



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Implementación de soluciones  
analíticas aplicables en yacimientos no  
convencionales: flujo a través de  
nanoporos y descripción fractal de  
redes de fracturas complejas**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniera Petrolera**

**P R E S E N T A**

Virginia Arlette Cedeño Estrada

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Rodolfo Gabriel Camacho Velázquez



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022**

Implementación de soluciones analíticas aplicables en yacimientos no convencionales: flujo a través de nanoporos y descripción fractal de redes de fracturas complejas.

SI SOBREVIVES, si persistes, canta,  
sueña, emborráchate.

Es el tiempo del frío: ama,  
apresúrate. El viento de las horas  
barre las calles, los caminos.

Los árboles esperan: tú no esperes,  
éste es el tiempo de vivir, el único.

- Jaime Sabines

*A mis padres.*

# Agradecimientos

A Mely Estrada y José Cedeño, mis padres, por su apoyo incondicional en todo momento y sus incontables sacrificios. Deseo que hoy puedan sentir que todo el esfuerzo ha valido la pena. Los amo.

A mi hermano, Adrián, por ser mi confidente y mejor amigo, por ayudarme y apoyarme siempre en todo este camino.

A Pichi, por ser mi compañera en noches de desvelo durante tantos años.

A mi asesor, Dr. Rodolfo Camacho, por su ayuda y su tiempo, por brindarme sus conocimientos y, sobretodo, por su comprensión.

A mis amigos Noé, Beto, Adri, Abraham, Saúl, Ivonne, Karlita y Davicho, por permitirme recorrer el trayecto, que no fue fácil, a su lado.

A Aldo, por haber sido mi motivación y por tu cariño.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería, por abrirme sus aulas y permitir mi formación como ingeniera.

Arlette Cedeño.

# Resumen

Cuando se realiza cualquier tipo de caracterización de un yacimiento de manera previa a su explotación, es habitual encontrarse con métodos, técnicas y soluciones que son desarrolladas bajo hipótesis que no siempre resultan verdaderas o aplicables al tipo de yacimiento en cuestión. Casos de este tipo son encontrados de manera frecuente cuando se estudian los yacimientos no convencionales, como los yacimientos de *shale gas* o de *tight oil*.

En un yacimiento de *shale gas*, el tamaño de la garganta de poro oscila en la escala de los nanómetros, lo que provoca que el flujo de gas en este tipo de medios sea un proceso complejo en el que las fuerzas viscosas no gobiernan el flujo y, por ende, la ley de Darcy no puede utilizarse para describir de manera adecuada este proceso. Por ello, en el presente trabajo se implementa una solución que clasifica los regímenes de flujo de gas a través de nanoporos, de acuerdo con el número de Knudsen, en cuatro diferentes regímenes (flujo continuo convencional, flujo por deslizamiento, flujo libre molecular y flujo de transición) y, posteriormente, propone un modelo integral para analizar el comportamiento del flujo de gas en este tipo de medios.

Por otro lado, cuando se pretende la explotación de yacimientos compactos en los que la permeabilidad es muy baja, como los yacimientos de *tight oil* o *shale oil*, se implementan técnicas de estimulación que reacondicionen las propiedades del yacimiento, tales como el fracturamiento hidráulico. Generalmente, esta técnica da lugar a redes de fracturas complejas que se generan cuando las fracturas hidráulicas entran en contacto con las fracturas naturales preexistentes en el yacimiento. El flujo a través de este tipo de medios fracturados es comúnmente modelado haciendo uso del modelo clásico de doble porosidad, sin embargo, la idealización de la red de fracturas como un arreglo lineal de paralelepípedos no es la más adecuada. Para realizar un mejor análisis del transiente de presión, en esta tesis se implementa una solución que emplea un modelo de flujo trilineal para representar el flujo a través de las fracturas hidráulicas, la red de fracturas complejas generada por la estimulación y la zona no alterada de la formación, expresando además a la porosidad y permeabilidad de la red de fracturas como leyes de potencias, de acuerdo con la teoría fractal.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Objetivo general . . . . .	3
Estructura del trabajo . . . . .	3
<b>1. Revisión de literatura</b>	<b>5</b>
1.1. Sistema petrolero . . . . .	5
1.1.1. Yacimientos convencionales . . . . .	6
1.1.2. Yacimientos no convencionales . . . . .	6
1.2. Yacimientos de <i>shale gas</i> . . . . .	7
1.2.1. Variación en la escala de porosidad . . . . .	8
1.2.2. Adsorción de gas . . . . .	9
1.2.3. Regímenes de flujo . . . . .	12
1.3. Yacimientos compactos . . . . .	15
1.3.1. Fracturamiento hidráulico en pozos horizontales . . . . .	16
1.3.2. Modelo de doble porosidad de Warren y Root . . . . .	17
1.3.3. Geometría fractal . . . . .	24
1.3.4. Caracterización de redes de fracturas complejas mediante la geometría fractal . . . . .	26
<b>2. Soluciones implementadas</b>	<b>32</b>
2.1. Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de <i>shale gas</i> . . . . .	32
2.1.1. Modelo matemático con múltiples regímenes de flujo . . . . .	33
2.1.2. Estudio de caso . . . . .	37
2.1.3. Análisis de sensibilidad . . . . .	40
2.2. Modelo fractal semi-analítico para la producción de aceite en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados	43
2.2.1. Geometría de flujo hipotética y metodología de desarrollo . . . . .	45
2.2.2. Desarrollo matemático del modelo fractal . . . . .	46

2.2.3. Análisis de sensibilidad . . . . .	64
<b>3. Descripción de la herramienta desarrollada</b>	<b>70</b>
3.1. Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de <i>shale gas</i> . . . . .	72
3.2. Modelo fractal semi-analítico para la producción de aceite en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados	76
<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>82</b>
Conclusiones . . . . .	82
Recomendaciones . . . . .	83
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>
<b>A. Código principal de la herramienta desarrollada</b>	<b>89</b>
A.1. Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de <i>shale gas</i> . . . . .	89
A.2. Modelo fractal semi-analítico para la producción de aceite en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados	91
<b>B. Algoritmo de Stehfest</b>	<b>93</b>

# Índice de tablas

1.1. Tipos de porosidad encontrados en yacimientos no convencionales y sus características (superíndices 1 y 2 indican porosidad primaria y secundaria, respectivamente). Adaptado de Milner et al. (2010). . . . .	10
2.1. Propiedades de una mezcla de gases típicamente encontrada en yacimientos de <i>shale gas</i> . Recuperado de Shen et al. (2017). . . . .	39
2.2. Datos sintéticos empleados para realizar el análisis de sensibilidad. Recuperado de Wang et al. (2015). . . . .	66

# Índice de figuras

1.	Clasificación gráfica de los yacimientos según su relación permeabilidad/viscosidad. Adaptado de Cander (2012). . . . .	2
1.1.	Clasificación de D. Russum para los yacimientos petroleros según sus propiedades roca-fluidos. Adaptado de Euzen (2011). . . . .	7
1.2.	Distribución de las moléculas de gas en el sistema poroso de los yacimientos de <i>shale gas</i> . Adaptado de Javadpour (2009). . . . .	11
1.3.	Isoterma de Langmuir. Adaptado de Euzen (2011). . . . .	12
1.4.	Fronteras de (1.4a) no deslizamiento y (1.4b) deslizamiento. Adaptado de Xie et al. (2018) y Javadpour et al. (2007). . . . .	14
1.5.	Apertura y propagación de la fractura hidráulica de acuerdo con el arreglo de esfuerzos compresivos <i>in-situ</i> . Adaptado de Fu et al. (2017). . . . .	17
1.6.	Tipos de propagación de una fractura o un conjunto de ellas, donde en A) se observa una fractura simple, en B) una fractura compleja, en C) una fractura compleja con apertura de fisuras y en D) una red de fracturas complejas. Adaptado de Warpinski et al. (2001). . . . .	18
1.7.	Esquemización de la clasificación de los yacimientos fracturados propuesta por Nelson Nosjean. Adaptado de Nelson (2001). . . . .	19
1.8.	Idealización de un medio poroso heterogéneo empleada para el desarrollo del modelo de doble porosidad. Adaptado de Warren and Root (1963). . . . .	20
1.9.	Generación de objetos de geometría euclidiana mediante la segmentación continua de sus lados. . . . .	25
1.10.	Construcción de la curva de Koch en tres etapas. Adaptado de Mandelbrot and Frame (1987). . . . .	26
1.11.	Construcción de la curva de Koch en $n$ etapas. Adaptado de Ungar (2007). . . . .	27
1.12.	Comportamiento característico de un sistema de doble porosidad en un gráfico diagnóstico semi-logarítmico. Recuperado de Gringarten (1984). . . . .	28
1.13.	Comportamiento característico de un sistema de una sola fractura en un gráfico diagnóstico doblemente logarítmico. Adaptado de Cinco-Ley et al. (1981). . . . .	29

1.14. Redes de fracturas con distinta dimensión fractal acopladas en un sistema matriz con dimensión euclidiana $d = 2$ , donde en (a) $d_{mf} = 1$ , en (b) $1 < d_{mf} < 2$ , y en (c) $d_{mf} = 2$ . Recuperado de Acuna et al. (1995). . . . .	30
1.15. Efecto de la dimensión fractal, $d_{mf}$ , en una red de fracturas complejas, donde en (a) $d_{mf} = 1,78$ , en (b) $d_{mf} = 1,65$ y en (c) $d_{mf} = 1,47$ . Recuperado de Acuna et al. (1995). . . . .	30
2.1. Validación de la herramienta desarrollada mediante la comparación de los resultados obtenidos con ésta y los resultados presentados por Shen et al. (2017). . . . .	38
2.2. Fracción de flujo de los distintos regímenes vs. radio de poro. . . . .	40
2.3. Fracción de flujo vs. radio de poro a diferentes condiciones de presión. . . . .	41
2.4. Fracción de flujo vs. radio de poro a diferentes condiciones de temperatura. . . . .	42
2.5. $J_{ad}/J$ vs. radio de poro para diferentes valores de la presión de Langmuir. . . . .	43
2.6. $J_{ad}/J$ vs. radio de poro para diferentes valores del espesor máximo de la capa de adsorción de gas. . . . .	44
2.7. Esquematización de la geometría de flujo tri-lineal para un yacimiento con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado. Adaptado de Wang et al. (2015). . . . .	45
2.8. Esquematización de la geometría de flujo tri-lineal para un yacimiento con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado. Adaptado de Brown et al. (2011). . . . .	46
2.9. Validación de la herramienta desarrollada mediante la comparación de los resultados obtenidos con ésta y los resultados presentados por Wang et al. (2015). . . . .	65
2.10. Efecto de la dimensión fractal (D) sobre los regímenes de flujo que son visibles en curvas tipo generadas con la solución propuesta por Wang et al. (2015). . . . .	68
2.11. Efecto del índice de conectividad ( $\theta$ ) sobre los regímenes de flujo que son visibles en curvas tipo generadas con la solución propuesta por Wang et al. (2015). . . . .	69
3.1. Ventana de inicio de la herramienta de cómputo desarrollada. . . . .	71
3.2. Ventana que muestra la lista de soluciones implementadas. . . . .	71
3.3. Ventana correspondiente a la solución que modela el comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de <i>shale gas</i> . . . . .	72
3.4. Ventanas emergentes que muestra el programa al momento de validar la información ingresada por el usuario. . . . .	73
3.5. Ventana que muestra la herramienta cuando los datos ingresados son válidos y se permite la generación de los gráficos correspondientes (solución para flujo en nanoporos). . . . .	74

3.6.	Ventana de impresión de gráficos interactivos generados para analizar el efecto de los distintos regímenes de flujo sobre el transporte de gas a través de nanoporos. . . . .	75
3.7.	Análisis de sensibilidad a la presión del flujo de gas a través de nanoporos realizado con la herramienta desarrollada. . . . .	76
3.8.	Ventana correspondiente a la solución que modela el comportamiento de la presión en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados. . . . .	77
3.9.	Ventana que muestra la herramienta cuando los datos ingresados son válidos y pueden generarse los gráficos correspondientes (solución fractal). . . . .	78
3.10.	Ventana de impresión de gráficos interactivos que permiten la generación de curvas tipo para el comportamiento de la presión. . . . .	79
3.11.	Análisis de sensibilidad al coeficiente de flujo interporoso, $\lambda$ , en la generación de curvas tipo. . . . .	80
3.12.	Análisis de sensibilidad a la relación de almacenamiento de las fracturas, $\omega$ , en la generación de curvas tipo. . . . .	80

# Nomenclatura

$\alpha$	Factor de forma para la transferencia de fluidos desde la matriz hacia las fracturas en la Región 2
$\delta$	Diámetro de colisión de las moléculas de gas
$\lambda$	Coefficiente de flujo interporoso
$\lambda_g$	Camino libre medio de las moléculas de gas
$\mu_g$	Viscosidad del gas
$\mu_o$	Viscosidad del aceite
$\nabla P$	Gradiente de presión
$\omega$	Relación de almacenamiento de las fracturas
$\phi(y)$	Porosidad fractal de la red de fracturas en la Región 2
$\phi_2$	Porosidad total de la Región 2 (matriz y fractura)
$\phi_f$	Porosidad de fractura en la Región 2, estimada en la cara de la fractura
$\phi_m$	Porosidad de matriz en la Región 3
$\phi_1$	Porosidad de la fractura hidráulica en la Región 1
$\rho_g$	Densidad del gas
$\theta$	Índice de conectividad característico de la difusión en la Región 2
$b_d$	Apertura media adimensional de la fractura hidráulica
$b_f$	Apertura media de la fractura hidráulica
$B_o$	Factor de volumen de formación del aceite
$c_F$	Compresibilidad del medio poroso
$c_f$	Compresibilidad del fluido

$C_{df}$	Coefficiente adimensional de almacenamiento del pozo
$c_{t1}$	Compresibilidad total de la fractura hidráulica en la Región 1
$c_{t2}$	Compresibilidad total de la Región 2 (matriz y fractura)
$c_{tf}$	Compresibilidad total de la red de fracturas en la Región 2
$c_{tm}$	Compresibilidad total de la matriz en la Región 3
$D$	Dimensión fractal
$d$	Dimensión euclidiana
$d_0$	Espesor máximo de la capa de adsorción
$d_e$	Espesor de la capa de adsorción
$F$	Coefficiente de flujo por deslizamiento
$f$	Factor de ponderación para el régimen de flujo de transición
$J$	Flujo másico de gas por unidad de área con múltiples regímenes de flujo
$J_M$	Flujo másico de gas por unidad de área para el flujo gobernado por la difusión de Knudsen
$J_S$	Flujo másico de gas por unidad de área para el régimen de flujo por deslizamiento
$J_T$	Flujo másico de gas por unidad de área para el régimen de flujo de transición
$J_V$	Flujo másico de gas por unidad de área para el régimen de flujo continuo convencional
$J_{ad}$	Flujo másico de gas por unidad de área con múltiples regímenes de flujo considerando el efecto de adsorción
$k(y)$	Permeabilidad fractal de la red de fracturas en la Región 2
$k_B$	Constante de Boltzmann, $k_B = 1,3805 \times 10^{-23}$ [J/K]
$k_f$	Permeabilidad de fractura en la Región 2, estimada en la cara de la fractura
$k_g$	Permeabilidad al gas
$k_m$	Permeabilidad de la matriz en la Región 3
$K_n$	Número de Knudsen

## NOMENCLATURA

---

$k_1$	Permeabilidad de la fractura hidráulica en la Región 1
$K_{ne}$	Número de Knudsen considerando el efecto de adsorción
$M$	Masa molecular de la mezcla de gases
$P$	Presión del sistema
$p_3$	Presión en la Región 3
$p_d$	Presión adimensional
$p_i$	Presión inicial del yacimiento
$p_{1d}$	Presión adimensional en la Región 1
$p_1$	Presión en la Región 1
$p_{2d}$	Presión adimensional de fractura en la Región 2
$p_2$	Presión de fractura en la Región 2
$p_{3d}$	Presión adimensional en la Región 3
$p_{md}$	Presión adimensional de matriz en la Región 2
$p_m$	Presión de matriz en la Región 2
$p_{wd}$	Presión adimensional de fondo fluyendo
$q_o$	Gasto de producción de aceite
$q_{21}$	Gasto de flujo por unidad volumétrica entre la Región 2 y la Región 1
$q_{32}$	Gasto de flujo por unidad volumétrica entre la Región 3 y la Región 2
$q_{mf}$	Gasto de flujo interporoso por unidad volumétrica en la Región 2
$R$	Constante universal de los gases
$r$	Radio del poro
$r_e$	Radio efectivo del poro considerando el efecto de adsorción
$S$	Factor de daño
$s$	Variable de Laplace
$T$	Temperatura del sistema
$t_d$	Tiempo adimensional

$v_g$	Velocidad del gas
$x_d$	Distancia adimensional en la dirección del eje $x$
$x_e$	Límite del yacimiento en dirección del eje $x$
$x_f$	Longitud de la fractura hidráulica
$x_{ed}$	Límite adimensional del yacimiento en dirección del eje $x$
$y_d$	Distancia adimensional en la dirección del eje $y$
$y_e$	Límite del yacimiento en dirección del eje $y$

# Introducción

Los yacimientos convencionales han sido, a lo largo de las últimas décadas, los principales objetivos de explotación, pues en este tipo de acumulaciones, la producción tanto de aceite como de gas puede llevarse a cabo de manera rentable y relativamente sencilla. Ya que han sido objeto de estudio de diversos trabajos de investigación, se cuenta con literatura que facilita su entendimiento.

De acuerdo con Cander (2012), los yacimientos no convencionales son aquéllos que requieren el uso de diversas tecnologías para alterar las propiedades del medio poroso (permeabilidad) o de sus fluidos (viscosidad), con el objetivo de producir hidrocarburos a tasas comercialmente competitivas. Este autor propone un método gráfico para clasificar los yacimientos en convencionales y no convencionales, incorporando tanto las propiedades de la roca como las propiedades de los fluidos, como se indica en la **Figura 1**. Se observa que los yacimientos convencionales serán graficados en el cuadrante inferior derecho del gráfico, mientras que los no convencionales estarán fuera de este cuadrante debido a una relación permeabilidad/porosidad baja.

Cuando se trata de yacimientos no convencionales, es necesario prestar la atención adecuada a la caracterización del medio, sus fluidos y los procesos que intervienen en el flujo cuando se pretende llevar a cabo la explotación de yacimientos no convencionales, pues la mayoría de los modelos y herramientas empleadas actualmente fueron desarrolladas bajo hipótesis que en estos casos no son válidas o verdaderas.

Ejemplificando lo anterior, podría hablarse de los yacimientos de *shale gas*, en los que el sistema poroso es heterogéneo, pues varía de forma considerable a diferentes escalas, llegando a presentar poros cuyo tamaño alcanza apenas algunas decenas de nanómetros. El flujo a esta escala se da como la combinación de diversos procesos y mecanismos, como se describe a continuación, por lo que ecuaciones clásicas, como la ley de Darcy, no son aplicables para describir estos fenómenos.

Algunos autores, como Swami et al. (2012) y Beskok and Karniadakis (1994), han propuesto que el flujo de gas a través de nanoporos puede darse en cuatro regímenes de flujo distintos, los cuales pueden determinarse en función del número de Knudsen ( $K_n$ ), un parámetro adimensional que se define como una medida del grado de

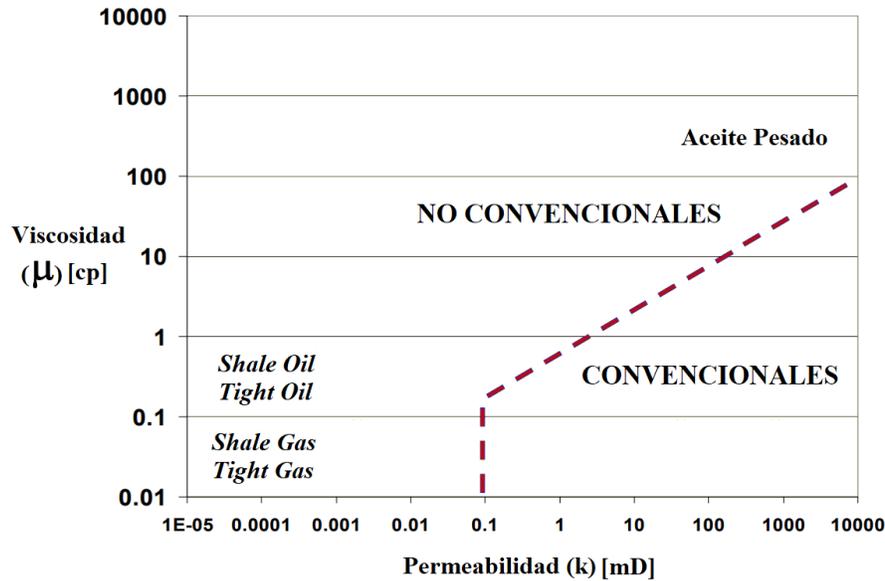


Figura 1: Clasificación gráfica de los yacimientos según su relación permeabilidad/viscosidad. Adaptado de Cander (2012).

rarefacción del gas mientras fluye a través de poros muy pequeños. De esta forma, dichos autores establecen que el flujo de fluidos en yacimientos de *shale gas* es una combinación de los regímenes de flujo continuo convencional ( $K_n \leq 0,001$ ), que puede ser descrito con la ley de Darcy, flujo por deslizamiento ( $0,001 \leq K_n \leq 0,1$ ), flujo de transición ( $0,1 \leq K_n \leq 10$ ) y flujo libre molecular ( $K_n \geq 10$ ). Además de ello, es prudente considerar que el gas que fluye en este tipo de yacimientos no es sólo gas libre, sino que también existe un mecanismo de flujo que se origina por la adsorción y desorción de las partículas de gas que se adhieren a la materia orgánica presente en la superficie de las paredes del poro.

Otro ejemplo tangible de las problemáticas halladas en yacimientos no convencionales es la permeabilidad limitada que caracteriza a los yacimientos compactos, como los yacimientos de *tight oil* y *shale oil*. Cuando las condiciones de permeabilidad en el yacimiento no favorecen el flujo de los hidrocarburos hacia el pozo, técnicas que incrementen esta propiedad pueden ayudar a resolver este problema, tal como lo hace el fracturamiento hidráulico. Este proceso de estimulación genera una red de fracturas complejas (gracias a la interacción entre las fracturas hidráulicas generadas y las fracturas naturales) que, de acuerdo con el arreglo de esfuerzos *in situ* del yacimiento, se propagará, dando lugar así a un medio de comunicación de alta conductividad hidráulica entre el pozo y el yacimiento, mejorando con ello los niveles de producción. El efecto de la red de fracturas complejas será relevante tanto en la producción de aceite como en el análisis de pruebas de presión en este tipo de escenarios.

Autores como Lee and Brockenbrough (1986) y Brown et al. (2011) han propuesto soluciones analíticas para modelar el comportamiento de la presión en estos casos, en cuyo desarrollo suponen un modelo de flujo tri-lineal similar al que se describirá en secciones posteriores de esta tesis; sin embargo, a pesar de que han habido diversos trabajos que buscan también abordar este tema, el hecho de considerar la complejidad de la red de fracturas creada sigue representando un reto, pues el modelo que con mayor frecuencia se utiliza para caracterizarla es el modelo clásico de doble porosidad de Warren and Root (1963), el cual asume que las fracturas se encuentran uniformemente distribuidas, perfectamente interconectadas y a una sola escala, situación que es muy poco probable encontrar.

Buscando proporcionar una caracterización más adecuada de la red de fracturas complejas, Chang and Yortsos (1990) y Acuna et al. (1995) propusieron el uso de la geometría fractal para estudiarla (consideraron a la red de fracturas como un objeto fractal que se incorpora a la matriz, misma que es considerada como un objeto de geometría euclidiana), implementando relaciones que describan a la porosidad y permeabilidad del medio en forma de leyes de potencias.

## Objetivo general

El objetivo de esta tesis es tomar como punto de partida trabajos anteriores<sup>1</sup> que propongan soluciones analíticas a las problemáticas previamente abordadas y escribir el código de una herramienta de cómputo que las automatice, construyendo además una interfaz gráfica para facilitar su uso.

## Estructura del trabajo

Con fines prácticos, esta tesis se divide en cinco apartados distintos, cuyo contenido particular se describe a continuación.

En la **Introducción** se presenta una breve descripción de los yacimientos no convencionales, mencionando además algunas de las problemáticas y retos que sus características pueden representar durante la explotación.

En el **Capítulo 1** se revisan a detalle los conceptos requeridos para la comprensión de la problemática que cada una de las soluciones implementadas en esta tesis busca resolver, así como de la solución *per se*.

---

<sup>1</sup>Se tomaron como punto de partida los trabajos realizados por Shen et al. (2017) y Wang et al. (2015), respectivamente.

En el **Capítulo 2** se describen de manera amplia las soluciones implementadas, así como su razón de ser, ventajas, análisis de sensibilidad y resultados obtenidos.

En el **Capítulo 3** se presenta la herramienta de cómputo desarrollada para este trabajo, describiendo la interfaz gráfica que la contiene, sus entradas y salidas y su funcionalidad.

Por último, en **Conclusiones y recomendaciones**, se enlistan las principales conclusiones de esta tesis, así como las recomendaciones pertinentes.

## Capítulo 1

# Revisión de literatura

En este capítulo se revisan a detalle los conceptos requeridos para la comprensión de la problemática que cada una de las soluciones implementadas en esta tesis busca resolver, así como de la solución *per se*; se revisa la teoría y resultados obtenidos en trabajos previos.

### 1.1. Sistema petrolero

Se define al sistema petrolero como el conjunto de eventos geológicos necesarios para dar lugar a un yacimiento de hidrocarburos. Aunque los elementos que componen al sistema petrolero pueden variar en las distintas definiciones existentes, la mayoría de los autores concuerda en que son cinco los necesarios: una roca generadora, una roca almacén, una roca sello, una trampa y sincronía entre estos cuatro elementos. A continuación se describe la importancia de cada uno, de acuerdo con Magoon (2004).

- **Roca generadora:** roca con un contenido elevado de materia orgánica; dadas las condiciones de presión y temperatura adecuadas, en ella se generarán los hidrocarburos.
- **Roca almacén:** roca porosa y permeable en la que los hidrocarburos tienden a acumularse luego de la migración primaria.
- **Roca sello:** roca que funciona como barrera, impidiendo el flujo de los hidrocarburos más allá de la roca almacén, gracias a sus condiciones de baja porosidad y muy baja permeabilidad.
- **Trampa:** estructura geológica que permite la acumulación de un volumen determinado de hidrocarburos, donde las condiciones propician que la roca almacén se encuentre rodeada por la roca sello, impidiendo así la migración de los fluidos. De manera general, puede hablarse de dos tipos distintos de trampas, aunque existen sistemas petroleros en los que la trampa es de origen combinado:

- Trampa estratigráfica: aquella generada por una variación en la litología y, por ende, una variación en la permeabilidad.
  - Trampa estructural: aquella resultante de una deformación en los estratos, misma que puede dar origen a estructuras como pliegues o fallas.
- **Sincronía:** se refiere a la necesidad de que todos estos eventos o elementos existan en un mismo tiempo y espacio, dando lugar a la generación y acumulación de los hidrocarburos, pues la ausencia de cualquiera de ellos lo impediría.

### 1.1.1. Yacimientos convencionales

El término yacimiento convencional es empleado para hacer referencia a aquellos yacimientos, ya sean de aceite o de gas, que tienen un sistema petrolero bien definido, en el que la roca almacén es porosa y permeable, y la energía natural del yacimiento permite que los fluidos se desplacen hacia el pozo de manera espontánea, sin la necesidad de implementar ninguna técnica que modifique las propiedades del fluido o del yacimiento.

### 1.1.2. Yacimientos no convencionales

A diferencia de un yacimiento convencional, cuando las propiedades de los fluidos o las propiedades geológicas del yacimiento no permiten que la producción de hidrocarburos se lleve a cabo de manera convencional, se dice entonces que se trata de un yacimiento no convencional.

La explotación de los yacimientos no convencionales se lleva a cabo mediante la implementación de diversas tecnologías que acondicionan las propiedades de estos para facilitar la producción.

Según Russum (2010), los yacimientos petroleros pueden clasificarse de acuerdo con sus propiedades roca-fluidos como se muestra en la **Figura 1.1**. Por convención, se asignarán las literales A,B,C y D para los cuatro tipos propuestos por Russum.

- Yacimientos tipo **A**: gas o aceite que fluye hacia los pozos de manera espontánea o con mínima intervención.
- Yacimientos tipo **B**: gas o aceite que fluye hacia los pozos si las condiciones del yacimiento son mejoradas, por ejemplo, un incremento en la permeabilidad. Algunos ejemplos de ello son los yacimientos de *shale/tight gas*.
- Yacimientos tipo **C**: gas o aceite que puede fluir hacia el pozo pero que necesita algún tipo de procesamiento adicional, o bien, que requiere alguna modificación o mejora en sus propiedades para hacerlo fluir, como en el caso de los aceites pesados.

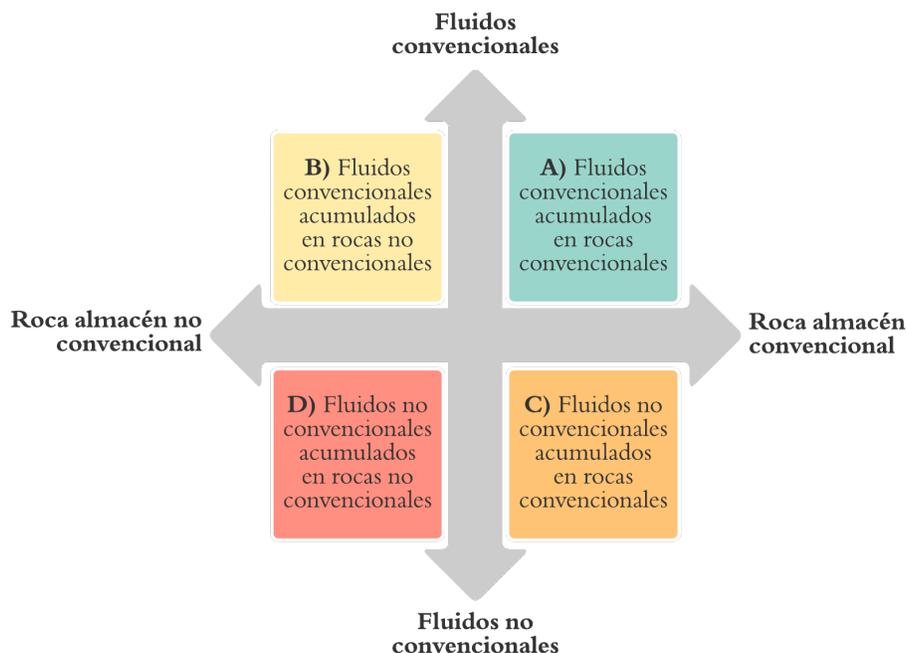


Figura 1.1: Clasificación de D. Russum para los yacimientos petroleros según sus propiedades roca-fluidos. Adaptado de Euzen (2011).

- Yacimientos tipo **D**: fluidos de poca madurez en rocas de baja calidad. Ejemplo de ello son los yacimientos de *shale oil*.

## 1.2. Yacimientos de *shale gas*

El término *shale gas* hace referencia al gas natural contenido en una formación de lutita. En un yacimiento de *shale gas*, la misma formación funciona como roca generadora, roca almacén y trampa en el sistema petrolero.

A diferencia de los yacimientos de arenisca o yacimientos carbonatados, los yacimientos de *shale gas* son caracterizados por poseer una porosidad relativamente baja (del 2% al 5%, según Chen et al. (2019)), ultra baja permeabilidad ( $\leq 0,001[mD]$ ) y un alto contenido de arcilla ( $\geq 2\%$ ) (Boyer et al., 2006). Son estas condiciones por las que los yacimientos de este tipo son considerados como no convencionales.

