



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Computadora analógica
como material didáctico para
modelado e implantación de
controladores**

MATERIAL DIDÁCTICO

Que para obtener el título de
INGENIERO MECATRÓNICO

P R E S E N T A N

José Juan Díaz Pacheco

Eduardo González Vicente

ASESOR DE MATERIAL DIDÁCTICO

Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022

Índice general

Prefacio	6
Guía de las Prácticas	8
1. Teoría de Control	13
1.1. Conceptos básicos de teoría de control	13
1.2. Tipos de sistemas de control	14
1.2.1. Sistema de control en lazo abierto	14
1.2.2. Sistema de control en lazo cerrado	14
1.3. Objetivos de control	14
1.4. Tipos de controladores	15
1.5. Representación de sistemas lineales invariantes en el tiempo	15
1.5.1. Función de transferencia	15
1.5.2. Espacio de estados	16
1.6. Interconexión de sistemas (Diagrama de bloques)	16
1.6.1. Interconexión en serie o en cascada	17
1.6.2. Interconexión en paralelo	17
1.6.3. Interconexión en retroalimentación	17
1.7. Análisis de sistemas dinámicos	18
1.7.1. Sistema de primer orden sin cero finito	18
1.7.2. Sistema de segundo orden sin ceros finitos	19
1.8. Criterio de estabilidad	21
2. Modelo del Amplificador Operacional	22
2.1. Amplificador en Lazo Abierto	22
2.2. Amplificador Con Retroalimentación Negativa	23
2.2.1. Amplificador Seguidor de Tensión	25
2.2.2. Amplificador No Inversor	26
2.2.3. Amplificador Inversor	27
2.2.4. Amplificador Integrador y Derivador	29
2.2.5. Amplificador Sumador y Diferencial	31
2.3. Práctica 1	34
2.3.1. Práctica 1: Control Proporcional (P) usando un Amplificador Operacional	34
2.3.2. Explicación y solución de la práctica	37

2.4.	Práctica 2	40
2.4.1.	Práctica 2: Controlador PID	40
2.4.2.	Explicación y solución de la práctica.	42
3.	Espacio de Estados	47
3.1.	Representación en Espacio de Estados	47
3.2.	Relación Espacio de Estados y Función de Transferencia	47
3.2.1.	Función de transferencia a Espacio de Estados	47
3.2.2.	Espacio de Estados a Función de Transferencia	49
3.3.	Estabilidad	49
3.4.	Puntos de equilibrio	50
3.5.	Plano de Fase	50
3.5.1.	Nodo Estable o Inestable	50
3.5.2.	Foco Estable o Inestable	51
3.5.3.	Punto Silla	51
3.5.4.	Centro	52
3.6.	Práctica 3	53
3.6.1.	Práctica 3: Plano de Fase.	53
3.6.2.	Solución de la Práctica	55
4.	Computadora analógica	59
4.1.	Símbolos de la computadora analógica	59
4.2.	Matlab Simulink y sus bloques básicos	60
4.2.1.	Bloques entrada-salida	60
4.2.2.	Bloques de fuente o sumidero	61
4.3.	Modelado en diagrama de bloques	62
4.4.	Circuito emulador de plantas	65
4.5.	Práctica 4	66
4.5.1.	Práctica 4: Circuito emulador de dinámicas de sistemas físicos	66
4.5.2.	Explicación y solución de la práctica	71
5.	Diseño de compensadores estilo PID	73
5.1.	Criterios de aproximación a un sistema de segundo orden sin ceros	73
5.2.	Cancelación de polos y ceros	74
5.3.	Diseño por medio del LGR	76
5.4.	Asignación de polos	77
5.5.	Construcción física del compensador	78
5.6.	Práctica 5	79
5.6.1.	Práctica 5: Diseño de controladores a partir de la función de transferencia	79
5.6.2.	Explicación y solución de la práctica	83
6.	Teoría de control discreto	88
6.1.	Tiempo de muestreo	89
6.2.	Transformada z	90

6.3.	Métodos de conversión o emulación	91
6.3.1.	Integración numérica (Regla de atraso)	91
6.4.	Implementación de un compensador digital	93
6.5.	Anti-Windup	94
6.5.1.	Saturación del actuador	94
6.5.2.	Efecto windup de la integral	94
6.5.3.	Método anti-windup	96
6.6.	Práctica 6	98
6.6.1.	Práctica 6: Discretización de controladores analógicos e introducción al fenómeno windup	98
6.6.2.	Explicación y solución de la práctica	103
7.	Identificación paramétrica	107
7.1.	Modelos de identificación paramétrica	107
7.1.1.	Modelo ARX	108
7.2.	Método de identificación paramétrica	108
7.3.	Algoritmo de estimación paramétrica	109
7.4.	Linealidad en los parámetros	110
7.5.	Condición de entrada	110
7.6.	Información previa y validación	111
7.7.	Práctica 7	112
7.7.1.	Práctica 7: Identificación paramétrica	112
7.7.2.	Explicación y solución de la práctica	118
8.	Circuitos Integrados No Lineales	124
8.1.	Diodo	124
8.2.	Configuraciones No Lineales Del Amplificador	124
8.2.1.	Amplificador Logarítmico	124
8.2.2.	Amplificador Exponencial	125
8.2.3.	Amplificador multiplicador de señales.	126
8.3.	Práctica 8	127
8.3.1.	Práctica 8: Amplificadores No Lineales	127
8.4.	Circuitos Integrados (Operadores Aritméticos).	129
8.4.1.	AD633	129
9.	Plantas No Lineales	132
9.1.	Oscilador de Van Der Pol	132
9.2.	Práctica 9	134
9.2.1.	Práctica 9 Oscilador Van Der Pol	134
9.2.2.	Cuestionario	138
9.2.3.	Solución de la Práctica	139
	Conclusiones	140

A. Anexos	141
A.1. Anexos Práctica 1	141
A.1.1. Actividad 2	141
A.1.2. Actividad 3	143
A.2. Anexos Práctica 6	144
A.2.1. Programa para Arduino (controlador)	144
A.2.2. Programa para Arduino (windup)	147
A.3. Anexos Práctica 7	150
A.3.1. Programa para Arduino (generador de sinusoides)	150
A.3.2. Script “Butterworth”	153
A.3.3. Script “mepmcr”	154
A.3.4. Script “estimación”	154
Referencias	158

Prefacio

Resumen

Este manual de prácticas cuenta con diversos circuitos propuestos que emplean como base al amplificador operacional, tienen el fin de demostrar y aplicar los conceptos vistos en materias relacionadas al control automático.

El manual se contempla para poder utilizarse completo o parcialmente en materias como control automático, control avanzado y control aplicado a nivel licenciatura, también se visualiza poder emplearse en materias de nivel maestría como modelado de sistemas mecatrónicos y control aplicado. Al mencionar completa o parcialmente se refiere a poder ocupar cierta cantidad de prácticas para ciertas materias y no todas.

Las prácticas elaboradas cubren aspectos como el objetivo de control (regulación), presentación del control PID, obtención de un plano de fase de una planta, tipos de errores en estado permanente, diseño de controladores analógicos y comparación de dos métodos de diseño de controladores a partir de la función de transferencia, teoría de controladores digitales y mejoras como el antiwindup, estimación paramétrica y una introducción a sistemas no lineales.

Objetivos

- Elaborar prácticas orientadas al control automático, empleando diversos circuitos y configuraciones de los amplificadores operacionales como material de apoyo, en el cual el usuario aplicará los conocimientos adquiridos en clase de teoría.
- Proporcionar un paradigma diferente al adquirido en clases de circuitos para comprender el amplificador operacional y su funcionamiento, utilizando conceptos de control.

Introducción

En la carrera de ingeniería mecatrónica existen varias asignaturas relacionadas con el control automático, para las cuales, o no se posee un laboratorio en particular o recientemente se está utilizando material didáctico desarrollado por los docentes o alumnos, tal es el ejemplo del manual de prácticas para motores de corriente directa elaborado por

Salinas González (2018). Siguiendo la misma filosofía, se propuso desarrollar material didáctico para complementar y/o apoyar a los docentes, debido a que, en la experiencia de los autores de este trabajo, la comprensión de conceptos o temas se asimilan mejor cuando se realizan de forma experimental.

El presente trabajo inició como un trabajo de servicio social en el que el objetivo era documentar la construcción de un banco de pruebas en el que se pudiera desarrollar un proyecto de la asignatura control automático. Sin embargo, al avanzar en el desarrollo de ese trabajo, se observó que el material podría ser propicio para demostrar experimentalmente otros conceptos o temas, por lo que se decidió generar un material didáctico que se pusiera a disposición de la planta docente.

Se trabajó en tres documentos; el primero será el principal que está dirigido para su presentación en el proceso de titulación, el cual se puede denominar un archivo de autocontenido que tiene la finalidad de almacenar la información correspondiente que sustenta el porqué de las prácticas y los conceptos en las cuales se basaron; el segundo será un manual dedicado al docente, el cual contendrá los temas sugeridos a cubrir, así como las prácticas y una propuesta de solución; finalmente, el tercero será un manual específico para el alumnado.

El alcance de las prácticas propuestas en el presente trabajo es para las asignaturas afines al control automático que imparte la facultad de ingeniería, pero eso no significa el descarte de un posible uso de alguna de las prácticas en alguna otra asignatura, tal como alguna de las asignaturas de electrónica.

Las prácticas propuestas se le harán llegar al grupo de profesores que imparten las asignaturas afines al control automático, quienes discutirían la pertinencia de su uso en un futuro próximo y en el orden que este grupo considere adecuado.

Guía de las Prácticas

Práctica 1: Control proporcional (P) usando un amplificador operacional

Comprender y analizar el uso del amplificador operacional como instrumento de control, emplear el amplificador operacional para construir e implantar un controlador proporcional utilizando resistencias variables para modificar la constante proporcional. Identificar el concepto de error en estado permanente y poner en práctica lo visto en clase de Control Automático de forma práctica, comparando los distintos tipos de plantas y sus errores en estado permanente correspondientes.

Práctica 2: PID

Implementar un controlador PID usando un solo amplificador operacional, utilizando resistencias y capacitores mediante la modificación de las constantes del controlador utilizando las expresiones proporcionadas. Finalmente será necesario que se comente como las constantes afectan al funcionamiento del circuito y su aportación al controlador.

Práctica 3: Plano de fase

Presentar el concepto de plano de fase y experimentar con los amplificadores operacionales para poder generar un plano de fase del circuito empleando el osciloscopio para observar la trayectoria generada. Identificar los distintos puntos de equilibrio que existen en los sistemas dinámicos y aprender a utilizar el osciloscopio para obtener planos de fase.

Práctica 4: Circuito emulador de dinámicas de sistemas físicos

Presentar y comprender los componentes que constituyen una computadora analógica y utilizar el concepto para construir un circuito capaz de emular la dinámica de un sistema físico lineal, invariante en el tiempo, de segundo orden y sin ceros finitos, empleando al amplificador operacional como integrado base. El circuito construido en esta práctica será utilizado en las 3 siguientes prácticas.

Práctica 5: Diseño de controladores a partir de la función de transferencia

Comparar dos métodos de diseño de controladores estilo PID (Lugar geométrico de las raíces y asignación de polos) y seleccionar uno mediante el criterio de aproximación a un sistema de segundo orden sin ceros e implementar el controlador en la planta de segundo orden construida en la práctica 4, en caso de cumplimiento de ambos métodos, solo se seleccionará uno para su implementación. Además, obtener los parámetros de diseño reales y compararlos con los teóricos deseados.

Práctica 6: Discretización de controladores analógicos e introducción al fenómeno windup

Conocer el método de discretización por regla de atraso para aplicarlo en el controlador analógico diseñado en la práctica 4 y obtener un tiempo de muestreo adecuado a partir del ancho de banda del sistema de control, con lo anterior programar el controlador e implementarlo a la planta. Además, conocer y entender los efectos del windup de la integral y como aplicar un método preventivo.

Práctica 7: Identificación paramétrica

Conocer un método para poder estimar los parámetros de una planta, donde los valores de estos sean complicados de obtener, pero con la restricción de conocer el modelo matemático que describa la dinámica del sistema y presente linealidad en los parámetros desconocidos y aplicarlo para estimar los parámetros de la planta construida en la práctica 4 y comparar los valores estimados contra los reales.

Práctica 8: Amplificadores no lineales

Conocer las configuraciones no lineales del amplificador operacional para conocer la multiplicación y división de señales analógicas. Introducir al alumno a los circuitos no lineales que se utilizarán en la práctica 9 del manual de prácticas.

Práctica 9: Oscilador Van Der Pol

Utilizar el circuito aritmético AD633 para construir un circuito no lineal conocido como el oscilador de Van De Pol. Proporcionar una breve introducción a temas más complejos sobre el control, en específico el concepto de ciclo límite. Proporcionar al alumno herramientas para poder construir circuitos no lineales que puedan utilizar en sus proyectos.

Trayectoria sugerida para las prácticas

En general, las prácticas están orientadas al control automático, pero no se puede emplear todas en una sola materia, esto es debido a los conceptos avanzados de algunas, los cuales no son vistos en ciertas clases de teoría por el nivel del curso. A continuación, se presenta una tabla en la que se describe puntualmente para qué temas de las asignaturas afines al control automático podría servir cada una de las prácticas propuestas como una actividad de apoyo al aprendizaje.

Prácticas	Temas que apoya
1. Control Proporcional (P) usando un Amplificador Operacional	2 Conceptos fundamentales de control. 4.1 Tipos de controladores: todo o nada, proporcional-integral-derivativo (PID), compensadores.
2. PID	4.1 Tipos de controladores: todo o nada, proporcional-integral-derivativo (PID), compensadores.
4. Circuito emulador de dinámicas de sistemas físicos	1.2 Definiciones: control y automatización, planta, variable a controlar, variable de control y perturbación. 2.1 Clasificación de los sistemas a tratar: sistemas dinámicos, lineales e invariantes en el tiempo.
5. Diseño de controladores a partir de la función de transferencia	4.1 Tipos de controladores: todo o nada, proporcional-integral-derivativo (PID), compensadores. 4.2 Diseño de controladores PID y compensadores. 4.4 Simulación numérica de sistemas de control.
6. Discretización de controladores analógicos e introducción al fenómeno windup	5.1 Conceptos generales sobre el control digital. 5.2 Equivalencias entre sistemas discretos y continuos. 5.3 Realización discreta de controladores y compensadores

Tabla 1: Control automático (clave 551).

Prácticas	Temas que apoya
3. Plano de Fase	3.1 Puntos de equilibrio de una ecuación de estado. 3.2 Estabilidad de los puntos de equilibrio (Lyapunov). 3.3 Determinación de la estabilidad.
4. Circuito emulador de dinámicas de sistemas físicos	1.2 El estudio de sistemas. 2.5 Simulación de sistemas físicos (manejo de MATLAB).

Tabla 2: Control avanzado (clave 2909).

Prácticas	Temas que apoya
1. Control Proporcional (P) usando un Amplificador Operacional	5.2 Implantación de controladores analógicos.
2. PID	5.2 Implantación de controladores analógicos.
4. Circuito emulador de dinámicas de sistemas físicos	1.2 Estado del arte en la implantación de sistemas de control.
5. Diseño de controladores a partir de la función de transferencia	5.1 Revisión de los métodos de diseño: dominio del tiempo, dominio de la frecuencia. 5.2 Implantación de controladores analógicos.
6. Discretización de controladores analógicos e introducción al fenómeno windup	2.1 Importancia de los sistemas de control de lazo cerrado. 2.2 Diseño de sistemas de control por emulación: diseño continuo e implementación discreta. 2.3 Sistemas discretos: transformada z, teorema de muestreo. 2.4 Controlador digital: convertidores AD, DA, resolución o errores de cuantización. 5.3 Implantación de controladores digitales.
7. Identificación paramétrica	3.1 Idea fundamental de la identificación paramétrica. 3.2 Métodos de identificación.

Tabla 3: Control aplicado (clave 2035).

Prácticas	Temas que apoya
3. Plano de fase	2.1 Introducción general. 2.2 Sistemas autónomos y no autónomos. 2.3 El espacio de fase n-dimensional. 2.4 Propósito del plano de fase y sus limitaciones. 2.5 El plano de fase de sistemas lineales de segundo orden.
8. Amplificadores No Lineales	1.1 Sistemas no lineales.
9. Oscilador Van Der Pol	1.1 Sistemas no lineales. 2.4 Propósito del plano de fase y sus limitaciones. 2.5 El plano de fase de sistemas lineales de segundo orden. 5.1 Preliminares matemáticos: linealización, funciones escalares y matriciales positivas definidas, negativas definidas y energías cinética, potencial y disipada. 5.2 Puntos de equilibrio. 5.3 Estabilidad: estabilidad de sistemas lineales (ecuación de Lyapunov) y estabilidad local de sistemas no lineales.

Tabla 4: Introducción a sistemas no lineales (clave 574).

Capítulo 1

Teoría de Control

1.1. Conceptos básicos de teoría de control

Antes de comenzar a analizar los sistemas de control se debe de definir ciertos términos esenciales, el autor Ogata (2010) brinda las siguientes definiciones de dichos términos:

Variable controlada y señal de control o variable manipulada. La variable *controlada* es la cantidad o condición que se mide y controla. La *señal de control* o variable *manipulada* es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema. *Controlar* significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto del valor deseado...

Plantas. Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de los elementos de una máquina que funcionan juntos, y cuyo objetivo es efectuar una operación particular...

Procesos. El *Diccionario Merriam-Webster* define un proceso como una operación o un desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden unos a otros de una forma relativamente fija y que conducen ... hacia un resultado o propósito determinados...

Sistemas. Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado...

Perturbaciones. Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, mientras que una perturbación *externa* se genera fuera del sistema y es una entrada. (p. 3)

1.2. Tipos de sistemas de control

1.2.1. Sistema de control en lazo abierto

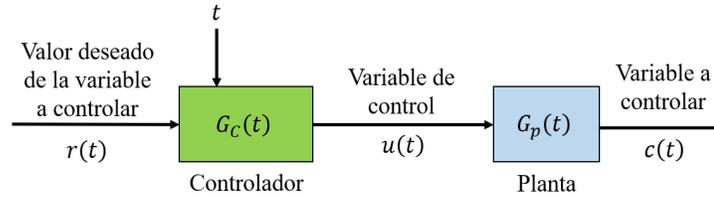


Figura 1.1: Sistema en lazo abierto.

En la Figura 1.1 se presenta un sistema en lazo abierto, el cual tiene las características de no corregir perturbaciones y simplemente se rige por la entrada (Ogata, 2010).

1.2.2. Sistema de control en lazo cerrado

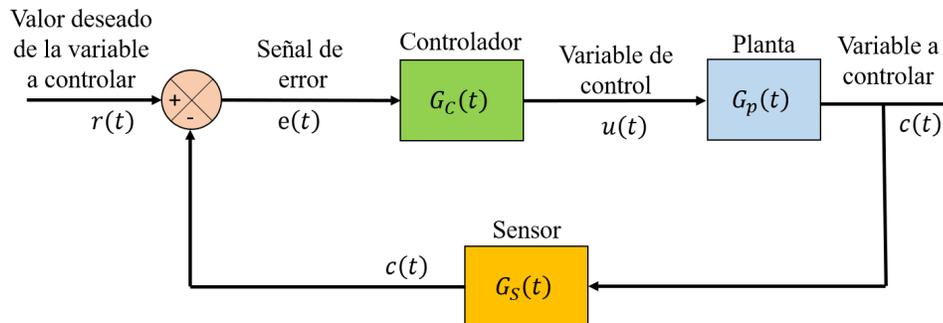


Figura 1.2: Sistema en lazo cerrado.

En la Figura 1.2 se presenta un sistema en lazo cerrado, las características destacables son: su baja sensibilidad al ruido y/o perturbaciones y la flexibilidad para controlar la respuesta transitoria y el error en estado permanente (Ogata, 2010).

1.3. Objetivos de control

Debe señalarse que, en el presente documento se aborda los objetivos de control considerados en las asignaturas mencionadas en Trayectoria sugerida para las prácticas, dichos objetivos son:

1. Estabilización: La respuesta del sistema debe de regresar a su punto de equilibrio, cuando el valor de su condición inicial sea diferente de cero.
2. Regulación: La respuesta del sistema con control debe de alcanzar un valor deseado constante cuando el valor de su condición inicial sea arbitrario.

3. Seguimiento: La respuesta del sistema debe de alcanzar y seguir una secuencia de valores deseados, es decir, una trayectoria.
4. Desempeño: La respuesta del sistema debe de cumplir con restricciones como tiempo de levantamiento, tiempo pico, tiempo de asentamiento y porcentaje de sobrepaso.
5. Robustez: Es cuando el sistema presenta un buen funcionamiento a pesar de existir perturbaciones y/o incertidumbre paramétrica.

1.4. Tipos de controladores

A continuación, se presenta una lista de controladores, en la cual se hace un desarrollo más extenso en los empleados en las prácticas.

1. Controladores ON/OFF
2. Controladores basados en la función de transferencia
 - a) Control tipo PID
 - I. Control proporcional
 - II. Control integral
 - III. Control proporcional-integral
 - IV. Control proporcional-derivativo
 - V. Control proporcional-integral-derivativo
 - b) Compensadores
3. Controladores basados en representación en variables de estado
4. Control óptimo
5. Control robusto
6. Control adaptable
7. Control inteligente

1.5. Representación de sistemas lineales invariantes en el tiempo

1.5.1. Función de transferencia

Ogata (2010) indica que la función de transferencia de un sistema descrito por medio de una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como la razón de la transformada de Laplace de la salida (respuesta) entre la transformada de Laplace de la

entrada (excitación) bajo el supuesto de todas las condiciones iniciales nulas, dicha función contiene polos y ceros.

Un polo es el valor de la variable s que al ser sustituido en la función de transferencia provoca que esta se vuelva infinita, también son las raíces del denominador de la función o también conocido como el polinomio característico. Un cero es el valor de s que al ser sustituido en la función de transferencia provoca que esta se convierta en cero, son las raíces del numerador de la función. Cabe mencionar que el número de polos y ceros finitos e infinitos en una función de transferencia deben de ser iguales, es decir, $\#polos = \#ceros$ (Nise, 2011).

La expresión (1.1) es un tipo de función de transferencia.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s + a}{(s + b)(s + c)} \quad (1.1)$$

1.5.2. Espacio de estados

Espacio de estados es conocido como método moderno o en el dominio del tiempo, es una forma de representación de un sistema dinámico en función de n ecuaciones diferenciales de primer orden (Nise, 2011).

Las expresiones (1.2) y (1.3) muestran un ejemplo de una representación en el espacio de estados para un sistema lineal e invariante en el tiempo.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

1.6. Interconexión de sistemas (Diagrama de bloques)

Nise (2011) indica algunas topologías comunes para interconectar los subsistemas que componen a un sistema complejo, estas topologías forman la base para convertir estos sistemas complicados en un solo bloque. A continuación, se presentan.

Sean dos sistemas dinámicos

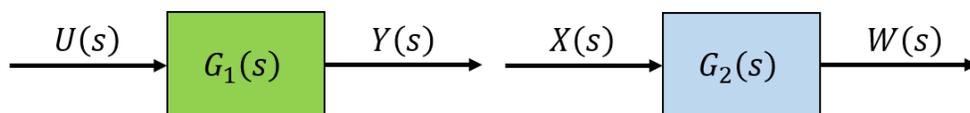


Figura 1.3: Sistemas empleados para ejemplificar las interconexiones.

1.6.1. Interconexión en serie o en cascada

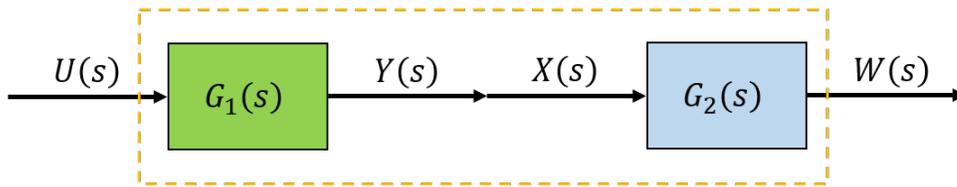


Figura 1.4: Sistemas en serie.

Donde la función de transferencia del sistema completo está dada por

$$G_{serie}(s) = \frac{W(s)}{U(s)} = G_1(s) G_2(s) \quad (1.4)$$

1.6.2. Interconexión en paralelo

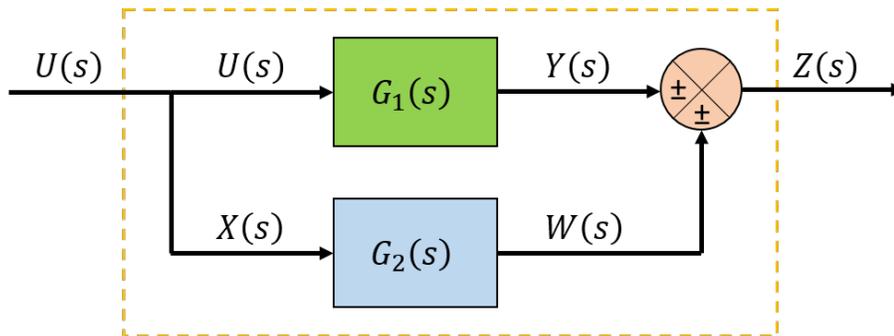


Figura 1.5: Sistemas en paralelo.

Donde la función de transferencia del sistema completo está dada por

$$G_{paralelo}(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \pm G_1(s) \pm G_2(s) \quad (1.5)$$

1.6.3. Interconexión en retroalimentación

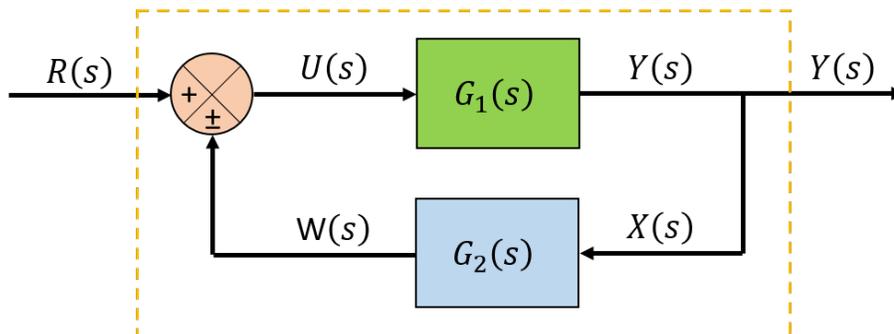


Figura 1.6: Sistemas en retroalimentación.

Donde la función de transferencia del sistema completo está dada por

$$G_{\text{retroalimentación}}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)} \quad (1.6)$$

1.7. Análisis de sistemas dinámicos

1.7.1. Sistema de primer orden sin cero finito

Este tipo de sistema puede ser representado por la función de transferencia (1.7).

$$G(s) = \frac{1}{s + b} \quad (1.7)$$

La respuesta genérica presente en la salida de este tipo de sistema (1.7) ante una entrada escalón, se puede observar en la Figura 1.7.

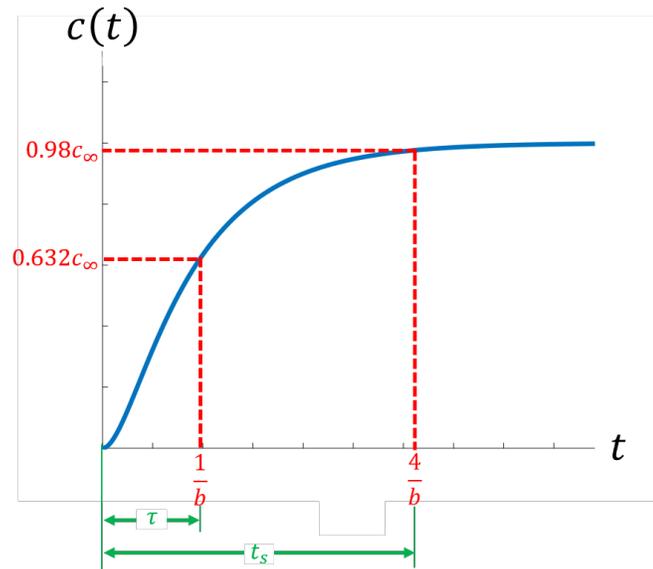


Figura 1.7: Respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada escalón.

El término $\frac{1}{b}$ se llama constante de tiempo de la respuesta y se puede describir como el tiempo que toma la respuesta de escalón para alcanzar el 63% de su valor final. El tiempo de asentamiento t_s se define como el tiempo necesario para que la respuesta del sistema alcance y permanezca dentro de una banda del 2% alrededor de su valor final (Nise, 2011).

Por lo tanto, algunos de los parámetros de diseño presentes en un sistema de primer orden y empleados en el presente escrito se indican en la Tabla 1.1.

Parámetro de diseño	Símbolo	Fórmula	Unidad
Constante de tiempo	τ	$\frac{1}{b}$	[s]
Tiempo de asentamiento	t_s	$4\tau \approx \frac{4}{b}$	[s]

Tabla 1.1: Parámetros de diseño de un sistema de primer orden.

1.7.2. Sistema de segundo orden sin ceros finitos

Nise (2011) plantea que este tipo de sistema tiene diversas variantes de respuesta, ya que puede presentar características muy semejantes a las de un sistema de primer orden sin ceros finitos o también puede presentar oscilaciones amortiguadas o puras en su respuesta transitoria, esto dependiendo de sus parámetros.

Un sistema de segundo orden sin ceros finitos se puede representar como

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.8)$$

donde

ω_n = Frecuencia natural $[\frac{rad}{s}]$.

ξ = Factor o coeficiente de amortiguamiento relativo $[adimensional]$.

De la ecuación característica de la función (1.8) se pueden obtener los polos con la ayuda de la ecuación (1.9).

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (1.9)$$

En la Tabla 1.2 se puede observar las 4 respuestas que puede presentar un sistema de segundo orden ante una entrada escalón, con sus características y polos presentes.

La respuesta subamortiguada se puede considerar como un modelo común para problemas físicos, muestra un comportamiento único destacable, en la Figura 1.8 se muestran la mayoría de los parámetros de diseño presentes en esta clase de respuesta ante una entrada escalón y en la Tabla 1.3 se muestra la forma de obtener los valores de dichos parámetros a partir de la función de transferencia.

Las unidades de los valores de $c(t)$ dependen del sistema, es decir, si es un sistema mecánico la salida puede ser velocidad con unidades $[\frac{m}{s}]$ o distancia $[m]$, en el caso eléctrico puede ser voltaje $[V]$, etc.

Para el análisis de sistemas no amortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado es recomendable realizar simulaciones en computadora y así obtener los valores de los parámetros.

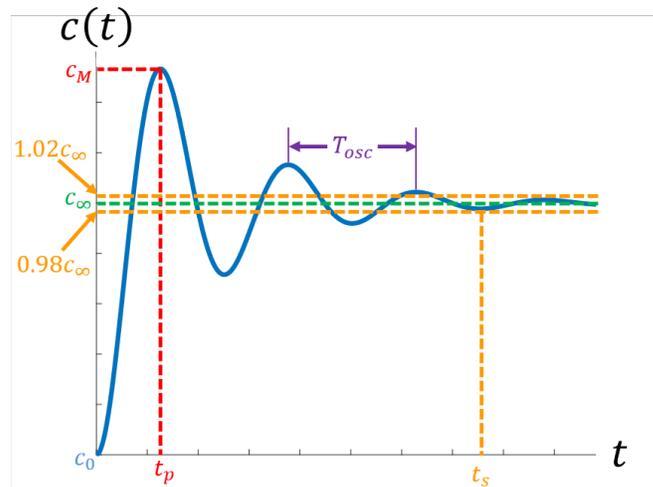


Figura 1.8: Parámetros de diseño de una respuesta subamortiguada de segundo orden.

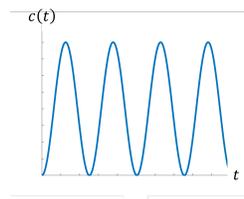
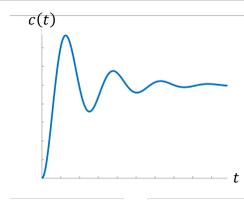
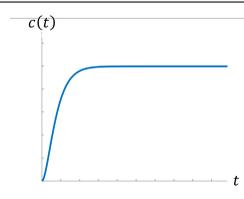
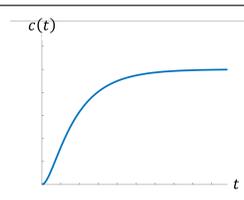
Factor de amortiguamiento	Caso	Polos	Respuesta
$\xi = 0$	No amortiguado	Imaginarios conjugados $P_{1,2} = \pm\omega_n j$	
$0 < \xi < 1$	Subamortiguado	Complejos conjugados $P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} j$	
$\xi = 1$	Críticamente amortiguado	Reales negativos idénticos $P_{1,2} = -\omega_n$	
$\xi > 1$	Sobreamortiguado	Reales negativos distintos $P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$	

Tabla 1.2: Tipos de respuesta de un sistema de segundo orden.

Parámetro de diseño	Símbolo	Fórmula	Unidad
Tiempo pico	t_p	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$	[s]
Tiempo de asentamiento	t_s	$\frac{4}{\xi\omega_n}$	[s]
Frecuencia de oscilación	ω_{osc}	$\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
Periodo de oscilación	T_{osc}	$\frac{2\pi}{\omega_{osc}}$	[s]
Condición inicial de $c(t)$	c_0	—	—
Valor máximo de $c(t)$	c_M	—	—
Valor final de $c(t)$	c_∞	$G(0) u_\infty$	—
Porcentaje de sobrepaso	$\%sp$	$e^{\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \times 100$	<i>adimensional</i>
Sobrepaso	sp	$\left(1 + \frac{\%sp}{100}\right) c_\infty$	<i>adimensional</i>

Tabla 1.3: Parámetros de diseño de un sistema de segundo orden subamortiguado.

1.8. Criterio de estabilidad

Nise (2011) hace la mención de la estabilidad como la más importante especificación de un sistema, debido a que no se puede diseñar un sistema inestable para cumplir un requerimiento deseado de respuesta transitoria o error en estado permanente. Por lo cual, existen diversas definiciones para estabilidad, dependiendo del tipo de sistema o el punto de vista. En este documento se limita a sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

El autor antes mencionado, da pie a un criterio sencillo de emplear, el cual se basa en la ubicación de los polos de la función de transferencia en el plano complejo (también denominado plano s), el cual enuncia los siguientes puntos:

1. Los sistemas estables poseen polos solamente ubicados en el semiplano izquierdo, por lo tanto, los polos tienen una parte real negativa.
2. Los sistemas inestables poseen al menos un polo ubicado en el semiplano derecho, en consecuencia, dicho polo o polos tienen parte real positiva.
3. Los sistemas marginalmente estables poseen polos ubicados en el eje imaginario y en el semiplano izquierdo, por lo cual algunos de los polos tienen parte real igual a cero.

El criterio anterior solicita conocer todos los polos del sistema, por lo cual, si el sistema es de orden superior, por ejemplo, mayor a tres, la obtención de ellos puede llegar a ser muy laborioso, por lo cual existen otros criterios más fáciles de utilizar en este tipo de situaciones, por ejemplo, el criterio de Routh-Hurwitz (véase Nise (2011) y/o Ogata (2010) para una revisión más profunda relacionada a criterios de estabilidad). Para los sistemas empleados en este escrito es sencillo encontrar los polos, dado que el grado más alto es de tercero.

Capítulo 2

Modelo del Amplificador Operacional

2.1. Amplificador en Lazo Abierto

Los avances logrados en la teoría de control y la electrónica están estrechamente relacionados. A lo largo de la historia se ha observado como el desarrollo en una disciplina permite generar nuevos paradigmas que ayudan a otras disciplinas del campo de la ciencia y la tecnología; el control y la electrónica son muestras de este evento. Muchos logros tecnológicos se deben al avance en la teoría del control y la misma electrónica, uno de estos tantos logros recae en el amplificador operacional, que ha permitido desarrollar de forma impresionante al control y a la electrónica analógica.

El amplificador operacional ha surgido por la necesidad de poder sumar, restar, seguir y realizar de forma más general operaciones para construir una computadora analógica, además de su gran capacidad para corregir errores y de esta forma crear lazos de control.

En esta sección se hablará de forma explícita como se puede realizar un análisis del amplificador operacional desde la teoría de control, para ello es necesario que se dominen los temas de simplificación de bloques y el análisis de señales en teoría de control.

El modelo del amplificador operacional en lazo abierto se puede descomponer como se observa en la Figura 2.1, las partes principales que se pueden ver es un bloque sumador que toma de entrada a los voltajes de los nodos $V(-)$ y $V(+)$ en sus respectivas entradas, dicho sumador genera una diferencia, conocida como error (e), y finalmente multiplica esa diferencia por una ganancia a .

El nodo $V(+)$ se conoce como entrada no inversora, esto se debe a que los voltajes conectados a esta entrada generan voltajes positivos a la salida. El nodo $V(-)$ se conoce como entrada inversora, en este caso los voltajes que se conecten a dicha entrada sufrirán un cambio de signo a la salida.

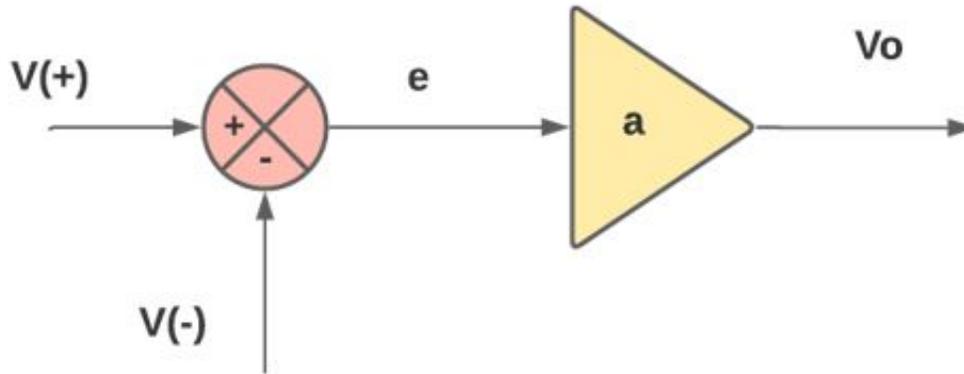


Figura 2.1: Amplificador en Lazo Abierto

La relación que nos permite obtener el error está dada por la siguiente ecuación,

$$e = V(+)-V(-) \quad (2.1)$$

la ecuación que nos permite relacionar el error con la salida es la siguiente.

$$V_0 = ae \quad (2.2)$$

Finalmente podemos obtener la salida en función de las entradas mediante la sustitución de (2.1) en (2.2), de tal forma que se obtiene la ecuación (2.3).

$$V_0 = a[V(+)-V(-)] \quad (2.3)$$

Es necesario apreciar que la ecuación (2.3) es el modelo del amplificador operacional visto como una fuente dependiente, dicha ecuación es válida para todas las conexiones del amplificador operacional, en las siguientes secciones se discutirán casos donde la relación entrada-salida puede variar según sea el caso.

2.2. Amplificador Con Retroalimentación Negativa

El amplificador operacional con retroalimentación negativa se puede dividir como se observa en la Figura 2.2, en este caso se tiene en la entrada no inversora ($V(+)$) un voltaje dV_P y en la entrada inversora ($V(-)$) se tienen dos voltajes, el primero es un voltaje cV_N y el segundo es un voltaje retroalimentando por el voltaje de salida V_o con una ganancia b . La salida está dada por la misma relación que en el amplificador en lazo abierto.

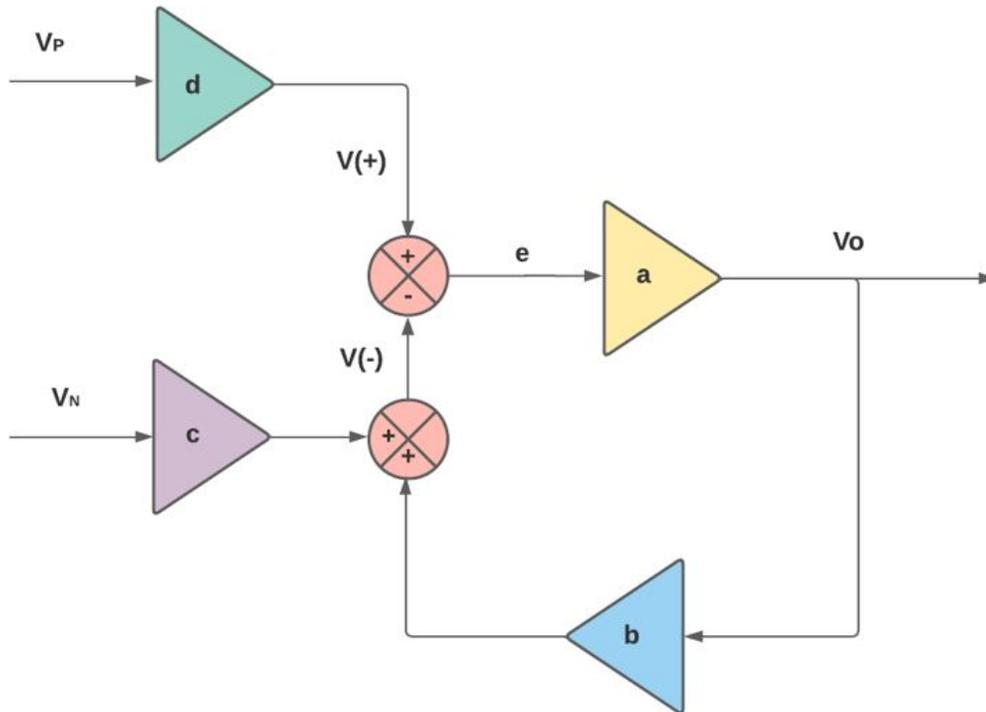


Figura 2.2: Amplificador con Retroalimentación Negativa

La ecuación (2.3) sigue siendo válida para este caso, la principal diferencia recae en el lazo cerrado, como se observa en la figura. Existen configuraciones donde la retroalimentación puede existir en los nodos $V(+)$ o $V(-)$. En la retroalimentación negativa se pueden reducir todas las conexiones en tres casos principales:

- Amplificador seguidor de tensión
- Amplificador no inversor
- Amplificador inversor.

