



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Simulación numérica de un
propulsor de efecto Hall para
un microsatélite**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Daniel Alejandro Alonso Bastos

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Jorge Alfredo Ferrer Pérez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

*Equipped with his five senses, man explores the universe around him and
calls the adventure science. . .*

*Science is the one human activity that is truly progressive. The body of
positive knowledge is transmitted from generation to generation.*

— EDWIN POWELL HUBBLE

*A mi mamá, hermana, hermanos, novia, familia, amigos y profesores.
A la UNAM, por los estudios y formación que me brindó.
Es gracias a ustedes todos los logros que he obtenido.
Sinceramente, muchas gracias.*

Agradecimientos

Una de las partes más importantes del presente trabajo es sin duda alguna esta sección, ya que es gracias a todas las personas y experiencias que me han llevado a este punto, en el cual me siento agradecido y contento.

Gracias a la UNAM por brindarme el espacio y recursos para mi formación y educación. A lo largo de la carrera conocí grandes personas de los cuales estoy profundamente agradecido por todos los conocimientos y lecciones que me dejaron, además conocí a valiosos colegas, compañeros y amigos que fueron sumando día a día. Agradezco a Dr. Ferrer por todas las pláticas, asesorías y consejos que me brindó en todo este camino, preocupándose por mi ámbito escolar, profesional y emocional, buscando siempre lo mejor.

Sin duda alguna, algo que potencializó mi persona y mi carrera fue pertenecer a la escudería UNAM Motorsports, que me brindó la oportunidad de trabajar hombro a hombro con un equipo de personas extraordinarias que también me brindaron la oportunidad de aprender de cada una de ellas. Un proyecto donde los momentos más difíciles, desafiantes, pero también satisfactorios en mi vida. Agradezco a Luis Rivero por permitirme conocer el proyecto, a Rodrigo Méndez que fue una piedra angular en mi joven carrera académica y profesional, quien me enseñó a ir más allá de mis límites. Agradezco a todas las personas que confiaron en mi como yo confíe en ellas, fue muy grato crecer en paralelo con todas ellas.

Todo esto no podría ser posible si no fuera por el apoyo de la familia, las palabras se quedan pequeñas para expresar el profundo agradecimiento que siento. A mi mamá y a mi hermana, simplemente son y serán mi modelo a seguir, las personas que siempre me han guiado, aconsejado, regañado para convertirme en la persona que soy hoy, las personas que aun cuando las situaciones son complicadas me enseñaron a salir adelante, las amo.

A mis hermanos Jesús y Oscar, por el apoyo incondicional en cada momento, por el orgullo que siento al ver las personas que son hoy y, sobre todo, saber que tuve y

tengo el privilegio de crecer a su lado. A su madre Gabriela y a su padre Lorenzo[†], quienes me brindaron todo su apoyo y se preocupaban por mí, quienes me abrieron las puertas de su casa y familia, son y serán como mis segundos padres.

A mi novia y mejor amiga Yoali Arenas, quien me ha apoyado en todos los aspectos de mi vida y me ha enseñado demasiado, agradezco por toda la paciencia y ayuda que me otorgó para lograr este trabajo. Pero va más allá, gracias por ser la persona que me motiva día a día para seguir adelante, por aconsejarme para lograr ser mejor persona.

A mis abuelos Bebey[†] y Marino[†], a mis tíos Isabel, Wanda, Carlos, George que hicieron lo imposible para ayudarme y apoyarme en todas las situaciones que más lo necesitaba, agradezco porque nunca me faltó un techo, un plato de comida y un abrazo por parte de ellos.

A mis grandes amigos que también los considero como mis hermanos. Kazuyuki, una gran persona que he tenido la oportunidad de conocer desde el primer día de preparatoria hasta ahora, que me ha aconsejado y ayudado a exigirme más cada día. Raúl Mendoza, una gran persona que me ha enseñado muchas cosas. Y, con una gran distinción a Alejandro Trejo[†], que hoy te dedico este trabajo, que simplemente te adelantaste y que me deja con un gran reto y motivación, vivir mi vida por dos, espero volvernos a encontrar y poder contarte todo lo que sucedió en tu ausencia y que tú me cuentes en la mía, te quiero hermano. Aprendí demasiado de ti, me acompañaste en momentos muy difíciles y tuvimos grandes experiencias, extraño las profundas charlas y consejos.

Agradezco por todas las enseñanzas y experiencias que me han brindado todas las personas con las que he tenido oportunidad de laborar, quienes han velado por mi futuro profesional dándome consejos y retroalimentación para ir mejorando día a día, ha sido un gran camino con grandes aprendizajes.

Agradezco al Laboratorio Nacional de Ingeniería Espacial y Automotriz LN-INGEA por impulsar el desarrollo tecnológico satelital en el país, dando paso a la motivación de colaborar con un granito de arena en este sector.

Por último, agradezco por las licencias y soporte técnico brindado a lo largo del trabajo por parte de ANSYS Maxwell y de VSim, sin su ayuda este trabajo no hubiera sido posible.

Índice general

1. Introducción	19
1.1. Historia	19
1.2. Justificación y motivación del estudio	21
1.3. Objetivos	22
1.3.1. Objetivo de la tesis	22
1.3.2. Hipótesis	22
1.3.3. Resumen del contenido de la tesis	23
2. Satélites	24
2.1. Definición	24
2.2. Clasificación	25
2.3. Subsistemas de un satélite	28
2.4. Etapas de lanzamiento de un satélite	29
3. Propulsión eléctrica	32
3.1. Ecuaciones fundamentales	32

3.1.1.	Ecuación Ideal del Cohete y Ecuación de Tsiolkovsky	33
3.1.2.	Empuje o <i>Thrust</i> (T)	35
3.1.3.	Impulso específico	35
3.2.	Sistemas de propulsión	36
3.3.	Propulsión eléctrica	39
3.4.	Selección de un propulsor eléctrico	42
3.4.1.	Comparación de propulsores eléctricos	44
3.4.2.	Proceso de diseño	45
4.	Teoría de plasmas	47
4.1.	Introducción	47
4.2.	Ionización	49
4.3.	Definición de un plasma	50
4.3.1.	Longitud de Debye	50
4.3.2.	Parámetro del plasma	57
4.3.3.	Frecuencia del plasma	58
4.3.4.	Frecuencia de colisiones	61
4.3.5.	Conclusión de la definición del plasma	62
4.4.	Movimiento de la partícula	63
4.4.1.	Campo magnético estático y uniforme	63
4.4.2.	Velocidad de deriva	66
4.5.	Interacción plasma-pared	68

4.6.	Descripción cinética del plasma	71
4.6.1.	Funciones de distribución	73
4.6.2.	Ecuación de Boltzmann	75
4.7.	Descripción de fluido del plasma	77
4.7.1.	Modelo de dos fluidos	80
5.	Propulsor Hall	83
5.1.	Efecto Hall	85
5.1.1.	Efecto Hall en una cinta conductora	85
5.1.2.	Efecto Hall en un gas ionizado	87
5.2.	Funcionamiento del propulsor	88
5.3.	Componentes principales	90
5.3.1.	Circuito magnético	90
5.3.2.	Cátodo	91
5.3.3.	Ánodo	93
5.3.4.	Canal de descarga	93
5.3.5.	Propelente	94
5.4.	Física de los propulsores Hall	95
5.4.1.	Campo eléctrico y magnético	97
5.4.2.	Corriente Hall	99
5.4.3.	Longitud de la región de ionización	101
5.4.4.	Distribución de potencial	103

5.4.5. Fuerza de empuje	105
5.4.6. Impulso específico	107
5.4.7. Eficiencia	109
5.5. Tipos de propulsores	111
6. Método <i>Particle In Cell</i> (PIC)	114
6.1. Métodos de simulación	114
6.2. Simulaciones PIC	116
6.3. Algoritmo PIC	117
6.3.1. Inicialización	118
6.3.2. Programa Principal	119
6.3.3. PIC-MCC	125
7. Simulación numérica del propulsor	127
7.1. Descripción del propulsor	127
7.2. Método numérico	129
7.2.1. Campo magnético	131
7.2.2. Modelo de fluido	132
7.2.3. Modelo de partículas	133
7.3. Metodología	142
7.4. Resultados	144
7.4.1. Campo magnético	145

7.4.2. Simulación PIC	149
8. Conclusiones y trabajo a futuro	162
8.1. Conclusiones	162
8.2. Trabajo a futuro	165
A. Distribución de Maxwell-Boltzmann	167
A.1. Función de distribución 1D Maxwell-Boltzmann	167
A.2. Función de distribución 3D Maxwell-Boltzmann	170
B. Factores de corrección	173
B.1. Empuje	173
B.2. Impulso específico	175
C. Análisis de resultados de la simulación electrostática	178
D. Pre-procesamiento del campo magnético	182
E. Simulación del propulsor por el método PIC	185
F. Gráficas	201
Bibliografía	204

Índice de figuras

2-1. Número de lanzamientos por año de satélites grandes, satélites medianos y pequeñas naves espaciales.	26
2-2. Número de lanzamientos al año de los diferentes tipos de satélites en la categoría de pequeñas naves espaciales.	27
2-3. Etapas de un vehículo lanzador de satélites.	31
2-4. Perfil de vuelo del lanzador Dnepr.	31
3-1. Diagrama de un cohete de masa variable en un estado inicial t y un estado final $t + dt$ moviéndose a una velocidad v	33
3-2. Clasificación de los distintos sistemas de propulsión.	36
3-3. Velocidad efectiva de escape en función del cociente entre empuje y peso del vehículo.	37
3-4. Esquema de un propulsor Resitojet.	39
3-5. Esquema de un propulsor Arcjet.	40
3-6. Esquema de un propulsor iónico.	40
3-7. Esquema de un propulsor coloidal.	41
3-8. Esquema de un propulsor magnetoplasmadinámico (MPD).	41
3-9. Esquema de un propulsor de plasma pulsado (PPT).	42

3-10. Información general de las regiones aproximadas de aplicación de diferentes sistemas de propulsión en función de impulso específico y empuje.	44
3-11. Aplicación de distintos propulsores eléctricos en función de su potencia e impulso específico.	45
4-1. Estados de la materia.	48
4-2. Carga de prueba q_T inmersa en un plasma neutro.	51
4-3. Representación gráfica de la delta de Dirac $\delta(x)$	52
4-4. Apantallamiento de Debye.	55
4-5. Apantallamiento de Debye en esferas introducidas en un plasma.	56
4-6. Esfera de Debye.	58
4-7. Estado inicial estacionario.	59
4-8. Partícula entrante con una velocidad v_{in}	61
4-9. Colisión de Coulomb debido a la interacción de cargas iguales.	62
4-10. Movimiento de una partícula cargada dado un campo magnético estático y uniforme.	66
4-11. Movimiento de una partícula cargada inmersa en un campo magnético y eléctrico.	67
4-12. Esquema de la región adyacente de la pared.	69
4-13. Esquema de las diferentes vainas.	69
4-14. Esquema de las dos escalas.	70
4-15. Diagrama de operaciones para la descripción autoconsistente de un plasma.	72
4-16. Notaciones Big-O más comunes.	73

4-17. Espacio de fase en un espacio bidimensional.	74
4-18. Jerarquía de los fenómenos del plasma.	82
5-1. Esquema de los diferentes tipos de plasma en función de su densidad y temperatura.	84
5-2. Cinta conductora con una corriente circulando y un campo magnético perpendicular a la corriente.	85
5-3. El signo de los portadores se determina mediante el signo del voltaje Hall.	86
5-4. Vista transversal de un propulsor Hall.	89
5-5. Funcionamiento del propulsor Hall.	90
5-6. Distintas configuraciones del circuito magnético.	91
5-7. Esquema de un cátodo hueco.	92
5-8. Esquema del ánodo.	93
5-9. Distintos tipos de propelentes utilizados en propulsores Hall.	95
5-10. Sección transversal del plasma en el canal de descarga del propulsor Hall.	96
5-11. Campo magnético en la línea central del canal de descarga.	98
5-12. Perfiles típicos del campo magnético radial y campo eléctrico axial del propulsor Hall a lo largo de la longitud del canal.	98
5-13. Esquema de las regiones de ionización y aceleración. Esquema del campo magnético radial y campo eléctrico axial.	99
5-14. Esquema eléctrico y la distribución de potencial en un propulsor de efecto Hall.	104
5-15. Modelo híbrido 2D de un propulsor Hall (SPT100).	105

5-16.Campo magnético y eléctrico en el propulsor Hall.	105
5-17.Tipos de propulsores Hall.	113
6-1. Esquema de clasificación de los diferentes métodos de simulación para plasmas.	115
6-2. Esquema del método PIC.	117
6-3. Diagrama de la solución del método PIC.	120
6-4. Esquema de la operación <i>scatter</i> . La carga de la partícula se distribuye entre los nodos circundantes.	121
6-5. Esquema del método de Leapfrog.	124
6-6. Diagrama de flujo del método PIC-MCC.	126
7-1. Propulsor SPT-100.	128
7-2. Diagrama de flujo.	130
7-3. Condiciones de frontera.	131
7-4. Variación de los coeficientes de forma del campo magnético.	132
7-5. Distribución de la densidad de partículas neutras.	133
7-6. Tipos de contorno desde el punto de vista de las partículas.	137
7-7. Partícula reflejo inyectada cuando cruza una partícula el eje de simetría.	139
7-8. Metodología empleada.	144
7-9. Líneas de flujo y magnitud del campo magnético.	146
7-10.Campo magnético en la línea central del canal de descarga.	147
7-11.Error relativo porcentual en los primeros 15 mm del propulsor.	148
7-12.Error relativo porcentual en la región de 15-40 mm del propulsor.	149

7-13.Campo magnético importado y malla del dominio.	150
7-14.Campo magnético importado en la línea central.	150
7-15.Densidad de partículas neutras (Xenón).	151
7-16.Densidad de partículas neutras en la línea central.	151
7-17.Comportamiento de iones y electrones dentro del propulsor.	152
7-18.Potencial de plasma y temperatura de electrones en el propulsor.	153
7-19.Potencial de plasma ϕ	154
7-20.Potencial de plasma en la línea central.	154
7-21.Densidad de electrones n_e	155
7-22.Densidad de electrones en la línea central.	156
7-23.Densidad de iones n_i	156
7-24.Densidad de iones en la línea central.	157
7-25.Partículas simuladas.	157
7-26.Densidad y velocidad de iones.	158
7-27.Velocidad de los iones simuladas en la dirección Z (u_z).	159
7-28.Velocidad promedio de los iones u_z	159
7-29.Velocidad máxima de los iones u_z	160
 B-1. Semiángulo de divergencia del haz de iones de un propulsor Hall en funcionamiento.	 174

Índice de tablas

2-1. Clasificación de satélites por su masa y vida útil.	25
2-2. Subsistemas satelitales y sus funciones.	29
3-1. Sistemas de propulsión para pequeñas naves espaciales.	38
3-2. Tabla comparativa de los principales propulsores eléctricos.	42
3-3. Proceso para diseño preliminar de un sistema de propulsión.	46
4-1. Parámetros característicos de los diferentes plasmas.	49
4-2. Momentos de la ecuación de Boltzmann.	79
5-1. Estado del arte de algunos propulsores de efecto Hall para pequeñas naves espaciales.	84
5-2. Propiedades de propelentes utilizados en propulsores Hall.	94
6-1. Algoritmo general del método PIC.	118
6-2. Algoritmo de Inicialización ($t_{inicial} = 0$).	119
6-3. Algoritmo de <i>Scatter</i>	121
6-4. Algoritmo de <i>Solve</i> 1D, ES-PIC.	123
6-5. Algoritmo de <i>Gather</i>	123

6-6. Algoritmo de <i>Push</i>	125
7-1. Condiciones de operación del propulsor SPT-100.	128
7-2. Leyes de escalamiento.	136
7-3. Colisiones incluidas en la simulación.	142
7-4. Parámetros utilizados en la simulación.	145

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Historia

Desde mucho tiempo atrás, la humanidad ha observado y a la vez adorado con fanatismo a los astros. Por ejemplo, nuestros antepasados, los aztecas realizaban sacrificios humanos para alimentar periódicamente al Sol del mediodía representado por Huitzilopochtli, donde los caballeros águila se preparaban para la guerra, su muerte era una oportunidad de formar parte del brillante cortejo que acompañaba diariamente al dios solar en su recorrido desde el este hacia el cenit [78].

La idea de surcar el Universo fue un sueño milenario, donde se pueden encontrar diferentes relatos provenientes de la imaginación o ciencia-ficción de autores como Luciano de Samosata, Edgar Allan Poe y Julio Verne.

En 1883 el físico y matemático Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky empezó a explicar los principios por los cuales los cohetes podrán impulsarse y volar en el vacío del espacio, además de recomendar el uso de combustibles líquidos en 1903 que son utilizados en la actualidad, recomendó medidas que debían considerarse para que los humanos pudieran sobrevivir durante los viajes espaciales como una cámara de descompresión para que los astronautas pudieran salir a trabajar en el vacío con trajes presurizados, que de igual manera son utilizados en la actualidad. Para dar un contexto, en 1903 fue cuando los hermanos Wright realizaron su primer vuelo. A Tsiolkovsky se le considera el padre de la conquista del espacio por sus ideas precursoras y sus notables aportaciones.

La conquista del espacio se inició en 1957, cuando la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (ex – URSS) colocó en órbita el 4 de octubre de 1957 el primer

satélite artificial de la Tierra, el *Sputnik I*, una esfera de aluminio de 58 cm de diámetro y 83 kg. Un mes después, la Unión Soviética volvió a sorprender al colocar en órbita su segundo satélite *Sputnik II*, el cual llevaba al primer ser viviente, la perrita Laika. La respuesta de Estados Unidos vino el 31 de enero de 1958, al colocar en órbita al primer satélite estadounidense, llamado *Explorer I*, con un tamaño de 15 cm de diámetro y un peso de 4.8 kg.

De aquel momento en adelante, el espacio empezó a poblarse de objetos lanzados por el hombre, que resultaban cada vez de mayor peso y más complejos, con instrumentos de telemetría más sofisticados, no sólo a las proximidades de nuestro planeta, sino mucho más allá, para ir develando los secretos de nuestro Sistema Solar, mediante sondas especiales. En este aspecto, correspondió también a la Unión Soviética lanzar la primera de ellas, llamada *Luna I*, el 2 de enero de 1959 [78].

La sonda estadounidense *Pionero 10*, fue lanzada en 1973 para hacer un recorrido por el Sistema Solar, este vehículo espacial fue el primer objeto hecho por el hombre que escapó del Sistema Solar, el cual lleva consigo una placa de aluminio y oro que indica científicamente cómo son los seres que lo hicieron, de dónde proviene y desde cuándo ha viajado en el espacio, en caso de que algún ser inteligente lo pueda descifrar.

El 12 de abril de 1961 el cosmonauta Yuri Gagarin fue el primer ser humano en viajar al espacio exterior, en nave Vostok I. La respuesta de Estados Unidos fue casi inmediata, el 25 de mayo de 1961 el presidente John F. Kennedy presentó al Congreso de Estados Unidos el programa espacial que permitiría llevar al hombre a la superficie de la Luna y regresarlo a salvo a la Tierra en esa misma década, es decir antes de 1970. Sin duda la hazaña más espectacular fue la llegada del hombre a la Luna, cuando Neil Armstrong pisó el suelo lunar el 21 de julio de 1969.

Además de la Unión Soviética y Estados Unidos, otros países también dominaban ya la tecnología de los cohetes, como China, India y Japón (Agencia Espacial Japonesa) logrando avances importantes en esta tecnología. Por su parte, la Agencia Espacial Europea está desarrollando programas de gran alcance, en los que interviene varios países, donde Francia tiene un papel relevante [78].

Uno de los momentos culminantes de los programas espaciales fue el encuentro amistoso de una nave *Apolo* y una *Soyuz* a 225 km de altura. La nave soviética fue lanzada el 15 de julio de 1975. Siete horas 30 minutos más tarde se lanzó la nave *Apolo*, y 44 horas y 19 minutos más tarde, las dos naves se acoplaron con éxito. Los comandantes Leonov y Stafford se dieron un abrazo que simboliza el esfuerzo de las dos naciones más poderosas del mundo para abrir en forma conjunta el amplio camino espacial. Como parte de los experimentos, se demostró la factibilidad de

rescatar de astronautas que se encontraban dentro de una nave averiada y traerlos a salvo de regreso a la Tierra [78].

En pocos años, la tecnología espacial ha avanzado de forma acelerada por la iniciativa de la hoy desaparecida Unión Soviética y de Estados Unidos, junto con la participación cada vez mayor como Europa, India, China y Japón; aunque va en aumento la participación de otras naciones.

1.2. Justificación y motivación del estudio

En México, en la actualidad no existen muchos trabajos e investigaciones relacionados a los sistemas de propulsión, y menos que estén orientados a los sistemas espaciales [77], y tampoco se encuentra literatura ni trabajos relacionados a la simulación de los propulsores eléctricos por medio del método numérico *Particle in Cell* (PIC).

Al paso de los años el número de lanzamientos de medianos y grandes satélites han tenido un crecimiento anual bajo respecto al rápido crecimiento en los últimos años en el uso de pequeñas naves espaciales, donde el 53.2% de las pequeñas naves espaciales se encuentran en la categoría de nano- o microsátélites. Esto se debe a que los grandes satélites tienen un costo de miles de millones de dólares, mientras que los satélites más pequeños cuestan unos cientos miles de dólares, siendo más sencillos de lanzar, una producción en un menor tiempo y la posibilidad de formar constelaciones de satélites, y como consecuencia da la oportunidad de realizar misiones científicas más complicadas y versátiles.

Hoy en día, México ha sido dependiente de otros países para adquirir y contar con tecnología espacial, teniendo como limitante a los tratados internacionales que prohíben a México importar y adquirir componentes y dispositivos de calidad espacial (Reglamento Internacional de Tráfico de Armas ITAR), esto tiene como consecuencia un retraso científico y tecnológico de más de 30 años, se gasta mucho dinero en información y servicios que son rentados a otros, por lo cual, se tiene una necesidad muy grande de desarrollar nuestra propia tecnología [77].

La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) ha sido de las primeras instituciones en abarcar el área aeroespacial, con un logro reciente al abrir la licenciatura en Ingeniería Aeroespacial, independiente a éste gran hito el trabajo en propulsión se ha realizado desde tiempo atrás en la UNAM. Actualmente está formando un grupo de tecnología espacial ya que los servicios satelitales con los que cuenta la

comunidad mexicana sólo se obtienen mediante la renta, compra o por medio de colaboraciones internacionales [29, 77]. Una de las principales motivaciones en el trabajo es poder contribuir y aportar elementos para fortalecer la carrera tanto en el área aeronáutica como en aeroespacial.

La decisión de utilizar un propulsor de efecto Hall como caso de estudio, se debe a su relativa facilidad, cuenta con una amplia bibliografía y, sobre todo, existen trabajos de tesis dentro de la UNAM donde se describe el diseño y construcción [77], la caracterización [64] y la propuesta de un arreglo experimental para medir el empuje [65] del propulsor.

Por todo lo mencionado con anterioridad, la motivación de la presente tesis es dejar las bases, entendimiento de la metodología de la simulación por el método PIC, logrando cerrar el círculo para el diseño del propulsor Hall, es decir, se pueden realizar simulaciones del propulsor considerando los campos magnéticos y eléctricos junto con la interacción de las partículas para hacer análisis más detallados, y realizar un diseño basado en las simulaciones y posteriormente hacer comparaciones experimentales.

Aunado de una motivación personal de aportar en el desarrollo de nuestra propia tecnología espacial, alineado al paradigma actual, y en un futuro eliminar la dependencia de otros países logrando una mayor participación en el sector espacial.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo de la tesis

Realizar una simulación numérica con el método *Particle in Cell* (PIC) de un propulsor tipo Hall para predecir su desempeño.

1.3.2. Hipótesis

Es posible que a través de diferentes métodos de simulación numérica se pueda modelar el flujo de plasma y el campo magnético de un propulsor seleccionado para entender la física del propulsor, de esta forma se da la oportunidad de diseñar y/o modelar sistemas de propulsión eléctricos con mayor detalle.

1.3.3. Resumen del contenido de la tesis

La tesis está dividida en ocho capítulos diferentes:

- **Capítulo 1.** Conocer los objetivos de la presente tesis, así como justificaciones y motivaciones.
- **Capítulo 2.** Explorar la definición, clasificación, subsistemas y etapas de lanzamiento de un satélite, junto con la situación actual de los mismos.
- **Capítulo 3.** Explorar las ecuaciones fundamentales de la propulsión, una breve descripción de los diferentes sistemas de propulsión existentes, una breve descripción de los diferentes propulsores eléctricos, y una exploración de la selección del propulsor eléctrico.
- **Capítulo 4.** Introducción a la teoría de plasmas, donde se define el plasma y sus tres conceptos fundamentales: longitud de Debye, frecuencia de plasma y frecuencia de colisiones. Adicionalmente se aborda el movimiento y velocidad de la partícula debido a un campo magnético estático y uniforme junto con su interacción plasma-pared. Al final del capítulo se hace referencia a los métodos para describir al plasma: descripción cinética y de fluido.
- **Capítulo 5.** Descripción del funcionamiento y física del propulsor Hall, al describir las condiciones típicas de funcionamiento, así como sus componentes principales: circuito magnético, cátodo, ánodo, canal de descarga y propelente.
- **Capítulo 6.** Descripción de los diferentes métodos de simulación, y una explicación de los pasos y algoritmos principales utilizados en el algoritmo PIC: *scatter, solve, gather* y *push*.
- **Capítulo 7.** Descripción y condiciones de operación del propulsor SPT-100, explicación del método numérico utilizado, así como una explicación del campo magnético, modelo de fluido y modelo de partículas donde se describen ecuaciones de estabilidad y tamaño de celda para disminuir el tiempo de cómputo. De igual manera se mencionan las condiciones de contorno y el método de colisiones (MCC) simulados. Al final del capítulo, se analizan los resultados obtenidos de la simulación.
- **Capítulo 8.** Conocer las conclusiones y trabajo a futuro propuesto.

Capítulo 2

SATÉLITES

En este capítulo se abordará la definición, clasificación por masa y vida útil, subsistemas y etapas de lanzamiento de los satélites, con el objetivo de justificar la importancia y relevancia que han adoptado las pequeñas naves espaciales en los últimos años, siendo un excelente grupo de estudio.

2.1. Definición

En general, un satélite es cualquier cuerpo natural o artificial que se encuentra en una órbita de un cuerpo celeste.

Un satélite artificial es cualquier cuerpo fabricado por el hombre, diseñado para ser colocado en una órbita deseada con una cierta carga útil dependiendo del tipo de misión. Mientras que un satélite natural es un cuerpo que orbita planetas o estrellas, como la Luna de nuestro planeta. En el presente trabajo, la palabra satélite hace referencia a los satélites artificiales.

Un cuerpo celeste se define como un objeto simple en el espacio, que puede interactuar con otro cuerpo por la ley de gravedad, o bien, si no hay fuerzas que influyan sobre él, se mantiene como un cuerpo errante en medio del espacio como los asteroides o cometas.

2.2. Clasificación

Los satélites se pueden clasificar de diferentes maneras, principalmente se clasifican por su medio de estabilización, por el tipo de misión, por el tipo de órbita y por su masa total. En la Tabla 2-1 se muestra la clasificación por masa ya que es la más utilizada.

Tabla 2-1: Clasificación de satélites por su masa y vida útil [77].

Tipo	Masa [kg]	Vida útil
Satélites grandes	>1000	10 años a 15 años
Satélites medianos	500 a 1000	7 años a 10 años
Minisatélites	100 a 500	7 años a 10 años
Microsatélites	10 a 100	2 años a 5 años
Nanosatélites	1 a 10	4 meses a 1.5 años
Picosatélites	0.1 a 1	4 meses a 1 año
Femtosatélites	<0.1	3 meses

Los satélites CubeSat son un tipo de nanosatélites o pico-satélites utilizados para investigación, normalmente se fabrican en dimensiones estándar de aproximadamente 10 centímetros cúbicos de capacidad que es lo que se conoce como 1U (una unidad) con una masa de hasta 1.3 kg. Pueden tener un tamaño de 1U, 2U, 3U o 6U que permiten aumentar las capacidades del sistema con un tamaño reducido respecto a los satélites tradicionales.

Una nave espacial es considerada pequeña si su peso es menor a 180 kg. Los mini-, micro-, nano- y picosatélites son considerados como pequeñas naves espaciales [57].

En la siguiente gráfica (Fig. 2-1) se puede observar que el número de lanzamientos al año de medianos y grandes satélites ha tenido un crecimiento anual bajo respecto al rápido crecimiento en los últimos años en el uso de pequeñas naves espaciales, también se aprecia una tendencia en el lanzamiento de satélites de bajo peso. Desde 2011, el número de lanzamientos de pequeñas naves espaciales ha aumentado a una tasa anual aproximada del 40.8%.

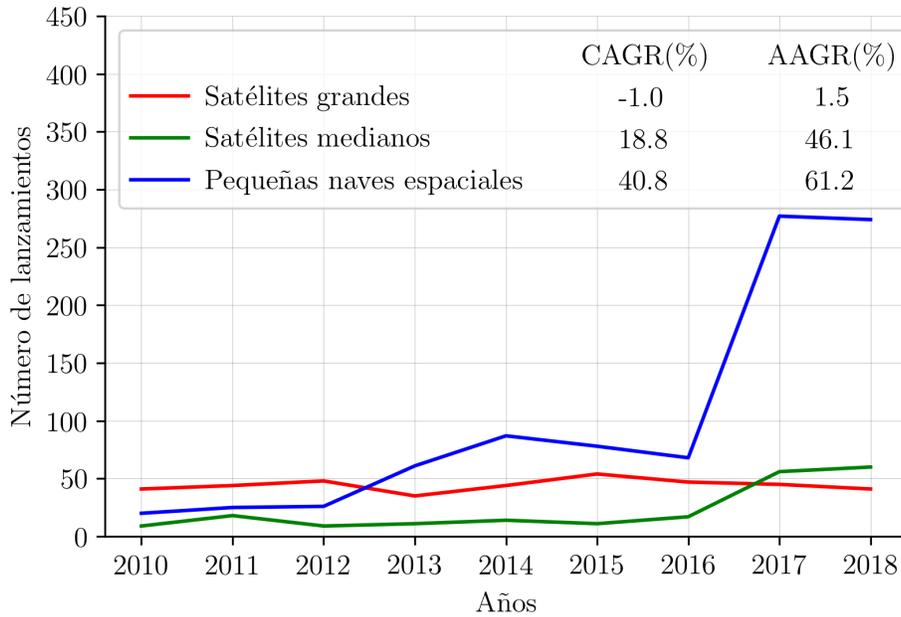


Figura 2-1: Número de lanzamientos por año de satélites grandes, satélites medianos y pequeñas naves espaciales con su respectiva tasa de crecimiento anual compuesto o CAGR por sus siglas en inglés, y la tasa de crecimiento anual promedio o AAGR por sus siglas en inglés. Datos procesados de USC Satellite Database [<https://www.ucsusa.org/nuclear-weapons/space-weapons/satellite-database>].

En la siguiente gráfica (Fig. 2-2) se muestra el número de lanzamientos de cada tipo de satélite en la categoría de pequeñas naves espaciales. Se puede observar que, en los últimos años, los fento-, nano- y microsátélites son los que mayor cantidad de lanzamientos tienen al año. Además, los nano- y microsátélites tienen una tasa de crecimiento anual promedio muy elevada a comparación de los demás tipos de satélites, es decir, están creciendo a un ritmo muy acelerado, evidenciando una tendencia. Asimismo, en promedio representan a más de la mitad (53.2%) de las pequeñas naves espaciales lanzadas, es decir, de cada 100 pequeñas naves espaciales lanzadas, 53 se encuentran en la categoría de nano- o microsátélites.

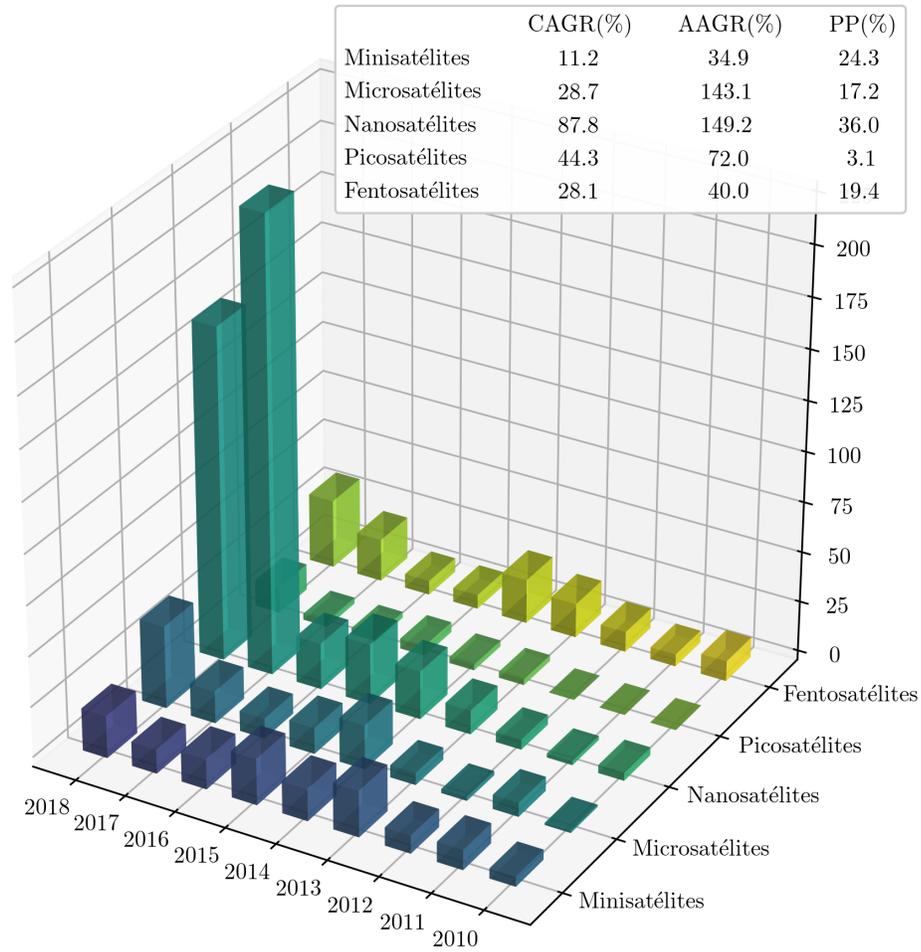


Figura 2-2: Número de lanzamientos al año de los diferentes tipos de satélites en la categoría de pequeñas naves espaciales con su respectivo CAGR, AAGR y su parte porcentual respecto al total de las pequeñas naves espaciales (PP). Datos procesados de USC Satellite Database [<https://www.ucsus.org/nuclear-weapons/space-weapons/satellite-database>].

Esto se debe a que se busca pasar de grandes satélites que tienen un costo de miles de millones de dólares a satélites más pequeños que cuestan unos cientos miles de dólares, demostrando ser confiables para aplicaciones científicas con el potencial de poder ser utilizados en el sector comercial. También, son más sencillos de lanzar debido al peso y se pueden producir en un tiempo más corto.

Además, el lanzamiento de varios de estos satélites pequeños da la posibilidad de formar constelaciones de satélites, es decir, redes amplias y completas de pequeños

satélites capaces de formar plataformas universales multifuncionales e inteligentes [47], teniendo los alcances tecnológicos y de investigación equivalentes a los satélites convencionales son masa mayor a los 1000 kg.

En el reporte de 2019 de SpaceWorks [70], se limita el rango superior de la masa de los microsátélites a 50 kg, dada la cantidad relativamente grande de actividad de desarrollo de satélites en el rango de 1 a 50 kg. En el reporte se estima que entre 2,000 a 2,800 nano- y microsátélites necesitarán ser lanzados en los próximos 5 años. Además, se prevé que la demanda de estas naves espaciales seguirá mostrando un fuerte crecimiento, con un aumento estimado de aproximadamente 250 (en 2018) a 745 (en 2023), es decir un aumento del 198 %.

La creciente accesibilidad de los nano- y microsátélites y de las naves espaciales redefinió a los principales actores de la exploración espacial, y el sector comercial pronto será responsable de la mayoría de los lanzamientos de naves espaciales de nano- y microsátélites [47].

2.3. Subsistemas de un satélite

Los satélites están conformados por varios subsistemas que realizan una función específica y tienen un objetivo específico que es el correcto funcionamiento de la misión espacial. En la Tabla 2-2 se muestran los subsistemas satelitales típicos y sus funciones.

Tabla 2-2: Subsistemas satelitales y sus funciones [77].

Subsistema	Función
Estructura mecánica	Proporcionar el soporte estructural para el montaje de otros subsistemas del satélite y también una interfaz entre el satélite y el vehículo de lanzamiento
Carga útil	Realizar el objetivo de la misión
Propulsión	Proporcionar el empuje requerido para permitir el desplazamiento del satélite y/o apoyar a las tareas de control y apuntamiento.
Potencia y suministro de energía	Recoger la energía solar, transformarla en energía eléctrica y distribuirla a otros componentes y subsistemas del satélite.
Control térmico	Regular la temperatura a bordo del satélite, asegurando la distribución de temperatura deseable a lo largo de la estructura del satélite para que los componentes se mantengan en su rango operacional.
Telemetría, seguimiento y comando (TT&C)	Monitorear y controlar el satélite de manera correcta desde la fase de despegue hasta el final de su vida operativa en el espacio, y también lograr una comunicación desde un centro de control en tierra para recibir información y ejecutar órdenes.
Posición y control de órbita	Mantener la órbita correcta del satélite y la orientación adecuada.
Comando y manejo de información	Ejecutar comandos, almacenamiento y manipulación de información de la misión espacial.

2.4. Etapas de lanzamiento de un satélite

Los satélites se colocan en el espacio por medio de un vehículo propulsado por cohetes, dicho vehículo se llama vehículo lanzador de satélites. Un vehículo lanzador se compone de varios segmentos diferentes o etapas, en las que cada etapa tiene una tarea diferente (Fig. 2-3).

En general, la estrategia habitual para la inserción de un satélite en su órbita de operación consiste en situar al satélite en una órbita de aparcamiento que es una órbita baja circular, típicamente se utiliza la propulsión química para llegar a la órbita de aparcamiento. Después, el satélite debe realizar maniobras orbitales por medio

del subsistema de propulsión (típicamente propulsión eléctrica) para colocarse en la órbita de la misión.

La inserción de un satélite en su órbita de operación rara vez se realiza directamente por el vehículo lanzador debido a que el rango de inclinaciones orbitales que se pueden conseguir directamente del lanzamiento es limitado y nunca puede ser menor que la latitud geográfica de la base del lanzamiento [77].

Principalmente, hay tres etapas en el lanzamiento de un satélite [60, 68]:

- **Primera etapa.** La primera etapa del vehículo lanzador contiene cohetes y el propelente necesario para elevar al vehículo lanzador. Durante la fase de ascenso propulsado, una vez que se consume el propelente de la primera etapa, la estructura de ésta se desprende desde del cohete principal, el cual sigue suministrando fuerza de empuje por el encendido del motor de la segunda etapa. La estructura desprendida de la primera etapa cae en una trayectoria libre sin control a la superficie de la Tierra.
- **Segunda etapa.** La segunda etapa contiene cohetes más pequeños con su respectivo propelente. Después de expulsar la masa estructural de la primera etapa se pone en marcha la segunda etapa. Al igual que la primera etapa, una vez que se consume el propelente de la segunda etapa su estructura se desprende, cayendo libremente debajo de la trayectoria de vuelo de la carga útil. La segunda etapa se utiliza para enviar el satélite al espacio.
- **Etapas superior.** La etapa superior está conectado al carenado del satélite. Este carenado es una estructura metálica que protege al satélite en todo el proceso de lanzamiento y facilita que el vehículo lanzador viaje a través de la resistencia de la atmósfera terrestre. El carenado se separa una vez que el satélite está por encima de la atmósfera de la Tierra. Los cohetes de la etapa superior se encienden después de que el satélite se encuentra en el espacio y colocan al satélite en el punto exacto requerido.

Cuando se consumen las tres etapas de los motores cohete del vehículo lanzador, el satélite se desprende de la estructura de la etapa superior para quedar en una órbita baja circular alrededor de la Tierra. El satélite es entonces enviado a una órbita de transferencia. Dicha órbita es una maniobra orbital que traslada al satélite de una órbita a otra mediante el impulso del propulsor. Una vez que el satélite alcanza la altura orbital deseada, sus subsistemas como los paneles solares y las antenas de comunicación se despliegan.

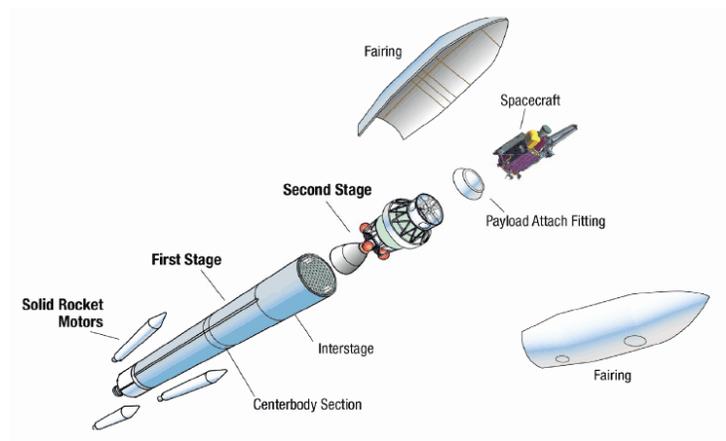


Figura 2-3: Etapas de un vehículo lanzador de satélites. Tomada de [1].

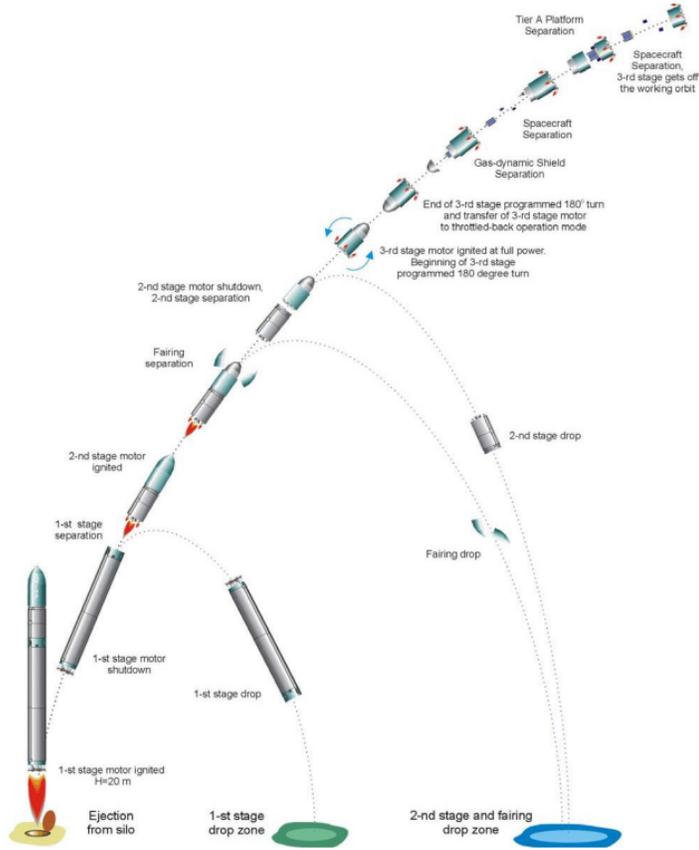


Figura 2-4: Perfil de vuelo del lanzador Dnepr. Tomada de [43].

Capítulo 3

PROPULSIÓN ELÉCTRICA

En este capítulo se abordarán las ecuaciones generales del fenómeno de propulsión como la ecuación del cohete ideal, del mismo modo se plantean las ecuaciones y conceptos fundamentales en propulsión para describir el desempeño del propulsor como el empuje y el impulso específico. En el capítulo 5, dichos conceptos son utilizados para modelar el funcionamiento del propulsor Hall, mientras que en el capítulo 7 son utilizados para evaluar los resultados obtenidos de la simulación comparado con los valores del propulsor en operaciones típicas de funcionamiento.

Además, se describen los diferentes tipos de propulsión, con el fin de explicar que la selección de un sistema de propulsión se define en función de las diferentes necesidades y requerimientos en las misiones espaciales. En el presente trabajo se profundiza en el tema de propulsión eléctrica permitiendo dar una introducción al funcionamiento de propulsores electrostáticos, familia a la cual pertenece el propulsor Hall.

3.1. Ecuaciones fundamentales

El funcionamiento del cohete está basado en la tercera Ley de Newton, a cada acción corresponde una reacción con la misma magnitud, pero con dirección opuesta. El cohete se mueve como resultado de la fuerza de reacción que resulta de expulsar parte de su masa en dirección opuesta a su movimiento, por lo tanto, el movimiento del cohete implica un cambio de su masa [2].

3.1.1. Ecuación Ideal del Cohete y Ecuación de Tsiolkovsky

Un cohete se mueve libremente en el espacio, en el tiempo t se mueve a una velocidad v respecto a la Tierra con una masa m , después de un cierto tiempo dt , el cohete expulsa una cantidad de masa dm a una velocidad de escape $-v_{ex}$ (*exhaust velocity*) respecto de sí mismo, moviéndose a una velocidad $v + dv$.

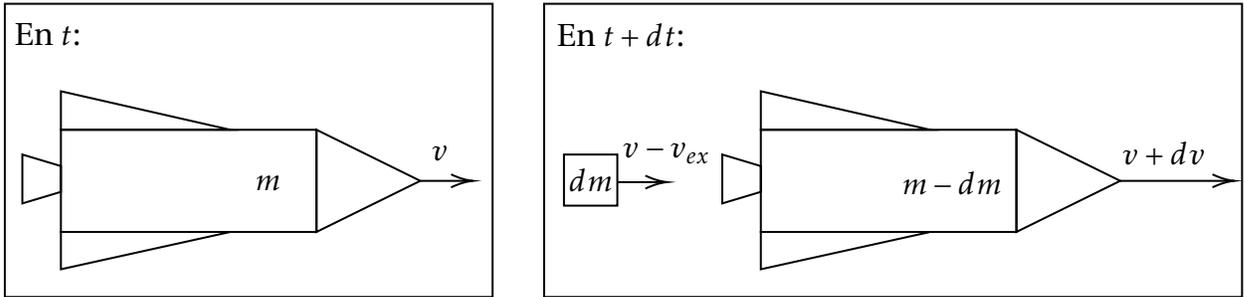


Figura 3-1: Diagrama de un cohete de masa variable en un estado inicial t y un estado final $t + dt$ moviéndose a una velocidad v .

La masa dm se mueve a una velocidad $v - v_{ex}$ respecto a la Tierra. La cantidad de momento inicial P_i y final P_f están dadas por las ecuaciones:

$$P_i = mv \quad (3-1)$$

$$P_f = (m - dm)(v + dv) + dm(v - v_{ex}) = mv + m dv - dm dv - v_{ex}dm \quad (3-2)$$

El momento lineal del cohete se conserva al no estar sujeto a fuerzas externas, de acuerdo con la segunda ley de Newton.

$$P_i = P_f \quad (3-3)$$

$$mv = mv + m dv - dm dv - v_{ex}dm \quad (3-4)$$

$$0 = m dv - dm dv - v_{ex}dm \quad (3-5)$$

El producto de $dm dv$ es muy pequeño, por lo tanto, es despreciable.

$$m dv = v_{ex}dm \quad (3-6)$$

$$ma = v_{ex}\dot{m} \quad (3-7)$$

El flujo másico en el escape es igual en magnitud y en dirección opuesta a la masa perdida por el cohete, es decir, $\dot{m} = -dm/dt$,

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{ex} \frac{dm}{dt}, \quad (3-8)$$

$$m dv = -v_{ex} dm, \quad (3-9)$$

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = -v_{ex} \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}, \quad (3-10)$$

$$-\frac{\Delta v}{v_{ex}} = \ln \frac{m_f}{m_0}. \quad (3-11)$$

De ahí se obtiene la ecuación del cohete ideal:

$$\boxed{m_f = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta v}{v_{ex}}\right)} \quad (3-12)$$

La masa final del cohete m_f es igual a la masa inicial m_0 menos la masa del propelente m_p , sustituyendo en la Ec. (3-12):

$$m_f = m_0 - m_p, \quad (3-13)$$

$$m_0 - m_p = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta v}{v_{ex}}\right), \quad (3-14)$$

$$1 - \frac{m_p}{m_0} = \exp\left(-\frac{\Delta v}{v_{ex}}\right). \quad (3-15)$$

De ahí se obtiene la ecuación de Tsiolkovsky:

$$\boxed{\frac{m_p}{m_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{v_{ex}}\right)} \quad (3-16)$$

Donde se puede representar de diferentes maneras:

$$m_p = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{v_{ex}}\right) \right] \Leftrightarrow m_p = m_f \left[\exp\left(\frac{\Delta v}{v_{ex}}\right) - 1 \right] \quad (3-17)$$

Es importante señalar que la ecuación de Tsiolkovsky no depende del tiempo, es una ecuación que relaciona cambios de velocidad con cambios de masa [2].

3.1.2. Empuje o *Thrust* (T)

El lado izquierdo de la Ec. (3-7) representa una fuerza, dicho término es la fuerza o empuje actuando en el centro de masa en dirección del movimiento. La fuerza de empuje T está dada por la siguiente expresión:

$$T = v_{ex} \frac{dm}{dt} = v_{ex} \dot{m} \quad (3-18)$$

3.1.3. Impulso específico

Aplicando una fuerza F al cohete durante un cierto tiempo t se produce un impulso, o cambio de momento lineal, igual a:

$$I = \int_0^t F dt = \int_0^t \dot{m} v_{ex} dt \quad (3-19)$$

El objetivo de la mayoría de los sistemas de propulsión es aplicar el mayor impulso posible. De la Ec. (3-19) es fácil de observar que para lograr el objetivo es necesario aplicar la fuerza durante mucho tiempo, es decir, el impulso depende de la cantidad de propelente en el cohete.

Para eliminar la dependencia de la cantidad de propelente y poder obtener el rendimiento del propulsor, se calcula el impulso específico, o impulso por unidad de peso del propelente.

$$I_{sp} = \frac{\int_0^t F dt}{W_p} = \frac{\int_0^t \dot{m} v_{ex} dt}{\int_0^t \dot{m} dt} \quad (3-20)$$

Suponiendo una velocidad de escape constante, se obtiene el impulso específico:

$$I_{sp} = \frac{v_{ex}}{g} \quad (3-21)$$

El impulso específico es el periodo en segundos durante el cual 1 kg de masa de propelente producirá un empuje de 1 kg de fuerza, es decir, indica la cantidad de tiempo que se puede ejercer la fuerza para mover la nave espacial [77].

Otra forma de escribir el impulso específico en función del empuje se obtiene al despejar la velocidad de escape de la Ec. (3-18) y sustituyéndola en la Ec. (3-21):

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}g} \quad (3-22)$$

3.2. Sistemas de propulsión

Existen diversos tipos de propulsión debido a las diferentes necesidades y requerimientos que se han tenido en las misiones espaciales. Los sistemas de propulsión más utilizados son los químicos, eléctricos y nucleares. En la Fig. 3-2 se muestra un mapa conceptual de los distintos sistemas de propulsión.

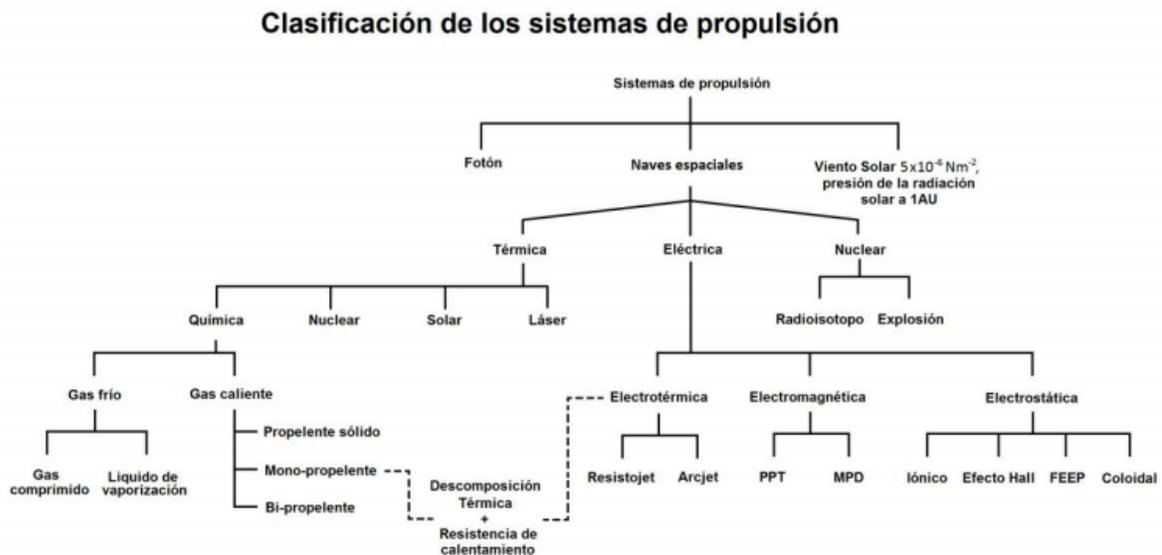


Figura 3-2: Clasificación de los distintos sistemas de propulsión [77].

