



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELADO NUMÉRICO DE PROBLEMAS DE FRACTURA EN
SÓLIDOS MEDIANTE DISCONTINUIDADES INTERIORES**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL - ESTRUCTURAS

P R E S E N T A :

GELACIO JUÁREZ LUNA

TUTOR:

DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN

CIUDAD UNIVERSITARIA

México 2006



JURADO ASIGNADO:

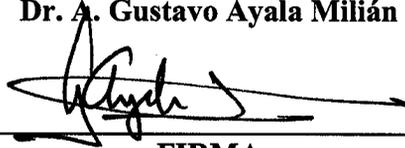
Presidente: Ing. Jesús Alberro Aramburu
Secretario: Dr. Arturo Tena Colunga
1er. Vocal: Dr. A. Gustavo Ayala Milián
2do. Vocal: Dr. Ismael Herrera Revilla
3er. Vocal: Dr. Francisco Sánchez Sesma
1er. Suplente: Dr. Juan J. Pérez Gavilán Escalante
2do. Suplente: Dr. Luis E. Fernández Baqueiro

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. A. Gustavo Ayala Milián



A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Ayala', is written over a horizontal line.

FIRMA

A Dios

A mis Padres, Francisco y Esperanza

A mis Hermanos, David y Eloisa

A mi Tutor

A la Universidad Nacional Autónoma de México

Al Instituto Politécnico Nacional

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca otorgada durante la duración de mis estudios de doctorado.

A la Dirección General de Estudios de Posgrado y al Instituto de Ingeniería, por el apoyo económico y material que me brindaron.

Al Dr. A. Gustavo Ayala Milián, por el apoyo académico y enseñanzas de vida que con tanto gusto me brindó.

A mis sinodales, Ing. Jesús Alberro Aramburu, Dr. Francisco Sánchez Sesma, Dr. Arturo Tena Colunga, Dr. Juan José Pérez Gavilán Escalante, Dr. Ismael Herrera Revilla y Dr. Luis Enrique Fernández Baqueiro, por su experiencia y conocimiento transmitidos.

Agradezco a mis compañeros de trabajo, por que de todos he aprendido: Guillermo Roeder, Esteban Flores, Carlos Avelar, Mauro Niño, Arturo Quiroz, Gonzalo Zárate Santillán, Federico Alba, Miguel Ángel Guzmán Barriga, Luis Torres Muñoz, Roberto Pérez Narváez, José Castillo, Jaime Retama, Alexander Abreu, Miguel Meza, especialmente a Mabel Mendoza y al M. en I. Octavio García Domínguez.

A mis padres Francisco Juárez Hernández y Esperanza Luna Sanabria por la vida y el apoyo incondicional que me han brindado durante mi desarrollo como persona; a mis hermanos David Juárez Luna y Eloisa Juárez Luna con quienes he compartido mi vida.

A todas las personas que me han inspirado a superarme: Constantino González, Sergio Quijas†, Héctor Colín, Dr. Héctor Sánchez, Catalina Sanabria, Gabino Juárez†, Genaro Serrano, Enedino Cordero, Pedro Montes, Fernando Villa.

A Monica Velázquez Luna, por su comprensión y cariño.

Índice

Resumen	x
Abstract	xii
1 Introducción	1
1.1 Aproximaciones para estudiar el proceso de falla	2
1.1.1 Mecánica de fractura	3
1.1.2 Método de la grieta discreta	5
1.1.3 Modelo de agrietamiento distribuido	7
1.1.4 Modelo de Discontinuidades Interiores	8
1.2 Motivación	11
1.3 Objetivos	13
1.4 Contenido	14
2 Planteamiento del Modelo de Discontinuidades Interiores	16
2.1 Planteamiento del problema elástico lineal	17
2.1.1 Problema de valores en la frontera	17
2.2 Planteamiento del Modelo de Discontinuidades Interiores	19
2.2.1 Cinemática de desplazamientos y deformaciones	20
2.2.2 Regularización de la cinemática	21
2.2.3 PVF del Modelo de Discontinuidades Interiores	23
2.3 Elementos finitos con discontinuidades interiores	25
2.3.1 Enriquecimiento elemental	26
2.3.2 Enriquecimiento nodal	30
3 Modelos constitutivos de daño	37
3.1 Modelo de daño isotrópico.	38
3.1.1 Ecuación constitutiva	39
3.1.2 Criterio de daño	40
3.1.3 Regla de endurecimiento	41
3.1.4 Condiciones de carga y descarga	43
3.1.5 Módulo tangente	43

3.2	Análisis de la falla en materiales	44
3.2.1	Fases de la curva esfuerzo deformación	44
3.2.2	Pérdida de estabilidad	46
3.2.3	Tiempo de bifurcación	46
3.3	Análisis del modelo isotrópico de daño con la cinemática de deformaciones de discontinuidades fuertes	49
3.3.1	Ecuación constitutiva discreta.	50
3.3.2	Condiciones de discontinuidad fuerte.	52
4	Formulación variacional del Modelo de Discontinuidades Interiores	54
4.1	Principio variacional del problema elástico lineal	55
4.2	Formulación variacional para un sólido dividido en subdominios	58
4.3	Formulación variacional del Modelo de Discontinuidad Débil	62
4.4	Formulación variacional del Modelo de Discontinuidades Fuertes	65
4.5	Formulación variacional del Modelo de Discontinuidad Discreta	67
4.6	Desarrollo de otros principios variacionales	68
4.6.1	Funcional de energía potencial total con discontinuidades	69
4.6.2	Funcional desplazamiento-esfuerzo con discontinuidades	69
4.6.3	Funcional de energía complementaria total con discontinuidades	71
4.7	Extensión a varias discontinuidades	71
4.7.1	Aproximación Continua	71
4.7.2	Aproximación Discreta	72
5	Aproximación mediante el MEF del Modelo de Discontinuidades Interiores	74
5.1	Generalidades	74
5.1.1	Discretización	75
5.1.2	Aproximación de campos	77
5.1.3	Extremización	77
5.2	Elemento Finitos con Discontinuidades Interiores	78
5.2.1	Matriz mixta para Discontinuidades Fuertes	78
5.2.2	Matriz mixta para Discontinuidad Discreta	80
5.2.3	Matriz de rigideces con Discontinuidades Interiores	81
5.2.4	Matriz de flexibilidades con Discontinuidades Interiores	84
5.3	Formulación del Elementos	85
5.3.1	Elemento unidimensional con discontinuidad	85
5.3.2	Elemento triangular con discontinuidad	90
6	Formulación variacional de estructuras laminares con discontinuidades	96
6.1	Teoría de placas	97
6.1.1	Problema de valores en la frontera	98
6.1.2	Cinemática	98

6.1.3	Desplazamiento	99
6.2	Formulación variacional general de placas	103
6.3	Desarrollo de otros principios variacionales	104
6.3.1	Funcional de energía total de placas	104
6.3.2	Funcional desplazamiento-fuerza	105
6.3.3	Funcional de energía complementaria total	106
6.4	Placas con discontinuidades	106
6.4.1	Funcional de energía general de placas con discontinuidades	109
6.5	Desarrollo de otros principios variacionales	110
6.5.1	Funcional de energía potencial total con discontinuidades	110
6.5.2	Funcional desplazamiento-fuerza	111
6.5.3	Funcional de energía complementaria total	112
6.6	Aproximación mediante el MEF de placas con discontinuidades	112
6.6.1	Matriz mixta	115
6.6.2	Matriz de rigideces	117
6.6.3	Matriz de Flexibilidades	120
6.6.4	Formulación del elemento finito triangular placa con discontinuidades	121
6.7	Teoría de flexión en vigas	126
6.7.1	Teoría de vigas de Bernoulli-Euler	127
6.7.2	Aproximación mediante el MEF	128
6.7.3	Teoría de vigas de Timoshenko	129
6.7.4	Aproximación mediante el FEM	131
6.8	Vigas con discontinuidades	132
6.8.1	Viga de Bernoulli-Euler	132
6.8.2	Viga de Timoshenko	134
7	Discontinuidades interiores con variación lineal del salto	137
7.1	Cinemática de la discontinuidad.	138
7.2	Aproximación con el método de los elementos finitos.	139
7.2.1	Ejemplo de aplicación.	141
7.3	Análisis y propuesta de una relación entre el salto y los desplazamientos regulares	143
7.4	Propuesta de una matriz para saltos lineales	146
7.4.1	Ejemplos	147
8	Tratamiento de la propagación	152
8.1	Seguimiento de discontinuidades	153
8.2	Seguimiento Local	154
8.3	Seguimiento Global	156
8.3.1	Planteamiento del seguimiento global como una ley de conservación	158
8.3.2	Planteamiento para determinar las líneas de discontinuidad	160
8.3.3	Estrategia de seguimiento propuesta	162

9 Ejemplos de aplicación	166
9.1 Barra	167
9.2 Barra 2 dimensiones	168
9.3 Viga con apoyos simples	168
9.4 Viga en cantilever	171
9.5 Viga simplemente apoyada con aproximación de esfuerzo plano	171
9.6 Viga empotrada	172
10 Conclusiones y trabajos futuros	175
10.1 Conclusiones	175
10.2 Trabajos futuros	177
Referencias	178

Índice de figuras

1.1	Proceso de falla adaptada (Oliver y Huespe, 2004).	2
1.2	Modos de fractura.	3
1.3	Procedimiento de remallado empleado en la propagación de grietas.	5
1.4	Idealización de la prueba a tensión.	6
1.5	Curvas: a) ablandamiento esfuerzo-apertura de la grieta y b) curva esfuerzo-desplazamiento. Bazant y Planas (1998).	6
1.6	Modelo de agrietamiento distribuido.	7
1.7	Modelo de discontinuidades interiores: a) discontinuidades débiles, b) discontinuidades fuertes y c) discontinuidad discreta.	9
2.1	Continuo Ω con acciones en el dominio y condiciones de frontera sobre Γ .	18
2.2	Cinemática de desplazamientos y deformaciones de las aproximaciones de Discontinuidad: a) Débil, b) Fuerte y c) Discreta.	21
2.3	Posible descomposición del campo de desplazamientos.	22
2.4	Representación gráfica del campo de desplazamientos en función de: a) desplazamientos continuos, b) desplazamientos regulares S y c) función M_S .	22
2.5	Enriquecimiento: a) Elemental y b) Nodal.	26
2.6	Sólido con discontinuidad S .	32
3.1	Curva esfuerzo deformación.	39
3.2	Normas: a) espacio de esfuerzos y b) espacio de deformaciones.	41
3.3	Regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal y b) exponencial.	42
3.4	Puntos característico durante el proceso de carga.	45
3.5	Coincidencia de puntos característicos.	46
3.6	Zona de localización S .	47
3.7	Modelo de daño: a) continuo y b) discreto.	52
4.1	Dominio Ω con sus condiciones de frontera en Γ .	56
4.2	Dominio Ω : a) dividido en tres subdominios y b) separado.	58
4.3	Dominio Ω : a) con una discontinuidad débil en el campo de desplazamientos y b) separado.	62
4.4	Dominio Ω con una discontinuidad fuerte S : a) continuo y b) separado.	65
4.5	Dominio Ω : a) con una discontinuidad fuerte y b) separado.	67

4.6	Aproximación continua del dominio Ω con varias discontinuidades.	72
4.7	Aproximación discreta del dominio Ω con varias discontinuidades.	73
5.1	Dominio Ω con discontinuidad S : a) descripción geométrica con sus condiciones de frontera y b) discretización con EFDI.	75
5.2	EFDI: a) triangular en dos dimensiones y b) paralelepípedo en tres dimensiones.	76
5.3	Modelo de daño: a) esfuerzo-salto y b) tracción-salto	82
5.4	Geometría del elemento unidimensional con discontinuidad.	85
5.5	Elemento mixto unidimensional.	86
5.6	Elemento finito de desplazamientos.	87
5.7	Idealización del elemento finito de flexibilidades.	89
5.8	Geometría del elemento triangular con discontinuidad.	90
5.9	Elemento mixto triangular con discontinuidad.	91
5.10	Elemento finito triangular con discontinuidad de desplazamientos.	93
6.1	Idealización de placas.	97
6.2	Placa con sus condiciones de frontera en Γ	98
6.3	Cinemática de la deformación una placa.	98
6.4	Esfuerzos en una placa.	101
6.5	Placa con zona de localización S	108
6.6	Placa con carga: a) antes y b) después del inicio de la discontinuidad.	108
6.7	Elemento finito triangular y rectangular placa con una discontinuidad.	113
6.8	Elemento finito triangular placa con una discontinuidad.	122
6.9	Elemento finito mixto triangular placa con una discontinuidad.	123
6.10	Elemento finito de placa una gruesa con una discontinuidad.	124
6.11	Elemento finito de placa delgada con una discontinuidad.	125
6.12	Cargas transversales en vigas que fundamentalmente se resisten por la acción de la flexión.	126
6.13	Elemento viga.	127
6.14	Viga de Timoshenko.	129
6.15	Elemento viga con articulación.	134
7.1	Dominio Ω con una discontinuidad Γ_d	138
7.2	Salto de desplazamiento en un elemento triangular con una discontinuidad.	139
7.3	Elemento finito cuadrilátero: a) con discontinuidad y b) movimiento de cuerpo rígido debido al salto normal w_n^i	141
7.4	Desplazamiento en los nudos debido al salto en la discontinuidad: formulación de Alfaite <i>et al.</i> (2003).	143
7.5	Elemento finito cuadrilátero con discontinuidad y sistema de referencia local.	144
7.6	Cinemática del elemento considerando $w_s^j = w_s^j = w_n^j = 0$	144
7.7	Cinemática del elemento considerando $w_s^i = 0$, $w_s^j \neq 0$ y $w_n^j \neq 0$	145

7.8	Cinemática del elemento considerando el salto sobre el borde, además, $w_s^i \neq 0$, $w_s^j \neq 0$ y $w_n^j \neq 0$	145
7.9	Cinemática propuesta por Alfaite <i>et al.</i> (2003).	146
7.10	Cinemática del elemento considerando $w_s^i \neq 0$, $w_s^j \neq 0$ y $w_n^j \neq 0$	146
7.11	Descripción del movimiento de cuerpo rígido debido a un salto dentro de un elemento finito.	147
7.12	Movimiento de cuerpo rígido producido por un salto dentro de un elemento finito.	148
7.13	Movimiento de cuerpo rígido en el caso de dos elementos vecinos.	149
7.14	Movimiento de cuerpo rígido en un elemento cuadrilátero.	149
8.1	Trayectorias de discontinuidad en un sólido.	154
8.2	Seguimiento local de una discontinuidad	155
8.3	Seguimiento global de discontinuidades.	157
8.4	Traza de una discontinuidad dentro del elemento.	158
8.5	Problema de conservación, con \mathbf{K} isotrópico.	159
8.6	Problema de conservación con \mathbb{K} anisotrópico	161
8.7	Parche asociado a un nodo base.	163
8.8	Parche en elementos finitos: a) cuadriláteros y b) triangulares.	165
9.1	Geometría de barra continua.	167
9.2	Geometría de barra discontinua.	167
9.3	Variación del desplazamiento d_2 respecto al esfuerzo σ	167
9.4	Geometría barra como un problema plano.	168
9.5	Idealización: a) Malla de elementos finitos, b) zona de localización y c) malla deformada.	169
9.6	Diagramas: a) Carga P - desplazamiento δ y b) esfuerzo σ_S - salto	169
9.7	Viga con carga al centro: a) descripción geométrica y b) con zona de localización (articulación).	170
9.8	Variación: a) Carga P <i>vs.</i> desplazamiento transversal w y b) momento M <i>vs.</i> salto.	170
9.9	Viga en cantiliver: a) descripción geométrica y b) con zona de localización (articulación).	171
9.10	Variación: a) Reacción R_{y2} <i>vs.</i> desplazamiento impuesto w_2 y b) cortante V <i>vs.</i> salto transversal del desplazamiento.	172
9.11	Viga simplemente apoyada: a) descripción geométrica b) idealización con EF planos, c) idealización con EF viga y d) con una zona de localización (articulación).	173
9.12	Variación de la carga P <i>vs.</i> desplazamiento u	174
9.13	Viga empotrada: a) descripción geométrica y b) con zona de localización (articulación).	174
9.14	Variación de: a) carga P <i>vs.</i> desplazamiento u y Momento M <i>vs.</i> salto en las rotaciones.	174

RESUMEN

En esta tesis doctoral se estudia el proceso de simulación de la falla en materiales con el Modelo de Discontinuidades Interiores en sus tres aproximaciones de discontinuidad: Débil, Fuerte y Discreta. Las dos primeras aproximaciones se pueden clasificar como Continuas, pues las relaciones constitutivas que rigen el comportamiento del material son continuas, relación esfuerzo-deformación, mientras que en la aproximación Discreta el comportamiento del material se rige por relaciones constitutivas discretas, relación tracción-salto.

Se presentan las ecuaciones que definen el problema de valores en la frontera del Modelo de Discontinuidades Interiores, así como sus soluciones aproximadas mediante formulaciones del Método de los Elementos Finitos reportadas en la literatura, las cuales presentan problemas particularmente numéricos. Los aspectos fundamentales que deben representar adecuadamente los elementos finitos con discontinuidades interiores son: la cinemática de los desplazamientos y deformaciones, y el equilibrio en la discontinuidad.

Dentro de las aportaciones fundamentales de este trabajo de investigación, está el desarrollo de una formulación variacional general del proceso de falla en materiales mediante el Modelo de Discontinuidades Interiores, que contiene como condiciones de estacionaridad, las ecuaciones que gobiernan el problema incluyendo las condiciones de frontera. Se puede demostrar que las funciones que extremiza un funcional, también satisfacen las ecuaciones que gobiernan el problema, pero la formulación variacional tiene mayores ventajas. A partir de la formulación variacional general del Modelo de Discontinuidades Interiores, se desarrolla una jerarquía de principios variacionales que se clasifican como: mixtos, de energía potencial total y de energía potencial complementaria total.

La solución de los funcionales de energía para el Modelo de Discontinuidades Interiores desarrollados en este trabajo de investigación, se aproximan mediante los modelos mixtos, de desplazamientos y de las fuerzas del método de los elementos finitos. En consecuencia, se obtiene una jerarquía de matrices de los llamados Elementos Finitos con Discontinuidades Interiores que se clasifican como mixtas, de rigideces y de flexibilidades.

Para representar zonas de localización de deformaciones en elementos estructurales dominados por cargas de flexión/cortante, se desarrolla un funcional de energía general para estos elementos con Discontinuidades Interiores; a partir de esta formulación, se desarrollan los funcionales para placas gruesas, placas delgadas, viga de Timoshenko y viga de Euler-Bernoulli. Los funcionales correspondientes a placas gruesas y a la viga de Timoshenko con discontinuidades consideran la energía de deformación por cortante y flexión, mientras que para placas delgadas y la viga de Euler-Bernoulli con discontinuidades sólo consideran la energía por flexión. En estos elementos, las zonas de localización (discontinuidades) se pueden presentar como saltos en los desplazamientos transversales (dislocación), saltos en las rotaciones (articulación) o una combinación de ellos.

Generalmente, el salto de desplazamiento se considera constante dentro de los elementos finitos con discontinuidades interiores, en este trabajo se analiza una propuesta para representar el salto de los desplazamientos con variación lineal, la cual no representa adecuadamente la cinemática de desplazamientos, por lo que se desarrolla una formulación para representar adecuadamente la cinemática de los desplazamientos. Ésta, se valida con ejemplos en los que se considera movimientos de cuerpo rígido de las partes en que se divide el elemento finito por la discontinuidad.

Para demostrar la capacidad de los elementos finitos con discontinuidades interiores formulados en este trabajo de investigación doctoral, se presenta ejemplos de aplicación para simular el proceso de falla en estructuras hasta el colapso. En éstos se observa que la energía que se induce a la estructura por la sollicitación de las cargas, se libera o se transforma en la energía necesaria para generar una discontinuidad, que dependiendo del problema puede ser una grieta, una dislocación, una articulación o una combinación de estas dos últimas.

Finalmente, se concluye que el formular el problema de valores en la frontera del Modelo de Discontinuidades Interiores en forma variacional, permite un tratamiento matemático más poderoso en cuestión de existencia, estabilidad y convergencia de soluciones numéricas. La jerarquía de los elementos finitos con discontinuidades interiores formulados en este trabajo es una herramienta numérica para simular el proceso de falla en estructuras, y así, conocer el comportamiento en su evolución al colapso.

ABSTRACT

In this dissertation the failure material process is studied by the three approaches of the Embedded Discontinuities Model: Weak, Strong and Discrete Discontinuities. The first two approaches can be classified as Continuum because the constitutive equations, which ruled the material behavior, is described by a continuum one, a stress-strain relationship, whereas in the Discrete approach the material behavior is described by a Discrete constitutive equation, a traction-displacement jump relationship.

The equations that defined the boundary value problem of the Embedded Discontinuities Model are given as well as its approximated solution by the Finite Element Method reported in the literature, which showed numerical problems. The fundamental features that the finite elements with embedded discontinuities have to guarantee are: the kinematics of the displacements and strains as well as the equilibrium in the discontinuity.

One of main contributions in this research work is the development of a general variational formulation of failure material process by Embedded Discontinuities, which provides as stationary conditions the equations that governs the problem including the boundary conditions. It can be shown that the functions which extremize the functional, also satisfied the equations that governs the problem, however, the former have more advantages. From the general variational formulation of the Embedded Discontinuities Model, a hierarchy of variational principles is formulated that is classified as: Mixed, total potential energy and total complementary energy.

The solution of the energy functionals of the Embedded Discontinuities Model, developed in this research work, are approximated by the mixed, displacement and equilibrium models of the Finite Element Method, as a result yields a hierarchy of the finite elements with embedded discontinuities matrices which are classified as: mixed, stiffness and flexibility, respectively.

To model the strain localization zones in structural elements dominated by flexion-shear loads, a general energy functional for this type of elements with discontinuities is developed; from this formulation the functionals for thick plates, thin plates, Timoshenko beam and Euler-Bernoulli beam are developed. The functionals standing for thick plates and Timoshenko beam with discontinuities take into account the energy by shear and flexion deformation, whereas the functionals standing for thin plates and Euler-Bernoulli beams with discontinuities only account the flexion deformations energy. In these elements, the localization zone (discontinuities) can come along as jumps in the transversal displacements (dislocations), jumps in the rotations (hinges) or as combination of them.

Usually, the displacement jump is assumed constant into the finite elements with embedded discontinuities, in this work a proposal for modeling linear displacement jump is analyzed. This does not simulate adequately the displacement kinematics, for this reason, it is developed a formulation that models adequately the displacement kinematics. This is validated with examples

which consider free rigid body relative motions of the two portions of the element split up by the discontinuity.

To show the effectiveness of the finite elements with embedded discontinuities formulated in this work, some application examples to simulate the failure process in structures until their collapse occurs. These examples showed that the energy induced by the loads to the structures is released or transformed in the energy that needs to be spend to generate a discontinuity, which depending of the problem may be a crack, dislocation, hinge or a combination of the last two.

Finally, it is concluded that the variational formulation of the boundary value problem of the Embedded Discontinuity Model allows a deeper mathematical treatment such as existence, stability and convergence of numerical solutions. The hierarchy of the finite elements with embedded discontinuities formulated in this work is a numerical tool to simulate the failure process in structures and the behavior in their evolution to the collapse.

Capítulo 1

Introducción

El estudio y la simulación del comportamiento de las estructuras y sus componentes en su evolución al colapso es tema de interés en diversos campos de la ingeniería. El comportamiento global de una estructura depende en gran parte del comportamiento del material o materiales con los que se construyen sus elementos estructurales. En el área de ingeniería civil, la generalidad de los materiales empleados en la construcción de las estructuras tienen un comportamiento inicialmente elástico hasta un que se alcanza un valor umbral, posteriormente se inicia un comportamiento no lineal que generalmente en el diseño se considera como un comportamiento plástico o elastoplástico, sin embargo, materiales como el concreto después de alcanzar un cierto valor umbral presenta ablandamiento por deformación.

Dependiendo del tipo de material, la falla se presenta físicamente como discontinuidades denominadas: grietas en el concreto, fracturas en rocas, líneas de deslizamiento en suelos y bandas de cortante en metales y suelos granulares. En relación con su manera de falla, el comportamiento de los materiales se puede clasificar como frágil y dúctil, en el primero de estos se tienen deformaciones pequeñas y la falla se presenta en forma abrupta, mientras que los materiales dúctiles presentan deformaciones grandes y la falla se presenta en forma gradual. Durante el proceso de falla toda o parte de la energía acumulada en el continuo (energía de deformación) debida a las sollicitaciones de carga, se libera o se transforma como la energía necesaria para generar una superficie de falla (grieta), que se presenta cuando ocurre un proceso de inestabilidad en el material.

En las décadas pasadas, diversos estudios y observaciones realizadas para describir el proceso de falla en medios continuos han determinado que éste es precedido por un fenómeno de localización de deformaciones, el cual se caracteriza por la formación de una zona de localización donde el daño y otros efectos no lineales se concentran (Bazant y Planas, 1998). Esta zona inicia con la formación de vacíos y su coalescencia, que eventualmente colapsa en discontinuidades macroscópicas. En la figura 1.1 se muestran las diferentes etapas del proceso de falla (Oliver y Huespe, 2004):

- *Zona de falla difusa.* Se caracteriza por el inicio de un fenómeno de disipación de energía, así como por el incremento y concentración de deformaciones espacialmente suaves.
- *Zona de discontinuidad débil.* La zona anterior se hace angosta, por lo que la concentración de deformaciones se agudiza colapsando en un campo de deformaciones discontinuo, mientras que el campo de desplazamientos se mantiene continuo. Este escenario, que se presentan deformaciones discontinuas y desplazamientos continuos se denomina de discontinuidades débiles.
- *Zona de discontinuidades fuertes.* La discontinuidad débil evoluciona a una banda cuyo tamaño es tan estrecho hasta convertirse en una banda discontinua de ancho cero. El campo de desplazamientos experimenta un salto, $[[\mathbf{u}]]$, y el de las deformaciones, incluyendo los gradientes de desplazamientos, se convierte en un campo no acotado.

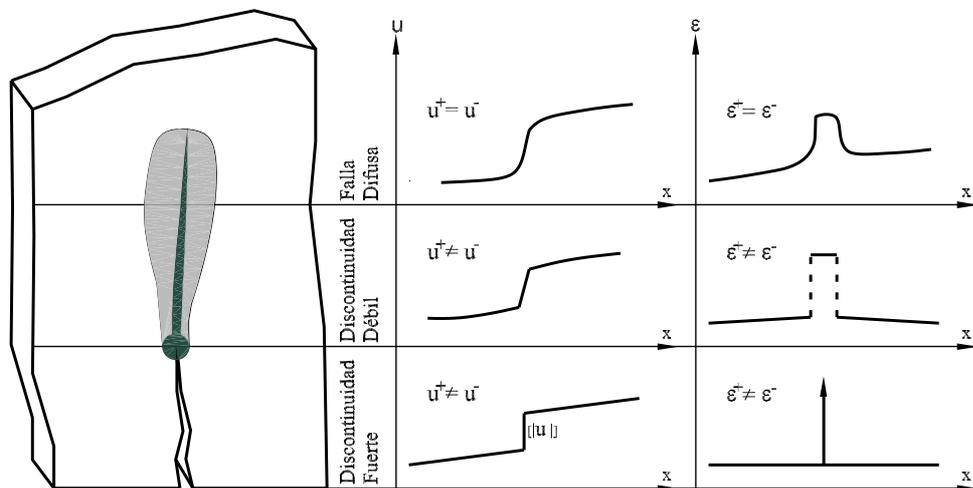


Figura 1.1: Proceso de falla adaptada (Oliver y Huespe, 2004).

1.1 Aproximaciones para estudiar el proceso de falla

Existen varias aproximaciones para simular el proceso de falla en materiales, las cuales se dividen principalmente en dos: la discreta y la continua. La diferencia básica entre estas aproximaciones es las leyes constitutivas que determinan el comportamiento del material. En la aproximación continua, se emplean relaciones constitutivas esfuerzo-deformación para el comportamiento del material, en el caso de la discreta, se emplean relaciones tracción-desplazamiento. A continuación se presenta una descripción de las aproximaciones más empleadas para el estudio de la falla en materiales a nivel macroscópico.

1.1.1 Mecánica de fractura

La mecánica de fractura, como una rama de la mecánica de cuerpos deformables, se encarga del estudio de sólidos agrietados, principalmente en materiales frágiles, en los que busca determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones, particularmente en la punta de las grietas, donde las deformaciones son no acotadas. La mecánica de fractura se clasifica como Mecánica de Fractura Elástica Lineal (MFEL) cuando el proceso mecánico que se desarrolla para generar una grieta, no presenta mecanismos plásticos. Por el contrario, cuando en la punta de una grieta los esfuerzos superan el límite elástico, desarrollando plasticidad o cualquier otro mecanismo inelástico, se clasifica como Mecánica de Fractura Elástica no Lineal.

El precursor de la mecánica de la MFEL fue Inglis (1913), quien obtuvo en un sólido infinito con una cavidad elíptica la solución elástica de los esfuerzos en el vértice de la cavidad; observó que cuando los ejes cortos de la elipse tienden a cero para representar una grieta, los esfuerzos en los ejes de la elipse tienden a ser no acotados. Posteriormente, Griffith (1921) para el problema de fractura, propuso un criterio de energía el cual establece que la propagación de grietas es controlada por el balance entre la energía de deformación y la energía requerida para formar nuevas superficies de grietas. Irwin (1956) desarrolló, con base en la teoría de Griffith, el concepto de razón de energía liberada (G), la cual se define como la cantidad de energía necesaria para generar una grieta de área unitaria, más tarde Irwin (1957) demostró que el estado de esfuerzos y desplazamientos en la cercanía de la punta de una grieta pueden ser descritos por una sola constante a la cual denominó Factor de Intensidad de Esfuerzo (K), la cual está relacionada con la razón de energía liberada. Además, Irwin introdujo el concepto de los modos de fractura independientes (figura 1.2): I) apertura, II) cortante en el plano y III) cortante fuera del plano.

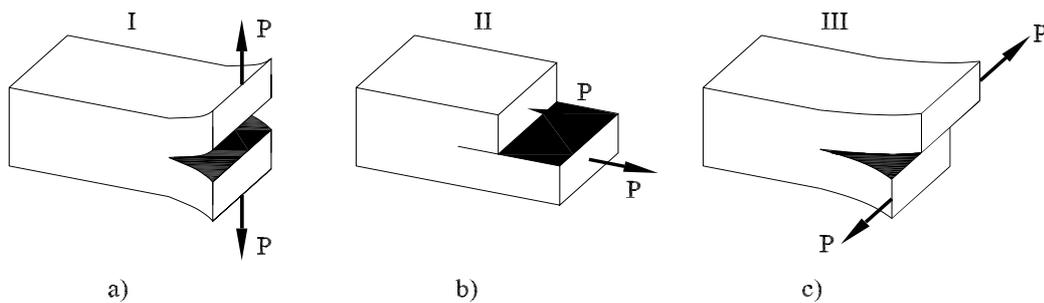


Figura 1.2: Modos de fractura.

El factor de intensidad de esfuerzo (K) se emplea como un criterio de propagación, al compararse con el factor de intensidad de esfuerzos crítico (K_c), definido como una propiedad de tenacidad del material la cual se determina en pruebas de laboratorio. Ambos se pueden definir en forma independiente para cada uno de los modos de fractura.

La MFLE simula el proceso de falla en materiales con el apoyo de los métodos numéricos, principalmente mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de las

Ecuaciones Integrales de Frontera (MEIF). Una vez que se genera una malla de un cuerpo agrietado, la simulación de la falla, por ejemplo en modo I, se lleva a cabo en incrementos que siguen cuatro pasos:

1. **Análisis de esfuerzos.** Existen soluciones analíticas de esfuerzos en sólidos agrietados, sin embargo, éstas son limitadas en su alcance. Por lo que se recurre a un análisis aproximado de esfuerzos mediante el MEF y el MEIF. La precisión de los resultados depende de la densidad de la malla y del orden del elemento empleado. Para discretizar un cuerpo agrietado, el MEF utiliza elementos finitos de puntos cuartos en la punta de la grieta para simular la singularidad de esfuerzos, mientras que en el resto del dominio se emplean elementos cuadriláteros y/o triangulares. En este mismo tipo de problemas el MEIF emplea formulaciones como la desarrollada por Portela *et al.* (1992), en la que los bordes de las grietas se discretizan con elementos cuadráticos discontinuos, mientras que en el resto de las fronteras se emplean elementos cuadráticos continuos.
2. **Cálculo del factor de intensidad de esfuerzos.** En aproximaciones del MEF, el cálculo del factor de intensidad de esfuerzos se realiza mediante el método de correlación de desplazamientos o el de la integral J (Rice, 1968). Este último se utiliza en aproximaciones como el método de las ecuaciones integrales de frontera.
3. **Cálculo de la dirección de propagación.** En la literatura existente se reportan tres métodos diferentes para calcular la dirección de propagación de una grieta: el del esfuerzo principal máximo, el de la tasa máxima de la energía liberada y el de la teoría de tasa mínima de la densidad de energía de deformación.
4. **Determinación de nuevo frente de grieta y remallado.** En aproximaciones de elementos finitos, para simular la propagación de la grieta, es necesario remallar el dominio en la región de la grieta usando un procedimiento como el de Swenson e Ingraffea (1987) mostrado en la figura (1.3), en el que dada la configuración inicial de la malla alrededor de la punta de una grieta (a), se eliminan el grupo de elementos vecinos y se extiende la grieta dentro de esta región (b). Posteriormente, se colocan elementos finitos de puntos cuartos en la punta de la grieta y, finalmente, se construye la malla de transición entre los elementos especiales y la malla original (c).

El proceso de propagación se detiene cuando el Factor de Intensidad de Esfuerzos K_I , es menor al valor crítico K_{IC} , que es un parámetro que depende del material.

Las ventajas de la MFEL es que localiza la discontinuidad en forma física mediante la aparición de una grieta y da resultados satisfactorios en materiales frágiles. Dentro de las desventajas de este método está el costo computacional adicional por el remallado en cada paso del análisis y que el método es capaz de simular el proceso de agrietamiento solamente si se tiene una grieta inicial en la estructura.

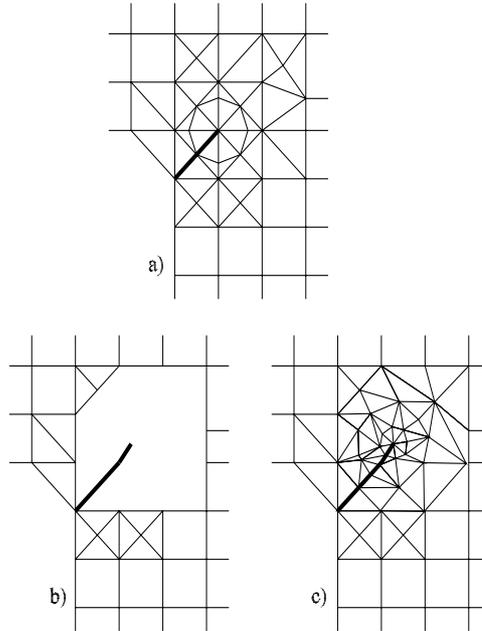


Figura 1.3: Procedimiento de remallado empleado en la propagación de grietas.

1.1.2 Método de la grieta discreta

El método de la grieta discreta modela la grieta como una discontinuidad del campo de desplazamientos, introduciendo elementos de interfase con espesor cero ubicados entre las fronteras de los elementos sólidos en las zonas del continuo susceptibles al agrietamiento. El comportamiento del material en las interfaces se determina por una ecuación constitutiva discreta (relación tracción, salto), se asume que mientras la grieta se propaga y se abre existe transferencia de esfuerzos entre los bordes de la grieta.

En los años setentas, Hillerborg *et al.* (1976) extienden el concepto de la grieta discreta en el concreto, proponen que una grieta cohesiva se puede desarrollar en cualquier lugar de un sólido, aún cuando no existe la presencia de una macrogrieta. Ellos llamaron esta extensión del modelo de grieta cohesiva como *Modelo de grieta ficticia*. Hillerborg describe una prueba a tensión en el concreto, como la que se muestra en la figura 1.4, la cual antes de alcanzar el valor de esfuerzo a tensión último σ_u , al incrementar la carga las deformaciones se mantienen uniformemente distribuidas a lo largo del espécimen (Arco OP). Al alcanzar el esfuerzo a tensión último, aparece una grieta cohesiva, normal al eje de la barra en algún lugar del espécimen, con apertura finita w , en la que aún existe transmisión de esfuerzos, al mismo tiempo, el resto del espécimen se descarga y sus deformaciones decrecen uniformemente a lo largo del arco PB. Lo anterior llevó a Hilleborg a suponer que la transferencia de esfuerzos a través de la grieta cohesiva es función de la apertura de la grieta, *i.e.*

$$\sigma = f(w)$$

donde $f(w)$ es una característica del material que se determina experimentalmente. Esta función,

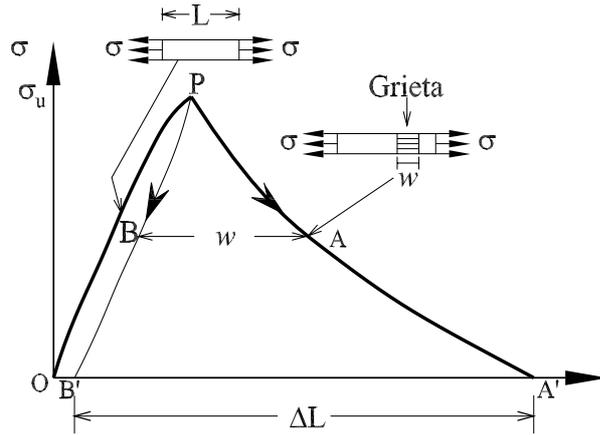


Figura 1.4: Idealización de la prueba a tensión.

representada gráficamente por una curva de ablandamiento, se puede extraer del comportamiento global de un elemento (figura 1.4) y graficar en forma separada como se muestra en la figura 1.5a. Esta curva de ablandamiento cumple con la propiedad que al alcanzar el valor de esfuerzo a tensión último σ_u , se tiene una apertura de grieta $w = 0$. El ingrediente principal del modelo de grieta cohesiva es la curva de ablandamiento, que varía para cada material, la cual se puede determinar en forma experimental.

Para simplificar los análisis, manteniendo los fundamentos del modelo, Hillerborg supuso no tomar en cuenta las deformaciones inelásticas en la curva de carga-descarga, *i.e.*, el comportamiento global del material es lineal elástico, por lo que para la curva de ablandamiento de la figura 1.4 la elongación ΔL , se construye como se muestra en la figura 1.5b.

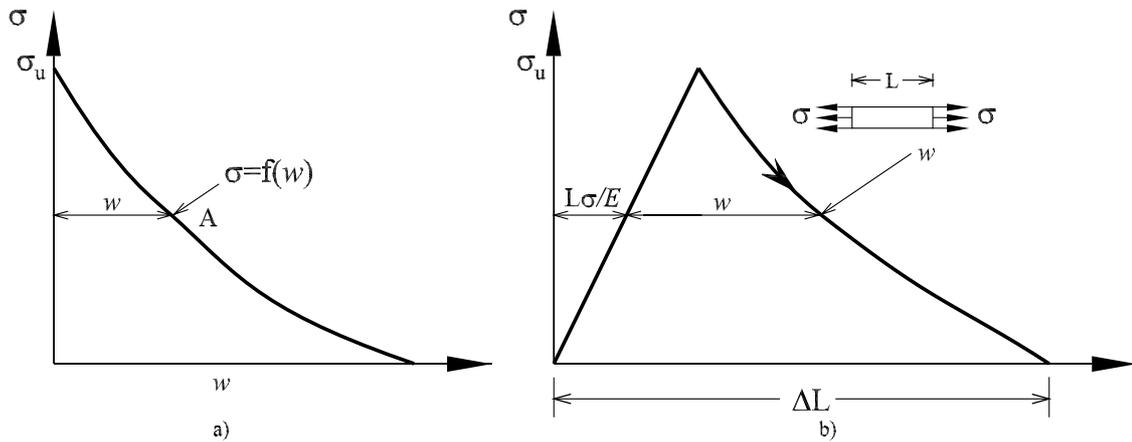


Figura 1.5: Curvas: a) ablandamiento esfuerzo-apertura de la grieta y b) curva esfuerzo-desplazamiento. Bazant y Planas (1998).

Los elementos de interfase proporcionan resultados satisfactorios debido a su representación cinemática fuerte del fenómeno de agrietamiento. La desventaja principal de estos elementos para simular el agrietamiento, es que las grietas sólo pueden representarse en los bordes de los

elementos sólidos, por lo que la ubicación de estos elementos debe determinarse antes del análisis, lo que requiere una tediosa generación de mallas.

1.1.3 Modelo de agrietamiento distribuido

Otra aproximación que ha tenido popularidad en el análisis de estructuras de concreto mediante elementos finitos es el modelo de agrietamiento distribuido introducido por Rashid (1968), el cual representa la pérdida de rigidez del material como un conjunto de grietas paralelas entre sí distribuidas sobre un elemento finito (figura 1.6). Lo anterior se puede simular convenientemente al reducir la rigidez y resistencia del material en la dirección normal a las grietas después de alcanzar la resistencia última del material. La evolución del proceso de falla de una estructura involucra el ablandamiento, que se refiere al decrecimiento de los esfuerzos y un incremento de las deformaciones en forma gradual.

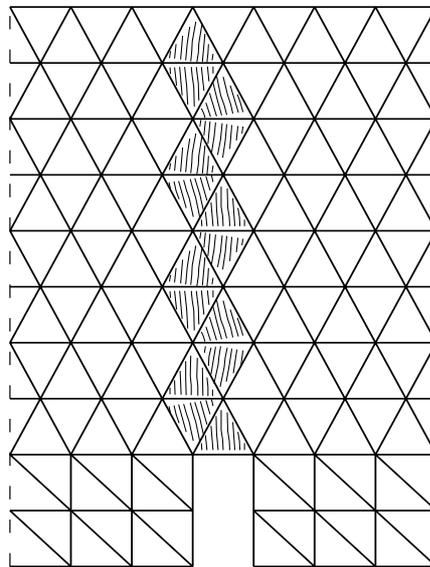


Figura 1.6: Modelo de agrietamiento distribuido.

Existen tres aproximaciones para la simulación del agrietamiento del concreto basados en el modelo de Grieta Distribuida (Rots, 1988): grieta fija, grieta fija multidireccional y grieta giratoria. El modelo de grieta fija considera la formación de una grieta perpendicular a la dirección del esfuerzo principal máximo, cuando el esfuerzo principal es mayor que la resistencia a tensión última del material, la orientación de la grieta permanece constante durante el análisis. En el modelo de grieta fija multidireccional consideran que se pueden formar múltiples grietas cuya orientación individual se mantiene fija durante todo el análisis computacional. El modelo de grieta giratoria, propuesta por Cope *et al.* (1980), considera que la grieta gira de acuerdo con la dirección de la deformación principal durante el proceso de carga, a diferencia del modelo de grieta fija.

La ventaja principal del modelo de agrietamiento distribuido es que no necesita remallado durante el proceso de simulación del proceso de la falla, sin embargo, cuando se presenta ablandamiento

de deformaciones en el análisis, el modelo de agrietamiento distribuido presenta dificultades que en principio eran desconocidas o no se apreciaban. Éstas consisten en:

- 1) Objetividad de la malla. Los resultados son afectados por el tamaño y la orientación de los elementos, este efecto puede ser reducido utilizando mallas finas;
- 2) Modos cinemáticos falsos. Producidos por la falta de convergencia en el análisis y
- 3) Atoramiento de los esfuerzos. Fenómeno que ocurre como consecuencia de la compatibilidad de desplazamientos entre elementos y de que la grieta no está alineada con un borde del elemento finito que la contiene. En consecuencia, el elemento en el interior de la banda de ablandamiento impone deformaciones a los elementos vecinos; si los elementos vecinos limitan dichas deformaciones, se produce un atoramiento de los esfuerzos en el interior y no llega a descargarse la banda por el ablandamiento.

1.1.4 Modelo de Discontinuidades Interiores

La aproximación de discontinuidades interiores surge de la búsqueda de un modelo que tenga las ventajas de los modelos de grieta discreta y grieta distribuida; que localice el daño y no requiera remallado, pero que no presente las dificultades que presentan estos modelos. Este procedimiento permite introducir discontinuidades en los elementos finitos durante el análisis, sin necesidad de alterar la malla. Además, no existe la necesidad de definir *a priori* zonas potenciales de falla, puesto que las discontinuidades se pueden introducir en cualquier momento del análisis. Para el seguimiento de las discontinuidades, el Modelo de Discontinuidades Interiores recurre a un criterio de falla para determinar el momento en que aparece una discontinuidad, y de un criterio de propagación para determinar su posición geométrica en el sólido durante el análisis. Estos criterios pueden ser simples como un criterio de fluencia o de daño, o más elaborados, como un análisis de bifurcación (pérdida de elípticidad de las ecuaciones que gobiernan el problema), por ejemplo Runesson *et al.* (1991).

Los aspectos fundamentales que considera el Modelo de Discontinuidades Interiores son la cinemática de los desplazamientos y deformaciones, así como, el equilibrio en la discontinuidad. El enriquecimiento cinemático se refiere a la representación correcta de la posición de la discontinuidad dentro del elemento, así como los desplazamientos relativos (saltos) entre los bordes de la discontinuidad. En este modelo, la continuidad interna de tracciones debe ser impuesta de tal forma que satisfaga el equilibrio interno entre las tracciones que se encuentran dentro de la discontinuidad y las que se encuentran en el material vecino a ésta. En los elementos finitos con discontinuidades interiores, existen dos tipos de enriquecimiento denominado: local y nodal. El primero enriquece el campo de desplazamientos mediante un nodo interno que captura los saltos de la discontinuidad, los grados de libertad del nudo interno se pueden condensar en forma estática. El enriquecimiento nodal, se basa en el método de la Partición de la Unidad (Melenk y Babuska, 1996), representa el salto mediante la adición de grados de libertad en los nodos existentes.

El Modelo de Discontinuidades Interiores se puede clasificar de acuerdo al tipo de discontinuidad y las relaciones constitutivas empleadas (Fernández, 2002). Si se considera una barra sujeta a tensión en la figura 1.7, hasta que alcanza la resistencia máxima a tensión del material, el análisis del proceso de falla se puede realizar introduciendo una discontinuidad en el campo de desplazamientos y con una relación constitutiva como se muestra a continuación.

1. Aproximación Continua. Esta aproximación considera que el sólido es continuo en todos sus puntos y emplea relaciones constitutivas estándares (relaciones esfuerzo - deformación) en todo el dominio. El proceso de falla en el material ocurre cuando se produce una zona de localización de deformaciones.
 - a) Discontinuidades Débiles. En estos modelos el campo de desplazamientos es continuo, pero el campo de deformaciones es discontinuo dentro del dominio ya que se presenta un salto en el campo de deformaciones a través de los bordes de la zona de localización.
 - b) Discontinuidades Fuertes. En estos modelos el campo de desplazamientos es discontinuo y el campo de deformaciones es no acotado en la discontinuidad. Esto se produce al hacer que el ancho de la zona de localización tienda a cero.
2. Aproximación Discreta. En esta aproximación se considera que el cuerpo deja de ser continuo ya que se produce una grieta o discontinuidad en el cuerpo, por lo cual se emplean relaciones constitutivas tracción-salto en la discontinuidad, mientras que el resto del dominio utiliza relaciones constitutivas estándares.

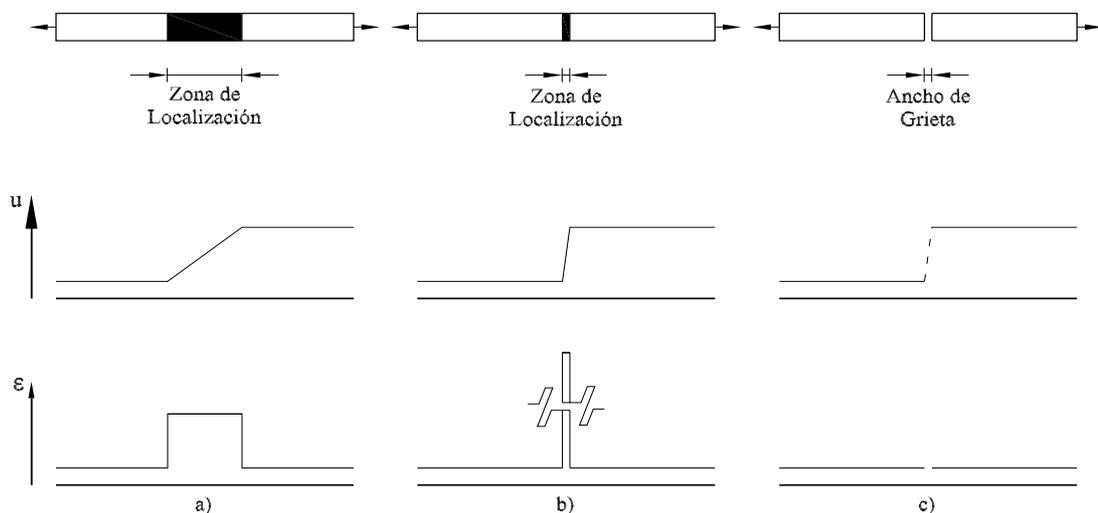


Figura 1.7: Modelo de discontinuidades interiores: a) discontinuidades débiles, b) discontinuidades fuertes y c) discontinuidad discreta.

Uno de los trabajos pioneros del Modelo de Discontinuidades Interiores es el de Ortiz *et al.* (1987), quienes al tratar de simular bandas de cortante con elementos finitos cuadriláteros, propusieron

enriquecer el campo de deformaciones tal que una discontinuidad débil pudiese ser capturada. Estos autores consideran que sólo una línea de discontinuidad débil puede cruzar el elemento, por que se requiere que otra línea de discontinuidad débil cruce el elemento vecino para modelar por completo la zona de localización. Posteriormente, esta idea fue mejorada por Belytschko *et al.* (1988), quienes propusieron embeber una zona de localización dentro de un elemento finito, *i.e.*, un elemento puede contener una zona de localización de deformaciones acotadas por dos líneas paralelas de discontinuidad débil. El espesor de la banda es independiente del tamaño del elemento y se considera como un parámetro del material.

Dvorkin *et al.* (1990) y (1991) consideraron que una discontinuidad fuerte puede ser modelada como una línea de localización embebida en elementos cuadriláteros, emplearon el principio de los trabajos virtuales con un término adicional que representa el trabajo de las tracciones cohesivas en la discontinuidad de desplazamientos (salto). Posteriormente, Olofsson *et al.* (1994) desarrollaron un elemento triangular, en el que no emplearon un principio variacional, pues las ecuaciones se desarrollaron de consideraciones físicas.

La aproximación de Discontinuidades Fuertes fue introducida por Simo, Oliver y Armero (1993) y Simo y Oliver (1994) con base en el Método de las Deformaciones Mejoradas (Simo y Rifai, 1990). Esta aproximación captura el salto de desplazamientos en un banda con un ancho cero, que induce en forma natural las deformaciones localizadas mediante la función Delta de Dirac δ . Demostraron que una discontinuidad fuerte se puede describir por una ley constitutiva continua con módulo de ablandamiento en lugar de postular una ley para interfases, proponen emplear la ley constitutiva continua con una función regular que aproxima la función delta de Dirac. La formulación de elementos finitos que realizan estos autores, se basa en el principio de los trabajos virtuales para satisfacer en forma débil algunas de las ecuaciones que gobiernan el problema e introducen en forma fuerte el equilibrio en la discontinuidad (continuidad interna de tracciones). De la formulación anterior, Armero y Garikipati (1996) y Oliver (1996) presentan ejemplos de aplicación. La matriz de rigideces de los elementos desarrollados por estos autores son no simétricas y están mal condicionadas, pues algunos elementos de la matriz contienen la función Delta de Dirac en forma regularizada, lo que produce problemas numéricos durante su solución y por consiguiente, resultados erróneos.

Una formulación variacional de un elemento con una discontinuidad discreta fue desarrollada por Lofti y Shing (1995), puesto que ésta no representa en forma adecuada la continuidad de tracciones en la discontinuidad, perdió su popularidad. Elementos con bandas de localización embebidas fueron empleados por Sluys y Berreends, (1998) para modelar fractura en el concreto y bandas de cortante en suelos, los cuales presentan problemas numéricos.

En cuanto a los modelos constitutivos empleados en los Modelos de Discontinuidades Interiores, Oliver *et al.* (1997) y (1999) presentan una transición entre las aproximaciones de discontinuidades débiles y fuertes. Oliver (2000) y Oliver *et al.* (2002a) presentan la formulación de un modelo de daño discreto a partir de un modelo de daño continuo bajo la cinemática de

deformaciones de discontinuidades fuertes. Fernández y Ayala (2004) desarrollaron un modelo de daño anisotrópico y un modelo de daño discreto en los que demuestran la equivalencia de ambos modelos mediante un análisis energético, estos autores demuestran que el modelo de daño anisotrópico satisface adecuadamente las condiciones de Discontinuidad Fuerte (Oliver 1996a).

1.2 Motivación

La representación de un fenómeno físico, llamado también modelado matemático, se puede formular de tres maneras: fuerte, débil y variacional. En su forma fuerte, el modelo se presenta como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales en espacio y/o tiempo, complementado con sus condiciones de frontera. En ocasiones el modelo en su forma fuerte se presenta como un sistema de ecuaciones algebraicas. En su forma débil, se presenta como una ecuación integral multiplicada por una función de peso, la cual relaja la forma fuerte al promediar la función sobre un dominio. En su forma variacional el modelo se presenta como un funcional cuyas condiciones estacionarias generan la forma fuerte y débil del modelo.

El principio variacional de un fenómeno físico contiene las ecuaciones que gobiernan el problema, mismas que se obtienen a partir de las condiciones estacionarias. Una formulación variacional de un problema tiene diversas ventajas (Washizu, 1967):

- Un funcional regularmente tiene un sentido físico definido y es invariante bajo transformación de coordenadas. Consecuentemente, una vez que un funcional se ha formulado, se pueden obtener las ecuaciones que gobiernan el problema expresado en otro sistema coordenado escribiendo la cantidad invariante en el nuevo sistema coordenado y posteriormente aplicando procedimientos del cálculo de variaciones.
- La formulación variacional es de gran utilidad, pues un problema planteado en forma fuerte que se formula en su forma variacional puede ser resuelto más fácilmente que el original. En un problema variacional con condiciones de frontera, la transformación se realiza mediante el método de los operadores de Lagrange, por lo que se puede derivar una familia de principios variacionales que son equivalentes uno al otro.
- Cuando un problema en elasticidad no puede ser resuelto en su forma exacta, la formulación variacional siempre proporciona una formulación directa para aproximar el problema. La formulación variacional proporciona no sólo las ecuaciones que gobiernan el problema en forma aproximada, sino también las condiciones de frontera aproximadas.

El fenómeno físico que se estudia en este trabajo de investigación es el proceso de falla en estructuras de materiales cuasifrágiles mediante el Modelo de Discontinuidades Interiores. Para aproximar este fenómeno se utilizan los modelos de discontinuidades interiores descritos anteriormente, en años recientes, se han estudiado y desarrollado los llamados elementos finitos

con discontinuidades interiores, los cuales capturan el salto en el campo de desplazamientos en el espesor del elemento, sin embargo, algunos de éstos presentan problemas como: dependencia del tamaño y orientación de la malla, atoramiento de esfuerzos, inestabilidad y divergencia numérica.

Jirásek (2000) realizó un estudio comparativo de los elementos finitos con discontinuidades interiores clasificándolos en tres familias: 1) elementos simétricos cinemáticamente consistentes (KOS), 2) elementos simétricos estáticamente consistentes (SOS) y 3) elementos no simétricos estática y cinemáticamente consistentes (SKON).

La aproximación KOS enriquece la cinemática del campo de desplazamientos y de deformaciones. Esta aproximación representa en forma adecuada la posibilidad de que las partes en que se divide el elemento tenga movimientos de cuerpo rígido, sin embargo, la continuidad de tracciones en la discontinuidad en ciertos casos pueden ser no reales. En contraste, la aproximación SOS emplea el equilibrio para representar el campo de desplazamientos y las tracciones en la discontinuidad. Esta formulación representa adecuadamente la continuidad de tracciones en la discontinuidad, pero no representa adecuadamente la cinemática por lo que presenta problemas de atoramiento de esfuerzos. En su trabajo Jirásek concluye que los elementos SKON garantizan tanto la continuidad del vector de tracciones en la discontinuidad como la posibilidad de movimiento de cuerpo rígido de las partes en que queda dividido el elemento. En estos elementos, la continuidad de tracciones se satisface en forma fuerte, mediante el promedio de los esfuerzos en el dominio del elemento y los de la discontinuidad, lo que produce que la matriz de rigideces sea no simétrica, además, de que sea mal condicionada, pues dentro de ésta se tienen elementos que contienen la función delta de Dirac. Como consecuencia, en su solución numérica se presentan problemas de inestabilidad, que ocasionan que la solución pueda divergir y llevar a resultados erróneos. Para resolver este problema Oliver *et al.* (2003) desarrollaron un elemento simétrico el cual desafortunadamente presenta problemas de atoramiento de esfuerzos. Recientemente, Wells y Sluys (2001), Alfaiate *et al.* (2003) desarrollaron una formulación que se basa en un método conocido como Partición de la Unidad (Melenk y Babuska, 1996), esta formulación representa el salto de desplazamiento por grados de libertad adicionales en los nodos existentes. En otro intento por darle solución a este problema, Fernández (2002) desarrolló una formulación imponiendo en forma fuerte el equilibrio en la discontinuidad, como resultado las matrices de rigideces no son simétricas. El autor reporta problemas que denomina deformaciones falsas, que producen giros en la dirección de los esfuerzos principales, dando lugar a errores en el cálculo de los esfuerzos y en la determinación de la orientación de la discontinuidad.

Formulaciones de elementos finitos con discontinuidades interiores con enriquecimiento local, como las de Ortiz *et al.* (1987), Simo *et al.*, (1993), Oliver, (1996a) y Fernández, (2002), parten del funcional de energía total, que corresponde al principio de los trabajos virtuales, el cual considera que la compatibilidad cinemática de deformaciones y constitutiva se satisface *a priori*, y el equilibrio interno y externo se satisface en forma débil. Puesto que el funcional de energía total contiene como condiciones de estacionaridad sólo algunas de las ecuaciones que gobiernan

el problema, la continuidad interna de tracciones se satisface en forma fuerte, promediando los esfuerzos del elemento con los de la discontinuidad, como resultado, se tiene la pérdida de la simetría y mal condicionamiento de la matriz de rigideces. Por otra parte, los elementos con enriquecimiento local desarrollados por Wells y Sluys (2001), Alfaiate *et al.* (2003) parten del funcional de energía total, en este caso la formulación no satisface adecuadamente la continuidad interna de tracciones, requieren un gasto computacional adicional debido al incremento de grados de libertad en los nodos existentes y el incremento de puntos de integración numérica ocasionado por la presencia de funciones discontinuas en la matriz de rigideces.

1.3 Objetivos

De la revisión de la literatura sobre el Modelo de Discontinuidades Internas, se puede concluir que la mayoría de los problemas que presentan los elementos finitos con discontinuidades internas se atribuyen a la manera como se formula el problema, *e.g.*, en los elementos con enriquecimiento local la falta de simetría y mal condicionamiento en las matrices de rigideces de un elemento con una discontinuidad, que puede generar inestabilidad y divergencia numérica, se debe a que la continuidad interna de tracciones se satisface en forma fuerte. Los elementos con enriquecimiento nodal tienen la desventaja que no satisfacen en forma adecuada la continuidad interna de tracciones y requiere un gasto computacional adicional. Una vez identificado este problema, y teniendo en cuenta las ventajas de la formulación variacional en problemas de elasticidad (Washizu, 1967):

El objetivo general de este trabajo de investigación es desarrollar una formulación variacional general del Modelo de Discontinuidades Internas en sus tres aproximaciones: Débil, Fuerte y Discreta, su solución mediante elementos finitos con discontinuidades internas y la simulación de problemas de interés práctico.

Para lograr el objetivo del objetivo general descrito anteriormente se establecen las siguientes metas.

- Formular teóricamente el problema de valores en la frontera del Modelo de Discontinuidades Internas en sus tres aproximaciones.
- Realizar una formulación variacional general del Modelo de Discontinuidades Internas, que satisfaga el problema de valores en la frontera en forma débil.
- Formular a partir de la formulación variacional general, una jerarquía de principios variacionales mixtos, de energía potencial total y de energía total complementaria.
- Desarrollar, a partir de esta formulación general del Modelo de Discontinuidades Internas, una formulación para elementos finitos sujetos a flexión y cortante como: placas, cascarones y vigas.

