

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL



APLICACIONES A LA TEORÍA DE LA ESPERA

Autores:

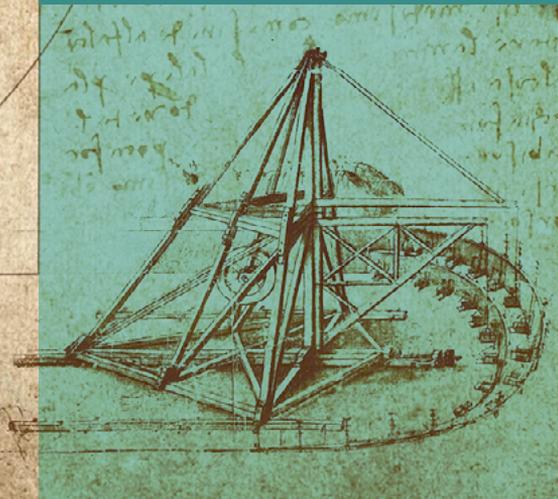
Adrián Gutiérrez Gómez
Adrielly Nahomeé Ramos Álvarez
Alejandro Felipe Zárate Pérez
Carlos Alberto Pérez Juárez
Emiliano Gutiérrez Ayala
Julio César Briseño Jiménez
Victoria Mayela Luna Rojas

Coordinadora:

Idalia Flores de la Mota

CUADERNILLO
DE DIVULGACIÓN

17





APLICACIONES A LA TEORÍA DE LA ESPERA

Autores:

Adrián Gutiérrez Gómez
Adrielly Nahomeé Ramos Álvarez
Alejandro Felipe Zárate Pérez
Carlos Alberto Pérez Juárez
Emiliano Gutiérrez Ayala
Julio César Briseño Jiménez
Victoria Mayela Luna Rojas

Coordinadora:

Idalia Flores de la Mota



CUADERNILLO
DE DIVULGACIÓN

17

Para visualizar la obra
te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

Flores, De la Mota, Idalia (Coordinadora).
Aplicaciones a la teoría de la espera
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2022, 68 p.

Aplicaciones a la teoría de la espera

Primera edición electrónica
de un ejemplar (5 MB) Formato PDF
Publicado en línea el 1 de julio de 2022

D.R. © 2022, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional
Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación
Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la
Universidad Nacional Autónoma de México. Prohibida la
reproducción o transmisión total o parcial por cualquier
medio sin la autorización escrita del titular de los derechos
patrimoniales.

Hecho en México.



Unidad de Apoyo Editorial
Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz
Formación editorial : Luis Enrique Vite Rangel

CONTENIDO

PRÓLOGO.....	6
SEMBLANZAS DE LOS AUTORES.....	8
INTRODUCCIÓN	11
CAPÍTULO 1. Análisis de una presa en tiempo y probabilidad discretos	19
1.1 Introducción.....	19
1.2 Probabilidad y tiempo discretos.....	20
1.3 Capacidad finita e infinita de la presa.....	21
CAPÍTULO 2. Revisión de etiquetas a través de un sistema de inspección de video	24
2.1 Introducción	24
2.2 Modelo de colas de Poisson	26
2.3 Descripción del ejemplo	27
2.4 Cálculos.....	28
2.5 Solución.....	30
2.6 Conclusiones	32

PRÓLOGO

Como parte de las actividades del Departamento de Investigación de Operaciones e Ingeniería Industrial de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial, de la Facultad de Ingeniería, UNAM, nos hemos propuesto el desarrollo de material didáctico y de divulgación a través de la elaboración de una serie de cuadernillos de difusión, así como apuntes que complementen la bibliografía de los cursos de la Facultad. Este material se centra en los tópicos que aborda la teoría de la espera a través de aplicaciones sencillas. El propósito es apoyar tanto la labor docente como el aumento en el conocimiento de la materia por los estudiantes a nivel maestría y licenciatura de las diferentes áreas de la ingeniería, así como de licenciaturas afines, para que conozcan el potencial que ofrecen estas herramientas.

Este material tiene como uno de sus objetivos introducir al lector en los temas de una manera clara y sencilla, pero sin perder el rigor teórico en su tratamiento. La selección, edición y revisión técnica del material

fue realizada por Idalia Flores De la Mota, y la elaboración de cada capítulo por parte de los alumnos de la maestría en Investigación de Operaciones. Adrián Gutiérrez Gómez, Adrielly Nahomeé Ramos Álvarez, Alejandro Felipe Zárate Pérez, Carlos Alberto Pérez Juárez, Emiliano Gutiérrez Ayala, Julio César Briseño Jiménez y Victoria Mayela Luna Rojas.

La redacción de este material fue una experiencia enriquecedora y los autores esperan que los estudiantes de ingeniería lo encuentren grato e informativo cuando traten de aprender cómo se puede aplicar la Teoría de la Espera en sus campos de interés. Se incluye una introducción con los conceptos básicos de la teoría para facilitar la lectura de los capítulos.

Agradezco en especial a la Maestra María Cuairán Ruidíaz y a Nismet Díaz Ferro por el apoyo en la revisión y formato de este material, así como a Mayela Luna Rojas por su apoyo al organizar todo el material, y finalmente al Proyecto PAPIME PE107421: Una visión holística de la Ingeniería y las matemáticas: Retos actuales en la enseñanza.

Idalia Flores De La Mota
Coordinadora de la publicación

1

2

3

4

5

7

SEMBLANZAS DE LOS AUTORES



Adrián Gutiérrez Gómez

Es ingeniero civil titulado por parte de la UNAM. Trabajó en un laboratorio de mecánica de suelos. Quiere resolver problemas en beneficio social aplicando la investigación de operaciones. También le gustan los temas de filosofía y psicología.



Adrielly Nahomeé Ramos Álvarez

Adrielly Ramos se graduó como ingeniera mecatrónica en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, actualmente es alumna de la Maestría en Ingeniería de Sistemas en Investigación de Operaciones en la misma facultad. Ha participado en diversos proyectos de innovación y desarrollo en movilidad y sustentabilidad, con Thales Group, Xylem Inc. y la Universidad de Stanford. Actualmente trabaja como ayudante de profesor B en el Departamento de Investigación de Operaciones e Ingeniería Industrial en la Facultad de Ingeniería

de la UNAM. Ha publicado diversos artículos en congresos internacionales en el área de industria 4.0 y manufactura inteligente e ingeniería mecánica. Es coautora del libro *Gestión ambiental en España, Guatemala y México desde la perspectiva de mujeres investigadoras*. Y además de sus intereses en gestión de recursos naturales, diseño mecánico, sustentabilidad, también es entusiasta del chino mandarín.



Carlos Alberto Pérez Juárez

Carlos Pérez es egresado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y estudió una Maestría en Ingeniería en Sistemas en el posgrado de la misma facultad, así como una Maestría en Administración de Empresas en la Universidad Iberoamericana campus Santa Fe, de la cual se graduó con el mejor promedio de su generación y recibió mención honorífica. Publicó un artículo en la revista *Procedia Computer Science*, editada por Elsevier. También ha desarrollado diversos manuales y cursos de capacitación y operación en conjunto con las marcas de equipo y maquinaria industrial que representa CAP INGENIERIA, empresa de la cual actualmente es socio y CEO.



Alejandro Felipe Zárate Pérez

Alejandro Felipe Zárate Pérez se graduó de la licenciatura en Actuaría de la Facultad de Ciencias de la UNAM; realizó una Maestría en Entornos Virtuales de Aprendizaje organizada por la OEI y la Universidad de Panamá, actualmente es alumno de la Maestría en Ingeniería de Sistemas en Investigación de Operaciones en la Facultad de Ingeniería. Asimismo, trabaja como técnico académico en la Dirección General de Cómputo y de Tecnologías de Información y Comunicación (DGTIC) en el Área de plataformas de cursos de

1

2

3

4

5

9

capacitación en línea. Ha participado como profesor en cursos de la DGTIC, como profesor de asignatura en la Facultad de Ciencias y como ayudante de profesor B en el Departamento de Investigación de Operaciones e Ingeniería Industrial en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.



Emiliano Gutiérrez Ayala

Estudió las carreras de Ingeniería Mecánica en la Facultad de Ingeniería de la UNAM y de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la misma universidad, además de estudiar la Maestría en Ingeniería en Sistemas, también en la UNAM. Sus intereses académicos son el álgebra abstracta, lógica matemática, teoría de conjuntos y teoría de gráficas. Otros intereses además de los académicos son la música pues toca el violín; la literatura y la historia.



Victoria Mayela Luna Rojas

Actuaría por la Facultad de Ciencias de la UNAM. En su carrera profesional se ha desempeñado como analista de gestión del portafolio de garantías en Nacional Financiera; se ha involucrado en el análisis, reporte y estructuración de información financiera, así como en el desarrollo de un software de uso interno para el monitoreo de portafolios de inversión. También formó parte del área de suscripción para una compañía de seguros dentales, en donde se encargaba de realizar el análisis de la información utilizada para la tarificación de seguros y la elaboración de reportes del negocio. Actualmente se encuentra cursando una Maestría en Ingeniería de Sistemas con enfoque a la investigación de operaciones en la UNAM.

1

2

3

4

5

INTRODUCCIÓN

En la actualidad y sobre todo en el sector de los servicios, existe una serie de situaciones en donde “alguien” o “algo” requiere de un determinado tipo de servicio, para lo cual, en ocasiones tiene que hacer una cola o esperar en línea ante “alguien” o “algo”, que es quien proporciona dicho servicio. En este sentido la teoría de colas ofrece elementos importantes de decisión en la solución de problemas como: disminuir o eliminar la congestión de un determinado servicio, minimizar pérdidas de tiempo debidas a operaciones deficientes, minimizar excesos de capacidad, etc.

La naturaleza de esta situación de espera puede analizarse matemáticamente si se conocen las leyes que gobiernan las llegadas para un servicio, el orden en que son atendidos y los tiempos para dar el servicio.

Existe una fuente de la que provienen las unidades que requieren un determinado servicio, las cuales llegan al sistema de espera formando una cola. El mecanismo de servicio, a través de estaciones de servicio, selecciona en el tiempo a una de las unidades en la cola para prestar el servicio solicitado. Una vez terminado este, la unidad deja el sistema de espera, como se observa en la figura 1.

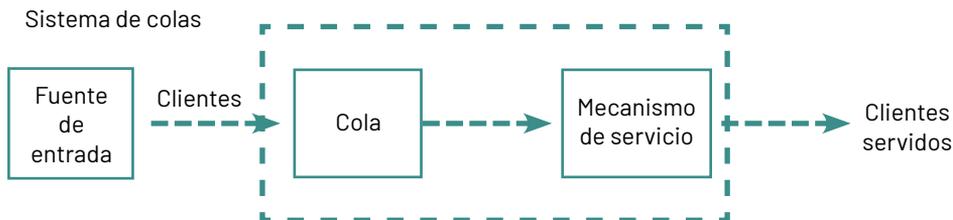


Figura 1. Mecanismo de servicio

CARACTERÍSTICAS DEL PROCESO DE ESPERA

1. Tipo de llegadas. Una característica de la fuente es el número total de unidades que solicitan servicio, que puede ser finito o infinito. Otra característica es la forma en que las unidades llegan al sistema de espera, y se pueden distinguir los siguientes casos:

- Llegadas de unidades al sistema con intervalos iguales de tiempo.
- Llegadas de unidades al sistema con intervalos desiguales de tiempo, pero perfectamente conocidos.
- Llegadas de unidades al sistema con intervalos desiguales de tiempo, cuyas probabilidades son conocidas (intervalos aleatorios).
- Llegadas de unidades al sistema con intervalos desiguales de tiempo, con probabilidades desconocidas y en cuyo caso no puede ser estimado.

2. Disciplina de la línea de espera. Existen diferentes disciplinas en la línea de espera. El caso más sencillo y el que normalmente se considera en modelos de espera es que el primero en llegar es a quien se le da primero servicio (FIFO). Otros tipos de disciplina se establecen de acuerdo con un cierto orden preferencial para otorgar servicio. También es posible que los clientes que lleguen a una instalación sean colocados en líneas de *espera con prioridad*, para que aquellas personas con mayor prioridad reciban preferencia para ser atendidos en primer término.

3. Mecanismo de servicio. El mecanismo de servicio puede constar de una o más unidades de servicio. Cada unidad contiene una o más estaciones de servicio. Igual que las llegadas de unidades al sistema, el tiempo de servicio (comprendido desde que la unidad entra al servicio hasta que termina) sigue la misma clasificación que en el punto 1.

Otros factores que pueden influir en el servicio son:

Servicio por grupo, colas en serie en las cuales la salida de una unidad de una estación de servicio es la entrada en la siguiente estación, etc.

