



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis espectral del campo magnético y gravimétrico para la estimación de profundidades a partir del espectro radial y la deconvolución de Euler.**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Geofísico**

**P R E S E N T A**

Leonel Gerardo Velázquez García

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Jaime Humberto Urrutia Fucugauchi



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

“Siento que las personas tenderán hacia el amor universal y la ayuda mutua, como el fuego que tiende hacia arriba y el agua hacia abajo, será natural en el mundo.”

Mozi (墨子)

# AGRADECIMIENTOS

---

A la Universidad Nacional Autónoma de México por proveerme de conocimientos en el aspecto académico y personal, por su esfuerzo y dedicación en todos estos años.

Al Instituto de Geofísica por la ayuda económica proporcionada para la elaboración de este trabajo.

Al Dr. Jaime Urrutia por su asesoría y apoyo, por acogerme en el Anexo 2 del Instituto de Geofísica y mostrarme lo increíble que puede ser la investigación.

Al profesor Julián Zapotitla por sus enseñanzas y tiempo, por acompañarme en este largo viaje.

A mis amigos y compañeros del Instituto de Geofísica, Elizabeth, Miguel, Margarita y Francisco.

A mis padres que son lo mejor que me pudo pasar en la vida, a mis tíos Guadalupe García y Rodolfo Campos por su amor incondicional.

A mis amigos Misael, Gabriel, Héctor y a mis familiares Prometey, Alfredo, Leobardo, Carlos, Tonatiuh, Huitzimengari y Yuritziri.

A mi abuela Hortencia por mostrarme lo que es la humildad y el optimismo.

# CONTENIDO

---

Resumen.....	i
Abstract.....	ii
Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1 Generalidades.....	1
1.2 Objetivos de la tesis.....	2
1.2.1 Objetivo general.....	2
1.2.2 Objetivos específicos.....	2
1.3 Planteamiento del problema.....	2
1.4 Hipótesis.....	3
Capítulo 2. Fundamento teórico.....	4
2.1 Introducción.....	4
2.2 Análisis Espectral.....	4
2.2.1 Teorema de muestreo.....	4
2.2.2 Transformada de Fourier.....	5
2.2.3 Concepto de Espectro.....	6
2.2.4 Espectro de campos potenciales.....	7
2.3 Fuentes de campo potencial.....	8
2.3.1 Fuentes magnéticas.....	8
2.3.2 Fuentes gravimétricas.....	9
2.3.3 Gradiente de campo gravitatorio.....	10
2.4 Decaimiento Espectral.....	11
2.4.1 Espectro radial.....	11
2.4.2 Energía de configuraciones simples.....	12
2.4.3 Energía esperada en un ensamble.....	13
2.4.4 Factor de profundidad y su estimación.....	13
2.5 Deconvolución de Euler.....	14
2.5.1 Función homogénea.....	15
2.5.2 Desarrollo teórico.....	15
2.5.3 Deconvolución de Euler en 3D.....	15
Capítulo 3. Métodos.....	17
3.1 Introducción.....	17

3.2 Cálculo de parámetros .....	17
3.3 Deconvolución de Euler 3D .....	18
3.4 Espectro Radial .....	19
3.5 Cálculo de la profundidad .....	21
3.6 Criterio de tolerancia .....	22
Capítulo 4. aplicación del método en modelos sintéticos.....	23
4.1 Introducción.....	23
4.2 Modelos directos .....	23
4.3 Estimación de fuentes .....	26
4.3.1 Espectro radial y cálculo de fuentes modelo 1.....	26
4.3.2 Espectro radial y cálculo de fuentes modelo 2.....	31
4.3.3 Espectro radial y cálculo de fuentes modelo 3.....	37
Capítulo 5. Implementación en las anomalías de campo potencial del Chicxulub .....	43
5.1 Introducción.....	43
5.2 Área de estudio y adquisición de datos .....	43
5.3 Procesamiento de los datos .....	44
5.4 Análisis de las mallas a partir del espectro radial.....	47
Conclusiones .....	52
Comentarios y recomendaciones.....	55
Anexos.....	56

# FIGURAS

---

Figura 1. Representación esquemática del cálculo del espectro a diferentes números de onda por medio de anillos concéntricos de espesor constante..	20
Figura 2. Representación esquemática del modelo 1 .....	24
Figura 3. Representación esquemática del modelo 2 .....	24
Figura 4. Representación esquemática del modelo 3 .....	25
Figura 5. Anomalía de componente vertical $G_z$ causada por el cuerpo que compone al modelo 1, malla de 500 x 500 nodos, densidad de contraste igual a 500[kg/m <sup>3</sup> ]. Las curvas de nivel se dibujan cada 10 mGal, se observa un registro máximo de 40 mGal en la interpolación .....	26
Figura 6. Espectros radiales de cada ventana (1200x1200[m <sup>2</sup> ]), se observa un desfase de amplitud que va de los -10 a los -5 Ln E(f) y de 0 a 5 Ln E(f), el intervalo con el que se realiza la regresión va de los 0.001667-0.009167[ciclos/m], se observa un pico en el número de onda 0.0175 [ciclos/m] .....	27
Figura 7. Localización espacial de una ventana de 1200x1200[m <sup>2</sup> ] con su respectivo espectro, el espectro presenta un máximo en el intervalo 0.01667-0.01833 [ciclos/m] .....	27
Figura 8. Localización espacial de las profundidades obtenidas con una ventana de 1000x1000[m <sup>2</sup> ] y con una tolerancia de aceptación de 0.5, se muestra con colores la profundidad de cada solución en un intervalo que va de los 230[m] a los 642[m] .....	28
Figura 9. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución del campo gravimétrico del modelo 1 .....	28
Figura 10. Anomalía de respuesta magnética correspondiente al modelo 1, malla de 500 x 500 nodos, magnetización $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3}$ [Am]. Las curvas de nivel se dibujan a 1 [nT], se observa un registro máximo de 5.8 [nT] en la interpolación .....	29
Figura 11. Espectros radiales de cada ventana (1200x1200[m <sup>2</sup> ]), las ventanas muestran un comportamiento similar entre ambos campos ya que se observan espectros agrupados en la parte inferior con valor de Ln(E(f)) menores a -5	29
Figura 12. Localización espacial de una ventana de 1200x1200[m <sup>2</sup> ] y su espectro radial, el comportamiento que presenta la anomalía magnética es similar al comportamiento del campo gravimétrico Figura 6 .....	30
Figura 13. Profundidades obtenidas a través del campo magnético con una tolerancia de 0.1, los colores muestran la ubicación y la profundidad obtenida en cada ventana, el intervalo de profundidades va de los 46 a los 879 metros .....	30
Figura 14. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución de campo magnético del modelo 1 .....	31
Figura 15. Anomalía gravimétrica correspondiente al modelo 2, malla de 200 x 200 nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 5 [mGal], se observa un registro máximo de 24[mGal] en la interpolación .....	31

Figura 16. Espectros radiales de una ventana de 400x400[m <sup>2</sup> ], se propone una ventana pequeña para observar la aportación de la fuente somera, podemos notar que a diferencia de las figuras correspondientes al modelo 1 no existe un salto marcado entre amplitudes, se observa un pico en 0.035 (ciclos/m) .....	32
Figura 17. Localización espacial de una ventana de 400x400[m <sup>2</sup> ] con su respectivo espectro, se marca un máximo en 0.035 [ciclos/m].....	33
Figura 18. Localización espacial de las profundidades obtenidas con una ventana de 1000x1000[m <sup>2</sup> ] y con una tolerancia de 0.8, de igual manera se muestra el rango en el cual se encuentran las profundidades con una escala de colores, en este caso las profundidades oscilan entre los 282 y los 721 [m] .....	33
Figura 19. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución de campo gravimétrico del modelo 2 .....	34
Figura 20. Anomalía magnética correspondiente al modelo 2, malla de 200 x 200 nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 0.2 [nT], se observa un registro máximo de 5.4[nT] en la interpolación .....	34
Figura 21. Espectros radiales de una ventana de 400x400[m <sup>2</sup> ], se puede notar que los espectros muestran mayor distribución en comparación con los obtenidos en el campo gravimétrico Figura 16 .....	35
Figura 22. Localización espacial de una ventana de 400x400[m <sup>2</sup> ] con su respectivo espectro, se marca un máximo en 0.035 [ciclos/m].....	35
Figura 23. Soluciones del campo magnético para una ventana de 1000x1000[m <sup>2</sup> ] con una tolerancia de 0.8, las profundidades encontradas se ubican desde los 138[m] hasta os 926 [m].....	36
Figura 24. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución del campo magnético del modelo 2 .....	36
Figura 25. Anomalía gravimétrica correspondiente al modelo 3, malla de 200 x 200 nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 1 [mGal], se observa un registro máximo de 17[mGal] en la interpolación.....	37
Figura 26. Espectros radiales de ventanas de 2000x2000[m <sup>2</sup> ], se observa un salto en el espectro cerca de los 0.0035 (cicos/m) sin embargo la profundidad de 400 [m] no concuerda con ninguna fuente en el modelo .....	38
Figura 27. Soluciones encontradas a partir de una ventana de 2000x2000[m <sup>2</sup> ] con una tolerancia de 4.4.....	38
Figura 28. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución del campo gravimétrico del modelo 3 .....	39
Figura 29. Anomalía magnética correspondiente al modelo 3, malla de 200 x 200 nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 0.2 [nT], se tiene un máximo de 3.2 [mGal] en la interpolación .....	40
Figura 30. Espectros obtenidos a partir de ventanas de 18000x18000[m <sup>2</sup> ], se observa un salto en los 0.0025 (cicos/m).....	40
Figura 31. Localización de las soluciones encontradas a partir de una ventana de 18000x18000[m <sup>2</sup> ] con una tolerancia de 4.4, las soluciones con mayor error corresponden a las soluciones en color rojo.....	41

Figura 32. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución del campo gravimétrico del modelo 3 .....	42
Figura 33. Anomalía de Bouguer perteneciente al cráter de Chicxulub, las curvas de nivel se encuentran cada dos miligales, la proyección utilizada es la UTM WGS84 zona 14N .....	45
Figura 34. Anomalía magnética perteneciente al cráter de Chicxulub, las curvas de nivel se encuentran cada cincuenta nanoteslas, la proyección utilizada es la UTM WGS84 zona 14N .....	46
Figura 35. Espectros obtenidos a partir de ventanas de 24000x24000[m <sup>2</sup> ] en la anomalía gravimétrica del cráter de Chicxulub .....	47
Figura 36. Localización de soluciones de la inversión del campo gravimétrico para el cráter Chicxulub, con una ventana de ~24000x~24000[m <sup>2</sup> ], se utilizó un criterio de tolerancia de 3.8. La proyección utilizada en el mapa es la UTM WGS84 zona 14N.....	48
Figura 37. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad encontrada en las soluciones de la anomalía gravimétrica del cráter de Chicxulub .....	49
Figura 38. Espectros obtenidos a partir de ventanas de 24000x24000[m <sup>2</sup> ] en la anomalía magnética del cráter de Chicxulub .....	50
Figura 39. Localización de las soluciones de la inversión del campo magnético para el cráter Chicxulub, con una ventana de ~24000x~24000 [m <sup>2</sup> ], se utilizó un criterio de tolerancia de 4.4. La proyección utilizada en el mapa es la UTM WGS84 zona 14N.....	50
Figura 40. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad encontrada en las soluciones de la anomalía magnética del cráter de Chicxulub .....	51

# RESUMEN

---

En este trabajo de tesis se propone un método para estimar la profundidad de las fuentes de una anomalía de campo potencial a partir de la combinación de la deconvolución de Euler y el espectro radial. Para analizar la validez del método se utilizan mapas de anomalías magnéticas y gravimétricas generadas para tres modelos sintéticos, a partir de los cuales se calcularon las ubicaciones y profundidades de las fuentes. El método trabaja con una serie de ventanas en las que se resuelve la ecuación de Euler, con lo cual se obtienen las localizaciones de las anomalías, y posteriormente se estima la profundidad a partir del espectro radial.

La dimensión de las ventanas es elegible, obteniendo en cada una de ellas la solución por mínimos cuadrados de la ecuación de Euler y el espectro promedio o ponderado, obtenido a través de la transformada de Fourier. Se almacena la ubicación de la fuente en el plano obtenido en la deconvolución y se calcula el decaimiento espectral de la ventana graficando la variación de la energía a diferentes frecuencias. A partir de las gráficas elaboradas se obtuvo la pendiente del decaimiento espectral y de forma inversa la profundidad de la fuente. Para complementar el método se calcula el error cuadrático medio en cada una de las ventanas móviles comparando los valores observados en el espectro radial con la curva ajustada extraída a través de la regresión lineal por mínimos cuadrados, obteniendo así un criterio de tolerancia mínima, con el cual se almacenan únicamente las soluciones que mejor se ajustan al decaimiento observado en el espectro radial.

Una vez analizado el método con modelos sintéticos se realizó una prueba con datos obtenidos en levantamientos gravimétricos y aeromagnéticos del cráter Chicxulub, con la finalidad de observar la respuesta del método en una geometría compleja. Finalmente se analizan y se describen las ventajas y limitaciones del método, así como posibles mejoras.

# ABSTRACT

---

This thesis proposes a method to estimate the depth of the sources of a potential field anomaly from the combination of the Euler deconvolution and the radial spectrum. To validate the method, maps of magnetic and gravimetric anomalies using three simple models were generated, on which the locations and depths of the sources were calculated. The method works with a series of windows in which the Euler equation is solved, the locations of the anomalies are obtained and the depth is subsequently estimated from the radial decay of the spectrum.

Moving window's dimension is eligible, getting in each one the solution by least-squares of the Euler equation and the average or weighted spectrum, obtained through the Fourier transform. Source location within the convolution plane is stored and the spectral decay of the window is calculated by graphing the variation of the energy at different frequencies. From the graphs produced, the slope of the spectral decay was obtained and, inversely, the depth of the source. The mean square error is calculated in each of the moving windows, comparing the values observed in the radial spectrum with the fitted curve extracted through linear least squares regression, thus obtaining a minimum tolerance criterion, that is used to only store the solutions that best fit the decay observed in the radial spectrum.

The method was analyzed in synthetic models; thus, a test was carried out with data obtained in gravimetric and aeromagnetic surveys of the Chicxulub crater, to observe the method's response in complex geometry. Finally, the advantages and limitations of the method, possible improvements, are analyzed and described.

# CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

---

## 1.1 Generalidades

La ciencia ha buscado desde sus inicios describir y entender los fenómenos físicos, biológicos y químicos que rigen el planeta. En este contexto la Geofísica surge como una rama que busca a través de observaciones, experimentos y mediciones explicar los procesos físicos que dan forma al planeta.

El subsuelo difícilmente es explorado de manera directa, es por eso que la mayoría de los datos con los que contamos, son el resultado de mediciones indirectas. Un ejemplo de estas mediciones son las obtenidas a partir de los campos potenciales, como el campo gravimétrico y el campo magnético; ambos campos se encuentran relacionados con las propiedades físicas como la densidad y la susceptibilidad magnética, respectivamente.

En la actualidad y gracias a las herramientas computacionales es posible interpretar la respuesta de campos potenciales a partir de modelos sintéticos, de tal forma que a partir de técnicas de inversión podemos conocer los parámetros de los cuerpos fuente, profundidad, dimensiones, densidad, etc (Blakely, 1996; Hinze *et al.*, 2013).

Para la estimación de la profundidad de las fuentes se han desarrollado diferentes métodos, que incluyen el espectro radial y la deconvolución de Euler. El primero se basa principalmente en la observación del decaimiento espectral a diferentes números de onda y el segundo en la solución de un sistema de ecuaciones que cumplen con la ecuación de Euler. A partir de distintos estudios contamos con herramientas que nos permiten calcular y resolver estos métodos en modelos simples y en datos medidos.

## 1.2 Objetivos de la tesis

### 1.2.1 Objetivo general

- Analizar la teoría detrás de la obtención de la deconvolución de Euler y el espectro radial, desarrollar e implementar un algoritmo para determinar la ubicación de fuente de anomalías de campo potencial a partir de la deconvolución de Euler y la estimación en profundidad a partir del espectro radial, y proponer un criterio para la estimación de soluciones en modelos sintéticos, en particular en el cráter Chicxulub.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Aplicar el algoritmo propuesto por Thompson en 1982 para el cálculo de la deconvolución de Euler en tres dimensiones.
- Aplicar el algoritmo propuesto por Mishra & Naidu en 1974 para el cálculo del espectro radial, dentro de un código programado en Matlab.
- Proponer un criterio de aceptación para discriminar soluciones dentro del algoritmo del espectro radial.
- Obtener los resultados a partir del programa generado en tres modelos sintéticos distintos.
- Mostrar el comportamiento del algoritmo en un caso real, utilizando datos provenientes de los levantamientos aeromagnético y gravimétrico en el área del cráter Chicxulub.

## 1.3 Planteamiento del problema

Se dispone de varios métodos para estimar la profundidad de las fuentes que producen campos potenciales, dentro de estos encontramos la deconvolución de Euler y el espectro radial. El primer método se usa con más frecuencia ya que ha mostrado ser útil no sólo en la estimación de la profundidad sino también en la delimitación de la misma (Reid et al., 1990). Por otro lado, el espectro radial ha sido usado para estimar la profundidad de fuentes.

La técnica del espectro radial se ha usado en levantamientos aeromagnéticos (Spector & Grant, 1970; Mishra & Naidu, 1974). En este trabajo se propone combinar el método de la deconvolución de Euler para encontrar la ubicación de la fuente y calcular la profundidad a partir del espectro en esa ventana. Esto se propone, tanto para el campo magnético como para el campo gravimétrico.

## 1.4 Hipótesis

Se pueden combinar los métodos de la deconvolución de Euler y el espectro radial para ubicar espacialmente las soluciones y calcular su profundidad. La inversión se puede realizar tanto para el campo magnético como para el campo gravimétrico.

# CAPÍTULO 2. FUNDAMENTO TEÓRICO

---

## 2.1 Introducción

En este capítulo se revisa la teoría del análisis espectral (Blackman & Tukey, 1959; Yaglom, 1962; Kay, 1989). Se parte de la definición de una función continua en un espacio para explicar el teorema de muestreo y la transformada de Fourier para una función continua y para una función discretizada. A partir de estos términos se define el concepto de espectro promedio o ponderado de una función y su aplicación en el estudio y modelado de los campos potenciales.

Por otro lado, se desarrolla el método de la deconvolución de Euler, comenzando con la definición de una función homogénea para finalmente expresar la ecuación con la cuál estimamos la ubicación de la fuente y su profundidad.

Adicionalmente, se describen las fuentes que generan los campos magnéticos y gravimétricos, así como las características y el comportamiento que tiene cada uno.

Finalmente se describe el comportamiento del decaimiento espectral para explicar el método del espectro radial y su uso en la estimación de la profundidad de fuente.

## 2.2 Análisis Espectral

Definimos el análisis espectral como el proceso de descomponer una señal en sus componentes a diferentes frecuencias.

### 2.2.1 Teorema de muestreo

Una función periódica en tiempo,  $t$  puede ser definida como  $f(t) = f(t + T)$ , donde  $T$  es la constante más pequeña llamada periodo y satisface la relación anterior. De forma general  $f(t) = f(t + NT)$ , siendo  $N$  un número entero diferente de cero.

Se define la función continua y la función discontinua en el Anexo 1.1.

El teorema de muestreo o teorema de Shannon indica que una función puede ser discretizada y recuperada completamente cuando (Bath,1974):

1. La función muestra un buen comportamiento, es decir se trata de una función continua, sin puntos anómalos como discontinuidades.
2. La función se encuentra limitada en un intervalo.

Si una función es digitalizada con un intervalo de muestreo constante,  $\tau$ , el periodo presente en la función que puede recuperar el proceso es  $2\tau$ , ya que necesitamos un mínimo de dos intervalos de muestreo para definir un periodo. La frecuencia que obtenemos ( $f_N = \frac{1}{2\tau}$ ) es llamada frecuencia de Nyquist y cumple un papel crucial en la digitalización de señales. Para evitar algún efecto de distorsión en la recuperación de la señal debemos considerar a la frecuencia de corte como  $f_c = 2f_N$ .

### 2.2.2 Transformada de Fourier

El análisis de Fourier es la teoría mediante la cual una función puede ser representada por series de senos y cosenos. Fourier estudió muchos casos en los cuales una función,  $f(x)$  definida en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  puede ser representada en el mismo intervalo por series trigonométricas.

Dirichlet en 1829, formuló las restricciones que dan validez al teorema, junto con las series de Fourier en forma compleja (Anexo 1.2).

$$F(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t} dt \dots (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \dots (2)$$

Señalamos las ecuaciones 1 y 2 como la transformada y transformada inversa de Fourier. Si  $f(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet y la integral  $\int |f(t)| dt$  es finita, entonces  $F(\omega)$  existe para toda  $\omega$  y representa la transformada de Fourier de  $f(t)$ . La función  $f(t)$  de la ecuación  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$  es la transformada inversa de Fourier y ambas se relacionan de la siguiente forma  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ .

La forma discreta para encontrar los valores calculados a partir de la transformada de Fourier se escribe de la siguiente manera (Smith,1999).

$$G(n) = \sum g(k) e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}, \dots (3)$$

$$g(k) = \frac{1}{N} \sum G(n) e^{i \frac{2\pi nk}{N}} \dots (4)$$

El cálculo de la transformada discreta (DFT) por sus siglas en inglés toma un tiempo considerable debido al número de ciclos que se deben generar. La forma más rápida y eficiente para el cálculo de la transformada es a través de la transformada rápida de Fourier o FFT (Fast Fourier Transform). Se trata de un algoritmo ingenioso desarrollado por Cooley & Tukey en 1965.

### 2.2.3 Concepto de Espectro

El espectro describe la variación de ciertas cantidades como la energía o la amplitud en función de algún parámetro, normalmente usamos la frecuencia o el número de onda.

Decimos entonces de forma matemática que una señal en dominio del tiempo  $f(t)$  puede ser representada en el dominio de la frecuencia por  $F(\omega)$ , donde  $\omega$  representa la frecuencia angular ( $\omega=2\pi f$ ). La función  $F(\omega)$  es compleja y puede ser representada como:

1. La suma de las partes real e imaginaria:  $F(\omega)=a(\omega) + ib(\omega)$
2. El producto del módulo y un exponencial complejo con la fase:  $F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$

Donde

$$|F(\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \dots (5)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{b(\omega)}{a(\omega)} + 2\pi n; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \dots (6)$$

El módulo  $|F(\omega)|$  se conoce como espectro de amplitud y el argumento  $\phi(\omega)$  es conocido como espectro de fase. La descripción de la potencia media y el efecto de truncamiento de la señal se explican en el Anexo 1.3.

#### 2.2.4 Espectro de campos potenciales

Para cualquier punto contenido en un medio llámese unidad de masa, de carga o de polo magnético observaremos una fuerza. Esta fuerza será una fuerza de atracción en el caso del campo gravitacional. Para el caso de dos cargas o dos polos magnéticos tendremos una fuerza de atracción o repulsión. Por definición el vector fuerza tendrá magnitud y sentido, para el caso del campo gravitacional, en distancias cortas y marco no relativista, se supone una línea recta entre dos cuerpos. Para el caso de electrostática o magnetostática y campos de corriente directa, la dirección del campo será tangencial a cualquier punto de observación.

En Geofísica la mayoría de los campos potenciales, en particular los campos de gravedad y magnético serán ocasionados por un ensamble de fuentes distribuidas de manera compleja (Hinze *et al.*, 2013). Efecto que se describe normalmente como un marco aleatorio o estocástico.

El campo potencial  $\varphi(x, y, z)$  en el espacio libre es decir sin fuente alguna satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \dots (7)$$

Cuando tenemos fuentes presentes, el potencial satisface la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\rho(x, y, z). \dots (8)$$

Donde  $\rho(x, y, z)$  funciona como densidad, magnetización o conductividad dependiendo de si  $\varphi$  se refiere a campo gravitatorio, magnético o de potencial eléctrico, respectivamente. Se sabe que los campos globales o locales se encuentran sujetos a una ley de atenuación cuadrática.

Los campos potenciales ya sea de gravedad, magnéticos o de corriente pueden ser expresados por la ecuación de Laplace o de Poisson según sea el caso. Algunas de las propiedades más conocidas de  $\varphi(x, y, z)$  son las siguientes:

1. Dado el potencial escalar del campo sobre cualquier plano, podemos calcular la fuerza vectorial del mismo en casi cualquier punto a través de una continuación analítica.

2. Los puntos donde no puede ser calculado el campo son llamados puntos singulares.

La transformada de Fourier en dos dimensiones de  $\varphi(u, v)$  y su transformada inversa se describen en el Anexo 1.4.

Para un campo aleatorio homogéneo,  $f(x)$  con un muestreo  $x = n\Delta x$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , donde  $\Delta x$  es el intervalo de muestreo. La exactitud de nuestra adquisición estará ligada al error que obtengamos al reconstruir la señal original. Esto se puede lograr como se ha mencionado anteriormente con un espectro limitado en frecuencia o número de onda y como segunda condición una frecuencia de muestreo igual a  $\frac{1}{\Delta x}$  que sea de al menos el doble de la mayor frecuencia presente. La primer condición indicaría que  $S_f(u) = 0$  para  $|u| \leq u_0$ , donde  $u_0 = 2\pi/\lambda_0$  tendremos entonces a  $\lambda_0$  como el menor número de onda que corresponde a la frecuencia más alta y la segunda condición implicaría que  $\Delta x = \lambda_0/2$ .

El espectro obtenido a partir de datos observacionales puede presentar dos tipos de distorsión, la primera generada por un efecto de truncamiento y la segunda distorsión creada al momento de digitalizar la señal. Para evitar el segundo efecto debemos elegir una frecuencia de muestreo apropiada, así como un valor adecuado de onda o frecuencia de corte.

Por otra parte, el ventaneo espectral es de suma utilidad para el análisis de campos potenciales como se explica en el Anexo 1.5.

## 2.3 Fuentes de campo potencial

Denominamos fuentes de campo potencial a cualquier campo físico que obedece la ecuación de Laplace. Los campos potenciales mejor conocidos son el campo magnético, eléctrico y gravitacional.

### 2.3.1 Fuentes magnéticas

Si consideramos un potencial magnético definido  $\varphi$  referido a un semiespacio, considerando que cumple la ecuación de Laplace de tal forma que  $\nabla^2\varphi = 0$  y contiene las características de una función armónica, entonces la componente de campo magnético total  $F$  se puede definir como la derivada direccional en del potencial  $\varphi$ .

$$F = -\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \dots (9)$$

Donde  $\frac{\partial}{\partial\alpha}$  es la derivada direccional en el sentido del vector director de magnetización  $\hat{\alpha}$ , es decir el sentido de la magnetización. La función  $F$  obtenida cumple de igual manera con la ecuación de Laplace  $\nabla^2F = 0$ .

Si se usan las identidades de Green se puede expresar la componente total como la suma de dos integrales como se muestra en el Anexo 1.6.

Para definir la magnetización ( $M$ ) de un volumen ( $V$ ) decimos que, esta corresponde a la suma de los momentos que causan los dipolos individuales  $m_i$  dividido por el volumen ( $V$ ) de tal forma que:

$$M = \frac{1}{V} \sum m_i \dots (10)$$

### 2.3.2 Fuentes gravimétricas

Conocer el campo debido a una fuente gravimétrica a través del modelado directo requiere de un cálculo repetido de la respuesta gravimétrica, la dificultad principal al hacer esto se presenta cuando intentamos modelar configuraciones geológicas complejas, por lo cual se proponen principalmente geometrías sencillas que después al sumarse generen la respuesta de la anomalía de interés. De forma general decimos que el potencial gravitacional  $\phi$  y la atracción gravitacional  $g$  en un punto  $P$  de un volumen de masa con densidad  $\rho$  está dado por:

$$\phi(P) = \gamma \int_R \frac{\rho}{r} dv, \dots (11)$$

$$g(P) = -\nabla\phi = -\gamma \int_R \frac{\rho \hat{r}}{r^2} dv. \dots (12)$$

Donde  $r$  es la distancia de  $P$  a un elemento del cuerpo  $dv$  y  $\gamma$  la constante de gravitación universal. Podemos definir a la componente vertical de la atracción del campo gravimétrico en coordenadas cartesianas como la derivada direccional del potencial gravitacional  $\phi$  en el Anexo 1.7 (Blakely, 1995).

### 2.3.3 Gradiente de campo gravitatorio

El campo gravimétrico se define como un campo vectorial conservativo descrito anteriormente por la ecuación escalar 11 y que cumple con la ecuación de Laplace (Blakely, 1995). Podemos descomponer al campo gravitatorio en tres componentes cartesianas ( $G_x, G_y, G_z$ ). El cálculo de las variaciones debidas a cada una de las componentes puede realizarse con el operador nabla ( $\nabla$ ) de manera que:

$$\nabla G_x = \frac{\partial G_x}{\partial x} i + \frac{\partial G_x}{\partial y} j + \frac{\partial G_x}{\partial z} k, \dots (13)$$

$$\nabla G_y = \frac{\partial G_y}{\partial x} i + \frac{\partial G_y}{\partial y} j + \frac{\partial G_y}{\partial z} k, \dots (14)$$

$$\nabla G_z = \frac{\partial G_z}{\partial x} i + \frac{\partial G_z}{\partial y} j + \frac{\partial G_z}{\partial z} k, \dots (15)$$

$$\Gamma = - \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \dots (16)$$

Podemos expresar la función 16 en términos de la función 12 de la siguiente manera:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{bmatrix} \dots (17)$$

En los sistemas matriciales cuadrados 16 y 17 los elementos de la diagonal principal satisfacen la ecuación de Laplace. Tendremos al tensor de gradiente gravimétrico  $\Gamma$  con signo negativo y por convención será simétrico, razón por la cual con tan sólo 5 componentes independientes lo podremos definir completamente (Beiki-Pedersen, 2010). La unidad fundamental de la gravimetría es el Eötvös [E],  $1E = 10^{-9} s^{-2}$  o  $1E \approx 10^{-10} g/m$ , donde  $g \approx$

$9.8 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$  es aproximadamente la aceleración gravitacional terrestre. La gradiometría describe la diferencia de aceleraciones con respecto a una base, por lo cual se cumplirá la siguiente igualdad  $1[E] = \frac{0.1 \mu\text{gal}}{m}$  la expresión anterior es usada como unidad de cambio en la navegación y la comunidad geofísica.

## 2.4 Decaimiento Espectral

Entendemos el decaimiento espectral como la tasa con la cual disminuye la energía espectral con el incremento de la frecuencia.

### 2.4.1 Espectro radial

Spector & Grant en 1970 desarrollaron un método para estimar la profundidad de una superficie de capas magnéticas a partir de la pendiente del espectro radial. Naidu en 1969, ofrece una técnica para calcular el espectro radial a partir de la transformada de Fourier descrita en términos generales de la siguiente forma (Mishra & Naidu, 1974):

$$\overline{X}_K(u, v) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N X_K(m, n) \exp(-i(um + un)), \dots (18)$$

donde

$$\overline{X}_K(u, v) \text{ es la transformada de Fourier de } X_k(m, n)$$

El subíndice  $k$  se refiere al número de bloque, M y N se refieren a las dimensiones del bloque. El espectro se obtiene entonces como

$$s'_K(u, v) = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^k \frac{1}{M \cdot N} |\overline{X}_k(u, v)|^2, \dots (19)$$

a partir del espectro podemos obtener al espectro radial como

$$R(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_x(s(\cos\theta), s(\sin\theta)) d\theta, \dots (20)$$

donde  $R(s)$  es el espectro radial, y

$$u = s * (\cos\theta), \dots (21)$$

$$v = s * (\sin\theta), \dots (22)$$

$$s = \sqrt{u^2 + v^2}. \dots (23)$$

### 2.4.2 Energía de configuraciones simples

Un rasgo importante del espectro de distintas formas de fuente (puntos, líneas y cuerpos de techo plano) es el hecho de que la energía puede ser expresada como el producto de factores discretos (H.S. Sadek, 1984):

$$E(r, \theta) = M * R_M(\theta) * R_T(\theta) * H(h, r) * S(a_i, r, \theta) * C(b_i, r), \dots (24)$$

donde las funciones se definen como:

$M$  = Factor de magnetización escalar, regido únicamente por la magnetización de la fuente.

$R_T$  = Factor del campo geomagnético, involucra a los cosenos directores del campo terrestre.

$R_M$  = Factor del vector de magnetización, definido exclusivamente por los cosenos directores de la fuente magnética (se asume uniforme).

$H$  = Factor de profundidad.

$S$  = Factor de extensión horizontal (Referido al largo del cuerpo magnetizado).

$C$  = Factor de extensión vertical (Espesor o profundidad del cuerpo).

Y las variables dependientes como:

$r$  = Número de onda radial ( $r = 2\pi f$ , donde la frecuencia  $f$  puede ser medida en cualquier dirección).

$\theta$  = Azimut del número de onda radial.

$h$  = Profundidad del techo del modelo de fuente.

$a_i$  = Parámetros que relacionan las dimensiones horizontales de la fuente.

$b_i$  = Parámetros que relacionan la extensión vertical de la fuente.

De la ecuación 24 se observa que los factores  $H, S$  y  $C$  se encuentran involucrados en el cálculo del espectro radial; los factores  $M, R_T$  y  $R_M$  afectan únicamente al valor absoluto de la energía y al cambio de esta con respecto al azimut, por lo cual de ninguna manera agregan algún efecto en la curva de decaimiento graficada en función del número de onda o frecuencia.

El decaimiento de la energía espectral con el incremento de la frecuencia es casi de forma invariable dominado por el factor de profundidad, el cual para cualquier fuente simple se encuentra definido como:

$$H(h, r) = e^{-2hr} \dots (25)$$

Debido a este hecho en modelos simples se pueden obtener buenas estimaciones de la profundidad del techo, analizando la pendiente del logaritmo del decaimiento de la energía. La precisión de esta estimación dependerá en parte de los factores  $S$  y  $C$  descritos a profundidad en el Anexo 1.8.

### 2.4.3 Energía esperada en un ensamble

El caso ideal de anomalía aislada se encuentra pocas veces en la práctica, por lo cual se busca conocer en un caso más general la forma del espectro, es decir cuando observamos distintas fuentes. Esto puede expresarse como:

$$\langle E(r, \theta) \rangle = \int_V E(r, \theta) \cdot \varphi(P_i) dV \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots (26)$$

Donde:

$V$  =Espacio de n-parámetros

$\varphi$  =Función de probabilidad conjunta para los parámetros  $P_i$ .

En el supuesto de que los parámetros varíen de forma independiente uno de otro podemos escribir

$$\varphi(P_i) = \varphi(P_1) \cdot \varphi(P_2) \dots \varphi(P_n), \dots (27)$$

entonces se debe reescribir la ecuación 26 como:

$$\langle E(r, \theta) \rangle = \langle M \rangle \langle R_M(\theta) \rangle \langle R_T(\theta) \rangle \langle H(h, r) \rangle \langle S(a_i, r, \theta) \rangle \langle C(b_i, r) \rangle \dots (28).$$

### 2.4.4 Factor de profundidad y su estimación

Si consideramos al ensamble de fuentes con una distribución de profundidades aleatoria uniforme:

$$h(1 - \gamma) \leq h \leq \bar{h}(1 + \gamma), \dots (29)$$

donde  $\gamma \leq 1$  y  $\bar{h}$  = promedio de valores de  $h$ .

Entonces

$$\langle H(h, r) \rangle = \frac{1}{2\gamma} \int e^{-2hr} dh. \dots (30)$$

Al evaluar la integral y generar un gráfico  $\partial \ln \langle H \rangle / \partial \bar{h}r$ , se demuestra que la pendiente es asintótica para  $2(1 - \gamma)$  (Pedersen, 1978b). De manera que cuando  $\gamma = 0$  entonces la pendiente  $\alpha = 2$ .

Para un valor de  $\gamma = 0.5$  la pendiente  $\alpha$  es igual a dos únicamente en  $r=0$ , por lo cual existe una subestimación de profundidad si se usan altas frecuencias para obtener la pendiente  $\alpha$ .

La estimación de profundidad es acertada cuando la variación de la profundidad  $\Delta \bar{h}$  en el ensamble es (Spector, 1968):

$$\frac{\Delta h}{h} \leq 25\%. \dots (31)$$

Lo que corresponde a  $\gamma = 0.25$ . Sin embargo, aun cuando esto se cumple es necesario evitar valores grandes de  $\bar{h}r$  en la estimación de la pendiente, y sobre todo considerar los efectos ocasionados por los factores  $S$  y  $C$ . Una vez corregido el espectro por sus factores de extensión horizontal y vertical ( $S$  y  $C$  respectivamente), el promedio de la profundidad es calculado a partir de la pendiente  $\alpha$  como:

$$\bar{h} = -\frac{\alpha}{4\pi}, \dots (32)$$

cuando la pendiente se mide en una gráfica  $\ln E(f, \theta)$  contra  $f$ , o

$$\bar{h} = -\frac{\alpha}{2}, \dots (33)$$

En una gráfica de espectro de amplitud  $\ln A(f, \theta)$  contra  $f$ , si dos o más ensambles de fuentes están presentes, cada uno con su respectivo promedio de profundidad de fuente y  $\frac{\Delta h}{h} \leq 25$  por ciento, entonces la gráfica mostrará una serie de intervalos lineales y las profundidades podrán ser determinadas al medir la pendiente de cada intervalo de forma separada.

## 2.5 Deconvolución de Euler

Es el método que utiliza la ecuación de Euler para determinar la profundidad de fuente en un campo potencial. Se usa en la interpretación de campos

potenciales para buscar estructuras, sistema de fallas, cuerpos intrusivos entre otras formaciones geológicas.

### 2.5.1 Función homogénea

Definimos a la función homogénea como aquella función que presenta un comportamiento multiplicativo de escala interesante, es decir supongamos una función cuya definición es  $f: V \rightarrow W$  entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $F$ . Entonces se dice que  $f$  es homogénea de grado  $k$  si:

$$f(\alpha v) = \alpha^k f(v) \quad \forall \alpha \in F \setminus \{0\}, \forall v \in V \dots (34)$$

### 2.5.2 Desarrollo teórico

La deconvolución de Euler es estrictamente válida en funciones homogéneas. Como vimos anteriormente una función  $f(v)$  de un número de variables  $v = (v_1, v_2, v_3 \dots)$  es homogénea de grado  $n$ , si:

$$f(\alpha v) = \alpha^n f(v), \dots (35)$$

donde  $\alpha$  es un número real y  $n$  es un entero. Si diferenciamos la ecuación con respecto a  $\alpha$  entonces:

$$v_1 \frac{\partial}{\partial \alpha v_1} f(\alpha v) + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial \alpha v_n} f(\alpha v) = n \alpha^{n-1} f(v), \dots (36)$$

en concreto si elegimos  $\alpha = 1$ . La ecuación se puede reescribir como:

$$v \cdot \nabla f = n f(v) \dots (37)$$

Si un campo puede ser expresado de la forma:

$$F = A/r^n \dots (38)$$

$F$  será un campo homogéneo de grado  $-n$ .

### 2.5.3 Deconvolución de Euler en 3D

Considerando un sistema de tres dimensiones la función homogénea de grado  $n$  estaría expresada de la siguiente forma (Thompson, 1982):

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z) \dots (39)$$

De manera que si seguimos el desarrollo teórico podemos llegar a la forma diferencial parcial de la ecuación de Euler:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf \dots (40)$$

Si suponemos que la función  $f(x, y, z)$  tiene la forma general:

$$f(x, y, z) = \frac{G}{r^N} \dots (41)$$

Donde  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  y  $N = 1, 2, 3 \dots$ ; obtendremos una función homogénea de orden  $n = -N$ . Existen distintas fuentes magnéticas puntuales simples que tienen un comportamiento similar a la ecuación anterior (Thompson, 1982).

Si consideramos una fuente puntual llámese punto de masa o dipolo magnético localizado en las coordenadas  $x_0, y_0, z_0$  relativas a nuestro punto de observación. El campo total de intensidad magnética estará definido como:

$$\Delta T(x, y) = f[(x - x_0), (y - y_0), z_0] \dots (42)$$

De tal manera que la ecuación de Euler quedaría expresada de la siguiente manera:

$$(x - x_0) \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \Delta T}{\partial y} - z_0 \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = -N \Delta T(x, y) \dots (43)$$

El valor de N se conoce como índice estructural y está relacionado con el modelo simple que provoca la anomalía.

A continuación, se muestra el valor de N propuesto por Thompson (1982), para cuatro modelos distintos:

Modelo Sintético	Valor de N
Línea de monopolos	1.0
Monopolo puntual	2.0
Línea de dipolos	2.0
Dipolo puntual	3.0

Tabla 1 Valor del índice estructural en modelos simples (Thompson, 1982)

# CAPÍTULO 3. MÉTODOS

---

## 3.1 Introducción

En este capítulo se desarrolla el cálculo de la deconvolución de Euler y el espectro radial en su forma discreta. Se explica cuáles son los parámetros con los cuales se trabajó y la manera en la cual se combinan los métodos para localizar y estimar las profundidades de fuente.

De igual manera se muestra el criterio que se propone y que se utilizó para almacenar las mejores soluciones de cada iteración.

## 3.2 Cálculo de parámetros

Los datos obtenidos durante la medición de los campos potenciales son generalmente mediciones puntuales equiespaciadas, ya sea para crear un perfil o una malla. Posterior a la adquisición de los datos y a la corrección de estos se realiza una interpolación.

Para este caso en particular trabajaremos con una malla por lo cual a partir de las dimensiones del área obtuvimos los siguientes parámetros:

$Lx$  =Longitud en x.

$Ly$  =Longitud en y.

