

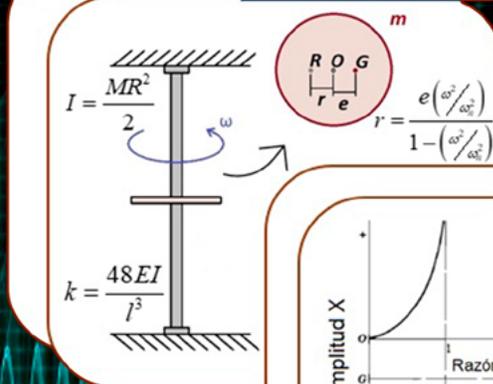


INSTRUCTIVO DE PRÁCTICAS DE LABORATORIO DE VIBRACIONES MECÁNICAS

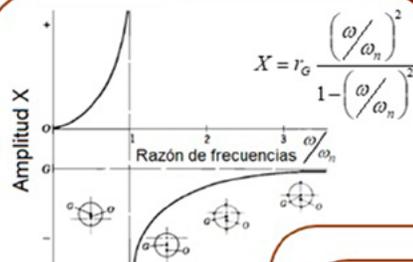
DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL

Definición del problema

Construye el
Modelo



Reproduce el
Fenómeno



Experimenta con un
Prototipo



Ricardo Yáñez Valdez
 Óscar Morales López
 Rubén Carlos Esquivel Hernández
 César Abraham Luna Estrada
 Isandra Danae Martínez Cortés
 Alejandro Tapia Villegas



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

**INSTRUCTIVO DE PRÁCTICAS DE LABORATORIO
DE VIBRACIONES MECÁNICAS**

Parte 1

Ricardo Yáñez Valdez
Óscar Morales López
Rubén Carlos Esquivel Hernández
César Abraham Luna Estrada
Isandra Danae Martínez Cortés
Alejandro Tapia Villegas

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE DISEÑO

YÁÑEZ Valdez, Ricardo,
Óscar Morales López,
Rubén Carlos Esquivel Hernández,
César Abraham Luna Estrada,
Isandra Danae Martínez Cortés y
Alejandro Tapia Villegas.
Instructivo de prácticas de laboratorio de vibraciones mecánicas.
Parte 1.
México, Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2021, 111 pp.

Instructivo de prácticas de laboratorio de vibraciones mecánicas.
Parte 1.

Primera edición: 2021.

D. R. © 2021, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad núm. 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C. P. 04510, México, D. F.

Facultad de Ingeniería.
Avenida Universidad núm. 3000, Ciudad Universitaria,
Delegación Coyoacán, C. P. 04510, México, D. F.
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial
por cualquier medio sin la autorización escrita del titular
de los derechos patrimoniales.

Cuidado de la edición: María Alicia Medina, Unidad de Apoyo Editorial.
Diseño de portada: Nismet Díaz Ferro, Unidad de Apoyo Editorial.

INTRODUCCIÓN

El presente *Instructivo de prácticas de laboratorio de vibraciones mecánicas*, parte 1, ha sido elaborado para cubrir los requisitos de la materia de Vibraciones Mecánicas que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México para estudiantes de Ingeniería Mecánica, sin excluir otras carreras.

El propósito fundamental que se persigue es el de aportar a la formación del alumno una visión objetiva del campo de las vibraciones mecánicas para complementar su formación teórico-práctica como ingeniero mecánico. Las actividades que describe este instructivo, junto con la participación en clase, la resolución de ejercicios y el desarrollo de reportes de práctica proporcionan un aprendizaje fundamental al estudiante que se introduce al estudio de las vibraciones mecánicas.

Para la realización de las prácticas se debe contar con el siguiente equipo y la instalación de los programas que se citan:

- 1) Computadora personal con paquetería básica.
- 2) Software libre Tracker (<https://physlets.org/tracker/>).
- 3) Software Mathematica®.
- 4) Fuente de poder.
- 5) Arduino UNO.
- 6) Motores de corriente directa.

Otros requisitos serán solicitados en función de la práctica que se vaya a realizar. En el cuerpo de cada una de las prácticas se describe el detalle completo del equipo necesario o material adicional para su buen desarrollo, así como, la bibliografía complementaria como fuente de consulta. En el anexo, se ha incluido un breve índice de archivos complementarios que podrán descargarse como un apoyo adicional para llevar a cabo las prácticas. Respecto a la construcción de los prototipos, cada práctica se ha propuesto con la intención de utilizar elementos cotidianos que habitualmente se tienen al alcance, sin necesidad de incorporar equipos especiales. La parte 2 de este instructivo cubrirá ese aspecto didáctico con un énfasis en la instrumentación experimental.

El manual contempla 12 prácticas de laboratorio y cada una requiere en promedio una sesión de dos horas a la semana para su realización y dos horas adicionales para la elaboración del reporte. Se debe considerar un tiempo adicional previo, al desarrollo de cada práctica, para la conceptualización, el diseño y la construcción de cada prototipo. Si bien, cada práctica desarrolla y sugiere un caso de estudio, no se cierra la posibilidad de que el profesor o el mismo estudiante propongan un caso similar y lo desarrollen con la estructura que sugiere esta obra.

El presente trabajo ha sido el resultado de una labor conjunta de un servidor y de estudiantes del Programa de Posgrado en Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería; sin tal participación e intercambio de ideas no se habría alcanzado tal objetivo. Se espera que este instructivo sea de mucha utilidad para aquel estudiante que quiere aprender esta importante rama de la Mecánica.

Mi más sincera gratitud a la Unidad de Apoyo Editorial de la UNAM por el trabajo editorial de la obra, así como a la Lic. María Alicia Medina por su importante apoyo en la corrección de estilo de la misma.

RICARDO YÁÑEZ VALDEZ

CONTENIDO

	Página
INTRODUCCIÓN	III
PRÁCTICA I	
SISTEMAS LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO: FRECUENCIA NATURAL	1
Objetivos	1
Introducción	1
Modelo del sistema vibratorio	1
Equipo por utilizar	3
Procedimiento	3
Reporte	4
Referencias bibliográficas	4
PRÁCTICA II	
SISTEMAS LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO: CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO	5
Objetivos	5
Introducción	5
Modelo del sistema vibratorio	6
Equipo por utilizar	12
Procedimiento	12
Reporte	14
Referencias bibliográficas	14
PRÁCTICA III	
SISTEMAS LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO: FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO Y DECREMENTO LOGARÍTMICO	15
Objetivos	15
Introducción	15
Modelo de un sistema libre amortiguado en términos del factor de amortiguamiento	16
Respuesta dinámica de un sistema con decremento logarítmico	18
Equipo por utilizar	20
Procedimiento	20
Reporte	25
Referencias bibliográficas	27

PRÁCTICA IV

SISTEMAS TORSIONALES: PARÁMETROS BÁSICOS DE LOS SISTEMAS VIBRATORIOS	29
Objetivos	29
Introducción	29
Modelo del sistema vibratorio angular	30
Equipo por utilizar	32
Procedimiento	34
Reporte	35
Referencias bibliográficas	36

PRÁCTICA V

SISTEMAS TORSIONALES: RESONANCIA	37
Objetivos	37
Introducción	37
Modelo del sistema rotacional	37
Equipo por utilizar	41
Sugerencias	41
Procedimiento	42
Reporte	42
Referencias bibliográficas	43

PRÁCTICA VI

SISTEMAS AMORTIGUADOS: AMORTIGUAMIENTO DE COULOMB	45
Objetivos	45
Introducción	45
Modelo del sistema vibratorio con amortiguamiento de Coulomb	46
Equipo por utilizar	49
Procedimiento	49
Reporte	51
Referencia bibliográfica	52

PRÁCTICA VII

ANÁLISIS ESPECTRAL: INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN EN MATHEMATICA®	53
Objetivos	53
Introducción	53
Excitación periódica	54
Análisis espectral	54
Equipo por utilizar	59
Procedimiento	59
Reporte	60
Referencias bibliográficas	61

PRÁCTICA VIII	
IMPACTO: CENTRO DE PERCUSIÓN	63
Objetivos	63
Introducción	63
Modelo del péndulo	64
Modelo del péndulo compuesto con una masa puntual	65
Equipo por utilizar	67
Procedimiento	68
Reporte	68
Referencias bibliográficas	69
PRÁCTICA IX	
COLISIÓN: RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN NO PERIÓDICA	71
Objetivos	71
Introducción	71
Función de impulso	71
Equipo por utilizar	77
Procedimiento	78
Reporte	79
Referencias bibliográficas	80
PRÁCTICA X	
ANÁLISIS MODAL: DISCRETIZACIÓN DE UN SISTEMA MECÁNICO	81
Objetivos	81
Introducción	81
Discretización de un sistema mecánico mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange	81
Análisis modal	83
Equipo por utilizar	86
Procedimiento	86
Reporte	87
Referencias bibliográficas	87
PRÁCTICA XI	
SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD: ESPACIO DE ESTADOS	89
Objetivos	89
Introducción	89
Modelo del sistema vibratorio	90
Equipo por utilizar	93
Procedimiento	93
Reporte	94
Referencias bibliográficas	95

PRÁCTICA XII	
ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN DINÁMICO NO AMORTIGUADO	97
Objetivos	97
Introducción	97
Modelo del sistema vibratorio	98
Equipo por utilizar	103
Procedimiento	103
Reporte	105
Referencia bibliográfica	106
ANEXO	
MATERIAL COMPLEMENTARIO PARA LA REALIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS	107
ÍNDICE DE FIGURAS	109
ÍNDICE DE TABLAS	111

PRÁCTICA I

SISTEMAS LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO: FRECUENCIA NATURAL

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Comprender el término de frecuencia natural de los sistemas vibratorios.
- 2) Determinar, experimentalmente, la frecuencia natural de un sistema vibratorio y la constante de elasticidad.

INTRODUCCIÓN

Todo sistema que posee masa y elasticidad es capaz de vibrar libremente, es decir, sin excitación externa. Para tales sistemas es de gran importancia su frecuencia natural. La frecuencia natural de un sistema es la frecuencia con la cual este vibrará cuando sea desplazado del equilibrio y cuando no esté sometido a ninguna fuerza externa; o sea, es el número de veces que el sistema oscilará en un segundo.

MODELO DEL SISTEMA VIBRATORIO

El sistema vibratorio más simple está formado por un resorte lineal k y una masa m .

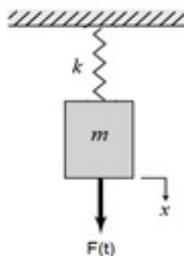


FIGURA I-1. Sistema masa-resorte

El resorte lineal es aquel que, al ser deformado, genera una fuerza del tipo:

$$F = -k x \quad (1.1)$$

donde, k es una constante.

Se supone que la masa m puede ser desplazada verticalmente sin resistencia alguna; por lo anterior, se dice que el sistema es no amortiguado. Cuando se aplica la ley de Newton en la dirección del movimiento, se tiene lo siguiente:

$$-kx = m\ddot{x} \quad (1.2)$$

o sea:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.3)$$

La ecuación diferencial (1.3), la cual es lineal y de coeficientes constantes, rige el movimiento de la masa m ¹. La ecuación característica se escribe así:

$$s^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad (1.4)$$

y la solución general es de la forma:

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad (1.5)$$

donde, $x = x(t)$ es llamada elongación del movimiento y $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular natural o propia del sistema. La frecuencia natural o propia del movimiento oscilatorio está dada por:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.6)$$

y el periodo $\tau_n = 2\pi / \omega_n$ es, entonces:

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.7)$$

¹ Por esta razón, se escogió un resorte lineal.

EQUIPO POR UTILIZAR

- 1) Modelo del sistema vibratorio:
 - a) Viga en voladizo.
- 2) Masa conocida.
- 3) Balanza.
- 4) Prensa de tornillo.
- 5) Cronómetro.
- 6) Escalímetro.

PROCEDIMIENTO

A) *Cálculo de la constante elástica de la barra a flexión:*

Para empezar, se debe obtener la constante elástica de la barra mediante la relación de una fuerza aplicada y el desplazamiento que produce. Se debe colocar una masa conocida en el extremo libre de la barra en equilibrio y medir el desplazamiento vertical que presenta un punto de la barra.

B) *Determinación de la frecuencia teórica de vibración del sistema:*

Con los valores conocidos de la masa y constante elástica, se utiliza la ecuación (1.6) para determinar la frecuencia a la que vibrará, teóricamente, la viga en voladizo.

C) *Determinación práctica de la frecuencia natural del sistema:*

Ahora, se desplaza la masa de su posición de equilibrio, se deja en libertad y se mide. Se cuenta a partir del segundo o tercer ciclo el tiempo que tarda en completar, por ejemplo, 10 oscilaciones completas. Se divide el número de ciclos entre el tiempo consumido en estos y, así, se obtiene la frecuencia natural del sistema.

$$f_n = \frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} \text{ [hertz]} \quad (1.8)$$

REPORTE

- 1) Elaborar una tabla que muestre, en la primera columna, un dibujo o diagrama del modelo analizado con sus dimensiones y datos usados. En una segunda columna, escribir la frecuencia natural calculada teóricamente. Y en una tercera columna, escribir la frecuencia natural obtenida prácticamente.

Modelo	f_n teórica	f_n práctica

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHANDRAN, B. y Edward B. Magrab, *Vibraciones*, México, Thomson, 2006.

THOMSON, William T. & Marie Dillon Dahleh, *Theory of Vibrations with Applications*, Santa Barbara, Pearson, 1998.

PRÁCTICA II

SISTEMAS LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO: CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Establecer los parámetros básicos de los sistemas vibratorios.
- 2) Determinar, experimentalmente, la frecuencia angular natural de un sistema vibratorio y la constante de amortiguamiento.

INTRODUCCIÓN

En muchos sistemas prácticos, la energía vibratoria se convierte, gradualmente, en calor o sonido. Debido a la reducción de la energía, la respuesta, como el desplazamiento del sistema, se reduce gradualmente. El mecanismo mediante el cual la energía vibratoria se convierte, gradualmente, en calor o sonido, se conoce como *amortiguamiento*. Aun cuando la cantidad de energía convertida en calor o en sonido es relativamente pequeña, la consideración del amortiguamiento llega a ser importante para predecir con exactitud la respuesta a la vibración de un sistema.

Como se supone que un amortiguador no tiene masa ni elasticidad, la fuerza de amortiguamiento existe solo, si hay una velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador. No es fácil determinar las causas del amortiguamiento en sistemas prácticos; por consiguiente, el amortiguamiento se modela como uno más de los siguientes tipos:

Amortiguamiento viscoso:

En el análisis de vibración, el amortiguamiento viscoso es el mecanismo de mayor uso. Cuando un sistema mecánico vibra en un medio fluido como el aire, gas, agua o aceite, la resistencia ofrecida por el fluido en el cuerpo en movimiento hace que se disipe la energía; en este caso, la

cantidad de energía disipada depende de muchos factores como el tamaño y forma del sistema vibratorio, la viscosidad del fluido, la frecuencia de vibración e, incluso, la velocidad del mismo sistema. En el amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad del cuerpo vibratorio.

Amortiguamiento de Coulomb o de fricción en seco:

En este caso, la fuerza de amortiguamiento es de magnitud constante, pero con dirección opuesta a la del movimiento del cuerpo vibratorio. El amortiguamiento de Coulomb es el resultado de la fricción entre superficies que al frotarse están secas o no tienen una lubricación suficiente.

Amortiguamiento debido a un material sólido o histerético:

Cuando un material se deforma, absorbe o disipa energía se observa este amortiguamiento. El efecto se debe a la fricción entre los planos internos, los cuales se resbalan o deslizan a medida que ocurren las deformaciones. Si un cuerpo que experimenta amortiguamiento producido por el material se somete a vibración, el diagrama de esfuerzo-deformación muestra un bucle de histéresis. El área de este bucle indica la pérdida de energía por unidad de volumen del cuerpo por ciclo debido al amortiguamiento.

En un sistema masa-resorte-amortiguador existen diferentes respuestas de vibración libre según la cantidad de amortiguamiento que este tenga.

MODELO DEL SISTEMA VIBRATORIO

1) Sistema masa-resorte-amortiguador:

El sistema vibratorio de un grado de libertad con vibraciones amortiguadas está formado por un resorte lineal k , una masa m y un amortiguador c .

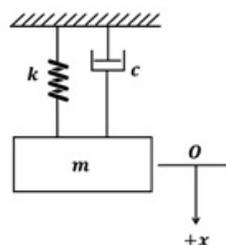


FIGURA II-1. Sistema masa-resorte-amortiguador

Lo anterior, se llama *sistema de un solo grado de libertad* debido a que una coordenada (x) es suficiente para especificar la posición de la masa en cualquier momento. Y como no existe ninguna fuerza externa aplicada a la masa, de ahí, el movimiento resultante de una perturbación inicial será una vibración libre.

En la práctica, excepto en el vacío, la amplitud de una vibración libre se reduce gradualmente al paso del tiempo por la resistencia ofrecida y por el medio circundante. Se dice que tales vibraciones son *amortiguadas*.

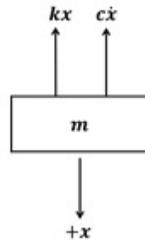


FIGURA II-2. Diagrama masa-aceleración del sistema masa-resorte-amortiguador

Cuando se aplica la segunda ley del movimiento de Newton en la dirección del movimiento, de acuerdo con el diagrama de la figura II-2, se tiene que la fuerza de amortiguamiento viscoso F es proporcional a la velocidad \dot{x} o v y se expresa como:

$$F = -c\dot{x} \quad (2.1)$$

donde, c es la constante de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento viscoso y el signo indica que la fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección de la velocidad. Si x se mide a partir de la posición de equilibrio de la masa m , la aplicación de la ley de Newton da por resultado la ecuación del movimiento siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.2)$$

para dar solución a la ecuación (2.2), suponemos que:

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.3)$$

donde, c y s son constantes indeterminadas. La inserción de la función (2.3) en la ecuación (2.2) lleva a la ecuación característica:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.4)$$

cuyas raíces son:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.5)$$

estas raíces dan las siguientes dos soluciones a la ecuación (2.2):

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t} \quad (2.6)$$

por lo que, la solución general de la ecuación (2.2) es una combinación de las dos soluciones antes planteadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, esto es:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{\left[-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right] t} + C_2 e^{\left[-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right] t} \quad (2.7)$$

donde, C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se tienen que determinar a partir de las condiciones iniciales del sistema.

Para cualquier sistema amortiguado, la relación de amortiguamiento se define como la relación de la constante de amortiguamiento con la constante de amortiguamiento crítico, y se escribe así:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (2.8)$$

El amortiguamiento crítico c_c se define como el valor de la constante de amortiguamiento c con el cual, el radical en la ecuación (2.5) se vuelve cero, por lo tanto, se obtiene:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad ; \quad c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \sqrt{km} = 2m \omega_n \quad (2.9)$$

De las ecuaciones (2.8) y (2.9) se obtiene:

$$\frac{c}{2m} = \zeta \omega_n \quad (2.10)$$

en consecuencia, la ecuación (2.5) se reescribe de la forma:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n \quad (2.11)$$

por esta razón, la solución general mostrada en la ecuación (2.7) se reescribe de la siguiente manera:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n t} \quad (2.12)$$

donde, $x = x(t)$ es llamada elongación del movimiento y $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular natural o propia del sistema. La frecuencia natural o propia del movimiento oscilatorio está dada por la siguiente ecuación:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

La naturaleza de las raíces s_1 , s_2 y el comportamiento de la solución (ecuación [2.12]), dependen de la magnitud del amortiguamiento. Se ve que el caso $\zeta = 0$ conduce a las vibraciones no amortiguadas, por lo que se supone que $\zeta \neq 0$. A continuación, se estudian tres casos:

CASO 1

$$\text{Sistema subamortiguado} \left(\zeta < 1 \text{ o } c < c_c \text{ o } \frac{c}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

En esta condición $\zeta^2 - 1$ es negativa y las raíces s_1 y s_2 se expresan así:

$$s_1 = \left(-\zeta + i \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \omega_n \quad ; \quad s_2 = \left(-\zeta - i \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \omega_n \quad (2.14)$$

La solución de la ecuación (2.12) se puede escribir de la siguiente forma:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left(C_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right) \quad (2.15)$$

En la ecuación anterior, el movimiento descrito es un movimiento armónico amortiguado de frecuencia angular $\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$, en el cual la amplitud disminuye, exponencialmente, con el tiempo. La frecuencia de vibración amortiguada (ω_d) del sistema siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada (ω_n):

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (2.16)$$

CASO 2

Sistema críticamente amortiguado $\left(\zeta = 1, c_c \text{ o } \frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$

En este caso, las raíces s_1 y s_2 son iguales y se expresan así:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n \quad (2.17)$$

por consiguiente, la solución general es de la forma:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (2.18)$$

El movimiento representado por la ecuación (2.17) es *aperiódico* y *se va reduciendo conforme t tiende a infinito*.