Los elementos básicos de un modelo de espera dependen de los siguientes factores:

1. Distribución de llegadas (llegadas individuales o en grupo).
2. Distribución del tiempo de servicio (servicio individual o masivo).
3. Diseño de la instalación de servicio (estaciones en serie, en paralelo o en red).
4. Disciplina de servicio (FIFO, LIFO, otras).
5. Tamaño de la cola (finito o infinito).
6. Fuente de llegadas (finita o infinita).
7. Conducta humana (cambios, elusión y renuncia).

En general, las soluciones analíticas son difíciles de obtener para problemas muy complejos, por lo que se debe usar la simulación.

NOTACIÓN DE KENDALL

Un código que describe el proceso de llegada. Los códigos usados son:

M para "Markoviano" (la tasa de llegadas sigue una distribución de Poisson), lo que significa una distribución exponencial para los tiempos entre llegadas.

D para unos tiempos entre llegadas deterministas, es decir, no siguen un proceso probabilista a la hora de su determinación.

G para una “distribución general” de los tiempos entre llegadas, o del régimen de llegadas.

Mismo código para tiempos de servicio.

Una forma de describir un proceso de espera en forma sencilla es a través de una serie de símbolos y diagonales tales como $A/B/X/Y, Z/$, notación de Kendall (1953), en donde A indica la distribución de tiempo entre llegadas, B la distribución de probabilidades de tiempo entre servicios, X el número de estaciones de servicio paralelas, Y la restricción en la capacidad del sistema y Z la disciplina de espera.

Normalmente se utilizan los primeros tres símbolos, omitiéndose los símbolos Y y Z . Así $M/D/2$ representa un sistema de espera con tiempo entre llegadas exponencial, servicio determinístico, dos estaciones de servicio, ningún límite en la capacidad de servicio y como disciplina primero en llegar primero en ser atendido.

$/M/M/2$ Llegadas poissonianas servicio poissoniano 2 estaciones de servicio.

$/M/G/8$ Llegadas poissonianas servicio con distribución general de tiempo entre servicios - 8 estaciones de servicio.

En la descripción de los modelos de espera se usa la siguiente nomenclatura:

E_n = Estado en el cual hay n unidades en el sistema.

λ = Relación media de llegadas = número esperado de llegadas por unidad de tiempo.

μ = Relación media de servicios = número esperado de unidades servidas por unidad de tiempo (de una estación de servicio).

$1/\lambda$ = Tiempo esperado entre llegadas.

$1/\mu$ = Tiempo esperado entre salidas tiempo medio esperado de servicio.

- 1
- s = Número de estaciones de servicio.
- λ_n = Relación media de llegadas de nuevas unidades cuando hay n unidades en el sistema.
- n = Relación media de servicios cuando hay n unidades en el sistema.
- $p_j(t)$ = Probabilidad de que existan j unidades en el sistema en el instante t .
- $\rho = \lambda / s\mu$ Porcentaje de utilización del servicio = intensidad de tráfico = probabilidad de que el servicio esté ocupado.

RÉGIMEN PERMANENTE O ESTADO ESTACIONARIO

Por régimen permanente o estado estacionario, se entiende la zona de respuesta del sistema en la que, tras haber transcurrido tiempo suficiente, todos los parámetros del sistema se han estabilizado y permanecen a un valor constante. En este sentido se definen las siguientes:

- 2
- 3
- 4
- L = Número esperado de unidades en el sistema
- L_q = Número esperado de unidades en la cola
- L_s = Número esperado de unidades siendo servidas o en servicio
- W_q = Tiempo esperado de permanencia en la cola
- W_s = Tiempo esperado de permanencia en el servicio = $1/\mu$
- W = Tiempo esperado de permanencia en el sistema
- $W = W_q + W_s$

MODELO GENERALIZADO DE COLA DE POISSON

5

El desarrollo del modelo generalizado se basa en el comportamiento a largo plazo, o de estado estable de la cola que se alcanza después de que el sistema ha estado funcionando durante un tiempo suficientemente largo.

Este modelo supone que las frecuencias tanto de las llegadas como de salidas dependen del estado, lo que significa que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio.

Definición

El modelo generalizado define a ρ_n como función de λ_n y μ_n .

Después se usan esas probabilidades para determinar las medidas de funcionamiento del sistema como la longitud promedio de la cola, el tiempo promedio de espera y la utilización promedio de la instalación.

Hipótesis 1

Dado $E_n(t) = n$ la distribución actual de probabilidad del tiempo restante hasta el siguiente nacimiento (llegada) es exponencial con parámetro λ_n ($n=0,1,2,\dots$).

El estado 0 solo puede cambiar al estado 1 cuando hay una llegada con la frecuencia λ_0 . Observe que μ_0 no está definida porque no puede haber salidas del sistema si está vacío. Ver figura 2.

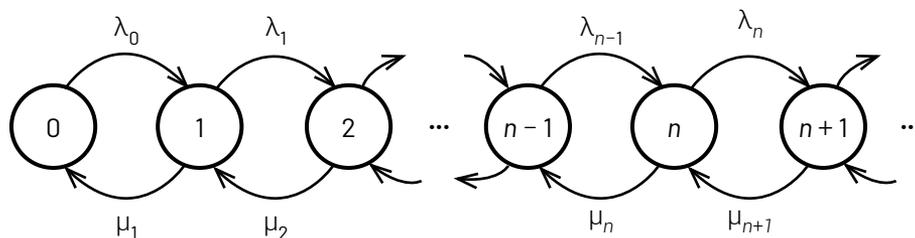


Figura 2. Cambio de estados y las frecuencias asociadas

Hipótesis 2

Dado $E_n(t) = n$, la distribución actual de probabilidad del tiempo restante hasta la siguiente muerte (compleción del servicio) es exponencial con parámetro μ_n ($n=1, 2, \dots$).

Hipótesis 3

Solo puede ocurrir un nacimiento o una muerte en un instante. Las expresiones λ_n y μ_n son tasas medias.

Ecuación de balance

Para cualquier estado del sistema n , la tasa media (número esperado de ocurrencias por unidad de tiempo) a la que los incidentes de entrada ocurren debe ser igual a la tasa media de los incidentes de salida.

Ecuaciones de estado

Con el fin de considerar una ecuación de balance analice el estado 0. El proceso entra a este estado únicamente desde el estado 1.

Por lo tanto, la probabilidad de estado estacionario de encontrarse en el estado 1 (p_1) representa la proporción de veces que le sería posible al proceso entrar al estado 0.

Dado que el proceso está en estado 1, la tasa media de entrar al estado 0 es μ_1 , desde cualquier otro estado esta tasa media es 0.

Por lo tanto, la tasa media global a la cual el proceso sale de su estado actual para entrar al estado 0 (tasa media de ocurrencias de entrada) es:

$$\mu_1 p_1 + 0(1 - p) = \mu_1 p_1$$

Con el mismo razonamiento se tiene que la tasa media de ocurrencia de incidentes de salida es $\lambda_0 q_0$ entonces la ecuación de balance para el estado 0 es:

$$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0$$

En la tabla 1 se muestran las ecuaciones de estado.

Tabla 1 Ecuaciones de estado

Estados	Ecuaciones
0	$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$
1	$p_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)p_1 - \lambda_0 p_0}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 + \frac{1}{\mu_2} \{(\mu_1 p_1 - \lambda_0 q_0) = 0\} = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$
...	...
n-1	$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} p_{n-1} - \lambda_{n-2} p_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} p_0$
n	$p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} (\mu_n p_n - \lambda_{n-1} p_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} p_0$

De esta manera se llega a las fórmulas de los modelos de Poisson.

CAPÍTULO 1

Análisis de una presa en tiempo y probabilidad discretos

Adrián Gutiérrez Gómez

1.1 Introducción

La siguiente aplicación de la teoría de colas fue obtenida del libro *Elements of Queuing Theory with Applications* de Saaty, T.

En general, uno se ocupa de la distribución de la cantidad de agua que queda en el depósito después de su uso, ya sea en tiempo continuo o discreto, como años. En el último caso, la entrada de agua al embalse variará de un año a otro según alguna distribución. Se almacena (salvo posible desbordamiento) para su uso durante la estación seca. Durante la temporada se utiliza a un ritmo uniforme. Se puede suponer que la cantidad total utilizada varía de un año a otro. Por simplicidad, se puede suponer que esta cantidad es una constante M .

Sea $\{X_t\}$ una familia de variables aleatorias distribuidas de forma idéntica e independientes en serie. Por tanto, si $t_1 < t_2$, X_{t_1} es independiente de X_{t_2} , para todo t_1 y t_2 . X_t denota la entrada de agua en el embalse en el tiempo t , o si t es discreta y mide años, entonces X_t es la entrada al comienzo del año t . Sea Z_t la cantidad de agua el tiempo almacenada en

t pero antes de la llegada de X_t . Sea Y_t la cantidad liberada. Si t denota el tiempo en años, Y_t es la cantidad liberada durante la estación seca del año. Se puede abordar todo el problema desde distribuciones de probabilidad discretas y continuas y de valores de tiempo discretos y continuos. Además, la capacidad de la presa puede asumirse como finita con valor K o infinita.

Tenga en cuenta que el W_t de desbordamiento viene dado por:

$$W_t = X_t + Z_t - K$$

Si este último es positivo, de lo contrario, es cero. Su distribución se puede determinar a partir de la de X_t y Z_t , una vez determinado el último de los dos.

1.2 Probabilidad y tiempo discretos

Examinemos la formulación del caso de tiempo discreto (medido en años). Primero asumimos que $Y_t = M$. De esta manera, se libera una cantidad igual a $\min(X_t + Z_t, M)$. Supongamos que X_t asume los valores $0, 1, \dots$ en el tiempo t con probabilidades P_0, \dots, P_k y que Z_t asuma los valores $0, 1, \dots$ en el tiempo t con probabilidades p_0, \dots, p_M y en el tiempo $t + 1$ con probabilidades P'_0, \dots, P'_k ; también sea $K \geq M$. Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$P'_0 = P_0(p_0 + p_1 + \dots + p_M) + P_1(p_0 + p_1 + \dots + p_{M-1}) + \dots + P_M p_0$$

$$P'_1 = P_0 p_{M+1} + P_1 p_M + \dots + P_{M+1} p_0$$

$$P'_{K-M} = P_0(p_K + \dots) + P_1(p_{K-1} + \dots) + \dots + P_{K-M}(p_M + \dots)$$

$$P'_{K-M+1} = \dots = P'_K = 0$$

Lo que da la distribución de Z_{t+1} de la de Z_t y así sucesivamente a Z_{t+n} , dando una cadena de Márkov. Tenemos convergencia conforme $n \rightarrow \infty$ a un estado estable si $p'_i > 0$ ($i = 0, \dots, K$). Para obtener la solución de estado estacionario, sea $P_i = P'_i$ ($i = 0, \dots, K-M$) y también use:

$$\sum_{i=1}^{K-M} P_i = 1$$

El problema puede resolverse mediante varios métodos numéricos, de Monte Carlo o matriciales.

1.3 Capacidad finita e infinita de la presa

Si la capacidad de un depósito es infinita, es decir, K a infinito, el problema correspondiente se simplifica y las ecuaciones en el estado estacionario son:

$$P'_0 = P_0(p_0 + p_1 + \dots + p_M) + P_1(p_0 + p_1 + \dots + p_{M-1}) + \dots + P_M p_0$$

$$P_i = P_0 p_{M+1} + P_1 p_{M+i-1} + \dots + p_{M+i} p_0, i \geq 1$$

La distribución estacionaria de $\{R_i\}$ satisface

$$R_0 = p_0(R_0 + \dots + R_M)$$

$$R_i = p_i(R_0 + \dots + R_M) + p_{i-1} R_{M+1} + \dots + p_0 R_{M+i}, i \geq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} R_i = 1$$

Si identificamos la longitud de la cola con el contenido del yacimiento, las llegadas por un proceso de Poisson con la entrada y el servicio en lotes de tamaño M , o la longitud de la cola, si esta última es menor que M , con la salida, entonces el último conjunto de ecuaciones describe la longitud de la cola en épocas justo antes de que comience el servicio. Esto da una relación entre las presas de almacenamiento y las colas.

Tenemos la siguiente expresión:

$$P_0 = R_0 + \dots + R_m, \quad P_i = R_{M+i}, \quad i \geq 1$$

y, por tanto, los dos conjuntos de ecuaciones dan una descripción equivalente del sistema.

