del hecho de que se vuelven más gruesos en la sección transversal cuando se estiran. Por el contrario, el caucho se vuelve más delgado. Lo contrario de auxético es gomoso. El nombre dilatacional surge del hecho de que los sólidos con relación de Poisson negativa experimentan fácilmente cambios de volumen, pero resisten los cambios de forma. Por el contrario, los materiales gomosos experimentan fácilmente cambios de forma (deformación por cizallamiento) pero son mucho más rígidos en relación con los cambios de volumen. La distinción se muestra en un mapa adaptado de Milton. El nombre auxetic, o auxetics en honor a Evans y colaboradores (Exeter, Reino Unido) en un artículo posterior y publicaciones posteriores, se deriva de la raíz de la palabra crecimiento, en alusión a la expansión lateral que se produce bajo tensión. En ese sentido, la propiedad de una relación de Poisson negativa puede llamarse auxeticidad. Más recientemente, los materiales en los que surgen propiedades interesantes o extremas de la microestructura en lugar de la composición se han denominado metamateriales. En muchos, pero no en todos, los efectos resonantes en la microestructura son de interés. El nombre es relativamente reciente pero los conceptos y ejemplos físicos no son recientes.

2.4 Ecuación de Navier-Cauchy

Con los conceptos y las expresiones revisadas con anterioridad se llegará a la ecuación de Navier-Cauchy, la cual nos ayuda a estudiar el movimiento de una partícula para un medio continuo, en donde las deformaciones y esfuerzos son infinitesimales.

Tomando el tensor de deformaciones $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ y sustituyendo en la ley de Hooke, tenemos:

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.25)$$

Ahora hacemos uso de la segunda ley de Newton para un medio continuo, introduciendo en ella la ecuación 2.25, obteniendo así la ecuación de Navier - Cauchy

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.26)$$

que en su forma vectorial, queda expresada como

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.27)$$

mientras que en notación indicial puede escribirse como

$$(\lambda + \mu)u_{i,ij} + \mu u_{i,jj} + f = \rho \ddot{u}_i, \quad (i = 1,2,3) \quad (2.28)$$

Sustituyendo la identidad de Helmholtz, la cual relaciona el operador laplaciano con la divergencia, el gradiente y el rotacional como $\nabla^2 u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \times (\nabla \times u)$, en la ec. 2.27, tenemos

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot u) - \mu\nabla \times (\nabla \times u) + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.29)$$

que en notación indicial puede escribirse como

$$(\lambda + 2\mu)u_{j,ij} - \mu e_{ijk} e_{klm} u_{m,lj} = \rho \ddot{u}_i. \quad (2.30)$$

2.5 Ecuaciones de onda

2.5.1 Ondas de cuerpo: P y S

Podemos usar el Teorema de Helmholtz para representar el campo de desplazamientos como

$$u = \nabla\phi + \nabla \times \psi, \quad (2.31)$$

donde ϕ es un potencial escalar irrotacional ($\nabla \times \phi = 0$) y ψ es un potencial vectorial sin divergencia ($\nabla \cdot \psi = 0$). Físicamente, en sismología, un campo irrotacional implica la ausencia de movimientos cortantes y el campo libre de divergencia implica que no hay cambio de volumen.

Considerando $\nabla \times u = 0$ en la ec. 2.31 obtenemos que

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 u + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.32)$$

es decir

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.33)$$

donde $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ que es la velocidad de las ondas P o compresionales y se considera que $f = 0$.

Por otro lado, considerando $\nabla \cdot u = 0$, se tiene que

$$\mu\nabla^2 u + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.34)$$

es decir

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.35)$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ que es la velocidad de las ondas S o transversales y se considera que $f = 0$.

2.5.2 Ondas superficiales

Dos de los atributos fundamentales de la Tierra que afectan las ondas sísmicas son la presencia de superficie libre y la forma cuasi elipsoidal del planeta. En particular, la superficie libre de un medio elástico tiene condiciones especiales de esfuerzos definido por la desaparición de tracciones superficiales, esto es de importancia debido a que las mediciones de ondas sísmicas que se hacen normalmente son en o muy cercanas a la superficie libre, por lo que resulta necesario entender los efectos que tiene para la interpretación de sismogramas. Las ondas incidentes y reflejadas interactúan y generan movimientos específicos. Por ejemplo, se sabe que las ondas SH reflejadas o incidentes tienen la misma amplitud, por lo que, en superficie libre, la amplitud del movimiento es el doble, a este factor multiplicativo se le conoce como función receptor SH (Lay y Wallace, 1995, p. 116).

2.5.2.1 Ondas de Rayleigh

Los efectos de receptor de superficie libre para ondas P y SV dependen del ángulo de incidencia y para ondas planas se pueden calcular algebraicamente. Los efectos pueden ser constantes o implicar un cambio de fase. Cuando hay curvatura de las ondas incidentes P o SV se generan efectos importantes de interacción de ondas P y SV en condiciones de frontera de superficie libre, y se generan ondas de Rayleigh (Sánchez-Sesma, 2018, p. 64).

Lord Rayleigh demostró en 1886 que el tipo de ondas que llevan su nombre decrecen exponencialmente con la profundidad, considérese que $|c| < \beta < \alpha$, se tiene el caso en el que:

$$f_{\beta} = -isgn_{\omega} \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2} \right)^{1/2}, \quad (2.36)$$

$$f_{\alpha} = -isgn_{\omega} \left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2} \right)^{1/2}, \quad (2.37)$$

Los potenciales ϕ y ψ que representan a las ondas P y SV, respectivamente quedan expresados

$$\phi = A_2 e^{-ilf_{\alpha}z} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)}, \quad (2.38)$$

$$\psi = B_2 e^{-ilf_{\beta}z} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)}, \quad (2.39)$$

donde no se tiene A_1 y B_1 , que corresponden a los coeficientes de las ondas incidentes. De las ecuaciones 2.36 y 2.37 puede verse que los potenciales dados por 2.38 y 2.39 representan ondas inhomogéneas que se atenúan con la profundidad y que viajan en el sentido positivo del eje x .

Para averiguar si pueden existir ondas superficiales de este tipo que satisfagan las condiciones de frontera libre, se plantea que no hay ondas incidentes en el medio, es decir $A_1 = B_1 = 0$,

$$(f_{\beta}^2 - 1)A_2 - 2f_{\beta}B_2 = 0, \quad (2.40)$$

$$-2f_\alpha A_2 - (f_\beta^2 - 1)B_2 = 0, \quad (2.41)$$

El sistema de ecuaciones resultante es homogéneo y tendrá solución diferente de la trivial solo si el determinante del sistema es nulo. Esto es, si

$$4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2 = 0, \quad (2.42)$$

y sustituyendo las ecuaciones 2.36 y 2.37 en la expresión 2.42 se tiene que

$$4 \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} - \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} = 0, \quad (2.43)$$

Esta expresión 2.42 es la llamada ecuación de Rayleigh. Si la ecuación tiene raíces tales que $c < \beta$ se tendrá soluciones aceptables con las formas 2.12. En efecto, puede demostrarse que la ecuación 2.43 tiene una raíz real $c = c_R < \beta$. Entonces, c_R es la velocidad de propagación de las ondas superficiales de Rayleigh, quien las estudió. De las ecuaciones 2.40 y 2.41 se tiene que

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2i \left(1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn}_\omega}{2 - \frac{c_R^2}{\beta^2}}. \quad (2.44)$$

Esta ecuación muestra la dependencia de las amplitudes de los potenciales ϕ y ψ . Sustituyendo las expresiones 2.38 y 2.39 en las ecuaciones de los campos de desplazamientos en dirección x y z puede obtenerse que

$$u = A_i \left\{ \frac{1}{2} \left(2 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \exp \left[- \left(1 - \frac{c_R^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} \frac{|\omega|}{c_R} z \right] - \exp \left[- \left(1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \frac{|\omega|}{c_R} z \right] \right\}, \quad (2.45)$$

$$w = A \operatorname{sgn}_\omega \left\{ \frac{2 \left(1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)} \exp \left[- \left(1 - \frac{c_R^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} \frac{|\omega|}{c_R} z \right] - \left(1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \left[- \left(1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \frac{|\omega|}{c_R} z \right] \right\}. \quad (2.46)$$

En las ecuaciones 2.45 y 2.46 se omite el factor $\exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c_R} \right) \right]$ de propagación y $A = -\frac{\omega B_2}{c_R}$. Puede verse que el movimiento decrece exponencialmente con la profundidad. En $x = 0$ el campo de desplazamiento es de la forma:

$$\begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \frac{2}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \\ -\frac{2i \operatorname{sgn} \omega}{c_R} \sqrt{\frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2}} \end{bmatrix} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c_R} \right) \right]. \quad (2.47)$$

Donde D es una constante. Es posible demostrar que la ecuación 2.47 presenta un campo de desplazamientos en donde las partículas de la superficie describen ciclos elípticos retrógrados, a diferencia de los ciclos progresivos que se observan en las ondas superficiales en líquidos.

En un semiespacio elástico la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh es independiente de la frecuencia, cosa que no sucede en un medio estratificado. Cuando la velocidad de propagación depende de la frecuencia se dice que las ondas son dispersivas. En problemas de cargas superficiales una parte importante de la energía se transforma en ondas de Rayleigh. Si la fuente es una excitación puntual en la superficie de las ondas Rayleigh se atenúan como ondas cilíndricas, es decir como $1/\sqrt{r}$.

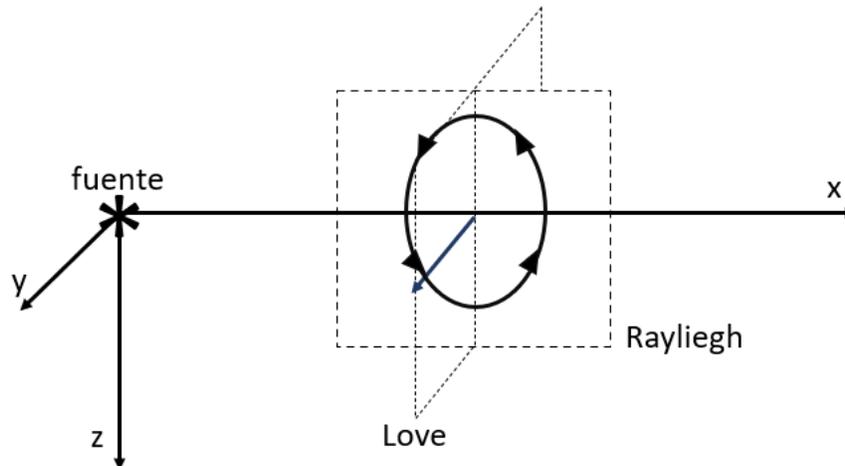


Figura 2.8: Geometría para ondas superficiales propagándose en un plano vertical que contiene la fuente. Ondas de Rayleigh (P-SV) aparecen en la componente radial y vertical. Ondas de Love (SH) aparecen en la componente transversal. (Stein, 2003, p.87)

2.5.2.2 Ondas de Love

Las propiedades de una onda SH atrapada en una capa de material soportado sobre un semiespacio y en presencia de superficie libre fueron exploradas por A. E. H. Love en 1911 (Lay y Wallace, 1995, p. 127), el resultado de estas interacciones recibe el nombre de ondas de Love. Este tipo de ondas presenta un movimiento perpendicular a la dirección de propagación (Figura 2.8), preceden a

las ondas de Rayleigh, pero no podían ser explicadas por la teoría de estas. A continuación, se analizarán los casos más sencillos.

Se desarrolla el caso estudiado por Love (Figura 2.7).

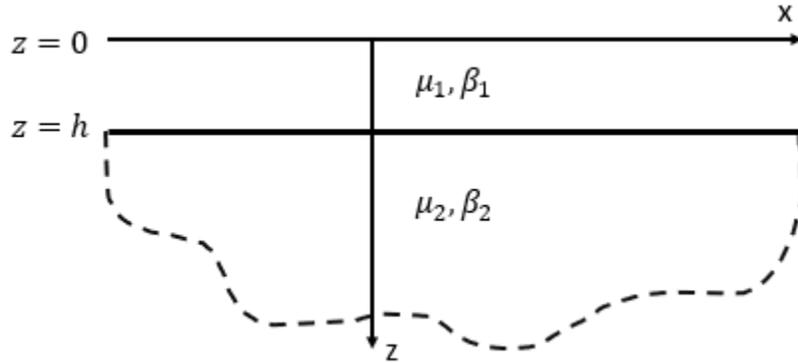


Figura 2.9: Modelo de Love para explicar ondas superficiales SH, $\beta_2 > \beta_1$.

Retomado de las Notas de Elastodinámica por Sánchez-Sema en 2018, la solución del caso SH de ondas de Love de un estrato sobre un semiespacio se obtiene a partir de la ecuación de onda para ondas S y teniendo en consideración la Figura (2.9), se plantea entonces

$$\nabla^2 v_j + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2 \quad (2.48)$$

Donde $j=1, 2$ denota al estrato y al semiespacio respectivamente, v_j representa el campo de desplazamientos en dirección y . Se sabe que las condiciones de frontera que se deben cumplir son la de frontera libre $z = 0$ y de continuidad de desplazamientos y esfuerzos en $z = h$.

Respectivamente se representan como

$$\text{en } z = 0 \quad \sigma_{zy} = \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \quad (2.49)$$

$$\text{en } z = h \quad v_1 = v_2 \quad (2.50)$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \quad (2.51)$$

Con el método de separación de variables se obtiene

$$v_{(1)} = A \cos(v_1 z) e^{-ikx}, \quad \text{donde } v_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_1^2} - k^2} \quad (2.52)$$

$$v_{(z)} = B e^{-v_2(z-h)} e^{-ikx}, \quad \text{donde} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_2^2} - k^2} \quad \text{y} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (2.53)$$

En forma matricial se puede acomodar las condiciones de frontera para resolver el sistema de ecuaciones 2.53 puesto que no hay excitación inicial el sistema se puede acomodar como

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

La matriz de condiciones de frontera es conocida como el kernel Δ . Para encontrar soluciones distintas a la trivial en el sistema anterior entonces el determinante del kernel debe ser nulo, es decir

$$|\Delta| = 0, \quad \text{entonces} \quad A \neq 0; \quad B \neq 0 \quad (2.55)$$

La expresión 2.55 tiene una infinidad de raíces relacionadas con los modos de propagación. Las ondas Love tienen un movimiento transversal paralelo a la superficie libre y esto se debe a las propiedades elásticas que son distintas entre la capa y el semiespacio. Estas ondas se pueden propagar a través de la capa superficial sin penetrar. Son más lentas que las ondas de cuerpo (P y S), pero se pueden desplazar a mayor velocidad que las ondas de Rayleigh. La dependencia de la velocidad de propagación con la frecuencia ocasiona el fenómeno de dispersión. Los diferentes componentes en la frecuencia viajan con diferente velocidad dispersando la onda en el tiempo. Este es siempre el caso en medios estratificados.

Analizaremos otro caso en que se tiene un estrato sobre una base rígida (Figura 2.10), donde no existe incidencia de ondas, pero el campo de desplazamiento a analizar es v , por lo que la ecuación de onda a resolver es

$$\nabla^2 v + \frac{\omega^2}{\beta^2} v = 0, \quad (2.56)$$

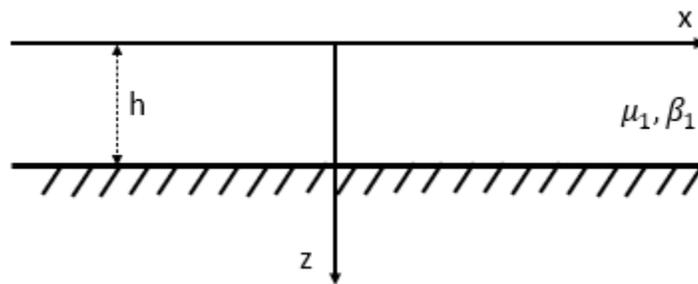


Figura 2.10: Estrato sobre una base rígida.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} v = 0, \quad (2.57)$$

Las condiciones de frontera, de tracción libre y de frontera rígida son respectivamente en $z = 0$ $\sigma_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ mientras que en $z = h$ se tiene que $v = 0$

La ecuación 2.57 se puede resolver mediante la separación de variables $v = X(x)Z(z)$ por lo que reescribiendo la ecuación de onda en estos términos y dividiendo entre XZ

$$v = \frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} + \frac{\omega^2}{\beta^2} = 0, \quad (2.58)$$

obteniendo la ecuación característica $-k^2 - \lambda^2 + \frac{\omega^2}{\beta^2} = 0$ las soluciones para x y para z son respectivamente:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0 \quad \rightarrow \quad z = A \cos \lambda z + B \sin \lambda z, \quad (2.59)$$

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \rightarrow \quad x = e^{\pm i k x}, \quad (2.60)$$

Puesto que la dependencia en x y en tiempo no varía, no se escribirá, pero se sabe que existe $e^{\pm i k x} e^{i \omega t}$ Evaluando los esfuerzos en la condición de frontera libre

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = -\mu (-A \sin \lambda z + B \cos \lambda z)|_{z=0}, \quad (2.61)$$

por lo que $B = 0$ para cumplir la condición; para la condición de frontera rígida se tiene que

$$v|_{z=h} = A \cos \lambda h = 0, \quad (2.62)$$

Por lo que se puede demostrar que el argumento es

$$\lambda h = \frac{\pi}{2} (2m + 1), \quad \text{con } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.63)$$

Que implica que λh en todos los puntos de inflexión del coseno es igual a 0. Despejando λ obtenemos

$$\lambda_m = \frac{\pi}{2h} (2m + 1), \quad \text{con } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.64)$$

A partir de la ecuación característica se puede despejar el número de onda horizontal como

$$k_m = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \left(\frac{\pi}{2h} (2m + 1)\right)^2}, \quad (2.65)$$

Si $\Omega_m = (2m + 1) \frac{\pi \beta}{2h}$ la ecuación anterior se reduce a

$$k_m = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{\Omega_m^2}{\beta^2}}, \quad (2.66)$$

Donde $\Omega_m = 2\pi \frac{1}{4h/\beta} (2m + 1) = \frac{1}{T_0} (2m + 1)$, con T_0 conocido como el periodo fundamental, Ω_m permite encontrar los modos fundamentales. La solución en el dominio de las frecuencias del campo de desplazamientos v se puede representar como

$$v(x, z, \omega) = Ae^{-ik_mx} \cos(\lambda_m z) = e^{-ik_mx} \cos\left(\frac{\Omega_m z}{\beta}\right), \quad (2.67)$$

Si por conveniencia reacomodamos el término de k_m de la exponencial como $e^{-ik_mx} = e^{-i\frac{\omega}{c_m(\omega)}x}$ donde $k_m = \frac{\omega}{c_m(\omega)}$, entonces la velocidad en términos de la frecuencia de puede escribir como

$$c_m(\omega) = \frac{\omega}{k_m} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{\Omega_m^2}{\beta^2}}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega^2}}}. \quad (2.68)$$

2.6 Función de Green

La función de Green es introducida en 1828 por George Green con un objetivo inicial de determinar el potencial eléctrico dentro de un volumen determinado y que verificara condiciones particulares sobre la superficie de dicho volumen, nos permite en la Elastodinámica, obtener una representación del movimiento en un punto del medio en términos de fuerzas del cuerpo e información sobre las fronteras (Aki y Richards, 2002, p. 27).

Sea I un intervalo en \mathbb{R} y sea $L: C^n(I) \rightarrow C^0(I)$ el siguiente operador diferencial

$$L = a_n(x, t)D^n + \dots + a_0(x, t), \quad (2.689)$$

Que asumiremos definido y normal en I . Podemos escribir entonces que dada $f(x, t)$, una función continua en I , resolver $u(x, t) \in C^n(I)$ tal que

$$L(u(x, t)) = f(x, t), \quad (2.70)$$

Usando la relación de la ecuación de onda $\rho\ddot{u}_i = f_i + (c_{ijkl}u_{k,l})_{,j}$, el operador L queda definido como:

$$(L(u))_i = \rho\ddot{u}_i + (c_{ijkl}u_{k,l})_{,j}, \quad (2.71)$$

El problema es resolver el campo de desplazamientos generado por una fuerza de campo que actúa en un medio elástico y homogéneo (Aki y Richards, 2002, p.27). Para este problema la función de Green satisface la ecuación

$$L(G(x, \xi, t)) = \delta(x - \xi, t) \quad (2.72)$$

En donde la función delta de Dirac indica un impulso aplicado en la posición ξ en el tiempo t . Multiplicando la ec. 2.72 por la fuerza aplicada en ξ e integrando sobre el volumen V alrededor del punto ξ se obtiene (Sainos, 2018, p. 11).

$$L\left[\int_V G(x, \xi, t)f(\xi, t)dV\right] = \int_V \delta(x - \xi, t)f(\xi, t)dV, \quad (2.73)$$

Usando la propiedad de la delta de Dirac, podemos reescribir la ec. 2.70 como

$$L\left[\int_V G(x, \xi, t)f(\xi, t)dV\right] = f(x, t), \quad (2.74)$$

Que en relación con la ecuación 2.70 se obtiene

$$u(x, t) = \int_V G(x, \xi, t)f(\xi, t)dV, \quad (2.75)$$

en donde la función de Green es el kernel de la integral. Sustituimos la fuerza $f_i(x, t) = \delta_{in}\delta(x - \xi)\delta(t)$ en la ecuación 2.71, entonces el tensor de Green $G_{in}(x, \xi, t)$ representa los desplazamientos elásticos para cada punto de coordenadas x_i , es decir el índice n hace referencia al eje donde se aplica la fuerza y el i a cada una de las componentes de la misma (Aki y Richards, 2002, p.26). La ecuación 2.71 queda expresada entonces como:

$$\int_V \rho G_{in}dV - \int_S c_{ijkl} G_{kn,l}n_j dS = \int_V \delta(x - \xi)\delta(t) \delta_{in}dV, \quad (2.76)$$

Para esta ecuación las soluciones serán las funciones de Green del medio y son dependientes de sus características, es decir, para cada medio existe una función de Green que va a describir como reacciona mecánicamente dicho medio a una excitación impulsiva. (Aki y Richards, 2002).

Haciendo uso del teorema de representación, el cual sintetizamos el desplazamiento de modelos de fuentes específicas a partir del desplazamiento producido por fuentes sencillas, como pulsos unitarios los cuales actúan en un tiempo y posición en el espacio (Aki y Richards, 2002), se tiene que

$$u_n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V f_i G_{in}dV + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_S (G_{in}t_i - c_{ijkl}G_{kn,l}n_j)dS, \quad (2.77)$$

La función de Green actúa como función de transferencia que considera los efectos de fuerzas o esfuerzos en (ξ, t) para determinar los desplazamientos en (x, t) (Aki y Richards, 2002. p. 64). La función de Green y el campo de desplazamientos están relacionados mediante la convolución de la función de transferencia con la forma de onda en tiempo $X_0(t)$ (Sainos, 2018, p. 12).

$$u_n(x, t) = X_0(t) * G_{in}. \quad (2.78)$$

2.6.1 Función de Green Caso 1D

Como se abordó, la ecuación que describe el equilibrio dinámico en un medio continuo es la 2ª Ley de Newton, que para el caso 1D en el que $u = u(x, t)$ con $|x| < \infty$ y $t \geq 0$, queda expresada como

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_x} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (2.78)$$

Donde el esfuerzo $\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial u / \partial x$, por lo que se puede escribir que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f_x}{\rho \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.80)$$

Esta es la ecuación de onda con un término forzante. Consideremos el caso en que la fuerza sea de la forma $f_x = \delta(x - x_0) \delta(t)$ que es una fuerza impulsiva concentrada en $x = x_0$. Al aplicar la transformada de Fourier temporal, en la que la transformada de Fourier de $\delta(t)$ es 1, con lo que $\delta(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega$, se puede escribir que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\delta(x - x_0)}{\rho \alpha^2} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} u = 0, \quad (2.81)$$

donde $u = u(x, \omega)$. En el caso homogéneo las soluciones de esta ecuación son de la forma $u = K \exp\left(\mp i \frac{\omega x}{\alpha}\right) \exp(i\omega t) = K \exp\left[i\omega \left(t \mp \frac{x}{\alpha}\right)\right]$ que no es práctica pues incluye ondas que viajan en dos sentidos en todo el dominio. Para tomar en cuenta la forma de la excitación, consideremos la forma siguiente:

$$u = K e^{(-i\omega|x-x_0|/\alpha)}, \quad (2.82)$$

Donde el factor $\exp(i\omega t)$ se sobreentiende aquí y en lo sucesivo. La ecuación 2.82 implica que las ondas se propagan hacia $x > x_0$ o hacia $x < x_0$ con lo que se cumple la condición de irradiación.

