UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

ANTECEDENTES DE ALGEBRA ELEMENTAL

ARNULFO ANDRADE DELGADO
FELIPE OREGEL SANCHEZ
JAIME PARADA AVILA
ERIK CASTAÑEDA DE I. P.

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS

F1/DC

ANTECEDENTES DE ALGEBRA ELEMENTAL

PROLOGO

El álgebra elemental es uno de los antecedentes primordiales para las carreras del área físico-matemática a nivel licenciatura. Ello se debe a que esta importante rama de las matemáticas es una base fundamental para el estudio de otras que, como el cálculo diferencial e integral, constituyen las herramientas teóricas necesarias para el desarrollo de las diversas disciplinas que se estudian en las carreras de la mencionada área.

Pero como el lapso transcurrido desde que se estudian estos conceptos en el nivel medio superior hasta retomarlos en la licenciatura es prolongado, resulta necesario que el alumno "repase" dichos conceptos para evitar tropiezos al abordar los de su carrera.

El presente material es un compendio de los conceptos básicos del álgebra elemental, que puede utilizarse como apoyo didáctico tanto en los cursos de matemáticas en el nivel medio superior como en las materias consecuentes.

La obra cuenta con elementos didácticos que tienen por objeto facilitar el estudio y permitir un mayor aprovechamiento del mismo, por medio de una metodología de autoaprendizaje.

Para lograrlo se recomienda al alumno que se apoye en otros elementos como son la asesoría académica, la consulta de otras fuentes de información, a fin de aclarar dudas sobre conceptos de la asignatura que lo requiera, o bien para profundizar en ellos.

Es importante mencionar que para alcanzar los propósitos expuestos en esta obra se sugiere que el alumno comprenda y utilice los elementos de apoyo didáctico incluidos en su propia estructura.

A continuación se presentan dichos elementos, a fin de que el material se utilice adecuadamente.

En la unidad aparecen:

a) Introducción. Muestra un panorama general del contenido.

b) Objetivo general. Indica la conducta que debe lograr el alumno al finalizar el estudio de la unidad.

Los elementos didácticos con que cuentan los módulos son:

a) Cuadro sinóptico. Es la síntesis del contenido presentada en forma esquemática.

b) Objetivos específicos. Se desglosan del objetivo general de la unidad.

c) Ejercicios propuestos. Son actividades a desarrollar por el alumno, con el propósito de reafirmar la comprensión y de aplicar el contenido. Asimismo le permiten comprobar si ha logrado los objetivos de aprendizaje propuestos.

Al final de la obra se encuentran:

a) Examen de autoevaluación. Tiene por objeto que el alumno pueda verificar por cuenta propia si ha alcanzado el mínimo necesario de los objetivos de aprendizaje correspondientes a la unidad.

b) Soluciones del examen de autoevaluación. Permiten comprobar o cotejar sus respuestas.

c) Soluciones de los ejercicios propuestos. Contienen las respuestas correctas de los ejercicios.

d) Bibliografía básica. Tiene como finalidad que el alumno consulte las obras allí mencionadas, cuando se requiera profundizar en los temas que contienen.

Por último, es de justicia agradecer a todas las personas que de alguna manera colaboraron en la creación de este material, muy especialmente a las licenciadas Irma Hinojosa Félix y María Cuairán Ruidíaz que trabajaron intensamente con los autores para hacer la adaptación pedagógica.

LOS AUTORES

CONTENIDO

MODULO 4 FRACCIONES

MODULO 5 EXPONENTES

MODULO 6 RADICALES

MODULO 7 ECUACIONES

MODULO 8 DESIGUALDADES E INECUACIONES DE UNA VARIABLE

MODULO 9 VALOR ABSOLUTO

MODULO 10 LOGARITMOS

MODULO 11 TEORIA DE CONJUNTOS

UNIDAD I ALGEBRA ELEMENTAL

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

Aplicará los conceptos, principios y teoremas básicos del algebra elemental, para la resolución de problemas matemáticos.

INTRODUCCION

El contenido de esta unidad presenta conceptos, definiciones, principios y teoremas básicos del algebra elemental, así como su desarrollo y demostraciones concretas en ejemplos resueltos.

Los temas fundamentales que se presentan en la unidad son operaciones algebraicas con sus propiedades elementales, los productos notables en diversos problemas de multiplicación y de factorización, y las operaciones con radicales en donde se utilizarán las leyes de los exponentes y radicales.

Posteriormente se estudiarán las ecuaciones, desigualdades e inecuaciones, logaritmos y teoría de conjuntos, con el objeto de que el alumno tenga los elementos necesarios para relacionar la teoría y su aplicación en todas las operaciones algebraicas.

MODULO 1 TRADUCCION DEL LENGUAJE COMUN AL LENGUAJE ALGEBRAICO Y VICEVERSA

CUADRO SINOPTICO

Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico:

1. Identificar las cantidades que son variables y las que son constantes.
2. Analizar las relaciones entre ellas.
3. Obtener la expresión algebraica que represente las relaciones existentes.

Traducción del lenguaje algebraico al lenguaje común:

1. Enunciar las expresiones algebraicas, sustituyendo letras, números, símbolos y signos por su equivalente en el lenguaje común.

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Dado el enunciado de un problema, traducirá la proposición a una expresión algebraica.

2. Dada una expresión algebraica, la traducirá al lenguaje común.

1.1 TRADUCCION DEL ENUNCIADO DE UN PROBLEMA A UNA EXPRESION ALGEBRAICA

Para solucionar muchos problemas de Ingeniería se procede fundamentalmente con modelos que en su mayoría son matemáticos. El más común de los lenguajes matemáticos es el Algebra, que permite expresar por medio de letras y signos una regla o proposición representativa de una situación teórica o real. Así pues, una expresión o fórmula algebraica es el modelo matemático representativo de un fenómeno o problema.

Definición: Fórmula es la expresión algebraica de una regla relativa a un problema o fenómeno teórico o real.

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene sustituyendo las letras que la componen con números representativos de un caso particular.

Para obtener la expresión algebraica que representa un problema dado es necesario identificar a partir de su enunciado, las cantidades variables y las constantes, y establecer enseguida las relaciones entre ambas. Después, se procede a representar estas operaciones, eligiendo letras para expresar a las variables y a las constantes involucradas, que pueden cambiar de un caso particular a otro.

En general para representar variables se usan las últimas letras del abecedario y las primeras para las constantes. Con esto se obtiene la expresión algebraica de un problema dado que permite representarlo en una forma abreviada.

Ejemplo 1

Expresar algebraicamente el hecho de que el volumen de un cono, es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

Solución

Sea r el radio de la base, h la altura del cono, V su volumen y dado que el área de la base es π por el cuadrado del radio, el volumen estará representado por:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Ejemplo 2

En un problema de movimiento rectilíneo, se sabe que el espacio recorrido por un punto móvil es el espacio inicial ya recorrido por el punto antes de empezar a estudiarlo, más la velocidad inicial por el tiempo, más la mitad del producto de la aceleración por el cuadrado del tiempo. Escribir una expresión que indique el espacio recorrido en un tiempo cualquiera.

Solución

Sea e el espacio recorrido al cabo del tiempo t, e_0 el espacio inicial, v_0 la velocidad inicial y a la aceleración. Se tendrá entonces que:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

1.2 TRADUCCION DEL LENGUAJE ALGEBRAICO AL LENGUAJE COMUN

Para su total comprensión y empleo es indispensable saber interpretar las expresiones algebraicas resultantes de un proceso, o de la formulación de un modelo matemático. De ahí la necesidad de saber trasladar al lenguaje común todas las operaciones que indican los signos y que deben efectuarse mediante las cantidades expresadas con letras. Este proceso se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3

Sabiendo que el volumen de un prisma de base hexagonal está dado por la fórmula:

$$V = \frac{Pa}{2}\,h$$

Donde P es el perímetro de la base, a es la apotema de la misma y h es la altura del prisma, enunciar en lenguaje común esta fórmula.

Solución

El volumen de un prisma de base hexagonal es igual a la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema multiplicado por la altura.

Ejemplo 4

Traducir al lenguaje común la expresión:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Solución

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Ejemplo 5

En general en un movimiento:

$$E_c = \frac{mV^2}{2}$$

Donde E_c es la energía cinética, m es la masa y V es la velocidad. Traducir esta expresión al lenguaje común.

Solución

La energía cinética adquirida por un cuerpo al desplazarse, es igual a la mitad del producto de su masa por el cuadrado de su velocidad.

Ejercicios propuestos

1. Expresar algebraicamente la proposición: La suma de un número x disminuido en la unidad, más la mitad del número aumentado en la unidad más el triple del cuadrado del número es 8.

2. Escribir algebraicamente el siguiente enunciado: La resistencia R a la flexión de una viga de sección rectangular, es proporcional al producto de la base b por el cuadrado de la altura h de la sección.

3. La temperatura C en grados centígrados es igual a las nueve quintas partes de la diferencia de la temperatura F en grados Fahrenheit menos treinta y dos. Expresar esto en lenguaje algebraico.

4. Expresar algebraicamente que: La suma de dos números, multiplicada por uno de ellos es igual al cuadrado de éste más el producto de los dos números.

5. Traducir al lenguaje común la expresión.

   $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6. Escribir en lenguaje común la igualdad:

   $x^2 + \frac{3\,(x - 5)}{2} = 4x + 1$

7. El volumen de una esfera está dado por la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. Traducir dicha fórmula al lenguaje común.

CUADRO SINOPTICO

Adición

Propiedades:

- Existencia.
- Unicidad.
- Conmutatividad.
- Asociatividad.
- Propiedad aditiva de la igualdad.

Sustracción

Operación inversa de la adición.
Si $a > b$ la diferencia $a - b$ es positiva.
Si $a < b$ la diferencia $a - b$ es negativa.
Propiedad sustractiva de la igualdad

$$a - b = a + (-b)$$

Multiplicación

Propiedades:

- Existencia.
- Unicidad.
- Conmutatividad.
- Asociatividad.
- Propiedad multiplicativa de la igualdad.
- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

División

Operación inversa de la multiplicación.
Propiedad divisoria de la igualdad.
Recíproco de a es $\frac{1}{a}$ $\quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

Leyes de los signos	Leyes de los exponentes
$\left.\begin{matrix}(+)\,(+)\\ \frac{(+)}{(+)}\end{matrix}\right\} = (+)$ $\quad \left.\begin{matrix}(-)\,(-)\\ \frac{(-)}{(-)}\end{matrix}\right\} = (+)$	$a^m a^n = a^{m+n}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ $(a^m)^n = a^{mn}$
$\left.\begin{matrix}(+)\,(-)\\ \frac{(+)}{(-)}\end{matrix}\right\} = (-)$ $\quad \left.\begin{matrix}(-)\,(+)\\ \frac{(-)}{(+)}\end{matrix}\right\} = (-)$	$(ab)^m = a^m b^m$ $\quad \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Reducirá los términos semejantes de una expresión algebraica.
2. Efectuará adiciones con polinomios.
3. Efectuará sustracciones con polinomios.
4. Multiplicará polinomios.
5. Dividirá polinomios.
6. Dividirá un polinomio en x entre un binomio de primer grado de la forma $x \pm a$, aplicando la división sintética.

2.1 REDUCCION DE TERMINOS SEMEJANTES

A cualquier factor de un término algebraico se le llama coeficiente de los factores restantes. Así, en el término $2ax$, 2 es el coeficiente de ax, a es el coeficiente de $2x$ y x es el coeficiente de $2a$.

Frecuentemente se considera como coeficiente sólo al factor númerico del término. El coeficiente numérico de ab en el término $6ab$ es 6. El coeficiente literal de b^2x en el término ab^2x es a.

Definición: Términos semejantes son aquéllos que difieren únicamente en sus coeficientes, como $2xy$, $-4xy$, xy.

La reducción de términos semejantes se lleva a cabo sumando algebraicamente los coeficientes y anotando el resultado como coeficiente de la

parte común de todos ellos. Antes de empezar a operar es conveniente ordenar todos los términos de acuerdo a las potencias descendentes o ascendentes de una literal.

Ejemplos

Reducir los términos semejantes:

1. $2a^2 - 3ab + b^2 - 5a + 4a^2 + ab - b^2 = 6a^2 - 2ab - 5a$
2. $8x^2y + 4x^3y^2 + 6x^2y - 9x^3y^2 - 10 - 5xy^2 + 3 - 6xy^2 - 2x^2y$

Ordenar primero y enseguida efectuar la reducción se obtiene:

$4x^3y^2 - 9x^3y^2 + 8x^2y + 6x^2y - 2x^2y - 5xy^2 - 6xy^2 - 10 + 3 =$

$= - 5x^3y^2 + 12x^2y - 11xy^2 - 7$

2.2 OPERACIONES DE ADICION Y SUSTRACCION, MULTIPLICACION, DIVISION DE POLINOMIOS Y DIVISION SINTETICA

2.2.1 ADICION

Definición: Adición es la operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas llamadas sumandos en una sola expresión algebraica llamada suma.

Propiedades.

1. Existencia. Siempre es posible efectuar la adición de dos o más números siendo el resultado otro número.
2. Unicidad. Dados dos números cualesquiera a y b, existe un solo número c que es la suma de los sumandos a y b: $a + b = c$
3. Conmutatividad. Siendo a y b dos números cualesquiera, se tiene: $a + b = b + a$
4. Asociatividad. Si a, b y c son tres números cualesquiera, entonces: $(a + b) + c = a + (b + c)$
5. Propiedad aditiva de la igualdad. Dados tres números cualesquiera a, b y c tales que $a = b$, entonces: $a + c = b + c$

Estas propiedades pueden generalizarse a cualquier número de sumandos.

Para efectuar con facilidad una adición de polinomios conviene:

- Ordenarlos de acuerdo a las potencias descendentes o ascendentes de una misma literal.
- Escribiendo unas debajo de otras de modo que los términos semejantes queden en columna.

Ejemplo

1. Sumar los polinomios:

$$5x^2 - 4x + 7, \quad x + 2x^2, \quad 3 + 6x - x^2$$

Solución

$$\begin{array}{rl} 5x^2 - 4x + 7 & \cdots\cdots \text{sumando} \\ 2x^2 + x & \cdots\cdots \text{sumando} \\ \underline{-x^2 + 6x + 3} & \cdots\cdots \text{sumando} \\ 6x^2 + 3x + 10 & \cdots\cdots \text{suma} \end{array}$$

2.2.2 SUSTRACCION

Definición: Es la operación inversa a la adición y se define como sigue: $a - b = c$ si $a = b + c$, siendo a el minuendo, b el sustraendo y c la resta o diferencia.

Propiedades

Si el minuendo a es mayor que el sustraendo b $(a > b)$, la diferencia $c = a - b$ es positiva $(c > 0)$ y si el minuendo a es menor que el sustraendo b $(a < b)$ la diferencia $c = a - b$ es negativa $(c < 0)$.

Si el minuendo y el sustraendo son iguales $(a = b)$, la diferencia es cero $(a - b = 0)$. Así:

$$9 - 7 = 2 \ (2 > 0); \quad 5 - 8 = -3 \ (-3 < 0); \quad 6 - 6 = 0$$

Propiedad sustractiva de la igualdad. Si a, b y c son números cualesquiera y $a = b$, entonces: $a - c = b - c$

El simétrico de un número, es el número que sumado a éste da como resultado cero. Así el simétrico de un número positivo a es el número negativo $-a$, ya que: $a + (-a) = 0$.

La operación que consiste en restar de un número a, otro número b, es equivalente a la de sumar al número a el simétrico de b, o sea:
$a - b = a + (-b)$ Así $12 - 7 = 12 + (-7) = 5$ o bien:
$4 - 10 = 4 + (-10) = ;\ - (6xy - 3x + 4y) = - 6xy + 3x - 4y$

En la adición y en la sustracción de expresiones algebraicas se requiere frecuentemente emplear símbolos de agrupación. Un paréntesis precedido del signo <u>más</u> puede suprimirse sin hacer ningún otro cambio y que un paréntesis precedido del signo <u>menos</u> puede suprimirse cambiando el signo de cada uno de los términos que agrupa. Así:

$$(5a - 3x + 2) = 5a - 3x + 2$$

La sustracción de polinomios se lleva a cabo colocando el sustraendo debajo del minuendo, de modo que queden en columna los términos semejantes y efectuando la sustracción término a término para determinar la diferencia.

Otro procedimiento es:

- Escribir el minuendo.
- Cambiar el signo a todos los términos del sustraendo y escribirlo debajo del minuendo, y
- Efectuar una suma.

Ejemplos

1. Encontrar la diferencia de los polinomios:

$$(6a^3 + 2a^2b - 3ab^2 + b^3) - (ab^2 - 4a^2b + 2a^3)$$

Solución

Primer procedimiento / Segundo procedimiento

$$\begin{array}{rcr} -\begin{array}{r} 6a^3 + 2a^2b - 3ab^2 + b^3 \\ \underline{2a^3 - 4a^2b + ab^2 } \\ 4a^3 + 6a^2b - 4ab^2 + b^3 \end{array} & \begin{array}{c} \cdots\cdots \text{minuendo} \cdots \\ \cdots\cdots \text{sustraendo} \cdots\cdots \\ \text{resta o diferencia} \end{array} & \begin{array}{r} 6a^3 + 2a^2b - 3ab^2 + b^3 \\ \underline{-2a^3 + 4a^2b - ab^2 } \\ 4a^3 + 6a^2b - 4ab^2 + b^3 \end{array} \end{array}$$

2. Restar

$$7 - 6xy^3 + 4x^3 - 2x^2y \quad \text{de} \quad 7x^3 - \sqrt{2}\,xy - x^2y - 6xy^3$$

cambiando los signos en el sustraendo.

Solución

$$\begin{array}{rrrrr} & 7x^3 - x^2y - 6xy^3 - \sqrt{2}\,xy & \\ - & 4x^3 - 2x^2y - 6xy^3 \qquad + 7 & \\ \hline & 3x^3 + x^2y + 0xy^3 - \sqrt{2}\,xy - 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7x^3 - x^2y - 6xy^3 - \sqrt{2}\,xy \\ -4x^3 + 2x^2y + 6xy^3 \qquad - 7 \\ \hline 3x^3 + x^2y + 0xy^3 - \sqrt{2}\,xy - 7 \end{array}$$

o sea que la diferencia es

$$3x^3 + x^2y - \sqrt{2}\,xy - 7$$

2.2.3 MULTIPLICACION

Definición: La multiplicación tiene por objeto encontrar un número P, el producto, que sea con respecto al multiplicando M, lo que el multiplicador m es respecto a la unidad.

En símbolos $P = M \times m$

Propiedades

1. Existencia. Siempre es posible efectuar la multiplicación con dos o más números cualesquiera (factores) y el resultado (producto) es un número.
2. Unicidad. Para dos números dados cualesquiera a y b, existe un solo número c, que es el producto de los factores a y b; $ab = c$.
3. Conmutatividad. Si a y b son dos números cualesquiera entonces: $ab = ba$
4. Asociatividad. Dados tres números cualesquiera a, b y c, entonces: $(ab)\,c = a\,(bc)$
5. Propiedad multiplicativa de la igualdad. Sean a, b y c, números cualesquiera tales que $a = b$, entonces; $ac = bc$
6. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición. Siendo a, b y c tres números cualesquiera, se tiene:

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

Estas propiedades pueden generalizarse a cualquier número de factores.

Regla de los signos de la multiplicación. El producto de dos factores de signos iguales es positivo: $(+)\,(+) = (+)$, $(-)\,(-) = (+)$, y el producto de dos factores con signos contrarios es negativo:

$$(+)\,(-) = (-) \quad , \quad (-)\,(+) = (-)$$

En general, el producto de un número cualquiera de factores es positivo, si el número de factores negativos es nulo o par, y dicho producto es negativo si el número de factores negativos es impar.

Para llevar a cabo la multiplicación de expresiones algebraicas, hay que tener en cuenta las tres siguientes leyes de los exponentes, en donde a y b son números cualesquiera y m y n son enteros positivos.

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

NOTA: Las leyes de los exponentes en general se tratan con más amplitud en el Módulo 5.

El producto de dos o más monomios puede obtenerse empleando la regla de los signos y las tres leyes de los exponentes.

Ejemplos

Multiplicar:

1. $(3a^3x)\,(-2ax) = -6a^4x^2$
2. $(abc^2)\,(-4ab^2c)\,(-2a^2bc^2) = 8a^4b^4c^5$
3. $(-3x^2y^3)^2\,(-5x^3y^2) = (9x^4y^6)\,(-5x^3y^2) = -45x^7y^8$

Producto de un monomio por un polinomio. Para efectuar esta multiplicación hay que tener en cuenta la ley distributiva de la multiplicación respecto a la adición, y lo ya tratado acerca del producto de dos monomios.

Producto de un polinomio por otro polinomio. En esta operación conviene escribir el multiplicador debajo del multiplicando, ordenando ambos con igual criterio de potencias descendentes de una misma literal, y escribir en columnas de términos semejantes los productos del multiplicador por el multiplicando, para efectuar con facilidad las sumas de dichos términos y obtener el producto buscado.

Ejemplos

Multiplicar:

1. $a^2b\ (2ax - 3by) = a^2b\ (2ax) + a^2b\ (-3by) = 2a^3bx - 3a^2b^2y$

2. $-3cxy^2\ (5x^2 - 2a^2cx - 7c^2yz) =$

$= (-3cxy^2)\ (5x^2) + (-3cxy^2)\ (-2a^2cx) + (-3cxy^2)\ (-7c^2yz) =$

$= -15cx^3y^2 + 6a^2c^2x^2y^2 + 21c^3xy^3z$

3. $(x^2 + ax - 2a^2)\ (3a^2 + x^2 - 2ax) =$

$$\begin{array}{rrrrrl}
x^2 & + ax & - 2a^2 & & & \cdots\cdots\cdots\ \text{Multiplicando} \\
x^2 & - 2ax & + 3a^2 & & & \cdots\cdots\cdots\ \text{Multiplicador} \\
\hline
x^4 & + ax^3 & - 2a^2x^2 & & & \\
 & - 2ax^3 & - 2a^2x^2 & + 4a^3x & & \\
 & & 3a^2x^2 & + 3a^3x & - 6a^4 & \\
\hline
x^4 & - ax^3 & - a^2x^2 & + 7a^3x & - 6a^4 & \cdots\cdots\ \text{Producto}
\end{array}$$

Evidentemente los tres renglones anteriores al producto se obtienen de multiplicar respectivamente cada término del multiplicador por el multiplicando.

2.2.4 DIVISION

Definición: Es la operación inversa de la multiplicación y se establece así:

$$\frac{a}{b} = c\ ;\ b \neq 0\ ,\ \text{si}\ a = bc$$

Donde a es el dividendo, b es el divisor y c es el cociente. Aquí es necesario que b no sea cero ($b \neq 0$) ya que la división entre cero no está definida.

Cabe recordar que la operación de dividir un número a entre un número $b \neq 0$ también puede escribirse:

$a \div b = c$ y en algunos casos $a : b = c$

Propiedades

Propiedad divisoria de la igualdad. Si a, b y c son números cualesquiera, tales que $a = b$ y $c \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

El recíproco de un número es el que, multiplicado por éste, da como producto la unidad. Así el recíproco de un número:

$$a \neq 0 \quad \text{es} \quad \frac{1}{a} \quad \text{ya que} \quad a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

Entonces la operación de dividir un número cualquiera a entre un número $b \neq 0$, es la misma que multiplicar a por el recíproco de b.

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

Regla de los signos de la división. El cociente de dos números es positivo si el dividendo y el divisor tienen signos iguales:

$$\frac{(+)}{(+)} = (+) \qquad \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

Dicho cociente es negativo si los signos del dividendo y el divisor son contrarios:

$$\frac{(+)}{(-)} = (-) \qquad \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

A continuación se anotan leyes de los exponentes que se requieren para efectuar fácilmente divisiones. En ellas a y $b \neq 0$ son números cualesquiera y m y n son enteros positivos.

IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

V. $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ siendo $m > n$ (m mayor que n)

Para dividir un monomio entre otro monomio hay que tener en cuenta la regla de los signos de la división y las leyes de los exponentes que involucran a dicha operación.

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio (dividendo) entre el monomio (divisor), sumando los cocientes obtenidos para encontrar el cociente buscado.

Ejemplos

Dividir:

1. $6a^3x^2$ entre $-2a^2x$ =

Solución

$$\frac{6a^3x^2}{-2a^2x} = \frac{6}{-2} \cdot \frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{x^2}{x} = -3ax$$

2. $-15x^4yz \div -3x^2y$ =

Solución

$$\frac{-15x^4yz}{-3x^2y} = \frac{-15}{-3} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{z}{1} = 5x^2z$$

3. $(4a^2bx^3 - 6ab^2x^2 - 2a^3b^4x^4) \div 2abx^2$ =

Solución

$$\frac{4a^2bx^3 - 6ab^2x^2 - 2a^3b^4x^4}{2abx^2} = \frac{4a^2bx^3}{2abx^2} + \frac{-6ab^2x^2}{2abx^2} + \frac{-2a^3b^4x^4}{2abx^2} =$$

$$= 2ax - 3b - a^2b^3x^2$$

Para dividir un polinomio entre otro polinomio se procede como sigue:

1o. El dividendo y el divisor se ordenan según las potencias descendentes de una misma literal.

2o. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, siendo el resultado el primer término del cociente. Se multiplica todo el divisor por este término y se resta al dividendo el producto obtenido.

3o. Se toma la diferencia obtenida como nuevo dividendo y se repite el proceso anterior para obtener el segundo término del cociente.

4o. Este proceso se repite hasta obtener una diferencia nula, o de grado inferior a la del divisor que constituye el residuo.

Si en una división el residuo es nulo, indica que el dividendo es múltiplo del divisor, o bien que el dividendo es divisible entre el divisor. Puede explicarse también diciendo que el divisor es factor del dividendo.

Así, si el polinomio P es divisible entre el polinomio Q el cociente C es:

$$\frac{P}{Q} = C$$

Si el residuo no es nulo entonces:

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$$

Donde R es un residuo de grado menor que el del divisor. Una expresión equivalente a la anterior es:

$$P = QC + R$$

Ejemplos

Dividir:

1. $x^2 - 84 - 5x$ entre $x + 7$

Solución

$$\begin{array}{lrl}
 & x - 12 & \cdots\cdots\text{ Cociente} \\
\text{Divisor: } x + 7 & \overline{)\,x^2 - 5x - 84} & \cdots\cdots\text{ Dividendo} \\
 & \underline{x^2 + 7x} & \cdots\cdots\text{ Producto por } x \\
 & -12x - 84 & \\
 & \underline{-12x - 84} & \cdots\cdots\text{ Producto por } -12 \\
 & 0 + 0 & \cdots\cdots\text{ Residuo nulo}
\end{array}$$

Evidentemente $x^2 - 5x - 84$ es divisible entre $x + 7$, así puede escribirse:

$$\frac{x^2 - 5x - 84}{x + 7} = x - 12$$

2. $x^4 - x^3y + 8xy^3 - x^2y^2 - 5y^4$ entre $xy - 2y^2 + x^2$

Solución

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2xy + 3y^2 \\ \hline x^2 + xy - 2y^2 & x^4 - x^3y - x^2y^2 + 8xy^3 - 5y^4 \\ & \underline{x^4 + x^3y - 2x^2y^2} \\ & \quad -2x^3y + x^2y^2 + 8xy^3 \\ & \quad \underline{-2x^3y - 2x^2y^2 + 4xy^3} \\ & \qquad 3x^2y^2 + 4xy^3 - 5y^4 \\ & \qquad \underline{3x^2y^2 + 3xy^3 - 6y^4} \\ & \qquad\qquad xy^3 + y^4 \end{array}$$

En este caso el residuo no nulo $xy^3 + y^4$, implica que $x^2 + xy - 2y^2$ no es factor del dividendo, y se escribe.

$$\frac{x^4 - x^3y - x^2y^2 + 8xy^3 - 5y^4}{x^2 + xy - 2y^2} = x^2 - 2xy + 3y^2 + \frac{xy^3 + y^4}{x^2 + xy - 2y^2}$$

2.2.5 DIVISION SINTETICA

Una forma simplificada de dividir un polinomio en x entre un binomio de la forma $x - r$ es aplicar la división sintética. Esta operación se puede disponer convenientemente en tres renglones procediendo como sigue:

En el primer renglón se escriben los coeficientes del polinomio ordenado según potencias descendentes de x: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, anotando un cero en el lugar del coeficiente de cada potencia que no aparezca. El número r se escribe aparte, a la izquierda.

Se repite el coeficiente a_0 abajo de sí mismo en el tercer renglón. Se multiplica a_0 por r y se escribe el producto debajo de a_1 en el segundo renglón. Se suma a_1 con el producto a_0r y la suma $a_1 + a_0r$ se escribe en el tercer renglón debajo de a_0r. Esta suma se multiplica por r, se escribe el producto en el segundo renglón debajo de a_2 y se suma con a_2 escribiendo la suma en el tercer renglón.

Se sigue este procedimiento hasta agotar los coeficientes del primer renglón, obteniendo en el tercer renglón, tantos números como coeficientes hay en el primero.

Estos números, hasta el penúltimo, son los coeficientes de las potencias descendentes del cociente y el último número de la derecha es el residuo.

Ejemplos

Dividir

1. $3x^3 - 2x^2 - 7$ entre $x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & 0 & -7 \\ 2 & & 6 & 8 & 16 \\ \hline & 3 & 4 & 8 & 9 \end{array}$$

Residuo

Coeficientes de x^2, x y término independiente respectivamente

r con signo contrario

Queda

$$\frac{3x^3 - 2x^2 - 7}{x - 2} = 3x^2 + 4x + 8 + \frac{9}{x - 2}$$

2. $4x^4 + 18x + 10x^3 - 9$ entre $x + 3$

Solución

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & 10 & 0 & 18 & -9 \\ -3 & & -12 & 6 & -18 & 0 \\ \hline & 4 & -2 & 6 & 0 & -9 \end{array}$$

Que representa:

$$\frac{4x^4 + 10x^3 + 18x - 9}{x + 3} = 4x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{9}{x + 3}$$

Ejercicios propuestos

Reducir términos semejantes:

1. $2ab - 3a^2 + 5b^2 - ab + a^2 - b^2$
2. $6x^2 - 3 + 4x - 5 - 2x^2 + x$
3. $a^3 - 4x^3 + 5a^2x - 3ax^2 - x^3 + ax^2 - 2a^2x$
4. $\sqrt{2}\ y + 3x^2y - 5xy^2 + 2\sqrt{2}\ y - \sqrt{3}\ xy^2 - 2x^2y$

Sumar los polinomios dados en cada caso.

5. $7a - 9 + 3a^2, \quad 6 - a^2 + 4a, \quad 2a^2 - 5a$

6. $4x^2 - 3xy + y^2, \quad 2xy + x^2 + 3y^2, \quad 9y^2 - xy + 5x^2 + 7,$
$x^2 + 6xy - 2$

7. $5ax^3 - 2a^2x^2 + a^3x, \quad 3a^3 + 2x^3 + 7a^2x^2, \quad 6a^3x - 3ax^3 + a^3,$
$x^3 + a^3 + 8$

Restar los siguientes polinomios.

8. $x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ menos $-x^3 + 2x^2 - 3x - 3$

9. $2a + 4by - 2cy^2 + dy^3$ menos $2dy^3 - 2by - a + 3cy^2$

10. Dados $A = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $B = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$;
$C = x^3 - x^2 - 6x - 2$

a) Calcular: $A + B - C$
b) Hallar: $A - B - C$
c) Obtener: $B - A - C$

Efectuar las multiplicaciones.

11. $(5ab^2)(4a^2b)$

12. $(-7x^2y^3)(2axy)$

13. $(-4a^2x)^2(3ax^2)$

14. $(7byz^3)(-2ab^2z)^3$

Multiplicar un monomio por un polinomio.

15. $xy^2(x^2 - 2y + 4)$

16. $12a^2by(5ax^2 - 3b^2xy - 4aby^2)$

17. $(3x - 7b)$ por $(x^2 + 2bx - 2b^2)$

Multiplicar un polinomio por otro.

18. $(x^2 + y^2 - 3xy)$ por $(2 - 3y + 2x)$

19. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$

20. $(xy - 2y^2 + x^2)(3y^2 + x^2 - 2xy)$

Efectuar las siguientes divisiones.

21. $(-4a^4b^3) \div (-2a^3b)$

22. $18x^2y^4z^3 \div 3x^2yz^2$

23. $(-27a^2bx^5y^2) \div (9bx^3y)$

24. $(2a^3bx - 3a^2b^2y)$ entre a^2b

25. $(4ab^5x^3 - 8b^2x^2y) \div (-2b^2x)$

26. $(21x^3y^2 - 35ax^3y^3z + 49x^4y) \div (7x^2y)$

Dividir un polinomio entre otro.

27. $2x^3 - 4 - 11x - 5x^2$ entre $2x + 1$

28. $(x^3 + 4x - 3x^2 - 7) \div (x - 1 + x^2)$

29. $(3x^3y - 5xy^3 + 3y^4 - x^4) \div (x^2 + y^2 - 2xy)$

30. $\dfrac{x^4 + y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$

Dividir y contestar, aplicando la división sintética.

31. $(x^3 + 7x - 2 + 4x^2) \div (x + 2)$

32. $(x^2 - x^4 + x^6 - 2) \div (x - 1)$ ¿Es factor $(x - 1)$ del dividendo?

33. $(4x^4 - 3x^2 + 3x + 7) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

34. ¿Es divisible $(x^4 - x + 5 - 5x^3)$ entre $(x - 5)$?

CUADRO SINOPTICO

PRODUCTOS NOTABLES		CASOS DE FACTORIZACION
1. Cuadrado de una suma	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Trinomio cuadrado perfecto (caso 3).
2. Cuadrado de una diferencia.	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
3. Binomios conjugados.	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	Diferencia de cuadrados (caso 2).
4. Producto de dos binomios que tienen un término común.	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	Trinomio de segundo grado (caso 5).
5. Producto de dos binomios con un término semejante y el otro no común.	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$	Trinomio de segundo grado (caso 7).
6. Cubo de la suma de un binomio.	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Cubo perfecto (caso 9).
7. Cubo de la diferencia de un binomio.	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
8. Factores cuyo producto da una suma de cubos.	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	Binomio de la forma: $x^n \pm y^n$ (caso 6).
9. Factores cuyo producto da una diferencia de cubos.	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	
10. Producto de dos binomios que no tienen un término común.	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$	Polinomio de cuatro términos (caso 4).

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Desarrollará expresiones algebraicas, haciendo uso de los productos notables:
   - Binomio al cuadrado.
   - Binomios conjugados.
   - Producto de dos binomios que tienen un término común y otro no común.
   - Cubo de un binomio.
   - Producto de dos binomios sin términos comunes o semejantes.
2. Factorizará expresiones algebraicas según los casos:
   - Monomio factor común.
   - Diferencia de dos cuadrados.
   - Trinomio cuadrado perfecto.
   - Polinomio de cuatro términos.
   - Trinomio cuadrado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$.
   - Binomios de la forma $x^n \pm y^n$ donde n puede ser par o impar.
   - Extracción de un factor lineal de la forma $x + b$ de un polinomio en x.
   - Polinomio que es cubo perfecto.

3.1 PRODUCTOS NOTABLES

La frecuencia con que se presentan algunos productos sugiere la conveniencia de memorizar las fórmulas de los productos notables, éstas que se presentan a continuación y que pueden comprobarse de manera fácil multiplicando directamente.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
5. $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
8. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
9. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
10. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Aplicando la propiedad asociativa de la adición y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, los productos notables pueden aplicarse también en algunos casos donde aparentemente no se cuenta con el tipo correspondiente de producto.

Ejemplos

Desarrollar:

1. $(3x + 2)^2 + (4x - 3)^2 = 9x^2 + 12x + 4 + 16x^2 - 24x + 9 =$
   $= 25x^2 - 12x + 13$
2. $(5ax + 2b)(5ax - 2b) = 25a^2x^2 - 4b^2$
3. $(x + 5)(x + 4) - (2x + 3)(3x - 6) =$
   $= x^2 + 9x + 20 - [6x^2 + (-12 + 9)x - 18] =$
   $= x^2 + 9x + 20 - 6x^2 + 3x + 18 = -5x^2 + 12x + 38$
4. $(2x + y)^3 - (3y - x)^3 =$
   $= 8x^3 + 3(4x^2)y + 3(2x)y^2 + y^3 - [27y^3 - 3(9y^2)x +$
   $+ 3(3y)x^2 - x^3] =$
   $= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 - 27y^3 + 27xy^2 - 9x^2y + x^3 =$
   $= 9x^3 + 3x^2y + 33xy^2 - 26y^3$

5. $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x^2 + 2x + 4)(x - 2) =$
$= x^3 + 1 + x^3 - 8 = 2x^3 - 7$

6. $(2x + a)(3y - b) = 6xy - 2bx + 3ay - ab$

7. $(y + z + 3)(y - z - 3) = [y + (z + 3)][y - (z + 3)] =$
$= y^2 - (z + 3)^2 = y^2 - z^2 - 6z - 9$

8. $(\mu + 2v - 3)^2 = [(\mu + 2v) - 3]^2 =$
$= (\mu + 2v)^2 - 2(\mu + 2v)3 + 9 =$
$= \mu^2 + 4\mu v + 4v^2 - 6\mu - 12v + 9$

3.2 FACTORIZACION

La factorización consiste en: Dada una expresión algebraica que es el producto de ciertos factores, determinar éstos. El problema de la factorización puede tratarse según los casos que se presentan enseguida, la mayor parte de los cuales se fundamentan en los productos notables.

Caso 1. Monomio factor común. Se presenta cuando todos los términos de la expresión contienen un mismo factor. Por ejemplo:

$$ax + ay - az = a(x + y - z)$$

Caso 2. Diferencia de dos cuadrados. La diferencia de los cuadrados de dos expresiones algebraicas puede descomponerse como el producto de dos binomios formados con la suma y la diferencia de dichas expresiones, como sugiere el producto notable No. 3.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Caso 3. Trinomio cuadrado perfecto. Debe confirmarse que existan los cuadrados de dos expresiones con signo (+) y el doble producto de ellas con signo (+) o (-). Este caso corresponde a los productos notables 1 y 2.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Caso 4. Polinomio de cuatro términos como el que aparece en el producto notable No. 10. Se puede proceder por partes asociando los términos dos a dos, aplicando el caso 1 y volviendo a aplicar éste:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$$

Caso 5. Trinomio cuadrado de la forma:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

este caso está sugerido por el producto notable No. 4. El coeficiente de x^2 es uno, y el coeficiente de x se puede descomponer en la suma de dos números a y b cuyo producto es el término independiente.

Caso 6. Binomios de la forma $x^n \pm y^n$ en que n es un número entero positivo.

Pueden distinguirse cuatro subcasos ya sea que n sea par o impar, y el signo (+) o (-). Se podrá extraer un factor $(x + y)$ o $(x - y)$ como se consigna en la siguiente tabla.

	n	signo	factor
a)	impar	-	$x - y$
b)	impar	+	$x + y$
c)	par	-	$(x - y)(x + y)$
d)	par	+	No es factorizable

El subcaso a) tiene una verificación parcial en el producto notable No. 9.

El subcaso b) la tiene en el producto notable No. 8.

El subcaso c) se basa en principio en el caso 2 de factorización.

Caso 7. Trinomio cuadrado de la forma:

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

Resulta ser el producto de dos binomios, uno de ellos con un término semejante y el otro no común. Este caso está sugerido por el producto notable No. 5.

El coeficiente de x se puede descomponer en la suma de dos números (el número ad y el número bc), que multiplicados $(ad \cdot bc)$ den como producto, el producto del coeficiente de x^2, (ac) por el término independiente (bd); $(ad \cdot bc) = (ac)\ (bd)$.

Una vez obtenidos dichos números (ad y bc) se descompone el trinomio en una expresión de cuatro términos descomponiendo según: $(ad + bc)x = adx + bcx$ y se aplica el caso 4 de factorización.

Caso 8. Extracción de un factor lineal, es decir de primer grado de la forma $x \pm b$ de un polinomio en x.

Conviene buscar en forma tentativa los factores de la forma $x \pm b$ que pueda tener el polinomio por medio de la división sintética, sabiendo que un residuo nulo implica el haber dividido entre un factor.

Caso 9. Polinomio que es un cubo perfecto. Este caso se basa en los productos notables 6 y 7. Se trata de polinomios de cuatro términos en los que deberán revisarse cuidadosamente los cubos de dos términos y los triples productos del cuadrado de un término por el otro con los signos adecuados.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Ejemplos

Factorizar indicando el caso correspondiente.

1. $2ax^3 - 6a^2x^2 + 10a^2x = 2ax\ (x^2 - 3ax + 5a)$. (Caso 1)

2. $9a^2x^4 - 16b^2y^2 = (3ax^2 + 4by)\ (3ax^2 - 4by)$. (Caso 2)

3. $x^2 - 6ax + 9a^2 = (x)^2 - 2\ (x)\ (3a) + (-3a)^2 =$

   $= (x - 3a)^2$. (Caso 3)

4. $3xy - 5x + 6ay - 10a = x\ (3y - 5) + 2a\ (3y - 5) =$

   $= (x + 2a)\ (3y - 5)$. (Caso 4)

5. $x^2 - 4x - 21$, como $-4 = 3 - 7$ y $(3)\ (-7) = -21$, queda

   $x^2 - 4x - 21 = (x + 3)\ (x - 7)$. (Caso 5)

6. $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$. (Caso 6), con n impar, signo (-). Se puede extraer el factor $(x - 3)$, el otro factor se puede escribir tomando como modelo el producto notable 9, o bien se puede obtener dividiendo $(x^3 - 27) \div (x - 3)$ queda:

   $$x^3 - 27 = (x - 3)\ (x^2 + 3x + 9)$$

7. $16a^4 - 81b^4 = (2a)^4 - (3b)^4$, (Caso 6), con n par, signo (-) se pueden extraer los factores $(2a - 3b)$ y $(2a + 3b)$ Puede comenzarse aplicando el caso 2, y volviendo a aplicarlo.

   $16a^4 - 81b^4 = \left[(2a)^2\right]^2 - \left[(3b)^2\right]^2 =$

   $= \left[(2a)^2 - (3b)^2\right]\ \left[(2a)^2 + (3b)^2\right] =$

   $= (2a - 3b)\ (2a + 3b)\ (4a^2 + 9b^2)$

8. $6x^2 - 13x - 5$. (Caso 7). Se deben buscar dos números que sumados den -13 y multiplicados den $-30 = 6\ (-5)$. Dichos números son -15 y 2. Se descompone:

   $6x^2 - 13x - 5 = 6x^2 - 15x + 2x - 5$ y se aplica el caso 4.

   $6x^2 - 15x + 2x - 5 =$

   $= 3x\ (2x - 5) + (2x - 5) = (3x + 1)\ (2x - 5)$ así

   que: $6x^2 - 13x - 5 = (3x + 1)\ (2x - 5)$

9. $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$. Aunque puede aplicarse aquí el caso 4, se empleará el caso 8.

Factor probado	División sintética	Conclusión
$x + 1$	$\begin{array}{r\|rrrr} -1 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & -1 & 5 & -1 \\ \hline & 1 & -5 & 1 & 15 \neq 0 \end{array}$	$(x + 1)$ No es factor
$x - 1$	$\begin{array}{r\|rrrr} +1 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & 1 & -3 & -7 \\ \hline & 1 & -3 & -7 & 9 \neq 0 \end{array}$	$(x - 1)$ No es factor
$x + 2$	$\begin{array}{r\|rrrr} -2 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & -2 & 12 & -16 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 = R \end{array}$	$(x + 2)$ Sí es factor

$(x - 2)^2$

$(x - 2)(x + 2)$

Como un mismo factor puede repetirse, se prueba nuevamente el factor obtenido.

$x + 2$	$\begin{array}{r\|rrr} -2 & 1 & -6 & 8 \\ & & -2 & 16 \\ \hline & 1 & -8 & 24 \neq 0 \end{array}$	El factor $(x + 2)$ no se repite.
$x - 2$	$\begin{array}{r\|rrr} +2 & 1 & -6 & 8 \\ & & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 0 = R \end{array}$	$(x - 2)$ Sí es factor.

Los coeficientes 1 y -4 que resultan representan al cociente $x - 4$, así que el polinomio dado queda factorizado como sigue:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x + 2)\ (x - 2)\ (x - 4)$$

10. $x^3 - 19x + 30$. (Caso 8). Si se procede con cuidado puede abreviarse la escritura de la división sintética operando mentalmente y no repitiendo los coeficientes del dividendo cuando un divisor propuesto no sea factor. Por ejemplo:

Factor probado	División sintética	Factor Propuesto y conclusión
$x + 1$	$\begin{array}{r\|rrrr} -1 & 1 & 0 & -19 & +30 \\ \hline & 1 & -1 & -18 & 48 \neq 0 \end{array}$	$(x + 1)$ No es factor.
$x - 1$	$+1 \mid 1 \quad 1 \quad -18 \quad +12 \neq 0$	$(x - 1)$ No es factor.
$x + 2$	$-2 \mid 1 \quad -2 \quad -15 \quad +60 \neq 0$	$(x + 2)$ No es factor.
$x - 2$	$+2 \mid 1 \quad 2 \quad -15 \quad 0 = R$	$(x - 2)$ Sí es factor
$x - 2$	$+2 \mid 1 \quad 4 \quad -7 \neq 0$	$(x - 2)$ No se repite.
$x + 3$	$-3 \mid 1 \quad +1 \quad -12 \neq 0$	$(x + 3)$ No es factor.
$x - 3$	$+3 \mid 1 \quad 4 \quad 0 = R$	$(x - 3)$ Sí es factor.

1 y 5 representan al cociente $(x + 5)$ que también es factor, por lo cual queda:

$$x^3 - 19x + 30 = (x - 2)\ (x - 3)\ (x + 4)$$

11. $8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3$, observando las potencias de x y de a, la expresión dada puede escribirse:

$$8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3 = (2x)^3 + 3\ (2x)^2a + 3\ (2x)a^2 + a^3$$

que corresponde al desarrollo de $(2x + a)^3$, caso 9. Queda:

$$8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3 = (2x + a)^3$$

12. $x^2 - 2xy + y^2 - 16$. Los tres primeros términos forman el cuadrado de $(x - y)$ y 16 es el cuadrado de 4, así que pueden aplicarse los casos 3 y 2 para tener:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 16 = (x - y)^2 - 4^2 =$$

$$= (x - y + 4)\ (x - y - 4)$$

13. Factorizar y multiplicar los factores:

$$(29)^2 - (14)^2 = (29 - 14)\ (29 + 14) =$$

$$= 15\ (43) = 645$$

Ejercicios propuestos

Desarrollar

1. $(3x + 4y)\ (3x - 4y)$
2. $(5x + 2a)^2$
3. $(a^2 + ab)^2$
4. $(4x - 7)\ (4x + 6)$
5. $(x^2 - 4)\ (2x^2 - 1)$
6. $(3y - 2z^2)^3$
7. $(3m + 4xy)^3$
8. $(v + a)\ (v^2 - av + a^2)$
9. $(4y^2 + 6y + 9)\ (2y - 3)$
10. $(3x - 4y)\ (2x + 5y)$
11. $(x^4 + 1)\ (x^2 + 1)\ (x^2 - 1)$
12. $(a - b + c)\ (a + b + c)$

13. $(x + y + 1)(3 + y + x)$

14. $(ax + 7)(3y + b)$

Factorizar aplicando el caso indicado, cuando se señale.