Para invertir los datos fue necesario organizar los datos de la malla dentro de una matriz compuesta por valores puntuales de intensidad de campo, para esto trabajamos con los valores ya interpolados de manera que:

$m$  = Número de filas de la matriz

$n$  =Número de columnas de la matriz

Considerando los valores anteriores se calcula la separación entre muestras de la siguiente forma:

$$\Delta x = Lx/m, \dots (44)$$

$$\Delta y = Ly/n. \dots (45)$$

Para facilitar el cálculo se trabajó con matrices cuadradas de tal forma que  $m = n$ , de igual manera para evitar factores de escala se definieron los espaciamentos  $\Delta x = \Delta y$ .

Partiendo del teorema de muestreo sabemos entonces que la frecuencia de Nyquist en una malla discretizada será:

$$F_{N_x} = F_{N_y} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \dots (46)$$

Se calculó el número de onda en dirección  $x$  y en dirección  $y$  de la siguiente forma:

$$\Delta p = 1/L_x, \dots (47)$$

$$\Delta q = 1/L_y \dots (48)$$

De tal forma que las longitudes de onda  $p$  y  $q$  están limitadas por la frecuencia de corte, es decir

$$p \in (-F_{N_x}; F_{N_x}), \dots (49)$$

$$q \in (-F_{N_y}; F_{N_y}), \dots (50).$$

### 3.3 Deconvolución de Euler 3D

Como se trató en el capítulo dos, el campo total de intensidad magnética está definido como:

$$\Delta T(x, y) = f[(x - x_0), (y - y_0), z_0] \dots (42)$$

De tal manera que la ecuación de Euler queda expresada de la siguiente manera:

$$(x - x_0) \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \Delta T}{\partial y} - z_0 \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = -N \Delta T(x, y) \dots (43)$$

Ahora bien, las incógnitas del problema son las coordenadas de la fuente puntual  $(x_0, y_0, z_0)$  con respecto al punto de observación  $(x, y, z)$ . Se tiene que el valor de  $\Delta T = B - f$  corresponde a la anomalía observada dentro de un campo regional estimado  $B$  y  $-N$  la razón de cambio del campo con la distancia. De manera que el sistema de ecuaciones a resolver estaría organizado de la siguiente manera:

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} + NB = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + Nf. \dots (51)$$

El sistema de la ecuación 51 se presenta de forma  $Am = d$ , donde  $m$  es el vector de parámetros desconocidos,  $A \in R^{N \times 4}$ ,  $d \in R^N$ , para cada ventana con  $N$  puntos de observación. La ventana es usada entonces para analizar toda el área de estudio.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} N \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_n}{\partial z} N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} N \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_n}{\partial z} N \end{bmatrix} \dots (52)$$

A partir del sistema de la ecuación 52 se puede estimar las coordenadas de la fuente  $(x_0, y_0, z_0)$  y el nivel de base  $B$ , resolviendo el sistema lineal de cuatro incógnitas y minimizando el error cuadrático:

$$m = (A^T A)^{-1} A^T d, \dots (53)$$

donde  $m = (x_0, y_0, z_0, B)^T$  y  $(A^T A)^{-1}$  representa la matriz inversa de  $A^T A$ .

### 3.4 Espectro Radial

A partir de la fórmula propuesta por Naidu en 1969 se tiene que para calcular la energía de un ensamble a partir de la transformada de Fourier debemos calcular:

$$\overline{X}_K(u, v) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N X_K(m, n) \exp(-i(um + un)), \dots (54)$$

donde

$\overline{X}_K(u, v)$  es la transformada de Fourier de  $X_k(m, n)$ ,  $k$  se refiere al número de bloque con el cuál se trabaja,  $M$  se refiere a las filas y  $N$  a las columnas que conforman el bloque.

El cálculo del valor  $\overline{X}_K(u, v)$  se calculó a partir de transformada rápida de Fourier en su forma discreta o FFT.

Una vez calculado el valor de la FFT se obtuvo el espectro de amplitud a partir del absoluto de la transformada:

$$S_k(u, v) = |X_k(u, v)|^2. \dots (55)$$

A partir del espectro se calculó el espectro radial utilizando la fórmula propuesta por Mishra en 1974.

$$R_k(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_k(s(\cos\theta), s(\sin\theta)) d\theta, \dots (56)$$

donde  $R_k(s)$  es el espectro radial calculado para el bloque  $k$ , y

$$u = s * (\cos\theta), \dots (57)$$

$$v = s * (\sin\theta), \dots (58)$$

$$s = \sqrt{u^2 + v^2}. \dots (59)$$

Para la implementación de la integral en forma discreta se propuso acomodar el espectro en el origen del plano de menor a mayor número de onda, para después generar una serie de anillos concéntricos de espesor constante de tal forma que sea integrara aquello que se ubicaba dentro del área del anillo.

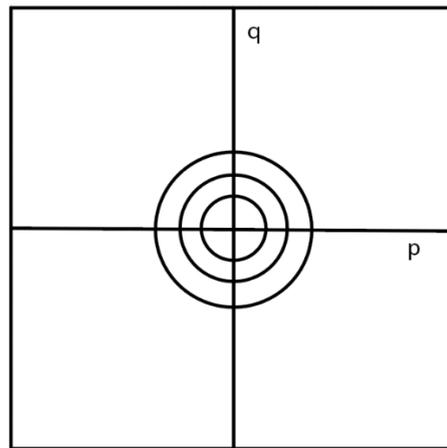


Figura 1. Representación esquemática del cálculo del espectro a diferentes números de onda por medio de anillos concéntricos de espesor constante

La creación de los anillos se realizó partiendo del origen es decir de menor a mayor número de onda, cada anillo representó entonces un intervalo de número de onda y los valores que se ubicaron dentro del anillo representaron las aportaciones energéticas para ese número de onda en específico, de tal manera que en forma discreta calculamos a  $R_k(s)$  como:

$$R_k(s) = \sum_{i=0}^k \left| X_k(u, v) * \arctan \left( \frac{v}{u} \right) \right|. \dots (60)$$

Siendo las posiciones  $u, v$  las pertenecientes al anillo con un intervalo de número de onda específico.

### 3.5 Cálculo de la profundidad

De acuerdo con Spector (1968) la estructura del subsuelo puede ser considerada como un número independiente de ensambles. Cada ensamble puede ser caracterizado como se mencionó en el capítulo dos, por la profundidad de la fuente magnetizada, sus dimensiones y la dirección de sus cosenos de magnetización.

En un levantamiento aeromagnético se puede considerar la distribución de cuerpos magnetizados como un ensamble de fuentes con una distribución de profundidades aleatoria uniforme.

Pedersen (1978) propone el cálculo de la profundidad  $H$  para un ensamble de distribución de profundidades  $\gamma \leq 1$  a través de la ecuación 61.

$$\langle H(h, r) \rangle = \frac{1}{2\gamma} \int e^{-2hr} dh. \dots (61)$$

En su trabajo mostró que al evaluar la integral y generar un gráfico  $\partial \ln \langle H \rangle / \partial \bar{h} r$  se puede observar que la pendiente se vuelve asintótica para  $2(1 - \gamma)$ . De manera que cuando  $\gamma = 0$  entonces la pendiente  $\alpha = 2$ , por lo cual se propone que para ensambles de estas características es posible calcular  $\bar{h}$  a partir de un gráfico  $\ln E$  contra  $f$ , de tal forma que:

$$\bar{h} = -\frac{\alpha}{2}. \dots (62)$$

Se calculó a partir del espectro radial  $R_k(s)$  la energía aportada a diferentes números de onda, con lo cual se generó el gráfico  $\ln E$  contra  $f$ , una vez obtenida la gráfica se procedió a calcular la pendiente con el método de mínimos cuadrados o LSQ por sus siglas en inglés.

La ecuación normal del LSQ se define en forma vectorial como:

$$G^T G \alpha = G^T d, \dots (63)$$

en nuestro caso lo que se busca es la pendiente por lo cual:

$$\alpha = (G^T G)^{-1} G^T d. \dots (64)$$

Donde:

G es la matriz de sensibilidad

d es el vector solución

### 3.6 Criterio de tolerancia

Debido a la naturaleza del cálculo de la profundidad se propuso aplicar un criterio de tolerancia en cada iteración, esto para que se almacenaran únicamente las soluciones que estuvieran por debajo del límite definido en nuestra tolerancia.

Para cada iteración se calculó el error cuadrático medio, MSE, se propuso este criterio ya que es el más usado en problemas de regresión lineal.

Para el cálculo del valor se comparó la curva del decaimiento espectral observada con la curva generada por una fuente que se encontrara a la profundidad estimada en esa iteración, siguiendo esta metodología fue posible juzgar en cada solución si la profundidad encontrada por medio de los mínimos cuadrados correspondía o no a la curva de un bloque que se encontrase esta profundidad.

Se definió entonces un valor máximo que puede alcanzar el MSE por sus siglas en inglés, mismo que representó la tolerancia del algoritmo.

La fórmula del MSE se encuentra definida como:

$$MSE(l) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^l (R_k real_i - R_k estimado_i)^2, \dots (65)$$

conocemos a  $l$  como el número de muestras

$R_k real$  como el decaimiento calculado a partir del espectro radial,

$R_k estimado_i$  como el decaimiento reconstruido a partir de la profundidad de la fuente estimada.

Las soluciones que fueron almacenadas cumplían entonces con la siguiente condición:

$$MSE \leq t. \dots (66)$$

Donde  $t$  es el error máximo que puede encontrar nuestra solución.

# CAPÍTULO 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO EN MODELOS SINTÉTICOS

---

## 4.1 Introducción

En este capítulo se describen los modelos sintéticos que se usaron para invertir las anomalías. Se muestran las propiedades de cada uno de los tres modelos, así como los parámetros con los cuales fueron generados. Por último, se muestran los resultados de la estimación de la profundidad para cada modelo.

## 4.2 Modelos directos

Las anomalías de campos potenciales se observan en forma de variaciones del campo, diferencias debidas al contraste espacial que existe en las propiedades que rigen al mismo, como lo es la densidad para el caso del campo gravimétrico. Para modelar de forma directa este comportamiento es necesario proponer un modelo simple y calcular la respuesta de este. La realización del modelado directo como se mencionó en el capítulo dos, requiere del cálculo repetido de la respuesta del campo potencial, situación que se resuelve sumando la respuesta de pequeños cuerpos como celdas de densidad o magnetización constante. Normalmente el algoritmo se implementa simulando un prisma rectangular, un cilindro o un dique.

Los modelos con los que se trabaja en esta sección fueron generados discretizando el medio en 2 millones de cubos que presentan una densidad y magnetización constantes. A continuación, se describen los tres modelos sintéticos con los que se trabajó:

Modelo 1:

Representación de un prisma con dimensiones  $4 \times 4$  [km<sup>2</sup>] de ancho y 10 [km] de largo, enterrado a 0.1 [km] en el centro del plano, con los ejes del prisma paralelos a los ejes de la ventana de observación. El contraste de densidades es  $\Delta\rho = 500$  [kg/m<sup>3</sup>] y con una magnetización  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3}$  [A/m]. El plano de observación cubre una región de 100 [km<sup>2</sup>] que consta de 200X200 nodos.

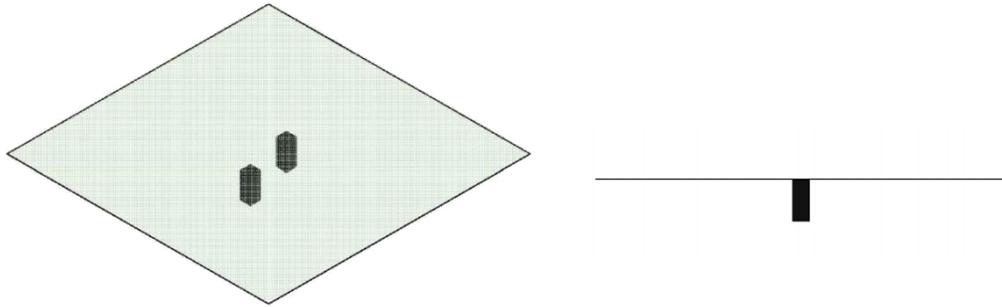


Figura 2. Representación esquemática del modelo 1

### Modelo 2:

El modelo contiene un par de prismas con distinta profundidad, el primer prisma se encuentra a 0.1 [km] de profundidad con  $2 \times 2$  [km<sup>2</sup>] de ancho por 10 [km] de largo, el segundo prisma está enterrado a 0.5 [km] de dimensiones  $2 \times 2$  [km<sup>2</sup>] de ancho por 10 [km] de largo. El contraste de densidades para ambos prismas es  $\Delta\rho = 500$  [kg/m<sup>3</sup>] y la magnetización  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3}$  [A/m]. El plano de observación abarca 100 [km<sup>2</sup>] con una malla compuesta de 200x200 nodos.

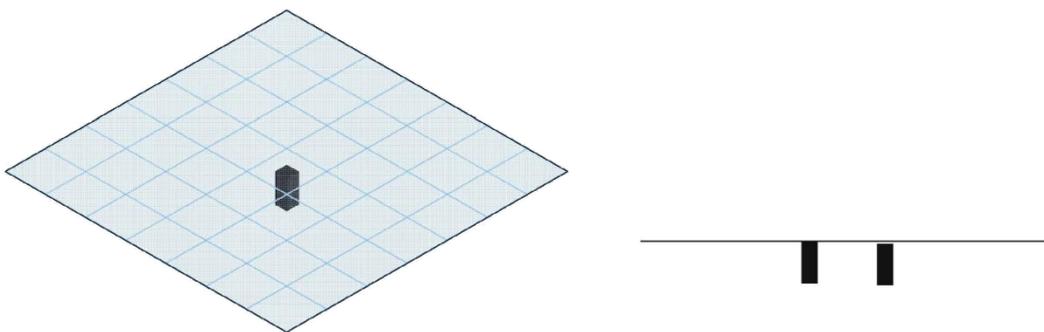


Figura 3. Representación esquemática del modelo 2

### Modelo 3:

Se modelan tres prismas localizados a 0.5[km], 1[km] y 1.5[km] por debajo del plano de observación. El contraste de densidad y de magnetización es igual en los tres prismas con un valor  $\Delta\rho = 530[\text{kg}/\text{m}^3]$  y  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3}[\text{A}/\text{m}]$ .

El primer prisma tiene una extensión horizontal de  $5 \times 5[\text{km}^2]$  y se ubica en el lado superior derecho de la ventana de observación, su límite superior se encuentra en 0.5[km] y su límite inferior en 2[km].

El segundo prisma tiene una extensión horizontal de  $9 \times 5[\text{km}^2]$  y se localiza en el lado inferior de la ventana de observación, se posiciona a 1[km] de profundidad y tiene una extensión vertical de 2.5[km].

El tercer prisma tiene una extensión horizontal de  $5 \times 7[\text{km}^2]$  ubicándose en la parte superior izquierda de la ventana de observación, su profundidad es de 1.5[km] con una extensión vertical de 2.5 [km].

El plano de observación y los nodos que componen la malla son  $100[\text{km}^2]$  y  $200 \times 200$  nodos respectivamente.

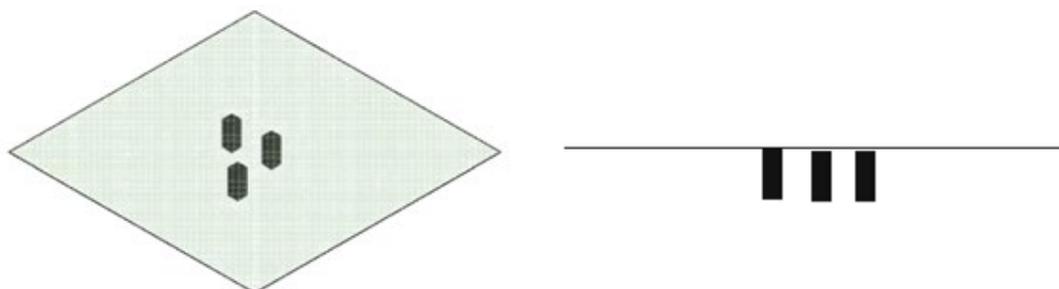


Figura 4. Representación esquemática del modelo 3

A partir de los modelos anteriormente descritos se calcularon los campos gravimétrico y magnético. La estimación de profundidades se llevó a cabo utilizando la componente vertical del campo gravimétrico y la anomalía magnética.

## 4.3 Estimación de fuentes

Considerando la teoría presentada en el capítulo dos, así como las fórmulas y consideraciones del capítulo tres se procedió a estimar la profundidad de la fuente. El proceso se realizó para los campos gravimétrico y magnético.

### 4.3.1 Espectro radial y cálculo de fuentes modelo 1

El primer modelo como se menciona en el apartado 4.2 corresponde a un prisma enterrado a 100 [m], se trató entonces de una fuente somera cuya anomalía gravimétrica se muestra a continuación Figura 5.

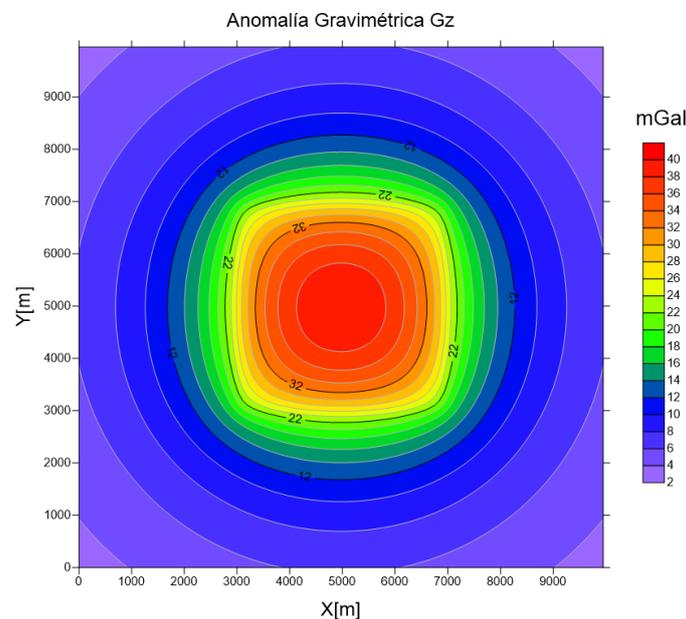


Figura 5. Anomalía de componente vertical Gz causada por el cuerpo que compone al modelo 1, malla de 500 x 500 nodos, densidad de contraste igual a 500[kg/m<sup>3</sup>]. Las curvas de nivel se dibujan cada 10 mGal, se observa un registro máximo de 40 mGal en la interpolación

Para obtener la imagen del espectro se discretizó la malla en 500x500 nodos con un espaciamiento  $\Delta x = \Delta y = 20$ [m], con una densidad de contraste igual a 500[kg/m<sup>3</sup>], la ventana propuesta para la interpretación fue de 60x60 nodos (1200x1200[m<sup>2</sup>]), con lo cual se analizó un número de onda fundamental de  $[8.333 \times 10^{-4} m^{-1}]$  y una frecuencia de Nyquist de  $[0.0125 m^{-1}]$ . A continuación, se presentan los espectros radiales calculados en cada ventana.

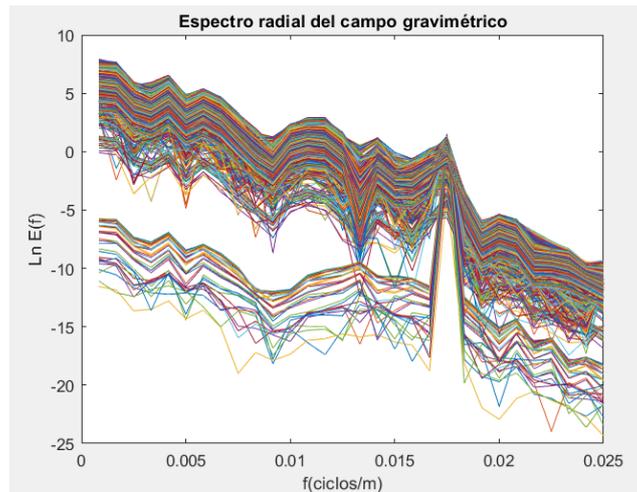


Figura 6. Espectros radiales de cada ventana ( $1200 \times 1200 [m^2]$ ), se observa un desfase de amplitud que va de los  $-10$  a los  $-5 \text{ Ln } E(f)$  y de  $0$  a  $5 \text{ Ln } E(f)$ , el intervalo con el que se realiza la regresión va de los  $0.001667-0.009167 [\text{ciclos/m}]$ , se observa un pico en el número de onda  $0.0175 [\text{ciclos/m}]$

En la Figura 6 observamos la variación que presenta el espectro dependiendo de la ubicación espacial de la ventana, se observan dos grupos principalmente, uno ubicado en la parte superior y otro en la parte inferior, el segundo grupo se encuentra en el intervalo de valores  $\text{Ln}(E(f)) = [-10, -5]$ , al analizar la ubicación de los decaimientos del segundo grupo se encontró que las ventanas observadas en la anomalía correspondían a un contacto lateral Figura 7.