La propulsión química se utiliza principalmente para propulsar cohetes al espacio, ya que generan un alto empuje, aunque tienen valores relativamente bajos de impulso específico. La propulsión eléctrica se utiliza típicamente para realizar ma-

niobras orbitales satelitales que requieren de alta precisión, ya que generan un bajo empuje, aunque tienen valores altos de impulso específico. La propulsión nuclear suele utilizarse para misiones espaciales donde se busca llegar a distancias donde la luz del Sol no puede aportar energía al satélite y deben generarse cantidades grandes de energía con poca masa.

En la Fig. 3-3 se muestra el cociente entre empuje y peso del vehículo contra la velocidad efectiva de escape para los diferentes sistemas de propulsión, asumiendo que la masa del vehículo incluye el sistema de propulsión y que la carga útil no se encuentra a bordo.

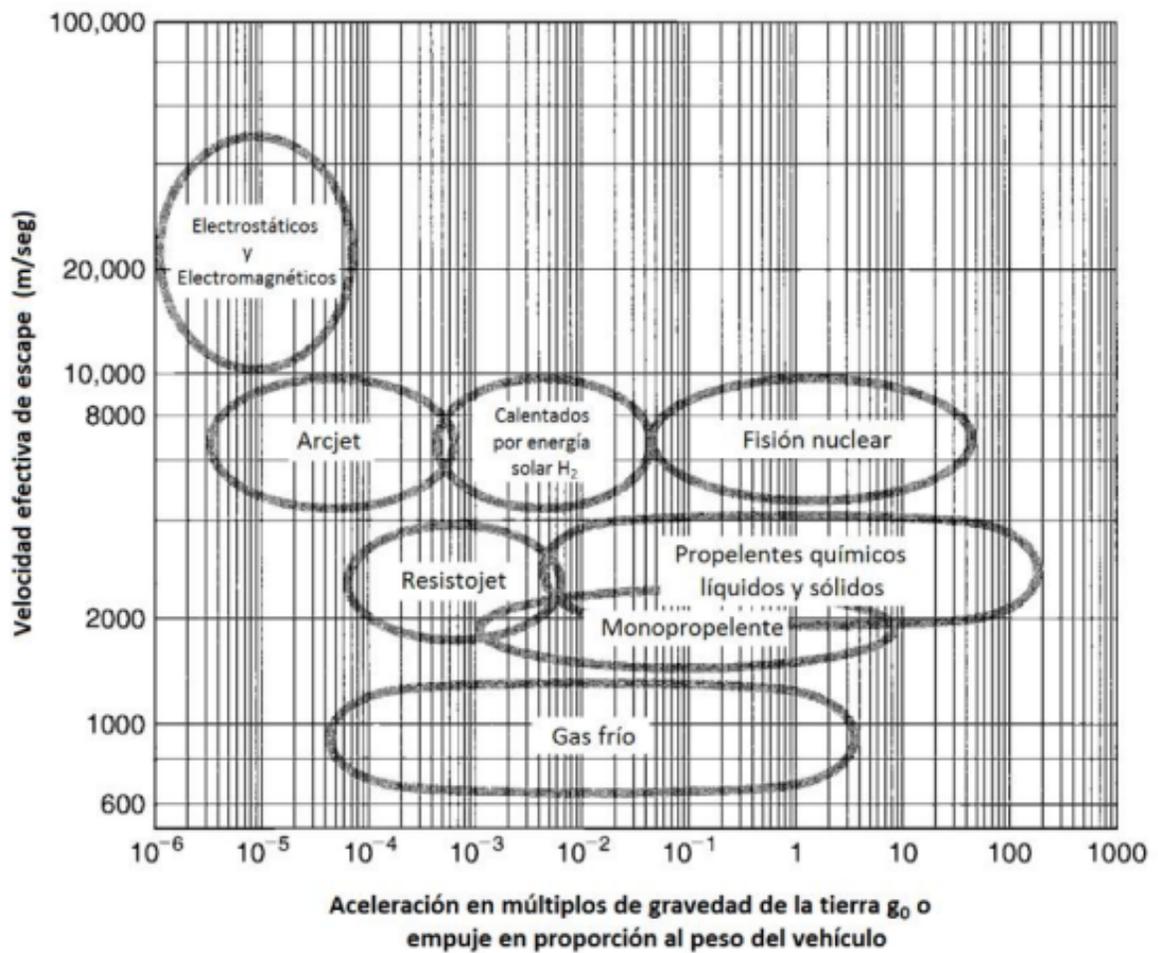


Figura 3-3: Velocidad efectiva de escape en función del cociente entre empuje y peso del vehículo [77].

El cociente entre empuje y peso del vehículo se puede interpretar como la canti-

dad de empuje en Newtons necesaria para acelerar un Newton de peso del vehículo [64]. De la Fig. 3-3 se puede notar que en contraste a la propulsión química, la propulsión eléctrica tiene valores mucho más pequeños de aceleración y en consecuencia tiene un bajo empuje, pero muestra velocidades efectivas de escape mayores que la propulsión química. En pocas palabras, la propulsión eléctrica requiere menor empuje para mover el vehículo, mientras que la propulsión química requiere de un alto empuje.

La velocidad de escape se puede interpretar como la cantidad de empuje obtenido por cada partícula de propelente que es expulsada [Ec. (3-16)]. De la Fig. 3-3 se puede notar que la propulsión eléctrica tiene una gran ventaja frente a la propulsión química ya que su velocidad de escape es muy alta [64]. Por lo tanto, en los sistemas de propulsión eléctrica se puede disminuir la masa del sistema, disminuyendo la masa del propelente, aunque también hay que considerar factores como el costo, la complejidad, el funcionamiento y la fiabilidad del sistema.

En la Tabla 3-1¹ se muestran diferentes productos para los distintos sistemas de propulsión para pequeñas naves espaciales² con su respectivo nivel de madurez de la tecnología (TRL, por sus siglas en inglés). El TRL es un método desarrollado por la NASA con el objetivo de medir el grado de madurez de una tecnología, dicho indicador tiene una escala del 1 al 9, siendo el 1 una tecnología en principios básicos y el 9 una tecnología comercializada y probada con éxito en entornos reales.

Para efectos de la Tabla 3-1, un TRL de 5 indica que el producto ha sido validado en un entorno relevante con datos experimentales validando los métodos numéricos. Los productos con un TRL menor o igual a 4 no son considerados en la tabla.

Tabla 3-1: Sistemas de propulsión para pequeñas naves espaciales [57].

Producto	Empuje	Impulso específico [s]	Nivel TRL
Hidracina	0.5 N a 30.7 N	200 a 235	9
Gas Frío	10 mN a 10 N	65 a 70	GN2/Butano 9
Propulsión alternativa (verde)	0.1 N a 27 N	220 a 250	HAN 6, ADN 9
Propulsor de plasma pulsado y de arco en vacío	1 μN a 1300 μN	500 a 3000	Teflon 7, Titanio 7
Electrospray	10 μN a 120 μN	500 a 5000	7
Propulsor Hall	10 mN a 50 mN	1000 a 2000	Xenon 7, Iodo 3
Propulsor iónico	1 mN a 10 mN	1000 a 3500	Xenon 7, Iodo 4

¹La tabla no es exhaustiva, tiene como objetivo dar un panorama general de las distintas tecnologías con su TRL.

²Una nave espacial es considerada como pequeña si su peso es menor a 180 kg. Los minisatélites (100 kg a 500 kg), microsátélites (10 kg a 100 kg), nanosatélites (1 kg a 10 kg) y picosatélites (<1 kg) son considerados como pequeñas naves espaciales.

Los productos destacados en negritas en la Tabla 3-1 son propulsores eléctricos, mientras que los restantes son propulsores químicos. Para fines de la presente tesis, se hará una breve descripción de los propulsores destacados en la siguiente sección. Ir a las referencias [71, 77] para profundizar en la descripción de los distintos propulsores.

En las secciones anteriores se describieron de manera general los diferentes sistemas de propulsión resaltando sus diferencias y aplicaciones, en la siguiente sección se profundizará en la propulsión eléctrica para que, en siguientes capítulos se pueda describir el funcionamiento del propulsor Hall.

3.3. Propulsión eléctrica

La propulsión eléctrica es la aceleración de un propelente mediante calentamiento eléctrico, y/o mediante fuerzas de campos eléctricos, y/o mediante fuerzas de campos magnéticos [77].

Los propulsores eléctricos se pueden clasificar según el método que utilizan para acelerar las partículas cargadas del propelente para generar el empuje del propulsor. Estos métodos se pueden separar en 3 categorías: electrotérmica, electrostática y electromagnética.

- **Propulsión electrotérmica.** Por medio de energía eléctrica el propelente (en forma de gas) es calentado, y luego es expulsado y acelerado por una tobera. Los más típicos son el resistojet (Fig. 3-4) y el arcjet (Fig. 3-5). Este tipo de propulsores ofrecen aumentos moderados de impulso específico en comparación con a los propulsores químicos.

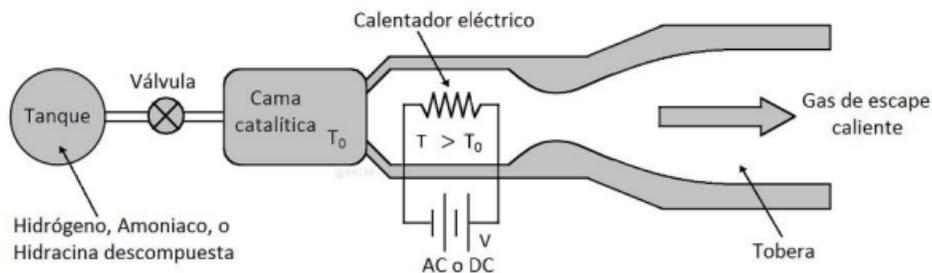


Figura 3-4: Esquema de un propulsor Resistojet [77].

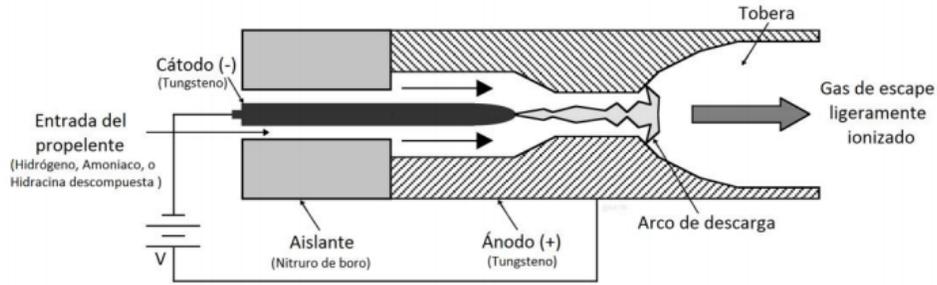


Figura 3-5: Esquema de un propulsor Arcjet [77].

- Propulsión electrostática.** El propulente (por lo general con un alto peso molecular) es ionizado por diferentes medios (p.ej., bombardeo de electrones, extracción de iones de la superficie de un metal líquido por medio de un campo electrostático fuerte) y acelerado a altas velocidades (de 30 km/s a 60 km/s) mediante la aplicación de un alto potencial eléctrico. Los más típicos son el propulsor iónico (Fig. 3-6), propulsor coloidal (Fig. 3-7) también conocido como *electrospray* y el propulsor Hall. Capaces de producir impulsos específicos muy altos con fuerzas de empuje bajas (μN a N), permitiendo una alta precisión en las misiones espaciales.

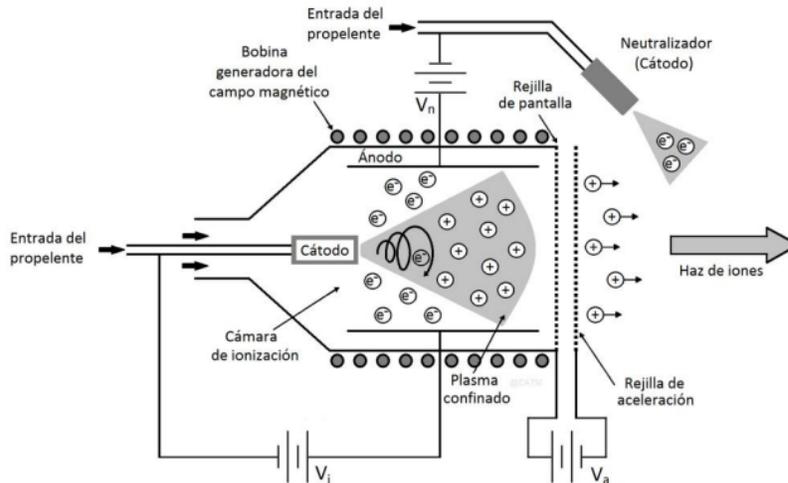


Figura 3-6: Esquema de un propulsor iónico [77].

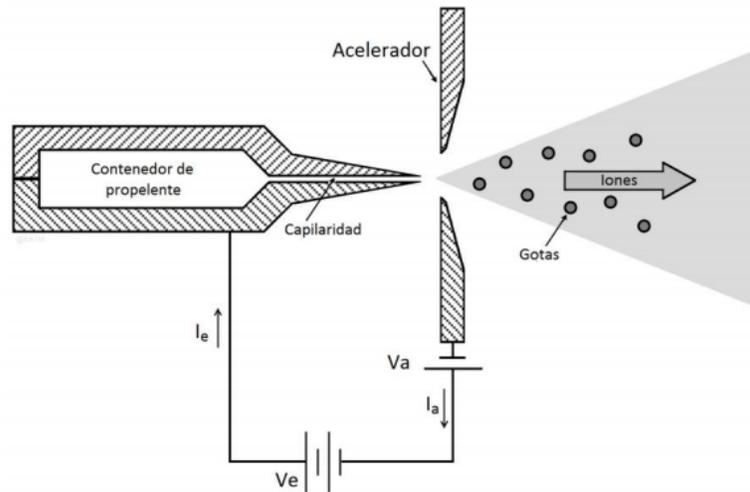


Figura 3-7: Esquema de un propulsor coloidal [77].

- Propulsión electromagnética.** El propelente es ionizado por diferentes medios y acelerado por campos magnéticos, eléctricos, o la combinación de ambos. El plasma es expulsado a una velocidad muy alta debido a la interacción de una corriente de descarga con un campo magnético (fuerza de Lorentz). Capaces de producir impulsos específicos muy altos, así como fuerzas de empuje mucho más altos (N a kN) que los propulsores electrostáticos.

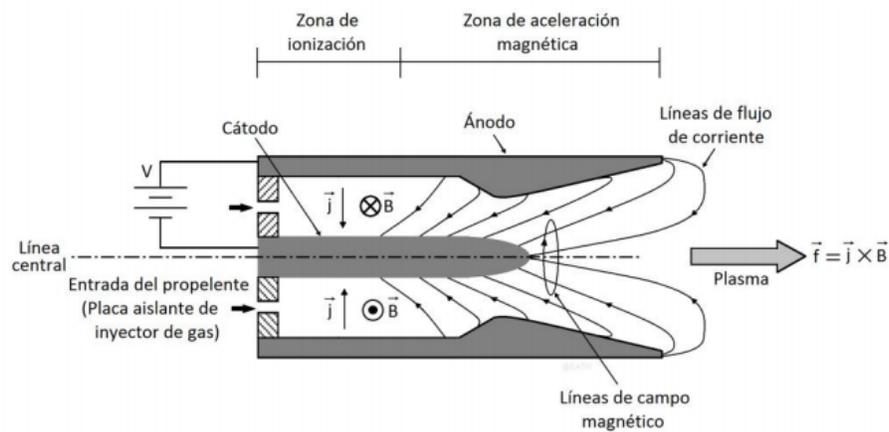


Figura 3-8: Esquema de un propulsor magnetoplasmadinámico (MPD) [77].

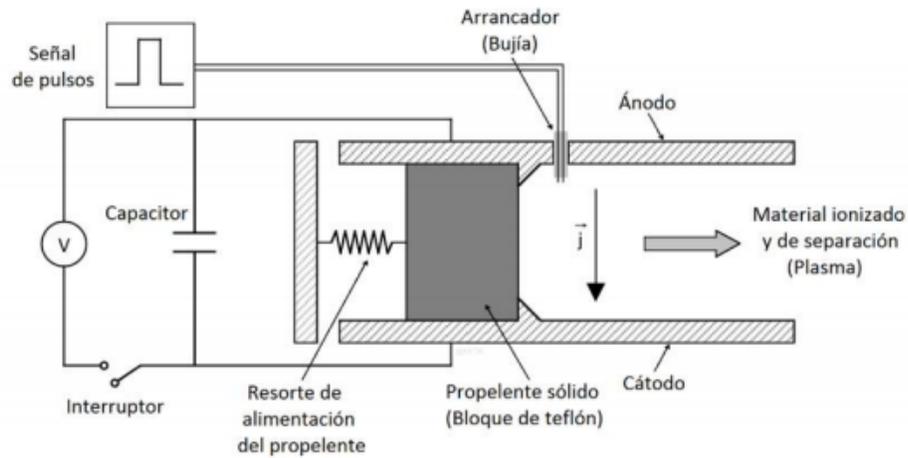


Figura 3-9: Esquema de un propulsor de plasma pulsado (PPT) [77].

3.4. Selección de un propulsor eléctrico

Esta sección tiene como objetivo comparar las distintas características y propiedades de los principales propulsores eléctricos. Para profundizar más en el tema, ir a la referencia [77].

Tabla 3-2: Tabla comparativa de los principales propulsores eléctricos [77].

Propulsor	Ventajas	Desventajas
Resistojet (electrotérmico)	Dispositivo sencillo; fácil de controlar; bajo costo; relativamente alta eficiencia; puede utilizar varios propelentes; requiere baja potencia; sistema de alimentación sencillo.	El I_{sp} es bajo; pérdida de calor; la disociación de gas; calentamiento indirecto del gas; erosión; interfaces complicadas; bajo empuje; requieren más potencia que un propulsor químico.

Arcjet (electro-térmico)	Calentamiento directo del gas; baja tensión; dispositivo relativamente sencillo; relativamente alto empuje; propelente inerte; PPU relativamente sencillo; sistema de alimentación sencillo.	Baja eficiencia; erosión a gran potencia; bajo I_{sp} ; corriente alta; cableado pesado; pérdida de calor; interfaces complicadas (especialmente las térmicas).
Iónico (electrostática)	El I_{sp} es alto; alta eficiencia; propelente inerte (xenón); propicio para misiones que requieren alto Δv ; vida útil adecuada; experiencia en vuelos.	Acondicionamiento de potencia compleja; altas tensiones; propelente único; bajo empuje por unidad de superficie; fuente de alimentación pesada; PPU muy complejo; son grandes; relativamente son motores pesados; requieren alta potencia; bajo empuje.
Hall (electrostática)	Rango de I_{sp} deseable donde el I_{sp} es alto; compacto; potencia relativamente sencilla; propelente inerte (Xenón); propicio para muchas misiones; eficiencia razonable; vida útil adecuada; experiencia en vuelos.	Propulsor único; alta divergencia de haz de iones; erosión; PPU complejo; contamina; requiere de alta potencia; bajo empuje.
FEEP (electrostática)	Ideales para misiones que requieran un control orbital muy preciso; son pequeños y compactos.	Su vida útil es limitada por la erosión de origen; problemas de contaminación.
Coloidal (electrostática)	Muy buena eficiencia; bajo TRL; costos de producción muy bajos; ideales para misiones que requieren una alta resolución en la determinación de empuje y alto rendimiento.	Su vida útil es limitada por la corrosión.
PPT (electromagnética)	Es un dispositivo sencillo; de baja potencia; propelente sólido; no hay gas o un sistema de alimentación líquida; ningún efecto de gravedad cero en el propelente; adecuado para maniobras de precisión.	Bajo el empuje; productos de reacción de Teflón son tóxicos; pueden ser corrosivos o condensables; ineficiente; PPU grande.

MPD (electro-magnética)	Puede ser relativamente simple; el I_{sp} es alto; alto empuje por unidad de área; su respuesta puede ser constante o pulsada.	Difícil de simular analíticamente; alta potencia específica; fuente de alimentación pesada; ineficientes; presentan retos de disipación de calor; difíciles de probar en la Tierra.
-------------------------	--	---

3.4.1. Comparación de propulsores eléctricos

Para la selección de un propulsor apropiado para cualquier misión se debe considerar las limitaciones de ingeniería como la energía disponible, la masa y el volumen. El uso de propulsión eléctrica limita la planificación de la misión a trayectorias de bajo empuje. Una vez identificadas y entendidas las limitaciones, se puede utilizar un cuadro comparativo de las características típicas de los propulsores eléctricos como el de la Tabla 3-2 y gráficas como las de las Figs. 3-3,3-10 para seleccionar el propulsor adecuado [80].

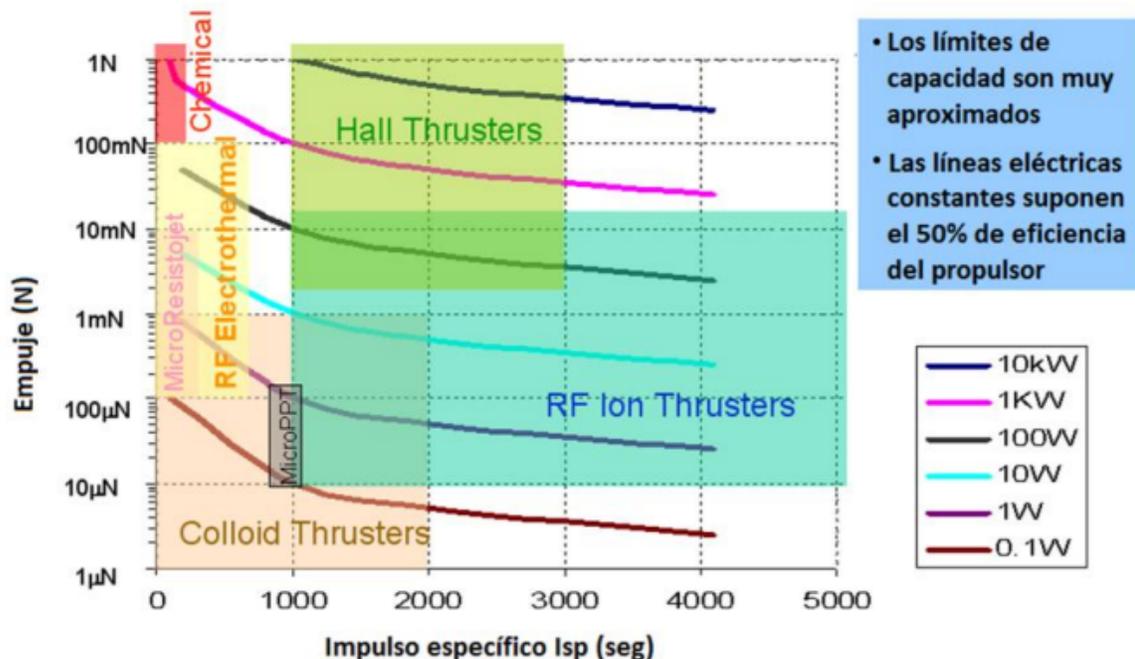


Figura 3-10: Información general de las regiones aproximadas de aplicación de diferentes sistemas de propulsión en función de impulso específico y empuje [77, 80].

El impulso específico de los propulsores eléctricos puede aumentar o disminuir variando la potencia requerida, aumentando su aplicación en distintas misiones, como se muestra en la Fig. 3-11. Muchos propulsores eléctricos en estado estacionario pueden ser operados entre el 25% y el 200% de su potencia nominal. Si la operación está fuera de los parámetros de funcionamiento nominales³ los propulsores se pueden ver perjudicados en la eficiencia eléctrica o la vida útil del propulsor.

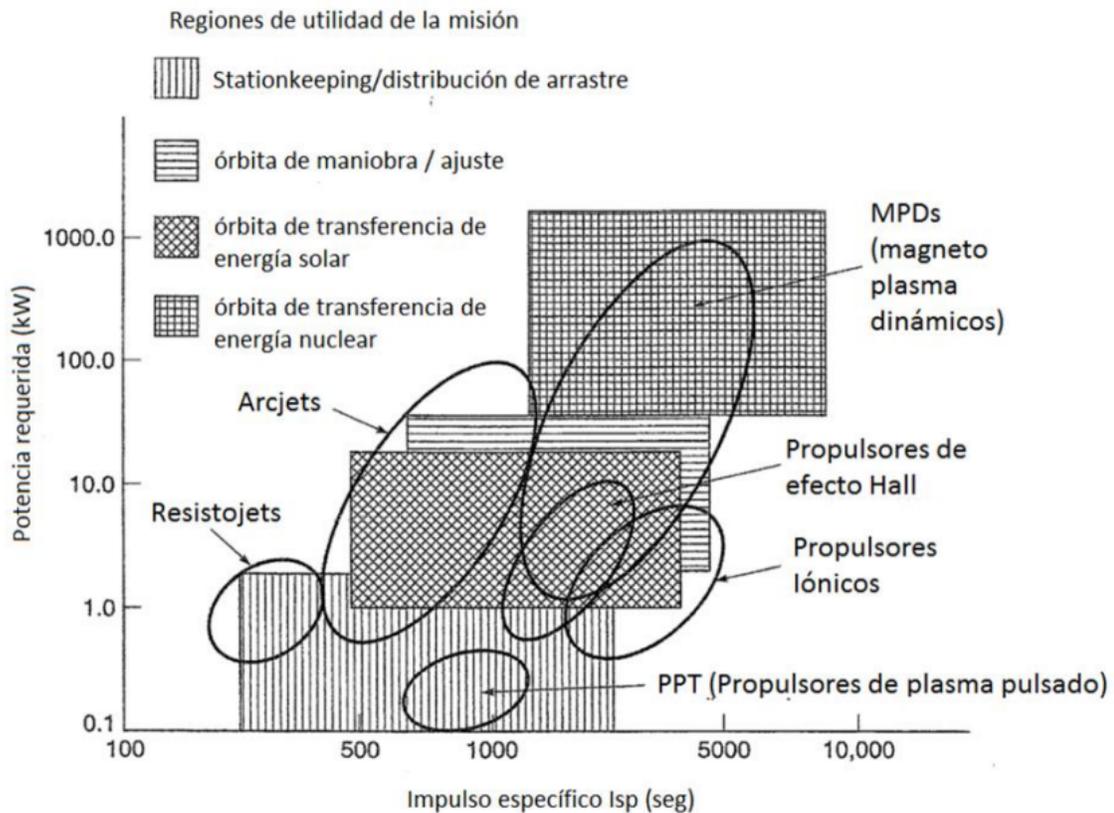


Figura 3-11: Aplicación de distintos propulsores eléctricos en función de su potencia e impulso específico [71].

3.4.2. Proceso de diseño

La Tabla 3-3 tiene como objetivo mostrar un proceso general para el diseño preliminar de un propulsor.

³El rendimiento de un propulsor es usualmente consultado para una condición nominal óptima. Generalmente, esta condición puede ser la eficiencia de conversión eléctrica, la vida útil máxima, el funcionamiento de operación más estable, o alguna combinación [77].

Tabla 3-3: Proceso para diseño preliminar de un sistema de propulsión [35].

Paso	Salidas	Comentarios
1. Definir los requerimientos de misión	<ul style="list-style-type: none"> ■ Declaración de los objetivos de la misión ■ Lista de requerimientos y limitaciones de la misión ■ Consideración del entorno político, económico e institucional 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Los objetivos de la misión incluyen las características de la órbita y de la carga útil ■ Considerar problemas de seguridad
2. Desarrollar criterios para evaluar y seleccionar sistemas	<ul style="list-style-type: none"> ■ Criterios de viabilidad/admisibilidad ■ Cifras cuantitativas de mérito ■ Cifras cualitativas de mérito 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Predeterminar los criterios de evaluación por los cuales se realiza la evaluación del sistema de propulsión
3. Desarrollar conceptos de misión alternativos	<ul style="list-style-type: none"> ■ Evaluación de soluciones anteriores ■ Selección del lugar de lanzamiento ■ Perfiles de órbita/misión ■ Maniobras de alto o bajo impulso, y el momento en que son requeridos ■ Estimar Δv o impulso 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Incluye varios conceptos que amplían las posibilidades ■ Evitar el diseño del vehículo hasta este punto
4. Definir el sistema del vehículo y seleccionar tecnologías potenciales	<ul style="list-style-type: none"> ■ Parámetros de desempeño del vehículo ■ Configuración del vehículo ■ Evaluación de soluciones anteriores ■ Requerimientos del sistema de propulsión ■ Lista de tecnologías potenciales 	<ul style="list-style-type: none"> ■ La configuración del vehículo incluye el número de propulsores, niveles de empuje del propulsor, tamaño y masa
5. Desarrollar diseños preliminares para el sistema de propulsión	<ul style="list-style-type: none"> ■ Evaluación de hardware disponible en el mercado ■ Sistema de estimación de masa ■ Sistema de configuración ■ Sistema de predicción de desempeño 	
6. Evaluar los diseños y la configuración	<ul style="list-style-type: none"> ■ Evaluación de factibilidad ■ Jerarquización de las opciones viables 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Evaluar las opciones para determinar la que mejor cumple los objetivos de la misión
7. Comparar diseños y seleccionar la mejor opción	<ul style="list-style-type: none"> ■ Punto de partida del mejor sistema ■ Documentación de los motivos 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Decidir entre iterar o partir de un concepto particular y un conjunto de opciones
8. Iterar y documentar los motivos de las elecciones	<ul style="list-style-type: none"> ■ Documentación del punto de partida si no se requirió de una iteración ■ Documento de los motivos de la iteración 	<ul style="list-style-type: none"> ■ La iteración es requerida para todos los diseños ■ Dependiendo del problema, la iteración se puede realizar en cualquiera de los pasos anteriores

Capítulo 4

TEORÍA DE PLASMAS

En este capítulo se aborda la teoría de plasmas que se divide en 3 partes principales. La primera se refiere a la deducción de conceptos fundamentales en la teoría de plasmas como la longitud de Debye, parámetro del plasma, frecuencia del plasma y frecuencia de colisiones, estos conceptos toman relevancia en los capítulos posteriores porque nos ayudan a explicar la física dentro del propulsor y por ende, nos lleva a entender con más detalle su funcionamiento para ser más críticos en los resultados observados en la simulación. Además, nos ayudarán para definir unas ecuaciones de estabilidad para la simulación.

La segunda parte se refiere al movimiento de las partículas sujetas a la acción de un campo magnético estático y su interacción con las paredes, es importante estudiarlas debido a que está fuertemente ligado al desempeño del propulsor, que se verá en los capítulos posteriores. Por último, se abordan las diferentes descripciones del plasma buscando entender sus implicaciones. Esta parte adquiere importancia porque en el presente trabajo se utiliza la descripción de fluido del plasma para simular los átomos neutros, mientras que para los iones y electrones se utiliza la descripción cinética, en el capítulo 6 se describe el método para solucionar dichas descripciones.

4.1. Introducción

Se cree que el universo está formado de energía oscura (69%), materia oscura (27%) y de materia ordinaria (1%). Todo lo que es visible en el cielo es parte de la materia ordinaria que se encuentra en forma de plasma, emitiendo radiación [17].

Desde un punto de vista científico, la materia conocida en el universo es clasificada en 4 estados: sólido, líquido, gaseoso y plasma. La materia cambia su estado a otro añadiendo energía al sistema, por ejemplo, temperatura y presión.

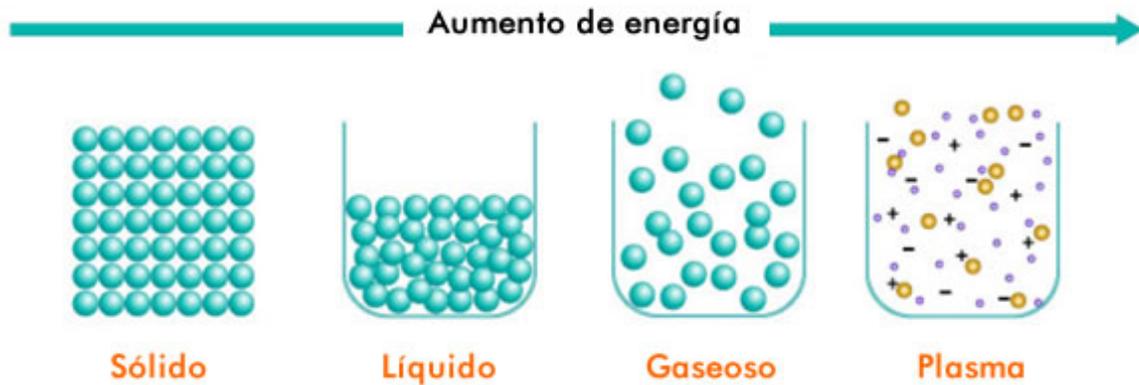


Figura 4-1: Estados de la materia.

Al aumentar la temperatura de un gas, la energía cinética de los átomos se vuelve tan alta que los átomos empiezan a colisionar, ocasionando que los electrones más externos del átomo se puedan remover, por lo tanto, la materia se vuelve una colección de iones y electrones, se podría decir que el plasma es un gas ionizado. A diferencia de los gases, el plasma es un buen conductor eléctrico, responden a fuerzas electromagnéticas, se puede confinar lejos de las paredes y tienen un comportamiento colectivo de iones y electrones.

El 99 % de la materia visible en el universo está en forma de plasma como las estrellas, además existen ejemplos en el planeta¹ como un relámpago en una tormenta eléctrica o las auroras boreales, y también hay plasmas creados por el hombre, como las lámparas de neón o los reactores de fusión nuclear que buscan reproducir la reacción que ocurre en una estrella para producir energía limpia, sustentable, sin emisión de gases invernaderos.

El plasma puede ser descrito por distintas características que ayudan a clasificarlo en diferentes tipos. En la Tabla 4-1 se muestra un ejemplo con algunos parámetros característicos del plasma, los cuales varían por varios órdenes de magnitud.

¹Son pocos los ejemplos de plasma que se pueden ver en la vida cotidiana, pues la mayoría de las cosas en la Tierra están en un equilibrio térmico.

Tabla 4-1: Parámetros característicos de los diferentes plasmas [62].

Plasma	Densidad n [m^{-3}]	Temperatura T [keV]	Longitud de Debye λ_{De} [m]
Interestelar	10^3	10^{-5}	0.7
Viento solar	10^7	10^{-2}	7
Ionosfera	10^{12}	10^{-4}	2×10^3
Corona solar	10^{12}	0.1	0.07
Propulsor iónico	10^{15}	10^{-3}	4×10^{-4}
Tokamak	10^{20}	1	7×10^{-5}

4.2. Ionización

La cantidad de ionización esperada para un gas en equilibrio térmico está dada por la ecuación de Saha [17].

$$\frac{n_i}{n_e} \approx 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_i} \exp\left(\frac{-U_i}{K_B T}\right) \quad (4-1)$$

Donde n_i y n_n son respectivamente la densidad de átomos ionizados y neutros por metro cúbico, T es la temperatura del gas en grados Kelvin, K_B es la constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} J/K), y U_i es la energía de ionización del gas, es decir, la mínima cantidad de energía para remover el electrón más externo de un átomo.

Para aire ordinario a temperatura ambiente se puede considerar: $n_n \approx 3 \times 10^{25} m^{-3}$, $T = 300$ K, $U_i = 14.5$ eV (para el nitrógeno que es elemento más abundante en la atmósfera), donde $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}$ J. La razón de ionización que se obtiene es muy baja: $n_i/n_n \approx 10^{-122}$. Por lo tanto, la ionización prácticamente no se da en las condiciones naturales de la atmósfera dentro de la Tierra [17, 64].

El significado físico de la ecuación de Saha se analiza a continuación. Un átomo es ionizado cuando sufre una colisión de suficiente energía como para soltar unos de sus electrones. En un gas frío tales colisiones ocurren con poca frecuencia, pues el átomo debe estar acelerado a una energía mucho mayor que la promedio en el gas por medio de una serie de colisiones favorables. El factor exponencial en la ecuación expresa que el número de átomos con alta velocidad cae exponencial-

mente con $U_i/K_B T$. Una vez que el átomo ha sido ionizado, éste permanece cargado hasta que se encuentre a un electrón, pues éste se recombinará fácilmente con el átomo ionizado volviéndolo neutro de nuevo. La tasa de recombinación depende de la densidad de electrones, la cual equivale a n_i . Esta es la razón por la cual el plasma existe en el medio interestelar, pues hay un valor muy bajo de n_i , por lo tanto la tasa de recombinación es muy baja y permite la existencia de plasma [17, 64].

4.3. Definición de un plasma

Se puede definir un plasma de la siguiente manera:

“Un plasma es un gas ionizado, cuasineutral, que muestra un comportamiento colectivo” [21].

El término de cuasineutralidad se aborda más adelante en el trabajo. A continuación, se explica lo que se entiende por comportamiento colectivo.

Un plasma contiene partículas cargadas, a medida que se estas cargas se mueven pueden generar concentraciones locales de carga positiva o negativa, que dan lugar a campos eléctricos, así también generan corrientes eléctricas y, por lo tanto, campos magnéticos. Estos campos afectan el movimiento de otras partículas cargadas más lejanas.

Es decir, el comportamiento colectivo consiste en que cualidades particulares microscópicas de muchas partículas son capaces de reflejarse en propiedades y comportamientos macroscópicos. Se debe entender que los movimientos ocurren no sólo en condiciones locales sino también en el estado del plasma en regiones lejanas.

Para entender la definición descrita del plasma es necesario definir tres conceptos: longitud de Debye, frecuencia del plasma y la frecuencia de colisiones.

4.3.1. Longitud de Debye

Imagínese un plasma inicialmente neutro, es decir, el número de cargas negativas es igual número de cargas positivas. Al introducir una carga de prueba q_T en el plasma, se genera un potencial electrostático alrededor de q_T .

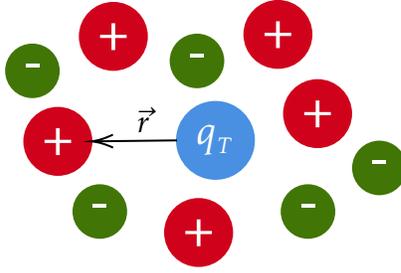


Figura 4-2: Carga de prueba q_T inmersa en un plasma neutro.

Al ser un plasma inicialmente neutro se obtiene que la densidad de electrones es igual a la de iones y que a su vez es igual a la densidad inicial ($n_e = n_i = n_0$). Asumiendo que el número de cargas positivas por ion es igual a 1 ($Z = 1$). El potencial ϕ alrededor de la carga q_T se obtiene resolviendo la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4-2)$$

donde ρ representa la densidad de carga volumétrica ($\rho = q/V$), q es la carga encerrada en el sistema. Por lo tanto ρ se puede expresar como la suma de la carga de prueba en $\vec{r} = 0$ más las cargas de los iones y electrones que dependen de \vec{r} , por lo tanto [21]:

$$\rho = q_T \delta(\vec{r}) + en_i(\vec{r}) - en_e(\vec{r}) \quad (4-3)$$

donde e representa la carga del electrón y $\delta(\vec{r})$ representa la delta de Dirac, que tiene satisface las condiciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1; \quad \delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Siendo $\delta(x)$ una función que tiende al infinito cuando $x = 0$ y para cualquier otro valor de x es igual a cero. La función delta de Dirac no es propiamente una función ya que no satisface ambas condiciones, sino que es una distribución o función generalizada, es decir, que es localmente integrable. Puede ser descrita como una secuencia de funciones que tienen un límite definido cuando se integra, dicha secuencia de funciones tienden a una forma de ancho infinitesimal, pero de área unidad (Fig. 4-3).

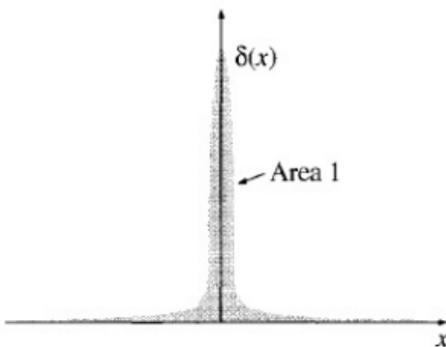


Figura 4-3: Representación gráfica de la delta de Dirac $\delta(x)$. Tomada de [3].

En este caso en particular, se utiliza la delta de Dirac para describir la densidad de carga volumétrica asociada a una partícula puntual (carga de prueba) ubicada en la posición $\vec{r} = 0$. El valor de $\delta(\vec{r})$ para las partículas en distintas posiciones ($\vec{r} \neq 0$) será igual a cero. Por lo tanto, se deben de agregar los efectos de las cargas de los iones y electrones.

Sustituyendo la densidad de carga volumétrica [Ec. (4-3)] en la ecuación de Poisson [Ec. (4-2)]:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} [q_T \delta(\vec{r}) + en_i(\vec{r}) - en_e(\vec{r})] \quad (4-4)$$

Al introducir la carga de prueba, los iones al ser más pesados se considera que no tienen movimiento, por lo tanto como una aproximación, se puede decir que la densidad de iones será constante y es igual a la densidad inicial $n_i = n_0$. En cambio, los electrones son ligeros y por lo tanto si tienen movimiento. La siguiente ecuación describe el movimiento de los electrones:

$$m_e \frac{d\vec{u}_e}{dt} = -e\vec{E} - \frac{1}{n_e} \nabla P_e = -e\vec{E} - \frac{1}{n_e} \nabla(n_e K_B T_e) \quad (4-5)$$

La ecuación de movimiento del electrón está dada por la masa del electrón m_e y su aceleración, igualada a las fuerzas debidas al campo eléctrico y de presión actuando sobre el electrón. La presión se puede escribir en función de la temperatura y la densidad por medio de la constante de Boltzmann, es decir $P_e = n_e K_B T_e$.

Para simplificar la ecuación anterior, se considera que la masa del electrón es de-

masiado pequeña, por lo tanto $m_e \rightarrow 0$. El campo eléctrico está dado por la ecuación $\vec{E} = -\nabla\phi$. La temperatura de los electrones se mantiene constante. Al considerar estas hipótesis en la ecuación anterior:

$$e\nabla\phi - T_e \frac{\nabla n_e}{n_e} \approx 0 \quad (4-6)$$

Al resolver la ecuación anterior, se obtiene la relación de Boltzmann (Ecuación 4-7) que relaciona la densidad de electrones con la densidad inicial afectada por una perturbación. En caso de no existir ninguna perturbación (sin presencia de un campo eléctrico) la densidad de electrones sería igual a la densidad inicial.

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{K_B T_e}\right) \quad (4-7)$$

Al sustituir n_e por la relación de Boltzmann en la Ecuación 4-4:

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[q_T \delta(\vec{r}) + en_0(\vec{r}) - en_0 \exp\left(\frac{e\phi}{K_B T_e}\right) \right] \quad (4-8)$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{q_T \delta(\vec{r})}{\epsilon_0} + \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{K_B T_e}\right) - 1 \right] \quad (4-9)$$

Nótese que si se supone una perturbación muy pequeña $e\phi/K_B T_e \ll 1$, el segundo término de la Ecuación (4-9) tendrá un valor aproximado de cero, y sólo quedará un término lineal. Por lo tanto, se puede expandir el segundo término en una serie de Taylor.

$$\nabla^2\phi = -\frac{q_T \delta(\vec{r})}{\epsilon_0} + \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 K_B T_e} \phi \quad (4-10)$$

Las dimensiones del segundo término de la Ecuación (4-10) sin considerar el potencial, muestran la inversa de una longitud al cuadrado [L^{-2}]. Si se invierte y se obtiene la raíz cuadrada de dicho término, se obtiene la longitud de Debye:

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 K_B T_e}{e^2 n_0}} \quad (4-11)$$

La Ecuación (4-10) queda escrita como:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q_T \delta(\vec{r})}{\epsilon_0} + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \phi \quad (4-12)$$

La solución de la ecuación anterior en coordenadas esféricas es:

$$\boxed{\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_T}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_{De}}\right)} \quad (4-13)$$

En la Ec.(4-13) se puede observar que el potencial electrostático para una carga de prueba q_T en el vacío, es modificado por la presencia del plasma. Es afectado por una función exponencial decreciente $f(t) = f(0) \exp(-\lambda t)$ donde λ es el coeficiente de amortiguamiento que dicta la rapidez del decrecimiento de la función, de tal manera que $\lambda = 1/\lambda_{De}$. Cuanto mayor sea λ la función decrece con mayor rapidez, y cuanto menor sea λ_{De} mayor será λ . El efecto que genera el plasma es un blindaje o apantallamiento del potencial, por lo tanto, el apantallamiento se observa como un amortiguamiento del potencial.

En la Fig. 4-4 se muestra el efecto del apantallamiento del potencial de Coulomb, dicho apantallamiento se vuelve importante en distancias r cercanas a la longitud de Debye. En pocas palabras, el efecto del plasma es generar un apantallamiento del potencial de una partícula cargada en el vacío; conocido como apantallamiento de Debye.

Se puede ver que mientras la densidad de partículas aumenta, la longitud de Debye disminuye, pues cada capa externa tiene más y más electrones. La temperatura de electrones T_e es aquella que define la longitud de Debye, pues los electrones crean el apantallamiento de Debye; al ser menos masivos que los iones, se mueven creando un exceso o déficit de carga negativa [64].

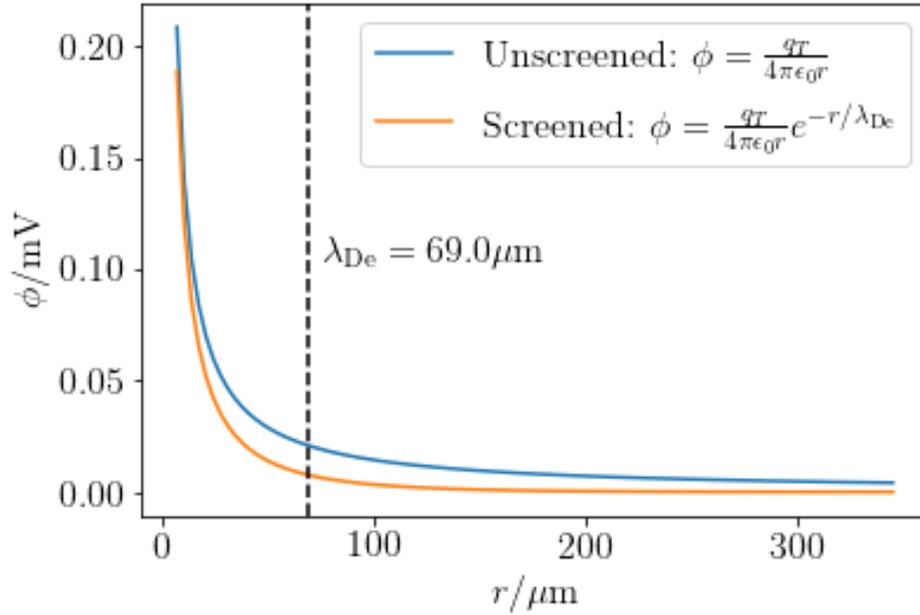


Figura 4-4: Apantallamiento de Debye. Tomada de [18].

La Ecuación (4-11) puede ser escrita en diferentes formas; para la temperatura T_e en grados Kelvin y la densidad n_0 en partículas por m^3 :

$$\lambda_{De} \approx 69 \sqrt{\frac{T_e}{n_0}} \quad (4-14)$$

Y para la energía $K_B T_e$ en eV y la densidad n_0 en partículas por m^3 :

$$\lambda_{De} \approx 7 \times 10^3 \sqrt{\frac{K_B T_e}{n_0}} \quad (4-15)$$

Es importante comprender el concepto de apantallamiento de Debye porque ayuda a describir la interacción del plasma con las paredes, y en este caso particular, la vida útil de propulsor depende de este concepto, ya que los iones dentro de la cámara son acelerados hacia la pared, dando lugar a la erosión de las paredes. Para comprender mejor el apantallamiento de Debye, imagínese que se introducen dos esferas metálicas conectadas a una batería dentro de un plasma de tal manera que una esfera esté cargada positivamente y la otra negativamente, de manera que se pueda producir un campo eléctrico dentro del plasma (Fig. 4-5).

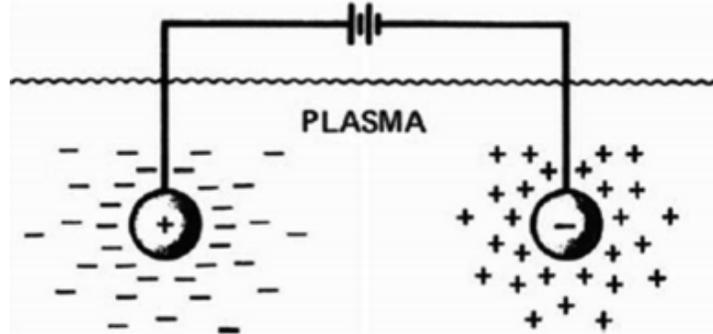


Figura 4-5: Apantallamiento de Debye en esferas introducidas en un plasma. Tomada de [17].

Esto implica que las esferas atraerán las partículas de carga opuesta, es decir, se formará una nube de electrones alrededor de la esfera cargada positivamente, y se formará una nube de iones alrededor de la esfera cargada negativamente. Existirá el mismo número de cargas tanto en cada esfera como en cada nube de partículas circundantes, por lo que habrá un blindaje o apantallamiento de cada esfera y no habrá campos eléctricos presentes en el plasma fuera de las nubes de carga. La longitud de Debye representa el espesor de la nube de carga.

La cuasineutralidad se puede definir entonces bajo el concepto de longitud de Debye. Si las dimensiones L del sistema en el que está inmerso el plasma son mucho más grandes que la longitud de Debye del plasma, entonces cualquier concentración de carga que surja dentro del plasma, o potencial externo que sea introducido al sistema, generará un apantallamiento de Debye a una distancia corta comparada con L , dejando al plasma libre de potenciales o campos eléctricos grandes. En distancias mayores o cercanas a la longitud de Debye, es decir, fuera del apantallamiento, la perturbación tiende a cero, por lo tanto, la densidad de electrones también tiende a la densidad inicial; y un pequeño cambio en la carga eléctrica dentro del plasma puede generar potenciales del orden $K_B T_e / q$. En estas condiciones el plasma es "cuasineutro", es decir, $n_e \simeq n_i \simeq n$, donde n se puede definir como la densidad del plasma. Por lo tanto, el plasma es neutro en cuanto a su carga promedio, pero no lo suficientemente neutro como para no presentar fuerzas electromagnéticas colectivas [17, 64].

Como ya se mencionó, la longitud de Debye aumenta al disminuir la densidad, pero si la densidad en un gas ionizado es tan baja que no hay suficientes cargas en las dimensiones del plasma como para garantizar un comportamiento colectivo, este gas ionizado no será un plasma. Por lo tanto, un criterio requerido para que un gas ionizado sea plasma es que:

$$\lambda_{De} \ll L \quad (4-16)$$

4.3.2. Parámetro del plasma

El apantallamiento de Debye es el resultado del comportamiento colectivo, y se necesita una gran densidad de partículas cargadas en el plasma, pues si hubiera pocas partículas el enfoque estadístico utilizado en el apantallamiento de Debye ya no sería válido. Para entender la cantidad de partículas atrapadas dentro de la longitud de Debye, se utiliza un volumen conocido como esfera de Debye (también se puede utilizar un cubo, conocido como cubo de Debye) cuyo radio es la longitud de Debye.