15. (caso 1). $3ax^3 - 6a^3xy + 9a^2bx =$

16. (casos 1 y 2). $8a^2 - 32b^2 =$

17. (caso 2). $16x^2 - (2y - 3)^2 =$

18. (caso 3). $9a^2 + 12ab + 4b^2 =$

19. (caso 4). $12xy + 9cy + 3cx + 4x^2 =$

20. (caso 5). $m^2 + 2m - 15 =$

21. (caso 2, dos veces o caso 6). $81x^4 - 16y^4 =$

22. (caso 6). $x^3 - 27 =$

23. (caso 7). $10x^2 - 13x - 3 =$

24. (caso 8). $x^3 - 7x + 4x^2 - 10 =$

25. (caso 9). $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 =$

26. $4x^2y^2 - (z + 1)^2 =$

27. $4x^2 (p + q) - 64 (p + q) =$

28. $a^2 - 4ab - 21b^2 =$

29. $r^4 - 8r^2 + 16 =$

30. $b^3 - 6b^2 + 12b - 8 =$

31. $3xy + 9ax - ay - 3a^2 =$

32. $8a^3 + 1 =$

33. $12z^3 - 11z^2 + 2z =$

34. $x^3 - 3x - 4x^2 + 18 =$

35. Factorizar y multiplicar los dos factores:

a) $(52)^2 - (48)^2 =$

b) $(55)^2 - (35)^2 =$

CUADRO SINOPTICO

Múltiplo común.	Polinomio que es múltiplo de dos o más polinomios.
Mínimo común múltiplo.	Múltiplo común con el menor grado posible.
Fracción.	Cociente de dos expresiones algebraicas.
Fracción propia.	Grado del numerador < grado del denominador.
Fracción impropia.	Grado del numerador ≥ grado del denominador.
Fracción algebraica simple.	Cuando numerador y denominador son expresiones racionales enteras.
Fracción compuesta.	Numerador o denominador con una o más fracciones.
Fracción racional en x.	Fracción simple donde los exponentes de x son enteros y positivos.
Fracciones parciales.	Fracciones simples que sumadas dan una fracción racional.

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Hallará el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios.
2. Identificará cuándo una fracción simple es propia o impropia.
3. Dada una fracción impropia la transformará en la suma de una expresión entera y una fracción propia.
4. Reducirá una fracción simple a sus términos más sencillos.
5. Efectuará operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones simples.
6. Simplificará fracciones compuestas.
7. Descompondrá fracciones racionales en sumas de fracciones parciales.

.1 GENERALIDADES

Si un polinomio es divisible entre otro se dice que el primero es múltiplo del segundo. Así:

$$x^3 - x^2 \quad \text{es múltiplo de} \quad x - 1$$

Todo polinomio que es múltiplo de dos o más polinomios se llama múltiplo común de éstos. Así:

$$4x^2 - 9y^2 \quad \text{es múltiplo común de} \quad (2x + 3y) \text{ y } (2x - 3y)$$

Dos o más polinomios tienen más de un múltiplo común.

El mínimo común múltiplo (M.C.M.) de dos o más polinomios es el múltiplo común que tiene el menor grado posible.

Entonces, el M.C.M. de dos o más polinomios es igual al producto de todos los factores diferentes de estos polinomios tomando cada factor con el mayor exponente que aparezca.

Ejemplos

1. Determinar el M.C.M. de:

   $x^2 + 2xy + y^2 \quad ; \quad x^2 - y^2$

   Conviene primero factorizar los polinomios dados:

   $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

   $x^2 - y^2 = (x + y)\ (x - y)$

   Los factores diferentes son:

   $(x + y)$ y $(x - y)$

   El mayor exponente con que aparece $(x + y)$ es 2 y el de $(x - y)$ es 1.

   Luego M.C.M. $= (x + y)^2\ (x - y)$

2. Obtener el M.C.M. de

   $x^2 - 4, \ x^3 - 8 \ \text{ y } \ x^3 - 4x^2 + 4x$

   Factorizando

   $x^2 - 4 = (x + 2)\ (x - 2)$

   $x^3 - 8 = (x - 2)\ (x^2 + 2x + 4)$

   $x^3 - 4x^2 + 4x = x\ (x - 2)^2$

   Luego M.C.M. $= (x + 2)\ (x - 2)^2\ (x^2 + 2x + 4)x$

Se sabe que una fracción es el cociente de dos cantidades que toman los nombres de numerador y denominador. Así en la fracción $\frac{P}{Q}$, P es el numerador y $Q \neq 0$ es el denominador.

Las operaciones con fracciones se efectúan en Algebra del mismo modo que en Aritmética.

Siendo la división la operación en la que se originan las fracciones, todo lo relativo a dicha operación es aplicable a las fracciones.

Una fracción algebraica es simple cuando el numerador y el denominador son expresiones racionales enteras, esto es, cuando los exponentes que aparecen son solamente enteros positivos.

Son fracciones simples:

$$\frac{3}{x-2}\,,\quad \frac{2x+1}{x^2+2x+4}\,,\quad \frac{x^3-27}{x-2}$$

Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador se trata de una fracción propia.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador la fracción es impropia.

De las tres fracciones anteriores las dos primeras son propias, la tercera es impropia.

Después de efectuar la división indicada en una fracción impropia, ésta se puede escribir como la suma de un polinomio (el cociente), más una fracción propia (el residuo) entre el denominador.

Para operar con fracciones es fundamental el siguiente teorema: Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por una misma cantidad no nula, el valor de la fracción no se altera. Así:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x^2}{x^2+2x}\ ;\quad \frac{x^4-3x^2}{2x^3} = \frac{x^2-3}{2x}$$

Las fracciones así determinadas son fracciones equivalentes.

4.2 SIMPLIFICACION DE FRACCIONES

Una fracción está totalmente simplificada o reducida a sus términos más sencillos cuando no existe ningún factor común al numerador y denominador distinto de uno.

Cuando una fracción no está totalmente simplificada, puede simplificarse dividiendo numerador y denominador entre sus factores comunes. Por ello conviene factorizar primero numerador y denominador para hacer la simplificación.

Ejemplos

Simplificar.

1. $$\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}$$

Evidentemente la fracción dada no está reducida a sus términos más sencillos, el factor común que se presenta en el numerador y denominador es $(x - 2)$ que se elimina al dividir numerador y denominador entre dicho factor.

2. $$\frac{x^2-7x+12}{16-x^2} = \frac{(x-4)\,(x-3)}{(4-x)\,(4+x)}$$

Se observa que el factor $(4 - x)$ del denominador es el simétrico del factor $(x - 4)$ del numerador, luego transformando el numerador al multiplicarlo dos veces por (-1) : $(x - 4)\,(x - 3) = (4 - x)\,(3 - x)$ queda el factor común $(4 - x)$ que puede reducirse.

$$\frac{x^2-7x+12}{16-x^2} = \frac{(x-4)\,(x-3)}{(4-x)\,(4+x)} = \frac{(4-x)\,(3-x)}{(4-x)\,(4+x)} = \frac{3-x}{4+x}$$

3. Efectuar la división indicada en la fracción impropia y simplificar, si es posible, el resultado.

$$\frac{2x^3-3x^2-x+4}{x^2-1}$$

Efectuando la división:

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 3 \\ x^2 - 1 & 2x^3 - 3x^2 - x + 4 \\ & \underline{2x^3 \qquad\quad -2x} \\ & -3x^2 + x \\ & \underline{-3x^2 \qquad + 3} \\ & x + 1 \end{array}$$

Queda:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - x + 4}{x^2 - 1} = 2x - 3 + \frac{x + 1}{x^2 - 1} = 2x - 3 + \frac{1}{x - 1}$$

ya que:

$$\frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)\ (x - 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

4.3 OPERACIONES ALGEBRAICAS CON FRACCIONES

4.3.1 Adición y sustracción. Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la suma o diferencia de ellas se obtiene fácilmente escribiendo la suma o diferencia de los numeradores entre el denominador común. Así:

$$\frac{a + 1}{x^2} + \frac{b - 3}{x^2} = \frac{a + b - 2}{x^2},$$

También:

$$\frac{3x^2}{x + 1} - \frac{x^2 + 7}{x + 1} = \frac{2x^2 - 7}{x + 1}$$

En esta forma se pueden sumar algebraicamente tres o más fracciones con denominador común.

Dos fracciones que no tengan el mismo denominador, pueden ser transformadas de tal manera que tengan un común denominador para proceder como se indicó antes. Dicha transformación puede hacerse buscando que las fracciones tengan como común denominador a un múltiplo común de los denominadores, pero conviene que éste sea el M.C.M. de los denominadores.

En consecuencia, para sumar algebraicamente más de dos fracciones se procede en la misma forma.

Ejemplos

Efectuar la operación indicada.

1. Sumar

$$\frac{x + a}{2ax^2} + \frac{x - a}{4a^2x}$$

Como el M.C.M. de los denominadores es:

M.C.M. $= 4a^2x^2$

Se transforman las fracciones dadas multiplicando numerador y denominador de cada una por el factor que da como producto el M.C.M. en el denominador.

$$\frac{x + a}{2ax^2} + \frac{x - a}{4a^2x} = \frac{(x + a)\ (2a)}{2ax^2\ (2a)} + \frac{(x - a)\ (x)}{4a^2x\ (x)} =$$

$$= \frac{2ax + 2a^2}{4a^2x^2} + \frac{x^2 - ax}{4a^2x^2} = \frac{x^2 + ax + 2a^2}{4a^2x^2}$$

2. Sumar:

$$\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^3 - 3x^2}$$

Factorizando los denominadores para determinar el M.C.M.

$x^2 - 9 = (x + 3)\ (x - 3)$

$x^2 + 3x = x\ (x + 3)$

$x^3 - 3x^2 = x^2\ (x - 3)$

Luego el M.C.M. de los denominadores es:

M.C.M. $= (x + 3)\ (x - 3)\ x^2$

Transformando las fracciones y sumándolas:

$$\frac{x^2}{(x + 3)\ (x - 3)\ x^2} + \frac{3\ (x - 3)\ x}{(x + 3)\ (x - 3)\ x^2} + \frac{2\ (x + 3)}{(x + 3)\ (x - 3)\ x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 3x^2 - 9x + 2x + 6}{(x + 3)\ (x - 3)\ x^2}$$

Simplificando queda:

$$\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^3 - 3x^2} = \frac{4x^2 - 7x + 6}{(x + 3)\ (x - 3)\ x^2}$$

3. Restar:

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x}{2x^2 - 5x - 3}$$

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$; $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)\ (2x + 1)$

M.C.M. $= (x - 3)^2\ (2x + 1)$

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{2x\ (2x + 1)}{(x - 3)^2\ (2x + 1)} -$$

$$- \frac{x\ (x - 3)}{(x - 3)^2\ (2x + 1)} = \frac{4x^2 + 2x}{(x - 3)^2\ (2x + 1)} - \frac{x^2 - 3x}{(x - 3)^2\ (2x + 1)} =$$

$$= \frac{4x^2 + 2x - x^2 + 3x}{(x - 3)^2\ (2x + 1)} = \frac{3x^2 + 5x}{(x - 3)^2\ (2x + 1)}$$

4. Sumar:

$$\frac{2r^2}{r^2 + rs + s^2} + r - s =$$

$$= \frac{2r^2}{r^2 + rs + s^2} + \frac{r - s}{1} = \frac{2r^2}{r^2 + rs + s^2} + \frac{(r - s)\ (r^2 + rs + s^2)}{r^2 + rs + s^2} =$$

$$= \frac{2r^2 + r^3 - s^3}{r^2 + rs + s^2} = \frac{r^3 + 2r^2 - s^3}{r^2 + rs + s^2}$$

4.3.2 Multiplicación y División. El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones dadas y cuyo denominador es el producto de sus denominadores. Así:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Esto se generaliza sin ninguna dificultad para más de dos fracciones. Por ejemplo, si se trata de multiplicar tres fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

Para dividir una fracción entre otra, cabe tener en cuenta que dividir una expresión entre una cantidad, es lo mismo que multiplicar la expresión por el recíproco de la cantidad. Esto es:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Esta operación se puede mecanizar fácilmente si se multiplica "en cruz" como se observa en el ejemplo:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos

Multiplicar y simplificar.

1. $$\frac{2x}{a^2 + a} \cdot \frac{ax}{x - x^2} = \frac{2x\ (ax)}{(a^2 + a)\ (x - x^2)} = \frac{2ax^2}{a\ (a + 1)\ x\ (1 - x)} =$$

$$= \frac{2x}{(a + 1)\ (1 - x)}$$

2. $$\frac{b^2 - 2b + 1}{b^2 - 1} \cdot \frac{2b^2 - b - 3}{3b^2 - b - 2} = \frac{(b^2 - 2b + 1)\ (2b^2 - b - 3)}{(b^2 - 1)\ (3b^2 - b - 2)}$$

Para simplificar conviene factorizar siempre que sea posible, para reducir los factores comunes. Así:

$$\frac{(b^2 - 2b + 1)\ (2b^2 - b - 3)}{(b^2 - 1)\ (3b^2 - b - 2)} = \frac{(b - 1)^2\ (2b - 3)\ (b + 1)}{(b + 1)\ (b - 1)\ (b - 1)\ (3b + 2)} =$$

$$= \frac{2b - 3}{3b + 2}$$

3. $$(x^3 - y^3) \cdot \frac{x^2 + y^2}{2x^2y + 2xy^2 + 2y^3} = \frac{x^3 - y^3}{1} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2x^2y + 2xy^2 + 2y^3} =$$

$$= \frac{(x^3 - y^3)\ (x^2 + y^2)}{2x^2y + 2xy^2 + 2y^3} = \frac{(x - y)\ (x^2 + xy + y^2)\ (x^2 + y^2)}{2y\ (x^2 + xy + y^2)} =$$

$$= \frac{(x - y)\ (x^2 + y^2)}{2y}$$

Dividir y simplificar:

4. $$\frac{x^2}{3} \div \frac{x}{2} = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2x^2}{3x} = \frac{2x}{3}$$

5. $$\frac{ab}{a + 1} \div (b + 1) = \frac{ab}{a + 1} \div \frac{b + 1}{1} = \frac{ab}{(a + 1)\ (b + 1)}$$

(Habiendo multiplicado "en cruz").

6. $$\frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 4)\ (x^2 - 1)}{(x + 1)\ (x^2 + x - 6)} =$$

$$= \frac{(x + 2)\ (x - 2)\ (x + 1)\ (x - 1)}{(x + 1)\ (x + 3)\ (x - 2)} = \frac{(x + 2)\ (x - 1)}{x + 3}$$

FRACCIONES COMPUESTAS

> **Definición:** Una fracción compuesta es aquélla que tiene una o más fracciones ya sea en el numerador o en el denominador.

Ejemplo

$$\frac{\dfrac{3x-2}{x^2+1}}{\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x-1}{x+2}} \qquad\qquad \frac{\dfrac{\frac{1}{x}-2}{x+3}}{\dfrac{4-x}{x}-5}$$

Simplificar una fracción compuesta es transformarla en otra fracción simple, reducida a sus términos más sencillos que sea equivalente.

Una forma de lograrlo es transformar el numerador y el denominador en fracciones simples, (si no lo son) y efectuar la división como se dijo antes. Así:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Cuando una fracción compuesta tiene la forma:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$$

a y d se llaman extremos, b y c son los medios.

Una regla sencilla para transformar una fracción compuesta como la anterior en una fracción simple, es escribir el producto de los extremos entre el producto de los medios. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{extremo} \cdots\cdots \\ \text{medio} \cdots\cdots \\ \text{medio} \cdots\cdots \\ \text{extremo} \cdots\cdots \end{array} \frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \begin{array}{l} \text{producto de los extremos} \\ \text{producto de los medios} \end{array}$$

Ejemplos

Simplificar las fracciones compuestas.

1. $$\frac{x-\dfrac{y}{x}}{y-\dfrac{x}{y}} = \frac{\dfrac{x^2-y}{x}}{\dfrac{y^2-x}{y}} = \frac{x^2-y}{x} \div \frac{y^2-x}{y} = \frac{(x^2-y)\,y}{x\,(y^2-x)}$$

Conviene tener cuidado para no confundir la raya del quebrado principal con otras que aparezcan.

2. $$\frac{\dfrac{a+1}{a-2}-\dfrac{a-1}{a+2}}{4+\dfrac{8}{a-2}} = \frac{\dfrac{(a+1)\,(a+2)-(a-2)\,(a-1)}{(a-2)\quad(a+2)}}{\dfrac{4\,(a-2)+8}{a-2}} =$$

$$= \frac{\left[(a+1)\,(a+2)-(a-2)\,(a-1)\right](a-2)}{(a-2)\,(a+2)\,4a} =$$

$$= \frac{(a+1)\,(a+2)-(a-2)\,(a-1)}{4a\,(a+2)} =$$

$$= \frac{a^2+3a+2-a^2+3a-2}{4a\,(a+2)} =$$

$$= \frac{6a}{4a\,(a+2)} = \frac{3}{2\,(a+2)}$$

3. $$\frac{\dfrac{1}{y-1}+y}{1-\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}}$$

El denominador es, a su vez, una fracción compuesta que habrá que simplificar primero.

$$1-\frac{1}{y+\dfrac{1}{y}} = 1-\frac{1}{\dfrac{y^2+1}{y}} = 1-\frac{y}{y^2+1} = \frac{y+1-y}{y^2+1}$$

Simplificando el numerador también separadamente.

$$\frac{1}{y-1}+y = \frac{1+(y-1)\,y}{y-1} \quad \frac{y^2-y+1}{y-1}$$

Dividiendo las fracciones simplificadas del numerador y denominador.

$$\frac{y^2 - y + 1}{y - 1} \div \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + 1} = \frac{(y^2 - y + 1)\ (y^2 + 1)}{(y - 1)\ (y^2 - y + 1)} = \frac{y^2 + 1}{y - 1}$$

4.5 DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION RACIONAL EN UNA SUMA DE FRACCIONES PARCIALES

Una fracción racional en x es una fracción simple donde los exponentes de x son enteros positivos.

Como ya se dijo, la suma de dos o más fracciones algebraicas simples es una fracción cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas, por ejemplo:

$$\frac{-4}{x + 2} + \frac{2}{x - 1} + \frac{5}{2x - 1} = \frac{x^2 + 23x - 18}{(x + 2)\ (x - 1)\ (2x - 1)}$$

Ahora se trata de resolver el problema inverso, o sea, descomponer una fracción dada en una suma de fracciones simples más sencillas, que son las fracciones parciales de la primera fracción.

En la igualdad anterior, las tres fracciones del 1er. miembro son las fracciones parciales de la fracción del 2o. miembro.

Se consideran solamente fracciones racionales propias con una sola literal, es decir fracciones propias donde el numerador y denominador son polinomios de una sola literal con exponentes enteros y positivos. El caso de una fracción impropia se trata, como ya se dijo, descomponiendo la fracción en un polinomio más una fracción propia.

Es indispensable factorizar totalmente el denominador de la fracción que se va a descomponer, ya que la descomposición depende de los factores de dicho denominador.

La descomposición de una fracción racional en fracciones parciales se basa en el siguiente teorema, que se enuncia sin demostración.

Toda fracción propia reducida a su mínima expresión puede expresarse como una suma de fracciones parciales de los siguientes tipos:

1. A cada factor de primer grado $ax + b$ que no se repita como factor del denominador, corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{A}{ax + b}$$

En donde A es una constante distinta de cero.

2. A cada factor de primer grado $ax + b$ que aparezca k veces como factor del denominador, corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

En donde: A_1, A_2 ..., A_k son constantes y $A_k \neq 0$

3. A cada factor de segundo grado $ax^2 + bx + c$ que no se pueda factorizar y que aparezca una sola vez como factor del denominador, corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde A y B son constantes y al menos una de ellas no es cero.

4. A cada factor de segundo grado $ax^2 + bx + c$ que no se pueda factorizar y que se repita k veces como factor del denominador, corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

En donde A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_k, B_k son constantes y A_k y B_k no son simultáneamente nulas.

Todas las constantes A y B de los cuatro casos dados antes deben determinarse apropiadamente por alguno de los dos procedimientos siguientes que se ilustran con ejemplos

1. Se establece un número de ecuaciones que contengan a las incógnitas A, B, etc., igual al número de éstas y se resuelve el sistema formado.

NOTA: Si el estudiante no tiene práctica en la solución de sistemas de ecuaciones, se recomienda consultar previamente el Módulo 7.

2. Se escribe la identidad que resulta de multiplicar los dos miembros de la igualdad establecida en el planteamiento de la descomposición por el denominador de la fracción, y se desarrollan los productos indicados. Se agrupan los términos de cada una de las potencias de la literal que se tenga y se igualan los coeficientes de las potencias iguales de ambos miembros de la identidad mencionada. De las ecuaciones que resultan se determinan los valores de las constantes A, B, etc., buscadas.

Ejemplos

Descomponer la fracción dada en sus fracciones parciales.

1. $\dfrac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)}$

Los tres factores de primer grado del denominador no se repiten, luego la descomposición comprende tres fracciones cuyos denominadores son estos tres factores y cuyos numeradores son las constantes A, B y C por determinar. Queda la identidad.

$$\frac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{2x - 1}$$

Multiplicando ambos miembros por el denominador de la fracción dada resulta:

$$x^2 + 23x - 18 = A(x + 2)(2x - 1) + B(x - 1)(2x - 1) +$$
$$+ C(x - 1)(x + 2)$$

Esta igualdad que es una identidad debe ser cierta para cualquier valor de x. Entonces para aplicar el primer procedimiento indicado anteriormente, a fin de determinar los valores de A, B y C, se necesitan tres ecuaciones que se obtienen dando a x tres valores distintos.

Para $x = 1$ $\quad 1 + 23 - 18 = A(3)(1)$ luego $A = 2$

Para $x = -2$ $\quad 4 - 46 - 18 = B(-3)(-5)$ de donde $B = -4$

Para $x = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{4} + \frac{23}{2} - 18 = C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$ luego $C = 5$

Por lo tanto la descomposición deseada es:

$$\frac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)} = \frac{2}{x - 1} - \frac{4}{x + 2} + \frac{5}{2x - 1}$$

2. $\dfrac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3}$

Se presentan en el denominador los factores de primer grado, x sin repetirse y (x - 1) repetido tres veces, así que el planteamiento de la descomposición según el caso 3 es:

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{(x - 1)^3}$$

Multiplicando ambos miembros por $x(x - 1)^3$

$$x^3 + 1 = A(x - 1)^3 + Bx(x - 1)^2 + Cx(x - 1) + Dx$$

Desarrollando en el 2o. miembro y agrupando términos según potencias de x para aplicar el segundo procedimiento.

$$x^3 + 1 = Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + Bx^3 - 2Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx + Dx$$

$$x^3 + 1 = (A + B)\,x^3 + (-3A - 2B + C)\,x^2 + (3A + B - C + D)\,x - A$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x en los dos miembros:

$$A + B = 1 \qquad \ldots(1)$$
$$-3A - 2B + C = 0 \qquad \ldots(2)$$
$$3A + B - C + D = 0 \qquad \ldots(3)$$
$$-A = 1 \qquad \ldots(4)$$

De (4): $A = -1$. Sustituyendo este valor en (1) resulta:

$B = 2$ Sustituyendo $A = -1$ y $B = 2$ en (2) queda.

$C = 1$ Finalmente con estos valores queda según (3).