- Aproximar mediante el método de elementos finitos los funcionales de energía desarrollados, para tener una jerarquía de elementos finitos con discontinuidades interiores mixtos, de desplazamientos y de flexibilidades.
- Desarrollar los algoritmos de solución e implantar numéricamente los elementos finitos desarrollados.
- Simular numéricamente el proceso de falla en problemas de interés práctico de la ingeniería.

1.4 Contenido

El contenido de este trabajo de investigación doctoral es el siguiente:

- Capítulo 2. Se presenta la el problema de valores en la frontera del problema elástico lineal, posteriormente el del modelo de Discontinuidades Interiores en sus aproximaciones de Discontinuidad Débil, Discontinuidad Fuerte y Discontinuidad Discreta. Se desarrollan formulaciones de elementos finitos con discontinuidades interiores existentes en la literatura para el modelo de Discontinuidades Interiores y se identifican las desventajas de estas formulaciones.
- Capítulo 3. Se presenta la teoría general de los modelos de daño para describir el comportamiento mecánico de los materiales. Se realiza un análisis de éstos para su aplicación al modelo de Discontinuidades Interiores y se muestra como a partir de la cinemática de deformaciones de discontinuidades fuertes de un modelo continuo (relación esfuerzo-deformación), en forma natural se desarrolla un modelo del tipo discreto (relación tracción-salto).
- Capítulo 4. Esta es una de las partes fundamentales de este trabajo de investigación, a partir del funcional de energía para un sólido continuo elástico de Fraeijs de Veubeke (1951) se formulan los funcionales de energía generales del modelo de Discontinuidades Interiores en sus tres aproximaciones: Débil, Fuerte y Discreta. Se demuestra que estos funcionales contienen como condiciones de estacionaridad, las ecuaciones que gobierna el problema, que se definen en su forma fuerte en el capítulo 2, pero la formulación variacional tiene mayores ventajas. A partir de estos funcionales generales, se desarrollan una jerarquía de de principios variacionales mixtos, de energía potencial total y de energía potencial total complementaria.
- Capítulo 5. En este capítulo, los funcionales de energía desarrollados en el capítulo anterior, se aproximan con el Método de los Elementos Finitos, teniendo como resultado una jerarquía de Elementos Finitos con Discontinuidades Interiores. Que se pueden clasificar como mixtos, de desplazamientos y de las fuerzas. Estos elementos representa en forma adecuada la continuidad interna de tracciones y la cinemática de las partes en que se divide el elemento finito por la aparición de la discontinuidad

- Capítulo 6. Se presenta la formulación variacional de sólidos con discontinuidades interiores, adaptados a representar problemas dominados por la flexión/cortante de elementos estructurales. A partir de los funcionales de energía para sólidos continuos con discontinuidades interiores desarrollados en el capítulo 4, se formulan funcionales de energía para placas gruesas, placas delgadas, viga de Timoshenko y viga de Euler-Bernoulli, todo ellos con discontinuidades. Se presenta la aproximación de la solución de los funcionales de energía mediante el método de los elementos finitos, lo que lleva a tener matrices que presentan saltos en el campo de los desplazamientos transversales, en los giros o combinaciones de ellos.
- Capítulo 7. Se realiza un análisis para considerar saltos con variación lineal dentro de elementos finitos con discontinuidades interiores propuesto por Alfaite *et al.* (2003), de la que se identifican deficiencias para representar la cinemática de desplazamientos. Por lo que se desarrolla una formulación para considerar la variación del salto en forma lineal dentro del elemento, se demuestra mediante movimientos de cuerpo rígido de las partes en que se divide el elemento, que esta formulación representa en forma adecuada la cinemática de los desplazamientos.
- Capítulo 8. Un ingrediente importante en la simulación del proceso de falla mediante el Modelo de Discontinuidades Interiores es el seguimiento de la(s) discontinuidad(es) durante el análisis. En este capítulo se describe un procedimiento algorítmico, desarrollado por Oliver *et al.* (2002b) para el trazado de discontinuidades fuertes en sólidos que se ha mostrado robusto y eficiente para el análisis de problemas típicos en el campo de la mecánica de daño computacional. Se plantea un procedimiento para el seguimiento de las discontinuidades con base en el seguimiento local, en el que la dirección de propagación se calcula con el estado de esfuerzos recuperado por el método del parche de recuperación súperconvergente
- Capítulo 9. Se presentan seis ejemplos de aplicación para simular el proceso de falla en estructuras hasta su colapso. En ellos se demuestra que la energía de deformación que se induce al sistema por la carga, se transforma o libera como la energía necesaria para generar una grieta o discontinuidad en un continuo, y una articulación o dislocamiento en los elementos a flexión/cortante, lo anterior demuestra la capacidad de los elementos finitos con discontinuidades interiores formulados en este trabajo de investigación para simular adecuadamente el proceso de falla.
- Capítulo 10. En este último capítulo se da una serie de las conclusiones resultantes de este trabajo de investigación y se presentan propuestas que pueden dar lugar al desarrollo de investigaciones futuras.

Capítulo 2

Planteamiento del Modelo de Discontinuidades Interiores

Para la simulación o representación de un proceso o un fenómeno físico, una de las partes fundamentales es su planteamiento matemático, que en su forma fuerte se le conoce como un problema de valores en la frontera (PVF), el cual generalmente se representa por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias definidas sobre una región o intervalo, y de un conjunto de condiciones de frontera, que especifican los valores de las variables involucradas y de sus derivadas de la frontera del intervalo o región. La forma fuerte se refiere a que la solución del PVF debe satisfacer cada punto del dominio donde se define el problema.

En el presente trabajo el fenómeno a estudiar es el proceso de la falla en materiales, que a nivel macroscópico se presenta físicamente por la aparición de Discontinuidades tales como: grietas, fracturas, líneas y bandas de cortante. Este proceso inicia con una concentración de deformaciones en una banda, llamada zona de localización, en este momento el campo de desplazamientos es continuo y el de deformaciones presenta un salto. A medida que el daño incrementa, la banda tiende a una línea o superficie, por consiguiente, se presenta un salto en el campo de desplazamientos y las deformaciones tiendan a ser no acotadas.

Para representar analíticamente el fenómeno de falla, el Modelo de Discontinuidades Interiores enriquece la cinemática del campo de desplazamientos al introducir un salto, que representa la discontinuidad física en el interior del dominio. El salto a su vez induce un campo de deformaciones que puede ser discontinuo o no acotado dependiendo de la aproximación de Discontinuidades Interiores. Lo anterior representa adecuadamente la física del proceso de falla.

Este capítulo inicia con el planteamiento del problema elástico lineal, se describe la cinemática del campo de desplazamientos y de deformaciones; se presentan las ecuaciones que gobiernan el problema incluyendo las condiciones de frontera. Posteriormente, para las tres aproximaciones del Modelo de Discontinuidades Interiores: Débil, Fuerte y Discreta, se presenta la cinemática de desplazamientos y deformaciones, que se enriquece para representar el salto en el campo de

desplazamientos y las deformaciones no acotadas en la zona de localización. Se presenta el PVF para cada una de las aproximaciones de Modelo de Discontinuidades Interiores.

Para resolver problemas de falla mediante el Modelo de Discontinuidades Interiores, se han desarrollado los llamados elementos finitos con discontinuidades interiores, que para simular adecuadamente la física del problema consideran dos aspectos fundamentales: 1) la cinemática del campo de desplazamientos y deformaciones, y 2) la continuidad de tracciones en la discontinuidad. El enriquecimiento de la cinemática debe representar en forma adecuada la posición de la discontinuidad dentro del elemento, así como el desplazamiento (apertura y corrimiento) de los bordes de una discontinuidad. La continuidad interna de tracciones se impone adecuadamente para asegurar el equilibrio entre las tracciones en la discontinuidad y la proyección de esfuerzos en el material vecino a ésta.

Al final del capítulo se muestran las soluciones existentes en la literatura para la formulación de elementos finitos con discontinuidades interiores: enriquecimiento elemental y enriquecimiento nodal. Se obtienen las matrices de rigideces de los elementos finitos con discontinuidades interiores para ambas aproximaciones y se describen sus ventajas e inconvenientes.

2.1 Planteamiento del problema elástico lineal

Se entiende por Medio Continuo un conjunto infinito de partículas que forman parte, por ejemplo, de un sólido, un fluido o un gas que va a ser estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (nivel atómico o molecular). En consecuencia, se admite que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas.

Como ejemplo de medio continuo se tiene un cuerpo tridimensional, cuyo comportamiento del material es elástico lineal con deformaciones pequeñas, con un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$, puntos materiales \mathbf{x} y frontera Γ con vector normal $\boldsymbol{\nu}$ (figura 2.1), el cual se somete a las acciones del vector de fuerzas de cuerpo \mathbf{b} en el interior del continuo, a las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en Γ_σ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en Γ_u . La frontera Γ del continuo está constituida por dos superficies Γ_u y Γ_σ ; Γ_u corresponde a la región con desplazamientos prescritos (conocidos) y Γ_σ corresponde al resto de la frontera que incluye aquellas porciones donde se aplican las cargas prescritas, de tal forma que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$.

2.1.1 Problema de valores en la frontera

El PVF del problema elástico lineal se define en forma fuerte por las siguientes ecuaciones y condiciones de frontera:

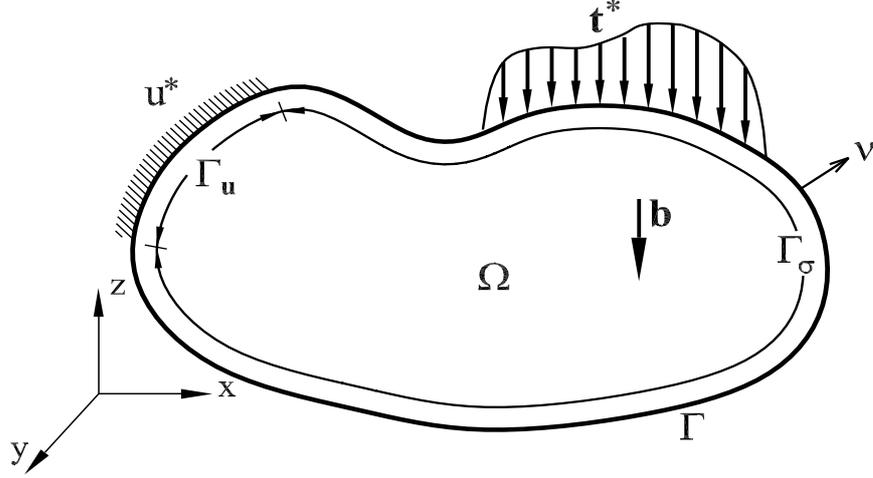


Figura 2.1: Continuo Ω con acciones en el dominio y condiciones de frontera sobre Γ .

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega & \quad \text{Compatibilidad cinemática} \\
 b) \quad & \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega & \quad \text{Compatibilidad constitutiva} \\
 c) \quad & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega & \quad \text{Equilibrio interno} \\
 d) \quad & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_{\sigma} & \quad \text{Equilibrio externo} \\
 & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_u & \\
 e) \quad & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_u & \quad \text{Condición esencial de frontera}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

La ec. 2.1a corresponde a la compatibilidad cinemática entre deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}$ y desplazamientos \mathbf{u} que para un cuerpo elástico lineal son:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \\
 \varepsilon_{i,j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

La ec. (2.1b) corresponde a la ecuación constitutiva, relación entre las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ y los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\
 \sigma_{ij}^{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé que se definen, en función del módulo elástico E y de la relación de Poisson ν , como:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
 \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

La ec. (2.1c) corresponde a la ecuación del equilibrio interno, Ecuación de Cauchy:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j &= \rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}\end{aligned}\tag{2.5}$$

en este caso se considera un comportamiento cuasiestático, por consiguiente, la aceleración es nula.

Las ecs. (2.1a – c) constituyen un sistema de 15 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El sistema está constituido por 15 ecuaciones diferenciales con 15 incógnitas en x , y , z y t . El problema queda bien condicionado cuando se le agregan las condiciones de frontera adecuadas, ecs. (2.1d – e).

2.2 Planteamiento del Modelo de Discontinuidades Interiores

Sea un sólido tridimensional, con un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$ y frontera Γ , el cual se somete a carga hasta la aparición de una discontinuidad en el campo de desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ a lo largo de una banda Ω^h de espesor k o superficie S (figura 2.2), donde las deformaciones inelásticas y otros procesos no lineales se concentran. En consecuencia, el dominio se divide en $\Omega = \Omega^- + \Omega^h + \Omega^+$, y la frontera $\Gamma = \Gamma^- + \Gamma^+$. Las condiciones de frontera son: las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^- + \Gamma_\sigma^+$ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en $\Gamma_u = \Gamma_u^- + \Gamma_u^+$, de tal forma que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$. La discontinuidad inicia cuando se satisface un criterio de falla, que en su caso más simple la falla se presente cuando se excede el límite de comportamiento elástico en un modelo de plasticidad o daño, o mediante un análisis más elaborado a nivel material, un análisis de bifurcación (pérdida de elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el problema) cuando se satisface la siguiente ecuación:

$$\det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^d \cdot \mathbf{n}) = 0$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la discontinuidad y \mathbf{C}^d es el tensor constitutivo tangente (Runesson, 1991).

El proceso de falla descrito anteriormente se puede idealizar mediante el modelo de Discontinuidades Interiores en sus tres aproximaciones: Discontinuidad Débil (DDE), Discontinuidad Fuerte (DFU) y Discontinuidad Discreta (DDI). Las primeras dos aproximaciones consideran que el dominio Ω permanece continuo después de que el material pierde estabilidad; el comportamiento del material se basa en una relación constitutiva continua esfuerzo-deformación. La DDI considera que el dominio Ω deja de ser continuo, debido a la aparición de la discontinuidad o grieta en S , pero con transmisión de tracciones a través de los bordes de la discontinuidad; el comportamiento del material se describe por una relación constitutiva tracción-separación de los

bordes de la discontinuidad. En las tres aproximaciones se considera que el resto del dominio $\Omega \setminus S = \Omega^- + \Omega^+$ se describe por una relación constitutiva estándar.

2.2.1 Cinemática de desplazamientos y deformaciones

Discontinuidad Débil

En esta aproximación se considera que las deformaciones inelásticas se concentran en una banda Ω^h de espesor k que divide el dominio en Ω^- y Ω^+ tal que $\Omega^- + \Omega^h + \Omega^+ = \Omega$ (figura 2.2a), el campo de desplazamientos continuo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ induce un campo de deformaciones discontinuo pero acotado (Oliver, 1998). Los campos de desplazamientos y deformaciones resultantes se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_k(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\frac{1}{k} \mu_k(\mathbf{x}) ([[\mathbf{u}]]) \otimes \mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^S\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ corresponden a las partes continuas de los campos de desplazamientos y deformaciones respectivamente, $[[\mathbf{u}]]$ es el salto, H_k es la función rampa en Ω^h ($H_k(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ y $H_k(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$) y μ_k es una función de colocación en Ω^h ($\mu_k(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^h$ y $\mu_k(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \notin \Omega^h$).

Discontinuidad Fuerte

En esta aproximación, las deformaciones inelásticas se concentran en una línea o superficie de espesor $k = 0$ (figura 2.2b) y el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es discontinuo, puesto que se presenta un salto $[[\mathbf{u}]]$ en un punto material dado S , el cual induce un campo de deformaciones no acotado. Ambos campos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\delta_s ([[\mathbf{u}]]) \otimes \mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^S\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde $[[\mathbf{u}]]$ es el salto, H_S es la función de Heaviside en S ($H_S(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ y $H_S(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$) y δ_s es la función delta de Dirac.

Discontinuidad Discreta

En esta aproximación, se considera que el material deja de ser continuo cuando se alcanza su resistencia máxima, sin embargo, existe transmisión de tracciones en la discontinuidad (figura

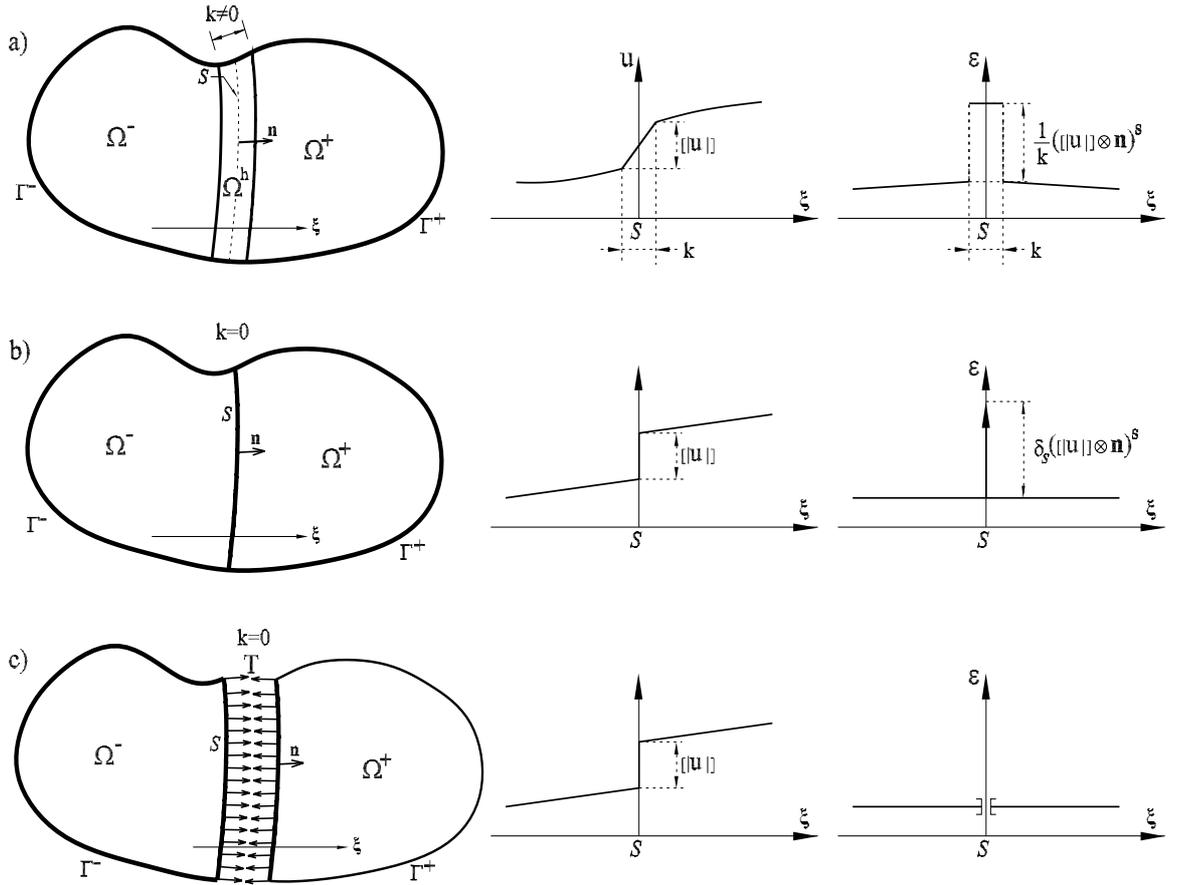


Figura 2.2: Cinemática de desplazamientos y deformaciones de las aproximaciones de Discontinuidad: a) Débil, b) Fuerte y c) Discreta.

2.2c) y el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es discontinuo, puesto que se presenta un salto $[[\mathbf{u}]]$ en un punto dado S ; el campo de deformaciones se define sólo en la parte continua del material.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^S \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (2.8)$$

2.2.2 Regularización de la cinemática

Puesto que no es posible imponer las condiciones de frontera \mathbf{u}^* en sólo uno de los campos de desplazamientos, el continuo $\bar{\mathbf{u}}$ o el salto $[[\mathbf{u}]]$ (figura 2.3), Oliver (1995b) propone definir el campo con la siguiente expresión (figura 2.4a y b):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + M_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (2.9)$$

Por consiguiente, el campo de deformación se define como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \nabla^S M_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (2.10)$$

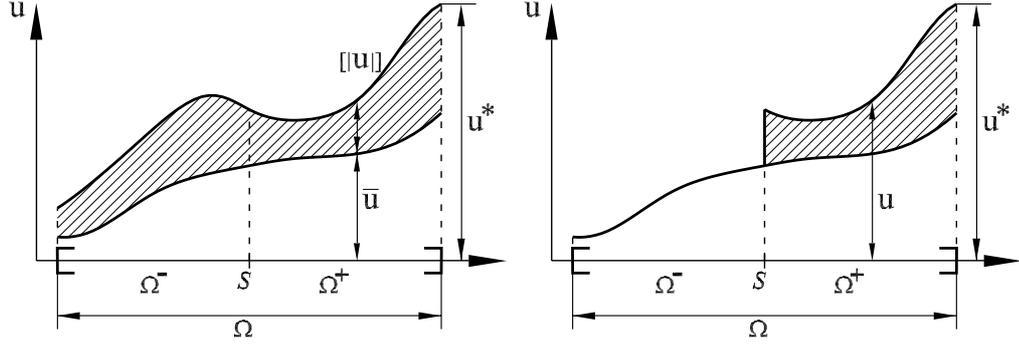


Figura 2.3: Posible descomposición del campo de desplazamientos.

donde $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ corresponde a la parte regular del campo de desplazamientos y $M_S(\mathbf{x})$ es una función que se define como:

$$M_S(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

donde $\varphi(\mathbf{x})$ es una función continua que cumple con:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{aligned} \quad (2.12)$$

La función M_S posee dos propiedades: $M_S(x) = 1 \quad \forall x \in S$ y $M_S(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega^- \cup \Omega^+$ (figura 2.4c).

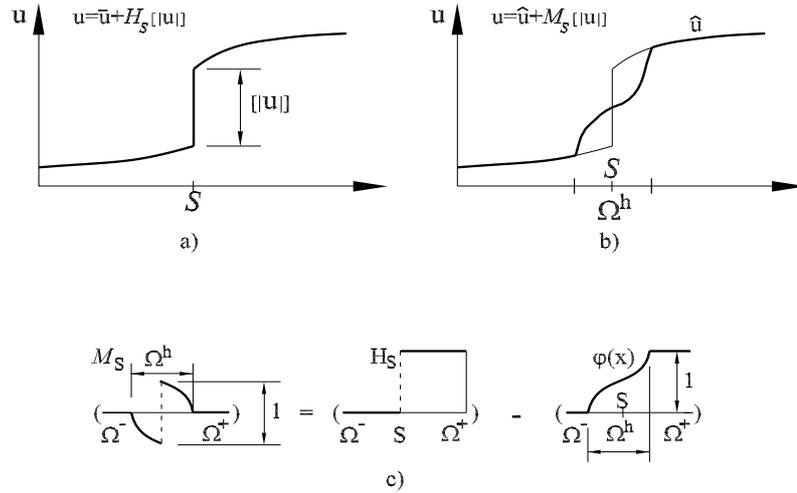


Figura 2.4: Representación gráfica del campo de desplazamientos en función de: a) desplazamientos continuos, b) desplazamientos regulares S y c) función M_S .

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \varphi(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

La parte continua, que puede ser elástica, del campo de deformaciones $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$ continuas, dependiente del campo de desplazamientos se define como:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.14)$$

Sustituyendo la ec. (2.13) en la ec. (2.14) se tiene

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla^S \varphi(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) - \varphi(\mathbf{x}) \nabla^S [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

Si se considera que el valor del salto es *constante* a través del elemento, el campo de deformaciones elásticas se definen como:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla^S \varphi(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (2.16)$$

2.2.3 PVF del Modelo de Discontinuidades Interiores

Las ecuaciones que gobiernan el PVF de cada una de las aproximaciones del Modelo de Discontinuidades Interiores, incluyen las ecs. (2.1) del problema lineal elástico, con la diferencia que el material presenta no linealidad y que la cinemática del campo de desplazamiento y deformaciones es discontinuo. Para garantizar el equilibrio en la zona de localización, el modelo incluye dos ecuaciones correspondientes a la continuidad interna y externa de tracciones.

En los PVF de las aproximaciones descritas a continuación, las ecuaciones correspondientes a la compatibilidad cinemática y la compatibilidad constitutiva se definen en $\Omega \setminus S$ y en Ω^h o S . La primera corresponde a la parte continua, que puede tener un comportamiento elástico, la última, corresponde a la zona de localización donde los efectos no lineales se concentran.

Discontinuidades Débiles

Las ecuaciones que gobiernan la aproximación de Discontinuidad Débil, que se caracteriza por que la zona de localización Ω^h tiene un ancho finito (figura 2.2a), son las siguientes:

a)	$\bar{\varepsilon}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ $\tilde{\varepsilon}^{[\mathbf{u}]}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$	en $\Omega \setminus S$ en Ω^h	Compatibilidad cinemática
b)	$\sigma^{\bar{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ $\sigma^{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$	en $\Omega \setminus S$ en Ω^h	Compatibilidad constitutiva
c)	$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ $\nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$	en $\Omega \setminus S$ en Ω^h	Equilibrio Interno
d)	$\sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ $\sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$	en Γ_σ en Γ_u	Equilibrio Externo
e)	$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$	en Γ_u	Condiciones esenciales de frontera
f)	$\sigma_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} - \sigma_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n} = [\sigma]_{\Gamma_i^-} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ $\sigma_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \sigma_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n} = [\sigma]_{\Gamma_i^+} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$	en Γ_i^- en Γ_i^+	Continuidad interna de tracciones
g)	$\sigma_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \sigma_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} = [\sigma]_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$	en S	Continuidad externa de tracciones

(2.17)

Discontinuidad Fuerte

El PVF para esta aproximación se define por las ecs. (2.17), excepto que la del equilibrio interno, ec. (2.17c), se satisface sólo en $\Omega \setminus S = \Omega^- + \Omega^+$, puesto que el espesor de la zona donde se concentran las deformaciones inelásticas es $k = 0$, $\Omega^h \rightarrow S$. En consecuencia, las fuerzas de cuerpo en la discontinuidad son nulas.

a)	$\bar{\varepsilon}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ $\tilde{\varepsilon}^{[\mathbf{u}]}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$	en $\Omega \setminus S$ en S	Compatibilidad cinemática
b)	$\sigma^{\bar{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ $\sigma^{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$	en $\Omega \setminus S$ en S	Compatibilidad constitutiva
c)	$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$	en $\Omega \setminus S$	Equilibrio Interno
d)	$\sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ $\sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$	en Γ_σ en Γ_u	Equilibrio Externo
e)	$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$	en Γ_u	Condiciones esenciales de frontera
f)	$\sigma_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} - \sigma_S \cdot \mathbf{n} = [\sigma]_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ $\sigma_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \sigma_S \cdot \mathbf{n} = [\sigma]_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$	en S	Continuidad interna de tracciones
g)	$\sigma_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \sigma_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} = [\sigma]_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$	en S	Continuidad externa de tracciones

(2.18)

Discontinuidad Discreta

En el PVF para la aproximación discreta, las ecuaciones correspondientes a la compatibilidad cinemática y constitutiva se definen sobre $\Omega \setminus S$, puesto que dependen de las deformaciones las cuales se consideran que sólo existen en la parte continua del sólido. En consecuencia, la

compatibilidad constitutiva en S depende de la relación entre las tracciones y el salto, la cual se satisface mediante un relación constitutiva discreta. La continuidad interna de tracciones en esta aproximación está dada por la proyección de los esfuerzos en el exterior de la discontinuidad y las tracciones dentro de la discontinuidad, a diferencia de las aproximaciones anteriores, donde las tracciones dentro de las discontinuidades está dada por la proyección de esfuerzos en la discontinuidad.

$$\begin{aligned}
a) \quad & \bar{\varepsilon}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{en } \Omega \setminus S & \text{Compatibilidad cinemática} \\
b) \quad & \boldsymbol{\sigma}^{\bar{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus S & \text{Compatibilidad constitutiva} \\
c) \quad & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus S & \text{Equilibrio Interno} \\
d) \quad & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_{\sigma} & \text{Equilibrio Externo} \\
& \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_u & \\
e) \quad & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) & \text{en } \Gamma_u & \text{Condiciones esenciales de frontera} \\
f) \quad & \begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} - T = \mathbf{0} \\ & = [[\boldsymbol{\sigma}]]_{S^-} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} & \text{en } S & \text{Continuidad interna de tracciones} \\
& \begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - T = \mathbf{0} \\ & = [[\boldsymbol{\sigma}]]_{S^+} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} & & \\
g) \quad & \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} = [[\boldsymbol{\sigma}]]_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{en } S & \text{Continuidad externa de tracciones}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3 Elementos finitos con discontinuidades interiores

Existen problemas en la mecánica de medios continuos cuya aproximación mediante el método estándar de los elementos finitos no es satisfactoria, tal es el caso del problema de Localización de Deformaciones, el cual involucra en su concepción cinemática saltos en el campo de desplazamientos que induce el campo de deformaciones no acotadas en las zonas de localización. Puesto que la aproximación estándar no es capaz de considerar estas discontinuidades en forma adecuada, se han desarrollado algunas formulaciones con la finalidad de enriquecer la aproximación estándar del MEF para capturar el salto en el campo de los desplazamientos, éstas se clasifican en dos grupos: Enriquecimiento elemental y Enriquecimiento nodal.

1. Enriquecimiento elemental

En esta formulación el salto de desplazamientos dentro del elemento finito se representa por un nodo interno, que induce un modo incompatible en el campo de deformaciones. El soporte del modo discontinuo de enriquecimiento es elemental (figura 2.5a) y en consecuencia, los grados de libertad discontinuos internos adicionales pueden condensarse a nivel elemental. El salto de desplazamientos se considera constante dentro del elemento (Oliver, 1996).

2. Enriquecimiento nodal

En esta formulación, el soporte del modo discontinuo de enriquecimiento es el mismo al que se tiene para las funciones de forma del elemento convencional (figura 2.5b). El conjunto de nodos con los grados de libertad adicionales se incrementa con los de enriquecimiento (dos por nodo en problemas en 2D), y sobre estos se construye la interpolación que lleva a un campo de desplazamientos discontinuos (Wells y Sluys, 2001, Alfaiate *et al.* 2003). La formulación se basa en el Método de la Partición de la Unidad (Melenk y Babuska, 1996), el salto de desplazamiento se representan por grados de libertad adicionales en los nodos existentes. La interpolación para introducir el salto de desplazamientos se realiza al extender las bases de interpolación de elementos finitos.

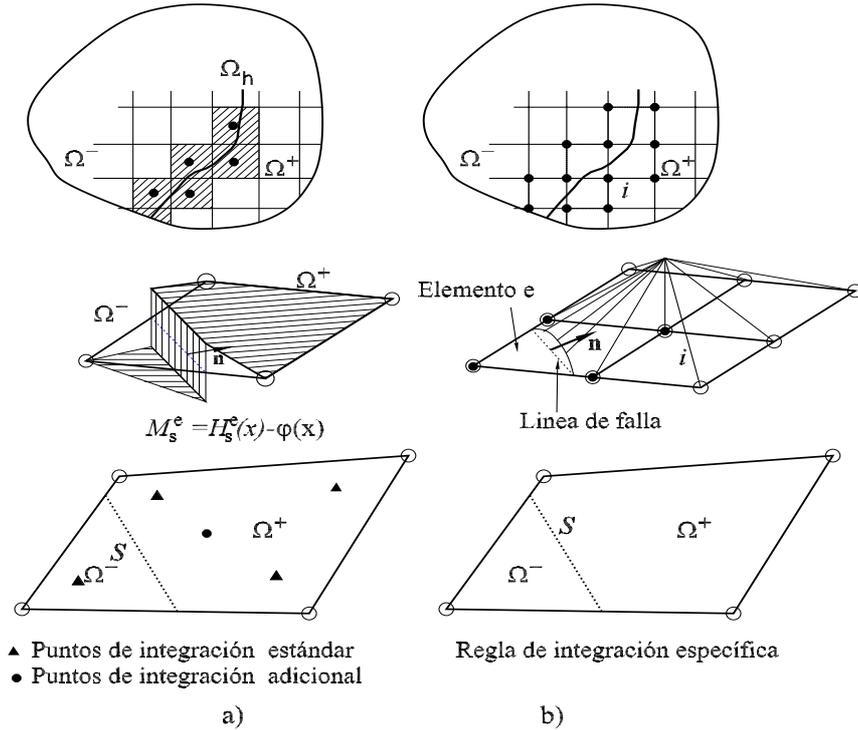


Figura 2.5: Enriquecimiento: a) Elemental y b) Nodal.

2.3.1 Enriquecimiento elemental

En esta sección se presenta el desarrollo de elementos finitos con discontinuidades interiores con base en el enriquecimiento elemental para resolver el PVF del Modelo de Discontinuidades Interiores para la aproximación de DFU. Esta formulación (Simo y Oliver 1994, Oliver *et al.* 2003) satisface las condiciones de la ec. (2.18) en forma débil, excepto la continuidad interna de tracciones (2.18f), que se introduce en forma fuerte sobre la discontinuidad del elemento.

La ec. (2.18) puede escribirse en forma débil tomando en cuenta el campo de desplazamientos de la ec. (2.7), considerando los siguientes espacios funcionales de desplazamientos, $\mathcal{V}_{\mathbf{u}}$, y de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles, $\bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mathbf{u}} &\equiv \left\{ \eta(x) = \bar{\eta} + M_S \alpha ; \bar{\eta} \in [H'(\Omega)]^{n_{\text{dim}}} \right\} \\ \bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^0 &\equiv \left\{ \bar{\eta}^o(x) \in [H'(\Omega)]^{n_{\text{dim}}} ; \bar{\eta}^o|_{\partial u \Omega} = 0 \right\}\end{aligned}\quad (2.20)$$

donde n_{dim} denota el número de dimensiones del problema y $H'(\Omega)$ es el espacio de funciones definidas en Ω .

Formulación variacional

El problema consiste en encontrar los campos de desplazamientos y de deformaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + M_S [|\mathbf{u}|]; \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^S \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta (|\mathbf{u}| \otimes \mathbf{n})^S\end{aligned}\quad (2.21)$$

tales que extremizen el funcional de energía:

$$\Pi(\eta) \equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \eta d\Omega - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{b} \cdot \eta d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \eta d\Gamma \quad \forall \eta \in \bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^0 \quad (2.22)$$

La primera variación del funcional de energía de la ecuación con respecto al campo de desplazamientos es

$$\delta \Pi \equiv \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : \delta \nabla \eta - \mathbf{b} \cdot \delta \eta] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \delta \eta d\Gamma \quad (2.23)$$

Del teorema de la divergencia, la siguiente integral se puede definir como:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \nabla \eta d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \eta d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \eta d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \eta d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \eta d\Gamma + \int_{S^-} \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \eta d\Gamma - \int_{S^+} \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \eta d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \eta d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \eta d\Gamma - \int_S (\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \eta d\Gamma\end{aligned}\quad (2.24)$$

Sustituyendo la ec. (2.24) en la ec. (2.23) se tiene:

$$\delta \Pi \equiv - \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta \eta d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta \eta d\Gamma - \int_S (\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \eta d\Gamma = 0 \quad (2.25)$$

donde las siguientes ecuaciones se satisfacen en forma débil¹:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= 0 & \text{en } \Omega \setminus S \\ \delta \Pi(\eta) \equiv 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \text{en } \Gamma_\sigma \\ [[\boldsymbol{\sigma}]] \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{en } S \end{aligned} \quad (2.26)$$

que son las ecuaciones de equilibrio interno y externo, y la continuidad externa de tracciones del PVF de la aproximación de DFU correspondientes a la ec. (2.18c, d y g). Puesto que para el funcional de energía de las ecs. (2.22) se considera que la compatibilidad (a y b) se satisface *a priori*, quedando por satisfacer la condición de continuidad interna de tracciones de la ec. (2.18 f). Ésta, se satisface en forma fuerte² durante la formulación de los elementos finitos igualando el promedio de los esfuerzos en el elemento con los de la discontinuidad como se mostrará más adelante.

Aproximación con el MEF

El campo de desplazamientos, definido en la ec. (2.9), se aproxima con las funciones de interpolación estándar

$$\mathbf{u}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{i=n} \underbrace{N_i^{(e)}}_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i(t) + M_S^{(e)}(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]]_{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (2.27)$$

donde $N_i^{(e)}$ contiene las funciones de interpolación estándar y la función $M_S(\mathbf{x})$ se define como:

$$M_S^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 \} \forall e \notin S \\ \left. \begin{array}{l} H_S^{(e)}(\mathbf{x}) - \varphi^e \\ \left(\varphi^e = \sum_{i^+=1}^{n_e^+} N_{i^+} \right) \end{array} \right\} \forall e \in S \end{cases} \quad (2.28)$$

Las deformaciones, definidas en la ec. (2.10), se aproximan con el gradiente del campo de desplazamientos

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \nabla^S \mathbf{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\nabla N_i^{(e)} \otimes \mathbf{d}_i(t) \right)^S - (\nabla \varphi^e \otimes [[\mathbf{u}]]_e)^S + \delta_S ([[\mathbf{u}]]_e \otimes \mathbf{n})^S \quad (2.29)$$

La función delta de Dirac se regulariza como:

$$\delta_S^{(e)} = \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} \quad (2.30)$$

tal que

¹La forma débil se refiere a que las ecuaciones se satisfacen en forma promediada sobre la región donde está definida.

²La forma fuerte se refiere a que la ecuación se satisface en todos los puntos de la región donde está definida.

$$\begin{aligned}\mu_S^{(e)}(\mathbf{x}) &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in S_e^k \\ \mu_S^{(e)}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \notin S_e^k\end{aligned}\quad (2.31)$$

Con las ecs. (2.30) y (2.31) se obtiene el campo de deformaciones en su forma regularizada:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \nabla^S \mathbf{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\nabla N_i^{(e)} \otimes \mathbf{d}_i(t) \right)^S - (\nabla \varphi^e \otimes [|\mathbf{u}|]_e)^S + \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} ([|\mathbf{u}|]_e \otimes \mathbf{n})^S \quad (2.32)$$

La continuidad interna de tracciones de las ecs. (2.18f) se impone en forma fuerte, *i.e.*, igualando el promedio de los esfuerzos del elemento de la parte continua $\Omega \setminus S$ y los de la zona de localización S_e :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \implies \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \frac{1}{l_e} \int_{S_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.33)$$

valor medio sobre $\Omega \setminus S$ valor medio sobre S

$$\implies \int_{S_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{l_e}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} d\Omega$$

$$\implies \int_{\Omega_e} \left(\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = 0 \quad (2.34)$$

en su forma incremental, los campos de desplazamientos y deformaciones de las ecs. (2.27) y (2.32) están definidos como:

$$\dot{\mathbf{u}}^h = \sum_{i=1}^{i=n_{node}} N_i \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \sum_{e \in S} M_S^{(e)}(\mathbf{x}) [|\dot{\mathbf{u}}|]; \dot{\mathbf{u}}^h \in \bar{\nabla}_{\mathbf{u}}^h \quad (2.35)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h = \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\underbrace{\nabla N_i}_{\mathbf{B}} \otimes \dot{\mathbf{d}}_i \right)^S + \left(\underbrace{\left[\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} \mathbf{n} - \nabla \varphi^e \right]}_{\mathbf{G}} \otimes [|\dot{\mathbf{u}}|]_e \right)^S \quad (2.36)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}^h &= \mathbf{N} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{M} [|\dot{\mathbf{u}}|] \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h &= \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G} [|\dot{\mathbf{u}}|]\end{aligned}\quad (2.37)$$

Para satisfacer el PVF de la aproximación de discontinuidades fuertes, con las funciones de interpolación anteriores, se debe extremizar el funcional de la ec. (2.22) y satisfacer la ec. (2.34) tal que

$$\begin{aligned} \delta \Pi_u(\eta^h) &\equiv \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \nabla^S \eta^h : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}^h) d\Omega - f_{ext} = 0 & \forall \eta^h \in \bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^{h^0} \quad (2.38) \\ [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]]_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} &\implies \int_{\Omega_e} \underbrace{\left(\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right)}_{\mathbf{G}^{*T}} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Para extremizar el funcional de la ecuación anterior, éste se deriva con respecto al campo de desplazamientos nodales \mathbf{d} e igualado a cero, así

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}^h) d\Omega &= f_{ext} \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^{*T} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}^h) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sustituyendo la ec. (2.37) en la ec. (2.39) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \right) d\Omega &= f_{ext} \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^{*T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \right) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Realizando unas operaciones algebraicas en la ecuación anterior, se tiene la siguiente matriz de rigideces de un elemento que contiene una discontinuidad en su interior:

$$\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{*T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{G}^{*T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{G} \end{bmatrix} d\Omega_e \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Esta matriz de rigideces, a pesar de no ser simétrica $\mathbf{G}^{*T} \neq \mathbf{G}^T$, tiene la ventaja de poder condensar el salto $[[\mathbf{u}]]$ en forma estática, lo que facilita el ensamble con la matriz global de la estructura para facilitar su proceso de solución numérica. Sin embargo, la matriz está mal condicionada, pues \mathbf{G}^* contiene valores de una delta de Dirac regularizada, que puede provocar que un cambio pequeño en los valores numéricos cause un error relativo grande en la respuesta, sin que esto dependa del método de solución. Lo anterior, puede producir que la solución del sistema diverja fácilmente y, como consecuencia, lleve a una respuesta errónea del comportamiento de una estructura.

2.3.2 Enriquecimiento nodal

Esta aproximación se basa el concepto de Partición de la Unidad aplicado al método del elemento finito por Melenk y Babuska (1996), dando lugar al llamado Método de Partición de la Unidad del Elemento Finito. Mões *et al.* (1999) aplicaron este concepto para capturar los saltos en el campo de desplazamiento en el contexto de MFLE y se le dio el nombre del método de los elementos finitos extendidos. Posteriormente Wells y Sluys (2001), Alfaiate *et al.* (2003) emplearon esta formulación para simular discontinuidades fuertes en superficies cohesivas.

Duarte y Oden (1996) demostraron que un campo se puede interpolar en términos de valores nodales discretos usando la Partición de la Unidad. Si se considera la función ϕ_i , la interpolación del campo \mathbf{u} sobre un continuo se puede aproximar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i^k(\mathbf{x}) \left(a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} \gamma_j(\mathbf{x}) \right) \quad (2.42)$$

donde ϕ_i es una función de Partición de la Unidad de orden k (si la partición de la unidad son polinomios, k es el grado del polinomio), a_i son los grados de libertad regulares, b_{ij} son los grados de libertad de enriquecimiento y γ_j se denomina la función base de enriquecimiento con m términos. Para evitar dependencia lineal, el orden de los polinomios en la base de enriquecimiento debe ser mayor que k .

La ec. (2.42) es un puente entre los métodos libres de malla y el método del elemento finito. La diferencia entre estos se encuentra en la selección de la función $\phi_i(\mathbf{x})$. El método libre de Galerkin (Belytschko *et al.* 1994) emplea una función de mínimos móviles pesados de orden k con una base de enriquecimiento vacía como partición de la unidad. Las funciones de interpolación en el método del elemento finito corresponden a la partición de la unidad puesto que,

$$\sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.43)$$

donde N_i son las funciones de interpolación. En la forma convencional del método de los elemento finitos, el orden de las funciones de partición de la unidad es del orden del polinomio de las funciones de forma y la función base de enriquecimiento es vacía. Por lo anterior no existe razón para no emplear la base de enriquecimiento dentro de los elementos finitos. En la notación de elementos finitos, la interpolación del campo de desplazamiento, empleando las propiedades de la partición de la unidad se puede realizar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d}}_{\text{Estándar}} + \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})(\mathbf{N}_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{a})}_{\text{Enriquecida}} \quad (2.44)$$

donde \mathbf{N} es la matriz que contiene la funciones de interpolación estándar de orden k , \mathbf{d} contiene los grados de libertad regulares, \mathbf{N}_γ es la matriz que contiene las funciones base de enriquecimiento y \mathbf{a} contiene los grados de libertad de enriquecimiento. El número de grados de libertad por nodo es igual al número de términos en la base de enriquecimiento multiplicada por la dimensión espacial. El campo de deformaciones en términos de desplazamientos nodales se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{B}_\gamma \mathbf{a} \quad (2.45)$$

En el modelo de Discontinuidades Interiores, el campo de desplazamientos se define como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (2.46)$$

o

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + M_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (2.47)$$

La razón de emplear la interpolación del campo de desplazamientos en la ec. (2.47) en el modelo de Discontinuidades Interiores en lugar de la ec. (2.46), es por que la primera evita tener las condiciones de frontera de Dirichlet en el salto $[[\mathbf{u}]]$. Sin embargo, existen otras formas de lograr esto. Lo que se requiere es que el salto $[[\mathbf{u}]]$ tenga un soporte local alrededor de la discontinuidad S (Samaniego *et al.*, 2003). Se considera un dominio $\Omega_{[[\mathbf{u}]]} \subset \Omega$, dividido por S en $\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+ = \Omega_{[[\mathbf{u}]]} \cap \Omega^+$ y $\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^- = \Omega_{[[\mathbf{u}]]} \cap \Omega^-$ (figura 2.6), tal que $\partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]} \cap \Gamma_u = \emptyset$

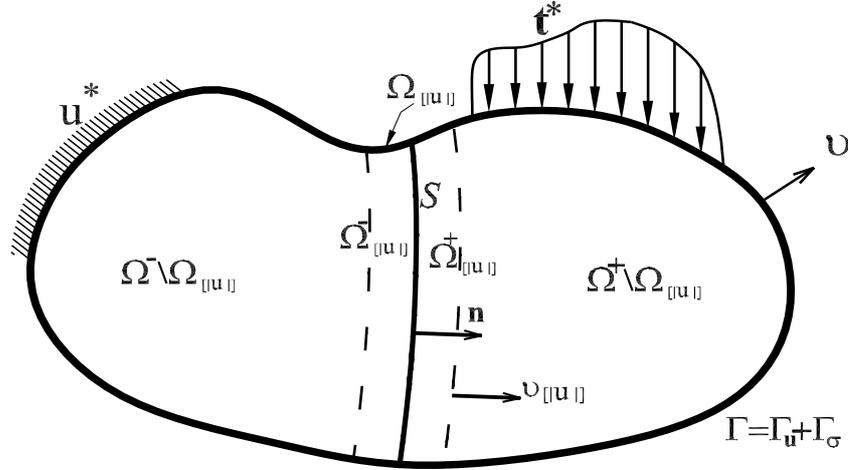


Figura 2.6: Sólido con discontinuidad S .

Considerando a $\phi_i^k = \mathbf{N}(\mathbf{x})$ y $\gamma_j(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x})$ en la ec. (2.42) para interpolar el campo de desplazamientos de la ecuación anterior, se tiene

$$\mathbf{u}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i(t)}_{\bar{\mathbf{u}}} + H_S(\mathbf{x}) \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{N}} N_j(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j(t)}_{[[\mathbf{u}]]} \quad (2.48)$$

donde \mathbb{N} es el conjunto de nodos que soportan el salto en la discontinuidad.

Formulación variacional

Esta formulación parte del funcional de energía total siguiente:

$$\Pi(\eta) \equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \eta d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \eta d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \eta d\Gamma \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\eta \quad (2.49)$$

donde \mathcal{V}_η es el espacio de variaciones admisibles de desplazamiento con la siguiente estructura:

$$\eta = \bar{\eta} + H_S \boldsymbol{\alpha} \quad (2.50)$$

sustituyendo la ec. (2.50) en la ec. (2.49) se tiene

$$\begin{aligned}
a) \quad & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Gamma \quad \forall \bar{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{V}_{\bar{\boldsymbol{\eta}}} \\
b) \quad & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s (H_S \boldsymbol{\alpha}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (H_S \boldsymbol{\alpha}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t} \cdot (H_S \boldsymbol{\alpha}) d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

de la primera variaci3n de la ec. (2.51a) igualada a cero, se puede demostrar que se satisface en forma d3bil lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= 0 & \text{en } \Omega \setminus S \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{en } \Gamma_{\sigma} \\
(\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{en } S
\end{aligned} \tag{2.52}$$

De la ec.(2.51b) se tiene

$$\nabla^s (H_S \boldsymbol{\alpha}) = (\delta_s \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\alpha})^s + (H_S \nabla \boldsymbol{\alpha})^s \tag{2.53}$$

sustituyendo la ec. (2.53) en la ec. (2.51b) se tiene

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\delta_s \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\alpha})^s d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (H_S \nabla \boldsymbol{\alpha})^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (H_S \boldsymbol{\alpha}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t} \cdot (H_S \boldsymbol{\alpha}) d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.54}$$

Puesto que $\boldsymbol{\alpha}|_{\Omega \setminus S} = \mathbf{0}$, el lado izquierdo de la ec. (2.54) se puede reescribir como:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\alpha} dS + \int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma} \cap \partial \Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Gamma \tag{2.55}$$

donde $\partial \Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+$ es la frontera de $\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+$. Del teorema de divergencia, el segundo t3rmino de la ecuaci3n anterior se define como

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\alpha} d\Omega &= - \int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\Omega \\
&= - \int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Omega + \int_{\partial \Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \boldsymbol{\nu}_{[[\mathbf{u}]]} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.56}$$

donde $\boldsymbol{\nu}_{[[\mathbf{u}]]}$ es la normal de $\partial \Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+$. Sustituyendo la ec. (2.56) en ec. (2.55) y considerando (2.52a),

$$\begin{aligned}
& \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\alpha} dS + \int_{\partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \boldsymbol{\nu}_{[[\mathbf{u}]]} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\Gamma - \underbrace{\int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Gamma}_{=0} \quad (2.57) \\
& = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\alpha} dS + \int_{\partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \boldsymbol{\nu}_{[[\mathbf{u}]]} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Gamma
\end{aligned}$$

Note que $\partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+$ se puede dividir en $(\partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]} \cap \Omega^+)$, $(\Gamma_\sigma \cap \partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+)$ y S . Puesto que $\boldsymbol{\alpha}|_{\partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]} \cap \Omega^+} = \mathbf{0}$,

$$\int_{\partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} \boldsymbol{\nu}_{[[\mathbf{u}]]} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\Gamma = - \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \boldsymbol{\alpha} dS + \int_{\Gamma_\sigma \cap \partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Gamma \quad (2.58)$$

Sustituyendo la ec. (2.58) en la ec. (2.57) y considerando la ec. (2.52b), se obtiene

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\alpha} dS - \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \boldsymbol{\alpha} dS + \underbrace{\int_{\Gamma_\sigma \cap \partial\Omega_{[[\mathbf{u}]]}^+} (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\alpha} d\Gamma}_{=0} \quad (2.59)$$

Finalmente, la ecuación anterior se escribe como:

$$\int_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+}) \cdot \boldsymbol{\alpha} dS = 0 \quad (2.60)$$

Que corresponde a la continuidad interna de tracciones del PVF de la ec. (2.18f). En la ecuación anterior, se observa que sólo se satisface la continuidad interna de tracciones en la parte correspondiente a Ω^+ , la formulación no es clara respecto a la continuidad interna de tracciones en la parte Ω^- .

Aproximación por el MEF

El campo de desplazamientos de la ecuación (2.48) se puede reescribir en forma matricial como

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}^T \mathbf{d} + H_S \mathbf{N}_{\mathbb{N}}^T \mathbf{a} \quad (2.61)$$

donde \mathbf{N} son las funciones de forma, \mathbf{d} los desplazamientos nodales y \mathbf{a} son los grados de libertad de enriquecimiento, que se pueden escribir como:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{N}_i \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{n_{\text{nodos}}} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_i \\ \vdots \\ d_{n_{\text{nodos}}} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_{\text{nodos}}} \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{1} = N_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

y

$$\mathbf{N}_{\mathbb{N}} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \mathbf{1} \\ \vdots \\ \gamma_i \mathbf{1} \\ \vdots \\ \gamma_{n^{nodos}} \mathbf{1} \end{Bmatrix} ; \quad \gamma_i = \begin{cases} N_i & \forall i \in \mathbb{N} \\ 0 & \forall i \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.64)$$

El campo de las deformaciones se calcula como

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\nabla^S \mathbf{u}\} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (2.65)$$

donde el operador \mathbf{L} , para el caso de dos dimensiones, se expresa como:

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} \partial_x(\cdot) & 0 \\ 0 & \partial_y(\cdot) \\ \partial_y(\cdot) & \partial_x(\cdot) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Definiendo

$$\mathbf{B} := \mathbf{L} \mathbf{N}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_{\mathbb{N}} := \mathbf{L} \mathbf{N}_{\mathbb{N}}^T \quad (2.67)$$

el campo de las deformaciones se calcula como:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = \mathbf{B} \mathbf{d} + H_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{\mathbb{N}} \mathbf{a} + \delta_s(\mathbf{n}) H_S \mathbf{N}_{\mathbb{N}}^T \mathbf{a} \quad (2.68)$$

con \mathbf{n} definido para el caso de dos dimensiones como

$$\mathbf{n} := \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Análogamente, para el campo admisible de desplazamientos se tiene

$$\{\nabla^S \boldsymbol{\eta}\} = \mathbf{B} \delta \mathbf{d} + H_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{\mathbb{N}} \delta \mathbf{a} + \delta_s(\mathbf{n}) H_S \mathbf{N}_{\mathbb{N}}^T \mathbf{a} \quad (2.70)$$

donde $\delta \mathbf{d}$ y $\delta \mathbf{a}$ son las variaciones admisibles de \mathbf{d} y \mathbf{a} , respectivamente.

Los esfuerzos se pueden expresar en forma incremental como:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e\} = \mathbf{D} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\} \quad (2.71)$$

donde \mathbf{D} es el operador constitutivo tangente.

Si se define

$$\mathbf{G}_N = H_S \mathbf{B}_N + \delta_s(\mathbf{n}) \mathbf{N}_N^T \quad (2.72)$$

sustituyendo las ecs. (2.70), (2.71) y (2.72) en la ec. (2.51) se tiene

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_{\Omega} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{B} \mathbf{D} \{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N}_N^T \delta \mathbf{d} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{N}_N^T \delta \mathbf{d} d\Gamma = 0 \\ b) \quad & \int_{\Omega} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{G}_N \mathbf{D} \{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (H_S \mathbf{N}_N^T \delta \mathbf{a}) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot (H_S \mathbf{N}_N^T \delta \mathbf{a}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Sustituyendo las ecs. (2.68) y (2.72), en la forma variacional de la ecuación anterior, se obtiene la siguiente matriz de rigideces:

$$\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_N \\ \mathbf{G}_N^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{G}_N^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_N \end{bmatrix} d\Omega_e \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \|\dot{\mathbf{a}}\| \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{ext} \\ \dot{\mathbf{f}}_{ext}^N \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

esta matriz de rigideces es simétrica, sin embargo, los grados de libertad de enriquecimiento no se pueden condensar como en el caso del Enriquecimiento Elemental, lo que requiere un gasto computacional adicional. Así mismo, la presencia de la función de Heaviside en los elementos de la matriz, requiere de emplear una técnica de integración *ad hoc*. Wells y Sluys (2001) proponen dividir un elemento triangular en siete triángulos pequeños con tres puntos de integración cada uno y dos en la discontinuidad, teniendo así un total de 23 puntos de integración.

De lo expuesto anteriormente se puede observar que para resolver problemas del proceso de falla en materiales mediante el Modelo de Discontinuidades Internas, la formulación de la aproximación de enriquecimiento elemental parte del funcional de energía potencial total, y satisface la continuidad interna de tracciones mediante el promedio de los esfuerzos en el dominio del elemento finito fuera y dentro de la discontinuidad. En consecuencia, de la aproximación con elementos finitos con discontinuidades interiores se obtienen matrices de rigideces no simétricas, que por la presencia de la función Delta de Dirac regularizada están mal condicionadas, lo que puede presentar problemas numéricos como estabilidad y convergencia durante la solución de problemas. La ventaja de esta aproximación es que los grados de libertad adicionales se pueden condensar estáticamente. Por otra parte, la formulación de elementos finitos con enriquecimiento nodal tiene dos inconvenientes principales que son: una implantación numérica compleja y el incremento de grados de libertad que requiere un gasto computacional adicional. A pesar que esta aproximación tiene un mejor desempeño cinemático, no es clara respecto a la continuidad interna de tracciones (ec. 2.18f).

Capítulo 3

Modelos constitutivos de daño

Se llama modelo constitutivo a una formulación matemática capaz de describir el comportamiento físico macroscópico de un sólido ideal, que resulta luego de aplicar hipótesis sobre un sólido real. De aquí que la formulación de modelos constitutivos sólo representa una realidad condicionada por ciertas hipótesis y por tanto su utilización debe realizarse consecuentemente con ellas (Oller, 2001).

Para representar el proceso físico de falla, los Modelos Constitutivos de Daño, permiten representar el comportamiento no lineal de los materiales en los que ocurre una degradación de rigidez, una vez que se alcanza un valor umbral del material. En términos generales el daño de los materiales es el proceso físico progresivo por el cual se rompen los mismos. La mecánica del daño es el estudio, a través de variables mecánicas, de los mecanismos involucrados en el deterioro de los materiales cuando son sometidos a cargas. A nivel de microescala el daño es la acumulación de microtensiones en la vecindad de defectos o interfaces y la rotura de ligaduras, que ambos dañan al material. En la mesoescala del volumen representativo, el daño se presenta en el crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos que, en conjunto, inician una fisura. En la macroescala el daño se refleja por el crecimiento de dicha fisura. Los dos primeros niveles pueden ser estudiados a través de variables de daño de la Mecánica de los Medios Continuos definidas a nivel de mesoescala. El tercer nivel se estudia normalmente utilizando la Mecánica de Fractura con variables definidas a nivel macroscópico.

La Mecánica del Daño Continuo utiliza variables continuas relacionadas con la densidad de estos defectos para describir el deterioro del material antes de la iniciación de macrofisuras. La Mecánica del Daño fue introducida por primera vez por Kachanov (1958), quién propuso la variable de daño como un escalar que varía entre 0 y 1 (daño isotrópico). A partir de este trabajo, se ha desarrollado la Mecánica del Daño, que permiten su aplicación a problemas prácticos de ingeniería. Modelos de daño anisotrópico fueron desarrollado por Lemaitre y Chaboche (1978) y (1985).

Para representar el proceso de falla con el Modelo de Discontinuidades Interiores, se requiere de un modelo constitutivo que describa el proceso de degradación del material, por lo que

se recurre a un Modelo Constitutivo. En los trabajos donde se emplea el concepto de Discontinuidad Fuerte, como los de Simo *et al.* (1993); Simo y Oliver (1994); Oliver y Simo (1994); Oliver (1996a,b); Armero y Garikipati (1996); Armero (1997), determinan el inicio y crecimiento de la discontinuidad en el sólido con un modelo constitutivo del tipo continuo (relación esfuerzo-deformación). En este contexto, cuando se introduce la cinemática de desplazamientos y deformaciones de la aproximación de discontinuidades fuertes al análisis de un modelo constitutivo continuo, se obtiene no sólo una ecuación constitutiva del tipo continua (relación tracción salto), sino todo un modelo constitutivo del tipo discreto (Oliver, 1996a; Armero y Garikipati, 1996; Oliver, 2000 y Oliver *et al.* 2002a).

En el presente capítulo se presentan las bases teóricas de los modelos de daño. Se describen los elementos de un modelo de daño isotrópico, que posteriormente se analiza cuando se introduce la cinemática de deformaciones de la aproximación de Discontinuidad Fuerte. Se demuestra que bajo estas condiciones, se puede generar a partir de un modelo continuo un modelo de daño discreto (Oliver, 2000 y Oliver *et al.* 2002).

3.1 Modelo de daño isotrópico.

Los modelos de daño isotrópicos se han empleado extensivamente para simular el comportamiento del material que presenta la degradación de sus propiedades mecánicas debido a la presencia de fisuras pequeñas que aparecen en el material durante el proceso de carga. Este proceso se puede simular en el contexto de medios continuos, introduciendo una variable interna de daño representada por un escalar, vector o tensor. Esta variable interna de daño, caracteriza el nivel de deterioro del material y relaciona el esfuerzo σ , con el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$, *e.g.*, en una dimensión se puede escribir como (figura 3.1):

$$\sigma = (1 - d) \bar{\sigma} \quad (3.1)$$

donde d es el parámetro de daño que toma el valor $0 \leq d \leq 1$. El esfuerzo efectivo y la deformación se relacionan por la ley de Hooke:

$$\bar{\sigma} = E \varepsilon \quad (3.2)$$

donde E es el módulo elástico del material. Sustituyendo la ec. (3.2) en la ec. (3.1)

$$\sigma = (1 - d) E \varepsilon \quad (3.3)$$

El problema en 3D se puede explicar como una generalización del caso unidimensional de manera que en lugar de trabajar con valores escalares se trabaja con tensores. Así, el esfuerzo en función del esfuerzo efectivo es:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^d : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.4)$$

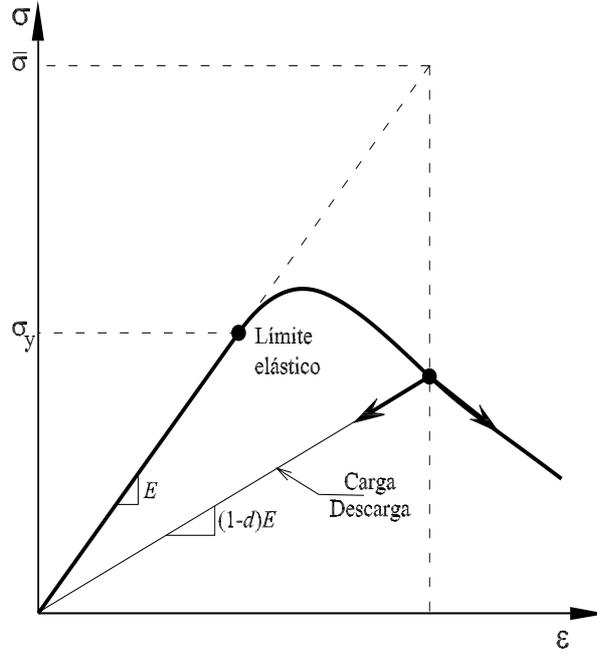


Figura 3.1: Curva esfuerzo deformación.

donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo elástico estándar de cuarto orden y \mathbf{C}^d es el tensor constitutivo elástico degradado. El primero puede expresarse en función de las constantes de Lamé,

$$\mathbf{C} = 2\mu\mathbf{I} + \lambda(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{1}$ es un tensor unitario de segundo orden, \mathbf{I} es un tensor unitario de cuarto orden que corresponde a $\mathbf{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$. Los coeficientes de Lamé se definen en la ec. (2.4).

