



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN UN MEDIO HETEROGÉNEO UTILIZANDO EL MÉTODO
INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL

PRESENTA:
Julio César Pardo Dañino

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Francisco José Sánchez Sesma

2016

División de Ingenierías Civil y Geomática



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA
COMITÉ DE TITULACIÓN
FING/DICyG/SEAC/UTIT/115/15

Señor
JULIO CÉSAR PARDO DAÑINO
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA, que aprobó este Comité, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

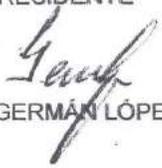
"PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN UN MEDIO HETEROGÉNEO UTILIZANDO EL MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA"

- I. INTRODUCCIÓN
- II. ELEMENTOS DE ELASTODINÁMICA
- III. EL MEDIO HETEROGÉNEO
- IV. MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA (IBEM)
- V. APLICACIONES
- VI. CONCLUSIONES
- VII. BIBLIOGRAFÍA
- VIII. APÉNDICE

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria a 21 de octubre del 2015.
EL PRESIDENTE


M.I. GERMÁN LÓPEZ RINCÓN

GLR/MTH*gar.

*De niño, ciertos cielos afinaron mi óptica: todos los
caracteres matizaron mi fisonomía. Los Fenómenos se
produjeron. Ahora, la inflexión eterna de los momentos y lo
infinito de las matemáticas me acosan por este mundo
en el que padezco todos los éxitos civiles, respetado por
la infancia extraña y los grandes afectos. Pienso en una
Guerra, justa o impuesta, de lógica muy prevista.
Es tan sencillo como una frase musical.
Arthur Rimbaud*

*¡Un hurra por la ciencia positiva! ¡Viva la demostración exacta!
Recoged uva de gato y mezcladla con cedro y ramas de lila;
éste es lexicógrafo o el químico ... éste compuso
una gramática de los antiguos jeroglíficos,
estos navegantes condujeron la nave por mares
desconocidos y peligrosos,
éste es el geólogo y éste trabaja con el escalpelo, y éste
es un matemático.
Walt Whitman*

*A un hombre podemos perdonar que haga algo útil
siempre que no lo admire. La única excusa para hacer
una cosa inútil es admirarla infinitamente.
Todo arte es completamente inútil.
Oscar Wilde*

Dedicatoria

*A mis padres y mi hermana:
la luz que me miró cuando nací
el cielo de mi infancia
los primeros planetas de mi ciencia
las primeras palabras de mi lengua
y las primeras sílabas del canto*

Agradecimientos

A mis padres María E. Dañino y Crispín Pardo por inculcar en mi el amor al estudio, por animarme a concluir mis metas. Por su esfuerzo en convertirme en una mejor persona. Porque siempre me han regalado su amor y comprensión.

A mi hermana Natalia Pardo, por todo el cariño que siempre me ha brindado. Por compartir conmigo inigualables momentos, desde los juegos de la infancia hasta las aulas universitarias.

A mis abuelos María Luisa Bolaños, Jovita Arcos y José Pardo por toda la confianza que me dieron, por todo el afecto que recibí de ellos.

A Itzén Velázquez por todos los maravillosos momentos que he pasado a su lado. Por ser mi ejemplo de perseverancia. Por mostrarme lo hermosa que es la vida π .

Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por compartirme su pasión por la ciencia. Por brindarme su apoyo en todo momento, por alentarme a mejorar mi desarrollo profesional.

Al Dr. Juan Camilo Molina por su paciencia al contestar mis preguntas, por la ayuda incondicional que siempre me mostró. Al M.I. Marcial Contreras y al M.C. Reymundo Itzá por sus atinadas sugerencias en la revisión de este trabajo.

A mis sinodales el Dr. Leonardo Ramírez, el Dr. Adrián Pozos, el M.I. Miguel Ángel Rodríguez y la Dr. Úrsula Iturrarán, por sus valiosos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo.

A mis profesores de la Escuela Nacional Preparatoria No. 2, quienes sembraron en mi el amor por la ciencia y el arte.

A mis profesores de la Facultad de Ingeniería, quienes a través de sus enseñanzas me mostraron la difícil pero gratificante labor del ingeniero civil.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias, que en palabras del Dr. Alberto Barajas me enseñaron que “matemático” no es el nombre de un talento sino de una pasión.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por dejarme aprender y soñar dentro de sus aulas. Porque me permitió mirar el universo sobre hombros de Gigantes.

Al Instituto de Ingeniería que me facilitó desarrollar este trabajo y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por apoyarme económicamente durante la elaboración del mismo.

A mis compañeros de cubículo, al M.C. José Piña, al Dr. Mathieu Perton, la Ing. Nayeli Chávez y la M.I. Marcela Baena por toda la ayuda que siempre me brindaron.

A mis amigos Eric Mejorada, César Cortés y Axel López por todas esas risas y momentos que hemos pasado juntos.

Índice general

Introducción	1
1. Elementos de elastodinámica	3
1.1. El tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones	3
1.2. Ecuaciones dinámicas y constitutivas	8
1.3. La ecuación de Navier-Cauchy	11
1.4. Función de Green	12
2. El medio heterogéneo	17
2.1. La ecuación de Navier – Cauchy para medios heterogéneos	17
2.2. Descripción de un medio heterogéneo con gradiente constante	20
2.3. Una función de Green aproximada para el caso antiplano	22
2.4. Evaluación del error de la función de Green aproximada	24
3. Método indirecto de elementos de frontera (IBEM)	27
3.1. Teorema de reciprocidad de Maxwell - Betti	27
3.2. Identidad de Somigliana	29
3.3. Ecuaciones Básicas del IBEM	30
3.4. Discretización del IBEM	32
4. Aplicaciones	35
4.1. Validación	35
4.2. Respuesta sísmica de topografías	38
4.3. Respuesta sísmica de valles aluviales	44
4.4. Respuesta sísmica de inclusiones	46
5. Conclusiones	51
A. Apéndice A (Elementos de Matemáticas)	53
A.1. Tensores	53
A.2. Transformada de Fourier y de Hankel	53
A.3. Funciones de Bessel	54
A.4. Función de Green	56
A.5. Coordenadas Bipolares	57
A.6. Ecuación integral de Fredholm	59

B. Apéndice B (Resultados de Elastodinámica)	61
B.1. Ecuación de Transporte	61
B.2. Pulso de Ricker	63
B.3. El tensor de tracciones de la función de Green	64
B.4. Integración Analítica	66
B.5. Solución analítica para un semiespacio homogéneo	68
B.6. Método de Thomson-Haskell	68
Bibliografía	72

Introducción

“El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos”

Jean-Baptiste Joseph Fourier

El estudio de la propagación de ondas es esencial en la ingeniería civil, ya que gracias al modelado de este tipo de fenómenos se puede estimar la severidad del movimiento sísmico, considerando la fuente y los trayectos de las ondas. En este estudio se ha comprobado que el papel de la geología superficial local puede generar el incremento de amplitud, así como también de la duración del movimiento durante el sismo, generando afectaciones considerables en las obras civiles, poniendo en riesgo a la población [Aki and Richards, 2002]. Hay sitios donde las características dinámicas del suelo pueden ser predichas gracias los datos disponibles generados a partir de la instrumentación sísmica. Sin embargo, cuando no existen estos datos la única forma de predecir estas propiedades dinámicas es a partir del modelado matemático de la propagación de ondas .

El tratamiento matemático de estos problemas se complica proporcionalmente a la similitud con la realidad, por ello para realizar el modelado de la propagación de ondas se hacen varias hipótesis que pueden parecer algo lejanas a las condiciones que se presentan en la naturaleza. El modelado clásico de la propagación de ondas consiste en considerar algunas hipótesis que suelen simplificar el problema, primeramente se considera que el medio es continuo, elástico, homogéneo (propiedades mecánicas iguales en el medio) e isótropo; sin embargo, aunque estas hipótesis generan resultados satisfactorios para varios problemas de interés en ingeniería sísmica, en ocasiones se necesita modelar otro tipo de materiales, por ejemplo en los cuales las propiedades mecánicas varían dentro en el medio. Estos medios se denominan heterogéneos y son comunes en la naturaleza, por ello es conveniente generar un modelo matemático que pueda explicar su comportamiento [Ben-Menahem and Beydoun, 1985].

En las últimas décadas se ha incrementado la capacidad de cómputo y se han generado modelos numéricos que pueden tratar estos problemas complejos. Una familia de métodos numéricos para este tipo de problemas son los Métodos de Elementos de Frontera (MEF) o BEM por sus siglas en inglés. Los cuales tienen la ventaja ante los métodos de dominio como el Método de Diferencias Finitas (MDF) y el Método de Elemento Finito (MEF) de requerir poca discretización [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991], disminuyendo así el tiempo de cómputo. El único requerimiento de utilizar el MEF es el conocimiento de la solución fundamental del problema de valores en la frontera, la llamada Función de Green.

Para iniciar este estudio, en el primer capítulo se dan los elementos de la teoría elastodinámica clásica, en el segundo capítulo se estudia la ecuación de Navier-Cauchy para un medio heterogéneo a partir de la teoría de rayos, para así obtener una función de Green para el medio heterogéneo. En el tercer capítulo se presenta brevemente el modelo numérico usado basado en la formulación indirecta del MEF, el IBEM

por sus siglas en inglés.

Este trabajo tiene como objetivo presentar y validar una solución fundamental propuesta para resolver el desplazamiento antiplano en un semiespacio, donde la velocidad de propagación de ondas S varía linealmente con la profundidad. La función de Green para el medio heterogéneo se usa en el IBEM para resolver la difracción de ondas en distintas configuraciones de geología superficial y de inclusiones. Se obtienen funciones de transferencia y sismogramas sintéticos de la respuesta en receptores en la superficie.

Capítulo 1

Elementos de elastodinámica

“En física las palabras y las fórmulas están conectadas con el mundo real”

Richard Phillips Feynman

Para poder establecer el comportamiento de un medio bajo condiciones dinámicas, es de gran importancia contar con una teoría físico-matemática que gobierne este problema. Para ello surge la teoría de la elastodinámica, la cual tiene sus bases en la hipótesis del medio continuo y deformable, en las leyes de la mecánica clásica de Newton y en la teoría de la elasticidad. A continuación se desarrollará brevemente los elementos de esta teoría, para ello utilizaremos la notación indicial y sus convenciones, además de los principios básicos del cálculo tensorial.

1.1. El tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones

La teoría de la elastodinámica tiene sus bases en dos hipótesis: la hipótesis del medio continuo y la hipótesis del cuerpo deformable. Un cuerpo G es llamado continuo si es una región regular de \mathbb{R}^3 y si para todo $\mathbf{x} \in G$ se le puede asignar un campo escalar positivo $\rho(\mathbf{x})$ llamado densidad de masa, *i.e.*:

$$\forall \mathbf{x} \in B \subset G, \quad \exists \rho(\mathbf{x}), \quad m(B) = \int_B \rho(\mathbf{x}) dV \quad (1.1)$$

Donde la función $m(B)$ es conocida como la masa de B . Los puntos $\mathbf{x} \in G$ son llamados puntos materiales de G .

Consideremos un cuerpo B , llamemos B_{ref} la configuración de referencia del cuerpo (no deformada) y B_{def} como la configuración del cuerpo ya deformada (Figura 1.1). Matemáticamente se dice que un cuerpo es deformable si existe un mapeo inyectivo φ que lleva a cada punto $\mathbf{X} \in B_{ref}$ a un punto $\mathbf{x} \in B_{def}$ *i.e.*

$$\varphi : \mathbf{X} \in B_{ref} \rightarrow \mathbf{x} \in B_{def} \quad (1.2)$$

Definamos el campo de desplazamiento como:

$$u_i(\mathbf{X}) = \varphi_i(\mathbf{X}) - \mathbf{X}_i \delta_{ij} \quad (1.3)$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kronecker (Apéndice A.1). La interpretación geométrica de este campo, es la representación del vector que une las posiciones sin deformar y la posición deformada de cada punto material (Figura 1.1).

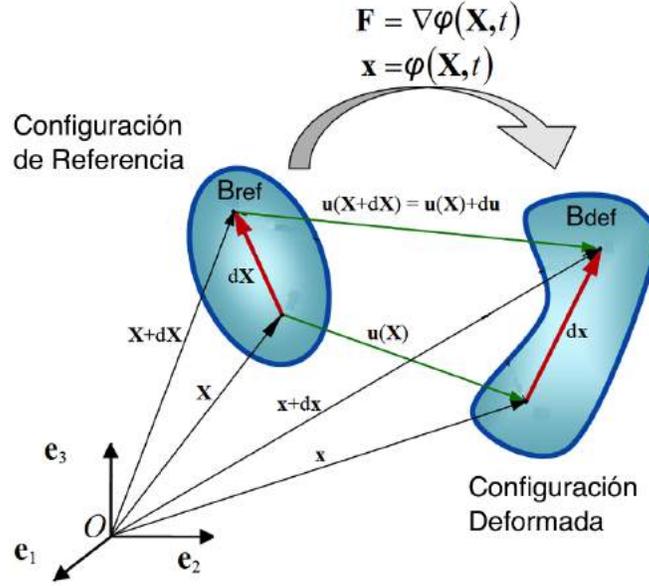


Figura 1.1: Configuración de referencia B_{ref} y configuración deformada B_{def} de un cuerpo deformable

Definamos al gradiente de deformación como el tensor de segundo orden tal que:

$$F_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} \quad (1.4)$$

Este tensor define la relación entre elementos diferenciales de la configuración sin deformar y los de la deformada. Más concretamente, si $d\mathbf{X}$ es un vector diferencial situado en el punto \mathbf{X} de la configuración de referencia y $d\mathbf{x}$ es el vector que resulta de la deformación de $d\mathbf{X}$ se cumple que:

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} dX_j \quad (1.5)$$

La demostración de este resultado se omite en este trabajo, se puede encontrar en [Marsden and Hughes, 1994]. A partir de las definiciones anteriores podemos obtener el gradiente del campo de desplazamiento:

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \quad (1.6)$$

El determinante del tensor de deformaciones es siempre positivo y diferente de cero, esto debido a la interpretación física de que la materia no puede desaparecer [Sini, 2010], por ello podemos obtener la descomposición polar de este tensor, teniendo:

$$F(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X})U(\mathbf{X}) \quad (1.7)$$

Donde $R(\mathbf{X})$ es un tensor ortogonal propio el cual está asociado físicamente con las rotaciones del cuerpo y $U(\mathbf{X})$ es un tensor simétrico definido positivo, el cual está asociado físicamente con el alargamiento del cuerpo. Se verifica que estos tensores son de la forma:

$$U^2(\mathbf{X}) = F^T(\mathbf{X})F(\mathbf{X}) \quad R(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X})U^{-1}(\mathbf{X}) \quad (1.8)$$

Definamos el tensor derecho de Cauchy-Green como

$$C_{ij} = F_{ki}F_{kj} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_j} \quad (1.9)$$

La descomposición espectral del tensor derecho de Cauchy-Green se puede obtener a partir de la del tensor de alargamiento $U(\mathbf{X})$ [Sini, 2010]. Si los alargamientos principales se denotan como $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y las direcciones principales como ν_1, ν_2, ν_3 entonces:

$$C = \lambda_\alpha \nu_\alpha \otimes \nu_\alpha \quad (1.10)$$

Donde \otimes es el producto tensorial. La cantidad λ_α da una medida de la deformación unidimensional del cuerpo. El tensor de Cauchy-Green (1.9) se puede expresar en términos del campo de desplazamiento (1.3), teniendo así:

$$C_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \quad (1.11)$$

Definamos al tensor de Green-Lagrange como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (1.12)$$

Este tensor es empleado comúnmente para modelos constitutivos en la teoría finita de deformaciones. La descomposición espectral de este tensor es:

$$E = \frac{1}{2} (\lambda_\alpha^2 - 1) \nu_\alpha \otimes \nu_\alpha \quad (1.13)$$

La cantidad $\frac{1}{2} (\lambda_\alpha^2 - 1)$ al igual que en el caso del tensor de Green-Cauchy da una medida de la deformación unidimensional del cuerpo, pero tiene la ventaja de anularse cuando el cuerpo no está deformado. Podemos expresar el tensor de Green-Lagrange (1.12) en términos del campo de desplazamiento (1.3):

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (1.14)$$

Para medir el tamaño de la deformación definamos el parámetro adimensional:

$$h(\mathbf{X}) = \|H(\mathbf{X})\| \quad (1.15)$$

Una deformación se considera infinitesimal si para todo punto $X \in B_{ref}$, el parámetro $h(\mathbf{X})$ es muy pequeño, es decir:

$$h(\mathbf{X}) \ll 1 \quad (1.16)$$

Si agrupamos a los términos de segundo orden en $O(h^2)$, podemos expresar al tensor U y al tensor R (1.8) como:

$$U_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + O_{ij}(h^2) \quad (1.17)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + O_{ij}(h^2) \quad (1.18)$$

Definamos al tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy y al tensor de rotaciones infinitesimales como:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.19)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.20)$$

Al considerar que las deformaciones son infinitesimales, podemos considerar a los tensores de deformaciones infinitesimales como una aproximación de primer orden a los tensores U y R , en particular el tensor ϵ_{ij} con el tensor E_{ij} . Con las ecuaciones (1.5), (1.6), (1.19) y (1.20) podemos obtener que:

$$dx_i = dX_i + \epsilon_{ij}dX_j + \omega_{ij}dX_j \quad (1.21)$$

Esta expresión muestra que al considerar deformaciones infinitesimales el vector de deformación $d\mathbf{x}$ se puede descomponer aditivamente en una traslación de cuerpo rígido, en una rotación de cuerpo rígido y en una deformación volumétrica, en contraste con el descomposición RU para una deformación finita. En otras palabras al considerar deformaciones infinitesimales la teoría de deformaciones se linealiza.

De todos estos cambios el que nos interesa analizar es la deformación volumétrica (1.19), ya que este cambio es el único que produce esfuerzos.

En un medio continuo actúan dos tipos de fuerzas:

- Las fuerzas de cuerpo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})$ que actúan sobre los puntos materiales de G (Figura 1.2).
- Las fuerzas de superficie $\mathbf{t}^{(n)}$ derivadas del contacto entre dos partes cualesquiera del cuerpo, estas fuerzas actúan a través de la superficie de separación (Figura 1.2). La fuerza $\mathbf{t}^{(n)}$, no sólo depende de los puntos $\mathbf{x} \in G$, si no también depende de la normal \mathbf{n} que orienta la superficie *i.e.*

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (1.22)$$

Este vector es conocido como el vector de tracciones de Cauchy.

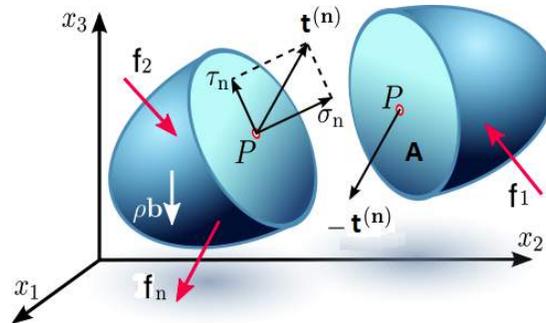


Figura 1.2: Fuerzas de cuerpo y de superficie en un medio continuo

Para poder demostrar la existencia del tensor de esfuerzos, enunciaremos los axiomas de nuestra teoría [Sini, 2010]

- Axioma del balance del momento lineal

$$\int_B f_i dV + \oint_{\partial B} t_i^{(n)} dS = \int_B \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV \quad (1.23)$$

- Axioma del balance del momento angular

$$\int_B \epsilon_{ijk} x_j f_k dV + \oint_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j t_k dS = \int_B \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} dV \quad (1.24)$$

Donde \mathbf{u} es el campo de desplazamientos del medio y ϵ_{ijk} es la densidad tensorial antisimétrica de Levi-Civita (Apéndice A.1). Estos axiomas se deducen directamente de la segunda ley de Newton.

Teorema (Existencia del tensor de esfuerzos de Cauchy) Sea \mathbf{f} y $\mathbf{t}^{(n)}$ un sistema de fuerzas para G . Entonces, existe un tensor σ (llamado tensor de esfuerzos de Cauchy) tal que:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j \quad \forall \mathbf{x} \in G \quad (1.25)$$

Para demostrar este teorema consideremos un punto $\mathbf{x}_0 \in G$, y al cuerpo B como el tetraedro formado por los vértices $x_0 V_1 V_2 V_3$ (Figura 1.3).

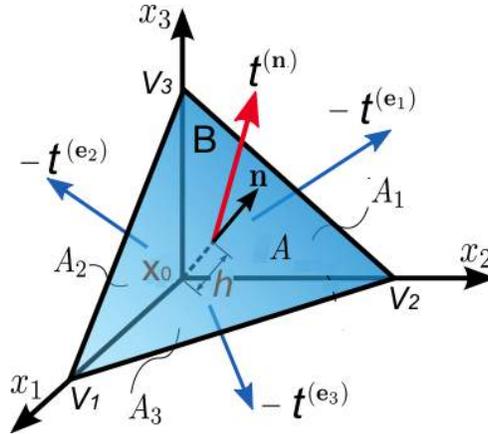


Figura 1.3: Tetraedro generado por los vértices $x_0 V_1 V_2 V_3$

Denotemos a \mathbf{n}^0 como el vector normal unitario al plano $V_1 V_2 V_3$, h como la distancia de x_0 al plano $V_1 V_2 V_3$. Llamemos Σ a la superficie opuesta al punto x_0 , Σ_i la superficie que contiene al punto x_0 y es opuesta al vértice V_i con $i = 1, 2, 3$, $A(h)$ como el área de Σ y $A_i(h)$ como el área de Σ_i con $i = 1, 2, 3$.

Del axioma del balance del momento lineal tenemos:

$$\left| \oint_{\partial B} t_i^{(n)} dS \right| \leq \int_B \left| f_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right| dV \leq K \text{Vol}(B) \quad (1.26)$$

Donde $\text{Vol}(B)$ es el volumen del cuerpo B y K es una constante que no depende de h . Si aproximamos $\text{Vol}(B) \approx h^3$ y $A(h) \approx h^2$ tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{A(h)} \oint_{\partial B} t_i^{(n)} dS = 0 \quad (1.27)$$

Por otra parte, por el teorema del valor medio tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{A(h)} \oint_{\Sigma} t_i^{(\mathbf{n})} dS = t_i^{(\mathbf{n}^0)} \quad (1.28)$$

Análogamente para las otras superficies:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{A(h)} \oint_{\cup \Sigma_j} t_i^{(\mathbf{n})} dS = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^3 \frac{A_j(h)}{A(h)} \frac{1}{A_j(h)} \oint_{\Sigma_j} t_i^{(\mathbf{n})} dS = t_i^{(-\mathbf{e}_j)} n_j^0 \quad (1.29)$$

Ya que $A_j(h) = A(h)n_j^0$. De las ecuaciones (1.27), (1.28) y (1.29) obtenemos:

$$t_i^{(\mathbf{n}^0)} = -n_j^0 t_i^{(-\mathbf{e}_j)} \quad (1.30)$$

Si $\mathbf{n}^0 \rightarrow \mathbf{e}_j$ se cumple que $t_i^{(\mathbf{e}_j)} = -t_i^{(-\mathbf{e}_j)}$, con lo cual obtenemos que la ecuación anterior queda como:

$$t_i^{(\mathbf{n}^0)} = t_i^{(\mathbf{e}_j)} n_j^0 \quad (1.31)$$

Donde $\sigma_{ij} = t_i^{(\mathbf{e}_j)} n_j$ es el llamado tensor de esfuerzos, que es lo que queríamos demostrar. La ecuación (1.25) es conocida como la *relación de Cauchy*.