Para determinar la constante sustituyamos la ec. 2.82 en la 2.81. Antes $\frac{du}{dx} = u \times \left(\frac{-i\omega}{\alpha}\right) \text{sgn}(x - x_0)$ y también $\frac{d^2u}{dx^2} = u \times \left(\frac{-i\omega}{\alpha}\right)^2 \text{sgn}^2(x - x_0) + K \exp(-i\omega|x - x_0|/\alpha) \times \left(\frac{-i\omega}{\alpha}\right) 2\delta(x - x_0)$ que se puede escribir como $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-\omega^2}{\alpha^2} u + K \times \left(\frac{-i2\omega}{\alpha}\right) \delta(x - x_0)$. Sustituyendo en la ec. 2.80 se tiene

$$\frac{-\omega^2}{\alpha^2} u + K \times \left(\frac{-i2\omega}{\alpha}\right) \delta(x - x_0) + \frac{\delta(x - x_0)}{\rho \alpha^2} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} u = 0, \quad (2.83)$$

De donde $K = (2i\omega\rho\alpha)^{-1}$ por lo que

$$u(x, \omega) = \frac{1}{2i\omega\rho\alpha} e^{-i\omega|x-x_0|/\alpha}, \quad (2.84)$$

Como $u(x, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega$ entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{4\rho\alpha\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-|x-x_0|/\alpha)}}{i\omega} d\omega, \quad (2.85)$$

Que exhibe la solución como la integral de una delta que es un escalón de Heaviside.

$$u(x, t) = (2\rho\alpha)^{-1} h(t - |x - x_0|/\alpha). \quad (2.86)$$

2.6.2 Función de Green Caso 2D

De manera análoga al caso anterior, la ecuación que describe el equilibrio dinámico en un continuo 2D en el que $v = v(x, z, t)$ es el desplazamiento en la dirección de y con $|x|, |z| < \infty$ y $t \geq 0$, es la 2ª Ley de Newton

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.87)$$

Donde los esfuerzos son, de acuerdo con la ley de Hooke $\sigma_{xy} = \mu \partial v / \partial x$ y $\sigma_{zy} = \mu \partial v / \partial z$ donde $\mu = \rho\beta^2$ es el módulo de elasticidad en cortante. La ec. 2.86 se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{f_y}{\rho\beta^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.88)$$

Esta es la ecuación de onda 2D con un término forzante. Consideremos el caso en que la fuerza sea de la forma $f_y = \delta(x)\delta(z)\delta(t)$ que es una fuerza impulsiva concentrada en $x = 0, z = 0$. Al aplicar la transformada de Fourier temporal, en la que la transformada de Fourier de $\delta(t)$ es 1, con lo que $\delta(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega$, se puede escribir que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\delta(x)\delta(z)}{\rho\beta^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} v = 0, \quad (2.89)$$

donde $v = v(x, z, \omega)$. En el caso homogéneo las soluciones de esta ecuación en coordenadas polares son de la forma

$$v(x, z, \omega) = \left\{ A J_n \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) \cos n\theta + B Y_n \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) \cos n\theta \right\} e^{i\omega t}, \quad (2.90)$$

Donde $J_n(\omega r/\beta)$ y $Y_n(\omega r/\beta)$ son funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden n . La solución de la ec. 2.90 no tiene dependencia azimutal por lo que exclusivamente implica $n=0$. Además, la condición de irradiación al infinito se cumple si $B = -iA$ y el equilibrio en el origen lleva a $A = (4i\rho\beta^2)^{-1}$. De esta forma se obtiene que

$$v(r, \omega) = \frac{1}{4i\rho\beta^2} \left\{ J_0 \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) - iY_0 \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) \right\} e^{i\omega t}, \quad (2.91)$$

O bien si $v(r, \omega) = G_{22}(r, \omega)$,

$$G_{22}(r, \omega) = \frac{1}{4i\rho\beta^2} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) e^{i\omega t}, \quad (2.92)$$

Donde $H_0^{(2)}(\omega r/\beta)$ =función de Hankel de segunda especie y orden cero. Esta es función de Green. En el trabajo de Lamb (1904), él lo desarrolló mediante

$$G_{22}(x, z, \omega) = \frac{1}{4i\rho\beta^2} \times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx - i\nu|z|}}{\nu} dk \times e^{i\omega t}, \quad (2.93)$$

donde $\nu = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2}$ con $Im(\nu) < 0$. Esta ecuación exhibe a la función de Green como la superposición continua de ondas planas homogéneas e inhomogéneas. Mediante la transformada inversa de Fourier de la ec. 2.92, la solución en el tiempo se puede escribir como

$$G_{22}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{22}(r, \omega) e^{+i\omega t} d\omega = \frac{1}{8\pi i\rho\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.94)$$

o bien, recurriendo a tablas de integrales (ver Abramowitz y Stegun, 1972) se puede obtener que

$$G_{22}(r, t) = \frac{1}{2\pi\rho\beta^2} \frac{h(t - \tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}, \quad (2.95)$$

Donde $h(t - \tau)$ = función de Heaviside, t =tiempo y $\tau = r/\beta$ = tiempo de viaje.

2.7 Método del Número de Onda Discreto (DWN)

El método del número de onda discreto (DWN por sus siglas en inglés) fue introducido por Bouchon y Aki en 1977 y este incluye una periodicidad espacial de fuentes para discretizar el campo de ondas radiadas y se basa en la transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia complejo para calcular las funciones de Green en distintos problemas de la Elastodinámica.

Para explicar el principio del método consideramos el caso 2D (Ver Bouchon, 2003). La radiación estacionaria de una línea fuente en un medio infinito y homogéneo puede ser representada como una onda cilíndrica o, de manera equivalente, como una superposición continua de planos de onda homogéneos e inhomogéneos. Si ubicamos la línea fuente a lo largo del eje y , entonces el plano normal a ella estará formado por el eje horizontal x y el vertical z , por lo que podemos escribir el desplazamiento o el esfuerzo como

$$F(x, z; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) e^{-ikx} dk e^{i\omega t}, \quad (2.96)$$

donde ω es la frecuencia y k es el número de onda horizontal. La ecuación 2.96 se cumple para el caso de una fuente bidimensional en un medio homogéneo horizontalmente.

Cuando se tiene que el medio es finito o heterogéneo verticalmente, se presentan polos y singularidades en el núcleo de la integral, además de que la integración sobre el número de onda horizontal se convierte matemática y numéricamente complicada. Para solucionar este problema se sustituye una fuente singular por fuentes periódicas distribuidas a lo largo del eje x. Por lo que la ec. 2.96 queda reemplazada por:

$$G(x, z; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) e^{-ikx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ikmL} dk, \quad (2.97)$$

Donde L es la periodicidad de la fuente, en esta expresión se omite el término $e^{i\omega t}$, de manera que la ec. 2.97 se reduce a

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(k_n, z) e^{ik_n x}, \quad (2.98)$$

Con $k_n = \frac{2\pi}{L} m$ que, si la serie converge, se aproxima mediante una suma finita

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=-N}^N f(k_n, z) e^{ik_n x}, \quad (2.99)$$

De esta manera se tiene ahora, un número de fuentes periódicas (Figura 2.9).

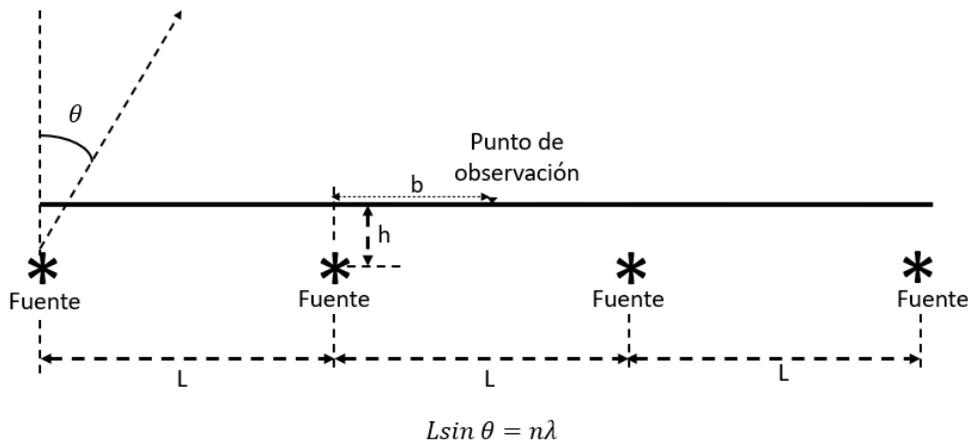


Figura 2.9: Interpretación física del método DWN. Una fuentes reemplazada por un arreglo infinito de fuentes distribuidas horizontalmente con un intervalo L. Para una longitud de onda λ dada corresponde una determinada frecuencia de excitación, la energía elástica se irradia en direcciones discretas θ solamente (Bouchon, 2003 p. 3).

Ahora para recuperar la solución de la fuente única en el dominio del tiempo, teóricamente si pudiéramos calcular la transformada continua de Fourier de G, sin embargo, en la práctica solo podemos hacerlo para un cierto número de frecuencias y obtener la transformada discreta de Fourier

para tener la solución en el dominio del tiempo. De manera que usamos la transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia compleja, para con ello tratar con una señal que tiene una respuesta de tiempo infinito (por el conjunto infinito de fuentes) y por otro lado usar la transformada discreta de Fourier, que conlleva una señal de duración finita $T = 2\pi/\Delta\omega$, donde $\Delta\omega$ es el muestreo de la frecuencia angular usado en el cálculo de G

$$g(x, z; t) = \int_{-\infty+i\omega_I}^{\infty+i\omega_I} G(x, z; \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.100)$$

Cuando ω_I denota la parte imaginaria constante de la frecuencia y es elegida tal que $e^{\omega_I T} \ll 1$. Esto asegura la atenuación, sobre una ventana de tiempo T, de la solución de respuesta de tiempo infinito. Por lo tanto, con una L suficientemente grande para no perturbar los arribos en los detectores (x, z) de una fuente cercana en la ventana de tiempo de interés T, por lo que la solución $f(x, z; t)$ es obtenida de las fuentes múltiples en el dominio de la frecuencia $G(x, z; \omega)$ mediante

$$f(x, z; t) = e^{-\omega_I t} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, z; \omega) e^{\omega_R t} d\omega_R, \quad (2.101)$$

Donde la integral es calculada mediante el uso de la transformada rápida de Fourier.

La ec. 2.99 muestra que ω_I es únicamente una función del tamaño considerado de la ventana de tiempo T. Los resultados no deberían ser sensibles al valor particular de ω_I elegido, mientras que brinde atenuación suficiente para las perturbaciones que llegan después de la ventana de interés T sean despreciables. Valores en el rango $\omega_I = [-\pi/T, -2\pi/T]$ son recomendables para la mayoría de las aplicaciones.

$$H_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_x} e^{-iv|z-z_s|}}{v} dk, \quad (2.102)$$

Sin embargo, en la práctica truncamos a

$$H_0 \sim \frac{1}{\pi} \sum_{-k_{max}}^{k_{max}} \frac{e^{-ik_x} e^{-iv|z-z_s|}}{v} dk, \quad (2.103)$$

Al hacer uso de k_{max} significa que estamos truncando el número de onda

$$K_{max} = 3 \frac{\omega}{\beta}, \quad (2.104)$$

La idea de truncar k_{max} es para tener ondas planas

$$K_{max} = 3 * (\omega/\beta), \quad (2.105)$$

Cuando se programa, al truncar el número de onda, planteamos fuentes vecinas

$$\omega = \omega_R - i\omega_I, \quad (2.106)$$

Esto representa que una onda en el dominio de la frecuencia que está calculada con esta ω va a tener un término de atenuación:

$$e^{-i\omega\frac{|x|}{\beta}} = e^{-i\omega_R\frac{|x|}{\beta}} e^{-\omega_I\frac{|x|}{\beta}}, \quad (2.107)$$

El segundo término de parte derecha de la ec. 2.107 nos indica que la fuente se atenúa con la distancia, eso es lo que queremos inducir: que las fuentes estén a una cierta distancia a nuestro arreglo de interés y que lleguen lo suficientemente atenuadas. Se escribe el valor absoluto de x para indicar que la onda viaja en cualquier dirección. De manera genérica podemos decir que la atenuación $e^{-\omega_I\frac{L}{\beta}} \approx 0.01$ el cual permite escribir que

$$\omega_I\frac{L}{\beta} = 5, \quad (2.108)$$

recordemos que

$$\omega_I = 2/Tw, \quad (2.109)$$

por lo que

$$\frac{2}{Tw}\frac{L}{\beta} \approx 5. \quad (2.110)$$

De manera que con esto tenemos una regla de cuanto es en función de β en el medio homogéneo. Se muestran dos ejemplos en el que se tiene un medio cuya $\beta = 1777[m/s^2]$, la fuente, que para el este caso es un pulso de Ricker cuyo periodo característico $t_p = 5[s]$ y tiempo central $t_s = 5[s]$, se encuentra en el origen y se tiene un arreglo de 10 detectores a una profundidad constante. Estos parámetros son los mismos para ambos casos, pero se modifica la periodicidad (Figura 2.10). Comparando sismogramas sintéticos, observamos como una periodicidad menor nos genera señales que son originadas debido a la proximidad entre las fuentes.

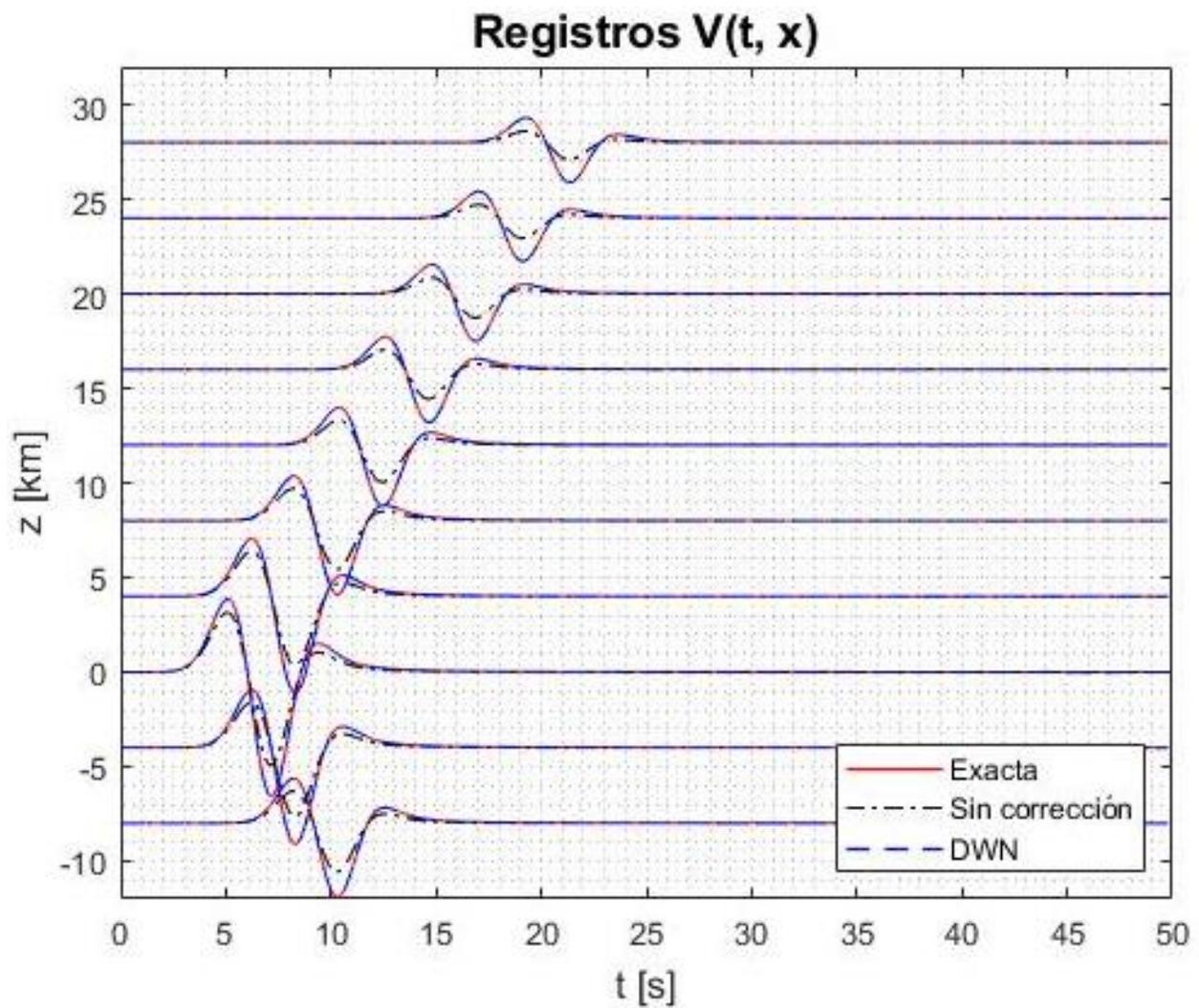


Figura 2.10: Sismogramas sintéticos mediante solución exacta y método el DWN. Cálculo empleando una $L=250.0$ y $TW=50$.

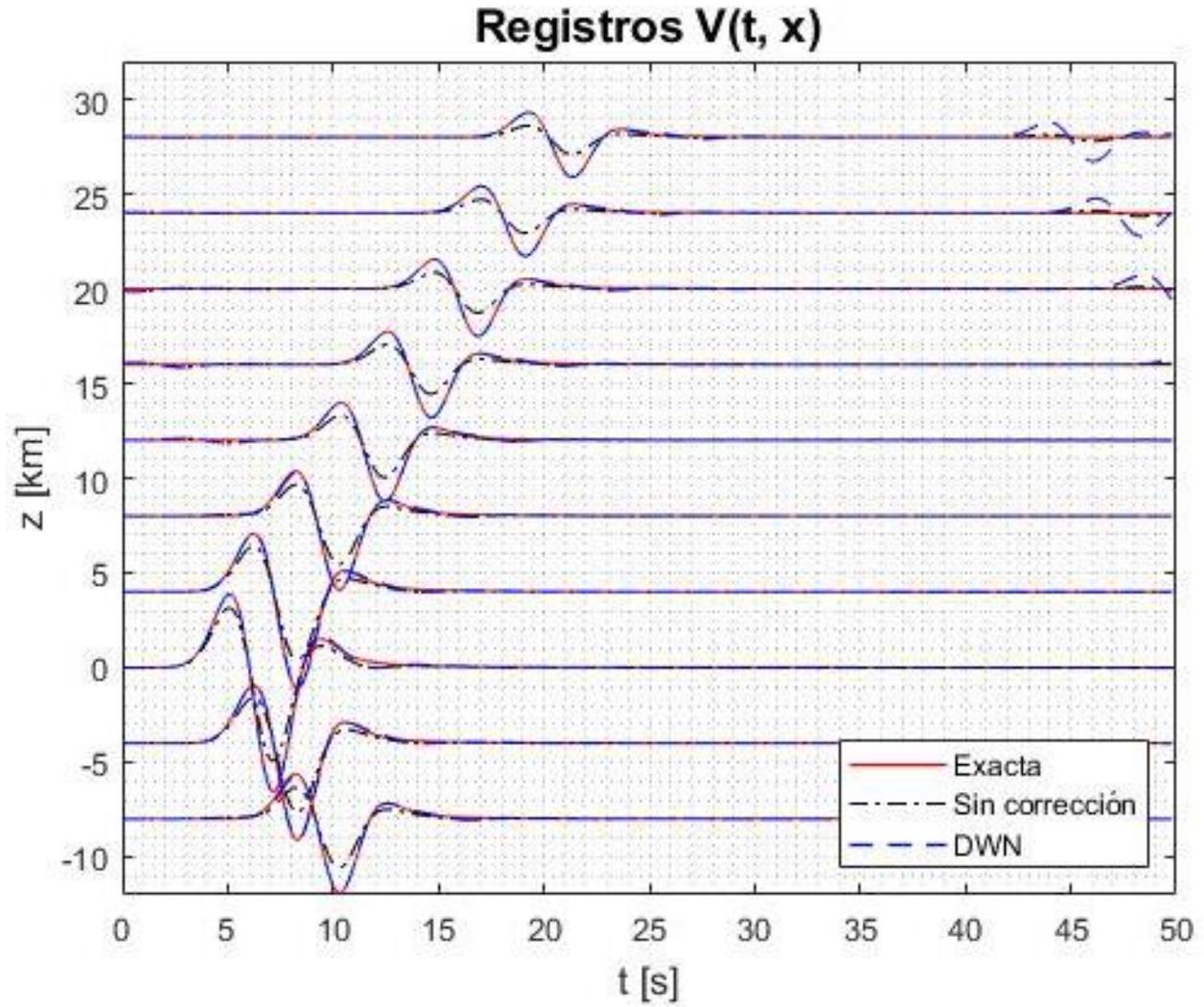


Figura 2.11: Sismogramas sintéticos mediante solución exacta y método el DWN. Cálculo empleando una $L=100.0$ y $TW=50$.

Capítulo 3: Formulación del problema

3.1 Fuerza puntual

Para estudiar el campo de desplazamientos producido por una fuente puntual en un sólido elástico, homogéneo e isótropo debemos tomar como punto de partida la ecuación de equilibrio de la segunda ley de Newton $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$, de manera que la ecuación de Navier adquiere la forma siguiente

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = 0, \quad (3.1)$$

Consideremos la fuerza aplicada está concentrada en el punto $\bar{\xi}$ (Figura 3.1). A mediados del siglo XIX, Lord Kelvin formuló expresiones para los desplazamientos provocados por fuerzas estáticas concentradas que actúan en un punto arbitrario en un cuerpo elástico infinito (Thomson, 1848). Si consideramos en lugar de una fuerza, dos, una longitudinal y una transversal aplicadas en el mismo punto, podemos expresar los desplazamientos como

$$u_L = \frac{f_1}{4\pi\mu r} F_L, \quad (3.2)$$

Longitudinalmente y

$$u_T = \frac{f_2}{4\pi\mu r} F_T, \quad (3.3)$$

Transversalmente. Donde $r = |\bar{x} - \bar{\xi}| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ y los factores $f_1 = 1$ y $f_2 = \lambda + 3\mu/2\lambda + 4\mu$.

Si la fuerza concentrada F_i se escribe en términos de estos dos componentes (longitudinal y transversal) relativos al punto de observación \bar{x} .

$$F_i = F_j \gamma_j \gamma_i + \delta_{ij} F_j - F_j \gamma_j \gamma_i, \quad (3.4)$$

Donde $\gamma_i = (x_i - \xi_i)/r$ son los cosenos directores del vector que va de la fuente al observador. Entonces es posible escribir que

$$u_i = \frac{F_j}{4\pi\mu r} [f_1 \gamma_i \gamma_j + f_2 (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)] = G_{ij} F_j, \quad (3.5)$$

De esta forma podemos escribir la función de Green para el problema de Kelvin como

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu r} [f_1\gamma_i\gamma_j + f_2(\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j)], \quad (3.6)$$

Que es el desplazamiento en el punto \bar{x} en la dirección i , debido a la fuerza unitaria aplicadas en $\bar{\xi}$ en la dirección j .

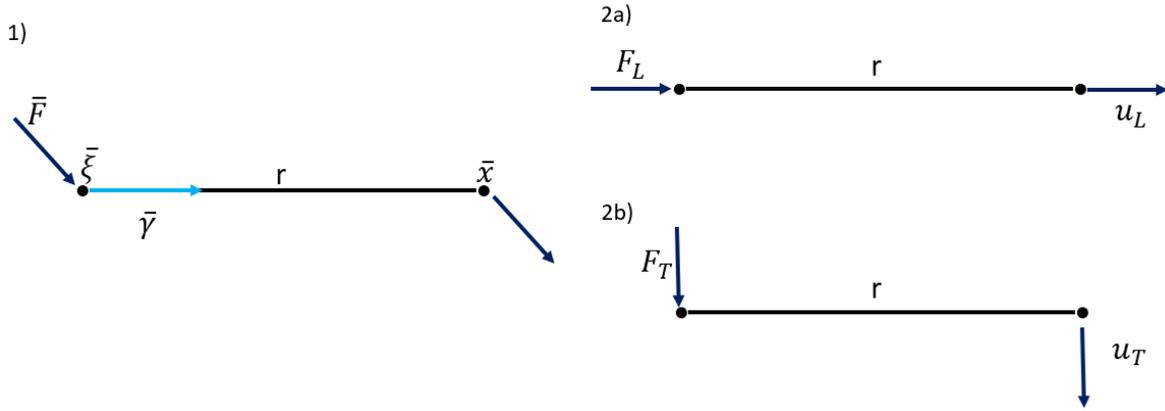


Figura 3.1: 1) Fuerza aplicada en un punto $\bar{\xi}$. 2a) y 2b) Desplazamiento longitudinal y transversal respectivamente.

Poco después, en 1849, George Stokes, resolvió el problema de las fuerzas que actúan en un medio infinito que varían en el tiempo. Una de sus características importantes es que es una de las pocas soluciones fundamentales que son conocidas tanto en los dominios del tiempo y frecuencia. (Arias, 2016).

De Stokes (1849) en *On dynamical Theory of Diffraction* tenemos

$$\xi = \frac{lk}{4\pi D a^2 r} f\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{l' - lk}{4\pi D b^2 r} f\left(t - \frac{r}{b}\right) + \frac{3lk - l'}{4\pi D r^3} \int_{r/a}^{r/b} t'(t - t') dt', \quad (3.7)$$

Donde $\xi = u_1, \eta = u_2, \zeta = u_3$, $l = \gamma_1$, $m = \gamma_2$, $n = \gamma_3$, $a = \alpha, b = \beta, D = \rho$, por lo tanto $Db^2 = \rho\beta^2 = \mu$ y $Da^2 = \rho\beta^2(\alpha^2/\beta^2) = \mu(\alpha^2/\beta^2)$. Llamamos $k = \gamma_j$ y $l' - lk = \delta_{1j} - \gamma_1\gamma_j =$ componente transversal. Considerando que $3lk - l' = -(l' - lk) + 2lk$, podemos moldear con $i=1$ la ec. 3.7 a

$$G_{ij}(x, \xi; t) = \frac{1}{4\pi\mu r} [f_1\gamma_i\gamma_j + f_2(\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j)], \quad (3.8)$$

donde las funciones f_1 y f_2 están dadas por

$$f_1(r, t) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + 2\beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - rk) k dk, \quad (3.9)$$

y

$$f_2(r, t) = \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) - \beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - rk) k dk, \quad (3.10)$$

Haciendo lo que Keilis-Borok (1950), integrando por partes tenemos

$$f_1(r, t) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + 2 \frac{\beta^2}{r^2} \left\{ \frac{r}{\alpha} h\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{r}{\beta} h\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \langle t - \frac{r}{\alpha} \rangle - \langle t - \frac{r}{\beta} \rangle \right\}, \quad (3.11)$$

$$f_2(r, t) = +\delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) - \frac{\beta^2}{r^2} \left\{ \frac{r}{\alpha} h\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{r}{\beta} h\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \langle t - \frac{r}{\alpha} \rangle - \langle t - \frac{r}{\beta} \rangle \right\}. \quad (3.12)$$

Recordemos que $h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ y $\langle t \rangle = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$.

Podemos encontrar una interpretación moderna de la solución de Stokes en dos y tres dimensiones en el trabajo realizado por Eason, Fulton y Sneddon (1956).