$D = 2$ Por lo cual la descomposición buscada es:

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{(x - 1)^3}$$

3. $\dfrac{1}{x^3 + 8}$

Factorizando el denominador se tiene:

$$\frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)}$$

Aparece el factor de segundo grado no repetido $(x^2 - 2x + 4)$ y el factor de primer grado $(x + 2)$ que tampoco se repite, entonces, según el caso 3 debe tenerse:

$$\frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 4} + \frac{C}{x + 2}$$

De aquí:

$$1 = (Ax + B)(x + 2) + C(x^2 - 2x + 4)$$

Procediendo como en el ejemplo anterior:

$$1 = Ax^2 + 2Ax + Bx + 2B + Cx^2 - 2Cx + 4C$$

$$1 = (A + C)x^2 + (2A + B - 2C)x + (2B + 4C)$$

Igualando coeficientes de potencias iguales de x.

$$A + C = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$2A + B - 2C = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$2B + 4C = 1 \qquad \ldots(3)$$

$$\text{De (1) } A = -C \qquad \ldots(4)$$

$$\text{De (3) } B = \frac{1 - 4C}{2} \qquad \ldots(5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (2): $2(-C) + \frac{1 - 4C}{2} - 2C = 0$

$- 4C + 1 - 4C - 4C = 0$, $12C = 1$ luego $C = \frac{1}{12}$. Sustituyendo este valor en (4) resulta: $A = -\frac{1}{12}$. Sustituyendo el valor de C en (5) se obtiene B:

$$B = \frac{1 - 4\frac{1}{12}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{3 - 1}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{esto es: } B = \frac{1}{3}$$

Así que la descomposición pedida es:

$$\frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)} = \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\frac{1}{12}}{x + 2} =$$

$$= \frac{\frac{-x + 4}{12}}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{12(x + 2)} = \frac{4 - x}{12(x^2 - 2x + 4)} + \frac{1}{12(x + 2)}$$

4. $\dfrac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2}$

El denominador presenta un factor de 2o. grado repetido dos veces, así que según el caso 4 la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $(x^2 + 1)^2$

$$\begin{aligned} 2x^3 + x + 3 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$A = 2$

$B = 0$

$A + C = 1$ luego $2 + C = 1$ por lo que $C = -1$

$B + D = 3$ como $B = 0$, $D = 3$

La descomposición solicitada es:

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{-x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Ejercicios propuestos

Hallar el M.C.M. de los polinomios dados, dejándolo en forma factorizada.

1. $6xy^2$, $4x^3y$, $36xy$
2. $4x - 4$, $x^2 - 1$
3. $2x^2 + 2x - 4$, $3x^2 + 7x + 2$

4. $x^4 - 8x^2 - 9,\ 4x^3 - 36x$

5. $2m^3 + m^2 - 3m,\ m^2 - n - m + mn,\ 2m^2 + 2mn + 3m + 3n$

Simplificar:

6. $\dfrac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} =$

7. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3} =$

8. $\dfrac{2x - x^2 - x^3}{x^3 - 3x + 2} =$

Efectuar la división y simplificar si es posible.

9. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} =$

Efectuar la suma algebraica, o resta indicada.

10. $\dfrac{a}{5} - \dfrac{a}{10} + \dfrac{7a}{25} =$

11. $\dfrac{y}{y - 5} - \dfrac{3}{y} =$

12. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1} =$

13. Restar $\dfrac{3m - 1}{m^2 - 4} - \dfrac{2m + 5}{(m - 2)^2} =$

14. $5 - \dfrac{2m - 3}{m - 1} - \dfrac{2}{m} =$

15. Restar $\dfrac{3}{3y - 5} - (2y - 3) =$

16. $\dfrac{1 - x}{2 + x} - \dfrac{1 + x}{2 - x} - \dfrac{3x}{x^2 - 4} =$

17. $\dfrac{3}{2x^2 + x - 1} + \dfrac{2}{6 + x - 2x^2} + \dfrac{1}{4x^2 + 4x - 3} =$

18. $\dfrac{5x^2y}{3ab^2} \cdot \dfrac{9a^2b}{10xy^2} =$

19. $\dfrac{x^2 + x}{y^2 - 1} \cdot \dfrac{y + 1}{x + 1} =$

20. $\dfrac{ax}{a + x} \cdot \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x}\right) =$

21. $(x^2 - 2xy - 3y^2)\ \dfrac{x^2 - 9y^2}{x^2 - 6xy + 9y^2} \cdot \dfrac{1}{7x + 21y} =$

Dividir y simplificar:

22. $\dfrac{9ab^2}{34x} \div \dfrac{27ab}{17x^2} =$

23. $\dfrac{a - b}{x - 2y} \div \dfrac{2y - x}{2b - 2a} =$

24. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} \div \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 7} =$

25. $\left(\dfrac{a^2}{x} - x\right) \div \left(\dfrac{a}{x} + 1\right) =$

Simplificar las fracciones compuestas:

26. $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{2 + \frac{4}{5}} =$

27. $\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} =$

28. $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + 1}{\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + 1} =$

29. $\dfrac{3 - \frac{x - 6}{x^2 - 6x + 8}}{2 + \frac{x + 7}{x^2 - 2x - 8}} =$

30. $1 - \dfrac{3}{4 - \dfrac{2}{1 - \frac{1}{x}}} =$

Descomponer en fracciones parciales.

31. $\dfrac{x - 5}{(x + 1)\ (x - 1)} =$

32. $\dfrac{7 - 8x}{(2x - 1)^2} =$

33. $\dfrac{x^2 + 3x - 1}{(x - 2)\ (x^2 + 5)} =$

34. $\dfrac{1 - 13x - 10x^2}{(2x^2 + 2x + 1)\ (x - 2)} =$

35. $\dfrac{3x^2 + 4x - 5}{(x^2 + 2)^2} =$

36. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x}{(x^2 + x + 1)^2} =$

MODULO 5 EXPONENTES

CUADRO SINOPTICO

LEYES DE LOS EXPONENTES	SIGNIFICADO	EJEMPLO
I $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Producto de varias potencias de una misma base.	$3x^5y^2 \cdot 2x^2y^3 =$ $= 3\ (2)x^{5+2}y^{2+3}$
II $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$	Potencia de una potencia.	$(2x^6)^3 = 2^3x^{6\cdot 3} =$ $= 8x^{18}$
III $\left(ab\right)^m = a^m b^m$	Potencia de un producto.	$(5xy)^2 = 25x^2y^2$
IV $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; $b \neq 0$	Potencia de una fracción.	$\left(\dfrac{10ax^3}{5by}\right) = \dfrac{(10ax)^3}{(5by)^3} =$ $= \dfrac{1000a^3x^3}{125b^3y^3} = \dfrac{8a^3x^3}{b^3y^3}$
V $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$	Cociente de dos potencias de una misma base.	$\dfrac{x^4b^8}{x^2b^6} = x^{4-2}\ b^{8-6} =$ $= x^2b^2$
VI $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ si $n > m$	Cociente de dos potencias de una misma base.	$\dfrac{6x^3y^2}{3x^5y^8} = \dfrac{2}{x^{5-3}y^{8-2}} =$ $= \dfrac{2}{x^2y^6}$

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Simplificará expresiones algebraicas, aplicando las leyes de los exponentes.
2. Efectuará operaciones con exponentes fraccionarios.
3. Identificará un exponente fraccionario de un exponente negativo.
4. Efectuará operaciones con exponentes negativos.

5.1 LEYES DE LOS EXPONENTES

La expresión a^n en donde al número a cualquiera se le llama base y n es un número entero positivo llamado exponente, representa el producto de n factores iguales a a, diciéndose que a^n es la enésima potencia de a. No se acostumbra escribir el exponente 1, y las potencias a^2 y a^3 reciben el nombre de cuadrado de a y cubo de a, respectivamente.

Si m y n son números enteros positivos y a y b son expresiones algebraicas cualesquiera con la condición de que al aparecer en un denominador no sean nulos, se tienen las siguientes leyes de los exponentes.

Leyes de los exponentes.

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$; $b \neq 0$

V. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$

VI. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ si $n > m$

Ejemplos

1. $3x^5y^2 \cdot 2x^2y^3 = 3\ (2)\ x^{5+2}y^{2+3} = 6x^7y^5$ (aplicando 1).
2. $(2x^6)^3 = 2^3\ (x^6)^3 = 8x^{18}$ (aplicando II y III).
3. $(5xy)^2 = 25x^2y^2$ (aplicando III).
4. $\left(\frac{10ax}{5by}\right)^3 = \frac{(10ax)^3}{(5by)^3} = \frac{1000a^3x^3}{125b^3y^3} = \frac{8a^3x^3}{b^3y^3}$ (aplicando IV y III).
5. $\frac{x^4b^8}{x^2b^6} = (x^{4-2})\ (b^{8-6}) = x^2b^2$ (aplicando V).
6. $\frac{6x^3y^2}{3x^5y^8} = \frac{2}{x^{5-3}y^{8-2}} = \frac{2}{x^2y^6}$ (aplicando VI).

Debe tenerse en cuenta que estas leyes han sido establecidas para exponentes enteros y positivos. Si se consideran en casos donde los exponentes no son enteros y positivos, es necesario establecer el significado que debe darse a los exponentes fraccionarios y negativos.

5.2 EXPONENTES FRACCIONARIOS Y NEGATIVOS

Sea q un número entero positivo y por tanto $1/q$ una fracción positiva, considérese el significado de $1/q$ como exponente, o sea, el significado de $a^{\frac{1}{q}}$, cuando $q \neq 0$. Para que la primera ley de los exponentes sea válida para este exponente fraccionario, deberá verificarse que:

$$\underbrace{a^{\frac{1}{q}}\, a^{\frac{1}{q}}\, a^{\frac{1}{q}} \cdots a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ factores}} = a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}} = a^{\left(\frac{1}{q}\right)q} = a$$

Esto es, $a^{\frac{1}{q}}$ debe tener la propiedad de que su potencia de grado q sea igual a a. Por lo anterior se define a $a^{\frac{1}{q}}$ como una raíz de índice q de a.

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

En donde el símbolo $\sqrt{}$ se llama radical y el entero positivo q es el índice de la raíz.

Para $q = 2$ se acostumbra omitir el índice, que corresponde a la raíz cuadrada.

5.3 RAICES PRINCIPALES

Cualquier número excepto cero tiene q raíces distintas de índice q. Por ejemplo: El número 4 tiene dos raíces cuadradas, que son $+ 2$, $- 2$. Para evitar ambigüedad se asignará a $a^{\frac{1}{q}}$ un valor único llamado raíz principal que se define como sigue:

1. Cuando el índice q es par. Si a es positivo, existen dos raíces reales de igual valor absoluto y de signos contrarios. En este caso, la raíz principal es la raíz positiva. Así la raíz cuadrada principal de 4 es $+ 2$ que se escribe $4^{1/2}$.

2. Cuando el índice q es impar. Si a es positivo, existe solamente una raíz real que es positiva y que se toma como la raíz principal. Si a es negativo, existe una raíz real negativa que se toma como la raíz principal. Por ejemplo:

El valor principal de la raíz cúbica de 8 es $+ 2$, representada por $8^{1/3}$ el valor principal de la raíz cúbica de $- 8$ es $- 2$, representada por $(- 8)^{1/3}$.

Cuando a es negativo y q es par, $a^{\frac{1}{q}}$ no representa un número real.

Ejemplos

1. $(16y^2)^{1/2} = \sqrt{16y^2} = \pm 4y$
2. $(ax)^{1/4} = \sqrt[4]{ax}$

Generalizando, si p y q son enteros positivos, para que se verifique la segunda ley de los exponentes se deberá tener que:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q} = a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^{p}$$

De donde por definición:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$$

Es decir que $a^{\frac{p}{q}}$ significa la raíz de índice q de la potencia de grado p de a.

Ejemplos

1. $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
2. $(3x)^{5/2} = \sqrt{(3x)^5} = \sqrt{243x^5}$

Si se toma únicamente la raíz principal, una potencia de exponente fraccionario se puede calcular efectuando la potencia y la raíz en cualquier orden, así que en un exponente fraccionario, el numerador de este corresponde a una potencia y el denominador a una raíz.

El exponente negativo se origina al dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor. Así por ejemplo:

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} \quad \text{o bien} \quad \frac{x^3}{x^7} = x^{3-7} = x^{-4}$$

Toda cantidad elevada a un exponente negativo, equivale a una fracción de numerador 1 y cuyo denominador es la misma cantidad con el exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De acuerdo con esto, de los ejemplos anteriores:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad y \quad x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

Según lo anterior, cualquier factor del numerador de una fracción se puede escribir en el denominador y viceversa si se cambia el signo de su exponente. Por ejemplo:

Sea la expresión $\dfrac{a^{-2}b^{-3}}{x^{-4}y^{-5}}$

De acuerdo con el significado del exponente negativo se tendrá:

$$\frac{a^{-2}b^{-3}}{x^{-4}y^{-5}} = \frac{1}{a^2b^3}\;\frac{x^4y^5}{1} = \frac{x^4y^5}{a^2b^3}$$

Se observa que los factores a^{-2} y b^{-3} que aparecen en el numerador de la expresión original con exponentes negativos, pasan al denominador con exponentes positivos y los factores x^{-4} y y^{-5} que están en el denominador de la expresión original con exponentes negativos, pasan al numerador con exponentes positivos.

El exponente cero proviene de dividir potencias iguales de la misma base. Así:

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$$

$$\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0$$

Por lo anterior se puede concluir que toda cantidad elevada a cero equivale a 1.

En efecto, según las leyes de los exponentes:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \quad \text{pero} \quad \frac{a^n}{a^n} = 1$$

Ahora bien dos expresiones iguales a una tercera son iguales entre sí, por lo tanto:

$$a^0 = 1$$

Ejercicios propuestos

1. Efectuar el siguiente producto:

   $(-4xy^2z)\ (-2x^2yz)\ (xyz^2)$

2. Desarrollar:

   $(7x^5y^6z^8)^2$

3. Desarrollar:

   $(3x^2y^3 - 7x^3y^2)^2$

4. Simplificar:

   $\dfrac{2a^3bx - 3a^2b^2y - 2a^3b^3}{a^2b}$

5. Simplificar:

$$\frac{18x^4y^9z^2}{36x^6y^3z^4}$$

6. Expresar con signo radical:

$xy^{1/2}$

7. Expresar con signo radical:

$x^{3/2}$, $y^{1/4}$, $z^{1/5}$

8. Expresar con signo radical:

$3x^{2/7}$, $y^{4/5}$, $z^{2/7}$

9. Expresar con exponente fraccionario:

$\sqrt[3]{x^7}$

10. Expresar con exponente fraccionario:

$\sqrt[3]{x^7}$ $\sqrt[5]{y^6}$

11. Expresar con exponente fraccionario:

$5a\ \sqrt[5]{x^2y^3z^9}$

12. Simplificar:

$$\frac{1}{2x^{-2}}$$

13. Escribir con exponentes positivos:

$$\frac{x^{-1}y^{-2}z^{-3}}{a^{-2}b^{-5}c^{-8}}$$

14. Escribir con exponentes positivos y simplificar:

$$\frac{a^{-1/2}x^{-2}}{3a^3x^2y^{-1}}$$

15. Escribir con exponentes positivos y simplificar:

$$\frac{x^{-2/3}y^{-1/4}}{x^2yz^{-1/2}}$$

Expresar con signo radical y exponentes positivos. Simplificar.

16. $\dfrac{x^{3/5}}{y^{-2/3}}$

17. $(x^{2/3})^{-2}$

18. $(x^{-1/2})^{1/3}$

Expresar con exponentes positivos.

19. $2\sqrt{x^{-3}y^{-4}}$

20. $\dfrac{a^{2/3}}{\sqrt{x^{-5}}}$

21. $\dfrac{3x^{-2/3}}{\sqrt{y^{-4}}}$

22. Escribir en cada paréntesis de la columna derecha, la letra del inciso de la columna izquierda que complete una proposición correcta.

a) $(a^m)^n$	puede expresarse como:	( ) a^{m-n}
b) $a^m a^n$	puede expresarse como:	( ) $a^{m/n}$
c) $\dfrac{a^m}{a^n}$	si m > n, también se escribe:	( ) $y^{5/4}$
d) $x^{3/2}$	expresado con signo radical:	( ) x^{-5}
e) $\sqrt[4]{y^5}$	expresado con exponente fraccionario:	( ) a^3b^{-3}
f) $\dfrac{1}{x^5}$	expresado con exponente negativo:	( ) a^{m+n}
g) El valor x^0 es:		( ) $\sqrt[3]{x^2}$
h) $\dfrac{a^m}{a^n}$	si m < n también se escribe:	( ) 1

i) La raíz principal de $9^{1/2}$ es: ( ) $\frac{a^3}{b^3}$

j) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ se puede escribir: ( ) 3

( ) 0

( ) $\sqrt{x^3}$

( ) a^{mn}

( ) $\frac{1}{x^{-5}}$

MODULO 6 RADICALES

CUADRO SINOPTICO

LEYES DE LOS RADICALES	EXPRESION DEL LENGUAJE COMUN
I. $\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$	El producto de raíces con el mismo índice es igual a la raíz del producto de los subradicales.
II. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$	El cociente de dos raíces con el mismo índice es igual a la raíz del cociente de los subradicales.
III. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	La raíz n de la raíz m de un número es igual a la raíz mn del número e igual a la raíz m de la raíz n del número.

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Efectuará en expresiones algebraicas, la extracción e introducción de factores en radicales.

2. Efectuará la racionalización del denominador de una fracción.

6.1 GENERALIDADES

La expresión $\sqrt[q]{a}$ representa la raíz principal de índice q de la cantidad "a". Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama radical y a la cantidad "a" bajo el radical se le nombra radicando o subradical; al número entero positivo q, como se mencionó, se le denomina índice de la raíz o índice del radical.

En el Módulo 5 relativo a exponentes, se estableció que:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

lo cual indica que es posible sustituir los radicales por exponentes fraccionarios, por tanto, las operaciones con radicales pueden efectuarse utilizando las leyes de los exponentes, entendiéndose que la raíz utilizada es la raíz principal.

6.2 LEYES DE LOS RADICALES

I. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$

Ejemplo 1 $\sqrt[3]{ax} \cdot \sqrt[3]{by} = \sqrt[3]{abxy}$

II. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$ para $b \neq 0$

Ejemplo 2 $\dfrac{\sqrt[6]{2a}}{\sqrt[6]{3b}} = \sqrt[6]{\dfrac{2a}{3b}}$

III. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Ejemplo 3

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = (a^{1/2})^{1/3} = a^{1/2 \cdot 1/3} = a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$$

6.3 EXTRACCION E INTRODUCCION DE FACTORES EN RADICALES

La extracción de factores en radicales se lleva a cabo comúnmente en la simplificación de radicales.

Se dice que el radical $\sqrt[q]{a}$ está simplificado cuando satisface las siguientes condiciones:

a) El subradical no contiene factores afectados de exponentes mayores que el índice q del radical.

b) El subradical no contiene fracciones.

c) El índice del radical es el menor posible.

En el inciso 6.4 se estudiará otra forma de simplificación de radicales llamada racionalización.

Ejemplo 4

Simplificar los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{8a^5}$ b) $\sqrt{\frac{27}{2}}$ c) $\sqrt[6]{27}$

Solución

a) $\sqrt[3]{8a^5} = \sqrt[3]{2^3a^3a^2} = 2a\ \sqrt[3]{a^2}$

b) $\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3^2 3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

Esta operación es inversa a la simplificación de radicales. Para introducir el coeficiente de un radical bajo el signo radical se eleva dicho coeficiente a la potencia que indique el índice del radical.

Ejemplo 5

Introducir bajo el signo radical:

a) $3a^2\ \sqrt[3]{a^2b}$; b) $(1 - a)\sqrt{\frac{1 + a}{1 - a}}$

Solución

a) $3a^2\ \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{(3a^2)^3\ a^2b} = \sqrt[3]{27a^8b}$

b) $(1 - a)\sqrt{\frac{1 + a}{1 - a}} = \sqrt{\frac{(1 - a)^2\ (1 + a)}{(1 - a)}} = \sqrt{(1 - a)\ (1 + a)} = \sqrt{1 - a^2}$

6.4 RACIONALIZACION

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en convertir una fracción cuyo denominador es irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional.

Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción desaparece todo signo radical del denominador. Se presentan los siguientes casos:

Caso 1.- Racionalizar el denominador de una fracción siendo éste un monomio.

Cuando se presenta este caso, se multiplican los dos términos de la fracción por el radical del mismo índice que el del denominador, que multiplicado por éste dé como producto una cantidad racional.

Ejemplo 6

Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{2x}}$

Solución

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt{2x}$.

$\frac{3}{\sqrt{2x}} = \frac{3}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{3\ \sqrt{2x}}{2x} =$ R. $\frac{3\ \sqrt{2x}}{2x}$

Ejemplo 7

Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt[3]{9a}}$

Solución

El denominador $\sqrt[3]{9a} = \sqrt[3]{3^2a}$. Para que en el denominador quede una raíz exacta hay que multiplicar:

$\sqrt[3]{3^2a}$ por $\sqrt[3]{3a^2}$

y para que la fracción no se altere se multiplica también el numerador por:

$\sqrt[3]{3a^2}$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9a}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3^2 a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[3]{3a^2}} = \frac{2\sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[3]{3^3a^3}} = \frac{2\sqrt[3]{3a^2}}{3a}$$

Caso 2.- Racionalizar el denominador de una fracción siendo éste un binomio que contiene radicales de segundo grado.

Cuando se presenta este caso, se multiplican ambos términos de la fracción por el conjugado del denominador y se simplifica el resultado.

Binomios conjugados. Dos expresiones que contienen radicales de 2o. grado como $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, o bien, $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$,

que difieren solamente en el signo que une sus términos, se dice que son conjugados. Así el conjugado de $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$ es $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$;

el conjugado de $4 - 3\sqrt{5}$ es $4 + 3\sqrt{5}$

El producto de dos binomios conjugados es racional. Así:

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{5})(3\sqrt{2} + \sqrt{5}) = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = 18 - 5 = 13$$

Ejemplo 8

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{4 - \sqrt{2}}{2 + 5\sqrt{2}}$$

Solución

Se multiplican el numerador y el denominador por $2 - 5\sqrt{2}$, teniéndose:

$$\frac{4 - \sqrt{2}}{2 + 5\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2 + 5\sqrt{2}} \cdot \frac{2 - 5\sqrt{2}}{2 - 5\sqrt{2}} = \frac{8 - 22\sqrt{2} + 10}{4 - 50} = \frac{18 - 22\sqrt{2}}{-46}$$

Simplificando: $\dfrac{9 - 11\sqrt{2}}{-23} = \dfrac{11\sqrt{2} - 9}{23}$

Para racionalizar el denominador de una expresión que contiene tres radicales de segundo grado hay que repetir dos veces el procedimiento descrito antes, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6}}$$

Solución

Considérese el denominador como el binomio:

$(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - \sqrt{6}$ por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{30} - 3}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{30} - 3}{1 + 2\sqrt{10}}$$

Multiplicando ambos términos nuevamente por el conjugado del denominador:

$$\frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{30} - 3)(1 - 2\sqrt{10})}{(1 + 2\sqrt{10})(1 - 2\sqrt{10})} =$$

$$= \frac{22\sqrt{3} - 5\sqrt{30} - 3 + 6\sqrt{10}}{1 - 40} =$$

$$= \frac{3 - 6\sqrt{10} + 5\sqrt{30} - 22\sqrt{3}}{39}$$

Ejercicios propuestos

Simplificar extrayendo los factores que puedan extraerse de los radicales.

1. $\sqrt{25x^4 y^3}$

2. $\sqrt{18xz^5}$

3. $2\sqrt[3]{54a^4 b^6}$

4. $4\sqrt[3]{250a^3 x^8}$

Introducir en el signo radical todos los factores que no estén dentro de él y simplificar.

5. $5x^2y\sqrt{3}$

6. $3ax^3\sqrt{3ax}$

7. $(x+1)\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$.

8. $2xy^2\sqrt[3]{ay}$

9. $7a^2b^3\sqrt[3]{\dfrac{2a}{49b^2}}$

Racionalizar el denominador de cada fracción.

10. $\dfrac{3}{4\sqrt{5}}$

11. $\dfrac{6}{5\sqrt{3x}}$

12. $\dfrac{a^2+b^2}{4\sqrt{a^2+b^2}}$

13. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}$

14. $\dfrac{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

15. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

CUADRO SINOPTICO

FORMULA GENERAL PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	DESCRIPCION
Completa $ax^2 + bx + c = 0$	Términos: - Segundo grado. - Primer grado. - Independiente.
Incompleta $ax^2 + c = 0$	Carece del término de primer grado.
Incompleta $ax^2 + bx = 0$	Carece del término independiente.

	DESCRIPCION
Compatible	Determinado: Una sola solución.
	Indeterminado: Una infinidad de soluciones.
Incompatible	No tiene solución.