A continuación se hablará de algunas de las problemáticas que representa un yacimiento de *shale gas*.

### 1.2.1. Variación en la escala de porosidad

El flujo de gas en yacimientos no convencionales suele representar un reto durante la explotación, debido a que el tamaño de poro y garganta de poro en estas formaciones varía desde nanómetros hasta micrómetros.<sup>1</sup> Mientras que en los yacimientos convencionales de arenisca o carbonatados el tamaño de poro varía de 1 a 100  $\mu\text{m}$ , en los yacimientos de *shale gas* el tamaño de la garganta de poro varía entre 1 y 200  $\text{nm}$  (Cipolla et al., 2009).

El gas en los yacimientos de *shale gas* se encuentra presente como gas libre en los espacios porosos, como gas adsorbido a las paredes del poro y como gas disuelto en el kerógeno<sup>2</sup> presente en la formación<sup>3</sup>. Bajo estas condiciones, es necesario tomar en cuenta que el flujo de gas en estos yacimientos se dará a diferentes escalas o niveles, de la forma en que a continuación se describe.

Se conoce como escala macroscópica a aquella que, comparada con el tamaño de los granos y espacios entre granos que constituyen el medio poroso, es considerada de mucho mayor magnitud; a escala macro, el flujo de fluidos puede analizarse como un fenómeno continuo, pues se ve gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes.

La escala microscópica es aquella que podría ser comparada con el tamaño de los poros y granos del medio poroso, pero que sigue siendo mayor a la escala molecular; ejemplo de ello son los nanoporos a través de los cuales fluyen los hidrocarburos en los yacimientos de *shale gas*. El transporte de gas a este nivel será un proceso complejo, influido por diversos mecanismos, que no podrá ser descrito de forma correcta mediante la ley de Darcy, problemática que será tratada en secciones posteriores de esta tesis.

De acuerdo con Javadpour et al. (2007), el flujo de gas en este tipo de yacimientos se da de forma consecutiva a seis diferentes escalas:

- **Macroescala:** el gas fluye del yacimiento hacia el pozo, normalmente a través de una fractura hidráulica.
- **Mesoescala:** el gas fluye a través de los poros más grandes, como redes de microfracturas.
- **Microescala:** el flujo de gas se da a través de los nanoporos.

---

<sup>1</sup> $\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ ;  $\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$

<sup>2</sup>Materia orgánica natural, insoluble y sólida, presente en las rocas generadoras, que puede producir hidrocarburos si recibe calor (Schlumberger, 2022).

<sup>3</sup>En los yacimientos de *shale gas*, el gas se origina en el kerógeno presente en la lutita, que funge como roca generadora y roca almacén.

- **Nanoescala:** conforme la producción avanza y la presión se reduce, el equilibrio termodinámico existente entre el gas en el espacio poroso y la materia orgánica en la formación (kerógeno) se ve alterado, por lo que inicia un proceso de liberación de gas de la superficie del poro.
- **Escala molecular:** el proceso previamente descrito altera la concentración de equilibrio entre la matriz del kerógeno y su superficie (expuesta a la red de poros), dando origen a un gradiente de concentración, por lo que se inicia un proceso de difusión de gas, es decir, nuevas moléculas de gas se mudan hacia las paredes del poro buscando restablecer el equilibrio.

### Tipos de porosidad en yacimientos de *shale gas*

Como se mencionó anteriormente, el tamaño de poro en este tipo de yacimientos varía de forma relativamente amplia. Milner et al. (2010) examinaron diversas muestras tomadas de yacimientos no convencionales (*mudstones* y *shales*) y concluyeron que son cinco los principales tipos de porosidad encontrados en este tipo de rocas, cuyas características principales se muestran en la **Tabla 1.1**, en la que también se ha añadido la porosidad de fractura.

#### 1.2.2. Adsorción de gas

El gas adsorbido en los yacimientos de *shale gas* formará una especie de capa que recubre la superficie de las paredes de los nanoporos y microporos. Cabe destacar que el área superficial aumenta de forma exponencial conforme se reduce el tamaño del poro.

De la forma en que se aprecia en la **Figura 1.2**, cuando se perfora un pozo o se induce una fractura, se altera el equilibrio del medio y comienza el flujo de moléculas de gas. Primero se produce el gas libre contenido en los nanoporos, después comienza a incrementar la presión de poro <sup>4</sup> debido a la desorción de moléculas de gas de las paredes del poro, y el proceso continúa con la difusión de las moléculas que se encontraban dispersas en el kerógeno. La importancia de la presencia de nanoporos radica en que, gracias al gran área superficial expuesta, es también grande el contenido de gas que será desorbido (Javadpour, 2009).

Además del tamaño de poro, el contenido de gas adsorbido dependerá de la capacidad de adsorción de la roca. La variación en la capacidad de adsorción de una roca en específico con la presión, a una temperatura dada, puede describirse mediante la isoterma de Langmuir, mostrada en la **Figura 1.3**.

---

<sup>4</sup>Se define como presión de poro a la presión que actúa sobre los fluidos en el espacio poroso, originada por los procesos geológicos de deposición y compactación Veeken (2006).

Tabla 1.1: Tipos de porosidad encontrados en yacimientos no convencionales y sus características (superíndices 1 y 2 indican porosidad primaria y secundaria, respectivamente). Adaptado de Milner et al. (2010).

<b>Tipo de porosidad</b>	<b>Características</b>	<b>Tamaño</b>
Porosidad intrapartícula <sup>1</sup>	Espacios frecuentemente encontrados entre fragmentos de nanofósiles.	3 nm - 2 $\mu\text{m}$
Porosidad intergranular <sup>1</sup>	Espacios encontrados entre los granos que conforman a la roca.	10 $\mu\text{m}$ - 200 $\mu\text{m}$
Porosidad de origen orgánico <sup>2</sup>	Este tipo de porosidad puede encontrarse como espacios formados por la transformación de la materia orgánica cuando alcanza la madurez térmica, o bien, como pequeños poros en la materia orgánica sólida presente en la roca, como el kerógeno.	10 nm - 10 $\mu\text{m}$
Porosidad intercrystalina <sup>2</sup>	Espacios entre cristales u otras partículas en la matriz.	1 $\mu\text{m}$ - 5 $\mu\text{m}$
Porosidad por disolución <sup>2</sup>	Espacios generados por disolución mineral, frecuentemente encontrados en pequeños porcentajes en <i>mudstones</i> .	5 $\mu\text{m}$ - 200 $\mu\text{m}$
Porosidad de fractura <sup>2</sup>	Porosidad que se origina cuando la roca es sometida a esfuerzos que dan lugar al fracturamiento, es decir, se trata de la porosidad relacionada a las fracturas naturales.	> 1 $\mu\text{m}$

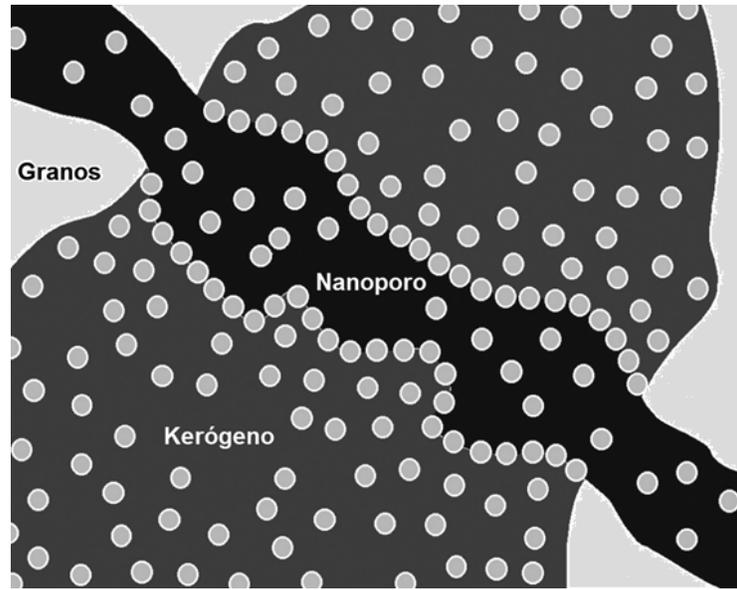


Figura 1.2: Distribución de las moléculas de gas en el sistema poroso de los yacimientos de *shale gas*. Adaptado de Javadpour (2009).

A una presión dada, sólo determinada cantidad de gas puede ser adsorbida y, a medida que la presión disminuye, el gas será liberado de la superficie de la roca en forma de gas libre en el espacio poroso.

Esta curva se construye mediante la ecuación 1.1 propuesta por Langmuir (1918):

$$G_s = \frac{V_L P}{P + P_L} \quad (1.1)$$

Donde  $G_s$  es el contenido de gas adsorbido por la superficie de la roca,  $P$  es la presión del yacimiento,  $V_L$  es el volumen de Langmuir y  $P_L$  es la presión de Langmuir. Estos dos últimos parámetros son de suma importancia, y se definen como el volumen de gas adsorbido por la roca cuando la presión tiende a infinito, y la presión correspondiente a la mitad de dicho volumen, respectivamente.

De la **Figura 1.3** puede concluirse que, mientras mayor sea la presión de Langmuir, mayor será la cantidad de gas liberada de las paredes del poro, lo que se traduce en una mayor producción de gas. En una etapa temprana, la contribución de la desorción de gas es insignificante, sin embargo, a medida que la presión se reduce será necesario tomar en cuenta este fenómeno, basándose en la isoterma correspondiente generada en el laboratorio (Yu and Sepehrnoori, 2018).



Donde  $q$  es el gasto de flujo,  $k$  es la permeabilidad del medio poroso,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $A$  es el área transversal al flujo y  $\nabla p$  es el gradiente de presión.

Es importante mencionar que, debido al tamaño de poro tan reducido que puede llegar a encontrarse en yacimientos de *shale gas*, el cumplimiento de las hipótesis planteadas para el desarrollo de la ley de Darcy podría verse condicionado, principalmente a causa de la existencia de velocidades de flujo en las que las fuerzas de inercia ya no resultan despreciables, por lo que puede concluirse que, en dado caso, dicha solución no es aplicable en este tipo de yacimientos.

Si se busca describir el perfil de velocidades de un fluido, como se hace con las ecuaciones de Navier-Stokes, existen dos principales tipos de condiciones de frontera:

1. *Frontera de no deslizamiento*: se asume que la velocidad de las moléculas del fluido, en este caso gas, en la superficie interna del poro es igual a cero (**Figura 1.4a**). Aplicable a flujo de gas en microporos, pues el fluido actúa como un medio continuo.
2. *Frontera de deslizamiento*: se asume que existe un movimiento relativo entre las paredes del poro y las moléculas de gas, es decir que las moléculas se deslizan libremente por las paredes del poro, por lo que pueden colisionar entre ellas mismas o con las paredes; por ende, la velocidad en la superficie interna del poro será diferente de cero (**Figura 1.4b**). Aplicable a flujo de gas en nanoporos, pues a esta escala el diámetro de flujo es comparable con el tamaño de las moléculas de gas.

Dado que las ecuaciones de Navier-Stokes se desarrollaron considerando condiciones de frontera de no deslizamiento, la presencia de nanoporos vuelve su uso inapropiado para modelar el flujo de fluidos a esta escala. En los yacimientos de *shale gas*, donde la escala de porosidad varía, deberán evaluarse las condiciones del medio para determinar el régimen de flujo en cuestión.

Swami et al. (2012) clasificaron el flujo de gas en este tipo de yacimientos en cuatro diferentes regímenes basados en un parámetro adimensional conocido como número de Knudsen, definido en la ecuación 1.3, donde  $K_n$  es el número de Knudsen,  $\lambda_g$  es el camino libre medio de las moléculas de gas y  $r_h$  es el radio hidráulico del poro. El número de Knudsen es una medida del grado de rarefacción <sup>5</sup> del gas mientras fluye a través de poros muy pequeños.

$$K_n = \frac{\lambda_g}{r_h} \quad (1.3)$$

---

<sup>5</sup>La rarefacción de un gas se define como la disminución de su densidad al separarse o espaciarse las moléculas que lo componen.

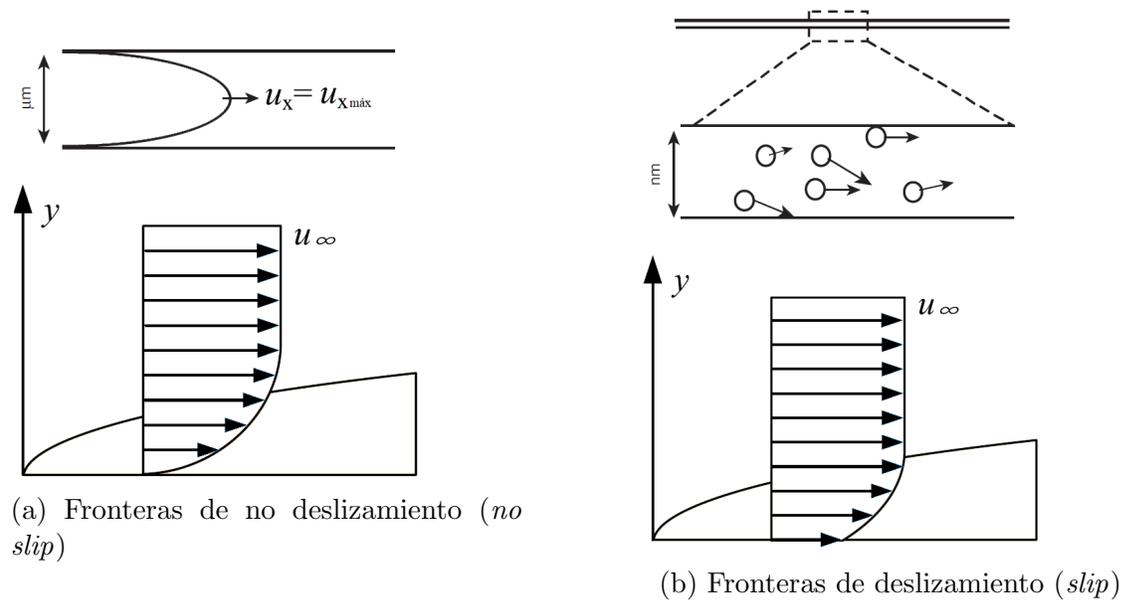


Figura 1.4: Fronteras de (1.4a) no deslizamiento y (1.4b) deslizamiento. Adaptado de Xie et al. (2018) y Javadpour et al. (2007).

El camino libre medio de las moléculas de gas, que hace referencia a la distancia que recorren las moléculas antes de colisionar entre ellas, se muestra en la ecuación 1.4, donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann en J/K y equivale a  $1,3805 \times 10^{-23}$ ,  $T$  es la temperatura en K,  $P$  es la presión en Pa y  $\delta$  es el diámetro de colisión de las moléculas de gas (definido como la distancia que existe entre los centros de dos moléculas en contacto).

$$\lambda_g = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi \delta^2 P} \quad (1.4)$$

Swami et al. (2012) proponen que, en los nanoporos de los yacimientos de *shale gas*, además del flujo convencional que puede modelarse mediante la ley de Darcy, pueden darse otros mecanismos de transporte. La clasificación propuesta se describe a continuación.

- Flujo continuo:**  $K_n \leq 0,001$ , también llamado flujo viscoso, para diámetros de poro en escala de los micrómetros, el tamaño del camino libre medio de las moléculas de gas resulta despreciable, por lo que las colisiones de las moléculas con las paredes del poro pueden no ser consideradas y el gas puede asumirse como un medio continuo. En este régimen sólo importan las colisiones entre las mismas moléculas del gas, es decir, se asume que las fuerzas viscosas gobiernan el flujo, mientras que las fuerzas de inercia no juegan un papel importante, así como que la velocidad de flujo en las paredes del poro es igual a cero. La ley de Darcy puede emplearse bajo este régimen.

- **Flujo de deslizamiento:**  $0,001 < K_n < 0,1$ , las moléculas de gas tienden a acumularse a lo largo de la superficie interna del poro y comienzan a deslizarse sobre esta, por ende, la velocidad en la pared del poro no será igual a cero. La ley de Darcy, con algunas modificaciones, podría emplearse para modelar este fenómeno.
- **Flujo de transición:**  $0,1 < K_n < 10$ , es quizá el régimen de flujo más complicado de modelar; además del fenómeno de deslizamiento de las moléculas, las colisiones entre éstas y las paredes del poro comienzan a tomar importancia, pues el tamaño de  $\lambda_g$  se vuelve significativo comparado con el tamaño de la garganta de poro. Algunas de las moléculas colisionan con otras adsorbidas a la superficie interna del poro, ejerciendo una fuerza sobre ellas que provoca su desorción, por lo que pasan a formar parte del flujo continuo, sin embargo, las ecuaciones que modelan el flujo continuo no describen este fenómeno de forma adecuada.
- **Difusión de Knudsen:**  $K_n \geq 10$ , el camino libre medio de las moléculas de gas es mucho más grande que el tamaño del poro, por lo que las moléculas colisionan de manera más frecuente con las paredes del poro que entre ellas mismas. Este régimen se da en gargantas de poro sumamente pequeñas.

### 1.3. Yacimientos compactos

Se les conoce como yacimientos compactos a aquéllas acumulaciones de aceite que se encuentran alojadas en formaciones cuya permeabilidad es muy baja. Ejemplo de ello son los yacimientos de *tight oil* y *shale oil*.

Zhang et al. (2016) definen a los yacimientos de *tight oil* como recursos de aceite que se encuentran preservados y acumulados en formaciones de baja porosidad ( $< 12\%$ ) y baja permeabilidad ( $< 0,1 \text{ mD}$ ), pudiendo tratarse de formaciones de lutita, limolita, arenisca, carbonatos u otro tipo de rocas compactas.

Por otro lado, de acuerdo con Jiang et al. (2016), el término *shale oil* es utilizado para señalar acumulaciones de hidrocarburos líquidos que pueden encontrarse libres, disueltos o adsorbidos a la superficie de la roca (lutita). Básicamente, los autores establecen que, en los yacimientos de *shale oil*, únicamente se da lugar (y de manera limitada) a mecanismos de migración primaria. Este tipo de yacimientos se ven caracterizados por poseer bajos niveles de porosidad ( $< 10\%$ ), así como baja permeabilidad ( $< 0,1 \text{ mD}$ ).

De acuerdo con la clasificación de Dave Russum, mostrada en el apartado 1.1.2 de esta tesis, los yacimientos de *tight oil* pertenecen al grupo de los fluidos convencionales acumulados en rocas no convencionales, mientras que los yacimientos de *shale*

*oil* pertenecen al grupo de los fluidos de poca madurez almacenados en rocas de baja permeabilidad.

Tanto para los yacimientos de *tight oil* como de *shale oil*, las condiciones y propiedades del yacimiento deberán ser reacondicionadas para realizar una explotación rentable de los mismos. Esto puede llevarse a cabo mediante técnicas como la perforación de pozos horizontales (que incrementen el área de contacto con el yacimiento) y, posteriormente, un proceso de fracturamiento hidráulico; de esta técnica de explotación se habla en el siguiente apartado de este trabajo.

### 1.3.1. Fracturamiento hidráulico en pozos horizontales

El fracturamiento hidráulico es una técnica de estimulación que se lleva a cabo con el objetivo de incrementar la permeabilidad en yacimientos en los que esta propiedad es baja o muy baja, mediante la generación de fracturas que comuniquen al pozo con el yacimiento. El tratamiento consiste en bombear un fluido a alta presión, mayor a la presión de fracturamiento de la roca, a través de los disparos, con el objetivo de inducir fracturas que, según el régimen de esfuerzos presente en el yacimiento, se propagarán a una distancia determinada del pozo. El fluido inyectado, compuesto aproximadamente por 90 % agua, también contendrá partículas sólidas conocidas como apuntalantes, las cuales tienen como objetivo impedir que la fractura abierta se cierre una vez que se detiene el bombeo.

Regularmente, cuando se pretende aplicar esta técnica de estimulación, se busca que el pozo horizontal sea perforado de forma paralela a la dirección del mínimo esfuerzo horizontal *in-situ*, de acuerdo con el arreglo de esfuerzos compresivos actuando sobre la roca; así, la fractura hidráulica abrirá en dirección del mínimo esfuerzo y se propagará en el plano del máximo esfuerzo, tal y como puede apreciarse en la **Figura 1.5**.

La combinación de estas tecnologías da lugar a la afectación de una porción del volumen del yacimiento debido a la estimulación, conocida como SRV, por sus siglas en inglés (*Stimulated Reservoir Volume*), mismo que comúnmente contiene redes de fracturas complejas, como la que se ilustra en la **Figura 1.6**, debido a la interacción que se da entre las fracturas hidráulicas y las fracturas naturales preexistentes, una vez que las primeras se propagan (Jia et al., 2015).

Los modelos analíticos más comunes para analizar el flujo de fluidos en un medio fracturado consideran a la red de fracturas como un medio homogéneo de geometría euclidiana, que conceptualiza a la red de fracturas y la matriz que la rodea como un medio continuo que ocupa la totalidad del dominio analizado (Wang et al., 2015). El ejemplo más común de este tipo de modelos continuos es el modelo clásico de doble porosidad introducido originalmente por Barenblatt et al. (1960), y aplicado

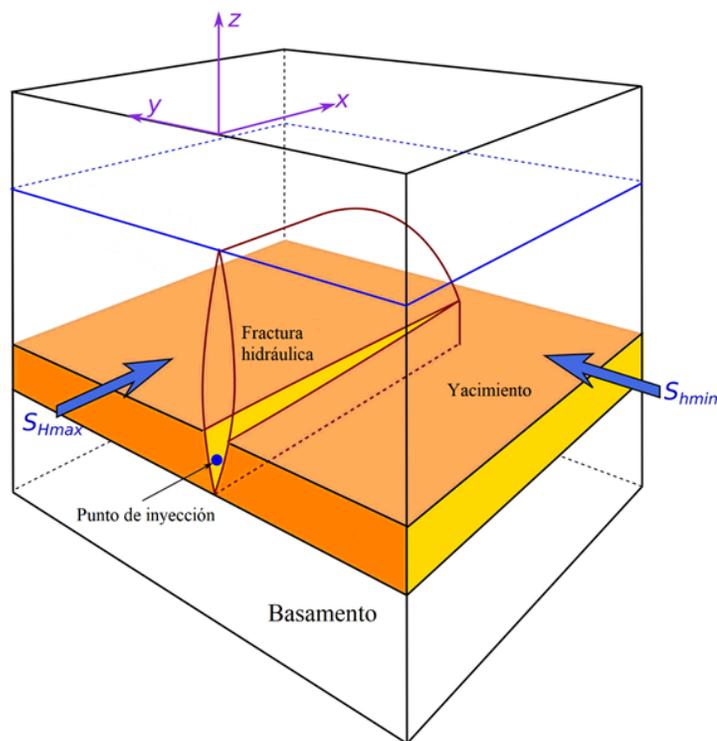


Figura 1.5: Apertura y propagación de la fractura hidráulica de acuerdo con el arreglo de esfuerzos compresivos *in-situ*. Adaptado de Fu et al. (2017).

a la ingeniería petrolera de manera posterior por Warren and Root (1963).

### 1.3.2. Modelo de doble porosidad de Warren y Root

El modelo propuesto por Warren and Root (1963) es un modelo idealizado que fue desarrollado con el propósito de estudiar y analizar el comportamiento característico de un medio poroso y permeable, en el que existen regiones que contribuyen de manera importante al volumen poroso, pero de manera despreciable a la capacidad de flujo; ejemplo de este tipo de medios son los yacimientos naturalmente fracturados, mismos que corresponden a los yacimientos tipo II según la clasificación de Nelson (2001), la cual se muestra en la **Figura 1.7**.

Como puede observarse en la **Figura 1.7**, Nelson (2001) clasifica a los yacimientos fracturados en cuatro familias o tipos principales, según sea el efecto o contribución que tienen las fracturas en el flujo de fluidos a través de ellos. A continuación se describe cada uno de los cuatro tipos.

- **Tipo I:** las fracturas proveen la mayor parte tanto de la porosidad como de la permeabilidad en el medio, es decir, intervienen en el flujo y el almacenamiento

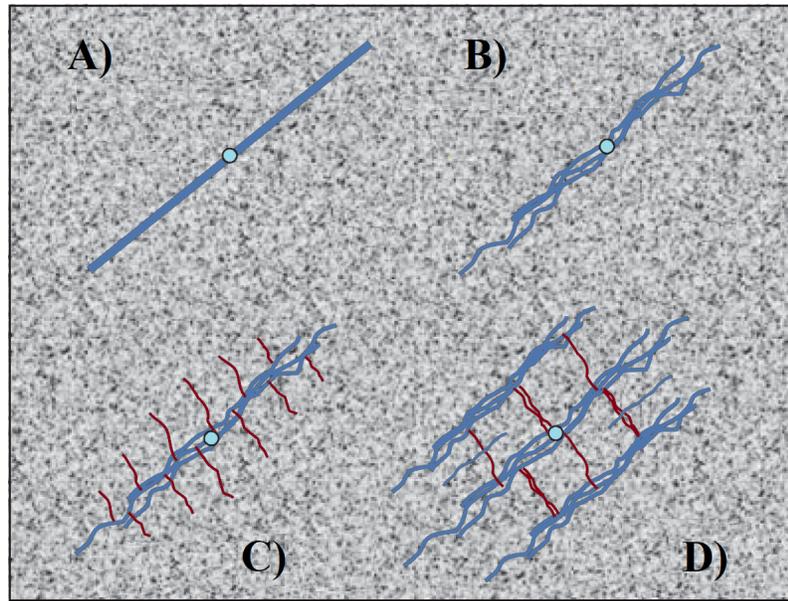


Figura 1.6: Tipos de propagación de una fractura o un conjunto de ellas, donde en A) se observa una fractura simple, en B) una fractura compleja, en C) una fractura compleja con apertura de fisuras y en D) una red de fracturas complejas. Adaptado de Warpinski et al. (2001).

de los fluidos, mientras que la matriz se caracteriza por poseer porosidad y permeabilidad muy bajas.

- **Tipo II:** las fracturas proveen una parte importante de la permeabilidad y, en menor medida, parte de la porosidad en el medio, es decir, favorecen el flujo de fluidos más que su almacenamiento; la matriz se caracteriza por poseer porosidad y permeabilidad relativamente bajas.
- **Tipo III:** las fracturas ayudan a mejorar la permeabilidad en el medio pero no contribuyen a la porosidad, es decir, sólo participan favoreciendo el flujo de fluidos, mientras que la matriz se caracteriza por poseer alta porosidad pero baja permeabilidad.
- **Tipo IV:** las fracturas no proveen porosidad o permeabilidad adicional al medio; la matriz se caracteriza por poseer alta porosidad y alta permeabilidad.

La esquematización empleada por Warren and Root (1963) es mostrada en la **Figura 1.8**, donde puede observarse al medio real y su representación mediante un conjunto de elementos volumétricos con porosidad primaria (paralelepípedos rectangulares que representan a la matriz) que se encuentran unidos por espacios porosos del tipo secundario (espaciamento entre cubos que representa a los vórgulos y las fracturas). Esta idealización es tomada como punto de partida para el desarrollo del modelo propuesto, y con base en ella pueden considerarse las siguientes premisas.

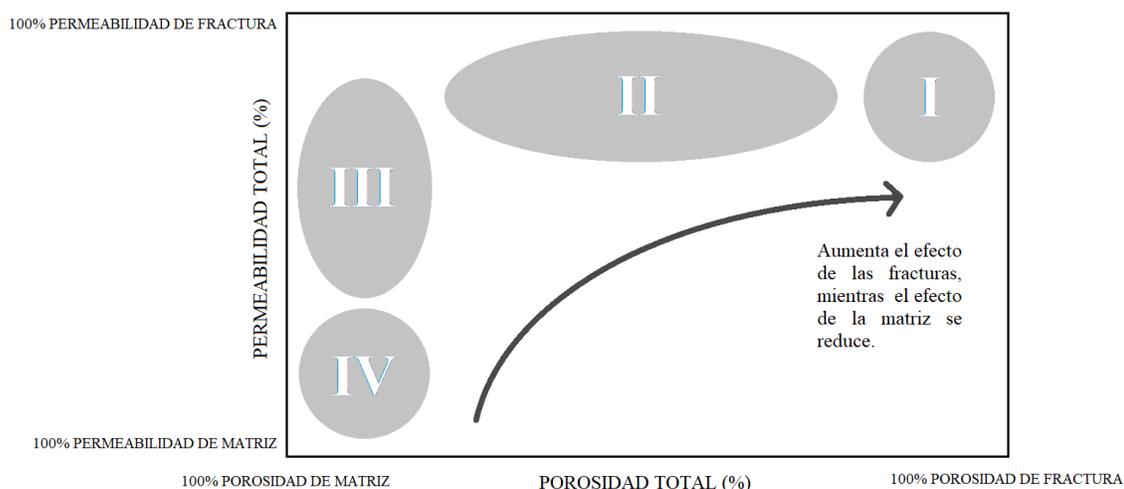


Figura 1.7: Esquemización de la clasificación de los yacimientos fracturados propuesta por Nelson Nosjean. Adaptado de Nelson (2001).

1. La porosidad primaria se encuentra contenida en un arreglo sistemático de paralelepípedos rectangulares idénticos, por lo que el sistema matriz es considerado homogéneo e isotrópico.
2. Todo tipo de porosidad secundaria se encuentra contenido en el sistema fractura, un sistema ortogonal, continuo y uniforme de fracturas, mismas que están orientadas de tal forma que cada fractura es paralela al eje principal de permeabilidad; las fracturas normales a cada eje se encuentran uniformemente espaciadas y son de espesor constante, aunque puede asumirse la existencia de una fractura de diferente espaciamiento o diferente espesor en cada uno de los ejes para simular un grado de anisotropía.
3. Así, puede considerarse a las porosidades primaria y secundaria, en conjunto, como un sistema homogéneo aunque anisótropo, donde el flujo puede darse entre elementos con porosidad primaria y elementos con porosidad secundaria, pero no entre elementos con porosidad primaria, es decir, el sistema matriz no está interconectado (yacimientos tipo II según Nelson (2001)).

Es importante mencionar que estas premisas resultan muy restrictivas: dado que los vórgulos y las fracturas tienen orígenes distintos, el considerarlos en conjunto como un solo tipo de porosidad secundaria es erróneo y, por esto mismo, el esperar que la anisotropía de la red de vórgulos y la red de fracturas sea la misma (y que además coincida con los ejes coordenados) es una hipótesis muy ambiciosa; también, es muy raro encontrar un escenario en el que las fracturas se encuentren uniformemente distribuidas, perfectamente interconectadas y a una sola escala.

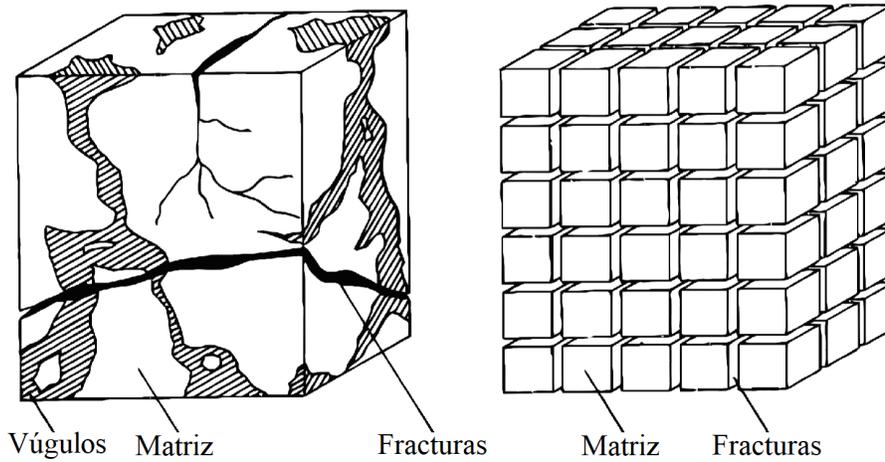


Figura 1.8: Idealización de un medio poroso heterogéneo empleada para el desarrollo del modelo de doble porosidad. Adaptado de Warren and Root (1963).

