



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ESTUDIO TEÓRICO DE LA
IMBIBICIÓN EN UN MEDIO
POROSO BAJO GRADIENTES DE
TEMPERATURA EN UN FLUIDO
NO NEWTONIANO**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Andrés Iván Villaseñor Paris

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Melesio Sánchez Huerta



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Agradecimientos

ESFUERZO, TRABAJO y PERSEVERANCIA

Las tres disciplinas que me han llevado a completar este gran logro.

Esta tesis representa el final de mi preparación profesional y el inicio de un gran sueño, es por ello que el presente trabajo está dedicado a mis padres el Sr. Andrés Eduardo Villaseñor Letepichia y la Sra. Chantal Paris Zárate, a quienes agradezco inmensamente por darme el total apoyo y amor para cumplir mis sueños y enfrentar cualquier obstáculo, porque gracias a ustedes y a su educación he logrado llegar a donde me encuentro hoy en día.

Agradezco enormemente a mi universidad por la gran preparación que he recibido de su parte y por las grandes oportunidades que me ha brindado, hoy me siento orgulloso de llevar en alto el nombre de mi máxima casa de estudios la UNAM.

A mi asesor, profesor, mentor y amigo el Dr. José Melesio Sánchez Huerta le doy gracias por ser mi guía y apoyo durante mi preparación profesional.

Ahora quiero agradecer a mi familia por estar a mi lado durante este proceso, comparto este logro con ustedes ya que todos forman parte de él, sin embargo, hago una mención especial a mi tío y amigo el Ing. Edgar Salinas a quien agradezco su gran apoyo, ejemplo e inspiración.

También agradezco a mis amigos por acompañarme durante todo este camino el cual compartimos, enfrentando cada reto y superando cada obstáculo en su compañía, sin embargo, hago la mención especial mis amigos el Lic. Eric Palacios y la Ing. Joanna Fuentes por ser ustedes quienes han estado en primera fila durante el proceso de este logro.

Por ultimo solo queda agradecerme a mí mismo por no rendirme, por creer en mí y jamás retroceder ante la presencia de nuevos retos, es por ello que me siento orgulloso de mi trabajo y los resultados de mi dedicación, hoy gracias a mi preparación y capacidad con seguridad me hago llamar Ingeniero.

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Resumen

En este trabajo se presenta el estudio teórico del ascenso capilar de un fluido no newtoniano en un medio poroso. Se analizan los efectos de la temperatura tanto en la viscosidad como en la tensión superficial en la velocidad del frente de imbibición. Para este estudio teórico se consideran distintos fluidos con propiedades reológicas diferentes, las cuales se caracterizan de acuerdo al índice de comportamiento correspondiente. Para las condiciones del medio poroso se consideran las características de una roca de arenisca (pieza de Sandstone Rock), con una porosidad del 20%. El modelo matemático que describe el ascenso del frente de imbibición se resuelve mediante la discretización de las ecuaciones diferenciales por diferencias finitas. Se analizan tres condiciones de temperatura, gradiente positivo ($G+$), gradiente negativo ($G-$) y el caso isotérmico ($G=0$) para un fluido Dilatante, Pseudoplástico y Newtoniano, los resultados finales muestran la variación de la velocidad de ascenso capilar por los efectos de la temperatura.

Objetivo

Derivar un modelo matemático que describa la velocidad de ascenso capilar de un fluido no newtoniano en un medio poroso, considerando los efectos generados por los cambios de temperatura.

Índice

1. Introducción	(5)
2. Antecedentes	(6)
2.1. Conceptos.	(6)
2.1.1. Definición de Fluido	(6)
2.1.2. Propiedades de los fluidos.	(7)
2.2. Tipos de fluidos.	(8)
2.2.1. Fluidos Newtonianos.	(8)
2.2.2. Fluidos no Newtonianos.	(9)
2.3. Imbibición.	(12)
2.3.1. Imbibición en capilares cónicos.	(13)
2.3.2. Imbibición en celdas de Hele Shaw.	(14)
2.3.3. Imbibición en tubos rectos.	(16)
2.3.4. Imbibición en un medio poroso.	(16)
2.4. Justificación.	(18)
3. Modelo Matemático	(19)
3.1. Descripción del problema.	(19)
3.2. Desarrollo del modelo matemático.	(20)
3.3. Modelo para el caso Isotérmico.	(21)
3.4. Modelo para el caso con Gradiente de Temperatura.	(23)
3.4.1. Modelo matemático para el Gradiente Positivo.	(25)
3.4.2. Modelo matemático para el Gradiente Negativo.	(25)
4. Resultados	(37)
4.1. Curvas obtenidas mediante el modelo matemático.	(28)
4.1.1. Fluido Newtoniano.	(28)
4.1.2. Fluido Pseudoplástico.	(29)
4.1.3. Fluido Dilatante.	(31)
4.2. Efectos del gradiente de temperatura.	(33)

4.2.1. Fluido Pseudoplástico.	(33)
4.2.2. Fluido Dilatante.	(34)
5. Conclusiones y Comentarios	(36)
5.1. Conclusiones	(36)
5.2. Comentarios	(37)
6. Bibliografía	(39)
7. Apéndice A	(42)
8. Apéndice B	(45)

Nomenclatura

σ	Tensión superficial. (N/m)
σ_0	Tensión superficial inicial. (N/m)
ϕ	Porosidad de la roca. (%)
θ	Angulo de contacto.
d	Diámetro medio de los poros. (m)
ΔP	Gradiente de Presión. (kPa)
v	Velocidad del flujo promedio. (m/s)
h	Altura de la roca. (m)
$h(t)$	Frente de imbibición instantáneo. (m)
h_{eq}	Altura de equilibrio. (m)
G	Gradiente de temperatura longitudinal, $G=(T_1 - T_0)/h$. (K/m) [1]
T_0	Temperatura inicial. (K)
T_1	Temperatura final. (K)
g	Aceleración gravitatoria. (m/s ²)
k	Permeabilidad (m/s).
μ_0	Viscosidad de referencia (Pa*s).
μ_{eff}	Viscosidad efectiva. (Pa*s)
n	Índice de comportamiento.
u	Velocidad de ascenso del fluido. (m/s)
ρ	Densidad del fluido. (kg/m ³)
t	Tiempo. (s)
t_c	Tiempo característico. (s)

1. Introducción.

El proceso de imbibición se define como la penetración de un fluido en un capilar o medio poroso por el efecto de la presión capilar, siendo este fenómeno sumamente importante en sistemas biológicos, en procesos industriales, en yacimientos acuíferos, yacimientos petroleros, inyección de tinta e incluso en el ascenso de nutrientes en las plantas.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos y está enfocado a la obtención de un modelo matemático que describa el ascenso de un fluido no newtoniano en un medio poroso considerando los efectos de temperatura.

El Capítulo uno, Introducción, presenta un breve resumen de la organización de este trabajo y detalles de cada capítulo. En el Capítulo dos, Antecedentes, se dan los conceptos básicos y un resumen de trabajos publicados que son la base teórica para la obtención del modelo matemático. En el capítulo tres, Modelo Matemático, se desarrollan paso a paso los modelos matemáticos para las tres condiciones de temperatura, así mismo se muestran las ecuaciones discretizadas las cuales son programadas en fortran y los resultados se presentan en el capítulo cuatro, Resultados, en este capítulo de manera gráfica se muestran los resultados derivados de los modelos matemáticos, las gráficas muestran la influencia del gradiente de temperatura y del índice de comportamiento. Las conclusiones resultantes del análisis de las curvas presentadas en cada gráfica se encuentran en el capítulo cinco. Finalmente se presenta la Bibliografía y apéndices A y B.

2. Antecedentes.

La mecánica de los fluidos y la termodinámica son dos ramas de la ciencia que trabajan en conjunto en miles de sistemas, esto puede explicarse debido a que el comportamiento de cualquier fluido se ve afectado directamente por las condiciones de temperatura a las que este se encuentre sometido, por esta razón los científicos a lo largo del tiempo han buscado desarrollar ecuaciones y sistemas matemáticos capaces de describir el comportamiento de estos fluidos y los efectos de la temperatura sobre estos.

2.1. Conceptos.

2.1.1. Definición de Fluido

De acuerdo con la mecánica de fluidos, una sustancia en la fase líquida o en la gaseosa se conoce como fluido, sin embargo, estos cuentan con características físicas que los identifican, como lo es su capacidad de deformación, esto ya que los fluidos oponen una resistencia muy baja a los esfuerzos cortantes que se les aplican, deformándose de manera continua debido a la aplicación de estos, ver (Figura 2.1). Para este trabajo nos enfocaremos únicamente en los fluidos que se encuentran en la fase líquida.

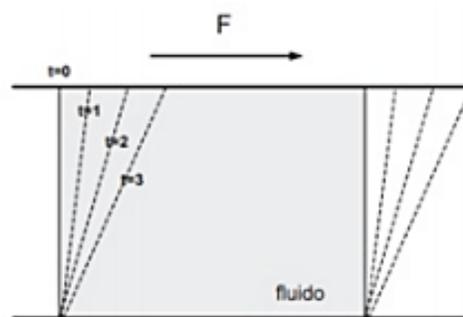


Figura 2.1 Esfuerzo cortante sobre un fluido [1]

2.1.2. Propiedades de los fluidos.

A continuación, se definen algunas propiedades importantes de los fluidos que serán utilizadas en este trabajo:

- Densidad: Es una magnitud escalar que mide la cantidad de masa por unidad de volumen.

$$\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

Donde “m” corresponde a la masa del fluido en [kg] y “V” al volumen que esta masa ocupa en el espacio en [m³]. Esta propiedad de los fluidos puede cambiar como función de la temperatura y de la presión, disminuyendo con el aumento de temperatura y aumentando con el aumento de la presión.

- Viscosidad: Es la medida de la resistencia a la deformación que presentan los fluidos al aplicarse un esfuerzo. Esta propiedad indica la capacidad de las moléculas del fluido a permanecer juntas, entre mayor sea esa capacidad, mayor será la resistencia a fluir. La viscosidad se presenta únicamente cuando hay un flujo, de otra manera no se puede saber su valor, las unidades para la viscosidad dinámica, μ son [Pa*s], bien [m²/s] para la viscosidad cinemática, ν .
- Tensión superficial: Es la propiedad de la interfaz entre dos fluidos la cual mide que tan diferentes son. Mide la fuerza que actúa tangencialmente por unidad de longitud en el borde de una superficie de un líquido en equilibrio. Si mide la tensión entre un líquido y el aire se denomina tensión superficial; si mide la tensión entre dos líquidos (o dos fluidos) se denomina tensión interfacial. Sus unidades en SI son: N/m. [1]

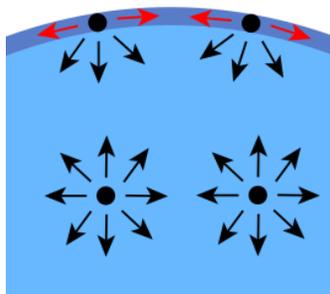


Figura 2.2 Diagrama de fuerzas entre moléculas

La tensión superficial también se puede explicar cómo las fuerzas que actúan entre las moléculas en el interior del fluido, donde éstas actúan diferentes en la superficie debido a que tienen mayor energía que las moléculas sumergidas, generando así una resistencia en la superficie respecto al ambiente, ver (Figura 2.2).

2.2. Tipos de fluidos.

La Reología es la rama de la mecánica de fluidos encargada del estudio y análisis del comportamiento de los fluidos y las propiedades mecánicas de sustancias que son capaces de fluir pero que su comportamiento no está controlado por las propiedades que rigen a los fluidos comunes (Newtonianos) [2].