Nota: Dos casos son de interés aquí. Uno es cuando la cantidad almacenada es muy grande y, por tanto, Z_t se vuelve cero con una probabilidad muy pequeña. El otro es el caso en el que la distribución de probabilidad de que el depósito esté lleno es pequeña, así tenemos la posibilidad de dos tipos de soluciones. Existe una solución estacionaria distinta de cero si, para el primer caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} np_n > M \text{ y para el segundo caso}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} np_n > M \text{ y para el segundo caso se cumple.}$$

Ahora notamos que, si $\{P_i\}$ es la solución para el almacenamiento de agua infinito en el caso discreto, tenemos para el almacenamiento finito:

$$P'_i = \frac{P_i}{P_0 + \dots + P_{K-1}}$$

Siempre podemos determinar $\{P_i\}$ expandiendo $\frac{z-1}{z-p(z)}$ para valores suficientemente pequeños de z e igualando coeficiente, siempre que $p_n > 0$, o usando distribuciones acumulativas,

$$G(x) = \int_0^x G(x+M-t) dF(t)$$

Como ejemplo, se puede resolver la última ecuación cuando

$$F(x) = \sum_i c_i e^{-\lambda_i x}$$

donde las c_i son constantes complejas y $Re(\lambda_i) > 0$ por sustitución, obteniendo condiciones que deben satisfacer c_i y λ_i , particularmente si también se conoce la distribución (de tipo general) $G(x)$.

1

2

3

4

5

CAPÍTULO 2

Revisión de etiquetas a través de un sistema de inspección de video

Adrielly Nahomeé Ramos Álvarez y Carlos Alberto Pérez Juárez

2.1 Introducción

La formación de colas es un elemento crucial de los sistemas que silenciosamente hace perder a la Ciudad de México, quinta urbe más grande del mundo, 2 mil 300 millones de dólares cada año en solo uno de sus muchos aspectos (IMCO, 2018). Las colas y su teoría correspondiente juegan un papel particular en los sistemas de todas clases, desde las filas de los supermercados hasta la transmisión de datos satelitales. A pesar de que las colas están presentes en la mayoría de las actividades humanas, su estudio matemático lo inició el danés Agner Erlang a inicios del siglo XX al estudiar el tráfico telefónico. Así, a partir de la telefonía, la teoría de colas surge para explicar el comportamiento de las filas de espera en cualquiera de sus aplicaciones.

Una parte importante de la teoría de colas es el modelo de colas de Poisson que busca determinar las medidas de funcionamiento de un sistema como la longitud promedio de la cola, el tiempo promedio de espera y la utilización de la instalación o estación de servicio, siendo estos de gran interés en las industrias en las que se busca que los procesos sean eficientes.

1

2

3

4

5

Actualmente con todas las nuevas tecnologías, avances publicitarios y mercadotecnia, hay una tendencia de mejora en la calidad de los productos, a tal grado que los esquemas de *Seis Sigma* y *Lean Manufacturing* son cada vez más requeridos. Para el ejemplo de aplicación mostrado en el presente capítulo se abordará la industria de los empaques y etiquetas, que en cuanto a las demandas en calidad de diseños y acabados ha obligado a la industria gráfica a mejorar sus procesos para poder satisfacer la producción en términos de variedad y acabados. Por esta razón se ha vuelto fundamental contar con sistemas de inspección en línea para garantizar la calidad en los productos. A tal grado que se comienza a ver usuarios finales que solicitan una inspección 100% garantizada.

Dentro de la industria gráfica, el mercado de empaque, en el cual se centrará este capítulo, es en términos de volumen, el más grande de los mercados de la industria. Debido al aumento significativo de precios en los últimos años y a sus importantes márgenes de utilidad (Drupa, 2019) requiere de una atención particular. Y el alcanzar una producción propia de *Seis Sigma* representaría un avance importante en esta industria.

Los principales inversiones en tecnología de impresión por mercado en 2020

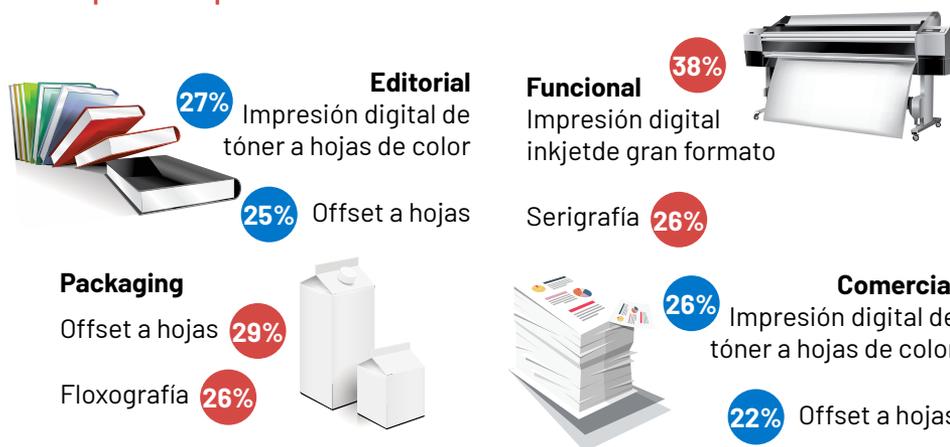


Figura 1. Principales inversiones en tecnología de impresión 2020 (Drupa, 2020)

Por tanto, el conocer el comportamiento de las colas dentro de este sistema podría ser la diferencia entre una producción a tiempo y la pérdida de contratos. Así, de una manera sencilla se presentará un ejemplo particular modelo de colas de Poisson utilizando la notación de Kendall aplicado a un sistema de impresión de etiquetas.

2.2 Modelo de colas de Poisson

El modelo de colas de Poisson es reconocido por la relación entre las distribuciones teóricas de Poisson y exponencial que describen los tiempos entre llegadas de los clientes al sistema y su correspondiente comportamiento. A continuación, se explicará el modelo generalizado de la cola de Poisson.

El desarrollo del modelo generalizado se basa en el comportamiento de estado estable de la cola que se alcanza después de que el sistema ha estado funcionando durante un tiempo suficientemente largo. Este modelo supone que las frecuencias tanto de las llegadas como de salidas dependen del estado, lo que significa que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio.

En el comportamiento de las líneas de espera del modelo, se destacan algunas características importantes, en primer lugar, que las llegadas son decrecientes, en segundo lugar, que estas llegadas ocurren de forma totalmente aleatoria; es decir que la ocurrencia de llegada de un cliente nuevo no se ve afectada por el tiempo transcurrido desde la ocurrencia de la llegada del cliente anterior, y en tercer lugar, que se puede interpretar a la "...distribución exponencial como el tiempo que transcurre hasta el primer evento de Poisson" (Arrollo et al., 2014).

El modelo generalizado define a p_n como función de λ_n y p_n . Después se usan esas probabilidades para determinar las medidas de funcionamiento o desempeño del sistema como la longitud promedio de la cola, el tiempo promedio de espera y la utilización promedio de la instalación.

2.3 Descripción del ejemplo

Ahora se presentará un ejemplo de aplicación del modelo de colas de Poisson para una cola, c servidores en paralelo, con población finita con la notación de Kendall $(M/M/C):(FIFO/N/\infty, c \leq N)$, expresando que las llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poisson y los tiempos de servicio se comportan exponencialmente y que habrá un número C de canales en el sistema. Además, la disciplina que seguirá la cola será la de primero en entrar, primero en salir (FIFO por sus siglas en inglés), y un número finito de clientes en el sistema.

El ejemplo se centrará en una fábrica de impresión en la que existen 3 líneas de producción. Los trabajos llegan según una distribución de Poisson con media de 18 trabajos por turno de 8 horas. El tiempo de impresión está exponencialmente distribuido con media de 108 minutos. Como no hay un límite de cantidad en el sistema, se tiene un aumento en la tasa de servicio proporcional al número de máquinas. La siguiente figura muestra una representación básica del sistema de impresión.

Una cola - c servidores en paralelo -población finita



Figura 2. Ilustración del ejemplo

2.4 Cálculos

Teniendo en cuenta este tipo de sistema con cierto número de servidores en paralelo y una capacidad limitada, se realizaron los cálculos correspondientes siguiendo las ecuaciones siguientes:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (0 \leq n < K) \\ 0 & (n \geq K) \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & (n < c) \\ c\mu & (n \geq c) \end{cases}$$

Para obtener la probabilidad de que el sistema esté vacío, al llegar se utiliza la ecuación de p_0 :

$$p_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \left(\frac{1 - (\lambda/c\mu)^{K-c+1}}{1 - \lambda/c\mu} \right) \right]^{-1}, & \lambda/c\mu \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} (K-c+1) \right]^{-1}, & \lambda/c\mu = 1 \end{cases}$$

La probabilidad de que existan n clientes en el sistema al llegar es:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0 & (0 \leq n \leq c) \\ \frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} p_0 & (c \leq n \leq N) \end{cases}$$

El número esperado de clientes en la cola L_q es:

$$L_q = \frac{p_0 (c\rho)^c \rho_c}{c! (1 - \rho_c)^2} [1 - \rho_0^{N-c+1} - (1 - \rho_c)(N-c+1)\rho_c^{N-c}]$$

Por lo tanto, se tiene:

$$L_q = \begin{cases} \rho_0 \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) \right], & \rho/c \neq 1 \\ \rho_0 \frac{\rho^c (N-c)(Nc+1)}{2c!}, & \rho/c = 1 \end{cases}$$

El número esperado de clientes en el sistema L_s es:

$$L_s = L_q + c - \rho_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c-n)(\rho_c c)^n}{n!} = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

Para determinar W_s se calcula λ_{ef} como sigue:

$$\lambda_{perdido} = \lambda_{\rho N}$$

$$\lambda_{ef} = \lambda - \lambda_{perdido} = (1 - \rho N)\lambda$$

El tiempo promedio de espera de un cliente en el sistema W_s es:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}}$$

El tiempo promedio de espera de un cliente en la cola W_q es:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$$

1

2

3

4

5

2.5 Solución

Este es un modelo con varios servidores del tipo $(M/M/C)$ donde:

- $C = 3$, el número de servidores (máquinas disponibles)
- $\lambda = 2.25$ trabajos por hora, 18 trabajos por turno de 8 horas (frecuencia de llegadas)
- $\mu =$ minutos (rapidez del servicio por servidor o máquina)

Y como no hay un límite de cantidad en el sistema $\lambda_{nf} = \lambda$ al usar C servidores en el sistema se tiene un aumento en la tasa de servicio proporcional a "C".

En nuestro ejemplo se tiene:

$$\lambda_n = \lambda = 2.25 \text{ trabajos por hora}$$

$$\mu = 108/60 = 1.8 \text{ horas}$$

$$\rho = \lambda/\mu = 1.25 \text{ trabajos}$$

Para calcular las medidas de desempeño se tiene:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n < c \\ c\mu & n \geq c \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\dots(n\mu)} p_0 = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0 & n < c \\ \frac{\lambda^n}{\prod_{i=1}^c i\mu(c\mu)^{n-c}} p_0 = \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} p_0 & n \geq c \end{cases}$$

Si $\rho = \lambda/\mu$ y además $\rho/c < 1$ el valor de ρ_0 se determina con:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = 1$$

Esto da como resultado:

$$\rho_0 = \left[\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho}{c} \right)^{n-c} \right]^{-1} \frac{\rho}{c} < 1$$

Sustituyendo:

Factor de utilización del sistema

$$\rho = \lambda/\mu$$

$$\rho = 1.25 \text{ trabajos}$$

$$\rho_0 = 0.416$$

$$\rho_1 = 0.52$$

$$\rho_2 = 0.325$$

$$\rho_3 = 0.135$$

Se puede observar que la probabilidad de que el servidor esté ocupado al tiempo de la llegada de un cliente, en este caso, trabajo de impresión, va disminuyendo a medida que aumenta el número de servidores en paralelo, por lo que teniendo 3 servidores solo habría una probabilidad de 13.5 % de que estuvieran ocupados, con lo que se agiliza así el sistema.

Entonces se tiene para L_q y L_s las siguientes fórmulas:

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n-c)\rho_n = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \rho_0$$

Trabajo en espera

$$L_q = 0.16$$

Como $\lambda_{ef} = \lambda$ entonces $L_s = + \rho$

Trabajos en impresión:

$$L_s = 1.41$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$$

El tiempo de espera en la cola es:

$$W_q = 4.2 \text{ min}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}}$$

Así el tiempo de espera en el sistema es:

$$W_s = 37.2 \text{ min}$$

2.6 Conclusiones

En conclusión podemos decir que el modelo de colas de Poisson sirve para definir los tiempos de espera y producción en una planta de impresión industrial, por lo que en la vida real puede ser de gran utilidad para programar la producción diaria, semanal o mensual de una empresa, así como analizar las alternativas de solución ante las posibles contingencias por falla de alguna máquina en las líneas de producción, trabajos urgentes inesperados, reposiciones de trabajos por rechazos de calidad por parte del cliente, o incluso hasta la programación de mantenimientos preventivos, ya que nos da información útil sobre los tiempos libres del sistema, que también pueden ayudar a la toma de decisiones de inversión como, ¿cuándo es necesaria una línea nueva?