### Desarrollo matemático del modelo

Aunque el modelo idealizado implica cierto grado de heterogeneidad a escala macroscópica, aún puede considerarse como un sistema homogéneo si las dimensiones de los paralelepípedos rectangulares son pequeñas en comparación con las dimensiones del yacimiento.

Un enfoque del modelo de Warren y Root que resulta útil en las siguientes secciones de esta tesis es el presentado por Blasingame (1994), mismo que se desarrolla a continuación.

Si se considera el flujo de un fluido ligeramente compresible, puede escribirse la ecuación de difusión para el sistema matriz y el sistema fractura como se muestra en las expresiones 1.5 y 1.6, respectivamente.

$$\frac{k_m}{\mu} \nabla^2 p_m = [\phi c_t]_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + q \quad (1.5)$$

$$\frac{k_f}{\mu} \nabla^2 p_f = [\phi c_t]_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - q \quad (1.6)$$

Donde  $k_m$  y  $k_f$  representan a la permeabilidad en el sistema matriz y en el sistema fractura, respectivamente,  $\mu$  es la viscosidad del fluido, los términos  $[\phi c_t]_m$  y  $[\phi c_t]_f$  hacen referencia a la porosidad y compresibilidad total del sistema matriz y del sistema fractura, respectivamente,  $q$  es el gasto de flujo en el medio por unidad de volumen y  $p_m$  y  $p_f$  representan a la presión en el sistema matriz y en el sistema fractura, respectivamente.

Para ambos sistemas, la ecuación de difusión se escribe con un término de producción; con base en ello puede decirse que, durante el flujo, el sistema matriz actuará como una fuente, mientras que el sistema fractura como un sumidero (debe recordarse que el flujo se da de los elementos de porosidad primaria hacia los elementos de porosidad secundaria). Si de las ecuaciones 1.5 y 1.6 se despeja al gasto de flujo,  $q$ , y las expresiones resultantes son igualadas, se obtiene la ecuación 1.7.

$$\frac{k_m}{\mu} \nabla^2 p_m + \frac{k_f}{\mu} \nabla^2 p_f = [\phi c_t]_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + [\phi c_t]_f \frac{\partial p_f}{\partial t} \quad (1.7)$$

Warren and Root (1963) sugieren que el comportamiento del flujo en el sistema matriz puede ser considerado como flujo pseudo-estacionario. Así, el gasto de flujo que sale de los bloques de matriz puede expresarse mediante la ecuación 1.8.

$$q = -[\phi c_t]_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (1.8)$$

Por otro lado, la caída de presión que se da en la cara de la fractura, es decir, en la interfaz que existe entre el sistema fractura y el sistema matriz, puede ser descrita mediante la ecuación 1.9.

$$q = \alpha \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) \quad (1.9)$$

Donde  $\alpha$  es un factor geométrico o factor de forma para la transferencia de fluidos desde la matriz hacia las fracturas, y depende del arreglo geométrico de los sistemas matriz y fractura. Al igualar las ecuaciones 1.8 y 1.9, y resolviendo para la derivada de la presión en el sistema matriz con respecto al tiempo, se llega a la ecuación 1.10, la cual describe las condiciones de presión en la interfaz matriz-fractura.

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \alpha \frac{k_m}{\mu} \frac{1}{[\phi c_t]_m} (p_f - p_m) \quad (1.10)$$

Las ecuaciones 1.8, 1.9 y 1.10 fueron propuestas por Barenblatt et al. (1960), de manera previa al trabajo de Warren and Root (1963).

Al sustituir la ecuación 1.8 en la ecuación 1.6 es posible obtener una relación para la presión en el sistema fractura, como se indica en la ecuación 1.11.

$$\nabla^2 p_f = \frac{\mu}{k_f} \left[ [\phi c_t]_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + [\phi c_t]_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \right] \quad (1.11)$$

Las definiciones de las variables adimensionales,  $t_D$  y  $p_D$ , propuestas se muestran a continuación.

$$t_D = \frac{k_f}{\mu \left( [\phi c_t]_f + [\phi c_t]_m \right) r_w^2} t \quad (1.12)$$

$$p_D = 2\pi \frac{k_f h}{qB\mu} (p_i - p) \quad (1.13)$$

En las ecuaciones 1.12 y 1.13,  $r_w$  representa al radio del pozo,  $q$  representa al gasto de producción,  $B$  hace referencia al factor de volumen de formación del aceite y  $p_i$  es la presión inicial en el yacimiento.

Al despejar al tiempo,  $t$ , de la ecuación 1.12 se tiene:

$$t = \frac{\mu}{k_f} \left( [\phi c_t]_f + [\phi c_t]_m \right) r_w^2 t_D \quad (1.14)$$

Al resolver la ecuación 1.13 para la presión en la matriz,  $p_m$  se tiene:

$$p_m = p_i - \frac{1}{2\pi} \frac{qB\mu}{k_f h} p_{Dm} \quad (1.15)$$

Al resolver la ecuación 1.13 para la presión en el sistema fractura,  $p_f$  se tiene:

$$p_f = p_i - \frac{1}{2\pi} \frac{qB\mu}{k_f h} p_{Df} \quad (1.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.14, 1.15 y 1.16 en 1.10 y arreglando de manera algebraica se obtiene la ecuación 1.17.

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2 \left( \frac{[\phi c_t]_f + [\phi c_t]_m}{[\phi c_t]_m} \right) (p_{Df} - p_{Dm}) \quad (1.17)$$

Sea  $\lambda$  el coeficiente de flujo interporoso, un parámetro que dicta la facilidad con la que la matriz aporta fluido a las fracturas, definido como:

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2 \quad (1.18)$$

Sea  $\omega$  la relación de almacenamiento, una medida de la capacidad de almacenamiento de las fracturas, definida como:

$$\omega = \frac{[\phi c_t]_f}{[\phi c_t]_f + [\phi c_t]_m} \quad (1.19)$$

O bien:

$$1 - \omega = \frac{[\phi c_t]_m}{[\phi c_t]_f + [\phi c_t]_m} \quad (1.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.18 y 1.20 en 1.17 se obtiene la forma adimensional de la ecuación 1.10, misma que se indica en la ecuación 1.21.

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \frac{\lambda}{(1 - \omega)} (p_{Df} - p_{Dm}) \quad (1.21)$$

De manera análoga, sustituyendo las ecuaciones 1.14, 1.15 y 1.16 en 1.11 y arreglando de manera algebraica se obtiene la ecuación 1.22.

$$\nabla^2 p_{Df} = \frac{1}{r_w^2} \left[ \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + (1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \right] \quad (1.22)$$

Al desarrollar el laplaciano se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial p_{Df}}{\partial r} \right] = \frac{1}{r_w^2} \left[ \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + (1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \right] \quad (1.23)$$

Si además se define al radio de pozo adimensional,  $r_D$ , como:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (1.24)$$

La ecuación 1.23 puede escribirse como se indica en la ecuación 1.25, que es la forma adimensional de la ecuación 1.11.

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right] = \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + (1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \quad (1.25)$$

De la ecuación 1.25, puede concluirse que, si  $\omega = 1$ , ésta se simplifica a la forma de la ecuación de difusión tradicional que modela el flujo en un medio homogéneo.

Haciendo uso de la transformada de Laplace, de las ecuaciones 1.21 y 1.25, puede llegarse finalmente al modelo propuesto por Warren and Root (1963), cuyo objetivo es describir el comportamiento de yacimientos naturalmente fracturados o de doble porosidad, el cual se muestra, en el espacio de Laplace, en la ecuación 1.26.

$$\bar{p}_{Df}(r_D, s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} \ln \left( \frac{4}{e^{2\gamma}} \frac{1}{r_D^2} \right) - \frac{1}{s} \ln(s) - \frac{1}{s} \ln \left( \frac{1 + \omega(1 - \omega)s}{\lambda} \right) + \frac{1}{s} \ln \left( \frac{1 + (1 - \omega)s}{\lambda} \right) \right] \quad (1.26)$$

Donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni y  $s$  es la variable de Laplace. La transformada inversa de Laplace de la ecuación 1.26 está dada por la ecuación 1.27.

$$p_{Df}(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4}{e^\gamma} \frac{1}{r_D^2} t_D \right) - \frac{1}{2} E_i \left( \frac{\lambda}{\omega(1 - \omega)} t_D \right) + \frac{1}{2} E_i \left( \frac{\lambda}{(1 - \omega)} t_D \right) \quad (1.27)$$

Aunque el modelo propuesto por Warren and Root (1963) sea ampliamente utilizado, y exista además un número importante de trabajos dedicados a hallar una solución analítica que modele el flujo de fluidos en medios fracturados, el incorporar la heterogeneidad de la red de fracturas complejas sigue representando un reto. Para atacar esta problemática, autores como Acuna et al. (1995) y Chang and Yortsos (1990) han hecho uso de la teoría fractal.

### 1.3.3. Geometría fractal

El concepto de geometría fractal fue originalmente introducido por Mandelbrot (1967), cuando intentaba medir la longitud de la línea costera de Gran Bretaña, y determinó que dicha longitud incrementaba conforme la longitud de la unidad de medición disminuía en función de una ley de potencias, que posteriormente relacionó con la dimensión fractal.

Para definir el concepto de dimensión fractal es necesario primero establecer que un fractal es un objeto geométrico que se caracteriza por ser autosemejante y que, además, no presenta variación estadística alguna si la escala varía, es decir que la autosemejanza se mantiene independiente de la escala. Dicho de una forma más simple, un fractal es un objeto geométrico que se genera a partir de copias más pequeñas de sí mismo.

La autosemejanza está directamente relacionada con el concepto de dimensión fractal. Si se piensa en un segmento de recta de longitud  $L$ , dicho segmento de recta puede ser generado mediante la unión de  $N$  segmentos de recta de longitud  $r = L/N$ , cada uno de los cuales puede obtenerse, mediante la relación de similitud  $r$ , a partir del segmento original. De manera análoga, un cuadrado con longitud de lado  $L$  puede construirse mediante la unión de  $N^2$  cuadrados con longitud de lado  $r = L/N$ , y lo mismo sucedería con un cubo de arista  $L$ , que podría construirse al unir  $N^3$  cubos de arista  $r = L/N$ . Este comportamiento es ilustrado en la **Figura 1.9**, donde cada uno de los objetos geométricos anteriormente mencionados es reducido en tamaño por un factor de  $1/2$ .

De lo anterior puede entonces concluirse que, si se genera un objeto geométrico de dimensión  $D$  mediante la reducción continua en tamaño de un objeto original por un factor  $1/N$ , entonces cada nivel de construcción estará formado por  $N^D$  número de copias del nivel previo. Ahora bien, si  $M$  es el número de copias generadas, se obtiene la siguiente relación:

$$M = N^D \tag{1.28}$$

Por lo tanto, si la dimensión  $D$  fuese un parámetro desconocido, es posible obtenerlo mediante la ecuación 1.29.

$$D = \frac{\log(M)}{\log(N)} \tag{1.29}$$

En la **Figura 1.10** puede observarse la construcción de un objeto fractal conocido como la curva de Koch. En la primer etapa o primer nivel de construcción, el objeto inicial es un segmento de recta; en la segunda etapa, el segmento es reducido en tamaño por un factor de  $1/3$ , y 4 copias de este subsegmento dan lugar al nuevo objeto geométrico; de forma similar, en la tercera etapa, cada una de las 4 copias

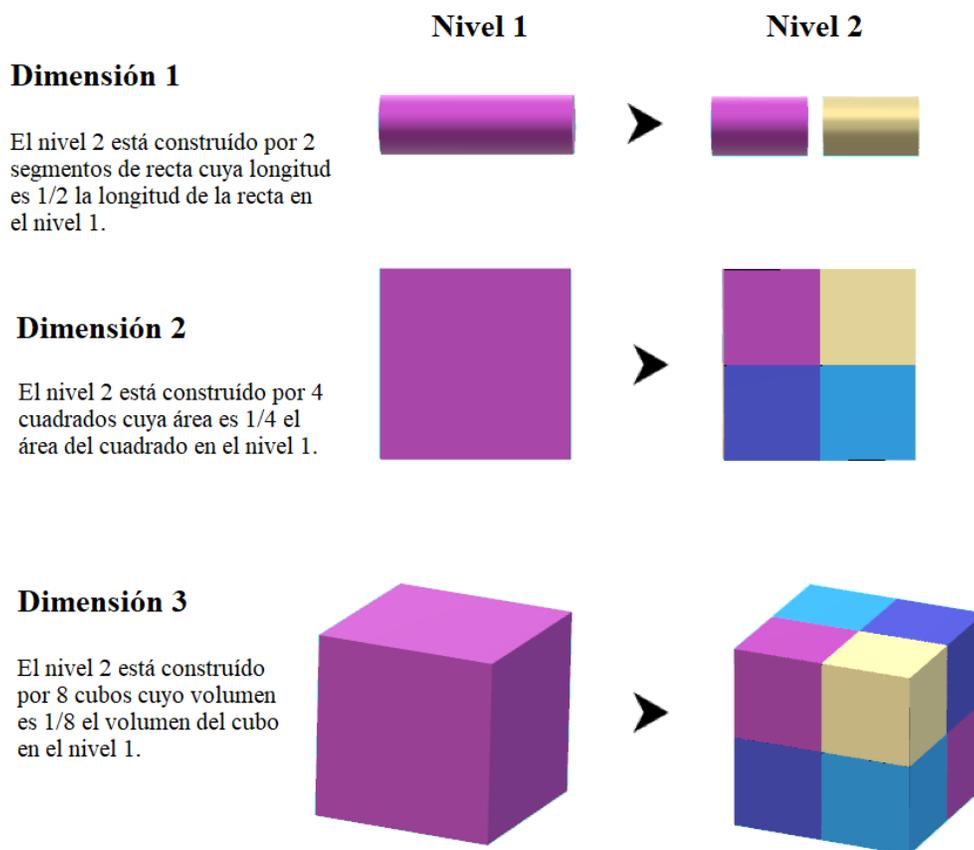


Figura 1.9: Generación de objetos de geometría euclidiana mediante la segmentación continua de sus lados.

generadas en la etapa anterior es nuevamente reducida en tamaño por un factor de 1/3, y nuevamente son 4 copias de este nuevo subsegmento las que dan origen al nuevo elemento geométrico.

Para el caso de la curva de Koch, se tiene que  $M = 4$  y  $N = 3$ , por lo que, haciendo uso de la ecuación 1.29 se obtiene:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26$$

Así, resulta que la curva de Koch no posee una dimensión entera, sino fraccionaria. La dimensión  $D$ , conocida como dimensión de Hausdorff, que es en realidad una generalización de la dimensión euclidiana, representa a la dimensión fractal, y es un parámetro crucial para describir cualquier objeto fractal.

Si el proceso anterior continuara repitiéndose  $n$  veces, el resultado obtenido sería el mostrado en la **Figura 1.11**. De la figura puede concluirse que el objeto fractal

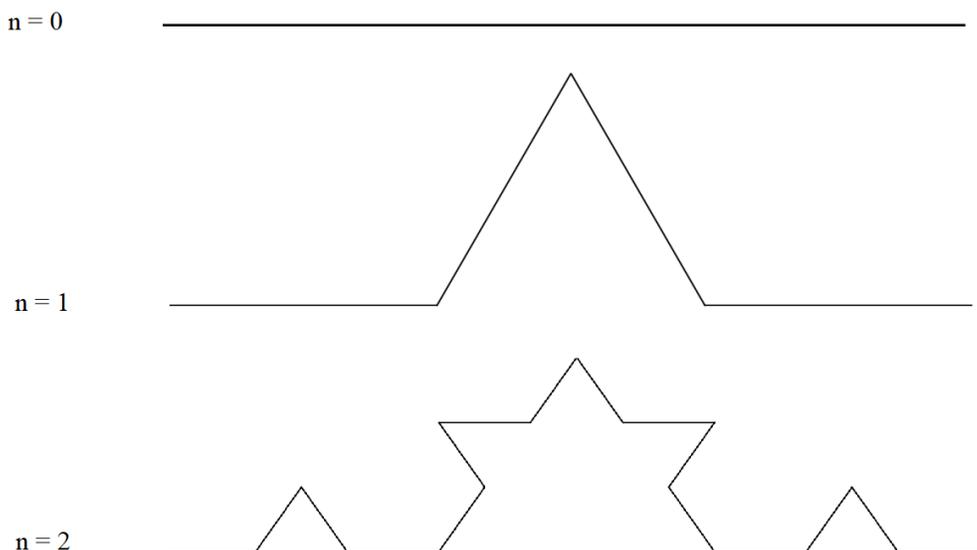


Figura 1.10: Construcción de la curva de Koch en tres etapas. Adaptado de Mandelbrot and Frame (1987).

generado es autosemejante independientemente de la escala de estudio, pues, en todas las etapas de construcción, éste se genera a partir de copias más pequeñas de sí mismo. De este modo, por ejemplo, la curva de Koch generada en la etapa  $n$  luce igual a la generada en la etapa  $n - 1$ , y si se realizase un acercamiento a dicho objeto fractal, en cualquiera de sus etapas podría observarse una misma estructura o forma repetida de manera indefinida.

Finalmente, puede pensarse en un elemento fractal como un objeto geométrico que no tiene una escala, longitud o tamaño característico asociado, pues, por ejemplo, si se pretende determinar la longitud de la curva de Koch, esta magnitud tenderá a infinito mientras mayor sea el detalle o acercamiento con el que se le mire, es decir, su longitud dependerá de la escala.

#### 1.3.4. Caracterización de redes de fracturas complejas mediante la geometría fractal

En la sección 1.3.2 de esta tesis, se presentan las tres premisas bajo las cuales Warren and Root (1963) desarrollaron su modelo, el cual asume que una red de fracturas, como las que se encuentran en los yacimientos naturalmente fracturados o estimulados mediante fracturamiento hidráulico, puede caracterizarse como dos medios distintos: el sistema matriz y el sistema fractura. Sin embargo, existen yacimientos que no satisfacen estas premisas, pues presentan propiedades a múltiples

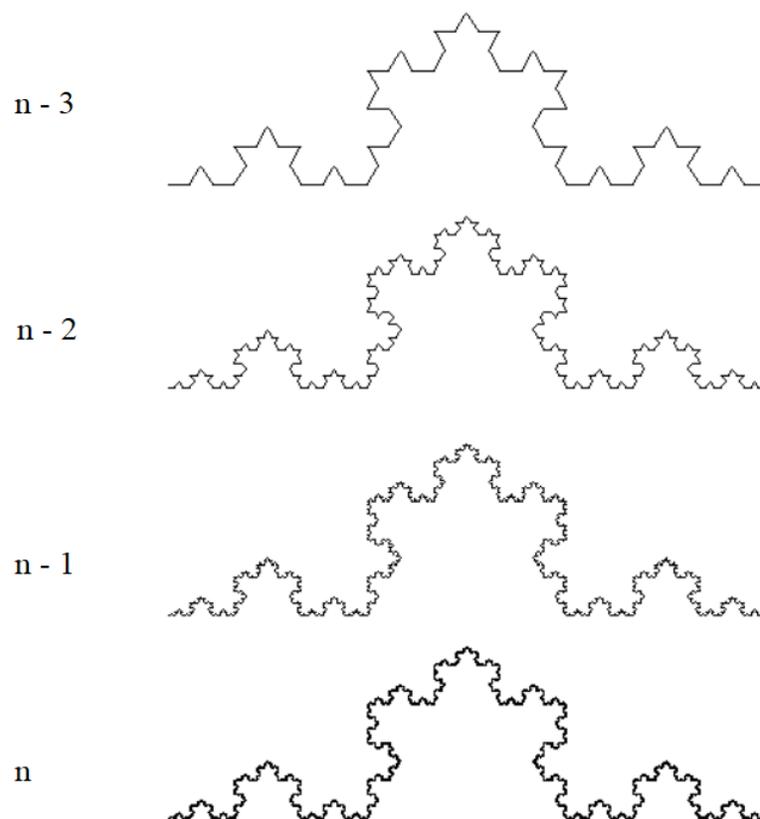


Figura 1.11: Construcción de la curva de Koch en  $n$  etapas. Adaptado de Ungar (2007).

escalas (fracturas que van desde los centímetros hasta los micrómetros), además de que la red de fracturas no obedece a la geometría euclidiana.

Dichas variaciones en la escala y densidad de las fracturas, así como en el grado de fracturamiento, se verán reflejadas cuando se lleve a cabo un análisis de pruebas de presión en este tipo de yacimientos.

Cuando se emplean modelos convencionales como herramienta para analizar pruebas de presión en yacimientos fracturados, la respuesta de la presión característica obtenida en gráficos diagnóstico es la siguiente (Chang and Yortsos, 1990):

- **Sistema de doble porosidad (Warren y Root):**  $p_D \approx \ln(t_D)$ , como se observa en la **Figura 1.12**.
- **Sistema de una sola fractura:**  $p_D \approx t_D^{1/4}$  a tiempos cortos y  $p_D \approx t_D^{1/2}$  a tiempos largos, sugiriendo flujo bi-lineal y lineal, respectivamente, como se observa en la **Figura 1.13**.

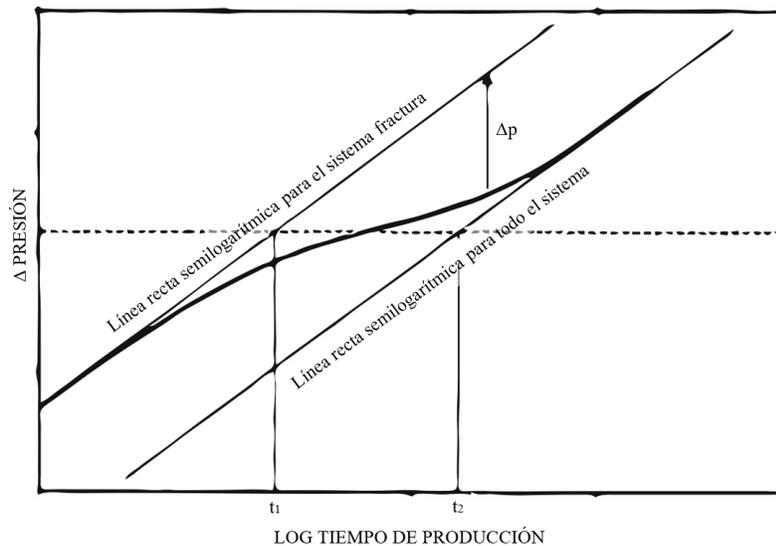


Figura 1.12: Comportamiento característico de un sistema de doble porosidad en un gráfico diagnóstico semi-logarítmico. Recuperado de Gringarten (1984).

Son muchos los casos en los que de los gráficos diagnóstico se obtienen líneas rectas cuya pendiente difiere de lo anteriormente mencionado.

Con el objetivo de describir la respuesta atípica de la presión en yacimientos naturalmente fracturados, autores como Acuna et al. (1995) y Chang and Yortsos (1990) hicieron uso de la geometría fractal para caracterizar a las redes de fracturas complejas, pues atribuyeron esta variación en el comportamiento de la presión a que la red de fracturas en cuestión difícilmente se encontraría uniformemente distribuida, perfectamente interconectada y a una sola escala, como se establece en los modelos que idealizan al sistema matriz-fractura como un medio homogéneo.

De acuerdo con Acuna et al. (1995), patrones reales de fracturamiento han sido analizados mediante distintos afloramientos de formaciones con estas características, así como con estudios de láminas delgadas, y se ha determinado que poseen propiedades fractales. Una característica básica de los objetos fractales es que muchas de sus propiedades dependen de la escala, y varían con ésta en función de una ley de potencias, tal como lo estableció Mandelbrot (1967).

Chang and Yortsos (1990) propusieron una manera de representar a las redes de fracturas complejas, asumiéndolas como objetos fractales incorporados a la matriz, y no solo como el espaciamiento existente en un arreglo lineal de paralelepípedos. Posteriormente, Acuna et al. (1995) simplificaron este formalismo para sistemas naturalmente fracturados, presentando expresiones en forma de leyes de potencias para representar a la porosidad y permeabilidad de un medio fracturado caracterizado en

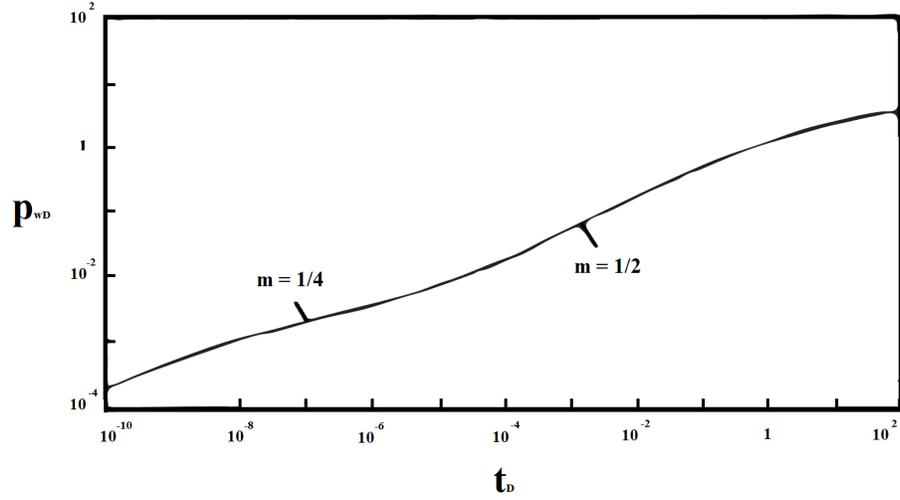


Figura 1.13: Comportamiento característico de un sistema de una sola fractura en un gráfico diagnóstico doblemente logarítmico. Adaptado de Cinco-Ley et al. (1981).

coordenadas cilíndricas, las cuales se muestran en las ecuaciones 1.30 y 1.31.

$$\phi_r = \phi_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{d_{mf}-d} \quad (1.30)$$

$$k_r = k_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{d_{mf}-d-\theta} \quad (1.31)$$

Donde  $\phi_r$  y  $k_r$  representan a la porosidad y permeabilidad fractal, respectivamente,  $\phi_0$  y  $k_0$  son propiedades de referencia,  $r$  es la escala,  $r_0$  es una longitud de referencia,  $d$  es la dimensión euclidiana,  $d_{mf}$  es la dimensión fractal y  $\theta$  representa al índice de conectividad de las fracturas.

El índice de conectividad está relacionado con la anisotropía del medio. Debido a que un medio fractal es anisótropo, la difusión en éste será anómala. Cuando  $\theta = 0$ , el medio está caracterizado por poseer una alta conectividad de las fracturas y, por ende, el proceso de difusión no se verá obstaculizado; esto puede aplicar para los casos en los que la red de fracturas se encuentra perfectamente interconectada. En un medio fractal, en cambio, existirán caminos de flujo de alta tortuosidad<sup>6</sup>, por lo que la difusión se verá ralentizada; de manera general, el valor del índice de conectividad incrementa conforme incrementa la tortuosidad y decrementa la conectividad del medio.

<sup>6</sup>La tortuosidad es una relación que caracteriza los trayectos convolutos de la difusión del fluido a través de los medios porosos. En la mecánica de fluidos de los medios porosos, la tortuosidad es la relación del largo de la corriente natural de un fluido —una línea o trayecto de flujo— entre dos puntos y la distancia en línea recta entre esos puntos (Schlumberger, 2022).

Para entender el efecto de la dimensión fractal,  $d_{mf}$ , en el medio, se presentan las **Figuras 1.14** y **1.15**. Ambas ilustran tres redes de fracturas, con distinta dimensión fractal, acopladas en un sistema matriz de dimensión euclidiana  $d = 2$ .

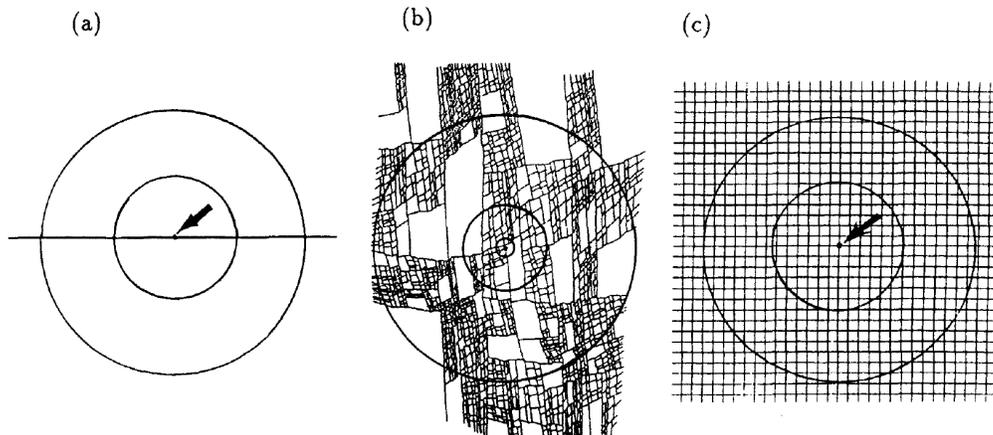


Figura 1.14: Redes de fracturas con distinta dimensión fractal acopladas en un sistema matriz con dimensión euclidiana  $d = 2$ , donde en (a)  $d_{mf} = 1$ , en (b)  $1 < d_{mf} < 2$ , y en (c)  $d_{mf} = 2$ . Recuperado de Acuna et al. (1995).

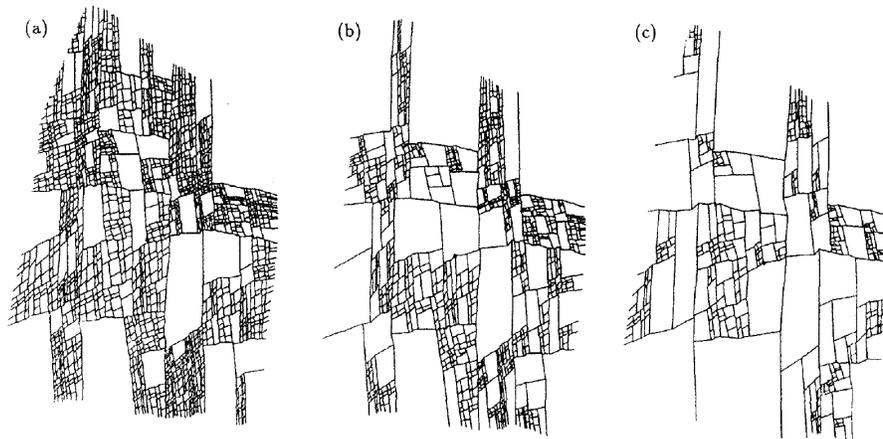


Figura 1.15: Efecto de la dimensión fractal,  $d_{mf}$ , en una red de fracturas complejas, donde en (a)  $d_{mf} = 1,78$ , en (b)  $d_{mf} = 1,65$  y en (c)  $d_{mf} = 1,47$ . Recuperado de Acuna et al. (1995).

En la **Figura 1.14**, (a) corresponde a un sistema de una sola fractura donde  $d_{mf} = 1$ , (b) representa un sistema fractal con  $1 < d_{mf} < 2$ , mientras que (c) podría representar al medio idealizado en el modelo de Warren and Root (1963), donde  $d_{mf} = 2$ . Aunque en los casos (a) y (c) la red de fracturas obedece a la geometría euclidiana, ambos podrían ser considerados como medios fractales para los límites

en los que  $d_{mf} = 1$  y  $d_{mf} = 2$ , respectivamente, considerando así al modelo fractal como una generalización del modelo convencional.

De manera similar, en la **Figura 1.15** se muestran tres redes de fracturas complejas, donde en (a)  $d_{mf} = 1,78$ , en (b)  $d_{mf} = 1,65$  y en (c)  $d_{mf} = 1,47$ . Con base en lo anterior, puede pensarse entonces en la dimensión fractal como un indicador de la densidad de fracturas en el medio.