3.1.1 Caso en medio estratificado

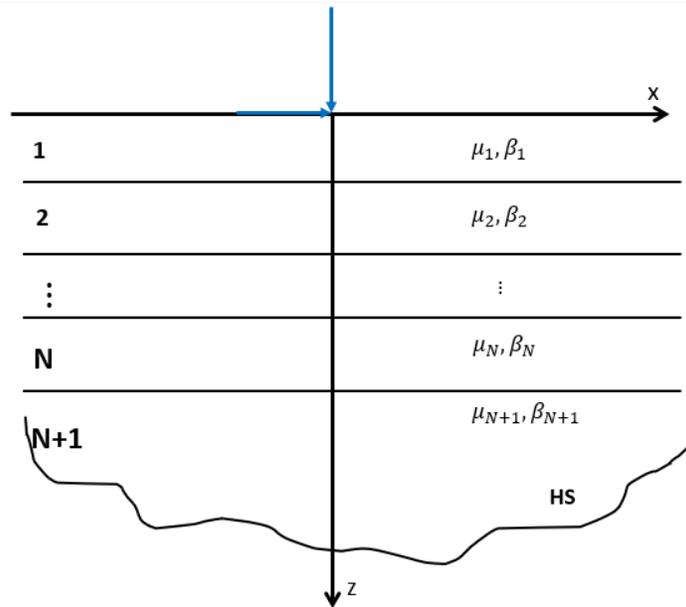


Figura 3.2: N capas paralelas planas soportadas sobre el semiespacio.

El caso de un medio formado por estratos horizontales planos soportados sobre un semiespacio, resulta conveniente debido a la simetría axial que existe con el eje z (Figura 3.2), por lo que a continuación se estudia ese modelo para fuentes puntuales y fuente explosivas.

3.1.1.1 Fuente puntual vertical

Consideramos una fuerza armónica puntual vertical en la superficie libre $z = 0$. Debido a la simetría axial del problema, los resultados dependen de z y r , por lo que los esfuerzos normales σ_{zz} y cortantes σ_{zr} son

$$\sigma_{zz} = -\delta(x)\delta(y)e^{i\omega t}, \text{ y } \sigma_{zr} = 0, \quad (3.13)$$

Donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac. Por lo que al expresarlas como integrales en los números de onda k_x y k_y , y reescribiendo en coordenadas polares, tenemos que

$$\sigma_{zz} = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x x} e^{ik_y y} dk_x dk_y = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k J_0(kr) dk, \quad (3.14)$$

Para el caso de una fuente puntual vertical aplicada en un semiespacio homogéneo e isótropo se tiene que plantear primero un caso similar, siendo este en un espacio completo. La aplicación de una fuerza vertical va a generar ondas P-SV. Siguiendo el trabajo de Knopoff (1964) y de Aki y Richards (1980), los desplazamientos en términos de potenciales $\phi(r, z)$ y $\psi(r, z)$, para ondas dilatacionales y de corte, respectivamente (Sánchez-Sesma, 2011, p.13-14), están dadas por

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \quad (3.15)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi, \quad (3.16)$$

donde u_r representa los desplazamientos radiales y u_z los desplazamientos verticales. Los potenciales ϕ y ψ son soluciones de las ecuaciones de onda reducidas (Sánchez-Sesma, 2011, p. 14).

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \phi = 0, \quad (3.17)$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi = 0. \quad (3.18)$$

Los potenciales que resuelven las ecuaciones 3.17 y 3.18, en un estrato j son

$$\phi(r, z) = (A_{2j-1} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)}) J_0(kr), \quad (3.19)$$

$$\psi(r, z) = (B_{2j-1}e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} + B_{2j}e^{-i\nu_j(z-z_j)})J_0(kr), \quad (3.20)$$

donde $\gamma = \sqrt{q^2 - k^2}$ es en número de onda vertical de ondas P, tal que $\text{Im} \gamma \leq 0$, $\nu = \sqrt{\omega^2/\beta^2 - k^2}$ es el número de onda vertical de ondas S con $\text{Im} \nu \leq 0$ y $k =$ número de onda radial. En donde los coeficientes con subíndices impares representan las ondas que viajan hacia arriba y los pares las ondas que viajan hacia abajo. Considerando 3.15 y 3.16 para calcular los desplazamientos, tenemos que quedan expresados como

$$u_r = (-A_{2j-1}e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} - A_{2j}e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - B_{2j-1}e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} + B_{2j}e^{-i\nu_j(z-z_j)})kJ_1(kr), \quad (3.21)$$

$$u_z = (A_{2j-1}i\gamma_j e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} - A_{2j}i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}k^2 e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} + B_{2j}k^2 e^{-i\nu_j(z-z_j)})J_0(kr), \quad (3.22)$$

Los esfuerzos para una z dada en planos horizontales, son obtenidos de la Ley de Hooke generalizada por medio de

$$\begin{aligned} \sigma_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donde $\mu = \rho\beta^2$, $\lambda + 2\mu = \rho\alpha^2$, y $\Theta = \nabla^2 \phi = -(\omega/\alpha)^2 \phi \equiv$ dilatación. De forma que los esfuerzos son

$$\sigma_{zr} = \mu (-A_{2j-1}2i\gamma_j e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + A_{2j}2i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}\xi e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} + B_{2j}\xi e^{-i\nu_j(z-z_j)})kJ_1(kr), \quad (3.24)$$

$$\sigma_{zz} = \mu (-A_{2j-1}\xi e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} - A_{2j}\xi e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}2i\nu_j k^2 e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} + B_{2j}2i\nu_j k^2 e^{-i\nu_j(z-z_j)})J_0(kr). \quad (3.25)$$

En las ecuaciones anteriores se define $\xi = (\nu_j^2 - k^2)$. Para N capas sobre un semiespacio tendremos cuatro incógnitas para cada una que en ese caso corresponden a las dos ondas que viajan hacia abajo y aquellas que van para arriba. Para estas $4N+2$ incógnitas se tiene un número igual de condiciones de frontera que vienen de los esfuerzos en el límite superior, de la continuidad de desplazamientos normales y radiales y los esfuerzos en las interfaces (Sánchez-Sesma, 2011, p. 15). Los esfuerzos para un número de onda dado k en la superficie $z=0$ deben ser (considérese el integrado de la ecuación 3.14):

$$\sigma_{zz} = -\frac{k}{2\pi}J_0(kr), \quad \text{y} \quad \sigma_{zr} = 0. \quad (3.26)$$

De acuerdo con la ecuación 3.14 una vez obtenidos los coeficientes, deben calcularse las integrales en el número de onda radial.

3.1.1.2 Fuente puntual horizontal

De forma similar al caso anterior, se consideran dos fuerzas puntuales armónicas horizontales, una aplicada en la dirección x y otra en dirección y . Las partes pares e impares del campo serán moduladas por $\cos \theta$ y $\sin \theta$, respectivamente. Además de las ondas P-SV, debido a la naturaleza de la fuerza, se tienen también ondas SH, es decir, ondas polarizadas horizontalmente. Según Aki y Richards (1980), los potenciales correspondientes $\phi(r, z)$, $\psi(r, z)$ y $\chi(r, z)$ son soluciones de las ecuaciones de onda reducidas:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \phi = 0, \quad (3.27)$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi = 0, \quad (3.28)$$

$$\nabla^2 \chi + \frac{\omega^2}{\beta^2} \chi = 0, \quad (3.29)$$

y los desplazamientos están dados por

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad (3.30)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (3.31)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi, \quad (3.32)$$

donde u_r , u_θ y u_z son los desplazamientos radiales, tangenciales y verticales, respectivamente. Aquí los esfuerzos de interés son σ_{zr} , $\sigma_{z\theta}$ y σ_{zz} que son los correspondientes a los esfuerzos de corte radial y transversal y el normal en un plano horizontal. De igual manera que para la fuerza vertical, estos son obtenidos mediante la Ley de Hooke generalizada, por lo que se tiene

$$\sigma_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (3.33)$$

$$\sigma_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad (3.34)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (3.35)$$

respectivamente. Los potenciales que resuelven las ecuaciones 3.27, 3.28 y 3.29 son

$$\phi = (A_{2j-1}e^{i\gamma_j(z-z_j)} + A_{2j}e^{-i\gamma_j(z-z_j)})J_1(kr)\cos\theta, \quad (3.36)$$

$$\psi = (B_{2j-1}e^{iv_j(z-z_j)} + B_{2j}e^{-iv_j(z-z_j)})J_1(kr)\cos\theta, \quad (3.37)$$

$$\chi = (C_{2j-1}e^{iv_j(z-z_j)} + C_{2j}e^{-iv_j(z-z_j)})J_1(kr)\sin\theta, \quad (3.38)$$

Al aplicar las ecuaciones 3.30-3.32 para calcular los desplazamientos en las expresiones 3.36-3.38, tenemos

$$u_r = (A_{2j-1}e^{i\gamma_j(z-z_j)} + A_{2j}e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}iv_je^{iv_j(z-z_j)} - B_{2j}iv_je^{-iv_j(z-z_j)}) \\ k\left(J_0 - \frac{J_1}{kr}\right)\cos\theta + (C_{2j-1}e^{iv_j(z-z_j)} + C_{2j}e^{-iv_j(z-z_j)})k\frac{J_1}{kr}\cos\theta, \quad (3.39)$$

$$u_\theta = -(A_{2j-1}e^{i\gamma_j(z-z_j)} + A_{2j}e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}iv_je^{iv_j(z-z_j)} \\ - B_{2j}iv_je^{-iv_j(z-z_j)})k\frac{J_1}{kr}\sin\theta \\ - (C_{2j-1}e^{iv_j(z-z_j)} + C_{2j}e^{-iv_j(z-z_j)})k\left(J_0 - \frac{J_1}{kr}\right)\sin\theta, \quad (3.40)$$

$$u_z = (A_{2j-1}i\gamma_je^{i\gamma_j(z-z_j)} - A_{2j}i\gamma_je^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}k^2e^{iv_j(z-z_j)} \\ + B_{2j}k^2e^{-iv_j(z-z_j)})J_1\cos\theta, \quad (3.41)$$

Respectivamente y donde se entiende que $J_0 = J_0(kr)$ y $J_1 = J_1(kr)$. Al calcular los esfuerzos de interés, estos quedan expresados como

$$\sigma_{zr} = -\mu\left(-A_{2j-1}2i\gamma_je^{i\gamma_j(z-z_j)} + A_{2j}2i\gamma_je^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}\xi e^{iv_j(z-z_j)} \\ + B_{2j}\xi e^{-iv_j(z-z_j)}\right) \\ k\left(J_0 - \frac{J_1}{kr}\right)\cos\theta + iv_j(C_{2j-1}e^{iv_j(z-z_j)} - C_{2j}e^{-iv_j(z-z_j)})k\frac{J_1}{kr}\cos\theta, \quad (3.42)$$

$$\sigma_{z\theta} = \mu\left(-A_{2j-1}2i\gamma_je^{i\gamma_j(z-z_j)} + A_{2j}2i\gamma_je^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1}\xi e^{iv_j(z-z_j)} \\ + B_{2j}\xi e^{-iv_j(z-z_j)}\right) \\ k\frac{J_1}{kr}\sin\theta - iv_j(C_{2j-1}e^{iv_j(z-z_j)} - C_{2j}e^{-iv_j(z-z_j)})k\left(J_0 - \frac{J_1}{kr}\right)\sin\theta, \quad (3.43)$$

$$\sigma_{zz} = \mu \left(-A_{2j-1} \xi e^{i\gamma_j(z-z_j)} - A_{2j} \xi e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + B_{2j-1} 2iv_j k^2 e^{iv_j(z-z_j)} - B_{2j} 2iv_j k^2 e^{-iv_j(z-z_j)} \right) J_1 \cos \theta, \quad (3.44)$$

Las ecuaciones 3.39, 3.40, 3.42 y 3.43 exhiben claramente la presencia de ondas P, SV y SH así como una clara dependencia azimutal. En las ecuaciones 3.41 y 3.44 no hay ondas SH.

En la superficie, la aplicación de una fuerza horizontal en la dirección x puede escribirse en términos de los esfuerzos

$$\sigma_{zz} = 0, \sigma_{zr} = -\delta(x)\delta(y) \cos \theta e^{i\omega t}, \text{ y } \sigma_{z\theta} = -\delta(x)\delta(y) \sin \theta e^{i\omega t}, \quad (3.45)$$

de nuevo, $\delta(\cdot)$ es la delta de Dirac. Considerando la ecuación 3.14 podemos escribir, sólo para σ_{zr} que

$$\sigma_{zr} = \frac{-\cos \theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k J_0(kr) dk = \frac{-\cos \theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} + \frac{J_1}{kr} \right) dk, \quad (3.46)$$

que exhibe de manera natural la aparición de los términos $\left(J_0 - \frac{J_1}{kr} \right)$ y $+\frac{J_1}{kr}$ para la dependencia radial y $\cos \theta$ para la dependencia azimutal. Esos términos aparecen intercambiados en los desplazamientos y esfuerzos y muestran la extraordinaria delicadeza del acoplamiento P-SV y SH. Ver detalles adicionales en Sánchez-Sesma et al. (2011).

También en el caso de la fuerza horizontal se formula un sistema de ecuaciones, que en realidad son dos; uno con $4N+2$ incógnitas y otro con $2N+1$ para las ondas P-SV y SH, respectivamente. Lo sorprendente es que la matriz de coeficientes para las ondas P-SV es idéntica a la correspondiente para la fuerza vertical (Sánchez-Sesma et al., 2011).

3.1.2 Caso del espacio infinito

Se busca escribir la solución de Stokes (1849) en coordenadas cilíndricas. A continuación, se trata el caso más simple que es el de una fuerza vertical aplicada en un punto, el origen en un espacio infinito para lo cual se parte de las expresiones presentadas anteriormente y se adaptan según sea necesario.

3.1.2.1 Fuente puntual vertical

A continuación, se van a describir los campos de desplazamientos y esfuerzos para una fuerza vertical en coordenadas cilíndricas. Lo cual es necesario para tratar medios con estratificación horizontal.

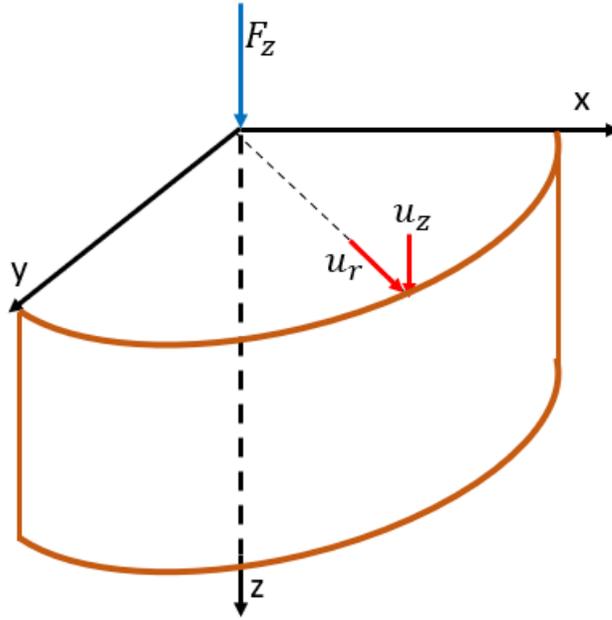


Figura 3.3: Fuente puntual vertical en espacio infinito.

Nuestro punto de partida para una fuerza puntual armónica vertical (Figura 3.3) serán las ecuaciones 3.19 y 3.20 que son los potenciales que resuelven las ecuaciones de onda reducidas, aplicando a estas las ecuaciones 3.15 y 3.16 para calcular los desplazamientos radiales y verticales y expresando los mismos en dos casos z positiva y z negativa, de manera que tenemos

$$u_r = [-A_1 e^{+i\gamma_j z} - B_1 i\gamma_j e^{+i\gamma_j z}] k J_1(kr) \quad \text{para } z < 0 \quad (3.47)$$

$$u_r = [-A_2 e^{-i\gamma_j z} + B_2 i\gamma_j e^{-i\gamma_j z}] k J_1(kr) \quad \text{para } z > 0 \quad (3.48)$$

$$u_z = [+A_1 i\gamma_j e^{+i\gamma_j z} + B_1 k^2 e^{+i\gamma_j z}] J_0(kr) \quad \text{para } z < 0 \quad (3.49)$$

$$u_z = [-A_2 i\gamma_j e^{-i\gamma_j z} + B_2 k^2 e^{-i\gamma_j z}] J_0(kr) \quad \text{para } z > 0 \quad (3.50)$$

Por otro lado, calculamos los esfuerzos cortantes y normales con las ecs. 3.23, y se expresan de manera similar a los desplazamientos, es decir

$$\sigma_{zr} = \mu [-A_1 2i\gamma_j e^{+i\gamma_j z} + B_1 (\nu_j^2 - k^2) e^{+i\gamma_j z}] k J_1(kr) \quad \text{para } z < 0 \quad (3.51)$$

$$\sigma_{zz} = \mu [-A_1 (\nu_j^2 - k^2) e^{+i\gamma_j z} + B_1 2i\gamma_j k^2 e^{+i\gamma_j z}] J_0(kr) \quad \text{para } z < 0 \quad (3.52)$$

$$\sigma_{zr} = \mu [+A_2 2i\gamma_j e^{-i\gamma_j z} + B_2 (\nu_j^2 - k^2) e^{-i\gamma_j z}] k J_1(kr) \quad \text{para } z > 0 \quad (3.53)$$

$$\sigma_{zz} = \mu [-A_2 (\nu_j^2 - k^2) e^{-i\gamma_j z} - B_2 2i\gamma_j k^2 e^{-i\gamma_j z}] J_0(kr) \quad \text{para } z > 0 \quad (3.54)$$

La razón de desglosar las ecuaciones de esta forma es debido a que se considera primero el caso del espacio completo. Para encontrar el valor de los coeficientes es necesario definir $z^{\mp} = 0 \mp \epsilon$, en donde se consideran dos esfuerzos normales: uno en tensión y otro en compresión.

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(-)} &= +\frac{1}{2}\delta(x)\delta(y) = \\ &= +\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}kJ_0(kr)dk \rightarrow \mu[-A_1(\nu_j^2 - k^2) + B_12iv_jk^2] = +\frac{k}{4\pi}\end{aligned}\quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(+)} &= -\frac{1}{2}\delta(x)\delta(y) = \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}kJ_0(kr)dk \rightarrow \mu[-A_2(\nu_j^2 - k^2) - B_22iv_jk^2] = -\frac{k}{4\pi}\end{aligned}\quad (3.56)$$

De donde

$$\sigma_{zz}^{(+)} - \sigma_{zz}^{(-)} = +\frac{k}{2\pi}\quad (3.57)$$

Dadas la continuidad y simetría en $z = 0$, tenemos que $u_r^{(+)} = u_r^{(-)}$, $u_z^{(+)} = u_z^{(-)}$, $\sigma_{zr}^{(+)} = \sigma_{zr}^{(-)} = 0$ de donde se puede obtener que $A_1 = -A_2 = \frac{k}{4\pi\rho\omega^2}$, $B_1 = B_2 = \frac{k}{iv_j4\pi\rho\omega^2}$, así que se tiene que los desplazamientos radiales y verticales

$$u_r = -\frac{\text{sgn}(z)}{4\pi\rho\omega^2}\int_0^{\infty}(e^{-i\gamma_j|z|} - e^{-iv_j|z|})k^2J_1(kr)dk,\quad (3.58)$$

$$u_z = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\int_0^{\infty}\left(i\gamma_j e^{-i\gamma_j|z|} - \frac{k^2}{iv_j} e^{-iv_j|z|}\right)kJ_0(kr)dk,\quad (3.59)$$

y los esfuerzos normal y cortante se expresan como

$$\sigma_{zz} = -\mu\frac{\text{sgn}(z)}{4\pi\rho\omega^2}\int_0^{\infty}((\omega^2/\beta^2 - 2k^2)e^{-i\gamma_j|z|} + 2k^2e^{-iv_j|z|})kJ_0(kr)dk,\quad (3.60)$$

$$\sigma_{zr} = \mu\frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\int_0^{\infty}\left(2i\gamma_j e^{-i\gamma_j|z|} + \frac{(\omega^2/\beta^2 - 2k^2)}{iv_j} e^{-iv_j|z|}\right)k^2J_1(kr)dk,\quad (3.61)$$

Se sigue con el planteamiento de las ondas irradiadas hacia la superficie desde la fuente, para esto consideraremos $z < z_F$. Con esto necesitamos solo las expresiones de los desplazamientos y

esfuerzos que incluyen las ondas que viajan hacia arriba y se incluyen los coeficientes de la fuente, denominados como A^F para las ondas P y B^F para las ondas S. De forma que tenemos

$$u_r = [-A^F e^{+i\gamma_j(z-z_F)} - B^F i\nu_j e^{+i\nu_j(z-z_F)}]kJ_1(kr) \quad \text{para } z < z_F \quad (3.62)$$

$$u_z = [+A^F i\gamma_j e^{+i\gamma_j(z-z_F)} + B^F k^2 e^{+i\nu_j(z-z_F)}]J_0(kr) \quad \text{para } z < z_F \quad (3.63)$$

Y al hacer los cálculos de los esfuerzos correspondientes con las expresiones 3.23, haciendo uso de 3.62 y 3.63 y considerando $\xi = \nu_j^2 - k^2$, obtenemos

$$\sigma_{zr} = \mu[-A^F 2i\gamma_j e^{+i\gamma_j(z-z_F)} + \xi B^F e^{+i\nu_j(z-z_F)}]kJ_1(kr) \quad \text{para } z < z_F \quad (3.64)$$

$$\sigma_{zz} = \mu[-A^F \xi e^{+i\gamma_j(z-z_F)} + B^F 2i\nu_j k^2 e^{+i\nu_j(z-z_F)}]J_0(kr) \quad \text{para } z < z_F \quad (3.65)$$

Para tener la solución en superficie libre planteamos que

$$\sigma^{SL} = \sigma^{EC} + \sigma^F = 0 \quad (3.66)$$

Por lo que

$$\sigma_{zr}^{SL} = \mu[+A_2 2i\gamma_j e^{-i\gamma_j z} + B_2 \xi e^{-i\nu_j z} - A^F 2i\gamma_j e^{i\gamma_j(z-z_F)} + \xi B^F e^{i\nu_j(z-z_F)}]kJ_1(kr) \quad (3.67)$$

$$\sigma_{zz}^{SL} = \mu[-A_2 \xi e^{-i\gamma_j z} - B_2 2i\nu_j k^2 e^{-i\nu_j z} - A^F \xi e^{i\gamma_j(z-z_F)} + B^F 2i\nu_j k^2 e^{i\nu_j(z-z_F)}]J_0(kr) \quad (3.68)$$

Evaluando en $z = z_0 = 0$, queda reducido a

$$\sigma_{zr}^{SL} = \mu[-A_2 \xi - B_2 2i\nu_j k^2 - A^F \xi e^{-i\gamma_j z_F} + B^F 2i\nu_j k^2 e^{-i\nu_j z_F}]J_0(kr), \quad (3.69)$$

$$\sigma_{zz}^{SL} = \mu[+A_2 2i\gamma_j + B_2 \xi - A^F 2i\gamma_j e^{-i\gamma_j z_F} + \xi B^F e^{-i\nu_j z_F}]kJ_1(kr), \quad (3.70)$$

Con esto se tiene que

$$-A_2 \xi - B_2 2i\nu_j k^2 = +A^F \xi e^{-i\gamma_j z_F} - B^F 2i\nu_j k^2 e^{-i\nu_j z_F}, \quad (3.71)$$

$$+A_2 2i\gamma_j + B_2 \xi = +A^F 2i\gamma_j e^{-i\gamma_j z_F} - \xi B^F e^{-i\nu_j z_F}, \quad (3.72)$$

Planteamos entonces que

$$\begin{bmatrix} -\xi & -2i\nu_j k^2 \\ 2i\gamma_j & +\xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} +\xi & -2i\nu_j k^2 \\ 2i\gamma_j & -\xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A^F e^{-i\gamma_j z_F} \\ B^F e^{-i\nu_j z_F} \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

Cuya solución es

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{F(k)} \begin{bmatrix} 4k^2\gamma_j\nu_j - \xi^2 & 4k^2\gamma_j\nu_j\xi \\ -4k^2\gamma_j\nu_j\xi & 4k^2\gamma_j\nu_j - \xi^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

Donde $F(k)$ es la función de Rayleigh

$$F(k) = 4k^2\gamma_j\nu_j + \xi^2. \quad (3.75)$$

Por lo que se entiende que hay presencia de ondas de Rayleigh en superficie libre.

3.1.2.2 Fuente puntual horizontal

De igual manera que para el caso en un medio estratificado, se consideran dos fuerzas horizontales, una aplicada en dirección x y otra en dirección y . Recordemos que además de ondas P - SV , se generan también ondas SH . Este tipo de fuentes generan los esfuerzos cortantes siguientes

$$\sigma_{zr} = -\frac{\text{sgn}(z)}{2} \delta(x)\delta(y) \cos \theta = -\frac{\text{sgn}(z)}{4\pi} \cos \theta \int_0^\infty k \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} + \frac{J_1}{kr} \right) dk, \quad (3.76)$$

$$\sigma_{z\theta} = +\frac{\text{sgn}(z)}{2} \delta(x)\delta(y) \sin \theta = +\frac{\text{sgn}(z)}{4\pi} \sin \theta \int_0^\infty k \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} + \frac{J_1}{kr} \right) dk, \quad (3.77)$$

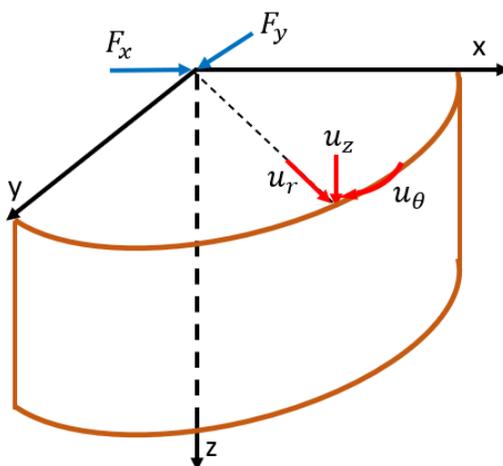


Figura 3.4: Fuentes puntuales horizontales en un espacio infinito.

En donde $\text{sgn}(z)$ se refiere al signo de z según sea el caso. Considerando los términos $J_0 - \frac{J_1}{kr}$ y $\frac{J_1}{kr}$, se puede obtener que $A_1 = A_2 = \frac{k^2}{i\gamma 4\pi\rho\omega^2}$, $B_1 = -B_2 = \frac{-1}{4\pi\rho\omega^2}$ y $C_1 = C_2 = \frac{(\omega/\beta)^2/i\nu_j}{4\pi\rho\omega^2}$.