3.1.1 Ecuación constitutiva

La energía libre de Helmholtz por unidad de volumen para el caso de un modelo de daño isotrópico se define como:

$$\Psi = \Psi(d, \boldsymbol{\varepsilon}) = (1 - d)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.6)$$

donde $\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$ es la energía libre de Helmholtz de un material elástico no dañado en función del campo de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$. Para problemas térmicamente estables es válida la siguiente forma de desigualdad de Clausius-Plank,

$$\Xi = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (3.7)$$

Esta expresión, conocida como de la potencia disipativa, permite hacer las siguientes consideraciones:

- La desigualdad de la ec. (3.7) debe cumplirse para cualquier variación temporal de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, por lo que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ debe ser nulo. Esta condición proporciona la ley constitutiva para el problema de daño escalar.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\Psi_0 \implies -\Psi_0 \text{ conjugada de } d \quad (3.8)$$

- Considerando la ley constitutiva, el valor de la disipación del modelo de degradación resulta,

$$\Xi = \Psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta que la ec. (3.8) se tiene la siguiente forma de la ecuación constitutiva.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d) \frac{\partial \Psi_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = (1-d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.10)$$

que corresponde a la ecuación constitutiva secante del modelo de daño.

3.1.2 Criterio de daño

El criterio de daño determina entre un estado de comportamiento elástico de un material, delimitado por una función de daño, y otro estado en el cual se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material. El criterio básicamente depende del tipo de material.

Para definir una función de daño, se requiere de una norma en el espacio de los esfuerzos,

$$\tau_{\boldsymbol{\sigma}} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{C}e^{-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}e^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.11)$$

o el espacio de deformaciones

$$\tau_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbf{C}} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2\Psi_0} \quad (3.12)$$

ambas se pueden relacionar mediante la siguiente expresión

$$\tau_{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d) \tau_{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.13)$$

Con estas normas se puede definir una región elástica en el espacio de los esfuerzos (3.2a),

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{\boldsymbol{\sigma} \mid f(\tau_{\boldsymbol{\sigma}}, q) < 0\} \quad (3.14)$$

y en el de las deformaciones (3.2b)

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\boldsymbol{\varepsilon} \mid f(\tau_{\boldsymbol{\varepsilon}}, r) < 0\} \quad (3.15)$$

donde q es una función que define el ablandamiento/endurecimiento y r es la variable interna cuyo valor define el límite elástico. Finalmente, se tienen las siguientes funciones de daño, en el espacio de esfuerzos y deformaciones correspondientemente, que definen el límite elástico del comportamiento del material.

$$f(\tau_{\boldsymbol{\sigma}}, q) = \tau_{\boldsymbol{\sigma}} - q \quad (3.16)$$

$$f(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r \quad (3.17)$$

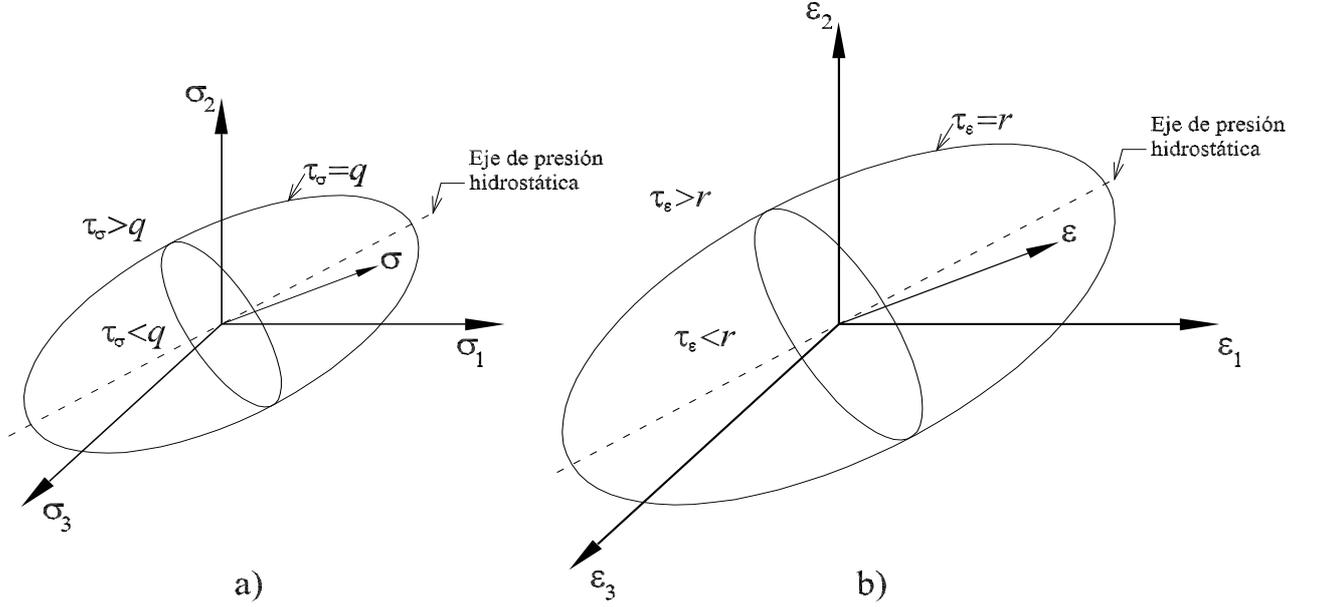


Figura 3.2: Normas: a) espacio de esfuerzos y b) espacio de deformaciones.

De la ec. (3.12), para el caso unidimensional, se puede obtener el valor de r_0

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon} \implies r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \quad (3.18)$$

donde r_0 es el valor umbral inicial y σ_y es el valor de la resistencia elástica. La variable de ablandamiento/endurecimiento q se define como:

$$q(r) = (1 - d)r \quad (3.19)$$

que depende de la variable interna r . Combinando las ecs. (3.19) y (3.10) se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{q(r)}{r} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.20)$$

3.1.3 Regla de endurecimiento

La regla de endurecimiento se define por la siguiente ecuación:

$$\dot{q} = H^d(r) \dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \quad q \in [0, \sigma_y] \quad q_0 = r_0 \quad (3.21)$$

donde H^d es el módulo de endurecimiento/ablandamiento continuo.

La regla de endurecimiento lineal se define como (figura 3.3a)

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 + H^d (r - r_0) & r > r_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

y para una regla exponencial (figura 3.3a)

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 \exp(-H^d (1 - \frac{r_0}{r})) & r > r_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Con base en lo anterior, se tiene que la variable de daño para el caso lineal

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} - H^d (1 - \frac{r_0}{r}) \neq 1 & r > r_0 \end{cases} \quad (3.24)$$

y para el caso exponencial:

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} \exp(-H^d (1 - \frac{r_0}{r})) & r > r_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

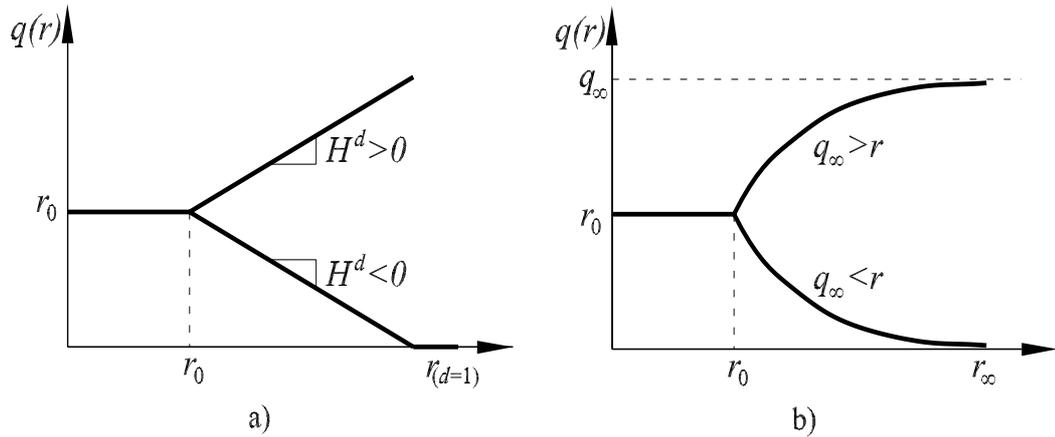


Figura 3.3: Regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal y b) exponencial.

La ley de evolución de la variable interna y de la variable de daño son:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \gamma \\ \dot{d} &= \gamma \frac{\partial f(\tau_\sigma, q)}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde γ es un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño. El rango de la variable interna es $[0, \infty)$. Los límites de la variable de daño son $d = [0, 1]$. Cuando la variable de daño es igual a cero, la variable interna r tiene el valor de r_0 , y cuando el daño es igual a uno, $r = r_\infty$.

3.1.4 Condiciones de carga y descarga

Estas condiciones, que permiten obtener el valor del multiplicador de daño γ , se conocen como las condiciones de Kuhn-Tucker :

$$\gamma \geq 0; \quad f(\tau_\sigma, q) \leq 0; \quad \gamma f(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (3.27)$$

y la condición de persistencia

$$\gamma \dot{f}(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (3.28)$$

Las ecuaciones expresadas anteriores determinan las condiciones de carga o descarga en el material. Si el valor de $f(\tau_\sigma, q) < 0$, el criterio de daño no se satisface, para que se cumpla las condiciones de Kuhn-Tucker necesariamente el valor de $\gamma = 0$. Por la anterior, la variación temporal del daño en la ec. (3.26) debe ser nula $\dot{d} = 0$, por tanto el material no presenta daño, pues se encuentra en el rango de comportamiento elástico.

3.1.5 Módulo tangente

La ecuación constitutiva en términos de la razón de esfuerzos y deformaciones se define como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.29)$$

donde \mathbf{C}^d es el módulo constitutivo tangente. Para obtenerlo, considere la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{1} - d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.30)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - d)\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{d}\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.31)$$

si se considera que en el material no presenta incremento de carga, entonces $\dot{d} = 0$. En consecuencia, se tiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - d)\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \implies \mathbf{C}^d = (\mathbf{1} - d)\mathbf{C} \quad (3.32)$$

Diferenciando τ_ε de la ec. (3.12) con respecto al tiempo y tomando en cuenta la ec. (3.17),

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \implies \dot{\tau}_\varepsilon = \dot{r} = \frac{1}{\tau_\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.33)$$

de la ec. (3.19) se puede obtener la derivada en el tiempo de la variable de daño

$$\dot{d} = \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) \dot{r} \quad (3.34)$$

sustituyendo la ec. (3.21) en la ecuación anterior, se tiene entonces:

$$\dot{d} = \left(\frac{q(r) - H^d r}{r^3} \right) \dot{r} \quad (3.35)$$

Finalmente, el tensor constitutivo tangente se obtiene sustituyendo la ec. 3.34 en la ec. (3.31)

$$\mathbf{C}^d = (1-d)\mathbf{C} : - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) \left(\underbrace{\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}}_{\boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (3.36)$$

Este modelo de daño isotrópico se puede resumir mediante las siguientes ecuaciones como:

a)	$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = (1 - d(r)) \Psi_0$	Energía libre de Helmholtz
b)	$d(r) = 1 - \frac{q}{r}; \quad q \in [r_0, 0] \quad d \in [0, 1]$	Variable de daño
c)	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	Ecuación constitutiva
d)	$\dot{r} = \gamma \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \end{cases}$	Ley de evolución de daño
e)	$f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}} - q; \begin{cases} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{cases}$	Criterio de daño
f)	$\dot{q} = H^d(r) \dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \leq 0$	Regla de endurecimiento
g)	$f < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma f = 0$	Condiciones de carga y descarga
h)	$\gamma \dot{f} = 0 \quad \text{si} \quad f = 0$	Condición de consistencia

(3.37)

3.2 Análisis de la falla en materiales

En esta sección se presentan los criterios para el inicio del proceso de falla desde el punto de vista constitutivo de los materiales, a partir del análisis de localización de deformaciones. La falla de un cuerpo continuo se define como un proceso de eventos o fases, que comienzan a nivel material, y que conduce a un deterioro progresivo a un discontinuo.

3.2.1 Fases de la curva esfuerzo deformación

El comportamiento mecánico de los materiales generalmente se describe por la curva esfuerzo deformación, si se considera un material sujeto a carga que presenta un comportamiento como el que se muestra en la curva de la figura (3.4), los fases en las que se divide esta curva son (Chaves, 2003):

- I. **Fase elástica.** En esta fase, se considera que el comportamiento del material es elástico lineal, *i.e.*, obedece la ley de Hooke. Esta fase está limitada por el punto **a** (punto de fluencia).

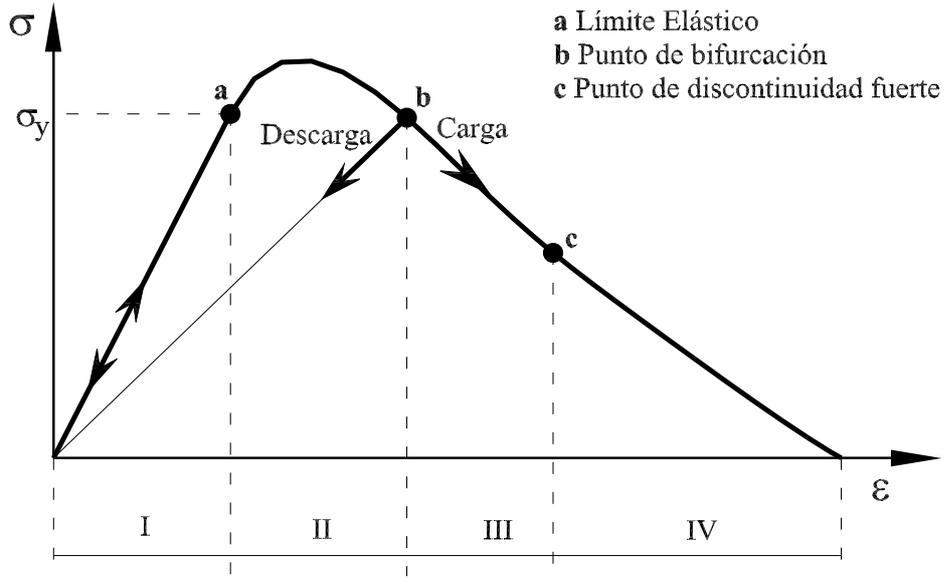


Figura 3.4: Puntos característico durante el proceso de carga.

II. **Fase inelástica.** El punto **a** en la figura corresponde al inicio del comportamiento no lineal del material, el cual se le conoce como inicio de un proceso de falla difusa. Este proceso se caracteriza por que inicia un fenómeno de disipación de energía, acompañado de una concentración de deformaciones espacialmente suaves. Al pasar el punto **a**, este proceso continúa hasta alcanzar el punto **b**, denominado punto de bifurcación.

III. **Fase de DDE.** La fase de discontinuidad débil inicia cuando se cumple la condición de bifurcación $\det[\mathbf{Q}(N)] = 0$. Esta fase se caracteriza por que en el campo de deformaciones es discontinuo, y el campo de desplazamiento se mantiene continuo.

$$\begin{aligned} [[\dot{\mathbf{u}}]] &= \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = 0 \\ \varepsilon &= [[\nabla\dot{\mathbf{u}}]] = \nabla\dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla\dot{\mathbf{u}}^- \neq 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

IV. **Fase de DFU.** Cuando la condiciones de discontinuidad fuerte se satisfacen, esta fase inicia (punto **c**). Se caracteriza por el salto en el campo de los desplazamientos y la aparición de deformaciones no acotadas.

$$\begin{aligned} [[\dot{\mathbf{u}}]] &= \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- \neq 0 \\ \varepsilon &= [[\nabla\dot{\mathbf{u}}]] = \nabla\dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla\dot{\mathbf{u}}^- \neq 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

El momento en que se presenta cada uno de las fases descritas anteriormente dependen no sólo del tipo de material (*i.e.* del modelo constitutivo), sino también, de la evolución del estado de esfuerzos. En algunos casos, algunas de las fases descritas anteriormente pueden coincidir (figura 3.5). Dentro de este contexto, la formación de una discontinuidad fuerte en un punto del material, se puede considerar como una discontinuidad débil que evoluciona a una discontinuidad fuerte en un cierto tiempo del proceso de deformación. En el tiempo de bifurcación t_b , el campo de deformaciones bifurca, como resultado se presenta una banda de localización con espesor pequeño k , que se caracteriza por el inicio de una discontinuidad débil. En tiempos subsecuentes del análisis el espesor de la banda tiende a cero, este momento t_{DFU} se denomina tiempo de discontinuidad fuerte, que se caracteriza por el inicio de una discontinuidad fuerte en el sólido.

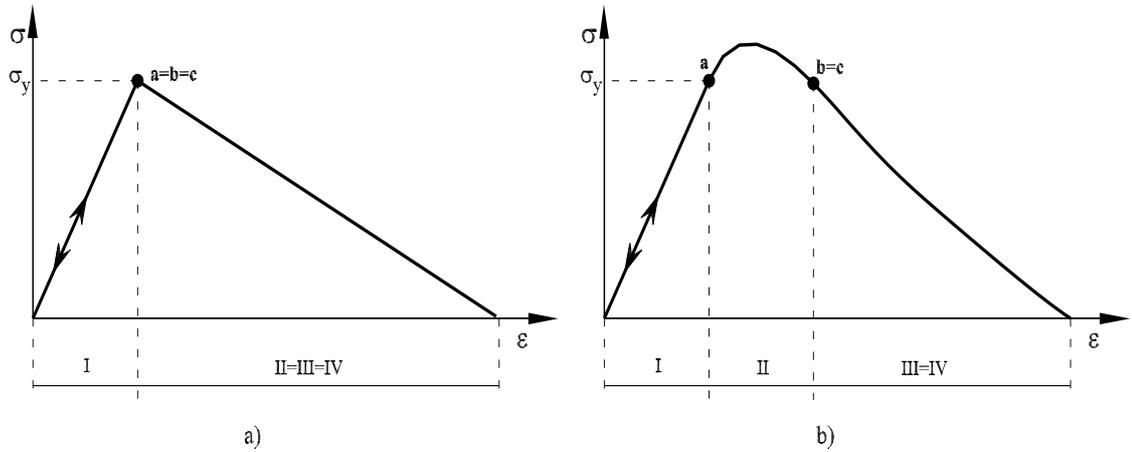


Figura 3.5: Coincidencia de puntos característicos.

3.2.2 Pérdida de estabilidad

En 1952 Drucker identificó la pérdida de estabilidad del material, como la pérdida de trabajo interno positivo. Propuso que un material es estable si la densidad del trabajo de segundo orden es positivo, teniendo como suficiente condición:

$$d^2W = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad (3.40)$$

Para un valor arbitrario de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$. Este criterio fue desarrollado posteriormente por Drucker (1959) y Hill (1958) entre otros. Hill demostró que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ es una condición necesaria para cualquier tipo de bifurcación o pérdida de unicidad.

3.2.3 Tiempo de bifurcación

El tiempo de bifurcación se define como el momento en que la solución del PVF no es única, *i.e.*, cuando inicia la localización de deformaciones, definida como una inestabilidad en la descripción constitutiva macroscópica de la deformación inelástica del material. Para ilustrar lo descrito

anteriormente, considérese el continuo de la figura (3.6) con puntos materiales en la zona de localización S .

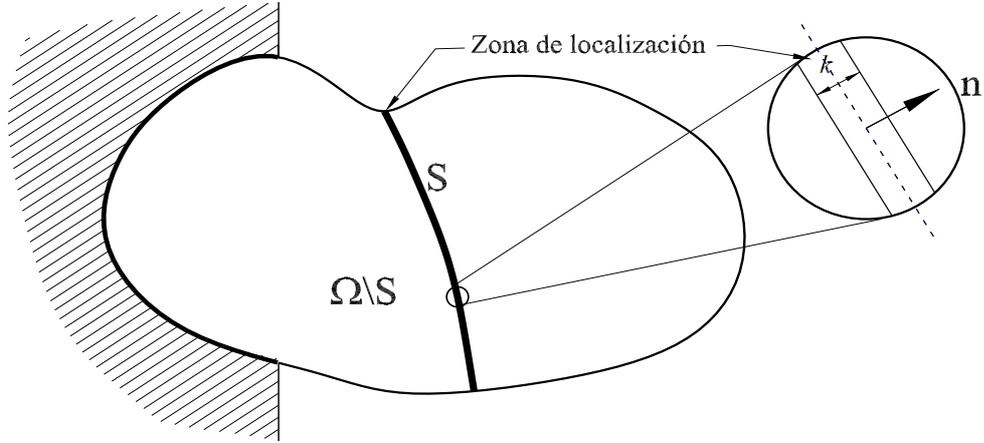


Figura 3.6: Zona de localización S .

Si se considera un punto material P en la zona de localización S con un estado de esfuerzos en el punto de bifurcación \mathbf{b} (figura 3.4). En este momento se tiene el siguiente estado de esfuerzos fuera y dentro de la banda de localización, respectivamente:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} = \mathbf{C}_{\Omega \setminus S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega \setminus S} & \text{en } \Omega \setminus S \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S = \mathbf{C}_S : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S & \text{en } S \end{cases} \quad (3.41)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_S$ y $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}$ son los esfuerzos dentro y fuera de la zona de localización, respectivamente, $\mathbf{C}_{\Omega \setminus S}$ y \mathbf{C}_S son los tensores constitutivos correspondientes. El campo de deformaciones se define como:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega \setminus S} = \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} & \text{en } \Omega \setminus S \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S = \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} + (\mathbf{M} \otimes \mathbf{n})^S & \text{en } S \end{cases} \quad (3.42)$$

donde \mathbf{M} es una función que depende del ancho de la banda de localización, y que define la dirección de la velocidad del salto.

De la continuidad interna de tracciones se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\Omega \setminus S} &= \mathbf{T} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Sustituyendo las ecs. (3.41) y (3.42) en la ec. (3.43) se tiene:

$$\underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_S \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{Q}(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{M} = [(\mathbf{C}_{\Omega \setminus S} - \mathbf{C}_S) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S] \cdot \mathbf{n} \quad (3.44)$$

donde $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ es el tensor de localización.

En el trabajo de Rice y Rudnicki (1980) se hace la distinción entre bifurcación continua y discontinua, con base en el tensor constitutivo tangente.

Bifurcación continua

En el caso de bifurcación continua se considera que dentro y fuera de la zona de localización el tensor constitutivo, $\mathbf{C}_{\Omega \setminus S} = \mathbf{C}_S$, *i.e.*, el material dentro y fuera de la zona de localización se mantiene en estado de carga, en consecuencia, la ec. (3.44) se transforma en:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_S \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (3.45)$$

La condición de bifurcación se satisface cuando la solución de la ecuación (3.45) es diferente de la solución trivial $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, resultando así la condición:

$$\det [\mathbf{Q}(\mathbf{n})] = 0 \quad (3.46)$$

Bifurcación discontinua

De estudios experimentales se ha observado que la respuesta del tensor constitutivo no es continua, pues aparentemente el material fuera de la zona de localización no continúa cargando, al contrario se descarga elásticamente. Este caso conocido como de bifurcación discontinua, $\mathbf{C}_{\Omega \setminus S} \neq \mathbf{C}_S$, en consecuencia, la ec. (3.44) se transforma:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_S \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{M}_D = [(\mathbf{C}_{\Omega \setminus S} - \mathbf{C}_S) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S] \cdot \mathbf{n} \quad (3.47)$$

despejando el valor de \mathbf{M}_D de la ecuación anterior:

$$\mathbf{M}_D = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_S \cdot \mathbf{n})^{-1} \cdot [(\mathbf{C}_{\Omega \setminus S} - \mathbf{C}_S) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S] \cdot \mathbf{n} \quad (3.48)$$

Rice y Rudnicki (1980) demostraron que la solución de la ec. (3.48) corresponde a la condición de carga plástica en la zona de localización, mientras que el resto del continuo se descarga en forma elástica. La condición necesaria para que se presente la localización de deformaciones, considerando bifurcación continua o discontinua está dada por la ec. (3.46).

La ecuación (3.46) se puede considerar como un análisis más elaborado para determinar: 1) el momento en que inicia el daño en el material, y 2) la dirección de propagación de la discontinuidad. Ingredientes necesarios para simular el proceso de falla en materiales mediante el Modelo de Discontinuidades Interiores.

3.3 Análisis del modelo isotrópico de daño con la cinemática de deformaciones de discontinuidades fuertes

En esta sección se muestra que bajo la condición de discontinuidad fuerte, a partir de un modelo de daño continuo (relación esfuerzo-deformación) se puede obtener de forma natural un modelo de daño discreto (relación tracción-salto). Éste fue desarrollado por Oliver (2000) y Oliver *et al.* (2002), partiendo del caso unidimensional y extendiéndolo al caso tridimensional.

De la ecuación constitutiva del modelo de daño de la ec. (3.37c) se pueden obtener las deformaciones como

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \implies \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{r}{q}\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.49)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r}{q}\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (3.50)$$

Considerando el campo de deformaciones de la ec. (3.42) se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{1}{k} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r}{q}\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (3.51)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por k , y considerando la fase de discontinuidad fuerte, *i.e.*, cuando $k \rightarrow 0$, se tiene una relación entre la razón del salto y la de los esfuerzos.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{1}{k} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S \right] = ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{kr}{q}\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (3.52)$$

Puesto que el campo de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ y la regla de endurecimiento están acotados, para la condición $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq 0$, la siguiente expresión se debe satisfacer:

$$\lim_{k \rightarrow 0} kr \neq 0 \quad (3.53)$$

Si se define la razón de la variable discreta interna $\bar{\alpha}$ como:

$$\bar{\alpha} \stackrel{\text{acotado}}{\stackrel{\text{def}}{=}} \begin{cases} \dot{\bar{\alpha}} = kr\dot{r} \\ \bar{\alpha} \in [0, \infty] \end{cases} \quad (3.54)$$

Sustituyendo la ec. (3.54) en la ec. (3.52) se tiene

$$([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\alpha}}{q}\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (3.55)$$

La ecuación anterior se conoce como *la ecuación de discontinuidad fuerte*.

Sustituyendo la ec. (3.54) en la ec. (3.37f) se tiene.

$$\dot{q} = H\dot{r} = \frac{1}{k}H\dot{\bar{\alpha}} \quad (3.56)$$

Puesto que \dot{q} está acotada ($q \in [0, r_0]$) así como $\bar{\alpha}$ y $\dot{\bar{\alpha}}$ la consistencia matemática de la ec.(3.56) requiere que

$$H = k\bar{H} \quad (3.57)$$

así, para el caso de la regla de ablandamiento/endurecimiento

$$\dot{q} = \bar{H}\dot{\bar{\alpha}} \quad (3.58)$$

donde el parámetro \bar{H} se denomina módulo discreto de ablandamiento/endurecimiento y se puede considerar como una propiedad del material.

El parámetro $\bar{\alpha}$ de la ec. (3.54) se puede interpretar como se muestra a continuación. De la ec. (3.18) considerando un régimen de carga se tiene

$$r = \tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon} \implies \dot{r} = \frac{1}{r} \underbrace{\varepsilon : \mathbf{C}}_{\frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d}} : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{r(1-d)} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{q} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} \quad (3.59)$$

Sustituyendo la cinemática de deformaciones de la ec.(3.51) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\alpha}} &= \lim_{k \rightarrow 0} k\dot{r} = \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{1}{q} \boldsymbol{\sigma} : \left[\dot{\bar{\varepsilon}} + \frac{1}{k} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S \right] = \frac{1}{q} \boldsymbol{\sigma} : ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S = \\ &= \frac{1}{q} [[\dot{\mathbf{u}}]] \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{q} [[\dot{\mathbf{u}}]] \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ es el vector de tracciones en la dirección normal a la superficie de la discontinuidad S .

3.3.1 Ecuación constitutiva discreta.

Multiplicando ambos lados de la ec. (3.55) por el tensor \mathbf{C} , se tiene:

$$\mathbf{C} : ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S = \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\alpha}}{q} : \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (3.61)$$

nuevamente multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por el vector normal \mathbf{n} , entonces

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{Q}^e} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] &= \mathbf{Q}^e \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\alpha}}{q} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\alpha}}{q} \mathbf{T} \right) \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\alpha}}{q} \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathbf{T} \right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde \mathbf{Q}^e es el tensor acústico elástico, el cual es un tensor definido positivo. Finalmente, de la ecuación anterior se tiene

$$[[\mathbf{u}]] = \frac{\bar{\alpha}}{q} \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathbf{T} \implies \mathbf{T} = \frac{q}{\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (3.63)$$

Que corresponde a la ecuación constitutiva discreta que relaciona las tracciones en los bordes de la discontinuidad con el salto del campo de desplazamientos $\mathbf{T} = \mathbf{T} ([[\mathbf{u}]])$.

Sustituyendo la ec. (3.63) en la ec. (3.60) se tiene la razón de la variable discreta interna $\bar{\alpha}$ como

$$\dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{q} [[\dot{\mathbf{u}}]] \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{\bar{\alpha}} [[\dot{\mathbf{u}}]] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (3.64)$$

Si se define la siguiente función dependiente de los saltos

$$\tau_{[[\mathbf{u}]]} \stackrel{def}{=} \|[[\mathbf{u}]]\|_{\mathbf{Q}^e} = \sqrt{[[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [[\mathbf{u}]]} \implies \dot{\tau}_{[[\mathbf{u}]]} = \frac{1}{\tau_{[[\mathbf{u}]]}} [[\dot{\mathbf{u}}]] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (3.65)$$

Sustituyendo la ec. (3.65) en la ec. (3.64), se tiene

$$\dot{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} = \dot{\tau}_{[[\mathbf{u}]]} \tau_{[[\mathbf{u}]]} \implies \bar{\alpha} = \tau_{[[\mathbf{u}]]} \implies f ([[\mathbf{u}]], \bar{\alpha}) = \bar{\alpha} - \tau_{[[\mathbf{u}]]} \quad (3.66)$$

De lo anterior, se puede definir una norma del vector de tracciones

$$\tau_{\mathbf{T}} = \frac{q}{\bar{\alpha}} \tau_{[[\mathbf{u}]]} = \sqrt{\frac{q}{\bar{\alpha}} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [[\mathbf{u}]] \frac{q}{\bar{\alpha}}} = \sqrt{\frac{q}{\bar{\alpha}} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [[\mathbf{u}]] \frac{q}{\bar{\alpha}}} = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathbf{T}} = \|\mathbf{T}\|_{\mathbf{Q}^{e-1}} \quad (3.67)$$

De la ec. (3.63) y de la ec. (3.65) se pueden definir las siguientes funciones de daño

$$\begin{aligned} G ([[\mathbf{u}]], \bar{\alpha}) &= \frac{q}{\bar{\alpha}} \tau_{\mathbf{T}} - \bar{\alpha} = 0 \\ f (\mathbf{T}, q) &= \tau_{\mathbf{T}} - q = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Las ecs. (3.64) a (3.68) definen un modelo de daño discreto, el cual se obtiene a partir de la ecuación del modelo de daño continuo de la ec. (3.37) considerando la cinemática de desplazamientos de discontinuidad fuerte, que induce el campo de deformaciones no acotado.

El modelo de daño discreto resultado de este análisis se resume a continuación:

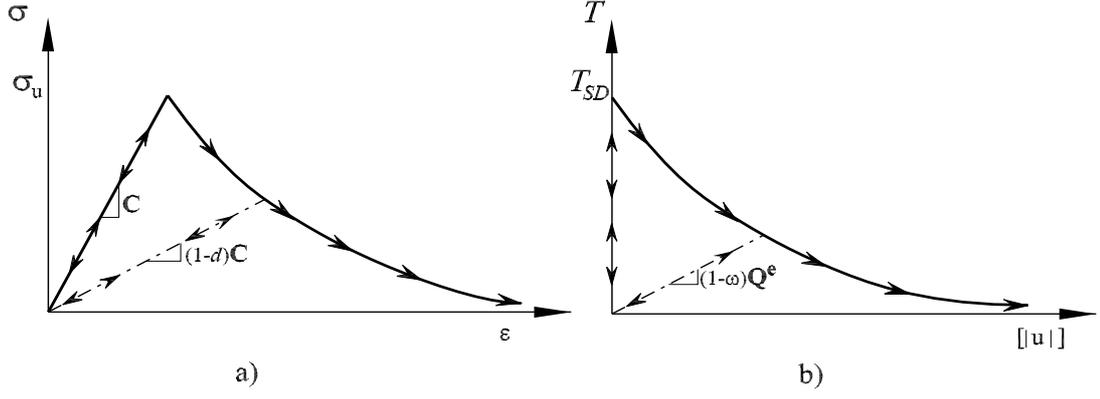


Figura 3.7: Modelo de daño: a) continuo y b) discreto.

a)	$\varphi([\mathbf{u}], \bar{\alpha}) = (1 - \omega) \varphi_0(\bar{\alpha}), \begin{cases} \varphi_0([\mathbf{u}]) = \frac{1}{2} [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [\mathbf{u}] \\ \mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \end{cases}$	Energía libre de Helmholtz
b)	$\omega = 1 - \frac{\bar{q}(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}}; \quad \omega \in [-\infty, 1]$	Variable de daño
c)	$\mathbf{T} = \frac{\varphi([\mathbf{u}], \bar{\alpha})}{\partial [\mathbf{u}]} = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e \cdot [\mathbf{u}]$	Ecuación constitutiva
d)	$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} = \bar{\lambda}, \quad \bar{\alpha} \in [0, \infty]$	Ley de evolución
e)	$f(T, \bar{q}) = \tau_T - \bar{q}; \quad \tau_T = \ \mathbf{T}\ _{\mathbf{Q}^{e-1}} = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathbf{T}}$	Criterio de daño
f)	$\dot{\bar{q}}(\bar{\alpha}) = \bar{H} \dot{\bar{\alpha}}; \quad \bar{H} = \dot{\bar{q}}'(\bar{\alpha}) \leq 0$	Regla de endurecimiento
g)	$f \leq 0; \quad \bar{\lambda} \geq 0; \quad \bar{\lambda} f = 0$	Condiciones de carga y descarga
h)	$\bar{\lambda} \dot{f} = 0$	Condición de consistencia

(3.69)

Este modelo de daño se caracteriza por la variable de daño discreto ω , la cual evoluciona en términos de la variable interna discreta $\bar{\alpha}$ y el módulo secante constitutivo $\mathbf{Q}^S = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e$. Puesto que el valor inicial de ω es $\omega = -\infty$ ($1 - \omega = +\infty$), el módulo constitutivo secante es $\mathbf{Q}^S = +\infty \mathbf{Q}^e$, por lo que el modelo se denomina que es un modelo rígido.

3.3.2 Condiciones de discontinuidad fuerte.

Si se considera un punto material en la zona de localización S , con un vector normal \mathbf{n} , el campo de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}_S$ en ese punto permanece continuo cuando inicia el régimen de discontinuidad fuerte.

$$\boldsymbol{\sigma}_S = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_S = \frac{q(r_S)}{r_S} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_S \quad (3.70)$$

Sustituyendo la ec. (3.51) en la ec. (3.70) en el tiempo de discontinuidad fuerte.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_S &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\bar{q}}{\bar{\alpha}} \mathbf{C} : \left(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{1}{k} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^S \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\bar{q}}{\bar{\alpha}} \mathbf{C} : \left(k\boldsymbol{\varepsilon} + ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^S \right) \\
&= \frac{\bar{q}}{\bar{\alpha}} \mathbf{C} : ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^S
\end{aligned} \tag{3.71}$$

La ecuación anterior se puede reescribir como:

$$([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^S = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{q}} \underbrace{\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_S}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{q}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S \tag{3.72}$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación de discontinuidades fuertes (Oliver, 1996a) la cual proporciona una relación entre los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}_S$ y el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$. Esta ecuación tensorial es un sistema de seis ecuaciones algebraicas que relacionan $\boldsymbol{\sigma}_S$ y $[[\mathbf{u}]]$. Además, de la ec. (3.72) se puede obtener las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} [[u]]_1 & \frac{1}{2} [[u]]_2 & \frac{1}{2} [[u]]_3 \\ \frac{1}{2} [[u]]_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} [[u]]_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{q}} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{21} & \bar{\varepsilon}_{22} & \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{31} & \bar{\varepsilon}_{32} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

De donde se obtiene las siguientes condiciones:

$$\bar{\varepsilon}_{22_S} = \bar{\varepsilon}_{23_S} = \bar{\varepsilon}_{33_S} = 0 \implies [\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_S]_{22} = [\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_S]_{23} = [\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_S]_{33} = 0 \tag{3.74}$$

La ec. (3.74) corresponde a las condiciones de discontinuidad fuerte, las cuales establecen las restricciones del estado de esfuerzos para el inicio de la fase de discontinuidades fuertes. Estas condiciones sólo se satisfacen bajo ciertas condiciones de esfuerzo y deformación en el modelo isotrópico continuo elástico desarrollado en la ec. (3.37). Una opción ante esta limitante es emplear el procedimiento de ancho de banda de localización variable desarrollado por Oliver *et al.* (1999), otra opción es un modelo anisotrópico como el de Fernández y Ayala (2004), quienes desarrollaron un modelo de daño anisotrópico y un modelo de daño discreto que satisfacen adecuadamente las condiciones de discontinuidad fuerte de la ec. (3.74). Estos modelos se desarrollaron para la aproximación de Discontinuidad Débil y Discreta, correspondientemente, los autores demuestran la equivalencia de ambos modelos mediante un análisis energético.

Capítulo 4

Formulación variacional del Modelo de Discontinuidades Interiores

La formulación variacional de un problema se presenta como un funcional, el cual tiene como condiciones de estacionaridad correspondientes a las ecuaciones de Euler-Lagrange, la forma fuerte del problema, con la diferencia, que la formulación variacional tiene ventajas sobre la formulación fuerte (Washizu, 1967). Los funcionales son magnitudes variables cuyo valor se determinan mediante la elección de una o varias funciones. El cálculo variacional estudia los métodos, llamados variacionales, que permiten hallar los valores estacionarios de los funcionales. Puesto que un funcional representa el modelo matemático de un problema físico, la aplicación de los métodos variacionales es importantes en áreas del conocimiento como la física teórica, mecánica Lagrangiana, mecánica cuántica, en las ingenierías, etc. Los métodos variacionales proveen las bases matemáticas del método del elemento finito, el cual es una herramienta numérica para resolver PVF.

Dentro de la mecánica de medios continuos, para resolver el problema elástico lineal definido en la ec.(2.1), la literatura reporta los siguientes funcionales de energía: Hellinger-Reissner (Reissner, 1950) con dos campos independiente (desplazamientos y esfuerzos), Fraeijs de Veubeke (1951) con cuatro campos independientes (desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tracciones); Hu (1955) y Washizu (1955) con tres campos independientes (desplazamientos, deformaciones y esfuerzos), Energía potencial total con un campo independiente (desplazamientos), Energía potencial complementaria con un campo independiente (esfuerzos); entre estos funcionales se encuentran los llamados funcionales híbridos como los de Pian (1964), Herrmann (1966) y Atluri (1975), que consideran campos independientes de diferente dimensión, *e.g.*, esfuerzos en el continuo y tracciones en una superficie. A partir del funcional general de Fraeijs de Veubeke (1951) se pueden generar los otros funcionales descritos anteriormente. Todos estos funcionales tiene en común, que al encontrarse la función o funciones que los extremize, también se están encontrando las soluciones a las ecuaciones que definen el problema. Para encontrar la función que extremize un funcional que represente un problema sencillo, *e.g.*, una barra, viga, la solución se puede obtener en forma analítica. Sin embargo, cuando se trata de un problema con una

geometría irregular, la solución mediante procedimientos analíticos no es, en general, viable. En este caso se recurre a los métodos numéricos aproximados como el de los Elementos Finitos para obtener la solución aproximada del problema.

El problema en este trabajo de investigación es simular el proceso de falla, considerando que se presenta el fenómeno de localización de deformaciones, que se aproxima con el Modelo de Discontinuidades Interiores dentro del contexto del método de los Elementos Finitos. Como se demostró en el capítulo 2, las formulaciones de Enriquecimiento elemental y global se basan en el funcional de energía potencial. La formulación de Enriquecimiento elemental satisface la continuidad de tracciones en forma fuerte e introduce valores de la función delta de Dirac en forma regularizada, lo que produce problemas de inestabilidad numérica. La formulación de Enriquecimiento global, no satisface en forma adecuada la continuidad interna de tracciones; requiere de un gasto computacional adicional para integrar numéricamente las funciones de Heaviside en el elemento y su implantación numérica se dificulta por los grados de libertad adicionales para capturar la discontinuidad.

En este capítulo se desarrolla una formulación variacional general para representar el fenómeno de localización de deformaciones mediante el modelo de discontinuidades interiores. Se presenta la formulación variacional del problema elástico lineal de Fraeijs de Veubeke (1951) en la que se basa la formulación que aquí se propone. A partir de esta formulación, tomando en cuenta la física del problema de falla en materiales descrito en la introducción del capítulo 1, se desarrolla un funcional de energía para un sólido dividido en tres subdominios. A partir de este funcional, considerando que el subdominio del interior se reduce a una banda de ancho $k \neq 0$ donde las deformaciones se concentran, se tiene como resultado el funcional para el Modelo de Discontinuidad Débil. Al considerar que la banda de localización $k = 0$ en el funcional anterior, se obtiene el funcional para el Modelo de Discontinuidad Fuerte. Finalmente, si se considera que el material deja ser continuo al producirse una grieta o discontinuidad, pero existe una transmisión de tracciones en la discontinuidad, se llega al desarrollo del funcional para el Modelo de Discontinuidad Discreta. Los campos independientes en estos funcionales de energía son los desplazamientos, las deformaciones, los esfuerzos y las tracciones.

A partir de estos funcionales generales de energía con discontinuidades, inspirados en la formulación de Fraeijs de Veubeke (1951), se puede obtener una jerarquía de formulaciones funcionales, que pueden tener como campos independientes los desplazamientos, las deformaciones, los esfuerzos, o combinaciones de ellos. Como resultado, esta jerarquía dentro del contexto de elementos finitos con discontinuidades interiores, da lugar al método de desplazamientos, fuerzas, mixtos y en general híbridos, los cuales se desarrollarán en el capítulo siguiente.

4.1 Principio variacional del problema elástico lineal

El principio variacional de Fraeijs de Veubeke es un principio canónico dentro de la teoría de la elasticidad que permite la variación independiente de los campos de desplazamientos,

deformaciones, esfuerzos y tracciones. En su formulación Fraeijs de Veubeke considera un sólido continuo con dominio Ω , con elementos \mathbf{x} llamados puntos materiales, y frontera Γ (figura 4.1). Las condiciones de frontera son las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en Γ_σ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en Γ_u , de tal forma que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$. Se considera que la frontera Γ del continuo está constituida por dos superficies Γ_u y Γ_σ , de tal manera que Γ_u corresponde a la región con desplazamientos prescritos (conocidos) y Γ_σ corresponde al resto de la frontera que incluye aquellas porciones donde se aplican las cargas prescritas.

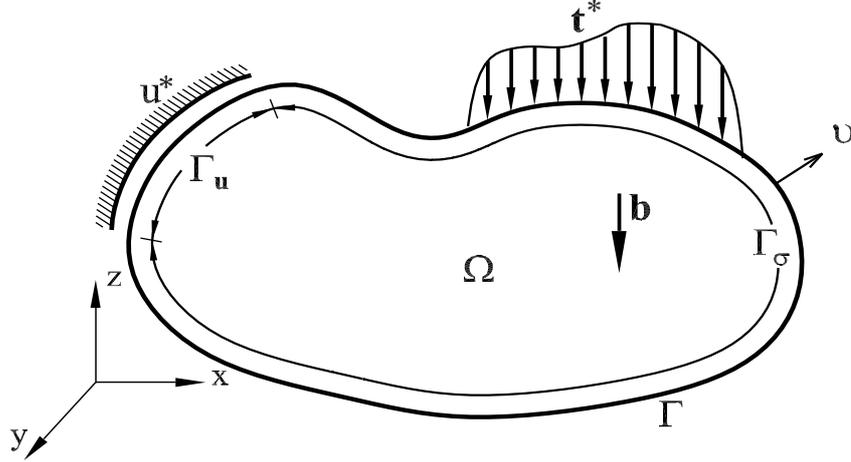


Figura 4.1: Dominio Ω con sus condiciones de frontera en Γ .

El principio variacional de Fraeijs de Veubeke sostiene que la primera variación del funcional de energía del continuo, la cual se realiza simultáneamente en los campos de desplazamientos u , deformaciones ε , esfuerzos σ y tracciones t , igualada a cero da lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a todos los campos de ecuaciones de la teoría de la elasticidad (PVF de la ec. (2.1)), incluyendo las condiciones esenciales y naturales de frontera (desplazamientos y tracciones)¹. Esto es

$$\delta\Pi_V = 0 \quad (4.1)$$

El funcional de energía del continuo se define como (Fraeijs de Veubeke, 1965):

$$\Pi_V = U - P + D \quad (4.2)$$

donde:

$$U = \int_{\Omega} W(\varepsilon) d\Omega \quad (4.3)$$

¹Este funcional fue publicado simultáneamente por Washizu (1955) y Hu (1955), desconociendo que cuatro años antes Fraeijs de Veubeke (1951) había publicado la versión original de este principio, que había sido omitido hasta su confirmación por Felippa (1999).

es la energía de deformación total, la cual se calcula a partir del campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma$$

es la energía potencial de las cargas prescritas, la cual se calcula a partir del campo integrable de desplazamientos \mathbf{u} , y

$$D = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.4)$$

es un potencial de dislocación que introduce un campo representado por los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ y tracciones \mathbf{t} . De lo anterior se tiene un funcional de energía de cuatro campos independientes \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, y \mathbf{t} .

$$\Pi_V(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t}) \equiv \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.5)$$

Los campos dependientes son el de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ y el de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$, el primero depende del de desplazamientos \mathbf{u} y el segundo del de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^u &= \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})^S \\ \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para un cuerpo de Hooke, la densidad de energía de deformación en función del campo de deformaciones se define como:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.7)$$

donde \mathbf{C} es la matriz constitutiva elástica.

Para demostrar el principio variacional de (Fraeijs de Veubeke, 1951), correspondiente a la ec. (4.1), se tiene que la primera variación de la ec. (4.5)

$$\begin{aligned} \delta \Pi_V &\equiv \int_{\Omega} [(\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Del teorema de la divergencia, la integral del término $\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u$ de la ecuación anterior, se puede definir como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sustituyendo la ec. (4.9) en la ec. (4.8) se tiene

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_v &\equiv \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta \mathbf{t} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

En la ecuación anterior, se observa que mediante la primera variación igualada a cero del funcional de la ec. (4.5) se satisfacen en forma débil con todas las ecuaciones y condiciones de frontera del PVF del problema elástico definido en la ec. (2.1). Lo que valida el principio variacional de Fraeijs de Veubeke (1951) definido en (4.1).

Se puede demostrar que en la solución de un problema dado, las funciones (desplazamiento, esfuerzo, deformaciones y tracciones) que extremizan el funcional de energía de la ec.(4.5), también satisfacen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema (PVF) de la ec. (2.1).

4.2 Formulación variacional para un sólido dividido en subdominios

Si se considera un medio continuo con dominio Ω y frontera Γ (figura 4.2), el cual se encuentra dividido en tres subdominios $\Omega = \Omega^- + \Omega^h + \Omega^+$ y $\Gamma = \Gamma^- + \Gamma^h + \Gamma^+$; cada subdominio tiene un tensor constitutivo tangente (\mathbb{C}^- , \mathbb{C}^h y \mathbb{C}^+), sus condiciones iniciales como son las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en la frontera $\Gamma_{\sigma} = \Gamma_{\sigma}^- + \Gamma_{\sigma}^h + \Gamma_{\sigma}^+$ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en $\Gamma_u = \Gamma_u^- + \Gamma_u^h + \Gamma_u^+$, de tal forma que $\Gamma_{\sigma} \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_{\sigma} \cap \Gamma_u = \emptyset$.

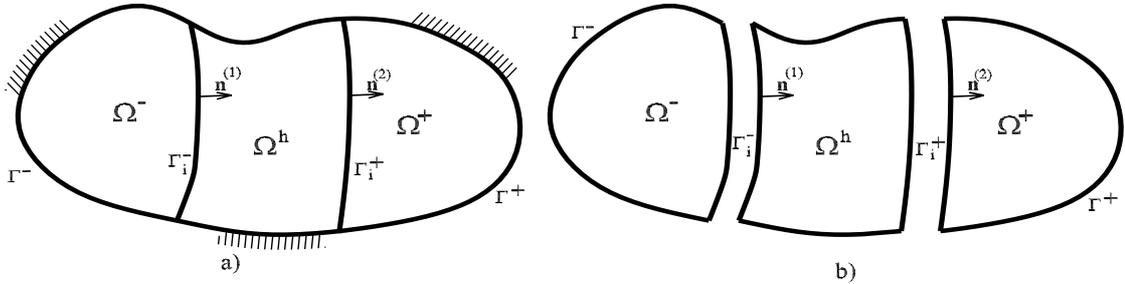


Figura 4.2: Dominio Ω : a) dividido en tres subdominios y b) separado.

El funcional de energía para el continuo Ω descrito anteriormente se obtiene de la suma del funcional de la ec. (4.5) definido en cada subdominio

$$\Pi^\Omega = \Pi_V^{\Omega^-} + \Pi_V^{\Omega^h} + \Pi_V^{\Omega^+} \quad (4.11)$$

donde:

$$\Pi_V^{\Omega^-} \equiv \int_{\Omega^-} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^-} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^-} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.12)$$

$$\Pi_V^{\Omega^h} \equiv \int_{\Omega^h} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^h} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^h} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.13)$$

$$\Pi_V^{\Omega^+} \equiv \int_{\Omega^+} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^+} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^+} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.14)$$

La primera variación del funcional definido en la ec. (4.11), se calcula de los funcionales de energía de cada subdominio correspondientes a las ecs. (4.12), (4.13) y (4.14):

$$\begin{aligned} \delta \Pi_V^{\Omega^-} &\equiv \int_{\Omega^-} [(\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma^-} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^-} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta \mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_V^{\Omega^h} &\equiv \int_{\Omega^h} [(\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma^h} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^h} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta \mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_V^{\Omega^+} &\equiv \int_{\Omega^+} [(\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma^+} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^+} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta \mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Del teorema de la divergencia, las integrales del término $\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u$ en cada uno de los subdominios, se puede definir como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^-} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} d\Omega &= - \int_{\Omega^-} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&= - \int_{\Omega^-} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_u^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{(1)} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^S} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} d\Omega &= - \int_{\Omega^S} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma^S} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&= - \int_{\Omega^S} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_u^h} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma^h} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^S} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^S} \cdot \mathbf{n}^{(1)} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^S} \cdot \mathbf{n}^{(2)} \cdot \delta \mathbf{u}_{\Omega^S} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^+} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} d\Omega &= - \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&= - \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_u^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{(2)} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Sustituyendo las ecs. (4.18), (4.19) y (4.20) en las ecs. (4.15), (4.16) y (4.17) correspondientemente se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_V^{\Omega^-} &\equiv \int_{\Omega^-} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega^-} (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega^-} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\
&\quad + \int_{\Gamma_\sigma^-} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u^-} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^-} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta \mathbf{t} d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n}^{(1)} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_V^{\Omega^h} &\equiv \int_{\Omega^h} (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega^h} (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega^h} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_\sigma^-} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u^-} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^-} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n}^{(1)} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n}^{(2)} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_V^{\Omega^+} &\equiv \int_{\Omega^+} (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega^+} (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega^-} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_\sigma^+} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u^-} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^-} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n}^{(2)} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

En las tres ecuaciones anteriores se observa que el PVF de la ec. (2.1) se satisface en forma débil en cada uno de los subdominios. En las ecuaciones anteriores se pueden sumar los términos correspondientes, excepto aquellos que contienen el esfuerzo dependiente de las deformaciones $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, pues el tensor constitutivo \mathbb{C} , es diferente en cada subdominio.

En el caso que los tensores constitutivos $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}^h = \mathbb{C}^+$, la primera variación del funcional definido en la ec. (4.11), se obtiene de la suma de las ecuaciones (4.21), (4.22) y (4.23)

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^\Omega &\equiv \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_i^-} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-}) \cdot \mathbf{n}^{(1)} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h}) \cdot \mathbf{n}^{(2)} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Como resultado, se cumple en forma débil con todas las condiciones de la ec. (2.1) para un sólido continuo, así mismo, se satisface la siguiente condición:

$$\begin{aligned}
f) \quad &\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = [[\boldsymbol{\sigma}]]_{\Gamma_i^-} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_i^- && \text{Continuidad interna} \\
&\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n}^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n}^{(2)} = [[\boldsymbol{\sigma}]]_{\Gamma_i^+} \cdot \mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_i^+ && \text{de tracciones}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

que muestra que existe continuidad interna de tracciones $[[\boldsymbol{\sigma}]]_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ en las fronteras internas Γ_i^- y Γ_i^+ , por lo que el sistema se encuentra en equilibrio.

4.3 Formulación variacional del Modelo de Discontinuidad Débil

Considere que el dominio del continuo descrito anteriormente, el subdominio Ω^h se reduce a una banda de espesor pequeño $k \neq 0$ (figura 4.3). De igual forma el dominio está dividido en tres subdominios, $\Omega = \Omega^- + \Omega^h + \Omega^+$ y dos regiones $\Gamma = \Gamma^- + \Gamma^+$; las condiciones de frontera son las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en la frontera $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^- + \Gamma_\sigma^+$ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en $\Gamma_u = \Gamma_u^- + \Gamma_u^+$, de tal forma que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$.

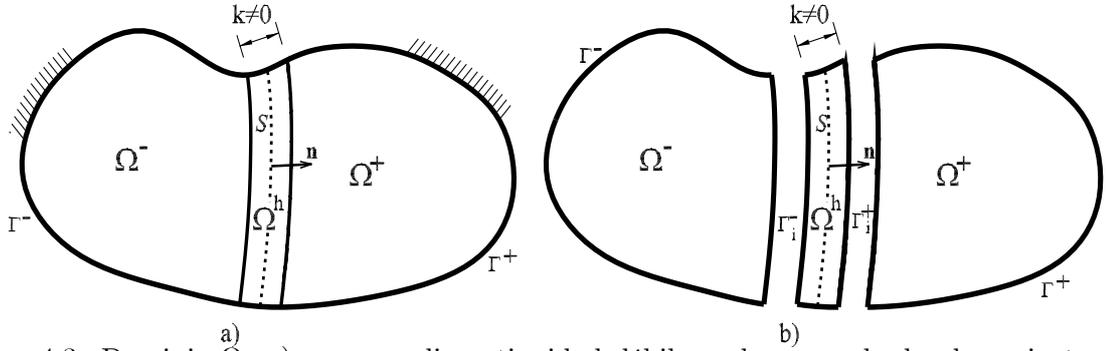


Figura 4.3: Dominio Ω : a) con una discontinuidad débil en el campo de desplazamientos y b) separado.

El funcional de energía para el continuo Ω descrito anteriormente se obtiene de la suma del funcional de la ec. (4.5) para cada subdominio

$$\Pi_{DDE}^\Omega = \Pi^{\Omega^-} + \Pi^{\Omega^h} + \Pi^{\Omega^+} \quad (4.26)$$

Si se considera que los subdominios $\Omega \setminus S = \Omega^- + \Omega^+$ tiene los mismos tensores constitutivos $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}^+$, la ecuación anterior se puede definir como:

$$\Pi_{DDE}^\Omega = \Pi^{\Omega \setminus S} + \Pi^{\Omega^h} \quad (4.27)$$

donde $\Pi^{\Omega \setminus S}$ se define por

$$\Pi^{\Omega \setminus S} \equiv \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.28)$$

y Π^{Ω^h} por

$$\Pi^{\Omega^h} \equiv \int_{\Omega^h} [\boldsymbol{\sigma} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega \quad (4.29)$$

Puesto que el dominio Ω^h tiene un espesor k relativamente pequeño, se considera que no se imponen los términos de tracciones \mathbf{t}^* y desplazamientos \mathbf{u}^* prescritos. En consecuencia, la ec. (4.13) se reduce a la ec. (4.29).

La primera variación del funcional de energía de cada subdominio correspondiente a las ecs. (4.28) y (4.29) es:

$$\begin{aligned} \delta\Pi^{\Omega \setminus S} &\equiv \int_{\Omega \setminus S} [(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\delta\Pi^{\Omega^h} \equiv \int_{\Omega^h} [(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Omega \quad (4.31)$$

Del teorema de la divergencia, las siguientes integrales se pueden definir como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus S} \boldsymbol{\sigma} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u d\Omega &= - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^h} \boldsymbol{\sigma} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u d\Omega &= - \int_{\Omega^h} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma^h} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega^S} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sustituyendo las ecs. (4.32) y (4.33) en las ecs. (4.30) y (4.31) correspondientemente se tiene:

$$\begin{aligned} \delta\Pi^{\Omega \setminus S} &\equiv \int_{\Omega \setminus S} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta\boldsymbol{\sigma}_\Omega d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^{\Omega^h} &\equiv \int_{\Omega^h} (\tilde{\varepsilon}^u - \tilde{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega^h} (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\tilde{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega^h} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma_i^-} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.35}$$

La primera variaci3n del funcional de energ3a de la ec. (4.26) se obtiene de la suma de las ecs. (4.34) y (4.35):

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{DDE}^{\Omega} &\equiv \int_{\Omega \setminus S} (\tilde{\varepsilon}^u - \tilde{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\sigma}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\tilde{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega^h} (\tilde{\varepsilon}^u - \tilde{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega^h} (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\tilde{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega^h} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\
&\quad + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_i^-} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_i^+} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

De los dos t3rminos 3ltimos de la ec. (4.36) se tiene $(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+}) \cdot \mathbf{n} = [[\boldsymbol{\sigma}]]_S \cdot \mathbf{n} = 0$, demostrando as3, que adem3s de satisfacerse la continuidad interna de tracciones, se satisface con la continuidad externa de la ec. (2.17g). Lo anterior demuestra que el funcional de energ3a definido en la ec. (4.27) satisface en forma d3bil el PVF del modelo de discontinuidad d3bil de la ec. (2.17).

El funcional de energ3a de la ec. (4.29) se puede aproximar cambiando la integral de volumen sobre el dominio Ω^h , por una integral de superficie o l3nea S multiplicada por el espesor k

$$\Pi^{\Omega^h} \equiv k \int_S [\boldsymbol{\sigma} : (\tilde{\varepsilon}^u - \tilde{\varepsilon}) + W(\tilde{\varepsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega \tag{4.37}$$

lo cual cumple con las condiciones de la ec. (2.1) para un s3lido continuo y con la continuidad interna de tracciones en S :

$$f) \quad \begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n} &= [[\boldsymbol{\sigma}]]_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^h} \cdot \mathbf{n} &= [[\boldsymbol{\sigma}]]_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}
\end{aligned} \quad \text{en } S \quad \text{Continuidad interna de tracciones} \tag{4.38}$$

4.4 Formulación variacional del Modelo de Discontinuidades Fuertes

Si se considera ahora que el dominio Ω^h de la sección anterior tiende a una superficie $\Omega^h \rightarrow S$ de espesor $k = 0$ (figura 4.4). El dominio se divide en dos subdominios y una superficie, $\Omega = \Omega^- + S + \Omega^+$ y dos regiones $\Gamma = \Gamma^- + \Gamma^+$; las condiciones de frontera son las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en la frontera $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^- + \Gamma_\sigma^+$ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en $\Gamma_u = \Gamma_u^- + \Gamma_u^+$, de tal forma que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$.

