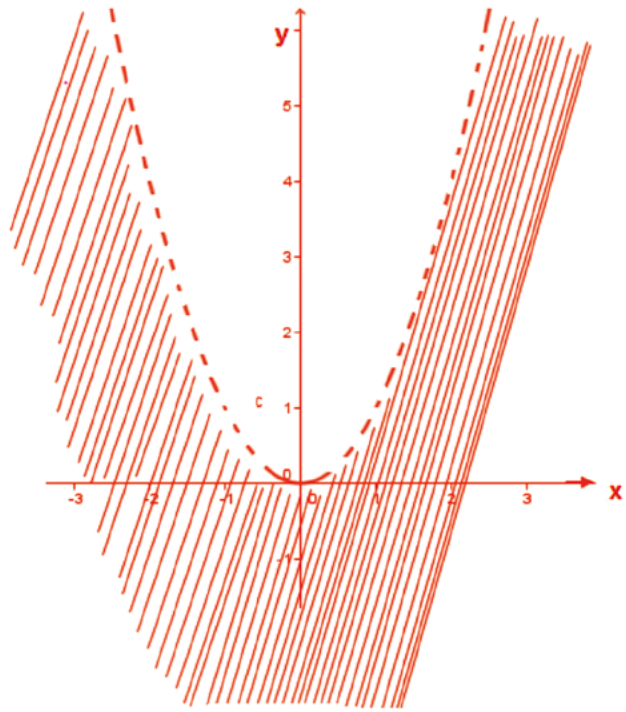
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS



GUÍA TEÓRICO-PRÁCTICA PARA PREPARAR EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO INTEGRAL

Margarita Ramírez Galindo

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

GUÍA TEÓRICO-PRÁCTICA PARA PREPARAR EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO INTEGRAL

Margarita Ramírez Galindo

División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas

RAMÍREZ GALINDO, Margarita. *Guía teórico-práctica para preparar el examen extraordinario de Cálculo Integral*. México, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería, 2020, 101 pp.

Guía teórico-práctica para preparar el examen extraordinario de Cálculo Integral

Primera edición: febrero de 2020

FACULTAD DE INGENIERÍA
Avenida Universidad núm. 3000, Ciudad Universitaria,
Delegación Coyoacán, Cd. Mx., México, C. P. 04510,
http://www.ingenieria.unam.mx/

Impreso y hecho en México

Unidad de Apoyo Editorial

Corrección de estilo: María Alicia Medina
Cuidado de la edición y formación editorial: Elvia Angélica Torres Rojas
Diseño de portada: Nismet Díaz Ferro

INTRODUCCIÓN

La presente guía está dirigida a los alumnos que adeudan la asignatura Cálculo Integral en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México y que consideran la opción de acreditarla mediante un examen extraordinario.

El objetivo fundamental de la guía es que los alumnos preparen y presenten, exitosamente, su examen, es decir, se pretende que a través de la lectura cuidadosa de este documento y la realización de las diversas actividades de aprendizaje que se proponen, cuenten con un instrumento que les permita planear, organizar y sistematizar el trabajo que promueva el logro de los aprendizajes esenciales establecidos en el programa vigente y, por ende, acreditar la asignatura.

La guía se ha diseñado de acuerdo con el programa de estudios correspondiente al Plan de Estudios 2008, el cual se sugiere tener a la mano y que podrán bajar de la siguiente dirección electrónica:

http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/CalculoIntegral/

la cual les permitirá ubicar y contrastar objetivos, actividades de aprendizaje, contenidos temáticos y bibliografía del programa de la asignatura que se propone en cada uno de los temas de esta guía. También, cabe mencionar, que esta guía puede servir de apoyo a la asignatura Cálculo Integral correspondiente al Plan de Estudios 2015, pues tienen una coincidencia, aproximadamente, del 90% del contenido del programa.

De suma importancia es que el programa se encuentre siempre a la mano de los alumnos que estén preparando su examen, pues les permitirá ubicar objetivos, aprendizajes, contenidos, actividades de enseñanza y bibliografía sugerida.

En términos generales, esta asignatura se centra en dos aspectos principales: por un lado, comprender los conceptos fundamentales del Cálculo Integral y adquirir la habilidad en el manejo y aplicación de las principales técnicas de integración; y por otro, comprender los conceptos fundamentales en torno a las funciones escalares de diversas variables y analizar su variación, así como algunas de sus aplicaciones.

En principio, se busca que la guía contenga en cada una de las temáticas los siguientes elementos: *objetivo* del tema, planteando de manera resumida los *conceptos fundamentales* a tratar, los cuales se refieren a los contenidos específicos; *estrategias de aprendizaje*, la realización de ellas es de trascendental importancia, pues permitirá al estudiante apropiarse de los conocimientos propios de cada tema; *bibliografía* donde se podrán encontrar los temas a tratar y que contribuirá a la ampliación de la información sobre algunos contenidos y aclaración de dudas.

En el seguimiento y la ejecución de estas acciones, se espera que contribuyan a lograr que los estudiantes, para quienes está dirigido este trabajo, alcancen su propósito de acreditar la asignatura en el examen extraordinario.

No puede dejar de mencionarse que, esta guía solo tendrá sentido y cumplirá su cometido, si el estudiante que la siga está dispuesto a realizar lo que se sugiere a lo largo de este trabajo, incluso en muchos casos, esfuerzos suplementarios.

RECOMENDACIONES PARA LA PREPARACIÓN DEL EXAMEN EXTRAORDINARIO

El trabajo que se presenta aquí se ha realizado deseando que te sea de utilidad para aprobar el examen extraordinario de la asignatura Cálculo Integral. El esfuerzo que realices para lograrlo se verá recompensado cuando puedas avanzar en las asignaturas que indica el Plan de Estudios de tu carrera, momentáneamente, limitado en las materias con las cuales existe seriación obligatoria con Cálculo Integral. Asimismo, al estudiar de manera disciplinada y constante, tú mismo adquirirás una mayor confianza en los conocimientos que logres o reafirmes, lo que contribuirá a que abordes con más y mejores elementos los conceptos de las asignaturas consecuentes.

Algunas recomendaciones que pueden contribuir a una mejor preparación de este examen se enlistan a continuación:

- Elige el periodo en el cual vas a presentar el examen extraordinario, considerando que cuentes con el tiempo necesario para prepararlo adecuadamente; de nada sirve inscribirte, si aún no estás listo. También, reflexiona acerca de la carga académica de tus otras materias y del tiempo que te demanden.

- Ten siempre a la mano el programa de la asignatura, es tu principal referente en lo que respecta a los contenidos académicos que debes aprender.

- Es conveniente que cuentes con algún libro de la asignatura, de preferencia, pero no de manera exclusiva, consulta los que se sugieren en la bibliografía señalada en el programa de la asignatura.

- Existen diversas páginas de Internet donde podrás consultar, tanto, teoría y ejercicios como complemento de tus actividades de estudio. Algunas direcciones electrónicas se enlistarán más adelante.

- Acércate al Departamento de Cálculo Integral o consulta su página *web* para conocer los horarios y el lugar en los que se ofrece, tanto el servicio de asesoría, como el taller de ejercicios. Aprovecha los servicios y apoyos que ofrece la Coordinación de Matemáticas, los cuales son muy valiosos y pueden ayudarte en la preparación de tu examen.

- Ten en cuenta que, un examen extraordinario tiene como finalidad proporcionar elementos que permitan emitir un juicio acerca de los conocimientos que posee el alumno respecto a la asignatura en cuestión y, ya que en su aplicación hay limitantes de tiempo, es imposible preguntar absolutamente todo lo del programa de la asignatura, por lo que deberás considerar que existen conocimientos fundamentales que todo estudiante que acredite la asignatura debe poseer, por lo que hacia allá deberás orientarte principalmente, siendo uno de los apoyos, si bien no es el único, la presente guía.

- En cada tema, se propondrán diversas estrategias de aprendizaje, cuya finalidad es que te permitan abordar, de manera exitosa, los contenidos de esta guía.

- Ten presente que esta guía contiene solo lineamientos generales sobre los temas, de ninguna manera debe considerarse como el único material para estudiar y preparar tu examen.

INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA GUÍA

Con la finalidad de que se facilite el empleo de este material, es conveniente que consideres que las actividades diversas presentadas siguen un orden determinado, tanto, por el programa de la asignatura, como por el objetivo del curso, así como por los objetivos específicos de cada tema. En este sentido, resulta de importancia que abordes los diferentes temas en el orden presentado, esto es, si decides dirigirte de manera inmediata al tema último del curso, es probable que tengas dificultades para comprenderlo, pues seguramente serán necesarios los antecedentes propios del tema y del mismo programa.

Considerando la naturaleza de la materia, se incorporarán en buena parte de este trabajo diversos ejemplos, tanto, ejercicios como aplicaciones propias de la asignatura (en el tema correspondiente). Sin embargo, no olvides que este material es una guía, no un cuaderno de texto ni un cuaderno de ejercicios.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .... *iii*
RECOMENDACIONES PARA LA PREPARACIÓN DEL EXAMEN EXTRAORDINARIO .... *v*
INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA GUÍA .... *vii*

TEMA 1
LAS INTEGRALES DEFINIDA E INDEFINIDA 1

OBJETIVO........ 1
CONCEPTOS FUNDAMENTALES 1
ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE 1
BIBLIOGRAFÍA........ 1
1.1. Definición de integral definida. Sumas de Riemann 2
1.2. Integrales indefinidas inmediatas. Cambio de variable.
Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral........ 5

TEMA 2
FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL........ 11

OBJETIVO........ 11
CONCEPTOS FUNDAMENTALES 11
ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE 11
BIBLIOGRAFÍA........ 12
2.1. Derivada de funciones logarítmicas y exponenciales 13
2.2. Integración de funciones que involucran funciones
logarítmicas y exponenciales 20
2.3. Integrales de funciones exponenciales de base *b* 24
2.4. Derivación e integración de funciones hiperbólicas
directas e inversas 25
2.5. Regla de L´Hôpital 28
2.6. Integrales impropias........ 32

TEMA 3
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN 37

OBJETIVO........ 37
CONCEPTOS FUNDAMENTALES 37

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE ... 37
BIBLIOGRAFÍA ... 38
3.1. Integración por partes ... 39
3.2. Integración por sustitución trigonométrica ... 43
3.3. Integración por descomposición en fracciones parciales ... 47
3.4. Integrales diversas ... 52
3.5. Aplicaciones geométricas de la integral definida ... 57

TEMA 4
DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES ... 77

OBJETIVO ... 77
CONCEPTOS FUNDAMENTALES ... 77
ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE ... 77
BIBLIOGRAFÍA ... 78
4.1. Dominio, recorrido, región de definición de una función de dos variables y curvas de nivel ... 79
4.2. Límites de funciones de dos variables ... 84
4.3. Derivadas de funciones de dos variables independientes ... 85
4.4. Gradiente de funciones y derivada direccional ... 88
4.5. Plano tangente y recta normal a una superficie ... 95

TEMA 1

LAS INTEGRALES DEFINIDA E INDEFINIDA

OBJETIVO

El alumno comprenderá los conceptos de las integrales definidas e indefinidas y las aplicará en el cálculo y obtención de integrales.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- Definición de la integral definida
- Propiedades de la integral definida
- Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral
- Integral indefinida con extremo superior variable
- Teorema Fundamental del Cálculo

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

- Se sugiere que estudies los conceptos relativos a la definición de integral definida, para lo cual debes manejar los conceptos que fundamentan las sumas de Riemann, así como las propiedades de la sumatoria.

- Debes comprender el enunciado del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, así como su interpretación geométrica.

- A partir de la definición de antiderivada general y del Teorema Fundamental del Cálculo, construye una tabla de integrales indefinidas inmediatas.

BIBLIOGRAFÍA

LARSON, R. y Bruce H. Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica*. *Cálculo* I, 9a. ed., México, McGraw-Hill, 2010.

STEIN, S. y A. Barcellos, *Cálculo y Geometría Analítica*, 5a. ed., Colombia, McGraw-Hill, 1995.

ZILL, D. y W. Wright, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 4a. ed., China, McGraw-Hill, 2011.

1.1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA. SUMAS DE RIEMANN

EJEMPLO 1.1.1. Mediante sumas de Riemann, calcula el valor de la integral $\int_0^3 x\,dx$

RESOLUCIÓN:

De la definición de integral definida se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x \quad \Longleftarrow$$

esta suma
se conoce como
una de las sumas
de Riemann

en este caso: $f(x) = x$

y la amplitud de cualquiera de los subintervalos está dada por:

$$\Delta_i x = \frac{b-a}{n}$$

;

$$\Delta_i x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

En este ejemplo $a = 0$

$$x_1 = 0 + \Delta_1 x \qquad f(x_1) = f(\Delta_1 x) = \Delta_1 x = \frac{3}{n}$$

$$x_2 = 0 + 2\,\Delta_2 x \qquad f(x_2) = f(2\,\Delta_2 x) = 2\,\Delta_2 x = \frac{6}{n}$$

$$x_3 = 0 + 3\,\Delta_3 x$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_i = a + i\,\Delta_i x \qquad f(x_i) = f(i\,\Delta_i x) = i\,\Delta_i x = \frac{3i}{n}$$

$$f(x_i)\,\Delta_i x = \left(\frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{9}{n^2}i$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9}{n^2}i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2n^2}\left(n^2+n\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}+\frac{9}{2n}\right] = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x = \frac{9}{2} \qquad \therefore \int_0^2 x\,dx = \frac{9}{2}$$

EJEMPLO 1.1.2. Utiliza la definición para calcular el valor de la integral $\int_{-2}^{0}\left(2x-\frac{1}{3}\right)dx$

RESOLUCIÓN:

De la definición de integral definida se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x$$

$$f(x) = \left(2x-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Delta_i x = \frac{b - a}{n}$$

$$\Delta_i x = \frac{0 + 2}{n} = \frac{2}{n}$$

aquí, se tiene: $a = -2$

$$x_i = a + i\,\Delta_i x = -2 + \frac{2}{n} i$$

$$f(x_i) = f(-2 + i\,\Delta_i x) = 2\left(-2 + \frac{2i}{n}\right) - \frac{1}{3} = -4 + \frac{4}{n} i - \frac{1}{3}$$

$$f(x_i) = f(-2 + i\,\Delta_i x) = 2\left(-2 + \frac{2i}{n}\right) - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4i}{n} - \frac{13}{3}$$

$$f(x_i)\,\Delta_i x = \left(\frac{4i}{n} - \frac{13}{3}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{8}{n^2} i - \frac{26}{3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^2} i - \frac{26}{3n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{26}{3n} n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{26}{3}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{n^2}\left(n^2 + n\right) - \frac{26}{3}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{14}{3} + \frac{4}{n}\right] = -\frac{14}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta_i\, x = -\frac{14}{3}$$

finalmente, $\int_{-2}^{0} \left(2x - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{14}{3}$

EJEMPLO 1.1.3. Sea $F(x) = \int_{1}^{x} \cos(t+1)\, dt$. Determina $F'(x)$

RESOLUCIÓN:

Se debe recordar que: $\frac{d}{dx} \int_{1}^{x} f(t)\, dt = f(x)$

de donde: $F'(x) = \cos(x+1)$

1.2. INTEGRALES INDEFINIDAS INMEDIATAS. CAMBIO DE VARIABLE. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL (TVMCI)

EJEMPLO 1.2.1. Obtén la antiderivada general de las siguientes funciones, utilizando las reglas básicas para integrales inmediatas:

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = x^{1/2} - x^3$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x$

RESOLUCIÓN:

Recordando algunas de las expresiones para las integrales inmediatas, se tiene el proceso de solución para cada inciso enseguida.

a) Corresponde a las integrales básicas de la forma:

$$\int k\,dx = k\,x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$$

entonces, la solución es:

$$\int (3x-4)\;dx = \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$$

b) Empleando las mismas expresiones del inciso anterior, se tiene:

$$\int \left(x^{1/2} - x^3\right)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^4}{4} + C$$

c) De manera similar a los ejercicios anteriores:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 4x\right) dx = \int \left(x^{-1/2} - 4x\right) dx = 2x^{1/2} - 2x^2 + C$$

EJEMPLO 1.2.2. Determina el valor medio de la función $f(x) = \left(2x^2 - 3x\right)$ en el intervalo $[1,4]$

RESOLUCIÓN:

Del TVMCI se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Rightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \Longleftarrow \text{ valor medio}$$

$$\int_1^4 \left(2x^2 - 3x\right)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\Bigg]_1^4$$

$$= \left[\frac{2(4)^3}{3} - \frac{3(4)^2}{2}\right] - \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{117}{6}$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = \frac{\frac{117}{6}}{4-1} = \frac{117}{18}$$

EJEMPLO 1.2.3. Determina el o los valores de *c*, cuya existencia garantiza el TVMCI, de la función $f(x) = 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0,2]$

RESOLUCIÓN:

Del TVMCI:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \Rightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$$

$$\int_0^2 \left(6x - 3x^2\right) dx = 3x^2 - x^3 \Big]_0^2 = 4$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} = \frac{4}{2-0} = 2$$

$$f(c) = \left(6c - 3c^2\right) \Rightarrow 6c - 3c^2 = 2$$

$$3c^2 - 6c + 2 = 0 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3},\; c_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Los valores de $c_1, c_2 \in [\,0, 2\,]$ son los valores que satisfacen el TVMCI.

