



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

# **Determinación de la ubicación y el número óptimo de pozos de relleno**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A**

Tomás Onofre Lucena

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Rodolfo Gabriel Camacho  
Velázquez



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022**

## **Dedicatoria**

### ***A mis padres Gloria y Tomás:***

Le agradezco a la vida por haberme dado una maravillosa familia. Gracias por su apoyo incondicional; por enseñarme el significado de humildad, honestidad, trabajo y generosidad con su ejemplo; por ser mis pilares y por motivarme a superarme en cualquier aspecto de mi vida.

### ***A mi hermana Jessica:***

Te agradezco por estar presente en todo momento y por toda la felicidad que hemos compartido. Qué alegría tener una gran hermana como tú.

### ***A mis abuelitas Guadalupe e Irma:***

Muchas gracias por todo su cariño y enseñanzas, son un gran ejemplo de vida.

## **Agradecimientos**

A mis tíos: Javier, Xóchitl, Ignacia, y Melchor; y a mis primos Luis y Misden; por su gran apoyo. También a la maestra Dora Almora.

Agradezco el afecto y apoyo de mi segunda familia, mis amigos de la Facultad de Ingeniería: Luis Callejas, Iris García, Leonel Molina, Luis del Valle, Edibaldo Ramírez, Oswaldo Ramírez, Diego Anaya, Ulises Acopa y Leydi Martínez. A mis amigos Octavio Olea, Mariana Lemus, Jonás Nogueta, Salvador Cabañas, Claudia Cruz, Diana Cruz, Carolina Guerra, Irving Díaz y Emmanuel Ek. Un agradecimiento especial a Lizbeth Loaiza, por acompañarme en todo momento.

A mi director de tesis, Dr. Rodolfo Camacho, por su invaluable orientación, soporte, retroalimentación y paciencia en la realización de esta tesis. A la Dra. Susa Gómez y al Dr. Miguel Meza, por su gran apoyo en la realización esta tesis. A mis sinodales: Ing. Israel Castro, Dr. Fernando Samaniego y Dr. Leonardo Teja por tomarse el tiempo de revisar y enriquecer mi tesis con sus valiosas observaciones.

A todos mis profesores, a la Facultad de Ingeniería y a la UNAM.

## Índice general

Índice general .....	2
Índice de figuras .....	6
Índice de tablas .....	9
Resumen .....	10
Objetivos .....	12
Objetivo principal.....	12
Objetivos secundarios .....	12
Introducción .....	13
1. Marco teórico .....	14
1.1. Conceptos de yacimientos.....	14
1.1.1. Propiedades de la roca y del fluido .....	14
1.1.2. Daño .....	16
1.2. Conceptos técnicos.....	17
1.2.1. Clasificación de recursos y reservas .....	18
1.2.1.1. Recursos .....	18
1.2.1.2. Reservas .....	19
1.2.2. Métodos de estimación de reservas.....	20
1.2.2.1. Métodos volumétricos.....	20
1.2.2.2. Métodos de rendimiento.....	20
1.2.2.3. Métodos análogos y probabilísticos.....	20
1.2.3. Etapas de recuperación.....	20
1.2.3.1. Recuperación primaria .....	21
1.2.3.2. Recuperación secundaria.....	21
1.2.3.3. Recuperación mejorada (EOR) .....	21
1.2.3.4. Recuperación avanzada (IOR) .....	22
1.2.4. Pozos de relleno .....	23
1.3. Conceptos económicos/financieros .....	25
1.3.1. Evaluación económica de proyectos .....	25

1.3.2. Horizonte temporal.....	26
1.3.3. Valor del dinero en el tiempo.....	26
1.3.4. Valor presente y valor futuro .....	27
1.3.5. Inflación .....	28
1.3.6. Incertidumbre y riesgo .....	28
1.4. Conceptos de evaluación.....	29
1.4.1. Ingresos .....	29
1.4.1.1. Volumen de aceite producido.....	29
1.4.1.2. Precio del aceite .....	30
1.4.2. Egresos .....	33
1.4.2.1. Capital de trabajo .....	34
1.4.2.2. Depreciación .....	34
1.4.2.3. Regalías .....	35
1.4.2.4. Impuesto sobre la renta (ISR) .....	35
1.4.2.5. Impuesto al valor agregado (IVA) .....	35
1.4.2.6. Valor de rescate.....	36
1.4.2.7. Costos de abandono.....	36
1.4.2.8. Valor agregado .....	36
1.4.2.9. Consideraciones finales.....	36
1.4.3. Límite económico.....	37
1.4.4. Métodos de análisis económico .....	37
1.4.4.1. Tasa interna de retorno.....	37
1.4.4.2. Valor presente neto .....	38
1.4.4.3. Perfil de VPN .....	39
1.4.4.4. Índice de rentabilidad.....	40
1.4.4.5. Periodo de recuperación .....	41
1.5. Conceptos básicos de optimización .....	41
1.5.1. Partes de un problema de optimización .....	42
1.5.1.1. Máximos y mínimos.....	42
1.5.1.2. Variables de decisión .....	44
1.5.1.3. Restricciones del problema .....	45
1.5.1.4. Función objetivo.....	45

2. Metodología .....	46
2.1. Solución analítica para la predicción de la producción.....	46
2.2. Optimización.....	49
2.2.1. Optimización: determinación de variables, restricciones y función objetivo .....	49
2.2.2. ¿Por qué usar un optimizador?.....	50
2.2.3. Optimizador: Método del Túnel.....	50
2.3. Determinación de la función objetivo .....	52
2.3.1. Cálculo del valor presente neto .....	57
3. Presentación y análisis de resultados .....	60
3.1. Análisis de casos diferentes .....	60
3.1.1. Caso 1.....	60
3.1.2. Caso 2.....	65
3.1.3. Caso 3.....	71
3.2. Análisis de las propiedades que influyen en el VPN .....	76
3.2.1. Efecto de los parámetros del pozo .....	76
3.2.1.1. Efecto del radio del pozo.....	76
3.2.1.2. Efecto del daño.....	76
3.2.2. Efecto de los parámetros del yacimiento .....	79
3.2.2.1. Porosidad.....	79
3.2.2.2. Viscosidad.....	80
3.2.2.3. Permeabilidad.....	81
3.2.2.4. Factor de volumen del aceite.....	82
3.2.2.5. Compresibilidad del aceite.....	83
3.2.2.6. Efecto del número de pozos .....	84
3.2.2.7. Efecto de tamaño del yacimiento .....	87
3.2.2.8. Efecto de la posición de los pozos .....	87
4. Conclusiones .....	89
Referencias.....	91
Anexos.....	93

Anexo I. Variables adimensionales y sistema de unidades .....	93
Anexo II. Solución de Rodríguez y Cinco-Ley.....	95
Formulación y resolución del problema.....	95
Comportamiento de la producción de los pozos bajo condiciones de flujo dominadas por frontera .....	98
Anexo III. Solución de Camacho et al. ....	100
Anexo IV. Análisis de las variables que influyen en el tiempo de ejecución del algoritmo .....	104

## Índice de figuras

<b>Figura 1.1.</b> Factor de volumen del aceite .....	15
<b>Figura 1.2.</b> Viscosidad del aceite .....	16
<b>Figura 1.3.</b> Factor de daño .....	17
<b>Figura 1.4.</b> Clasificación de recursos.....	18
<b>Figura 1.5.</b> Clasificación de las reservas.....	19
<b>Figura 1.6.</b> Métodos de recuperación mejorada.....	22
<b>Figura 1.7.</b> Una nueva propuesta de clasificación de métodos de IOR-EOR.....	23
<b>Figura 1.8.</b> Relación del valor presente con el valor futuro.....	28
<b>Figura 1.9.</b> Precio de la Mezcla Mexicana de Exportación de 1996 a 2020.....	31
<b>Figura 1.10.</b> Factores que influyen en el precio del petróleo.....	32
<b>Figura 1.11.</b> Perfil de VPN.....	40
<b>Figura 1.12.</b> Máximos y mínimos de una función de una variable. ....	44
<b>Figura 1.13.</b> Función de dos variables con máximos y mínimos múltiples.....	44
<b>Figura 2.1.</b> Representación del modelo de yacimiento .....	47
<b>Figura 2.2.</b> Representación geométrica del método del túnel.....	51
<b>Figura 2.3.</b> Curva de gasto contra tiempo.....	54
<b>Figura 2.4.</b> Producción contra tiempo.....	58
<b>Figura 3.1.</b> Coordenadas de los pozos de relleno (Caso 1).....	62
<b>Figura 3.2.</b> Variación del número óptimo de pozos de relleno con respecto al tiempo (Caso 1).....	63
<b>Figura 3.3.</b> Gráfica del gasto total contra el tiempo (Caso 1).....	64
<b>Figura 3.4.</b> Gráfica del VPN vs Tiempo (Caso 1).....	64
<b>Figura 3.5.</b> Variación del VPN de n pozos con respecto al valor de cero pozos (Caso 1). .....	65
<b>Figura 3.6.</b> Arreglo inicial de pozos (Caso 2).....	66
<b>Figura 3.7.</b> Coordenadas de los pozos de relleno (Caso 2).....	68
<b>Figura 3.8.</b> Coordenadas óptimas de los pozos de relleno (Caso 2).....	69
<b>Figura 3.9.</b> Gasto contra tiempo (Caso 2).....	69
<b>Figura 3.10.</b> Valor presente neto vs número de pozos (Caso 2).....	70

<b>Figura 3.11.</b> Número óptimo de pozos vs tiempo (Caso 2) .....	70
<b>Figura 3.12.</b> Variación del VPN de n pozos con respecto al de cero pozos (Caso 2).....	71
<b>Figura 3.13.</b> Gasto vs tiempo (Caso 3).....	72
<b>Figura 3.14.</b> VPN vs número de pozos (Caso 3).....	73
<b>Figura 3.15.</b> Valor presente neto vs tiempo (Caso 3).....	73
<b>Figura 3.16.</b> Coordenadas de los pozos de relleno en diferentes escenarios (Caso 3).....	74
<b>Figura 3.17.</b> Número óptimo de pozos de relleno vs tiempo .....	75
<b>Figura 3.18.</b> Efecto del daño en la producción .....	77
<b>Figura 3.19.</b> Efecto del daño en la producción de aceite. ....	78
<b>Figura 3.20.</b> Efecto del daño en los ingresos .....	78
<b>Figura 3.21.</b> Variación de la producción con respecto a la porosidad (0 PR).....	79
<b>Figura 3.22.</b> Variación de la producción con respecto a la porosidad (1 PR).....	79
<b>Figura 3.23.</b> Efecto de la viscosidad en la producción (0 PR) .....	80
<b>Figura 3.24.</b> Efecto de la viscosidad en la producción (1 PR) .....	80
<b>Figura 3.25.</b> Efecto de la permeabilidad en la producción (0 y 1 PR) .....	81
<b>Figura 3.26.</b> Efecto de la permeabilidad en la producción (0 y 1 PR) .....	81
<b>Figura 3.27.</b> Efecto del factor de volumen del aceite en la producción (0 PR). ....	82
<b>Figura 3.28.</b> Efecto del factor de volumen del aceite en la producción (1 PR). ....	82
<b>Figura 3.29.</b> Efecto de la compresibilidad del aceite en la producción (0 PR).....	83
<b>Figura 3.30.</b> Efecto de la compresibilidad del aceite en la producción (1 PR).....	83
<b>Figura 3.31.</b> Efecto de la perforación de pozos de relleno.....	84
<b>Figura 3.32.</b> Efecto de la transmisibilidad en el número óptimo de pozos. ....	85
<b>Figura 3.33.</b> Número óptimo de pozos de relleno vs tiempo. ....	86
<b>Figura 3.34.</b> Coordenadas de los pozos.....	87
<b>Figura 3.35.</b> Comparación de la producción entre las coordenadas óptimas y no óptimas. .....	88
<b>Figura III- 1.</b> Función escalón .....	100
<b>Figura IV-1.</b> Variación del tiempo de ejecución del algoritmo con respecto al tamaño del yacimiento.....	105

<b>Figura IV- 2.</b> Tiempo de ejecución contra número de pozos al variar la duración del periodo de estudio .....	106
<b>Figura IV- 3.</b> Tiempo de ejecución de acuerdo con la periodización en el cálculo de los flujos de efectivo. ....	106

## Índice de tablas

<b>Tabla 2.1.</b> Características del yacimiento utilizado para obtener el VPN.....	57
<b>Tabla 2.2.</b> Características de los pozos de producción y de relleno.....	57
<b>Tabla 2.3.</b> Gastos de los pozos originales y de relleno. ....	57
<b>Tabla 2.4.</b> Gastos totales y producción acumulada de los pozos originales y de relleno..	58
<b>Tabla 2.5.</b> Condiciones económicas a las que estarán sujetos los ingresos y egresos .....	59
<b>Tabla 2.6.</b> Flujos de efectivo .....	59
<b>Tabla 3.1.</b> Propiedades de los yacimientos de los casos presentados.....	60
<b>Tabla 3.2.</b> Factores económicos involucrados en los casos presentados .....	60
<b>Tabla 3.3.</b> Parámetros del pozo productor y de los posibles pozos de relleno (Caso 1) ...	60
<b>Tabla 3.4.</b> Distribución de los pozos de relleno dentro del yacimiento (Caso 1).....	61
<b>Tabla 3.5.</b> Ubicaciones y número óptimo de pozos de relleno en tiempos diferentes de análisis (Caso 1) .....	62
<b>Tabla 3.6.</b> Propiedades de los pozos originales y de los posibles pozos de relleno (Caso 2) .....	65
<b>Tabla 3.7.</b> Coordenadas óptimas para tiempos de análisis y cantidad de pozos de relleno diferentes (Caso 2) .....	66
<b>Tabla 3.8.</b> Coordenadas y número óptimo de pozos de relleno para diferentes tiempos (Caso 2) .....	68
<b>Tabla 3.9.</b> Características de los pozos originales y de relleno (Caso 3). ....	71
<b>Tabla 3.10.</b> Coordenadas óptimas para diferentes tiempos y cantidades de pozos de relleno (Caso 3) .....	74
<b>Tabla 3.11.</b> Registro de tiempo contra el número óptimo de pozos de relleno para los tres casos presentados. ....	86

## Resumen

Al desarrollar un proyecto, es fundamental efectuar un análisis económico para determinar su factibilidad. Un factor importante a la hora de tomar decisiones es la cantidad de información disponible; la simulación matemática es útil para adquirir información, permitiendo predecir el comportamiento de un fenómeno determinado.

El objetivo de este trabajo es determinar tanto el número óptimo de pozos de relleno como sus coordenadas respectivas, utilizando una solución analítica que modela un yacimiento rectangular, con pozos produciendo a diferentes presiones de fondo y diferentes tiempos de producción iniciales. Esto se logró mediante la aplicación de un algoritmo que determina el valor máximo de la función económica conocida como valor presente neto (VPN), a través de un proceso de optimización.

La función económica anterior depende de los datos siguientes: el número, posiciones, daño y la presión de fondo de los pozos, el tiempo inicial de producción de los pozos de relleno, el tiempo durante el cual se evaluará el VPN, el tamaño del yacimiento, sus propiedades petrofísicas y del fluido, el precio del barril, y los gastos operativos y de infraestructura. A medida que incrementa el número de pozos de relleno, aumenta la cantidad de variables a determinar (número y coordenadas de pozos de relleno). Por lo tanto, se utilizó un optimizador avanzado, capaz de resolver problemas con ese grado de complejidad, el cual está basado en la técnica de Tunneling.

Se presenta gráficamente la variación del VPN con respecto al número de pozos de relleno, su posición y tiempo en que entran a producción. Además, se muestra la sensibilidad del VPN frente a la variación de las presiones de fondo y daños de cada pozo. Aunque se supone un área rectangular, esta herramienta es útil para casi cualquier yacimiento en cualquier etapa de su ciclo de vida, siempre y cuando se tenga un aceite bajosaturado. El algoritmo propuesto determina con éxito las variables anteriormente mencionadas, consiguiendo resultados apropiados en un tiempo de ejecución corto.

## Summary

When developing a project, it is important to make an economic analysis to determine its viability. An important factor when making decisions is the amount of available information; mathematical simulation is useful to obtain information by predicting the behavior of a given phenomenon.

The objective of this work is to determine both the optimal number of infill wells and their respective coordinates, using an analytical solution that models a rectangular reservoir, with wells producing at different bottomhole pressures and different initial production times. This is accomplished by applying an algorithm able of determining the maximum value of the Net Present Value (NPV), by optimizing this economic function.

This economic function depends on the following data: the number, positions, damage, and the bottomhole pressure of the initial wells, the initial production time of the infill wells, the time during which the NPV will be evaluated; the size of the reservoir, its petrophysical and fluid properties, the price per barrel, and the operating and infrastructure costs. As the number of infill wells increases, the number of variables to be determined (number of infill wells and their coordinates) increases. Therefore, a robust optimizer was used, capable of solving problems with this degree of complexity. This optimizer is based on the Tunneling method.

The variation on NPV with respect to the number of new wells, their position and initial production time is presented graphically. Also, the sensibility of the NPV with to the variation of the bottomhole pressure and damage of each well is shown. Although, a rectangular area is assumed, this tool is useful to almost any reservoir at any stage of its life cycle, as long it is undersaturated. The proposed algorithm successfully determines the targeted variables, achieving adequate results in a short running time.

## **Objetivos**

### **Objetivo principal**

Determinar el número óptimo de pozos de relleno y su ubicación para optimizar el valor presente neto de la inversión, por medio de un algoritmo que consiste en la unión de una solución analítica para un yacimiento de una porosidad, homogéneo e isotrópico, con un optimizador robusto basado en el método de Tunneling.

### **Objetivos secundarios**

Analizar el efecto de la variación de los parámetros independientes del pozo y del yacimiento que influyen en el VPN.

## Introducción

La tesis presente tiene por objetivo documentar el desarrollo de un algoritmo que calcula las coordenadas y el número de pozos de relleno óptimos a perforar en un yacimiento rectangular y homogéneo.

Generalmente, la cantidad de recursos disponibles a la hora de implementar un proyecto petrolero es limitada, por lo es importante efectuar un análisis económico para analizar su factibilidad. La calidad del análisis depende de la certeza con la que se pronostican los flujos de efectivo; por lo tanto, es necesario usar un modelo que se aproxime a la realidad al momento de predecirlos.

Usualmente, la información disponible para realizar un análisis de esta magnitud es escasa. El modelo del yacimiento empleado en este proyecto permite simular su producción, utilizando información básica, y tomar decisiones de acuerdo con los resultados que se obtengan.

En este trabajo, las coordenadas y el número de pozos óptimos se determinaron al optimizar el valor presente, obtenido a partir del pronóstico de la producción; mediante una solución analítica. Esta solución contempla un yacimiento rectangular homogéneo, con pozos produciendo con diferentes presiones de fondo fluyendo, que inician a producir en tiempos diferentes.

En ingeniería y en muchas otras disciplinas se suelen despreciar efectos con el fin de simplificar el modelado. Es importante considerar las simplificaciones realizadas en el modelo del yacimiento, una de las principales limitaciones del programa es la forma rectangular del yacimiento, pues en la práctica estos poseen formas variadas e irregulares. Para trabajar con este modelo se deben adecuar las magnitudes del yacimiento a una forma rectangular. En este trabajo, también se asume que el yacimiento es homogéneo e isotrópico; ambas particularidades no suelen presentarse, sin embargo, estas hipótesis pueden ser aceptables en los primeros cálculos, cuando la información acerca del yacimiento es escasa.

# 1. Marco teórico

## 1.1. Conceptos de yacimientos

Un yacimiento es un cuerpo de roca de volumen definido, poroso y permeable, capaz de almacenar y transmitir hidrocarburos en estado líquido o gaseoso. Para que un yacimiento exista, se necesita la presencia de una roca generadora, una migración, una trampa, una roca almacenadora y una sincronía entre todos estos elementos.

### 1.1.1. Propiedades de la roca y del fluido

Para comprender algunos temas mostrados en capítulos posteriores (especialmente en el capítulo 0), se definirán los conceptos siguientes:

**Porosidad ( $\phi$ ):** Es la relación entre el volumen poroso y el volumen total de la roca. Existen diferentes clasificaciones de la porosidad, una de ellas las divide en porosidad efectiva y porosidad absoluta. La porosidad absoluta se refiere al volumen poroso total del medio; por otro lado, la porosidad efectiva cuantifica el volumen poroso conectado que contribuye al flujo de fluidos.

Generalmente, la porosidad efectiva se utiliza para efectuar mediciones de laboratorio y cálculos relacionados con el flujo de fluidos. Se puede obtener a través de métodos de laboratorio o registros geofísicos; la precisión de este valor depende de la cantidad y la calidad de los datos utilizados y de la heterogeneidad del yacimiento (Craft, 1990).

La porosidad se puede utilizar para medir el espacio disponible que tiene un yacimiento o porción de él para almacenar fluidos. La siguiente ecuación es útil para determinar el volumen poroso de un yacimiento con espesor constante:

$$V_p = Ah\phi \quad (1.1)$$

donde:

- $V_p$  = volumen poroso
- $A$  = área del yacimiento
- $\phi$  = porosidad

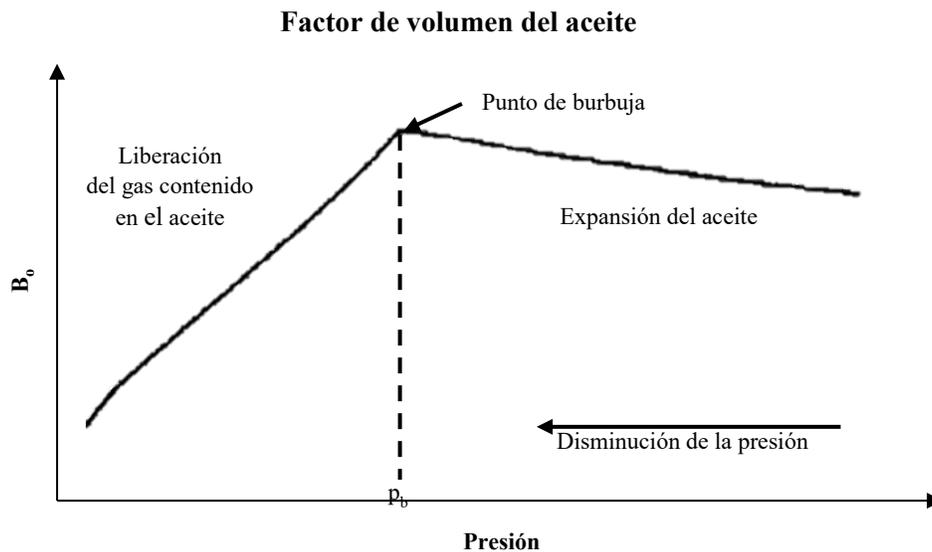
**Permeabilidad ( $k$ ):** Mide la facilidad con la que una roca permite el paso de los fluidos a través de su volumen poroso interconectado; la unidad más empleada de la permeabilidad es el Darcy. De este parámetro depende el ritmo con el cual los fluidos se desplazarán dentro del medio poroso (Mannucci, s.f.).

**Factor de volumen del aceite ( $B_o$ ):** Se define como el volumen en barriles que un tanque de almacenamiento ocupa dentro del yacimiento a condiciones de presión y temperatura de yacimiento, con el gas disuelto que puede mantener a esa presión, la **Figura 1.1** muestra el comportamiento de este parámetro del aceite cuando la presión cambia. El efecto anterior se representa con la ecuación siguiente:

$$B_o = \frac{V_{o+g.d.@ c.y}}{V_o @ c.e.} \quad (1.2)$$

donde:

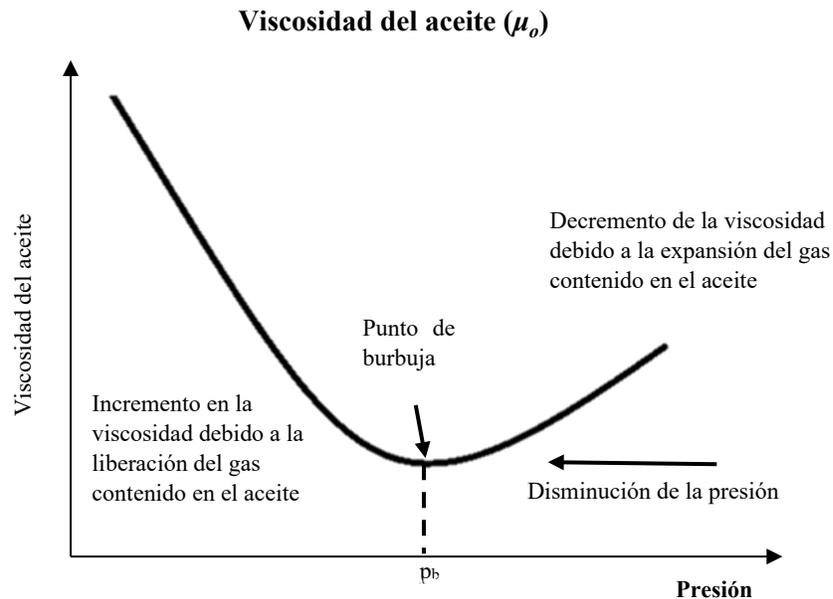
- $B_o$  = factor de volumen del aceite
- $V_{o+g.d.@ c.y}$  = volumen de aceite y gas disuelto en el yacimiento
- $V_o @ c.e.$  = volumen de aceite a condiciones estándar



**Figura 1.1.** Factor de volumen del aceite. Cuando la presión es mayor que la presión de burbuja, el aceite se expande debido al decremento de la presión; eventualmente, se llegará a una presión menor que la de burbuja y el gas disuelto contenido en el aceite se liberará. Modificado de The properties of Petroleum fluids, McCain, 1990.

**Viscosidad ( $\mu$ ):** Es un parámetro que mide la resistencia al flujo de un fluido. Generalmente se expresa en centipoises (cp). La viscosidad a condiciones de yacimiento suele medirse en laboratorio (Craft, 1990).

Existen diferentes tipos de viscosidad, la viscosidad con la que se tratará en este trabajo es la viscosidad dinámica o absoluta ( $\mu$ ), la cual depende principalmente de la temperatura, la presión y de la composición del fluido. En la **Figura 1.2** se muestra la variación de la viscosidad a medida que la presión declina.



**Figura 1.2.** Viscosidad del aceite. Cuando la presión del yacimiento es mayor que la presión de burbuja, la viscosidad decrementará al bajar la presión debido a la expansión del gas disuelto en el aceite. Por otra parte, cuando la presión del yacimiento es menor que la presión de burbuja, la viscosidad incrementará cuando la presión disminuya debido a que el gas contenido en el aceite se libera. Modificado de Applied Petroleum Reservoir Engineering, Craft, 1990.

**Compresibilidad isotérmica:** Es la variación del volumen de una sustancia al cambiar la presión a una temperatura constante, su unidad es el recíproco de la unidad de la presión. Tal variación está dada por la ecuación siguiente:

$$c = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} \quad (1.3)$$

donde:

$c$  = compresibilidad isotérmica

$v$  = volumen

$p$  = presión

### 1.1.2. Daño

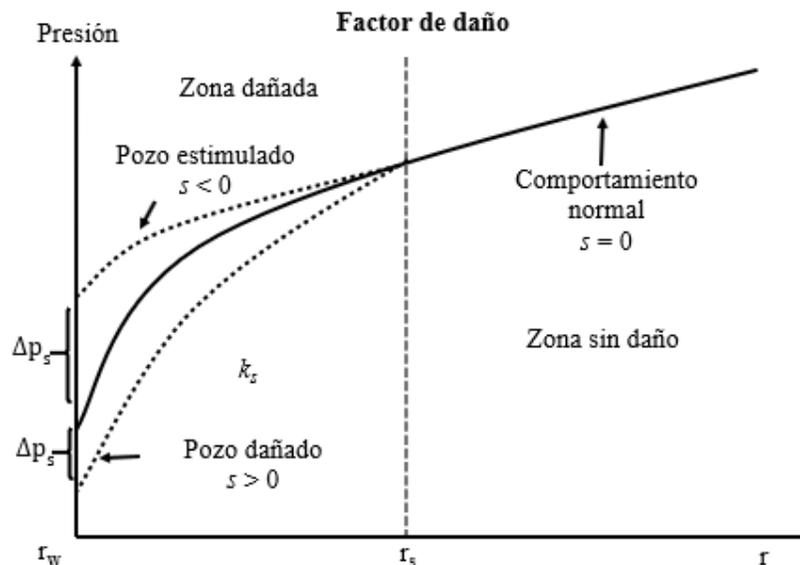
El daño de formación es cualquier restricción parcial o total en el flujo desde el yacimiento hasta el pozo, provocada por la alteración de la roca debido a los diversos procesos operativos durante la vida productiva del pozo. El factor de daño es un valor adimensional y se representa con la letra  $s$ , se utiliza para comparar las condiciones reales de un pozo con las ideales. El daño se calcula mediante la siguiente expresión:

$$s = \frac{kh\Delta p_s}{qB\mu} \quad (1.4)$$

donde:

- $s$  = factor de daño
- $k$  = permeabilidad
- $\Delta p_s$  = diferencial de presión
- $q$  = gasto
- $B$  = factor de volumen
- $\mu$  = viscosidad

Cuando el valor de  $s$  es cero, denota que el pozo no tiene daño; un valor positivo de este parámetro indica que existe un daño que afecta la productividad del pozo (pozo dañado); y un valor negativo significa que existe una mejora (pozo estimulado). En la **Figura 1.3** se presentan los tres efectos anteriores.



**Figura 1.3.** Factor de daño. La alteración del flujo se produce en la zona dañada, la cual posee una permeabilidad diferente a la del yacimiento. Modificado de Fundamentos de Ingeniería de Yacimientos, Escobar, 2012.

## 1.2. Conceptos técnicos

Al momento de cuantificar los volúmenes de hidrocarburos de un país o región, es necesario clasificarlos, pues, el hecho de conocer la existencia del recurso no garantiza que sea posible su extracción. Diferenciar las reservas de los recursos es esencial al realizar un análisis económico.

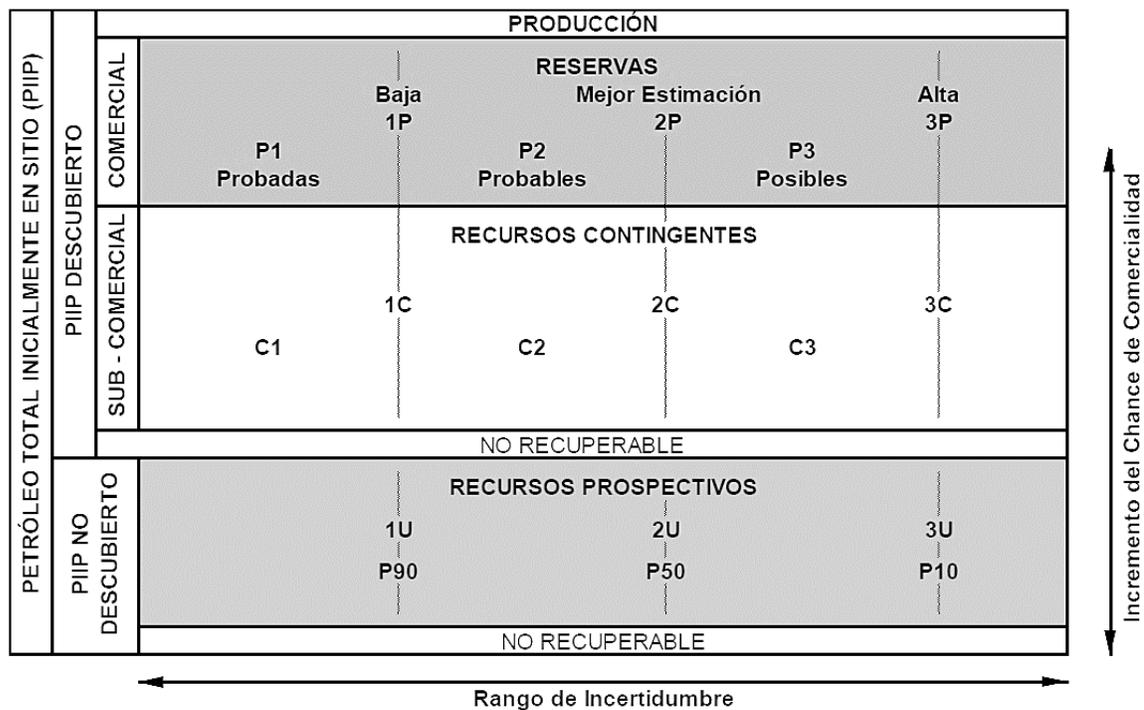
El objetivo del PRMS (Petroleum Resources Management System) es proporcionar un sistema de gerenciamiento de recursos petroleros para evaluar los volúmenes de hidrocarburos, valorar proyectos y clasificarlos dentro de un marco integral, respaldando proyectos petroleros. Se emplea en jurisdicciones múltiples, permitiendo efectuar comparaciones, mejorando la certeza de las estimaciones y brindando claridad en las comunicaciones globales. (Society of Petroleum Engineers, 2018).