La señal $V(-)$ se obtiene mediante la suma de dos señales, la primera señal proviene de un voltaje negativo V_N multiplicado por una ganancia c . La segunda señal es la señal de salida V_o multiplicado por una ganancia, esta señal se le conoce como señal retroalimentada o voltaje retroalimentado. Finalmente la ecuación queda expresada como se observa a continuación.

$$V(-) = bV_o + cV_N \quad (2.4)$$

La señal $V(+)$ esta dada por la ecuación (2.5),

$$V(+)= dV_P \quad (2.5)$$

sustituyendo (2.5) y (2.4) en (2.3) y al desarrollar,

$$V_O = a(dV_{P_i} - (bV_0 + cV_{N_i}))$$

$$V_O + abV_0 = a(dV_{P_i} - cV_{N_i})$$

se obtiene el voltaje de salida de forma general.

$$V_O = a \frac{dV_{P_i} - cV_{N_i}}{1 + ab} \quad (2.6)$$

2.2.1. Amplificador Seguidor de Tensión

En este caso los voltajes de los nodos $V(+)$ y $V(-)$ están dados de la siguiente forma: en el nodo $V(+)$ se tiene la única entrada del sistema donde se aplica el voltaje de entrada, es decir con $V_{P_i} = V_i$, para obtener el voltaje en el nodo $V(-)$ debemos recurrir a la ecuación a la Figura 2.3. Para encontrar las constantes debemos recordar que las flechas tienen ganancia unitaria, es decir la señal no sufre ninguna modificación.

Al utilizar la noción previamente mencionada podemos encontrar que $b = d = 1$ y como este diagrama no tiene ninguna señal conectada a la entrada inversora se obtiene $V_N = 0$.

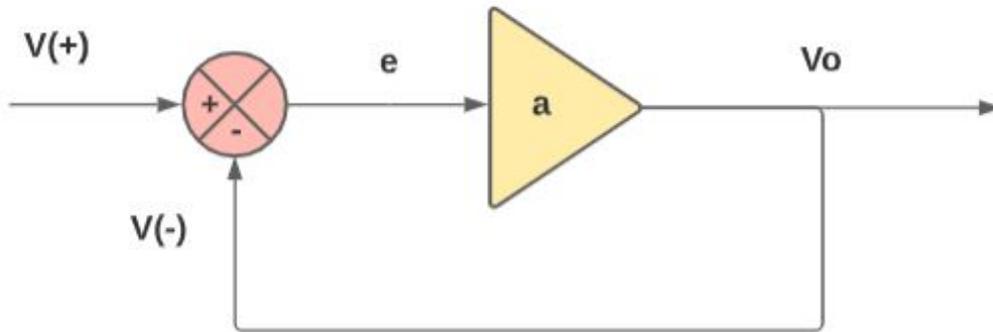


Figura 2.3: Amplificador Seguidor de Tensión

Al sustituir lo anterior en (2.6) se obtiene lo siguiente

$$V_O = \frac{a}{1 + a} V_i \quad (2.7)$$

En las clases de electrónica básica se han proporcionado las herramientas para el análisis de los amplificadores operacionales de forma ideal, por lo que la ecuación (2.7) no se parece a la ecuación ampliamente conocida. Sabemos de la hoja de datos que a tiende a ser muy alta y esto a su vez nos da la siguiente relación $a \gg 1$, lo anterior implica que podemos aproximar (2.7) mediante la siguiente ecuación.

$$V_O \approx \frac{aV_i}{a} = V_i$$

En el caso ideal podemos suponer que $a \rightarrow \infty$, para obtener la ecuación es necesario solucionar el límite como en los cursos de Cálculo para obtener (2.8).

$$V_o = V_i \quad (2.8)$$

2.2.2. Amplificador No Inversor

La Figura 2.4 es la representación del amplificador operacional no inversor dividido en sus bloques correspondientes.

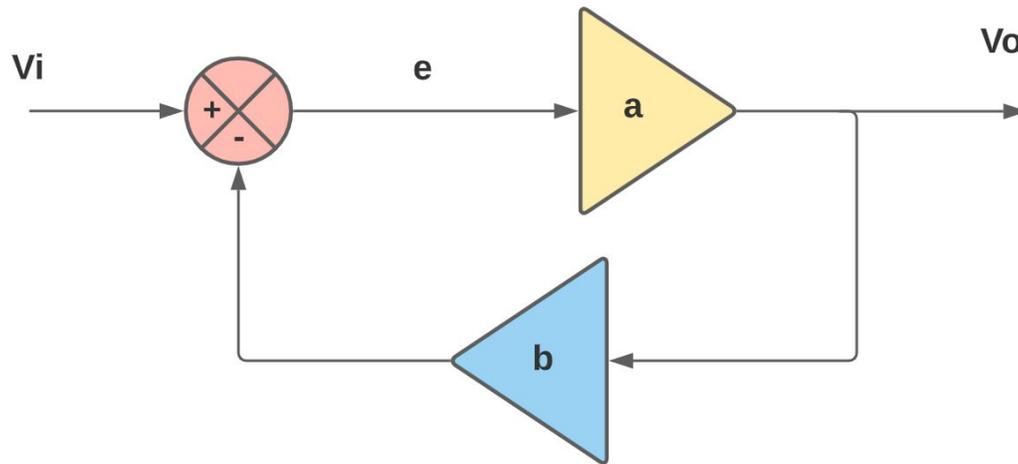


Figura 2.4: Amplificador No Inversor.

De la Figura 2.4 podemos ver fácilmente que $V_P = V_i$ con $d = 1$ y que $V_N = 0$, pero si queremos encontrar el voltaje retroalimentado al nodo $V(-)$ es necesario recurrir a su equivalente electrónico. Lo anterior se debe a que la figura 2.4 es una abstracción del circuito 2.5.

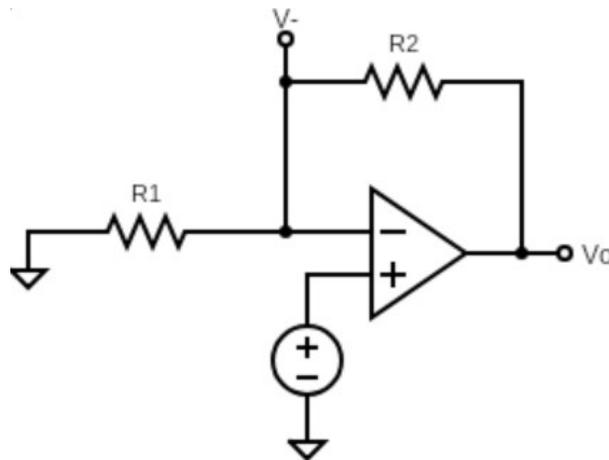


Figura 2.5: Circuito Amplificador No Inversor.

Para encontrar el voltaje en el nodo $V(-)$, es necesario tomar una simplificación del circuito anterior, de forma que se obtiene el circuito de la figura 2.6.

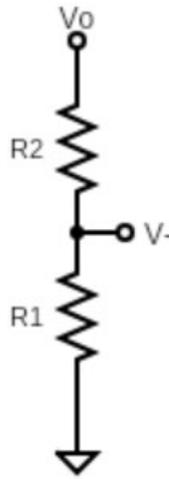


Figura 2.6: Retroalimentación del amplificador No Inversor.

Con ayuda del circuito anterior y al utilizar un divisor de voltaje en el nodo $V(-)$ se obtiene la siguiente ecuación.

$$b = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.9)$$

Finalmente sustituimos (2.9) en (2.6) con lo previamente mencionado, es decir $V_{P_i} = V_i$, $d = 1$ y $V_{N_i} = 0$, para obtener (2.10).

$$V_o = \frac{a(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + aR_1} V_i \quad (2.10)$$

como $R_1 + R_2 \ll aR_1$, podemos aproximar (2.10) de la siguiente forma.

$$V_o \approx \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_i$$

En el caso ideal la relación entrada salida se puede obtener al calcular el límite de (2.10) cuando $a \rightarrow \infty$, dando así la ecuación (2.11).

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_i \quad (2.11)$$

2.2.3. Amplificador Inversor

Para realizar el análisis del amplificador operacional en su configuración inversora, es necesario recurrir a la Figura 2.7, tal como se puede observar es necesario usar la forma completa de la ecuación (2.4); para ello es necesario encontrar las constantes b y c .

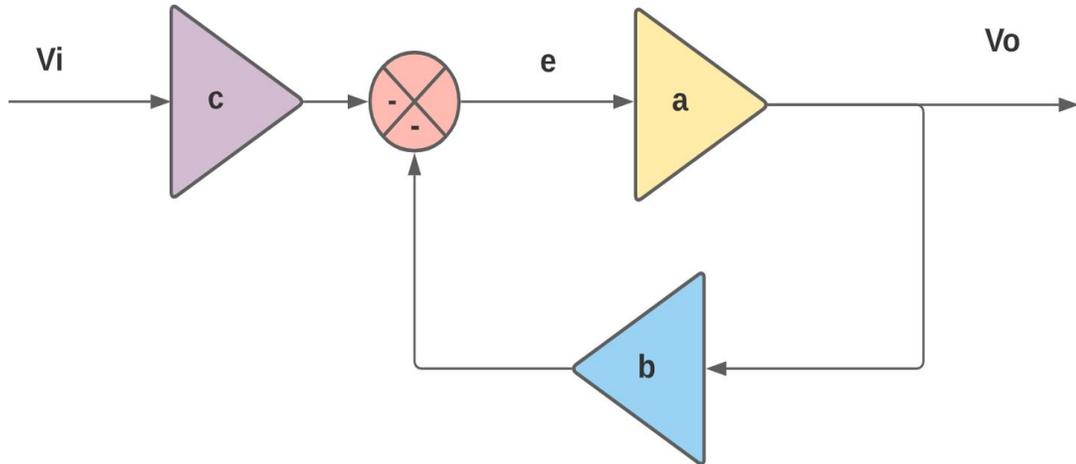


Figura 2.7: Amplificador Inversor.

Previamente ya se ha encontrado el valor de b , mediante la ecuación (2.9), por lo que solo debemos encontrar el valor de c . Para ello debemos recurrir nuevamente al equivalente electrónico que está dado por el circuito de la Figura 2.8.

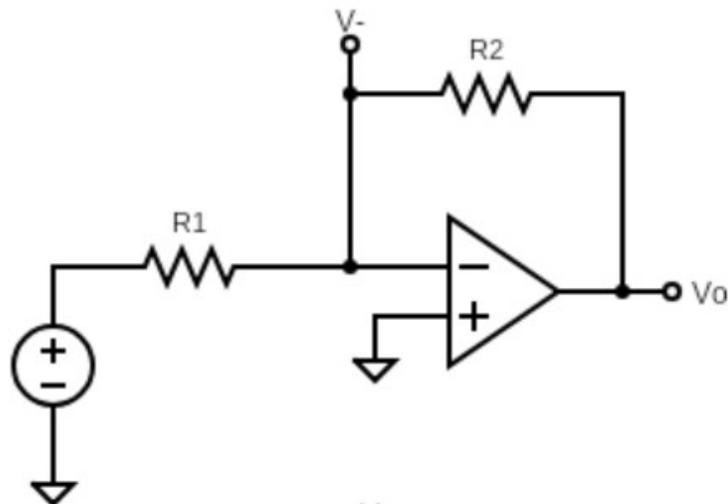


Figura 2.8: Circuito Amplificador Inversor.

Es posible realizar una simplificación para obtener c , dicha simplificación se puede observar en el circuito de la figura 2.9.

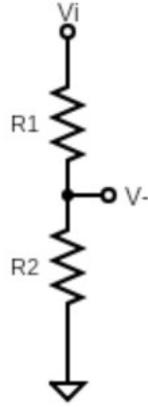


Figura 2.9: Circuito Amplificador Inversor.

Es necesario realizar un divisor de voltaje para encontrar c para obtener (2.12).

$$c = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) y (2.9) en (2.4), se obtiene lo siguiente,

$$V(-) = V_O \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) + V_i \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \quad (2.13)$$

Sustituyendo $V_{P_i} = 0$, $V_{N_i} = V_i$ y las constantes (2.9) y (2.12) en (2.6) se obtiene (2.14).

$$V_O = - \frac{aR_2}{R_1 + R_2 + aR_1} V_i \quad (2.14)$$

como $R_1 + R_2 \ll aR_1$ podemos aproximar (2.14) a

$$\begin{aligned} V_O &\approx - \frac{aV_i R_2}{aR_1} \\ &\approx - \frac{R_2}{R_1} V_i \end{aligned}$$

En el caso ideal $a \rightarrow \infty$

$$V_O = - \frac{R_2}{R_1} V_i \quad (2.15)$$

2.2.4. Amplificador Integrador y Derivador

Amplificador Integrador

En estos casos es necesario emplear impedancias y usar la ecuación de los amplificadores inversores. Para obtener las ecuaciones correspondientes al integrador y derivador inversores, primero es necesario emplear el concepto de la impedancia y reactancia, de forma general podemos definir a la reactancia como la oposición a que circule una corriente

por el elemento. La impedancia está más relacionada a la suma de la resistencia con la reactancia, ya sea positiva o negativa, dicha suma es una cantidad que pertenece al dominio de los números complejos. En los amplificadores operacionales se suele emplear más el capacitor, por lo que la reactancia a definir debe ser la capacitiva, la reactancia capacitiva está dada por la siguiente ecuación.

$$X_c = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{sC} \quad (2.16)$$

Cabe destacar que las unidades de la reactancia como de la impedancia están dadas en Ohmios, por lo que la ecuación (2.16) nos permite simplificar el análisis de los circuitos que contengan componentes capacitivos.

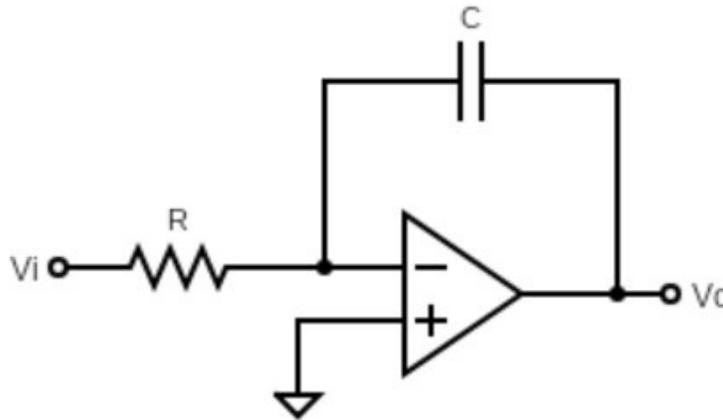


Figura 2.10: Circuito Amplificador Integrador.

Como se puede ver en el circuito anterior; el modo de operación es bastante similar al caso del amplificador inversor, haciendo que $R_2 = X_C$ y de (2.16) sustituimos en (2.15) y al desarrollar se obtiene la ecuación que nos relaciona la entrada y la salida.

$$V_O = \frac{1}{sCR} V_i = \int \frac{1}{CR} V_i \quad (2.17)$$

Derivador

En el circuito 2.11 se puede observar al amplificador operacional en su configuración diferenciador o también conocida como derivadora, realizando un análisis similar al realizado para la configuración integradora podemos encontrar la ecuación (2.18).

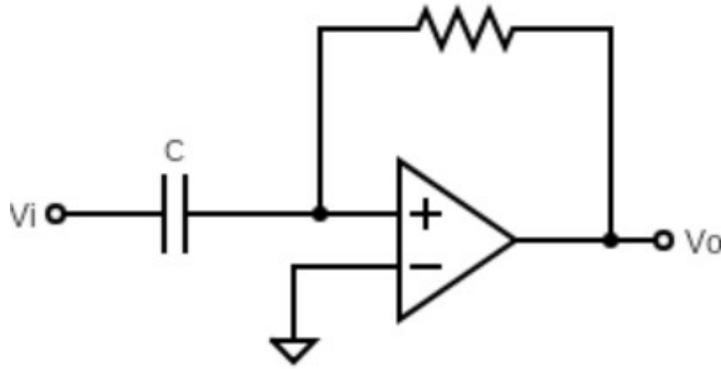


Figura 2.11: Circuito Amplificador Diferenciador.

$$V_O = CRsV_i = CR\frac{d}{dt}V_i \quad (2.18)$$

2.2.5. Amplificador Sumador y Diferencial

En la Figura 2.12 se puede observar el caso general del amplificador operacional con retroalimentación negativa.

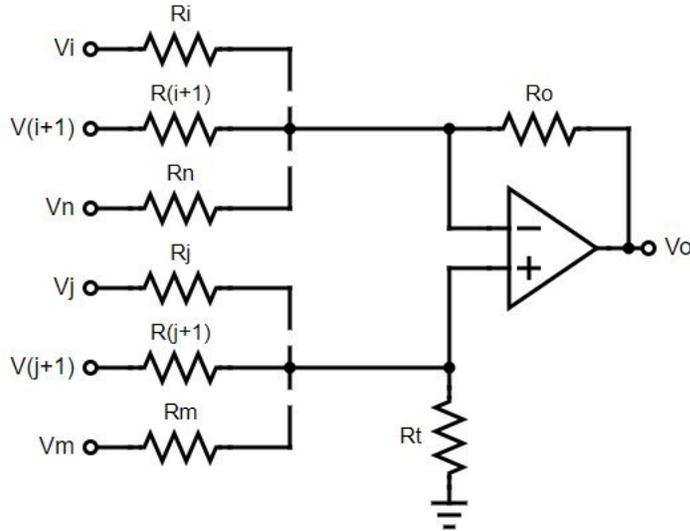


Figura 2.12: Amplificador operacional Sumador-Restador.

Como en el caso general es posible tener n voltajes en la entrada inversora y m voltajes en la entrada no inversora, es necesario expresar las ecuaciones (2.4) y (2.5) como:

$$V(-) = bV_O + \sum_{i=1}^n c_i V_{N_i} \quad (2.19)$$

$$V(+)=\sum_{j=1}^m d_j V_{P_j} \quad (2.20)$$

Al sustituir (2.19) y (2.20) en (2.3) y al despejar el voltaje de salida del amplificador se obtiene.

$$V_o = \frac{a(\sum_{j=1}^m d_j V_{P_j} - \sum_{i=1}^n c_i V_{N_i})}{1 + ab} \quad (2.21)$$

Donde la constante b se obtiene del circuito de la Figura 2.13, las constantes c y de d se obtienen de circuitos similares al de la Figura 2.13 con la diferencia de realizar los cambios en función del voltaje que se analice. Dichas modificaciones afectan principalmente a la resistencia equivalente, por lo que no es posible derivar un circuito para mostrar el ejemplo.

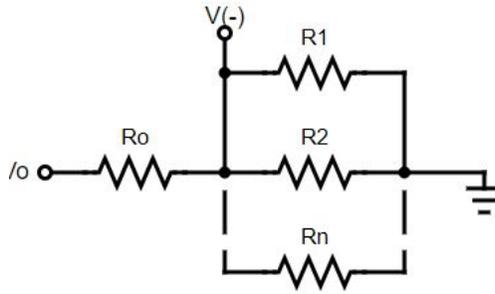


Figura 2.13: Circuito de retroalimentación.

Del circuito anterior y los circuitos para las constantes c y d y al usar el supuesto que las resistencias de entrada son iguales, es decir $R_i = R_j = R$, se obtienen las ecuaciones (2.22), (2.23) y (2.24).

$$b = \frac{R^n}{R_o R_n + R^n} \quad (2.22)$$

$$c = \frac{R^n R_o}{R^2[(n-1)R + R_o] + R^n R_o} \quad (2.23)$$

$$d = \frac{R^m R_t}{R^2[(m-1)R + R_t] + R^m R_t} \quad (2.24)$$

Amplificador Diferencial

Si se utiliza (2.21) con $n = m = 1$ se obtiene la ecuación (2.6), dicho caso es el amplificador diferencial, pero para obtener la diferencia entre los voltaje de entrada es necesario sustituir las constantes b y c dando como resultado la siguiente ecuación.

$$V_o = a \frac{(dV_P)(R_1 + R_2) - R_2 V_N}{(R_1 + R_2) + aR_1}$$

Si se obtiene el valor de la ecuación suponiendo que $A \rightarrow \infty$, se puede obtener la siguiente ecuación.

$$V_o = \frac{(dV_P)(R_1 + R_2) - R_2V_N}{R_1} \quad (2.25)$$

Si se desea tener una expresión que se pueda manipular con facilidad, se propone el siguiente valor para la constante d .

$$d = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.26)$$

Usando (2.26) con la ecuación (2.25) es posible obtener la siguiente ecuación para el caso de (2.21) con $n = m = 1$.

$$V_o = \frac{R_2}{R_1}(V_P - V_N) \quad (2.27)$$

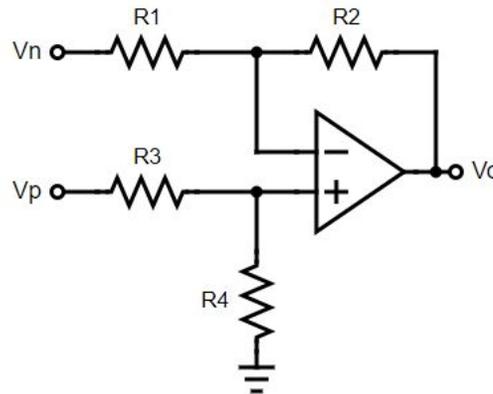


Figura 2.14: Amplificador Operacional Diferencial.

Amplificador Sumador

Para este caso es necesario suponer que $\sum_{j=1}^m d_j V_{P_j} = 0$ y considerar que las resistencias de entrada son iguales, al sustituir en (2.21) y solucionando el límite cuando $a \rightarrow \infty$ se obtiene (2.28).

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} \left(\sum_{i=1}^n V_{N_i} \right) \quad (2.28)$$

El circuito se observa en la Figura 2.15.

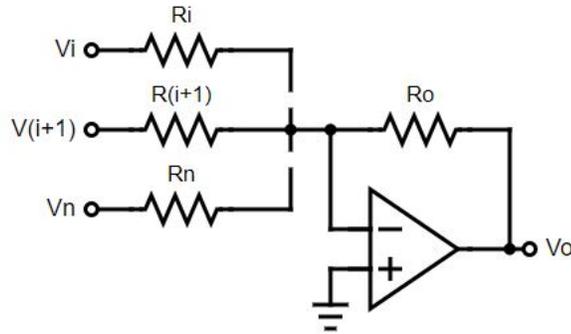


Figura 2.15: Amplificador Operacional Sumador.

Amplificador Sumador Restador

Existe un caso particular del amplificador que nos permite usar más de un voltaje de entrada por entrada sin perder la facilidad del manejo en las ecuaciones, dicho caso parte del supuesto que $m = n$, es decir se debe tener la misma cantidad de entradas en la entrada inversora como en la no inversora; además se debe suponer que todas las resistencias del circuito son iguales en magnitud. Todo lo anterior nos permite obtener la expresión (2.29).

$$V_o = \sum_{j=1}^m V_{P_j} - \sum_{i=1}^n V_{N_i} \quad (2.29)$$

2.3. Práctica 1

2.3.1. Práctica 1: Control Proporcional (P) usando un Amplificador Operacional

Objetivos

- Identificar y calcular el error en estado permanente.
- Emplear y reconocer la contribución de un control proporcional.
- Emplear y reconocer la contribución de un control integral.

Material

La siguiente tabla contiene varias combinaciones posibles para la selección de los componentes, donde hay dos columnas se debe escoger alguna de las dos variantes para las resistencias y el capacitor.

Material	
$C = 1[\mu F]$	$C = 0.1[\mu F]$
$R_1 = 1[k\Omega] R_2 = 1[M\Omega]$	$R_1 = 1[M\Omega] R_2 = 10[M\Omega]$
2 potenciómetro de $100[k\Omega]$	
2 amplificadores operacionales TL081 o 741	

Tabla 2.1: Material

Desarrollo

I Actividad 1

Es necesario alambrear el siguiente circuito, dicho circuito será la planta que se debe controlar, hay que remarcar que en este circuito en particular la entrada de control se deberá conectar a la entrada no inversora.

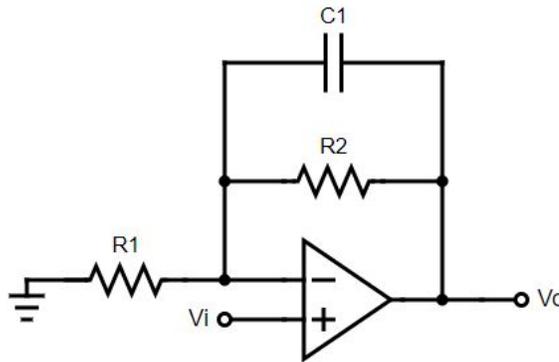


Figura 2.16: Planta a Controlar.

El modelo matemático que define a la planta está dado por la ecuación (2.30).

$$\frac{V_O}{V_i} = \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C_1 s}{s R_1 R_2 C_1 + R_1} \quad (2.30)$$

Se recomienda utilizar los siguientes valores para los componentes empleados $R_1 = 1[M\Omega]$, $R_2 = 10[M\Omega]$ y $C_1 = 0.1[\mu F]$, al realizar la sustitución se obtiene la siguiente función de transferencia.

$$\frac{V_O}{V_i} = \frac{s + 11}{s + 1} \quad (2.31)$$

Preguntas Cuestionario

- ¿Cuál es el tipo de planta?, ¿tipo 0 tipo 1, tipo n?
- Obtenga la respuesta del circuito a una entrada escalón.

$$V_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_D & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

donde $V_D > 0[V]$ y V_D es una constante en DC. Muestre los resultados obtenidos con ayuda del osciloscopio.

Recomendaciones

La entrada escalón se puede obtener mediante el uso de un botón conectado a un voltaje en DC, para lo cual debe mantenerlo oprimido el tiempo que considere oportuno.

II Actividad 2

Para esta actividad es necesario implementar el siguiente circuito, cabe destacar que los valores de las resistencias R_1 y R_2 y del capacitor C son los mismos valores que en la actividad pasada.

Utilice resistencias que cumplan con lo siguiente:

- $R_3 = R_5 = 1[k\Omega]$
- $R_4 = R_6$ (Se recomienda usar un potenciómetro para cada resistencia, mida con su multímetro para garantizar que sus valores sean iguales.)

Usando el generador de señales conecte una onda cuadrada de $\pm 1[V]$ al nodo V_r .

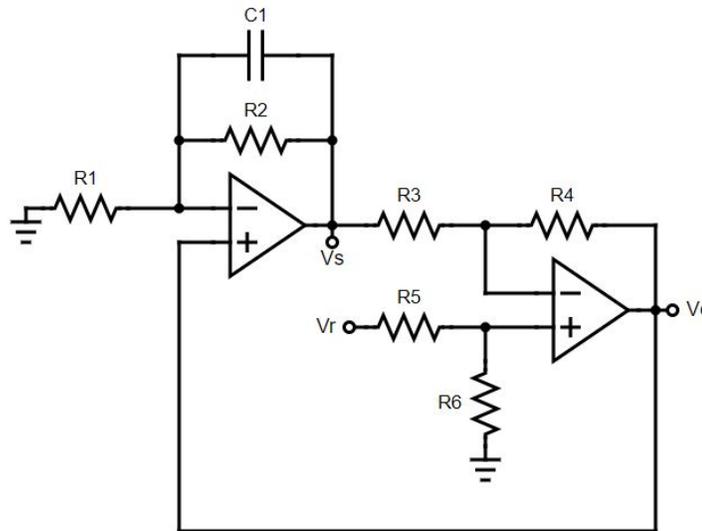


Figura 2.17: Planta con Control Proporcional.

Preguntas Cuestionario

- ¿Cuál es la respuesta del anterior circuito con la misma entrada pulso de la actividad anterior?

- Modifique los valores de las resistencias R_4 y R_6 , recuerde que se debe cumplir $R_4 = R_6$. Anote sus observaciones para $330[\Omega]$, $1[k\Omega]$, $10[k\Omega]$ y $100[k\Omega]$.

III Actividad 3

Reemplace la resistencia R_4 con un segundo capacitor y desconecte las resistencias de la entrada inversora, como se observa en la siguiente figura.

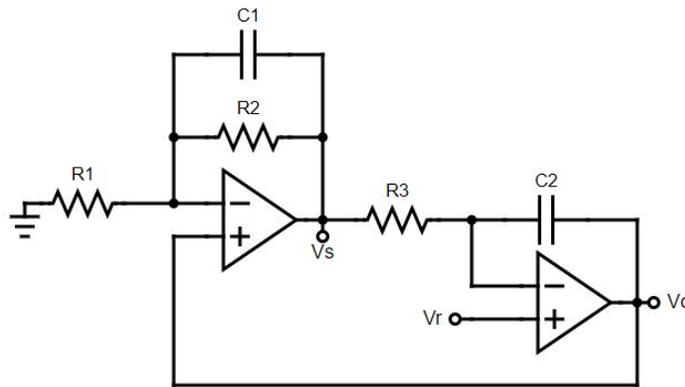


Figura 2.18: Planta con Control Integral.

Conecte un señal triangular al nodo V_r y anote sus observaciones.

Preguntas Cuestionario

- Conecte el escalón utilizado en la actividad 1 a este circuito y registre su respuesta.
- Explique porque sucede la respuesta anterior y cuál es el error en estado permanente.

2.3.2. Explicación y solución de la práctica

Para cumplir con el diseño del controlador, es necesario identificar que el tipo de planta es cero, esto se debe a que no existen ningún polo que se encuentre en el eje de los imaginarios. El circuito empleado en la práctica es un controlador proporcional para su demostración revise el anexo A.1.

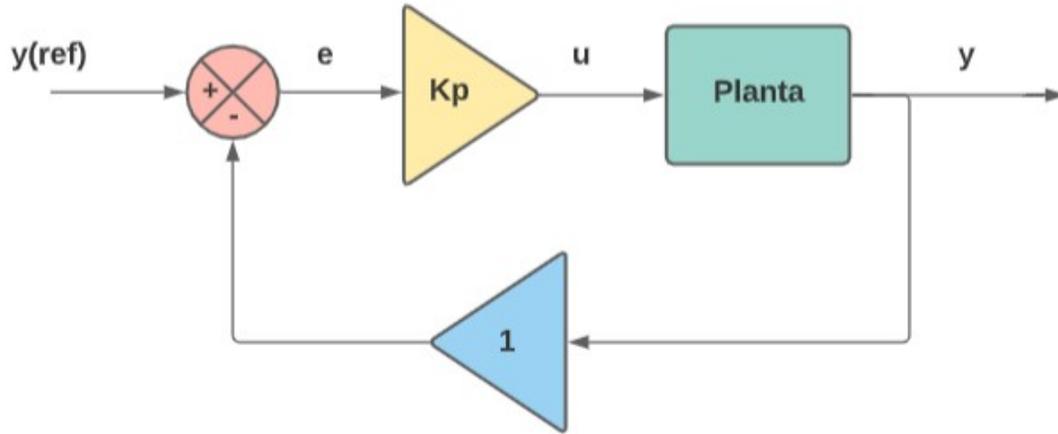


Figura 2.19: Diagrama de bloques del control proporcional.

De la Figura 2.19 y de la ecuación (2.1) podemos generar el error como

$$e = \frac{y_r}{1 + K_p G(s)}$$

El error en estado permanente se puede obtener

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + K_p G(s)} \\ &= \frac{1}{1 + K_p G(0)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

En este caso para obtener $G(0)$ es necesario evaluar 2.31 con $s = 0$, lo que da origen a la ecuación (2.34),

$$\begin{aligned} G(0) &= (R_1 + R_2)/R_1 \\ &= 11 \end{aligned} \quad (2.34)$$

al sustituir (2.34) en (2.33) se obtiene el error en estado permanente del sistema con el controlador proporcional.

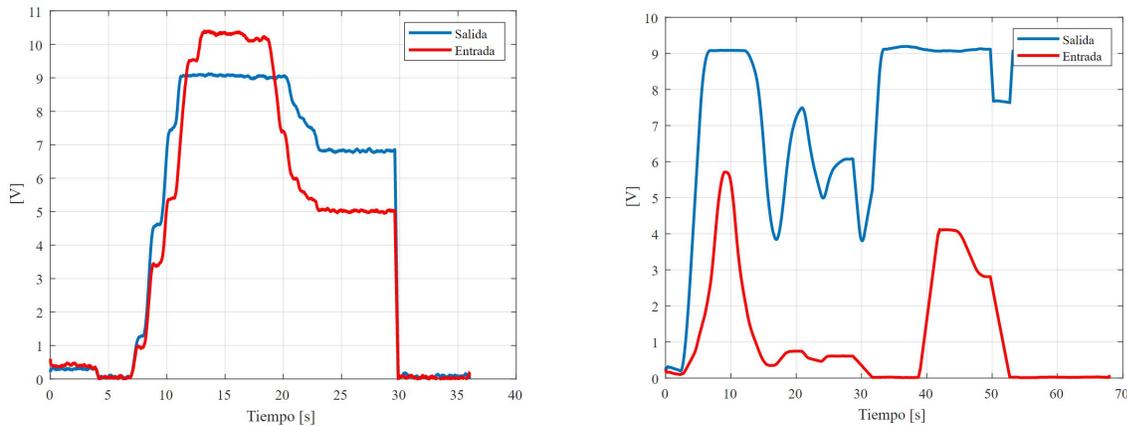
$$e_\infty = \frac{1}{1 + 11K_p} \quad (2.35)$$

De (A.9) se puede recordar que $K_P = R_4$, lo que nos permite cambiar la constante de proporcionalidad con el cambio de una simple resistencia al sistema. De (2.35) se puede concluir que a mayor valor de K_P menor será el error del controlador, en el caso extremo si $K_P \rightarrow \infty$ se puede hacer que el error sea igual a 0.

Implantación

En la implantación se ha decidido utilizar un potenciómetro lineal como la entrada, de esta forma podemos modificar el voltaje deseado del circuito.

Con una K_p relativamente pequeña podemos ver en la Figura 2.20 (a) que el error es constante, si dicha K_p , es demasiado baja puede llegar a ocasionar que el amplificador entre en su región de saturación en la Figura 2.20 (b).



(a) Usando una K_p moderada.

(b) Usando una K_p pequeña.

Figura 2.20: Salida y entrada de la planta

En las gráficas se puede observar la señal de entrada en color rojo y la señal de salida es de color azul. La entrada al sistema se ha variado para ver si se cumplía con el seguimiento y podemos ver que en sus estados constantes presenta un error considerable. Tal como se menciono previamente al usar una $K_p \gg 0$, el error debe tender a cero, en la Figura 2.21 se ha usado dicha K_p para el seguimiento de una señal de un potenciómetro.

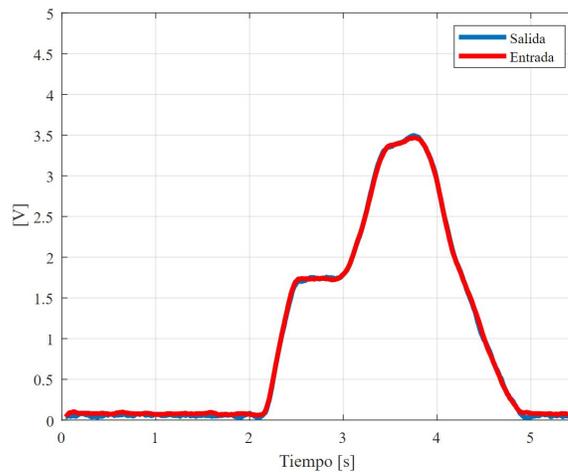


Figura 2.21: Seguimiento usando una K_p grande.

2.4. Práctica 2

2.4.1. Práctica 2: Controlador PID

Objetivos

- Identificar el control PID y sus beneficios para controlar una planta.
- Comprender las aportaciones de las constantes del PID

La siguiente tabla contiene varias combinaciones posibles para el material necesario.

Material

Material	
3 capacitores $C = 1[\mu F]$ $R_1 = 1[k\Omega]$ $R_2 = 1[M\Omega]$	3 capacitores $C = 0.1[\mu F]$ $R_1 = 1[M\Omega]$ $R_2 = 10[M\Omega]$
1 potenciómetro de $100[k\Omega]$	
2 amplificadores operacionales TL081 o 741	
Varias resistencias de entre $1[k\Omega]$ - $100[k\Omega]$	

Tabla 2.2: Material

Desarrollo

I Actividad 1

El sistema a controlar es el mostrado en la Figura 2.22, se utilizarán los siguientes valores para los componentes empleados $R_1 = 1[M\Omega]$, $R_2 = 10[M\Omega]$ y $C_1 = 0.1[\mu F]$, esto nos da la siguiente función de transferencia.

$$\frac{V_O}{V_i} = \frac{s + 11}{s + 1}$$

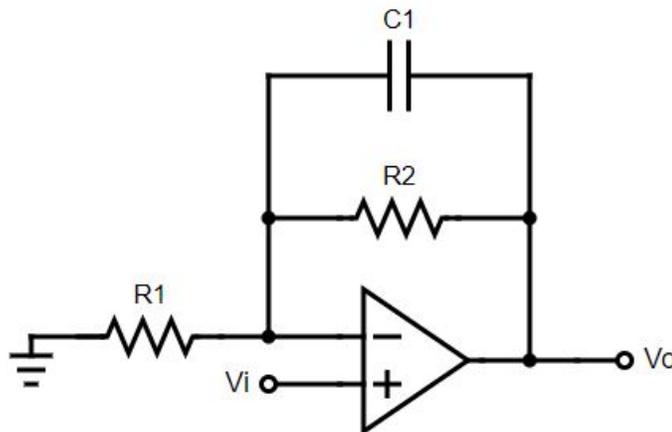


Figura 2.22: Planta a Controlar.

En esta práctica se usará un control PID con un solo amplificador operacional, para ello se analizará el siguiente circuito.

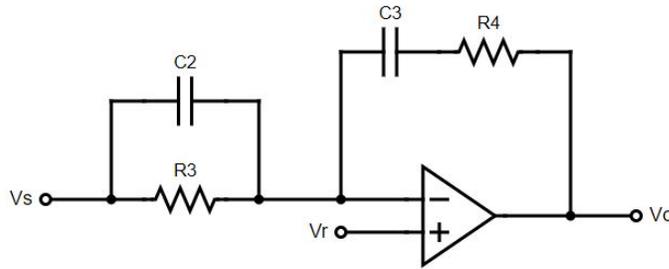


Figura 2.23: Controlador PID.

El modelo matemático de dicho sistema está dado por la siguiente ecuación,

$$V_o = (1 + PID)V_i - PIDV_1$$

donde

$$PID = K_d s + K_p + \frac{K_i}{s}$$

y las constantes K_p , K_d y K_i están dadas por las siguientes ecuaciones.

$$K_d = C_2 R_4$$

$$K_p = \frac{C_2}{C_3} + \frac{R_4}{R_3}$$

$$K_i = \frac{1}{R_3 C_3}$$

El alumno deberá conectar la salida de este controlador a la entrada no inversora de la planta y el voltaje deseado a la entrada no inversora del controlador, de forma tal que el circuito quede de la siguiente forma.

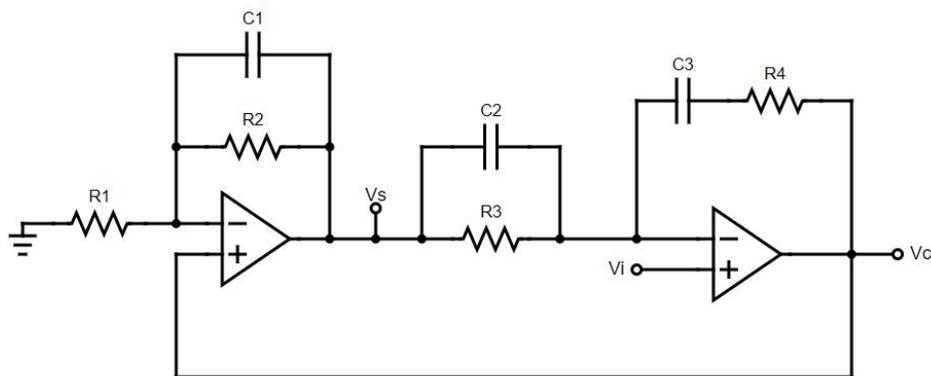


Figura 2.24: Sistema con Controlador PID.

Si usamos $C = C_2 = C_3$ las constantes del PID están dadas por las ecuaciones de la Tabla 2.3 para ello se han recomendado dos diferentes opciones para la elección el capacitor, lo que permite dejar las constantes en función de las resistencias.

$C = 0.1[\mu F]$	$C = 1[\mu F]$
$K_d = \frac{R_4}{10} * 10^{-6}$	$K_d = R_4 * 10^{-6}$
$K_p = 1 + \frac{R_4}{R_3}$	$K_p = 1 + \frac{R_4}{R_3}$
$K_i = \frac{10}{R_3} * 10^6$	$K_i = \frac{1}{R_3} * 10^6$

Tabla 2.3: Constantes del Controlador PID

Usando la tabla anterior pruebe las siguientes configuraciones y anote sus observaciones junto a la respuesta observada en el osciloscopio.

- K_d muy grande
- K_p muy grande
- k_i muy grande

Usando sus anotaciones conteste las siguientes preguntas.

Cuestionario

- ¿Qué aporta o que efecto tuvo la constante proporcional K_p ?
- ¿Qué aporta o que efecto tuvo la constante proporcional K_i ?
- ¿Qué aporta o que efecto tuvo la constante proporcional K_d ?

2.4.2. Explicación y solución de la práctica.

El circuito de la práctica es un controlador PID, para poder explicar su funcionamiento es necesario obtener su equivalente en diagrama de bloques que se observa en la Figura 2.25, dicho diagrama de bloques se ha generado a partir del modelo obtenido del circuito.