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Resolverá ecuaciones de primer grado con una incógnita.
2. Resolverá ecuaciones de segundo grado, aplicando los métodos de:
   a) Completar cuadrados.
   b) Por fórmula general.
   c) Por descomposición en factores.
3. Resolverá sistemas de dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas y de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, aplicando los métodos de:
   a) Sustitución.
   b) Reducción.
   c) Igualación.
4. Calculará el valor de un determinante de segundo y tercer orden.

7.1 GENERALIDADES

Igualdad es la expresión en la cual dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor. Por ejemplo, son igualdades:

$$a = b + c \ ; \ 3x^2 = 4x + 15$$

Definición: Ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica, o es verdadera, para determinados valores de las incógnitas.

Así: $5x + 2 = 17$

es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita (x) y sólo se verifica para el valor $x = 3$, o sea:

$$5\ (3) + 2 = 17 \ ; \ 15 + 2 = 17$$

$$17 = 17$$

Identidad es una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las letras que intervienen en ella. Así se tiene que:

$$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$$

son identidades porque se verifican para cualesquiera valores de las letras a y b.

El signo de identidad es $\equiv$ que se lee "idéntico a".

Así, la identidad $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$, se lee: $(x + y)^2$, idéntico a $x^2 + 2xy + y^2$.

Una ecuación numérica es aquélla que no tiene más letras que las incógnitas, como $4x - 5 = x + 4$, donde la única letra es la incógnita x.

Una ecuación literal es aquélla que además de las incógnitas tiene otras letras, que representan cantidades conocidas, como $3x + 2a = 5b - bx$.

Una ecuación es entera cuando ninguno de sus términos tiene denominador, como en los ejemplos anteriores.

Es fraccionaria cuando algunos o todos sus términos tienen denominador, como:

$$\frac{3x}{2} + \frac{6x}{5} = 5 + \frac{5}{x}$$

Grado de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita. Así: $4x - 6 = 3x - 1$

es una ecuación de primer grado porque el mayor exponente de x es 1.

La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ es una ecuación de segundo grado porque el mayor exponente de x es 2.

Raíces o soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad.

Así en la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$ la raíz es 7, porque haciendo $x = 7$

$$5\ (7) - 6 = 3\ (7) + 8 \Rightarrow 29 \equiv 29$$

Por tanto, "Resolver una ecuación" es encontrar sus raíces, o sea, el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

7.2 REGLAS DE LAS ECUACIONES

1) Si a los dos miembros de una ecuación se les suma una misma cantidad positiva o negativa la igualdad subsiste.

2) Si a los dos miembros de una ecuación se les resta una misma cantidad positiva o negativa la igualdad subsiste.

3) Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad positiva o negativa la igualdad subsiste.

4) Si los dos miembros de una ecuación se dividen entre una misma cantidad positiva o negativa la igualdad subsiste.

5) Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o si a los dos miembros se les extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

La transposición de términos consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro.

Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

Términos iguales con signos iguales en distinto miembro de una ecuación, pueden suprimirse. Así, en la ecuación $x + b = 2a + b$, se tiene el término b con signo + en los dos miembros. Este término puede suprimirse, quedando $x = 2a$.

Cambio de signo: Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación se altere, ya que esto equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por (-1), con lo cual la igualdad no varía.

Si en la ecuación $-2x - 3 = x - 15$, se multiplican ambos miembros por -1, se tendrá:

$$2x + 3 = -x + 15$$

que es la ecuación dada con los signos de todos sus términos cambiados.

7.3 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Reglas generales para resolver ecuaciones de primer grado.

1) Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.

2) Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.

3) Se reducen los términos semejantes en cada miembro.

4) Se despeja la incógnita obteniendo así el valor buscado.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación:

$$35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$$

Solución

Se efectúa la transposición de términos, en el primer miembro, todos aquéllos que contengan la incógnita y en el otro todos aquéllos que no la contengan. Así:

$$-22x - 18x + 30x = 14 + 32 - 35 - 6$$

Reduciendo.

$$-10x = 5$$

Simplificando:

$$2x = -1$$

Despejando x:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Verificación:

Sustituyendo $x = -\frac{1}{2}$ en la ecuación dada se tiene:

$$35 - 22\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) = 14 - 30\left(-\frac{1}{2}\right) + 32$$

$$35 + 11 + 6 + 9 = 14 + 15 + 32$$

$$61 \equiv 61$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación:

$$10(x - 9) - 9(5 - 6x) = 2(4x - 1) + 5(1 + 2x)$$

Solución

Efectuando los producto indicados:

$$10x - 90 - 45 + 54x = 8x - 2 + 5 + 10x$$

Suprimiendo 10x en ambos miembros, transponiendo términos y reduciendo, queda:

$$54x - 8x = -2 + 5 + 90 + 45$$

$$46x = 138$$

Despejando x:

$$x = \frac{138}{46} = 3 \therefore x = 3$$

Verificación:

Haciendo x = 3 en la ecuación dada se tiene:

$$10(3 - 9) - 9(5 - 18) = 2(12 - 1) + 5(1 + 6)$$

$$-60 + 117 = 22 + 35$$

$$57 \equiv 57$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación:

$$2 - \frac{x - 1}{40} = \frac{2x - 1}{4} - \frac{4x - 5}{8}$$

Solución

Se encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores 40, 4 y 8, que es 40, quedando la ecuación:

$$40(2) - (x - 1) = 10(2x - 1) - 5(4x - 5)$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$80 - x + 1 = 20x - 10 - 20x + 25$$

Transponiendo términos y reduciendo:

$$-x = -10 + 25 - 80 - 1$$

$$-x = -66 \therefore x = 66$$

Por tanto, la raíz de la ecuación o el valor que la satisface es:

$$x = 66$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2x} + 1$$

Solución

El m.c.m. de los denominadores es 30x, quedando la ecuación:

$$10\ (2) - 30\ (5) = 3x\ (7) - 15\ (3) + 30x$$

Efectuando las operaciones indicadas.

$$20 - 150 = 21x - 45 + 30x$$

Transponiendo términos y reduciendo.

$$-\ 21x - 30x = -\ 45 - 20 + 150$$

$$-\ 51x = 85$$

Despejando x :

$$x = -\ \frac{85}{51}$$

Dividiendo entre 17 numerador y denominador:

$$x = -\ \frac{5}{3}$$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación:

$$\frac{6x + 5}{15} - \frac{5x + 2}{3x + 4} = \frac{2x + 3}{5} - 1$$

Solución

El m.c.m. de los denominadores es 15 (3x + 4) quedando la ecuación

$(6x + 5)\ (3x + 4) - 15\ (5x + 2) = 3\ (3x + 4)\ (2x + 3) - 15\ (3x + 4).$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$18x^2 + 24x + 15x + 20 - 75x - 30 =$$

$$18x^2 + 27x + 24x + 36 - 45x - 60$$

Transponiendo términos y simplificando.

$$39x - 75x - 51x + 45x = 36 - 60 - 20 + 30$$

$$-\ 42x = -\ 14$$

Despejando x :

$$x = \frac{14}{42} = \frac{1}{3} \therefore x = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación:

$$x\ (3 - 2b) - 1 = x\ (2 - 3b) - b^2$$

Solución

Efectuando las operaciones indicadas.

$$3x - 2bx - 1 = 2x - 3bx - b^2$$

Transponiendo:

$$3x - 2bx - 2x + 3bx = 1 - b^2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$x + bx = 1 - b^2$$

Factorizando ambos miembros:

$$x\ (1 + b) = (1 - b)\ (1 + b)$$

Despejando x :

$$x = \frac{(1 + b)\ (1 - b)}{(1 + b)}$$

Queda:

$$x = 1 - b$$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación:

$$\frac{a - 1}{x - a} - \frac{2a\ (a - 1)}{x^2 - a^2} = - \frac{2a}{x + a}$$

Solución

El m.c.m. de los denominadores es $x^2 - a^2$, quedando la ecuación:

$$(x + a)\ (a - 1) - 2a\ (a - 1) = - 2a\ (x - a)$$

Efectuando las operaciones indicadas.

$$ax - x + a^2 - a - 2a^2 + 2a = - 2ax + 2a^2$$

Reduciendo:

$$3ax - x = 3a^2 - a$$

Factorizando:

$$x\ (3a - 1) = a\ (3a - 1)$$

Despejando x:

$$x = \frac{a\ (3a - 1)}{(3a - 1)}$$

Simplificando:

$$x = a$$

Ejemplo 8

Una persona paga \$ 870.00 por un libro, un traje y un sombrero. El sombrero costó \$ 50.00 más que el libro y \$ 200.00 menos que el traje. ¿Cuánto pagó por cada cosa?

Solución

Sea x el precio del libro.

El sombrero costó \$ 200.00 menos que el traje, por lo tanto el traje costó \$ 200.00 más que el sombrero.

Así:

$x + 50 + 200 = x + 250$ = precio del traje.

Como las 3 cosas costaron \$ 870.00, se tiene:

$$x + x + 50 + x + 250 = 870$$

$$3x = 870 - 250 - 50$$

$$3x = 570 \qquad x = \frac{570}{3}; \qquad x = 190$$

Por lo tanto:

x = precio libro = \$ 190.00

Precio sombrero = $x + 50 = 190 + 50 =$ \$ 240.00

Precio traje = $x + 250 = 190 + 250 =$ \$ 440.00

Comprobando:

$$190 + 240 + 440 = 870$$

$$870 \equiv 870$$

Ejemplo 9

La suma de dos números es 77, si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 2 y el residuo 8. Hallar los números.

Solución

Sea x el número mayor. Por lo tanto $77 - x$ = número menor.

De acuerdo con las condiciones del problema al dividir el número mayor x entre el menor 77 - x, el cociente es 2 y el residuo es 8, pero si al dividendo x se le resta el residuo 8, la división de x - 8 entre 77 - x es exacta y resulta el cociente 2, así se tendrá la ecuación:

$$\frac{x - 8}{77 - x} = 2$$

Resolviendo:

$$x - 8 = 2\ (77 - x);\ x - 8 = 154 - 2x$$

$$3x = 162 \qquad x = 54$$

El número mayor x = 54, luego el menor será 77 - 54 = 23.

Luego los números buscados son 23 y 54.

7.4 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2. Así:

$$4x^2 + 7x + b = 0$$

es una ecuación de segundo grado.

Las ecuaciones completas de segundo grado son ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Que tienen un término en x^2, un término en x, y un término independiente de x. Así:

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \quad y \quad x^2 - 8x = - 15$$

son ecuaciones completas de segundo grado.

Las ecuaciones incompletas de segundo grado son ecuaciones de la forma:

A) $ax^2 + c = 0$ que carecen de término en x, ó

B) $ax^2 + bx = 0$ que carecen de término independiente.

Así:

$$x^2 - 16 = 0 \quad y \quad 3x^2 + 5x = 0$$

son ecuaciones incompletas de segundo grado.

Las raíces de una ecuación de segundo grado son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación.

Toda ecuación de segundo grado tiene dos raíces o valores de la incógnita que satisfacen la ecuación.

7.5 RESOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GR[illegible] CON UNA INCOGNITA POR EL METODO DE COMPLETAR CUADRADOS

Método de completar c[illegible]rados. Este método se explicará mediante la resolución de un eje[illegible].

Eje[illegible] 10

Resolver la ecuación:

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

El término independiente se pasa al segundo miembro de la ecuación:

$$2x^2 - 2x = 1$$

Ahora, se divide toda la ecuación entre el coeficiente de x^2, y queda:

$$x^2 - x = \frac{1}{2}$$

El primer miembro resultará un cuadrado perfecto si se agrega el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, en ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Simplificando:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ahora, el primer miembro es un cuadrado perfecto.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros.

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Despejando x:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, los valores que resuelven la ecuación son:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

7.6 RESOLUCION DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA POR MEDIO DE LA FORMULA GENERAL

Dada una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, pueden obtenerse sus raíces por medio de la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De la que se obtienen los valores:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con la aplicación directa de la fórmula general se cuenta con la ventaja de poder determinar qué tipo de raíces tiene la ecuación. Calculando primero el valor del indicador o discriminante: $I = b^2 - 4ac$.

1) Si $I > 0$ las raíces son reales desiguales.

2) Si $I = 0$ las raíces son reales iguales.

3) Si $I < 0$ las raíces son complejas.

$x^2 - 3x + x - 3$
$x(x-3) + (x-3)$
$(x+1)(x-3)$
$x = -1$
$x = 3$

Ejemplo 11

Resolver por fórmula la ecuación:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Solución

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,(1)\,(-3)}}{2\,(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Obteniéndose los valores:

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \therefore x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \therefore x_2 = -1$$

Los valores $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$ resuelven la ecuación.

7.7 RESOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA POR FACTORIZACION

Caso 1. Dado $ax^2 + bx + c = 0$ si $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$

Factorizando: $x\,(ax + b) = 0$ lo que equivale a dos ecuaciones lineales.

Primera solución: $x_1 = 0$

Segunda solución: $ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$

Ejemplo 12

Resolver la ecuación:

$$2x^2 + 6x = 0$$

Solución

Factorizando:

$$x\,(2x + 6) = 0$$

Primera solución:

$$x_1 = 0$$

Segunda solución:

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

Los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$ resuelven la ecuación.

Caso 2. Dado $ax^2 + bx + c = 0$ si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$ o sea:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Si a y c tienen el mismo signo las raíces son imaginarias. Si a y c tienen signos contrarios, las raíces son reales y simétricas.

Ejemplo 13

Resolver la ecuación:

$$6x^2 - 24 = 0$$

Solución

$$x^2 = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = -2 \text{ y } x_2 = 2$$

Los valores $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ satisfacen la ecuación dada.

Ejemplo 14

La longitud de un terreno rectangular es el doble que su ancho. Si la longitud se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m, el área se duplica. Encontrar las dimensiones del terreno.

Solución

Sea x = ancho del terreno. Entonces 2x = longitud del terreno.

Por tanto el área del terreno es $(x)(2x) = 2x^2$. Aumentando su longitud en 40 m ésta sería $(2x + 40)$. Aumentando el ancho en 6 m éste sería $(x + 6)$. El área sería ahora $(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240$. Sin embargo dadas las condiciones del problema esta área sería doble que la anterior $2x^2$.

Entonces:

$$2x^2 + 52x + 240 = 4x^2$$

Transponiendo y reduciendo:

$$-2x^2 + 52x + 240 = 0$$

Cambiando signos y dividiendo entre 2.

$$x^2 - 26x - 120 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$x_1 = 30 \quad y \quad x_2 = -4$$

Aceptando la solución $x_1 = 30$, el ancho del terreno es 30 m y la longitud es $2x = 60$ m.

7.8 SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Así:

$$2x + 3y = 13 \qquad 4x - y = 5$$

es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Solución de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

La solución del sistema anterior es: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.

Un sistema de ecuaciones es compatible cuando tiene solución y es incompatible cuando no la tiene. Un sistema compatible es determinado cuando tiene una sola solución e indeterminado cuando tiene una infinidad de soluciones.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas, es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita. Esta operación se llama eliminación.

Los métodos de eliminación más usuales son tres: Igualación, Sustitución y Reducción; este último se llama también de Suma y Resta.

METODO DE IGUALACION

Dado el sistema de ecuaciones, se despeja cualquiera de las incógnitas de ambas ecuaciones y se igualan entre sí los valores obtenidos, resultando una ecuación con una incógnita. Se resuelve esta ecuación y el valor que la satisface se sustituye en cualquiera de las ecuaciones dadas, generalmente es la más sencilla, para obtener así el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 15

Resolver el sistema:

$$7x + 4y = 13$$
$$5x - 2y = 19$$

Solución

Se despeja x de ambas ecuaciones:

$$7x = 13 - 4y \quad \therefore \quad x = \frac{13 - 4y}{7}$$

$$5x = 19 + 2y \quad \therefore \quad x = \frac{19 + 2y}{5}$$

Igualando los valores de x obtenidos:

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$$

Obteniéndose una sola ecuación con una incógnita. Resolviendo la ecuación:

$$5\ (13 - 4y) = 7\ (19 + 2y)$$

$$65 - 20y = 133 + 14y \Rightarrow - 20y - 14y = 133 - 65 \therefore - 34y = 68$$

$$y = - 2$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema dado

$$7x + 4\ (-2) = 13 \ ;\ 7x - 8 = 13 \ ;\ 7x = 21 \therefore x = 3$$

Solución

$$x = 3 \qquad y = - 2$$

METODO DE SUSTITUCION

Dado el sistema de ecuaciones, se despeja cualquiera de las incógnitas de una de ellas, sustituyendo este valor en la ecuación restante, resultando una ecuación con una incógnita. Se resuelve esta ecuación y el valor que la satisface se sustituye en cualquiera de las ecuaciones dadas, para obtener así el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 16

Resolver el sistema:

$$2x = - 24 - 5y \therefore x = \frac{- 24 - 5y}{2}$$

Se despeja una de las incógnitas, de una de las ecuaciones dadas:

$2x = -24 - 5y$

$2x + 5y = -24$

$8x - 3y = 19$

Este valor se sustituye en la otra ecuación:

$$8\left(\frac{- 24 - 5y}{2}\right) - 3y = 19$$

Obteniéndose una sola ecuación con una incógnita. Resolviendo la ecuación:

$$4\ (- 24 - 5y) - 3y = 19 \ ;\ - 96 - 20y - 3y = 19 \ ;\ - 23y = 96 + 19;$$

$$- 23y = 115 \therefore y = - \frac{115}{23} \qquad y = - 5$$

Sustituyendo y = - 5 en cualquiera de las ecuaciones dadas:

$$2x + 5\ (-5) = - 24 \ ;\ 2x - 25 = - 24 \ ;\ 2x = 1 \therefore x = \frac{1}{2}$$

Solución

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = - 5$$

METODO DE REDUCCION

En este método se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas, sumando o restando según convenga, una ecuación de la otra para eliminar la incógnita y así obtener una ecuación con una incógnita. Se resuelve esta ecuación y el valor que la satisface se sustituye en cualquiera de las ecuaciones dadas, para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 17

Resolver el sistema:

$$5x + 6y = 20$$
$$4x - 3y = -23$$

Solución

Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas. Se escoge arbitrariamente la y pues en este caso resulta lo más sencillo. Se multiplica la segunda ecuación por 2, obteniéndose:

$$5x + 6y = 20$$
$$8x - 6y = -46$$

Como los coeficientes de y que se han igualado tienen signos distintos, se suman estas ecuaciones, porque con ello se elimina y:

$$\begin{array}{rl} 5x + 6y = & 20 \\ 8x - 6y = & -46 \\ \hline 13x \quad\quad = & -26 \end{array}$$

De aquí:

$$13x = -26 \therefore x = -\frac{26}{13} = -2$$

Sustituyendo $x = -2$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, se tiene:

$$5(-2) + 6y = 20 \quad ; \quad -10 + 6y = 20 \quad ; \quad 6y = 30 \therefore y = 5$$

Solución

$$x = -2 \quad ; \quad y = 5$$

Ejemplo 18

La diferencia de dos números es 14, y 1/4 de su suma es 13. Encontrar estos números.

Solución

x = número mayor $\qquad$ y = número menor

De acuerdo con las condiciones del problema se tiene el sistema:

$$x - y = 14$$
$$\frac{x + y}{4} = 13$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{rl} x - y = & 14 \\ x + y = & 52 \\ \hline 2x \quad\quad = & 66 \end{array} \quad \therefore x = 33$$

Sustituyendo $x = 33$ en cualquiera de las ecuaciones:

$$33 - y = 14 \quad \therefore \quad y = 19$$

Los números buscados son 33 y 19.

7.9 DETERMINANTES

Un determinante de orden n, designado por Δn, se representa por un arreglo en forma de cuadrado de n cantidades llamadas elementos, dispuestos en n filas y n columnas, como se muestra:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & ------ \; l_1 \\ a_2 & b_2 & ------ \; l_2 \\ --- & --- & ------ \\ a_n & b_n & ------ \; l_n \end{array}$$

Se acostumbra encerrar este arreglo entre dos líneas rectas verticales.

Ya que n representa el orden de un determinante, se dice que un determinante de segundo orden tendrá dos filas y dos columnas, un determinante de tercer orden tres filas y tres columnas y así sucesivamente.

Un determinante de segundo orden se representa como:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Donde los elementos a_1 y b_2 forman la diagonal principal. El valor de Δ_2 se define como el producto de los elementos en la diagonal principal, menos el producto de los elementos en la otra diagonal. Es decir por definición:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\, b_2 - a_2\, b_1$$

El segundo miembro de esta igualdad se llama desarrollo de Δ_2.

Ejemplo 19

Resolver el siguiente determinante de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2\ (1) - (-4)\ (3) = 2 + 12 = 14$$

Un determinante de tercer orden se representa como:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

El modo más sencillo de hallar el valor de un determinante de tercer orden es aplicando la Regla de Sarrus. Esta sencilla regla se explicará por medio de un ejemplo.

Ejemplo 20

Resolver el siguiente determinante por la Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Pasos a seguir

a) Debajo de la tercera fila se repiten las dos primeras filas.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Se trazan tres diagonales de derecha a izquierda y tres de izquierda a derecha, como se indica a continuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

c) Se multiplican entre sí los tres números por los que pasa cada diagonal.

d) Los productos de los números comprendidos en las diagonales trazadas de izquierda a derecha se escriben con su propio signo.

e) Los productos de los números que comprenden las diagonales trazadas de derecha a izquierda se anotan con el signo cambiado. Así:

$$(1)\ (2)\ (3) + (-4)\ (-1)\ (-3) + (5)\ (-2)\ (1) -$$
$$- (-3)\ (2)\ (5) - (1)\ (-1)\ (1) - (3)\ (-2)\ (-4) =$$
$$= 6 + (-12) + (-10) - (-30) - (-1) - (24) =$$
$$= 6 - 12 - 10 + 30 + 1 - 24 =$$
$$= -9$$

Ejercicios propuestos

Resolver:

1. $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$
2. $x + 3\ (x - 1) = 6 - 4\ (2x + 3)$
3. $(x - 4)\ (2x + 5) = (2x + 3)\ (x - 4) + 5$
4. $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = 0$
5. $\left(3 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) = 7 - \left(x - \frac{x}{2}\right)$
6. $\frac{5}{1 + x} - \frac{3}{1 - x} - \frac{6}{1 - x^2} = 0$
7. $\frac{10x - 7}{15x + 3} = \frac{3x + 8}{12} - \frac{5x^2 - 4}{20x + 4}$
8. $(m + 4x)\ (3m + x) = (2x - m)^2 + m\ (15x - m)$
9. $\frac{x + a}{3} = \frac{(x - b)^2}{3x - a} + \frac{3ab - 3b^2}{9x - 3a}$
10. A, tiene 14 años menos que B, y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tienen cada uno?
11. Repartir $ 310.00 entre 3 personas de modo que la segunda reciba $ 20.00 menos que la primera y $ 40.00 más que la tercera.
12. Una pluma y un lapicero costaron 18 dólares. Si la pluma hubiera costado 6 menos y el lapicero 4 más habrían costado lo mismo. ¿Cuánto costó cada uno?
13. Dividir 260 en dos partes tales que el duplo de la mayor dividido entre el triple de la menor, dé 2 de cociente y 40 de residuo.
14. Una persona tenía cierta suma de dinero. Gastó $ 20.00 y prestó las 2/3 de lo que le quedaba. Si ahora tiene $ 10.00. ¿Cuánto tenía al principio?
15. Resolver la siguiente ecuación completando cuadrados.

    $4x^2 + 3x - 22 = 0$
16. Resolver la siguiente ecuación por la fórmula general.

    $5x^2 - 7x - 90 = 0$
17. Resolver la siguiente ecuación.

    $5x^2 - 9 = 46$
18. Resolver la siguiente ecuación.

    $x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$
19. A, tiene 3 años más que B, y el cuadrado de la edad de A aumentado en el cuadrado de la edad de B equivale a 317 años. Hallar ambas edades.
20. Resolver por el método de igualación el siguiente sistema.

    $3x + 5y = 7$
    $2x - y = -4$
21. Resolver por el método de sustitución el siguiente sistema.