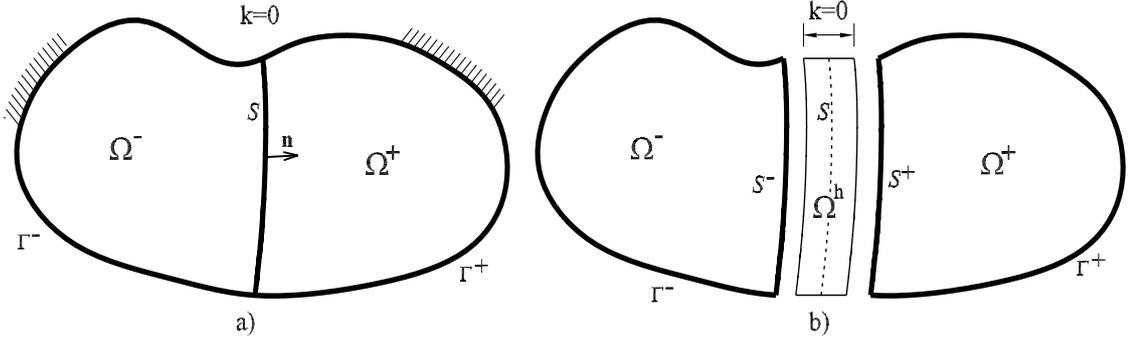


Figura 4.4: Dominio Ω con una discontinuidad fuerte S : a) continuo y b) separado.

El funcional de energía para el continuo descrito anteriormente se define por la siguiente ecuación:

$$\Pi_{DFU}^\Omega = \Pi^{\Omega \setminus S} + \Pi^S \quad (4.39)$$

donde $\Pi^{\Omega \setminus S}$ se define en la ec. (4.28) y Π^S se desarrolla a partir de la ec.(4.29)

$$\Pi^{\Omega^h} \equiv \int_{\Omega^S} [\boldsymbol{\sigma} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})] d\Omega \quad (4.40)$$

con la diferencia que la ec. (4.40) no presenta fuerzas de cuerpo \mathbf{b} , pues el dominio $\Omega^h \rightarrow S$ con espesor $k = 0$.

La primera variación de la ec. (4.40) es:

$$\delta \Pi^{\Omega^h} \equiv \int_{\Omega^h} [(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta \boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u] d\Omega \quad (4.41)$$

Del teorema de la divergencia, las siguientes integrales se pueden definir como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^h} \boldsymbol{\sigma} : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u d\Omega &= - \int_{\Omega^h} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega^h} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&= - \int_{\Omega^h} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{S^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{S^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&= - \int_{\Omega^h} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta [|\mathbf{u}|] dS
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Sustituyendo la ec. (4.42) en la ec. (4.41) se tiene:

$$\delta \Pi^{\Omega^h} \equiv \int_{\Omega^h} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega^h} (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega^h} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta [|\mathbf{u}|] dS \tag{4.43}$$

Si el dominio $\Omega^h \rightarrow S$ (figura 4.4), entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$\delta \Pi^S \equiv \int_S (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta \boldsymbol{\sigma} dS + \int_S (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dS - \int_S \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta [|\mathbf{u}|] d\Omega + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta [|\mathbf{u}|] dS \tag{4.44}$$

la cual se define como la variación del potencial de interfaz o dislocación en S .

De la suma de las ecs. (4.34) y (4.44) se obtiene la primera variación del funcional de la ec. (4.39):

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{DFU}^{\Omega} &\equiv \int_{\Omega \setminus S} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\partial S^-} (\boldsymbol{\sigma}_S - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\
&- \int_{\partial S^+} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} - \boldsymbol{\sigma}_S) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_S (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta \boldsymbol{\sigma} dS + \int_S (\boldsymbol{\sigma}^{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dS - \int_S \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta [|\mathbf{u}|] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Se demuestra que este funcional de energía satisface el PVF del Modelo de Discontinuidades Fuertes definido en la ec. 2.18.

Finalmente, el funcional de energía para un sólido con una discontinuidad S está dado por la suma del funcional de la ec. (4.30) en los subdominios Ω^+ y Ω^- y el potencial de interfase o dislocación Π^S :

$$\Pi_{DFU}^{\Omega}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t}, [|\mathbf{u}|], \boldsymbol{\sigma}_S, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \Pi_V^{\Omega \setminus S} + \Pi_V^S \tag{4.46}$$

En la ecuación anterior, se observa que el funcional de energía incrementa los cuatro campos

independientes, propuesto originalmente por Fraeijns de Veubeke, a siete campos independientes, en forma natural aparece el salto de desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ como campo independiente en el potencial de interfaz:

$$\begin{aligned}\Pi_{DFU}^S ([[\mathbf{u}]], \boldsymbol{\sigma}_S, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) &\equiv \int_S \left[\boldsymbol{\sigma}_S : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[[\mathbf{u}]]} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right] dS \\ &\equiv \int_S [\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} \cdot [[\mathbf{u}]]] - \boldsymbol{\sigma}_S : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) dS\end{aligned}\quad (4.47)$$

4.5 Formulación variacional del Modelo de Discontinuidad Discreta

En esta aproximación se considera que el dominio Ω deja de ser continuo puesto que se produce una grieta o discontinuidad S dentro de él (figura 4.5), por consiguiente, se emplean relaciones constitutivas tracción-salto en la discontinuidad, mientras que en el resto del dominio $\Omega \setminus S$ se emplean relaciones constitutivas estándares.

En este caso, el funcional de energía potencial del continuo se define por la suma del funcional en los subdominios Ω^- y Ω^+ ($\Omega \setminus S = \Omega^- + \Omega^+$) de la ec. (4.28) y el potencial de interfase o dislocación Π_V^S en la discontinuidad S , el cual se deriva de la ec. (4.47) como el producto de las tracciones T por el campo de desplazamientos ($\mathbf{u}_S^+ - \mathbf{u}_S^-$) (el salto $[[\mathbf{u}]]$), pues se considera que el cuerpo deja de ser continuo.

$$\Pi_{DDI}^S \equiv \int_S T \cdot [[\mathbf{u}]]] dS \quad (4.48)$$

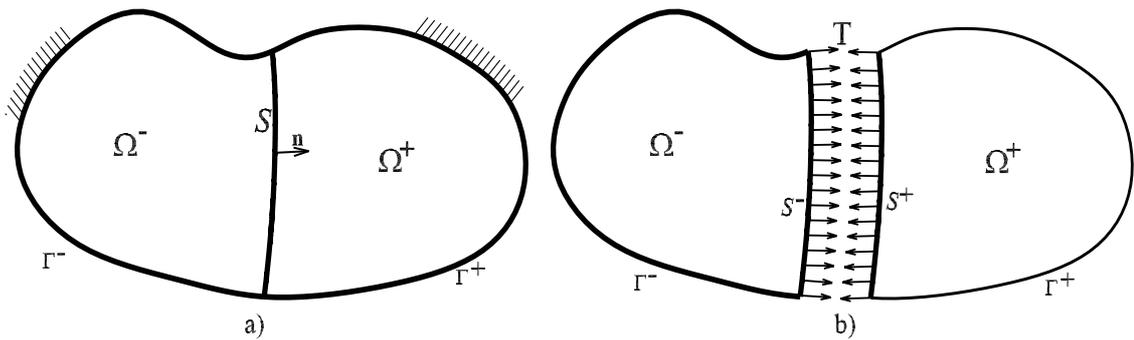


Figura 4.5: Dominio Ω : a) con una discontinuidad fuerte y b) separado.

Incluyendo este término en la ec. (4.28) se tiene un funcional de cinco variables independientes:

$$\Pi_{DDI}^\Omega (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, [[\mathbf{u}]], \mathbf{t}) = \Pi^{\Omega \setminus S} + \Pi_D^S \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{DDI}^{\Omega} \equiv & \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega + W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})d\Omega - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma + \int_S T \cdot (\mathbf{u}_S^+ - \mathbf{u}_S^-) dS\end{aligned}\quad (4.50)$$

La primera variación de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{DDI}^{\Omega} \equiv & \int_{\Omega \setminus S} [(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_S T \cdot (\delta\mathbf{u}_S^+ - \delta\mathbf{u}_S^-) d\Gamma\end{aligned}\quad (4.51)$$

Del teorema de la divergencia se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \setminus S} \boldsymbol{\sigma} : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u d\Omega &= - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{S^-} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{S^+} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma\end{aligned}\quad (4.52)$$

Sustituyendo la ec. (4.52) en la (4.51) se tiene

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{DDI} \equiv & \int_{\Omega \setminus S} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^*) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \delta\mathbf{t} d\Gamma \\ & - \int_{S^-} (T - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta\mathbf{u}_S^- d\Gamma - \int_{S^+} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - T) \cdot \delta\mathbf{u}_S^+ d\Gamma\end{aligned}\quad (4.53)$$

Así, se demuestra el PVF del Modelo de Discontinuidades Interiores que se satisface en forma débil para la aproximación Discreta definido en la ec. (2.19).

4.6 Desarrollo de otros principios variacionales

Los funcionales de energía generales con Discontinuidades Interiores desarrollados anteriormente, ecs. (4.26), (4.39) y (4.49), consideran como variables independientes, el campo de desplazamiento, el de deformaciones, el de esfuerzos y el del salto de desplazamientos que aparece en forma natural en la formulación. De estos funcionales, es posible generar una jerarquía de

principios variacionales que pueden involucran sólo algunas variables o combinación de ellas como independientes.

4.6.1 Funcional de energía potencial total con discontinuidades

Si las siguientes condiciones de compatibilidad se satisfacen *a priori*,

$$\begin{aligned}
a) \quad & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = 0 && \text{in } \Omega \setminus S && \text{Compatibilidad cinemática} \\
& \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} && \text{in } S && \\
b) \quad & \boldsymbol{\sigma}^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} && \text{in } \Omega \setminus S && \text{Compatibilidad constitutiva} \\
c) \quad & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) && \text{on } \Gamma_u && \text{Condición esencial de frontera}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

los funcionales de energía generales definidos en las ecs. (4.26), (4.46) y (4.49) de las aproximaciones de DDE, DFU y DDI se reducen a los siguientes funcionales.

$$\begin{aligned}
\Pi_{DDE}^{\Omega}(\mathbf{u}, [|\mathbf{u}|]) &\equiv \int_{\Omega \setminus S} [W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{u}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \\
&\quad + k \int_S [W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[|\mathbf{u}|]}) - \mathbf{b} \cdot [|\mathbf{u}|]] dS
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\Pi_{DFU}^{\Omega}(\mathbf{u}, [|\mathbf{u}|]) \equiv \int_{\Omega \setminus S} [W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{u}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_S W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[|\mathbf{u}|]}) dS \tag{4.56}$$

$$\Pi_{DDI}^{\Omega}(\mathbf{u}, [|\mathbf{u}|]) \equiv \int_{\Omega \setminus S} [W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{u}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_S T \cdot [|\mathbf{u}|] dS \tag{4.57}$$

En estos funcionales de energía, solamente los campos de desplazamiento \mathbf{u} y el salto $[|\mathbf{u}|]$ son sujetos a variación

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, [|\mathbf{u}|]) = 0 \tag{4.58}$$

que satisfacen en forma débil el equilibrio interno y externo, la continuidad interna y externa de de tracciones. Así, se satisface con el VBP de cada aproximación. Los funcionales de energía definidos en las ecs. (4.55), (4.56) y (4.57) dan lugar a la formulación de desplazamientos de elementos finitos.

4.6.2 Funcional desplazamiento-esfuerzo con discontinuidades

Esta formulación considera que la siguiente ecuación de compatibilidad entre el campo de desplazamientos y deformaciones se satisface *a priori*

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{u}} = \nabla^S \bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \bar{\mathbf{u}})^S &&& \text{in } \Omega \setminus S && \text{Compatibilidad cinemática} \\
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[|\mathbf{u}|]} = \delta ([|\mathbf{u}|] \otimes \mathbf{n})^S &&& \text{in } S &&
\end{aligned} \tag{4.59}$$

además, que las deformaciones dependientes de la densidad de energía complementaria $\phi(\boldsymbol{\sigma})$ definida por.

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\sigma &= \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{en } \Omega \setminus S \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\sigma &= \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{en } S\end{aligned}\quad (4.60)$$

Para el caso elástico la energía complementaria se define como:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.61)$$

Donde el tensor \mathbf{E} relaciona el campo de los esfuerzos con las deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\sigma} \implies \mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1} \quad (4.62)$$

Así, los funcionales de energía definidos en las ecs. (4.26), (4.46) y (4.49) de las aproximaciones de DDE, DFU y DDI se reducen a los siguientes funcionales.

$$\begin{aligned}\Pi_{DDE}^\Omega(\mathbf{u}, [[\mathbf{u}]], \boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathbf{u} - \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \\ &+ k \int_S [\boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[[\mathbf{u}]]} - \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{b} \cdot [[\mathbf{u}]]] dS\end{aligned}\quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{DFU}^\Omega(\mathbf{u}, [[\mathbf{u}]], \boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathbf{u} - \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \\ &+ \int_S [\boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[[\mathbf{u}]]} - \phi(\boldsymbol{\sigma})] dS\end{aligned}\quad (4.64)$$

$$\Pi_{DDI}^\Omega(\mathbf{u}, [[\mathbf{u}]], \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathbf{u} - \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_S T \cdot [[\mathbf{u}]] dS \quad (4.65)$$

Estos funcionales de energía consideran el campo de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, el de desplazamientos \mathbf{u} y el del salto $[[\mathbf{u}]]$ sujetos a variación.

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, [[\mathbf{u}]], \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (4.66)$$

que satisface en forma débil el equilibrio interno y externo, la continuidad interna y externa, además, la siguiente relación.

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathbf{u} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\sigma &= \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus S \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[[\mathbf{u}]]} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\sigma &= \mathbf{0} & \text{en } S\end{aligned}\quad (4.67)$$

que corresponde a las deformaciones dependientes del campo de desplazamientos y a las dependientes del campo de esfuerzos respectivamente. Se demuestra que el PVF se satisface para las tres aproximaciones. Los funcionales de energía de la ecs. (4.63), (4.64) y (4.65), dan lugar a una formulación de elementos finitos mixta que involucra el campo de desplazamientos y esfuerzos.

4.6.3 Funcional de energía complementaria total con discontinuidades

En esta formulación se considera que las siguientes condiciones de equilibrio se satisfacen *a priori*,

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \setminus S \quad \text{Equilibrio interno} \\
 d) \quad & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_\sigma \\
 & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_u \quad \text{Equilibrio externo}
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

en consecuencia, los funcionales de energía de las ecs. (4.26), (4.46) y (4.49) de las aproximaciones de DDE, DFU y DDI se reducen a los siguientes funcionales.

$$\Pi_{DDE}^\Omega(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S) \equiv \int_{\Omega \setminus S} \phi(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + k \int_S \phi(\boldsymbol{\sigma}_S) dS \tag{4.69}$$

$$\Pi_{DFU}^\Omega(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S) \equiv \int_{\Omega \setminus S} \phi(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_S \phi(\boldsymbol{\sigma}_S) dS \tag{4.70}$$

$$\Pi_{DDI}^\Omega(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S) \equiv \int_{\Omega \setminus S} \phi(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_S \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} \cdot [|\mathbf{u}|] dS \tag{4.71}$$

Estos funcionales de energía considera solamente el campo de esfuerzo $(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S)$ como variable independiente sujeta a variación.

$$\delta \Pi(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S) = 0 \tag{4.72}$$

se puede demostrar que la compatibilidad y la continuidad de tracciones se satisfacen en forma débil. Se satisfacen todas las ecuaciones que gobiernan el PVF de las tres aproximaciones. Los funcionales de energía definidos en las ecs. (4.55), (4.56) y (4.57) dan lugar a la formulación de las fuerzas de elementos finitos.

4.7 Extensión a varias discontinuidades

Los funcionales de energía desarrollados anteriormente se pueden extender para el caso de sólidos con varias discontinuidades, pues no sólo se limita a dos subdominios y una discontinuidad, sino que se pueden considerar un número finito de éstos.

4.7.1 Aproximación Continua

Sea un sólido continuo con dominio Ω y frontera Γ (figura 4.6), el cual se divide en cuatro subdominios $\Omega = \Omega^1 + \dots + \Omega^4$, con su respectiva frontera $\Gamma = \Gamma^1 + \dots + \Gamma^4$ las condiciones en ésta son: las tracciones prescritas \mathbf{t}^* en $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^1 + \dots + \Gamma_\sigma^4$ y los desplazamientos prescritos \mathbf{u}^* en $\Gamma_u = \Gamma_u^1 + \dots + \Gamma_u^4$, tal que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$.

El funcional de energía para este sistema está dado por el funcional de siete campos independientes:

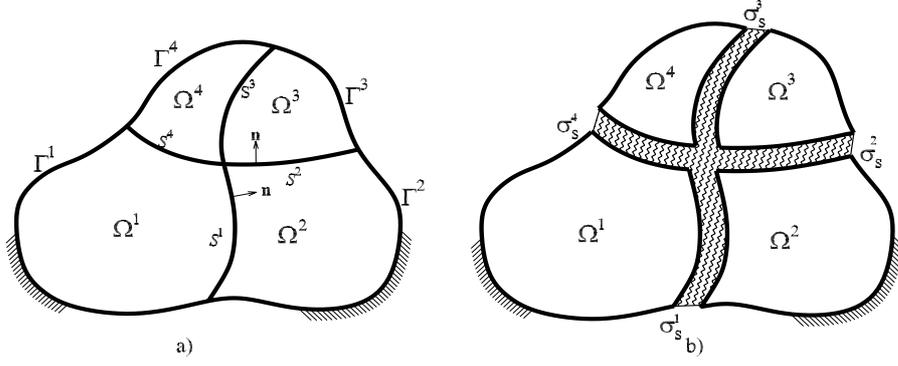


Figura 4.6: Aproximación continua del dominio Ω con varias discontinuidades.

$$\Pi^\Omega(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{t}, [|\mathbf{u}|], \boldsymbol{\sigma}_S, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \Pi + \Pi^S = \sum_n \Pi^n + \sum_n \Pi^{S n} \quad (4.73)$$

donde el funcional de la parte continua se define por

$$\Pi^n \equiv \int_{\Omega^n} [\boldsymbol{\sigma} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^n} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^n} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.74)$$

y para la zona de localización en el caso de Discontinuidad Débil

$$\Pi^{S n} \equiv k \int_S [\boldsymbol{\sigma} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega \quad (4.75)$$

y para Discontinuidad Fuerte

$$\Pi^{S n} \equiv \int_S [\boldsymbol{\sigma}_S : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[|\mathbf{u}|]} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})] dS \quad (4.76)$$

La sumatoria de n se extiende para todos los subdominios del continuo. Tal como se realizó el desarrollo para los dominios (Ω^- y Ω^+) con una sola discontinuidad, el funcional de la ec. (4.73) satisface en forma débil las condiciones de la ec. (2.18).

4.7.2 Aproximación Discreta

Como se mencionó anteriormente, en la aproximación discreta se asume que el material deja de ser continuo al aparecer una o varias grietas (figura 4.6), por lo que el funcional de energía en la discontinuidad difiere al de la aproximación continua.

El funcional de energía para este sistema está dado por el funcional de cinco campos independientes:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{t}, [|\mathbf{u}|]) = \Pi + \Pi^S = \sum_n \Pi^n + \sum_n \Pi^{S n} \quad (4.77)$$

donde el funcional de la parte continua se define por

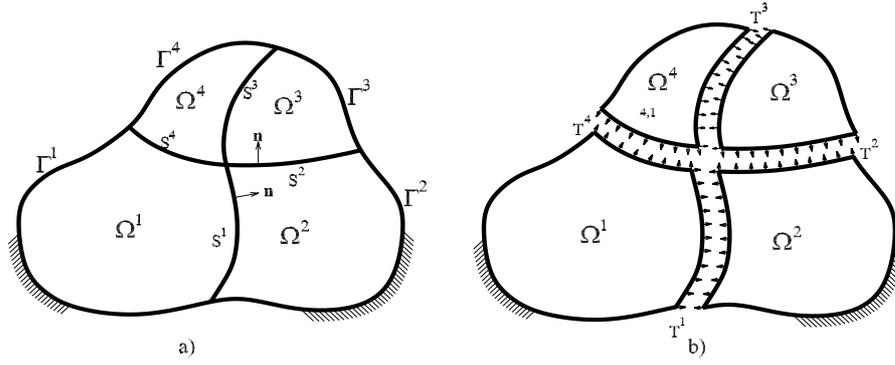


Figura 4.7: Aproximación discreta del dominio Ω con varias discontinuidades.

$$\Pi^n \equiv \int_{\Omega^n} [\boldsymbol{\sigma} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^n} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^n} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Gamma \quad (4.78)$$

y para la zona de discontinuidad

$$\Pi^{S^n} \equiv \int_{S^n} T \cdot [|\mathbf{u}|] d\Gamma \quad (4.79)$$

La sumatoria de n se extiende para todos los subdominios del continuo. De igual forma como se realizó el desarrollo para los dominios $(\Omega^-$ y $\Omega^+)$ con una sola discontinuidad, el funcional de la ec. (4.77) satisface en forma débil las condiciones de la ec. (2.19).

Capítulo 5

Aproximación mediante el MEF del Modelo de Discontinuidades Interiores

El obtener una solución exacta de un problema con localización de deformaciones, mediante la formulación desarrollada en el capítulo anterior, sería un trabajo muy laborioso, pues un continuo tiene un número infinito de grados de libertad. Por lo que se tiene que recurrir a un método aproximado, generalmente de discretización para reducir el problema a un número finito de grados de libertad, que den lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas que puedan resolverse en un tiempo razonable.

La discretización natural de una formulación variacional es el método de Rayleigh-Ritz, que se puede clasificar como una subclase del método de residuos pesados de Galerkin. El Método de los Elementos Finitos fue desarrollado dentro de este contexto, y continúa siendo el método numérico más poderoso basado en el método de Rayleigh-Ritz.

En este capítulo, los funcionales de energía desarrollados en el capítulo anterior, se discretizan con elemento finitos, lo que da lugar a los llamados Elementos Finitos con Discontinuidades Interiores (EFDI). Como resultado, se tiene una Jerarquía de EFDI que se pueden clasificar como mixtos, basados en el método de los desplazamientos y en el de las fuerzas.

En este capítulo se aproxima la solución mediante el MEF a los funcionales de energía para las aproximaciones de Discontinuidad Fuerte y Discreta, pues el procedimiento para Discontinuidad Débil es similar al de la Fuerte, ya que sólo cambia el dominio de integración.

5.1 Generalidades

Considerando que $\mathbf{u}_S^+ - \mathbf{u}_S^- = [[\mathbf{u}]]$ en S y que el desplazamiento prescrito $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ en Γ_u , los funcionales de energía desarrollados en la sección anterior se definen para las aproximaciones de

Discontinuidad Débil, Fuerte y Discreta como:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{WD}}^{\Omega}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, [[\mathbf{u}]]) &\equiv \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma \\ &+ k \int_S [\boldsymbol{\sigma}_S : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[[\mathbf{u}]}] - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] dS \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{SD}}^{\Omega}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, [[\mathbf{u}]]) &\equiv \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma \\ &+ \int_S [\boldsymbol{\sigma}_S : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[[\mathbf{u}]}] - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) + W(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})] dS \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{DD}}^{\Omega}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, [[\mathbf{u}]]) &\equiv \int_{\Omega \setminus S} [\boldsymbol{\sigma} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega + W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma \\ &+ \int_S T \cdot [[\mathbf{u}]] dS \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.1.1 Discretización

Considérese un sólido sujeto a carga que presenta una discontinuidad S en su interior (figura 5.1a), el cual se discretiza con elementos finitos, *e.g.* elementos triangulares, como se muestra en la figura 5.1b. Si se trata de un problema en dos dimensiones, los EFDI representan la discontinuidad S como una línea (5.2a), para un problema en tres dimensiones, los EFDI representan la discontinuidad como una superficie (5.2b). En ambos casos, un nodo en el interior del EFDI representa el salto del campo de desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$.

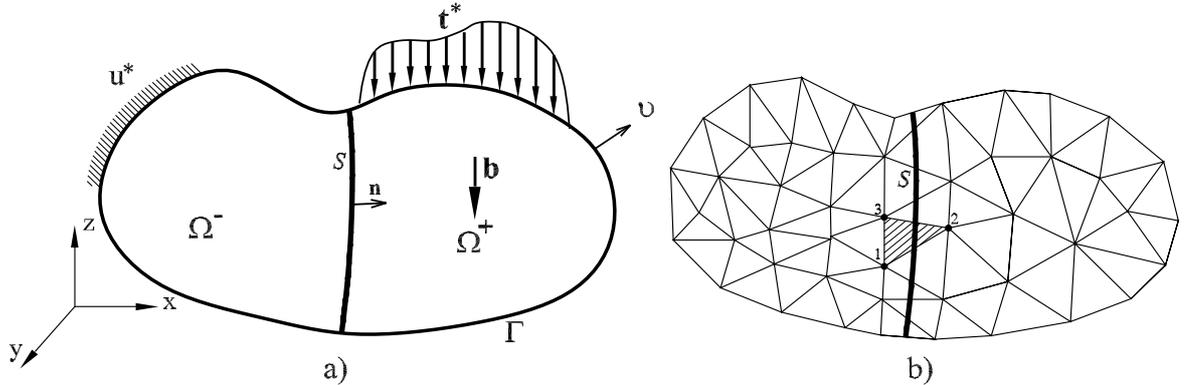


Figura 5.1: Dominio Ω con discontinuidad S : a) descripción geométrica con sus condiciones de frontera y b) discretización con EFDI.

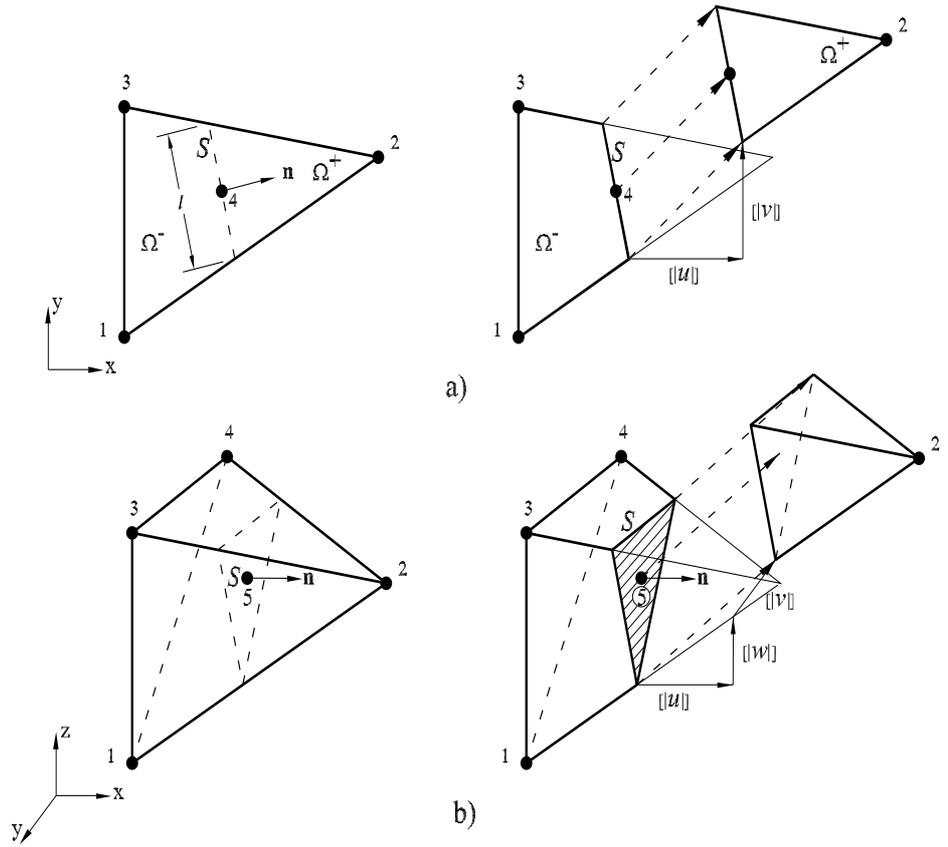


Figura 5.2: EFDI: a) triangular en dos dimensiones y b) paralelepípedo en tres dimensiones.

Del capítulo 2, donde se definió la cinemática de desplazamientos y deformaciones. El campo de desplazamientos para se define por la siguiente expresión (Oliver 1995b) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + M_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

donde la función

$$M_S(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

El campo de deformaciones, dependiente de los desplazamientos, para el Modelo de Discontinuidad fuerte se define por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\delta_s ([[\mathbf{u}]]) \otimes \mathbf{n}}_{\boldsymbol{\xi}^{[[\mathbf{u}]}}} \quad (5.6)$$

y para el Modelo de Discontinuidad Discreta que sólo considera las deformaciones continuas

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla \varphi(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (5.7)$$

5.1.2 Aproximación de campos

El campo de desplazamiento regular se interpola con la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (5.8)$$

donde las \mathbf{N} corresponde a la funciones de interpolación estándar, definidas en los nodos del elemento

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{i=n} N_i^{(e)} \quad (5.9)$$

y \mathbf{d} corresponde al vector de los desplazamientos nodales. La función $M_S(\mathbf{x})$ se define dentro del EFDI como:

$$M_S^e(\mathbf{x}) = H_S^e(\mathbf{x}) - \varphi^e \quad (5.10)$$

donde la función φ^e se puede definir mediante la función siguiente:

$$\varphi^e = \sum_{i^+=1}^{n_e^+} N_{i^+} \quad (5.11)$$

La funciones N_{i^+} corresponden a la funciones de forma de los nudos del lado derecho de la discontinuidad, que satisfacen la definición de la función φ en la ec. (2.12). Así, se tienen los elementos para necesarios para aproximar el campo de desplazamientos, definido en la ec. (5.4), en función de los desplazamientos nodales y del salto en el nudo interior.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} + \underbrace{M_S^e}_{\mathbf{N}_c} [|\mathbf{u}|] \quad (5.12)$$

El campo de deformaciones continuo dependiente de los desplazamientos, con salto de desplazamiento constante definido en la ec. (5.7), se aproxima como:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^u = \mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{d} - \nabla \varphi}_{\mathbf{B}_c} \cdot [|\mathbf{u}|] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S \quad (5.13)$$

y el de las deformaciones no acotadas.

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{[|\mathbf{u}|]} = \delta_s (\mathbf{n} \otimes [|\mathbf{u}|]) \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (5.14)$$

donde \mathbf{B} se define como $\partial(\mathbf{N}\mathbf{d}) = \mathbf{B}\mathbf{d}$.

5.1.3 Extremización

Del cálculo variacional se tiene que para que un funcional Π^Ω tenga un valor estacionario, la primera variación debe ser igual a cero considerando en ello todos los campos independientes. Lo anterior se puede expresar como:

$$\delta\Pi^\Omega = \frac{\partial\Pi^\Omega}{\partial u_i}\delta u_i = \frac{\partial\Pi^\Omega}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial\Pi^\Omega}{\partial u_2}\delta u_2 + \dots + \frac{\partial\Pi^\Omega}{\partial u_m}\delta u_m = 0 \quad (5.15)$$

Puesto que las variaciones δu_i son arbitrarias, la relación anterior es equivalente a:

$$\frac{\partial\Pi^\Omega}{\partial u_1} = 0; \frac{\partial\Pi^\Omega}{\partial u_2} = 0; \dots \frac{\partial\Pi^\Omega}{\partial u_m} = 0 \quad (5.16)$$

el cual es un sistema de ecuaciones simultaneas que puede ser resuelto para u_1, \dots, u_m .

5.2 Elemento Finitos con Discontinuidades Interiores

En esta sección de este trabajo de investigación, la solución de los funcionales de energía desarrollados en el capítulo anterior se aproximan mediante el método de los elementos finitos, teniendo como resultado una jerarquía de elementos finitos con discontinuidades interiores que se clasifican como mixtos, de desplazamientos y de las fuerzas.

5.2.1 Matriz mixta para Discontinuidades Fuertes

Para aproximar la solución de un problema mediante el Método de los elementos finitos empleando el funcional de Discontinuidades Fuertes de la ec. (5.2), se consideran como variables independientes el campo de desplazamientos nodales \mathbf{d} y al salto $[[\mathbf{u}]]$, el de deformaciones $\hat{\mathbf{e}}$ y $\tilde{\mathbf{e}}$, y esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}$ y $\boldsymbol{\sigma}_S$ ¹. Note que en esta aproximación el sólido es continuo en todos sus puntos por lo que se considera la existencia del campo de deformaciones $\tilde{\mathbf{e}}$ no acotado en la zona de discontinuidad S .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} + \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{e}}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} + \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_S}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde \mathbf{N} , $\mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}$ y $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}}$ son las matrices de funciones de interpolación en $\Omega \setminus S$ de desplazamientos regulares \mathbf{d} , deformaciones $\hat{\mathbf{e}}$ y esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}$; \mathbf{N}_c , $\mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{e}}}$ y $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_S}$ son las matrices de funciones de interpolación en S del salto $[[\dot{\mathbf{u}}]]$, deformaciones $\tilde{\mathbf{e}}$ y esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$.

Sustituyendo la ec. (5.17) en la (5.2) y derivando con respecto a cada una de las variables, se tiene:

¹Para el caso de una formulación de Discontinuidades Débiles de ec. (5.1), se realiza un procedimiento similar al que se describe a continuación, pues solamente cambian los dominios donde se realiza la integración.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\mathbf{d}}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\bar{\mathbf{t}}} d\Gamma & (5.18) \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [\dot{\mathbf{u}}]} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \varphi^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega + \int_S \mathbf{N}_{\sigma_S} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} dS \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{\mathbf{e}}}} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{e}}} d\Omega \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\bar{\mathbf{e}}}} &\equiv 0 \equiv - \int_S \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_S} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S dS + \int_S \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{C}^d \cdot \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{e}}} dS \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}^T \cdot \left[\left(\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{d}} - \nabla \varphi \cdot [\dot{\mathbf{u}}] \right) - \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{e}} \right] d\Omega \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S} &\equiv 0 \equiv \int_S \mathbf{N}_{\sigma_S}^T \cdot \left[\frac{1}{k} \left(\mathbf{n} \otimes [\dot{\mathbf{u}}] \right) - \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{e}} \right] dS
\end{aligned}$$

Expresando cada término de la ec. (5.18) como una submatriz, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{e}}\bar{\mathbf{e}}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} d\Omega & \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{e}}\sigma_{\Omega \setminus S}} &= - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega = \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}\bar{\mathbf{e}}}^T \\
\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{e}}\bar{\mathbf{e}}} &= \int_S \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{C}^d \cdot \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} dS & \mathbf{K}_{[\mathbf{u}]\sigma_S} &= \int_S \mathbf{N}_{\sigma_S} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{K}_{\sigma_S[\mathbf{u}]}^T \\
\mathbf{K}_{\mathbf{d}\sigma_{\Omega \setminus S}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega = \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}\mathbf{d}}^T & \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{e}}\sigma_S} &= - \int_S \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_S} dS = \mathbf{K}_{\sigma_S\bar{\mathbf{e}}}^T \\
\mathbf{K}_{[\mathbf{u}]\sigma_{\Omega \setminus S}} &= - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \varphi^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega = \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}[\mathbf{u}]}^T & \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\bar{\mathbf{t}}} d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Finalmente, de las ecs. (5.19) se obtiene la matriz de rigideces global de un elemento finito con seis variables independientes para la aproximación continua, capaz de simular el salto de los desplazamientos y deformaciones en S :

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\mathbf{d}\sigma_{\Omega \setminus S}} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{[[\mathbf{u}]]\sigma_{\Omega \setminus S}} & \mathbf{K}_{[[\mathbf{u}]]\sigma_S} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\sigma_{\Omega \setminus S}} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\sigma_S} \\
K_{\sigma_{\Omega \setminus S}\mathbf{d}} & \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}[[\mathbf{u}]]} & \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}\hat{\mathbf{e}}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma_S[[\mathbf{u}]]} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\sigma_S\hat{\mathbf{e}}} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

5.2.2 Matriz mixta para Discontinuidad Discreta

Para aproximar la solución del funcional de energía de la aproximación discreta, ec. (5.3), se consideran como variables independientes el campo de desplazamientos nodales \mathbf{d} y al salto $[[\mathbf{u}]]$, el de deformaciones $\hat{\mathbf{e}}$ y el de esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}$. A diferencia de la aproximación continua, en esta se considera que el dominio Ω deja de ser continuo puesto que se produce una grieta o discontinuidad S , sin embargo, existe transmisión de esfuerzos a través de los bordes de la discontinuidad que dependen del salto $[[\mathbf{u}]]$.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\
\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}
\end{aligned} \quad (5.21)$$

Sustituyendo la ec. (5.21) en la ec. (5.3) y derivando con respecto a cada una de las variables se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\mathbf{d}}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{t}} d\Gamma \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [[\dot{\mathbf{u}}]]} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \varphi^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega + \int_S \dot{T} dS \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\hat{\mathbf{e}}}} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} d\Omega \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}^T \cdot \left[\left(\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{d}} - \nabla \varphi \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \right) - \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} \right] d\Omega
\end{aligned} \quad (5.22)$$

Denotando cada término de la ec. (5.22) como una submatriz se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}} d\Omega & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\sigma_{\Omega \setminus S}} &= - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega = \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}\hat{\mathbf{e}}}^T \\
\mathbf{K}_{\mathbf{d}\sigma_{\Omega \setminus S}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega = \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}\mathbf{d}}^T & \dot{\mathbf{F}}_S &= \int_S \dot{T} dS \\
\mathbf{K}_{[[\mathbf{u}]]\sigma_{\Omega \setminus S}} &= - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \varphi^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega = \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}[[\mathbf{u}]]}^T & \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \cdot \dot{\bar{\mathbf{t}}} d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Finalmente, de las ecs. (5.23) se obtiene la matriz de rigideces global de un elemento finito con cuatro variables independientes para la aproximación discreta, capaz de simular el salto de los desplazamientos y deformaciones en S :

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\mathbf{d}\sigma_{\Omega \setminus S}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{[[\mathbf{u}]]\sigma_{\Omega \setminus S}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{e}}\sigma_{\Omega \setminus S}} \\
K_{\sigma_{\Omega \setminus S}\mathbf{d}} & \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}[[\mathbf{u}]]} & \mathbf{K}_{\sigma_{\Omega \setminus S}\hat{\mathbf{e}}} & \mathbf{0}
\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\ \dot{\sigma}_{\Omega \setminus S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \\ -\dot{\mathbf{F}}_S \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

Sí se considera en la aproximación continua que el campo de deformaciones $\tilde{\mathbf{e}}$ en la discontinuidad S depende del salto, $\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{k} \left(\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]] \right)$, la matriz de rigideces de la aproximación continua ec. (5.20) se reduce a la matriz de rigideces de la aproximación discreta ec. (5.24), con $\dot{\mathbf{F}}_S = \int_S \dot{\sigma}_S \cdot n d\Gamma$. Con lo anterior, se demuestra que existe una relación directa entre las aproximaciones continua y discreta, no sólo en los modelos de daño (Oliver, 2000), sino también en la formulación.

5.2.3 Matriz de rigideces con Discontinuidades Interiores

Se consideran como variables independientes al campo de desplazamientos nodales $\dot{\mathbf{d}}$ y el salto $[[\dot{\mathbf{u}}]]$. Lo anterior da lugar al método de los desplazamientos en el Método de los Elementos Finitos que aseguran la compatibilidad dentro del elemento y a lo largo de sus fronteras. Puesto que el campo de deformaciones depende del de desplazamientos y el de esfuerzos del de deformaciones, se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}_c[[\dot{\mathbf{u}}]] & (5.25) \\
\dot{\tilde{\mathbf{e}}} &= \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^{\mathbf{u}} \\
\tilde{\mathbf{e}} &= \tilde{\mathbf{e}}^{[[\mathbf{u}]]} \\
\dot{\sigma}_{\Omega \setminus S} &= \mathbf{C} : \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^{\mathbf{u}} \\
\dot{\sigma}_S &= \mathbf{C}^d : \tilde{\mathbf{e}}^{[[\mathbf{u}]]} = \mathbf{C}_C^d \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]; & \dot{T} &= \mathbf{C}_D^d \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]
\end{aligned}$$

Por lo que los funcionales para la aproximación de Discontinuidad Fuerte y Discreta de las ec. (5.2) y (5.3) se reducen a:

$$\Pi_{DFU}^{\Omega}(\mathbf{u}, [[\mathbf{u}]]) \equiv \int_{\Omega \setminus S} [W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})d\Omega - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u}d\Gamma + \int_S [W([[\mathbf{u}]])] dS \quad (5.26)$$

$$\Pi_{DDI}^{\Omega}(\mathbf{u}, [[\mathbf{u}]]) \equiv \int_{\Omega \setminus S} [W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})d\Omega - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u}d\Gamma + \int_S T \cdot [[\mathbf{u}]] dS \quad (5.27)$$

Sustituyendo la ec. (5.25) en los funcionales de la ecs. (5.26) y (5.27) y derivando respecto a cada una de las variables se obtiene la siguiente matriz de rigideces:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_c d\Omega \\ \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}_c^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}_c^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_c d\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \\ -\dot{\mathbf{F}}_S \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

donde la fuerza $\dot{\mathbf{F}}_S$ en la discontinuidad para la aproximación continua se define como:

$$\dot{\mathbf{F}}_S = \int_S \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.29)$$

y para la discreta

$$\dot{\mathbf{F}}_S = \int_S \dot{T} d\Gamma \quad (5.30)$$

Los esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$ y tracciones \dot{T} se obtienen de un modelo de daño continuo, relación esfuerzo-salto, (figura 5.3.a) y para la aproximación discreta se emplea un modelo de daño discreto (Oliver *et al.* 2002a), relación tracción-salto (figura 5.3.b).

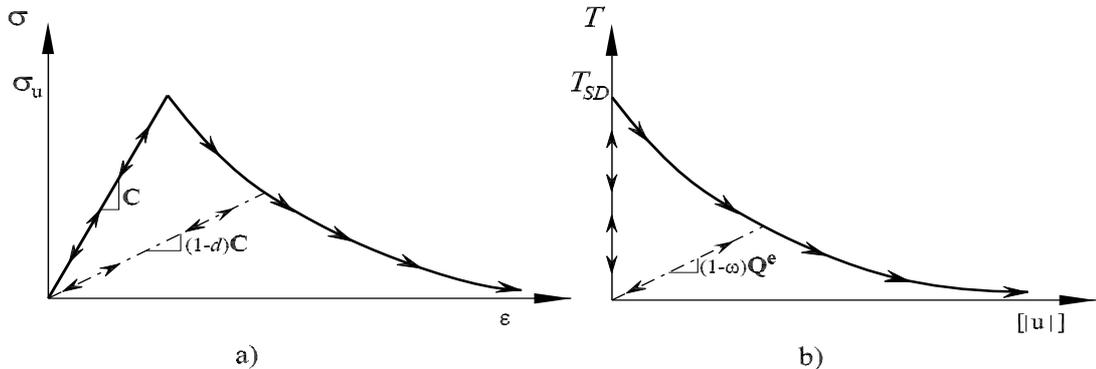


Figura 5.3: Modelo de daño: a) esfuerzo-salto y b) traccion-salto

Por lo que el esfuerzo $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$ depende del salto de los desplazamientos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\alpha}}{q} \boldsymbol{\sigma}_S \right) = \mathbf{C}_C^d \cdot \mathbf{n} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]], \quad (5.31)$$

Para el caso de ablandamiento lineal se tiene que $\frac{q}{\alpha} = \bar{H}$, que al sustituir en la ec. (5.31) y multiplicar ambos lados por \mathbf{n} , se tiene.

$$\frac{1}{\bar{H}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \implies \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} = \bar{H} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{Q}^e} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.32)$$

donde \mathbf{Q}^e se define como el tensor de localización elástico. Finalmente

$$\dot{T}_S = \bar{H} \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.33)$$

y, en consecuencia

$$\int_S \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_S \dot{T}_S d\Gamma = \int_S \bar{H} \cdot \mathbf{Q}^e \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] d\Gamma \quad (5.34)$$

Sustituyendo la ec. (5.34) en la ec. (4.24) se obtiene la siguiente matriz de rigideces:

$$\left[\begin{array}{cc} \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_c d\Omega \\ \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}_c^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}_c^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_c d\Omega + \int_S \bar{H} \cdot \mathbf{Q}^e d\Gamma \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{d}} \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (5.35)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{\text{aa}} & \mathbf{K}_{\text{ab}} \\ \mathbf{K}_{\text{ba}} & \mathbf{K}_{\text{bb}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{d}} \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (5.36)$$

En esta formulación se obtiene una matriz simétrica, la cual se puede condensar en forma estática reduciéndose el costo computacional para su solución.

Solución

Para resolver el sistema obtenido de las ecs. (5.35) y (5.36) se realiza la condensación estática mostrada a continuación:

$$\begin{array}{l} a) \quad \mathbf{K}_{\text{aa}} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_{\text{ab}} [[\dot{\mathbf{u}}]] = f_{\text{ext}} \\ b) \quad \mathbf{K}_{\text{ba}} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_{\text{bb}} [[\dot{\mathbf{u}}]] = 0; \quad [[\dot{\mathbf{u}}]] = -\mathbf{K}_{\text{bb}}^{-1} (\mathbf{K}_{\text{ba}} \dot{\mathbf{d}}) \end{array} \quad (5.37)$$

Al sustituir la ec. (5.37b) en la (5.37a) se obtiene una matriz de rigideces condensada en la ecuación

$$(\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{ba})\dot{\mathbf{d}} = f_{ext} \quad (5.38)$$

5.2.4 Matriz de flexibilidades con Discontinuidades Interiores

Mientras que en la teoría general del método de los desplazamientos del Método de los elementos finitos se comprende razonablemente, esto no sucede para el caso del método de las fuerzas. La razón es probablemente por que desde el punto de vista geométrico no es muy intuitivo, pues el método de las fuerzas hace énfasis en la transmisión de esfuerzos, en lugar de modos de deformación como lo hace el de los desplazamientos. El primer paso en su formulación es asumir un campo de esfuerzos que satisface las condiciones de equilibrio (Fraeijns de Veubeke, 1965).

Por ejemplo, para un problema en dos dimensiones, los esfuerzos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum \beta_i S_{xx}^{(i)}(x, y) + \sum P_r T_{xx}^{(i)}(x, y) \\ \sigma_y &= \sum \beta_i S_{yy}^{(i)}(x, y) + \sum P_r T_{yy}^{(i)}(x, y) \\ \tau_{xy} &= \sum \beta_i S_{xy}^{(i)}(x, y) + \sum P_r T_{xy}^{(i)}(x, y) \end{aligned} \quad (5.39)$$

deben satisfacer las condiciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}^{(i)}}{\partial y} = 0 & \quad \frac{\partial T_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^{(i)}}{\partial y} = -X_r(x, y) \\ \frac{\partial S_{yx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}^{(i)}}{\partial y} = 0 & \quad \frac{\partial T_{yx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}^{(i)}}{\partial y} = -Y_r(x, y) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Donde los esfuerzos S_{nn} , con amplitud desconocida β_i , se encuentran en equilibrio en la parte del continuo donde no existen fuerzas de cuerpo, y que los esfuerzos $T_{xx}^{(i)}$ con amplitud P_r se encuentran en equilibrio en las zonas donde existen fuerzas de cuerpo. Por lo anterior, se pueden utilizar las funciones de Airy que satisfacen el equilibrio. En el principio de la energía potencial complementaria, de donde se deriva el método de flexibilidades, no se prescriben cargas, lo que se prescriben son desplazamientos a lo largo de la frontera.

Para aproximar la solución de los funcionales de energía complementaria de los Modelos de Discontinuidad Fuerte y Discreta definidos en la ecs. (4.70) y (4.71). Se consideran como variables independientes el campo de esfuerzos que se interpola como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} + \mathbf{N}_S \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \quad (5.41)$$

donde $\mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}$ y \mathbf{N}_S son las funciones de interpolación de esfuerzos.

Sustituyendo la ec. (5.41) y en los funcionales de las ec. (4.70) y (4.71) derivando con respecto a cada una de las variables independientes se tiene:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega & \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_S d\Omega \\ \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_S^T \cdot \mathbf{E} \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} d\Omega & \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_S^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_S d\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{S}}_S \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

donde $\dot{\mathbf{d}}$ son los desplazamientos prescritos y $\dot{\mathbf{S}}_S$ para la aproximación de DFU se define como:

$$\dot{\mathbf{S}}_S = \int_S \mathbf{E}^{dc} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S d\Gamma \quad (5.43)$$

y para la discreta

$$\dot{\mathbf{S}}_S = \int_S \mathbf{E}^{dd} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.44)$$

donde \mathbf{E}^{dc} y \mathbf{E}^{dd} son el tensor constitutivo tangente inverso para la aproximación de DFU y DDI correspondientemente.

5.3 Formulación del Elementos

5.3.1 Elemento unidimensional con discontinuidad

Considere una barra de longitud L , área de sección transversal A , módulo elástico E , que presenta un salto en el campo de desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ (figura 5.1). Esta barra se puede idealizar mediante la jerarquía de elementos finitos con discontinuidades interiores desarrollados al inicio de este capítulo.

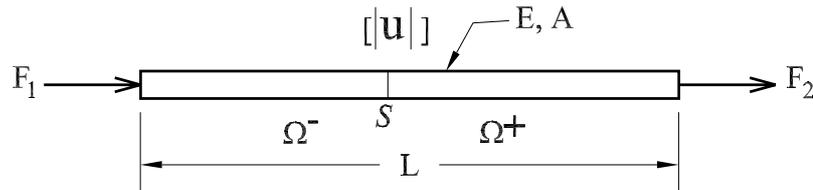


Figura 5.4: Geometría del elemento unidimensional con discontinuidad.

Matriz mixta

En esta aproximación la barra de la figura 5.1 se idealiza como un elemento unidimensional mixto (figura 5.5), en el que se aproximan el campo de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$, el de deformaciones $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ y el de esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ como en la ec. (5.21).

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [|\dot{\mathbf{u}}|] \\
\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\bar{\mathbf{e}}} \\
\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

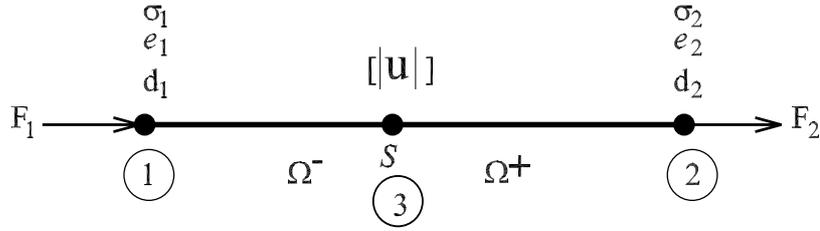


Figura 5.5: Elemento mixto unidimensional.

donde \mathbf{N} , $\mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}$ y $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}}$ contiene las funciones de interpolación de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos correspondientemente. Si se considera que la variación de estos campos es lineal,

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}} \tag{5.46}$$

Las funciones de interpolación \mathbf{N} se definen como:

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{cc} N_1 & N_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{array} \right\} \tag{5.47}$$

y la función φ de la ec. (5.11) se define

$$\varphi^e = N_2$$

con la que se determina la función M_S^e de la ec. (5.10)

$$\mathbf{N}_c = M_S^e(\mathbf{x}) = H_S^e(\mathbf{x}) - \varphi^e \tag{5.48}$$

La matriz \mathbf{B} y \mathbf{B}_c contiene las derivadas de las funciones de interpolación y de la función φ , correspondientemente.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_c &= \nabla \varphi = \frac{1}{L}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

La matriz constitutiva y el tensor acústico elástico son

$$\mathbf{C} = E; \mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot E \cdot \mathbf{n} \quad (5.50)$$

Sustituyendo de las ecs. (5.46) a (5.50) en la ec. (5.24) se tiene la matriz mixta del elemento unidimensional con discontinuidades interiores

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{2} & -\frac{A}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2} & \frac{A}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{2} & -\frac{A}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EAL}{3} & \frac{EAL}{6} & -\frac{AL}{3} & -\frac{AL}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EAL}{6} & \frac{EAL}{3} & -\frac{AL}{6} & -\frac{AL}{3} \\ -\frac{A}{2} & \frac{A}{2} & -\frac{A}{2} & -\frac{AL}{3} & -\frac{AL}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{A}{2} & \frac{A}{2} & -\frac{A}{2} & -\frac{AL}{6} & -\frac{AL}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ [[\dot{u}]] \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ -\dot{F}_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

Matriz de rigideces

En esta aproximación la barra de la figura 5.1 se idealiza como un elemento unidimensional en el que se aproximan el campo de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ (figura 5.6)

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{N}_c(\mathbf{x})[[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.52)$$

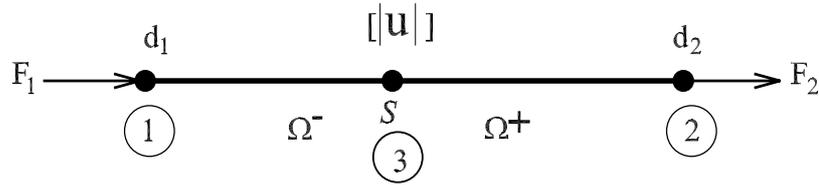


Figura 5.6: Elemento finito de desplazamientos.

Sustituyendo de las ecs. (5.46) a (5.50) en los elementos de la ec. (5.35) se obtiene la matriz de rigideces

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 - L\bar{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ [[\dot{u}]] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

de la cual se obtiene una relación entre el desplazamiento de los nodos y el salto

$$[\dot{\mathbf{u}}] = -\mathbf{K}_{\mathbf{bb}}^{-1} \left(\mathbf{K}_{\mathbf{ba}} \dot{\mathbf{d}} \right) \quad (5.54)$$

$$[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{1}{1 + L\bar{H}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix}$$

y la matriz de rigidez condensada correspondiente a la ec. (5.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{K}\dot{\mathbf{d}} &= f_{ext} \\ \frac{EA}{L + \frac{1}{H}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Matriz de flexibilidades

En esta aproximación la barra de la figura 5.1 se idealiza como un elemento unidimensional en el que se aproximan el campo de esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ (figura 5.7a), aunque se podría aproximar las cargas al ser el esfuerzo constante a lo largo del elemento (figura 5.7b). Del funcional de energía complementaria de la ec. (4.70), se tiene el siguiente funcional para el caso unidimensional

$$\Pi_{DFU}^{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}, \boldsymbol{\sigma}_S) \equiv \int_{\Omega \setminus S} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S} : \mathbf{E}_{\Omega \setminus S} : \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S} d\Omega + \int_S \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_S : \mathbf{E}_S : \boldsymbol{\sigma}_S dS - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (5.56)$$

donde el campo de esfuerzos de interpolo como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} + \mathbf{N}_S \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \quad (5.57)$$

Considere que se impone un desplazamiento $d_2 = 0$ en un nudo 2 del elemento y una carga P_1 en el nudo 1 (figura 5.7c), puesto que el esfuerzo es constante a lo largo de la barra:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \frac{1}{A} f_1 \quad (5.58)$$

En consecuencia, el campo de esfuerzos de la ec. (5.57) se interpola por la siguiente ecuación.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}} P; \quad \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{A} \quad (5.59)$$

Sustituyendo la ec. (5.59) en el funcional de la ec. (5.56) se tiene:

$$\Pi(P) \equiv \int_{\Omega \setminus S} \frac{1}{2} P \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}^T : \mathbf{E}_{\Omega \setminus S} : \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}^T P d\Omega + \int_S \frac{1}{2} P \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}^T : \mathbf{E}_S : \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}^T P dS - \int_{\Gamma_u} P \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (5.60)$$

Para que el funcional de la ecuación anterior tenga un valor estacionario, se debe cumplir que la primera derivada con respecto a P sea igual a cero.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P} \equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\sigma}^T : \mathbf{E}_{\Omega \setminus S} : \mathbf{N}_{\sigma}^T d\Omega P + \int_S \mathbf{N}_{\sigma}^T : \mathbf{E}_S : \mathbf{N}_{\sigma}^T dS P - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_{\sigma}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (5.61)$$

Considere nuevamente la barra de la figura 5.7c con un desplazamiento prescrito $d_2 = 0$ en un nudo 2 y un carga f_1 en el nudo 1, sustituyendo el valor de las cargas f_1 y f_s , y el desplazamiento d_2 , en la ec. (5.61):

$$\frac{1}{EA} f_1 + \frac{1}{E\bar{H}A} f_s - d_1 = 0 \quad (5.62)$$

Puesto que $f_1 = f_s$ la ec. (5.62) se transforma en

$$\frac{L + \frac{1}{\bar{H}}}{EA} \cdot 1 f_1 = d_1$$

En la figura 5.7c se puede observar que el valor de la fuerza f_2 en el nudo 2 es:

$$f_2 = -f_1 = -1 \cdot f_1$$

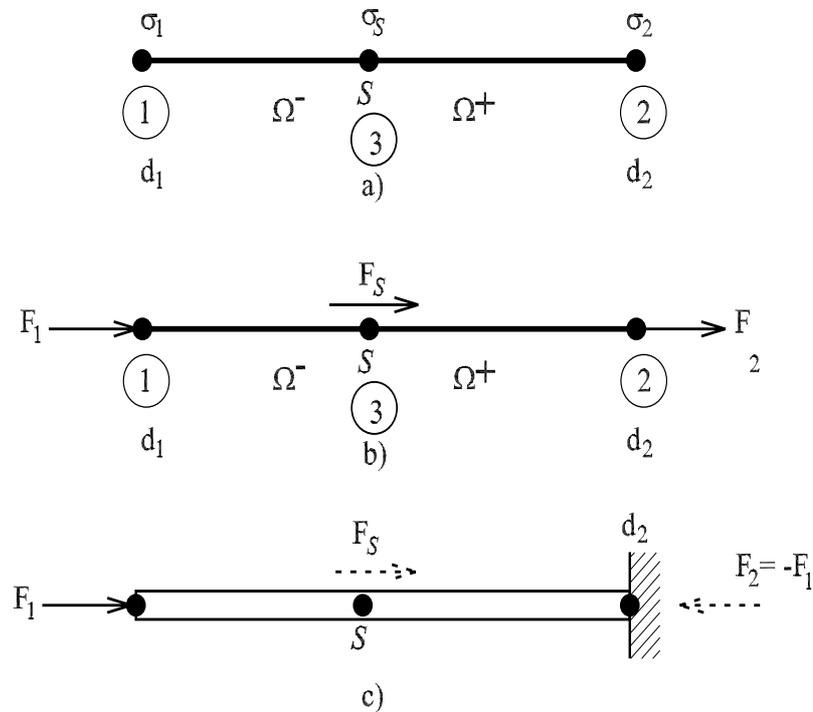


Figura 5.7: Idealización del elemento finito de flexibilidades.

De lo anterior, se puede deducir la siguiente matriz de flexibilidades del elemento unidimensional con discontinuidades

$$\frac{L + \frac{1}{\bar{H}}}{EA} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

Observe que en este caso, la matriz de flexibilidades de la ec. (5.63) es la matriz inversa de la matriz de rigideces de la ec. (5.55), esto se debe a que se trata de un elemento unidimensional lineal, lo posiblemente no ocurriría en un elemento bidimensional.

Las matrices de la ecs. (5.51), (5.55) y (5.63) corresponden a la matriz mixta, de rigideces y flexibilidades de elementos finitos con discontinuidades interiores.

5.3.2 Elemento triangular con discontinuidad

Considere el elemento finito triangular con un área A_e que presenta un salto en el campo de desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ (figura 5.8). Las propiedades mecánicas de este elemento son módulo elástico E , relación de Poisson ν y módulo de ablandamiento discreto \bar{H} . Este elemento triangular se puede idealizar mediante la jerarquía de elementos finitos con discontinuidades interiores desarrollados al inicio de este capítulo.

