



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAestrÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – INSTRUMENTACIÓN

APLICACIÓN DEL RADAR DE PENETRACIÓN EN LA ZONA
ARQUEOLÓGICA DE TEOTIHUACAN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
M. EN I. FLOR LÓPEZ RODRÍGUEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. VÍCTOR MANUEL VELASCO HERRERA, INSTITUTO DE GEOFÍSICA

MÉXICO, D. F. ABRIL 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Boris Escalante Ramírez.
Secretario: Dr. Jorge Lira Chávez.
Vocal: Dr. Víctor Manuel Velasco Herrera.
1^{er.} Suplente: Dr. Miguel Moctezuma Flores.
2^{do.} Suplente: Dr. Ernst Mikhailovich Kussul.

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México.

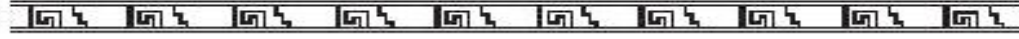
TUTOR DE TESIS:

Dr. Víctor Manuel Velasco Herrera



FIRMA

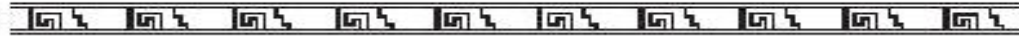
(Segunda hoja)



Agradecimientos

*La participación de Flor López Rodríguez fue apoyada por una beca de CEP-UNAM.
Proyectos DGAPA-PAPIIT- IN106214 y CONACyT-180148.*





Agradecimientos

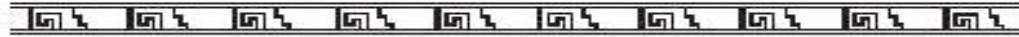
En primer lugar, quiero agradecer el apoyo incondicional de mi tutor, el Dr. Víctor Manuel Velasco Herrera. Muchas gracias por darme esta segunda oportunidad y por invitarme a trabajar en estos temas de investigación tan apasionantes como son la historia y el procesamiento de señales.

También quiero agradecer a los sinodales y a la Dra. Graciela Velasco Herrera por sus comentarios y recomendaciones para mejorar la redacción de esta tesis. Así como a todos mis amigos y compañeros que me ayudaron durante el trabajo preliminar, en especial mis amigas Karen Hines y Mariana Téllez, quienes fueron siempre las primeras en ofrecerse como voluntarias; y mis compañeros de doctorado, en especial a Oscar Sosa y Carmen Leal.

Por último, quiero dedicar este trabajo a mi increíble familia que es mi mayor orgullo y sin ellos no sería lo que soy hoy. Con mucho cariño para mis papás Pepis y Rubén (y Pipo), mis hermanos Ana y Daniel, y sobre todo para mis sobrinas Daphné, Amélie y Andrea. Quienes son mi fuente de inspiración y fuerza para ser mejor cada día.

Flor López Rodríguez

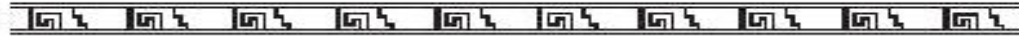




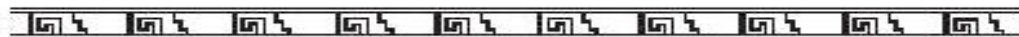
ÍNDICE

Agradecimientos	i
Resumen	vii
Abstract	viii
Introducción	1
Capítulo 1. Antecedentes	4
1.1 Métodos geofísicos para el mapeo en arqueología.....	4
1.1.1 Radar de penetración terrestre (GPR).....	5
1.1.2 Teoría de GPR.....	7
1.1.3 Procedimientos de adquisición.....	9
1.1.4 Mediciones de propagación y retrodispersión de radar.....	10
1.1.5 Procesamiento de datos después de la adquisición.....	11
1.1.6 Aplicación de GPR en arqueología.....	15
1.1.7 Interpretación de datos de GPR.....	16
1.2 Análisis wavelet.....	18
1.3 Transformada de wavelet.....	21
1.3.1 Ejemplos gráficos de la transformada de wavelet continua (CWT).....	24
1.3.2 Efecto de la fase.....	25
1.3.3 Efecto de la frecuencia.....	26
1.3.4 Efecto de la amplitud.....	27
1.3.5 Efecto de la resolución.....	29
1.4 Trabajos de análisis en GPR.....	30
1.4.1 Trabajos de GPR que aplican el análisis wavelet.....	30
1.4.2 Trabajos de GPR que utilizan otros métodos de análisis.....	33
1.5 Trabajos sobre el algoritmo de wavelet multicruzado.....	34
Capítulo 2. Análisis de datos	37
2.1 Mediciones de GPR.....	37
2.2 Transformada continua de wavelet (CWT).....	42
2.3 Reconstrucción por banda de una serie de tiempo.....	43
2.4 Wavelet cruzado.....	44
2.5 Wavelet de coherencia.....	44
2.6 Wavelet global.....	45
2.7 Algoritmos de la función multicruzada.....	45
2.7.1 Función multicruzada de Fourier (FMC).....	45
2.7.2 Wavelet multicruzado (MCW).....	50
Capítulo 3. Resultados del análisis de datos	54
3.1 Medición 'Tun03'.....	54
3.1.1 Espectros para una traza dentro y otra traza fuera del intervalo del túnel.....	54
3.1.2 Espectros para trazas dentro y fuera del intervalo del túnel.....	58
3.1.3 Espectros para trazas fuera del intervalo del túnel.....	60
3.1.4 Espectros para trazas dentro del intervalo del túnel.....	62
3.2 Medición 'Tun06'.....	64
3.2.1 Espectros para una traza dentro y otra traza fuera del intervalo de la cámara.....	64





3.2.2	<i>Espectros para trazas dentro y fuera del intervalo de la cámara</i>	69
3.2.3	<i>Espectros para trazas fuera del intervalo de la cámara</i>	70
3.2.4	<i>Espectros para trazas dentro del intervalo de la cámara</i>	72
Discusión y conclusiones		76
Apéndice		79
Algoritmo y ejemplos de la función multicruzada		79
A.1	Función multicruzada sin retardo	79
A.2	Función multicruzada con retardo	80
	Ejemplos usando la definición de función multicruzada sin retardo	80
	Conclusiones	85
Referencias		86





LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1. Valores de los periodos (ns) obtenidos de los estratos analizados con los algoritmos MCW y FMC filtrado	74
Tabla 3.2. Periodos (ns) y profundidad (m) para el intervalo dentro de túnel/cámara, usando CWT	74
Tabla 3.3. Periodos (ns) y profundidad (m) para el intervalo dentro y fuera de túnel/cámara, usando MCW y FMC.....	75
Tabla 3.4. Periodos (ns) y profundidad (m) para el intervalo dentro de túnel/cámara, usando MCW y FMC....	75

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1. Elementos principales de un sistema de GPR estándar.	7
Fig. 1.2. Propagación de onda electromagnética.	8
Fig. 1.3. Intervalos de frecuencia de dispositivos electrónicos y electromagnéticos.	9
Fig. 1.4. Eliminación de bandas.....	12
Fig. 1.5. Método de migración.	14
Fig. 1.6. Senoidales con fases diferentes ($\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi/4, \phi_3 = \pi/2, \phi_4 = \pi$ rad).	25
Fig. 1.7. Senoidales con frecuencias diferentes ($f_1 = 2, f_2 = 2, f_3 = 4, f_4 = 8$ Hz).	26
Fig. 1.8. Senoidales con amplitudes diferentes ($A_1 = 1, A_2 = 1/2, A_3 = 1/3, A_4 = 1/4$).	27
Fig. 1.9. Senoidales con amplitudes ($A_1 = 1, A_2 = 1/2, A_3 = 1/3, A_4 = 1/4$) y frecuencias diferentes ($f_1 = 2, f_2 = 2, f_3 = 4, f_4 = 8$ Hz).	28
Fig. 1.10. Senoidales con resoluciones diferentes ($DT = 1/NWT$).	29
Fig. 2.1. Vista superior del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada.	38
Fig. 2.2. Corte transversal del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada	38
Fig. 2.3. Interior del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada.	39
Fig. 2.4. Interior de una de las cámaras al final del túnel.	39
Fig. 2.5. Trazas de la medición 'Tun03'. (A) Ubicación. (B) Radargrama.	40
Fig. 2.6. Trazas de la medición 'Tun06'. (A) Ubicación. (B) Radargrama.	41
Fig. 2.7. Algoritmo FMC.	49
Fig. 2.8. Algoritmo MCW.	53
Fig. 3.1. Espectro wavelet de la traza 19 (dentro del túnel) de la medición 'Tun03'.	55
Fig. 3.2. Espectro wavelet filtrado (banda 2-5 ns) de la traza 19 ('Tun03').	55
Fig. 3.3. Espectro wavelet de la traza 40 (fuera del túnel) de la medición 'Tun03'.	56
Fig. 3.4. Espectro wavelet filtrado (banda 6-10 ns) de la traza 40 ('Tun03').	56
Fig. 3.5. XWT y WTC entre las trazas 19 y 40 de la medición 'Tun03'.	57
Fig. 3.6. XWT y WTC entre las trazas 40 y 41 de la medición 'Tun03'.	58
Fig. 3.7. Espectro MCW entre las trazas 19-21 (dentro del túnel) y las trazas 4-5 (fuera del túnel) de la medición 'Tun03'.	59
Fig. 3.8. Espectro FMC entre las trazas 19-21 (dentro del túnel) y las trazas 4-5 (fuera del túnel) de la medición 'Tun03'.	59
Fig. 3.9. Espectro wavelet de la función multicruzada de las trazas 1-5 (fuera del túnel) de la medición 'Tun03'.	61
Fig. 3.10. Espectro wavelet de la función cruzada de las trazas 19-23 (dentro del túnel) de la medición 'Tun03'.	63
Fig. 3.11. Espectro wavelet de la traza 14 (dentro de la cámara) de la medición 'Tun06'.	64
Fig. 3.12. Espectro wavelet filtrado (banda 2-5 ns) de la traza 14 ('Tun06').	64
Fig. 3.13. Espectro wavelet de la traza 22 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.	65



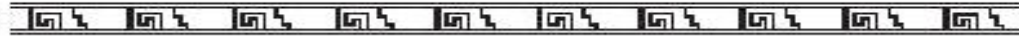


Fig. 3.14.	Espectro wavelet filtrado (banda 6-10 ns) de la traza 22 ('Tun06').	65
Fig. 3.15.	XWT y WTC entre las trazas 14 y 22 de la medición 'Tun06'.	67
Fig. 3.16.	XWT y WTC entre las trazas 22 y 23 de la medición 'Tun06'.	68
Fig. 3.17.	Espectro MCW entre las trazas 14-15 (dentro de la cámara) y las trazas 20-22 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.	69
Fig. 3.18.	Espectro FMC entre las trazas 14-15 (dentro de la cámara) y las trazas 20-22 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.	69
Fig. 3.19.	Espectro wavelet de la función cruzada de las trazas 20-24 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.	71
Fig. 3.20.	Espectro wavelet de la función cruzada de las trazas 14 y 15 de la medición 'Tun06' (dentro de la cámara).	73
Fig. A.1.	Función cruzada sin retardo R_{xyz} de S1, S2 y S3.	79
Fig. A.2.	Función cruzada con retardo R_{xyz2} de S1, S2 y S3.	80
Fig. A.3.	Función cruzada R_{xyz} de X, Y y Z, usando FMC.	81
Fig. A.4.	Función cruzada de X, Y y Z, usando MCW.	81
Fig. A.5.	Función cruzada R_{xyz} de X, Y y Z con ruido, usando FMC.	82
Fig. A.6.	Función cruzada de X, Y y Z con ruido, usando MCW.	82
Fig. A.7.	Función cruzada R_{xyz} de X, Y y Z, usando FMC.	83
Fig. A.8.	Función cruzada de X, Y y Z, usando MCW.	83
Fig. A.9.	Función cruzada R_{xyz} de X, Y y Z con ruido, usando FMC.	84
Fig. A.10.	Función cruzada de X, Y y Z con ruido, usando MCW.	84





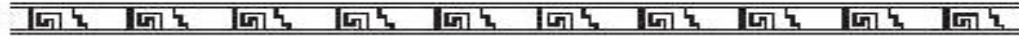
Resumen

Este trabajo doctoral tiene como objetivo desarrollar una metodología instrumental para equipos electromagnéticos, así como los algoritmos para el procesamiento de datos de sistemas multicanales o señales múltiples como es el caso del radar de penetración terrestre (GPR). La meta final de esta tesis doctoral fue obtener un análisis de wavelet multicruzado (MCW) y de multicruzado de Fourier (FMC) para ser aplicados en las trazas crudas de GPR. Particularmente se realizó un estudio en el túnel localizado debajo del Templo de la Serpiente Emplumada (La Ciudadela, Teotihuacan, México) con el propósito de estimar su profundidad, longitud y sus características. Esta información fue importante para la planificación de la excavación arqueológica del túnel, el cual se cree que representa el inframundo, una región importante de la mitología mesoamericana, hogar de las fuerzas telúricas que emanan de deidades, en donde la vida se crea y recrea constantemente. Los resultados obtenidos por la metodología instrumental y el procesamiento de los datos mostraron que el túnel tiene 12-14 metros de profundidad y 100-120 metros de largo con tres cámaras al final. Estos resultados fueron confirmados por las excavaciones en 2014. Arqueólogos creen que debido a la importancia y sacralidad del túnel, una de las cámaras podría ser la tumba de un gobernante de la ciudad antigua.

La UNAM desde un inicio ha participado en este proyecto arqueológico y que a nivel mundial es considerado como uno de los descubrimientos más importantes de la era moderna utilizando una técnica ingenieril, una metodología instrumental y un procesamiento de datos múltiples que no hay análogos en el mundo. Los algoritmos de MCW y FMC determinaron periodos de los estratos subterráneos del túnel. Trazas de GPR dentro y fuera del túnel/cámara, fuera del túnel/cámara y dentro del túnel/cámara analizadas con los algoritmos de MCW y FMC filtrado determinaron los periodos del relleno del túnel y de la cámara, arcilla y matriz (compuesto de tepetate y arcilla). El periodo del relleno del túnel obtenido por análisis de MCW (14.37 ns) refleja el compuesto mixto de tepetate y arcilla en este estrato, ya que su valor es cercano al periodo de la matriz (15.22 ns); periodos del relleno de la cámara (11.40 ± 0.40 ns) y la matriz (11.40 ± 0.73 ns) fueron casi idénticos. El análisis de FMC del túnel obtuvo un periodo (5.08 ± 1.08 ns) cercano al de la cámara (4.27 ± 0.85 ns), sugiriendo que el túnel y la cámara están rellenos con materiales parecidos. El uso de ambos algoritmos permite un análisis más detallado, ya que las similitudes entre los periodos del relleno del túnel y de la cámara no podrían haberse determinado solamente con el algoritmo de MCW.

Palabras clave: Teotihuacan, túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada, radar de penetración terrestre, análisis de wavelet multicruzado.