Para esto, se establece una metodología para clasificar recursos y reservas, al proporcionar principios, criterios, métodos, conceptos y procedimientos matemáticos, técnicos y científicos para estimar, cuantificar, evaluar y verificar las reservas. (Comisión Nacional de Hidrocarburos, 2012).

## 1.2.1. Clasificación de recursos y reservas

### 1.2.1.1. Recursos

Es el volumen de petróleo que se presenta naturalmente en la corteza terrestre; comprende cantidades descubiertas y no descubiertas, incluyendo las recuperadas. En la **Figura 1.4** se presentan sus clasificaciones y subclasificaciones de acuerdo con el PRMS:



**Figura 1.4.** Clasificación de recursos. (Petroleum Resources Management System, Society of Petroleum Engineers, 2018).

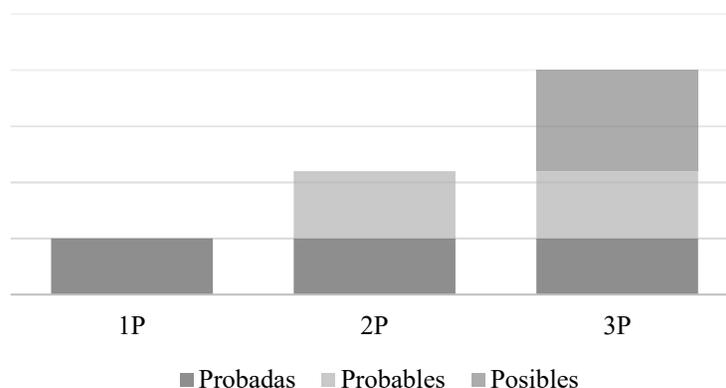
### 1.2.1.2. Reservas

Volumen de petróleo recuperable, de acuerdo con el PRMS, las reservas deben satisfacer los cuatro criterios siguientes: descubiertas, recuperables, comerciales y remanentes. Debido a variaciones tecnológicas y comerciales, el descubrimiento de campos y yacimientos y la comprensión de campos conocidos, las reservas pueden cambiar a través del tiempo (Lake, 2011).

Se pueden clasificar de acuerdo con su incertidumbre (que depende de factores técnicos, económicos, regulatorios, sociales y políticos) en:

- **Probadas:** Volumen del cual se tiene una certeza razonable de recuperarse comercialmente, pues está respaldado por el análisis de datos de geociencias e ingeniería. En métodos determinísticos existe una certeza razonable de recuperar ese volumen; mientras en que probabilísticos la probabilidad de recuperar el volumen es de al menos 90%.
- **Probables:** La probabilidad de recuperar estas reservas adicionales es menor que la de las reservas probadas, pero mayor que la de las posibles. La probabilidad de recuperar un volumen mayor al de la estimación 2P (suma de las reservas probadas y posibles) es la misma que la de recuperar un volumen menor (50%).
- **Posibles:** En métodos probabilísticos, existe una probabilidad de al menos 10% de recuperar un volumen igual o superior a la estimación 3P (suma de reservas probadas, probables y posibles).

En la **Figura 1.5** se muestra los tipos de recursos que integran a las reservas 1P, 2P y 3P.



**Figura 1.5.** Clasificación de las reservas. Elaboración propia.

## **1.2.2. Métodos de estimación de reservas**

Existen diferentes métodos para estimar el volumen recuperable de hidrocarburos y pueden aplicarse en cualquier etapa de producción de un yacimiento. La incertidumbre en el cálculo de estos volúmenes disminuye a medida que avanza la explotación, pues con el tiempo, la información recabada será cada vez mejor.

### ***1.2.2.1. Métodos volumétricos.***

Estos métodos permiten calcular el volumen de aceite total a partir de las propiedades de la roca y del fluido, para luego estimar el volumen recuperable. En etapas tempranas (cuando la información es limitada), la estimación puede emplear un enfoque probabilístico; o puede utilizarse un enfoque determinístico conforme se desarrolla el proyecto (Society of Petroleum Engineers, 2018).

### ***1.2.2.2. Métodos de rendimiento.***

Estas predicciones consideran la información derivada de la producción y sus indicadores a medida que se extraen los hidrocarburos. Con el tiempo suficiente de producción, se puede determinar una tendencia de presión o producción, que puede extrapolarse hasta llegar al límite económico, y después estimar las reservas (Society of Petroleum Engineers, 2018).

### ***1.2.2.3. Métodos análogos y probabilísticos.***

En etapas tempranas (exploración o de desarrollo inicial), la cantidad de información directa es limitada, por lo que se pueden utilizar analogías para estimar los recursos. La idea principal es, que las propiedades del yacimiento y sus mecanismos de empuje pueden compararse con los de un yacimiento análogo.

## **1.2.3. Etapas de recuperación**

La perforación de pozos permite obtener información discreta (directa e indirecta) para comprobar la presencia de hidrocarburos en un yacimiento. Cada yacimiento posee propiedades únicas, una caracterización correcta depende de la determinación de estos parámetros y de la interpretación de la información recabada (Escobar, 2012).

El concepto de aceite incremental se refiere al aumento en el volumen extraído de hidrocarburos, debido a la modificación en las condiciones del yacimiento o de las instalaciones e infraestructura del campo; este volumen puede añadirse a las reservas si el

proyecto en cuestión posee una madurez comercial. El aceite incremental considera una medida del éxito de la implementación de métodos de recuperación, reparaciones, estimulaciones, sistemas artificiales, entre otras actividades. En yacimientos convencionales, existen diferentes etapas de recuperación: primaria, secundaria, mejorada y avanzada (Society of Petroleum Engineers, 2018).

### ***1.2.3.1. Recuperación primaria***

En esta etapa, la producción de hidrocarburos proviene de la energía natural que almacena el yacimiento. Un diferencial de presión permite el flujo de fluidos desde el yacimiento hasta el pozo. Los mecanismos de empuje que intervienen en esta primera etapa son: la expansión del sistema roca-fluidos, empujes por gas disuelto, por casquete de gas y por acuífero asociado y la segregación gravitacional, los cuales pueden actuar en conjunto (Ahmed & McKinney, 2005).

Conforme la presión del yacimiento disminuye debido a la producción, el diferencial de presión también lo hará. La implementación de sistemas artificiales de producción también se considera como parte de la producción primaria.

### ***1.2.3.2. Recuperación secundaria***

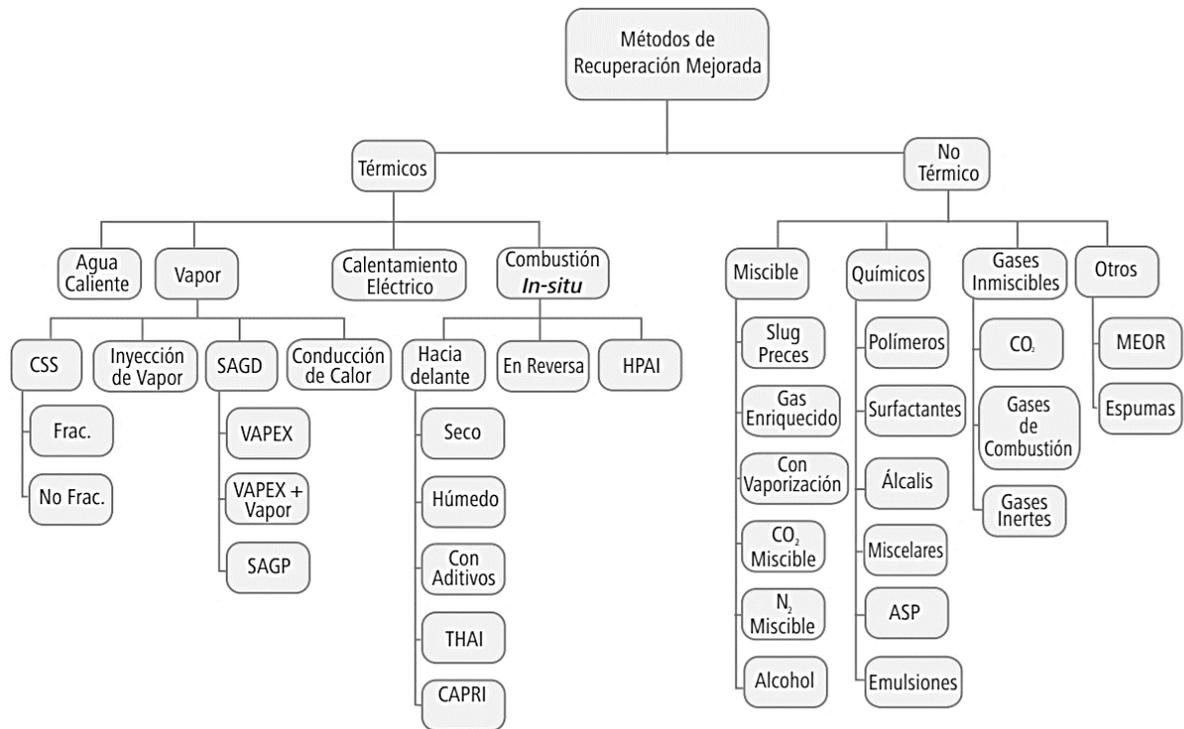
Consiste en la introducción de fluidos inmiscibles al yacimiento mediante pozos inyectores. Involucra desplazamientos inmiscibles por agua, gas o mezclas de agua-gas. Comúnmente, se utiliza el agua debido a su disponibilidad y bajo costo. Esto acelera la producción y permite el desplazamiento de aceite móvil en el medio poroso.

Poner en marcha estos métodos en etapas tempranas, incluso antes de finalizar la recuperación primaria, permite elevar el factor de recuperación del aceite. La etapa finaliza cuando el costo, tanto de la inyección como del tratamiento del fluido inyectado, se aproxima a los ingresos generados por la producción de hidrocarburos (Alvarado & Manrique, 2010).

### ***1.2.3.3. Recuperación mejorada (EOR)***

Es la inyección de materiales con el fin de modificar el comportamiento fisicoquímico del sistema roca-fluido y de los fluidos del yacimiento. El objetivo es reducir la saturación residual de aceite, retenida en los poros de la roca por fuerzas capilares y viscosas que evitan su flujo al emplear métodos convencionales (Alvarado & Manrique, 2010).

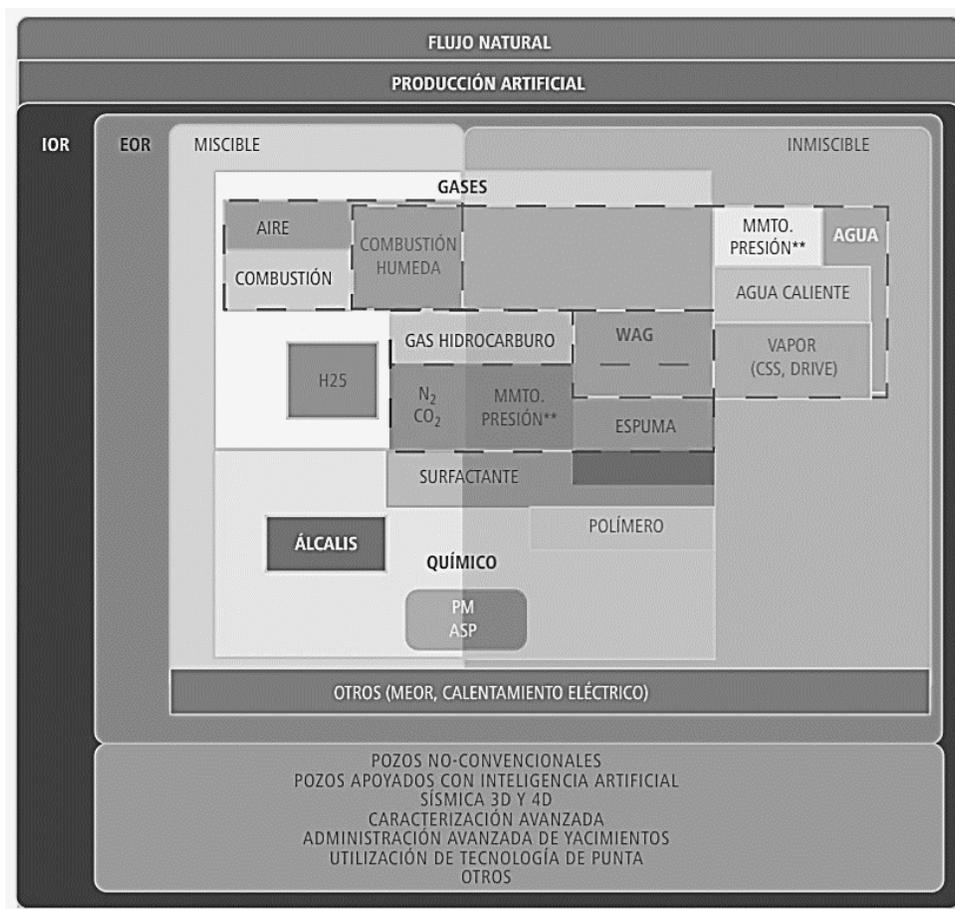
En la **Figura 1.6** se muestran las clasificaciones y subclasificaciones de la recuperación mejorada:



**Figura 1.6.** Métodos de recuperación mejorada. (El Futuro de la Producción de Aceite en México: Recuperación Secundaria y Avanzada, Comisión Nacional de Hidrocarburos, 2012)

#### ***1.2.3.4. Recuperación avanzada (IOR)***

Cualquier técnica que incremente la recuperación de hidrocarburos pertenece a esta clasificación. En esta categoría se encuentran los métodos de recuperación secundaria y mejorada (EOR); además, abarca un amplio rango de actividades, p. ej. estrategias operacionales para mejorar la eficiencia de barrido empleando pozos de relleno, pozos horizontales, polímeros para el control de la movilidad y caracterización y administración avanzada de yacimientos (Rangel, 2015).



**Figura 1.7.** Una nueva propuesta de clasificación de métodos de IOR-EOR. (El Futuro de la Producción de Aceite en México: Recuperación Secundaria y Avanzada, Comisión Nacional de Hidrocarburos, 2012)

#### 1.2.4. Pozos de relleno

Un pozo de relleno es aquel pozo que se perfora en un campo que ya posee pozos de producción, para disminuir el espacio promedio entre pozos, acelerar la producción y recuperar aceite incremental. Esta actividad está clasificada como recuperación avanzada (IOR) (Society of Petroleum Engineers, 2018).

Es frecuente que en un yacimiento existan zonas con saturaciones de aceite remanente, que pueden llegar a ser atractivas para la recuperación, la implementación de pozos de relleno permite recuperar este volumen de aceite.

Los pozos de relleno se perforan después de la fase inicial de desarrollo y producción de un yacimiento de gas o aceite. El objetivo es que estos pozos hagan contacto con aquellas porciones de la formación en donde existan saturaciones remanentes altas; esto se puede

realizar incluso después de la recuperación primaria o secundaria. Además, los pozos de relleno pueden ser verticales u horizontales. Entre algunas de sus ventajas están:

- a. Incrementan la producción de aceite o gas al permitir la recuperación en zonas donde existen permeabilidades bajas o muy bajas.
- b. Mejoran la conectividad entre los pozos, ya sean inyectoros o productores. Siendo especialmente útiles en zonas con continuidades pobres.
- c. En procesos de recuperación mejorada, incrementan la eficiencia de barrido horizontal y vertical.
- d. En zonas heterogéneas, permiten mejorar la comunicación con el yacimiento, por ejemplo, zonas con grandes variaciones en la permeabilidad y con secciones aisladas.
- e. Si los pozos se perforan de manera adecuada, permiten maximizar los beneficios económicos, incrementando los activos del yacimiento y reduciendo las tasas de abandono.
- f. Reducen el límite económico, al incrementar el tiempo de producción de volúmenes de aceite o gas comerciales en formaciones con permeabilidades bajas.
- g. Aumentan la vida productiva de los yacimientos en los que se implementan.

La perforación de pozos de relleno permite que el espaciamiento o distancia promedio entre pozos decrezca. Esta actividad ha sido ampliamente usada dentro de la industria, permitiendo alcanzar resultados satisfactorios, como en los casos siguientes:

- a. En yacimientos compactos (tight reservoirs), los cuales poseen permeabilidades bajas, que van desde 1 md hasta microdarcies. En este tipo de yacimientos, las áreas de drene por pozo son muy pequeñas, además, la producción individual de cada pozo decremente prematuramente. Una gran cantidad de yacimientos de este tipo producen gas empleando estrategias de perforación de pozos de relleno.
- b. En yacimientos altamente heterogéneos, en donde la movilidad del aceite es escasa, la disminución del espacio promedio entre los pozos permite extraer aceite o gas en cantidades comerciales.

- c. En campos maduros que posean zonas con saturaciones de aceite remanente atractivas, incluso después de recuperaciones mejoradas o avanzadas.
- d. En yacimientos compartimentalizados, en los cuales existen porciones aisladas.

### **1.3. Conceptos económicos/financieros**

La ingeniería económica cuantifica las utilidades y los costos asociados a los proyectos de ingeniería, determinando si obtendrán las ganancias suficientes para sustentar las inversiones de capital determinadas. Implica la evaluación sistemática de los resultados económicos de las soluciones propuestas a problemas de ingeniería, las cuales deben cumplir con lo siguiente:

- Generar beneficio a largo plazo
- Garantizar el bienestar y la supervivencia de una organización
- Constituir un conjunto de tecnologías e ideas creativas e innovadoras
- Permitir la identificación de los resultados que se esperan
- Llegar a la rentabilidad máxima mediante un criterio válido y aceptable de rendimiento

La ingeniería económica mide en unidades monetarias las decisiones que toman o recomiendan los ingenieros, para elevar el valor de una empresa. Estas decisiones dependen de los costos y rendimientos asociados con el diseño propuesto para la solución de un problema. (Sullivan, 2004)

#### **1.3.1. Evaluación económica de proyectos**

El éxito en cualquier proyecto depende de la toma correcta de decisiones. Saber utilizar la información disponible es indispensable para seleccionar la opción que genere el mayor beneficio económico. Ejemplos de decisiones en el ámbito petrolero son: perforación de pozos, desarrollo de campos, mejoramiento de proyectos ya existentes, compra o venta de propiedades, entre otras.

En general, los recursos para llevar a cabo las diferentes alternativas son limitados. Por eso, se debe realizar un análisis económico, que ayude a la empresa a determinar la conveniencia o inconveniencia de destinar sus recursos a la ejecución de una o más alternativas.

Un proyecto de inversión es una propuesta integrada por un conjunto de planes, cuyo objetivo es aumentar la utilidad de una empresa, además de elevar la eficiencia de sus actividades económicas, financieras y operacionales en el futuro. Su clasificación es la siguiente:

- **Independientes:** Los flujos de efectivo de los proyectos independientes no se relacionan entre sí. Aceptar uno no evita que los demás puedan implementarse, siempre y cuando cumplan con un criterio de aceptación. Pueden implementarse todos, ninguno o cualquier cantidad de estos.
- **Contingentes:** La aceptación de un proyecto de este tipo depende de la aprobación de uno o más proyectos diferentes.
- **Mutuamente excluyentes:** La aceptación de una alternativa inhabilita la aceptación de las demás; estos proyectos poseen la misma función y compiten entre sí. Dos propuestas mutuamente excluyentes no pueden aceptarse simultáneamente. En estos casos, se debe determinar cuál es el mejor proyecto, pues, saber si un proyecto es bueno o malo no es suficiente.

La industria petrolera se distingue por tener grandes flujos de efectivo, además, el periodo comprendido entre las inversiones y la obtención de ganancias suele ser considerable. A menudo se presentan incertidumbres y riesgos grandes, por eso, es crucial relacionar los factores técnicos con los económicos, pues su interacción es compleja. Además, impuestos y contratos tienen características únicas y varían de región en región. En cuanto a los costos operativos, aumentan con respecto al tiempo.

### 1.3.2. Horizonte temporal

También llamado horizonte económico, es el periodo en el cual se calcularán los flujos de efectivo del proyecto; se divide en dos periodos: de inversión y de operación. El horizonte económico en la industria petrolera se determina por el menor tiempo entre el contrato de adjudicación de áreas petroleras, la producción de las reservas existentes y la vida económica del proyecto. Puede estar sujeto a condiciones especiales, las cuales dependen de los objetivos de la compañía, por ejemplo: obtener el mayor beneficio a largo plazo, o extraer petróleo de zonas de alto riesgo en el menor tiempo posible (Moix, 2014).

### 1.3.3. Valor del dinero en el tiempo

El valor del dinero en el tiempo sostiene que una cantidad de dinero en el presente tendrá un valor diferente en el futuro. Es el concepto más importante en ingeniería

económica, los cálculos que consideran el valor del dinero en el tiempo se realizan en los flujos de efectivo para obtener la medida del valor (Blank & Tarquin, 2006).

- **Composición:** movimiento de un valor presente a un valor futuro. Se le aplica una tasa de interés para obtener un incremento.
- **Descuento:** movimiento de un valor futuro a un valor presente. Para obtener el valor en el presente, se le aplica una tasa de descuento.

### 1.3.4. Valor presente y valor futuro

Ambos conceptos provienen de la aplicación del principio del valor del dinero en el tiempo. El valor futuro es la cantidad de dinero que tendrá un inversionista al final de un periodo “ $t$ ”, el cual es el mismo que el inicial más la ganancia por los intereses “ $i$ ”. El valor futuro se determina de la manera siguiente:

$$VF = VP (1 + i)^t \quad (1.5)$$

donde:

$VF$  = valor futuro

$VP$  = valor presente

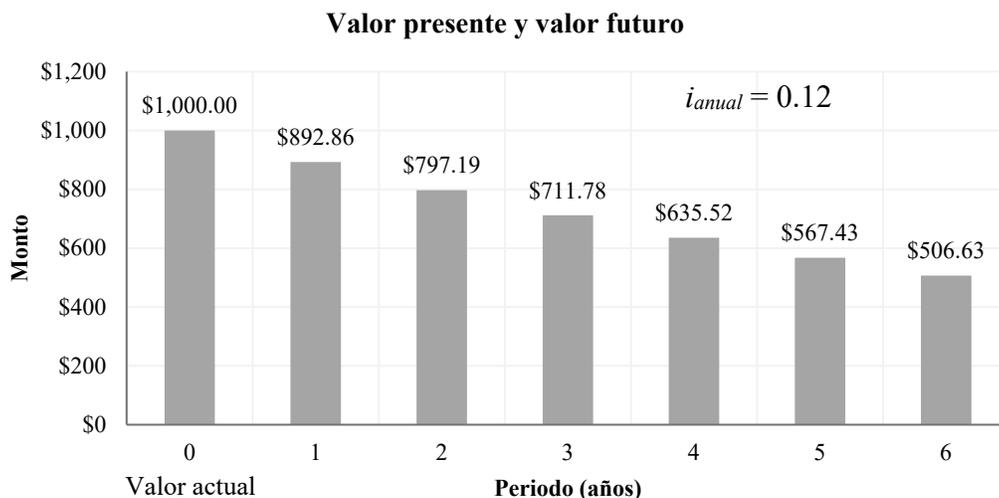
$i$  = tasa de descuento

$t$  = periodos de diferencia entre el valor presente y el valor futuro

El valor presente es la cantidad de dinero a invertir en el presente para obtener un valor futuro deseado, considerando una tasa de interés determinada. Al despejar el término del valor presente en la ecuación anterior se obtiene:

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^t} \quad (1.6)$$

Se muestra un ejemplo de la influencia del tiempo en el valor del dinero (aplicando los conceptos de valor presente y valor futuro) en la **Figura 1.8**.



**Figura 1.8.** Relación del valor presente con el valor futuro. El número de periodos es directamente proporcional al tiempo que transcurre. Se observa que el valor inicial del monto se redujo a poco más de la mitad en seis años.

### 1.3.5. Inflación

La inflación es el aumento en la cantidad de dinero necesaria para tener la misma cantidad de un producto o servicio antes del precio inflado. Se mide en tasa porcentual y refleja el aumento sostenido, continuo y generalizado de los precios de bienes y servicios (Blank & Tarquin, 2006).

La inflación ocasiona que el poder adquisitivo de una unidad monetaria sea mayor en el presente que en el futuro, debido al aumento en los precios. A lo largo de la historia de los cambios de los precios, la inflación ha sido mucho más común que la deflación, la cual es una reducción del precio promedio de bienes y servicios y eleva el poder de compra de la unidad monetaria (Sullivan, 2004).

### 1.3.6. Incertidumbre y riesgo

El riesgo es la probabilidad de no tener éxito, o de fracasar en un proyecto. Representa la variabilidad de los flujos de efectivo reales con respecto a los estimados. Mientras que la incertidumbre es aquel caso en el que no se conocen los resultados posibles de un evento, por lo que no son cuantificables las probabilidades de ocurrencia. Se debe a la falta de información o a la presencia de información falsa o sesgada. El tiempo también influye; mientras más lejano sea el evento en cuestión, mayor incertidumbre existirá. Cuando se trata con riesgo o incertidumbre, determinar qué tan sensible es una inversión a los cambios

de los factores que no se pueden conocer con certeza, resulta muy adecuado. (Sullivan, 2004)

La predicción de volúmenes de hidrocarburos siempre tendrá algún grado de incertidumbre, el cual disminuirá a medida que se desarrolla el proyecto y se obtiene información. Los factores que lo generan se clasifican en técnicos, económicos, regulatorios, sociales y políticos. El rango de incertidumbre puede representarse con escenarios determinísticos o con una distribución de probabilidad (por ejemplo: P90, P50, P10). (Society of Petroleum Engineers, 2018)

Conforme la cantidad y calidad de la información mejore, la incertidumbre disminuirá. Permitiendo realizar análisis más precisos, para cuantificar la consecuencia de los riesgos, considerar las opciones para abordarlos y tomar las mejores decisiones.

## **1.4. Conceptos de evaluación**

Los flujos de efectivo o flujos de caja son estimaciones de entradas o salidas de dinero en un periodo en específico, que puede ser: semanal, mensual, anual, etc. Es la diferencia entre los ingresos y los egresos. (Moix, 2014)

### **1.4.1. Ingresos**

Los ingresos son las entradas económicas provenientes de la actividad comercial de los bienes o servicios de una empresa o entidad económica, los cuales incrementan el patrimonio de ésta. El valor de salvamento de los activos fijos, el incremento de cuentas por pagar, la recuperación del capital de trabajo, la venta parcial o total del negocio al final de la vida económica del proyecto, también se consideran ingresos (Moix, 2014).

El ingreso total resulta de la multiplicación del precio de venta unitario por el número de unidades vendidas. En general, al presentarse varias alternativas, lo ideal es elegir aquella que maximice el beneficio económico; por otro lado, en caso de que el beneficio económico sea constante entre las alternativas, se debe elegir aquella que minimice los costos totales por unidad (Sullivan, 2004).

#### ***1.4.1.1. Volumen de aceite producido***

La producción de aceite es la suma de petróleo recuperada a una fecha dada. Para la evaluación de proyectos, se requiere que se diferencien las cantidades de producción (ventas y no ventas) registradas. La suma de los volúmenes de aceite recuperados durante un periodo determinado es la producción acumulada (Society of Petroleum Engineers, 2018).

Al incrementar el volumen recuperado, la declinación de la presión del yacimiento dependerá de la rapidez con la que se los fluidos se produzca, de la expansión de los fluidos y de la compactación del volumen poroso. El factor de recuperación se calcula dividiendo el volumen de aceite producido entre el volumen total de aceite.

#### ***1.4.1.2. Precio del aceite***

El precio del aceite es el segundo factor que determina los ingresos del proyecto. Generalmente, cuanto más ligero sea un crudo (con altas densidades API), más alto será su precio. Esto se debe a que los crudos ligeros producen derivados con un valor más alto (p. ej. gasolina, queroseno o gas); además, para su transformación a derivados no necesitan del empleo de procesos complejos, a diferencia de los crudos pesados. (Almeida Garza, 1994)

Generalmente, los precios del petróleo se ajustan a crudos marcadores, los cuales deben cumplir con las siguientes características: liquidez (producción suficiente), comercialización (producido por distintas compañías), calidad (características estables de acuerdo con las necesidades de las refinerías) y logística (zona con infraestructura suficiente) (Guerrero, 2009).

El precio del crudo es altamente volátil y su determinación es un proceso complejo que depende de variables interrelacionadas e interdependientes, algunas de los cuales se enlistan a continuación:

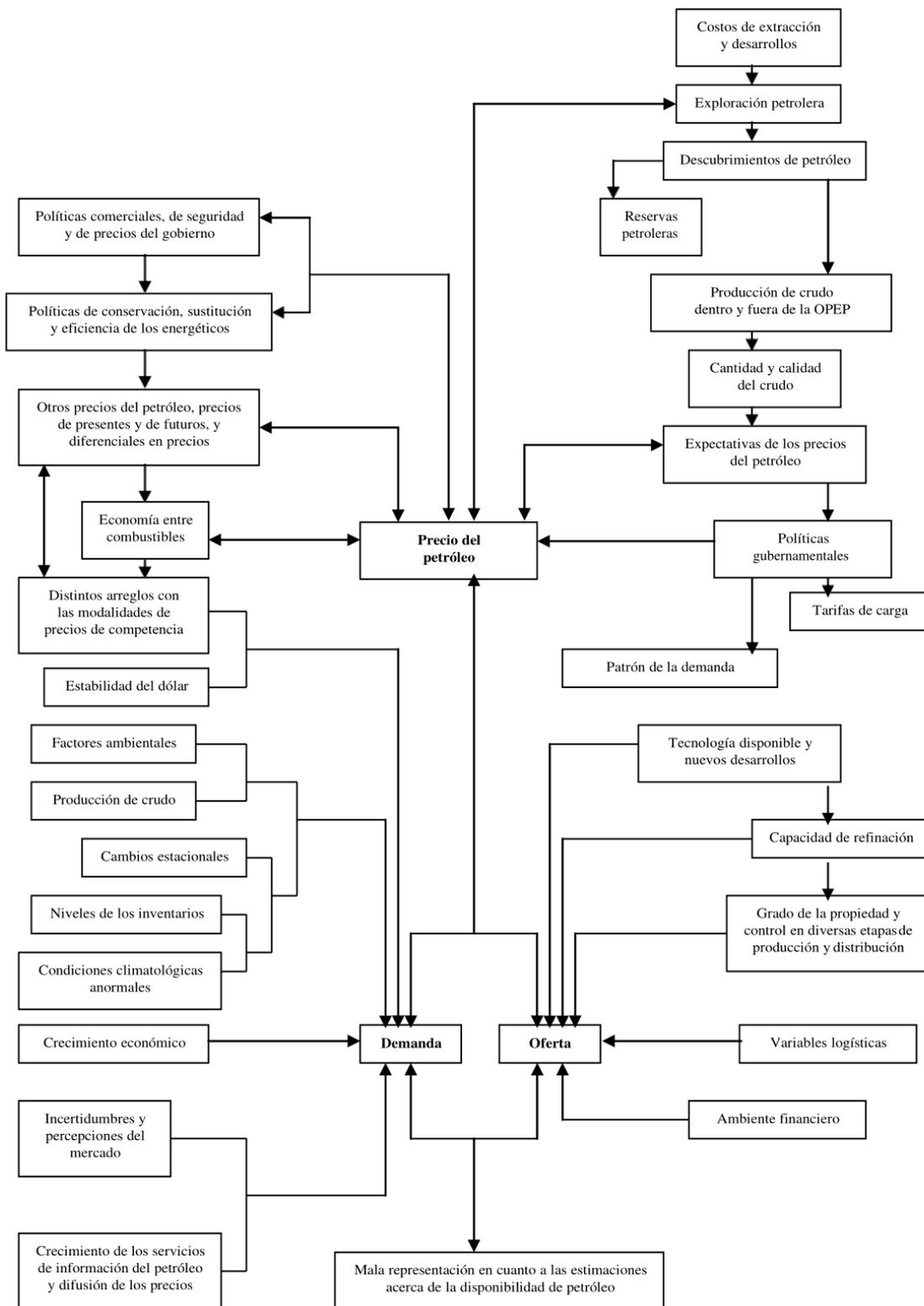
- Grados API del aceite
- Variaciones en las estimaciones de las reservas
- Contenido de azufre asociado
- Competitividad en los precios de los diferentes crudos
- Protección del poder de compra (inflación y tipo de cambio)
- Valor del petróleo como recurso no renovable
- Desarrollo tecnológico
- Incertidumbre
- Condiciones del mercado (oferta y demanda)
- Factores políticos
- Factores naturales (contingencias y desastres naturales)

La **Figura 1.9** muestra la variación del precio de la Mezcla Mexicana de Exportación, siendo un claro ejemplo de que el precio del petróleo es altamente voluble y es resultado de una interacción compleja y dinámica entre diferentes variables.