El número de partículas dentro de la esfera de Debye se obtiene al multiplicar la densidad del plasma n por el volumen de la esfera:

$$N_D = n \left(\frac{4}{3} \pi \lambda_{De}^3 \right) \quad (4-17)$$

El término $n\lambda_{De}^3$ es conocido como parámetro de plasma Λ . Al tener una gran densidad de partículas dentro de la esfera de Debye, se presenta el comportamiento colectivo y estadístico característico del plasma [64]. Por lo tanto, para que un gas ionizado sea un plasma debe cumplir con la condición:

$$N_D \gg 1 \quad (4-18)$$

O bien,

$$\Lambda = n\lambda_{De}^3 \gg 1 \quad (4-19)$$

Algunos autores definen al parámetro de plasma g como la inversa de N_D :

$$g \equiv \frac{1}{N_D} \ll 1 \quad (4-20)$$

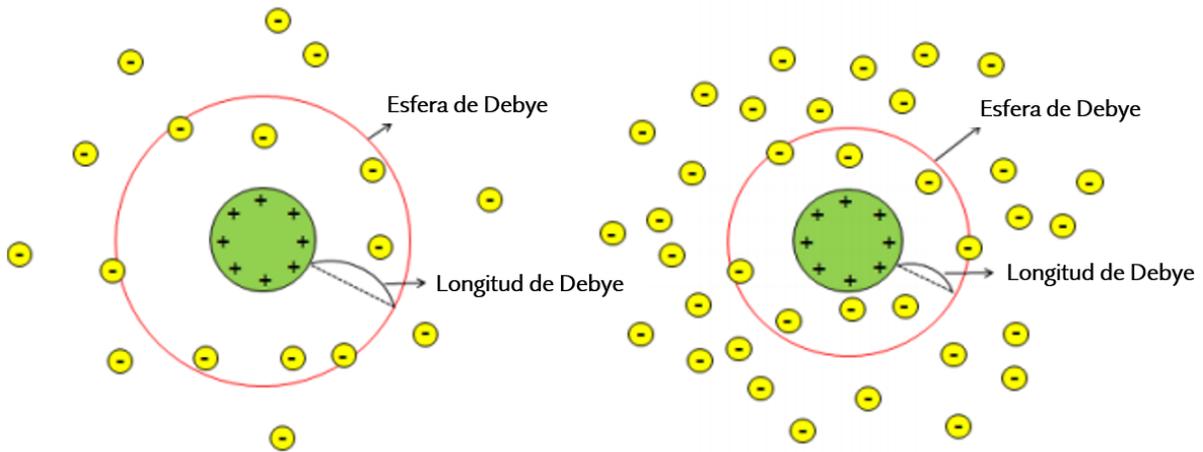


Figura 4-6: Esfera de Debye. La longitud de Debye aumenta al disminuir la densidad de partículas cargadas.

4.3.3. Frecuencia del plasma

La frecuencia de plasma es un parámetro importante para definir el plasma, en los siguientes capítulos se utilizará para definir el parámetro Hall, y también para describir unas ecuaciones de estabilidad que ayudarán para acelerar la ejecución de la simulación.

Una de las propiedades fundamentales del plasma es su tendencia a permanecer eléctricamente neutro, y que cualquier pequeño cambio local de su neutralidad resultante de la separación de cargas genera campos eléctricos y estos mueven a los electrones a sus posiciones originales. La inercia resultante de estas fuerzas eléctricas hace que los electrones oscilen alrededor de la región inicialmente cargada. Como estas oscilaciones son a muy altas frecuencias, en un promedio temporal la cuasineutralidad se conserva [64].

Considérese un estado inicial estacionario en el que se tiene una densidad de electrones n_0 . También asúmase que los iones se encuentran fijos, con la misma densidad de electrones $n_e = n_i = n_0$. Los electrones se encuentran a una distancia Δx de los iones, como se muestra en la Fig. 4-7.

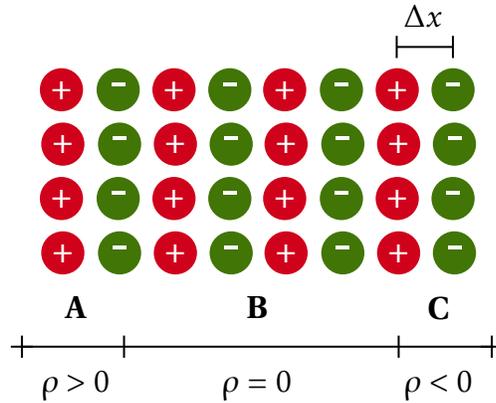


Figura 4-7: Estado inicial estacionario.

En el sistema existen 3 regiones, la región A tiene una carga positiva, en la región B la carga es igual a cero y en la región C la carga es negativa. Los electrones tenderán a moverse hacia los iones, causando un movimiento oscilatorio de los electrones con respecto a los iones que se encuentran fijos. El objetivo es calcular la frecuencia de oscilación debido al campo eléctrico generado por las cargas en cada región.

Por medio de la ley de Gauss se calcula el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4-21)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4-22)$$

Si $E = 0$ y $\rho = en_0$, reescribiendo la ecuación anterior:

$$E = \frac{en_0 \Delta x}{\epsilon_0} \quad (4-23)$$

La ecuación de movimiento para un electrón en presencia de un campo eléctrico en la dirección x está dada por:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_x \quad (4-24)$$

Sustituyendo el campo eléctrico de la Ecuación (4-23) en la Ecuación (4-24) y despejando, resulta que:

$$\frac{d^2x}{d^2t} + \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \Delta x = 0, \quad (4-25)$$

$$\frac{d^2x}{d^2t} + \omega_p^2 \Delta x = 0. \quad (4-26)$$

Que es la ecuación del oscilador armónico, donde ω_p es la frecuencia del plasma.

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (4-27)$$

Al dividir y multiplicar por $T_e K_B$, la Ecuación (4-27) se puede escribir como:

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 T_e K_B} \frac{T_e K_B}{m_e}, \quad (4-28)$$

$$\omega_p = \frac{1}{\lambda_{De}} \sqrt{\frac{T_e K_B}{m_e}}. \quad (4-29)$$

La expresión dentro de la raíz cuadrada es un parámetro llamado velocidad térmica de los electrones v_{th} .

$$v_{th} = \sqrt{\frac{T_e K_B}{m_e}} \quad (4-30)$$

La frecuencia del plasma se puede escribir en función de la longitud de Debye y de la velocidad térmica de los electrones:

$$\omega_p = \frac{v_{th}}{\lambda_{De}} \quad (4-31)$$

La frecuencia del plasma también puede ser escrita en Hertz, para la densidad n_0 en partículas por cm^3 , con la siguiente ecuación:

$$f_p = 8980\sqrt{n_0} \text{ Hz} \quad (4-32)$$

4.3.4. Frecuencia de colisiones

Imagínese que se tiene una densidad de partículas objetivo n_{target} , e introducimos una partícula (partícula entrante) con una cierta velocidad de entrada v_{in} . Cada partícula objetivo tiene una sección transversal σ , como se muestra en la Fig. 4-8.

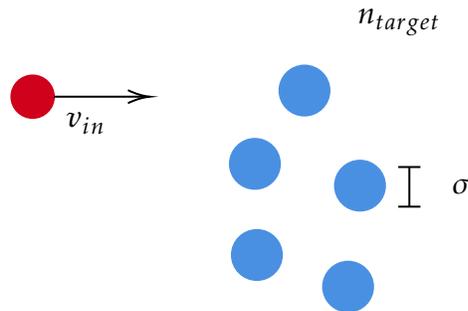


Figura 4-8: Partícula entrante con una velocidad v_{in} .

La frecuencia de colisiones ν_{col} es proporcional a la densidad de partículas objetivo y a la sección transversal de cada partícula objetivo:

$$\nu_{col} = n_{target}v_{in}\sigma \quad (4-33)$$

La partícula entrante al moverse a través del plasma puede tener colisiones con partículas neutras y cargadas. La frecuencia de colisión con partículas neutras está en dada por:

$$\nu_{col} = n_n v_{th,e} \pi a_0^2 \quad (4-34)$$

donde n_n es la densidad de partículas neutras objetivo, la velocidad de entrada puede aproximarse como la velocidad térmica de los electrones $v_{th,e}$, y la sección transversal puede aproximarse a la de un átomo, donde a_0 es el radio de Bohr.

La partícula entrante al interactuar con partículas cargadas sufre una desviación en su trayectoria debido a la fuerza de Coulomb.

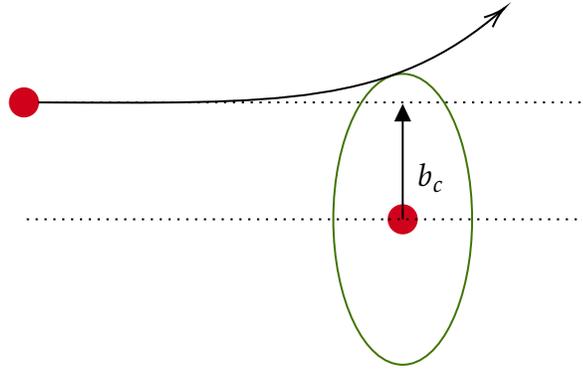


Figura 4-9: Colisión de Coulomb debido a la interacción de cargas iguales.

Para estimar la distancia de aproximación más cercana b_c en la cual la partícula entrante tiene una desviación considerable, se requiere que la energía de interacción de Coulomb y cinética sea comparable:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{b_c} \sim mv_{th,e}^2 \quad (4-35)$$

La frecuencia de colisión con partículas cargadas está dada por:

$$\nu_{col} = \frac{n_0 e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v_{th,e}^3} \quad (4-36)$$

En términos de la sección transversal y la de densidad de partículas objetivo se define el camino libre medio entre colisiones de Coulomb:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (4-37)$$

4.3.5. Conclusión de la definición del plasma

Para entender la definición de un plasma, se definieron 3 conceptos: la longitud de Debye, la frecuencia de plasma y la frecuencia de colisión.

El plasma es globalmente neutro cuando su tamaño es mayor que la longitud de Debye, y por otro lado, muestra un efecto colectivo cuando el número de partículas en una esfera de Debye es mucho mayor que 1. Bajo esta condición las partículas de un gas ionizado no interactúan a través de la interacción uno a uno o a través de la colisión uno a uno, sino a través del campo eléctrico y magnético.

4.4. Movimiento de la partícula

4.4.1. Campo magnético estático y uniforme

A continuación, se estudia la trayectoria que tendrá una partícula cargada bajo la influencia de un campo magnético estático y uniforme, sin la presencia de un campo eléctrico.

Partiendo de la ecuación de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4-38)$$

Si se considera un campo electrostático ($\vec{E} = 0$), y la fuerza como el producto de la masa por el cambio de velocidad con respecto al tiempo (2da Ley de Newton), se obtiene:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4-39)$$

La solución a la Ecuación (4-39) se puede hacer resolviendo todos los componentes de la ecuación en todas sus direcciones, o estudiando las propiedades del movimiento de la partícula sujeto a la fuerza de Lorentz. En este trabajo se realizará el segundo método.

La variación de la energía cinética es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4-40)$$

Despejando el cambio de la velocidad con respecto al tiempo de la Ecuación (4-39) y sustituyendo en la Ecuación (4-40):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = m\vec{v} \cdot \frac{q(\vec{v} \times \vec{B})}{m} \quad (4-41)$$

Dado que la fuerza de Lorentz es siempre perpendicular a la dirección del movimiento, el producto punto entre \vec{v} y $(\vec{v} \times \vec{B})$ es igual a cero, por lo tanto la variación de la energía cinética también es igual a cero, por lo que la velocidad v^2 es una constante respecto al tiempo.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0 \quad (4-42)$$

La velocidad de la partícula tiene una componente paralela y otra componente perpendicular al campo magnético, tales que la suma de cada componente resulta en el vector velocidad de la partícula $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$.

La componente paralela de la velocidad es definida como la proyección de \vec{v} sobre \vec{B} . Proyectando la ecuación de Newton en la dirección paralela:

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \vec{B}) \frac{\vec{B}}{B^2}, \quad (4-43)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{B}}{B^2} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\vec{B}}{B^2} = 0, \quad (4-44)$$

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0. \quad (4-45)$$

De la Ecuación (4-45) se puede deducir que la componente paralela al campo \vec{B} de la velocidad de la partícula, también es constante respecto al tiempo.

El vector velocidad y su componente paralela son constantes respecto al tiempo, de la ecuación $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ se puede concluir que la magnitud de la velocidad perpendicular también es constante respecto al tiempo. Dos observaciones, el campo magnético no afecta la velocidad de las partículas que son paralelas a la dirección del campo magnético; y la única posible trayectoria de la partícula, en un plano perpendicular, es un movimiento circular uniforme:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{\rho} = |q|v_{\perp}B \quad (4-46)$$

De la Ecuación (4-46) se pueden inferir dos propiedades, la primera es la frecuencia de ciclotrón o girofrecuencia.

$$\omega_c = \frac{v_{\perp}}{\rho} = \frac{|q|B}{m} \quad (4-47)$$

Y la segunda es el radio de Larmor, radio de ciclotrón o giroradio.

$$\rho = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \quad (4-48)$$

Por lo general, el radio de Larmor se calcula a partir de la velocidad térmica, pues esta velocidad es la velocidad promedio con la que viajan las partículas dentro del plasma en cualquier dirección, al viajar en dirección perpendicular al campo magnético es cuando surge la frecuencia de ciclotrón. Escribiéndose como [64]:

$$\rho = \frac{mv_{th}}{|q|B} = \frac{v_{th}}{\omega_c} \quad (4-49)$$

Es importante notar que la frecuencia de ciclotrón no depende de la velocidad o la energía cinética, sino únicamente de la intensidad del campo magnético. Partículas con más energía orbitan en círculos con mayor radio completando cada vuelta en el mismo tiempo que partículas con menos energía orbitando en círculos de menor radio [64].

Por lo tanto, si hay un campo magnético presente, la partícula cargada del plasma tendrá una trayectoria helicoidal, esto es, tendrá un movimiento circular alrededor del eje por el cual tiene su dirección el campo magnético, con una frecuencia correspondiente a la frecuencia del ciclotrón y con un radio correspondiente al radio de Larmor. En caso de ser una carga positiva $q > 0$, se tendrá una rotación a la izquierda respecto a B ; y si la carga es negativa $q < 0$, se tendrá una rotación a derecha respecto a B . Así el movimiento de la partícula cargada se verá como se presenta en la siguiente figura:

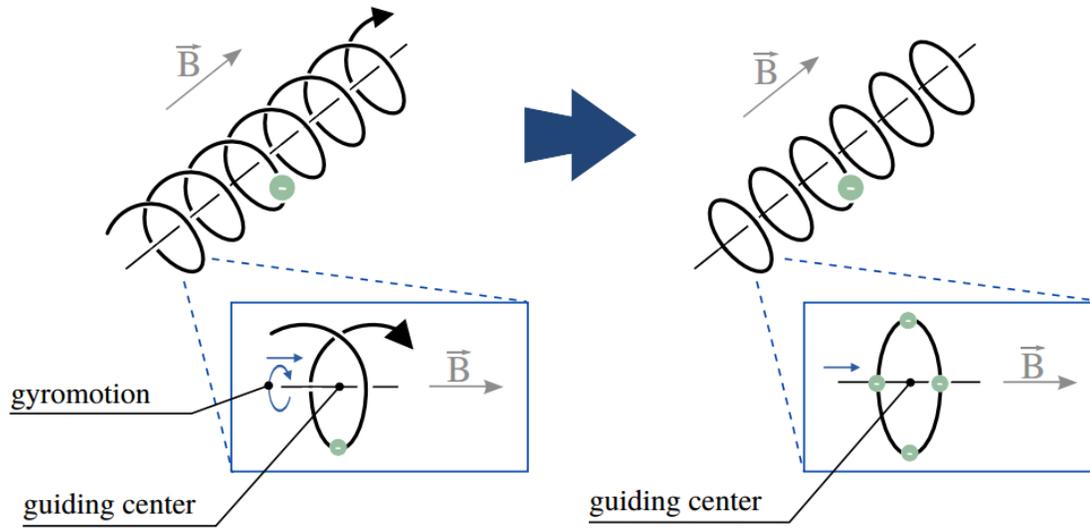


Figura 4-10: Movimiento de una partícula cargada dado un campo magnético estático y uniforme [62].

4.4.2. Velocidad de deriva

A continuación, se estudia la trayectoria que tendrá una partícula cargada bajo la influencia de un campo electromagnético estático y uniforme. Se considerará un campo magnético axial en dirección z tal que: $\vec{B} = B\hat{z}$, y un campo eléctrico perpendicular al campo magnético en la dirección x tal que: $\vec{E} = E\hat{x}$. Por otra parte, se separarán la velocidad de la partícula en sus componentes paralela y perpendicular al campo magnético de tal forma que: $\vec{v}(t) = \vec{v}_\perp(t) + \vec{v}_z(t)\hat{z}$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento en dirección perpendicular al campo magnético se obtiene sustituyendo los valores descritos en la Ec. (4-38):

$$m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = q (E\hat{x} + \vec{v}_\perp \times B\hat{z}) \quad (4-50)$$

La trayectoria de la partícula se muestra en la Fig. 4-11. La partícula es acelerada hacia arriba debido al campo eléctrico, al mismo tiempo, la partícula está sujeta a un campo magnético lo que ocasiona que su trayectoria se curve hacia abajo, mientras se mueve hacia abajo, el campo eléctrico hará que la partícula disminuya su velocidad, y cuando la velocidad disminuye el giroradio también disminuye. Por lo tanto, la partícula sujeta a la fuerza magnética se acelerará de nuevo en dirección del

campo eléctrico, aumentando su velocidad y por consiguiente su giroradio².

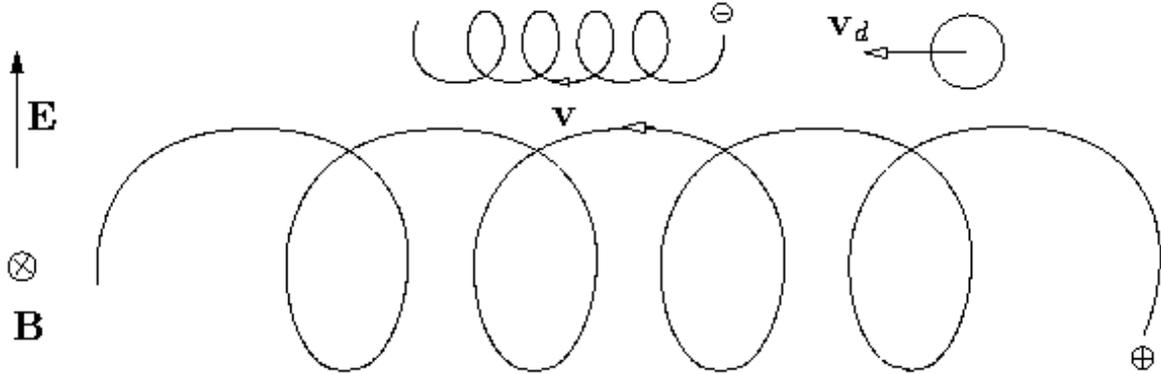


Figura 4-11: Movimiento de una partícula cargada inmersa en un campo magnético y eléctrico. Tomada de [37].

Se busca una solución que describa una velocidad promedio, de la forma:

$$\vec{v}_{\perp}(t) = \vec{v}_E + \vec{v}_{ac}(t) \quad (4-51)$$

donde \vec{v}_E corresponde a una velocidad constante, y $\vec{v}_{ac}(t)$ es la velocidad cambiante en el tiempo.

Sustituyendo la Ec. (4-51) en la Ec. (4-50) se obtiene:

$$m \frac{d\vec{v}_{ac}}{dt} = q \left(E\hat{x} + \vec{v}_E \times B\hat{z} + \vec{v}_{ac} \times B\hat{z} \right) \quad (4-52)$$

Tanto el lado izquierdo como el último término del lado derecho de la Ec. (4-52) forman la ecuación mostrada en la sección 4.4.1, por lo que describen movimientos circulares armónicos a la frecuencia de ciclotrón. Al seleccionar \vec{v}_E en la Ec. (4-52) los demás términos se anulan, obteniendo:

$$E\hat{x} + \vec{v}_E \times B\hat{z} = 0 \quad (4-53)$$

Despejando a \vec{v}_E :

²Nótese que el ejemplo descrito es para una partícula de carga positiva $q > 0$.

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (4-54)$$

La cual se denomina velocidad de deriva y representa la velocidad perpendicular promedio. Nótese que ésta no depende de la velocidad o masa de la partícula dentro de los campos. Imagínese dos partículas con distinta masa inmersas en los mismos campos \vec{E} y \vec{B} . La partícula de mayor masa tendrá un mayor giroradio pero menor girofrecuencia, y la partícula de menor masa tendrá un menor giroradio pero mayor girofrecuencia; ambos efectos se cancelarán entre sí y darán la misma velocidad de deriva \vec{v}_E [64].

4.5. Interacción plasma-pared

En esta sección se pretende explicar de manera conceptual la interacción plasma-pared, si se quiere profundizar en los fundamentos matemáticos véase [30].

Supongamos que se tiene un plasma confinado entre paredes, los electrones al tener menor masa y una temperatura más alta son más móviles que los iones, por consiguiente, sus flujos también son mayores. Debido a esto, generalmente los materiales en contacto con plasmas se cargan negativamente respecto al potencial del plasma. En otras palabras, los electrones van hacia las paredes, produciendo una acumulación de carga negativa en la superficie generando un campo eléctrico. Dicho campo hace que los electrones se opongan y los iones se aceleren. Este fenómeno crea una capa de espesor del orden de la longitud de Debye, llamada vaina electrostática o *sheath*, en la cual no hay cuasineutralidad y existen fuertes gradientes de potencial eléctrico.

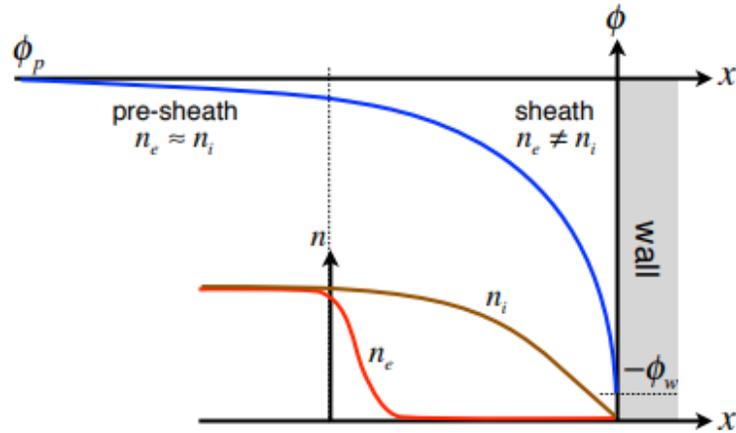


Figura 4-12: Esquema de la región adyacente de la pared. Distinción del potencial y densidad de partículas entre la zona de la pre-vaina cuasineutra y la vaina no neutra. Tomada de [50].

El proceso descrito con anterioridad es el más común que es el caso de una vaina negativa, pues el potencial en la pared es menor al potencial del plasma, debido a la acumulación de la carga negativa. En el caso de que el potencial de la pared fuera mayor se tiene una vaina positiva, donde los iones son los que se repelen y los electrones son acelerados. Existe un comportamiento que combina la vaina positiva y negativa, llamado vainas dobles.

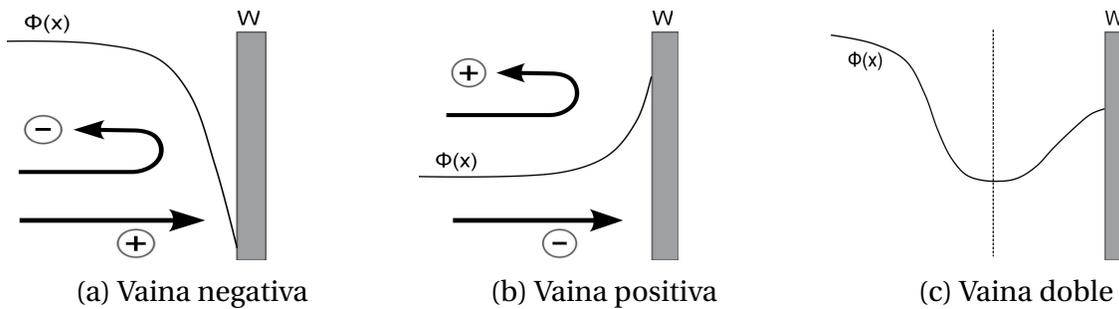


Figura 4-13: Esquema de las diferentes vainas. Tomada de [30].

Cuando la longitud de Debye es mucho menor que la longitud típica del problema, se tiene un problema con dos escalas, una asociada al plasma confinado, que es cuasineutro, y la otra asociada a la vaina, que es no neutra. Desde un punto de vista macroscópico, las vainas se pueden entender como superficies de discontinuidad en las paredes [30]. Para resolver el problema de las dos escalas se utilizan dos aproximaciones, la teoría fluidodinámica y la teoría cinética. En ambas se tiene que cumplir con la condición de Bohm, véase [66].

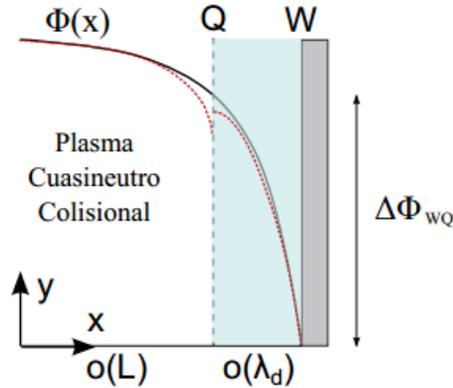


Figura 4-14: Esquema de las dos escalas. En rojo se representan las soluciones fluidodinámicas donde se puede observar la necesidad de una capa de transición que junte ambas regiones, mientras que en negro se representan las soluciones de la teoría cinética. Tomada de [30].

A continuación, se explica la interacción de los electrones e iones en el interior de la vaina y en presencia de dos tipos de paredes, metálicas conductoras y cerámicas dieléctricas.

Electrones en pared metálica conductora

Supongamos dos casos ideales, el primero es una superficie de reflexión perfecta en la que todo electrón que incide es reflejado especularmente. El otro caso ideal, es el de una pared perfectamente absorbente, en la que todo electrón que incide es recolectado por la pared. Una pared metálica conductora real tiene un comportamiento intermedio a los casos ideales descritos, en general, la fracción de electrones reflejados es despreciable y por tanto, el comportamiento de la pared real se aproxima al de una pared perfectamente absorbente [30].

Electrones en pared cerámica dieléctrica

Cuando un haz de electrones impacta una pared de material dieléctrico se produce un fenómeno llamado emisión secundaria de electrones o SSE por sus siglas en inglés. Los electrones que impactan en la pared son llamados electrones primarios, y los emitidos secundarios. Hay tres tipos de electrones secundarios:

- Electrones primarios reflejados elásticamente. Los electrones son reflejados especularmente debido al impacto con una superficie de reflexión perfecta, en donde hay conservación de energía de las partículas.
- Electrones primarios reflejados difusamente. Los electrones se impactan en

superficies de reflexión no perfectas.

- Electrones emitidos desde la estructura cristalina del material dieléctrico (electrones verdaderos). Los electrones son emitidos por la excitación de la estructura cristalina debido a la energía depositada por el haz de electrones que impacta la pared.

La proporción de electrones secundarios emitidos de cada tipo depende del material y de la energía de los electrones incidentes. La cantidad total de electrones secundarios emitidos se puede obtener con el flujo de electrones primarios que impactan con la pared [30].

Iones en diferentes paredes

En el caso de los iones, su comportamiento es independiente al tipo de pared, pero si es afectado por el potencial de la vaina electrostática, es decir, para las vainas negativas los iones son atraídos y para las vainas positivas, los iones son repelidos.

En la presente tesis, solo se aborda el caso de las vainas negativas, en las cuáles los iones son acelerados hacia la pared, impactándola y dando lugar a la erosión del material (*sputtering*). Luego, se produce un proceso llamado recombinación, que prácticamente los iones que inciden en la pared se convierten en partículas neutras, aunque alguna fracción puede reflejarse elástica o difusamente produciendo iones que vuelven a la región cuasineutra [30], no es el enfoque de la tesis, por lo que se considerará solamente el proceso de recombinación.

4.6. Descripción cinética del plasma

Como se mencionó en las secciones anteriores, el movimiento de las partículas cargadas depende de los campos eléctricos y magnéticos. En esta sección se busca describir al plasma de una manera más autoconsistente, es decir, considerando el movimiento ocasionado por los efectos de los campos eléctricos y magnéticos que las mismas partículas cargadas provocan.

La descripción autoconsistente de un plasma se puede describir en cuatro pasos:

1. Al tener las fuerzas que actúan sobre cada partícula, se calculan la posición y velocidad de todas las partículas utilizando la ley de Newton para las N partículas.
2. Al tener la posición y velocidad de todas las partículas se calcula la densidad de

- carga ρ y la densidad de corriente \vec{j} .
- Al tener la densidad de carga y la densidad de corriente, se calculan los campos eléctricos y magnéticos por medio de las ecuaciones de Maxwell.
 - Al tener los campos eléctricos y magnéticos se calcula la fuerza que actúa sobre cada partícula, dada por la fuerza eléctrica con el campo eléctrico evaluado en r_i más la fuerza de Lorentz.

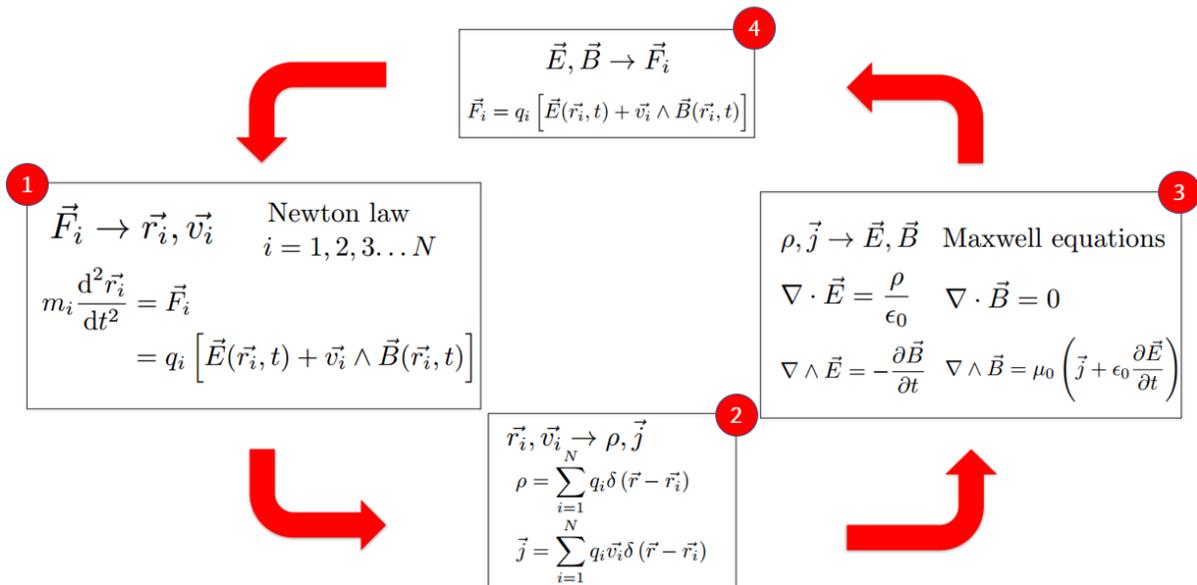


Figura 4-15: Diagrama de operaciones para la descripción autoconsistente de un plasma. Tomada de [21].

El sistema de ecuaciones descrito es capaz de representar de manera más completa la dinámica del plasma, ya que describe la evolución y movimiento de todas las partículas que constituyen el sistema en los campos eléctricos y magnéticos generados por su presencia.

Este método es muy completo y preciso pero no es práctico. Dado que con este método es necesario realizar $N - 1$ operaciones por cada partícula, por lo que se convierte en un problema de $O(N^2)$ ³. Dado que las simulaciones de plasma típicas contienen más de un millón de partículas (Tabla 4-1) no es factible desde el punto de vista computacional, para ejemplificarlo, supóngase una computadora que realiza 3 mil millones de operaciones por segundo y la simulación cuenta con 1×10^7

³La notación Landau o Big-O, nos ayuda a entender el desempeño del algoritmo dada una cantidad de datos a procesar. $O(N^2)$ representa un algoritmo donde su desempeño es directamente proporcional al cuadrado del tamaño del conjunto de datos de entrada.

partículas, el tiempo de simulación tomaría aproximadamente 9 horas , pero si aumentamos a 1×10^9 la simulación tardaría 10 años y medio. Por lo tanto se necesita un método distinto, un método estocástico.

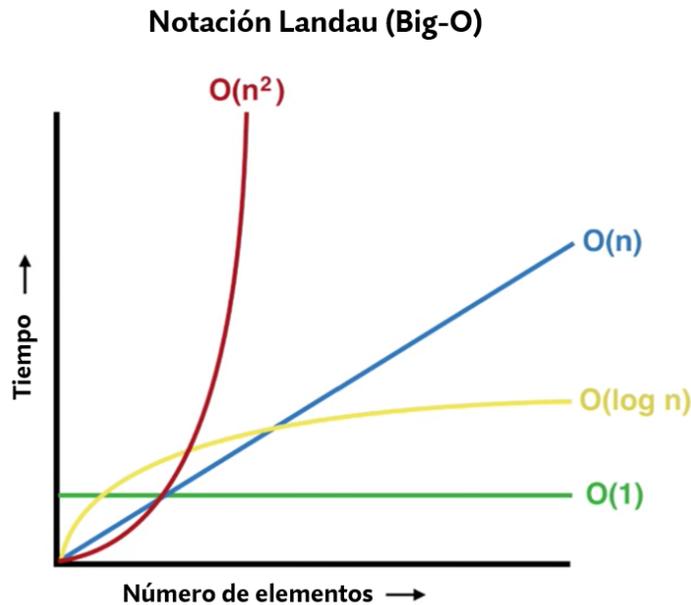


Figura 4-16: Notaciones Big-O más comunes. Tomada de [42].

4.6.1. Funciones de distribución

En este apartado se busca describir la ecuación de Boltzmann y la ecuación de Vlasov. La ecuación de Boltzmann es la de particular interés porque determina la evolución en el tiempo de la función de distribución, integra los efectos de colisiones y nos permite derivar las ecuaciones para describir al plasma como un fluido.

Con el método estadístico se busca una función de distribución que nos permita entender cómo se distribuyen las partículas en el espacio de fase. El espacio de fase es un espacio de seis dimensiones: tres dimensiones en el espacio de velocidad y tres dimensiones en el espacio físico.

La Fig. 4-17 representa una proyección del plano de seis dimensiones en un plano bidimensional. Las partículas se distribuyen en el espacio de fase y se coloca un volumen de dimensiones $d\vec{v}$ y $d\vec{r}$, que es grande desde un punto de vista microscópico para que muchas partículas estén contenidas en él, pero sigue siendo pequeño desde un punto de vista macroscópico.

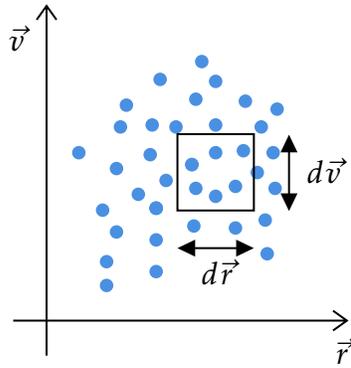


Figura 4-17: Espacio de fase en un espacio bidimensional.

Se define una función que depende de la posición, velocidad y tiempo $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Al multiplicar esta función por $d\vec{r}d\vec{v}$ se obtiene el número de partículas que contiene el volumen del espacio de fase en el tiempo t , centrado en \vec{r} y \vec{v} .

De hecho, hay una función de distribución para cada especie $f_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$, donde s es el índice de la especie que también depende de la posición, velocidad y tiempo.

A partir de la función de distribución, se pueden obtener algunas cantidades de interés como:

El número total de partículas para las especies s que se denota como N_s :

$$N_s = \int d\vec{r} \int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (4-55)$$

La densidad numérica, que representa la densidad de las partículas en el espacio físico independientemente de su distribución en el espacio de velocidad:

$$n_s(\vec{r}, t) = \int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (4-56)$$

Y por último, la velocidad media que es una función de la posición y es dada por la media de la velocidad de todas las partículas, ponderados en función de su función de distribución:

$$\vec{u}_s = \frac{1}{n_s} \int \vec{v} f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (4-57)$$

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann es un ejemplo de una función de distribución, considerando una función de distribución independiente al espacio físico (plasma uniforme) y al tiempo. Esta es la función de distribución de las partículas una vez alcanzado el equilibrio térmico, la cual establece que las partículas se distribuyen según una función de distribución gaussiana, para el caso tridimensional [Ec. (A-22)]:

$$F(v) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_B T}\right) \quad (4-58)$$

Y en el caso unidimensional [Ec. (A-6)]:

$$F(v) = 2n \left(\frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_B T}\right) \quad (4-59)$$

Las distintas propiedades de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann se encuentran descritas en el Apéndice A.

4.6.2. Ecuación de Boltzmann

Como ya se mencionó, la función de distribución de Maxwell-Boltzmann es independiente al tiempo. En esta sección se mostrará una ecuación que muestre cómo la función de distribución evoluciona con el tiempo. Para ello, considérese un gran número de partículas en un espacio de fase contenidas en un cierto volumen, donde las partículas no se crean ni se destruyen, como se muestra en la Fig. 4-17. La variación de las partículas contenidas en el volumen será debido al flujo de partículas que entran o salen del volumen, es decir:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = -\nabla_{6D} \cdot (\vec{u} f_s) \quad (4-60)$$

Donde \vec{u} es la velocidad a la cual las partículas se mueven en el espacio de fase;

∇_{6D} es la divergencia de un espacio de seis dimensiones, que se puede separar en el operador nabla del espacio físico y el operador nabla del espacio de velocidad:

$$\nabla_{6D} = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial v_x'}, \frac{\partial}{\partial v_y'}, \frac{\partial}{\partial v_z'} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}'}, \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} \right) \quad (4-61)$$

La velocidad \vec{u} se puede expresar como el cambio temporal en el espacio físico y de velocidad, es decir, la derivada de la posición respecto al tiempo y la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{u} = \left(\frac{\partial \vec{r}'}{\partial t'}, \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} \right) \quad (4-62)$$

Las partículas cambian su posición en el tiempo (velocidad), y cambian su velocidad de acuerdo con su aceleración, la cual es dada por la fuerza entre la masa de las partículas de acuerdo con la segunda ley de Newton. Se puede separar la fuerza en dos: la fuerza de largo alcance o *long range* (F^{lr}) que son las fuerzas debidas a los efectos colectivos; y la fuerza de corto alcance o *short range* (F^{sr}) que son las fuerzas debidas a las colisiones. Por lo que:

$$\vec{u} = \left(\vec{v}', \frac{\vec{F}}{m_s} \right) = \left(\vec{v}', \frac{\vec{F}^{lr} + \vec{F}^{sr}}{m_s} \right) \quad (4-63)$$

Si se sustituye \vec{u} de la Ec. (4-63) en la Ec. (4-60) y se resuelve, se obtiene:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \cdot (\vec{v}' f_s) - \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} \cdot \left[\left(\frac{\vec{F}^{lr} + \vec{F}^{sr}}{m_s} \right) f_s \right] \quad (4-64)$$

La Ec. (4-64) muestra la ley de conservación. Al realizar un par de observaciones se puede llegar a la ecuación de Boltzmann.

La primera es que \vec{v}' es independiente a \vec{r}' , por lo que:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \cdot (\vec{v}' f_s) = \vec{v}' \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}'} \quad (4-65)$$

Y la segunda, es que las fuerzas descritas son en realidad fuerzas eléctricas y magnéticas. Así que \vec{F}^{lr} , por ejemplo, será igual a la carga de las partículas multiplicada por el campo eléctrico de largo alcance \vec{E}^{lr} más la fuerza de Lorentz $\vec{v} \times \vec{B}^{lr}$, donde el campo eléctrico es independiente a \vec{v} y la fuerza de Lorentz es perpendicular a \vec{v} .

Al realizar el par de observaciones descritas y algunos cálculos, se llega a:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}^{lr}}{m_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(\frac{\vec{F}^{sr}}{m_s} f_s \right)}_{\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c} \quad (4-66)$$

Donde el término $(\partial f / \partial t)_c$ es el término en el cual se relacionan las colisiones, llamado operador de colisión. Escribiendo la Ec. (4-66) en términos de la fuerza eléctrica y magnética, se obtiene la ecuación de Boltzmann que describe como la función de distribución evoluciona en el tiempo en el espacio de fase:

$$\boxed{\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\vec{E}^{lr} + \vec{v} \times \vec{B}^{lr}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c} \quad (4-67)$$

Si las colisiones se desprecian, se obtiene la ecuación de Vlasov:

$$\boxed{\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\vec{E}^{lr} + \vec{v} \times \vec{B}^{lr}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = 0} \quad (4-68)$$

4.7. Descripción de fluido del plasma

La descripción cinética del plasma es muy detallada y precisa. Sin embargo, su solución es extremadamente complicada tanto analítica como numéricamente, además de que es muy costoso resolver una ecuación cinética. Por lo que se puede utilizar un modelo más simple como un modelo de fluido para describir la dinámica del plasma, en la que se consideran algunos aspectos macroscópicos como densidades y velocidades medias de las partículas [21, 36, 51].

Las partículas se distribuyen en un espacio de fase que es un espacio seis dimensiones: tres dimensiones en el espacio de velocidad y tres dimensiones en el espacio físico. La descripción de un fluido es en tres dimensiones (\vec{r}), por lo que se estudia la dinámica del plasma observando cantidades que sólo dependen del espacio físico, cantidades como la densidad, la temperatura y la velocidad del plasma como un fluido. Mientras que las cantidades en el espacio de velocidad se promedian como la densidad y la velocidad media.

El valor promedio de una función genérica que depende de la velocidad $g(\vec{v})$, se obtiene de la integral de esa función ponderada en función de la distribución de las partículas en el espacio de velocidad, integrada sobre el espacio de velocidades, normalizada por la densidad de partículas en el plasma, para la especie s :

$$\langle g(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{n_s} \int g(\vec{v}) f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (4-69)$$

Al utilizar distintas funciones $g(\vec{v})$, se obtienen diferentes cantidades de fluido, como por ejemplo la velocidad promedio [Ec. (4-70)] y la densidad de energía cinética promedio [Ec. (4-71)], respectivamente:

$$g(\vec{v}) = \vec{v} \Rightarrow \vec{u}_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_s} \int \vec{v} f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (4-70)$$

$$g(\vec{v}) = \frac{1}{2} m_s v^2 \Rightarrow W_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_s} \int \frac{1}{2} m_s v^2 f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (4-71)$$

Las ecuaciones de fluido pueden ser derivadas al tomar los momentos de la ecuación de Boltzmann [Ec. (4-67)]. Es decir, la ecuación de Boltzmann se multiplica por una función $g_i(\vec{v})$ y se integra respecto al espacio de velocidad [21]:

$$\int g_i(\vec{v}) [\text{Boltzmann}] d\vec{v} = 0 \quad (4-72)$$

Al elegir correctamente la función $g_i(\vec{v})$ se obtienen la ecuación de continuidad, la ecuación de conservación del momento y la ecuación de conservación de la energía:

Tabla 4-2: Momentos de la ecuación de Boltzmann [21, 49].

$g_i(\vec{v})$	Ecuación
$g_1(\vec{v}) = 1$	Ecuación de continuidad
$g_2(\vec{v}) = m_s \vec{v}$	Ecuación de conservación del momento
$g_3(\vec{v}) = \frac{1}{2} m_s v^2$	Ecuación de conservación de la energía

A continuación se deriva la ecuación de continuidad, y después se mencionan las ecuaciones restantes. Al utilizar $g_1(\vec{v}) = 1$ en la Ec. (4-72), se obtiene:

$$\int \left[\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \right] d\vec{v} = 0 \quad (4-73)$$

La solución a la Ec. (4-73) se aborda integrando por partes. La primera parte es igual a la derivada parcial respecto al tiempo de la densidad de partículas, esto es porque $n_s = \int f_s d\vec{v}$ [Ec. (4-56)]:

$$\int \frac{\partial f_s}{\partial t} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f_s d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} n_s \quad (4-74)$$

En la segunda parte, el término $\int \vec{v} f_s d\vec{v}$ es igual a la velocidad del fluido multiplicada por la densidad [Ec. (4-57)]:

$$\int \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \int \vec{v} f_s d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n_s \vec{u}_s) \quad (4-75)$$

En la tercera parte, se utiliza el teorema de divergencia, convirtiéndose en la integral sobre una superficie que contiene el espacio de velocidad, que tiende a infinito. Puesto que no hay partículas que tengan una velocidad infinita, la función f_s tenderá a cero, por lo tanto, la integral de la superficie es igual a cero:

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{q_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} \right] d\vec{v} &= \frac{q_s}{m_s} \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot [(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) f_s] d\vec{v} \\ &= \frac{q_s}{m_s} \int_{S_v \rightarrow \infty} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) f_s \cdot d\vec{S}_v = 0 \end{aligned} \quad (4-76)$$

En la cuarta parte, la integral del operador de colisiones es igual a cero, ya que se considera que las colisiones no crean ni destruyen partículas, es decir, no hay procesos como ionización y recombinación.

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = 0 \quad (4-77)$$

Al juntar las ecuaciones se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\boxed{\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n_s \vec{u}_s) = 0} \quad (4-78)$$

4.7.1. Modelo de dos fluidos

Las ecuaciones de fluido que se presentarán a continuación separan a cada especie presente en el plasma, típicamente iones y electrones. En otras palabras, las ecuaciones se aplican a iones y electrones por separado, obteniendo la dinámica del fluido por especie, es por lo que el modelo es llamado de dos fluidos.

La complejidad de la descripción de dos fluidos puede reducirse, combinando las especies para obtener las ecuaciones de gobierno del plasma, generando un modelo de fluido simple. En el presente trabajo sólo se mencionan las ecuaciones del modelo de dos fluidos, referirse a [36, 51] para las ecuaciones del modelo simple.

A continuación, se muestra un resumen de las ecuaciones de fluido que se obtienen al multiplicar la ecuación de Boltzmann por una función $g_i(\vec{v})$ e integrando sobre el espacio de velocidad [21]:

- Ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n_s \vec{u}_s) = 0 \quad (4-79)$$

- Ecuación de conservación del momento.

$$m_s n_s \frac{d\vec{u}_s}{dt} = q_s n_s (\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{P}_s + \vec{R}_s \quad (4-80)$$

Donde:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_s \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{R} = \int m_s (\vec{v} - \vec{u}_s) \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c d\vec{v}$$

- Ecuación de conservación de la energía.

$$\frac{3}{2} n_s \frac{dT_s}{dt} + \vec{P}_s : \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{u}_s + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{q}_s = Q_s \quad (4-81)$$

Donde:

$$T_s = \frac{1}{3n_s} \int m_s (\vec{v} - \vec{u}_s)^2 f_s d\vec{v}$$

$$\vec{q}_s = \frac{1}{2} m_s \int (\vec{v} - \vec{u}_s)^2 (\vec{v} - \vec{u}_s) f_s d\vec{v}$$

$$Q_s = \int \frac{1}{2} m_s (\vec{v} - \vec{u}_s)^2 \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c d\vec{v}$$

La aceleración del fluido se debe a la fuerza eléctrica y magnética más el aporte de la presión y una fuerza viscosa debido a las colisiones.

La ecuación de conservación de energía establece que la variación de la energía del sistema T_s , se debe al calor viscoso, que es un producto de doble punto más el calor que es transportado por el vector de flujo de calor \vec{q}_s . También existe un término que es el calor generado debido a las fuerzas viscosas Q_s [21].

Observaciones:

- Cualquier plasma cuasineutral consiste en al menos dos especies diferentes, por lo que hay un intercambio de cantidad de movimiento en colisiones entre las distintas especies, que se denota como [36, 51]:

$$\nu_{\alpha\beta} n_\alpha m_\alpha (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\beta) \quad (4-82)$$

Donde $\nu_{\alpha\beta}$ es la frecuencia de colisión de la especie α con la especie β .

- El sistema de ecuaciones no está cerrado, para resolver la ecuación de energía se necesita una expresión del flujo de calor y esto requiere conocer la función de distribución.

- El modelo tiene que ser acoplado a las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4-83)$$

Esto se puede realizar porque la carga eléctrica en el sistema puede obtenerse al sumar la carga eléctrica de las especies [Ec. (4-84)] y de manera similar para la densidad de corriente [Ec. (4-85)]:

$$\rho = \sum_s q_s n_s \quad (4-84)$$

$$\vec{j} = \sum_s q_s n_s \vec{u}_s \quad (4-85)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell sólo requieren conocer la densidad de partículas n_s y la velocidad media \vec{u}_s .

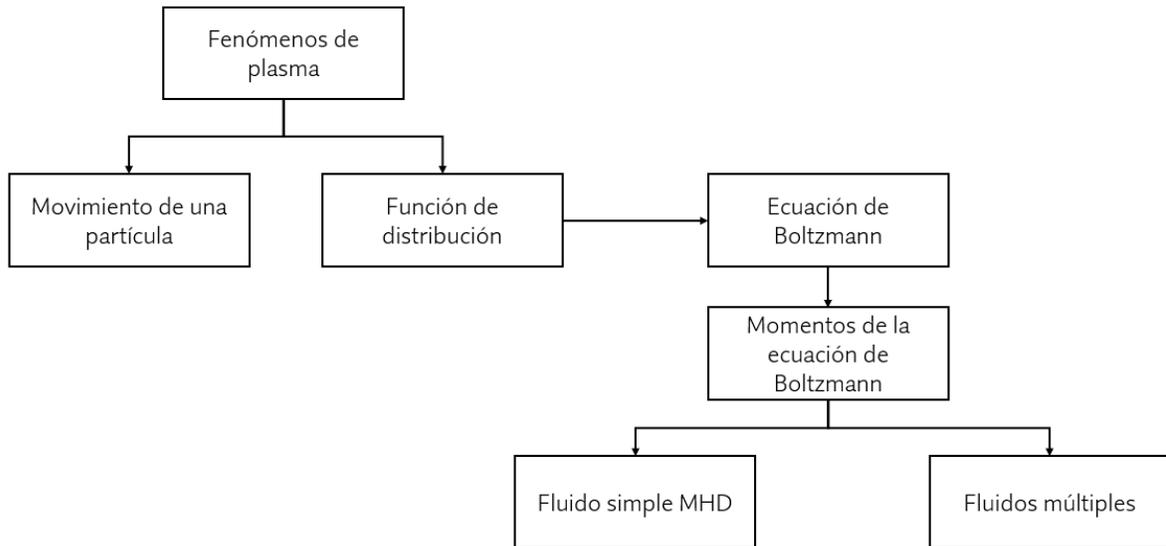


Figura 4-18: Jerarquía de los fenómenos del plasma [25].

Capítulo 5

PROPULSOR HALL

Con los antecedentes revisados de la propulsión eléctrica en el capítulo 3, y los fundamentos en teoría de plasmas en el capítulo 4, ya es posible describir el funcionamiento del propulsor Hall en su principio de funcionalidad y componentes principales. De igual manera, se desarrollan las ecuaciones de propulsión y teoría de plasma para el propulsor. Además, se profundiza en la física del propulsor, describiendo las curvas típicas de los campos eléctrico y magnético. Todo lo revisado en el capítulo ayudará a proponer una simulación con las condiciones del propulsor, y dar una interpretación correcta de los resultados obtenidos.

Como se mencionó en la sección 4.1, existen diferentes tipos de propulsión, una de ellas es la propulsión eléctrica, que a su vez se divide en propulsión electrotérmica, electrostática y electromagnética, según el método que utilicen para acelerar las partículas cargadas del propelente para generar empuje. Donde, el propulsor Hall pertenece a la familia de propulsión electrostática.

Dentro de la propulsión eléctrica, el propulsor de efecto Hall es uno de los primeros modelos en concebirse y salir al espacio, además de contar con una extensa experiencia de vuelo. Aun siendo una tecnología madura, los motores Hall siguen siendo motivo de investigación, ya que la física de dichos motores no se entiende por completo, sobre todo en cuanto se refiere a la movilidad de los electrones en el plasma y a la interacción del plasma con la pared. Esto hace que exista un interés científico permanente además del desafío de obtener diseños óptimos con mejores características propulsivas [30, 77].

Tabla 5-1: Estado del arte de algunos propulsores de efecto Hall para pequeñas naves espaciales [57].