Por lo que los desplazamientos quedan expresados como

$$u_r^{PSV} = + \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(\frac{k^2}{i\gamma_j} e^{-i\gamma_j|z|} - i\gamma_j e^{-i\gamma_j|z|} \right) k \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} \right) \cos \theta dk, \quad (3.78)$$

$$u_r^{SH} = + \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(\frac{\omega^2/\beta^2}{i\gamma_j} e^{-i\gamma_j|z|} \right) k \left(\frac{J_1}{kr} \right) \cos \theta dk, \quad (3.79)$$

$$u_\theta^{PSV} = - \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(\frac{k^2}{i\gamma_j} e^{-i\gamma_j|z|} - i\gamma_j e^{-i\gamma_j|z|} \right) k \left(\frac{J_1}{kr} \right) \sin \theta dk, \quad (3.80)$$

$$u_\theta^{SH} = - \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(\frac{\omega^2/\beta^2}{i\gamma_j} e^{-i\gamma_j|z|} \right) k \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} \right) \sin \theta dk, \quad (3.81)$$

$$u_z = - \frac{\text{sgn}(z)}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty (e^{-i\gamma_j|z|} - e^{-i\gamma_j|z|}) k^2 J_1(kr) \cos \theta dk, \quad (3.82)$$

Y los esfuerzos como

$$\sigma_{zr}^{PSV} = -\mu \frac{\text{sgn}(z)}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty (2k^2 e^{-i\gamma_j|z|} - (k^2 - \nu_j^2) e^{-i\gamma_j|z|}) k \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} \right) \cos \theta dk, \quad (3.83)$$

$$\sigma_{zr}^{SH} = -\mu \frac{\text{sgn}(z)}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} e^{-i\gamma_j|z|} \right) k \left(\frac{J_1}{kr} \right) \cos \theta dk, \quad (3.84)$$

$$\sigma_{z\theta}^{PSV} = +\mu \frac{\text{sgn}(z)}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty (2k^2 e^{-i\gamma_j|z|} - (k^2 - \nu_j^2) e^{-i\gamma_j|z|}) k \left(\frac{J_1}{kr} \right) \sin \theta dk, \quad (3.85)$$

$$\sigma_{z\theta}^{SH} = +\mu \frac{\text{sgn}(z)}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} e^{-i\gamma_j|z|} \right) k \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} \right) \sin \theta dk, \quad (3.86)$$

$$\sigma_{zz} = +\mu \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \int_0^\infty \left(\frac{k^2(k^2 - \nu_j^2)}{i\gamma_j} e^{-i\gamma_j|z|} - 2i\gamma_j k^2 e^{-i\gamma_j|z|} \right) J_1(kr) \cos \theta dk, \quad (3.87)$$

Estas ecuaciones (3.58 a 3.61 y 3.78 a 3.87) son, ni más ni menos, la solución de Stokes (1849) en coordenadas polares. La representación para la fuerza vertical incluye sólo ondas P-SV mientras que para la fuerza horizontal se añaden las ondas SH. Es evidente que esta solución permite incluir fuerzas en el interior de medios estratificados.

3.2 Fuente explosiva

Por practicidad, las fuentes volumétricas tales como las explosiones, suelen modelarse con fuentes esféricas de ondas dilatacionales. Es posible demostrar que el potencial escalar ϕ de una onda esférica armónica en un medio elástico es $\phi = R^{-1} \exp(-\frac{i\omega R}{\alpha})$, donde ω = frecuencia circular, α = velocidad de propagación de las ondas P y R = radio en coordenadas esféricas. Se ha omitido el factor $e^{+i\omega t}$. Para estudiar dichas fuentes en un medio estratificado, también se debe expresar el potencial en coordenadas cilíndricas (r, z) .

3.2.1 Caso del semiespacio

Mediante la representación de Sommerfeld (ver Aki y Richards, 2002,) dada por la siguiente expresión, el potencial queda

$$\phi = R^{-1} \exp(-\frac{i\omega R}{\alpha}) = \int_0^{\infty} (i\gamma)^{-1} \exp(-i\gamma|z|) J_0(kr) k dk, \quad (3.88)$$

donde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, y $J_0(kr)$ = función de Bessel de primera especie y orden cero de argumento kr . Si se establece que el potencial de la fuente sea

$$\phi = -\frac{M_0(\omega)}{4\pi\rho\alpha^2} R^{-1} \exp(-\frac{i\omega R}{\alpha}), \quad (3.89)$$

donde $M_0(\omega)$ = espectro de Fourier del momento sísmico (ver Aki y Richards, 2002, p.192). El desplazamiento radial u_R esta dado por

$$u_R(R, \omega) = \frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{M_0(\omega)}{4\pi\rho\alpha^2} R^{-2} (1 + i\omega R/\alpha) \exp(-\frac{i\omega R}{\alpha}), \quad (3.90)$$

que en el dominio del tiempo queda expresado como

$$u_R(R, t) = \frac{M_0\left(t - \frac{R}{\alpha}\right) + \frac{R}{\alpha} \dot{M}_0\left(t - \frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho\alpha^2 R^2}. \quad (3.91)$$

Para verificar este resultado, recurrimos a una expresión más general (Aki y Richards, 2002, p.77) y partimos de

$$M_{pq} * G_{np,q} = \left(\frac{15\gamma_n\gamma_p\gamma_q - 3\gamma_n\delta_{pq} - 3\gamma_p\delta_{nq} - 3\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho} \right) \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t - \tau) d\tau \quad (3.92)$$

$$+ \left(\frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{nq} - \gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{6\gamma_n \gamma_p \gamma_q - \gamma_n \delta_{pq} - \gamma_p \delta_{nq} - 2\gamma_q \delta_{np}}{4\pi\rho\beta^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq} \left(t - \frac{r}{\beta} \right) + \\
& + \frac{\gamma_n \gamma_p \gamma_q}{4\pi\rho\alpha^3} \frac{1}{r} \dot{M}_{pq} \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) - \left(\frac{\gamma_n \gamma_p - \delta_{np}}{4\pi\rho\beta^3} \right) \gamma_q \frac{1}{r} \dot{M}_{pq} \left(t - \frac{r}{\beta} \right),
\end{aligned}$$

donde δ_{np} es la delta de Kronecker. Considerando un tensor isótropo $M_{pq} = M_0(t)\delta_{pq}$, donde $M_0(t)$ es un escalar. Podemos sustituir esto en la ec. (3.89), multiplicando por δ_{pq} cada término del numerador en los cocientes que conforman la expresión, teniendo entonces

$$\begin{aligned}
M_{pq} * G_{np,q} &= \\
&= \left(\frac{15\gamma_n \gamma_p \gamma_q \delta_{pq} - 3\gamma_n \delta_{pq} \delta_{pq} - 3\gamma_p \delta_{nq} \delta_{pq} - 3\gamma_q \delta_{np} \delta_{pq}}{4\pi\rho} \right) \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_0(t - \tau) d\tau \\
&+ \left(\frac{6\gamma_n \gamma_p \gamma_q \delta_{pq} - \gamma_n \delta_{pq} \delta_{pq} - \gamma_p \delta_{nq} \delta_{pq} - \gamma_q \delta_{np} \delta_{pq}}{4\pi\rho\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} M_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) - \\
&- \left(\frac{6\gamma_n \gamma_p \gamma_q \delta_{pq} - \gamma_n \delta_{pq} \delta_{pq} - \gamma_p \delta_{nq} \delta_{pq} - 2\gamma_q \delta_{np} \delta_{pq}}{4\pi\rho\beta^2} \right) \frac{1}{r^2} M_0 \left(t - \frac{r}{\beta} \right) + \\
&+ \frac{\gamma_n \gamma_p \gamma_q \delta_{pq}}{4\pi\rho\alpha^3} \frac{1}{r} \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) - \left(\frac{\gamma_n \gamma_p \delta_{pq} - \delta_{np} \delta_{pq}}{4\pi\rho\beta^3} \right) \gamma_q \frac{1}{r} \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{\beta} \right),
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Recordando que $\gamma_j \delta_{ij} = \gamma_i$ y que $\gamma_i \gamma_i = 1$ la expresión 3.93 se simplifica quedando únicamente los términos correspondientes a la contribución de la onda P, es decir

$$u(r, t) = \frac{\gamma_n}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{1}{r^2} M_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{\gamma_n}{4\pi\rho\alpha^3} \frac{1}{r} \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right), \tag{3.94}$$

que podemos reescribir como

$$u(r, t) = \frac{M_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{r}{\alpha} \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right)}{4\pi\rho\alpha^2 r^2}, \tag{3.95}$$

siendo igual a la ecuación 3.91.

El desplazamiento en la dirección de x_j está dado por $u_j = u_R \times (x_j / R)$. Para representar a la explosión, el potencial en coordenadas cilíndricas queda

$$\phi = \hat{M}_0 \int_0^\infty (-ik/\gamma_j) e^{-i\gamma_j |z|} J_0(kr) k dk, \tag{3.96}$$

donde $\widehat{M}_0 = M_0(\omega)/4\pi\rho\alpha^2$. Si $A^F = -\widehat{M}_0 ik/\gamma_j$ se puede escribir el integrando de la representación integral de Sommerfeld para una fuente de ondas esféricas. Este integrando en coordenadas cilíndricas y usando el número de onda radial k , el integrando del potencial de la fuente de ondas dilatacionales está dado por

$$\phi^F = [A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|}]J_0(kr), \quad (3.97)$$

donde $A^F = \widehat{M}_0 \frac{ik}{\gamma_j}$, k = número de onda radial, $\gamma_j = \sqrt{\omega^2/\alpha^2 - k^2}$ = número de onda vertical de ondas P con $Im \gamma \leq 0$. Los potenciales de ondas P y SV incluyendo las ondas reflejadas por la superficie libre y el de la fuente, considerando que $z < z_F$

$$\phi = [Ae^{-i\gamma_j(z-z_1)} + A^F e^{+i\gamma_j(z-z_F)}]J_0(kr), \quad (3.98)$$

$$\psi = [B e^{-i\gamma_j(z-z_1)}]J_0(kr), \quad (3.99)$$

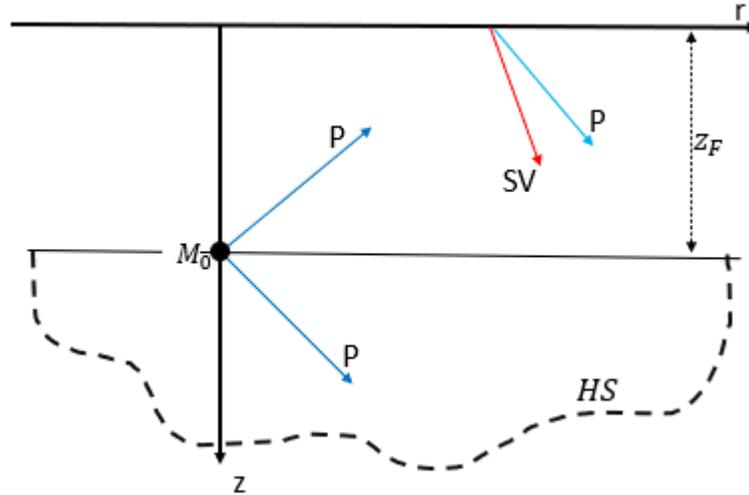


Figura 3.5: Diagrama de rayos debido a una fuente explosiva en el semiespacio.

Por lo que tenemos los desplazamientos radiales u_r y verticales u_z expresados como

$$u_r = [-A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} - A e^{-i\gamma_j(z-z_1)} + i\gamma_j B e^{-i\gamma_j(z-z_1)}] k J_1(kr), \quad (3.100)$$

$$u_z = [-sgn(z - z_F)i\gamma_j A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} - i\gamma_j A e^{-i\gamma_j(z-z_1)} + k^2 B e^{-i\gamma_j(z-z_1)}]J_0(kr), \quad (3.101)$$

Para calcular los esfuerzos cortantes σ_{zr} y normales σ_{zz} , recurrimos a las ecuaciones 3.23 y tomando $\xi = v^2 - k^2$, de manera que queda

$$\sigma_{zz} = \mu[-\text{sgn}(z - z_F)\xi A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} - \xi A e^{-i\gamma_j(z-z_1)} - 2i\nu_j k^2 B e^{-i\nu_j(z-z_1)}]J_0(kr), \quad (3.102)$$

$$\sigma_{zr} = \mu[\text{sgn}(z - z_F) 2i\gamma_j A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} + 2i\gamma_j A e^{-i\gamma_j(z-z_1)} + \xi B e^{-i\nu_j(z-z_1)}]kJ_1(kr), \quad (3.103)$$

El caso en el que $z = z_1 = 0$ y $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = 0$, es decir en superficie libre, se tiene que

$$-\xi A^F e^{-i\gamma_j z_F} - \xi A - 2i\nu_j k^2 B = 0, \quad (3.104)$$

$$-2i\gamma_j A^F e^{-i\gamma_j z_F} + 2i\gamma_j A + \xi B = 0. \quad (3.105)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} -\xi & -2i\nu_j k^2 \\ 2i\gamma_j & +\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\xi \\ 2i\gamma_j \end{bmatrix} A^F e^{-i\gamma_j z_F}, \quad (3.106)$$

Para calcular los coeficientes A y B se tiene que

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi & -2i\nu_j k^2 \\ 2i\gamma_j & +\xi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} +\xi \\ 2i\gamma_j \end{bmatrix} A^F e^{-i\gamma_j z_F}, \quad (3.107)$$

resultando

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{F(k)} \begin{bmatrix} 4k^2 \gamma_j \nu_j - \xi^2 \\ i4\gamma_j \xi \end{bmatrix} A^F e^{-i\gamma_j z_F}. \quad (3.108)$$

Aquí $F(k) = 4k^2 \gamma_j \nu_j + \xi^2 =$ función de Rayleigh.

3.2.2 Caso en un medio estratificado

Debido a la presencia de estratos, las ondas P emitidas por la fuente explosiva generarán ondas P-SV al incidir en la superficie libre y sobre las interfaces de los estratos, por lo que, a diferencia del caso anterior, tendremos también ondas P-SV que viajan hacia arriba. De manera que, suponiendo que la fuente está en el estrato j , podemos expresar los potenciales como:

$$\phi = [A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} + A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + A_{2j-1} e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})}] J_0(kr), \quad (3.109)$$

$$\psi = [B_{2j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + B_{2j-1} e^{+i\nu_j(z-z_{j+1})}] J_0(kr), \quad (3.110)$$

Recurriendo a las ecuaciones 3.15 y 3.16 para calcular los desplazamientos radiales u_r y verticales u_z tenemos

$$u_r = [-A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} - A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - A_{2j-1} e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})} + i\nu_j B_{2j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} - i\nu_j B_{2j-1} e^{+i\nu_j(z-z_{j+1})}] k J_1(kr), \quad (3.111)$$

$$u_z = [-\operatorname{sgn}(z - z_F) i\gamma_j A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} - i\gamma_j A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + i\gamma_j A_{2j-1} e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})} + k^2 B_{2j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + k^2 B_{2j-1} e^{+i\nu_j(z-z_{j+1})}] J_0(kr), \quad (3.112)$$

Sustituyendo 3.111 y 3.112 en las ecuaciones 3.23 los esfuerzos cortantes σ_{zr} y normales σ_{zz} quedan expresados como

$$\sigma_{zz} = \mu[-\xi A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} - \xi A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - \xi A_{2j-1} e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})} - 2i\nu_j k^2 B_{2j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + 2i\nu_j k^2 B_{2j-1} e^{+i\nu_j(z-z_{j+1})}] J_0(kr), \quad (3.113)$$

$$\sigma_{zr} = \mu[\operatorname{sgn}(z - z_F) 2i\gamma_j A^F e^{-i\gamma_j|z-z_F|} + 2i\gamma_j A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - 2i\gamma_j A_{2j-1} e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})} + \xi B_{2j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + \xi B_{2j-1} e^{+i\nu_j(z-z_{j+1})}] k J_1(kr), \quad (3.114)$$

En el caso en el que $z = z_1 = 0$ y $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = 0$, es decir en superficie libre, se tiene que

$$u_r: -A_2 - A_1 e^{-i\gamma_1 z_1} + i\nu_1 B_2 - i\nu_1 B_1 e^{-i\nu_1 z_1} = A^F e^{-i\gamma_1 z_F}, \quad (3.115)$$

$$u_z: -i\gamma_1 A_2 + i\gamma_1 A_1 e^{-i\gamma_1 z_1} + k^2 B_2 + k^2 B_1 e^{-i\nu_1 z_1} = i\gamma_j A^F e^{-i\gamma_1 z_F}, \quad (3.116)$$

$$\sigma_{zz}: -\xi A_2 - \xi A_1 e^{-i\gamma_1 z_1} - 2i\nu_1 k^2 B_2 + 2i\nu_1 k^2 B_1 e^{-i\nu_1 z_1} = \xi A^F e^{-i\gamma_1 z_F}, \quad (3.117)$$

$$\sigma_{zr}: 2i\gamma_1 A_2 - 2i\gamma_1 A_1 e^{-i\gamma_1 z_1} + \xi B_2 + \xi B_1 e^{-i\nu_1 z_1} = 2i\gamma_j A^F e^{-i\gamma_1 z_F}, \quad (3.118)$$

La ecs 3.111, 3.112, 3.113, 3.114 establecen el caso generalizado para una fuente en el estrato j , con esto y tomando en cuenta la continuidad de desplazamientos y esfuerzos expresados mediante

$$u_r^{j-1}(z_j) = u_r^j(z_j), \quad (3.119)$$

$$u_z^{j-1}(z_j) = u_z^j(z_j), \quad (3.120)$$

$$\sigma_{zz}^{j-1}(z_j) = \sigma_{zz}^j(z_j), \quad (3.121)$$

$$\sigma_{zr}^{j-1}(z_j) = \sigma_{zr}^j(z_j). \quad (3.122)$$

3.3 Matriz global

La solución a problemas de propagación de ondas elásticas en un medio estratificado, en el que cada capa es homogénea y donde el conjunto de capas tiene propiedades físicas que varían únicamente en una coordenada, puede ser dado como el *coeficiente* de productos de matrices. La solución a problemas de propagación de ondas en un medio inhomogéneo en el que la inhomogeneidad varía solamente en una coordenada es mucho más simple si consideramos el problema de la propagación de ondas en un medio que consiste en un gran número de capas homogéneas. Este problema se ha superado con la aplicación de grandes equipos computacionales, al menos para modelos específicos de inhomogeneidades, Knopoff (1964).

Un procedimiento para la manipulación de la matriz de problemas de ondas elásticas ha sido ideado por Thomson (1950) y corregida y elaborada por Haskell (1953).

Cuando el número de estratos se vuelve muy grande, el número de las ecuaciones para la solución para ondas armónicas planas también. En el caso de ondas en un medio conformado por N estratos soportados en un semiespacio y subyacentes al vacío, los determinantes son del orden $2N+1$ para el caso escalar de ondas SH, mientras que para el caso vectorial de ondas P-SV es de $4N+2$. Dado que para propósitos de esta tesis nos interesa conocer el movimiento antiplano (SH) y en el plano (P-SV) y considerando que la matriz P-SV es la misma para fuerzas verticales y horizontales existen dos sistemas de ecuaciones desacoplados (Sánchez-Sesma, 2011, p. 17), que tienen la forma

$$Ax = b, \quad (3.123)$$

Donde A es la matriz en la que se imponen las condiciones de frontera, x es la matriz de coeficientes y b la matriz de términos independientes, estos últimos, serán cero excepto para las interfaces donde se aplican las fuentes, en esta interfaz el término será igual al salto en las condiciones de esfuerzos y/o desplazamientos, para el caso de la fuente explosiva los términos independientes serán distintos de cero en las interfaces entre la posición de la fuente (Sainos, 2018, p. 25). Para el cómputo de estos casos, los sistemas de ecuaciones correspondientes se resuelven para una frecuencia (ω) y para un número de onda (k) determinados y estarán dentro de la integral del número de onda radial, es decir, la matriz se resolverá hasta Nk veces para un receptor.

3.3.1 Caso plano (P-SV)

Para este caso se puede notar que las ecuaciones 3.39 y 3.41 que describen los desplazamientos para la fuerza horizontal u_r y u_θ tienen, en esencia, los términos de z iguales, cambiando únicamente el signo y u_θ debido a las fuerzas horizontales comparte esos mismos términos que u_r para el caso de la fuerza vertical. Por otra parte u_z en consecuencia de la fuerza vertical y las fuerzas horizontales, ecuaciones 3.22 y 3.41, respectivamente, tienen los términos entre paréntesis iguales. Estas simetrías se repiten para el caso de los esfuerzos. Teniendo en cuenta estas características, es posible resolver un solo sistema de ecuaciones, ya que lo único que cambiaría sería la excitación, es decir, las discontinuidades en los esfuerzos dentro de los términos independientes (Sainos, 2018, p. 25).

La matriz global A se expresará en función de una submatriz de esfuerzos E y otra de desplazamientos D. La primera se puede armar empleando la contribución plana de los esfuerzos normales σ_{zz} y cortantes debido a la fuente horizontal $\sigma_{z\theta}$ o σ_{zr} para la fuente vertical; esta matriz se expresa como

$$E_j^{P-SV} \begin{bmatrix} A_{2j-1} \\ B_{2j-1} \\ A_{2j} \\ B_{2j} \end{bmatrix}, \quad (3.124)$$

Donde

$$E_j^{P-SV} = \mu_j \begin{bmatrix} -\xi_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & -2iv_j k^2 e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & -\xi_j e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})} & +2iv_j k^2 e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} \\ +2i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & +\xi_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & -2i\gamma_j e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})} & +\xi_j e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} \end{bmatrix}, \quad (3.125)$$

Por otra parte, la matriz de desplazamientos D se puede expresar tomando como base el desplazamiento u_z y u_θ debido a la fuente horizontal o u_r debido a la fuente vertical.

$$D_j^{P-SV} \begin{bmatrix} A_{2j-1} \\ B_{2j-1} \\ A_{2j} \\ B_{2j} \end{bmatrix}, \quad (3.126)$$

Donde

$$D_j^{P-SV} = \begin{bmatrix} -i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & +k^2 e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & +i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_{j+1})} & +k^2 e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} \\ -e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & +i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & -e^{+i\gamma_j(z-z_{j+1})} & -i\gamma_j e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} \end{bmatrix}, \quad (3.127)$$

Las submatrices E_j y D_j son de dimensión 2x4. En la condición de frontera libre de la ec 3.125 se reduce a

$$E_0^{P-SV} = \begin{bmatrix} -\xi_1 & -2iv_1 k^2 & -\xi_1 e^{+i\gamma_1(z-z_1)} & +2iv_1 k^2 e^{i\gamma_1(z-z_1)} \\ +2i\gamma_1 & +\xi_1 & -2i\gamma_1 e^{+i\gamma_1(z-z_1)} & +\xi_1 e^{i\gamma_1(z-z_1)} \end{bmatrix}, \quad (3.128)$$

Mientras que los esfuerzos y desplazamientos en el semiespacio son

$$E_{N+1}^{P-SV} = \mu_{N+1} \begin{bmatrix} -\xi_{N+1} & -2iv_{N+1} k^2 \\ -2iv_{N+1} k^2 & +\xi_{N+1} \end{bmatrix}, \quad (3.129)$$

$$D_{N+1}^{P-SV} = \begin{bmatrix} -i\gamma_{N+1} & +k^2 \\ -1 & +i\nu_{N+1} \end{bmatrix}, \quad (3.130)$$

Donde E_{N+1} y D_{N+1} son submatrices de orden 2x2 debido a la ausencia de reflexiones causadas por el semiespacio. Con base en las expresiones previas, el sistema de ecuaciones lineales que se debe resolver para las fuerzas puntuales sigue la forma

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_1 & -D_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E_1 & -E_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & -D_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & -E_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -D_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -E_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D_N & D_{N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & E_N & E_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ B_1 & B_1 \\ A_2 & A_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_{2j-1} & A_{2j-1} \\ B_{2j-1} & B_{2j-1} \\ A_{2j} & A_{2j} \\ B_{2j} & B_{2j} \\ \vdots & \vdots \\ A_{N+1} & A_{N+1} \\ B_{N+1} & B_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-k\text{sgn}(z)}{2\pi\mu_j} & 0 \\ 0 & \frac{i k\text{sgn}(z)}{2\pi\mu_j} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

Donde los coeficientes de la primera columna corresponden a la fuente vertical en la cual la discontinuidad se encuentra en el esfuerzo normal σ_{zz} , por otra parte, los de la segunda columna corresponden a la fuente horizontal en donde, de manera análoga la discontinuidad está en los esfuerzos cortantes $\sigma_{z\theta}$ y σ_{zr} . Es observable que la dimensión de la matriz global A es de $(4N+2) \times (4N+2)$ y las matrices de incógnitas y términos independientes son de dimensión $(4N+2) \times 2$.

3.3.2 Caso antiplano (SH)

Para el caso antiplano se simplifica la matriz A, ya que las incógnitas por estrato disminuyen a dos, estando determinada por los esfuerzos cortantes σ_{zr} y los desplazamientos verticales u_z , para cada interfaz j se tiene que

$$E_j^{SH} = \mu_j [i\nu_j e^{-i\nu_j(z-z_j)} + i\nu_j e^{+i\nu_j(z-z_{j+1})}], \quad (3.132)$$

$$D_j^{SH} = [e^{-i\nu_j(z-z_j)} + e^{+i\nu_j(z-z_{j+1})}], \quad (3.133)$$

Para el caso de la superficie libre, los esfuerzos se expresan como

$$E_0^{SH} = [iv_1 + iv_1 e^{+iv_1(z-z_1)}], \quad (3.134)$$

En el caso del semiespacio, por otro lado, las submatrices son de un elemento, definiéndose como

$$E_{N+1}^{SH} = \mu_{N+1}[-iv_{N+1}], \quad (3.135)$$

$$D_{N+1}^{SH} = 1, \quad (3.136)$$

Con lo que se forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D_1 & -D_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E_1 & -E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & -D_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & -E_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_N & -D_{N+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E_N & -E_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{2j-1} \\ C_{2j} \\ \vdots \\ C_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\text{sgn}(z)}{2\pi\mu_j} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

Donde encontramos el término de fuente en la discontinuidad de esfuerzos en el vector de términos independientes, siendo este, así como el vector de coeficientes, de dimensiones $(2N+1)$.