**Figura 1.9.** Precio de la Mezcla Mexicana de Exportación de 1996 a 2020 (Banco de México, 2020).

La **Figura 1.10** resume en un diagrama todos los factores implicados en el precio del petróleo.



**Figura 1.10.** Factores que influyen en el precio del petróleo. (Determinación del Precio Internacional del Petróleo, Almeida Garza, 1994)

### 1.4.2. Egresos

Cantidades integradas por las salidas de dinero o volumen, son indispensables para poner en marcha un proyecto. Las inversiones en activos, costos asociados al proyecto, costos operativos y de mantenimiento, consumos propios, regalías, participación de terceros en la producción o las ganancias, impuestos, incremento de inventario y cuentas por cobrar, son ejemplos de egresos (Moix, 2014). Existen dos tipos principales de egresos:

- i. **CAPEX:** se destinan a la compra de bienes, los cuales serán parte de los activos de la empresa. Antes de operar, es necesario realizar desembolsos, como invertir en estudios geológicos o sísmicos, diseños de ingeniería, compra de equipos, perforación de pozos exploratorios, etc. En la industria petrolera, el CAPEX se divide en inversiones en el subsuelo e inversiones de infraestructura; el efecto de la depreciación es diferente para las dos, por lo que se manejan de diferentes maneras.

Actividades relacionadas al costo integral del pozo conforman a las inversiones de subsuelo: movimiento del equipo de perforación, construcción de la localización y vía de acceso, perforación, terminación y pruebas. Las inversiones de infraestructura se deben a actividades como: líneas de flujo, estaciones de recolección, procesos de separación y tratamiento de crudo y gas, centros de almacenamiento, procesamiento de fluidos, inyección de agua, centros de generación de energía eléctrica, etc.

- ii. **OPEX:** al poner en marcha un proyecto, es necesario cubrir los gastos administrativos y generales, tales como realizar pagos ligados a condiciones contractuales o pagar regalías e impuestos al Estado. Estos desembolsos (a diferencia del CAPEX), no formarán parte de los activos de la empresa. El OPEX variable (incluye consumo de energía, tratamiento químico y transporte), dependerá de las unidades producidas, mientras que el OPEX fijo es función de otras variables de operación del campo, como los costos de personal, mantenimiento, gestión ambiental y social, seguridad e imprevistos. El OPEX por barril en un campo es resultado de la suma de todos los costos operativos necesarios para obtener la producción, y puede aumentar al declinar la producción (Moix, 2014).

La estimación de los costos debe obtenerse mediante un proceso de planeación y diseño; y necesita de la colaboración de ingenieros de diseño, personal de marketing, de producción, de finanzas y de la alta dirección. Los resultados que se obtienen permiten fijar un precio de venta, determinar qué tan factible es producir el producto, evaluar cuánto capital se puede destinar a mejorar procesos y establecer parámetros para mejorar la productividad (Sullivan, 2004).

### 1.4.2.1. Capital de trabajo

Es aquel capital necesario para que la empresa comience a operar y mantenga la operatividad. El capital de trabajo permanecerá en la empresa como una inversión; se caracteriza por su liquidez, es decir, posee la capacidad de convertirse en dinero a corto plazo, por lo que es posible recuperarlo fácilmente al finalizar el proyecto. Considera lo siguiente: caja operativa, inventarios, cuentas por cobrar y cuentas por pagar.

### 1.4.2.2. Depreciación

Es el decremento del valor de un bien debido al paso del tiempo o al desgaste que ocasiona su uso; establece una deducción anual en el ingreso antes de impuestos. Permite distribuir el uso de un activo a través del tiempo y considerarlo para los efectos del cálculo del impuesto sobre la renta. Todo activo posee una vida útil, por lo que es necesario reemplazarlo con el tiempo. Existen diferentes métodos para calcular la depreciación; en la industria petrolera se utilizan el método de línea recta y por unidades de producción.

- Depreciación por línea recta: se usa en activos que poseen vidas útiles asociadas a un periodo determinado. La depreciación es igual al costo del equipo entre su vida útil:

$$D_t = \sum_{t=1}^t \frac{I}{VU} \quad (1.7)$$

donde:

$D_t$	=	depreciación en el año $t$
$t$	=	año
$I$	=	inversión
$VU$	=	vida útil del activo

- Depreciación por unidad de producción: se usa en activos que poseen vidas útiles asociadas a una cantidad total de producción:

$$D_t = P_t \frac{I}{\sum_{t=0}^i P_t} \quad (1.8)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 D_t &= \text{depreciación en el año } t \\
 \sum_{t=0}^i P_t &= \text{producción total del pozo durante toda su vida útil} \\
 t &= \text{año} \\
 I &= \text{inversión}
 \end{aligned}$$

### **1.4.2.3. Regalías**

Es una tasa aplicada al valor contractual de los hidrocarburos que se extraen del subsuelo, la cual puede pagarse en volumen o en moneda. Este porcentaje depende del tipo de hidrocarburo que se extrae y será mayor conforme su precio sea más elevado.

### **1.4.2.4. Impuesto sobre la renta (ISR)**

Es el impuesto que grava el incremento patrimonial debido a ingresos provenientes de una fuente de riqueza ubicada en territorio nacional. Este impuesto debe pagarse por personas físicas o morales, que residan dentro o fuera del país. Por lo tanto, cada una de las empresas petroleras dedicadas a la exploración y explotación de hidrocarburos en el país deben cubrirlo. Su cálculo debe aplicarse a la ganancia gravable, la cual se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{Ganancia Gravable} &= \text{Ingresos} - \text{OPEX} - \text{Regalías} \\
 &\quad - \text{Gastos} - \text{Depreciación} - \text{Otros Gastos}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Después de obtener la ganancia gravable, ésta se multiplica por la tasa de impuesto:

$$\text{ISR} = \text{Ganancia gravable} * \text{tarifa de impuesto nominal} \tag{1.10}$$

### **1.4.2.5. Impuesto al valor agregado (IVA)**

Las condiciones del IVA son diferentes en cada país. En general, la empresa opera como un agente de retención del IVA y realiza un balance entre el IVA que paga a sus proveedores y contratistas y el que cobra a sus clientes. Después, entrega la diferencia a las autoridades fiscales.

#### **1.4.2.6. Valor de rescate**

Es la venta del negocio o los activos al final de la vida económica. Es posible considerar algunos equipos como valor de rescate, en caso de que puedan usarse en otros proyectos.

#### **1.4.2.7. Costos de abandono**

En la extracción de petróleo, eventualmente se alcanzará el límite económico. Es a partir de este momento en el que las condiciones del yacimiento impedirán que sea rentable continuar con la explotación. El abandono considera todas aquellas actividades que involucren el desmantelamiento y retiro de los materiales, plantas, plataformas, instalaciones, maquinaria y equipo utilizado en las actividades petroleras, además del taponamiento y el abandono de pozos y la restauración ambiental del área.

Al llegar a las condiciones de abandono, es necesario que las áreas que han sido utilizadas se entreguen en las condiciones que el contrato estipula. El costo de abandono se refiere al costo requerido para aislar y cerrar un pozo que no cuenta con el potencial para seguir explotándolo y debe considerarse en la evaluación económica (Moix, 2014).

#### **1.4.2.8. Valor agregado**

El valor agregado o valor incremental es igual al VPN esperado. En campos en desarrollo, se tiene que estimar el valor que incrementará la propuesta de inversión. Los flujos de efectivo utilizados en esta evaluación no consideran las inversiones realizadas en el pasado.

#### **1.4.2.9. Consideraciones finales**

El flujo de efectivo o de caja resulta de los ingresos y egresos, el cual se calcula mediante la ecuación siguiente:

$$FE_t = I_t - OPEX_t - R_t - G_t - ISR_t - CAPEX_t - CT_t \quad (1.11)$$

donde:

- $FE_t$  = Flujo de efectivo para el periodo  $t$
- $OPEX_t$  = OPEX durante el periodo  $t$
- $I_t$  = Ingresos durante el periodo  $t$
- $R_t$  = Regalías en el periodo  $t$
- $ISR_t$  = Impuesto sobre la renta
- $CAPEX_t$  = CAPEX durante el periodo  $t$

$$R_t = \text{Regalías}$$

$$CT_t = \text{Capital de trabajo}$$

### 1.4.3. Límite económico

Es el momento en el que los ingresos obtenidos por la venta de hidrocarburos se igualan a los costos de su explotación, a partir de este punto, se llegará al flujo de efectivo máximo acumulado para un proyecto, y continuar desarrollándolo (sin implementar un sistema que solucione esta situación) generará pérdidas económicas.

Los costos operativos sólo involucran a los costos que se eliminarán cuando la producción se detenga. Estos costos se pueden reducir para disminuir el límite económico y prolongar la vida útil del proyecto. Cuando se llega al límite económico, el volumen de hidrocarburos remanente en el yacimiento ya no es considerado reserva; sin embargo, es posible que por cambios en el mercado o avances tecnológicos futuros, pueda ser viable económicamente.

Pueden ocurrir periodos en los que los flujos de efectivo sean negativos, debido a factores como bajas en el precio del petróleo o problemas operacionales, pero es posible continuar operando siempre y cuando se visualicen flujos de efectivo positivos en un futuro.

### 1.4.4. Métodos de análisis económico

Cuando se realiza una inversión, se espera generar un beneficio económico en el futuro. La evaluación de un proyecto de inversión consiste en determinar mediante un análisis si es factible o no llevarlo a cabo.

El primer paso es determinar la información sobre los flujos de efectivo futuros, necesaria para tomar decisiones de presupuesto de capital. El paso siguiente es evaluar la conveniencia de llevar a cabo las alternativas disponibles. Además, es necesario utilizar un método de evaluación y selección de proyectos, para finalmente, decidir si cierta propuesta se acepta o rechaza (Van Horne, 2010).

#### *1.4.4.1. Tasa interna de retorno*

Es la tasa de interés que hace igual a cero el valor presente de un proyecto, para esto, los flujos de efectivo de entrada deben ser iguales que los de salida. La TIR se obtiene al encontrar la tasa que satisface la siguiente ecuación:

$$I_0 - \sum_{i=1}^n \frac{FE_t}{(1 + TIR)^i} = 0 \quad (1.12)$$

donde:

- $I_0$  = inversión en el periodo cero
- $FE_t$  = flujo de efectivo para el periodo  $t$
- $n$  = número total de periodos
- $TIR$  = tasa interna de retorno

La TIR debe ser mayor o igual (rentabilidad mínima) que la tasa mínima aceptable de rendimiento (TMAR) para que un proyecto se acepte. Si lo anterior no se cumple, significará que el rendimiento del proyecto será menor que sus costos, generando una pérdida de valor a la empresa.

Se enlistan algunas de las desventajas de evaluar proyectos con la tasa interna de retorno:

- a. No permite comparar proyectos con diferentes duraciones
- b. Pueden existir tasas internas de retorno múltiples en un proyecto, al existir un cambio de signo en el valor presente neto del proyecto.
- c. Si todos los flujos de efectivo de un proyecto son positivos, no existirá una TIR, pues no habrá cambio de signo.

#### ***1.4.4.2. Valor presente neto***

El valor presente neto, flujo de efectivo descontado o simplemente valor presente es un indicador que permite determinar la viabilidad de un proyecto. Consiste en convertir todos los flujos de efectivo de una empresa o un proyecto a un valor presente, se considera un método efectivo para evaluar proyectos de inversión (Blank & Tarquin, 2006).

El VPN se puede utilizar cuando se presenta una decisión con alternativas mutuamente excluyentes, es decir, que existen diferentes opciones y sólo una puede ser seleccionada; además, el hecho de que, en este trabajo, las alternativas posean vidas iguales simplifica el análisis económico. Cuando se rechaza un proyecto, se renuncia al costo y a los beneficios que este pudiese brindar, a esto se le conoce como costo de oportunidad. Una de las principales ventajas del VPN, es que considera el principio del valor del dinero en el tiempo. El cálculo del VPN es sencillo, y se realiza de la siguiente manera:

$$VPN = -I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{FE_t}{(1+d)^t} \quad (1.13)$$

donde:

- $I_0$  = inversión en el tiempo cero
- $t$  = periodo
- $FE$  = flujo de efectivo para cada periodo
- $n$  = número de periodos del tiempo de evaluación
- $d$  = tasa de descuento o costo de oportunidad

Para el cálculo del valor presente neto, es importante utilizar los flujos de efectivo ya deflactados, en otras palabras, que consideren el efecto de la inflación. Esto se consigue a través de la siguiente expresión:

$$FE = FEN / (1+i)^t \quad (1.14)$$

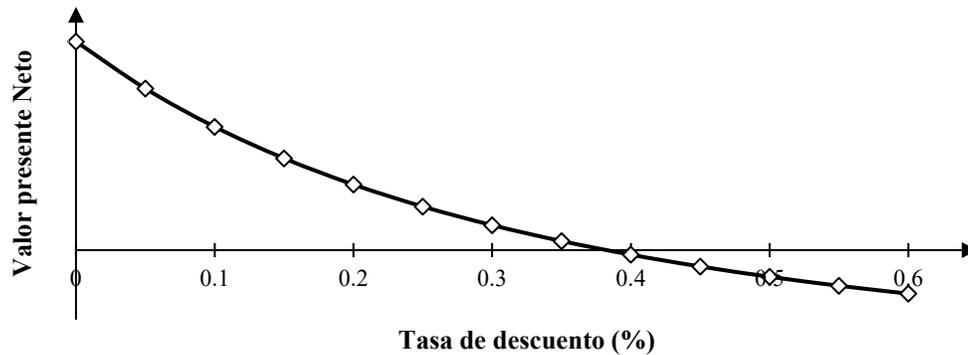
donde:

- $FE$  = flujo de efectivo para cada periodo
- $FEN$  = flujo de efectivo neto para cada periodo
- $i$  = tasa de inflación
- $t$  = periodo

Sólo se aceptarán los proyectos cuyo valor presente neto sea mayor o igual a cero. Los flujos de efectivo de entrada nunca deben ser menores que los de salida. Cuando existen proyectos mutuamente excluyentes, lo ideal es seleccionar la o las alternativas que generen el VPN más alto. Utilizar este método en conjunto con el de la tasa interna de retorno (TIR) permite seleccionar propuestas que eleven el valor de mercado de las acciones. Si la tasa de rendimiento o de descuento se selecciona correctamente al calcular el VPN, el incremento de las acciones de la empresa será igual al VPN calculado (Van Horne, 2010).

#### **1.4.4.3. Perfil de VPN**

Generalmente, los métodos del VPN y de la TIR llevan a la misma decisión de aceptación o rechazo. El perfil de VPN representa la relación entre el VPN de un proyecto y su tasa de descuento empleada. Mientras menor sea la tasa de descuento, el VPN será más alto. El valor presente neto de un proyecto será igual a cero cuando la curva del perfil cruce el eje de las abscisas y justo en ese punto se encontrará la TIR. El VPN será negativo para las tasas de descuento mayores a la TIR (Van Horne, 2010).



**Figura 1.11.** Perfil de VPN. Elaboración propia.

Si la tasa de rendimiento es menor que la TIR, se aceptará el proyecto, pues el VPN será mayor que cero permitiendo elevar el valor de la empresa.

#### 1.4.4.4. Índice de rentabilidad

También conocido como razón costo-beneficio, es el resultado de dividir la suma de los flujos de efectivo netos futuros entre el flujo de salida inicial. Se obtiene de la siguiente manera:

$$IR = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{FE_t}{(1+d)^t}}{I_0} \quad (1.15)$$

donde:

$I_0$  = inversión en el tiempo cero

$t$  = periodo

$FE$  = flujo de efectivo para cada periodo

$n$  = número de periodos del tiempo de evaluación

$d$  = tasa de descuento o costo de oportunidad

Para que una inversión cumpla con este criterio, la relación debe ser igual o mayor que uno. En todos los casos, la decisión de aceptar o rechazar un proyecto será la misma al emplear el índice de rentabilidad que al usar el VPN. La diferencia es que el índice de rentabilidad sólo es una rentabilidad relativa y el VPN permite expresar la rentabilidad monetaria absoluta (Van Horne, 2010).

#### ***1.4.4.5. Periodo de recuperación***

El periodo de recuperación (PR), es el tiempo requerido para recuperar la inversión de efectivo inicial, por medio de los flujos de efectivo esperados durante el proyecto. Se considera que la inversión se ha recuperado cuando la acumulación de los flujos de efectivo rebasa a la inversión inicial. Este método no se considera adecuado para seleccionar un proyecto debido a que considera el tiempo como criterio único, pero puede brindar información que complementa al método del valor presente neto y ayudar a las empresas a cambiar las estrategias de inversión.

El tiempo de pago mide la cantidad de tiempo que debe pasar para recuperar la inversión inicial y no considera intereses. Cuando un proyecto se pone en marcha, se buscan dos metas principales: la primera es conseguir utilidades, y la segunda es que éstas lleguen lo más pronto posible; no es lo mismo recibirlas a corto que a mediano o largo plazo.

Si se utiliza este único método, el proyecto es aceptado si el periodo de recuperación calculado es menor que el periodo de recuperación máximo aceptable.

Las empresas prefieren utilizar este criterio en proyectos desarrollados en zonas con situaciones sociales, políticas o económicas inestables, pues debido al alto riesgo, se busca recuperar la inversión inicial lo más pronto posible. La principal desventaja de este método es que sólo toma en consideración los flujos de efectivo generados durante el plazo de recuperación y desprecia a los flujos de efectivo posteriores, por lo que no representa una medida de la rentabilidad (Van Horne, 2010).

Otra desventaja es que, ignora el valor del dinero en el tiempo. Pues no considera el momento en el que se presentan los flujos de efectivo. Además, el periodo de recuperación máximo aceptable sólo es un parámetro subjetivo.

### **1.5. Conceptos básicos de optimización**

Desde sus orígenes, el hombre siempre se ha involucrado con la optimización. Inicialmente, la optimización consistía en prejuicios o rituales, como consultas con oráculos, o la observación de estrellas. Con el paso del tiempo, esas prácticas se reemplazaron por leyes o principios que rigen al mundo, ya con el desarrollo de las matemáticas, los cálculos matemáticos se aplican en la optimización. Recientemente, se ha logrado un avance considerable debido a progresos en computación, haciendo que problemas complejos puedan resolverse de manera rápida y eficiente (Antonioni & Lu, 2007).

Una definición detallada de optimización sería el conjunto de técnicas, métodos, procedimientos y algoritmos que tienen la finalidad de encontrar el valor óptimo; y puede aplicarse en distintas áreas, como ingeniería, física, matemáticas, economía, administración, comercio, ciencias sociales, e incluso política. Algunas áreas típicas de aplicación de la optimización en la ingeniería son el modelado, caracterización, diseño, control de procesos, producción, control de calidad, mantenimiento, control de inventarios, entre otras (Antoniou & Lu, 2007).

En la vida real, la mayoría de los problemas poseen soluciones múltiples, llegando incluso a ser infinitas. Un problema de optimización se puede definir como un problema de decisión, que consiste en seleccionar valores para un conjunto de variables que se relacionan entre sí (variables de decisión), estas variables deben ser independientes, de tal manera que, al modificarse, se distingan unos resultados de otros. Cuando se optimiza, dependiendo de las circunstancias, se maximiza o minimiza el objetivo u objetivos, considerando las restricciones que pueden limitar la selección de los valores de las variables de decisión (Meneu, 1999).

### **1.5.1. Partes de un problema de optimización**

La optimización matemática se encarga de formalizar y tratar problemas de optimización mediante un enfoque matemático. Una optimización está constituida por una función objetivo, la cual se maximizará o minimizará dependiendo de las variables de decisión. El conjunto de soluciones factibles, región factible o conjunto de oportunidades se integra por los valores de las variables de decisión que describen al objeto de estudio. Para obtener la solución de un problema de optimización, se debe identificar el conjunto de valores de las variables de decisión que satisfagan las restricciones establecidas y lleven al valor óptimo de la función objetivo.

#### ***1.5.1.1. Máximos y mínimos***

La palabra óptimo proviene de “optimismo”; se refiere a la elección del mejor curso de acción posible cuando existen alternativas múltiples. Los máximos y mínimos son los valores supremos e ínfimos de una función, respectivamente; a estos puntos se les conoce como extremos de la función.

Una solución óptima de un problema de maximización es un máximo global o absoluto, la cual es una solución factible  $x^* \in S$ , tal que:

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in S$$

Y  $x^* \in S$  será una solución óptima única o máximo global único si:

$$f(x^*) > f(x), \forall x \in S \text{ tal que } x \neq x^*$$

Caso contrario, una solución óptima de un problema de minimización es un mínimo global o absoluto, la cual es una solución factible  $x^* \in S$ , tal que:

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S$$

Además,  $x^* \in S$  será una solución óptima única o mínimo global único si:

$$f(x^*) < f(x), \forall x \in S, \text{ tal que } x \neq x^*$$

Además de los máximos y mínimos globales, en una función también pueden presentarse máximos y mínimos locales o relativos. Se trata de un máximo local si para algún  $\varepsilon > 0$  se cumple que:

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in S \cap (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$$

Y de un mínimo local cuando:

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S \cap (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$$

El mínimo y el máximo pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\min F = f(x) \text{ para } x \in E^n$$

$$\max F = f(x) \text{ para } x \in E^n$$

donde  $E^n$  representa el espacio Euclidiano y  $n$  su dimensión.

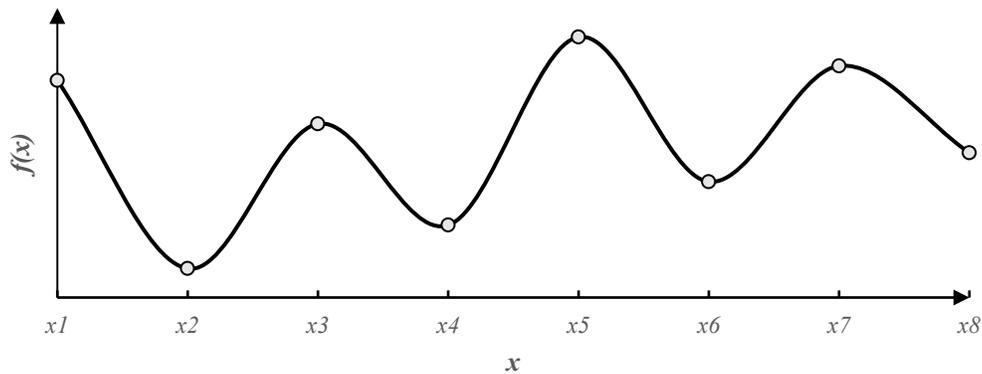
Generalmente, en los problemas de optimización se busca minimizar la función objetivo, pues cualquier problema de maximización simplemente es equivalente a la minimización del opuesto de la función objetivo. Cabe aclarar que la función opuesta de  $f(x)$ , es  $-f(x)$ ; la expresión siguiente muestra esta relación:

$$\max[f(x)] = -\min[-f(x)] \tag{1.16}$$

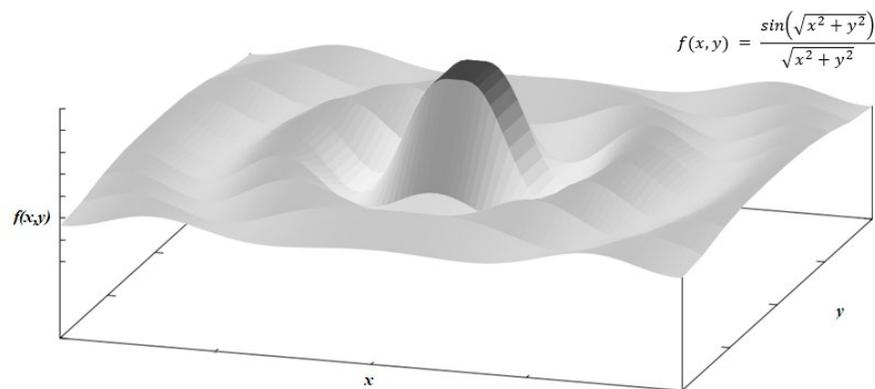
El teorema de Weierstrass señala que toda función  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que sea continua en  $D$ , tendrá un máximo y un mínimo globales en cualquier conjunto  $S \subseteq D$  que sea

compacto y no vacío. Este teorema garantiza la existencia de una solución óptima, ya sea máximo o mínimo.

Dos ejemplos de aplicación del teorema de Weierstrass se observan en las **Figuras 1.12** y 1.13. En la primera, se tiene una función continua de una variable  $f(x)$  con sus mínimos y máximos respectivos ubicados en los puntos silla; mientras que en la segunda se muestra una función continua de dos variables  $f(x, y)$  con sus evidentes puntos silla.



**Figura 1.12.** Máximos y mínimos de una función de una variable. Los puntos correspondientes a  $x_2$  y  $x_5$  son el mínimo y el máximo globales, respectivamente. Mientras que los demás puntos de la curva son mínimos o máximos locales. Es importante considerar que un máximo global siempre será un máximo local y que un mínimo global siempre será un mínimo local. Elaboración propia.



**Figura 1.13.** Función de dos variables con máximos y mínimos múltiples; sólo hay un punto óptimo y se encuentra en el punto más alto de la superficie. Elaboración propia.

### 1.5.1.2. Variables de decisión

La comprensión del problema es necesaria al identificar las variables a optimizar, las cuales influirán en la función objetivo. Se define una función  $F$ , la cual dependerá de  $n$  parámetros:

$$F = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

Se requiere optimizar  $F$ , una cantidad escalar, que puede tomar cualquier valor. Un ejemplo de esto puede ser la cantidad de material para elaborar un empaque, o las utilidades de una empresa en cierto periodo. Las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  serán los parámetros que influirán en el valor de  $F$ . La función por optimizar recibirá el nombre de función objetivo y puede depender de cualquier cantidad de variables, las cuales se conocen como variables de decisión (Antoniou & Lu, 2007).

Las variables de decisión son parámetros desconocidos y su valor se determinará a partir de la optimización del problema. Las variables de decisión óptimas serán aquellas que generen el valor óptimo (máximo o mínimo) para la función objetivo. Para simplificar su escritura, usualmente se emplea notación matricial, a través de un vector columna  $x$ , con elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , o también con la transpuesta de  $x$  (denominada  $x^T$ ), la cual se expresará con el vector fila:

$$x^T = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$$

### ***1.5.1.3. Restricciones del problema***

Frecuentemente, las variables de decisión están sujetas a restricciones; por ejemplo: a principios físicos como la conservación de la masa o a valores que deben satisfacerse. Dependiendo de la naturaleza del problema a optimizar, puede poseer un conjunto de ecuaciones o de desigualdades, las cuales permiten establecer las restricciones del problema (Antoniou & Lu, 2007).

Cualquier punto de  $x$  que satisfaga las restricciones del problema, recibirá el nombre de punto factible del problema de optimización. A su vez, el conjunto de todos esos puntos será conocido como región factible, dominio factible o conjunto solución de  $x$ .

### ***1.5.1.4. Función objetivo***

Una función se define como una relación entre dos conjuntos, en la que a cada valor del primer conjunto le corresponde sólo un valor del segundo. La función objetivo es aquella cuyo valor se pretende maximizar o minimizar a través de la optimización, depende de las variables de decisión y mide su calidad. La finalidad de todo proceso de optimización es encontrar los valores de las variables de decisión que permitan maximizar o minimizar el valor de la función objetivo.

## 2. Metodología

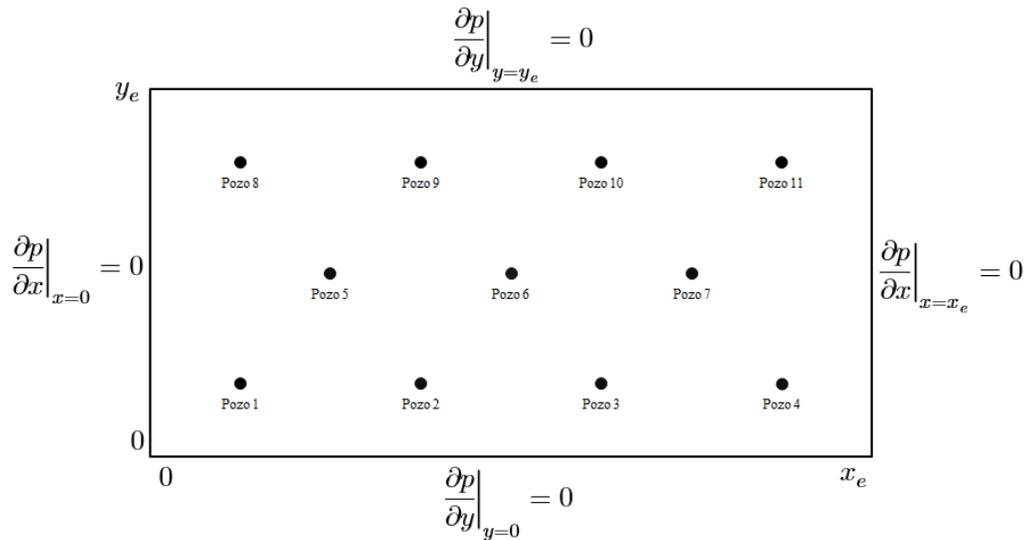
En este trabajo se propone un algoritmo que permite obtener el número óptimo de pozos de relleno a perforar y sus coordenadas respectivas, siempre y cuando sea viable la perforación de pozos nuevos. En este capítulo se documenta el desarrollo de este procedimiento, desde el planteamiento del problema hasta la fase de optimización. Se muestran los pasos que se siguen para obtener la mejor solución, partiendo de las definiciones presentadas en el primer capítulo.

Para una organización mejor, la explicación del algoritmo se desglosará en tres partes principales: la primera, que trata sobre la solución analítica para la predicción de la producción; la segunda, que establece las bases para la optimización y la tercera que consiste en una optimización para elegir la mejor solución.

### 2.1. Solución analítica para la predicción de la producción

Inicialmente, Rodríguez y Cinco Ley desarrollaron un modelo para predecir la producción de petróleo, “*A new model for production decline*”, en el que utilizaron la transformada de Laplace y las funciones de Green para obtener su solución. El modelo consiste en una solución analítica para un yacimiento rectangular, homogéneo e isotrópico, con fronteras cerradas al flujo y un espesor constante, en la **Figura 2.1** se muestra gráficamente el modelo del yacimiento. Las consideraciones de este modelo conceptual son las siguientes:

- Fluido ligeramente compresible
- Compresibilidad constante
- Viscosidad constante
- No considera efectos gravitacionales y flujo no Darciano
- Soporta cualquier número de pozos
- La presión de fondo de los pozos es constante y no cambia durante el tiempo de producción
- Todos los pozos comienzan a producir en el tiempo cero de la simulación.
- Los pozos pueden estar dañados, pero no estimulados
- No se pueden implementar pozos de relleno



**Figura 2.1.** Representación del modelo de yacimiento

Las variables adimensionales y las unidades que se utilizan en esta solución se muestran en el **Anexo I**. En el **Anexo II** se muestra a detalle la obtención de esta solución. La cual se puede aplicar para predecir la producción para el caso en que todos los pozos del yacimiento comiencen a producir en el tiempo cero.

La producción de los pozos se puede dividir en dos etapas: la primera ocurre en tiempos cortos y se caracteriza por que el transiente de presión generado por la producción del yacimiento aún no alcanza las fronteras del yacimiento; la segunda se presenta en tiempos más largos, cuando el transiente ha llegado a las fronteras e influye en la declinación de la producción del yacimiento.

En la etapa temprana, la declinación de la presión tendrá un comportamiento exponencial modificado. En el caso de que haya pozos múltiples y todos produzcan con una misma presión de fondo fluyendo, la declinación de la presión será exponencial; todos los pozos del yacimiento tendrán el mismo coeficiente de declinación.

La pendiente de declinación de la producción se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$m = \frac{0.006329kD}{\phi\mu c_t A} \quad (2.1)$$

donde:

- $m$  = pendiente de declinación de la producción
- $k$  = permeabilidad

$D$	=	coeficiente de declinación
$\phi$	=	porosidad de la roca
$\mu$	=	viscosidad del aceite
$c_t$	=	compresibilidad total
$A$	=	área del yacimiento

El valor del coeficiente de declinación  $D$  dependerá de la forma y del tamaño del yacimiento, del número de pozos produciendo, su daño y localización (Véase anexo I).

La existencia de gastos negativos en un pozo puede interpretarse como una inyección de fluidos. Así, para satisfacer la condición de presión de fondo constante, algunos pozos productores podrían convertirse en inyectoros.