EJEMPLO 1.2.4. Evalúa las integrales indefinidas que se enlistan a continuación, realizando, cuando sea necesario, un cambio de variable adecuado y/o completando la diferencial.

1) $\int 3x^2 \sqrt{2 + x^3}\, dx$

2) $\int x^4 \operatorname{sen}\left(x^5 - 3\right) dx$

3) $\int \sec 2x \tan 2x \sqrt{5 + \sec 2x}\, dx$

4) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 2x + 1}\, dx$

5) $\int \csc^3 x \cot x\, dx$

RESOLUCIÓN:

1)

$$\int 3x^2\left(2+x^3\right)^{1/2} dx = \frac{2}{3}\left(2+x^3\right)^{3/2} + C$$

$$u = 2 + x^3$$

$$du = 3x^2\,dx$$

2)

$$\int x^4 \operatorname{sen}\left(x^5 - 3\right) dx = -\frac{1}{5}\cos\left(x^5 - 3\right) + C$$

$$u = x^5 - 3$$

$$du = 5x^4\,dx$$

3)

$$\int \sec 2x \tan 2x\sqrt{5 + \sec 2x}\, dx = \int \sec 2x \tan 2x(5 + \sec 2x)^{1/2}\, dx$$

$$u = (5 + \sec 2x) \qquad = \frac{1}{2} \bullet \frac{2}{3}(5 + \sec 2x)^{3/2} + C$$

$$du = 2\sec 2x \tan 2x \qquad = \frac{1}{3}(5 + \sec 2x)^{3/2} + C$$

4)

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}\, dx = -ang\tan\left(\cos x\right) + C$$

$$u = \cos x$$

$$du = -\operatorname{sen} x$$

5)

$$I=\int \csc^3 x \cot x \, dx=\int (\csc x)^2 \csc x \cot x \, dx \Leftarrow$$ es una integral de la forma

$$\int u^n du$$

Realizando cambio de variable, se tiene:

$$u = \csc x$$

$$du = -\csc x \cot x \; dx$$

$$\Longrightarrow \quad I=-\frac{1}{3}\csc^3 x$$

TEMA 2

FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL

OBJETIVO

El alumno conocerá las funciones logaritmo y exponencial, así como sus propiedades, y las aplicará en el cálculo de límites, derivadas e integrales.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- Definición de la función logaritmo natural y de la función exponencial
- Propiedades de las funciones logaritmo y exponencial de base e y de base distinta de e
- Derivada de la función logaritmo natural y derivación logarítmica
- Derivada de la función exponencial
- Derivada de las funciones logarítmicas y exponenciales de base distinta de e
- Derivada de una función elevada a otra función
- Integral definida e indefinida de la función $f(u) = \frac{1}{u}$
- Integral definida e indefinida de la función exponencial
- Definición de las funciones hiperbólicas (directas e inversas)
- Derivada de las funciones hiperbólicas (directas e inversas)
- Integral definida e indefinida de funciones que involucran a las funciones hiperbólicas
- Regla de L´ Hôpital
- Integrales impropias

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

- Se sugiere que estudies, comprendas y memorices las propiedades de la función logaritmo natural y de la función exponencial de base e.

- Considera lo estudiado en el punto anterior, para que puedas establecer una relación con las funciones logarítmicas y exponenciales de base distinta de e.
- Construye una tabla de derivadas e integrales indefinidas que involucren a las funciones logaritmo y exponencial.
- Establece la relación entre las funciones anteriores y las funciones hiperbólicas, esto te facilitará la comprensión del proceso de derivación e integración de este tipo de funciones.
- En el cálculo de límites, deberás identificar las diferentes indeterminaciones que permiten aplicar la regla de L´ Hôpital, por lo que es muy importante que las estudies.
- Deberás ser capaz de identificar las integrales impropias, así como su carácter de convergencia o divergencia; una herramienta fundamental para lograrlo será evaluar la integral definida, así como el cálculo de límites.

BIBLIOGRAFÍA

LARSON, R. y Bruce H. Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica*. *Cálculo* I, 9a. ed., México, McGraw-Hill, 2010.

STEIN, S. y A. Barcellos, *Cálculo y Geometría Analítica*, 5a. ed., Colombia, McGraw-Hill, 1995.

SWOKOWSKI, E., *Cálculo con Geometría Analítica*, 2a. ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.

ZILL, D. y W. Wright, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 4a. ed., China, McGraw-Hill, 2011.

2.1. DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

EJEMPLO 2.1.1. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \ln\sqrt{x^3 + x^2}$

2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\cos^2 x}{x^{1/3}}\right) + \tan 2x$

RESOLUCIÓN:

1) La derivada de la función $f(x) = \ln u$ está dada por $\dfrac{d(\ln u)}{dx} = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

Inicialmente, para facilitar el proceso de derivación, se aplican propiedades de la función logaritmo natural y posteriormente se deriva:

$$f(x) = \ln\left(x^3 + x^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^3 + x^2\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2}\right)$$

2) Al aplicar propiedades y después realizar el proceso de derivación, se tiene:

$$f(x) = \ln\left(\cos^2 x\right) - \ln\left(x^{1/3}\right) + \tan 2x$$

$$f(x) = 2\ln(\cos x) - \frac{1}{3}\ln(x) + \tan 2x$$

$$f'(x) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x} - \frac{1}{3x} + 2\sec^2 2x$$

EJEMPLO 2.1.2. Obtén la derivada de las siguientes funciones mediante derivación logarítmica:

1) $y = \dfrac{\sqrt{x+8}}{\left(x^3+11\right)\sqrt[3]{4x+2}}$

2) $y = \left(x^3+2\right)(x-4)(3x+6)^{1/5}$

RESOLUCIÓN:

1) Cuando se aplica la función logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad, además de propiedades de esta función, tenemos:

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt{x+8}}{\left(x^3+11\right)\sqrt[3]{4x+2}}$$

$$\ln y = \ln(x+8)^{1/2} - \ln\left[\left(x^3+11\right)(4x+2)^{1/3}\right]$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+8) - \left[\ln\left(x^3+11\right) + \frac{1}{3}\ln(4x+2)\right]$$

enseguida, se deriva implícitamente y después se despeja a la función derivada:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+8)} - \frac{3x^2}{\left(x^3+11\right)} - \frac{1}{3}\frac{4}{4x+2}$$

$$y' = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{(x+8)} - \frac{3x^2}{\left(x^3+11\right)} - \frac{1}{3}\frac{4}{4x+2}\right]y$$

finalmente, se sustituye la función y, así:

$$y' = \left[\frac{1}{2(x+11)} - \frac{3x^2}{(x^3+11)} - \frac{4}{3(4x+2)}\right]\frac{\sqrt{x+8}}{(x^3+11)\sqrt[3]{4x+2}}$$

2) Al aplicar la función logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad y propiedades:

$$\ln y = \ln\left[(x^3+2)(x-4)(3x+6)^{1/5}\right]$$

$$\ln y = \ln(x^3+2) + \ln(x-4) + \frac{1}{5}\ln(3x+6)$$

después, se deriva de forma implícita y se despeja la derivada de la función, sustituyendo, finalmente, a la función y, así:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{1}{(x-4)} + \frac{3}{5(3x+6)}$$

$$y' = \left[\frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{1}{(x-4)} + \frac{3}{5(3x+6)}\right]y$$

$$y' = \left[\frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{1}{(x-4)} + \frac{3}{5(3x+6)}\right](x^3+2)(x-4)(3x+6)^{1/5}$$

EJEMPLO 2.1.3. Deriva las siguientes funciones:

1) $y = \log_{10}(x^3+2)$

2) $y = \log_2\left[(4x^3-x)(x+5)\right]$

RESOLUCIÓN:

1) Para derivar funciones logarítmicas de base a, se tiene:

$$\frac{d\left(\log_a u(x)\right)}{dx} = \frac{1}{u\ln a}\,\frac{du}{dx}$$

$$y = \log_{10}\left(x^3 + 2\right)$$

$$y' = \frac{1}{\left(x^3 + 2\right)\ln 10}\left(3x^2\right) = \frac{3x^2}{\left(x^3 + 2\right)\ln 10}$$

2) Empleando propiedades de las funciones logarítmicas y la fórmula de derivación del inciso 1) se tiene:

$$y = \log_2\left[\left(4x^3 - x\right)\left(x + 5\right)\right]$$

$$y = \log_2\left(4x^3 - x\right) + \log_2\left(x + 5\right)$$

$$y' = \frac{12x^2 - 1}{\left(4x^3 - x\right)\ln 2} + \frac{1}{\left(x + 5\right)\ln 2}$$

$$y' = \log_2\left(4x^3 - x\right) + \log_2\left(x + 5\right)$$

EJEMPLO 2.1.4. Deriva las siguientes funciones:

1) $y = e^{\sqrt{x+2x}}$

2) $y = 4e^{\left(x^2\ln(x-2)\right)} + \operatorname{sen}\left(e^{\ln x} - 2x\right)$

RESOLUCIÓN:

1) La regla para derivar funciones exponenciales de base e es:

$$\frac{d\left(e^{u(x)}\right)}{dx} = e^{u(x)}\,\frac{du(x)}{dx}$$

por lo que se tiene:

$$y' = e^{\sqrt{x^3 + 2x}}\;\frac{d\left(x^3+2x\right)^{1/2}}{dx}$$

$$y' = \left(e^{\sqrt{x^3 + 2x}}\right)\frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}$$

2) Además de emplear la misma regla del ejercicio anterior, se debe tener presente que la función exponencial y la función logaritmo natural son mutuamente inversas:

$$y' = 4e^{\left(x^2\ln(x-2)\right)}\,\frac{d\left(x^2\ln(x-2)\right)}{dx} + \cos(x-2x)\frac{d(-x)}{dx}$$

$$y' = 4e^{\left(x^2\ln(x-2)\right)}\left[x^2\left(\frac{1}{x-2}\right) + \ln(x-2)2x\right] + \cos(-x)(-1)$$

$$y' = 4e^{\left(x^2\ln(x-2)\right)}\left[x^2\left(\frac{1}{x-2}\right) + \ln(x-2)2x\right] - \cos(-x)$$

EJEMPLO 2.1.5. Deriva las siguientes funciones:

1) $y = 3^{\sqrt{x-1}}$

2) $y = 5^{\left(x \ln(x-2)\right)} + 2^{\cos x}$

RESOLUCIÓN:

1) La regla para derivar funciones exponenciales de base distinta de e está dada por la expresión:

$$\frac{d\left(b^{u(x)}\right)}{dx} = b^{u(x)} u'(x) \ln b$$

por lo que se tiene:

$$y' = 3^{\sqrt{x-1}} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \ln 3$$

2) Al utilizar la misma expresión del ejercicio anterior, se tiene:

$$y' = 5^{\left(x\ln(x-2)\right)} \frac{d\left(x\ln(x-2)\right)}{dx} \ln 5 + 2^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x\right)\ln 2$$

$$y' = 5^{\left(x\ln(x-2)\right)}\left(x\left(\frac{1}{x-2}\right) + \ln(x-2)\right)\ln 5 - \left(\operatorname{sen} x\right)2^{\cos x} \ln 2$$

EJEMPLO 2.1.6. Deriva las siguientes funciones:

1) $f(x) = (x)^{x^2}$

2) $f(x) = (\sec x)^{\operatorname{sen} 2x}$

RESOLUCIÓN:

1) Aquí, se tiene el caso de una función elevada a otra función. Para obtener la derivada de este tipo de funciones, se sugiere que, en lugar de memorizar la fórmula correspondiente, se utilice, cada vez, la derivación logarítmica, proceso que forma parte del curso y se ha abordado en ejemplos anteriores.

$f(x) = (x)^{x^2}$ donde $f(x) = y$ por lo que se tiene $y = (x)^{x^2}$

Enseguida, se realiza el proceso que sugiere la derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln\ (x)^{x^2}$$

$$\ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(2x)$$

$$y' = (x + 2x\ln x)\,y$$

$$y' = (x + 2x\ln x)(x)^{x^2}$$

2) Se resuelve de manera similar al ejercicio previo, así:

$$y = (\sec x)^{\operatorname{sen} 2x}$$

$$\ln y = \ln\left(\sec x\right)^{\operatorname{sen} 2x}$$

$$\ln y = \left(\operatorname{sen} 2x\right)\ln\left(\sec x\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\operatorname{sen} 2x\right)\frac{\sec x \tan x}{\sec x} + \ln\left(\sec x\right)\left(2\cos 2x\right)$$

$$y' = \left[\left(\operatorname{sen} 2x\right)\tan x + \ln\left(\sec x\right)\left(2\cos 2x\right)\right]y$$

$$y = \left[\left(\operatorname{sen} 2x\right)\tan x + \ln\left(\sec x\right)\left(2\cos 2x\right)\right]\left(\sec x\right)^{\operatorname{sen} 2x}$$

2.2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

EJEMPLO 2.2.1. Resuelve lo siguiente:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\, dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{2t^2+4t+3}\, dt$

3) $\displaystyle\int \frac{z^3}{z^4+1}\, dz$

4) $\displaystyle\int \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}\, dx$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx$

RESOLUCIÓN:

En estos ejercicios, se emplearán las siguientes expresiones:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad , \quad \int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x| + C$

$$u = 1 + x$$

$$du = dx$$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{2t^2 + 4t + 3} dt = I$

$$u = 2t^2 + 4t + 5$$

$$du = (4t + 4)dt$$

$$du = 4(t + 1)dt$$

$$I = \left[\frac{1}{4}\ln\left(2t^2 + 4t + 3\right)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{4}\ln(2 + 4 + 3) - \frac{1}{4}\ln(3)\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 9 - \ln 3)$$

3) $\displaystyle\int \frac{z^3}{z^4 + 1} dz = \frac{1}{4}\ln\left(z^4 + 1\right) + C$

$$u = \left(z^4 + 1\right)$$

$$du = \left(4z^3\right)dz$$

4) $$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

5) $$\int \frac{1}{1 + e^{-x}}\,dx = I$$

Para resolver esta integral, se puede emplear un artificio algebraico que consiste en multiplicar y dividir por el mismo elemento la función integrando, para posteriormente realizar un cambio de variable, como se observa enseguida.

$$I = \int \frac{(e^x)}{(1 + e^{-x})\,e^x}\,dx = \int \frac{(e^x)}{(e^x + 1)}\,dx = \ln(e^x + 1) + C$$

$$u = e^x + 1$$

$$du = e^x\,dx$$

EJEMPLO 2.2.2. Obtén cada una de las integrales indicadas:

1) $$\int e^{2x+3}\,dx$$

2) $$\int 2x\left(\sec^2 x^2\right)e^{\tan x^2}\,dx$$

3) $$\int \frac{e^x}{16 + e^{2x}}\,dx$$

4) $$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}\,dx$$

RESOLUCIÓN:

1) Se tiene una integral de la forma $\int e^{u}\, du = e^{u} + C$

$$\int e^{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$$

$$u = 2x + 3$$

$$du = 2\,dx$$

2) Nuevamente, se tiene una integral de la forma que se indica en 1):

$$\int 2x\left(\sec^2 x^2\right)e^{\tan x^2}\, dx = e^{\tan x} + C$$

$$u = \tan x^2$$

$$du = \sec^2 x^2\,\left(2x\right)dx$$

3) La integral es de la forma $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} ang\tan\left(\frac{u}{a}\right) + C$

aunque, también, involucra a la función exponencial:

$$\int \frac{e^x}{16 + e^{2x}}\, dx = \frac{1}{4} ang\tan\left(\frac{e^x}{4}\right) + C$$

$$u^2 = e^{2x} \qquad a^2 = 16 \;\Rightarrow\; a = 4$$

$$u = e^x$$

$$du = e^x\, dx$$

4) Aquí, se tiene una integral del tipo $\int \frac{du}{u}\ \ln|u| + C$

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}\,dx = -2\ \ln\left|\cos\sqrt{x}\ \right| + C = \ln\left|\sec^2\sqrt{x}\right| + C$$

$$u = \cos\sqrt{x}$$

$$du = -\operatorname{sen}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

2.3. INTEGRALES DE FUNCIONES EXPONENCIALES DE BASE *b*

EJEMPLO 2.3.1. Obtén lo siguiente:

1) $\int 2x\,5^{x^2+3}\,dx$

2) $\int 7^{5x-1}\,dx$

3) $\int \frac{4^{\csc\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\ \tan\sqrt{x}}\,dx$

RESOLUCIÓN:

Estas integrales son de la forma $\int b^u\,du = \frac{b^u}{\ln b} + C$

1) $\int 2x\ 5^{x^2+3}dx = \frac{5^{x^2+3}}{\ln 5} + C$

$$u = x^2 + 3$$

$$du = 2x\,dx$$

2) $\displaystyle\int 7^{5x-1}\,dx = \frac{7^{5x-1}}{5\ln 7} + C$

$$u = 5x - 1$$

$$du = 5\,dx$$

3) $\displaystyle\int \frac{4^{\csc\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4^{\csc\sqrt{x}}\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = I$

$$u = \csc\sqrt{x}$$

$$du = -\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

$$I = -\frac{2\left(4^{\csc\sqrt{x}}\right)}{\ln 4} + C$$

2.4. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS DIRECTAS E INVERSAS

EJEMPLO 2.4.1. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \tanh x\ \operatorname{senh} 2x$

2) $f(x) = \cosh^{-1}(\cos x)$

RESOLUCIÓN:

1) Aquí, se emplean las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas:

$$\frac{d\left(\operatorname{senh} u\right)}{dx} = \left(\cosh u\right)u' \quad , \quad \frac{d\left(\tanh u\right)}{dx} = \left(\operatorname{sech}^2 u\right)u'$$

$$f'\left(x\right) = \tanh x \frac{d}{dx}\operatorname{senh} 2x \; + \; \operatorname{senh} 2x \frac{d}{dx}\tanh x$$

$$f'\left(x\right) = \tanh x\left(\, 2\cosh 2x \,\right) \; + \; \operatorname{senh} 2x\left(\operatorname{sech}^2 x\right)$$

2) De manera similar al ejercicio anterior y aplicando la fórmula de derivación:

$$\frac{d\left(\cosh^{-1} u\right)}{dx} = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

entonces, se tiene:

$$f'\left(x\right) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^2 x - 1}}$$

EJEMPLO 2.4.2. Obtén la integral indicada:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{36 - x^2}\, dx$

2) $\displaystyle\int \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{5 + x^3}}\, dx$

RESOLUCIÓN:

1) Es una integral asociada a la integral conocida:

$$\int \frac{1}{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u} + C\right|$$

$$\int \frac{1}{36 - x^2}\, dx = \frac{1}{12}\left[\ln\left|\frac{10}{2}\right| - \ln|1|\right] = \frac{1}{12}\ln|5|$$

$$u^2 = x^2$$

$$u = x \quad , du = dx$$

$$a^2 = 16 \ , \ \ a = 4$$

2) Aquí, se tiene una integral asociada a la integral conocida:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{5 + x^3}}\, dx = -2\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5 + x^3}}\, dx = -\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x^3} + \sqrt{5 + x^3}\right| + C$$

El proceso de integración que justifica el resultado anterior, requiere realizar un cambio de variable como se observa enseguida:

$$u^2 = x^3$$

$$u = x^{3/2} \ , \ \ du = \frac{3}{2}x^{1/2}\, dx = \frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx$$

$$a^2 = 5 \ , \ \ a = \sqrt{5}$$

2.5. REGLA DE L´HÔPITAL

Esta regla permite obtener, si existe, el límite de funciones tales que, cuando se evalúan directamente, dan lugar a cualquiera de las dos indeterminaciones siguientes:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}$$

Sin embargo, existen otras indeterminaciones, según se describe enseguida.

Cuando se presentan cualquiera de las indeterminaciones:

$$(0)(\infty)\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0\ ,\ 1^\infty$$

es posible llevarlas a la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ y, entonces, aplicar la regla L´Hôpital.

La regla de L´Hôpital establece en su aplicación que cuando en el cálculo del límite de un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ se obtiene cualquiera de las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, deberá calcularse el límite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, sin embargo, si persiste la indeterminación, deberá considerarse la generalización de esta regla, la cual se puede expresar así:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\ldots=L$$

EJEMPLO

Calcula, si existe, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x^{-2}}{x^{2-1}}$

RESOLUCIÓN:

Inicialmente, se aplican propiedades de la función logaritmo natural y después se evalúa a la función directamente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^{-2}}{x^{2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{-2\ \ln x}{x^2-1}=\frac{0}{0}\ \longleftarrow\ \text{indeterminación}$$

Esta indeterminación es tal que aplica la regla de L´Hôpital:

$$-2\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=-2\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=-1$$

finalmente, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x^{-2}}{x^{2-1}}=-1$

EJEMPLO 2.5.1. Obtén, si existe:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\ln(1+x)-1}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x^3}{\cot 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

RESOLUCIÓN:

1) Inicialmente, se evalúa de forma directa la función:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\ln(1+x)-1}{x^2}=\frac{0}{0}$$

esta indeterminación permite aplicar la regla de L´Hôpital. Al derivar numerador y denominador, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{0}{0}$$

nuevamente, se aplica la regla de L´Hôpital:}

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \dfrac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Finalmente, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2} = 1$

2) Se procede como en el ejercicio 1):

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = (\infty)(0)$$

se observa que es una indeterminación donde no aplica la regla de L´Hôpital, por lo que se procede a realizar el siguiente artificio algebraico:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\dfrac{1}{x^2}} = \frac{0}{0}$$

Para esta indeterminación, se aplica la regla señalada y, luego de algunas simplificaciones, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{x+2}\left(-2x^{-2}\right)}{\dfrac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{2x(x+2)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{x+2}\left(-2x^{-2}\right)}{\dfrac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2} = \frac{\infty}{\infty}$$

nuevamente, una indeterminación. Es factible aplicar L´Hôpital:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{1} = \infty$, por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ no existe.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x^3}{\cot 2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3\ln x}{\cot 2x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Se aplica la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{x}}{2\csc^2 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2x\csc^2 2x} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x} = \frac{0}{0}$$

nuevamente, L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} 2x \cos 2x(2)}{1} = 4\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} 2x \cos 2x = 4(0) = 0$$

por lo que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x^3}{\cot 2x} = 0$$

4) Evaluando inicialmente la función se tiene:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{\ln x}\right) = \infty - \infty$$

esta indeterminación no permite aplicar la regla de L´Hôpital, por lo que para llevarla a la forma adecuada se procede a realizar la operación que se indica:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x(x-1)}{(x-1)(\ln x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x^2 + x}{(x-1)(\ln x)} = \frac{0}{0}$$

ahora, es posible aplicar la regla de L´Hôpital, así:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 2x + 1}{(x-1)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 2x + 1}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} = \frac{0}{0}$$

nuevamente, se aplica la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}-2}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = -\frac{3}{2}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{\ln x}\right) = -\frac{3}{2}$$

2.6. INTEGRALES IMPROPIAS

Las integrales impropias se pueden clasificar en dos grupos:

1) Integrales definidas cuyos extremos de integración, uno o ambos, tienden al infinito positivo o al infinito negativo, como se muestran enseguida:

$$\int_u^{\infty} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\;dx$$

2) Integrales definidas en las que el integrando presenta una discontinuidad en algún punto extremo o dentro del intervalo de integración como se muestran enseguida:

$\int_a^b f(x)\,dx$, discontinuidad en $x = a$

$\int_a^b f(x)\,dx$, discontinuidad en $x = b$

$\int_a^b f(x)\,dx$, discontinuidad en $x = c$; $a < c < b$

Estas integrales se definen en términos de un límite y, se dice, cuando existe, que la integral converge; si no existe, la integral diverge.

EJEMPLO 2.6.1. Evalúa las siguientes integrales impropias y determina, si convergen o divergen.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-4} \frac{dx}{x^3}\,dx$

2) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{(3x-1)^{2/3}}\,dx$

RESOLUCIÓN:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = I$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$I = \lim_{u\to\infty} \int_{u}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx + \lim_{v\to\infty} \int_{0}^{v} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

Estas son integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{1}{w^2+a^2}\,dw$

$$I = \lim_{u\to-\infty} \Big[ang\tan(x+1) \Big]_u^0 + \lim_{u\to-\infty} \Big[ang\tan(x+1) \Big]_0^v$$

$$I = \lim_{u\to-\infty} \Big[ang\tan(1) - ang\tan(u+1) \Big] +$$

$$\lim_{v\to\infty} \Big[ang\tan(v+1) - ang\tan(1) \Big]$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi$$ por lo tanto, la integral converge

2) $$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} (\ln x) x^{-2}\, dx = I$$

Esta es una integral que se resuelve aplicando el método de integración por partes. Ten presente que, si estás preparando un extraordinario, ya conoces el método. Como recordatorio, se tiene:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$u = \ln x \quad , \quad dv = x^{-2} dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad , \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$I = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \ln x + \int x^{-2} dx \right]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_2^b$$

$$I = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

Al aplicar el límite a la primera función, se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Y se resuelve aplicando la regla de L´Hopital.

Finalmente,

$$I = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{2}{b} + \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$$, por lo que la integral converge.

3) $I=\int_{-\infty}^{-4}\frac{dx}{x^3}=\lim_{u\to-\infty}\int_{-\infty}^{-4}x^{-3}dx=\lim_{u\to-\infty}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_u^{-4}$

$$I=\lim_{u\to-\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_u^{-4}=\lim_{u\to-\infty}\left[-\frac{1}{2(-4)^2}+\frac{1}{2u^2}\right]=-\frac{1}{32}$$, la integral converge.

4) Aquí, se tiene el caso en que la función es discontinua en $x=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}\in[0,2]$

$$I=\int_0^2\frac{1}{(3x-1)^{2/3}}\,dx=\int_0^{1/3}(3x-1)^{-2/3}\,dx+\int_{1/3}^{2}(3x-1)^{-2/3}\,dx$$

$$I=\lim_{\varepsilon\to\frac{1^-}{3}}\int_0^{\varepsilon}(3x-1)^{-2/3}\,dx+\lim_{\varepsilon\to\frac{1^+}{3}}\int_{\varepsilon}^{2}(3x-1)^{-2/3}\,dx$$

integrando se tiene:

$$I=\lim_{\varepsilon\to\frac{1^-}{3}}(3x-1)^{1/3}\Big|_0^{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to\frac{1^+}{3}}(3x-1)^{1/3}\Big|_{\varepsilon}^{2}$$

$$I=\lim_{\varepsilon\to\frac{1^-}{3}}\left[(3(\varepsilon)-1)^{1/3}-(-1)^{1/3}\right]+\lim_{\varepsilon\to\frac{1^+}{3}}\left[(3(2)-1)^{1/3}-(3(\varepsilon)-1)^{1/3}\right]$$

$I\ =\ 1+\sqrt[3]{5}$ por lo tanto, la integral converge

TEMA 3

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

OBJETIVO

El alumno adquirirá habilidad en el uso de diversas técnicas de integración y las aplicará en la solución de problemas geométricos.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- Método de integración por partes
- Método de integración por sustitución trigonométrica
- Método de integración por descomposición en fracciones parciales
- Integración cuando se emplean sustituciones diversas
- Integración de funciones trigonométricas
- Aplicaciones de la integral definida: cálculo de áreas, cálculo del volumen de sólidos de revolución y cálculo de la longitud de arco

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

- Deberás tener en cuenta que para identificar y aplicar los diferentes métodos de integración es necesario dominar las integrales básicas, así como los cambios de variables más frecuentes que se han estudiado en temas anteriores.

- La habilidad que exige el manejo de los métodos de integración se adquiere a partir de la identificación del integrando y de sus características, los cuales son el fundamento teórico de este proceso, por lo que es conveniente que tengas presente la relación entre funciones derivadas y sus antiderivadas, desde las inmediatas, hasta las que requieren un cambio de variable.

- Para abordar las aplicaciones de tipo geométrico, debes de considerar que es fundamental haber adquirido la habilidad necesaria para calcular el valor de las integrales definidas diversas.

- Las aplicaciones geométricas requieren, en la mayoría de los casos, recurrir a la representación en el plano cartesiano y la identificación de diversas curvas, por lo que se sugiere reafirmes tus antecedentes de geometría analítica plana.

BIBLIOGRAFÍA

LARSON, R. y Bruce H. Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica*. *Cálculo* I, 9a. ed., México, McGraw-Hill, 2010.

STEIN, S. y A. Barcellos, *Cálculo y Geometría Analítica*, 5a. ed., Colombia, McGraw-Hill, 1995.

SWOKOWSKI, E., *Cálculo con Geometría Analítica*, 2a. ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.

ZILL, D. y W. Wright, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 4a. ed., China, McGraw-Hill, 2011.

3.1. INTEGRACIÓN POR PARTES

Este método aplica en aquellas integrales cuyo integrando está formado por un producto de funciones, o bien, un cociente de funciones que se puede expresar como producto de funciones. El método se establece a partir de la expresión:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Uno de los aspectos principales a considerar en este método es que se debe identificar a la función u , de manera que sea fácilmente diferenciable, y a la función dv , la cual es conveniente sea relativamente de fácil integración, de manera que la nueva integral que se genere tenga una estructura más sencilla que la integral original.

EJEMPLO 3.1.1. Efectuar:

1) $\int x \ln x\,dx$

2) $\int 3t^2 e^{2t}\,dt$

3) $\int ang\tan x\,dx$

4) $\int x e^{-2x}\,dx$

5) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

6) $\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx$

RESOLUCIÓN:

1) $I = \int \underset{u}{x}\ \underset{dv}{\ln x}\ dx$

$$u = \ln x \qquad dv = x$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

2) $$I = \int 3t^2 e^{2t} dt$$

$$u = 3t^2 \qquad dv = e^{2t} dt$$

$$du = 6t\, dt \qquad v = \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$I = \int 3t^2 e^{2t} dt = \frac{3}{2} t^2 e^{2t} - 3 \underbrace{\int t e^{2t} dt}_{I_1} \leftarrow \text{nuevamente se integra por partes}$$

$$I_1 = \int t e^{2t} dt = \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{2} \int e^{2t} dt = \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t}$$

$$u = t \qquad dv = e^{2t}$$

$$du = dt \qquad v = \frac{1}{2} e^{2t}$$

Recordando la integral original, se tiene, finalmente,

$$I = \int 3t^2 e^{2t} dt = \frac{3}{2} t^2 e^{2t} - 3 \left[\frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} \right] + C$$

3) $$I = \int ang \tan x\, dx = x\, ang \tan x - \underbrace{\int \frac{x}{1 + x^2}}_{I'} dx$$

$$u = ang \tan x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{1 + x^2} dx \qquad v = x$$

$$I' = \int \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(1 + x^2 \right)$$

$$I = \int ang \tan x\, dx = x\, ang \tan x - \frac{1}{2} \ln \left(1 + x^2 \right) + C$$

4) $I = \int xe^{-2x}\, dx$

Al aplicar la expresión de integración por partes, se tiene:

$$u = x \qquad dv = e^{-2x}dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\int x\,e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x\,e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

5) $I = \int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$

Integrando por partes:

$$u = \ln x \qquad dv = \sqrt{x}\, dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

$$I = \int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}\ln\, x - \frac{2}{3}\int \frac{x^{3/2}}{x}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$$

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

6) $I=\int e^{x}\operatorname{sen}2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos 2x e^{x}+\frac{1}{2}\underbrace{\int e^{x}\cos 2x\,dx}_{I_1}$

$u=e^{x}\qquad dv=\operatorname{sen}2x\ dx$

$du=e^{x}\,dx\qquad v=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$I=\underbrace{\int e^{x}\cos 2x\,dx}_{\text{nuevamente se integra por partes}}=\frac{1}{2}e^{x}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{2}\underbrace{\int e^{x}\operatorname{sen}2x\,dx}_{\text{es la integral original}}$$

$u=e^{x}\qquad dv=\cos 2x\,dx$

$du=e^{x}dx\qquad v=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$

Al sustituir en la integral original:

$$I=\int e^{x}\operatorname{sen}2x\ dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos 2x\ e^{x}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{x}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{2}\underbrace{\int e^{x}\operatorname{sen}2x\,dx}_{\text{es la integral original}}\right]$$

$$\int e^{x}\operatorname{sen}2x\ dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos 2x\ e^{x}+\frac{1}{4}e^{x}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{x}\operatorname{sen}2x\ dx$$

Agrupando términos:

$$\frac{5}{4}\int e^{x}\operatorname{sen}2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos 2x e^{x}+\frac{1}{4}e^{x}\operatorname{sen}2x+C$$

finalmente, se tiene:

$$\int e^{x}\operatorname{sen}2x\,dx=-\frac{4}{10}e^{x}\cos 2x e^{x}+\frac{4}{20}e^{x}\operatorname{sen}2x+C$$

$$I=-\frac{2}{5}e^{x}\cos 2x\ e^{x}+\frac{1}{5}e^{x}\operatorname{sen}2x+C$$

3.2. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Frecuentemente, al resolver integrales, se tienen en el integrando expresiones algebraicas que no definen integrales inmediatas y, tampoco, pasan a ser inmediatas con algún cambio de variable simple. De manera particular, las formas algebraicas

$$\sqrt{a^2-u^2}\ ,\ \sqrt{a^2+u^2}\ ,\ \sqrt{u^2-a^2}$$

al presentarse como parte del integrando, sugieren realizar una serie de sustituciones que involucran algunas funciones e identidades trigonométricas, las cuales se concentran en la siguiente tabla:

Si la integral contiene:	Realizar la sustitución:	Emplear la identidad:
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u=a\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u=a\tan\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u=a\sec\theta$	$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$

Cabe señalar, que parte del fundamento de estas sustituciones e identidades es el teorema de Pitágoras y su relación con el triángulo rectángulo que establece su manejo desde la geometría, por lo que en algunos de los ejemplos siguientes se recurrirá a este elemento.