2.2.1. Fluidos Newtonianos.

Fueron llamados así debido al Físico Británico Isaac Newton, quien estableció una relación constitutiva en la cual el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la velocidad de deformación y son descritos mediante por la ley de viscosidad de Newton $\tau = \mu (\partial u / \partial y)$, donde, τ es el esfuerzo cortante, μ es la viscosidad dinámica [Pa*s] y $\partial u / \partial y$ es la velocidad de deformación.

Los fluidos newtonianos se caracterizan por tener una viscosidad constante la cual sólo se puede ver afectada por los cambios de temperatura y de presión, como prueba de esto en la Figura 2.3 se observa que la relación Esfuerzo Cortante contra Velocidad de Deformación es completamente lineal ($\tau = \mu\dot{\epsilon}$). [3]

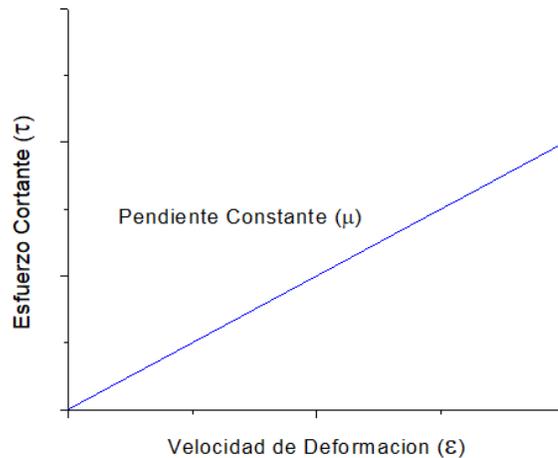


Figura 2.3 Comportamiento lineal de un fluido newtoniano

Esta relación de proporcionalidad corresponde a la viscosidad dinámica μ , por lo tanto, los fluidos newtonianos pueden ser considerados linealmente viscosos.

2.2.2. Fluidos no Newtonianos.

Los fluidos no newtonianos se comportan de manera diferente al aplicarse un esfuerzo cortante sobre estos, donde su resistencia a fluir varía respecto a la magnitud del esfuerzo y la duración en que este se aplica, es por esta razón que este tipo de fluidos no tiene un valor constante de viscosidad y por ende no obedecen la ley de viscosidad de newton.

El modelo reológico más utilizado para este tipo de fluidos es el correspondiente a la ley de potencia para la viscosidad.

$$\mu = K_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \quad (2.1)$$

Donde $(\partial u/\partial y)$ es la velocidad de deformación, K_0 es el índice de congruencia dimensional y μ la viscosidad del fluido. Dentro de esta clasificación se pueden mencionar, polímeros en disolución, tinta, mermelada, etc.

En la Figura 2.4 se puede observar la diferencia de comportamiento que hay entre los diferentes fluidos al aplicarse sobre estos un esfuerzo cortante.

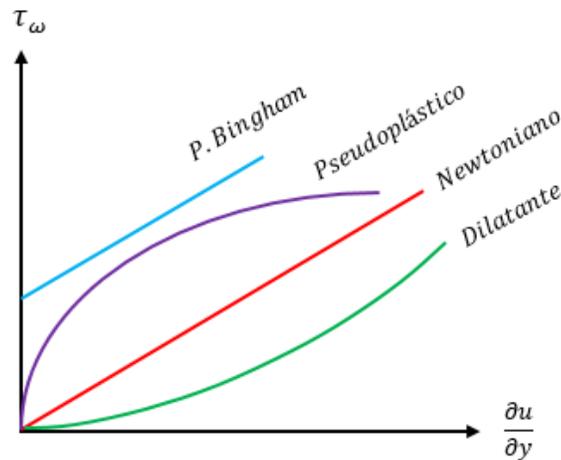


Figura 2.4 Variación del esfuerzo cortante con la razón de deformación para fluidos newtonianos y no newtonianos

Los fluidos no newtonianos se clasifican de la siguiente manera:

- Comportamiento Pseudoplástico.

Los fluidos que se consideran pseudoplástico son aquellos que tienen un índice de comportamiento $n < 1$, estos fluidos se caracterizan por tener una alta viscosidad, la cual disminuye rápidamente al aumentar el esfuerzo sobre el fluido.

- Comportamiento Dilatante.

Los fluidos que se consideran Dilatantes son aquellos que tienen un índice de comportamiento $n > 1$, estos fluidos se caracterizan por tener una baja viscosidad, la cual aumenta conforme aumenta la velocidad de los esfuerzos aplicados sobre estos. Los fluidos dilatantes son poco comunes de manera cotidiana, por lo tanto, un ejemplo de un fluido con

estas características sería la mezcla de fécula de maíz con agua, el cual, al ser expuesto a una alta rapidez de corte, aumenta su viscosidad enormemente.

- Comportamiento Viscoplastico. (Plástico de Bingham)

Este tipo de fluidos se caracterizan por su comportamiento, el cual es similar al de un sólido hasta que se le aplica una fuerza la cual excede su esfuerzo de cedencia y este comienza a fluir, en ese momento se presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, donde esta relación se describe por el modelo reológico de Bingham ($\tau = \tau_0 + \eta_p(\partial u/\partial y)$), donde $(\partial u/\partial y)$ es la velocidad de deformación, τ el esfuerzo cortante y η_p es la viscosidad plástica. Algunos ejemplos con las características de un fluido plástico son la pasta dental, pomadas, grasas, etc.

2.3. Imbibición.

La Imbibición es el proceso de absorción por efectos de la presión capilar que se genera al poner en contacto el líquido con el sólido poroso o capilar, siendo la presión capilar la que produce el movimiento del fluido en el medio poroso, la cual se puede cuantificar por la relación de la tensión superficial entre el tamaño de poro o radio del capilar, σ/d [N/m²]. [5]

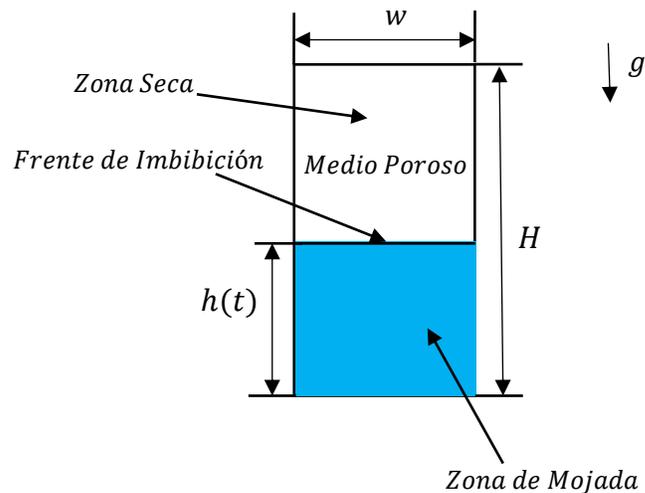


Figura 2.5 Presentación grafica de la penetración del flujo capilar en una muestra porosa.

Los trabajos que se han realizado hasta el momento han sido desarrollados tanto en capilares como medios porosos, donde los capilares se conforman principalmente por tubos rectos, conos o placas, por otra parte, los medios porosos pueden ser muestras de papel radiales o rocas verticales de sección circular o cuadrada.

A continuación, se presentan un breve resumen de diferentes trabajos que se emplean como base teórica para este trabajo.

2.3.1. Imbibición en capilares cónicos.

El avance de un fluido a través de un medio capilar se ve directamente afectado por la presencia de la presión capilar la cual a su vez depende de la naturaleza del fluido y del medio, es razonable pensar que la geometría de este medio también puede considerarse un factor que influya en el ascenso del fluido, en este sentido Sánchez y Ortíz [6] presentan un trabajo donde realizan un estudio teórico y experimental de la dinámica de un fluido a través de capilares cónicos, donde se menciona que la evolución del flujo capilar se ve afectada por la geometría del medio y por los efectos de la temperatura, donde la viscosidad del fluido es función de este último parámetro, cabe mencionar que durante el ascenso capilar en el interior del tubo se genera un flujo de Poiseuille, donde el frente de imbibición se detiene cuando se equilibran las fuerzas capilares y gravitacionales.

En la Figura 2.6 presentan los resultados teóricos y experimentales para el frente de imbibición ξ en función del tiempo τ , por lo tanto, se demuestra que la evolución del ascenso capilar se ve afectada por la geometría del medio y también por la presencia de un gradiente de temperatura el cual modifica la tensión superficial y viscosidad del fluido.

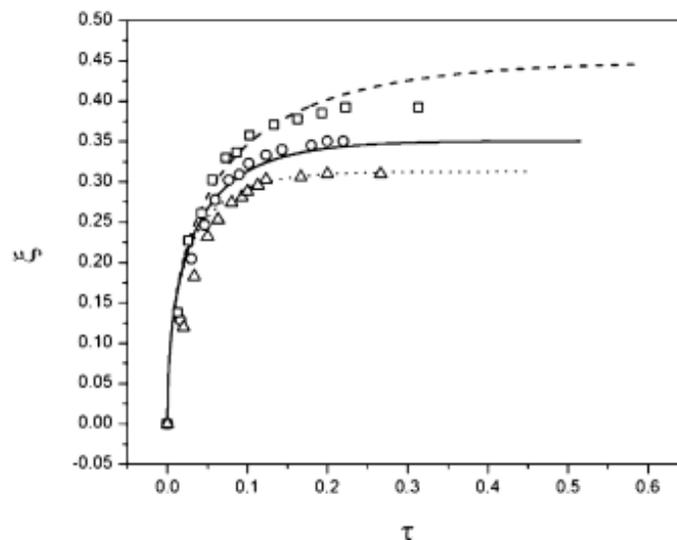


Figura 2.6 Curvas comparativas de los resultados teóricos (líneas) y experimentales (símbolos) para para la evolución de frente de imbibición ξ en función del tiempo t , para los gradientes $G = -500$ (K/m), (triángulos), $G = +500$ (K/m), (cuadrados) y el caso isotérmico, $T_0 = 300$ (°K) (círculos). [6]

2.3.2. Imbibición en celdas de Hele Shaw.

En el trabajo desarrollado por Sánchez [7], se estudia de manera experimental la evolución temporal del frente de imbibición para fluidos no newtonianos en una celda de Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura utilizando como fluido de trabajo una solución acuosa con cuatro condiciones de concentración de carboximetilcelulosa (CMC) y se empleó una celda formada por dos placas de vidrio. Los resultados obtenidos se pueden ver en las Figuras 2.7, 2.8 y 2.9.

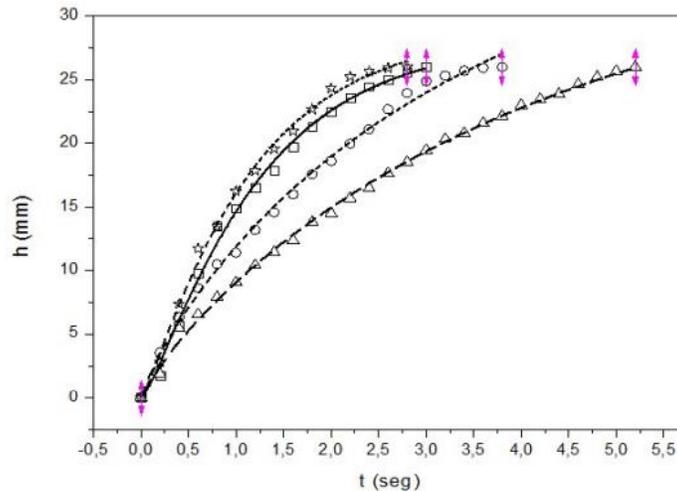


Figura 2.7 Evolución temporal isotérmica del frente de imbibición, para las cuatro concentraciones. Los resultados experimentales (símbolos) y las líneas de tendencia para cada valor del índice de comportamiento “n”: (\square) $n=0.9$, (\circ) $n=0.75$; (Δ) $n=0.64$; (\times) $n=0.56$. [7]

La figura anterior muestra el caso isotérmico en el que la solución del 4% ($n=0.56$) ascienda tan rápido como la solución de 1% ($n=0.95$) que es una solución muy cercana a un fluido Newtoniano.