## Capítulo 2

# Soluciones implementadas

Este capítulo está dividido en dos subapartados, en cada uno de los cuales se describe la solución implementada <sup>1</sup>, su funcionalidad, ventajas, análisis de sensibilidad y/o resultados obtenidos.

### 2.1. Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de *shale gas*

Buscando solucionar las limitantes en el modelado del flujo de fluidos en yacimientos de *shale gas* provocadas por la existencia de distintos mecanismos de flujo, debido a la variación en la escala de porosidad, se tomó como base el trabajo realizado por Shen et al. (2017), titulado *Gas Flow Behavior of Nanoscale Pores in Shale Gas Reservoirs*. Shen et al. (2017) propusieron un modelo de flujo considerando el flujo continuo convencional, flujo por deslizamiento, flujo de transición, difusión de Knudsen y el efecto de la adsorción del gas, con el objetivo de evaluar el comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos.

Además, Shen et al. (2017) realizaron un análisis de sensibilidad para cuantificar el efecto de parámetros como presión, temperatura, espesor de la capa de gas adsorbida y la presión de Langmuir sobre el comportamiento del flujo de gas.

A continuación, se describe de forma detallada el desarrollo del modelo propuesto por Shen et al. (2017).

---

<sup>1</sup>Las soluciones implementadas en esta tesis son completamente atribuidas a los autores de los trabajos que se tomaron como base, mismos que son debidamente referenciados en el subapartado correspondiente. El objetivo central de esta tesis es desarrollar una herramienta computacional que automatice dichas soluciones existentes en la literatura, replicando sus resultados.

### 2.1.1. Modelo matemático con múltiples regímenes de flujo

#### Flujo continuo convencional

Cuando el número de Knudsen es menor que 0,001, el flujo de gas a través de los nanoporos presentes en los yacimientos de *shale gas* puede describirse mediante la ley de Darcy, la cual se expresa como se indica en la ecuación 2.1.

$$v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \nabla P \quad (2.1)$$

Donde  $v_g$  es la velocidad del gas,  $k_g$  es la permeabilidad al gas,  $\mu_g$  es la viscosidad del gas y  $\nabla P$  es el gradiente de presión.

La ecuación 2.2 es conocida como la ecuación de Poiseuille para el flujo de fluidos viscosos en un tubo capilar, donde  $Q$  es el gasto de flujo,  $r$  es el radio del tubo capilar,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $\Delta P$  es un diferencial de presión y  $L$  es la longitud del capilar.

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (2.2)$$

Si se considera al medio poroso como un conjunto de capilares, las ecuaciones 2.1 y 2.2 pueden relacionarse entre sí, por lo que la permeabilidad de Darcy puede expresarse mediante la ecuación 2.3, donde  $r$  sería el radio capilar del poro.

$$k_g = \frac{r^2}{8} \quad (2.3)$$

Sustituyendo la ecuación 2.3 en la ecuación 2.1, el flujo másico de gas por unidad de área para el flujo continuo convencional puede expresarse mediante la ecuación 2.4, donde  $\rho_g$  es la densidad del gas.

$$J_V = \frac{\rho_g r^2}{8\mu_g} \nabla P \quad (2.4)$$

#### Flujo por deslizamiento (*slip flow*)

Si el valor de  $K_n$  se encuentra entre 0,001 y 0,1, las colisiones entre las moléculas y las paredes del poro no son despreciables y la velocidad de las moléculas a lo largo de las paredes del poro es diferente de cero, por lo que el efecto de deslizamiento de gas debe tomarse en cuenta.

Klinkenberg (1941) fue el primero, en la industria petrolera, en considerar el efecto de deslizamiento del gas en el medio poroso, pues observó que, a presiones muy bajas, el flujo real de gas era mayor al flujo calculado mediante la ley de Darcy.

Klinkenberg atribuyó este efecto al deslizamiento de las moléculas de gas sobre (y a lo largo de) la pared del poro, por lo que propuso la ecuación 2.5 para determinar la permeabilidad aparente al gas como una función de la presión (Swami et al., 2012).

$$k_a = k_\infty \left( 1 + \frac{b_k}{\bar{P}} \right) \quad (2.5)$$

Donde  $k_\infty$  es una permeabilidad al gas de referencia en mD,  $\bar{P}$  es la presión media del sistema en psi, y  $b_k$  es el factor de deslizamiento, mismo que se define en la ecuación 2.6 y depende tanto del camino libre medio de las moléculas como del radio de poro a través del cual fluyen.

$$b_k = \frac{4c\lambda_g\bar{P}}{r} \quad (2.6)$$

En la ecuación 2.6,  $c$  es un valor constante cercano a la unidad. Roy et al. (2003) propusieron una ecuación similar para determinar la permeabilidad aparente al gas, como se indica en la ecuación 2.7.

$$k_a = k_\infty(1 + 5K_n) \quad (2.7)$$

Si se considera a la permeabilidad de Darcy como permeabilidad de referencia, el flujo másico por unidad de área para el flujo por deslizamiento estará dado por la ecuación 2.8, donde  $F = (1 + 5K_n)$  representa un factor de flujo por deslizamiento.

$$J_S = F \frac{\rho_g r^2}{8\mu_g} \nabla P \quad (2.8)$$

### Difusión de Knudsen

Cuando  $K_n$  toma valores mayores a 10, el transporte de gas en el medio poroso puede describirse mediante la difusión de Knudsen, proceso que también es conocido como flujo libre molecular. Para este régimen, el flujo másico por unidad de área puede representarse por la ecuación 2.9.

$$J_M = -D_{K_n} \nabla n_i \quad (2.9)$$

Donde  $\nabla n_i$  es el gradiente de densidad del componente  $i$  de una mezcla de gases, mismo que puede calcularse mediante la ecuación 2.10.

$$\nabla n_i = \frac{-M_i}{10^3 RT} \nabla P \quad (2.10)$$

$M_i$  es la masa molecular del componente  $i$ ,  $R$  es la constante universal de los gases, y  $T$  es la temperatura del sistema.

$D_{K_n}$  representa al coeficiente de difusividad de Knudsen. Roy et al. (2003), asumiendo un flujo a través de un tubo capilar, propusieron la ecuación 2.11 para calcular dicho coeficiente, donde  $d$  es el diámetro de flujo del capilar y  $M$  es la masa molecular de la mezcla de gases.

$$D_{K_n} = \frac{d}{3} \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{0,5} \quad (2.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.10 y 2.11 en 2.9, se tiene entonces que el flujo másico por unidad de área para el régimen de flujo gobernado por la difusión de Knudsen se calcula mediante la ecuación 2.12.

$$J_M = \frac{2rM}{3 \times 10^3 RT} \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{0,5} \nabla P \quad (2.12)$$

### Flujo de transición

El transporte de gas en el régimen de flujo de transición se encuentra entre los regímenes de *slip flow* y flujo libre molecular, donde el flujo por deslizamiento y la difusión de Knudsen coexisten. A medida que el número de Knudsen crece, el efecto del deslizamiento de las moléculas de gas decrece, mientras que el efecto de la difusión de Knudsen crece. Entonces, el modelo de transporte de gas en este régimen estará dado como una ponderación entre el régimen de flujo por deslizamiento y el régimen gobernado por la difusión de Knudsen, como se muestra en la ecuación 2.13 (Shi et al., 2013).

$$J_T = f J_S + (1 - f) J_M \quad (2.13)$$

Donde  $J_T$  es el flujo másico por unidad de área para el régimen de flujo de transición y  $f$  es el factor de ponderación para el mismo régimen, el cual es un parámetro adimensional entre 0 y 1, y puede expresarse mediante la ecuación 2.14.

$$f = \frac{1}{1 + \left( \frac{K_n}{K_{n0,5}} \right)^{n-1}} \quad (2.14)$$

Los valores de los coeficientes  $K_{n0,5}$  y  $n$  están dados por 4,5 y 5, respectivamente. Cuando  $K_n$  es menor a 0,1, el factor de ponderación  $f$  es cercano a la unidad, mientras que cuando  $K_n$  es mayor a 10,  $f$  se aproxima a 0, es decir, mientras mayor sea el valor de  $f$ , mayor será el efecto del deslizamiento de las moléculas de gas sobre el régimen de flujo y, de forma contraria, mientras menor sea el valor de  $f$ , mayor será el efecto de la difusión de Knudsen.

### Modelo propuesto

De acuerdo con los resultados analíticos mostrados líneas arriba, el flujo de gas en yacimientos de *shale gas* es un proceso complejo que incluye los cuatro regímenes de flujo descritos anteriormente, los cuales pueden existir al mismo tiempo, por lo que no es apropiado modelar el flujo con sólo uno de ellos.

Un parámetro útil para tomar en cuenta el efecto que tiene cada régimen sobre el transporte de gas es el flujo másico por unidad de área con múltiples regímenes de flujo, mostrado en la ecuación 2.15.

$$J = J_V + J_S + J_T + J_M \quad (2.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.4, 2.8, 2.12 y 2.13 en 2.15 se llega a la ecuación.

$$J = \left[ \left( 1 + \frac{2 + \left(\frac{K_n}{4,5}\right)^4}{1 + \left(\frac{K_n}{4,5}\right)^4} (1 + 5K_n) \right) \frac{\rho_g r^2}{8\mu_g} + \frac{1 + 2\left(\frac{K_n}{4,5}\right)^4}{1 + \left(\frac{K_n}{4,5}\right)^4} \frac{2rM}{3 \times 10^3 RT} \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{0,5} \right] \nabla P \quad (2.16)$$

Si se considera el efecto de la adsorción de gas, el espesor de la capa de gas adsorbida, de acuerdo con la ecuación de Langmuir, puede expresarse mediante la ecuación 2.17, donde  $d_e$  es el espesor de la capa adsorbida, y  $d_0$  es el espesor máximo de la capa de adsorción.

$$d_e = d_0 \frac{P}{P + P_L} \quad (2.17)$$

Con base en lo anterior, el radio efectivo de flujo en los nanoporos,  $r_e$ , y el número de Knudsen considerando el efecto de la adsorción,  $K_{ne}$ , pueden determinarse mediante las ecuaciones 2.18 y 2.19, respectivamente.

$$r_e = r - d_e = r - d_0 \frac{P}{P + P_L} \quad (2.18)$$

$$K_{ne} = \frac{\lambda_g}{r_e} \quad (2.19)$$

Así, el flujo másico de gas por unidad de área con múltiples regímenes de flujo tomando en cuenta el efecto de adsorción,  $J_{ad}$ , queda expresado en la ecuación 2.20.

$$J_{ad} = \left[ \left( 1 + \frac{2 + \left(\frac{K_{ne}}{4,5}\right)^4}{1 + \left(\frac{K_{ne}}{4,5}\right)^4} (1 + 5K_{ne}) \right) \frac{\rho_g r_e^2}{8\mu_g} + \frac{1 + 2\left(\frac{K_{ne}}{4,5}\right)^4}{1 + \left(\frac{K_{ne}}{4,5}\right)^4} \frac{2r_e M}{3 \times 10^3 RT} \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{0,5} \right] \nabla P \quad (2.20)$$

### 2.1.2. Estudio de caso

Analizando las ecuaciones 2.16 y 2.20, puede concluirse que son muchos los parámetros que tienen un efecto sobre el comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de *shale gas*. Para analizar la influencia de los diferentes regímenes de flujo, Shen et al. (2017) propusieron como parámetro de análisis al cociente entre el flujo másico por unidad de área correspondiente a cada régimen de flujo y el flujo másico por unidad de área con múltiples regímenes, ambos considerando el efecto de adsorción, como se indica a continuación:

- $J_{adDarcy}/J_{ad}$

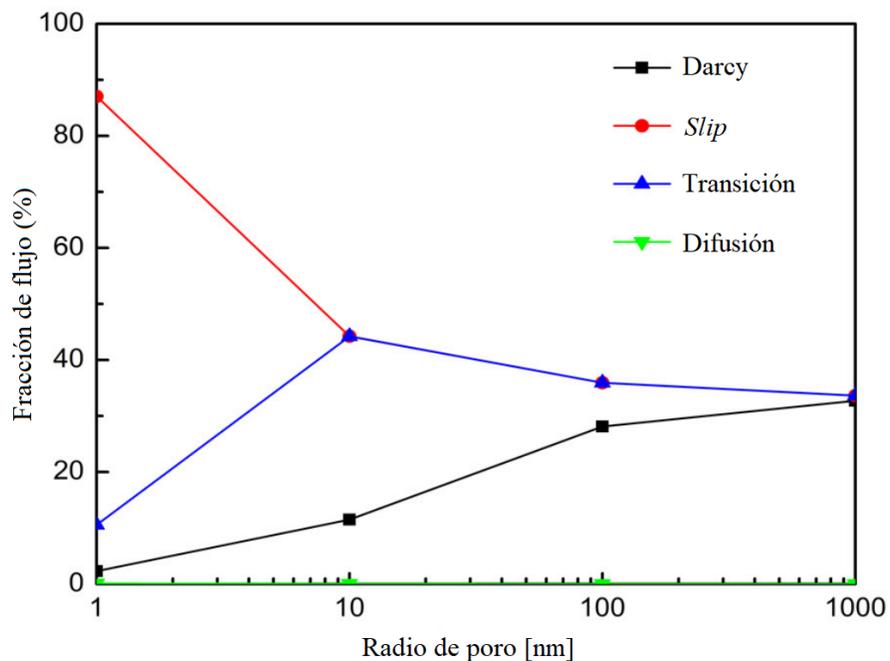
- $J_{adSlip}/J_{ad}$

- $J_{adTransición}/J_{ad}$

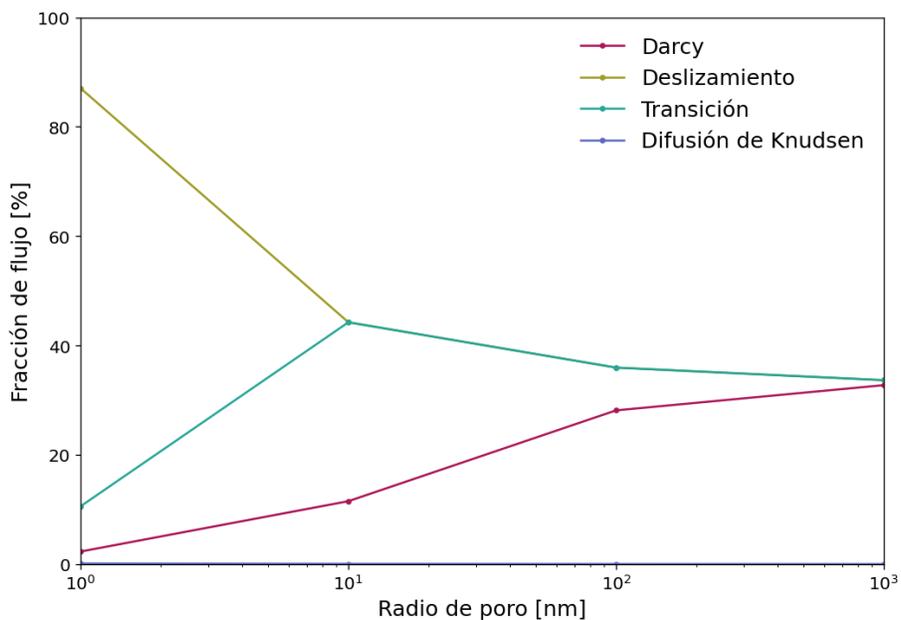
- $J_{adKnudsen}/J_{ad}$

En la **Tabla 2.1** se presentan las propiedades de una mezcla de gases típicamente encontrada en los yacimientos de *shale gas*.

Con los datos proporcionados en la **Tabla 2.1**, Shen et al. (2017) presentaron en su trabajo la **Figura 2.1a**, donde pretenden mostrar la relación existente entre la fracción de flujo de cada régimen y el radio de poro. De manera análoga, la **Figura 2.1b** fue generada con la herramienta computacional desarrollada en esta tesis y, aunque los resultados obtenidos coinciden con los resultados presentados por Shen et al. (2017), para la creación de este gráfico dichos autores consideraron un valor arbitrario del camino libre medio de las moléculas ( $\lambda_g$ ) de 5,55 nm. Esta hipótesis no es representativa de las condiciones reales del flujo que se darían con los datos proporcionados, pues el camino libre medio, como se indicó anteriormente, es función de la presión y temperatura del sistema, así como del diámetro de colisión de las moléculas.



(a) Fracción de flujo vs. radio de poro. Recuperado de Shen et al. (2017).



(b) Fracción de flujo vs. radio de poro, generado con la herramienta desarrollada (considerando un valor arbitrario de  $\lambda_g = 5,5 \text{ nm}$ ).

Figura 2.1: Validación de la herramienta desarrollada mediante la comparación de los resultados obtenidos con ésta y los resultados presentados por Shen et al. (2017).

Por lo anterior, y también con base en la **Tabla 2.1** se generó la **Figura 2.2**, en

Tabla 2.1: Propiedades de una mezcla de gases típicamente encontrada en yacimientos de *shale gas*. Recuperado de Shen et al. (2017).

<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
Densidad del gas ( $\rho_g$ )	8.03	$kg/m^3$
Viscosidad del gas ( $\mu_g$ )	0.12	$\times 10^{-4} Pa \cdot s$
Espesor máximo de la capa de adsorción ( $d_0$ )	0.50	$nm$
Temperatura ( $T$ )	300	$K$
Presión ( $P$ )	10	$MPa$
Gradiente de presión ( $\nabla P$ )	5	$MPa/m$
Presión de Langmuir ( $P_L$ )	10	$MPa$
Constante universal de los gases ( $R$ )	8.31	$Pa \cdot m^3 / (mol \cdot K)$
Masa molecular de la mezcla ( $M$ )	19.50	$kg/kmol$
Diámetro de colisión molecular de la mezcla	0.41	$\times 10^{-9} m$

la que se ilustra la relación entre la fracción de flujo correspondiente a cada régimen y el radio de poro,  $r$ , esta vez considerando el valor de  $\lambda_g$  calculado de  $0,555 \text{ nm}$ , y al analizarla puede llegarse a las siguientes conclusiones:

- A medida que incrementa el tamaño del poro, el efecto del flujo continuo convencional (modelado con la ley de Darcy) también crece, mientras que el efecto del flujo por deslizamiento (*slip flow*) y el efecto del flujo de transición decrecen.
- Para el caso estudiado, el efecto que tiene el régimen de flujo libre molecular (difusión de Knudsen) es mínimo y, por lo tanto, el efecto del flujo de transición resulta prácticamente igual al del flujo por deslizamiento, observándose en la **Figura 2.2** un traslape entre las curvas correspondientes.
- Los regímenes de flujo que gobiernan el transporte de gas a través de los nanoporos (en este caso particular) son el flujo por deslizamiento y flujo de transición.
- Es posible observar que el efecto del flujo libre molecular decrementa conforme el tamaño del poro incrementa.

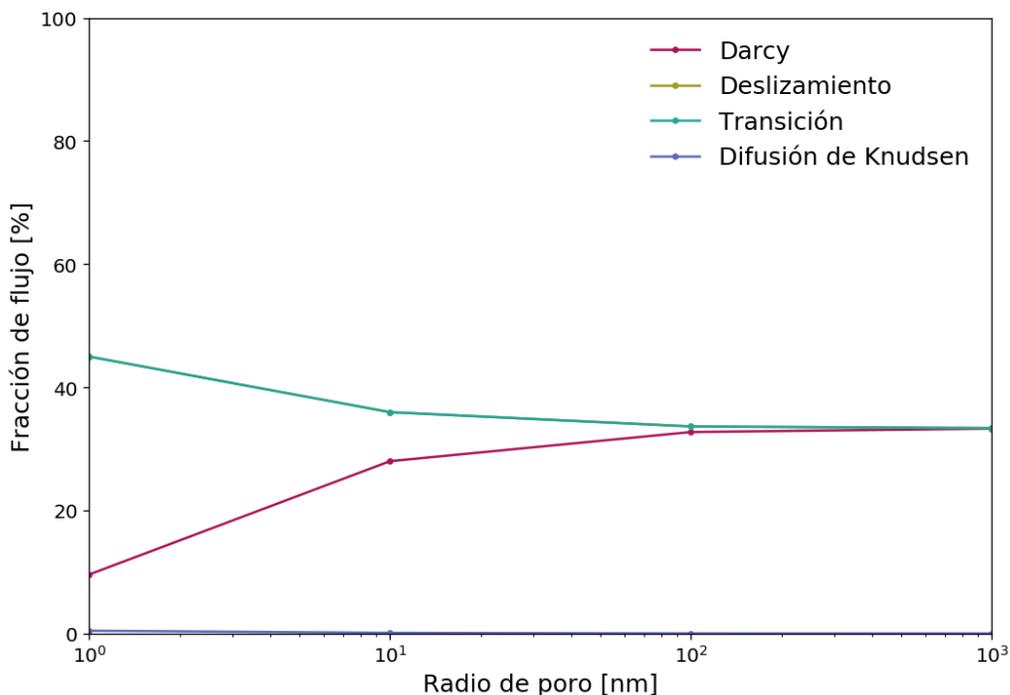


Figura 2.2: Fracción de flujo de los distintos regímenes vs. radio de poro.

### 2.1.3. Análisis de sensibilidad

#### Efecto de la presión

De manera análoga a lo realizado por Shen et al. (2017), en este trabajo se analizó el efecto de la presión sobre el transporte de gas en el medio poroso mediante la variación de este parámetro desde 5 *MPa* hasta 40 *MPa*. Los resultados obtenidos se muestran en la **Figura 2.3**, misma que se generó con los datos presentados en la **Tabla 2.1**, modificando únicamente la temperatura, la cual se consideró a 350 *K*.

De la **Figura 2.3** puede concluirse que, mientras las fracciones de flujo correspondientes a los regímenes de flujo continuo convencional (Darcy) y flujo libre molecular (difusión de Knudsen) crecen a medida que la presión crece, las fracciones de flujo de los regímenes de transición y flujo por deslizamiento decrecen.

También, se observa que, a una presión dada, sólo la fracción de flujo del régimen continuo convencional crece mientras el radio de poro incrementa, pues el efecto de los tres regímenes restantes decrece conforme crece el tamaño del poro. Este comportamiento es atribuible a que, mientras mayor sea el radio del poro a través del cual el gas fluye, menor efecto sobre el flujo tendrán las colisiones entre las moléculas de gas y las colisiones entre las moléculas de gas y las paredes del poro.

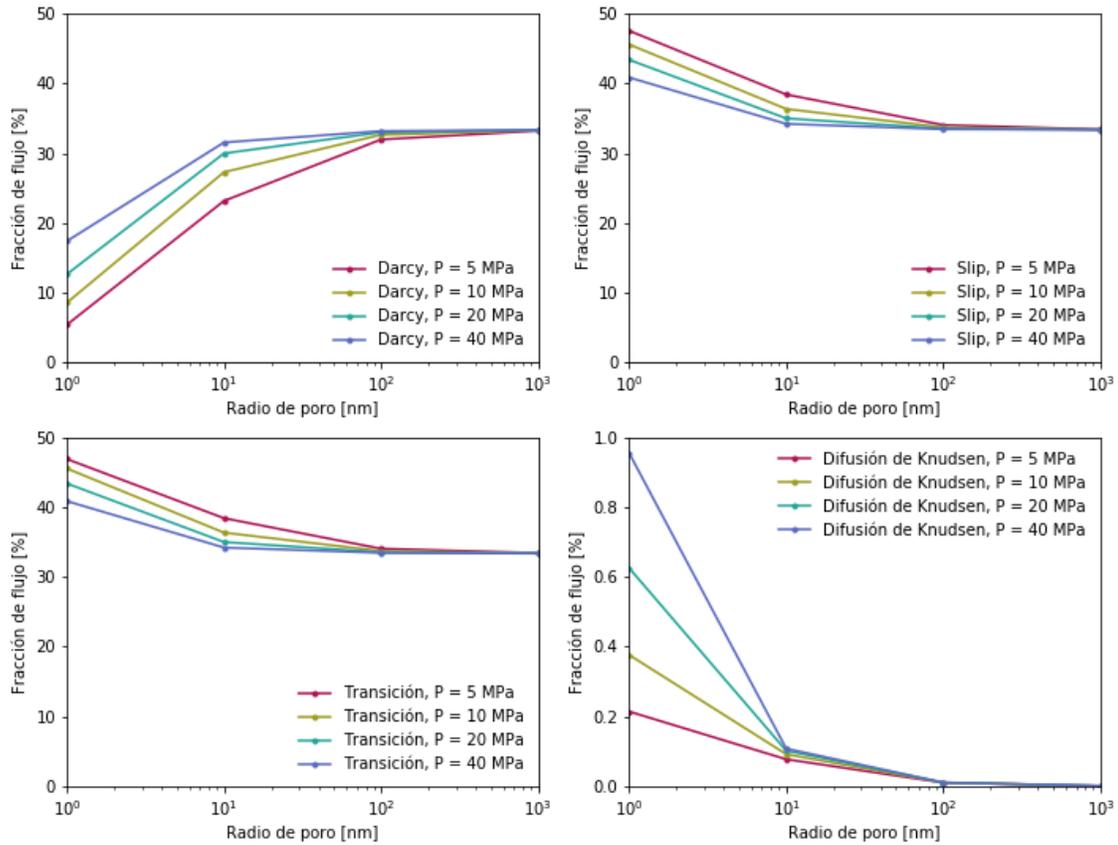


Figura 2.3: Fracción de flujo vs. radio de poro a diferentes condiciones de presión.

### Efecto de la temperatura

Por otra parte, en la **Figura 2.4** se muestra el efecto que tiene la temperatura sobre los regímenes de flujo presentes en el transporte de gas a través de nanoporos, pues se grafica la fracción de flujo de cada uno de los cuatro regímenes versus el radio de poro, haciendo variar la temperatura de 320 *K* a 400 *K*. Dicha figura se generó tomando como base la **Tabla 2.1**.

Puede observarse que la variación en las fracciones de flujo de los cuatro regímenes es muy pequeña, sin embargo, para los regímenes de flujo continuo convencional y flujo libre molecular la fracción de flujo decrece conforme aumenta la temperatura, mientras que, para los regímenes de flujo por deslizamiento y de transición, la fracción de flujo crece a medida que la temperatura aumenta.

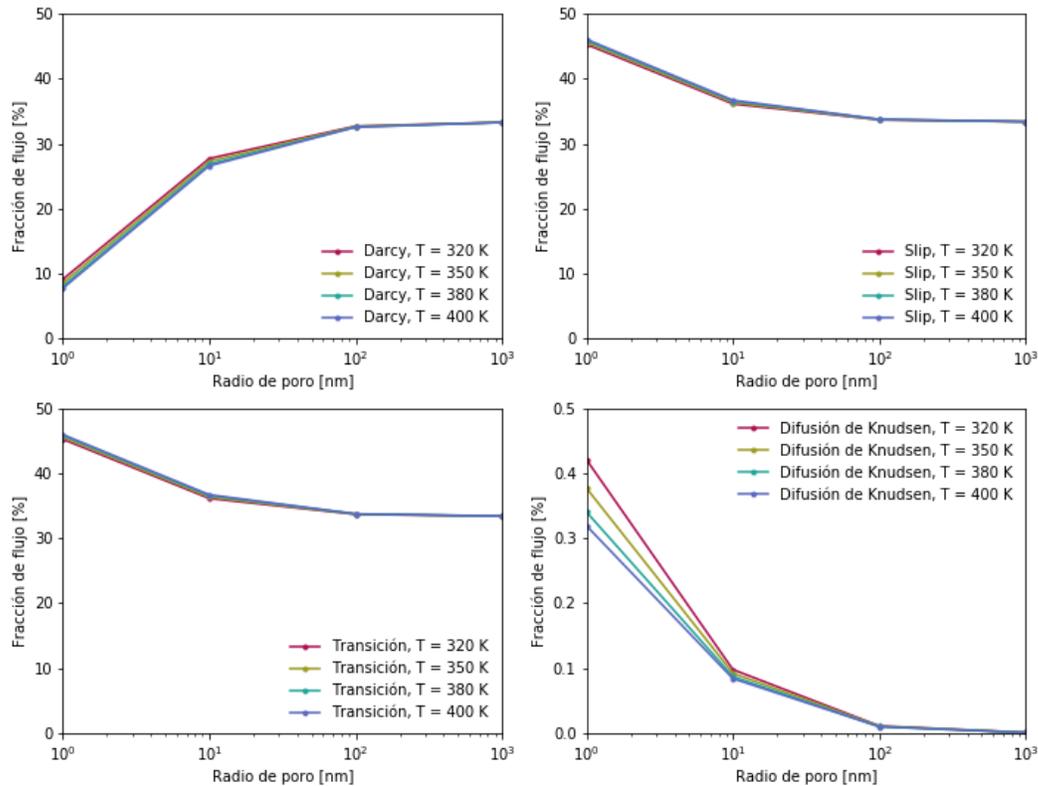


Figura 2.4: Fracción de flujo vs. radio de poro a diferentes condiciones de temperatura.

### Efecto de la presión de Langmuir

Como se mencionó en secciones anteriores, conforme aumenta el tiempo de explotación de un yacimiento de *shale gas* y decrece la presión, es importante considerar el efecto de la desorción de moléculas de gas de las paredes de los nanoporos a través de los cuales fluye. Shen et al. (2017) analizaron el efecto de la presión de Langmuir sobre el flujo volumétrico de gas por unidad de área total (considerando los cuatro regímenes de flujo), para lo que propusieron como parámetro de análisis al cociente  $J_{ad}/J$ , es decir, el flujo volumétrico considerando el efecto de adsorción sobre el flujo volumétrico sin considerar dicho efecto.

Con base en los datos proporcionados por la **Tabla 2.1**, la **Figura 2.5** muestra el efecto de la variación de la presión de Langmuir de 10 MPa a 25 MPa, mientras la presión y la temperatura se mantienen constantes. Es posible concluir que, a mayor presión de Langmuir, más grande será el cociente de flujos, debido a que será mayor la cantidad de gas liberada de la superficie del poro a medida que disminuye la presión del sistema, lo que se traduce en un flujo másico total mayor.

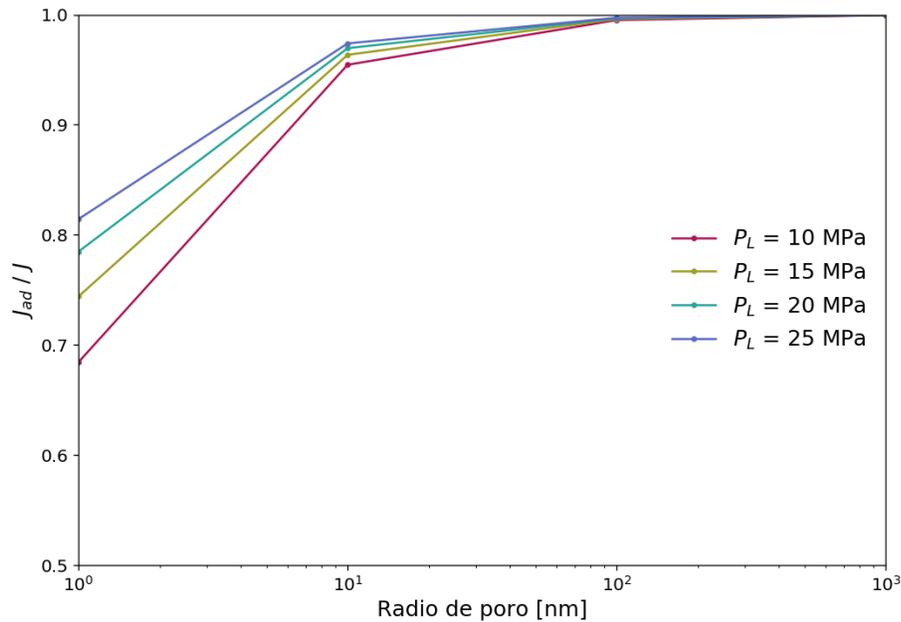


Figura 2.5:  $J_{ad}/J$  vs. radio de poro para diferentes valores de la presión de Langmuir.