EJEMPLO 3.2.1

1) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

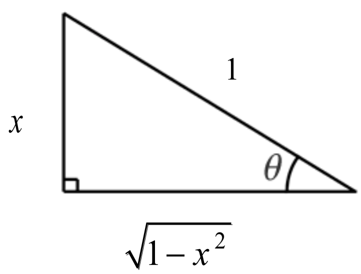
3) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^{3/2}}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

RESOLUCIÓN:

1) $$I=\int \frac{2x^3\,dx}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{a^2-u^2}}}=\int \frac{2\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta}=2\int \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta$$



$$x=\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow x^3=\operatorname{sen}^3\theta$$

$$dx=\cos\theta\;d\theta$$

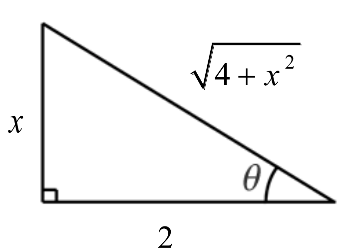
$$\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$$

$$I=2\int \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}^2\theta\;d\theta=2\int \operatorname{sen}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$I=2\left[\int \operatorname{sen}\theta\;d\theta-\int \operatorname{sen}\theta(\cos\theta)^2\,d\theta\right]$$

$$I=-2\cos\theta+\frac{2}{3}(\cos\theta)^3+C=-2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+C$$

2) $$I=\int \frac{\overbrace{\sqrt{4+x^2}}^{\sqrt{a^2+u^2}}}{x}\,dx$$



$$x=2\tan\theta$$

$$dx=2\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{4+x^2}=2\sec\theta$$

$$I=\int\frac{(2\sec\theta)\left(2\sec^{2}\theta\right)}{2\tan\theta}d\theta=2\int\frac{\sec\theta\left(1+\tan^{2}\theta\right)}{\tan\theta}d\theta$$

$$I=2\int\frac{\left(\sec\theta+\sec\theta\tan^{2}\theta\right)}{\tan\theta}d\theta$$

$$I=2\int\frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta+2\int 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

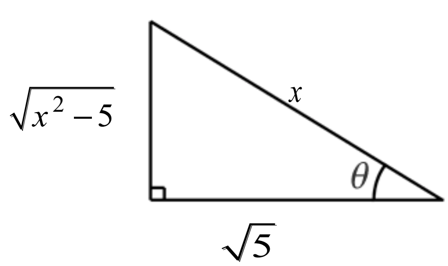
$$I=2\int\csc\theta\, d\theta+\ 2\int\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$I=2\left[\ln\left(\csc\theta-\cot\theta\right)+\sec\theta\right]+C$$

Para expresar en términos de la variable original, se toma como referencia un triángulo rectángulo, identificando las funciones trigonométricas de interés, donde resulta finalmente,

$$I=\ 2\left[\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^{2}}-2}{x}\right)\right]+\sqrt{4+x^{2}}+C$$

3) $$I=\int\frac{1}{\left(x^{2}-5\right)^{3/2}}dx=\int\frac{1}{\left(x^{2}-5\right)\underbrace{\sqrt{x^{2}-5}}_{\sqrt{u^{2}-a^{2}}}}dx$$



$$x=\sqrt{5}\sec\theta$$

$$dx=\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta$$

$$\sqrt{x^{2}-5}=\sqrt{5}\tan\theta$$

$$x^{2}-5=5\tan^{2}\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta}{5\tan^2\theta\sqrt{5}\tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{5}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{5}\int (\operatorname{sen}\theta)^{-2}\cos\theta\,d\theta$$

$$I = -\frac{1}{5}(\operatorname{sen}\theta)^{-1} + C = -\frac{1}{5}\csc\theta + C$$

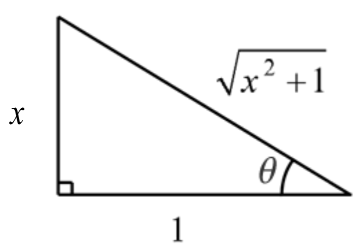
En términos de la variable original:

$$I = -\frac{x}{5\sqrt{x^2-5}} + C$$

4) $I = \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

la función del integrando también se puede expresar en términos de radicales, según se muestra a continuación

$$I = \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4}\,dx$$



$$x = \tan\theta$$

$$dx = \sec^2\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta} = \int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \; = \frac{1}{2}\left[\int d\theta + \int \cos 2\theta \, d\theta \right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\theta \; + \; \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta \right] + C$$

Para expresar en términos de la variable original:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \; \cos\theta$$

donde

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \;\; , \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Finalmente,

$$I = \frac{1}{2} ang \tan x + \; \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + C$$

3.3. INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Este método considera al integrando como el cociente de dos funciones polinomiales $\frac{f(x)}{g(x)}$, el cual, en principio, no da lugar a una integral inmediata.

Con objeto de facilitar su manejo, es conveniente tomar en cuenta las siguientes consideraciones.

- ✓ Analizar, si el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$; de no ser así, efectuar primero la división de polinomios.
- ✓ Expresar $g(x)$ como un producto de factores lineales $(px + q)$, los cuales pueden determinar raíces reales diferentes o raíces reales iguales.
- ✓ Si fuese el caso, en el polinomio $g(x)$ identificar la forma cuadrática irreducible $ax^2 + bx + c$, en la cual se identifican raíces complejas donde, también, podrían presentarse en repetición (raíces complejas iguales).

EJEMPLO 3.3.1

Efectúa las integrales que se presentan a continuación:

1) $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2+x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^2\left(x^2-4\right)}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{3x^3+10x}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{2x^4+4x^2+6}{3x^3-12x}\,dx$

RESOLUCIÓN:

1) $I = \displaystyle\int \frac{x-4}{x^2+x}\,dx$

$$\frac{x-4}{x^2+x} = \frac{x-4}{x(x+1)}$$

← raíces reales diferentes

$$\frac{x-4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$x-4=A(x+1)+Bx$$

$x=-1$; $x=0$

$-5=-B \Rightarrow B=5$ $\quad -4=A$

$$\frac{x-4}{x(x+1)}=\frac{-4}{x}+\frac{5}{x+1}$$

$$I=\int\frac{x-4}{x^2+x}dx=5\ln|x+1|-4\ln|x|+C$$

2) $I=\int\dfrac{x^3-2}{x^2(x^2-4)}dx$

$$\frac{x^3-2}{x^2(x^2-4)}=\frac{x^3-2}{x^2(x-2)(x+2)}$$

raíces reales iguales
y reales diferentes

$$\frac{x^3-2}{x^2(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}+\frac{D}{(x+2)}$$

$$x^3-2=A(x)(x-2)(x+2)+B(x-2)(x+2)+C(x^2)(x+2)+D(x^2)(x-2)$$

$x=0$; $x=2$

$-2=-4B \Rightarrow B=\frac{1}{2}$ $\quad 6=16C \Rightarrow C=\frac{3}{8}$

$x=-2$; $x=1$

$-10=-16D \Rightarrow D=\frac{5}{8}$ $\quad 3A=0 \Rightarrow A=0$

$$\frac{x^3-2}{x^2(x-2)\,(x+2)} = +\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{3}{8}}{(x-2)}+\frac{\frac{5}{8}}{(x+2)}$$

$$I=\int\frac{x^3-2}{x^2\left(x^2-4\right)}dx-\frac{1}{2x}+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{5}{8}\ln|x+2|+C$$

3) $$I=\int\frac{3x^3+10x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

$$\frac{3x^3+10x}{\left(x^2+4\right)^2} \longleftarrow$$ raíces complejas iguales

$$\frac{3x^3+10x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$3x^3+10x=(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)$$

$$3x^3+10x=Ax^3+Bx^2+(4A+C)x+(4B+D)$$

Por igualdad de polinomios resulta:

$$A=3,\quad B=0,\quad C=-2,\quad D=0$$

$$\frac{3x^3+10x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{3x}{x^2+4}-\frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$I=\int\frac{3x^3+10x}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{1}{x^2+4}+C$$

4) $I=\int \frac{2x^4+4x^2+6}{3x^3-12x}dx=\frac{2}{3}\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3-4x}dx$

En el integrando, se observa que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, por lo que inicialmente se realiza la división de polinomios, obteniendo el resultado que se indica:

$$I=\frac{2}{3}\int\left((x+2)+\frac{4x^2+8x+3}{x^3-4x}\right)dx$$

$$I=\underbrace{\frac{2}{3}\int(x+2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\frac{2}{3}\int\frac{4x^2+8x+3}{x^3-4x}dx}_{I_2}$$

$$I_1=\frac{2}{3}\int(x+2)\,dx=\frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]$$

$$I_2=\frac{2}{3}\int\frac{4x^2+8x+3}{x^3-4x}dx$$

$$\frac{4x^2+8x+3}{x^3-4x}=\frac{4x^2+8x+3}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{4x^2+8x+3}{x(x-2)(x+2)}\longleftarrow$$ raíces reales diferentes

$$\frac{4x^2+8x+3}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+2)}$$

$$4x^2+8x+3=A(x-2)(x+2)+Bx(x-2)+Cx(x-2)$$

$x=0$; $x=2$

$3=-4A\ \Rightarrow\ A=-\frac{3}{4}$ $\qquad$ $35=8B\ \Rightarrow\ B=\frac{35}{8}$

$x = -2$

$3 = 8C \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{3}{8}$

$$\frac{4x^2 + 8x + 3}{x(x-2)(x+2)} = \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{35}{8}}{(x-2)} + \frac{\frac{3}{8}}{(x+2)}$$

$$I_2 = \frac{2}{3}\int \frac{4x^2 + 8x + 3}{x^3 - 4x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x-2+C|$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{x^2}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

3.4. INTEGRALES DIVERSAS

Frecuentemente, se presentan integrales en las cuales es necesario realizar procedimientos algebraicos como completar un trinomio cuadrado perfecto, emplear de manera reiterativa identidades trigonométricas conocidas, o bien, en otros casos, realizar cambios de variable elementales. A continuación, se presentarán algunos de estos casos.

EJEMPLO 3.4.1.

1) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-6x+15}\,dx$

4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5+2x-x^2}}\,dx$

5) $\displaystyle\int \cos^4(2x)\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-3x+2}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\tan^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$

RESOLUCIÓN:

1) $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+15}\,dx = I$

$$x^2-6x+15 = x^2-6x+9\ +6$$

$$= (x-3)^2+6$$

$$I = \int \frac{3x-2}{(x-3)^2+6}\,dx = \int \frac{3(u+3)-2}{u^2+6}\,du$$

Realizando cambio de variable

$$u = x-3 \Rightarrow x = u+3$$

$$dx = du$$

$$I = \int \frac{3(u+3)-2}{u^2+6}\,du = \int \frac{3u+7}{u^2+6}\,du = 3\underbrace{\int \frac{u}{u^2+6}\,du}_{\int \frac{dz}{z}} + 7\int \frac{du}{u^2+6}$$

nuevamente, un cambio de variable:

$$z = u^2+6 \Rightarrow dz = 2u\,du$$

$$I = \frac{3}{2}\ln\left(u^2+6\right)+\frac{7}{\sqrt{6}}\,ang\tan\frac{u}{\sqrt{6}}+C$$

$$u = x-3$$

Finalmente,

$$I = \frac{3}{2}\ln\left[(x-3)^2+6\right]+\frac{7}{\sqrt{6}}\,ang\tan\frac{(x-3)}{\sqrt{6}}+C$$

2) $\int \frac{3}{\sqrt{5+2x-x^2}}\, dx = I$

$$5+2x-x^2 = -\left(x^2-2x-5\right)$$

$$= -\left[(x-1)^2 - 6\right]$$

$$= \underbrace{6-(x-1)^2}_{a^2-u^2}$$

$$I = \int \frac{3}{\sqrt{5+2x-x^2}}\, dx = 3\int \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{6-(x-1)^2}}_{\sqrt{a^2-u^2}}}\, dx$$

$$I = 3\, ang\, \text{sen} \frac{(x-1)}{\sqrt{6}} + C$$

3) $\int \frac{1}{2x^2-3x+2}\, dx = I$

$$2x^2-3x+2 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$$

$$= 2\left(\underbrace{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}}_{\text{se completa un trinomio cuadrado perfecto}} - \frac{9}{16} + 1\right)$$

$$= 2\left[\underbrace{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}_{u^2+a^2}\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]}\, dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\sqrt{7}}\, ang\tan\left(\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)\right] + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\, ang\tan\left(\frac{4x-3}{\sqrt{7}}\right) + C$$

4) $I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\; dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \cos^2 x\; dx$

Recordando:

$$\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$$

$$I = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x \operatorname{sen} x\; dx$$

$$I = \int \cos^2 x \operatorname{sen} x\; dx - \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\; dx$$

$$I = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

5) $\int \cos^4 (2x)\; dx = I$

Aquí, se requiere la identidad

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u$$

$$I = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos^2 4x\right) dx$$

Nuevamente, la identidad anterior:

$$I = \int \frac{1}{4}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x\right) dx$$

$$I = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 8x + C$$

$$I = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 8x + C$$

6) $\displaystyle\int \frac{\tan^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx = I$

Aquí, se requiere la identidad

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$I = \int \frac{\sec^2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx - \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$I = \tan\sqrt{x} - \frac{1}{2}(2)\sqrt{x} + C = \tan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

3.5. APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

I) Cálculo de áreas en coordenadas cartesianas

En el cálculo de áreas de regiones planas, debes considerar que tales áreas se pueden establecer de diferentes formas: a través de regiones horizontales (lo que implica el integrando en términos de la variable y y el diferencial dy) o en regiones verticales (lo que implica el integrando en términos de la variable x y el diferencial dx). La elección dependerá de la forma como se presente la región, de manera que el proceso de integración sea el más simple posible.

De manera general, se establece:

$$A=\int_a^b \underbrace{\left[f(x)-g(x)\right]}_{\text{curva superior - curva inferior}} dx \quad \Longleftarrow \quad \text{región vertical}$$

$$A=\int_c^d \underbrace{\left[f(y)-g(y)\right]}_{\text{curva de la derecha - curva de la izquierda}} dy \quad \Longleftarrow \quad \text{región horizontal}$$

> **EJEMPLO 3.5.1**. Encuentra el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones $y=-x^2$ y $y=x-2$

RESOLUCIÓN:

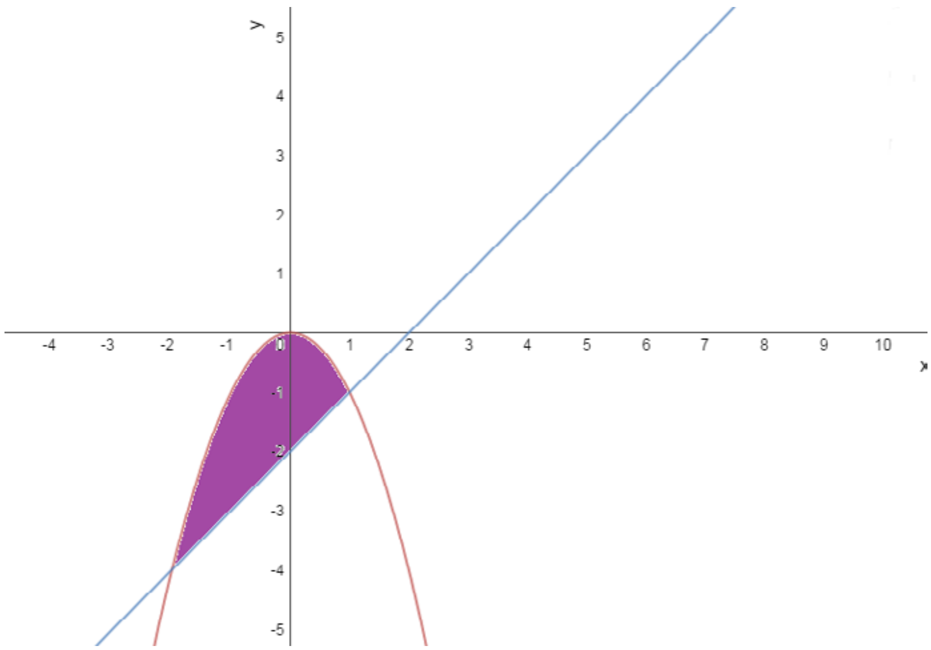
Inicialmente, se determinan los puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$y=-x^2 \quad (1) \qquad\qquad y=x-2 \quad (2)$$

igualando (1) y (2):

$$-x^2=x-2 \;\Rightarrow\; x^2+x-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\;\; x_2=-2$$