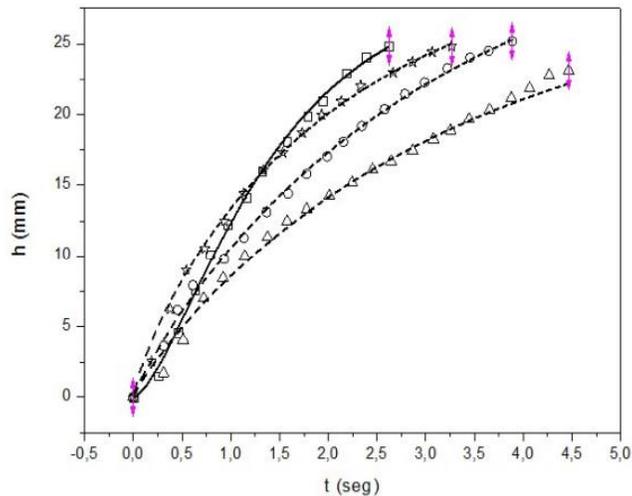


Figura 2.8 Evolución temporal Gradiente Positivo del frente de imbibición, para las cuatro concentraciones. Los resultados experimentales (símbolos) y las líneas de tendencia para cada valor del índice de comportamiento “n”: (\square) $n=0.9$, (\circ) $n=0.75$; (Δ) $n=0.64$; (\times) $n=0.56$. [7]

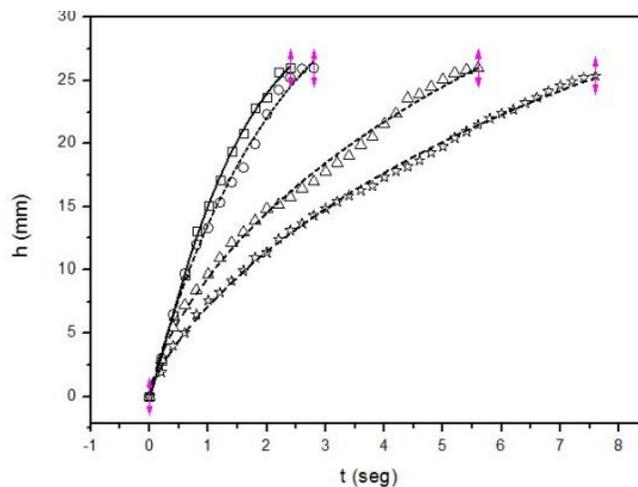


Figura 2.9 Evolución temporal Gradiente Negativo del frente de imbibición, para las cuatro concentraciones. Los resultados experimentales (símbolos) y las líneas de tendencia para cada valor del índice de comportamiento “n”: (\square) $n=0.9$, (\circ) $n=0.75$; (Δ) $n=0.64$; (\times) $n=0.56$. [7]

En La Figura 2.7, se presenta el caso de gradiente positivo, se observa que tiene un comportamiento similar en relación al caso isotérmico, en ambos casos para valores del índice de comportamiento 0.75 y 0.64 el ascenso es más lento. En la Figura 2.9, se muestra el gradiente negativo, en este caso el flujo es mucho más lento respecto a los casos anteriores, bajo estas condiciones de temperatura se observa que la velocidad del frente de imbibición es directamente proporcional con el incremento del índice de comportamiento. [7]

2.3.3. Imbibición en tubos rectos.

El ascenso del flujo en tubos capilares generalmente es caracterizado tanto en los capilares como en los medios porosos por la posición de su superficie libre $h(t)$ (frente de imbibición) la cual obedece la ley de Lucas-Washburn, pero esta ley funciona correctamente cuando se trata en sistemas sin gravedad y es válida a pequeñas distancias de penetración en sistemas verticales. [8]

Sin embargo, en el desarrollo de esta ley se consideran constantes las propiedades de los fluidos, lo cual no es suficiente ya que como se observa en los trabajos ya mencionados la influencia de la temperatura y la geometría afectan directamente a la velocidad y altura que presenta el frente de imbibición.

2.3.4. Imbibición en un medio poroso.

Medio poroso.

Durante mucho tiempo los medios porosos han sido uno de los temas de interés de la comunidad científica y la ingeniería, debido a su complejidad inherente e importancia en muchas áreas tecnológicas [9], para este trabajo el medio poroso se define como un elemento físico finito tridimensional el cual no es continuo, dotado de una serie de poros (huecos) ubicados de forma aleatoria y de una misma dimensión entre sí, los cuales son capaces de permitir el flujo de fluidos a través del medio, ver (Figura 2.11).

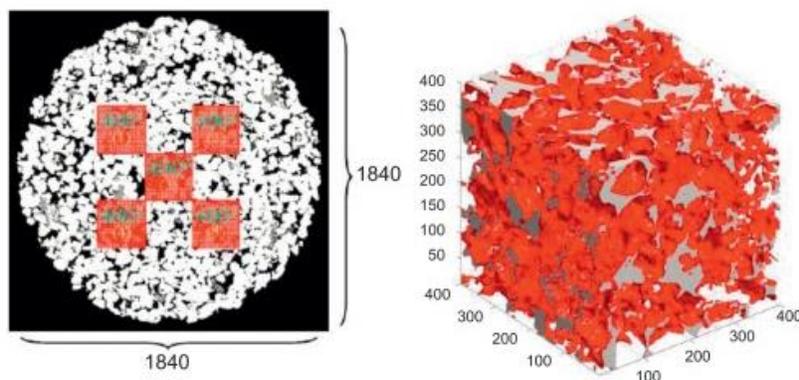


Figura 2.11 Berea sandstone: Left side is a core sample, subdivided into sub-volumes 1–5; right side is sub-volume 3 with grey-shaded mineral skeleton and, in red, the pore space network [19]

En este sentido Sánchez [9] presenta un trabajo en el cual se obtiene un modelo de predicción del ascenso capilar considerando los cambios de temperatura a través de los medios porosos.

A partir de las pruebas experimentales y teóricas, donde se trabaja con tres casos diferentes de temperatura, se obtuvieron los resultados que muestran en la figura 2.10.

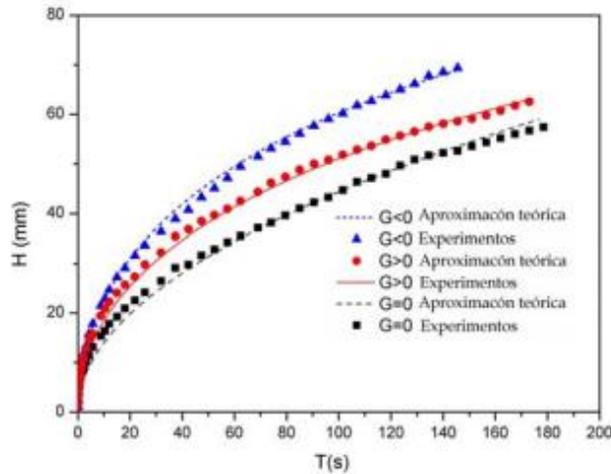


Figura 2.10 Comparación de resultados teóricos (curvas) y resultados experimentales (símbolos) para la evolución temporal del frente de imbibición $h(t)$, para los distintos valores de G considerados: en este caso para $G = 0$ donde $T_0 = T_1 = T_{Lab} = 295.2 \text{ K}$ (■), $G < 0$ donde $G^- = -47 \text{ K/m}$ (▲) y $G > 0$ donde $G^+ = 47 \text{ K/m}$ (●). [9]

En la Figura 2.10 se observa que los flujos sometidos a un gradiente de temperatura presentan una mayor velocidad de ascenso que el caso isotérmico, siendo el más rápido y con una mayor altura de equilibrio el caso con gradiente negativo, por lo tanto, este trabajo nuevamente demuestra que los efectos del cambio de temperatura afectan directamente al avance del flujo, en este experimento ocurre para la imbibición en un medio poroso, por último, se destaca que este análisis se desarrolla para un fluido newtoniano.

2.4. Justificación.

Actualmente hay muy poca información respecto a la imbibición para fluidos no newtonianos a través de medios porosos y son muy pocos los trabajos que involucran los efectos generados por los cambios de temperatura para estos, por lo tanto, en este trabajo se pretende sentar las bases considerando los efectos de la temperatura mediante el desarrollo de un modelo matemático capaz de describir el ascenso de este tipo de fluidos en un medio poroso. Cabe mencionar que todo esto es la continuación de una serie de trabajos en el campo de la mecánica de fluidos enfocados en los fluidos capilares, siendo este trabajo una parte innovadora de este campo.

3. Modelo Matemático.

3.1. Descripción del problema.

Como se muestra en la Figura 3.1, el medio poroso de sección transversal constante, sujeto a un gradiente de temperatura, se pone en contacto con un fluido, el cual ascenderá por efectos de la presión capilar, durante el ascenso el fluido alcanzará la temperatura del medio, durante el movimiento capilar la fuerza de fricción y el peso del fluido se opondrán a este, finalmente el fluido se detendrá cuando se alcance la altura de equilibrio. Se analizarán tres condiciones de temperatura, un gradiente positivo en donde el fluido se calienta a medida que asciende, un gradiente negativo cuando el fluido baja su temperatura durante el ascenso y finalmente el caso isotérmico.

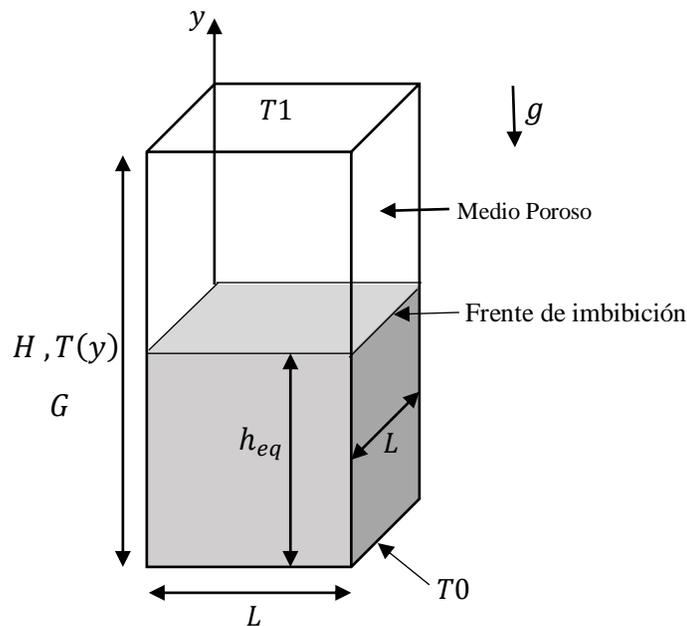


Figura 3.1. Vista esquemática de la región embebida (zona gris) y del frente de imbibición instantáneo o altura de equilibrio h_{eq} . El bloque tiene altura H y el área de la sección transversal L^2 , se encuentra debajo del campo de gravedad g y un gradiente de temperatura longitudinal $G=(T_1 - T_0)/H$. Aquí, T_0 es la temperatura en la cara inferior y T_1 es la temperatura en la cara Superior

3.2. Desarrollo del modelo matemático.

La velocidad de penetración del fluido se puede modelar a partir de la ecuación Blake-Kozeny, que se emplea para flujos de fluidos no newtonianos a bajas velocidades en medios porosos, Ec. (1), mediante la cual podemos relacionar la velocidad de flujo promedio “ u ” y el gradiente de presión ΔP . [10]

$$u = \left[\frac{k}{\mu_{eff}} \left(-\frac{dp}{dy} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

Donde k es la permeabilidad [m/s], μ_{eff} es la viscosidad efectiva [Pa*s] y n es el índice de comportamiento.

$$\mu_{eff} = \frac{K^*}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n (150k\phi)^{\frac{1-n}{2}} \quad (2)$$

En la Ec. (2) [21] se tiene que μ_{eff} corresponde a la viscosidad efectiva (Pa*s), K^* es el índice de congruencia dimensional, ϕ la porosidad del medio (%) y k la permeabilidad (m/s).