Producto	Fabricante	Empuje [mN]	Potencia [W]	Impulso específico [s]	Nivel TRL
BHT-200	Busek	13	200	1390	Xenon TRL 8, Iodine TRL 4
HT100	SITAEL	5 a 15	175	<1350	Xenon TRL 6
CHT	UTIAS SFL	6.2	200	1139	Xenon TRL 6

Como se mencionó en la sección 3.3 existen muchos tipos de plasma, que se pueden clasificar según algunos parámetros característicos. El plasma en el interior de un propulsor de efecto Hall constituye un plasma parcialmente ionizado de baja temperatura, muy lejos del equilibrio termodinámico. Típicamente tiene una densidad $n \approx 3 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ y una temperatura $T \approx T_e \approx 10^5 \text{ K}$. En la Fig. 5-1 se muestra un esquema de los diferentes tipos de plasmas en función de su densidad y temperatura [30].

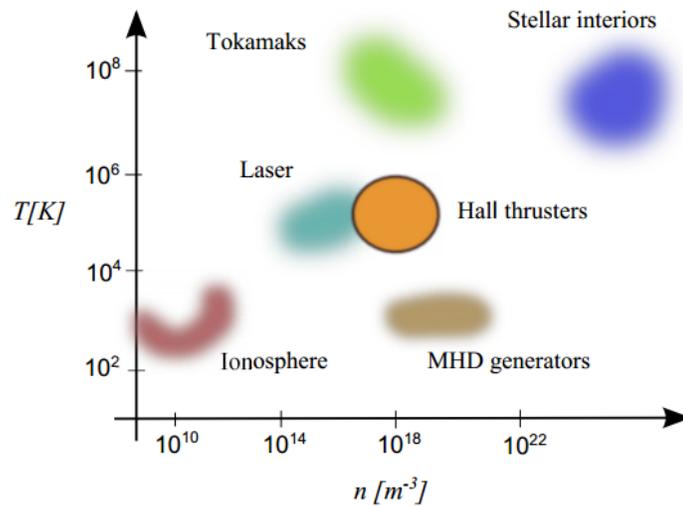


Figura 5-1: Esquema de los diferentes tipos de plasma en función de su densidad y temperatura. Tomada de [30].

5.1. Efecto Hall

5.1.1. Efecto Hall en una cinta conductora

Imagínese una cinta conductora (metálica o semiconductor) de espesor t y ancho d , por la cual circula una corriente eléctrica I y se le aplica un campo magnético \vec{B} que atraviesa perpendicularmente a la cinta. Supóngase un portador de carga positiva que se mueve con una velocidad \vec{v} en dirección de la corriente¹, al estar en movimiento el portador, este experimentará una fuerza magnética dada por la ecuación de Lorentz [Ec. (4-38)]:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5-1)$$

Dicha fuerza desviará a los portadores de su trayectoria, acumulándolos en un lado de la cinta, en este caso, en la parte superior como se muestra en la Fig. 5-2.

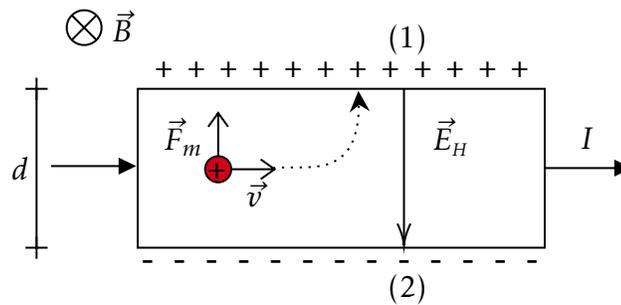


Figura 5-2: Cinta conductora con una corriente circulando y un campo magnético perpendicular a la corriente. La fuerza magnética desvía a los portadores de su trayectoria y los acumula de un lado de la cinta.

En el lado opuesto de la cinta se acumulan los portadores de carga distinta, lo que genera un campo eléctrico llamado campo eléctrico Hall \vec{E}_H , debido a la carga acumulada existe una diferencia de potencial V_{12} entre los puntos (1) y (2). Asumiendo que \vec{E}_H es uniforme se tiene que:

¹En escala microscópica las cargas positivas se mueven en dirección de la corriente eléctrica, mientras que las cargas negativas se mueven en sentido contrario [77].

$$V_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = \vec{E}_H \cdot \vec{d} \quad (5-2)$$

donde \vec{d} es el vector dirigido desde el punto (1) al punto (2) cuyo módulo d , es el ancho de la cinta.

Como consecuencia del campo eléctrico Hall, los portadores experimentarán una fuerza eléctrica dada por:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}_H \quad (5-3)$$

Asumiéndose un estado de equilibrio de fuerzas, los portadores siguen nuevamente trayectorias rectilíneas sin desviarse, igualando los módulos de la fuerza magnética y eléctrica sobre los portadores se obtiene:

$$F_m = F_e \Rightarrow qE_H = qvB \Rightarrow E_H = vB \quad (5-4)$$

El valor de la diferencia de potencial V_{12} una vez alcanzado el equilibrio se le denomina tensión o voltaje Hall V_H , por lo que:

$$V_H = E_H d \quad (5-5)$$

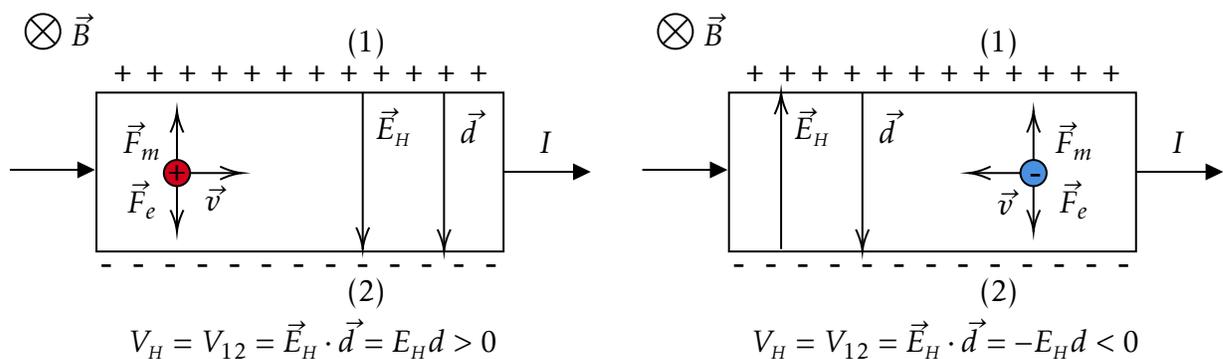


Figura 5-3: Dos posibles situaciones dependiendo de la carga del portador, donde la corriente tiene el mismo sentido. El signo de los portadores se determina mediante el signo del voltaje Hall.

La corriente eléctrica es la densidad de corriente J que pasa por un área transversal S del conductor, es decir $I = JS$, mientras que la densidad de corriente se expresa en función de la concentración de portadores n , su carga y su velocidad, es decir $J = nqv$. Al despejar la velocidad² se obtiene:

$$v = \frac{I}{nqS} \quad (5-6)$$

La cinta de espesor t y un ancho d , tiene un área transversal $S = td$, al sustituir la velocidad de la Ec. (5-6) en la Ec. (5-4), y de igual manera, al sustituir el campo eléctrico Hall de la Ec. (5-5) en la Ec. (5-4), se obtiene la magnitud del potencial Hall:

$$V_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{t} \quad (5-7)$$

En pocas palabras, el efecto Hall consiste en la aparición de una diferencia de potencial en una cinta conductora a la que se le aplica una corriente I y un campo magnético externo perpendicular a la dirección de la corriente. Dicha diferencia de potencial se debe a la acumulación de portadores de carga en los lados de la cinta por la fuerza magnética que actúa sobre los mismos.

5.1.2. Efecto Hall en un gas ionizado

Existe otra cantidad interesante, dicha cantidad ayudará a plantear el efecto Hall en un gas ionizado en lugar de una cinta conductora. Esta cantidad es el parámetro Hall [64].

El parámetro Hall se obtiene de la Ec. (5-7):

$$R_H = \frac{1}{nq} \quad (5-8)$$

Por lo tanto, a mayor densidad de portadores de carga menor será el parámetro Hall. Para el caso de un gas ionizado, se requiere muy poca densidad de partículas

²La densidad de corriente tiene el mismo signo tanto para una carga positiva (+ q) desplazándose con una velocidad + v como para una carga negativa (- q) desplazándose con una velocidad en sentido opuesto - v .

para lograr la ionización, por ende, se tendrá un parámetro de Hall grande. Como el caso del efecto Hall en un plasma es un caso particular, se suele denotar al parámetro Hall para plasmas como Ω , y se define como [64]:

$$\Omega = \frac{\omega_c}{\nu_{col}} = \frac{|q|B}{m\nu_{col}} \quad (5-9)$$

Donde ω_c es la frecuencia de ciclotrón [Ec. (4-47)], ν_{col} es la frecuencia de colisión [Ec. (4-33)] y m la masa del electrón.

Dentro de un medio donde está ocurriendo el efecto Hall se tendrá un campo eléctrico total equivalente a la suma del campo eléctrico inicial dado por la corriente de portadores dentro del material con el campo producido ($E = E_0 + E_H$). El ángulo que se forma entre el campo eléctrico total \vec{E} y la dirección de la densidad de corriente \vec{J} de los portadores, es el ángulo Hall [64]:

$$\Omega = \tan(\Theta_H) \quad (5-10)$$

Otra cantidad interesante es la resistividad Hall que se define como:

$$\rho_H = \frac{E}{J} = BR_H \quad (5-11)$$

5.2. Funcionamiento del propulsor

El propelente es introducido por el ánodo y dispersado dentro del canal de descarga. Los electrones son emitidos por el cátodo, de estos electrones, aproximadamente dos terceras partes se van aguas abajo hacia el exterior para neutralizar el chorro de plasma expulsado. Por causa del campo eléctrico, el otro tercio de los electrones se mueven hacia el ánodo, atravesando el campo magnético radial y transversal, lo cual ralentizará su movimiento, aumentando así su tiempo de residencia en el propulsor. Los electrones tenderán a moverse de manera espiral alrededor del eje del propulsor en la dirección $\vec{E} \times \vec{B}$, lo cual representa la corriente Hall. Los electrones que forman la corriente Hall colisionan con los átomos neutros presentes dentro del canal lo que produce la ionización del propelente, y por tanto, la generación del plasma [30].

Los iones, a diferencia de los electrones, están débilmente magnetizados, por lo que su movimiento se debe básicamente a la acción del campo eléctrico. Los iones generados en el canal son acelerados hacia el exterior por acción del campo eléctrico. Estos iones son lo que determinan el empuje y el impulso específico, además son responsables de la erosión del canal y del cátodo, lo que perjudica la vida útil del propulsor [30].

Por acción del plasma se forman alrededor de las paredes del propulsor capas límite de contorno, llamadas vainas electrostáticas o *sheaths*. Estas capas confinan parcialmente al plasma, de manera que se producen importantes pérdidas energéticas [30].

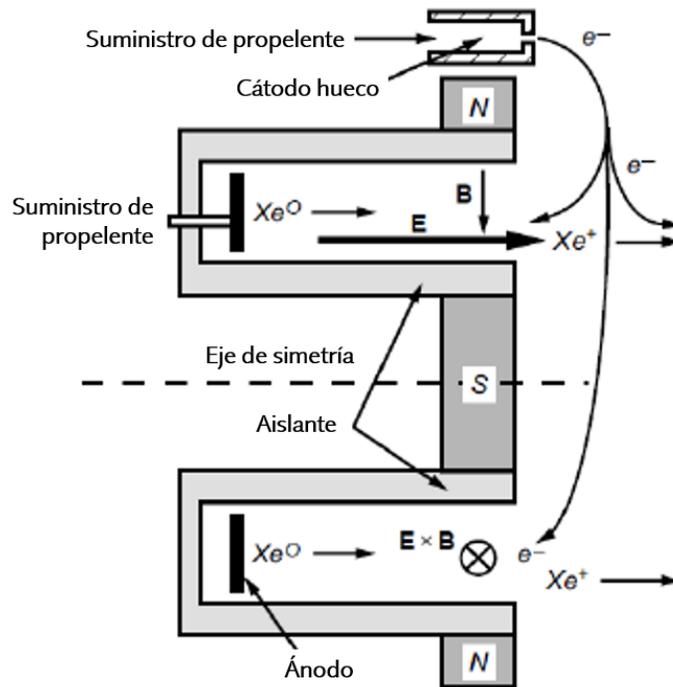


Figura 5-4: Vista transversal de un propulsor Hall. Tomada de [30].

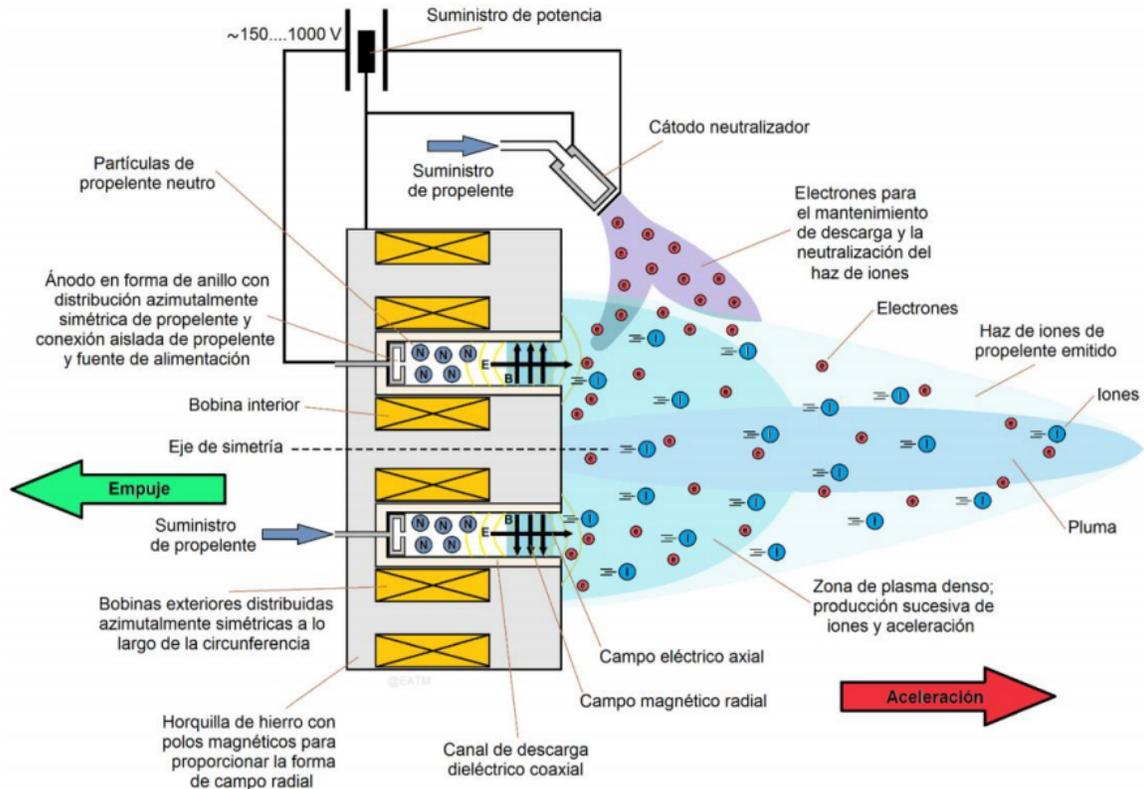


Figura 5-5: Funcionamiento del propulsor Hall. Tomada de [77].

5.3. Componentes principales

5.3.1. Circuito magnético

Se denomina circuito magnético a un dispositivo en el cual las líneas de fuerza del campo magnético se hallan canalizadas trazando un camino cerrado. Para su fabricación se utilizan materiales ferromagnéticos, pues éstos tienen una permeabilidad magnética mucho más alta que el aire o el espacio vacío y por tanto el campo magnético tiende a confinarse dentro del material, llamado núcleo [77].

El objetivo del circuito magnético es generar un campo magnético radial en el canal de descarga para atrapar a los electrones que van hacia el ánodo. Para crear dicho campo magnético se utilizan imanes permanentes o electroimanes formados por bobinas.

El circuito magnético se puede colocar en distintas configuraciones como se muestra en la Fig. 5-6.

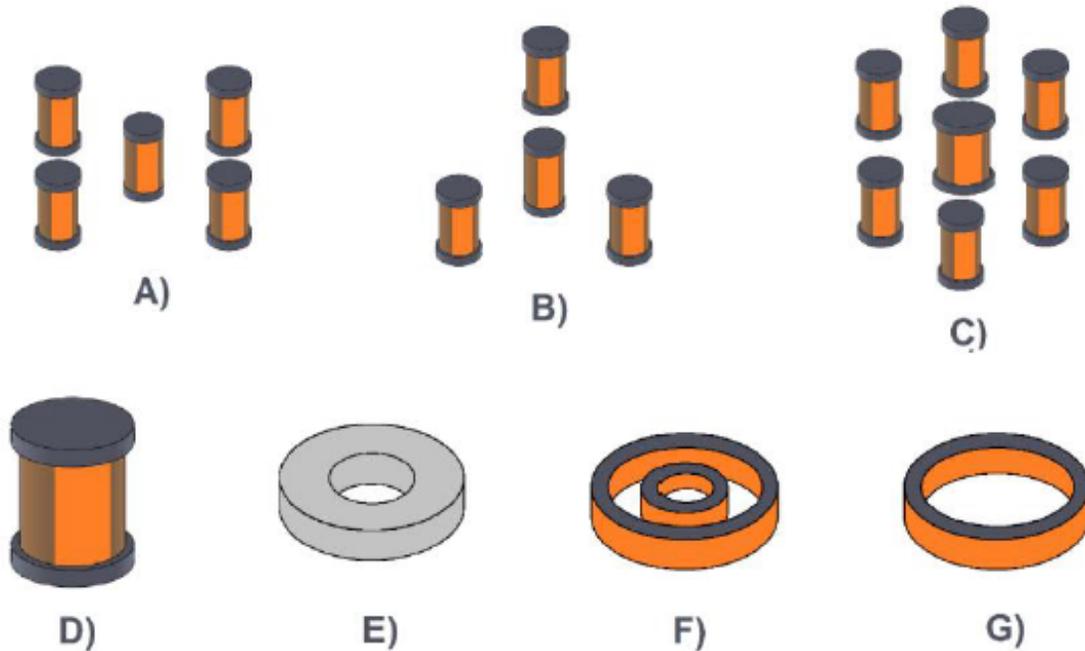


Figura 5-6: Distintas configuraciones del circuito magnético. A) Configuración clásica de 4 bobinas afuera y 1 al centro, B) Configuración de 3 bobinas afuera y 1 al centro, C) Configuración de n bobinas afuera y 1 al centro, D) Solenoide en configuración *tandem*, E) Imán permanente, F) Configuración de 1 bobina al centro y 1 circundante, G) Configuración de 1 bobina externa. Tomada de [77].

5.3.2. Cátodo

El cátodo es el encargado de emitir la cantidad necesaria de electrones. Una parte de los electrones viaja hacia el ánodo, a causa del campo magnético transversal los electrones quedan atrapados, orbitando en líneas de campo magnético a muy alta velocidad, colisionando con los átomos del propelente y provocando la ionización del propelente; la otra parte de los electrones neutraliza el haz de iones exterior, evitando que el satélite se cargue eléctricamente o interfiera con otros sistemas del satélite.

El cátodo consiste en un refractario de forma tubular con un orificio en uno de sus extremos, y se conforma por un inserto de forma cilíndrica, un calentador o *heater*, y una guarda o *keeper*, tal como se muestra en la Fig. 5-8.

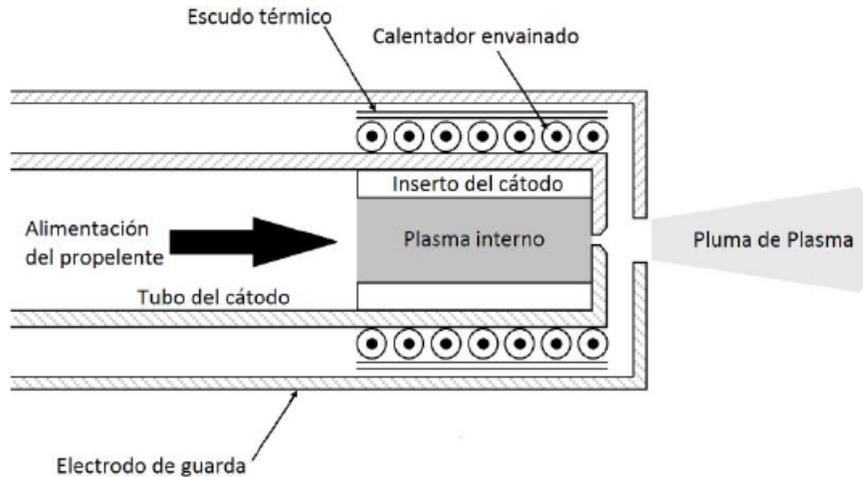


Figura 5-7: Esquema de un cátodo hueco. Tomada de [77].

En el momento que se enciende el cátodo, el calentador también se enciende. El calentador elevará al inserto a temperaturas a las cuales el inserto emitirá electrones a causa del efecto termiónico. El propelente inyectado dentro de la cámara es ionizado por los electrones emitidos, generando un plasma de cátodo, de este plasma de cátodo saldrán los electrones necesarios para el funcionamiento del propulsor. En el momento que se ioniza el propelente, el calentador se apaga y el plasma de cátodo mantiene caliente al inserto, conservando el efecto termiónico y, por ende, la generación de electrones.

La guarda es una estructura metálica cilíndrica, cuya función es mantener al cátodo protegido de la erosión causada por el haz de iones del propulsor, así como también ayuda a mantener el calor del cátodo para continuar con la generación de electrones. La guarda también se conecta a una diferencia de potencial, el cual ayuda a expulsar a los electrones alojados dentro del cátodo, por lo que el cátodo debe estar eléctricamente asilado del cuerpo del propulsor y de las líneas de alimentación del propelente para mantener las diferencias de potencial necesarias. Es un componente importante, ya que en caso de tener algún problema con el cátodo, los electrones no serán emitidos de la manera deseada, limitando el desempeño del propulsor e inclusive no funcionaría el propulsor.

5.3.3. Ánodo

Normalmente en los propulsores Hall, el ánodo también funge como inyector del propelente. La función que tiene como ánodo es la recolección de los electrones emitidos por el cátodo y los generados por el proceso de ionización. La función que tiene como inyector es introducir el propelente al canal de descarga.

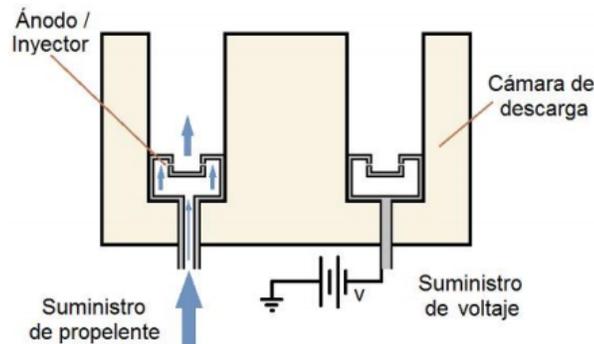


Figura 5-8: Esquema del ánodo. Tomada de [77].

5.3.4. Canal de descarga

El canal de descarga es la zona donde ocurre el proceso de ionización. Existen dos versiones de propulsores de efecto Hall según las dimensiones del canal y del tipo de material. La primera versión, denominada *Stationary Plasma Thruster* (SPT), *Hall Effect Thruster* (HET) o *Magnetic Layer Thruster*, presenta una cámara cilíndrica más alargada constituida por materiales dieléctricos. Los materiales utilizados comúnmente son el nitruro de boro (BN), el sílice o dióxido de silicio (SiO_2), el borosil ($BN - SiO_2$), o la alúmina (Al_2O_3). La segunda versión, denominada *Thruster with Anode Layer* (TAL), presenta una cámara cilíndrica corta y de material metálico. Sin embargo, ambos tipos de propulsores se basan en los mismos principios físicos para ionizar y acelerar el propelente [28, 30].

El canal de descarga está sometido a numerosas colisiones de electrones del plasma, lo cual genera un desgaste de las paredes internas del canal, afectando la vida del propulsor.

5.3.5. Propelente

Generalmente, los gases nobles son una buena opción por su elevado peso atómico y baja energía de ionización. Como se muestra en la Tabla 5-1, el Xenón es el propelente con mayor grado de madurez y utilizado en los propulsores Hall, debido a su alto peso atómico ya que la masa pesada del Xenón minimiza los factores de pérdida de impulso específico dado, en estado natural son gaseosos, fáciles de manipular y fáciles de aplicar la inyectarse dentro del propulsor.

También es posible utilizar materiales no gaseosos en su estado natural como el yodo, debido a su elevado peso atómico y a su bajo potencial de ionización, con la desventaja de que se tiene que calentar para convertirlo en estado gaseoso y también tiene dificultad en el manejo.

También se han experimentado con distintos elementos para ser utilizados como propelentes, cada uno con sus respectivas ventajas y desventajas. Algunos de ellos presentan barreras técnicas, por lo que hace que tengan ciertas restricciones y algunos otros, aún no han sido probados. La Tabla 5-2 muestra varias propiedades de cada uno de los propelentes potenciales.

Tabla 5-2: Propiedades de propelentes utilizados en propulsores Hall [77].

Propelente	Punto de fusión [°C]	Punto de ebullición [°C]	Energía de ionización [eV]	Masa atómica [uma]	Costo aproximado [dólar/kg]
Argón (Ar)	-189	-186	15.75991	39.948	6
Bismuto (Bi)	271.3	1559	7.287	208.98	9
Cadmio (Cd)	321.03	765	8.991	112.4	25
Cesio (Cs)	28.64	685	3.893	132.9	11000
Kriptón (Kr)	-157.2	-152.3	14	83.8	295
Magnesio (Mg)	650	1090	7.64572	24.3247	6
Mercurio (Hg)	-38.86	356.73	10.434	200.59	18
Xenón (Xe)	-111.9	-108.1	12.127	131.3	1200
Yodo (I)	113	182	10.44	126.9	83
Zinc (Zn)	420	907	9.394118	65.409	5

Estas propiedades son útiles para la selección del propelente ya que tiene una relación su funcionamiento. Por ejemplo, las masas atómicas juegan un papel importante, ya que las partículas del propelente se van a transformar en iones más pesados resultantes del proceso de ionización y esto afecta directamente al empuje del propulsor [Ec. (5-43)], a mayor masa atómica del propelente, mayor será el empuje, mientras que a menor masa atómica el impulso específico será mayor [Ec. (5-49)].

También se debe considerar que para se puedan utilizar es necesario que el propelente se encuentre en un estado gaseoso, por lo que hay que convertirlos si es necesario, y mientras mayor calor específico tenga el propelente, más energía se necesitará para convertirlo en gas.

En la siguiente figura, se muestran fotos de diversos propelentes funcionando en propulsores Hall.



Figura 5-9: Distintos tipos de propelentes utilizados en propulsores Hall. Tomada de [77].

5.4. Física de los propulsores Hall

Considérese un propulsor Hall con un canal de descarga de longitud L dentro del cual se tienen campos eléctricos y magnéticos cruzados, produciendo una densidad de plasma considerable de ancho w , que prácticamente es equivalente al ancho del

canal de descarga. Los iones salen por un área A_e para formar el haz del plasma, tal como se muestra en la Fig. 5-10.

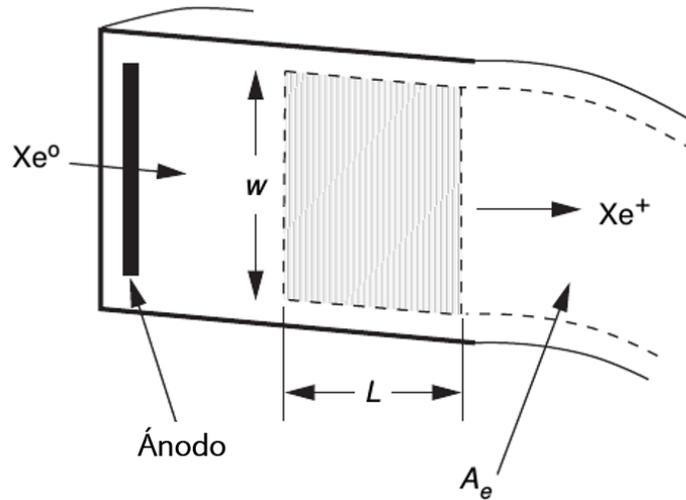


Figura 5-10: Sección transversal del plasma en el canal de descarga del propulsor Hall. Tomada de [28].

Los electrones que entran al canal de descarga desde el cátodo tienen un movimiento en forma espiral alrededor de las líneas de campo magnético radial con un radio correspondiente al radio de Larmor [Ec. (4-49)]. Para un óptimo funcionamiento del propulsor, el radio de Larmor de los electrones debe ser menor a la longitud del canal de descarga, de modo que los electrones se magnetizan y se reduce su movilidad hacia el ánodo. Este parámetro sirve para validar de manera muy rápida si el propulsor va a funcionar. Para un caso tridimensional, la velocidad del electrón se caracteriza por su velocidad térmica, que puede ser la velocidad media dada por la ecuación [Ec. (A-24)]:

$$v_{th} = \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8K_B T}{\pi m}} \quad (5-12)$$

Por lo tanto, el radio de Larmor para los electrones se escribe como:

$$\rho_e = \frac{v_{th}}{\omega_c} = \frac{m_e}{q_e B} \sqrt{\frac{8K_B T_e}{\pi m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{m_e}{q_e} T_{eV}} \ll L \quad (5-13)$$

Donde T_{eV} es la temperatura del electrón en eV. Considérese a los electrones fuertemente magnetizados, lo que significa que los electrones deben orbitar muchas veces alrededor de una línea de campo magnético antes de colisionar con un átomo neutro o un ion. Esto normalmente se describe afirmando que el cuadrado del parámetro Hall [Ec. (5-9)] debe ser mayor a la unidad [28]:

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{\omega_c^2}{\nu_{col}^2} \gg 1} \quad (5-14)$$

Dicho criterio es claro en el caso de un electrón moviéndose hacia un campo magnético transversal [Ec. (5-15)]. Donde un alto parámetro Hall significa que los electrones tendrán dificultad en su camino hacia el ánodo al haber llegado al campo magnético transversal.

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu}{1 + \Omega^2} \quad (5-15)$$

En el caso de los iones, el radio de Larmor debe ser más grande que la longitud característica del canal de descarga, de esta manera los iones pueden ser acelerados fuera del canal debido al campo eléctrico. La velocidad de salida de los iones está en función de la diferencia de potencial aplicada entre el cátodo y el ánodo [Ec. (5-34)], por lo que la tercera condición del propulsor Hall está dada por:

$$\boxed{\rho_i = \frac{v_i}{\omega_c} = \frac{m_i}{q_i B} \sqrt{\frac{2q_i V_b}{m_i}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_i}{q_i}} V_b \gg L} \quad (5-16)$$

5.4.1. Campo eléctrico y magnético

Los perfiles del campo eléctrico y magnético afectan el rendimiento y vida del propulsor. El campo magnético se descompone en sus componentes axial y radial, debido a la presencia de pantallas magnéticas se genera un gradiente positivo del campo magnético en el canal de descarga, lo que significa que el componente radial aumenta en la dirección axial, alcanzando su valor máximo en el plano de salida [48]. En la Fig. 5-11 se muestra la magnitud del campo magnético en la línea central del canal de descarga, se observa que la componente radial es la de mayor aporte, por lo que se desprecia la componente axial.

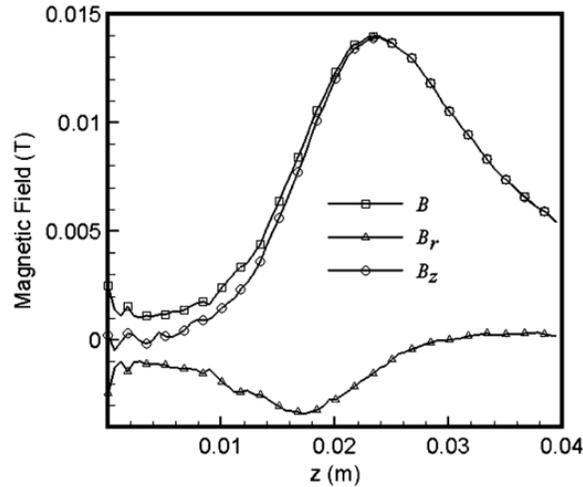


Figura 5-11: Campo magnético en la línea central del canal de descarga. Tomada de [48].

Los electrones que provienen del cátodo experimentan un calentamiento de Joule en la región donde el campo magnético transversal es máximo, proporcionando una mayor temperatura localizada de los electrones y una mayor tasa de ionización. La alta temperatura de los electrones y su reducida movilidad en la región de un fuerte campo magnético hace que el campo eléctrico axial también se maximice cerca de la región de salida, como se muestra en la Fig. 5-12. Dicho campo eléctrico proporciona la energía necesaria para que los electrones ionicen el flujo de gas y acelere libremente a los iones fuera del canal, conocida como región de aceleración.

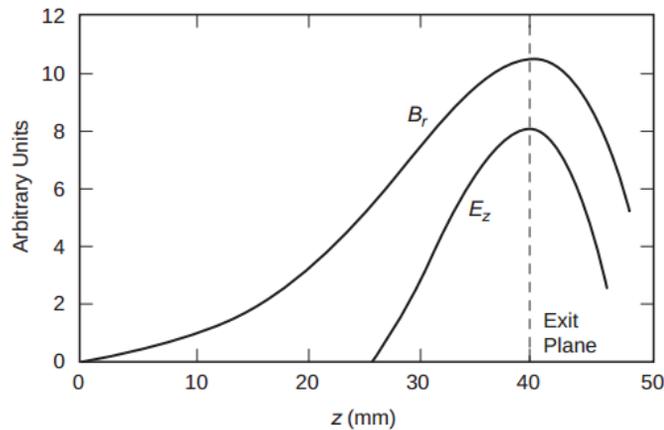


Figura 5-12: Perfiles típicos del campo magnético radial y campo eléctrico axial del propulsor Hall a lo largo de la longitud del canal. Tomada de [28].

El gas neutro es inyectado por el ánodo y es ionizado en la región de ionización dentro del canal de descarga, como la utilización de la masa es muy alta, la densidad del gas neutro en la región de salida es muy pequeña. Las regiones de aceleración y ionización se superponen, lo que conduce a la dispersión de la velocidad de los iones y a una cierta divergencia en el haz resultante.

La intensidad y el perfil del campo magnético controlan las posiciones relativas de las regiones de ionización y aceleración, las cuales deben ser optimizadas para asegurar una eficiente extracción de iones [8].

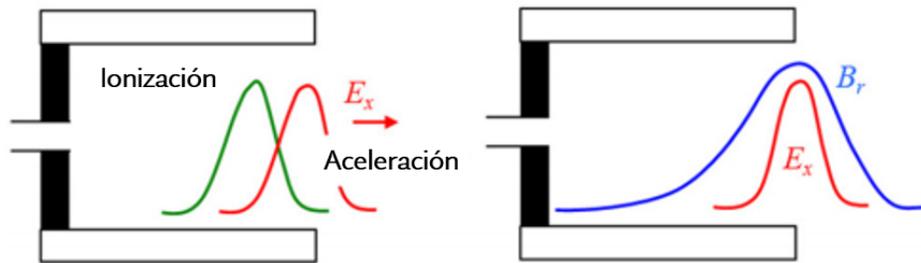


Figura 5-13: Esquema de las regiones de ionización y aceleración. Esquema del campo magnético radial y campo eléctrico axial. Tomada de [8].

5.4.2. Corriente Hall

Los electrones del plasma sienten una fuerza $\vec{E} \times \vec{B}$ que provoca que circulen alrededor del eje axial formando la corriente Hall. La magnitud de la velocidad azimutal de los electrones atrapados está dada por la velocidad de deriva [Ec.(4-54)]:

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \approx \frac{E_z}{B_r} \quad (5-17)$$

La corriente Hall, es la corriente en la dirección azimutal, dada por:

$$I_H = n_e q_e \left(\int_0^L v_E dz \right) w = n_e q_e \left(\int_0^L \frac{E}{B} dz \right) w \quad (5-18)$$

Donde w es el ancho del plasma, que se puede considerar como el ancho del canal de descarga. El campo eléctrico axial es aproximadamente el voltaje de descarga

V_d (véase 5.4.4) entre el espesor del plasma, es decir la longitud del canal [28].

$$I_H \approx n_e q_e w \frac{V_d}{B} \quad (5-19)$$

De la Ec. (5-19) se puede observar que la corriente Hall aumenta de manera proporcional al voltaje de descarga, y es inversamente proporcional al campo magnético.

La corriente de iones que se separa del plasma y forma el haz de iones a través del área A_e , es aproximadamente:

$$I_i = n_i q_i v_i A_e \approx n_i q_i \sqrt{\frac{2q_i V_d}{m_i}} 2\pi R w \quad (5-20)$$

donde R es el radio promedio del canal de descarga. Como el plasma es cuasineutro ($n_i \approx n_e$), la corriente Hall se puede escribir en términos de la corriente de iones, es decir:

$$I_H \approx \frac{I_i}{2\pi R B} \sqrt{\frac{m_i V_d}{2q_e}} \quad (5-21)$$

Por lo que, si se aumenta la corriente de iones, la corriente Hall también aumentará.

El empuje del propulsor Hall en función de la corriente Hall está dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{T} = \int (\vec{J}_H \times \vec{B}) d\vec{A} = I_H B \approx I_i \sqrt{\frac{m_i V_d}{2q_e}} \quad (5-22)$$

El término de empuje se aborda en la sección 5.4.5.

5.4.3. Longitud de la región de ionización

Considérese un átomo de gas neutro con una velocidad v_n incidente en un plasma de densidad n_e (densidad de electrones), temperatura del electrón T_e y un grosor L . La densidad del gas neutro disminuirá con respecto al tiempo debido a la ionización:

$$\frac{dn_n}{dt} = -n_n n_e k_i \quad (5-23)$$

donde k_i es la tasa de ionización que depende de la temperatura de los electrones. El flujo de los átomos neutros incidentes en el plasma está dado por la ecuación:

$$\Gamma_n = n_n v_n \quad (5-24)$$

donde la velocidad de los átomos neutros en la dirección axial x está dada por $v_n = dx/dt$. Al sustituir el flujo y la velocidad de los átomos neutros en la Ec. (5-23) se obtiene:

$$\frac{d\Gamma_n}{\Gamma_n} = -\frac{n_e k_i}{v_n} dx \quad (5-25)$$

La solución de la Ec. (5-25) describe la disminución del flujo de átomos neutros a causa de la ionización, al considerar que la tasa de ionización y la densidad del plasma son constantes.

$$\Gamma_n(x) = \Gamma(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_i}\right) \quad (5-26)$$

donde $\Gamma(0)$ es la densidad de átomos neutros en la región del ánodo; y λ_i es el camino libre medio de ionización, definida por:

$$\lambda_i = \frac{v_n}{n_e k_i} \quad (5-27)$$

El camino libre medio de ionización depende de la velocidad de los átomos neutros que determina el tiempo que el átomo estará en el plasma antes de una colisión.

El camino libre medio es inversamente proporcional a la densidad de electrones, ya que a mayor número de electrones aumenta la probabilidad de que un electrón se encuentre con un átomo neutro. Nótese que el camino libre medio de ionización es distinto al descrito en la Ec. (4-37).

La ionización de una gran fracción η del flujo del átomo tendrá lugar en la longitud de ionización, deducida de [28]:

$$1 - \eta = \exp\left(-\frac{L}{\lambda_i}\right) \quad (5-28)$$

Por lo tanto, la longitud de la región de ionización está dada por la ecuación:

$$L = -\lambda_i \ln(1 - \eta) \quad (5-29)$$

Como algunos de los iones generados en el plasma golpean las paredes del canal de descarga y vuelven a ingresar en el plasma como neutros en lugar de salir como haz de iones, el grosor del plasma debe exceder significativamente el camino libre medio de ionización para obtener una alta eficiencia en la utilización de masa, es decir:

$$\frac{\lambda_i}{L} = cte \ll 1 \quad (5-30)$$

Otra manera de obtener la longitud de ionización es partir de la ecuación de continuidad de electrones en estado estacionario escrita para el flujo de electrones [8].

$$\frac{d\Gamma_e}{\Gamma_e} = -\frac{n_n k_i}{v_e} dx \quad (5-31)$$

La integración de la ecuación para el flujo de electrones, al asumir que los otros parámetros son constantes, proporciona otra estimación de λ_i :

$$\lambda_i = \frac{v_e}{n_n k_i} \quad (5-32)$$

De la Ec. (5-32) se puede notar que dada una densidad de átomos neutros y una

tasa de ionización, la velocidad axial del electrón determina el λ_i y por lo tanto la longitud de la región de ionización L .

Dado que la velocidad axial del electrón está fuertemente relacionada con el campo magnético y varía en $1/B^2$ [Ec.(4-54)], la longitud de la región de ionización disminuye con el aumento de la intensidad del campo magnético radial.

5.4.4. Distribución de potencial

Dentro del canal de descarga del propulsor se presenta una distribución no uniforme del potencial, este es un factor importante que considerar ya que dicho potencial determinará la intensidad de la velocidad de salida de los iones.

El esquema eléctrico de un propulsor Hall se muestra en la Fig. 5-14. Normalmente, las fuentes de energía están conectadas a una misma referencia, llamada cátodo común. El voltaje al cuál se encuentran el ánodo y cátodo en el propulsor no es el voltaje que será aprovechado para expulsar a los iones, pues parte del voltaje del propulsor es utilizado por los demás componentes como lo son el *heater* y el *keeper*.

La Fig. 5-14 también muestra la distribución de potencial del propulsor Hall. Como se mencionó, la distribución de potencial dentro del propulsor es no uniforme, este efecto se explica por el cambio de movilidad de los electrones a través de un campo magnético debido al gradiente de campo magnético y a la corriente de electrones a lo largo del campo magnético impulsada por el gradiente de temperatura del electrón [41].

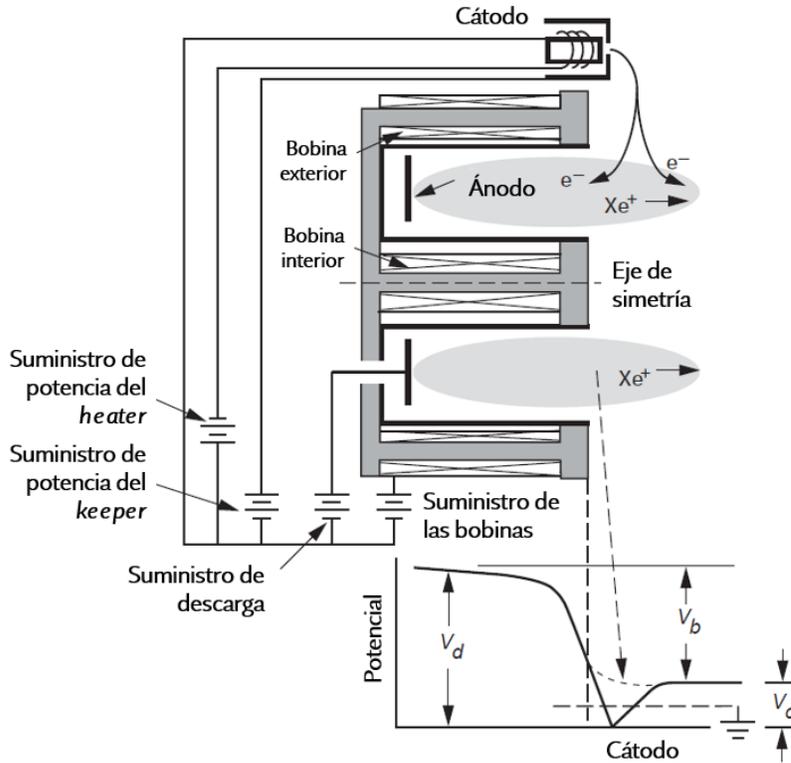


Figura 5-14: Esquema eléctrico y la distribución de potencial en un propulsor de efecto Hall. Tomada de [28].

En las regiones donde el campo magnético transversal es bajo, el plasma se encuentra débilmente magnetizado y la movilidad de electrones es alta, por lo que el potencial de plasma es cercano al potencial del ánodo. El potencial de plasma disminuye hacia el potencial del cátodo cerca del plano de salida a medida que aumenta el campo magnético limitando la movilidad del electrón (Fig. 5-12). La diferencia entre el voltaje de descarga V_d y el voltaje del cátodo y sus componentes V_c es el voltaje por el cual serán acelerados los iones V_b [28].

$$V_b = V_d - V_c \quad (5-33)$$

El potencial de plasma axial, mostrado esquemáticamente por la línea de puntos de la Fig. 5-14, disminuye desde las regiones de ionización y aceleración hasta el potencial de plasma del haz de empuje. Los iones son generados a lo largo de todo este gradiente de potencial, lo que provoca una propagación de energía iónica en el haz. Dado que la mayoría de los iones se generan en la región de ionización, la velocidad media del haz de iones se puede expresar como [28]:

$$v_i = \sqrt{\frac{2qV_b}{m_i}} \quad (5-34)$$

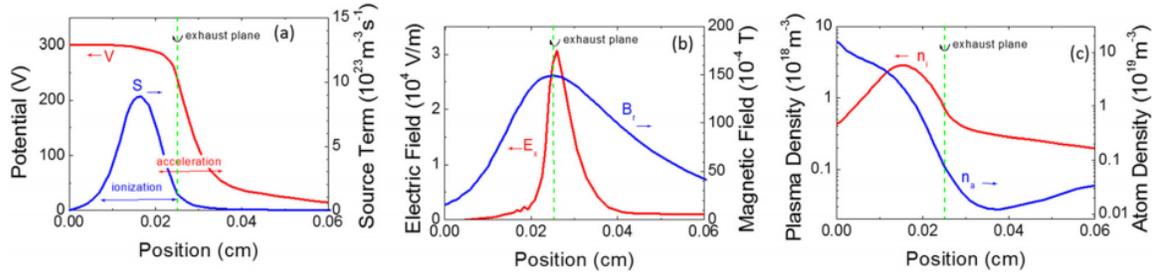


Figura 5-15: Distribución axial del tiempo promedio (a) potencial de plasma y tasa de ionización, (b) campo magnético radial externo y campo eléctrico axial, (c) densidad de plasma y densidad de átomos de Xenón. Modelo híbrido 2D de un propulsor Hall (SPT100). Tomada de [8].

5.4.5. Fuerza de empuje

Supóngase dos condiciones, la primera es que el plasma del propulsor Hall es localmente cuasineutro ($n_i \approx n_e$) en la región de aceleración, y la segunda es que los campos eléctrico y magnético son uniformes. Se utiliza un sistema de coordenadas cilíndrico con un eje axial z y uno radial r , tal como se muestra en la Fig. 5-16.

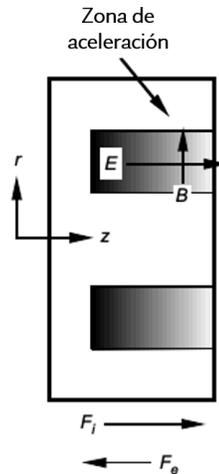


Figura 5-16: Campo magnético y eléctrico en el propulsor Hall. Tomada de [28].

Los iones son esencialmente no magnetizados y sienten la fuerza del campo eléctrico local. La fuerza sobre los iones del propelente dado el campo eléctrico será [28]:

$$\vec{F}_i = 2\pi \int \int qn_i \vec{E} r dr dz \quad (5-35)$$

Los electrones sentirán una fuerza electrostática de la misma naturaleza que los iones, pero de sentido contrario, debido al signo de sus cargas. Los campos transversales limitan el movimiento de los electrones hacia dentro o fuera del propulsor. Por lo tanto, la fuerza por unidad de área en los electrones atrapados en el campo se obtiene a partir de la fuerza de Lorentz [28]:

$$\vec{F}_e = -2\pi \int \int qn_e \vec{E} r dr dz - 2\pi \int \int q_e n_e v_E \times \vec{B} r dr dz = 0 \quad (5-36)$$

Donde v_E es la velocidad de deriva dada por los campos \vec{E} y \vec{B} transversales.

La densidad de corriente se puede expresar como $J = qnv$, al sustituir la densidad de corriente en la Ec. (5-36), se obtiene la siguiente equivalencia:

$$-2\pi \int \int qn_e \vec{E} r dr dz = 2\pi \int \int J_H \times \vec{B} r dr dz \quad (5-37)$$

Donde $J_H = -q_e n_e v_E$, para los electrones que forman la corriente Hall con su velocidad correspondiente a la velocidad de deriva.

Se puede igualar la Ec. (5-35) con la Ec. (5-37), de lo cual se obtiene la fuerza por unidad de volumen sobre los iones:

$$\vec{F}_i = \vec{J}_H \times \vec{B} \quad (5-38)$$

La fuerza debida a la corriente Hall se transfiere al cuerpo del propulsor por medio de la fuerza de Lorentz, generando la fuerza de empuje $\vec{F}_i = -\vec{T}$, tal que:

$$\vec{T} = \vec{J}_H \times \vec{B} = -\vec{F}_i \quad (5-39)$$

Como se mencionó en la sección 3.1.2, la fuerza de empuje para un propulsor en general está dada por el flujo másico del propelente y su velocidad de salida [Ec. (3-18)]. El propulsor Hall expulsa iones a altas velocidades, por lo que la velocidad de escape del propulsor se puede tomar como la velocidad de los iones v_i [Ec. (5-34)]. De tal modo, que la ecuación de la fuerza de empuje se puede escribir como:

$$T = \dot{m}v_{ex} \approx \dot{m}_i v_i \quad (5-40)$$

El flujo másico de iones está relacionado con la corriente del haz de iones I_b por la ecuación:

$$\dot{m}_i = \frac{I_b m_i}{q} \quad (5-41)$$

Sustituyendo las Ecs. (5-34) y (5-41) en la Ec. (5-40), se obtiene la fuerza de empuje en función de la corriente del haz de iones y del voltaje con el cual se aceleran los iones:

$$T = \sqrt{\frac{2m_i}{q}} I_b \sqrt{V_b} \quad (5-42)$$

La Ec. (5-42) describe la fuerza de empuje para un haz de iones unidireccional, ionizado una sola vez y monoenergético. Todo lo cual, en general, no ocurre. Por lo que, se utiliza un factor de corrección de empuje total γ (véase Apéndice B). Por lo tanto, la fuerza de empuje considerando el factor de corrección se escribe como [Ec. (B-9)]:

$$T = \gamma \dot{m}_i v_i = \gamma \sqrt{\frac{2m_i}{q}} I_b \sqrt{V_b} \quad (5-43)$$

5.4.6. Impulso específico

El impulso específico I_{sp} está descrito por la Ec. (3-22) que es una medida de eficiencia del propulsor y está definido por el cociente entre la fuerza de empuje y la tasa de consumo del propelente.

Al sustituir el empuje de la Ec. (5-40) para los iones en la Ec. (3-22) se obtiene:

$$I_{sp} = \frac{v_i \dot{m}_i}{g \dot{m}} \quad (5-44)$$

donde v_i es la velocidad de escape para un haz de iones unidireccional y monoenergético [28].