CASO 3

Sistema sobreamortiguado $\left(\zeta > 1 \text{ o } c > c_c \text{ o } \frac{c}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$

Cuando $(\zeta^2 - 1) > 0$, las raíces s_1 y s_2 están dadas por:

$$s_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n < 0 ; s_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n < 0 \quad (2.19)$$

con $s_2 \ll s_1$. Por esta razón, la solución general se expresa como:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.20)$$

El movimiento del sistema es aperiódico, independientemente, de las condiciones iniciales impuestas. Como las raíces son negativas, el movimiento se reduce, exponencialmente, con el tiempo.

2) Decremento logarítmico:

Este decremento representa la velocidad con la cual se reduce la amplitud de una vibración libre amortiguada. El decremento logarítmico se define como el logaritmo natural de la relación de cualquiera de las dos amplitudes sucesivas con sus tiempos correspondientes a dos amplitudes sucesivas (desplazamientos). Si x_i es la amplitud del i - ciclo, el cual ocurre en un tiempo t_i , entonces:

$$x_i = X e^{-\zeta \omega t_i} \quad (2.21)$$

La amplitud x_{i+1} del siguiente ciclo ocurrirá un periodo después en $t_i + \tau$ y estará dada por:

$$x_{i+1} = X e^{-\zeta \omega (t_i + \tau)} \quad (2.22)$$

De tal forma, que la relación de amplitudes sucesivas queda como sigue:

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{X e^{-\zeta \omega t_i}}{X e^{-\zeta \omega (t_i + \tau)}} = e^{\zeta \omega \tau} = \text{constante} \quad (2.23)$$

Puesto que, las amplitudes para obtener la relación son elegidas arbitrariamente, la ecuación (2.23) muestra que el decremento es constante, siempre y cuando, estas sean sucesivas. Comúnmente, el decremento logarítmico es expresado como el logaritmo natural de la relación de amplitudes según se muestra en la ecuación (2.23), y es denotado con una letra δ .

$$\delta = 1n \frac{x_i}{x_{i+1}} \quad (2.24)$$

El decremento logarítmico se mide a través de una unidad adimensional llamada neper¹ (símbolo Np) que, en realidad, es otra forma de la relación de amortiguamiento ζ . Una vez conocidas δ y ζ , el decremento logarítmico se determina resolviendo la siguiente ecuación:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (2.25)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

1) Modelo del sistema vibratorio:

a) Viga en voladizo.

2) Masa conocida.

3) Balanza.

4) Prensas de tornillo.

5) Cronómetro.

6) Escalímetro.

PROCEDIMIENTO

A) *Cálculo de la constante elástica de la barra a flexión (k):*

Primero, se obtiene la constante elástica de la barra mediante la relación de una fuerza aplicada y el desplazamiento que produce. Se coloca una masa conocida en el extremo libre de la barra en equilibrio y se mide el desplazamiento vertical que presenta un punto de la barra.

¹ Aunque no son parte del Sistema Internacional de Unidades, los nepers son las unidades que expresan la relación logarítmica natural de una variable, son unidades análogas a los decibels y son llamados así, en honor a John Napier (1550-1617). Para una mayor referencia, consulte: Alexander, Charles K. y Matthew N. O. Sadiku, *Fundamentos de circuitos eléctricos*, 3ª ed., México, McGraw-Hill, 2004.

B) *Determinación de la frecuencia angular natural del sistema (ω_n):*

Ahora, se determina la frecuencia natural del sistema. Se desplaza la masa de su posición de equilibrio, se deja en libertad y se mide. Al contar a partir del segundo o tercer ciclo el tiempo que tarda en completar, por ejemplo, 10 oscilaciones completas, se divide el número de ciclos entre el tiempo consumido en estos y, así, se obtiene la frecuencia natural del sistema.

$$f_n = \frac{\# \text{ ciclos}}{\text{tiempo [seg]}} \quad (2.26)$$

Una vez obtenida la frecuencia natural, a partir de la ecuación $f_n = \omega_n / 2\pi$, se obtiene la frecuencia angular.

Con los valores conocidos de masa y la constante elástica, se utiliza la ecuación $\omega_n = \sqrt{k/m}$ para determinar la frecuencia angular natural a la que vibrará, teóricamente, la viga en voladizo.

C) *Cálculo del factor de amortiguamiento (ζ):*

Para calcular el factor de amortiguamiento experimental, lo primero que se determina es el decremento logarítmico (δ), el cual se obtiene mediante la medida de las amplitudes de dos ciclos consecutivos, que serán utilizadas en la ecuación (2.24). El decremento resultante será evaluado mediante la ecuación (2.25).

El factor de amortiguamiento teórico se obtiene igualando la frecuencia de amortiguamiento (ecuación [2.16]) con la frecuencia angular natural experimental y despejando, de ahí, el factor de amortiguamiento.

D) *Cálculo de la constante de amortiguamiento (c):*

Tanto para el cálculo del factor de amortiguamiento teórico como para el experimental, ambos se obtienen utilizando la ecuación (2.10) y los valores de las variables obtenidas en los pasos anteriores.

REPORTE

- 1) Primero, elaborar un dibujo o diagrama del modelo analizado con sus dimensiones y datos usados.
- 2) En la siguiente la tabla, escribir los cálculos de la constante de amortiguamiento de forma teórica del lado izquierdo y del lado derecho la constante de amortiguamiento obtenida experimentalmente:

Constante de amortiguamiento teórica	Constante de amortiguamiento experimental

- 3) Con los resultados obtenidos, llenar la siguiente tabla:

Resultados teóricos	Resultados experimentales
k :	k :
ω_n :	ω_n :
ζ :	ζ :
c :	c :

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HUTTON, David V., *Applied Mechanical Vibrations*, New York, McGraw-Hill, 1918.

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 2018.

PRÁCTICA III

SISTEMAS LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO: FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO Y DECREMENTO LOGARÍTMICO

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Determinar, experimentalmente, el factor de amortiguamiento de un sistema mecánico a través de la definición de decremento logarítmico.
- 2) Identificar el tipo de amortiguamiento que se presenta con base en los parámetros adimensionales del sistema.

INTRODUCCIÓN

De una forma simple, el amortiguamiento puede entenderse como el fenómeno de disipación de la energía mecánica. Sin embargo, en la práctica no existen los sistemas mecánicos completamente conservativos. No obstante, existen ocasiones donde el amortiguamiento no es relevante, o bien, su orden de magnitud en contraste con la contribución energética (cinética para la masa y potencial para la rigidez) es tan pequeño que permite desprestigiar dichos efectos.

De manera concreta, el fenómeno disipativo puede presentarse en tres mecanismos diferentes:

- a)* Por flujo viscoso:
Cuando es debido a la disipación viscosa de un fluido (e.g. cojinetes o rodamientos viscosos, flujos de Couette o por movimiento de superficies, émbolo-pistón con un fluido, etc.).
- b)* Por una fuerza de oposición:
Cuando existe una fuerza que se opone al movimiento y que eventualmente logra contrarrestarlo (e.g. fricción en seco o amortiguamiento de Coulomb, corrientes de Eddy o amortiguamiento magnético).

c) Estructural por histéresis:

La disipación es el único mecanismo que depende, directamente, de las propiedades de los materiales y las geométricas del sistema. Está asociada a la energía de deformación del material llamada resiliencia.

Cualquiera que sea el mecanismo de amortiguamiento presente en el sistema, este debe caracterizarse por una constante de proporcionalidad (c) entre la fuerza aplicada y la velocidad, dicho parámetro se define como constante de amortiguamiento. Sin embargo, calcular dicha constante no siempre es del todo posible, por lo que deben establecerse nuevos parámetros adimensionales para que, sin necesidad de detallar el mecanismo de amortiguamiento, sea posible predecir el tipo de comportamiento de la respuesta dinámica como el factor de amortiguamiento (ζ), o aquellos que sean más fáciles de medir con un instrumental relativamente común como el decremento logarítmico (δ).

Con base en el factor de amortiguamiento, su comportamiento puede clasificarse en tres tipos:

- a) Subamortiguado.
- b) Críticamente amortiguado.
- c) Sobreamortiguado.

MODELO DE UN SISTEMA LIBRE AMORTIGUADO EN TÉRMINOS DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO

Primero, considérese un sistema de parámetros concentrados compuesto por: una masa m , un elemento de rigidez k y un amortiguador c como se muestra en la figura III-1.

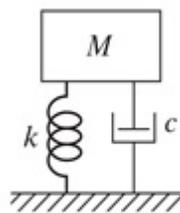


FIGURA III-1. Sistema masa-resorte-amortiguador

Cuando se aplican las ecuaciones de Newton-Euler, la ecuación de movimiento del sistema se escribe:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3.1)$$

donde, u es el desplazamiento del sistema. Posteriormente, se procede a normalizar la ecuación diferencial obtenida, entonces, se tiene la siguiente ecuación:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \quad (3.2)$$

Sea ω la frecuencia (circular) natural del sistema, la cual es obtenida mediante la raíz cuadrada del cociente de la rigidez entre la masa; por lo tanto, se llega a la expresión siguiente:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{2\omega c}{2\omega m}\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\omega \frac{c}{2\omega m}\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\omega \zeta \dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (3.3)$$

donde, ζ es conocida como el factor de amortiguamiento y es un parámetro adimensional, el cual se obtiene mediante la expresión:

$$\zeta = \frac{c}{2\omega m} \quad (3.4)$$

Irónicamente, al tratarse de un número adimensional, el factor de amortiguamiento resulta ser más importante y útil para la mayoría de las aplicaciones que la misma constante de amortiguamiento. Una de las razones concretas por las cuales se prefiere calcular el factor ζ en lugar de la constante c , es que permite conocer la naturaleza del comportamiento de la respuesta del sistema, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial.

Así que:

- a) Si $\zeta = 0$ la respuesta será no amortiguada.
- b) Si $0 < \zeta < 1$ la respuesta será subamortiguada.
- c) Si $\zeta = 1$ la respuesta será críticamente amortiguada.
- d) Si $\zeta > 1$ la respuesta será sobreamortiguada.

La figura III-2 muestra gráficamente este comportamiento, el cual depende del factor de amortiguamiento.

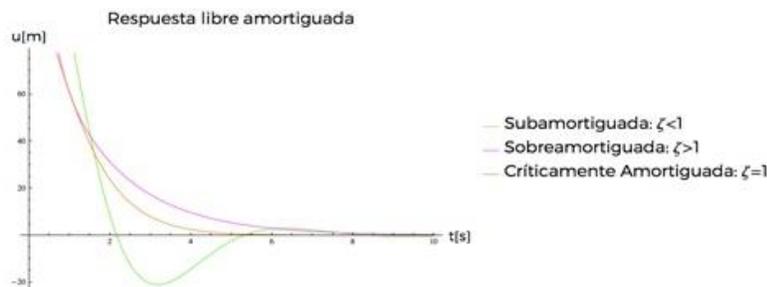


FIGURA III-2. Tipo de comportamiento de la respuesta libre del sistema en función con el valor del factor de amortiguamiento

RESPUESTA DINÁMICA DE UN SISTEMA CON DECREMENTO LOGARÍTMICO

Como ya se ha establecido con anterioridad, calcular de manera exacta la disipación energética de un sistema o amortiguamiento resulta algo poco práctico en el ejercicio profesional de la Ingeniería, debido principalmente a que los mecanismos de este fenómeno suelen ser muy complejos y llevan a estimaciones basadas en demasiadas idealizaciones del modelo.

Por lo anterior, surge la necesidad de caracterizar el fenómeno del amortiguamiento a través de métodos y herramientas más simples y al alcance de cualquier interesado en el tema. Tales modelos y métodos no deben comprometer su confiabilidad o precisión por la simpleza. Sobre esta línea, el enfoque más sencillo y robusto parte de suponer que la disipación energética se da de forma logarítmica, lo cual en principio no parece algo tan lejano a la teoría matemática, ya

que es un término asociado a la función exponencial que modela dicho fenómeno en la respuesta libre:

$$u(t) = U_0 e^{-\zeta \omega t} \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad (3.5)$$

En la figura III-3, se puede apreciar la representación gráfica de la función anterior, donde se observa cómo cada una de las amplitudes U_j van en decremento con el paso del tiempo. En consecuencia, sea δ el decremento logarítmico definido como:

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left(\frac{U_j}{U_{j+1}} \right) \quad (3.6)$$

La expresión anterior permite caracterizar el comportamiento disipativo a partir de la medición directa de dos amplitudes (del mismo signo), dichas mediciones pueden hacerse con cualquier instrumento, desde una regla hasta una instrumentación con sensores y tarjetas de adquisición de datos. Una vez conocidas dichas amplitudes, se procede a dividir las y del cociente se obtiene el logaritmo natural. Así, se obtiene la siguiente relación:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.7)$$

Además, si de alguna forma se sabe que el factor de amortiguamiento es muy pequeño (por ejemplo, para un caso subamortiguado de 0.3 o menor), se puede utilizar la aproximación:

$$\delta = 2\pi\zeta \quad (3.8)$$

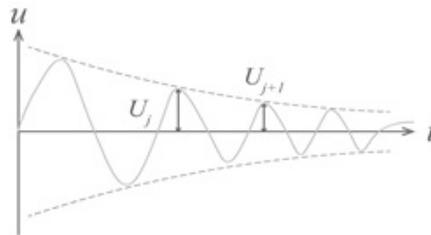


FIGURA III-3. Respuesta dinámica de un sistema mecánico con decremento logarítmico (amortiguamiento)

EQUIPO POR UTILIZAR

1) Modelo del sistema vibratorio:

- a) Masa.
- b) Resorte suave.
- c) Vaso de precipitado.
- d) Agua.
- e) Miel de abeja.
- f) Etiqueta o *sticker* de color.

2) Balanza.

3) Soporte universal.

4) Flexómetro.

5) Cámara de celular.

6) Software libre Tracker.

7) Software Mathematica®.

PROCEDIMIENTO

A) *Experimentación:*

Se realizarán y analizarán tres casos: i) masa y resorte, ii) masa y resorte con un vaso de precipitado lleno de agua y iii) masa y resorte en un vaso de precipitado lleno de miel de abeja. De cada caso, se harán tres eventos o mediciones.

Además, es importante señalar que a la masa se le debe colocar un marcador, ya sea con una etiqueta o un *sticker* de color y este debe contrastar con el fondo o con cualquier otra

característica. Se debe acoplar el resorte a la masa y colgarlos desde una superficie fija. Por otro lado, se debe seleccionar un envase que contenga el fluido (agua o miel), de tal manera que, la masa pueda introducirse en él, esto es con el objeto de que haya una interacción entre la masa en movimiento y el fluido que lo amortigüe.

Cada uno de los eventos deberán grabarse con la cámara del celular (si este cuenta con la característica de cámara lenta, mejor), hay que cerciorarse que, el cuadro desde el cual se hace la toma permita ver bien y, claramente, al marcador.

B) *Análisis del video en Tracker:*

Con los videos obtenidos en cada evento, se procederá a obtener la respuesta amortiguada del sistema. Para ello, se abre el programa y se selecciona la opción *Importar* y *Video* (figura III-4).

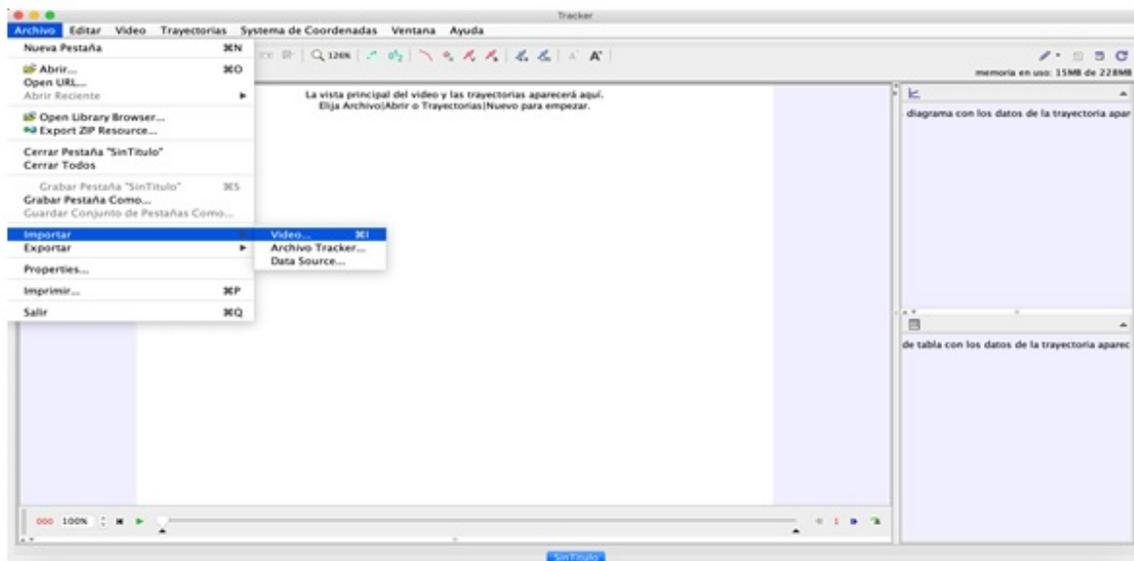


FIGURA III-4. Uso del programa Tracker. Importar el video

Una vez que el video está importado, se selecciona la opción para establecer el sistema de referencia y se coloca el origen en el punto de equilibrio de la vibración (figura III-5).

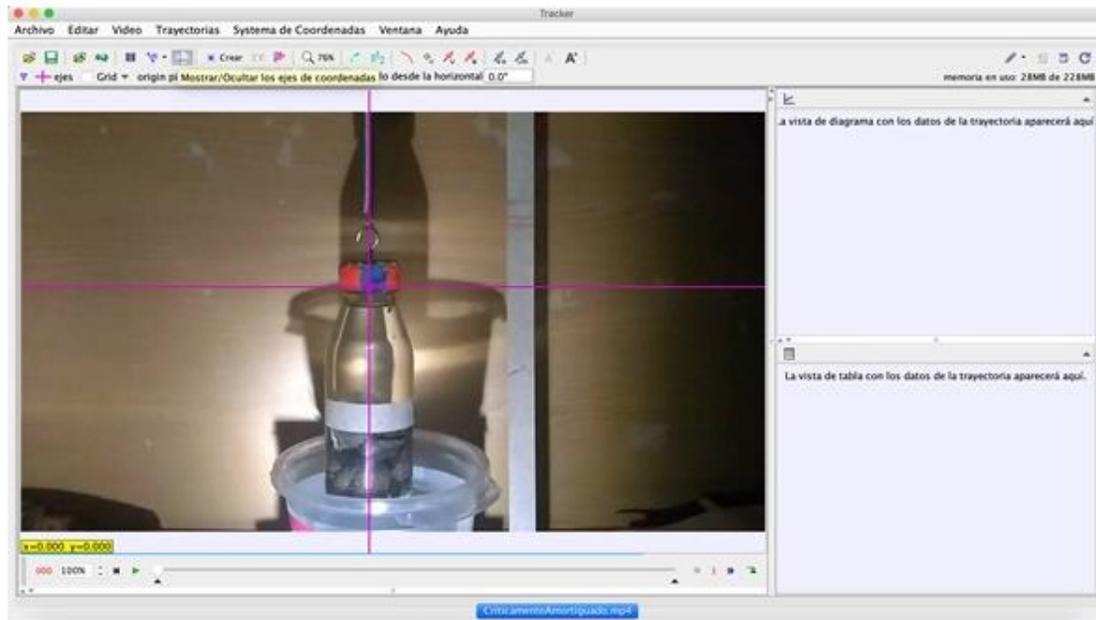


FIGURA III-5. Uso del programa Tracker. Colocar el sistema de referencia

Posteriormente, es necesario calibrar la imagen con una dimensión de referencia; para esto, se utiliza la herramienta *Vara de calibración* con darle clic derecho al botón  (figura III-6).