Además, el gradiente de presiones se puede estimar mediante la siguiente expresión

$$\Delta p = -C_1 \frac{\sigma}{d} \quad (3)$$

Donde σ corresponde a la tensión superficial, “ d ” al diámetro medio de los poros y C_1 es una constante agregada adimensional la cual engloba las propiedades de ángulo de contacto (θ) y porosidad (ϕ). [9]

3.3. Modelo para el caso Isotérmico.

Para derivar el modelo matemático, de la Ec. (1) se obtiene:

$$\Delta p = -\frac{\mu_{eff}}{k} u^n h \quad (4)$$

Ahora se sustituye la Ec. (3) en la Ec. (4) generando la siguiente ecuación:

$$-c_1 \frac{\sigma}{d} = -\frac{\mu_{eff}}{k} u^n h \quad (5)$$

Como se observa en la ecuación anterior se tienen los efectos generados en el fluido por el gradiente de presión y los efectos viscosos, a la ecuación anterior como resultado de un balance de fuerzas se le incorporan los efectos de la columna de fluido, con lo que se obtiene la Ec. (6).

$$c_1 \frac{\sigma}{d} - \frac{\mu_{eff}}{k} u^n h - \phi \rho g h = 0 \quad (6)$$

Donde ϕ es el porcentaje de porosidad (%), ρ es la densidad del fluido (kg/m^3), “g” la aceleración gravitatoria (m/s^2) y “h” la altura de la roca.

A partir de un análisis de órdenes de magnitud [9] se puede demostrar que la porosidad de la roca puede estimarse mediante la siguiente expresión.

$$k = \frac{d^2}{c_2} \quad (7)$$

Se sustituye la Ec. (7) en la Ec. (6), además, la velocidad “u” se considera como la velocidad promedio del frente de imbibición por lo que $u = dh/dt$, en consecuencia se obtiene la siguiente expresión, Ec.(8).

$$c_1 \frac{\sigma}{d} - \frac{c_2 \mu_{eff}}{d^2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^n h - \phi \rho g h = 0 \quad (8)$$

Para obtener un modelo más general, se proponen las siguientes variables adimensionales, ver Eq. (9) y Ec. (10), que permitirán simplificar la ecuación anterior.

$$\varepsilon = \frac{h}{h_{eq}} \quad (9)$$

$$\tau = \frac{t}{t_c} \quad (10)$$

En las cuales h_{eq} es la altura de equilibrio a la que llega el fluido en metros y t_c es el tiempo característico en segundos que el fluido tarda en alcanzar la altura mencionada.

Sustituyendo la Ec. (9) y Ec. (10) en la Ec. (8) se obtiene la siguiente ecuación:

$$1 - \frac{d}{c_1\sigma} \frac{c_2\mu_{eff}}{d^2} h_{eq} \left(\frac{h_{eq}}{t_c} \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^n \varepsilon - \frac{d}{c_1\sigma} \Phi\rho g(h_{eq})\varepsilon = 0 \quad (11)$$

Por lo tanto, a partir de la Ec. (11) se obtiene la siguiente ecuación diferencial, la cual corresponde al **Modelo Matemático para el caso Isotérmico**.

$$1 - \varepsilon \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^n - \varepsilon = 0 \quad (12)$$

De la Ec. (11) h_{eq} y t_c se definen de la siguiente manera:

$$h_{eq} = \frac{c_1\sigma}{\Phi\rho g d} \quad (13)$$

$$\left[\frac{c_2}{d^2\Phi\rho g} \mu_{eff}(h_{eq})^n \right]^{\frac{1}{n}} = t_c \quad (14)$$

Este modelo puede simplificarse si se considera una roca delgada (lámina) en la cual se puedan considerar nulos los efectos del peso del fluido, en cuyo caso los resultados se muestran en el **Apéndice A**.

3.4. Modelo para el caso con Gradiente de Temperatura.

Para desarrollar el modelo matemático para el caso con un gradiente de temperatura (Positivo y Negativo), se parte de la Ec. (6).

$$C_1 \frac{\sigma}{d} - \frac{\mu_{eff}}{k} u^n h - \phi \rho g h = 0$$

Se emplea nuevamente la viscosidad efectiva determinada por la ecuación Ec. (2).

$$\mu_{eff} = \frac{K^*}{12} \left(9 + \frac{3}{n}\right)^n (150k\phi)^{\frac{1-n}{2}}$$

Christiansen [21] propone que el índice de congruencia adimensional, K^* , puede variar de acuerdo a la siguiente expresión Ec. (15).

$$K^* = K_0^* e^{-n \frac{T(y)-T_0}{T_v}} \quad (15)$$

Donde T_0 es la temperatura inicial, K_0^* es el índice de congruencia dimensional evaluado a la temperatura T_0 inicial, T_v es un valor de incremento de temperatura para el cual la viscosidad presenta un incremento igual a “e” y $T(y)$ es el valor de temperatura de la roca para una posición “y”. [21]

En este caso se analiza un gradiente lineal de temperatura por lo que la distribución de está en la roca está dada de la siguiente manera. [8]

$$T(y) = T_0 \pm Gy \quad (16)$$

Donde (G) es el gradiente de temperatura definido como $G=(T_1 - T_0)/H$.

Combinando las ecuaciones (5), (6), (15) y (16), se puede demostrar que la caída de presión puede estimarse mediante la siguiente expresión.

$$dp = - \frac{C_2 H_0}{d^2} \left[\frac{1}{12} \left(9 + \frac{3}{n}\right)^n (150k\phi)^{\frac{1-n}{2}} \right] u^n e^{-n \frac{\pm Gy}{T_v}} dy \quad (17)$$

Por lo tanto, la Ec. (17) queda de la siguiente forma.

$$dp = -Au^n e^{-n\frac{\pm Gy}{Tv}} dy \quad (18)$$

Donde:

$$A = \frac{C_2 H_0}{d^2} \left[\frac{1}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n (150k\phi)^{\frac{1-n}{2}} \right]$$

Integrando la Ec. (18) y considerando un balance de las fuerzas presentes durante el ascenso capilar y junto con la Ec. (3) se obtiene la expresión siguiente.

$$-C_1 \frac{\sigma}{d} = \pm Au^n e^{\mp n\frac{G}{Tv}h} - \phi \rho gh \quad (19)$$

Para considerar los efectos de la temperatura y la presión capilar, se propone una expansión en series de Taylor en función de la temperatura.

$$\sigma(h(t)) = \sigma_0 \left[1 + \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) Gh \right] \quad (20)$$

Se sustituye el valor de la tensión superficial de la Ec. (20) en la Ec. (19) y considerando que el frente de imbibición avanza con una velocidad promedio $u = \partial h / \partial t$, se obtiene la Ec. (21).

$$\frac{C_1}{d} \sigma_0 \left[1 + \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) Gh \right] \pm A \left(\frac{dh}{dt} \right)^n e^{\mp n\frac{G}{Tv}h} - \phi \rho gh = 0 \quad (21)$$

Para obtener un modelo general se proponen las siguientes variables adimensionales

$$\varepsilon = \frac{h}{h_{eq}}$$

$$\tau = \frac{t}{t_c}$$

Sustituir estas variables da como resultado la siguiente ecuación diferencial, la cual corresponde al **Modelo Matemático para el caso con Gradiente de Temperatura**.

$$[1 \pm B\varepsilon] - \varepsilon \pm \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau}\right)^n e^{\mp\alpha\varepsilon} = 0 \quad (22)$$

Por último, se presentan las ecuaciones para cada gradiente.

3.4.1. Modelo matemático para el Gradiente Positivo.

Se plantea la Ec. (22) con los signos correspondientes al caso del gradiente positivo, dando como resultado la ecuación diferencial para el **Gradiente Positivo**.

$$[1 + B\varepsilon] - \varepsilon + \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau}\right)^n e^{-\alpha\varepsilon} = 0 \quad (23)$$

3.4.2. Modelo matemático para el Gradiente Negativo.

Se plantea la Ec. (22) con los signos correspondientes al caso del gradiente negativo, dando como resultado la ecuación diferencial para el **Gradiente Negativo**.

$$[1 - B\varepsilon] - \varepsilon - \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau}\right)^n e^{+\alpha\varepsilon} = 0 \quad (24)$$

Donde:

$$B = \frac{h_{eq}}{\sigma_0} G \left(\frac{d\sigma}{dT}\right)$$

$$\alpha = n \frac{G}{T_v} h_{eq}$$

$$h_{eq} = \frac{C_1 \sigma_0}{\phi \rho g d}$$

$$t_c = \frac{h_{eq}}{\left(\frac{C_1 \sigma_0}{Ad}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

O bien

$$t_c = \frac{C_1 \sigma_0}{\phi \rho g d \left(\left(\frac{C_1 \sigma_0}{\frac{C_2 K_0^*}{d}} \right) \frac{1}{\left[\frac{1}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n (150 k \phi)^{\frac{1-n}{2}} \right]} \right)^{\frac{1}{n}}}$$

4. Resultados.

Las condiciones del medio poroso utilizadas para las pruebas del modelo matemático corresponden a una roca con características; Material: Arenisca de berea, Porosidad (ϕ): 20 %, Diámetro promedio de poro (d): 0.2×10^{-3} (m), Permeabilidad: 500 (mD) y con las siguientes dimensiones:

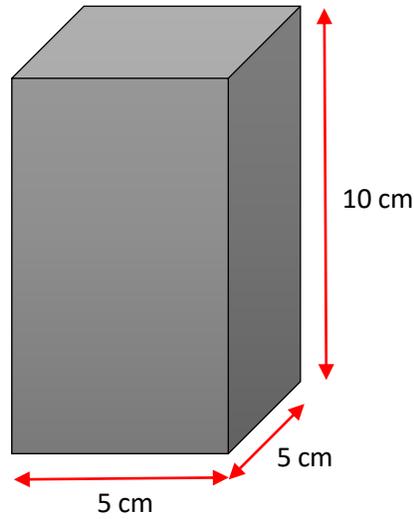


Figura 4.1 Dimensiones de una sección de Berea Sandstone

Por otra parte, las condiciones de fluido no newtoniano utilizadas fueron tomadas de la caracterización hecha en el trabajo de Sodah [13] presentadas en la siguiente tabla.

Test Mixture	Material %Consistency cm ²	dyne. Sec. Flow	Behaviour index	Type of Flow
CS100	26.77	1.000	1.00	Newtonian
H100	13.80	0.830	0.819	pseudoplastic
SC100	81.50	0.834	0.368	pseudoplastic
CS80 : SC20	5.84	0.860	0.857	pseudoplastic
CS70 : SC30	5.99	0.808	0.825	pseudoplastic
CS60 : SC40	15.00	0.684	0.699	pseudoplastic
CS50 : SC50	17.31	0.632	0.637	pseudoplastic
CS40 : SC60	18.11	0.607	0.628	pseudoplastic
H60 : SC40	2.58	1.300	1.320	dilatant
H30 : CS70	2.35	1.179	1.185	dilatant
H20 : CS80	1.81	1.102	1.109	dilatant

Tabla 4.1 Características de flujo de Jarabe de Maíz (CS), Miel (H), Crema comestible (SC) y mezclas entre estos CS: SC and H:CS [13]

4.1. Curvas obtenidas mediante el modelo matemático.

Utilizando los modelos matemáticos desarrollados anteriormente, se pueden obtener las siguientes curvas, las cuales describen el ascenso capilar de un fluido en un medio poroso dependiendo de sus características físicas (Newtoniano, Pseudoplástico o Dilatante) así como los efectos que causa sobre este la presencia de un gradiente de temperatura.