    $32x - 25y = 13$
    $16x + 15y = 1$
22. Resolver por el método de reducción el siguiente sistema.

    $9x + 7y = -4$
    $11x - 13y = -48$
23. Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Hallar los números.

$x_1 + x_2 = 18$

$x_1 - 6 = x_2$

$x_2 + 4 = x_1$

Resolver los siguientes determinantes:

24. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 9 & -11 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -19 & -21 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 31 & -85 \\ -20 & 43 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 8 & -6 & 9 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

31. Relacionar las expresiones de la columna de la izquierda con las de la derecha según convenga.

a) Expresión en la cual dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor: ( ) Identidad.

b) Igualdad en la que hay una o varias incógnitas y que se verifica para determinados valores de las incógnitas: ( ) Transposición de términos.

c) Igualdad que se verifica para cualquiera valores de las letras que intervienen en ella: ( ) Ecuación incompleta de 2o. grado.

d) Los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación se llaman: ( ) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

e) Cómo se le llama a la acción de cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro: ( ) Resolver un sistema de ecuaciones.

f) Toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2, se le llama: ( ) Igualdad.

g) A la ecuación $ax^2 + c = 0$ se le llama: ( ) Raíces o soluciones de la ecuación.

h) ¿Qué aplicación tiene la fórmula?: ( ) Las raíces de una ecuación de 2o. grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

i) Un sistema de ecuaciones es: ( ) Resolver un determinante de 3er. orden.

j) Determinante de 2o. orden: ( ) Ecuación.

k) La Regla de Sarrus es para: ( ) Ecuación de 2o. grado

l) La Regla de Kramer es para: ( ) La reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

CUADRO SINOPTICO

PROPIEDADES: NO VARIA SU SENTIDO CUANDO:
(1) Si $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$
(2) Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$ Si $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c >$ $> b + d$
(4) Si de tres cantidades a,b,c, $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$
(6) $\left.\begin{matrix} \text{Si } a,b,c,d \text{ y} \\ a > b \text{ y } c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bd$
(8) Si $a > b$ y $n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \end{cases}$

PROPIEDADES: SE INVIERTE SU SENTIDO CUANDO:
(3) Si $a > b$ y $c < a \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$
(7) Si $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
(9) Si $a < 0$, $b < 0$ y $a > b \Rightarrow$ $\Rightarrow a^n < b^n$ para $n = 2,4,6,$ $8.....$

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará los conceptos de desigualdad, desigualdad absoluta e inecuación.
2. Resolverá problemas aplicando las propiedades de las desigualdades.
3. Dada una inecuación aplicará las propiedades de las desigualdades hasta obtener el dominio de la incógnita que contenga.

8.1 GENERALIDADES

Desigualdad es una expresión que nos indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

Los sentidos de una desigualdad son dos:

> mayor que	$a > b$	a mayor que b
< menor que	$b < a$	b menor que a

Se llama primer miembro de una desigualdad a la parte que está a la izquierda y segundo miembro a la que está a la derecha del signo de desigualdad.

8.2 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1. El sentido de una desigualdad no se altera si se suma o se resta la misma cantidad a ambos miembros.

$$\text{Si } a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

2. El sentido de una desigualdad no se altera si ambos miembros se multiplican o dividen entre la misma cantidad positiva.

$$\text{Si } a > b \quad y \quad c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

3. El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican o dividen entre la misma cantidad negativa.

$$\text{Si } a > b \quad y \quad c < 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

4. Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, la suma dará origen a una desigualdad del mismo sentido.

$$\text{Si } a > b \quad y \quad c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

5. Si de tres cantidades a, b, c: $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$.

6. Si dos desigualdades entre números positivos tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos serán desiguales en el mismo sentido.

$$\left.\begin{matrix} \text{Si } a, b, c, d > 0 \\ y \ a > b \ y \ c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bd$$

7. Si en una desigualdad se sustituyen ambos miembros por sus recíprocos, se invierte su sentido.

$$\text{Si } a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

8. Si los miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, o se les extrae una misma raíz positiva, el signo de la desigualdad no cambia.

$$\text{Si } a > b \quad y \quad n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \end{cases}$$

9. Si los dos miembros de una desigualdad son negativos y se elevan a una misma potencia par positiva el signo de la desigualdad cambia.

$$\text{Si } a < 0,\ b < 0 \quad y \quad a > b \Rightarrow a^n < b^n \quad \text{para } n = 2, 4, 6, 8 \ldots$$

8.3 DESIGUALDADES ABSOLUTAS

Una desigualdad absoluta es análoga a una identidad tal como: "Si a y b son números positivos desiguales, $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$".

Es posible demostrar una desigualdad absoluta mediante pasos lógicos, aplicando las propiedades de las desigualdades hasta lograr una desigualdad más sencilla y evidente.

No es fácil averiguar los pasos a seguir en la transformación de la desigualdad, sin embargo, con la práctica se adquiere destreza en el análisis.

Ejemplo 1

Demostrar la siguiente desigualdad:

Si a y b son positivos y diferentes $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$

1o. Factorizando el segundo miembro $a^3 + b^3 > ab\,(a + b)$

2o. Como a y b son positivos $(a + b)$ será positivo y por lo tanto podemos dividir ambos miembros entre $(a + b)$ sin alterar el sentido de la desigualdad.

$$a^2 - ab + b^2 > ab$$

3o. Transponiendo ab al primer miembro:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

4o. Sustituyendo el primer miembro por su equivalente:

$$(a - b)^2 > 0$$

lo cual es evidentemente cierto para dos números positivos y diferentes.

8.4 INECUACIONES DE UNA VARIABLE

Inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas), y que sólo se verifica para determinados valores de estas incógnitas.

Tal es el caso de la desigualdad $2x - 3 > x + 5$, que es una inecuación pues tiene "x" como incógnita y sólo se verifica para cualquier valor de $x > 8$.

Solución de inecuaciones: Resolver una inecuación es hallar los valores de las incógnitas que la satisfacen. La solución de inecuaciones se funda en las propiedades de las desigualdades, expuestas al principio de este módulo, y en las consecuencias que de las mismas se derivan.

Ejemplo 2

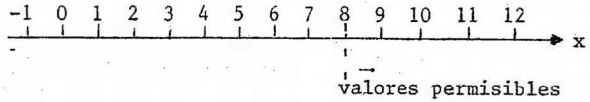
Resolver la siguiente inecuación:

$2x - 3 > x + 5$

$2x - x - \cancel{3} + \cancel{3} > \cancel{x} - \cancel{x} + 5 + 3$ Aplicando 8.2.1

$2x - x > 5 + 3$

$x > 8$



Ejemplo 3

Resolver la siguiente inecuación:

$7 - \frac{z}{2} > \frac{5z}{3} - 6$	multiplicando por 6
$42 - 3z > 10z - 36$	transponiendo
$- 3z - 10z > - 36 - 42$	reduciendo
$- 13z > - 78$	invirtiendo el sentido
$13z < 78$	dividiendo entre 13
$z < 6$	

Ejemplo 4

Resolver la inecuación

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

Solución:

Factorizando el primer miembro queda:

$$(x + 1)(x - 3) < 0$$

Se puede observar que la expresión $x^2 - 2x - 3$ vale cero si $x = -1$ ó si $x = 3$. Para cualquier valor de x diferente de -1 o 3, el primer miembro es positivo o negativo, es decir, es mayor que cero o menor que cero.

Es mayor que cero cuando los dos factores $(x + 1)$ y $(x - 3)$ tienen el mismo signo y es menor que cero cuando los signos de esos factores son distintos.

El factor $x + 1$ es negativo cuando $x < -1$ y es positivo si $x > -1$

$x = 1 < 0$ $\qquad$ $x + 1 > 0$

El factor $x - 3$ es negativo cuando $x < 3$ y es positivo si $x > 3$

$x - 3 < 0$ $\qquad$ $x - 3 > 0$

Los valores de x para los cuales tienen signos distintos los factores $(x + 1)$ y $(x - 3)$ son los comprendidos entre -1 y 3

$x + 1 > 0$ $\qquad$ $x - 3 < 0$

Así que la solución de la inecuación es:

$$-1 < x < 3$$

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $2x - 2 > \frac{8}{3}x - 6$

2. $\frac{1}{4}(x + 10) > \frac{2}{3}x + 5$

3. $3x - 4 + \frac{x}{4} < \frac{5x}{2} + 2$

4. $\frac{1}{2}(3x + 7) < \frac{7}{3}x - 4$

5. $x^2 - 4x + 3 < 0$

6. $x^2 - x - 6 < 0$

MODULO 9 VALOR ABSOLUTO

CUADRO SINOPTICO

DEFINICION DEL VALOR ABSOLUTO

$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geq 0$

$|a| = -a \quad \text{si} \quad a < 0$

PROPIEDADES ELEMENTALES

$|a| \geq 0$ El valor absoluto de a nunca es negativo.

$|a| = 0$ Implica que $a = 0$.

$|a|^2 = a^2$

$+\sqrt{a^2} = |a|$

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS REALES

$|x| \leq b$ Implica $-b \leq x \leq b$

$|x - a| \leq b$ Implica $-b \leq x - a \leq b$

$|x - a| \leq b$ Implica $a - b \leq x \leq a + b$

$|x| \geq b$ Implica $x \leq b$ ó $x \geq b$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a + b| = |a| + |b|$

$|a + b| < |a| + |b|$

$|ab| = |a| \; |b|$

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará el concepto de valor absoluto.
2. Enunciará las propiedades elementales del valor absoluto.
3. Resolverá una ecuación de una variable, que contenga valor absoluto obteniendo el conjunto solución.
4. Resolverá una inecuación de una variable, que contenga valor absoluto obteniendo el conjunto solución.

9.1 GENERALIDADES

El valor absoluto o valor numérico de cualquier número real a, se representa con $|a|$ y se define:

$$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geq 0 \; ; \; |a| = -a \quad \text{si} \quad a < 0$$

Nótese que el valor absoluto de cualquier número distinto de cero, es positivo.

Ejemplo 1

a) $|3| = 3$

b) $|-7| = 7$

c) $|0| = 0$

9.2 PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Las principales propiedades del valor absoluto son las siguientes:

Para todo número real a se tiene:

1) $|a| \geq 0$ o sea que el valor absoluto de a nunca es negativo

2) $|a| = 0$ implica que $a = 0$

3) $|a|^2 = a^2$

4) $+\sqrt{a^2} = |a|$

5) $-|a| \leq a \leq |a|$

Ejemplo 2

a) $|2|^2 = 2^2 = 4$

b) $+\sqrt{6^2} = |6| = 6$

c) $+\sqrt{(-11)^2} = +\sqrt{121} = 11 = |11|$

d) Para $a = 4$, la propiedad 5 queda:

$-|4| \leq 4 \leq |4|$ esto es: $-4 < 4 = 4$

Además de las propiedades anteriores del valor absoluto, se tiene que para cualesquiera números reales a, x y b, siendo $b \geq 0$.

6) $|x| \leq b$ implica $-b \leq x \leq b$

7) $|x - a| = b$ implica $-b \leq x - a = b$

8) $|x - a| \leq b$ implica $a - b \leq x \leq a + b$

9) $|x| \geq b$ implica $x \leq -b$ o bien $x \geq b$

Ejemplo 3

a) $|x| \leq 5$ es verdadera sí y solamente sí: $-5 \leq x = 5$

b) $|x - 4| \leq 9$ es verdadera sí y solamente sí : $-9 \leq x - 4 \leq 9$

c) $|x - 3| \leq 2$ es verdadera sí y solamente sí : $3 - 2 \leq x \leq 3 + 2$ esto es $1 \leq x \leq 5$

d) $|x| \geq 7$ es verdadera sí y solamente sí : $x \leq -7$ o bien si: $x \geq 7$

10) El valor absoluto de la suma de dos números reales a y b es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

$|a + b| \leq |a| + |b|$

Ejemplo 4

a) Si $a = 5$ y $b = 3$, $|a + b| = |5 + 3| = |8| = 8$

$|a| = |5| = 5$, $|b| = |3| = 3$ y $|a| + |b| = 5 + 3 = 8$

en este caso en que: $a > 0$ y $b > 0$, $|5 + 3| = |5| + |3|$

b) Si $a = 7$ y $b = -9$, $|a + b| = |7 + (-9)| = |7 - 9| = |-2| = 2$

$|a| = |7| = 7$, $|b| = |-9| = 9$ y $|a| + |b| = 7 + 9 = 16$;

$2 < 16$ ahora que: $a > 0$ y $b < 0$ $|7 + (-9)| < |7| + |-9|$

c) Tomando $a = -10$, $b = 13$, $|a + b| = |-10 + 13| = |3| = 3$

$|a| + |b| = |-10| + |13| = 10 + 13 = 23$;

$3 < 23$, o sea que: $|-10 + 13| < |-10| + |13|$

d) Para $a = -4$ y $b = -1$, $|a + b| = |-4 + (-1)| = |-4 - 1| =$

$= |-5| = 5$

$|a| + |b| = |-4| + |-1| = 4 + 1 = 5$

$|-4 + (-1)| = |-4| + |-1|$

Puede observarse que si dos números reales a y b tienen el mismo signo, entonces $|a + b| = |a| + |b|$ y si tienen signos contrarios, entonces $|a + b| < |a| + |b|$.

11) El valor absoluto del producto de dos números reales a y b es igual al producto de sus valores absolutos.

$|ab| = |a|\ |b|$

Ejemplo 5

a) Si $a = 8$ y $b = 3$, $|ab| = |8\ (3)| = |24| = 24$

$|a|\ |b| = |8|\ |3| = 8\ (3) = 24 \therefore |8\ (3)| = |8|\ |3|$

b) Para $a = -11$ y $b = 4$, $|ab| = |(-11)\ 4| = |-44| = 44$

$|a|\ |b| = |-11|\ |4| = (11)\ 4 = 44 \therefore |(-11)\ 4| = |-11|\ |4|$

c) Si $a = -3$ y $b = -9$, $|(-3)\ (-9)| = |27| = 27$

$|-3|\ |-9| = 3\ (9) = 27$

$|(-3)\ (-9)| = |-3|\ |-9|$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación:

$$|x - 3| = 5$$

Solución

Por la definición de valor absoluto, la expresión $|a| = b$ (con $b \geq 0$) es verdadera sí y solamente sí $a = -b$ ó $a = b$ por lo cual, $|x - 3| = 5$ implica $x - 3 = 5$ ó $x - 3 = -5$ o sea, despejando x: $x_1 = 8$, $x_2 = -2$ son las soluciones de la ecuación $|x - 3| = 5$

Comprobación:

Para $x_1 = 8$: $|8 - 3| = 5$; $|5| = 5$; $5 = 5$

Para $x_2 = -2$: $|-2 - 3| = 5$; $|-5| = 5$; $5 = 5$

Ejemplo 7

Resolver la desigualdad $|x - 2| \leq 4$ y expresar la solución como un intervalo, (es decir como una expresión $a \leq x \leq b$).

Solución

La expresión $|x - 2| \leq 4$ es verdadera sí y solamente sí $-4 \leq x - 2 \leq 4$ por lo cual $2 - 4 \leq x \leq 2 + 4$, esto es: $-2 \leq x \leq 6$

Ejemplo 8

Resolver la desigualdad:

$$|x - 4| > 3$$

Solución

$|x - 4| > 3$ es verdadera sí y solamente sí $x - 4 < -3$ o si $x - 4 > 3$

La proposición $x - 4 < -3$ es equivalente a $x < 1$ y la proposición $x - 4 > 3$ es equivalente a $x > 7$, luego la solución de la desigualdad $|x - 4| > 3$ es: $x < 1$ ó $x > 7$.

Ejemplo 9

Resolver la ecuación:

$$|3x + 2| = 5 - x$$

Solución

La ecuación propuesta implica $3x + 2 = 5 - x$ ó $3x + 2 = -(5 - x)$

Resolviendo:

$$3x + 2 = 5 - x$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Resolviendo:

$$3x + 2 = -(5 - x)$$

$$3x + 2 = -5 + x$$

$$2x = -7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación propuesta, son:

$$x_1 = \frac{3}{4} \qquad y \qquad x_2 = -\frac{7}{2}$$

Ejercicios propuestos

Resolver las ecuaciones propuestas:

1. $|x - 4| = 3$
2. $|2x + 3| = 4 - x$
3. $|3 - x| = |1 + x|$
4. $|x + 4| = |x + 2|$

Resolver las desigualdades siguientes y expresar su solución en la forma $a \leq x \leq b$ ó en la forma $a < x < b$ según el caso.

5. $|x| \leq 5$
6. $|3x| < 27$
7. $|x - 2| \leq 1$
8. $|2x - 3| < 5$

Resolver las desigualdades:

9. $|2x| > 8$
10. $|x - 1| \geq 5$
11. $|3x - 5| > 4$

CUADRO SINOPTICO

LOGARITMOS	Logaritmos decimales o de base 10	a) La parte entera, es la característica. b) La parte decimal, es la mantisa:Se obtiene por medio de tablas. c) El número que corresponde a un logaritmo dado es el antilogaritmo.
	Logaritmos naturales o de base e	A diferencia de los logaritmos decimales, la característica y la mantisa de los logaritmos naturales, se obtiene por medio de las tablas.

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Dado un número real positivo, obtendrá su logaritmo decimal o natural en tablas.
2. Dado un número logarítmico, obtendrá un antilogaritmo en tablas.
3. Efectuará operaciones aritméticas de multiplicación, división, potenciación y radicación simples y combinadas, empleando logaritmos.

10.1 GENERALIDADES

Para toda base positiva "b" con $b \neq 1$ y para todo número positivo "y" existe un número real "x" tal que:

$$b^x = y \qquad \ldots(1)$$

A tal número "x" se le denomina logaritmo de base "b" del número "y" lo cual se expresa:

$$x = \log_b y \qquad \ldots(2)$$

Existen tantos sistemas logarítmicos como bases se pueden tomar, sin embargo, los más usuales son los logaritmos decimales (base 10) y los logaritmos naturales (base e).

Componentes de un logaritmo: Todo número logarítmico se compone de una parte entera llamada característica y una parte decimal llamada mantisa. La mantisa será siempre positiva, a diferencia de la característica que también podrá ser negativa, lo cual se indica testándola: $\bar{3}$, $\overline{10}$, etc.

Ejemplo 1

Dada una ecuación logarítmica obtener el dato faltante.

a) Si $3 = \log_2 y$; $2^3 = 8$; $y \Rightarrow 8$

b) Si $x = \log_3 81$; $x = ?$ como $3^x = 81 \Rightarrow x = 4$

c) Si $4 = \log_b \frac{1}{16}$; $b = ?$ como $b^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

10.2 LOGARITMOS DECIMALES O DE BASE 10

El sistema logarítmico de base 10 presenta la ventaja de que su característica es fácilmente determinable, y la mantisa que se obtiene en tablas es la misma para todos los números cuya única diferencia es la colocación del punto decimal, tales como 5.7349, 5734.9, 0.00057349, etc.

Notación: Este sistema logarítmico se denota:

$$\log_{10} y = x \text{ asociado a } 10^x = y$$

Aunque también para base 10 se omite la base $\log y = x \Rightarrow 10^x = y$

Obtención de la característica:

Si definimos como posición de referencia (P.R.), a la ubicada entre los dos primeros dígitos significativos que forman un número, por ejemplo:

a) 3|25.27 P|R

b) .009|318 P|R

c) 01|053.9 P|R

d) 9|87 P|R

Entonces la característica del logaritmo en base 10, es igual al número de dígitos existentes entre la P.R. y el punto decimal y será positiva si el número es mayor que 1 y negativa en caso contrario.

Así pues para los ejemplos anteriores las características son:

a) 2 b) $\bar{3}$ c) 3 d) 0

Obtención de la mantisa en las tablas: La mantisa del logaritmo se obtiene en las tablas desechando el punto decimal tomado ya en cuenta en la característica. Por ejemplo: Obtención del logaritmo del número 375.61

Evidentemente la característica es 2, ahora bien la mantisa se obtiene como sigue:

TABLA DE LOGARITMOS

N	0 1 2 3 4	5	6 7 8 9	Partes proporcionales 1 2 3 4 5	6	7 8 9
⋮						
37		5740			7	

$$\begin{array}{r} 5740 \\ +\ \ 7 \\ \hline 5747 \end{array}$$

MANTISA 5747

$\therefore$ log 375.61 = 2.5747

Como se ve, sólo pueden ser consideradas 4 cifras significativas de este número 2 en la columna, 1 en el renglón y la última en las partes proporcionales o interpoladoras. Para los números que excedan a cuatro cifras significativas se considera una aproximación.

Ejemplo 2

Obtener los logaritmos siguientes:

a) log 153.14 = 2.1850 (compruebe en tablas).

b) log 0.7263 = $\bar{1}$.8611

c) log 3.562 = 0.5516

d) log 0.000,010,01 = $\bar{5}$.0004

e) log 1 = 0

El proceso inverso a obtener el logaritmo de un número es encontrar su antilogaritmo. Así, si log 507.4 = 2.7053 entonces antilog 2.7053 = 507.4

Evidentemente, el proceso a seguir para la obtención del antilogaritmo corresponderá con el seguido para la obtención del logaritmo de un número. Sabemos que todo número logarítmico está compuesto de una característica y una mantisa las cuales serán ahora conocidas. La característica nos indicará la posición del punto decimal con respecto a nuestra útil posición de referencia (P.R.), situada entre las dos primeras cifras significativas del número. Para características positivas (P.R.) estará a la izquierda del punto decimal, para negativas a la derecha.

La obtención de las cifras significativas que forman el número será a partir de la mantisa, la que será leída en las tablas de antilogaritmos. Para mayor claridad se obtiene aquí el antilog 2.5152

La mantisa que es .5152 leída en tablas:

TABLA DE ANTILOGARITMOS

M	0 1 2 3 4	5	6 7 8 9	Partes proporcionales 1 2 3 4 5 6 7 8 9
⋮				
.51		3273		2

$$\begin{array}{r} 3273 \\ +\ \ 2 \\ \hline 3275 \end{array}$$ que son las cifras significativas.

Como la característica es 2, el punto decimal estará dos dígitos a la derecha de la P.R.;

3¦27.5
P¦R

$\therefore$ antilog 2.5152 = 327.5

Ejemplo 3

a) antilog $\overline{3}.2731 = 0.001875$ (compruebe en tablas).

b) antilog $0.4352 = 2.724$

c) antilog $4.9368 = 86460$

d) antilog $9.3010 = 2{,}000{,}000{,}000$

10.3 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Las propiedades logarítmicas que se enuncian a continuación ayudan a efectuar operaciones aritméticas combinadas de cierta dificultad, convirtiéndolas en operaciones sencillas y prácticas.

1. Para un producto: "El logaritmo del producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números".

$$\log_b [m.n.p] = \log_b m + \log_b n + \log_b P \ldots (3)$$

2. Para un cociente: "El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual a la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador".

$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n \qquad \ldots(4)$$

3. Para una potencia: "El logaritmo de la enésima potencia de un número "m" positivo es igual a n veces el logaritmo del número".

$$\log_b\left(m^n\right) = n \log_b m \qquad \ldots(5)$$

4. Para una raíz: "El logaritmo de la raíz enésima positiva real de un número, es igual a dividir el logaritmo del número entre el índice "n" de la raíz".

$$\log_b \sqrt[n]{m} = \frac{\log_b m}{N} \qquad \ldots(6)$$

10.4 REGLAS AUXILIARES PARA OPERACIONES CON LOGARITMOS

Como sabemos, la mantisa y la característica de un logaritmo son independientes, lo cual provoca que las operaciones entre números logarítmicos sean diferentes a las que se realizan entre números reales. Probablemente es este el punto donde el estudiante encuentra mayores dificultades si no cuenta con una orientación adecuada. El propósito de este subtema es establecer reglas sencillas que permitan la fácil operación entre logaritmos.

Regla para la suma: Sume independientemente las mantisas y las características, sumando finalmente ambos resultados.