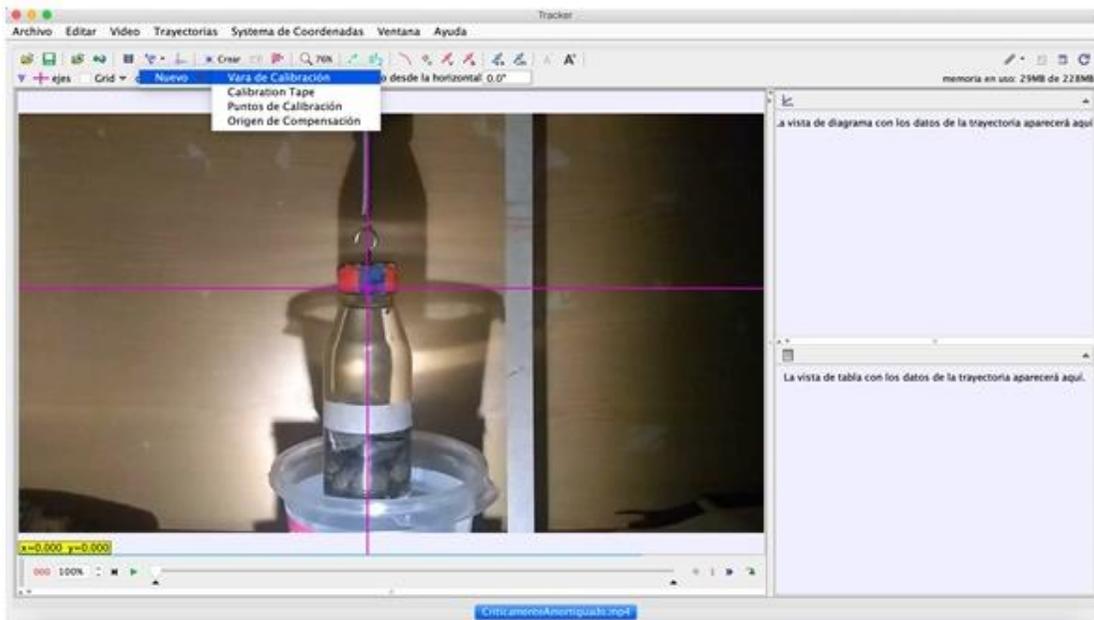


FIGURA III-6. Uso del programa Tracker. Usar la herramienta *Vara de calibración*

Para calibrar el sistema, es necesario mantener presionada la tecla *Shift* (el cursor cambia a un cuadrado [figura III-7]). Manteniendo el cursor presionado, se arrastra para trazar una línea de una dimensión conocida de la imagen (esta es solo una referencia dimensional).

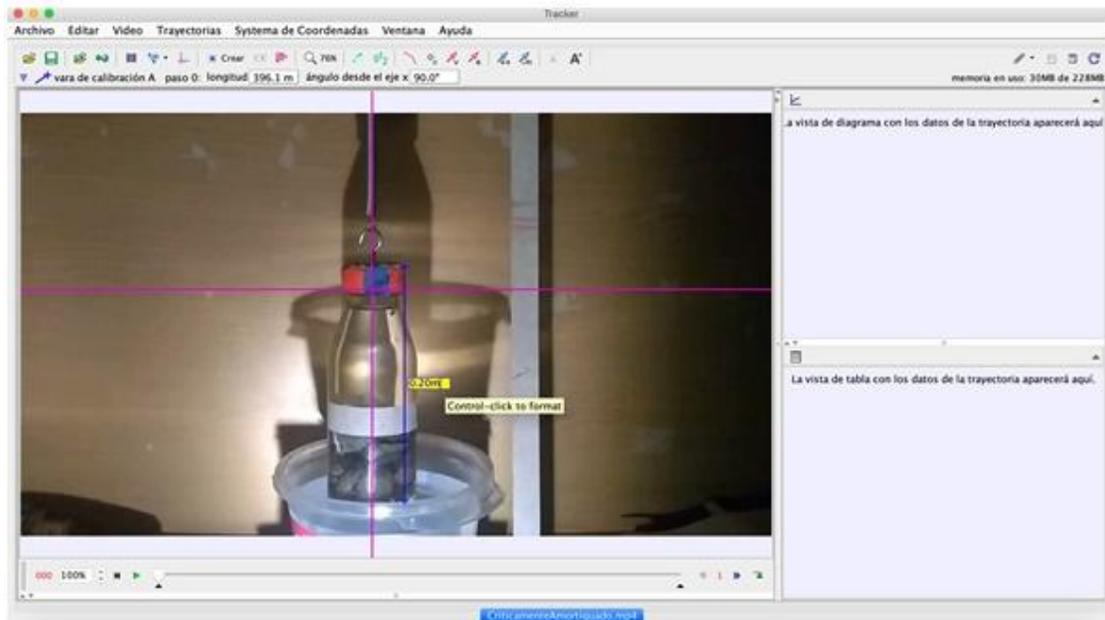


FIGURA III-7. Uso del programa Tracker. Calibrar la imagen

Una vez que la imagen está calibrada, se procede a dar clic derecho al botón *Crear* para establecer la *Masa puntual* a estudiar (figura III-8).

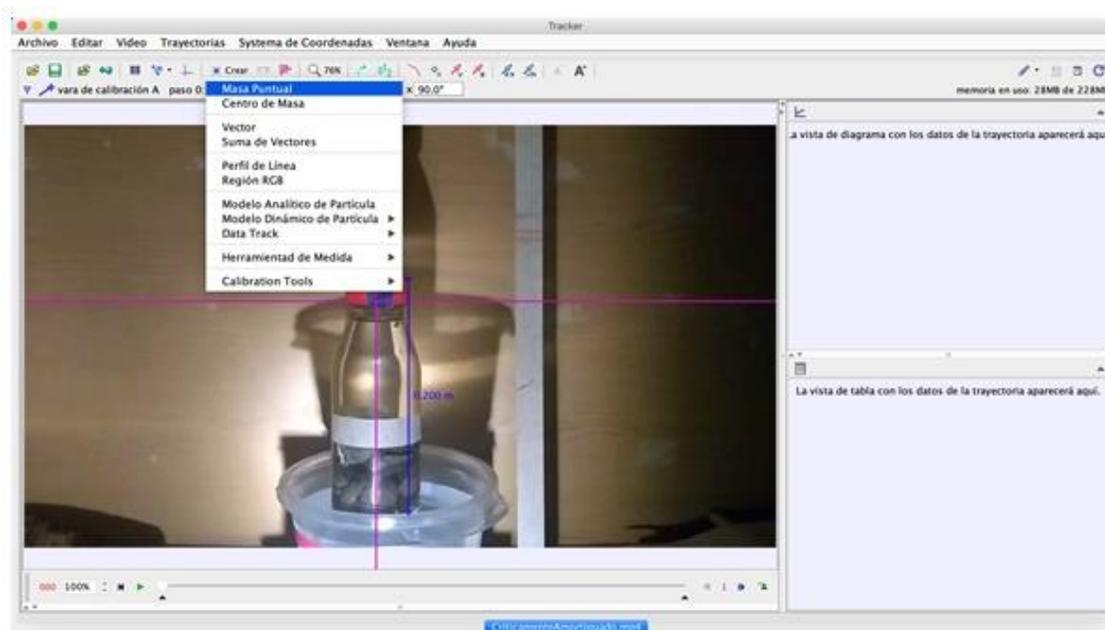


FIGURA III-8. Uso del programa Tracker. Crear una *Masa puntual*

Con la tecla *Shift* presionada, el cursor cambia a un cuadrado, nuevamente, y se procede a seleccionar el marcador o *sticker*. En la parte superior izquierda, se le asocia un valor numérico a la masa en (kg). Posteriormente, con la combinación de las teclas *Ctrl + Shift* se define la trayectoria a analizar, por lo que se abrirá el siguiente recuadro y el cursor cambiará a una forma circular (figura III-9).

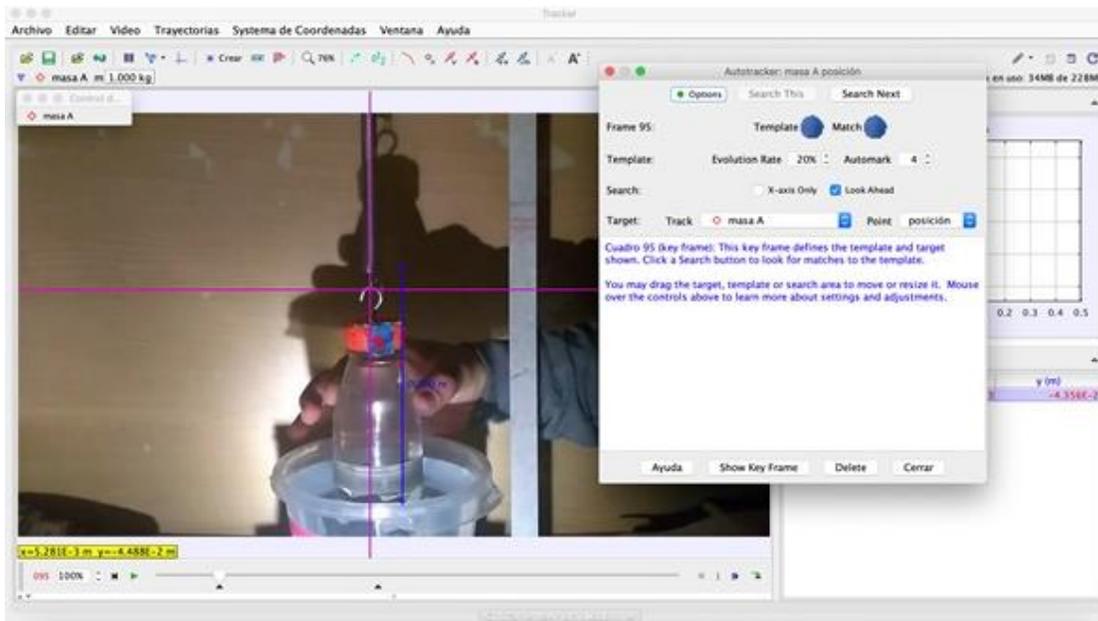


FIGURA III-9. Uso del programa Tracker. Definir la trayectoria a analizar

Se corrobora que, efectivamente, ese patrón de color es el que el programa debe rastrear y, en caso de que todo esté correcto, se le asigna la opción de *Search* (u *Options* como aparece en la imagen anterior). Una vez realizado esto, el programa comenzará a obtener la gráfica del movimiento; después, se deberán importar las gráficas a un archivo de Excel®.

C) Determinación del decremento logarítmico manual:

Con base en las gráficas diseñadas en el punto anterior, se obtienen las amplitudes U_j y U_{j+1} , posteriormente se procede a realizar el cociente entre ellas y se calcula el logaritmo natural para, así, estimar el valor del decremento δ . Acto seguido, se calcula el factor de amortiguamiento ζ a partir del decremento logarítmico ya estudiado en esta práctica 3.

D) *Determinación del decremento logarítmico mediante Wolfram® Mathematica®:*

Para comenzar, se debe apoyar en la interfaz de Mathematica, archivo Decre_Log (ver anexo) en él, se obtiene el factor de amortiguamiento utilizando métodos numéricos, tales como los interpoladores lagrangianos, método de Newton-Raphson, diferenciación central, etc. El programa pedirá importar el archivo de Excel® que fue obtenido a partir del programa Tracker³.

La siguiente tabla es el ejemplo de los datos para importar a partir del archivo de Excel®. La primera columna corresponde a los datos del tiempo y la segunda a los de amplitud. Nótese que la tabla carece de encabezados, este detalle es importante, porque de no seguirse así, el programa no podrá resolver el decremento logarítmico.

TABLA III-1. Datos para importar sin encabezados

0.000	0.01
0.001	0.03
0.002	0.05
...	...
x.xxx	0.00

REPORTE

- 1) Únicamente, se debe elaborar una tabla que establezca el caso analizado, así como los eventos realizados con su respectivo decremento logarítmico y el promedio obtenido de estos.

³ El archivo de Excel® solo debe contener la columna de tiempo y amplitud obtenida, ninguna columna adicional; además, debe carecer de encabezados tal como se muestra en la tabla III-1.

Caso de amortiguamiento	Evento	Factor de amortiguamiento analítico	Factor de amortiguamiento Mathematica®	Promedio analítico	Promedio Mathematica®	Error relativo
	1					
Subamortiguado	2					
	3					
	1					
Críticamente amortiguado	2					
	3					
	1					
Sobreamortiguado	2					
	3					

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHANDRAN, B. y Edward B. Magrab, *Vibraciones*, México, Thomson, 2006.

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 2018.

THOMSON, William T. & Marie Dillon Dahleh, *Theory of Vibrations with Applications*, Santa Barbara, Pearson, 1998.

PRÁCTICA IV

SISTEMAS TORSIONALES: PARÁMETROS BÁSICOS DE LOS SISTEMAS VIBRATORIOS

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Identificar, experimentalmente, los parámetros básicos de un sistema torsional:
 - a) Frecuencia amortiguada.
 - b) Factor de amortiguamiento.
 - c) Coeficiente de atenuación.
 - d) Frecuencia natural.
 - e) Coeficiente de elasticidad.
 - f) Coeficiente de amortiguamiento viscoso.

- 2) Comprobar que la frecuencia natural es independiente de la disipación viscosa del sistema.

INTRODUCCIÓN

Un sólido puede sufrir deformaciones longitudinales y transversales o angulares (torsionales). El estudio de este tipo de ondas mecánicas es de especial importancia para el análisis de las flechas utilizadas en la transmisión de potencia.

Un sistema rotatorio se caracteriza por contar con elementos capaces de almacenar y disipar energía como:

- La inercia rotacional de un cuerpo, con respecto a un eje, representa la capacidad del cuerpo para almacenar energía cinética en forma de un *momentum* angular.

- La elasticidad del sistema representa su capacidad de almacenar energía potencial como la deformación plástica de un elemento.
- El amortiguamiento viscoso es la capacidad del sistema para disipar energía en función de su velocidad angular.

Cualquier sistema dinámico que oscile libremente se especifica por tres frecuencias características:

- La frecuencia amortiguada es la frecuencia con la que el sistema oscila libremente (sin ninguna excitación externa).
- La frecuencia natural es la frecuencia a la que el sistema oscilaría libremente de no tener presencia de amortiguamiento, su identificación es vital para el estudio de la resonancia.
- La frecuencia neperiana o coeficiente de atenuación representa el decaimiento logarítmico de la amplitud de las oscilaciones libres del sistema.

MODELO DEL SISTEMA VIBRATORIO ANGULAR

Un péndulo torsional es un sistema oscilatorio formado por un volante de inercia suspendido en un resorte angular, el cual oscila hasta que la energía suministrada se disipa a un medio viscoso con una torsión inicial. El péndulo puede modelarse como un resorte lineal de constante k , un amortiguador viscoso de coeficiente c y una inercia rotacional I como se muestra en la figura IV-1.

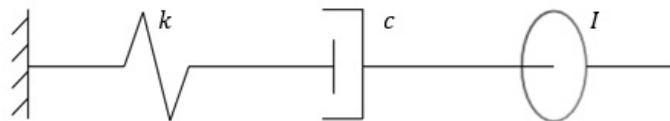


FIGURA IV-1. Sistema resorte-amortiguador-inercia

El resorte angular lineal, cuando es deformado en una dirección dada, genera un par en la dirección opuesta:

$$\theta = \frac{1}{k} \tau \quad (4.1)$$

El amortiguador viscoso, cuando rota en una dirección dada, genera un par en la dirección opuesta proporcional a la velocidad de rotación:

$$\tau = c\dot{\theta} \tag{4.2}$$

La inercia rotacional es la oposición del cuerpo a un cambio en su velocidad angular:

$$\tau = I\ddot{\theta} \tag{4.3}$$

Para modelar el sistema, se realizan los diagramas de cuerpos libres de los elementos y se emplea la tercera ley de Newton para definir las interacciones de los elementos del sistema. Se utilizan las ecuaciones (4.1) a (4.3) para, mediante un balance de fuerzas, relacionar los pares generados por los elementos con el desplazamiento angular.

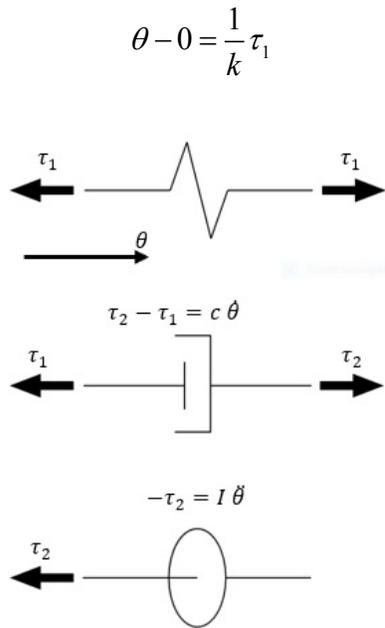


FIGURA IV-2. Diagramas de cuerpos libres con elementos del sistema torsional

Cuando se usa la segunda ley de Newton para un sistema angular como ecuación de equilibrio, obtenemos el modelo del sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= k\theta \\ \Rightarrow \tau_2 &= k\theta + c\dot{\theta} \\ \Rightarrow I\ddot{\theta} &= -k\theta - c\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{c}{I} \dot{\theta} + \frac{k}{I} \theta = 0 \quad (4.4)$$

El comportamiento oscilatorio del sistema queda descrito por el coeficiente de atenuación α , la frecuencia amortiguada ω_d y la frecuencia natural ω_n , los cuales se relacionan entre sí de acuerdo con la ecuación (4.5) y que, a su vez, se relacionan a los parámetros del sistema mediante la ecuación (4.6). La ecuación (4.7) muestra la relación del coeficiente de atenuación con el factor de amortiguamiento ζ , el cual indica el decremento de la amplitud con cada oscilación del sistema (expresada con su frecuencia natural):

$$\omega_n^2 = \alpha^2 + \omega_d^2 \quad (4.5)$$

$$\ddot{\theta} + 2\alpha \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (4.6)$$

$$\alpha = \zeta \omega_n \quad (4.7)$$

Para que la respuesta del sistema sea una oscilación, el comportamiento debe ser subamortiguado ($\alpha < \omega_n$) y la respuesta observada queda determinada por la ecuación (4.8), la cual modela una oscilación sinusoidal que decae en el tiempo. Los valores de a y b determinan el desfase de la oscilación en el tiempo y se obtienen dadas las condiciones iniciales $\theta(0)$ y $\dot{\theta}(0)$ del sistema:

$$\theta = \left[a \cos(\omega_d t) + b \operatorname{sen}(\omega_d t) \right] e^{-\alpha t} \quad (4.8)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

1) Modelo del sistema vibratorio:

a) Péndulo torsional.

Este consiste en un volante de inercia suspendido por un resorte torsional, el resorte se encuentra acoplado a un servomotor montado en una base. Cuando se utiliza el servomotor, se excita el volante de inercia a distintas frecuencias. Para hacer funcionar al

servomotor, se puede apoyar en el programa de Arduino sweep.nb (ver anexo). La figura IV-3 presenta un ejemplo del péndulo.



FIGURA IV-3. Péndulo torsional

b) Amortiguador viscoso.

El volante de inercia se sumergirá, parcialmente, en un recipiente con agua. El recipiente cuenta con una graduación angular en grados para poder realizar mediciones sobre el giro del volante. Se puede apoyar en el archivo angle.pdf (ver anexo) y en los archivos complementarios para acoplar la plantilla al recipiente. La figura IV-4 muestra un ejemplo del amortiguador, mientras que la figura IV-5 señala el diagrama del sistema y sus componentes. Inicialmente, se recomienda sumergir el volante de inercia a la mitad de su altura y experimentar variando la distancia sumergida para obtener distintas disipaciones.

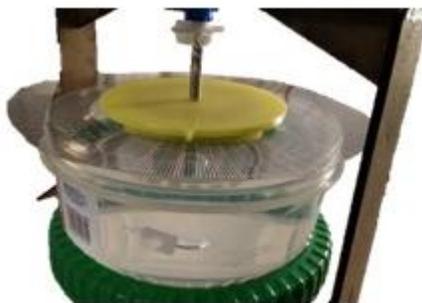


FIGURA IV-4. Volante de inercia acoplado al amortiguador viscoso graduado

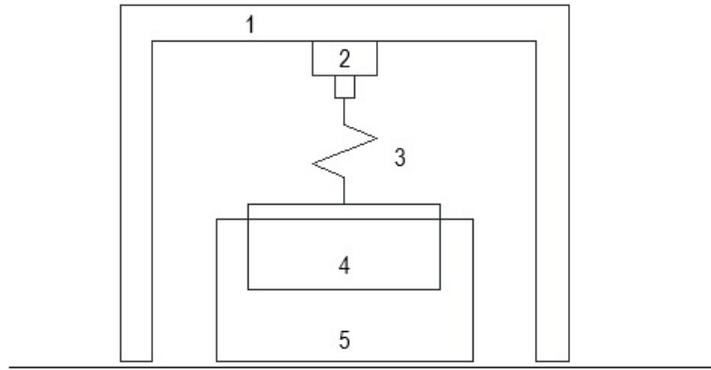


FIGURA IV-5. Diagrama de las partes del sistema:

(1) base, (2) servomotor, (3) resorte, (4) volante de inercia y (5) disipador viscoso

2) Cámara de video.