El tensor de esfuerzos de Cauchy contiene las componentes de los vectores de tracciones $\sigma = [t_i^{(\mathbf{e}_1)}, t_i^{(\mathbf{e}_2)}, t_i^{(\mathbf{e}_3)}]$ orientadas a la base vectorial $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en cualquier punto material del medio continuo (Figura 1.4). El subíndice i indica la cara donde se ubica el esfuerzo y el subíndice j la dirección que toma del sistema de referencia. Los esfuerzos σ_{ij} con $i = j$ se conocen como esfuerzos normales, los esfuerzos σ_{ij} con $i \neq j$ se conocen como esfuerzos cortantes.

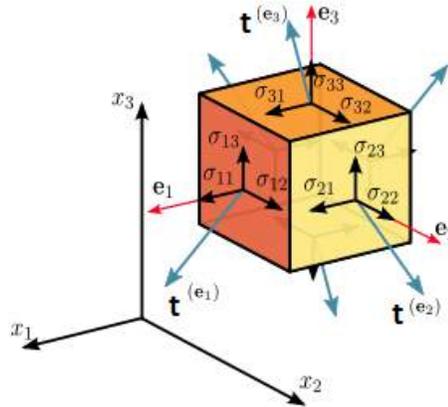


Figura 1.4: Cubo diferencial con las componentes del tensor de esfuerzos

1.2. Ecuaciones dinámicas y constitutivas

Otras consecuencias que se deducen a partir de los axiomas (1.23) y (1.24) son las ecuaciones dinámicas, estas ecuaciones se enuncian a continuación como teorema:

Teorema (Ecuaciones de movimiento) Sea \mathbf{f} y $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$ un sistema de fuerzas para G y sea σ el tensor de esfuerzos de Cauchy entonces:

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \forall x \in G \quad (1.32)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall x \in G \quad (1.33)$$

Para demostrar la primera ecuación partamos del primer axioma del balance del momento lineal (1.23)

$$\int_B f_i dV + \oint_{\partial B} t_i^{(n)} dS = \int_B \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV \quad (1.34)$$

Podemos introducir ahora la relación de Cauchy (1.25) la ecuación (1.34), teniendo así:

$$\int_B f_i dV + \oint_{\partial B} \sigma_{ij} dS_i = \int_B \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV \quad (1.35)$$

Donde $dS_i = n_i dS$. Por el teorema de Gauss-Ostrogradsky, podemos reescribir la ecuación (1.35) como:

$$\int_B f_i dV + \int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_B \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV \quad (1.36)$$

Puesto que $B \subset G$ es arbitrario y \mathbf{f}, ρ, σ y \mathbf{u} son continuas, por el teorema de localización tenemos:

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad \forall x \in G \quad (1.37)$$

Así terminamos la prueba de (1.32). Para demostrar la igualdad (1.33) partamos el axioma del balance del momento angular:

$$\int_B \epsilon_{ijk} x_j f_k dV + \oint_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j t_k dS = \int_B \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} dV \quad (1.38)$$

Utilizando la relación de Cauchy y que $dS_i = n_i dS$ tenemos:

$$\int_B \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k dV + \oint_{\partial B} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} dS_l = \int_B \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} dV \quad (1.39)$$

Haciendo uso del teorema de Gauss-Ostrogradsky la ecuación anterior se transforma en:

$$\int_B \epsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_B \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) dV = \int_B \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} dV \quad (1.40)$$

Utilizando el teorema de localización, concluimos que:

$$\epsilon_{ijk} x_j f_k + \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) - \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = 0 \quad \forall x \in G \quad (1.41)$$

Desarrollemos la ecuación (1.41):

$$\epsilon_{ijk} x_j \left(f_k + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \right) + \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} = 0 \quad \forall x \in G \quad (1.42)$$

Vemos que en el primer término de la igualdad anterior, es la segunda ley de Newton para un medio continuo (1.32). Entonces nuestra ecuación se reduce a:

$$\epsilon_{ilk}\sigma_{kl} = 0 \quad \forall x \in G \quad (1.43)$$

Dado que la densidad tensorial antisimétrica multiplica a las componentes del tensor de esfuerzo y da como resultado cero, concluimos que el tensor de esfuerzos es simétrico, ya que el producto de un ente simétrico por otro antisimétrico es siempre nulo. Esta condición de simetría se puede expresar como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, que es lo que queríamos demostrar

La descripción cinemática (deformaciones) y las leyes de movimiento son válidas para cualquier material considerado continuo y deformable. Sin embargo, la experiencia nos indica que los cuerpos responden de manera muy distinta ante los mismos estímulos. Puesto que estas diferencias no aparecen en las ecuaciones cinemáticas ni de movimiento, deben de aparecer en otro tipo de ecuación. Estas ecuaciones son las llamadas ecuaciones constitutivas, que establecen una relación funcional entre los esfuerzos y las deformaciones *i.e.*

$$\sigma(x, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}(x, t)) \quad (1.44)$$

Además de caracterizar el material estas ecuaciones compensan las incógnitas de cualquier problema mecánico. Las ecuaciones constitutivas deben cumplir un principio básico [Gurtin, 1982], el llamado principio de invariancia. El principio de invariancia establece que las relaciones constitutivas deben de ser válidas para cualquier observador.

En este trabajo nos enfocaremos en los cuerpos sólidos, decimos que un material es sólido si posee una configuración de referencia, tal que cualquier deformación que no sea un movimiento de sólido rígido lleva al cuerpo a una nueva configuración deformada, en la cual su respuesta material es diferente. Además de considerar un cuerpo sólido, definimos que este es elástico si su respuesta no presenta histéresis y además es independiente de la velocidad de aplicación de las cargas.

Un material elástico es simple de caracterizar, ya que la dependencia del esfuerzo respecto a la deformación es únicamente a través del gradiente de deformación, en el instante en el que se evalúa. El valor de la deformación en instantes anteriores no afecta el esfuerzo. Entonces definimos la siguiente ecuación constitutiva:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (1.45)$$

Donde C_{ijkl} es el tensor de propiedades elásticas del cuerpo deformable; este tensor es de cuarto orden y está compuesto por 81 constantes elásticas. Esta ecuación es conocida como la ley de Hooke para medios continuos. Si desarrollamos para un ij fijo, podemos obtener que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (1.46)$$

Si consideramos que el material es isótropo, a partir del teorema de Rivlin-Ericksen [Gurtin, 1982] podemos demostrar rigurosamente que el tensor de propiedades mecánicas queda caracterizado únicamente por 2 constantes elásticas (λ y μ), conocidas como las constantes elásticas de Lamé, teniendo así:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.47)$$

Sustituyendo la ecuación (1.47) en la ecuación (1.45) podemos definir al tensor de esfuerzos en términos de las constantes elásticas y la deformación como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1.48)$$

Cuando se considera que estas constantes de Lamé no varían respecto en el espacio se dice que el medio es homogéneo; de lo contrario el medio es heterogéneo.

1.3. La ecuación de Navier-Cauchy

En esta sección obtendremos la ecuación gobernante de la teoría de la elastodinámica. Para ello sustituimos la ecuación (1.19) en (1.48):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.49)$$

Ahora derivamos respecto a x_j para obtener la divergencia del tensor de esfuerzos

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \quad (1.50)$$

Por el teorema de Schwarz tenemos que las derivadas cruzadas son iguales, tenemos:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.51)$$

Finalmente podemos sustituir la ecuación (1.51) en la segunda ley de Newton para medios continuos (1.32), obteniendo:

$$f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.52)$$

La ecuación anterior es la ecuación gobernante de la elastodinámica y es conocida como ecuación de Navier – Cauchy. Utilizando un conocido resultado del análisis vectorial:

$$\left(\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (1.53)$$

Podemos reescribir la ecuación de Navier-Cauchy (1.52) como:

$$\frac{1}{\rho} f_i + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \beta^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.54)$$

Donde $\alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ y $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$ son las velocidades de propagación de las ondas P y S respectivamente.

Físicamente, las ondas P o primarias ejercen una compresión sobre las partículas que se encuentran alrededor de su trayectoria y deforman el medio elástico que las contiene; por esta razón son llamadas ondas compresionales o longitudinales [Aki and Richards, 2002]. En cambio las ondas S o secundarias se propagan en el medio distorsionándolo pero manteniendo el volumen constante; estas ondas son conocidas como ondas transversales (Figura 1.5).

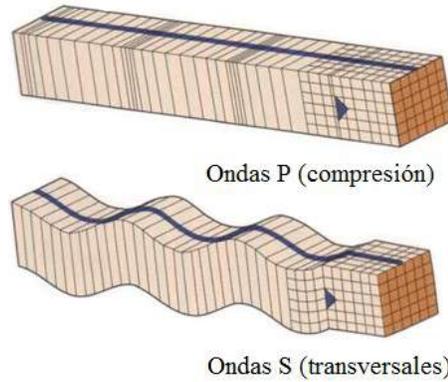


Figura 1.5: Propagación de ondas compresionales (P) y ondas transversales (S)

Dada su naturaleza las ondas S se pueden descomponer en dos campos de ondas, SH y SV. Se dice que las ondas SH, son ondas transversales (antiplanas) que se propagan en el plano, pero su movimiento está dado en dirección perpendicular al plano (Figura 1.6), mientras tanto las ondas SV son ondas que se propagan en el plano pero su dirección de propagación está contenida en el plano.

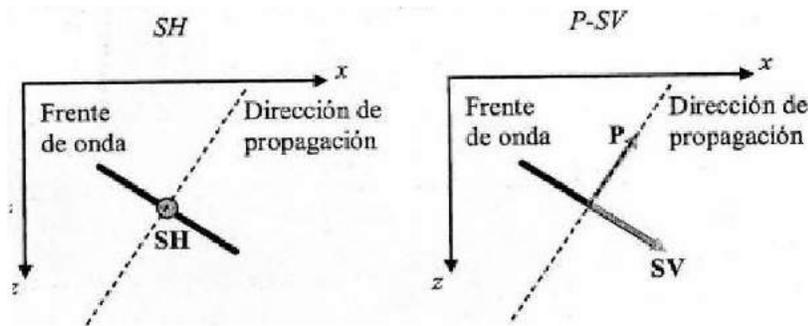


Figura 1.6: Dirección de propagación de los diferentes campos de ondas SH, SV y P

1.4. Función de Green

En esta sección obtendremos la solución fundamental para la ecuación de Navier -Cauchy (función de Green) para un espacio completo en el caso antiplano (ondas SH). La solución se obtendrá en el espacio-frecuencia.

Para empezar esta deducción definamos la siguiente convención; asignemos los nombres usuales a las coordenadas del plano cartesiano en tres dimensiones $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$.

Teniendo en cuenta lo anterior hagamos la siguientes consideraciones. Se asume que sólo existen componentes de fuerza y desplazamiento en la dirección y (perpendicular al plano), y que el campo de desplazamientos es independiente de y . Esto nos lleva a tener un campo de desplazamientos dado de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = v(\mathbf{x}, t) \mathbf{j} \quad (1.55)$$

Con $\mathbf{x} = (x, z)$ y $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$. También consideremos que la fuerza de cuerpo es una fuerza puntual impulsiva unitaria con dirección en y (figura 1.7) ubicada en el punto $\xi = (x_0, z_0)$ (fuente) aplicada en un tiempo $t = \tau$ dada por:

$$f_y(\mathbf{x}, t) = \delta(t - \tau)\delta(x - x_0)\delta(z - z_0) \quad (1.56)$$

Donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

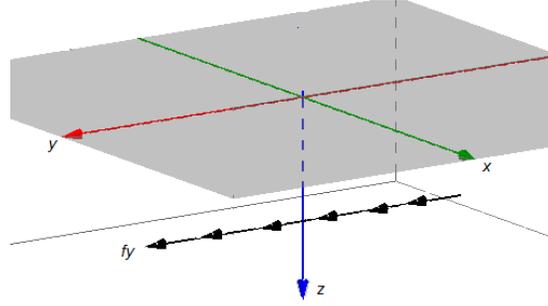


Figura 1.7: Línea de fuerza puntual impulsiva unitaria en dirección y

Al establecer lo anterior la ecuación (1.54) adquiere la siguiente forma:

$$\beta^2 \Delta g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) + \frac{1}{\rho} \delta(t - \tau) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) = \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial t^2} \quad (1.57)$$

Donde $g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$ es la función de Green (Apéndice A.4) del espacio completo bidimensional. La ecuación (1.57) es conocida como la ecuación de onda inhomogénea y se clasifica como una ecuación hiperbólica.

Utilicemos la transformada directa de Fourier (Apéndice A.2) en la ecuación (1.57), dicha transformación nos hace un mapeo del tiempo a la frecuencia angular $g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \rightarrow G(\mathbf{x}, \omega; \xi)$; dando como resultado:

$$\Delta G(\mathbf{x}, \omega; \xi) + k^2 G(\mathbf{x}, \omega; \xi) = -\frac{1}{\mu} \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (1.58)$$

Donde $k = \frac{\omega}{\beta}$ es el número de onda. La ecuación (1.58) es conocida como la ecuación de Helmholtz inhomogénea y es clasificada en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales como una ecuación elíptica. Pasemos la ecuación (1.58) a coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 G(r, \theta, \omega; \xi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, \theta, \omega; \xi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G(r, \theta, \omega; \xi)}{\partial \theta^2} + k^2 G(r, \theta, \omega; \xi) = -\frac{1}{2\pi\mu r} \delta(r) \delta(\theta) \quad (1.59)$$

El problema no está en función del ángulo θ , ya que en un disco de radio $r = a$ se cumple que $G(a, \theta, \omega; \xi) = c$, donde c es una constante. Entonces G es función únicamente del radio r y de la frecuencia angular ω esto es $G(r, \omega; \xi)$. Con ello establecemos el siguiente problema de valores en la frontera (PVF) para un espacio completo bidimensional:

$$\frac{\partial^2 G(r, \omega; \xi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, \omega; \xi)}{\partial r} + k^2 G(r, \omega; \xi) = -\frac{\delta(r)}{2\pi\mu r} \quad (x, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \cap -\infty < \omega < \infty \quad (1.60)$$

$$G(r, \omega; \xi) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad r \rightarrow \infty \cap -\infty < \omega < \infty \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial G(r, \omega; \xi)}{\partial r} + ikG(r, \omega; \xi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad r \rightarrow \infty \cap -\infty < \omega < \infty \quad (1.62)$$

Con $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Las condiciones de frontera (1.61) y (1.62) son las llamadas condiciones de radiación de Sommerfeld [Sommerfeld, 2013b], físicamente la primera condición establece que la solución se anula en el infinito, mientras que la segunda indica que no hay propagación de energía desde el infinito hacia una región acotada del plano. Estas condiciones garantizan la unicidad del PVF.

EL PVF tiene solución analítica [Graff, 1975]. Observemos que el lado izquierdo de la ecuación (1.60) es la ecuación diferencial de Bessel de orden $n = 0$ (Apéndice A.3). Para obtener su solución transformemos la ecuación (1.60) al dominio (η, ω) utilizando la transformada de Hankel de orden $n = 0$ (Apéndice A.2), teniendo así:

$$(-\eta^2 + k^2)G_0(\eta, \omega; \xi) = -\frac{1}{2\pi\mu} \quad (1.63)$$

La solución en el dominio (η, ω) toma la forma:

$$G_0(\eta, \omega; \xi) = \frac{1}{2\pi\mu} \left(\frac{1}{\eta^2 - k^2} \right) \quad (1.64)$$

Para obtener la solución en el dominio (r, ω) , usemos la transformada inversa de Hankel, obteniendo así:

$$G(r, \omega; \xi) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{J_0(\eta r)}{\eta^2 - k^2} \eta d\eta \quad (1.65)$$

Para encontrar el valor de la integral (1.65) hagamos el cambio de variable $z = ik$, con ello la integral queda como:

$$G(r, \omega; \xi) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{J_0(\eta r)}{\eta^2 + z^2} \eta d\eta \quad (1.66)$$

Cuya solución es [Graff, 1975]:

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\eta r)}{\eta^2 + z^2} \eta d\eta = K_0(zr) \quad (1.67)$$

Donde $K_0(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de segunda especie de orden 0 (Apéndice A.3). Podemos ligar esta solución con las funciones de Hankel primera y segunda especie. Las funciones de Hankel cumplen la primera condición de radiación de Sommerfeld, en cambio sólo la de segunda especie cumple la segunda condición de radiación, es por ello que utilizando las propiedades de las funciones de Bessel modificadas tenemos:

$$K_0(zr) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(-izr) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr) \quad (1.68)$$

Finalmente sustituimos (1.68) en la ecuación (1.66):

$$G_{22}(r, \omega; \xi) = \frac{1}{4\mu i} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) \quad (1.69)$$

Esta función de Green corresponde al desplazamiento en dirección y debido a una fuerza impulsiva unitaria aplicada en dirección y aplicada en ξ como lo indican los subíndices, siendo uno de los componentes del Tensor de Green.

Dado que la función de Green quedó en términos de la frecuencia, podemos obtener su representación en el dominio del tiempo, para lo cual utilizamos la transformada inversa de Fourier [Abramowitz and Stegun, 1964], teniendo:

$$g_{22}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{H(t - \frac{r}{\beta})}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{\beta^2}}} \quad (1.70)$$

Siendo $H(\cdot)$ la función de Heaviside. Físicamente esta solución genera frentes de onda circulares con centro en la fuente ξ y rayos que describen la familia de rectas que pasan por la fuente como se muestra en la figura (1.8).

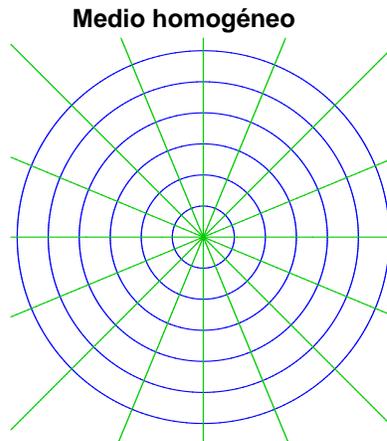


Figura 1.8: Rayos (color verde) y frentes de onda (color azul) de un medio homogéneo debidos a una fuerza puntual impulsiva

Capítulo 2

El medio heterogéneo

“No entre aquí quien no sepa geometría”

Inscripción sobre la entrada de la Academia de Platón

Las ecuaciones que gobiernan la elastodinámica clásica son regidas por hipótesis que ayudan a simplificar el problema desde el punto de vista matemático, en ocasiones estas hipótesis evaden la realidad, por ello se busca un modelo que se asemeje más a las condiciones naturales en las que se encuentran los medios. Para ello se establecerá la ecuación que gobierna un medio con cierta propiedad de heterogeneidad. La deducción de esta ecuación tiene como base la teoría de rayos.

2.1. La ecuación de Navier – Cauchy para medios heterogéneos

En el capítulo anterior se estableció la ecuación que gobierna un medio continuo isótropo y homogéneo en condiciones dinámicas, la condición de homogeneidad se establece al no variar las constantes de Lamé (λ y μ). Se puede entonces establecer una variación de estas constantes respecto a alguna de las variables espaciales, generando así un medio heterogéneo.

Teniendo en cuenta esto se desarrollará la ecuación de Navier – Cauchy considerando que el medio tiene una variación de la densidad y de las constantes de Lamé respecto a las variable espaciales. Teniendo en cuenta lo anterior, definimos que las constantes de Lamé están en función del espacio, esto es $\lambda = f(\mathbf{x})$ y $\mu = g(\mathbf{x})$ al igual que la densidad $\rho = h(\mathbf{x})$. La ecuación constitutiva adquiere la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior, se obtiene la divergencia del tensor de esfuerzos, teniendo así:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.2)$$

Se observa que se tendrá que aplicar la regla para el producto de derivadas; obteniendo de nueva cuenta la ecuación de Navier-Cauchy para un medio homogéneo más una parte adicional dada por las derivadas de las constantes de Lamé:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Sustituyendo en la ley de Newton para medios continuos se tiene:

$$f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) es conocida como la ecuación de Navier – Cauchy para medios heterogéneos. Un caso particular de esta ecuación es claramente la ecuación (1.52). Dado que el caso de estudio es el antiplano, consideremos de nueva cuenta que el campo de desplazamiento está dado por $\mathbf{u} = v(\mathbf{x}, t) \mathbf{j}$. Esto nos lleva a que la ecuación de Navier-Cauchy para un medio heterogéneo tome la forma:

$$\beta^2 \Delta g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \delta(t - \tau) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) = \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial t^2} \quad j = 1, 3 \quad (2.5)$$

Se observa que dicha ecuación tiene la misma estructura de la ecuación para el caso homogéneo (1.57), el cambio radica en el segundo sumando donde intervienen las primeras derivadas respecto a las variables espaciales de la constante de Lamé μ y del campo de desplazamiento v . La función anterior admite una solución analítica exacta en términos de las funciones de Whittaker [Bard and Gariel, 1986].

Para establecer una solución general a la ecuación anterior es conveniente que pasemos al dominio de la frecuencia $g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \rightarrow G(\mathbf{x}, \omega; \xi)$ utilizando la transformada directa de Fourier, esto nos lleva a:

$$\Delta G(\mathbf{x}, \omega; \xi) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \omega; \xi)}{\partial x_j} + k^2 G(\mathbf{x}, \omega; \xi) = -\frac{1}{\mu} \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad j = 1, 3 \quad (2.6)$$

Si el medio heterogéneo tiene una variación suave de sus propiedades respecto al espacio, la solución general [Popov, 2002] a esta ecuación viene dada por:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = A(\mathbf{x}, \omega) \exp(i\omega\tau(\mathbf{x})) \quad (2.7)$$

Donde $\mathbf{x} = (x, z)$, $A(\mathbf{x}, \omega)$ es la función de amplitudes y $\tau(\mathbf{x})$ es el tiempo de viaje o de tránsito también conocido como eikonal. Sustituyamos la solución general (2.7) en la ecuación (2.6), esto nos da como resultado:

$$-\omega^2 \rho A = -\omega^2 \mu A \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} + i\omega \left(2\mu \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} + \mu A \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_j \partial x_j} + A \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right) + \left(\mu \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} \right) \quad (2.8)$$

Hagamos los siguientes cambios de variables:

$$N(A) = \left[\mu \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - \rho \right] A \quad (2.9)$$

$$M(A) = \mu \left(2 \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} + A \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_j \partial x_j} \right) + A \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

$$L(A) = \mu \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

Teniendo en cuenta estos cambios de variable, la ecuación (2.8) puede ser reescrita como:

$$-\omega^2 N(A) + i\omega M(A) + L(A) = 0 \quad (2.12)$$

Ahora bien, consideremos altas frecuencias ($\omega \gg 0$), vemos que únicamente tienen importancia los términos $N(A)$ y $M(A)$, para disminuir la discrepancia de considerar altas frecuencias, consideremos la aproximación asintótica para las amplitudes derivada de la teoría WKBJ (Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys) [Červený, 2005]:

$$A(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{(i\omega)^n} \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.13) en la ecuación (2.12) tenemos:

$$\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{N(u_{m+2})}{(i\omega)^m} + \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{M(u_{m+1})}{(i\omega)^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L(u_m)}{(i\omega)^m} = 0 \quad (2.14)$$

Si agrupamos los términos con iguales potencias $i\omega$ y los igualamos a cero, generamos el siguiente sistema de ecuaciones recurrentes:

$$N(u_0) = 0 \quad (2.15)$$

$$N(u_1) + M(u_0) = 0 \quad (2.16)$$

$$N(u_{m+2}) + M(u_{m+1}) + L(u_m) = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Observamos que los términos predominantes en alta frecuencia ($\omega \gg 0$) son las ecuaciones (2.15) y (2.16) ya que están asociadas a los términos $(i\omega)^2$ y $i\omega$ respectivamente, los demás términos son inversamente proporcionales a $i\omega$.