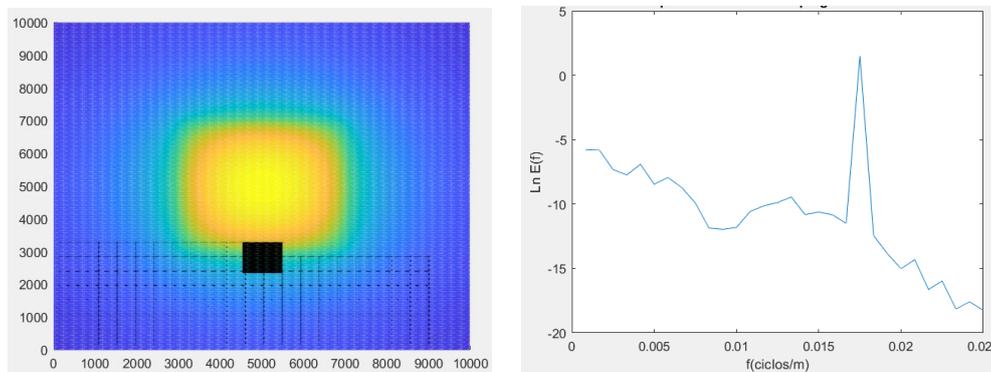


Figura 7. Localización espacial de una ventana de  $1200 \times 1200 [m^2]$  con su respectivo espectro, el espectro presenta un máximo en el intervalo  $0.01667-0.01833 [\text{ciclos/m}]$

Con la metodología descrita en el capítulo 3 se procedió a ubicar las soluciones mediante la deconvolución de Euler, para lo cual se discretizó la malla en  $200 \times 200$  nodos con una separación  $\Delta x = \Delta y = 50 [m]$  y una ventana de observación de  $20 \times 20$  nodos lo que equivale a  $(1000 \times 1000 [m^2])$ , dentro de las

ubicaciones encontradas por la deconvolución obtuvimos las siguientes profundidades mediante el espectro radial:

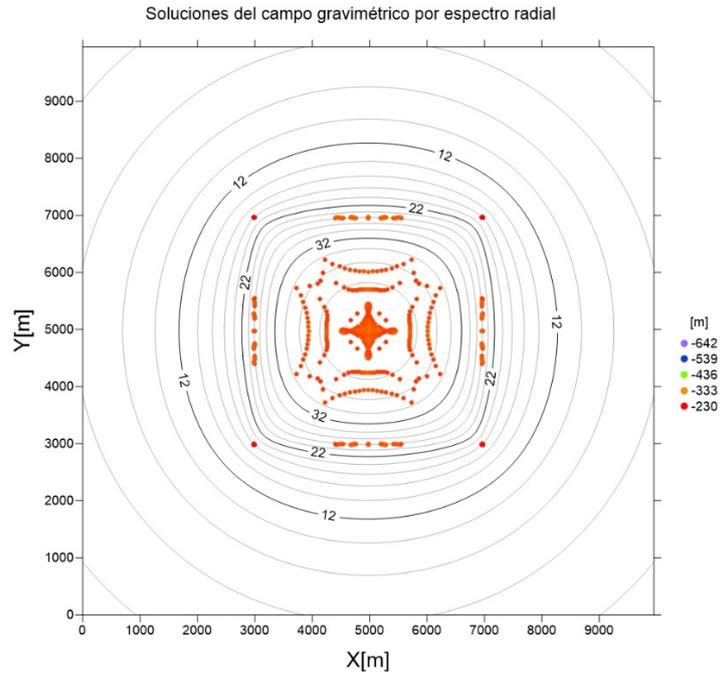


Figura 8. Localización espacial de las profundidades obtenidas con una ventana de  $1000 \times 1000 [m^2]$  y con una tolerancia de aceptación de 0.5, se muestra con colores la profundidad de cada solución en un intervalo que va de los  $230 [m]$  a los  $642 [m]$

En la Figura 8 observamos que la mayoría de las profundidades se encuentran cercanas a los  $300 [m]$ , la ubicación de las mismas sigue una simetría con respecto a los bordes de la anomalía.

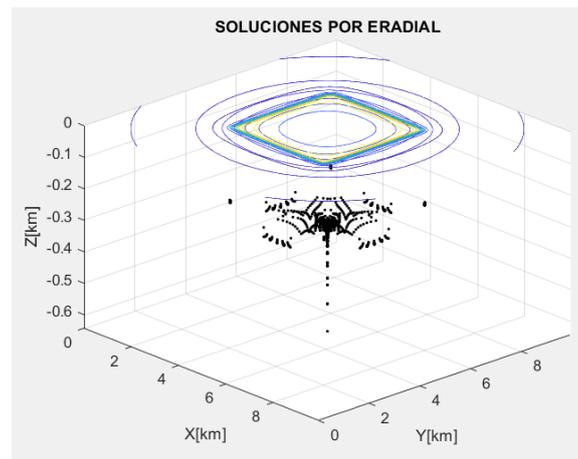


Figura 9. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución del campo gravimétrico del modelo 1

El siguiente campo por analizar fue el campo magnético, se muestra la anomalía magnética debida a un prisma enterrado a  $100 [m]$ :

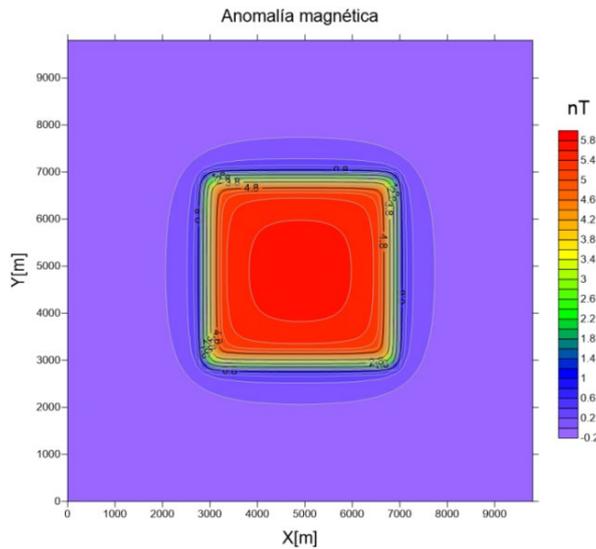


Figura 10. Anomalia de respuesta magnética correspondiente al modelo 1, malla de 500 x 500 nodos, magnetización  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3} [A/m]$ . Las curvas de nivel se dibujan a 1 [nT], se observa un registro máximo de 5.8 [nT] en la interpolación

Se discretizó la malla en 500x500 nodos, con lo cual la separación entre nodos fue de  $\Delta x = \Delta y = 20 [m]$ , el contraste de magnetización del cuerpo fue  $\Delta M = -9.7 \times 10^{-3} \left[ \frac{A}{m} \right]$ . Usando el tamaño de ventana de  $(1200 \times 1200 [m^2])$  es decir, un número de onda fundamental de  $[8.333 \times 10^{-4} m^{-1}]$  y una frecuencia de Nyquist igual a  $[0.0125 m^{-1}]$ , se obtuvieron los siguientes decaimientos.

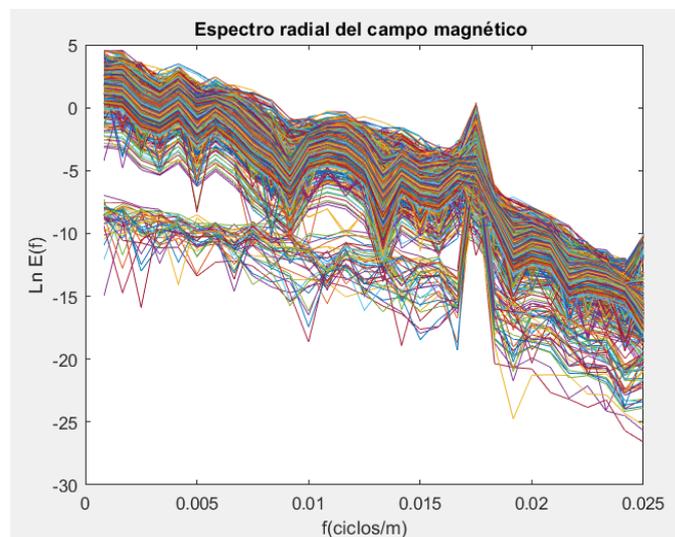


Figura 11. Espectros radiales de cada ventana  $(1200 \times 1200 [m^2])$ , las ventanas muestran un comportamiento similar entre ambos campos ya que se observan espectros agrupados en la parte inferior con valor de  $\text{Ln}(E(f))$  menores a -5

Podemos notar ciertas similitudes entre la Figura 6 y Figura 11 ya que en ambas se observa un comportamiento similar para el decaimiento espectral, por ejemplo, un máximo en el intervalo 0.01667-0.01833.

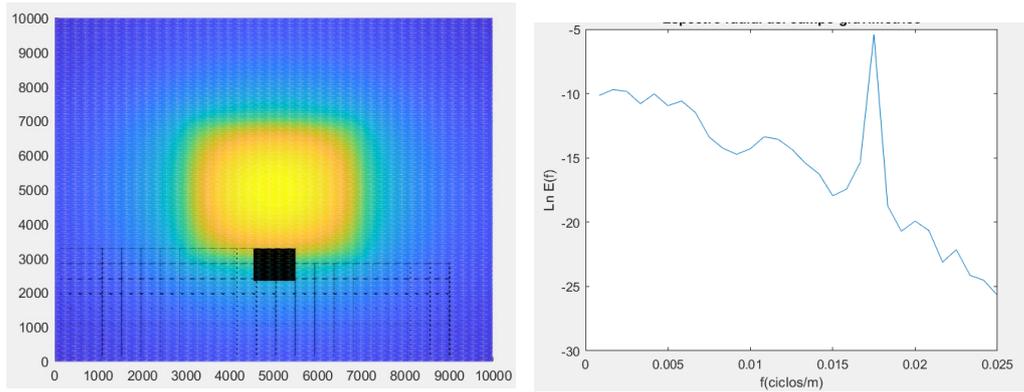


Figura 12. Localización espacial de una ventana de  $1200 \times 1200 [m^2]$  y su espectro radial, el comportamiento que presenta la anomalía magnética es similar al comportamiento del campo gravimétrico Figura 6

De igual manera se procede a ubicar las soluciones en planta y a profundidad a partir de la deconvolución y el espectro, para lo cual se discretizó la malla en  $200 \times 200$  nodos con una separación  $\Delta x = \Delta y = 50 [m]$  y una ventana de observación de  $20 \times 20$  nodos lo que equivale a  $(1000 \times 1000 [m^2])$ , con estos parámetros se obtuvieron las siguientes profundidades:

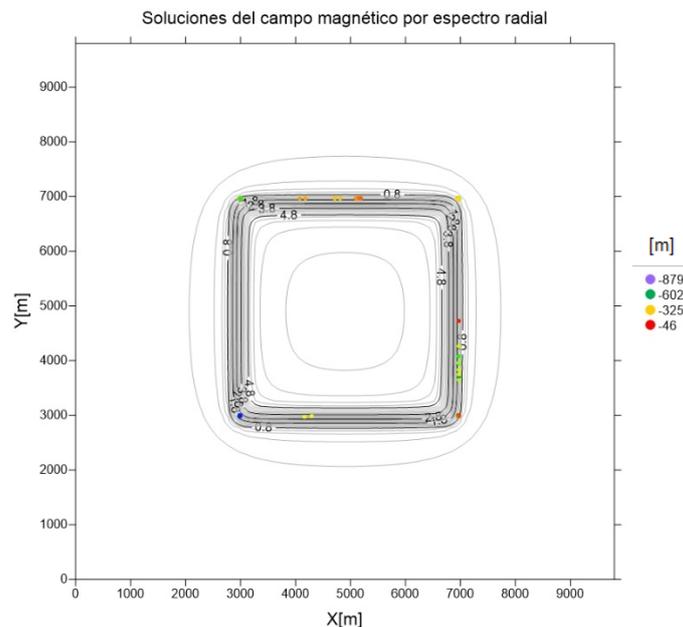


Figura 13. Profundidades obtenidas a través del campo magnético con una tolerancia de 0.1, los colores muestran la ubicación y la profundidad obtenida en cada ventana, el intervalo de profundidades va de los 46 a los 879 metros

Se observa en la Figura 13 que las soluciones se ubican cercanas a los bordes de la anomalía y que las profundidades son en su mayoría sobre estimadas ubicándose entre los 46[m] y 879[m].

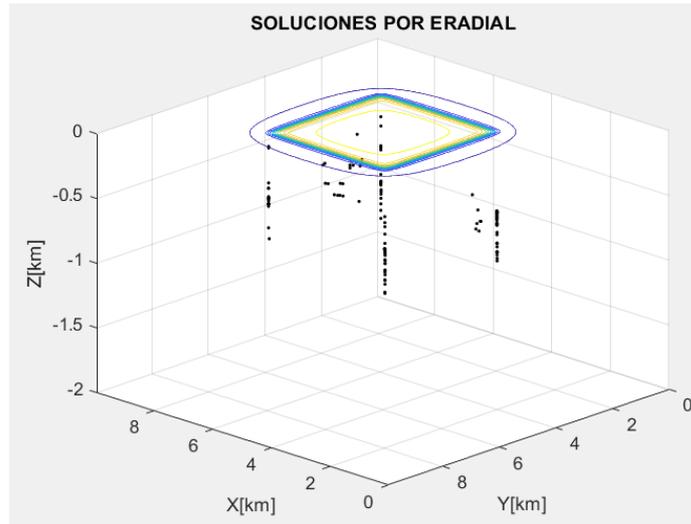


Figura 14. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución de campo magnético del modelo 1

### 4.3.2 Espectro radial y cálculo de fuentes modelo 2

Se observa en la Figura 15 la anomalía gravimétrica debida a un par de prismas con dimensiones de  $2 \times 2$  [km<sup>2</sup>] de ancho y 10 [km] de largo, enterrados a 0.1 [km] y 0.5 [km] de profundidad.

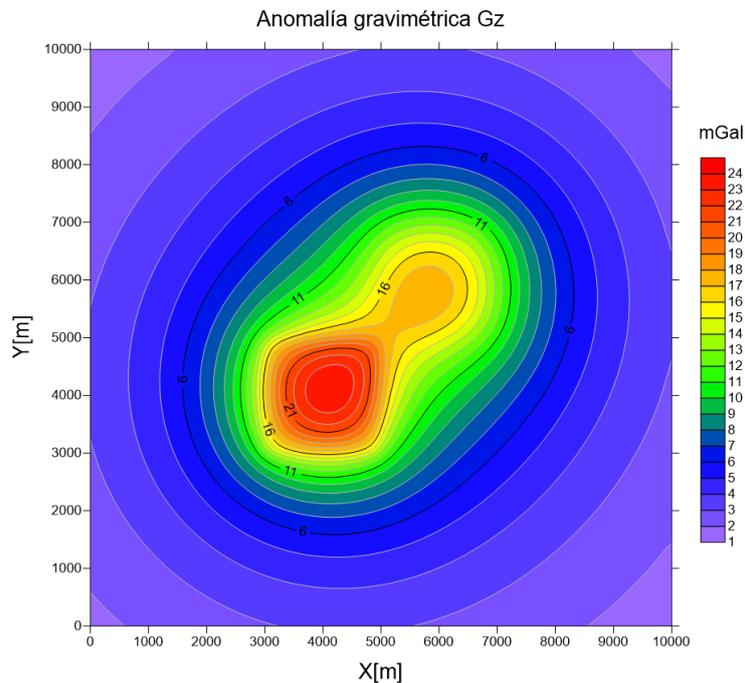


Figura 15. Anomalía gravimétrica correspondiente al modelo 2, malla de  $200 \times 200$  nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 5 [mGal], se observa un registro máximo de 24 [mGal] en la interpolación

La malla se reinterpoló en  $1000 \times 1000$  nodos con un espaciamento  $\Delta x = \Delta y = 10$  [m], la ventana propuesta para la interpretación fue de  $40 \times 40$  nodos ( $400 \times 400$  [m<sup>2</sup>]), con lo cual se observó un número de onda fundamental de

$[0.25 \times 10^{-2}m^{-1}]$  y una frecuencia de Nyquist  $[0.05m^{-1}]$ . A continuación, se muestran los espectros generados en cada ventana Figura 16:

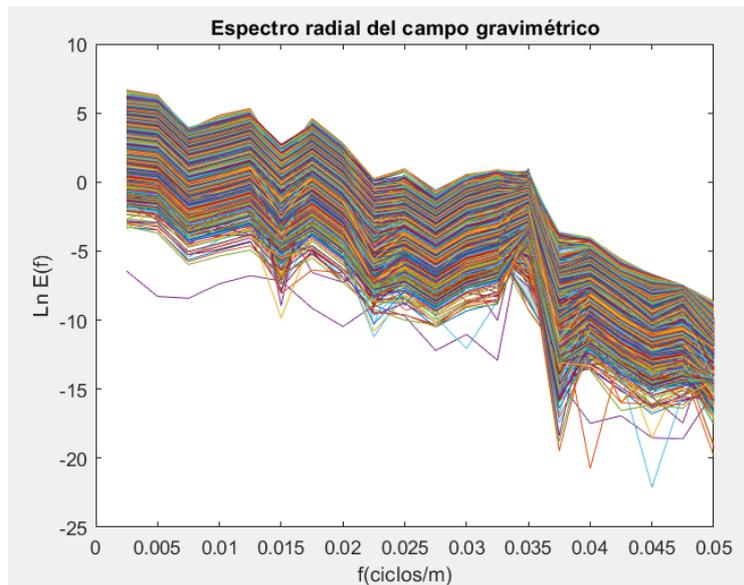


Figura 16. Espectros radiales de una ventana de  $400 \times 400 [m^2]$ , se propone una ventana pequeña para observar la aportación de la fuente somera, podemos notar que a diferencia de las figuras correspondientes al modelo 1 no existe un salto marcado entre amplitudes, se observa un pico en  $0.035$  (ciclos/m)

En la Figura 16 se observa que para el modelo 2 existe una mayor agrupación en cuanto al decaimiento del espectro, a partir de observaciones se considera que este comportamiento se debe a la forma de la anomalía, ya que en pocas ocasiones el gradiente observado por la ventana se muestra como un contacto lateral. Sin embargo, se sigue observando un comportamiento similar por ejemplo en  $0.35$  [ciclos/m] Figura 17.

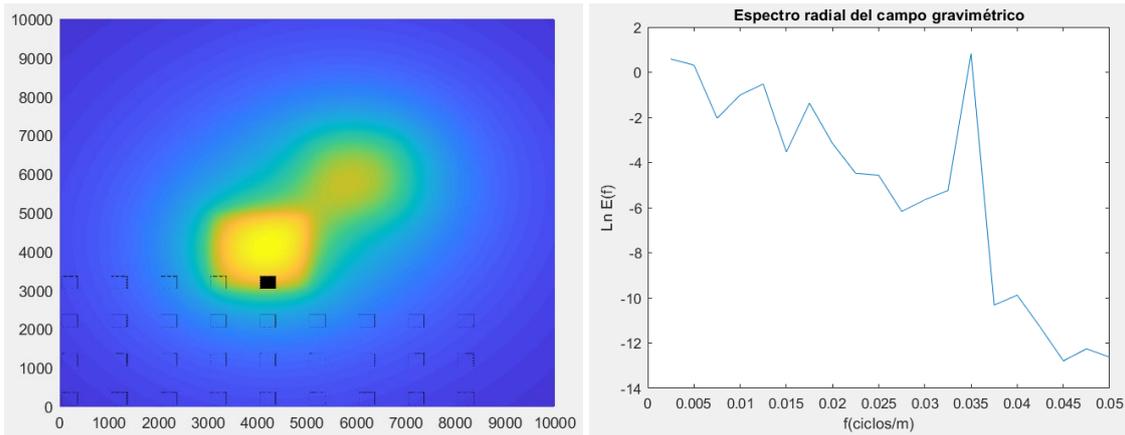


Figura 17. Localización espacial de una ventana de 400x400[m<sup>2</sup>] con su respectivo espectro, se marca un máximo en 0.035 [ciclos/m]

A partir de la inversión de la pendiente y la solución del sistema de ecuaciones de Euler obtenemos las soluciones mostradas a continuación Figura 18:

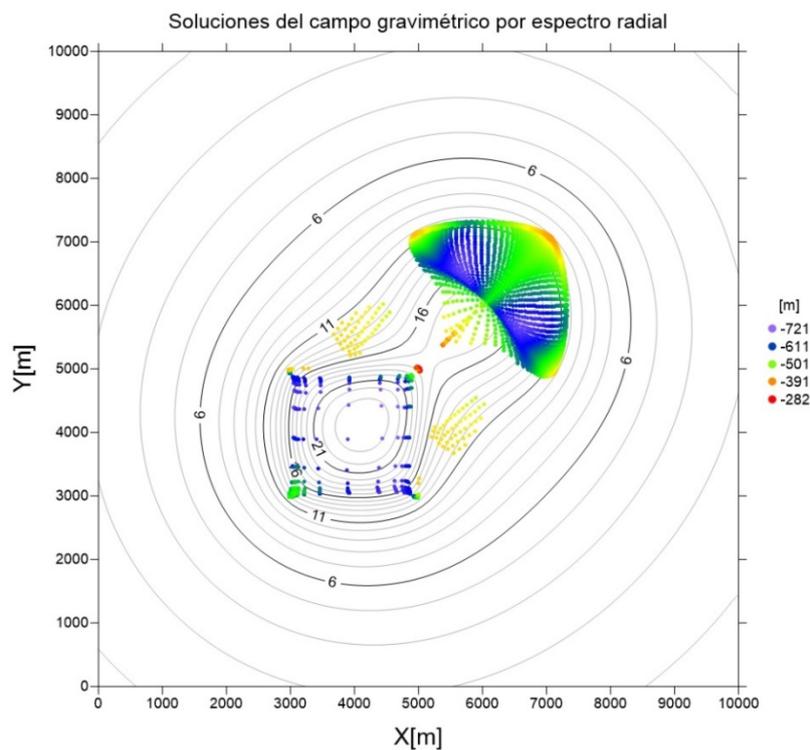


Figura 18. Localización espacial de las profundidades obtenidas con una ventana de 1000x1000[m<sup>2</sup>] y con una tolerancia de 0.8, de igual manera se muestra el rango en el cual se encuentran las profundidades con una escala de colores, en este caso las profundidades oscilan entre los 282 y los 721 [m]

Podemos observar en la Figura 18 que las profundidades estimadas son muy cercanas al valor real de profundidad y que las soluciones además se localizan cercanas a los dos cuerpos que provocan la anomalía.