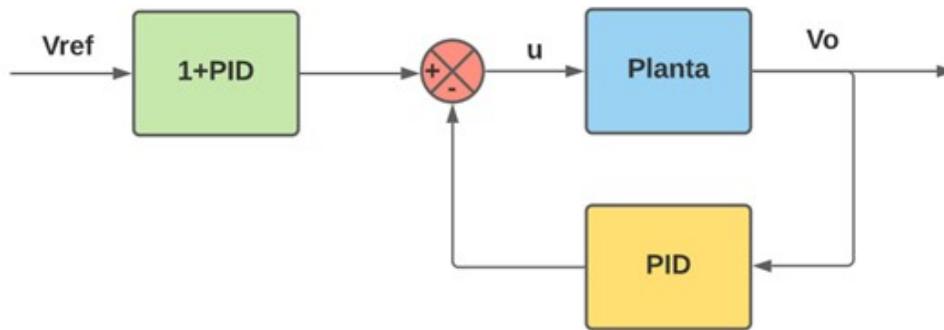


Figura 2.25: Diagrama de Bloques del Circuito.

Reduciendo los bloques y haciendo un cambio de variables para facilitar el cálculo, donde el cambio de variables es el siguiente,

$$H(s) = PID$$

$$G(s) = \frac{s + 11}{s + 1}$$

se obtiene el siguiente diagrama.

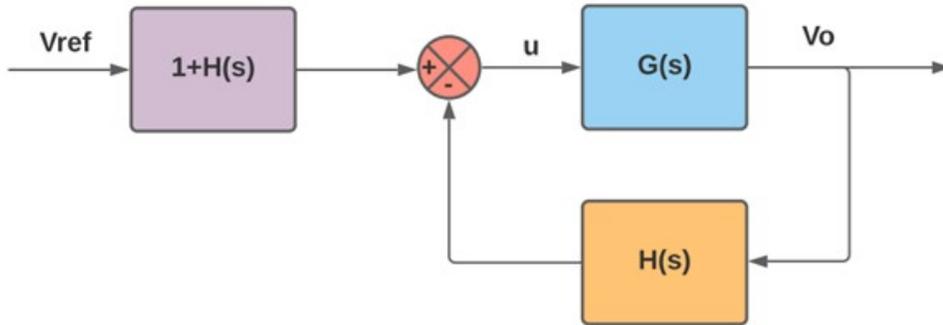


Figura 2.26: Diagrama con el Cambio de Variables.

El lazo de retroalimentación negativa se reduce mediante la reducción de bloques para la retroalimentación negativa y mediante la multiplicación de las ganancias se puede obtener la relación entrada-salida.

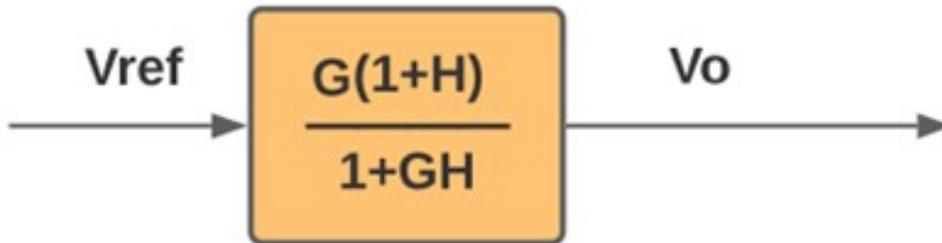


Figura 2.27: Diagrama de Bloques I/O del Controlador.

Mediante el desarrollo de las ecuaciones correspondiente podemos encontrar las siguientes ecuaciones

$$1 + H = \frac{K_d s^2 + (K_p + 1)s + K_i}{s}$$

$$G(1 + H) = \frac{K_d s^3 + (K_p + 1 + 11K_d)s^2 + (11 + 11K_p + K_i)s + 11K_i}{s(s + 1)}$$

$$1 + GH = \frac{K_d s^3 + (K_p + 1 + 11K_d)s^2 + (1 + 11K_p + K_i)s + 11K_i}{s(s + 1)}$$

Al reducir y desarrollando se obtiene la siguiente función de transferencia.

$$\frac{G(1+H)}{1+GH} = \frac{K_d s^3 + (K_p + 1 + 11K_d)s^2 + (11 + 11K_p + K_i)s + 11K_i}{K_d s^3 + (K_p + 1 + 11K_d)s^2 + (1 + 11K_p + K_i)s + 11K_i}$$

Al reemplazar la anterior función de transferencia en la figura 2.27 se obtiene la ecuación (2.36).

$$\frac{V_o}{V_{ref}} = \frac{K_d s^3 + (K_p + 1 + 11K_d)s^2 + (11 + 11K_p + K_i)s + 11K_i}{K_d s^3 + (K_p + 1 + 11K_d)s^2 + (1 + 11K_p + K_i)s + 11K_i} \quad (2.36)$$

Es necesario recurrir al valor final de dicha función de transferencia para poder concluir sobre el comportamiento de esta implementación PID

$$\begin{aligned} V_f &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(1+H)}{1+GH} V_{ref} \\ &= \frac{11K_i}{11K_i} V_{ref} \\ &= V_{ref} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior es posible garantizar que el sistema cumplirá con el comportamiento deseado.

Implantación

En este trabajo se han utilizado diferentes configuraciones para la implantación de la práctica y se ha probado solo con una señal que se prendía y apagaba.

- Primera Selección

$$\begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 * 10^{-3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100[k\Omega] \\ 1[k\Omega] \end{bmatrix}$$

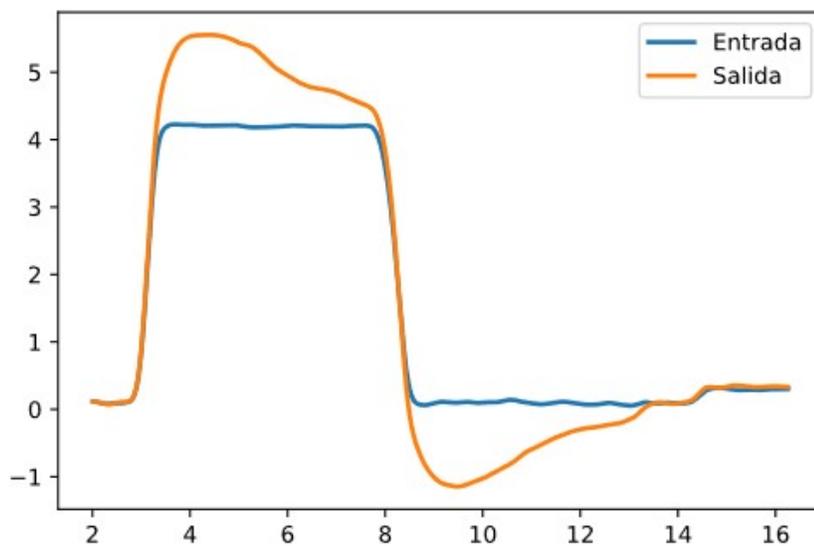


Figura 2.28: Respuesta obtenida

- Segunda Selección

$$\begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 * 10^{-3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1[M\Omega] \\ 1[k\Omega] \end{bmatrix}$$

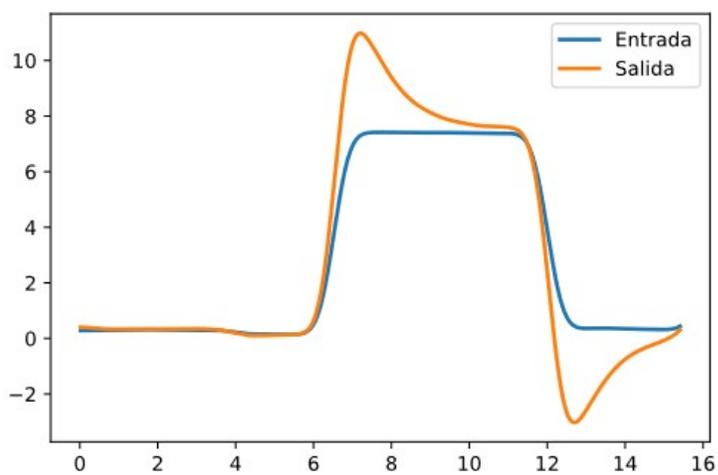


Figura 2.29: Respuesta obtenida

- Tercera Selección

$$\begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1[M\Omega] \\ 1[M\Omega] \end{bmatrix}$$

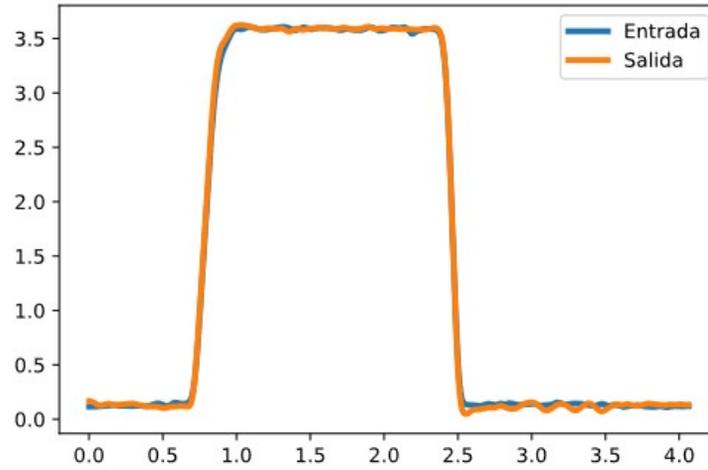


Figura 2.30: Respuesta obtenida

Capítulo 3

Espacio de Estados

3.1. Representación en Espacio de Estados

El autor Nise (2011) define los conceptos indispensables para el análisis de los sistemas en su representación en espacio de estado.

Variable del Sistema. Se refiere a cualquier variable que responda a una entrada o a sus condiciones iniciales del sistema.

Variables de estado. Es el conjunto más pequeño de variables linealmente independientes tal que los valores de los miembros a un dado tiempo t_0 y en conjunto con la función forzada puedan determinar completamente el valor de todas las variables del sistema para todo $t > t_0$.

Vector de estado. Es un vector que contiene todas las variables de estado.

Espacio de estados. Es un espacio n-dimensional cuyos ejes son las variables de estados. Una trayectoria puede ser representada como un mapeo de la evolución de estas variables.

Ecuación de salida. Es la ecuación algebraica que expresa la salida expresada como una combinación lineal de las variables de estado.(p. 123)

3.2. Relación Espacio de Estados y Función de Transferencia

3.2.1. Función de transferencia a Espacio de Estados

La relación entre la función de transferencia y la representación del espacio de estados requiere de una forma de poder pasar de una representación a la otra, de forma tal que es necesario establecer como transformar la función de transferencia a una representación en espacio de estados.

Es necesario mencionar que aunque existen diferentes formas de representar y obtener una representación en el espacio de estados, en este caso se ha decidido utilizar la metodología propuesta por Nise (2011) al ser un punto de referencia para los alumnos y porque

trabaja únicamente con la ecuación diferencial para obtener la representación del espacio de estados.

Su metodología parte del uso de la ecuación diferencial en lugar de la función de transferencia, a continuación mostramos los fragmentos más relevantes de su método.

Considérese la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \quad (3.1)$$

Una selección conveniente para seleccionar las variables de estado es escoger la salida $y(t)$ y las $(n-1)$ derivadas como las variables de estado. Escogiendo las variables de estado x_i se obtiene

$$x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \quad (3.2)$$

y al diferenciar ambos extremos. (p. 133)

$$\dot{x} = \frac{d^n y}{dt^n} \quad (3.3)$$

Al sustituir las variables de estado y haciendo uso de la ecuación diferencial original en la ecuación anterior se obtiene un sistema de n ecuaciones de la forma,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.4a)$$

$$y = Cx' + Du \quad (3.4b)$$

donde y es la salida del sistema, la matrices A y B dependen del sistema formulado al transformar la función de transferencia y las matrices C y D se debe obtener según la salida que se desee analizar.

En este documento se usaran los siguientes casos de (3.4).

- Para $n = 2$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (3.5a)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (3.5b)$$

- Para $n = 3$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (3.6a)$$

$$\dot{x} = [1 \ 0 \ 0] x + [0] u \quad (3.6b)$$

3.2.2. Espacio de Estados a Función de Transferencia

El método para obtener la representación de la función de transferencia en función del espacio de estados requiere retomar las ecuaciones (3.4), a las cuales se les debe obtener su equivalente en el espacio de frecuencia mediante la transformada de Laplace. Lo anterior permite obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$sX(S) = AX(s) + BU(s) \quad (3.7a)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (3.7b)$$

despejando $X(s)$ de la ecuación 3.7a se puede obtener la siguiente ecuación.

$$X(S) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (3.8)$$

Finalmente se sustituye (3.8) en (3.7b) para obtener la transformación de la representación en el espacio de estados a una función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.9)$$

3.3. Estabilidad

Hay que recordar que para encontrar los eigenvalores de una matriz es necesario resolver la ecuación

$$Ax = \lambda x \quad (3.10)$$

$$\lambda x - Ax = (\lambda I - A)x = 0 \quad (3.11)$$

Como se observa en la ecuación anterior si la matriz $(\lambda I - A)$ es invertible la única solución posible será la trivial, el vector nulo, lo que nos indica que si queremos encontrar

las soluciones no triviales es necesario hacer que $(\lambda I - A)$ sea singular esto se puede lograr al forzar al que el determinante sea nulo, es decir

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (3.12)$$

Mediante la ecuación anterior es posible encontrar los polos del sistema y poder determinar si el sistema es estable o inestable.

3.4. Puntos de equilibrio

Cuando se analizan los sistemas se suelen emplear los puntos de equilibrio, esto se debe a que los puntos de equilibrio nos pueden dar bastantes detalles sobre sus sistemas y su comportamiento, Un estado x^* es un estado de equilibrio (o un punto de equilibrio) del sistema si una vez que $x(t)$ es igual x^* , permanece siendo igual a x^* para todo tiempo futuro. De forma matemática esto significa que no existe variación del sistema una vez se ha llegado a dicho punto los puntos de equilibrio se pueden encontrar al solucionar la siguiente ecuación.

$$f(x^*) = 0 \quad (3.13)$$

3.5. Plano de Fase

El retrato de fase es la evolución de las trayectorias del espacio de estados, formado por las diferentes trayectorias correspondientes a las distintas condiciones iniciales. De los sistemas lineales se puede obtener los patrones que usualmente se presentan en los sistemas dinámicos. Los planos de fase de los sistemas autónomos dependen de forma estrecha de los valores propios de la ecuación característica o en el espacio de estados de los eigenvalores de la matriz de la planta. Estos casos se dividen de la siguiente forma

- $\lambda_1 y \lambda_2$ son ambos reales y tienen el mismo signo
- $\lambda_1 y \lambda_2$ son ambos reales y de signo opuesto
- $\lambda_1 y \lambda_2$ son complejos conjugados con partes real no nula
- $\lambda_1 y \lambda_2$ son complejos conjugados con parte real nula.

3.5.1. Nodo Estable o Inestable

El primer caso corresponde al nodo, si ambos valores propios son negativos, entonces se le llama nodo estable, pero si son positivos, entonces el punto singular se llama inestable.

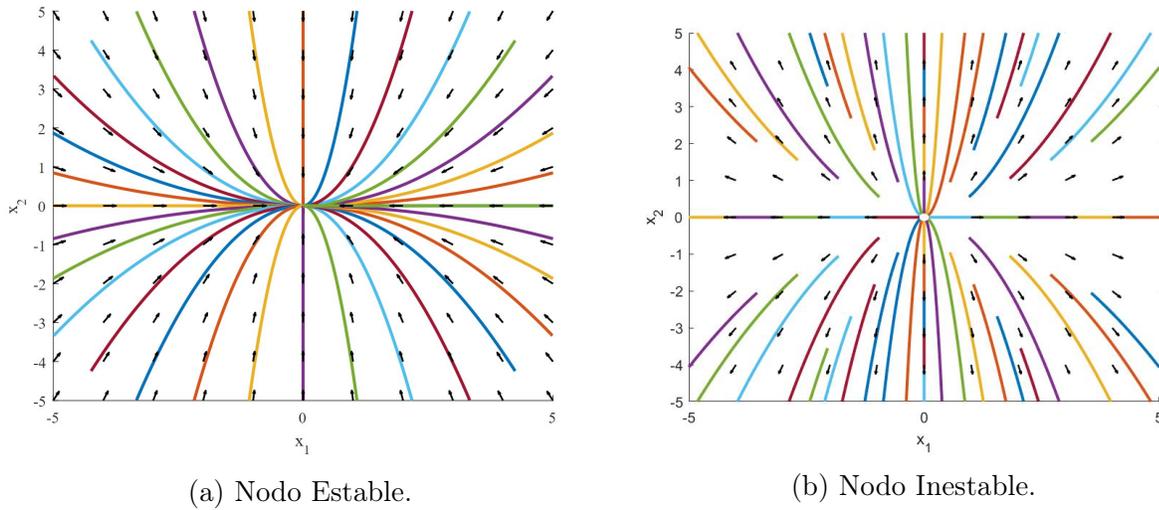


Figura 3.1: Plano de fase Nudo.

3.5.2. Foco Estable o Inestable

Este comportamiento corresponde al tercer caso, de igual forma que en los nodos, se dice que un foco es estable si su parte real es negativa, si su parte real es positiva entonces se llama focos inestables.

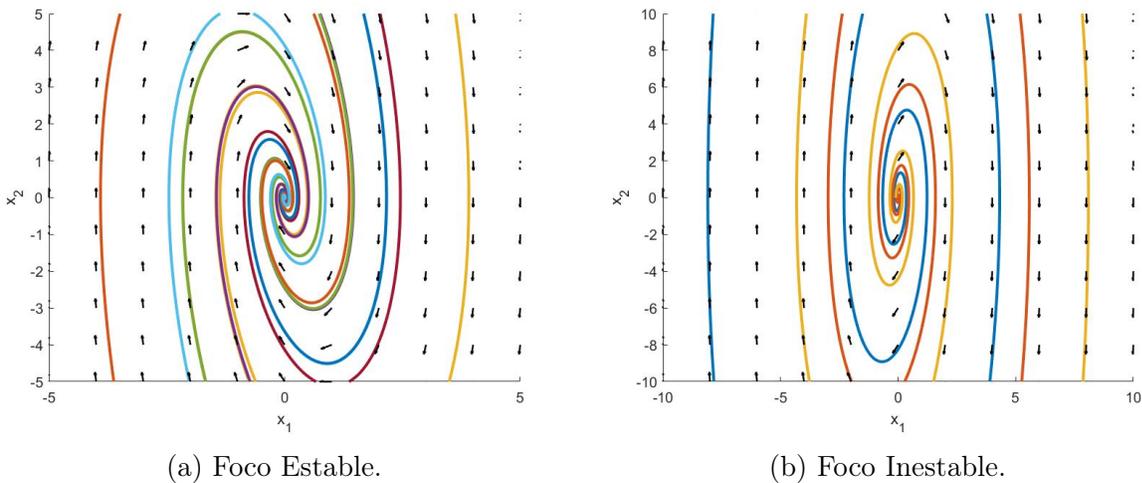


Figura 3.2: Plano de fase Foco.

3.5.3. Punto Silla

Un punto silla corresponde al segundo caso, donde los valores propios son de distinto signo.

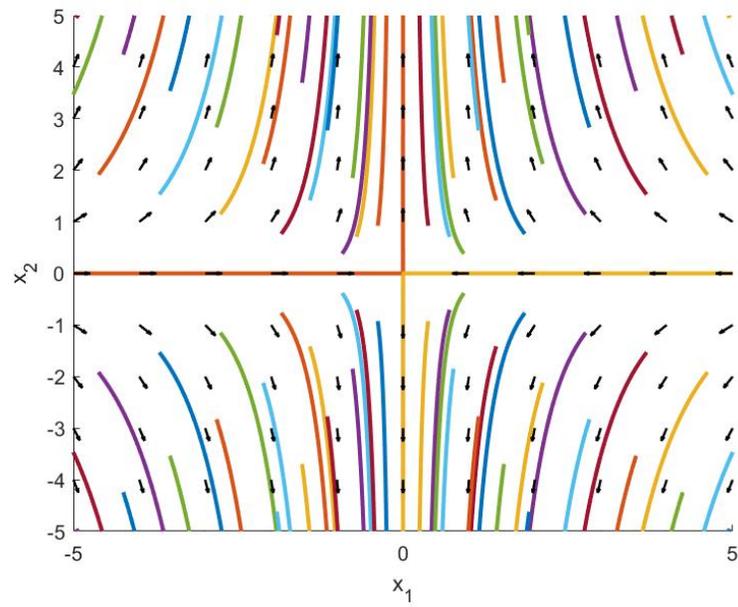


Figura 3.3: Punto Silla.

3.5.4. Centro

Este caso corresponde al cuarto caso de los valores propios, cuando ambos son complejos conjugados con parte real nula.

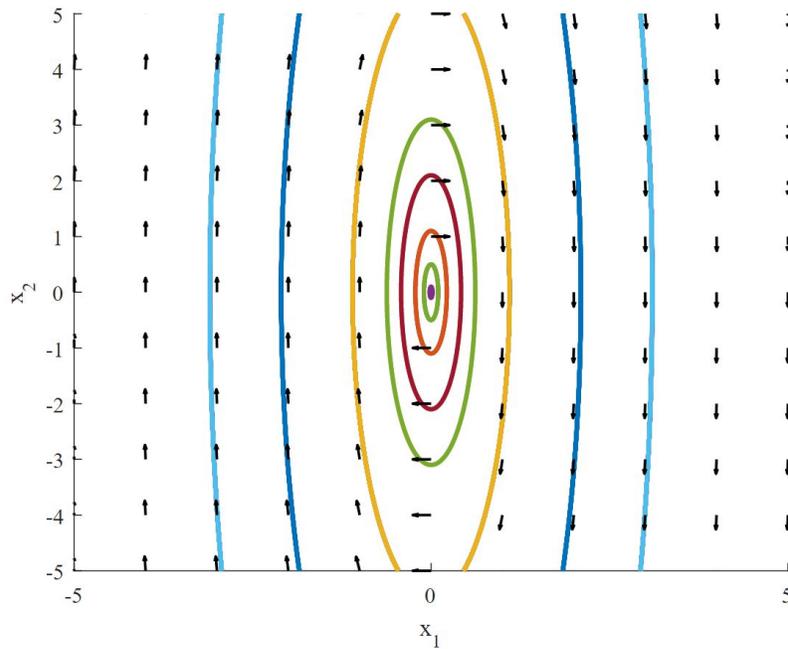


Figura 3.4: Punto Centro.

3.6. Práctica 3

3.6.1. Práctica 3: Plano de Fase.

Objetivos

- Comprender el concepto de plano de fase.
- Conocer los diferentes comportamientos de los sistemas lineales.
- Conocer y entender la definición de una trayectoria del sistema.

Material y Equipo

- 2 capacitores de 1[uF]
- 1 amplificador operacional TL081 o 741
- 1 resistor de 1[M], 1 resistor de 100[k]
- 2 potenciómetros o trimpots de 100[k]
- 2 cables BNC-caimán
- 1 botón de contacto momentáneo (push-button).
- Osciloscopio

Desarrollo

I Actividad 1

- 1- Se debe alambrear el circuito mostrado en la figura 3.5, dicho circuito es un filtro, pero en nuestro caso nos interesa obtener las señales V_y y V_x para poder observar su respuesta.

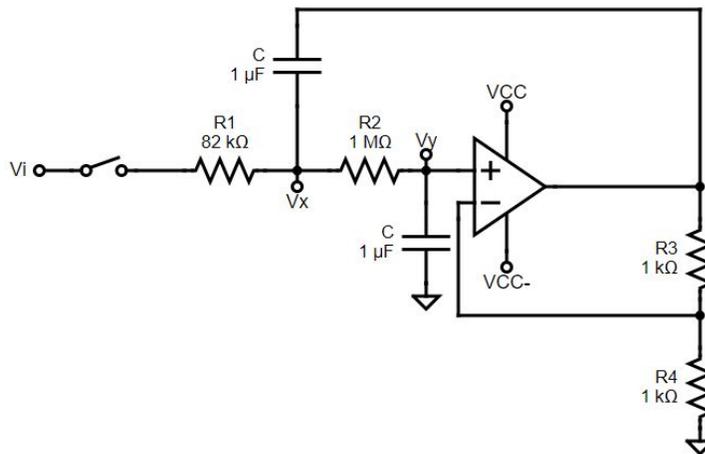


Figura 3.5: Circuito Nodo Estable

- 2- La alimentación y la entrada se deben conectar como se observa en la figura 3.6, la fuente debe ser simétrica y para poder obtener la entrada del sistema es necesario conectar un potenciómetro con uno de sus pines exteriores conectada a la alimentación, el pin exterior restante se debe conectar a la referencia y su pin de en medio servirá como la entrada al sistema.

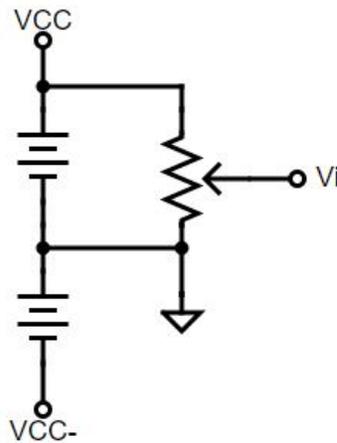


Figura 3.6: Fuente de Entrada y de Alimentación.

- 3- Para lograr obtener la resistencia de $82[k\Omega]$ se le pide al alumno que ajuste un potenciómetro como en la figura 3.7 para que la resistencia sea igual a la deseada.

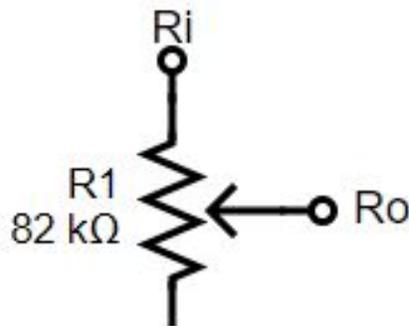


Figura 3.7: Potenciómetro para la Resistencia.

- 4- El alumno deberá poner el osciloscopio en su modo para graficar XY.
- 5- El alumno mantendrá el push-button dejando que el sistema se sature .
- 6- El alumno empezará capturar los datos a partir de soltar el push-button.

II Actividad 2

- 1- Se deberá modificar el circuito de la actividad I para obtener el circuito de la figura 3.8, la modificación realizada modifica los polos del sistema de forma que se pueda generar un sistema cuyo plano de fase sea un foco estable.

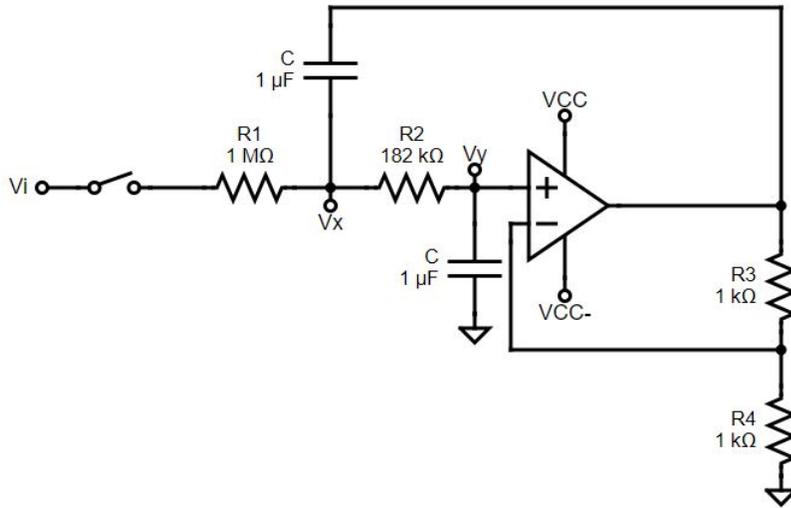


Figura 3.8: Circuito Foco Estable

- 2- Se sugiere que para obtener la resistencia $R_2 = 182[k\Omega]$, se conecte el potenciómetro ajustado a $82[k\Omega]$ de la actividad I en serie con una resistencia de $100[k\Omega]$, tal como se observa en la figura 3.9.

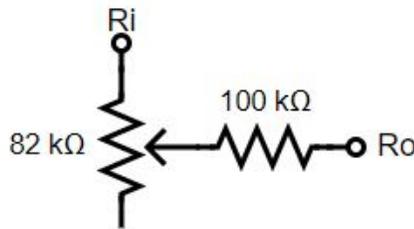


Figura 3.9: Potenciómetro para la Resistencia.

- 3- La alimentación y entrada debe ser la misma que se utilizó en la figura 3.6.
- 4- El alumno deberá poner el osciloscopio en su modo para graficar XY.
- 5- El alumno mantendrá el push-button dejando que el sistema se sature.
- 6- El alumno empezará capturar los datos a partir de soltar el push-button

3.6.2. Solución de la Práctica

Para poder garantizar el correcto funcionamiento de la práctica ha sido necesario realizar su implantación en varias etapas, a continuación, se expondrán las fases desarrolladas para la actividad 2, posteriormente se mencionará el proceso correspondiente a la actividad 1.

Actividad 2 Foco

En una primera fase se ha realizado una simulación del circuito, de donde se han obtenido los datos necesarios para generar su plano de fase tal como se muestra en la figura 3.10.

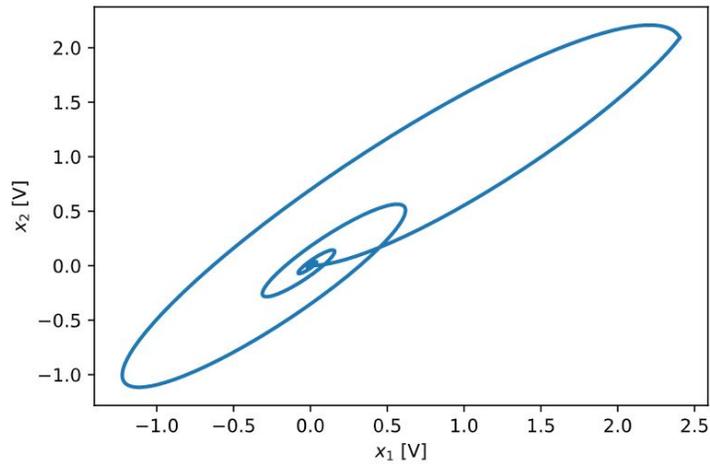


Figura 3.10: Plano de Fase obtenido mediante Simulación.

Dicha trayectoria se puede dividir en dos trayectorias, donde la primera trayectoria se genera a partir del suministro de una alimentación externa para poder obtener las condiciones iniciales. La segunda trayectoria se genera a partir de dichas condiciones iniciales del sistema, siendo la respuesta libre.

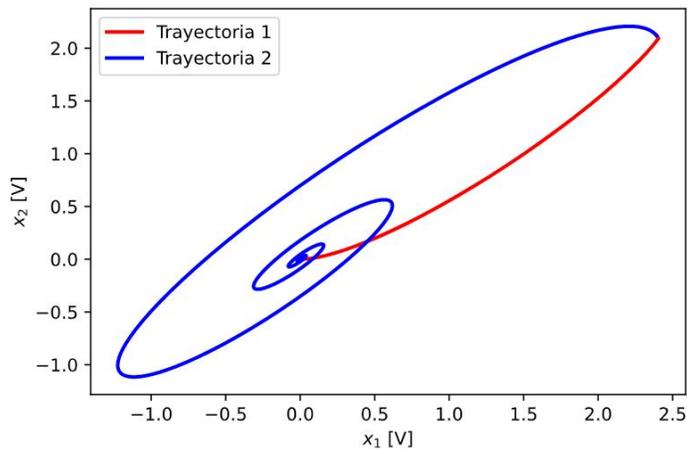
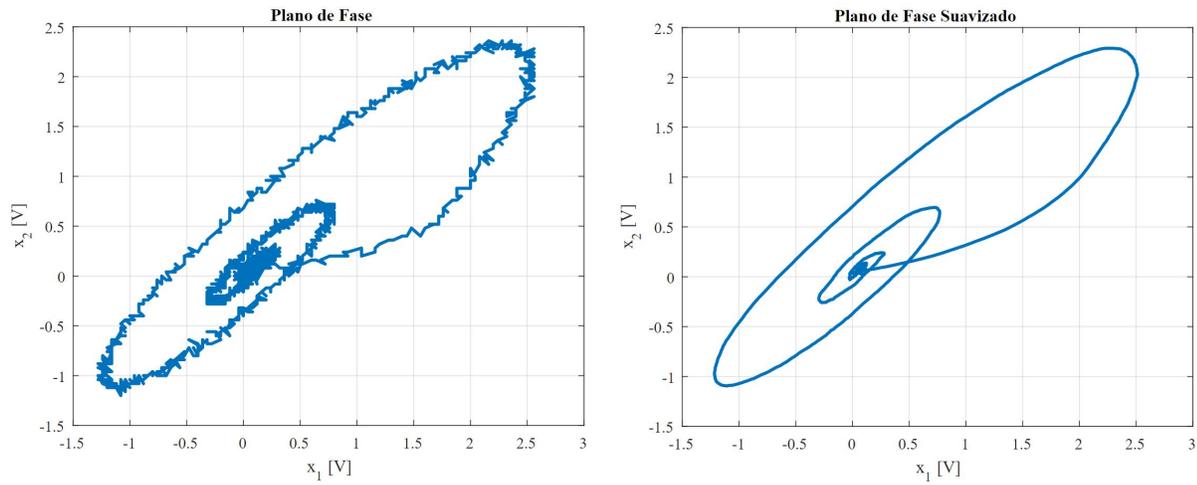


Figura 3.11: Trayectorias presentes en el Foco.

La segunda etapa ha sido la implantación del sistema haciendo el armado del circuito en una protoboard, de la cual se han obtenido los datos mediante el uso de un osciloscopio y estos datos se han procesado usando Python, en la figura 3.12 se muestran las gráficas

generadas, en la gráfica 3.12a se muestran los datos y en la gráfica 3.12b se muestran los datos filtrados mediante un filtro Gaussiano.



(a) Foco antes del filtrado.

(b) Foco Filtrado.

Figura 3.12: Planos de Fase Obtenidos.

Tal y como se puede observar la ruta obtenida mediante la simulación es bastante parecida a la obtenida mediante la implantación y el uso del osciloscopio, lo que garantiza que la práctica funciona de la forma esperada.

Actividad 1 Nodo

Para la primera actividad de la práctica se se ha realizado el mismo procedimiento con la actividad 2, donde los resultados obtenidos mediante la simulación se observan en la figura 3.13.

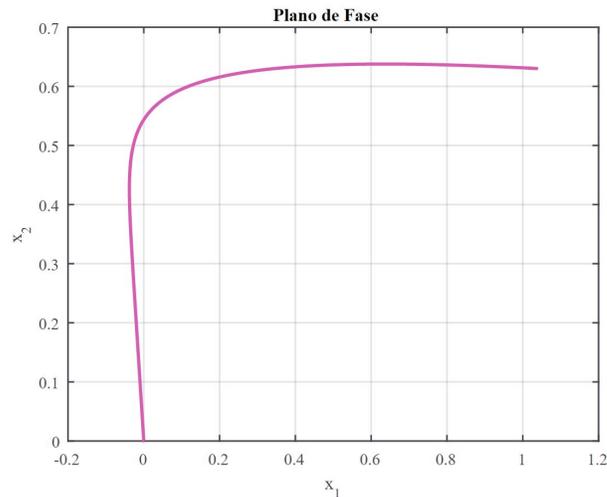


Figura 3.13: Plano de Fase obtenido mediante Simulación.

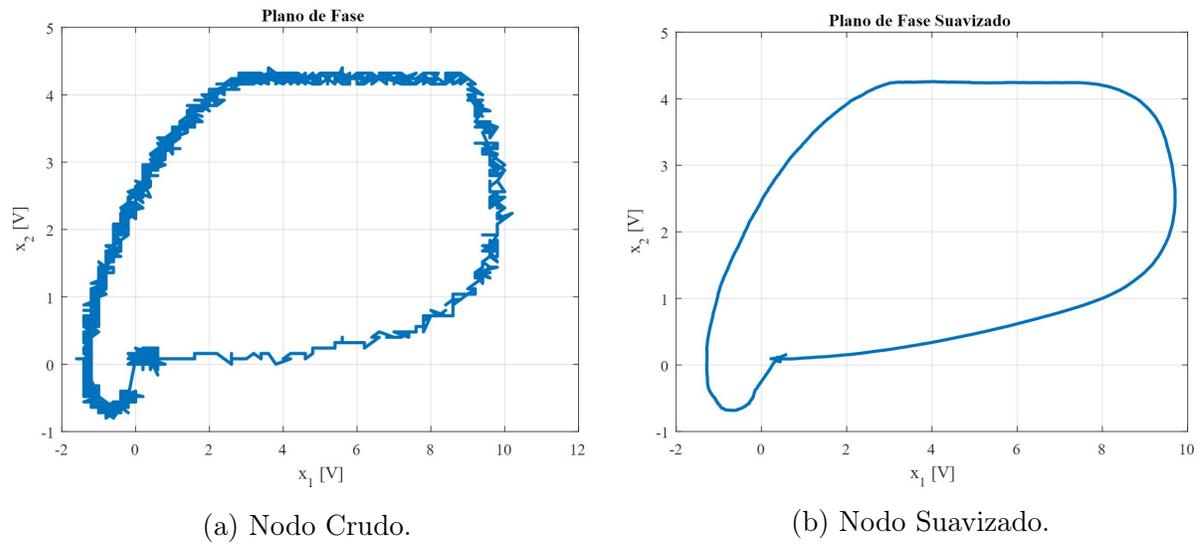


Figura 3.14: Planos de Fase Obtenidos.

Al realizar la implantación se han obtenido las figuras 3.14a y 3.14b, donde la primera son los datos antes de pasar la señal por el filtro y la segunda una vez se ha pasado por el filtro.

Capítulo 4

Computadora analógica

Los amplificadores operacionales fueron inicialmente desarrollados para computadoras electrónicas analógicas, estas computadoras pueden ser programadas para resolver modelos matemáticos de sistemas físicos como mecánicos, eléctricos, etc., debido a la expresión usualmente de los modelos en términos de ecuaciones diferenciales (Alexander & Sadiku, 2013).

En el presente capítulo se emplea el amplificador operacional por su versatilidad en aplicaciones lineales y la relativa sencillez de determinar la relación de su entrada-salida, por lo anterior, se utiliza principalmente para crear un circuito capaz de resolver una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo de segundo orden o también se puede decir, para emular el comportamiento de un sistema descrito por dicha ecuación diferencial.

4.1. Símbolos de la computadora analógica

La computadora analógica es la aplicación más clásica para los amplificadores operacionales, la cual permite la resolución de ecuaciones diferenciales, empleando las configuraciones elementales del amplificador operacional como son el inversor, integrador, sumador y un elemento que se conoce como multiplicador.

En la literatura ha existido diversas maneras de representar los bloques que componen a la computadora analógica, estos bloques son una manera sencilla de representar a un amplificador inversor, sumador, etc., esto con la finalidad de facilitar la lectura de los diagramas. Los símbolos empleados en el presente documento se muestran en la Tabla 4.1, estos se redibujaron en base a los símbolos expuestos en Fitch et al. (2011) con sus ajustes necesarios para su mejor entendimiento.

Como no siempre es deseable emplear un multiplicador inversor en ocasiones se conecta un inversor a la salida del multiplicador inversor y así obtener la señal positiva, en la Tabla 4.2 se muestra el diagrama completo y su símbolo simplificado.

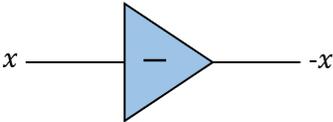
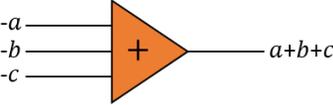
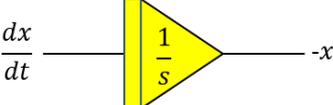
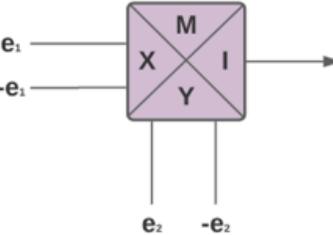
Elemento	Símbolo
Inversor	
Sumador	
Integrador	
Multiplicador inversor	

Tabla 4.1: Simbología de los bloques que constituyen una computadora analógica.

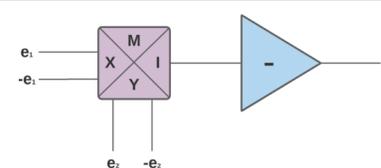
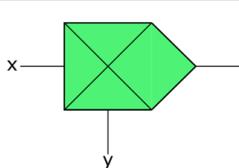
Diagrama completo	Símbolo simplificado
	

Tabla 4.2: Simbología del multiplicador de una computadora analógica.

4.2. Matlab Simulink y sus bloques básicos

Matlab Simulink es un software de diagramas de bloques para modelar y simular. Matlab Simulink proporciona un editor gráfico, con librerías personalizables y solucionadores para el modelado y la simulación de sistemas dinámicos. Es posible crear diagramas de bloques donde los bloques representan las partes del sistema, en otras palabras, simbolizan a los componentes físicos, ya sea un pequeño sistema o una función. Los modelos entrada-salida representan a cada bloque.

4.2.1. Bloques entrada-salida

Los bloques básicos manejados en Matlab Simulink son los ilustrados en la Tabla 4.3, como se puede observar estos bloques son bastante similares a los utilizados en la computadora analógica, lo que permite realizar diagramas de bloques para representar a los sistemas y realizar sus simulaciones. Se suele abreviar a estos bloques como I/O (por sus

siglas en inglés Input/Output).

En particular, estos bloques son conocidos como bloques entrada-salida, a causa de poseer dos terminales que se deben conectar para hacer uso correcto de los mismos, esto significa, la entrada sufrirá el cambio dentro del bloque para así generar la salida de este. En la Tabla 4.3 se encuentra un bloque no mencionado en los símbolos de la computadora analógica, siendo el bloque de función de transferencia, este bloque es como tal un sistema en sí mismo y es de gran utilidad, puesto que en ocasiones es mejor representar ciertos sistemas en su función de transferencia para evitar tener un diagrama extenso.

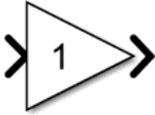
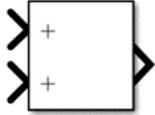
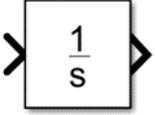
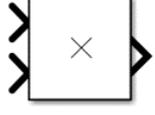
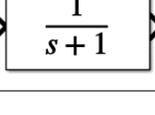
Elemento	Símbolo
Ganancia	
Sumador	
Integrador	
Derivador	
Multiplicador	
Función de Transferencia	

Tabla 4.3: Simbología de los bloques empleados en Matlab Simulink.