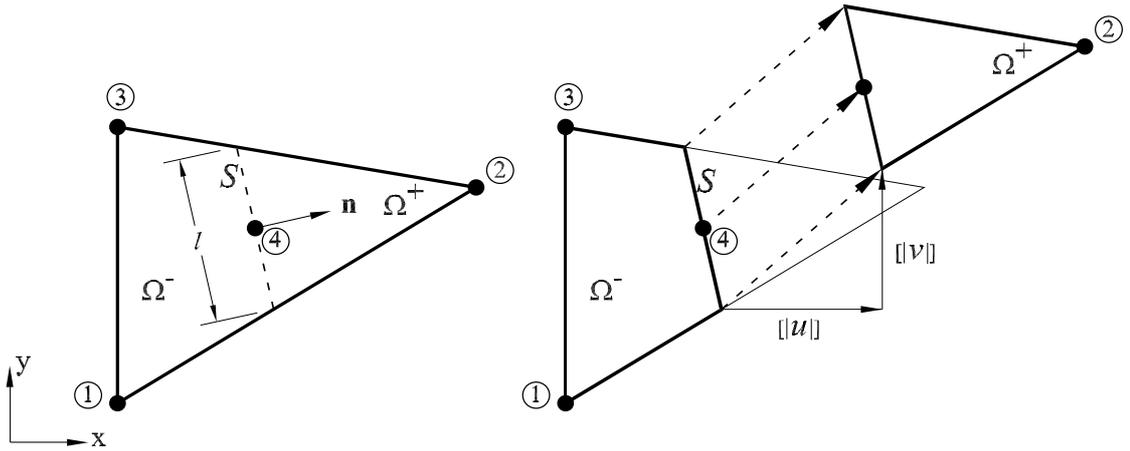


Figura 5.8: Geometría del elemento triangular con discontinuidad.

Matriz mixta

En esta aproximación el elemento de la figura 5.8 se idealiza como un elemento finito mixto (figura 5.9), en el que se aproximan el campo de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$, el de deformaciones $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ y el de esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ como en la ec. (5.21).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\bar{\mathbf{e}}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \end{aligned} \quad (5.64)$$

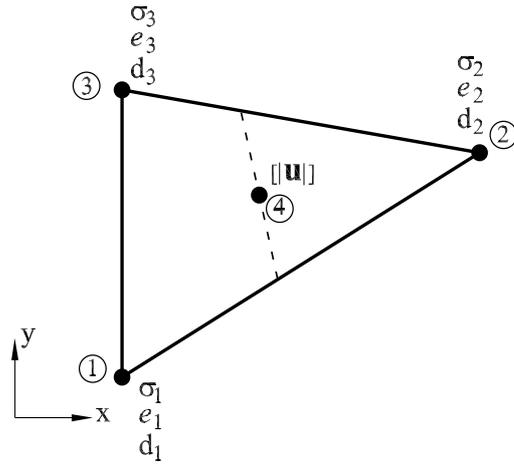


Figura 5.9: Elemento mixto triangular con discontinuidad.

donde \mathbf{N} , $\mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}}$ y $\mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}$ contiene las funciones de interpolación de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos correspondientemente. Si se considera que las funciones de interpolación de estos campos son las mismas

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\bar{\mathbf{e}}} = \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \quad (5.65)$$

donde

$$\mathbf{N} = \left\{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \right\} \quad (5.66)$$

La función φ de la ec. (5.11) se definen como:

$$\varphi^e = N_2 \quad (5.67)$$

Las funciones \mathbf{N} para el caso de interpolación lineal se definen como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{a_1 + b_1x + c_1y}{2A_e} \\ N_2 &= \frac{a_2 + b_2x + c_2y}{2A_e} \\ N_3 &= \frac{a_3 + b_3x + c_3y}{2A_e} \end{aligned} \quad (5.68)$$

los coeficientes a_i , b_i y c_i se calculan de las siguientes expresiones

$$a_i = x_j y_k - y_j x_k \quad (5.69)$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

con la permutación cíclica de los índices.

La función \mathbf{N}_c de la ec. (5.10) se determina como:

$$\mathbf{N}_c = M_S^e(\mathbf{x}) = H_S^e(\mathbf{x}) - \varphi^e \quad (5.70)$$

La matriz \mathbf{B} y \mathbf{B}_c contiene las derivadas de la funciones de interpolación y de la función φ , definidas en las ecs. (5.66) y (5.67), correspondientemente.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$$\mathbf{B}_c = -\nabla \varphi^e = \begin{bmatrix} \partial_x \varphi^e & 0 \\ 0 & \partial_y \varphi^e \\ \partial_y \varphi^e & \partial_x \varphi^e \end{bmatrix} = -\frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & 0 \\ 0 & x_1 - x_3 \\ x_1 - x_3 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

El tensor acústico elástico s define como:

$$\mathbf{Q}^e = \mathcal{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathcal{N} \quad (5.73)$$

donde \mathcal{N} depende de las componentes del vector normal n_x a la discontinuidad.

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Sustituyendo de las ecs. (5.65) a (5.73) en los elementos de la ec. (5.24) se tiene la matriz mixta del elemento triangular con discontinuidades interiores.

$$\int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nabla \varphi^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}} & -\mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}}^T \cdot \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \\ \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}^T \cdot \mathbf{B} & -\mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}^T \cdot \nabla \varphi & -\mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}}^T \cdot \mathbf{N}_{\hat{\mathbf{e}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} d\Omega \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ [|\dot{\mathbf{u}}|] \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\ \dot{\sigma}_{\Omega \setminus S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \\ -\dot{\mathbf{F}}_S \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

Matriz de rigideces

En esta aproximación elemento de la figura 5.8 se idealiza como un elemento triangular en el que se aproximan el campo de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ (figura 5.10)

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}_c\dot{[\mathbf{u}]}$$
 (5.76)

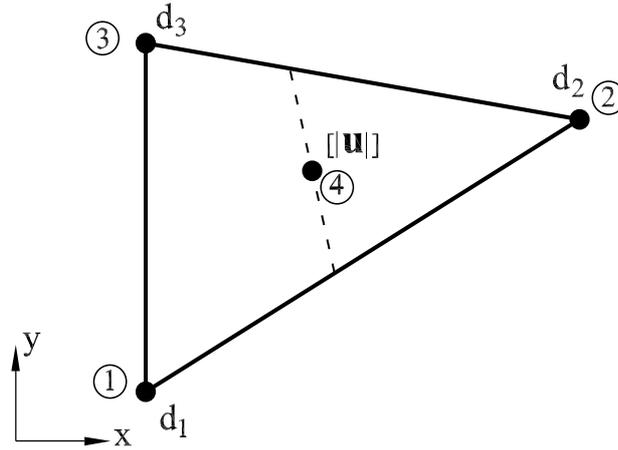


Figura 5.10: Elemento finito triangular con discontinuidad de desplazamientos.

Sustituyendo de las ecs. (5.71), (5.72) y (5.73) en la ec. (5.28) se obtiene la matriz de rigideces para el elemento triangular con discontinuidades interiores.

$$\int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_c^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{B}_c^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_c \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{[\mathbf{u}]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ -\mathbf{F}_S \end{Bmatrix}$$
 (5.77)

Matriz de flexibilidades

Como se mencionó anteriormente, el primer paso en esta formulación es asumir que el campo de esfuerzos que satisface las condiciones de equilibrio. En el caso que los esfuerzos varían en forma lineal en los ejes x y y , se pueden aproximar como.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 + a_4x + a_7y \\ \sigma_y &= a_2 + a_5x + a_8y \\ \sigma_{xy} &= a_3 + a_6x + a_9y \end{aligned}$$
 (5.78)

Los parámetros a_i se llaman amplitudes de esfuerzo, o simplemente parámetros de esfuerzo. Los esfuerzos de la ecuación anterior, deben satisfacer el equilibrio en la ec. (5.40), donde se obtiene que los parámetros

$$\begin{aligned} a_4 + a_9 &= 0 \\ a_7 + a_8 &= 0 \end{aligned} \tag{5.79}$$

Sustituyendo la ec. (5.79) en la relación de esfuerzos cortantes de la ec. (5.78) se obtiene $\sigma_{xy} = a_3 + a_7x + a_4y$. Consecuentemente, se tienen siete parámetros independientes, que se pueden agrupar en un vector

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & -y & 0 & 0 & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} \tag{5.80}$$

o

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}_l \mathbf{a} \tag{5.81}$$

Los parámetros de esfuerzo a_i en la aproximación de la ec. (5.80) se pueden reducir a cinco si $a_4 = a_7 = 0$, renumerando los parámetros, se comprueba que la siguiente ecuación satisface las condiciones de equilibrio de la ec. (5.40).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 + a_4y \\ \sigma_y &= a_2 + a_5x \\ \sigma_{xy} &= a_3 \end{aligned} \tag{5.82}$$

que en forma matricial se pueden escribir como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} \tag{5.83}$$

o

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}_m \mathbf{a} \tag{5.84}$$

Observe que en esta aproximación el esfuerzo cortante σ_{xy} es constante en el elemento, y los esfuerzos σ_x y σ_y varían linealmente. La aproximación más elemental para el campo de esfuerzos, es considerar que todos los parámetros de esfuerzo son constantes en el elemento, así:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.85)$$

o

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}_c \mathbf{a} \quad (5.86)$$

Para aproximar el elemento de la de la figura 5.8 se idealiza como un elemento triangular en el que se aproximan el campo de esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ (figura 5.7a),

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}_{\sigma_{\Omega \setminus S}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} + \mathbf{N}_s \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \quad (5.87)$$

Considerando que los esfuerzos $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}$, varían linealmente dentro del elemento, y que los esfuerzos en la discontinuidad $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$, son constantes, pues sólo están definidos en la discontinuidad. De las ecs. (5.81) y (5.86) se aproxima el campo de esfuerzos como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}_l \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} + \mathbf{S}_c \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \quad (5.88)$$

Sustituyendo de las ecs.(5.81) y (5.86) en los elementos de la matriz definida en la ec. (5.42), se obtiene la siguiente matriz de flexibilidades para el elemento triangular con discontinuidades interiores.

$$\int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_l \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_l & \mathbf{S}_l \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_c \\ \mathbf{S}_c \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_l d\Omega & \mathbf{S}_c \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_c \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{S}}_S \end{Bmatrix} \quad (5.89)$$

Capítulo 6

Formulación variacional de estructuras laminares con discontinuidades

Es común en la solución de problemas estructurales idealizar las estructuras como laminares, con elementos que trabajan a flexión, tal es el caso de: vigas, columnas, losas, tubos y cascarones, entre otros. Estas estructuras cuando están sujetas a condiciones no previstas en su diseño, pueden presentar daño que lleve a colapso incipiente de los elementos que eventualmente fallan pudiendo ser la causa de que la estructura colapse. Por ejemplo, en el análisis de estructuras reticulares para simular la aparición de daño en el comportamiento de un edificio se introducen articulaciones para representar la recesión de un elemento particular ha perdido la capacidad de carga, lo que se refleja como una disminución en la rigidez global de la estructura. Esta aparición de articulaciones no ocurre de manera súbita, sino que son resultado de un proceso local de falla representado por el ablandamiento de las propiedades del elemento. Este ablandamiento sucesivamente lleva a una estructura en proceso de falla a resultados diferentes de los que se obtiene normalmente.

Recientemente, para estudiar el problema descrito anteriormente como un fenómeno de localización de deformaciones en vigas y marcos como articulaciones plásticas, Ehrlich y Armero (2004) desarrollaron elementos finitos con discontinuidades interiores con base en la teoría de vigas de Timoshenko. Armero (2005) presenta la caracterización de discontinuidades fuertes en la teoría de láminas de Cosserat con el fin de modelar el proceso de falla en estos elementos estructurales. Armero y Ehrlich (2006) presentan una formulación para simular líneas de articulación en placas gruesas (Teoría de Reissner Mindlin). A pesar de obtener resultados numéricos en algunas simulaciones, los elementos desarrollados por estos autores presentan problemas de atoramiento de esfuerzos.

Por lo anterior, en este capítulo se desarrolla una formulación teórica, para representar el inicio de la falla en elementos a flexión/cortante hasta la formación por completo de una

articulación/dislocación con base en el modelo de Discontinuidades Interiores desarrollado en este trabajo. Es pertinente recordar que el proceso de falla en los materiales inicia físicamente como una concentración de deformaciones en zonas de localización, que posteriormente se pueden observar a nivel macroscópico como grietas o bandas de deslizamiento. Si lo anterior se adapta a elementos que trabajan en flexión/cortante, se puede plantear que la falla inicia con una concentración de deformaciones, que reducen la capacidad de un elemento en forma gradual, hasta el momento en que la articulación o dislocación se desarrolla por completo, momento en el que el elemento pierde su capacidad en esa zona.

Se presenta la formulación variacional general de sólidos con discontinuidades interiores, adaptado a representar problemas dominados por la flexión/cortante de elementos estructurales como: vigas, placas y láminas. Con base en este funcional, se desarrolla una aproximación mediante el método de los elementos finitos con discontinuidades interiores. Se desarrolla una formulación para elementos que toman en cuenta sólo la energía interna de deformación debida a las deformaciones producidas por la flexión (teoría de placas delgadas), y una formulación más general que además considera la energía interna debida a la deformación por cortante (teoría de placas gruesas). Se demuestra que el funcional de energía para sólidos con discontinuidades desarrollado en este trabajo da como condiciones de estacionaridad la forma fuerte del problema, *i.e.*, equivalente a las ecuaciones que gobiernan el problema de valores en la frontera.

6.1 Teoría de placas

En mecánica estructural, una placa es una capa delgada plana de material, cuya función primaria es transmitir cargas transversales a un plano los apoyos mediante la combinación de momentos flexionantes y fuerzas cortantes. Las placas son una forma particular de un sólido tridimensional reducido a un sistema de referencia sobre una superficie o simplemente a una superficie media con espesor t (figura 6.1). Con ejes de referencia x y y sobre la superficie, y un tercer eje, z se considera normal a la superficie para formar un sistema cartesiano de referencia.

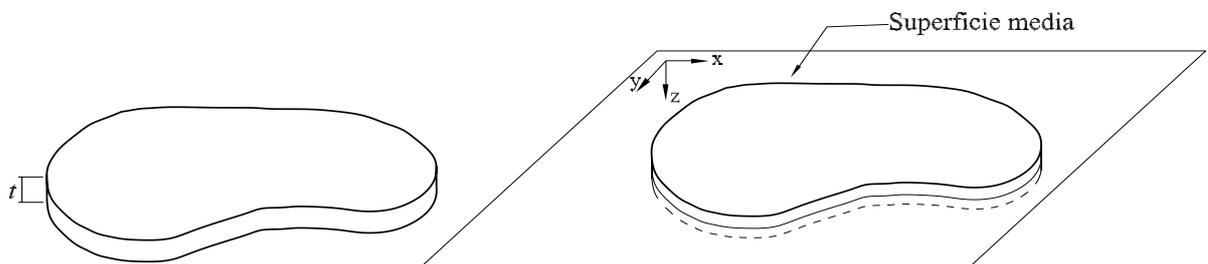


Figura 6.1: Idealización de placas.

6.1.1 Problema de valores en la frontera

El fenómeno físico que se estudia en este trabajo es el de la falla en materiales en problemas dominados por la flexión/cortante de miembros estructurales, por lo en forma breve se presenta la teoría elástica de placas.

El problema de placas a flexión se reduce a un cuerpo de dos dimensiones correspondiente a la superficie media de una placa plana con espesor t , con un dominio $A \in \mathbb{R}^2$, con puntos materiales \mathbf{x} y frontera Γ (figura 6.2). Las condiciones de frontera prescritas son: las tracciones superficiales q sobre A , el cortante V^* a lo largo Γ_v , el momento flexionante M^* en Γ_m , el desplazamiento transversal w^* en Γ_w , y la rotación θ^* en Γ_θ , respectivamente, tal que $\Gamma_v \cup \Gamma_m = \Gamma_w \cup \Gamma_\theta = \Gamma$ y $\Gamma_v \cap \Gamma_w = \Gamma_m \cap \Gamma_\theta = 0$.

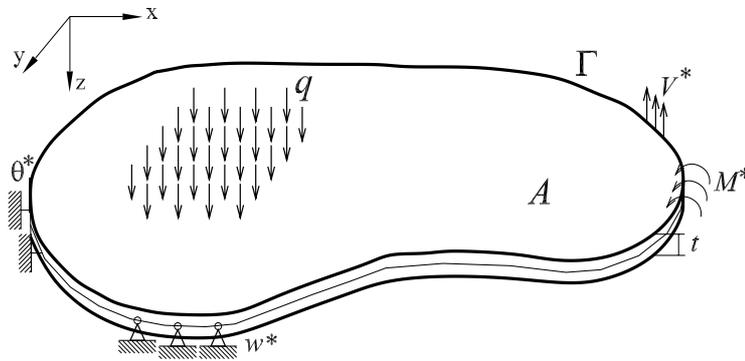


Figura 6.2: Placa con sus condiciones de frontera en Γ .

6.1.2 Cinemática

La cinemática de deformaciones de la teoría de placas planas asume que las partículas del material que originalmente se encuentran en una línea recta, normal a la superficie media no deformada, permanecen en línea recta durante la deformación, pero esta línea no es necesariamente normal a la superficie media deformada (figura 6.3). Después de la flexión, las partículas que se encuentran en la superficie media $z = 0$ presentan una deflexión $w(x, y)$ a lo largo del eje z .

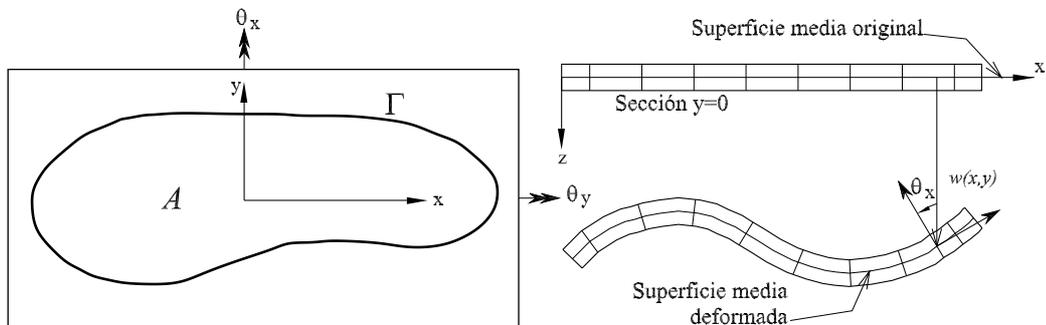


Figura 6.3: Cinemática de la deformación una placa.

6.1.3 Desplazamiento

Las componentes de desplazamiento de un punto con coordenadas x, y, z considerando deformaciones pequeñas son

$$u = -z\theta_x(x, y), \quad v = -z\theta_y(x, y) \quad \text{y} \quad w = w(x, y) \quad (6.1)$$

o en forma vector

$$\mathbf{u}_b = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_x \\ -z\theta_y \\ w \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

donde, θ_x y θ_y son las rotaciones de la normal con respecto a la superficie media no deformada en los planos x, y ; w es el desplazamiento transversal en el eje z .

Deformaciones (Compatibilidad cinemática)

El campo de deformaciones dependiente de los desplazamientos de un problema tridimensional general se define por la siguiente relación

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon^u} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_b} \quad (6.3)$$

Puesto que en una placa plana w corresponde a la deflexión transversal de la superficie media y no varía con respecto a z , entonces $\varepsilon_{zz} = 0$.

Sustituyendo la ec. (6.1) en la ec. (6.3), y separando en: 1) deformaciones por flexión, que dependen de la curvatura κ , la cuales varían en forma lineal a través del espesor de la placa

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yx} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_a} = -z \underbrace{\begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ 2k_{yx} \end{Bmatrix}}_{\kappa} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial\theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_b} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}}_{\theta} \quad (6.4)$$

y 2) las deformaciones por cortante, que se asumen son constantes a través del espesor de la placa

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\gamma} = \nabla w - \boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

En forma compacta las ecs. (6.4) y (6.5) se definen como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_a &= -z\boldsymbol{\kappa} = -z\mathbf{L}_b\boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \nabla w - \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (6.6)$$

que se pueden reescribir

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_b} = \begin{bmatrix} -z\boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\mathbf{B}_b\boldsymbol{\theta} \\ \nabla w - \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -zI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & 0 \\ -I & \nabla \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (6.7)$$

o bien en forma matricial esta relación desplazamiento-deformación se define por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{L}\mathbf{u} \quad (6.8)$$

Equilibrio

El estado de esfuerzos en una placa arbitraria se ilustra en la figura 6.4, en las que las fuerzas resultantes están dadas por

$$\begin{aligned} \text{Fuerzas de membrana} \quad N &= \begin{cases} N_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz \\ N_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} dz \\ N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} dz \end{cases} \\ \text{Momentos flexionantes} \quad M &= \begin{cases} M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z dz \\ M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z dz \\ M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z dz \end{cases} \\ \text{Fuerzas cortantes} \quad V &= \begin{cases} V_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} dz \\ V_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} dz \end{cases} \end{aligned} \quad (6.9)$$

En teoría de placas, la fuerza de membrana no existe ($N = 0$), por lo que las fuerzas resultantes F son

$$F = \begin{Bmatrix} M \\ V \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma} dz \quad (6.10)$$

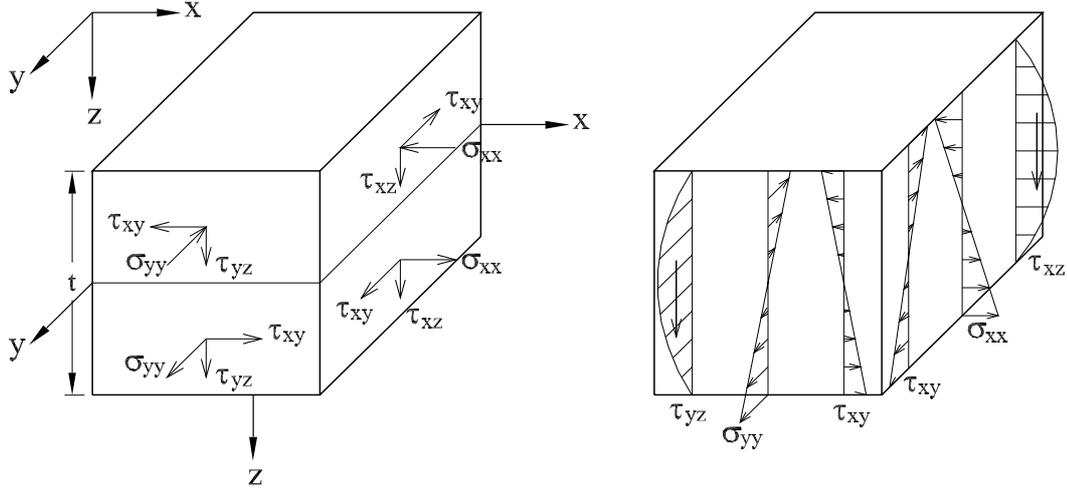


Figura 6.4: Esfuerzos en una placa.

La ecuación de equilibrio se deriva al considerar un elemento infinitesimal $tdx dy$ sometido a una carga transversal p_z y una fuerza de cuerpo b_z .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_b^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix}}_V = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\nabla^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix}}_V + \underbrace{(p_z + tb_z)}_{q_z} = 0$$

La ec. (6.11) se puede escribir como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_b^T & -I \\ 0 & \nabla^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ V \end{Bmatrix}}_F + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_z \end{Bmatrix}}_q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio se define por:

$$\mathbf{L}^T F + q = 0 \quad (6.13)$$

o en términos de esfuerzo, sustituyendo la ec. (6.10) en la ec. (6.13)

$$\mathbf{L}^T \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma} dz + q = 0 \quad (6.14)$$

Compatibilidad Constitutiva

De la teoría de la elasticidad, la relación constitutiva entre los esfuerzos las deformaciones, al asumir condiciones de esfuerzo plano ($\varepsilon_{zz}=0$), se define en forma matricial a partir de la ec. (2.3) como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

donde, E es el módulo elástico, ν es la relación de Poisson, y μ es el módulo de cortante que se define como:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.16)$$

Sustituyendo la ec. (6.6) en la ec. (6.15), se tienen la relación constitutiva siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= -z\mathbf{DL}_b^T\theta = -z\mathbf{D}\kappa \\ \tau &= \mu(\nabla w - \theta) = \mu\gamma \end{aligned} \quad (6.17)$$

Subsecuentemente, substituyendo la ecuación anterior en la ec. (6.10), se tiene las siguientes relaciones: momento flexionante-curvatura y fuerza cortante-deformaciones por cortante.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} &= \frac{t^3}{12} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_f} \{\kappa\} \\ \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} &= \frac{5}{6}t \underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_s} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.18)$$

En forma compacta, estas ecuaciones, que representan la compatibilidad constitutiva, se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{D}_f\kappa \\ V &= \mathbf{D}_s\gamma \end{aligned} \quad (6.19)$$

6.2 Formulaci3n variacional general de placas

En esta secci3n se desarrolla un funcional de energa general para problema de placas a partir del funcional para el problema elstico lineal de Fraeijs de Veubeke (1951) definido. Posteriormente, partiendo de este funcional, se desarrollan los funcionales particulares para vigas.

Substituyendo las relaciones de deformaci3n de la ec. (6.6), y la relaci3n constitutiva de la ec. (6.19) dentro del funcional de energa definido en la ec. (4.5), se tiene el siguiente funcional de energa general correspondiente a la teorfa de placas con seis variables independientes

$$\begin{aligned} \Pi(w, \boldsymbol{\theta}, M, V, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}) = & \int_A \left[M(\mathbf{L}_b \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\kappa}) + V((\nabla w - \boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma} - qw \right] dA \\ & - \int_{\Gamma_m} M^* \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* w d\Gamma - \int_{\Gamma_\theta} M(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) d\Gamma - \int_{\Gamma_w} V(w - w^*) d\Gamma \end{aligned} \quad (6.20)$$

Este funcional de energa proporciona como condiciones de estacionaridad las ecuaciones que definen la formulaci3n fuerte del problema (ecs. (6.6), (6.13) y (6.19)) como condiciones estacionarias, *i.e.*, equivalente a las ecuaciones que gobiernan el problema correspondiente al PVF.

Para demostrar que la afirmaci3n anterior es v3lida, a continuaci3n se presenta la primera variaci3n del funcional de energa definido por la ec. (6.20)

$$\delta \Pi = \int_A [(\mathbf{L}_b \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\kappa}) \delta M + ((\nabla w - \boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\gamma}) \delta V - (M - \mathbf{D}_f \boldsymbol{\kappa}) \delta \boldsymbol{\kappa} - (V - \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}) \delta \boldsymbol{\gamma}] dA \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} & + \int_A [M \mathbf{L}_b \delta \boldsymbol{\theta} - V \delta \boldsymbol{\theta} + V \nabla \delta w - q \delta w] dA - \int_{\Gamma_m} M^* \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* \delta w d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_\theta} [(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) \delta M + M \delta \boldsymbol{\theta}] d\Gamma - \int_{\Gamma_w} [(w - w^*) \delta V + V \delta w] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Del teorema de la divergencia, las siguientes integrales se pueden definir como

$$\begin{aligned} \int_A M \mathbf{L}_b \delta \boldsymbol{\theta} dA & = - \int_A \mathbf{L}_b^T M \delta \boldsymbol{\theta} dA + \int_\Gamma M \boldsymbol{\nu} \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma \\ \int_A V \nabla \delta w dA & = - \int_A \nabla^T V \delta w dA + \int_\Gamma V \boldsymbol{\nu} \delta w d\Gamma \end{aligned} \quad (6.23)$$

Substituyendo la ec. (6.23) en la ec. (6.21), la primera variaci3n del funcional de energa de la ec. (6.20) es

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \int_A [(\mathbf{L}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\kappa}) \delta M + ((\nabla w - \boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\gamma}) \delta V - (M - \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa}) \delta \boldsymbol{\kappa}] dA + \quad (6.24) \\
& \int_A [-(V - \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}) \delta \boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{L}^T M + V) \delta \boldsymbol{\theta} - (\nabla^T V + q) \delta w] dA + \int_{\Gamma_M} (M \cdot \boldsymbol{\nu} - M^*) \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_\theta} (M \boldsymbol{\nu} - M) \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma + \int_{\Gamma_V} (V \boldsymbol{\nu} - V^*) \delta w d\Gamma + \int_{\Gamma_w} (V \boldsymbol{\nu} - V) \delta w d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_\theta} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) \delta M d\Gamma - \int_{\Gamma_w} (w - w^*) \delta V d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Así, la formulación variacional de la ec. (6.20) contiene las ecuaciones que definen el PVF de la teoría de placas como sus condiciones de estacionaridad, lo que demuestra que es equivalente a las ecuaciones que gobiernan el problema y sus condiciones de frontera.

6.3 Desarrollo de otros principios variacionales

El funcional de energía general para placas definido en la ec. (6.20), considera como variables independientes los campos de desplazamiento transversal w , las rotaciones $\boldsymbol{\theta}$, la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$, las deformaciones por cortante $\boldsymbol{\gamma}$, los momentos M y cortantes V . De este funcional, es posible generar una jerarquía de principios variacionales que pueden involucran sólo algunas variables o combinación de ellas como independientes.

6.3.1 Funcional de energía total de placas

Si se asume que la compatibilidad de placas se satisface *a priori*, es posible establecer las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{L}_b^T \boldsymbol{\theta} \quad (6.25) \\
\boldsymbol{\gamma} &= (\nabla w - \boldsymbol{\theta})
\end{aligned}$$

donde el desplazamiento transversal w y la rotación $\boldsymbol{\theta}$ son los campos independientes, mientras que la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ y las deformaciones por cortante $\boldsymbol{\gamma}$ son los independientes.

Como resultado, el funcional de energía definido en la ec. (6.20) con seis variables independientes se reduce a un funcional de energía con dos variables independientes, que corresponde a la formulación de **Reissner Mindlin** para placas gruesas (Reissner, 1945 y Mindlin, 1951).

$$\begin{aligned}
\Pi(w, \boldsymbol{\theta}) = & \int_A \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} (\nabla w - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{D}_s (\nabla w - \boldsymbol{\theta}) - qw \right] dA \quad (6.26) \\
& - \int_{\Gamma_M} M^* \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_V} V^* w d\Gamma
\end{aligned}$$

Este funcional considera la energía interna debida a la deformación por flexión y por cortante.

Ahora, si las rotaciones $\boldsymbol{\theta}$ son dependientes del desplazamiento transversal w por la relación:

$$\boldsymbol{\theta}^w = \nabla w \quad (6.27)$$

Entonces la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ en la ec. (6.25) depende del desplazamiento transversal w y la contribución de la energía de las deformaciones por cortante es nula:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{L}_b \nabla w \\ \boldsymbol{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde el producto de los operadores $\mathbf{L}_b \nabla$ se define por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}_b \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Así, el funcional de energía definido en la ec. (6.26), con dos variables independientes se reduce a una, corresponde a la teoría de placas delgadas de **Kirchhoff**.

$$\Pi(w) = \int_A \left[\frac{1}{2} w \mathbf{P}^T \mathbf{D}_f \mathbf{P} w - qw \right] dA - \int_{\Gamma_m} M^* \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* w d\Gamma \quad (6.30)$$

Este funcional de energía sólo considera la energía de deformación por flexión, pues desprecia la energía de deformación por cortante.

6.3.2 Funcional desplazamiento-fuerza

Si se considera que las ecuaciones de compatibilidad entre la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ y el giro $\boldsymbol{\theta}$, así como entre las deformaciones por cortante $\boldsymbol{\gamma}$ y el desplazamiento transversal w y el giro definidas en la ec. (6.25) se satisface *a priori*. Además, que la curvatura y las deformaciones por cortante dependen de la densidad de energía complementaria $\phi(M)$ y $\phi(V)$ se definen como.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^M &= \frac{\partial \phi(M)}{\partial V} \\ \boldsymbol{\gamma}^V &= \frac{\partial \phi(V)}{\partial M} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Para el caso elástico la energía complementaria se define como:

$$\begin{aligned} \phi(M) &= \frac{1}{2} M \mathbf{E}_f M \\ \phi(V) &= \frac{1}{2} V \mathbf{E}_s V \end{aligned} \quad (6.32)$$

Donde \mathbf{E} relaciona:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{E}_f M \implies \mathbf{E}_f = \mathbf{D}_f^{-1} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{E}_s V \implies \mathbf{E}_s = \mathbf{D}_s^{-1}\end{aligned}\quad (6.33)$$

Con estas consideraciones, el funcional de energía definido en las ec. (6.20), se obtiene el siguiente:

$$\begin{aligned}\Pi(w, \boldsymbol{\theta}, M, V,) &= \int_A [M\boldsymbol{\kappa}^M + V\boldsymbol{\gamma}^V - \phi(M) - \phi(V) - qw] dA \\ &\quad - \int_{\Gamma_m} M^* \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* w d\Gamma\end{aligned}\quad (6.34)$$

Este funcional de energía considera el desplazamiento transversal, las rotaciones, el momento y la fuerza cortante como variables independientes.

6.3.3 Funcional de energía complementaria total

Si se considera que las siguientes condiciones de equilibrio dadas en la ec. (6.11) se satisfacen *a priori*, en consecuencia, el funcional de energía de la ec. (6.20) se reducen al siguiente funcional.

$$\Pi(M, V) = \int_A [\phi(M) - \phi(V)] dA - \int_{\Gamma_m} M\boldsymbol{\theta}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_v} Vw^* d\Gamma$$

Este funcionales de energía considera solamente el momento M y el cortante V como variables independientes.

6.4 Placas con discontinuidades

Sea una placa de espesor t , con dominio $A \in \mathbb{R}^2$ de la figura (6.5), sometida a cargas y que presenta un salto en el campo de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ a lo largo de una banda (zona de localización de deformaciones) S . En estas condiciones, el dominio se divide en subdominios, $A = A^- + A^+$ y en dos fronteras $\Gamma = \Gamma^- + \Gamma^+$. Las condiciones de frontera prescritas son: las tracciones q sobre $A = A^- + A^+$, la carga transversal V^* a lo largo de $\Gamma_v = \Gamma_v^- + \Gamma_v^+$, el momento flexionante M^* a lo largo de $\Gamma_m = \Gamma_m^- + \Gamma_m^+$, el desplazamiento transversal w^* sobre $\Gamma_w = \Gamma_w^- + \Gamma_w^+$, y la rotación θ^* a lo largo $\Gamma_\theta = \Gamma_\theta^- + \Gamma_\theta^+$, respectivamente, tal que $\Gamma_v \cup \Gamma_m = \Gamma_w \cup \Gamma_\theta = \Gamma$ y $\Gamma_v \cap \Gamma_w = \Gamma_m \cap \Gamma_\theta = 0$.

La zona de localización S , se caracteriza por la concentración de deformaciones inelásticas en una banda estrecha, puesto que ésta inicia con la formación de microfisuras y su coalescencia que gradualmente se convierte en una discontinuidad macroscópica (articulación y/o dislocación), mientras que el material vecino se descarga. La discontinuidad del campo de desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ en placas se puede presentar como: un salto en el campo de desplazamiento transversal $[[w]]$

(dislocación), un salto en el campo de las rotaciones $[[\boldsymbol{\theta}]]$ (articulación) o una combinación de ambos, figura (6.6).

Para describir la cinemática de desplazamientos de una placa que presenta una discontinuidad, se considera que las deformaciones se concentran en la banda S con espesor $k = 0$, los campos de desplazamiento transversal $w(x, y)$ y el de las rotaciones $\boldsymbol{\theta}(x, y)$

$$w(x, y) = \bar{w} + H_s [[w]] \quad (6.35)$$

$$\boldsymbol{\theta}(x, y) = \bar{\boldsymbol{\theta}} + H_s [[\boldsymbol{\theta}]] \quad (6.36)$$

con saltos $[[w]]$ y $[[\boldsymbol{\theta}]]$ en un punto (material) dado S , induce un campo de deformaciones no acotadas. Ambos campos se pueden expresar como:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{L}_b \boldsymbol{\theta}(x, y) = \underbrace{\mathbf{L}_b \bar{\boldsymbol{\theta}}}_{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} + \underbrace{\delta_s ([[\boldsymbol{\theta}]] \otimes \mathbf{n})^S}_{\bar{\boldsymbol{\kappa}}[[\boldsymbol{\theta}]}} \quad (6.37)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla (\bar{w} + H_s [[w]]) - (\bar{\boldsymbol{\theta}} + H_s [[\boldsymbol{\theta}]]) = \underbrace{\nabla \bar{w} - \bar{\boldsymbol{\theta}}}_{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} + \underbrace{\delta_s [[w]] \mathbf{n} - H_s [[\boldsymbol{\theta}]]}_{\bar{\boldsymbol{\gamma}}[[w]], [[\boldsymbol{\theta}]}} \quad (6.38)$$

donde H_S es la función de Heaviside definida en S ($H_S(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in A^-$ y $H_S(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in A^+$) y δ_s es la función delta de Dirac.

El problema de valores en la frontera de placas con discontinuidades se define por el siguiente sistema de ecuaciones y condiciones de frontera.

a)	$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$	en A	Compatibilidad cinemática
b)	$\begin{aligned} M(\mathbf{x}, t) - M(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} \\ V(\mathbf{x}, t) - V(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$	en A	Compatibilidad constitutiva
c)	$\mathbf{L}_b^T M(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$	en $A \setminus S$	Equilibrio interno
d)	$\nabla^T V - q = \mathbf{0}$	en A	Equilibrio externo
e)	$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= \bar{w}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$	en Γ_u	Condiciones esenciales de frontera
f)	$\begin{aligned} (M_{A^-} - M_S) \cdot n &= (M_S - M_{\Omega^+}) \cdot n = \mathbf{0} \\ &= [[M]]_S \cdot n \\ (V_{A^-} - V_S) \cdot n &= (V_S - V_{\Omega^+}) \cdot n = \mathbf{0} \\ &= [[V]]_S \cdot n \end{aligned}$	en S	Continuidad interna
g)	$\begin{aligned} (M_{A^-} - M_{A^+}) \cdot n &= [[M]] = 0 \\ (V_{A^-} - V_{A^+}) \cdot n &= [[V]] = 0 \end{aligned}$	en S	Continuidad externa

(6.39)

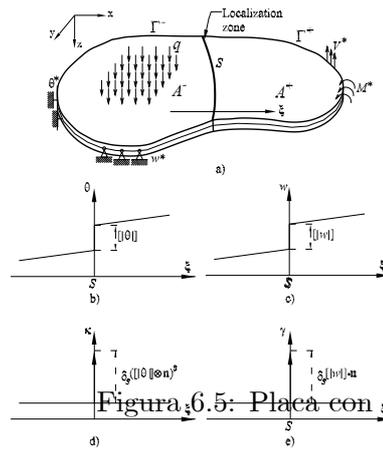
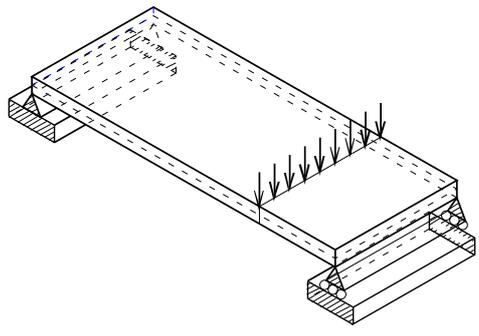


Figura 6.5: Placa con zona de localización S.



<p>Fuerza cortante V</p>	<p>Fuerza cortante V</p>
<p>Momento flexionante M</p>	<p>Momento flexionante M</p>
<p>Rotación θ</p>	<p>Rotación θ</p>
<p>Desplazamiento w</p>	<p>Desplazamiento w</p>
a)	b)

Figura 6.6: Placa con carga: a) antes y b) después del inicio de la discontinuidad.

6.4.1 Funcional de energía general de placas con discontinuidades

El funcional de energía para placas con discontinuidades se puede desarrollar sustituyendo las relaciones entre las deformaciones y las rotaciones de la ec. (6.6), y relaciones constitutiva ec. (6.19) en el funcional de energía general para el modelo de Discontinuidad Discreta (5.3), por consiguiente

$$\begin{aligned} \Pi(w, \boldsymbol{\theta}, M, V, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}, [|w|], [|\boldsymbol{\theta}|]) &= \int_{A \setminus S} \left[M (\overline{\boldsymbol{\kappa}}^\theta - \overline{\boldsymbol{\kappa}}) + V (\overline{\boldsymbol{\gamma}}^{\overline{w}, \overline{\boldsymbol{\theta}}} - \overline{\boldsymbol{\gamma}}) + \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{D}_f \overline{\boldsymbol{\kappa}} + \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{D}_s \overline{\boldsymbol{\gamma}} + qw \right] dA \\ &\quad - \int_{\Gamma_m} M^* \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* w d\Gamma + \int_S [M_S \mathbf{n} [|\boldsymbol{\theta}|] + V_S \mathbf{n} [|w|]] d\Gamma \end{aligned} \quad (6.40)$$

La primera variación de la ec. (6.40) proporciona

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_{A \setminus S} \left[(\overline{\boldsymbol{\kappa}}^\theta - \overline{\boldsymbol{\kappa}}) \delta M + (\overline{\boldsymbol{\gamma}}^{\overline{w}, \overline{\boldsymbol{\theta}}} - \overline{\boldsymbol{\gamma}}) \delta V - (M - \mathbf{D}_f \overline{\boldsymbol{\kappa}}) \delta \overline{\boldsymbol{\kappa}} - (V - \mathbf{D}_s \overline{\boldsymbol{\gamma}}) \delta \overline{\boldsymbol{\gamma}} \right] dA \\ &\quad + \int_{A \setminus S} [M \delta \overline{\boldsymbol{\kappa}}^\theta + V \delta \overline{\boldsymbol{\gamma}}^{\overline{w}, \overline{\boldsymbol{\theta}}} + q \delta w] dA + \int_S [M_S \mathbf{n} \delta [|\boldsymbol{\theta}|] + V_S \mathbf{n} \delta [|w|]] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Por el teorema de la divergencia, las siguientes integrales se puede definir como

$$\begin{aligned} \int_{A \setminus S} M \delta \overline{\boldsymbol{\kappa}}^\theta dA &= - \int_{A \setminus S} \mathbf{L}_b^T M \delta \boldsymbol{\theta} dA + \int_\Gamma M \mathbf{n} \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma \\ &\quad - \int_{A \setminus S} B^T M \delta \boldsymbol{\theta} dA - \int_{S^-} M \mathbf{n} \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma + \int_{S^+} M \mathbf{n} \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma + \int_\Gamma M \boldsymbol{\nu} \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma \\ &\quad - \int_{A \setminus S} \mathbf{L}_b^T M \delta \boldsymbol{\theta} dA + \int_S M \mathbf{n} \delta [|\boldsymbol{\theta}|] d\Gamma + \int_\Gamma M \boldsymbol{\nu} \delta \boldsymbol{\theta} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \int_{A \setminus S} V \delta \overline{\boldsymbol{\gamma}}^{\overline{w}, \overline{\boldsymbol{\theta}}} dA &= \int_{A \setminus S} V (\nabla \delta \overline{w} - \delta \overline{\boldsymbol{\theta}}) dA = \int_{A \setminus S} V \nabla \delta \overline{w} dA - \int_{A \setminus S} V \delta \overline{\boldsymbol{\theta}} dA \\ &= - \int_{A \setminus S} \nabla^T V \delta \overline{w} dA + \int_S V \mathbf{n} \delta \overline{w} d\Gamma - \int_{A \setminus S} V \delta \overline{\boldsymbol{\theta}} dA \\ &= - \int_{A \setminus S} \nabla^T V \delta \overline{w} dA - \int_{S^-} V \mathbf{n} \delta \overline{w} d\Gamma + \int_{S^+} V \mathbf{n} \delta \overline{w} d\Gamma - \int_{A \setminus S} V \delta \overline{\boldsymbol{\theta}} dA \\ &= - \int_{A \setminus S} \nabla^T V \delta \overline{w} dA + \int_S V \mathbf{n} \delta [|w|] d\Gamma - \int_{A \setminus S} V \delta \overline{\boldsymbol{\theta}} dA \end{aligned} \quad (6.43)$$

Substituyendo las ecs. (6.42) y (6.43) en la ec. (6.41), la primera variación del funcional de energía de placas con discontinuidades ec. (6.40) es

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \int_{A \setminus S} \left[(\bar{\boldsymbol{\kappa}}^\theta - \bar{\boldsymbol{\kappa}}) \delta M + (\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}} - \bar{\boldsymbol{\gamma}}) \delta V - (M - \mathbf{D}_f \bar{\boldsymbol{\kappa}}) \delta \bar{\boldsymbol{\kappa}} - (V - \mathbf{D}_s \bar{\boldsymbol{\gamma}}) \delta \bar{\boldsymbol{\gamma}} \right] dA \quad (6.44) \\
& - \int_{A \setminus S} [(\mathbf{L}_b^T M + V) \delta \boldsymbol{\theta} + (\nabla^T V - q) \delta \bar{w}] dA \\
& - \int_S (V_S - V_{A^-}) \mathbf{n} \delta [|w|] d\Gamma - \int_S (V_{A^+} - V_S) \mathbf{n} \delta [|w|] d\Gamma \\
& - \int_S (M_S - M_{A^-}) \mathbf{n} \delta [|\boldsymbol{\theta}|] d\Gamma - \int_S (M_{A^+} - M_S) \mathbf{n} \delta [|\boldsymbol{\theta}|] d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Por consiguiente, las condiciones de estacionaridad de la formulación variacional de la ec. (6.44) proporciona el problema de valores en la frontera de placas con discontinuidades definido por la ec. (6.39).

6.5 Desarrollo de otros principios variacionales

El funcional de energía general para placas con discontinuidades definido en la, ecs. (6.40), considera como variables independientes los campos de desplazamiento transversal w , las rotaciones $\boldsymbol{\theta}$, la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$, las deformaciones por cortante $\boldsymbol{\gamma}$, los momentos M , cortantes V , y los saltos $[|w|]$ y $[|\boldsymbol{\theta}|]$. De este funcional, es posible generar una jerarquía de principios variacionales que pueden involucran sólo algunas variables o combinación de ellas como independientes.

6.5.1 Funcional de energía potencial total con discontinuidades

Asumiendo que la compatibilidad se satisface *a priori*, es posible establecer una relación como la de la ec. (6.25) pero con la parte continua de los campos de curvatura y deformación por cortante

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\kappa}} &= \mathbf{L}_b^T \bar{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.45) \\
\bar{\boldsymbol{\gamma}} &= (\nabla \bar{w} - \bar{\boldsymbol{\theta}})
\end{aligned}$$

Como resultado el funcional de energía definido en la ec. (6.40) con ocho variables independientes se reduce a un funcional de energía con cuatro variables independientes, correspondiente a la teoría de **Reissner Mindlin** para placas gruesas con discontinuidades

$$\begin{aligned}
\Pi(w, \boldsymbol{\theta}, [|w|], [|\boldsymbol{\theta}|]) = & \int_{A \setminus S} \left[\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b \bar{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} (\nabla \bar{w} - \bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{D}_s (\nabla \bar{w} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) - qw \right] dA \quad (6.46) \\
& - \int_{\Gamma_m} M^* \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* w d\Gamma + \int_S [M_S \mathbf{n} [|\boldsymbol{\theta}|] + V_S \mathbf{n} [|w|]] d\Gamma
\end{aligned}$$

Ahora, supóngase que el campo de rotaciones continuas $\bar{\theta}$ es dependiente del desplazamiento transversal continuo \bar{w} mediante la relación

$$\bar{\theta} = \nabla \bar{w} \quad (6.47)$$

Así, de la ec. (6.45), la curvatura $\bar{\kappa}$ es ahora dependiente de los desplazamientos transversales \bar{w} y las deformaciones por cortante son nulas

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \mathbf{P}\bar{w} \\ \bar{\gamma} &= (\nabla \bar{w} - \nabla \bar{w}) = 0 \end{aligned} \quad (6.48)$$

Como resultado el funcional de energía definido en la ec. (6.46) con cuatro variables independientes se reduce a dos variables dependientes. Este funcional de energía corresponde al de la teoría de **Kirchhoff** con discontinuidades (teoría de placas delgadas).

$$\Pi(w, [|\theta|]) = \int_{A \setminus S} \left[\frac{1}{2} \bar{w}_b^T \mathbf{P}^T \mathbf{D}_f \mathbf{P} \bar{w} - qw \right] dA - \int_{\Gamma_m} M^* \theta d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* w + \int_S M_S \mathbf{n} [|\theta|] d\Gamma \quad (6.49)$$

6.5.2 Funcional desplazamiento-fuerza

Esta formulación considera que las ecuaciones de compatibilidad entre la curvatura κ y el giro θ , así como entre las deformaciones por cortante γ y el desplazamiento transversal w y el giro definidas en la ec. (6.39a) se satisface *a priori*. Además, que la curvatura y las deformaciones por cortante dependientes de la densidad de energía complementaria $\phi(M)$ y $\phi(V)$ se definen como.

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}^M &= \frac{\partial \phi(M)}{\partial V} \\ \bar{\gamma}^V &= \frac{\partial \phi(V)}{\partial M} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Para el caso elástico la energía complementaria se define como:

$$\begin{aligned} \phi(M) &= \frac{1}{2} M \mathbf{E}_f M \\ \phi(V) &= \frac{1}{2} V \mathbf{E}_s V \end{aligned} \quad (6.51)$$

Donde \mathbf{E} relaciona:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \mathbf{E}_f M \implies \mathbf{E}_f = \mathbf{D}_f^{-1} \\ \bar{\gamma} &= \mathbf{E}_s V \implies \mathbf{E}_s = \mathbf{D}_s^{-1} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Con estas consideraciones, el funcional de energía definidos en las ecs. (6.40), se reducen al siguiente:

$$\begin{aligned} \Pi(w, \boldsymbol{\theta}, M, V,) = & \int_A [M\bar{\boldsymbol{\kappa}}^M + V\bar{\boldsymbol{\gamma}}^V - \phi(M) - \phi(V) - qw] dA \\ & - \int_{\Gamma_m} M^* \boldsymbol{\theta} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V^* w d\Gamma + \int_S [M_S \mathbf{n} [|\boldsymbol{\theta}|] + V_S \mathbf{n} [|w|]] d\Gamma \end{aligned} \quad (6.53)$$

Este funcional de energía considera el desplazamiento transversal, las rotaciones, el momento y la fuerza cortante como variables independientes.

6.5.3 Funcional de energía complementaria total

En esta formulación se considera que las siguientes condiciones de equilibrio dadas en la ec. (6.39c – d) se satisfacen *a priori*, en consecuencia, el funcional de energía de la ec. (6.40) se reducen al siguiente funcional.

$$\begin{aligned} \Pi(M, V) = & \int_A [\phi(M) - \phi(V)] dA - \int_{\Gamma_m} M \boldsymbol{\theta}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_v} V w^* d\Gamma \\ & + \int_S [M_S \mathbf{n} [|\boldsymbol{\theta}|] + V_S \mathbf{n} [|w|]] d\Gamma \end{aligned} \quad (6.54)$$

Este funcional de energía considera sólo el momento M y el cortante V como variables independientes.

6.6 Aproximación mediante el MEF de placas con discontinuidades

Considérese los elementos finitos placa con una discontinuidad en su interior de la figura 6.7, en este caso se puede observar que se presenta un salto en el desplazamiento transversal $[|w|]$ (dislocación) o en las rotaciones $[|\boldsymbol{\theta}|]$ (articulación) o una combinación de ellos.

En el capítulo 2, se definió la cinemática de desplazamientos y deformaciones en función de los desplazamientos regulares (Oliver 1995b). Análogamente, se pueden definir desplazamiento transversal y las rotaciones definidos en la ecs. (6.35) y (6.36) mediante la siguiente expresión:

$$w(\mathbf{x}) = \hat{w}(\mathbf{x}) + M_S(\mathbf{x}) [|w|](\mathbf{x}) \quad (6.55)$$

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) + M_S(\mathbf{x}) [|\boldsymbol{\theta}|](\mathbf{x}) \quad (6.56)$$

donde la función

$$M_S(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (6.57)$$

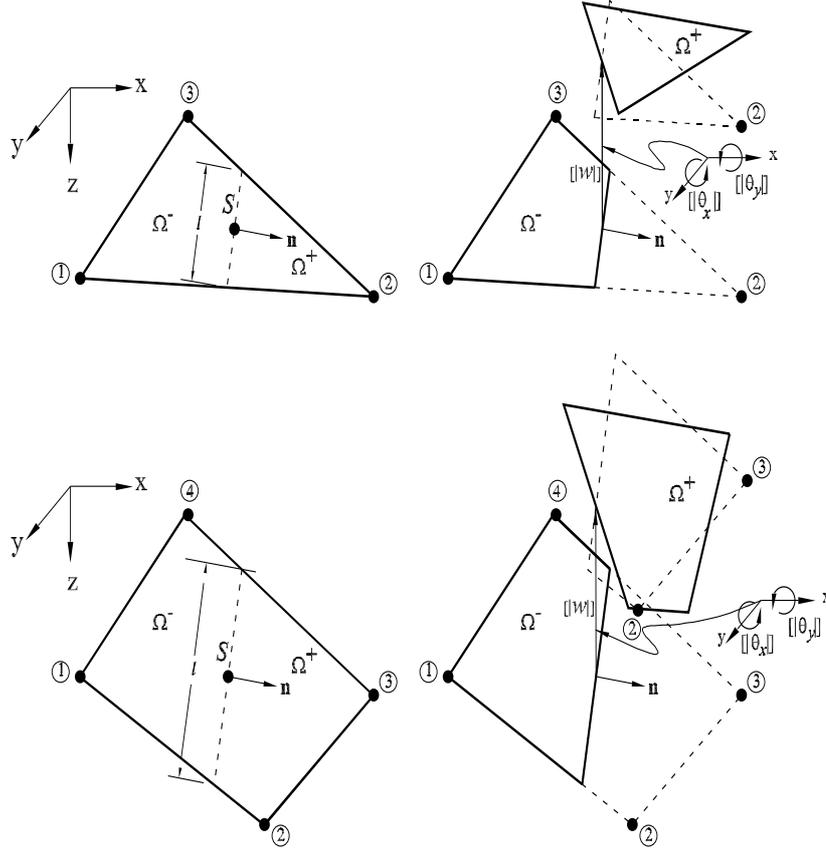


Figura 6.7: Elemento finito triangular y rectangular placa con una discontinuidad.