Por otra parte, el ejemplo ofrece datos que mantienen al sistema en óptimas condiciones, como se puede ver en los resultados de la solución, por lo que en principio podría operar incluso con 2 líneas de producción únicamente, aunque si aumentamos la tasa de llegada λ de los trabajos, veremos cómo el sistema comienza a tener trabajos en espera.

En general podemos decir que este ejemplo nos muestra claramente la importancia y aplicación de temas como el de la teoría de colas en la vida real.

1

2

3

4

5

CAPÍTULO 3

Taquería

Emiliano Gutiérrez Ayala y Alejandro Felipe Zárate Pérez

3.1 Introducción

En México el negocio de la venta de comida es, por excelencia, una de las mayores vías de emprendimiento. Existen desde cadenas restauranteras enormes hasta pequeños locales que pueden perderse fácilmente en una gran urbe como la Ciudad de México. Casi en cada esquina uno puede encontrarse con un pequeño puesto de aquella deliciosa comida que forma parte de la gastronomía mexicana: gorditas, tacos, tortas y un sin fin de manjares que podrían enumerarse aquí.

A pesar de que pueda parecer caótica la forma en que funciona un pequeño local de este tipo, resulta que existen formas de tratar de predecir su comportamiento. Es decir, es posible medir la tasa de llegadas de clientes, el tiempo de espera de estos y el tiempo medio en que se demora la atención a un cliente.

Los modelos de colas son una herramienta extraordinaria para estudiar estos casos y así tratar de conocer el comportamiento de estos sistemas.

1

2

3

4

5

3.2 Modelo de colas M/M/C

Disciplina FIFO

La disciplina FIFO obtuvo su nombre por las siglas en inglés *First In First Out* (Primero en Entrar Primero en Salir). El significado de esto es que aquello que ha llegado primero a un sistema debe ser a lo primero que se le dé salida.

Procesos de nacimiento y muerte

Un proceso de nacimiento y muerte es un tipo de proceso o cadena de Márkov de estados discretos $\{0, 1, \dots, n\}$, que comúnmente denota a la población de algún sistema, y tiempo continuo. Esto es que el futuro es independiente del pasado y solamente importa el presente, lo cual se puede escribir como:

$$P[X(t_n) \leq x | X(t_1), \dots, X(t_{n-1})] = P[X(t_n) \leq x | X(t_{n-1})] \quad (1)$$

En este proceso de Márkov el estado del sistema cambia como máximo en una unidad ya sea arriba o abajo en un intervalo finito. Cuando un sistema se encuentra en un estado $n \geq 0$ el tiempo hasta la siguiente llegada o nacimiento es una variable aleatoria que se distribuye de forma exponencial con un parámetro λ_n . Por otro lado, si un sistema se encuentra en un estado $n \geq 1$ el tiempo de la siguiente salida o muerte en el sistema es una variable aleatoria que se distribuye de forma exponencial con un parámetro μ_n .

Para la teoría de colas los estados del sistema representan al número de clientes en el sistema. Asimismo, los nacimientos representan las llegadas a un sistema y las muertes como las salidas.

Modelo de colas M/M/1

Este proceso de Márkov es el modelo de colas más sencillo y sigue una disciplina FIFO. Se trata de un proceso de llegadas/salidas donde las llegadas se distribuyen de forma Poisson con parámetro λ y $1/\lambda$ es el tiempo medio entre llegadas. Por otro lado, los servicios se distribuyen de forma exponencial con parámetro μ y donde el tiempo de servicio es $1/\mu$. Para este caso se considera un solo servidor.

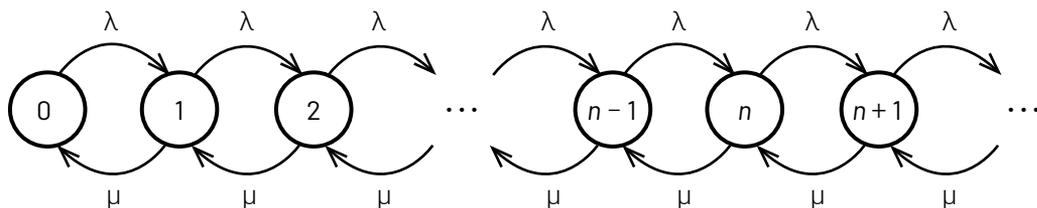


Figura 1. Diagrama de transición de un modelo M/M/1

Modelo M/M/C

EL modelo $M/M/C$ o modelo de varios servidores se puede considerar como una generalización del modelo de colas $M/M/1$. En este caso se tiene una cantidad de C servidores y el proceso de llegadas se distribuye de forma Poisson con parámetro λ y $1/\lambda$ es el tiempo medio entre llegadas. Los C servicios se distribuyen idénticamente de forma exponencial con parámetro μ y tiempo de servicio $1/\mu$.

En este caso, el parámetro de llegadas es constante $\lambda_n = \lambda$ y es independiente del número de clientes en el sistema. En contraste, el parámetro de servicios completos depende del número de clientes en el sistema. Así, si C o más clientes entonces los C servidores estarán ocupados. En este caso, como cada servicio C se distribuye exponencial con parámetro μ se sigue que la combinación de servicios completados es $C\mu$. Por

otro lado, si $n < C$ se tiene que solo n servidores están proporcionando algún servicio, por lo que la combinación de servicios completados es $n\mu$. Por tanto, μ_n se puede escribir como:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si } 1 \leq n < \mu \\ C\mu & \text{si } \mu \geq C \end{cases}$$

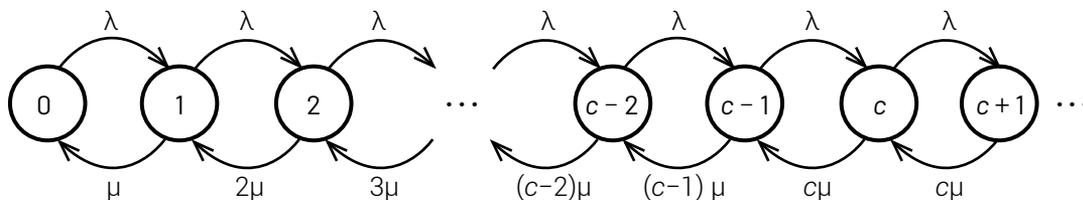


Figura 2. Diagrama de transición de un modelo M/M/C

Por otro lado, es importante saber si en algún momento la cola estará vacía, es decir si el número de clientes es cero. Nótese que las probabilidades de estado del sistema son:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 & \text{si } 1 \leq n < \mu \\ \frac{\lambda^n}{C^{n-c} C! \mu^n} & \text{si } \mu \leq c \end{cases} \quad (3)$$

donde p_n se distribuye Poisson, por lo que la probabilidad de que la cola esté vacía, es decir, que $n = 0$ es:

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{r^n}{C^{n-c} \mu^n} \right)^{-1} \quad (4)$$

donde $r = \frac{\lambda}{\mu}$

La condición de que se tenga una solución en un estado estable es $\frac{\lambda}{C\mu} < 1$.

1

2

3

4

5

Luego, consideremos la siguiente serie infinita:

$$\sum_{n=c}^{\infty} \frac{r^n}{C^{n-C}C!} = \frac{r^C}{C!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{r}{C}\right)^{n-C} = \frac{r^C}{C!} \sum_{m=c}^{\infty} \left(\frac{r}{C}\right)^m$$

Así:

$$\sum_{n=c}^{\infty} \frac{r^n}{C^{n-C}C!} = \frac{r^C}{C!} \left(\frac{1}{1-r/C}\right)$$

Por lo tanto, podemos reescribir p_0 como:

$$p_0 = \left(\frac{r^C}{C!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{C-1} \frac{r^n}{n!} \right)^{-1} \quad (5)$$

$$\text{Donde } \rho = \frac{r}{C}$$

También es importante saber cuál será el tamaño de cola esperado L_q por lo que el cálculo del tamaño esperado es:

$$L_q = \frac{r^C \rho}{C!(1-\rho)^2} p_0 \quad (6)$$

Por otro lado, el tiempo de espera estimado de los clientes se puede calcular mediante el siguiente modelo:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{r^C}{C!(C\mu)(1-\rho)^2} p_0 \quad (7)$$

Así, conocidas las estimaciones W_q y L_q podemos calcular el tiempo de espera W y el tamaño de la cola L , donde $W = W_q + \frac{1}{\mu}$, obteniendo:

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{L_q}{\lambda} = \frac{r^C}{C!(C\mu)(1-\rho)^2} p_0 \quad (8)$$

$$L = r + \frac{r^C \rho}{C!(1-\rho)^2} p_0 \quad (9)$$

3.3 Planteamiento del problema

Como se mencionó en la motivación, los establecimientos de comida rápida en México son muy comunes y concurridos por gran parte de la población. Un caso particular son las taquerías que ya son tradicionales y que preparan uno de los platillos más populares y ricos de la gastronomía mexicana: los tacos.

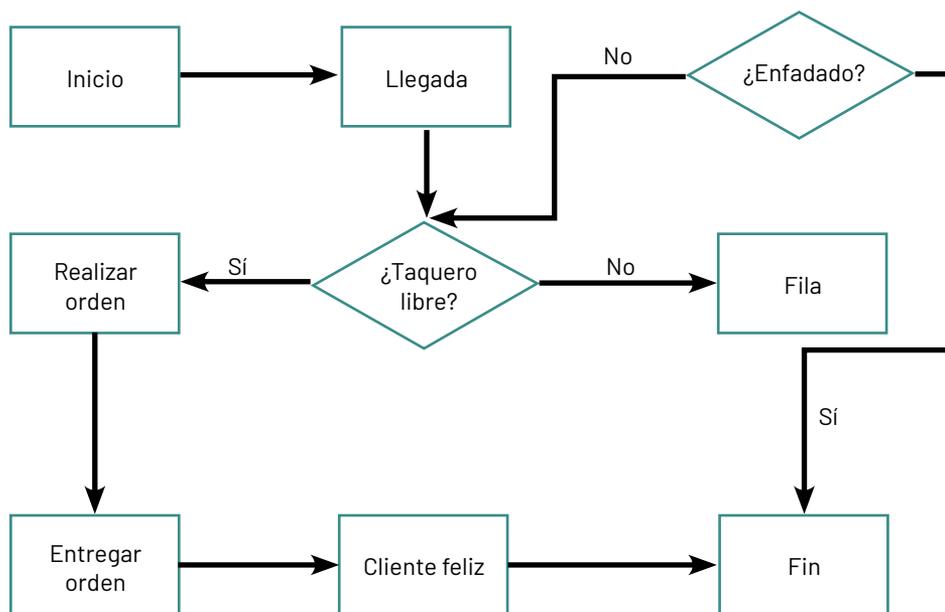


Figura 3. Modelo conceptual

En una taquería común se tiene uno o más taqueros que van despachando a las personas conforme van llegando, se puede asumir que las llegadas de las personas se distribuyen Poisson con parámetro λ , mientras que el o los taqueros preparan las órdenes de cada cliente con una distribución exponencial y parámetro μ y con un tiempo de servicio $\frac{1}{\mu}$.



Figura 4. Preparadores de tacos en un día de trabajo

Así pues, luego de realizar ciertas estimaciones por experiencia propia se plantea el siguiente problema.

Se busca inaugurar una taquería que cuente con un total de 3 taqueros, donde la media de tiempo en despachar una orden sea de 5 minutos. Se estima que los comensales llegan de acuerdo con un proceso de Poisson con media de 30 clientes por hora. La última estimación es que un cliente se enfadará si tiene que esperar más de 10 minutos en la fila por lo que se plantea la pregunta siguiente:

¿Es posible que 3 taqueros sean suficientes para que un cliente no se enfade esperando en la fila?

3.4 Solución

Lo necesario para saber si un cliente no se va a enfadar en la fila es conocer el tiempo de espera de estos donde $\mu = 1/5$ y $\lambda = 1/2$. Recordemos que $r = \frac{\lambda}{\mu}$. Así $r = 5/2$, calculando p_0 usando (5) tenemos:

$$p_0 = \left(\frac{(5/2)^3}{3!(1-(5/6))} + \sum_{n=0}^2 \frac{(5/2)^n}{n!} \right)^{-1} = \left(\frac{125}{8} + \frac{53}{8} \right)^{-1} = \frac{4}{89}$$

Luego, el tamaño de cola estimado L_q es:

$$L_q = \frac{(5/2)^3 (5/6)}{3!(1 - (5/6))^2} (4/89) = 3.511$$

El tiempo de espera de estimado w_q

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 2(3.511) = 7.02$$

Finalmente, el tiempo de espera W y el tamaño de la cola L son:

$$W = 1/5 + 7.02 = 12.02$$

$$L = 5/2 + 3.511 = 6.011$$

3.5 Conclusiones

En conclusión, podemos observar que existe un tiempo estimado de 7.02 minutos de espera para cada comensal, sin embargo, el tiempo de espera total sobrepasa el límite de los 10 minutos por lo que se puede llegar al punto donde ciertos comensales puedan enfadarse e irse.