Cabe destacar que estos bloques son ideales, en consecuencia, se puede indicar una similitud a las configuraciones del amplificador operacional ideal. Los diagramas se pueden asemejar más a los sistemas reales mediante una amplia gama de bloques, por lo anterior Matlab Simulink nos permite mejorar y hacer crecer nuestros diagramas para cumplir con el objetivo deseado.

4.2.2. Bloques de fuente o sumidero

En la Tabla 4.4, podemos observar bloques auxiliares que permiten analizar el sistema, estos bloques como solo cuentan con una terminal se pueden considerar bloques fuente o

sumidero (también conocidos en inglés como source o sink respectivamente). Los bloques fuente permiten dar una entrada a los bloques I/O y el sumidero permite terminar una señal para su análisis o para generar una gráfica.

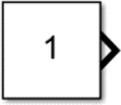
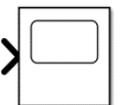
Elemento	Símbolo
Constante	
Escalón heaviside	
Scope	

Tabla 4.4: Simbología de las fuentes y el sumidero empleados en Matlab Simulink.

4.3. Modelado en diagrama de bloques

Para poder modelar un sistema en un diagrama de bloques es necesario partir de su ecuación diferencial, suponga una ecuación diferencial de orden n

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = g(t) \quad (4.1)$$

donde

$$y^n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Es necesario despejar el término de mayor orden de la ecuación diferencial (4.1), obteniendo la expresión

$$y^n = g(t) - a_{n-1}y^{n-1} - \dots - a_1y' - a_0y = g(t) - j(t) \quad (4.2)$$

donde

$$j(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i$$

Una vez obtenido el término de mayor orden, se puede comenzar a construir el diagrama de bloques mediante los siguientes pasos:

1. Colocar un bloque sumador con $n + 1$ entradas y nombrar su salida y^n .
2. Colocar tantos bloques integradores como sean necesarios hasta que y^n sea igual a y y renombre la salida de cada integrador con su respectiva derivada, como ejemplo la salida del primer integrador será y^{n-1} y la del último y .

3. Conectar la salida de cada bloque integrador a la entrada del siguiente, de forma tal que solo quede libre la entrada del primer integrador y la salida del último integrador.
4. Conectar la salida del sumador a la entrada del primer integrador.
5. Colocar bloques de ganancia de forma que representen los coeficientes: $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$.
6. Conectar la entrada de las ganancias a su respectivo término y^n , según la ecuación diferencial.
7. Conectar las salidas de las ganancias a las entradas del sumador con su respectivo signo.
8. Coloque el bloque que representa la entrada $g(t)$, con la ayuda de los bloques “Source” y conectar su salida al sumador.
9. Conectar el bloque Scope a la salida que desee medir, comúnmente es y .

Para clarificar el empleo de los pasos anteriores, se muestra un ejemplo a continuación.

Ejemplo 4-1

Se tiene la ecuación diferencial

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(t)$$

al despejar y''' se obtiene

$$y''' = g(t) - a_2y'' - a_1y' - a_0y \quad (4.3)$$

Con la ecuación diferencial (4.3) se puede empezar a realizar el diagrama de bloques del sistema como se observa en la Tabla 4.5, donde se colocan los pasos y el diagrama correspondiente a dicho paso.

Como se puede observar en el diagrama generado al final de la Tabla 4.5 no se han empleado elementos como el multiplicador o la función de transferencia, en el caso del multiplicador estudiado en la sección 8 se verá que esta forma de modelar el sistema en función de su diagrama de bloques no solo es aplicable a sistemas lineales, siendo una herramienta que nos permitirá modelar sistemas no lineales en Matlab Simulink.

Estos diagramas de bloques se pueden generar de forma equivalente con los bloques de la computadora analógica. Además, se puede aseverar que las bases de la computadora analógica es lo que ha dado origen al diseño mediante bloques que no solo es una forma de programación específica de Matlab Simulink, sino que es ampliamente utilizada por su simplicidad.

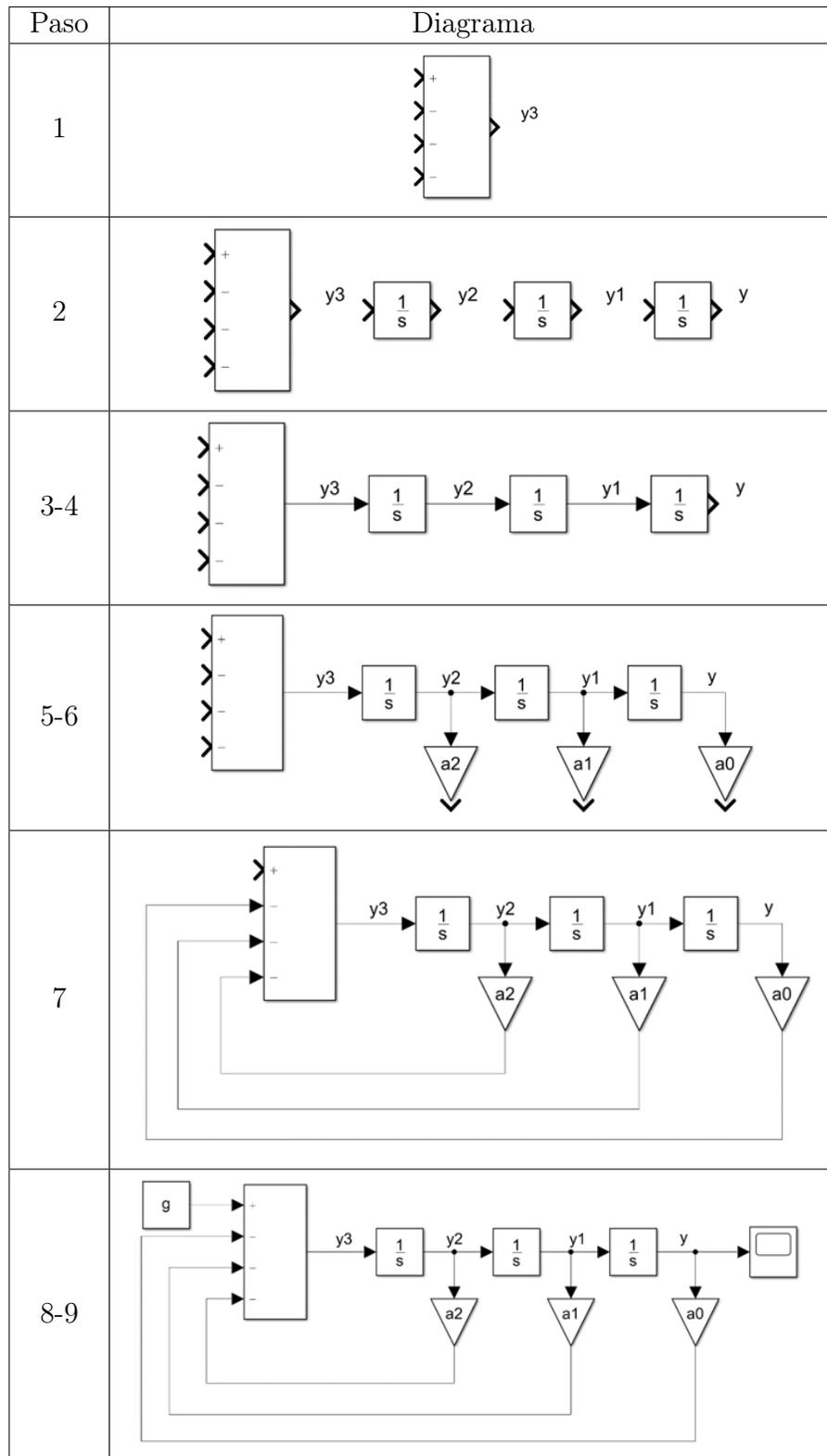


Tabla 4.5: Pasos para modelar un sistema empleando Matlab Simulink.

4.4. Circuito emulador de plantas

Una vez se ha obtenido el diagrama de bloques podemos ser capaces de implementarlo de forma práctica, para ello es necesario pasar del diagrama de bloques de Matlab Simulink al diagrama que se puede generar mediante la computadora analógica. Este paso intermedio se recomienda para dar una transición correcta de un modelo más simplificado a una implementación con los amplificadores.

Retomando el ejemplo pasado, tenemos descrito el sistema en su diagrama de bloques, pero como se mencionó previamente, dicho diagrama puede ser considerado ideal y además los bloques de Matlab Simulink siempre tienen salida positiva, a diferencia de un amplificador de configuración simple donde siempre la salida es negativa.

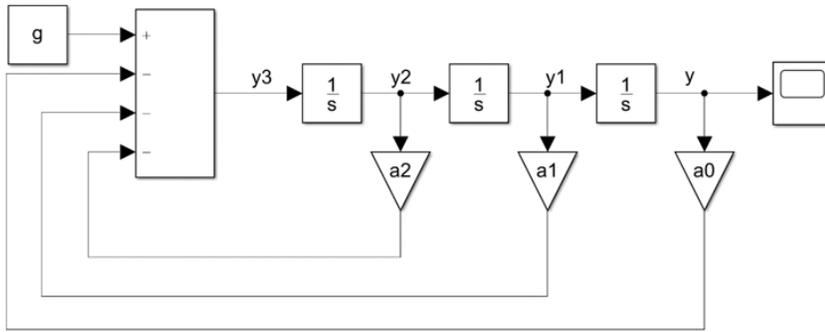


Figura 4.1: Diagrama de bloques final del ejemplo 4-1 en Matlab Simulink.

Tratando de aplicar los pasos ilustrados en la Tabla 4.5, pero en este caso usando el diagrama de la computadora analógica donde cada salida de un bloque es de signo invertido al de la entrada, en consecuencia, se provoca que a la salida del sumador se tenga $-y'''$. Por lo tanto, en la salida del primer integrador se tendrá y'' , en la salida del segundo $-y'$ y en la salida del último integrador y , en este caso se debe de agregar bloques inversores como extras para obtener el resultado correcto.

Para obtener la respuesta deseada solo se debe asegurar los signos de los términos del lado derecho de (4.3) que ingresan al sumador con auxilio del inversor en caso de ser necesario y tomar en cuenta la inversión de signo del término de la izquierda de (4.3) en consecuencia de la inversión del signo del sumador. Con lo anterior, las entradas de las derivadas deben ser con signo negativo, por lo cual y'' y y deben tener un inversor en su salida para así poder ser utilizadas por el sumador.

Una peculiaridad del diagrama de la computadora analógica es que las ganancias del integrador o cualquier otro bloque se puede indicar con una acotación en el conector de entrada del bloque, al realizar lo comentado anteriormente se puede llegar al diagrama de la Figura 4.2.

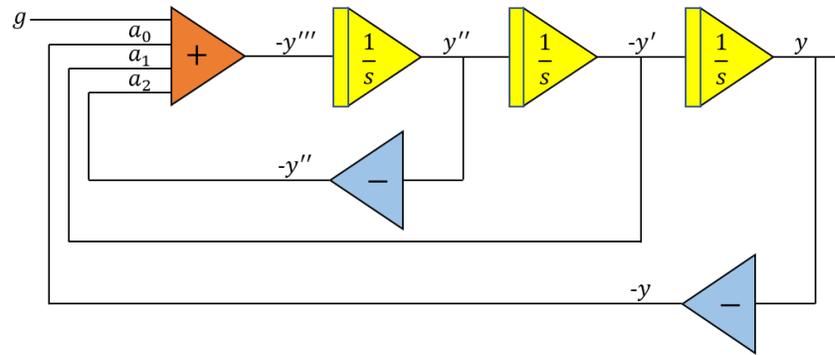


Figura 4.2: Diagrama con bloques de la computadora analógica.

Como se puede observar estos diagramas tienen más elementos que el diagrama de bloques de Matlab Simulink, pero el beneficio principal de plantear este diagrama de la computadora analógica es la posibilidad de plantear el número de amplificadores operacionales necesarios para la implementación del circuito, es decir, este diagrama es una simplificación menor del circuito a diseñar.

4.5. Práctica 4

4.5.1. Práctica 4: Circuito emulador de dinámicas de sistemas físicos

Objetivos

- Identificar y emplear bloques analógicos que constituyen una computadora analógica.
- Construir un circuito que emule la dinámica de un sistema físico lineal e invariante en el tiempo de segundo orden.
- Medir y comparar los parámetros de diseño experimentales con los teóricos.

Material y equipo a utilizar

- Fuente de alimentación.
- Osciloscopio.
- 2 cables BNC.
- 6 amplificadores operacionales TL081.
- 7 resistencias de $10 [k\Omega]$.
- 1 resistencia de $15 [k\Omega]$.
- 1 resistencia de $68 [k\Omega]$.
- 2 resistencias de $10 [M\Omega]$ (todas las resistencias de preferencia de precisión).
- 2 capacitores de $0.1 [\mu F]$ no polarizados (de preferencia de poliéster).
- 1 trimpot de $100 [k\Omega]$.
- 1 dip switch 3 posiciones.

Si se decide ocupar el circuito de la Figura 4.3 para emular una fuente de 1 [V]:

- 1 amplificador operacional TL081.
- 1 trimpot de 100 [kΩ].

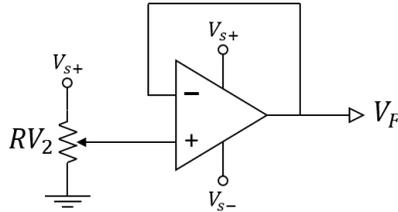


Figura 4.3: Fuente de 1 [V].

Desarrollo

Actividad 1

Construir el circuito a partir del diagrama ilustrado en la Figura 4.9, el cual resuelve la ecuación diferencial o emula una planta cuya dinámica se describe con la ecuación (4.4).

$$\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) + 0.147c(t) = 0.667u(t) \quad (4.4)$$

Para una fácil y ágil construcción del circuito, se indicará la constitución de cada bloque, para que al final solo se interconecten. Además, con la finalidad de presentar los símbolos de la computadora analógica, en cada bloque se ilustrará el símbolo y su circuito equivalente.

Primer integrador: integra la señal $-\ddot{c}(t)$, este bloque posee un inversor, esto se debe al cambio de signo que debe de presentarse en la salida del bloque, debido al signo requerido por el sumador.

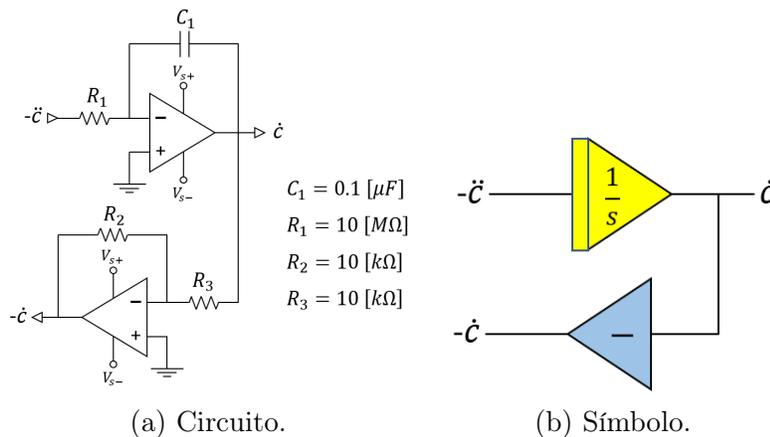


Figura 4.4: Primer integrador.

Segundo integrador: integra la señal $\dot{c}(t)$, en este bloque no se presenta un inversor, debido a que la salida del bloque presenta el signo requerido.

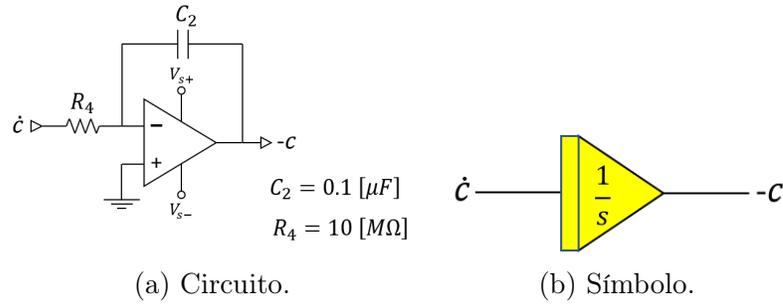


Figura 4.5: Segundo integrador.

Sumador: realiza la operación de adición de la señal de entrada y de las señales de los integradores.

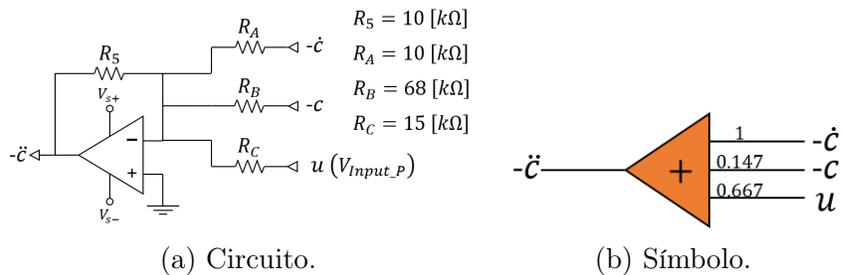


Figura 4.6: Sumador de señales.

Eliminación del offset y salida de la planta: elimina el offset total que se va acumulando por cada amplificador operacional con la ayuda de un sumador.

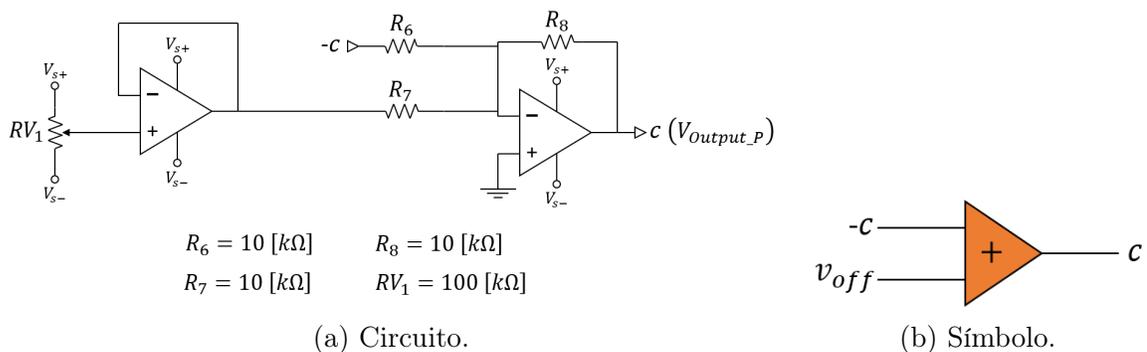


Figura 4.7: Nulificación del offset y salida de la planta.

Para la activación y la desactivación de la entrada se sugiere emplear un dip switch como el ilustrado en la Figura 4.8, el cual debe de estar conectado entre la entrada de la planta y la fuente de 1 [V], este componente tiene la finalidad de emular una entrada escalón.

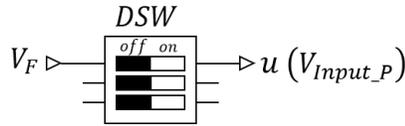


Figura 4.8: Interruptor DIP.

La interconexión de los bloques para obtener el circuito completo se puede apreciar en la Figura 4.9.

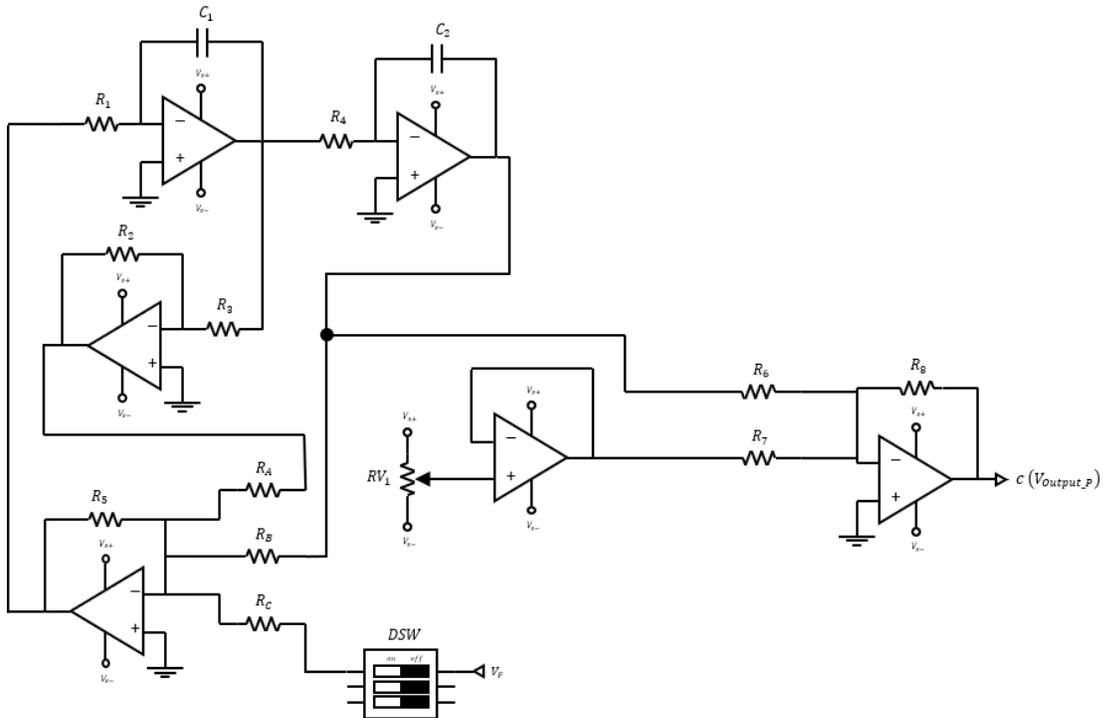


Figura 4.9: Circuito completo.

La planta cuenta con los parámetros indicados en la Tabla 4.6.

Parámetros	Valor teórico
t_s	23.2 [s]
t_p	0 [s]
$\%sp$	0 %
$c(\infty)$	4.537 [V]

Tabla 4.6: Parámetros de la planta de segundo orden.

Actividad 2

1. Poner al dip switch en modo “off” e ingresar un voltaje de 1 [V] en una de las terminales del dip switch (V_F), en el caso de no poder obtener este voltaje de una

fuentes externa extra, se puede emplear el circuito de la Figura 4.3, en el cual se debe de variar el trimpot hasta obtener el voltaje requerido.

2. Conectar la entrada y salida de la planta a los canales 1 y 2 del osciloscopio respectivamente con la ayuda de los cables BNC, la entrada de la planta se considera entre el dip switch y la resistencia R_C .
3. Alimentar al sistema con un voltaje de $\pm 11 [V]$ y con el dip switch en modo “off”, se debe de esperar alrededor de $26 [s]$ para la estabilización del sistema, posteriormente se debe de verificar el valor de la salida de la planta, si no es cero, modificar el valor del trimpot de la etapa de eliminación del offset hasta tener una salida igual a cero.
4. Activar la entrada de $1 [V]$, es decir, cambiar a modo “on” al dip switch y esperar la estabilización de la respuesta del sistema, esperando aproximadamente $26 [s]$.
5. Si se desea medir de nuevo la respuesta al escalón, cambiar a “off” al dip switch y esperar $26 [s]$ para que el sistema llegue a su punto de equilibrio y repetir el paso 4.
6. Tomar una imagen de las gráficas de las señales. En los osciloscopios existe la posibilidad de guardar en una memoria USB la información de las señales leídas, se puede obtener dicha información para después procesarlos en el programa que desee emplear el alumno para obtener mejores gráficas.
7. Obtener los parámetros reales del sistema, anotarlos, compararlos con los indicados en la práctica, calcular el error de exactitud y llenar la Tabla 4.7. Los parámetros se pueden obtener mediante la gráfica proporcionada por el osciloscopio o a partir de los datos obtenidos en el caso de su disponibilidad.
8. Para finalizar el experimento, apagar las fuentes de alimentación y el osciloscopio.
9. Contestar el cuestionario.

Parámetros	Valor teórico	Valor experimental	% de error
t_s	[s]	[s]	
V_∞	[V]	[V]	

Tabla 4.7: Valores de los parámetros de la planta de segundo orden.

NOTA: Para la obtención del tiempo de asentamiento t_s se empleó el criterio de 2% de error.

Cuestionario

1. Si los parámetros leídos no fueron cercanos a los teóricos, explique ¿Qué cree que haya influido en la diferencia?
2. Al modificar las resistencias R_A , R_B y R_C del diagrama de la Figura 4.9, ¿Qué sucede con la respuesta del circuito?

4.5.2. Explicación y solución de la práctica

Actividad 2

En la Figura 4.10 se muestran las señales presentadas en la entrada y salida de la planta.

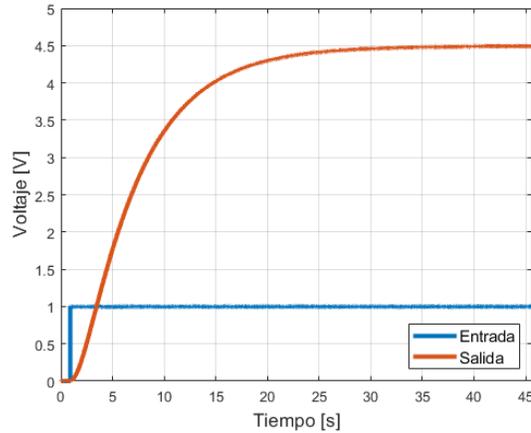


Figura 4.10: Señales de la planta.

Los parámetros se obtuvieron a partir de los datos procesados en Matlab, en la Tabla 4.8 se muestra la comparación de los parámetros.

Parámetros	Valor teórico	Valor experimental	% de error
t_s	23.2 [s]	22.83 [s]	1.595
V_∞	4.537 [V]	4.491 [V]	1.014

Tabla 4.8: Comparación de los valores de los parámetros de la planta de segundo orden.

Cuestionario

1. La discrepancia de los valores teóricos contra los valores experimentales es debido a las tolerancias presentes en los componentes electrónicos empleados, ya que no se asegura que el valor sea exacto, además también existe el factor del tiempo de muestreo y resolución del equipo de obtención de datos.
2. Al modificar R_A y R_B , se modifica los coeficientes del polinomio característico del sistema y si se varia R_C se incrementa o disminuye la ganancia, por lo cual la forma de la respuesta del sistema cambiará, puede presentarse una salida estilo subamortiguada o sobreamortiguada, es decir, si la combinación de las resistencias hace al polinomio característico poseer en sus raíces una parte imaginaria, la respuesta será subamortiguada, pero si las raíces no tienen parte imaginaria la respuesta será sobreamortiguado.

Como nota importante, si se desea emular otro sistema se debe de tener en cuenta la ventana de voltajes de trabajo, con la fuente sugerida en esta práctica la ventana

es de $\pm 9.5 [V]$ aproximadamente, esto quiere decir que los cálculos internos del sistema deben entrar en dicha ventana de lo contrario los parámetros de la respuesta resultante no coincidirán con los teóricos, para ellos se recomienda realizar simulaciones, una recomendación es modificar la ganancia al último, otra restricción es evitar utilizar resistencias menores a $10 [k\Omega]$ para evitar pérdidas.

Capítulo 5

Diseño de compensadores estilo PID

El controlador abordado en este capítulo tiene sus inicios en el siglo XX cuando se presentó la necesidad de construir un mecanismo automático con la finalidad de dirigir embarcaciones. El ruso Nicholas Minisky nacido en 1885, se le reconoce su gran contribución a la teoría general que se utiliza en la actualidad para mejorar el funcionamiento de sistemas automáticos de control, gracias a su desarrollo teórico dedicado a la dirección automática de barcos lo que dio paso al llamado proporcional más integral más derivativo, también conocido por su abreviación PID (Nise, 2011).

Cuando a un ingeniero se le asigna un problema de diseño de control, de ser posible él debe de conseguir una representación matemática de la planta, debe de analizar su respuesta transitoria, así como su respuesta en estado permanente, con la finalidad de poder observar si dichas características producen el comportamiento deseado, en el caso contrario, el ingeniero debe de diseñar un controlador que satisfaga estos requerimientos, existen diversos métodos de diseño, los que se abordarán en la práctica de este capítulo son el método de diseño por medio del lugar geométrico de las raíces (LGR) y asignación de polos.

5.1. Criterios de aproximación a un sistema de segundo orden sin ceros

Se debe enfatizar que las expresiones que describen el comportamiento de la respuesta de sistemas de segundo orden vistas en este trabajo se obtuvieron a partir de un sistema que solo posee dos polos complejos y ningún cero finito. Si el sistema presenta más de 2 polos y/o tiene ceros, no se puede emplear dichas fórmulas para calcular las especificaciones de desempeño. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, un sistema con más de 2 polos y/o posea ceros, se puede aproximar a un sistema de segundo orden que tenga solo 2 polos complejos dominantes (Nise, 2011).

El autor antes mencionado, da pie a la existencia de justificaciones que ayudan a aproximar un sistema de orden superior con o sin ceros finitos a uno de segundo orden sin ceros finitos, cabe destacar que está dirigido a sistemas con polos ubicados en el semiplano izquierdo del plano s , es decir, sistemas estables, dichas justificaciones son:

- Los polos de orden superior no dominantes deben cumplir

$$|\operatorname{Re}\{P_{NoDominante}\}| \geq 5 |\operatorname{Re}\{P_{Dominante}\}|$$

- Los ceros deben cumplir

$$|\operatorname{Re}\{C\}| \geq 5 |\operatorname{Re}\{P_{Dominante}\}|$$

Una vez justificado la aproximación, se puede emplear las fórmulas para obtener el sobrepaso en porcentaje, el tiempo de asentamiento, tiempo pico, etc., utilizando la información de los polos dominantes, estas justificaciones se consideran unas condiciones necesarias, pero no suficientes para aumentar la confianza en la aproximación de segundo orden, estas justificaciones son empleados en este capítulo.

Por otro lado, en el caso de no cumplirse las justificaciones de aproximación el lector debe simular el sistema con ayuda de alguna paquetería de software para observar la respuesta del sistema, sin embargo, se sugiere simular los sistemas aun cuando se cumplan las justificaciones para su aceptación final.

5.2. Cancelación de polos y ceros

La cancelación de polos y ceros es una herramienta de utilidad para hacer aproximaciones de segundo orden, pero se debe de ocupar con moderación y cuidado, en la presente práctica se emplea para poder diseñar un controlador PID.

Como nota importante, si se realiza la cancelación de un polo de la planta con un cero del controlador, se debe de tener bien definido el modelo del sistema, de no ser así esta cancelación podría no presentarse, por lo cual el polo y el cero tendrían presencia en la respuesta final del sistema, para entenderlo mejor véase el ejemplo 5-1, el cual está basado en un ejemplo propuesto por Nise (2011).

Ejemplo 5-1

Para las tres funciones de transferencia (5.1), (5.2) y (5.3) determinar si existe cancelación entre el polo y cero, su respuesta ante un escalón unitario en el dominio del tiempo y graficarlas.

$$G_1(s) = \frac{30(s+3)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \quad (5.1)$$

$$G_2(s) = \frac{30(s+3.01)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \quad (5.2)$$

$$G_3(s) = \frac{30(s+2.5)}{(s+3)(s+4)(s+5)} \quad (5.3)$$

Solución.

Multiplicando a las funciones (5.1), (5.2) y (5.3) por una función escalón $\frac{1}{s}$ y realizando la expansión en fracciones parciales

$$C_1(s) = \frac{30}{s(s+4)(s+5)} = \frac{1.5}{s} - \frac{7.5}{(s+4)} + \frac{6}{(s+5)} \quad (5.4)$$

$$C_2(s) = \frac{30(s+3.01)}{s(s+3)(s+4)(s+5)} = \frac{1.505}{s} - \frac{0.05}{(s+3)} - \frac{7.425}{(s+4)} + \frac{5.97}{(s+5)} \quad (5.5)$$

$$C_3(s) = \frac{30(s+2.5)}{s(s+3)(s+4)(s+5)} = \frac{1.25}{s} + \frac{2.5}{(s+3)} - \frac{11.25}{(s+4)} + \frac{7.5}{(s+5)} \quad (5.6)$$

en el dominio del tiempo

$$c_1(t) = 1.5 - 7.5e^{-4t} + 6e^{-5t} \quad (5.7)$$

$$c_2(t) = 1.505 - 0.05e^{-3t} - 7.425e^{-4t} + 5.97e^{-5t} \quad (5.8)$$

$$c_3(t) = 1.25 + 2.5e^{-3t} - 11.25e^{-4t} + 7.5e^{-5t} \quad (5.9)$$

Las gráficas de las respuestas se pueden apreciar en la Figura 5.1.

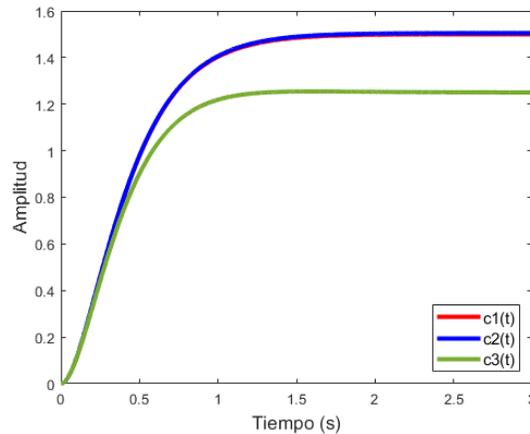


Figura 5.1: Respuestas escalón unitario de los sistemas del ejemplo 5-1.

La ecuación $C_1(s)$ es la respuesta cuando existe la cancelación del polo y cero. Para la ecuación $C_2(s)$, el residuo del polo en -3 el cual es el más cercano al cero, es relativamente más pequeño que los otros residuos, por ello se puede hacer una aproximación de segundo orden al despreciar la respuesta generada por el polo en -3 . Por último, para $C_3(s)$ el residuo del polo en -3 el cuál es el más cercano al cero, no es insignificante a comparación de los otros residuos, por ello no se puede hacer una aproximación de la respuesta escalón de un sistema de segundo orden.

En la Figura 5.1, se puede observar a la señal $c_3(t)$ la cual presenta menos cercanía a la señal $c_1(t)$, esto es debido a la insuficiente proximidad del cero al polo, este inconveniente

se puede presentar si no se tiene un buen modelo del sistema, aunque también se presenta en sistemas que se linealizan, desprecian o se realizan suposiciones, ya que en ocasiones los polos obtenidos no se encuentran exactamente en la posición en el plano s indicada por el modelo.

En el presente texto, la planta que se emplea en las prácticas es lineal y su modelo describe adecuadamente su dinámica, es decir, la ubicación de los polos en el plano s del modelo matemático están muy cercanos a los reales.

5.3. Diseño por medio del LGR

Nise (2011) indica que el lugar geométrico de las raíces es una representación gráfica de la trayectoria de los polos de un sistema en lazo cerrado cuando se varía la ganancia. Cada punto de dicho lugar geométrico de las raíces satisface la condición de ángulo $\angle KG(s)H(s) = \pm 180^\circ$ y la condición de magnitud $|KG(s)H(s)| = 1$.

Para poder lograr una mejoría en la respuesta transitoria y el error en estado permanente mediante la técnica del lugar geométrico de las raíces se pueden emplear diversos métodos, uno de ellos es primero de forma independiente obtener por medio de un compensador PD la respuesta transitoria requerida y al final se mejora el error en estado permanente con el compensador PI, un segundo método es primero mejorar el error en estado permanente y posteriormente la respuesta transitoria, pero este último en algunos casos llega a deteriorar el error en estado permanente (Nise, 2011). Por otro lado, existe la posibilidad de que un control PI o PD haga presentarse los parámetros deseados en el sistema, el ingeniero debe de observar que es lo más conveniente, aunque también si no existe alguna restricción se puede sobrediseñar.

Algunos consejos que se pueden tomar en cuenta para el diseño, cuando se requiere un error en estado permanente igual a cero para una entrada escalón son:

- Para un control PI. Si la planta no cuenta con algún componente integral, se puede suponer que la parte integral del compensador es parte de la planta y con ello realizar los cálculos de la condición de ángulo para encontrar el cero del compensador y al final obtener el valor de la ganancia con la condición de magnitud. Por ejemplo, la planta tiene la estructura

$$G_P(s) = \frac{\alpha}{s + \beta} \quad (5.10)$$

y el compensador PI tiene la estructura

$$G_c(s) = \frac{\sigma(s + \delta)}{s} \quad (5.11)$$

después de las consideraciones se obtiene

$$G'_P(s) = \frac{\alpha}{s(s + \beta)} \quad (5.12)$$

$$G'_C(s) = \sigma(s + \delta) \quad (5.13)$$

Por último, se calcula los valores de σ y δ .

- Para un control PID. Si la planta no cuenta con algún componente integral, se puede suponer que la parte integral del compensador es parte de la planta, se puede utilizar un cero para la cancelación de un polo de la planta y luego utilizar el segundo cero y la ganancia para obtener los requerimientos deseados. Por ejemplo, la planta tiene la estructura

$$G_P(s) = \frac{\alpha}{(s + \beta)(s + \delta)} \quad (5.14)$$

y el compensador PID tiene la estructura

$$G_c(s) = \frac{\sigma(s + \phi)(s + \delta)}{s} \quad (5.15)$$

después de las consideraciones se obtiene

$$G'_P(s) = \frac{\alpha(s + \delta)}{s(s + \beta)(s + \delta)} = \frac{\alpha}{s(s + \beta)} \quad (5.16)$$

$$G'_C(s) = \sigma(s + \phi) \quad (5.17)$$

Por último, se calcula los valores de σ y ϕ .

Los problemas de análisis y diseño de control que manejen el lugar geométrico de las raíces pueden llegar a ser muy laboriosos si se realiza a mano, debido al método de su resolución de prueba y error, por ello el lector debe tener acceso a una computadora, calculadora programable o al software de Matlab, dicho lo anterior se sugiere al lector realizar un problema o al menos una iteración a mano y luego utilizar un programa, esto con la finalidad de no perder la intuición o la forma de resolución.

5.4. Asignación de polos

Este método es uno de los más sencillos de aplicar, ya que solo se requiere deducir a partir de los parámetros de diseño deseados, el par de polos dominantes que dan una ecuación característica deseada de segundo o de primer orden según sea el caso, posteriormente se obtiene la ecuación característica de lazo cerrado del sistema, teniendo ya en cuenta el controlador propuesto con sus respectivas incógnitas k . Los dos polinomios deben de ser del mismo orden para poder igualar sus coeficientes para posteriormente obtener los valores de las incógnitas k . En el caso de tener una ecuación característica deseada de orden menor al de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, se le puede agregar polos no dominantes a la primera ecuación para poder realizar la igualación.

Este método es sencillo de aplicar, pero tiene la desventaja de poder saturar al actuador en caso de colocar la parte real del polo no dominante muy alejado a la izquierda de la parte real de los polos dominantes en el plano s . Para esta técnica se sugiere antes de la implementación, obtener la función de transferencia en lazo cerrado y observar si los polos no dominantes pueden ser cancelados por algún cero del controlador y/o que los ceros del controlador cumplan con la justificación del criterio de aproximación a un sistema de segundo orden, en el caso de ser complicado obtener la función de transferencia del sistema completo y las raíces de los polinomios, se puede recurrir a la simulación y en caso de no obtener buenos resultados cambiar de posición al polo no dominante.

5.5. Construcción física del compensador

La construcción física de un compensador analógico emplea al amplificador operacional en esencia, especialmente la configuración mostrada en la Figura 5.2, cuya función de transferencia es

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (5.18)$$

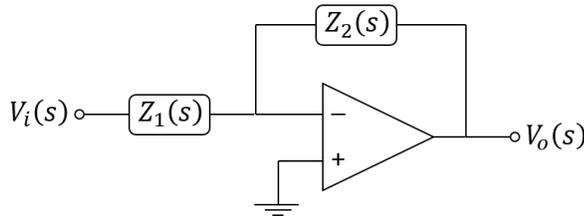


Figura 5.2: Amplificador operacional inversor.

Empleando la configuración de la Figura 5.2 y la expresión (5.18) se puede obtener la Tabla 5.1, en esta se indica la construcción física de los controladores empleando el amplificador operacional, los componentes $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$, se deben de sustituir en las posiciones que se muestran en la Figura 5.2, para contrarrestar el signo negativo se debe de colocar en cascada del compensador un amplificador inversor con ganancia unitaria. La construcción de la Tabla 5.1 fue basada en la expuesta en Nise (2011).

Acción de control	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Proporcional			$-\frac{R_2}{R_1}$
Integral			$-\frac{1}{RCs}$
Diferencial			$-RCs$
Proporcional-Integral			$-\frac{R_2}{R_1} \left(s + \frac{1}{R_2 C} \right)$
Proporcional-Diferencial			$-R_2 C \left(s + \frac{1}{R_1 C} \right)$
Proporcional-Integral-Diferencial			$-\left[\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right) + R_2 C_1 s + \frac{1}{R_1 C_2} \right]$

Tabla 5.1: Construcción de controladores usando un amplificador operacional.

Si se cuenta con más amplificadores operacionales y el costo no es una restricción, se puede emplear un sumador inversor que sume las señales de los bloques proporcional, integral y diferencial, se puede ajustar una ganancia unitaria en los 3 bloques y en el sumador modificar la ganancia de las señales con una resistencia variable, con ello el valor de la ganancia de cada señal no depende de las resistencias y capacitores de las otras.

5.6. Práctica 5

5.6.1. Práctica 5: Diseño de controladores a partir de la función de transferencia

Objetivos

- Diseñar 2 controladores estilo PID con base en la función de transferencia de la planta de segundo orden construida en la práctica 4, por medio del método LGR y por asignación de polos.
- Comprender el criterio de aproximación a un sistema de segundo orden para sistemas de orden 3 o superior y emplearlo para la selección del sistema de control.
- Comparar los dos sistemas de control obtenidos y seleccionar el más cercano al desempeño requerido.
- Implementar el controlador seleccionado en la planta.
- Medir y comparar los parámetros de diseño alcanzados en la implementación contra los requeridos.