El desplazamiento transversal y las rotaciones continuas en función del salto se definen como:

$$\bar{w}(\mathbf{x}) = \hat{w}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) [[w]](\mathbf{x}) \quad (6.58)$$

$$\bar{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{\theta}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) [[\theta]](\mathbf{x}) \quad (6.59)$$

La curvatura y las deformaciones por cortante dependientes del desplazamiento transversal y los giros para el Modelo de Discontinuidad fuerte se definen por la siguiente ecuación:

$$\kappa = \bar{\kappa}^{\bar{\theta}} + \delta_s ([[\theta]]) \otimes \mathbf{n}^S \quad (6.60)$$

$$\gamma = \bar{\gamma}^{\bar{w}, \bar{\theta}} + \delta_s [[w]] \mathbf{n} - H_s [[\theta]] \quad (6.61)$$

En el Modelo de Discontinuidad Discreta que considera que cuando el material alcanza un valor, el cuerpo deja de ser continuo pero existe transmisión de momentos y fuerzas cortantes, por lo que sólo existe deformaciones continuas en el cuerpo. Por lo anterior, las curvatura y las deformaciones por cortante continuas están dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\kappa}}^{\bar{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{L}_b^T \bar{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}) &= (\nabla \bar{w}(\mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}))\end{aligned}\tag{6.62}$$

El campo de desplazamiento transversal y las rotaciones regulares se interpola con la siguiente expresión:

$$\hat{w} = \mathbf{N}w_d \tag{6.63}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{N}\boldsymbol{\theta}_d \tag{6.64}$$

donde las \mathbf{N} corresponde a la funciones de interpolación estándar, definidas en los nodos del elemento

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{i=n} N_i^{(e)} \tag{6.65}$$

y w_d y $\boldsymbol{\theta}_d$ corresponde al vector de los desplazamiento transversal y las rotaciones nodales. La función $M_S(\mathbf{x})$ se define dentro del elemento como:

$$M_S^e(\mathbf{x}) = H_S^e(\mathbf{x}) - \varphi^e \tag{6.66}$$

De la definición de la función φ^e en la ec. (2.12), se puede obtener de la siguiente expresión:

$$\varphi^e = \sum_{i+=1}^{n_e^+} N_{i+} \tag{6.67}$$

La funciones N_{i+} corresponden a la funciones de forma de los nudos del lado derecho de la discontinuidad, que satisfacen la definición de la función φ en la ec. (2.12). Así, se tienen los elementos necesarios para aproximar el campo desplazamiento transversal y las rotaciones, definido en la ecs. (6.55) y (6.56), en función de los valores nodales y de los salto en el nudo interior.

$$w(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})w_d + \underbrace{M_S^e(\mathbf{x})}_{\mathbf{N}_c} [w](\mathbf{x}) \tag{6.68}$$

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_d + M_S(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\theta}](\mathbf{x}) \tag{6.69}$$

y el de las continuas de las ecs. (6.58) y (6.59) en función del salto se definen como:

$$\bar{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})w_d - \varphi^e(\mathbf{x}) [w](\mathbf{x}) \tag{6.70}$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_d - \varphi^e(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\theta}](\mathbf{x}) \tag{6.71}$$

Con las ecuaciones anteriores, la curvatura y de las deformaciones por cortante continuas definidas en la ec. (6.62) se aproximan como:

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}}^{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{L}_b \theta_d - \mathbf{L}_b^T \varphi(\mathbf{x}) [|\theta|] \quad (6.72)$$

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\bar{w}, \bar{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{x}) = [\nabla (\mathbf{N}w_d - \varphi(\mathbf{x}) [|\dot{w}|]) - (\mathbf{N}\theta_d - \varphi(\mathbf{x}) [|\dot{\theta}|])] \quad (6.73)$$

6.6.1 Matriz mixta

Para aproximar la solución del funcional de energía de la ec. (6.40) con el método de los elementos finitos, se consideran como variables independientes el desplazamiento transversal w , el giro $\boldsymbol{\theta}$, la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$, las deformaciones por cortante $\boldsymbol{\gamma}$, el momento M y la fuerza cortante V .

$$\begin{aligned} \dot{w}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{w}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [|\dot{w}|] \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot \left[\left[\dot{\boldsymbol{\theta}} \right] \right] \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ \dot{M}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_M(\mathbf{x}) \cdot \dot{M} \\ \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_V(\mathbf{x}) \cdot \dot{V} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Con la aproximación del desplazamiento transversal y el de las rotaciones, se puede calcular la parte continuo de éstos en las ecs. (6.70) y (6.71), así como la curvatura y de las deformaciones por cortante continuas de las ecs. (6.72) y (6.73). Posteriormente, las ecuaciones anteriores se sustituyen en la ec. (6.44), se derivan con respecto a cada una de las variables y se igualan a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{w}_d} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \nabla^T \mathbf{N}_V \dot{V} d\Omega - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{q} d\Omega - \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}^T \dot{\bar{V}} d\Gamma & (6.75) \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [|\dot{w}_d|]} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \nabla^T \mathbf{N}_V \dot{V} d\Omega - \int_S \dot{V}_s \mathbf{n} dS \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\theta}_d} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{L}_b^T \mathbf{N}_M \dot{M} d\Omega - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_V \dot{V} d\Omega - \int_{\Gamma_m} \mathbf{N}^T \dot{\bar{M}} d\Gamma \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [|\dot{\theta}_d|]} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \mathbf{L}_b^T \mathbf{N}_M \dot{M} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \mathbf{N}_V \dot{V} d\Omega - \int_S \dot{M}_s \mathbf{n} dS \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\kappa}} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\kappa}}^T \mathbf{N}_M \dot{M} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\kappa}}^T \mathbf{D}_f \cdot \mathbf{N}_{\hat{\kappa}} \dot{\kappa} d\Omega \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\gamma}} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\gamma}}^T \mathbf{N}_V \dot{V} d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\gamma}}^T \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{N}_{\hat{\gamma}} \dot{\gamma} d\Omega \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{M}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_M^T \cdot \left[\left(\mathbf{L}_b^T \dot{\theta}_d - \mathbf{L}_b^T \varphi^e [|\dot{w}_d|] \right) - \mathbf{N}_{\hat{\kappa}} \dot{\kappa} \right] d\Omega \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{V}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_V^T \cdot \left[\nabla \mathbf{N} \dot{w}_d - \nabla \varphi^e [|\dot{w}_d|] - \left(\mathbf{N} \dot{\theta}_d - \varphi^e [|\dot{w}_d|] \right) - \mathbf{N}_{\hat{\gamma}} \dot{\gamma} \right] d\Omega
\end{aligned}$$

Denotando cada término de la ec. (5.22) como una submatriz se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{Vw} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \nabla^T \mathbf{N}_V d\Omega & \mathbf{K}_{M\hat{\kappa}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\kappa}}^T \mathbf{N}_M d\Omega \\
\mathbf{K}_{M\theta} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{L}_b^T \mathbf{N}_M d\Omega & \mathbf{K}_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\gamma}}^T \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{N}_{\hat{\gamma}} d\Omega \\
\mathbf{K}_{V\theta} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_V d\Omega & \mathbf{K}_{V\hat{\gamma}} &= - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\gamma}}^T \mathbf{N}_V d\Omega \\
\mathbf{K}_{V[|w_d|]} &= - \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \nabla^T \mathbf{N}_V d\Omega & \mathbf{F}_{\text{ext}V} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{q} d\Omega + \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}^T \dot{\bar{V}} d\Gamma \\
\mathbf{K}_{M[|\theta_d|]} &= - \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \mathbf{L}_b^T \mathbf{N}_M d\Omega & \mathbf{F}_{\text{ext}M} &= \int_{\Gamma_m} \mathbf{N}^T \dot{\bar{M}} d\Gamma \\
\mathbf{K}_{V[|\theta_d|]} &= \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \mathbf{N}_V d\Omega & \mathbf{F}_V &= \int_S \dot{V}_s \mathbf{n} dS \\
\mathbf{K}_{\hat{\kappa}\hat{\kappa}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{\hat{\kappa}}^T \mathbf{D}_f \cdot \mathbf{N}_{\hat{\kappa}} d\Omega & \mathbf{F}_M &= \int_S \dot{M}_s \mathbf{n} dS
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Finalmente, de las ecs. (6.76) se obtiene la matriz mixta de un elemento finito con ocho variables independientes para la aproximación discreta, capaz de simular el salto de los desplazamientos y deformaciones en S :

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{Vw} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{M\theta} & \mathbf{K}_{V\theta} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{V[[w_d]]} \\
 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{M[[\theta_d]]} & \mathbf{K}_{V[[\theta_d]]} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\hat{\kappa}\hat{\kappa}} & 0 & \mathbf{K}_{M\hat{\kappa}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}} & 0 & \mathbf{K}_{V\hat{\gamma}} \\
 0 & \mathbf{K}_{\theta M} & 0 & \mathbf{K}_{[[\theta_d]]M} & \mathbf{K}_{\hat{\kappa}M} & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{K}_{wV} & \mathbf{K}_{\theta V} & \mathbf{K}_{[[w_d]]V} & \mathbf{K}_{[[\theta_d]]V} & 0 & \mathbf{K}_{\hat{\gamma}V} & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{Bmatrix}
 \dot{w} \\
 \dot{\theta} \\
 [[\dot{w}_d]] \\
 [[\dot{\theta}_d]] \\
 \dot{\hat{\kappa}} \\
 \dot{\hat{\gamma}} \\
 \dot{M} \\
 \dot{V}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}V} \\
 \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}M} \\
 \dot{\mathbf{F}}_V \\
 \dot{\mathbf{F}}_M \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (6.77)$$

6.6.2 Matriz de rigideces

Placas gruesas con discontinuidades interiores

Para aproximar el funcional de energía para placas gruesas con discontinuidades interiores (6.46) se consideran como variables independientes el desplazamiento transversal w y las rotaciones θ .

$$\begin{aligned}
 \dot{w}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{w}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{w}]] \\
 \dot{\theta}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\theta}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\theta}]]
 \end{aligned}
 \quad (6.78)$$

La parte continua de éstas, se obtiene de las ecs. (6.70) y (6.71), así como la curvatura y de las deformaciones por cortante continuas de las ec. (6.72) y (6.73). Posteriormente, se sustituyen estas ecuaciones en el funcional de la ec. (6.46), se deriva con respecto a las variables independientes y se iguala a cero, así se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{w}_d} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \left[\mathbf{N}^T \nabla^T \mathbf{D}_s \left(\nabla \mathbf{N} \dot{w}_d - \nabla \varphi^e [|\dot{w}_d|] - \mathbf{N} \dot{\theta}_d \right) - \mathbf{N}^T \cdot \dot{q} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}^T \dot{V} d\Gamma \quad (6.79) \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\theta}_d} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \left[\mathbf{N}^T \mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b \left(\mathbf{N} \dot{\theta}_d - \varphi^e [|\dot{\theta}_d|] \right) - \mathbf{N}^T \mathbf{D}_s \left(\nabla \mathbf{N} \dot{w}_d - \nabla \varphi^e [|\dot{w}_d|] - \mathbf{N} \dot{\theta}_d \right) \right] d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma_m} \mathbf{N}^T \dot{M} d\Gamma \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [|\dot{w}_d|]} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \nabla^T \mathbf{D}_s \left(\nabla \mathbf{N} \dot{w}_d - \nabla \varphi^e [|\dot{w}_d|] - \mathbf{N} \dot{\theta}_d \right) d\Omega - \int_S \dot{V}_s \mathbf{n} dS \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [|\dot{\theta}_d|]} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \left[\varphi^{eT} \mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b \left(\mathbf{N} \dot{\theta}_d - \varphi^e [|\dot{\theta}_d|] \right) + \varphi^{eT} \mathbf{D}_s \left(\nabla \mathbf{N} \dot{w}_d - \nabla \varphi^e [|\dot{w}_d|] - \mathbf{N} \dot{\theta}_d \right) \right] d\Omega \\
&\quad - \int_S \dot{M}_s \mathbf{n} dS
\end{aligned}$$

Denotando cada término de la ec. (6.79) como una submatriz se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ww} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \nabla^T \mathbf{D}_s \nabla \mathbf{N} d\Omega & \mathbf{K}_{[|w|][|w|]} &= \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \nabla^T \mathbf{D}_s \nabla \varphi^e d\Omega \\
\mathbf{K}_{w\theta} &= \int_{\Omega \setminus S} -\mathbf{N}^T \nabla^T \mathbf{D}_s \mathbf{N} d\Omega & \mathbf{K}_{[|w|][|\theta|]} &= - \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \nabla^T \mathbf{D}_s \varphi^e d\Omega \\
\mathbf{K}_{w[|w|]} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \nabla^T \mathbf{D}_s \nabla \varphi^e d\Omega & \mathbf{K}_{[|\theta|][|\theta|]} &= \int_{\Omega \setminus S} [\varphi^{eT} \mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b \varphi^e + \varphi^{eT} \mathbf{D}_s \varphi^e] d\Omega \\
\mathbf{K}_{w[|\theta|]} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \nabla^T \mathbf{D}_s \varphi^e d\Omega & \dot{\mathbf{F}}_{\text{extV}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{q} d\Omega + \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}^T \dot{V} d\Gamma \\
\mathbf{K}_{\theta\theta} &= \int_{\Omega \setminus S} [\mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b + \mathbf{N}^T \mathbf{D}_s \mathbf{N}] d\Omega & \dot{\mathbf{F}}_{\text{extM}} &= \int_{\Gamma_m} \mathbf{N}^T \dot{M} d\Gamma \\
\mathbf{K}_{\theta[|w|]} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \mathbf{D}_s \nabla \varphi^e d\Omega & \dot{\mathbf{F}}_V &= \int_S \dot{V}_s \mathbf{n} dS \\
\mathbf{K}_{\theta[|\theta|]} &= - \int_{\Omega \setminus S} [\mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \varphi^e + \mathbf{N}^T \mathbf{D}_s \varphi^e] d\Omega & \dot{\mathbf{F}}_M &= \int_S \dot{M}_s \mathbf{n} dS
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Finalmente, de las ecs. (6.80) se obtiene la matriz de rigideces de un elemento finito con cuatro variables independientes para la aproximación discreta, capaz de simular el salto de los desplazamientos y deformaciones en S :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\theta} & \mathbf{K}_{w[[w]]} & \mathbf{K}_{w[[\theta]]} \\ \mathbf{K}_{\theta w} & \mathbf{K}_{\theta\theta} & \mathbf{K}_{\theta[[w]]} & \mathbf{K}_{\theta[[\theta]]} \\ \mathbf{K}_{[[w]]w} & \mathbf{K}_{[[w]]\theta} & \mathbf{K}_{[[w]][[w]]} & \mathbf{K}_{[[w]][[\theta]]} \\ \mathbf{K}_{[[\theta]]w} & \mathbf{K}_{[[\theta]]\theta} & \mathbf{K}_{[[\theta]][[w]]} & \mathbf{K}_{[[\theta]][[\theta]]} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ [[\dot{w}_d]] \\ [[\dot{\theta}_d]] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{extV}} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\text{extM}} \\ \dot{\mathbf{F}}_V \\ \dot{\mathbf{F}}_M \end{Bmatrix} \quad (6.81)$$

Placas delgadas con discontinuidades interiores

Para aproximar el funcional de energía para placas delgadas con discontinuidades interiores (6.46) se consideran como variables independientes el desplazamiento transversal w , pues las rotaciones dependen de la derivada del desplazamiento transversal. Puesto que la energía que considera esta formulación es la energía por flexión, sólo se presentan discontinuidades en las rotaciones, que físicamente representan articulaciones. El desplazamiento transversal regular se aproximan como:

$$\dot{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{w}_d \quad (6.82)$$

Las rotaciones en función de los desplazamientos transversales está dado por:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \dot{w}(\mathbf{x}, t) + \psi_S(\mathbf{x}) [[\dot{\theta}]] = \bar{\boldsymbol{\theta}}(x) + H_s(x) [[\theta]] = \hat{\boldsymbol{\theta}}(x) + \psi_S(x) [[\theta]] \quad (6.83)$$

Sustituyendo las rotaciones de la ec. (6.83) en la ec. (6.4) se tiene la curvatura

$$\kappa = \mathbf{L}_b \dot{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\mathbf{P} \bar{w}}_{\bar{\kappa}^w} + \underbrace{\boldsymbol{\delta}_s [[\theta]] \mathbf{n}}_{\bar{\kappa}_b^{[[\theta]]}} = \underbrace{\mathbf{P} \dot{w} - \mathbf{L}_b \varphi^e(\mathbf{x}) [[\dot{\theta}]]}_{\bar{\kappa}^w} + \underbrace{\boldsymbol{\delta}_s [[\theta]] \mathbf{n}}_{\bar{\kappa}_b^{[[\theta]]}} \quad (6.84)$$

Sustituyendo las ecs. (6.84) en el funcional de energía de la ec. (6.49), derivando respecto a cada una de las variables independientes e igualando a cero, se tiene.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{w}_d} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \left[\mathbf{N}^T \mathbf{P}^T \mathbf{D}_f \left(\mathbf{P} \mathbf{N} \dot{w}_d - \mathbf{L}_b \varphi^e(\mathbf{x}) [[\dot{\theta}]] \right) - \mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{q}} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}^T \dot{V} d\Gamma - \int_{\Gamma_m} \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{M}} d\Gamma \\ \frac{\partial \Pi}{\partial [[\dot{\theta}_d]]} &\equiv 0 \equiv - \int_{\Omega \setminus S} \varphi^e \mathbf{P}^T \mathbf{D}_f \left(\mathbf{P} \mathbf{N} \dot{w}_d - \mathbf{L}_b \varphi^e(\mathbf{x}) [[\dot{\theta}]] \right) d\Omega - \int_S \dot{M}_s \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (6.85)$$

Denotando cada término de la ec. (6.85) como una submatriz se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ww} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \mathbf{P}^T \mathbf{D}_f \mathbf{P} \mathbf{N} d\Omega & \dot{\mathbf{F}}_M &= \int_S \dot{M}_s \mathbf{n} dS \\
\mathbf{K}_{w[[w]]} &= - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \mathbf{P}^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b \varphi^e d\Omega & \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}^T \cdot \dot{q} d\Omega + \int_{\Gamma_v} \mathbf{N}^T \dot{\bar{V}} d\Gamma + \int_{\Gamma_m} \mathbf{N}^T \dot{\bar{M}} d\Gamma \\
\mathbf{K}_{[[w]][[w]]} &= \int_{\Omega \setminus S} \varphi^{eT} \mathbf{L}_b^T \mathbf{D}_f \mathbf{L}_b \varphi^e d\Omega
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Finalmente, de las ecs. (6.86) se obtiene la matriz de rigideces de un elemento finito con dos variables independientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w[[w]]} \\ \mathbf{K}_{[[w]]w} & \mathbf{K}_{[[w]][[w]]} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ [[\dot{\theta}_d]] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{extV}} \\ \dot{\mathbf{F}}_M \end{Bmatrix} \tag{6.87}$$

6.6.3 Matriz de Flexibilidades

Para aproximar la solución de los funcionales de energía complementaria de la ec. (6.54). Se consideran como variables independientes los momentos M y los cortantes, que se aproximan como:

$$\begin{aligned}
\dot{M}(x) &= \mathbf{N}_{M_{A \setminus S}} \dot{M}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{M_S} \dot{M}_S \\
\dot{V}(x) &= \mathbf{N}_{V_{A \setminus S}} \dot{V}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{V_S} \dot{V}_S
\end{aligned} \tag{6.88}$$

donde $\mathbf{N}_{M_{A \setminus S}}$, \mathbf{N}_{M_S} , $\mathbf{N}_{V_{A \setminus S}}$ y \mathbf{N}_{V_S} son las funciones de interpolación de momento y cortante correspondientemente.

Sustituyendo la ec. (6.88) en el funcional de las ec. (6.54) y derivando con respecto a cada una de las variables independientes se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{M}_{A \setminus S}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{M_{A \setminus S}}^T \mathbf{E}_f \left[\mathbf{N}_{M_{A \setminus S}} \dot{M}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{M_S} \dot{M}_S \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\theta} \dot{\bar{\theta}} d\Gamma \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{V}_{A \setminus S}} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{V_{A \setminus S}}^T \mathbf{E}_s \left[\mathbf{N}_{V_{A \setminus S}} \dot{V}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{V_S} \dot{V}_S \right] d\Omega - \int_{\Gamma_m} \dot{\bar{w}} d\Gamma \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{M}_S} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{M_S}^T \mathbf{E}_f \left[\mathbf{N}_{M_{A \setminus S}} \dot{M}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{M_S} \dot{M}_S \right] d\Omega + \int_S \mathbf{n} \cdot [[\dot{\theta}_d]] d\Gamma \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{V}_S} &\equiv 0 \equiv \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{V_S}^T \mathbf{E}_s \left[\mathbf{N}_{V_{A \setminus S}} \dot{V}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{V_S} \dot{V}_S \right] d\Omega + \int_S \mathbf{n} \cdot [[\dot{w}_d]] d\Gamma
\end{aligned} \tag{6.89}$$

Denotando cada término de la ec. (6.89) como una submatriz se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{MM} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{M_{A \setminus S}}^T \mathbf{E}_f \mathbf{N}_{M_{A \setminus S}} d\Omega & \mathbf{K}_{vv} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{V_S}^T \mathbf{E}_s \mathbf{N}_{V_S} d\Omega \\
\mathbf{K}_{Mm} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{M_{A \setminus S}}^T \mathbf{E}_f \mathbf{N}_{M_S} d\Omega & \dot{\mathbf{R}}_{\theta} &= \int_{\Gamma_{\theta}} \dot{\bar{\theta}} d\Gamma \\
\mathbf{K}_{VV} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{V_{A \setminus S}}^T \mathbf{E}_s \mathbf{N}_{V_{A \setminus S}} d\Omega & \dot{\mathbf{R}}_w &= \int_{\Gamma_v} \dot{\bar{w}} d\Gamma \\
\mathbf{K}_{Vv} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{V_{A \setminus S}}^T \mathbf{E}_s \mathbf{N}_{V_S} d\Omega & \dot{\mathbf{R}}_M &= \int_S \mathbf{n} \cdot \left[\left[\dot{\theta}_d \right] \right] d\Gamma \\
\mathbf{K}_{mm} &= \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{N}_{M_S}^T \mathbf{E}_f \mathbf{N}_{M_S} d\Omega & \dot{\mathbf{R}}_V &= \int_S \mathbf{n} \cdot \left[\left[\dot{w}_d \right] \right] d\Gamma
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Finalmente, de las ecs. (6.90) se obtiene la matriz de flexibilidades de un elemento finito con dos variables independientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{MM} & 0 & \mathbf{K}_{Mm} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{VV} & 0 & \mathbf{K}_{Vv} \\ \mathbf{K}_{mM} & 0 & \mathbf{K}_{mm} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{vV} & 0 & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{M}_{A \setminus S} \\ \dot{V}_{A \setminus S} \\ \dot{M}_S \\ \dot{V}_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{\theta} \\ \dot{\mathbf{R}}_w \\ \dot{\mathbf{R}}_M \\ \dot{\mathbf{R}}_V \end{Bmatrix} \tag{6.91}$$

donde $\dot{\mathbf{R}}_{\theta}$ y $\dot{\mathbf{R}}_w$ corresponden a los giros y desplazamientos transversales prescritos, $\dot{\bar{\theta}}$ y $\dot{\bar{w}}$. Los términos $\dot{\mathbf{R}}_M$ y $\dot{\mathbf{R}}_V$ se define como:

$$\dot{\mathbf{R}}_M = - \int_S \mathbf{E}^M \dot{M}_S d\Gamma \tag{6.92}$$

$$\dot{\mathbf{R}}_V = - \int_S \mathbf{E}^V \dot{V}_S \cdot \mathbf{n} d\Gamma \tag{6.93}$$

donde \mathbf{E}^M y \mathbf{E}^V son los tensores constitutivos tangentes inversos momento-salto en las rotaciones y cortante-salto en los desplazamientos transversales, correspondientemente.

6.6.4 Formulación del elemento finito triangular placa con discontinuidades

Considere el elemento finito triangular placa con un área A_e que presenta un salto en el campo de desplazamiento transversal $[[w]]$ y en los giros $[[\theta_x]]$, $[[\theta_y]]$ (figura 6.8). Las propiedades mecánicas de este elemento son módulo elástico E , relación de Poisson ν y módulo de ablandamiento discreto \bar{H} . Este elemento triangular placa se puede idealizar mediante una jerarquía de elementos finitos con discontinuidades interiores desarrollados anteriormente.

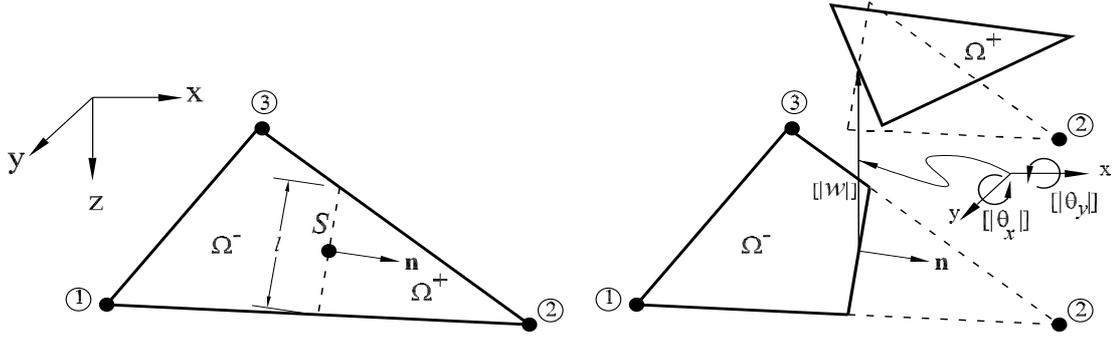


Figura 6.8: Elemento finito triangular placa con una discontinuidad.

Matriz Mixta

En esta aproximación, el elemento triangular de la figura (6.8) se idealiza como un elemento finito mixto (figura 6.9) en el que se aproximan las siguientes variables en forma independiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{w}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{w}]] \\
 \dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} [[\dot{\theta}_x]] \\ [[\dot{\theta}_y]] \end{bmatrix} \\
 \dot{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \\
 \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} \\
 \dot{M}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_M(\mathbf{x}) \cdot \dot{M} \\
 \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}_V(\mathbf{x}) \cdot \dot{V}
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

Si se considera que las funciones de interpolación son las mismas,

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{N}_M = \mathbf{N}_V \tag{6.95}$$

cada término de la matriz \mathbf{N} , se definen en la ec. (5.68)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \tag{6.96}$$

La función $\mathbf{N}_c(\mathbf{x})$ de la ec. (6.66) se define como:

$$\mathbf{N}_c(\mathbf{x}) = M_S^e(\mathbf{x}) = H_S^e(\mathbf{x}) - \varphi^e \tag{6.97}$$

en este caso la función φ^e se define por:

$$\varphi^e = N_2 \tag{6.98}$$

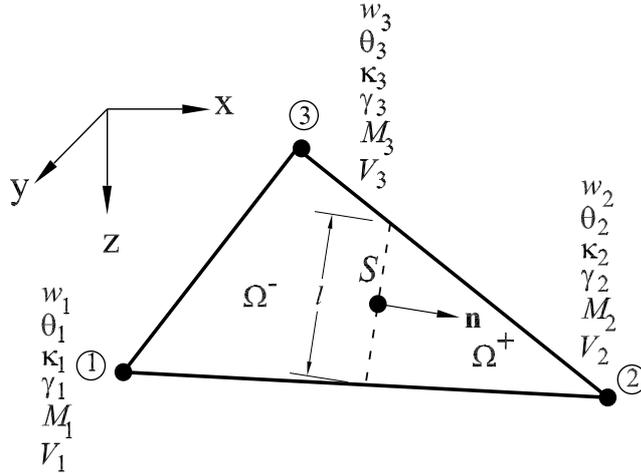


Figura 6.9: Elemento finito mixto triangular placa con una discontinuidad.

Sustituyendo las ecs. (6.95) y (6.98) en las integrales correspondientes de la ec. (6.76) se obtiene la matriz de rigideces mixta de este elemento triangular con discontinuidad.

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{Vw} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{M\theta} & \mathbf{K}_{V\theta} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{V[[w_d]]} \\
 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{M[[\theta_d]]} & \mathbf{K}_{V[[\theta_d]]} \\
 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\hat{\kappa}\hat{\kappa}} & 0 & \mathbf{K}_{M\hat{\kappa}} & 0 \\
 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{K}_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}} & 0 & \mathbf{K}_{V\hat{\gamma}} \\
 0 & \mathbf{K}_{\theta M} & 0 & \mathbf{K}_{[[\theta_d]]M} & \mathbf{K}_{\hat{\kappa}M} & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{K}_{wV} & \mathbf{K}_{\theta V} & \mathbf{K}_{[[w_d]]V} & \mathbf{K}_{[[\theta_d]]V} & 0 & \mathbf{K}_{\hat{\gamma}V} & 0 & 0
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ [[\dot{w}_d]] \\ [[\dot{\theta}_d]] \\ \hat{\kappa} \\ \hat{\gamma} \\ \dot{M} \\ \dot{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}V} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}M} \\ \dot{\mathbf{F}}_V \\ \dot{\mathbf{F}}_M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.99)$$

Matriz de rigideces

Placas gruesas En esta aproximación el elemento de la figura 6.8 se idealiza como un elemento triangular en el que se aproximan el desplazamiento transversal \dot{w} y los giros $\dot{\theta}$ (figura 6.10):

$$\begin{aligned}
 \dot{w}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{w}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{w}]] \\
 \dot{\theta}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\theta}_d + \mathbf{N}_c(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\theta}]]
 \end{aligned} \quad (6.100)$$

Si las funciones de interpolación \mathbf{N} se aproximan con funciones lineales como las de la ec. (5.68). Posteriormente, si se sustituyen en la matriz definida en la ec. (6.80), se obtiene una matriz de rigideces del elemento triangular para representar placas gruesas con discontinuidades interiores.

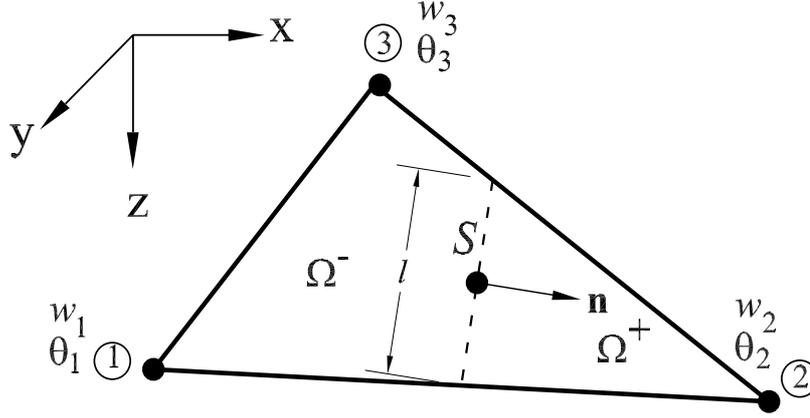


Figura 6.10: Elemento finito de placa una gruesa con una discontinuidad.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w\theta} & \mathbf{K}_{w[[w]]} & \mathbf{K}_{w[[\theta]]} \\ \mathbf{K}_{\theta w} & \mathbf{K}_{\theta\theta} & \mathbf{K}_{\theta[[w]]} & \mathbf{K}_{\theta[[\theta]]} \\ \mathbf{K}_{[[w]]w} & \mathbf{K}_{[[w]]\theta} & \mathbf{K}_{[[w]][[w]]} & \mathbf{K}_{[[w]][[\theta]]} \\ \mathbf{K}_{[[\theta]]w} & \mathbf{K}_{[[\theta]]\theta} & \mathbf{K}_{[[\theta]][[w]]} & \mathbf{K}_{[[\theta]][[\theta]]} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ [[\dot{w}_d]] \\ [[\dot{\theta}_d]] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\text{extV}} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\text{extM}} \\ \dot{\mathbf{F}}_V \\ \dot{\mathbf{F}}_M \end{Bmatrix} \quad (6.101)$$

Placas delgadas En esta aproximación elemento de la figura 6.8 se idealiza como un elemento triangular con discontinuidades para resolver problemas en placas delgadas. En esta formulación las rotaciones $\dot{\theta}$, dependen de la derivada de los desplazamientos transversales \dot{w} , los cuales se consideran como variables independientes (figura 6.11).

$$\dot{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{w}_d \quad (6.102)$$

con los que se aproximan el campo de las rotaciones de la ec. (6.83):

$$\dot{\theta}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{w}_d + \psi_S(\mathbf{x}) [[\dot{\theta}]] \quad (6.103)$$

donde \mathbf{N} es la matriz de las funciones de interpolación:

$$\mathbf{N} = [N_i, N_j, N_k] \quad (6.104)$$

de los desplazamientos y giros en los nodos

$$\dot{w} = [\dot{w}_i, \dot{\theta}_{x_i}, \dot{\theta}_{y_i}]^T \quad (6.105)$$

Considerando las funciones de interpolación del elemento triangular placa desarrollado por Bazeley *et al.* (1966):

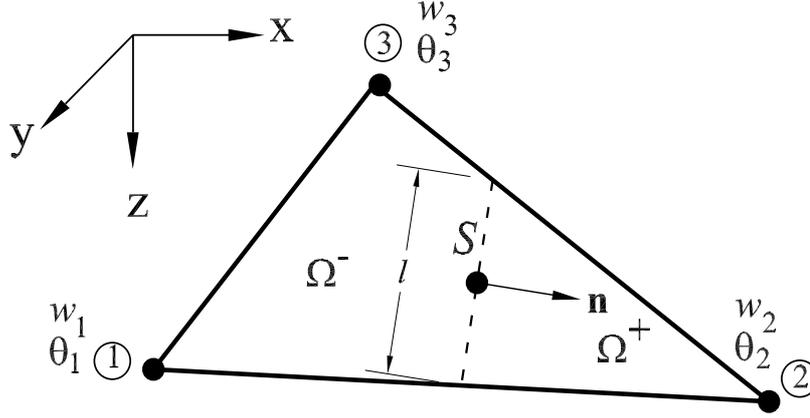


Figura 6.11: Elemento finito de placa delgada con una discontinuidad.

$$N_i = \left\{ \begin{array}{c} L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_k - L_i L_j - L_i L_k^2 \\ -b_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) + b_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ c_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \end{array} \right\} \quad (6.106)$$

con la permutación cíclica de los índices. L se define como:

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A_e}$$

Los valores de las constantes a , b y c se definen en la ec. (5.69). La función, φ^e , se define en la ec. (6.98).

Posteriormente, se sustituyen y se calculan las integrales en la ec. (6.86), se tienen los términos de la matriz de rigideces del elemento triangular placa delgada con discontinuidades interiores en la ec. (6.87)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{w[[w]]} \\ \mathbf{K}_{[[w]]w} & \mathbf{K}_{[[w]][[w]]} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \dot{w} \\ [[\dot{\theta}_d]] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{F}}_{\text{extV}} \\ \dot{\mathbf{F}}_M \end{array} \right\} \quad (6.107)$$

Matriz de flexibilidades

El primer paso en esta formulación es asumir que el campo de esfuerzos que satisface las condiciones de equilibrio. Se consideran como variables independientes los momentos M y la fuerza cortantes V , que se interpola como:

$$\begin{aligned} \dot{M}(x) &= \mathbf{N}_{M_{A \setminus S}} \dot{M}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{M_S} \dot{M}_S \\ \dot{V}(x) &= \mathbf{N}_{V_{A \setminus S}} \dot{V}_{A \setminus S} + \mathbf{N}_{V_S} \dot{V}_S \end{aligned} \quad (6.108)$$

Si se utilizan las funciones de interpolación \mathbf{S}_m y \mathbf{S}_c de las ecs. (5.84) para aproximar las ecs. (5.86), se tiene.

$$\begin{aligned}\dot{M}(x) &= \mathbf{S}_m \dot{M}_{A \setminus S} + \mathbf{S}_c \dot{M}_S \\ \dot{V}(x) &= \mathbf{S}_m \dot{V}_{A \setminus S} + \mathbf{S}_c \dot{V}_S\end{aligned}\quad (6.109)$$

Sustituyendo las funciones de interpolación en las ec. (6.90) y posteriormente en la ec. (6.91), se tiene la siguiente matriz de flexibilidades para el elemento placa con discontinuidades.

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_m^T \mathbf{E}_f \mathbf{S}_m^T & 0 & \mathbf{S}_m^T \mathbf{E}_f \mathbf{S}_c & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_m^T \mathbf{E}_s \mathbf{S}_m^T & 0 & \mathbf{S}_m^T \mathbf{E}_s \mathbf{N} \mathbf{S}_c \\ \mathbf{S}_c^T \mathbf{E}_f \mathbf{S}_m & 0 & \mathbf{S}_c^T \mathbf{E}_f \mathbf{S}_c & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_c^T \mathbf{E}_s \mathbf{N} \mathbf{S}_m & 0 & \mathbf{S}_c^T \mathbf{E}_s \mathbf{S}_c \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{M}_{A \setminus S} \\ \dot{V}_{A \setminus S} \\ \dot{M}_S \\ \dot{V}_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma} \dot{\bar{\theta}} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \dot{\bar{w}} d\Gamma \\ - \int_S \mathbf{E}^M \dot{M}_S d\Gamma \\ - \int_S \mathbf{E}^V \dot{V}_S \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{Bmatrix} \quad (6.110)$$

6.7 Teoría de flexión en vigas

Las vigas son los elementos estructurales más comunes, particularmente en Ingeniería Civil y Mecánica. Una viga como elemento estructural tiene la función primaria de soportar cargas transversales y transmitir las a los apoyos, resistiéndolas principalmente a través de la flexión.

La flexión produce esfuerzos longitudinales de compresión en un lado de la viga, y de tensión en el otro. Las dos regiones se separan por una superficie neutra con esfuerzo cero. La combinación de esfuerzos a tensión y compresión produce un momento de flexión interno, el cual es el mecanismo primario que permite la transmisión de las cargas transversales a los apoyos (Felippa, 2004), este mecanismo se ilustra en la figura 6.12.

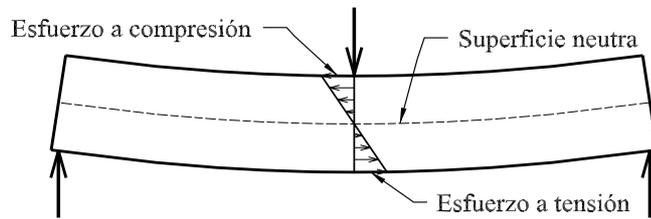


Figura 6.12: Cargas transversales en vigas que fundamentalmente se resisten por la acción de la flexión.

Los modelos matemáticos de las vigas estructurales se construyen a partir de las bases teóricas de vigas. Debido a que las vigas son realmente cuerpos tridimensionales, todos los modelos

necesariamente implican alguna forma de aproximación de su comportamiento físico. El modelo más simple y mejor conocido para vigas rectas y prismáticas se basa en la teoría de Bernoulli-Euler, que se conoce además como teoría clásica de vigas, y el otro modelo corresponde a la teoría de vigas de Timoshenko. El modelo de Bernoulli-Euler no considera las deformaciones transversales por cortante, sin embargo, los elementos basados en la teoría de Timoshenko incorporan las deformaciones del cortante transversal.

6.7.1 Teoría de vigas de Bernoulli-Euler

La teoría clásica (Bernoulli-Euler) de vigas se basa en las siguientes suposiciones (Felippa, 2004):

1. Simetría plana. El eje longitudinal es recto y la sección transversal de la viga tiene un plano longitudinal de simetría. Las cargas transversales resultantes que actúan en cada sección yacen en ese plano.
2. Variación de la sección transversal. La sección transversal es constante o varía suavemente.
3. Normal. Las secciones planas originalmente normales al eje de la viga permanecen planas y normales al eje longitudinal deformado después de la flexión, figura (6.13).
4. Energía de deformación. Los elementos toman solamente en cuenta la energía de deformación interna debida a flexión. Otros efectos como la deformación transversal y la fuerza axial se ignoran.
5. Linearización. Las deflexiones transversales, rotaciones y deformaciones se consideran pequeñas tal que las suposiciones de deformaciones infinitesimales sean aplicables.
6. Comportamiento elástico. Se asume que el comportamiento del material es elástico e isotrópico. Vigas heterogéneas fabricadas con diferentes materiales, como el concreto reforzado, no se excluyen.

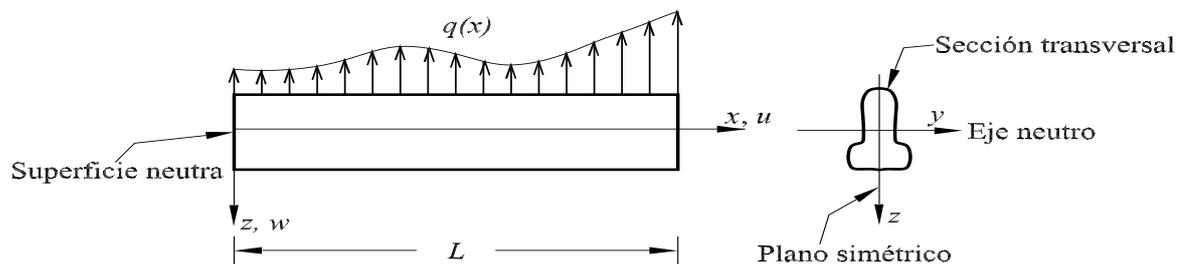


Figura 6.13: Elemento viga.

PVF

El campo de ecuaciones que definen el PVF en $0 \leq x \leq L$ de la teoría de vigas de Bernoulli-Euler son:

Ecuaciones cinemáticas La rotación θ de la sección transversal y la curvatura κ del eje longitudinal se definen como:

$$\theta = \frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d\theta}{dx} \quad (6.111)$$

Ecuaciones Constitutivas La relación momento-curvatura es consecuencia de asumir una distribución lineal de deformaciones y esfuerzos sobre la sección transversal, esto es:

$$M = EI\kappa \quad (6.112)$$

Ecuaciones de equilibrio Las ecuaciones de equilibrio se definen por las siguientes relaciones:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad \frac{dV}{dx} - q = \frac{d^2 M}{dx^2} - q = 0 \quad (6.113)$$

que son análogas a las ecuaciones de equilibrio para placas, ecs. (6.11).

Funcional de energía

Asumiendo que la compatibilidad en el funcional de energía general de placas, definido en la ec. (6.20), se satisface *a priori* por las relaciones en la rotación y en la curvatura dadas en la ec. (6.111). Luego entonces el funcional de energía funcional para las vigas de Bernoulli-Euler es:

$$\Pi(w) = \int_L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^T EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - qw \right] dx \quad (6.114)$$

Este funcional de energía, que considera la energía debido a la flexión, tiene al campo de desplazamiento transversal $w(x)$ como variable independiente.

6.7.2 Aproximación mediante el MEF

En la teoría clásica de vigas, el desplazamiento transversal w se aproxima por la siguiente ecuación

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 \theta_1 + N_3 w_2 + N_4 \theta_2 = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (6.115)$$

donde las funciones de interpolación se definen por

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3Lx^2 + L^3) \\ N_2 &= \frac{1}{L^3} (Lx^3 - 2L^2x^2 + L^3x) \\ N_3 &= \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3Lx^2) \\ N_4 &= \frac{1}{L^3} (x^3L - L^2x^2) \end{aligned} \quad (6.116)$$

Substituyendo la ec. (6.115) en la ec. (6.114),

$$\Pi(\mathbf{d}) = \int_L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N} \mathbf{d}}{\partial x^2} \right)^T EI \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N} \mathbf{d}}{\partial x^2} \right) - (\mathbf{N} \mathbf{d})^T q \right] dL \quad (6.117)$$

La condición para que el funcional de energía Π de la ec. (6.117) tenga un valor estacionario es que, $\delta\Pi = 0$.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}} = 0 \quad (6.118)$$

Así,

$$\int_L \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \right)^T}_{\mathbf{B}^T} EI \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \right)}_{\mathbf{B}} dx \mathbf{d} - \int_L \mathbf{N}^T q dx = 0 \quad (6.119)$$

$$\underbrace{\int_L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dL}_{\mathbf{K}} \mathbf{d} = \int_L \mathbf{N}^T q dx \quad (6.120)$$

Substituyendo las ecs. (6.116) en la ec. (6.119), se tiene la siguiente matriz de rigideces

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.121)$$

para la teoría clásica de Bernoulli-Euler.

6.7.3 Teoría de vigas de Timoshenko

El modelo de Timoshenko introduce el efecto de la deformación por cortante transversal, considera que la sección transversal permanece plana pero no necesariamente normal a la superficie neutra deformada, figura (6.14).

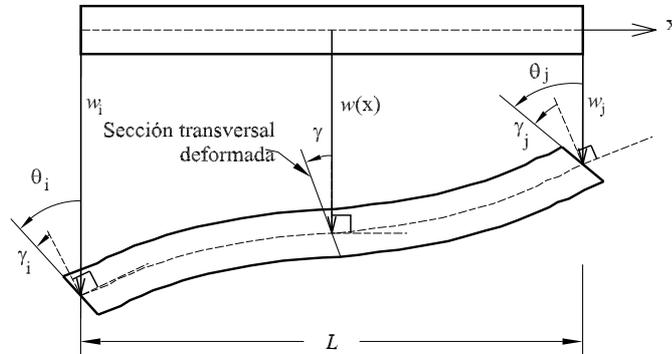


Figura 6.14: Viga de Timoshenko.

La descripción del comportamiento de la viga se mejora mediante la introducción de dos cantidades en cada punto del eje neutro, la deflexión transversal w y la rotación θ de la sección transversal, por lo que la deformación por cortante se define por la diferencia entre la rotación de la sección transversal y la pendiente del eje neutro.

Las ecuaciones que definen el PVF en $0 \leq x \leq L$ de la teoría de vigas de Timoshenko son:

Ecuación cinemática La rotación θ de la sección transversal y la curvatura κ de la deflexión longitudinal del eje son:

$$\theta = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad \kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (6.122)$$

Ecuación constitutiva Las relaciones momento-curvatura y cortante-deformación se definen como:

$$\begin{aligned} M &= EI\kappa \\ V &= \mu A_s \gamma \end{aligned} \quad (6.123)$$

donde V es la fuerza cortante transversal, $\gamma = \gamma(x)$ es la rotación de cortante promedio sobre la sección transversal, μ es el módulo de cortante y $A_s = kA$ el área efectiva por cortante. El factor k toma en cuenta las correcciones promediadas hechas por la distribución del cortante de deformación a lo largo del peralte, *e.g.*, para una viga con sección transversal rectangular el valor del k es usualmente $5/6$.

Ecuación de equilibrio La ecuación de equilibrio es la misma que se define en para teoría de vigas de Bernoulli-Euler en la ec. (6.113).

Funcional de energía

Asumiendo que la compatibilidad en el funcional de energía general de placas, definido en la ec. (6.20), se satisface *a priori* por una relación fuerte en la curvatura y en las deformaciones por cortante dadas en la ec. (6.122). Así el funcional de energía para las vigas de Timoshenko es

$$\Pi(w, \theta) = \int_L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^T EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^T \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) - qw \right] dx \quad (6.124)$$

donde $\alpha = \mu A_s$ es la rigidez a cortante. Este funcional de energía, que toma en cuenta la energía debida a flexión y la energía por deformación a cortante, tiene dos campos independientes: desplazamiento transversal $w(x)$ y rotación $\theta(x)$.

6.7.4 Aproximación mediante el FEM

En la teoría de vigas de Timoshenko el desplazamiento transversal w y las rotaciones θ se aproximan en forma separada

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbf{N}_w \mathbf{w} \\ \theta(x) &= \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (6.125)$$

Sustituyendo la ec. (6.125) en la ec. (6.124),

$$\Pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) = \int_L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta}}{\partial x} \right)^T EI \left(\frac{\partial \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta} \right)^T \alpha \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta} \right) - q \mathbf{N}_w \mathbf{w} \right] dx \quad (6.126)$$

La condición de que el funcional de energía Π de la ec. (6.126) tenga un valor estacionario es que, $\delta\Pi = 0$.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{w}} = \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (6.127)$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{w}} &= - \int_L^T \alpha \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \right)^T \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta} dx + \int_L \alpha \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \mathbf{w} dx - \int_L^T \mathbf{N}_w^T q dx = 0 \quad (6.128) \\ \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\theta}} &= \int_L \left(\frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} \right)^T EI \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} \boldsymbol{\theta} dx + \int_L^T \alpha \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta} dx - \int_L^T \alpha \mathbf{N}_\theta^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \mathbf{w} dx = 0 \end{aligned}$$

Asumiendo una interpolación lineal en los dos campos

$$\mathbf{N}_w = \mathbf{N}_\theta = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \quad (6.129)$$

donde

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{L-x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (6.130)$$

Substituyendo la ec. (6.129) en la ec. (6.128), se obtiene la matriz de rigideces siguiente:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} & -\frac{A_s G}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} \\ \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} \end{bmatrix} \quad (6.131)$$

para un elemento viga con interpolación lineal correspondiente a la teoría de Timoshenko.

Es importante mencionar que la matriz de rigideces de la ec. (6.131) sólo se debe utilizar cuando

las vigas son peraltadas, ya que su uso lleva a soluciones con problemas de atoramiento cuando las vigas son no peraltadas. Este problema, de índole numérico ha sido resuelto en la literatura, sin embargo, su estudio sale de los alcances de este trabajo.

6.8 Vigas con discontinuidades

Esta sección presenta una extensión de la formulación para placas con discontinuidades interiores definidas en la ec. (6.46) a elementos viga de las teorías de Timoshenko y Bernoulli-Euler.

6.8.1 Viga de Bernoulli-Euler

Cinemática

En esta aproximación se presenta un salto en el campo de las rotaciones $[[\theta]]$, cuando una zona de localización S aparece

$$\theta(x) = \bar{\theta} + H_s [[\theta]] = \hat{\theta} + M_S [[\theta]] = \frac{d\hat{w}}{dx} + M_S [[\theta]] \quad (6.132)$$

La curvatura se define como

$$\kappa = \frac{\partial\theta}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}}_{\bar{\kappa}^w} + \underbrace{\delta_s [[\theta]]}_{\bar{\kappa}_b^{[[\theta]]}} = \underbrace{\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi(x) [[\theta]]}{\partial x}}_{\bar{\kappa}^w} + \underbrace{\delta_s [[\theta]]}_{\bar{\kappa}_b^{[[\theta]]}} \quad (6.133)$$

Suponga que la compatibilidad se satisface a priori por una relación fuerte dada en la ec. (6.133). Entonces, del funcional de energía general para placas definido en la ec. (6.46) se tiene

$$\begin{aligned} \Pi(w, [[\theta]]) &= \int_L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi(x) [[\theta]]}{\partial x} \right)^T EI \left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi(x) [[\theta]]}{\partial x} \right) + q \cdot w \right] dx \\ &+ \int_S M_S \mathbf{n} [[\theta]] d\Gamma \end{aligned} \quad (6.134)$$

Aproximación mediante el MEF

El desplazamiento transversal regular se define por

$$\hat{w}(x) = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (6.135)$$

donde $\mathbf{N}\mathbf{d}$ se define en la ec. (6.115), y φ es una función lineal dada por

$$\varphi = \frac{x}{L} \quad (6.136)$$

Substituyendo la ec. (6.135) en la ec. (6.134)

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{d}, [|\mathbf{d}|]) &\equiv \int_0^L \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi [|\theta|]}{\partial x} \right]^T EI \left[\frac{\partial^2 \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi [|\theta|]}{\partial x} \right] dx \\ &\quad - \int_0^L \mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \bar{q} dx + \frac{1}{2} [|\theta|] C_D^T I [|\theta|] \end{aligned} \quad (6.137)$$

La condición para que el funcional de energía Π de la ec. (6.114) tenga un valor estacionario es que, $\delta\Pi = 0$.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}} = \frac{\partial\Pi}{\partial[|\theta|]} = 0 \quad (6.138)$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi(\mathbf{d}, [|\mathbf{d}|])}{\partial\mathbf{d}} &\equiv \int_0^L \underbrace{\left(\frac{d^2\mathbf{N}}{dx^2} \right)^T}_{\mathbf{B}^T} EI \left[\frac{\partial^2 \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi [|\theta|]}{\partial x} \right] dx - \int_0^L \mathbf{N}^T \bar{q} dx \equiv 0 \\ \frac{\partial\Pi(\mathbf{d}, [|\mathbf{d}|])}{\partial[|\theta|]} &\equiv \int_0^L \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi [|\theta|]}{\partial x} \right)^T}_{\mathbf{B}_C^T} EI \left[\frac{\partial^2 \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi [|\theta|]}{\partial x} \right] dx + C_D^T I [|\mathbf{d}|] \equiv 0 \end{aligned} \quad (6.139)$$

Substituyendo la ec. (6.115) y (6.136) en la ecuación anterior, se tiene la siguiente matriz de rigideces, en forma incremental

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{EI}{L} \\ 0 & \frac{EI}{L} & 0 & -\frac{EI}{L} & \frac{EI}{L} + IC_D^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \frac{d}{dt}[|\dot{\theta}|] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.140)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ [|\dot{\theta}|] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.141)$$

Esta formulación variacional proporciona matrices de rigideces simétricas, las cuales se pueden condensar en forma estática, como se realizó en la ec. (5.38), lo que reduce el costo computacional en la solución.

$$(\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba}) \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{f}_{ext} \quad (6.142)$$

Substituyendo los términos de la ec. (6.140) en la ec. (6.142), se obtiene la siguiente matriz de rigideces condensada

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \left[4 - \frac{E}{E+C_D^T L}\right] \frac{EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \left[2 + \frac{E}{E+C_D^T L}\right] \frac{EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \left[2 + \frac{E}{E+C_D^T L}\right] \frac{EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \left[4 - \frac{E}{E+C_D^T L}\right] \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{F}_1 \\ \dot{M}_1 \\ \dot{F}_2 \\ \dot{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (6.143)$$

Suponiendo que la matriz constitutiva tangente C_D^T es nula, *i.e.*, no existe transmisión de momento flexionante en la zona de localización. Entonces, la matriz de rigideces definida por la ec. (6.143) se transforma en

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{F}_1 \\ \dot{M}_1 \\ \dot{F}_2 \\ \dot{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (6.144)$$

Esta matriz rigideces con discontinuidades corresponde a una matriz de rigideces correspondiente a una viga con una articulación en el claro (figura 6.15), lo que demuestra que esta formulación simula adecuadamente la degradación del material en la viga hasta que pierde totalmente su capacidad para transmitir el momento en la zona de localización, *i.e.*, formación de una articulación donde el valor del momento es cero.

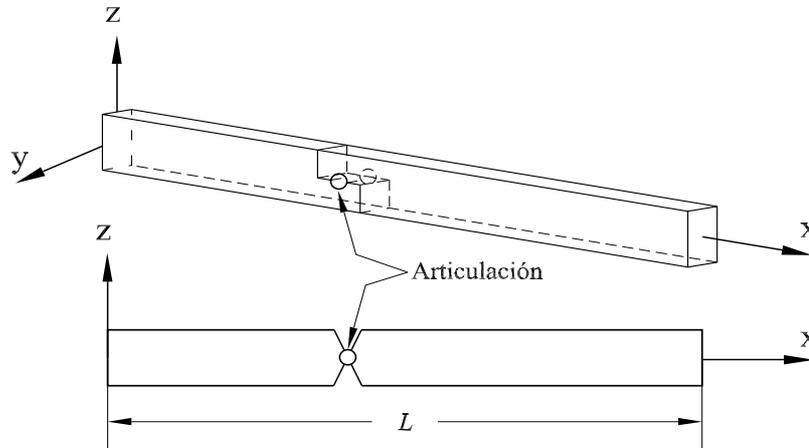


Figura 6.15: Elemento viga con articulación.

6.8.2 Viga de Timoshenko

Cinemática

La viga de Timoshenko con discontinuidades presenta un salto en el campo de desplazamientos transversales $[[w]]$ y otro en el de las rotaciones $[[\theta]]$

$$w(x) = \bar{w} + H_s [[w]] = \hat{w} + M_S [[w]] \quad (6.145)$$

$$\theta(x) = \bar{\theta} + H_s[|\theta|] = \hat{\theta} + M_S[|\theta|] \quad (6.146)$$

La curvatura y la deformación por cortante se define respectivamente por

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}}_{\bar{\kappa}} + \underbrace{\delta_s[|\theta|]}_{\tilde{\kappa}} \quad (6.147)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) = \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \bar{\theta} \right)}_{\tilde{\gamma}} + \underbrace{\delta_s[|w|] - H_s[|\theta|]}_{\tilde{\gamma}} \quad (6.148)$$

Si se supone que la compatibilidad se satisface *a priori* por una relación dada en las ecs. (6.146) y (6.147), por tanto, del funcional general de energía de placas definido en la ec. (6.46) se tiene

$$\begin{aligned} \Pi_{(w,\theta,|w|,|\theta|)} = \int_L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\theta}}{dx} \right)^T EI \left(\frac{d\bar{\theta}}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\theta} \right)^T \alpha \left(\frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\theta} \right) + q \cdot w \right] dx \quad (6.149) \\ + \int_S [M_S \mathbf{n}[|\theta|] + V_S \mathbf{n}[|w|]] d\Gamma \end{aligned}$$

Este funcional tiene cuatro campos independientes, y satisface el equilibrio en forma débil.

Aproximación mediante el FEM

La aproximación del campo continuo de desplazamientos transversales y rotaciones se define por

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x) &= \mathbf{N}_\theta \theta - \varphi[|\theta|] \\ \bar{w}(x) &= \mathbf{N}_w w - \varphi[|w|] \end{aligned} \quad (6.150)$$

Sustituyendo la ec. (6.150) en la ec. (6.149),

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \frac{1}{2} \left[\frac{d(\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi[|\theta|])}{dx} \right]^T EI \left[\frac{d(\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi[|\theta|])}{dx} \right] dx - \int_0^L (\mathbf{N}_w w)^T \cdot \bar{q} dx \quad (6.151) \\ &+ \int_0^L \frac{1}{2} \left[\frac{d(\mathbf{N}_w w - \varphi[|w|])}{dx} - (\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi[|\theta|]) \right]^T \alpha \left[\frac{d(\mathbf{N}_w w - \varphi[|w|])}{dx} - (\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi[|\theta|]) \right] dx \\ &+ \int_S [M_S \cdot \mathbf{n}[|\theta|] + V_S \cdot \mathbf{n}[|w|]] dx \end{aligned}$$

La condición para que el funcional de energía de la ec. (6.151) tenga un valor estacionario es que la diferencial con respecto a cada una de las variables independientes sea igual a cero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial w} &\equiv 0 \equiv \int_L \frac{d\mathbf{N}_w^T}{dx} \alpha \left[\frac{d(\mathbf{N}_w w - \varphi [|w|])}{dx} - (\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi [|\theta|]) \right] dx - \int_L \mathbf{N}_w^T \bar{q} dx & (6.152) \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} &\equiv 0 \equiv \int_L \left[\frac{d\mathbf{N}_\theta^T}{dx} EI \left[\frac{d(\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi [|\theta|])}{dx} \right] - \mathbf{N}^T \alpha \left[\frac{d(\mathbf{N}_w w - \varphi [|w|])}{dx} - (\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi [|\theta|]) \right] \right] dx \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [|w|]} &\equiv 0 \equiv \int_L -\frac{d\varphi^T}{dx} \alpha \left[\frac{d(\mathbf{N}_w w - \varphi [|w|])}{dx} - (\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi [|\theta|]) \right] dx + \int_0^L V_S \cdot n dx \\
\frac{\partial \Pi}{\partial [|\theta|]} &\equiv 0 \equiv \int_L \left[-\frac{d\varphi^T}{dx} EI \left[\frac{d(\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi [|\theta|])}{dx} \right] + \varphi^T \alpha \left[\frac{d(\mathbf{N}_w w - \varphi [|w|])}{dx} - (\mathbf{N}_\theta \theta - \varphi [|\theta|]) \right] \right] dx \\
&\quad + \int_S M_S \cdot n dx
\end{aligned}$$

Sustituyendo las funciones de interpolación \mathbf{N}_θ , \mathbf{N}_w y φ , definidas en las ecs. (6.129) y (6.136) respectivamente, en la ec. (6.152) e integrando, se tiene

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & & & & \\
-\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & & & & \\
\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} & & & & \\
-\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & & & & \\
\hline
\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & & & & \\
-\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{6} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{3} & & & & \\
\hline
\frac{\alpha}{L} + IC_D^T & & & & -\frac{\alpha}{2} & & & \\
& & & & -\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{L} + \frac{\alpha}{3} + IC_M^T & &
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ [|w|] \\ [|\theta|] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.153)$$

La matriz de rigideces para un elemento viga con discontinuidades interiores correspondiente a la teoría de vigas de Timoshenko. Esta matriz de rigideces es simétrica y se puede condensar estáticamente.

Capítulo 7

Discontinuidades interiores con variación lineal del salto

La generalidad de las formulaciones de elementos finitos con discontinuidades interiores, reportadas en la literatura, corresponden a elementos de deformación constante las cuales dependen de los desplazamientos nodales, *e.g.*, Oliver (1996a), Garikipati y Hughes, (2000), Jirásek y Zimmermann (2001), Fernández (2002). Estas formulaciones consideran que el salto de los desplazamientos es continuo dentro del elemento, lo cual podría generar la aparición de deformaciones espurias durante el análisis, y en consecuencia, una respuesta equívoca de la estructura en estudio.

Para mejorar la cinemática de desplazamientos, Alfaite *et al.* (2003) desarrollan una formulación dentro del contexto de elementos finitos con enriquecimiento nodal considerando variación lineal del salto del campo de desplazamientos. Esta formulación representa el salto mediante el enriquecimiento de grados de libertad adicionales en los nodos existentes. Para comprobar la efectividad de esta formulación, en este capítulo se presentan ejemplos en los que se considera movimiento de cuerpo rígido de las partes en que queda dividido el elemento debido a la presencia de una discontinuidad, de los cuales se observa que cuando la dirección de la discontinuidad coincide con los ejes de referencia globales, la relación entre el salto con variación lineal en la discontinuidad y los desplazamientos nodales es satisfactoria, sin embargo, cuando la dirección de las discontinuidades no están alineadas a los ejes de referencia globales, la formulación no es satisfactoria.

Por lo anterior, en este capítulo se desarrolla una formulación que relaciona adecuadamente la relación entre el salto y los desplazamientos continuos en los nudos del elemento con la finalidad de reducir el problema de deformaciones falsas (Fernández, 2002) y así obtener mejores resultados en los análisis. Finalmente, se discute la posibilidad de considerar saltos continuos o con variación lineal en los elementos finitos con discontinuidades interiores.

7.1 Cinemática de la discontinuidad.

Sea un sólido continuo con dominio Ω y frontera $\partial\Omega$, al cual presenta una discontinuidad Γ_d (figura 7.1). Las condiciones de frontera son las tracciones prescritas en Γ_t de la frontera y los desplazamientos prescritos en Γ_u , de tal forma que $\Gamma_t \cup \Gamma_u = \partial\Omega$ y $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$. El campo de desplazamientos total se compone de la suma de la parte continua $\hat{\mathbf{u}}$ en Ω , y de la parte discontinua correspondiente al salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}(\mathbf{x})]]$ en la superficie de la discontinuidad Γ_d .

$$\mathbf{u}(x) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_{\Gamma_d} [[\mathbf{u}(\mathbf{x})]] \quad (7.1)$$

donde \mathcal{H}_{Γ_d} se define como:

$$\mathcal{H}_{\Gamma_d} = H_{\Gamma_d} - (1 - r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (7.2)$$

El parámetro escalar r define la manera en que se distribuye el salto dentro del dominio Ω ; si $r = 1$, el salto se transmite de Ω^- a Ω^+ , H_{Γ_d} es la función de Heaviside en la discontinuidad Γ_d .

$$H_{\Gamma_d} = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (7.3)$$

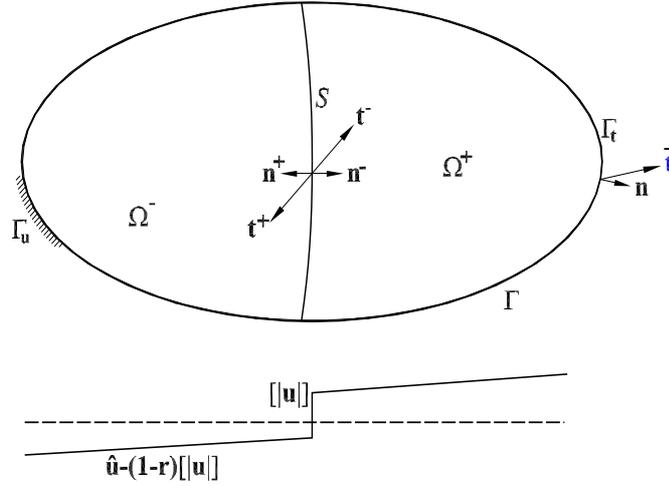


Figura 7.1: Dominio Ω con una discontinuidad Γ_d .

El campo de deformaciones en el sólido que presenta una discontinuidad se define por:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^S \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^S [[\mathbf{u}]]) \quad \text{en } \Omega \setminus S, \quad (7.4)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^S \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^S [[\mathbf{u}]]) + \delta ([[\mathbf{u}]]) \otimes \mathbf{n} \quad \text{en } S, \quad (7.5)$$

donde \otimes representa el producto diádico y δ es la función Delta de Dirac sobre la superficie Γ_d . El campo de desplazamientos y el de deformaciones son continuos en Ω^- y Ω^+ ($\Omega \setminus S = \Omega^- \cup \Omega^+$), puesto que el término no acotado en la ecuación (7.5) está definido en S .

7.2 Aproximación con el método de los elementos finitos.

Sea un sólido con dominio, Ω , que presenta una discontinuidad S , el cual se discretiza con elementos finitos. Si uno de estos elementos con dominio Ω^e presenta una discontinuidad que lo divide en dos subdominios Ω^- y Ω^+ (figura 7.2). El salto, $[[\mathbf{u}]]$, en la discontinuidad, l_d , dentro de cada elemento se define como:

$$[[\mathbf{u}]] = [[\mathbf{u}(s(\mathbf{x}))]] \mathbf{w}^e \quad (7.6)$$

donde $s(\mathbf{x})$ es la coordenada tangente a la discontinuidad. En la figura 7.2 se muestra el sistema local de referencia \mathbf{s} , \mathbf{n} ; donde \mathbf{n} , es normal a la discontinuidad. Si se considera que el salto varia en forma lineal en función de s a lo largo de la discontinuidad l_d , éste se define por la siguiente ecuación :

$$[[\mathbf{u}(s(\mathbf{x}))]] = (D + qs) \mathbf{e}_s + (C + ks) \mathbf{e}_n \quad (7.7)$$

donde D , q , C y k son constantes, \mathbf{e}_s y \mathbf{e}_n son los vectores unitarios de las direcciones \mathbf{s} y \mathbf{n} respectivamente.

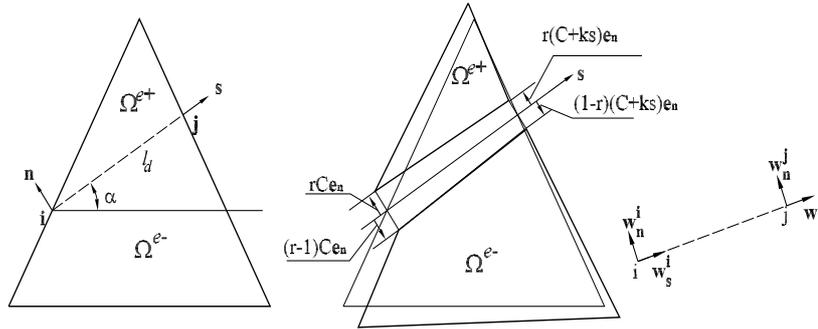


Figura 7.2: Salto de desplazamiento en un elemento triangular con una discontinuidad.