Analicemos la ecuación (2.15), esta nos dice que:

$$\left[\mu \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - \rho \right] A = 0 \quad (2.18)$$

Dado que forzosamente $A \neq 0$, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} = \frac{1}{\beta^2} \quad (2.19)$$

La ecuación anterior es de suma importancia en la teoría de rayos, y es conocida como la ecuación Eikonal, esta ecuación es una EDP no lineal cuya solución es el tiempo de viaje (τ). Geométricamente el tiempo de viaje son superficies denominadas frentes de onda. Los rayos son trayectorias ortogonales a estas superficies. Vectorialmente la ecuación (2.19) se escribe como:

$$\|\nabla \tau\|^2 = \frac{1}{\beta^2} \quad (2.20)$$

Donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana. Ahora analicemos la ecuación (2.16). Debemos imponer que $M(u_0) = 0$ esto con el fin de poder hacer que el sistema no homogéneo de ecuaciones recurrentes pueda ser soluble respecto a u_1 . Por ello tenemos:

$$\mu \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} + u_0 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_j \partial x_j} \right) + u_0 \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} = 0 \quad (2.21)$$

Dividiendo la ecuación entre μ , y usando la propiedades del gradiente del logaritmo natural ($\nabla \ln(r) = \frac{1}{r} \nabla r$) nos queda:

$$2 \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} + u_0 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_j \partial x_j} + u_0 \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.22)$$

Hagamos ahora que la solución sea de la forma $u_0 = \frac{B}{\sqrt{\mu}}$, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$$2 \frac{\partial B}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} + B \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) es conocida como la ecuación de transporte, que es otra de las ecuaciones esenciales de la teoría de rayos, dicha ecuación es una EDP lineal que al resolverla nos da el valor de las amplitudes. Vectorialmente esta ecuación se expresa como:

$$2 \nabla \tau \cdot \nabla B + B \Delta \tau = 0 \quad (2.24)$$

La solución general a esta ecuación (Apéndice B.1) se deduce a partir de elementos de geometría diferencial, y da como resultado [Popov, 2002]

$$B = \frac{\psi(\gamma_1)}{\sqrt{\frac{J}{\beta}}} \quad (2.25)$$

Donde J es el determinante de la matriz jacobiana y γ_1 es una de las coordenadas centradas en el rayo. Se observa que el patrón de irradiación únicamente depende de γ_1 , ya que estamos tratando un caso bidimensional. Finalmente, podemos sustituir la solución (2.25) en la solución general (2.26) dando así que $G(\mathbf{x}, \omega)$ adquiere la forma de:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \psi(\gamma_1) \sqrt{\frac{\beta(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{x}) J(\mathbf{x})}} \exp(i\omega\tau(\mathbf{x})) = \psi(\gamma_1) \sqrt{\frac{1}{\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})}} \sqrt{\frac{1}{J(\mathbf{x})}} \exp(i\omega\tau(\mathbf{x})) \quad (2.26)$$

Al cociente $\sqrt{\frac{1}{\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})}}$ se le conoce como impedancia.

2.2. Descripción de un medio heterogéneo con gradiente constante

La ecuación (2.5) establece el comportamiento dinámico para un medio heterogéneo e isotrópico, por heterogéneo se estableció que las constantes de Lamé y la densidad varían espacialmente. Consideremos esta ecuación pero establezcamos que únicamente hay variación respecto a la variable $x_3 = z$, la cual denominaremos profundidad; la variación está dada por $\mu = f(z)$ y $\rho = g(z)$. La ecuación (2.5) puede reescribirse como:

$$\beta^2 \Delta g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) + \frac{1}{\rho} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \delta(t - \tau) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) = \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

Un caso particular de un medio heterogéneo es aquel en el cual la velocidad de onda S (β) varíe linealmente y la densidad varíe de forma polinómica ambas respecto a la profundidad. La velocidad de onda S y la densidad pueden escribirse de la forma:

$$\beta(z) = \beta_0 \frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} = \beta(0)(1 + \gamma z) \quad (2.28)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} \right)^n = \rho(0)(1 + \gamma z)^n \quad (2.29)$$

Donde z_0 es la profundidad en la cual se ubica una fuerza impulsiva (fuente), β_0 y ρ_0 son la velocidad de la onda S y la densidad en la fuente, respectivamente. Además $\beta(0)$ y $\rho(0)$ son la velocidad de la onda S y la densidad respectivamente en $z = 0$, $\gamma = 1/h$ es el gradiente de velocidad, h es la distancia medida en el eje z donde la velocidad de la onda S es nula *i.e.* ($\beta(-h) = 0$). El exponente n , es un número real tal que $n \geq 0$, por lo que a densidad puede ser constante o incrementarse con la profundidad.

Dado que el coeficiente de Lamé μ está en función de la velocidad de onda S y de la densidad, su función queda como:

$$\mu(z) = \beta^2(z)\rho(z) = \mu_0 \left(\frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} \right)^{n+2} = \mu(0)(1 + \gamma z)^{n+2} \quad (2.30)$$

Donde $\mu_0 = \beta_0^2 \rho_0$ y $\mu(0) = \beta^2(0)\rho(0)$. En un medio en el que el gradiente de la velocidad es constante, los frentes onda y los rayos son circunferencias [Ben-Menahem and Beydoun, 1985], y son representados geoméricamente por medio de un sistema curvilíneo (Figura (2.1)), que es el sistema bipolar de coordenadas (Apendice A.5). Así, los frentes de onda y los rayos quedan definidos por las expresiones:

$$x^2 + [z - ((z_0 + h) \cosh(\gamma\beta(0)\tau) - h)]^2 = R_w^2 \quad \text{con} \quad R_w = (z_0 + h) \sinh(\gamma\beta(0)\tau) \quad (2.31)$$

$$(x - (z_0 + h) \cot(j_0))^2 + (z + h)^2 = R^2 \quad \text{con} \quad R = \frac{z_0 + h}{\sin j_0} \quad (2.32)$$

Donde $R_1^2 = (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2$ y $R_2^2 = (x - x_0)^2 + (z + z_0 + 2h)^2$ son distancias medidas desde los polos a cualquier punto, R_w es el radio aparente de los frentes de onda, R es el radio de los rayos que salen del ángulo j_0 .

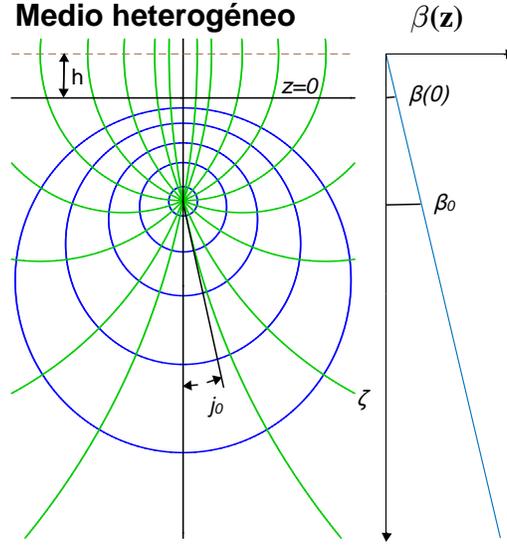


Figura 2.1: Rayos (color verde) y frentes de onda (color azul) de un medio heterogéneo debidos a una fuerza puntual impulsiva

En el sistema de coordenadas bipolares j_0 es el ángulo de salida (representado por la coordenada u ver Apéndice A.5) y $\tau = \zeta t_0$ es el tiempo de viaje (donde ζ es representado por la coordenada v ver Apéndice A.5), donde $t_0 = h/\beta_0$, estas coordenadas son a su vez funciones de las coordenadas cartesianas:

$$\tau = \frac{1}{\gamma\beta(0)} \ln\left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}\right) = \frac{h}{\beta(0)}\zeta \quad (2.33)$$

$$j_0 = \arcsin\left(\frac{2x(z_0 + h)}{R_1 R_2}\right) \quad (2.34)$$

También se observa que $z_0 + h$ es la ubicación del polo dentro del medio heterogéneo, (representado por a ver Apéndice A.5).

2.3. Una función de Green aproximada para el caso antiplano

En el capítulo anterior se mostró la deducción analítica de la función de Green en el caso antiplano (SH) para un medio homogéneo. A continuación se desarrollará la deducción de la función de Green para el caso antiplano para un medio heterogéneo, la deducción tiene base en la teoría de rayos [Sánchez-Sesma et al., 2001] y no en la solución exacta de la ecuación de Navier para medios heterogéneos.

Se dedujo que el desplazamiento producido por una fuente escalar en dos dimensiones para alta frecuencia está dado por la ecuación (2.26), ahora bien reescribiendo esta ecuación de forma normalizada tenemos:

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \psi(\gamma_1) \sqrt{\frac{\rho(z_r)\beta(z_r)}{\rho(z)\beta(z)}} \sqrt{\frac{J(x_r, z_r)}{J(x, z)}} \exp(i\omega\tau(x, z)) \quad (2.35)$$

Las coordenadas x_r y z_r son coordenadas de referencia a lo largo del rayo. Se introducen en la solución los términos $\rho(z_r)\beta(z_r)$ y $J(x_r, z_r)$ con el fin de normalizar la solución, para tener así una impedancia

relativa y una dispersión geométrica relativa.

Comenzaremos con nuestra deducción, dicho desarrollo se seguirá de manera heurística utilizando algunos conceptos conocidos de la función de Green para un medio homogéneo, la solución (2.35) dada por la teoría de rayos y las propiedades del medio heterogéneo mencionadas anteriormente. Recordemos la función de Green para un medio homogéneo:

$$G_{22}(r, \omega; \xi) = \frac{1}{4\mu i} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) \quad (2.36)$$

Realicemos la expansión asintótica de Neumann para la función de Hankel:

$$G_{22}(r, \omega; \xi) \approx \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\omega r}} \exp\left(-i\left[\frac{\omega r}{\beta} - \frac{\pi}{4}\right]\right) \quad (2.37)$$

De esta expansión es claro ver que los frentes de onda son círculos de radio r y la dispersión geométrica es proporcional a \sqrt{r} . Haciendo una analogía podemos decir que en el medio con gradiente constante los frentes de onda son círculos con radio R_w y la dispersión geométrica será proporcional a $\sqrt{R_w}$. También se observa que $r/\beta = \tau$ que es el tiempo de viaje en el caso homogéneo. El patrón de irradiación para el caso de un medio homogéneo se asume unitario. Teniendo en cuenta lo anterior podemos hacer una aproximación para el medio heterogéneo:

$$G(\mathbf{x}, \omega) \approx C \left(\frac{\rho(z_0)\beta(z_0)}{\rho(z)\beta(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\omega R_w}\right)^{1/2} \exp\left(-i\left[\omega \tau - \frac{\pi}{4}\right]\right) \quad (2.38)$$

Donde C es una constante de proporcionalidad. La posición de referencia se asume como la localización de la fuente (x_0, z_0) . La ecuación (2.38) ya se asemeja ahora a la ecuación (2.37), pero podemos reescribirla como:

$$G(\mathbf{x}, \omega) \approx C \left(\frac{\rho(z_0)\beta(z_0)}{\rho(z)\beta(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau}{R_w}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\omega \tau}\right)^{1/2} \exp\left(-i\left[\omega \tau - \frac{\pi}{4}\right]\right) \quad (2.39)$$

De esta forma podemos hacer cumplir la restricción asintótica y además podemos incluir los efectos de propagación cerca de la fuente. Entonces, llevando la ecuación (2.39) a la forma (2.36) y utilizando las ecuaciones (2.28), (2.29), y (2.31) obtenemos que la función de Green para un medio heterogéneo adquiere la forma de

$$G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi) \approx \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{\gamma \beta(0) \tau}{\sinh(\gamma \beta(0) \tau)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\mu_0 i} H_0^{(2)}(\omega \tau) \quad (2.40)$$

Analizando la función de Green aproximada, se observa que la ecuación es compatible con la teoría de rayos, ya que se conservan los factores que modulan la trayectoria de los rayos, así como el tiempo de viaje. La ecuación (2.40) puede ser reescrita en una forma más compacta de la siguiente manera:

$$G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi) \approx \Lambda \frac{1}{4\mu_0 i} H_0^{(2)}(\omega \tau) \quad (2.41)$$

Donde Λ es:

$$\Lambda = \left(\frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{\gamma \beta(0) \tau}{\sinh(\gamma \beta(0) \tau)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

La función Λ puede expresarse en término únicamente de las coordenadas bipolares dando así:

$$\Lambda = (\sinh(\zeta) [\coth(\zeta) - \cos(j_0)])^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{\zeta}{\sinh(\zeta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

Se puede observar que Λ tiende a uno cuando $\gamma \rightarrow 0$, teniendo así un caso particular en el cual el medio es homogéneo. Al tener que $\gamma \rightarrow 0$, se ve que el campo de desplazamiento $G \rightarrow \frac{1}{4\mu_0 i} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right)$. La función de Green obtenida (2.41) se asemeja a la función de Green para el caso homogéneo, principalmente en que la frecuencia únicamente se encuentra dentro del argumento de la función de Hankel, dejando el término Λ independiente de ella. Lo anterior nos permite obtener de manera similar la función de Green en el dominio del tiempo utilizando la transformada inversa de Fourier [Abramowitz and Stegun, 1964]:

$$g_{22}(\zeta, j_0, t; \xi, \tau) = \Lambda \frac{1}{2\pi\mu} \frac{H(t - \tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \quad (2.44)$$

2.4. Evaluación del error de la función de Green aproximada

La función de Green establecida para este medio heterogéneo es una aproximación. Para la evaluación del error, se evaluará la función de Green en la ecuación de Navier – Cauchy para medios heterogéneos para el caso de ondas S (2.5).

$$\beta^2 \Delta g_{22}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) + \frac{1}{\rho} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial g_{22}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \delta(t - \tau) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) = \frac{\partial^2 g_{22}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial t^2} \quad (2.45)$$

Al evaluar la función de Green para medios heterogéneos en la ecuación Navier – Cauchy para medios heterogéneos (SH) se esperaría que el resultado en cualquier punto distinto de la fuente fuera cero, al ser la función de Green obtenida una aproximación este resultado debería ser muy cercano a cero, por lo cual este valor se evaluará como:

$$\beta^2 \Delta g_{22}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) + \frac{1}{\rho} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial g_{22}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial z} - \frac{\partial^2 g_{22}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial t^2} = \epsilon \quad (2.46)$$

Donde ϵ es el error de la aproximación dada. Dado que la función de Green obtenida se encuentra en el dominio de la frecuencia, y la función de Green en la ecuación de Navier – Cauchy se encuentra en el dominio del tiempo, dicha ecuación debe ser transformada al dominio de la frecuencia, por lo que utilizando la transformada de Fourier puede ser escrita como:

$$\beta^2 \Delta G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) + \frac{1}{\rho} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi)}{\partial z} + \omega^2 G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) = \epsilon \quad (2.47)$$

Dado que el error es un valor numérico, puede adquirir una forma consistente con las unidades del problema, y puede ser escrito como:

$$\mu \Delta G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) + \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi)}{\partial z} + \rho \omega^2 G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) = \rho \omega^2 \epsilon \quad (2.48)$$

Finalmente el porcentaje de error es representado como:

$$E(\%) = \left| 1 + \frac{1}{\rho \omega^2 G_{22}} \left(\mu \Delta G_{22} + \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial G_{22}}{\partial z} \right) \right| 100 \quad (2.49)$$

Donde el error está expresado como $E(\%) = \left| \frac{\epsilon}{G_{22}} \right|$.

A continuación se muestra el resultado del cálculo del error E (Figura 2.2 y Figura 2.3) para un medio con $h = 100m$, $z_0 = 100[m]$ (fuente), $\beta(0) = 200[m/s]$, $\beta_0 = 400[m/s]$, $\rho = 1000[kg/m^3]$ (constante $n = 0$) y una frecuencia de $5[Hz]$ y $10[Hz]$ respectivamente.

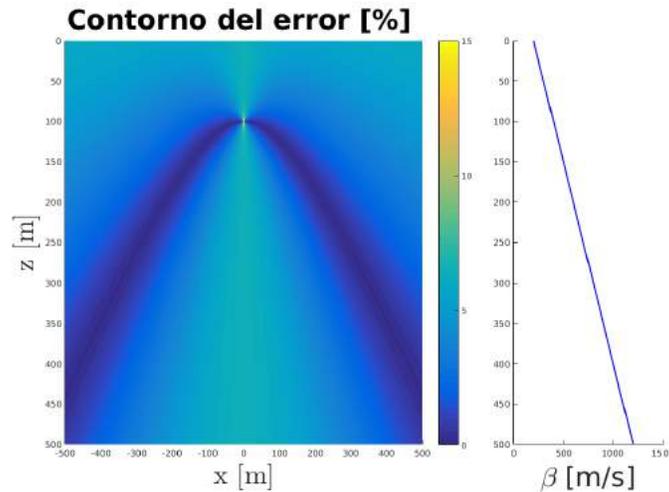


Figura 2.2: Contorno que muestra el error de la función de Green aproximada para un medio heterogéneo a una frecuencia de $5[Hz]$.

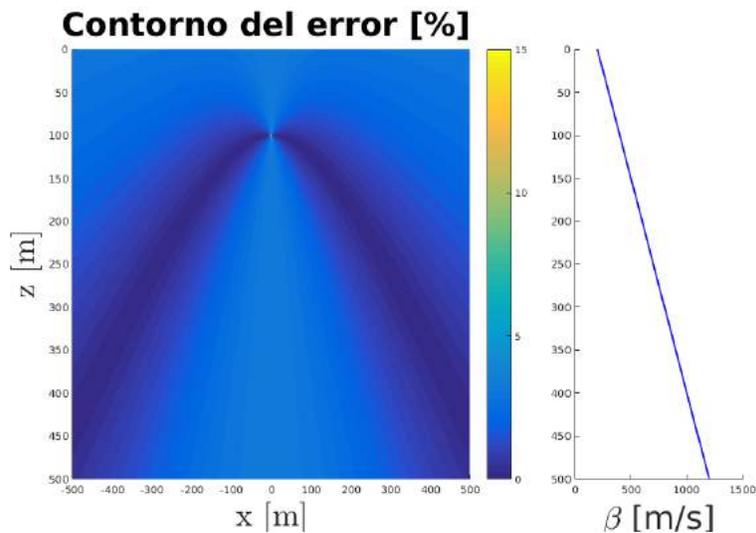


Figura 2.3: Contorno que muestra el error de la función de Green aproximada para un medio heterogéneo a una frecuencia de $10[Hz]$.

La aproximación analítica se considera buena, ya que los errores calculados a partir de la evaluación de la función de Green en la ecuación de Navier son muy bajos. Los errores calculados para frecuencias altas son muy bajos, tendiendo a cero por ciento, mientras que para frecuencias bajas el error aumenta. Se

observa que el caso de frecuencia baja ($5[Hz]$) el error no sobrepasa el 6 %, mientras que para frecuencia más alta el error no pasa del 4 %.

Capítulo 3

Método indirecto de elementos de frontera (IBEM)

“No hay rama de la matemática, por más abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real”

Nicolai Lobachevski

Entre los métodos numéricos que existen para la solución de problemas de elastodinámica está el Método de Elementos de la Frontera o conocido como BEM (Boundary Element Method) por sus siglas en inglés. Este método es una técnica numérica empleada para la solución a problemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales.

El BEM consiste en realizar la formulación débil de un problema de valores en la frontera gobernado por ecuaciones diferenciales, esto es llevar las ecuaciones diferenciales en forma de ecuaciones integrales. Se utilizan las condiciones de frontera dadas para resolver las ecuaciones integrales que tiene como dominio la frontera; en lugar de tener valores en todo el dominio definido por las ecuaciones diferenciales. La solución a las ecuaciones integrales resulta ser una solución exacta de la ecuaciones diferenciales.

En el campo de la elastodinámica surge una variación de este método el llamado Método Indirecto de Elementos en la Frontera o IBEM (Indirect Boundary Element Method) por sus siglas en inglés. La formulación que se utiliza es con base en los principios físicos de la reflexión y difracción de ondas [Sánchez-Sesma and Luzón, 1995]. Las ecuaciones integrales utilizadas tienen un riguroso desarrollo matemático, este método da excelentes resultados con pocos recursos computacionales; a continuación se desarrollará brevemente la formulación.

3.1. Teorema de reciprocidad de Maxwell - Betti

Para iniciar la formulación del IBEM presentaremos el teorema de reciprocidad de Maxwell - Betti, que es uno de los teoremas generales más importantes de la mecánica del medio continuo. Se deduce directamente del axioma del balance del momento lineal.