PROCEDIMIENTO

A) *Obtención de la frecuencia amortiguada del sistema:*

En el contenedor con agua, se debe sumergir el volante de inercia. Proporcionar una rotación inicial al volante y grabar un video de las oscilaciones que presenta. A partir del periodo t , que tarda en cumplir un ciclo, determinar la frecuencia angular amortiguada del sistema. Usar la siguiente ecuación:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{t} \quad (4.9)$$

Enseguida, repetir las mediciones con distintos ciclos o medir el periodo en el cual, el sistema tarda en completar varios ciclos para minimizar el error.

B) *Determinación del coeficiente de atenuación:*

A partir del video obtenido, se debe anotar el ángulo donde se liberó inicialmente el péndulo $\theta(0)$ y se debe registrar el ángulo que alcanza el péndulo al completar el primer ciclo $\theta(t)$.

El coeficiente de atenuación es una medida del decaimiento logarítmico de la amplitud de la oscilación en cada ciclo y se mide en nepers por segundo $[Np/s]$. Calcule el valor de la atenuación dadas las amplitudes θ y el periodo del ciclo t , utilizando la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{\ln \left[\frac{\theta(0)}{\theta(t)} \right]}{t} \quad (4.10)$$

C) *Determinación de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema:*

Para calcular la frecuencia natural del sistema, se utiliza la ecuación (4.5), posteriormente, se usa la ecuación (4.7) para obtener el factor de amortiguamiento.

D) *Determinación de los coeficientes de elasticidad y de amortiguamiento viscoso del sistema:*

Por último, se determina el momento de inercia y los coeficientes de elasticidad y amortiguamiento viscoso del sistema, use las ecuaciones (4.11) y (4.12):

$$c = 2I\alpha \quad (4.11)$$

$$k = I\omega_n^2 \quad (4.12)$$

REPORTE

1) Para iniciar, se elabora una tabla. En la primera columna se anota la amplitud de las oscilaciones (ángulo donde se libera el volante y ángulo al completar un ciclo); en la segunda columna, se anota el tiempo en el cual ocurre dicho ángulo máximo:

$\theta(t) [^\circ]$	$t [s]$

2) Completar la tabla siguiente con apoyo de la tabla anterior.

Parámetros	Agua como disipación viscosa
ω_d	
α	
ζ	
ω_n	
I	
d	
k	

El experimento es posible repetirlo con distintos fluidos y en el sistema se pueden observar los cambios dada la variación de su disipación.

- 3) ¿Qué sucede cuando se excita al péndulo torsional a su frecuencia natural? Realice el experimento y concluya.
- 4) ¿Qué sucede cuando se excita al péndulo torsional a frecuencias cercanas (mayores o menores) a la natural? Realice el experimento y concluya.
- 5) ¿Qué sucede cuando se excita al péndulo torsional a su frecuencia natural sin amortiguamiento (sin el contenedor de agua)? Realice el experimento y concluya.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 2018.

THOMSON, William T. & Marie Dillon Dahleh, *Theory of Vibrations with Applications*, Santa Barbara, Pearson, 1998.

PRÁCTICA V

SISTEMAS TORSIONALES: RESONANCIA

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Determinar la velocidad angular natural de un sistema mecánico rotacional de un grado de libertad.
- 2) Observar los efectos que presenta el sistema con un disco desbalanceado cuando es excitado a diferentes velocidades.

INTRODUCCIÓN

En un sistema rotacional es de gran importancia que el centro de la masa de un cuerpo coincida con el eje de rotación, si esto no ocurre, entonces, se dice que el cuerpo está desbalanceado. Cuando un cuerpo desbalanceado gira en un eje elástico, se produce una vibración que dependerá de la velocidad a la que gire el sistema. Al igualar la velocidad angular de la masa con la velocidad angular natural del sistema, este puede entrar en un efecto conocido como resonancia.

MODELO DEL SISTEMA ROTACIONAL

Este sistema rotacional está formado por una flecha con una constante de rigidez k y un disco rotatorio de masa m , cuyo centro de la masa se encuentra en el punto G , la masa y la flecha se unen en el punto O y giran con respecto al eje en el punto R .

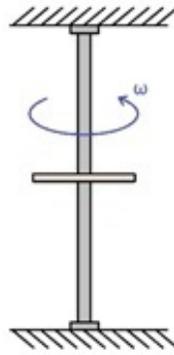


FIGURA V-1. Sistema rotacional desbalanceado

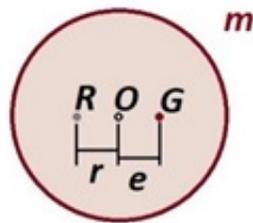
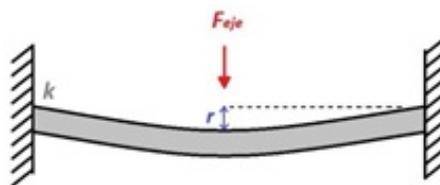
FIGURA V-2. Disco de giro con masa m 

FIGURA V-3. Esquema de viga con soporte simple

Cuando a la viga se le considera como un resorte, entonces, la fuerza que ejerce al ser deformada es la siguiente:

$$F_{eje} = kr \quad (5.1)$$

donde k es la constante de rigidez del eje y r es la deformación que tiene desde el centro de la barra. Al estar desbalanceado el disco de masa m , existe una distancia desde la unión del disco con el eje (punto O) hasta el centro de la masa del disco (punto G) llamada excentricidad e . Cuando el disco desbalanceado gira, el eje tenderá a deformarse y se creará un nuevo eje de giro en el punto R , siendo r la distancia entre dicho punto y el punto O .

La fuerza centrífuga debida al desbalanceo es:

$$F_{\text{Disco}} = m (e + r) \omega^2 \quad (5.2)$$

La fuerza restauradora del eje (ecuación [5.1]) y la fuerza de desbalanceo del disco (ecuación [5.2]) deben ser iguales, ya que una provoca a la otra, esto es:

$$kr = m (e + r) \omega^2 \quad (5.3)$$

al desarrollar:

$$\frac{k}{m} = \frac{(e + r) \omega^2}{r}$$

donde la velocidad angular natural para un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento es:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (5.4)$$

al sustituir la ecuación (5.4) en la ecuación (5.3) se tiene:

$$\omega_n^2 = \frac{(e + r) \omega^2}{r}$$

$$\omega_n^2 r = (e + r) \omega^2$$

al despejar r de la ecuación se tiene:

$$r = (e + r) \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$r = e \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + r \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$r - r \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = e \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = e \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$r = \frac{e \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)}{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)} \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) es la función que describe a la distancia r como dependiente de la velocidad del sistema, a la velocidad angular natural del sistema y a la excentricidad del disco. Como en el sistema, la constante de rigidez k del eje, la masa m del disco y la excentricidad e son constantes, entonces, la velocidad angular del sistema se convierte en la única variable independiente. De esta manera, se puede observar en el denominador de la ecuación (5.5) que, si la velocidad angular toma el mismo valor que la velocidad angular natural, entonces, r tiende al infinito, a este fenómeno se le conoce como resonancia.

La constante de rigidez de la barra se puede expresar en una función que dependa de las características físicas del material y de su geometría:

$$k = \frac{48EI}{l^3} \quad (5.6)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material, I es el momento de inercia y l es la longitud de la barra.

El momento de inercia para una barra de sección transversal circular se calcula con la siguiente expresión:

$$I = \frac{M R^2}{2} \quad (5.7)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

- 1) Viga con soportes rotacionales.
- 2) Disco de masa conocido desbalanceado.
- 3) Balanza.
- 4) Estroboscopio o sensor de velocidad angular.
- 5) Circuito de control de velocidad de motor DC.

SUGERENCIAS

Se sugiere usar materiales y dimensiones que propicien que la velocidad angular natural esté en intervalos factibles para reproducirlos con un motor común y corriente. Mientras más baja sea la velocidad angular, menor será la corriente requerida para mover al sistema. A continuación, se enlistan las siguientes recomendaciones:

Primero, utilizar un eje de acrílico o algún polímero para que la constante de rigidez k sea relativamente baja con respecto a un eje de metal, cuya k sería muy alta.

En seguida, diseñar un disco cuya masa m sea lo más grande posible, de tal forma, que pueda tanto balancearse como desbalancearse y, de ese modo, sea controlable la excentricidad.

Por último, llevar a cabo el control de velocidades usando el microcontrolador Arduino Uno y motores de 5 V o más con alimentación externa.

Nota: para calcular la velocidad angular natural del sistema se puede apoyar del archivo denominado SMRD (ver anexo).

PROCEDIMIENTO

A) *Medir variables:*

Inicialmente, medir la masa de la barra y el disco. Se puede usar una balanza o hacerlo por medio del producto del volumen y la densidad de las piezas.

B) *Parámetros a calcular:*

Después, calcular el momento de inercia (ecuación [5.7]), la constante de rigidez de la barra (ecuación [5.6]) y, finalmente, la velocidad angular natural del sistema (ecuación [5.4]).

C) *Accionar el sistema:*

Posteriormente, ensamblar el sistema con el disco balanceado como se muestra en la figura V-3. Activar el sistema con el circuito de control de velocidad para que comience a girar. Se debe apoyar del estroboscopio para determinar la velocidad angular del sistema. Se sugiere comenzar con valores de velocidad angular bajos y, después, elevar la velocidad de forma gradual.

D) *Experimento:*

Para finalizar, repetir el experimento, pero esta vez con el disco desbalanceado. Se observará que mientras más cercanos sean los valores de velocidad a la frecuencia angular natural, más propenso estará el sistema a vibrar.

REPORTE

1) Calcular la velocidad angular natural del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$$

- 2) Calcular los valores de la distancia r (m) para el caso balanceado ($e = 0$) y el caso desbalanceado ($e \neq 0$) para cada uno de los valores de la velocidad angular aplicada al sistema. Los valores de ω son propuestos, arbitrariamente, para los casos ($\omega < \omega_n$) y ($\omega > \omega_n$), siempre y cuando, cumplan esas condiciones y puedan ser reproducidos por el motor:

r (m)			
Caso	$\omega < \omega_n$	$\omega = \omega_n$	$\omega > \omega_n$
$e = 0$			
$e \neq 0$			

- 3) Finalmente, observar los efectos que tiene el hecho de aplicar la velocidad ω al sistema en los diferentes casos y explicar, analíticamente, qué es lo que sucede con la distancia r .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHANDRAN, B. & Edward B. Magrab, *Vibrations*, 2nd ed., Toronto, Cengage Learning, 2009.

SETO, William W., *Teoría y problemas de vibraciones mecánicas*, México, McGraw-Hill, 1970.

THOMSON, William T. & Marie Dillon Dahleh, *Theory of Vibrations with Applications*, Santa Barbara, Pearson, 1998.

PRÁCTICA VI

SISTEMAS AMORTIGUADOS: AMORTIGUAMIENTO DE COULOMB

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Definir la ecuación que describe el sistema vibratorio amortiguado por fricción mediante las ecuaciones de movimiento de Newton.
- 2) Observar los efectos que presenta el comportamiento del sistema cuando se cambia la superficie de contacto.

INTRODUCCIÓN

El amortiguamiento de Coulomb resulta del deslizamiento de dos superficies secas. La fuerza de amortiguamiento es igual al producto de la fuerza normal N y el coeficiente de fricción dinámico μ_d cuando hay contacto entre los dos cuerpos. Una vez que se inicia el movimiento, la fuerza se asume independiente de la velocidad. Si un cuerpo A, se desliza sobre otro B, con una velocidad v , la fuerza de roce puede expresarse así:

$$F = \mu_d N \quad (6.1)$$

Este tipo de fricción tiende a desaparecer cuando las piezas sólidas en contacto están adecuadamente lubricadas; sin embargo, es difícil eliminarlo completamente y en la práctica coexiste con amortiguamiento viscoso o de otros tipos. El valor del coeficiente de fricción depende de los materiales en contacto y de la condición de las superficies en contacto.

MODELO DEL SISTEMA VIBRATORIO CON AMORTIGUAMIENTO DE COULOMB

Para empezar, se debe considerar un sistema de un solo grado de libertad con fricción seca como se muestra en la figura VI-1a. Este modelo consta de un resorte y una masa sobre una superficie inclinada a 45° .

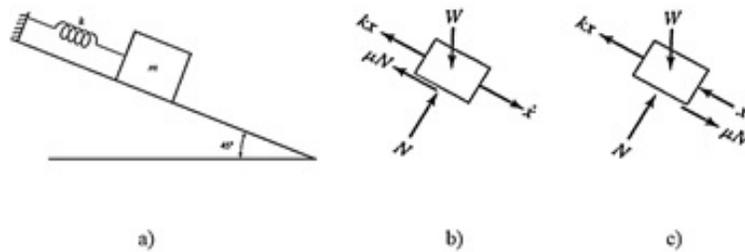


FIGURA VI-1. a) Sistema masa-resorte sobre una superficie.
 b) Diagrama de cuerpo libre cuando la masa se mueve hacia la derecha.
 c) Diagrama de cuerpo libre cuando el cuerpo se mueve hacia la izquierda

La fuerza de fricción que se genera debido al contacto entre dos superficies está descrita por la ecuación (6.1). Cuando únicamente se considera el intervalo lineal del resorte, la fuerza del resorte está dada por:

$$F = kx \quad (6.2)$$

donde k es el coeficiente del resorte en (N/m) y x es el desplazamiento del resorte en (m).

Ya que la dirección de la fricción es contraria a la dirección con la que se mueve la masa, se deben considerar dos casos.

CASO I

La masa se mueve a la derecha:

En el diagrama de cuerpo libre (figura VI-1b), considerar una pendiente de 45° , el peso se divide en dos componentes, una que es normal y otra paralela a la superficie de contacto, por lo que la ecuación que describe el movimiento es:

$$m\ddot{x} + kx = -N\mu + W_x \quad (6.3)$$

donde W_x es la componente del peso paralela a la superficie. La solución general de esta ecuación no homogénea de segundo grado es la siguiente:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t + \frac{-N\mu + W_x}{k} \quad (6.4)$$

donde la frecuencia natural se escribe $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y A_1 y B_1 son constantes del sistema.

CASO II

La masa se mueve a la izquierda:

En el diagrama de cuerpo libre (figura VI-1c), ahora, la dirección de la fricción va en dirección contraria, su ecuación diferencial correspondiente es:

$$m\ddot{x} + kx = N\mu + W_x \quad (6.5)$$

la solución general de esta ecuación es:

$$x(t) = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t + \frac{N\mu + W_x}{k} \quad (6.6)$$

donde A_2 y B_2 son constantes del sistema.

Las ecuaciones (6.4) y (6.6) son casos particulares que representan el movimiento del sistema en un intervalo determinado y *describen solo una parte del ciclo*. Para encontrar los valores de las constantes de cada ecuación en cada intervalo, se procede a resolverlos.

Al suponer que la masa se desplaza en una cantidad $x(t) = x_1$ y se suelta, su velocidad en ese instante comenzaría con $\dot{x}(t) = 0$. Como el movimiento es de derecha a izquierda, se sustituye en la ecuación (6.6) y nos da:

$$x_1 = A_2(1) + 0 + \frac{N\mu + W_x}{k}$$

$$A_2 = x_1 - \frac{N\mu}{k} - \frac{W_x}{k} \text{ y } B_2 = 0$$

por lo que la ecuación (6.6) se escribe:

$$x(t) = \left(x_1 - \frac{N\mu}{k} - \frac{W_x}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{N\mu + W_x}{k} \quad (6.7)$$

tal ecuación describe el movimiento del ciclo en el intervalo $0 \leq t \leq \pi / \omega_n$. Para el siguiente semiciclo, la ecuación que lo describe es la (6.4) y sus condiciones iniciales parten de las condiciones finales de la ecuación (6.7) cuando $t = \pi / \omega_n$, por lo tanto, se tiene:

$$x \left(t = \frac{\pi}{\omega_n} \right) = - \left(x_1 - 2 \left(\frac{N\mu}{k} + \frac{W_x}{k} \right) \right) \quad (6.8)$$

$$\dot{x} \left(t = \frac{\pi}{\omega_n} \right) = 0$$

estas condiciones iniciales determinan el valor de las constantes de la ecuación (6.4):

$$A_1 = x_1 \frac{3N\mu}{k} - \frac{W_x}{k} \text{ y } B_1 = 0$$

así:

$$x(t) = \left(x_1 - \frac{3N\mu}{k} - \frac{W_x}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{-N\mu + W_x}{k} \quad (6.9)$$

la ecuación describe el movimiento del semiciclo en el intervalo $\pi / \omega_n \leq t \leq 2\pi / \omega_n$.

Así, este procedimiento continúa hasta que la fuerza del resorte sea menor que la fuerza generada por la fricción entre las superficies. La siguiente ecuación determina el número de ciclos del sistema:

$$\text{número de ciclos} = \frac{x_0 - \left(\frac{\mu N}{k} \right) - \frac{W_x}{k}}{\frac{4\mu N}{k}} \quad (6.10)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

1) Modelo de sistema vibratorio:

- a) Sistema masa-resorte sobre una superficie inclinada a 45° . Además, el prototipo tiene la opción de variar el ángulo de inclinación en 30° , 45° y 70° .

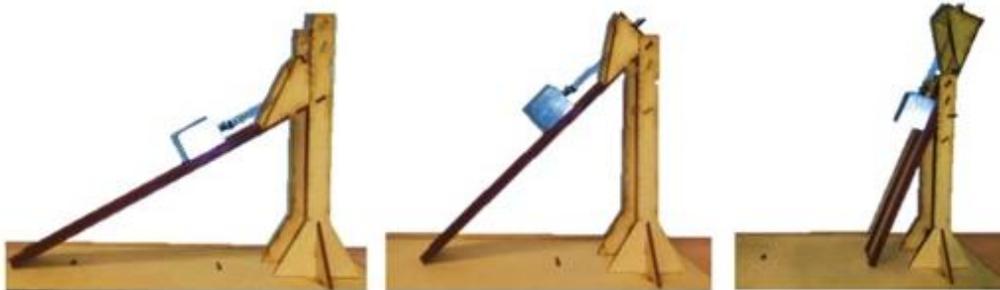


FIGURA VI-2. Prototipo del sistema vibratorio en 30° , 45° y 70° , respectivamente

- 2) Masa conocida.
- 3) Balanza.
- 4) Prensa de tornillo.
- 5) Cámara de video.
- 6) Regla graduada.

PROCEDIMIENTO

A) *Calcular la constante elástica del resorte:*

Primero, se debe fijar el resorte verticalmente y colocar una masa conocida. Medir cuánto se desplaza, después de ejercer dicha fuerza. Obtener la constante elástica k del resorte mediante

la relación de una fuerza aplicada conocida y el desplazamiento que produce, y despejar la constante k de la ecuación (6.2).

B) *Determinar la posición de la masa al final del primer semiciclo y calcular el coeficiente de fricción:*

Cuando ya está montado el sistema masa-resorte sobre la superficie inclinada, desplazar la masa a una distancia tal que se pueda cuantificar, dicha distancia tomará el valor de x_1 (figura VI-3). Se recomienda que la superficie lleve alguna referencia para hacer más cómoda la lectura al momento de medir las distancias. Se debe apoyar en una cámara de video para grabar el evento y determinar la distancia respecto a la posición de reposo en donde se detiene antes de cambiar de dirección, dicho valor corresponde a la posición cuando $x(t = \pi / \omega_n)$ en (m), por lo que se puede despejar la variable asociada a la fricción de la ecuación (6.8).

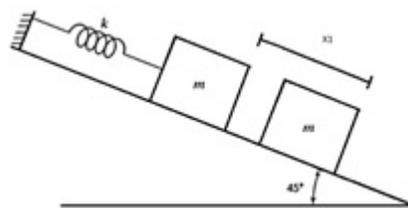


FIGURA VI-3. Perturbación inicial

C) *Graficar el desplazamiento de la masa:*

Una vez que se obtuvieron los valores de k y de μ se sustituirán en la ecuación (6.7), la cual describirá el desplazamiento de la masa respecto al tiempo en el intervalo $0 \leq t \leq \pi / \omega_n$. Usar la ecuación (6.9) para el intervalo $\pi / \omega_n \leq t \leq 2\pi / \omega_n$.

Para ver el efecto del amortiguamiento, se deben graficar ambas ecuaciones en sus respectivos intervalos.