El campo de desplazamientos, definido por ecuación (7.1), se aproxima en forma matricial para cada elemento finito e con n mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{N}^e(x) \hat{\mathbf{a}}^e \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma_d \\ [[\mathbf{u}]]^e &= \mathbf{N}_w^e[s(x)] \mathbf{w}^e \quad \text{en } \Gamma_d \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde \mathbf{N}^e contiene las funciones de forma estándar, \mathbf{N}_w^e las funciones de forma empleadas para aproximar el salto $[[\mathbf{u}]]$, $\hat{\mathbf{a}}^e$ son los grados de libertad asociados a $\hat{\mathbf{u}}^e$, y \mathbf{w}^e son los grados de libertad asociados a $[[\mathbf{u}]]$.

Asumiendo que el campo de desplazamiento total, $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} [|\mathbf{u}|]$, se aproxima por las funciones de forma estándar:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{a}^e \text{ en } \Omega \setminus \Gamma_d \quad (7.9)$$

donde \mathbf{a}^e son los grados de libertad asociados al desplazamiento total \mathbf{u} . Puesto que el campo de desplazamientos es continuo, la contribución del salto debe de ser continuo sobre los desplazamientos \mathbf{u}^e . Esto se cumple al proyectar el salto a los nudos n del elemento:

$$\mathcal{H}_{\Gamma_d} [|\mathbf{u}|]^e = \mathbf{N}^e \mathbf{H} \tilde{\mathbf{a}}^e \quad (7.10)$$

donde \mathbf{H} es una matriz de $(2n \times 2n)$, $\mathbf{H} = \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{I}$, e \mathbf{I} una matriz unitaria de $(2n \times 2n)$. Los grados de libertad enriquecidos están dados por

$$\tilde{\mathbf{a}}^e = \mathbf{M}_w^e \mathbf{w}^e \quad (7.11)$$

sustituyendo la ecuación (7.11) en (7.10) se tiene

$$\mathcal{H}_{\Gamma_d} [|\mathbf{u}(\mathbf{x})|] = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{H} \mathbf{M}_w^e \mathbf{w}^e \quad (7.12)$$

La ecuación anterior relaciona el salto dentro de la discontinuidad con los desplazamientos en los grados de libertad adicionales del elemento.

En la ec. (7.11), la matriz \mathbf{M}_w^e ($2n \times 2n_w$), se define como:

$$\mathbf{M}_w^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{w1}^e \\ \mathbf{N}_{w2}^e \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{wn}^e \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

donde \mathbf{N}_{wi}^e son las funciones de forma definidas como:

$$\mathbf{N}_{wn}^e = \begin{bmatrix} \frac{l_d - (y^{(n)} - y^i) \text{sen } \alpha}{l_d} & \frac{(y^{(n)} - y^i) \text{cos } \alpha}{l_d} & \frac{(y^{(n)} - y^i) \text{sen } \alpha}{l_d} & -\frac{(y^{(n)} - y^i) \text{cos } \alpha}{l_d} \\ \frac{(x^{(n)} - x^i) \text{sen } \alpha}{l_d} & \frac{l_d - (x^{(n)} - x^i) \text{cos } \alpha}{l_d} & -\frac{(x^{(n)} - x^i) \text{sen } \alpha}{l_d} & \frac{(x^{(n)} - x^i) \text{cos } \alpha}{l_d} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

donde l_d es la longitud de la discontinuidad Γd , α es el ángulo entre los ejes x y s ; n es el número de nudos del elemento y n_w es el número de nudos por donde pasa la discontinuidad.

Sustituyendo las ecs. (7.12) y (7.8) en la ec. (7.1), se obtiene, para cada elemento que presenta una discontinuidad, el campo de desplazamientos mostrado a continuación:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e(x) (\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{H} \mathbf{M}_w^e \mathbf{w}^e) \text{ en } \Omega^e \quad (7.15)$$

7.2.1 Ejemplo de aplicación.

En este ejemplo, se considera un elemento cuadrilátero con un salto $w_n^i = 0.10$ en el nudo i de la discontinuidad y los desplazamientos regulares $\hat{\mathbf{u}} = 0$, por lo que el desplazamiento total $\mathbf{u}(x)$ en los nudos se debe solamente a la contribución del salto $[[\mathbf{u}(\mathbf{x})]]$, correspondiente a un movimiento de cuerpo rígido en el elemento; además, se considera que $r = 1$, con la finalidad de que el salto se concentre sobre Ω^+ (figura 7.3). Por lo anterior, de la ec. (7.15) se tiene que el desplazamiento en los nodos está dado por:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{H} \mathbf{M}_w^e \mathbf{w}^e \quad (7.16)$$

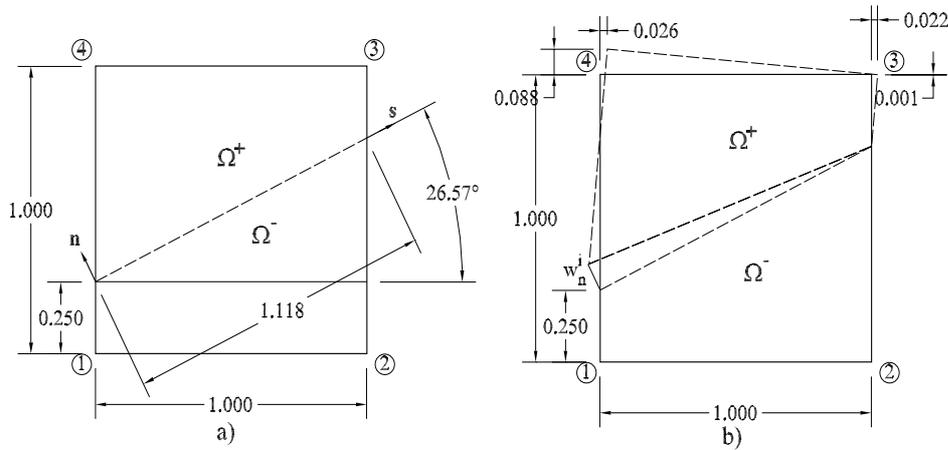


Figura 7.3: Elemento finito cuadrilátero: a) con discontinuidad y b) movimiento de cuerpo rígido debido al salto normal w_n^i .

Los grados de libertad \mathbf{w}^e del salto $[[\mathbf{u}(\mathbf{x})]]$ en la discontinuidad son:

$$\mathbf{w}^e = \begin{Bmatrix} w_s^i \\ w_n^i \\ w_s^j \\ w_n^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

La matriz \mathbf{M}_w^e , definida en la ec. (7.13), la cual relaciona el salto de los desplazamientos de la discontinuidad con los de los desplazamientos regulares, para este ejemplo tiene los siguientes valores:

$$\mathbf{M}_w^e = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.2 & -0.1 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.1 & -0.2 & -0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & -0.4 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.3 & -0.6 \\ 0.4 & 0.2 & -0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.3 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

y la matriz \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Sustituyendo \mathbf{M}_w^e y \mathbf{H} en la ecuación (7.16), se obtienen los desplazamientos en los nudos 3 y 4 debidos al salto w_n^i dados a continuación:

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ u_x^3 \\ u_y^3 \\ u_x^4 \\ u_y^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.06 \\ 0.02 \\ 0.06 \\ 0.10 \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

Los desplazamientos en la ec. (7.20) se muestran gráficamente en la figura 7.4, donde se observa que el desplazamiento en la dirección y es el mismo que el salto $w_n^i = 0.10$ normal a la discontinuidad, lo cual al existir un movimiento de cuerpo rígido, esto no representa adecuadamente la cinemática.

Este ejemplo muestra que la relación entre el salto y los desplazamientos de los nudos del elemento propuesta por Alfaiate *et al.* (2003) no describe correctamente la cinemática del cuerpo.

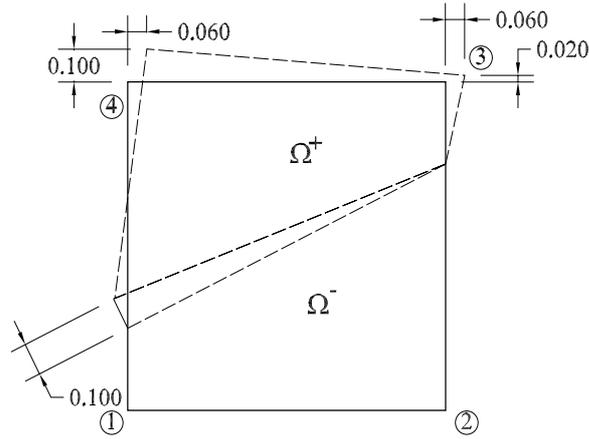


Figura 7.4: Desplazamiento en los nudos debido al salto en la discontinuidad: formulación de Alfaite *et al.* (2003).

7.3 Análisis y propuesta de una relación entre el salto y los desplazamientos regulares

En esta sección se presenta la descripción cinemática de un elemento que presenta un salto con variación lineal, se muestran diferentes configuraciones que podría tener un elemento finito de las partes en que queda dividido por la presencia de la discontinuidad. El objetivo de este análisis es describir las posibles configuraciones que relacionan el salto en la discontinuidad y los desplazamientos nodales, así como, verificar la propuesta de Alfaite *et al.* (2003) para relacionarlos.

Sea dos elementos cuadrilátero mostrado en la figura 7.5, el elemento 1 presenta una discontinuidad en el centro, la cual se extiende del nudo i al j . Se considera que el elemento 2 es de un material con un módulo elástico muy pequeño, de tal manera que cuando el elemento 1 se deforma, el borde del elemento 2 lo hace conjuntamente con el del elemento 1 libremente. Si se considera que en la discontinuidad S del elemento se presenta el salto de desplazamiento w_n^i , normal a la discontinuidad, y que no existen desplazamientos regulares ($\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 0$), *i.e.*, el movimiento de las partes que queda dividido el elemento es un movimiento de cuerpo rígido, pues en estos elementos con enriquecimiento nodal, los grados de libertad adicionales capturan sólo los desplazamientos debido a el salto en la discontinuidad; por lo que sólo el salto en el nudo i induce desplazamientos en los nudos del elemento.

Caso 1. Se considera el nudo i fijo en la dirección \mathbf{s} ($w_s^j = 0$) y al nudo j fijo en las direcciones \mathbf{s} y \mathbf{n} ($w_s^j = w_n^j = 0$), además, el salto se mantiene sobre el borde de los nudos 1 y 4 (figura 7.6).

En este caso se observa que el salto w_n^i origina desplazamientos en la dirección y de los nodos 1 y 4, sin embargo, no es representativo, pues físicamente, deberían existir desplazamientos en las direcciones x y y en otros nudos.

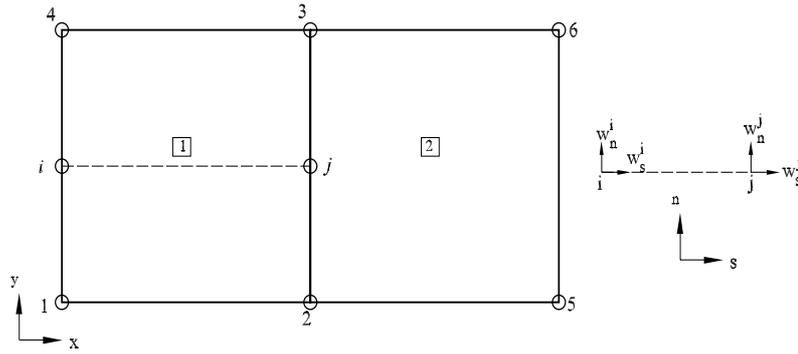


Figura 7.5: Elemento finito cuadrilátero con discontinuidad y sistema de referencia local.

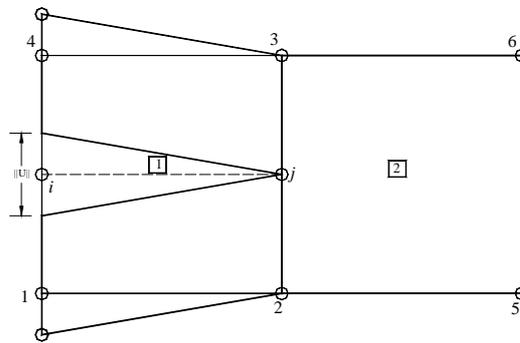


Figura 7.6: Cinemática del elemento considerando $w_s^j = w_s^j = w_n^j = 0$.

Caso 2. Se considera el nudo i fijo en la dirección s ($w_s^i = 0$) y al nudo j libre en las direcciones s y n ($w_s^j \neq 0$, $w_n^j \neq 0$), consecuentemente, el salto se mantiene sobre el borde de los nudos 1 y 4 (figura 7.7).

En este caso se observa que el salto w_n^i origina desplazamientos en la dirección y de los nudos 1 y 4, y en las direcciones x y y de los nudos 2 y 3, por lo que se generan desplazamientos en los nudos 5 y 6. Sin embargo, este comportamiento no representa correctamente la cinemática de un sólido con una discontinuidad, pues los nudos 1 y 4 deberían presentar desplazamientos en la dirección x .

Caso 3. Se mantiene el salto en dirección del borde de los nudos 1 y 4, además, existe desplazamiento del nudo i la dirección s ($w_s^i \neq 0$), figura 7.8.

En este caso, se observa que el salto w_n^i origina desplazamientos en todos los nudos, sin embargo, en los nudos 1 y 4, sólo genera desplazamientos en la dirección y . Por lo que no representa en forma correcta el movimiento, pues debería de existir desplazamientos en la dirección x .

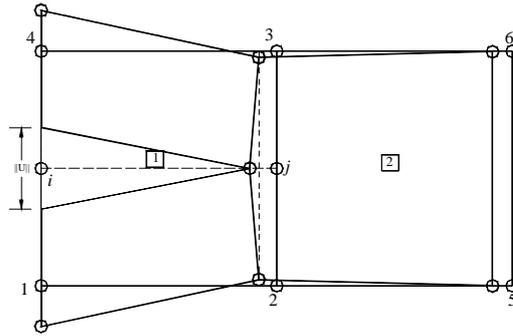


Figura 7.7: Cinemática del elemento considerando $w_s^i = 0$, $w_s^j \neq 0$ y $w_n^j \neq 0$.

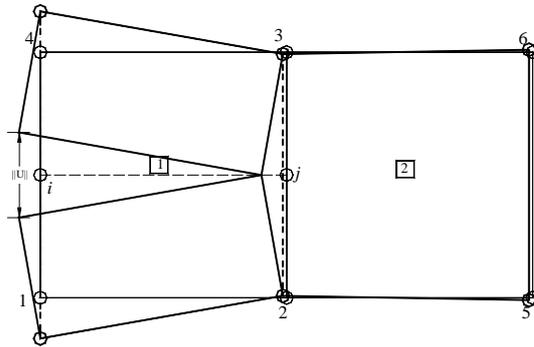


Figura 7.8: Cinemática del elemento considerando el salto sobre el borde, además, $w_s^i \neq 0$, $w_s^j \neq 0$ y $w_n^j \neq 0$.

Caso 4. Alfaite *et al.* (2003) propone la cinemática mostrada en la figura 7.9, donde el salto w_n^i genera desplazamientos en los nudos 1, 2, 3 y 4.

En esta configuración, se puede observar que el salto w_n^i genera los desplazamientos w_s^i y w_s^j , sin embargo, los desplazamientos en los nudos 1, 2, 3 y 4, no corresponden a los desplazamientos que se tendrían en caso de un movimiento de cuerpo rígido, pues deberían de existir desplazamientos en la dirección y de los nudos 2 y 3.

Caso 5. Existe desplazamiento en todos los nudos (figura 7.10).

En este caso, se observa que el salto w_n^i genera desplazamientos en los nudos 1, 2, 3 y 4 en sus dos direcciones, asimismo, se presentan desplazamientos en los nudos de la discontinuidad, pues en i se presenta w_s^i y en j se presenta w_s^j . Estos desplazamientos no son considerados en el trabajo de Alfaite *et al.* (2003).

Del análisis de los cinco casos mostrados anteriormente, se concluye que es necesario mejorar la relación entre el salto de desplazamiento en la discontinuidad y los desplazamientos continuos de los nudos, para representar los saltos con variación lineal en la discontinuidad. Pues en los primeros tres casos, se observa que no existe una buena aproximación, además, en el caso 4, la

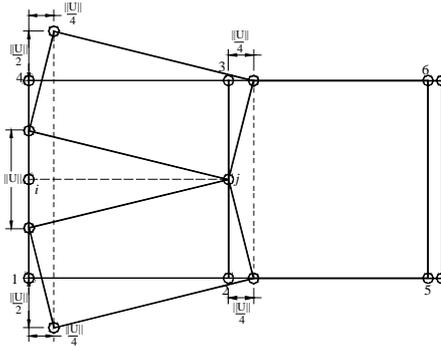


Figura 7.9: Cinemática propuesta por Alfaite *et al.* (2003).

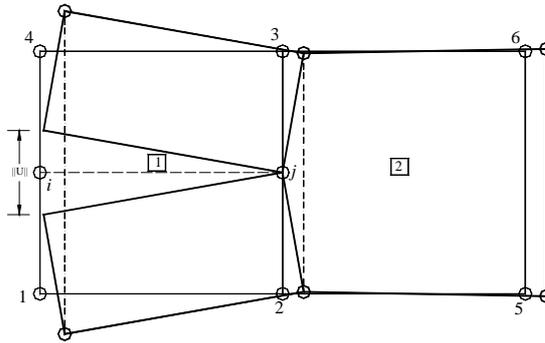


Figura 7.10: Cinemática del elemento considerando $w_s^i \neq 0$, $w_s^j \neq 0$ y $w_n^j \neq 0$.

cinemática propuesta por Alfaite *et al.* (2003), donde la matriz \mathbf{M}_w^e relaciona el salto $[[\mathbf{u}]]$ con los desplazamientos de los nodos que forman el elemento, no relaciona en forma satisfactoria los desplazamientos. Por lo que en el caso 5, se propone mejorar la cinemática propuesta por Alfaite *et al.* (2003), con la finalidad de reducir el problema de deformaciones falsas (Fernández, 2002), y así, obtener mejores resultados en los análisis.

7.4 Propuesta de una matriz para saltos lineales

Considérese el elemento de la figura 7.11a con una discontinuidad en su interior que parte del nudo i al nudo j de longitud L_d , el valor del salto en el nudo i es $[[w_n^i]] \neq 0$ y en el nudo j es $[[w_n^j]] = 0$ produce un movimiento de cuerpo rígido de las partes en que se divide el elemento. En consecuencia, los nudos del elemento presentan desplazamientos Δx_{ny} Δy_n .

El ángulo θ se puede obtener de la siguiente relación:

$$\text{sen } \theta = \frac{[[w_n^i]]}{2L_d} \implies \theta = \text{sen}^{-1} \frac{[[w_n^i]]}{2L_d} \quad (7.21)$$

Los desplazamientos δ de los nodos medidos a partir del nudo j se pueden calcular mediante la siguiente relación (figura 7.11b):

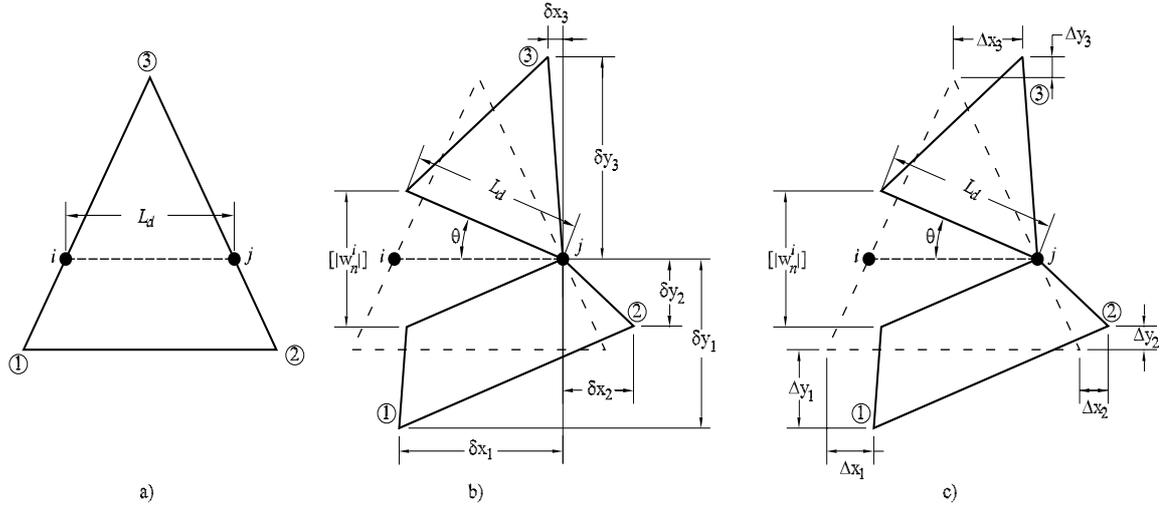


Figura 7.11: Descripción del movimiento de cuerpo rígido debido a un salto dentro de un elemento finito.

$$\begin{Bmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \\ \delta z_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{jn} \\ y_{jn} \\ z_{jn} \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

Los elementos del vector de la parte derecha de la ecuación anterior se definen por la diferencia de coordenadas del nudo j y n ,

$$\begin{aligned} x_{jn} &= x_j - x_n \\ y_{jn} &= y_j - y_n \\ z_{jn} &= z_j - z_n \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde n es el número del nodo correspondiente.

Para calcular los desplazamientos Δx_n y Δy_n producidos por el salto $[[w_n^i]]$, de figura 7.11b y c se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_j - x_n - \delta x_n \\ \Delta y_n &= y_j - y_n - \delta y_n \end{aligned} \quad (7.24)$$

Sustituyendo las ecs. (7.22) y (7.23) en la ecuación anterior, se tiene el valor de los desplazamientos Δx_n y Δy_n en función de las coordenadas de los nodos y el ángulo θ .

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_{jn} (1 - \cos \theta) + y_{jn} \text{sen } \theta \\ \Delta y_n &= y_{jn} (1 - \cos \theta) - x_{jn} \text{sen } \theta \end{aligned} \quad (7.25)$$

7.4.1 Ejemplos

1) Sea el elemento de la figura 7.12a, con una discontinuidad en el interior, el salto normal a la discontinuidad $[[w_n^i]]$ produce un ángulo $\theta = 10^\circ$. Las coordenadas de los nudos son:

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{1}{6} & y_i &= \frac{1}{3} \\
x_j &= \frac{5}{6} & y_j &= \frac{1}{3} \\
x_1 &= 0 & y_1 &= 0 \\
x_2 &= 0 & y_2 &= 0 \\
x_3 &= \frac{1}{2} & y_3 &= 1
\end{aligned}
\tag{7.26}$$

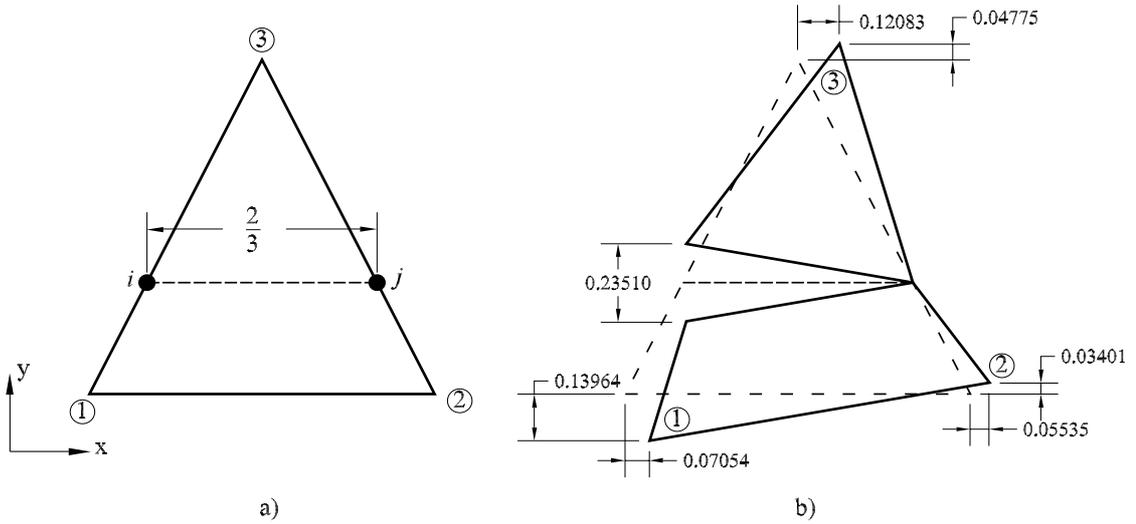


Figura 7.12: Movimiento de cuerpo rígido producido por un salto dentro de un elemento finito. Sustituyendo el valor de las coordenadas nodales en la ec. (7.25) se obtienen los desplazamientos de cada nodo, éstos se muestran acotados en la figura 7.12b.

2) Considere que la discontinuidad en el elemento del ejemplo anterior se propaga en un elemento vecino (figura 7.13a), el salto normal a la discontinuidad $[[w_n^i]]$ produce un ángulo $\theta = 10^\circ$. Las coordenadas del nudos k y 4 son:

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{7}{6} & y_k &= \frac{1}{3} \\
x_4 &= \frac{3}{2} & y_4 &= 1.0
\end{aligned}
\tag{7.27}$$

Sustituyendo el valor de las coordenadas nodales en la ec. (7.25) se obtienen los desplazamientos de cada nodo, estos se muestran acotados en la figura 7.13b.

Para considerar la posibilidad de que el salto se distribuya sobre los subdominios Ω^+ y Ω^- , como se define en la ec. (7.2), con base a la ec. (7.12), la ec. (7.25) se define como

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & \mathcal{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{jn}(1 - \cos \theta) + y_{jn} \sin \theta \\ y_{jn}(1 - \cos \theta) - x_{jn} \sin \theta \end{Bmatrix} [[w_n^i]]
\tag{7.28}$$

donde N_n son las funciones de forma de nudo n .

En la ec. (7.28) el ángulo θ se calcula como

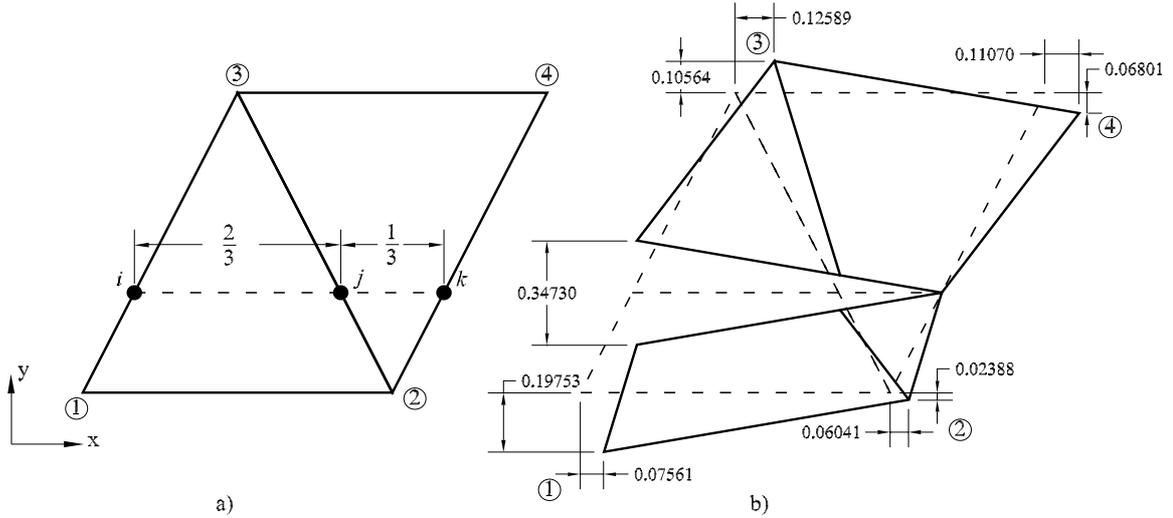


Figura 7.13: Movimiento de cuerpo rígido en el caso de dos elementos vecinos.

$$\text{sen } \theta = \frac{\mathcal{H} [|w_n^i|]}{L_d} \implies \theta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\mathcal{H} [|w_n^i|]}{L_d} \right) \quad (7.29)$$

Para validar la ecuación anterior, se calculan los desplazamientos de los nodos del ejemplo de la figura (7.3), el cual se realizó con la ec. (7.12), se considera que $r = 1$, con la finalidad de que el salto se concentre sobre Ω^+ . Los desplazamientos nodales se muestran en la figura .

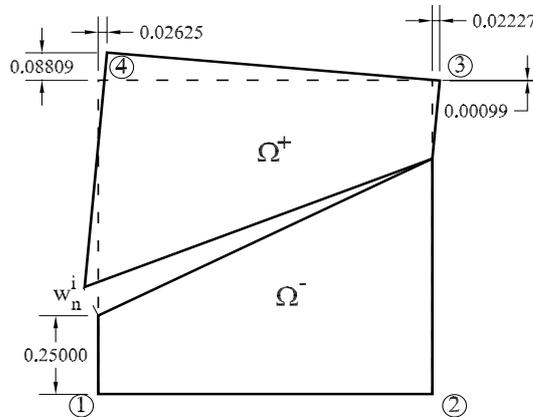


Figura 7.14: Movimiento de cuerpo rígido en un elemento cuadrilátero.

De lo anterior, se concluye que la expresión de la ec. (7.28) representa adecuadamente la relación entre los saltos $[|w_n^i|]$ en modo de falla I y los desplazamientos nodales. Esta expresión debe depender solamente del salto, de otra forma se tendrían más incógnitas, pues también depende del de las funciones $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$. La primera se puede expresar en función del salto y la longitud de la discontinuidad como en la ec. (7.29), sin embargo, no es posible con la función $\text{cos } \theta$, por lo que se obtiene de una serie de Taylor.

Si una función $f(x)$ con derivadas de orden n en un punto x_0 , esta se puede expresar como una

serie de Taylor $T_n f$ por la formula

$$\begin{aligned} T_n f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned} \quad (7.30)$$

Sea la función definida por,

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (7.31)$$

que se aproxima por la serie de la ec. (7.30) cuando el valor de $x_0 = 0$, se tiene

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \dots \quad (7.32)$$

Para determinar la función $\cos \theta$ en función de $\text{sen } \theta$, se aproxima mediante una serie la ecuación siguiente:

$$\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = 1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{2!} - \frac{3 \text{sen}^4 \theta}{4!} - \dots = \cos \theta \quad (7.33)$$

De la ecuación anterior, se define la expresión siguiente:

$$(1 - \cos \theta) = \frac{\text{sen}^2 \theta}{2!} + \frac{3 \text{sen}^4 \theta}{4!} \quad (7.34)$$

Sustituyendo las ecs. (7.29) y (7.34) en la ec. (7.28), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_d} \begin{bmatrix} N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & \mathcal{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{jn} \\ -x_{jn} \end{Bmatrix} [w_n^i] \quad (7.35)$$

$$+ \frac{1}{2!L_d^2} \begin{bmatrix} N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{jn} \\ y_{jn} \end{Bmatrix} [w_n^i]^2 \quad (7.36)$$

$$+ \frac{4}{4!L_d^4} \begin{bmatrix} N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_n \mathcal{H}^4 & 0 \\ 0 & N_n \mathcal{H}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{jn} \\ y_{jn} \end{Bmatrix} [w_n^i]^4$$

Con esa expresión aproximada con la serie de Taylor, se calcularon los desplazamientos nodales de los elementos de las figuras 7.13 y 7.14, obteniendo errores máximos del 0.17%, por lo que esta formulación relaciona en forma adecuada el salto de desplazamientos con los desplazamientos nodales. Su implementación generaría un gasto computacional adicional, el cual no sería una limitante. Sin embargo, en la figura (7.10) se observa que el salto de la discontinuidad inducen desplazamientos en el borde del elemento vecino, en este caso al centro del elemento. Estos desplazamientos a su vez generan deformaciones en esa zona, los cuales si se trata de un elemento

de deformación constante no se representan en la formulación, como resultado en este elemento los esfuerzos, que dependen de las deformaciones, podrían ser equívocos.

La generalidad de las formulaciones de elementos finitos con discontinuidades interiores reportadas en la literatura, son en elementos de deformación constante que dependen del promedio de los desplazamientos nodales, *e.g.*, Oliver (1996a), Garikipati y Hughes, (2000), Jirásek y Zimmermann (2001), Fernández (2002). El mejorar la cinemática de un salto constante por uno con variación lineal, se refleja en el cálculo de las deformaciones continuas, las cuales sería muy semejantes si se emplea un elemento de deformaciones constantes. Para determinar el estado de esfuerzos en estos elementos se recurre a un Modelo Constitutivo, el cual puede tener como variables independientes las deformaciones o el salto de desplazamientos. Si se tienen las deformaciones como variables independientes y se trata de un elemento de deformaciones constantes, el estado de esfuerzo en el elemento es semejante si el salto es constante o varía en forma lineal. Si en el elemento que contiene la punta de la discontinuidad, se tiene el salto como variable independiente en el Modelo Constitutivo (relación tracción-salto), el estado de esfuerzos se puede calcular en uno o dos puntos a lo largo de la discontinuidad, en el caso de un sólo punto tendría que ser al centro, el salto en ese punto sería similar a un elemento con salto constante, si se integra en dos puntos posiblemente el estado de esfuerzos en el elemento tenga una mejor aproximación.

Recientemente, Manzoli y Shing (2006) desarrollaron un elemento con variación lineal del salto, en el que calculan el estado de esfuerzos en dos puntos dentro de la discontinuidad, realizan simulaciones numéricas que comparan con los resultados de un elemento mixto formulado en el mismo trabajo. Sería deseable comparar un elemento con saltos continuos y con variación lineal, lo anterior está fuera de los alcances de este trabajo de investigación.

Capítulo 8

Tratamiento de la propagación

En el desarrollo de modelos numéricos para la solución de problemas en la mecánica de sólidos que involucran discontinuidades, uno de los factores que pueden tener gran importancia es el de la propagación, la cual depende no sólo de los criterios para definir el inicio de una discontinuidad y de su dirección de propagación, sino también, de la correcta formulación de un algoritmo computacional.

Algunas aproximaciones propuestas en la literatura consideran la determinación o trazado correcto de una discontinuidad en un sólido, como un elemento básico para la evaluación del comportamiento postcrítico del sólido. Tal es el caso de la Mecánica de Fractura que calcula la dirección de propagación de una grieta con diferentes métodos como: el esfuerzo principal máximo, la tasa máxima de la energía liberada y la tasa mínima de la densidad de energía de deformación. Otras aproximaciones, como la de los modelos de agrietamiento distribuido, no requieren del trazado explícito de la discontinuidad, sino que aparece siguiendo la trayectoria de los elementos que presentan daño.

En el caso del Modelo de Discontinuidades Interiores, es necesario determinar la posición geométrica que ocupa la discontinuidad y su evolución durante el análisis, puesto que del seguimiento de la(s) discontinuidad(es), depende el comportamiento mecánico del continuo. En la literatura se documentan diferentes métodos para el seguimiento de las discontinuidades, entre las principales se encuentra la del vector de nivel asignado, seguimiento local y seguimiento global.

En el método del vector de nivel asignado (Ventura *et al.* 2003), la posición de la discontinuidad se describe por la posición de la punta, y por una función vectorial que describe la trayectoria de la discontinuidad. Esta segunda se forma por una función de distancia dada por la proyección del punto más cercano a la superficie de la discontinuidad, y su gradiente. Estas funciones se definen en una banda estrecha que contiene la discontinuidad. La actualización de los valores nodales de la función, cuando la discontinuidad se propaga, se realiza por operaciones geométricas. Este procedimiento ha sido empleado para propagar grietas en el método de malla libre de Galerkin.

En este capítulo se describen dos procedimientos algorítmicos para la propagación de las discontinuidades, el de seguimiento local, que se caracteriza porque durante el proceso del

análisis verifica si alguno de los elementos vecinos a un elemento que presenta una discontinuidad satisfacen un criterio de falla, posteriormente, propaga la discontinuidad con una dirección de propagación calculada en algún punto del elemento o con el promedio de varios puntos. El otro procedimiento es el de seguimiento global, que se caracteriza porque primero determina todas las posibles direcciones de propagación en el continuo, y posteriormente, activa sólo aquellos segmentos de líneas de discontinuidad donde los elementos satisfacen un criterio de falla. Se presenta un algoritmo de seguimiento de discontinuidades del tipo global desarrollado por Oliver *et al.* (2002b) para el trazado de discontinuidades en sólidos que ha mostrado ser robusto y eficiente para el análisis de problemas típicos en el campo de la mecánica del daño computacional. Al final del capítulo, se presenta un procedimiento para el seguimiento de las discontinuidades con base en el seguimiento local, en el que la dirección de propagación se calcula con el estado de esfuerzos recuperado por el método del parche de recuperación súperconvergente (Zienkiewicz y Zhu, 1992).

8.1 Seguimiento de discontinuidades

Para determinar el instante en que se presenta(n) la(s) discontinuidad(es) y su seguimiento en la simulación de proceso de falla en materiales, se necesita desarrollar algoritmos que requieren los siguientes elementos:

- 1) **Criterio de falla.** Es aquel que define el momento en que se presenta una discontinuidad en un punto material de un sólido. El criterio de falla más simple considera que ésta se inicia cuando se alcanza el límite elástico del material dado por un criterio de fluencia o de daño. En análisis más elaborados, la propagación de una discontinuidad puede iniciarse después del régimen elástico cuando ocurre la bifurcación (pérdida de elipticidad) de las ecuaciones que gobiernan el problema y aparece una discontinuidad, por ejemplo: Rice (1976) y Runesson *et al.* (1991).
- 2) **Dirección de propagación.** Define la trayectoria de la discontinuidad en un punto del sólido. La manera más simple de obtener esta dirección, es considerar que la discontinuidad se propaga en la dirección ortogonal al esfuerzo principal máximo. Un análisis más riguroso y sofisticado para determinar la dirección de propagación es un análisis de bifurcación.

Considere un cuerpo en dos dimensiones que debido a la acción de cargas externas, experimenta en su interior discontinuidades en el campo de desplazamientos. En la figura 8.1 se ilustran las trayectorias de estas discontinuidades las cuales se denotan por \mathcal{S}_i $i \in \{1, \dots, n_d\}$ donde n_d es en número de discontinuidades, los puntos raíz r_n , son aquellos puntos materiales donde inicia una discontinuidad cuando se satisface un criterio de falla.

Para realizar el seguimiento de las discontinuidades existen estrategias en la literatura para elementos finitos con discontinuidades interiores, las cuales se pueden clasificar como: Seguimiento Local y Seguimiento Global

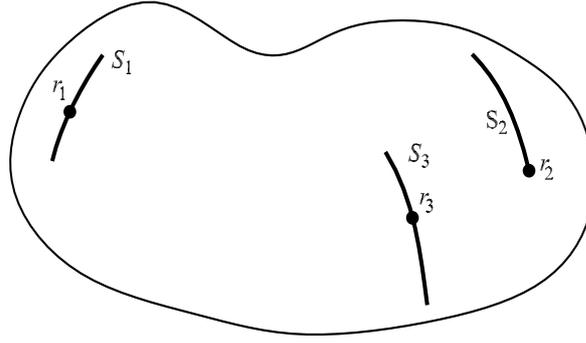


Figura 8.1: Trayectorias de discontinuidad en un sólido.

8.2 Seguimiento Local

Con este procedimiento para dar seguimiento de una discontinuidad durante la simulación del proceso de falla en un sólido, primero se determinan los puntos materiales que satisfacen un criterio de falla, posteriormente, se trazan la discontinuidad en el sólido con la dirección de propagación, la cual se obtiene en un punto del elemento o con el promedio de varios puntos.

La estrategia de seguimiento local para propagar una discontinuidad existente o para determinar el inicio de una discontinuidad nueva se requieren los siguientes elementos:

1. **Identificación de la raíz r_i .** Cualquier elemento e , que satisface un criterio de falla, se denomina como un elemento raíz, y es uno donde inicia una nueva discontinuidad S_i , siempre que no existan en su frontera Γ^e puntos de inicio de discontinuidad I_{S_i} $i \in \{1, \dots, n_d - 1\}$ (figura 8.2).
2. **Propagación de una discontinuidad S_i .** La propagación de una discontinuidad se puede realizar mediante un algoritmo geométrico (figura 8.2). Dada la punta de una discontinuidad I_{S_i} y una dirección de propagación $\tau^{(e)}$, en un elemento vecino Ω^e que satisface un criterio de falla, el seguimiento de la discontinuidad se realiza con los siguientes pasos:
 - Trazo de una línea con dirección $\tau^{(e)}$ que pase por I_{S_i} .
 - Determinación del punto de final O_{S_i} .
 - Consideración de la posición geométrica del punto O_{S_i} , como el punto de inicio de la discontinuidad I_{S_i} para un elemento vecino $e + 1$.

Esta estrategia es simple, robusta y confiable, cuando se trata con una discontinuidad, se ha empleado en forma adecuada en trabajos como los de Oliver 1996, Oliver *et al.* 1999 y Oliver *et al.* 2002a. Sin embargo, en el caso de presentarse varias discontinuidades, esta estrategia

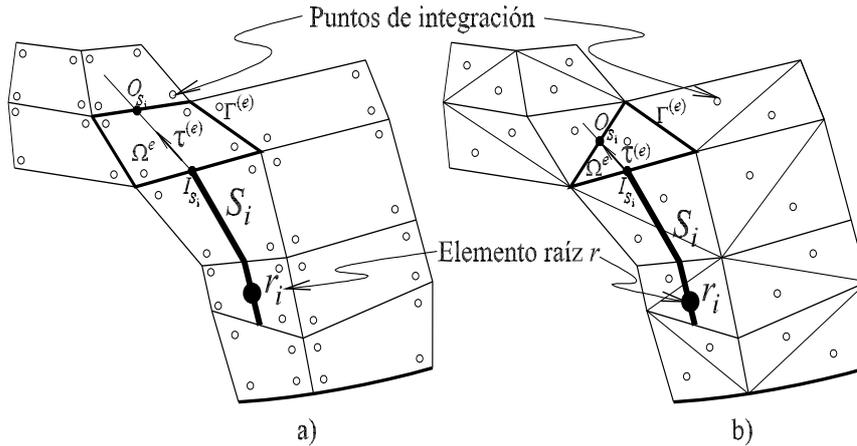


Figura 8.2: Seguimiento local de una discontinuidad

no es del todo adecuada, pues si durante el análisis un elemento vecino a uno que contiene una discontinuidad satisface un criterio de falla, mediante este algoritmo de propagación no es posible identificar si se trata de un nuevo elemento raíz, o si la discontinuidad existente se propagará dentro de ese elemento. Este algoritmo requiere del uso del arreglo que contiene las incidencias de los elementos finitos, para conocer aquellos en los que coinciden los bordes del elemento con los de la discontinuidad.

Para calcular la dirección de propagación $\tau^{(e)}$, en los elementos vecinos al que contiene una discontinuidad S_i , generalmente se emplea un criterio que involucra el estado de esfuerzos o un criterio de bifurcación en los puntos de integración del elemento. El considerar que el estado de esfuerzos en un punto del elemento finito es representativo de lo que ocurre en el tramo de la discontinuidad que pasa por dicho elemento, puede llevar a una respuesta equívoca de la estructura, pues la discontinuidad no se localiza en punto donde los esfuerzos se conozcan adecuadamente (como lo es un punto de integración gaussiana).

Para tratar de aliviar este problema Alfaiate *et al.* (1997) y Alfaiate y Pires (1999), calculan el estado de esfuerzos en la punta de la discontinuidad como el promedio de los esfuerzos en dos puntos de integración, localizados en cada lado del borde donde se encuentra la punta de la discontinuidad. Wells y Sluys (2001) emplea una función de peso para calcular el estado de esfuerzos en la punta de discontinuidad con el que calcular el vector normal de la discontinuidad. Fernández (2002) propone un cálculo no local de la orientación de la discontinuidad, a través de una recuperación de los esfuerzos en el punto de interés utilizando la información de ciertos elementos vecinos. Esto mediante la definición de un parche que contiene los elementos vecinos a la discontinuidad, calcula el estado de esfuerzos en el centro geométrico de cada uno de los elementos del parche y por medio del procedimiento estándar de Mínimos Cuadrados, obtiene el estado de esfuerzos en la punta de la discontinuidad, con el que calcula la orientación de la discontinuidad.

En problemas en tres dimensiones, las discontinuidades se presentan como superficies, donde

la estrategia de seguimiento local presenta dificultades para coincidir estas superficies de discontinuidad entre elementos vecinos, pues para propagarlas se necesita un punto y una normal o dos líneas, lo que puede generar un número indefinido de superficies (Chaves, 2003).

8.3 Seguimiento Global

Como alternativa a la estrategia de seguimiento local, se tiene el de seguimiento global, que determina todas las líneas (en dos dimensiones) o superficies (en tres dimensiones) de discontinuidad, posteriormente *identifica* entre ellas las que se encuentran activas, que corresponden a las líneas de discontinuidad que atraviesan al menos un elemento que satisface un criterio de falla.

El criterio de seguimiento global se basa en encontrar una función que describa todas las líneas de discontinuidad en el medio, para construir de esta función se tiene la condición que su gradiente sea ortogonal a la dirección de propagación en los puntos materiales del sólido. Esta dirección se calcula mediante algún criterio, inclusive en los elementos donde aún no se alcanza un estado crítico de bifurcación. El seguimiento global determina implícitamente las direcciones de las líneas de discontinuidades con base en las direcciones de propagación calculadas en todos los elementos con los que se discretiza el continuo, a diferencia de los trabajos de Alfaiate *et al.* (1997), Alfaiate y Pires (1999), Wells y Sluys (2001) y Fernández (2002) que calculan el estado de esfuerzos aproximado en la punta de la discontinuidad con los esfuerzos de los puntos de integración de los elementos vecinos, y posteriormente, determinan la dirección de propagación de la discontinuidad con el estado de esfuerzos aproximado.

El criterio de seguimiento global se describe a continuación (Oliver *et al.* 2002b):

1. **Trazo de todas las posibles trayectorias de discontinuidad existente.** Si en cada punto \mathbf{x} de una discontinuidad S_i , la tangente $\boldsymbol{\tau}$, representa el vector de propagación, entonces S_i son los segmentos de la familia de curvas envolventes del campo vectorial $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ (ver figura 8.3a). Si se asume que estas envolventes se pueden describir por la función $\phi(\mathbf{x})$, entonces sus valores ($\phi(\mathbf{x}) = \text{cte}$) definen todas las líneas posibles de discontinuidad como (figura 8.3b):

$$S_i = \{ \mathbf{x} \in \Omega; \quad \phi(\mathbf{x}) = \phi_{S_i} \} \quad (8.1)$$

donde ϕ_{S_i} es un valor constante que se considera como *identificador* de la línea de discontinuidad. Por la forma en como se plantea el artificio de propagación de discontinuidades, Oliver *et al.* (2002b) denominan los valores de ϕ_{S_i} , como valores de temperatura, *i.e.*, cada isolínea corresponde la curva que tiene el mismo valor de temperatura. En el contexto de elementos finitos, el algoritmo calcula los valores nodales de $\phi^{(n)}$.

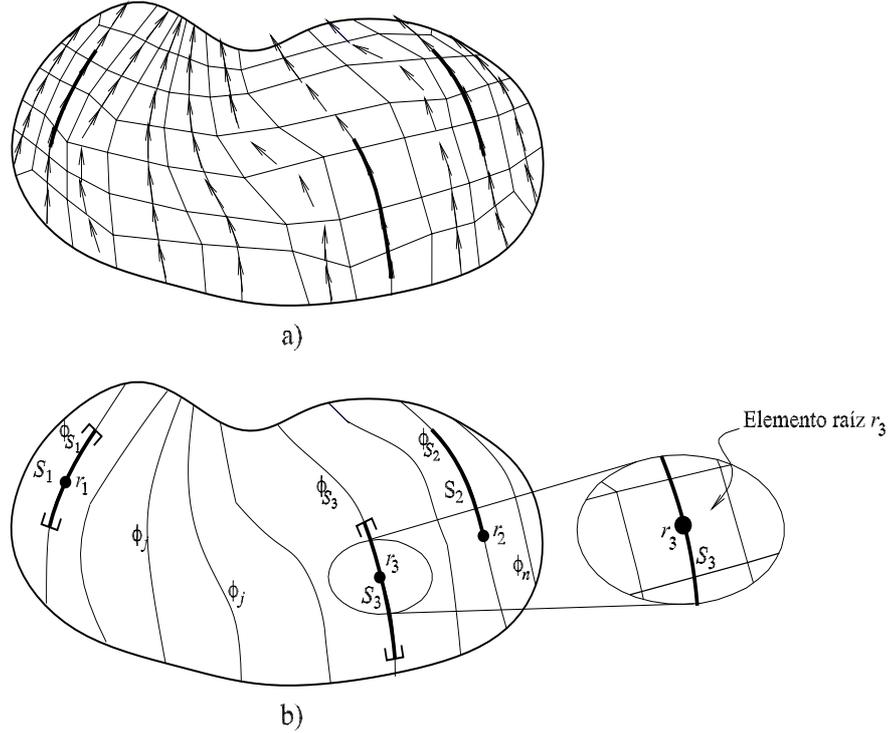


Figura 8.3: Seguimiento global de discontinuidades.

2. **Determinación de la raíz, r_i .** Cualquier elemento e , que satisface un criterio de falla, se considera como un elemento raíz r_i , de una nueva discontinuidad S_{nd} , siempre y cuando el elemento no presente alguna otra discontinuidad $S_i \in \{1, \dots, n_d\}$.
3. **Determinación de los valores que identifican las discontinuidades activas.** Para cada elemento raíz r_i , se puede considerar que la trayectoria de la discontinuidad pasa por el centro del elemento (figura 8.3b). Consecuentemente, el valor de $\phi(\mathbf{x})$ correspondiente, que *identifica* la discontinuidad, es el promedio de los valores en los nodos del elemento raíz.

$$\phi_{S_i} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \phi^{(m)} \quad (8.2)$$

donde n corresponde al número de nodos del elemento. Los valores de ϕ_{S_i} $i = 1, \dots, n_d$ *identifican* las líneas de discontinuidad correspondientes.

4. **Determinación de la posición de una discontinuidad dentro de un elemento.** Una vez que se conoce el valor de $\phi(\mathbf{x})$ en los nodos $\phi^{(m)}$, y el valor que *identifica* la discontinuidad ϕ_{S_i} , la posición de S_i dentro del elemento e , se puede determinar mediante el siguiente algoritmo (figura 8.4):

- Determinación de los bordes con cambio de signo de $(\phi^{(m)} - \phi_{S_i})$.

- Para cada uno de estos bordes calcular la posición de S_i mediante interpolación lineal.

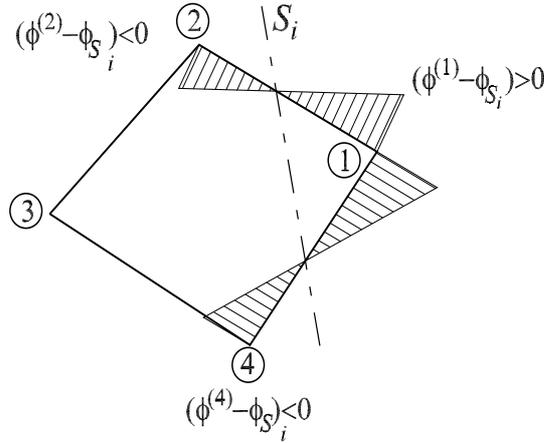


Figura 8.4: Trazo de una discontinuidad dentro del elemento.

5. **Fijación de las partes consolidadas de las trayectorias de discontinuidad.** En los elementos que satisfacen un criterio de falla, el valor nodal $\phi^{(m)}$ se fija para los siguientes pasos del análisis. Esto consolida las trayectorias de discontinuidad activas en el medio.

8.3.1 Planteamiento del seguimiento global como una ley de conservación

Para trazar todas la posibles trayectorias de discontinuidad definidas en la ec. (8.1) con el algoritmo de seguimiento global descrito anteriormente, si se supone que las envolventes del campo vectorial $\boldsymbol{\tau}$ descritas por la función $\phi(\mathbf{x})$ corresponde a una cantidad conservada (potencial) cuya ley de conservación se define como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = - \int_{\Gamma_q} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (8.3)$$

donde el flujo \mathbf{q} , es la velocidad de transferencia por unidad de superficie y Q la velocidad por unidad de volumen a la que se genera o desvanece ϕ en cada punto del dominio.

La energía de ϕ , fluye en la dirección $-\nabla\phi$ con la magnitud $\mathbb{K} \cdot |\nabla\phi|$, donde \mathbb{K} es el coeficiente de conductividad del material, pues el flujo esta relacionado con el gradiente de ϕ . Tal que:

$$\begin{aligned} q_x &= -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ q_y &= -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ q_z &= -k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \implies \mathbf{q} = -\mathbb{K} \cdot \nabla \phi \quad (8.4)$$

Si en la ec. (8.3) se emplean el teorema de divergencia,

$$\int_{\Gamma_q} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (8.5)$$

se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio

$$\frac{d}{dt} \phi + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q \quad (8.6)$$

sustituyendo la ec. (8.4) en la ec. (8.6), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \phi = \mathbb{K} \cdot \Delta \phi + Q \quad (8.7)$$

donde $\Delta = \nabla^2$ es el operador de Laplace. Esta ecuación diferencial parcial corresponde a la ecuación de problemas de conservación, cuyo PVF se puede resumir como (figura 8.5):

a)	$\mathbf{q} = -\mathbb{K} \cdot \nabla \phi$ en Ω	Compatibilidad	
b)	$\frac{d}{dt} \phi + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q$ en Ω	Equilibrio	
c)	$\phi = \phi^*$ en Γ_ϕ	Condición esenciales de frontera	(8.8)
d)	$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{q}^*$ en Γ_q	Condición natural de frontera	

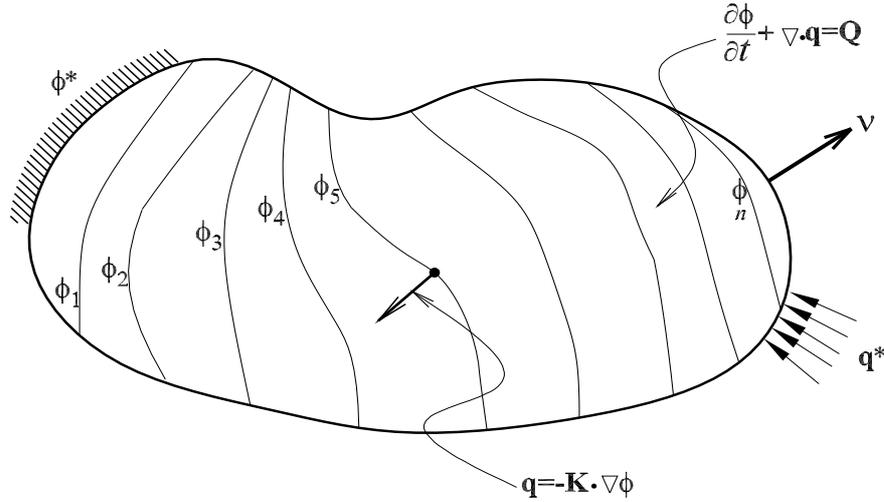


Figura 8.5: Problema de conservación, con \mathbf{K} isotrópico.

El funcional para el problema definido en la ecuación anterior está dado por:

$$\Pi(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \phi \nabla^T \cdot \mathbb{K} \cdot \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega} \phi \cdot Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} \phi \cdot \mathbf{q}^* d\Gamma \quad (8.9)$$

que contiene como condiciones de estacionaridad, las ec. (8.8b – c), puesto que compatibilidad entre el potencial y el flujo de la ec. (8.8a) se satisface *a priori*.

8.3.2 Planteamiento para determinar las líneas de discontinuidad

En esta sección se presenta el procedimiento para obtener las envolventes del campo vectorial $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, que define las direcciones de propagación en los puntos materiales \mathbf{x} del dominio Ω en dos dimensiones. Si se asume que $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ es un campo vectorial unitario, *i.e.*:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = \|\boldsymbol{\tau}\|^2 = 1 \quad (8.10)$$

El objetivo de esta formulación es encontrar una función $\phi(\mathbf{x})$ cuyas líneas de nivel, definidas en la ec. (8.1) sean envolventes de $\boldsymbol{\tau}$. Puesto que el gradiente de las envolventes son ortogonales a $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, la función $\phi(\mathbf{x})$ debe ser solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8.11)$$

Multiplicando con el producto diádico la ec. (8.11) por $\boldsymbol{\tau}$, se tiene

$$(\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) = \mathbb{K}_{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (8.12)$$

que corresponde a la ecuación de flujo \mathbf{q} en una ley de conservación

$$\mathbf{q} = -\mathbb{K}_{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) \quad (8.13)$$

Para el caso de régimen de flujo estacionario o permanente y que no existen fuentes internas Q ,

$$\frac{d}{dt} \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8.14)$$

$$Q = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8.15)$$

el equilibrio de la ec. (8.6) y el flujo en la frontera en la ec. (8.3) se definen por

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (8.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8.17)$$

Sustituyendo la ec. (8.13) en la ec. (8.17) se tiene la ecuación de Laplace

$$\Delta \cdot \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (8.18)$$

En este caso de seguimiento global el valor de $\phi = \text{cte}$ representa el valor que identifica las líneas de discontinuidad y $\mathbb{K}_{\boldsymbol{\tau}}$ es un tensor anisotrópico de conductividad definido por:

$$[\mathbb{K}_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}))] = [\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}] = \begin{bmatrix} \tau_x^2 & \tau_x \tau_y \\ \tau_x \tau_y & \tau_y^2 \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

Los valores del vector $\boldsymbol{\tau}$ se obtienen de un criterio para determinar la dirección de propagación que puede ser un análisis de bifurcación.

Con las consideraciones de las ecs. (8.14) y (8.15), el problema de valores en la frontera de la ec. (8.8), se puede definir como¹ (figura 8.6):

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \mathbf{q} = -\mathbb{K}\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\phi && \text{en } \Omega && \text{Compatibilidad} \\
 b) \quad & \nabla \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} && \text{en } \Omega && \text{Equilibrio} \\
 c) \quad & \phi = \phi^* && \text{en } \Gamma_\phi && \text{Condición esenciales de frontera} \\
 d) \quad & \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 && \text{en } \Gamma_q && \text{Condición natural de frontera}
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

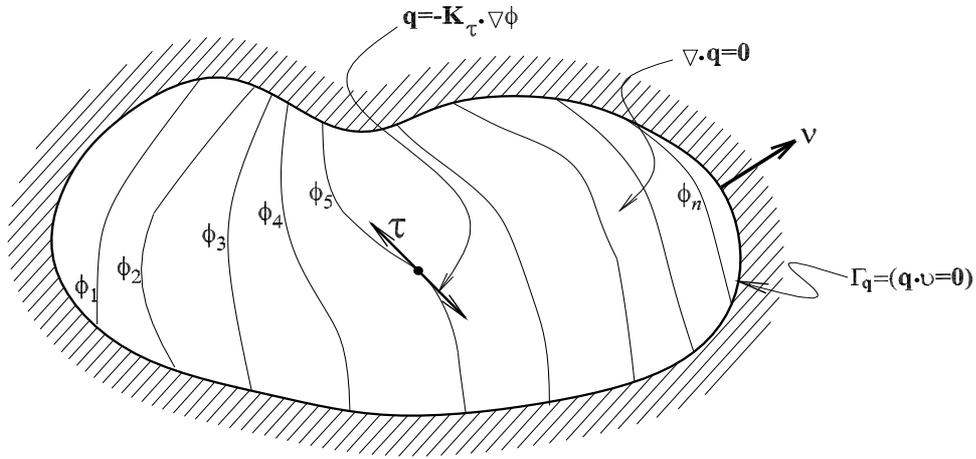


Figura 8.6: Problema de conservación con \mathbb{K} anisotrópico .

De las ecs. (8.15) y (8.16), el funcional de la ec. (8.9) se reduce a

$$\Pi(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \phi \nabla^T \cdot \mathbb{K}\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\phi d\Omega \tag{8.21}$$

que proporciona como condiciones de estacionaridad el PVF definido en la ec. (8.20), considerando que la compatibilidad entre el potencial y el flujo de la ec. (8.20a) se satisface *a priori*.

Para obtener un valor estacionario del funcional de la ec. (8.21), se realiza una aproximación con el método de los elementos finitos. En este caso la variable independiente es el potencial ϕ , que se aproxima como:

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\phi \tag{8.22}$$

Donde \mathbf{N} son las funciones de interpolación, ϕ son los valores nodales del potencial. Sustituyendo la ec. (8.22) en el funcional de la ec. (8.21), derivando respecto a ϕ e igualando a cero:

¹La ec. (8.20b), corresponde a un problema de Laplace.

$$\sum_{n=1}^{nelementos} \int_{\Omega^e} [\mathbf{N}^T \nabla^T \cdot \mathbb{K} \cdot \nabla \mathbf{N}] d\Omega \phi = \mathbf{0} \quad (8.23)$$

$$\mathbf{K} \cdot \phi = \mathbf{0}$$

Las ec. (8.23) definen el problema de conservación lineal, para este caso corresponde a la ecuación de Laplace, que se tiene que resolver en cada paso del análisis. En la solución de esta ecuación se pueden presentar el problema de una matriz singular y de la solución trivial o constante ($\phi = \mathbf{0}$ ó $\phi = \text{cte}$). Note que la solución en del tipo constante indicaría que en todos los nodos se tiene el mismo valor, en consecuencia se tendría una banda la cual no seria útil para darle seguimiento a la discontinuidad.