La eficiencia de utilización del propelente η_m se define como el cociente entre el flujo másico ionizado \dot{m}_i y el flujo másico del propelente \dot{m} :

$$\eta_m = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}} \quad (5-45)$$

Sustituyendo la velocidad de escape de los iones [Ec. (5-34)] y la eficiencia del propelente [Ec. (5-45)] en la Ec. (5-44), se obtiene el impulso específico en función de la masa del ion y del voltaje con el que se aceleran los iones.

$$I_{sp} = \frac{\eta_m}{g} \sqrt{\frac{2qV_b}{m_i}} \quad (5-46)$$

Para simplificar la ecuación se sustituyen los valores de g y q , por lo que se obtiene el impulso específico para cualquier propelente:

$$I_{sp} = 5.77 \times 10^{-11} \eta_m \sqrt{\frac{V_b}{m_i}} \quad (5-47)$$

Las ecuaciones anteriores describen un haz de iones unidireccional, ionizado una sola vez y monoenergético, por lo que de igual manera se utiliza un factor de corrección γ (véase Apéndice B). La Ec. (5-46) se escribe como [Ec. (B-18)]:

$$I_{sp} = \frac{\gamma \eta_m}{g} \sqrt{\frac{2qV_b}{m_i}} \quad (5-48)$$

Y la ecuación para cualquier propelente:

$$I_{sp} = 5.77 \times 10^{-11} \gamma \eta_m \sqrt{\frac{V_b}{m_i}} \quad (5-49)$$

5.4.7. Eficiencia

La eficiencia eléctrica del propulsor está definida por la relación de la potencia del haz de iones producido P_b y la potencia total de entrada P_T .

$$\eta_e = \frac{P_b}{P_T} = \frac{I_b V_b}{P_0 + I_b V_b} \quad (5-50)$$

donde P_0 representa las demás formas de potencia de entrada al propulsor para lograr el haz de iones. Por ejemplo, la potencia que requiere el propulsor para la creación de iones, llamada eficiencia de producción de iones (η_d) o también llamada pérdida por descarga (*Discharge Loss*), dada por la ecuación:

$$\eta_d = \frac{P_d}{I_b} \quad (5-51)$$

donde P_d representa la potencia necesaria para producir el haz de iones. Mientras más pequeña sea η_d , el propulsor tendrá un mejor rendimiento pues se necesitará un menor voltaje y corriente para producir más iones para la corriente del haz.

La eficiencia total de un propulsor eléctrico (η_T) está definida por el cociente entre la potencia de empuje cinético P_{jet} (*jet power*) y la potencia eléctrica total de entrada en el propulsor P_{in} (*input power*).

$$\eta_T = \frac{P_{jet}}{P_{in}} \quad (5-52)$$

La potencia de empuje cinético está definida por:

$$P_{jet} = \frac{1}{2} \dot{m} v_{ex}^2 \quad (5-53)$$

Al despejar la velocidad de escape de la ecuación de la fuerza de empuje [Ec. (5-40)] y sustituir dicho valor en la Ec. (5-53), se obtiene la ecuación:

$$P_{jet} = \frac{T^2}{2\dot{m}} \quad (5-54)$$

Por lo que, la eficiencia total de un propulsor eléctrico está definida por:

$$\eta_T = \frac{T^2}{2\dot{m}P_{in}} \quad (5-55)$$

La potencia de entrada, el flujo másico inicial y el empuje son parámetros que se pueden obtener fácilmente, mientras que los parámetros del haz de iones (corriente y velocidad) son difícilmente medibles, incluso en sistemas de vacío. Es por eso que, la Ec. (5-55) se prefiere para medir la eficiencia total de los propulsores Hall.

Al sustituir la fuerza de empuje [Ec. (5-43)] en la ecuación de la eficiencia total [Ec. (5-55)], se obtiene:

$$\eta_T = \frac{(\gamma\dot{m}_i v_i)^2}{2\dot{m}P_{in}} \quad (5-56)$$

Si se sustituye la velocidad de escape de los iones [Ec. (5-34)], el flujo másico de los iones [Ec. (5-41)] y la eficiencia de utilización del propelente [Ec. (5-45)], la Ec. (5-56) se escribe como:

$$\eta_T = \gamma^2 \eta_m \frac{\dot{m}_i v_i^2}{2\dot{m}P_{in}} = \gamma^2 \eta_m \frac{I_b V_b}{P_{in}} \quad (5-57)$$

De la eficiencia eléctrica [Ec. (5-50)], se obtiene que:

$$P_{in} = \frac{P_b}{\eta_e} = \frac{I_b V_b}{\eta_e} \quad (5-58)$$

Por lo que, la eficiencia total en función de otras eficiencias se escribe como:

$$\eta_T = \gamma^2 \eta_e \eta_m \quad (5-59)$$

Para calcular una eficiencia más precisa en un propulsor se pueden utilizar más factores de eficiencia, como la eficiencia de utilización eléctrica η_0 , eficiencia de utilización de corriente η_b y la eficiencia de utilización de voltaje η_v [28].

La eficiencia de utilización eléctrica está dada por:

$$\eta_0 = \frac{P_d}{P_T} = \frac{P_d}{P_d + P_k + P_{mag}} \quad (5-60)$$

donde P_d es la potencia de descarga, P_T es la potencia total, P_k es la potencia del *keeper*, y P_{mag} es la potencia utilizada para generar el campo magnético.

La eficiencia de utilización de corriente está dada por:

$$\eta_b = \frac{I_b}{I_d} \quad (5-61)$$

La eficiencia de utilización de voltaje está dada por:

$$\eta_v = \frac{V_b}{V_d} \quad (5-62)$$

Así, la eficiencia total se puede calcular con el producto de las demás eficiencias [Ec. (5-59)]:

$$\boxed{\eta_T = \gamma^2 \eta_e \eta_m \eta_0 \eta_b \eta_v} \quad (5-63)$$

5.5. Tipos de propulsores

Hoy en día existen diferentes diseños de propulsores Hall, donde el tamaño, forma, funcionamiento y aplicación varían dependiendo de la misión. De entre ellos destacan los siguientes [30, 77]:

- **Propulsor de alto impulso específico.** El aumento del impulso específico permite competir en un rango de misiones más grande. La forma en que se obtienen impulsos específicos mayores ($\sim 4000s$) es aumentando el potencial de descarga y la potencia del propulsor, un proceso llamado escalado por arriba de los propulsores.
- **Propulsor dual.** Funcionan en dos regímenes de operación: uno a bajo empuje y alto impulso específico, y el otro de alto empuje y bajo impulso específico. Esto se consigue con diseños que permiten modificar el potencial de descarga y el campo magnético aplicado al propulsor.
- **Propulsor de doble etapa.** Se busca separar el proceso de ionización y aceleración del plasma (parecido en los propulsores iónicos). Esto se consigue colocando electrodos o cátodos intermedios en el canal de descarga.
- **Propulsor de baja potencia.** Se consideran propulsores de baja potencia porque operan en un rango de 50 a 100 W. Se obtiene al reducir el flujo másico del propelente y el voltaje de descarga. Se utilizan en satélites pequeños, sería el escalado por abajo del propulsor. Algunos problemas tecnológicos hacen que sean ineficientes y poco competitivos frente a otros propulsores eléctricos.
- **Propulsor Cilíndrico (*Cylindrical Hall Thruster* CHT).** Utiliza una cámara cilíndrica completa sin la pared interior, esto reduce la relación superficie-volumen del propulsor, de manera que se producen menores pérdidas energéticas en las paredes. El campo magnético tiene una topología distinta, de modo que los efectos de espejo magnético son importantes.
- **Propulsor con cúspides magnéticas.** Consiste de una cámara cilíndrica o cónica y un campo magnético que presenta cúspides, esto es, puntas que se introducen en las paredes del motor. Esto tiene un doble objetivo, el primero es limitar el transporte axial de los electrones, y el segundo, reducir las pérdidas en las paredes.
- **Propulsor lineal.** La geometría lineal es atractiva para el escalamiento hacia abajo de la descarga, ya que no tiene las limitaciones prácticas impuestas por la pieza del polo magnético central en un diseño coaxial. Además, es el uso de materiales cerámicos avanzados que no son fáciles de maquinar y que se encuentran en forma de placa, como el vapor químicamente depositado (CVD).
- **Propulsor multicanal (*Nested Channel Hall Thruster* NCHT).** Consiste en un solo motor con múltiples cámaras cilíndricas anulares, cada una de diferente tamaño, de manera que todas ellas son coaxiales y contienen su propio ánodo e inyector. Por lo general comparten el mismo cátodo que se encuentra en el centro del propulsor. Son propulsores diseñados para operar a una elevada potencia (100 – 200 kW) pero con un peso reducido. La configuración de múltiples canales de descarga les permite operar en un gran número de condiciones, esto se consigue activando los diferentes canales de descarga. Son por tanto propulsores de operación dual.
- **Propulsores agrupados (*Clustered Hall Thrusters*).** Es la agrupación de dos o

más propulsores que se acomodan de tal manera que se utilizan para determinar los efectos de acoplamiento asociados a la agrupación. La agrupación permite que una nave espacial pueda alcanzar una potencia a escala prácticamente ilimitada y niveles de empuje con un propulsor dado.

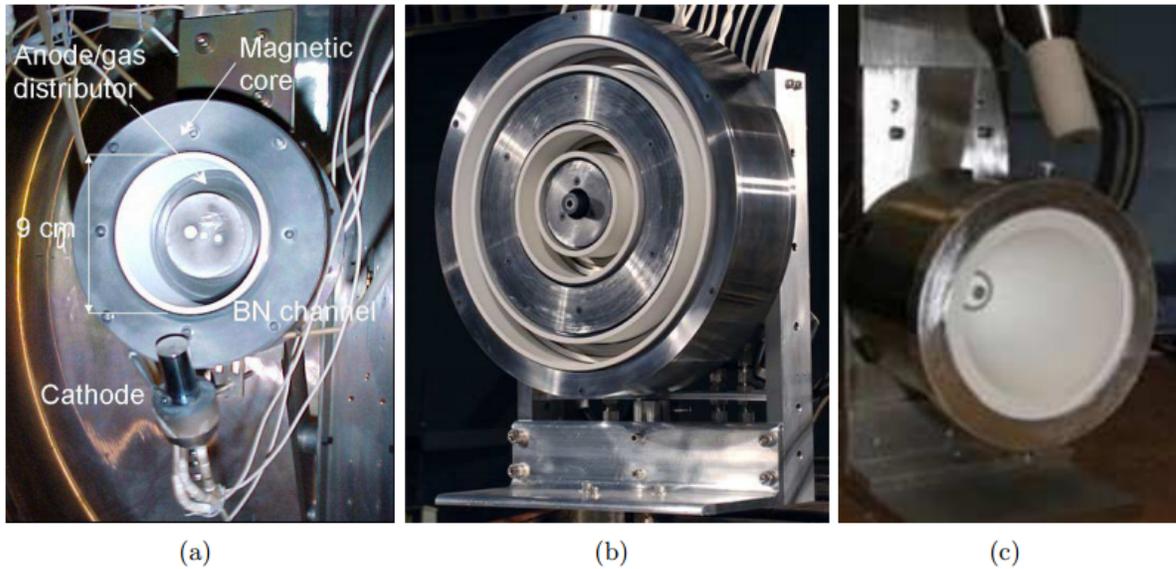


Figura 5-17: a) Propulsor Cilíndrico (CHT). Fuente: Hall thruster Experiment, PPPL. b) Propulsor multicanal (NCHT). Fuente: Plamadynamics and Electric Propulsion Laboratory, Universidad de Michigan. c) Propulsor con cúspides magnéticas. Fuente: Space Propulsion Laboratory, MIT. Tomada de [30].

Capítulo 6

MÉTODO *Particle In Cell* (PIC)

En el capítulo 4 se obtuvo la ecuación de Boltzmann [Ec. (4-67)], una ecuación que nos ayudará a entender cómo se distribuyen las partículas en un espacio de seis dimensiones o espacio fase, logrando así la descripción cinética del plasma. En este capítulo se profundiza en uno de los métodos basados en partículas para solucionar métodos cinéticos, el método *Particle In Cell*, y de la misma manera se profundizará en su algoritmo.

6.1. Métodos de simulación

Existe una gran variedad de métodos, con sus respectivas variantes, para describir el comportamiento de un plasma. Cada método tiene un rango de aplicación y validez, en la Fig. 6-1 se muestra un esquema de clasificación de los diferentes métodos en función del costo computacional y la de fidelidad.

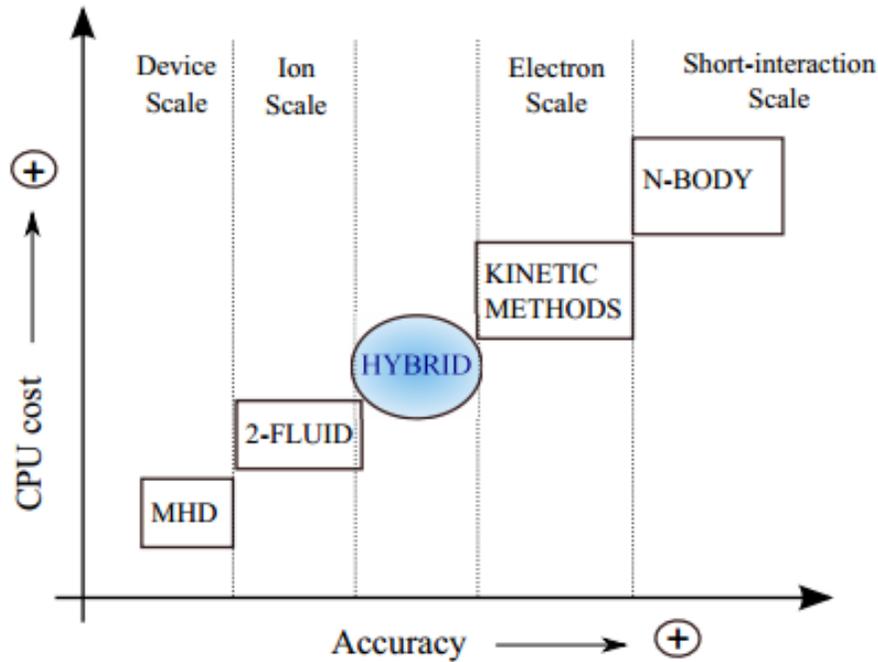


Figura 6-1: Esquema de clasificación de los diferentes métodos de simulación para plasmas. Tomada de [30].

En general, existen tres categorías de métodos de simulación en plasmas:

- Los métodos fluidos: Dinámica de Fluidos Computacional o CFD (del inglés *Computational Fluid Dynamics*) y magnetohidrodinámica (MHD)
- Los métodos cinéticos (basado en partículas): Simulación Directa Monte Carlo (DSMC), *Particle In Cell* (PIC) e Hidrodinámica de Partículas Suaves o SPH (del inglés *Smoothed Particle Hydrodynamics*).
- Los métodos híbridos.

En los métodos cinéticos, se pretende obtener las funciones de distribución de las diferentes especies del plasma (neutros, iones y electrones). Como se mencionó en la sección 4.6, la función de distribución indica, para un instante de tiempo dado, el número de partículas que se encuentran en una posición y velocidad determinadas; por medio de la ecuación de Boltzmann se determina la evolución en el tiempo de la función de distribución.

En general, los métodos cinéticos son capaces de reproducir con gran precisión el comportamiento del plasma, pero lo hacen a un coste computacional muy elevado.

Los métodos fluidos utilizan las técnicas convencionales desarrolladas para flui-

dos magnetizados. Este tipo de modelos tienen un rango de validez menor sujeto a las características del plasma que se está estudiando.

Un factor importante es el número de Knudsen:

$$K_n = \frac{\lambda}{L} \quad (6-1)$$

Donde λ es el camino libre medio de colisiones que está definido por la ecuación $\lambda = 1/\sigma n$ visto en la sección 4.3.4 y L es el dominio. Si el camino libre medio de colisiones es mucho más pequeño que el dominio ($L, K_n \ll 1$), significa que el problema puede ser modelado como un continuo y por lo tanto se pueden ocupar los métodos fluidos.

Así es necesario que el número de Knudsen del fluido y/o el radio de Larmor (sección 4.4.1) de los electrones sean pequeños. Aunque estas hipótesis no se cumplan, los métodos fluidos suelen proporcionar resultados aceptables en el comportamiento macroscópico del plasma [30].

En estos métodos se resuelven las ecuaciones de conservación de carga, momento y energía del plasma mediante las técnicas numéricas habituales de la mecánica de fluidos, es decir, los modelos fluidos pueden tratar al plasma como un fluido o como una combinación de varios.

Finalmente, los métodos híbridos representan un término medio entre los métodos cinéticos y fluidos. Consiste en modelar parte de las especies del plasma como un fluido, mientras que las especies restantes se modelan con métodos PIC.

La diferencia entre los modelos radica en que, los métodos de fluidos resuelven algunas ecuaciones de gobierno en un dominio discretizado en una malla computacional, mientras que los métodos cinéticos utilizan partículas para representar las moléculas, dichas partículas se utilizan para calcular cantidades macroscópicas del plasma como densidad, velocidad y temperatura, ocupando una malla computacional para obtener las interacciones de las partículas.

6.2. Simulaciones PIC

El método PIC es una técnica utilizada para modelar sistemas físicos cuyo comportamiento varía en una amplia gama de escalas espaciales. A nivel macroscópico,

se describe la dinámica por un modelo continuo, mientras que en un modelo microscópico es modelado por una colección de partículas discretas. Tratar ambos niveles por separado puede ser problemático, por lo que el método PIC intenta ser el puente entre lo microscópico y macroscópico [62].

En otras palabras, el método PIC es un algoritmo iterativo, que consiste en la resolución de las ecuaciones diferenciales involucradas en la evolución del plasma (el potencial eléctrico, el campo eléctrico y las ecuaciones cinéticas), por medio del movimiento de las diferentes especies del plasma debido a la presencia de campos electromagnéticos¹. Las partículas tienen asignadas una o más propiedades (por ejemplo, masa, velocidad, carga, etc.). El espacio de simulación se toma como una malla computacional, la cual es utilizada para calcular propiedades macroscópicas como la densidad del plasma, velocidad y temperatura.

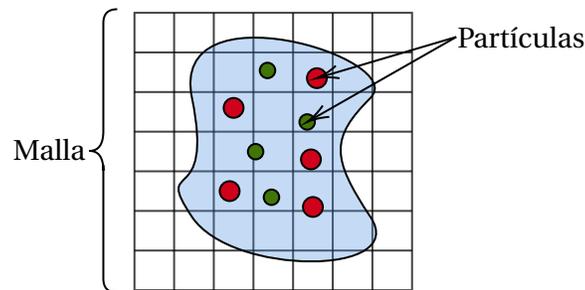


Figura 6-2: Esquema del método PIC.

6.3. Algoritmo PIC

El método PIC se puede describir en tres pasos principales:

1. Inicialización. Asignar memoria, cargar partículas iniciales, configurar variables y parámetros.
2. Programa principal. Consta de cuatro pasos principales, añadiendo un paso para diagnósticos opcionales.
 - *Scatter*. Los atributos de las partículas son interpolados a los nodos cercanos de la celda de la malla.
 - *Solve*. Las ecuaciones diferenciales se resuelven en la malla computacional.

¹Dependiendo del tipo de campo involucrado, el método PIC se puede dividir en: ES-PIC, (electrostático) y en EM-PIC (electromagnético).

- *Gather*. La solución de cada partícula se encuentra por interpolación en la malla.
 - *Push*. La partícula se mueve bajo la influencia del momento y los atributos de la partícula se actualizan.
 - Diagnósticos opcionales.
3. Finalización. Almacenar resultados de salida, liberar la memoria.

En las siguientes secciones se describirá cada paso mencionado; a continuación se muestra la estructura del programa:

Tabla 6-1: Algoritmo general del método PIC [62].

1. Inicializar los datos de la partícula	◇ Inicialización
2. Inicializar la malla	
3. while $t < t_{max}$ do	◇ Programa principal
4. Calcular las contribuciones de la partícula a la malla	- <i>Scatter</i>
5. Resolver los campos	- <i>Solve</i>
6. Actualizar las fuerzas en la posición de las partículas	- <i>Gather</i>
7. Mover las partículas a sus nuevas posiciones	- <i>Push</i>
8. Calcular los diagnósticos opcionales	
9. $t = t + t_{paso}$	
10. end while	
11. Imprimir los resultados	◇ Finalización
12. Liberar la memoria	

6.3.1. Inicialización

Es la primera fase del algoritmo, en la cual se leen los parámetros iniciales de la simulación (puede venir de un archivo de entrada), el tiempo inicial, condiciones iniciales, además de inicializar las estructuras de datos para almacenar los resultados en la malla (densidad de las especies, densidad de carga, potencial y campo eléctrico) y para almacenar los datos de cada partícula (posición, velocidad, etc.) También se describe el dominio de la simulación mediante una malla computacional.

Imagínese un propulsor iónico, en el cual la densidad del plasma es de $n = 10^{15}$ partículas por metro cúbico, la densidad del plasma disminuye conforme la distancia a la salida del propulsor aumenta, por lo tanto, se puede hablar de una densidad promedio de $n = 10^{12}$. Falta multiplicarlo por el dominio de la simulación, pero aun así ya es un número muy grande. A lo que se quiere llegar, es que no es computacionalmente factible simular cada partícula. Para que la simulación sea lo más eficiente

posible, se utilizan macropartículas (también conocidas como superpartículas), que es una partícula computacional que representa muchas partículas reales. El peso específico w_{sp} es la relación entre las partículas reales N_{real} y las macropartículas N_{sim} , es decir:

$$w_{sp} = \frac{N_{real}}{N_{sim}} \quad (6-2)$$

Tabla 6-2: Algoritmo de Inicialización ($t_{inicial} = 0$) [62].

-
1. Construir el dominio
 2. **for all Partícula** $p \in Dominio$ **do**
 3. $pos(p) = random()$
 4. $vel(p) = 0$
 5. **end for**
 6. **for all Vértice** $v \in Malla$ **do**
 7. $campo(v) = 0$
 8. **end for**
-

6.3.2. Programa Principal

El programa principal corresponde a la segunda fase del algoritmo, consta de cuatro pasos (Fig. 6-3) y uno opcional. Dichos pasos se repiten en el mismo orden en cada paso de tiempo.

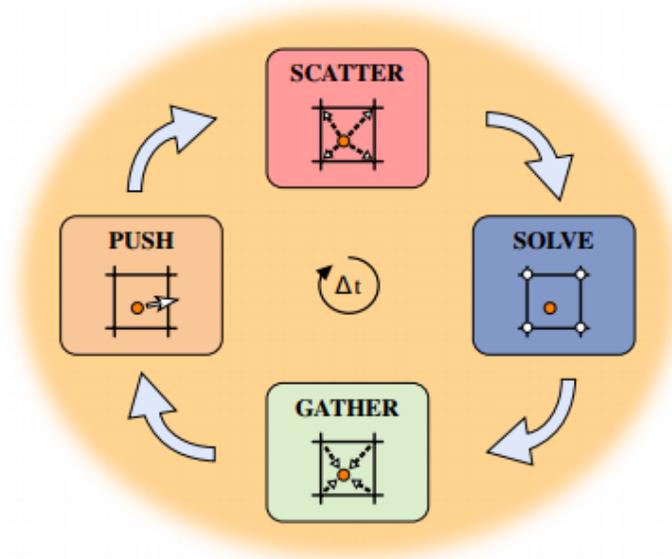


Figura 6-3: Diagrama de la solución del método PIC. Tomada de [62].

Scatter

En la simulación existe un gran número de partículas, cada una localizada en una cierta posición x , este paso consiste en calcular la densidad de carga ρ en los nodos cercanos por medio de funciones de peso, dichas funciones se usan para conectar la información de las partículas al espacio y viceversa.

La función de peso más sencilla y con menor coste computacional es NGP (*Nearest Grid Point*), la cual consiste en generar un volumen de control en cada nodo. Esta función de peso no penaliza la distancia entre el punto de estudio y la posición de referencia. Se dice entonces que es de orden 0 [30]. El problema que tiene es que si una partícula se está moviendo de derecha a izquierda a lo largo de todo el tiempo de simulación puede generar muchas fluctuaciones y ruido numérico. Por este motivo no es recomendable esta función y se usan funciones de peso de mayor orden.

Las funciones de peso más comunes son las de orden 1 o de tipo lineal. En la Fig. (6-4) se muestra una partícula de simulación mostrada en verde, en una celda bidimensional, partiendo la celda en cuatro áreas más pequeñas. El área total de la celda es normalizada a 1, por lo que cada fracción de área es el factor de ponderación del nodo opuesto, es decir, las áreas están inversamente relacionadas con la distancia de los nodos a la partícula, de modo que el nodo más cercano a la partícula recibe

mayor cantidad de carga.

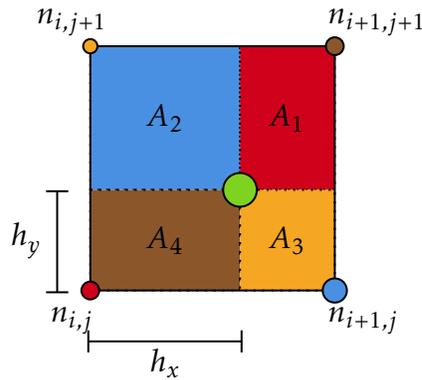


Figura 6-4: Esquema de la operación *scatter*. La carga de la partícula se distribuye entre los nodos circundantes.

Los factores de ponderación vienen dados por las cuatro fracciones de área:

$$w(p, n_{i,j}) = A_1 = (1 - h_x)(1 - h_y) \quad (6-3)$$

$$w(p, n_{i+1,j}) = A_2 = (h_x)(1 - h_y) \quad (6-4)$$

$$w(p, n_{i,j+1}) = A_3 = (1 - h_x)(h_y) \quad (6-5)$$

$$w(p, n_{i+1,j+1}) = A_4 = (h_x)(h_y) \quad (6-6)$$

Finalmente, la densidad de carga en cada nodo es la carga de la partícula de simulación multiplicada por su factor de ponderación.

Tabla 6-3: Algoritmo de *Scatter* [62].

$\rho(n_{i,j})$:	densidad de carga en el nodo $n_{i,j}$
q_p :	carga de la partícula p
1. for all Partícula $p \in Dominio$ do	
2.	Determinar la celda en la que se encuentra la partícula p
3.	Determinar las coordenadas de cada nodo $(n_{i,j})$ de la celda
4.	$\rho(n_{i,j}) = \rho(n_{i,j}) + q_p \cdot w(p, n_{i,j})$
5.	$\rho(n_{i+1,j}) = \rho(n_{i+1,j}) + q_p \cdot w(p, n_{i+1,j})$
6.	$\rho(n_{i,j+1}) = \rho(n_{i,j+1}) + q_p \cdot w(p, n_{i,j+1})$
7.	$\rho(n_{i+1,j+1}) = \rho(n_{i+1,j+1}) + q_p \cdot w(p, n_{i+1,j+1})$
8. end for	

Solve

Al tener la densidad de carga en cada nodo, se resuelve el campo eléctrico y magnético con la ecuación de Poisson ($\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$). Como se mencionó con anterioridad, el método PIC se puede dividir en dos dependiendo del campo involucrado, en este trabajo de tesis se estudiará el método ES-PIC, que se refiere a un campo electrostático.

Considérese el caso 1D, la ecuación de Poisson queda como:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6-7)$$

La cual se puede aproximar por medio de diferencias finitas:

$$\frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \approx \frac{(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}))}{\Delta x^2} = -\frac{\rho_i}{\epsilon_0} \quad (6-8)$$

Donde i es la coordenada del nodo de estudio en 1D. La Ec. (6-8) se puede solucionar de manera matricial $A\vec{\phi} = \vec{b}$, pero al estar ocupando un lenguaje de programación que no tiene un solucionador para matrices se recurren a métodos numéricos. En este trabajo se utilizará el método Gauss-Seidel porque requiere menos memoria ya que la nueva solución se sobrescribe a la solución anterior. La Ec. (6-8) en términos del método Gauss-Seidel se escribe como:

$$\phi_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left[\phi_{i-1}^{k+1} + \phi_{i+1}^k + \frac{\rho_i}{\epsilon_0} \Delta^2 x \right] \quad (6-9)$$

Donde k es el número de iteración. El método numérico seguirá iterando hasta que el residuo $R = \|A\phi - b\|$ sea menor a una cierta tolerancia.

El campo eléctrico es igual al gradiente de potencial, es decir:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (6-10)$$

En el caso unidimensional, la Ec. (6-10) se puede escribir como:

$$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dx} \quad (6-11)$$

Por medio de diferencias finitas:

$$E_i = -\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (6-12)$$

Tabla 6-4: Algoritmo de *Solve* 1D, ES-PIC.

-
1. **for all** *Nodo* $i \in \text{Malla}$ **do**
 2. $(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1})/\Delta x^2 = -\rho_i/\epsilon_0$
 3. $E_i = -(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})/2\Delta x$
 4. **end for**
-

Gather

Para mover las partículas se necesita conocer las fuerzas a las cuales están sometidas, en este caso son las fuerzas eléctricas. En el paso anterior se obtuvo el campo eléctrico en cada nodo de la malla. Al contrario del paso *Scatter*, se interpolará la información de la malla a las partículas, es importante mencionar que se debe emplear la misma función de peso utilizada en el paso *Scatter*.

Tabla 6-5: Algoritmo de *Gather* [62].

-
1. **for all** *Partícula* $p \in \text{Dominio}$ **do**
 2. Determinar la celda en la que se encuentra la partícula p
 3. Determinar las coordenadas de cada nodo $(n_{i,j})$ de la celda
 4. $E(p) = E(n_{i,j}) \cdot w(p, n_{i,j}) + E(n_{i+1,j}) \cdot w(p, n_{i+1,j}) + E(n_{i,j+1}) \cdot w(p, n_{i,j+1}) + E(n_{i+1,j+1}) \cdot w(p, n_{i+1,j+1})$
 5. **end for**
-

Push

Los campos calculados en el paso anterior modifican la velocidad y posición de las partículas, por lo que se utiliza la ecuación de Lorentz [Ec. (4-38)] para calcular la

nueva velocidad y posición de las partículas.

Las ecuaciones de gobierno de la velocidad y aceleración respectivamente son:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (6-13)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6-14)$$

Utilizando la primera diferencia finita hacia delante, las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como:

$$v^{k+1} = v^k + a^k \Delta t \quad (6-15)$$

$$x^{k+1} = x^k + v^k \Delta t \quad (6-16)$$

Esta solución es simple, pero incorrecta. El problema con el método de la diferencia finita hacia delante es que se utiliza la velocidad en el tiempo k para mover la partícula de k a $k + 1$. Lo que tiene más sentido físico es utilizar la velocidad media $k + 1/2$, esta es la premisa del método Leapfrog. La velocidad y la integración de posición se superponen, siendo desplazadas por medio paso de tiempo Δt . En la Fig. 6-5 se muestra un esquema de esta idea; las posiciones de las partículas existen en los tiempos de paso integral, mientras que la velocidad existe en los tiempos medios [12].

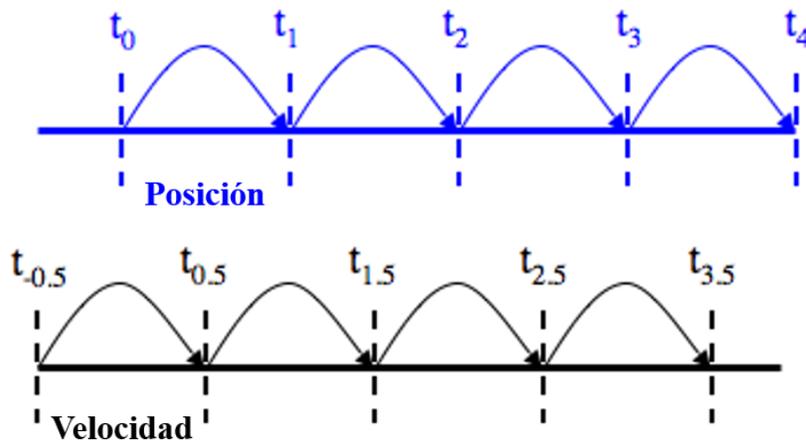


Figura 6-5: Esquema del método de Leapfrog. Tomada de [12].

Por lo tanto, las nuevas velocidades y posiciones de las partículas son calculadas con el método de Leapfrog, respectivamente están dadas por las ecuaciones:

$$v^{k+0.5} = v^{k-0.5} + \left(\frac{\vec{F}}{m} \right) \Delta t \quad (6-17)$$

$$x^{k+1} = x^k + (v^{k+0.5}) \Delta t \quad (6-18)$$

En pocas palabras, la nueva velocidad de las partículas es calculada con la Ec. (6-17) en función del campo eléctrico obtenido en el paso anterior, y después la nueva posición es calculada con la Ec. (6-18).

Al terminar el movimiento de las partículas a sus nuevas posiciones, se tiene que verificar que las partículas continúen dentro del dominio. Existen diferentes escenarios si las partículas están fuera del dominio dependiendo de las condiciones de frontera:

- Abierta. La partícula se elimina.
- Reflectante. La partícula vuelve al dominio por un rebote elástico.
- Periódico. La partícula vuelve al dominio, pero del lado opuesto.

Tabla 6-6: Algoritmo de *Push*.

1.	$a = F/m = (qE)/m$
2.	$v = v - 0.5a\Delta t$
3.	$a = F/m$
4.	$v = v + a\Delta t$
5.	$x = x + v\Delta t$
6.	Repetir 3,4 y 5
7.	Verificar si las partículas siguen en el dominio

6.3.3. PIC-MCC

Cuando el método PIC utiliza el método Monte Carlo (MCC) para tratar a las colisiones (véase la sección 7.2.3) se le llama PIC-MCC. El tratar a las colisiones por este método añade un paso, el cual calcula una probabilidad de colisión y después es comparada con un número aleatorio para determinar si tiene lugar un evento.

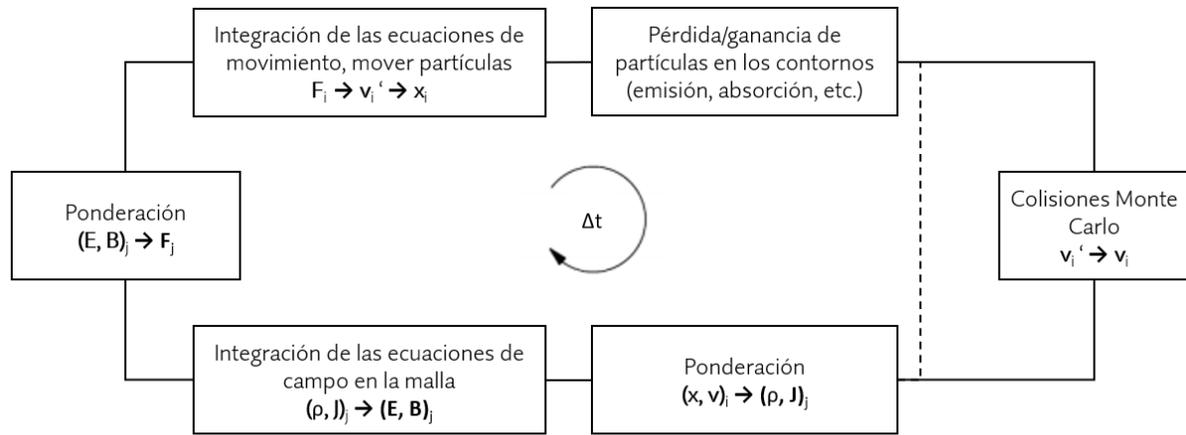


Figura 6-6: Diagrama de flujo del método PIC-MCC. Tomada de [15].

Capítulo 7

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROPULSOR

En este capítulo es donde converge todo el conocimiento teórico de los capítulos anteriores, dando soporte a las consideraciones ocupadas en la simulación. A continuación se hablará del método numérico híbrido abordado para la simulación junto con las condiciones de contorno utilizadas para el modelo fluido y cinético. También se describen unas ecuaciones de estabilidad que tienen como objetivo reducir el tiempo de cómputo. Al final del capítulo se discuten los resultados obtenidos en la simulación.

7.1. Descripción del propulsor

En el presente trabajo se estudiará el propulsor SPT-100, que pertenece a la familia de los propulsores SPT (*Stationary Plasma Thruster*), desarrollado por Fakel en Rusia. Su primer vuelo fue en 1994 en el satélite Gals-1. Es uno de los propulsores más investigados y por ende con más documentación, siendo el principal motivo por el cual se seleccionó este propulsor. El propulsor se ha ido mejorando en el tiempo desarrollando nuevas generaciones del propulsor SPT-100 como lo son SPT-100B, SPT-100M y SPT-100D, véase [53].

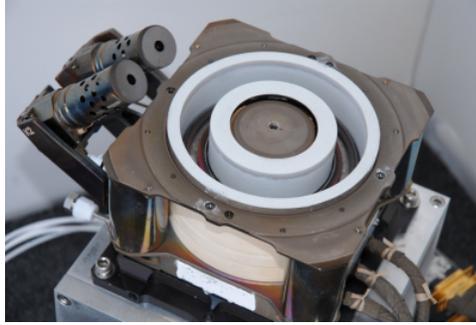


Figura 7-1: Propulsor SPT-100. Tomada de [56].

Como se mencionó en la sección 5.2, el propelente es inyectado por el ánodo, mientras que los electrones son inyectados en el cátodo que se encuentra afuera del canal de descarga. Una parte de los electrones va hacia el canal de descarga y debido al campo magnético los electrones se mantienen dentro del canal de descarga, produciendo la ionización del propelente, y debido al campo eléctrico los iones generados son acelerados hacia el exterior, generando empuje. El canal de descarga es una cámara cilíndrica, normalmente de materiales eléctricos. Las cámaras del propulsor SPT-100 son de nitruro de boro hexagonal (hBN), con una constante dieléctrica o permitividad relativa $\mu_r = 4.6$ [16]. En la Tabla 7-1 se muestran las condiciones de operación habituales del propulsor SPT-100.

Tabla 7-1: Condiciones de operación del propulsor SPT-100 [30, 52, 73, 75].

Parámetro	Unidad	Valor
Longitud del canal	mm	25
Radio externo	mm	50
Radio interno	mm	35
Potencia nominal	W	1350
Potencial de descarga	V	300
Corriente de descarga	A	4.5
Gasto másico	mg/s	5
Máximo B_r	T	0.015
Empuje	N	0.08
Impulso específico	s	1600
Eficiencia	%	50

7.2. Método numérico

A lo largo del tiempo se han desarrollado diferentes códigos para la simulación de los propulsores Hall, normalmente son simulaciones 2D axisimétricas. El primer código se desarrolló en el MIT, llamado HPHall [23]. Después se realizaron mejoras, desarrollando el código HPHall-2 [59]. Existen otros códigos como StarFish [14] y VORPAL [58]. VORPAL es un código PIC comercial desarrollado por la Universidad de Colorado, que fue incorporado a VSim de Tech-X [52]. Dicho código es utilizado en el presente trabajo.

La geometría típica de un propulsor Hall es una geometría anular, que se representa en un espacio físico tridimensional axisimétrico en coordenadas cilíndricas (z, r, θ) . La mayoría de los modelos en la literatura se enfocan en el plano RZ del propulsor, y se asume que el plasma es axisimétrico y uniforme en la dirección azimutal [8]. Aunque también existen trabajos que se enfocan en el plano $R\theta$ [33]. Se han reportado variaciones azimutales en el campo magnético y en la erosión de paredes [55], dichas variaciones juegan un papel importante en la difusión de electrones [72]. En el presente trabajo, se utiliza la hipótesis de axisimetría, esto es, la simetría cilíndrica de las variables del modelo ($\partial/\partial\theta = 0$). Así el problema queda reducido un problema de dos dimensiones (r, z) [5].

La simulación considera a los átomos neutros como un fluido, mientras que los iones y electrones son modelados como macropartículas, por lo que se tiene un método híbrido. La malla y el campo magnético se calculan en el pre-proceso. Se utiliza el método PIC mover las macropartículas en función de los campos eléctrico y magnético. En el caso de los neutros, se incluye una distribución axial unidimensional que permanece estática en la simulación. Las colisiones son calculadas por medio del método Monte Carlo (MCC) y se incluyen colisiones elásticas, colisiones de intercambio de carga (CEX), ionización y excitación.

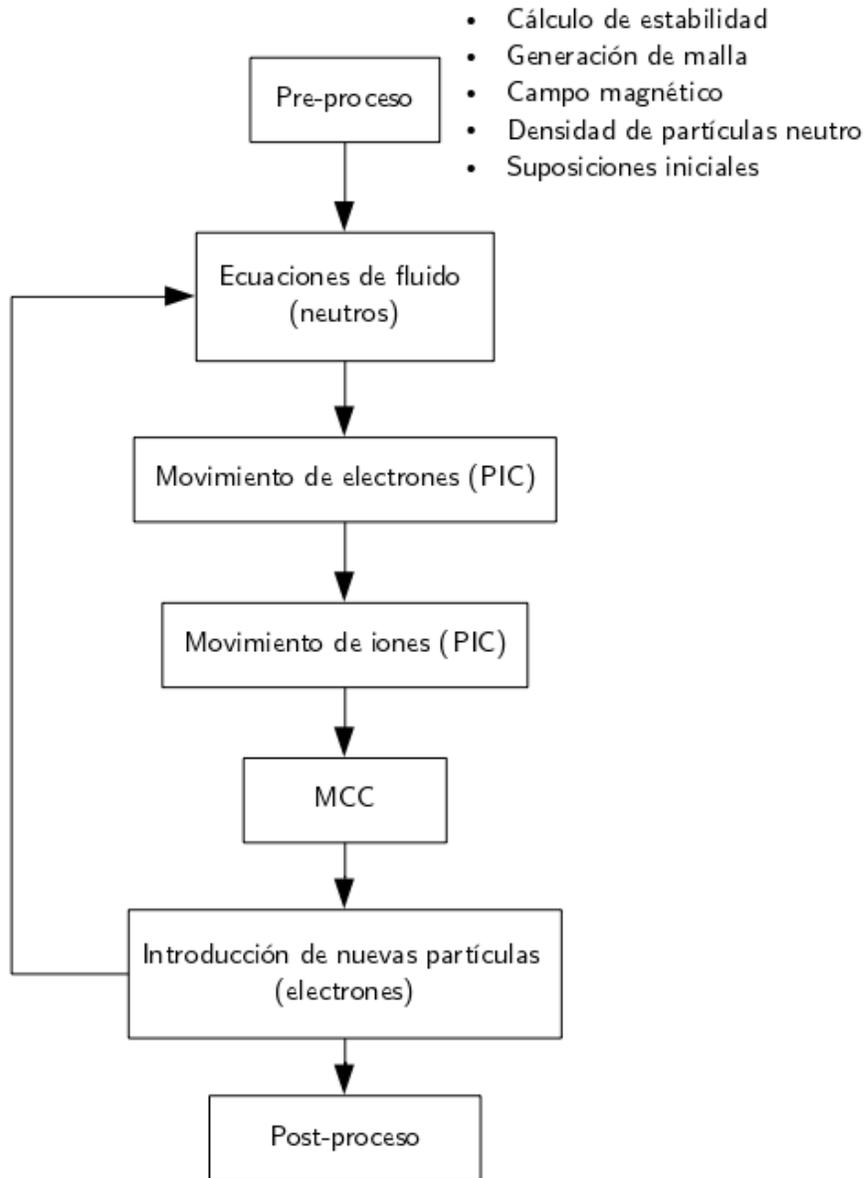


Figura 7-2: Diagrama de flujo [23, 72].

El dominio computacional representa el ancho del propulsor (R), y la longitud del canal de descarga más una longitud adicional que describe a la pluma. En $z = 0$ se encuentra el ánodo con un voltaje de 300 V. Las paredes internas del propulsor se modelan como una condición de pared dieléctrica con una permitividad relativa ϵ_r de 4.6. Los límites radiales y axiales del dominio computacional se modelan como metálicos. Todos los elementos metálicos de la simulación, excepto el ánodo, están a un potencial de tierra. Los electrones se introducen al sistema con una dis-

tribución gaussiana de velocidad y su fuente se encuentra en $34\text{mm} < z < 36\text{mm}$ y $74\text{mm} < r < 76\text{mm}$ [67].

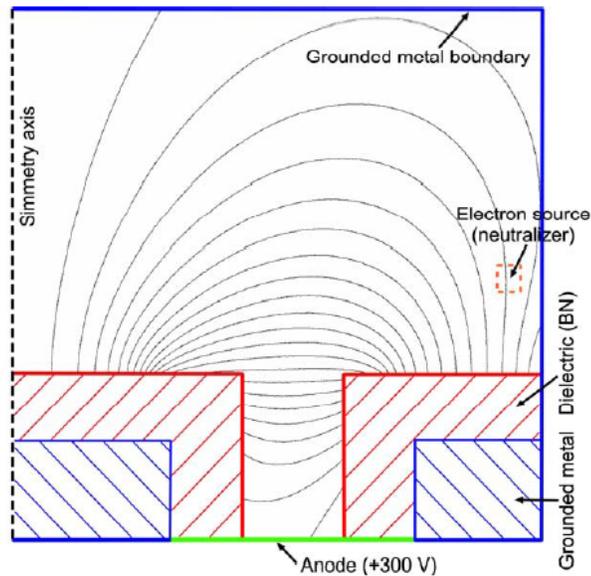


Figura 7-3: Condiciones de frontera. Tomada de [67].

7.2.1. Campo magnético

Como se mencionó en la sección 5.4.1, el campo magnético se presenta de forma radial, y normalmente presenta su valor máximo cerca del plano de salida del propulsor. La distribución del campo magnético en la línea central dentro del canal de descarga está dada de forma analítica por [44]:

$$B(z) = B_{max} \exp \left[-K \left(\frac{z}{L} - 1 \right)^2 \right] \quad (7-1)$$

Donde B_{max} es el campo magnético radial máximo (Tabla 7-1), y K es el coeficiente de forma del campo magnético. Una distribución ideal para el SPT-100 se encuentra cuando $K = 16$. A medida que K disminuye, la fuerza magnética cerca del ánodo aumenta, lo que causa una pérdida en el rendimiento debido a que el proceso de ionización puede comenzar inmediatamente después de que los neutros son inyectados, por lo que una cantidad relativamente grande de iones puede regresar a los neutros debido a un proceso de recombinación en las paredes [44].

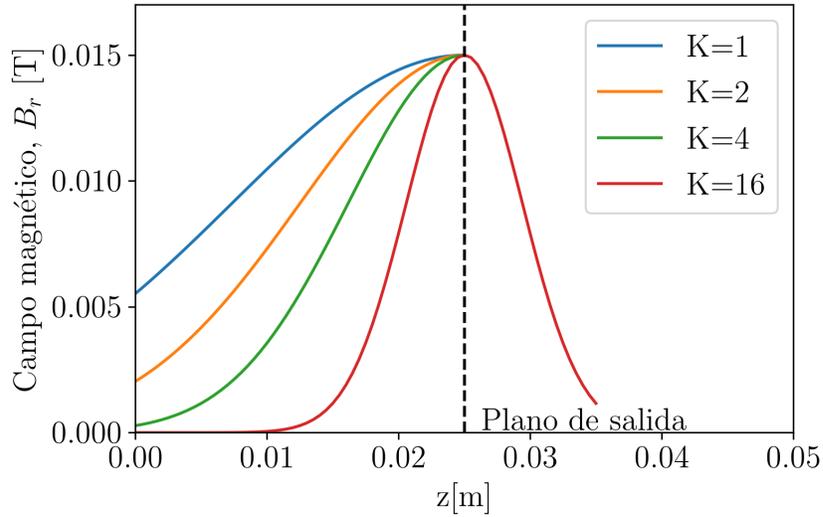


Figura 7-4: Variación de los coeficientes de forma del campo magnético.

El campo magnético se resuelve durante el pre-proceso de la simulación. La simulación tiene la capacidad de utilizar el campo magnético proveniente de dos maneras: de una expresión analítica (Ec. [7-1]), o importando los resultados de una simulación. En el presente trabajo, la simulación del campo magnético se realiza con el software ANSYS Maxwell, aunque también se puede resolver la ecuación de Laplace ($\nabla^2\sigma = 0$) por el método de diferencias finitas [23].

7.2.2. Modelo de fluido

Las partículas de Xenón neutro son simuladas como un fluido, por lo que se incluye una distribución axial unidimensional (uniforme en dirección radial y azimutal) de densidad neutra [27]:

$$n_{Xe}(z) = n_{Xe}(0) + 5 \times 10^{18} \arctan \left[10 \left(1 - \frac{z}{0.018} \right) \right] \quad (7-2)$$

donde $n_{Xe}(0)$ es la máxima densidad de partículas de Xenón, en este caso se utiliza un valor de $n_{Xe}(0) = 1 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ [76], que simula el gasto másico constante de 5 mg/s (Tabla 7-1).

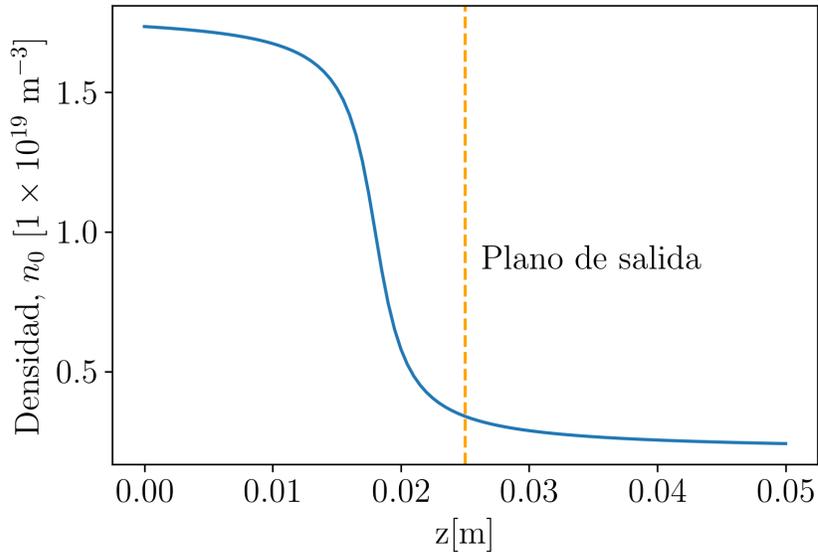


Figura 7-5: Distribución de la densidad de partículas neutras.

Para acoplar las ecuaciones de Maxwell con las de fluido es necesario conocer la densidad de partículas y la velocidad media, en este caso por ser una simulación electrostática sólo se calcula el campo eléctrico, por lo tanto es suficiente con conocer la densidad de partículas (sección 4.7), que es dada por la Ec. (7-2).

En VSim, los fluidos se modelan bajo el marco Fluid, en este caso se utiliza el bloque <neutralGas>, que proporciona una densidad estática del gas de fondo (*background*) [19]. Las ecuaciones de gobierno del fluido se basan en las ecuaciones compresibles de Navier-Stokes [20].

7.2.3. Modelo de partículas

Estabilidad

En el método PIC, hay tres parámetros importantes que limitan la precisión de la solución numérica, éstos son: el tamaño de la celda, el paso de tiempo y la densidad de las macropartículas [31]. En la presente tesis se presentan las condiciones de estabilidad, pero si el lector quiere profundizar en el tema véase [7, 34].

Tamaño de celda

El tamaño de la celda debe ser tal que pueda resolver la longitud de Debye del electrón para evitar la llamada inestabilidad finita de la malla debido al solapamiento o *aliasing* de diferentes modos de Fourier [45]. En pocas palabras, el solapamiento de modos significa que las oscilaciones que difieren por un factor de $2\pi/\Delta x$ son prácticamente indistinguibles en la simulación. Este efecto se debe a la pérdida de información de pasar de un sistema continuo a un sistema espacialmente discreto [31]. Para evitar dicho efecto se utiliza la condición:

$$\Delta x < \zeta \lambda_{De} \quad (7-3)$$

donde Δx es el tamaño de la celda, ζ es una constante de orden 1 en función de los detalles del sistema utilizado y λ_{De} es la longitud de Debye.

Paso de tiempo

El paso de tiempo necesita resolver la propagación de la onda de luz y la onda Langmuir [45]. La razón es porque al discretizar de forma explícita las ecuaciones de campo se requiere que la condición de Courant¹ se satisfaga con la velocidad de onda de desplazamiento más rápida, la velocidad de la luz [46].

$$c\Delta t < \Delta x \quad (7-4)$$

Además, la discretización explícita de las ecuaciones de movimiento introduce una restricción relacionada con el tiempo de respuesta más corta, la frecuencia de plasma de electrones [46].

$$\omega_{pe}\Delta t < 2 \quad (7-5)$$

donde c es la velocidad de luz, Δt es el paso de tiempo, Δx es el tamaño de la celda y ω_{pe} es la frecuencia de plasma de electrones. En VSim, el paso de tiempo de una simulación electrostática con partículas es calculado como [19]:

$$\Delta t = \min\left(\frac{2}{\omega_{pe}}, \frac{1}{DLI v_{th}}\right) \quad (7-6)$$

¹La condición de Courant es una condición de convergencia de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales solucionadas mediante algoritmos. El número de Courant es el cociente entre el intervalo de tiempo y el tiempo de residencia en un volumen finito [63].

donde $DLI = \sqrt{1/DX^2 + 1/DY^2 + 1/DZ^2}$

En resumen, el método PIC busca resolver las escalas más finas en todas partes, para eliminar esta restricción, Lapenta [46] desarrolló un método implícito que permite resolver las escalas de interés.