D) *Calcular el número de ciclos:*

Enseguida, calcular el número de ciclos con la ecuación (6.10).

E) *Analizar los resultados:*

Por último, analizar el efecto de variar el ángulo en el modelo, primero a 30° y después a 70° , graficar la respuesta de cada ángulo y compararla con la respuesta experimental.

REPORTE

1) Cálculo de la constante elástica K .

Fuerza aplicada	Desplazamiento (m)	K (N/m)

2) Posteriormente, llenar la siguiente tabla y calcular el coeficiente de fricción.

Parámetro	Medición experimental
masa [kg]	
N [N]	
W_x [N]	
X_1 [m]	
X_2 [m]	
K [N/m]	
ω_n	
μ	
Número de ciclos	

3) Después, comparar el video del desplazamiento del modelo con las gráficas de desplazamiento obtenidas.

4) Finalmente, dibujar las gráficas obtenidas en el inciso E) del procedimiento.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 5th ed., Miami, Pearson, 2011.

PRÁCTICA VII

ANÁLISIS ESPECTRAL: INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN EN MATHEMATICA[®]

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Aplicar el análisis espectral de un sistema vibratorio mediante el uso de una herramienta computacional de programación para los sistemas mecánicos que son sometidos a excitaciones periódicas.
- 2) Establecer una correlación entre la función del factor de magnificación y las salidas del sistema para distintos armónicos.

INTRODUCCIÓN

En contraste con el análisis de los sistemas libres, en los sistemas forzados existen diversos enfoques y metodologías que dependen del tipo de aplicación. En el caso particular de las excitaciones periódicas, dicho análisis resulta conveniente realizarlo en el dominio de la frecuencia. Hay que recordar que una vibración (en cualquiera de sus manifestaciones) obedece esencialmente a una estructura canon, la cual está compuesta por una amplitud, una frecuencia y un desfase. Mientras que en los sistemas libres y en algunos sistemas forzados (de excitación transitoria) lo que se busca es caracterizar dichos parámetros respecto al tiempo. El análisis espectral busca un enfoque distinto. Bajo la suposición de que la respuesta del sistema se encuentra en un estado permanente, el análisis espectral buscará cómo los diferentes casos de armónicos como $j\omega_0$ (múltiplos de la frecuencia de excitación) de las amplitudes finales de las múltiples respuestas se van magnificando o decreciendo; esto es con el fin de obtener un mapeo de los posibles escenarios de carga y sus magnificaciones máximas en amplitud.

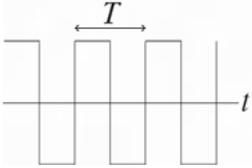
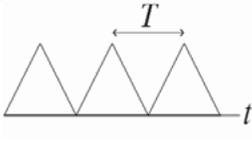
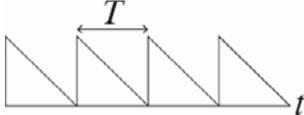
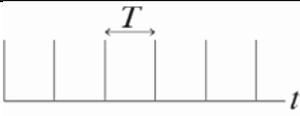
EXCITACIÓN PERIÓDICA

Una excitación periódica es aquella que se caracteriza por poseer una frecuencia de excitación o frecuencia fundamental ω_0 . De forma generalizada, una excitación periódica es una función del tipo:

$$F(t) = F_0 f(t, \omega_0) \quad (7.1)$$

donde F_0 es la magnitud de la fuerza en unidades de carga. Por su parte, la función $f(t, \omega_0)$ describe el tipo de comportamiento que se sigue en el tiempo, este último se destaca en los enlistados de la tabla VII-1.

TABLA VII-1. Algunos tipos de funciones periódicas para una fuerza dinámica

Armónica	$F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
Señal cuadrada	
Señal triangular	
Señal diente de sierra	
Tren de pulsos	

ANÁLISIS ESPECTRAL

Para explicarlo de forma simple, el análisis espectral busca representar a la función de desplazamiento en el dominio de la frecuencia de excitación ω_0 y a sus múltiplos o armónicos $j\omega_0$.

$$u(t) \rightarrow u(j\omega_0) \quad (7.2)$$

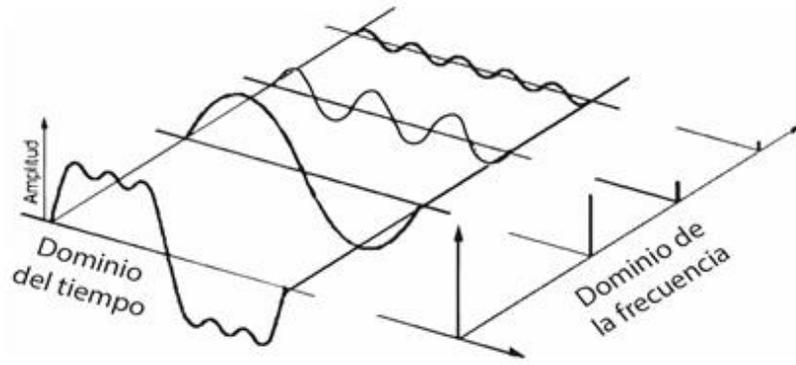


FIGURA VII-1. Relación gráfica entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia

Tal como puede apreciarse en la figura VII-1, y para fines de este análisis, el dominio de la frecuencia es un dominio puntual (no continuo), razón por la cual el análisis espectral puede entenderse, de igual forma, como un método de discretización para el dominio temporal.

Dicha discretización se realiza mediante la representación de la función de excitación en series de Fourier y, tomando ventaja del hecho de que se trabaja con funciones periódicas, se busca calcular los factores de magnificación y desfases de la respuesta permanente, en lugar de obtener una función del desplazamiento como tal.

Los pasos para realizar un análisis espectral en un sistema periódicamente excitado son:

- a) Determinación del periodo fundamental, el tipo de señal y la magnitud de la fuerza.
- b) Representación de la señal en series de Fourier.

Una vez que se conoce la función (ecuación [7.1]), se busca la representación en series de Fourier mediante:

$$F(j\omega_0, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen}(j\omega_0 t) \quad (7.3)$$

donde:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t)$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(j\omega_0 t) dt$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(j\omega_0 t) dt$$

c) Análisis de convergencia.

El análisis consiste en comparar gráficamente ambas funciones, $F(t)$ contra $F(j\omega_0 t)$, y ver que la discretización sea una aproximación representativa del fenómeno (figura VII-2).

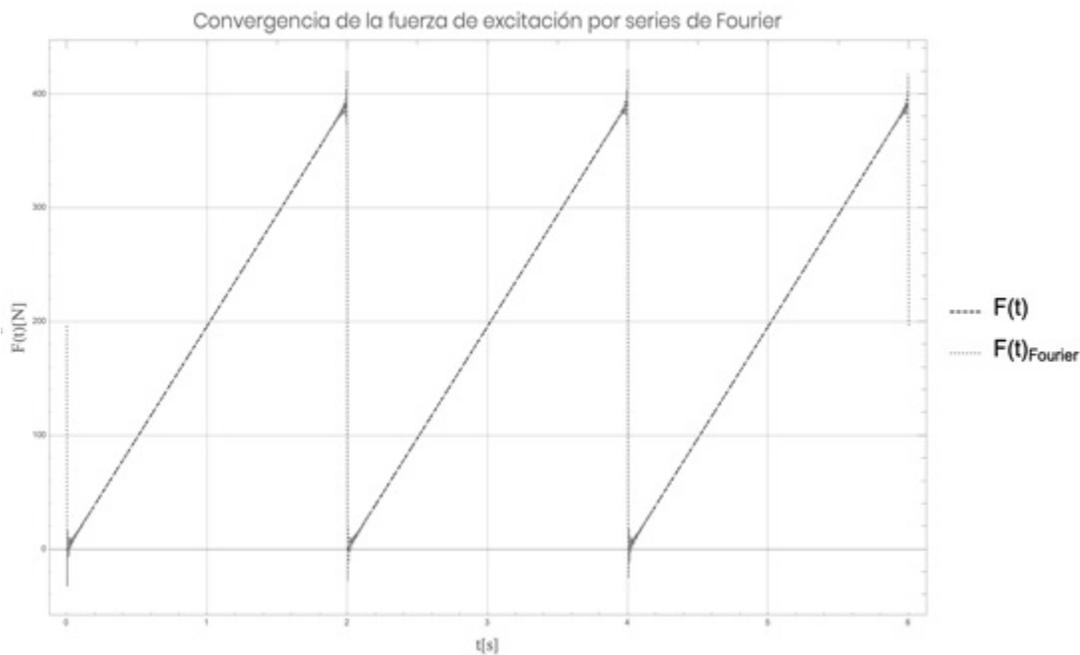


FIGURA VII-2. Análisis de la convergencia, comparación de la fuerza en el dominio del tiempo y su representación en series de Fourier

Se debe notar que en los puntos donde existe un cambio radical de dirección, en el cual la función original no es derivable, se presenta el Fenómeno de Gibbs. Debe tenerse en

cuenta que esto es algo inevitable y es una manifestación de las discontinuidades que presenta la función en la representación en series de Fourier.

d) Cálculo de las razones de frecuencia, magnificaciones y desfases.

Se comienza por calcular las *j*-ésimas por razones de frecuencia y el número depende de la cantidad de armónicos $j\omega_0$ como se considera en el análisis:

$$\Omega_j = \frac{j\omega_0}{\omega} \quad (7.4)$$

donde $j = 1, 2, \dots, n$ y ω es la frecuencia natural del sistema. Una vez calculadas las razones de frecuencia, se procede por obtener las magnificaciones máximas de la respuesta, esto es:

$$H(\Omega_j) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega_j^2)^2 + (2\xi\Omega_j)^2}} \quad (7.5)$$

donde ξ es el factor de amortiguamiento del sistema. Cuando se han calculado las magnificaciones para el *j*-ésimo armónico, se hace lo mismo para los desfases:

$$\varphi_{\Omega_j} = \tan^{-1} \frac{2\xi\Omega_j}{1 - \Omega_j^2} \quad (7.6)$$

e) Amplitudes de Fourier y respuesta en el tiempo adimensional.

A partir de la información anterior, se obtienen las amplitudes de Fourier c_j tal que:

$$c_j = H(\Omega_j) \sqrt{a_j + b_j} \quad (7.7)$$

Como paso adicional y opcional, la respuesta del sistema puede expresarse como función del tiempo adimensional $\bar{t} = \omega t$ así:

$$u(\bar{t}) = \frac{T}{2} \left[c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \operatorname{sen}(\Omega_j \bar{t} - \varphi_{\Omega_j} - \phi_j) \right] \quad (7.8)$$

donde:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\phi_j = \tan^{-1} \left(\frac{a_j}{b_j} \right)$$

f) Obtención del espectro de frecuencias.

En el gráfico siguiente, se deben relacionar:

las entradas: c_j

las salidas: $c_j H(\Omega_j)$

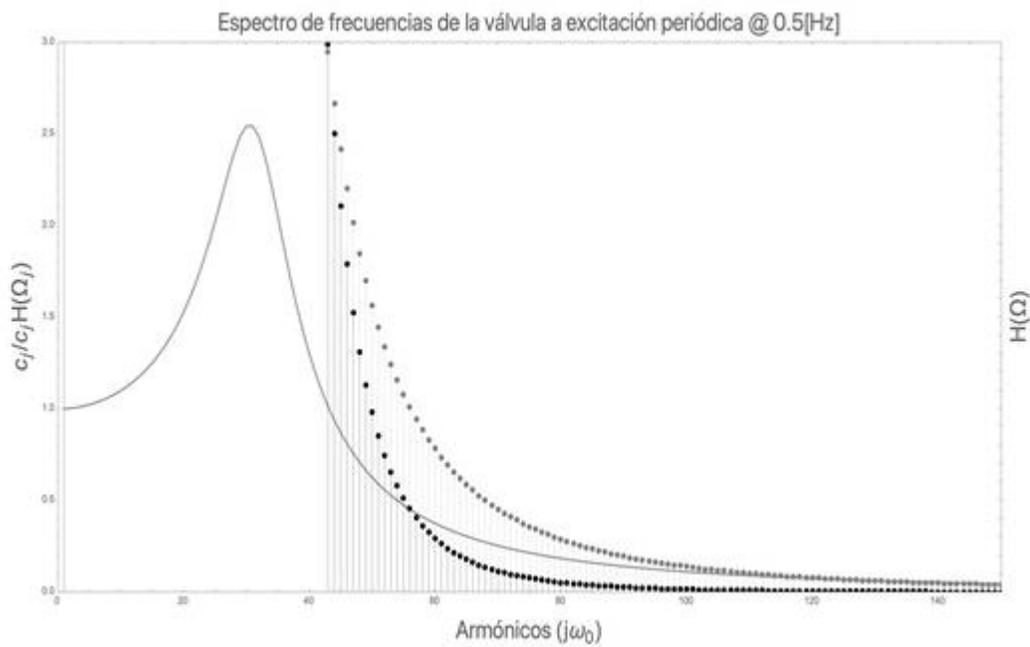


FIGURA VII-3. Ejemplo de un espectro de frecuencias para un sistema periódicamente forzado

Las líneas verticales negras representan la amplitud de entrada, la cual está asociada a la deflexión inicial del cuerpo. Las líneas de color gris representan la amplitud de la respuesta magnificada bajo las condiciones de operación⁴.

EQUIPO POR UTILIZAR

- 1) Software Wolfram Mathematica®.
- 2) Código guía de programación (ver anexo).
- 3) Interfaz de análisis espectral (ver anexo).

PROCEDIMIENTO

A) Programación por parte del alumno:

Los archivos descargables llevarán al alumno paso a paso en la programación de un análisis espectral para un caso de estudio en concreto. En las primeras etapas, el alumno deberá observar cómo las señales van cambiando; para ello, se incluye una tabla con los comandos para cada tipo de función periódica.

TABLA VII-2. Comandos más comunes de Mathematica® para las funciones armónicas cuando se considera que $\omega_0 = 2\pi/T$

Tipo de señal	Comando en Mathematica®
Armónica	$\text{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$
Señal cuadrada	$\text{SquareWave}\left[\left\{F_{0\min}, F_{0\max}\right\}, t/T\right]$
Señal triangular	$\text{TriangularWave}\left[\left\{F_{0\min}, F_{0\max}\right\}, t/T\right]$
Señal diente de sierra	$\text{SawtoothWave}\left[\left\{F_{0\min}, F_{0\max}\right\}, t/T\right]$

⁴ Se debe observar que cuanto más cercano se está en la zona de resonancia, la magnificación obtenida es mayor.

B) *Uso del programa interfaz:*

Con esta interfaz, el estudiante será capaz de variar con mayor facilidad varios parámetros del sistema y a partir de ahí, podrá deducir sus propias conclusiones.

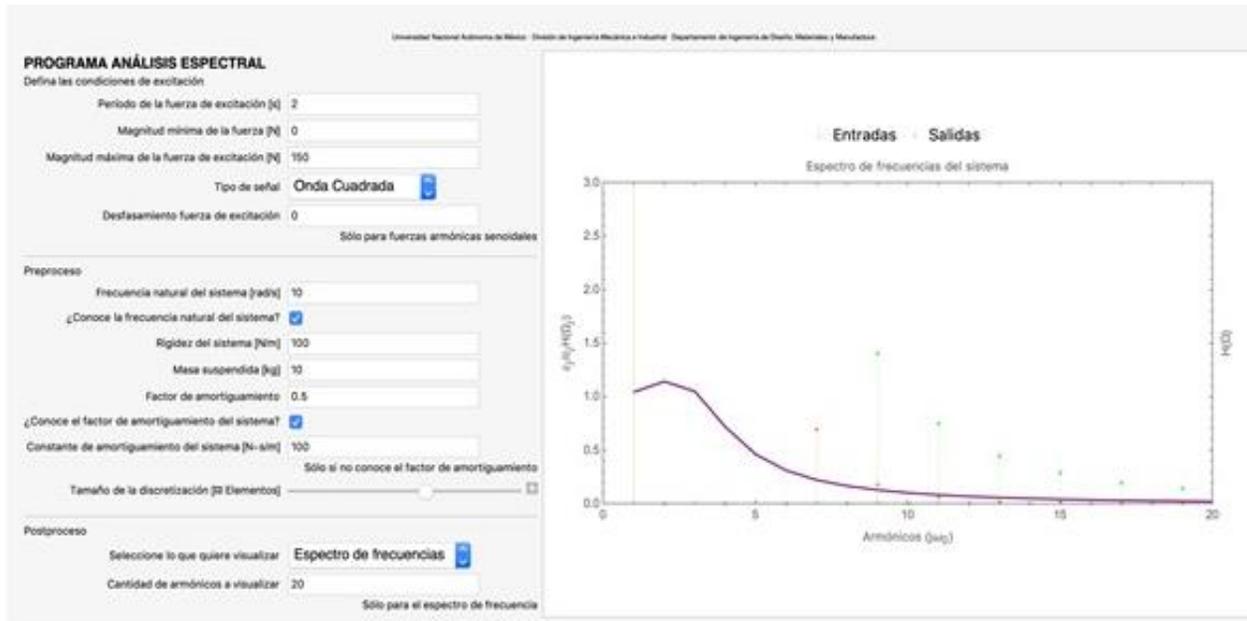


FIGURA VII-4. Interfaz del programa proporcionado (ver anexo)

REPORTE

1) Primero, elaborar una tabla que muestre los distintos casos de señal y el respectivo espectro de frecuencias obtenido.

Tipo de señal	Espectro de frecuencias obtenido
Armónica	[Imagen]
Señal cuadrada	[Imagen]
Señal triangular	[Imagen]
Señal diente de sierra	[Imagen]

2) Enseguida, obtener los espectros de frecuencia de dos casos y comparar.

Cuando $\zeta < 0.3827$

Cuando $\zeta \geq 0.3827$

a) Insertar ambos gráficos y describir lo que se observa.

b) Investigar los conceptos de filtros pasa bajas y altas, y establecer cuál es la relación con lo escrito en el inciso anterior.

3) Finalmente, observar e incluir las imágenes y describir sus observaciones cuando:

a) El factor de amortiguamiento aumenta.

b) ¿Qué pasa en la condición de resonancia $\Omega = 1$ cuando ζ aumenta?

c) ¿Qué relación existe entre la magnificación (línea púrpura) y el comportamiento de las entradas con las salidas del sistema?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHANDRAN, B. y Edward B. Magrab, *Vibraciones*, México, Thomson, 2006.

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 2018.

PRÁCTICA VIII

IMPACTO: CENTRO DE PERCUSIÓN

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Determinar, analíticamente, la posición del centro de percusión de un péndulo para un centro de rotación dado.
- 2) Dados el centro de rotación y un punto de impacto en el péndulo, diseñar el momento de inercia del péndulo para que el punto de impacto sea el centro de percusión.
- 3) Validar ambos diseños.

INTRODUCCIÓN

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido en reposo, las reacciones son un desplazamiento y una rotación. Existe un punto en el cual, el movimiento de traslación y rotación se anulan (el punto permanecerá estático en el espacio), dicho punto se conoce como centro de rotación c_R , mientras que el punto donde actúa la fuerza se conoce como centro de percusión c_P (figura VIII-1). El centro de masa de la barra se designa como c_m .

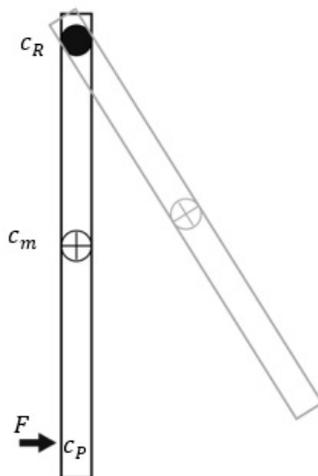


FIGURA VIII-1. Reacción de un cuerpo rígido libre ante un impacto en su centro de percusión

Un péndulo compuesto es un cuerpo rígido que rota respecto a un centro de rotación fijo. A cada centro de rotación le corresponde un centro de percusión cuya posición depende del momento de inercia del péndulo. Si el péndulo recibe un impacto en el centro de percusión, la junta en el centro de rotación no recibirá ninguna reacción (impacto transmitido por el péndulo). De recibir un impacto en cualquier otro punto, la junta recibirá un impacto de magnitud y dirección variable con el punto de impacto.

Cuando se diseña un balancín que puede recibir impactos, es indispensable diseñar su inercia rotacional para que el punto de impacto sea el centro de percusión; de esta forma, se minimizan las consecuencias del impacto en una máquina, por ejemplo: la vibración y ruido.

MODELO DEL PÉNDULO

Para obtener la posición del centro de percusión d_P para un centro de rotación d_R , es necesario conocer la masa m del péndulo y su momento de inercia en el centro de masa I (figura VIII-2).