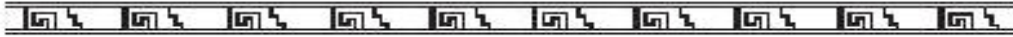
Abstract

This doctoral work aims to develop an instrumental methodology for electromagnetic equipment and algorithms for multichannel systems data processing or multiple signals such as ground penetrating radar (GPR). The ultimate goal of this thesis was to obtain multi-cross wavelet (MCW) and Fourier multi-cross function (FMC) algorithms and apply them to analyze raw GPR traces. A study was conducted particularly in the tunnel located beneath the Temple of the Feathered Serpent (The Citadel, Teotihuacan, Mexico) in order to estimate its depth, length and characteristics. This information was important for the planning of the archeological excavation of the tunnel, which is believed to represent the underworld, an outstanding region of Mesoamerican mythology, home of telluric forces emanating from deities, where life was constantly created and recreated. The results obtained by instrumental methodology and processing of the data showed that the tunnel is 12-14 meters deep and 100-120 meters long with three chambers at its end, interpretations that were confirmed by excavations in 2014. Archeologists believe that due to the tunnel's sacredness and importance, one of the chambers may be the tomb of a ruler of the ancient city.

UNAM from the beginning has participated in this archeological project that globally is considered one of the most important discoveries of modern era by using an engineering technique, an instrumental methodology and multiple data processing for which there are no other techniques like it. The MCW and FMC algorithms determined the periods of subsurface strata of the tunnel. GPR traces inside-and-outside the tunnel/chamber, outside the tunnel/chamber and inside the tunnel/chamber analyzed with the MCW and filtered FMC algorithms determined the periods of the tunnel and chamber fillings, clay and matrix (limestone-clay compound). The tunnel filling period obtained by MCW analysis (14.37 ns) reflects the mixed limestone-clay compound of this stratum, since its value is close to that of the period of the matrix (15.22 ns); periods of the chamber filling (11.40 ± 0.40 ns) and the matrix (11.40 ± 0.73 ns) were almost identical. FMC analysis of the tunnel obtained a period (5.08 ± 1.08 ns) close to that of the chamber (4.27 ± 0.85 ns), suggesting the tunnel and chamber are filled with similar materials. The use of both algorithms allows a deeper analysis, since the similarities between the tunnel and chamber filling periods could not have been determined with the MCW algorithm alone.

Keywords: Teotihuacan, tunnel beneath the Temple of the Feathered Serpent, ground penetrating radar, multi-cross wavelet analysis.





Introducción

En este trabajo hemos desarrollado dos algoritmos para el análisis multivariable de wavelet y los hemos aplicado por primera vez a los datos de GPR (radar de penetración terrestre) del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada en Teotihuacan. El wavelet multicruzado es una extensión de la función de wavelet cruzada (Torrence y Compo, 1998), mientras que la función multicruzada de Fourier está basada en la definición formal de la función cruzada (Wiener, 1928) y es una extensión del teorema de Wiener-Khintchine (Khintchine, 1934), ambos para dos o más series de tiempo.

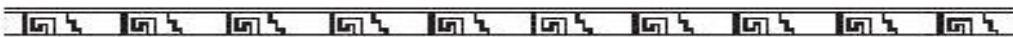
Mediante el análisis espectral de profundidad-tiempo es posible obtener resultados más verosímiles de la interpretación del radargrama¹. Por medio de las huellas espectrales de los estratos como el túnel y la cámara y de sus periodos dominantes, es posible hacer una caracterización de los diferentes materiales. Estos nuevos algoritmos serían una herramienta complementaria del análisis de radargrama y permitirían planear mejor las excavaciones arqueológicas, pues minimizaría los costos y los errores en la toma de decisiones.

Teotihuacan ha sido una de las ciudades antiguas más importantes en el mundo, con alrededor de 200,000 habitantes en una área de entre 23 y 25 kilómetros cuadrados. Su edificio principal durante una época fue el Templo de la Serpiente Emplumada, localizada en la Ciudadela, uno de sus conjuntos arquitectónicos rituales más importantes.

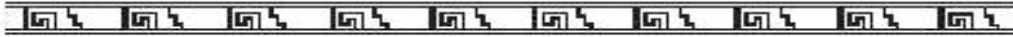
La armoniosa integración de escultura y arquitectura, sus magníficos acabados, los enterramientos y ofrendas descubiertos en su interior y el simbolismo que encierra cada elemento asociado han representado una de las formas de comprender el conocimiento de la sociedad teotihuacana, el poder, el Estado, la ideología y el calendario. Descubierta y explorado por el arqueólogo Manuel Gamio entre 1917 y 1922 (Gamio, 1922; INAH, 2008), el edificio ha sido considerado entre las más importantes manifestaciones culturales de Teotihuacan.

Los arqueólogos piensan además que en La Ciudadela se encontraba la cancha del juego de pelota. La información obtenida hasta el momento indica que el edificio que servía para tal fin, de poco más de cien metros de largo, fue destruido casi completamente al tiempo que se tapaba el

¹ Radargrama: imagen del perfil de GPR.



Introducción



túnel, localizado a pocos metros. Sobre sus restos fue construida La Ciudadela, uno de los principales y más importantes santuarios que tuvo la ciudad.

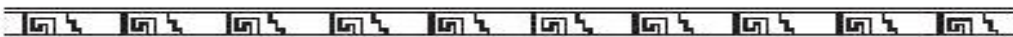
En 2009 se inició la exploración de una construcción que se encuentra a escasos metros de la entrada al túnel, por lo que ambos elementos guardan una estrecha vinculación espacial y simbólica. El juego de pelota y el inframundo están relacionados en muchos mitos de la creación (Recinos, 1947).

El descubrimiento del túnel por Sergio Gómez y Julie Gazzola ocurrió a finales de 2003, mientras trabajaban en la conservación del Templo de la Serpiente Emplumada. Sin embargo, su exploración ha requerido varios años dedicados a la planeación y obtención de los recursos necesarios para llevar a cabo la investigación al más alto nivel científico. El equipo actual está integrado por más de treinta personas y cuenta con asesores de prestigio nacional e internacional.

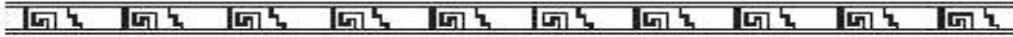
La importancia del túnel radica en constituir la ‘materialización’ propia de una de sus regiones más sobresalientes: el inframundo. Se trataba de un lugar de creación, donde residen las fuerzas telúricas emanadas de las deidades; el sitio donde se crea y se recrea la vida de forma constante. La dirección del túnel conduce hacia el centro del Templo de la Serpiente Emplumada, y su orientación es de oeste a este. Precisamente la entrada al inframundo se realizaba, según distintos relatos o mitos que compartían diversas culturas mesoamericanas, en esa dirección. El inframundo también era una región eminentemente acuática. Cuando los teotihuacanos decidieron hacer esta oquedad, que es el acceso al túnel, ellos buscaban el nivel freático (entre 12 y 15 metros bajo la superficie) porque el túnel reunía las condiciones para tener relación con el inframundo: una estructura subterránea, húmeda y oscura.

Este conducto subterráneo fue cerrado hace aproximadamente mil ochocientos años por los teotihuacanos y nadie había entrado en él desde entonces. La entrada al túnel fue localizada a pocos metros de la plataforma adosada al templo y pasa por debajo de ambos edificios. El acceso se realiza por un tiro vertical de casi cinco metros por lado que desciende hasta una profundidad de catorce metros desde la superficie; la entrada permite el acceso a un largo corredor con una longitud estimada de 103 metros que lleva a una serie de cámaras subterráneas excavadas en la roca.

De acuerdo con el arqueólogo Sergio Gómez: “El verdadero valor de este hallazgo no sólo radica en el privilegio de poder ser los primeros que ingresemos después de 1800 años, sino que también estamos seguros de que nos guiará hacia un mejor entendimiento de la cosmovisión teotihuacana, de su ideología religiosa y de su conformación social”.



Introducción



Antes de iniciar las excavaciones, entre 2005 y 2006, fue necesario planificar la excavación y realizar análisis preliminares por medio de métodos geofísicos de exploración. En México se han aplicado recientemente métodos geofísicos en arqueología. Se realizaron estudios para la localización de túneles ceremoniales en la pirámide de la Luna (Arzate et al., 1990) y en la pirámide del Sol (Chávez et al., 2001) en donde se utilizaron los métodos magnético, eléctrico y de radar de penetración terrestre (GPR). También se han hecho estudios geofísicos en zonas cerradas, como es el caso del Templo Mayor de la Ciudad de México (Barba et al., 1997).

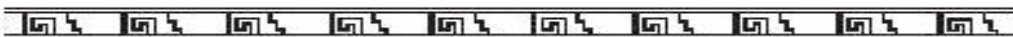
GPR está basado en la emisión de ondas electromagnéticas y la recepción de su retrodispersión que ocurre en las discontinuidades de la constante dieléctrica y la conductividad eléctrica de los materiales (Davis y Annan, 1989). Los investigadores aprecian que es un método no destructivo y no invasivo que provee información de alta resolución en tiempo real (Basile et al., 2000).

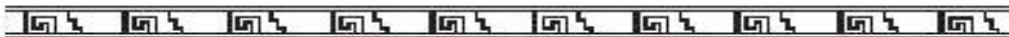
Para la adquisición de datos de GPR la antena debe ser desplazada sobre una superficie mientras transmite y recibe ondas electromagnéticas (sistema monoestático). Después de una inspección de GPR, se obtiene un perfil de los estratos subterráneos en términos de x (distancia cubierta por la antena) y un tiempo de viaje en dos sentidos (el tiempo que le toma al pulso electromagnético viajar a partir de la antena al blanco y viceversa). La resolución espacial de los datos de GPR depende de $\Delta\tau$, la duración del pulso.

Entre 2005 y 2006 se usó un GPR equipado con antenas de 100 MHz para explorar el túnel. El análisis de los datos de GPR produjo una estimación de que el túnel tenía una profundidad de 12-14 metros y su longitud era de 100-120 metros, con varias cámaras al final de éste. Los arqueólogos creen que debido a la importancia y sacralidad del túnel, una de estas cámaras puede ser la tumba de un gobernante de la ciudad antigua. La confirmación de esta hipótesis adelantaría significativamente el conocimiento de la historia de Teotihuacan, la cual no tiene evidencia sobre su forma de gobierno.

Excavaciones arqueológicas a finales de 2014 confirmaron los resultados de GPR, la longitud del túnel es de 102.43 metros y existen tres cámaras al final de éste. Así como existe una zona de fractura en el techo del túnel, justo antes de entrar a estas cámaras.

Esta tesis doctoral está compuesta por tres capítulos (antecedentes, análisis de datos y resultados del análisis de datos) y una sección de discusión y conclusiones, así como un apéndice.





Capítulo 1

Antecedentes

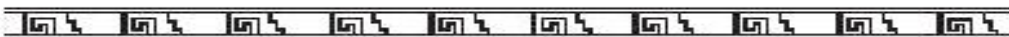
En este capítulo se hace una breve reseña de los métodos geofísicos comunes (activos y pasivos) empleados en la rama de la arqueología como la resistividad eléctrica, la conductividad electromagnética y la magnetometría; y otros no tan comunes como la imagenología termal, el potencial espontáneo y la susceptibilidad magnética. Así como una descripción más elaborada del radar de penetración terrestre (GPR) y algunos ejemplos de sus primeras aplicaciones en arqueología.

El descubrimiento de que las retrodispersiones de GPR, medidas en tiempo, son capaces de definir la profundidad real (velocidad de onda conocida) fue uno de los avances más importantes de GPR en arqueología. Por último, se hace una introducción al tema de la transformada de wavelet.

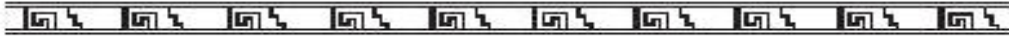
1.1 Métodos geofísicos para el mapeo en arqueología

Los métodos geofísicos más usados en arqueología son: magnetometría, resistividad eléctrica, conductividad electromagnética y GPR (Clark, 1990; Gater y Gaffney, 2003). Los métodos magnéticos emplean dispositivos pasivos que miden cambios pequeños en el campo magnético de la Tierra, los cuales son influenciados por cambios en el suelo. Se hace un mapeo espacial con este tipo de métodos para obtener patrones de algunas características magnéticas cercanas a la superficie.

Los otros tres métodos geofísicos comunes son activos, es decir, transmiten la energía hacia el suelo y después miden qué tanto la energía es afectada por los cambios culturales, geológicos o ambientales en el suelo. Es deseable que los cambios mapeados puedan estar relacionados con los fenómenos de interés para el arqueólogo como es la presencia o ausencia de características culturales enterradas o cambios geológicos significativos. En el método de resistividad eléctrica se transmite una corriente eléctrica al suelo y se miden las diferencias de voltaje entre el dispositivo transmisor y el receptor. Un método similar de energía transmisible es usado en conductividad electromagnética (EM), pero en este caso se induce un campo electromagnético con geometría



Antecedentes



compleja en el suelo y se hacen mediciones del efecto de este campo en los depósitos subterráneos. En este método pueden medirse tanto las propiedades eléctricas como magnéticas del suelo.

Otra técnica geofísica poco común para medir otras propiedades cerca de la superficie es la imagenología termal. Esta técnica mide la radiación de calor del suelo por periodos de tiempo. Los cambios en radiación están relacionados, en teoría, con las diferencias de materiales cercanos a la superficie. Un potencial espontáneo mide el potencial eléctrico de materiales enterrados, el cual difiere de acuerdo con su composición y el contenido de agua (Reynolds, 2011). La susceptibilidad magnética es una técnica que obtiene lecturas del suelo directamente de pozos para medir el magnetismo remanente de materiales enterrados. Estas lecturas pueden estar relacionadas comúnmente con cambios en las propiedades del suelo que son afectadas por la modificación humana del suelo natural o por los procesos de formación de sedimento.

1.1.1 Radar de penetración terrestre (GPR)

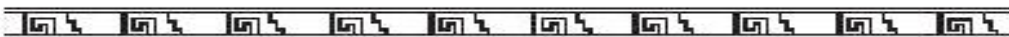
Una de las cualidades que los investigadores aprecian del GPR es que no es un método destructivo o invasivo y además tiene la capacidad de dar información de alta resolución en tiempo real (Basile et al., 2000). Esta técnica se basa en la emisión de ondas electromagnéticas y en la recepción de la retrodispersión que ocurre en la discontinuidad de la constante dieléctrica y conductividad eléctrica del material (Davis y Annan, 1989).

Para la adquisición de datos se desplaza la antena sobre una superficie mientras que ésta emite y recibe las ondas electromagnéticas (sistema monoestático). Los datos de GPR se recolectan generalmente a lo largo de transectos² con espaciado muy angosto dentro de una malla de medición; cada transecto consiste en miles de ondas de radar que han sido retrodispersadas por interfases en el suelo.

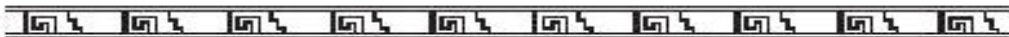
Éste es un método activo que transmite pulsos electromagnéticos a partir de antenas superficiales hacia el suelo y que mide el tiempo transcurrido (en nanosegundos) entre los pulsos enviados y los recibidos en la superficie. La forma individual de las ondas retrodispersadas (conocida como *forma de onda*) recibida dentro del suelo es digitalizada en una *traza de retrodispersión*³ la cual es una serie de ondas retrodispersadas hacia una posición en la superficie.