4.1.1. Fluido Newtoniano.

Para un fluido con características: $n=1$ y $k=26.8$. [13] Se obtienen las siguientes curvas [Figura 4.1] de ascenso capilar de acuerdo a las condiciones $G=150$ (K/m) y $\phi =20\%$.

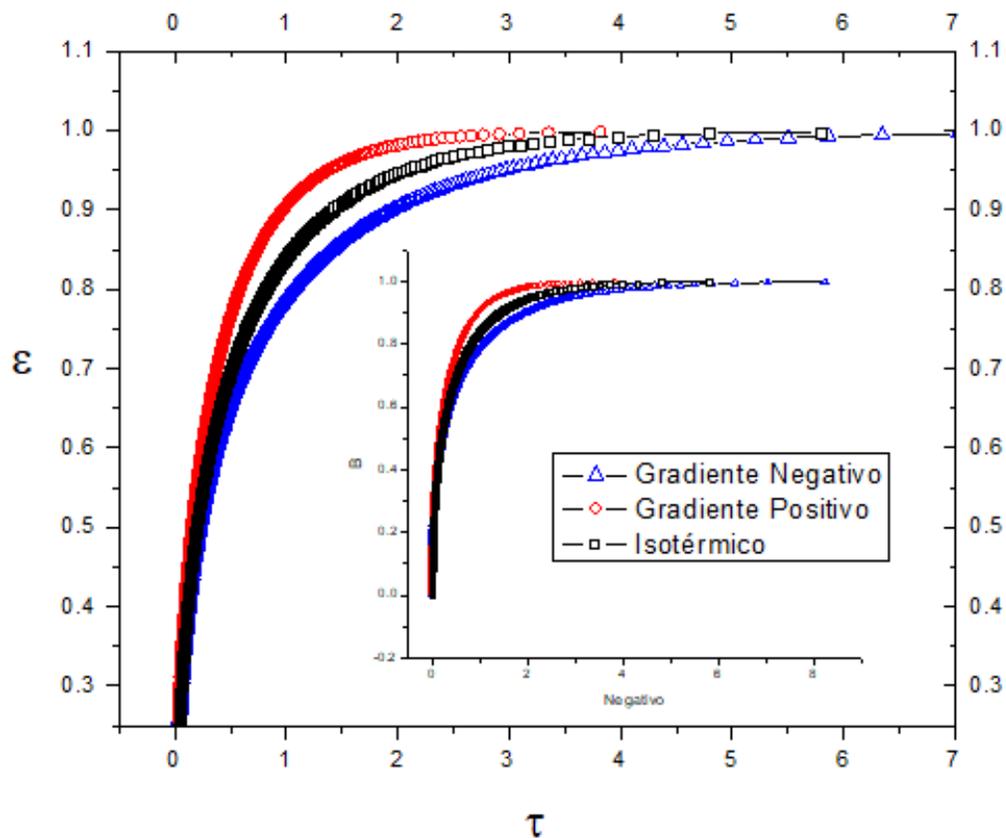


Figura 4.2

En la Figura 4.2 se puede observar que existe una variación en la velocidad de ascenso respecto a las condiciones del gradiente de temperatura, donde esta diferencia indica que el fluido sometido a un gradiente de temperatura negativo (base de la roca a mayor temperatura que la parte superior) tiene la menor velocidad del frente de imbibición, también, para el fluido bajo las condiciones de un gradiente de temperatura positivo (parte superior de la roca a mayor temperatura que la inferior) se presenta la mayor velocidad de ascenso, dejando entre estos el fluido que asciende por un medio isotérmico. Para los tres casos se presenta un comportamiento asintótico.

4.1.2. Fluido Pseudoplástico.

Para un fluido con características: $n=0.84$ y $k=13.8$. [13] Se obtienen las siguientes curvas [Figura 4.2] de ascenso capilar de acuerdo a las condiciones $G=150$ (K/m) y $\phi =20\%$.

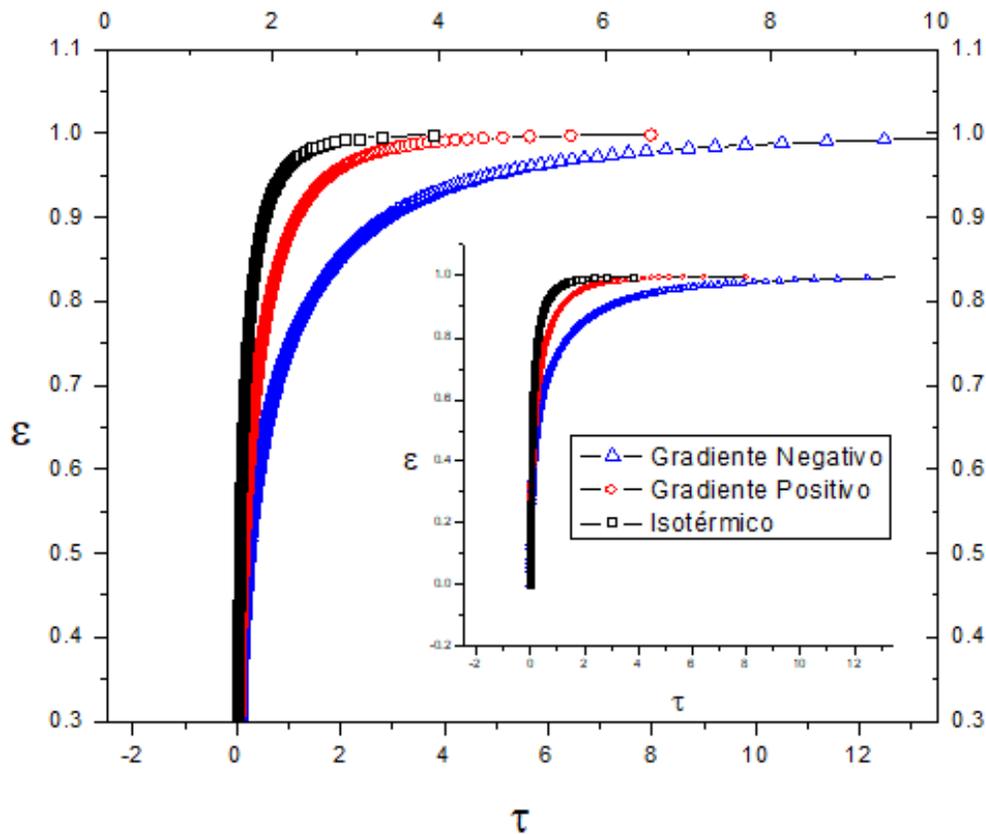


Figura 4.3

Para un fluido con características: $n=0.63$ y $k=81.5$. [13] Se obtienen las siguientes curvas [Figura 4.3] de ascenso capilar de acuerdo a las condiciones $G=150$ (K/m) y $\phi =20\%$.

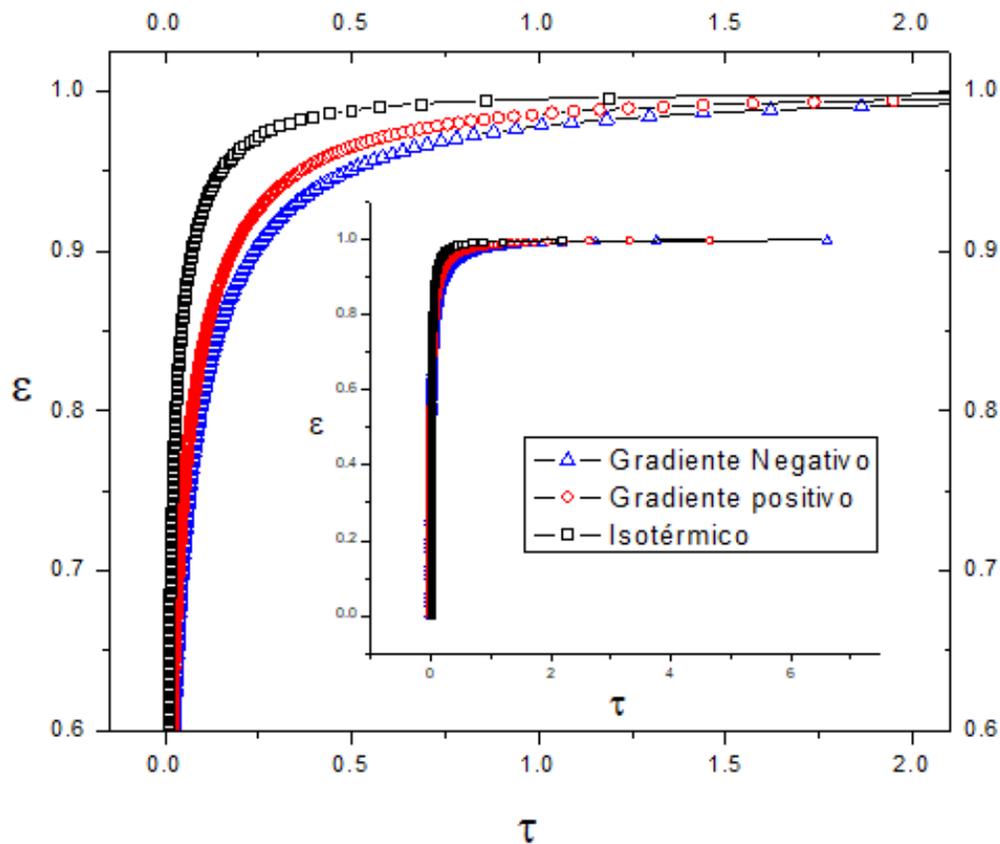


Figura 4.4

En la Figura 4.3 y 4.4 se observan los efectos de la presencia de los gradientes de temperaturas sobre un fluido pseudoplástico, en ambas figuras se observa que al existir un gradiente de temperatura en el medio por donde el frente de imbibición avanza, la velocidad de este es menor que el caso isotérmico, el cual presenta la mayor velocidad. Se observa en ambas figuras que el flujo más lento corresponde al fluido en las condiciones de un gradiente negativo de temperatura, mientras que para el caso de un gradiente positivo de temperatura el flujo avanza a menor velocidad que el isotérmico y a mayor que el caso con un gradiente positivo. También se observa un comportamiento asintótico para los tres casos en ambas figuras.

4.1.3. Fluido Dilatante.

Para un fluido con características: $n=1.3$ y $k=2.58$. [13] Se obtienen las siguientes curvas [Figura 4.4] de ascenso capilar de acuerdo a las condiciones $G=150$ (K/m) y $\phi =20\%$.