Los valores correspondientes de las ordenadas son $y_1 = -1, \quad y_2 = -4,$ por lo tanto, se tienen los puntos $P_1(1, -1)$ y $P_2(-2, -4)$; la gráfica de la región se muestra a continuación:



El área de interés, cuando se considera una región vertical, se obtiene al resolver la siguiente integral:

$$A = \int_{-2}^{1} \underbrace{\left[-x^2 - (x-2)\right]}_{\substack{\text{curva superior-} \\ \text{curva inferior}}} dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^{1}$$

$$A = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2} \text{ unidades de área}$$

EJEMPLO 3.5.2. Encuentra el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones

$y = x^3 - x^2 - 2x$ y $g(x) = 0$

RESOLUCIÓN:

Inicialmente, se determinan los puntos de intersección entre las curvas:

$y = x^3 - x^2 - 2x$ (1) $\qquad y = 0$ (2)

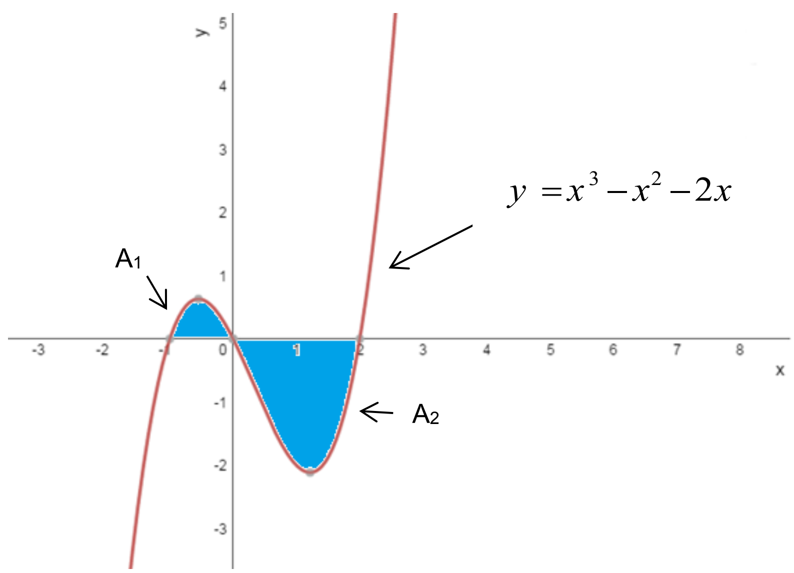
igualando (1) y (2), se tiene:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - x - 2\right) = 0$$

Se obtienen los valores en los cuales la curva (1) corta al eje de las abscisas $g(x) = 0$:

$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$

La siguiente gráfica muestra la región de interés:



El área total se puede interpretar como la suma de las áreas A_1 y A_2:

$$A = \underbrace{\int_{-1}^{0} \left(x^3 - x^2 - 2x\right) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{0}^{2} -\left(x^3 - x^2 - 2x\right) dx}_{A_2}$$

$$A=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=$$

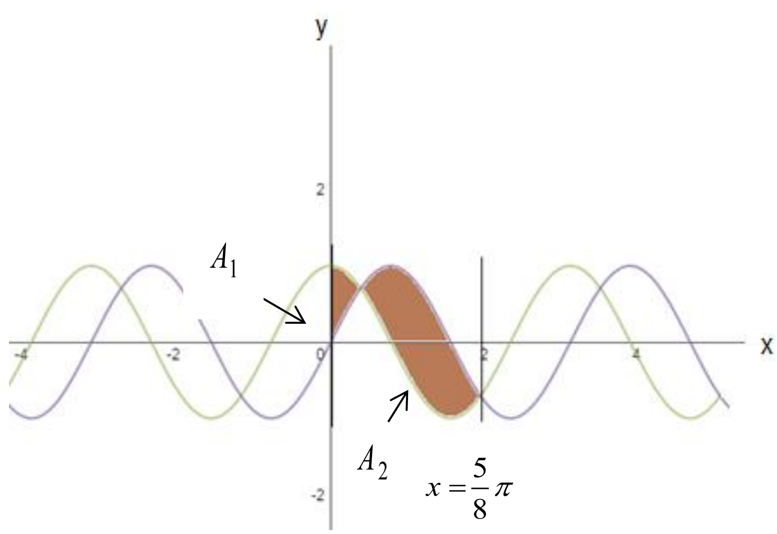
$$A=-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right]+\left[-4+\frac{8}{3}+4\right]=\frac{37}{12}\ \text{unidades de área}$$

EJEMPLO 3.5.3. Calcula el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones:

$y=\cos 2x,\quad y=\operatorname{sen} 2x$ en el intervalo $\left[0,\frac{5}{8}\pi\right]$

RESOLUCIÓN:

Aquí conviene establecer, gráficamente, la región de interés para definir en el cálculo cuál variable de integración es la más conveniente (región vertical o región horizontal).



Se observa que la región vertical es la más adecuada, además, el área buscada estará determinada por la suma de dos áreas:

$$A=A_1+A_2$$

$$A_1 = \int_0^{\pi/8} (\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/8}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\pi/8}^{5\pi/8} (\operatorname{sen}2x - \cos\ 2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\right]_{\pi/8}^{5\pi/8}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{10\pi}{8}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{8}\right)\right)$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{8}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$A = A_1 + A_2 = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}$ unidades de área

> **EJEMPLO 3.5.4.** Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las rectas
>
> $y = x, \quad y = 4x \quad \text{y} \quad y = -x + 2$

RESOLUCIÓN:

Inicialmente, se determinan los puntos de intersección de las rectas:

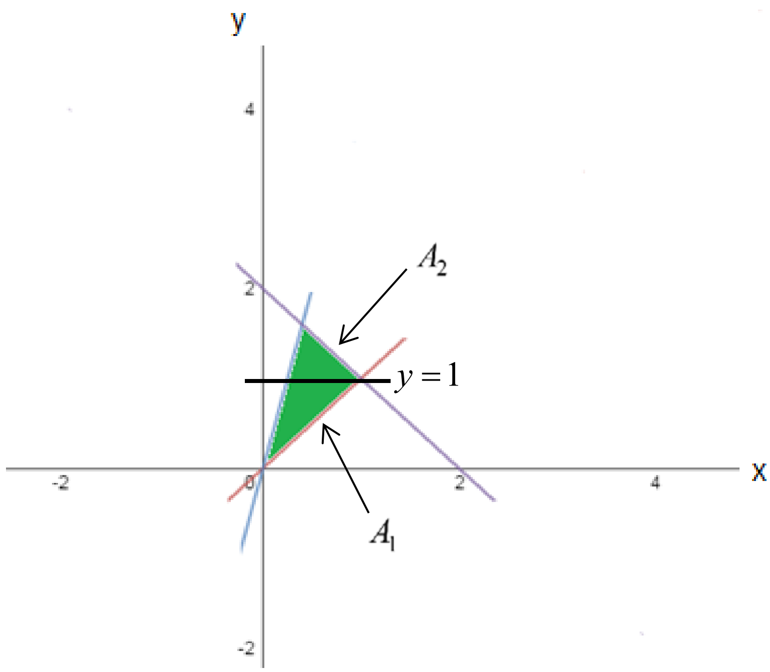
$$(1)\ y = x, \qquad (2)\ y = 4x \qquad \text{y} \qquad (3)\ y = -x + 2$$

Para (1) y (2): $\quad x = 4x \Rightarrow x = 0 \qquad \therefore \quad P_1(0,0)$

Para (1) y (3): $x = -x+2 \Rightarrow x = 1 \quad \therefore \quad P_2(1,1)$

Para (2) y (3): $4x = -x+2 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \quad \therefore \quad P_3\left(\frac{2}{5},\frac{8}{5}\right)$

El lugar geométrico de interés se muestra a continuación:



Como puedes observar, en este caso no importa si se considera una región vertical u horizontal; es necesario dividir la región en dos secciones, pues no es posible calcular el área con una sola integral.

Si se elige una *región horizontal*, al trazar el segmento de la recta horizontal que pasa por el punto $P_2(1,1)$, se tienen claramente definidas dos regiones, lo que lleva a calcular dos áreas, cuya suma dará el valor del área buscada:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_0^1 \underbrace{\left(y - \frac{y}{4}\right)}_{\substack{\text{curva de la derecha-} \\ \text{curva de la izquierda}}} dy + \int_1^{8/5} \underbrace{\left(-y + 2 - \frac{1}{4}y\right)}_{\substack{\text{curva de la derecha-} \\ \text{curva de la izquierda}}} dy$$

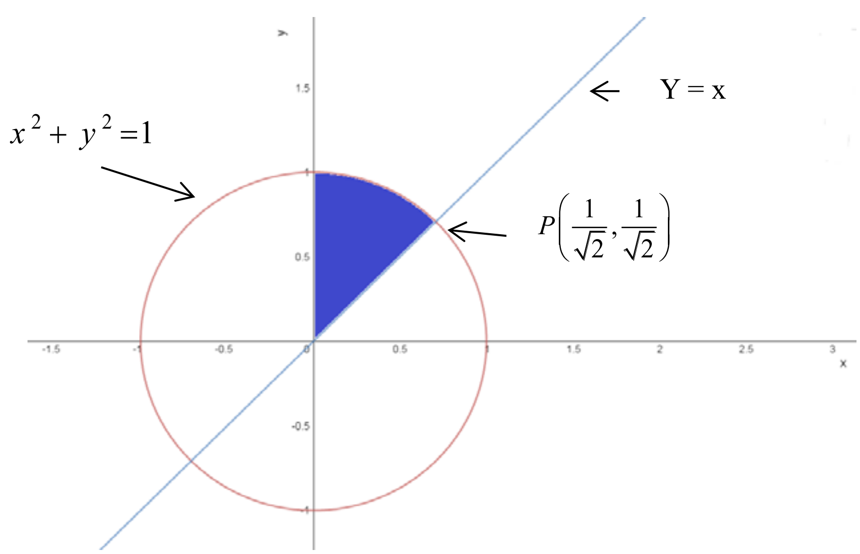
$$A=\int_0^1 \frac{3y}{4}\,dy+\int_1^{8/5}\left(2-\frac{5}{4}y\right)dy$$

$$A=\left[\frac{3}{8}y^2\right]_0^1+\left[2y-\frac{5}{8}y^2\right]_0^2=\frac{3}{8}+\frac{9}{40}=\frac{3}{5}\ \text{unidades de área}$$

EJEMPLO 3.5.5. Mediante Cálculo Integral, obtén el área de la región limitada por la gráfica de la curva de la ecuación $x^2+y^2=1$ y la recta $y=x$ en el intervalo desde $x=0$ hasta $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN:

La región de interés se muestra sombreada en la siguiente figura:



Según se observa, debe considerarse solo una parte del círculo en el primer cuadrante, por lo cual la ecuación correspondiente es $y=\sqrt{1-x^2}$.

Así, el área está dada por:

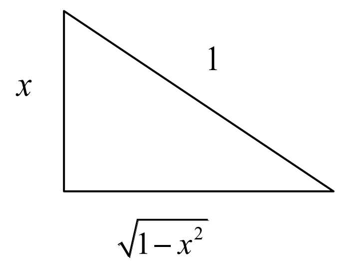
$$A=\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx=\underbrace{\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx}_{I_1}-\underbrace{\int_0^{1/\sqrt{2}}x\,dx}_{I_2}$$

La primera integral se puede resolver por sustitución trigonométrica:

$$x=\operatorname{sen}\theta$$

$$dx=\cos\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$$



$$I_1=\int\sqrt{1-x^2}\;dx=\int\cos\theta\cos\theta\,d\theta=\int(\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$I_1=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta)$$

También se tiene la identidad $\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$I_1=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

regresando a la variable original:

$$I_1=\frac{1}{2}(ang\operatorname{sen}x)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}=\frac{\pi+2}{8}$$

para la segunda integral:

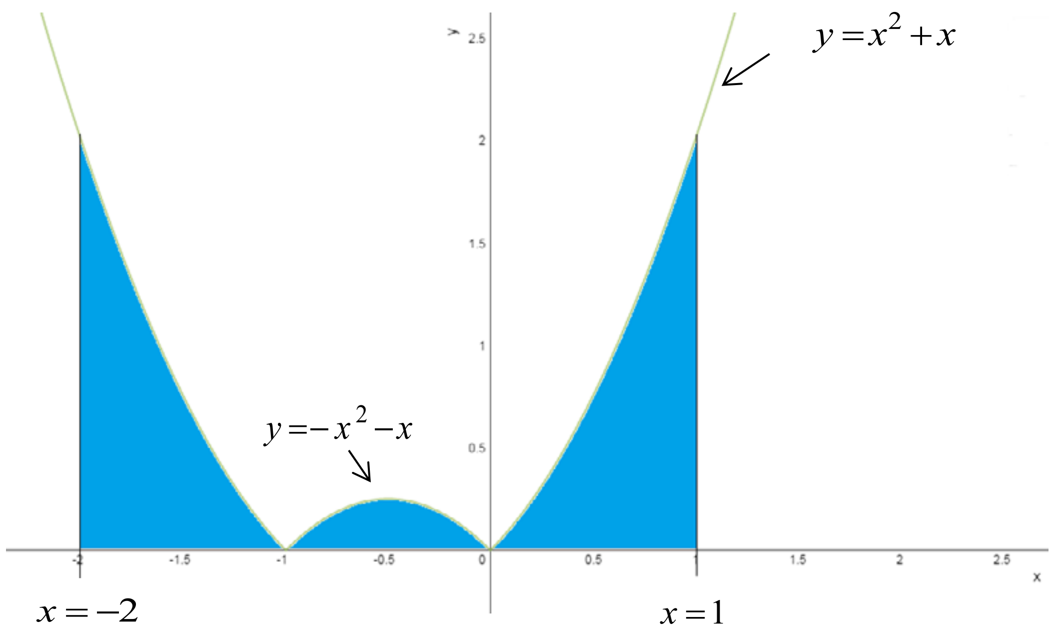
$$I_2 = \int_0^{1/\sqrt{2}} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

Finalmente, $A = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{8} u^2$, o unidades de área.

> **EJEMPLO 3.5.6**. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \left|x^2 + x\right|$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[-2,1]$

RESOLUCIÓN:

La gráfica de la función se presenta enseguida:



La función valor absoluto define dos intervalos, los cuales quedan establecidos de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & -2 \le x \le -1 \ \cup \ 0 \le x \le 1 \\ -\left(x^2 + x\right) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Por lo que el área se calcula a partir de la siguiente integral:

$$A=\int_{-2}^{1} f\left(x\right) dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^2+x\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(-x^2-x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x^2+x\right) dx$$

$$A=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$A=\left[\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{-8}{3}+2\right)\right]+\left[-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right]$$

$A=\dfrac{11}{6}u^2$ o unidades de área

II) Cálculo de longitud de arco en coordenadas cartesianas

Recuerda que para obtener la longitud de un arco de curva S a partir de su gráfica, puede presentarse cualquiera de los siguientes casos:

Si la gráfica corresponde a $y=f\left(x\right)$ en el intervalo $\left[a,b\right]$, se debe emplear:

$$S=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Si la gráfica corresponde a $x=f\left(y\right)$ en el intervalo $\left[c,d\right]$, se debe emplear:

$$S=\int_{c}^{d}\sqrt{1+\left[f'(y)\right]^2}\,dy$$

EJEMPLO 3.5.7. Calcula la longitud de arco entre los puntos $A\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$ y $B\left(8\ ,\dfrac{8}{3}\right)$ de la curva de la ecuación $y=\left(\dfrac{8}{27}x^2\right)^{1/3}$

RESOLUCIÓN:

La longitud de arco para la gráfica se obtiene a partir de:

$$S=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\ dx$$

La ecuación de la curva se expresa según se indica:

$$y=\left(\frac{8}{27}x^2\right)^{1/3}=\frac{\sqrt[3]{8x^2}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}x^{2/3}$$

Al derivar: $f'(x)=y'\ =\dfrac{4}{9}x^{-1/3}$

$$\left[f'(x)\right]^2=\frac{16}{81x^{2/3}}\qquad\Rightarrow\quad 1+\left[f'(x)\right]^2=1+\frac{16}{81x^{2/3}}$$

Debes tener presente la conveniencia de efectuar las operaciones que simplifiquen la expresión que determina el integrando:

$$\left(1+\left[f'(x)\right]^2\right)^{1/2}=\left(\frac{81x^{2/3}+16}{81x^{2/3}}\right)^{1/2}$$

$$=\frac{\left(81x^{2/3}+16\right)^{1/2}}{(81)^{1/2}\ x^{1/3}}$$

finalmente,

$$\left(1+\left[f'(x)\right]^2\right)^{1/2}=\frac{\left(81x^{2/3}+16\right)^{1/2}}{9x^{1/3}}$$

sustituyendo en la expresión para cálculo de longitud de arco:

$$S=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\frac{1}{9}\int_1^8\frac{\left(81x^{2/3}+16\right)^{1/2}}{x^{1/3}}dx$$