El comportamiento del gasto no cambia durante el flujo transitorio (mismo para daños diferentes, en tiempos cortos. Cuando se llega al flujo dominado por fronteras, el gasto decrecerá debido al incremento en  $D$  y la declinación disminuirá. A mayor coeficiente de declinación, el gasto disminuye más rápidamente.

Cuando los pozos produzcan a diferentes pero constantes presiones de fondo, la declinación de la producción de este modelo seguirá un comportamiento exponencial modificado durante el periodo de flujo dominado por fronteras. Cuando todos los pozos del yacimiento produzcan bajo la misma presión de fondo, la declinación tendrá un comportamiento exponencial, el cual es típico en yacimientos cuyo mecanismo de empuje es la expansión de sus fluidos. Además, el daño que se tenga en los pozos influirá en sus gastos.

Como una continuación, surgió el trabajo llamado “*Optimum position for wells producing at constant wellbore pressure*”, desarrollado por Camacho, Rodríguez, Galindo y Prats. En este, se obtuvo una solución analítica para múltiples pozos produciendo a diferentes presiones de fondo y comenzando a producir en diferentes tiempos; además, las presiones de fondo y los daños de los pozos se pueden modificar durante el tiempo de simulación. En el **Anexo III** de este trabajo se muestra el detalle para la obtención de esta solución.

En este trabajo se utiliza la función Heaviside o de Escalón Unitario para obtener las soluciones para los objetivos siguientes:

- a. Que se pueda comenzar la producción de los pozos en cualquier momento.
- b. La presión de fondo puede modificarse en cualquier momento de la vida productiva de los pozos.

- c. El daño de los pozos (pozo dañado, sin daño y estimulado) puede alterarse en cualquier momento.

Para conseguir los objetivos de esta tesis, fue necesario emplear la siguiente solución analítica para el caso en el que las condiciones de producción cambien durante la vida productiva:

$$q_{wDj}(t_D) = \sum_{i=1}^{nw} (-1)^{i+j} \frac{\sum_{k=1}^{nw-1} (m_{ij})_k}{2\pi \sum_{k=1}^{nw} |\gamma|_k} [p_{wD}(x_{Di}, y_{Di})] \quad (2.2)$$

donde:

- $q_{wDj}$  = gasto adimensional del pozo  $j$
- $t_D$  = tiempo adimensional
- $nw$  = número de pozos
- $(m_{ij})_k$  = matriz menor de la matriz  $\gamma$ , pero con la fila  $k$  formada por unos
- $\gamma$  = matriz que se obtiene a partir de la ecuación (II.19)
- $p_{wD}$  = presión adimensional
- $x_{Di}$  = coordenada adimensional en  $x$
- $y_{Di}$  = coordenada adimensional en  $y$

En el Anexo III de este trabajo se muestra con más detalle esta solución analítica.

## 2.2. Optimización

Para resolver un problema de optimización, se tienen que definir tres aspectos clave: las variables de decisión, sus restricciones y la función objetivo. Entender qué es lo que se desea obtener y cómo conseguirlo, requiere identificar y analizar el problema, proceso o situación presentada.

### 2.2.1. Optimización: determinación de variables, restricciones y función objetivo

Para iniciar una optimización, se requiere de una función objetivo, de las variables a optimizar y de las restricciones. Los elementos anteriores se mostraron en la sección 1.5.1; a continuación, se explicará cómo se decidió utilizar los elementos anteriores:

- i. Función objetivo:

La función objetivo será el valor presente neto del proyecto, mostrado en la sección 1.4.4.2. Este método permite evaluar y comparar varios proyectos entre sí.

ii. Variables de decisión:

Éstas corresponderán a las coordenadas de cada uno de los pozos de relleno. Como cada pozo posee dos coordenadas (una en  $x$  y otra en  $y$ ), el número de variables de decisión será dos veces la cantidad de pozos de relleno. Además, como es necesario el número de pozos, se añadirá una variable extra, quedando  $2n + 1$  como la cantidad de variables a optimizar, en la que  $n$  un número entero que indica la cantidad de pozos de relleno.

iii. Restricciones de la optimización:

Al considerarse un yacimiento rectangular, el rango de valores de las variables  $x$  y  $y$  oscila entre cero y  $x_e$  y  $y_e$ , respectivamente (véase la Figura 2.1).

### 2.2.2. ¿Por qué usar un optimizador?

Para el problema presentado, la cantidad de variables independientes usadas en el cálculo de la función objetivo es muy grande. Tan sólo la determinación de la producción involucra: las propiedades de la roca y el fluido y las dimensiones del yacimiento; el número, coordenadas y características de los pozos de producción y de relleno; el daño y el tiempo de evaluación. Además, de las variables requeridas para el cálculo del valor presente neto.

El cambio en cualquiera de las variables del párrafo anterior modificará el valor de la función objetivo (VPN). La complejidad del problema incrementa a medida que aumenta el número de pozos de relleno, pues la producción de cada uno de estos repercutirá en todos los demás. Y esta producción y repercusión cambiará con la simple acción de modificar la ubicación de cualquier pozo de relleno, provocando que el número de soluciones posibles para el problema sea inconmensurable. Por ese motivo, se debe usar un optimizador para determinar los valores óptimos tanto del número, como de las coordenadas de cada uno estos pozos.

### 2.2.3. Optimizador: Método del Túnel

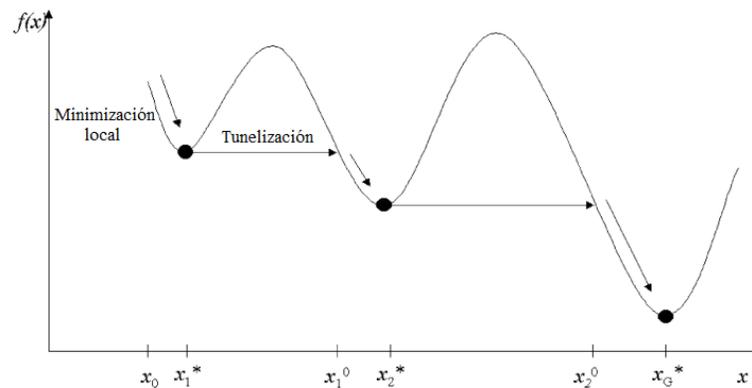
Una vez establecidas la función objetivo, las variables de decisión y los límites del yacimiento, el siguiente paso es la optimización. Los optimizadores son herramientas que permiten llevar a cabo una optimización; en este trabajo, se usó el método del túnel, resultado de los trabajos de Levy y Montalvo (1985) y de Levy y Gómez (1985). Se trata de un optimizador global robusto, capaz de optimizar una gran cantidad de variables y de obtener múltiples mínimos locales. Además, consigue resultados con precisión excelente, en tiempos de ejecución cortos.

Este algoritmo se compone de una secuencia de ciclos; cada uno consta de dos fases: una de minimización y otra de tunelización. Primero, la fase de minimización comienza en un punto inicial ( $x_0$ ), en el que el valor de la función objetivo disminuye hasta encontrar un mínimo local ( $x_1$ ), **Fig. 2.2**. Después, partiendo del punto encontrado en la minimización, la fase de tunelización determina un mejor punto inicial en otro valle de la función para la siguiente fase de la minimización. Ambas fases se repiten hasta encontrar los mínimos globales (Gómez & Levy, 1985).

El objetivo de la optimización global es encontrar el mínimo global, despreciando los mínimos locales que no sean de interés. Se desea encontrar la solución global  $x_G$  de una función  $f(x)$ .

$$\min_{x \in B} f(x)$$

Con  $B = \{x | l \leq x \leq u\}$ ,  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $x \in R^n$ ,  $f \in C^2$ , siendo  $n$  el número de variables independientes.



**Figura 2.2.** Representación geométrica del método del túnel. (Multiphase Equilibria Calculation by Direct Minimization of Gibbs Free Energy Using the Tunnelling Global Optimization Method, Nichita & Gómez, 2004).

El método del túnel encuentra el mínimo global de una función  $f(x)$ , donde  $f$  es una función escalar con primera y segunda derivada continuas y  $x$  será un vector con  $n$  elementos. Si  $f(x)$  es un mínimo global, se deben cumplir las condiciones siguientes:

1.  $f(x) > f(x^*)$ ,  $\forall x, x \neq x^*, \|x - x^*\| < \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$
2.  $f(x) > f(x^*)$ ,  $\forall x, x \neq x^*, A \leq x \leq B$

La primera condición implica que  $x^*$  es un mínimo de  $f(x)$  dentro de una zona pequeña. La segunda establece que  $f(x^*)$  es un mínimo global en toda la región de interés.

El método del túnel ha probado ser eficiente en problemas de dificultad elevada. Su principio se basa en una tunelización desde un valle a otro en la función objetivo, lo que permite encontrar una serie de mínimos cada vez mejores, hasta encontrar el mínimo global (Fig. 2.2).

$$f(x_1) \geq f(x_2) \geq \dots \geq f(x_G)$$

donde  $x_G$  es el mínimo global de la función objetivo. Al desprestigiar los mínimos locales de la función, el algoritmo se vuelve más rápido y eficiente.

Debido a que el método del Tunneling se encarga de minimizar funciones, y los objetivos de esta tesis son maximizar la función objetivo (VPN), es necesario realizar ajustes a esta última función, lo cual se muestra en la ecuación siguiente:

$$\max[VPN] = -\min[-VPN] \quad (2.3)$$

donde:

$\max[VPN]$  = valor máximo de la función VPN

$\min[VPN]$  = valor mínimo de la función VPN

### 2.3. Determinación de la función objetivo

Un modelo es una representación de un fenómeno, de un proceso o de la realidad en general. Dependiendo de su complejidad y del fin de lo que se desea representar, se han desarrollado diferentes modelos como soluciones a ecuaciones diferenciales parciales en dos dimensiones, ejemplos de estas son las soluciones analíticas utilizadas en esta tesis: Rodríguez y Cinco-Ley, 1993 y Camacho et al., 1996.

Al comenzar un modelado, se suelen usar modelos sencillos y a partir de estos, se construyen modelos con mayor complejidad e información, hasta que el responsable del estudio considere que este representa satisfactoriamente el problema de estudio, es decir, que el modelo tenga validez.

La función objetivo es una expresión matemática generada a partir de un modelo matemático, la cual representa una cantidad a optimizar (maximizar o minimizar), por ejemplo: los ingresos, las utilidades o los costos de una empresa; se tiene que definir como una variable dependiente de los parámetros de decisión a través de una relación funcional.

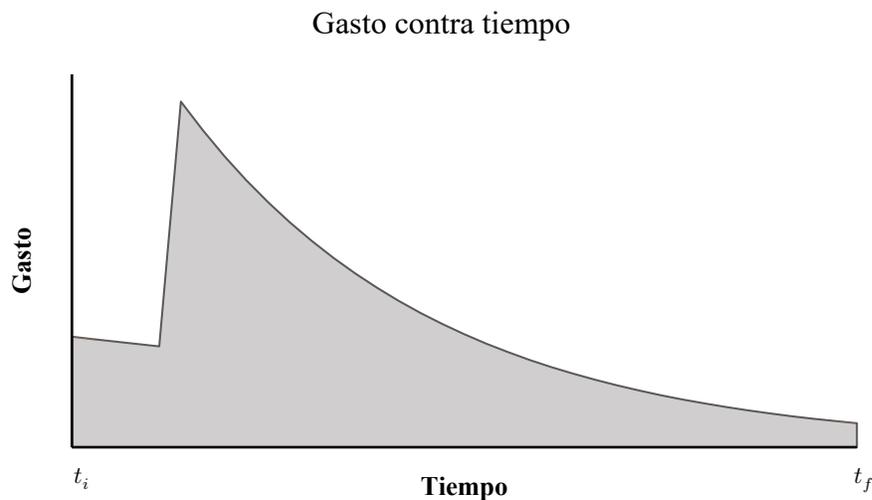
La optimización puede ser útil para que la implementación de algún proyecto genere las utilidades más elevadas, o para que el tiempo requerido para recuperar una inversión sea

el menor posible. En este trabajo, se pretende que el proyecto genere el mayor beneficio y el método ideal para elegir la mejor alternativa es el valor presente neto (presentado en la sección 1.4.4.2 de este trabajo). El criterio para determinarla es simple: la solución que genere el VPN más alto será la óptima. A continuación, se muestra la determinación del VPN:

1. El primer paso consiste en la lectura de las variables que determinarán el VPN:
  - a. Datos del yacimiento:
    - i. Presión inicial del yacimiento
    - ii. Presión de referencia
    - iii. Permeabilidad del yacimiento
    - iv. Dimensiones del yacimiento ( $x_e$  y  $y_e$ )
    - v. Porosidad de yacimiento
    - vi. Espesor del yacimiento
    - vii. Factor de volumen del aceite
    - viii. Viscosidad del aceite
    - ix. Compresibilidad total.
  - b. Datos de los pozos de producción y de relleno:
    - i. Número de pozos de producción originales
    - ii. Número de pozos de relleno que comenzarán a producir después de los pozos originales
    - iii. Coordenadas en  $x$  y  $y$  de los pozos de producción
    - iv. Presión de fondo de cada pozo
    - v. Radio del pozo, el cuál será el mismo para todos los pozos
    - vi. Daño del pozo, el cuál puede ser diferente para cada pozo
    - vii. Tiempo inicial de producción de cada pozo
  - c. Datos económicos:
    - i. Costo de perforación de cada pozo
    - ii. Precio del barril de petróleo
    - iii. Costo de producción por barril
    - iv. Tasa de descuento
    - v. Periodo de evaluación

- vi. Regalías
- vii. Impuestos
- viii. CAPEX
- ix. OPEX
- x. Capital de trabajo.

2. Una vez que el programa ha leído los datos anteriores, el paso siguiente será predecir la producción con la solución analítica presentada en la sección 2.1. El resultado será una serie de gastos que variarán con respecto al tiempo, lo cual se ejemplifica en la siguiente **Figura 2.3**:



**Figura 2.3.** Curva de gasto contra tiempo. Los valores de salida de la solución analítica serán una serie de gastos. La integral de esta curva será igual al volumen de aceite producido durante el periodo de análisis.

3. A partir de los datos obtenidos en el paso anterior se determina la producción acumulada de aceite durante el periodo de análisis, la cuál será igual a la integral de la curva del gasto contra el tiempo:

$$N_p = \int_{t_i}^{t_f} q(t) dt \quad (2.4)$$

donde:

- $N_p$  = producción acumulada de aceite en el tiempo de análisis
- $t_i$  = tiempo en el que inicia la producción
- $t_f$  = tiempo en el que finaliza la producción
- $q(t)$  = gasto

Esta integral puede resolverse por medio de diferentes métodos. En este trabajo se optó por la regla del trapecio, este método, como su nombre lo indica, emplea trapecios y brinda áreas más precisas que las sumas de Riemann, las cuales involucran rectángulos. El área de un trapecio se obtiene mediante la expresión siguiente:

$$A_{\text{trapecio}} = a \left( \frac{b_1 + b_2}{2} \right) \quad (2.5)$$

donde  $a$  es la altura, y  $b_1$  y  $b_2$  son las longitudes de la primera y segunda base, respectivamente. Adaptando la fórmula anterior al problema en cuestión se obtiene la Ec. 2.6.:

$$Np_{\text{periodo}} = \Delta t \left( \frac{q_1 + q_2}{2} \right) \quad (2.6)$$

donde,  $\Delta t$  es el tiempo que comprende desde el inicio hasta el final del periodo en cuestión, en días (en el programa se puede optar por que este periodo sea mensual, bimestral, trimestral, semestral o anual) y  $q_1$  y  $q_2$  son los gastos registrados al comienzo y al final del periodo en cuestión. Para obtener el volumen producido durante el tiempo total de estudio, es necesario sumar los volúmenes producidos de todos los periodos:

$$Np = \sum_{i=2}^n \Delta t \left( \frac{q_i + q_{i-1}}{2} \right) \quad (2.7)$$

donde  $n$  es el número total de periodos y  $t$  la duración de estos.

4. Después de obtener la predicción de los volúmenes producidos en cada periodo, se calcularán los flujos de efectivo del proyecto, éstos dependerán de los ingresos y egresos, mostrados en las secciones 1.4.1 y 1.4.2.
  - a. Ingresos:
    - i. Volumen producido
    - ii. Precio del petróleo
  - b. Egresos:
    - i. Inversiones iniciales
    - ii. Costos operativos
    - iii. Depreciación
    - iv. Impuestos

## v. Regalías

5. Para obtener los flujos de efectivo, las variables anteriores interactuarán de la manera siguiente:

La utilidad bruta se obtendrá multiplicando el volumen producido de petróleo (en barriles) por el precio del barril de petróleo:

$$UB = Np * \text{Precio del barril} \quad (2.8)$$

donde:

$UB$  = utilidad bruta  
 $Np$  = predicción de la producción acumulada

Después, para obtener el flujo de efectivo antes de impuestos, se utilizará la expresión siguiente:

$$FEAI = UB - CO - CAPEX - Reg - Dep \quad (2.9)$$

donde:

$FEAI$  = flujo de efectivo antes de impuestos  
 $CO$  = costos operativos  
 $CAPEX$  = capital expenditures (gastos de capital)  
 $Reg$  = regalías  
 $Dep$  = depreciación

El flujo de efectivo después de impuestos se calculará con la expresión siguiente:

$$FEDI = FEAI * \text{Tasa de impuestos} \quad (2.10)$$

6. Para mejorar la precisión, el VPN considera el principio del valor del dinero en el tiempo, (mostrado en la sección 1.3.3). Para esto, se usará una tasa de descuento que afectará a los flujos de efectivo futuros durante el tiempo de análisis. La suma de todos los flujos de efectivo traídos al presente de cada periodo dará como resultado el valor presente neto del proyecto, Ec. (1.13).
7. El siguiente paso es optimizar, para esto se usará el método del Tunneling (presentado en la sección 2.2).
8. El resultado de la optimización será una lista del número óptimo de pozos de relleno y sus coordenadas correspondientes, además de su valor presente neto.

### 2.3.1. Cálculo del valor presente neto

A continuación, mediante un ejemplo, se muestra el proceso a seguir para obtener el valor presente neto. Se tiene un yacimiento rectangular cuyas características se presentan en la **Tabla 2.1**:

**Tabla 2.1.** Características del yacimiento utilizado para obtener el VPN.

Características del yacimiento y del fluido								
x (ft)	y (ft)	p <sub>inicial</sub> (psi)	k (md)	$\phi$	h (ft)	B <sub>o</sub>	$\mu$ (cp)	c <sub>t</sub> (psi <sup>-1</sup> )
30,000	30,000	3,500	50	0.15	260	1.3698	1.2856	1.50E-05

Inicialmente producirán dos pozos, se planea que después de un año comiencen a producir dos pozos de relleno. Las siglas PP y PR se refieren a pozo inicial de producción y pozo de relleno, respectivamente. La **Tabla 2.2** muestra las características de los pozos de producción y de relleno:

**Tabla 2.2.** Características de los pozos de producción y de relleno

Características de los pozos de producción y de relleno						
Pozo	x (ft)	y (ft)	r <sub>w</sub> (ft)	p <sub>wf</sub> (psi)	Daño	T <sub>inicial</sub> (días)
PP <sub>1</sub>	7,500	15,000	0.25	1,500	3.00	0
PP <sub>2</sub>	22,500	15,000	0.25	1,500	3.00	0
PR <sub>1</sub>	-	-	0.25	1,500	0.00	365
PR <sub>2</sub>	-	-	0.25	1,500	0.00	365

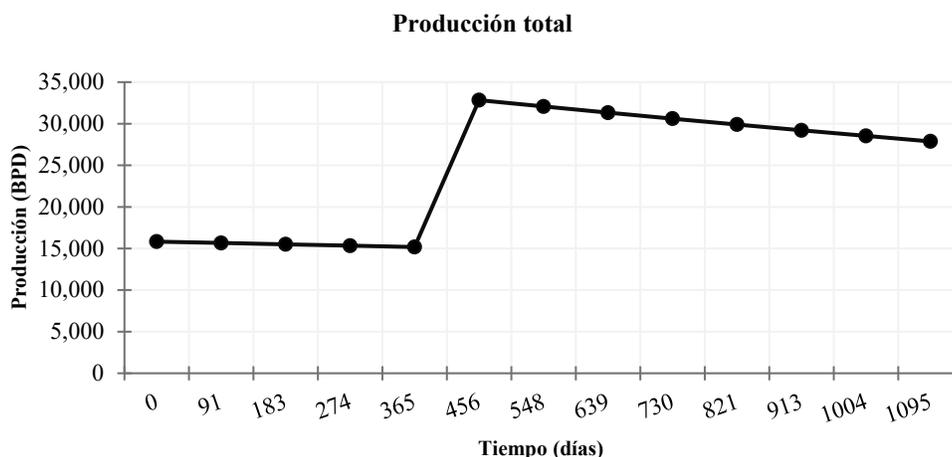
Se desea predecir el volumen de hidrocarburos ( $N_p$ ) que se producirá en los siguientes tres años. Al usar el modelo expuesto en la sección 2.1, se obtuvieron los siguientes gastos para cada uno de los pozos:

**Tabla 2.3.** Gastos de los pozos originales y de relleno.

Tiempo (días)	Q <sub>P1</sub> (BPD)	Q <sub>P2</sub> (BPD)	Q <sub>P3</sub> (BPD)	Q <sub>P4</sub> (BPD)	Q <sub>total</sub> (BPD)
0	7,914.54	7,914.54	0.00	0.00	15,829.09
91	7,831.48	7,831.48	0.00	0.00	15,662.95
183	7,749.28	7,749.28	0.00	0.00	15,498.56
274	7,667.94	7,667.94	0.00	0.00	15,335.89
365	7,587.46	7,587.46	0.00	0.00	15,174.93
456	7,456.48	7,456.52	8,959.65	8,959.71	32,832.35
548	7,284.08	7,284.11	8,752.49	8,752.55	32,073.23
639	7,115.66	7,115.70	8,550.12	8,550.18	31,331.66
730	6,951.14	6,951.17	8,352.43	8,352.49	30,607.23

821	6,790.42	6,790.45	8,159.31	8,159.37	29,899.55
913	6,633.41	6,633.45	7,970.66	7,970.71	29,208.24
1004	6,480.04	6,480.07	7,786.37	7,786.42	28,532.90
1095	6,330.21	6,330.25	7,606.34	7,606.39	27,873.19

La **Figura 2.4** muestra el gasto total para un tiempo de tres años, con intervalos trimestrales (considerando que la duración promedio de un mes es de 30.42 días):



**Figura 2.4.** Producción contra tiempo. El gasto mostrado es el resultado de la suma de todos los gastos de los pozos que producen en el yacimiento.

Para obtener el volumen de aceite producido, es necesario calcular el área bajo la curva de declinación del gasto total contra el tiempo de producción para el rango de 0 a 1095 días (tres años). Para esto, se utiliza la ecuación (2.6):

Aplicando la ecuación anterior, resultan los volúmenes que se incluyen en la **Tabla 2.4**:

**Tabla 2.4.** Gastos totales y producción acumulada de los pozos originales y de relleno

Gastos totales y producción acumulada				
Periodo	T (días)		Q <sub>total</sub>	N <sub>p</sub> (barriles)
1	0		15,829.09	-
2	91		15,662.95	1,436,981.74
3	183		15,498.56	1,421,899.59
4	274		15,335.89	1,406,975.74
5	365		15,174.93	1,392,208.53
6	456		32,832.35	2,190,572.31
7	548		32,073.23	2,961,641.85
8	639		31,331.66	2,893,164.97
9	730		30,607.23	2,826,271.35

10	821	29,899.55	2,760,924.41
11	913	29,208.24	2,697,088.36
12	1004	28,532.90	2,634,728.29
13	1095	27,873.19	2,573,810.05
		<b>Total</b>	<b>27,196,267.20</b>

Los ingresos y egresos estarán sujetos a las condiciones incluidas en la **Tabla 2.5**:

**Tabla 2.5.** Condiciones económicas a las que estarán sujetos los ingresos y egresos

Condiciones económicas de los ingresos y egresos	
Costo pozo (dólares)	20,000,000
Precio barril (dólares)	47
Tasa de descuento anual	0.12
Tasa de impuestos	0.8
Costo barril (dólares)	10

Cabe mencionar que el algoritmo propuesto en este trabajo permite la entrada de las variables de la ecuación (1.11), pero para fines prácticos, en este ejemplo, se depreciará la depreciación y en el costo por barril estará implícito el OPEX y el capital de trabajo. Para obtener el flujo de efectivo, se utilizarán las fórmulas (2.8), (2.9) y (2.10), los resultados se muestran en la **Tabla 2.6**:

**Tabla 2.6.** Flujos de efectivo

Flujos de efectivo del proyecto						
Tiempo	CAPEX (dólares)	Utilidad bruta (dólares)	Costos de producción (dólares)	FEAI (dólares)	FEDI (dólares)	VPN (dólares)
0	0	0	0	0	0	0
91	0	67,538,142	14,369,817	53,168,325	10,533,713	10,533,713
183	0	66,829,281	14,218,996	52,610,285	10,325,180	20,858,893
274	0	66,127,860	14,069,757	52,058,103	10,120,776	30,979,669
365	40,000,000	65,433,801	13,922,085	51,511,716	-28,596,717	2,382,952
456	0	102,956,898	21,905,723	81,051,175	15,462,574	17,845,527
548	0	139,197,167	29,616,419	109,580,749	20,708,815	38,554,342
639	0	135,978,753	28,931,650	107,047,104	20,039,847	58,594,189
730	0	132,834,754	28,262,714	104,572,040	19,392,489	77,986,678
821	0	129,763,447	27,609,244	102,154,203	18,766,043	96,752,722
913	0	126,763,153	26,970,884	99,792,269	18,159,834	114,912,556
1,004	0	123,832,229	26,347,283	97,484,947	17,573,207	132,485,763
1,095	0	120,969,073	25,738,101	95,230,972	17,005,531	149,491,294

### 3. Presentación y análisis de resultados

#### 3.1. Análisis de casos diferentes

Las **Tablas 3.1** y **3.2** muestra las propiedades de los yacimientos mostrados a continuación:

**Tabla 3.1.** Propiedades de los yacimientos de los casos presentados

Propiedades del yacimiento y del aceite			
	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Dimensión en x (ft)	15,000	30,000	44,000
Dimensión en y (ft)	10,000	30,000	18,000
Presión inicial (psi)	3,500	3,500	3,600
Permeabilidad (md)	50	50	50
Porosidad (fracción)	0.15	0.15	0.15
Espesor del yacimiento (ft)	260	260	150
Factor de volumen del aceite	1.3698	1.3698	1.3698
Viscosidad del aceite (cP)	1.2856	1.2856	1.2856
Compresibilidad del aceite (psi <sup>-1</sup> )	0.000015	0.000015	0.000015
Pozos de producción	1	2	3

**Tabla 3.2.** Factores económicos involucrados en los casos presentados

Factores económicos			
	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Costo de perforación por pozo (dólares)	20,000,000	20,000,000	20,000,000
Precio del barril de petróleo (dólares)	52	47	50
Tasa de descuento anual	12%	12%	12%
Tasa de impuestos total	80%	80%	80%
Costo de producción por barril (dólares)	10	10	10

#### 3.1.1. Caso 1

Para este caso se tiene un pozo inicial produciendo, que se encuentra justo en el centro de un yacimiento pequeño. Se desean perforar pozos de relleno luego de un año de iniciar a producir. Sin embargo, no se conocen las coordenadas ni la cantidad de pozos a perforar. La **Tabla 3.3** muestra los parámetros del pozo productor y de los posibles pozos de relleno, los cuales producirán a la misma presión de fondo constante:

**Tabla 3.3.** Parámetros del pozo productor y de los posibles pozos de relleno (Caso 1)

Parámetros del pozo productor y de los pozos de relleno (Caso 1)						
	x (ft)	y (ft)	r <sub>w</sub> (ft)	p <sub>wf</sub> (psi)	Daño	T <sub>inicial</sub> (días)
PP <sub>1</sub>	7,500	5,000	0.25	1,500	3	0

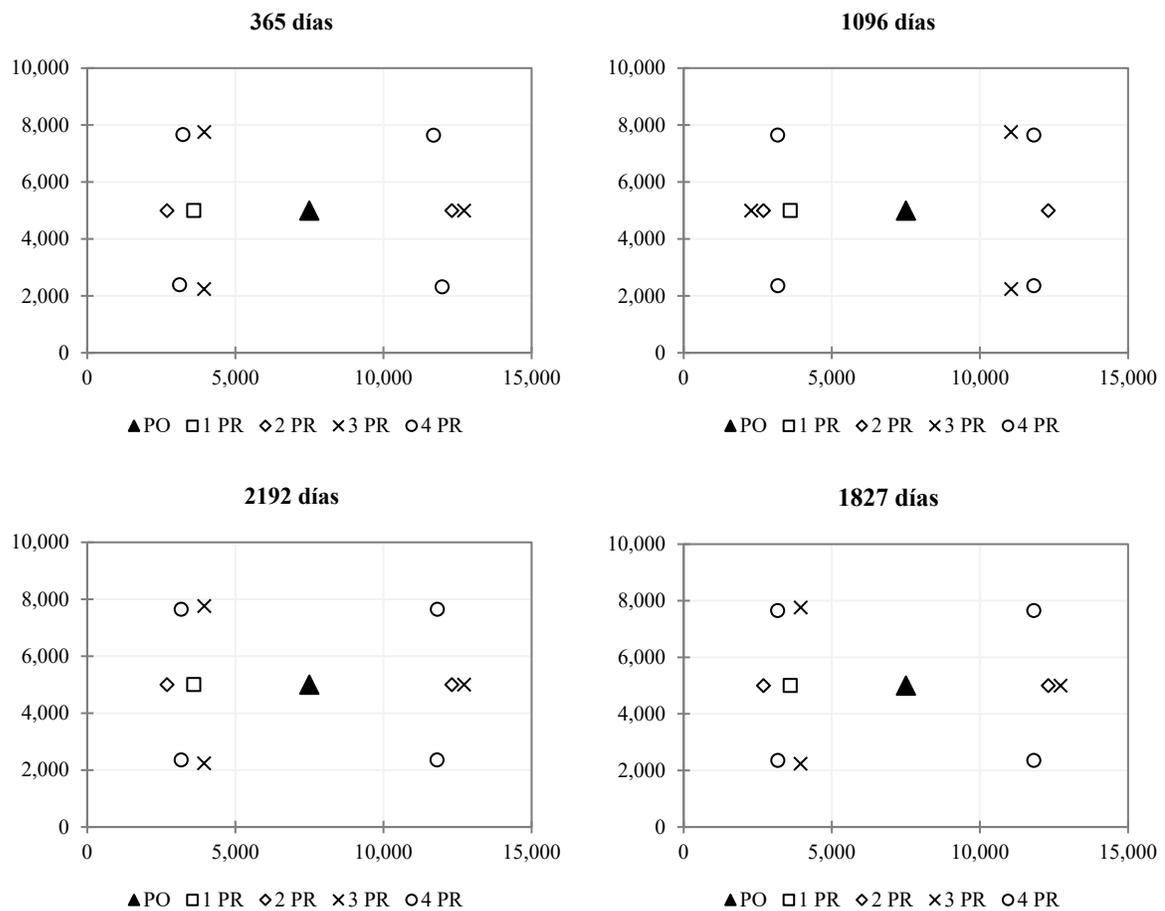
PR <sub>1</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>2</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>3</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>4</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365

Se obtuvieron las coordenadas óptimas para distintos escenarios utilizando el algoritmo propuesto; para empezar, las únicas variables optimizadas fueron las coordenadas de los pozos. Cada uno de estos escenarios se distingue por su tiempo de análisis y por la cantidad de pozos de relleno empleados en la simulación. En la **Tabla 3.4** se muestra la distribución de los pozos dentro del yacimiento en cada escenario:

**Tabla 3.4.** Distribución de los pozos de relleno dentro del yacimiento (Caso 1)

Distribución de los pozos de relleno en el yacimiento (Caso 1)									
PR totales		1 PR		2 PR		3 PR		4 PR	
Tiempo (días)		x (ft)	y (ft)						
<b>365</b>	PR <sub>1</sub>	3,599	5,000	2,692	5,000	3,949	7,760	3,121	2,389
	PR <sub>2</sub>	-	-	12,308	5,000	3,947	2,240	3,237	7,664
	PR <sub>3</sub>	-	-	-	-	12,721	5,000	11,988	2,315
	PR <sub>4</sub>	-	-	-	-	-	-	11,698	7,638
<b>1,096</b>	PR <sub>1</sub>	3,599	5,000	2,692	5,000	2,279	4,999	3,179	2,354
	PR <sub>2</sub>	-	-	12,308	5,000	11,053	2,241	3,179	7,646
	PR <sub>3</sub>	-	-	-	-	11,050	7,760	11,821	2,354
	PR <sub>4</sub>	-	-	-	-	-	-	11,821	7,647
<b>1,827</b>	PR <sub>1</sub>	3,599	5,000	2,692	5,000	3,946	2,241	3,179	2,354
	PR <sub>2</sub>	-	-	12,308	5,000	12,721	4,999	11,821	2,354
	PR <sub>3</sub>	-	-	-	-	3,949	7,760	3,179	7,646
	PR <sub>4</sub>	-	-	-	-	-	-	11,821	7,646
<b>2,192</b>	PR <sub>1</sub>	3,599	5,000	2,692	5,000	3,947	2,241	3,177	2,355
	PR <sub>2</sub>	-	-	12,308	5,000	3,949	7,760	11,816	2,350
	PR <sub>3</sub>	-	-	-	-	12,721	5,000	11,826	7,643
	PR <sub>4</sub>	-	-	-	-	-	-	3,179	7,645

En la **Figura 3.1** se muestran gráficamente las distribuciones de los pozos mostradas en la **Tabla 2.1**. Debido a que es un yacimiento homogéneo e isotrópico, el área de drene de los pozos tendrá una forma circular. Como el único pozo productor está en el centro, los pozos de relleno se sitúan formando un círculo a su alrededor. Es importante mencionar que los límites del yacimiento también influirán en la posición, pues pozos cercanos a esta frontera, tendrán áreas de drene menores; por eso, en este caso (en el que  $x_e$  es mayor que  $y_e$ ) los pozos de relleno tienden a colocarse en los flancos.