Teorema (Reciprocidad de Maxwell-Betti) Sea un campo de desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sobre un medio continuo en un dominio Ω para un sistema de fuerzas $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ y unas condiciones iniciales y de frontera sobre $\partial\Omega$ y sea otro campo de desplazamiento $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sobre el mismo dominio Ω para el sistema

de fuerzas $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)$ con condiciones iniciales y de frontera sobre $\partial\Omega$ distintas a las del campo de desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, entonces se cumple que [Achenbach, 2003]:

$$\int_{\Omega} \left(f_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) v_i - \left(h_i - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right) u_i dV = \int_{\partial\Omega} t_i^{(n)}(\mathbf{v}) u_i - t_i^{(n)}(\mathbf{u}) v_i dS \quad (3.1)$$

Para probar este teorema desarrollemos la integral:

$$\int_{\partial\Omega} t_i^{(n)}(\mathbf{u}) v_i dS = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_i n_j dS \quad (3.2)$$

Aplicando el teorema de Gauss - Ostrogradsky tenemos:

$$\int_{\partial\Omega} t_i^{(n)}(\mathbf{u}) v_i dS = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_i}{\partial x_j} dV \quad (3.3)$$

Desarrollando la integral anterior obtenemos:

$$\int_{\partial\Omega} t_i^{(n)}(\mathbf{u}) v_i dS = \int_{\Omega} v_i \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} dV + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (3.4)$$

Observemos que la primer parte de la integral se puede relacionar con la ley de Newton para un medio continuo (1.32), en cuanto al segundo miembro de la integral le podemos aplicar la ley de Hooke generalizada para un medio continuo (1.46), teniendo así:

$$\int_{\partial\Omega} t_i^{(n)}(\mathbf{u}) v_i dS = \int_{\Omega} \left(f_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) v_i dV + \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (3.5)$$

Análogamente podemos desarrollar la integral:

$$\int_{\partial\Omega} t_i^{(n)}(\mathbf{v}) u_i dS = \int_{\Omega} \left(h_i - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right) u_i dV + \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (3.6)$$

Dado que el medio continuo es el mismo sabemos que para ambas integrales el tensor de elementos de propiedades mecánicas es el mismo, finalmente utilizamos la propiedad de simetría de dicho tensor $C_{ijkl} = C_{klij}$ en la última integral (3.6), para tener así:

$$\int_{\partial\Omega} t_i^{(n)}(\mathbf{v}) u_i dS = \int_{\Omega} \left(h_i - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right) u_i dV + \int_{\Omega} C_{klij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dV \quad (3.7)$$

Ahora restando (3.5) con (3.7) obtenemos la ecuación (3.1), que es lo que queríamos demostrar.

Si aplicamos la transformada directa de Fourier al teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti (3.1) obtenemos:

$$\int_{\Omega} [U_i(\mathbf{x}, \omega) H_i(\mathbf{x}, \omega) - V_i(\mathbf{x}, \omega) F_i(\mathbf{x}, \omega)] dV = \int_{\partial\Omega} [V_i T_i^{(n)}(\mathbf{U}, \mathbf{x}, \omega) - U_i T_i^{(n)}(\mathbf{V}, \mathbf{x}, \omega)] dS \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) es conocida como el resultado de Betti.

3.2. Identidad de Somigliana

En esta sección daremos la identidad de Somigliana para el caso antiplano heterogéneo, no obstante esta identidad es muy general, ya que puede ser representada para el caso de deformación plana o tridimensional.

Enunciemos el problema de valores en la frontera que queremos resolver:

$$\Delta V(\mathbf{x}, \omega) + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial V(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + k^2 V(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{\mu} F(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \Omega \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.9)$$

$$V(\mathbf{x}, \omega) = \hat{V}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_v \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.10)$$

$$\mathbf{T}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{\mathbf{T}}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_t \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.11)$$

Con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Donde $\hat{V}(\mathbf{x}, \omega)$ y $\hat{\mathbf{T}}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega)$ son el movimiento y el vector de tracciones prescrito en las fronteras $\partial\Omega_v$ y $\partial\Omega_t$ respectivamente, la frontera del problema está dada por $\partial\Omega = \partial\Omega_v \cup \partial\Omega_t$.

Por otro lado consideremos el problema con valores en la frontera para un espacio completo:

$$\Delta G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi)}{\partial z} + k^2 G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) = -\frac{1}{\mu} \delta(\mathbf{x} - \xi) \quad \mathbf{x} \in \Omega \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.12)$$

$$G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{x}\|}}\right) \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi)}{\partial \|\mathbf{x}\|} + ik G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{x}\|}}\right) \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.14)$$

Obtengamos la representación integral de los problemas (3.9) y (3.12) a partir del resultado de Betti (3.8):

$$\int_{\Omega} [V(\mathbf{x}, \omega) \delta(\mathbf{x} - \xi) - G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) F(\mathbf{x}, \omega)] dV = \int_{\partial\Omega} [G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) T^{(n)}(V, \mathbf{x}, \omega) - V(\mathbf{x}, \omega) T^{(n)}(G_{22}, \mathbf{x}, \omega)] dS \quad (3.15)$$

Utilizando las propiedades de la delta de Dirac, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$c V(\xi, \omega) = \int_{\partial\Omega} [G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) - V(\mathbf{x}, \omega) T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi)] dS + \int_{\Omega} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) F(\mathbf{x}, \omega) dV \quad (3.16)$$

Donde $T_{22}^{(n)}$ es la componente del tensor de tracciones asociado a la función de Green G_{22} (Apéndice B.3). La constante c está definida como [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991]:

$$c = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega' \\ \frac{1}{2} & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.17)$$

Con Ω' como el exterior del dominio Ω tal que $\Omega \cup \Omega' = \mathbb{R}^2$ y $\Omega \cap \Omega' = \partial\Omega$. La ecuación (3.16) es conocida como la identidad de Somigliana y es una de las ecuaciones básicas para la formulación del IBEM.

Utilicemos la propiedad de simetría de la función de Green en la ecuación (3.16), para obtener:

$$c V(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\partial\Omega} \left[G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) T^{(n)}(\xi, \omega) - V(\xi, \omega) T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) \right] dS_{\xi} + \int_{\Omega} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) F(\xi, \omega) dV_{\xi} \quad (3.18)$$

En las diferenciales dS_{ξ} y dV_{ξ} el subíndice ξ indica la variable sobre la cual se realiza la integración.

La identidad de Somigliana (3.18) se considera una transcripción matemática del principio de Huygens-Fresnel, el cual establece que para cada punto de un frente de onda actúa una fuente de ondas cilíndricas (figura 3.1). Matemáticamente, este principio se observa al recordar que el campo de desplazamientos (3.18) es el resultado de la suma de las contribuciones de las fuentes puntuales para cada $\xi \in \partial\Omega$, representadas por la función de Green.

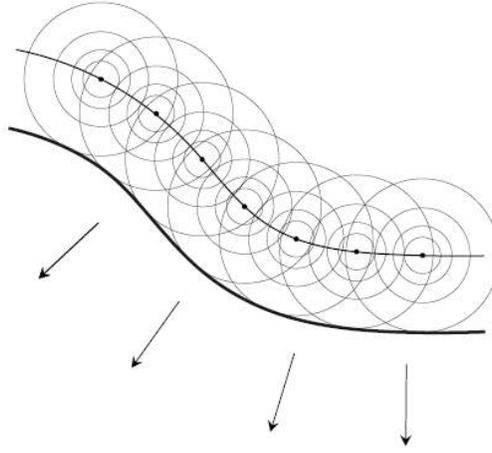


Figura 3.1: Ilustración geométrica del principio de Huygens-Fresnel

3.3. Ecuaciones Básicas del IBEM

La identidad de Somigliana, es la base del modelo numérico del IBEM. Para desarrollar las ecuaciones básicas del IBEM, partamos de la identidad de Somigliana (3.18) y consideremos que las fuerzas de cuerpo son cero:

$$c V(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\partial\Omega} \left[G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) T^{(n)}(\xi, \omega) - V(\xi, \omega) T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) \right] dS_{\xi} \quad (3.19)$$

Para obtener el campo de desplazamiento y el campo de tracciones, seguiremos el desarrollo presentado en [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991]. Consideremos el llamado problema exterior, esto es el problema con valores en la frontera tal que:

$$\Delta V'(\mathbf{x}, \omega) + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial V'(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + k^2 V'(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega' \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.20)$$

$$V'(\mathbf{x}, \omega) = V(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega' = \partial\Omega \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.21)$$

$$\mathbf{T}^{(n)'}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{T}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega' = \partial\Omega \cap -\infty < \omega < \infty \quad (3.22)$$

Donde $V'(\mathbf{x}, \omega)$ es el campo de desplazamientos en el dominio Ω' y $\mathbf{T}^{(n)'}(\mathbf{x}, \omega)$ el vector de tracciones asociado al problema exterior en el dominio Ω' . Dado que $\partial\Omega = \partial\Omega'$ es la frontera común a ambas regiones, se deduce que la función de Green es la misma para el problema interior y para el exterior. Aplicando la identidad de Somigliana (3.19) para el problema exterior (3.20) y el problema (3.12) tenemos:

$$c' V'(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\partial\Omega} \left[G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) T^{(n)'}(\xi, \omega) - V'(\xi, \omega) T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) \right] dS_{\xi} \quad (3.23)$$

Ahora la constante c' toma los valores:

$$c' = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega' \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.24)$$

Sumando la identidad de Somigliana del problema exterior (3.19) con la del problema interior (3.23) obtenemos:

$$V(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\partial\Omega} \left[G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) \left(T^{(n)}(\xi, \omega) - T^{(n)'}(\xi, \omega) \right) - \left(V(\xi, \omega) - V'(\xi, \omega) \right) T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) \right] dS_{\xi} \quad (3.25)$$

Sobre la frontera $\partial\Omega$ se cumple que $v'(\xi, \omega) = v(\xi, \omega)$ debido a las condición (3.21) y definiendo $\phi(\xi, \omega) = T^{(n)}(\xi, \omega) - T^{(n)'}(\xi, \omega)$ como la distribución de fuerza, la ecuación (3.25) se reduce a:

$$V(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\partial\Omega} \phi(\xi, \omega) G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_{\xi} \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.26)$$

Finalmente a la ecuación (3.26) se le puede aplicar la ley de Hooke para obtener una representación análoga para el campo de tracciones, teniendo así:

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\partial\Omega} \phi(\xi, \omega) T_{22}^{(n)}(\xi, \omega) dS_{\xi} \quad \mathbf{x} \in \Omega - \partial\Omega \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) es válida únicamente en el dominio Ω excepto en $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ya que las funciones de Green y el Tensor de tracciones son singulares en $\mathbf{x} = \xi$. Cuando $\mathbf{x} = \xi$ la ecuación (3.27) se reescribe como [Kupradze, 1963]:

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}, \omega) + \int_{\partial\Omega} \phi(\xi, \omega) T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_{\xi} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.28)$$

Las ecuaciones (3.26), (3.27) y (3.28) completan la formulación integral del IBEM. El título de “indirecto”, se debe al hecho de que para encontrar el campo de desplazamiento v , primero se debe encontrar la distribución de fuerzas ϕ , que no es una de las variables originales del problema; calculado el valor de la distribución de fuerzas se sustituye en la ecuación (3.26) y se obtiene finalmente los desplazamientos.

Para obtener la distribución de fuerzas ϕ , se le debe dar solución a la ecuación (3.28), esta ecuación es una ecuación integral de Fredholm de segunda especie (Apéndice A.6), donde el núcleo son las tracciones asociado a la función de Green $T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi)$. La función independiente es el vector de tracciones $T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega)$ y la incógnita buscada es la distribución de fuerzas $\phi(\mathbf{x}, \omega)$.

3.4. Discretización del IBEM

Para realizar la discretización del IBEM es necesario discretizar la frontera, ya que el dominio del problema está ahí; por ello hagamos que la frontera $\partial\Omega$ esté compuesta por segmentos de recta de la forma Γ_i , cumpliendo que $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$, realicemos también otra consideración, digamos que la distribución de fuerzas $\phi(\mathbf{x}, \omega)$ es constante dentro del segmento discretizado Γ_i , entonces la ecuación del desplazamiento (3.26) queda discretizada como:

$$V(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.29)$$

Análogamente la discretización para el campo de tracciones queda dada por:

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi \quad \mathbf{x} \in \Omega - \partial\Omega \quad (3.30)$$

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}, \omega) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.31)$$

Recordando el problema de valores en la frontera (3.9), teníamos una frontera $\partial\Omega_v$ y $\partial\Omega_t$ en las cuales se tenían prescritos los desplazamientos y las tracciones respectivamente; se debe evaluar en los N_v puntos centrales de cada elemento ($i = 1, 2, \dots, N_v$) donde el desplazamiento es prescrito y en los N_t puntos centrales de los elementos ($i = N_v + 1, N_v + 2, \dots, N$) donde las tracciones fueron prescritas. El problema se reduce a resolver un sistema de N ecuaciones con N incógnitas.

Establecida ya la discretización para obtener la distribución de fuerzas $\phi(\omega)$, ahora el problema radica en calcular las integrales $\int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$ y $\int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$. Para eso hay que observar que las integrales son singulares cuando se acercan a la fuente, esto es cuando $\mathbf{x} \approx \xi$, por ello la integración se debe realizar en dos partes:

1. Para el cálculo de las integrales fuera de las singularidades se utiliza una integración numérica, la cual está dada por la cuadratura Gauss, esto tanto para el caso homogéneo como para el caso heterogéneo.
2. Cuando se integra dentro de un radio muy cercano dentro de la singularidad, se opta por realizar una integración analítica (Apéndice B.4). Esta integración únicamente se realiza en el caso de la integral $\int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$ ya que el valor de la integral $\int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$ cerca de la singularidad es cero. La integración analítica es la misma para el caso homogéneo y para el heterogéneo, ya que las coordenadas bipolares en un radio muy cercano a los polos (fuente) se comportan como las coordenadas polares.

La construcción del campo difractado a cada frecuencia requiere que se garantice la representación de la superficie difractora representada por N segmentos rectos, en el centro de cada cual se estable la solución (se denomina punto de colocación). Conforme aumenta la frecuencia se suministran más puntos de colocación para mantener la relación N/λ donde λ es la longitud de onda mínima entre los medios a cada lado de la frontera.

Para finalizar se dará un ejemplo de la aplicación del método del IBEM para el caso de geometrías arbitrarias; para ello hay que recordar un principio básico de la física de ondas, el cual nos dice que el campo

de desplazamiento total en una superficie libre, es igual al desplazamiento debido a la onda incidente más el desplazamiento debido a la onda reflejada (figura 3.2).

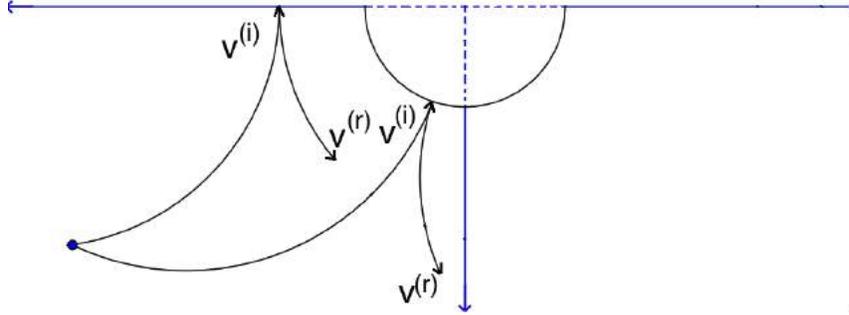


Figura 3.2: Incidencia y reflejo de un rayo en un medio heterogéneo

Considerando lo anterior, formulamos que el campo de desplazamiento totales es igual a:

$$v^{(T)} = v^{(i)} + v^{(r)} \quad (3.32)$$

Donde $v^{(T)}$ es el campo de desplazamientos totales, $v^{(i)}$ es el desplazamiento debido a la onda incidente y $v^{(r)}$ es el desplazamiento debido a la onda reflejada y difractada. Ahora bien, el campo de desplazamiento debido a la onda incidente se conoce, se dedujo para una fuerza puntual impulsiva unitaria en un espacio completo tanto para un medio homogéneo como para un medio heterogéneo, entonces la incógnita para conocer el campo de desplazamientos totales es obtener el campo debido a la onda reflejada y difractada, he aquí donde entra el IBEM, ya que ese campo es expresado gracias a la ecuación (3.26), entonces el campo de desplazamientos totales viene dado por:

$$V(\mathbf{x}, \omega) = G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_{\xi} \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.33)$$

De la misma manera se puede conocer el campo de tracciones totales, teniendo así:

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_{\xi} \quad \mathbf{x} \in \Omega - \partial\Omega \quad (3.34)$$

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) + \frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}, \omega) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_{\xi} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.35)$$

Ahora, como conocemos las tracciones prescritas en la frontera $\partial\Omega$ las cuales son iguales a cero debido a la condición de ser una superficie libre la ecuación (3.34) nos queda como:

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_{\xi} = -T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) \quad \mathbf{x} \in \Omega - \partial\Omega \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}, \omega) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_{\xi} = -T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.37)$$

En la ecuación (3.36) obtenemos un sistema de de N ecuaciones con N incógnitas de la forma $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{B}$; conocemos el valor de $T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi)$ el cual es el vector de términos independientes (\bar{B}), la matriz de coeficientes (\mathbf{A}) está dada por la integral de las tracciones $\int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$ que también conocemos, el vector de incógnitas \bar{x} está dado por la distribución de fuerzas $\phi(\omega)$. Resolviendo el sistema, obtenemos el valor de la distribución de fuerza, después este vector se sustituye en la ecuación (3.33) y así se obtiene el campo de desplazamientos $V(\mathbf{x}, \omega)$ (función de transferencia) que es la incógnita original del problema.

De manera análoga, se puede obtener el modelo numérico para el caso de inclusiones, en esos problemas el IBEM no sólo se debe considerar la onda reflejada y difractada, sino que también la refractada. En estos caso las condiciones de frontera preescritas obedecen a continuidad de desplazamiento y de tracciones, además de superficie libre.

Capítulo 4

Aplicaciones

“El álgebra es generosa. A menudo da más de lo que se le pide”

Jean Le Rond D’Alambert

Finalmente, se utilizará la función de Green obtenida para un medio heterogéneo bajo el esquema numérico del método indirecto de elementos de frontera, para obtener así la respuesta de diferentes geometrías y de inclusiones. La respuesta de todos los modelos es para una fuerza puntual impulsiva para el caso antiplano.

4.1. Validación

Antes de validar el modelo numérico verificaremos una propiedad que tiene la función de Green para el medio heterogéneo, para un valor de h muy grande ($h \rightarrow \infty$) la respuesta es la de un medio homogéneo. Para esta prueba tomemos un valor de h suficientemente grande y comparemos la respuesta contra la solución analítica de un semiespacio homogéneo (Apéndice B.5). Al hacer que h se aproxime a un valor numérico muy grande (Figura 4.1), la variación de velocidad de onda del medio heterogéneo toma una pendiente nula, dando como resultado que el medio tenga un valor de velocidad de onda constante igual a la velocidad de onda en la superficie $\beta(z) = \beta(0)$

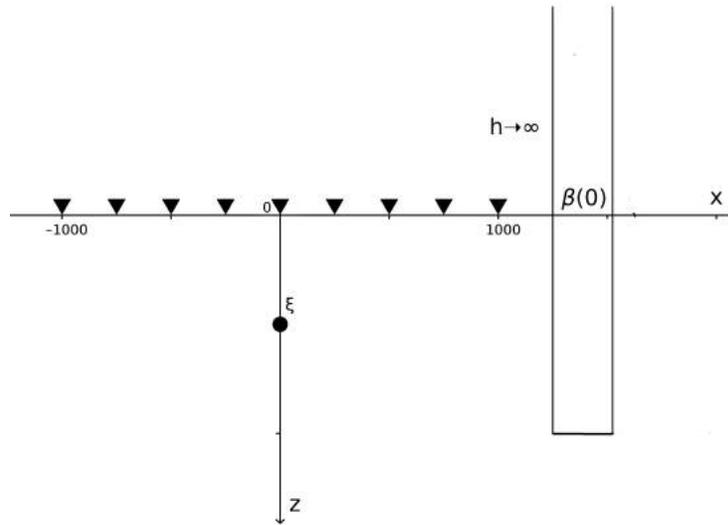


Figura 4.1: Modelo de un semiespacio heterogéneo, (para h muy grande homogéneo)

Consideremos una fuente ubicada en $\xi = (0m, 200m)$. Una velocidad de onda en la superficie de $\beta(0) = 200[m/s]$, la misma que tendrá el modelo del medio homogéneo. Para esta prueba se convolucionará la función de transferencia con un pulso de Ricker (Apéndice B.2) con $ts = 2[s]$ y un $tp = 1[s]$, para así obtener la respuesta en tiempo. Para el cálculo de la respuesta usaremos 31 observadores distribuidos en la superficie entre $-1000m$ y $1000m$, con un $\Delta t = 0.15[s]$ y una frecuencia máxima de $f_{max} = 3.2[Hz]$.

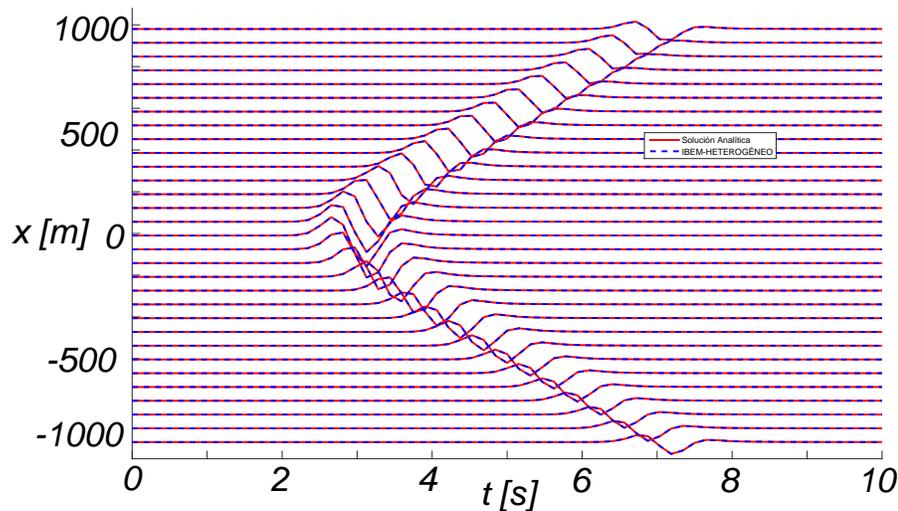


Figura 4.2: Sismogramas sintéticos para un medio heterogéneo con $h = 10,000m$

La respuesta del medio heterogéneo mostrada en la figura 4.2 es idéntica a la respuesta calculada con la solución analítica para el medio homogéneo (Apéndice B.5). Así se comprueba que para valores de h lo suficientemente grandes el medio heterogéneo se comporta como un medio homogéneo.

Para validar la respuesta del medio heterogéneo se utilizará el método de Thomson-Haskell (Apéndice B.6). En el método de Thomson-Haskell utilizaremos 300 estratos que aproximen al perfil de velocidades

(Figura 4.3) dado por la variación de velocidades del medio heterogéneo.

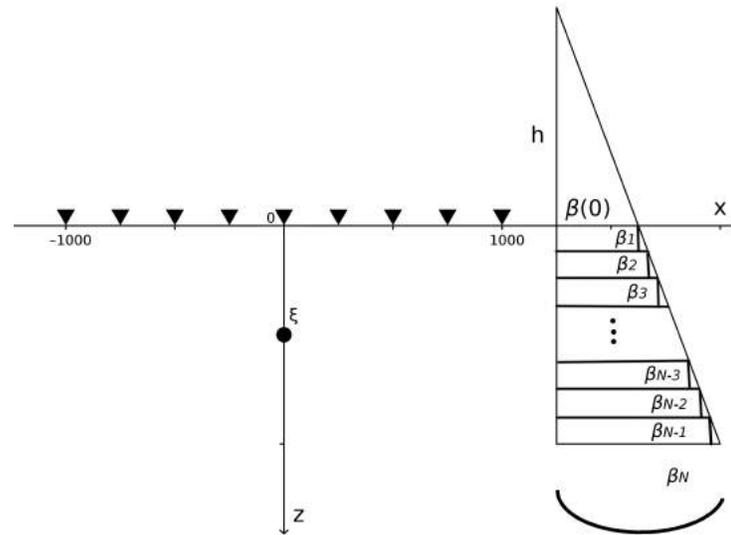


Figura 4.3: Modelo de un semiespacio heterogéneo y una aproximación a él con el modelo del método de Thomson-Haskell

Existe un problema a la hora de realizar esta verificación, este se debe a que el medio heterogéneo tiene una variación de velocidades lineal respecto al eje z , mientras que el método de Thomson-Haskell tiene una variación discreta que se trunca hasta el semiespacio; esto nos lleva a tener problemas al final de la respuesta. Para esta prueba se realizaremos dos modelos, el primero está dado por un $h = 200[m]$ y una fuente ubicada en $\xi = (0m, 200m)$, el segundo está dado por un $h = 400[m]$ y una fuente ubicada en $\xi = (0m, 200m)$. Para obtener la respuesta en tiempo utilizaremos el mismo pulso de Ricker y la misma discretización temporal que en el caso anterior.