### Efecto del espesor máximo de la capa de adsorción

En la **Figura 2.6**<sup>2</sup> se ilustra el efecto que tiene la variación del espesor de la capa de adsorción sobre el cociente  $J_{ad}/J$ , variando  $d_0$  de 0,3 nm a 1,0 nm. Al analizar dicha variación se observa que, al aumentar el espesor máximo de la capa de adsorción, el cociente de flujos volumétricos por unidad de área decrece, pues el radio efectivo de flujo,  $r_e$ , disminuye y con ello disminuye también el flujo másico total por unidad de área.

## 2.2. Modelo fractal semi-analítico para la producción de aceite en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados

Una de las tecnologías que ha permitido la explotación de yacimientos no convencionales, en los que la permeabilidad es muy baja para producir hidrocarburos de manera rentable, es la implementación de una técnica de estimulación que mejore dicha propiedad mediante un fracturamiento hidráulico a la formación, ello además de la perforación de pozos horizontales que incrementen el área de contacto con el yacimiento. Este procedimiento da lugar a una red de fracturas complejas en la cercanía

<sup>2</sup>La **Figura 2.6** también se generó con los datos mostrados en la **Tabla 2.1**.

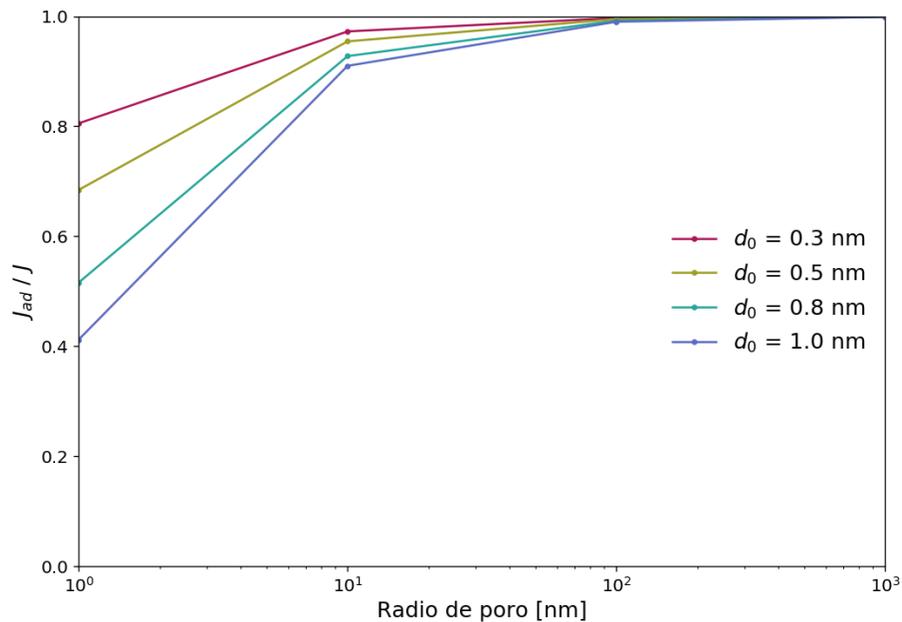


Figura 2.6:  $J_{ad}/J$  vs. radio de poro para diferentes valores del espesor máximo de la capa de adsorción de gas.

de los disparos, sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, los modelos que la caracterizan como un medio homogéneo de geometría euclidiana describen pobremente el comportamiento del flujo a través de dicha red.

Con el objetivo de llevar a cabo una mejor caracterización de la red de fracturas complejas generada por el fracturamiento hidráulico en yacimientos compactos, para esta tesis se tomó como referencia el trabajo de Wang et al. (2015), titulado *A semi-analytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells*, en el que presentan una modificación a la ecuación de difusión tradicional, pues emplean definiciones fractales de la porosidad y permeabilidad de una red de fracturas complejas para describir el flujo en el sistema de doble porosidad generado por el fracturamiento.

El objetivo central del modelo desarrollado por Wang et al. (2015) es proveer una representación más realista del flujo que se da en las distintas regiones que rodean a un pozo horizontal hidráulicamente fracturado, para propiciar la generación de curvas tipo más confiables que puedan emplearse para el análisis de pruebas de presión en yacimientos de *tight oil* y, de manera general, en yacimientos compactos.

El desarrollo del modelo propuesto por Wang et al. (2015), así como un análisis de sensibilidad del mismo, se presenta a continuación.

### 2.2.1. Geometría de flujo hipotética y metodología de desarrollo

En la **Figura 2.7** se esquematiza la geometría de flujo tri-lineal que hipotéticamente se espera de un yacimiento con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado. Para el desarrollo de su modelo, Wang et al. (2015) consideraron tres regiones de flujo lineal: flujo a través de la fractura hidráulica (Región 1), flujo en la red de fracturas complejas creada por la estimulación (Región 2), y flujo en la región inalterada del yacimiento (Región 3). En el esquema,  $b_f$  es la apertura media de la fractura hidráulica,  $x_e$  y  $y_e$  representan los límites del yacimiento en la dirección de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente, y  $x_f$  es la longitud de la fractura hidráulica.

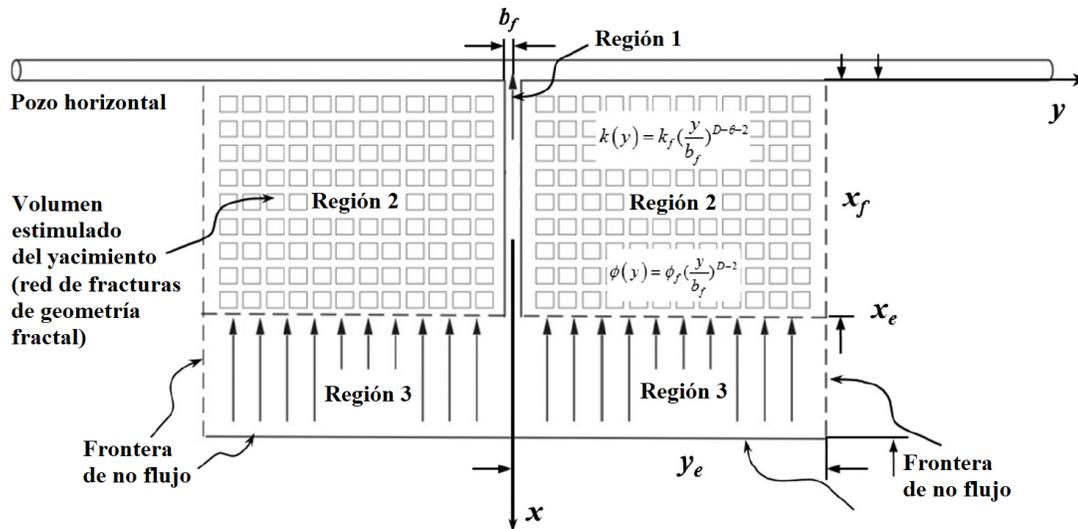


Figura 2.7: Esquemización de la geometría de flujo tri-lineal para un yacimiento con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado. Adaptado de Wang et al. (2015).

En realidad, el esquema presentado por Wang et al. (2015) es una adaptación de la esquematización realizada por Brown et al. (2011) para esta geometría de flujo, la cual puede verse esbozada en la **Figura 2.8**. Las tres regiones de flujo contiguas a través de las cuales se da el flujo son: la zona no alterada del yacimiento que se ubica más allá de la punta de las fracturas hidráulicas (Región 3), la zona del yacimiento que queda entre las fracturas hidráulicas (Región 2) y las fracturas hidráulicas (Región 1). Como se ha mencionado antes, la Región 2 del yacimiento se asume caracterizada por la presencia de una red de fracturas complejas, mientras que, de manera hipotética, las fracturas hidráulicas serán de conductividad finita, y serán equidistantes entre sí, espaciadas por una distancia  $y_e$  (de esta forma puede entenderse la presencia de las fronteras de no flujo esquematizadas).

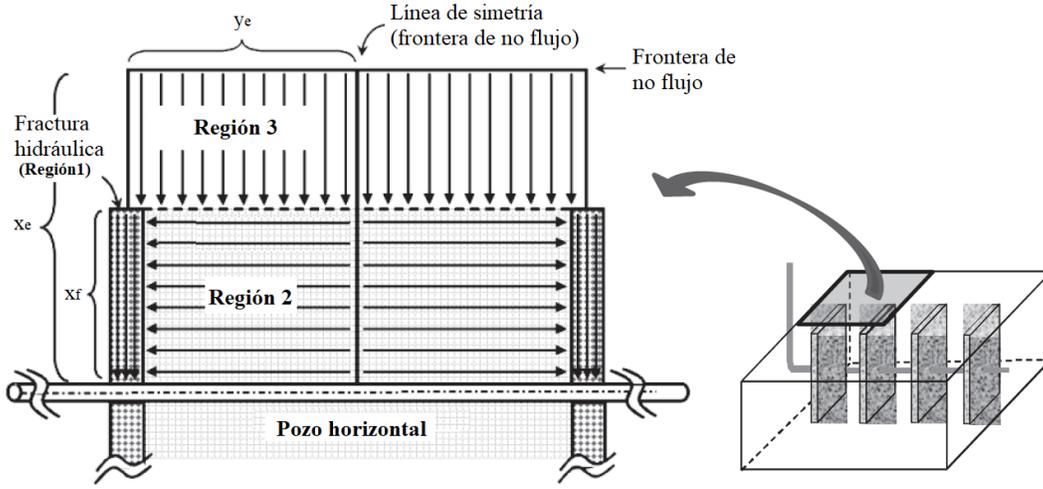


Figura 2.8: Esquematación de la geometría de flujo tri-lineal para un yacimiento con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado. Adaptado de Brown et al. (2011).

El modelo en cuestión fue desarrollado bajo la hipótesis de un flujo monofásico de un fluido de compresibilidad constante. La caracterización de la red de fracturas complejas en la Región 2 se llevó a cabo empleando las expresiones presentadas por Acuna et al. (1995) (ecuaciones 1.30 y 1.31), considerando que la dimensión euclidiana del medio en el que se incorpora la red de fracturas (sistema matriz) es  $d = 2$ , con el objetivo de desarrollar una ecuación de difusión fractal. Las expresiones empleadas para describir la porosidad y permeabilidad fractal en la dirección del eje  $y$  (de acuerdo con el sistema cartesiano indicado en la **Figura 2.7**) se muestran en las ecuaciones 2.21 y 2.22.

$$\phi(y) = \phi_f \left( \frac{y}{b_f} \right)^{D-2} \quad (2.21)$$

$$k(y) = k_f \left( \frac{y}{b_f} \right)^{D-2-\theta} \quad (2.22)$$

Donde  $\phi_f$  y  $k_f$  representan a la porosidad y permeabilidad de fractura en la Región 2, estimadas en la cara de la fractura (en la frontera de flujo compartida por la Región 1 y la Región 2), respectivamente,  $D$  corresponde a la dimensión fractal de la red de fracturas, y  $\theta$  es el índice de conectividad característico de la difusión en la Región 2.

### 2.2.2. Desarrollo matemático del modelo fractal

Wang et al. (2015) desarrollaron su modelo fractal en coordenadas cartesianas

para un yacimiento rectangular con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado, donde la fractura es totalmente penetrante y se propaga verticalmente, además de poseer conductividad finita, es decir, la caída de presión dentro de la fractura no es despreciable. En cada región, el flujo es representado mediante la ecuación de difusión para flujo monofásico y dos condiciones de frontera, además, el flujo entre regiones se describe relacionando dichas ecuaciones a través de condiciones de frontera o mediante términos de producción (fuentes o sumideros).

Los autores definen las siguientes variables adimensionales:

$$x_d = \frac{x}{x_f} \quad (2.23)$$

$$y_d = \frac{y}{b_f} \quad (2.24)$$

$$b_d = \frac{b_f}{x_f} \quad (2.25)$$

Donde  $x_d$  y  $y_d$  son la distancia adimensional en dirección de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente, y  $b_d$  es la apertura media adimensional de la fractura hidráulica.

$$p_d = \frac{k_f h (p_i - p)}{q_o B_o \mu_o} \quad (2.26)$$

$$t_d = \frac{k_f t}{\phi_2 c_{t2} \mu_o x_f^2} \quad (2.27)$$

Donde  $p_d$  y  $t_d$  representan a la presión y al tiempo adimensional, respectivamente,  $h$  es el espesor del yacimiento,  $p_i$  es la presión inicial en el yacimiento,  $q_o$  es el gasto de producción de aceite,  $B_o$  hace referencia al factor de volumen de formación del aceite,  $\mu_o$  es la viscosidad del aceite, y  $c_{t2}$  y  $\phi_2$  representan a la compresibilidad y porosidad total de la Región 2 (sistema matriz y fractura), respectivamente.

A continuación, se presenta la derivación de la ecuación de difusión para cada una de las regiones de flujo, sus respectivas condiciones de frontera y su solución en el espacio de Laplace.

### Flujo en la Región 3

Para desarrollar la ecuación de continuidad en la Región 3, primero se plantea un balance de materia para un diferencial de volumen  $\Delta V = V_b = \Delta x \Delta y \Delta z$ , como se muestra en la ecuación 2.28, para el flujo en dirección del eje  $n$ .

$$m_{in} - m_{on} = \bar{V}_n A_{in} \rho_o \Delta t - \bar{V}_n A_{on} \rho_o \Delta t = m_{acn} \quad (2.28)$$

Donde  $m_{in}$  y  $m_{on}$  representan a la masa que entra y sale del sistema de estudio (representado por el diferencial de volumen), respectivamente,  $\bar{V}_n$  es la velocidad del flujo en la dirección del eje  $n$ ,  $A_{in}$  y  $A_{on}$  hacen referencia al área de entrada y salida del flujo en dirección de  $n$ , respectivamente,  $\rho_o$  es la densidad del aceite,  $\Delta t$  es un diferencial de tiempo y  $m_{acn}$  es la masa acumulada en el sistema, la cual puede expresarse como se muestra en la ecuación 2.29.

$$m_{acn} = m|_{t+\Delta t} - m|_t = V_b \phi_m S_f \rho_o|_{t+\Delta t} - V_b \phi_m S_f \rho_o|_t \quad (2.29)$$

En la expresión anterior,  $m$  es la masa presente en el sistema,  $\phi_m$  es la porosidad en la Región 3, o bien, la porosidad de matriz, y  $S_f$  es el índice de saturación de fluido del medio.

Con base en lo anterior, el balance de materia para el diferencial de volumen  $\Delta V$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \left( \bar{V}_x \Delta y \Delta z \rho_o \Delta t \Big|_x - \bar{V}_x \Delta y \Delta z \rho_o \Delta t \Big|_{x+\Delta x} \right) \\ & + \left( \bar{V}_y \Delta x \Delta z \rho_o \Delta t \Big|_y - \bar{V}_y \Delta x \Delta z \rho_o \Delta t \Big|_{y+\Delta y} \right) \\ & + \left( \bar{V}_z \Delta x \Delta y \rho_o \Delta t \Big|_z - \bar{V}_z \Delta x \Delta y \rho_o \Delta t \Big|_{z+\Delta z} \right) \\ & = \Delta x \Delta y \Delta z \phi_m S_f \rho_o|_{t+\Delta t} - \Delta x \Delta y \Delta z \phi_m S_f \rho_o|_t \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si la ecuación 2.30 se multiplica por  $1/\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$ , y se asume que el medio está completamente saturado por un mismo fluido, es decir, que el índice de saturación,  $S_f$ , es igual a uno, se obtiene la ecuación 2.31.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\bar{V}_x \rho_o}{\Delta x} \Big|_x - \frac{\bar{V}_x \rho_o}{\Delta x} \Big|_{x+\Delta x} \right) + \left( \frac{\bar{V}_y \rho_o}{\Delta y} \Big|_y - \frac{\bar{V}_y \rho_o}{\Delta y} \Big|_{y+\Delta y} \right) + \left( \frac{\bar{V}_z \rho_o}{\Delta z} \Big|_z - \frac{\bar{V}_z \rho_o}{\Delta z} \Big|_{z+\Delta z} \right) \\ & = \frac{\phi_m \rho_o}{\Delta t} \Big|_{t+\Delta t} - \frac{\phi_m \rho_o}{\Delta t} \Big|_t \end{aligned} \quad (2.31)$$

Considerando la definición de la derivada, mostrada en la ecuación 2.32.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \quad (2.32)$$

Entonces, la ecuación 2.31 puede escribirse como se indica a continuación:

$$\frac{\partial(\bar{V}_x \rho_o)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}_y \rho_o)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{V}_z \rho_o)}{\partial z} = -\frac{\partial(\phi_m \rho_o)}{\partial t} \quad (2.33)$$

Ahora bien, para derivar la ecuación de difusión se opta por expresar a la ecuación 2.33 en términos de la divergencia, obteniendo como resultado la ecuación 2.34.

$$\nabla \cdot (\bar{V} \rho_o) = -\frac{\partial(\phi_m \rho_o)}{\partial t} \quad (2.34)$$

Sabiendo que:

$$\nabla \cdot (\bar{V} \rho_o) = \bar{V} \nabla \rho_o + \rho_o \nabla \bar{V} \quad (2.35)$$

Y siendo la densidad del aceite,  $\rho_o$ , una función de la presión en la Región 3,  $p_3$ , resulta:

$$\rho_o(p_3) \therefore \nabla \rho_o \propto \nabla p_3 \quad (2.36)$$

Entonces, desarrollando el gradiente de la densidad,  $\nabla \rho_o$ , y aplicando la regla de la cadena:

$$\nabla \rho_o = \left( \frac{\partial p_3}{\partial x}, \frac{\partial p_3}{\partial y}, \frac{\partial p_3}{\partial z} \right) \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} = \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} \nabla p_3 \quad (2.37)$$

Por lo tanto, la ecuación 2.35 puede escribirse de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot (\bar{V} \rho_o) = \bar{V} \left( \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} \nabla p_3 \right) + \rho_o \nabla \bar{V} \quad (2.38)$$

Si se considera la ecuación de Darcy (mostrada anteriormente en la 2.1 para un flujo de gas), se tiene:

$$\nabla \cdot (\bar{V} \rho_o) = \left( -\frac{k}{\mu_o} \nabla p_3 \right) \left( \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} \nabla p_3 \right) + \rho_o \nabla \left( -\frac{k}{\mu_o} \nabla p_3 \right) \quad (2.39)$$

Suponiendo al medio en la Región 3 como isótropo y homogéneo, puede entonces pensarse en la permeabilidad al fluido,  $k$ , como una propiedad escalar y ya no tensorial, y por lo tanto:

$$k_x = k_y = k_z = k_m, \quad \frac{\partial k_m}{\partial x} = \frac{\partial k_m}{\partial y} = \frac{\partial k_m}{\partial z} \quad (2.40)$$

Donde  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  representan a la permeabilidad al fluido que satura el medio en la dirección de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente, y  $k_m$  es la permeabilidad al aceite en la Región 3, o bien, la permeabilidad en la matriz. Con base en lo anterior, la

ecuación 2.39 puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot (\bar{V} \rho_o) = -\frac{k_m}{\mu_o} \left( \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} (\nabla p_3)^2 + \rho_o \nabla^2 p_3 \right) \quad (2.41)$$

La compresibilidad de un fluido, en este caso aceite, puede definirse como:

$$c_f = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} \quad (2.42)$$

Por lo tanto:

$$\rho_o c_f = \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} \quad (2.43)$$

Así, sustituyendo la ecuación 2.43 en la ecuación 2.41 se llega a:

$$\nabla \cdot (\bar{V} \rho_o) = -\frac{k_m}{\mu_o} (\rho_o c_f (\nabla p_3)^2 + \rho_o \nabla^2 p_3) \quad (2.44)$$

Dado que se considera un régimen de flujo laminar (pues se emplea como ecuación de transporte que describe el flujo a la ecuación de Darcy), se asume que las fuerzas viscosas gobiernan el flujo, mientras que las fuerzas de inercia resultan despreciables, por lo que puede deducirse entonces que la velocidad del fluido,  $\bar{V}$ , será de magnitud pequeña y, por ende, también el gradiente de la presión,  $\nabla p_3$ , será de magnitud pequeña (recordar que  $\bar{V} \propto \nabla p_3$ ). Por ello, se cumple la siguiente condición:

$$\rho_o c_f (\nabla p_3)^2 \ll \rho_o \nabla^2 p_3 \quad (2.45)$$

Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación 2.44 puede simplificarse a la siguiente forma:

$$\nabla \cdot (\bar{V} \rho_o) = -\frac{k_m}{\mu_o} (\rho_o \nabla^2 p_3) \quad (2.46)$$

Si se sustituye la ecuación 2.46 en la ecuación 2.34, se obtiene la ecuación 2.47.

$$\frac{k_m}{\mu_o} (\rho_o \nabla^2 p_3) = \frac{\partial(\phi_m \rho_o)}{\partial t} \quad (2.47)$$

Sabiendo que tanto la densidad del fluido como la porosidad del medio son funciones de la presión, es decir,  $\rho_o(p_3)$  y  $\phi_m(p_3)$ , aplicando la regla de la cadena al lado derecho de la ecuación 2.47 se obtiene:

$$\frac{\partial(\phi_m \rho_o)}{\partial t} = \phi_m \rho_o \left( \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p_3} + \frac{1}{\phi_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_3} \right) \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (2.48)$$

La compresibilidad de un medio poroso, en este caso la Región 3, puede definirse como:

$$c_F = \frac{1}{\phi_m} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_3} \quad (2.49)$$

Y si se define a la compresibilidad total del sistema en la Región 3 (compresibilidad total de la matriz),  $c_{tm}$ , en la ecuación 2.50.

$$c_{tm} = c_f + c_F \quad (2.50)$$

La ecuación 2.48 puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(\phi_m \rho_o)}{\partial t} = \phi_m \rho_o c_{tm} \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (2.51)$$

Al sustituir la ecuación 2.51 en 2.47 se llega a la ecuación 2.52.

$$\nabla^2 p_3 = \frac{\phi_m \mu_o c_{tm}}{k_m} \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (2.52)$$

Definiendo al coeficiente de difusividad hidráulica,  $\eta$ , como se indica a continuación:

$$\eta = \frac{k_m}{\phi_m \mu_o c_{tm}} \quad (2.53)$$

Sustituyendo la ecuación 2.53 en la ecuación 2.52 resulta:

$$\nabla^2 p_3 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (2.54)$$

La ecuación 2.54 es la ecuación de difusión para un fluido de compresibilidad constante que fluye a través de un medio isótropo y homogéneo. Si se desarrolla el laplaciano, se llega a la ecuación 2.55.

$$\frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_3}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (2.55)$$

Finalmente, siguiendo la hipótesis de flujo lineal en la Región 3, la ecuación de difusión para dicha región se muestra en la ecuación 2.56

$$\frac{k_m}{\mu_o} \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} = \phi_m c_{tm} \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (2.56)$$

Para homogeneizar el problema y facilitar el manejo de la ecuación 2.56, se realiza un cambio de variable y se aplica la regla de la cadena con el objetivo de adimensionalarla, obteniendo así la ecuación 2.57, donde  $p_{3d}$  representa a la presión adimensional en la Región 3.

$$\frac{\partial}{\partial x_d} \left( \frac{\partial p_3}{\partial p_{3d}} \frac{\partial p_{3d}}{\partial x_d} \frac{\partial x_d}{\partial x} \right) \frac{\partial x_d}{\partial x} = \frac{\phi_m \mu_o c_{tm}}{k_m} \frac{\partial p_3}{\partial p_{3d}} \frac{\partial p_{3d}}{\partial t_d} \frac{\partial t_d}{\partial t} \quad (2.57)$$

De las variables adimensionales definidas en las ecuaciones 2.23, 2.24, 2.26 y 2.27, es posible obtener las siguientes derivadas auxiliares.

$$\frac{\partial x_d}{\partial x} = \frac{1}{x_f} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial y_d}{\partial y} = \frac{1}{b_f} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial p_{3d}} = -\frac{q_o B_o \mu_o}{k_f h} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial t_d}{\partial t} = \frac{k_f}{\phi_2 c_{t2} \mu_o x_f^2} \quad (2.61)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.58, 2.59, 2.60 y 2.61 en 2.57, se obtiene la ecuación de difusión para la Región 3 en su forma adimensional.

$$\frac{\partial^2 p_{3d}}{\partial x_d^2} = \frac{\phi_m c_{tm} k_f}{\phi_2 c_{t2} k_m} \frac{\partial p_{3d}}{\partial t_d} \quad (2.62)$$

Para el flujo en la Región 3, la ecuación 2.62 estará sujeta a las condiciones de frontera e inicial enunciadas a continuación.

- **Condición de frontera interna:** se asume la continuidad de la presión en las Regiones 3 y 2.

$$p_{3d}|_{x_d=1} = p_{2d}|_{x_d=1} \quad (2.63)$$

- **Condición de frontera externa:** se asume la existencia de una frontera de no flujo.

$$\left. \frac{\partial p_{3d}}{\partial x_d} \right|_{x_d=x_{ed}} = 0 \quad (2.64)$$

- **Condición inicial:** presión inicial del yacimiento,  $p_i$ .

$$p_{3d}(x_d, t_d = 0) = 0 \quad (2.65)$$

Ahora bien, para resolver la ecuación 2.62, se opta por obtener su transformada de Laplace.

Sea:

$$A = \frac{\phi_m c_{tm} k_f}{\phi_2 c_{t2} k_m} = cte. \quad (2.66)$$

Entonces, la transformada de Laplace de la ecuación 2.62 se muestra a continuación:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 p_{3d}}{\partial x_d^2} \right\} = A(sF(s) - f(0)) \quad (2.67)$$

Donde  $s$  es la variable de Laplace y  $F(s) = p_{3d}$ . Tomando en cuenta la condición inicial mostrada en la ecuación 2.65, la ecuación 2.67 puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{3d}}{\partial x_d^2} - A s \bar{p}_{3d} = 0 \quad (2.68)$$

O bien:

$$y'' - A s y = 0 \quad (2.69)$$

Para resolver la ecuación 2.69 se obtiene su polinomio característico, mismo que es mostrado en la ecuación 2.70.

$$(D^2 - A s)y = 0 \quad (2.70)$$

Al resolver el polinomio característico se obtiene  $D = \pm\sqrt{As}$ , por lo que la solución general la ecuación 2.68 está dada por:

$$y = c_1 e^{\sqrt{As}x_d} + c_2 e^{-\sqrt{As}x_d} = \bar{p}_{3d} \quad (2.71)$$

En la ecuación 2.71,  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración, cuyo valor será determinado mediante las condiciones de frontera anteriormente planteadas. Así, derivando la ecuación 2.71 con respecto a  $x_d$  y sustituyendo la condición de frontera externa mostrada en la ecuación 2.64, resulta:

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{3d}}{\partial x_d} \right|_{x_d=x_{ed}} = c_1 \left( \sqrt{As} e^{\sqrt{As}x_{ed}} \right) + c_2 \left( -\sqrt{As} e^{-\sqrt{As}x_{ed}} \right) = 0 \quad (2.72)$$

Si la ecuación 2.72 se resuelve para  $c_2$  se llega a:

$$c_2 = c_1 e^{2\sqrt{As}x_{ed}} \quad (2.73)$$

De este modo, si se sustituye la ecuación 2.73 en 2.71 se obtiene como resultado la ecuación 2.74.

$$\bar{p}_{3d} = c_1 e^{\sqrt{As}x_d} + \left( c_1 e^{2\sqrt{As}x_{ed}} \right) e^{-\sqrt{As}x_d} \quad (2.74)$$

Evaluando la ecuación 2.74 en  $x_d = 1$  y sustituyendo la condición de frontera interna indicada en la ecuación 2.63 se tiene:

$$\bar{p}_{3d}|_{x_d=1} = c_1 e^{\sqrt{As}} + c_1 e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}} = \bar{p}_{2d}|_{x_d=1} \quad (2.75)$$

Resolviendo la ecuación 2.75 para  $c_1$ :

$$c_1 = \frac{p_{2d}^-|_{x_d=1}}{e^{\sqrt{As}} + e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}}} \quad (2.76)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.73 y 2.76 en la derivada de  $p_{3d}^-$  con respecto a  $x_d$ , la expresión resultante se muestra en la ecuación 2.77.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{3d}^-}{\partial x_d} &= \left( \frac{p_{2d}^-|_{x_d=1}}{e^{\sqrt{As}} + e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}}} \right) \left( \sqrt{As} e^{\sqrt{As}x_d} \right) \\ &- \left( \frac{p_{2d}^-|_{x_d=1}}{e^{\sqrt{As}} + e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}}} \right) \left( e^{2\sqrt{As}x_{ed}} \right) \left( \sqrt{As} e^{-\sqrt{As}x_d} \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Al evaluar la ecuación 2.77 en  $x_d = 1$  resulta:

$$\left. \frac{\partial p_{3d}^-}{\partial x_d} \right|_{x_d=1} = \left[ \left( \frac{p_{2d}^-|_{x_d=1}}{e^{\sqrt{As}} + e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}}} \right) \left( \sqrt{As} \right) \right] \left( e^{\sqrt{As}} - e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}} \right) \quad (2.78)$$

Sabiendo que:

$$\frac{e^{\sqrt{As}} - e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}}}{e^{\sqrt{As}} + e^{2\sqrt{As}x_{ed}-\sqrt{As}}} = \frac{e^{\sqrt{As}} - e^{\sqrt{As}x_{ed}}}{e^{\sqrt{As}} + e^{\sqrt{As}x_{ed}}} = \tanh \left( \sqrt{As} - \sqrt{As}x_{ed} \right) \quad (2.79)$$

La ecuación 2.78 puede reescribirse entonces como:

$$\left. \frac{\partial p_{3d}^-}{\partial x_d} \right|_{x_d=1} = \left( \sqrt{As} \right) \left( \tanh \left( \sqrt{As} - \sqrt{As}x_{ed} \right) \right) p_{2d}^-|_{x_d=1} \quad (2.80)$$

Sea:

$$a_3 = As = \frac{\phi_m c_{tm} k_f}{\phi_2 c_{t2} k_m} s, \quad s_3 = \sqrt{a_3} \left( \tanh \left( \sqrt{a_3} - \sqrt{a_3}x_{ed} \right) \right) \quad (2.81)$$

Entonces, finalmente, la ecuación 2.80 puede expresarse como se indica en la ecuación 2.82, la cual corresponde a la solución en el espacio de Laplace a la ecuación de difusión para la Región 3.

$$\left. \frac{\partial p_{3d}^-}{\partial x_d} \right|_{x_d=1} = s_3 \left( p_{2d}^-|_{x_d=1} \right) \quad (2.82)$$

## Flujo en la Región 2

Para modelar el flujo a través de la Región 2, pensando en la existencia de una red de fracturas complejas, Wang et al. (2015) establecieron que se trata de un medio con doble porosidad, y optaron por emplear leyes de potencias para describir la porosidad y permeabilidad del sistema (ecuaciones 2.21 y 2.22, respectivamente). El

flujo en la Región 2 se considera perpendicular a la fractura hidráulica, es decir, en la dirección del eje  $y$ .

De manera análoga al procedimiento realizado para la Región 3, es posible obtener la ecuación de difusión para la Región 2, misma que se muestra en la ecuación 2.83.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k(y)}{\mu_o} \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) + q_{mf} + q_{32} = c_{tf} \phi(y) \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (2.83)$$

Donde  $p_2$  es la presión de fractura en la Región 2 y  $c_{tf}$  representa a la compresibilidad total de la red de fracturas que existe en ésta misma.

Es importante mencionar que el medio en la Región 2 se supone heterogéneo, siendo  $\phi(y)$  y  $k(y)$ , la porosidad y permeabilidad fractal en la Región 2, funciones de la posición; además, en la ecuación de difusión para la Región 2 se toman en cuenta también dos términos fuente o términos de producción,  $q_{mf}$  y  $q_{32}$ , que representan, respectivamente, al gasto del flujo interporoso y al gasto del flujo que se da de la Región 3 a la Región 2 (con el objetivo de analizar su efecto en la caída de presión total del sistema), ambos por unidad volumétrica, cuya definición se muestra en las ecuaciones 2.84 y 2.85, donde  $p_m$  es la presión de matriz en la Región 2.