**Figura 3.1.** Coordenadas de los pozos de relleno (Caso 1).

En la Tabla 3.4 y la Figura 3.1, se observa que las coordenadas óptimas para un pozo de relleno (representado con un cuadrado), son las mismas en todos los tiempos de simulación; lo mismo ocurre en el caso en el que existe dos pozos de relleno (cada pozo se distribuye en un flanco del yacimiento en cada uno de los escenarios simulados).

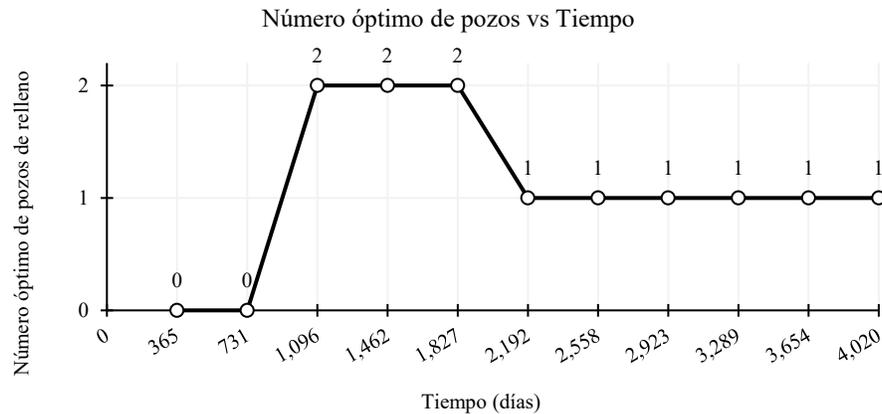
La **Tabla 3.5** muestra el resultado de cuatro simulaciones después de optimizar las coordenadas y el número de pozos.

**Tabla 3.5.** Ubicaciones y número óptimo de pozos de relleno en tiempos diferentes de análisis (Caso 1)

Ubicaciones y número óptimo de pozos de relleno al variar el tiempo de análisis (Caso 1)								
Tiempo de análisis	365 días		1096 días		1827 días		2192 días	
Número de pozos óptimos	0		2		2		1	
	x	y	x	y	x	y	x	y

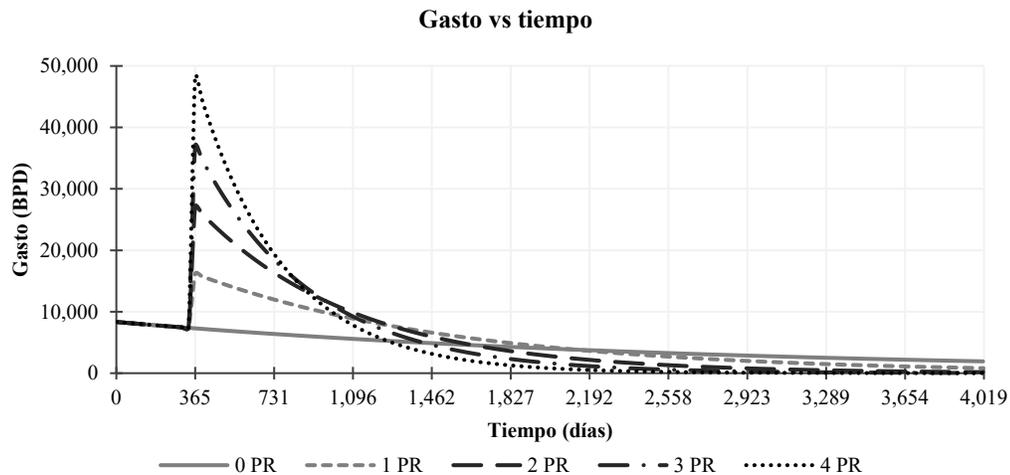
PR <sub>1</sub>	-	-	2,692	5,000	2,692	5,000	3,599	5,000
PR <sub>2</sub>	-	-	12,308	5,000	12,308	5,000	-	-
PR <sub>3</sub>	-	-	-	-	-	-	-	-
PR <sub>4</sub>	-	-	-	-	-	-	-	-

De la tabla anterior, se extrajo la **Figura 3.2**, la cual muestra que la cantidad de pozos de relleno también dependerá del tiempo de análisis.



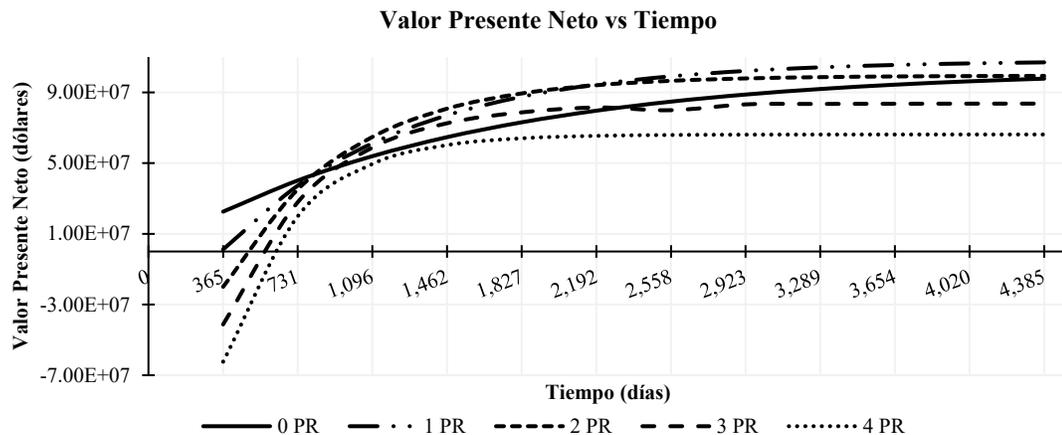
**Figura 3.2.** Variación del número óptimo de pozos de relleno con respecto al tiempo (Caso 1).

Perforar pozos de relleno requiere de un desembolso de capital, el cual tiene que recuperarse a medida que el tiempo de producción transcurre. Por eso en este caso, si el análisis solo considera los primeros dos años de producción no será factible la perforación de nuevos pozos. Por otro lado, al aumentar el periodo de análisis, la cantidad óptima de pozos de relleno aumentará hasta llegar a un pico. Luego de este pico, esta variable disminuirá debido a que la aceleración de la producción provoca un agotamiento más temprano; en la **Figura 3.3** se muestra este último efecto.



**Figura 3.3.** Gráfica del gasto total contra el tiempo (Caso 1). Este es el resultado de la suma de los gastos de todos los pozos para diferentes escenarios, en los cuales se modifica la cantidad de pozos de relleno a perforar.

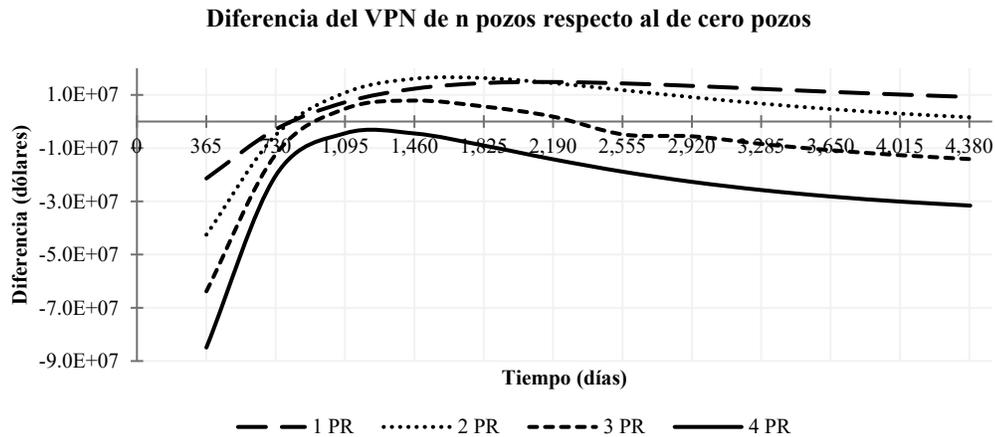
En la **Figura 3.3** se observa que llegará un momento en el que el gasto para un número de pozos determinado será menor que el gasto obtenido de una cantidad menor de pozos. Esto se debe a que la aceleración de la producción conlleva un agotamiento más temprano de la presión y las reservas del yacimiento. Las gráficas de la **Figura 3.4** muestran cómo cambia el valor presente neto con respecto al tiempo cuando se perforan diferentes números de pozos de relleno.



**Figura 3.4.** Gráfica del VPN vs Tiempo (Caso 1). Se muestran los VPN resultantes de los diferentes escenarios. La curva que representa el VPN que generan cuatro PR es la menor de todas, esto se debe a que la producción proveniente de esos pozos no es capaz de costear su perforación. También, llegará un punto en el que el VPN de 0 PR supere al VPN de un PR o dos PR.

En la **Figura 3.5** se muestra la variación del VPN a través del tiempo para distintos pozos de relleno perforados. Cada curva es el resultado de restar el VPN de cero pozos de

relleno al VPN de  $n$  pozos de relleno. Si el valor de la función es positivo, significa que perforar tal cantidad de pozos brindará beneficios económicos; además, la curva que represente a la solución óptima siempre tendrá el valor más alto para el tiempo en cuestión.



**Figura 3.5.** Variación del VPN de  $n$  pozos con respecto al valor de cero pozos (Caso 1). Esta gráfica muestra la diferencia que existe entre perforar cierta cantidad de pozos y no perforarlos, es el resultado de la resta del  $VPN(n \text{ pozos}) - VPN(0 \text{ pozos})$ . Si la curva se encuentra en el cuadrante negativo, no se deben perforar pozos de relleno; por el contrario, si se encuentra en el positivo, la perforación de pozos generará beneficios económicos.

Para llegar a estos resultados se supuso que todos los pozos del yacimiento produjeron a la misma presión de fondo constante, y que no se presentaron estimulaciones en los pozos durante todo el periodo de análisis, por lo que su daño se mantuvo constante.

### 3.1.2. Caso 2

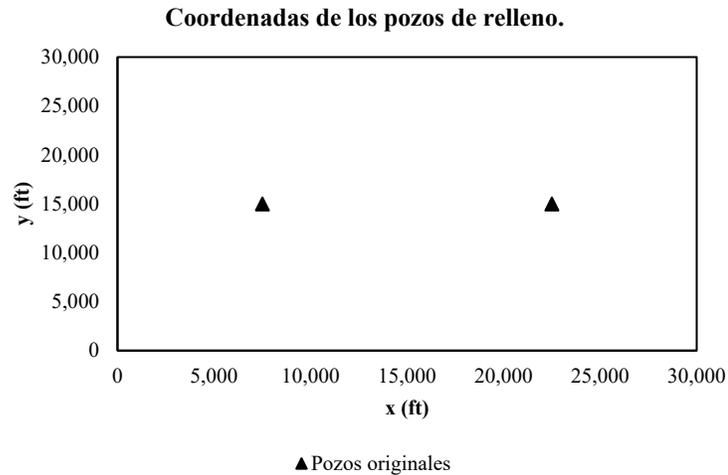
Se tiene un yacimiento con dos pozos produciendo en el centro, la **Figura 3.6** muestra el arreglo inicial de estos. En la **Tabla 3.6**, se observan las propiedades de los pozos originales y de los posibles pozos de relleno:

**Tabla 3.6.** Propiedades de los pozos originales y de los posibles pozos de relleno (Caso 2).

Propiedades de los pozos originales y de los posibles pozos de relleno (Caso 2)						
	x (ft)	y (ft)	$r_w$ (ft)	$p_{wf}$ (psi)	Daño	$T_{inicial}$ (días)
PP <sub>1</sub>	7,500	15,000	0.25	1,500	3	0
PP <sub>2</sub>	22,500	15,000	0.25	1,500	3	0
PR <sub>1</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>2</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>3</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>4</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365

PR <sub>5</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>6</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>7</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365
PR <sub>8</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365

Se supone que todos los pozos del yacimiento producirán a la misma presión de fondo constante y que su daño también se mantendrá constante durante todo el periodo de estudio.



**Figura 3.6.** Arreglo inicial de pozos (Caso 2)

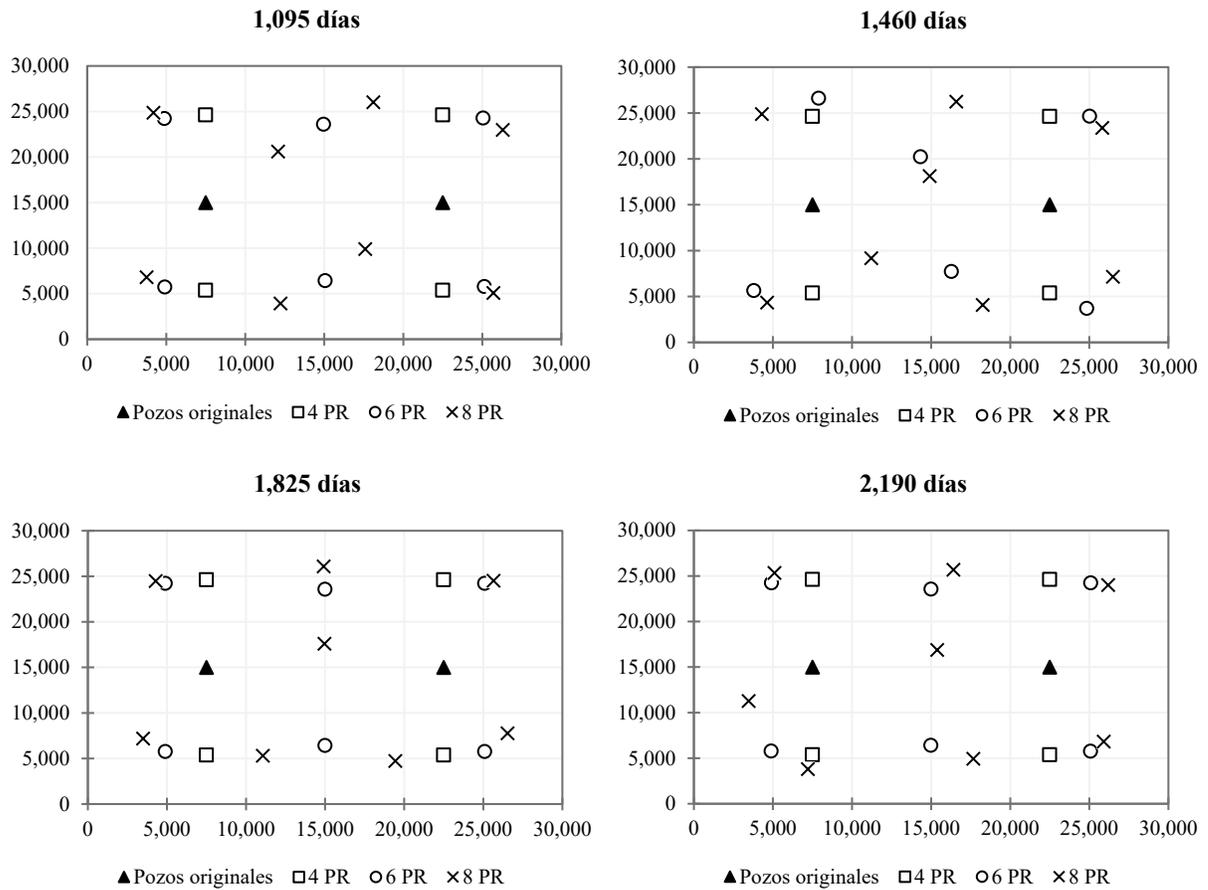
Se utilizó el algoritmo propuesto en esta tesis para obtener las coordenadas óptimas de los pozos de relleno para los escenarios que se muestran en la **Tabla 3.7**. Es importante mencionar que no se optimizó el número de pozos de relleno:

**Tabla 3.7.** Coordenadas óptimas para tiempos de análisis y cantidad de pozos de relleno diferentes (Caso 2)

Coordenadas óptimas para diferentes tiempos de análisis y cantidad de pozos de relleno							
PR totales		4		6		8	
Tiempo (días)		x(ft)	y(ft)	x(ft)	y(ft)	x(ft)	y(ft)
<b>1,095</b>	PR <sub>1</sub>	7,500	5,379	4,919	5,734	3,763	6,821
	PR <sub>2</sub>	22,500	24,622	15,063	6,429	4,196	24,864
	PR <sub>3</sub>	22,500	5,380	14,967	23,597	12,234	3,927
	PR <sub>4</sub>	7,500	24,622	25,136	5,785	17,591	9,900
	PR <sub>5</sub>	-	-	4,884	24,217	12,082	20,613
	PR <sub>6</sub>	-	-	25,057	24,272	18,109	26,024
	PR <sub>7</sub>	-	-	-	-	26,293	22,977
	PR <sub>8</sub>	-	-	-	-	25,706	5,091
<b>1,460</b>	PR <sub>1</sub>	7,500	5,377	3,789	5,636	4,632	4,333
	PR <sub>2</sub>	7,499	24,622	16,285	7,709	18,254	4,069
	PR <sub>3</sub>	22,501	5,380	14,334	20,209	11,208	9,171

	PR <sub>4</sub>	22,499	24,623	24,842	3,697	14,910	18,111
	PR <sub>5</sub>	-	-	25,024	24,639	16,590	26,240
	PR <sub>6</sub>	-	-	7,889	26,587	4,298	24,870
	PR <sub>7</sub>	-	-	-	-	25,815	23,378
	PR <sub>8</sub>	-	-	-	-	26,493	7,143
<b>1,825</b>	PR <sub>1</sub>	7,500	5,379	4,903	5,761	3,493	7,189
	PR <sub>2</sub>	7,500	24,622	15,000	6,427	11,062	5,311
	PR <sub>3</sub>	22,500	5,379	25,096	5,761	14,962	17,609
	PR <sub>4</sub>	22,500	24,622	15,000	23,572	19,436	4,727
	PR <sub>5</sub>	-	-	4,901	24,225	14,908	26,092
	PR <sub>6</sub>	-	-	25,099	24,226	4,294	24,478
	PR <sub>7</sub>	-	-	-	-	25,649	24,521
	PR <sub>8</sub>	-	-	-	-	26,536	7,776
<b>2,190</b>	PR <sub>1</sub>	7,500	5,379	4,894	5,781	7,204	3,814
	PR <sub>2</sub>	7,500	24,622	14,987	6,413	3,463	11,277
	PR <sub>3</sub>	22,500	5,379	25,088	5,758	17,660	4,942
	PR <sub>4</sub>	22,500	24,622	14,994	23,555	15,382	16,877
	PR <sub>5</sub>	-	-	4,908	24,244	16,403	25,694
	PR <sub>6</sub>	-	-	25,090	24,235	5,090	25,340
	PR <sub>7</sub>	-	-	-	-	26,190	24,017
	PR <sub>8</sub>	-	-	-	-	25,913	6,831

Las coordenadas mostradas en la tabla anterior se muestran en la **Figura 3.7**.



**Figura 3.7.** Coordenadas de los pozos de relleno (Caso 2). La ubicación óptima de los pozos puede variar con respecto al tiempo. Debido a que la cantidad de posibles soluciones incrementa a medida que aumenta el número de pozos de relleno simulados, es posible que exista más de una solución óptima.

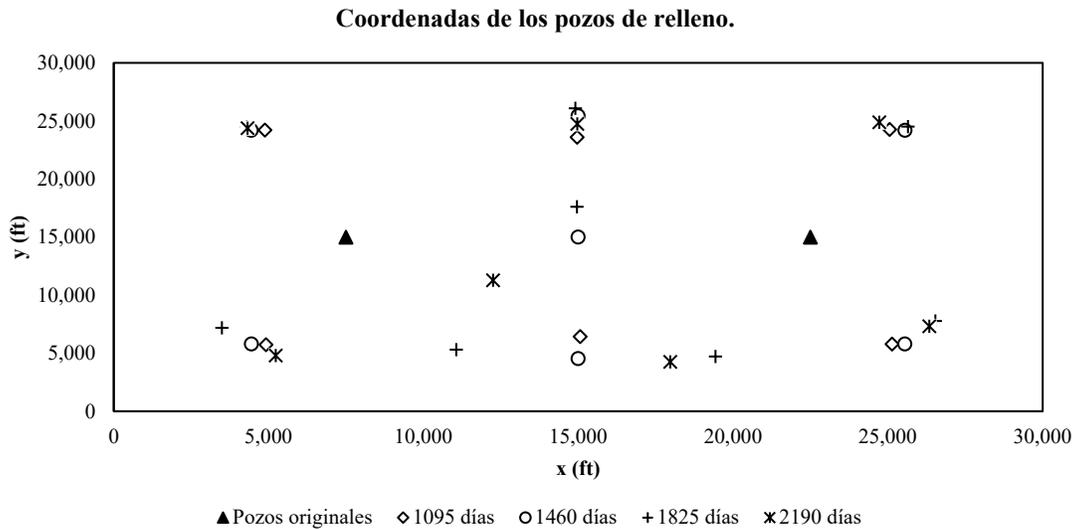
Se usó el algoritmo cambiando el tiempo total de producción y optimizando las coordenadas de los pozos y su número. La **Tabla 3.8** muestra algunos de los resultados de estas optimizaciones:

**Tabla 3.8.** Coordenadas y número óptimo de pozos de relleno para diferentes tiempos (Caso 2)

Tiempo de análisis	1,095 días		1,460 días		1,825 días		2,190 días	
Pozos óptimos	6		7		8		7	
	x(ft)	y(ft)	x(ft)	y(ft)	x(ft)	y(ft)	x(ft)	y(ft)
PR <sub>1</sub>	4,919	5,734	4,448	5,797	3,493	7,189	5,232	4,810
PR <sub>2</sub>	15,063	6,429	15,000	4,532	11,062	5,311	12,248	11,286
PR <sub>3</sub>	14,967	23,597	15,000	14,992	14,962	17,609	26,340	7,320
PR <sub>4</sub>	25,136	5,785	25,552	5,796	19,436	4,727	17,973	4,259
PR <sub>5</sub>	4,884	24,217	15,000	25,437	14,908	26,092	14,970	24,745
PR <sub>6</sub>	25,057	24,272	4,444	24,193	4,294	24,478	4,322	24,379

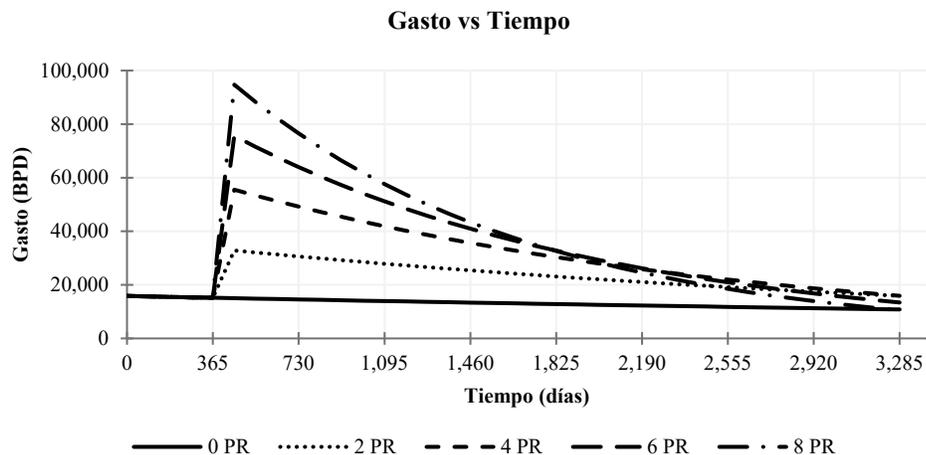
PR <sub>7</sub>	-	-	25,556	24,193	25,649	24,521	24,727	24,893
PR <sub>8</sub>	-	-	-	-	26,536	7,776	-	-

En la **Figura 3.8** se muestran las coordenadas presentadas en la tabla anterior:



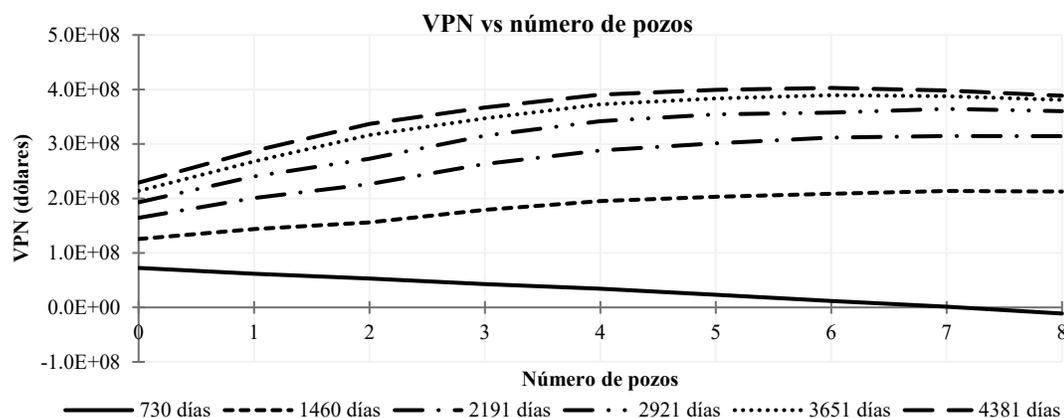
**Figura 3.8.** Coordenadas óptimas de los pozos de relleno (Caso 2). Los triángulos representan a los pozos originales, al ser un yacimiento homogéneo, los pozos tienden a distribuirse de una manera uniforme por todo el yacimiento.

La **Figura 3.9** muestra el incremento en la producción de aceite en función de la perforación de pozos de relleno:



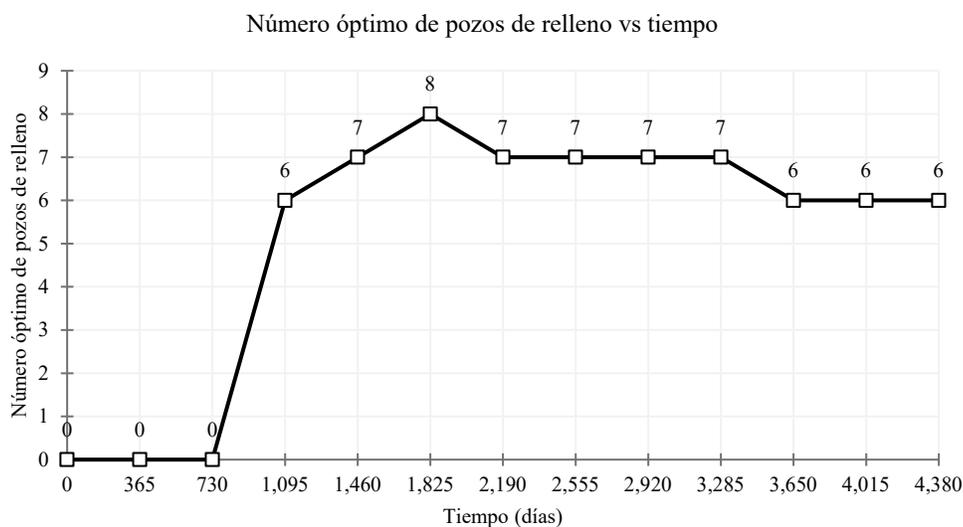
**Figura 3.9.** Gasto contra tiempo (Caso 2). Se observa la influencia que tiene la perforación de pozos de relleno en la producción. A mayor cantidad de pozos de relleno, mayor producción inmediata, con el consecuente agotamiento temprano del yacimiento.

Como es un yacimiento grande, admite un mayor número de pozos de relleno; en la **Figura 3.10** se muestra el VPN contra el número de pozos en diferentes tiempos.



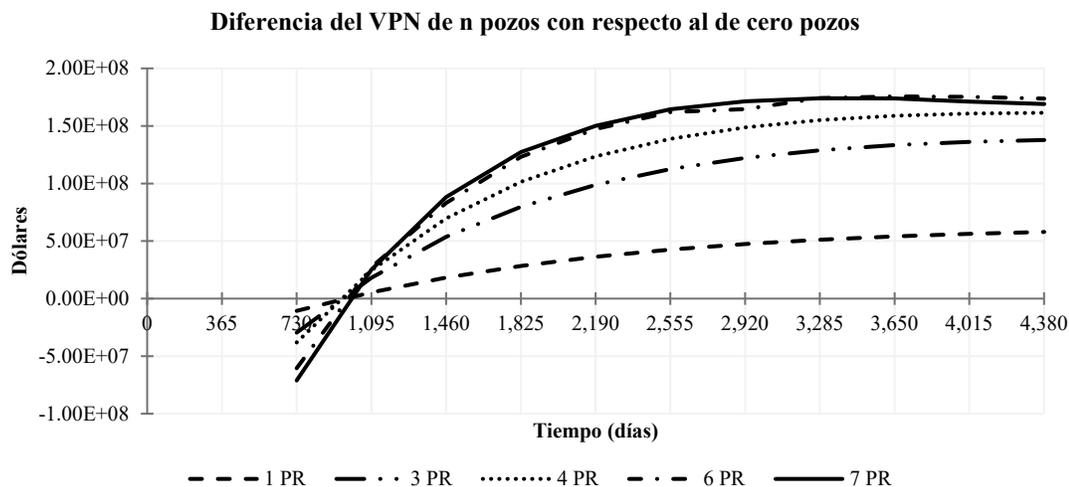
**Figura 3.10.** Valor presente neto vs número de pozos (Caso 2). Se muestra el impacto de la cantidad de los pozos de relleno en el VPN en distintos tiempos; el número óptimo de pozos corresponderá al punto más alto de cada una de estas curvas.

El número óptimo de pozos de relleno cambia durante el tiempo de análisis, esto se presenta en la **Figura 3.11**; también se muestra que el número máximo de pozos de relleno que pueden perforarse es de ocho. Sin embargo, es más viable perforar seis o siete pozos de relleno, porque el rango de tiempos de análisis en los que estos números son óptimos es mucho mayor.



**Figura 3.11.** Número óptimo de pozos vs tiempo (Caso 2). Dependiendo del tiempo de análisis, la cantidad de pozos cambiará. Al comienzo no será factible debido a la inversión que implica perforarlos; pero, a medida que transcurre el tiempo, los pozos serán capaces de costearse; sin embargo, en tiempos largos, la cantidad óptima de pozos de disminuirá debido a que también aceleran la declinación de la producción.

La **Figura 3.12** muestra la diferencia entre no perforar pozos de relleno y perforar algunos. Las características de este yacimiento propician que el número óptimo de pozos de relleno oscile entre seis y ocho. Sin embargo, al analizar el VPN para diferentes números de pozos de relleno, se observa que las respuestas para seis y siete pozos son prácticamente iguales, por lo que es mejor perforar seis.



**Figura 3.12.** Variación del VPN de n pozos con respecto al de cero pozos (Caso 2). Los escenarios en los que se presenten valores positivos tendrán beneficios económicos. Las curvas para las diferentes cantidades de pozos de relleno comenzarán con valores negativos, pues se tienen que considerar los costos de perforación.