Para solucionar este problema es necesario añadir un taquero adicional, con este nuevo taquero el tiempo y la cola se reducirían, por lo cual la probabilidad de que un comensal se enfade será menor y con ello el abandono de la fila de espera no ocurrirá.

Este ejemplo se realizó suponiendo taqueros que atienden órdenes de comensales; sin embargo, este mismo planteamiento puede trasladarse al funcionamiento, por ejemplo, de una página en internet, en cuyo caso solo tenemos que suponer que en vez de taqueros atendiendo solicitudes son servidores de cómputo atendiendo a los visitantes que llegan a la página para solicitar un servicio. El propósito en este caso es el mismo, entregar el servicio requerido lo más rápido posible para que el usuario no se enfade y abandone la página sin "consumir" ningún servicio.

CAPÍTULO 4

El Señor de los anillos

Victoria Mayela Luna Rojas

4.1 Introducción

Una situación común en la vida cotidiana es que la demanda de un servicio supere a la capacidad que existe para proporcionarlo, dando lugar a la formación de líneas de espera o filas.

Dentro de la investigación de operaciones, al estudio analítico del comportamiento de líneas de espera se le conoce como teoría de colas. Y se encarga de modelizar las filas, con sus respectivos proveedores de servicios, con el objetivo principal de predecir la longitud de estas y los tiempos asociados.

El poder determinar cómo opera un sistema de colas permite su optimización, reducir los tiempos de espera y los costos asociados, así como evaluar el impacto de posibles modificaciones al sistema.

Los modelos se utilizan ampliamente en telecomunicaciones, establecimientos comerciales, aeropuertos, líneas de producción, autopistas, etc.

1

2

3

4

5

En el presente capítulo se abordará un ejemplo práctico de la teoría de colas.

4.2 Descripción del problema

Supongamos que estamos jugando *El Señor de los Anillos: La Batalla por la Tierra Media*; este es un videojuego de estrategia en tiempo real basado en la trilogía de películas de *El Señor de los Anillos* desarrollado por la empresa *Electronic Arts Inc.* (EA). Y consiste en elegir una de las facciones en guerra para recolectar recursos y construir bases militares y ejércitos para derrotar en batalla a tus oponentes.

Al inicio del juego se escoge entre la campaña del bien (Gondor y Rohan) y la del mal (Isengard y Mordor). Si elegimos este último bando, iniciaremos la partida comandando al ejército de Isengard.

Ahora, esta facción está diseñada de tal forma que la estrategia a seguir durante el juego sea ofensiva. Ya que dentro de los edificios que se pueden construir no existe la opción para levantar murallas que protejan al campamento de un ataque enemigo.

Por lo que para ganar debemos de formar ejércitos numerosos en el menor tiempo posible e iniciar el asalto a las fortalezas enemigas. ¿Será posible lograr este objetivo con el sistema que tenemos?

4.3 Modelo

Para responder la pregunta anterior analizaremos el proceso de producción de batallones de soldados, ballestas, piqueros y berserker. Estas unidades se construyen en un edificio denominado pozo de Uruk siguiendo el proceso que se detalla a continuación.

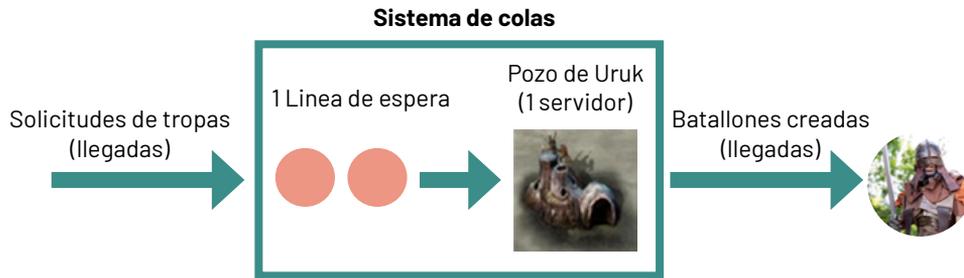


Figura 1

En la figura 1 observamos que las llegadas al sistema serán las solicitudes para la creación de nuevos batallones. Estas llegadas siguen una distribución de probabilidad Poisson con frecuencia de uno cada 65 segundos.

Si no hay órdenes de servicio previas, la nueva solicitud entra y recibe el servicio; de lo contrario deberá formarse en la fila para esperar su turno. La disciplina de la cola es FIFO, es decir, que la primera solicitud en llegar es la primera en ser atendida.

Además, contamos con un servidor, el cual se tarda 20 o 30 segundos en producir un batallón. Una vez que la producción está terminada, las tropas salen del sistema y se procede a atender la siguiente solicitud.

Cabe señalar que la población de la cola (las solicitudes) es infinita y la capacidad de esta es ilimitada.

4.4 Medidas de desempeño del sistema

Con las especificaciones anteriores, tenemos un modelo de cola general, el cual denominaremos como (M/G/1): (DG/∞/∞). Ahora procederemos a calcular las medidas de desempeño del sistema.

En primera instancia tenemos que el número esperado de llegadas por unidad de tiempo (en este caso segundos) es:

$$\lambda = \frac{1}{40} = 0.025$$

Ahora, el tiempo de servicio (t) se puede modelar como una variable aleatoria uniforme discreta $T \sim U(20,30)$. De aquí nos interesa conocer la esperanza ($E[t]$) y la varianza ($Var[t]$); estos datos los obtenemos de la siguiente manera:

$$E(t) = \frac{1}{2} * (20+30) = 25$$

$$Var(t) = \frac{1}{2} * [(20-25)^2 + (30-25)^2] = 25$$

Por otro lado, el número esperado de solicitudes atendidas en el servidor por unidad de tiempo es:

$$\mu = \frac{1}{E(t)} = \frac{1}{25} = 0.04$$

Una vez calculados los parámetros λ y μ podemos obtener el factor de utilización del sistema como sigue:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.025}{0.04} = 0.625$$

Vamos a ver ahora cuál es el número esperado de clientes en el sistema

$$L_s = \lambda E(t) + \frac{\lambda^2 [E^2(t) + Var(t)]}{2[1 - \lambda E(t)]} = (0.025 * 25) + \frac{25^2 [25^2 + 25]}{2[1 - (0.025 * 25)]} = 1.16667$$

$$L_s \approx 1 \text{ solicitud}$$

También nos interesa conocer el tiempo medio de espera de una solicitud en el sistema

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{0.50962}{0.025} = 46.66667 \text{ segundos}$$

Asimismo, el número esperado de clientes en la cola será:

$$L_q = L_s - \lambda E(t) = 1.16667 - (0.025 * 25) = 0.54167$$

$$L_q \approx 1 \text{ solicitud}$$

Para finalizar, nos resta calcular el tiempo promedio de espera de una solicitud formada en la cola

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.54167}{0.025} = 21.66667 \text{ segundos}$$

4.5 Conclusiones

Analizando las medidas de desempeño obtenidas anteriormente observamos que

$$\rho = 0.625 < 1$$

Lo cual implica que tenemos un sistema estable, es decir, un sistema con la capacidad suficiente para atender las solicitudes que llegan.

En cuanto al número de clientes en la fila, observamos que en promedio habrá 1 formado ($L_q \approx 1$) y que aproximadamente esperará 22 segundos en pasar al servidor a ser atendido ($W_q \approx 22$). Esto nos indica que no habrá un congestionamiento dentro del sistema.

Por último, el desempeño promedio del sistema nos indica que estará atendiendo a 1 solicitud ($L_s \approx 1$) y que el tiempo desde que esta llega hasta que sale será de aproximadamente 47 segundos ($W_s \approx 47$).

Con lo anterior, podemos concluir que el sistema de colas del juego nos permitirá crear tropas suficientes para nuestro ejército sin saturarse y en un corto tiempo. De tal forma que a lo largo de la partida podremos contar con un flujo de batallones que nos ayudará a ganar el juego.

CAPÍTULO 5

Teoría de colas para autolavado (proceso manual)

Julio César Briseño Jiménez

5.1 Introducción

Es frecuente que algunos procesos tiendan a esperar por un servicio, lo que provoca que se acumulen y estén a la espera en algún orden en específico, por lo cual la teoría de colas, que pertenece a la investigación de operaciones, es encargada de proponer modelos para el manejo eficiente de las líneas de espera. El trabajo que se presenta a continuación es un ejercicio práctico de aplicación, el cual trabaja el comportamiento de espera en un servicio de autolavado que opera de manera manual con trabajadores encargados de limpiar los automóviles.

Una manera de medir la calidad del servicio en estos lugares es por medio de los tiempos de espera de los clientes, ya que esto ayuda a tomar decisiones sobre el proceso de lavado, los tiempos en cada proceso y las posibles configuraciones de los espacios dentro del lote. Este estudio es de aplicación directa y es un ejemplo de lo que algunas empresas enfrentan, pero además también pequeños emprendedores, donde por medio

1

2

3

4

5

de herramientas matemáticas y estadísticas se toman decisiones concretas y complejas.

La metodología general que se utiliza en este estudio consiste en la recolección de información relacionada con la hora de llegada y atención de los clientes, análisis estadístico de los datos suficientes para el análisis y comprobar su modelo y confiabilidad, posteriormente se trabaja con los parámetros necesarios para utilizar el modelo de teoría de colas y determinar las variables de interés.

Finalmente se otorgan los resultados del análisis donde se presentan la longitud promedio de la línea de espera, tiempos muertos, tiempo promedio de llegadas de servicio, y el de espera, así como el tiempo total en el sistema.

5.2 Estructura básica de los modelos de colas

La teoría de colas se utiliza en esta investigación para conocer si el costo en tiempo que el cliente absorbe es más alto que el esperado; los modelos de colas por sí mismos no resuelven directamente el problema, pero contribuyen con información vital que se requiere para tomar decisiones. El modelo predice algunas características sobre la línea de espera, así como del tiempo de espera promedio.

La teoría básica de colas puede dividirse en dos estudios, el primero se trata de distribuciones de tipo específico de las cuales se derivan fórmulas matemáticas, el otro enfoque se trata de distribuciones clásicas, empíricas o hipotetizadas que siempre se analizan mediante métodos de simulación.

El primer enfoque exige que la distribución siga una distribución de Poisson, y que la prestación de servicios siga una distribución exponencial. El segundo enfoque de la simulación permite un estudio más amplio,

1

2

3

4

5

pero más complicado de desarrollar, sin embargo, con ambos estudios pueden estudiarse las combinaciones en la formación de colas.

5.3 Características del centro de lavado

El centro de autolavado “Pato mojado” se encuentra ubicado en la avenida Hidalgo norte número 20, San Antonio Tecomitl en CDMX, cuenta con una extensión aproximada de 350 metros cuadrados.

El autolavado tiene cerca de 10 años de operación y actualmente cuenta con 6 trabajadores, de los cuales uno de ellos además es el encargado y responsable del lugar.

El servicio de lavado se presta en su mayoría a particulares, ya que no ofrece ningún tipo de prioridad o descuento a automóviles de uso público como taxis o servicio de alguna plataforma, por lo que los clientes se atienden en el orden que llegan, la calidad del servicio no se ve afectada por el tamaño o marca del vehículo.

Dentro de los procesos de lavado estándar se encuentra el lavado y aspirado, sin embargo, adicionalmente tienen servicios de aplicación de *armor all*, lavado de vestiduras, lavado con cera y servicio de pulido/encegado. El horario de servicio es de lunes a domingo de 9 a 5:30.

Clientes

La valoración de los clientes en aplicaciones es alta. Los comentarios positivos son por la calidad del servicio y la honestidad en el trabajo, motivo por el cual se recibe mucha demanda. Los comentarios negativos se refieren al tiempo que tarda el servicio y a la capacitación del personal (capacitación conducción/ tecnologías). El autolavado tiene muy cerca otros negocios de lavado de autos, el primero a escasos 50 metros y otro

1

2

3

4

5

a 200 metros; sin embargo, no reciben la misma calificación y comentarios. Por lo que la competencia no afecta directamente la demanda, pero la mejora de los tiempos de servicio ayudaría a atender un número mayor de automóviles.



Figura 1. Vista del exterior del autolavado.