Las expresiones en cuestión fueron previamente propuestas por Wang et al. (2014), quienes a partir del concepto de flujo interporoso (propuesto inicialmente por Barenblatt et al. (1960) y, posteriormente, aplicado por Warren and Root (1963) a la ingeniería petrolera) y la ley de Darcy, desarrollaron las ecuaciones 2.84 y 2.85, respectivamente, mediante las cuales proponen que dichas tasas de flujo varían en la dirección del eje  $y$  con una tendencia similar a la de la porosidad de fractura en la Región 2.

$$q_{mf} = \frac{\alpha k_m}{\mu_o} (p_m - p_2) \left( \frac{y}{b_f} \right)^{D-2} \quad (2.84)$$

$$q_{32} = \frac{k_m}{\mu_o} \frac{1}{x_f} \frac{\partial p_3}{\partial x} \Big|_{x=x_f} \left( \frac{y}{b_f} \right)^{D-2} \quad (2.85)$$

Sustituyendo las relaciones fractales de porosidad y permeabilidad en la ecuación 2.83 se obtiene:

$$\frac{k_f}{\mu_o} \left( \frac{y}{b_f} \right)^{D-2-\theta} \left[ \frac{D-2-\theta}{y} \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} \right] + q_{mf} + q_{32} = c_{tf} \left[ \phi_f \left( \frac{y}{b_f} \right)^{D-2} \frac{\partial p_2}{\partial t} \right] \quad (2.86)$$

Ahora bien, sustituyendo las ecuaciones 2.84 y 2.85 en la ecuación 2.86 y arreglando de manera algebraica se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{D-2-\theta}{y} \frac{\partial p_2}{\partial y} + \left(\frac{y}{b_f}\right)^\theta \frac{\alpha k_m}{k_f} (p_m - p_2) + \left(\frac{y}{b_f}\right)^\theta \frac{k_m}{k_f} \frac{1}{x_f} \frac{\partial p_3}{\partial x} \Big|_{x=x_f} \\ = \left(\frac{y}{b_f}\right)^\theta \frac{\mu_o c_{tf} \phi_f}{k_f} \frac{\partial p_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.87)$$

También, buscando homogeneizar el problema y facilitar el manejo de las ecuaciones, se adimensiona la ecuación 2.87, realizando un cambio de variable y aplicando la regla de la cadena, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_d} \left( \frac{\partial p_2}{\partial p_{2d}} \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} \frac{\partial y_d}{\partial y} \right) \frac{\partial y_d}{\partial y} + \frac{D-2-\theta}{y} \frac{\partial p_2}{\partial p_{2d}} \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} \frac{\partial y_d}{\partial y} + \left(\frac{y}{b_f}\right)^\theta \alpha \frac{k_m}{k_f} (p_m - p_2) \\ + \left(\frac{y}{b_f}\right)^\theta \frac{k_m}{k_f} \frac{1}{x_f} \left( \frac{\partial p_3}{\partial p_{3d}} \frac{\partial p_{3d}}{\partial x_d} \frac{\partial x_d}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_f} = \left(\frac{y}{b_f}\right)^\theta \frac{\mu_o c_{tf} \phi_f}{k_f} \frac{\partial p_2}{\partial p_{2d}} \frac{\partial p_{2d}}{\partial t_d} \frac{\partial t_d}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Al sustituir las variables dimensionales definidas inicialmente (ecuaciones 2.23, 2.24 y 2.25), así como las derivadas auxiliares mostradas en las ecuaciones 2.58, 2.59, 2.60 y 2.61 y, además, arreglando de forma algebraica, la ecuación 2.88 resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{2d}}{\partial y_d^2} + \left(\frac{D-2-\theta}{y_d}\right) \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} + y_d^\theta b_d^2 \frac{k_m}{k_f} \frac{p_{3d}}{\partial x_d} \Big|_{x_d=1} + y_d^\theta b_d^2 x_f^2 \alpha \frac{k_m}{k_f} (p_{md} - p_{2d}) \\ = y_d^\theta b_d^2 \left( \frac{c_{tf} \phi_f}{c_{t2} \phi_2} \right) \frac{\partial p_d}{\partial t_d} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Para la Región 2, las definiciones del coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , y la relación de almacenamiento de las fracturas,  $\omega$ , propuestas por Warren and Root (1963), pueden expresarse como:

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} x_f^2 \quad \omega = \frac{c_{tf} \phi_f}{c_{t2} \phi_2} \quad (2.90)$$

Por lo tanto, la ecuación de difusión, en su forma adimensional, para la Región 2 se muestra en la ecuación 2.91.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{2d}}{\partial y_d^2} + \left(\frac{D-2-\theta}{y_d}\right) \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} + \lambda y_d^\theta b_d^2 (p_{md} - p_{2d}) + y_d^\theta b_d^2 \frac{k_m}{k_f} \frac{p_{3d}}{\partial x_d} \Big|_{x_d=1} \\ = y_d^\theta b_d^2 \omega \frac{\partial p_d}{\partial t_d} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Para el flujo en la Región 2, la ecuación 2.91 estará sujeta a las condiciones de frontera e inicial enunciadas a continuación.

- **Condición de frontera interna:** se asume la continuidad de la presión en la cara de la fractura.

$$p_{2d}|_{y_d=1} = p_{1d}|_{y_d=1} \quad (2.92)$$

- **Condición de frontera externa:** se asume la existencia de una frontera de no flujo.

$$\left. \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} \right|_{y_d=y_{ed}} = 0 \quad (2.93)$$

- **Condición inicial:** presión inicial del yacimiento,  $p_i$ .

$$p_{2d}(y_d, t_d = 0) = 0 \quad (2.94)$$

Para resolver la ecuación 2.91, primero se obtiene su transformada de Laplace.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 p_{2d}}{\partial y_d^2} + \left( \frac{D-2-\theta}{y_d} \right) \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} + \lambda y_d^\theta b_d^2 (p_{md} - p_{2d}) + y_d^\theta b_d^2 \frac{k_m}{k_f} \frac{p_{3d}}{\partial x_d} \Big|_{x_d=1} \right\} \\ = y_d^\theta b_d^2 \omega (sG(s) - g(0)) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde  $G(s) = \bar{p}_{2d}$ . Tomando en cuenta la condición inicial mostrada en la ecuación 2.94, la ecuación 2.95 puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}_{2d}}{\partial y_d^2} + \left( \frac{D-2-\theta}{y_d} \right) \frac{\partial \bar{p}_{2d}}{\partial y_d} + \lambda y_d^\theta b_d^2 (\bar{p}_{md} - \bar{p}_{2d}) + y_d^\theta b_d^2 \frac{k_m}{k_f} \frac{\bar{p}_{3d}}{\partial x_d} \Big|_{x_d=1} \\ = y_d^\theta b_d^2 \omega s \bar{p}_{2d} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Ahora bien, si se considera al modelo de doble porosidad de Warren and Root (1963), la ecuación 2.97 (mostrada en su forma adimensional) puede emplearse para describir las condiciones del flujo interporoso entre el sistema matriz y el sistema fractura.

$$\lambda(p_{md} - p_{2d}) = (1 - \omega) \frac{\partial p_{md}}{\partial t_d} \quad (2.97)$$

Para expresar a la presión adimensional de la matriz en la Región 2,  $\bar{p}_{md}$ , en términos de la presión adimensional de fractura en la Región 2,  $\bar{p}_{2d}$ , ambas en el espacio de Laplace, se obtiene la transformada de Laplace de la ecuación 2.97, la cual se muestra a continuación.

$$\bar{p}_{md} = \frac{\lambda \bar{p}_{2d}}{\lambda + (1 - \omega)s} \quad (2.98)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones 2.82 y 2.98 en la ecuación 2.96 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}_{2d}}{\partial y_d^2} + \left( \frac{D-2-\theta}{y_d} \right) \frac{\partial \bar{p}_{2d}}{\partial y_d} + \lambda y_d^\theta b_d^2 \left( \frac{\lambda \bar{p}_{2d}}{\lambda + (1-\omega)s} - \bar{p}_{2d} \right) \\ + y_d^\theta b_d^2 \frac{k_m}{k_f} (s_3 \bar{p}_{2d}|_{x_d=1}) = y_d^\theta b_d^2 \omega s \bar{p}_{2d} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Factorizando términos, la ecuación 2.99 puede escribirse como se indica en la ecuación 2.100.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{2d}}{\partial y_d^2} + \left( \frac{D-2-\theta}{y_d} \right) \frac{\partial \bar{p}_{2d}}{\partial y_d} + y_d^\theta s_2 \bar{p}_{2d} = 0 \quad (2.100)$$

Donde:

$$s_2 = \left( \lambda b_d^2 \left( \frac{\lambda}{\lambda + (1-\omega)s} - 1 \right) + b_d^2 \frac{k_m}{k_f} s_3 - \omega s b_d^2 \right) \quad (2.101)$$

La solución general a la ecuación 2.100, en términos de las funciones de Bessel modificadas <sup>3</sup>, está dada por:

$$\bar{p}_{2d} = y_d^{\alpha_2} [c_1 I_{n_2}(\beta_2 y_d^{\gamma_2}) + c_2 K_{n_2}(\beta_2 y_d^{\gamma_2})] \quad (2.102)$$

En la ecuación 2.102,  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración, mientras que  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ , y  $n_2$  están definidas por las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_2 = \frac{3-D+\theta}{2} \quad \beta_2 = \frac{2\sqrt{-s_2}}{2+\theta} \quad \gamma_2 = \frac{2+\theta}{2} \quad n_2 = \frac{3-D+\theta}{2+\theta} \quad (2.103)$$

Si la ecuación 2.102 se deriva con respecto a  $y_d$  se llega a:

$$\frac{\partial \bar{p}_{2d}}{\partial y_d} = \beta_2 \gamma_2 y_d^{\alpha_2 + \gamma_2 - 1} [c_1 I_{n_2-1}(\beta_2 y_d^{\gamma_2}) - c_2 K_{n_2-1}(\beta_2 y_d^{\gamma_2})] \quad (2.104)$$

Al sustituir la condición de frontera externa, dada por la ecuación 2.93, en la ecuación 2.104 resulta:

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{2d}}{\partial y_d} \right|_{y_d=y_{ed}} = \sqrt{-s_2} y_{ed}^{\alpha_2 + \gamma_2 - 1} [c_1 I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed}^{\gamma_2}) - c_2 K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed}^{\gamma_2})] = 0 \quad (2.105)$$

Por otro lado, sustituyendo la condición de frontera interna, dada por la ecuación 2.92, en la ecuación 2.102 se obtiene como resultado:

$$\bar{p}_{2d}|_{y_d=1} = c_1 I_{n_2}(\beta_2) + c_2 K_{n_2}(\beta_2) = \bar{p}_{1d}|_{y_d=1} \quad (2.106)$$

---

<sup>3</sup> $I_n(x)$  es la función de Bessel modificada del primer tipo, mientras que  $K_n(x)$  representa a la función de Bessel modificada del segundo tipo, ambas correspondientes a cualquier orden real  $n$  (Bowman, 2012).

Resolviendo el sistema de ecuaciones conformado por 2.105 y 2.106 para las constantes de integración,  $c_1$  y  $c_2$ , se obtienen las siguientes soluciones:

$$c_1 = \frac{K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2)}{I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2) K_{n_2}(\beta_2) + I_{n_2}(\beta_2) K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2)} \bar{p}_{1d} \Big|_{y_d=1} \quad (2.107)$$

$$c_2 = \frac{I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2)}{I_{n_2}(\beta_2) K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2) + I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2) K_{n_2}(\beta_2)} \bar{p}_{1d} \Big|_{y_d=1} \quad (2.108)$$

La solución a la ecuación de difusión, en el espacio de Laplace, para la Región 2, se obtiene al sustituir las ecuaciones 2.107 y 2.108 en 2.102. Ahora bien, para obtener una expresión que represente al flujo que se da de la Región 2 a la Región 1, se evalúa la ecuación 2.104 en  $y_d = 1$  y, además, se sustituyen los valores de  $c_1$  y  $c_2$ . De este modo se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{p}_{2d}}{\partial y_d} \Big|_{y_d=1} = s_4 \bar{p}_{1d} \Big|_{y_d=1} \quad (2.109)$$

Con:

$$s_4 = \sqrt{-s_2} \frac{I_{n_2-1}(\beta_2) K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2) - I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2) K_{n_2-1}(\beta_2)}{I_{n_2}(\beta_2) K_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2) + I_{n_2-1}(\beta_2 y_{ed} \gamma^2) K_{n_2}(\beta_2)} \quad (2.110)$$

### Flujo en la Región 1

De forma análoga a lo realizado para las Regiones 3 y 2, para la Región 1, que representa a la fractura hidráulica, se asume un flujo lineal en la dirección del eje  $x$ , por lo que la ecuación de difusión para dicho caso puede escribirse como se indica en la ecuación 2.111.

$$\frac{k_1}{\mu_o} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + q_{21} = \phi_1 c_{t1} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (2.111)$$

En la ecuación 2.111,  $p_1$  es la presión en la Región 1,  $\phi_1$  y  $k_1$  representan a la permeabilidad y porosidad de la fractura hidráulica, respectivamente,  $c_{t1}$  hace referencia a la compresibilidad total de la fractura hidráulica, y  $q_{21}$  es el gasto del flujo por unidad de volumen que se da de la Región 2 a la Región 1. Este último parámetro puede reescribirse si se emplea la ley de Darcy, y la ecuación 2.111 podría expresarse como a continuación.

$$\frac{k_1}{\mu_o} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{k_f}{\mu_o b_f} \frac{\partial p_2}{\partial y} \Big|_{y=b_f} = \phi_1 c_{t1} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (2.112)$$

La ecuación 2.112 es la ecuación de difusión para la Región 1 y, tal como se realizó anteriormente, para adimensionarla primero debe derivarse y aplicarse la regla de la

cadena, resultando así:

$$\frac{k_1}{\mu_o} \frac{\partial}{\partial x_d} \left( \frac{\partial p_1}{\partial p_{1d}} \frac{\partial p_{1d}}{\partial x_d} \frac{\partial x_d}{\partial x} \right) + \frac{k_f}{\mu_o b_f} \left( \frac{\partial p_2}{\partial p_{2d}} \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} \frac{\partial y_d}{\partial y} \right) \Big|_{y_d=1} = \phi_1 c_{t1} \frac{\partial p_1}{\partial p_{1d}} \frac{\partial p_{1d}}{\partial t_d} \frac{\partial t_d}{\partial t} \quad (2.113)$$

Al sustituir las derivadas auxiliares mostradas en las ecuaciones 2.58, 2.59, 2.60 y 2.61 y arreglar de manera algebraica, se obtiene la ecuación de difusión para la Región 1 en su forma adimensional, la cual es mostrada en la ecuación 2.114.

$$\frac{\partial^2 p_{1d}}{\partial x_d^2} + a_1 \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} \Big|_{y_d=1} = b_1 \frac{\partial p_{1d}}{\partial t_d} \quad (2.114)$$

Donde:

$$a_1 = \frac{k_f x_f^2}{k_1 b_f^2} \quad b_1 = \frac{\phi_1 c_{t1} k_f}{\phi_2 c_{t2} k_1} \quad (2.115)$$

La ecuación 2.114 está sujeta a las condiciones de frontera e inicial presentadas a continuación.

- **Condición de frontera interna:** se asume la existencia de producción por almacenamiento en el pozo;  $C_{df}$  es el coeficiente de almacenamiento adimensional y  $p_{wd}$  representa a la presión adimensional de fondo fluyendo.

$$\frac{\partial p_{1d}}{\partial x_d} \Big|_{x_d=0} = \psi \left( 1 - C_{df} \frac{\partial p_{wd}}{\partial t_d} \right) \quad \psi = -\frac{\pi k_f x_f}{k_1 b_f} \quad (2.116)$$

- **Condición de frontera externa:** se asume la existencia de una frontera de no flujo.

$$\frac{\partial p_{1d}}{\partial x_d} \Big|_{x_d=1} = 0 \quad (2.117)$$

- **Condición inicial:** presión inicial del yacimiento,  $p_i$ .

$$p_{1d}(x_d, t_d = 0) = 0 \quad (2.118)$$

Para resolver la ecuación 2.114, se obtiene su transformada de Laplace.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 p_{1d}}{\partial x_d^2} \right\} + a_1 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial p_{2d}}{\partial y_d} \Big|_{y_d=1} \right\} = b_1 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial p_{1d}}{\partial t_d} \right\} \quad (2.119)$$

O bien:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{1d}}{\partial x_d^2} + a_1 \frac{\partial \bar{p}_{2d}}{\partial y_d} \Big|_{y_d=1} = b_1 (sH(s) - h(0)) \quad (2.120)$$

Donde  $H(s) = p_{1d}^-$ . Considerando la condición inicial mostrada en la ecuación 2.118, la ecuación 2.120 puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 p_{1d}^-}{\partial x_d^2} + a_1 \frac{\partial p_{2d}^-}{\partial y_d} \Big|_{y_d=1} = b_1 s p_{1d}^- \quad (2.121)$$

Si se sustituye la ecuación 2.109 en la ecuación 2.121 se llega a:

$$\frac{\partial^2 p_{1d}^-}{\partial x_d^2} = \delta p_{1d}^- \quad (2.122)$$

Con:

$$\delta = s b_1 - a_1 s_4 \quad (2.123)$$

La ecuación 2.122 puede también escribirse de la siguiente manera:

$$y'' - \delta y = 0 \quad (2.124)$$

Para resolver la ecuación 2.124 se obtiene su polinomio característico, mismo que es mostrado en la ecuación 2.125.

$$(D^2 - \delta) = 0 \quad (2.125)$$

Al resolver el polinomio característico se obtiene  $D = \pm\sqrt{\delta}$ , por lo que la solución general a la ecuación 2.122 está dada por:

$$y = c_1 e^{-\sqrt{\delta}x_d} + c_2 e^{\sqrt{\delta}x_d} = p_{1d}^- \quad (2.126)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración, y su valor se determinará mediante las condiciones de frontera anteriormente planteadas. Así, derivando la ecuación 2.126 con respecto a  $x_d$ , resulta:

$$\frac{\partial p_{1d}^-}{\partial x_d} = c_1 \left(-\sqrt{\delta}\right) e^{-\sqrt{\delta}x_d} + c_2 \left(\sqrt{\delta}\right) e^{\sqrt{\delta}x_d} \quad (2.127)$$

Para sustituir las condiciones de frontera, primero es necesario obtener su transformada de Laplace, por lo que la transformada de Laplace para las condiciones de frontera interna y externa se indican en las ecuaciones 2.128 y 2.129, respectivamente.

$$\frac{\partial p_{1d}^-}{\partial x_d} \Big|_{x_d=0} = \frac{\psi}{s} (1 - s^2 C_{df} p_{wd}^-) \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial p_{1d}^-}{\partial x_d} \Big|_{x_d=1} = 0 \quad (2.129)$$

Ahora bien, sustituyendo la ecuación 2.128 en la ecuación 2.127 se tiene:

$$\frac{\partial p_{1d}^-}{\partial x_d} \Big|_{x_d=0} = -\sqrt{\delta}c_1 + \sqrt{\delta}c_2 = \frac{\psi}{s} (1 - s^2 C_{df} p_{wd}^-) \quad (2.130)$$

De manera similar, si se sustituye la ecuación 2.129 en la ecuación 2.127 se llega a:

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{1d}}{\partial x_d} \right|_{x_d=1} = -\sqrt{\delta} c_1 e^{-\sqrt{\delta}} + \sqrt{\delta} c_2 e^{\sqrt{\delta}} = 0 \quad (2.131)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones conformado por las ecuaciones 2.130 y 2.131 para las constantes de integración,  $c_1$  y  $c_2$ , se obtienen las siguientes soluciones:

$$c_1 = \frac{\psi (1 - s^2 C_{df} \bar{p}_{wd})}{s \sqrt{\delta} - \sqrt{\delta} e^{2\sqrt{\delta}}} e^{2\sqrt{\delta}} \quad (2.132)$$

$$c_2 = \frac{\psi (1 - s^2 C_{df} \bar{p}_{wd})}{s \sqrt{\delta} - \sqrt{\delta} e^{2\sqrt{\delta}}} \quad (2.133)$$

Al sustituir las ecuaciones 2.132 y 2.133 en la ecuación 2.126 se obtiene el resultado mostrado en la ecuación 2.134, el cual representa a la solución, en el espacio de Laplace, de la ecuación de difusión para la Región 1.

$$\bar{p}_{1d} = -\frac{\psi e^{-\sqrt{\delta} x_d} (e^{2\sqrt{\delta}} + e^{2\sqrt{\delta} x_d})}{\sqrt{\delta} (e^{2\sqrt{\delta}} - 1) s} (1 - s^2 C_{df} \bar{p}_{wd}) \quad (2.134)$$

### Solución final para la presión de fondo fluyendo

Para tomar en cuenta el efecto del daño a la formación debe partirse de su definición, la cual establece que dicho parámetro puede suponerse como una caída de presión adicional al comportamiento ideal del sistema, por lo que entonces puede establecerse la ecuación 2.135.

$$p_{wd} = \bar{p}_{1d}|_{x_d=0} - S \left. \frac{\partial \bar{p}_{1d}}{\partial x_d} \right|_{x_d=0} \quad (2.135)$$

Donde  $S$  representa al factor de daño. Para obtener una solución general en el espacio de Laplace para la presión adimensional de fondo fluyendo,  $\bar{p}_{wd}$ , es necesario primero evaluar la ecuación 2.134 en  $x_d = 0$ , con lo que se llega a la ecuación 2.136.

$$\bar{p}_{1d}|_{x_d=0} = -\frac{\psi (e^{2\sqrt{\delta}} + 1)}{\sqrt{\delta} (e^{2\sqrt{\delta}} - 1) s} (1 - s^2 C_{df} \bar{p}_{wd}) \quad (2.136)$$

Tomando en cuenta que:

$$\tanh(\sqrt{\delta}) = \frac{e^{2\sqrt{\delta}} - 1}{e^{2\sqrt{\delta}} + 1} \quad (2.137)$$

Entonces la ecuación 2.136 puede escribirse como:

$$\bar{p}_{1d}|_{x_d=0} = -\frac{\psi}{s\sqrt{\delta} \tanh(\sqrt{\delta})} (1 - s^2 C_{df} \bar{p}_{wd}) \quad (2.138)$$

Finalmente, si se sustituyen las ecuaciones 2.130 y 2.138 en la ecuación 2.135, se obtiene la solución general para la presión adimensional de fondo fluyendo,  $\bar{p}_{wd}$ , misma que se muestra en la ecuación 2.139.

$$\bar{p}_{wd} = \frac{\frac{\psi}{s\sqrt{\delta} \tanh(\sqrt{\delta})} + S\frac{\psi}{s}}{\left(\frac{\psi}{s\sqrt{\delta} \tanh(\sqrt{\delta})} + S\frac{\psi}{s}\right) s^2 C_{df} - 1} \quad (2.139)$$

Como puede observarse, la solución mostrada en la ecuación 2.139 está desarrollada en el espacio de Laplace. Para obtener la presión adimensional de fondo fluyendo en el dominio del tiempo,  $p_{wd}$ , es necesario invertir numéricamente la ecuación en cuestión; para realizar esto, se empleó el algoritmo de Stehfest (1970), cuyos principios y metodología se presentan en el **Apéndice B** de esta tesis.

Así mismo, con la finalidad de generar curvas tipo que puedan emplearse como herramienta para el análisis de pruebas de presión en este tipo de casos, partiendo del valor obtenido de  $p_{wd}$ , se calcula la función derivada definida por Bourdet et al. (1989) como se muestra en la ecuación 2.140.

$$\left(\frac{dp_{wd}}{dX}\right)\Big|_i = \frac{(\Delta p_{wd1}/\Delta X_1) \Delta X_2 + (\Delta p_{wd2}/\Delta X_2) \Delta X_1}{(\Delta X_1 + \Delta X_2)} \quad (2.140)$$

Donde el subíndice 1 representa a la posición anterior a la posición  $i$ , mientras que el subíndice 2, por el contrario, representa a la posición posterior a la posición  $i$ . Además,  $X$  se define como:

$$X = \ln(\Delta t_d) \quad (2.141)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación 2.141, la ecuación 2.140 puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} DER(\Delta p_{wd})|_i = & \left[ \left( \frac{\Delta p_{wd}|_i - \Delta p_{wd}|_{i-1}}{\ln(t_{d_i}/t_{d_{i-1}})} \ln\left(\frac{t_{d_{i+1}}}{t_{d_i}}\right) + \frac{\Delta p_{wd}|_{i+1} - \Delta p_{wd}|_i}{\ln(t_{d_{i+1}}/t_{d_i})} \ln\left(\frac{t_{d_i}}{t_{d_{i-1}}}\right) \right) \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\ln\left(\frac{t_{d_{i+1}}}{t_i}\right) + \ln\left(\frac{t_{d_i}}{t_{d_{i-1}}}\right)} \right] \quad (2.142) \end{aligned}$$

### 2.2.3. Análisis de sensibilidad

Cuando una red de fracturas se modela desde el enfoque de la geometría fractal, son dos los parámetros cruciales para describirla: la dimensión fractal,  $D$ , y el índice de conectividad,  $\theta$ . Como fue mencionado en la sección 1.3.4 de esta tesis,  $\theta$  es directamente proporcional a la tortuosidad del camino de flujo e inversamente proporcional a la conectividad de las fracturas, mientras que  $D$  es un indicador de la densidad de fracturamiento, así como del área que las fracturas ocupan.

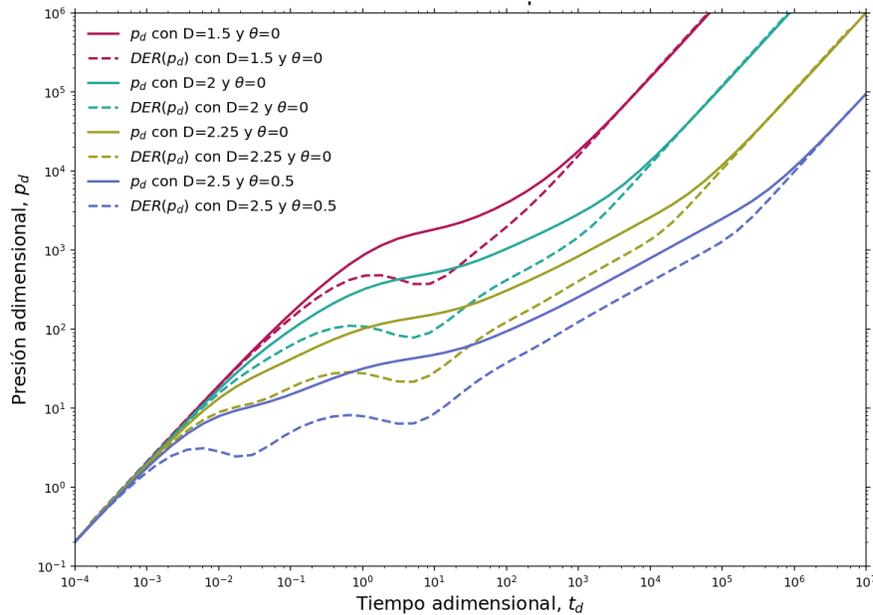
Con el objetivo de analizar la influencia que tienen estos dos parámetros sobre el comportamiento de la presión, empleando la herramienta desarrollada (que se describe en el siguiente capítulo de este trabajo), se llevó a cabo un análisis de sensibilidad, variando el valor de la dimensión fractal, de manera similar a lo realizado por Wang et al. (2015). Los resultados se muestran en la **Figura 2.9a**. El gráfico fue generado con los datos presentados en la **Tabla 2.2**, misma que fue recuperada del trabajo presentado por Wang et al. (2015)<sup>4</sup>.

La **Figura 2.9a** muestra el efecto de la dimensión fractal sobre la presión adimensional de fondo fluyendo,  $p_{wd}$ , y la función derivada,  $DER(p_{wd})$ , que puede visualizarse mediante un gráfico diagnóstico doblemente logarítmico de dichos parámetros *versus* el tiempo adimensional,  $t_d$ . Es posible observar que la dimensión fractal afecta el resultado arrojado por la solución presentada por Wang et al. (2015) durante el periodo de producción, pues el comportamiento de la presión varía de manera considerable, sin embargo, a tiempos cortos, el flujo se ve fuertemente gobernado por el almacenamiento, independientemente del valor de  $D$ . En la **Figura 2.9b** se muestran los resultados obtenidos por Wang et al. (2015) al trabajar los mismos escenarios.

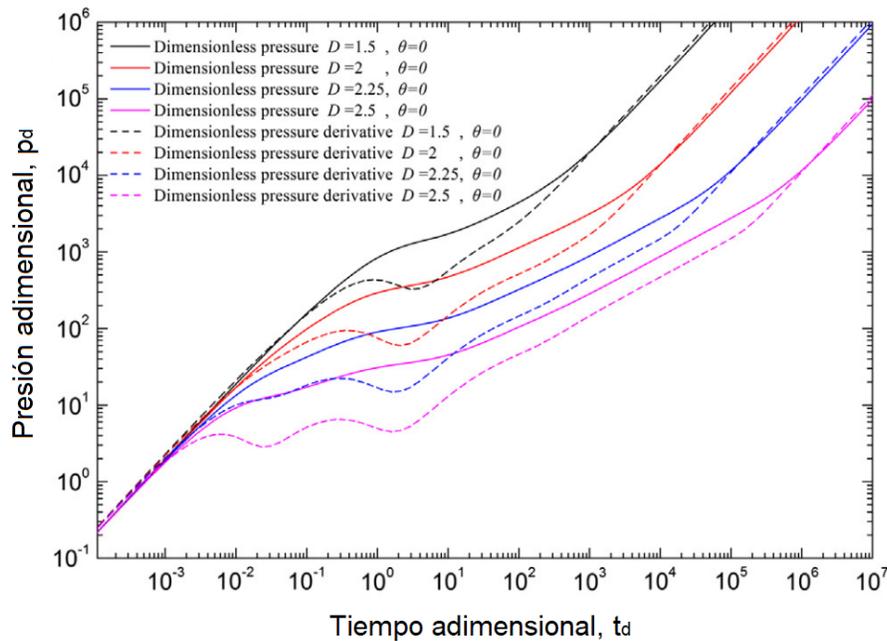
Es importante mencionar que, aunque sean considerados válidos únicamente aquéllos valores de la dimensión fractal que se encuentren entre uno (1) y dos (2), con el objetivo de comparar los resultados de la herramienta desarrollada en este trabajo con los resultados obtenidos por Wang et al. (2015), se emplearon los mismos valores de  $D$  que dichos autores utilizaron.

---

<sup>4</sup>En los datos y parámetros presentados en el trabajo de Wang et al. (2015) no se indican los valores del factor de daño ni del coeficiente de almacenamiento adimensional, por lo que se optó por considerar los siguientes valores arbitrarios:  $S = 0$ ,  $C_{df} = 6 \times 10^{-4}$ .



(a) Efecto de la dimensión fractal,  $D$ , sobre el comportamiento de la presión adimensional de fondo fluyendo,  $p_{wd}$ , y la función derivada,  $DER(p_{wd})$ . Para los cuatro casos se calcularon valores de  $\lambda = 0,0158$  y  $\omega = 0,0137$ .



(b) Efecto de la dimensión fractal,  $D$ , sobre el comportamiento de la presión adimensional de fondo fluyendo,  $p_{wd}$ , y la función derivada,  $DER(p_{wd})$ . Recuperado de Wang et al. (2015).

Figura 2.9: Validación de la herramienta desarrollada mediante la comparación de los resultados obtenidos con ésta y los resultados presentados por Wang et al. (2015).

Tabla 2.2: Datos sintéticos empleados para realizar el análisis de sensibilidad. Recuperado de Wang et al. (2015).