### 3.1.3. Caso 3

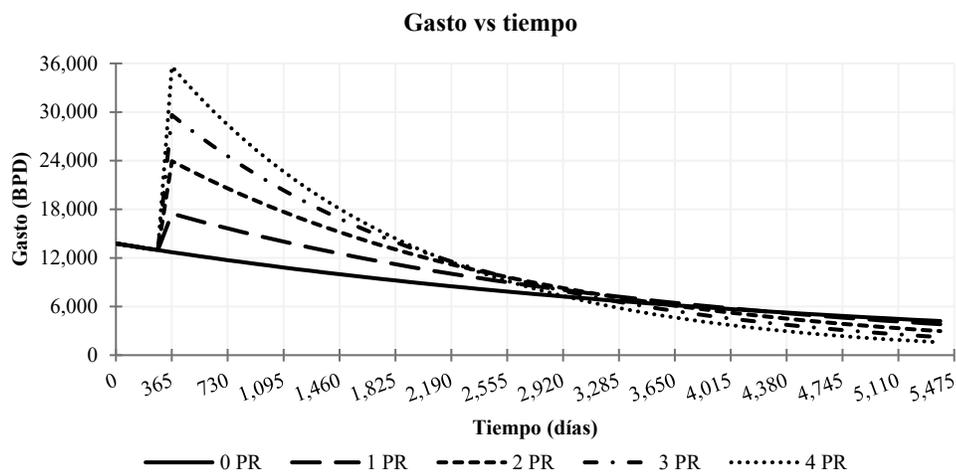
Este yacimiento, inicialmente tiene tres pozos produciendo. Se requieren perforar pozos de relleno al cabo de un año. Para simplificar el análisis, se considerará que los pozos producirán a la misma presión de fondo constante y que su daño se mantendrá fijo. La **Tabla 3.9** muestra las características de todos los pozos:

**Tabla 3.9.** Características de los pozos originales y de relleno (Caso 3).

Características de los pozos originales y de relleno (Caso 3)						
	x (ft)	y (ft)	$r_w$ (ft)	$p_{wf}$ (psi)	Daño	$T_{inicial}$ (días)
PP <sub>1</sub>	11,000	9,000	0.25	1,800	3	0
PP <sub>2</sub>	22,000	9,000	0.25	1,800	3	0
PP <sub>3</sub>	33,000	9,000	0.25	1,800	3	0
PR <sub>1</sub>	4,695	12,222	0.25	1,800	0	365
PR <sub>2</sub>	17,832	3,408	0.25	1,800	0	365
PR <sub>3</sub>	6,086	2,616	0.25	1,800	0	365
PR <sub>4</sub>	11,452	14,024	0.25	1,800	0	365

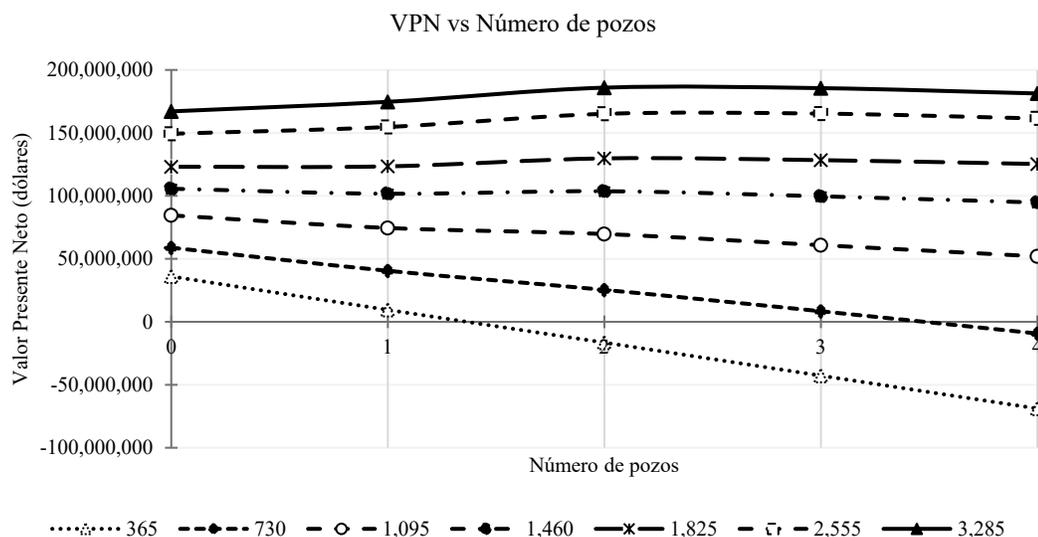
PR <sub>5</sub>	35,386	14,439	0.25	1,800	0	365
PR <sub>6</sub>	22,842	15,271	0.25	1,800	0	365
PR <sub>7</sub>	40,617	8,494	0.25	1,800	0	365
PR <sub>8</sub>	29,924	2,850	0.25	1,800	0	365

La **Figura 3.13** muestra la producción del yacimiento durante el tiempo de análisis. Todos los pozos de relleno iniciarán a producir en el día 365, por eso, el incremento en la producción se observa inmediatamente después de esta fecha, el cuál será mayor a medida que se tengan más pozos de relleno; sin embargo, la declinación de la producción también será más acentuada.



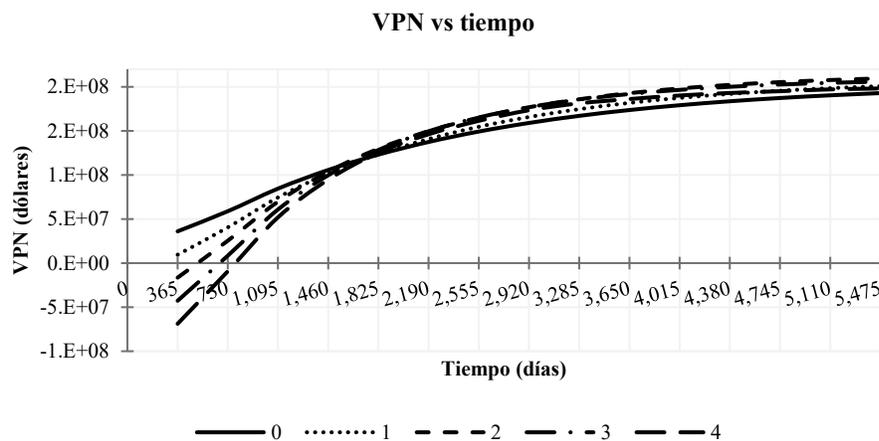
**Figura 3.13.** Gasto vs tiempo (Caso 3). Se muestra el cambio en la producción generado por la perforación de pozos de relleno.

La **Figura 3.14** muestra el VPN contra el número de pozos de relleno para diferentes tiempos. Las curvas son diferentes y cada una tendrá un número óptimo de pozos de relleno. Como es de esperarse, aquellas curvas con tiempos de producción altos tendrán VPN mayores que las que tengan tiempos de producción menores.



**Figura 3.14.** VPN vs número de pozos (Caso 3). Como los pozos se perforan a los 365 días de haber iniciado la producción, la curva que representa a este tiempo es una recta con una pendiente igual al costo de los pozos de relleno. A tiempos de producción mayores, se observa que los pozos ya son capaces de cubrir sus costos y ya pueden generar beneficios económicos significativos.

La **Figura 3.15** muestra el cambio en el VPN durante el tiempo de producción para diferentes cantidades de pozos de relleno.



**Figura 3.15.** Valor presente neto vs tiempo (Caso 3). El VPN de todas las curvas se elevará conforme avance el tiempo. Por lo tanto, los incrementos a tiempos más largos serán menores que los que ocurran en tiempos cortos.

En la **Figura 3.16** se muestran las coordenadas de los pozos de relleno en los diferentes escenarios simulados:

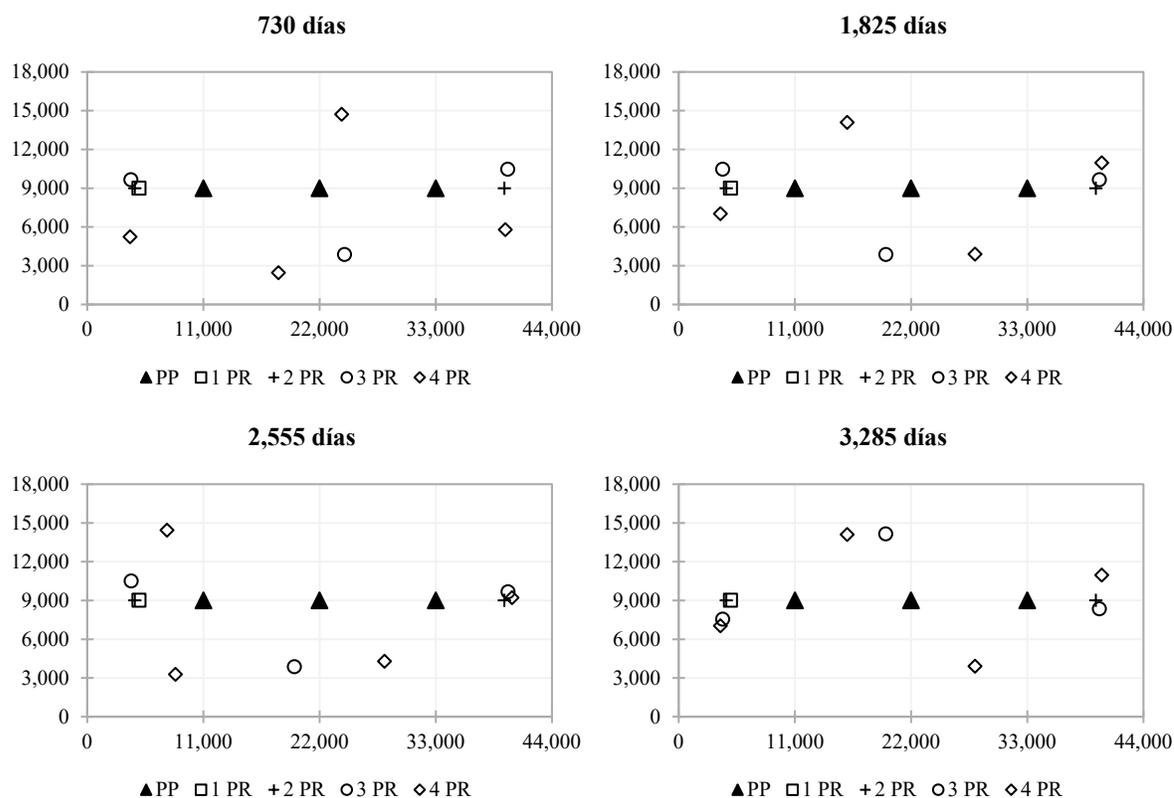


Figura 3.16. Coordenadas de los pozos de relleno en diferentes escenarios (Caso 3)

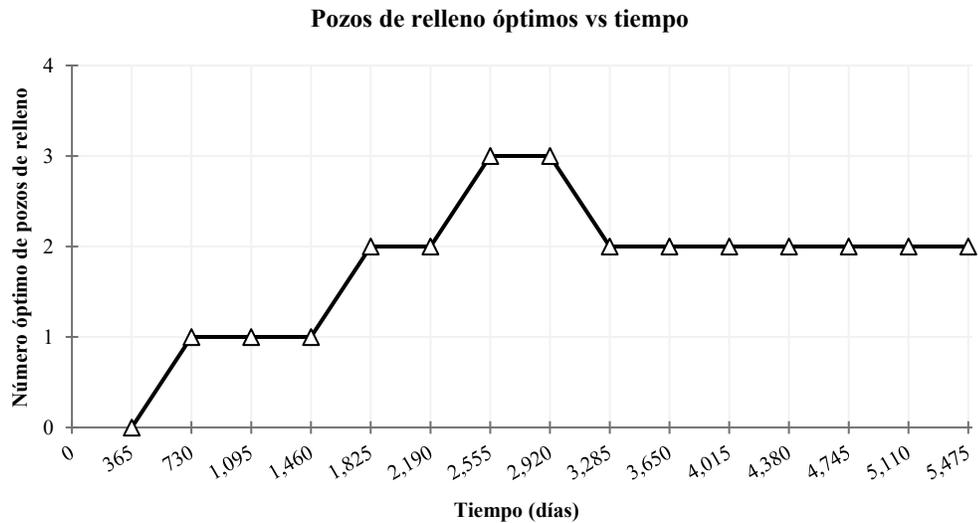
La **Tabla 3.10** muestra las coordenadas de los pozos incluidos en la **Figura 3.16**:

**Tabla 3.10.** Coordenadas óptimas para diferentes tiempos y cantidades de pozos de relleno (Caso 3)

Coordenadas óptimas para diferentes tiempos de análisis y cantidades de pozos de relleno (Caso 3)									
		1 PR		2 PR		3 PR		4 PR	
		x (ft)	y (ft)						
730	1	4,911	9,000	4,504	9,000	4,154	9,656	4,061	5,250
	2	-	-	39,495	9,000	24,370	3,860	18,106	2,467
	3	-	-	-	-	39,826	10,464	24,085	14,732
	4	-	-	-	-	-	-	39,587	5,800
1,825	1	4,911	9,000	4,504	9,000	4,174	10,464	3,948	7,034
	2	-	-	39,495	9,000	19,629	3,861	28,048	3,903
	3	-	-	-	-	39,845	9,655	15,952	14,098
	4	-	-	-	-	-	-	40,053	10,966
2,555	1	4,911	9,000	4,504	9,000	4,174	10,463	28,140	4,283
	2	-	-	39,495	9,000	19,629	3,860	8,356	3,281
	3	-	-	-	-	39,845	9,656	7,551	14,431
	4	-	-	-	-	-	-	40,223	9,211

3,285	1	4,911	9,000	4,504	9,000	4,174	7,534	28,048	3,902
	2	-	-	39,495	9,000	19,619	14,138	3,947	7,034
	3	-	-	-	-	39,846	8,346	15,952	14,098
	4	-	-	-	-	-	-	40,052	10,966

La **Figura 3.17** incluye el número óptimo de pozos de relleno contra el tiempo.



**Figura 3.17.** Número óptimo de pozos de relleno vs tiempo. La curva comienza en cero, sube a un punto máximo y luego declina; este comportamiento será el mismo para todos los casos en los que se utilice un modelo de yacimiento con estas características.

## **3.2. Análisis de las propiedades que influyen en el VPN**

En este apartado se muestra el efecto que tienen las propiedades del pozo y del yacimiento en la producción de hidrocarburos. Esta información puede ser útil en aquellos casos en los que se desee mejorar el flujo de fluidos desde el yacimiento hasta el pozo, mediante diversas operaciones.

### **3.2.1. Efecto de los parámetros del pozo**

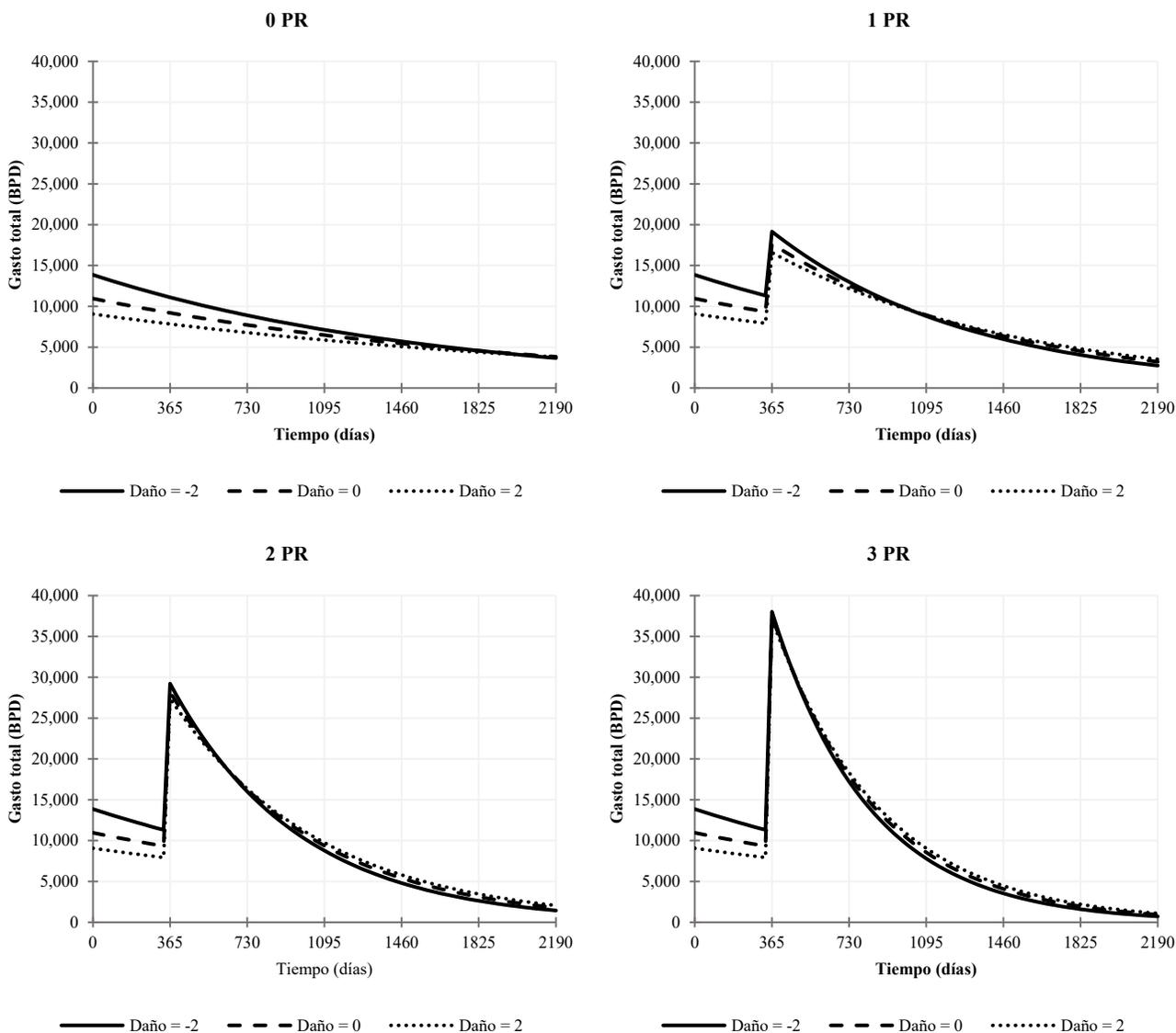
#### ***3.2.1.1. Efecto del radio del pozo***

El radio del pozo influirá directamente en la producción: radios grandes provocarán mayores gastos y declinaciones más abruptas en la producción.

#### ***3.2.1.2. Efecto del daño***

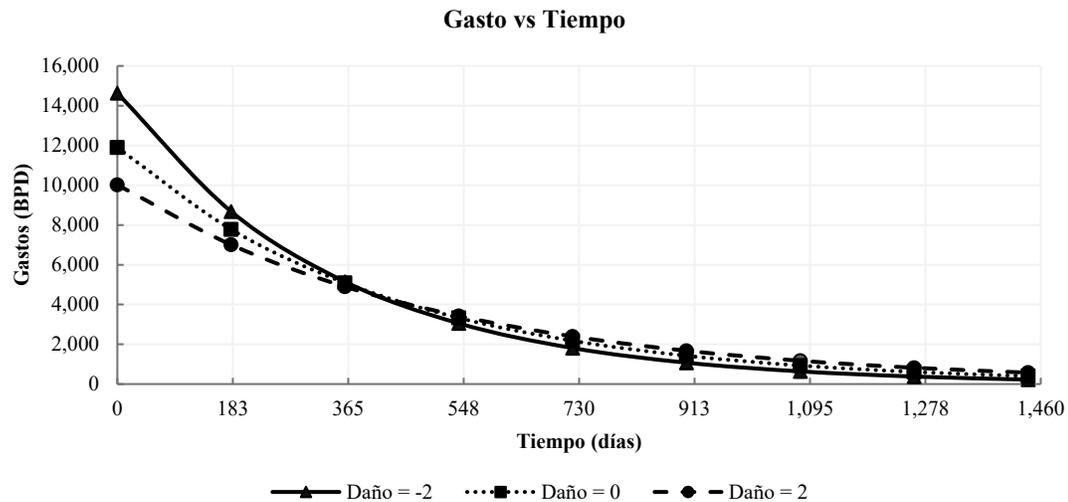
El daño se definió en la sección 1.1.2, el cual alterará el comportamiento de los pozos originales y de relleno. Si los primeros pozos están estimulados, la producción inicial de los pozos de relleno será menor, pues habrá menos volumen recuperable de hidrocarburos en el yacimiento.

El número de pozos de relleno a perforar también dependerá del daño, los yacimientos que presenten pozos dañados tenderán a necesitar más pozos de relleno. Este factor se puede modificar por medio de reparaciones, que mejorarán el flujo, permitiendo aprovechar mejor la energía del yacimiento. En la **Figura 3.18** se muestra el efecto del daño en la producción.



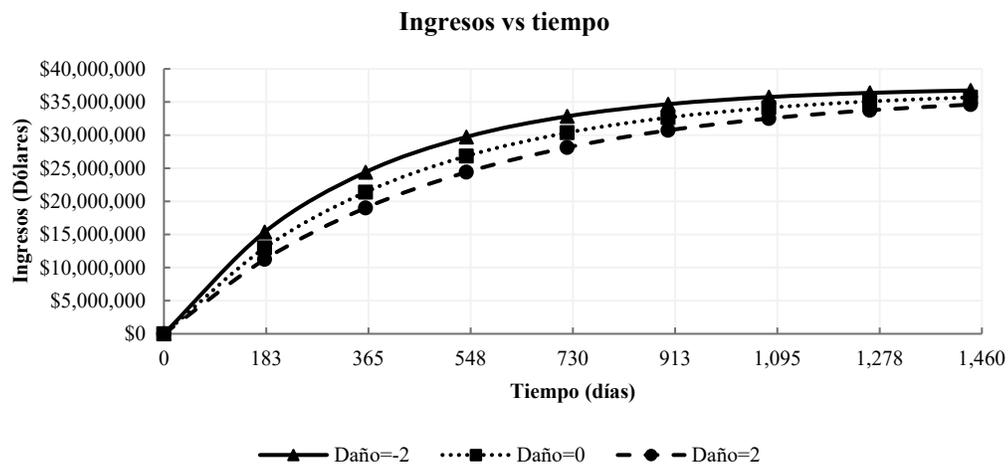
**Figura 3.18.** Efecto del daño en la producción. En este caso, se tiene un solo pozo original, si el pozo (o pozos) originales tiene daño, el gasto total de los pozos de relleno será diferente. La producción inicial de los pozos de relleno fue menor en los escenarios en los que el pozo original estaba estimulado, debido a que drena más aceite que en los casos en los que estaba dañado.

Al existir daño, las condiciones de flujo en las vecindades del pozo disminuyen, modificando la producción. Lo cual se ilustra en la **Figura 3.19**.



**Figura 3.19.** Efecto del daño en la producción de aceite. En esta simulación no se perforaron pozos de relleno, el gasto generado por el pozo dañado es considerablemente menor que el que proviene del pozo sin daño, y este a su vez, es menor que el proveniente del pozo estimulado.

En la **Figura 3.20** se muestra el efecto que tiene el daño en los ingresos. Como es de esperarse, el pozo que se encuentra estimulado genera mayores ganancias, debido a que su producción no está restringida. Es importante mencionar que incluir el costo de las estimulaciones no está dentro de los alcances de este trabajo; sin embargo, si es necesario es posible añadir esta variable en el algoritmo.

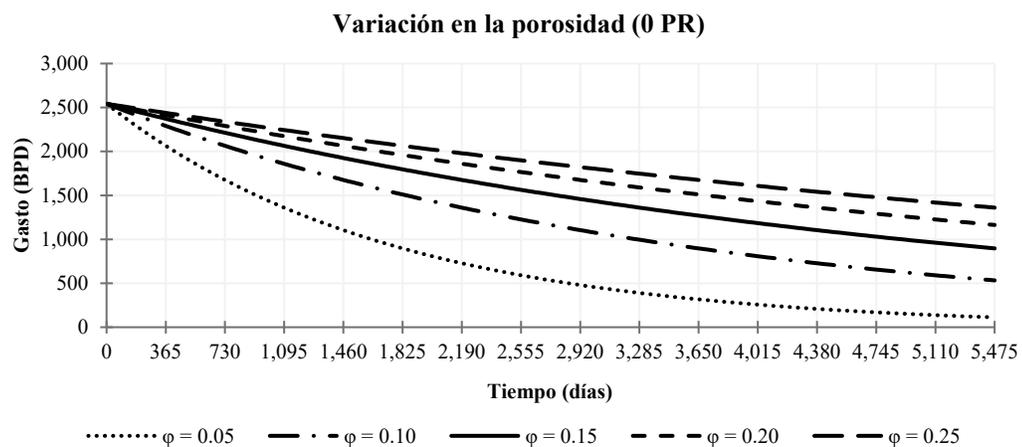


**Figura 3.20.** Efecto del daño en los ingresos. Un pozo dañado brindará menos beneficios económicos.

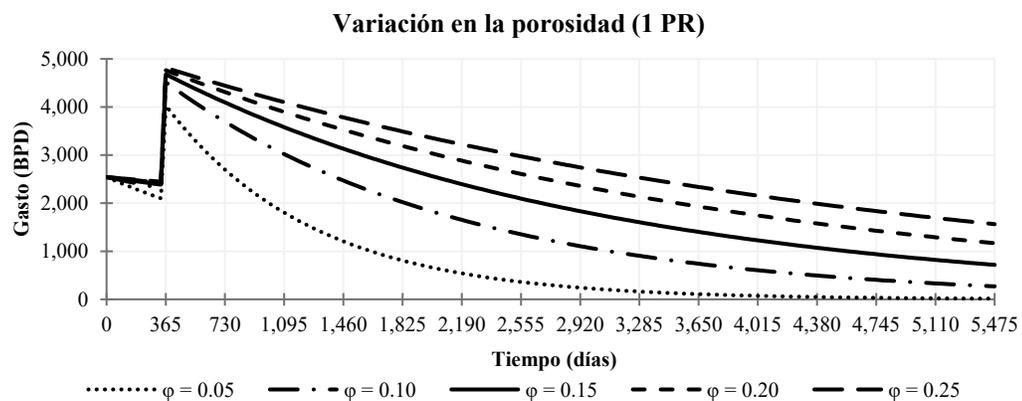
### 3.2.2. Efecto de los parámetros del yacimiento

#### 3.2.2.1. Porosidad

Se realizaron múltiples simulaciones para observar la influencia de la porosidad en la producción empleando el modelo presentado en la sección 2.1; algunos de los resultados se muestran en las **Figuras 3.21 y 3.22**. Se considera que el valor del gasto inicial de todos los pozos es el mismo para todas las porosidades evaluadas; también, la transmisibilidad del yacimiento será la misma. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo de producción, es evidente que aquellos casos en los que las porosidades son menores presentan declinaciones más abruptas. Esto último ocurre debido a que el volumen de fluidos almacenados en el yacimiento es directamente proporcional al valor de la porosidad.



**Figura 3.21.** Variación de la producción con respecto a la porosidad (0 PR). La declinación de las curvas que representan a los casos con porosidades bajas es más abrupta que sus contrapartes.



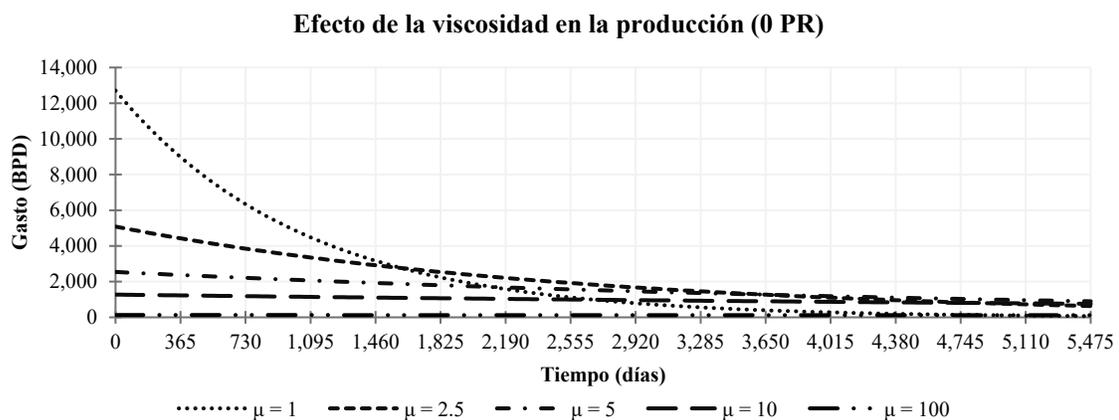
**Figura 3.22.** Variación de la producción con respecto a la porosidad (1 PR). La perforación de pozos está pensada para realizarse a los 365 días de haber comenzado la producción. Al adicionar un pozo de relleno, el agotamiento de la producción ocurrirá antes que en la gráfica anterior.

Mientras mayor sea la porosidad, el tiempo necesario para agotar el yacimiento será mayor, pues porosidades altas permiten a la roca almacenar más hidrocarburos. Además, será más viable perforar pozos de relleno.

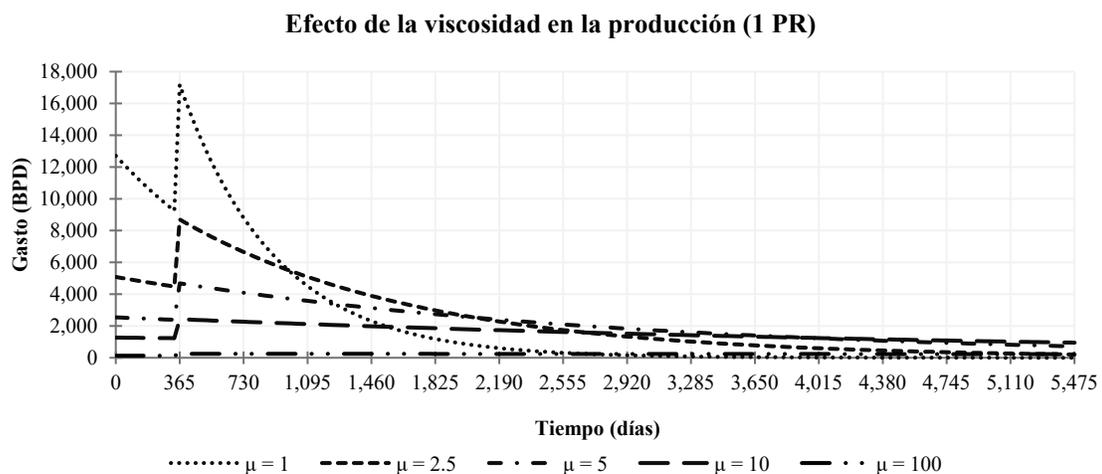
### 3.2.2.2. Viscosidad

A mayor viscosidad, el aceite tendrá mayor resistencia a fluir. La producción será inversamente proporcional a la viscosidad del fluido.

Yacimientos con viscosidades altas tenderán a agotarse en un tiempo mayor; además se requerirá un número mayor de pozos de relleno. En las Figuras 3.23 y 3.24 se muestra el efecto de la viscosidad en la producción de aceite.



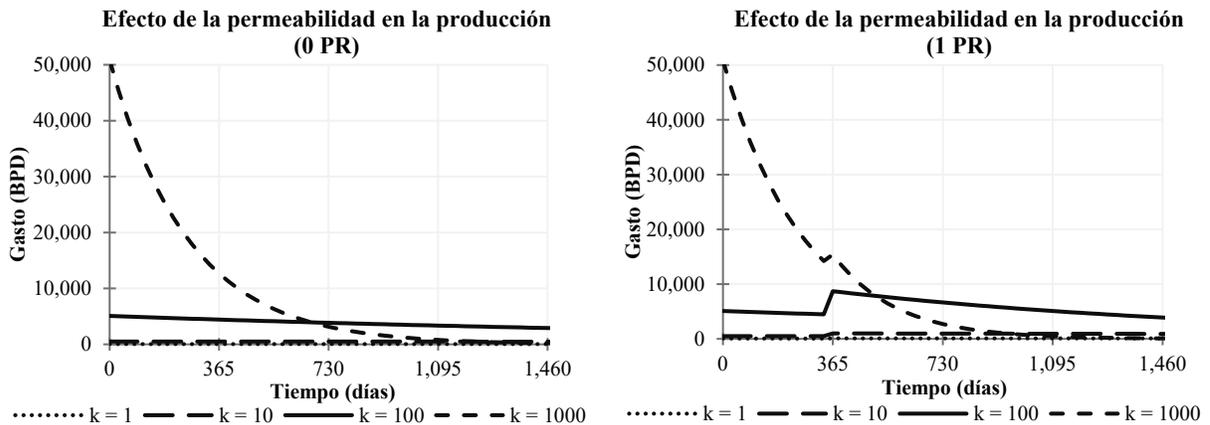
**Figura 3.23.** Efecto de la viscosidad en la producción (0 PR).