Capítulo 4. Solución numérica: Ejemplos

Las ecuaciones diferenciales nos ayudan a expresar fenómenos de la naturaleza, como es el caso de la propagación de ondas. Sin embargo, muchas veces la solución analítica no es suficiente, por lo que se deben realizar aproximaciones estudiando el sistema en cuestión bajo ciertas condiciones propuestas. Es por eso que, para tener una mejor perspectiva de la implicación de los parámetros requeridos, así como el cerciorarnos de que las soluciones son las correctas, en este capítulo se muestran resultados obtenidos mediante los códigos generados y adaptados en FORTRAN y MATLAB a partir de la formulación realizada y empleando el método del DWN.

Dadas las unidades para cada parámetro necesario, las cuales son especificadas en cada tabla de datos de los ejemplos propuestos, los desplazamientos son dados en [m], aunque para fines de poder observar mejor el comportamiento de estos se tiene un factor de escala que varía para cada caso.

4.1 Fuente puntual

4.1.1 Fuente puntual en semiespacio

4.1.1.1 Comparación con solución de Stokes

Para este caso se compara la solución de Stokes (1849) con la función de Green para una fuerza puntual dada.

Se calcula la solución de Stokes para la función de Green en el dominio del tiempo para una fuerza en el punto de fuente dada por un pulso de Ricker. Se hace la convolución analítica de la función de Green (Eqs. 3.58, 3.59, 3.78-3.82) con el pulso de Ricker.

ALFA $\left[\frac{km}{s}\right]$	BETA $\left[\frac{km}{s}\right]$	RHO $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$				
2.0	1.0	1.0				
XF[km]	YF[km]	ZF[km]				
0	0	0				
XI[km]	XFIN[km]	YI[km]	YFIN[km]	ZI[km]	ZFIN[km]	NR
-2	2	0	0	0.1	0.1	11
TP[s]	TS[s]	DT[s]	NT			
0.2	1.0	0.02	512			

Tabla 4.1: Parámetros usados para el cálculo de la función de Green mediante la solución de Stokes.

BETA $\left[\frac{km}{s}\right]$	RHO $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	ANU				
1.0	1.0	0.333333				
L[km]	Q	FACTW $\left[\frac{rad}{s}\right]$	FACNMAX			
100	5000.0	2.0	15.0			
XMIN[km]	XMAX[km]	YMIN[km]	YMAX[km]	ZMIN[km]	ZMAX[km]	NEST
-2	2	0	0	0.1	0.1	11
TP[s]	TS[s]	DT[s]	N			
0.2	1.0	0.02	512			

Tabla 4.2: Parámetros empleados para el cálculo de la función de Green mediante el método del DWN.

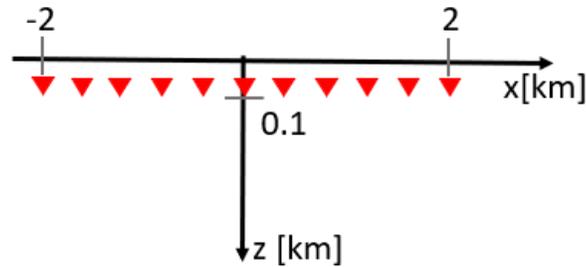


Figura 4.1: Arreglo de 11 detectores paralelo al eje z con x y y contantes.

Para el primer ejemplo en el cual se consideran los valores mostrados en las tablas 4.1 y 4.2 con un factor de escala de 10. Es de esperarse que la respuesta en G_{xz} y G_{zx} será la misma (Figura 4.2), mientras que en G_{xy} , G_{yx} , G_{zy} y G_{yz} será nula debido a que el arreglo está distribuido únicamente a lo largo del eje x a una cierta profundidad. Por otra parte, las componentes G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} se comportan de manera similar, teniendo una amplitud mayor las últimas dos (Figura 4.3). También se observa que la aproximación mediante el método del DWN empata con un error mínimo con la solución exacta.

Gxz

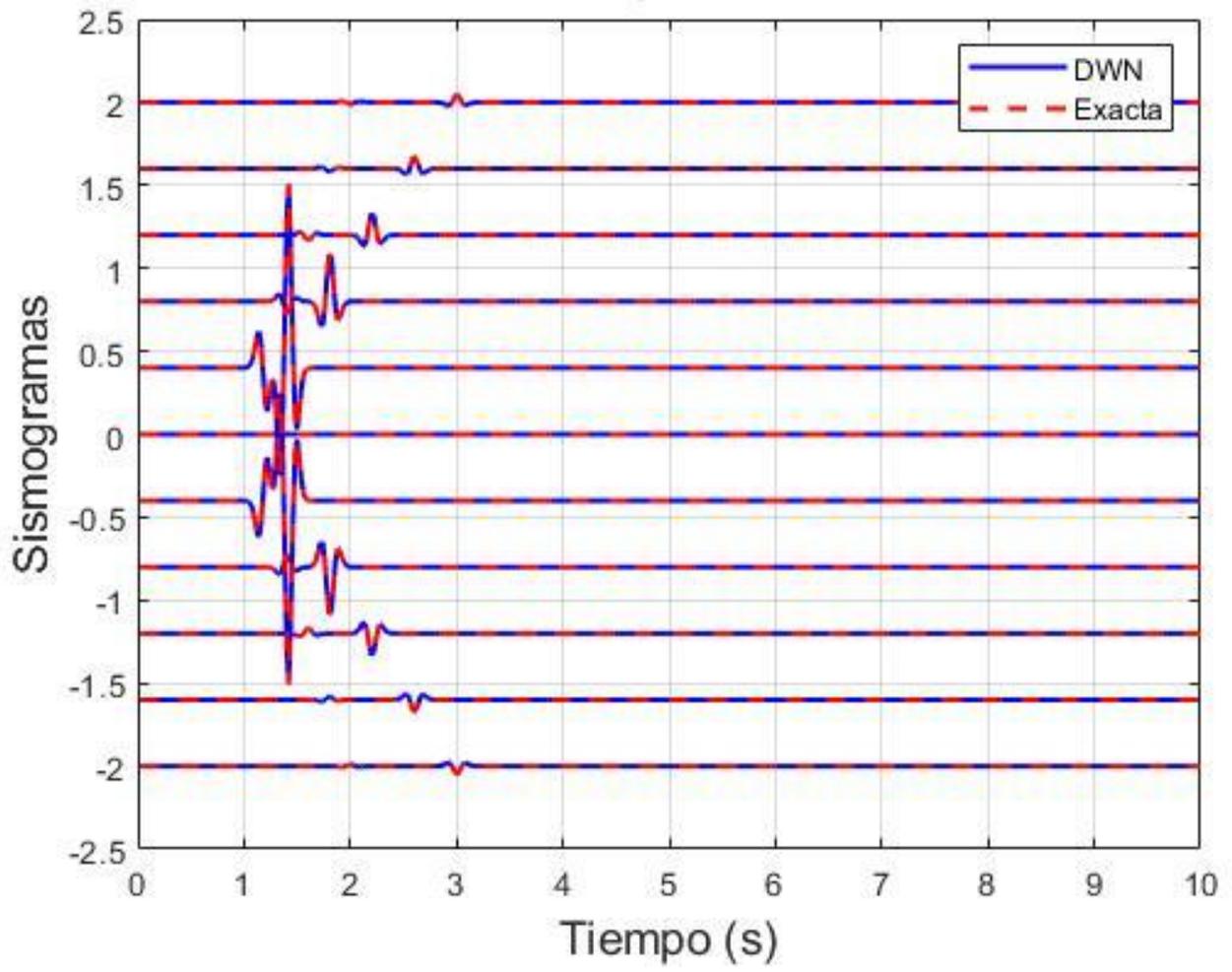


Figura 4.2: Respuesta G_{xz} ante una fuerza aplicada en el origen de coordenadas, con un arreglo de 11 detectores a una profundidad constante a lo largo del eje x.

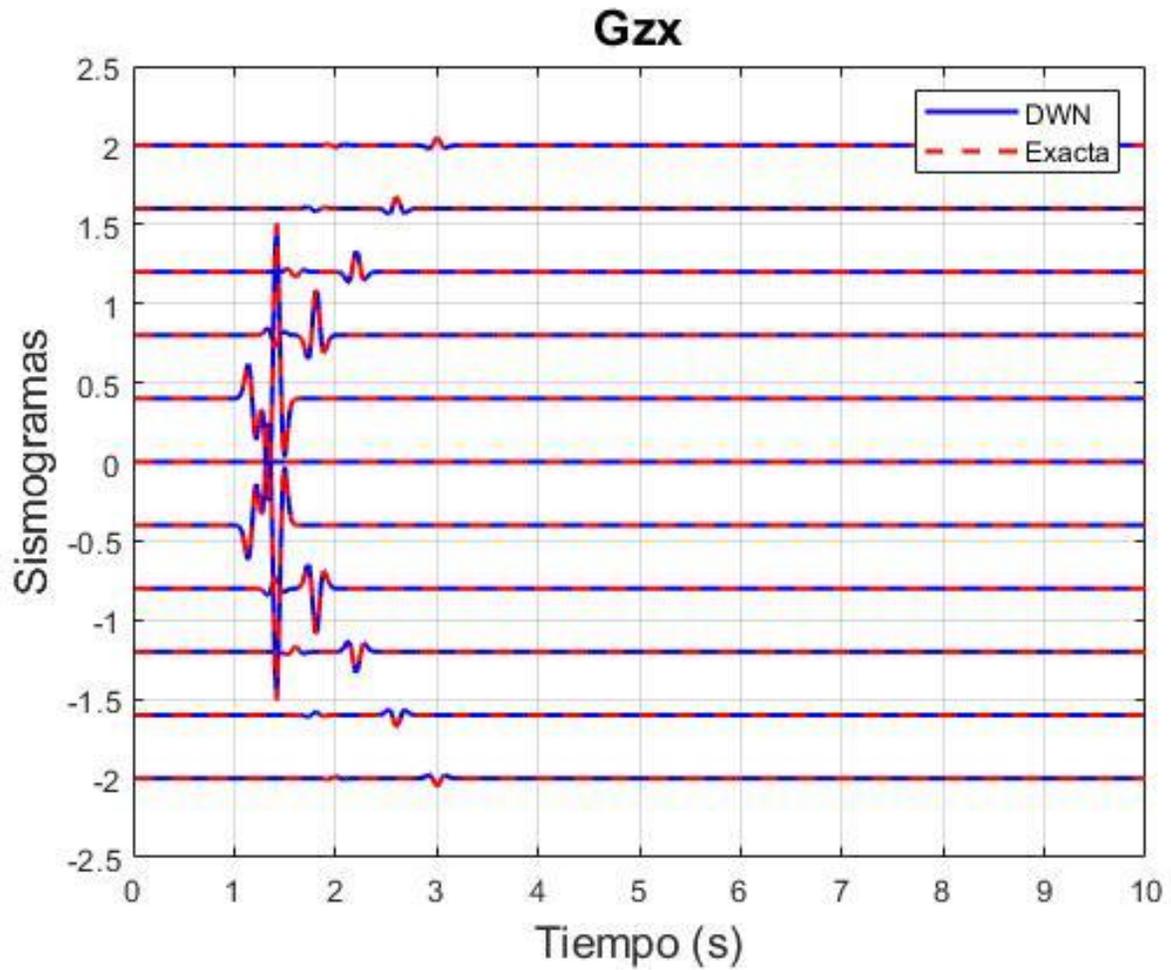


Figura 4.3: Respuesta G_{zx} ante una fuerza aplicada en el origen de coordenadas, con un arreglo de 11 detectores a una profundidad constante a lo largo del eje x.

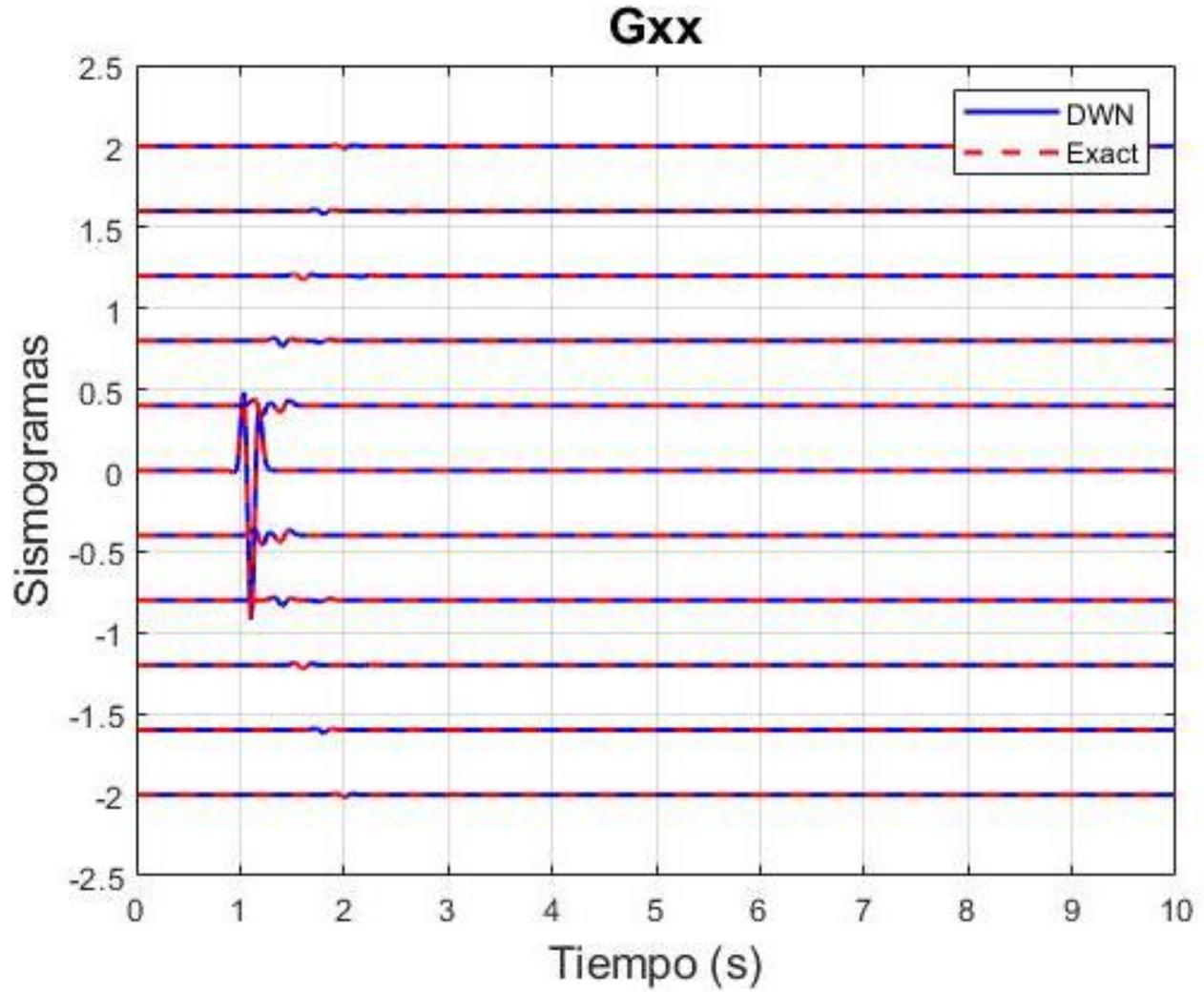


Figura 4.4: Respuesta de G_{xx} ante una fuerza aplicada en el origen de coordenadas, con un arreglo de 11 detectores a una profundidad constante a lo largo del eje x.

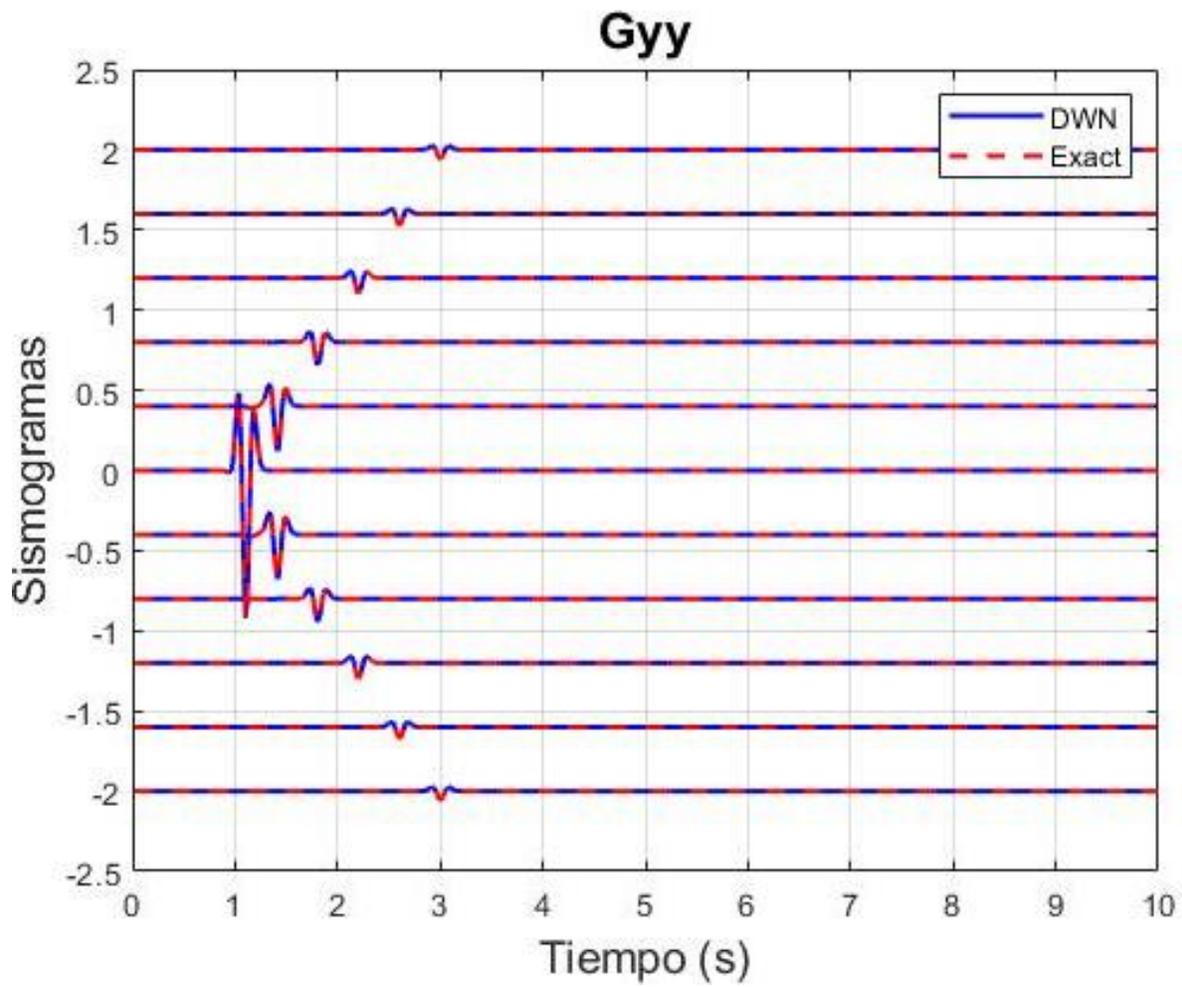


Figura 4.5: Respuesta de G_{yy} ante una fuerza aplicada en el origen de coordenadas, con un arreglo de 11 detectores a una profundidad constante a lo largo del eje x.

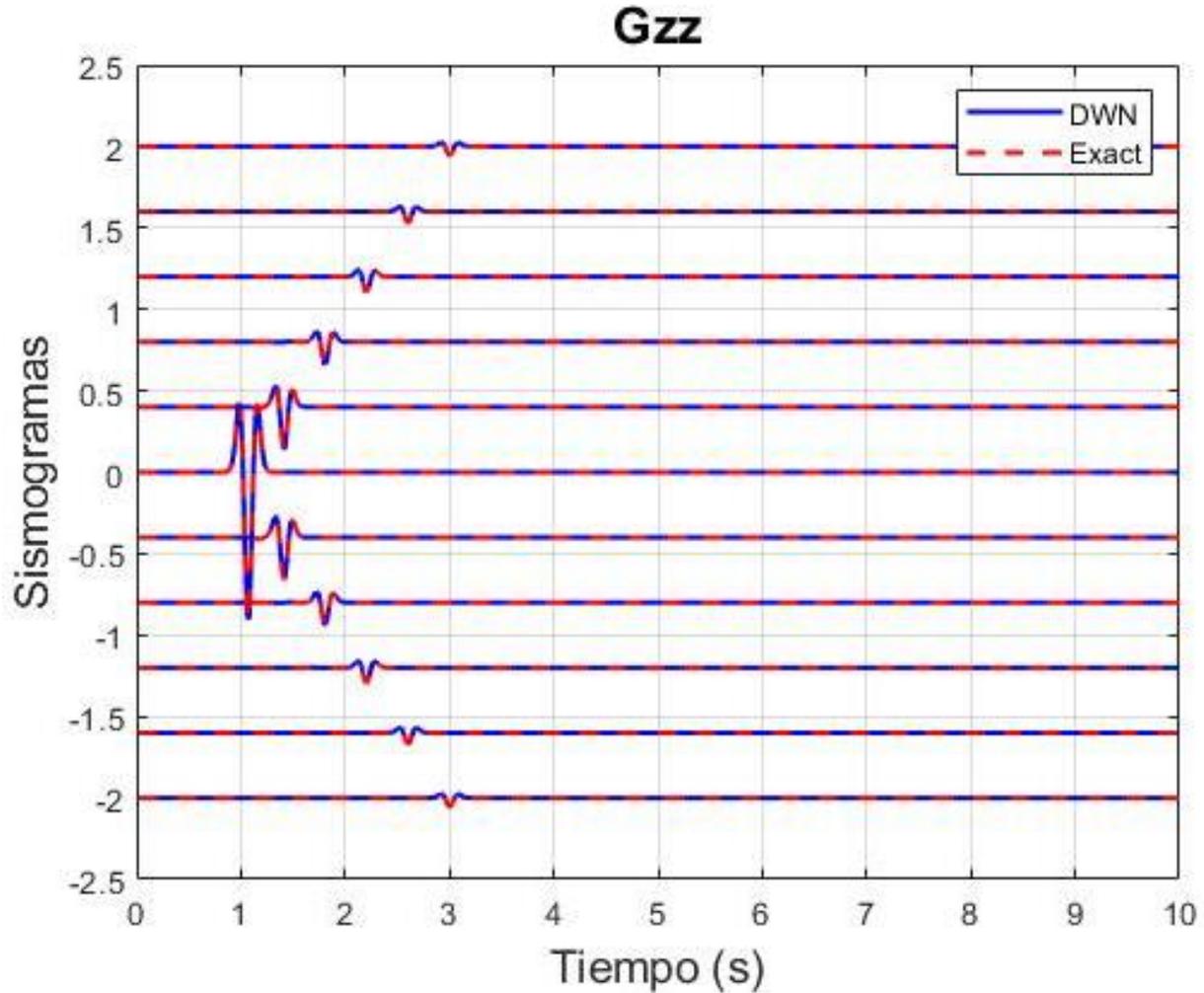


Figura 4.6: Respuesta de G_{zz} ante una fuerza aplicada en el origen de coordenadas, con un arreglo de 11 detectores a una profundidad constante a lo largo del eje x.

4.1.1.2 Calibración en un semiespacio

Con el propósito de verificar la calidad del programa que emplea el método del DWN, se comparan sismogramas sintéticos obtenidos mediante éste y los generados con el programa AXITRA desarrollado por Coutant (1989), que usa el método de reflectividad, para el caso de un semiespacio. El ejemplo aquí mostrado es retomado del trabajo de Sainos (2018). Los parámetros para este caso son los mostrados en la Tabla 4.3.

ALFA $\left[\frac{km}{s}\right]$	BETA $\left[\frac{km}{s}\right]$	RHO $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Q
2.0	1.0	1.0	1000
TP[s]	TS[s]	DT[s]	NT
0.03	0.075	0.001	128
L[km]	FACTW $\left[\frac{rad}{s}\right]$	ZFUEN[km]	FACNMAX

1.024	1.0	0.01	3.0
-------	-----	------	-----

Tabla 4.3: Parámetros usados para la verificación del método en un semiespacio (Sainos, 2018). El arreglo empleado de los receptores puede verse ilustrado a continuación (Figura 4.4). Esta alineación implica que todas las componentes del tensor de Green son distintas de cero, puesto que los receptores no se encuentran en los planos nodales.

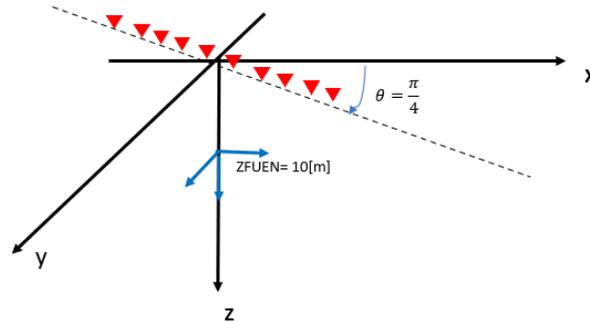


Figura 4.7: Esquema del arreglo de receptores en el semiespacio, la fuente se encuentra a 10 metros de profundidad (Sainos, 2018).

A continuación, se presentan resultados de las tres componentes obtenidos para la respuesta debido a la fuerza vertical. En las figuras 4.8, 4.10 y 4.12 se observan los desplazamientos en las componentes x , y y z . Mientras que en las figuras 4.9, 4.11 y 4.13 se observa el error residual entre los sismogramas generados por AXITRA y el código generado, teniendo para U_x , U_y y U_z valores de 7×10^{-3} , 3.5×10^{-3} y 16×10^{-3} , respectivamente (Sainos, 2018, p. 37-39).