Ejemplo 4

a) $\overline{5}.9507 + 2.3010 = \overline{5} + 2 + .9507 + .3010 = \overline{3} + 1.2517 = \overline{2}.2517$

b) $4.3973 + 1.8792 = 4 + 1 + (.3973 + .8792) = 5 + 1.2765 = 6.2765$

Reglas para la resta:

a) Reste independientemente las mantisas y las características, sumando finalmente ambos resultados.

b) Si la mantisa del minuendo es menor que la del sustraendo complemente tomando una unidad de la característica del minuendo.

Ejemplo 5

a) $2.6799 - 2.3109 = 2 - 2 + (.6799 - .3109) = 0 + 0.3690$

b) $\overline{3}.0792 - 2.6091 = \overline{4} - 2 + (1.0792 - .6091) = \overline{6} + 0.4701 = \overline{6}.4701$

c) $\overline{1}.7868 - \overline{4}.7782 = \overline{1} - (\overline{4}) + (.7868 - .7782) = 1 + 4 + 0.0086 =$
$= 3.0086$

Regla para la multiplicación: Multiplique independientemente la mantisa y las características, sumando finalmente ambos resultados.

Ejemplo 6

a) $2\ (\overline{3}.9566) = 2\ (\overline{3} + 0.9566) = \overline{6} + 1.9132 = \overline{5}.9132$

b) $3\ (1.8574) = 3\ (1 + .8574) = 3 + 2.5722 = 5.5722$

Reglas para la división:

a) Divida independientemente la mantisa y la característica sumando finalmente ambos resultados.

b) Si la característica no es exactamente divisible compleméntela cediendo unidades a la mantisa y restándolas a la característica.

Ejemplo 7

a) $\frac{1}{2}(\bar{3}.9031) = \frac{1}{2}(\bar{4} + 1.9031) = \bar{2} + 0.9515 = \bar{2}.9515$

b) $\frac{1}{3}(7.8576) = \frac{1}{3}(6 + 1.8576) = 2 + 0.6192 = 2.6192$

Una vez comprendidos los métodos de operación de los logaritmos, pasaremos a efectuar dichas operaciones combinadas aplicando las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo 8

Aplicando las propiedades de los logaritmos, efectuar el producto k.

$k = (735.92)(.000937)$ Aplicando ... (3)

$\log k = \log 735.92 + \log .000937 = 2.8668 + \bar{4}.9717 =$

$= 2 + \bar{4} + (.8668 + .9717) = \bar{2} + 1.8385 = \bar{1}.8395$

Tomando antilogaritmos $k = \text{antilog } \bar{1}.8395 = \underline{0.6895}$

Ejemplo 9

Efectuar la división aplicando las propiedades de los logaritmos.

$k = 97690/687.5$ Aplicando ... (4)

$\log k = \log 97690 - \log 687.5 = 4.9898 - 2.8373 = 2.1525$

Tomando antilogaritmos $k = \text{antilog } 2.1525 = \underline{142.1}$

Ejemplo 10

Empleando las propiedades de los logaritmos efectuar la potencia.

$k = (4.835)^{3.4}$ Aplicando ... (5)

$\log k = 3.4 \log 4.835 = 3.4\,(0.6843) = 2.3266$

Tomando antilogaritmos $k = \text{antilog } 2.3266 = \underline{212.1}$

Ejemplo 11

Calcular la raíz indicada por medio de las propiedades de los logaritmos.

$k = \sqrt[7]{.009431}$ Aplicando ... (6)

$\log k = \frac{1}{7}\log .009431 = \frac{1}{7}(\bar{3}.9745) = \frac{1}{7}(\bar{7} + 4.9745) = \bar{1} + 0.71064 =$

$= \bar{1}.71064$

Tomando antilogaritmos $k = \text{antilog } \bar{1}.71064 = \underline{.5136}$

Ejemplo 12

Aplicando las propiedades de los logaritmos efectuar las operaciones indicadas.

$$k = \left[\frac{\sqrt[3]{0.0805}\,(17.39)^3}{(0.00905)^2\,(1108.5)}\right]^4$$

$$\log k = 4\left[\left(\frac{1}{3}\log 0.0805 + 3\log 17.39\right) - \left(2\log 0.00905 + \log 1108.5\right)\right]$$

$$\log k = 4\left[\left(\frac{1}{3}(\bar{2}.9058) + 3\,(1.2402)\right) - \left(2\,(\bar{3}.9566) + 3.0446\right)\right]$$

$$\log k = 4\left[\left(\frac{1}{3}(\bar{3} + 1.9058) + 3.7206\right) - \left(2\,(\bar{3} + .9566) + 3.0446\right)\right]$$

$$\log k = 4\left[\left(\bar{1} + 0.6352 + 3.7206\right) - \left(\bar{6} + 1.9132 + 3.0446\right)\right]$$

$$\log k = 4\left[\left(3.3558\right) - \left(\overline{2}.9578\right)\right] = 4\ (2 - \overline{2}) + 4\ (1.3558 - .9578)$$

$$\log k = 4\ (4) + 4\ (.3980) = 16 + 1.592 = 17.592$$

Tomando antilogaritmos: $k = \text{antilog } 17.592$

$k = 390{,}800{,}000{,}000{,}000{,}000$

10.5 LOGARITMOS NATURALES O DE BASE e

El sistema logarítmico natural es aquél cuya base es el número $e = 2.71828$. Para este sistema adoptamos la notación siguiente:

$$\text{Ln}^{y} = x \quad \text{asociada a} \quad e^{x} = y$$

A diferencia de los logaritmos decimales, tanto la mantisa como la característica de los logaritmos naturales se encuentran en tablas impresas. Dichas tablas contienen los logaritmos naturales de los números comprendidos entre 1 y 10, pudiéndose obtener el Ln de cualquier número, mediante su descomposición en potencias de 10.

Para ilustrar mejor estos conceptos y el manejo de las tablas véase lo siguiente:

$\text{Ln } 862 = \text{Ln } 8.62 + 2 \text{ Ln } 10$ ya que $862 = 8.62 \times 10^{2}$

$\text{Ln } .00862 = \text{Ln } 8.62 - 3 \text{ Ln } 10$ ya que $.00862 = 8.62 \times 10^{-3}$

Ahora en las tablas:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.6		2.1541							

m	Ln 10^{m}
1	2.3026
2	4.6052
3	6.9078
4	9.2103
5	11.5129

$$\therefore \text{Ln } 862 = \text{Ln } 8.62 + 2 \text{ Ln } 10 = 2.1541 + 4.6062 = 6.7593$$

La única regla operacional que agregaremos en este sistema será para el Ln de un número comprendido entre cero y uno.

$$\text{Ln } .0862 = \text{Ln } 8.62 - 2 \text{ Ln } 10 = 2.1541 - 4.6052$$

Esta operación se realiza restando a la mantisa de la potencia de 10, la mantisa del número, y restando las características en el orden acostumbrado.

$$2 - 4 + (.6052 - .1541) = \overline{2}.4511$$

Ejemplo 13

Obtener los logaritmos naturales indicados:

a) $\text{Ln } 1789 = \text{Ln } 1.789 + 3 \text{ Ln } 10 = .5816 + 6.9078$

$\text{Ln } 1789 = \underline{\underline{7.4894}}$

b) $\text{Ln } .0000915 = \text{Ln } 9.15 - 5 \text{ Ln } 10 = 2.2138 - 11.5129 =$

$= 2 - 11 + (.5129 - .2138) = \overline{9}.2991$

$\text{Ln } .0000915 = \underline{\overline{9}.2991}$

c) $\text{Ln } .00237 = \text{Ln } 2.37 - 3 \text{ Ln } 10 = 0.8629 - 6.9078 =$

$= 0 - 6 + (.9078 - .8629) = \overline{6}.0449$

$\text{Ln } .00237 = \underline{\overline{6}.0449}$

Ejercicios propuestos

1. Enunciar los conceptos incluidos en la siguiente expresión:

$$r = \log_v z$$

______ ______ ______

2. Si $r = \log_v z$ elija la expresión correcta:

a) $r = z^v$ b) $z = v^r$ c) $v = r^z$

3. Dadas las siguientes ecuaciones logarítmicas. Obtener el dato faltante.

a) Si $x = \log_6 1296$; $x = ?$

b) Si $1 = \log_4 q$; $q = ?$

c) Si $3 = \log_b \frac{1}{343}$; $b = ?$

4. Obtener los siguientes logaritmos:

a) $\log 2 =$

b) $\log .0002 =$

c) $\log 25376.8$

d) $\log .8716$

5. Determinar los siguientes antilogaritmos:

a) $\text{antilog } \overline{6}.4753 =$

b) $\text{antilog } 8.2105 =$

c) $\text{antilog } 0 =$

d) $\text{antilog } \overline{1}.6927 =$

6. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $\overline{3}.8517 + 2.2931 =$

b) $\overline{4}.1532 - 1.2745 =$

c) $\overline{2}.3927 - \overline{6}.4912 =$

d) $5\ (\overline{4}.8763) =$

e) $\frac{1}{4}\ (\overline{6}.2248) =$

f) $\frac{1}{5}\ (12.2675) =$

7. Obtener los siguientes logaritmos naturales:

a) $L_n\ 4397 =$

b) $L_n\ .000{,}395 =$

c) $L_n\ .000{,}001{,}01 =$

8. Efectuar las operaciones indicadas, aplicando las propiedades de los logaritmos naturales:

a) $k = \dfrac{(0.00749)\ (49.37)^2}{29.16}$

b) $k = \dfrac{\sqrt[3]{27.78}\ \sqrt{48.91}}{\sqrt[3]{.0018}}$

c) $k = \left[\dfrac{(1.001)^3\ (.0339)^2}{\sqrt[3]{99.9}\ \sqrt[4]{.0007}}\right]^4$

CUADRO SINOPTICO

$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A$

Igualdad de conjuntos.	Dos conjuntos A y B son iguales sí y sólo sí, A es el subconjunto de B y B es el subconjunto de A.	
Unión de conjuntos.	La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto de todos los elementos x tales que, x pertenece a A o x pertenece a B.	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$
Intersección de conjuntos.	La intersección de los conjuntos A y B, es el conjunto de todos los elementos x tales que, x pertenece a A y x pertenece a B.	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$
Diferencia.	La diferencia A - B de dos conjuntos A y B, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$
Complemento.	El complemento de un conjunto A, es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.	$A' = \{x \mid x \in U,\ x \notin A\} = U - A$

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Expresará con sus propias palabras los conceptos de:
   a) Elemento.
   b) Conjunto.
   c) Igualdad de conjuntos.
   d) Subconjunto.
   e) Conjunto vacío.
   f) Conjunto universo.
   g) Conjunto complemento.
2. Efectuará operaciones de unión, intersección, disjunción y diferencia de dos o más conjuntos dados.
3. Aplicará las propiedades: Conmutativa, Asociativa y Distributiva, en la resolución de problemas con conjuntos.

11.1 CONCEPTOS BASICOS

El concepto de conjunto es fundamental en todas las ramas de la matemática y las aplicaciones de la teoría de conjuntos son cada vez más frecuentes y diversas. Con el objeto de establecer un lenguaje se integran las siguientes definiciones:

Conjunto: Cuando de un grupo de entes u objetos podemos seleccionar una colección bien definida de elementos que cumplen con una regla común, a esta colección se le denomina conjunto.

Son tres las formas más comunes de expresar un conjunto para ilustrarlas tomemos el conjunto P de los números naturales pares menores que 10.

a) $P = \{2, 4, 6, 8\}$ forma tabular o por extensión.

b) $P = \{x/x \text{ es par}, x < 10\}$ forma constructiva o por comprensión.

(La barra inclinada "/" se lee "tal que").

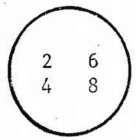
c) 

Diagrama de Venn-Euler

Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas, los elementos con letras minúsculas, números o símbolos.

No importa el orden de colocación de los elementos.

Igualdad de conjuntos: Se dice que dos conjuntos A y B son iguales cuando constan exactamente de los mismos elementos, tal es el caso de:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{9, 5, 1, 3, 7\}$

Si los conjuntos no son iguales se denominan distintos, lo cual se denota:

$$A \neq B$$

Tal es el caso de:

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{a, b. c\}$

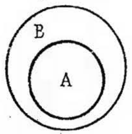
Subconjunto: Si todos los elementos de un conjunto A pertenecen también a otro conjunto B, se dice que:

A es subconjunto de B.

A está contenido en B.

B contiene a A.

Y se denota $A \subset B$



Existen dos posibilidades, para los subconjuntos que son:

a) $A \subset B$ pero $A \neq B$ "A es subconjunto propio de B".

b) $A \subset B$ pero $A = B$ "A es subconjunto impropio de B".

Conjunto vacío: Es el conjunto que carece de elementos y se representa por la letra griega ϕ.

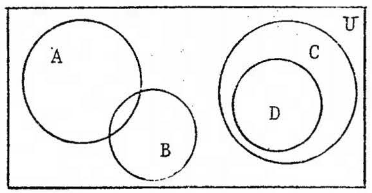
El conjunto $\phi = \{\ \}$ se considera subconjunto de todos los conjuntos.

Para aclarar, los siguientes conjuntos;

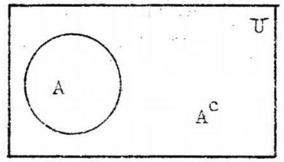
$A = \{\phi\}$ $B = \{0\}$; son no vacíos

ya que contienen un elemento.

Conjunto universal: Si dada una cantidad determinada de conjuntos, existe otro conjunto U en el cual todos estén contenidos, a este conjunto U se le denomina conjunto universal de dichos conjuntos.



Conjunto complemento: Dados un conjunto universal U y un conjunto A contenido en U, se llama conjunto complemento de A, o simplemente complemento de A y se denota por: A' o A^c, al conjunto de elementos de U que no pertenecen al conjunto A.



Ejemplo 1

Escribir en forma tabular, o por extensión.

$A = \{x/x^2 = 4\} \Rightarrow A = \{2, -2\}$

$B = \{z/z$ es una letra de la palabra correcto$\}$

$B = \{c, o, r, e, t\}$

$C = \{x/x$ es entero positivo$\} \Rightarrow C = \{1, 2, 3, \ldots \infty\}$

Ejemplo 2

Escribir en forma constructiva, o por comprensión:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} \Rightarrow A = \{x/x$ es par$\}$

$B = \{3\} \Rightarrow B = \{x/x - 2 = 1\} = \{x/2x = 6\}$

$C = \{1, 2, 3, 4, \ldots,\} \Rightarrow C = \{x/x \in N\}$

NOTA: "N" es el conjunto de los números naturales: Enteros y positivos.

$D = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots\} \Rightarrow D = \{x/x$ es número primo$\}$

Ejemplo 3

Dado $A = \{x, y, z\}$ ¿Cuántos subconjuntos hay en A y cuáles son?

Haciendo una lista resultan:

$\{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \phi$. Así pues hay 8 subconjuntos de A.

Ejemplo 4

Cuáles de estos conjuntos son vacíos.

$A = \{x/x$ es cada persona viviente mayor de 300 años$\}$

$B = \{x/x^2 = 9,\ 2x = 4\}$

$C = \{x/x \neq x\}$

$D = \{x/x + 3 = 3\}$

$A = B = C = \phi$ son vacíos.

D no es vacío pues contiene un elemento: $D = \{0\}$

Ejemplo 5

Contruir el conjunto universal de los conjuntos.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{-9, -7, -5, -3, -1\}$

$C = \{0\}$

$U = \{-9, -7, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

Ejemplo 6

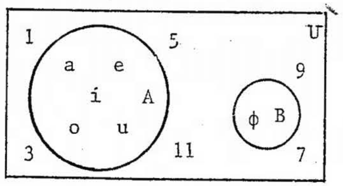
Establezca el conjunto complemento en cada caso.

a) $U = \{x/x$ es una letra del alfabeto$\}$

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$A^c = \{x/x$ es una consonante del alfabeto$\}$

b)

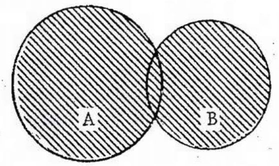


$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \phi\}$

$B^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, a, e, i, o, u\}$

11.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

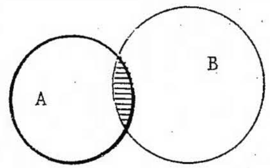
Unión de conjuntos: La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos y se denota por: $A \cup B$.



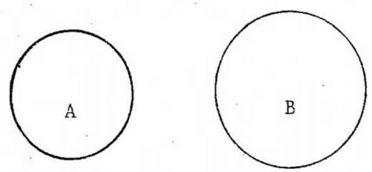
$A \cup B = \{x/x \in A$ o $x \in B\}$

Intersección de conjuntos: La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B y se denota por $A \cap B$.

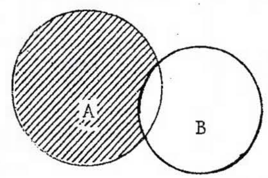
$A \cap B = \{x/x \in A$ y $x \in B\}$



Dos conjuntos A y B son disjuntos si su intersección es nula o sea $A \cap B = \phi$ lo cual significa que no tienen elementos comunes.



Diferencia de conjuntos: La diferencia de dos conjuntos A y B se representa por A - B y se define como el conjunto de elementos que pertenecen a "A" pero no a "B".



$A - B = \{x/x \in A,\ x \in B\}$

Ejemplo 7

Dados los conjuntos:

A = {1, 2, 3, 4, a, b, c, d}

B = {3, 8, c, e}

C = {1, 2, 5, b, p}

establecer:

A U B = {1, 2, 3, 4, 8, a, b, c, d, e}

A ∩ B = {3, c}

A - B = {1, 2, 4, a, b, d}

B - A = {8, e}

A U C = {1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, p}

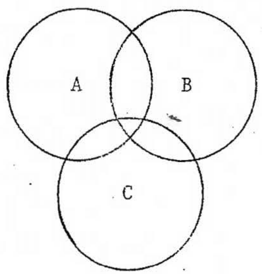
A ∩ C = {1, 2, b}

A - C = {3, 4, a, c, d}

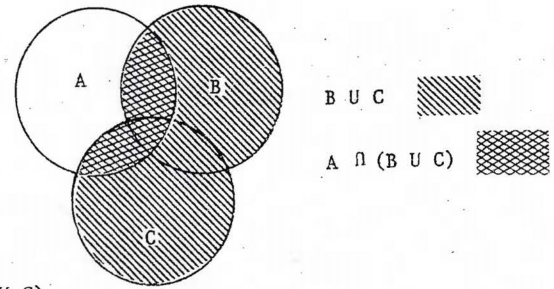
C - A = {5, p}

Ejemplo 8

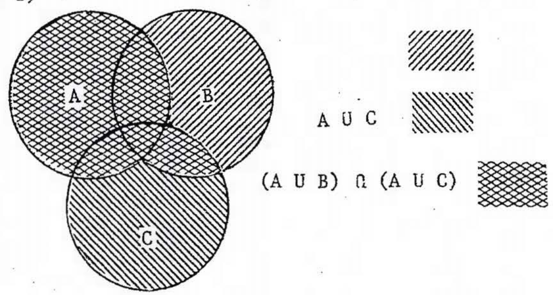
Sombrear en el siguiente diagrama de Venn:



a) A ∩ (B U C)



b) (A U B) ∩ (A U C)



11.3 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS

1. Propiedad Conmutativa.

   A U B = B U A - - - ec 11.1

   A ∩ B = B ∩ A - - - ec 11.2

2. Propiedad Asociativa.

   A U (B U C) = (A U B) U C - - - ec 11.3

   A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C - - - ec 11.4

3. Propiedad Distributiva.

   A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C) - - - ec 11.5

   A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C) - - - ec 11.6

Para ilustrar las propiedades anteriores se dan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 9

Sean los conjuntos:

$A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 3, 6, 9, 10\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, 8\}$

a) Demostrar $A \cup B = B \cup A$:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

$B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

b) Demostrar $A \cap B = B \cap A$:

$A \cap B = \{2, 6\}$

$B \cap A = \{2, 6\}$

c) Demostrar $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$:

$B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

d) Demostrar $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$:

$B \cap C = \{3\}$ $\quad$ $A \cap (B \cap C) = \phi$

$(A \cap B) = \{2, 6\}$ $\quad$ $(A \cap B) \cap C = \phi$

e) Demostrar $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

$B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cap B = \{2, 6\}$ $\quad$ $A \cap C = \{1, 5\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 5, 6\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 5, 6\}$

f) Demostrar $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

$B \cap C = \{3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ejercicios propuestos

1. Cambiar la forma por extensión a comprensión o viceversa.

   a) $A = \{x/x + 1 > 5,\ x \in E\}$

   b) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

   c) $C = \{x/x^3 + 5 = 32\}$

2. Escribir los subconjuntos posibles para el siguiente conjunto.

   $A = \{a, b, c, d\}$

3. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos.

   a) $A = \{x/\sqrt{x} = x^2\}$

   b) $B = \{x/x + 1 = 5,\ x^2 = 4\}$

   c) $C = \{x/x$ es vocal, x es consonante$\}$

4. Si $U = \{x/x$ es letra del abecedario$\}$

Establecer el conjunto complemento.

$A = \{a, e, i, o, u\}$ $\quad A^c =$

$B = \{c, k, q, s, z\}$ $\quad B^c =$

5. Dados los conjuntos:

   $A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, a, c, e, g\}$

   $B = \{0, 5, 9, 11, 13, 15, a, e, i, o, u\}$

   $C = \{1, 7, 9, 12, 14, 16, e, g, h, p\}$ $\quad$ y

$U = A \cup B \cup C$ establecer:

$A \cup B =$

$A \cap B =$

$A - B =$

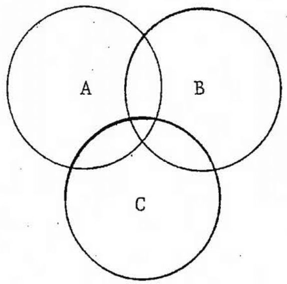
$B - A =$

$A^c \cup (B \cap C) =$

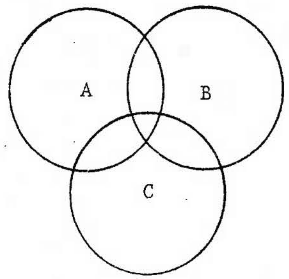
$(A - C) \cup (B - C) =$

$(A \cup B) \cap (A \cup C)^c =$

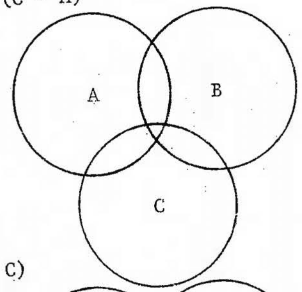
6. Sombrear en el siguiente diagrama de Venn.