² Trayecto a lo largo del cual se realizan las observaciones o se toman las muestras para un proyecto científico de investigación.

³ El conjunto de varias onduletas registradas a diferentes profundidades produce una serie de retrodispersiones en una posición. Esto se conoce como una *traza de retrodispersión*.



Antecedentes



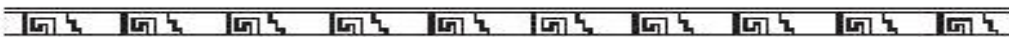
Lo que se obtiene de una inspección de GPR es un perfil de estratos en términos de x (distancia cubierta por la antena) y una trayectoria de tiempo de dos sentidos (tiempo que le llevó al pulso electromagnético en viajar desde la antena al blanco y del blanco a la antena). La resolución espacial depende de la frecuencia usada y de la frecuencia de muestreo. El tiempo de dos sentidos puede ser convertido aproximadamente en distancia, asignándole a cada una de las retrodispersiones una profundidad precisa. Este tipo de información no está disponible por otros métodos geofísicos de mediciones cercanas a la superficie. Las amplitudes de las ondas retrodispersadas son particularmente importantes porque sus variaciones se relacionan directamente con los cambios en las propiedades físicas o químicas de los diferentes materiales en el subsuelo. Cuando se mapean estas diferencias de amplitudes espacialmente y con profundidad, podemos construir mapas e imágenes tridimensionales de las características arqueológicas enterradas. La inspección de los datos de GPR no sólo puede identificar las características para posibles futuras excavaciones, sino que también puede hacer una interpolación entre excavaciones, proyectando el conocimiento arqueológico en áreas que no han sido o nunca serán excavadas (Conyers, 2013).

Mientras que los pulsos de GPR son transmitidos a través de varios materiales en su trayectoria hacia los objetos de interés, su velocidad cambia, dependiendo de las propiedades físicas y químicas del material a través del cual viajan. Cuando se miden los tiempos de los pulsos de energía y además conocemos la velocidad a través del suelo, podemos medir la profundidad con precisión.

Los sistemas de GPR estándar consisten de tres elementos principales (fig. 1.1⁴): la unidad de control (generador de pulso, computadora y software asociado), las antenas (transmisor y receptor) y la unidad de despliegue (pantalla de la computadora). La unidad de control produce un pulso eléctrico de alto voltaje, el cual es enviado a través de cables a la antena transmisora, la cual incrementa la amplitud del voltaje y de las formas del pulso para después transmitirlo. Los cables (coaxiales o de fibra óptica) conectan a las antenas con el sistema que puede ser localizado en la estación de base. Los cables de fibra óptica generan menos ruido que está relacionado con el equipo y que puede afectar la claridad de la señal en algunos cables coaxiales (Davis y Annan, 1989).

Todos los sistemas de GPR generan pulsos electromagnéticos necesarios para crear ondas de propagación directamente en la antena. Algunos sistemas transmiten la onda retrodispersada

⁴ Imagen tomada de la página <http://www.malags.com/innovation/gpr-explained>.



Antecedentes

enviada al sistema de control para registrarla como dato digital o como dato analógico en la forma de cambios de voltaje, los cuales pueden ser digitalizados y almacenados en el sistema de control.

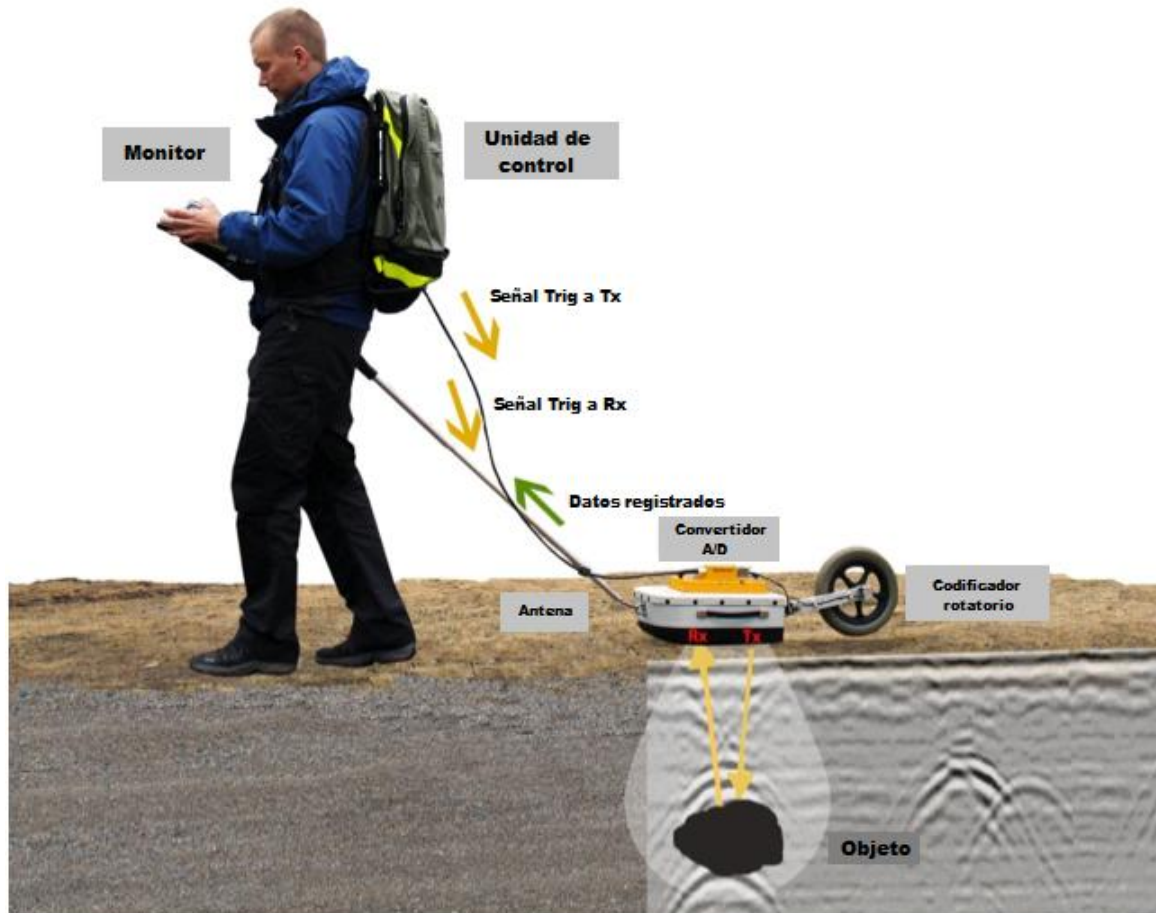
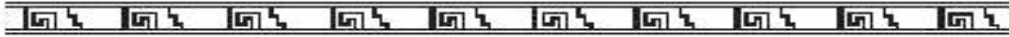


Fig. 1.1. Elementos principales de un sistema de GPR estándar: Antena con un transmisor (Tx) y receptor (Rx), unidad de control (computadora) y unidad de despliegue (monitor).

1.1.2 Teoría de GPR

Las ondas de radar que viajan tanto en el aire como en el suelo son energía electromagnética compuesta por un campo eléctrico y uno magnético, perpendiculares entre sí y de forma oscilatoria. Estas ondas se producen cuando una corriente oscila de ida y vuelta en un cuerpo conductor, produciendo de esta manera un campo magnético inducido (Kraus, 1950; Rojansky, 1971). Las ondas electromagnéticas generadas se propagan hacia fuera de la fuente, con la parte eléctrica de la forma de onda moviéndose perpendicularmente con respecto a la parte magnética (fig. 1.2; Conyers,

Antecedentes



2013). Si cualquier componente eléctrico o magnético se pierde —ya sea que se atenúe o absorba— la onda dejará de propagarse.

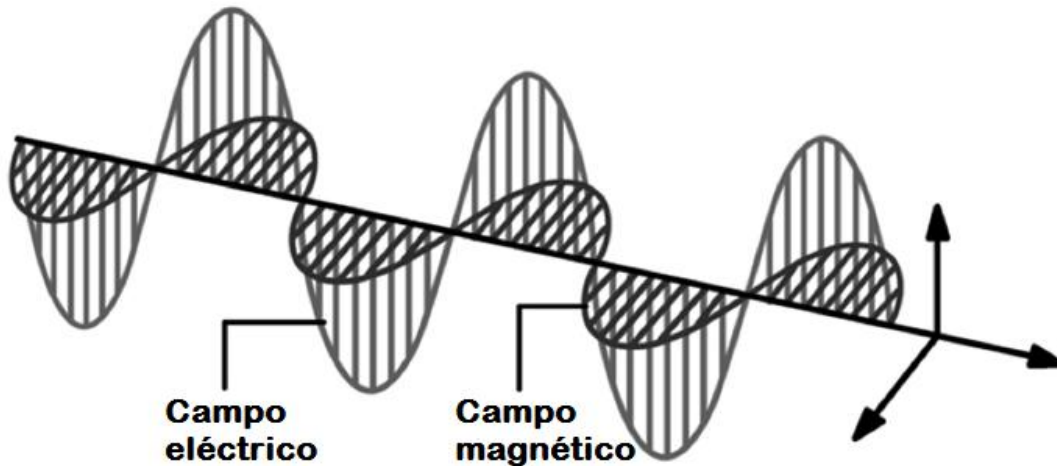
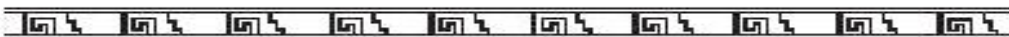


Fig. 1.2. Propagación de onda electromagnética. Una onda electromagnética consiste de ondas magnética y eléctrica perpendiculares durante la propagación.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la energía de radar usada en GPR se produce en una antena. Dependiendo de la frecuencia de oscilación (medida en ciclos por segundos), se producen ondas de radar de una cierta longitud de onda. Entre más alta sea la frecuencia de oscilación, más corta es la longitud de onda de la energía electromagnética producida, y viceversa. Se requiere de antenas de tamaño grande con frecuencia de oscilación menor para generar longitudes de onda de radar grandes. La energía con longitud de onda mayor se propaga más profundamente y con menor dispersión debido a objetos pequeños. Las longitudes de onda más cortas penetran distancias no muy profundas, pero con mayor dispersión debido a pequeñas discontinuidades. Además penetran a menor profundidad porque se atenúan debido a la mayoría de las condiciones de suelos (Leckebusch, 2003).

Algunos ejemplos de ondas electromagnéticas son: la luz visible, los rayos X, radiación ultravioleta e infrarroja, ondas de televisión, de radio y de teléfono celular, rayos gamma y microondas. La energía usada por la mayoría de las aplicaciones de GPR tiene una frecuencia de entre los diez a los mil quinientos megahertz (fig. 1.3; Conyers, 2013). Esta energía ocupa una porción del mismo espectro electromagnético de la televisión, radio FM, teléfonos celulares y otros dispositivos de comunicación personal.



Antecedentes

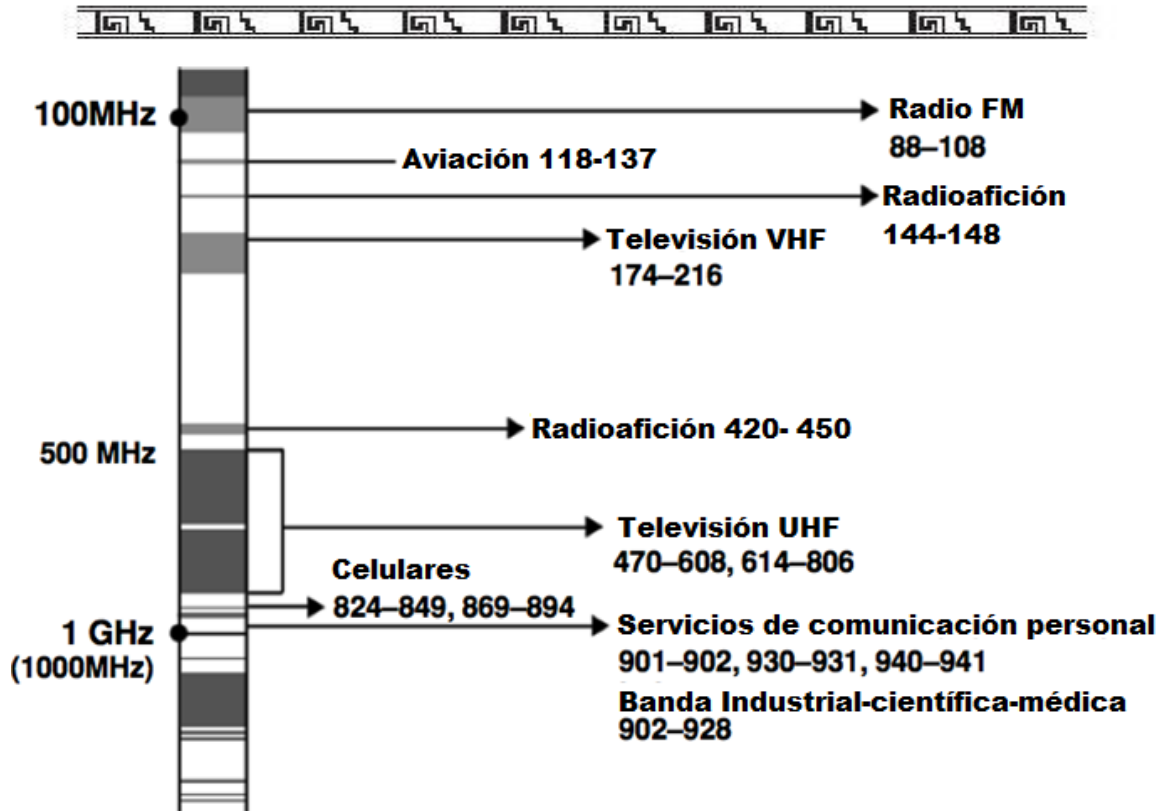


Fig. 1.3. Intervalos de frecuencia de dispositivos electrónicos y electromagnéticos.

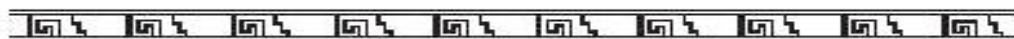
Las discontinuidades subterráneas —debido a las cuales existen las retrodispersiones— se producen generalmente por los cambios en las propiedades eléctricas o magnéticas del suelo, por las variaciones de su contenido de agua, cambios litológicos o cambios de densidad de volumen en las interfases estratigráficas (Van Dam y Schlager, 2000).

Las retrodispersiones también ocurren cuando la energía de radar atraviesa interfases entre características arqueológicas y la matriz que las rodea. Los espacios vacíos que se encuentran en sitios de entierros, túneles o tuberías también generan retrodispersiones de radar significativas debido al cambio en la velocidad de propagación de la onda de radar.

1.1.3 Procedimientos de adquisición

La mayoría de los sistemas de GPR transmiten pulsos de radar a frecuencias muy elevadas que van de 25000 a 50000 pulsos por segundo y los convertidores digitales en estos sistemas no son lo suficientemente rápidos para muestrear las ondas retrodispersadas recibidas de estos pulsos (Leckebusch, 2003).