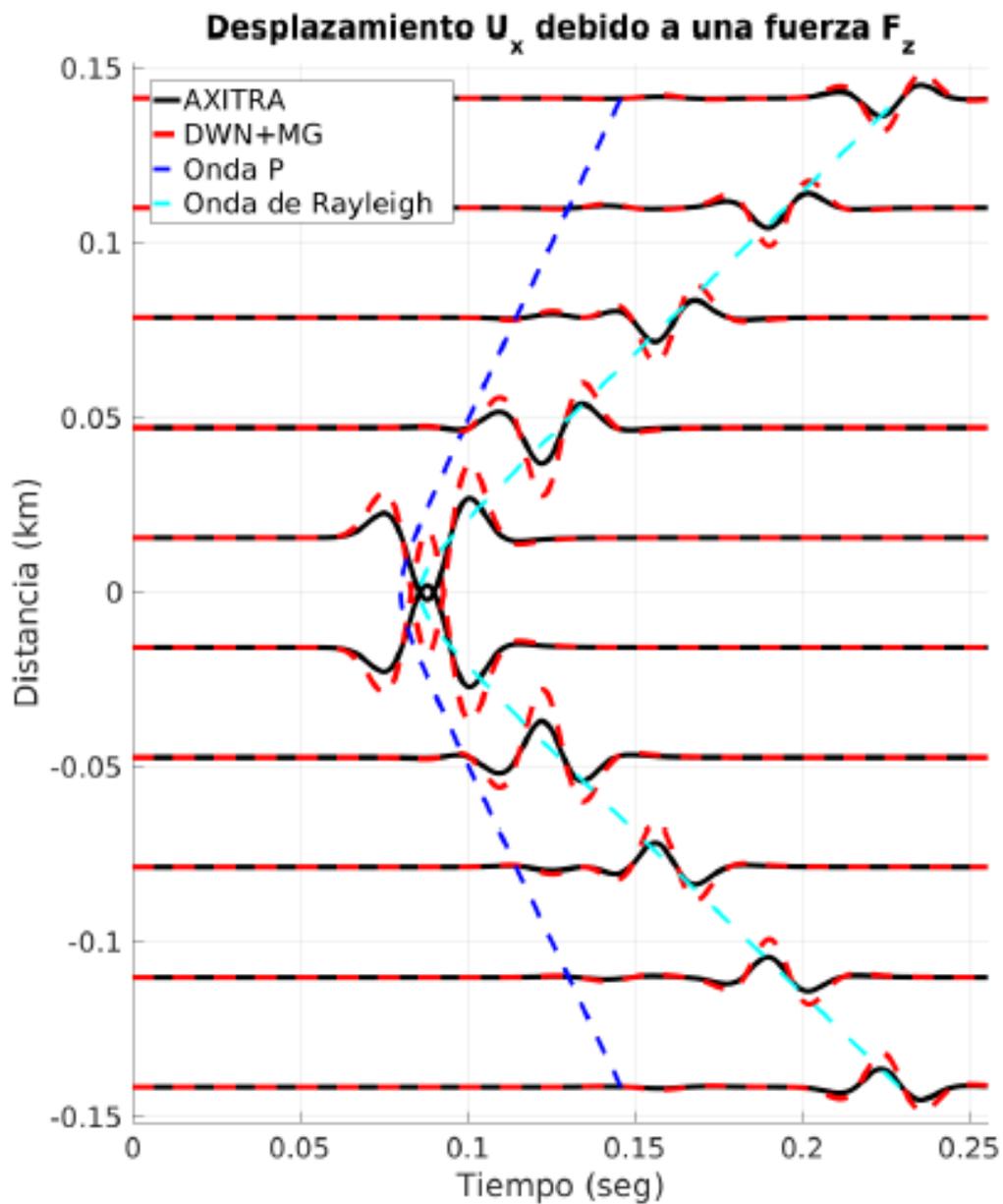


Figura 4.8: Componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con AXITRA (línea negra) (Sainos, 2018, p. 42).

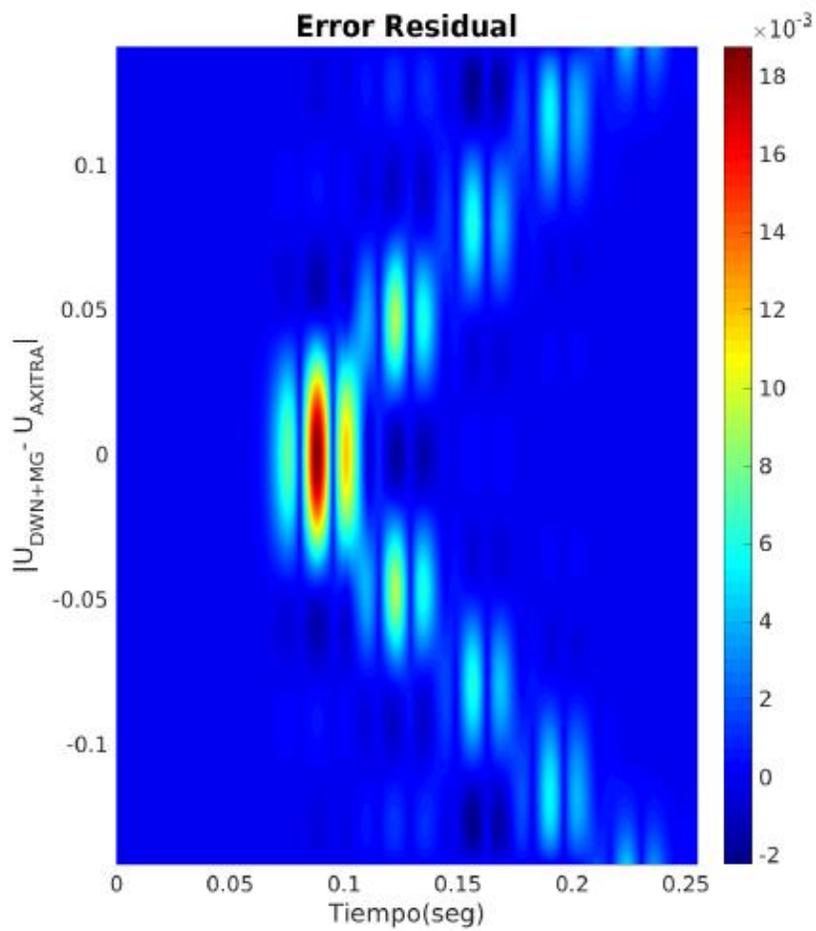


Figura 4.9: Componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados (Sainos, 2018, p. 42).

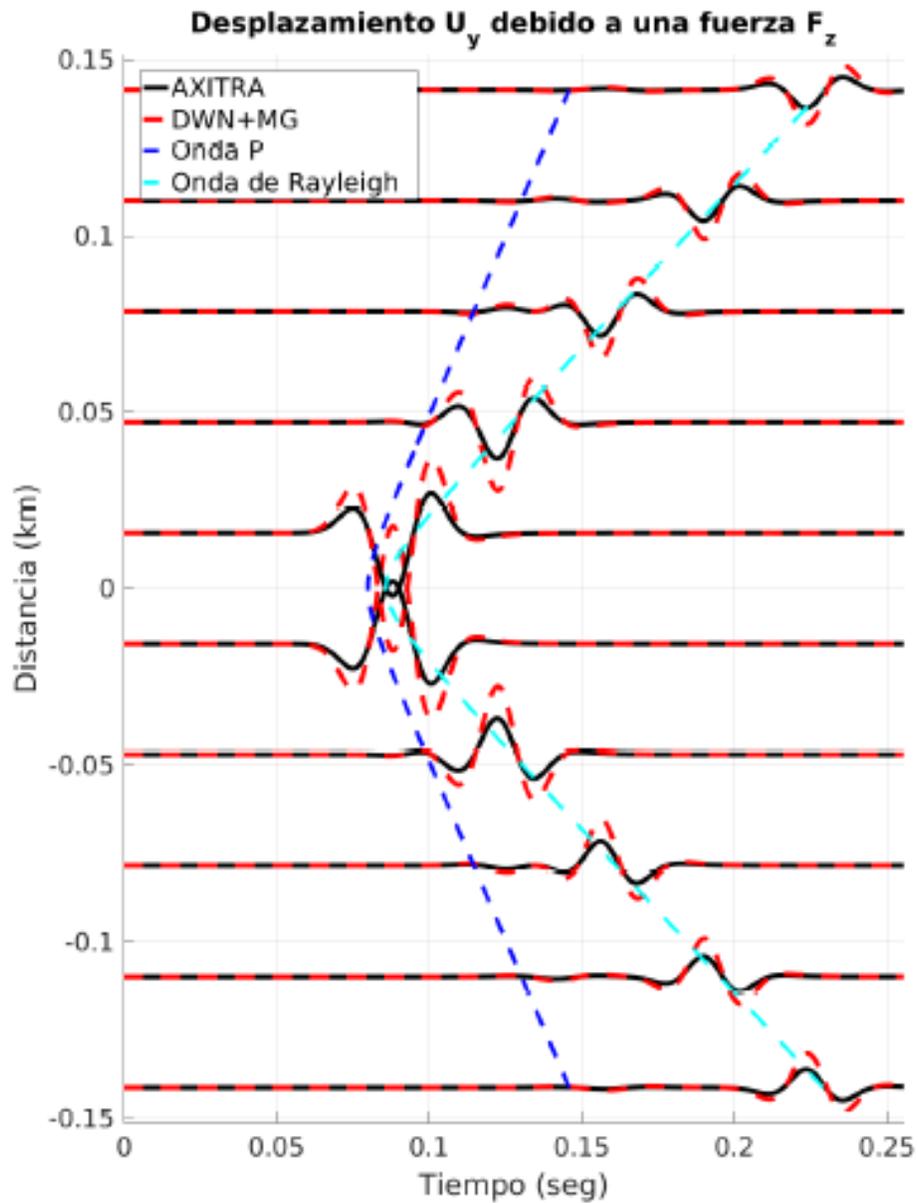


Figura 4.10: Componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semiespacio. Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con AXITRA (línea negra). (Sainos, 2018, p.43)

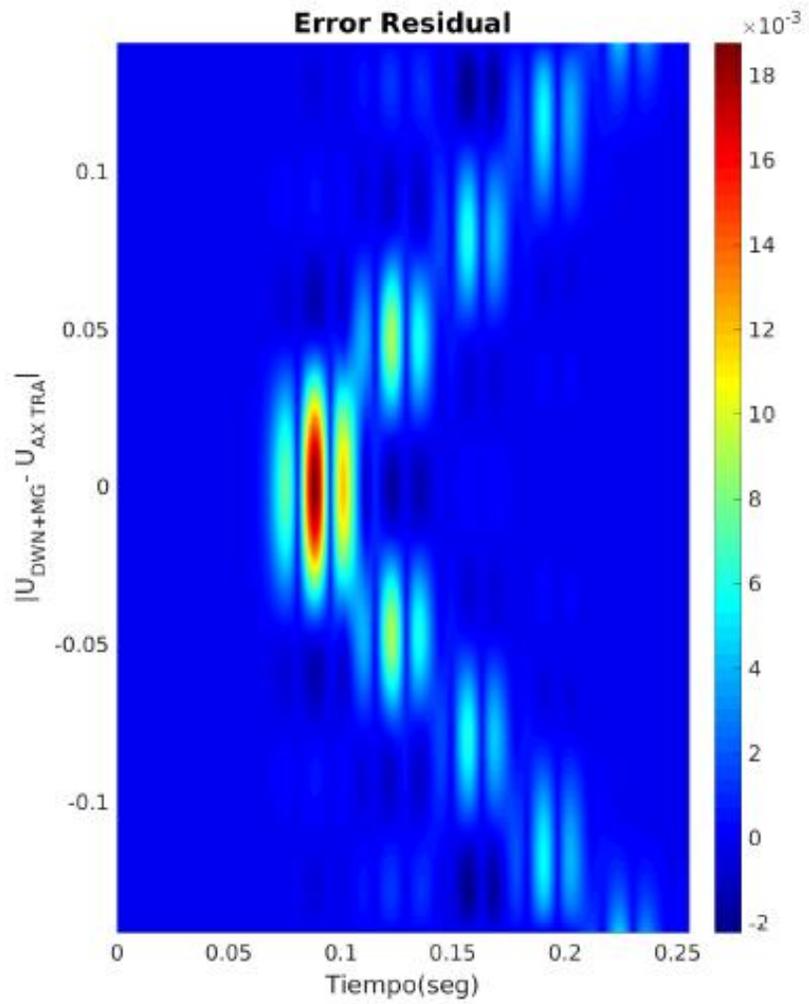


Figura 4.11: Componente de desplazamiento U_y , debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semiespacio. Mapa de contornos para visualizar el error relativo (Sainos, 2018, p.43)

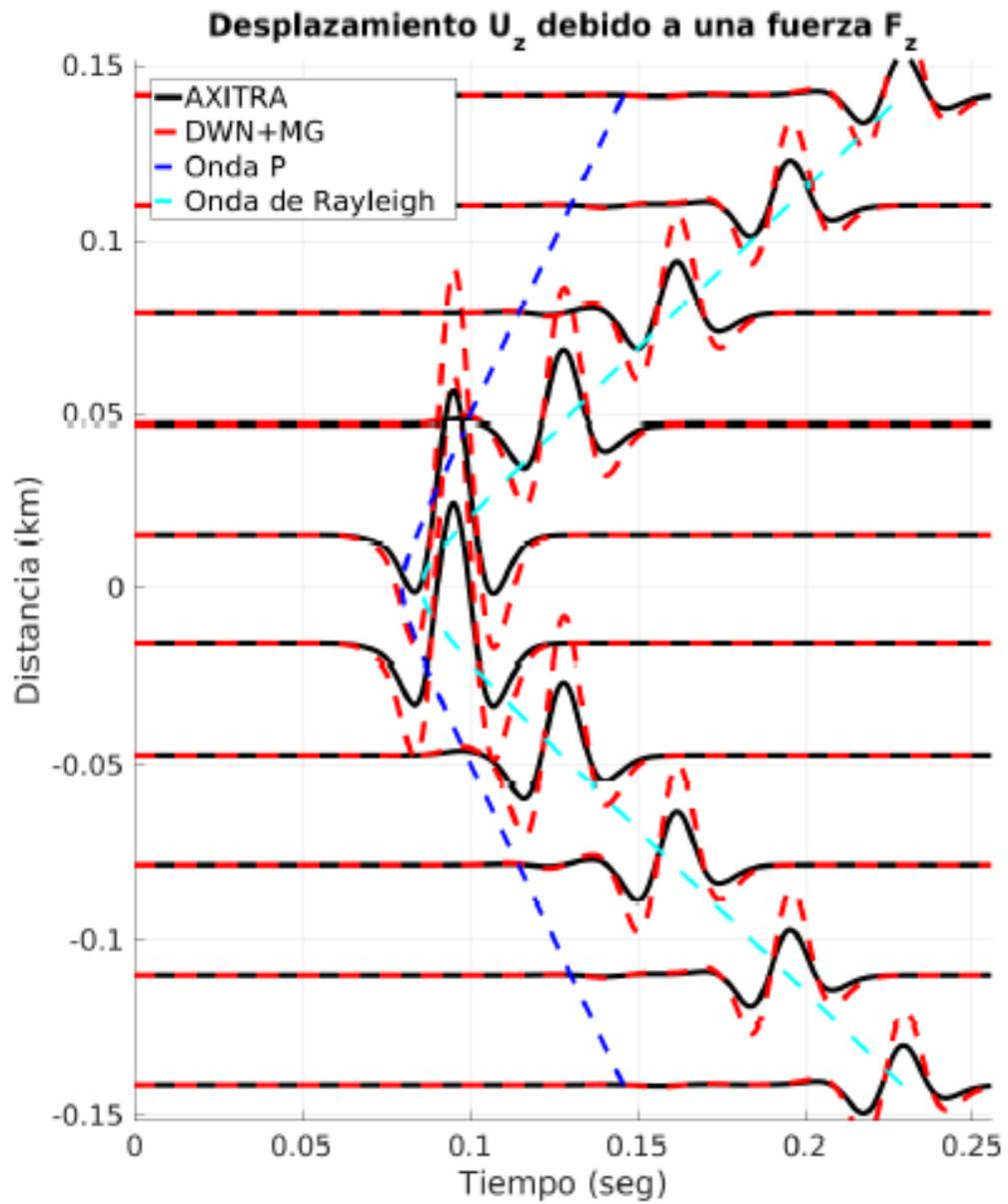


Figura 4.12: Componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semiespacio. Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con AXITRA (línea negra) (Sainos, 2018, p.43).

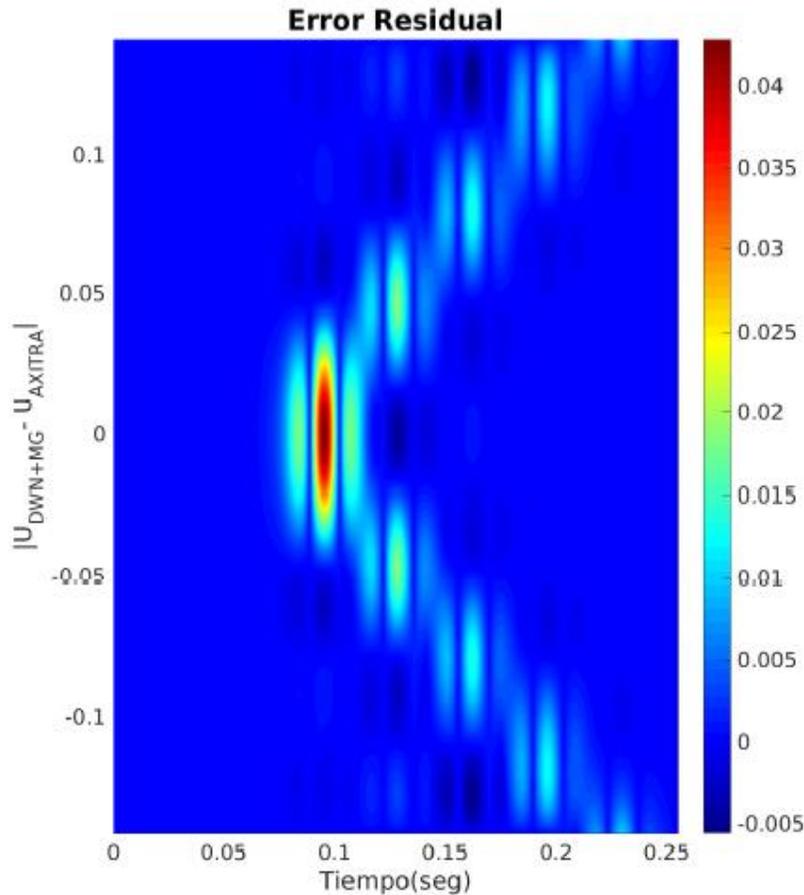


Figura 4.13: Componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semiespacio. Mapa de contornos para visualizar el error relativo. (Sainos, 2018, p. 43)

4.1.2 Fuerza puntual en medio estratificado

Para el caso del medio estratificado se propone un caso en el que se tienen dos estratos del mismo espesor, soportados sobre un semiespacio, con las características particulares postradas en la Tabla 4.3 (Figura 4.14). En este ejemplo, los 10 receptores se encuentran distribuidos únicamente a lo largo del eje x en superficie y la fuente está ubicada en la interfaz 1, es decir en la base del primer estrato. Se establece un espesor del semiespacio de 88 [km], que es solo indicar un tamaño muy por encima de las dimensiones de los estratos propuestos.

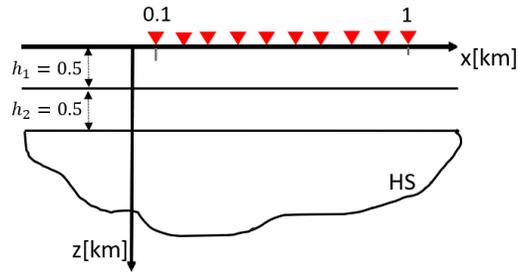


Figura 4.14: Arreglo de 10 detectores en dirección x con z y y constantes en 0.

NL					
2					
H [km]	ALF [$\frac{km}{s}$]	BET [$\frac{km}{s}$]	RHO [$\frac{kg}{m^3}$]	QP	QS
0.5	2.0	1.0	2.0	1000	1000
0.5	4.0	2.0	2.5	1000	1000
88	5.0	3.0	10	1000	1000
L [km]	FACTW [$\frac{rad}{s}$]	FACNMAX	JFUEN		
50	2.0	3	1		
XMIN [km]	XMAX [km]	YMIN [km]	YMAX [km]	ZRCPT [km]	NEST
0.1	1	0	0	0	10
TP [s]	TS [s]	DT [s]	NT		
0.08	0.5	0.01	256		

Tabla 4.4: Parámetros considerados para el cálculo de sismogramas sintéticos para una fuerza puntual en un medio estratificado.

Con esta información se genera un modelo estratigráfico (Figura 4.15). En la figura se ha truncado el espesor del semiespacio con el propósito de que debido a la diferencia de tamaño entre este y los estratos, sea capaz de verse en la gráfica el valor de estos últimos.

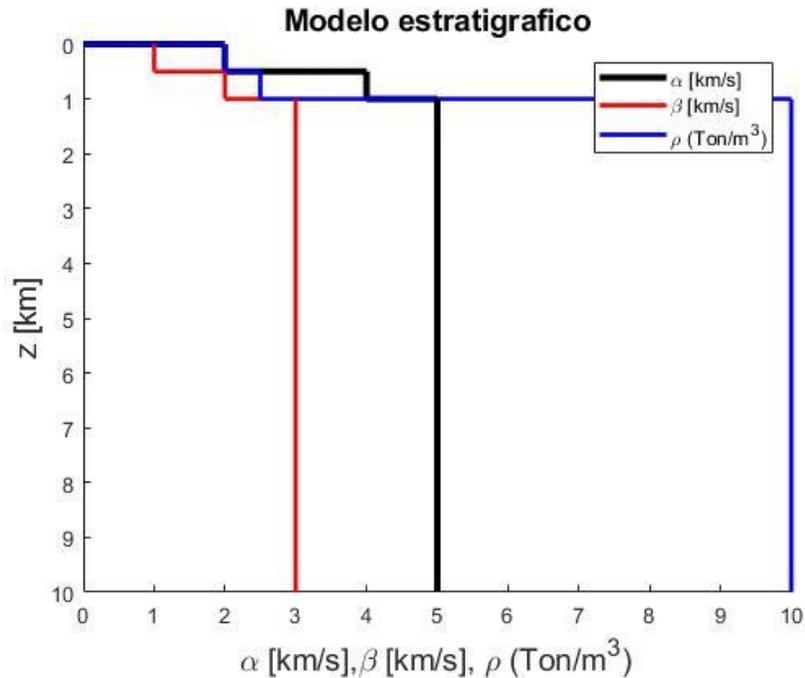


Figura 4.15: Modelo estratigráfico de dos estratos soportados sobre un semiespacio con propiedades de la Tabla 4.3.

Dadas las condiciones del arreglo, se tiene que G_{xy} , G_{zy} , G_{yx} y G_{yz} son nulas. En los sismogramas mostrados en las obtenidas (Figura 4.16), la línea punteada azul y roja representan la velocidad de onda P y S, respectivamente. De manera que podemos observar que el arribo de las ondas P y S concuerdan con las líneas que indican las velocidades. En todas las componentes del tensor de Green mostradas en este ejemplo se tiene un arribo no causal, ya que el tiempo no corresponde al de la aplicación de la fuerza, este puede deberse a los valores de periodicidad L dados para el cálculo, al ser un valor relativamente pequeño, esto mismo pasa con las señales posteriores a los arribos causales, las señales equiespaciadas se hacen presentes después de cierto tiempo. A pesar de ser sismogramas “sucios”, es importante observar los efectos que tienen los parámetros dados.

Los sismogramas mantienen similitudes notables en cuando a la curva de viaje. Sin embargo, podemos observar que en G_{xx} (Figura 4.16), se distingue más fácilmente el arribo de la onda P, asimismo la periodicidad de las fuentes, al tener un valor bajo se ve reflejada en los sismogramas que muestran movimientos que carecen de sentido físico, de manera similar en G_{yy} (Figura 4.18), que es también donde estas fuentes periódicas resaltan más.

Por otro lado, vemos que la mayor amplitud se tiene en G_{zz} (Figura 4.20), pero que el movimiento que predomina (o al menos que es observable) es el de la onda transversal.

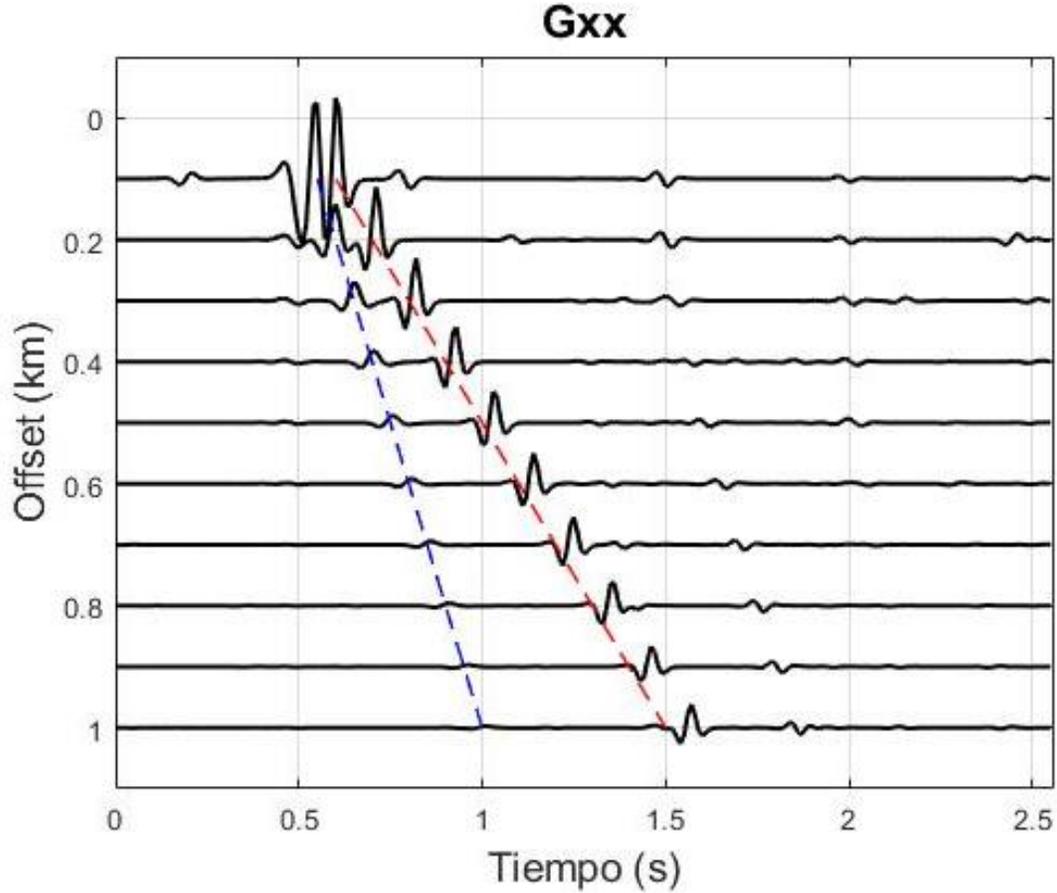


Figura 4.16: Sismogramas: G_{xx} , En las que las líneas punteadas azul y roja representan las velocidades de onda P y S. Es claro el arribo no causal en aproximadamente el segundo 0.2, así como señales posteriores a los arribos esperados (los que tienen velocidades de onda P y S dadas), los cuales son debidos a la periodicidad $L=50$ [km], asimismo es posible observar ondas en sentido contrario y de menos amplitud.