Material y equipo a utilizar

- Planta de segundo orden construida en la práctica 4.
- Fuente de alimentación.
- Osciloscopio.
- 2 cables BNC.

Si se decide ocupar el controlador propuesto e ilustrado en la Figura 5.3.

- 5 amplificadores operacionales TL081.
- 6 resistencias de $10 [k\Omega]$.
- 2 resistencias de $1 [M\Omega]$ (todas las resistencias de preferencia de precisión).
- 2 capacitores de $0.1 [\mu F]$ no polarizados (de preferencia de poliéster).

- 1 trimpot de 10 [kΩ], 2 de 100 [kΩ] y 1 de 1 [MΩ].
- 1 dip switch 3 posiciones.
- 1 integrado 7805 (en el caso de no contar con una fuente de 5 [V] extra).

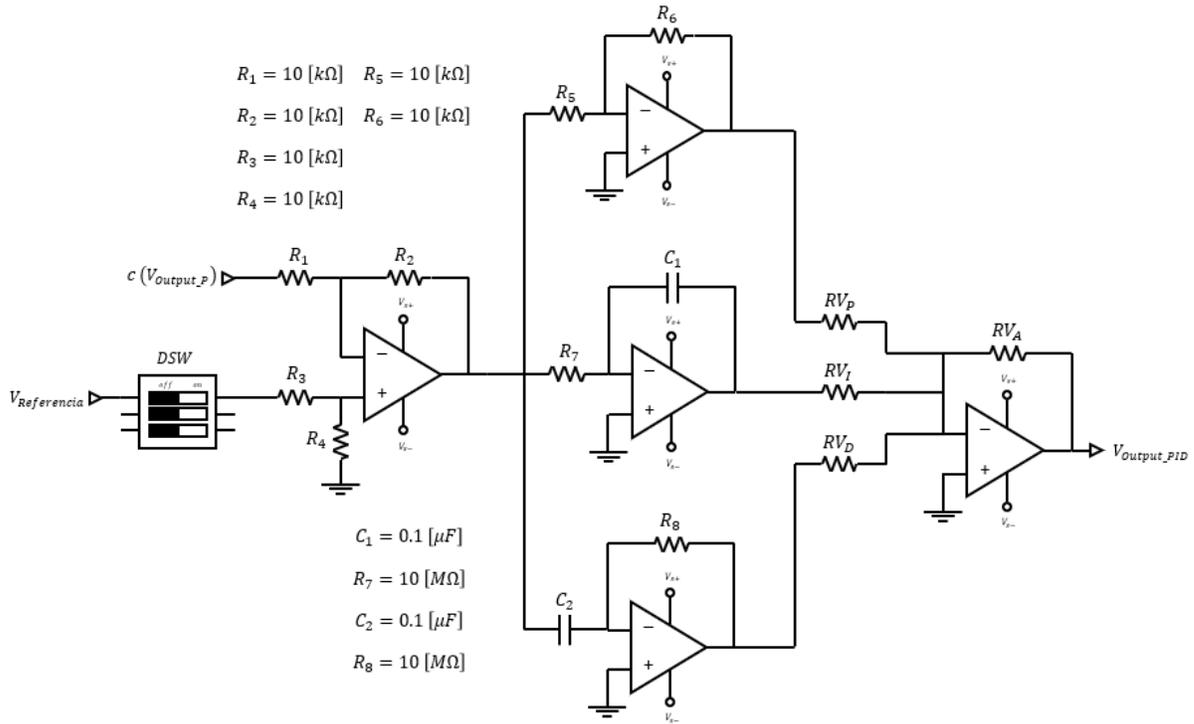


Figura 5.3: Circuito PID.

Desarrollo

Actividad 1

- Obtener la función de transferencia de la planta cuya dinámica es descrita por la ecuación diferencial (4.4) empleada en la práctica 4, que se repite aquí para fines de claridad.

$$\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) + 0.147c(t) = 0.667u(t)$$

- Diseñar un controlador estilo PID que cumpla con los siguientes requerimientos:
 - Un porcentaje de sobrepaso del 20%.
 - Un tiempo de asentamiento t_s de 9.5 [s].
 - Un $e(\infty) = 0$ para una entrada escalón.

Emplear las técnicas de diseño LGR y asignación de polos y seleccionar el sistema de control que satisfaga el criterio de aproximación a un sistema de segundo orden, en el caso de que ambos lo cumplan seleccionar solo uno para implementarlo.

NOTA: Para el cálculo del tiempo de asentamiento t_s se debe de emplear el criterio del 2% de error.

Consejo para el método LGR.

Emplear la siguiente estructura del controlador

$$G_C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = \frac{K_d(s+a)(s+b)}{s}$$

Utilizar un cero del compensador para anular un polo de la planta y considerar que la parte integrativa del controlador es parte de la planta, con ello solo faltaría encontrar el segundo cero de $G_C(s)$ y su respectiva ganancia.

Actividad 2

Si se emplea el controlador analógico propuesto.

Construir el controlador ilustrado en la Figura 5.3, las resistencias RV_P , RV_I , RV_D y RV_A representan a los trimpots, para obtener los valores de estas resistencias, primero se debe de fijar un valor en la resistencia RV_A , posteriormente los valores de las demás resistencias se obtienen a partir de los valores de las incógnitas k calculadas en la actividad 1 y con las fórmulas mostradas en la Tabla 6.1.

Incógnita K	Resistencia	Valor de la resistencia
Proporcional K_P	RV_P	$\frac{RV_A}{K_P}$
Integral K_I	RV_I	$\frac{RV_A}{K_I}$
Diferencial K_D	RV_D	$\frac{RV_A}{K_D}$

Tabla 5.2: Valores de las resistencias del sumador del controlador.

La finalidad del dip switch en el circuito es la emulación de una entrada escalón.

Si no se emplea el controlador analógico propuesto.

El alumno es libre de utilizar otro tipo de configuración del controlador teniendo en cuenta que este debe de ser analógico como única restricción.

Actividad 3

1. Conectar la salida del controlador en la entrada de la planta y conectar la salida de la planta en la segunda entrada del controlador (variable a controlar).
2. Poner al dip switch en modo “off” e ingresar un voltaje de 5[V] en una de las terminales del dip switch ($V_{Referencia}$), en el caso de no poder obtener este voltaje de una fuente externa extra, se puede emplear el integrado 7805.

3. Conectar la entrada y salida del sistema a los canales 1 y 2 del osciloscopio respectivamente, con la ayuda de los cables BNC, la entrada del sistema se considera entre el dip switch y la resistencia R_3 .
4. Alimentar al sistema con un voltaje de $\pm 11 [V]$ y con el dip switch en modo “off”, se debe de esperar alrededor de $12 [s]$ para la estabilización del sistema.
5. Activar la entrada de $5 [V]$, es decir, cambiar a modo “on” al dip switch y esperar la estabilización de la respuesta del sistema, esperando aproximadamente $12 [s]$.
6. Si se desea medir de nuevo la respuesta al escalón, cambiar a “off” al dip switch y esperar $12 [s]$ para que el sistema llegue a su punto de equilibrio y repetir el paso 5.
7. Tomar una imagen de las gráficas de las señales. En los osciloscopios existe la posibilidad de guardar en una memoria USB la información de las señales leídas, se puede obtener dicha información para después procesarlos en el programa que desee emplear el alumno para obtener mejores gráficas.
8. Obtener los parámetros reales del sistema, anotarlos, compararlos con los deseados indicados en la práctica, calcular el error de exactitud y llenar la Tabla 5.3. Los parámetros se pueden obtener mediante la gráfica proporcionada por el osciloscopio o a partir de los datos obtenidos en el caso de su disponibilidad.
9. Para finalizar el experimento, apagar las fuentes de alimentación y el osciloscopio.
10. Contestar el cuestionario.

Parámetros	Valor teórico	Valor experimental	% de error
t_s	$[s]$	$[s]$	
$\%sp$	$\%$	$\%$	
V_∞	$[V]$	$[V]$	

Tabla 5.3: Comparación de los valores de los parámetros del sistema de control.

NOTA: El voltaje V_∞ teórico, es el valor real del voltaje que ingresa en la entrada del sistema de control, por lo cual el alumno debe medirlo ya que en ocasiones algunas de las fuentes de alimentación no dan el voltaje exacto que indican suministrar.

Cuestionario

1. ¿Cuál de los dos métodos de diseño se obtuvo el mejor resultado?
2. Si uno de los sistemas en lazo cerrado no cumplió el criterio de segundo orden, ¿Por qué cree usted que se presentó tal caso?

5.6.2. Explicación y solución de la práctica

Actividad 1

La función de transferencia de la planta es

$$G_P(s) = \frac{0.667}{s^2 + s + 0.147} = \frac{0.667}{(s + 0.821)(s + 0.179)} \quad (5.19)$$

Utilizando un controlador PID y dos métodos de diseño para esta actividad, el primer método es por medio del LGR y el segundo por asignación de polos, al final se seleccionará el sistema de control que cumpla el criterio de aproximación de un sistema de segundo orden.

Método LGR

El compensador PID tiene la estructura

$$G_{C1}(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = \frac{K_d (s + a)(s + b)}{s} \quad (5.20)$$

donde

$$\begin{aligned} K_p &= K_d (a + b) \\ K_i &= K_d (a)(b) \end{aligned}$$

Para este problema se aplicará la técnica de eliminación de un polo de la planta con el primer cero del compensador, se supondrá que el polo en el origen del compensador es parte de la planta y se realizará los cálculos con ayuda del LGR para encontrar el segundo cero del compensador y la ganancia.

En el primer paso, se encuentra el factor de amortiguamiento a partir del sobrepaso indicado.

$$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{20}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln\left(\frac{20}{100}\right)^2}} = 0.456 \quad (5.21)$$

Posteriormente se busca el ángulo de la línea radial del factor de amortiguamiento.

$$\theta_\xi = 90^\circ + \arcsin(\xi) = 90^\circ + \arcsin(0.456) = 117.126^\circ \quad (5.22)$$

Para el segundo paso se encuentran el par de polos dominantes deseados con los datos de $\%sp = 20\%$ y $t_{sd} = 9.5$ [s].

La parte real del polo dominante compensado es

$$\Re\{P_D\} = \frac{4}{9.5} = \frac{8}{19} = 0.421 \quad (5.23)$$

Por lo cual, la parte imaginaria del polo dominante compensado es

$$\Im\{P_D\} = \Re\{P_D\} * \tan(180^\circ - 117.126^\circ) = 0.822 \quad (5.24)$$

Por lo tanto, los polos dominantes deseados son $0.421 \pm 0.822i$.

Se empleará el primer cero del controlador para eliminar el polo $(s + 0.179)$ de la planta, después se supondrá que el polo en el origen del controlador es parte de la planta y se calculará la posición del segundo cero del compensador, realizando lo anterior se buscará el segundo cero con la función de transferencia (5.25).

$$G'_P(s) = \frac{K_d(s + 0.179)(s + b)}{s} \frac{0.667}{(s + 0.821)(s + 0.179)} = \frac{K_d 0.667(s + b)}{s(s + 0.821)} \quad (5.25)$$

Se resuelve la condición de ángulo $\angle K_dGH(s) = \pm 180^\circ$ en el punto $s^* = 0.421 \pm 0.822i$,

$$\angle K_dGH(s) = \angle K_d + \angle 0.667 + \theta_{cb} - \angle(s - (-0)) - \angle(s - (-0.821))$$

$$K_dGH(s = s^*) = 0^\circ + 0^\circ + \theta_{cb} - \left(180^\circ + \arctan\left(\frac{0.822}{-0.421}\right)\right) - \arctan\left(\frac{0.822}{-0.421 + 0.821}\right)$$

$$K_dGH(s = s^*) = -180^\circ$$

despejando θ_{cb}

$$\theta_{cb} - 117.126^\circ - 64.06^\circ = -180^\circ$$

$$\theta_{cb} = 1.186^\circ \quad (5.26)$$

Localizando la posición del cero en el plano s

$$b = -\frac{0.822}{\tan(1.186^\circ)} - 0.421 = -40.11 \quad (5.27)$$

Determinando K_d al evaluar $|K_dGH(s)| = 1$ en $s^* = 0.421 \pm 0.822i$

$$K_d = \left| \frac{s(s + 0.821)}{0.667(s + 40.11)} \right| = 0.0319 \quad (5.28)$$

Por lo tanto, el compensador queda de la forma

$$G_{C1}(s) = \frac{0.0319(s + 40.11)(s + 0.179)}{s} = 1.285 + 0.0319s + \frac{0.2292}{s} \quad (5.29)$$

Obteniendo la función de transferencia del sistema completo a partir de las funciones (5.19), (5.29) y con una retroalimentación unitaria

$$T_1(s) = \frac{\frac{0.0319(0.667)(s+40.11)}{s(s+0.821)}}{1 + \frac{0.0319(0.667)(s+40.11)}{s(s+0.821)}} = \frac{0.0319(0.667)(s + 40.11)}{s(s + 0.821) + 0.0319(0.667)(s + 40.11)}$$

$$T_1(s) = 0.0213 \frac{s + 40.11}{s^2 + 0.842s + 0.853}$$

Encontrando los polos y ceros

$$T_1(s) = 0.0213 \frac{s + 40.11}{(s + 0.421 + 0.822i)(s + 0.421 - 0.822i)} \quad (5.30)$$

Como el valor absoluto de la parte real del cero es 95.27 veces más grande que el valor absoluto de la parte real de los polos dominantes, se puede decir que $T_1(s)$ tiene una aproximación buena a un sistema de segundo orden sin ceros.

Método por asignación de polos

Del desarrollo anterior se conocen los polos dominantes deseados, los cuales son $0.421 \pm 0.822i$, por lo cual el polinomio característico deseado es

$$s^2 + 0.842s + 0.853 = 0 \quad (5.31)$$

La estructura del controlador PID es

$$G_{C2}(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (5.32)$$

Encontrando la función de transferencia en lazo cerrado con la función de la planta (5.19), el controlador (5.32) y una retroalimentación unitaria se tiene

$$T_2(s) = \frac{(0.667K_d)s^2 + (0.667K_p)s + (0.667K_i)}{s^3 + (0.667K_d + 1)s^2 + (0.667K_p + 0.147)s + (0.667K_i)} \quad (5.33)$$

Por lo tanto, el polinomio característico del sistema en lazo cerrado es

$$s^3 + (0.667K_d + 1)s^2 + (0.667K_p + 0.147)s + (0.667K_i) = 0 \quad (5.34)$$

Como el polinomio deseado es un grado menor al polinomio del sistema en lazo cerrado, se procede a multiplicarlo por un polo no dominante, el cual solo posea parte real y su valor absoluto sea por lo menos 5 veces más grande que el valor absoluto de la parte real de los polos dominantes conjugados.

Calculando la ubicación del polo no dominante

$$p_{NoD} = 5(-0.421) = -2.105 \quad (5.35)$$

Multiplicando el nuevo polo (5.35) con la ecuación característica (5.31) y desarrollando

$$(s^2 + 0.842s + 0.853)(s + 2.105) = s^3 + 2.947s^2 + 2.626s + 1.795 = 0 \quad (5.36)$$

Igualando los polinomios característicos (5.34) y (5.36) se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0.667K_i &= 1.795 \\ 0.667K_p + 0.147 &= 2.626 \\ 0.667K_d + 1 &= 2.947 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.37)

$$\begin{aligned} K_i &= 2.693 \\ K_p &= 3.718 \\ K_d &= 2.921 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Por lo tanto, el controlador queda de la forma

$$G_{C2}(s) = 3.718 + 2.921s + \frac{2.693}{s} \quad (5.39)$$

Sustituyendo los valores de las incógnitas k (5.38) en la función de transferencia (5.33) se tiene

$$T_2(s) = \frac{(1.947)s^2 + (2.479)s + (1.795)}{s^3 + (2.947)s^2 + (2.626)s + (1.795)} \quad (5.40)$$

Obteniendo los polos y ceros de la función (5.40),

$$T_2(s) = 1.947 \frac{(s + 0.636 + 0.719i)(s + 0.636 - 0.719i)}{(s + 0.421 + 0.822i)(s + 0.421 - 0.822i)(s + 2.105)} \quad (5.41)$$

Aplicando el criterio de aproximación a un sistema de segundo orden a (5.41), se puede decir que del valor absoluto de la parte real del polo no dominante es 5 veces más grande que el valor absoluto de la parte real de los polos dominantes conjugados, por lo cual si cumple la primera justificación. Por la parte de los ceros, el valor absoluto de la parte real de los ceros conjugados es 1.51 veces más grande que el valor absoluto de la parte real de los polos dominantes conjugados, en consecuencia, los ceros no cumplen la otra justificación, por lo tanto, este sistema con control difícilmente puede cumplir el desempeño deseado.

Si se desea ocupar el segundo controlador, se tiene que simular junto con la planta en algún software para confirmar el cumplimiento del desempeño requerido, aunque es muy recomendable simular el primer controlador con la planta, esto para darle una validez más sólida al cumplimiento correcto de este.

Por lo anterior se selecciona el controlador conseguido por el método LGR para implementarlo, cuyo diagrama de bloques se modela en la Figura 5.4.

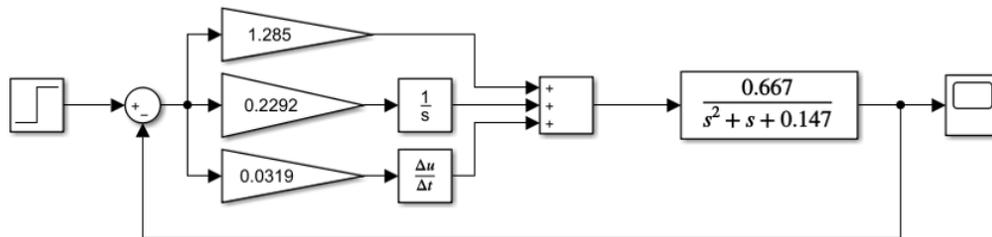


Figura 5.4: Diagrama de bloques del sistema de control.

Actividad 3

En la Figura 5.5 se muestran las señales presentadas en la entrada y salida del sistema de control.

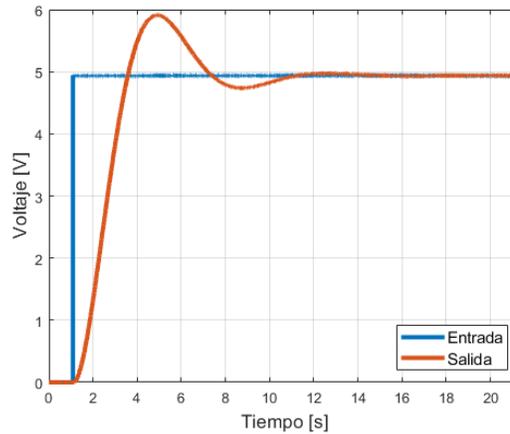


Figura 5.5: Señales del sistema de control con PID analógico.

Los parámetros se obtuvieron a partir de los datos procesados en Matlab, en la Tabla 5.4 se muestra la comparación de los parámetros.

Parámetros	Valor teórico	Valor experimental	% de error
t_s	9.5 [s]	9.1 [s]	4.211
$\%sp$	20 %	19.9 %	0.5
V_∞	4.936 [V]	4.936 [V]	0

Tabla 5.4: Comparación de los valores de los parámetros del sistema de control.

Cuestionario

1. El método LGR, debido a su cumplimiento con el criterio de aproximación a un sistema de segundo orden.
2. En el caso del método de asignación de polos, el valor absoluto de la parte real de los ceros conjugados es 1.51 veces más grande que el valor absoluto de la parte real de los polos dominantes conjugados, como consecuencia estos ceros tienen una presencia considerable en la respuesta del sistema de control, por lo cual no se puede asegurar que los parámetros deseados se presenten.

Capítulo 6

Teoría de control discreto

Con el desarrollo de las microcomputadoras hoy en día una computadora personal puede servir para controlar diversas máquinas, desde una maquina CNC, impresora 3D, etc.

La ventaja de utilizar una computadora digital es poder supervisar el proceso de forma externa al lazo de realimentación y al mismo tiempo realizar el control dentro del lazo. Ejemplos de supervisión son monitorear los parámetros de la planta, intervalos de manejo de las variables o el paro total del proceso. Ejemplos de control son las funciones de transferencia que representan los compensadores (P, PI, PD, PID, etc.) que en la práctica pasada se construyeron con componentes analógicos, ahora son sustituidos por una computadora digital que realiza los cálculos correspondientes para emular las propiedades de un compensador analógico (Nise, 2011).

Lo mejor de la computadora digital sobre los sistemas analógicos más destacados son los costos y la flexibilidad a los cambios en el diseño, ya que se realizan modificaciones simples de software en vez de costosas modificaciones de hardware.

En el diagrama de bloques de la Figura 6.1 se presenta un sistema en lazo cerrado con un controlador digital, en el diagrama se puede observar que la planta se sigue mostrando en el tiempo continuo mientras el dispositivo que genera la señal de referencia, el sensor y el controlador trabajan en el tiempo discreto, también se puede observar que algunas de las señales se denotan como $x(kT)$ donde T se refiere al tiempo de muestreo y k al número de muestra, ahora se utiliza la variable auxiliar z para el análisis de este tipo de sistemas. Como el lazo de la Figura 6.1 contiene tanto señales digitales como analógicas, debe de existir un dispositivo que convierta las señales analógicas en digitales y viceversa, para el primer caso existe el convertidor de analógico a digital (ADC) y para el segundo el convertidor de digital a analógico (DAC).

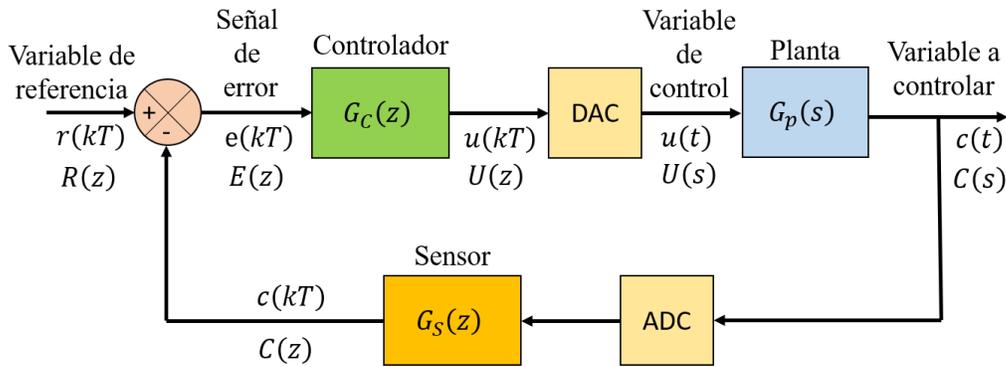


Figura 6.1: Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado con controlador digital.

6.1. Tiempo de muestreo

Si la conversión de una señal de analógico a digital ocurriera de manera instantánea, es decir, las muestras de tiempo se aproximen a intervalos tendientes a cero, no se tendría la necesidad de diferenciarlas, de tal modo, el análisis y diseño que se realizaron en la práctica 5, serían válidas a pesar de la existencia de la computadora digital en el lazo, pero este no es el caso de los problemas abordados en este documento.

Como las señales son muestreadas en intervalos específicos y se retienen con algún retén, ocasiona que el desempeño del sistema cambie cuando se modifica el tiempo de muestreo, más específico, ahora para el sistema en lazo cerrado, la estabilidad y la respuesta transitoria dependen también de la velocidad de muestreo; si es lento, el sistema puede presentar inestabilidad ya que los valores no se actualizan con la suficiente velocidad (Nise, 2011).

Existen diferentes métodos para obtener un tiempo de muestreo adecuado, dependiendo del autor que se lea, en la presente práctica de este capítulo se emplea una fórmula basada en las ideas expuestas en Franklin et al. (1998), las cuales indican que la velocidad de muestreo requerida depende del ancho de banda de lazo cerrado del sistema y dicha velocidad de muestreo debería ser más rápida que 30 veces el ancho de banda para garantizar que el controlador digital pueda igualar lo más cerca posible el rendimiento del controlador analógico. Aunque, en ocasiones este método podría ser laborioso si no se cuenta con las herramientas de cómputo necesarias, además se deben de realizar simulaciones para verificar primeramente si el sistema no se hizo inestable y si cumple con los parámetros requeridos. Por otro lado, el tiempo obtenido de este método o de cualquier otro nos da un punto de partida para buscar el valor conveniente.

El ancho de banda (ω_{AB}) se puede definir como una medida del rango de frecuencias que se considera útil para que la amplitud de la señal de entrada no se atenué considerablemente en la salida del sistema. Se puede medir como la frecuencia en la cual la curva de respuesta de magnitud está a $3 [dB]$ por debajo de su valor a frecuencia cero (Nise, 2011).

Para sistemas de primer orden el ancho de banda se puede obtener fácilmente ya que se utiliza la frecuencia de corte o de quiebre, la cual es donde está el corte entre las asíntotas de baja y alta frecuencia, el valor de la frecuencia de corte es el valor absoluto del polo del

sistema. Por lo tanto, para sistemas de primer orden se puede emplear la fórmula (6.1).

$$\omega_{AB} = f_c = |Polo| \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (6.1)$$

Para sistemas de segundo orden el ancho de banda se puede encontrar con la fórmula (6.2).

$$\omega_{AB} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}} \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (6.2)$$

donde

ω_n = Frecuencia de oscilación del sistema sin amortiguamiento $\left[\frac{rad}{s} \right]$.

ξ = Factor de amortiguamiento relativo [adimensional].

Para sistemas de orden 3 o superior se recomienda obtener el ancho de banda a partir del diagrama de Bode que brinde algún software como Matlab.

Una vez obtenido el ancho de banda se procede a encontrar el tiempo de muestreo con la fórmula (6.3).

$$T = \frac{2\pi}{40(\omega_{AB})} [s] \quad (6.3)$$

Cabe destacar que el microcontrolador pensado en utilizar para la implementación debe de tener la capacidad computacional, de no ser así, en el mejor caso el sistema no presenta la respuesta deseada o en el peor el sistema se hace inestable.

Por último, se recomienda realizar simulaciones de la planta y el control digital para asegurar la respuesta requerida.

6.2. Transformada z

La transformada z se emplea como herramienta para análisis de sistemas y señales discretas, esta transformada contiene la información de muestreo a partir de la cual los sistemas de datos muestreados puedan ser modelados con funciones de transferencia, esto ayuda a analizarlas y diseñarlas con la facilidad y conocimientos obtenidos con la transformada de Laplace (Nise, 2011).

En la Tabla 6.1 se exponen algunas transformadas z empleadas en el presente trabajo, donde se define una señal discreta $f(kT)$ y se muestra su correspondiente función de z ($F(z)$), después de realizar la transformación.

$f(kT)$	$F(z)$
$x(k)$	$X(z)$
$x(k-1)$	$z^{-1}X(z)$
$x(k-2)$	$z^{-2}X(z)$
$x(k+1)$	$zX(z)$

Tabla 6.1: Transformaciones z .

6.3. Métodos de conversión o emulación

Franklin et al. (1998) menciona que estos métodos surgieron por la necesidad de obtener compensadores digitales a partir del diseño en el tiempo continuo, esto es debido a que los diseños en tiempo continuo ya están bien establecidos y se gustaría poder aprovechar el diseño, haciendo que una computadora digital reproduzca un equivalente discreto, en el cual se presenten las mismas características o lo más cerca posible del compensador continuo, este tipo de método de diseño se conoce como emulación.

Por lo tanto, dada una función de transferencias $H(s)$, se busca una función de transferencia discreta $H(z)$ que posea aproximadamente las mismas características, los métodos más destacados son:

1. Integración numérica.
2. Mapeo de polos y ceros.
3. Equivalentes de retención.

En el presente texto solo se abordará el método de integración numérica y se enfocará en la regla de atraso o también conocida como la regla de Euler de atraso.

6.3.1. Integración numérica (Regla de atraso)

El tema de la integración numérica de ecuaciones diferenciales llega a ser bastante complejo y amplio, aquí solo se muestra una técnica más elemental, ya que solo se considera una fórmula de baja complejidad y que posee un paso fijo de tiempo. El concepto fundamental es representar una función de transferencia dada $H(s)$ como una ecuación diferencial y encontrar una ecuación en diferencias cuya solución sea una aproximación a la ecuación diferencial. Suponga que se tiene la función de transferencia (6.4).

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = s \quad (6.4)$$

La expresión (6.4) es equivalente a la ecuación diferencial (6.5).

$$u(t) = \dot{e}(t) \quad (6.5)$$

Ahora, se busca aproximar la solución de la ecuación diferencial (6.5) empleando el método de Euler de atraso. Por lo cual, de la definición de la derivada, se sabe

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (6.6)$$

donde Δx es el cambio de x durante un intervalo de tiempo Δt , aunque Δt no sea igual a 0, relación (6.7) será aproximadamente verdadera.

$$\dot{x}(k) \cong \frac{x(k) - x(k-1)}{T} \quad (6.7)$$

donde

$T = t_k - t_{k-1}$	Tiempo de muestreo.
$t_k = kT$	Para un tiempo de muestreo constante.
k	Es un número entero,
$x(k)$	es el valor de x en t_k y
$x(k-1)$	es el valor de x en t_{k-1} .

La idea de la aproximación (6.7) se utiliza en la expresión (6.5) obteniendo la ecuación en diferencias (6.8).

$$u(k) = \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (6.8)$$

Usando la transformada z en (6.8) se tiene

$$U(z) = \frac{E(z) - E(z)z^{-1}}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} E(z) = \frac{z-1}{Tz} E(z) \quad (6.9)$$

Por lo tanto,

$$H(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{Tz} \quad (6.10)$$

Lo anterior demuestra el por qué en este caso el método de integración numérica por regla de atraso propone que s sea sustituida por $\frac{z-1}{Tz}$.

Cabe señalar que si el tiempo de muestreo T se hace más pequeño, el desempeño del compensador digital da un resultado más cercano al compensador analógico.

A continuación, se presenta un ejemplo de transformación del dominio s al dominio z .

Ejemplo 6-1

Para el compensador (6.11), obtener la transformada z utilizando la regla de atraso y un tiempo de muestreo de 0.1 [s].

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1.2s^2 + 0.6s + 12.6}{s} \quad (6.11)$$

Solución:

Primero se sustituye $s \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$ en la ecuación (6.11) obteniendo la expresión (6.12).

$$G_c(z) = \frac{1.2 \left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 + 0.6 \left(\frac{z-1}{Tz}\right) + 12.6}{\left(\frac{z-1}{Tz}\right)} \quad (6.12)$$

Sustituyendo $T = 0.1$ [s] en (6.12), desarrollando y simplificando se tiene

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{13.86z^2 - 24.6z + 12}{z^2 - z} \quad (6.13)$$

6.4. Implementación de un compensador digital

El controlador del ejemplo 6-1 se puede implementar en una computadora digital por medio de un algoritmo numérico que emule el compensador. Primero se debe de encontrar una expresión para la salida muestreada de la computadora, $u(kT)$ con la ayuda de la Tabla 6.1, para fines prácticos y debido a que T es constante, la notación de $u(kT)$ se simplifica a $u(k)$. Para explicar el proceso a seguir se obtendrá la función $u(k)$ del ejemplo 6-1 utilizando el procedimiento brindado por Nise (2011).

Ejemplo 6-2

Obtener la función $u(k)$ de la función (6.13) para su implementación en un microcontrolador.

Solución:

Multiplicando en cruz la función (6.13),

$$(z^2 - z)U(z) = (13.86z^2 - 24.6z + 12)E(z) \quad (6.14)$$

Despejando el término con la potencia más alta de z que opere en la salida $U(z)$,

$$z^2U(z) = (13.86z^2 - 24.6z + 12)E(z) + U(z)z \quad (6.15)$$

Dividiendo a la ecuación (6.15) entre el coeficiente de $U(z)$,

$$U(z) = \left(13.86\frac{z^2}{z^2} - 24.6\frac{z}{z^2} + 12\frac{1}{z^2}\right)E(z) + U(z)\frac{z}{z^2}$$

$$U(z) = (13.86 - 24.6z^{-1} + 12z^{-2})E(z) + U(z)z^{-1} \quad (6.16)$$

Finalmente, al realizar la transformada z inversa de (6.16) con ayuda de la Tabla 6.1,

$$u(k) = 13.86e(k) - 24.6e(k-1) + 12e(k-2) + u(k-1) \quad (6.17)$$

La función (6.17) puede ser programada en un microcontrolador ahora.

Cabe destacar que existe la posibilidad de obtener una función de transferencia $G_c(z)$ de la forma

$$G_c(z) = \frac{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}{z - 1} \quad (6.18)$$

Teniendo una función $u(k)$

$$u(k) = \alpha e(k+1) + \beta e(k) + \gamma e(k-1) + u(k-1) \quad (6.19)$$

Como se puede observar en la función (6.19), la muestra de salida actual $u(k)$, es una función dependiente de las muestras del futuro $e(k+1)$, el presente $e(k)$ y pasado $e(k-1)$ de $e(t)$ y de la muestra del pasado de la salida $u(k-1)$, si se va a programar este compensador, la muestra de salida no puede depender de valores futuros de la entrada, una solución a este problema es igualando a 0 el coeficiente de $e(k+1)$ y simular el algoritmo, en el caso de no dar buenos resultados se requiere emplear otro método de emulación.

Con lo anterior se puede indicar que el numerador de la función de transferencia del compensador debe de ser de orden menor o igual que del denominador para su factible implementación.

6.5. Anti-Windup

Como se mencionó anteriormente una de las ventajas del control digital es su versatilidad, ya que se pueden realizar modificaciones o agregar más restricciones sin la necesidad de modificar el hardware, un complemento muy útil es el anti-windup. El windup es un tema muy extenso, por lo cual, en este documento solo se aborda para el caso del windup del controlador y para sistemas de entrada única y salida única (SISO, por sus siglas en inglés), debido a que es el empleado en la práctica. El windup en un controlador PID o PI es una característica para tener en consideración en el lazo de control, para evitar la reacción exagerada de la acción integral, esto se presenta debido a la saturación del actuador de la planta, el cual es conocido como no lineal (Hippe, 2006).

6.5.1. Saturación del actuador

Los actuadores empleados en plantas poseen físicamente limitaciones, por ejemplo, una servoválvula puede estar abierta al 100 % o cerrada al 0 %, pero no se puede estar más abierta al 100 % o menos del 0 %, un motor tiene un voltaje límite que da como consecuencia una velocidad máxima, si se llega a sobrepasar se puede dañar, etc. Si no se toma en cuenta estas limitaciones del actuador se puede tener un comportamiento no deseado en el transitorio de la señal de salida del sistema de control.

En un lazo cerrado de control es muy probable alcanzar los límites del actuador, debido a los parámetros de diseño deseados y por la acción integral del controlador, cuando llega a suceder, el lazo cerrado de control pasa a ser un lazo abierto de control, por lo tanto, la retroalimentación se interrumpe debido a que las variaciones de la señal de salida de la planta no tienen influencia en la entrada de la planta durante ese periodo (Hippe, 2006), en otras palabras, el sistema no posee la capacidad de inyectar menos o más energía al actuador de la planta, así pues este comportamiento sigue hasta aproximarse al valor deseado y el actuador entre en su zona de no saturación, esto para volverse a comportar como un sistema en lazo cerrado (Castaño, 2020).

6.5.2. Efecto windup de la integral

En un compensador PI y PID se utiliza una acción integral y recordando su propiedad de memoria, es decir, guarda los datos anteriores del error debido a que está integrando la señal del error, esta integración seguirá aumentando inclusive cuando el actuador se encuentre saturado, lo anterior tiene como consecuencia en el valor exageradamente grande del término integral, en la jerga de control a esto se le conoce como “windup”. La consecuencia de esta sobrecarga en el término integral se presenta cuando el actuador sale de sus limitaciones físicas y debe esperar hasta que la integral se descargue para volver a reaccionar o salir de su saturación, esto conlleva a tener un transitorio muy largo y un sobrepaso grande en la respuesta del sistema (Castaño, 2020).

Para entender mejor este inconveniente a continuación se muestra un ejemplo, el cual está inspirado en dos ejemplos, uno mostrado en Castaño (2020) y el otro en Hippe (2006).

Ejemplo 6-3

Se emplea el sistema mostrado en la Figura 6.2, el cual consta de una planta de orden 1 y un control PI.

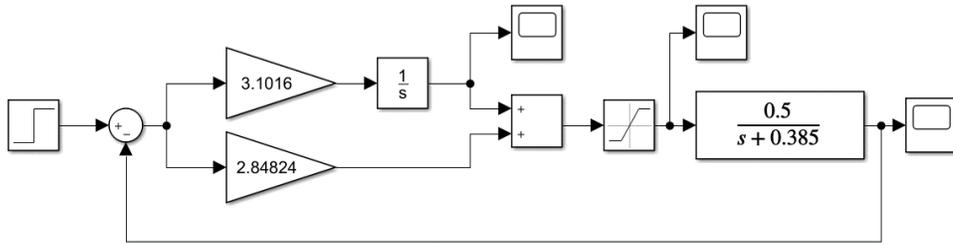
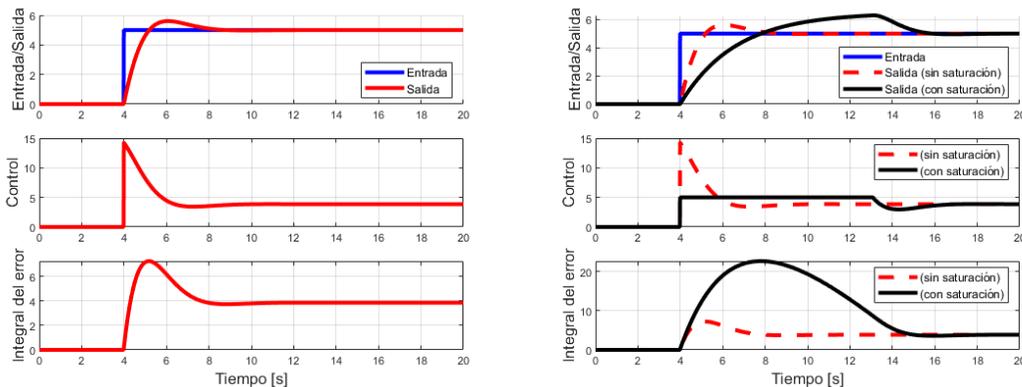


Figura 6.2: Sistema para ejemplificar el efecto windup de la integral.

Antes de comenzar el análisis, se debe considerar que para fines ilustrativos y para un mejor entendimiento, la activación del valor deseado se da en el segundo 4, por consiguiente, para poder ubicar rápidamente el tiempo de asentamiento de la respuesta transitoria del sistema en las gráficas, a dicho tiempo se le suma 4 segundos.

Si el actuador de la planta no cuenta con ninguna restricción o saturación, lo cual sería lo ideal, el sistema se comportaría como se observa en las gráficas de la Figura 6.3(a), cuyo tiempo de asentamiento se da en el segundo 8.33 y por la parte integral, esta crece hasta llegar a un valor máximo de 7.261. Por otro lado, si el actuador posee una saturación de ± 5 y no se considera el efecto windup del integrador, el sistema se comporta como se ve en las gráficas de la Figura 6.3(b), en la cual si se observa las líneas negras continuas pertenecientes al sistema con saturación, se puede ver como la integral sigue creciendo a pesar de estar saturado el actuador, llegando a un valor de 22.68, el cual es muy superior al valor obtenido en el sin saturación, esto tiene consecuencias en el control, puesto una vez sobrepasado el valor deseado, este debe de descargar toda la acción integral para que la salida del sistema alcance el valor deseado, el tiempo de asentamiento se logra en el segundo 15.6, aquí es donde se puede observar que el sistema se comporta como lazo abierto hasta el segundo 13.08, donde empieza a responder el sistema de control como lazo cerrado.



(a) Sin saturación en el actuador.

(b) Sin/con saturación en el actuador.

Figura 6.3: Efecto windup en un sistema de control con PI.

6.5.3. Método anti-windup

El método anti-windup es la forma de evitar el crecimiento descontrolado de la acción integral del sistema de control cuando el actuador se encuentre en sus límites de saturación, esto ayuda al controlador en reaccionar rápido cuando el actuador entre de nuevo a su zona de operación, es decir, el controlador no espera la descarga de todo el error acumulado (Castaño, 2020).

En el campo de la prevención del windup se presentan diversas soluciones, sin embargo, son basadas en varias interpretaciones de los efectos del windup, por consiguiente, los remedios ofrecidos también lucen bastante diferentes a primera vista (Hippe, 2006). En el presente texto se expone y utiliza una solución orientada al control digital para evitar el windup del integrador, el cual está basado en los expuestos en Castaño (2020) y en las ideas de Hippe (2006), en donde se mencionan soluciones en las cuales se le hace conocer al controlador que el actuador está saturado.

La estrategia más sencilla para resolver el problema es avisarle al controlador que detenga la acumulación del error en el integrador cuando el actuador este saturado, para entender mejor esta estrategia a continuación se explica un método correctivo.

El bloque del controlador PID analógico se puede descomponer como se observa en la Figura 6.4(a), si se le aplica la regla de atraso quedaría el diagrama como en la Figura 6.4(b).

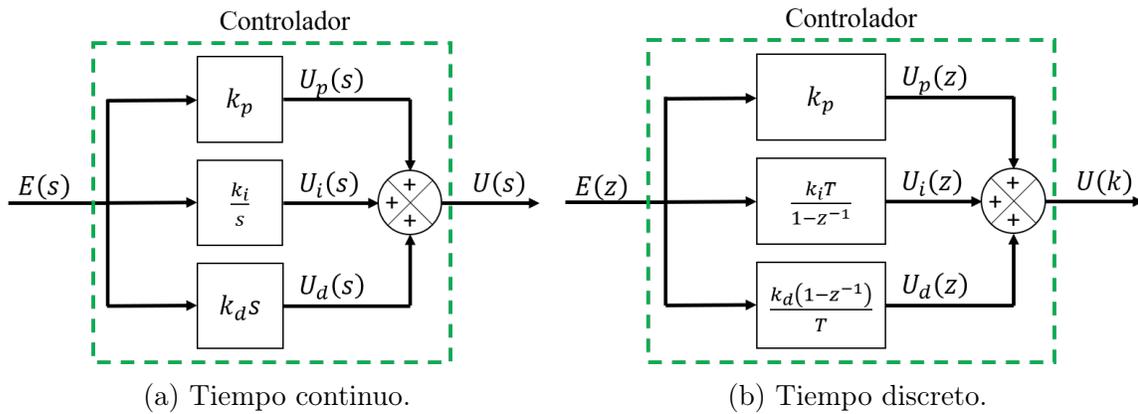


Figura 6.4: Controlador PID.