Para superar este problema, los sistemas de control emplean métodos de muestreo incrementales que producen una traza compuesta de retrodispersión al registrar la primera muestra



Antecedentes



digital dentro de una traza de la energía retrodispersada que llega del primer pulso transmitido. La segunda muestra es registrada del segundo pulso y así sucesivamente hasta que se construya una traza de retrodispersión completa. Es posible requerir 512 o más muestras del mismo número de pulsos producidos consecutivamente para compilar el registro de una traza de retrodispersión completa. La mayoría de los usuarios de GPR recolectan un mínimo de 512 muestras digitales para registrar cada traza de retrodispersión.

El método de adquisición de datos conocido por pasos usa el mismo método general, con la excepción de que se reciben datos discretos en una traza de retrodispersión y se registran en cada intervalo de paso. Cuando se mueve la antena al siguiente paso, se adquiere una traza de retrodispersión de nuevo y se registra digitalmente con 512 o más muestras.

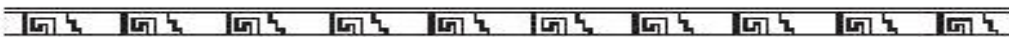
Para crear una imagen vertical de las retrodispersiones subterráneas, se despliegan todas las trazas de retrodispersión registradas, sin importar el método de adquisición, en un formato en donde se grafica el tiempo de dos sentidos o profundidad aproximada de las ondas retrodispersadas sobre el eje vertical y la posición superficial sobre el eje horizontal.

1.1.4 Mediciones de propagación y retrodispersión de radar

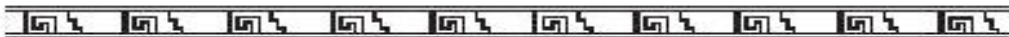
La meta principal de la mayoría de las investigaciones de GPR es diferenciar y mapear espacialmente las interfases subterráneas importantes. En cualquier momento que la energía de radar cruce un contacto entre dos materiales en el suelo con propiedades físicas y químicas diferentes, la velocidad de las ondas que las atraviesan cambia y parte de la energía se retrodispersa hacia la superficie.

Algunas capas sedimentarias y otros materiales enterrados tienen propiedades particulares que afectan la velocidad de propagación de energía electromagnética y por lo tanto la intensidad de las ondas retrodispersadas (Van Dam et al., 2002). La cantidad de retrodispersión que ocurre en interfases enterradas está en función del contenido de humedad, el cual puede estar relacionado directamente con las propiedades físicas de objetos enterrados (Conyers, 2013).

Las propiedades de materiales medibles que afectan la propagación y retrodispersión de ondas de radar son la conductividad eléctrica (relacionada con la cantidad de humedad) y la permeabilidad magnética (Olhoeft, 1981; Reynolds, 2011; Van Dam y Schlager, 2000). Si se conocen estas propiedades, es posible predecir la cantidad de retrodispersión en interfases enterradas.



Antecedentes



La permitividad dieléctrica relativa (RDP), también conocida como constante dieléctrica, caracteriza las propiedades eléctrica y magnética de los materiales enterrados y es una medida de la capacidad de un material para almacenar un campo electromagnético aplicado y después transmitir ese campo (*Standard Guide for Using the Surface Ground Penetrating Radar Method for Subsurface Investigation*, ASTM; Von Hippel, 1954; Wensink, 1993).

La RDP se determina empíricamente a partir de mediciones en el campo o se mide directamente en el laboratorio. Entre mayor sea la RDP de un material, menor es la velocidad de propagación. La RDP es una medida general de qué tan bien se transmite la energía de radar en el subsuelo. Por lo tanto, es posible medir la velocidad de propagación de la energía de radar y también su intensidad.

Para la mayoría de las aplicaciones de arqueología, los valores de RDP y las mediciones de velocidad de propagación en el suelo son equivalentes. Por ejemplo, si la RDP de agua fresca es muy elevada (alrededor de 80), la energía de radar puede transmitirse con facilidad a través de ésta, sin atenuarse (especialmente en estado sólido), solamente a una velocidad muy lenta. Es muy importante entender el concepto de RDP (o velocidad) del material en cada lugar que se investigue, ya que éste se usará para convertir el tiempo de propagación en profundidad.

1.1.5 Procesamiento de datos después de la adquisición

El tipo más común de filtrado que se puede aplicar a cualquier conjunto de datos consiste en la eliminación de bandas horizontales que aparecen en la mayoría de los perfiles de retrodispersión de GPR (fig. 1.4; Conyers, 2013). Se registran estas bandas debido al ruido generado por algunas antenas o son causadas por ruido del sistema (Leckebusch, 2003; Shih y Doolittle, 1984; Sternberg y McGill, 1995), el cual es inherente a cualquier equipo de GPR o por frecuencias de interferencia (radio). Estas bandas contienen retrodispersiones importantes que de otra manera serían visibles en perfiles.



Antecedentes

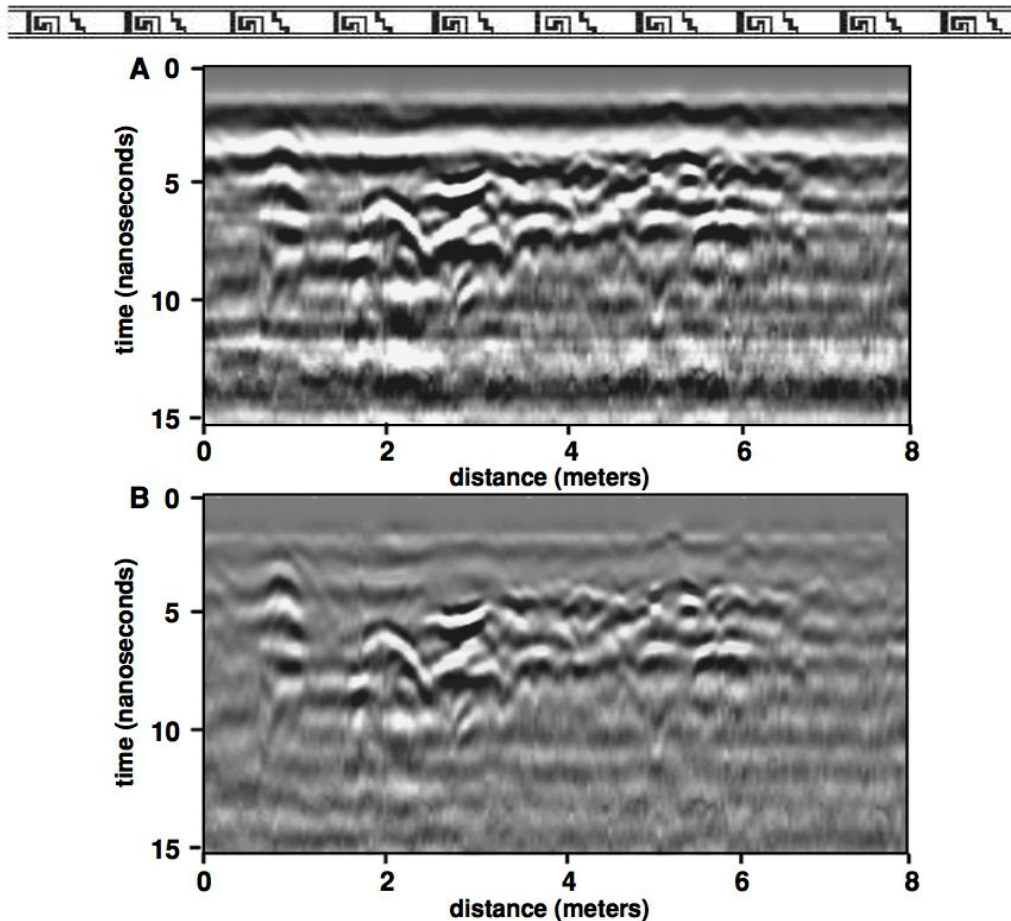
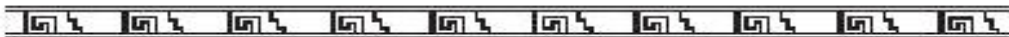


Fig. 1.4. Eliminación de bandas. El perfil sin procesar (A) contiene bandas que opacan retrodispersiones importantes. Cuando se remueven estas bandas (B), se hacen visibles retrodispersiones por arriba de los 5 nanosegundos.

La mayoría de los programas de procesamiento tienen la capacidad de eliminar estas bandas por medio de un proceso aritmético sencillo que suma todas las amplitudes de las retrodispersiones registradas al mismo tiempo a lo largo de un perfil de retrodispersión y divide por el número de las trazas sumadas. El resultado es un promedio de todo el ruido de fondo que produce estas bandas y después se resta del conjunto de datos (Conyers, 2013).

Si existe mucha interferencia debido a teléfonos celulares, radio transmisores u otros dispositivos cercanos, los perfiles pueden contener ruido conocido como “nieve” o bandas que hacen que la información no pueda interpretarse (Conyers, 2013). Ciertos filtros de algunos programas de procesamiento reducen las frecuencias de interferencia ya sea con filtros de respuesta de impulso infinito (IIR) o de respuesta de impulso finito (FIR). Estos procesos se diferencian en el número de trazas de retrodispersión usado en el promedio y el tipo de algoritmos de promedio e interpolación en el proceso de filtrado.

Antecedentes



El filtrado F-k⁵ es una técnica tomada del procesamiento sísmico en donde las retrodispersiones registradas en el tiempo son transformadas al espacio de frecuencia, empleando programas de transformada de Fourier (Maijala, 1992). El resultado de este procesamiento de filtrado es la eliminación de retrodispersiones de ángulo elevado que pueden opacar los datos horizontales importantes.

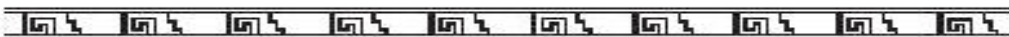
Las retrodispersiones múltiples suceden cuando la energía de radar es retrodispersada de un objeto enterrado bajo la superficie, o entre las capas del subsuelo (Conyers, 2013). Cuando cada una de estas retrodispersiones son captadas por la antena de superficie y registradas, éstas se muestran en un perfil como retrodispersiones horizontales repetitivas y a una misma distancia de separación. Estas retrodispersiones múltiples también esconden retrodispersiones importantes que fueron medidas al mismo tiempo. Por lo tanto, es importante removerlas por medio de un procesamiento como la deconvolución o deconvolución predictiva (Fischer et al., 1994; LaFleche et al., 1991; Maijala, 1992; Malagodi et al., 1996; Neves et al., 1996; Rees y Glover, 1992; Todoeschuck et al., 1992).

Tal método realiza una estimación de la forma del pulso transmitido por la antena y cómo ésta se modifica conforme viaja por el subsuelo. Se basa en el hecho de que conforme el pulso es transmitido en el subsuelo, parte de la onda electromagnética cambia de forma en un proceso de convolución. El propósito de este filtro es eliminar parte de las ondas registradas que convolucionaron durante la transmisión en el suelo. El procesamiento de deconvolución restaura las ondas retrodispersadas en un perfil hasta obtener el patrón original. El método de deconvolución puede usarse para identificar y después eliminar las retrodispersiones múltiples al predecirse con precisión.

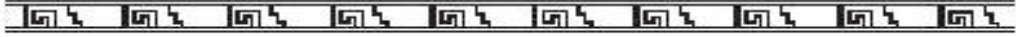
Los sistemas de GPR estándar producen en ocasiones imágenes distorsionadas de la estratigrafía del subsuelo. Esto es causado por el rayo⁶ ancho del radar el cual provoca varios caminos del rayo así como cambios en la velocidad y por lo tanto la refracción del rayo transmitido con la profundidad (Conyers, 2013).

⁵ Filtrado F-k: Transformada de Fourier (FT) sobre tiempo y espacio, donde F es la frecuencia (FT sobre tiempo) y k se refiere al número de onda (FT sobre espacio).

⁶ Rayo: Como los rayos de luz de muy alta frecuencia, las ondas de radar tienden a viajar en líneas rectas o *rayos* a velocidades que se aproximan a la de la luz ($3 \times 10^8 \frac{m}{s}$). Los rayos de radar están sujetos a la refracción en la atmósfera, resultado de viajar a través de regiones de diferentes densidades.



Antecedentes



El proceso de migración es un procesamiento de imagen de dos dimensiones que se ha usado para eliminar algunas de estas distorsiones causadas en todos los procedimientos de recolección de datos (Beres et al., 1999; Fischer et al., 1994; Fisher et al., 1992; Grasmueck, 1994; Malagodi et al., 1996; Milligan y Atkin, 1993; Young y Jingsheng, 1994). El proceso de migración puede usarse para ajustar espacialmente todos estos tipos de retrodispersiones distorsionadas o hiperbólicas para “colapsarlas” hacia su punto de origen (fig. 1.5; Conyers, 2013). El método de migración más sencillo para la eliminación de hipérbolas se logra al sumar todas las retrodispersiones a lo largo de los brazos de una hipérbola y colocando el promedio en su ápice (Conyers, 2013).

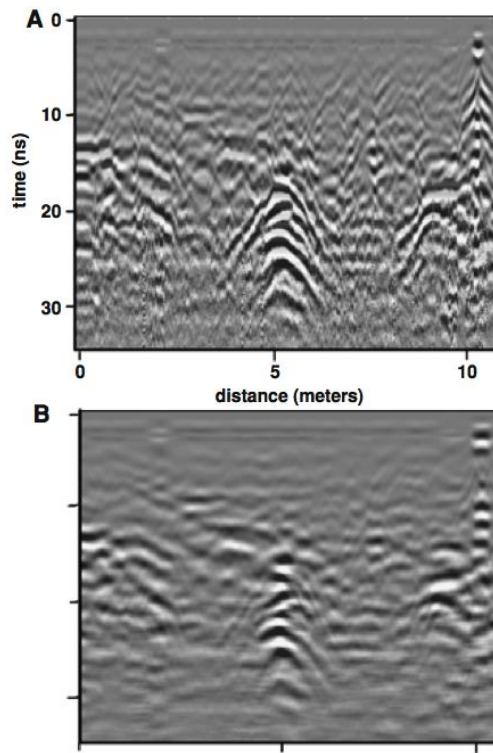
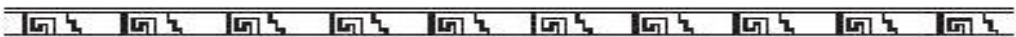


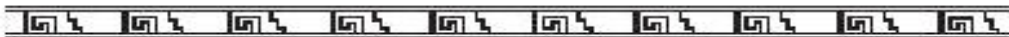
Fig. 1.5. Método de migración. Hipérbolas de retrodispersión producidas por la parte superior y lateral de las paredes de piedra en Petra, Jordania (A), son migradas a sus orígenes (B), filtrando el perfil y dejando sólo los ápices de las hipérbolas.

El proceso de migración debe emplearse solamente cuando estemos seguros del origen de las retrodispersiones distorsionadas, la velocidad de los materiales y la geometría de los caminos de transmisión en el subsuelo.

Las retrodispersiones de baja amplitud pueden resaltarse al incrementar rangos de ganancia en ciertos tiempos de registro. Cuando se incrementan las amplitudes de todas las retrodispersiones



Antecedentes



en cierta ventana de tiempo, se deben aplicar filtros para eliminar las bandas horizontales que también se incrementan (Conyers, 2013). Este proceso debe repetirse hasta que las retrodispersiones de interés sean visibles.