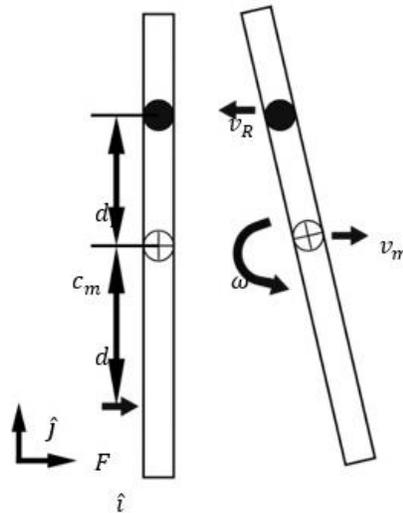


FIGURA VIII-2. Reacción de un cuerpo rígido ante una fuerza

Cuando se somete el cuerpo a una fuerza F , las reacciones serán una aceleración tanto lineal como angular, producirán una velocidad v_m en el centro de masa y una rotación ω en el cuerpo:

$$F = m \dot{v}_m$$

$$F d_p = I \dot{\omega}$$

$$\Rightarrow m d_p v_m = I \omega \tag{8.1}$$

El centro de percusión presentará una velocidad v_R relativa al centro de masa del cuerpo causada por la rotación; no obstante, se sabe que su velocidad absoluta respecto a un sistema de referencia inercial será cero:

$$v_R = \omega d_R$$

$$0 = v_m - v_R$$

$$\Rightarrow v_m = \omega d_R \tag{8.2}$$

De las ecuaciones (8.1) y (8.2) se obtiene la ecuación que relaciona las propiedades inerciales del péndulo y el centro de rotación con el centro de percusión, esto es:

$$\Rightarrow m d_p \omega d_R = I \omega$$

$$\Leftrightarrow m d_p d_R = I \tag{8.3}$$

MODELO DEL PÉNDULO COMPUESTO CON UNA MASA PUNTUAL

Al modificar el momento de inercia del péndulo es posible cambiar el punto donde se ubica su centro de percusión. Para cambiar el momento de inercia, es posible agregar una masa puntual m_M a una distancia c_M del centro de rotación. En el nuevo modelo, el origen del sistema de referencia se desplaza al centro de rotación c_R , c_B corresponde a la distancia del origen al centro de la masa del péndulo y c_m a la distancia del origen al nuevo centro de la masa total (figura VIII-3).

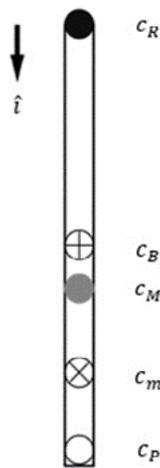


FIGURA VIII-3. Modelo de un péndulo con una masa puntual adicional

Para hacer uso de la ecuación (8.3), es necesario calcular los valores de las nuevas propiedades:

- La masa total queda conformada por la masa del péndulo m_B y la masa puntual m_M :

$$m = m_B + m_M \quad (8.4)$$

- Se calcula la nueva posición del centro de masa para el cuerpo compuesto:

$$c_m = \frac{c_B m_B + c_M m_M}{m_B + m_M} \quad (8.5)$$

- La distancia del centro de masa al centro de rotación se sustituye por c_m :

$$d_R = c_m \quad (8.6)$$

- La distancia del centro de masa al centro de percusión se sustituye por la diferencia entre c_P y c_m :

$$d_P = c_P - c_m \quad (8.7)$$

- El momento de inercia de la masa puntual en el nuevo centro de masa se calcula con c_M como su radio de giro, mientras que el momento de inercia del péndulo I_B se desplaza de su centro de masa a c_m con el teorema de ejes paralelos. Se suman ambos momentos de inercia para obtener el total I :

$$\begin{aligned} I_M' &= m_M (c_m - c_M)^2 \\ I_B' &= I_B + m_B (c_m - c_B)^2 \\ \Rightarrow I &= I_B' + I_M' \\ \Leftrightarrow I &= I_B + m_B (c_m - c_B)^2 + m_M (c_m - c_M)^2 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (8.4) y (8.8) en la ecuación (8.3), se obtiene el modelo total del péndulo compuesto y la masa puntual:

$$c_P = \frac{I_B + c_B^2 m_B + c_M^2 m_M}{c_B m_B + c_M m_M} \quad (8.9)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

1) Modelo de un péndulo para pruebas de impacto:

El modelo consiste en un cuerpo rígido (una barra) que está acoplado en un extremo a una junta que le permite rotar libremente. La junta se encuentra montada en un carro, el cual se puede desplazar sobre una base. La base cuenta con una serie de barrenos dispuestos a diferentes alturas, los cuales permiten descansar a una segunda barra en la cual se impactará el péndulo. Para el diseño de la base, se puede apoyar en el archivo base.dwg (ver anexo). En el diseño de la junta que se acopla al eje del péndulo, usar el archivo center.stl (ver anexo). Y en relación con el diseño del carro en el que se monta la junta y que permite el desplazamiento lineal, usar el archivo percussion.stl (ver anexo).



FIGURA VIII-4. Péndulo compuesto para pruebas de impacto

2) Masa puntual:

Esta consiste en una masa que se puede acoplar al péndulo en distintos puntos, permitiendo modificar su momento de inercia.

PROCEDIMIENTO*A) Determinación del centro de percusión:*

- A.1) Para calcular su momento de inercia en el centro de masa, se debe utilizar la masa y la geometría del cuerpo.
- A.2) Para determinar la posición del centro de percusión del péndulo, se debe emplear la ecuación (8.3).
- A.3) Por último, se debe corroborar la posición del centro de percusión con el péndulo compuesto.

B) Diseño del momento de inercia del péndulo:

- B.1) Cuando se tiene un balancín que recibirá un impacto en un punto dado, como diseñador deberá determinar el momento de inercia del balancín para que el punto de impacto sea el centro de percusión.
- B.2) Dadas las dimensiones del péndulo, fijar un punto a una cierta distancia del centro de rotación para que sea el nuevo centro de percusión del cuerpo.
- B.3) Para determinar la posición donde se debería colocar una masa, se debe utilizar la ecuación (8.9) que permita modificar el momento de inercia del cuerpo, para minimizar los efectos del impacto.
- B.4) El diseño de la inercia del péndulo se debe corroborar con el péndulo compuesto.

REPORTE

- 1) Redactar la memoria de cálculo para determinar el momento de inercia de su péndulo y establecer su centro de percusión. Realizar el experimento y concluir.
- 2) ¿Qué sucede cuando el impacto ocurre en un punto superior al centro de percusión? Realizar el experimento y concluir.

- 3) ¿Qué sucede cuando el impacto ocurre en un punto inferior al centro de percusión? Realizar el experimento y concluir.
- 4) Cuando ya está establecido un punto en el péndulo (distinto del centro de percusión y del extremo inferior del péndulo) donde se recibirá un impacto, así como una masa para modificar el momento de inercia del cuerpo, determinar la posición donde se debe ubicar dicha masa para convertir al punto de impacto en el centro de percusión. Redactar la memoria de cálculo, realizar el experimento y concluir.
- 5) ¿Qué sucede cuando se desea que el centro de percusión sea el extremo inferior del péndulo? Redactar la memoria de los cálculos correspondientes, realizar el experimento y concluir.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CROSS, R., “Center of Percussion of Hand-Held Implements”, *American Journal of Physics*, vol. 72(5), 2004, pp. 622-630.

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 2018.

PRÁCTICA IX

COLISIÓN: RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN NO PERIÓDICA

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Identificar la respuesta de un sistema masa-resorte al ser excitado por medio de una colisión.

INTRODUCCIÓN

El impulso es una función cuya excitación se lleva a cabo en un intervalo de tiempo muy corto. Los efectos del impulso sobre un sistema son apreciables en el instante infinitesimal después del tiempo $t = 0$, es decir, un tiempo $t = 0^+$. Un ejemplo de una fuerza impulsiva es aquella que se genera después de una colisión, esta fuerza se obtiene al integrar el cambio del *momentum* de un objeto con respecto al tiempo. Se estudian dos casos: *colisión perfectamente elástica* y *colisión inelástica*.

FUNCIÓN DE IMPULSO

Mientras que una función de pulso rectangular representa una entrada constante que es súbitamente removida, la función de impulso es aquella cuya excitación toma lugar en un instante de tiempo que tiende a cero. La función de pulso rectangular (figura IX-1) tendrá un valor M en un tiempo mayor a cero y menor o igual a un valor T ; después de este intervalo, la función se vuelve nula. El área bajo la curva es $A = MT$.

$$f(t) = \begin{cases} M & 0 < t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

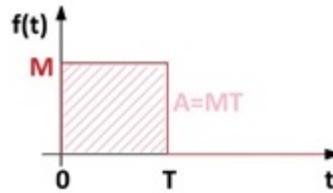


FIGURA IX-1. Función de pulso rectangular

Después de pasar la función de pulso rectangular al dominio de la frecuencia se obtiene:

$$F(s) = \int_0^T M e^{-st} dt = M \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) \quad (9.1)$$

La función de impulso en el dominio de la frecuencia (figura IX-2) se construye tomando el área de la función pulso rectangular $A = MT$ como constante, cuando T es muy pequeño; es decir, se obtiene el límite de $F(s)$ cuando T tiende a cero:

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow 0} M \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) = A \lim_{T \rightarrow 0} \frac{A}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) = A \quad (9.2)$$

Por lo tanto, A se vuelve la magnitud de la fuerza del impulso.

Si $A = 1$, entonces, el impulso es unitario y se conoce comúnmente en la literatura como la función *delta de Dirac* $\delta(t)$. Al interpretar al impulso como condición inicial para un sistema, el impulso comienza en el tiempo $t = 0$, pero sus efectos se aprecian en un momento después con una diferencia infinitesimal llamada $t = 0^+$.

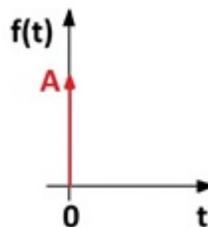


FIGURA IX-2. Función de impulso

Colisión:

Una función con una fuerza impulsiva se puede observar en una colisión; en dicho caso existe una masa m_1 con velocidad v_1 que impacta con una masa m_2 con velocidad v_2 . Al integrar la diferencia de *momentum* de la masa m_1 antes y después del impacto con respecto al tiempo, se obtiene la fuerza impulsiva:

$$mv(t) - mv(0) = \int_0^t f(t) dt \quad (9.3)$$

Se sabe que la integral de la función de la fuerza impulsiva es A , por lo que:

$$mv(t) - mv(0) = A \quad (9.4)$$

Colisión inelástica:

Se tienen dos masas m_1 y m_2 con velocidades iniciales v_1 y v_2 , respectivamente, como se muestra en la figura IX-3.

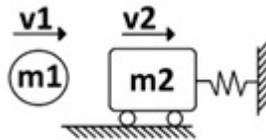


FIGURA IX-3. Sistema de colisión inelástica antes del impacto

Si se le llama m a la masa m_1 y la masa m_2 se vuelve función de m , entonces, $m_2 = qm$, es decir, la masa m_2 es “ q ” veces más grande que la masa m .

Se analiza el cambio en la cantidad del momento lineal de la masa m_1 en el instante $t = 0^+$ en donde la fuerza ya no existe, pero sus efectos ya son apreciados en el sistema, por lo tanto, $A = 0$.

$$mv_3 + qmv_4 - mv_1 - qmv_2 = 0 \quad (9.5)$$

Para asegurar que se lleve a cabo una colisión inelástica, la masa m_1 y la masa m_2 deben quedar unidas después de llevarse a cabo la colisión (figura IX-4), por lo que el sistema mecánico ya no solo consta de una masa $m_2 = qm$, ahora, $m_2 = m + qm$; esto significa que las velocidades v_3 y v_4 serán iguales después de la colisión.

$$v_3 = v_4 = v(0^+) \quad (9.6)$$

al sustituir (9.6) en (9.5), se obtiene:

$$(m + qm)v(0^+) - (mv_1 - qm(0)) = 0 \quad (9.7)$$

al desarrollar:

$$v(0^+) = \frac{m}{(1+q)m} v_1 = \frac{v_1}{(1+q)} \quad (9.8)$$

la ecuación que modela al sistema es:

$$(1+q)m\ddot{x}(t) + kx = 0 \quad (9.9)$$

se resuelve para un tiempo:

$$t \geq 0^+$$

con desplazamiento:

$$x(0^+) = 0$$

y velocidad:

$$\dot{x}(0^+) = v(0^+) = v_3 = v_4 = \frac{1}{(1+q)} v_1$$

con la información anterior, la solución es:

$$x(t) = \frac{v(0^+)}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) \quad (9.10)$$

Al sustituir las condiciones anteriores:

$$x(t) = \frac{v_1}{(1+q)} \left(\sqrt{\frac{(1+q)m}{k}} \right) \text{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{(1+q)m}} t \right) \quad (9.11)$$

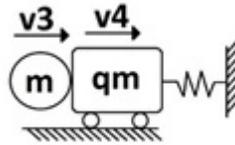


FIGURA IX-4. Sistema de colisión inelástica después del impacto

Colisión perfectamente elástica:

Al estudiar al sistema después de la colisión, se analiza la conservación del *momentum*, esto es:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_3 + m_2 v_4 \quad (9.12)$$

al reagrupar:

$$m_1(v_1 - v_3) = m_2(v_4 - v_2) \quad (9.13)$$

debido a que se considera una colisión perfectamente elástica, la energía cinética se conserva:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_3^2 + \frac{1}{2} m_2 v_4^2 \quad (9.14)$$

al reagrupar:

$$\frac{1}{2} m_1(v_1^2 - v_3^2) = \frac{1}{2} m_2(v_4^2 - v_2^2) \quad (9.15)$$

por diferencia de cuadrados se sabe que:

$$(v_1^2 - v_3^2) = (v_1 + v_3)(v_1 - v_3) \quad (9.16)$$

$$(v_4^2 - v_2^2) = (v_4 + v_2)(v_4 - v_2) \quad (9.17)$$

al sustituir las ecuaciones (9.16) y (9.17) en (9.15), se tiene:

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1 + v_3)(v_1 - v_3) = \frac{1}{2} m_2 (v_4 + v_2)(v_4 - v_2) \quad (9.18)$$

al dividir la ecuación (9.18) entre (9.13) resulta:

$$(v_1 + v_3) = (v_4 + v_2) \quad (9.19)$$

y al resolver (9.13) y (9.19) al mismo tiempo, como en el caso donde la masa m_2 está originalmente estacionaria ($v_2 = 0$), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$v_3 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{(1-q)m}{(1+q)m} v_1 = \frac{(1-q)}{(1+q)} v_1 \quad (9.20)$$

$$v_4 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m}{(1+q)m} v_1 = \frac{2}{(1+q)} v_1 \quad (9.21)$$

de la ecuación (9.20) se obtiene que la velocidad de la masa m_1 , después del impacto es:

$$v_3 = \frac{(1-q)}{(1+q)} v_1 \quad (9.22)$$

al integrar la diferencia de cantidad de movimiento lineal con respecto al tiempo, se obtiene:

$$m \frac{(1-q)}{(1+q)} v_1 - m v_1 = \int_0^t f(t) dt$$

$$\int_0^t f(t) dt = m \frac{-2q}{(1+q)} v_1 \quad (9.23)$$

como se observa en la ecuación (9.23), el impacto perfectamente elástico provoca que la masa m_1 cambie su sentido de movimiento. En la figura IX-5, se observa el esquema de este tipo de

colisión, nótese que para esta colisión, las masas ya no estarán unidas después del evento, por lo que el sistema solo tendrá qm como valor de masa.

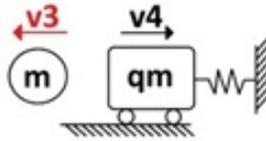


FIGURA IX-5. Sistema de colisión perfectamente elástica después del impacto

Por lo tanto, la ecuación que modela al sistema es:

$$qm \ddot{x}(t) + kx = m \frac{2q}{(1+q)} v_1 \delta(t) \quad (9.24)$$

al resolver esa ecuación se obtiene:

$$x(t) = \frac{2v_1}{(1+q)} \sqrt{\frac{qm}{k}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{qm}} t \right) \quad (9.25)$$

la forma general de la solución se infiere a:

$$\dot{x}(0) = v(0+) = \frac{2v_1}{(1+q)} \quad (9.26)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

- 1) Masas m_1 y m_2 para caso elástico y caso inelástico.
- 2) Resorte con constante conocida de rigidez k .
- 3) Rodamientos que disminuyan el amortiguamiento del sistema tanto como sea posible.
- 4) Dispositivo que asegure velocidad v_1 constante.
- 5) Medidor de desplazamiento, velocidad o aceleración contra tiempo.

PROCEDIMIENTO

A) Recomendaciones:

Se deben utilizar dispositivos que impriman la misma rapidez v_1 a un proyectil masa m_1 en cada ocasión que se emplee. Se recomienda hacer uso de proyectiles esféricos como balines o canicas, ya que estos pueden ser lanzados por curvas cuya velocidad al final del trayecto es conocida cuando se derivan sus trayectorias (figura IX-6). Otra recomendación se apoya en utilizar proyectiles balísticos que puedan ser lanzados por dispositivos mecánicos que garanticen proporcionar una velocidad v_1 conocida y repetible (figura IX-7). El sistema mecánico puede estar conformado por un resorte industrial, una base con rodamientos y una masa de algún material de trabajo en el cual irá montado el acelerómetro.

B) Experimento:

El experimento consiste en realizar dos eventos. En el primero, se llevará a cabo la colisión inelástica, esto significa que el sistema a estudiar consta de la masa m_2 más el proyectil m_1 . En el segundo evento, se llevará a cabo la colisión perfectamente elástica, por lo que el sistema a estudiar solo consistirá en una masa m_2 . Para el primer evento, se recomienda utilizar un proyectil que se una a la masa del sistema mecánico, por ejemplo, una esfera que entre en una cavidad del sistema o un proyectil balístico con ventosas que se adhieran a una superficie lisa del sistema. Para el segundo evento, se recomienda utilizar un proyectil que después de la colisión se aleje lo suficiente del sistema como para ser recuperado, por ejemplo, una pelota de material elástico como la goma o un proyectil balístico con punta de goma.

Las mediciones consistirán en almacenar datos del acelerómetro para ambos eventos.



FIGURA IX-6. Ejemplo de dispositivo cuando se usan proyectiles esféricos

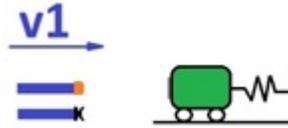


FIGURA IX-7. Ejemplo de eventos con proyectiles balísticos

REPORTE

- 1) Realizar el estudio analítico de las ecuaciones con respecto al tiempo que caracterizan al sistema mecánico en ambos eventos del experimento, sustituyendo los valores conocidos de masa, constante de rigidez y condiciones iniciales. Estas ecuaciones pueden ser graficadas con software de uso académico como Wolfram Mathematica®. Las gráficas por obtener son: $x(t)$ vs t , $v(t)$ vs t y $a(t)$ vs t .
- 2) Los datos obtenidos del acelerómetro son datos de aceleración ($[m/ss]$) contra el tiempo (usualmente dados en $[ms]$ que transforme a $[s]$), entonces, es necesario generar datos de velocidad y desplazamiento. Se debe utilizar un procesador de datos como Microsoft Excel® para generar un polinomio que se ajuste al conjunto de datos e integre el polinomio una vez para velocidad ($[m/s]$) y dos veces para desplazamiento ($[m]$). Graficar los datos obtenidos, las gráficas deben ser en el mismo formato que las obtenidas analíticamente $x_e(t)$ vs t , $v_e(t)$ vs t y $a_e(t)$ vs t .
- 3) Una vez que se obtienen las gráficas de la solución analítica y las gráficas de los datos experimentales, se comparan las gráficas de desplazamiento de forma cualitativa, así como los valores de velocidad para el tiempo inicial cero. Si los valores presentan errores mayores al 10%, se enlistan las razones por las cuales esto sucede y las soluciones en el modelo analítico para disminuir el error.

Evento	Velocidad analítica $V(0+) [m/s]$	Velocidad experimental $V_e(0+) [m/s]$	Error [%]
Colisión inelástica			
Colisión elástica			

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PALM III, William, J., *Mechanical Vibration*, Hoboken, John Wiley & Sons, 2006.

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 2nd ed., Massachusetts, Addison-Wesley, 1990.

THOMPSON, William, T., *Vibration Theory with Applications*, 4th ed., Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1992.