Para integrar, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$u=81x^{2/3}+16$$

$$du=\frac{162}{3\sqrt[3]{x}}dx=\frac{54}{\sqrt[3]{x}}dx$$

integrando y completando el diferencial:

$$S=\left[\frac{2}{(9)(54)(3)}\left(81x^{2/3}+16\right)^{3/2}\right]_1^8$$

$$S=\frac{1}{729}\left[\left(81(4)+16\right)^{3/2}-\left(81(1)+16\right)^{3/2}\right]$$

$S=7.29$ unidades de longitud

EJEMPLO 3.5.8. Calcula la longitud de la curva $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{y}$ en el intervalo $[2\,,4]$

RESOLUCIÓN:

La curva está en la forma $x = f(y)$, por lo que la longitud de arco para la gráfica se obtiene a partir de:

$$S = \int_c^d \sqrt{1+\left[f'(y)\right]^2}\,dy$$

Se deriva a la función $x = f(y)$, después se simplifica para aplicar la expresión correspondiente y se tiene:

$$f'(y) = \frac{dx}{dy} = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

$$\left[f'(y)\right]^2 = \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 1+\left[f'(y)\right]^2 = 1+\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^2$$

$$1+\left[f'(y)\right]^2 = y^4 - 1 + \frac{1}{y^4} = \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^2$$

sustituyendo en la expresión de longitud de arco:

$$S = \int_c^d \sqrt{1+\left[f'(y)\right]^2}\,dy = \int_2^4 \sqrt{\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^2}\,dy$$

$$S = \int_2^4 \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)dy = \left[\frac{y^3}{3} + \frac{1}{y}\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$S = 17.9$ unidades de longitud

EJEMPLO 3.5.9. Calcula la longitud de la curva $y = \frac{1}{2}\ln(\cos 2x)$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{12}$

RESOLUCIÓN:

La longitud de arco para la curva se obtiene a partir de:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

La derivada de la ecuación de la curva se expresa según se indica:

$$f'(x) = y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-2\,\text{sen}\,2x}{\cos 2x}\right] = -\frac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x} = -\tan 2x$$

$$S = \int_0^{\pi/12} \sqrt{1+\tan^2 2x}\, dx = \int_0^{\pi/0} \sec\, 2x\, dx$$

El integrando resulta de la identidad:

$$\tan^2 u + 1 = \sec^2 u \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\tan^2 u + 1} = \sec u$$

resolviendo la integral y al evaluar, se tiene:

$$S = \frac{1}{2}\ln\left(\sec 2x + \tan 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\sec 2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \tan 2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sec(0) + \tan(0)\right)\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln(1)\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$S = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$ unidades de longitud

III) Cálculo de volumen de sólidos de revolución

Para obtener el volumen de un sólido de revolución, se debe considerar cuál es el eje de revolución, este puede ser el eje de las abscisas (horizontal) o el eje de las ordenadas (vertical), o bien, rectas paralelas a los ejes coordenados.

Cuando el eje de revolución es el eje de las abscisas, el volumen del sólido de revolución se obtiene a partir de la expresión:

$$V = \pi \int_a^b \left[R(x) \right]^2 dx$$

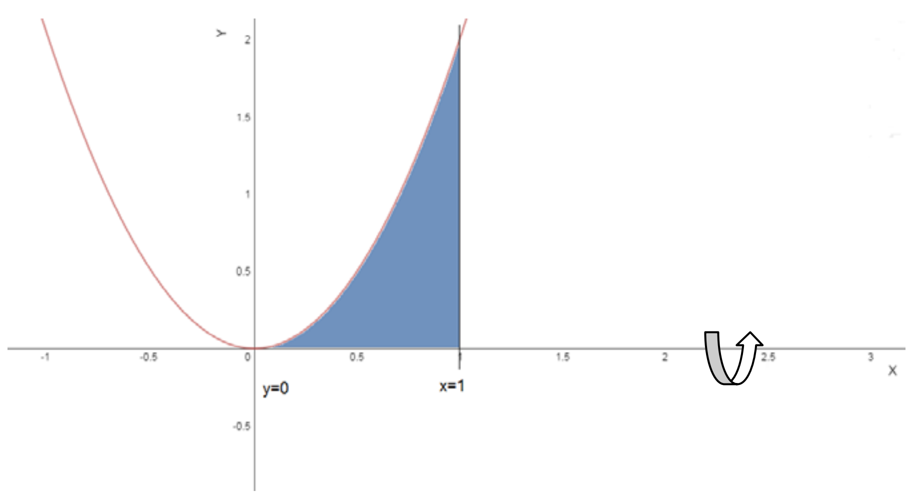
Cuando el eje de revolución es el eje de las ordenadas, el volumen del sólido de revolución se obtiene a partir de la expresión:

$$V = \pi \int_c^d \left[R(y) \right]^2 dy$$

EJEMPLO 3.5.10. Determina el volumen del sólido generado al girar la región plana limitada por las curvas $y = 2x^2, \quad y=0, \quad x=1$ alrededor del eje x .

RESOLUCIÓN:

La gráfica de la región se muestra enseguida:



para calcular el volumen de interés, se emplea:

$$V = \pi \int_a^b \left[R(x) \right]^2 dx$$

Los valores de los extremos de integración son $a=0$ y $b=1$ y el radio del sólido generado está dado por la función, por lo que:

$$R(x) = 2x^2 \quad \Rightarrow \left[R(x) \right]^2 = 4x^4$$

Sustituyendo en la expresión del volumen, se tiene:

$$V = \pi \int_0^1 4x^4 dx = \pi \left(\frac{4x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{4}{5}\pi \quad \text{unidades de volumen}$$

EJEMPLO 3.5.11. Determina el volumen del sólido generado al girar la región plana limitada por las curvas $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x$ alrededor del eje x.

RESOLUCIÓN:

Inicialmente, se determinan los puntos de intersección entre las dos curvas:

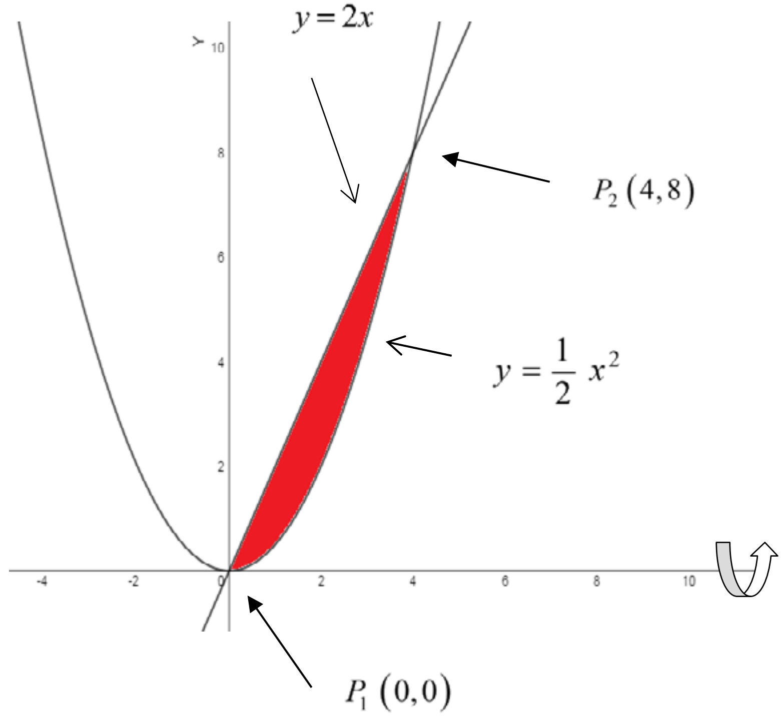
$$\frac{1}{2}x^2 = 2x \Rightarrow 4x - x^2 = 0$$

$$x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

Para obtener la ordenada:

$y_1 = 0$ y $y_2 = 2(4) = 8$, entonces, $P_1(0,0)$ y $P_2(4,8)$

La gráfica de la región plana que gira se muestra enseguida:



Aquí, dos curvas determinan la región plana que gira, la curva inferior genera el radio menor y la curva superior el radio mayor; entonces, el volumen se calcula partir de:

$$V = \pi\int_a^b \left\{\left[R\left(x\right)\right]^2 - \left[r\left(x\right)\right]^2\right\} dx$$

donde el radio mayor es:

$$R\left(x\right) = 2x \;\Rightarrow\; \left[R\left(x\right)\right]^2 = 4x^2$$

y el radio menor es:

$$r\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2 \;\Rightarrow\; \left[r\left(x\right)\right]^2 = \frac{1}{4}x^4$$

Sustituyendo en la expresión de volumen:

$$V = \pi\int_0^4 \left(4x^2 - \frac{1}{4}x^4\right) dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_0^4$$

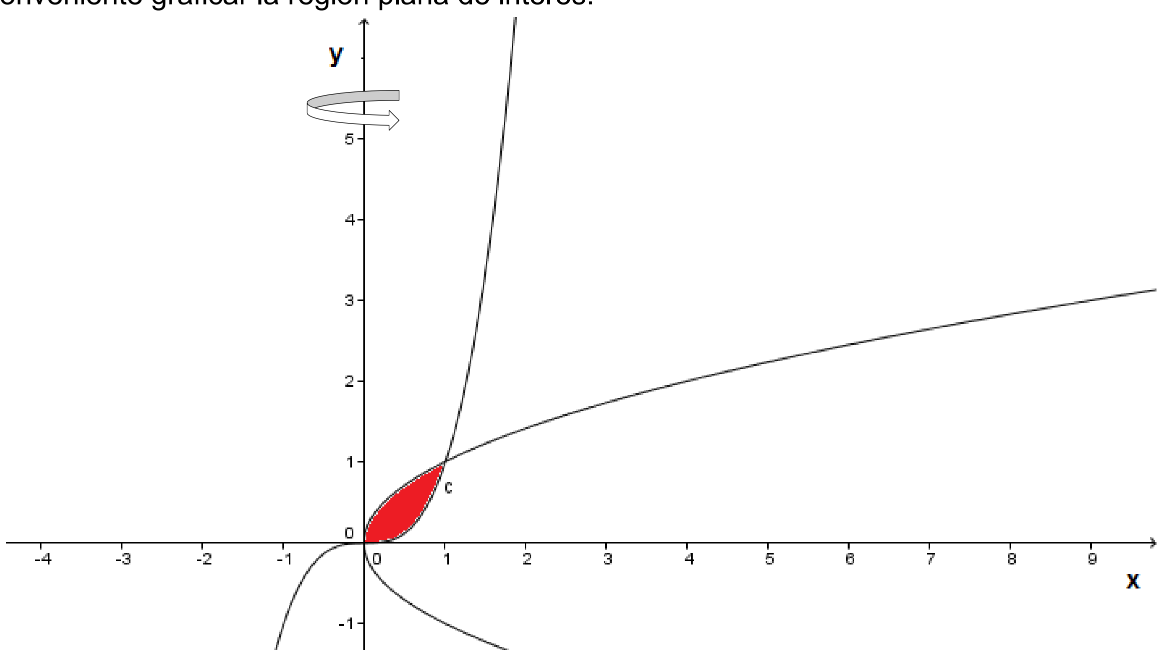
$$V = \pi\left[\frac{4}{3}(4)^3 - \frac{(4)^5}{20}\right] = \pi\left(\frac{256}{3} - \frac{1024}{20}\right)$$

$$V = \pi\left[\frac{4}{3}(4)^3 - \frac{(4)^5}{20}\right] = \frac{512}{15}\pi \text{ unidades de volumen}$$

EJEMPLO 3.5.12. Sea la región plana acotada por las curvas $y = x^3$ y $y^2 = x$, las cuales se intersecan en los puntos $P_1(0,0)$ y $P_2(1,1)$. Si la región gira alrededor del eje y, determina el volumen del sólido generado.

RESOLUCIÓN:

Es conveniente graficar la región plana de interés:



Se debe recordar que, si el eje de revolución es el eje de las ordenadas, el volumen del sólido de revolución se obtiene a partir de la expresión:

$$V = \pi\int_c^d [R(y)]^2\, dy$$

Sin embargo, aquí dos curvas determinan la región plana que gira; la curva de la derecha genera el radio mayor y la curva de la izquierda genera el radio menor; entonces, el volumen se calcula partir de la expresión:

$$V = \pi\int_c^d \left\{[R(y)]^2 - [r(y)]^2\right\} dy$$

donde el radio mayor está dado por:

$$R(y) = \sqrt[3]{y} \quad \Rightarrow [R(y)]^2 = y^{2/3}$$

y el radio menor por:

$$r(y) = y^2 \quad \Rightarrow [r(y)]^2 = y^4$$

Sustituyendo en la expresión del volumen, se tiene:

$$V = \pi\int_0^1 \left(y^{2/3} - y^4\right) dy = \pi\left[\left(\frac{3}{5}\right)y^{5/3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1$$

$$V = \pi\left[\left(\frac{3}{5}\right)y^{5/3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}\pi$$ unidades de volumen

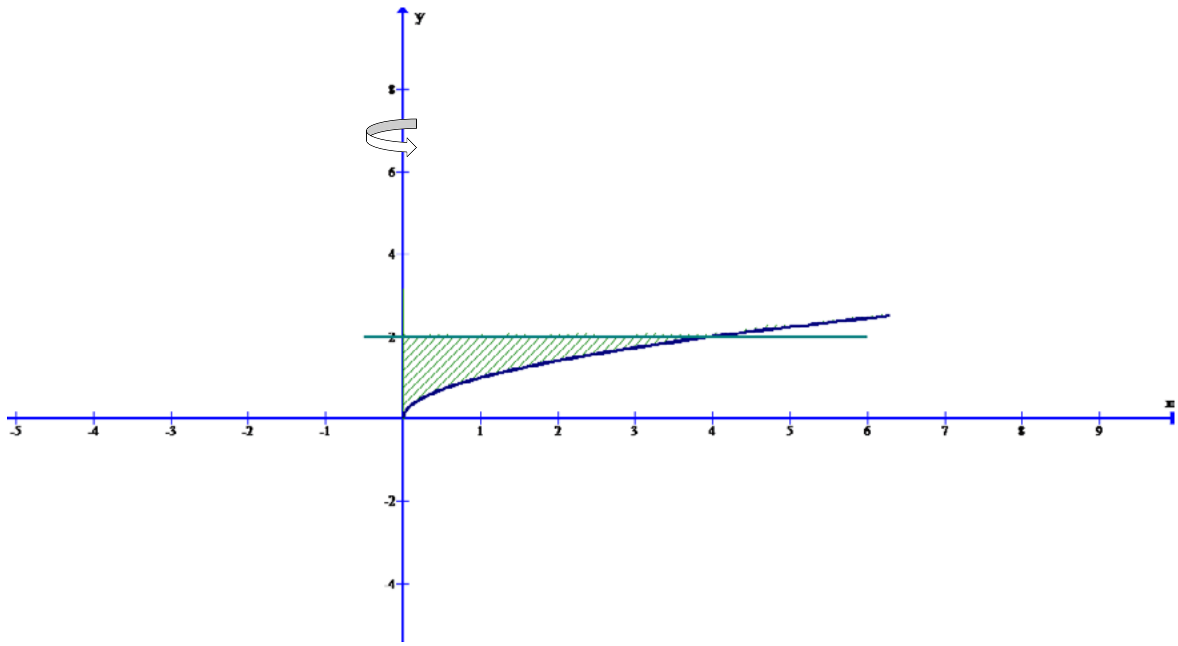
EJEMPLO 3.5.13. Determina el volumen del sólido generado al girar la región plana limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = 2$ alrededor del eje y.

RESOLUCIÓN:

Cuando el eje de revolución es el eje de las ordenadas, el volumen del sólido de revolución se obtiene a partir de la expresión:

$$V = \pi\int_c^d [R(y)]^2\, dy$$

La gráfica de la región se muestra enseguida:



De los datos que proporciona el enunciado se tiene: $y=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x=y^2$

por lo tanto:

$$R(y)=y^2 \;\Rightarrow\; [R(y)]^2=y^4$$

al sustituir en la expresión del volumen:

$$V=\pi\int_0^2 y^4dy=\pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{\pi}{5}(2)^5=\frac{32}{5}\pi \quad \text{unidades de volumen}$$

TEMA 4

DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES

OBJETIVO

El alumno comprenderá el concepto de función escalar de variable vectorial, determinará la variación de este tipo de funciones en cualquier dirección y la aplicará en la solución de problemas físicos y geométricos.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- Dominio, recorrido y gráfica de funciones escalares de dos variables.
- Región de definición de una función de dos variables.
- Curvas de nivel de una función de dos variables.
- Límites de funciones de dos variables.
  Derivadas parciales y sucesivas de funciones de dos variables.
- Gradiente de funciones de dos y tres variables. Propiedades.
- Derivada direccional.
- Ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a una superficie en un punto.