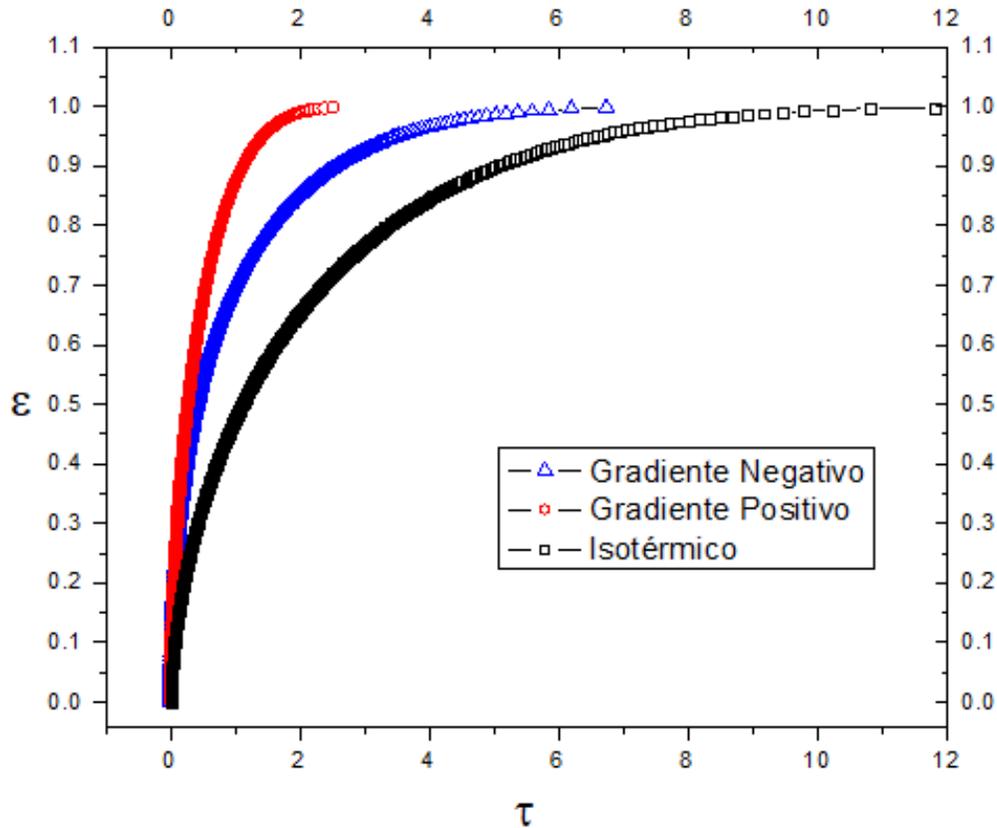


Figura 4.5

Como se observa en la Figura 4.5 y 4.6, la presencia de los gradientes de temperatura aumenta la velocidad con la que el frente de imbibición avanza, siendo el fluido que se encuentra en condiciones isotérmicas el que asciende a menor velocidad. Se puede ver en las figuras ya mencionadas que la mayor velocidad del frente de imbibición se presenta en el flujo bajo condiciones de un gradiente positivo de temperatura y por debajo de este se encuentra el flujo bajo condiciones de un gradiente negativo de temperatura. De igual manera para el fluido dilatante se presenta un comportamiento asintótico de las curvas que describen la velocidad de ascenso del frente de imbibición.

Para un fluido con características: $n=1.2$ y $k=2.75$. [13] Se obtienen las siguientes curvas [Figura 4.5] de ascenso capilar de acuerdo a las condiciones $G=150$ (K/m) y $\phi =20\%$.

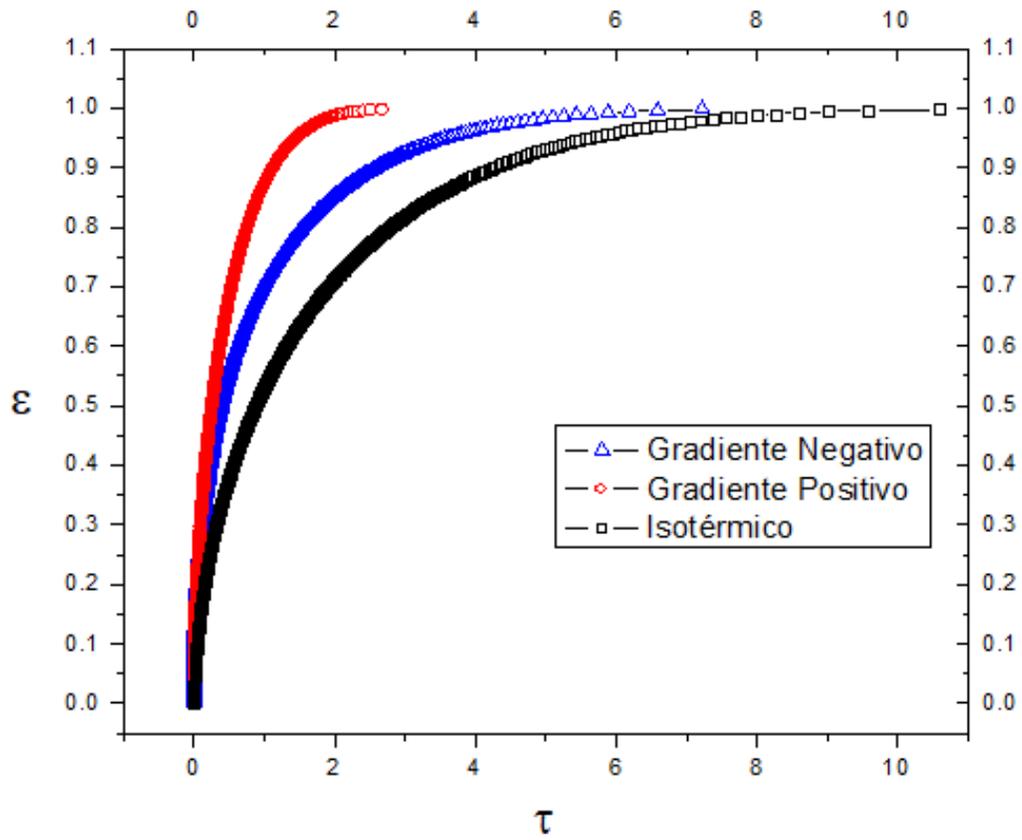


Figura 4.6

4.2. Efectos del gradiente de temperatura.

Visualización de los efectos que causa el cambio en la magnitud del gradiente de temperatura para un fluido pseudoplástico y un dilatante.

4.2.1. Fluido Pseudoplástico

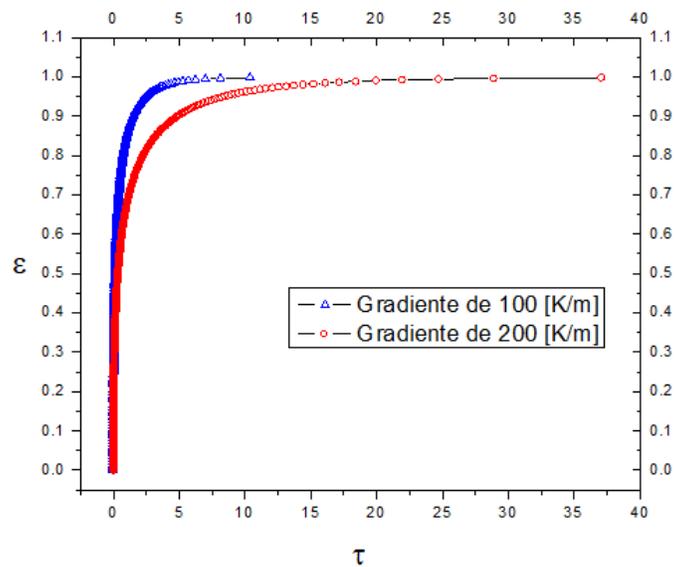


Figura 4.7. Gradiente Negativo

En la Figura 4.7 se observan los efectos del cambio de magnitud del gradiente de temperatura para el caso de un fluido con características $n=0.84$ y $k=13.8$, el cual está bajo las condiciones de un gradiente negativo de temperatura. Como se observa en la figura, el aumento del gradiente disminuye la velocidad de ascenso del fluido Pseudoplástico, siendo más rápido el flujo con un gradiente de temperatura menor.

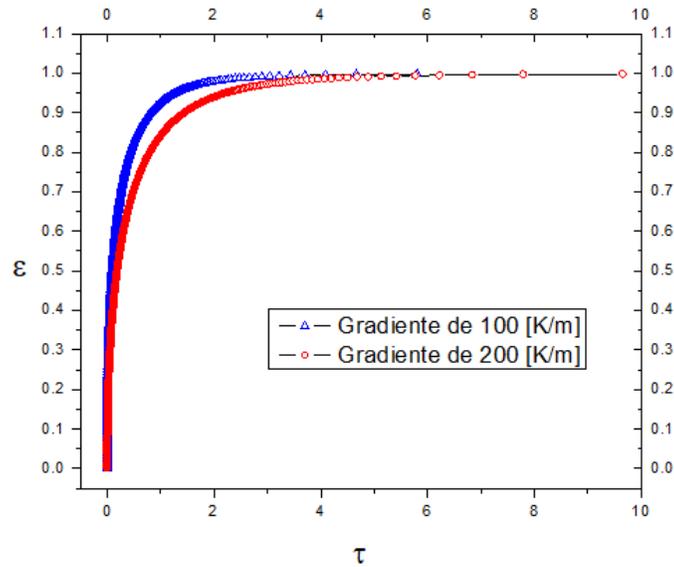


Figura 4.8. Gradiente Positivo

En la Figura 4.8 se observan los efectos del cambio de magnitud del gradiente de temperatura para el caso de un fluido con características $n=0.84$ y $k=13.8$, el cual está bajo las condiciones de un gradiente Positivo de temperatura. Como se observa en la figura, el aumento del gradiente disminuye la velocidad de ascenso del fluido Pseudoplástico, siendo más rápido el flujo con un gradiente de temperatura menor.

4.2.2. Fluido Dilatante.

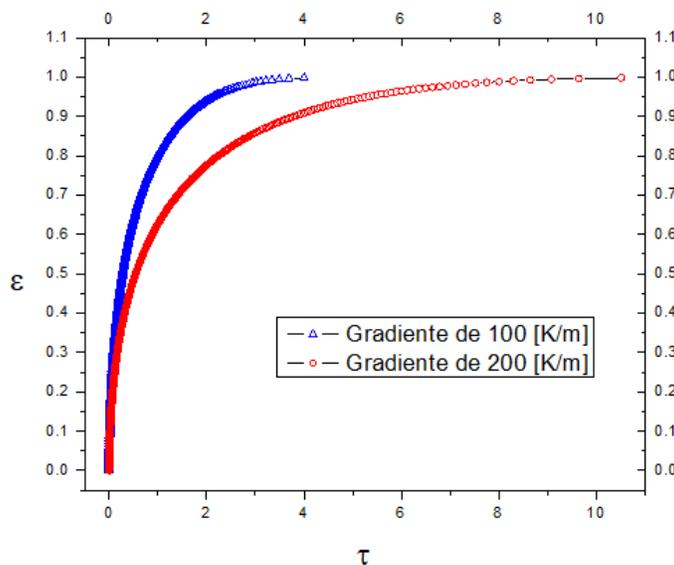


Figura 4.9. Gradiente Negativo

En la Figura 4.9 se pueden ver los efectos generados por el cambio de magnitud del gradiente de temperatura para el caso de un fluido con características $n=1.3$ y $k=2.58$, el cual se encuentra bajo las condiciones de un gradiente negativo de temperatura. Como se observa en la figura, el aumento del gradiente disminuye la velocidad de ascenso del fluido Dilatante, siendo más rápido el flujo con un gradiente de temperatura menor.