Proceso de lavado

El proceso de lavado lo ejecutan personas especializadas que utilizan para las diferentes tareas herramientas eléctricas en la aplicación de jabón, agua y aspirado. Así como insumos como franelas, jabón, aromatizantes y aplicadores de brillo y protección.

El proceso de lavado y los tiempos de relevancia se muestran a continuación. Para este proceso se tomó en cuenta tiempos donde se consideran eventos discretos, el aspirado se contempla como un intervalo de tiempo que corresponde al que la máquina de aspirado está en funcionamiento. El proceso de aspirado se considera en futuros análisis.

1

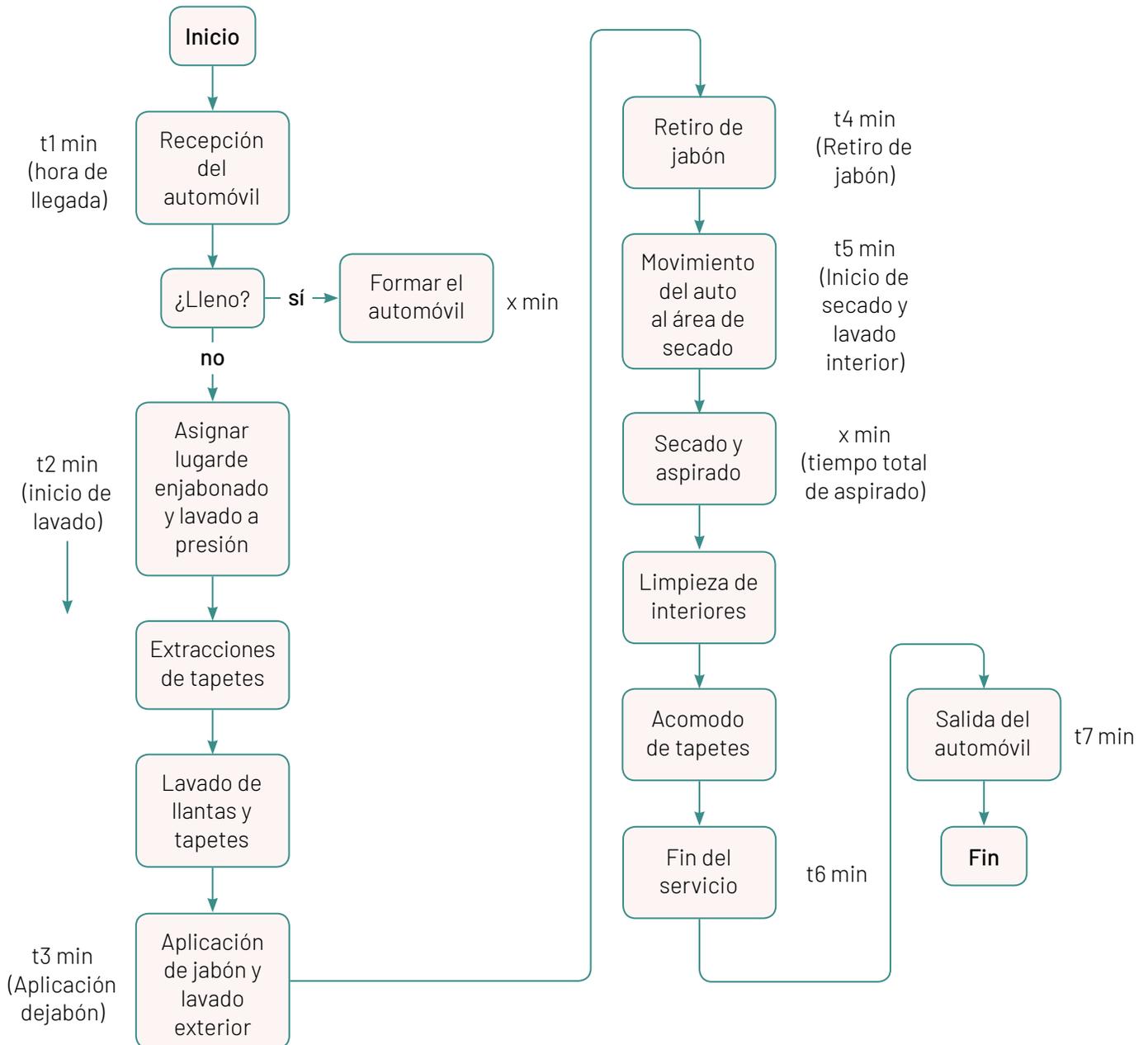
2

3

4

5

Diagrama del proceso de lavado



1

2

3

4

5

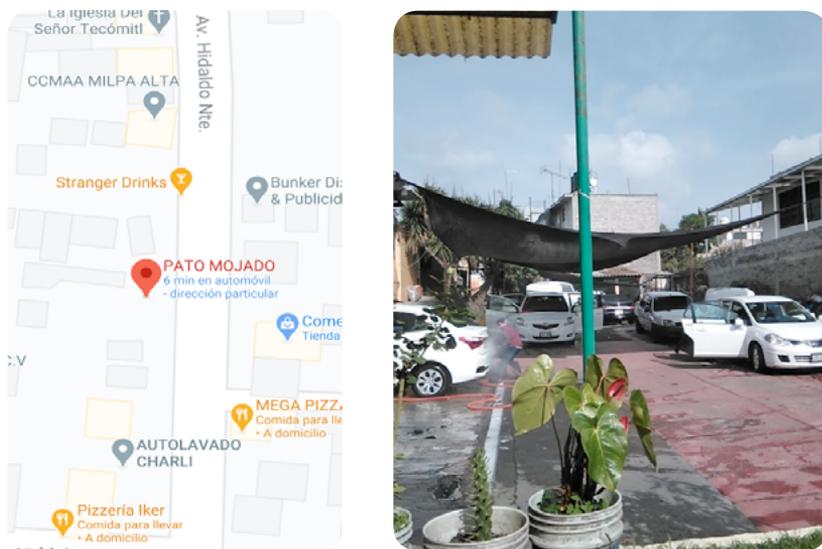


Figura 2. Ubicación y foto del interior del autolavado.

En promedio el servicio de lavado dura 45 minutos aproximadamente; las variaciones incurren en el color, tamaño del auto, nivel de suciedad y los autos que estén en espera. Cuando los lavadores están ocupados y no hay espacio para la espera del servicio los autos llegan a esperar más de 65 minutos en salir del autolavado.

Para determinar los tiempos de manera adecuada es importante aplicar la teoría de colas. Para saber el tiempo total del sistema se requiere conocer el promedio de espera, el tiempo promedio de servicio, el tiempo promedio entre llegadas y la longitud promedio de la fila.

5.4 Modelo conceptual

En el modelo conceptual del autolavado se pretende simplificar todas las variables que no afectan el estudio de sistema. Por ello, en primer lugar, se pretende ubicar nuestro problema que es un sistema de tipo dinámico ya que el tiempo representa nuestra variable independiente, es

1

2

3

4

5

estocástico ya que los datos no son directos y se tiene cierta aleatoriedad en el sistema, por lo que se rige mediante distribuciones de probabilidad y es discreto ya que el interés del estudio es en ciertos eventos del proceso.

El modelo conceptual está basado en los objetivos principales. En este documento es conocer el número de lavadores suficientes en el sistema cuando la demanda es mayor, además también se requiere saber si se pueden mejorar los tiempos de lavado de los autos. El cumplimiento de este objetivo se dejará para futuras investigaciones del proyecto ya que el estudio está fuera del análisis por medio de la teoría de colas.

El modelo conceptual representa una dinámica como la mostrada en la imagen que representa dos bucles: uno negativo y otro positivo, los cuales se estabilizan uno al otro en la población dentro del sistema ya que mientras que por un lado se tienen servicios terminados por otro se tiene una tasa de llegadas. Mientras tanto nos ayuda a entender los actores principales del modelo conceptual.

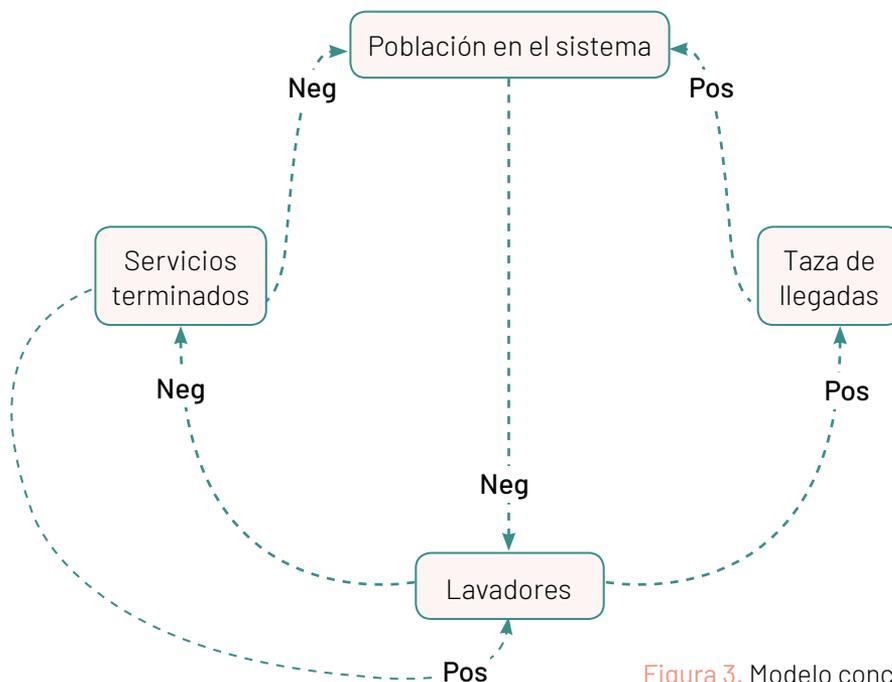
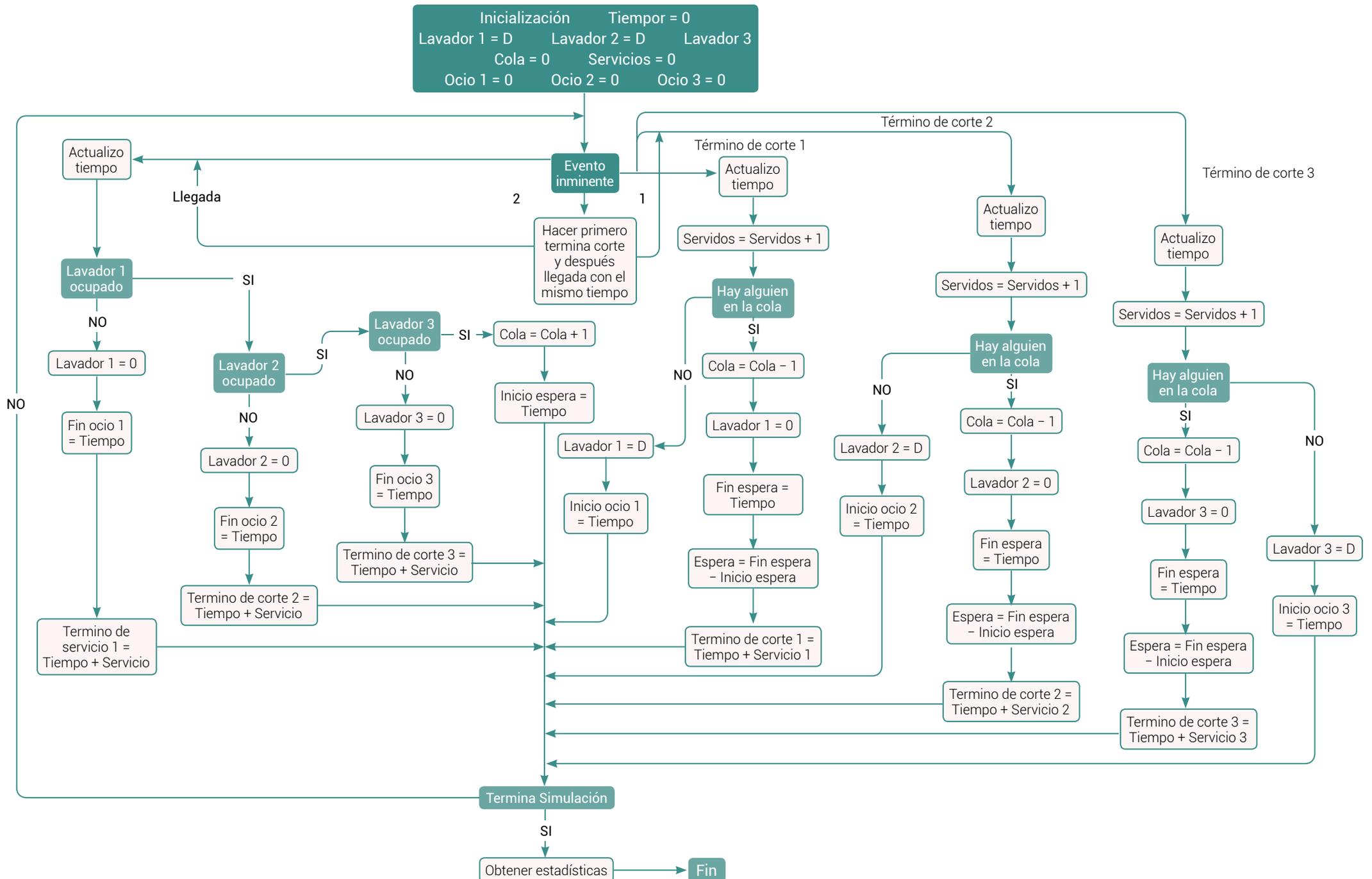


Figura 3. Modelo conceptual.