Parámetro	Valor	Unidades
$b_f$	$1,60 \times 10^{-2}$	ft
$c_{tf}$	$2,58 \times 10^{-4}$	$psi^{-1}$
$c_{tm}$	$2,58 \times 10^{-6}$	$psi^{-1}$
$c_{t1}$	$2,58 \times 10^{-5}$	$psi^{-1}$
$k_f$	$2,00 \times 10^2$	$mD$
$k_m$	$2,30 \times 10^{-1}$	$mD$
$k_1$	$2,00 \times 10^3$	$mD$
$x_f$	$6,56 \times 10^2$	ft
$x_e$	$1,15 \times 10^3$	ft
$y_e$	$6,56 \times 10^2$	ft
$\alpha$	$3,20 \times 10^{-5}$	$ft^2$
$\mu$	1,06	cp
$\phi_f$	$1,50 \times 10^{-5}$	n/a
$\phi_m$	$1,08 \times 10^{-1}$	n/a
$\phi_1$	$4,50 \times 10^{-1}$	n/a

Para entender mejor las etapas o regímenes de flujo que se hacen visibles en el gráfico anteriormente analizado (y estudiar además el efecto de los parámetros fractales sobre ellos), en las **Figuras 2.10** y **2.11** se seccionan tanto la curva de la presión adimensional de fondo fluyendo como la de la función derivada en cinco periodos diferentes, los cuales son descritos a continuación:

- **Periodo 1:** el flujo se ve completamente gobernado por el efecto del almacenamiento, por lo que ambas curvas coinciden, y su tendencia se ve caracterizada por una pendiente unitaria. Puede decirse que ni la dimensión fractal ni el índice de conectividad influyen de manera importante en este periodo de flujo.
- **Periodo 2:** se da un primer periodo de transición que se origina conforme desaparece el efecto del almacenamiento; se caracteriza por una joroba en la curva de la función derivada. A medida que incrementa el valor de  $D$ , puede observarse que incrementa también la duración de este periodo; por otro lado,

puede observarse que el flujo de transición se da a tiempos más cortos para valores pequeños de  $\theta$ .

- **Periodo 3:** comienza el flujo interporoso considerado hipotéticamente pseudo-estacionario por Warren and Root (1963), mismo que se da cuando comienza la transferencia de fluidos desde la matriz hacia las fracturas (en la Región 2, según el esquema mostrado en la **Figura 2.7**). En la red de fracturas, conforme avanza la producción, se reduce la presión, por lo que los fluidos en la matriz empiezan a migrar hacia las fracturas. Este periodo de flujo se caracteriza por formar un valle en la curva de la función derivada, y podría decirse que, antes del valle, el flujo se da por la contribución del sistema fractura, mientras que después del valle el flujo se da por la contribución del sistema en su totalidad (matriz y fractura). Este periodo de flujo se verá influenciado por el coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , y la relación de almacenamiento de las fracturas,  $\omega$ , como se mostrará en la siguiente sección de esta tesis.
- **Periodo 4:** nuevamente, en este periodo de flujo la curva de la función derivada tiende a ser una línea recta, cuya pendiente dependerá de los parámetros fractales; el comportamiento observado corresponde al de una ley de potencias (característica del comportamiento fractal). En este periodo, la onda de presión ha alcanzado los límites de la fractura hidráulica, es decir, alcanza la Región 3 indicada en la **Figura 2.7**.
- **Periodo 5:** es el último periodo y el flujo se ve gobernado por las fronteras. Las curvas de  $p_{wd}$  y  $DER(p_{wd})$  convergen en una línea recta de pendiente unitaria, tendencia característica de la existencia de fronteras de no flujo. Es posible observar que una variación en el índice de conectividad no tiene efecto observable en este periodo de flujo.

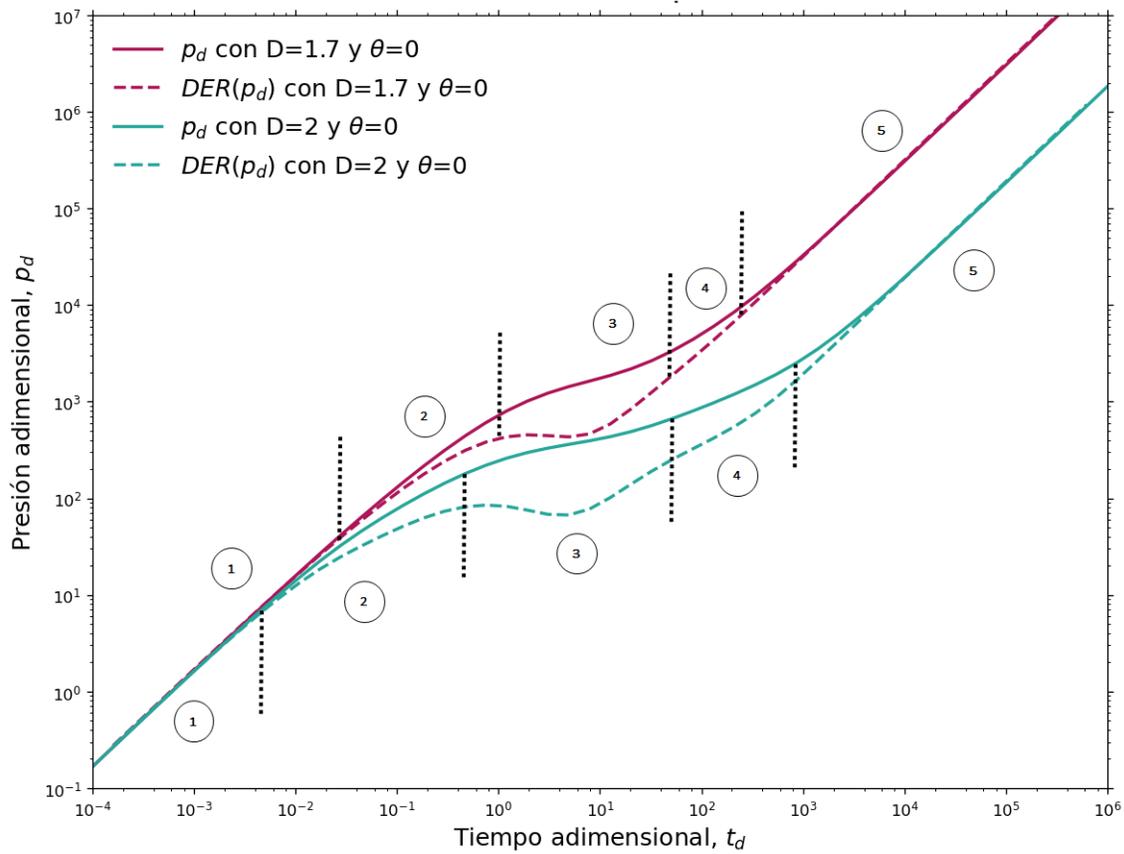


Figura 2.10: Efecto de la dimensión fractal ( $D$ ) sobre los regímenes de flujo que son visibles en curvas tipo generadas con la solución propuesta por Wang et al. (2015).

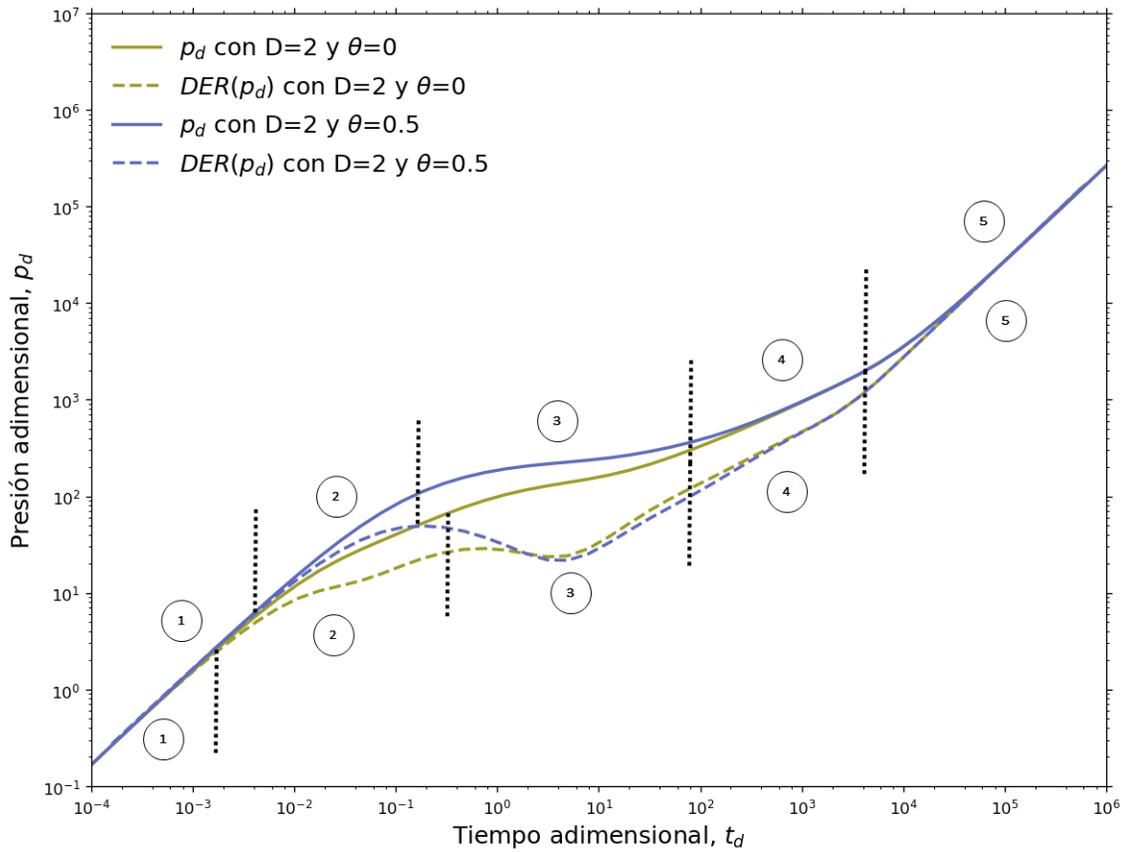


Figura 2.11: Efecto del índice de conectividad ( $\theta$ ) sobre los regímenes de flujo que son visibles en curvas tipo generadas con la solución propuesta por Wang et al. (2015).

## Capítulo 3

# Descripción de la herramienta desarrollada

Con el objetivo de implementar las soluciones presentadas en esta tesis, se optó por desarrollar una herramienta de cómputo utilizando el lenguaje de programación Python<sup>®</sup>. Dicha herramienta consta de una interfaz gráfica que permite al usuario hacer uso de los algoritmos integrados, de forma intuitiva, a través de diferentes *wid-gets*, además de proporcionarle los resultados obtenidos para cada solución mediante gráficos interactivos, facilitando así el análisis visual de éstos.

En este capítulo se describe la interfaz gráfica desarrollada, así como sus entradas y salidas. En el **Apéndice A** se muestra el código principal correspondiente a las soluciones trabajadas.

Al correr el código, el usuario podrá visualizar una ventana como la mostrada en la **Figura 3.1**, en la que se indican los datos principales correspondientes a esta tesis, y se permite al usuario utilizar la herramienta al dar *click* en el botón *Inicio*. Es importante mencionar que, al ser ésta la ventana principal del programa, debe permanecer activa hasta que la herramienta deje de utilizarse.

Una vez que se oprime el botón *Inicio*, se muestra una lista de las soluciones implementadas (ver **Figura 3.2**). En esta ventana, el usuario deberá seleccionar la solución con la que desea trabajar, y posteriormente dar *click* en el botón *Comenzar* para continuar.

Cuando el usuario oprime el botón *Comenzar*, el programa lo dirigirá a la ventana correspondiente a la solución seleccionada. Cada una de dichas ventanas es descrita en las siguientes secciones.

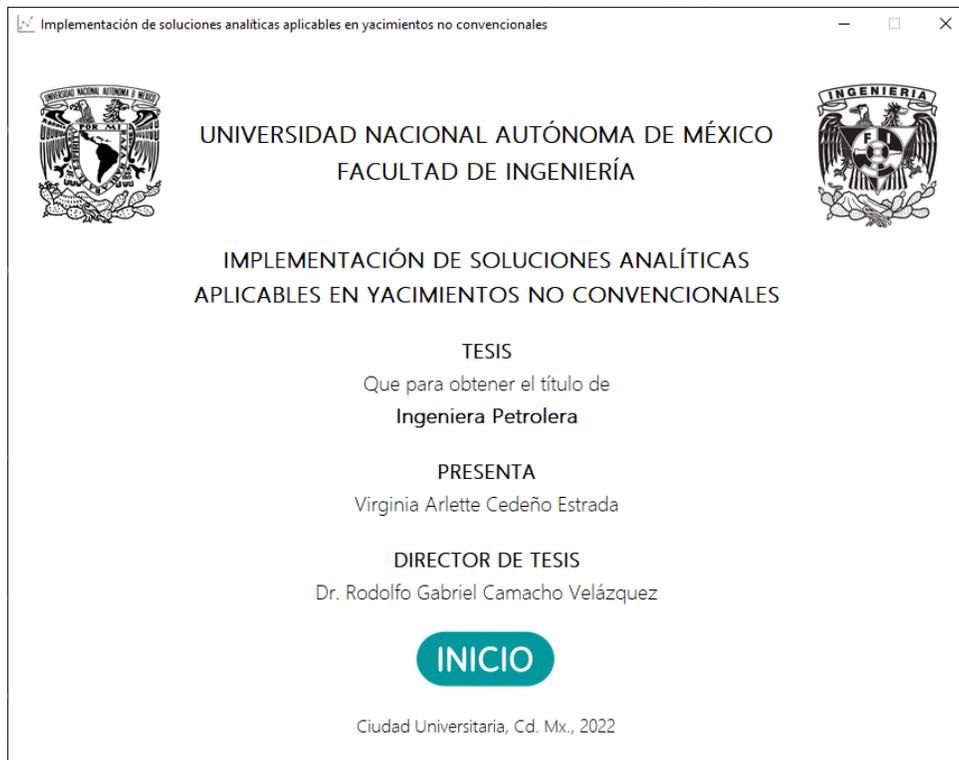


Figura 3.1: Ventana de inicio de la herramienta de cómputo desarrollada.

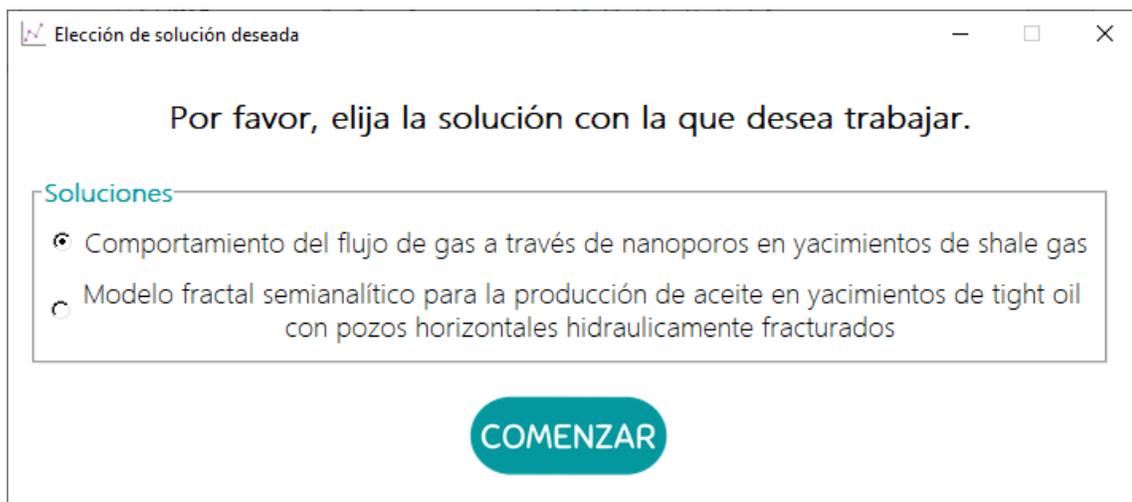


Figura 3.2: Ventana que muestra la lista de soluciones implementadas.

### 3.1. Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de *shale gas*

Toda vez que el usuario seleccione esta solución, una ventana como la mostrada en la **Figura 3.3** se hará visible, en la que se le solicitan al usuario las propiedades y parámetros necesarios para modelar la influencia de los diferentes regímenes de flujo sobre el transporte de gas a través de nanoporos.

En esta ventana se le permite al usuario seleccionar las unidades de las propiedades que se le requiere ingresar; es posible elegir entre unidades del sistema inglés y unidades del sistema internacional.

En la parte inferior de la ventana, el usuario encontrará los botones *Volver al menú*, que lo redirige a la ventana anterior para seleccionar una solución diferente, y *Validar datos*.

Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de shale gas

Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de shale gas

Proporcione las propiedades solicitadas a continuación:

Propiedades

Densidad del gas:	<input type="text"/>	kg/m <sup>3</sup> ▾	Gradiente de presión (∇P):	<input type="text"/>	MPa/m ▾
Viscosidad del gas:	<input type="text"/>	Pa·s ▾	Presión de Langmuir:	<input type="text"/>	MPa ▾
Espesor máximo de adsorción (d <sub>0</sub> ):	<input type="text"/>	nm	Masa molecular del gas:	<input type="text"/>	kg/kmol
Temperatura del yacimiento:	<input type="text"/>	K ▾	Diámetro de colisión molecular:	<input type="text"/>	nm
Presión del yacimiento:	<input type="text"/>	MPa ▾			

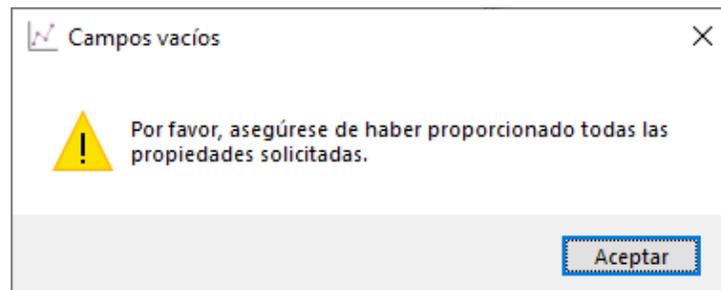
**VOLVER AL MENÚ** **VALIDAR DATOS**

Figura 3.3: Ventana correspondiente a la solución que modela el comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de *shale gas*.

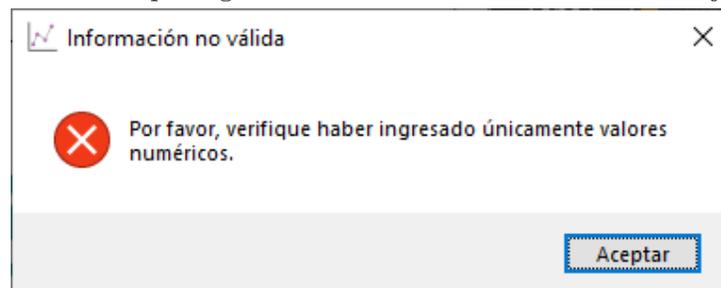
El botón *Validar datos* tiene la funcionalidad de verificar que la información ingresada por el usuario sea completa y congruente, y le hace a éste saber dichas condiciones a través de ventanas emergentes como se muestra en la **Figura 3.4**.

Este filtro de datos es capaz de detectar cuando una casilla de entrada se ha

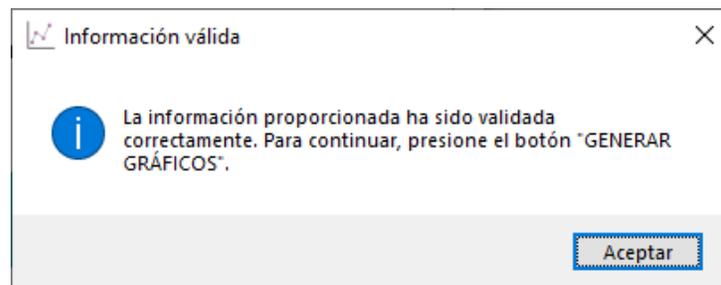
dejado vacío, y lo señala al usuario mostrando un mensaje como se indica en la **Figura 3.4a**; de manera similar, si en alguna de las casillas de entrada se han ingresado valores no numéricos, se muestra un mensaje solicitando que se realicen las correcciones pertinentes, tal como lo ilustra la **Figura 3.4b**. Finalmente, si no existen problemas con los datos ingresados por el usuario, el programa mostrará una ventana emergente como la presentada en la **Figura 3.4c**, donde se anuncia que es posible continuar presionando el botón *Generar gráficos*. Cabe mencionar que, una vez que la información es validada, el botón *Validar datos* desaparece y es reemplazado por el botón *Generar gráficos*, de la forma en que se ilustra en la **Figura 3.5**.



(a) Advertencia de que alguna de las casillas de entrada se ha dejado vacía.



(b) Advertencia de que alguno (o algunos) de los parámetros ingresados contiene caracteres no numéricos.



(c) Mensaje indicando que la información ingresada es válida y se puede continuar.

Figura 3.4: Ventanas emergentes que muestra el programa al momento de validar la información ingresada por el usuario.

Al presionar el botón *Generar gráficos*, el programa genera una serie de figuras

Figura 3.5: Ventana que muestra la herramienta cuando los datos ingresados son válidos y se permite la generación de los gráficos correspondientes (solución para flujo en nanoporos).

interactivas como se muestra en la **Figura 3.6**. Dichos gráficos ilustran a la fracción del flujo másico total de gas por unidad de área,  $J$ , que corresponde a los regímenes de flujo continuo convencional o flujo de Darcy ( $J_V$ ), flujo por deslizamiento o *slip flow* ( $J_S$ ), flujo gobernado por la difusión de Knudsen o flujo libre molecular ( $J_M$ ), y flujo de transición ( $J_T$ ), con respecto al radio del poro a través del cual se da el flujo. Por practicidad, se optó por mantener el rango de valores para el radio de poro constante para todos los gráficos, variando de 1  $nm$  a 1000  $nm$ .

El objetivo del gráfico es comparar el comportamiento de dichos regímenes conforme las condiciones del flujo varían, para definir cuál es el que gobierna el proceso de transporte y modelarlo de manera más apropiada, o bien, entender alguna variación en el comportamiento del flujo que difiera del modelo convencional (ley de Darcy).

A la derecha de los gráficos, el usuario encontrará cuatro *sets* de *sliders*, cada uno de los cuales corresponde a un caso de estudio distinto (Curvas 1, 2, 3 y 4). Los *sliders* le permitirán al usuario variar los valores de la presión y temperatura del sistema, la presión de Langmuir y el espesor máximo de la capa de adsorción para cada caso, a la vez que se modifican en tiempo real los gráficos generados. Así, el usuario podrá comparar el efecto que tiene la variación de los parámetros modificados sobre los regímenes de flujo en cuatro escenarios diferentes.

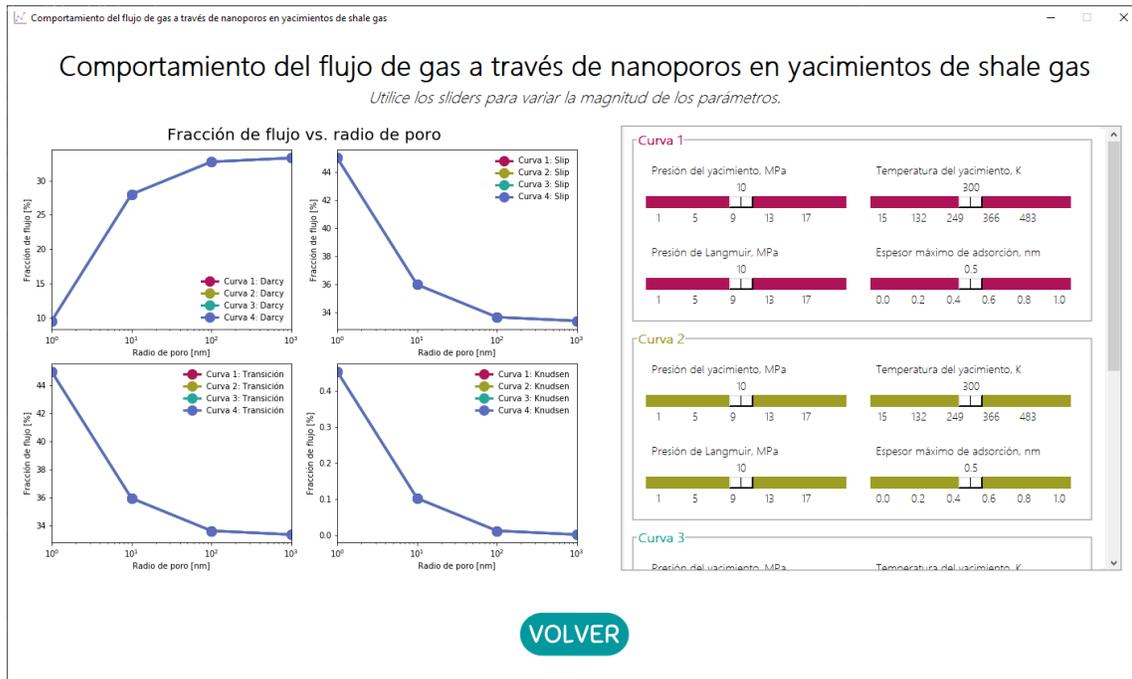


Figura 3.6: Ventana de impresión de gráficos interactivos generados para analizar el efecto de los distintos regímenes de flujo sobre el transporte de gas a través de nanoporos.

En la parte inferior central de esta ventana se encontrará el botón *Volver*, mismo que devolverá al usuario a la ventana anterior (**Figura 3.3**) en caso de que se requiera comenzar nuevamente.

En la **Figura 3.7** se presenta un nuevo análisis de sensibilidad, esta vez empleando la herramienta de cómputo en cuestión. Aunque al inicio los cuatro escenarios se traslapen, pues son generados con los mismos datos, al hacer uso de los *sliders* es posible observar las variaciones generadas.

Los gráficos mostrados se generaron inicialmente con las propiedades contenidas en la **Tabla 2.1** y, posteriormente, la presión del sistema se modificó como se indica a continuación:

1. **Curva 1:** 18 MPa
2. **Curva 2:** 13 MPa
3. **Curva 3:** 9 MPa
4. **Curva 4:** 5 MPa

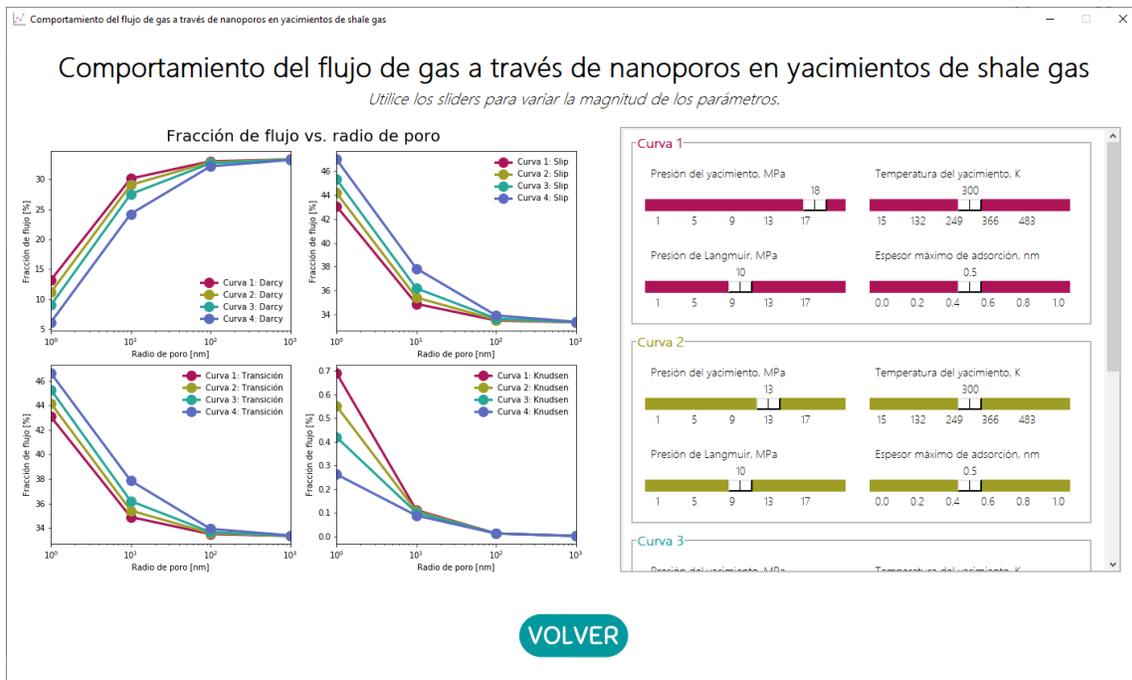


Figura 3.7: Análisis de sensibilidad a la presión del flujo de gas a través de nanoporos realizado con la herramienta desarrollada.

Puede notarse que lo observado en la **Figura 3.7** coincide con lo observado en la **Figura 2.3**, y es que mientras las fracciones de flujo correspondientes a los regímenes de flujo continuo convencional (Darcy) y flujo libre molecular (difusión de Knudsen) crecen a medida que la presión crece, las fracciones de flujo de los regímenes de transición y flujo por deslizamiento decrecen.

### 3.2. Modelo fractal semi-analítico para la producción de aceite en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados

Cuando sea esta la solución que el usuario seleccione, la herramienta desarrollada mostrará una ventana como la que se indica en la **Figura 3.8**, en donde se encuentran disponibles las casillas de entrada para que el usuario ingrese las distintas propiedades y parámetros que se requieren para generar una serie de curvas tipo que pretenden modelar el comportamiento de la presión en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados.

Figura 3.8: Ventana correspondiente a la solución que modela el comportamiento de la presión en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados.

En la parte inferior de la ventana, el usuario encontrará los botones *Volver al menú*, que lo redirige a la ventana anterior para seleccionar una solución diferente, y *Validar datos*. De manera similar a la solución descrita en la sección anterior, el botón *Validar datos* da inicio a una funcionalidad que permite verificar que la información ingresada sea completa y congruente, y también arroja como resultado ventanas emergentes como las mostradas en la **Figura 3.4**.

Además, cuando los datos ingresados por el usuario sean validados por la herramienta, el botón *Validar datos* desaparece y el botón *Generar gráficos* toma su lugar (ver **Figura 3.9**), permitiendo al usuario continuar.

Si la información ingresada por el usuario cumple con los criterios establecidos anteriormente, al oprimir el botón *Generar gráficos* el programa mostrará un conjunto de cuatro curvas tipo generadas empleando la solución presentada en la ecuación 2.139, la cual representa una solución a la ecuación de difusión desarrollada para determinar el comportamiento de la presión con respecto al tiempo en un yacimiento compacto con un pozo horizontal hidráulicamente fracturado, con la particularidad de describir a la red de fracturas complejas generada por la estimulación mediante la aplicación de la teoría fractal, empleando las relaciones de porosidad y permeabilidad propuestas por Acuna et al. (1995), además de la función derivada de la presión, la cual se obtiene haciendo uso del algoritmo de Bourdet et al. (1989).

Figura 3.9: Ventana que muestra la herramienta cuando los datos ingresados son válidos y pueden generarse los gráficos correspondientes (solución fractal).

Por practicidad, el rango de valores del tiempo adimensional,  $t_d$ , se manejó de manera constante para todos los gráficos, variando de  $10^{-4}$  [adim] a  $10^6$  [adim]. La ventana que será presentada al usuario se muestra en la **Figura 3.10**.

Aunque en un principio las cuatro curvas generadas se traslapen, el usuario podrá variar la relación de almacenamiento de las fracturas ( $\omega$ ), el coeficiente de flujo interporoso ( $\lambda$ ), la dimensión fractal de la red de fracturas ( $D$ ) y/o el índice de conectividad que caracteriza al proceso de difusión ( $\theta$ ), con la finalidad de estimar el efecto que tiene cada parámetro en el transiente de presión y así tener una caracterización más adecuada de éste; es posible emplear esta herramienta como instrumento para analizar pruebas de presión en casos que se asemejen al estudiado en esta tesis.