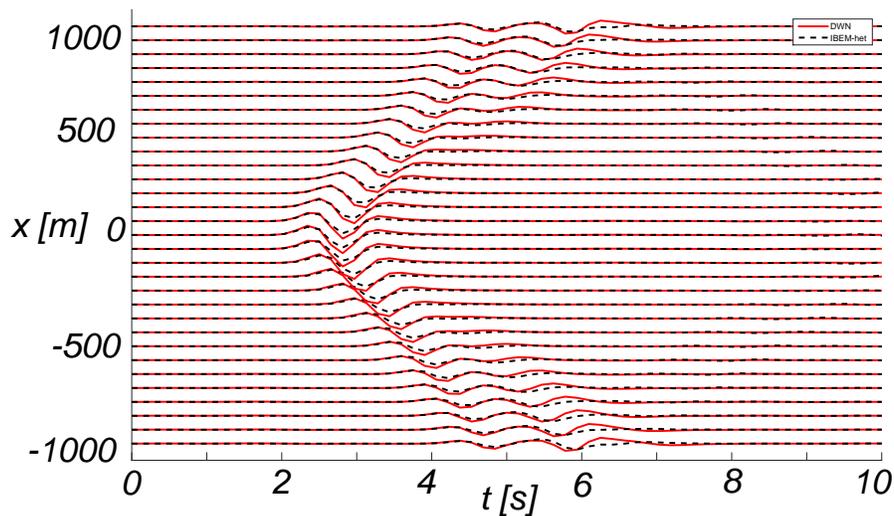


Figura 4.4: Sismogramas sintéticos de un medio heterogéneo con $h = 200m$

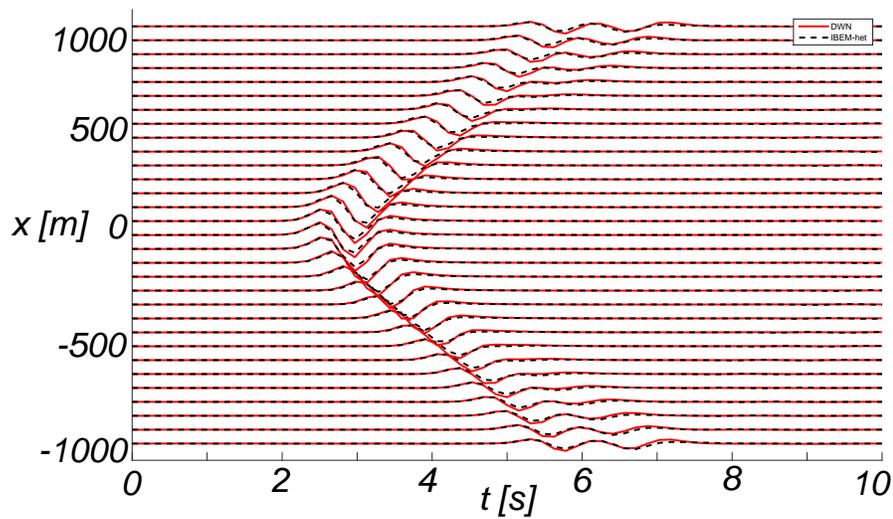


Figura 4.5: Sismogramas sintéticos de un medio heterogéneo con $h = 400m$

La validación mostrada en las figuras 4.4 y 4.5 muestran una buena comparación entre los modelos, vemos que el primer arribo del frente de onda en ambos modelos es el mismo y además se logra recrear la onda superficial después del primer arribo.

4.2. Respuesta sísmica de topografías

En esta sección se daremos algunos ejemplos de la respuesta sísmica de topografías, se analizará el caso del semiespacio y el caso de una geometría cóncava. Compararemos los resultados con modelos análogos para medios es homogéneos.

Para todos los modelos consideraremos la misma discretización tanto espacial como temporal, teniendo así que los modelos tienen distribuidos 101 observadores en la superficie dentro del intervalo $[-1000m, 1000m]$ con una discretización temporal de $\Delta t = 0.15[s]$ y una frecuencia máxima $f_{max} = 3.2[Hz]$.

El primer modelo a analizar es un semiespacio heterogéneo como se muestra en la figura 4.6.

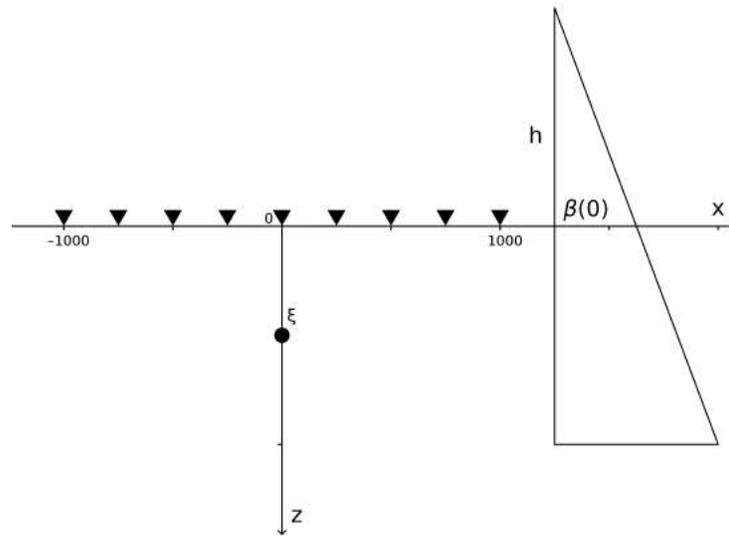


Figura 4.6: Modelo de un semiespacio heterogéneo

Obtendremos la respuesta para una fuente ubicada en $\xi = (0, 150m)$, y un valor de $h = 300m$. La densidad a considerar es de $\rho = 1800[kg/m^3]$ y la velocidad en la superficie es igual a $\beta(0) = 200[m/s]$. Para la respuesta en el tiempo usaremos un pulso de Ricker con parámetros $t_s = 2[s]$ y $t_p = 1[s]$.

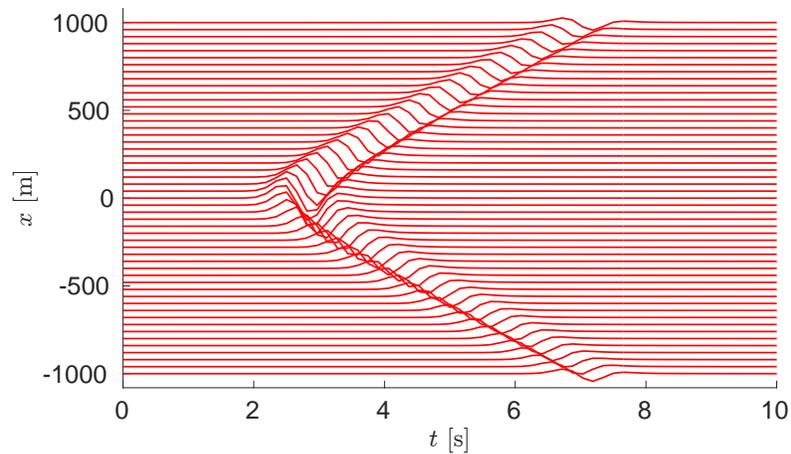


Figura 4.7: Sismogramas sintéticos del semiespacio homogéneo

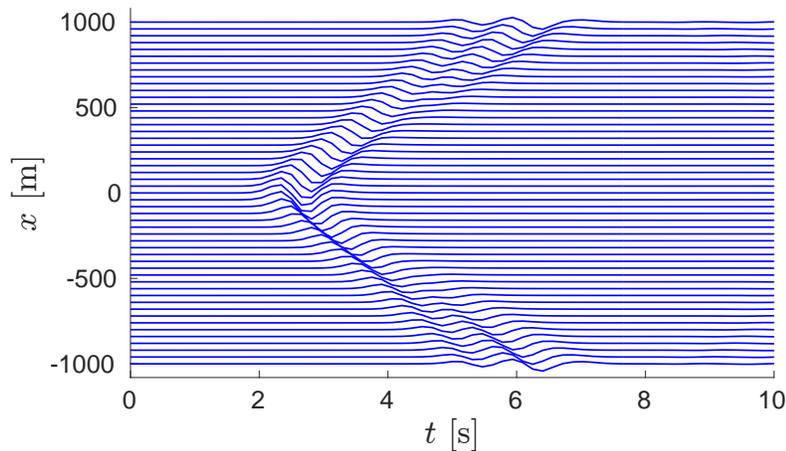


Figura 4.8: Sismogramas sintéticos del semiespacio heterogéneo con $h = 300$

Un efecto interesante es la aparición de ondas superficiales en el modelo heterogéneo (Figura 4.8) en contraste con el modelo homogéneo (Figura 4.7).

En un medio homogéneo, en el caso antiplano, no existe propagación de ondas superficiales [Aki and Richards, 2002], en cambio en un medio con estratos plano con diferentes valores de velocidad β se puede demostrar que aparecen este tipo de ondas denominadas ondas de Love.

El modelo heterogéneo se puede pensar como el caso límite de una infinidad de estratos, con un espesor infinitesimal. Para poder apreciar más este efecto se observemos el diagrama fk de ambos modelos. Este diagrama se obtiene al aplicar la transformada espacial de Fourier a la función de transferencia.

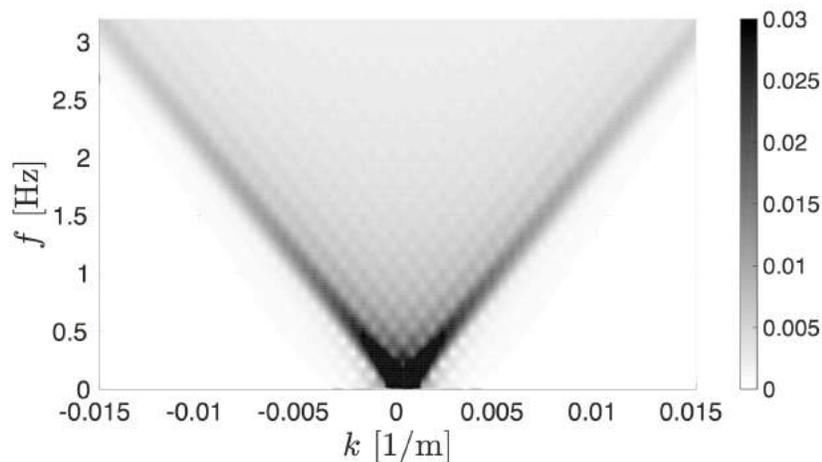


Figura 4.9: Diagrama fk del semiespacio homogéneo

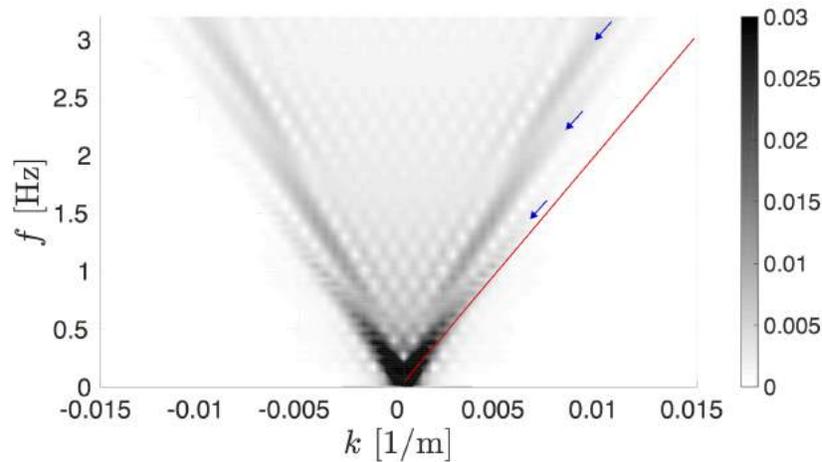


Figura 4.10: Diagrama fk del semiespacio heterogéneo

En el diagrama fk para el medio homogéneo (Figura 4.9) muestra una recta cuya pendiente es igual a la velocidad del semiespacio debido a la relación $\beta = f/k$. En el diagrama fk para el medio heterogéneo (Figura 4.10) observamos curvas que se dispersan (flechas azules), estas curvas indican la presencia de ondas superficiales en la respuesta del medio. En línea roja se representa la pendiente de la velocidad del semiespacio homogéneo $\beta = 200[m/s]$.

Las ondas superficiales son generadas debido a la reflexión, refracción y difracción de los rayos. En el modelo heterogéneo de un semiespacio no hay ni refracción ni difracción, el fenómeno que predomina es la reflexión debida a la curvatura de los rayos. Las ondas superficiales son las que causan más daño estructuralmente ya que poseen amplitudes mayores y duraciones largas en comparación con las ondas de cuerpo (SH).

El siguiente modelo a analizar es el de una geometría cóncava triangular, la altura del modelo es de $100[m]$ y la base de $200[m]$ (figura 4.11). El fin de modelar esta geometría es el de contrastar los efectos de la geología superficial local.

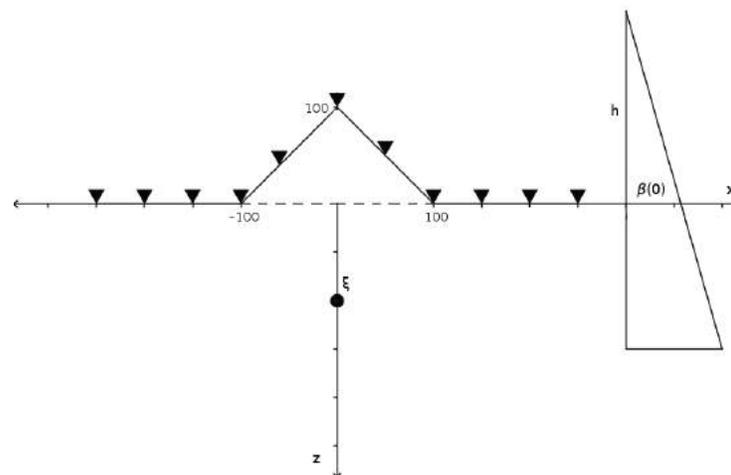


Figura 4.11: Modelo de una geometría cóncava heterogénea

Analizaremos para un valor de $h = 300[m]$ y una fuente ubicada en $\xi = (0, 150m)$. El modelo tiene un valor de velocidad de propagación de onda en $z = 0$ de $\beta(0) = 200[m/s]$.

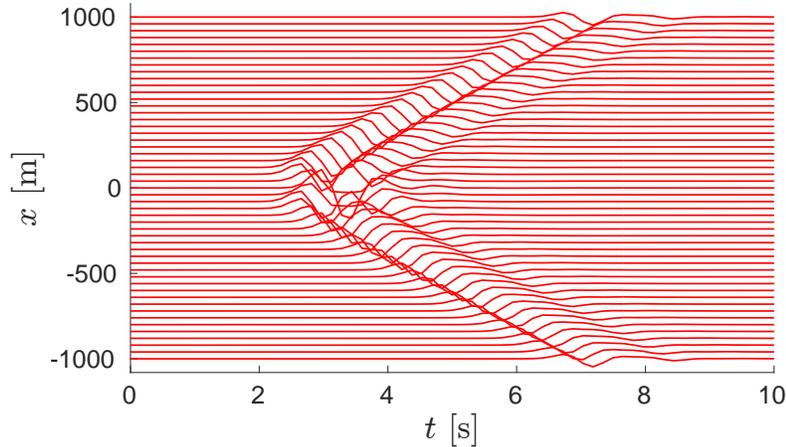


Figura 4.12: Sismogramas sintéticos de la geometría triangular homogénea

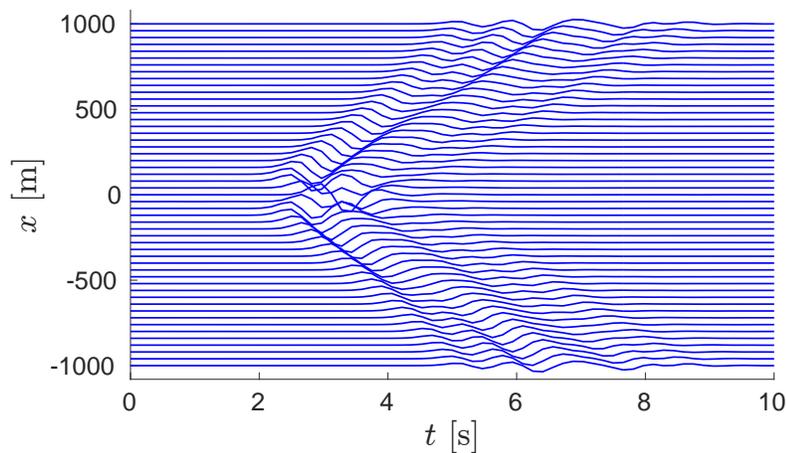
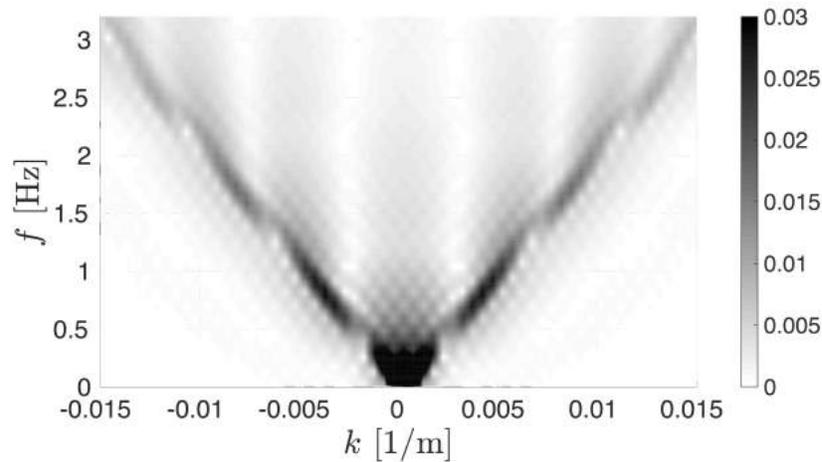
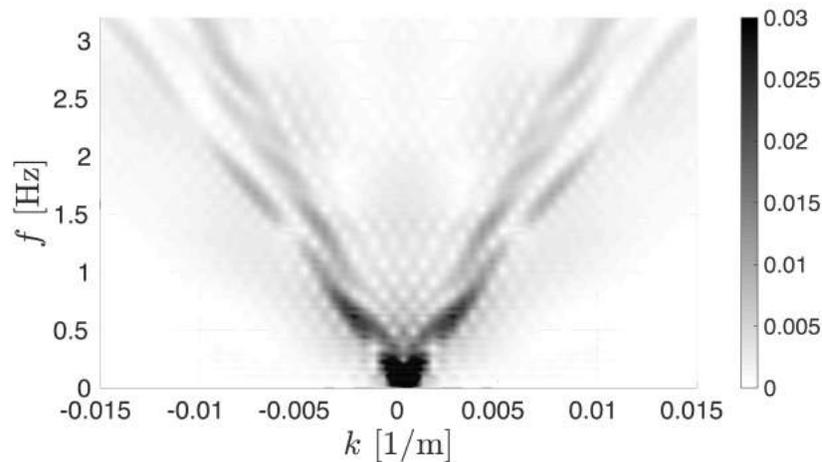


Figura 4.13: Sismogramas sintéticos de la geometría triangular heterogénea

La respuesta en el medio heterogéneo (Figura 4.13) muestra una mayor duración que la respuesta obtenida para el medio homogéneo (Figura 4.12). La curvatura de los rayos dentro de la concavidad del medio heterogéneo genera fenómenos complejos de reflexión y difracción de los frentes de onda. Este fenómeno genera que las ondas superficiales tengan mayor duración en contraste con la respuesta del medio homogéneo.

Figura 4.14: Diagrama fk de geometría triangular homogéneaFigura 4.15: Diagrama fk de geometría triangular heterogénea

El diagrama fk (Figura 4.15) del medio heterogéneo muestra curvas de dispersión que indican la presencia de ondas superficiales. El diagrama fk en el medio homogéneo (Figura 4.14) muestra una tendencia similar al semiespacio homogéneo, ya que la pendiente de las curvas se aproxima a la velocidad del modelo $\beta = 200[m/s]$. En cambio las curvas del diagrama fk del medio heterogéneo muestran diferentes valores de las pendientes teniendo diferentes modos de vibración en el modelo.

La variación entre la geometría del modelo del semiespacio analítico (Figura 4.8) y la geometría cóncava (Figura 4.13) da cambios significativos en la duración y en la amplitud de la respuesta, estos cambios son conocidos como efectos de sitio. Por ello en el modelado sísmico se debe tomar mucho en cuenta la geología superficial local, ya que estas características locales generan respuestas totalmente distintas en comparación con modelos simplificados.

4.3. Respuesta sísmica de valles aluviales

Un modelo de interés en la sismología es el llamado valle aluvial. La cuenca del Valle de México se puede aproximar a este tipo de modelos, ya que está constituida por una serie de estratos arcillosos deformables que descansan en depósitos más rígidos. El modelado de estas estructuras ha llevado a la conclusión de que los efectos de sitio generan amplificaciones notables [Benites and Aki, 1994]. A continuación se modelaremos un valle aluvial como el mostrado en la figura (4.16).

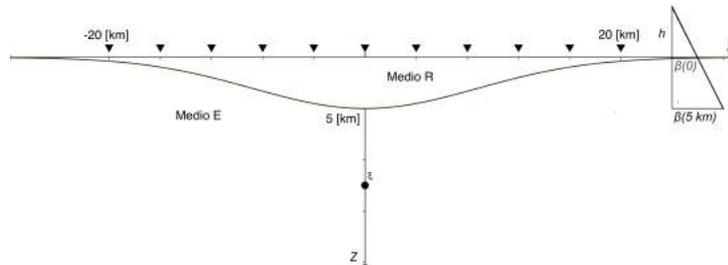


Figura 4.16: Modelo de un valle aluvial con una región R heterogénea

La geometría del valle aluvial es la utilizada por [Sills, 1978]. La fuerza puntual está localizada dentro del medio E . La inclusión tiene la característica de ser un medio heterogéneo; en cuanto al semiespacio se considerará como un medio homogéneo.