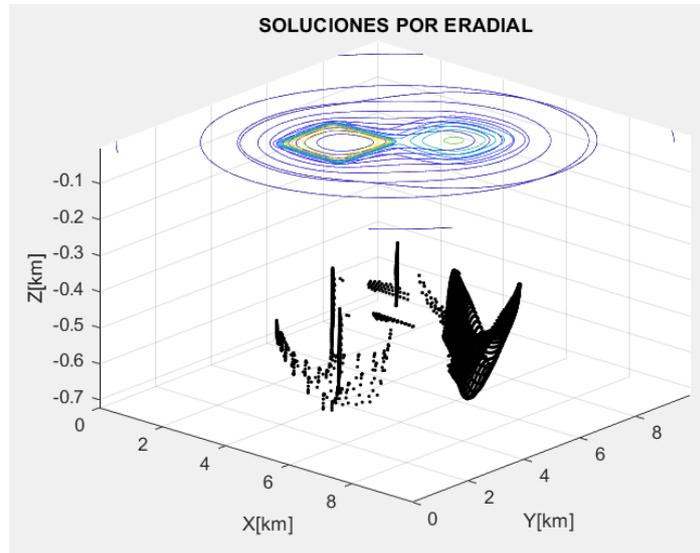


Figura 19. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución de campo gravimétrico del modelo 2

A continuación, se presenta la anomalía magnética debida a las fuentes del modelo 2.

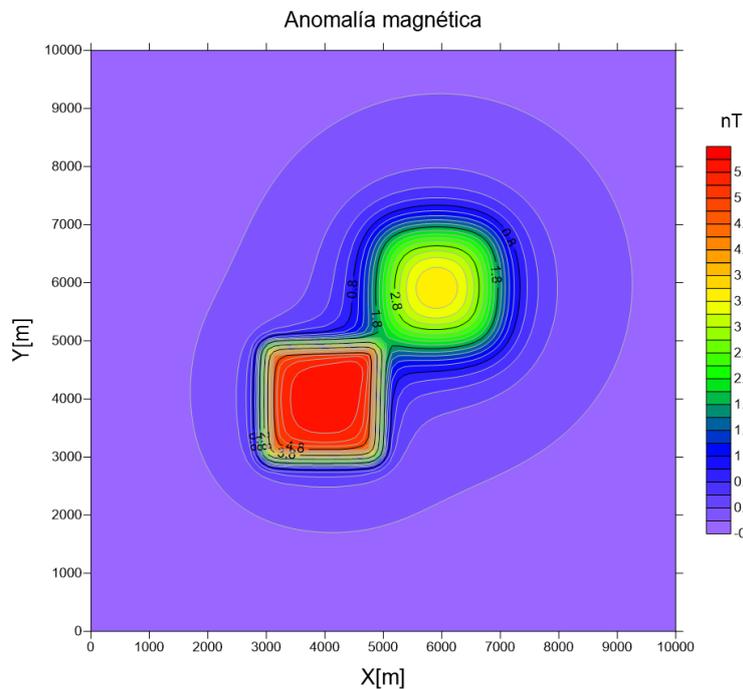


Figura 20. Anomalía magnética correspondiente al modelo 2, malla de 200 x 200 nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 0.2 [nT], se observa un registro máximo de 5.4[nT] en la interpolación

Para el caso magnético se trabajó con la fuente somera y profunda de igual manera, para la primera fuente se realizó una interpolación de tal manera que se trabajó con 10[m] de espaciamiento entre muestras, la ventana propuesta fue de 400x400[m<sup>2</sup>]. Los espectros obtenidos se muestran a continuación Figura 21:

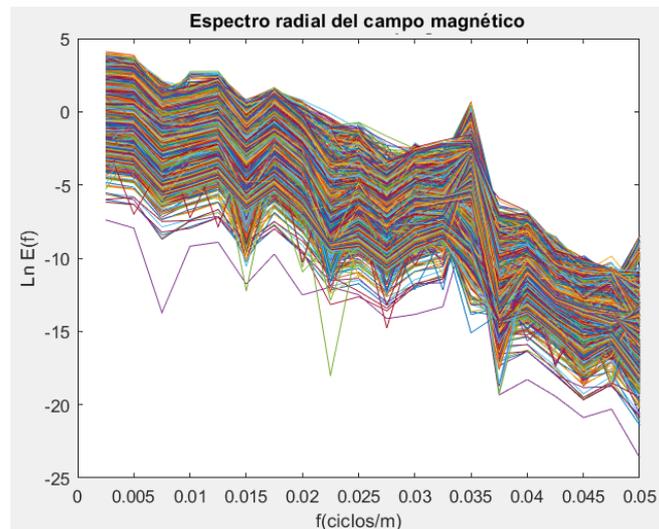


Figura 21. Espectros radiales de una ventana de 400x400[m<sup>2</sup>], se puede notar que los espectros muestran mayor distribución en comparación con los obtenidos en el campo gravimétrico Figura 16

Se encontró que el campo magnético mostró el mismo comportamiento que el campo gravimétrico, por ejemplo, el pico en 0.035 [ciclos/m] prevalece al igual que el efecto producido en los bordes rectos de la anomalía Figura 22.

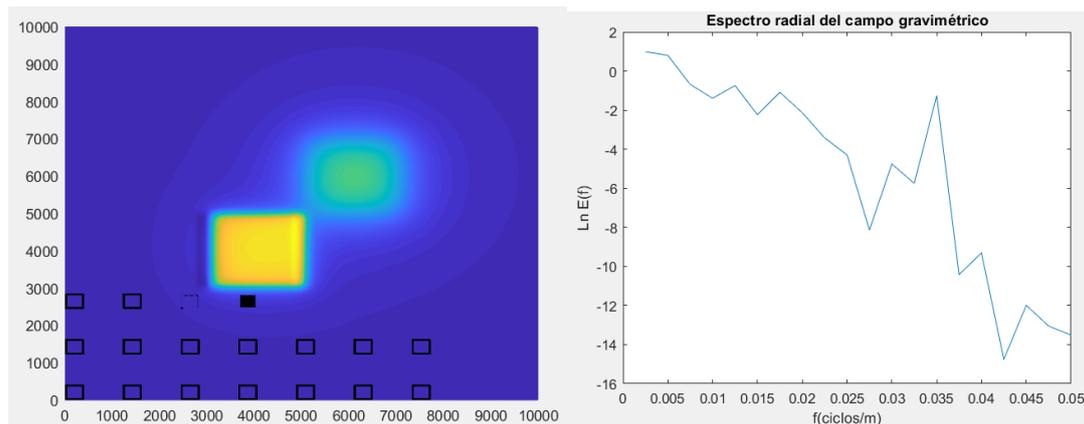


Figura 22. Localización espacial de una ventana de 400x400[m<sup>2</sup>] con su respectivo espectro, se marca un máximo en 0.035 [ciclos/m]

Para calcular la profundidad a partir del espectro se eligió el intervalo que va de los 0.05 a los 0.0015 (ciclos/m), se calculó la regresión lineal por mínimos



### 4.3.3 Espectro radial y cálculo de fuentes modelo 3

A continuación, se presenta la anomalía gravimétrica correspondiente al modelo de tres prismas localizados a 0.5[km], 1[km] y 1.5[km] por debajo de plano de observación.

El plano de observación y los nodos que componen la malla son 400[km<sup>2</sup>] y 200x200 nodos respectivamente.

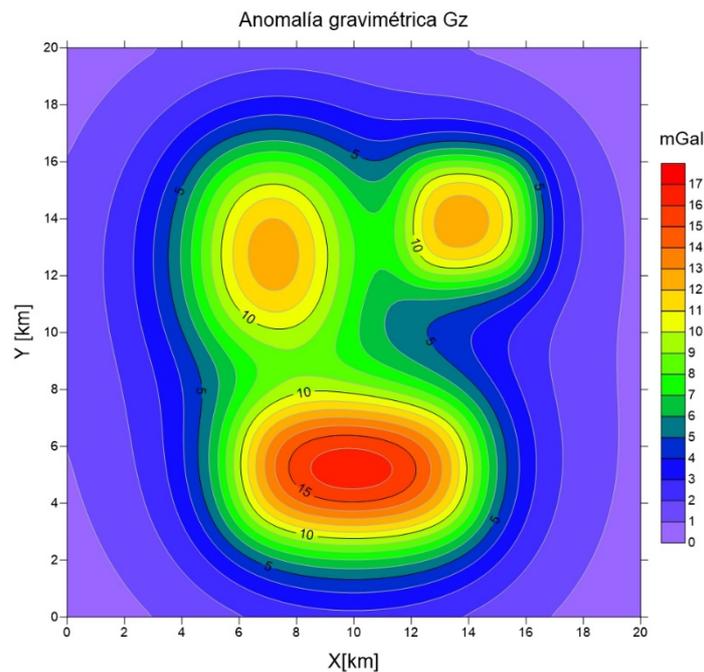


Figura 25. Anomalía gravimétrica correspondiente al modelo 3, malla de 200 x 200 nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 1 [mGal], se observa un registro máximo de 17[mGal] en la interpolación

Se decidió observar el área de interés con una ventana de 20x20 nodos (2000x2000[m<sup>2</sup>]), obteniendo un número de onda fundamental igual a  $[5. \times 10^{-4}m^{-1}]$  y una frecuencia de Nyquist equivalente a  $[0.001m^{-1}]$ . Los espectros evaluados para cada ventana se presentan a continuación:

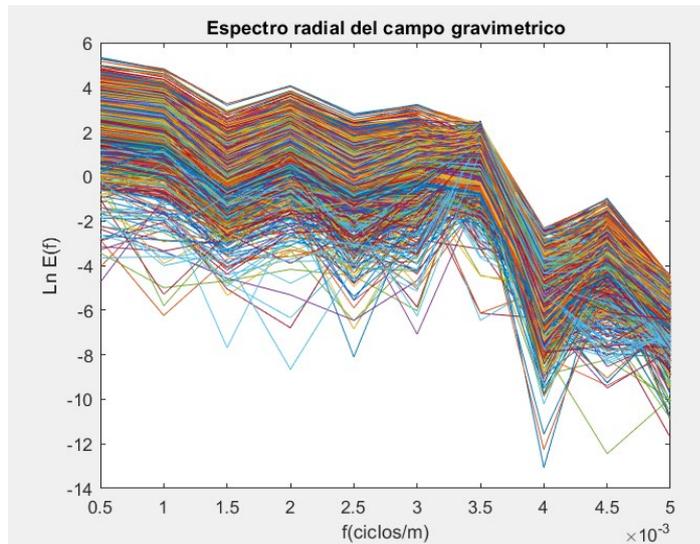


Figura 26. Espectros radiales de ventanas de  $2000 \times 2000 [m^2]$ , se observa un salto en el espectro cerca de los  $0.0035$  (cicos/m) sin embargo la profundidad de  $400 [m]$  no concuerda con ninguna fuente en el modelo

En la Figura 26 se observaron espectros agrupados como el caso del modelo 1 y 2, se observó un pico en  $3.5 \times 10^{-3}$  [ciclos/m], a partir de la observación de los espectros se eligió el intervalo que va de los  $0.5$  a los  $1.5 \times 10^{-3}$  [ciclos/m] para realizar la regresión lineal, se utilizó un criterio de aceptación de  $4.4$  con lo cual se encontraron las siguientes soluciones:

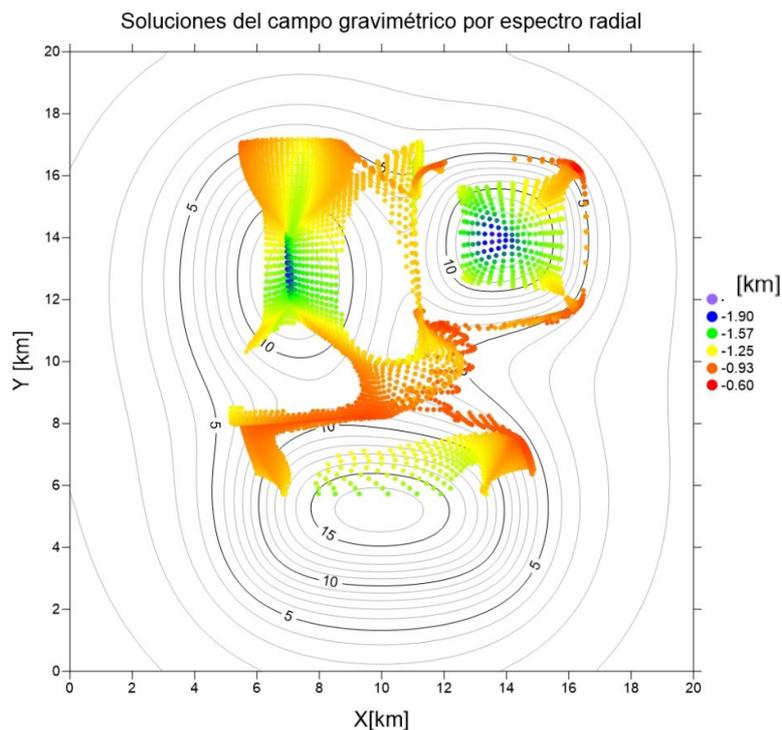


Figura 27. Soluciones encontradas a partir de una ventana de  $2000 \times 2000 [m^2]$  con una tolerancia de  $4.4$

En la Figura 27 se muestran las profundidades obtenidas a partir de la anomalía gravimétrica, se observó un intervalo de soluciones que va de los 600 a los 2200 [m]. Dentro de las soluciones observadas es muy notoria la presencia de tres cuerpos.

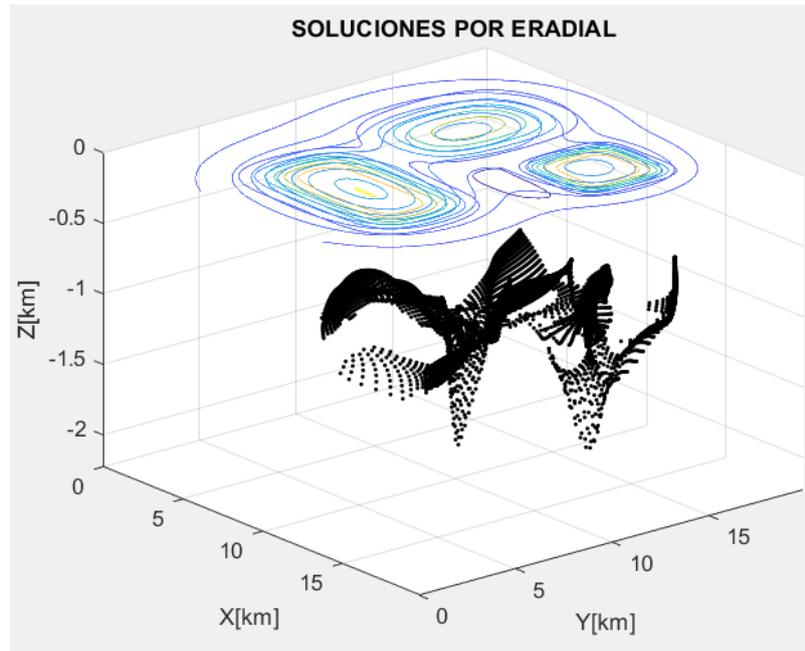


Figura 28. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución del campo gravimétrico del modelo 3

A continuación, se muestra el análisis realizado para la anomalía magnética, la cual corresponde de igual manera a tres prismas localizados a 0.5[km], 1[km] y 1.5[km] por debajo de plano de observación con un contraste de magnetización  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3} [A/m]$ , la Figura 29 muestra la anomalía magnética observada en el modelo 3.

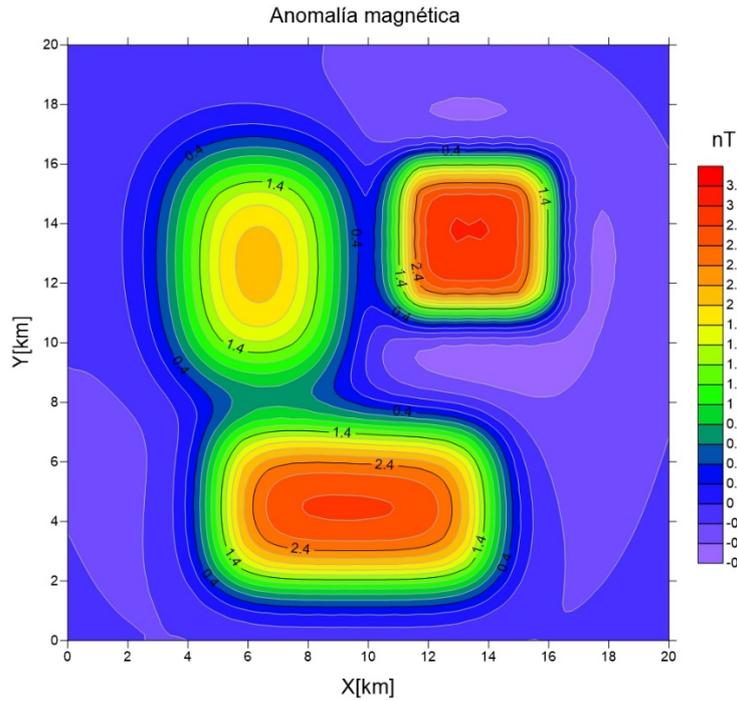


Figura 29. Anomalia magnética correspondiente al modelo 3, malla de 200 x 200 nodos. Las curvas de nivel se dibujan cada 0.2 [nT], se tiene un máximo de 3.2 [mGal] en la interpolación

A partir de la interpolación de 200x200 nodos se obtuvo un  $dx=dy=150$ [m] entre muestras. Se analizó la anomalía con una ventana de  $18000 \times 18000$  [m<sup>2</sup>] con lo cual se obtuvieron los espectros mostrados a continuación:

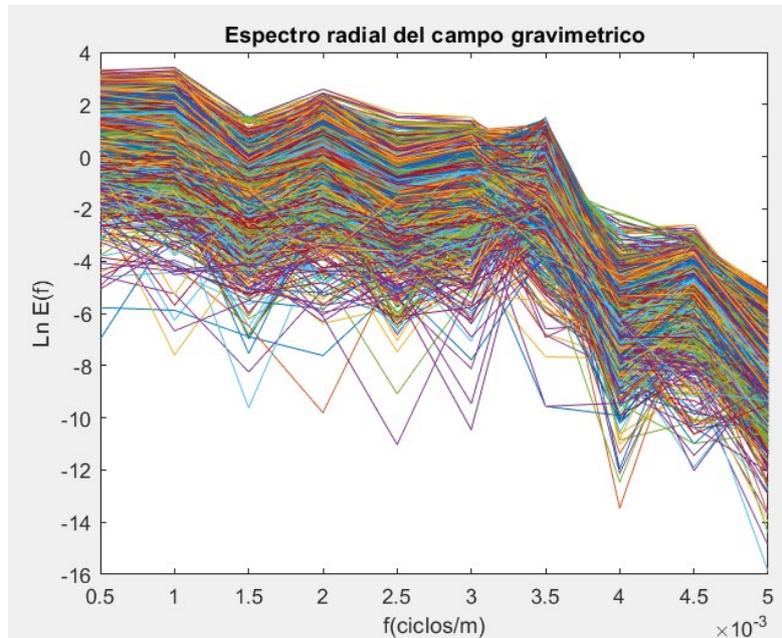


Figura 30. Espectros obtenidos a partir de ventanas de  $18000 \times 18000$  [m<sup>2</sup>], se observa un salto en los 0.0025 (cicos/m)

Se eligió el intervalo que va de los 0.0001 a los 0.0005 [ciclos/m] para invertir la anomalía y se consideró un criterio de tolerancia igual a 4.4 con lo cual se obtuvieron las siguientes estimaciones de profundidad Figura 31.