PRÁCTICA X

ANÁLISIS MODAL: DISCRETIZACIÓN DE UN SISTEMA MECÁNICO

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Utilizar la formulación de Euler-Lagrange para construir las ecuaciones del elemento finito para sistemas mecánicos simples.
- 2) Realizar el análisis modal y calcular una solución mediante el uso de Mathematica®.

INTRODUCCIÓN

Cuando se trata de analizar sistemas continuos sujetos a una condición de vibración, una simplificación muy útil para la industria es llevarlos a un dominio discreto. Bajo este enfoque es el dominio espacial, el cual se analiza de manera puntual para llegar a un modelo de múltiples grados de libertad.

En la implementación computacional, resulta más práctico formular las ecuaciones del elemento finito, que a su vez son las ecuaciones del sistema, mediante un método de residuos ponderados o de Galerkin, aunque, para sistemas donde el número de nodos (#GDL) no es tan amplio, se pueden utilizar algunos métodos más sencillos como son las formulaciones variacionales o de Euler-Lagrange. Una vez que las ecuaciones han sido establecidas, se utiliza el análisis modal para resolver los desplazamientos individuales.

DISCRETIZACIÓN DE UN SISTEMA MECÁNICO MEDIANTE LAS ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

En la figura X-1, se muestra un sistema mecánico cuya masa es m y posee un largo L , así como un módulo de Young E_y . Al discretizar el dominio espacial del cuerpo, ese mismo sistema se puede ver como un conjunto de cuerpos de masa m_i conectados entre sí.

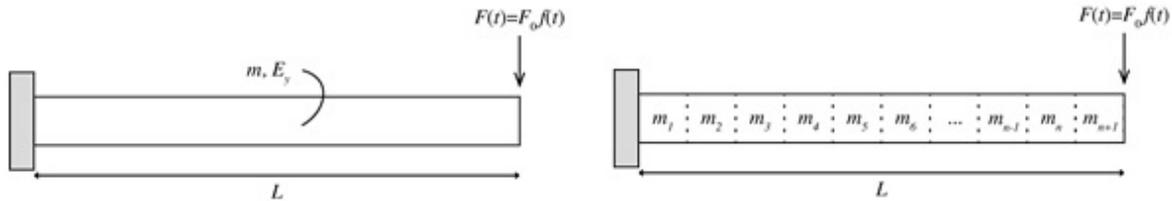


FIGURA X-1. Sistema mecánico continuo (izquierda), sistema mecánico discretizado (derecha)

Para entender un poco mejor la forma cómo se podrían plantear las ecuaciones de equilibrio, el sistema discretizado puede reescribirse como un conjunto de sistemas MRA (Masa-Resorte-Amortiguador) interconectados, figura X-2.

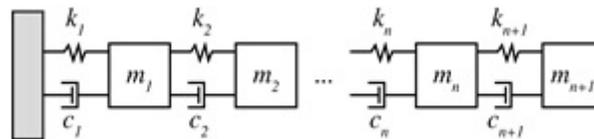


FIGURA X-2. Conjunto del sistema MRA para el sistema discretizado

Una vez que el diagrama de conexión se ha establecido, lo que procede es construir las ecuaciones de equilibrio, en este caso debido a que el sistema posee más de dos GDL (Grados de Libertad), lo más recomendado es utilizar la formulación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{10.1}$$

donde $L=T-V$ es el lagrangiano del sistema, T y V son las energías cinética y potencial respectivamente, mientras que q_i es el grado de libertad generalizado, Q_i es una componente del vector de carga y D es la función de disipación total definida como:

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} c_i \dot{q}_i^2 \tag{10.2}$$

de tal forma que, c_i es la constante de amortiguamiento viscoso. Una vez que se han aplicado las ecuaciones de Euler-Lagrange, y se reagrupan los términos en función de las coordenadas generalizadas por las que se encuentran multiplicados, se construye un sistema de la forma:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = Q \tag{10.3}$$

M , C y K son las matrices de propiedades inerciales, amortiguamiento y rigidez respectivamente. *A priori*, este sistema de ecuaciones diferenciales no puede ser resuelto, directamente, por alguno de los métodos tradicionales, esto es debido a que en la mayoría de los casos resultaría en una solución compleja derivada de las raíces que eventualmente se deben obtener para la solución, en consecuencia, se desarrolla el análisis modal.

ANÁLISIS MODAL

El análisis modal busca dar una solución real al sistema de ecuaciones diferenciales que se forma. El principio del análisis es simple, se trata de representar a ese mismo sistema en términos de una base vectorial que le permita diagonalizar las matrices y, de esta forma, *desacoplar* los efectos combinados de cada modo de vibración. Esto se logra a partir de los conceptos de los *eigenvalores* y *eigenvectores*.

Para este caso particular, cuando el sistema no tiene efectos de amortiguamiento considerables o despreciables, lo más recomendado es partir del concepto de la matriz dinámica. Esto es:

$$C_{DN} = M^{-1}K \quad (10.4)$$

si, por el contrario, se consideran los efectos de disipación, el problema del valor se complica demasiado, ya que no siempre es sencillo obtener los valores principales. Para esto se han desarrollado modelos de amortiguamiento más simples para que ayuden a simplificar el problema, como es el caso del *amortiguamiento de Rayleigh*, el cual supone que la matriz de amortiguamiento puede expresarse en términos de una combinación lineal de las matrices de propiedades inerciales y amortiguamiento o, por otro lado, se encuentra el concepto del *factor de pérdida*, lo cual ayuda a ver a la matriz de rigidez como una cantidad fasorial.

Sistema sin amortiguamiento:

$$\det(C_{DN} - \lambda_i I) = 0 \quad (10.5)$$

Sistema con amortiguamiento:

$$\det(M\lambda_i^2 + C\lambda_i + K) = 0 \quad (10.6)$$

donde λ_i es el i -ésimo eigenvalor del sistema, producto de resolver el polinomio característico derivado de la resolución de la ecuación (10.6). Una vez calculados los eigenvalores, se obtienen los eigenvectores $U^{(i)}$.

Sistema sin amortiguamiento:

$$(C_{DN} - \lambda_i 1)U^{(i)} = 0 \quad (10.7)$$

Sistema con amortiguamiento:

$$(M\lambda_i^2 + C\lambda_i + K)U^{(i)} = 0 \quad (10.8)$$

Cuando los eigenvectores han sido calculados, se procede a construir la matriz modal, la cual se define como la conjunción de dichos vectores característicos del sistema, esto es:

$$\Phi = [U^{(1)} \quad U^{(2)} \quad \dots \quad U^{(n)}] \quad (10.9)$$

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} U_1^{(1)} & U_1^{(2)} & \dots & U_1^{(n)} \\ U_2^{(1)} & U_2^{(2)} & \dots & U_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_n^{(1)} & U_n^{(2)} & \dots & U_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

Otra forma de entender a la matriz modal es como la base vectorial asociada a las coordenadas naturales del sistema, entonces, esta puede funcionar como una matriz de cambio de base, misma que se aplicará para representar las matrices y vectores que conforman al sistema en función de la base principal o las coordenadas naturales. El vector de desplazamiento (amplitud) modal η se define como:

$$u = \Phi\eta \quad (10.11)$$

$$u_i = \Phi_{ij}\eta_j \quad (10.12)$$

al sustituir en la ecuación del sistema:

$$M_{jk}\Phi_{ij}\ddot{\eta}_j + C_{jk}\Phi_{ij}\dot{\eta}_j + K_{jk}\Phi_{ij}\eta_j = Q_k \quad (10.13)$$

premultiplicando la expresión anterior por la transpuesta de la matriz modal:

$$\Phi_{ji} M_{jk} \Phi_{ij} \ddot{\eta}_j + \Phi_{ji} C_{jk} \Phi_{ij} \dot{\eta}_j + \Phi_{ji} K_{jk} \Phi_{ij} \eta_j = \Phi_{ji} Q_k$$

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T C \Phi \dot{\eta} + \Phi^T K \Phi \eta = \Phi^T Q \tag{10.14}$$

al analizar las matrices de propiedades inerciales (de masa), amortiguamiento y rigidez con las transformaciones homogéneas aplicadas:

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} = m_k \tag{10.15}$$

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} = c_k \tag{10.16}$$

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} = k_k \tag{10.17}$$

$$m_k \ddot{\eta}_k + c_k \dot{\eta}_k + k_k \eta_k = F_k \tag{10.18}$$

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k \tag{10.19}$$

por lo tanto, el desplazamiento modal η_k se calcula como la superposición de una respuesta libre más una forzada, es decir:

$$\eta_k(t) = \eta_k^{\text{libre}}(t) + \eta_k^{\text{forzada}}(t) \tag{10.20}$$

$$\eta_k(t) = \eta_{0k} e^{-\zeta_k \omega_k t} \text{sen}(\omega_{d_k} t + \varphi_{0_k}) + \frac{1}{m_k \omega_{d_k}} \int_0^t e^{-\zeta_k \omega_k \xi} \text{sen}(\omega_{d_k} \xi) F(t - \xi) d\xi \quad (10.21)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

- 1) Software Wolfram Mathematica®.
- 2) Dos módulos con acelerómetro para Arduino®.
- 3) Un Arduino® Uno®.
- 4) Computadora.
- 5) Barra de metal de 1 m de largo.
- 6) Una prensa.

PROCEDIMIENTO

A) *Instalar el experimento:*

Se deberá colocar la barra de metal, de tal forma, que represente a una viga en voladizo tal como se muestra en la figura X-3. Sobre puntos estratégicos de la misma, se colocarán los acelerómetros. Se recomienda en los primeros dos tercios del dominio del análisis.

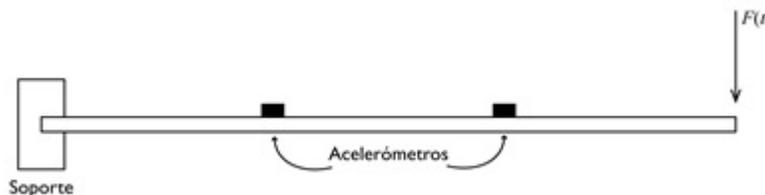


FIGURA X-3. Diagrama de la instalación del experimento

Los acelerómetros se deben programar, de tal forma, que se puedan obtener los datos de desplazamientos de cada uno de los puntos (nodos). En caso de que únicamente se puedan

obtener los datos de aceleración, se implementa un método numérico como las *reglas de Simpson* para integrar los datos y obtener los desplazamientos.

B) *Uso del programa interfaz:*

Aquí, se proporciona una versión más automática del algoritmo, en este caso, el alumno debe ser capaz de variar con mayor facilidad varios parámetros del sistema y a partir de ahí, obtener sus propias conclusiones.

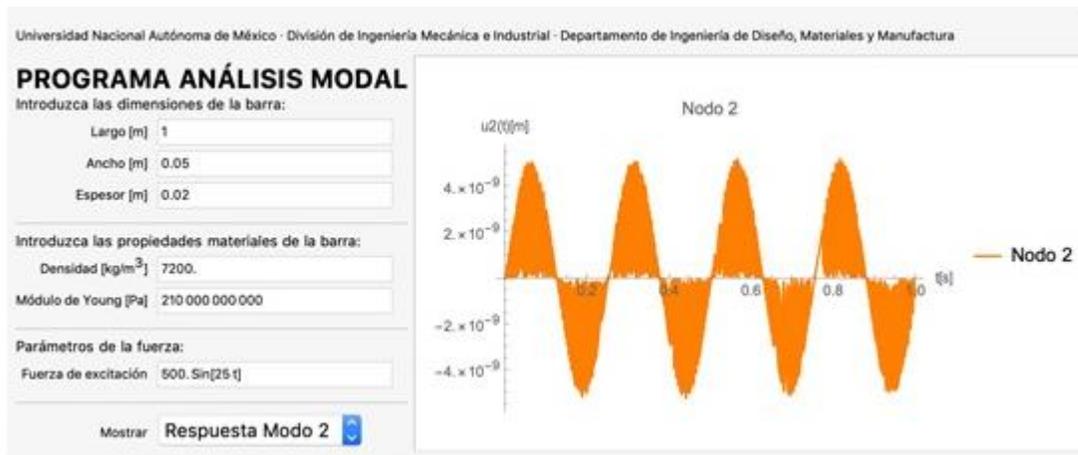


FIGURA X-4. Interfaz del programa proporcionado

REPORTE

- 1) Se deben comparar los resultados obtenidos con el programa proporcionado para cada uno de los dos nodos teóricos y los experimentales obtenidos con los acelerómetros.
-
-

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHANDRAN, B. y Edward B. Magrab, *Vibraciones*, México, Thomson, 2006.

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 20

PRÁCTICA XI

SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD: ESPACIO DE ESTADOS

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Obtener mediante el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange el modelo matemático de un sistema de múltiples grados de libertad.
- 2) Linealizar el modelo y obtener su solución mediante la representación en el espacio de estados.
- 3) Comparar, experimentalmente, la solución linealizada.

INTRODUCCIÓN

Sistemas de múltiples grados de libertad

Al conjunto mínimo de variables independientes que se necesitan para describir un sistema se le conoce como coordenadas generalizadas y cuando un sistema requiere más de una variable es denominado de varios grados de libertad. Así, en un sistema de “n” grados de libertad se tendrán “n” coordenadas generalizadas que pueden ser comúnmente representadas mediante las variables q_k . Las ecuaciones de movimiento para un sistema es posible obtenerlas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange que se describen en términos de coordenadas generalizadas mediante:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta E_k}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta E_k}{\delta q_j} + \frac{\delta E_d}{\delta \dot{q}_j} + \frac{\delta E_p}{\delta q_j} = Q_j \quad \text{con } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (11.1)$$

donde E_k es la energía cinética, E_p la energía potencial, E_d la energía disipada y Q_j la fuerza generalizada. Cuando las fuerzas que se ejercen son únicamente conservadoras, se tiene $Q_j = 0$.

Con la ecuación anterior, se obtiene un número de ecuaciones diferenciales igual al número de coordenadas generalizadas.

El modelo en el espacio de estados de un sistema físico debe consistir en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para representar la dinámica del sistema. El sistema se modela en un espacio vectorial conocido como espacio de estados, donde cada punto debe ser un posible estado del sistema. La base vectorial de dicho espacio está dada por un conjunto de vectores llamados variables de estado. Dichos vectores deben ser el mínimo conjunto de variables linealmente independientes para definir el estado del sistema, es decir, deben ser la configuración espacial y energética para un instante dado.

Normalmente, para un sistema mecánico, las variables de estado deben ser las coordenadas generalizadas y sus derivadas. Comúnmente, se utiliza una segunda ecuación para calcular las variables de interés del sistema a partir de las variables de estado. El modelo se sustenta en el hecho de que, para un sistema lineal, cualquier variable se puede expresar como una combinación lineal de las variables de estado y las entradas del sistema.

MODELO DEL SISTEMA VIBRATORIO

El sistema vibratorio que se va a analizar se forma por un péndulo compuesto de masa m_P , momento de inercia I y centro de masa l_G . El péndulo se encuentra montado en un carro de masa m , el cual se desliza con una disipación b sobre un riel. Adicionalmente, el carro se encuentra acoplado a un resorte de elasticidad k y, entre el péndulo y el carro, debe existir una disipación angular b_P .

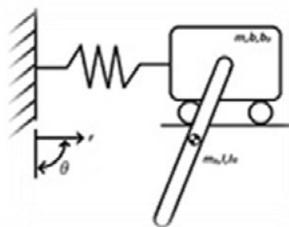


FIGURA XI-1. Sistema resorte-carro-péndulo compuesto

Para obtener el modelo mediante la ecuación de Euler-Lagrange, como primer paso, se debe calcular la energía cinética E_K y potencial E_P del sistema, así como la energía disipada E_D .

La energía cinética del sistema debe estar distribuida en el carro (la velocidad en la dirección del desplazamiento r') y el péndulo (la velocidad del centro de masa y la rotación θ'):

$$E_k = \frac{1}{2} m (r')^2 + \frac{1}{2} m_p (r' + l_G \theta' \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} m_p (l_G \theta' \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} I (\theta')^2 \quad (11.2)$$

La energía potencial del sistema se debe dar por la elevación del centro de masa del péndulo, la aceleración de gravedad g y la deformación del resorte r :

$$E_p = m_p g l_G (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k r^2 \quad (11.3)$$

La energía disipada del sistema se debe al movimiento del carro y péndulo:

$$E_D = \frac{1}{2} b (r')^2 + \frac{1}{2} b_p (\theta')^2 \quad (11.4)$$

Los términos calculados se sustituyen en la ecuación de Euler-Lagrange, se observa que las coordenadas generalizadas deben ser la posición del carro r y el ángulo del péndulo θ :

$$\partial_t \begin{bmatrix} \partial_{r'} (E_k - E_p) \\ \partial_{\theta'} (E_k - E_p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_r (E_p - E_k) \\ \partial_\theta (E_p - E_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_{r'} (E_D) \\ \partial_{\theta'} (E_D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Al expandirse los términos, se obtiene el modelo del sistema:

$$\begin{bmatrix} k r + b r' - \sin(\theta) l_G m_p \theta'^2 + m r'' + m_p r'' + \cos(\theta) l_G m_p \theta'' \\ g \sin(\theta) l_G m_p + b_p \theta' + \cos(\theta) l_G m_p r'' + I \theta'' + l_G^2 m_p \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

Cabe observar, que el modelo es altamente no lineal, por lo que se aplican las aproximaciones (11.7) que asumen ángulos, velocidades y aceleraciones cercanos a cero para obtener el modelo lineal (11.8):

$$\sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1 - \theta, \theta \theta' \approx 0, \theta \theta'' \approx 0, \theta r'' \approx 0, \theta'^2 \approx 0 \quad (11.7)$$

$$\begin{bmatrix} k r + b r' + m r'' + m_p r'' + l_G m_p \theta'' \\ g l_G m_p \theta + b_p \theta' + l_G m_p r'' + I \theta'' + l_G^2 m_p \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m+m_p & l_G m_p \\ l_G m_p & I+l_G^2 m_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'' \\ \theta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & g l_G m_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

Según la posición, se escogen el ángulo, la velocidad y la velocidad angular como variables de estado para obtener el modelo en espacio de estados del sistema:

$$\begin{bmatrix} r' \\ \theta' \\ r'' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k(I+l_G^2 m_p)}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} & \frac{g l_G^2 m_p^2}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} & -\frac{b(I+l_G^2 m_p)}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} & \frac{b_p l_G m_p}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} \\ \frac{k l_G m_p}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} & -\frac{g l_G m_p (m+m_p)}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} & \frac{b l_G m_p}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} & -\frac{b_p (m+m_p)}{(I)(m)+(I+m l_G^2) m_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ r' \\ \theta' \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

La respuesta del sistema se obtiene mediante la transformada inversa de Laplace y debe depender de las condiciones iniciales r_0 , θ_0 , v_0 y ω_0 .

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \\ r' \\ \theta' \end{bmatrix} = L^{-1} \left[\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k(I+l_G^2 m_p)}{Im+(I+m l_G^2) m_p} & \frac{g l_G^2 m_p^2}{Im+(I+m l_G^2) m_p} & -\frac{b(I+l_G^2 m_p)}{Im+(I+m l_G^2) m_p} & \frac{b_p l_G m_p}{Im+(I+m l_G^2) m_p} \\ \frac{k l_G m_p}{Im+(I+m l_G^2) m_p} & -\frac{g l_G m_p (m+m_p)}{Im+(I+m l_G^2) m_p} & \frac{b l_G m_p}{Im+(I+m l_G^2) m_p} & -\frac{b_p (m+m_p)}{Im+(I+m l_G^2) m_p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \right] \quad (11.10)$$

EQUIPO POR UTILIZAR

- 1) Modelo de sistema vibratorio:
 - a) Sistema de resorte-carro-péndulo compuesto.
- 2) Balanza.
- 3) Cámara de video.
- 4) Escalímetro.
- 5) Software de análisis de video (se recomienda usar Kinovea o Camtasia Studio para manipulación de cuadros).



FIGURA XI-2. Prototipo del sistema resorte-carro-péndulo compuesto

PROCEDIMIENTO

A) *Datos del sistema:*

Obtener la masa del carro y del péndulo. El coeficiente de rigidez del resorte se puede determinar cuando se coloca una masa conocida y se mide la longitud deformada del resorte.

B) *Disipación del péndulo b_p :*

Calcular el centro de gravedad del péndulo. Con la masa del carro estática, hacer oscilar el péndulo y gravar el evento. La disipación b_p se obtiene por la ecuación siguiente:

$$b_p = \frac{2I \ln\left(\frac{\theta(0)}{\theta(t)}\right)}{t} \quad (11.11)$$

donde $\theta(0)$ es la posición inicial, $\theta(t)$ es la posición un periodo después, t es el tiempo que dura el periodo e I es el momento de inercia del cg respecto al eje de giro.