La discretización temporal es para una frecuencia máxima $f_{max} = 3.2[Hz]$ y un $\Delta t = 0.15[s]$; esto para 512 frecuencias. La densidad en el medio R es de $\rho_R = 1800[kg/m^3]$, y la del medio E es de $\rho_E = 2700[kg/m^3]$; dando una relación entre ellas de $\bar{\rho} = 2/3$. Se colocaron 101 observadores distribuidos en el intervalo $[-250km, 250km]$.

La relación de velocidad de onda es de $\bar{\beta} = \beta_R(0)/\beta_E = 1/2$, la velocidad en la superficie del medio R es de $\beta_R(0) = 200[m/s]$ y la del semiespacio es de $\beta_E = 400[m/s]$. La fuente está ubicada en $\xi = (0, 300km)$. En el caso heterogéneo se tiene un valor de $h = 50[km]$.

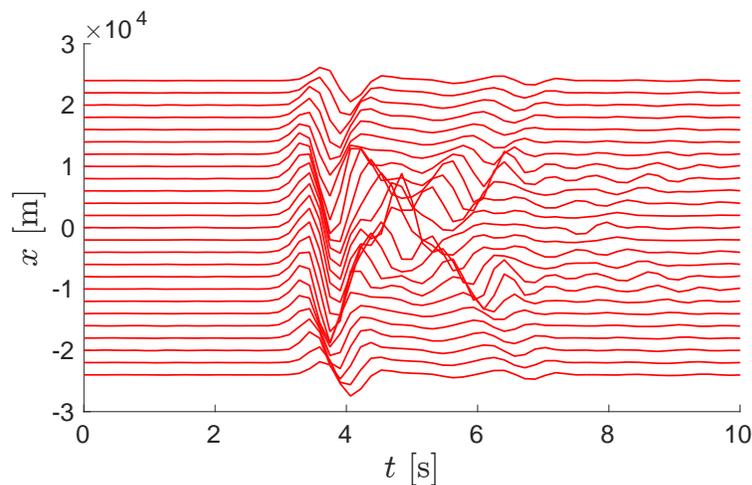


Figura 4.17: Sismogramas sintéticos para el valle aluvial homogéneo

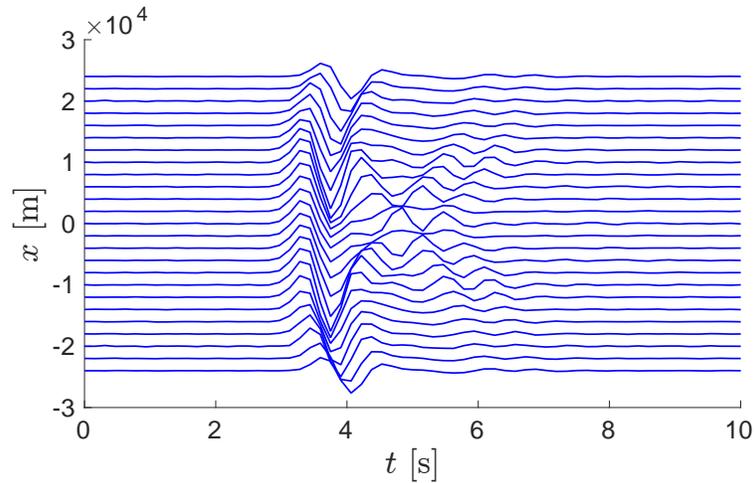


Figura 4.18: Sismogramas sintéticos para el valle aluvial heterogéneo

La respuesta en el medio homogéneo (Figura 4.17) tiene una duración mayor duración respecto a la del medio heterogéneo (Figura 4.18). El cambio de velocidad en el medio homogéneo es fuerte ya que el frente de onda pasa de una velocidad de $\beta = 400[m/s]$ a una de $\beta = 200[m/s]$, esto provoca que la refracción de la onda genere amplificación y una mayor duración. En cuanto en el medio heterogéneo el cambio de velocidad es suave, ya que a la profundidad de $z = 5[km]$ la velocidad en la región R es la misma que la región E ($\beta = 400[m/s]$) provocando que la respuesta en el valle heterogéneo se vea atenuada.

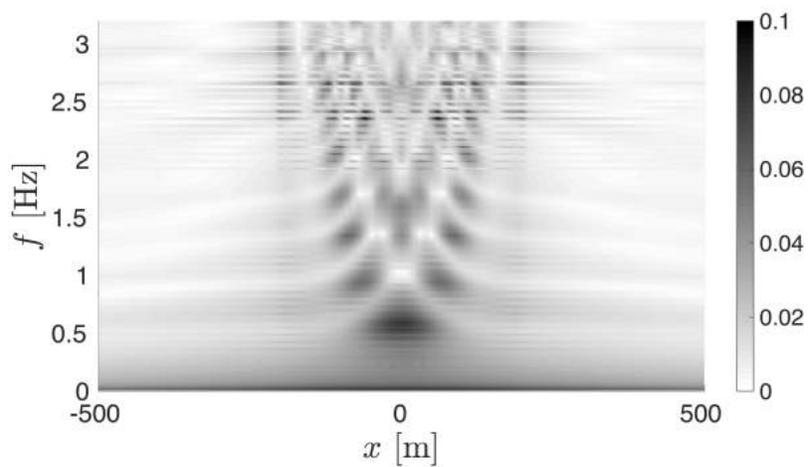


Figura 4.19: Diagrama fx para el valle aluvial homogéneo

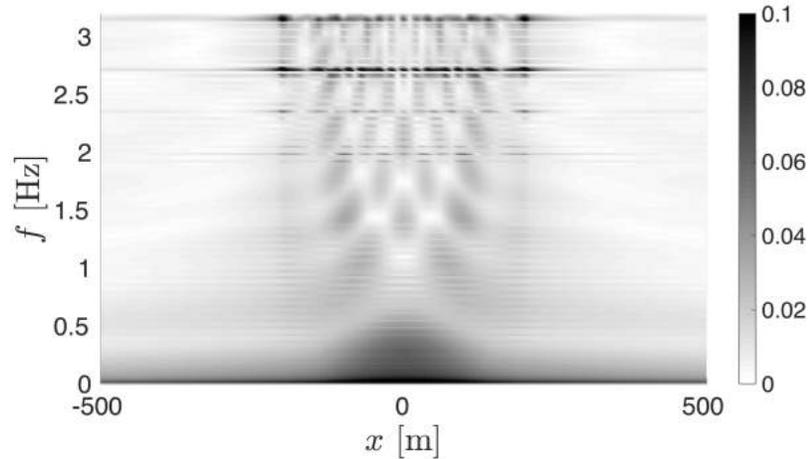


Figura 4.20: Diagrama $f x$ para el valle aluvial heterogéneo

La disminución de las amplitudes en el medio heterogéneo se puede ver de forma clara en los diagramas $f x$. En el diagrama $f x$ del medio homogéneo (Figura 4.19) hay un aumento de las amplitudes dentro del valle debido al cambio de la velocidad de onda, esta amplificación llega hasta la frecuencia de $3[Hz]$. En cuanto al diagrama $f x$ del medio heterogéneo muestra una disminución de las amplitudes dentro del valle, generado por el cambio suave de la velocidad de onda dentro de este.

4.4. Respuesta sísmica de inclusiones

Finalmente se obtendrá la respuesta de una inclusión debido a una fuerza puntual dentro del medio E . La inclusión a estudiar se muestra en la figura (4.21). Dado que este estudio se ha desarrollado para el caso antiplano, se podría pensar a este tipo de modelos una representación muy simplificada de estructuras cuya dimensión en el eje y exceda a las otras dos. Un ejemplo de estas estructuras podría ser el caso de la cortina de una presa; sin embargo, la correcta modelación de estas estructuras requeriría que el caso fuera tridimensional.

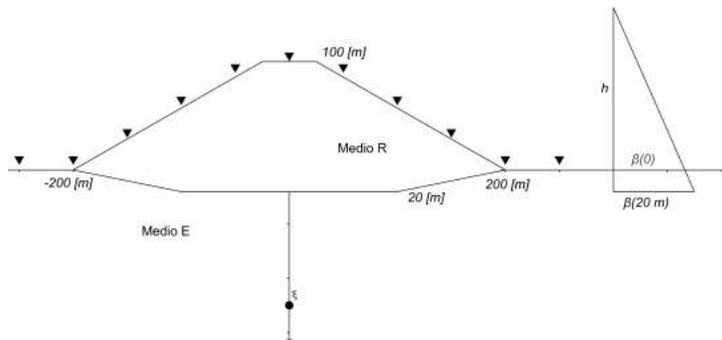


Figura 4.21: Modelo de una inclusión con una región R heterogénea

Dicha inclusión está formada por un hexágono irregular con una base mayor de $200[m]$ y una base menor igual a $50[m]$. La inclusión tiene característica de ser un medio heterogéneo; en cuanto al semiespacio de un medio homogéneo.

La discretización temporal es la misma que la del valle aluvial. La relación de velocidad de onda es de $\bar{\beta} = 1/2$, la velocidad en la superficie del medio R es de $\beta_R(0) = 200[m/s]$ y la del semiespacio de $\beta_E = 400[m/s]$. La fuente está ubicada en $\xi = (0, 300m)$ con un valor de $h = 200[m]$.

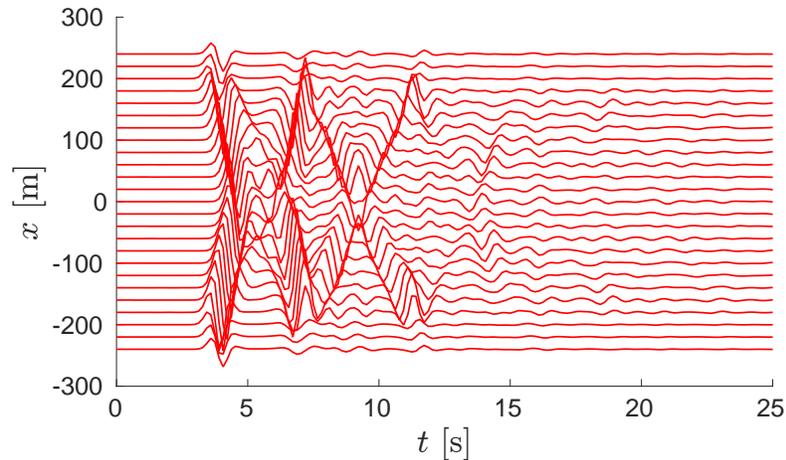


Figura 4.22: Sismogramas sintéticos de la inclusión homogénea

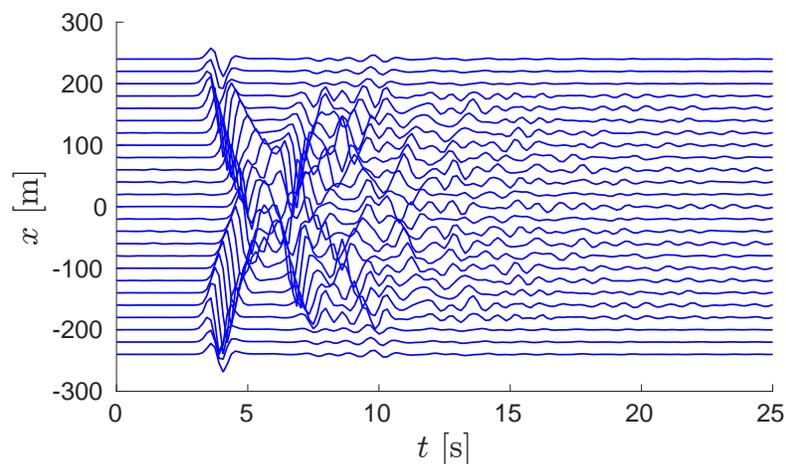
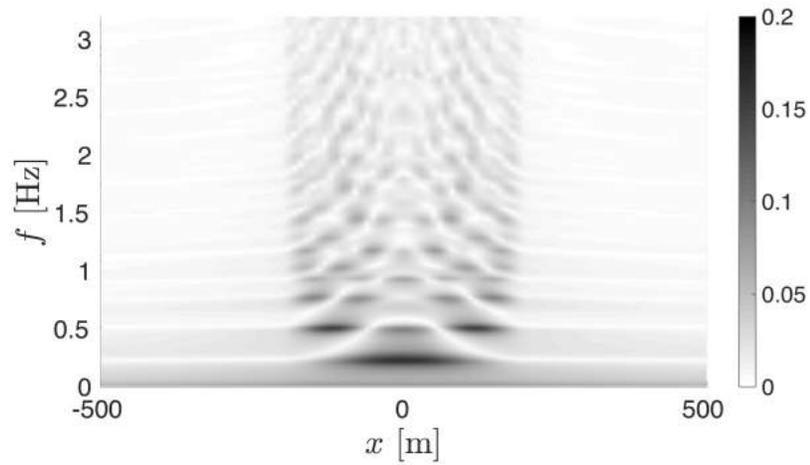
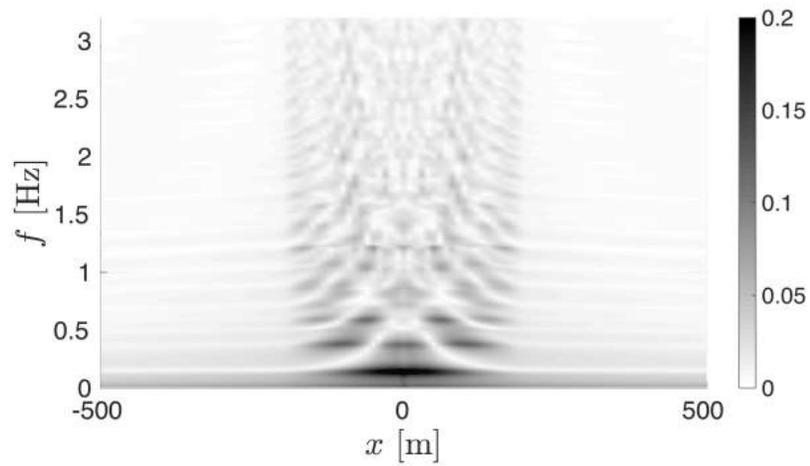


Figura 4.23: Sismogramas sintéticos de la inclusión heterogénea

La respuesta del medio heterogéneo (Figura 4.23) tiene mayor duración y un aumento de las amplitudes, mientras que en el modelo homogéneo hay una atenuación de la respuesta (Figura 4.22). En ambos modelos hay un cambio fuerte en la velocidad de onda. En el medio homogéneo hay un cambio de $\beta_E = 400m/s$ a una de $\beta_E = 200m/s$, en cuanto al medio heterogéneo hay un cambio de velocidad de $\beta_E = 400m/s$ a una velocidad de $\beta = 220[m/s]$, sin embargo dentro de la inclusión del valle heterogéneo la velocidad disminuye hasta $\beta = 100[m/s]$, la curvatura de los rayos produce un fenómeno de resonancia que genera el aumento de las amplitudes y mayor duración de la respuesta.

Figura 4.24: Diagrama fx de la inclusión homogéneaFigura 4.25: Diagrama fx de la inclusión heterogénea

El diagrama fx del medio heterogéneo (Figura 4.25) el aumento de las amplitudes dentro de la inclusión, en cuanto en el diagrama fx del medio homogéneo (Figura 4.24) hay una disminución de las amplitudes.

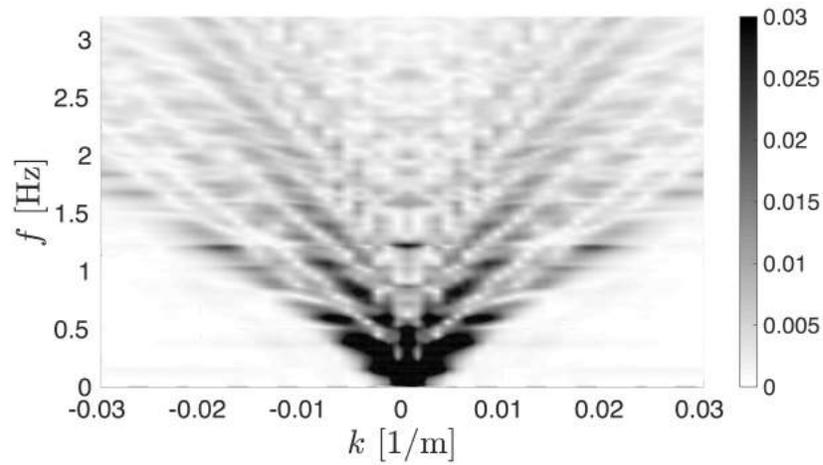


Figura 4.26: Diagrama fk de la inclusión heterogénea

El diagrama fk del medio heterogéneo (Figura 4.26) muestra las curvas de dispersión del modelo, las cuales indican la presencia de ondas superficiales. En este diagrama se ven los modos de vibración asociados a cada curva de dispersión. La presencia de ondas superficiales en este modelo provoca fenómenos de resonancia que son desfavorables para estructuras con estas características.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se presentó una aproximación para obtener la solución fundamental de un medio elástico heterogéneo. La solución fue utilizada en el Método Indirecto de Elementos en la Frontera para obtener la respuesta de topografías e inclusiones.

La función de Green aproximada para un medio heterogéneo se comporta correctamente, ya que genera errores despreciables, que son por lo general menores al 5 %. Además es muy sencilla de calcular, ya que el factor de corrección Λ es independiente de la frecuencia. Una ventaja importante de la función de Green aproximada es que es continua en todo su dominio y la singularidad debida a la fuerza puntual aplicada se puede tratar como en el caso de la función de Green analítica para un medio homogéneo.

La obtención de la función de Green para un espacio completo heterogéneo brinda la capacidad de poder utilizarla mediante el Método Indirecto de Elementos en la Frontera para aplicarla en topografías o inclusiones. El cálculo de la respuesta de un medio heterogéneo tiene el mismo costo computacional que el cálculo de la respuesta de un medio homogéneo.

De entre los cambios que se dan en la respuesta del medio heterogéneo y del medio homogéneo destacan la variación de la amplitud y el tiempo de la respuesta en ciertos modelos como lo muestra [Luzón et al., 2003]. En el medio heterogéneo la curvatura de los rayos genera respuestas más complejas en comparación con el medio homogéneo. El gran número de variables que controlan la modelación complican identificar de manera concreta las diferencias entre las respuestas obtenidas entre el medio homogéneo y el medio heterogéneo, así como también comparar las respuestas entre diferentes modelos heterogéneos, haciendo así compleja la realización de un análisis paramétrico.

A partir del trabajo realizado se derivan algunos trabajos a realizar a futuro, como son la realización del caso de deformación plana para poder tener el esquema completo bidimensional, así como también la construcción de un modelo de estratos heterogéneos, basado en el método de Thomson-Haskell, el cual pueda modelar un perfil de velocidades arbitrario de un medio heterogéneo en general.

Apéndice A

Apéndice A (Elementos de Matemáticas)

A.1. Tensores

Un objeto \mathfrak{T} se dice que es un tensor si éste permanece invariante ante cualquier transformación de un sistema de coordenadas de un espacio de N dimensiones, y sus componentes satisfacen la siguiente ley general de transformación:

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_m}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{a_2}} \dots \frac{\partial y^{i_n}}{\partial x^{a_n}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial y^{j_1}} \frac{\partial x^{b_2}}{\partial y^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{b_m}}{\partial y^{j_m}} T_{b_1, b_2, \dots, b_m}^{a_1, a_2, \dots, a_n} \quad (\text{A.1})$$

Con $i_1, i_2, \dots, i_n; j_1, j_2, \dots, j_m = 1, 2, \dots, N$. Siendo n y m dos números naturales cualquiera. Este objeto se conoce como tensor de orden $n + m$, de n índices contravariantes y m índices covariantes.

Un tensor muy importante es la delta de Kronecker, este ente matemático es un tensor de orden 2 y es el único que se mapea bajo la transformación identidad y está definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Otro ente matemático importante por mencionar es la densidad tensorial de Levi Civita, definida como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{permutación par} \\ 0 & \text{índices repetidos} \\ -1 & \text{permutación impar} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Este ente no es un tensor, ya que no cumple la propiedad de transformación (A.1) al no ser invariante. Este ente se clasifica en una colección de entes matemáticos más amplia que son las llamadas densidades tensoriales, cuyo caso particular da los tensores.

A.2. Transformada de Fourier y de Hankel

Definiremos a continuación de la transformada de Fourier. Supongamos una función $f(t)$ suficientemente regular e integrable, entonces definimos a la función $F(\omega)$ como la transformada directa de Fourier de la siguiente manera:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt \quad (\text{A.4})$$

Ahora bien podemos definir también la transformación inversa que permite recuperar la función $f(t)$ dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) F(\omega) d\omega \quad (\text{A.5})$$

Una de los principales usos de la transformada de Fourier es el cálculo de la transformada de Fourier de la función $f^{(n)}$, se puede demostrar que dicha transformada está dada por:

$$f^{(n)} = (i\omega)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) F(\omega) d\omega \quad (\text{A.6})$$

Para definir la transformada de Hankel. Supongamos una función $f(r)$ integrable, entonces definimos a la función $F_n(\eta)$ como la transformada directa de Hankel de la siguiente manera:

$$F_n(\eta) = \int_0^{\infty} r f(r) J_n(\eta r) dr \quad n \geq -\frac{1}{2} \quad (\text{A.7})$$

Donde $J_n(\cdot)$ es la función de Bessel de primera especie de orden n . Ahora bien podemos definir también la transformación inversa que permite recuperar la función $f(r)$ dada por:

$$f(r) = \int_0^{\infty} \eta F_n(\eta) J_n(\eta r) d\eta \quad (\text{A.8})$$

Un resultado importante de la transformada de Hankel es el que se refiere a la transformación del operador de Bessel Δ_n :

$$\int_0^{\infty} r \left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(\eta r) dr = -\eta^2 F_n(\eta) \quad (\text{A.9})$$

A.3. Funciones de Bessel

En la resolución de muchos problemas de la física matemática se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad \text{con } n \geq 0 \quad (\text{A.10})$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación diferencial de Bessel de n -ésimo orden. La solución general a la ecuación diferencial de Bessel viene dada por:

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x) \quad (\text{A.11})$$

Donde A, B son constantes arbitrarias y $J_n(\cdot), Y_n(\cdot)$ son las funciones de Bessel de n -ésimo orden de primera y segunda especie. La función de Bessel de primera especie se obtiene a partir del método de Frobenius y está dada por:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n} \quad (\text{A.12})$$

Donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma de Euler. La función de Bessel de segunda especie o también llamada función de Weber o función de Neumann y está dada por:

$$Y_n(x) = \frac{-1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \Psi(k+1) - \Psi(k+n+1) \right] \quad (\text{A.13})$$

Donde $\Psi(\cdot)$ es la función Digamma.