Con la finalidad de evitar problemas de singularidad (el determinante de $|\mathbb{K}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}))| = 0$) durante la simulación numérica, el tensor de conductividad de la ec. (8.19) se modifica de la siguiente manera:

$$\mathbb{K}_\epsilon = \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + \epsilon \mathbf{1} \quad (8.24)$$

Donde $\mathbf{1}$ es el tensor unitario y ϵ^2 es un valor constante, lo suficientemente pequeña para satisfacer la ec. (8.12), pero lo suficientemente grande para evitar la singularidad de \mathbb{K} .

Para tener una solución diferente a la trivial $\phi=0$ en la ec. (8.23), el valor del ϕ se prescribe en un nodo, y para evitar soluciones del tipo $\phi = \text{cte.}$, se prescribe un nodo adicional. Puesto que los valores de ϕ se utilizan para *identificar* las discontinuidades, los valores prescritos de potencial ϕ^* son irrelevantes siempre que no se ubiquen en dos puntos de la misma isolínea.

Este artificio para el seguimiento de la discontinuidad da resultados aceptables, pues determina en forma global las posibles líneas de propagación, y activa durante el proceso de análisis, los segmentos de discontinuidades en los elementos que satisfacen un criterio de falla. Lo anterior se debe a la construcción del tensor anisotrópico de conductividad de la ec. (8.19), puesto que, como se mencionó anteriormente, la energía de ϕ , en este caso el valor que *identifica* la discontinuidad, fluye en la dirección $-\nabla\phi$, con la magnitud $\mathbb{K}_\epsilon \cdot |\nabla\phi|$.

8.3.3 Estrategia de seguimiento propuesta

Puesto que la técnica de seguimiento global puede requerir de un gasto computacional adicional en cada paso del análisis, es este trabajo se emplea una estrategia con base en el seguimiento local, se recupera el tensor de de esfuerzos en la punta de la discontinuidad mediante el método del parche de recuperación súperconvergente (Zienkiewicz y Zhu, 1992), con este estado interpolado se calcula la dirección de propagación de la discontinuidad.

²Oliver *et al.* (2002b) emplean un valor de $\epsilon = 10^{-6}$.

En el análisis de sólidos con una formulación de desplazamientos del método de los elementos finitos, generalmente el estado de esfuerzos aproximado, σ_h , que se conoce en los puntos de integración, es discontinuo entre elementos. Considere un sólido discretizado o en una zona de interés como la delimitada por el parche de elementos finitos cuadriláteros en la figura 8.7 asociados a un nudo i .

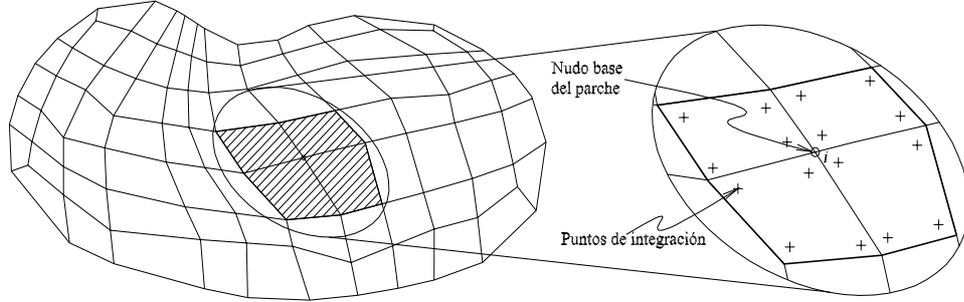


Figura 8.7: Parche asociado a un nudo base.

El error local de la aproximación del estado de esfuerzos se define por.

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (8.25)$$

donde el tensor de esfuerzos σ , corresponden a la solución exacta, los cuales son continuos y suavizados entre elementos. Si se define la norma cuadrática del error local de la ec. (8.25) como:

$$\|e_\sigma\|^2 = \int_{\Omega} e_\sigma^T e_\sigma dx \Omega \quad (8.26)$$

Para aproximar los esfuerzos σ , con una expansión polinomial se tiene

$$\sigma = Pa \quad (8.27)$$

donde P , contiene polinomios de interpolación y a es un vector de parámetros desconocidos. Para problemas en dos dimensiones se emplea la siguiente aproximación.

$$P = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad (8.28)$$

$$a = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3] \quad (8.29)$$

Para recuperar el estado de esfuerzos continuo, σ , a partir de la solución aproximada, σ_h , el problema se plantea como el minimizar el error entre estos definido en la ec. (8.26), mediante la determinación de la función de la ec. (8.27) que extremize el siguiente funcional:

$$\Pi_s = \sum_{n=1}^n (\sigma - \sigma_h)^2 + \alpha \sum_{n=1}^n \int_{\Omega^e} (\nabla \sigma - \mathbf{b})^2 d\Omega \quad (8.30)$$

donde n es el número de puntos donde se conocen los esfuerzos, σ_h , el parámetro adimensional, α , es una constante de penalización. El primer término de la ec. (8.30) representa el funcional de mínimos cuadrados que calcula el error entre los esfuerzos suavizados y los esfuerzos aproximados. El segundo término de la ec. (8.30) representa un funcional de penalización, con un valor de α , suficientemente grande tal que el gradiente de los esfuerzos continuos σ , se aproximen a las fuerzas de cuerpo \mathbf{b} , para garantizar el equilibrio.

Sustituyendo la ec. (8.27) en la ec. (8.30), se tiene

$$\Pi_s = \sum_{n=1}^n (Pa - \sigma_h)^2 + \alpha \sum_{n=1}^n \int_{\Omega^e} (\nabla Pa - b)^2 d\Omega \quad (8.31)$$

Para tener un valor extremo de este funcional se deriva con respecto a a y se iguala a cero:

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial a} = \sum_{i=1}^n P(Pa - \sigma_h) + \alpha \sum_{n=1}^n \int_{\Omega^e} \nabla P(\nabla Pa - b) = 0 \quad (8.32)$$

Así

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n PPa + \sum_{n=1}^n \int_{\Omega^e} \nabla P \nabla Pa &= \sum_{i=1}^n P\sigma_h + \sum_{n=1}^n \int_{\Omega^e} \nabla Pb \\ \left(\sum_{i=1}^n PP + \alpha \sum_{n=1}^n \int_{\Omega^e} \nabla P \nabla P \right) a &= \sum_{i=1}^n P\sigma_h + \alpha \sum_{n=1}^n \int_{\Omega^e} \nabla Pb \\ Aa &= b \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$(8.34)$$

El sistema de ecuaciones de la ec. (8.34) se resuelve para obtener los valores de a . Éstos valores, se sustituye en la ec. (8.27) con la que se recupera un estado de esfuerzos suavizado en todos los puntos del parche.

El procedimiento de seguimiento en este trabajo se basa en el seguimiento local, *e.g.*, Oliver 1996, utilizado por Alfaiate *et al.* (1997), Wells y Shuys (2001), Fernández (2005), la diferencia en este trabajo, es que para calcular la dirección de propagación de la discontinuidad, se emplea el tensor de esfuerzos recuperado con la solución del funcional de la ec. (8.30). El algoritmo de propagación consiste de los siguientes puntos:

1. **Identificación de un elemento raíz** r_i . Cualquier elemento e , que satisface un criterio de falla, se denomina como un elemento raíz. En este trabajo se considera que la falla se produce predominantemente en Modo I, por lo que se emplea el siguiente criterio de falla:

$$\sigma_n - f_t \leq 0 \quad (8.35)$$

donde σ_n , corresponde al esfuerzo normal a la posible discontinuidad y, f_t , es el esfuerzo de falla a tensión.

2. **Cálculo de la dirección de la propagación.** Esta se realiza con base en el método del parche de recuperación súperconvergente (Zienkiewicz y Zhu, 1992):

- Construcción de un parche con los elementos finitos adyacentes asociados los nodos i y j , correspondientes al borde que contiene la punta de la discontinuidad (figura 8.8)

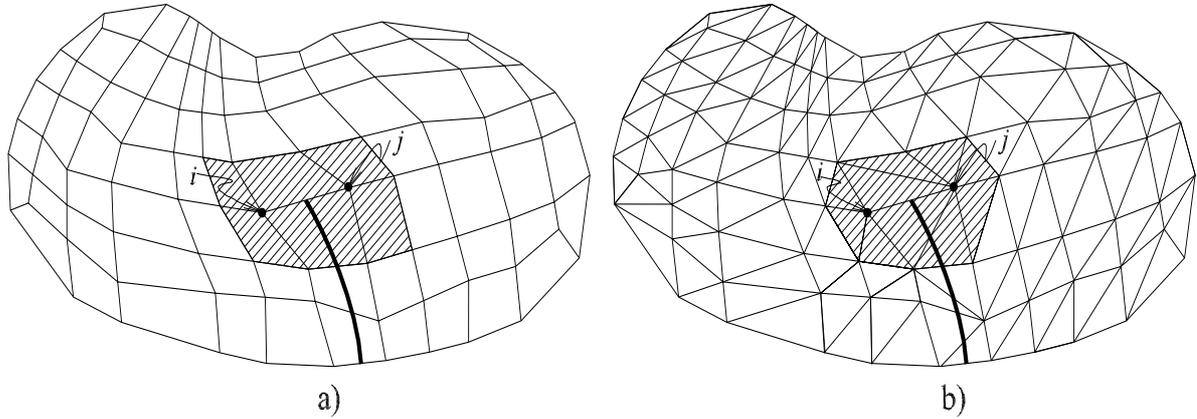


Figura 8.8: Parche en elementos finitos: a) cuadriláteros y b) triangulares.

- Cálculo las constantes a mediante la solución de la ec. (8.34), con su la evaluación en los puntos de integración de los elementos que forman el parche.
- Obtención del tensor de esfuerzos en la punta de la discontinuidad con la ec. (8.27).
- Cálculo de la dirección de la discontinuidad con el estado de esfuerzos interpolado.

3. **Propagación de una discontinuidad S_i .** La discontinuidad con procedimiento de seguimiento local descrito anteriormente (figura 8.2).

Una propuesta para el seguimiento de las discontinuidades, es emplear elementos finitos mixtos, en los cuales se conoce el campo de los esfuerzos en todos los puntos de un sólido que presenta discontinuidades, con esto se puede conocer el estado de esfuerzos en cualquier punto dentro del elemento incluyendo la punta de la discontinuidad.

Capítulo 9

Ejemplos de aplicación

Para mostrar el potencial de la formulación desarrollada en este trabajo, en este capítulo se presentan algunos ejemplos de la aplicación para simular el proceso de falla de estructuras sujeta a carga en su evolución al colapso. Las estructuras se discretizan con algunos elementos de la jerarquía de elementos de elementos finitos con discontinuidades interiores desarrollados en este trabajo.

En el primero de estos ejemplos, una barra modelada con elementos unidimensionales, se utiliza la matriz mixta, de rigideces y de flexibilidades del elemento unidimensional con discontinuidades interiores. En el segundo, se utiliza la matriz de rigideces del elemento finito triangular con discontinuidades interiores. Posteriormente, se simula el comportamiento de vigas discretizadas con matrices de rigideces de elementos viga con discontinuidades interiores formulados con base en la teoría de Euler- Bernoulli y en la de Timoshenko.

Se demuestra que la energía que se induce a la estructura por la carga externa, se libera o se transforma en la energía para desarrollar la discontinuidad. Lo que demuestra la capacidad que estos elementos para simular el proceso de falla en las estructuras. Dependiendo del problema, la zona de localización de deformaciones, donde una discontinuidad se presenta, puede representar físicamente una grieta, una articulación, una dislocación, o una combinación de estas dos últimas. En los ejemplos desarrollados en este capítulo, se emplea un modelo de daño con una regla de ablandamiento lineal como la de la ec. (3.22), aunque se puede emplear una exponencial o alguna otra.

Con los resultados obtenidos en este capítulo se puede concluir que la formulación variacional general del problema del Modelo de Discontinuidades Interiores, da como resultado una jerarquía de elementos finitos con discontinuidades interiores, los cuales presentan ventajas numéricas sobre otros elementos que se reportan en la literatura, su extensión a elemento en tres dimensiones para estudiar problemas de interés es sencilla.

9.1 Barra

Se presenta el ejemplo clásico de una barra restringida en su extremo izquierdo y sometida a carga de tracción en su otro extremo hasta llegar a la falla (Oliver y Huespe, 2004). La barra tiene una longitud $L = 2$ m, área $A=1\text{ m}^2$ (figura 9.1), con las siguientes propiedades mecánicas: módulo de elasticidad $E = 1,000$ MPa, esfuerzo de falla a tensión $\sigma_u = 1$ MPa y energía de fractura $G_f=0.005 \frac{\text{MN}}{\text{m}}$. Se realiza un análisis cuasiestático empleando la matriz mixta, de rigideces y de flexibilidades del elemento unidimensional correspondientes a las ecs. (5.51), (5.55) y (5.63). Cuando se alcanza un esfuerzo igual al del esfuerzo de falla, se presenta un salto en el campo de desplazamientos en el centro de la barra, las deformaciones decrecen en el continuo $\Omega \setminus S$ y se incrementan en la zona de localización S (figura 9.2). Este proceso simula el proceso de daño en la estructura hasta llegar al colapso (figura 9.3).

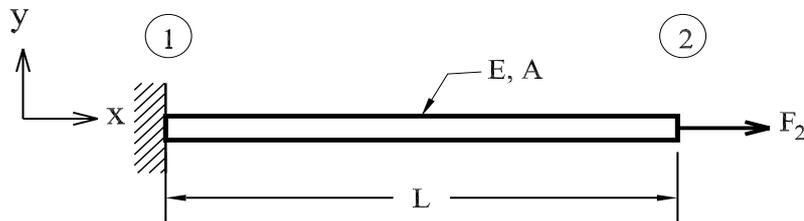


Figura 9.1: Geometría de barra continua.

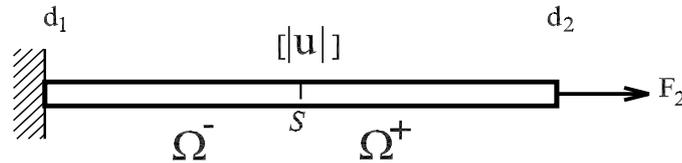


Figura 9.2: Geometría de barra discontinua.

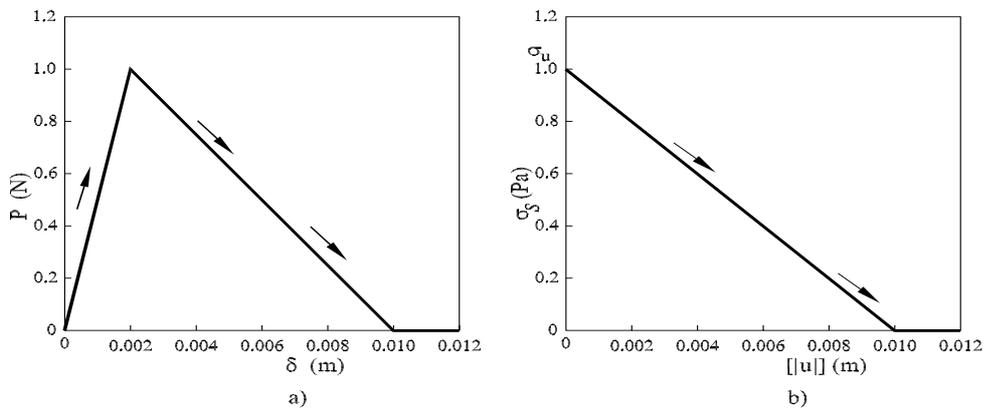


Figura 9.3: Variación del desplazamiento d_2 respecto al esfuerzo σ .

El área bajo la curva se la figura (9.3), corresponde a la energía externa inducida por la carga,

que es igual a la energía de fractura G_f del material necesaria para desarrollar una grieta en la sección de la barra, con lo que se demuestra que el elemento finito desarrollado en la formulación anterior es capaz de capturar la discontinuidad y de disipar energía (energía de fractura) en forma adecuada.

9.2 Barra 2 dimensiones

En este ejemplo se emplean los elemento triangulares de deformación constante con discontinuidades interiores desarrollado en el capítulo 5 de este trabajo, ec. (5.77), que corresponde al método de los desplazamientos de los elementos finitos. Para mostrar el potencial de este elemento, en la figura 9.4 se idealiza la barra de la figura (9.1) como un problema plano; se consideran las propiedades geométricas y mecánicas del ejemplo anterior, la estructura se somete a carga a P hasta que aparece un salto $[[\mathbf{u}]]$ en el campo de desplazamientos.

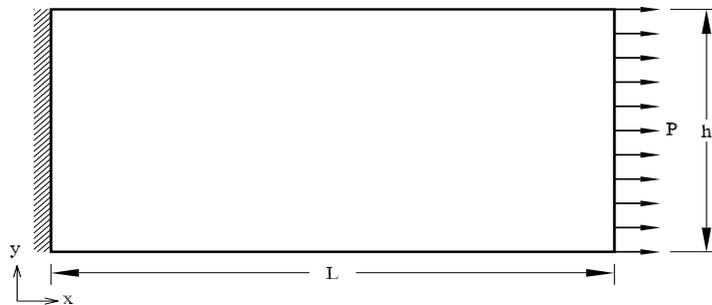


Figura 9.4: Geometría barra como un problema plano.

Este problema se analiza con cuatro mallas de elementos finitos triangulares (figura 9.5) las cuales muestran la aparición del un salto $[[\mathbf{u}]]$ en el interior de la barra; en la figura 9.6 se muestra el diagrama carga P desplazamiento δ y esfuerzo σ_S salto $[[\mathbf{u}]]$, para una relación de Poisson $\nu = 0.0$ y 0.4 . Para las cuatro mallas de elementos finitos, los diagramas coinciden.

Se observa que el diagrama carga P desplazamiento δ para una relación de Poisson, nula $\nu = 0.0$, corresponde a la curva mostrada en la figura 9.3, con un área bajo de la curva igual a la energía de fractura G_f . Con lo que se demuestra que el elemento bidimensional desarrollado libera en forma adecuada la energía.

9.3 Viga con apoyos simples

Sea una viga con apoyos simples (figura 9.7), a la que se le impone con una carga en el centro del claro, longitud $L = 1$ y propiedades mecánicas $EI = 1$. Para simular el proceso de falla en este problema, se utilizaron los elementos finitos con discontinuidades interiores de la ec. (6.140) correspondiente a teoría de vigas de Euler-Bernoulli. El comportamiento del material es inicialmente elástico hasta que el momento flexionante alcanza un valor de fluencia $M_y = 1$, en ese instante, comienzan a concentrarse las deformaciones en una zona lo que degrada el material.

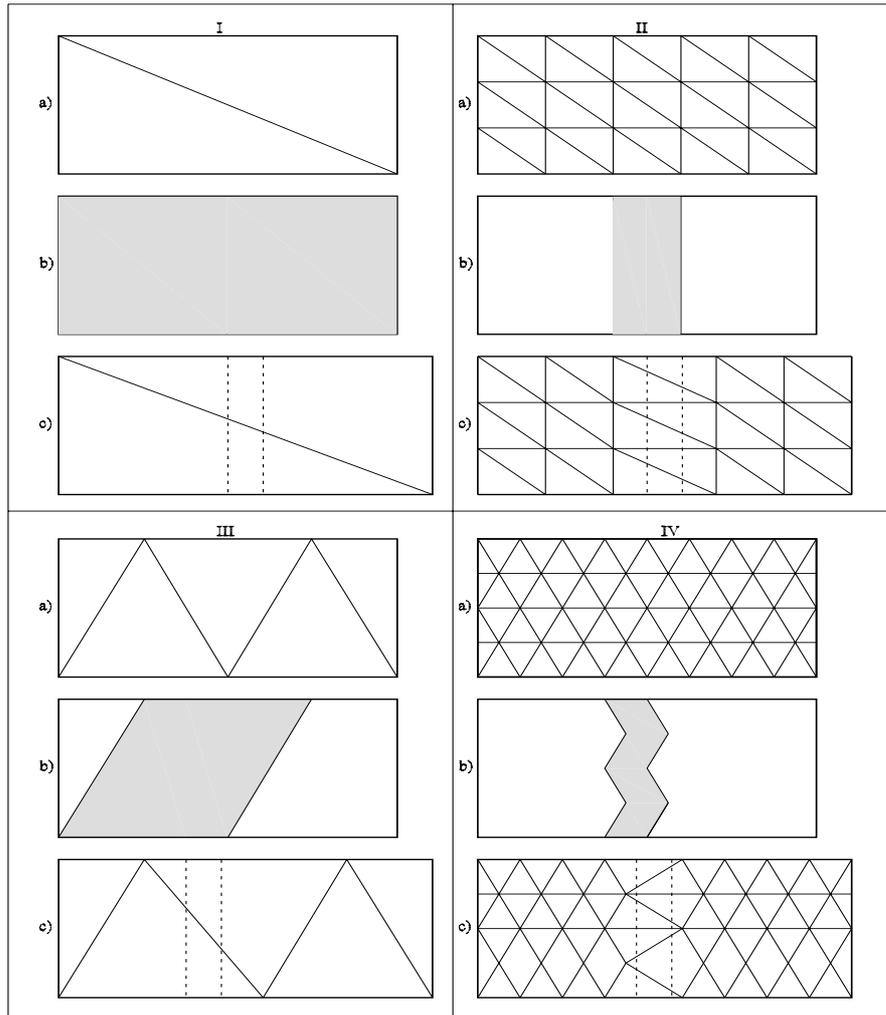


Figura 9.5: Idealización: a) Malla de elementos finitos, b) zona de localización y c) malla deformada.

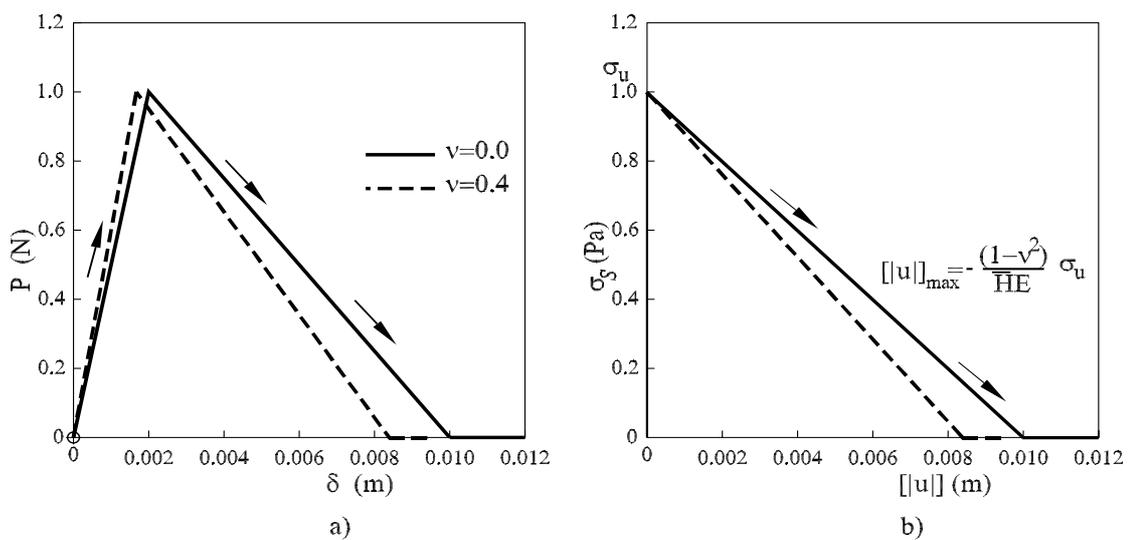


Figura 9.6: Diagramas: a) Carga P - desplazamiento δ y b) esfuerzo σ_s - salto .

Puesto que se presenta un salto en el campo de las rotaciones $[[\theta]]$ físicamente se desarrolla una articulación. La resistencia a flexión de la viga decrece debido al ablandamiento que sigue una relación lineal con un módulo de ablandamiento $H = -0.4$.

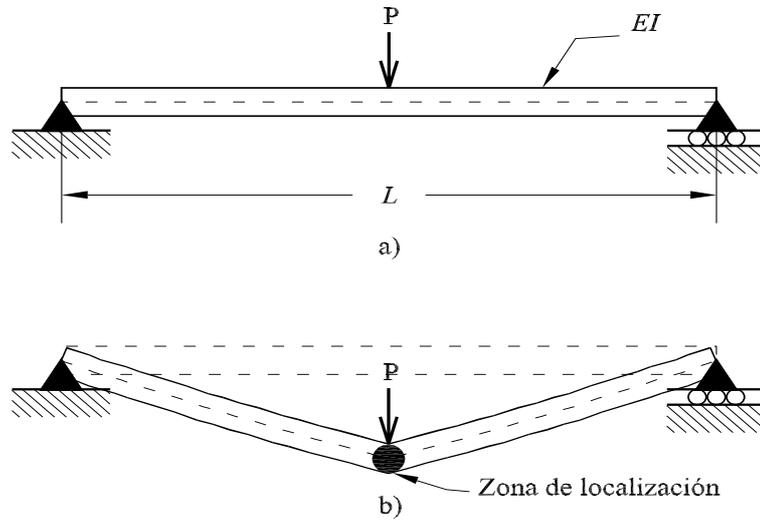


Figura 9.7: Viga con carga al centro: a) descripción geométrica y b) con zona de localización (articulación).

La figura (9.8) muestra la variación de la carga P vs. el desplazamiento transversal w en el centro de la viga y la variación del momento flexionante M al centro vs. el salto $[[\theta]]$ (desarrollo de la articulación). Se observa que la carga P y el momento flexionante M decrecen después de alcanzar un valor de fluencia M_y y la viga colapsa.

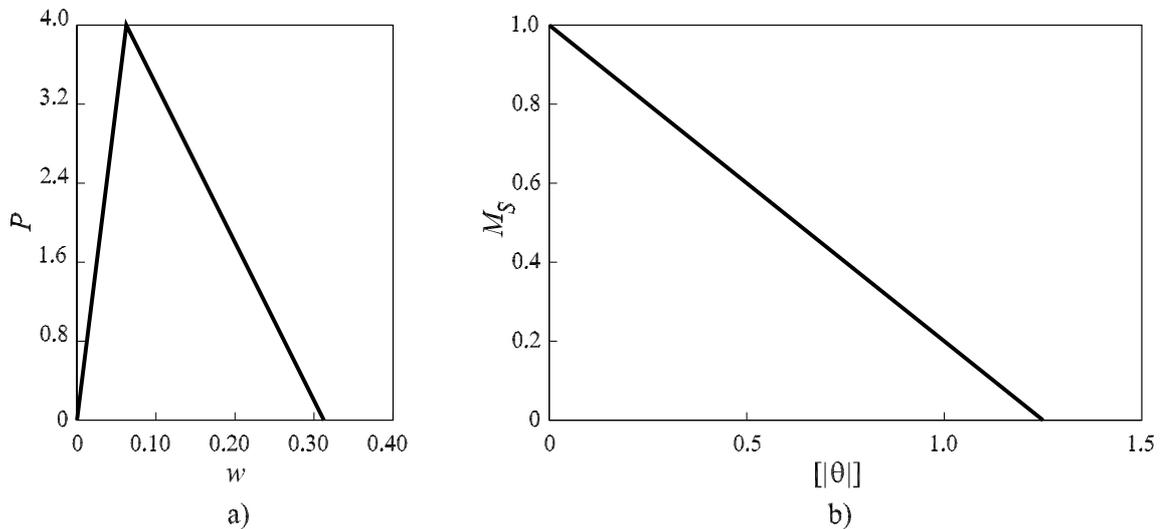


Figura 9.8: Variación: a) Carga P vs. desplazamiento transversal w y b) momento M vs. salto.

Integrando ambas curvas, se muestra que la energía que suministra la carga al sistema, 0.625 Nm, es igual a la energía que se disipa en la discontinuidad. Lo que demuestra la capacidad del elemento para simular en forma adecuada este tipo de problemas.

9.4 Viga en cantilever

Considérese la viga en cantilever con propiedades mecánicas $EI = 1$ y longitud $L = 1$, figura (9.9a), la cual se le impone un desplazamiento transversal \bar{w}_2 en su extremo izquierdo. Para simular el proceso de falla en este problema, se utilizaron los elementos finitos con discontinuidades interiores de la ec. (6.153) correspondiente a teoría de vigas de Timoshenko. Como en el ejemplo anterior, el comportamiento del material es inicialmente elástico lineal hasta que el momento alcanza el valor de fluencia $M_y = 1$, en este caso la zona de localización, se presenta un salto en el campo de los desplazamientos transversales $[[w]]$, por lo que físicamente se desarrolla una dislocación. La resistencia de momento flexionante decrece siguiendo una relación lineal con un módulo de ablandamiento $H = -0.1$.

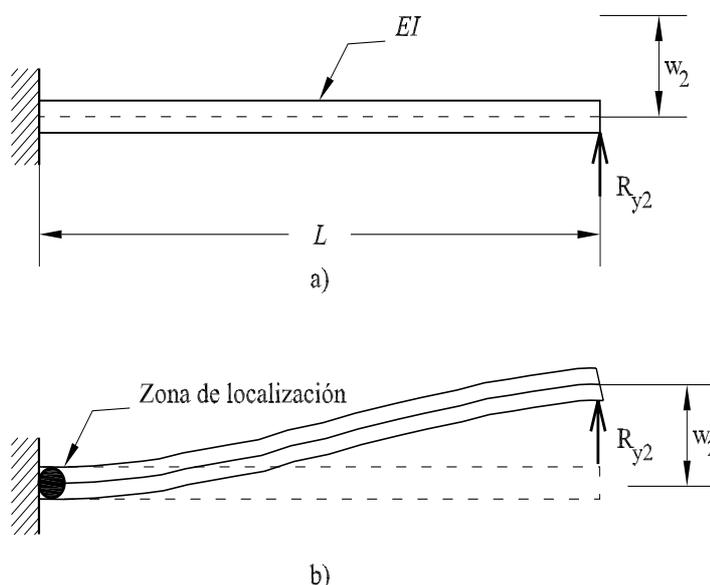


Figura 9.9: Viga en cantilever: a) descripción geométrica y b) con zona de localización (articulación).

La figura (9.10) muestra la variación de la reacción R_y vs. el desplazamiento impuesto \bar{w}_2 en el extremo libre de la viga y la variación del cortante V vs. el salto del desplazamiento $[[w]]$ en el extremo. Se puede observar que la reacción R_y y el cortante V decrecen después de alcanzar el valor de fluencia M_y conforme colapsa la viga.

Integrando ambas curvas, se tiene que la energía que se suministra al sistema por el desplazamiento impuesto, 5.0 N m, es igual a la energía que se disipa en la discontinuidad, lo que demuestra el potencial de esta formulación para simular estos problemas.

9.5 Viga simplemente apoyada con aproximación de esfuerzo plano

Para ilustrar la aplicación de esta formulación a problemas en dos dimensiones se considera el problema de una viga simplemente apoyada con una carga al centro del claro y con espesor de

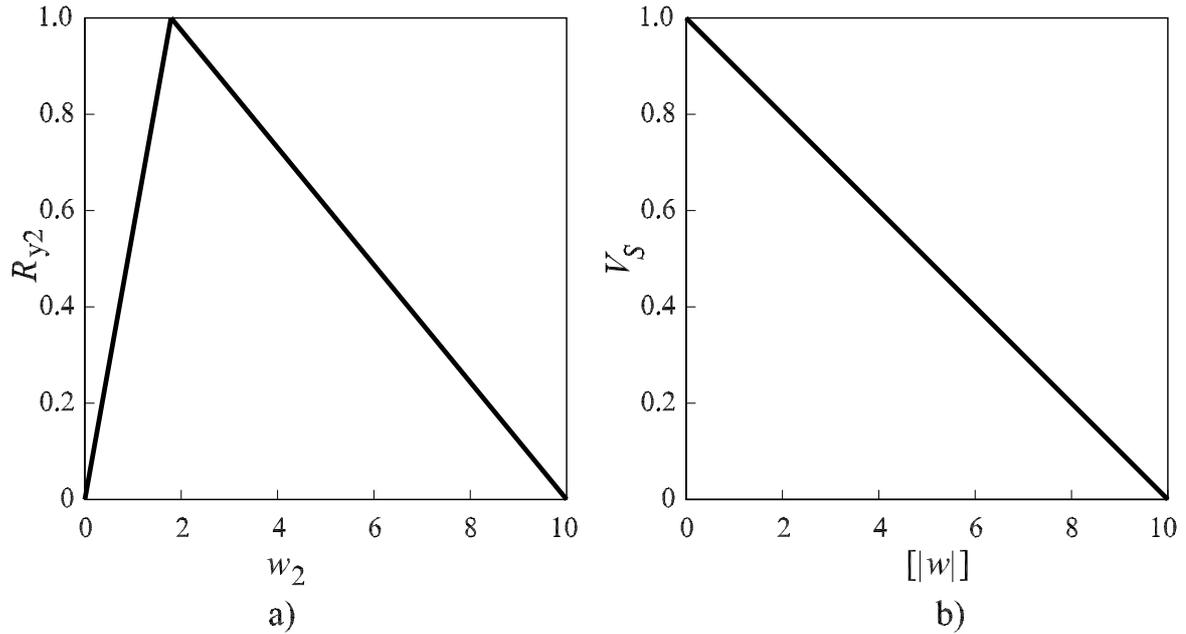


Figura 9.10: Variación: a) Reacción R_{y2} vs. desplazamiento impuesto w_2 y b) cortante V vs. salto transversal del desplazamiento.

1 mm como la de la figura 9.11, que se idealiza como un problema de esfuerzo plano. Con fines comparativos este mismo problema se idealiza con los elementos viga desarrollados en la ec. (6.140). Este ejemplo ha sido también estudiado con elementos finitos extendidos bidimensionales triangulares por Wells y Sluys (2001). Las siguientes propiedades del material se emplean: módulo de Young $E = 100\text{MPa}$, relación de Poisson $\nu = 0.0$, límite elástico del momento $M_u = 2.5\text{Nmm}$ y energía de fractura $G_f = 0.1\text{Jmm}^{-2}$.

La figura (9.10) muestra la variación de la carga P vs. el desplazamiento transversal u al centro del claro L . Integrando la respuesta de las curvas carga-desplazamiento para ambas mallas, se muestra que la energía disipada es igual a 0.308Nmm para elementos planos (Wells y Sluys, 2001) y 0.30Nmm para elementos viga con discontinuidades. Que corresponde a la energía de fractura multiplicada por el área de la sección transversal de viga, lo que muestra la capacidad de estos elementos para simular este tipo de problemas en forma adecuada.

9.6 Viga empotrada

Considérese la viga empotrada con propiedades mecánicas $E = 40,000\text{MPa}$ y longitud $L = 2\text{m}$, figura (9.13a), a la cual se le impone una carga P en el centro del claro. Para simular el proceso de falla en este problema, se utilizaron los elementos finitos con discontinuidades interiores de la ec. (6.140) correspondiente a teoría de vigas de Euler-Bernoulli. El comportamiento del material es inicialmente elástico lineal hasta que el momento alcanza el valor de fluencia $M_y = 0.8\text{MN} - \text{m}$, en este caso la zona de localización (articulación) se presenta en el centro de la viga (9.13b). La resistencia de momento flexionante decrece siguiendo una relación lineal con un módulo de ablandamiento $H = -0.5$.

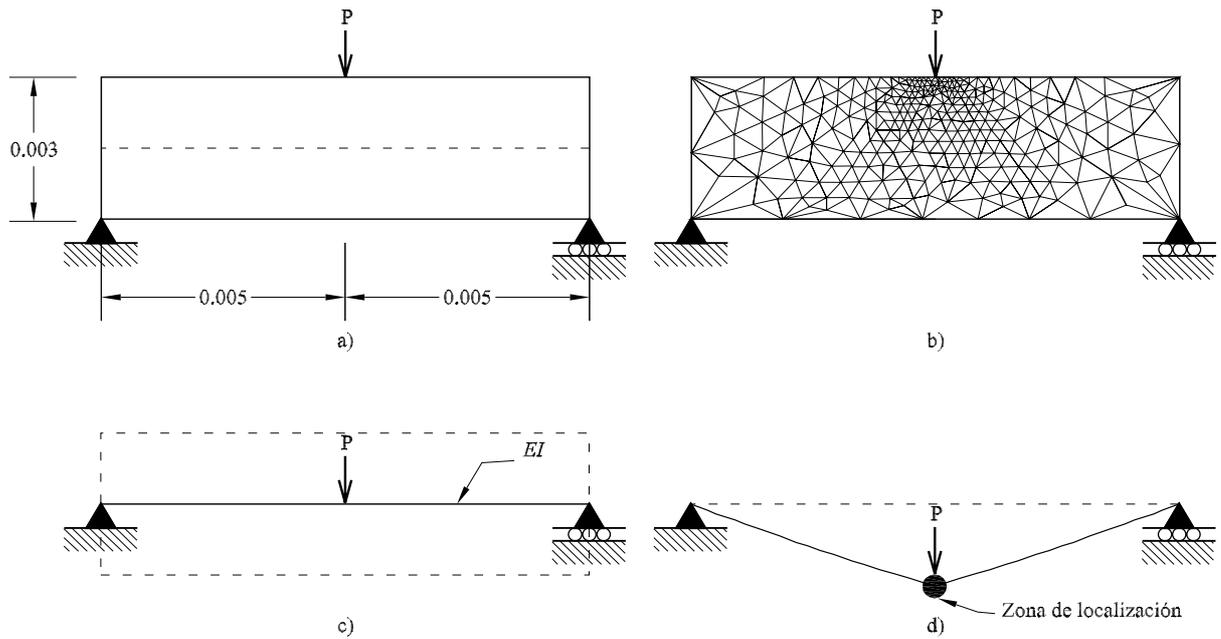


Figura 9.11: Viga simplemente apoyada: a) descripción geométrica b) idealización con EF planos, c) idealización con EF viga y d) con una zona de localización (articulación).

La figura (9.14) muestra la variación de la carga P vs. el desplazamiento w en el centro de la viga y la variación del momento M vs. el salto de las rotaciones $[[\theta]]$ en el centro. Se puede observar que cuando la viga alcanza el momento máximo, se presenta un desplazamiento máximo $w = 0.05$ m; en este instante aparece una zona de localización en el centro del claro, *i.e.*, desarrollo de una articulación, por lo que en el resto de la viga comienza a descargarse, de tal forma que al desarrollarse por completo la articulación, el desplazamiento máximo al centro es $w = 0.025$ m. Las áreas achuradas bajo las curvas de la figura (9.14), corresponde a la energía necesaria para desarrollar la articulación.

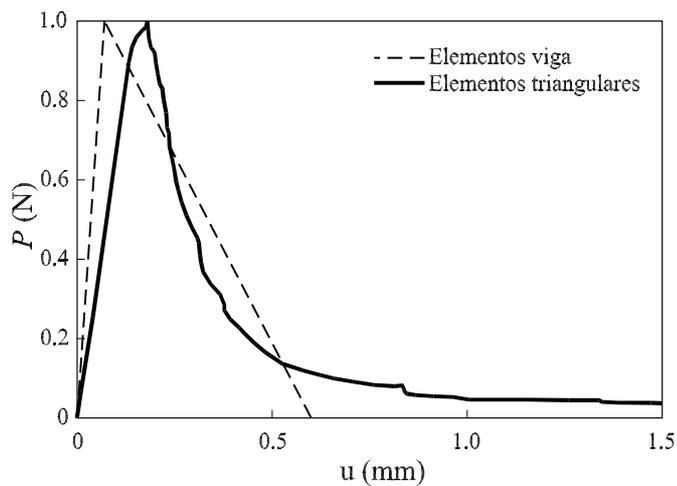


Figura 9.12: Variación de la carga P vs. desplazamiento u .

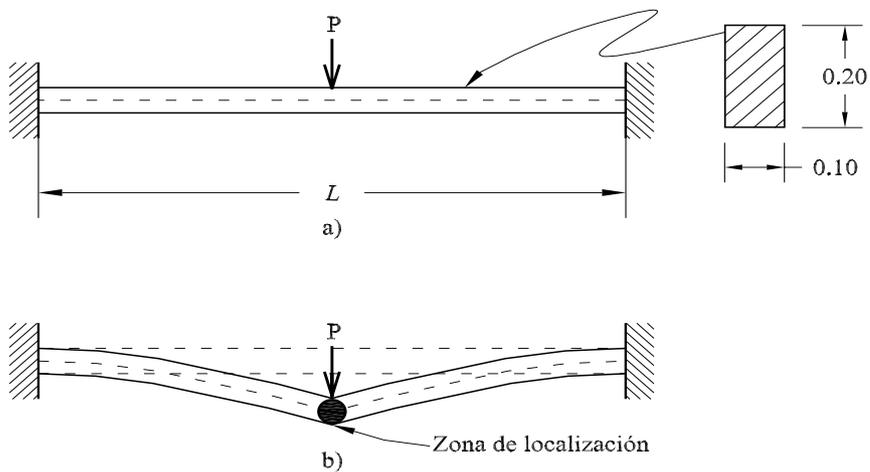


Figura 9.13: Viga empotrada: a) descripción geométrica y b) con zona de localización (articulación).

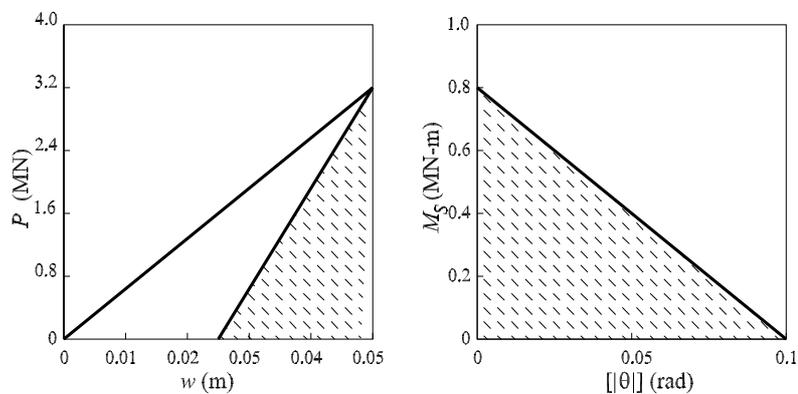


Figura 9.14: Variación de: a) carga P vs. desplazamiento u y Momento M vs. salto en las rotaciones.

Capítulo 10

Conclusiones y trabajos futuros

10.1 Conclusiones

De este trabajo se desarrollo una formulación variacional general del Modelo de Discontinuidades Interiores para el problema de localización de deformaciones en sólidos, de cada una de las aproximaciones: Discontinuidad Débil, Discontinuidad Fuerte y Discontinuidad Discreta. Como se demostró, esta formulación variacional incluye todas las ecuaciones que gobiernan el problema, como condiciones de estacionaridad, pero la formulación variacional presenta un tratamiento matemático más poderoso en cuestión de existencia, estabilidad y convergencia de soluciones numéricas. De la formulación variacional general, es posible generar una familia de principios variacional que incluyen los mixtos, de energía total y los de la energía complementaria.

La aproximación de los funcionales desarrollados mediante el MEF, dio lugar a matrices de rigideces simétricas de elementos finitos con discontinuidades interiores. Las cuales se pueden clasificar como matrices de rigideces, flexibilidades y mixtas, teniendo así una jerarquía de elementos finitos con Discontinuidades Interiores. La formulación presentada garantiza dentro del elemento finito tanto la continuidad del vector de tracciones en la discontinuidad, como la posibilidad de movimientos de cuerpo rígido de las partes en que queda dividido el elemento.

Partiendo de los funcionales para sólidos continuos con discontinuidades interiores, en este trabajo se presentó una formulación variacional para representar la localización de deformaciones en problemas donde la acción dominante es la flexión/cortante en elementos como: placas, vigas y láminas. Se demostró que el Modelo de Discontinuidades Interiores, representa adecuadamente el fenómeno de concentración de deformaciones en estos elementos dominados por la flexión/cortante, en los que la discontinuidad se puede presentar como un salto en los desplazamientos transversales (dislocación), en las rotaciones (articulaciones) o como una combinación de ellos.

Las contribuciones principales de este trabajo de investigación son:

- Se demostró que al introducir la continuidad de tracciones en el modelo en su forma variacional, *i.e.*, funcional de energía, se satisface el PVF, se tiene varias ventajas.
- Se desarrolló una jerarquía de principios variacionales para el Modelo de Discontinuidad Interiores, en sus tres aproximaciones, que incluye principios Mixtos, de energía potencia total y de energía potencial complementaria.
- Se desarrolló un funcional de energía para un sólido que experimenta más de una discontinuidad en su interior, que satisface el PVF, el cual da la posibilidad de considerar más de una grieta dentro de un elemento finito.
- Se formularon las matrices de rigideces, flexibilidades y mixtas de los elementos finitos con discontinuidades interiores, las cuales son simétricas y bien condicionadas. Estos elementos representan en forma consistente la continuidad interna de tracciones y los movimientos de cuerpo rígido de las partes en las que queda dividido el elemento por la aparición de la discontinuidad. Lo anterior no sólo mejora la estabilidad numérica, sino también disminuye el tiempo de cómputo en la solución, proporcionando resultados confiables.
- Se demostró que existe una relación directa entre la aproximación con Discontinuidades Fuertes y Discretas, no sólo en los modelos de daño que se emplean para describir el comportamiento del material, sino también en la formulación variacional.
- Se desarrollaron los funcionales de energía para los elementos placas y vigas sin discontinuidades interiores se pueden generar a partir del principio variacional general de Fraeijs de Veubeke (1951) para un continuo elástico. Así mismo, los funcionales de energía para estos elementos con discontinuidades se pueden generar a partir del funcional general de energía para el Modelo de Discontinuidades Interiores, también desarrollado en este trabajo, el cual fue inspirado en el de Fraeijs de Veubeke.
- La formulación presentada es una formulación general del Modelo de Discontinuidades Interiores, de la que se pueden desarrollar elementos finitos con discontinuidades interiores tridimensionales para resolver problemas de localización de deformaciones de interés en la ingeniería.
- Para la formulación variacional, en este caso el problema de localización de deformaciones en elementos estructurales dominados por la flexión, el método natural de discretización es el de Rayleigh-Ritz, por lo que el método del elemento finito, que se originó en esta línea, continúa siendo el método numérico más poderoso para resolver estos problemas.
- Se presentó un análisis para considerar la variación lineal dentro de la discontinuidad, de la cual se concluyó que para que una variación lineal mejore la representación cinemática y la distribución de esfuerzos en el continuo, se requiere emplear elementos finitos no sean de deformaciones constantes, pues en este caso las deformaciones dependen del promedio global de los desplazamientos, por lo que una variación lineal del salto no sería de relevancia en los resultados.

- Los elementos mixtos desarrollados tienen la ventaja de dar el estado de esfuerzos en todos los puntos del dominio, por lo que no requieren de emplear métodos para conocerlos en puntos de interés como se tiene que realizar en la formulación de desplazamientos.

10.2 Trabajos futuros

- Partiendo de las formulaciones variacionales desarrolladas en este trabajo, los desarrollos futuros son:
- Formular familias de elementos finitos con discontinuidades interiores en 1, 2 y 3 dimensiones, su implantación en un código de elementos finitos y simulación numérica de problemas de interés.
- Desarrollar formulaciones de elementos finitos con saltos de desplazamiento con variación lineal, su implantación y comparación con elementos con saltos constantes.
- Implantar las formulaciones de elementos finitos correspondientes a los funcionales de energía para las placas gruesas y delgadas.
- Desarrollar las formulaciones y algoritmos necesarios para resolver problemas donde la acción es debida a cargas dinámicas rápidas como explosiones, choques e impactos.
- Elaborar simulaciones numéricas de problemas de interés práctico.

Bibliografía

- [1] **Alfaiate, J., Simone, A. y Sluys, L. J. (2003)**. Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 5799-5817.
- [2] **Alfaiate, J., Pires, E.B. y Martins, J.A.C. (1997)**. A finite element analysis of non-prescribed crack propagation in concrete. *Computers and Structures*, vol. 63(1), pp 17–26.
- [3] **Alfaiate, J. y Pires, E.B.(1999)**. A discrete crack numerical model. En: Carpinteri, A., Aliabadi, M. (Eds.), *Computational Fracture Mechanics in Concrete Techonology*. WIT Press/Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, pp. 133–162.
- [4] **Armero, F. y Garikipati, K. (1996)**. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, pp. 2863-2885.
- [5] **Armero, F. (1997)**. Localized anisotropic damage of brittle materials. En: D.R.J. Owen, E. Oñate, E. Hinton (Eds.), *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications (COMPLAS V)*, CIMNE, Barcelona, España, pp. 635-640.
- [6] **Armero, F. (2005)**. Modelo y simulación numérica de discontinuidades fuertes en láminas. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Granada, España, CIMNE, memorias en disco compacto.
- [7] **Armero, F. y Ehrlich, D. (2006)** Finite element methods for the multi-scale modelling of softening hinge lines in plates at failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 1283-1324.
- [8] **Atluri, S. N. (1975)**. On “hybrid” finite-element models in solid mechanics. In: *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*. R. Vichnevetsky (Eds.), AICA, Rutgers University, pp. 346–356, .
- [9] **Bazant, Z. P. y Planas, J. (1998)**. *Fracture and size effect in concrete an others cuasibrittle materials*. CRC Press, Boca Raton, FL.

- [10] **Belytschko, T., Fish, J. y Engelman, B.E. (1988)**. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 70(1), pp. 59-89.
- [11] **Belytschko, T., Lu, YY. y Gu, L. (1994)**. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. vol. 37(2), pp. 229-256.
- [12] **Bazeley G. P., Cheung Y. K., Irons B. M. y Zienkiewicz O. C. (1966)**. Triangular elements in plate bending - conforming and non-conforming solutions. In *Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Przemieniecki J. S. *et al.* (Eds.), AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, pp. 547-576.
- [13] **Chaves, E.W.V. (2003)**. A three dimensional setting for strong discontinuities modelling in failure mechanics. Tesis para obtener el grado de Doctor presentada en la Universidad Politecnica de Cataluña (UPC), Barcelona, España.
- [14] **Chaboche, J.L. (1979)**. Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en presence d'un endommagement anitrope. *Colloque EUROMECH 115*, Grenoble Edition du CNRS.
- [15] **Cope, R.J., Rao, P.V., Clark, L.A. y Norris, P. (1980)**. Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs. *Numerical Methods for Nonlinear problems*. Taylor, C., Hinton, E. y Oden, D.R.J. (Eds.), Pineridge Press, Swansea, pp. 457-470.
- [16] **Duarte, C.A., Oden, J.T. (1996)**. H-p clouds an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Diferential Equations*, vol. (12)6, pp.673-705.
- [17] **Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M. y Gioia, G. (1990)**. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 541-564.
- [18] **Dvorkin, E. N. y Assanelli, A. P. (1991)**. 2D finite elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 90, pp. 829-844.
- [19] **Drucker, D.C. (1959)**. A definition of stable inelastic materials. *J. Appl. Mech.*, vol. 26, pp. 101-106.
- [20] **Ehrlich, D. y Armero, F. (2004)**. Finite Element Methods for the Analysis of Softening Plastic Hinges in Beams and Frames. *Computational Mechanics*, vol. 35, pp. 237-264.
- [21] **Fraeijs de Veubeke, B.M., (1951)**. Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures à longeron couplés, *Bull. Serv. Technique de L'Aéronautique No. 24*, Imprimerie Marcel Hayez, Bruselas, 56 pp.

- [22] **Fraeijs de Veubeke, B.M. (1965)**. Displacement and equilibrium in the finite element method. on Stress Analysis, Zienkiewicz O. C. y Hollister G.S., (Edi) John Wiley and Sons, Londres, pp. 145-197.
- [23] **Felippa, C.A. (1999)**. On the original publication of the general canonical functional of linear elasticity. Report CU-CAS-99-07, Center for Aerospace Structures. Collegue of Engineering University of Colorado, Boulder, Co.
- [24] **Felippa, C.A. (2004)**. Introduction to Finite Element Methods. Course Notes, ver World Wide Web: <http://caswww.colorado.edu/Felippa.d/FelippaHome.d/Home.html>
- [25] **Fernández, L. (2002)**. Modelado numérico de la fractura en el concreto. Tesis presentada en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM para obtener el grado de Doctor en Ingeniería (estructuras).
- [26] **Fernández, L. y Ayala, G.A. (2004)**. Constitutive modelling of discontinuities by means of discrete and continuum approximations and damage models. International Journal of Solids and Structures, vol. 41, pp. 1453-1471.
- [27] **Garikipati, K. y Hughes, T.J.R., (2000)**. A variational multiscale approach to strain localization formulation for multidimensional problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 188, pp. 39-60.
- [28] **Griffith, A. A. (1921)**. The phenomena of rupture and flow in solids. Philos. T. Roy. Soc. A., vol. 221, pp. 163-197.
- [29] **Herrmann, L. R. (1966)**. A bending analysis for plates. In Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, pp. 577-604.
- [30] **Hill, R. (1958)**. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. J. Mech. Phys. Solids, vol. 6, pp. 236-249.
- [31] **Hillerborg, A., Modeer, M. y Petersson, P. E. (1976)**. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. Cement and Concrete Research, vol. 6, pp. 773-782.
- [32] **Hu, H. (1955)**. On some variational methods on the theory of elasticity and the theory of plasticity. Scientia Sinica, vol.4, pp. 33-54.
- [33] **Inglis, C.E. (1913)**. Stress in a plate due to the presence of crack and sharp corners. Transactions of the Institute of Naval Architects, series A, vol. 55, pp. 163-198.
- [34] **Irwin, G.R. (1956)**. Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys. Proceedings of the Sagamore Research Conference, vol. 2, pp. 289-305.

- [35] **Irwin, G.R. (1957)**. Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate. *Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, pp. 361-364.
- [36] **Jirásek, M. (2000)**. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 188, pp. 307-330.
- [37] **Jirásek, M. y Zimmermann, T. (2001)**. Embedded crack model: I. Basic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 50, pp. 1269-1290.
- [38] **Juarez, G. y Ayala, G. A. (2005)**. Variational formulation of strain localization phenomenon. *Computational Plasticity (COMPLAS) VIII*. D.R.J. Owen, E. Oñate y B. Suárez (Eds.). Part 1, pp. 487-490.
- [39] **Kachanov, L. M. (1958)**. Time of rupture process under creep conditions. *Inzvestia Akademii Nauk. Otd Tech Nauk*. vol. 8, pp. 26-31.
- [40] **Lemaitre, J. y Chaboche, J.L., (1978)**. Aspect phénoménologique de la rupture per endommagement. *J. Mécanique Appliquée* 2, pp. 317-365.
- [41] **Lemaitre, J. y Chaboche, J.L., (1985)**. *Mécanique de Matériaux Solide*, Dunod, Paris.
- [42] **Lofti, H.R. y Shing, P.B. (1995)**. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 1307-1325.
- [43] **Manzoli O.L. y Shing P.B. (2006)**. A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers and Structures*. In press.
- [44] **Melenk J.M. y Babuska, I. (1996)**. The partition of unity nite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139(1-4), pp. 289-314.
- [45] **Mindlin, R. D. (1951)**. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38.
- [46] **Möes, N., Dolbow, J. y Belytschko, T. (1999)**. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 46, vol. 1, pp. 131-150.
- [47] **Oliver, J. y Simo, J. (1994)**. A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids, in: Z.P. Ba zant et al. (Eds.), *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, E. and F.N. Spon, Londres, pp. 25-39.
- [48] **Oliver, J. (1996a)**. modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3575-3600.

- [49] **Oliver, J. (1996b)**. modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3601-3623.
- [50] **Oliver, J. (1998)**. The strong discontinuity approach: an overview. In: Idelsohn, S., Oñate, E., Dvorkin, E.N. (Eds.), *Computational Mechanics. New Trends and Applications. Proceedings (CD-ROM) of the IV World Congress on Computational Mechanics (WCCM98)*, Barcelona, España, CIMNE, pp. 1-19.
- [51] **Oliver, J. Cervera, M. y Manzoli O. (1997)**. On the use of J2 plasticity models for the simulation of 2D strong discontinuities in solids. In D. Owen, E. Onate, and E. Hinton, editors, *Proceedings of International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, España, CIMNE, pp. 38-55.
- [52] **Oliver, J., Cervera, M. y Manzoli, O., (1999)**. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, vol. 15(3), pp. 319-351.
- [53] **Oliver, J. (2000)**. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 7207-7229.
- [54] **Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M.D.G. y Chaves, E. (2002a)**. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, pp. 113-136.
- [55] **Oliver, J., Huespe, A.E., Samaniego, E. y Chaves, E.W.V. (2002b)**. On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics. *Proceedings of the fifth world congress on computational mechanics (WCCM V)*, Editors: Mang, H.A.; Rammerstorfer, F.G.; Eberhardsteiner, J., Publisher: Vienna University of Technology, Austria,
- [56] **Oliver, J., Huespe, A. E. y Samaniego, E. (2003)**. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 2135-2161.
- [57] **Oliver, J. y Huespe, A. E. (2004)**. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 2987-3014.
- [58] **Oller, S. (2001)**. *Fractura mecánica. Un enfoque global*. CIMNE, España.
- [59] **Olofsson, T., Klisinski, M. y Nedar, P. (1994)**. Inner softening bands: a new approach to the localization in finite elements. en Mang, Bicanic y de Borst (eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, Pineridge, Swansea, Gran Bretaña, pp. 373-382.

- [60] **Ortiz, M., Leroy, Y. y Needleman, A. (1987).** A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 61, pp.189-214.
- [61] **Pian, T. H. H. (1964).** Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA J.*, vol. 2, pp. 1333–1336.
- [62] **Portela, A., Aliabadi, M.H. y Rooke, D.P. (1992).** The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269-1287.
- [63] **Rashid, Y. R. (1968).** Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7(4), pp. 334-344.
- [64] **Rice, J.R. (1968).** A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Transaction ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379-386.
- [65] **Rice, J.R. (1976).** The localization of plastic deformation. *Theoretical and Applied Mechanics*, en W. T. Koiter (eds.), pp. 207-220, North-Holland Publishing Company, Holanda.
- [66] **Rice, J.R. y Rudnicki, J.W. (1980).** A note on some feature of the theory of localization of deformation, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 16, pp. 597-605.
- [67] **Reissner, E. (1945).** The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, pp. 69–77.
- [68] **Reissner, E. (1950).** On a variational theorem in elasticity, *J. Math. Phys.*, vol. 29, pp. 90–95.
- [69] **Rots, J.G. (1988).** Computational modelling of concrete fracture. Tesis de Doctorado, Universidad de Tecnología de Delft, Holanda.
- [70] **Runesson, K., Ottosen, N.S. y Peric, D. (1991).** Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *International Journal of Plasticity*, vol. 7, pp. 99-121.
- [71] **Samaniego, E., Oliver, J. y Huespe, A.E. (2003).** Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids, *Monograph CIMNE 72*, España.
- [72] **Simo, J. C., Oliver, J. y Armero, F. (1993).** An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, vol. 12, pp. 277-296.

- [73] **Simo, J. C. y Oliver, J. (1994)** A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. Proceedings of the US-Europe Workshop on Fracture and Damage in Quasibrittle Structures, Bazant, Bittnar y Jirasek (Eds.), Praga, República Checa, pp. 25-39.
- [74] **Simo, J. y Rifai, S. (1990).** A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 29, pp 1595-1638.
- [75] **Sluys, L.J. y Berends, A.H. (1998).** 2D/3D modelling of crack propagation with embedded discontinuity elements, in: R. de Borst, N. Bi canic, H. Mang, G. Meschke (Eds.), Computational Modelling of Concrete Structures, Balkema, Rotterdam, pp. 399-408.
- [76] **Swenson, D. e Ingraffea, A.R. (1987).** A finite element model of dynamic crack propagation with an application to intersecting cracks. Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, pp. 191-204. San Antonio, Texas, E. U. A.
- [77] **Ventura G., Budyng E., y Belytschko, T. (2003).** Vector level sets for description of propagation cracks in finite element. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 58, pp. 1571-1592.
- [78] **Washizu, K. (1955)** On the variational principles of elasticity and plasticity, Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Technical Report 25-18, MIT, Cambridge, MA.
- [79] **Washizu, K. (1967).** Variational methods in Elasticity and plasticity, Pergamon Press, Nueva York.
- [80] **Wells, G.N. y Sluys, L.J. (2001).** A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pp. 2667-2682.
- [81] **Zienkiewicz O. C. y Zhu J. Z. (1992).** The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. (33)7, 1331-1364