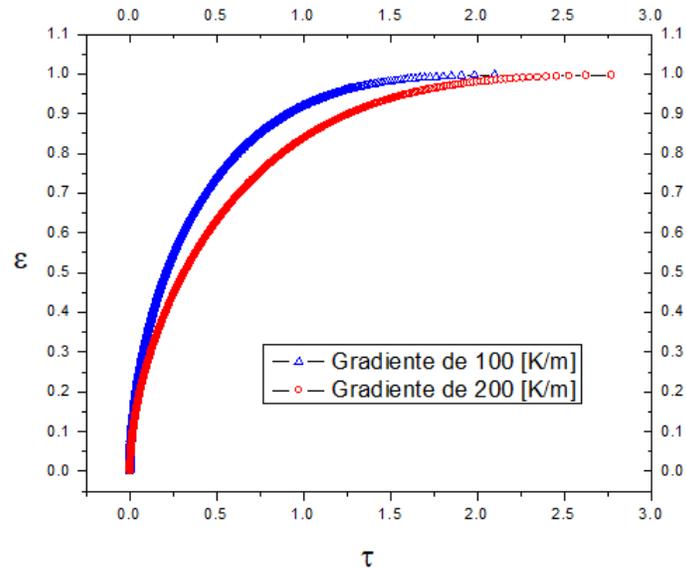


Figura 4.10 [Gradiente Positivo, $n=1.3$, $k=2.58$, $TV=15$, $\phi=20\%$ y $C_1 = 0.8$.]

En la Figura 4.10 se pueden ver los efectos generados por el cambio de magnitud del gradiente de temperatura para el caso de un fluido con características $n=1.3$ y $k=2.58$, el cual se encuentra bajo las condiciones de un gradiente positivo de temperatura. Como se observa en la figura, el aumento del gradiente disminuye la velocidad de ascenso del fluido Dilatante, siendo más rápido el flujo con un gradiente de temperatura menor.

5. Conclusiones y Comentarios

5.1. Conclusiones.

En el desarrollo de este trabajo de tesis se obtiene una descripción grafica del ascenso de los fluidos Newtoniano, Pseudoplástico y Dilatante, a través de un medio poroso con gradientes de temperatura, respecto a lo obtenido en los resultados se pueden hacer las siguientes conclusiones:

Se presenta un comportamiento muy particular para cada uno de los fluidos sometido a los gradientes de temperatura, donde:

- Los fluidos pseudoplásticos, en presencia de un gradiente de temperatura la velocidad de ascenso disminuye respecto al caso isotérmico.
- Los fluidos dilatantes sometidos a un gradiente de temperaturas aumentan su velocidad de flujo respecto al caso isotérmico del mismo.
- Para los tres tipos de fluidos en sus diferentes condiciones de temperatura se presenta un comportamiento asintótico, ya que conforme avanza el frente de imbibición la velocidad de este va disminuyendo.
- También se tiene que los fluidos No Newtonianos presentan gran sensibilidad a los efectos de los gradientes de temperatura, donde tanto para fluidos Pseudoplásticos y Dilatantes el aumento de la magnitud de gradiente de temperatura, ya sea negativo o positivo, disminuye la velocidad de ascenso del frente de imbibición de estos.

Por último, cabe destacar que todos estos resultados fueron obtenidos por el modelo matemático desarrollado para este trabajo, el cual presento resultados coherentes y sensibilidad al cambio de los parámetros, por lo tanto, se concluye diciendo que el objetivo de derivar un Modelo Matemático predictivo para el ascenso capilar de un fluido no newtoniano en una roca se cumplió satisfactoriamente.

5.2. Comentarios.

En los resultados obtenidos para el fluido Newtoniano, el caso con un gradiente de temperatura negativo es el de menor velocidad del frente de imbibición, esto se puede deber a que conforme la temperatura va disminuyendo, la viscosidad del fluido va aumentando, provocando que el fluido desacelere. Para el caso con un gradiente de temperatura positivo se tiene una mayor velocidad de ascenso, esto se puede dar ya que la temperatura del fluido va aumentando y con esto su viscosidad va disminuyendo, teniendo así una mejor capacidad de fluir. Por último, el caso isotérmico se encuentra entre ambas curvas ya mencionadas, esto puede deberse a que en el ascenso de este fluido no se presenta ninguna modificación de su viscosidad y por lo tanto presenta un comportamiento estándar, en el cual el fluido únicamente se ve afectado por los efectos de su propio peso.

En los resultados correspondientes al fluido Pseudoplástico podemos observar que la presencia de un gradiente de temperaturas tiende a reducir la velocidad de estos fluidos, lo que significa que los vuelve más viscosos, dificultando su capacidad de fluir a través del medio poroso, dando a notar que el caso isotérmico es el que presenta mayor velocidad debido a que su viscosidad solo se ve afectada por el esfuerzo de ascenso y no por los cambios de temperatura. Esto se puede deber en el caso de un gradiente negativo a que la viscosidad aumenta conforme el frente de imbibición avanza y al ser más lento el movimiento las propiedades del fluido indican que la viscosidad de este es mayor, en el caso del gradiente positivo la viscosidad de entrada es baja debido a que la temperatura de inicio es menor, pero conforme la temperatura aumenta va disminuyendo la viscosidad, permitiéndole fluir con una mayor facilidad y velocidad.

De acuerdo a los resultados obtenidos para el fluido Dilatante, se observa que la presencia de un gradiente de temperatura aumenta la velocidad del flujo y por ende eso podría significar que su viscosidad disminuye. El flujo con mayor velocidad de ascenso es el que está bajo un gradiente positivo, esto puede significar que conforme el frente de imbibición va subiendo y a temperatura aumentando, la viscosidad del fluido disminuye y le permite una mejor

capacidad de fluir. Ahora con la presencia de un gradiente negativo, se observa que la velocidad del frente de imbibición es menor respecto al caso anterior y mayor que el caso isotérmico, esto se puede deber a que conforme la temperatura disminuye, la viscosidad aumenta y se genera un frente de imbibición más viscoso, el cual desacelera al fluido. Ahora el caso isotérmico es el que tiene una menor velocidad, esto se puede deber a que este no sufre variación en su viscosidad debido a cambios de temperatura, donde por las propiedades del fluido tenemos que conforme el esfuerzo del flujo aumenta este se vuelve más viscoso y por ende fluye a una menor velocidad.

Por otra parte, se observa un comportamiento muy particular al momento de comparar la influencia de la magnitud del gradiente de temperaturas, donde en las figuras 4.7 y 4.9 que corresponden a un fluido pseudoplástico y dilatante respectivamente, esto ya que se observa en ambos casos que entre mayor sea el gradiente de temperatura, la velocidad de ascenso disminuye, lo cual indica que las propiedades como la viscosidad y tensión superficial incrementan con el gradiente sin importar el fluido.

Por último, cabe mencionar que lo dicho en esta sección de comentarios es únicamente una interpretación propia, por lo tanto, esta información no cuenta aún con sustento experimental que permita hacer estas afirmaciones, la parte experimental correspondiente a este trabajo se verá en la segunda etapa de esta investigación la cual se llevará a cabo como proyecto de posgrado en Ingeniería Mecánica - Termo fluidos.

6. Bibliografía.

- [1] Maximino Ventura Sánchez & Juan Guillermo Cervantes. (2019). Estudio teórico-experimental de la imbibición para un fluido pseudoplástico. Ciudad Universitaria, Cd. Mx.: UNAM – Dirección General de Bibliotecas.
- [2] Zitzewitz, P.W. (2004). Física. Colombia: McGraw-Hill.
- [3] Robert L. Mott. (1996). MECÁNICA DE FLUIDOS APLICADA. 4a. Ed. CaIJe 4 N° 25-2~ piso Fracc, Ind. Alce Blanco, Naucalpan de Juárez, Edo. de México, c.P. 53370: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- [4] Reiner, M., and Scott Blair, Rheology terminology, in Rheology, Vol. 4 pp. 461, (New York: Achedemic Press, 1967).
- [5] Abraham Medina Ovando, José Antonio Cordova y Ravmundo Martínez-Angeles. (20 de julio de 1999). Imbibición en papel. Ciencias Exactas y Aplicadas, Vol.1, p.271.
- [6] J.M. Sánchez Huerta, A. Ortiz Gómez. (2021, Julio 16). Imbibition in conical capillaries under temperature gradients. ELSEVIER, 412, pp.1-5.
- [7] J.M Sánchez, J.G Cervantes. (2017, septiembre 20-22). Estudio Experimental del frente de Imbibición de fluidos no-newtonianos en una celda de Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura. MEMORIAS DEL XXIII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMIM, 1ro, pp. 1-5.
- [8] José Melesio Sánchez Huerta. (AGOSTO 2005). Imbibición en medios porosos fracturados. Facultad de Ingeniería, UNAM: Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería.

- [9] José Melesio Sánchez Huerta (AGOSTO 2005). Spontaneous imbibition in a porous medium under longitudinal temperature gradients. REVISTA MEXICANA DE FÍSICA, 1er. Volumen.
- [10] Taha Sochi. (11 August 2010). Non-Newtonian flow in porous media. ELSEVIER, Vol.1, p.5010.
- [11] G. W. Scott Blair et al., J. Phys. Chem., (1939) 43 (7) 853–864. Also the de Waele-Ostwald law, e.g Markus Reiner et al., Kolloid Zeitschrift (1933) 65 (1) 44-62.
- [12] E.N. Sieder, G.E. Tate, Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes, Ind. Eng. Chem. 28 (1936) 1429.
- [13] G. SODAH AYERNOR. (SEPTEMBER 1986). A MODIFIED POWER LAW FOR DETERMINING FLOW CHARACTERISTICS OF FLUID. NIJOTECH, VOL. 10, p.18.
- [14] Vradsis GC, Protopapas AL. Macroscopic conductivities for flow of Bingham plastics in porous media. J Hydraulic Eng 1993;119(1):95e108
- [15] Valentina Ciriello & Vittorio Di Federico. (24 January 2013). Analysis of a benchmark solution for non-Newtonian radial displacement in porous media. ELSEVIER, Vol. 1, p.47.
- [16] R.P. Chabra, J. Comiti, I. Machac̃, Flow of non-Newtonian fluids in fixed and fluidised beds, Chemical Engineering Science 56 (2001) 1–27.
- [17] Talens Oliag Pau. (19/6/16). Caracterización del comportamiento reológico de un alimento fluido pseudoplástico. Universidad Politécnica de Valencia, Vol. 1, p.3.

- [18] Yu-Shu Wu & Karsten Pruess. (1998, Enero). A numerical method for simulating non-Newtonian fluid flow and displacement in porous media. ELSEVIER, Vol. 21, p. 354.
- [19] Jürgen H. Schön. (2015). Chapter 2 - Pore Space Properties. ELSEVIER, Vol. 1, Figure 2.45.
- [20] YUNUS A. ÇENGEL & JOHN M. CIMBALA. (2004). MECÁNICA DE FLUIDOS, Fundamentos y aplicaciones. Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre APiso 17, Colonia Desarrollo Santa FeDelegación Álvaro ObregónC.P. 01376, México, D.F.: MCGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- [21] E.B. Christiansen, S.E. Craig, Heat transfer to pseudoplastic fluids in laminar flow, AICHE J. 8 (1962) 154.

7. Apéndice A

De acuerdo a la ecuación diferencial vista en la Ec. (16) del capítulo 3, para la imbibición en condiciones isotérmicas, se puede presentar una simplificación del mismo si se consideran nulos los efectos del peso del fluido, donde esto podría suceder si el medio poroso donde este fluye es muy delgado (lamina de roca de arenisca de berea).