**Figura 3.24.** Efecto de la viscosidad en la producción (1 PR)

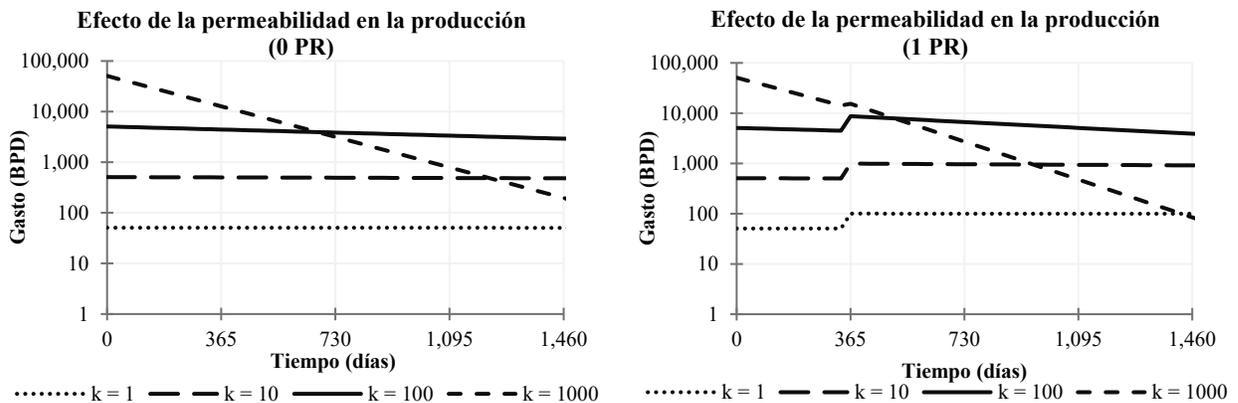
### 3.2.2.3. Permeabilidad

Mientras más alta sea la permeabilidad, la producción de los pozos mejorará, sin embargo, la declinación de la producción será muy abrupta y las reservas se agotarán rápidamente. Por el contrario, permeabilidades bajas brindan producciones bajas y declinaciones con pendientes suaves. Los yacimientos con permeabilidades bajas son buenos candidatos para perforar pozos de relleno. En la **Figura 3.25** se muestra el cambio en la producción de los pozos debido a diferentes permeabilidades.



**Figura 3.25.** Efecto de la permeabilidad en la producción (0 y 1 PR). Existe una gran diferencia entre los gastos para permeabilidades altas y bajas. El gasto de los pozos es proporcional a la permeabilidad de la roca. En las curvas de la gráfica correspondiente a 1 PR se observan escalones a los 365 días, estos son resultado del incremento de la producción ocasionado por los pozos de relleno.

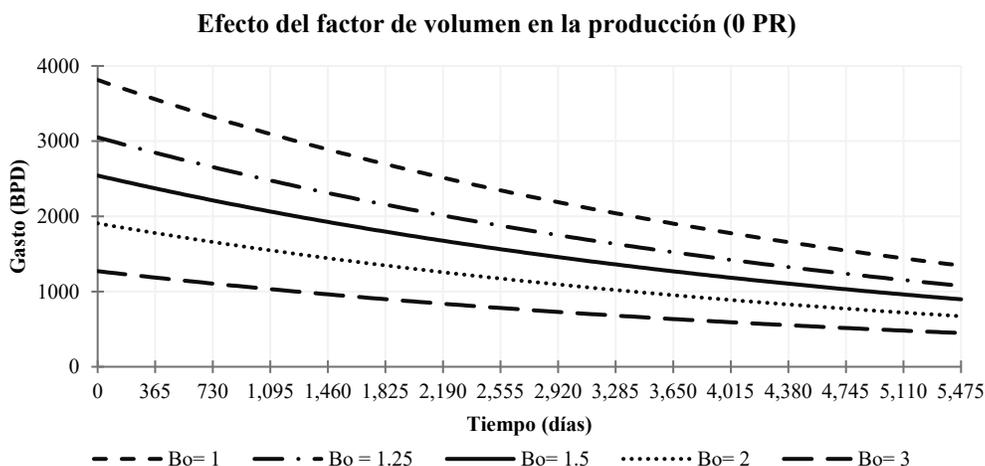
La producción de los pozos es proporcional a la permeabilidad y al igual que la viscosidad, el rango de valores que puede tener es muy amplio. El efecto de la variación de la permeabilidad de la formación en la producción puede ser más fácil de observar en una gráfica semilogarítmica, como se muestra en la **Figura 3.26**.



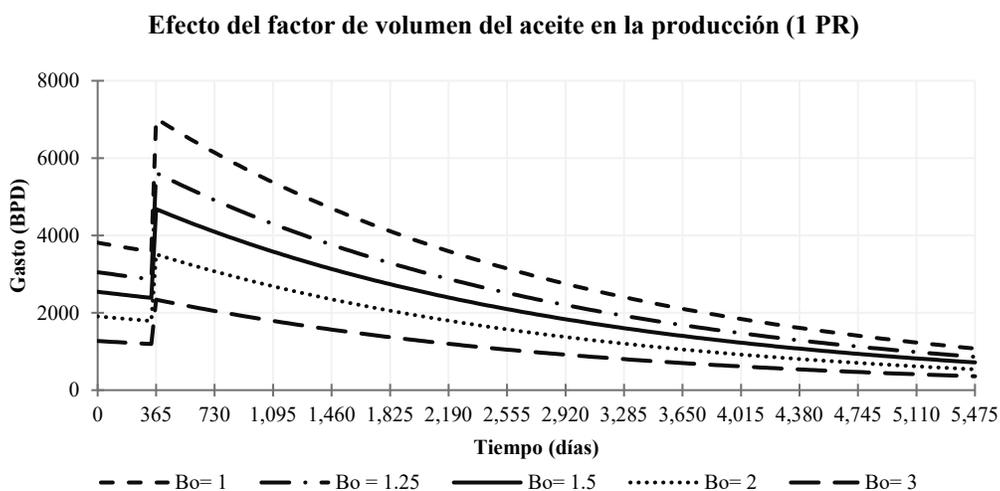
**Figura 3.26.** Efecto de la permeabilidad en la producción (0 y 1 PR). Las gráficas semilogarítmicas permiten observar mejor la magnitud del impacto de la permeabilidad en la producción.

### 3.2.2.4. Factor de volumen del aceite

El factor de volumen del aceite ( $B_o$ ) es un parámetro que influirá en el volumen de hidrocarburos que contiene el yacimiento. Mientras más alto sea este valor, el volumen de aceite será menor, como se puede observar en las **Figuras 3.27** y **3.28**.



**Figura 3.27.** Efecto del factor de volumen del aceite en la producción (0 PR).

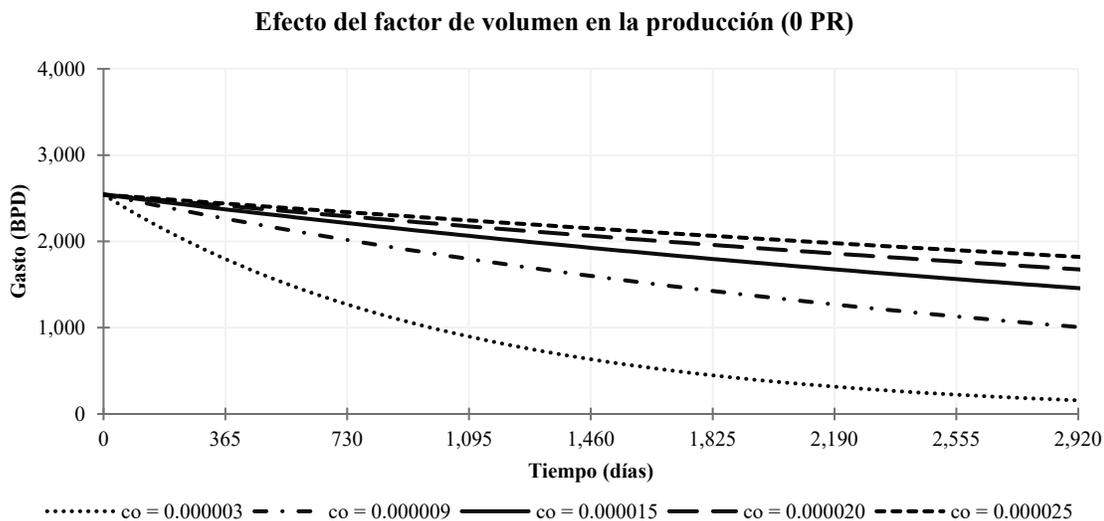


**Figura 3.28.** Efecto del factor de volumen del aceite en la producción (1 PR).

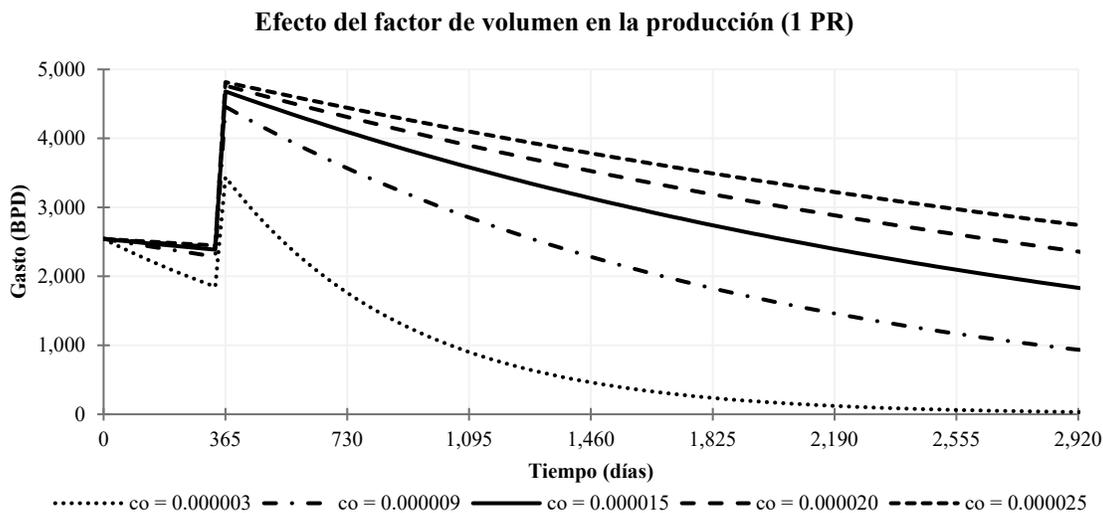
Es importante mencionar que los aceites ligeros tienen factores de volumen altos (y estos fluyen mejor que los pesados); sin embargo, el gasto decreció debido a que se tiene un yacimiento volumétrico y el volumen que contiene es inversamente proporcional al factor de volumen  $B_o$ .

### 3.2.2.5. Compresibilidad del aceite

En la **Figura 3.29** se muestra el efecto de la compresibilidad del aceite en la producción, se observa que la declinación del aceite es mayor en aquellos casos que presentan compresibilidades bajas.



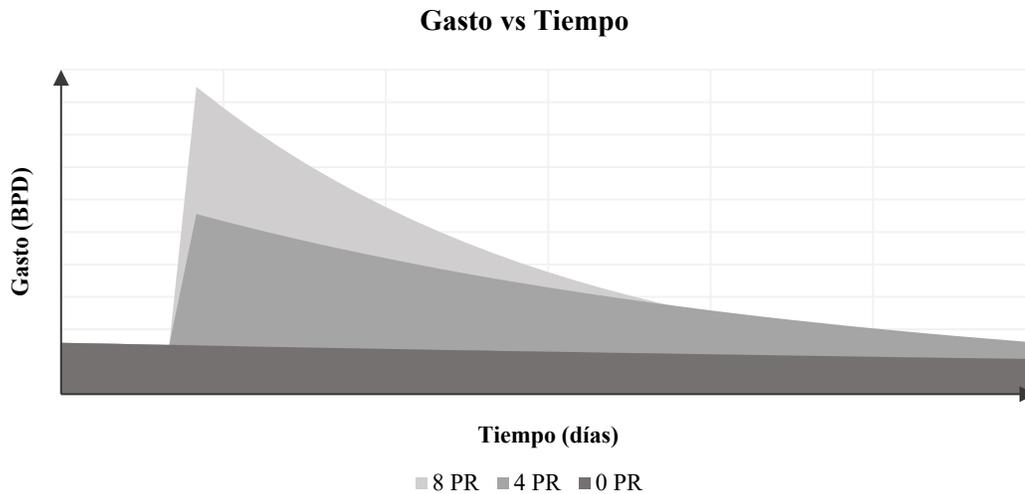
**Figura 3.29.** Efecto de la compresibilidad del aceite en la producción (0 PR). Compresibilidades altas brindan curvas de declinación de la producción más suaves.



**Figura 3.30.** Efecto de la compresibilidad del aceite en la producción (1 PR). En los escenarios en los que la compresibilidad es elevada, la producción declina más suavemente debido a la expansión mayor del aceite al declinar la presión. La producción inicial del pozo original fue la misma en todos los casos.

### 3.2.2.6. Efecto del número de pozos

En la **Figura 3.31** se muestra el incremento en la producción debido a la perforación de pozos de relleno. A medida que se perforan más pozos, la producción de aceite será mayor. Sin embargo, el agotamiento rápido de las reservas también provocará una declinación de la presión del yacimiento más temprana.



**Figura 3.31.** Efecto de la perforación de pozos de relleno. Mientras mayor sea el número de pozos productores, el incremento de la producción será mayor. Sin embargo, esto conlleva un agotamiento más temprano del yacimiento.

El número óptimo de pozos de relleno a perforar dependerá de la capacidad que tenga el yacimiento para transmitir sus fluidos, del volumen de hidrocarburos que puede contener y del tiempo en el que se realice el análisis de la producción.

La transmisibilidad es un parámetro compuesto que se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$T = \frac{k_a h}{\mu} \quad (3.1)$$

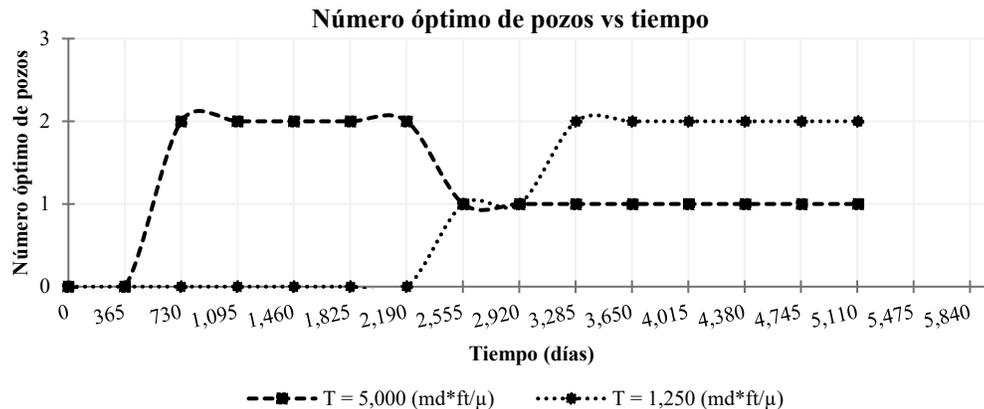
donde:

- $T$  = transmisibilidad
- $k_a$  = permeabilidad
- $h$  = espesor
- $\mu$  = viscosidad

De acuerdo con la **Figura 3.32**, si la transmisibilidad de un yacimiento es buena (ya sea porque la viscosidad del aceite es baja o porque la permeabilidad de la roca es alta), y

se desea obtener el mejor VPN en un periodo corto, lo ideal será perforar múltiples de pozos de relleno. En este mismo caso, a largo plazo, no se necesitaría de la perforación de múltiples pozos e incluso de ninguno en los mejores escenarios del VPN.

En cambio, si la transmisibilidad es baja, no será viable perforar pozos de relleno a tiempos cortos, pues los nuevos pozos aún no alcanzarán la producción acumulativa de petróleo suficiente para cubrir sus costos y generar ganancias. Sin embargo, el número de pozos óptimos se eleva a tiempos más largos.



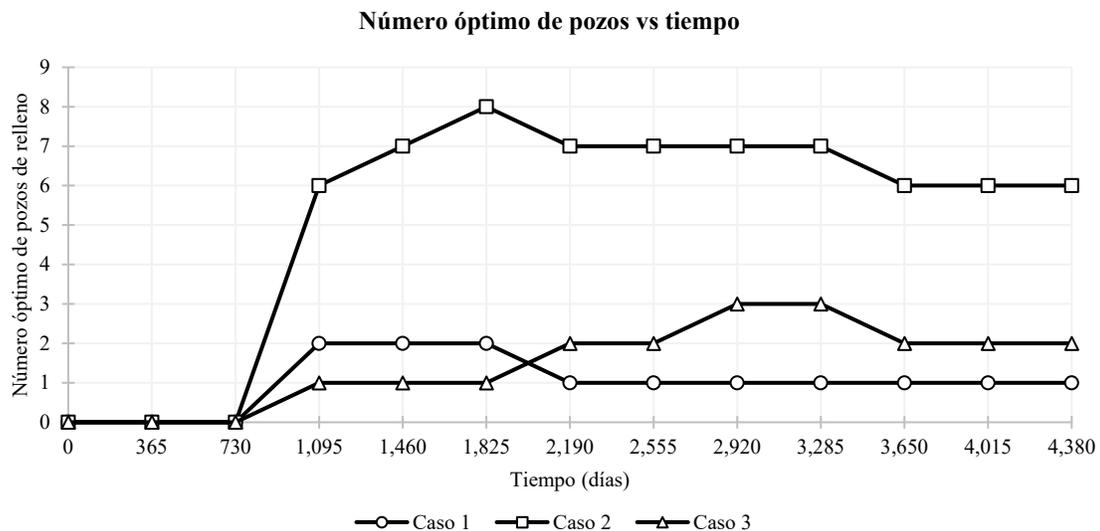
**Figura 3.32.** Efecto de la transmisibilidad en el número óptimo de pozos. En el caso en el que la transmisibilidad es más alta ( $T = 5,000$  (md\*ft/ $\mu$ )), el número óptimo de pozos aumenta en tiempos cortos y disminuye en tiempos intermedios. Mientras que el otro caso ( $T = 1,250$  (md\*ft/ $\mu$ )), el número óptimo aumenta en tiempos intermedios y largos.

Si el yacimiento posee transmisibilidades altas, los gastos de los pozos serán más elevados y las reservas del yacimiento se agotarán más rápidamente; pasará todo lo contrario si posee transmisibilidades bajas. Además, yacimientos con transmisibilidades bajas, en tiempos largos tenderán a requerir más pozos de relleno que los que tengan transmisibilidades altas.

Existen casos en los que es mejor perforar pocos pozos o incluso ninguno, ya sea porque el tiempo de análisis es muy bajo y los pozos de relleno no pueden alcanzar a cubrir sus costos o porque simplemente no es factible perforar pozos nuevos; esto último ocurre en yacimientos con pocas reservas. Las reservas del yacimiento dependen de su tamaño, espesor, porosidad y del factor de volumen del aceite. Mientras más reservas tenga el yacimiento, el tiempo necesario para agotarlas será mayor y tenderá a admitir un mayor número óptimo de pozos.

Si el objetivo es generar la mayor utilidad a largo plazo, perforar un número alto de pozos de relleno no siempre será lo ideal. La perforación de pozos y sus gastos de

producción, involucra un desembolso de capital que afectará negativamente al valor presente neto. Por otro lado, si se prioriza recuperar la inversión en un periodo corto, lo mejor será perforar menos pozos o incluso no perforar. En la **Figura 3.33** se muestra el efecto que tiene el número de pozos en el VPN considerando diferentes tiempos, en la que el punto más alto de cada curva corresponderá al número óptimo de pozos de relleno.



**Figura 3.33.** Número óptimo de pozos de relleno vs tiempo. Los casos corresponden a los expuestos en la sección 3.1. Cada yacimiento posee propiedades únicas que lo distinguen de los demás, las cuales pueden influir en menor o mayor medida en el VPN.

El tiempo es un factor importante, el número óptimo de pozos cambiará de acuerdo con el tiempo que dure el estudio. La **Tabla 3.11** muestra el número óptimo de pozos de relleno obtenido para cada tiempo, para los casos considerados en esta tesis:

**Tabla 3.11.** Registro de tiempo contra el número óptimo de pozos de relleno para los tres casos presentados.

<b>Registro de tiempo contra el número óptimo de pozos de relleno para los tres casos presentados</b>			
Tiempo (días)	Caso 1	Caso 3	Caso 2
0	0	0	0
365	0	0	0
730	0	0	0
1,095	2	1	6
1,460	2	1	7
1,825	2	1	8
2,190	1	2	7
2,555	1	2	7
2,920	1	3	7

3,285	1	3	7
3,650	1	2	6
4,015	1	2	6
4,380	1	2	6

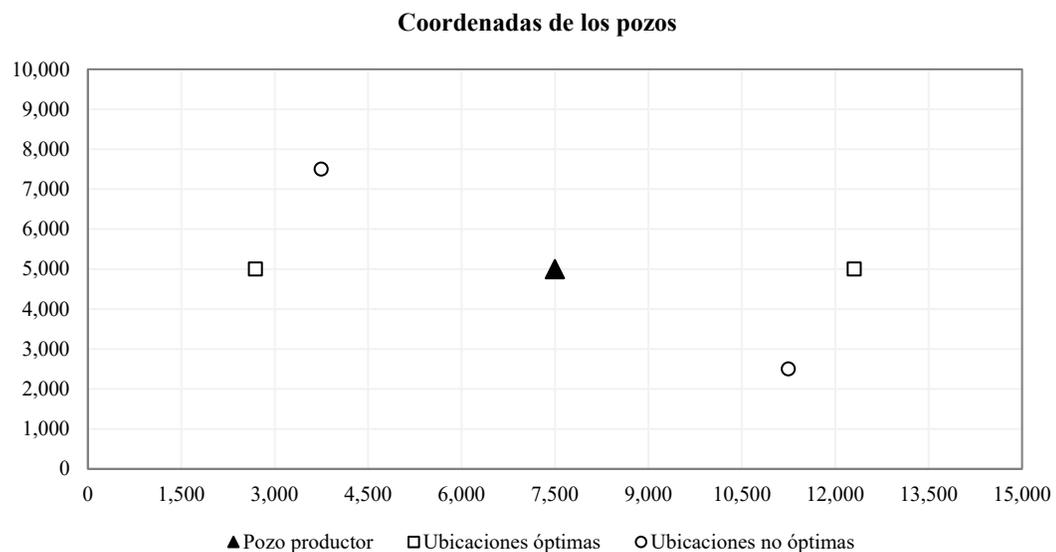
### 3.2.2.7. Efecto de tamaño del yacimiento

Como se ha visto, el volumen de hidrocarburos almacenado en un yacimiento depende de múltiples factores, uno de estos es el tamaño del yacimiento. Los yacimientos grandes tenderán a contener más hidrocarburos que los pequeños. Además, mientras más grande sea un yacimiento, el tiempo requerido para agotar sus reservas será mayor. Por eso, en yacimientos grandes suele ser más factible perforar una mayor cantidad de pozos.

### 3.2.2.8. Efecto de la posición de los pozos

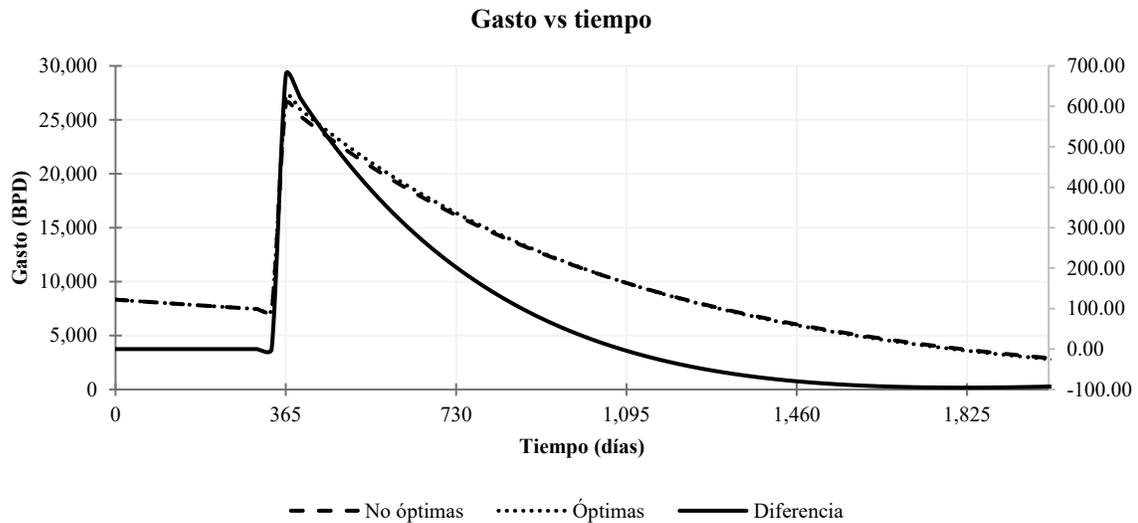
En los ejemplos mostrados en la sección 3.1 se observa la manera en la que los pozos de relleno se distribuyen. Los pozos de relleno se situarán en aquellas zonas en donde los pozos originales no han drenado un volumen considerable. Además, los límites del yacimiento también influirán en su posición, pues mientras más cerca un pozo esté de una frontera exterior, su área de drene será menor.

Para observar los beneficios de optimizar el VPN, se comparan los siguientes dos escenarios correspondientes al “Caso 1” presentado en la sección 3.1.1:



**Figura 3.34.** Coordenadas de los pozos. El pozo original está señalado con el triángulo, mientras que los pozos óptimos se encuentran señalados con cuadrados y los no óptimos con círculos.

En la **Figura 3.35** se muestra la diferencia entre perforar pozos de relleno en ubicaciones óptimas y en ubicaciones no óptimas:



**Figura 3.35.** Comparación de la producción entre las coordenadas óptimas y no óptimas. El eje secundario de la derecha es resultado de restar el gasto de las coordenadas que no son óptimas al gasto de las coordenadas óptimas. El área bajo la última curva representará el incremento en el volumen de aceite producido.

## 4. Conclusiones

Las funciones de los pozos de relleno son acelerar la producción e incrementar el volumen producido de hidrocarburos, elevando el factor de recuperación. Los tiempos iniciales de producción de los pozos de relleno no son variables que deban optimizarse, pues los beneficios de los pozos de relleno se observan mejor cuando se perforan en etapas tempranas.

Cada yacimiento posee características que lo distinguen de los demás, por lo que no es posible establecer una verdad absoluta con respecto a la cantidad de pozos a perforar. En general, será factible perforar más pozos de relleno cuando:

1. Las reservas del yacimiento sean grandes debido a:
  - a. Las dimensiones del yacimiento ( $x$  y  $y$ ) sean grandes.
  - b. El espesor del yacimiento sea alto.
  - c. La porosidad de la roca sea grande, lo que le permitirá contener más volumen de hidrocarburos.
2. La transmisibilidad sea baja debido a:
  - a. Permeabilidades bajas
  - b. Viscosidades altas
3. El aceite posea una compresibilidad baja, lo que impedirá que el fluido se expanda adecuadamente al declinar la presión; influyendo en la producción.

La producción de los pozos también será sensible al daño, presión de fondo y sus radios. Por lo que es necesario mantenerlos en condiciones óptimas para garantizar buenos resultados.

Además de las variables mencionadas anteriormente, el número óptimo de pozos dependerá de los objetivos del inversionista, y del tiempo en que desee recuperar su inversión o tener ganancias. En todos los casos simulados hubo una variación en la cantidad óptima de pozos de relleno cuando se emplearon diferentes tiempos de análisis.

Perforar una cantidad elevada de pozos incrementará la producción, pero no necesariamente se reflejará un mayor beneficio económico. Cada pozo de relleno tiene que ser capaz de costear su perforación además de generar beneficios económicos.

En esta tesis se usó una solución analítica que considera un yacimiento homogéneo, isotrópico y de una sola porosidad, por lo que es muy probable que exista más de una solución óptima; en todo caso, el optimizador mostrará las mejores soluciones del problema y las clasificará de acuerdo con una tolerancia. Cuando esto ocurre, lo ideal será tomar la decisión que implique el uso de la menor cantidad de recursos, pues los costos de transporte de material, herramientas, personal, etc., pueden ser variables que influyan en el VPN y que no se consideraron en la elaboración de este algoritmo.

También, se debe tomar en cuenta que el modelo empleado considera una forma rectangular, la cual puede adaptarse a los yacimientos para tener resultados aproximados. Es posible modificar el modelo de yacimiento empleado en este trabajo para la predicción de la producción, y puede adaptarse a las particularidades del yacimiento con que se trabaja. Sin embargo, el modelo presentado en esta tesis es muy útil en las etapas tempranas, en las que la información sobre el yacimiento es escasa.

Si se dispone de modelos diferentes al empleado en esta tesis, ya sean para yacimientos de doble o triple porosidad o heterogéneos y anisotrópicos, se recomienda emplearlos conjuntamente con el optimizador, para generar resultados similares a los presentados en este trabajo.

Se desarrolló un algoritmo capaz de encontrar el número óptimo de pozos de relleno con sus coordenadas respectivas. El tiempo de ejecución del algoritmo depende principalmente de la cantidad de pozos de relleno que puede admitir el yacimiento, del número de los cálculos de los flujos de efectivo de los proyectos y el tiempo total de análisis. Las soluciones óptimas permitirán obtener la mayor cantidad de beneficios.

## Referencias

- Ahmed, T., & McKinney, P. D. (2005). *Advanced reservoir engineering*. Gulf Professional Publishing.
- Alireza, B., & Nwaoha, C. (2014). *Dictionary of oil, gas, and petrochemical processing*. CRC Press.
- Almeida Garza, A. (1994). *Determinación del precio internacional del petróleo*. Fondo de cultura económica México.
- Alvarado, V., & Manrique, E. (2010). *Enhanced oil recovery: field planning and development strategies*. Elsevier.
- Antoniou, A., & Lu, W.-S. (2007). *Practical Optimization. Algorithms and Engineering Applications*. Springer.
- Craft, B.C, y Hawkins, M. H. (1990). *Applied Petroleum Reservoir Engineering*. Prentice Hall PTR.
- Banco de México. (2020, julio 30). *Precio de la mezcla mexicana de petróleo*. Retrieved from Banco de México: <https://www.banxico.org.mx/apps/gc/precios-spot-del-petroleo-gra.html>
- Blank, L., & Tarquin, A. (2006). *Ingeniería económica*. Mc Graw Hill.
- Camacho, R., & et al. (1996). Optimum Position for Wells Producing at Constant Wellbore Pressure. *Society of Petroleum Engineers*.
- Comisión Nacional de Hidrocarburos. (2012). *El futuro de la producción de aceite en México: recuperación avanzada y mejorada IOR-EOR*. CNH.
- Donaldson, E. C. (1984). *Enhanced oil recovery*. Los Angeles, California, EE.UU.: Elsevier.
- Escobar, F. H. (2012). *Fundamentos de ingeniería de yacimientos*. Neiva, Colombia: Guadalupe Ltda.
- Gómez, S., & Levy, A. (1985). The tunneling method applied to global optimization. In R. H. P. T. Boggs, *Numerical Optimization* (pp. 213-244). SIAM.
- Guerrero, L. G. (2009). Evaluación económica de un mejorador de crudo por medio de opciones reales. (*Tesis de maestría*). Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México.
- Lake, L. W. (2011). *Enhanced oil recovery*. Austin, Texas: University Co-op.
- Langenkamp, R. D. (2014). *Handbook of oil industry: terms & phrases*. Tulsa, Oklahoma: PennWell.

- Levy, A. V., & Montalvo, A. (1985). The Tunneling Algorithm for the Global Minimization of Functions. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* , Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Mannucci, J. (s.f.). *Caracterización Física de Yacimientos*. Mannyron Consultores.
- McCain, W. (1990). *The Properties of Petroleum Fluids*. PennWell.
- Moix, R. (2014). *Evaluación económica de proyectos petroleros*. Bogotá, Colombia: HIPERGRAPH.
- Nichita, D., & Gómez, S. (2004). Multiphase Equilibria Calculation by Direct Minimization of Gibbs Free Energy Using the Tunnelling Global Optimization Method. *Journal of Canadian Petroleum Technology*.
- R. Meneu, J. M.-S. (1999). *Fundamentos de optimización matemática en economía*. Universidad de Valencia.
- Rangel, E. R. (2015). *IOR-EOR: Una oportunidad histórica para México*. CDMX, México: Academia de Ingeniería México.
- Rodriguez, F., & Cinco-Ley, H. (1993). A new model for production decline. *SPE*.
- Satter, A., & Iqbal, G. (2016). *Reservoir Engineering*. Elsevier.
- Society of Petroleum Engineers. (2018). *Petroleum Resources Management System*. Society of Petroleum Engineers.
- Van Horne C. James, W. J. (2010). *Fundamentos de administración financiera*. Pearson Education.
- William G. Sullivan, E. M. (2004). *Ingeniería económica de DeGarmo*. Pearson Educación.