C) *Coeficiente de amortiguamiento del carro b :*

Hacer oscilar la masa conectada al resorte sin el péndulo y grabar el evento. Obtener la disipación con la siguiente relación:

$$b = \frac{2m \ln\left(\frac{r(0)}{r(t)}\right)}{t} \quad (11.12)$$

donde m es la masa del carro, $r(0)$ es la posición inicial, $r(t)$ es la posición un periodo después y t es el tiempo que dura el periodo.

D) *Desplazamiento del sistema:*

Para el sistema completo carro-péndulo-resorte, generar un pequeño desplazamiento angular del péndulo y grabar la respuesta tanto del carro como del péndulo. Utilizar el software Kinovea y obtener los desplazamientos del carro y del péndulo.

E) *Análisis experimental:*

Obtener la transformada inversa de Laplace. Use la ecuación (11.10). Las condiciones iniciales se obtienen al aplicar el paso anterior (inciso D).

REPORTE

1) Llenar la siguiente tabla con los valores obtenidos experimentalmente:

Modelo	
m [kg]	
m_p [kg]	
K [N/m ²]	
b_p [m ⁴ /s]	
b [kg/s]	
I [m ⁴]	

- 2) Escribir las ecuaciones de la respuesta del carro y del péndulo, y graficarlas respecto al tiempo. Después, comparar los resultados teóricos con los obtenidos experimentalmente. Escribir las observaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHANDRAN, B. y Edward B. Magrab, *Vibraciones*, México, Thomson, 2006.

HE, Jimin & Zhi-Fang Fu, *Modal Analysis*, Oxford, Butterworth-Heinemann, 2001.

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 2018.

THOMSON, William T. & Marie Dillon Dahleh, *Theory of Vibrations with Applications*, Santa Barbara, Pearson, 1998.

PRÁCTICA XII

ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN DINÁMICO NO AMORTIGUADO

OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica van dirigidos a:

- 1) Analizar un sistema vibratorio en el cual, mediante un absorbedor de vibración, se mitiguen las vibraciones mecánicas en una viga empotrada que es sometida a excitaciones armónicas.

INTRODUCCIÓN

El absorbedor de vibración, también llamado absorbedor de vibración dinámico, es un dispositivo mecánico que se utiliza para reducir o eliminar la vibración indeseable. Una máquina o sistema puede experimentar vibración excesiva, si en ella actúa una fuerza cuya frecuencia de excitación casi coincida con una frecuencia natural de la máquina o sistema.

En tales casos, la vibración de la máquina o sistema se puede reducir por medio de un neutralizador de vibración o absorbedor de vibración dinámico, el cual es simplemente otro sistema de resorte-masa anexado a la masa principal (original) que debe ser protegida contra la vibración. Por lo tanto, la masa principal y la masa del absorbedor anexadas constituyen un sistema de dos grados de libertad, de ahí, que el absorbedor de vibración tenga dos frecuencias naturales.

El absorbedor de vibración dinámico se diseña, de tal modo, que las frecuencias naturales del sistema resultantes se alejen de la frecuencia de excitación. El absorbedor de vibración se utiliza comúnmente en maquinaria que opera a velocidad constante, porque el absorbedor de vibración se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo solo dentro de una banda angosta de frecuencias. Los primeros usos de absorbedores de vibración datan de 1883 y 1909, sus aplicaciones se destacan en la estabilización de buques y disminución de la vibración en motores de combustión interna. De igual forma, desde hace décadas, se han utilizado

absorbedores para minimizar oscilaciones de edición altas y, en la actualidad, las aplicaciones de los absorbedores de vibración son variadas.

Algunas otras aplicaciones comunes del absorbedor de vibración comprenden herramientas reciprocantes como las lijadoras, sierras y compactadoras, así como grandes motores de combustión interna reciprocantes, los cuales funcionan a velocidad constante (para un consumo mínimo de combustible). En estos sistemas, el absorbedor de vibración ayuda a balancear las fuerzas reciprocantes. Sin un absorbedor de vibración, las fuerzas reciprocantes desbalanceadas podrían hacer que el dispositivo fuera imposible de mantenerse o de controlar.

Se manejan dos tipos de absorbedores de vibración: no amortiguados y amortiguados. Los no amortiguados se conforman de una masa y un resorte que se conectan a la masa principal, mientras que, a los amortiguados se les agrega un elemento disipador de energía.

MODELO DEL SISTEMA VIBRATORIO

El absorbedor de vibración dinámico no amortiguado es diseñado, de modo que, las frecuencias naturales del sistema resultantes deben alejarse de la frecuencia de excitación. Si se fija una masa auxiliar m_2 a una máquina de masa m_1 mediante un resorte de rigidez k_2 , el sistema de dos grados de libertad es como se muestra en la figura XII.1. El análisis de un absorbedor de vibración dinámico se considera como un sistema de un solo grado de libertad al idealizar la máquina.

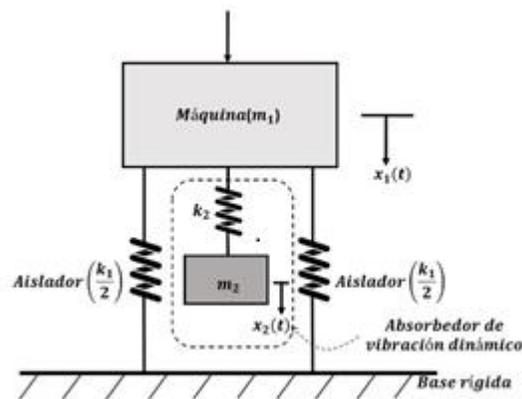


FIGURA XII-1. Absorbedor de vibración dinámico no amortiguado

Las ecuaciones de movimiento de las masas m_1 y m_2 son:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_0 \sin \omega t \quad (12.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (12.2)$$

donde $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$ que es la excitación armónica aplicada sobre la masa principal. De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \text{sen } \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

cuando se supone una solución armónica:

$$x_j(t) = X_j \text{sen } \omega t, \quad j = 1, 2 \quad (12.4)$$

se obtienen las amplitudes de estado estables de las masas m_1 y m_2 como:

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (12.5)$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (12.6)$$

lo que se desea hacer es reducir la amplitud de la máquina (X_1), es decir, reducir a cero la amplitud de m_1 , por lo que el numerador de la ecuación (12.5) debe ser igual a cero, lo que da como resultado:

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (12.7)$$

Si la máquina opera cerca de su condición de resonancia, antes de la adición del absorbedor de vibración dinámico $\omega^2 \cong \omega_1^2 = k_1/m_1$, entonces, el absorbedor se diseña de modo que:

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \quad (12.8)$$

la amplitud de vibración de la máquina, mientras opera a su frecuencia resonante original, será cero. Se define así:

$$\delta_{\text{est}} = \frac{F_0}{k_1} \quad (12.9)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (12.10)$$

como la frecuencia natural de la máquina o sistema principal y:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (12.11)$$

de acuerdo con la frecuencia natural del absorbedor o sistema auxiliar las ecuaciones (12.5) y (12.6) se pueden reescribir:

$$\frac{X_1}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (12.12)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (12.13)$$

Desbalance rotatorio:

Un causante usual de las vibraciones son los equipos rotatorios que al tener presentes pequeñas irregularidades en la distribución de la masa en el componente rotatorio, pueden producir altas vibraciones en el sistema, lo cual se conoce como desbalance rotatorio.

El desbalance o desequilibrio se presenta cuando no coincide el centro de gravedad con el centro de giro, porque al girar se induce una fuerza centrífuga no compensada que rota a la velocidad de giro. Cuando el sistema rotativo es ligero, el desbalance se presenta como uno de los siguientes tipos:

- *Desbalance estático*: los ejes son paralelos, de manera que, el centro de gravedad no está en el eje de giro.
- *Desbalance de par*: el eje central principal intercepta con el eje de giro en el centro de gravedad del rotor y se produce un efecto de par.
- *Desbalance cuasi-estático*: el eje central principal intercepta al eje de rotación, pero no en el centro de gravedad del rotor.
- *Desbalance dinámico*: es el caso más común, es una combinación de los anteriores cuando los ejes no se cruzan y están en cualquier posición en el espacio.

En la figura XII-2 se ilustra un esquema del modelo de una máquina rotatoria de un grado de libertad con un desbalance rotatorio de masa m_0 y distancia desde el centro de rotación e (excentricidad) que se soporta por una base con elasticidad k y amortiguamiento c .

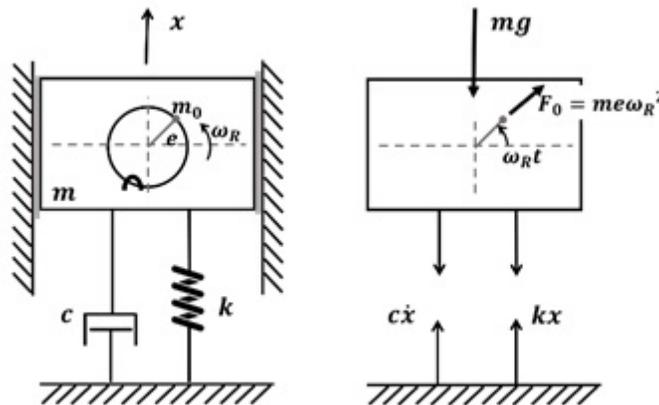


FIGURA XII-2. Sistema rotatorio

Las fuerzas de entrada que el movimiento vibratorio provoca, se originan por el desbalanceo en la rotación, el cual existe, si el centro de masa del cuerpo rígido rotatorio y el centro de rotación no coinciden, es decir, se trata de un desbalance dinámico. Al suponer que el rotor (motor) debe

girar a una velocidad constante (ω_R) y que la masa desbalanceada m_0 se localiza a una distancia e del centro de rotación, la masa desbalanceada debe producir una fuerza centrífuga de magnitud $m_0 e \omega_R^2$.

De acuerdo con el sistema, cuando por la suma de las fuerzas se omite el amortiguador, se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$M \ddot{x} + kx = -m_0 \ddot{x}_r \quad (12.14)$$

donde x_r es la coordenada en x del desbalance con respecto al centro de rotación y se calcula como $x_r = e \sin(\omega t)$ y la frecuencia de rotación del equipo está denotada por $\omega_R = \omega$

al reemplazar $x_r = e \sin(\omega t)$ en la ecuación de movimiento:

$$M \ddot{x} + kx = m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) \quad (12.15)$$

por lo que la solución particular es:

$$x_p = C \sin(\omega t) \quad (12.16)$$

donde:

$$C = \frac{F_0}{k - M\omega^2} = \frac{\delta_{\text{est}}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (12.17)$$

con $F_0 = m_0 e \omega_R^2$ y $\delta_{\text{est}} = F_0/k$ que indican la desviación de la masa bajo la fuerza F_0 , se le conoce como deflexión estática, porque es una fuerza constante. La amplitud máxima C representa la relación de la amplitud del movimiento dinámico con la amplitud del movimiento estático y se conoce como factor de amplificación o relación de amplitud.

EQUIPO POR UTILIZAR

- 1) Cronómetro.
 - 2) Escalímetro o regla.
 - 3) Balanza.
 - 4) Modelo de sistema vibratorio.
 - a) Motor.
 - b) Disco con masa para desbalance.
 - c) Viga.
 - d) Soportes.
 - e) Absorbedor de vibración.
-
-

PROCEDIMIENTO**A) Sistema vibratorio (sin control de vibración):**

Construir el sistema vibratorio de la viga en voladizo con un motor con desbalance rotatorio mostrado en la figura XII-3.

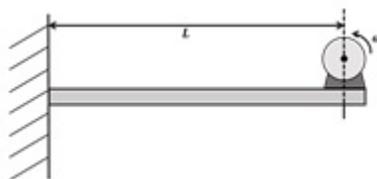


FIGURA XII-3. Sistema vibratorio de motor con desbalance rotatorio en viga, en voladizo y sin control de vibración

B) *Datos del sistema vibratorio sin control de vibración (teórico):*

B.1) Medir la masa del motor (m_{motor}), la masa del desbalance ($m_{\text{desbalance}} = m_0$), la masa total ($M = m_{\text{motor}} + m_{\text{desbalance}}$) y la distancia del centro de rotación a donde se encuentra localizada la masa desbalanceada (e).

B.2) Obtener la constante elástica de la viga (k_{viga}).

B.3) Calcular la frecuencia natural de la viga $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{\text{viga}}}{M}}$ y la del motor ω .

C) *Amplitud de la vibración forzada sin control de vibración (teórico):*

La amplitud de la vibración forzada de la ecuación (12.17) del sistema se da por:

$$C_{\text{máxima}} = \frac{F_0}{k_{\text{viga}} - M\omega^2} \text{ [mm]},$$

donde $F_0 = m_0 e\omega^2$ [N].

D) *Datos del sistema vibratorio sin control de vibración (práctico):*

Medir la amplitud por medio de la regla o escalímetro que previamente se debe colocar en una superficie plana.

E) *Sistema vibratorio (con control de vibración):*

Agregar al sistema vibratorio de la viga en voladizo con un motor con desbalance rotatorio un absorbedor de vibración como se muestra en la figura XII-4.

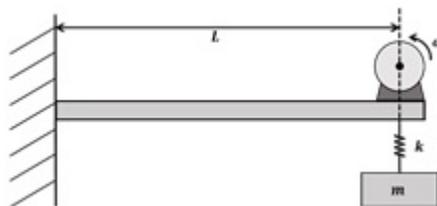


FIGURA XII-4. Sistema vibratorio de motor con desbalance rotatorio en viga, en voladizo y con control de vibración

F) *Datos del sistema vibratorio con absorbedor dinámico de vibración:*

- F.1) Medir la masa del motor (m_{motor}), la masa del desbalance ($m_{\text{desbalance}} = m_0$), la masa total ($m_1 = m_{\text{motor}} + m_{\text{desbalance}}$), la masa del absorbedor de vibración (m_2) y la distancia del centro de rotación donde se encuentra localizada la masa desbalanceada (e).
- F.2) Obtener la constante elástica de la viga ($k_{\text{viga}} = k_1$) y la constante del absorbedor de vibraciones (k_2).
- F.3) Calcular la frecuencia natural de la viga ($\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$) y la frecuencia del absorbedor ($\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$). Además, conocer la velocidad del motor (ω).

G) *Amplitud de la vibración forzada con absorbedor dinámico de vibración:*

Con los datos obtenidos de las ecuaciones (12.5) y (12.6), calcular:

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (12.18)$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (12.19)$$

donde $F_0 = m_0 e \omega^2$ [N].

H) *Datos del sistema vibratorio con control de vibración (práctico):*

Medir la amplitud por medio de la regla o escalímetro que previamente se debe colocar en una superficie plana.

REPORTE

- 1) Escribir en la tabla los cálculos de la amplitud teórica del sistema sin usar el absorbedor de vibraciones de un lado y en el otro lado usarlo.

Amplitud teórica sin absorbedor de vibraciones	Amplitud teórica con absorbedor de vibraciones

2) Elaborar una tabla en la cual se muestre la amplitud teórica y la experimental obtenidas del sistema.

	Amplitud teórica [mm]	Amplitud experimental [mm]
Sin absorbedor de vibración		
Con absorbedor de vibración		

3) ¿Qué se concluye a partir de los valores obtenidos de las amplitudes tanto teóricas como experimentales?

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

SINGIRESU, S. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Miami, Pearson, 2018.

ANEXO

MATERIAL COMPLEMENTARIO PARA LA REALIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS

Los archivos complementarios se pueden descargar en la liga siguiente:

<http://paginaspersonales.unam.mx/app/webroot/index.php/archivos/index/alias:ricardoyaNez>
en la casilla *Archivos anexo*.

Si bien estos archivos no son imprescindibles para realizar las prácticas, si pueden ser un apoyo importante para el estudiante.

Nombre del archivo:	Útil para desarrollar las prácticas:
Decre_Log.nb	III
angle.pdf	IV
sweep.nb	IV
SMRD	V
Código guía de programación	VII
Interfaz de análisis espectral	VII
base.dwg	VIII
center.stl	VIII
percussion.stl	VIII

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura I.1. Sistema masa-resorte	1
Figura II.1. Sistema masa-resorte-amortiguador	6
Figura II.2. Diagrama masa-aceleración del sistema masa-resorte-amortiguador	7
Figura III.1. Sistema masa-resorte-amortiguador	16
Figura III.2. Tipo de comportamiento de la respuesta libre del sistema en función con el valor del factor de amortiguamiento	18
Figura III.3. Respuesta dinámica de un sistema mecánico con decremento logarítmico (amortiguamiento)	19
Figura III.4. Uso del programa Tracker. Importar el video	21
Figura III.5. Uso del programa Tracker. Colocar el sistema de referencia	22
Figura III.6. Uso del programa Tracker. Usar la herramienta <i>Vara de calibración</i>	22
Figura III.7. Uso del programa Tracker. Calibrar la imagen	23
Figura III.8. Uso del programa Tracker. Crear una <i>Masa puntual</i>	23
Figura III.9. Uso del programa Tracker. Definir la trayectoria a analizar	24
Figura IV.1. Sistema resorte-amortiguador-inercia	30
Figura IV.2. Diagramas de cuerpos libres con elementos del sistema torsional	31
Figura IV.3. Péndulo torsional	33
Figura IV.4. Volante de inercia acoplado al amortiguador viscoso graduado	33
Figura IV.5. Diagrama de las partes del sistema: (1) base, (2) servomotor, (3) resorte, (4) volante de inercia y (5) disipador viscoso	34
Figura V.1. Sistema rotacional desbalanceado	38
Figura V.2. Disco de giro con masa m	38
Figura V.3. Esquema de viga con soporte simple	38
Figura VI.1. a) Sistema masa-resorte sobre una superficie. b) Diagrama de cuerpo libre cuando la masa se mueve hacia la derecha. c) Diagrama de cuerpo libre cuando el cuerpo se mueve hacia la izquierda	46
Figura VI.2. Prototipo del sistema vibratorio en 30° , 45° y 70° , respectivamente	49
Figura VI.3. Perturbación inicial	50
Figura VII.1. Relación gráfica entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia	55

Figura VII.2. Análisis de la convergencia, comparación de la fuerza en el dominio del tiempo y su representación en series de Fourier	56
Figura VII.3. Ejemplo de un espectro de frecuencias para un sistema periódicamente forzado	58
Figura VII-4. Interfaz del programa proporcionado (ver anexo)	60
Figura VIII.1. Reacción de un cuerpo rígido libre ante un impacto en su centro de percusión	63
Figura VIII.2. Reacción de un cuerpo rígido ante una fuerza	64
Figura VIII.3. Modelo de un péndulo con una masa puntual adicional	65
Figura VIII.4. Péndulo compuesto para pruebas de impacto	67
Figura IX.1. Función de pulso rectangular	72
Figura IX.2. Función de impulso	72
Figura IX.3. Sistema de colisión inelástica antes del impacto	73
Figura IX.4. Sistema de colisión inelástica después del impacto	75
Figura IX.5. Sistema de colisión perfectamente elástica después del impacto	77
Figura IX.6. Ejemplo de dispositivo cuando se usan proyectiles esféricos	78
Figura IX.7. Ejemplo de eventos con proyectiles balísticos	79
Figura X.1. Sistema mecánico continuo (izquierda), sistema mecánico discretizado (derecha)	82
Figura X.2. Conjunto del sistema MRA para el sistema discretizado	82
Figura X.3. Diagrama de la instalación del experimento	86
Figura X.4. Interfaz del programa proporcionado	87
Figura XI.1. Sistema resorte-carro-péndulo compuesto	90
Figura XI.2. Prototipo del sistema resorte-carro-péndulo compuesto	93
Figura XII.1. Absorbedor de vibración dinámico no amortiguado	98
Figura XII.2. Sistema rotatorio	101
Figura XII.3. Sistema vibratorio de motor con desbalance rotatorio en viga, en voladizo y sin control de vibración	103
Figura XII.4. Sistema vibratorio de motor con desbalance rotatorio en viga, en voladizo y con control de vibración	104

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla III.1. Datos para importar sin encabezados	25
Tabla VII.1. Algunos tipos de funciones periódicas para una fuerza dinámica	54
Tabla VII.2. Comandos más comunes de Mathematica® para las funciones armónicas cuando se considera que $\omega_0 = 2\pi/T$	59

Instructivo de prácticas de laboratorio de vibraciones mecánicas.
Parte I, se publicó en 2021 en la plataforma oficial de la Unidad de Apoyo Editorial (UDAЕ) de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México, Ciudad de México. C.P. 04510