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

- Considera que varios de los conceptos que se estudian en este tema se fundamentan en antecedentes de cálculo de funciones de una variable, así como en Geometría Analítica del Espacio, por lo que es conveniente que repases conceptos como dominio, recorrido, cálculo de límites, derivadas, superficies, vector normal a una superficie, ecuaciones del plano y la recta en el espacio.

- Con objeto de que visualices las superficies, puedes recurrir a algún *software*, tales como, *GeoGebra*, *Wolfram*, *Maple*, *Matlab*, entre otros.

BIBLIOGRAFÍA

ESTRADA, O., *et al*., *Cálculo vectorial y aplicaciones*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

LARSON, R. y Bruce H. Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica*. *Cálculo* I, 9a. ed., México, McGraw-Hill, 2010.

STEIN, S. y A. Barcellos, *Cálculo y Geometría Analítica*, 5a. ed., Colombia, McGraw-Hill, 1995.

SWOKOWSKI, E., *Cálculo con Geometría Analítica*, 2a. ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.

ZILL, D. y W. Wright, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 4a. ed., China, McGraw-Hill, 2011.

4.1. DOMINIO, RECORRIDO, REGIÓN DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES Y CURVAS DE NIVEL

Para los fines de este subtema, la terminología y la notación para las funciones de dos o más variables es similar a la que se usa para funciones de una variable; por ejemplo, la expresión:

$$z = f(x, y)$$

significa que z es una función de x y y en el sentido de que, el valor de la *variable dependiente* z, queda unívocamente determinado especificando los valores de las *variables independientes* x y y.

EJEMPLO 4.1.1.

Graficar el dominio de la función: $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$

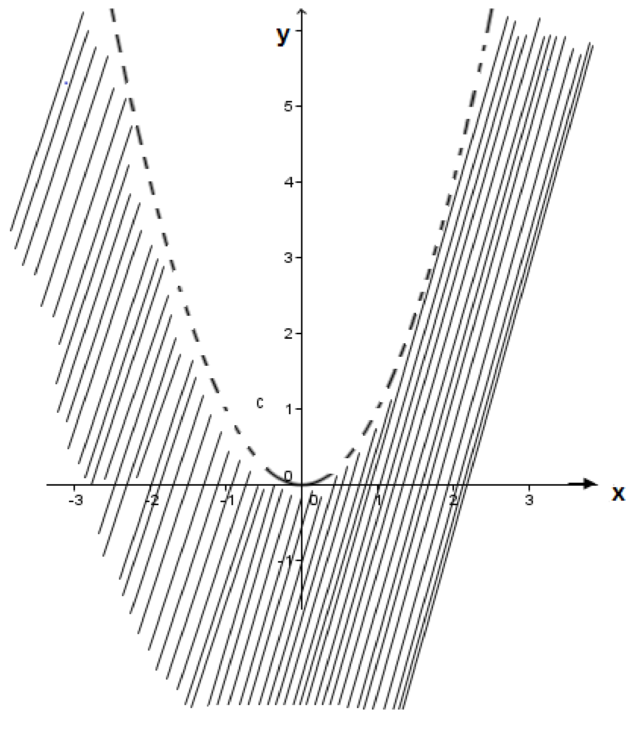
RESOLUCIÓN:

La función $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$ solo está definida cuando $0 < x^2 - y$, lo que también se expresa como $y < x^2$

Los puntos para los cuales se satisface esta desigualdad y que constituyen el dominio de la función, se describen enseguida:

$$D_f = \left\{ (x,y) \,/\, \mathrm{y} < x^2;\ \mathrm{x}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

La gráfica correspondiente al dominio de la función se muestra a continuación; en ella el dominio está determinado por la zona sombreada, sin considerar los puntos frontera de la parábola que se muestran de forma discontinua.



La gráfica del dominio de la función se llama
región de definición de la función

EJEMPLO 4.1.2.

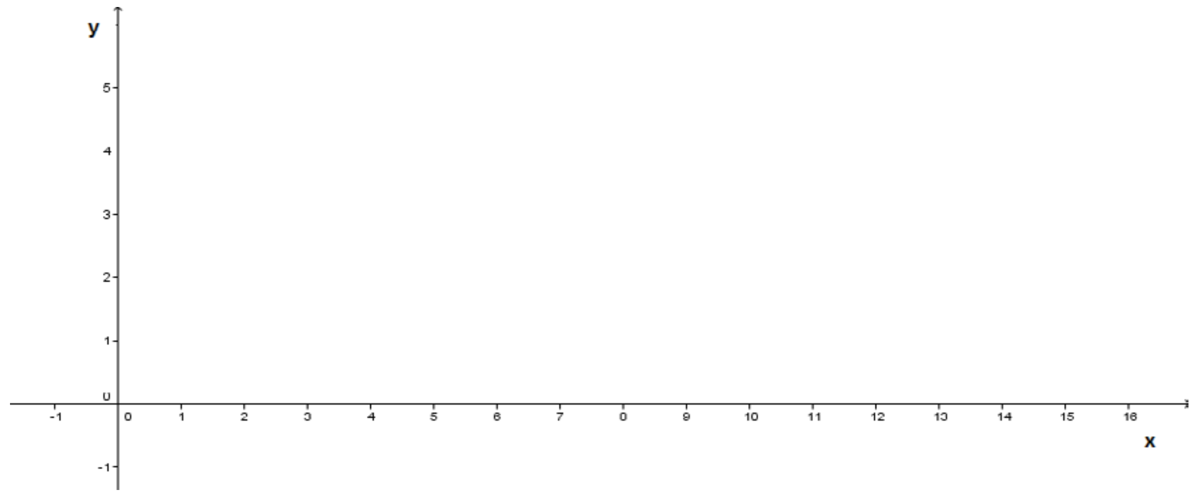
Determina y grafica el dominio de la función: $f\left(x, y\right) = e^{x - y}$

RESOLUCIÓN:

La función exponencial está definida en su dominio para todos los reales, por lo cual se tiene:

$$D_f = \left\{\left(x, y\right) / \, x, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$$

Gráficamente, se tiene todo el plano XY, el cual se representa enseguida solo de manera esquemática.



EJEMPLO 4.1.3.

Describe la gráfica de la función $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$. También, determina el dominio y recorrido de la función.

RESOLUCIÓN:

Para identificar la función, consideramos que $z=f(x,y)$, entonces:

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

al elevar al cuadrado y reordenando la expresión, se tiene:

$$x^2+y^2+z^2=4$$

la cual representa una esfera de centro en el origen y radio dos.

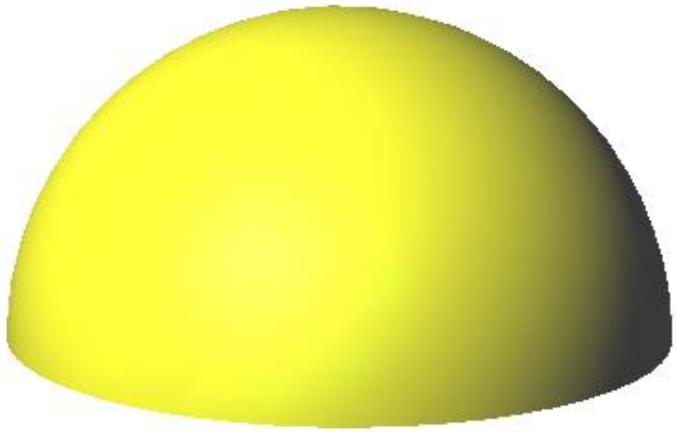
El dominio está determinado por

$$D_f=\left\{(x,y)/\,x^2+y^2\leq 4;\quad x,\ y\in\mathbb{R}\right\}$$

y el recorrido es:

$$R_f=\{z\,/\,0\leq z\leq 2\}$$

Observando la expresión de la función dada, y como se ha mostrado, solo se consideran los valores de $0 \le z \le 2$, , la gráfica corresponde a la semiesfera superior.



EJEMPLO 4.1.4.

Describe las curvas de nivel de la función $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ para $z = 1$ y $z = 2$.

RESOLUCIÓN:

Para obtener las curvas de nivel, se determina la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ y cada uno de los planos de las ecuaciones $z = 1$ y $z = 2$.

Para $z = 1$

$$1 = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25 - x^2 - y^2} = x$$

$$25 - x^2 - y^2 = x^2 \Rightarrow \; 25 = 2x^2 + y^2$$

Al simplificar resulta

$$\frac{x^2}{25/2}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \Longleftarrow$$

elipse de centro en el eje *z*
y semieje mayor
con dirección del eje *y*

Para $z=2$

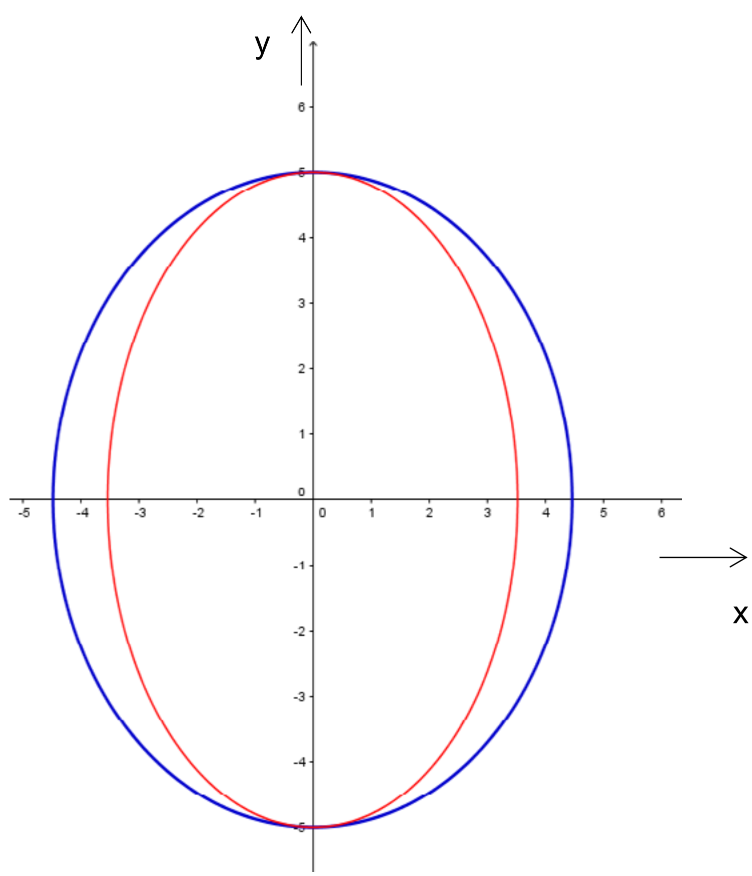
$$2^2\left(25-x^2-y^2\right)=x^2 \Rightarrow 4\left(25-x^2-y^2\right)=x^2$$

$$100-4x^2-4y^2 = x^2 \Rightarrow 100=5x^2+4y^2$$

Y al simplificar se obtiene

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \Longleftarrow$$

elipse de centro en el eje *z*
y semieje mayor
con dirección del eje *y*



4.2. LÍMITES DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

EJEMPLO 4.2.1.

Calcula, si existe, cada uno de los siguientes límites:

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3}{2+xy}$$

RESOLUCIÓN:

Evaluando directamente a la función:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3}{2+xy} = \frac{2(0)-3}{2+(0)} = \frac{-3}{2}$$, en este caso *el límite existe*

2) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

RESOLUCIÓN:

De manera similar al ejercicio 1), se evalúa directamente a la función:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} = \frac{0}{0} \leftarrow$$ indeterminación

a) Límites reiterados:

$$\lim_{x\to1}\left[\lim_{y\to2} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{2x-2x-2+2}{x^2+4-2x-8+5}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\left[\frac{0}{x^2-2x+1}\right] = 0$$

$$\lim_{y\to 2}\left[\lim_{x\to 1}\frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}\right] = \lim_{y\to 2}\left[\frac{y-2-y+2}{1+y^2-2-4y+5}\right]$$

$$=\lim_{y\to 2}\left[\frac{0}{y^2-4y+4}\right]=0$$

b) Trayectorias: $y=2x$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x(2x)-2x-2x+2}{x^2+4x^2-2x-8x+5}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2x^2-4x+2}{5x^2-10x+5}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{2\left(x^2-2x+1\right)}{5\left(x^2-2x+1\right)}\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

Conclusión:

Considerando que el proceso de análisis por límites reiterados constituye casos particulares de trayectorias y que el valor del límite de una función, cuando existe, es único, se concluye que en este caso *el límite no existe.*

4.3. DERIVADAS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

EJEMPLO 4.3.1.

Sea la función $f(x,y) = x^4 \operatorname{sen}\left(xy^3\right)$. Obtén las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

RESOLUCIÓN:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^4\frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{sen}\left(xy^3\right)\right]+\operatorname{sen}\left(xy^3\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^4\cos\left(xy^3\right)\left(y^3\right)+\operatorname{sen}\left(xy^3\right)\left(4x^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^4y^3\cos\left(xy^3\right)+4x^3\operatorname{sen}\left(xy^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 \frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{sen}\left(x y^3\right)\right] + \operatorname{sen}\left(x y^3\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^4\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 \cos\left(x y^3\right)\left(3xy^2\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^5 y^2 \cos\left(x y^3\right)$$

EJEMPLO 4.3.2.

Sea la función $f\left(x, y\right) = x^2 y e^{xy}$.

Obtén las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $\left(1,1\right)$.

RESOLUCIÓN:

Inicialmente, se obtienen las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[y e^{xy}\right] + y e^{xy} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y^2 e^{xy} + 2xy e^{xy}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 3e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[y e^{xy}\right] + y e^{xy} \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \left[xy e^{xy} + e^{xy}\right]$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 2e$$

EJEMPLO 4.3.3.

Verificar que las funciones:

1) $z = e^{x}\operatorname{sen} y + e^{y}\cos x$

2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

Satisfacen la ecuación de Laplace: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

RESOLUCIÓN:

Aquí, se deben obtener las derivadas parciales de segundo orden para lo cual, primero, se determinan las derivadas parciales primeras o de primer orden:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[e^{x}\operatorname{sen} y + e^{y}\cos x\right] = e^{x}\operatorname{sen} y - e^{y}\operatorname{sen} x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x}\operatorname{sen} y - e^{y}\operatorname{sen} x\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x}\operatorname{sen} y - e^{y}\cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{x}\operatorname{sen} y + e^{y}\cos x\right] = e^{x}\cos y + e^{y}\cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{x}\cos y + e^{y}\cos x\right] = -e^{x}\operatorname{sen} y + e^{y}\cos x$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace, se tiene:

$$e^{x}\operatorname{sen} y - e^{y}\cos x - e^{x}\operatorname{sen} y + e^{y}\cos x = 0$$

$0 = 0 \quad \therefore$ se verifica

2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln\left(x^2 + y^2\right)\right] = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2x}{x^2+y^2}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[(2x)\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2x)\left[-\left(x^2+y^2\right)^{-2}(2x)\right]+\left(x^2+y^2\right)^{-1}(2)=-\frac{4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-4x^2+2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-2x^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2y}{x^2+y^2}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[(2y)\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2y)\left[-\left(x^2+y^2\right)^{-2}(2y)\right]+\left(x^2+y^2\right)^{-1}(2)=-\frac{4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-4y^2+2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-2y^2+2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Al sustituir en la ecuación de Laplace:

$$\frac{-2x^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{-2y^2+2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

$$0=0 \quad \therefore \text{ se verifica}$$

4.4. GRADIENTE DE FUNCIONES Y DERIVADA DIRECCIONAL

El gradiente de una función es el vector que se obtiene de aplicar el operador diferencial vectorial nabla a una función de dos o tres variables:

$$\bar{\nabla} f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j \quad , \quad \text{o bien,} \quad \bar{\nabla} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

EJEMPLO 4.4.1. Calcula el gradiente de las siguientes funciones en el punto indicado:

1) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}\,,\quad P(-2,3)$

2) $f(x,y)=e^{2x}\tan y,\quad P\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

3) $f(x,y,z)=xz^2-xy^3z\,,\quad P(1,-2,\,2)$

RESOLUCIÓN:

1) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{1/3}$

$$\bar{\nabla}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j$$

$$\bar{\nabla}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2\right)^{1/3}\right]i+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2\right)^{1/3}\right]j$$

$$\bar{\nabla}f(x,y)=\left[\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{-2/3}(2x)\right]i+\left[\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{-2/3}(2y)\right]j$$

$$\bar{\nabla}f(-2,3)=\left[\frac{1}{3}(4+9)^{-2/3}(-2)\right]i+\left[\frac{1}{3}(4+9)^{-2/3}(6)\right]j$$

$$\bar{\nabla}f(-2,3)=\left[\frac{-2}{3(13)^{2/3}}\right]i+\left[\frac{6}{3(13)^{2/3}}\right]j=\left[\frac{-2}{3\sqrt[3]{(13)^2}}\right]i+\left[\frac{2}{\sqrt[3]{(13)^2}}\right]j$$

$$\bar{\nabla}f(-2,3)=-0.12\,i+0.36\,j$$

2) $f(x,y)=e^{2x}\tan y$

$$\bar{\nabla} f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x} i+\frac{\partial f}{\partial y} j$$

$$\bar{\nabla} f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{2x\tan y}\right] i+\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{2x\tan y}\right] j$$

$$\bar{\nabla} f(x,y)=\left[\left(e^{2x\tan y}\right)(2\tan y)\right] i+\left[\left(e^{2x\tan y}\right)\left(2x\sec^2 y\right)\right] j$$

$$\bar{\nabla} f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\left[\left(e^{(0)\tan(\pi/4)}\right)(2\tan(\pi/4))\right] i+\left[\left(e^{(0)\tan(\pi/4)}\right)\left((0)\sec^2(\pi/4)\right)\right] j$$

$$\bar{\nabla} f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=2i+j$$

3) $f(x,y,z)=xz^2-xy^3z,\quad P(1,-2,2)$

$$\bar{\nabla} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x} i+\frac{\partial f}{\partial y} j+\frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$\bar{\nabla} f(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xz^2-xy^3z\right) i+\frac{\partial}{\partial y}\left(xz^2-xy^3z\right) j+\frac{\partial}{\partial z}\left(xz^2-xy^3z\right) k$$

$$\bar{\nabla} f(x,y,z)=\left(z^2-y^3z\right) i+\left(-3xy^2z\right) j+\left(2xz-xy^3\right) k$$

$$\bar{\nabla} f(1,-2,2)=\left((2)^2-(-2)^3(2)\right) i+\left(-3(1)(-2)^2(2)\right) j+\left(2(1)(2)-(1)(-2)^3\right) k$$

Finalmente,

$$\bar{\nabla} f(1,-2,2)=20i-24j+12k$$

El gradiente permite obtener la derivada direccional de una función y establecer conceptos adicionales, tales como, el valor máximo y/o mínimo de la derivada direccional y la tasa de crecimiento máxima y/o mínima de una función en un punto.