En las **Figuras 3.11** y **3.12** se muestran los resultados de un nuevo análisis de sensibilidad llevado a cabo con la ayuda de la herramienta desarrollada; ambas figuras se generaron tomando como base los datos presentados en la **Tabla 2.2**, variando algunos parámetros de la forma en que se indica a continuación.

En la **Figura 3.11** se presenta a la familia de curvas tipo generadas para analizar el efecto que tiene el coeficiente de flujo interporoso sobre el comportamiento de la presión, las cuales se construyeron considerando las siguientes propiedades:

1. **Curva 1:**  $\omega = 0,06$   $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 1,0$

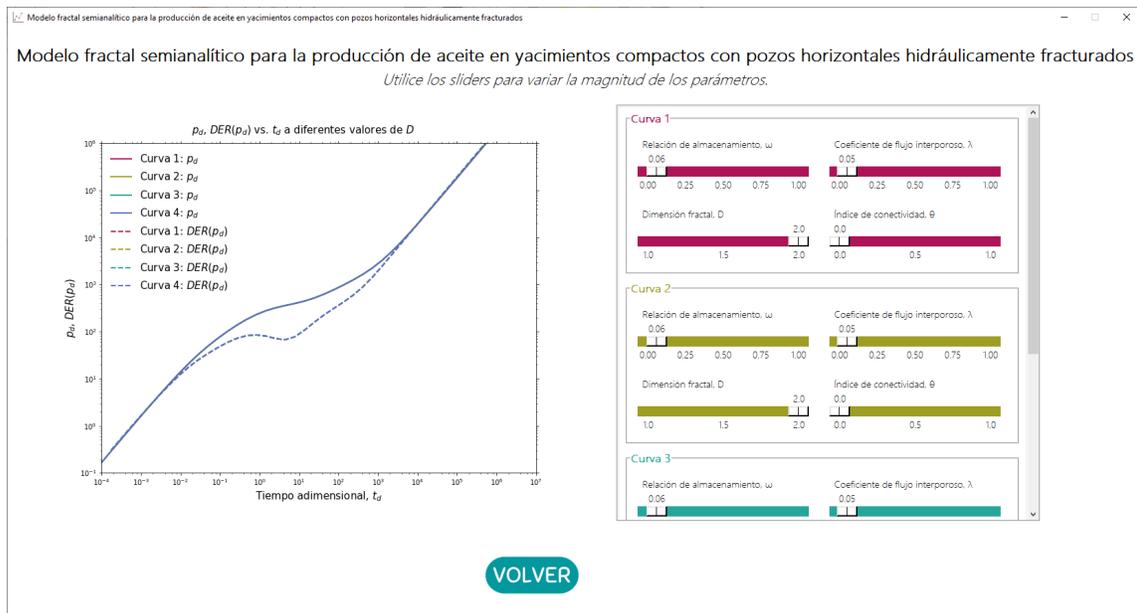


Figura 3.10: Ventana de impresión de gráficos interactivos que permiten la generación de curvas tipo para el comportamiento de la presión.

2. **Curva 2:**  $\omega = 0,06$   $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 0,50$
3. **Curva 3:**  $\omega = 0,06$   $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 0,20$
4. **Curva 4:**  $\omega = 0,06$   $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 0,05$

Considerando que  $\lambda$  es un parámetro que define la comunicación existente entre el sistema matriz y el sistema fractura, se concluye que mientras menor sea este parámetro, más difícil será la transferencia de fluido entre ambos medios; en el gráfico se observa que, a valores más pequeños, más tardía será la transición de flujo típica de un medio con doble porosidad, caracterizada por formar un valle de la curva de la función derivada.

De manera similar, en la **Figura 3.12** se presenta a la familia de curvas tipo generadas para analizar el efecto que tiene la relación de almacenamiento de las fracturas sobre el comportamiento de la presión, las cuales se construyeron considerando las siguientes propiedades:

1. **Curva 1:**  $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 0,05$   $\omega = 0,20$
2. **Curva 2:**  $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 0,05$   $\omega = 0,10$
3. **Curva 3:**  $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 0,05$   $\omega = 0,03$
4. **Curva 4:**  $D = 2,0$   $\theta = 0,0$   $\lambda = 0,05$   $\omega = 0,0$

## CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DE LA HERRAMIENTA DESARROLLADA

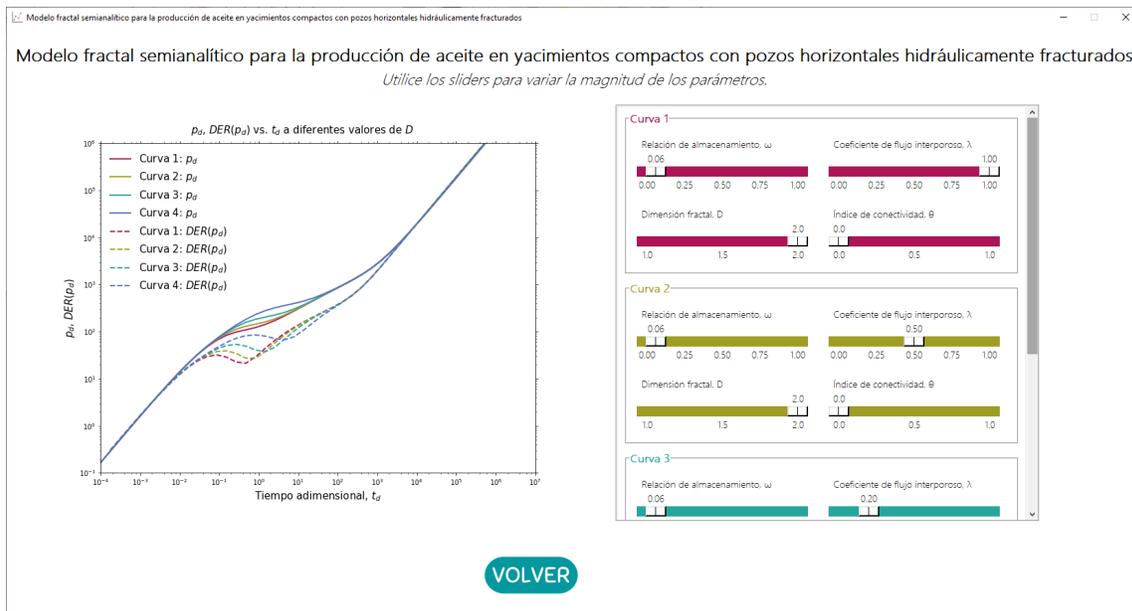


Figura 3.11: Análisis de sensibilidad al coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , en la generación de curvas tipo.

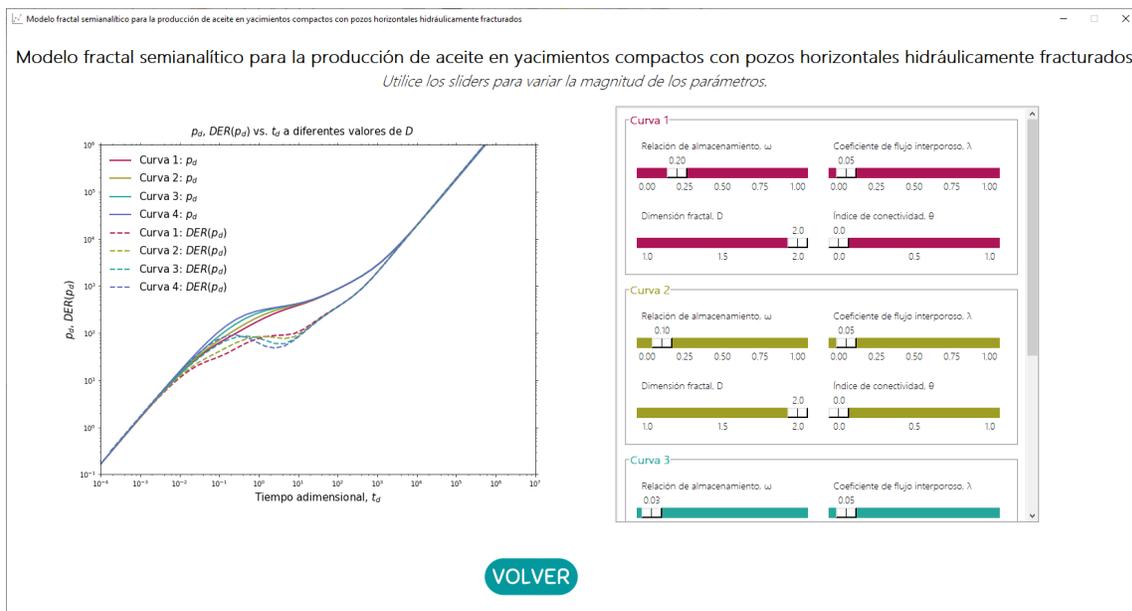


Figura 3.12: Análisis de sensibilidad a la relación de almacenamiento de las fracturas,  $\omega$ , en la generación de curvas tipo.

Si se considera que la relación de almacenamiento de las fracturas,  $\omega$ , es un indicador de la diferencia existente entre la capacidad de almacenamiento que tienen las fracturas y la capacidad del sistema total, puede concluirse entonces, y con base

en la **Figura 3.12**, que si  $\omega$  decrece, la transición de flujo característica de un medio con doble porosidad se dará de manera temprana y, además, tendrá mayor duración.

# Conclusiones y recomendaciones

## Conclusiones

- La mayoría de los métodos, técnicas y soluciones que se emplean para realizar cualquier tipo de caracterización de yacimientos convencionales, son desarrollados bajo hipótesis que no siempre resultan verdaderas o aplicables a los yacimientos no convencionales, por lo que es importante prestar la atención adecuada al medio, sus fluidos y los procesos que intervienen en el flujo de éstos.
- La herramienta de cómputo presentada fue desarrollada con el objetivo de hacer uso de soluciones propuestas por diversos autores en trabajos previos: para tratar con yacimientos no convencionales no es necesario comenzar completamente desde cero, sino que una buena práctica es aprovechar las herramientas teóricas ya existentes y hacer uso de los recursos computacionales actuales, facilitando el acceso a métodos más factibles para estudiar los distintos tipos de yacimientos según sus características.
- Con respecto a la solución correspondiente al flujo de gas a través de nanoporos puede concluirse lo siguiente:
  - En medios en los que el sistema poroso es heterogéneo y varía de manera considerable a diferentes escalas (con poros cuyo tamaño alcanza apenas algunas decenas de nanómetros), como en los yacimientos de *shale gas*, el flujo de gas se da como la combinación de diversos procesos y mecanismos.
  - El flujo de gas a través de nanoporos puede darse en cuatro regímenes de flujo distintos, los cuales pueden determinarse en función del número de Knudsen: flujo continuo convencional ( $K_n \leq 0,001$ ), flujo por deslizamiento ( $0,001 \leq K_n \leq 0,1$ ), flujo de transición ( $0,1 \leq K_n \leq 10$ ) y flujo libre molecular ( $K_n \geq 10$ ).
  - A medida que incrementa el tamaño del poro, el efecto del flujo continuo convencional también crece, mientras que el efecto del flujo por deslizamiento (*slip flow*) y del flujo de transición decrece. Este comportamiento es atribuible a que, mientras mayor sea el radio del poro a través del cual

el gas fluye, menor efecto sobre el flujo tendrán las colisiones entre las moléculas de gas y las colisiones entre éstas y las paredes del poro.

- Considerando el parámetro de análisis  $J_{ad}/J$ , a mayor presión de Langmuir, más grande será el cociente de flujos, pues entre mayor sea la presión de Langmuir, mayor será la cantidad de gas liberada de la superficie del poro a medida que disminuye la presión del sistema, lo que se traduce en un flujo másico total mayor.
  - Al aumentar el espesor máximo de la capa de adsorción, el cociente de flujos volumétricos por unidad de área ( $J_{ad}/J$ ) decrece, pues el radio efectivo de flujo,  $r_e$ , disminuye y con ello disminuye también el flujo másico total por unidad de área.
- Con respecto a la solución semi-analítica para la producción de aceite en yacimientos compactos puede concluirse que:
- Cuando las condiciones de permeabilidad en el yacimiento no favorecen el flujo de los hidrocarburos hacia el pozo, técnicas como el fracturamiento hidráulico pueden ayudar a incrementar esta propiedad y resolver el problema. Este proceso de estimulación genera una red de fracturas complejas.
  - Con el objetivo de incorporar la heterogeneidad que caracteriza a una red de fracturas complejas puede hacerse uso de la geometría fractal e implementarse relaciones que describan a la porosidad y permeabilidad del medio en forma de leyes de potencias.
  - Una variación en la dimensión fractal,  $D$ , tendrá un efecto importante en la respuesta de la presión para tiempos de producción intermedios y largos, mientras que a tiempos cortos será el efecto del almacenamiento el mecanismo que gobierne el flujo.
  - El efecto del índice de conectividad,  $\theta$ , será apreciable en el transiente de presión a tiempos de producción intermedios, pues a tiempos cortos es el efecto del almacenamiento el mecanismo que gobierna el flujo. A tiempos largos, el efecto que tiene  $\theta$  sobre el comportamiento de la presión es despreciable.

## Recomendaciones

- Sobre la solución correspondiente al flujo de gas a través de nanoporos se recomienda, en un trabajo subsecuente, el desarrollo de un modelo de transporte que considere los cuatro regímenes de flujo descritos en esta tesis (flujo continuo convencional (flujo viscoso), *slip flow*, flujo libre molecular (difusión de Knudsen) y flujo de transición), así como el efecto de la adsorción y desorción de las moléculas de gas.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

- En el caso de la solución semi-analítica para la producción de aceite en yacimientos compactos, se recomienda mejorar la herramienta aquí desarrollada implementando la alimentación del modelo con datos provenientes de pruebas de presión, con el objetivo de llevar a cabo un ajuste de curvas tipo.

# Bibliografía

- Acuna, J., Ershaghi, I., and Yortsos, Y. (1995). Practical application of fractal pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs. *SPE Formation Evaluation*, 10(03):173–179.
- Barenblatt, G. I., Zheltov, I. P., and Kochina, I. (1960). Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 24(5):1286–1303.
- Beskok, A. and Karniadakis, G. E. (1994). Simulation of heat and momentum transfer in complex microgeometries. *Journal of Thermophysics and Heat transfer*, 8(4):647–655.
- Blasingame, T. (1994). Reservoir flow solutions, lecture 5: Dual porosity reservoirs: Warren and root approach.
- Bourdet, D., Ayoub, J., and Pirard, Y. (1989). Use of pressure derivative in well test interpretation. *SPE Formation Evaluation*, 4(02):293–302.
- Bowman, F. (2012). *Introduction to Bessel functions*. Courier Corporation.
- Boyer, C., Kieschnick, J., Suarez-Rivera, R., Lewis, R. E., and Waters, G. (2006). Producing gas from its source. *Oilfield review*, 18(3):36–49.
- Brown, M., Ozkan, E., Raghavan, R., and Kazemi, H. (2011). Practical solutions for pressure-transient responses of fractured horizontal wells in unconventional shale reservoirs. *SPE Reservoir evaluation & engineering*, 14(06):663–676.
- Cander, H. (2012). Ps what are unconventional resources? a simple definition using viscosity and permeability. In *AAPG Annual Convention and Exhibition. Tulsa, US: American Association of Petroleum Geologists and Society for Sedimentary Geology*.
- Chang, J. and Yortsos, Y. C. (1990). Pressure transient analysis of fractal reservoirs. *SPE Formation Evaluation*, 5(01):31–38.
- Chen, F., Lu, S., Ding, X., Zhao, H., and Ju, Y. (2019). Total porosity measured for shale gas reservoir samples: A case from the lower silurian longmaxi formation in southeast chongqing, china. *Minerals*, 9(1):5.

- Cinco-Ley, H. et al. (1981). Transient pressure analysis for fractured wells. *Journal of petroleum technology*, 33(09):1749–1766.
- Cipolla, C. L., Lolon, E., and Mayerhofer, M. J. (2009). Reservoir modeling and production evaluation in shale-gas reservoirs. In *IPTC 2009: International Petroleum Technology Conference*, pages cp–151. European Association of Geoscientists & Engineers.
- Euzen, T. (2011). Shale gas—an overview. In *Technique Report*. IFP Technologies (Canada) Inc.
- Fu, P., Settgast, R. R., Hao, Y., Morris, J. P., and Ryerson, F. J. (2017). The influence of hydraulic fracturing on carbon storage performance. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122(12):9931–9949.
- Gringarten, A. C. (1984). Interpretation of tests in fissured and multilayered reservoirs with double-porosity behavior: theory and practice. *Journal of petroleum technology*, 36(04):549–564.
- Hubbert, M. K. (1957). Darcy’s law and the field equations of the flow of underground fluids. *Hydrological Sciences Journal*, 2(1):23–59.
- Javadpour, F. (2009). Nanopores and apparent permeability of gas flow in mudrocks (shales and siltstone). *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 48(08):16–21.
- Javadpour, F., Fisher, D., and Unsworth, M. (2007). Nanoscale gas flow in shale gas sediments. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 46(10).
- Jia, P., Cheng, L., Huang, S., Cao, R., and Xu, Z. (2015). A semi-analytical model for production simulation of complex fracture network in unconventional reservoirs. In *SPE/IATMI Asia Pacific Oil & Gas Conference and Exhibition*. OnePetro.
- Jiang, Z., Zhang, W., Liang, C., Wang, Y., Liu, H., and Chen, X. (2016). Basic characteristics and evaluation of shale oil reservoirs. *Petroleum Research*, 1(2):149–163.
- Klinkenberg, L. (1941). The permeability of porous media to liquids and gases. *Am. Petrol. Inst., Drilling and Production Practice*, 2:200–213.
- Langmuir, I. (1918). The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica and platinum. *Journal of the American Chemical society*, 40(9):1361–1403.
- Lee, S.-T. and Brockenbrough, J. R. (1986). A new approximate analytic solution for finite-conductivity vertical fractures. *SPE Formation Evaluation*, 1(01):75–88.
- Magoon, L. B. (2004). Petroleum system: Nature’s distribution system for oil and gas. *Encyclopedia of energy*, 4:823–836.

- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *science*, 156(3775):636–638.
- Mandelbrot, B. B. and Frame, M. (1987). Fractals. *Encyclopedia of physical science and technology*, 5:579–593.
- Milner, M., McLin, R., and Petriello, J. (2010). Imaging texture and porosity in mudstones and shales: Comparison of secondary and ion-milled backscatter sem methods. In *Canadian unconventional resources and international petroleum conference*. OnePetro.
- Nelson, R. (2001). *Geologic analysis of naturally fractured reservoirs*. Elsevier.
- Roy, S., Raju, R., Chuang, H. F., Cruden, B. A., and Meyyappan, M. (2003). Modeling gas flow through microchannels and nanopores. *Journal of applied physics*, 93(8):4870–4879.
- Russum, D. (2010). What is unconventional oil or unconventional gas. *AJM Petroleum Consultants website*.
- Schlumberger (2022). Schlumberger oilfield glossary. *Schlumberger*.
- Shen, W., Li, X., Xu, Y., Sun, Y., and Huang, W. (2017). Gas flow behavior of nanoscale pores in shale gas reservoirs. *Energies*, 10(6):751.
- Shi, J., Zhang, L., Li, Y., Yu, W., He, X., Liu, N., Li, X., and Wang, T. (2013). Diffusion and flow mechanisms of shale gas through matrix pores and gas production forecasting. In *SPE unconventional resources conference Canada*. OnePetro.
- Stehfest, H. (1970). Algorithm 368: Numerical inversion of laplace transforms [d5]. *Communications of the ACM*, 13(1):47–49.
- Swami, V., Clarkson, C. R., and Settari, A. T. (2012). Non-darcy flow in shale nanopores: Do we have a final answer? In *SPE Canadian unconventional resources conference*. OnePetro.
- Ungar, Š. (2007). The koch curve: A geometric proof. *The American Mathematical Monthly*, 114(1):61–66.
- Veeken, P. P. (2006). *Seismic stratigraphy, basin analysis and reservoir characterization*. Elsevier.
- Wang, W., Shahvali, M., and Su, Y. (2015). A semi-analytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells. *Fuel*, 158:612–618.

- Wang, W., Su, Y., and Shahvali, M. (2014). A mathematical model for flow in multi-stage hydraulic fracture systems using fractal theory. In *ECMOR XIV-14th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, volume 2014, pages 1–12. European Association of Geoscientists & Engineers.
- Warpinski, N., Wolhart, S., and Wright, C. (2001). Analysis and prediction of micro-seismicity induced by hydraulic fracturing. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. OnePetro.
- Warren, J. and Root, P. J. (1963). The behavior of naturally fractured reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3(03):245–255.
- Xie, F., Li, Y., Wang, X., Wang, Y., Lei, G., and Xing, K. (2018). Numerical study on flow and heat transfer characteristics of low pressure gas in slip flow regime. *International Journal of Thermal Sciences*, 124:131–145.
- Yu, W. and Sepehrnoori, K. (2018). *Shale gas and tight oil reservoir simulation*. Gulf Professional Publishing.
- Zhang, X.-S., Wang, H.-J., Ma, F., Sun, X.-C., Zhang, Y., and Song, Z.-H. (2016). Classification and characteristics of tight oil plays. *Petroleum Science*, 13(1):18–33.

## Apéndice A

# Código principal de la herramienta desarrollada

En este apéndice se presentan las líneas de código de las rutinas desarrolladas más importantes en cada solución. Para su desarrollo se empleó el lenguaje de programación Python<sup>®</sup>.

### A.1. Comportamiento del flujo de gas a través de nanoporos en yacimientos de *shale gas*

Las siguientes líneas de código corresponden a la definición de la función  $F(p, t, p_L, d_0)$ , que determina las fracciones de flujo correspondientes a cada régimen de flujo, sin considerar el efecto de la adsorción,  $J_{ad}$ , y considerándolo,  $J$ , de la forma en que se indica en las ecuaciones 2.16 y 2.20 de esta tesis.

```
1 def F(P,T,PL,d0):
2
3     #Se calcula el espesor de la capa de adsorción de gas y el
4     camino libre medio de las moléculas bajo las condiciones dadas
5     d=d0*(P/(P+PL))
6     free_path=kb*T/math.sqrt(2)/math.pi/coll_diam**2/P
7
8     #Define e inicializa los vectores que requiere la función
9     re=np.arange(0,limite, dtype=float)
10    radiom=np.arange(0,limite, dtype=float)
11    kne=np.arange(0,limite, dtype=float)
12    kn=np.arange(0,limite, dtype=float)
13    Jv=np.arange(0,limite, dtype=float)
14    Jv_noad=np.arange(0,limite, dtype=float)
15    fcoeff=np.arange(0,limite, dtype=float)
16    fcoeff_noad=np.arange(0,limite, dtype=float)
17    Js=np.arange(0,limite, dtype=float)
18    Js_noad=np.arange(0,limite, dtype=float)
```

## APÉNDICE A. CÓDIGO PRINCIPAL DE LA HERRAMIENTA DESARROLLADA

---

```
18 Jm=np.arange(0,limite,dtype=float)
19 Jm_noad=np.arange(0,limite,dtype=float)
20 aux=np.arange(0,limite,dtype=float)
21 aux_noad=np.arange(0,limite,dtype=float)
22 Jt=np.arange(0,limite,dtype=float)
23 Jt_noad=np.arange(0,limite,dtype=float)
24 Total=np.arange(0,limite,dtype=float)
25 Total_noad=np.arange(0,limite,dtype=float)
26 ratioJ=np.arange(0,limite,dtype=float)
27 ratioDarcy=np.arange(0,limite,dtype=float)
28 ratioSlip=np.arange(0,limite,dtype=float)
29 ratioTransition=np.arange(0,limite,dtype=float)
30 ratioDiffusion=np.arange(0,limite,dtype=float)
31
32 "Obtencion de re y Kne"
33 for i in range(0,limite):
34     re[i]=(radio[i]/10**9)-d
35     radiom[i]=(radio[i]/10**9)
36     kne[i]=free_path/(re[i])
37     kn[i]=free_path/(radiom[i])
38
39 "Flujo continuo convencional (Darcy)"
40 for i in range(0,limite):
41     Jv[i]=densg*re[i]**2*Pgrad/8/viscg
42     Jv_noad[i]=densg*radiom[i]**2*Pgrad/8/viscg
43
44 "Flujo por deslizamiento (Slip flow)"
45 for i in range(0,limite):
46     fcoeff[i]=1+5*kne[i]
47     fcoeff_noad[i]=1+5*kn[i]
48     Js[i]=densg*re[i]**2*Pgrad/8/viscg*fcoeff[i]
49     Js_noad[i]=densg*radiom[i]**2*Pgrad/8/viscg*fcoeff_noad[i]
50
51 "Flujo libre molecular"
52 for i in range(0,limite):
53     Jm[i]=(2*re[i]*M/(3*10**3)/R/T)*math.sqrt(8*R*T/M/math.pi)*
Pgrad
54     Jm_noad[i]=(2*radiom[i]*M/(3*10**3)/R/T)*math.sqrt(8*R*T/M/
math.pi)*Pgrad
55
56 "Flujo de transicion"
57 for i in range(0,limite):
58     aux[i]=(kne[i]/4.5)**4
59     aux_noad[i]=(kn[i]/4.5)**4
60     f=1/(1+aux[i])
61     f_noad=1/(1+aux_noad[i])
62     Jt[i]=f*Js[i]+(1-f)*Jm[i]
63     Jt_noad[i]=f_noad*Js_noad[i]+(1-f_noad)*Jm_noad[i]
64
65 #Calcula la fraccion de flujo correspondiente a cada regimen
66 for i in range(0,limite):
67     Total[i]=Jv[i]+Js[i]+Jm[i]+Jt[i]
```

```

68     Total_noad[i]=Jv_noad[i]+Js_noad[i]+Jm_noad[i]+Jt_noad[i]
69     ratioJ[i]=Total[i]/Total_noad[i]
70     ratioDarcy[i]=Jv[i]/Total[i]*100
71     ratioSlip[i]=Js[i]/Total[i]*100
72     ratioTransition[i]=Jt[i]/Total[i]*100
73     ratioDiffusion[i]=Jm[i]/Total[i]*100
74
75     return ratioDarcy, ratioSlip, ratioTransition, ratioDiffusion,
ratioJ
76

```

## A.2. Modelo fractal semi-analítico para la producción de aceite en yacimientos compactos con pozos horizontales hidráulicamente fracturados

Las siguientes líneas de código corresponden a las dos funciones principales relacionadas con esta solución.

La función  $G(t, D, \theta)$  calcula el aproximado de la transformada inversa de Laplace para un tiempo dado empleando el algoritmo de Stehfest (1970), así como la función derivada mediante el algoritmo de Bourdet et al. (1989). Por otro lado, la función  $F(s, D, \theta)$  calcula el valor de la presión adimensional de fondo fluyendo en el espacio de Laplace,  $p_{wd}$ , mostrada en la ecuación 2.139 de esta tesis.

```

1  "Funcion general con algoritmo de Stehfest incluido"
2  #-----
3
4  def G(tiempo, D, the):
5      aa=list(range(0, var))
6      functiempo=list(range(0, var))
7      deri=list(range(0, var))
8      aux=list(range(1, sumas+1))
9      for i in range(0, var):
10         resultado=0
11         aa[i]=math.log(2)/tiempo[i]
12         for j in N:
13             aux[j-1]=aa[i]*j
14             if j<ene:
15                 A=j
16             else:
17                 A=ene
18             sdos=0
19             ka=(j+1)/2
20             ka=int(ka)

```

## APÉNDICE A. CÓDIGO PRINCIPAL DE LA HERRAMIENTA DESARROLLADA

---

```
21         for z in range(ka,A+1):
22             uno=math.factorial(2*z)
23             dos=math.factorial(ene-z)
24             tres=math.factorial(z)
25             cuatro=math.factorial(z-1)
26             cinco=math.factorial(j-z)
27             seis=math.factorial((2*z)-j)
28             sdos=sdos+((z**(ene))*uno)/(dos*tres*cuatro*cinco*
seis)
29         Vj=sdos*((-1)**(ene+j))
30         resultado=resultado+Vj*F(aux[j-1], D, the)
31         functiempo[i]=resultado*aa[i]
32
33     for i in range(1,var-1):
34         deri[i]=((functiempo[i+1]-functiempo[i])/(math.log(tiempo[i
+1])-math.log(tiempo[i]))*math.log(tiempo[i]/tiempo[i-1]))
35         deri[i]=deri[i]+((functiempo[i]-functiempo[i-1])/(math.log(
tiempo[i])-math.log(tiempo[i-1]))*math.log(tiempo[i+1]/tiempo[i
]))
36         deri[i]=deri[i]*(1/(math.log(tiempo[i+1]/tiempo[i])+math.log
(tiempo[i]/tiempo[i-1])))
37         derivada=np.delete(deri,[0,49])
38     return functiempo, derivada
39 #-----
40
41 "Pwd en el espacio de Laplace"
42 #-----
43
44 def F(laplace, D, the):
45     a3=((phim*ctm*kf)/(ct2phi2*km))*laplace
46     s3=math.sqrt(a3)*math.tanh(math.sqrt(a3)-(math.sqrt(a3)*xed))
47     s2=lam*(bd**2)*((lam/(lam+(1-ome)*laplace))-1)+(bd**2)*(km/kf)*
s3-(ome*laplace*bd**2)
48     be=2*math.sqrt(-s2)/(2+the)
49     ga=(2+the)/2
50     eta=(3-D+the)/(2+the)
51     auxiliar=math.sqrt(-s2)*((sp.iv(eta-1,be)*sp.kv(eta-1,be*yed**ga
))-sp.kv(eta-1,be)*sp.iv(eta-1,be*yed**ga))/(sp.iv(eta,be)*sp.kv(
eta-1,be*yed**ga)+sp.iv(eta-1,be*yed**ga)*sp.kv(eta,be))
52     b1=(phi1*ct1*kf)/(ct2phi2*k1)
53     a1=(xf**2*kf)/(bf**2*k1)
54     delt=laplace*b1-a1*auxiliar
55     c1=-(math.pi*kf*xf)/(k1*bf)
56     pwd1=(c1/(laplace*math.sqrt(delt)*math.tanh(math.sqrt(delt))))+(
skin*c1/laplace)
57     pwd=pwd1/(pwd1*laplace**2*cdf-1)
58     return pwd
59 #-----
60
```

## Apéndice B

# Algoritmo de Stehfest

El algoritmo propuesto por Stehfest (1970) es un método numérico utilizado para obtener una aproximación de la transformada inversa de Laplace de una función, partiendo de su transformada.

Si la transformada de Laplace,  $f(s)$ , de una función existe, el algoritmo de Stehfest (1970) proporcionará un valor aproximado,  $Fa$ , de su transformada inversa,  $p(t)$ , para un tiempo  $t$  dado. El valor de  $Fa$  se obtiene mediante la ecuación B.1.

$$Fa = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^{2n} V_j F\left(j \frac{\ln(2)}{t}\right) \quad (\text{B.1})$$

Donde:

$$V_j = (-1)^{n+j} \sum_{k=\frac{j+1}{2}}^{\min(j,n)} \frac{k^{n+1}(2k)!}{(n-k)!k!(k-1)!(j-k)!(2k-j)!} \quad (\text{B.2})$$

$$2n = N \quad (\text{B.3})$$

El parámetro  $k$  debe truncarse a modo que pertenezca siempre al conjunto de los números naturales, mientras que  $N$  debe ser un número entero par. De la ecuación B.2 puede observarse que los coeficientes  $V_j$  se mantendrán constantes durante todo el proceso iterativo para determinar el valor de  $Fa$ , por lo que sólo deberán ser calculados una vez.

La precisión del método depende directamente del parámetro  $N$ , sin embargo, eso no significa que mientras mayor sea el valor de  $N$  mayor será la precisión, pues si el valor es muy grande podrían presentarse errores por truncamiento. Generalmente, valores entre 12 y 16 arrojan buenos resultados.