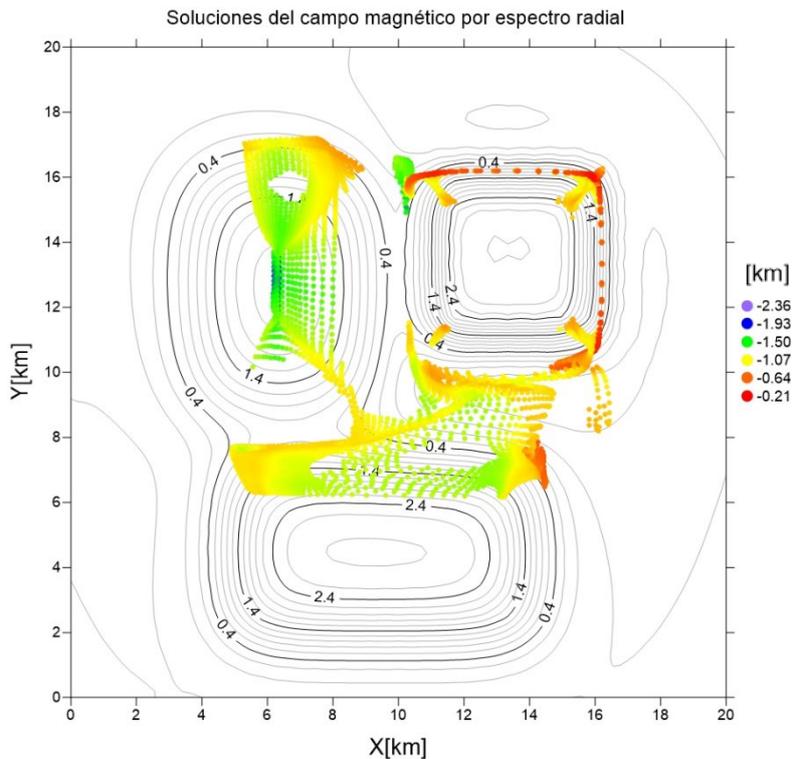


Figura 31. Localización de las soluciones encontradas a partir de una ventana de 18000x18000[m<sup>2</sup>] con una tolerancia de 4.4, las soluciones con mayor error corresponden a las soluciones en color rojo

En la figura 31 se presentan los valores estimados a partir de las soluciones del campo magnético, se encontró que las soluciones para este caso se encuentran entre 210[m] y 2360[m] de profundidad, las soluciones con mayor presencia fueron las de color verde-amarillo y correspondían a fuentes estimadas en una profundidad cercana a 1000-1500[m].

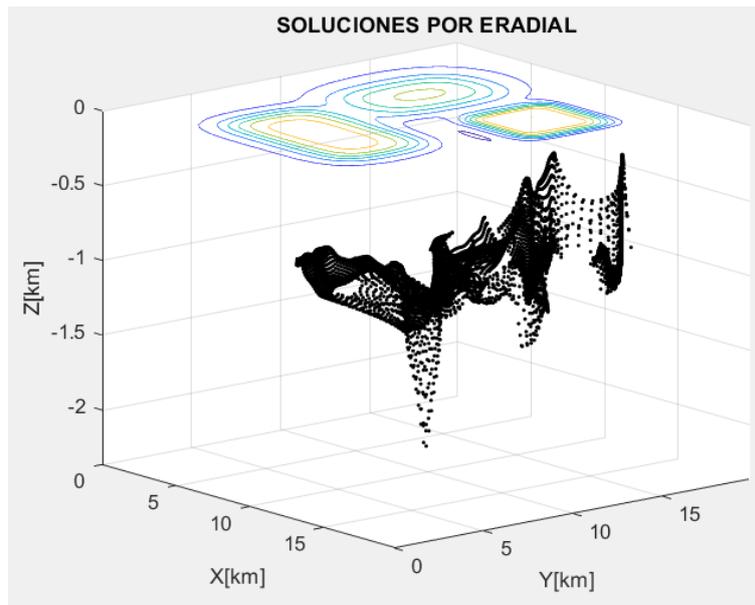


Figura 32. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad de cada solución del campo gravimétrico del modelo 3

# CAPÍTULO 5. IMPLEMENTACIÓN EN LAS ANOMALÍAS DE CAMPO POTENCIAL DE CHICXULUB

---

## 5.1 Introducción

El cráter Chicxulub es un elemento estructural importante, el cual se encuentra en la parte norte de la península de Yucatán.

A lo largo de los años, se han realizado diferentes estudios, a través de los cuales se ha logrado entender gran parte del origen, evolución, estructura y composición del cráter (Batista-Rodríguez *et al.*, 2013).

En este capítulo se pretende complementar y discutir la información sobre la estructura del cráter Chicxulub a partir de un análisis de los campos potenciales naturales en el área. El análisis consistió en una adquisición, un procesamiento y un modelado de datos geofísicos a través del método propuesto en este trabajo con el fin de localizar anomalías en los campos potenciales y estimar la profundidad de su fuente.

## 5.2 Área de estudio y adquisición de datos

El cráter Chicxulub es un cráter de impacto de ~200km de diámetro que se localiza en la plataforma carbonatada de Yucatán y, cuyo centro geométrico se encuentra en los alrededores del puerto de Chicxulub. El cráter es ampliamente conocido ya que se considera como uno de los cráteres multi-anillados terrestres mejor conservados. Se ha calculado que este se formó en el límite Cretácico-Paleógeno, hace 66 millones de años (Urrutia *et al.*, 2011) y que, el impacto ocasionó que las rocas impactadas del Mesozoico se fundieran. El cráter generado alcanzó una profundidad de 25 km, por lo que la mayor parte de la corteza se vio afectada. Debido a la energía liberada sobre la corteza durante el impacto, se ha inferido que ocurrió un rebote elástico de la corteza inferior y media, el cual alteró el límite corteza-manto y produjo un levantamiento en la parte central del cráter. Inmediatamente después de la formación del cráter, éste fue rellenado por escombros fragmentados y brechas suevíticas (Batista-Rodríguez *et al.*, 2013). Actualmente, el cráter se encuentra

cubierto por ~1[Km] de sedimentos carbonatados del Paleógeno y Neógeno, y en superficie, la estructura se observa como una depresión semi circular (Urrutia *et al.*, 2013).

Las rocas que conforman al cráter, así como aquellas que fueron afectadas por el impacto, se encuentran rodeadas por rocas diamagnéticas, por lo cual es posible observar altos contrastes en las propiedades físicas de los materiales. Estos contrastes se pueden observar como anomalías magnéticas que reflejan la estructura general del cráter (Ortiz-Alemán & Urrutia, 2010).

Los datos de anomalía magnética y gravimétrica de la zona fueron colectados por el equipo de adquisición de PEMEX sobre la península de Yucatán. El levantamiento aeromagnético se realizó con un espaciamiento de 6km entre líneas paralelas y perpendiculares, con una altura de vuelo igual a 450 m.

### 5.3 Procesamiento de los datos

Los datos con los que trabajamos han sido previamente corregidos para obtener la anomalía magnética y la anomalía gravimétrica de Bouguer, de tal manera que a partir de una interpolación de mínima curvatura se obtienen las siguientes mallas:

Para el mapa de anomalía gravimétrica obtenemos el siguiente mapa Figura 33:

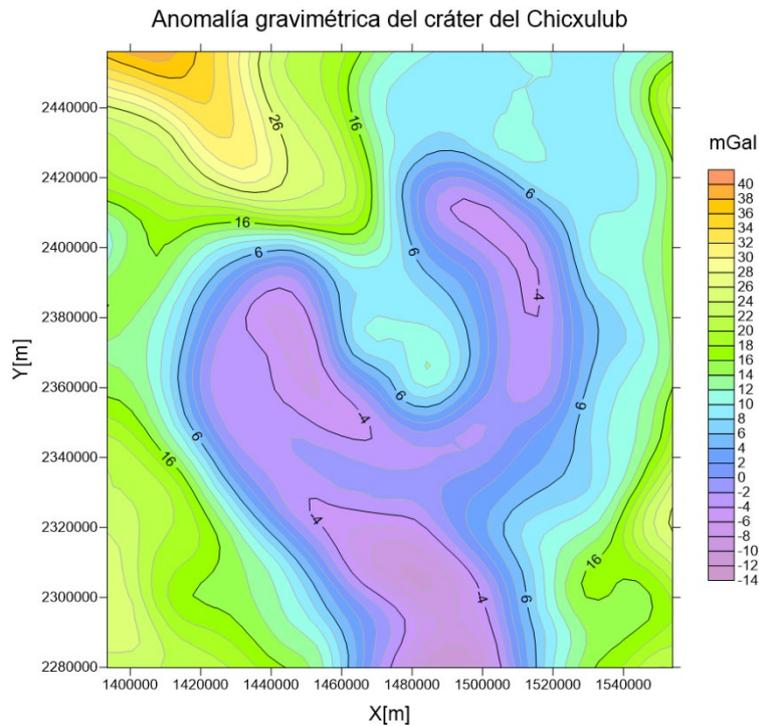


Figura 33. Anomalía de Bouguer perteneciente al cráter de Chicxulub, las curvas de nivel se encuentran cada dos miligales, la proyección utilizada es la UTM WGS84 zona 14N

Podemos observar en la anomalía de Bouguer un patrón concéntrico, marcado de forma clara en las amplitudes bajas. La zona central de la anomalía gravimétrica muestra anomalías magnéticas de mayor amplitud con respecto al anillo que lo rodea (Robolledo-Vieyra *et al.*, 2010). Gracias a las perforaciones que se han realizado en la zona se ha encontrado variaciones en la densidad dentro de litologías individuales  $2.2-2.9 \text{ gcm}^{-3}$  para sedimentos carbonatados y  $2.0-2.3 \text{ gcm}^{-3}$  para brechas de impacto (Urrutia, 1997).

Existen contrastes de densidad entre todas las litologías identificables y a pesar de la dificultad que representa la obtención de un modelo tridimensional Batista y colaboradores proponen en 2013 un modelo gravimétrico del cráter.

Para el caso de los datos aeromagnéticos obtenemos el siguiente resultado:

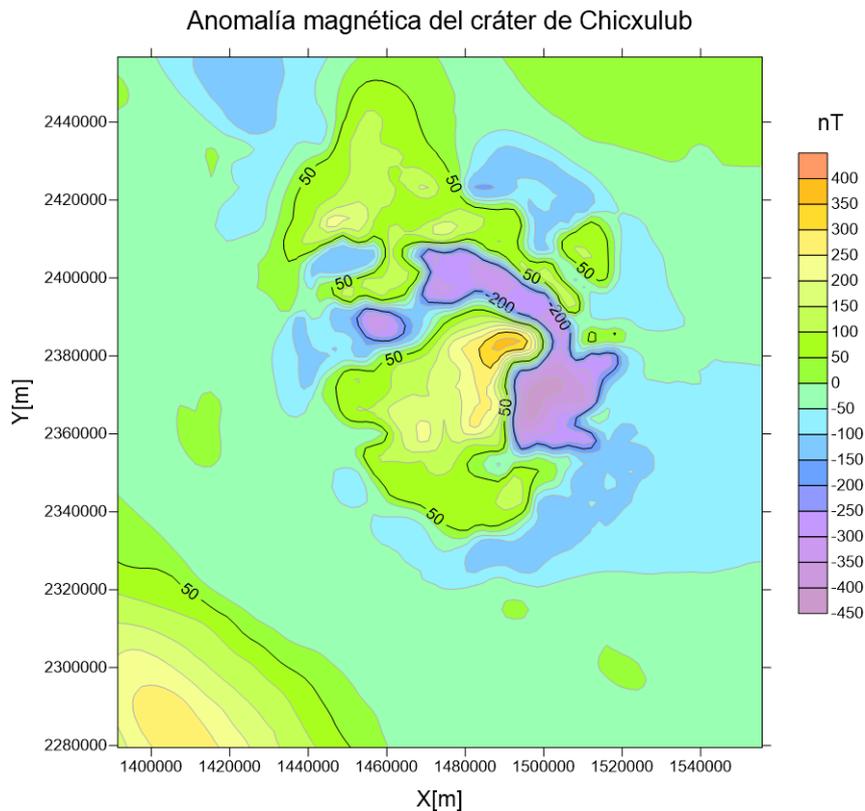


Figura 34. Anomalía magnética perteneciente al cráter de Chicxulub, las curvas de nivel se encuentran cada cincuenta nanoteslas, la proyección utilizada es la UTM WGS84 zona 14N

En la Figura 34 se muestran los datos aeromagnéticos que revelan una zona central de aproximadamente 40 [km] de radio con anomalías de alta amplitud. Las anomalías magnéticas han sido asociadas por algunos autores con las rocas fundidas, el levantamiento central y las brechas suevíticas, mismas que presentan un orden de magnitud tres o cuatro veces mayor que los carbonatos que las rodean (Ortiz-Alemán & Urrutia, 2010). La zona interna se extiende hasta los ~20 km y está dominada por anomalías de alta amplitud (>400nT) mismas que Pilkington (2000) propone que son provocadas por un solo cuerpo, la zona intermedia alcanza un radio promedio de ~45 km y muestra varios ordenes de amplitud, así como anomalías dipolares con algunas estructuras concéntricas. Esta zona intermedia se encuentra alargada en dirección noroeste-sureste. La zona externa está compuesta por anomalías de baja amplitud (<25nT) y se extiende hasta los ~80 km.

## 5.4 Análisis de las mallas a partir del espectro radial

Como se mostró en los capítulos anteriores el espectro radial en conjunto con la deconvolución de Euler puede ser usado para estimar la profundidad de la fuente de una anomalía magnética. En este subcapítulo se presentan los resultados para la estimación de las fuentes que producen las anomalías magnéticas y gravimétricas del cráter Chicxulub.

A continuación, se muestran los espectros obtenidos en la anomalía gravimétrica, se propuso una ventana de 40x40 nodos ( $24000 \times 24000 [m^2]$ ), obteniendo un número de onda fundamental igual a  $[4 \times 10^{-5} m^{-1}]$  y una frecuencia de Nyquist equivalente a  $[0.00008 m^{-1}]$ .

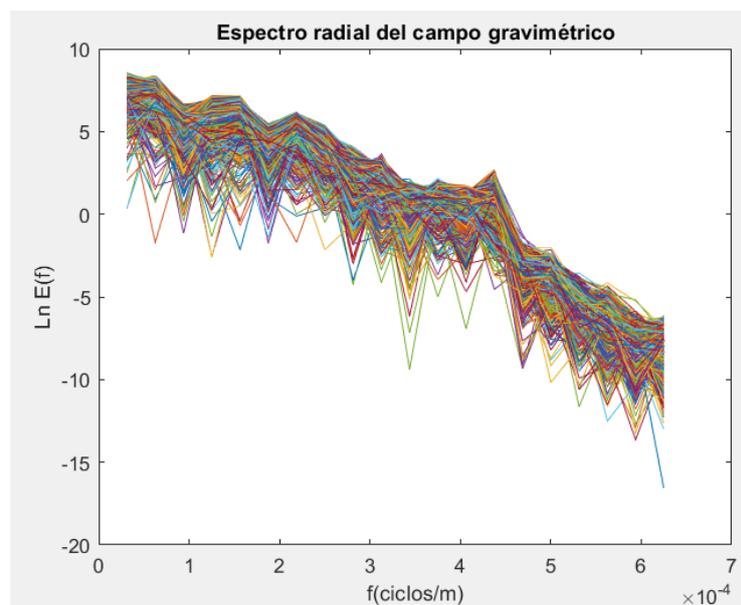


Figura 35. Espectros obtenidos a partir de ventanas de  $24000 \times 24000 [m^2]$  en la anomalía gravimétrica del cráter de Chicxulub

Las soluciones para el campo gravimétrico utilizando un criterio de tolerancia de 3.8 y la ventana anteriormente mencionada se observan a continuación:

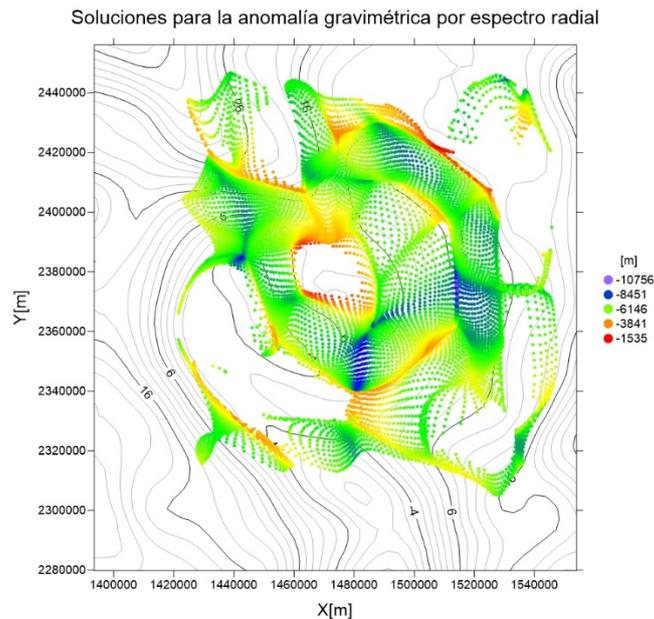
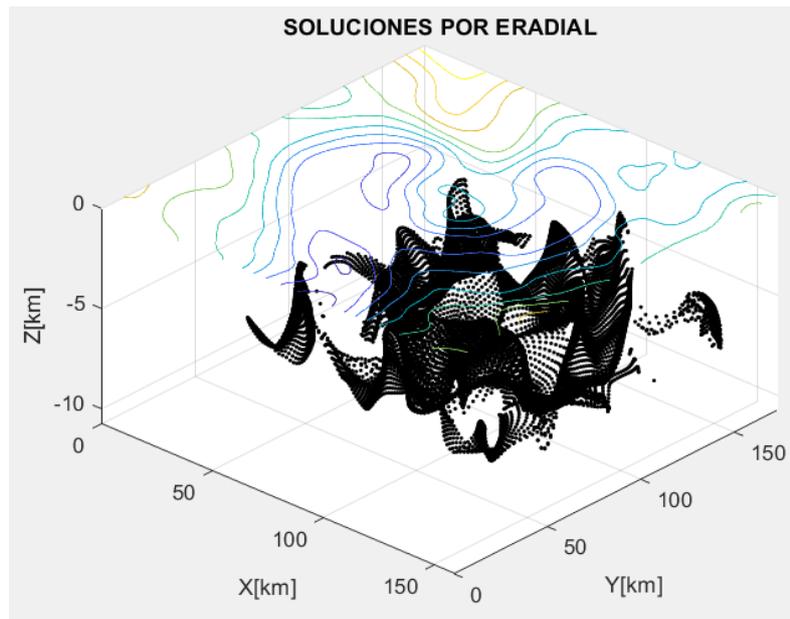


Figura 36. Localización de soluciones de la inversión del campo gravimétrico para el cráter Chicxulub, con una ventana de  $\sim 24000 \times \sim 24000 [m^2]$ , se utilizó un criterio de tolerancia de 3.8. La proyección utilizada en el mapa es la UTM WGS84 zona 14N

Se observa en la Figura 36 y Figura 37 que el mayor número de soluciones se encontró entre los 1600 y 7500 [m], las soluciones encontradas se posicionaron con una geometría que corresponde con aquella esperada en el cráter de Chicxulub, las soluciones más someras denotadas en color rojo se colocaron en el centro del anillo. La profundidad encontrada corresponde con las brechas que cubrieron el cráter después del impacto, Batista y colaboradores entre otros modelan en 2013 la respuesta gravimétrica del cráter y estiman que estas se ubican entre 1200 y 6200 metros. El intervalo de profundidad estimado correspondió de igual manera con la profundidad de las rocas del paleógeno (Batista *et al.*, 2013), las cuales se distribuyen a lo largo del cráter y se estima tienen una densidad de  $2.67 [g/cm^3]$ .



*Figura 37. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad encontrada en las soluciones de la anomalía gravimétrica del cráter de Chicxulub*

De la zona en cuestión se tiene información proveniente de diferentes perforaciones en las cuales se ha encontrado una gruesa capa casi horizontal de una secuencia de carbonatos y evaporitas misma que se ubica sobre un basamento de composición granítica.