Las retrodispersiones generadas debido a cambios sutiles en el suelo también pueden resaltarse por medio de la transformada de Hilbert (Annan, 1999; Todoeschuck et al., 1992; Turner et al., 1992; Yilmaz, 2001). Este proceso transforma las amplitudes de retrodispersión y su geometría en frecuencia espacial e información de fase. Las retrodispersiones de fase, ya sean deflexiones positivas o negativas, indican cambios importantes de la permitividad dieléctrica relativa de los materiales en una interfase reflejante (Conyers, 2013). El cambio de fase en amplitudes a lo largo de un perfil puede dar información al intérprete del tipo de material que está produciendo la retrodispersión. Lo mismo ocurre con los cambios de frecuencia a lo largo de una retrodispersión de interés, ya que pueden indicar cómo el suelo está absorbiendo y dispersando la energía de radar durante la transmisión y cuando se dispersa hacia la superficie.

1.1.6 Aplicación de GPR en arqueología

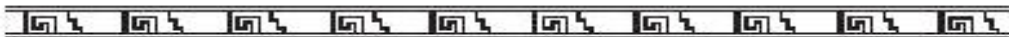
Una de las primeras aplicaciones de GPR en arqueología fue el estudio que se realizó en el cañón de Chaco en Nuevo México (Vickers et al., 1976) para encontrar paredes enterradas a un metro de profundidad. Otros estudios de aplicación de GPR en arqueología histórica fueron realizados exitosamente para la búsqueda de piedras enterradas y sótanos usados como almacén (Bevan y Kenyon, 1975; Kenyon, 1977).

A finales de los años ochenta y principios de los noventa, el GPR fue usado con éxito en ciertos contextos de arqueología, pero en la mayoría de los casos, estos estudios fueron solamente experimentos para encontrar anomalías. Por lo general, los perfiles de GPR parcialmente procesados eran analizados en papel o en pantalla de computadora. Sólo se hacían excavaciones si algunas retrodispersiones eran interesantes y que además tuvieran algún significado arqueológico.

El descubrimiento de que las retrodispersiones de GPR, medidas en tiempo, son capaces de definir la profundidad real (velocidad de onda conocida) fue uno de los avances más importantes de GPR en arqueología. Otra área de investigación es la integración de conjuntos múltiples de datos recolectados por medio de diferentes métodos geofísicos. Este tipo de integración se ha llevado a cabo a través de un método matemático simple de correlación (Savvaidis et al., 1999), comparación matemática de amplitudes de GPR en mapas de corte con otros mapas geofísicos (Piro et al., 2000),



Antecedentes



el uso de modelado estadístico (Marukawa y Kamei, 1999) y por medio de programas de sistemas de información geográfica (Kvamme, 2003).

1.1.7 Interpretación de datos de GPR

En los años setenta, cuando los datos de GPR fueron aplicados en arqueología por primera vez, se hicieron la mayoría de las interpretaciones al analizar los perfiles de retrodispersión y al buscar anomalías que pudieron ser producidas por retrodispersiones de objetos arqueológicos enterrados (Bevan, 1977; Sheets et al., 1985). Estos métodos eran muy imprecisos y era lo mejor que se podía hacer con datos analógicos que no podían guardarse en un medio digital para después ser procesados.

Los registros de campo deben ser procesados para remover el ruido, las escalas deben ser modificadas ya sea en el eje vertical u horizontal; y puede haber dificultades para encontrar las anomalías que pueden o no ser significativas en el estudio. Antes de que llegara la era del análisis de amplitud tridimensional a mediados de los noventa, la mayor parte de la interpretación de GPR consistía en analizar las retrodispersiones de perfiles que parecieran de objetos enterrados y correlacionarlas con otras retrodispersiones de perfiles adjuntos.

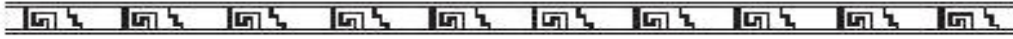
Al usar tal técnica es posible identificar características y determinar su profundidad, pero este proceso es muy laborioso y presenta muchas dificultades. Al usar el método visual, los intérpretes frecuentemente están inseguros de saber cuáles retrodispersiones son generadas por los objetos de interés y cuáles pueden ser producidas sólo por características geológicas.

Aunque existen otros métodos de interpretación más sofisticados como el modelado sintético, todavía es necesario correlacionar los mapas e imágenes con las características identificadas en los perfiles y de interés arqueológico.

El modelado sintético de perfiles de dos dimensiones fue desarrollado para modelar objetos enterrados, estratigrafía y superficies reflejantes (Goodman, 1994). Este tipo de modelado puede ayudar al intérprete con un ejemplo de cómo se verían los datos de GPR en realidad y permitiría una interpretación más precisa de perfiles ya que hayan sido procesados (Conyers and Goodman, 1997; Goodman, 1994; Nishimura and Goodman, 1993). Este tipo de procesamiento permite construir un modelo de estratigrafía conocida y características arqueológicas antes de ir al campo para determinar si un estudio de GPR será capaz de delinear los materiales de interés. Después de que los datos de GPR han sido adquiridos y procesados en perfiles de retrodispersión, los modelos pueden



Antecedentes



reajustarse para representar condiciones de campo conocidas con mayor precisión como una guía en la interpretación.

Perfiles simulados son generados por computadora al seguir las trayectorias de las ondas de radar durante la transmisión a través de varios medios con permitividades dieléctricas relativas, conductividades eléctricas y permeabilidades magnéticas (Goodman, 1994). Tanto la geometría de la estratigrafía superficial como de las características arqueológicas en el modelo son programadas para que el modelo sea cercano a lo más real posible.

Ya que los modelos sintéticos hayan sido analizados y las retrodispersiones puedan compararse con las características arqueológicas modeladas, los modelos pueden usarse como una herramienta de aprendizaje que ayude a comprender cómo se propaga la energía y se refleja en el suelo.

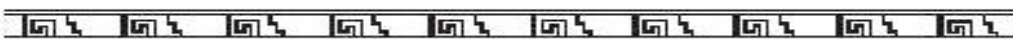
Los modelos sintéticos de componentes importantes de un sitio arqueológico pueden obtenerse si se conoce antes información sobre las condiciones del subsuelo. Las características eléctricas y magnéticas de sedimento deben estimarse así como la composición de los objetos arqueológicos de interés. Estos datos se incluyen en el modelo y la computadora usará esta información para predecir los coeficientes de reflectividad (Conyers, 2013), calculados por la ecuación:

$$R = (\sqrt{K_1} - \sqrt{K_2})(\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2}) \quad (1.1)$$

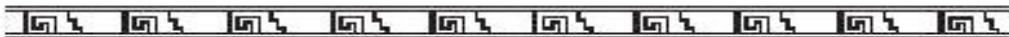
Donde: R es el coeficiente de reflectividad en una interfase entre materiales con diferentes permitividades dieléctricas relativas; K_1 es la permitividad dieléctrica relativa del material superior; K_2 es la permitividad dieléctrica relativa del material inferior. Entre mayor sea el coeficiente, mayor será la amplitud de las ondas retrodispersadas en la interfase.

El programa también deberá predecir la energía de atenuación a cierta profundidad, la velocidad de la energía en diferentes capas y la amplitud de las retrodispersiones recibidas en la superficie. Después de generar el modelo, se grafican las retrodispersiones resultantes en dos dimensiones como en el caso de los perfiles de GPR estándar y se ajustan sus escalas horizontal y vertical. Se pueden cambiar los parámetros de entrada y correr de nuevo la simulación hasta que exista una mejor concordancia entre los perfiles real y sintético.

Un tipo de manipulación de datos más sofisticado es el análisis de mapas de corte de amplitud el cual crea mapas de diferencias de amplitud de retrodispersiones espacialmente y con una profundidad en una malla (Conyers y Goodman, 1997; Goodman, 1996; Goodman et al., 1998).



Antecedentes



Como resultado se puede obtener una serie de mapas tridimensionales que ilustran la ubicación de las anomalías en las retrodispersiones, a partir de un análisis por computadora de varios perfiles de dos dimensiones. Con este método se mapean las amplitudes de las retrodispersiones y su profundidad, las cuales son mediciones indirectas de las diferencias de los materiales en interfases subterráneas que reflejan la energía de radar.

Entre mayor sea la amplitud de una onda retrodispersada, mayor será la diferencia entre las propiedades físicas y químicas de los materiales en la interfase que refleja la energía. Las áreas de retrodispersiones de *baja amplitud* indican una *matriz uniforme* de material, mientras que las de *amplitud mayor* se refieren a áreas de *contraste elevado* como los objetos arqueológicos, vacíos o cambios estratigráficos importantes.

Los mapas de corte deben construirse con mucho cuidado y ser ajustados a varios parámetros del sitio como la profundidad de interés, dimensión y orientación de los objetos y la naturaleza de la matriz que los rodea. Por lo que es necesario tener conocimiento previo sobre las condiciones del sitio. Los cortes de amplitud se hacen a intervalos de tiempo iguales; cada corte representa el grosor aproximado del material en el subsuelo. Cuando uno ve los cambios de amplitud en una serie de cortes de tiempo en dirección horizontal, es análogo a estudiar los cambios geológicos y arqueológicos de capas a la misma profundidad (Conyers et al., 2002; Goodman et al., 1995; Malagodi et al., 1996; Milligan y Atkin, 1993).

Cuando las anomalías de amplitud en cada corte son correlacionadas con características arqueológicas conocidas y con cambios estratigráficos que pueden estar disponibles para estudio en excavaciones cercanas, se pueden construir mapas tridimensionales extremadamente precisos de un sitio.

La ubicación precisa de todas las retrodispersiones, si son procesadas en varios cortes secuenciales, puede analizarse como un cubo tridimensional de datos y ciertas amplitudes pueden graficarse para obtener imágenes realistas del subsuelo como objetos tridimensionales llamados isosuperficies (Conyers et al., 2002; Goodman et al., 1998; Heinz and Aigner, 2003; Leckebusch, 2003; Leckebusch and Peikert, 2001).

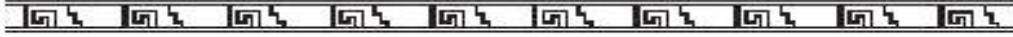
1.2 Análisis wavelet

Algunos requerimientos para que una función sea considerada como una wavelet son:

- ❖ Debe tener energía finita:



Antecedentes



$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^2 dt < \infty \tag{1.2}$$

Donde E es la energía de una función igual a la integral de su magnitud al cuadrado.

❖ Si $\psi(f)$ es la transformada de Fourier (FT) de $\psi(t)$:

$$\psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-2\pi ift} dt \tag{1.3}$$

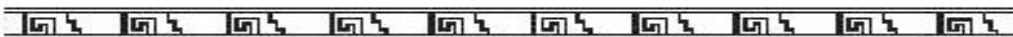
Entonces debe cumplirse la siguiente condición:

$$C_g = \int_0^{\infty} \frac{|\psi(f)|^2}{f} df < \infty \tag{1.4}$$

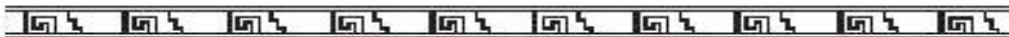
Esto implica que la wavelet tiene una componente diferente de cero o que la wavelet $\psi(t)$ debe tener un promedio igual a cero. La ecuación 1.4 se conoce como la condición de admisibilidad y C_g es llamada constante de admisibilidad. El valor de C_g depende de la wavelet seleccionada. Las wavelets que cumplen la condición de admisibilidad son filtros pasabanda porque dejan pasar sólo esas componentes de señal dentro de un rango finito de frecuencias (la pasabanda) y en proporciones caracterizadas por el espectro de energía de la wavelet.

Para una reconstrucción perfecta necesitamos la transformada de wavelet continua (CWT). Existen la wavelet madre (Paul, Morlet, etc.), wavelet padre (función escala) y muchas wavelets hijas de varios tamaños. La wavelet padre no es necesaria para la CWT, sólo juega un papel indirecto en la creación de las wavelets hijas. Las hijas son clones de la madre, alargados o comprimidos. La wavelet padre tiene dos roles importantes: da el punto de inicio para el análisis y además hace posible calcular los coeficientes con rapidez. El tamaño de la función escala determina la resolución más fina usada para el análisis. Farge usó una transformada continua para hacer análisis y las wavelets ortogonales para compresión. Meyer decía que las wavelets continuas eran como una película de la realidad (Hubbard, 1997).

El análisis de Fourier es apropiado para señales regulares periódicas, mientras que las wavelets son apropiadas para señales altamente no estacionarias con picos o discontinuidades repentinas. Para señales casi estacionarias, cuyo comportamiento es predecible para un cierto tiempo, uno quisiera combinar las características de ambas; si para un tiempo largo la señal oscila con estabilidad, entonces no es razonable analizarla con wavelets pequeñas que sólo atrapan algunas oscilaciones en un tiempo. Las wavelets son imprecisas para altas frecuencias comparadas con el



Antecedentes



análisis de Fourier ventaneado. Por estas razones, Meyer dice que las wavelets no se adaptan bien a la música y discurso. Sin embargo, el análisis de Fourier ventaneado es incompatible con ortogonalidad debido al tamaño fijo de la ventana, le hace falta la flexibilidad de las wavelets (Hubbard, 1997).

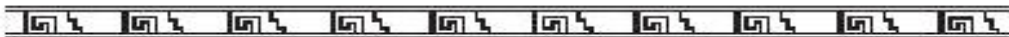
La mayoría de los datos que representan problemas físicos que modelamos no son totalmente aleatorios, pero tienen una cierta estructura de correlación. La correlación es local en tiempo (dominio del espacio) y frecuencia (dominio espectral). Deberíamos aproximar estos conjuntos de datos con bloques que posean localización tanto en tiempo como en frecuencia. Estos bloques serán capaces de revelar la estructura de correlación intrínseca de los datos resultando en una aproximación potente de cualidades: sólo un número pequeño de bloques puede representar con precisión los datos. En electromagnetismo las wavelets compactas (estrictamente localizadas en el espacio) pueden ser usadas como funciones base. Estas wavelets no pueden tener un espectro estrictamente finito, pueden ser aproximadamente localizadas en el espectro (Pan, 2003).

En general, preferimos un decaimiento rápido (exponencial o polinomial inverso) alejado del centro de la masa de la función. La frecuencia localizada representa el límite de banda. El decaimiento de altas frecuencias corresponde a la suavidad de las wavelets: entre más suave sea la función, más rápido será el decaimiento. Si el decaimiento es exponencial, la función muchas veces es infinitamente diferenciable. El decaimiento hacia bajas frecuencias corresponde al número de momentos de fuga polinomiales de la wavelet. Debido a la localización en tiempo-frecuencia de las wavelets, podemos obtener una representación eficiente. La idea de la localización en frecuencia en términos de suavidad y momentos de fuga puede generalizar el concepto de localización en frecuencia múltiple, en donde la FT no está disponible (Pan, 2003).