Finalmente se obtuvo un modelo que representa el funcionamiento de manera detallada del autolavado y que nos ayudará a cumplir los dos objetivos propuestos, el cual divide a los lavadores o canales de servicio separados ya que de esta manera se puede detallar el comportamiento de llegadas y servicio del autolavado. Dicho modelo se presenta en la siguiente imagen.



1

2

3

4

5

5.5 Recolección y análisis de datos

Para la recolección de los datos se utilizó una tabla donde se representan las partes del proceso de mayor interés. Esta tabla se llenó para los autos que llegan, pero no considera los tiempos individuales de cada lavador, por lo que solo mide la estancia del auto en el sistema.

Formato para concentrado de datos

No. Automóvil	Hora de llegada	Hora de iniciación del servicio	Hora de aplicación del jabón	Hora de eliminación del jabón	Hora de iniciación de secado	Hora de iniciación de aspirado	Hora de terminación del servicio de lavado	Hora de entrega del automóvil

Análisis de datos

En promedio los lavadores terminan de lavar una unidad en 47 minutos, por lo que si la demanda se pudiera controlar con tres lavadores estos pueden lavar 36 autos en un turno de 9 horas. Por ello, la muestra de 37 autos es suficiente. Haciendo el cálculo por el método simple de muestreo se obtiene que la muestra suficiente es de 32 autos, utiliza un nivel de confianza de 95% y error de 5%, y una desviación estándar de 0.4.

$$n = \frac{S^2}{\frac{\varepsilon^2}{z^2} + \frac{S^2}{N}} = \frac{0.4^2}{\frac{0.05^2}{1.96^2} + \frac{0.4^2}{36}} = 31.$$

Pruebas de bondad

Para determinar el modelo de colas que se debe seguir es necesario analizar el tiempo de llegadas y el tiempo de servicio, el objetivo de esto es saber qué tipo de distribución sigue. La prueba de bondad que se utilizará es la de Chi-cuadrada.

El procedimiento para seguir de la prueba de Chi-cuadrada es el siguiente:

- 1) Elaborar un histograma
- 2) Definir una hipótesis
- 3) Establecer el estadístico de prueba
- 4) Definir el nivel de significancia
- 5) Calcular la estadística de prueba
- 6) Rechazar o aceptar la hipótesis

Se tomaron los datos en los días de mayor afluencia de viernes a lunes y se muestran en las siguientes tablas:

Tiempo entre llegadas						
No. Clases	Intervalo		Llegadas 1	Llegadas 2	Llegadas 3	Total
1	0.000	0.283	14	7	5	26
2	0.283	0.567	3	3	1	7
3	0.567	0.850	3	1	0	4
4	0.850	1.133	0	0	0	0
5	1.133	1.417	0	0	0	0
6	1.417	1.700	0	0	1	1

Total	38
-------	----

64	6 clases
mínimo	0.017
máximo	1.600
rango	1.583
intervalo	0.264

Histograma de tiempo de llegadas

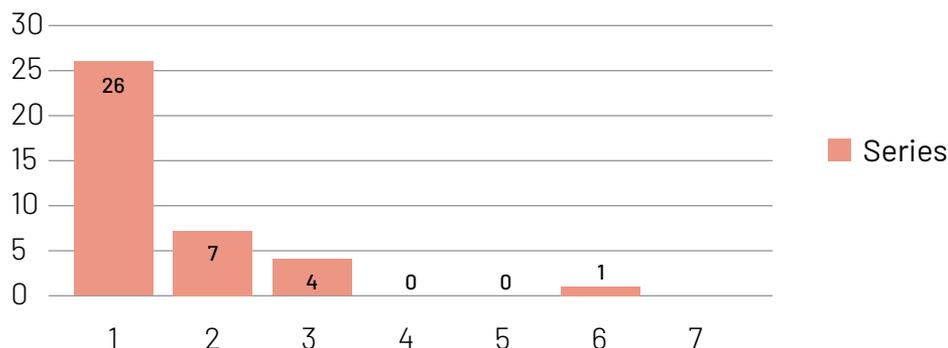


Figura 4. Histograma de tiempo de llegadas.

En el histograma se observa un dato que está alejado del grupo, se conoce como atípico, el cual hace que el sesgo sea mucho mayor, por lo que se procede a eliminar el dato. El comportamiento del histograma presupone una distribución exponencial, para corroborar lo anterior es necesario realizar una prueba de bondad de ajuste.

El estadístico de prueba es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{0i} - f_{e_i})^2}{f_{e_i}}$$

t_i = Valor esperado en la i -ésima celda

ξ_i = Valor esperado en la i -ésima celda

n = Categorías o celdas

Para el cálculo de las frecuencias esperadas se estimaron los parámetros en una hoja de Excel por lo que se obtuvo los siguientes resultados.

Prueba de bondad de ajuste exponencial del tiempo de llegadas

Hipotesis nula: Los tiempos de llegadas de autolavado son exponencial (H_0)

Hipotesis alternativa: Los tiempos de llegadas de autolavado no son exponenciales (H_1)

Grados de libertad 6-1	5	6 clases
Nivel confianza	0.95	
Nivel significancia	0.05	
Grados libertad	4	Se desconoce μ

Obtener valor de X^2							
Clases		frecuencia observada = f_0	Probabilidades exponencial = π	$f_e = \pi * n$	$f_o - f_e$	$(f_o - f_e)^2$	$(f_o - f_e)^2 / f_e$
0.000	0.283	26	64.96%	24.04	1.96	3.86	0.16
0.283	0.567	7	22.76%	8.42	-1.42	2.02	0.24
0.567	0.850	4	7.98%	2.95	1.05	1.10	0.37
0.850	1.133	0	2.79%	1.03	-1.03	1.07	1.03
1.133	1.417	0	0.98%	0.36	-0.36	0.13	0.36
1.417	1.700	1	0.34%	0.13	0.87	0.76	6.00
Total		37		36.93	0.07	0.00	0.00
							8.17

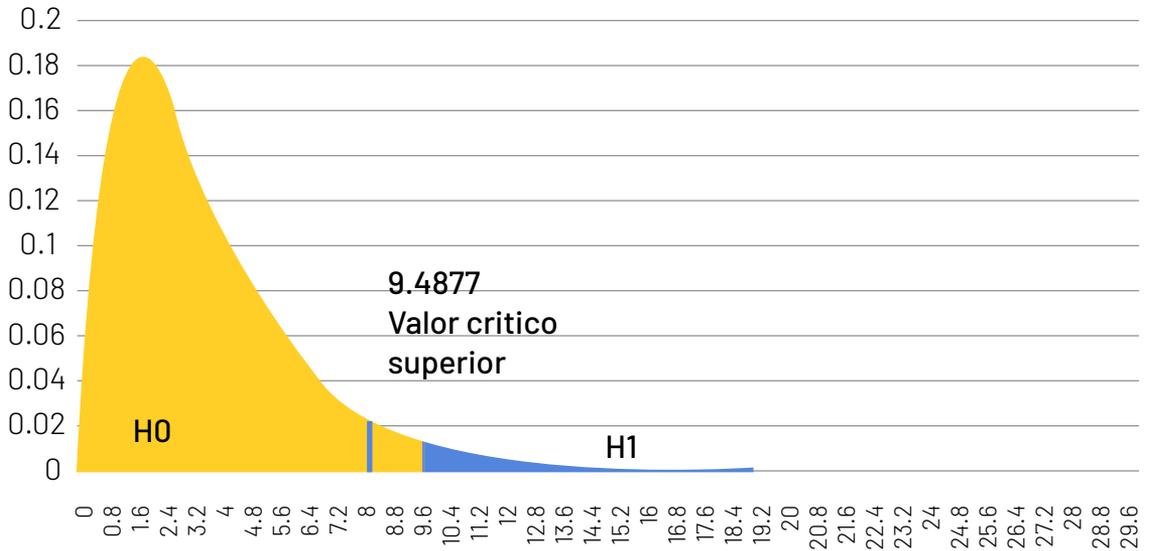


Figura 5. Prueba de bondad de ajuste.

Valor crítico superior	9.487729037
Media (Poisson) = λ	3.701298701
Media de muestra (dist exp) = μ	3.701298701
P valor	0.09
α	0.05

Como el P valor es mayor que el nivel de significancia α , concluimos con la hipótesis nula. No existe información suficiente para rechazar la hipótesis nula.

Por lo tanto, se puede concluir que en la distribución que sigue el tiempo de llegadas es exponencial.

El valor obtenido para el valor esperado y la varianza de la distribución es:

$$E[t] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3.701} = 0.2701 \text{ y } \text{var}[t] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{3.701^2} = 0.0730$$

Tiempo de duración del servicio

Se procede a hacer la prueba de bondad de ajuste para el caso de los tiempos de servicio.

Tiempo de servicio						
Serie	Intervalo		Llegadas 1	Llegadas 2	Llegadas 3	Total
1	-0.228	-0.087	2	1	2	5
2	-0.087	0.051	3	4	2	9
3	0.051	0.189	8	2	3	13
4	0.189	0.327	5	2	0	7
5	0.327	0.465	2	1	0	3
6	0.465	0.603	0	1	0	1
			20	Total		38

min	-0.226
max	0.602
rango	0.828
intervalo	0.1380 00:08

Histograma de tiempo de servicio

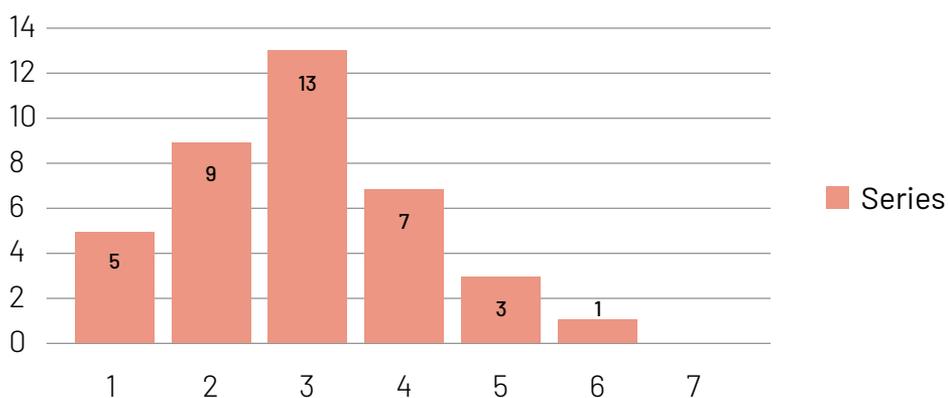


Figura 6. Histograma de tiempo de servicio.

Se observa que el histograma queda de esa manera ya que muestra que los datos seguían una curva log normal, por lo que se corroboró sacando el logaritmo a los datos y posteriormente se realizó el histograma. Para identificar la distribución asociada a los tiempos de servicio se realizará la prueba de bondad de ajuste.

El estadístico de prueba es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{0i} - f_{e_i})^2}{f_{e_i}}$$

t_i = Valor esperado en la i -ésima celda

ξ_i = Valor esperado en la i -ésima celda

n = Categorías o celdas

Para el cálculo de las frecuencias esperadas se estimaron los parámetros en una hoja de Excel por lo que se obtuvo los siguientes resultados.

Prueba de bondad de ajuste normal - (Chi Cuadrada) del tiempo de servicio.

Hipotesis nula: Los tiempos de llegadas de autolavado sigue una distribución normal (H0)

Hipotesis alternativa: Los tiempos de llegadas de autolavado no sigue una distribución normal (H1)

Grados de libertad 6-1	5	6 clases
Nivel confianza	0.99	
Nivel significancia	0.01	
Grados libertad	3	Se desconoce μ y σ

Para los grados de libertad al no conocer los parámetros de μ y σ se restaron 2 grados de libertad extra para el cálculo de los parámetros.