La siguiente malla para analizar fue aquella correspondiente a la anomalía magnética observada en el cráter. Se decidió observar el área de interés con una ventana de 40x40 nodos ( $24000 \times 24000 [m^2]$ ), obteniendo un número de onda fundamental igual a  $[4 \times 10^{-5} m^{-1}]$  y una frecuencia de Nyquist equivalente a  $[0.00008 m^{-1}]$ . Los espectros evaluados para cada ventana se presentan a continuación:

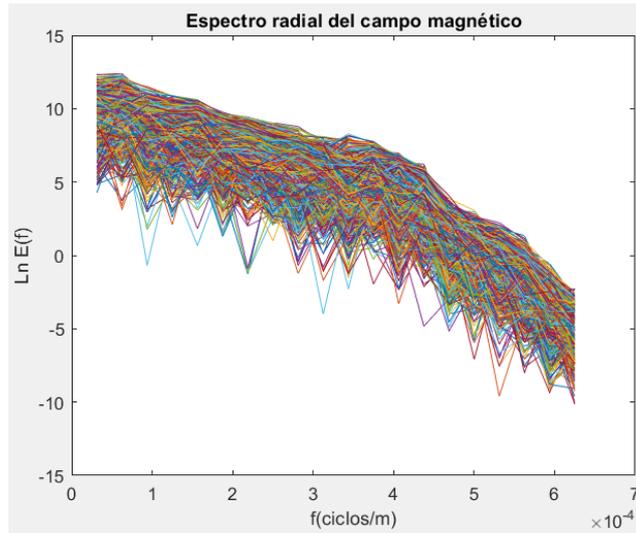


Figura 38. Espectros obtenidos a partir de ventanas de  $24000 \times 24000 [m^2]$  en la anomalía magnética del cráter de Chicxulub

Para su procesamiento se eligió de igual manera una ventana de  $24 \times 24 [km^2]$ , la tolerancia elegida fue de 4.4 con lo cual se obtuvieron las siguientes soluciones Figura 39:

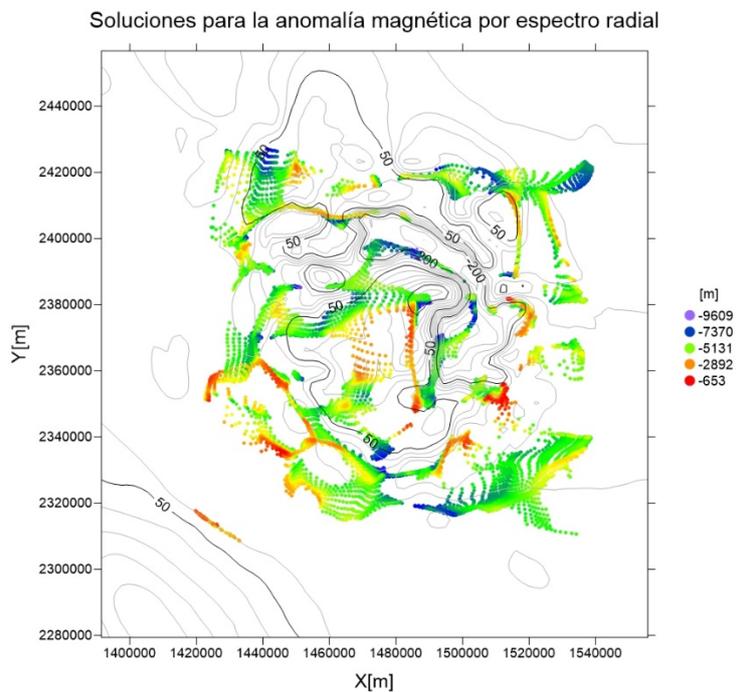
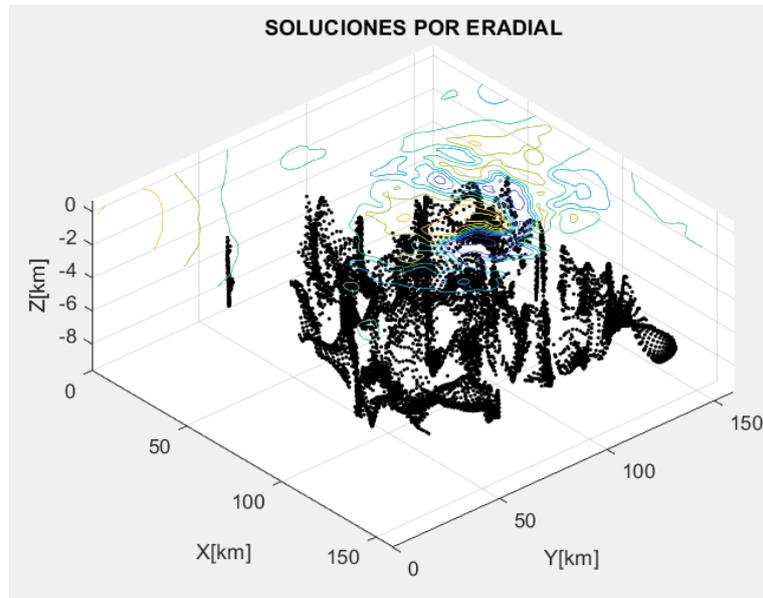


Figura 39. Localización de las soluciones de la inversión del campo magnético para el cráter Chicxulub, con una ventana de  $\sim 24000 \times \sim 24000 [m^2]$ , se utilizó un criterio de tolerancia de 4.4. La proyección utilizada en el mapa es la UTM WGS84 zona 14N

Se observa que el mayor número de soluciones se ubican en profundidad entre los 650 [m] y los 7000[m], la posición de las soluciones se observa sigue la geometría de la anomalía.

Otros autores ubican fuentes magnéticas someras en los primeros dos mil metros, por lo que es posible estemos observando en la Figura 39 y Figura 40 el efecto de las mismas.



*Figura 40. Diagrama en tres dimensiones que muestra la profundidad encontrada en las soluciones de la anomalía magnética del cráter de Chicxulub*

Se consideró que las soluciones calculadas corresponden con aquellas obtenidas por Pilkington (2000), ya que ambas sugieren que la profundidad de la fuente se encuentra en un intervalo que va de los 2400 y los 6400 [m] para el caso de fuentes profundas.

# CONCLUSIONES

---

En este trabajo se analizó la teoría del espectro radial y la deconvolución de Euler para estimar con una serie de ventanas la profundidad y ubicación de una fuente potencial. A partir de esta información se implementó un método con el cual se logró optimizar la estimación de la profundidad a partir de la inversión conjunta entre el espectro radial y la deconvolución de Euler, esto se demostró en los modelos sintéticos. Se implementó el algoritmo propuesto por Thompson en 1982 para el cálculo de la deconvolución de Euler en tres dimensiones, así como el algoritmo de Mishra de 1974 para el cálculo del espectro radial dentro de un código en Matlab, en el cual se propuso un criterio de aceptación para mejorar la estimación y ubicación de las fuentes magnéticas y gravimétricas. Se concluye que el criterio sirve para limitar el número de resultados encontrados sin embargo no influye en la estimación de profundidad.

Se generó la anomalía gravimétrica con un contraste de densidad  $\Delta\rho = 500[\text{kg}/\text{m}^3]$  y magnética con una magnetización  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3}[\text{A}/\text{m}]$ , para el modelo uno, prisma con dimensiones de  $4 \times 4 [\text{km}^2]$  de ancho y  $10 [\text{km}]$  de largo, enterrado a  $0.1[\text{km}]$  en el centro del plano, con ejes del prisma paralelos a los ejes de la ventana de observación.

Con base en la malla generada a partir de los datos gravimétricos del modelo uno es posible reconocer una anomalía gravimétrica simétrica con un máximo al centro de la ventana de observación con  $40 \text{ mGal}$ , la anomalía tiene una geometría circular concéntrica. Para este modelo se ubicaron las soluciones dentro de los límites del cuerpo y al centro de este, la profundidad estimada en estas soluciones se ubicó en los  $0.3[\text{km}]$  de profundidad en promedio.

La anomalía magnética mostró un decaimiento mayor en comparación con la anomalía gravimétrica, la geometría observada fue cuadrada concéntrica con un máximo de  $5.8 \text{ nT}$ . La deconvolución de Euler ubicó las soluciones únicamente en los límites del cuerpo, la profundidad estimada en estas soluciones se ubicó en los  $0.4[\text{km}]$  aproximadamente.

Se obtuvo la anomalía gravimétrica con un contraste de densidad  $\Delta\rho = 500[\text{kg}/\text{m}^3]$  y magnética con una magnetización  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3}[\text{A}/\text{m}]$ , para dos prismas con dimensiones de  $2 \times 2 [\text{km}^2]$  de ancho y  $10 [\text{km}]$  de largo, enterrados a  $0.1[\text{km}]$  y  $0.5[\text{km}]$ , ordenados en diagonal al centro del plano, con ejes del prisma paralelos a los ejes de la ventana de observación.

Se observó una anomalía gravimétrica con un máximo de  $24 \text{ mGal}$ , la anomalía presentó una geometría en forma de cacahuete, se observó que las curvas equipotenciales que correspondían a la fuente somera se presentaron más concéntricas en comparación a la fuente de mayor profundidad. Para este caso las soluciones de la deconvolución de Euler se concentraron principalmente sobre el prisma de menor profundidad, sin embargo, se observaron también soluciones sobre los límites del segundo cuerpo. La profundidad encontrada con el espectro radial se ubicó entre los  $500$  y  $600 [\text{m}]$  de profundidad.

La anomalía magnética del modelo dos reveló con mayor claridad dos fuentes aisladas, los bordes de la anomalía se dilucidaron con mayor claridad y definición, la geometría observada en planta se observó más cuadrada en comparación con la anomalía gravimétrica, se reveló un máximo de  $5.4 \text{ nT}$ . La deconvolución de Euler ubicó las soluciones en el centro y los bordes de la fuente ubicada a  $0.5[\text{km}]$ , mientras que para la fuente más somera las mismas se ubicaron las esquinas del cuerpo, la profundidad estimada en estas soluciones se ubicó en los  $0.5[\text{km}]$  aproximadamente.

Se obtuvo la anomalía gravimétrica para tres prismas con un contraste de densidad  $\Delta\rho = 500[\text{kg}/\text{m}^3]$  y un contraste de magnetización  $\Delta M = 9.7 \times 10^{-3}[\text{A}/\text{m}]$ , el primer prisma de dimensión horizontal  $5 \times 5[\text{km}^2]$  se ubicó del lado superior derecho con  $1.5[\text{km}]$  de extensión vertical, el segundo prisma contó con una extensión horizontal de  $9 \times 5 [\text{km}^2]$  y se localizó en la parte inferior de la ventana con  $2[\text{km}]$  de extensión vertical, el tercer prisma de  $5 \times 7[\text{km}^2]$  de extensión horizontal se colocó en la parte superior izquierda con  $2[\text{km}]$  de extensión en el eje z. La profundidad de los prismas fue de  $0.5$ ,  $1$  y  $1.5[\text{km}]$  respectivamente ordenados al centro del plano, con ejes del prisma paralelos a los ejes de la ventana de observación.

Se observaron tres anomalías gravimétricas, el prisma dos presentó una anomalía con un máximo de 17 mGal, mientras que los prismas uno y tres generaron anomalías con valores máximos de 12 mGal. Para este tercer modelo se encontró que las soluciones a partir de la deconvolución de Euler se localizaron en los cuerpos 1 y 3 principalmente, no obstante, se observaron soluciones en la parte norte del prisma 2. La profundidad encontrada en los límites del prisma 1 se encontraron en 0.6 [km] mientras que para el prisma dos y tres las soluciones se ubicaron en 1.25 [km] aproximadamente.

La anomalía magnética del modelo tres mostró con mayor definición la forma rectangular de las tres fuentes, sobre todo para el prisma 1 y 2. La anomalía de la fuente 1 mostró el máximo con 3nT, le siguió en intensidad la anomalía 2 con 2.8nT y por último la anomalía del prisma 3 con 2nT. Utilizando la deconvolución de Euler se encontraron soluciones sobre todo en los bordes de las tres anomalías y en el caso particular de la anomalía 3 en el centro de esta. Las profundidades estimadas en el espectro radial arrojaron valores de 0.3 [km] para la fuente más somera y de 1-1.5[km] aproximadamente para los dos cuerpos restantes.

Esta inversión se concluye puede llevarse a cabo en fuentes que muestren respuesta magnética o gravimétrica.

Para la delimitación de la fuente se concluye que el método del espectro radial por si solo trabaja bien para una fuente aislada, sin embargo, para casos de más de una fuente es necesario combinarlo con la deconvolución de Euler para una ubicación espacial con mejor resolución.

El análisis de la anomalía gravimétrica del cráter mostró un patrón concéntrico marcado en amplitudes bajas, en la zona central se encontraron amplitudes de mayor orden que corresponden con la geometría circular multianillada del cráter. Las soluciones encontradas en el cráter a partir de la deconvolución de Euler en los datos gravimétricos mostraron un patrón concéntrico, se observó un mayor número de soluciones en la parte noreste de la ventana de observación. La profundidad estimada a partir del espectro radial reveló que la profundidad de las fuentes se ubicaba entre los 1200 y 6200 metros.

La anomalía magnética observada en Chicxulub reveló tres anillos, con una zona en la parte central de aproximadamente 40 [km] de radio compuesta por anomalías de alta amplitud. La zona intermedia se observó elongada en dirección noreste-sureste con diferentes ordenes de amplitud, la tercera zona se encontró en la parte externa y se compuso por anomalías de baja amplitud extendiéndose hasta los 80[km]. La ubicación de las fuentes obtenidas a través de la deconvolución de Euler reveló patrones concéntricos mismos que se ubicaron rodeando el cráter, se observó que la distribución de las mismas se dio de forma equivalente ubicando fuentes a menor profundidad en la parte sur de la ventana de observación. Con el uso del espectro radial se obtuvieron profundidades que oscilaron entre los 650 y los 7000[m].

De forma general se demuestra la utilidad de ambos métodos y particularmente de su uso en conjunto.

## COMENTARIOS Y RECOMENDACIONES

---

El trabajo puede ser complementado analizando el efecto que se produce al incrementar el espesor de los anillos para el cálculo del espectro radial.

Se puede realizar una mejora en la implementación de la integral ya que los valores que quedan en los bordes del anillo no son tomados en cuenta por la lógica que sigue el algoritmo.

El trabajo puede ser complementado eligiendo los puntos en el espectro radial que mejor se ajusten al decaimiento de la curva ya que el programa funciona por el momento eligiendo un intervalo de número de onda con el cual queremos trabajar.

El incrementar el número de anillos es decir disminuir el espesor de estos aumenta el número de mediciones, con lo cual se incrementa la resolución en la gráfica del decaimiento, sin embargo, se obtiene mayor ruido.

En este trabajo el efecto de la geometría de la fuente no fue considerado, sin embargo, puede ser implementado para observar la mejora en la estimación.

Se sugiere que el tamaño de ventana para la observación de la profundidad debe corresponder a al menos cuatro veces la profundidad esperada.

## ANEXOS

### Anexo 1.1. Definición de función periódica y aperiódica.

Conocemos a la función que no presenta periodicidad en el sentido de tiempo finito como función aperiódica, de tal manera que podemos imaginar a la función con un comportamiento periódico únicamente en el tiempo infinito ( $T = \infty$ ).

Una función  $f$  que pertenece al espacio de funciones continuas,  $C$ , cumple con las siguientes características:

1. La función presenta un valor finito definido  $f(c)$  en  $c$ .
2. Cuando  $t$  se aproxima a  $c$ ,  $f(t)$  se aproxima al valor  $f(c)$  en forma de límite, es decir  $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c)$ .

Si una función es continua en todos sus puntos para un intervalo supóngase  $a \leq t \leq b$ , entonces se puede decir que la función es continua en ese intervalo.

### Anexo 1.2. Condiciones de Dirichlet

Dirichlet en 1829 formula las restricciones que le dan validez a la Transformada de Fourier. Estas restricciones las conocemos entonces como condiciones de Dirichlet. Las restricciones estipulan que para un intervalo  $[-\pi, \pi]$  la función  $f(x)$  debe ser (1) única definida, (2) limitada, (3) tener por lo menos un número finito de máximos y mínimos, (4) contener únicamente un número finito de discontinuidades, es decir continua por partes y (5) ser periódica.

De la forma compleja de las series de Fourier se establecen las siguientes ecuaciones:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt \dots (67)$$

$$f(t) = \int C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \dots (68)$$

Con  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

### Anexo 1.3. Potencia media de una función real y truncamiento de la señal

Si  $\bar{E}$  es la potencia media de una función real,  $f(t)$  cuyo periodo es  $T$ , entonces (Thompson, 1982).

$$\bar{E} = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (f(t))^2 dt. \dots(69)$$

Conocemos a  $((f(t))^2)$  como la energía instantánea, misma que al ser integrada en la ecuación  $\bar{E} = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (f(t))^2 dt$  otorga el promedio de la energía de la función. El espectro de potencia y su respectiva energía total se relacionan de la siguiente forma:

$$E_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \dots(70)$$

El ventaneo de los datos puede ser concebido como el truncamiento de una función infinita,  $f(t)$ . La función,  $w(t)$  es una ventana en tiempo y puede ser usada para observar los datos presentes en un intervalo de interés,  $w(t)$  puede presentar distintas formas, un ejemplo de esto sería la función cajón o box-car donde  $w(t) = 1$  para los valores dentro del intervalo  $-T < t < T$  y cero para valores fuera del mismo. Usando el teorema de convolución, en el dominio de Fourier la función truncada se calcula como:

$$F_{tr}(w) = \frac{1}{2\pi} F(w) * W(w). \dots(71)$$

Las ventanas más conocidas para trincar la señal son la función box-car (rectangular), Barlett (triangular), Blackman, Daniell, Hamming, Hanning (coseno levantado), Parzan y Welch. El truncamiento de la señal introduce un efecto de suavizado cuya magnitud dependerá de la longitud de la ventana. Entre más corta sea la longitud de la ventana, mayor será el grado de suavizado y viceversa. La transformada de Fourier de datos truncados se conoce normalmente como espectro promedio o ponderado (Blackman y Tuckey, 1959). La ventana que produce menor distorsión debe tener las siguientes propiedades:

- a) El intervalo de tiempo debe ser el más grande posible. Esto implica que la transformada de Fourier de la ventana espectral tiene su energía concentrada en el lóbulo principal.
- b) La forma de la ventana debe ser lo más suavizada posible, libre de esquinas con ángulos agudos.

Anexo 1.4. Transformada de Fourier en dos dimensiones

La transformada de Fourier en dos dimensiones de  $\varphi(u, v)$  y su transformada inversa se describen a continuación:

$$\varphi(u, v) = \int \int \varphi(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy, \dots (72)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \varphi(u, v) \exp[i(ux + vy)] du dv. \dots (73)$$

Conocemos en la ecuación a  $u$  y  $v$  como ejes en el plano de Fourier. La ecuación 73 es conocida como la integral de Fourier representada por  $\varphi(x, y)$ . La ecuación 72 existe únicamente si y sólo si:

$$\int \int |\varphi(x, y)| dx dy < \infty. \dots (74)$$

Los campos potenciales que son causados por fuentes estocásticas son de dos tipos: una interfaz aleatoria separando dos medios homogéneos y una capa horizontal de espesor finito con la densidad o magnetización variando de forma aleatoria. La representación espectral o representación de Cramer de un campo aleatorio y homogéneo se encuentra establecida por (Yaglom, 1962).

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int dF(u, v) \exp[i(ux + vy)]. \dots (75)$$

Donde

$$dF(u, v) = F(u + du, v + dv) - F(u, v), (du, dv) \rightarrow 0. \dots (76)$$

Anexo 1.5. Descripción del ventaneo espectral

Podemos observar el ventaneo espectral como el producto de un campo aleatorio homogéneo y una ventana. El modelo quedaría entonces de la siguiente forma:

$$f_0(m, n) = f(m, n) \cdot w_0(m, n). \dots (77)$$

Donde  $f_0(m, n)$  es el campo observado sobre un área finita,  $w_0(m, n)$  es una función de ventana discreta y  $f(m, n)$  es la función que representa el potencial del campo.

$$f(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint dF(u, v) \exp[i(um + vn)], \dots (78)$$

$$w_0(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint W_0(u, v) \exp[i(um + vn)] du dv. \dots (79)$$

Sustituyendo tendríamos:

$$f_0(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint F_0(u, v) \exp[i(um + vn)] du dv. \dots (80)$$

donde

$$F_0(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \iint dF(u', v') W_0(u - u', v - v'). \dots (81)$$

Los coeficientes de la transformada discreta de  $f_0(m, n)$ ,  $0 \leq m \leq M - 1$  y  $0 \leq n \leq N - 1$  (el área de investigación es un rectángulo de dimensiones  $M \times N$ ) tendrían entonces los coeficientes  $0 \leq k \leq M - 1$  y  $0 \leq l \leq N - 1$  de tal manera que:

$$F_0(k, l) = \frac{1}{4\pi^2} \iint dF(u', v') W_0\left(\frac{2\pi k}{M} - u', \frac{2\pi l}{N} - v'\right). \dots (82)$$

Y por lo cual calcularíamos el espectro de potencial de un campo finito como (Kay, 1989).

$$S_{f_0}(k, l) = E \left\{ \frac{1}{MN} |F_0(k, l)|^2 \right\}, \dots (83)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint S_f(u', v') \left| W_0\left(\frac{2\pi k}{M} - u', \frac{2\pi l}{N} - v'\right) \right|^2 du' dv'. \dots (84)$$

El factor  $|W_0(u, v)|^2$  en la expresión del espectro es el espectro debido a la ventana. La variación angular del espectro del campo potencial puede ser distorsionada a menos que la ventana usada tenga las siguientes propiedades:

a) El espectro debido a la ventana debe ser parecido a una función delta. Una función en dominio del tiempo  $\delta(t)$  donde  $\delta(t) \geq 0$  para algún valor finito de  $t$ ,  $\delta(t - a) = 0$  para  $t \neq a$  y  $\int \delta(t) dt = 1$ .

b) La fuga de energía es mínima lo cual es posible controlando la altura de los lóbulos laterales de la ventana espectral.

c) El espectro de la ventana debe ser isotrópico o cercano a esta.