Densidad de las macropartículas

Las partículas al moverse a través de los límites de las celdas generan fluctuaciones en la densidad, y por consecuencia ese ruido tiene un impacto en el campo eléctrico y potencial. Como los electrones son sensibles a tal oscilación en el campo, habrá un aumento no físico de energía [31]. Se busca que la densidad de la macropartícula sea tal que evite dichas fluctuaciones en el campo. La condición que debe cumplirse es [9]:

$$\chi = \frac{(\omega_{pe}\Delta t)^2}{2N} \ll 1 \quad (7-7)$$

donde χ representa la condición que se debe cumplir y N es el número de macropartículas.

Escala

La densidad de electrones y su temperatura en condiciones típicas que prevalecen en el canal de descarga respectivamente son: $n_e = 10^{17} - 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $T_e = 15 \text{ eV}$, por lo que la longitud de Debye es aproximadamente $10 - 50 \mu\text{m}$. El canal de descarga tiene una longitud de $3 - 5 \text{ cm}$ x $1.5 - 2 \text{ cm}$ de radio, por lo que para resolver la longitud de Debye se necesita una malla de 4000×2000 . El paso del tiempo será del orden de 10^{-11} s . El tiempo de convergencia se estima a partir del tiempo que tarda la especie más lenta en cruzar el canal, es decir, las partículas neutras que tienen una velocidad de aproximadamente 200 m/s , lo que da un tiempo de convergencia estimado de 10^{-3} s , es decir, al menos 100 millones de iteraciones [9].

Para acelerar la ejecución de la simulación, se utilizan algunos artificios. En la literatura se encontraron dos métodos distintos:

- El primer método [73], trata de reducir la masa de las especies pesadas (iones y neutros) por un factor f , que multiplica su velocidad y reduce el tiempo de convergencia por un factor \sqrt{f} . Además, se utiliza una permitividad artificial,

que significa que la permitividad del vacío ϵ_0 se incrementa por un factor γ^2 , esto provoca que la longitud de Debye se aumente por un factor γ , por ende, disminuye la frecuencia de plasma, por lo tanto el paso de tiempo y el tamaño de celda aumentan, disminuyendo el tiempo de simulación. Este método implica cambios de escala no relacionados linealmente, además, el uso de una permitividad artificial puede cambiar la dinámica del plasma, lo que hace que sea imposible reajustar el sistema original [75].

- El segundo método [75], trata de aplicar una escala geométrica que reduzca cualquier dimensión del canal manteniendo inalterados los parámetros adimensionales importantes de la física. Esto producirá un escalado más consistente del plasma y de los parámetros de rendimiento al identificar los parámetros relevantes que gobiernan su física y hacer que permanezcan constantes bajo el escalado.

En el presente trabajo, se utilizará el escalado como método para acelerar la simulación, esto con el motivo de evitar la no linealidad del primer método. En la Tabla 7-2 se resumen las leyes de escalamiento, donde los parámetros son escalados por el factor ζ , los parámetros escalados están representados por el asterisco.

Tabla 7-2: Leyes de escalamiento [75].

Parámetros	Parámetros escalados
Longitud	$L^* = \zeta L$
Potencial eléctrico	$V^* = V$
Campo magnético	$B^* = \zeta^{-1} B$
Gasto másico	$\dot{m}^* = \zeta \dot{m}$
Corriente	$I^* = \zeta I$
Campo eléctrico	$E^* = \zeta^{-1} E$
Densidad	$n^* = \zeta^{-1} n$
Temperatura	$T^* = T$
Empuje	$T^* = \zeta T$
Impulso específico	$I_{sp}^* = I_{sp}$
Eficiencia	$\eta^* = \eta$
Velocidad	$v^* = v$

Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno que se aplican en la simulación son:

- Inyección de partículas.
- Pared.
- Vacío.
- Eje de simetría.

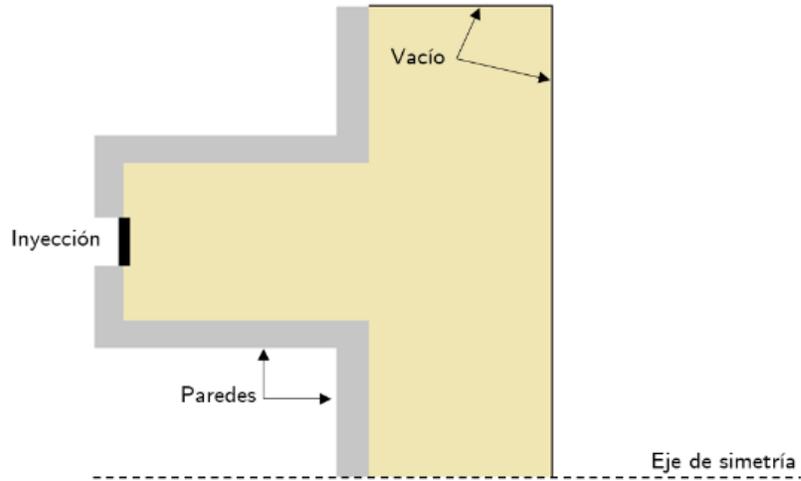


Figura 7-6: Tipos de contorno desde el punto de vista de las partículas.

Inyección de partículas

En el funcionamiento del propulsor, los electrones y neutros (propelente) son inyectados por medio del cátodo y ánodo, respectivamente. En el presente trabajo, se modela la introducción de los electrones en el dominio, debido a que los neutros son modelados como un fluido estático.

Para determinar el número de partículas que son introducidas en cada paso de tiempo, se puede partir de la conservación de la masa o las unidades:

$$\frac{\#}{s} = \frac{\#}{m^3} \frac{m}{s} m^2 \quad (7-8)$$

donde m^3 representa la densidad de partículas, m/s representa una velocidad que es la velocidad térmica y m^2 representa un área que es la superficie del inyector (cátodo). Por lo tanto, la ecuación se puede escribir como:

$$\dot{N} = nuA \quad (7-9)$$

El número real de partículas inyectadas en cada paso de tiempo es:

$$N_r = \dot{N} \Delta t \quad (7-10)$$

Ahora bien, la inyección de electrones está en función de la corriente de descarga (Tabla 7-1), de igual manera se puede atacar el problema por medio de un análisis dimensional. Dado que $[A] = [C/s]$, si se divide la corriente de descarga $[A]$ entre la carga del electrón $[C]$, se obtiene #/s que es igual a \dot{N} .

Pared

La interacción del plasma con las paredes es importante en el funcionamiento de los propulsores Hall. Con esta condición de contorno se pretende modelar la interacción de las especies con las diferentes paredes en el dominio, el tema se estudia con mayor profundidad en la sección 4.5.

En el caso de los electrones, al incidir en una pared metálica son absorbidos, mientras que al impactar en una pared de material dieléctrico se produce una emisión secundaria de electrones, para reducir la complejidad en la simulación en el presente trabajo los electrones son absorbidos al incidir con las paredes.

En el caso de los iones, su comportamiento es independiente al tipo de pared, pero se ve afectado debido al potencial de la vaina electrostática que se genera que, en este caso, los iones son acelerados hacia la pared, dando lugar a la erosión del material y a un proceso llamado recombinación. Adicionalmente, puede haber emisión secundaria de electrones [5], que es modelado en el presente trabajo con una probabilidad del 50%.

La recombinación es el proceso donde un ion se convierte en un átomo neutro debido a la colisión con un flujo de electrones. Existen dos tipos de recombinación en el plasma: la recombinación en la cámara, y la recombinación en las paredes. De los cuales, sólo la recombinación en las paredes es un proceso importante en la simulación del plasma [30]. Recuérdese que las partículas neutro son simuladas como un fluido con densidad estática, para disminuir la complejidad del código y limitar las especies en la simulación se ha decidido por no incorporar el proceso de recombinación, aunque es un importante punto que añadir en trabajo a futuro.

En pocas palabras, la recombinación en la pared significa que todos los iones que incidan en la pared se convierten en nuevas partículas neutro que son reinyectadas en el dominio de la simulación, es decir, las paredes representan un sumidero de iones y una fuente de partículas neutro.

Las nuevas partículas son introducidas en una posición aleatoria de una distribución uniforme de probabilidad con una velocidad que se escoge aleatoriamente de una distribución semimaxwelliana en la dirección normal a la pared y maxwelliana según el plano paralelo a la misma, que también está en función de la temperatura que caracteriza la función de distribución, si se desea conocer el detalle matemático véase [5, 30].

Las partículas neutro no se ven afectadas por la presencia de una vaina electrostática y simplemente sufre una reflexión con una nueva velocidad aleatoria, en términos de la simulación, se introducen la misma cantidad de neutros que colisionaron con la pared. Nótese que, en el presente trabajo, la densidad de neutros es modelada como un fluido estático, por lo que dichas colisiones con la pared no están presentes, pero en caso de querer desarrollarse una simulación donde los neutros sean modelados como partículas deberán seguir los pasos mencionados.

Vacío

Toda partícula que sale por este tipo de contorno se remueve del dominio de simulación y no se vuelven a introducir, es decir, se pierden en la simulación. Este tipo de contorno representa un vacío perfecto, pero en caso de simular un vacío no perfecto se introducen partículas neutro a través del contorno.

Eje de simetría

El eje de simetría se encuentra en $r = 0$, dicha simetría impone una condición de simetría especular, modificando el vector de velocidad de la partícula $(v_z, v_r, v_\theta) = (v_z, -v_r, v_\theta)$.

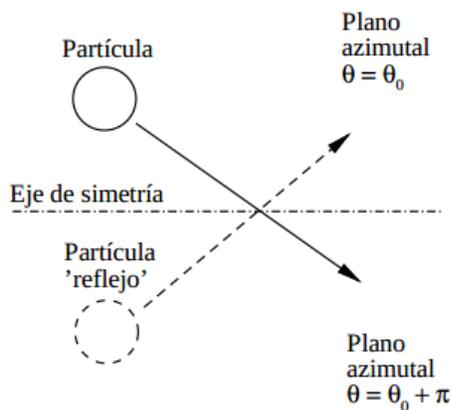


Figura 7-7: Partícula reflejo inyectada cuando cruza una partícula el eje de simetría. Tomada de [5].

Colisiones por el método Monte Carlo

Los dos factores principales que controlan el movimiento de las partículas son el campo eléctrico y las colisiones entre partículas. Las colisiones son tratadas como un sistema estocástico, es decir, se trata desde un punto de vista probabilístico. Las colisiones se consideran procesos de Markov, donde la probabilidad de que ocurra una colisión depende solamente del evento anterior [73].

Los dos métodos comúnmente utilizados son, DSMC (*Direct Simulation Monte Carlo*) y MCC (*Monte Carlo Collisions*). MCC asume que hay dos especies diferentes de partículas, siendo una especie dominante sobre la otra. MCC determina la probabilidad de colisión a partir de valores macroscópicos promedio de las especies, es decir, no se contabiliza la probabilidad de colisión de cada pareja de partículas en la celda. El efecto de la colisión modifica la posición, velocidad y masa de cada partícula de la especie no dominante, mientras que la especie dominante no es afectada [30]. En el método DSMC, las partículas se colisionan explícitamente, permitiendo conservar la energía e impulso a través de la colisión. Esto es necesario para modelar auto-colisiones (por ejemplo, colisiones neutro-neutro) [13, 73].

Las ventajas de utilizar MCC sobre DSMC, es que MCC es mucho más simple de implementar y es más rápido ya que no es necesario resolver pares de partículas [13]. Además, en VSim la interacción entre diferentes especies y la interacción de las especies con un fluido son modeladas bajo el marco Reactions, que es una actualización al bloque <MonteCarloInteractions>, ambos se basan en el método MCC [19]. Por las razones mencionadas, el presente trabajo utiliza el método MCC.

La idea principal del método MCC es [73]:

1. Para cada partícula de la especie α , se calcula la probabilidad de una colisión en Δt con la especie β . La probabilidad de colisión es dada por Birdsall como:

$$P_{\alpha,\beta} = 1 - \exp(-n_{\beta}\sigma v_{\alpha,\beta}\Delta t) \quad (7-11)$$

donde n_{β} es la densidad del gas objetivo en la ubicación de la partícula, $v_{\alpha,\beta}$ es la velocidad relativa, σ es la sección transversal de colisión que está en función de la velocidad relativa $\sigma(v_{\alpha,\beta})$ y Δt es el paso del tiempo.

2. La probabilidad $P_{\alpha,\beta}$ es comparada con un número aleatorio ξ para determinar si tiene lugar un evento.
3. Si ocurre un evento, el momento de la partícula inicial cambia de manera discontinua por alguna cantidad vectorial que también es determinada aleatoriamente.

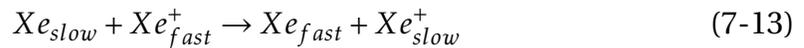
De manera conceptual se explicarán algunos tipos de colisión y posteriormente se mencionan las colisiones presentes en la simulación (Tabla 7-3), si se desea profundizar en el tema, véase [30, 73].

- **Colisiones elásticas. Colisiones de pequeño ángulo.** Son colisiones elásticas que producen un intercambio de cantidad de movimiento entre las partículas.



Las colisiones ion-neutro son de especial importancia [5], y se descomponen en dos tipos de colisiones: colisiones de pequeño ángulo y las colisiones de intercambio de carga o CEX (*Charge Exchange Collisions*).

- **Colisiones de intercambio de carga (CEX).** Son colisiones elásticas que producen un intercambio de la carga eléctrica entre las partículas. En el caso de las partículas ion-neutro, las colisiones CEX producen iones de baja velocidad y neutros de alta velocidad. Los iones de baja velocidad pueden tener un impacto negativo en las operaciones de la nave espacial [11], ya que no son capaces de superar la barrera potencial a la salida del canal y tienden a impactar con las distintas superficies de la nave espacial, provocando un deterioro de estas [5].



- **Recombinación.** Como se mencionó en la sección 7.2.3, la recombinación es el proceso donde un ion se convierte en un átomo neutro debido a la colisión con un flujo de electrones.



- **Ionización.** Es el proceso por el cual el átomo del propelente (Xe) pierde electrones y adquiere carga positiva debido al bombardeo de electrones sobre los átomos, generándose nuevas partículas ion. Si el átomo pierde un electrón es un ion simple con una carga positiva elemental ($+e$), si pierde dos electrones es un ion doble con dos cargas positivas elementales ($+2e$) y así sucesivamente.



El primer proceso es una ionización simple, y los otros dos procesos son una ionización doble. En la simulación solo se aborda el proceso de ionización simple.

- **Excitación.** Cuando el electrón colisiona con el átomo del propelente (Xe) y la energía transferida es insuficiente para producir el proceso de ionización, se

da el proceso de excitación, donde el electrón del átomo no es expulsado, pero sí se mueve a una órbita de mayor energía.



- **Colisión de Coulomb.** Es el proceso en el cual la trayectoria de una partícula cargada se desvía debido al campo eléctrico de la otra partícula. Este tipo de colisiones no son incluidas en la simulación, pero existe una variante del método MCC para calcular estas colisiones, llamado MCCC (*Monte Carlo Coulomb Collision*), para profundizar en este método véase [73].

A continuación, se muestra una tabla con el tipo de colisiones que están incluidas en la simulación.

Tabla 7-3: Colisiones incluidas en la simulación [72].

Colisión	Incluida
Elástica electrón-neutro	✓
Excitación electrón-neutro	✓
$Xe + e^- \rightarrow Xe^+ + 2e^-$	✓
$Xe + e^- \rightarrow Xe^{++} + 3e^-$	
$Xe^+ + e^- \rightarrow Xe^{++} + 2e^-$	
Coulomb electrón-electrón	
Coulomb electrón-ion	
CEX ion-neutro	✓
Elástica ion-neutro	✓
Coulomb ion-ion	
Elástica neutro-ion	
Elástica neutro-neutro	
Recombinación en la cámara	
Recombinación en las paredes	

7.3. Metodología

En la Fig. 7-8 se muestra la metodología empleada en el presente trabajo, donde la primera columna muestra las entradas a las respectivas simulaciones, la segunda columna muestra los procesos en la simulación electrostática y en la tercera columna se muestran los procesos para la simulación del propulsor utilizando VSim.

La simulación electrostática realizada en ANSYS utiliza propiedades de los materiales del núcleo y de la pared, parámetros de operación y geométricos. La simulación arroja los resultados en un archivo csv del campo magnético en sus tres direcciones (B_x, B_y, B_z) en una malla de 172×123 que coincide con la malla empleada en la simulación del propulsor. El archivo pasa por un proceso de extracción, transformación y carga (ETL), es decir, se extrae la información, se escala la información dado un factor de escalamiento ζ y se carga en un nuevo archivo de tipo h5 para que pueda ser consumida por la simulación del propulsor.

La simulación del propulsor toma como entrada una malla con la información del campo magnético radial del archivo h5, condiciones de frontera, parámetros de operación y geométricos, factor de escalamiento, parámetros de simulación, de funciones, de malla y de estabilidad, descripción de partículas y las colisiones a simular. Dentro del código se realiza el escalamiento, la distribución de neutros dada la Ec. (7-2), el cálculo de estabilidad, solución del campo electrostático, del método PIC y la solución de las colisiones por el método MCC.

Los resultados que se obtienen en la simulación del propulsor son el campo magnético, densidad de partículas neutras, potencial de plasma, densidad de iones y electrones, y la velocidad de los iones en la dirección u_z . De igual manera, se obtienen los parámetros de longitud de Debye, frecuencia de plasma y la velocidad térmica.

Cabe mencionar, que el código tiene un menú para seleccionar si el usuario quiere utilizar una función lineal en lugar de la Ec. (7-2) para la distribución de neutros, también tiene la opción de utilizar la Ec. (7-1) para el cálculo del campo magnético, permitiendo controlar por el coeficiente de forma K . En el caso de que el usuario ocupe la función analítica para el campo magnético, la segunda columna del diagrama ya no aplicaría.

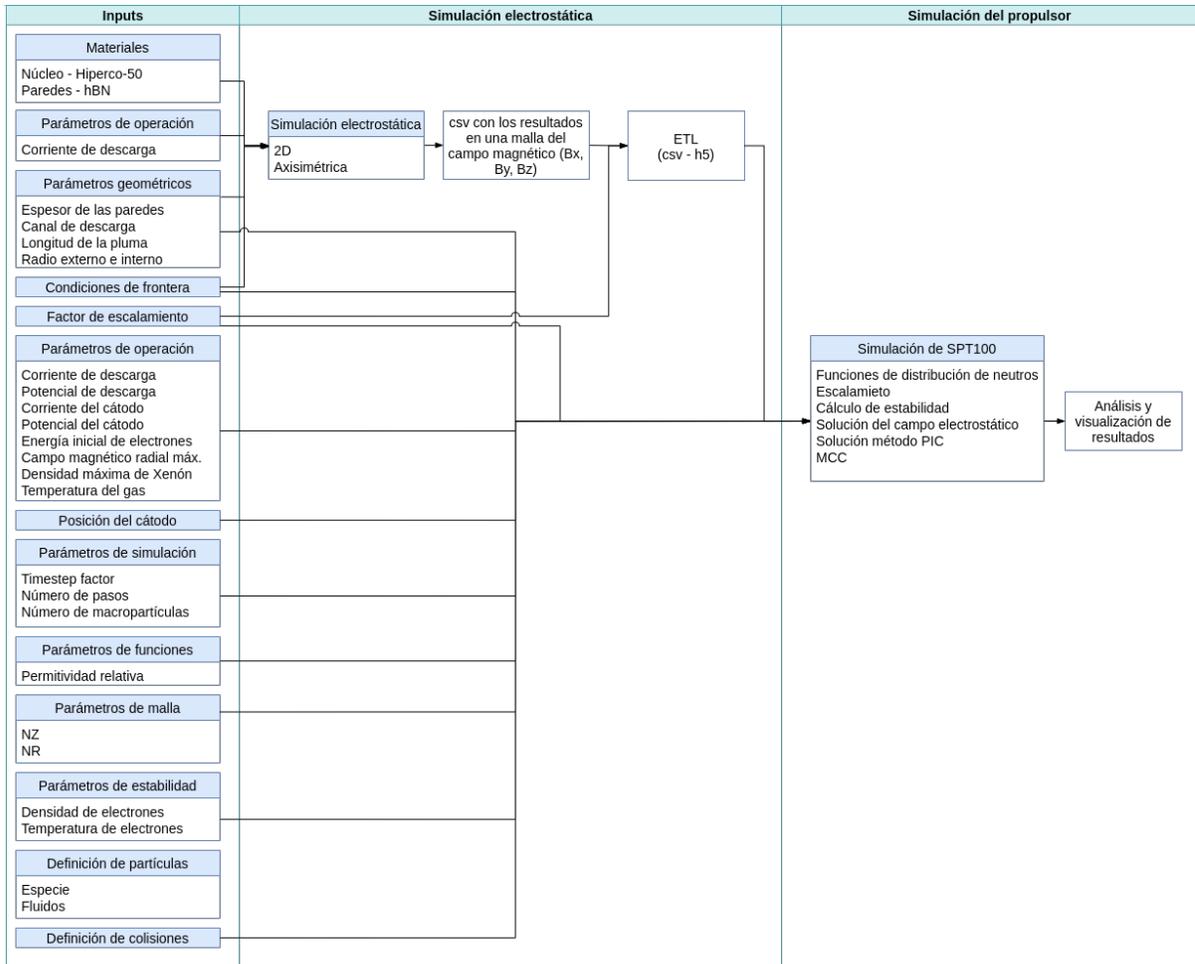


Figura 7-8: Metodología empleada.

7.4. Resultados

En la siguiente tabla se muestra los parámetros y valores utilizados en la simulación.

Tabla 7-4: Parámetros utilizados en la simulación.

Parámetro	Símbolo	Unidad	Valor
Factor de escalamiento	ζ		0.02
Longitud del canal de descarga	L_{canal}	mm	25
Radio externo	R_e	mm	50
Radio interno	R_i	mm	35
Longitud de la pluma	L_{pluma}	mm	10
Espesor pared dieléctrica	t	mm	5
R_{min} cátodo	R_{min}	mm	35
R_{max} cátodo	R_{max}	mm	50
Z_{min} cátodo	Z_{min}	mm	21
Z_{max} cátodo	Z_{max}	mm	26
Densidad de electrones	n_e	m^{-3}	1×10^{18}
Temperatura de electrones	T_e	eV	15
<i>Timestep factor</i>			0.25
Paso de tiempo	Δt	s	4.42×10^{-13}
Número de pasos	N_{steps}		243000
Número de macropartículas	N		1×10^6
Potencial de descarga	V_b	V	300
Potencial del cátodo	V_{catodo}	V	0
Corriente de descarga	I_b	A	4.5
Densidad máxima de partículas de Xenón	$n_{Xe}(0)$	m^{-3}	1×10^{21}
Temperatura del gas	T_{Xe}	K	300
Permitividad relativa	μ_r		4.6
Longitud de Debye	λ_{De}	m	4.07×10^{-6}
Frecuencia de plasma	ω	1/s	3.9×10^{11}
Velocidad térmica	v_{th}	m/s	1.6×10^6
Número de celdas en Z	NZ		172
Número de celdas en R	NR		123
Condición de estabilidad	χ		1.56×10^{-7}

7.4.1. Campo magnético

El campo magnético es calculado como parte del pre-proceso de la simulación PIC, en el presente trabajo se realizó una simulación electrostática 2D y axisimétrica para obtener el campo magnético dentro y fuera del canal de descarga, utilizando el software ANSYS Maxwell.

El campo magnético es generado por bobinas, en la simulación se utilizó una bobina con un núcleo de alta permeabilidad magnética, el material utilizado para el núcleo es Hiperco-50 [61]. Mientras que las paredes del canal de descarga se modelaron con el material nitruro de boro hexagonal (hBN).

Los resultados del campo magnético obtenidos de la simulación electrostática son comparados con los resultados registrados en el trabajo [48], aunque no es el mismo propulsor tiene los mismos parámetros geométricos y de operación que el propulsor SPT100.

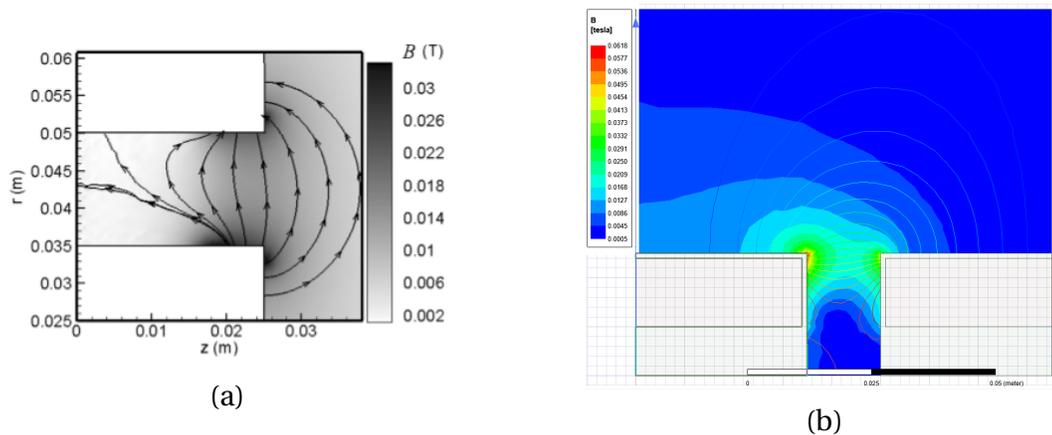


Figura 7-9: a) Líneas de flujo y magnitud del campo magnético. Tomada de [48]. b) Líneas de flujo y magnitud del campo magnético simulado.

Al comparar los resultados de la simulación, se observa que la magnitud del campo magnético es mayor cerca del plano de salida y de las paredes del canal de descarga, mientras que las líneas de flujo básicamente son perpendiculares al eje del canal, particularmente en el plano de salida.

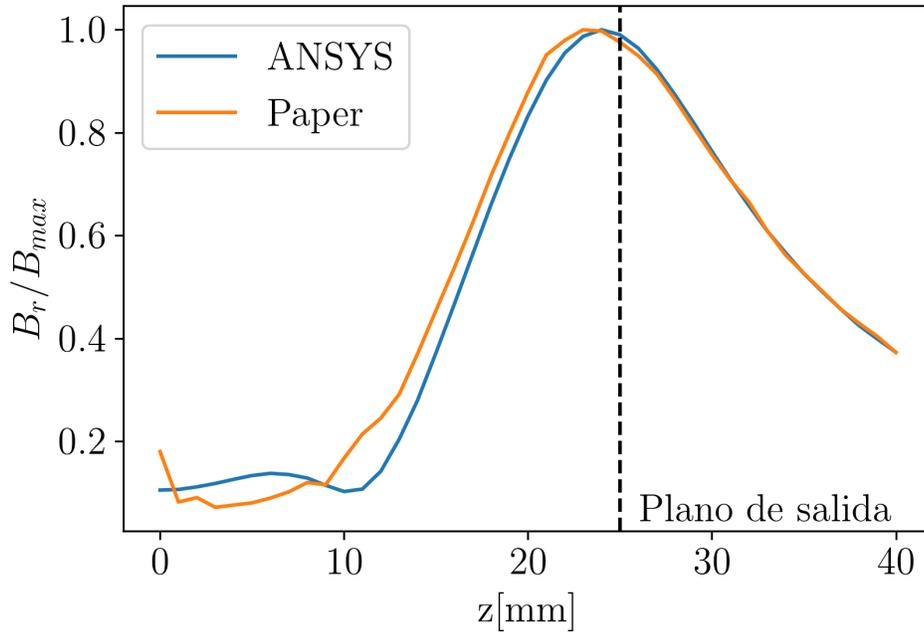


Figura 7-10: Campo magnético en la línea central del canal de descarga, donde la línea amarilla representa los resultados de [48], mientras que la línea azul representa los resultados obtenidos en la simulación realizada con ANSYS Maxwell.

Para entender si el error de la simulación es aceptable, se realizó una comparación escalando la magnitud del campo magnético en la línea central del canal de descarga entre el valor máximo (Fig. 7-10), véase la Fig. 5-11 para visualizar los resultados de [48]. El error relativo porcentual [Ec. (7-19)] promedio es de 15.86%.

$$error(\%) = \frac{|y_{exacta} - y_{aproximada}|}{y_{exacta}} \times 100 \quad (7-19)$$

Nótese que el error es mayor cerca de la pared del ánodo y va disminuyendo conforme se acerca al plano de salida. El error relativo porcentual promedio en los primeros 15 mm del propulsor es de 36.7%, esto puede deberse a problemas en las condiciones de frontera en la cara del ánodo, a la caracterización de los materiales y geometría de la pared y del núcleo. Además, se realizaron simulaciones con diferentes tamaños de malla para mostrar independencia de malla.

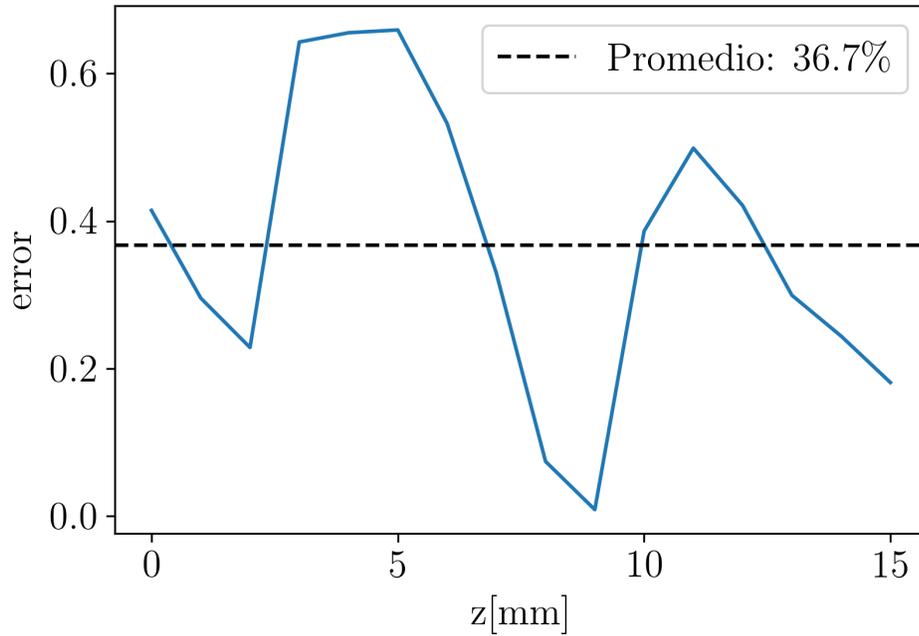


Figura 7-11: Error relativo porcentual en los primeros 15 mm del propulsor.

El error relativo porcentual promedio en la longitud restante (15-40 mm) es de 2.5%, donde el valor máximo del campo magnético es de 0.019T cerca del plano de salida del propulsor.

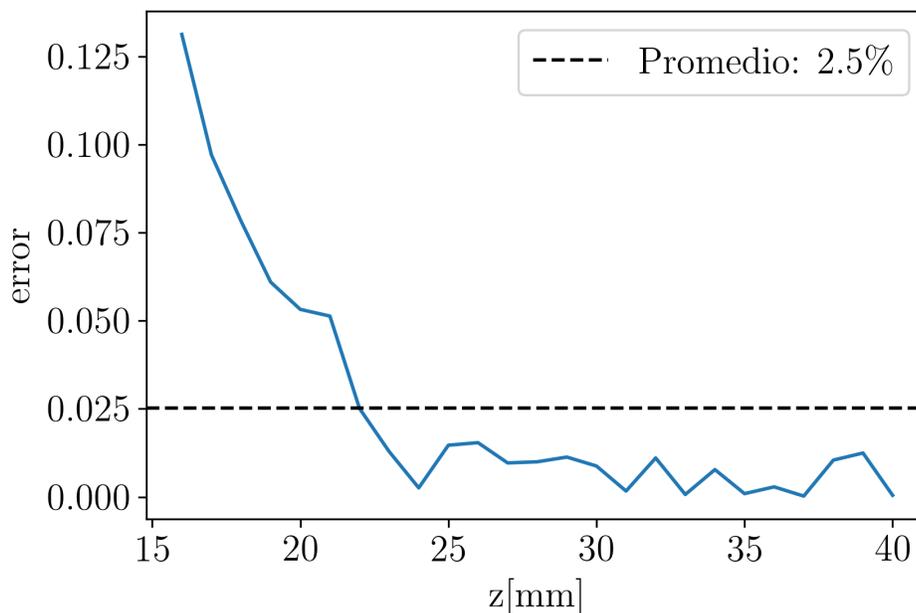


Figura 7-12: Error relativo porcentual en la región de 15-40 mm del propulsor.

El campo magnético atrapa a los electrones por lo que controla las posiciones relativas de las regiones de ionización y aceleración, dichas regiones son cercanas al canal de descarga. Debido a que el error cerca del plano de salida es menor al 10% y tiene un valor máximo cercano a los 0.02T se ha decidido utilizar los resultados del campo magnético simulado.

Para usar los resultados de la simulación como pre-proceso de la simulación PIC se exportaron los resultados de ANSYS en una malla de 172×123 en un archivo csv, después se realizó un script en Python para transformarlo a un archivo h5 para que pudiera ser utilizado en VSim.

7.4.2. Simulación PIC

La simulación PIC cuenta con un campo magnético simulado, una ecuación para simular las partículas neutro como un fluido [Ec. (7-2)], cálculos de estabilidad para determinar el tamaño de celda [Ec. (7-3)], paso tiempo [Ec. (7-6)] y densidad de partículas [Ec. (7-7)], además de contar con una escala para reducir los tiempos de simulación. La fuente de electrones se encuentra en el centro del propulsor para asegurar la introducción de dichas partículas, pero en trabajo futuro se podría manipular la colocación de la fuente a la posición real de un propulsor. Las colisiones

son modeladas por el método MCC, el tipo de colisiones incluidas en la simulación se muestran en la Tabla 7-3.

A continuación, se grafican el campo magnético importado junto con el tamaño de malla (Fig. 7-13), y la distribución de partículas neutro (Fig. 7-16) para verificar que las condiciones iniciales sean las correctas. Nótese que los resultados mencionados en esta sección son resultados escalados por ζ (Tabla 7-2).

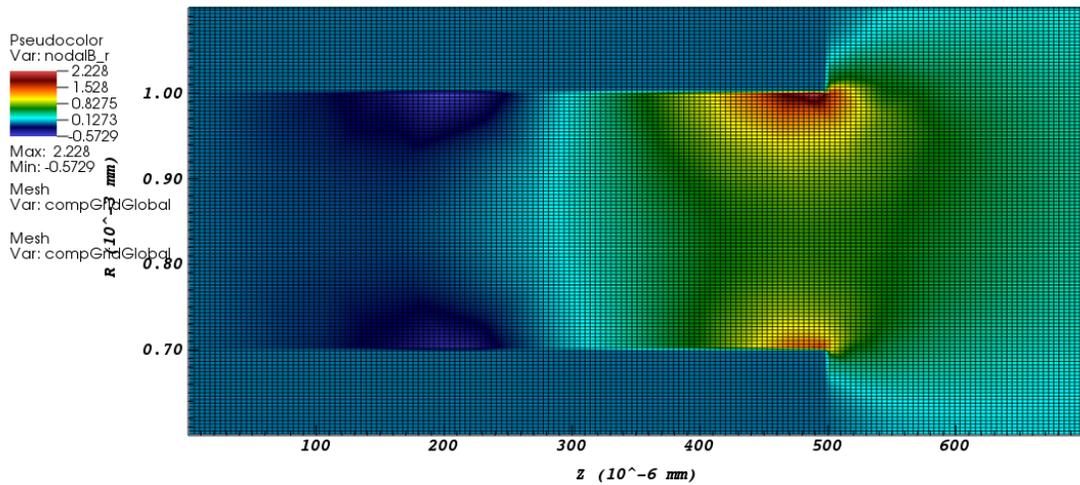


Figura 7-13: Campo magnético importado y malla del dominio.

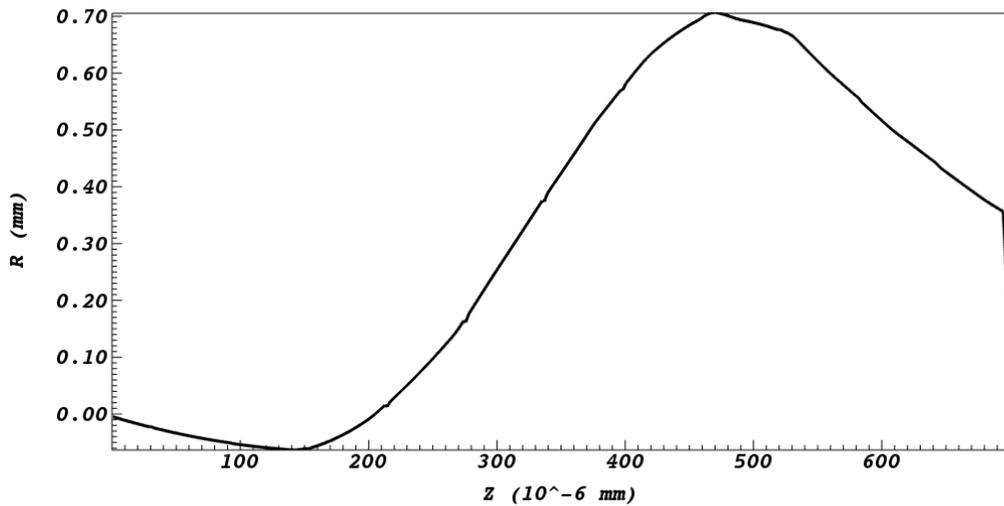


Figura 7-14: Campo magnético importado en la línea central.

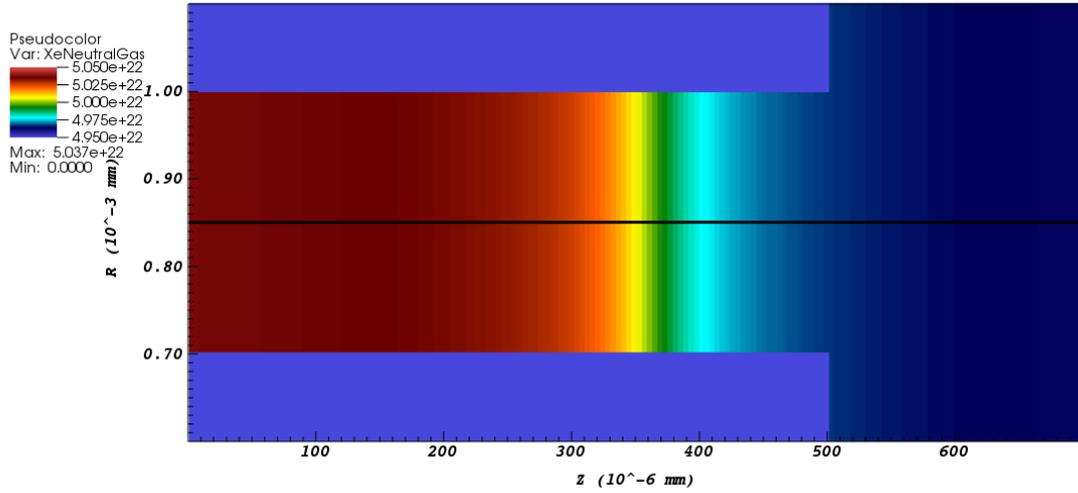


Figura 7-15: Densidad de partículas neutras (Xenón).

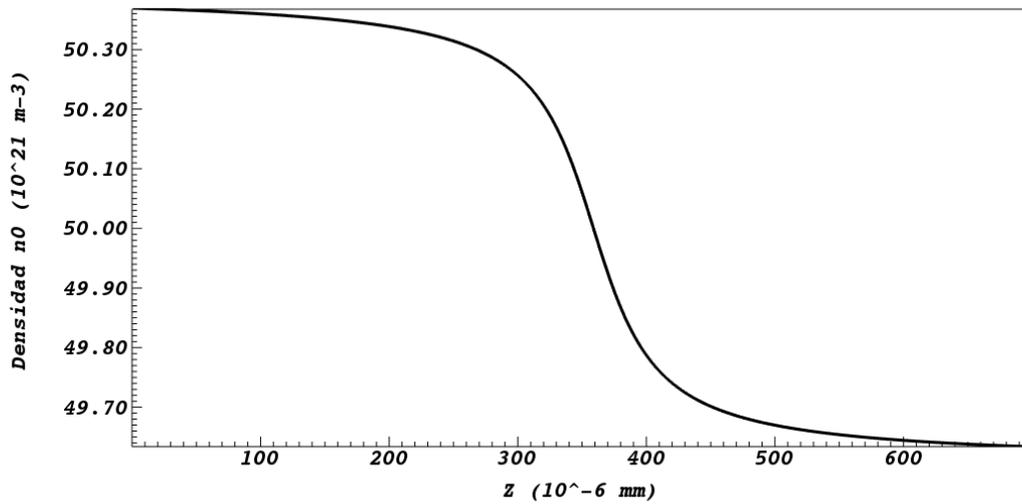


Figura 7-16: Densidad de partículas neutras en la línea central.

El potencial del plasma en las líneas del campo magnético se describe con la ecuación [38]:

$$\phi = \phi_0 + T_{e0} \ln(n_e/n_{e0}) \tag{7-20}$$

Donde T_{e0} , ϕ_0 y n_{e0} son constantes de integración, n_e es la densidad de electrones

y ϕ es el potencial de plasma. Debido a que la temperatura de los electrones (T_e) permanece relativamente constante a través de las líneas de campo: $T_e \approx T_{e0}$.

Los electrones son inyectados a una temperatura relativamente baja, al acercarse al canal de descarga van aumentando su temperatura hasta llegar a la región máxima del campo magnético, donde los electrones experimentan un calentamiento de Joule, es decir, los electrones adquieren una mayor temperatura localizada. Por causa del campo eléctrico algunos electrones se mueven hacia el ánodo, disminuyendo su temperatura.

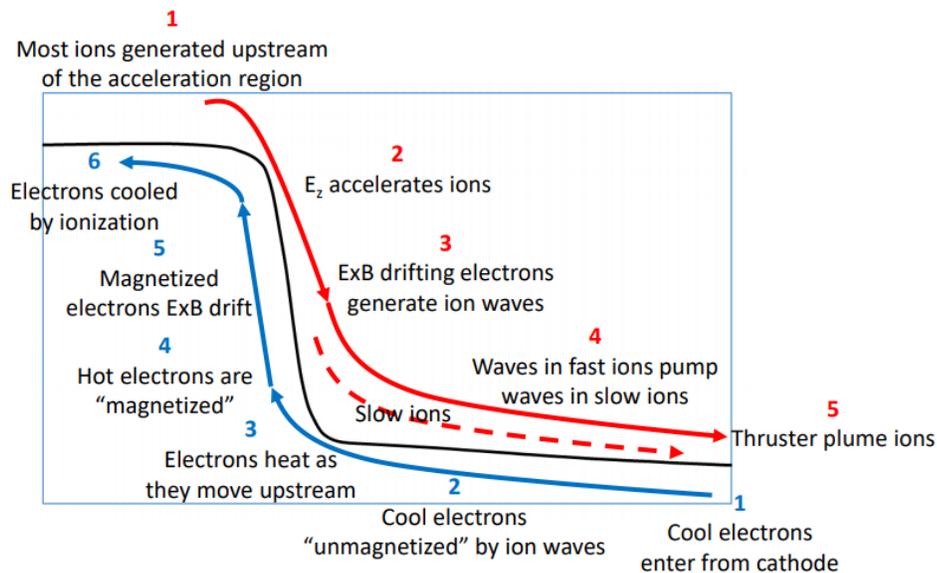


Figura 7-17: Comportamiento de iones y electrones dentro del propulsor. Tomada de [39].

De la Ec. (7-20), se destacan dos fenómenos en el propulsor, el primero es que cerca del ánodo y un poco antes del plano de salida del propulsor la temperatura de los electrones es baja y también la densidad de electrones, por lo que el potencial del plasma se mantiene relativamente uniforme cercano al valor de ϕ_0 . El segundo fenómeno es que después del plano de salida los electrones también tienen una baja temperatura y su densidad tiende a cero conforme se alejan del plano de salida, ocasionando una caída en el potencial del plasma.

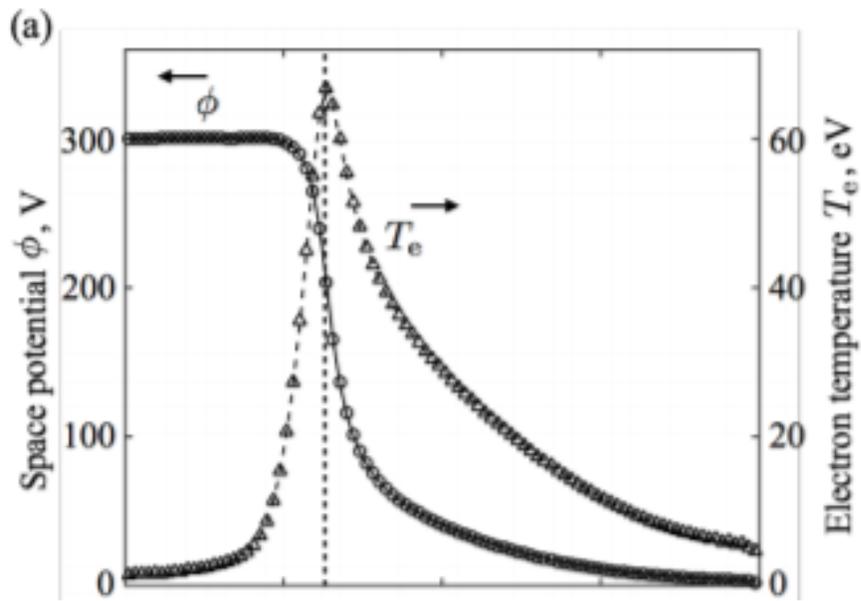


Figura 7-18: Potencial de plasma y temperatura de electrones en el propulsor. Tomada de [40].

En la Fig. 7-19 se muestran los resultados obtenidos en la simulación donde se muestra el fenómeno descrito con anterioridad. Dentro del canal de descarga el potencial del plasma se mantiene uniforme cerca del voltaje del ánodo (300V) con un incremento del 16.6% (350V), debido a la energía del electrón. Mientras que, a la salida del propulsor, el potencial del plasma disminuye debido a que la densidad de electrones tiende a cero (Fig. 7-21).

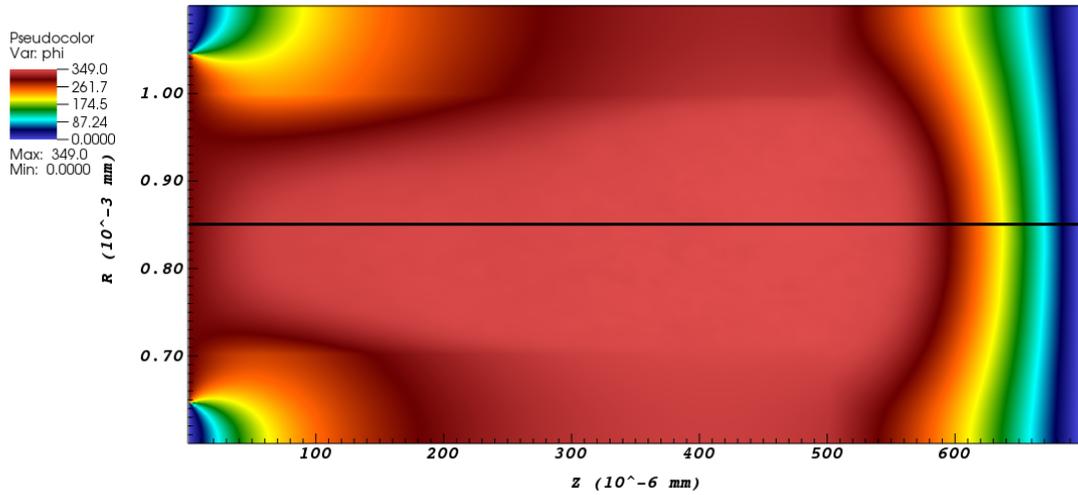


Figura 7-19: Potencial de plasma ϕ

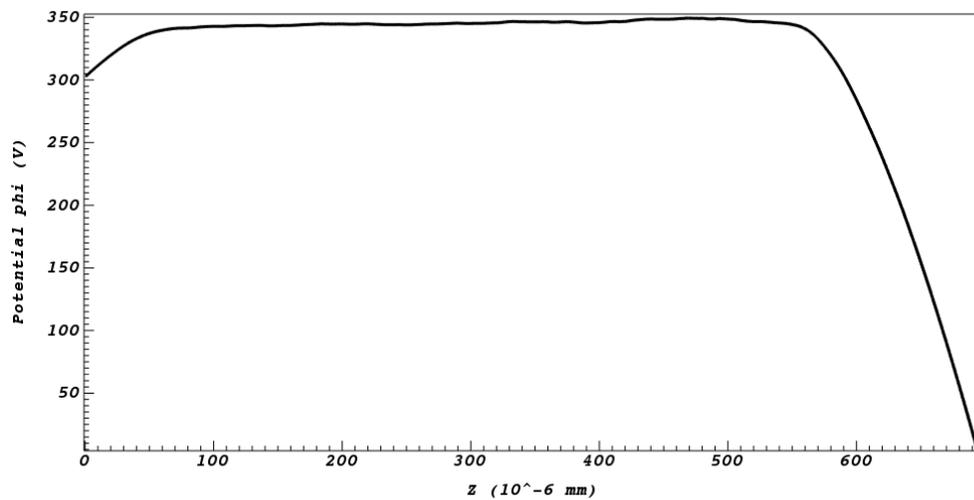


Figura 7-20: Potencial de plasma en la línea central, se observa un incremento de 50V, que representa un 16.6%

En la Fig. 7-21 se muestra la densidad de electrones simulados, donde se muestra el fenómeno típico de un propulsor Hall. Nótese que la densidad de partículas dentro del canal no es simétrica, la asimetría se debe a que el campo magnético tampoco es simétrico.

La mayor densidad de electrones ocurre cerca del plano de salida, debido a que el

campo magnético tiene su mayor magnitud en esa zona, atrapando a los electrones, los cuáles orbitan en las líneas del campo magnético a muy alta velocidad, incrementando la posibilidad de colisión con los átomos del propelente provocando el proceso de ionización. Otra pequeña parte de los electrones se mueve hacia el ánodo. La densidad de electrones a la salida del propulsor es muy cercana a cero debido a que el cátodo se encuentra prácticamente en el canal de descarga, absorbiendo los electrones que colisionen con la pared del cátodo. En caso de que el cátodo no estuviera a la salida del canal de descarga, se lograría observar una disminución más suave de la densidad tendiendo a cero.

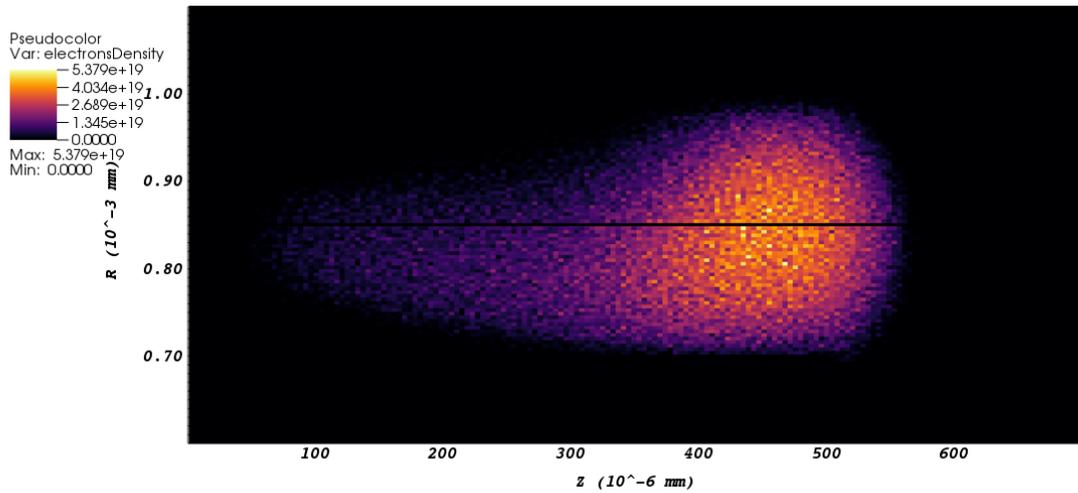


Figura 7-21: Densidad de electrones n_e

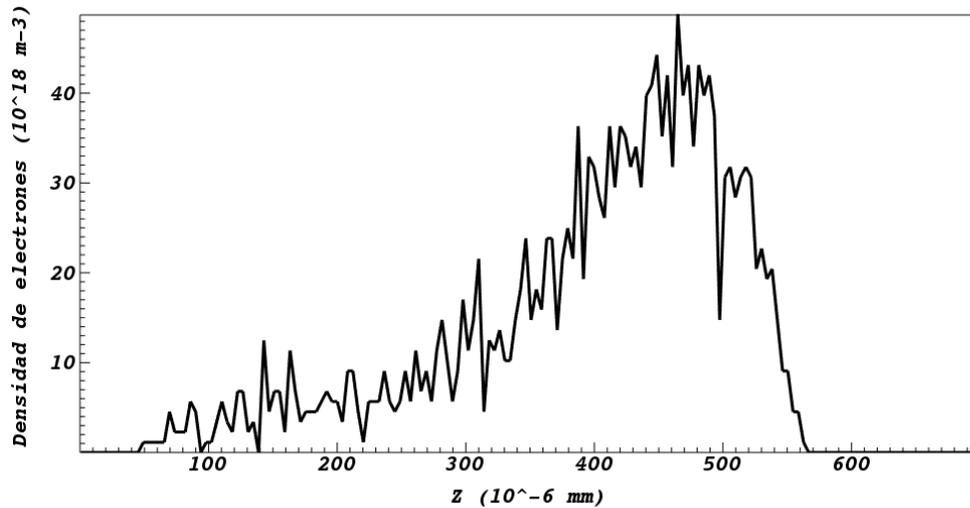


Figura 7-22: Densidad de electrones en la línea central.