Entonces, debe recordarse que para obtener la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\overline{u}$, se toma el producto escalar del gradiente de f con el vector $\overline{u}$, como se muestra enseguida:

$$D_{\overline{u}} f(x,y) = \overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{\mathrm{u}}$$

$$D_{\overline{u}} f(x,y,z) = \overline{\nabla} f(x,y,z) \cdot \overline{\mathrm{u}}$$

Además, es conveniente recordar algunas propiedades del gradiente:

1) El valor máximo de $D_{\overline{u}} f(x,y)$ en $P(x,y)$ es $\left\| \overline{\nabla} f(x,y) \right\|$
2) El valor mínimo de $D_{\overline{u}} f(x,y)$ en $P(x,y)$ es $-\left\| \overline{\nabla} f(x,y) \right\|$
3) La tasa de crecimiento máxima de $f(x,y)$ en $P(x,y)$ ocurre en la dirección de $\overline{\nabla} f(x,y)$
4) La tasa mínima de crecimiento de $f(x,y)$ en $P(x,y)$ ocurre en la dirección de $-\overline{\nabla} f(x,y)$

EJEMPLO 4.4.2. Calcula la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto P y en la dirección indicada:

1) $f(x,y) = x^x \ln y,\qquad P(4,1),\qquad \overline{a} = i - 3j$

2) $f(x,y) = e^x \cos y,\qquad P\left(0, \frac{\pi}{4}\right),\qquad \overline{a} = 5i - 2j$

RESOLUCIÓN:

1) Para obtener la derivada direccional, toma en cuenta que:

$$D_{\overline{u}} f(x,y) = \overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{\mathrm{u}}$$

por lo cual es necesario obtener el gradiente de la función y el vector unitario que determina la dirección.

Recordemos que el gradiente se puede expresar con la notación:

$$\overline{\nabla} f(x,y) = f_x i + f_y j$$

entonces:

$$\overline{\nabla} f(x,y) = f_x i + f_y j = 3x^2 \ln y \; i + \frac{x^3}{y} j$$

$$\overline{\nabla} f(4,1) = 3(16)\ln(1)\; i + 64 j = 0i + 64 j$$

$$\overline{\nabla} f(4,1) = (0, 64) \longleftarrow \quad \text{gradiente de la función}$$

Para el vector unitario se tiene:

$$\overline{\mathrm{u}} = \frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|} = \frac{(1,-3)}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \,, \frac{-3}{\sqrt{10}} \right)$$

finalmente,

$$D_{\overline{u}} f(x,y) = (0,64) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}} \right) = \frac{-192}{\sqrt{10}} \approx -60.71$$

2) De manera similar al inciso anterior, se obtiene el gradiente de la función:

$$\overline{\nabla} f(x,y) = f_x i + f_y j = e^x \cos y\, i - e^x \operatorname{sen} y\, j$$

$$\overline{\nabla} f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = e^{(0)} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) i - e^{(0)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) j$$

$$\bar{\nabla} f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, i - \frac{\sqrt{2}}{2}\, j = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

y el vector unitario es:

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{(5,-2)}{\sqrt{25+4}} = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$$

entonces, la derivada direccional resulta así:

$$D_{\bar{u}} f(x,y) = \bar{\nabla} f(x,y) \cdot \bar{u}$$

$$D_{\bar{u}} f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$$

$$D_{\bar{u}} f(x,y) = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{29}} \approx 0.918$$

EJEMPLO 4.4.3. En los ejercicios siguientes, encuentra un vector unitario en la dirección en la que f aumenta con mayor rapidez en el punto P, así como, la razón del cambio de f en P en esa dirección:

1) $f(x,y) = 4x^3y^2, \quad P(-1,1)$

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P(4,-3)$

RESOLUCIÓN:

1) La dirección en la cual la función aumenta con mayor rapidez es la dirección del gradiente de f en P:

$$\bar{\nabla} f(x,y) = f_x i + f_y j = 12x^2 y^2\, i + 8x^3 y\, j$$

$$\bar{\nabla} f(-1,1) = 12(-1)^2 (1)^2 i + 8(-1)^3 (1) j = 12i - 8j$$

para hacerlo unitario:

$$\bar{u} = \frac{\bar{\nabla} f(-1,1)}{\left\|\bar{\nabla} f(-1,1)\right\|} = \frac{(12,-8)}{\sqrt{144+64}} = \frac{4(3,-2)}{\sqrt{16\,(13)}}$$

$$\bar{u} = \frac{4(3,-2)}{4\sqrt{13}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right) \Longleftarrow$$ es el vector unitario que determina la dirección en la cual la función crece más rápidamente

La razón de cambio de f en P en esa dirección, está dada por el módulo del gradiente de la función en P, por lo que:

$$\left\|\bar{\nabla} f(-1,1)\right\| = \sqrt{144+64} = 4\sqrt{13} \quad \longleftarrow$$ razón de cambio

2) De manera similar al inciso anterior, se tiene:

$$\bar{\nabla} f(x,y) = f_x\, i + f_y\, j = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}(2x)i + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}(2y)\,j$$

$$\bar{\nabla} f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,i + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,j$$

Al evaluar en el punto dado, tenemos:

$$\bar{\nabla} f(4,-3) = \frac{4}{\sqrt{16+9}}\,i - \frac{3}{\sqrt{16+9}}\,j$$

$$\bar{\nabla} f(4,-3) = \frac{4}{5}\,i - \frac{3}{5}\,j = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Al calcular el módulo de este vector:

$$\left\|\bar{\nabla} f(4,-3)\right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$$

Entonces, el vector unitario que determina la dirección en la cual la función crece más rápidamente es:

$$\bar{\nabla} f(4,-3)=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

La razón de cambio de f en P en esa dirección, está dada por el módulo del gradiente de la función en P, por lo que:

$$\left\|\bar{\nabla} f(4,-3)\right\|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=1 \quad \longleftarrow \quad \text{razón de cambio}$$

4.5. PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

De los conceptos estudiados en tu curso de Cálculo Integral, recuerda lo siguiente.

El plano tangente a la gráfica de la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ tiene como ecuación:

$$\underbrace{F_x(x_0,y_0,z_0)}_{\substack{\text{derivada parcial}\\ \text{con respecto a } x\\ \text{evaluada en el}\\ \text{punto } P_0}}(x-x_0)+\underbrace{F_y(x_0,y_0,z_0)}_{\substack{\text{derivada parcial}\\ \text{con respecto a } y\\ \text{evaluada en el}\\ \text{punto } P_0}}(y-y_0)+\underbrace{F_z(x_0,y_0,z_0)}_{\substack{\text{derivada parcial}\\ \text{con respecto a } z\\ \text{evaluada en el}\\ \text{punto } P_0}}(z-z_0)=0$$

donde el gradiente de la función determina un vector normal a la superficie y al plano tangente a dicha superficie, es decir:

$$\bar{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)=F_x(x_0,y_0,z_0)i+F_y(x_0,y_0,z_0)j+F_z(x_0,y_0,z_0)k$$

$$\bar{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)=\bar{N} \quad \leftarrow \text{vector normal al plano tangente a la superficie}$$

Para la recta normal a la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$, unas ecuaciones simétricas son:

$$\frac{(x-x_0)}{a}=\frac{(y-y_0)}{b}=\frac{(z-z_0)}{c}$$

donde el gradiente de la función en P_0 determina un vector paralelo a la recta normal a la superficie:

$\bar{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)=(a,b,c)$ $\leftarrow$ vector paralelo a la recta normal a la superficie

EJEMPLO 4.5.1. Encuentra una ecuación del plano tangente a la gráfica de:
$x^2+y^2+z^2=25$ en el punto $P(3,4,0)$

RESOLUCIÓN:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-25$$

$$F(x,y,z)=0 \quad \Rightarrow x^2+y^2+z^2-25=0$$

$$\bar{\nabla}F(x,y,z)=F_x i+F_y j+F_z k$$

$$\bar{\nabla}F(x,y,z)=2x\,i+2y\,j+2z\,k$$

$$\bar{\nabla}F(3,4,0)=2(3)i+2(4)j+2(0)k=6i+8j+0k$$

entonces, un vector normal al plano tangente es: $\bar{N}=(6,8,0)$

y una ecuación del plano tangente resulta ser:

$$6(x-3)+8(y-4)=0 \quad \Rightarrow 6x+8y-50=0$$

EJEMPLO 4.5.2. Determina unas ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la ecuación que se da en el punto *P* indicado:

1) $z = 9x^2 + 4y^2, \qquad P(-1,-2,25)$

2) $xy + 2yz - xz^2 + 2 = 0, \qquad P(-3, 5, 1)$

RESOLUCIÓN:

1) Si $z = f(x, y)$ es una ecuación de la superficie, entonces, tomando

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

se tiene:

$$F(x,y,z) = 9x^2 + 4y^2 - z \quad \Rightarrow \qquad 9x^2 + 4y^2 - z = 0$$

$$\bar{\nabla}F(x,y,z) = 18x\,i + 8y\,j - k$$

Al evaluar en el punto dado:

$$\bar{\nabla}F(-1,-2,25) = 18(-1)i + 8(-2)j - k = -18i - 16j - k$$

Un vector normal al plano tangente es $\bar{N} = (-18,-16,-1)$ que también se expresa como:

$$\bar{N} = \left(F_x, F_y, F_z\right)\Big|_P$$

por lo que la ecuación del plano tangente se obtiene a partir de:

$$F_x\big|_P(x - x_0) + F_y\big|_P(y - y_0) + F_z\big|_P(z - z_0) = 0$$

$$-18(x+1) - 16(y+2) - (z-25) = 0$$

$$-18x - 18 - 16y - 32 - z + 25 = 0$$

finalmente,

$18x + 16y + z + 25 = 0$ $\Leftarrow$ ecuación del plano tangente

Para la recta normal, unas ecuaciones simétricas son de la forma:

$$\frac{(x-x_0)}{a}=\frac{(y-y_0)}{b}=\frac{(z-z_0)}{c}$$

donde: $\bar{u}=(a,b,c)=(-18,-16,-1)$

por lo que unas ecuaciones son:

$$\frac{(x+1)}{-18}=\frac{(y+2)}{-16}=\frac{(z-25)}{-1}$$ $\Leftarrow$ ecuaciones de la recta normal

2) De manera similar al inciso anterior, tenemos:

$$F(x,y,z)=xy+2yz-xz^2+2$$

$$F(x,\ y,\ z)\ =\ 0\quad\Rightarrow\quad\underbrace{xy+2yz-xz^2+2}_{F(x,y,z)=0}=0$$

$$\bar{\nabla}F(x,y,z)=\left(y-z^2\right)i+(x+2z)\,j+(2y-2xz)k$$

Evaluando en el punto dado, se tiene:

$$\bar{\nabla}F\Big|_P=(5-1)i+(-3+2)\,j+(10+6)k$$

$$\bar{\nabla}F\Big|_P=4i-j+16k$$ $\Leftarrow$ vector normal al plano tangente

por lo que la ecuación del plano se obtiene al sustituir en la expresión:

$$F_x\big|_P(x-x_0)+F_y\big|_P(y-y_0)+F_z\big|_P(z-z_0)=0$$

$$4(x+3)-(y-5)+16(z-1)=0$$

Al simplificar:

$$4x - y + 16z + 1 = 0$$

Para la recta normal:

$$\frac{(x+3)}{4} = \frac{(y-5)}{-1} = \frac{(z-1)}{16}$$

EJEMPLO 4.5.3. Obtén ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes, en el punto *P* indicado:

$a)\ 4x^2 - 2y + 3z^2 = 10 \quad , \quad P(-1, 3, 2)$

$b)\ z = 3e^{-x} \cos y \quad , \quad P(0, \pi, -3)$

RESOLUCIÓN:

1) Si $z = f(x, y)$ es una ecuación de la superficie, entonces, tomando

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

se tiene:

$$F(x, y, z) = 4x^2 - 2y + 3z^2 - 10 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 2y + 3z^2 - 10 = 0$$

$$\bar{\nabla} F(x, y, z) = 8x\,i - 2j + 6z\,k$$

al evaluar en el punto dado:

$$\bar{\nabla} F(-1, 3, 2) = 8(-1)i - 2j + 6(2)k = -8i - 2j + 12k$$

Un vector normal al plano tangente es:

$$\bar{N} = \left(F_x, F_y, F_z\right)\Big|_P$$

por lo que

$$\bar{N}=(-8,-2,12) \quad \Rightarrow \quad \bar{N}'=(-4,-1,6)$$

Una ecuación del plano tangente se obtiene a partir de:

$$F_x\big|_P(x-x_0)+F_y\big|_P(y-y_0)+F_z\big|_P(z-z_0)=0$$

$$-4(x+1)-(y-3)+6(z-2)=0$$

$$-4x-4-y+3+6z-12=0$$

finalmente,

$4x+y-6z-13=0 \quad \Leftarrow$ ecuación del plano tangente

Para la recta normal, unas ecuaciones simétricas son de la forma:

$$\frac{(x-x_0)}{a}=\frac{(y-y_0)}{b}=\frac{(z-z_0)}{c}$$

donde: $\bar{u}=(a,b,c)=(-4,-1,6)$

por lo que unas ecuaciones son:

$\dfrac{(x+1)}{-4}=\dfrac{(y-3)}{-1}=\dfrac{(z-2)}{6} \quad \Leftarrow$ ecuaciones de la recta normal

2) De manera similar al inciso anterior, se tiene la función $z=3e^{-x}\cos y$

$$F(x,y,z)=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{3e^{-x}\cos y-z}_{F(x,y,z)}=0$$

$$\bar{\nabla}F(x,y,z)=-3e^{-x}\cos y\,i-3e^{-x}\operatorname{sen} y\,j-k$$

Al evaluar en el punto dado:

$$\bar{\nabla}F\Big|_P = -3(-1)i - 3\,(0)\,j - k$$

$$\bar{\nabla}F\Big|_P = 3i - k \quad \Leftarrow \quad \text{vector normal al plano tangente}$$

Así, la ecuación del plano se obtiene sustituyendo las componentes del vector normal en la expresión:

$$F_x\big|_P\left(x - x_0\right) + F_y\big|_P\left(y - y_0\right) + F_z\big|_P\left(z - z_0\right) = 0$$

$$3(x - 0) + 0(y - \pi) - (z + 3) = 0$$

Simplificando:

$$3x - z - 3 = 0$$

Finalmente, para la recta normal, se tiene:

$$\frac{x}{3} = \frac{(z + 3)}{-1} \;;\; y = \pi$$

Guía teórico-práctica para preparar el examen extraordinari-
ode Cálculo Integral, se publicó en febrero de 2020
en la plataforma oficial de la Unidad de Apoyo Editorial
(UDAE) de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria,
México, Ciudad de México. C.P. 04510