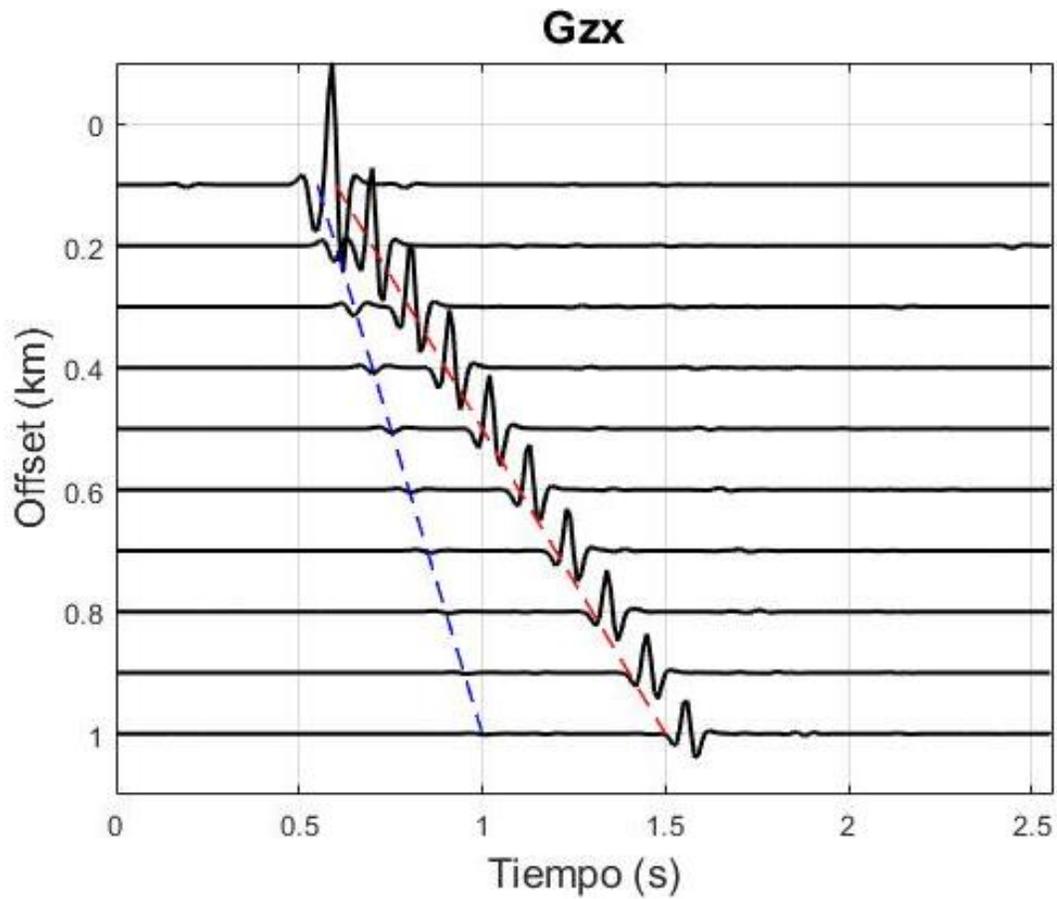


Figura 4.17: Sismogramas: G_{zx} En las que las líneas punteadas azul y roja representan las velocidades de onda P y S. Dada la componente, podemos notar una pequeña onda no causal en la primer traza, así como perturbaciones posteriores a la señal esperada de la onda P, que son debidas a la periodicidad L.

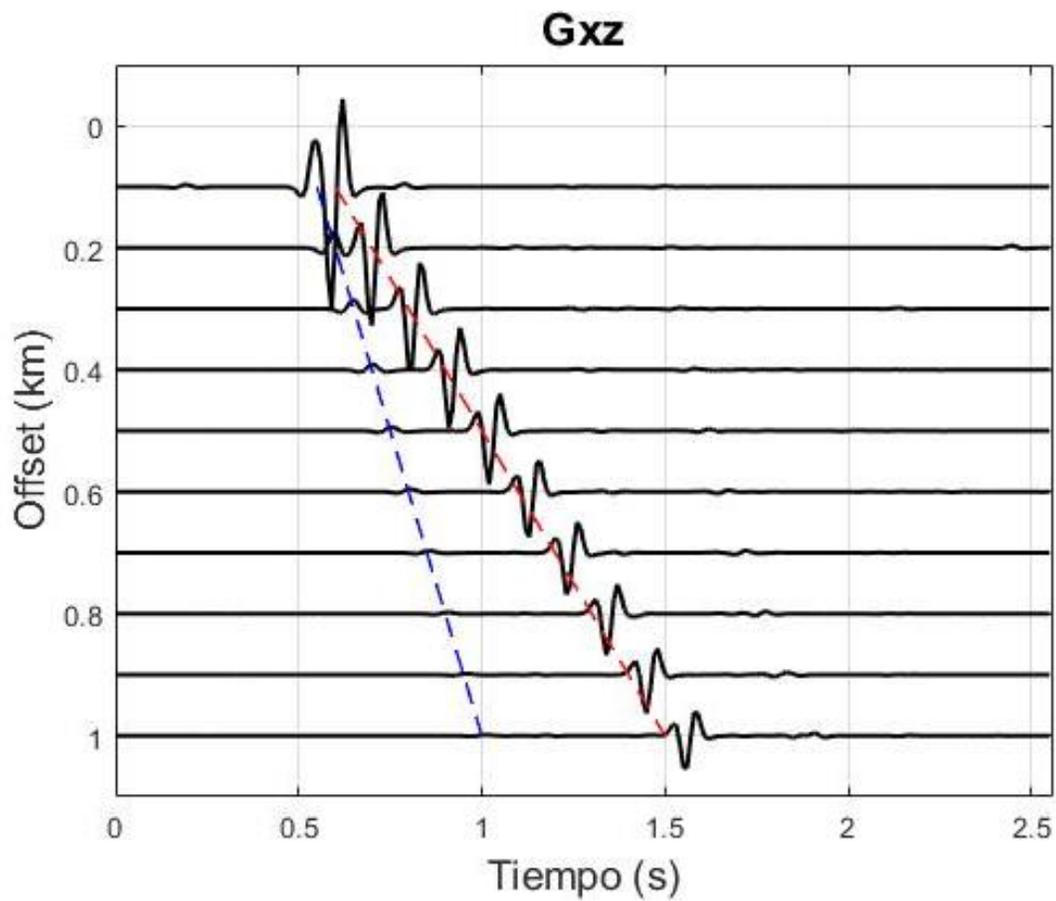


Figura 4.18: Sismogramas: G_{xz} En las que las líneas punteadas azul y roja representan las velocidades de onda P y S. Dada la componente, podemos notar una pequeña onda no causal en la primer traza, así como perturbaciones posteriores a la señal esperada de la onda P, que son debidas a la periodicidad L.

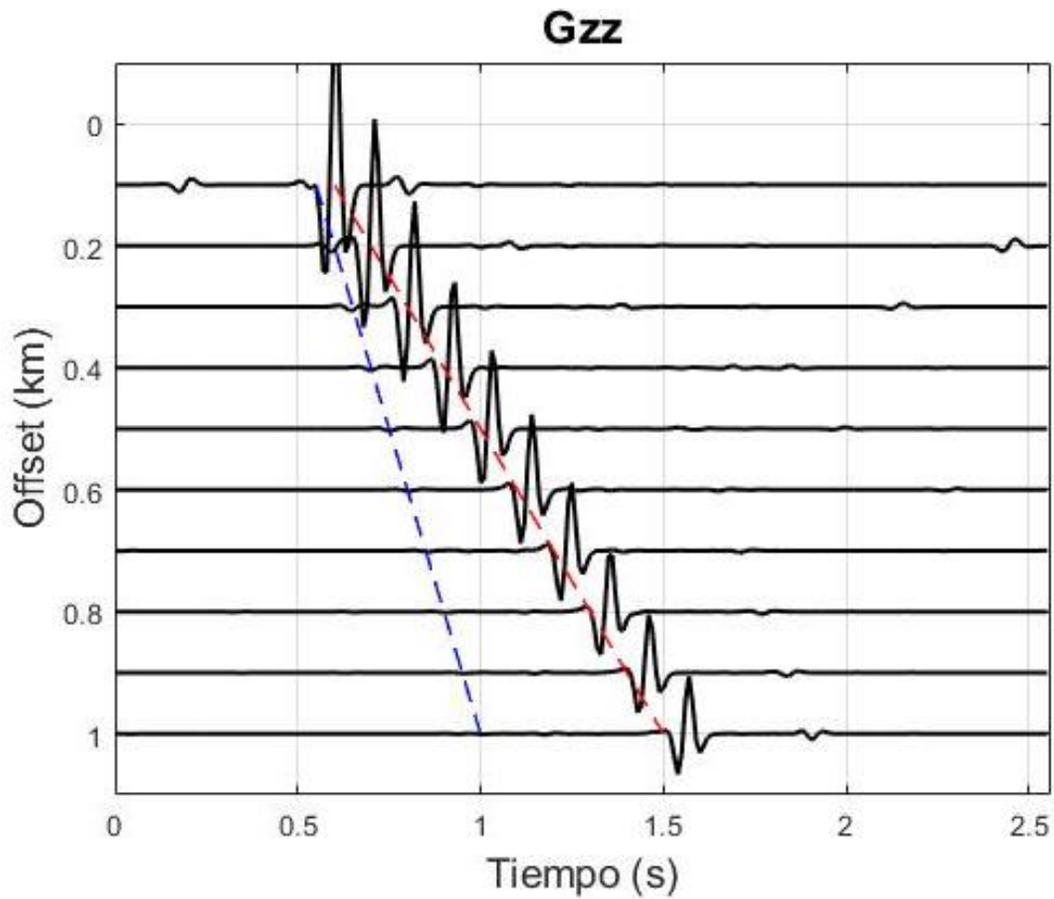


Figura 4.19: Sismogramas: G_{zz} En las que las líneas punteadas azul y roja representan las velocidades de onda P y S. Dada la componente, podemos notar una pequeña onda no causal en la primer traza, así como perturbaciones posteriores a la señal esperada de la onda P tanto en un sentido, como en otro, que son debidas a la periodicidad L

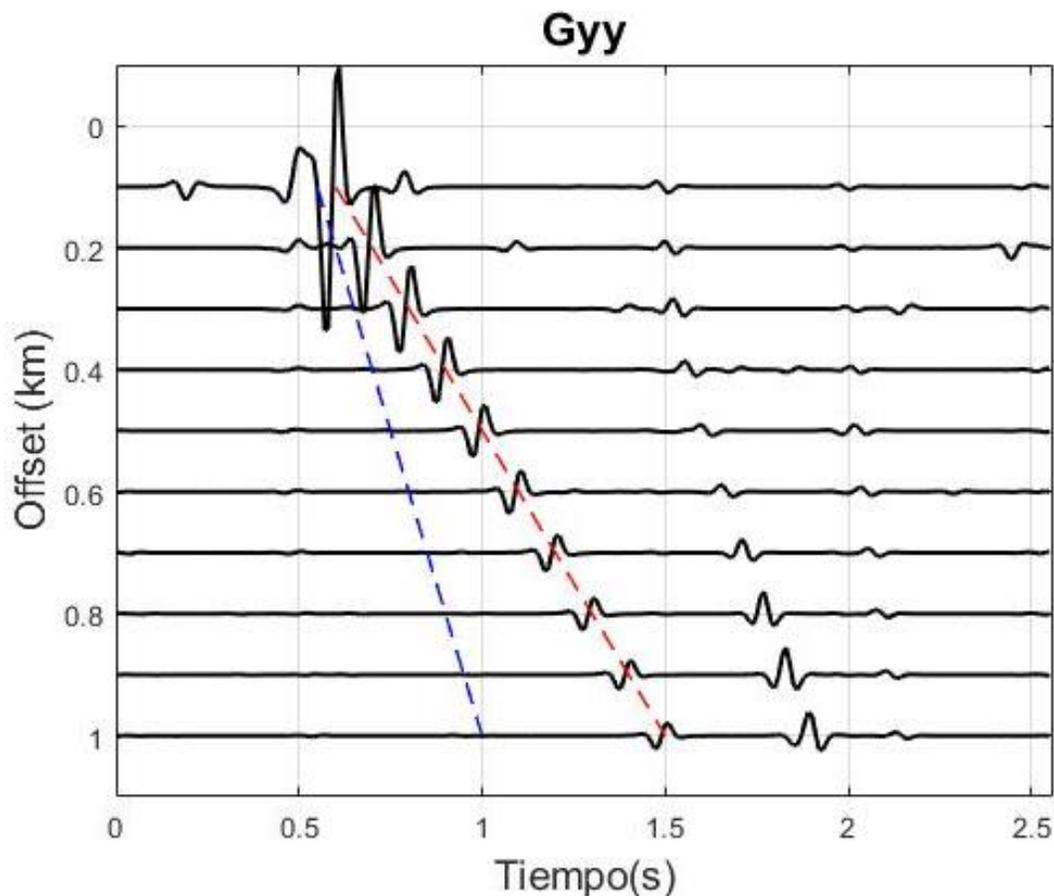


Figura 4.20: Sismogramas: G_{yy} . En las que las líneas punteadas azul y roja representan las velocidades de onda P y S. Dada la componente, podemos notar que las ondas no causales tienen una amplitud mayor al resto del tensor de Green, además de que las velocidades con las que viajan son prácticamente infinitas en ciertas partes, lo cual carece totalmente de sentido físico, por lo que es fácil recalcar la importancia de los valores apropiados de periodicidad, en este caso. A pesar de eso se tiene una idea bastante clara del comportamiento de onda P y S, por lo que emplear valores pequeños para el cálculo de DWN nos puede dar una respuesta esperada, pero con detalles a tener presentes.

4.1.2.1 Calibración en medio estratificado

A continuación, se da una validación del método de la matriz global para un modelo de un estrato.

ALFA $\left[\frac{km}{s}\right]$	BETA $\left[\frac{km}{s}\right]$	RHO $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Q
3.0	1.0	1.0	1000
5.0	2.5	1.0	1000
TP[s]	TS[s]	DT[s]	NT
0.004	0.008	0.0004	512
L[km]	FACTW $\left[\frac{rad}{s}\right]$	ZFUEN[km]	FACNMAX

5.0	1.0	0.05	3.0
-----	-----	------	-----

Tabla 4.5: Parámetros considerados para el cálculo de sismogramas sintéticos para una fuerza puntual para un estrato sobre un semiespacio (Sainos, 2018).

El arreglo de receptores y la fuente empleados corresponde a como se muestra en la Figura 4.11.

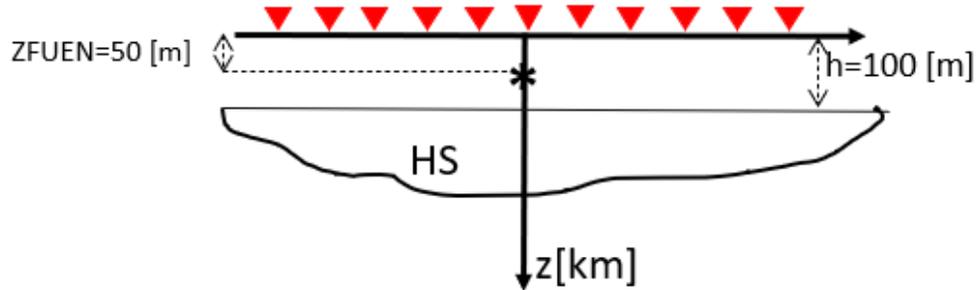


Figura 4.21: Arreglo de receptores en dirección x con z y constantes en θ , para el caso de un estrato sobre un semiespacio con fuente a 50 metros de profundidad.

En la Figura 4.21 se muestran los resultados obtenidos por Sainos (2018) y su comparación con AXITRA, mientras que en la Figura 4.22 observamos el error calculado.

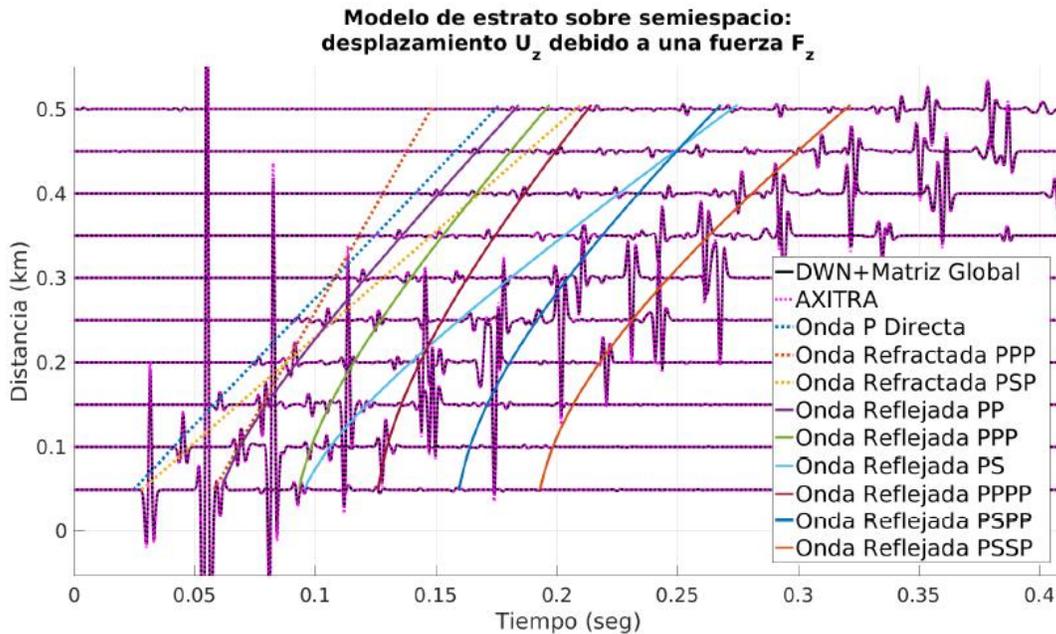


Figura 4.22: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio. La curva de color negro representa el campo de desplazamientos calculado con el código del DWN usando matriz global mientras que la curva en magenta representa el campo de desplazamientos calculado con AXITRA. (Sainos, 2018, p.49)

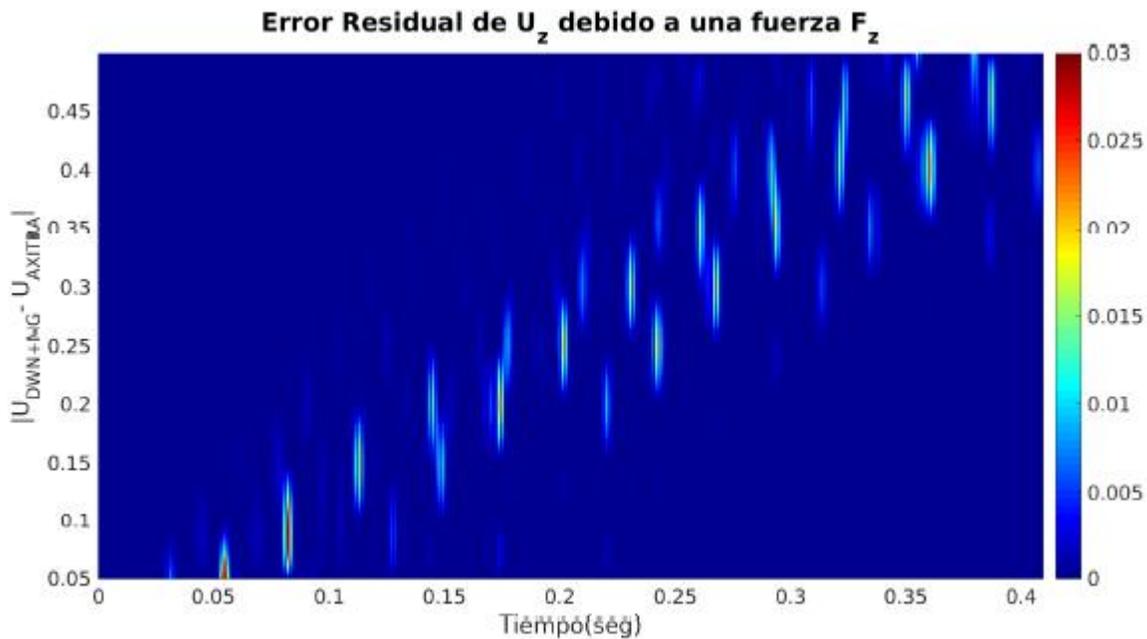


Figura 4.23: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con AXITRA para el campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z . (Sainos, 2018, p.49)

4.1.3 Fuerza puntual en medio estratificado con aumento de velocidad

Se considera un medio estratificado en el que existe aumento de velocidad conforme el estrato es más profundo, en la Tabla 4.6 se muestran los valores de cada parámetro empleados para el cálculo de los sismogramas sintéticos.

NL					
3					
H[km]	ALF $\left[\frac{km}{s}\right]$	BET $\left[\frac{km}{s}\right]$	RHO $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	QP	QS
0.1	1.0	0.5	1.0	500	500
0.1	2.0	1.0	1.0	500	500
0.1	3.0	1.5	1.0	500	500
88	4.0	3.0	2.0	1000	1000
L[km]	FACTW $\left[\frac{rad}{s}\right]$	FACNMAX	JFUEN		
5	1.0	6	1		
XMIN[km]	XMAX[km]	YMIN[km]	YMAX[km]	ZRCPT[km]	NEST
1	21	0	0	0	20

TP[s]	TS[s]	DT[s]	NT
0.005	0.1	0.0005	512

Tabla 4.6: Parámetros considerados para el cálculo de sismogramas sintéticos para una fuerza puntual para un medio estratificado con aumento de velocidad.

Se tiene entonces un arreglo de 20 receptores sobre la superficie, distribuidos de forma lineal a lo largo del eje x . Como se muestra en la Figura 4.24 a continuación.

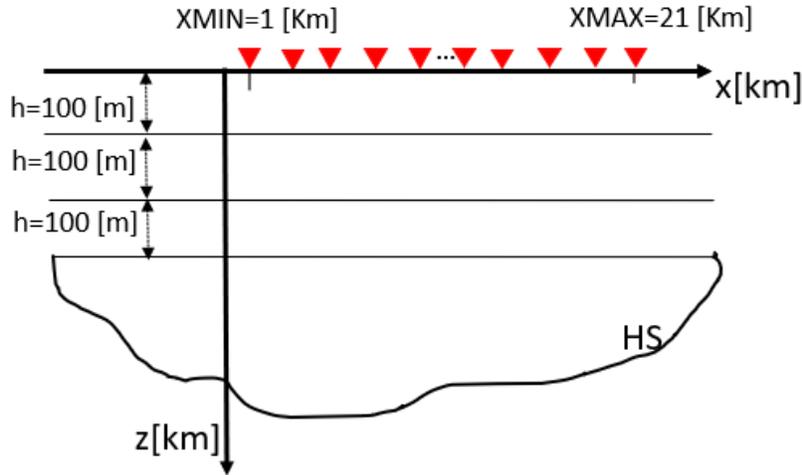


Figura 4.24: Arreglo de receptores en dirección x con z y y constantes en 0, para el caso de un medio estratificado con aumento de velocidad.

Dadas las condiciones del arreglo, se tiene que G_{xy} , G_{zy} , G_{yx} y G_{yz} son nulas. En los sismogramas mostrados en las obtenidas (Figura 4.25-4.27) en los que la duración del sismograma de cada componente es de 50 [s]. En color azul se muestran los componentes G_{xx} , G_{xy} y G_{xz} , en color negro G_{yx} , G_{yy} y G_{yz} , por último en color rojo se tiene G_{zx} , G_{zy} y G_{zz} . Las amplitudes tienen un factor de escala de 10.

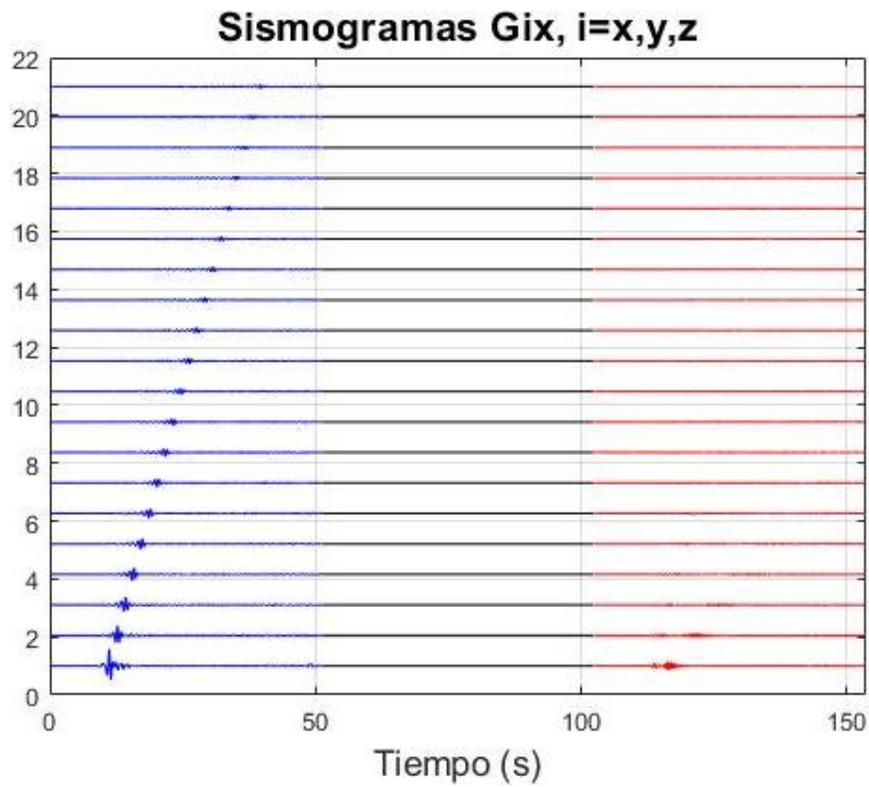


Figura 4.25: Sismogramas: G_{xx} , G_{yx} y G_{zx} .