En la Fig. 7-23 se muestra la densidad de iones simulados, y de igual manera la máxima densidad de iones se encuentra cerca del plano de salida del propulsor, debido a que dónde hay mayor cantidad de electrones mayor la probabilidad de colisiones con los átomos del propelente, generando mayor cantidad de iones.

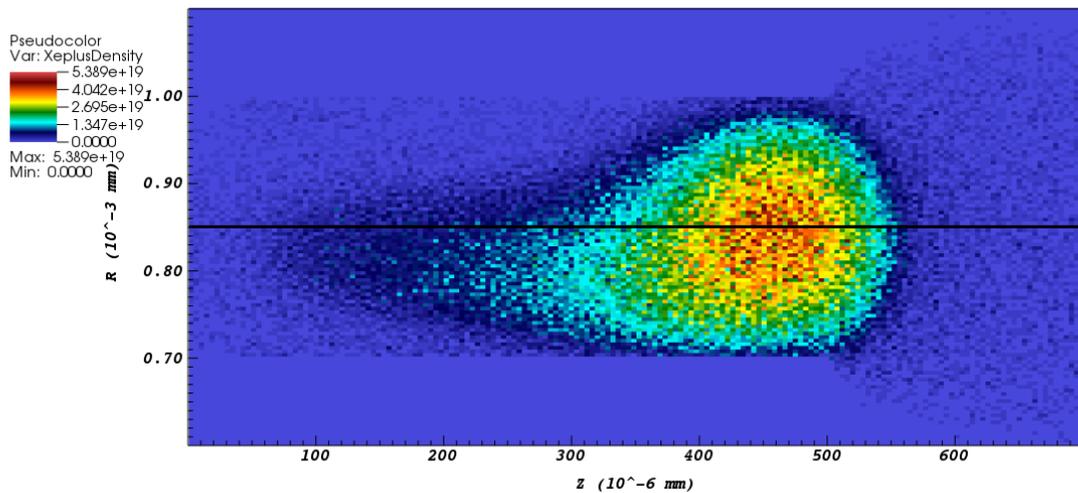


Figura 7-23: Densidad de iones n_i

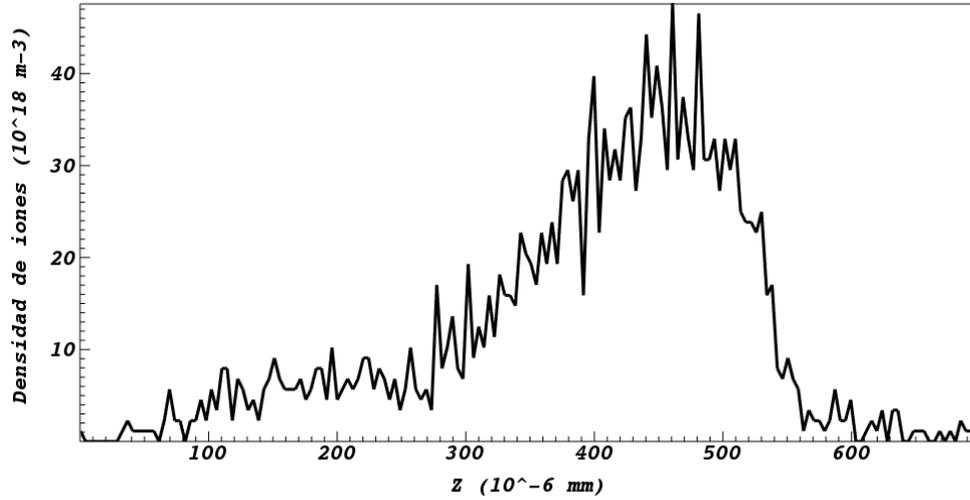


Figura 7-24: Densidad de iones en la línea central.

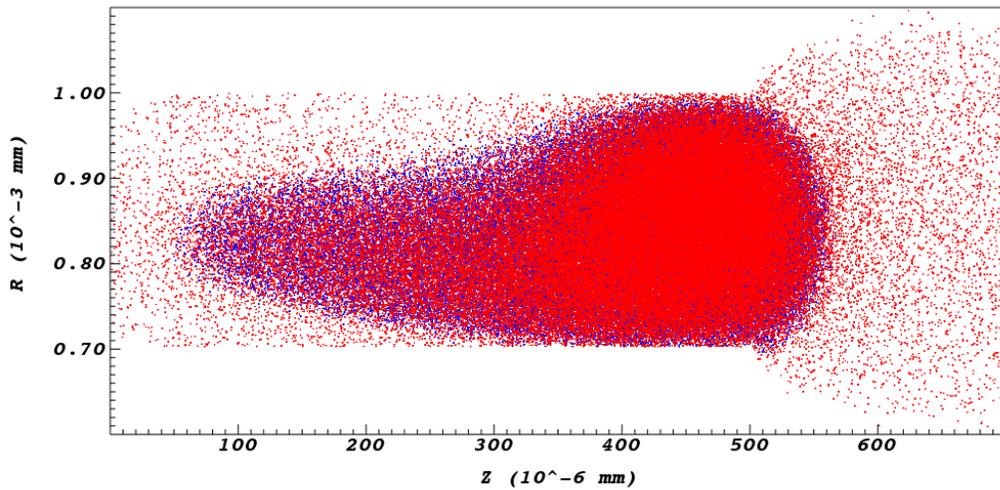


Figura 7-25: Partículas simuladas, donde las partículas azules representan a los electrones y las partículas rojas representan a los iones.

Los iones a diferencia de los electrones están débilmente magnetizados por lo que su movimiento se debe básicamente al campo eléctrico. Los iones son acelerados hacia el exterior por acción del campo eléctrico, es decir, los iones experimentan un cambio de velocidad cerca del plano de salida, como se observa en la Fig. 7-26.

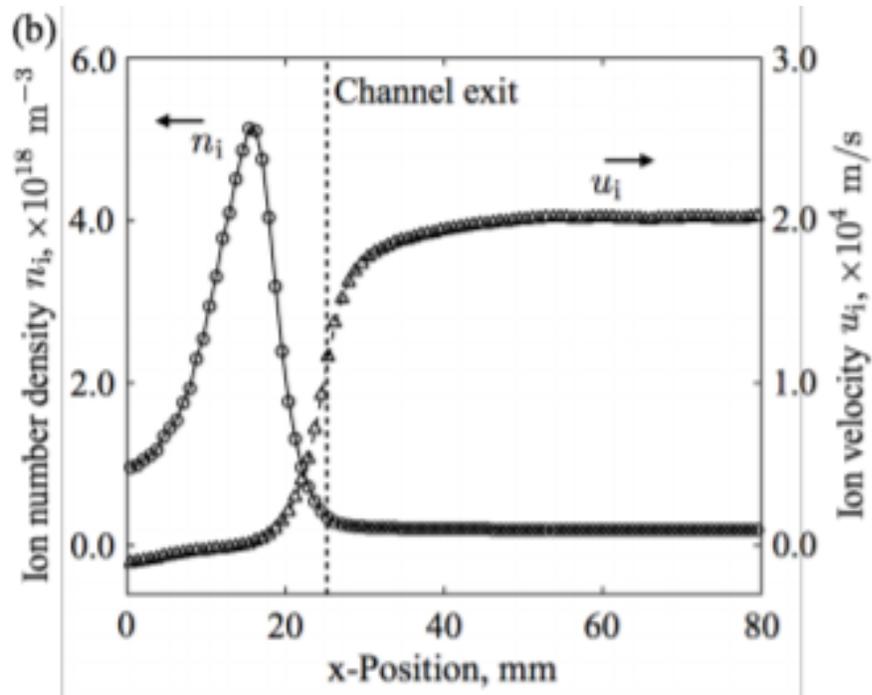


Figura 7-26: Densidad y velocidad de iones. Tomada de [40].

En las siguientes figuras se muestra las velocidades promedio y máximas de los iones en todo el dominio de la simulación. Se puede notar que existe un cambio de velocidad de los iones cerca del plano de salida del propulsor, con un valor máximo de 2×10^4 m/s, y en caso de que el dominio de simulación fuera más amplio esperaríamos que se mantuviera relativamente constante a lo largo del dominio.

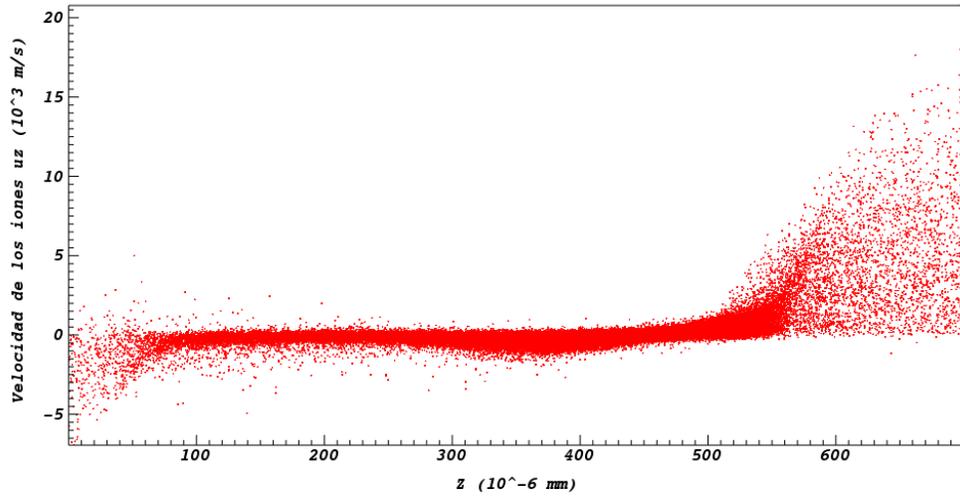


Figura 7-27: Velocidad de los iones simuladas en la dirección Z (u_z).

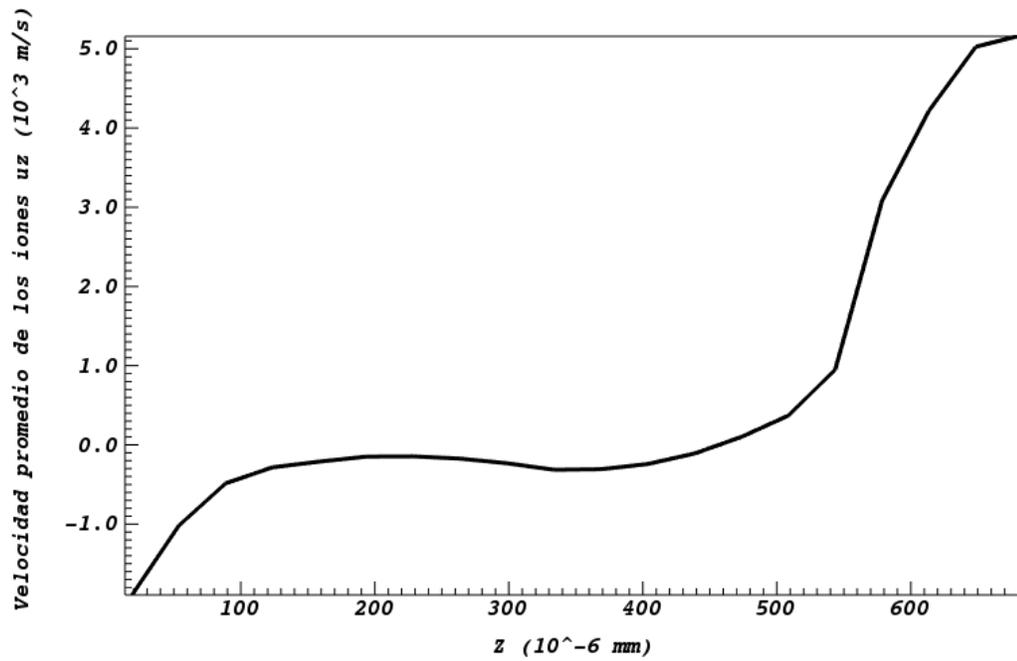


Figura 7-28: Velocidad promedio de los iones u_z

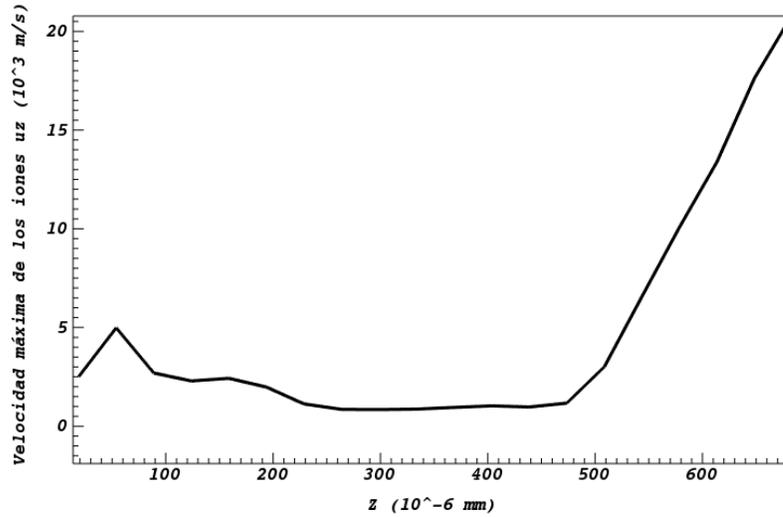


Figura 7-29: Velocidad máxima de los iones u_z

Los iones son los que determinan los valores del empuje e impulso específico del propulsor. El empuje está dado por la ecuación [Ec. (5-40)]:

$$T = \dot{m}v_{ex} \approx \dot{m}_i v_i \quad (7-21)$$

El flujo másico de iones está dado por la ecuación [Ec. (5-41)]:

$$\dot{m}_i = \frac{I_b m_i}{q} \quad (7-22)$$

Si consideramos una corriente de descarga I_b de 4.5A (Tabla 7-1), y una velocidad de iones aproximada de 1.25×10^4 m/s dado los resultados de la simulación se obtiene un empuje aproximado de 0.077N, mientras que el empuje en operaciones típicas del propulsor es de 0.08 N, un error relativo porcentual del 3.6%.

El impulso específico está dado por la ecuación [Ec. (3-22)]:

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}g} \quad (7-23)$$

Al utilizar el empuje y flujo másico de iones obtenidos en la simulación, el im-

pulso específico es de 1230 s, comparado al impulso específico del propulsor Hall en operaciones típicas de 1600s, se tiene un error del 20.5%. El error podría reducirse si se calcula la corriente de descarga en la simulación.

Capítulo 8

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

8.1. Conclusiones

El objetivo de realizar una simulación numérica con el método Particle in Cell (PIC) de un propulsor tipo Hall para predecir su desempeño se cumplió, generando información y metodología para la implementación del método PIC en la simulación de propulsores eléctricos.

En el presente trabajo se abordaron diferentes temas a lo largo de los capítulos con el objetivo de justificar la selección del propulsor, describir los fundamentos y teorías que permitan modelar de manera correcta la simulación, de igual manera justificar las consideraciones utilizadas, resaltando:

- Los datos muestran un evidente crecimiento en el lanzamiento de pequeñas naves espaciales en los últimos años. En particular, los nano- y microsatelites que en promedio, representan al 53.2% de las pequeñas naves espaciales lanzadas. Esto por sus reducidos costos, facilidad en el lanzamiento debido a su peso, tiempos de producción, confiabilidad y la posibilidad de formar constelaciones.
- La selección del sistema de propulsión depende de las diferentes necesidades y requerimientos en las misiones espaciales. La propulsión eléctrica se utiliza típicamente para realizar maniobras satelitales que requieren alta precisión, traduciéndose en un bajo empuje.
- Los componentes principales del propulsor Hall son el circuito magnético, cátodo, ánodo, canal de descarga y propelente. Es importante conocerlos y entenderlos, ya que un mal desempeño en alguno de ellos se traduce en un mal

funcionamiento del propulsor.

- Se profundizó en entender la definición del plasma en sus tres principales conceptos (longitud de Debye, frecuencia de plasma y frecuencia de colisión), entender el movimiento de las diferentes partículas bajo la influencia de un campo electromagnético y entender la interacción del plasma con las paredes, con la finalidad de describir el funcionamiento del propulsor y para proponer una simulación con las condiciones correctas y justificadas.
- Una descripción completa de la dinámica del plasma considera la evolución y movimiento de todas las partículas dado por el campo electromagnético y su interacción con las demás partículas, dicha descripción no es factible computacionalmente, ya que es un problema $O(N^2)$ y las simulaciones típicas contienen más de un millón de partículas. Para abordar el problema, se busca un método estadístico. La ecuación de Boltzmann nos ayuda a entender la distribución de las partículas en el espacio de fase considerando fuerzas electromagnéticas y las colisiones, logrando así la descripción cinética del plasma.
- La solución de la descripción cinética es complicada tanto analítica como numéricamente. Por lo que se utiliza un modelo de fluido para describir la dinámica del plasma considerando aspectos macroscópicos. La descripción de un fluido es en tres dimensiones (\vec{r}), observando cantidades que sólo dependen del espacio físico como la densidad, temperatura y velocidad. Mientras que las cantidades en el espacio velocidad se promedian. Además, se pueden modelar las especies por separado, obteniendo la dinámica del fluido por especie. Dichos modelos son acoplados con las ecuaciones de Maxwell por medio de la densidad de partículas n_s y la velocidad media \vec{u}_s .
- Existen tres métodos de simulación en plasmas: fluidos, cinéticos e híbridos. En los métodos cinéticos se pretende obtener las funciones de distribución de las diferentes especies del plasma, siendo un enfoque microscópico con gran precisión pero con un coste computacional elevado. Los métodos fluidos utilizan la mecánica de fluidos, siendo un enfoque macroscópico con resultados aceptables a un menor coste computacional. En este trabajo se utilizó un método híbrido para tener un balance entre los dos métodos.
- El método PIC es un puente entre lo macroscópico y lo microscópico. Es un algoritmo iterativo, que soluciona ecuaciones diferenciales involucradas en la evolución del plasma por medio del movimiento de las diferentes especies debido a la presencia de campos electromagnéticos. El espacio de simulación cuenta con una malla computacional que es utilizada para calcular propiedades macroscópicas. El algoritmo se describe en tres pasos principales: inicialización, programa principal y finalización. Donde el programa principal consta de cuatro pasos principales: *scatter*, *solve*, *gather* y *push*.

Si bien, las simulaciones se realizaron con uso de software especializado para la simulación del campo magnético (ANSYS Maxwell) y para la simulación de plasma

(VSim), el trabajo abarcó los temas de teorías de plasmas, funcionamiento del propulsor, descripción del algoritmo del método PIC y la metodología utilizada para la simulación del propulsor para permitir la implementación en cualquier software o código.

La simulación fue elaborada para reducir el tiempo de cómputo y asegurar una descripción del funcionamiento del propulsor al utilizar leyes de escalamiento, cálculos de estabilidad, cálculos de malla y simulando a las partículas neutro como un fluido, mientras que los iones y electrones fueron simulados como partículas. Para reducir la complejidad se utilizaron algunos procesos de colisiones y creación de partículas, específicamente: colisión elástica ion-neutro y electrón-neutro, excitación electrón-neutro, ionización, colisiones de intercambio de carga ion-neutro. Se pueden introducir más procesos y partículas para estudiar fenómenos en específico o incrementar la precisión de las simulaciones. El tiempo de simulación en una computadora virtual de 8 CPUs virtuales con 30 GB de memoria RAM fue de aproximadamente 5 horas con 45 minutos.

Los resultados obtenidos en la simulación del campo magnético en la zona de interés tienen un error relativo promedio porcentual de 2.5%, menor al 10% por lo que se decidió utilizar los resultados como pre-proceso de la simulación PIC, aunque se tiene que mencionar que el error promedio en todo el dominio es de 15.86%, esto puede deberse a la falta de caracterización y geometría de los materiales utilizados, además de una posible selección incorrecta de las condiciones de frontera.

Los resultados obtenidos en la simulación PIC del propulsor Hall describen la física y fenómenos estudiados del propulsor, se explica a continuación. La densidad de iones y electrones tienen su valor máximo cerca del plano de salida, que es donde se encuentra el máximo valor del campo magnético, generando una nube de electrones moviéndose a altas velocidades para aumentar la probabilidad de colisión con las partículas neutras, dicho proceso es llamado ionización en el cual se producen iones, partículas débilmente magnetizados y que son acelerados a causa del campo eléctrico hacia afuera del plano de salida, provocando el empuje. Además, se observa que el potencial del plasma ϕ se mantiene constante dentro del propulsor debido a las temperaturas del electrón, y a la salida tiende a cero debido a la disminución de electrones. En pocas palabras, el presente trabajo logró describir la física del propulsor.

Se utilizaron un par de parámetros para comparar el error de la simulación, el primero es el cálculo del empuje que tuvo en error de 3.6%, que representa una diferencia de 0.003 N. El segundo es el cálculo del impulso específico dado por el empuje, flujo másico y la gravedad, obteniendo un error de 20.5%.

Se espera que el presente trabajo pueda ser una posible guía para futuros desarrollos, abriendo las capacidades de implementar la simulación por el método PIC para un diseño del propulsor de manera más integral al utilizar trabajos anteriores en el diseño, caracterización y experimentación de los propulsores Hall. De igual manera, se espera contribuir con un granito de arena en el sector aeroespacial en México.

Como conclusión, los resultados obtenidos en la simulación tienen un error relativamente bajo, y por otro lado, muestra una correcta descripción del funcionamiento del propulsor en su campo magnético, potencial de plasma, distribución de iones y electrones y la velocidad de los iones comparado con la literatura; con lo cual el objetivo del trabajo se cumplió.

8.2. Trabajo a futuro

Para el trabajo a futuro se proponen las siguientes recomendaciones, aunque algunas pueden tener mayor relevancia según sea el caso de estudio.

- Validar resultados de la simulación con el funcionamiento de un propulsor en laboratorio para cuantificar el error contra experimentos.
- Validar la posición del cátodo, ya que en el trabajo actual los electrones son inyectados en el centro del canal a muy poca distancia, por lo que no permite que se vea la densidad electrones a la salida del propulsor, debido a que el electrón al incidir en la pared del cátodo es absorbido.
- Añadir el proceso de recombinación en las paredes, que es el proceso donde un ion se convierte en un átomo neutro, lo que se traduce a la modelación de más especies e interacciones en la simulación.
- Realizar una simulación cinética para comparar resultados y tiempos de simulación contra la simulación híbrida en el presente trabajo. La simulación cinética es aquella donde las especies son simuladas como partículas.
- Explorar la posibilidad de simular a los electrones como fluido, debido a que son partículas más ligeras y necesitan un paso de tiempo más pequeño.
- Modelar el impacto de electrones en una pared dieléctrica que produce una emisión secundaria de electrones, que se traduce a más especies e interacciones dentro de la simulación.
- Implementar más tipos de colisiones, con la idea de disminuir el error reportado en el presente trabajo.
- Calibrar el coeficiente de forma de campo K en la ecuación de Kwon para que se acerque más al comportamiento del campo magnético en el propulsor.

- Para simular la pluma del propulsor, se pueden utilizar los resultados obtenidos de la simulación de la presente tesis como condiciones iniciales, lo que provoca una disminución del tiempo de cómputo. Otra estrategia sería ampliar el dominio de la simulación de tal manera que alcance para simular la pluma.
- Por medio de un refinamiento de malla cerca de las paredes del propulsor se puede hacer un estudio de la vaina electrostática o *sheath*.
- Optimizar el paso de tiempo para reducir el tiempo de cómputo sin perjudicar los resultados de la física del propulsor.
- Integrar el cálculo de la corriente de la descarga I_b para comprobar el funcionamiento del propulsor con esta variable, asimismo de tener un cálculo más acertado del mismo, lo que se podría traducir en una disminución del error en el impulso específico.
- Determinar una correcta geometría y caracterización de los materiales utilizados en la simulación electrostática para obtener el campo magnético, además de un estudio a profundidad de las condiciones de frontera en la misma podrían disminuir el error obtenido, lo cual ayudaría a predecir el comportamiento de las especies simuladas cerca del ánodo.
- Crear procesos de la interacción de los iones con las paredes para el estudio de la erosión de las paredes, lo que perjudica la vida útil del propulsor.
- Validar el uso de software especializado para las simulaciones, o la generación de código para la simulación.

Apéndice A

DISTRIBUCIÓN DE MAXWELL-BOLTZMANN

La distribución de Maxwell-Boltzmann está relacionada con el estado estacionario de un sistema con una temperatura T , siempre y cuando las interacciones entre las partículas sean suficientes. Si el sistema termodinámico no está en completo equilibrio, el requisito mínimo es que las colisiones entre partículas del mismo tipo sean lo suficientemente numerosas como para establecer la distribución Maxwell-Boltzmann.

A.1. Función de distribución 1D Maxwell-Boltzmann

Para un gas en equilibrio térmico, con una composición de partículas que se mueven en una dimensión, se caracteriza por la siguiente función de distribución isotrópica unidimensional homogénea de Maxwell-Boltzmann [69]:

$$f(v_x) = C \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2K_B T}\right) \quad (\text{A-1})$$

La condición de normalización es tal que la probabilidad total sobre todos los componentes de velocidad es una sola, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v}) d\vec{v} = 1 \quad (\text{A-2})$$

La condición de normalización en función de la densidad de partículas es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v}) d\vec{v} = n \quad (\text{A-3})$$

Al utilizar la condición de normalización en función de la densidad de partículas [Ec. (A-4)] se obtiene:

$$n = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2K_B T}\right) dv_x = C \left(\frac{2K_B T \pi}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-4})$$

Si se despeja la constante C de la Ec. (A-4) y se sustituye en la Ec. (A-1), la función de distribución normalizada se escribe como:

$$f(v_x) = n \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2K_B T}\right) \quad (\text{A-5})$$

La distribución de las velocidades de las partículas $F(v)$ de la suma entre las dos posibles direcciones es:

$$F(v) = 2n \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_B T}\right) \quad (\text{A-6})$$

En la sección 4.3.3 se demostró que la velocidad térmica se define como [Ec. (4-30)]:

$$v_{th} = \sqrt{\frac{TK_B}{m}} \quad (\text{A-7})$$

La distribución de las velocidades de las partículas [Ec. (A-6)] escrita en función de la velocidad térmica:

$$F(v) = 2n \left(\frac{1}{2\pi v_{th}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) \quad (\text{A-8})$$

La velocidad v más probable es la velocidad que tiene la máxima probabilidad. Esta velocidad se determina a partir de la condición $F'(v) = 0$:

$$0 = v \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2K_B T}\right) \quad (\text{A-9})$$

Se obtiene que la velocidad más probable es cero. La velocidad media $\langle v \rangle$ se calcula por la ecuación Ec. (4-57):

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v F(v) dv \quad (\text{A-10})$$

Por lo tanto, la velocidad media es:

$$\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2K_B T}{\pi m}}} \quad (\text{A-11})$$

La velocidad media cuadrática v_{RMS} se calcula por la ecuación:

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \frac{1}{n} \left[\int_0^{\infty} v^2 F(v) dv \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-12})$$

Por lo tanto, la velocidad media cuadrática es:

$$\boxed{v_{RMS} = \sqrt{\frac{K_B T}{m}}} \quad (\text{A-13})$$

A.2. Función de distribución 3D Maxwell-Boltzmann

La función de distribución para el caso tridimensional se representa por la ecuación:

$$f(\vec{v}) = C \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2K_B T}\right] \quad (\text{A-14})$$

El valor de la constante C se obtiene con la condición de normalización en función de la densidad de partículas [Ec. (A-3)]:

$$C = n \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A-15})$$

Por lo tanto, la función de distribución normalizada se escribe como:

$$f(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2K_B T}\right] \quad (\text{A-16})$$

La magnitud del vector velocidad se obtiene mediante el módulo del vector por la ecuación:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (\text{A-17})$$

Por lo tanto, la función de distribución normalizada se escribe de la siguiente manera:

$$f(v) = n \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_B T}\right) \quad (\text{A-18})$$

Y en función de la velocidad térmica:

$$f(v) = n \left(\frac{1}{2\pi v_{th}^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) \quad (\text{A-19})$$

Se puede obtener una expresión para la distribución de probabilidad para la velocidad al transformar la distribución tridimensional en una distribución de la magnitud del vector de velocidad (promediada sobre la dirección). Esto se logra mediante el uso de coordenadas esféricas para el vector de velocidad:

$$d\vec{v} = v^2 dv \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi v^2 dv \quad (\text{A-20})$$

La distribución de partículas viajando a una velocidad escalar (positiva) en el intervalo $v, v + dv$, está dada por:

$$F(v) = 4\pi v^2 f(v) \quad (\text{A-21})$$

Por lo que:

$$F(v) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_B T}\right) \quad (\text{A-22})$$

La velocidad v más probable es la velocidad que tiene la máxima probabilidad. Esta velocidad se determina a partir de la condición $F'(v) = 0$:

$$v = \sqrt{\frac{2K_B T}{m}} \quad (\text{A-23})$$

La velocidad media $\langle v \rangle$ es:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8K_B T}{\pi m}} \quad (\text{A-24})$$

La velocidad media cuadrática v_{RMS} es:

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}}$$

(A-25)

Apéndice B

FACTORES DE CORRECCIÓN

B.1. Empuje

La fuerza de empuje de un propulsor Hall en función de la corriente del haz de iones I_b y del voltaje V_b con el cual se aceleran los iones, está dada por la Ec. (5-42):

$$T = \sqrt{\frac{2m_i}{q}} I_b \sqrt{V_b} \quad (\text{B-1})$$

La Ec. (B-1) describe la fuerza de empuje para un haz de iones unidireccional, ionizado una sola vez y monoenergético. Todo lo cual, en general no ocurre. Las condiciones de unidireccionalidad y de ionización múltiple se estudian en este apéndice. El caso monoenergético no se estudia en este trabajo.

Para un propulsor con un perfil de corriente de iones constante acelerado por campos eléctricos uniformes, la corrección del empuje debido a la desviación del haz de iones al salir del propulsor se puede expresar como:

$$f_\theta = \cos \theta_d \quad (\text{B-2})$$

Donde θ_d es el semiángulo de divergencia promedio del haz de iones. Por ejemplo, si el ángulo de empuje es de 10° , entonces $\cos \theta_d = 0.985$, lo que representa una pérdida de empuje del 1.5%.

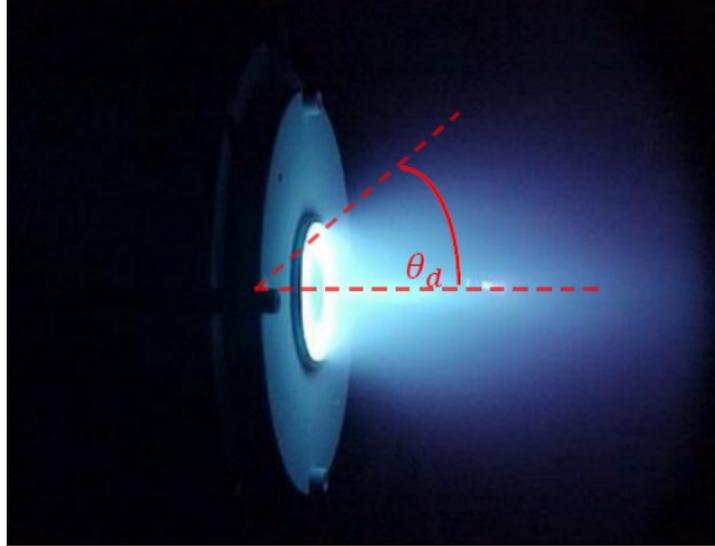


Figura B-1: Semiángulo de divergencia del haz de iones de un propulsor Hall en funcionamiento. Tomada de [64].

Si el suministro de plasma nos es uniforme y/o el sistema acelerador tiene curvatura, entonces la corrección angular quedará como:

$$f_{\theta} = \frac{\int_0^r 2\pi r J_i(r) \cos \theta_d(r) dr}{I_b} \quad (\text{B-3})$$

Donde $J_i(r)$ es la densidad de corriente de iones como función del radio.

La segunda corrección aplicada a la ecuación de empuje considera la presencia de múltiples iones cargados. Si el haz de iones contiene tanto iones ionizados una sola vez como iones doblemente ionizados, la corriente total del haz es:

$$I_b = I^+ + I^{++} \quad (\text{B-4})$$

Donde I^+ son los iones ionizados sólo una vez y I^{++} son los iones doblemente ionizados. Por lo tanto, el empuje total T_m está dado por la suma del empuje para cada especie:

$$T_m = I^+ \sqrt{\frac{2m_i V_b}{q}} + I^{++} \sqrt{\frac{m_i V_b}{q}} = I^+ \sqrt{\frac{2m_i V_b}{q}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{I^{++}}{I^+}\right) \quad (\text{B-5})$$

El factor de corrección del empuje α se define por el cociente entre la Ec. (B-5) y la Ec. (B-1), es decir:

$$\alpha = \frac{T_m}{T} = \frac{I^+ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{I^{++}}{I^+}\right)}{I_b} \quad (\text{B-6})$$

Al sustituir el valor de la corriente I_b [Ec. (B-4)] en la Ec. (B-6) se obtiene:

$$\alpha = \frac{I^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} I^{++}}{I^+ + I^{++}} \quad (\text{B-7})$$

La corrección de empuje total γ se define por el producto de α y la corrección por divergencia del haz f_θ [28].

$$\gamma = \alpha f_\theta \quad (\text{B-8})$$

Por lo tanto, el empuje corregido se define como:

$$T = \gamma \sqrt{\frac{2m_i}{q}} I_b \sqrt{V_b} \quad (\text{B-9})$$

B.2. Impulso específico

El impulso específico I_{sp} es una medida de eficiencia del propulsor y está definido por el cociente entre la fuerza de empuje y la tasa de consumo del propelente [Ec. (3-22)].

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}g} \quad (\text{B-10})$$

La fuerza de empuje para un propulsor en general está dada por el flujo másico del propelente y su velocidad de salida [Ec. (3-18)]. El propulsor Hall expulsa iones a altas velocidades, lo que genera la fuerza de empuje, por lo que la velocidad de escape del propulsor se puede tomar como la velocidad de los iones v_i . Por lo tanto, la ecuación de la fuerza de empuje se puede escribir como [Ec. (5-40)]:

$$T = \dot{m}v_{ex} \approx \dot{m}_i v_i \quad (\text{B-11})$$

Por lo tanto, la ecuación del impulso específico es:

$$I_{sp} = \frac{v_i \dot{m}_i}{g \dot{m}} \quad (\text{B-12})$$

La eficiencia de utilización del propulsor η_m se define como el cociente entre el flujo másico ionizado \dot{m}_i y el flujo másico del propelente \dot{m} .

$$\eta_m = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}} \quad (\text{B-13})$$

El flujo másico de iones está relacionado con la corriente de haz de iones I_b por la ecuación:

$$\dot{m}_i = \frac{I_b m_i}{q} \quad (\text{B-14})$$

Al sustituir el flujo másico [Ec. (B-14)] en la Ec. (B-13), la eficiencia de utilización del propulsor es:

$$\eta_m = \frac{I_b m_i}{q \dot{m}} \quad (\text{B-15})$$

Como se hizo anteriormente con la fuerza de empuje, se debe considerar la corrección de eficiencia másica tomando en cuenta las dobles ionizaciones:

$$\eta_{m^*} = \alpha_m \frac{I_b}{q} \frac{m_i}{\dot{m}} \quad (\text{B-16})$$

El término corregido corresponde a la suma de los términos ionizados solo una vez y los doblemente ionizados, si se realiza el mismo procedimiento que se utilizó para la fuerza de empuje, se obtendrá α_m :

$$\alpha_m = \frac{I^+ + \frac{1}{2}I^{++}}{I^+ + I^{++}} \quad (\text{B-17})$$

Nótese que el término α_m para el impulso específico es distinto para la fuerza de empuje, debido a que el impulso específico depende de la carga de manera lineal, mientras que la fuerza de empuje depende de la carga de manera cuadrática. Por tal motivo al evaluar la corriente de iones doblemente ionizados se obtiene un factor $\frac{1}{2}$ para el impulso específico y un factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ para la fuerza de empuje.

Al sustituir la Ec. (B-9) y la Ec. (B-16) en la Ec. (B-10) se obtiene el impulso específico en términos del voltaje con el que se aceleran los iones y la masa del ión.

$$I_{sp} = \frac{\gamma \eta_m}{g} \sqrt{\frac{2qV_b}{m_i}} \quad (\text{B-18})$$

Y en función de la eficiencia másica corregida:

$$I_{sp} = \frac{\gamma \eta_{m^*}}{g} \sqrt{\frac{2qV_b}{m_i}} \quad (\text{B-19})$$

Apéndice C

ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN ELECTROSTÁTICA

El campo magnético es importante en el funcionamiento del propulsor Hall, ya que mantiene a los electrones confinados, controlando las zonas de ionización y aceleración. En el método PIC es utilizado como una malla de fondo para simular la posición y velocidad de las partículas en cada paso del tiempo, por lo que es una condición inicial y es calculado en el pre-proceso de la simulación.

El campo magnético dentro y fuera del canal de descarga se resuelve por medio de una simulación electrostática 2D y axisimétrica con la ayuda del software comercial ANSYS. Para validar los resultados obtenidos se calculó el error relativo porcentual del perfil obtenido comparado con los resultados del trabajo [48].

A continuación, se muestra el algoritmo utilizado para graficar y calcular el error relativo porcentual del campo magnético dentro y fuera del canal de descarga, con el fin de dimensionar el error en la zona de interés, es decir, la zona donde la magnitud del campo magnético es mayor.

ETL ANSYS Simulation results

```
import pandas as pd
import os
import glob
import numpy as np
from time import time
import matplotlib.pyplot as plt
import plotly
import seaborn as sns
from matplotlib import rc
import math
```

Directories definition

```
# root path
path_general = '/home/daniel/Dropbox/Tesis II_Ref/ANSYS Maxwell/'
# directory with results files
path_resultados = path_general + 'Resultados/'
# file with Chang Liu results
path_excel = path_resultados + 'b_changlui.xlsx'
# directory with all ANSYS simulation results
path_csv = path_resultados + 'csv_ANSYS/iron'
# directory where are saved figures
path_plots = path_resultados + 'iron_plots/'
path_tesis = path_plots + '/Tesis/'
```

Import paper results

```
# import paper results
df_paper = pd.read_excel(path_excel, sheet_name='changlui_normalizado')
df_paper.rename(columns={"y_norm": "y_paper"}, inplace=True)
```

Final results

```
# results file path
file_ = '/home/daniel/Dropbox/Tesis II_Ref/ANSYS
Maxwell/Resultados/csv_ANSYS/iron/Hall_T_0.001_Z_0.01_PERBN_4.6_PERNF_4000_COERNF_15000_BULKNF_10300000.csv'

# file path
df_ansys = pd.read_csv(file_)
# inputs Kwon shape coefficients and channel length (L)
K_16 = 16
K_4 = 4
L = 0.025

# scale value depending of units of Mag_B
if((df_ansys.columns[1] == 'Mag_B [tesla]') or (df_ansys.columns[1] == 'Mag_B [Tesla]')):
    scale = 1
if((df_ansys.columns[1] == 'Mag_B [mTesla]') or (df_ansys.columns[1] == 'Mag_B [mtesla]')):
    scale = 1000

# transform
df_ansys.rename(columns={df_ansys.columns[1]: "y_ansys"}, inplace=True)
df_ansys = df_ansys/scale
df_ansys['y_ansys_norm'] = df_ansys.y_ansys/df_ansys.y_ansys.max()
# concatenate with paper results
df = pd.concat([df_paper, df_ansys[['y_ansys', 'y_ansys_norm']]], axis=1, sort=False)
# solve kwon equation
bmax = max(df['y_ansys'])
df['y_kwon_16'] = bmax*np.exp(-K_16*(df['x']/L-1)**2)
df['y_kwon_4'] = bmax*np.exp(-K_4*(df['x']/L-1)**2)
# reorder
df = df[['x', 'y_ansys', 'y_paper', 'y_ansys_norm', 'y_kwon_4', 'y_kwon_16']]
# scale with maximum
df['y_kwon_4_norm'] = df.y_kwon_4/max(df.y_kwon_4)
df['y_kwon_16_norm'] = df.y_kwon_16/max(df.y_kwon_16)
# realtive error calculation
```

```

df['error_paper'] = abs(df['y_paper']-df['y_ansys_norm'])/df['y_paper']
df['error_kwon_4'] = abs(df['y_kwon_4_norm']-df['y_ansys_norm'])/df['y_kwon_4_norm']
df['error_kwon_16'] = abs(df['y_kwon_16_norm']-df['y_ansys_norm'])/df['y_kwon_16_norm']

# error zones
df['error_paper_1'] = df['error_paper'][:16]
df['error_paper_2'] = df['error_paper'][16:]

# resume dataframe
file_name = file_.replace("\\", "/").split('/')[ -1]
file_aux = file_name.split('_')

# quick plot in order to visualize and validate results
fig = plt.figure()
plt.plot(df['y_ansys_norm'],label='ANSYS')
plt.plot(df['y_paper'],label='Paper')
plt.axvline(L*1000, ls='--', c='orange')
mean_global_paper = 'Paper: ' + str(df['error_paper'].mean())
plt.axhline(df['error_paper'].mean(), ls='--', c='black', label = mean_global_paper)
plt.legend()
plt.title(file_name)

# error 1 plot
fig = plt.figure()
plt.plot(df['error_paper_1'],label='error before 15')
plt.axvline(L*1000, ls='--', c='orange')
mean_paper = 'Paper: ' + str(df['error_paper_1'].mean())
plt.axhline(df['error_paper_1'].mean(), ls='--', c='black', label = mean_paper)
plt.legend()
plt.title(file_name)

# error 2 plot
fig = plt.figure()
plt.plot(df['error_paper_2'],label='error after 15')
plt.axvline(L*1000, ls='--', c='orange')
mean_paper = 'Paper: ' + str(df['error_paper_2'].mean())
plt.axhline(df['error_paper_2'].mean(), ls='--', c='black', label = mean_paper)
plt.legend()

```

Final plots

```

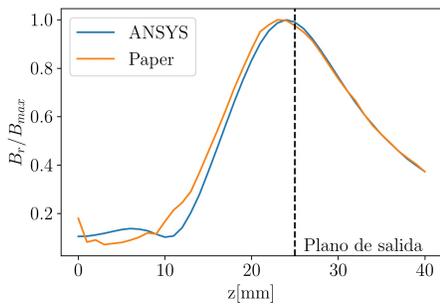
rc('font', **{'family': 'serif', 'serif': ['Computer Modern'], 'size': 16})
rc('text', usetex=True)
# We need the following so that the legend labels are vertically centred on
# their indicator lines.
rc('text.latex', preview=True)

```

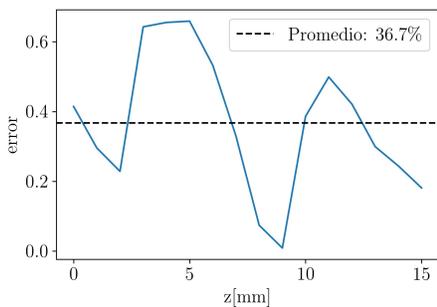
```

# general plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df['y_ansys_norm'],label=r'ANSYS')
ax.plot(df['y_paper'],label=r'Paper')
ax.axvline(L*1000, ls='--', c='k')
ax.annotate(xy=((L+0.001)*1000, 0.000045*1000),
            s=r'Plano de salida')
ax.legend()
ax.set_xlabel(r'z$[\textup{mm}]$')
ax.set_ylabel(r'$B_r/B_{\max}$')
plt.savefig(path_tesis + 'general.png', dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.savefig('general.png', dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.show()

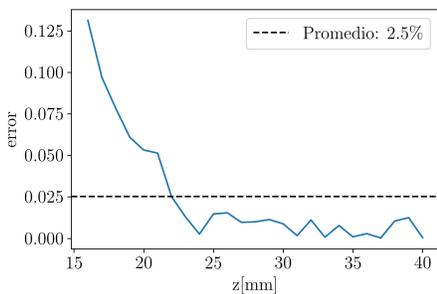
```



```
# error plot before 15 mm
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df['error_paper_1'])
mean_number = "{0:.1f}".format(df['error_paper_1'].mean()*100,"f")
mean_paper = 'Promedio: ' + mean_number + r'\%'
plt.axhline(df['error_paper_1'].mean(), ls='--', c='black', label = mean_paper)
ax.legend()
ax.set_xlabel(r'z$[\textup{mm}]$')
ax.set_ylabel(r'error')
plt.savefig(path_tesis + 'error1.png', dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.savefig('error1.png', dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.show()
```



```
# error plot after 15 mm
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df['error_paper_2'])
mean_number = "{0:.1f}".format(df['error_paper_2'].mean()*100,"f")
mean_paper = 'Promedio: ' + mean_number + r'\%'
plt.axhline(df['error_paper_2'].mean(), ls='--', c='black', label = mean_paper)
ax.legend()
ax.set_xlabel(r'z$[\textup{mm}]$')
ax.set_ylabel(r'error')
plt.savefig(path_tesis + 'error2.png', dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.savefig('error2.png', dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.show()
```



Apéndice D

PRE-PROCESAMIENTO DEL CAMPO MAGNÉTICO

Para poder utilizar los resultados obtenidos en la simulación electrostática como insumo a la simulación del propulsor por medio del método PIC, es importante entender el formato que deben tener los datos para ser introducidos, y de igual forma el formato en el cual los resultados de la simulación electrostática son exportados.

Los resultados de la simulación electrostática se exportaron en una malla de 172×123 en un archivo csv, para ser utilizado es necesario transformarlo a un archivo h5, de tal manera VSim puede incorporar los resultados de la simulación electrostática.

A continuación, se muestra el algoritmo utilizado para extraer la información del archivo csv, escalar los resultados del campo magnético en función del factor de escalamiento ζ (Tabla 7-2) y exportar los datos en un archivo h5.

CSV to H5 file

```
import pandas as pd
import numpy as np
import h5py
```

Functions definition

```
# function to delimitate walls
def func(df):
    result = 0
    if (df.x < 0.035 and df.z < 0.025) or (df.x > 0.05 and df.z < 0.025):
        result = 0
    else:
        result = 1
    return result
```

Inputs definition

```
# paths definition
## directory where csv file with ANSYS simulation result is located
path_ansys_csv = 'C:/Users/Daniel/Documents/Tesis Hall Simulation/ANSYS Simulation/ANSYS
Simulation/20191116_Hall_Magnetv2_Iron/'
## directory where h5 file will be exported
path_VSim = 'C:/Users/Daniel/Documents/20191226_Hall/'
# files names
ansys_name = 'B_Hall.csv'
VSim_name = 'B_Hall.h5'
ansys = path_ansys_csv + ansys_name
VSim = path_VSim + VSim_name

# scale parameter
zeta = 0.02
```

ETL

```
df = pd.read_csv(ansys, delimiter=' ', skiprows=1)
df = df.reset_index()

# delete possible error in index
df = df.dropna(axis=1, how='all')
df = df.rename(columns={df.columns[0]: "x"})
if (df.x == df.index).unique() == True:
    df = df.drop(columns = ['x'])

# rename columns
df = df.rename(columns={df.columns[0]: "x", df.columns[1]: "y",
                        df.columns[2]: "z", df.columns[3]: "Bx",
                        df.columns[4]: "By", df.columns[5]: "Bz"})

# reorder
df = df[['x', 'z', 'Bx', 'By', 'Bz']]
# magnetic field magnitude computation
df['B_magnitude'] = np.sqrt(df.Bx**2 + df.Bz**2)
df = df.join(df.apply(func, axis=1).rename('flag'))
# sort values, because the reference system is not the same
df = df.sort_values(['x', 'z'], ascending=[False, True])
# transformed magnetic vector
df['Bx_T'] = (df.flag * df.Bx) / zeta
df['By_T'] = (df.flag * df.By) / zeta
df['Bz_T'] = (df.flag * df.Bz) / zeta
df['Bmag_T'] = (df.flag * df.B_magnitude) / zeta

# shape values
x_dim = df.x.nunique()
z_dim = df.z.nunique()
# 0 array of dif matrix
```

```

matrix_Bx = pd.DataFrame(np.zeros(shape=(z_dim,x_dim)))
matrix_By = pd.DataFrame(np.zeros(shape=(z_dim,x_dim)))
matrix_Bz = pd.DataFrame(np.zeros(shape=(z_dim,x_dim)))
matrix_mag = pd.DataFrame(np.zeros(shape=(z_dim,x_dim)))

# create matrix with data
aux = 0
for i in df.z.unique():
    matrix_Bx.iloc[aux] = np.array(df[df.z == i].Bx_T)
    aux = aux + 1

aux = 0
for i in df.z.unique():
    matrix_By.iloc[aux] = np.array(df[df.z == i].By_T)
    aux = aux + 1

aux = 0
for i in df.z.unique():
    matrix_Bz.iloc[aux] = np.array(df[df.z == i].Bz_T)
    aux = aux + 1

aux = 0
for i in df.z.unique():
    matrix_mag.iloc[aux] = np.array(df[df.z == i].Bmag_T)
    aux = aux + 1

# transform to array
data_Bx = matrix_Bx.to_numpy()
data_By = matrix_By.to_numpy()
data_Bz = matrix_Bz.to_numpy()
data_mag = matrix_mag.to_numpy()

# w -> write h5 file
with h5py.File(VSim,'w') as hdf:
    # vector data
    dset = hdf.create_dataset('nodalB', (z_dim,x_dim,3))
    ## nodalB_z
    dset[:, :,0] = data_Bz
    ## nodalB_r
    dset[:, :,1] = data_Bx
    ## nodalB_Phi
    dset[:, :,2] = data_By

    # magnitude data
    hdf.create_dataset('nodalB_magnitude', data = data_mag)

```

Apéndice E

SIMULACIÓN DEL PROPULSOR POR EL MÉTODO PIC

A continuación, se muestra el algoritmo utilizado para la simulación PIC del propulsor. En el código se describen los insumos empleados en la simulación, las funciones analíticas para el cálculo del campo magnético, permitividad relativa, densidad de partículas neutro como un fluido.

En el código se describen los siguientes bloques:

- *Exposed variables*. Parámetros geométricos y de operación del propulsor, parámetros de la malla y parámetros para calcular las ecuaciones de estabilidad.
- *Primary and secondary variables*. Escalamiento de las variables (Tabla 7-2), cálculo de la geometría según la posición de la malla, cálculo de la estabilidad.
- *Functions*. Funciones analíticas para el cálculo del campo magnético, permitividad relativa en el dominio de la simulación, densidad de partículas neutro como un fluido.
- *Grid*. Definición de la malla en función de los parámetros obtenidos en los insumos.
- *Multifield*. Solución del campo electrostático en función de las condiciones de frontera. Solución del método PIC.
- *Fluid*. Descripción de las partículas neutras como un fluido.
- *Species*. Definición de los iones y electrones como partículas.
- *ImpactCollider*. Las colisiones son modeladas por el método MCC.