De la Figura 6.4(b) se puede expresar la ley de control $U(s)$ de diversas formas al simplificar todos o algunos de los bloques presentes, pero la ley de control recomendable a utilizar para usar el anti-windup es el que deja intacto el bloque integrador, a continuación, se muestra una ley de control donde se simplificó el bloque proporcional y diferencial, se dejó intacto el integrador y se aplicó la transformada z inversa, dicha la ley de control es

$$\begin{aligned}
 u_i(k) &= u_i(k-1) + (k_i T) e(k) \\
 u(k) &= u_i(k) + \left(k_p + \frac{k_d}{T}\right) e(k) - \left(\frac{k_d}{T}\right) e(k-1)
 \end{aligned}
 \tag{6.20}$$

Además, se deben de agregar las restricciones

$$\begin{aligned} & \text{if } u(k) \geq u_{max} \\ & \quad u_i(k) = u_i(k-1) \\ & \text{else if } u(k) \leq u_{min} \\ & \quad u_i(k) = u_i(k-1) \\ & \text{end} \end{aligned}$$

donde u_{max} y u_{min} son los valores límite de la saturación del actuador.

Ahora para el ejemplo 6-3 se implementa un control digital con la ley de control y las restricciones antes mencionadas, con lo anterior, la respuesta del sistema quedaría como se muestra en las gráficas de la Figura 6.5, en el cual se ve la reacción más rápida del actuador y por ello la salida del sistema llega al valor deseado más rápido que el sistema que no tiene las restricciones, el tiempo de asentamiento se da en el segundo 9.71.

A las restricciones mencionadas y agregadas al controlador se le conoce como un método anti-windup. En este método el controlador se da cuenta de que el actuador está en saturación y por ende detiene la acumulación del error en el integrador.

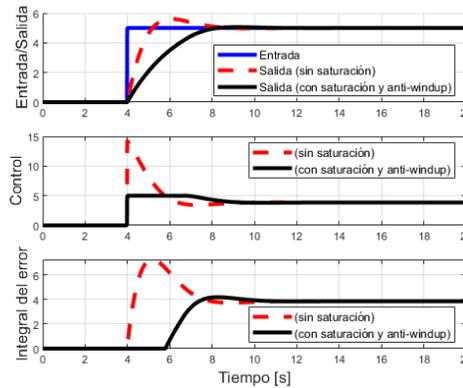


Figura 6.5: Sistema sin/con saturación en el actuador y el código anti-windup.

Cabe destacar que el ingeniero debe decidir si la respuesta obtenida es suficiente aun cuando no se cumplan algunos de los requerimientos de diseño, de no ser así debe de buscar otras opciones de solución.

6.6. Práctica 6

6.6.1. Práctica 6: Discretización de controladores analógicos e introducción al fenómeno windup

Objetivos

- Calcular y utilizar un tiempo de muestreo adecuado para la discretización del controlador analógico diseñado en la práctica 5 a partir del ancho de banda de lazo cerrado del sistema.
- Conocer y emplear el método de regla de atraso para discretizar el controlador analógico.
- Implementar el controlador digital en la planta construida en la práctica 4.
- Conocer y entender el fenómeno windup de la parte integral de un controlador y aplicar un método preventivo.

Material y equipo a utilizar

- Planta de segundo orden construida en la práctica 4.
- Fuente de alimentación.
- Osciloscopio.
- 2 cables BNC.

Si se decide ocupar el controlador propuesto e ilustrado en la Figura 6.6.

- | | |
|---|---|
| • 2 amplificadores operacionales TL081. | • 1 pushbotton. |
| • 5 resistencias de 10 $[k\Omega]$. | • 1 dip switch 3 posiciones. |
| • 1 resistencia de 12 $[k\Omega]$. | • 1 convertidor de digital a analógico MCP4725, Figura 6.7. |
| • 1 resistencia de 15 $[M\Omega]$. | • 1 integrado 7805 (en el caso de no contar con una fuente de 5 $[V]$ extra). |
| • 1 diodo 1N4148. | • 1 computadora que tenga instalado el programa Arduino IDE. |
| • 1 tarjeta Arduino nano o uno. | |
| • 1 capacitor de 0.1 $[\mu F]$. | |

NOTA: El Módulo MCP4725 emplea la comunicación I2C.

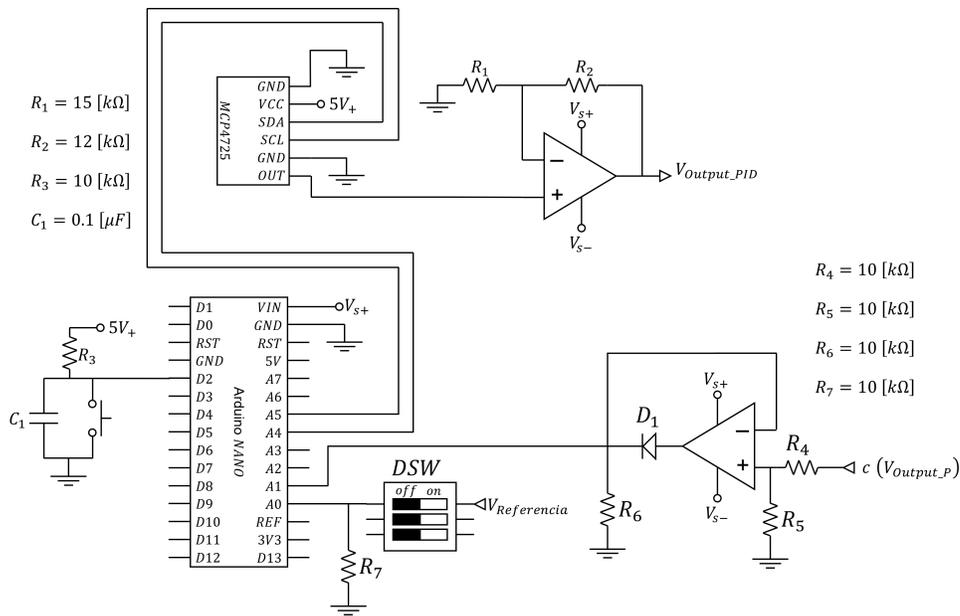


Figura 6.6: Controlador digital.

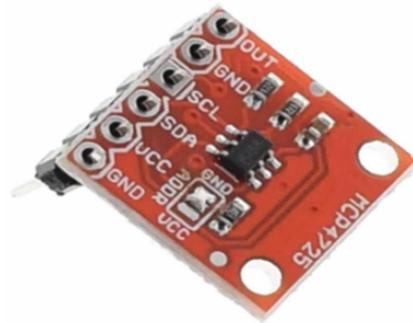


Figura 6.7: MCP4725.

Desarrollo

Actividad 1

- Obtener el ancho de banda de lazo cerrado del sistema y en base a él, proponer un tiempo de muestreo.
- Discretizar el controlador analógico diseñado en la práctica 5, utilizando el método de regla de atraso.

Si se emplea el controlador digital propuesto.

- Armar el circuito mostrado en la Figura 6.6.

- Transcribir el script mostrado en la sección A.2.1 en un archivo con extensión “.ino”. El script tiene la finalidad de orientar la forma de utilizar el módulo MCP4725. Además, posee una estructura general de cómo se programaría el controlador, la información faltante son los coeficientes de la ecuación de la ley de control.
- Cargar el código del archivo al Arduino Nano o Uno.

NOTA: El circuito presenta las siguientes propiedades:

- La salida del controlador posee un umbral de voltajes de 0 a 9 [V].
- Para la entrada de la variable a controlar, se acondicionó la señal de salida de la planta, debido al umbral de voltajes de admisión de 0 a 5 [V] presente en el ADC del Arduino. Por lo cual, el ADC lee la mitad del valor del voltaje real y por ello debe de ser multiplicado por 2 para no modificar los coeficientes de la ley de control.
- Para la entrada de la variable de referencia solo se admiten voltajes de 0 a 5 [V] por la restricción impuesta por el ADC, en caso de sobrepasar el rango mencionado, el ADC se dañaría.
- La finalidad del dip switch en el circuito es la emulación de una entrada escalón.

Si no se emplea el controlador digital propuesto.

- Construir un controlador digital que presente una señal de salida continua con una ventana de voltajes de 0 a 9 [V].
- Poseer dos entradas de lectura de señales, la primera para la variable de referencia y la segunda para la variable a controlar (salida de la planta), estos deben de contar con un acondicionamiento de señal, en el cual el voltaje a leer se encuentre en el umbral de voltajes de lectura del microcontrolador seleccionado, ya que, se debe de respetar los rangos de voltaje de lectura de los ADC del microcontrolador para no dañarlo.
- Se puede emplear el script mostrado en la sección A.2.1 como guía para programar el microcontrolador a utilizar.

Actividad 2

1. Conectar la salida del controlador en la entrada de la planta y conectar la salida de la planta en la segunda entrada del controlador (variable a controlar).
2. Poner al dip switch en modo “off” e ingresar un voltaje de 5 [V] en una de las terminales del dip switch ($V_{Referencia}$), en el caso de no poder obtener este voltaje de una fuente externa extra, se debe de emplear el regulador 7805.
3. Conectar la entrada y salida del sistema a los canales 1 y 2 del osciloscopio respectivamente con la ayuda de los cables BNC, la entrada del sistema se considera entre el dip switch y la resistencia R_7 .

4. Alimentar al sistema con un voltaje de $\pm 11 [V]$ y con el dip switch en modo “off”, se debe de esperar alrededor de $26 [s]$ para la estabilización del sistema.
5. Activar el controlador, si se está utilizando el circuito propuesto, presionar el push-botton y verificar el encendido del led del pin D13 del Arduino nombrado L.
6. Activar la entrada de $5 [V]$, es decir, cambiar a modo “on” al dip switch y esperar la estabilización de la respuesta del sistema, esperando aproximadamente $12 [s]$.
7. Si se desea medir de nuevo la respuesta al escalón, cambiar a “off” el dip switch y esperar $26 [s]$ para que el sistema llegue a su punto de equilibrio, presionar el botón de reinicio del microcontrolador y repetir el paso 5 y 6.
8. Tomar una imagen de las gráficas de las señales. En los osciloscopios existe la posibilidad de guardar en una memoria USB la información de las señales leídas, se puede obtener dicha información para después procesarlos en el programa que desee emplear el alumno para obtener mejores gráficas.
9. Obtener los parámetros reales del sistema, anotarlos, compararlos con los deseados indicados en la práctica 5, calcular el error de exactitud y llenar la Tabla 6.2. Los parámetros se pueden obtener mediante la gráfica proporcionada por el osciloscopio o a partir de los datos obtenidos en el caso de su disponibilidad.
10. Para finalizar el experimento, apagar las fuentes de alimentación y el osciloscopio.

Parámetros	Valor teórico	Valor experimental	% de error
t_s	$9.5 [s]$	$[s]$	
$\%sp$	20%	$\%$	
V_∞	$[V]$	$[V]$	

Tabla 6.2: Comparación de los valores de los parámetros del sistema de control.

NOTA: El voltaje V_∞ teórico, es el valor real del voltaje que ingresa en la entrada del sistema de control, por lo cual el alumno debe medirlo ya que en ocasiones algunas de las fuentes de alimentación no dan el voltaje exacto que indican suministrar.

Actividad 3

En esta actividad se empleará la siguiente función de transferencia del controlador

$$G_C(s) = k_p + k_d s + \frac{k_i}{s} = 3.216 + 0.0107s + \frac{0.576}{s} \quad (6.21)$$

En la Figura 6.8 se ilustra la respuesta del sistema de control ante una entrada escalón de $5 [V]$, considerando un controlador analógico y la inexistencia de saturación en el actuador, en la Tabla 6.3 se muestra los parámetros presentes en dicha señal.

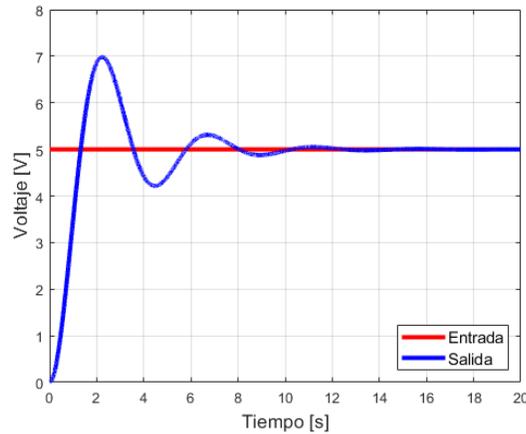


Figura 6.8: Señales del sistema con el control propuesto y sin saturación en el actuador.

Parámetros	Valor teórico
t_s	9.84 [s]
$\%sp$	40 %
V_∞	5 [s]

Tabla 6.3: Valores de los parámetros del sistema con el controlador analógico propuesto.

- Obtener la ley de control con la ayuda de las siguientes expresiones y el tiempo de muestreo seleccionado en la actividad 1

$$u_i(k) = u_i(k-1) + (k_i T) e(k)$$

$$u(k) = u_i(k) + \left(k_p + \frac{k_d}{T}\right) e(k) - \left(\frac{k_d}{T}\right) e(k-1)$$

- Copiar el script de Arduino existente en el anexo de este manual, en la sección A.2.2, en caso de no emplear el microprocesador sugerido, se debe de hacer la transcripción de la lógica del código al microcontrolador elegido.
- Agregar los coeficientes correspondientes en la ley de control del script.
- Existe dos renglones con la leyenda “//AntiWindup”, para el primer evento dejar comentado estos dos renglones.
- Realizar los pasos de la actividad 2, para la lectura de los datos y la obtención de los parámetros de la respuesta del sistema, pero con el cambio de esperar aproximadamente 26 [s] para la estabilización de la salida de la planta ante la entrada escalón de 5 [V].
- Llenar la Tabla 6.4.
- Para el segundo evento descomentar los dos renglones con la leyenda “//AntiWindup”.

- Realizar nuevamente los pasos de la actividad 2, para la lectura de los datos y la obtención de los parámetros de la respuesta del sistema, esperar un lapso de 26 [s] para la estabilización de la salida de la planta ante la entrada escalón de 5 [V].
- Llenar la Tabla 6.4.
- Contestar el cuestionario.

Parámetros	Valor teórico	Sin anti-windup	Con anti-windup
t_s	9.84 [s]	[s]	[s]
%sp	40 %	%	%
V_∞	5 [V]	[V]	[V]

Tabla 6.4: Valores de los parámetros obtenidos en la actividad 3.

Cuestionario

1. ¿Cuáles son las ventajas de un control digital ante un analógico?
2. Sin el método de prevención, ¿Qué se puede observar en la señal de salida del sistema de control con respecto a la señal sin saturación?
3. Con el método de prevención, ¿Qué mejoría se observó?
4. Con sus palabras ¿Cómo describe el fenómeno windup de un controlador que posee parte integral?

6.6.2. Explicación y solución de la práctica

Actividad 1

La función de transferencia del sistema de control 5.30 obtenida en la práctica 5, que se repite aquí para fines de claridad

$$T_1(s) = 0.0213 \frac{s + 40.11}{(s + 0.421 + 0.822i)(s + 0.421 - 0.822i)}$$

se puede decir que

$$\xi = 0.456 \quad (6.22)$$

$$\omega_n = 0.914 \quad (6.23)$$

Calculando el ancho de banda del sistema de control mediante la sustitución de (6.22) y (6.23) en (6.2), se tiene

$$\omega_{AB} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}} = 1.206 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (6.24)$$

Obteniendo el tiempo de muestreo por la sustitución de (6.24) en (6.3)

$$T_m = \frac{2\pi}{40 (1.206 [\frac{rad}{s}])} = 0.130 [s] \approx 0.01 [s] \quad (6.25)$$

A partir de la función (6.21), se encuentra la función de transferencia en el dominio de z donde

$$s = \frac{z - 1}{Tz}$$

Por lo tanto,

$$G_{C1}(z) = \frac{0.0319 \left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 + 1.285 \left(\frac{z-1}{Tz}\right) + 0.229}{\left(\frac{z-1}{Tz}\right)} \quad (6.26)$$

Sustituyendo $T = 0.01 [s]$ en (6.26), desarrollando y simplificando se tiene

$$G_{C1}(z) = \frac{4.477z^2 - 7.664z + 3.189}{z^2 - z} \quad (6.27)$$

Por último, se adquiere la función $u(k)$ para la implementación. Multiplicando en cruz la función (6.27),

$$(z^2 - z) U(z) = (4.477z^2 - 7.664z + 3.189) E(z) \quad (6.28)$$

Despejando el término con la potencia más alta de z que opera en la salida $U(z)$,

$$z^2 U(z) = (4.477z^2 - 7.664z + 3.189) E(z) + U(z) z \quad (6.29)$$

Dividiendo la ecuación (6.29) entre z^2 ,

$$U(z) = \left(4.477 \frac{z^2}{z^2} - 7.664 \frac{z}{z^2} + 3.189 \frac{1}{z^2}\right) E(z) + U(z) \frac{z}{z^2}$$

$$U(z) = (4.477 - 7.664z^{-1} + 3.189z^{-2}) E(z) + U(z) z^{-1} \quad (6.30)$$

Finalmente, al realizar la transformada z inversa de (6.30) con ayuda de la Tabla 6.1,

$$u(k) = 4.477e(k) - 7.664e(k-1) + 3.189e(k-2) + u(k-1) \quad (6.31)$$

Actividad 2

En la Figura 6.9 se muestran las señales presentadas en la entrada y salida del sistema de control.

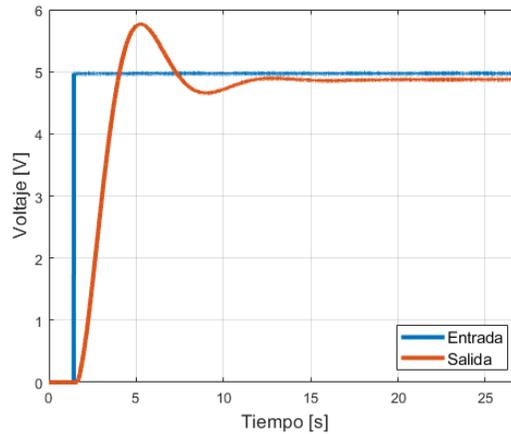


Figura 6.9: Señales del sistema de control con PID digital.

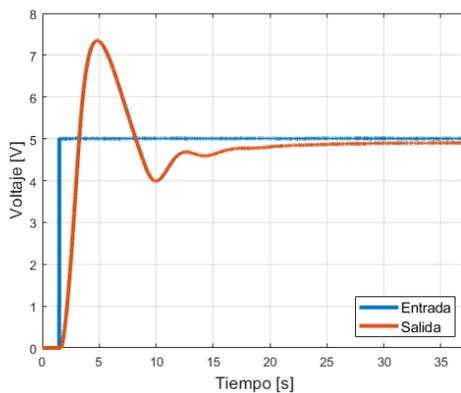
Los parámetros se obtuvieron a partir de los datos procesados en Matlab, en la Tabla 6.5 se muestra la comparación de los parámetros.

Parámetros	Valor teórico	Valor experimental	% de error
t_s	9.5 [s]	9.28 [s]	2.316
$\%sp$	20 %	18.4 %	8
V_∞	4.964 [V]	4.882 [V]	1.094

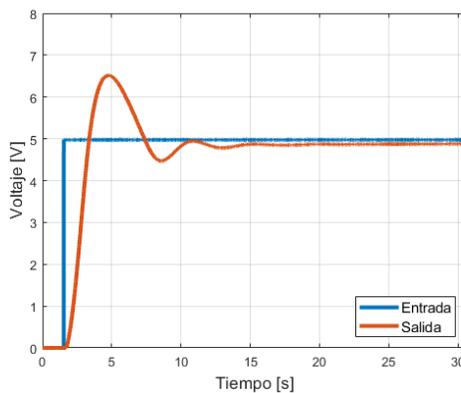
Tabla 6.5: Comparación de los valores de los parámetros del sistema de control.

Actividad 3

En la Figura 6.10 se muestran las señales presentadas en la entrada y salida del sistema de control de la actividad 3, en el cual se muestra el efecto al no y si utilizar el método de prevención anti-windup.



(a) Sin anti-windup.



(b) Con anti-windup.

Figura 6.10: Señales del sistema de control de la actividad 3.

Los parámetros se obtuvieron a partir de los datos procesados en Matlab, en la Tabla 6.6 se muestran los parámetros teóricos, así como los presentados al utilizar y no utilizar el anti-windup en el sistema de control.

Parámetros	Valor teórico	Sin anti-windup	Con anti-windup
t_s	9.84 [s]	18.66 [s]	11.845 [s]
$\%sp$	40 %	50.1 %	33.7 %
V_∞	5 [V]	4.9 [V]	4.882 [V]

Tabla 6.6: Comparación de los parámetros obtenidos en la actividad 3.

Cuestionario

1. Un control digital tiene la ventaja sobre un control analógico en la flexibilidad en el cambio de diseño y/o la adición de restricciones al proceso, debido a la modificación del software en vez del hardware.
2. Sin el método preventivo, existe la presencia de un tiempo de asentamiento grande con respecto al sistema sin saturación. Por otro lado, el porcentaje de sobrepaso fue mayor al teórico, por lo cual hay presencia de un pico de voltaje mayor al simulado.
3. Utilizando el método preventivo, el tiempo de asentamiento fue más cercano al deseado y el sobrepaso cambió, pero fue menor al teórico y por ello el pico de voltaje fue menor al simulado.
4. El windup es cuando la integral sigue almacenando información, aun si el sistema se comporta como lazo abierto debido a la saturación del actuador. Cuando el actuador sale de la zona de saturación y el sistema debe de comportarse como sistema en lazo cerrado, el integrador al no responder rápido no lo permite y como consecuencia el sistema seguirá en lazo abierto hasta que este se descargue, esto conlleva a una respuesta lenta y sobrepasos mayores a los calculados.

Capítulo 7

Identificación paramétrica

Para obtener el modelo matemático de un sistema físico y poder trabajar con él, por ejemplo, para diseñar un controlador, se requiere del conocimiento de los valores de sus parámetros como masas, amortiguamientos, inductancias, resistencias, etc., que con frecuencia no son fáciles de obtener. Por otra parte, las mediciones o las especificaciones proporcionadas por los vendedores son fuentes, pero en ocasiones no se tiene al alcance la documentación o incluso algunos fabricantes no lo reportan y existe la posibilidad de ser complicado poder medir dichos parámetros, por lo cual un método que ayuda a resolver este problema es la identificación paramétrica.

La identificación paramétrica requiere una previa definición de la estructura del modelo matemático, en la práctica de este capítulo se emplea la identificación paramétrica fuera de línea, ya que esta permite obtener los parámetros dinámicos del modelo a partir de datos experimentales obtenidos de la entrada y salida de la planta con auxilio de un algoritmo, a condición de que se considere a los parámetros constantes.

Los elementos clave de la identificación paramétrica de un sistema son la selección de la estructura del modelo, el diseño del experimento, la estimación de los parámetros y la validación (Åström & Wittenmark, 1989).

7.1. Modelos de identificación paramétrica

Para poder llevar a cabo la identificación paramétrica se necesita establecer los modelos a utilizar para tal fin, estos modelos reciben el nombre de modelos de identificación, el cual es diferente al modelo del sistema físico.

Existen diferentes tipos de estructuras que pueden definir los modelos de identificación paramétrica, en el procesamiento de señales digitales existe el modelo ARX (AutoRegressive model with eXternal input), el cual en el presente texto será la referencia para el modelo de regresión debido sus características.

7.1.1. Modelo ARX

La estructura del modelo ARX (AutoRegressive model with eXternal input) indica un modelo del sistema con la forma

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + e(k) \quad (7.1)$$

donde $y(k)$ es la salida, $u(k)$ es la entrada, $e(k)$ es el error y se asume que es un proceso aleatorio independiente de la salida y entrada, es decir, se considera ruido blanco, $A(z)$ y $B(z)$ son polinomios discretos y las incógnitas son los coeficientes de estos polinomios. La función de transferencia de este modelo es

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (7.2)$$

Por lo cual, los coeficientes del polinomio $A(z)$ se obtiene a partir de los polos y los coeficientes del polinomio $B(z)$ de los ceros.

7.2. Método de identificación paramétrica

Este método emplea mínimos cuadrados recursivos y la arquitectura ARX, por lo cual se considera la expresión

$$y(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k) + \frac{1}{A(z)}e(k) \quad (7.3)$$

Se supone la inexistencia del ruido $e(k)$, por lo cual se iguala a cero, en consecuencia, se utiliza solo el término $\frac{B(z)}{A(z)}u(k)$, que puede ser expresado mediante la definición de dos vectores $\psi(k)$ y θ .

$$\psi(k)^T = [-y(k-1) \quad \cdots \quad -y(k-n_a) \quad u(k-1) \quad \cdots \quad u(k-n_b)] \quad (7.4)$$

$$\theta^T = [a_1 \quad \cdots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n_b}] \quad (7.5)$$

El modelo con estructura ARX se puede escribir como

$$y(k) = \psi(k)^T \theta = \theta^T \psi(k) \quad (7.6)$$

donde $y(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de salida con n renglones de mediciones del sistema, $\psi(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de regresión armada mediante elementos de funciones conocidas y $\theta \in \mathbb{R}^p$ es el vector de parámetros desconocidos o a estimar donde p es el número de parámetros. El modelo (7.6) es indexado por la variable k , la cual indica el tiempo discreto (Reyes, 2011). Cabe destacar que (7.6) es también llamado modelo de regresión debido a su procedencia de una estructura ARX.

El algoritmo para la estimación de parámetros utilizado en el presente trabajo posee la ventaja de poder estimar parámetros de modelos en tiempo continuo a partir de mediciones en tiempo discreto, con la desventaja de aumentar la carga computacional debido a calcular

n_d derivadas de una señal, pero actualmente las computadoras poseen la capacidad para resolver esta desventaja.

Se puede obtener un modelo de regresión en tiempo continuo, tomando como referencia al modelo ARX en tiempo discreto. Considere un modelo en tiempo continuo de la forma

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t)$$

el cual se puede reescribir como

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} - \dots - a_n y(t) + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t) \quad (7.7)$$

Suponiendo el conocimiento de la señal de entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ del sistema, así como sus derivadas, se puede obtener el modelo de regresión

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \psi(t)^T \theta \quad (7.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi(t)^T &= \left[-\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \quad \dots \quad -y(t) \quad \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} \quad \dots \quad u(t) \right] \\ \theta^T &= [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m] \end{aligned} \quad (7.9)$$

Para el cálculo de las derivadas de la señal de salida de la planta, en la práctica de este capítulo se emplean las fórmulas de diferencias divididas finitas centradas con alta exactitud, dichas fórmulas se adquirieron en Chapra y Canale (2007).

Una vez establecido el modelo de identificación se construye un algoritmo para determinar las incógnitas del modelo que están contenidas en el vector de parámetros desconocidos. Este algoritmo de solución se le da el nombre de algoritmo de estimación paramétrica.

7.3. Algoritmo de estimación paramétrica

Reyes (2011) desarrolló y dedujo el algoritmo de estimación paramétrica, en el cual emplea una función de costo, operaciones matriciales, entre otras operaciones (pp. 293-298). Debido a que su deducción es bastante extensa, en este trabajo para fines prácticos y evitar extender el texto se deja a criterio del lector consultar el desarrollo de dicha deducción para una descripción detallada.

Reyes (2011) expresó las ecuaciones recursivas discretas del algoritmo de mínimos cuadrados como

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + P(k-1) \psi(k) \left[I + \psi(k)^T P(k-1) \psi(k) \right]^{-1} e(k) \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1) \psi(k) \left[I + \psi(k)^T P(k-1) \psi(k) \right]^{-1} \psi(k)^T P(k-1) \\ e(k) &= y(k) - \psi(k)^T \hat{\theta}(k-1) \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde $P(k) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ se denomina la matriz de covarianza y $e(k) \in \mathbb{R}^n$ es el error de predicción.

Las ecuaciones (7.10) se pueden programar en diferentes lenguajes o entornos, por la facilidad que brinda Matlab al trabajar con matrices e ingresar datos externos, se recomienda utilizar esta herramienta, al final de este manual de prácticas se encuentra la función “mepmcr” que contiene el algoritmo, esta función puede ser llamada para poder realizar el proceso de estimación.

Cabe destacar la virtud de este algoritmo de poder identificar cualquier modelo matemático, sin depender de la naturaleza del sistema, el único requisito pedido al sistema es que su modelo pueda ser representado como un regresor lineal con relación a sus parámetros. Por consiguiente, se puede aplicar a plantas lineales como a no lineales tanto continuos como discretos (Reyes, 2011).

7.4. Linealidad en los parámetros

Reyes (2011) menciona que, si un modelo matemático de un sistema cumple con la característica de linealidad en los parámetros, esto significa que puede ser reescrito en la forma de un modelo de regresión, para aterrizar esta idea se ponen como ejemplo los modelos (7.11) y (7.12) que tienen parámetros α y β y pueden reescribirse en forma de modelo de regresión.

$$y = \alpha \text{sen}(t) + \beta t^5 = [\text{sen}(t) \quad t^5] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

con $\psi(k)^T = [\text{sen}(t) \quad t^5]$,

$$\dot{x} = \alpha \sqrt{x} + \beta \cos^2(x) = [\sqrt{x} \quad \cos^2(x)] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

con $\psi(k)^T = [\sqrt{x} \quad \cos^2(x)]$. En todos los casos anteriores el vector de parámetros es $\theta^T = [\alpha \quad \beta]$.

Por otro lado, los modelos (7.13) y (7.14) no son lineales en los parámetros y por ello no se puede aplicar el algoritmo.

$$y = -\cos^2(\alpha t) + e^{-\beta t} \quad (7.13)$$

$$\dot{x} = \frac{\tan(\alpha t)}{1 + \tan(\alpha t)} - \cos^3(\text{sen}(\beta x)) \quad (7.14)$$

7.5. Condición de entrada

Åström y Wittenmark (1989) plantean que para obtener una estimación adecuada se requiere una forma de caracterizar la entrada de la planta, esta forma se denomina excitación persistente y se logra si la señal de entrada al sistema posee diferentes componentes

frecuenciales que lo exciten. A las señales empleadas para este propósito se les categoriza por el orden de excitación persistente que posean. Para fines prácticos se deja a criterio del lector revisar el trabajo de dichos autores para profundizar más sobre el tema de excitación persistente.

Para obtener una estimación buena se recomienda un orden de excitación persistente de la señal a emplear, igual al número de parámetros desconocidos (Åström & Wittenmark, 1989). En el libro de los autores mencionados anteriormente se muestra los análisis del orden de las señales de prueba más comunes, en el presente texto solo se abordará la señal sinusoidal con la estructura $sen(\omega t)$ debido a su fácil empleo y entendimiento, dicha señal se considera de una excitación persistente de orden 2, por lo cual, una suma algebraica de κ sinusoides de diferentes frecuencias son de orden 2κ .

Para obtener el número necesario de sinusoides con diferentes frecuencias se emplea la formula

$$\#S = \frac{\#PD}{2} \quad (7.15)$$

donde $\#S$ es el número de sinusoides y $\#PD$ el número de parámetros desconocidos, cabe señalar que se debe de tomar el entero superior del resultado de la división.

7.6. Información previa y validación

El ingreso de información de los parámetros conocidos al algoritmo da como resultado una ventaja significativa, debido a la reducción de los parámetros a estimar, mejoramiento de la precisión de la estimación y reducción de los requisitos de excitación (Åström & Wittenmark, 1989).

Una forma sencilla de validación del modelo estimado es simular la respuesta del modelo por medio de algún software con la entrada que fue ingresada al sistema real y comparar las respuestas de los dos sistemas.

7.7. Práctica 7

7.7.1. Práctica 7: Identificación paramétrica

Objetivos

- Conocer y utilizar un método de identificación paramétrica.
- Conocer y comprender consideraciones para obtener una buena estimación.
- Estimar los parámetros del modelo matemático de la planta construida en la práctica 4.
- Comparar los valores reales de los parámetros contra los obtenidos por el algoritmo.

Material y equipo a utilizar

- Planta de segundo orden construida en la práctica 4.
- Fuente de alimentación.
- Osciloscopio.
- 2 cables BNC.
- 1 computadora que tenga instalado el programa Matlab.

Si la práctica se desea desarrollar con el circuito generador de señales sinusoidales propuesto e ilustrado en la Figura 7.1.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| • 1 amplificador operacional TL081. | • 1 pushbotton. |
| • 1 resistencia de 10 $[k\Omega]$. | • 1 convertidor de digital a analógico <i>MCP4725</i> , Figura 6.7. |
| • 1 resistencia de 12 $[k\Omega]$. | • 1 integrado 7805 (en el caso de no contar con una fuente de 5 $[V]$ extra). |
| • 1 resistencia de 15 $[M\Omega]$. | • 1 computadora que tenga instalado el programa Arduino IDE. |
| • 1 tarjeta Arduino nano o uno. | |
| • 1 capacitor de 0.1 $[\mu F]$. | |

NOTA: El Módulo MCP4725 emplea la comunicación I2C.

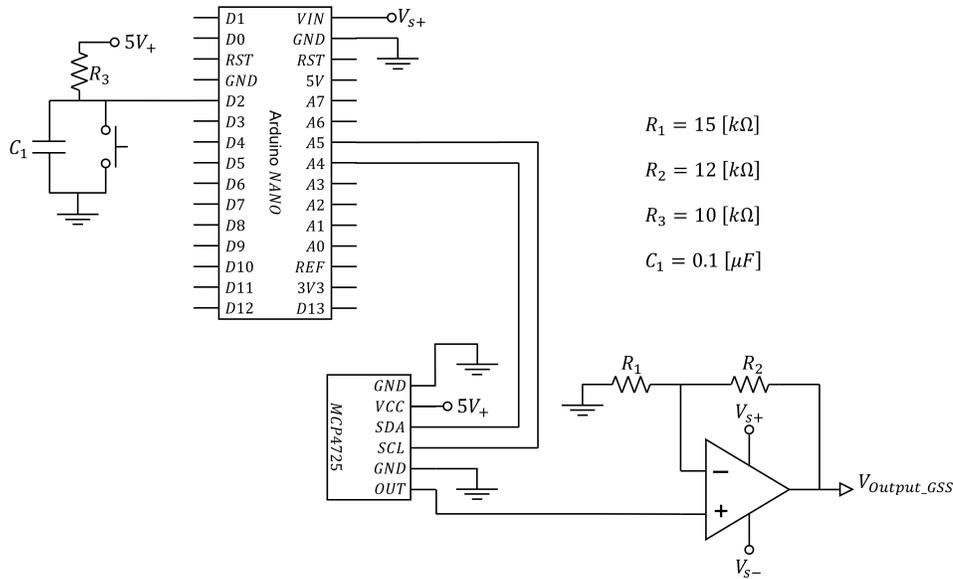


Figura 7.1: Generador de señales sinusoidales.

Desarrollo

Actividad 1

- Obtención del modelo de regresión a partir del modelo matemático de la planta.

La ecuación diferencial

$$\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) + 0.147c(t) = 0.667u(t)$$

se puede reescribir como

$$\ddot{c}(t) + \alpha\dot{c}(t) + \beta c(t) = \gamma u(t)$$

Despejando $\ddot{c}(t)$

$$\ddot{c}(t) = -\alpha\dot{c}(t) - \beta c(t) + \gamma u(t) \quad (7.16)$$

Reescribiendo el modelo matemático (7.16) en forma de un modelo de regresión

$$\psi(t)^T = [-\dot{c}(t) \quad -c(t) \quad u(t)]$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

donde $y(t) = \psi(t)^T \theta = [\ddot{c}(t)]$

- Cálculo del número de sinusoides de diferente frecuencia que deben estar presentes en la señal de excitación.

Se desconocen 3 parámetros del sistema, por lo cual

$$\#S = \frac{3}{2} = 1.5 \approx 2 \quad (7.18)$$

Por lo anterior, la señal de entrada puede ser

$$u(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}t\right) + \text{sen}\left(\frac{6\pi}{15}t\right) \quad (7.19)$$

- Selección del periodo de muestreo de las señales del sistema.
 - Los osciloscopios actuales cuentan con la opción de poder guardar los datos en un dispositivo de almacenamiento, si se tiene al alcance uno, se debe de buscar y obtener el tiempo de muestreo del equipo o en el caso de poder seleccionarlo, escoger un intervalo pequeño permitido por el equipo, esto último para tener una mejor estimación.
 - En caso de no tener un osciloscopio con la característica de guardar los datos, se puede utilizar un microcontrolador para leer los voltajes, solo se tiene que recordar que la salida de la planta también puede presentar voltajes negativos, se recomienda un tiempo de muestreo pequeño permitido por el microcontrolador, esto para poder obtener una mejor estimación.

Si el alumno decide emplear el circuito propuesto.

- Armar el circuito mostrado en la Figura 7.1.
- Transcribir el script mostrado en la sección A.3.1 en un archivo con extensión “.ino” y leer la explicación del funcionamiento del código. El script posee la estructura para poder generar una señal resultante de la suma de dos sinusoides de diferente frecuencia. El circuito tiene la finalidad emular una fuente sinusoidal.
- El valor de la variable “muestras” del script se obtiene a partir del periodo de la primera señal sinusoidal, este valor se obtiene mediante

$$\text{muestras} = \text{Redondear}(15 [s] \times 200) = 3000$$

El periodo de 15 [s] se obtuvo de la ecuación (7.19).

Si el alumno decide no emplear el circuito propuesto.

- Construir un circuito generador de una señal resultante de 2 sinusoides de diferente frecuencia, además debe de presentar una señal continua en la salida.

Actividad 2

1. Conectar en la entrada de la planta la salida del generador de señales sinusoides.

2. Conectar la entrada y salida de la planta a los canales 1 y 2 del osciloscopio respectivamente con la ayuda de los cables BNC.
3. Alimentar al sistema con un voltaje de ± 11 [V] se debe de esperar alrededor de 26 [s] para la estabilización del sistema.
4. Verificar el valor de la salida de la planta, si no es cero, modificar el valor del trimpot de la etapa de eliminación del offset hasta tener una salida igual a cero.
5. Activar el generador de señales, si se está utilizando el circuito propuesto, presionar el pushbotton y verificar el encendido del led del pin D13 del Arduino nombrado L.
6. Esperar cerca de 40 [s] o más para la lectura de los datos.
7. Si se desea realizar nuevamente este experimento, debe de esperarse 26 [s] para que el sistema llegue a su punto de equilibrio, presionar el botón de “Reset” del microcontrolador del generador de señales y repetir los pasos 5 y 6.
8. Tomar una imagen de las gráficas de las señales y guardar la información de las lecturas en un archivo con extensión “.csv”, se debe de guardar los datos de la forma (7.20), es decir, el primer renglón debe contener la información de la entrada y el segundo renglón la de la salida del sistema.

$$\begin{array}{cccccc} u(0), & u(1), & \cdots, & u(N-1), & u(N) & \\ c(0), & c(1), & \cdots, & c(N-1), & c(N) & \end{array} \quad (7.20)$$

donde N es el número total de datos.

9. Para finalizar el experimento, apagar las fuentes de alimentación y el osciloscopio.

Actividad 3

- Abrir el programa Matlab y transcribir los códigos que se encuentran en la sección A.3.2, A.3.3 y A.3.4 en diferentes scripts de Matlab y guardarlos en la misma carpeta donde se almacenaron los datos capturados de la planta, los scripts nombrados "butterworthz "mepmcr"son funciones, por lo cual deben de guardarse con el nombre de la función indicada al inicio de cada programa.

NOTA: El filtro empleado en esta práctica es el de Butterworth que puede variar de orden 1 a 10 y para el cálculo de las derivadas, el script propuesto emplea las fórmulas de diferencias divididas finitas centradas con alta exactitud.

- Evento con ruido en las señales.
 - Ingresar la siguiente información en la sección correspondiente del script de estimación

```

% Información para el programa
filename = '.csv';           % Nombre del archivo
TM =;                       % Tiempo de muestreo
Fc = 1;                     % Frecuencia de corte en [Hz]
FilOrden = 0;              % Orden del filtro de 0 a 10
P = [1,0,0; 0,1,0; 0,0,1]; % Matriz de covarianza
theta = [0; 0; 0];         % Vector de parametros,
                           % condiciones iniciales

```

En la primera variable se debe de ingresar el nombre del archivo donde se encuentre las mediciones y en la segunda variable el tiempo de muestreo de las mediciones. Por otro lado, al colocar 0 en el orden del filtro este no filtrará ninguna señal por lo cual la frecuencia de corte no se toma en cuenta en este evento, la matriz P se utilizará con pesos unitarios y el vector de parámetros θ se consideran nulos.

- Correr el script, guardar las gráficas de las derivadas de $c(t)$ y de la comparación de señales de la salida de la planta $c(t)$ y llenar la Tabla 7.1 con los valores de la estimación.
- Evento con las señales filtradas.
- Ingresar la siguiente información en la sección correspondiente del script

```

% Información para el programa
filename = '.csv';           % Nombre del archivo
TM =;                       % Tiempo de muestreo
Fc = 1;                     % Frecuencia de corte en [Hz]
FilOrden = 10;             % Orden del filtro de 0 a 10
P = [1,0,0; 0,1,0; 0,0,1]; % Matriz de covarianza
theta = [0; 0; 0];         % Vector de parametros,
                           % condiciones iniciales

```

Se coloca 10 en el orden del filtro y 1 [Hz] en la frecuencia de corte, se indica orden 10 para tener un mejor filtrado y la frecuencia de corte se escoge pensando en no atenuar las frecuencias importantes indicadas por la entrada y solo mitigar al ruido.