A continuación se muestran algunos gráficos de las funciones de Bessel para distintos órdenes (A.1)

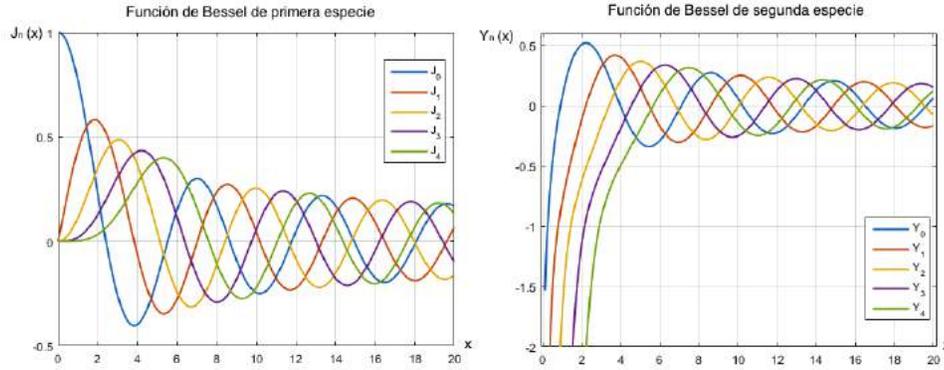


Figura A.1: Funciones de Bessel de primera y segunda especie de distintos órdenes.

Existen otras formas especiales de las soluciones de la ecuación de Bessel. Estas son soluciones complejas conjugadas de la ecuación de Bessel, y son las llamadas funciones de Hankel dadas por:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \quad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \quad (\text{A.14})$$

La función $H_n^{(1)}(\cdot)$ y $H_n^{(2)}(\cdot)$ son conocidas como las funciones de Hankel de n-ésimo orden de primera y segunda especie respectivamente. Hay una relación entre las funciones de Hankel y las funciones modificadas de Bessel de segunda especie y es:

$$K_n(z) = \frac{\pi i}{2} \exp\left(\frac{\pi i}{2}n\right) H_n^{(1)}(iz) \quad K_n(z) = \frac{\pi}{2i} \exp\left(-\frac{\pi i}{2}n\right) H_n^{(2)}(-iz) \quad (\text{A.15})$$

A continuación se muestran algunas de las propiedades de las funciones de Bessel:

1. Fórmula de recurrencia para las funciones de Bessel:

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \quad (\text{A.16})$$

Las funciones $Y_n(x)$ satisfacen la misma fórmula. Se observa que para la funciones de Bessel de orden cero se cumple $J_0'(x) = -J_1(x)$.

2. Desarrollos asintóticos, para x suficientemente grandes:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.17})$$

3. Desarrollos para argumentos pequeños, con $n \geq 0$ y $0 < x \ll \sqrt{n+1}$, se tiene:

$$J_n \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad Y_n \approx \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] & \text{si } n = 0 \\ -\frac{\Gamma(n)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

Para más propiedades se puede consultar [Abramowitz and Stegun, 1964]

A.4. Función de Green

A continuación se expondrá de una manera heurística la definición de la función de Green. Consideremos el siguiente problema no homogéneo con valores en la frontera:

$$L[u](x) = -f(x) \quad (\text{A.19})$$

Dónde $L[\cdot]$ es un operador diferencial lineal sobre cierto espacio de funciones y f es una función continua en $[a, b]$. Se demuestra que la solución a dicho problema se puede expresar en la forma:

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds \quad (\text{A.20})$$

Donde la función núcleo $G(x, s)$ es la llamada función de Green. La función de Green se puede caracterizar mediante la función delta de Dirac, ya que si suponemos que existe una función $G(x, s)$ tal que se cumpla la ecuación A.20, entonces podemos operar ambos lados (A.20), teniendo:

$$L[u](x) = \int_a^b L[G(\cdot, s)](x) f(s) ds = -f(x) \quad (\text{A.21})$$

Observamos que $L[G(\cdot, s)](x)$ debe actuar como la delta de Dirac $-\delta(x - s)$. Entonces el problema inicial (A.19) se puede establecer como:

$$L[G(\cdot, s)](x) = -\delta(x - s) \quad (\text{A.22})$$

El problema entonces consiste en resolver la ecuación (A.22) con las condiciones de frontera originales del problema, para después obtener la solución original $u(x)$ a partir de la ecuación (A.20).

El valor de una solución dada por una función de Green, se basa en el hecho de que la función de Green es independiente del término no homogéneo ($f(x)$) de la ecuación diferencial; por lo tanto una vez determinada la función de Green, la solución del problema con valores en la frontera se obtiene por la integración sin importar la naturaleza de $f(x)$.

Se enuncian a continuación sin demostración algunas de las propiedades de la función de Green:

1. La función $G(x, s)$ es continua en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$. Para cada s fija las derivadas parciales $\frac{\partial G(x, s)}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2}$ son funciones continuas de x , con $x \neq s$.
2. Para cada s fija, la función de Green satisface el problema homogéneo correspondiente para $x \neq s$:

$$L[G(\cdot, s)](x) = 0 \quad \text{con } x \neq s \quad (\text{A.23})$$

con las condiciones de frontera del problema.

3. La función de Green es única
4. La función de Green es simétrica

$$G(x, s) = G(s, x) \quad (\text{A.24})$$

A.5. Coordenadas Bipolares

Las coordenadas bipolares son un sistema de referencia ortogonal bidimensional. En este sistema de referencia cualquier punto del espacio euclidiano bidimensional esta dado por la pareja (u, v) que son las coordenadas bipolares. Ambas coordenadas (u, v) son adimensionales. Dichas coordenadas se pueden poner en relación con las coordenadas cartesianas teniendo como transformación directa $(x, y) \rightarrow (u, v)$:

$$x = \frac{a \sinh(v)}{\cosh(v) - \cos(u)} \quad y = \frac{a \sin(u)}{\cosh(v) - \cos(u)} \quad (\text{A.25})$$

Donde $a \in \mathbb{R}^+$, y los valores de u y v tienen como dominio $0 \leq u < 2\pi$ y $-\infty < v < \infty$ respectivamente. Las curvas de nivel de estas coordenadas se muestran en la figura (A.2).

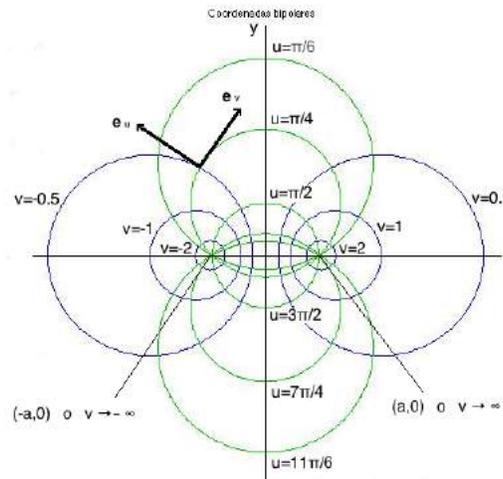


Figura A.2: Curvas de nivel de las coordenadas bipolares.

Se observa que estas curvas se crean a partir de dos polos, situados en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ de ahí el nombre que se le da a estas coordenadas. El valor $2a$ indica que tan lejos se encuentran los polos de sí. Cabe destacar que muy cerca de cada polo las coordenadas bipolares se comportan como las coordenadas polares bidimensionales.

Los círculos azules mostrados en la figura (A.2) son los denominados círculos de Apolonio, y son las curvas de nivel de la coordenada v . Se puede observar que a medida que el valor absoluto de v se hace más pequeño estos círculos crecen más y se alejan de su respectivo polo; ahora si el valor absoluto de v es muy grande los círculos se hacen más pequeños tendiendo a estar centrados en el polo. Esta familia de circunferencias está dada por la ecuación:

$$(x - \operatorname{acoth}(v))^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csch}^2(v) \quad (\text{A.26})$$

Los círculos verdes, son las curvas de nivel de la coordenada bipolar u . Estos círculos pasan por los polos y están controlados por la coordenada u , que da el ángulo de salida de los círculos; esto es u es una recta a cierto ángulo que es tangente al círculo en el polo como se muestra en la figura (A.3)

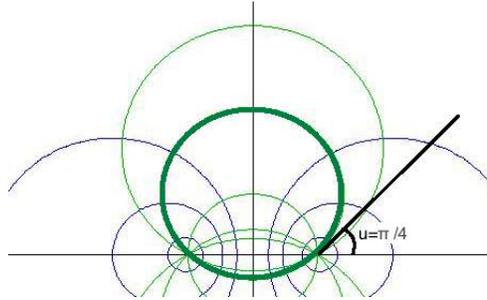


Figura A.3: Coordenada bipolar u .

Esta familia de circunferencias viene descrita por la ecuación:

$$x^2 + (y - \operatorname{acot}(v))^2 = a^2 \operatorname{csc}^2(v) \quad (\text{A.27})$$

La transformación inversa de coordenadas $(u, v) \rightarrow (x, y)$ está dada por:

$$v = \operatorname{atanh}\left(\frac{2ax}{x^2 + y^2 + a^2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}\right) \quad u = \operatorname{atan}\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \quad (\text{A.28})$$

Geoméricamente se pueden demostrar algunos resultados. El primero es que la relación R_1/R_2 es siempre constante para una curva de nivel dada por la coordenada v (figura (A.4)).

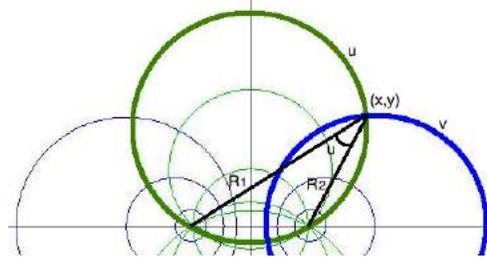


Figura A.4: Interpretaciones geométricas de las coordenadas bipolares.

El segundo resultado es que el ángulo que forman las rectas R_1 y R_2 en el punto (x, y) es igual ángulo de salida de la circunferencia dada por la curva de nivel de la coordenada u (figura (A.4)). Es fácil ver que $R_1^2 = (x + a)^2 + y^2$ y $R_2^2 = (x - a)^2 + y^2$.

Otras propiedades importantes de las coordenadas bipolares son sus factores de escala dados por:

$$h_v^2 = h_u^2 = \frac{a^2}{(\cosh(v) - \cos(u))^2} \quad (\text{A.29})$$

Y el valor del operador Laplaciano, dado por:

$$\nabla^2 = \frac{(\cosh(v) - \cos(u))^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \quad (\text{A.30})$$

A.6. Ecuación integral de Fredholm

Se conoce como ecuación integral de Fredholm de segunda especie a la una ecuación del tipo:

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\phi(t)dt = f(x) \quad (\text{A.31})$$

donde $\phi(x)$ es la función incógnita; $K(x, t)$ y $f(x)$ son funciones conocidas, x y t son variables reales que varían en el intervalo (a, b) , $\lambda \in \mathbb{R}$. La función $K(x, t)$ se denomina núcleo de la ecuación integral; se supone que el núcleo $K(x, t)$ está definido en el cuadrado $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ en el plano $x - t$ y es continuo en Ω , o bien sus discontinuidades son tales que:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dxdt \quad (\text{A.32})$$

tiene un valor finito.

Apéndice B

Apéndice B (Resultados de Elastodinámica)

B.1. Ecuación de Transporte

Consideremos la ecuación de transporte en su forma vectorial para la amplitud A :

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A + A\Delta\tau = 0 \quad (\text{B.1})$$

Recordemos que τ son superficies que describen los frentes de onda, se observa que $\nabla\tau$ es un campo vectorial normal al frente de onda, y tangente a los rayos en la intersección con los frentes de onda. Recordemos la ecuación eikonal:

$$\|\nabla\tau\|^2 = \frac{1}{C^2} \quad (\text{B.2})$$

De esta ecuación podemos deducir que el módulo del campo $\nabla\tau$ es igual al inverso de la velocidad de propagación. Entonces denotemos a $\nabla\tau = \frac{\bar{\tau}}{C}$ donde $\bar{\tau}$ es un vector unitario tangente a los rayos y normal a los frentes de onda. Pensemos que a los rayos definidos como curvas con el parámetro s (longitud de arco), entonces sus componentes se expresan como:

$$\bar{\mathbf{r}}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (\text{B.3})$$

Considerando lo anterior podemos calcular es fácil ver que:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \quad (\text{B.4})$$

Entonces podemos calcular la derivada total de A respecto a s , dada por:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \nabla A \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{B.5})$$

Gracias a esta relación es fácil ver que se tiene la igualdad:

$$\nabla\tau \cdot \nabla A = \frac{1}{C} (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla A) = \frac{1}{C} \frac{dA}{ds} \quad (\text{B.6})$$

Ahora bien, considerando la derivada del tiempo de viaje respecto a s que:

$$\frac{d\tau}{ds} = \nabla\tau \cdot \bar{i} = \frac{1}{C} (\bar{i} \cdot \bar{i}) = \frac{1}{C} \quad (\text{B.7})$$

Entonces vemos que podemos relacionar las diferenciales $ds = C d\tau$, dando que:

$$\frac{1}{C} \frac{dA}{ds} = \frac{1}{C^2} \frac{dA}{d\tau} \quad (\text{B.8})$$

Podemos ahora sustituir (B.8) en (B.1) dando como resultado:

$$\frac{2}{C^2} \frac{dA}{d\tau} + A\Delta\tau = 0 \quad (\text{B.9})$$

Siendo ahora una EDO a lo largo del rayo. Sin embargo falta calcular el valor de $\Delta\tau$. Para ello consideremos el operador Laplaciano como la divergencia del gradiente, esto es:

$$\Delta\tau = \nabla \cdot \nabla\tau = \frac{1}{C} \nabla \cdot \nabla\bar{i} \quad (\text{B.10})$$

Consideremos también un tubo formado por rayos como el que se muestra en la figura (B.1).

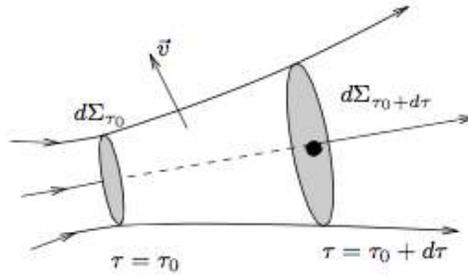


Figura B.1: Tubo de rayos

En la figura anterior \bar{v} es un vector normal exterior y unitario a la superficie del tubo de rayos, tiene la finalidad de orientar esta, $d\Sigma|_{\tau+d\tau}$ y $d\Sigma|_{\tau}$ es el área en la tapa superior e inferior respectivamente. Ahora bien, recordando la definición formal de la divergencia, podemos expresar la ecuación anterior como:

$$\frac{1}{C} \nabla \cdot \nabla\bar{i} = \frac{1}{C} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \bar{i} \cdot \bar{v} ds}{\Delta V} \quad (\text{B.11})$$

Recordemos que estamos trabajando en sistema de coordenada cartesiano (x, y, z) , sin embargo nos conviene tener un sistema que describa localmente al rayo, este sistema es conocido como coordenadas centradas y esa formado por (s, γ_1, γ_2) donde s es la longitud de arco, y γ_1, γ_2 son dos coordenadas cualquiera que describan al rayo. Teniendo en cuenta esto podemos obtener un valor del diferencial de volumen en coordenadas cartesianas a nuestro nuevo sistema, el cual está dado por:

$$dV = J ds d\gamma_1 d\gamma_2 = C J d\tau d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (\text{B.12})$$

Sabemos que J es el determinante Jacobiano de la transformación de coordenadas, definido como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial y}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial z}{\partial \gamma_2} \end{vmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Ahora bien, considerando lo anterior podemos reescribir la ecuación (B.11) como:

$$\frac{1}{C} \nabla \cdot \nabla \bar{t} = \frac{1}{C} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \bar{t} \cdot \bar{v} dS}{C J d\tau d\gamma_1 d\gamma_2} \quad (\text{B.14})$$

Analicemos la integral del numerador, para ello observamos que es una integral de flujo, analizando un tubo alrededor de un rayo observamos que en la superficie lateral del tubo se cumple que $\bar{v} \perp \bar{t}$, ya que \bar{v} es un vector normal exterior unitario a la superficie, mientras que \bar{t} es un vector tangente unitario a la superficie; ahora bien analizando la tapa superior ($\tau + d\tau$) e inferior (τ) notamos que $\bar{v} \parallel \bar{t}$, en la tapa inferior son perpendiculares pero con sentido opuesto, mientras que en la tapa superior se cumple la perpendicularidad pero ambos con el mismo sentido. Entonces la integral de la ecuación (B.14) se puede aproximar como:

$$\int_S \bar{t} \cdot \bar{v} dS \approx d\Sigma|_{\tau+d\tau} - d\Sigma|_{\tau} = (J|_{\tau+d\tau} - J|_{\tau}) d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (\text{B.15})$$

Entonces la ecuación (B.14) puede ser reescrita como:

$$\frac{1}{C} \nabla \cdot \nabla \bar{t} = \frac{1}{C} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{J|_{\tau+d\tau} - J|_{\tau}}{C J d\tau} = \frac{1}{C J} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{C} \right) \quad (\text{B.16})$$

Como establecimos al principio que $\Delta \tau = \frac{1}{C} \nabla \cdot \nabla \bar{t}$, podemos reescribir la ecuación (B.9) como:

$$\frac{2}{C^2} \frac{dA}{d\tau} + \frac{A}{C J} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{J}{C} \right) = 0 \quad (\text{B.17})$$

Teniendo una ecuación diferencial ordinaria que es fácil de resolver, la solución para A viene dada por:

$$A = \frac{\psi(\gamma_1, \gamma_2)}{\sqrt{\frac{J}{C}}} \quad (\text{B.18})$$

Donde $\psi(\gamma_1, \gamma_2)$ es una constante de integración que a su vez es función de los parámetros γ_1 y γ_2 , esta función es conocida como patrón de irradiación. El Jacobiano J representa geoméricamente una medida de la dispersión de los rayos. Cuando J incrementa el tubo de rayo crece, mientras que si J decrece el tubo de rayos se estrecha.

B.2. Pulso de Ricker

Se denomina pulso de Ricker a la ondícula con parámetros t_p y t_s que tiene la siguiente función en el dominio del tiempo:

$$r(t) = \left(a^2 - \frac{1}{2} \right) \exp(-a^2) \quad \text{con} \quad a = \pi \frac{t - t_s}{t_p} \quad (\text{B.19})$$

Dónde t_s representa el centro del pulso y t_p el periodo característico, el cual representa la distancia de separación entre las crestas. En la figura B.2 se muestra un pulso de Ricker con parámetros $t_s = 4$ y $t_p = 2$

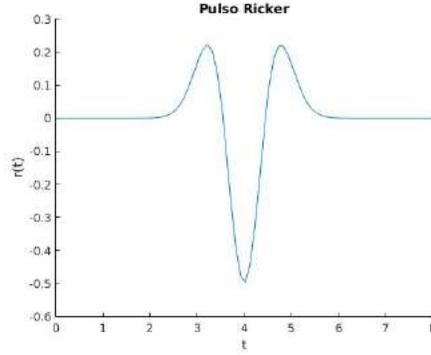


Figura B.2: Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.

Analíticamente, se puede aplicar la transformada directa de Fourier al pulso de Ricker, obteniendo así su función en el dominio de la frecuencia, la cual está dada por:

$$R(\omega) = -\frac{tp}{\sqrt{\pi}} b^2 \exp(-b^2) \exp(-i\omega t_s) \quad \text{con} \quad b = \frac{\omega}{\omega_p} \quad (\text{B.20})$$

Donde ω_p es la frecuencia angular característica ($\omega_p = \frac{2\pi}{t_p}$). En la figura B.3 se muestra el gráfico del valor absoluto de la transformada de Fourier ($|R(\omega)|$) del pulso de Ricker con los parámetros antes mencionado; teniendo así que $\omega_p = \pi$.

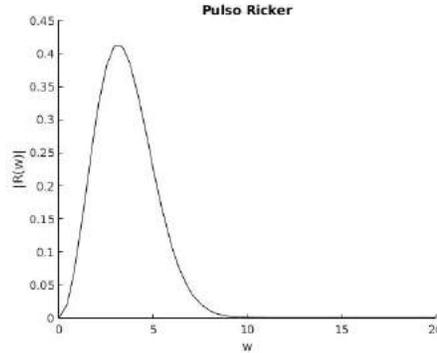


Figura B.3: Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia.