Obtener valor de X2							
Clases		frecuencia observada = f0	Probabilidades normales = π	fe = π*n	fo - fe	(fo - fe)^2	(fo - fe)^2/fe
-0.228	-0.087	5	13.50%	5.13	-0.13	0.02	0.00
-0.087	0.051	9	24.32%	9.24	-0.24	0.06	0.01
0.051	0.189	13	30.72%	11.67	1.33	1.76	0.15
0.189	0.327	7	21.36%	8.12	-1.12	1.25	0.15
0.327	0.465	3	8.17%	3.11	-0.11	0.01	0.00
0.465	0.603	1	0.21%	0.08	0.92	0.85	10.57
Total		38	98.28%	37.35	0.65	0.43	0.01
							10.89

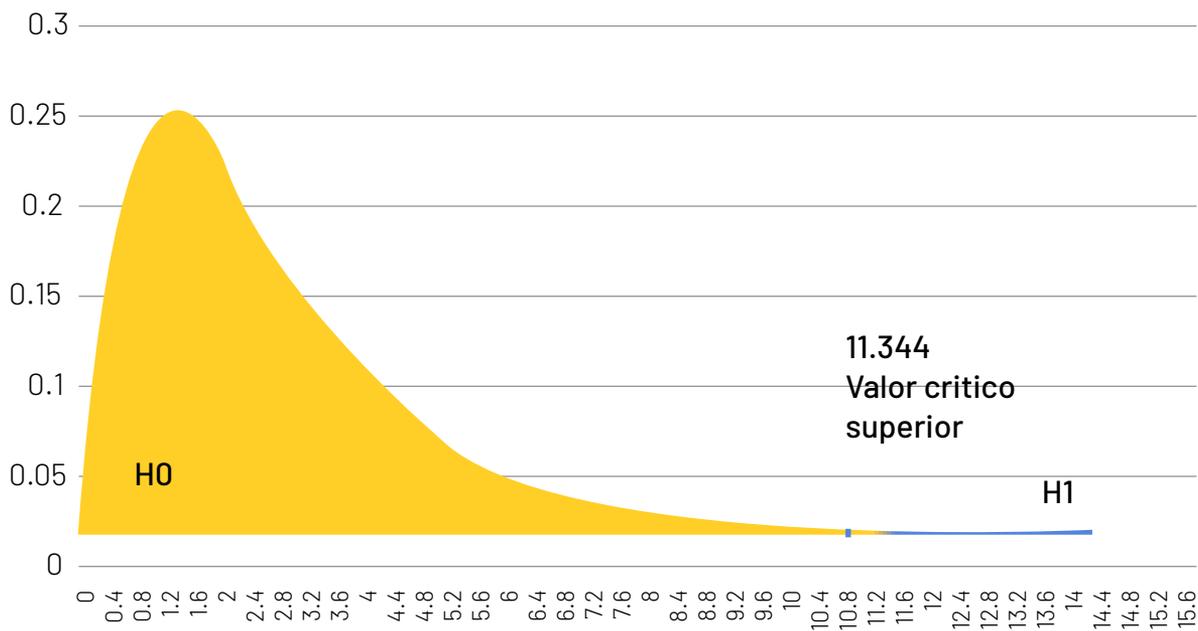


Figura 7. Prueba de bondad de ajuste.

Valor critico superior	11.3448667
Desv. Estandar	0.17402466
Media de muestra (dist exp) = μ	0.105
P valor	0.0123
α	0.01

Como el P valor es mayor que el nivel de significancia α , concluimos con la hipotesis nula. No existe información suficiente para rechazar la hipotesis nula.

Como la hipótesis nula es aceptada se concluye que en la distribución que sigue el tiempo de servicio es log-normal.

El valor obtenido para el valor esperado y la varianza de la distribución es:

$$E[t] = e^{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2} = e^{0.105 - \frac{1}{2}(0.174)^2} = 1.094$$

$$\text{var}[t] = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2(0.105) + 2(0.174)^2} - e^{2(0.105) + (0.174)^2} = 0.0356$$

5.6 Modelo de teoría de colas

El modelo de colas de acuerdo con la notación de Kendall es del tipo $M/G/c$ y es conocido como sistema de pérdida, donde la distribución que sigue el tiempo de llegadas es exponencial (M), el tiempo de servicio es tipo log-Normal (G) con 3 canales y algunas veces el encargado del auto-lavado participa por lo que son 4 canales (c) en ocasiones depende del aforo de vehículos

1

2

3

4

5

5.7 Análisis con teoría de colas

El análisis del sistema se realizó en los días en los que la demanda de servicio es mayor, los viernes, sábado, domingo y lunes. Cuando el sistema se encuentra saturado el tiempo de servicio promedio es de 65 minutos (1.09 hora), y en promedio llega un automóvil cada 17 minutos, por lo que el sistema se encuentra en algunos momentos del día sobrepasado en capacidad de dar servicio y recibir autos.

$$\rho = \frac{\lambda}{c * \mu} = \frac{3.7}{3 * 0.914} * 100 = 134\%$$

Con este factor de saturación el tiempo promedio de espera no se puede calcular, ya que es mayor de 100%, lo que quiere decir que la cola crece indefinidamente. Por lo que para determinar un tiempo estimado del promedio de espera se hace la suposición que el factor de carga está al 99%, con estos datos se obtiene que el tiempo de espera es de horas o 67 minutos, realmente el cliente espera más ya que este fue calculado con un factor de 99%.

Para este tipo de modelos se tiene que en algún momento alcanza el estado estable, para el cálculo de los parámetros se considera que se utilizarán 5 lavadores (canales) que es cuando el sistema se estabiliza y se obtiene un valor de 0.809 como se muestra a continuación:

$$\rho = \frac{\lambda}{c * \mu} = \frac{3.7}{5 * 0.914} * 100 = 81\%$$

Las fórmulas ocupadas para un modelo de colas $M/G/c$ son las siguientes:

$$(\text{Número de clientes en la cola}) L_q = \frac{\lambda^2 * \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)} = 1.904$$

$$(\text{Número promedio de clientes en el sistema}) L_s = L_q + \rho = 2.7$$

(Tiempo promedio de espera en la cola)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)} = 0.514 \text{ horas} = 31 \text{ min}$$

(Tiempo promedio de estancia en el sistema)

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.72 = 43 \text{ min}$$

5.8 Conclusiones y recomendaciones

El cálculo de los parámetros de colas se basa en la teoría propuesta para un modelo de colas $M/G/c$ y una saturación del sistema estable, por lo que se recomienda que el autolavado funcione con no menos de 5 lavadores ya que con este número se garantiza que el sistema no se desestabilice con la demanda, ya que si se utiliza una saturación de 1.34 los cálculos en este modelo de colas no son coherentes. También con un modelo de colas $M/M/c$ se puede hacer una aproximación con una saturación de 99%, los tiempos de estancia en el sistema rondan los 67 minutos y el número de clientes en la cola es de 2.8, en donde se espera que estos números sean mayores ya que el sistema es mayor que 1.

Para validar el modelo teórico de colas se realizó una simulación utilizando los datos obtenidos en la recopilación y los tipos de distribuciones que se validaron con las pruebas de bondad. Para esta simulación se utilizó el programa *Anylogic* y un modelo simple de colas, el modelo se corrió por 50 veces en donde el sistema se saturó y colapsó en al menos 2 veces, el tiempo de simulación en cada corrida fue de 8 horas, lo que corresponde al horario de trabajo del autolavado.

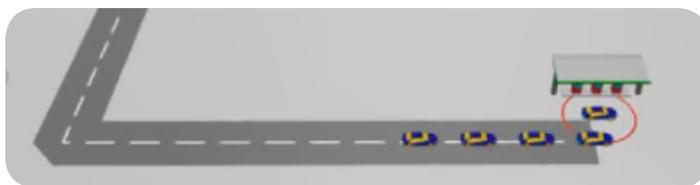


Figura 8. Modelo 3D de la simulación del servicio de lavado.

En el modelo se marcaron 2 gráficas que promedian la longitud de las colas y el porcentaje de utilización del autolavado, estas gráficas indican:

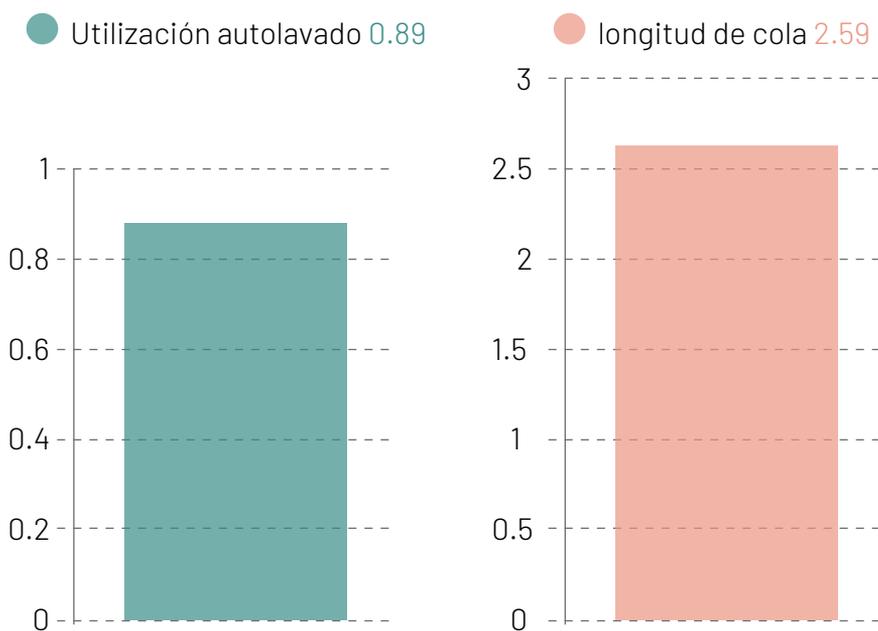


Figura 9. Utilización del autolavado vs. Longitud de la cola.

En las diferentes corridas del modelo se encontró que la longitud promedio de la cola es de 3.13 autos, y la utilización del autolavado es de 0.82. Este modelo presenta valores más cercanos a la realidad, es un apoyo a lo obtenido de manera teórica. En un futuro se revisará la validación de este modelo con más corridas y el afinamiento de más datos en campo para poder validar el modelo de simulación. Mientras tanto se deja como comparación para el lector entre el modelo teórico y el simulado.

REFERENCIAS

- Arrollo I., Bravo L., Llinas H., Muñoz F. (2014). Distribuciones de Poisson y Gamma: Una Discreta y Continua Relación. *Prospect*. Vol 12. Enero-Junio, 99-107.
- Cantley, C. (s.f.). Battle for Middle-Earth I Isengard. Battle for Middle-Earth. Recuperado 19 de diciembre de 2020, de <http://lotr-bfme.the3rdage.net/isengard/isengard.php>
- Drupa Global. (2019). *6th Drupa Global Trends Report 2019 Executive Summary*.
- Drupa Global. (2020). *7th Drupa Global Trends Report: the international graphic industry facing*.
- Instituto Mexicano de la Competitividad. (2019). *Tráfico causa pérdidas de 47 mmdp en CDMX: IMCO*. <https://www.transporte.mx/trafico-causa-perdidas-de-47-mmdp-en-cdmx-imco/#:%7E:text=Compare!&t+ext=Solo%20en%20el%20caso%20de,perdidas%20se%20fij%C3%B3%20en%20146.45>

Pacheco Velázquez, E. A. (1986). Introducción a la Teoría de Colas.

<http://132.248.9.195/pmig2018/0063623/Index.html>

Saaty, T. (1961). *Elements of Queuing Theory with Applications* (pp. 336–343). New York: Dover Publications, Inc.

The Lord of the Rings: The Battle for Middle-Earth Unit Stats Guide. (2005, 28 enero). GameFAQs. <https://gamefaqs.gamespot.com/pc/918989-the-lord-of-the-rings-the-battle-for-middle-earth/faqs/34960>

Virtamo, J. (s. f.). *Queueing Theory. M/G/1 queue*. Recuperado 19 de diciembre de 2020, de https://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/E_mg1jono.pdf
[file:///A:/DELL/Downloads%20\(A\)/154-Texto%20del%20art%C3%A1culo-454-1-10-20110328%20\(1\).pdf](file:///A:/DELL/Downloads%20(A)/154-Texto%20del%20art%C3%A1culo-454-1-10-20110328%20(1).pdf)

1

2

3

4

5



Aplicaciones a la teoría de la espera

se publicó digitalmente en el repositorio de la Facultad de Ingeniería en junio de 2022. Primera edición electrónica de un ejemplar (5 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Barlow para textos y Robot Slab para títulos con sus respectivas variantes.