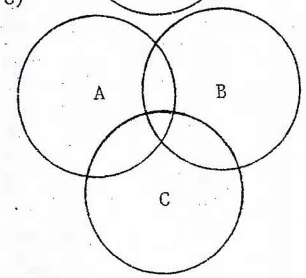
a) $(A - B) \cap (C - B)$



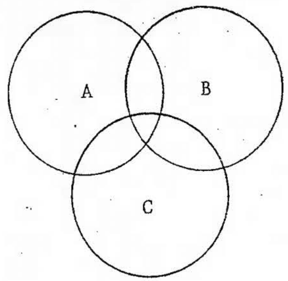
b) $(A \cap B) \cup (C - A)$



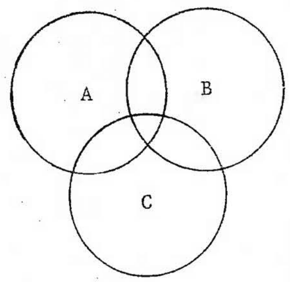
c) $(B \cup C) - (A \cap C)$

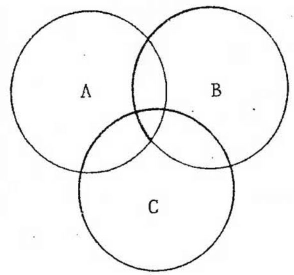


7. Sombrear y comparar ambos miembros de las siguientes igualdades, en el siguiente diagrama de Venn.

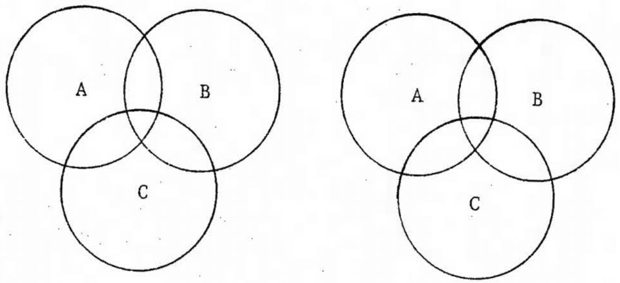


a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

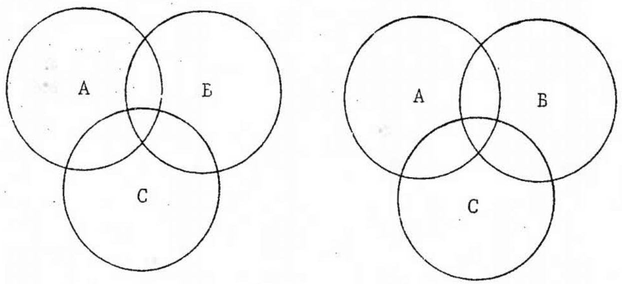




b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



EXAMEN DE AUTOEVALUACION

Con el objeto de que el estudiante pueda verificar por cuenta propia si ha alcanzado el mínimo necesario de los objetivos de aprendizaje correspondientes a la parte de Algebra elemental, se presenta el siguiente examen de autoevaluación.

1. Escribir la expresión algebraica que represente la siguiente proposición.

   La suma de tres números es 33, el segundo es dos unidades mayor que el triple del primero y el tercero es cinco unidades menor que la mitad del primero.

2. Expresar en lenguaje común la siguiente expresión algebraica.

   $$(a + b)^3 + 2(a - b)^2 = 3a - \frac{b}{2} + 7$$

Efectuar las siguientes operaciones y simplificar el resultado.

3. $(4 - x)(4 - 2x)(4 + x)$
4. $(2x^4 - 5x^3 + 11x - 2x^2 - 6) \div (x^2 - 3x + 2)$
5. $(-9 - 2n^2)^2$
6. $(3a^2 - 11b^2)(3a^2 + 11b^2)$
7. $(a^2 - 3b)^3$

Factorizar las siguientes expresiones.

8. $2ax^2 - 18ay^2$
9. $a^2 - 5ab - 36b^2$
10. $3a^3b^3 - 24$
11. $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

Efectuar las siguientes operaciones, simplificando el resultado.

12. $\dfrac{x + 1}{2x - 3} - \dfrac{x - 1}{2x + 3} + \dfrac{2x^2 - 7x}{4x^2 - 9}$

13. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 7x - 30} \cdot \dfrac{30 - 7x - x^2}{24 - 2x - x^2}$

14. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} \div \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 7}$

15. $\dfrac{x + 3 - \dfrac{6}{x + 2}}{x + 6 + \dfrac{7}{x - 2}}$

16. $\left(\dfrac{3x}{4y}\right)^4 \left(\dfrac{2y}{3x^3}\right)^5$

Expresar el resultado con exponentes positivos.

17. $\left(\dfrac{2p^{-2}q^{-3}}{4r^{-1}}\right)^{-2}$

18. $\left(\dfrac{16a^{-4}b^{-3/2}}{9\,a^{-2}b^{1/3}}\right)^{-1/2}$

19. Escribir bajo un solo radical.

$\dfrac{x + y}{2z}\sqrt{\dfrac{12z^3}{x + y}}$

20. Escribir en forma más simple.

$\sqrt[3]{81x^5y^6}$

21. Racionalizar el denominador de la fracción.

$\dfrac{3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}$

22. Resolver la ecuación $2(x - 7) = -3(2x + 1) - 3$, y comprobar el resultado.

23. Resolver la ecuación $6x^2 + 11x = -3$, y comprobar las soluciones.

24. Resolver el sistema de ecuaciones:

$5x + 7y = -2$
$4x + 6y + 3 = 0$

y comprobar las soluciones.

25. Demostrar que es cierta la igualdad entre determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

26. Resolver la ecuación:

$1 - \dfrac{7x}{2} = 3x - \dfrac{1}{2}$

27. Resolver la desigualdad $\left|\dfrac{3}{2}x - 2\right| \le 1$ y expresar la solución en la forma $a \le x \le b$.

28. Empleando logaritmos calcular:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{800.4}}{1439\sqrt{1.934}}$

b) $\sqrt{\dfrac{(57.81)\ (6.183)}{19.78}}$

29. Dados los conjuntos:
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, $C = \{3, 6, 7, 8, 9\}$ obtener:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $A \cap B$

d) $B \cap C$

e) $A \cap (B \cup C)$

f) $(A \cup B) \cup C$

30. Considerando los conjuntos A, B, C del problema anterior, demostrar que:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE AUTOEVALUACION

1. $x + 3x + 2 + \frac{x}{2} - 5 = 33$

2. El cubo de la suma de dos números (a y b), más el doble del cuadrado de su diferencia, es igual al triple del primero, menos la mitad del segundo más siete.

3. $64 - 32x - 4x^2 + 2x^3$

4. $2x^2 + x - 3$

5. $81 + 36n^2 + 4n^4$

6. $9a^4 - 121b^4$

7. $a^6 - 9a^4b + 27a^2b^2 - 27b^3$

8. $2a\,(x + 3y)\,(x - 3y)$

9. $(a + 4b)\,(a - 9b)$

10. $3\,(ab - 2)\,(a^2b^2 + 2ab + 4)$

11. $(2a + 3)^3$

12. $\frac{x}{2x + 3}$

13. $\frac{x + 3}{x + 6}$

14. $\frac{(x + 2)\,(x + 7)}{(x - 2)\,(x - 3)}$

15. $\frac{x\,(x - 2)}{(x - 1)\,(x + 2)}$

16. $\frac{y}{24x^{11}}$

17. $\frac{4p^4q^6}{r^2}$

18. $\frac{3ab^{11/12}}{4}$

19. $\sqrt{3z}\ (x + y)$

20. $3xy^2\ \sqrt[3]{3x^2}$

21. $\dfrac{6x + 13\sqrt{xy} + 6y}{4x - 9y}$

22. $x_1 = 1$

23. $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

24. $x = \frac{9}{2}$; $y = -\frac{7}{2}$

25. $158 \equiv 158$

26. $x = \frac{3}{13}$

27. $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

28. a) 0.004640 ; b) 4.250

29. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

c) $A \cap B = \{1, 3\}$

d) $B \cap C = \{3, 6\}$

e) $A \cap (B \cup C) = \{1, 3\}$

f) $(A \cap B) \cup C = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$

30. a) $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} = A \cup (B \cup C)$

b) $(A \cap B) \cap C = \{3\} = A \cap (B \cap C)$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

MODULO 1 TRADUCCION DEL LENGUAJE COMUN AL LENGUAJE ALGEBRAICO Y VICEVERSA

1. $x - 1 + \frac{1}{2}(x + 1) + 3x^2 = 8$

2. $R = kbh^2$; (k es la constante de proporcionalidad)

3. $C = \frac{9}{5}(F - 32)$

4. $(a + b)\ a = a^2 + ab$

5. El cubo de la diferencia de un número menos otro, es igual al cubo del primero, menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

6. El cuadrado de un número, más la mitad del triple de la diferencia del número menos cinco, es igual al cuádruplo del número, más la unidad.

7. El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del producto de [illegible] por el cubo del radio.

MODULO 2 REDUCCION DE TERMINOS SEMEJANTES

1. $-2a^2 + ab + 4b^2$

2. $4x^2 + 5x - 8$

3. $a^3 + 3a^2x - 2ax^2 - 5x^3$

4. $x^2y - (5 + \sqrt{3})\ xy^2 + 3\sqrt{2}\ y$

Operaciones con polinomios

Adición

5. $4a^2 + 6a - 3$

6. $11x^2 + 4xy + 13y^2 + 5$

7. $2ax^3 + 3x^3 + 5a^2x^2 + 7a^3x + 5a^3 + 8$

Sustracción

8. $2x^3 - 6x^2 + 5x - 2$

9. $3a + 6by - 5cy^2 - dy^3$

10. a) $A + B - C = 2x^3 + 2x^2 + 7x - 4$

b) $A - B - C = - 2x^3 + 4x^2 - x + 10$

c) $B - A - C = - 2x^2 + 13x - 6$

Multiplicación

11. $20a^3b^3$

12. $- 14ax^3y^4$

13. $48a^5x^4$

14. $- 56a^3b^7yz^6$

15. $x^3y^2 - 2xy^3 + 4xy^2$

16. $60a^3bx^2y - 36a^2b^3xy^2 - 48a^3b^2y^3$

17. $3x^3 - bx^2 - 20b^2x + 14b^3$

18. $2x^3 - 9x^2y + 11xy^2 - 3y^3 + 2x^2 - 6xy + 2y^2$

19. $a^5 - b^5$

20. $x^4 - x^3y - 4x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4$

División

21. $2ab^2$

22. $6y^3z$

23. $- 3a^2x^2y$

24. $2ax - 3by$

25. $- 2ab^3x^2 + 4xy$

26. $3xy - 5axy^2z + 7x^2$

27. $x^2 - 3x - 4$

28. Cociente $x - 4$, residuo $9x - 11$

29. $3y^2 + xy - x^2$

30. Cociente $x + y$, residuo $2y^4$

División sintética

31. Cociente $x^2 + 2x + 3$, residuo $R = - 8$

32. Cociente $x^5 + x^4 + x + 1$, residuo $R = - 1$, No.

33. Cociente $4x^3 - 2x^2 - 2x + 4$, residuo $R = 5$

34. Sí

MODULO 3 PRODUCTOS NOTABLES

1. $9x^2 - 16y^2$

2. $25x^2 + 20ax + 4a^2$

3. $a^4 - 2a^3b + a^2b^2$

4. $16x^2 - 4x - 42$

5. $2x^4 - 9x^2 + 4$

6. $27y^3 - 54y^2z^2 + 36yz^4 - 8z^6$

7. $27m^3 + 108m^2xy + 144mx^2y^2 + 64x^3y^3$

8. $v^3 + a^3$

9. $8y^3 - 27$

10. $6x^2 + 7xy - 20y^2$

11. $x^8 - 1$

12. $a^2 + 2ac + c^2 - b^2$

13. $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 3$

14. $3axy + abx + 21y + 7b$

Factorización

15. $3ax (x^2 - 2a^2y + 3ab)$

16. $8 (a + 2b) (a - 2b)$

17. $(4x - 2y + 3)(4x + 2y - 3)$

18. $(3a + 2b)^2$

19. $(4x + 3c)(x + 3y)$

20. $(m + 5)(m - 3)$

21. $(9x^2 + 4y^2)(3x + 2y)(3x - 2y)$

22. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

23. $(5x + 1)(2x - 3)$

24. $(x + 1)(x - 2)(x + 5)$

25. $(z + 1)^3$

26. $(2xy + z + 1)(2xy - z - 1)$

27. $4(p + q)(x + 4)(x - 4)$

28. $(a + 3b)(a - 7b)$

29. $(r + 2)^2 (r - 2)^2$

30. $(b - 2)^3$

31. $(3x - a)(y + 3a)$

32. $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$

33. $z(3z - 2)(4z - 1)$

34. $(x + 2)(x - 3)^2$

35. a) 400 b) 1800

MODULO 4 FRACCIONES

1. M.C.M. $= 36x^3y^2$

2. M.C.M. $= 4(x + 1)(x - 1)$

3. M.C.M. $= 2(x + 2)(x - 1)(3x + 1)$

4. M.C.M. $= x(x - 6)(x + 6)(x^2 + 1)(x - 3)(x + 3)$

5. M.C.M. $= m(m - 1)(2m + 3)(m + n)$

6. $\dfrac{a}{a - b}$

7. $\dfrac{x - y}{x^2 - xy + y^2}$

8. $\dfrac{x}{1 - x}$

9. $x + 4 - \dfrac{3x + 3}{x^2 + 1}$

10. $\dfrac{19a}{50}$

11. $\dfrac{y^2 - 3y + 15}{y(y - 5)}$

12. $\dfrac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$

13. $\dfrac{m^2 - 16m - 8}{(m + 2)(m - 2)^2}$

14. $\dfrac{3m^2 - 4m + 2}{m(m - 1)}$

15. $\dfrac{-6y^2 + 19y - 12}{3y - 5}$

16. $\dfrac{3x}{x^2 - 4}$

17. $\dfrac{3x^2 - 6x - 18}{(2x - 1)(x + 1)(2x + 3)(x - 2)}$

18. $\dfrac{3ax}{2by}$

19. $\dfrac{x}{y - 1}$

20. $x - a$

21. $\dfrac{x + y}{7}$

22. $\dfrac{bx}{6}$

23. $\dfrac{2(2ab - a^2 - b^2)}{4xy - x^2 - 4y^2}$

24. $\dfrac{(x + 2)(x + 7)}{(x - 2)(x - 3)}$

25. $a - x$

26. $\dfrac{1}{21}$

27. $\dfrac{1 - x}{1 + x}$

28. $\dfrac{x + 2}{x + 4}$

29. $\dfrac{(3x - 10)(x + 2)}{(2x + 3)(x - 2)}$

30. $\dfrac{1 + x}{2(2 - x)}$

31. $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 1}$

32. $\dfrac{3}{(2x - 1)^2} - \dfrac{4}{2x - 1}$

33. $\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{3}{x^2 + 5}$

34. $-\dfrac{3}{2x^2 + 2x + 1} - \dfrac{5}{x - 2}$

35. $\dfrac{3}{x^2 + 2} + \dfrac{4x - 11}{(x^2 + 2)^2}$

36. $\dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1} + \dfrac{x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

MODULO 5 EXPONENTES

1. $8x^4y^4z^4$

2. $49x^{10}y^{12}z^{16}$

3. $9x^4y^6 - 42x^5y^5 + 49x^6y^4$

4. $2ax - 3by - 2ab^2$

5. $\dfrac{y^6}{2x^2z^2}$

6. $x\sqrt{y}$

7. $x\sqrt{x}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt[5]{z}$

8. $3\,\sqrt[7]{x^2}\,\sqrt[5]{y^4}\,\sqrt[7]{z^2}$

9. $x^{7/3}$

10. $3x^{7/3}y^{6/5}$

11. $5ax^{2/5}y^{3/5}z^{9/5}$

12. $\dfrac{x^2}{2}$

13. $\dfrac{a^2b^5c^8}{xy^2z^3}$

14. $\dfrac{y}{3a^{7/2}x^4}$

15. $\frac{z^{1/2}}{x^{8/3}y^{5/4}}$

16. $\sqrt[5]{x^3}\ \sqrt[3]{y^2}$

17. $\frac{1}{x\ \sqrt[3]{x}}$

18. $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

19. $\frac{2}{x^{3/2}y^2}$

20. $a^{2/3}x^{5/2}$

21. $\frac{3y^2}{x^{2/3}}$

22. (c) a^{m-n} (g) 1

( ) $a^{\frac{m}{n}}$ (j) $\frac{a^3}{b^3}$

(e) $y^{5/4}$ (i) 3

(f) x^{-5} ( ) 0

(j) a^3b^{-3} (d) $\sqrt{x^3}$

(b) a^{m+n} (a) a^{mn}

( ) $\sqrt[3]{x^2}$ ( ) $\frac{1}{x^{-5}}$

NOTA: El inciso h no tiene respuesta en la columna y la j se repite.

MODULO 6 RADICALES

1. $5x^2y\ \sqrt{y}$
2. $3z^2\ \sqrt{2xz}$
3. $6ab^2\ \sqrt[3]{2a}$
4. $20ax^2\ \sqrt[3]{2x^2}$
5. $\sqrt{75x^4y^2}$
6. $\sqrt{27a^3x^7}$
7. $\sqrt{2x^2 + 2x}$
8. $\sqrt[3]{8ax^3y^7}$
9. $\sqrt[3]{14a^7b^7}$
10. $\frac{3\sqrt{5}}{20}$
11. $\frac{2\sqrt{3x}}{5x}$
12. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}$
13. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{2b})^2}{a-2b}$
14. $\frac{19-7\sqrt{10}}{3}$
15. $\frac{2\sqrt{3}+8\sqrt{5}-5\sqrt{15}-1}{22}$

MODULO 7 ECUACIONES

1. $x = \frac{22}{3}$
2. $x = -\frac{1}{4}$
3. $x = -1$
4. $x = 3$
5. $x = 15$
6. $x = -\frac{1}{2}$
7. $x = -16$
8. $x = -\frac{3m}{2}$
9. $x = \frac{a}{2}$
10. A = 21 B = 35
11. 1a. \$ 130.00 ; 2a. \$ 110.00 ; 3a. \$ 70.00
12. Pluma 14 dlls Lapicero 4 dlls
13. 200 y 60
14. \$ 50.00
15. $x_1 = 2,\ x_2 = -3\frac{3}{4}$
16. $x_1 = 5,\ x_2 = -3\frac{3}{5}$
17. $x_1 = +\sqrt{11},\ x_2 = -\sqrt{11}$
18. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$
19. A = 14, B = 11
20. $x = -1,\ y = 2$
21. $x = \frac{1}{4},\ y = -\frac{1}{5}$
22. $x = -2,\ y = 2$
23. 96 y 84
24. - 59
25. 30
26. - 47
27. - 367
28. 14
29. 0
30. 847
31. (c) Identidad

(e) Transposición de términos.

(g) Ecuación incompleta de 2o. grado.

(j) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(l) Resolver un sistema de ecuaciones.

(a) Igualdad.

(d) Raíces o soluciones.

(h) Las raíces de una ecuación de 2o. grado.

(k) Resolver un determinante de 3er. orden.

(b) Ecuación.

(f) Ecuación de 2o. grado.

(i) La reunión de dos o más ecuaciones con 2 o más incógnitas.

MODULO 8 DESIGUALDADES E INECUACIONES DE UNA VARIABLE

1. $x < 6$
2. $x < -6$
3. $x < 8$
4. $x > 9$
5. $1 < x < 3$
6. $-2 < x < 3$

MODULO 9 VALOR ABSOLUTO

1. $x_1 = 7,\ x_2 = 1$
2. $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -7$
3. $x_1 = 1$
4. $x_1 = -3$
5. $-5 \leq x \leq 5$
6. $-9 < x < 9$
7. $1 \leq x \leq 3$
8. $-1 < x < 4$
9. $x < -4$ ó $x > 4$
10. $x \leq -4$ ó $x \geq 6$
11. $x < \frac{1}{3}$ ó $x > 3$

MODULO 10 LOGARITMOS

1. r: Número real que corresponde al logaritmo de "z" en base "v"
   v: Base del logaritmo con $v \neq 1$ y $v > 0$
   z: Número real positivo.
2. b) Es la expresión correcta.
3. a) $x = 4$
   b) $q = 4$

   c) $b = .1428$
4. a) 0.3010
   b) $\overline{4}.3010$
   c) 4.4034
   d) $\overline{1}.9403$
5. a) 0.000002987
   b) 162400000
   c) 1
   d) 0.4928
6. a) 0.1448
   b) $\overline{6}.8787$
   c) 3.9015
   d) $\overline{16}.3815$
   e) $\overline{2}.5562$
   f) 2.4535
7. a) 8.3888
   b) $\overline{7}.8366$
   c) $\overline{13}.8056$
8. a) 0.6259
   b) 174.12
   c) 5.665×10^{-12}

MODULO 11 TEORIA DE CONJUNTOS

1. a) $A = \{7, 8, 9, 10 \ldots\}$
   b) $B = \{x / \sqrt{x} \in N\}$
   c) $C = \{3\}$

2. $\{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{\phi\}$

3. a) A no es vacío $A = \{0, 1\}$

   b) B es vacío $B = \phi$

   c) C es vacío $C = \phi$

4. $A^c = \{x/x$ es consonante del abecedario$\}$

   $B^c = \{a, b, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, r, t, u, v, w, x, y\}$

5. $A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, a, c, e, g, i, o, u\}$

   $A \cap B = \{0, 5, 9, a, e\}$

   $A - B = \{1, 3, 7, c, g\}$

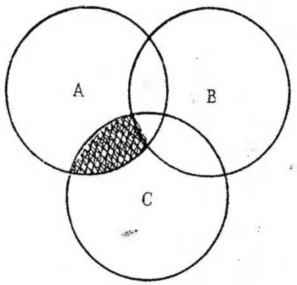
   $B - A = \{11, 13, 15, i, o, u\}$

   $A^c \cup (B \cap C) = \{9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, e, h, i, o, p, u\}$

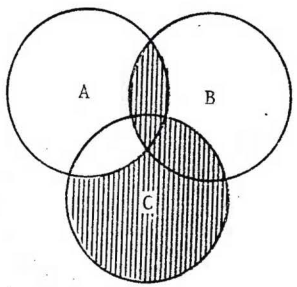
   $(A - C) \cup (B - C) = \{0, 3, 5, 11, 13, 15, a, c, i, o, u\}$

   $(A \cup B) \cap (A \cup C)^c = \{11, 13, 15, i, o, u\}$

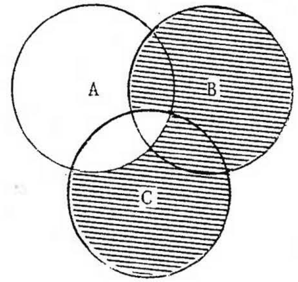
6. a) $(A - B) \cap (C - B)$



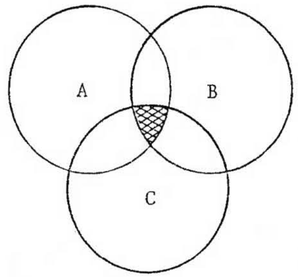
b) $(A \cap B) \cup (C - A)$

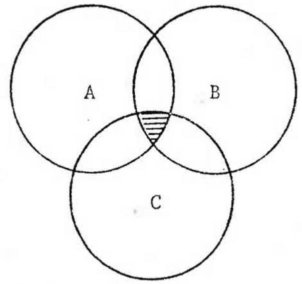


c) $(B \cup C) - (A \cap C)$

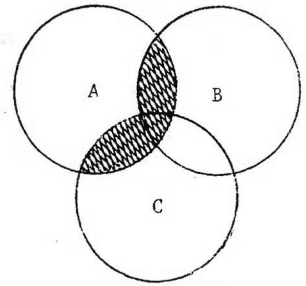


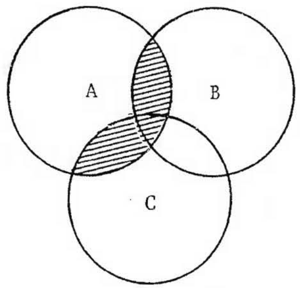
7. a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$



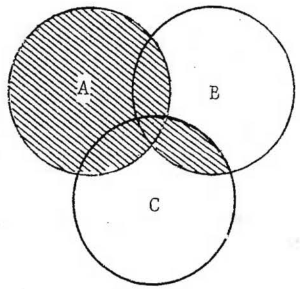


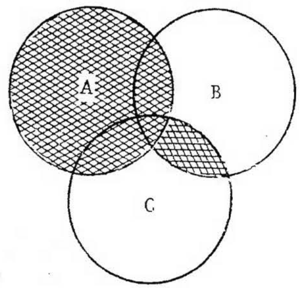
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$





c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$





BIBLIOGRAFIA

Título: ALGEBRA ELEMENTAL.

Autor: Aurelio Baldor.

Editorial: EDIME Organización Gráfica, S. A.

Título: ELEMENTOS DE ALGEBRA.

Autor: Jorge Wentworth y David E. Smith.

Editorial: Ginn y Compañía.

Título: ALGEBRA ELEMENTAL.

Autor: Gordon Fuller.

Editorial: CECSA.

Título: COLLEGE ALGEBRA.

Autor: Murray R. Spiegel.

Editorial: Schaum Publishing Co.

Título: ALGEBRA.

Autor: Charles Lehmann.

Editorial: Limusa Wiley.