Las series de wavelet convergen uniformemente para todas las funciones continuas, mientras que las series de Fourier no. En electromagnetismo, los campos frecuentemente son discontinuos a través de las fronteras de materiales. Las wavelets descomponen y reconstruyen funciones de manera efectiva debido al análisis multirresolucional (MRA), esto es, el paso de una escala a otra más burda o más fina. MRA provee una transformada de wavelet rápida que permite la conversión entre una función y sus coeficientes de wavelet o de complejidad lineal o lineal-logarítmica (Pan, 2003).

Podemos usar wavelets para descomponer datos, funciones y operadores en diferentes componentes de frecuencia y después estudiar cada componente con un nivel de resolución que corresponda a la escala de la componente en particular. Esta técnica de multirresolución supera al





análisis de Fourier de tal manera que tanto el dominio del tiempo como el de la frecuencia puedan ser preservados. De manera informal, podemos decir que la transformada de wavelet lleva a cabo un muestreo optimizado. En contraste, la FT ventaneada sobremuestra el objeto bajo estudio, con respecto al criterio de muestreo de Nyquist (Pan, 2003).

1.3 Transformada de wavelet

La transformada de wavelet (WT) es útil para analizar señales que pueden describirse mejor como no periódicas, intermitentes o transitorias (Addison, 2002). Además tiene la habilidad de examinar la señal simultáneamente tanto en tiempo como en frecuencia de una manera distinta a la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT).

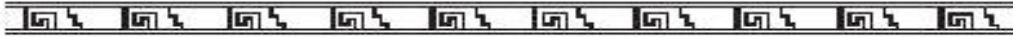
El análisis de Fourier tiene otros límites: la transformada de Fourier (FT) esconde información sobre el tiempo. Proclama sin ambigüedad qué tanto de cada frecuencia es contenida por una señal, pero es reservada sobre cuándo se emiten estas frecuencias. La FT pretende que cualquier instante de una señal es idéntica a cualquier otro, aún cuando la señal es tan compleja como una sinfonía de Mozart o cambia tan dramáticamente como el electrocardiograma de un ataque cardíaco fatal. El análisis de Fourier no es apto para señales muy cortas o señales que cambian de repente y son impredecibles. Además, la falta de información sobre tiempo hace que la FT sea vulnerable a errores (Hubbard, 1997).

La STFT ventaneada compara un segmento de la señal con bits de curvas oscilantes, primero de una frecuencia, luego de otra y así. Cuando hemos analizado el segmento, deslizamos la ventana hacia el siguiente. Algunas desventajas de la STFT son: mientras más pequeña sea la ventana, se localizarán mejor los picos o discontinuidades (cambios que suceden rápidamente), pero más ciega será para las componentes de baja frecuencia de la señal. Si escogemos una ventana más grande, podremos identificar mejor las bajas frecuencias pero será peor para la localización en el tiempo (Hubbard, 1997).

El punto de partida del trabajo con wavelets se dio con Jean Morlet quien desarrolló wavelets como una herramienta para la prospección de petróleo. Las frecuencias de los ecos están relacionadas con el grosor de estratos subterráneos. Todas las señales retrodispersadas corresponden a diferentes estratos de diferentes grosores. Morlet se quedó con el número de oscilaciones de la ventana constante y varió el ancho de la ventana, alargando o comprimiéndola como un acordeón.



Antecedentes



Cuando expandió la ventana, las oscilaciones también se alargaban, decreciendo su frecuencia; cuando comprimía a la wavelet, las oscilaciones adentro también se comprimían, produciendo altas frecuencias (Hubbard, 1997).

Como estas nuevas funciones tenían más o menos la misma forma, ya sea que hayan sido alargadas o comprimidas, Morlet las llamó “wavelets de forma constante” para distinguirlas de las funciones de Gabor y de otras wavelets de geofísica. La WT a veces es conocida como *microscopio matemático* porque wavelets grandes hacen una aproximación de la señal, mientras que wavelets pequeñas hacen una amplificación de los detalles.

Los segmentos de tiempo donde la wavelet y la señal son ambos positivos o negativos dan como resultado una contribución positiva a la integral. Regiones donde la señal y la wavelet son de signo opuesto dan como resultado contribuciones negativas a la integral. Las transformadas de wavelet son particularmente buenas para encontrar características de señal reconocibles de esta manera, cuando las características ocurren de manera intermitente (Addison, 2002).

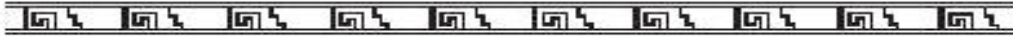
Grossman y Morlet demostraron que cuando se usan wavelets para representar una señal, la energía de la señal no cambia (Hubbard, 1997). Esta energía —valor promedio del cuadrado de la señal— no corresponde necesariamente a la energía física. Esto quiere decir que uno puede transformar una señal a una wavelet y después obtener la señal exacta de vuelta. También quiere decir que un cambio pequeño en la representación de wavelet produce el cambio pequeño correspondiente en la señal (Hubbard, 1997).

Mientras que la FT convierte una señal de una variable (tiempo o espacio) en otra señal de una variable (frecuencia), la WT produce una transformada de dos variables (tiempo y frecuencia). La utilidad de las wavelets es convertir la información de una señal en números (coeficientes) que puedan ser manipulados, analizados o usados para reconstruir la señal original. Los coeficientes nos dicen de qué manera la función analizada (senos y cosenos, wavelets) necesita ser modificada para reconstruir la señal, sumando wavelets de diferentes tamaños y posiciones. La técnica para calcular coeficientes consiste en multiplicar la señal analizada por una función de wavelet madre y calcular la integral del producto (Hubbard, 1997).

Al expandir o comprimir una wavelet, ésta se adapta automáticamente a las diferentes componentes de una señal: una ventana pequeña para componentes de alta frecuencia y una ventana grande para las de baja frecuencia. Este procedimiento se conoce como *multirresolución*. En la búsqueda de petróleo, el análisis a altas frecuencias corresponde a inspeccionar los estratos más delgados (Hubbard, 1997).



Antecedentes



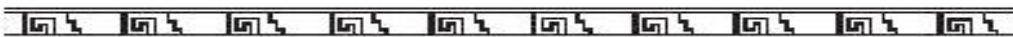
Algunas veces se habla sobre escala en lugar de resolución y Morlet hablaba de octavas. Resolución tiene que ver con el hecho de que el tamaño cambiante de la wavelet cambia el tamaño de las componentes que se pueden observar. Octavas se refieren al hecho de que ir de una resolución a una dos veces más fina duplica la frecuencia de las wavelets de manera que éstas codifican frecuencias que son dos veces más altas. La naturaleza peculiar de las wavelets es que la resolución, escala y frecuencia cambian al mismo tiempo (Hubbard, 1997). Las wavelets encuentran las propiedades que corresponden a transitorios fuertes como la ruptura y discontinuidad. Son adecuadas para observar cambios como los picos o pulsos en una señal o bordes en una imagen. Un coeficiente de wavelet mide la correlación o el acuerdo entre la wavelet y el segmento correspondiente de la señal. Una alta correlación quiere decir que existe un pequeño pedazo de la señal que se parece a la wavelet (Meyer, 1992).

Por definición, la wavelet tiene una integral de cero (mitad de área es positiva, otra mitad es negativa). Multiplicar la wavelet por una constante cambia las partes positiva y negativa de la misma manera y la integral sigue siendo cero. También podemos construir wavelets que producen coeficientes pequeños o iguales a cero cuando son comparados con funciones lineales, cuadráticas y polinomios de grado elevado.

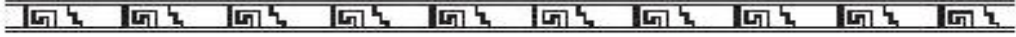
Hablando matemáticamente, la WT es el producto de la función wavelet con la señal. Si la wavelet empata la forma de la señal en una escala y posición específica, entonces se obtiene un valor grande de transformada. Si la wavelet y la señal no se correlacionan, obtenemos un valor bajo de transformada (Hubbard, 1997).

El GPR emplea la transformada de Fourier como otro tipo de análisis. Aunque es un método muy útil y que se ha aplicado en diferentes áreas de investigación, nosotros mostramos en este trabajo que para el estudio del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada fue mejor emplear el análisis wavelet. Las wavelets son funciones manipuladas a través de un proceso de traslación (movimiento temporal) y dilatación (ensanchamiento de wavelet) para transformar la señal en otra forma que se desarrolla en tiempo y escala (periodo). Esto no se puede hacer con la transformada de Fourier.

En la siguiente sección presentamos ejemplos en donde explicamos cómo interpretar los resultados que nos muestra la transformada de wavelet continua.



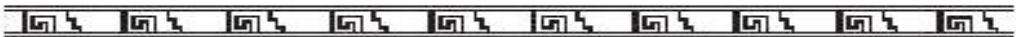
Antecedentes



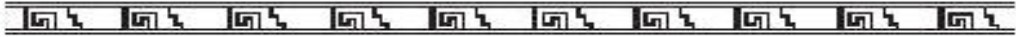
1.3.1 Ejemplos gráficos de la transformada de wavelet continua (CWT)

En estos ejemplos utilizamos series de tiempo sencillas compuestas por senoidales, a las cuales les aplicamos la transformada de wavelet continua.

Presentamos los espectros de WT para los efectos debidos a fase, frecuencia, amplitud y resolución. Para todas las gráficas de esta sección, el panel sobre el espectro corresponde a la serie de tiempo y el panel izquierdo al wavelet global.



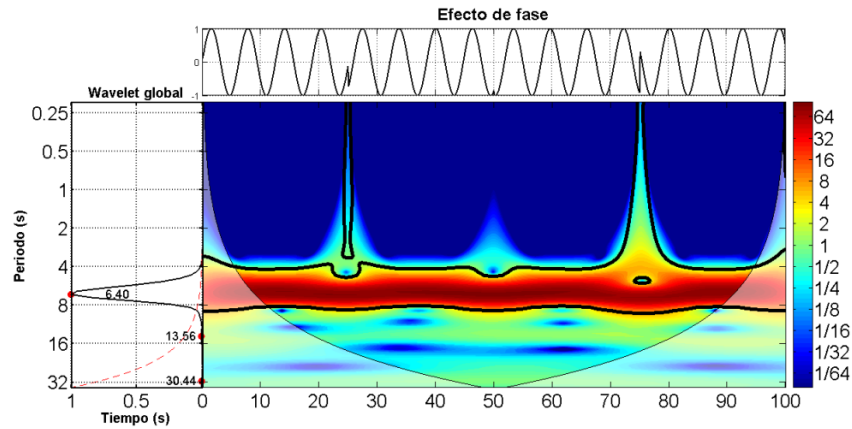
Antecedentes



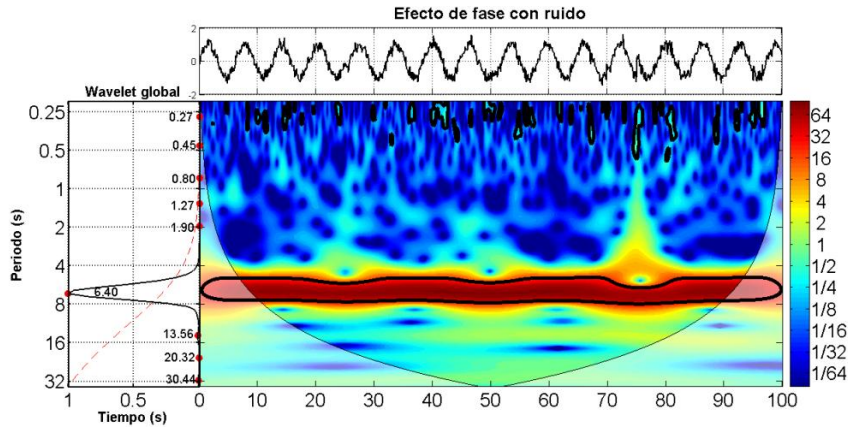
1.3.2 Efecto de la fase

Tenemos la siguiente serie de tiempo:

$$y = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq 25 \text{ s} \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & 25 < t \leq 50 \text{ s} \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right), & 50 < t \leq 75 \text{ s} \\ \sin(t - \pi), & 75 < t \leq 100 \text{ s} \end{cases}$$



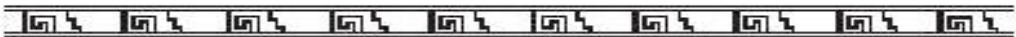
a) Sin ruido



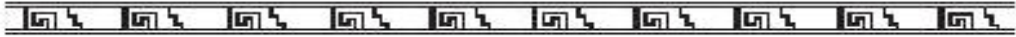
b) Con ruido

Fig. 1.6. Senoidales con fases diferentes ($\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi/4, \phi_3 = \pi/2, \phi_4 = \pi$ rad).

En la figura 1.6 podemos observar cómo los picos en los espectros de wavelet coinciden con los cambios de fase en la serie de tiempo, tanto en la serie original como en el caso de ruido añadido. En este ejemplo, alrededor de 25 s observamos el primer cambio de fase, a los 50 s el segundo y alrededor de 75 s el tercero.



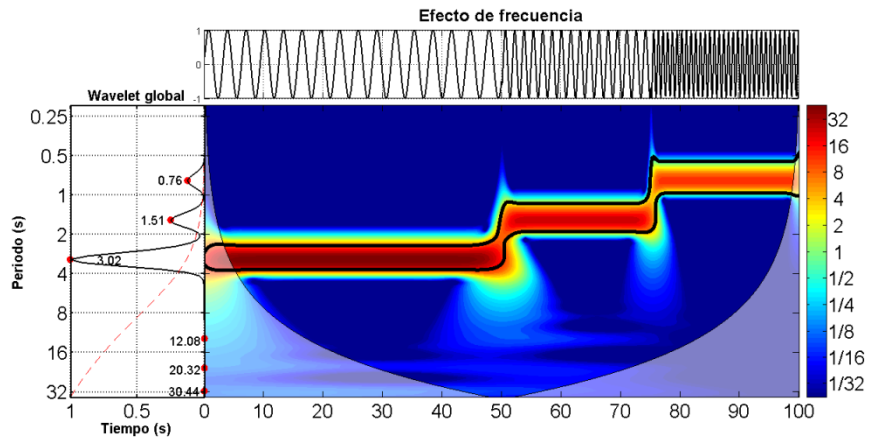
Antecedentes



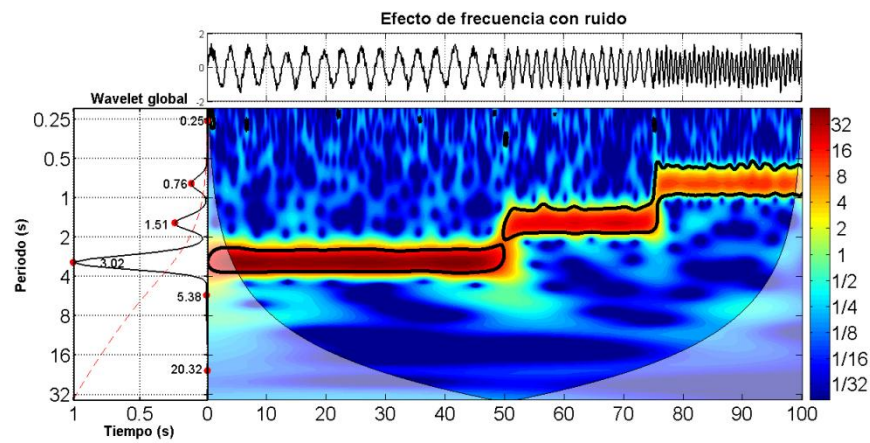
1.3.3 Efecto de la frecuencia

Tenemos la siguiente serie de tiempo:

$$y = \begin{cases} \sin 2t, & 0 \leq t \leq 50 \text{ s} \\ \sin 4t, & 50 < t \leq 75 \text{ s} \\ \sin 8t, & 75 < t \leq 100 \text{ s} \end{cases}$$



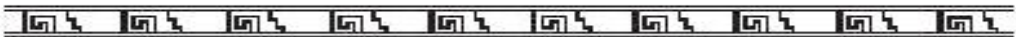
a) Sin ruido



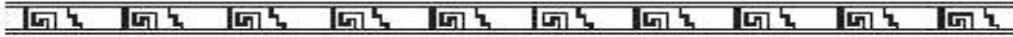
b) Con ruido

Fig. 1.7. Senoidales con frecuencias diferentes ($f_1 = 2$, $f_2 = 2$, $f_3 = 4$, $f_4 = 8$ Hz).