- Correr el script, guardar las gráficas de las derivadas de $c(t)$ y de la comparación de señales de la salida de la planta $c(t)$ y llenar una nueva Tabla 7.1 con los valores de la estimación de este evento.
- Realizar un acercamiento a las gráficas de entrada y salida de la planta, esto con la finalidad de poder observar el mitigamiento del ruido, el cual es el otro resultado del filtro y no solo el atraso de las señales.
- Para el último evento, se supone conocer el valor del parámetro α .
- Ingresar la siguiente información en el script

```

%% Informacion para el programa
filename = '.csv';           % Nombre del archivo
TM =;                       % Tiempo de muestreo
Fc = 1;                     % Frecuencia de corte en [Hz]
FilOrden = 10;             % Orden del filtro de 0 a 10
P = [0.0001,0,0; 0,1,0; 0,0,1]; % Matriz de covarianza
theta = [1; 0; 0];         % Vector de parametros,
                           % condiciones iniciales

```

La matriz P indica menor peso en la búsqueda del parámetro α , por lo cual, se debe de ingresar el valor del parámetro en las condiciones iniciales del vector θ . El algoritmo empleará el valor del parámetro conocido para ayudar en la búsqueda de los demás, pero ya no se le dará mucha importancia buscar el valor del parámetro conocido.

- Correr el script, guardar la gráfica de la comparación de señales de la salida de la planta $c(t)$ y llenar una nueva Tabla 7.1 con los valores de la estimación de este evento.

NOTA: Para la gráfica con el nombre “Comparación de señales de la salida de la planta $c(t)$ ”, la señal medida es la obtenida en el experimento, la señal estimada es la conseguida al simular el modelo de la planta con los parámetros estimados e ingresándole la entrada medida en el experimento y la señal teórica es la alcanzada simulando el modelo de la planta con los parámetros reales e ingresándole la entrada medida en el experimento, este último modelo fue la ecuación base para construir la planta.

Parámetros	Valor teórico	Valor estimado	% de error
α	1		
β	0.147		
γ	0.667		

Tabla 7.1: Comparación de los parámetros reales contra los estimados.

Cuestionario

1. El ruido presente en las señales, ¿Tienen algún efecto positivo o negativo en la estimación?
2. Las señales filtradas, ¿Presentan alguna mejoría en la estimación?
3. Ayudando al algoritmo ingresando un parámetro conocido y quitándole el peso en su búsqueda, ¿Qué efecto tiene en la estimación?

7.7.2. Explicación y solución de la práctica

Actividad 2

En la Figura 7.2 se muestra la señal presentada en la entrada y salida de la planta al ingresarle la señal seleccionada de excitación.

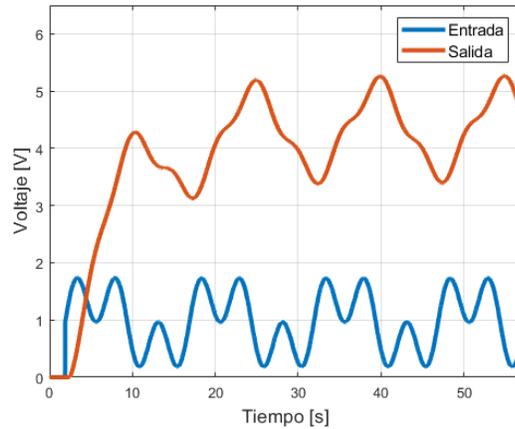


Figura 7.2: Señales de la planta obtenidas con una excitación persistente en la entrada.

Actividad 3

Evento con ruido en las señales.

Para esta práctica se necesitó conocer hasta la segunda derivada de la salida de la planta para poder aplicar el algoritmo, se empleó las fórmulas de diferencias divididas finitas centradas con alta exactitud para poder encontrarlas, las señales obtenidas después de derivar la señal de salida sin filtrar se pueden observar en la Figura 7.3.

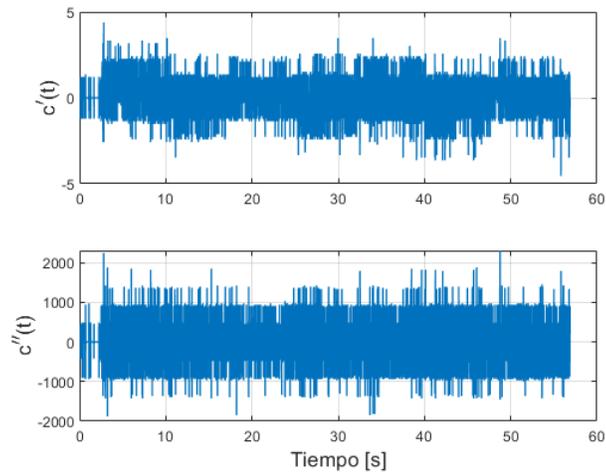


Figura 7.3: Derivadas de la señal de salida $c(t)$ de la planta, $c(t)$ sin filtrar.

Para la estimación paramétrica se empleó la matriz de covarianza

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con las condiciones iniciales de los parámetros

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando los scripts de Matlab proporcionados por el manual de prácticas se obtuvieron las siguientes estimaciones de los parámetros

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.1565 \\ 0.4065 \\ 1.3336 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

La comparación de los valores reales contra los estimados y el error de exactitud se presentan en la Tabla 7.2.

Parámetros	Valor teórico	Valor estimado	% de error
α	1	0.1565	84.35
β	0.147	0.4065	176.53
γ	0.667	1.3336	99.94

Tabla 7.2: Comparación de los parámetros reales contra los estimados del evento 1.

En la Figura 7.4 se colocó la señal medida, la señal estimada y la señal teórica de la salida de la planta para poder compararlas. La señal medida es la obtenida en el experimento, la señal estimada es la conseguida al simular el modelo de la planta con los parámetros estimados e ingresándole la entrada medida en el experimento y la señal teórica es la alcanzada simulando el modelo de la planta con los parámetros reales e ingresándole la entrada medida en el experimento, este último modelo fue la ecuación base para construir la planta.

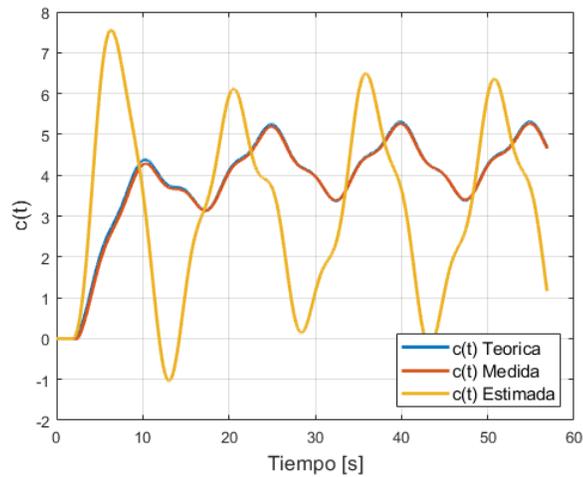


Figura 7.4: Comparación de señales de la salida de la planta $c(t)$ del evento 1.

Evento con las señales filtradas.

Como se puede observar en la Figura 7.3, el ruido se incrementó al elevar el orden de la derivada, esto tiene como consecuencia una mala estimación, por lo cual se debe de emplear un filtro ya sea construido por el lector o uno proporcionado por Matlab, por ejemplo, en este caso se diseñó un filtro de orden 10 de Butterworth y se pasaron las señales obtenidas de la planta por él y al calcular las derivadas de la salida filtrada se obtuvieron las señales mostradas en la Figura 7.5.

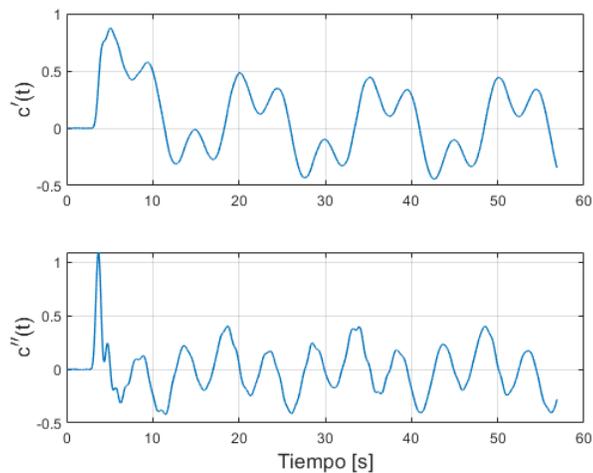


Figura 7.5: Derivadas de la señal de salida $c(t)$ de la planta, $c(t)$ filtrado.

En la Figura 7.6 se muestra un acercamiento a las señales de la planta, en la cual se puede apreciar como el ruido presente en ellas se mitiga en las señales filtradas, además también presentan un retardo debido al filtro.

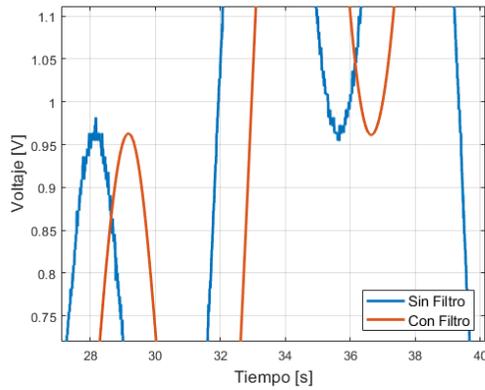
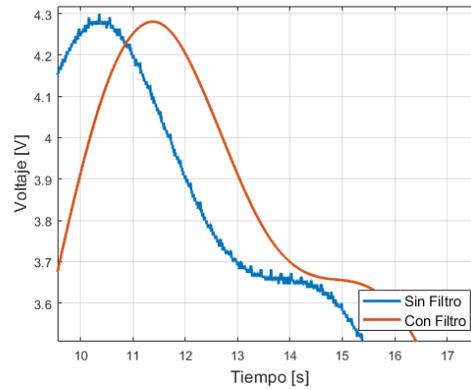
(a) Entrada de la planta $u(t)$.(b) Salida de la planta $c(t)$.

Figura 7.6: Acercamiento a las señales de la planta con y sin filtrar.

Los valores de los parámetros estimados son

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.9589 \\ 0.1397 \\ 0.6298 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

La comparación de los valores reales contra los estimados y el error de exactitud se muestran en la Tabla 7.3.

Parámetros	Valor teórico	Valor estimado	% de error
α	1	0.9589	4.11
β	0.147	0.1397	4.97
γ	0.667	0.6298	5.58

Tabla 7.3: Comparación de los parámetros reales contra los estimados del evento 2.

La comparación de la señal teórica, la señal medida y la señal estimada del evento 2 se muestran en la Figura 7.7.

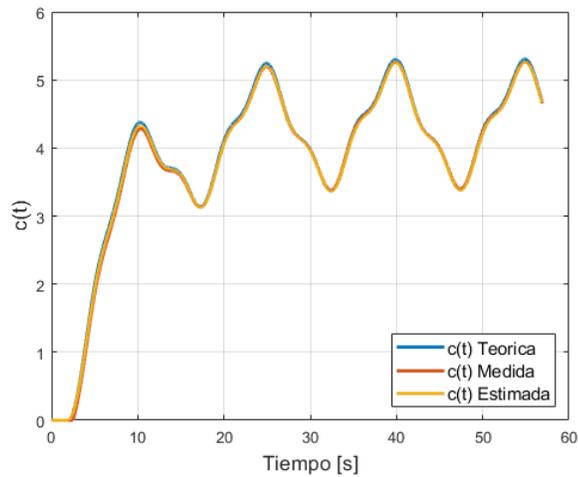


Figura 7.7: Comparación de señales de la salida de la planta $c(t)$ del evento 2.

Último evento, se supone conocer el valor del parámetro α .

Suponiendo el conocimiento del valor del parámetro α , se emplea la matriz de covarianza

$$P = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con las condiciones iniciales de los parámetros

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los valores de los parámetros estimados son

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.9986 \\ 0.1430 \\ 0.6469 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

La comparación de los valores reales contra los estimados y el error de exactitud se muestran en la Tabla 7.4.

Parámetros	Valor teórico	Valor estimado	% de error
α	1	0.9986	0.14
β	0.147	0.1430	2.72
γ	0.667	0.6469	3.01

Tabla 7.4: Comparación de los parámetros reales contra los estimados del evento 3.

La comparación de la señal teórica, la señal medida y la señal estimada del evento 3 se muestran en la Figura 7.8.

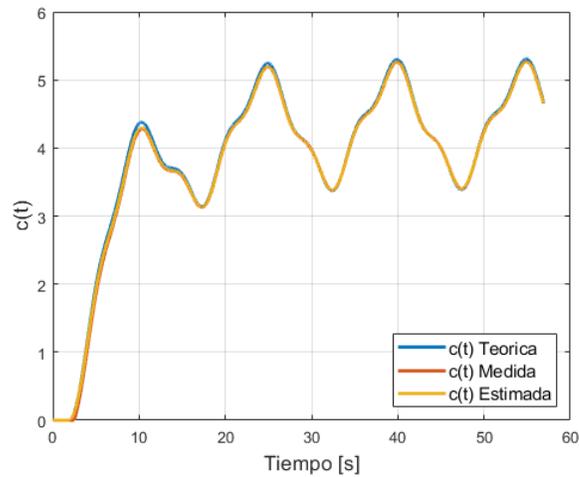


Figura 7.8: Comparación de señales de la salida de la planta $c(t)$ del evento 3.

Cuestionario

1. Tiene un efecto negativo ya que el algoritmo da valores de parámetros estimados erróneos muy lejanos a los reales, cabe señalar que estos errores se obtienen debido al esfuerzo del algoritmo de explicar este ruido.
2. Los parámetros convergen adecuadamente a los valores reales, aunque presentan un error de exactitud relativamente pequeño.
3. Se acerca mucho más a los valores reales, aunque al comparar las señales, la medida, la estimada y la teórica, se puede observar que la teórica difiere un poco de la medida y esto puede ser debido a la tolerancia de los componentes que constituyen a la planta o por la resolución de los sensores de medición. Por otro lado, se puede decir que la señal estimada es muy cercana a la medida y por lo tanto es una buena estimación.

Capítulo 8

Circuitos Integrados No Lineales

8.1. Diodo

Es un dispositivo electrónico que permitir el paso de la corriente en un solo sentido, usualmente al analizar circuitos que emplean diodos es necesario analizar el sentido de las corrientes del circuito y dependiendo del sentido se puede considerar al diodo en dos estados, alimentado en directa (encendido) o alimentado en inversa (apagado), pero dicha representación no nos permite llegar a las conclusiones deseadas. Para lograr entender de forma matemática es necesario recurrir a la ecuación de corriente del diodo.

La ecuación que representa la relación entre voltaje y corriente del diodo está dada por la siguiente ecuación

$$i_D = I_0 e^{\frac{v_D}{V_T}} \quad (8.1)$$

donde V_T es el voltaje térmico que este dado por la siguiente ecuación

$$V_T \equiv \frac{kT}{q_e} \quad (8.2)$$

cabe denotar que k es la constante de Boltzman, T es la temperatura en la escala Kelvin y q_e es la carga del electrón.

8.2. Configuraciones No Lineales Del Amplificador

8.2.1. Amplificador Logarítmico

Una de la aplicaciones del diodo se puede observar en la implantación de los amplificadores no lineales, en el circuito de la figura 8.1 se puede observar el amplificador en su configuración logarítmica. Usando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo de la entrada inversora se puede obtener la ecuación (8.3).

$$i_R + i_D = 0 \quad (8.3)$$

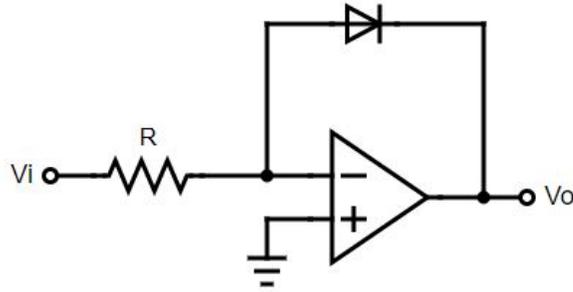


Figura 8.1: Amplificador logarítmica inversor.

Al sustituir la ecuación (8.1) y la ecuación obtenida mediante la ley de Ohm para obtener la corriente de la resistencia R en la ecuación (8.3), se obtiene la relación entrada-salida del amplificador logarítmico.

$$v_o = -v_T \ln\left(\frac{v_i}{RI_s}\right) \quad (8.4)$$

Como se pudo observar anteriormente, el amplificador logarítmico invierte el signo de la señal, para evitar este signo opuesto es necesario emplear un amplificador inversor para obtener el mismo signo a la entrada y a la salida como se observa en la figura 8.2.

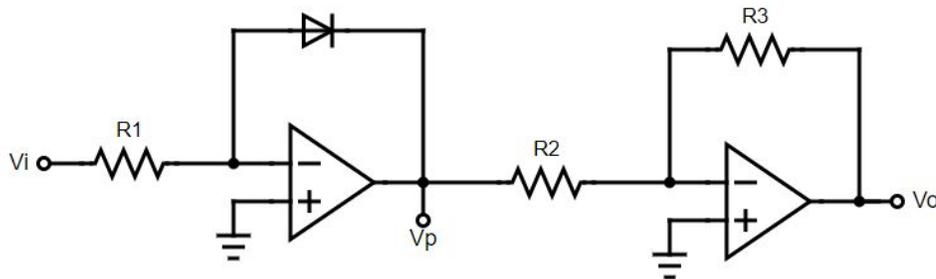


Figura 8.2: Amplificador logarítmico.

8.2.2. Amplificador Exponencial

En el circuito de la figura 8.3 se puede observar el amplificador en su configuración exponencial,

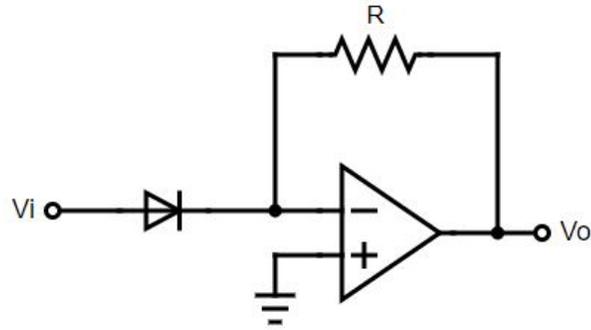


Figura 8.3: Amplificador exponencial inversor.

la relación entrada-salida esta dada por la siguiente ecuación.

$$v_o = -I_s R e^{\frac{v_i}{v_T}} \quad (8.5)$$

De igual forma que en el amplificador logarítmico, es necesario emplear un amplificador inversor para obtener el mismo signo a la entrada y a la salida.

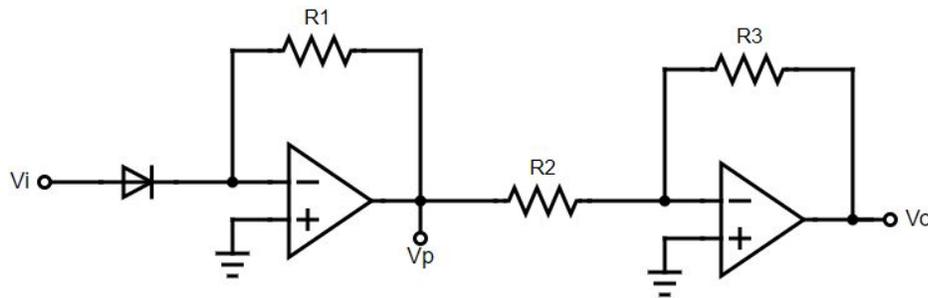


Figura 8.4: Amplificador exponencial.

8.2.3. Amplificador multiplicador de señales.

La culminación de la implantación de los amplificadores operacionales en la configuración logarítmica y exponencial recae en su utilidad para dar origen al multiplicador de señales, que dicho circuito requiere de los amplificadores antes mencionados.

En el análisis del amplificador multiplicador es necesario recordar una de las propiedades de los logaritmos que se observa en la ecuación (8.6).

$$\log(a) + \log(b) = \log(ab) \quad (8.6)$$

En este trabajo se ha descrito el uso del amplificador para obtener el logaritmo de una señal, el lector podrá intuir que es necesario emplear un amplificador sumador para poder aprovechar las propiedades de los logaritmos y obtener un logaritmos de dos señales que

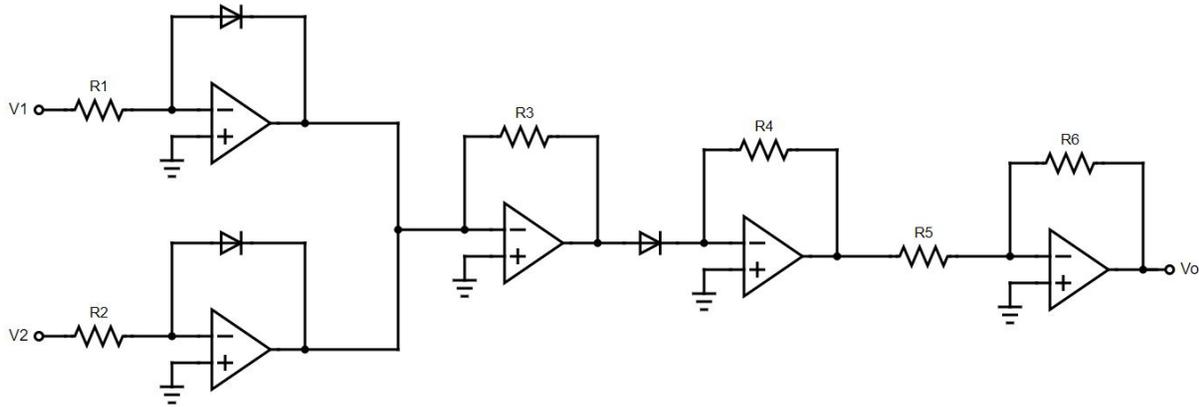


Figura 8.5: Amplificador operacional multiplicador.

se multiplican. Finalmente solo es necesario conectar en serie un amplificador antilogarítmico para poder obtener la multiplicación de las señales de entrada. La discusión anterior culmina en un circuito como el que se puede observar en la figura 8.5.

La ecuación del circuito 8.5 esta dada por

$$v_o = -\frac{v_1 v_2}{R I_s} \quad (8.7)$$

Si el último amplificador cuenta con una ganancia $A = R I_s$, la ecuación anterior se reduce a la siguiente.

$$v_o = v_1 v_2 \quad (8.8)$$

La ecuación (8.8) solo es valida para el primer cuadrante, es decir $v_1, v_2 \geq 0$.

8.3. Práctica 8

8.3.1. Práctica 8: Amplificadores No Lineales

Objetivos

- El alumno comprenderá el amplificador exponencial y logarítmico.
- El alumno obtendrá modelos para los amplificadores no lineales.

Material

- 2 diodos.
- 2 resistencias de $1[M\Omega]$, 4 resistencias de $2[k\Omega]$.
- 4 amplificadores operacionales TL081 o un amplificador operacional TL084.
- 1 potenciómetro DE $100[k\Omega]$.

Desarrollo

I- Actividad 1

- 1) Realice las conexiones del circuito 8.6 en su tabla de proyectos (protoboard).

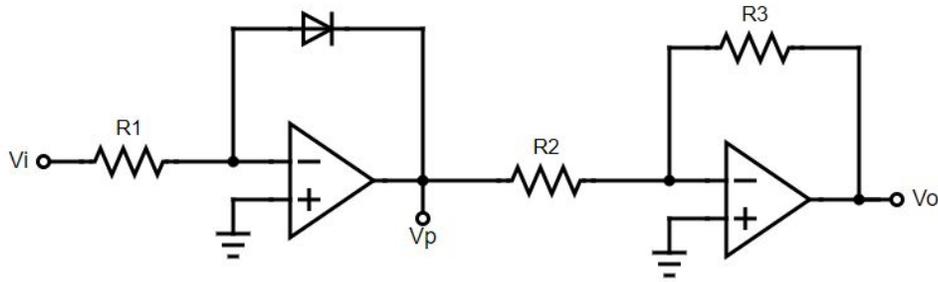


Figura 8.6: Amplificador logarítmico.

- 2) Utilice el potenciómetro para completar la tabla 8.1 y obtenga la gráfica usando la tabla obtenida.

$v_i[V]$	$v_o[V]$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Tabla 8.1: Mediciones del amplificador logarítmico.

II- Actividad 2

- 1) Realice las conexiones del circuito 8.7 en su tabla de proyectos (protoboard).
- 2) Utilice el potenciómetro para completar la tabla 8.2 y obtenga la gráfica usando la tabla obtenida.

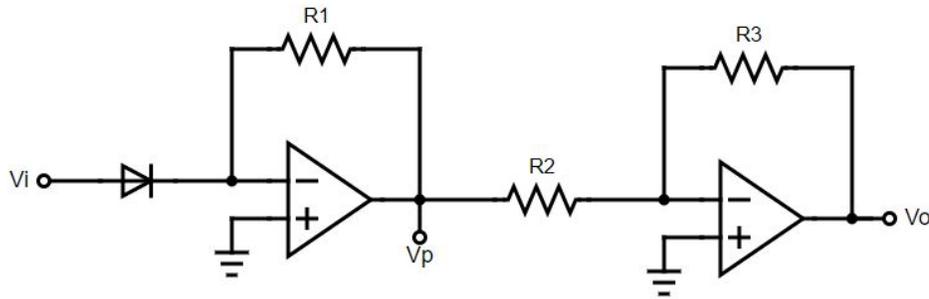


Figura 8.7: Amplificador exponencial.

$v_i[V]$	$v_o[V]$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Tabla 8.2: Mediciones del amplificador exponencial

8.4. Circuitos Integrados (Operadores Aritméticos).

En la sección anterior se planteó la posibilidad de emplear los amplificadores no lineales de forma teórica, de forma práctica se suelen emplear los multiplicadores, de los circuitos integrados especialmente diseñados, dichos circuitos multiplicadores se fundamentan en el principio de transconductancia variable. Algunos ejemplos de circuitos que se suelen emplear para este propósito son AD534 y AD633, siendo estos últimos circuitos integrados capaces de realizar operaciones aritméticas.

8.4.1. AD633

El AD633 es un circuito integrado aritmético, en esta sección se mencionarán las operaciones que se pueden realizar con la ayuda de este circuito integrado. La estructura del circuito se puede observar en la siguiente figura.

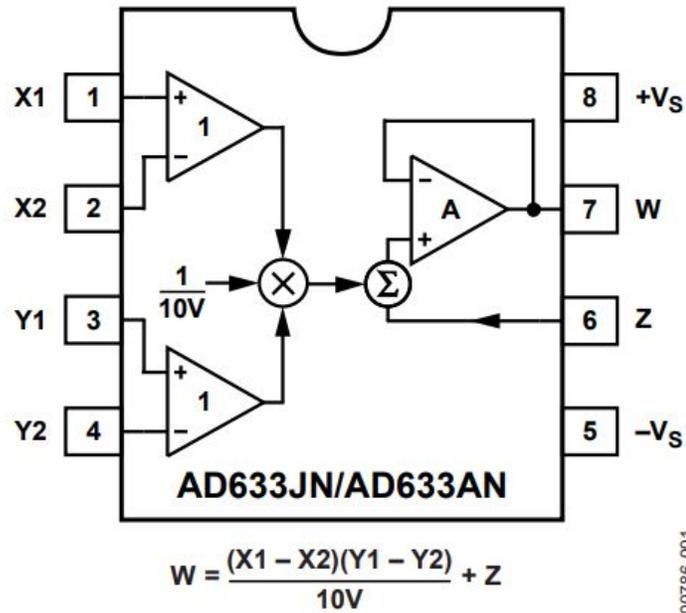


Figura 8.8: Circuito integrado AD633 obtenido de *Low Cost Analog Multiplier*, 2015

Los nombres de los pines se pueden observar en la siguiente tabla.

Pin No.	Mnemonic	Description
1	X1	X Multiplicand Noninverting Input
2	X2	X Multiplicand Inverting Input
3	Y1	Y Multiplicand Noninverting Input
4	Y2	Y Multiplicand Inverting Input
5	-V _s	Negative Supply Rail
6	Z	Summing Input
7	W	Product Output
8	+V _s	Positive Supply Rail

Figura 8.9: Pines del AD633 obtenido de *Low Cost Analog Multiplier*, 2015

Como se observa en la imagen obtenida de la hoja de especificaciones *Low Cost Analog Multiplier*, 2015, se cuenta con dos entradas para X y dos para Y siendo entradas diferenciales, es decir funcionan tal y como un amplificador diferencial. Ambas entradas X e Y son multiplicadas y escaladas por un factor de 1/10 para finalmente ser sumadas a un factor de suma Z siendo esta la salida W.

La ecuación de este sistema es

$$W = \frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10} + Z \quad (8.9)$$

AD633 como multiplicador

En el circuito 8.10 se muestra como se puede utilizar al AD633 como un multiplicador analógico, la entrada al sistema puede ser la fuente X y es posible usar la fuente Y_1 como una fuente constante para observar la multiplicación de ambas señales. Es necesario indicar que este circuito multiplicador es de 4 cuadrantes, a diferencia del obtenido anteriormente.

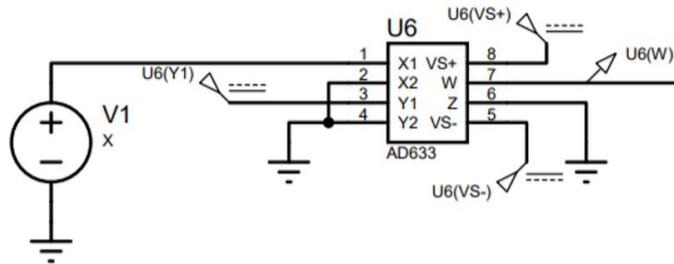


Figura 8.10: Circuito AD633 como multiplicador.

AD633 como función cuadrática

Al igual que en el divisor la hoja de especificaciones nos propone el circuito necesario para usar el AD633 como una operación cuadrática.

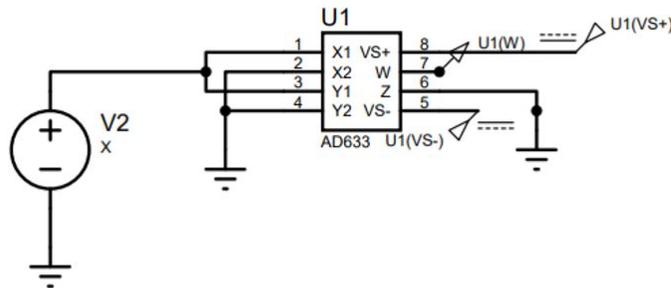


Figura 8.11: Circuito AD633 como función cuadrática.

El circuito 8.11 se puede expresar en la ecuación (8.10).

$$W = \frac{E^2}{10} \quad (8.10)$$

Capítulo 9

Plantas No Lineales

9.1. Oscilador de Van Der Pol

El oscilador de Van Der Pol es un circuito que como tal dice su nombre en un oscilador con amortiguamiento no lineal. Su dinámica puede ser expresada mediante la ecuación (9.1).

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (9.1)$$

En control, el oscilador de Van Der Pol se suele emplear para exponer un concepto que solo se presenta en sistemas no lineales, siendo este los ciclos limite, es por esta razón que se ha seleccionado al oscilador de Van Der Pol para la práctica que se desarrollara. Como se mencionó anteriormente este circuito exhibe un comportamiento estable, pero a diferencia de los sistemas lineales la estabilidad no puede ser establecida en un solo punto en el espacio de estados, sino a una colección de puntos de equilibrio que forma dicha trayectoria también llamada órbita estable.

En la figura 9.1 se muestra el plano de fase que se ha generado para la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2(1 - x^2)\frac{dx}{dt} - x \quad (9.2)$$

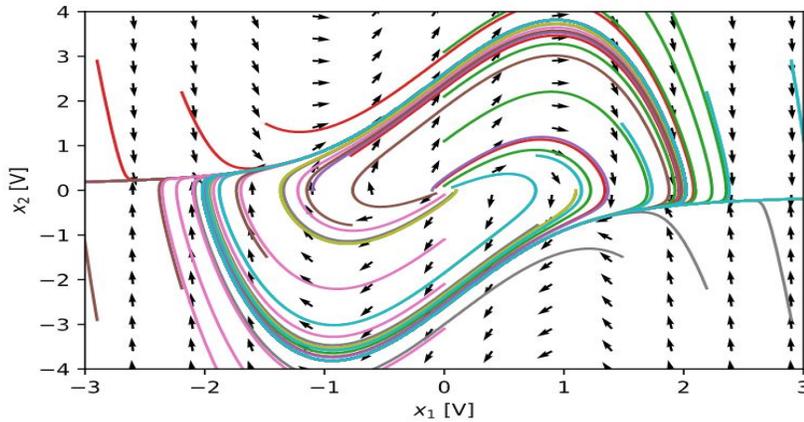


Figura 9.1: Plano de Fase Oscilador de Van Der Pol.

En la figura 9.1 se puede observar que todas las trayectorias tienden a una orbita, es decir cualquier condición inicial que se utilice llegará a formar parte de la trayectoria cerrada que se puede observar.

En particular se pueden observar dos casos para las condiciones iniciales

- 1- Condiciones Iniciales Internas: Esto se refiere a que las condiciones iniciales se encuentran dentro de la trayectoria formada por el ciclo límite, es decir es el conjunto formado por los puntos internos de ciclo límite. Para estos puntos se puede concluir que tienen un comportamiento inestable, ya que el estado tiende a crecer hasta alcanzar el ciclo límite. Una forma de explicar lo anterior es con mencionar que el punto de equilibrio del origen es inestable, ocasionando que las trayectorias no converjan al origen.
- 2- Condiciones Iniciales Externas: Estas condiciones se refieren a todos los puntos que se encuentran en la parte externa del ciclo límite. Todos los puntos externos tienen un comportamiento estable ya que muestran un decrecimiento en el estado conforme t incremente.

Para la práctica se han utilizado los conocimientos expuestos en el trabajo para poder diseñar el circuito que permitirá mostrar el comportamiento del oscilador de Van Der Pol, dicho circuito al que se ha llegado se muestra en la figura 9.2.

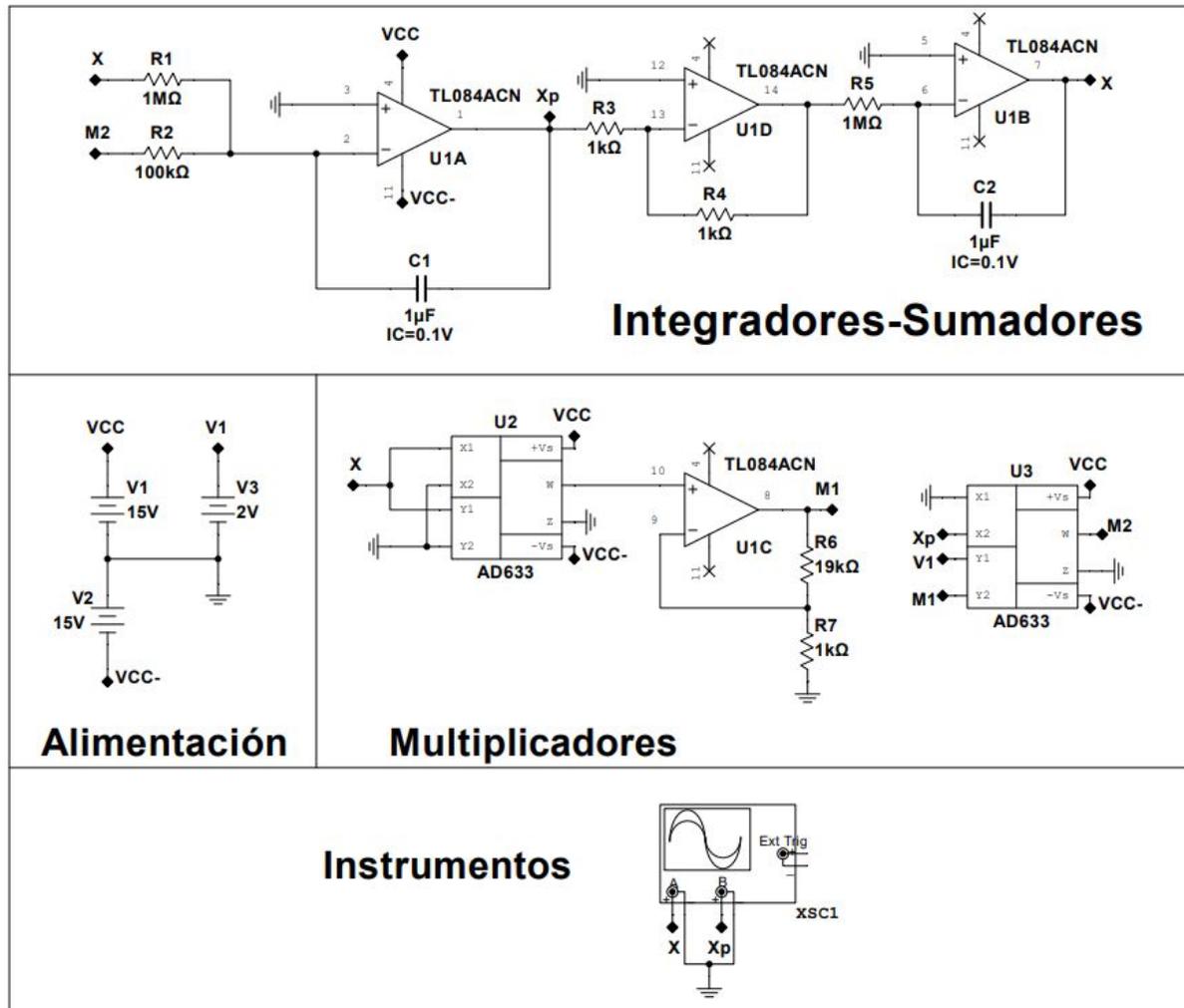


Figura 9.2: Circuito del Oscilador Van Der Pol.

9.2. Práctica 9

9.2.1. Práctica 9 Oscilador Van Der Pol

Objetivos

- El alumno entenderá el funcionamiento del oscilador de Van Der Pol.
- El alumno será capaz de simular y generar planos de fases mediante Python.
- El alumno identificará y entenderá el concepto de ciclo limite.

Material

- Computadora

- Python

Previo

Se le pide que instale algún editor para Python, estos pueden ser:

- Anaconda
- Visual Studio
- Jupyter

Desarrollo

I- Actividad 1

Se le pide al alumno que conecte el siguiente circuito en el software de preferencia.

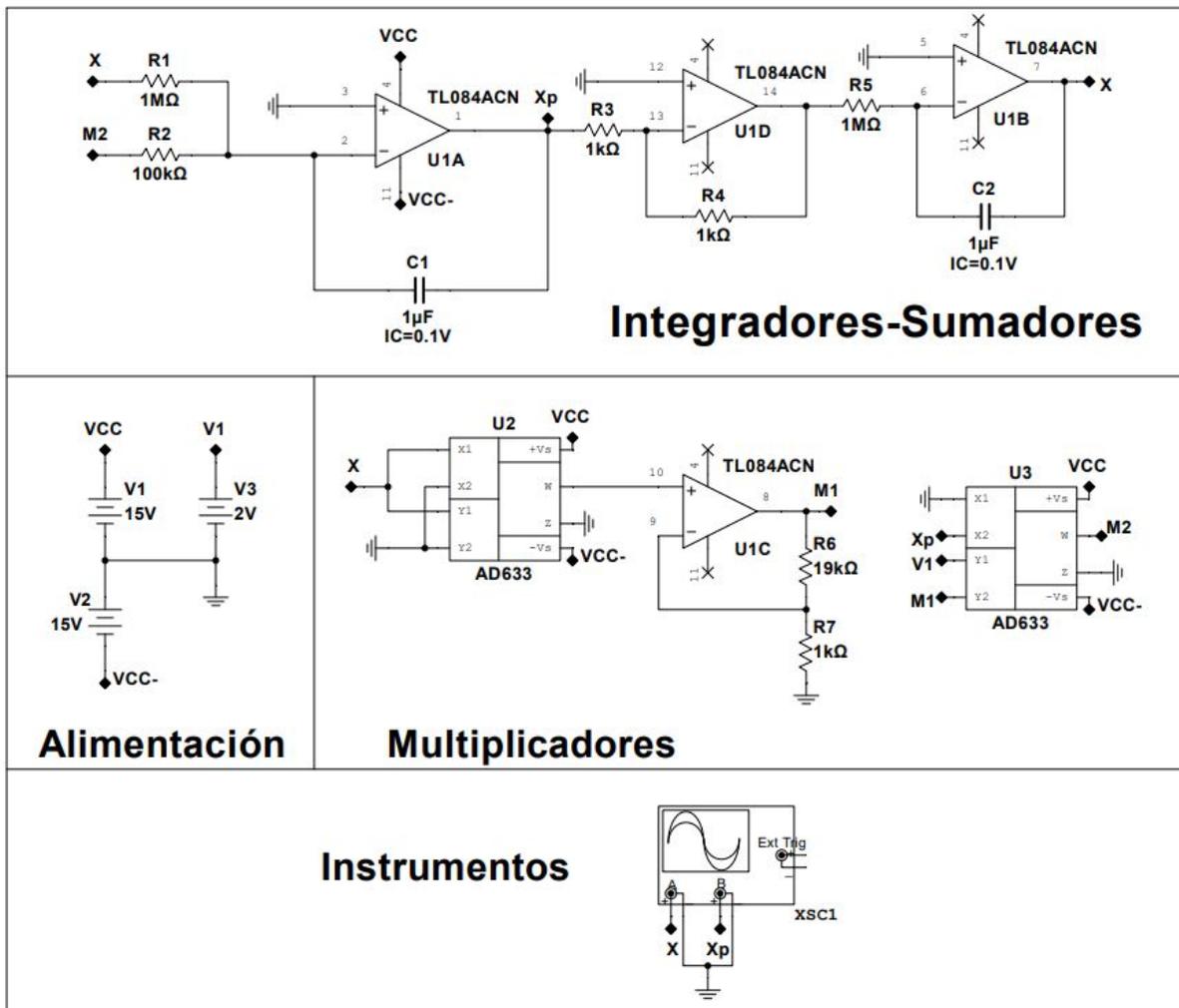


Figura 9.3: Circuito del Oscilador Van Der Pol.