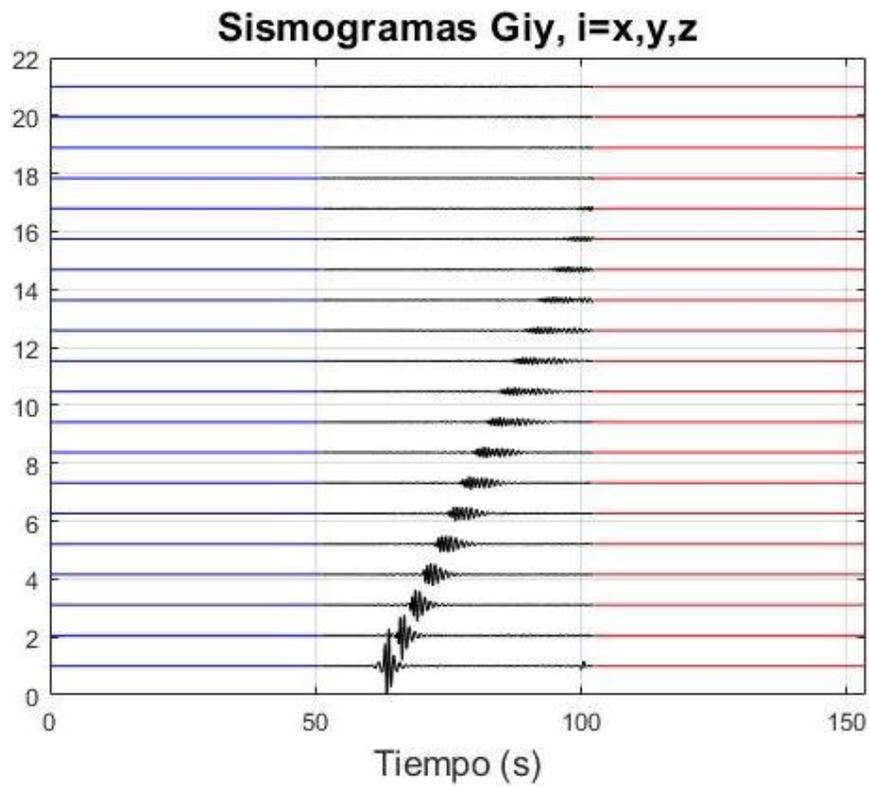


Figura 4.26: Sismogramas: G_{xy} , G_{yy} y G_{zy} .

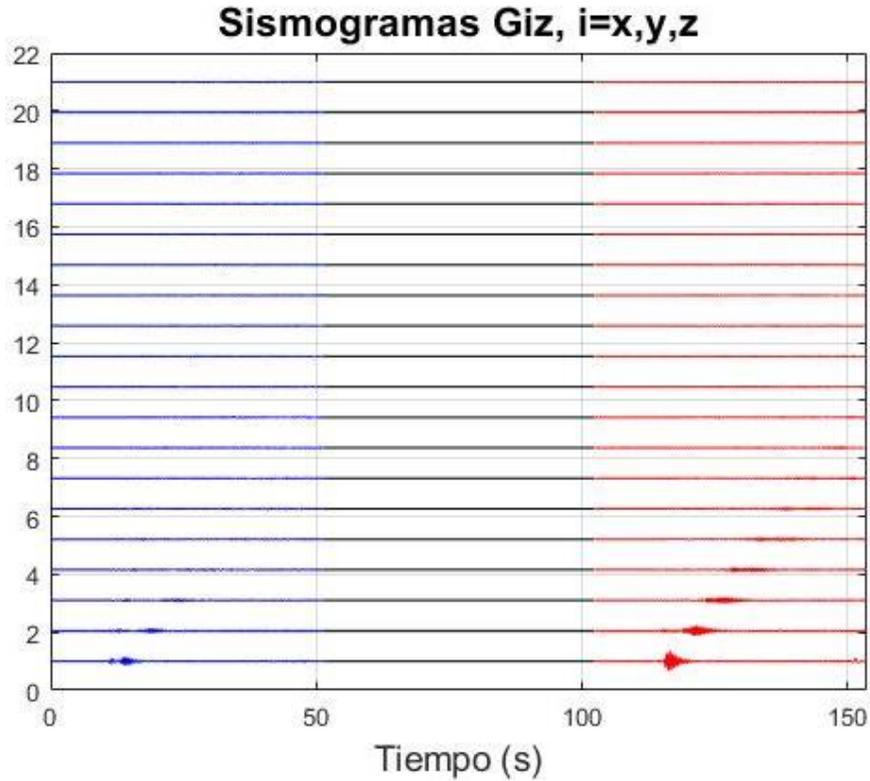


Figura 4.27: Sismogramas: G_{zz} , G_{yz} y G_{zz} .

4.2 Fuente explosiva

4.2.1 Comparación solución exacta contra método del DWN

Para la fuente volumétrica en el semiespacio, se compara primero la solución exacta se calcula el campo de desplazamientos por una explosión con $M_0 = e^{-a^2}$ contra el cálculo a partir de la solución en coordenadas polares, con integración en el número de onda radial con J_0 y J_1 .

Se propone un arreglo de una línea diagonal en el plano xy a una profundidad constante, con la fuente, igualmente, ubicada en el origen de coordenadas. Se pueden ver los detalles en la Tabla 4.7 (Figura 4.28).

ALFA $\left[\frac{km}{s}\right]$	RHO $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$					
3.0	1.0					
XF[km]	YF[km]	ZF[km]				
0	0	0				
XI[km]	XFIN[km]	YI[km]	YFIN[km]	ZI[km]	ZFIN[km]	NR
0.5	5	0.5	5	5	5	11

TP[s]	TS[s]	DT[s]	NT	
0.2	1.0	0.01	512	
L[km]	Q	FACTW $\left[\frac{rad}{s}\right]$	FACNMAX	Para cálculo con DWN únicamente
20	1000	1.0	3	

Tabla 4.7: Parámetros empleados para el cálculo de sismogramas sintéticos de una fuente volumétrica. Se emplean estos mismos datos tanto para la solución exacta como para la solución en coordenadas polares.

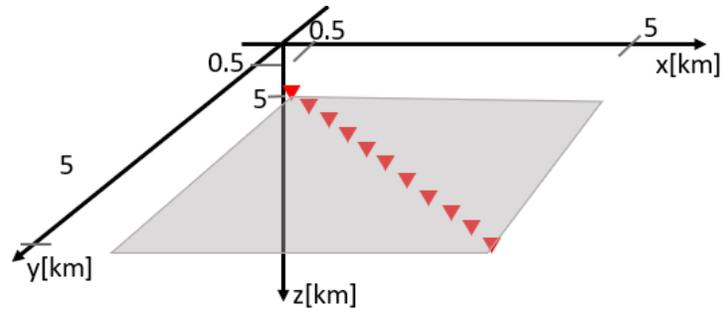


Figura 4.28: Arreglo de detectores en una línea diagonal sobre el plano xy.

Las respuestas obtenidas en este caso empatan casi por completo, por lo que suponemos que los parámetros de periodicidad L, calidad Q, factor tw FACTW y factor n máxima FACNMAX, son más apropiados para el ejemplo actual. (Figura 4.29 y 4.30).

Respuesta DWN

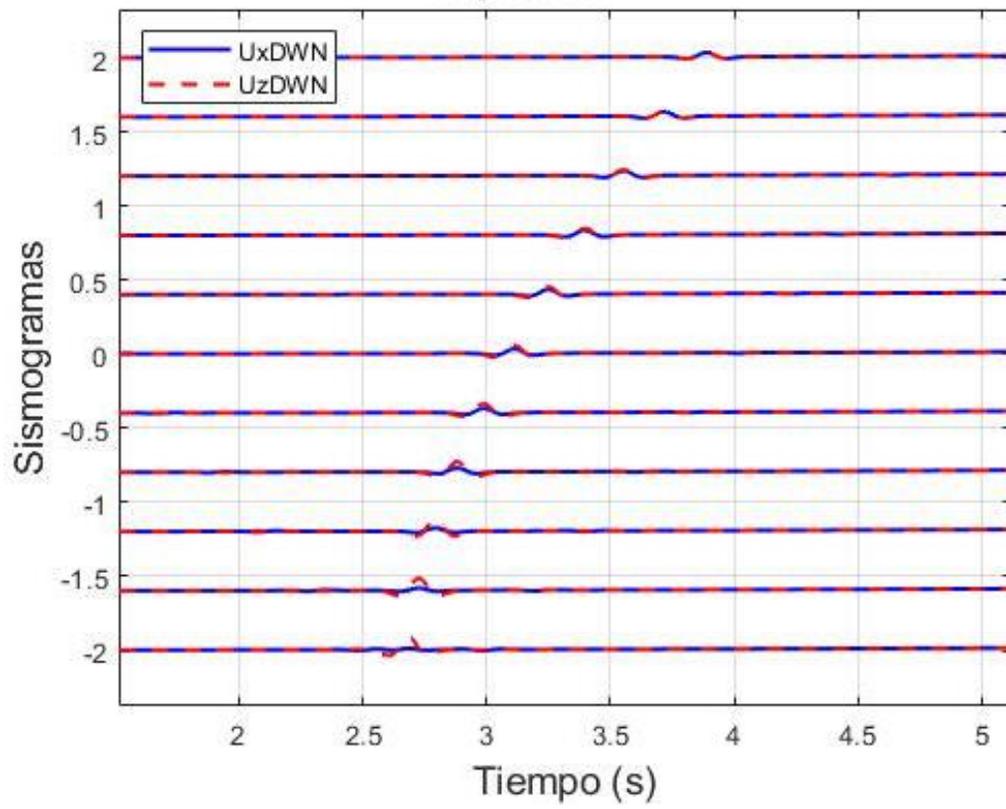


Figura 4.29: Respuesta calculada mediante el DWN.

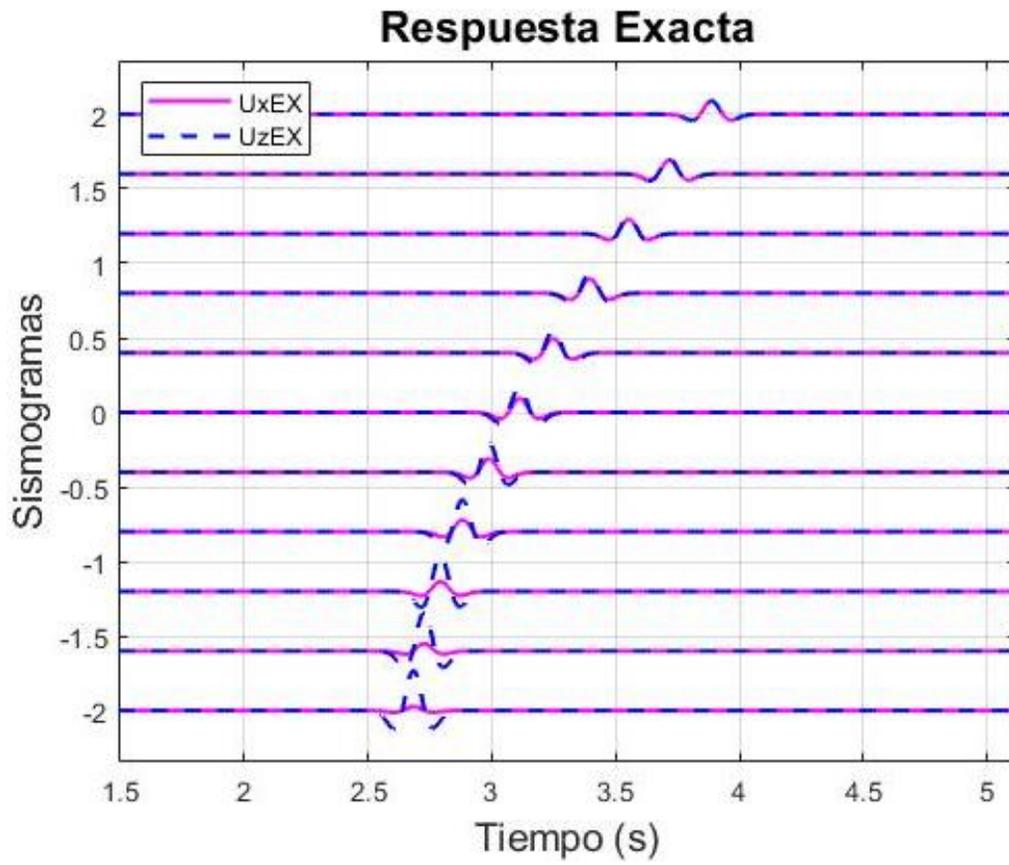


Figura 4.30: Respuesta calculada mediante la solución exacta.

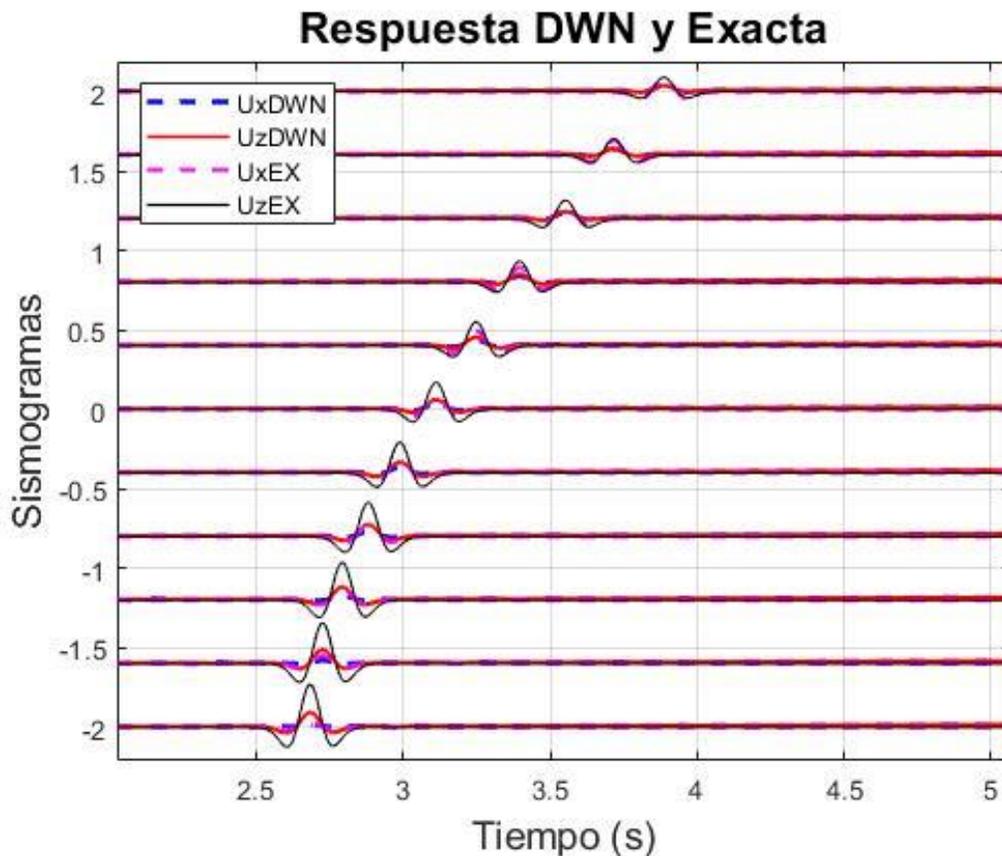


Figura 4.31: Sobreposición de respuestas dadas por el DWN y la solución exacta.

4.2.2 Fuente explosiva en semiespacio

Para el caso de una explosión en un semiespacio se propone un arreglo de 10 receptores que forman una línea diagonal en el plano xy a profundidad constante cercana a la superficie, de igual manera que la fuente con el propósito de obtener en los sismogramas la onda de Rayleigh. En la Tabla 4.5 se pueden ver a detalle los parámetros empleados. (Figura 4.32)

BETA $\left[\frac{km}{s}\right]$	RHO $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	ANU	Q				
1	1.0	0.333333	250.0				
L $[km]$	FACTW $\left[\frac{rad}{s}\right]$	FACNMAX					
150	3.0	5.0					
H $[km]$	XMIN $[km]$	XMAX $[km]$	YMIN $[km]$	YMAX $[km]$	ZMIN $[km]$	ZMAX $[km]$	NEST
0.05	-2	2	-2	2	0.1	0.1	10
TP	TS $[s]$	DT $[s]$	N				
0.025	0.05	0.05	512				

Tabla 4.8: Parámetros empleados para el cálculo de sismogramas sintéticos de una fuente volumétrica en el semiespacio.

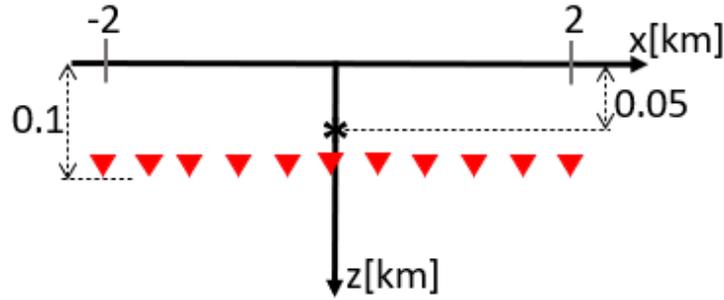


Figura 4.32: Arreglo con detectores a profundidad constante a lo largo del eje x.

Se consideró necesario disminuir, en comparación de los casos pasados, los parámetros del pulso de Ricker, es decir el periodo característico y el tiempo central, así como duplicar el número de frecuencias ya que se observaban los sismogramas carentes de definición, a pesar de estas consideraciones, los resultados se ven un tanto angulosos.

Dado el arreglo podemos notar que la respuesta en las componentes horizontales es la misma, mientras que, en la componente vertical, las amplitudes en las trazas son mayor, a excepción de las centrales, todas con un factor de escala de 100.

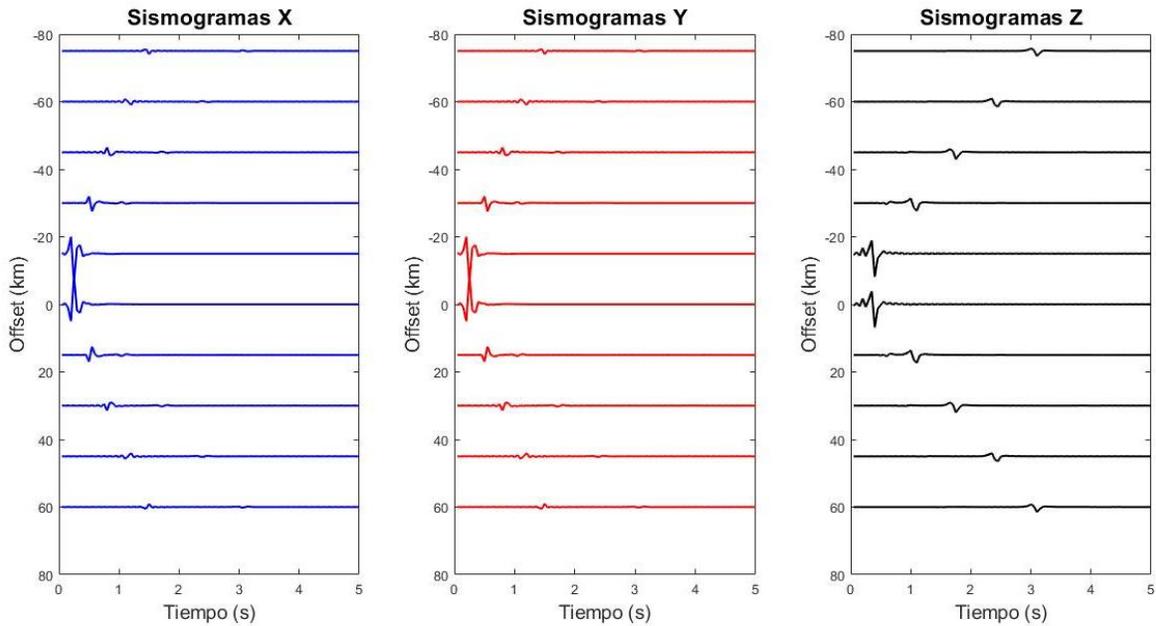


Figura 4.33: Sismogramas obtenidos en las tres componentes.

Capítulo 5. Discusión de resultados

Tanto para el estudio de la fuente puntual y la fuente explosiva, (en la que en el caso de fuerza vertical va a generar ondas P-SV, mientras que la horizontal dará lugar a ondas P-SV y SH. Mientras que para la fuente volumétrica tendremos ondas P-SV) es necesario tener presente la intervención de los parámetros empleados para el cálculo de la respuesta mediante el método del DWN, ya que estos, tienden a generar distintos efectos en los resultados que dan lugar a posibles confusiones e interpretaciones erróneas. A menudo ocurrió que el considerar una periodicidad pequeña, esta daba lugar a la alteración de la respuesta generando señales que contaminan los sismogramas. De manera similar los valores elegidos de T_w y N máximo generaban efectos de “ringing”, además de alentar el proceso.

La geometría del arreglo y la localización de la fuente nos da un indicio de que debemos esperar en los sismogramas. Las gráficas nos dan la capacidad de visualizar las respuestas, sin embargo, el analizar directamente los archivos de datos obtenidos del programa, también es útil ya que en estos se puede estudiar una frecuencia específica de interés y observar las simetrías esperadas.

Al comparar resultados con AXITRA podemos notar que el error aumenta en los receptores cercanos a la fuente para ambos ejemplos mostrados, debido sobre todo a las amplitudes y no a los tiempos de arribo de las ondas, los cuales pueden deberse a las diferencias entre modelos de atenuación empleadas por cada programa.

La estructura de las matrices permite hacer eficiente el cálculo, pero sería válido probar otros métodos y comparar entre ellos. Este tiene la practicidad de dada su formulación, ser muy intuitivo y estable en frecuencias altas.

El caso de la explosión resulta complicado de obtener resultados estables, al acercarnos a la superficie libre con el arreglo y la fuente. Para este caso se considera importante comparar con programas establecidos (como AXITRA o SPECFEM) o generar un catálogo que proponga una gran cantidad de configuraciones.

En la actualidad este tipo de análisis es relativamente sencillo debido a la facilidad de acceso que se tiene a equipo de cómputo, suponiendo que se el software está disponible. Claramente la falta de estos en tiempos anteriores ha significado un obstáculo para obtener resultados contundentes para un número significativo de experimentos.

Capítulo 6. Conclusiones y perspectivas

Gracias a la formulación realizada para la fuente puntual y explosiva, y al empleo del método del DWN, se han generado las herramientas de cálculo que permitirían definir los parámetros de cálculo del método y de la fuente propuesta. Siguiendo las consideraciones mencionadas para la elección apropiada de periodicidad de las fuentes, tomando en cuenta la velocidad del medio. Los resultados son congruentes con lo que predice la teoría para casos sencillos propuestos, como es en superficie libre, en el semiespacio y medios estratificados, por lo que se cumple el objetivo principal de la tesis.

En el futuro deberá estudiarse con mayor detalle la solución para fuentes volumétricas y obtener formulaciones más sencillas y flexibles. Es deseable poder calcular sismogramas al posicionar la fuente en medio de un estrato y para medios estratificados en general. Además de incluir la dislocación como parte de las fuentes posibles. Esas son tareas pendientes.

Referencias

- Arias Marín, P. (2016). *Interacción dinámica suelo-estructura aplicada a distintas geometrías de cimentación (vibración transmitida del suelo a la estructura)*. [Tesis de licenciatura]. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Aki, K. y P.G. Richards (2002). *Quantitative seismology*. University Science Books, p. 1, 12-13, 26- 27, 64, 192, 77.
- Bouchon, M. (2003). A review of the discrete wavenumber method, *Pure and applied Geophysics* **160**, (3-4), 445-465.
- Chao, Ching-Chang (1960) Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface loadings. *Journal of Applied Mechanics* 27.3, 559-567.
- Evans, K.E. y Alderson D. A. (200). Auxetic materials: functional materials and structures from lateral thinking. *Advanced Materials (Weinheim, Germany)*, **12**, 617-628.
- Knopoff, L. (1964). A matrix method for elastic wave problems, *Bulletin of the Seismological Society of America* **54**, (1), 431-438.
- Milton, G. (1992). Composite materials with Poisson's ratios close to -1, *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 1105-1137.
- Mooney, Harold M. (1974) Some numerical solutions for Lamb's problem. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62.2, 473-491
- Lamb, Horace (1904) On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London* 72. 128-130
- Lay, T. y T. C. Wallace (1995). *Modern global seismology*. Vol. 58. Academic Press, p. 35, 116, 127.
- Pekeris, C.L (1955) The seismic Surface pulse. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 41.7, 469-480
- Sainos Vizuet, M. (2018). *Cálculo de sismogramas sintéticos en medios estratificados*. [Tesis de licenciatura]. Universidad Nacional Autónoma de México, p. 11, 12, 25, 37-39, 42-43, 49, 66, 67, 69, 72,81
- Sánchez-Sesma, F. J., M. Rodríguez, U. Iturrarán-Viveros, F. Luzón, M. Campillo, L. Margerin, A. García-Jerez, M. Suarez, M. A. Santoyo y A. Rodríguez-Castellanos (2011). A theory for microtremor H/V spectral ratio: application for a layered medium, *Geophysical Journal International* **186** (1), 221-225.

Sasatani, T. (1985). Seismic wave propagation in a stratified half-space. *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University. Series 7, Geophysics* 7.5, 401-420.

Stein, Seth and Wysession Michael (2003). An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure. Blackwell Publishing, p. 38, 39, 41, 87.

Stokes, G. G. (1849). On the Dynamical Theory of Diffraction. *Transacciones de la Sociedad Filosófica de Cambridge*, p. 25,26