En la figura 1.7 podemos identificar los periodos que corresponden a cada frecuencia tanto de la serie original como de la que se le añadió ruido: el periodo de 3.02 s corresponde a la frecuencia de 2 Hz, el de 1.51 s a la de 4 Hz y el de 0.76 s a la de 8 Hz.



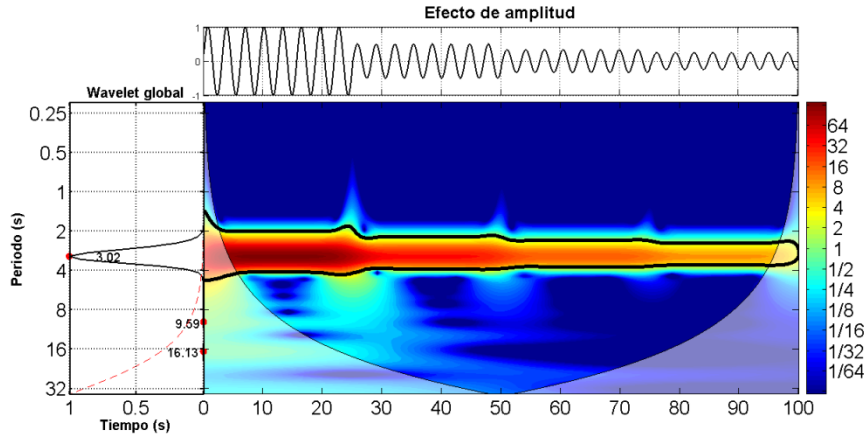
Antecedentes



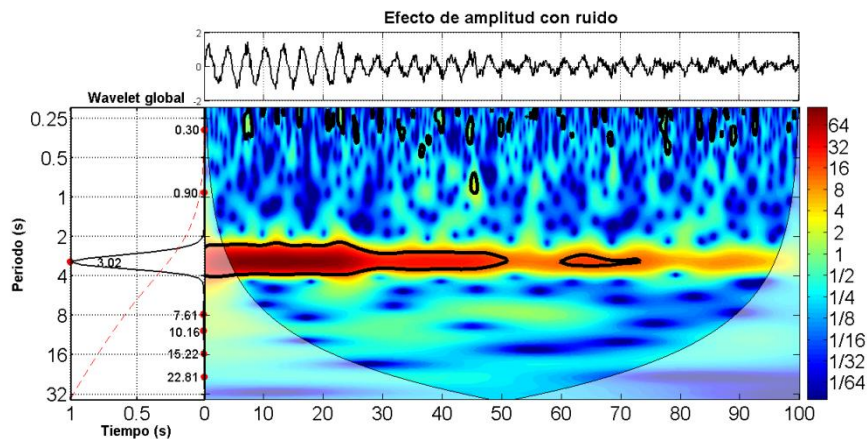
1.3.4 Efecto de la amplitud

Tenemos la siguiente serie de tiempo:

$$y = \begin{cases} \sin 2t, & 0 \leq t \leq 25 \text{ s} \\ \frac{1}{2} \sin 2t, & 25 < t \leq 50 \text{ s} \\ \frac{1}{3} \sin 2t, & 50 < t \leq 75 \text{ s} \\ \frac{1}{4} \sin 2t, & 75 < t \leq 100 \text{ s} \end{cases}$$



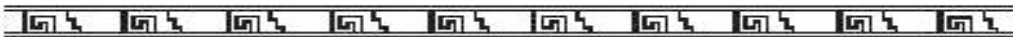
a) Sin ruido



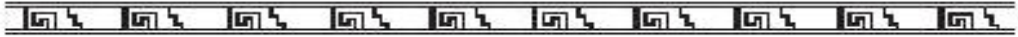
b) Con ruido

Fig. 1.8. Senoidales con amplitudes diferentes ($A_1 = 1, A_2 = 1/2, A_3 = 1/3, A_4 = 1/4$).

En la figura 1.8 podemos observar pequeños picos y el espesor de la banda en el espectro debido a la diferencia en amplitud, especialmente en la gráfica sin ruido (fig. 1.8a). Alrededor de 25 s podemos identificar el primer cambio de amplitud, a los 50 s el segundo y alrededor de 75 s el tercero. El periodo que predomina de 3.02 s es el correspondiente a la frecuencia de 2 Hz.

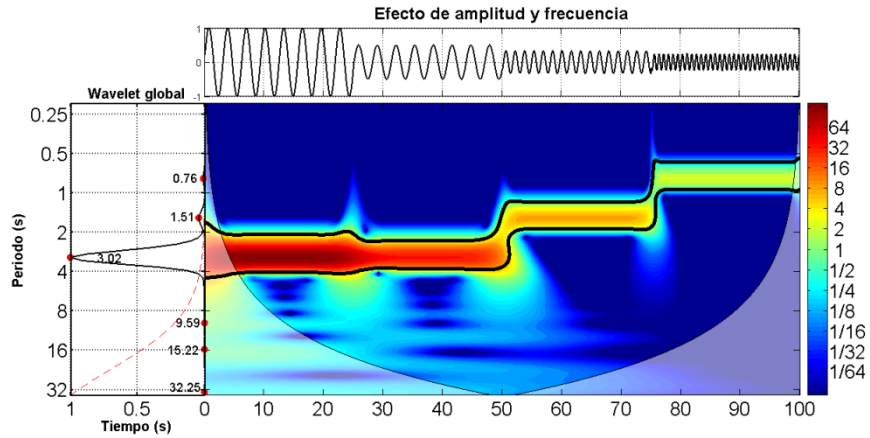


Antecedentes

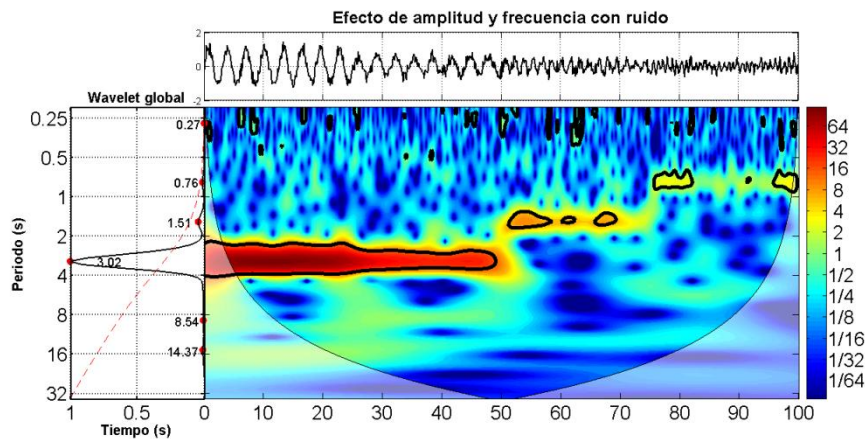


Para el caso de una serie de tiempo con amplitudes y frecuencias diferentes:

$$y = \begin{cases} \sin 2t, & 0 \leq t \leq 25 \text{ s} \\ \frac{1}{2} \sin 2t, & 25 < t \leq 50 \text{ s} \\ \frac{1}{3} \sin 4t, & 50 < t \leq 75 \text{ s} \\ \frac{1}{4} \sin 8t, & 75 < t \leq 100 \text{ s} \end{cases}$$



a) Sin ruido



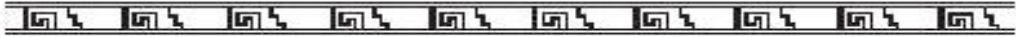
b) Con ruido

Fig. 1.9. Senoidales con amplitudes ($A_1 = 1$, $A_2 = 1/2$, $A_3 = 1/3$, $A_4 = 1/4$) y frecuencias diferentes ($f_1 = 2$, $f_2 = 2$, $f_3 = 4$, $f_4 = 8$ Hz).

En la figura 1.9, tanto en la serie de tiempo original como en la que se añadió ruido, podemos identificar los periodos que corresponden a las frecuencias (3.02 s para 2 Hz, 1.51 s para 4 Hz y 0.76 s para 8 Hz), así como los picos que corresponden a los cambios de amplitud (el primero en 25 s, el segundo en 50 s y el tercero en 75 s).



Antecedentes



1.3.5 Efecto de la resolución

Si tenemos una serie de tiempo: $y = \begin{cases} \sin 2t, & 0 \leq t \leq 50 \text{ s} \\ \sin 4t, & 50 < t \leq 75 \text{ s} \\ \sin 8t, & 75 < t \leq 100 \text{ s} \end{cases}$

En donde: $t = 100 \times \text{time}$, $\text{time} = 0 : \frac{1}{NWT} : 1$ y $NWT = 8192, 1024, 512$ y 128 . NWT es el número de puntos o tamaño de bloque de la señal. La resolución DT la calculamos como $DT = \frac{1}{NWT}$.

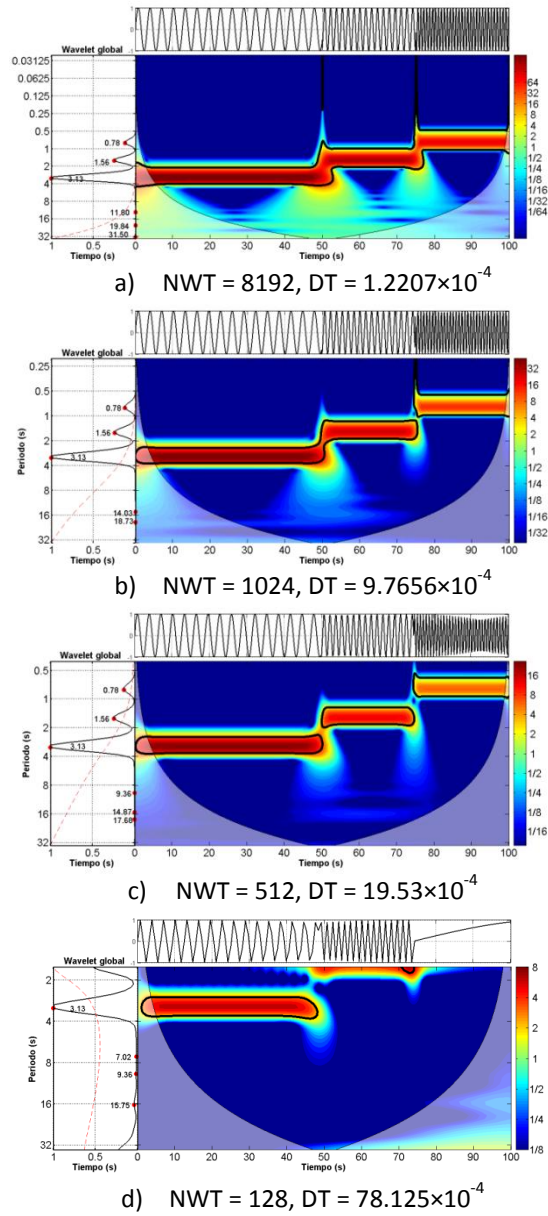
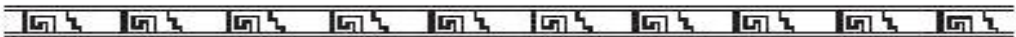
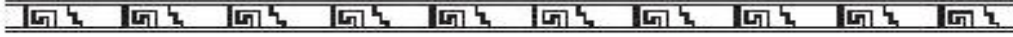


Fig. 1.10. Senoidales con resoluciones diferentes ($DT = 1/NWT$).



Antecedentes



De la figura 1.10 podemos ver que los periodos están mejor definidos a una resolución mayor, como es el caso para $NWT = 8192$.

1.4 Trabajos de análisis en GPR

Recientemente se ha aplicado el análisis wavelet en varios trabajos relacionados con GPR. A continuación mencionamos algunos:

1.4.1 Trabajos de GPR que aplican el análisis wavelet

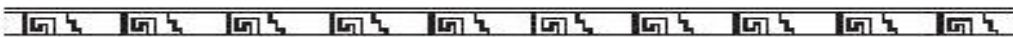
Uno de los problemas que se tiene con señales de GPR es que se corrompen fácilmente por ruido, ya que el receptor tiene una banda ultra ancha (UWB). El ruido captado por este sistema puede enmascarar las retrodispersiones débiles que resultan de las inhomogeneidades localizadas en la profundidad de la estructura estudiada. Por esta razón, Baili et al. (2006) investigaron el uso exitoso de la transformada discreta de wavelet (DWT) para eliminar el ruido de las señales de GPR. Emplearon diferentes wavelets madre para eliminar el ruido de señales de GPR captadas de pavimentos. Encontraron que, con el mismo nivel de procesamiento, la DWT de doble densidad (DDDWT) supera a la wavelet madre Daubechies de orden 6.

Ni et al. (2010) también emplearon la DWT como una técnica de procesamiento de señales, para filtrar y mejorar los datos crudos de GPR con el fin de obtener imágenes de perfil de mayor calidad. Llevaron a cabo experimentos de laboratorio y analizaron las ubicaciones de las tuberías enterradas bajo diferentes condiciones. Las tuberías eran hechas de plástico y metal, y se estudiaron las configuraciones de dos tuberías en paralelo y una tubería sencilla, ambas horizontales. Los resultados experimentales indican que los perfiles de DWT pueden proporcionar más información que el perfil tradicional de GPR. Las imágenes del diámetro y la posición de las tuberías, incluso las dos tuberías de diferentes materiales y en alineación horizontal, pueden mejorarse al utilizar el perfil de DWT.

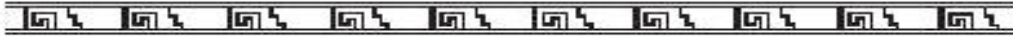
Centeno-Salas et al. (2014) propusieron la implementación del algoritmo piramidal de Mallat⁷ a los datos de GPR, de acuerdo con el análisis de su naturaleza transitoria. Éste es un método de descomposición de la DWT, la cual introduce una variable y una longitud de wavelet variable y escalable, con un soporte compacto y una banda limitada en el dominio de la frecuencia.