Es necesario asignarles condiciones iniciales a los capacitores diferente de cero, se recomienda utilizar las siguientes condiciones para los capacitores.

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Cuestionario

Modifique las condiciones iniciales de los capacitores para cumplir con las siguiente preguntas.

- ¿Qué puede observar cuando las condiciones iniciales cumplen $C_1, C_2 > |3V|$?
- ¿Qué puede observar cuando las condiciones iniciales cumplen $C_1, C_2 < |3V|$?

II- Actividad 2

En esta práctica es necesario usar una plataforma para programar en Python, para ello es necesario abrir su entorno de trabajo preferido.

- Paso 1: Importar Librerías.

Para empezar con la programación es necesario importar las librería que se van a utilizar. Las librería que se utilizarán son:

- `numpy`: Es la librería que nos permite operar sobre arreglos y realizar operaciones de álgebra lineal
- `matplotlib.pyplot`: Es la librería que nos permite generar graficas en python.
- `math`: Se encarga de proporcionar funciones matemáticas elementales, son de forma escalar.

Lo anterior se realiza con la instrucción `import`, en Python a las importaciones se les puede asignar un identificador usando la palabra reservada `as`. Lo anterior nos permite simplificar el código al poder utilizar una librería con un nombre fácil de identificar. El código en la primera entrada debe ser el siguiente

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

- Paso 2 Definimos la función

En esta celda se define la función vectorial del oscilador de Van Der Pol, los parámetros que recibe la función están dados por el vector de estados, el cual esta constituido por las variables de estados. El segundo parámetro que recibe la función debe ser la variable de tiempo y en ultimo lugar recibe los parámetros necesarios de la función, siendo las constantes del sistema.

```
def vectorfield(w,t,p):
    x,y=w
    m,c,k=p

    f=[y,
        (1/m)*(2*c*(1-x**2)*y-k*x)]

    return f
```

c) Paso 3 Definimos los parámetros del método numérico

Es necesario asignar los parámetros del resolvidor como se ve en el siguiente fragmento de código.

```
# ODE solucionador parametros
abserr = 1.0e-8
relerr = 1.0e-6
#El stoptime es el tiempo final
stoptime = 20.0
#numpoints representa el numero de puntos que se desean
numpoints = 1000

# Se crea el vector t para el tiempo que se desea solucionar
t = [stoptime * float(i) / (numpoints - 1) for i in
      range(numpoints)]
```

d) Paso 4 Creando el plano de fase y dibujando el campo vectorial.

Esta celda del programa consiste de tres partes:

1- Creando plano de fase:

En la primera parte se ha definido una trayectoria circular haciendo uso de los ciclos for, estos ciclos "for" nos dan las condiciones iniciales que serán utilizadas para cada trayectoria que se dibuje. Una vez establecidas las condiciones iniciales, se agrupan en el arreglo w_0 , los parámetros del sistema utilizados son iguales a 1 y se han asignado en el arreglo p . Finalmente se pasan estos arreglos, p y w_0 , al solucionador que nos devuelve la solución de la ecuación. Dicha solución se asigna en la variable w_{sol} y se grafica la trayectoria con el método plot de la librería matplotlib.

```
for r in np.arange(0.1,6,1):
    for c in np.arange(0,2.5*math.pi,math.pi/4.0):
        x = r*math.cos(c)
        y = r*math.sin(c)
        p = [1,1,1]
        w0 = [x, y]
        wsol = odeint(vectorfield, w0, t, args=(p,),
                      atol=abserr, rtol=relerr)
        plt.plot(wsol[:,0],wsol[:,1])
```

```

start=-4.1
end=4
step=.5
x, y =
    np.meshgrid(np.arange(start, end, step), np.arange(start, end, step))

```

2- Dibujando el campo vectorial:

La segunda parte de esta celda crea un meshgrid y se manda como parámetro a la función `vectorfield`, que define al sistema, los valores que regresa la función se normalizan para obtener los vectores unitarios del campo vectorial y con la ayuda del método `quiver` se dibujan los vectores encima del plano de fase.

```

u, v=vectorfield([x, y], 0, p)
U = u / np.sqrt(u**2 + v**2);
V = v / np.sqrt(u**2 + v**2);
Q=plt.quiver(x, y, U, V, scale=40)
plt.xlim(-3, 3)
plt.ylim(-4, 4)
plt.xlabel('$x_1$ [V]')
plt.ylabel('$x_2$ [V]')

```

3- Guardando la imagen:

En la última sección se utiliza el método `savefig` de la librería de `matplotlib`, este comando nos permite guardar la imagen en el directorio.

```

plt.savefig('PlanoFase.svg')

```

e) Paso 5 Solucionado para solo una trayectoria

Utilice el siguiente código para encontrar la solución para solo una trayectoria.

```

x = -0.1
y = -0.1
p = [1, 1, 1]
w0 = [x, y]
wsol = odeint(vectorfield, w0, t, args=(p,),
              atol=abserr, rtol=relerr)

plt.plot(wsol[:, 0], wsol[:, 1])
plt.xlabel('$x_1$ [V]')
plt.ylabel('$x_2$ [V]')

```

9.2.2. Cuestionario

Modifique las condiciones iniciales y concluya sobre el sistema.

9.2.3. Solución de la Práctica

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al implantar el circuito y obtener mediciones de las señales deseadas. En la figura 9.4 se muestran dos gráficas obtenidas mediante simulación, la gráfica 9.4a, proviene al solucionar la ecuación 9.2 usando Python. La figura 9.4b corresponde a la simulación del circuito de la figura 9.2 mediante Multisim.

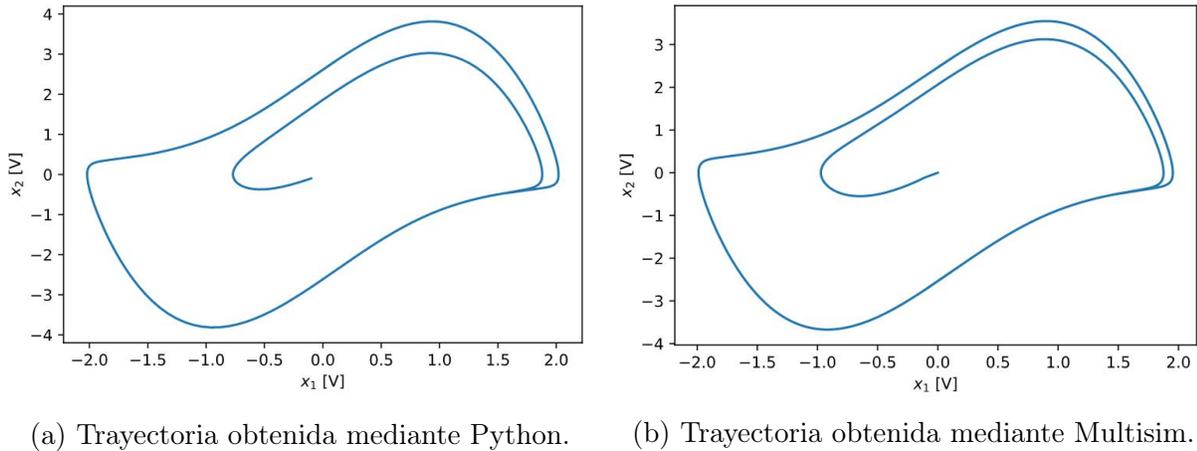


Figura 9.4: Trayectorias del oscilador de Van Der Pol.

Como se puede observar en la figura 9.4, el circuito tiene una respuesta casi igual a la obtenida con la resolución de la ecuación diferencial.

En la figura 9.5 se pueden observar las gráficas obtenidos al implantar el circuitos de la práctica. En la gráfica izquierda se muestra la trayectoria usando los datos crudos y en la gráfica derecha se muestran los resultados al utilizar un filtro para obtener una trayectoria más suave.

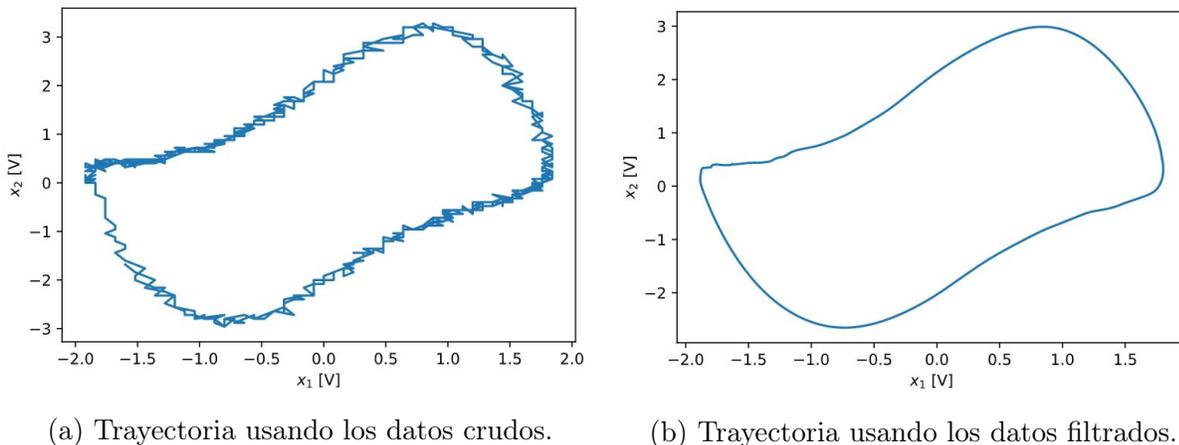


Figura 9.5: Implantación del oscilador de Van Der Pol.

De lo anterior podemos concluir que las trayectorias obtenidas mediante la implantación son bastante cercanas a las trayectorias que se esperaban, en específico conservan el comportamiento de la ecuación del oscilador del Van Der Pol.

Conclusiones

Al final se logró elaborar 9 prácticas como material didáctico para diferentes materias de control impartidas por la facultad de ingeniería, dichas prácticas tienen el propósito de complementar y reforzar algunos conceptos teóricos, además es una ventaja el poder crear plantas rápidas y pequeñas de control para fines experimentales.

Se recalca el hecho de que la finalidad del presente trabajo escrito respalda a los otros dos documentos creados y fue desarrollado con la finalidad de ser el trabajo principal y se puede definir como un archivo de autocontenido que posee la información que sustenta las prácticas, así como los conceptos que se desean una asimilación mejor con la ayuda de experimentos.

Además, se promueve el uso de software como Matlab y Python. Matlab para analizar y simular plantas, así como sistemas de control para comprobar y verificar su correcto funcionamiento.

Por otro lado, se puede decir que este trabajo es un primer avance de la idea de creación de prácticas para asignaturas de control, por ello se puede creer que servirá como punto de partida para futuros proyectos que planteen modificarlo y/o complementarlo.

Por último, se puede decir que este material se pondrá a disposición de los profesores que imparten las asignaturas de control, de manera que ellos decidan la mejor adaptación de las prácticas y su uso en sus labores docentes. Se planeaba aplicar las prácticas a los alumnos de las asignaturas relacionadas con el fin de observar el desempeño de estas y proponer mejoras. Sin embargo, debido a la pandemia de COVID-19, esto no fue posible finalmente.

Apéndice A

Anexos

A.1. Anexos Práctica 1

A.1.1. Actividad 2

Se ha propuesto el circuito de la figura A.1, dicho circuito se empleará para obtener un circuito que sea un control proporcional con su planta.

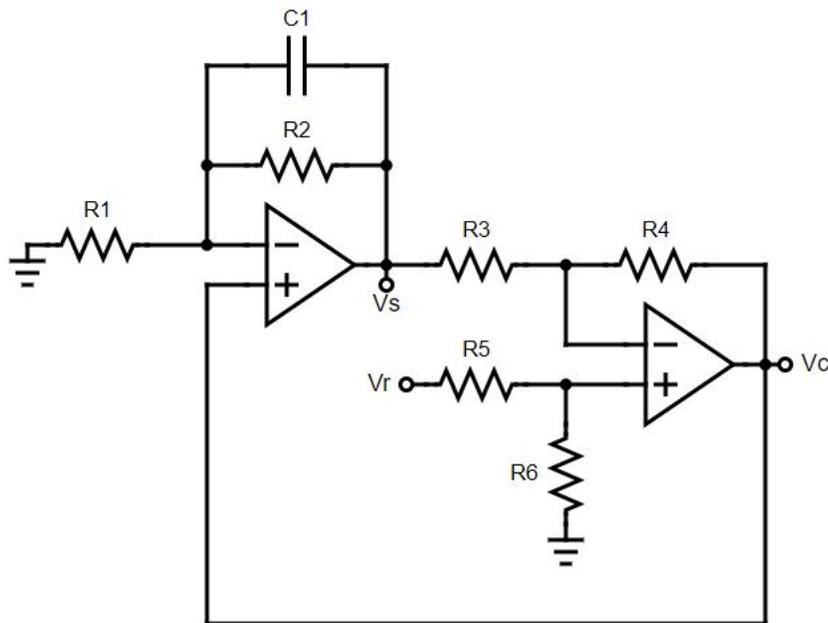


Figura A.1: Circuito de la planta con controlador.

Como se puede observar el controlador de la figura A.1 es un amplificador operacional diferencial, lo que nos indica que su salida esta dada por la ecuación (2.25), realizando un cambio de variables a la ecuación (2.25) se obtiene (A.1). Donde $V_{oc} = V_o$ es el voltaje de

salida del controlador, $V_{ref} = V_P$ y V_{os} es el voltaje del sistema a controlar.

$$V_{oc} = \frac{dV_{ref}(R_3 + R_4) - R_4V_{os}}{R_3} \quad (\text{A.1})$$

De (2.31) se realiza un cambio de variables con $V_{os} = V_o$ y $V_i = V_{oc}$ y sustituyendo (A.1) para luego simplificar se obtiene la ecuación del sistema con el controlador propuesto.

$$V_{os} = \frac{d(R_3 + R_4)(s + 11)}{(R_3 + R_4)s + (R_3 + 11R_4)} V_{ref} \quad (\text{A.2})$$

Para la segunda parte es necesario obtener el modelo de la planta con el controlador, el cual esta descrito con la ecuación (A.3).

$$y = \frac{K_P(s + 11)}{(1 + K_P)s + (11K_P + 1)} y_r \quad (\text{A.3})$$

Para poder comparar el modelo (A.3) y (A.1), es necesario establecer una relación de variables $V_{os} = y$ y $V_{ref} = y_r$, de igualar se obtiene lo siguiente.

$$\frac{K_P(s + 11)}{(1 + K_P)s + (11K_P + 1)} = \frac{d(R_3 + R_4)(s + 11)}{(R_3 + R_4)s + (R_3 + 11R_4)}$$

Si se desea mantener la igualdad es necesario igualar los numeradores y los denominadores dando origen así a (A.4) y (A.5).

$$K_P(s + 11) = d(R_3 + R_4)(s + 11) \quad (\text{A.4})$$

$$(1 + K_P)s + (11K_P + 1) = (R_3 + R_4)s + (R_3 + 11R_4) \quad (\text{A.5})$$

De A.4 es posible obtener el valor de d

$$d = \frac{K_P}{R_3 + R_4} \quad (\text{A.6})$$

de la ecuación (A.5) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones al igualar los términos de los polinomios característicos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + K_P \\ 1 + 11K_P \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Solucionando el sistema anterior por la matriz inversa se obtiene,

$$\begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ K_P \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

sustituyendo lo anterior podemos encontrar el valor de K_P , ya que la constante es igual al valor de la resistencia y con lo anterior podemos implementar el circuito de un controlador proporcional. Con lo anterior podemos garantizar que el circuito propuesto

puede representar un control proporcional con el valor de la resistencia R_4 como el valor de la constante proporcional del controlador.

En el circuito a implementar usaremos valores de (A.8) de la magnitud de kiloOhms, ya que si se dejan sin un escalamiento se dificultará el poder variar los valores de las resistencias para la constante proporcional, por la falta de resistencias cercanas a la unidad, es decir se utilizará (A.9).

$$\begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ K_P \end{bmatrix} [k\Omega] \quad (\text{A.9})$$

Lo anterior no afecta al análisis previamente realizado, se puede decir que las ecuaciones son exactamente iguales con la diferencia de un factor aplicado a las ganancias del controlador.

A.1.2. Actividad 3

Se puede realizar un análisis similar al anterior para encontrar que se puede expresar un control integral con el circuito (a) de la figura A.2, pero como se puede observar la cantidad de componentes aumenta de forma radical. Por lo anterior se ha decidido usar una versión más sencilla siendo el circuito (b) de la figura A.2.

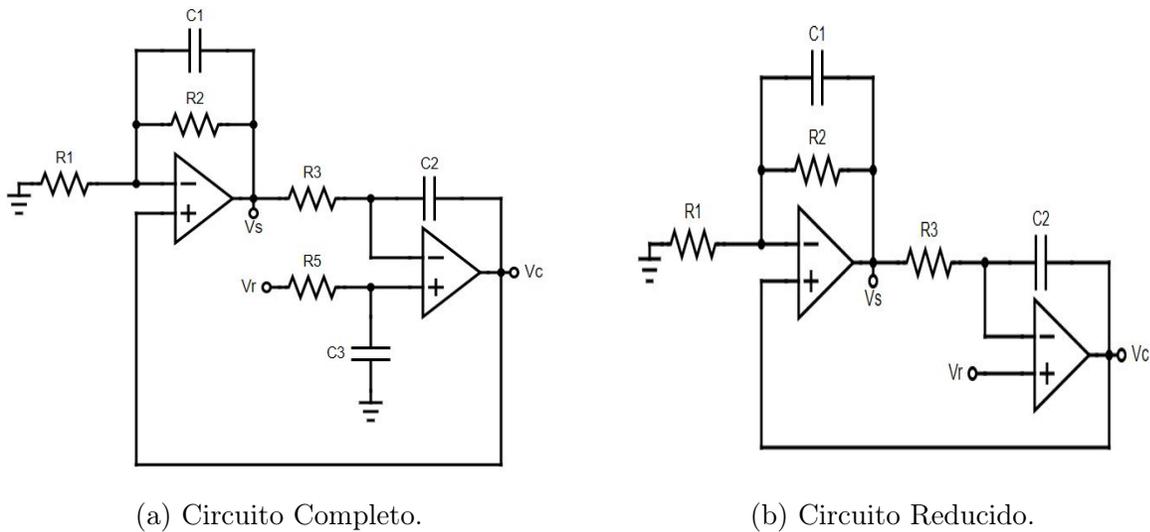


Figura A.2: Circuito Controlador Integral.

A.2. Anexos Práctica 6

A.2.1. Programa para Arduino (controlador)

```
//-----1-----
//Comunicacion Arduino-MCP4725
#include <Wire.h> //Libreria para usar I2C
#define MCP47252 0x60 //Nombre del modulo 0x60 o 0x61
byte Control = 0b01000000;
int Nulo = 0;
//-----1-----
//-----2-----
//Variable a controlar
float VOL_SYS = 0.0;
//Variable de referencia
float VOL_REF = 0.0;
//Variables de la ley de control
float u_k0 = 0.0; //Senal de control actual
float u_k1 = 0.0; //Senal de control anterior
int Vs = 0; //Voltaje de salida
//Variables de los errores
float e_k0 = 0; //Error actual
float e_k1 = 0; //Error un tiempo antes
float e_k2 = 0; //Error dos tiempos antes
//Tiempo por cada ciclo de programa
unsigned long tiempo1 = 0; //Tiempo anterior del programa
unsigned long tiempo2 = 0; //Tiempo actual del programa
//Bandera de la activacion del control
byte empieza = HIGH;
//-----2-----
//-----3-----
void setup() {
//Activacion del control
pinMode(2, INPUT);
empieza = digitalRead(2);
//Led indicador de la activacion del control
pinMode(13, OUTPUT);
digitalWrite(13, LOW);
//-----3-----
//-----4-----
//Actualizacion del voltaje de salida
Wire.begin(); //Inicio de la comunicacion
Wire.beginTransmission(MCP47252); //Nombre del dispositivo
Wire.write(Control); //Comando para actualizar el DAC
```

```

Wire.write(Nulo >> 4);    //Envio del valor del voltaje
Wire.write((Nulo & 15) << 4);
Wire.endTransmission(); //Finalizacion de la comunicacion
}
//-----4-----
//-----5-----
void loop() {
  empieza = digitalRead(2);
  if (empieza == LOW)
  {
    digitalWrite(13, HIGH); //Indicador de activacion
    while (1)
    {
      tiempo1 = millis();
      //'#' tiempo de muestreo [ms]
      if ((tiempo1 - tiempo2) >= #)
      {
//-----5-----
//-----6-----
        //Lectura de los voltajes
        VOL_REF=analogRead(A0)*0.004888;
        VOL_SYS=analogRead(A1)*0.009775; //Se amplifica X2
//-----6-----
//-----7-----
        e_k2=e_k1;          //Error k-2
        e_k1=e_k0;          //Error k-1
        e_k0=VOL_REF-VOL_SYS; //Error actual k
        u_k1=u_k0;          //Ley de control k-1
        //Ley de control actual k
        u_k0=u_k1 +Q1*e_k0 +Q2*e_k1 +Q3*e_k2;
//-----7-----
//-----8-----
        Vs=round(u_k0*455.0); //Factor de escalamiento
        //Restriccion del actuador
        if (Vs > 4095)
        {
          Vs=4095;
        } else if (Vs < 0)
        {
          Vs=0;
        }
//-----8-----
//-----9-----
        //Actualizacion del voltaje de salida
        Wire.beginTransaction(MCP47252);

```

```

    Wire.write(Control);
    Wire.write(Vs >> 4);
    Wire.write((Vs & 15) << 4);
    Wire.endTransmission();
    tiempo2=tiempo1;
//-----9-----
}
}
}
}

```

Explicación de los sectores del código

1. La librería “Wire.h” hace posible la existencia de la comunicación I2C entre la tarjeta Arduino y el módulo, se declara el nombre del módulo para poder ser llamado por el microcontrolador, se declara una variable del tipo byte contenedora del comando de actualización del voltaje y por último se declara una variable del tipo entero poseedora del valor de un voltaje cero.
2. Se declaran las variables utilizadas en el programa, como: las almacenadoras de los valores de la variable medida y de referencia, las empleadas en la ley de control, de los tiempos de los ciclos del programa y del estatus de la activación o desactivación del controlador.
3. Primero se realiza la declaración de la terminal D2 del Arduino como entrada, posteriormente se realiza la lectura del pin D2. También se hace la declaración de la terminal D13 como salida, esto es debido a la presencia de un led nombrado “L” en el pin, el cual, si está encendido, el controlador esta activado o si esta apagado, el controlador esta desactivado.
4. Se muestra el método de comunicación entre la placa y el módulo para modificar el voltaje de salida, en este primer enlace se manda un valor de voltaje 0.
5. Se realiza la lectura del pin D2, si este se encuentra en HIGH; no se ingresa al ciclo, en el caso de ser LOW; se ingresa al ciclo, se enciende el led “L” indicando la activación del controlador, se ingresa al bucle principal y se guardan los valores de los tiempos de los ciclos de programas para la actualización de la salida cada cierto tiempo, este tiempo debe ser indicado por el alumno por lo cual se debe de cambiar el carácter ‘#’ por el valor calculado en milisegundos.
6. Se realiza la lectura de los voltajes, primero el voltaje de referencia, en el cual se efectúa una multiplicación por 0.004888 para realizar la conversión a voltaje, después el voltaje a controlar, el cual se efectúa la multiplicación por 0.009775 y esto es debido a la conversión al voltaje real, ya que en el acondicionamiento de la señal de salida de la planta esta atenuada a la mitad y por ello el voltaje leído se multiplica por 2.

7. En este sector se almacenan los valores de los errores pasados y se calcula el actual, de igual forma se almacena el valor de la ley de control anterior y se calcula la actual. En el cálculo de la ley de control actual existen variables como: $Q1$, $Q2$ y $Q3$, las cuales deben ser remplazadas por los valores numéricos calculados en la actividad 1 de la práctica.
8. En este sector se realiza un escalamiento para obtener una ventana restringida de voltajes de 0 a 9 [V], el módulo MCP4725 acepta valores de 0 a 4095 donde 0 es 0 [V] y 4095 es 9 [V].
9. El último sector, tiene la finalidad de actualizar el voltaje de salida del controlador, mandando el valor real calculado en la ley de control. Además, se almacena el tiempo en el cual se ingresó en la nueva iteración del cálculo de la ley de control.

A.2.2. Programa para Arduino (windup)

```

        //Comunicacion Arduino-MCP4725
#include <Wire.h>
#define MCP47252 0x61
byte Control = 0b01000000;
int Nulo = 0;
        //Variable a controlar
float VOL_SYS = 0.0;
        //Variable de referencia
float VOL_REF = 0.0;
//-----1-----
        //Variables de la ley de control
float u_k0 = 0.0;        //Senal de control actual
int Vs = 0;        //Voltaje de salida
        //Variables del integrador
float ui_k0 = 0.0;        //Senal del integrador actual
float ui_k1 = 0.0;        //Senal del integrador anterior
        //Variables de los errores
float e_k0 = 0;        //Error actual
float e_k1 = 0;        //Error un tiempo antes
//-----1-----
        //Tiempo por cada ciclo de programa
unsigned long tiempo1 = 0;        //Tiempo anterior del programa
unsigned long tiempo2 = 0;        //Tiempo actual del programa

        //Bandera de la activacion del control
byte empieza = HIGH;

void setup() {
    //Activacion del control

```

```

pinMode(2, INPUT);
empieza = digitalRead(2);

//Led indicador de la activacion del control
pinMode(13, OUTPUT);
digitalWrite(13, LOW);

//Actualizacion del voltaje de salida
Wire.begin();
Wire.beginTransmission(MCP47252);
Wire.write(Control);
Wire.write(Nulo >> 4);
Wire.write((Nulo & 15) << 4);
Wire.endTransmission();
}

void loop() {
  empieza = digitalRead(2);

  if (empieza == LOW)
  {
    digitalWrite(13, HIGH);
    while (1)
    {
      tiempo1 = millis();
      // '#' tiempo de muestreo [ms]
      if ((tiempo1 - tiempo2) >= #)
      {
        //Lectura de los voltajes
        VOL_REF=analogRead(A0)*0.004888;
        VOL_SYS=analogRead(A1)*0.009775; //Se amplifica X2

        e_k1=e_k0; //Error k-1
        e_k0=VOL_REF-VOL_SYS; //Error actual k
//-----2-----
        ui_k1 = ui_k0; //Integral del error k-1
        ui_k0 = ui_k1 + Q1*e_k0; //Integral del error actual k
        //Ley de control actual k
        u_k0=ui_k0 + Q2*e_k0 + Q3*e_k1;
//-----2-----
        Vs=round(u_k0*455.0); //Factor de escalamiento
//-----3-----
        //Restriccion del actuador
        if (Vs > 4095)
        {

```

```

        //ui_k0 = ui_k1; //Anti-windup
        Vs=4095;
    } else if (Vs < 0)
    {
        //ui_k0 = ui_k1; //Anti-windup
        Vs=0;
    }
//-----3-----
    //Actualizacion del voltaje de salida
    Wire.beginTransaction(MCP47252);
    Wire.write(Control);
    Wire.write(Vs >> 4);
    Wire.write((Vs & 15) << 4);
    Wire.endTransmission();
    tiempo2=tiempo1;
}
}
}
}

```

Explicación de los sectores del código

Este nuevo script es semejante al anterior, solo cuenta con algunas modificaciones, los nuevos sectores agregados son:

1. Se eliminaron las variables u_{k1} y e_{k2} , pero se agregaron dos nuevas variables encargadas de almacenar la integración del error.
2. En este sector primero se realiza la integración numérica de la señal del error y posteriormente se calcula la ley de control. Existen 3 variables las cuales son: $Q1$, $Q2$ y $Q3$, estas deben ser cambiadas por los valores calculados en la actividad 3 de la práctica.
3. En el último sector, donde se encuentran las restricciones de la salida del controlador, se agregaron los renglones de código que servirán en la activación o desactivación del anti-windup, estos renglones poseen en el lado derecho la leyenda “//Anti-windup”.

A.3. Anexos Práctica 7

A.3.1. Programa para Arduino (generador de sinusoides)

```

//Comunicacion Arduino-MCP4725
#include <Wire.h>
#define MCP47252 0x61 //Nombre del modulo 0x60 o 0x61
byte Control = 0b01000000;
int Nulo = 0;
//Bandera de apagado/encendido del generador
byte empieza = HIGH;
//-----1-----
const int muestras = 3000; // muestras = Periodo * 200
const int Amplitud = 228;
const byte Frecuencia = 3;
//-----1-----
//-----2-----
//Senal sinusoidal 1
float IncAngulo_1 = 2.0 * 3.1416 / muestras;
float Angulo_1 = 0.0;
//Senal sinusoidal 2
float IncAngulo_2 = Frecuencia * 2.0 * 3.1416 / muestras;
float Angulo_2 = 0.0;
//-----2-----
//-----3-----
//Senal final
int ValorSen = 0;
int contador = 0;
bool Bandera = false;
//-----3-----
//Tiempo por cada ciclo de programa
unsigned long tiempo1=0; //Tiempo anterior del programa
unsigned long tiempo2=0; //Tiempo actual del programa

void setup() {
//Activacion de la senal
pinMode(2, INPUT);
empieza = digitalRead(2);
//Led indicador de la activacion del control
pinMode(13, OUTPUT);
digitalWrite(13, LOW);
//Actualizacion del voltaje de salida
Wire.begin();
Wire.beginTransmission(MCP47252);

```

```

Wire.write(Control);
Wire.write(Nulo >> 4);
Wire.write((Nulo & 15) << 4);
Wire.endTransmission();
}

void loop() {
  empieza = digitalRead(2);
  if (empieza == LOW)
  {
    digitalWrite(13, HIGH); //Indicador de activacion
    while (1)
    {
//-----4-----
      //Calculo de la senal
      ValorSen = round((sin(Angulo_1) + sin(Angulo_2) + 2) *
        Amplitud);
      if(contador == muestras)
      {
        Angulo_1 = 0.0;
        Angulo_2 = 0.0;
        contador = 1;
      }else
      {
        Angulo_1 += IncAngulo_1;
        Angulo_2 += IncAngulo_2;
        contador++;
      }
      Bandera = true;
//-----4-----
//-----5-----
      // Tiempo de espera para actualizar el voltaje de salida
      while(Bandera == true)
      {
        tiempo1 = micros();
        if ((tiempo1 - tiempo2) >= 5000)
        {
          //Actualizacion del voltaje de salida
          Wire.beginTransaction(MCP47252);
          Wire.write(Control);
          Wire.write(ValorSen >> 4);
          Wire.write((ValorSen & 15) << 4);
          Wire.endTransmission();
          tiempo2=tiempo1;
          Bandera = false;

```

```
//-----5-----
    }
  }
}
}
```

Explicación de los sectores del código

1. En esta sección se presentan 3 variables, la primera nombrada “muestras” tiene la finalidad de almacenar el número de iteraciones del cálculo de la señal para alcanzar un ciclo de 0° a 360°, el valor de esta variable debe de ser entero y es obtenido a partir de la formula

$$muestras = \text{Redondear} (\text{Periodo} \times 200)$$

la variable “Amplitud” indica el tamaño pico a pico aproximadamente de la señal, el número impuesto es para poder tener una señal en la salida fácil de medir y, por último, la variable “Frecuencia” indica las veces más grande que es la frecuencia de la senoide 2 que la 1. La senoide 1 es la señal base.

2. En esta sección se muestran las variables de las dos senoideas, para ambas se tiene la misma estructura, es decir, se tiene una variable “IncAngulo_x” almacenadora de un valor constante, el cual posee el valor del incremento del ángulo en radianes que debe de aumentarse en cada ciclo de programa y la variable “Angulo_x” es el receptor del valor nuevo del ángulo para cada iteración de programa.
3. En esta sección se presentan las variables usadas para la señal resultante, la nombrada “ValorSen” almacena el valor resultante de la suma de las 2 senoideas, la “contador” acumula el número de ciclos del programa y la “Bandera” es la activadora o desactivadora de la actualización del voltaje de salida del generador de señales.
4. En esta sección se realiza el cálculo del voltaje de salida del generador de señales. También se realiza el proceso lógico de incrementar el ángulo para la nueva iteración o el reinicio de los ángulos, dependiendo del número de iteración en el que se encuentre el programa, una vez realizado los pasos anteriores, se activa la bandera indicando la finalización del proceso.
5. La última sección tiene el propósito de esperar el tiempo correspondiente para actualizar el voltaje de salida, una vez actualizada la salida el programa desactiva la bandera para indicar que se realice el nuevo cálculo de la salida.

A.3.2. Script “Butterworth”

```

function [SenFiltradas] = Butterworth(Orden,Fcorte,Senales)
Num = [1];
if Orden == 1      % Orden 1
    Den = [1 1];
elseif Orden == 2  % Orden 2
    Den = [1, 1.414, 1];
elseif Orden == 3  % Orden 3
    Den = [1, 2, 2, 1];
elseif Orden == 4  % Orden 4
    Den = [1, 2.613, 3.414, 2.613, 1];
elseif Orden == 5  % Orden 5
    Den = [1, 3.236, 5.236, 5.236, 3.236, 1];
elseif Orden == 6  % Orden 6
    Den = [1, 3.864, 7.464, 9.142, 7.464, 3.864, 1];
elseif Orden == 7  % Orden 7
    Den = [1, 4.494, 10.098, 14.592, 14.592, 10.098, 4.494, 1];
elseif Orden == 8  % Orden 8
    Den = [1, 5.126, 13.137, 21.846, 25.688, 21.846, 13.137, 5.126,
           1];
elseif Orden == 9  % Orden 9
    Den = [1, 5.759, 16.582, 31.163, 41.986, 41.986, 31.163, 16.582,
           5.759, 1];
elseif Orden == 10 % Orden 10
    Den = [1, 6.392, 20.432, 42.802, 64.882, 74.233, 64.882, 42.802,
           20.432, 6.392, 1];
else
    Den = [1];
    Orden = 0;
end

% Funcion de transferencia del filtro
Num = Num * ((Fcorte*2*pi)^(Orden));
for k=(Orden+1):-1:2
    Den(k) = Den(k) * ((Fcorte*2*pi)^(k-1));
end
Filtro = tf(Num,Den);

% Filtrado de las senales
SenFiltradas(:,1)=lsim(Filtro,Senales(:,1),Senales(:,3));
SenFiltradas(:,2)=lsim(Filtro,Senales(:,2),Senales(:,3));
SenFiltradas(:,3)=Senales(:,3);
end

```

A.3.3. Script “mepmcr”

```
function [r, theta] = mepmcr(y,fi,P,theta)
[n,m]=size(fi);      % n = # de muestras, m = # de parametros
psi=(1:m)';         % Vector columna de observaciones
r=eye(n,m);         % Trayectoria de convergencia de los parametros

for k=1:n           % Algoritmo recursivo de minimos cuadrados
    for i=1:m       % Se forma el regresor
        psi(i,1)=fi(k,i);
    end

    e = y(k)-psi'*theta;           % Error de regresion
    L = P*psi/(1+psi'*P*psi);      % Ganancia de la correccion
    theta = theta+(L*e);           % Vector estimado
    P = P-(L*psi'*P);              % Matriz de covariancia

    for i=1:m
        r(k,i)=theta(i,1); % Convergencia de los parametros
    end
end
end
end
```

A.3.4. Script “estimación”

```
%% Limpiar entorno de trabajo
clc;
clear all;
close all;

%% Informacion para el programa
filename = 'Practica 7.csv'; % Nombre del archivo
TM = 0.005;                 % Tiempo de muestreo
Fc = 1;                     % Frecuencia de corte en [Hz]
FilOrden = 10;              % Orden del filtro, valor de 0 a 10
P = [1,0,0; 0,1,0; 0,0,1]; % Matriz de covarianza
theta = [0; 0; 0];          % Vector de parametros,
                                % condiciones iniciales

%% Cargar el archivo .csv de las senales
ValsSYS = csvread(filename);
ValsSYS = ValsSYS';
[R,C] = size(ValsSYS);
ValsSYS(:,3)=(0:TM:(R-1)*TM)';

%% Graficas de las senales sin filtrar
```

```

figure(1)
plot(ValSYS(:,3),ValSYS(:,1),'LineWidth',2);
title('Entrada de la planta u(t)');
ylabel('Voltaje [V]');
xlabel('Tiempo [s]');
figure(2)
plot(ValSYS(:,3),ValSYS(:,2),'LineWidth',2);
title('Salida de la planta c(t)');
ylabel('Voltaje [V]');
xlabel('Tiempo [s]');

%% Filtrado de las senales empleando el filtro de Butterworth
% El orden del filtro puede variar de 0 a 10.
% Butterworth(Orden-del-Filtro, Frecuencia-de-corte-[Hz], Senales)
[ValSYS] = Butterworth(FilOrden,Fc,ValSYS);

%% Graficas de las senales despues de usar el filtro
figure(1)
hold on
plot(ValSYS(:,3),ValSYS(:,1),'LineWidth',2);
legend('Sin Filtro','Con
      Filtro','FontSize',11,'Location','southeast');
hold off
figure(2)
hold on
plot(ValSYS(:,3),ValSYS(:,2),'LineWidth',2);
legend('Sin Filtro','Con
      Filtro','FontSize',11,'Location','southeast');
hold off

%% Derivadas
[R,C] = size(ValSYS);
DSalida(1:R-6)=0;
DDSalida(1:R-6)=0;

% Primera derivada
for k=4:1:(R-3)
    DSalida(k-3)=(-ValSYS(k+2,2) +8*ValSYS(k+1,2) -8*ValSYS(k-1,2)
      +ValSYS(k-2,2))/(12*TM);
end
DSalida=DSalida';

% Segunda derivada
for k=4:1:(R-3)
    DDSalida(k-3)=(-ValSYS(k+2,2) +16*ValSYS(k+1,2) -30*ValSYS(k,2)
      +16*ValSYS(k-1,2) -ValSYS(k-2,2))/(12*(TM^2));
end

```

```

DDSalida=DDSalida';

% Eliminar los 3 primeros y 3 ultimos renglones
for k=1:1:3
    ValSYS(R,:)=[];
    ValSYS(1,:)=[];
    [R,C] = size(ValSYS);
end

%% Graficas de las derivadas
figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(ValSYS(:,3),DSalida,'LineWidth',1);
title('Derivadas de c(t)');
ylabel('c^{\prime}(t)');
subplot(2,1,2)
plot(ValSYS(:,3),DDSalida,'LineWidth',1);
ylabel('c^{\prime\prime}(t)');
xlabel('Tiempo [s]');

%% Estimacion parametrica
psi=[-DSalida -ValSYS(:,2) ValSYS(:,1)];
[Vtc,thetaE]=mepmcr(DDSalida,psi,P,theta);
% Vtc = vector de trayectorias de convergencia de los parametros
% thetaE = vector de los parametros estimados
% mepmcr(Derivada-de-mayor-orden, psi, P, theta);

%% Grafica de la convergencia de los parametros
figure(4)
plot(Vtc,'LineWidth',2);
title('Convergencia de los parametros');
ylabel('Valor estimado');
xlabel('Numero de muestras');
legend('\alpha', '\beta', '\gamma', 'FontSize', 15, 'Location', 'southeast');

%% Cargar archivo .csv de las senales de nuevo
ValSYS = csvread(filename);
ValSYS = ValSYS';
[R,C] = size(ValSYS);
ValSYS(:,3)=(0:TM:(R-1)*TM)';

%% Simulacion de la planta teorica
PlaTeo = tf([0.667],[1 1 0.147]);
Teorica = lsim(PlaTeo,ValSYS(:,1),ValSYS(:,3));

%% Simulacion con la planta con parametros estimados
PlaEst = tf([thetaE(3)],[1 thetaE(1) thetaE(2)]);

```

```

Estimacion = lsim(PlaEst,ValSYS(:,1),ValSYS(:,3));

%% Grafica de comparacion de senales de la salida de la planta
figure(5)
plot(ValSYS(:,3),Teorica,'LineWidth',2);
hold on
plot(ValSYS(:,3),ValSYS(:,2),'LineWidth',2);
plot(ValSYS(:,3),Estimacion,'LineWidth',2);
title('Comparacion de senales de la salida de la planta c(t)');
ylabel('c(t)');
xlabel('Tiempo [s]');
legend('c(t) Teorica','c(t) Medida','c(t)
    Estimada','FontSize',11,'Location','southeast');
hold off

%% Salidas del programa
disp(['Tiempo de muestreo: ', num2str(TM), ', frecuencia de corte:
    ',...
    num2str(Fc), ' [Hz] y orden del filtro: ', num2str(FilOrden)]);
disp('Matriz de covarianza');
P
disp('Vector de parametro (condiciones iniciales)');
theta
disp('Vector de parametro (estimaciones)');
thetaE
disp('Funcion de transferencia teorica');
PlaTeo
disp('Funcion de transferencia estimada');
PlaEst

```

Referencias

- Alexander, C. K. & Sadiku, M. N. O. (2013). *Fundamentals of electric circuits*. McGraw-Hill.
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (1989). *Adaptive control*. Addison-wesley.
- Castaño, S. A. (2020). *Anti Windup en un Control PID*. Consultado el 25 de noviembre de 2020, desde <https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/anti-windup-en-un-control-pid/>
- Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill Interamericana.
- Fitch, A. L., Iu, H. H. C. & Lu, D. D. C. (2011). An Analog Computer for Electronic Engineering Education. *IEEE Transactions on Education*, 54(4), 550-557. <https://doi.org/10.1109/TE.2010.2090350>
- Franklin, G. F., Powell, J. D. & Workman, M. L. (1998). *Digital control of dynamic systems*. Addison Wesley Longman.
- Hippe, P. (2006). *Windup in control: its effects and their prevention*. Springer.
- Low Cost Analog Multiplier [Rev. K]. (2015). Analog Devices. <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/AD633.pdf>
- Nise, N. S. (2011). *Control systems engineering*. John Wiley & Sons.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Reyes, F. (2011). *Robótica: control de robots manipuladores*. Alfaomega.
- Salinas González, F. M. (2018). *Manual de prácticas para motores de corriente directa* (Material didáctico de licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México Ciudad Universitaria, Cd. Mx.