SPT-100 Hall Thruster Simulation

```
#####
# This input file performs
# SPT-100 Hall thruster channel
# simulations using a 2-D Axisymmetric
# cylindrical set up in this simulation.
#####

<XSim cylHallThrusterT>
  shortDescription = "SPT-100 Hall Thruster (text-based setup)"
  description = "Cylindrical SPT-100 Hall Thruster Channel Plasma Discharge Simulation"
  longDescription = "SPT-100 Hall thruster channel simulation using a 2-D axisymmetric cylindrical set
up, stability equations."
  analyzers = [computePtclNumDensity.py]
</XSim>

#####
#
# Exposed variables
#
#####

# Scale factor
<XVar ZETA>
  description = "Scale factor of Hall Thruster"
</XVar>

# --- Boolean ---
<XVar IMPORT_MAGNETIC_FIELD>
  description = "0- Solve Kwon Equation, 1- Import magnetic field from a h5 file"
  default = 0
</XVar>

<XVar H5_FILE_NAME>
  description = "h5 file name"
  default = B_Hall.h5
</XVar>

<XVar CALCULATE_THRUST>
  description = "0- Faster, more stable simulation that excludes histories for thrust, 1- Include
histories for thrust"
  default = 0
</XVar>

<XVar CATHODE_POSITION>
  description = "0- Default (middle), 1- User definition"
  default = 0
</XVar>

<XVar GAS_DENSITY_FUNCTION>
  description = "0- Taccogna eq., 1- Linear Equation"
  default = 0
</XVar>

<XVar DEBUG_CODE>
  description = "0- No debug, 1- Debug, error when run simulation"
  default = 0
</XVar>

# --- Geometric variables ---
<XVar CHANNEL_LENGTH>
  description = "Hall thruster channel length (m)"
</XVar>

<XVar PLUME_LENGTH>
  description = "Hall thruster plume length (m)"
</XVar>

<XVar CHANNEL_RMIN>
  description = "Hall thruster inner radius (m)"
```

```

</XVar>

<XVar CHANNEL_RMAX>
  description = "Hall thruster outer radius (m)"
</XVar>

<XVar INNER_DIELEC_THICK>
  description = "Inner dielectric wall thickness (m)"
</XVar>

<XVar OUTER_DIELEC_THICK>
  description = "Outer dielectric wall thickness (m)"
</XVar>

<XVar CATHODE_RMIN>
  description = "Nearest R cathode position [corner] (m)"
</XVar>

<XVar CATHODE_RMAX>
  description = "Farthest R cathode position [corner] (m)"
</XVar>

<XVar CATHODE_ZMIN>
  description = "Nearest Z cathode position [corner] (m)"
</XVar>

<XVar CATHODE_ZMAX>
  description = "Farthest Z cathode position [corner] (m)"
</XVar>

# --- Operation variables and function parameters---

<XVar ANODE_V>
  description = "Anode voltage (V)"
</XVar>

<XVar CATHODE_V>
  description = "Cathode voltage (V)"
</XVar>

<XVar CATHODE_CURRENT>
  description = "Cathode emission current (A)"
</XVar>

<XVar INIT_ELEC_ENERGY>
  description = "Initial cathode emitted electron energy (eV)"
</XVar>

<XVar MAX_XEGAS_DENS>
  description = "Maximum xenon neutral gas density at anode location (ptc/m3)"
</XVar>

<XVar XEGAS_TEMPERATURE>
  description = "Xenon gas temperature (K)"
</XVar>

<XVar MAX_RAD_BFIELD>
  description = "Maximum radial magnetic field strength (T)"
</XVar>

<XVar K_MF>
  description = "Magnetic field shape coefficient, k=16 for SPT-100 [Kwon]"
</XVar>

<XVar EPSILON_R>
  description = "Relative permittivity"
</XVar>

# --- Grid ---
<XVar NZ>
  description = "Number of cells in the Z direction"
</XVar>

<XVar NR>

```

```

description = "Number of cells in R direction"
</XVar>

# --- Stability calculations ---
<XVar ELECTRON_DENSITY>
description = "Electron density, for stability calculations (m-3)"
</XVar>

<XVar ELECTRON_TEMPERATURE_EV>
description = "Electron temperature, for stability calculations (eV)"
</XVar>

# --- Simulation variables ---
<XVar NSTEPS>
description = "Number of time steps to run the simulation"
</XVar>

<XVar NDUMPS>
description = "Number of dumps (DUMPPERIOD=int(NSTEPS/NDUMPS))"
</XVar>

<XVar MACROPTC>
description = "Macroparticles density"
</XVar>

<XVar TIMESTEP_FACTOR>
description = "Time step factor "
</XVar>

#####
#
# Primary variables (dimensions and operating parameters)
#
#####
$ import verbosity

verbosity = VP_NOTICE

$ DEBUG_CODE = 0 # history debug in order to review parameters

$ ZETA = 0.02 # scale factor
# stability calculations
$ ELECTRON_DENSITY = 1.e18 # in m-3
$ ELECTRON_TEMPERATURE_EV = 15 # in eV

# Geometric variables (m)
$ CHANNEL_LENGTH = 0.025 # 2.5 cm
$ PLUME_LENGTH = 0.01
$ CHANNEL_RMIN = 0.035
$ CHANNEL_RMAX = 0.05
$ INNER_DIELEC_THICK = 0.005
$ OUTER_DIELEC_THICK = 0.005
$ CATHODE_RMIN = 0.051
$ CATHODE_RMAX = 0.053
$ CATHODE_ZMIN = 0.028
$ CATHODE_ZMAX = 0.03

# Simulation variables
$ NDIM = 2
$ TIMESTEP_FACTOR = 0.25
$ NSTEPS = 243000
$ NDUMPS = 200
$ MACROPTC = 1e5

# Boolean
$ CALCULATE_THRUST = 0
$ IMPORT_MAGNETIC_FIELD = 1 # 0 Equation, 1 Import h5 file
$ H5_FILE_NAME = B_Hall.h5
$ CATHODE_POSITION = 0 # 0 Default (middle), 1 User definition
$ GAS_DENSITY_FUNCTION = 0 # 0 Taccogna, 1 Linear Equation

# Operating variables
$ ANODE_V = 300.0 # (V)
$ CATHODE_V = 0.0

```

```

$ CATHODE_CURRENT = 4.5 # (A)
$ INIT_ELEC_ENERGY = 5.0 # (eV)
$ MAX_RAD_BFIELD = 0.015 # (T)
$ MAX_XEGAS_DENS = 1.e21 # (m^-3)
$ XEGAS_TEMPERATURE = 300.0 # (K)

# function Parameters
$ K_MF = 16. # Magnetic field shape coefficient, k=16 for SPT-100 [Kwon]
$ EPSILON_R = 4.6 # Relative permittivity ratio

#####
# Import
#####

$ import mathphys
$ import absorbingBox
$ import matrix
$ import solverbcs
$ import statics

#####
#
# Secondary variables (defined in terms of other variables)
#
#####

# ***** SCALED *****

# Particle parameters
$ XENON_A = 131.293 # Xenon mass number
$ XENON_Z = 54 # Xenon atomic number
$ XENON_MASS = XENON_A * PROTMASS
$ XENONPLUS_CHARGE = ELEMCHARGE / XENON_MASS # specifi charge q/m

# scaled stability parameters
$ ELECTRON_DENSITY = ELECTRON_DENSITY / ZETA

# scaled Geometric
$ CHANNEL_LENGTH = CHANNEL_LENGTH * ZETA
$ CHANNEL_RMIN = CHANNEL_RMIN * ZETA
$ CHANNEL_RMAX = CHANNEL_RMAX * ZETA
$ INNER_DIELEC_THICK = INNER_DIELEC_THICK * ZETA
$ OUTER_DIELEC_THICK = OUTER_DIELEC_THICK * ZETA
$ PLUME_LENGTH = PLUME_LENGTH * ZETA

# scaled Operating variables
$ CATHODE_CURRENT = CATHODE_CURRENT * ZETA
$ MAX_RAD_BFIELD = MAX_RAD_BFIELD / ZETA
$ MAX_XEGAS_DENS = MAX_XEGAS_DENS / ZETA

# Geometric calcs
$ TOTAL_LENGTH = CHANNEL_LENGTH + PLUME_LENGTH
$ RAD_MIN = CHANNEL_RMIN - INNER_DIELEC_THICK
$ ANODE_RMIN = CHANNEL_RMIN - 0.5 * INNER_DIELEC_THICK
$ RAD_MAX = CHANNEL_RMAX + OUTER_DIELEC_THICK
$ ANODE_RMAX = CHANNEL_RMAX + 0.5 * OUTER_DIELEC_THICK

# Calculate stability (Delta t, Delta x)
## Plasma parameters
$ DEBYE_LENGTH =
sqrt((EPSILON0*ELECTRON_TEMPERATURE_EV*ELEMCHARGE)/(ELECTRON_DENSITY*ELEMCHARGE*ELEMCHARGE))
$ PLASMA_FREQ = sqrt((ELECTRON_DENSITY*ELEMCHARGE*ELEMCHARGE)/(EPSILON0*ELECMASS))
$ V_THERMAL = sqrt(ELEMCHARGE*ELECTRON_TEMPERATURE_EV/ELECMASS)

# Grid parameters
$ NZ_SUG = int(LZ/DEBYE_LENGTH + 1) # NZ Suggested (History Block)
$ NR_SUG = int(LR/DEBYE_LENGTH + 1) # NR Suggested (History Block)
$ NZ = 172
$ NR = 123

## guard cells
$ NZ1 = NZ + 1
$ NR1 = NR + 1
$ NZM1 = NZ - 1

```

```

$ NRM1 = NR - 1

### section breaks
$ LZ = TOTAL_LENGTH
$ LR = RAD_MAX - RAD_MIN
$ ZBGN = 0.0
$ ZEND = ZBGN + LZ
$ RBGN = RAD_MIN
$ REND = RBGN + LR

### Grid spacings
$ DZ = LZ / NZ
$ DZI = 1. / DZ
$ DR = LR / NR
$ DRI = 1. / DR
$ DLI = sqrt(DZI * DZI + DRI * DRI)

### Geometric grid positions
$ EMISSION_OFFSET = 0.01*DR

$ CHANNEL_ZEND = ZBGN + CHANNEL_LENGTH
$ CHANNEL_ZEND_IDX = (int) (CHANNEL_ZEND / DZ) + 1 # IDX -> INDEX

$ INNER_DIELEC_RMAX = RBGN + INNER_DIELEC_THICK
$ BOT_WALL_RIDX = (int) ( (INNER_DIELEC_RMAX-RBGN) / DR )
$ BOTWALL_POS = RBGN + (BOT_WALL_RIDX + 1) * DR + EMISSION_OFFSET
$ BOT_WALL_ANODE_RIDX = (int) ( (ANODE_RMIN-RBGN) / DR )
$ TOP_WALL_ANODE_RIDX = (int) ( (ANODE_RMAX-RBGN) / DR )

$ OUTER_DIELEC_RMIN = REND - OUTER_DIELEC_THICK
$ TOP_WALL_RIDX = (int) ( (OUTER_DIELEC_RMIN - RBGN) / DR )
$ TOPWALL_POS = RBGN + TOP_WALL_RIDX * DR - EMISSION_OFFSET

## time step
$ DT = TIMESTEP_FACTOR * min(2/PLASMA_FREQ , 1/(DLI * V_THERMAL))
## dump period
$ DUMP_PERIOD = int(NSTEPS / NDUMPS)

## Macroparticles density check  $XI \ll 1$ 
$ XI = (PLASMA_FREQ * DT) * (PLASMA_FREQ * DT) / (2 * MACROPTC)

# Electron Emission parameters
$ CATHODE_NUMPHYS_ELEC_PER_STEP = CATHODE_CURRENT * DT / ELEMCHARGE
$ VThermalE = sqrt(2 * ELEMCHARGE * INIT_ELEC_ENERGY / ELECMASS)
$ MATERIAL = 'copper'

$ if CATHODE_POSITION == 0
# default
$ CATHODE_RMIN = CHANNEL_RMIN
$ CATHODE_RMAX = CHANNEL_RMAX
$ CATHODE_ZMIN = $CHANNEL_ZEND - 20.0*DZ$
$ CATHODE_ZMAX = $CHANNEL_ZEND + 3.0*DZ$
$ else
# user definition
$ CATHODE_RMIN = CATHODE_RMIN * ZETA
$ CATHODE_RMAX = CATHODE_RMAX * ZETA
$ CATHODE_ZMIN = CATHODE_ZMIN * ZETA
$ CATHODE_ZMAX = CATHODE_ZMAX * ZETA
$ endif

#####
#
# Functions
#
#####
<function Br(x,y,z)>
  H(CHANNEL_ZEND - x) * H(y-CHANNEL_RMIN) * H(CHANNEL_RMAX-y) * MAX_RAD_BFIELD * (CHANNEL_RMIN / y) *
  exp(-K_MF*(x/CHANNEL_ZEND-1.0)*(x/CHANNEL_ZEND-1.0)) + H(x-CHANNEL_ZEND) * H(y-CHANNEL_RMIN) *
  H(CHANNEL_RMAX-y) * MAX_RAD_BFIELD * (CHANNEL_RMIN / y) * exp(-K_MF*(x/CHANNEL_ZEND-1.0)*(x/CHANNEL_ZEND-
  1.0))
</function>

# Relative permittivity function
<function relative_permittivity(x,y,z)>

```

```

    EPSILON0 * (1.0 + (EPSILON_R - 1.0) * H(CHANNEL_RMIN-y) * H(CHANNEL_ZEND-x) + (EPSILON_R - 1.0) * H(y-
CHANNEL_RMAX) * H(CHANNEL_ZEND-x))
</function>

$ if GAS_DENSITY_FUNCTION == 0
<function gasDensity(x,y,z)>
    H(CHANNEL_ZEND-x) * H(y-CHANNEL_RMIN) * H(CHANNEL_RMAX-y) * (MAX_XEGAS_DENS * ZETA + 5.e18 *
atan(10*(1-x/ZETA/0.018)))/ZETA + H(x-CHANNEL_ZEND) * (MAX_XEGAS_DENS * ZETA + 5.e18 * atan(10*(1-
x/ZETA/0.018)))/ZETA
</function>
$ else
<function gasDensity(x,y,z)>
    MAX_XEGAS_DENS * (0.1+(1.0-x/CHANNEL_ZEND)) * H(CHANNEL_ZEND-x) * H(y-CHANNEL_RMIN) *
H(CHANNEL_RMAX-y) + H(x-CHANNEL_ZEND) * MAX_XEGAS_DENS * 0.1 * (1.0 - (x-CHANNEL_ZEND)/CHANNEL_ZEND)
</function>
$ endif

#####
#
# Input Blocks
#
#####

#####
# Basic Simulation Parameters
#####

dt = DT
dimension = NDIM
floattype = double
nsteps = NSTEPS
dumpPeriodicity = DUMP_PERIOD

#####
# Grid
#####

<Grid globalGrid>
  kind = coordProdGrid
  coordinateSystem = Cylindrical
  includeCylAxis = 0
  # dir 0 - Z direction
  <CoordinateGrid dir0>
    sectionBreaks = [ZBGN ZEND]
    deltaAtBreaks = [DZ DZ]
  </CoordinateGrid>
  # dir 1 - R direction
  <CoordinateGrid dir1>
    sectionBreaks = [RBGN REND]
    deltaAtBreaks = [DR DR]
  </CoordinateGrid>
</Grid>

# Decomposition (The periodic directions)
<Decomp decomp>
</Decomp>

#####
# Multifield (Define the EM field and describe its boundary conditions)
#####

# Separate specification of the date (Field)
# Operations on those fields (FieldUpdater)
# Algorithms sequence of those update operations (UpdateStep)

# Blocks contained within a FieldBlock: BoundaryCondition, InitialCondition, Source

# electrostatic field
# Solve steps
# 1. Compute charge density rho
# 2. Solve Poisson's equation (lap(phi)=-rho/epsilon0)
# 3. Compute electric field (E=-grad(phi))
# 4. Update particle velocity (ma=qE)
# 5. Advance particle location (delta(x)=v*delta(t))

```

```

<MultiField esField>
# **** Field
# charge density rho
<Field rho>
  kind = depField
  numComponents = 1
  overlap = [1 1]
  offset = none
  <InitialCondition densityFunc>
    kind = varset
    lowerBounds = [ 0 0]
    upperBounds = [NZ1 NR1]
    components = [0]
    <STFunc component0>
      kind = expression
      expression = 0.0
    </STFunc>
  </InitialCondition>
</Field>

# Electric potential (phi) on the nodes
<Field phi>
  numComponents = 1
  overlap = [1 1]
  offset = none
</Field>

# The electric field is evaluated at the edges
# Electric field on edges
<Field edgeE>
  numComponents = 3 # vector
  overlap = [1 1]
  offset = edge
</Field>

# Electric field on nodes
<Field nodalE>
  numComponents = 3
  overlap = [1 1]
  offset = none
</Field>

# Magnetic field on nodes, pre-processing
# Two possible ways.
# 1. Solving an equation [Kwon] (case 0)
# 2. Import a h5 file with the solution (case 1)

$ if IMPORT_MAGNETIC_FIELD == 0
# Solving Kwon equation

# Magnetic field on nodes; not updated
<Field nodalB>
  numComponents = 3
  overlap = [1 1]
  offset = none
  <InitialCondition initB>
    kind = varset
    lowerBounds = [ 0 0]
    upperBounds = [NZ1 NR1]
    components = [0 1 2]
    <STFunc component0>
      kind = expression
      expression = 0.0
    </STFunc>
    <STFunc component1>
      kind = expression
      expression = Br(x,y,z)
    </STFunc>
    <STFunc component2>
      kind = expression
      expression = 0.0
    </STFunc>
  </InitialCondition>

```

```

</Field>

$ else
# 2. Import a h5 file with the solution
# Nodal magnetic field
<Field nodalB>
  numComponents = 3
  overlap = [1 1]
  offset = none
</Field>

# Magnetic field on nodes; not updated
<FieldUpdater readB>
  kind = importFromFileUpdater
  fileName = H5_FILE_NAME
  dataset = "nodalB"
  writeFields = [nodalB]
  writeComponents = [0 1 2]
  lowerBounds = [0 0 0]
  upperBounds = [NZ NR 3]
</FieldUpdater>

$ endif

# Electrostatic solve
# Potential is solved using the Poisson's equation -lap(phi)=rho
<FieldUpdater esSolve>
  kind = linearSolveUpdater
  lowerBounds = [ 0 0]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
  readFields = [rho]
  readComponents = [0]
  writeFields = [phi] # field to update
  writeComponents = [0]
  writeEquationToFile = false

# Read Right hand side (RHS)
## matrix and rhs fill
  coordProdLaplacian(interior, 0, 1, 1, 0, NZM1, NR, 1, 0, rho, 0, 1.0, relative_permittivity(x,y,z))
# Dirichlet Boundary Conditions
  dirichletBC(leftWall, 2, 0, BOT_WALL_ANODE_RIDX, 1, 1, TOP_WALL_ANODE_RIDX, 1, 0, ANODE_V, 1.0)
  dirichletBC(leftBotWall, 2, 0, 0, 0, 1, BOT_WALL_ANODE_RIDX, 1, 0, 0.0, 1.0)
  dirichletBC(leftTopWall, 2, 0, TOP_WALL_ANODE_RIDX, 0, 1, NR1, 1, 0, 0.0, 1.0)
  dirichletBC(rightWall, 2, NZM1, 0, 0, NZ1, NR1, 1, 0, CATHODE_V, 1.0)
# Neumann Boundary Conditions
  neumannBC(bottomWall, 2, 1, 0, 0, NZM1, 1, 1, 0, 0.0, 1, 1, 1.0)
  neumannBC(topWall, 2, 1, NR, 0, NZM1, NR1, 1, 0, 0.0, 1, -1, 1.0)

## Read LHS (-lap(phi))
<VectorReader phiReader>
  kind = fieldVectorReader
  minDim = 0
  writeField = phi
  writeComponent = 0
  lowerBounds = [ 0 0]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
  component = 0
</VectorReader>
## solver
<LinearSolver mySolver>
  kind = directSolver # solve a linear equation using direct methods
  solverType = superLU
</LinearSolver>
</FieldUpdater>

# Compute electric field (E=-grad(phi))
<FieldUpdater gradPhi>
  kind = gradVecUpdaterCoordProd # compute gradient scalar given by read and write fields
  factor = -1.
  lowerBounds = [ 0 0]
  upperBounds = [NZ NR]
  readFields = [phi]
  writeFields = [edgeE]
</FieldUpdater>

```

```

# Edge to nodes
<FieldUpdater edgeToNode>
  kind = edgeToNodeVec # interpolates field components between grid edges and nodes
  lowerBounds = [ 0 0]
  upperBounds = [NZ1 NR]
  readFields = [edgeE]
  writeFields = [nodalE]
</FieldUpdater>

# Perform operation on a field F, another field G and a STFunc f (F=f*G)
# Boundary edge to node is a copy
<FieldUpdater copyPerimLeft>
  kind = unaryFieldOpUpdater
  minDim = 1
  lowerBounds = [0 0]
  upperBounds = [1 NR1]
  operation = set # F=f*G
  bumpReadIter = [0 0 0] # number of cells in each simulated dimension
  readFields = [edgeE] # G
  component = 0
  writeFields = [nodalE] # F
  <STFunc copyFunc>
    kind = constantFunc
    amplitude = 1.
  </STFunc>
</FieldUpdater>

# Boundary edge to node is a copy
<FieldUpdater copyPerimRight>
  kind = unaryFieldOpUpdater
  minDim = 1
  lowerBounds = [NZ 0]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
  operation = set
  bumpReadIter = [-1 0 0]
  readFields = [edgeE]
  component = 0
  writeFields = [nodalE]
  <STFunc copyFunc>
    kind = constantFunc
    amplitude = 1.
  </STFunc>
</FieldUpdater>

# Boundary edge to node is a copy
<FieldUpdater copyPerimFront>
  kind = unaryFieldOpUpdater
  minDim = 2
  lowerBounds = [ 0 0]
  upperBounds = [NZ1 1]
  operation = set
  bumpReadIter = [0 1 0]
  readFields = [edgeE]
  component = 1
  writeFields = [nodalE]
  <STFunc copyFunc>
    kind = constantFunc
    amplitude = 1.
  </STFunc>
</FieldUpdater>

# Boundary edge to node is a copy
<FieldUpdater copyPerimBack>
  kind = unaryFieldOpUpdater
  minDim = 2
  lowerBounds = [ 0 NR ]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
  operation = set
  bumpReadIter = [0 -1 0]
  readFields = [edgeE]
  component = 1
  writeFields = [nodalE]
  <STFunc copyFunc>

```

```

    kind = constantFunc
    amplitude = 1.
  </STFunc>
</FieldUpdater>

# ***** UpdateStep
# Set phi initial (initial step)

$ if IMPORT_MAGNETIC_FIELD == 0
# Solving Kwon equation
<InitialUpdateStep step0>
  messageFields = [phi]
  updaters = [esSolve]
  alsoAfterRestore = true
</InitialUpdateStep>
$ else
<InitialUpdateStep step0>
  messageFields = [phi]
  updaters = [esSolve readB]
  alsoAfterRestore = true
</InitialUpdateStep>
$ endif

# Electrostatic solve
<UpdateStep step1>
  toDtFrac = 1. # update the updaters to either the same time
  updaters = [esSolve]
  messageFields = [phi]
</UpdateStep>

# Compute electric field on Yee mesh
<UpdateStep step2>
  toDtFrac = 1.
  updaters = [gradPhi]
  messageFields = [edgeE]
</UpdateStep>

# Compute nodal E
<UpdateStep step3>
  toDtFrac = 1.0
  updaters = [edgeToNode copyPerimLeft copyPerimRight copyPerimFront copyPerimBack]
  messageFields = [nodalE]
</UpdateStep>

updateStepOrder = [step1 step2 step3]

</MultiField>

#####
# Scalar Depositor (Deposit charge from charged particles in a simulation into depFields)
#####

<ScalarDepositor rhoDep>
  kind = areaWeightingCP
  depField = esField.rho
</ScalarDepositor>

#####
# Fluid (Define Neutral Gas Fluid)
#####

<Fluid XeNeutralGas>
# 3 types of fluids: coldRelFluid, eulerFluid, neutralGas
kind = neutralGas # static, background gas
gasKind = Xe
<InitialCondition constGasDensity>
  lowerBounds = [0 0]
  upperBounds = [NZ NR]
  components = [0]
  kind = varset
<STFunc component0>
  kind = expression
  expression = gasDensity(x,y,z)
</STFunc>

```

```

</InitialCondition>
</Fluid>

#####
# Species (electrons, Xepus)
#####

<Species electrons>
  kind = relBorisCyl
  charge = ELECCHARGE
  mass = ELECMASS
  chargeDeps = [rhoDep]
  fields = [esField.nodalE esField.nodalB]
  numPtclsInMacro = MACROPTC
  maxcellxing = 1

# Particle sources
# Emission at every time step, cathode emitter for electrons
<ParticleSource cathodeElectronEmitter>
  # xvLoaderEmitter -> Wide variety of options for creating particles either by density loading in a
  volume
  # and/or flux-emitting from a surface. Needs 2 sub-blocks (position and velocity generator)
  kind = xvLoaderEmitter
  applyTimes = [0. 1.0] # interval particles are created
  emit = false # flux-emitting features
  load = true # density-loading features
  loadAfterInit = true # continue loading particles after initialization

  # Generate physical position of particles when they are loaded or emitted
  <PositionGenerator bitRevSlab>
    kind = bitRevSlabPosGen # load particles based on a rectangular slab object
    <Slab loadSlab>
      lowerBounds = [CATHODE_ZMIN CATHODE_RMIN]
      upperBounds = [CATHODE_ZMAX CATHODE_RMAX]
    </Slab>
    numPhysPtclsPerStep = CATHODE_NUMPHYS_ELEC_PER_STEP # Determine the number of physical particles
  load per TS
  </PositionGenerator>

  # Generate velocity of a particle when loaded or emitted
  <VelocityGenerator emitVelGen>
    kind = beamVelocityGen # Gaussian distribution velocity vector
    vbar = [ -VThermalE 0.0 0.0] # mean of the Gaussian distribution
    vsig = [ 0.0 $0.5*VThermalE$ $0.5*VThermalE$ ] # vsig of a Gaussian distribution
    #emissionQuad = 1
  </VelocityGenerator>

  # relMacroDenFunc -> non-uniform density
  <STFunc relMacroDenFunc>
    kind = expression
    expression = 1.0 # number between 0,1
  </STFunc>

</ParticleSource>

# Particle sinks
<ParticleSink leftElectronAbsorber>
  kind = absAndSav # absorb and save
  lowerBounds = [-1 -1]
  upperBounds = [0 NR1]
</ParticleSink>

<ParticleSink rightElectronAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [NZ -1]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
</ParticleSink>

<ParticleSink topElectronAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [$CHANNEL_ZEND_IDX + 1$ NR]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
</ParticleSink>

```

```

<ParticleSink botElectronAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX + 1$ -1]
  upperBounds = [NZ1 0]
</ParticleSink>

<ParticleSink topFaceHElectronAbsorber>
  kind = absAndSav
  minDim = 1
  lowerBounds = [-1 TOP_WALL_RIDX]
  upperBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX $TOP_WALL_RIDX + 1$]
</ParticleSink>

<ParticleSink botFaceHElectronAbsorber>
  kind = absAndSav
  minDim = 1
  lowerBounds = [-1 BOT_WALL_RIDX]
  upperBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX $BOT_WALL_RIDX+1$]
</ParticleSink>

<ParticleSink topFaceVElectronAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX $TOP_WALL_RIDX + 1$]
  upperBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX + 1$ NR1]
</ParticleSink>

<ParticleSink botFaceVElectronAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX -1]
  upperBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX+1$ BOT_WALL_RIDX]
</ParticleSink>

# sets up fully absorbing boxes in any dimension, with no periodic boundaries
absorbingBox(NZ, NR, 1)
</Species>

<Species Xeplus>
  kind = relBorisCyl # Boris pusher
  charge = ELEMCHARGE
  #charge = XENONPLUS_CHARGE
  mass = XENON_MASS
  chargeDeps = [rhoDep] # User-defined ScalarVector that deposits charge
  fields = [esField.nodalE esField.nodalB] # fields which particle species will interact
  numPtclsInMacro = MACROPTC

# Particle sinks
<ParticleSink leftIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  minDim = 1
  lowerBounds = [-1 -1]
  upperBounds = [0 NR1]
</ParticleSink>

# Particles out right are removed
<ParticleSink rightIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  minDim = 1
  lowerBounds = [NZ -1 ]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
</ParticleSink>

<ParticleSink topIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX + 1$ NR]
  upperBounds = [NZ1 NR1]
</ParticleSink>

<ParticleSink botIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX + 1$ -1]
  upperBounds = [NZ1 0]
</ParticleSink>

# The absorber which is tied to the sputter emitter.

```

```

<ParticleSink topFaceHIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [-1 TOP_WALL_RIDX ]
  upperBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX $TOP_WALL_RIDX + 1$]
</ParticleSink>

<ParticleSink botFaceHIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  minDim = 1
  lowerBounds = [-1 BOT_WALL_RIDX -1]
  upperBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX $BOT_WALL_RIDX + 1$ NZ1]
</ParticleSink>

<ParticleSink topFaceVIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX $TOP_WALL_RIDX + 1$]
  upperBounds = [$CHANNEL_ZEND_IDX + 1$ NR1]
</ParticleSink>

<ParticleSink botFaceVIonAbsorber>
  kind = absAndSav
  lowerBounds = [CHANNEL_ZEND_IDX -1]
  upperBounds = [$CHANNEL_ZEND_IDX + 1$ BOT_WALL_RIDX]
</ParticleSink>

# Secondary electrons emission (electrons generated as ionization product)
<ParticleSource topIonSEEmitter>
  # secElec -> model the generation of secondary electrons being produced by impact with electron or
ions on metal surfaces
  kind = secElec
  ptclAbsorber = topFaceHIonAbsorber
  material = MATERIAL
  emissionProb = 0.5 # probability for emission of secondaries from a material surface
  direction = [0.0 -1.0] # outward-facing normal of the ParticleSource
  emittingSurface = TOPWALL_POS
  secondarySpecies = electrons
</ParticleSource>

<ParticleSource botIonSEEmitter>
  kind = secElec
  ptclAbsorber = botFaceHIonAbsorber
  material = MATERIAL
  emissionProb = 0.5
  direction = [0.0 1.0] # outward-facing normal of the ParticleSource
  emittingSurface = BOTWALL_POS
  secondarySpecies = electrons
</ParticleSource>

$ if CALCULATE_THRUST==0
  absorbingBox(NZ, NR, 1)
$ endif

</Species>

#####
# ImpactCollider (MCC technique)
#####

# electron-neutral collisions
<ImpactCollider electronNeutralFluid>
  neutralGas = [XeNeutralGas]
  impactSpecies = [electrons]
  neutralGasTemp = XEGAS_TEMPERATURE

# electron-neutral ionization
<ImpactCollision elecNeutralIonization>
  kind = impactIonization
  ionizedElectronSpecies = [electrons]
  ionSpecies = [Xeplus]
  crossSectionDataType = [eedl]
  crossSectionDataFile = [eedl.dat]
  depleteBackgroundGas = True
  scatteringType = uniform
</ImpactCollision>

```

```

# electron-neutral elastic scattering
<ImpactCollision elecNeutralElastic>
  kind = impactElastic
  crossSectionDataType = [eed1]
  crossSectionDataFile = [eed1.dat]
  scatteringType = uniform
</ImpactCollision>

# electron-neutral excitation
<ImpactCollision elecNeutralExcitation>
  kind = impactExcitation
  crossSectionDataType = [eed1]
  crossSectionDataFile = [eed1.dat]
  scatteringType = uniform
</ImpactCollision>

</ImpactCollider>

# ion-neutral collisions
<ImpactCollider ionNeutralFluid>
  neutralGas = [XeNeutralGas]
  impactSpecies = [Xeplus]
  neutralGasTemp = XEGAS_TEMPERATURE

# ion-neutral momentum-exchange
<ImpactCollision XeIonNeutralElastic>
  kind = impactIonCollision
  ionCollType = MomentumExchange
  crossSectionDataType = [builtIn]
  scatteringType = uniform
</ImpactCollision>

# ion-neutral CEX
<ImpactCollision XeIonNeutralCEX>
  kind = impactIonCollision
  ionCollType = ChargeExchange
  crossSectionDataType = [builtIn]
  scatteringType = backward
</ImpactCollision>

</ImpactCollider>

#####
# History blocks for particles
#####

$if DEBUG_CODE == 1
<History epsilon0_elecmass_elemcharge>
  kind = scalarValue
  scalars = [EPSILON0 ELECMASS ELEMCHARGE]
</History>

# xenon parameters
<History Xenonmass_Xenonpluscharge>
  kind = scalarValue
  scalars = [XENON_MASS XENONPLUS_CHARGE]
</History>

# scalar values (plasma, simulation, grid)
<History Debye_PlasmaFreq_Vthermal>
  kind = scalarValue
  scalars = [DEBYE_LENGTH PLASMA_FREQ V_THERMAL]
</History>

<History DT_XI>
  kind = scalarValue
  scalars = [DT XI]
</History>

<History LZ_NZ_LR_NR>
  kind = scalarValue
  scalars = [LZ NZ LR NR]
</History>

```

```

<History SUGGESTED_NZ_NR>
  kind = scalarValue
  scalars = [NZ_SUG NR_SUG]
</History>

<History CATHODE_RMIN_RMAX_ZMIN_ZMAX>
  kind = scalarValue
  scalars = [CATHODE_RMIN CATHODE_RMAX CATHODE_ZMIN CATHODE_ZMAX]
</History>

$endif

<History numXeIons>
  kind = speciesNumberOf
  species = [Xeplus]
</History>

<History numElectrons>
  kind = speciesNumberOf
  species = [electrons]
</History>

$if CALCULATE_THRUST==1

<History absorbedIonCurrent>
  kind = speciesCurrAbs
  species = [ Xeplus ]
  ptclAbsorbers = [ rightIonAbsorber ]
</History>

<History absorbedIonVelocity>
  kind = speciesAbsPtclData2
  species = [ Xeplus ]
  ptclAbsorbers = [ topIonAbsorber rightIonAbsorber botIonAbsorber]
  ptclAttributes = [ xVelocity numPtclsInMacro kineticEnergy xPosition yPosition ]
  collectMethod = statsForEachStep
</History>
$endif

<History ionAbsData>
  kind = speciesAbsPtclData2
  species = [ Xeplus ]
  ptclAbsorbers = [ topFaceHIonAbsorber botFaceHIonAbsorber ]
  ptclAttributes = [xPosition yPosition kineticEnergy current ]
  collectMethod = recordForEachPtcl
</History>

<History elecAbsData>
  kind = speciesAbsPtclData2
  species = [ electrons ]
  ptclAbsorbers = [ topFaceHElectronAbsorber botFaceHElectronAbsorber ]
  ptclAttributes = [xPosition yPosition kineticEnergy current ]
  collectMethod = recordForEachPtcl
</History>

```

Apéndice F

GRÁFICAS

A continuación, se muestra el algoritmo utilizado para graficar la distribución de la densidad de partículas neutras en el canal de descarga dada una ecuación analítica [Ec. (7-2)] y una lineal. Además, se calcula el perfil del campo magnético dada por la Ec. (7-1), variando los coeficientes de forma K del campo magnético.

Neutral density and magnetic field plots

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import rc
import math
```

Neutral-particle density distribution

```
# latex format
rc('font', **{'family': 'serif', 'serif': ['Computer Modern'], 'size': 16})
rc('text', usetex=True)
rc('text.latex', preview=True)
```

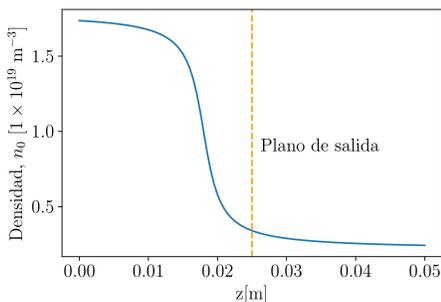
Nonlinear

```
# scale factor
zeta = 1
# inputs
n0 = 1e19 #m-3
L_channel = 25 #mm
L_plume = 25 #mm
step = 0.0005*zeta

# scale
L_channel = L_channel/1000
L_plume = L_plume/1000
L_total = (L_channel + L_plume)*zeta
n0 = n0/zeta

x = np.arange(0, L_total+step, step)
y = n0 + 5e18*np.arctan(10*(1-x/zeta/0.018))

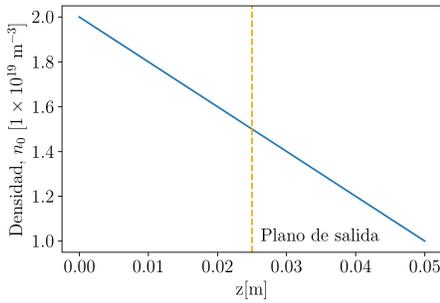
# plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, y/1e19)
ax.axvline(L_channel, ls='--', c='orange')
ax.annotate(xy=(L_channel*1.05, max(y/1e19)/2),
           s=r'Plano de salida')
ax.set_xlabel(r'z$[\textup{m}]$')
ax.set_ylabel(r'Densidad, $n_0\sim[1\times 10^{19}\sim\textup{m}^{-3}]$')
plt.savefig('densidad_neutro.png', dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.show()
```



Linear

```
k = 1
x = np.arange(0, L_total+step, step)
y = n0 * k * (1-(x-L_total)/L_total)
# plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, y/1e19)
ax.axvline(L_channel, ls='--', c='orange')
ax.annotate(xy=(L_channel*1.05, max(y/1e19)/2),
           s=r'Plano de salida')
```

```
ax.set_xlabel(r'z$[\textup{m}]$')
ax.set_ylabel(r'Densidad, $n_0 \sim [1 \times 10^{19}] \sim \textup{m}^{-3}$')
plt.savefig('densidad_neutro_lineal.png',dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.show()
```



Magnetic field (B)

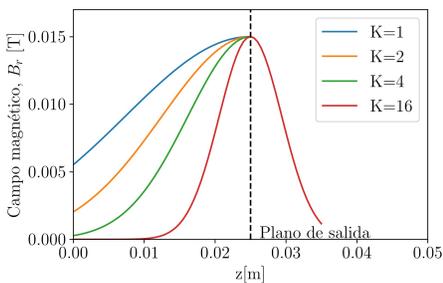
```
# inputs
L_channel = 25 #mm
L_plume = 10 #mm
step = 0.0005
Bmax = 0.015 #T

# scale
L_channel = L_channel/1000
L_plume = L_plume/1000
L_total = L_channel + L_plume

# computation
x = np.arange(0,L_total+step,step)
x1 = np.arange(0,L_channel+step,step)
y1 = Bmax*np.exp(-1*(x1/L_channel-1)**2)
y2 = Bmax*np.exp(-2*(x1/L_channel-1)**2)
y3 = Bmax*np.exp(-4*(x1/L_channel-1)**2)
y4 = Bmax*np.exp(-16*(x1/L_channel-1)**2)

# plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x1, y1, label = 'K=1')
ax.plot(x1, y2, label = 'K=2')
ax.plot(x1, y3, label = 'K=4')
ax.plot(x, y4, label = 'K=16')

ax.set_ylim([0, 0.017])
ax.set_xlim([0, 0.05])
ax.axvline(L_channel, ls='--', c='k')
ax.annotate(xy=(L_channel*1.05, 0.0001),
            s=r'Plano de salida')
ax.legend()
ax.set_xlabel(r'z$[\textup{m}]$')
ax.set_ylabel(r'Campo magnético, $B_r \sim [\textup{T}]$')
plt.savefig('br_k.png',dpi = 300, bbox_inches='tight')
plt.show()
```



Bibliografía

- [1] (2015). Launch Vehicle. <https://smap.jpl.nasa.gov/observatory/launch-vehicle/>. [Online; Último acceso 10-Mayo-2019].
- [2] Aguilar, L. A. (2007). Dinámica de cohetes.
- [3] Andino, F, Recarte, M., and Spilsbury, M. (2014). La función delta de dirac. *REVISTA DE LA ESCUELA DE FÍSICA, UNAH*, 2(1).
- [4] Andreussi, T., Giannetti, V., Leporini, A., Saravia, M., and Andrenucci, M. (2017). Influence of the magnetic field configuration on the plasma flow in hall thrusters. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 60(1):014015.
- [5] Antón, D. E. (2005). Motores de efecto Hall de alto impulso específico. Master's thesis, Universidad Politécnica de Madrid.
- [6] Bhargava, A. (2016). *Grokking Algorithms: An illustrated guide for programmers and other curious people*. Manning Publications Co.
- [7] Birdsall, C. K. and Langdon, A. B. (1991). *Plasma Physics via Computer Simulation*. IOP, Bristol.
- [8] Boeuf, J.-P. (2017). Tutorial: Physics and modeling of hall thrusters. *Journal of Applied Physics*, 121.
- [9] Boulanger, L. et al. (2014). *Improvements to a fully kinetic Hall thruster simulation code and characterization of the cylindrical cusped field thruster*. Tesis de maestría, Massachusetts Institute of Technology.
- [10] Brieda, L. (2010). The Electrostatic Particle In Cell (ES-PIC) Method. <https://www.particleincell.com/2010/es-pic-method/>. [Online; Último acceso 10-Marzo-2019].
- [11] Brieda, L. (2011a). Charge Exchange Collisions (CEX). <https://www.particleincell.com/2011/charge-exchange/>. [Online; Último acceso 28-Septiembre-2019].

- [12] Brieda, L. (2011b). Leapfrog Particle Push (Velocity Integration). <https://www.particleincell.com/2011/velocity-integration/>. [Online; Último acceso 25-Marzo-2019].
- [13] Brieda, L. (2011c). Monte Carlo Collisions (MCC) Example. <https://www.particleincell.com/2011/mcc/>. [Online; Último acceso 28-Septiembre-2019].
- [14] Brieda, L. and Keidar, M. (2012). Development of the starfish plasma simulation code and update on multiscale modeling of hall thrusters. In *48th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, page 4015.
- [15] Bruhwiler, D. L., Giacone, R. E., Cary, J. R., Verboncoeur, J. P., Mardahl, P., Esarey, E., Leemans, W., and Shadwick, B. (2001). Particle-in-cell simulations of plasma accelerators and electron-neutral collisions. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 4(10):101302.
- [16] Ceramics, P. (2019). About Boron Nitride . <https://precision-ceramics.com/materials/boron-nitride/>. [Online; Último acceso 15-Agosto-2019].
- [17] Chen, F. F. (2016). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer.
- [18] Christian (2018). The debye length. <https://scipython.com/blog/the-debye-length/>. [Online; Último acceso 1-marzo-2019].
- [19] Corporation, T.-X. (2018). *VSim Reference Manual*.
- [20] Documentation, C. M. (2013). Plasma module users guide.
- [21] Fasoli, A., Ricci, P., Howling, A., Theiler, C., Testa, D., Furno, I., and Hogge, J.-P. (2016). Plasma Physics: Introduction. [MOOC impartido por École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Recuperado en 2018].
- [22] Fife, J. M. (1995). Two-dimensional hybrid particle-in-cell modeling of Hall thrusters. Tesis de maestría, Massachusetts Institute of Technology.
- [23] Fife, J. M. (1998). Hybrid-PIC modeling and electrostatic probe survey of Hall thrusters. Tesis doctoral, Massachusetts Institute of Technology.
- [24] Filipic, G. (2008). Principles of "particle in cell" simulations.
- [25] Gallagher, P. T. (no date). Introduction to plasma physics (py5012). Technical report, Astrophysics Research Group. Trinity College Dublin.
- [26] Garfias, D. A. (2015). Análisis y simulación del desempeño de un propulsor para un CubeSat en una misión lunar. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

- [27] Garrigues, L. (1998). *Modelisation d'un propulseur à plasma stationnaire pour satellites*. PhD thesis.
- [28] Goebel, D. M. and Katz, I. (2008). *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters*. California Institute of Technology, Jet Propulsion Laboratory, E.U.A.: JPL Space Science and Technology Series.
- [29] Gutiérrez, S. D. S., Fuentes, C. R., Aguilar, A. R., de la Rosa Nieves, S., Jimenéz, F. J. M., Cabrera, E. P., Gómez, J. S., and Pérez, J. A. F. (2013). Developing a space program for Mexico. In *2013 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)*, pages 1053–1057. IEEE.
- [30] Gutiérrez, R. S. (2012). Código Híbrido Avanzado de Motores de Plasma de Efecto Hall. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid.
- [31] H., S. (2007). Particle-in-cell techniques. <http://plasma.kulgun.net/HBS/chap2.pdf>. [Online; Último acceso 30-Agosto-2019].
- [32] Hewett, D. W. and Langdon, A. B. (1987). Electromagnetic direct implicit plasma simulation. *Journal of Computational Physics*, 72(1):121–155.
- [33] Hirakawa, M. and Arakawa, Y. (1996). Numerical simulation of plasma particle behavior in a hall thruster. In *32nd Joint Propulsion Conference and Exhibit*, page 3195.
- [34] Hockney, R. W. and Eastwood, J. W. (1988). *Computer simulation using particles*. crc Press.
- [35] Humble, R. W., Henry, G. N., and Larson, W. J. (1995). *Space Propulsion Analysis and Design*. Space Technology Series, McGrawHill.
- [36] Hutchinson, I. and Freidberg, J. (2003). Introduction to plasma physics i.
- [37] Hutchinson, I. H. (2001). Introduction to Plasma Physics. <http://silas.psfc.mit.edu/introplasma/index.html>. [Online; Último acceso 11-Marzo-2019].
- [38] Kamhawi, H., Huang, W., Haag, T., Shastry, R., Soulas, G., Smith, T., Mikellides, I., and Hofer, R. (2013). Performance and thermal characterization of the nasa-300ms 20 kw hall effect thruster.
- [39] Katz, I., Chaplin, V. H., and Lopez Ortega, A. (2018). Numerical studies of hall thruster acceleration region electron transport. In *2018 Joint Propulsion Conference, Princeton University ExB Workshop*.
- [40] Kawashima, R., Bak, J., Komurasaki, K., and Koizumi, H. (2018). Two-dimensional modeling of the hall thruster discharge with non-uniform propellant supply in azimuth. *arXiv preprint arXiv:1805.06120*.

- [41] Keidar, M., Gallimore, A. D., Raitses, Y., and Boyd, I. D. (2004). On the potential distribution in hall thrusters. *Applied Physics Letters*, 85(13):2481–2483.
- [42] Ko, D. (2019). Big O Notation (using Ruby) . <https://medium.com/@dankomong/big-o-notation-using-ruby-a357d85bb9b1>. [Online; Último acceso 3-Febrero-2020].
- [43] Kosmotras, I. (2001). Dnepr space launch system user’s guide.
- [44] Kwon, K. (2010). *A novel numerical analysis of hall effect thruster and its application in simultaneous design of thruster and optimal low-thrust trajectory*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology.
- [45] Lapenta, G. and Astrofysica, C. V. P. (2010). Particle in cell methods with application to simulations in space weather.
- [46] Lapenta, G., Brackbill, J., and Ricci, P. (2006). Kinetic approach to microscopic-macroscopic coupling in space and laboratory plasmas. *Physics of plasmas*, 13(5):055904.
- [47] Levchenko, I., Bazaka, K., Ding, Y., Raitses, Y., Mazouffre, S., Henning, T., Klar, P. J., Shinohara, S., Schein, J., Garrigues, L., et al. (2018). Space micropropulsion systems for cubesats and small satellites: from proximate targets to furthestmost frontiers. *Applied Physics Reviews*, 5(1):011104.
- [48] Liu, C., Gu, Z., Xie, K., Sun, Y., and Tang, H. (2012). Influence of the magnetic field topology on hall thruster discharge channel wall erosion. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 22(3):4904105–4904105.
- [49] Martinez-Sanchez, M. and Lozano, P. (2014). Ionized gases.
- [50] Martinez-Sanchez, M. and Lozano, P. (2015). Space propulsion.
- [51] Minotti, F. O. (2012). Apuntes de física del plasma.
- [52] Mirzai, A. (2016). Feasibility Study of Hall Thruster’s Wall Erosion Modelling Using Multiphysics Software. Tesis de maestría, Aalto University.
- [53] Mitrofanova, O., Gnizdor, R. Y., Murashko, V., Koryakin, A., and Nesterenko, A. (2011). New generation of spt-100. *Wiesbaden, Germany*.
- [54] Moisan, M. and Pelletier, J. (2012). *Physics of collisional plasmas: introduction to high-frequency discharges*. Springer Science & Business Media.
- [55] Morozov, A. (1995). Electron dynamics in spt-channel and the problem of anomalous erosion. *IEPC-95-41*.

- [56] Nakles, M. R., Hargus Jr, W. A., Delgado, J. J., and Corey, R. L. (2011). A performance comparison of xenon and krypton propellant on an spt-100 hall thruster (preprint). Technical report, AIR FORCE RESEARCH LAB EDWARDS AFB CA.
- [57] NASA (2016). State of the Art of Small Spacecraft Technology. <https://sst-soa.arc.nasa.gov/>. [Online; Último acceso 11-Febrero-2019].
- [58] Nieter, C. and Cary, J. R. (2004). Vorpak: a versatile plasma simulation code. *Journal of Computational Physics*, 196(2):448–473.
- [59] Parra, F., Ahedo, E., Fife, J., and Martinez-Sanchez, M. (2006). A two-dimensional hybrid model of the hall thruster discharge. *Journal of Applied Physics*, 100(2):023304.
- [60] Piñeros, J. O. M. (2012). Estudio de la trayectoria de un cohete de tres etapas lanzado desde el territorio colombiano. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia.
- [61] Potrivitu, G.-C. (2014). Magnetic system configuration for a hall effect thruster. *SCIENTIFIC ADVISERS EDITORIAL BOARD*, page 49.
- [62] Pous, X. S. (NA). Particle-in-Cell Algorithms for Plasma Simulations on Heterogeneous Architectures. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC).
- [63] Restrepo Bustamante, S. (2017). Solución a de la ecuación de navier-stokes por diferencias finitas.
- [64] Reyes, E. R. (2016). Caracterización de un propulsor tipo Hall para un microsátélite. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- [65] Reyes, E. R. (2018). Propuesta del arreglo experimental para medir el empuje de propulsores tipo Hall para microsátélites. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- [66] Riemann, K.-U. (1991). The bohm criterion and sheath formation. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 24(4):493.
- [67] Schneider, R., Matyash, K., Mutzke, A., Kalentev, O., Taccogna, F., Koch, N., and Schirra, M. (2009). Self consistent kinetic simulations of spt and hemp thrusters including the near-field plume region. In *APS Meeting Abstracts*.
- [68] Sharma, P. (2018). What exactly is a satellite launch vehicle? . <https://www.quora.com/What-exactly-is-a-satellite-launch-vehicle>. [Online; Último acceso 10-Mayo-2019].
- [69] Šperka, J., Vorác, J., and Zajicková, L. (2014). Problems for the course f5170–introduction to plasma physics.

- [70] Stephanie DelPozzo, C. W. and Doncaster, B. (2019). Nano/microsatellite market forecast, 9th edition.
- [71] Sutton, G. and Biblarz, O. (2017). *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley Sons, Inc.
- [72] Szabo, J. (2001a). Fully kinetic hall thruster modeling. *27th IEPC, Pasadena, IEPC Paper*.
- [73] Szabo, J. J. (2001b). *Fully Kinetic Numerical Modeling of a Plasma Thruster*. Tesis doctoral, Massachusetts Institute of Technology.
- [74] Sánchez, J. E. M. (2015). Diseño de un sistema de control para el propulsor Hall del micro satélite Quetzal. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- [75] Taccogna, F, Longo, S., Capitelli, M., and Schneider, R. (2005). Plasma flow in a hall thruster. *Physics of plasmas*, 12(4):043502.
- [76] Taccogna, F and Minelli, P. (2011). Three-dimensional fully kinetic particle-in-cell model of hall-effect thruster. In *International Electric Propulsion Conference*.
- [77] Tejada, E. A. (2015). Diseño y construcción de un propulsor espacial para un micro-satélite. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- [78] Vela, R. N. (2015). *México en el Espacio (El Planeta Azul)*. Manuel Sánchez y Madrid.
- [79] Villegas, Y. G. and Valencia, R. B. (2016). Implementación del Método PIC sobre un Clúster con GPU usando CUDA. Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira.
- [80] Wertz, J. R., Everett, D. E., and Puschell, J. J. (2011). *Space Mission Engineering: The New SMAD*. Space Technology Library.