B.3. El tensor de tracciones de la función de Green

La función de Green en general es un tensor de segundo orden definido como G_{im} dónde el primer índice indica que se trata del desplazamiento en dirección i en cambio el segundo índice dice que el desplazamiento es debido a una fuerza impulsiva aplicada en dirección m . Debido a que se propuso a estudiar el problema antiplano, en las hipótesis que se dieron se dijo que únicamente había desplazamiento en dirección $y = x_2$ debido a una fuerza impulsiva en dirección $y = x_2$, de ahí que se obtenga la función de Green en ambos casos homogéneo y heterogéneo $G_{22}(\cdot)$.

$$G_{22}(r, \omega; \xi) = \frac{1}{4\mu i} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) \quad G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi) = \Lambda \frac{1}{4\mu_0 i} H_0^{(2)}(\omega \tau) \quad (\text{B.21})$$

Donde Λ es:

$$\Lambda = (\sinh(\zeta) [\coth(\zeta) - \cos(j_0)])^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{\zeta}{\sinh(\zeta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.22})$$

Dado que el IBEM exige saber las tracciones del medio a modelar, a continuación obtendremos dichas tracciones; para empezar recordemos la ley de Hooke para un medio continuo heterogéneo (el caso homogéneo es un caso particular donde λ_z y μ_z son constantes):

$$\sigma_{ij} = \lambda_z \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu_z \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.23})$$

Dado que estudiamos el caso antiplano, es fácil demostrar que el tensor de esfuerzos debido a la función de Green únicamente tiene 4 elementos, los cuales son:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu_z \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu_z \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad (\text{B.24})$$

El tensor de tracciones está dado por la relación de Cauchy y es:

$$T_{im}^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} (G_{im}) n_j \quad (\text{B.25})$$

Recordando las hipótesis del caso antiplano, tenemos que únicamente existen fuerzas y desplazamientos en dirección x_2 , esto implica que únicamente se tendrá un componente del tensor de tracciones el cual será T_{22} y está dado por:

$$T_{22}^{(\mathbf{n})} = \mu_z \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \mathbf{n}_1 + \mu_z \frac{\partial G_{22}}{\partial x_3} \mathbf{n}_3 \quad (\text{B.26})$$

Esta es la expresión general para calcular las tracciones. Calculemos el caso particular en el cual el medio es homogéneo. Para ello recordemos que la función de Green está en función del radio y de la frecuencia, por ello las tracciones se calculan como:

$$T_{22}^{(\mathbf{n})}(r, \omega; \xi) = \mu \frac{\partial G_{22}(r, \omega)}{\partial r} \frac{\partial r(x, z)}{\partial x} \mathbf{n}_1 + \mu \frac{\partial G_{22}(r, \omega)}{\partial r} \frac{\partial r(x, z)}{\partial z} \mathbf{n}_3 \quad (\text{B.27})$$

Dando como resultado:

$$T_{22}^{(\mathbf{n})}(r, \omega) = \frac{i\omega}{4\beta} H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{\beta} \right) \left(\frac{x - x_0}{r} \mathbf{n}_1 + \frac{z - z_0}{r} \mathbf{n}_3 \right) \quad (\text{B.28})$$

Para el caso heterogéneo las derivadas son más complicadas, esquemáticamente el cálculo de las tracciones se da como:

$$T_{22}^{(\mathbf{n})}(\zeta, j_0, \omega; \xi) = \mu_z \frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial x} \mathbf{n}_1 + \mu_z \frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial z} \mathbf{n}_3 \quad (\text{B.29})$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$T_{22}(x, z, \omega) = \mu_z \left(\frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial j_0} \frac{\partial j_0(x, z)}{\partial x} \right) \mathbf{n}_1 \\ + \mu_z \left(\frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial j_0} \frac{\partial j_0(x, z)}{\partial z} \right) \mathbf{n}_3 \quad (\text{B.30})$$

Ahora bien, en el cálculo de las derivadas de la función de Green para un medio heterogéneo respecto

a las coordenadas bipolares las podemos descomponer como:

$$\frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial \zeta} = \frac{1}{4\mu_0 i} \left[H_0^{(2)} \left(\frac{\omega h \zeta}{\beta(0)} \right) \frac{\partial \Lambda(\zeta, j_0)}{\partial \zeta} - \frac{\omega h}{\beta(0)} \Lambda(\zeta, j_0) H_1^{(2)} \left(\frac{\omega h \zeta}{\beta(0)} \right) \right] \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial G_{22}(\zeta, j_0, \omega; \xi)}{\partial j_0} = \frac{1}{4\mu_0 i} H_0^{(2)} \left(\frac{\omega h \zeta}{\beta(0)} \right) \frac{\partial \Lambda(\zeta, j_0)}{\partial j_0} \quad (\text{B.32})$$

Finalmente el cálculo se reduce a obtener las derivadas de Λ respecto a las coordenadas bipolares; para simplificar los resultados designemos $M = (\sinh(\zeta) [\coth(\zeta) - \cos(j_0)])^{\frac{n+1}{2}}$ y $N = \left[\frac{\zeta}{\sinh(\zeta)} \right]^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(\zeta, j_0)}{\partial \zeta} &= \left[\frac{\sinh(\zeta) - \zeta \cosh(\zeta)}{\sinh^2(\zeta)} \right] \left[\frac{M}{2N} \right] \\ &+ \left(\frac{n+1}{2} \right) M^{\frac{n-1}{n+1}} N \left(\cosh(\zeta) \{ \coth(\zeta) - \cos(j_0) \} - \sinh(\zeta) \{ \coth^2(\zeta) - 1 \} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial \Lambda(\zeta, j_0)}{\partial j_0} = \sinh(\zeta) \sin(j_0) \left(\frac{n+1}{2} \right) M^{\frac{n-1}{n+1}} N \quad (\text{B.34})$$

Así como también el cálculo de las derivadas bipolares respecto a las coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial z} = 2 \left[\frac{R_1(z + z_0 + 2h)}{R_2^3} - \frac{z - z_0}{R_1 R_2} \right] \left[\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right]^{-1} \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial x} = 2 \left[\frac{R_1(x - x_0)}{R_2^3} - \frac{x - x_0}{R_1 R_2} \right] \left[\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right]^{-1} \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial j_0(x, z)}{\partial z} = - \left[\frac{2A(x - x_0)(z + z_0 + 2h)}{R_1 R_2^3} + \frac{2A(x - x_0)(z - z_0)}{R_1^3 R_2} \right] \left[1 - \frac{2A^2(x - x_0)^2}{R_1^2 R_2^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial j_0(x, z)}{\partial x} = - \left[\frac{A(x - x_0)^2}{R_1 R_2^3} - \frac{2A}{R_1 R_2} + \frac{A(x - x_0)^2}{R_1^3 R_2} \right] \left[1 - \frac{2A^2(x - x_0)^2}{R_1^2 R_2^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.38})$$

Donde $A = h + z_0$

B.4. Integración Analítica

Al discretizar el modelo numérico del IBEM surgen las siguientes ecuaciones:

$$v(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{B.39})$$

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi \quad \mathbf{x} \in \Omega - \partial\Omega \quad (\text{B.40})$$

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}, \omega) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\omega) \int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (\text{B.41})$$

El problema ahora radica en calcular las integrales $\int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$ y $\int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$. Analicemos cada uno de los casos:

- Primero analicemos la integral de las tracciones $\int_{\Gamma_i} T_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$. Sabemos que cuando $\mathbf{x} = \xi$ se encuentra una singularidad, sin embargo matemáticamente se ha probado que el valor de la integral cuando se tiene que $\mathbf{x} = \xi$ es igual a cero. Físicamente esto se debe a que la tracción es la proyección de la fuerza sobre el vector normal, el cual es ortogonal al segmento discretizado. Entonces la integral queda como:

$$\int_{\Gamma_i} T_{22}^{(n)}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi = \frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}, \omega) \quad (\text{B.42})$$

La interpretación física de este término está asociada a una distribución simétrica de fuerzas que actúan en un punto de la frontera del dominio.

- En el caso de la integral $\int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi$, sabemos que existe una singularidad débil de orden r^{-1} cuando $\mathbf{x} = \xi$ y sólo existe en el sentido de valor principal de Cauchy. Una forma de evitar esta singularidad es tomar los primeros términos del desarrollo en serie de la función de Hankel. Esta integración se realiza computacionalmente cuando el radio $r_0 < 0.5 L$, donde r_0 es la distancia entre el observador y la fuente y L es la longitud del elemento a discretizar. Tomando en cuenta esto la integral queda definida como:

$$\int_{\Gamma_i} G_{22}(\mathbf{x}, \omega; \xi) dS_\xi = \frac{1}{4\mu i} \int_{\Gamma_i} J_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) - iY_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) dS_\xi \quad (\text{B.43})$$

La cual podemos expresar como:

$$I = \frac{1}{4\mu i} \int_0^{\frac{L}{2}+r_0} J_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) - iY_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) dr + \int_0^{\frac{L}{2}-r_0} J_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) - iY_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) dr \quad (\text{B.44})$$

Si consideramos las siguientes aproximaciones a las funciones de Bessel:

$$J_0 \approx 1 - \frac{x^2}{4} \quad Y_0 \approx \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - (\gamma - 1) \frac{x^2}{4} \right] \quad (\text{B.45})$$

Haciendo estas sustituciones e integrando, obtenemos para la función de Bessel de primera especie:

$$\int_0^{\frac{L}{2}+r_0} J_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) dr + \int_0^{\frac{L}{2}-r_0} J_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) dr \approx \frac{L}{4\mu i} \left\{ 1 - \frac{(kL)^2}{96} (C_1^3 + C_2^3) \right\} \quad (\text{B.46})$$

Y para la función de Bessel de segunda especie:

$$\int_0^{\frac{L}{2}+r_0} Y_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) dr + \int_0^{\frac{L}{2}-r_0} Y_0\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) dr \approx \frac{L}{4\mu i} \left\{ \gamma - 1 + \frac{C_1}{2} \ln\left(\frac{kLC_1}{4}\right) + \frac{C_2}{2} \ln\left(\frac{kLC_2}{4}\right) \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{3} - \gamma\right) \frac{(kL)^2}{96} (C_1^3 + C_2^3) - \frac{(kL)^2 C_1^3}{96} \ln\left(\frac{kLC_1}{4}\right) - \frac{(kL)^2 C_2^3}{96} \ln\left(\frac{kLC_2}{4}\right) \right\} \quad (\text{B.47})$$

Donde γ es la constante de Euler, $C_1 = 1 + \frac{2r_0}{L}$, $C_2 = 1 - \frac{2r_0}{L}$ y $k = \frac{\omega}{\beta}$.

B.5. Solución analítica para un semiespacio homogéneo

Consideremos el caso de un semiespacio homogéneo, en el cual actúa una fuente impulsiva ubicada en $\xi = (x_0, z_0)$. El dominio del problema está dado por:

$$HS = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{0}) \cdot \mathbf{e}_z \geq 0\} \quad (\text{B.48})$$

La respuesta en cualquier punto del dominio está dada por un onda incidente y una onda reflejada, esto es:

$$\mathbf{v}^T = \mathbf{v}^{inc} + \mathbf{v}^{ref} \quad (\text{B.49})$$

El valor de la onda incidente es la solución al espacio completo deducida en el capítulo 1. Para obtener el valor de la onda reflejada se utiliza el método de las imágenes [Kausel, 2006], el cual nos da el valor de la onda reflejada en términos de la solución analítica del espacio completo, pero para una fuente localizada en $\xi_i = (x_0, -z_0)$. De esta manera la respuesta en el dominio de la frecuencia está dada por:

$$G_{22}(r_1, r_2, \omega) = \frac{1}{4\mu i} \left[H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r_1}{\beta}\right) + H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r_2}{\beta}\right) \right] \quad (\text{B.50})$$

Siendo $r_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z + z_0)^2}$ el radio que va de la fuente real y la imaginaria al punto donde se desea medir el desplazamiento respectivamente. También se puede establecer la respuesta para el dominio del tiempo:

$$G_{22}(r_1, r_2, t) = \frac{1}{2\pi\mu} \left[\frac{H(t - \frac{r_1}{\beta})}{\sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{\beta^2}}} + \frac{H(t - \frac{r_2}{\beta})}{\sqrt{t^2 - \frac{r_2^2}{\beta^2}}} \right] \quad (\text{B.51})$$

B.6. Método de Thomson-Haskell

El método de Thomson-Haskell [Thomson, 1950] [Haskell, 1953] se utiliza para obtener la respuesta de medios estratificados sobre un semiespacio ante una fuerza impulsiva o ante la incidencia de una onda plana. El método consiste en construir una relación entre desplazamientos y esfuerzos en planos normales al eje z para cada estrato y para el semiespacio. Al usar esta relación además de las condiciones de continuidad de desplazamientos y las condiciones de equilibrio entre las interfaces del medio, es posible obtener una relación final entre los desplazamientos y los esfuerzos en un estrato. Esto nos lleva a que es posible “propagar” en el interior de todo el medio para obtener así la respuesta en superficie del problema (o en cualquier parte del medio).

Se muestra en la figura (B.4) el modelo general a analizar.

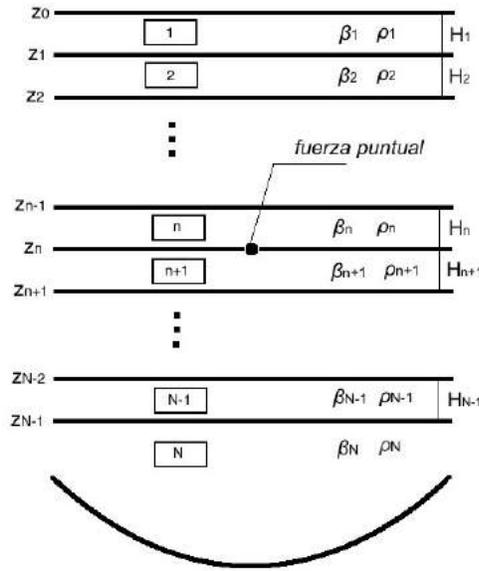


Figura B.4: Modelo formado por $N - 1$ estratos y un semiespacio para el método de Thomson-Haskell

En la figura B.4 se muestra el medio estratificado, formado por $N - 1$ estratos y un semiespacio, a cada estrato y semiespacio le corresponde una respectiva densidad ρ y una respectiva velocidad de propagación β . La fuerza impulsiva se encuentra localizada en la interfaz z_n . Cada estrato tiene un ancho H .

El problema de propagación de ondas en un medio estratificado requiere que una formulación no sólo en el dominio de la frecuencia (ω), si no también en el dominio del número de onda vertical k , esto es que requiere una transformada inversa de Fourier adicional para regresar a la variable espacial x .

Establecido lo anterior, podemos obtener la relación de desplazamientos y esfuerzos para los $N - 1$ estratos, la cual está dada por:

$$\begin{Bmatrix} v_n(k, z, \omega) \\ \tau_n(k, z, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_n z) & \frac{1}{\mu_n v_n} \sin(v_n z) \\ -\mu_n \eta_n \sin(v_n z) & \cos(v_n z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n(k, 0, \omega) \\ \tau_n(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.52})$$

Esta ecuación es válida para cada estrato, con $0 \leq z \leq H$. Si queremos conocer la respuesta en las fronteras, esto es en las interfaces, podemos evaluar $z = H$, obteniendo:

$$\begin{Bmatrix} v_n(k, H_n, \omega) \\ \tau_n(k, H_n, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_n H_n) & \frac{1}{\mu_n v_n} \sin(v_n H_n) \\ -\mu_n \eta_n \sin(v_n H_n) & \cos(v_n H_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n(k, 0, \omega) \\ \tau_n(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.53})$$

Dónde η_n y μ_n son el número de onda vertical y el módulo de cortante para el estrato n respectivamente. En la ecuación anterior $v_n(k, H_n, \omega)$ y $\tau_n(k, H_n, \omega)$ representan el desplazamiento y el esfuerzo en el estrato n a la profundidad H_n dentro del estrato, esto es en la interfaz z_n ; de la misma forma $v_n(k, 0, \omega)$ y $\tau_n(k, 0, \omega)$ representan el desplazamiento y el esfuerzo en el estrato n a la profundidad 0 dentro, esto es la interfaz z_{n-1} .

La ecuación anterior puede ser reescrita de forma compacta de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{V}_n^-(\omega)\} = [\mathbb{P}_n(\omega)] \{\mathbf{V}_n^+(\omega)\} \quad (\text{B.54})$$

Falta dar la ecuación que relaciona los desplazamientos y los esfuerzos en el semiespacio, dicha ecuación está dada por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{S}_N(\omega) \\ \dot{S}_N(k, H_n, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{i}{\mu_n v_n} \\ 1 & \frac{i}{\mu_n v_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n(k, 0, \omega) \\ \tau_n(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.55})$$

Los términos \dot{S}_N y \dot{S}_N representan una onda llegando desde el semiespacio y una onda que se aleja hacia el semiespacio respectivamente, para nuestro caso sabemos que no llega ninguna onda desde el semiespacio, por ello tenemos que $\dot{S}_N = 0$.

La ecuación anterior puede ser reescrita de forma compacta de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{S}_n(\omega)\} = [\mathbb{Q}_n] \{\mathbf{V}_n^-(\omega)\} \quad (\text{B.56})$$

Sabemos que en cada interfaz existe continuidad de desplazamientos, por ello sabemos que se debe cumplir la condición:

$$v_n(k, H_n, \omega) = v_{n+1}(k, 0, \omega) \quad (\text{B.57})$$

Podemos aplicar la ecuación (B.57) en las ecuaciones (B.53) y (B.55) hasta el estrato $n + 1$ (el estrato bajo la fuerza impulsiva). Con ello se puede crear un sistema de ecuaciones ensambladas de manera recursiva hasta que se obtiene:

$$\{\mathbf{S}_n(\omega)\} = [\mathbb{Q}_n][\mathbb{P}_N(\omega)][\mathbb{P}_{N-1}(\omega)] \cdots [\mathbb{P}_{n+1}(\omega)] \begin{Bmatrix} v_{n+1}(k, 0, \omega) \\ \tau_{n+1}(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.58})$$

Se puede hacer lo mismo, esto es obtener de manera recursiva el sistema de ecuaciones desde el estrato n (el estrato sobre la fuerza impulsiva) hasta el estrato 1. Obteniendo así:

$$\begin{Bmatrix} v_n(k, H_n, \omega) \\ \tau_n(k, H_n, \omega) \end{Bmatrix} = [\mathbb{P}_n(\omega)][\mathbb{P}_{n-1}(\omega)] \cdots [\mathbb{P}_1(\omega)] \begin{Bmatrix} v_1(k, 0, \omega) \\ \tau_1(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.59})$$

Sabemos que los esfuerzos en la superficie libre, esto es en la interfaz z_0 (interfaz entre el primer estrato y la superficie libre) son iguales a cero, de ahí que $\tau_1(k, 0, \omega) = 0$. Otra condición que sabemos que cumple el problema es el equilibrio en la interfaz z_n , donde se encuentra localizada la fuerza puntual. Esta condición está dada por:

$$\tau_{n+1}(0) + f_y = \tau_n(H_n) \quad (\text{B.60})$$

En la ecuación (B.60) el esfuerzo al que nos referimos, es el esfuerzo en dirección y y ubicado en el plano z , esto es τ_{zy} ; f_y representa la fuerza impulsiva ubicada en la interfaz z_n . Reescribamos la ecuación (B.58) y la ecuación (B.59) respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{S}_N(k, H_n, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{n+1}(k, 0, \omega) \\ \tau_{n+1}(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{Bmatrix} v_n(k, H_n, \omega) \\ \tau_n(k, H_n, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(k, 0, \omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.62})$$

Utilizando nuevamente las condiciones de continuidad (B.57) y de equilibrio (B.60) la ecuación (B.62) se reescribe como:

$$\begin{Bmatrix} v_{n+1}(k, 0, \omega) \\ \tau_{n+1}(k, 0, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(k, 0, \omega) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.63})$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (B.63) en la ecuación (B.61) obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \check{S}_N(k, H_n, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} v_1(k, 0, \omega) \\ U_{21} v_1(k, 0, \omega) - f_y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.64})$$

Esta última ecuación nos da el desplazamiento en la superficie libre, el cual está dado por:

$$v_1(k, 0, \omega) = \frac{L_{12}}{L_{11}U_{11} + L_{12}U_{21}} f_y \quad (\text{B.65})$$

Bibliografía

- [Abramowitz and Stegun, 1964] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation.
- [Achenbach, 2012] Achenbach, J. (2012). *Wave propagation in elastic solids*, volume 16. Elsevier.
- [Achenbach, 2003] Achenbach, J. D. (2003). *Reciprocity in elastodynamics*. Cambridge University Press.
- [Aki and Richards, 2002] Aki, K. and Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology*, volume 1. University Science Books.
- [Bard and Gariel, 1986] Bard, P.-Y. and Gariel, J.-C. (1986). The seismic response of two-dimensional sedimentary deposits with large vertical velocity gradients. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 76(2):343–366.
- [Ben-Menahem, 1987] Ben-Menahem, A. (1987). Green’s tensor and its potentials for inhomogeneous elastic media. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 409(1837):287–327.
- [Ben-Menahem and Beydoun, 1985] Ben-Menahem, A. and Beydoun, W. B. (1985). Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media-i. general theory. *Geophysical Journal International*, 82(2):207–234.
- [Benites and Aki, 1994] Benites, R. and Aki, K. (1994). Ground motion at mountains and sedimentary basins with vertical seismic velocity gradient. *Geophysical Journal International*, 116(1):95–118.
- [Beydoun and Ben-Menahem, 1985] Beydoun, W. B. and Ben-Menahem, A. (1985). Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media-ii. a canonical problem. *Geophysical Journal International*, 82(2):235–262.
- [Červený, 1983] Červený, V. (1983). Synthetic body wave seismograms for laterally varying layered structures by the gaussian beam method. *Geophysical Journal International*, 73(2):389–426.
- [Červený, 2005] Červený, V. (2005). *Seismic ray theory*. Cambridge university press.
- [Červený et al., 1982] Červený, V., Popov, M. M., and Pšenčík, I. (1982). Computation of wave fields in inhomogeneous media gaussian beam approach. *Geophysical Journal International*, 70(1):109–128.
- [Červený and Pšenčík, 1979] Červený, V. and Pšenčík, I. (1979). Ray amplitudes of seismic body waves in laterally inhomogeneous media. *Geophysical Journal International*, 57(1):91–106.
- [Červený and Ravindra, 1971] Červený, V. and Ravindra, R. (1971). *Theory of seismic head waves*. University of Toronto Press.

- [Courant and Hilbert, 1966] Courant, R. and Hilbert, D. (1966). *Methods of mathematical physics*, volume 1. CUP Archive.
- [Graff, 1975] Graff, K. F. (1975). *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation.
- [Gurtin, 1982] Gurtin, M. E. (1982). *An introduction to continuum mechanics*, volume 158. Academic press.
- [Haskell, 1953] Haskell, N. A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the seismological Society of America*, 43(1):17–34.
- [Kausel, 2006] Kausel, E. (2006). *Fundamental solutions in elastodynamics: a compendium*. Cambridge University Press.
- [Kupradze, 1963] Kupradze, V. D. (1963). Dynamical problems in elasticity. *Progress in solid mechanics*, 3.
- [Luzón et al., 2003] Luzón, F., Ramírez, L., Sánchez-Sesma, F., and Posadas, A. (2003). Propagation of sh elastic waves in deep sedimentary basins with an oblique velocity gradient. *Wave motion*, 38(1):11–23.
- [Luzón et al., 2004] Luzón, F., Ramírez, L., Sánchez-Sesma, F., and Posadas, A. (2004). Simulation of the seismic response of sedimentary basins with vertical constant-gradient velocity for incident sh waves. *Pure and applied geophysics*, 161(7):1533–1547.
- [Madariaga, 1984] Madariaga, R. (1984). Gaussian beam synthetic seismograms in a vertically varying medium. *Geophysical Journal International*, 79(2):589–612.
- [Marsden and Hughes, 1994] Marsden, J. E. and Hughes, T. J. (1994). *Mathematical foundations of elasticity*. Courier Corporation.
- [Popov, 2002] Popov, M. M. (2002). *Ray theory and Gaussian beam method for geophysicists*. Edfubfa.
- [Sánchez-Sesma and Campillo, 1991] Sánchez-Sesma, F. J. and Campillo, M. (1991). Diffraction of p, sv, and rayleigh waves by topographic features: A boundary integral formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6):2234–2253.
- [Sánchez-Sesma and Luzón, 1995] Sánchez-Sesma, F. J. and Luzón, F. (1995). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident p, s, and rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85(1):269–284.
- [Sánchez-Sesma et al., 2001] Sánchez-Sesma, F. J., Madariaga, R., and Irikura, K. (2001). An approximate elastic two-dimensional green's function for a constant-gradient medium. *Geophysical Journal International*, 146(1):237–248.
- [Sánchez-Sesma et al., 1993] Sánchez-Sesma, F. J., Ramos-Martinez, J., and Campillo, M. (1993). An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident p, s and rayleigh waves. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 22(4):279–295.
- [Sánchez-Sesma et al., 2012] Sánchez-Sesma, F. J., Rodríguez-Castellanos, A., Pérez-Gavilán, J. J., Marengo-Mogollon, H., Pérez-Rocha, L. E., and Luzón, F. (2012). Some properties of the green's function of simplified elastodynamic problems. *Earthquakes and Structures*, 3(3_4):507–518.

- [Sills, 1978] Sills, L. B. (1978). Scattering of horizontally-polarized shear waves by surface irregularities. *Geophysical Journal International*, 54(2):319–348.
- [Sini, 2010] Sini, M. (2010). *An introduction to mathematical methods of continuum mechanics*. RICAM, Austrian Academy of Sciences.
- [Sommerfeld, 2013a] Sommerfeld, A. (2013a). *Mechanics of deformable bodies: Lectures on theoretical physics*, volume 2. Academic Press.
- [Sommerfeld, 2013b] Sommerfeld, A. (2013b). *Partial Differential Equations in Physics: Lectures on theoretical physics*, volume 6. Academic Press.
- [Thomson, 1950] Thomson, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of applied Physics*, 21(2):89–93.