### Anexo 1.6. Identidades de Green del campo magnético

Usando las identidades de Green se puede expresar la componente total como la suma de dos integrales, una integral de línea y una integral doble (Blakely, 1955):

$$F(x, y, z) = - \int_v G \nabla^2 F(x', y', 0) dv + \oint_s \left( G \frac{\partial F(x', y', 0)}{\partial z} - F(x', y', 0) \frac{\partial G}{\partial z} \right) ds, \dots (85)$$

$$F(x, y, z) = \oint_s \left( G \frac{\partial F(x', y', 0)}{\partial z} - F(x', y', 0) \frac{\partial G}{\partial z} \right) ds. \dots (86)$$

La expresión que describe entonces a F para  $z < 0$ , con la función de Green en un semiespacio es:

$$G = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 - (z-z')^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} = 0. \dots (87)$$

Desarrollando las derivadas y valuando para  $z'=0$ , se obtiene por resultado la componente total del campo magnético anómalo en cualquier punto donde  $z < 0$ :

$$F(x, y, z) = - \frac{z}{2\pi} \iint \frac{F(x', y', 0) dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}. \dots (88)$$

Se describe de esta forma el campo magnético de un volumen de material magnético.

El valor de inducción magnética en un punto P se expresa como:

$$B = -C_m \nabla_p \int_R M \cdot \nabla_Q \frac{1}{r} dv. \dots (89)$$

Siendo M la magnetización y r la distancia del punto de observación P a un elemento dv del cuerpo,  $C_m$  es una constante que depende del sistema de unidades, la anomalía del campo total se aproxima con:

$$\nabla T = -C_m \hat{F} \cdot \nabla_p \int_R M \cdot \nabla_Q \frac{1}{r} dv. \dots (90)$$

Reconocemos a  $\hat{F}$  como un vector de tipo unitario en dirección del campo regional. Estas ecuaciones pueden evaluarse de forma directa sobre cuerpos simples. Para generar un volumen de material magnético se deben utilizar N

celdas magnéticas que formen al cuerpo y después por el principio de superposición podemos sumarlas de la siguiente manera:

$$B_j = \sum_{i=1}^N M_i b_{ij}. \dots(91)$$

Se tiene entonces que  $B$  es el campo en el punto de observación  $j$ ,  $M_i$  la magnitud de magnetización en la celda  $i$  y  $b_{ij}$  el campo magnético en el punto  $j$  de la celda  $i$  el cual se describe como:

$$b_{ij} = -C_m \nabla_p \int_R \widehat{M} \cdot \nabla_Q \frac{1}{r} dv. \dots(92)$$

### Anexo 1.7. Componente vertical de atracción del campo gravimétrico.

Podemos definir a la componente vertical de la atracción del campo gravimétrico en coordenadas cartesianas como la derivada direccional del potencial gravitacional  $\phi$  (Blakely, 1995):

$$g_z(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \dots(93)$$

$$g_z(x, y, z) = -G \iiint_{x'y'z'} \rho(x', y', z') \frac{(z-z')}{r^3} dx' dy' dz'. \dots (94)$$

Donde  $r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

Para resolver el problema directo necesitamos calcular de forma repetida  $g_z(x, y, z)$ . Dividiendo el escenario complejo en partes iguales formadas por prismas rectangulares que funcionan como fuentes individuales de geometría simple, podemos sumar de forma lineal las contribuciones de cada una asignando una densidad constante a cada celda.

$$g_{zm} = \sum_{n=1}^N \rho_n \psi_{mn}. \dots (95)$$

Donde  $g_{zm}$  corresponde a la atracción vertical en el punto de observación,  $\rho_n$  la densidad del elemento  $n$  y  $\psi_{mn}$  la atracción gravitacional del punto  $m$  de la celda  $n$ .

Para cuerpos tridimensionales el volumen se genera a partir del conjunto de celdas de densidad uniforme (Blakely, 1995). La atracción en un punto se calcula entonces con la suma de los efectos que provoca cada prisma. Definimos a la componente vertical de la atracción gravitacional debida a un prisma rectangular con densidad uniforme de la siguiente manera:

$$g_z = \gamma \rho \iiint \frac{z'}{[(x'^2 + y'^2 + z'^2)]^{3/2}} dx' dy' dz' \dots (96)$$

Anexo 1.8. Factores S, C y no considerados para configuraciones de energía simples.

Los factores S y C para un número simple de modelos 3-D y 2-D se muestran en las siguientes tablas:

$r = \text{No. de onda radial} = 2\pi(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}$
$f_x, f_y = \text{Frecuencias en dirección } x, y$
$u = r \sin \theta = 2\pi f_x$
$v = r \cos \theta = 2\pi f_y$
$\theta = \tan^{-1}(u/v)$
$a = \text{longitud media de la línea, radio del cilindro, o extensión media horizontal del techo del dique.}$
$a, b = \text{extensión media del prisma o lamina en las direcciones } x, y.$
$\psi = \text{Angulo formado por la dirección de la línea y el eje } x.$
$\varphi = \text{Angulo de inclinación del dique.}$
$t = \text{Profundidad vertical en la dirección de } z.$
$J_1 = \text{Función de Bessel de primer orden.}$

Tabla 1. Muestra los índices involucrados en la Tabla 2 (Modificado de H. S. Sadek).

<i>Modelo</i>	<i>Factor S(a, b, ψ, r, θ)</i>	<i>Factor C(t, φ, r, θ)</i>	<i>Referencia</i>
<i>Modelo 3D</i>			
Mono-polo puntual	1	1	Spector (1968)
Dipolo puntual	1	$r^2$	Spector
Linea horizontal finita compuesta por mono- polos			

Línea finita	$\frac{\sin^2[a(u\cos\psi+v\sin\psi)]}{a^2(u\cos\psi+v\sin\psi)^2}$	1	Spector (1968)
Línea horizontal finita compuesta por	$\frac{\sin^2[a(u\cos\psi+v\sin\psi)]}{a^2(u\cos\psi+v\sin\psi)^2}$	$r^2$	Spector (1968)
Prisma rectangular infinito en forma vertical	$\frac{\text{sen}^2(au)}{(au)^2} \frac{\text{sen}^2(bv)}{(bv)^2}$	1	Spector (1968)
Prisma rectangular finito en forma vertical	$\frac{\text{sen}^2(au)}{(au)^2} \frac{\text{sen}^2(bv)}{(bv)^2}$	$(1 - e^{-tr})^2$	Spector (1968)
Lamina rectangular en posición horizontal	$\frac{\text{sen}^2(au)}{(au)^2} \frac{\text{sen}^2(au)}{(au)^2}$	$(tr)^2$	Pedersen (1978b)
Cilindro circular infinito en posición	$\frac{J_{12}(ar)}{(ar)^2}$	1	Pedersen (1978b)
Cilindro circular finito en posición vertical	$\frac{J_{12}(ar)}{(ar)^2}$	$(1 - e^{-tr})^2$	Pedersen (1978b)
<b>Modelo 2D</b>			
Línea horizontal compuesta mono-polos	1	1	Cassano (1975)
Línea horizontal compuesta mono-polos	1	$u^2$	Cassano (1975)
Dique vertical infinito	$\frac{\text{sen}^2(au)}{(au)^2}$	1	Pedersen (1978b)
Dique vertical finito	$\frac{\text{sen}^2(au)}{(au)^2}$	$(1 - e^{-tu})^2$	Pedersen (1978b)
Dique inclinado finito	$\frac{\text{sen}^2(au)}{(au)^2}$	$\text{sen}^2[1 + e^{-2tu} - 2e^{-tu}\cos(\cot\phi tu)]$	Pedersen (1978b)

Tabla 2. Muestra los factores de la curva de decaimiento del espectro de amplitud (Modificado de H. S. Sadek)

Las expresiones anteriores se calculan suponiendo un cuerpo prismático con lados paralelos a los ejes de referencia, para los cuerpos en 2D se asumen sus ejes normales al rumbo y en dirección de x.

En el caso de dos modelos de profundidad limitada como lo son el dipolo y la lámina horizontal, se tiene en cada caso un efecto  $S$  nulo y un resultado  $C$  máximo cuando el número de onda  $r = 1/h$ .

En prismas, cilindros o diques finitos de extensión vertical  $t$ , se tiene un efecto máximo de  $C$  en  $r = 1/t \cdot \ln((h + t)/h)$ , mismo que ocasionará un efecto de  $S$  casi nulo, imperceptible o que ha sido compensado.

Para el caso de cuerpos finitos observamos un comportamiento similar al que se presenta en una lámina cuando  $t/h \leq 0.25$ , en el caso de cuerpos infinitos ocurrirá lo mismo para  $t/h \geq 1.0$ .

Si los valores de  $t/h$  son intermedios la energía decae de forma lineal en altas frecuencias únicamente.

El cálculo del factor  $S$  depende totalmente del modelo y es de importancia en los casos donde el promedio de la dimensión horizontal de las fuentes sea igual o mayor al promedio de profundidad. Para cualquier dimensión horizontal de fuente, el valor del factor  $S$  incrementa junto con la frecuencia y el efecto ocasionado da como resultado una sobre estimación de la profundidad, por lo cual el efecto de  $S$  debe ser considerado.

En ciertos casos el efecto de  $S$  es compensado por el efecto que produce la dispersión de las profundidades de fuente, sin embargo, en muchas ocasiones no existe tal compensación y debe considerarse a la profundidad obtenida en el espectro como profundidad máxima.

Para evaluar el efecto de la anchura horizontal se asume que la fuente es debida a cilindros verticales de radio  $a$ , con una distribución uniforme (Pedersen, 1978b) de manera que

$$0 \leq a \leq 2\bar{a}. \dots(97)$$

Donde  $\bar{a}$  = radio promedio. Entonces de la tabla 1, el factor  $S$  correspondiente es:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\bar{a}} \int_0^{2\bar{a}} \frac{J_1^2(ar)}{(ar)^2} da, \dots(98)$$

$$= \frac{8}{3\pi\bar{a}r}, \quad \bar{a}r > \pi. \dots(99)$$

La ecuación 85 representa el rango asintótico obtenido al evaluar la integral.

La tasa de decaimiento de energía debido a  $S$  tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial \ln(S)}{\partial r} = -\frac{1}{r}. \dots(100)$$

Comparado con el decaimiento debido al factor  $H$ .

$$\frac{\partial \ln(H)}{\partial r} = -2\bar{h}. \dots (101)$$

Para una distribución más restrictiva de  $\acute{a}$

$$\acute{a}(1 - \beta) \leq a \leq \acute{a}(1 + \beta), \beta < 1. \dots(102)$$

La tasa de decaimiento debida al factor  $S$  para un modelo cilíndrico resulta en

$$\frac{\partial \ln(S)}{\partial r} = -\frac{3}{r}, \bar{a}r > \pi. \dots(103)$$

Se observa que el efecto en el caso restrictivo  $\beta < 1$  es tres veces mayor que el previsto en  $\beta = 1$ .

Para el modelo de un dique con extensión horizontal promedio  $2\bar{a}$  es decir  $\beta = 1$ , el resultado es

$$\frac{\partial \ln(S)}{\partial r} = -\frac{2}{r}, \bar{a}r > \pi. \dots(104)$$

Finalmente, para prismas verticales, de ancho  $a$  y  $b$  uniformemente distribuidos

$$\acute{a}(1 - \beta) \leq a \leq \acute{a}(1 + \beta), \dots(105)$$

$$\acute{a}\alpha(1 - \beta) \leq b \leq \acute{a}\alpha(1 + \beta), 0 \leq \alpha \leq 10 \leq \beta \leq 1. \dots(106)$$

(Nótese que el parámetro  $\alpha$  trabaja como un factor de elongación). El decaimiento para  $\beta = 1$  se encuentra dado por

$$\frac{\partial \ln(S)}{\partial r} = -\frac{2}{r}. \dots(107)$$

Esto es similar para el dique con una función de distribución más restrictiva ecuación 92,  $\beta < 1$ , y el doble que para el cilindro ecuación 88.

Para  $\beta < 1, \alpha < 1$ , la tasa con la que decae  $S$  es

$$\frac{\partial \ln(S)}{\partial r} = -\frac{3}{r}. \dots(108)$$

Existe una fórmula propuesta por Spector (1968) para el caso de un ensamble de prismas verticales en donde se asume a  $\alpha = \beta = 1$ , la fórmula permite una evaluación numérica simple del valor de  $S$  en frecuencias bajas. La ecuación supone a los parámetros  $a = b$ , y se expresa de la siguiente forma:

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \left\{ \frac{S_i(2\bar{a}r \text{Sen}\theta)}{2\bar{a}r \text{Sen}\theta} \cdot \frac{S_i(2\bar{a}r \text{Cos}\theta)}{2\bar{a}r \text{Cos}\theta} \right\}^2 d\theta. \dots(109)$$

Donde  $S_i$  es la integral del seno definida como:

$$S_i(x) = \int_0^x \frac{\text{Sen}(P)}{P} dP. \dots(110)$$

Misma que podemos evaluar numéricamente por la serie infinita

$$S_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}. \dots(111)$$

Se puede obtener el promedio de extensión horizontal  $2\bar{a}$  en un perfil a partir de la distancia que existe entre puntos de inflexión, para el mapa de anomalía se deben promediar las distancias entre puntos de inflexión siguiendo perfiles ortogonales que nos ayuden a reducir el sesgo. De forma alternativa podemos obtener el promedio con la segunda derivada vertical (Green, 1972).

Cuando el proceso se realiza sobre un perfil, se obtiene el cálculo de la integral numérica una sola vez. Este procedimiento asume fuentes bidimensionales con ejes de referencia paralelos a la dirección del perfil, con un número de onda en dirección del rumbo igual a cero (digamos,  $u = r \text{sen}\theta \equiv 0$ ), por ley de L'Hopital.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}(2\bar{a}u)}{2\bar{a}u} \right] = 1. \dots(112)$$

De forma alternativa, si las fuentes son 3-D en lugar de 2-D, es necesario asumir que la integral de la ecuación 98 es independiente a  $\theta$ , por lo que la evaluación en  $\theta = 0$  satisface.

Se nota que para valores grandes de número de onda y distribución uniforme  $0 \leq a \leq 2\bar{a}$ , el decaimiento de la energía para el dique y el cilindro (prismas 2-D) es igual, siempre y cuando el rumbo del dique sea normal al del perfil.

La opción de modelos y de la función de distribución para computar la corrección por extensión horizontal es de cierta manera arbitraria.

Cuando no se realiza ninguna corrección las estimaciones de profundidad pueden contener un error máximo de 50 o 60 por ciento (H. S. Sadek, 1984).

Si consideramos modelos de fuente limitados en profundidad (dipolo puntual, línea de dipolos, lamina rectangular horizontal) es posible observar un máximo espectral en  $r = 1/h$ , el decaimiento lineal puede ser restituido en este caso con la resta del término  $\ln r^2$  del espectro. De manera similar, los cilindros, prismas y diques finitos producen un máximo en el número de onda cuyo valor dependerá de la profundidad y la extensión vertical. Al examinar el cálculo del factor  $C$  en un ensamble de cilindros verticales, prismas, diques (todos con un mismo factor  $C$  y con profundidad distribuida uniformemente (Pedersen, 1978b) como:

$$\bar{t}(1 - \delta) \leq t \leq \bar{t}(1 + \delta) , \delta < 1. \dots(113)$$

Tendremos que

$$\langle C \rangle = \frac{1}{2\delta\bar{t}} \int_{\bar{t}(1-\delta)}^{\bar{t}(1+\delta)} (1 - e^{-tr})^2 dt. \dots(114)$$

Y si se establece que:

$$\frac{\partial}{\partial r} \{ \ln \langle H(r, \bar{h}) \rangle + \ln \langle C(r, \bar{t}, \delta) \rangle \} = 0. \dots(115)$$

Se puede encontrar una relación entre el valor de  $r$  y el valor máximo de energía, el cual es obtenido inspeccionando el espectro, y los factores  $\bar{h}, \delta, \bar{t}$ . En casos donde el valor de  $\bar{t}$  sea muy pequeño se puede considerar independiente a la distribución del parámetro  $r$  sin embargo estará relacionado ampliamente con  $\delta$ . En caso opuesto donde  $\bar{t}$  presenta un valor muy grande la dependencia será con  $\bar{h}$ . Debido a esta interdependencia es muy difícil determinar el promedio de extensión vertical de cuerpos que no sean puntos o láminas.

Además de los factores  $H, S$  y  $C$  que afectan directamente el decaimiento del espectro de amplitud en función de la frecuencia radial, existen factores que

de igual manera alteran la caída de la energía, particularmente al existir varias fuentes.

A pesar de que  $M$  y  $R_M$  no afectan a la tasa de decaimiento de energía, cada uno contribuye al nivel absoluto de energía, y al verse inmersos dos ensambles con diferentes profundidades (ensambles que alberguen valores distintos en magnitud de  $M$  y  $R_M$ ) el decaimiento debido a cada ensamble tendrá un nivel de energía absoluto distinto. Esta condición resultará en un escalón entre los incrementos que son en realidad dominados por un decaimiento lineal. Spector (1968) y Green (1972) calcularon los posibles valores de  $M$ ,  $R_M(\theta)$  y  $R_T(\theta)$  concluyendo que las variaciones en la orientación de  $R_M(\theta)$  y  $R_T(\theta)$  producen un efecto imperceptible en el espectro de energía.

La dispersión de las fuentes en el plano horizontal puede afectar en gran medida la simetría azimutal del espectro y su forma en cualquier dirección radial. En el caso de un perfil se debe tomar en cuenta que la forma del decaimiento espectral estará afectada por la disposición horizontal de las fuentes, efecto producido por la ventana usada para truncar la señal. Anomalías cercanas al punto medio del segmento del perfil o ventana producirán el máximo espectro de energía y entonces se prestarán más fácilmente a la estimación de la profundidad.

## REFERENCIAS

---

Bath, M. (1974) "Spectral Analysis in Geophysics," Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

Batista-Rodríguez, JA, Pérez-Flores MA, Urrutia-Fucugauchi J (2013) Three-dimensional gravity modeling of Chicxulub Crater structure, constrained with marine seismic data and land boreholes. *Earth, Planets and Space* 65: 973–983

Beiki, M., 2010, Analytic signals of gravity gradient tensor and their application to estimate source location: *Geophysics*, 75, 159-174.

Bhattacharyya, B.K. Leu, L.K., 1977. Spectral analysis of gravity and magnetic anomalies due to rectangular prismatic bodies. *Geophysics*, 42(1), pp.41-50.

Blackman, R. B. & Tukey, J. W. (1959). *The measurement of power spectrum*, Dover Publications, New York

Blakely, R. J. (1996). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Cooley, J. W. & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine computation of complex Fourier series, *Math. Comput.* 19, 297 – 301
- Green, A. G. , 1972, Magnetic profile analysis: *Geophysical Journal Royal Astronomical Society*, v. 30, p. 393-403.
- Hinze, W.J., Von Frese, R.R. Saad, A.H., 2013. Gravity and magnetic exploration: Principles, practices, and applications. Cambridge University Press.
- Kay, S. M. (1989), *Modern spectrum analysis*, Prentice Hall, New Jersey
- Mishra, D. C. Naidu, P. S. (1974). Two-dimensional power spectral analysis of aeromagnetic fields, *Geophys. Prosp.* 22, 345-353
- Nabighian, M.N. Hansen, R.O., 2001. Unification of Euler and Werner deconvolution in three dimensions via the generalized Hilbert transform. *Geophysics*, 66(6), pp.1805-1810.
- Ortiz-Alemán, C., Urrutia-Fucugauchi, J (2010). Aeromagnetic anomaly modeling of central zone structure and magnetic sources in the Chicxulub crater, *Phys. Earth Planet. Int.*
- Pedersen, L. B. (1978b), A statistical analysis of potential fields using a vertical circular cylinder and a dike: *Geophysics*, v. 43, p. 943-953.
- Pilkington, M., Hildebrand, A.R., (2000), Three-dimensional magnetic imaging of the Chicxulub crater. *J. Geophysics.*30, p. 161-181.
- Prabhakar S. Naidu M. P Mathew (1998), Chapter 3 Power spectrum and its applications, Elsevier, v. 5, p. 75-143.
- Reid, A.B., Allsop, J.M., Granser, H., Millett, A.T. Somerton, I.W., 1990. Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution. *Geophysics*, 55(1), pp.80-91.
- Sadek H. S. (1984), *Spectral analysis of aeromagnetic profiles for depth estimation principles, software and practical application*, Department of the interior U.S. geological survey.
- Smith, S. W. (1999). *The Scientist and Engineer's guide to digital signal processing* (2nd edition), California Technical Publishing.
- Spector, A., 1968, *Spectral analysis of aeromagnetic maps*: Ph.D. thesis, Department of Physics, University of Toronto.
- Spector, A., Grant, F.S., 1970. Statistical models for interpreting aeromagnetic data. *Geophysics*, 35(2), pp.293-302.
- Thompson, D. J. (1982). Spectrum estimation and harmonic analysis, *Proc. IEEE* 70 (7), 1055 –1096
- Urrutia-Fucugauchi, J., Perez-Cruz, L. Camargo-Zanoguera, A. (2013), "Oil exploration in the Southern Gulf of Mexico and the Chicxulub impact," *Geology Today*, vol. 29, no. 5, pp. 182–189.
- Yaglom, A. H. (1962). *Introduction to theory of stationary random functions*, Prentice Hall, New Jersey