## Anexos

### Anexo I. Variables adimensionales y sistema de unidades

Las variables adimensionales son parámetros que llevan implícitos grupos de variables reales que influyen en el comportamiento de un fenómeno; su uso facilita la resolución del problema al reducir la cantidad de variables a trabajar. Son directamente proporcionales a las variables reales, contienen valores característicos del problema y como su nombre lo indica, no poseen unidades.

A continuación, se muestran las definiciones de las variables adimensionales usadas en la solución analítica empleada en esta tesis. La cual considera un yacimiento homogéneo e isotrópico con fronteras cerradas al flujo, de forma rectangular y con pozos que producen a una presión de fondo constante.

La presión adimensional se define de la siguiente manera:

$$p_D(x_D, y_D, t_D) = \frac{p_i - p(x, y, t)}{p_i - p_{wref}} \quad (I.1)$$

Cuando un pozo produce a una presión de fondo constante, su gasto cambiará con el tiempo. Por otro lado, si un pozo produce bajo un gasto constante, lo que variará será su presión de fondo. El gasto de un pozo  $j$  que produce a una presión de fondo constante se muestra a continuación:

$$q_{wDj} = \frac{141.2\mu q_{wj}(t)B}{kh(p_i - p_{wref})} \quad (I.2)$$

El tiempo adimensional se define de la manera siguiente:

$$t_D = \frac{0.006329 kt}{\phi\mu c_t A} \quad (I.3)$$

Las coordenadas adimensionales para una geometría rectangular están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$x_D = x/\sqrt{A} \quad (I.4)$$

$$y_D = y/\sqrt{A} \quad (I.5)$$

Los parámetros empleados en las variables adimensionales son los siguientes:

$p_i$	=	presión inicial del yacimiento
$p_{wref}$	=	presión de referencia
$\mu$	=	viscosidad del fluido
$t$	=	tiempo en variables reales
$q_{wj}(t)$	=	gasto del pozo $j$ en el tiempo $t$
$B$	=	factor de volumen del aceite
$k$	=	permeabilidad
$h$	=	espesor del yacimiento
$c_t$	=	compresibilidad total
$A$	=	área del yacimiento

A continuación, en la **Tabla I. 1** se muestran las unidades de los parámetros utilizados en la solución de esta tesis:

**Tabla I. 1.** Unidades de los parámetros empleados en la solución analítica.

Unidades de los parámetros empleados en la solución analítica	
Parámetro	Unidad
Presión ( $p$ )	psi
Permeabilidad ( $k$ )	md
Viscosidad ( $\mu$ )	cp
Factor de volumen del aceite ( $B_o$ )	bbbl/STB
Porosidad ( $\phi$ )	-
Compresibilidad ( $c_o$ )	psi <sup>-1</sup>
Tiempo ( $t$ )	días
Coordenadas de los pozos ( $x, y$ )	pies

## Anexo II. Solución de Rodríguez y Cinco-Ley

### Formulación y resolución del problema

El flujo en el yacimiento se describe con la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 p_D}{\partial y_D^2} + 2\pi \sum_{j=1}^{nw} q_{wDj}(t_D) \delta(x_D - x_{Dj}, y_D - y_{Dj}) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (\text{II.1})$$

donde:

$$\begin{aligned} 0 < x_D < x_{eD} \\ 0 < y_D < y_{eD} \\ t_D > 0 \end{aligned}$$

La ecuación diferencial (II.1) estará sujeta a las condiciones iniciales y de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0, x_{eD}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial p_D}{\partial y_D} \right|_{y_D=0, y_{eD}} &= 0 \end{aligned}$$

El problema planteado se puede resolver con la transformada de Laplace y las funciones de Green. La transformada de Laplace de la ecuación (II.1) se muestra a continuación:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial y_D^2} + 2\pi \sum_{j=1}^{nw} \bar{q}_{wDj}(t_D) \delta(x_D - x_{Dj}, y_D - y_{Dj}) = s \bar{p}_D \quad (\text{II.2})$$

Y sus condiciones de frontera en el espacio de Laplace son:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0, x_{eD}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial y_D} \right|_{y_D=0, y_{eD}} &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación anterior con sus condiciones de frontera mediante el método de las funciones de Green resulta:

$$\bar{p}_D(x_D, y_D) = -2\pi \sum_{j=1}^{nw} G(x_D, y_D, x_{Dj}, y_{Dj}; s) \bar{q}_{wDj} \quad (\text{II.3})$$

donde  $G(x_D, y_D, x_{Dj}, y_{Dj}; s)$  es la función de Green asociada al problema y se obtiene como solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y'^2} - sG = \delta(x' - x_D, y' - y_D) \quad (\text{II.4})$$

Con las condiciones de frontera siguientes:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x'} \right|_{x'=0, x_{eD}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y'} \right|_{y'=0, y_{eD}} = 0$$

Al resolver la ecuación (II.4), se obtienen las siguientes funciones de Green:

a) Si  $0 < y' < y_D$

$$\begin{aligned} & G(x_D, y_D, x', y'; s) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{s}x_{eD}} \frac{\cosh[\sqrt{s}(y_D - y_{eD})] \cosh[\sqrt{s}y']}{\sinh[\sqrt{s}y_{eD}]} \\ & - \frac{2}{x_{eD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh[a_n(y' - y_{eD})] \cosh[a_n y']}{a_n \sinh[a_n y_{eD}]} \cos\left[\frac{n\pi x_D}{x_{eD}}\right] \cos\left[\frac{n\pi x'}{x_{eD}}\right] \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

b) Si  $y_D < y' < y_{eD}$ :

$$\begin{aligned} & G(x_D, y_D, x', y'; s) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{s}x_{eD}} \frac{\cosh[\sqrt{s}(y_D)] \cosh[\sqrt{s}(y' - y_{eD})]}{\sinh[\sqrt{s}y_{eD}]} \\ & - \frac{2}{x_{eD}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh[a_n(y' - y_{eD})] \cosh[a_n y_D]}{a_n \sinh[a_n y_{eD}]} \cos\left[\frac{n\pi x_D}{x_{eD}}\right] \cos\left[\frac{n\pi x'}{x_{eD}}\right] \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

En las ecuaciones anteriores, el término  $a_n$  se define como

$$a_n = \sqrt{s + \left(\frac{n\pi}{x_{eD}}\right)^2}; n = 0, 1, 2, \dots$$

Para un yacimiento produciendo con múltiples pozos bajo presión de fondo constante, se agrega la siguiente condición a la localización de los pozos:

$$p_D(x_{Di}, y_{Di}, t_D) = p_{wDi} + S_i q_{wDi}(t_D) \quad (\text{II.7})$$

donde  $i = 1, 2, \dots, nw$

donde  $S_i$  es el factor de daño en el pozo  $i$ . La transformada de Laplace de la condición anterior resulta en:

$$\bar{p}_D(x_{Di}, y_{Di}) = \frac{p_{wDi}}{s} + S_i \bar{q}_{wDi} \quad (\text{II.8})$$

La ecuación anterior puede sustituirse en la ecuación (II.2) para conseguir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{nw} F_{ij} \bar{q}_{wDj} = -\frac{p_{wDi}}{2\pi s} \quad (\text{II.9})$$

Para  $i = 1, 2, \dots, nw$

donde  $F_{ij}$  se define de la siguiente manera:

$$F_{ij} = G_{ij} + \alpha_{ij} \quad (\text{II.10})$$

Siendo  $\alpha_{ij}$  y  $G_{ij}$ :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -S_i/2\pi & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

$$G_{ij} = G(x_{Di}, y_{Di}, x_{Dj}, y_{Dj}; s) \quad (\text{II.12})$$

La ecuación (II.9) puede escribirse en notación matricial como:

$$F \bar{q}_{wD} = -\frac{1}{2\pi s} p_{wD} \quad (\text{II.13})$$

donde  $F$  es una matriz cuadrada de orden  $nw$  y elementos  $F_{ij}$ ;  $\bar{q}_{wD}$  es un vector de gastos adimensionales desconocidos y  $p_{wD}$  es un vector de presiones de fondo adimensionales conocidas. Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (II.9), el gasto adimensional queda definido de la siguiente manera:

$$\bar{q}_{wDj} = -\frac{1}{2\pi s} \frac{\sum_{j=1}^{nw} (-1)^{i+j} M_{ij} p_{wDi}}{|F|} \quad (\text{II.14})$$

donde  $M_{ij}$  es el menor del elemento  $F_{ij}$  de la matriz  $F$ . Cabe mencionar que la ecuación anterior se encuentra dentro del espacio de Laplace, sin embargo, resulta complicado obtener su transformada inversa. En esta ecuación, el valor del parámetro de Laplace ( $s$ ) tiende a cero a tiempos largos, durante las condiciones de flujo dominadas por las fronteras.

### Comportamiento de la producción de los pozos bajo condiciones de flujo dominadas por frontera

Primero, utilizando las propiedades de la transformada de Laplace, se estableció la forma limitante de la función de Green, representada por las ecuaciones (II.5) y (II.6). A tiempos largos, cuando  $s$  tiende a cero (representado en la ecuación (II.15)), las ecuaciones (II.5) y (II.6) se escribirán:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(x_D, y_D, x', y'; s) = -\frac{1}{s} - \beta(x_D, y_D, x', y') \quad (\text{II.15})$$

donde la función  $\beta(x_D, y_D, x', y')$  que no depende del parámetro  $s$  de Laplace se define así:

a) Si  $0 < y' < y_D$

$$\begin{aligned} & \beta(x_D, y_D, x', y') \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh[n\pi(y_D - y_{eD})/x_{eD}] \cosh[n\pi x'/x_{eD}]}{n\pi \sinh[n\pi y_{eD}/x_{eD}]} \cos \left[ \frac{n\pi x_D}{x_{eD}} \right] \cos \left[ \frac{n\pi x'}{x_{eD}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

b) Si  $y_D < y' < y_{eD}$

$$\begin{aligned} & \beta(x_D, y_D, x', y'; s) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh[n\pi(y' - y_{eD})] \cosh[n\pi y_D/x_{eD}]}{n\pi \sinh[n\pi y_{eD}/x_{eD}]} \cos \left[ \frac{n\pi x_D}{x_{eD}} \right] \cos \left[ \frac{n\pi x'}{x_{eD}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Usando la aproximación (II.16) en la ecuación (II.10) se obtiene lo siguiente:

$$F_{ij} = -\frac{1}{s} - \gamma_{ij} \quad (\text{II.18})$$

donde:

$$\gamma_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_{ij} \quad (\text{II.19})$$

$$\beta_{ij} = \beta(x_{Di}, y_{Di}, x_{Dj}, y_{Dj}) \quad (\text{II.20})$$

Usando las propiedades de los determinantes, se puede demostrar que el determinante de la matriz  $F$  con elementos  $F_{ij}$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$|F| = (-1)^{nw} \left[ \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{nw} |\gamma|_k + |\gamma| \right] \quad (\text{II.21})$$

donde  $\gamma$  es la matriz con  $\gamma_{ij}$  elementos;  $|\gamma|$  es el determinante de  $\gamma$ , y  $|\gamma|_k$  es el determinante de la matriz  $\gamma$ , la cual sólo contiene unos en su fila  $k$ .

El menor de la matriz  $M_{ij}$  de la ecuación (II.4) puede escribirse también de la siguiente manera:

$$M_{ij} = (-1)^{nw-1} \left[ \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{nw} (m_{ij})_k + m_{ij} \right] \quad (\text{II.22})$$

### Anexo III. Solución de Camacho et al.

Esta solución emplea las funciones de Green y de escalón unitario para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas.

Usando la transformada de Laplace, se obtiene la solución para pozos múltiples que producen a diferentes presiones de fondo y cuya producción puede iniciar a diferentes tiempos en un yacimiento rectangular.

$$\bar{p}_D(x_D, y_D) = -2\pi \sum_{j=1}^{nw} G(x_D, y_D, x_{Dj}, y_{Dj}; s) e^{-st_{Dj}} \bar{q}_{wDj} \quad (\text{III.123})$$

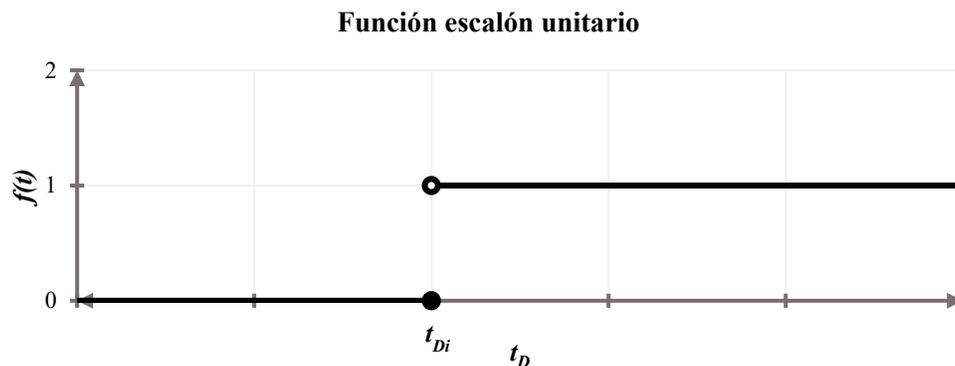
donde  $G(x_D, y_D, x_{Dj}, y_{Dj}; s)$  es la función de Green asociada al problema en el espacio de Laplace y  $t_{Dj}$  es el tiempo adimensional en el que el pozo  $j$  comenzará a producir.

Las variables adimensionales empleadas en la ecuación anterior están definidas en el Anexo I.

Para que los pozos de relleno comiencen a producir a diferentes tiempos, se establece la siguiente condición en su localización:

$$\begin{aligned} p_D(x_{Di}, y_{Di}, t_D) H(t_D - t_{Di}) \\ = H(t_D - t_{Di}) p_{wDi} - S_i q_{wDi} (t_D - t_{Di}) H(t_D - t_{Di}) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Para  $i = 1, 2, \dots, nw$ , en donde  $nw$  será el número total de pozos y  $t_{Di}$  es el tiempo adimensional en el que el pozo  $i$  comenzará a producir,  $S_i$  será el factor de daño del pozo  $i$ .  $H(t_D - t_{Di})$  es la función de escalón unitario o Heaviside, la cual tomará el valor de cero cuando el tiempo adimensional sea menor que  $t_{Di}$  y el valor de uno cuando sea igual o mayor, la siguiente figura muestra esta función.



**Figura III- 1.** Función escalón

\* Los elementos pertenecientes a los anexos de este trabajo se listaron empleando numeración romana.

Al transformar la ecuación (III.2) al espacio de Laplace resulta:

$$\begin{aligned}\bar{p}_D(x_{Di}, y_{Di}) &= \int_0^{t_{Di}} e^{-st_D} p_D(x_{Di}, y_{Di}, t_D) dt_{Di} \\ &= [p_{wDi}/s - S_i \bar{q}_{wDi}] e^{-st_D}\end{aligned}\quad (III.3)$$

Empleando el teorema del valor medio para las integrales se obtiene:

$$\int_0^{t_{Di}} e^{-st_D} p_D(x_{Di}, y_{Di}, t_D) dt_D = \frac{p_D(x_{Di}, y_{Di}, \bar{z}t_{Di})}{s} (1 - e^{-st_{Di}}) \quad (III.4)$$

donde  $\bar{z}$  es un número real entre cero y uno. Cuando  $z$  se aproxima a uno, da buenos resultados.

Sustituyendo las ecuaciones (III.3) y (III.4) en la ecuación (III.123), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{nw} F_{ij} \bar{q}_{wDj} = \frac{p_D(x_{Di}, y_{Di}, \bar{t}_{Di})}{2\pi s} (1 - e^{-st_{Di}}) - \frac{p_{wDi}}{2\pi s} (e^{-st_{Di}}) \quad (III.5)$$

Siendo  $i = 1, 2, \dots, nw$  y  $\bar{t}_{Di}$  es el tiempo adimensional justo antes de que el pozo  $i$  comience a producir. Los términos  $F_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$  y  $G_{ij}$  se describen a continuación:

$$F_{ij} = e^{-st_{Dj}} (G_{ij} + \alpha_{ij}) \quad (III.6)$$

A su vez,  $\alpha_{ij}$  y  $G_{ij}$  se definen de la siguiente manera:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -S_i/2\pi & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (III.7)$$

$$G_{ij} = G(x_{Di}, y_{Di}, x_{Dj}, y_{Dj}; s) \quad (III.8)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (III.5) se obtiene:

$$\bar{q}_{wDj} = -\frac{1}{2\pi s} \sum_{i=1}^{nw} (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}}{|F|} \{ p_D(x_{Di}, y_{Di}, \bar{t}_{Di}) (1 - e^{-st_{Di}}) + p_{wDi} e^{-st_{Di}} \} \quad (III.9)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, nw$

donde  $M_{ij}$  es el menor del elemento  $F_{ij}$  de la matriz cuadrada  $F$  de orden  $nw$ , y  $|F|$  es su determinante.

Usando la aproximación de la función de Green a tiempos largos dado en el apéndice II dentro de la ecuación de (III.5) y sustituyendo la ecuación resultante junto con  $M_{ij}$  y  $|F|$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{wDj} e^{-st_{Dj}} &= \frac{1}{2\pi s} \left\{ \sum_{i=1}^{nwj} (-1)^{i+j} [p_{Di} + e^{-st_{Di}} (p_{wDi} - p_{Di})] \right. \\ &\quad \times \frac{\sum_{i=1}^{nwj-1} (m_{ij})_k}{\sum_{k=1}^{nwj} |\gamma|_k} \\ &\quad + s \sum_{i=1}^{nwj} (-1)^{i+j} m_{ij} [p_{Di} + e^{-st_{Di}} (p_{wDi} - p_{Di})] \\ &\quad \left. / \sum_{k=1}^{nwj} |\gamma|_k \right\} / \left\{ 1 + s / \sum_{k=1}^{nwj} \frac{|\gamma|_k}{|\gamma|} \right\} \end{aligned} \quad (III.10)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, nw$

donde  $nwj$  es el número de pozos produciendo en el tiempo  $t_{Dj}$ .  $|\gamma|$  es el determinante de la matriz  $\gamma$ , que contiene elementos  $\gamma_{ij}$  a excepción de su fila  $k$ , la cual contiene unos. También,  $m_{ij}$  es el menor del elemento  $\gamma_{ij}$  de la matriz  $\gamma$  y  $(m_{ij})_k$  se obtiene al reemplazar la fila  $k$  de la matriz  $m_{ij}$  por unos. Además,  $p_{Di} = p_D(x_{Di}, y_{Di}, t_{Di})$ .  $\gamma_{ij}$  está dado por la siguiente ecuación:

$$\gamma_{ij} = \tilde{\beta}_{ij} - \alpha_{ij} \quad (III.11)$$

Además,  $\tilde{\beta}_{ij}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x_{Di}, y_{Di}, x_{Dj}, y_{Dj}) \\ = \beta(x_{Di}, y_{Di}, x_{Dj}, y_{Dj}) + \frac{y_{eD}}{x_{eD}} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\tilde{y}}{y_{eD}} + \frac{y_{Di}^2 + y_{Dj}^2}{2y_{eD}^2} \right] \end{aligned} \quad (III.12)$$

Siendo  $\tilde{y} = y_{Di}$  si  $0 < y_{Dj} < y_{Di}$ . La función  $\beta$  está dada por las ecuaciones (II.16) y (II.17), mostradas en el Anexo II.

La inversión de Laplace de la ecuación (III. 10) resulta:

$$\begin{aligned}
& H(t_D - t_{Dj})q_{wDj}(t_D - t_{Dj}) \\
&= \frac{D_j}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{nwj} (-1)^{i+j} p_{Di} \frac{1 - e^{-t_D D_j}}{D_j} \right. \\
&+ \left[ (p_{wDi} - p_{Di})H(t_D \right. \\
&- t_{Di}) \frac{1 - e^{-D_j(t_D - t_{Di})}}{D_j} \left. \right] \frac{\sum_{k=1}^{nwj-1} (m_{ij})_k}{\sum_{k=1}^{nwj} |\gamma|_k} \\
&+ \sum_{i=1}^{nwj} (-1)^{i+j} m_{ij} [p_{Di} e^{-D_j t_D} \\
&+ (p_{wDi} - p_{Di})H(t_D - t_{Di}) e^{-D_j(t_D - t_{Di})}] \\
&\left. / \sum_{k=1}^{nwj} |\gamma|_k \right\}
\end{aligned} \tag{III.13}$$

donde:

$$D_j = \frac{\sum_{k=1}^{nw} |\gamma|_k}{|\gamma|} \tag{III.14}$$

La presión adimensional puede obtenerse al sustituir la aproximación de la función de Green a tiempos largos e invertir:

$$\begin{aligned}
p_{Di} = 2\pi \sum_{j=1}^{nwi} \int_0^{\bar{t}_{Di} - t_{Dj}} q_{wDj}(\tau) d\tau + \tilde{\beta}_{ij} q_{wDj}(\bar{t}_{Di} \\
- t_{Dj})] H(\bar{t}_{Di} - t_{Dj})
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Para una  $t_D \geq \bar{t}_{Di}$

La ecuación (III. 13) brinda el gasto adimensional para el pozo  $j$  que empezará a producir en el tiempo  $t_{Dj}$ . Para el caso particular en el que todos los pozos  $j$  comiencen a producir en  $t_{Dj} = 0$ , la ecuación a resolver será la siguiente:

$$\begin{aligned}
q_{wDj}(t_D) = \frac{1}{2\pi s} \left\{ \sum_{j=1}^{nw} (-1)^{i+j} p_{wDi} (1 - e^{-Dt_D}) \frac{\sum_{k=1}^{nw-1} (m_{ij})_k}{\sum_{k=1}^{nwj} |\gamma|_k} \right. \\
\left. + \sum_{i=1}^{nwj} (-1)^{i+j} \frac{m_{ij}}{|\gamma|} p_{wDi} e^{-Dt_D} \right\}
\end{aligned} \tag{III.16}$$

donde  $j = 1, 2, \dots, nw$

## Anexo IV. Análisis de las variables que influyen en el tiempo de ejecución del algoritmo

En este anexo se presenta un breve análisis de las variables que influyen en el tiempo de ejecución del algoritmo.

Para conocer la relación entre el tamaño del yacimiento y el tiempo de ejecución, se realizó el siguiente ejercicio de optimización: tres yacimientos con las mismas características a excepción de sus dimensiones en  $x$  y en  $y$ ; el periodo de estudio es de ocho años. Esto se muestra en la **Tabla IV.1**:

**Tabla IV.1.** Propiedades de los yacimientos (Casos A, B y C)

Propiedades del yacimiento y del aceite			
	Caso A	Caso B	Caso C
Dimensión en $x$ (ft)	5,000	10,000	15,000
Dimensión en $y$ (ft)	5,000	10,000	15,000
Presión inicial (psi)	3,600	3,600	3,600
Permeabilidad (md)	65	65	65
Porosidad (fracción)	0.16	0.16	0.16
Espesor del yacimiento (ft)	200	200	200
Factor de volumen del aceite	1.4812	1.4812	1.4812
Viscosidad del aceite (cP)	1.2856	1.2856	1.2856
Compresibilidad del aceite ( $\text{psi}^{-1}$ )	0.000018	0.000018	0.000018
Pozos de producción	1	1	1

Los factores económicos que influirán en los flujos de efectivo de los tres proyectos tendrán los mismos valores y se muestran en la **Tabla IV.2**:

**Tabla IV.2.** Factores económicos implicados en los Casos A, B y C

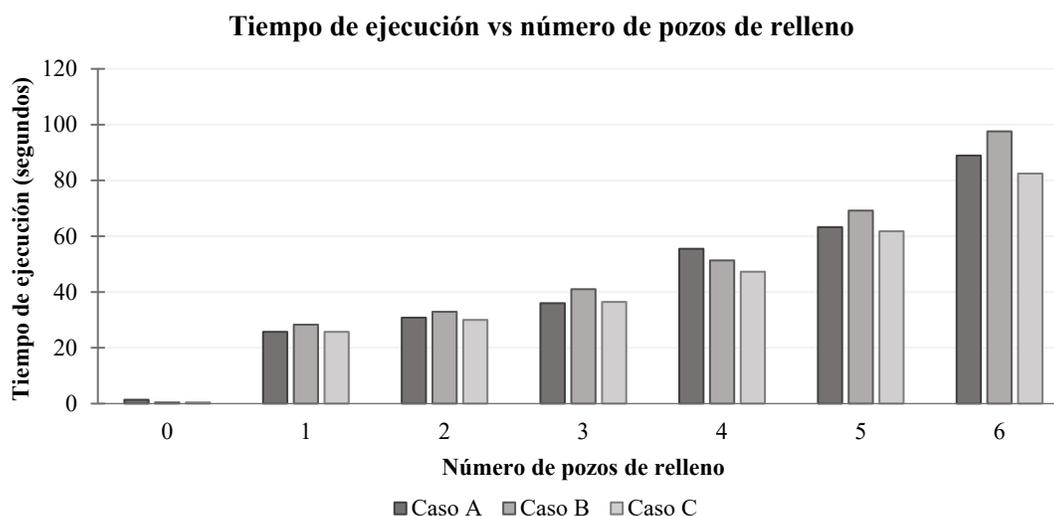
Factores económicos			
	Caso A	Caso B	Caso C
Costo de perforación por pozo (dólares)	15,000,000	15,000,000	15,000,000
Precio del barril de petróleo (dólares)	62	62	62
Tasa de descuento anual	12%	12%	12%
Tasa de impuestos total	78%	78%	78%
Costo de producción por barril (dólares)	12	12	12

Los tres casos tendrán un solo pozo produciendo en el centro del campo y los pozos de relleno se perforarán después de un año de haber comenzado la producción, esto se presenta en la **Tabla IV. 3**:

**Tabla IV. 3** Pozos originales de los Casos A, B y C

Pozos originales de los casos A, B y C							
		x (ft)	y (ft)	r <sub>w</sub> (ft)	p <sub>wf</sub> (psi)	Daño	T <sub>inicial</sub> (días)
Caso A	PP <sub>1</sub>	2,500	2,500	0.25	1,500	3	0
Caso B	PP <sub>1</sub>	5,000	5,000	0.25	1,500	3	0
Caso C	PP <sub>1</sub>	7,500	7,500	0.25	1,500	3	0
	PR <sub>n</sub>	-	-	0.25	1,500	0	365

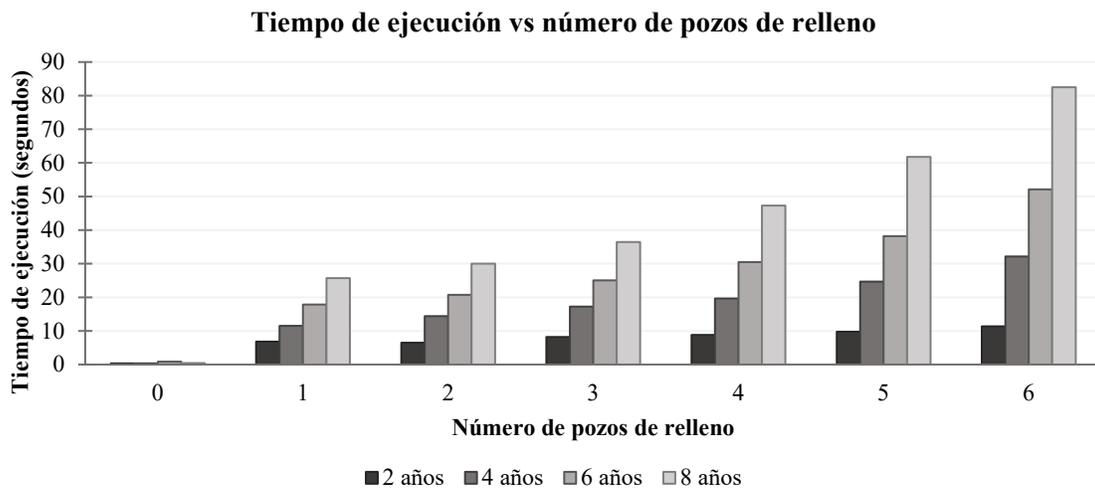
Se registraron los tiempos de ejecución para escenarios diferentes. El tamaño de los yacimientos fue la primera variable que se comparó, los resultados se muestran a continuación:



**Figura IV-1.** Variación del tiempo de ejecución del algoritmo con respecto al tamaño del yacimiento. Se observa que, a pesar de que existe gran diferencia en el tamaño de los tres casos, el tiempo de ejecución es similar en cada uno de estos. La sección de la gráfica que muestra cero pozos de relleno representa el tiempo de ejecución en el que el programa obtiene el valor presente del proyecto sin considerar pozos de relleno y en esta, no es necesario optimizar.

Según los resultados obtenidos, el tiempo de ejecución incrementará a medida que aumente la cantidad de pozos de relleno; sin embargo, el tamaño del yacimiento no será una variable que influya considerablemente en el tiempo de ejecución, pues los resultados arrojan tiempos de ejecución similares para los tres casos.

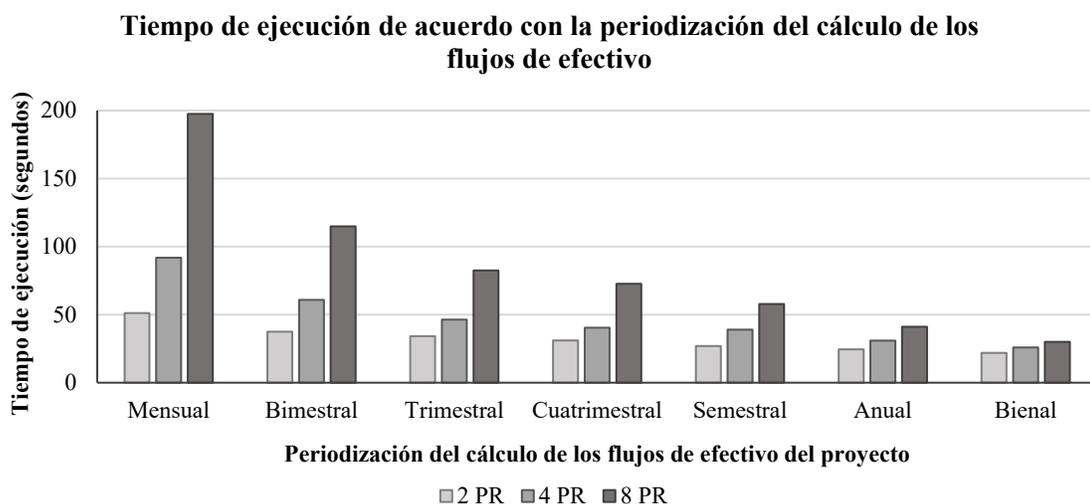
En la siguiente gráfica se muestra la variación en el tiempo de ejecución al cambiar la duración del periodo de estudio.



**Figura IV- 2.** Tiempo de ejecución contra número de pozos al variar la duración del periodo de estudio. Se observa que al igual que con el número de pozos, el tiempo de ejecución incrementará cuando aumente la duración del periodo de estudio.

Como se observa en la gráfica anterior, el periodo de estudio será una variable que influya en el tiempo de ejecución del programa. Mientras este sea mayor, se necesitará más tiempo para obtener la solución óptima del problema.

En la gráfica siguiente se presenta el efecto de la periodización del cálculo de los flujos de efectivo del proyecto (el cual puede ser mensual, bimestral, etc.):



**Figura IV- 3.** Tiempo de ejecución de acuerdo con la periodización en el cálculo de los flujos de efectivo. Mientras menor sea este periodo, el tiempo de ejecución será mayor, pues incrementará la cantidad de cálculos que realice el programa.

De acuerdo con los resultados, se puede concluir que mientras menor sea la periodización del cálculo de los flujos de efectivo, el tiempo de ejecución del programa será mayor. Sin embargo, periodos pequeños brindan resultados más precisos (debido al método del trapecio empleado para obtener la producción del yacimiento) e información más detallada.

A pesar de que el tiempo de ejecución depende de todos los datos de entrada, se concluye que las variables que tendrán mayor influencia sobre este son las siguientes:

- a. Cantidad de pozos de relleno a optimizar
- b. Tiempo total de análisis
- c. Periodización del cálculo de los flujos de efectivo
- d. Cantidad de ciclos de minimización y tunelización y tolerancia del método del túnel

Además de las variables anteriores, el tiempo de ejecución también dependerá de la naturaleza y la velocidad de las instrucciones de la máquina empleada para ejecutar el programa.