Para realizar esta simplificación, partimos de la Ec. (11) del capítulo 3, donde los efectos generados por el peso del fluido se consideran nulos (densidad $[\rho]$ y aceleración gravitatoria $[g]$), dando como resultado la siguiente ecuación, ver Ec. (7.1).

$$1 - \frac{d}{c_1 \sigma} \frac{c_2 \mu_{eff}}{d^2} h_{eq} \left(\frac{h_{eq}}{t_c} \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^n \varepsilon = 0 \quad (7.1)$$

Ahora, sustituyendo la Ec. (13) y (15) del capítulo 3 en la Ec. (7.1), se obtiene la ecuación diferencial para el caso **Isotérmico con Peso Despreciable**:

$$1 - \varepsilon \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^n = 0 \quad (7.2)$$

Realizando la integral de la Ec. (7.2), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\tau = n \frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} + C_1$$

Donde se aplica la condición, cuando $\tau = 0$ entonces $\varepsilon = 0$, lo cual indica que la constante obtenida $C_1 = 0$, lo cual nos da como resultado la ecuación **El Modelo Matemático para el caso Isotérmico con Peso Despreciable**, ver Ec. (7.3).

$$\tau = n \frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} \quad (7.3)$$

Por lo tanto, para la propuesta de este modelo matemático sin efectos del peso del fluido, se obtienen las siguientes curvas características del ascenso del frente de imbibición para los fluidos con características; Newtoniano $n=1$, Pseudoplástico $n=0.84$ y Dilatante $n=1.3$.

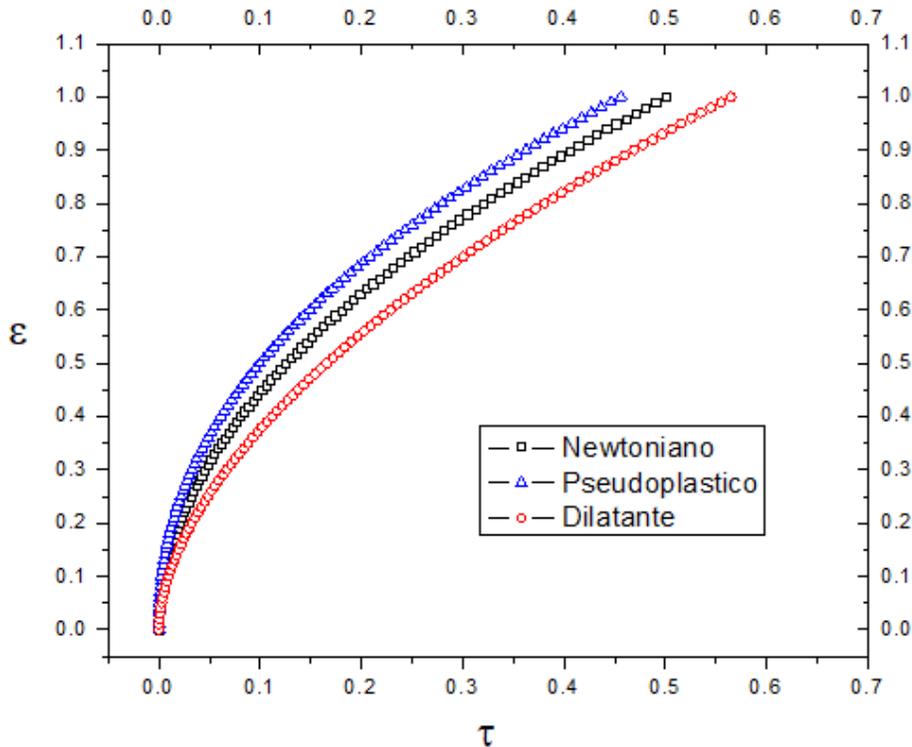


Figura 7.1

De acuerdo a la figura anterior, ver Figura 7.1, se puede observar la velocidad de ascenso del frente de imbibición para cada uno de los fluidos de trabajo y la comparación entre estos, en el cual podemos observar que el fluido más lento es el dilatante dado que le toma más tiempo alcanzar la altura de la roca, y el más rápido es el pseudoplástico llegando a la altura de la roca con menor tiempo, esto se debe a que cuando estos fluidos comienzan a fluir a través de la roca por efecto de sus propiedades el dilatante comienza a aumentar su viscosidad y en pseudoplástico comienza a disminuirla, mientras que el newtoniano se mantiene constante quedando entre ambos fluidos no newtonianos.

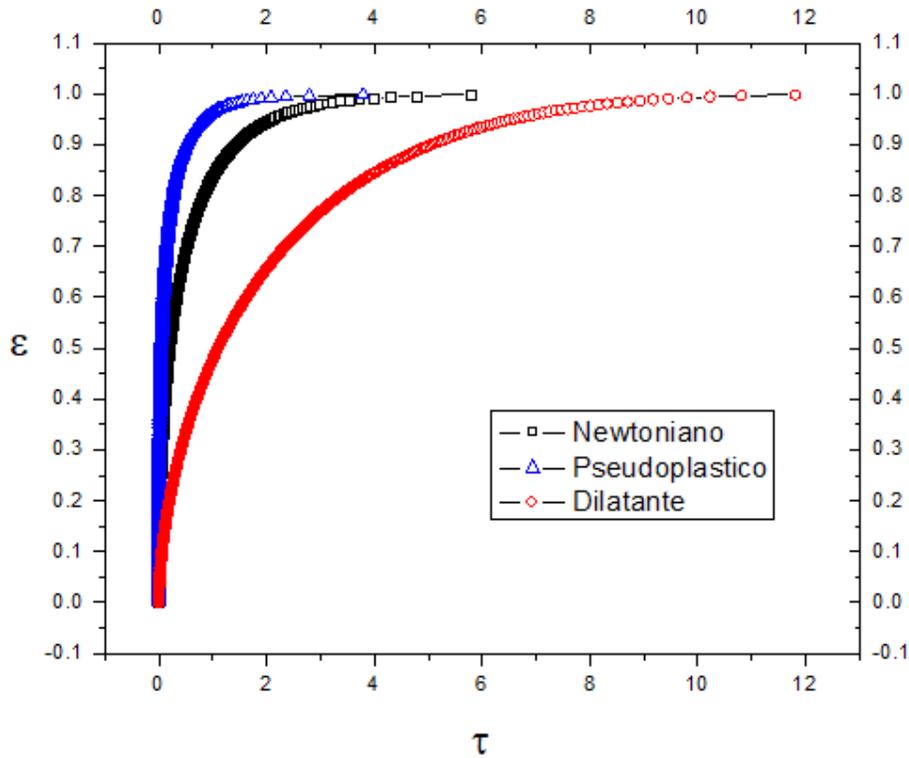


Figura 7.2

Para realizar la comparación entre el modelo isotérmico original, Ec. (16) capítulo 3, y el modelo con peso despreciable, Ec. (7.2), se presenta en la figura 7.2 las curvas características del modelo original bajo las mismas condiciones que las de la Figura 7.1, lo cual nos muestra que, aunque ambos modelos cumplen con la misma lógica (Dilatante menor velocidad, Pseudoplástico mayor velocidad y el Newtoniano entre estos), estos son muy diferentes al momento de describir el ascenso del flujo y en especial en la relación de tiempo entre estos, lo cual demuestra que el peso del fluido es un factor muy importante para tener datos con una mejor precisión y así tener una descripción más realista del comportamiento de los fluidos.

8. Apéndice B

Programa utilizado para la solución numérica del modelo matemático

```
1 subroutine iniciales
2 use var
3 implicit none
4
5
6     Y(1)    = 0.d0
7     tao(1)  = 0.d0
8     X(1)    = 0.d0
9     taod(1) = 0.d0
10    taocp(1) = 0.d0
11    taocn(1) = 0.d0
12    taodp(1) = 0.d0
13    taodn(1) = 0.d0
14    taori(1) = 0.d0
15    taorp(1) = 0.d0
16    taorn(1) = 0.d0
17 end subroutine inicial
```

Entrada

```
1 subroutine input
2 use var
3 implicit none
4
5 n=1.3d0
6 H = 2.5d-2 !Altura
7 R1= 1.0d-3 !Radio
8 R0= 0.3d-3 !Radio
9 rho= 1.02d3 !densidad
10 g = 9.81d0 !Gravedad
11 sigma= 60.94d-3 !Tensión superficial
12 sigmaP=60.94d-3 ! evaluada a la temprartura fria grdiente positivo
13 sigmaN=59.5d-3 !evaluada a la temperatura caliente gradiente negativo
14 Tinf=20.d0 + 273.15d0
15 Tsup=40.d0 + 273.15d0
16 dsigma= -3.428d-4
17 DE=0.2d-3
18 TV=15.0d0
19 k0=2.58d0 ! Es H0
20 Hroca=10.0d-2
21 fi=20.0d-2
22 cl=8.0d-1
23 end subroutine input
```

Malla

```
1 subroutine malla
2 use var
3 implicit none
4 ! ***** Roca *****
5   do i=1,imax,1
6
7     Y(i) = ( (i-1.d0)/(imax-1.d0) )**2.d0
8
9
10    end do
11 !***** Roca *****
12   do i=1,imax,1
13
14     X(i) = ( (i-1.d0)/(imax-1.d0) )**1.0d0
15
16   end do
17
18 end subroutine malla
```

Programa

```
1 program cono
2 use var
3 implicit none
4
5   call input
6   call iniciales
7   call malla
8
9
10 !***** INICIALES *****
11
12
13
14 !Constantes Roca
15 GT=abs((Tsup-Tinf)/Hroca)!Gradiente de la roca o celda
16 BrocaP=((cl/(fi*roo*g*DE))*dsigma) !((Hroca/sigmaP)*GT*dsigma)
17 BrocaN=((cl/(fi*roo*g*DE))*dsigma) !((Hroca/sigmaN)*GT*dsigma)
18 AlfaRP=((n*cl*sigmaP*GT)/(fi*roo*g*DE*TV) !((Hroca*n*GT)/TV)
19 AlfaRN=((n*cl*sigmaN*GT)/(fi*roo*g*DE*TV) !((Hroca*n*GT)/TV)
20
21
```

```

22 !##### ROCAAAAA #####
23 Print*, 'INICIA ROCA'
24 pause
25
26 open(unit=11, file='sal_Isotermico_Roca.dat')
27
28     Print*, 'INICIA ROCA ISOTERMICO'
29
30     do i=2, imax, 1
31         Risoa=Y(i)-Y(i-1)
32         Risob=1.0d0-Y(i)
33
34         taori(i)=((Risoa/(Risob/Y(i)))**(1.d0/n))+taori(i-1)
35
36         write(11,*) taori(i),Y(i)
37         write(*,*) taori(i),Y(i)
38
39     end do
40
41     close (unit=11)
42 pause

```

```

44 open(unit=12, file='sal_Gradiente_Positivo_Roca.dat')
45
46 Print*, 'INICIA ROCA POSITIVO'
47 call malla
48
49     do i=2, imax, 1
50         Risoa=X(i)-X(i-1)
51         Rgpa=(-1.0d0-(X(i)*(BrocaP-1.0d0)))
52         Rgpb=(exp(-AlfaRN*X(i))-1.0d0)
53
54         taorp(i)= (Risoa/((Rgpa/Rgpb)**(1.d0/n)))+taorp(i-1)
55
56     if(Rgpa/Rgpb<0.0d0) close(unit=12)
57     if(Rgpa/Rgpb<0.0d0) exit
58
59         write(12,*) taorp(i),X(i)
60         write(*,*) taorp(i), X(i)
61
62     end do
63
64     close (unit=12)
65 pause

```

```

67 open(unit=13,file='sal_Gradyente_Negativo_Roca.dat')
68
69 Print*, 'INICIA ROCA NEGATIVO'
70 call malla
71
72     do i=2,imax,1
73         Risoa=Y(i)-Y(i-1)
74         Rgna=(1.0d0-(Y(i)*(BrocaN+1.0d0)))
75         Rgnb=((exp(AlfaR*Y(i)))-1.0d0)
76
77         taorn(i)=(Risoa/((Rgna/Rgnb)**(1.d0/n)))+taorn(i-1)
78
79         write(13,*) taorn(i),Y(i)
80         write(*,*) taorn(i),Y(i)
81
82     end do
83
84     close (unit=13)
85
86
87 end program Roca

```