⁷ Algoritmo que determina los coeficientes de aproximación (a) y de detalle (b) de nivel $j-1$ a partir de los coeficientes de aproximación de nivel j en base a la recurrencia dada en: $a_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{j,2k} + \frac{1}{\sqrt{2}}a_{j,2k+1}$ y

$$b_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{j,2k} - \frac{1}{\sqrt{2}}a_{j,2k+1}.$$



Antecedentes



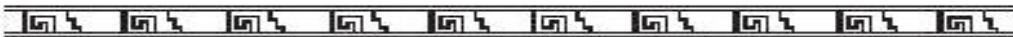
Los datos de GPR fueron analizados en un plano de tiempo-frecuencia y fueron sintetizados en diferentes niveles de resolución a través de octavas de frecuencia que permitieron la eliminación de ruido. Esta técnica mejora los radargramas obtenidos en áreas urbanas ya que el ruido característico enmascara a los reflectores principales. En esos casos, la aplicación de la transformada discreta de Fourier (DFT), diseñada para el análisis de datos en el que la frecuencia no varía con el tiempo, es limitada. La DWT es una herramienta alternativa para el análisis de los datos transitorios porque determina el tiempo que corresponde a cada componente de frecuencia y además permite reconstruir los datos en una secuencia de espacios de aproximación sucesivos, tales como los subespacios ortogonales ⁸.

El análisis de wavelet de multiresolución (MRA), una de las técnicas más eficaces de wavelet aplicadas en el procesamiento de imágenes, permite la descripción de una imagen en términos de una forma aproximada, más los detalles en un intervalo amplio que puede ser útil para los procesos de filtración. El perfil 2D de GPR es similar a una imagen en todos los aspectos, si cada punto de los datos del perfil de GPR es considerado como un pixel de imagen en general. Jeng et al. (2009) proponen que, por este método, el MRA ofrece una base de filtración eficiente. Los autores prestaron atención especial a los datos con resonancia o a la dispersión de fuentes de ruido, donde este método ha demostrado ser muy útil.

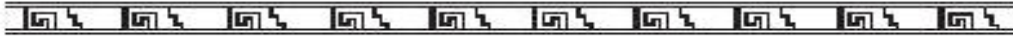
La interpretación cuantitativa de los datos de GPR es deseable para la mejora de la calidad de la imagen de radar. Idi y Kamarudin (2012) emplearon el análisis de MRA para procesar la imagen de radar en diferentes niveles de descomposición. La familia Daubechies fue usada para descomponer la imagen en cuatro niveles diferentes de detalles. Nivel 3 para detalles diagonales y nivel 4 para detalles horizontales, proporcionaron una visualización sin ruido de las discontinuidades del subsuelo. Esto condujo a la detección de una estructura enterrada y a la identificación de su ubicación espacial. Se estimó la profundidad de la estructura enterrada en base a la escala de la imagen. Este trabajo demuestra la eficacia del análisis de la transformada de wavelet de Daubechies como otra técnica de exploración de datos de estructuras adquiridos por GPR.

En las ciencias de la Tierra, es común obtener la imagen de la propiedad de un objetivo al emplear datos geofísicos indirectos de baja resolución. La reducción de escala de estos datos de baja resolución a la resolución apropiada del objetivo, es un tema importante en la formación de

⁸ Se dice que dos subespacios S_1 y S_2 de \mathfrak{R}^n son ortogonales si el producto punto $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ para todos los vectores $\mathbf{v}_1 \in S_1$ y para todos $\mathbf{v}_2 \in S_2$.



Antecedentes

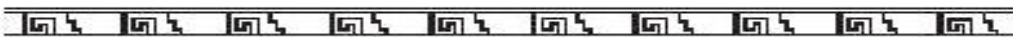


imágenes. Simard et al. (2011) emplearon la metodología basada en wavelet para reducir la escala de las imágenes geofísicas de baja resolución a un modelo geológico de alta resolución por medio del uso de un modelo hidrogeofísico análogo. En primer lugar, todas las imágenes disponibles fueron transformadas por wavelet. Las texturas de porosidad de alta resolución fueron reproducidas por medio de un recocado simulado⁹, optimizando las estadísticas de los coeficientes de detalle del objetivo con las estadísticas de los coeficientes de detalle del modelo análogo en cada escala. El enfoque fue evaluado en un modelo de porosidad sintética. Las porosidades obtenidas reprodujeron las características a gran escala del campo de porosidad del objetivo apoyado por los datos geofísicos, así como por las texturas de alta frecuencia extraídas del campo de porosidad del modelo análogo.

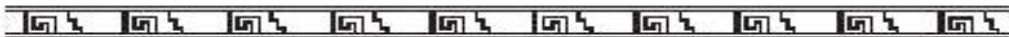
Tzanis (2013) introduce un método para eliminar el ruido de datos de GPR y extraer información geométrica a partir de características estructurales dependientes de la escala, basado en filtros direccionales de wavelets B-Spline (BSW) de una y dos dimensiones, y filtros de Gabor de dos dimensiones. Un filtro direccional BSW se construye mediante la disposición lateral de wavelets unidimensionales idénticas s de longitud L , modificando la dirección s -paralela (“span”) con una función de ventana adecuada y rotando la matriz resultante hacia la orientación deseada. La longitud L de la wavelet define la escala temporal y espacial a aislar y “span” determina la longitud sobre la que se suaviza (resolución espacial). El filtro de Gabor se genera al multiplicar una gaussiana elíptica por una onda plana compleja; en cualquier dirección, las escalas temporal o espacial a aislar son determinadas por la longitud de onda λ de la onda plana y la resolución espacial por el coeficiente espacial de aspecto γ , el cual especifica la elipticidad de la base de la función de Gabor. En cualquier orientación, ambos tipos de filtros pueden ser sintonizados en cualquier frecuencia o número de onda espacial al variar L o λ , respectivamente. Los filtros pueden aplicarse directamente a los radargramas en 2D, en cuyo caso extraen información sobre las escalas dadas con ciertas orientaciones. De manera alterna, pueden ser rotadas en diferentes orientaciones bajo control adaptativo¹⁰, para así permanecer sintonizadas en una frecuencia o número de onda dados. Estos métodos de filtración también pueden ser utilizados para mejorar el coeficiente de S/R

⁹ Algoritmo de búsqueda meta-heurística para problemas de optimización global. El objetivo general de este tipo de algoritmos es encontrar una buena aproximación al valor óptimo de una función en un espacio de búsqueda grande. A este valor óptimo se lo denomina *óptimo global*.

¹⁰ Método de control que se debe adaptar a un sistema controlado por parámetros que varían o que inicialmente son inciertos.



Antecedentes



en una manera particularmente adecuada para datos de GPR. Esto se debe a que la respuesta en frecuencia de los filtros simula las características de frecuencia de la wavelet fuente. Las características de localización temporal de los filtros pueden ser explotadas para investigar las características de propagación de señales; por lo tanto, las propiedades de materiales. Este método resultó ser muy eficaz en la extracción de información escalar fina o gruesa de datos ruidosos de GPR a partir de inspecciones arqueométricas y geotécnicas.

1.4.2 Trabajos de GPR que utilizan otros métodos de análisis

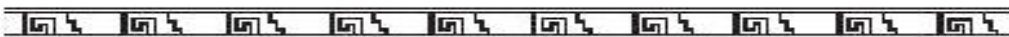
Con el fin de localizar objetos cilíndricos como tuberías y cables enterrados bajo tierra con GPR, es necesario detectar hipérbolas de retrodispersión en los radargramas medidos. En la práctica, esta tarea en muchos casos es complicada debido a los diferentes entornos geológicos, a hipérbolas incompletas y en primer lugar, al hecho de que los objetos cercanos generan hipérbolas que interfieren entre sí. Birkenfeld (2010) desarrolló un sistema automático de detección basado en una red neuronal¹¹ usando campos receptivos¹². El autor demostró que, con una definición adecuada de datos de entrenamiento, el sistema fue capaz de detectar hipérbolas, incluso en situaciones difíciles.

Con base en la Distribución de Wigner–Ville (WVD)¹³, Elizondo et al. (2012) realizaron un análisis en tiempo y frecuencia de datos de GPR, basado en el estudio de la descomposición de la señal espectral. Calcularon una correlación entre la señal original y las componentes de tiempo-frecuencia para obtener anomalías estructurales de la información contenida en el radargrama, relacionándola con la geología disponible. En primer lugar, aplicaron un ejemplo teórico construido representando un túnel (tubería). Obtuvieron las firmas correspondientes en los dominios de tiempo y frecuencia. Por último, analizaron esta metodología en un sitio de prueba en la detección de un

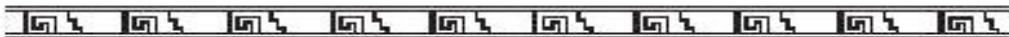
¹¹Redes neuronales: Modelos inspirados en las redes neuronales biológicas (sistema central nervioso de animales, en particular el cerebro) y se usan para estimar funciones que dependen de un número grande de entradas. Estas redes se presentan como sistemas de “neuronas” interconectadas que intercambian mensajes entre sí. Las conexiones se ponderan numéricamente para ser definidas en base a la experiencia, haciendo que estas redes se adapten a las entradas y sean capaces de aprendizaje.

¹² Campo receptivo de una neurona sensorial es la región particular del espacio sensorial en el que un estímulo activa a la neurona.

¹³WVD es una distribución de cuasiprobabilidad. Fue introducida por Eugene Wigner en 1932 para estudiar correcciones cuánticas en la mecánica estadística. El objetivo era conectar la función de onda que aparece en la ecuación de Schrödinger con la distribución de probabilidad en el espacio de fase. En 1948 fue derivada por Jean Ville como una representación cuadrática de la energía local en tiempo-frecuencia de una señal.



Antecedentes



tambo enterrado donde la geometría y su profundidad eran conocidas. La WVD fue capaz de definir los rasgos morfológicos relacionados con el tambo y por lo tanto, es probable que este método permita localizar este tipo de estructuras.

Por medio de sensores de radar UWB, Salman et al. (2008) llevaron a cabo las tareas de caracterización de materiales y reconocimiento de objetos en base a la imagen de todo el entorno. Los autores aplicaron una versión de UWB de elipsometría¹⁴ de microondas para la estimación de la permitividad de objetos homogéneos. La tarea de reconocimiento de objetos se llevó a cabo por medio de nodos biestáticos de sensor en base a las mediciones de GPR. Las evaluaciones del desempeño basado en la simulación, mostraron un comportamiento muy robusto debido al preprocesamiento adecuado de los datos de GPR. Las aplicaciones de este método incluyen la detección de fuentes de incendio, la detección de objetos metálicos ocultos debajo de la ropa y el reconocimiento de estructuras de construcción.

El GPR es una de las tecnologías que ha sido investigada ampliamente como un medio para mejorar la eficiencia en la detección de minas terrestres. Tesfamariam y Dilip (2014) propusieron dos métodos para detectar minas enterradas. Ambos métodos se basan en las técnicas de sustracción de fondo¹⁵ para detectar minas terrestres de plástico. El primer método emplea la estimación de fondo adaptativa y el segundo utiliza la estimación de fondo basada en la modelación multicapa de propagación de ondas electromagnéticas.

1.5 Trabajos sobre el algoritmo de wavelet multicruzado

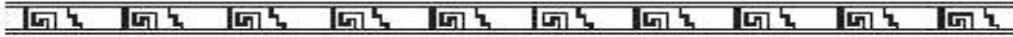
Legates et al. (2013) presentaron una cuantificación mejorada de las variaciones en microrrelieve de la corteza de árboles que utiliza wavelets en un dominio circular de los datos adquiridos mediante el sistema automatizado de medición de árboles de LaserBark™. El microrrelieve de la corteza afecta tanto a la hidrología como a la biogeoquímica de los bosques. Es por esto que una representación mejorada del microrrelieve de la corteza sería muy útil para describir la influencia de varias especies de árboles en las contribuciones de agua y solutos en el suelo del bosque. La mayoría de los métodos existentes para cuantificar el microrrelieve de la

¹⁴ Elipsometría es una técnica óptica para investigar las propiedades dieléctricas (conductividad eléctrica, composición, naturaleza cristalina y otras) de materiales como las películas delgadas. La elipsometría de microondas puede estar sujeta a los efectos significativos de ondas estacionarias resultantes de la retrodispersión.

¹⁵ Técnica en el campo de procesamiento de imágenes en donde el primer plano de una imagen es extraída para su procesamiento posterior.



Antecedentes



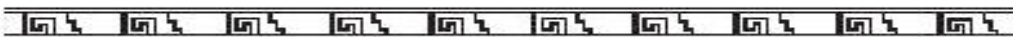
corteza son medidas globales, es decir, proporcionan un único número que representa el microrrelieve general de la corteza. Para resolver esto, los autores propusieron el análisis wavelet de los datos del sistema automatizado de medición de árboles de LaserBark™ y lo describieron para cuantificar las variaciones en el microrrelieve de la corteza, alrededor del perímetro del árbol. Esta medida describió las diferencias espaciales en el microrrelieve y permitió una representación de los árboles que exhibieron variabilidad direccional en el microrrelieve debido a los efectos naturales o antropogénicos. La componente radial resaltó los cambios en la profundidad del microrrelieve, mientras que la componente tangencial se relacionó con la distancia entre los surcos en la sección transversal de la corteza. Por lo tanto, es probable que el análisis wavelet sea una herramienta útil para comparar la estructura de corteza que varía, dentro de una misma especie de árbol o entre diferentes especies de árboles, en diferentes etapas de crecimiento, y entre árboles que han crecido bajo diferentes condiciones ambientales.

Velasco-Herrera et al. (2014) hicieron un análisis de la sincronización de las capas de la atmósfera solar. Para encontrar la relación entre los diferentes índices solares (manchas solares y el índice de la corona solar) en el espacio de tiempo-frecuencia, los autores emplearon una nueva wavelet cruzada múltiple (MCW) para encontrar la sincronización de la actividad solar en diferentes capas solares. Este análisis les permitió determinar el tipo de relación y sincronización entre las diferentes manifestaciones de las distintas capas solares (lineal o una relación más compleja).

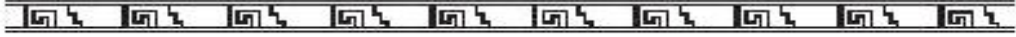
Soon et al. (2014) reportaron las variaciones climáticas sobre las escalas de tiempo centenaria y milenaria. Aplicaron un nuevo algoritmo para calcular los espectros de wavelet cruzado múltiple en el dominio de tiempo-frecuencia, el cual es generalizado para dos o más series de tiempo (el algoritmo MCW descrito en este trabajo doctoral). Los autores encontraron por medio de este análisis las relaciones estadísticas y físicas entre los índices de la actividad solar y los registros climáticos indirectos¹⁶.

De la revisión de estos trabajos de análisis de GPR y análisis wavelet, podemos concluir que el análisis espectral de tiempo-frecuencia probablemente nos permite obtener resultados más

¹⁶ Datos o registros indirectos: Características físicas preservadas del entorno que pueden sustituir a las medidas directas. Los paleoclimatólogos reúnen datos indirectos de los registradores de variabilidad natural del clima, tales como anillos de árboles, núcleos de hielo, polen fósil, sedimentos del océano, corales y datos históricos. Mediante el análisis de los registros tomados de éstas y otras fuentes indirectas, los científicos pueden ampliar nuestro conocimiento del clima mucho más allá del registro instrumental.

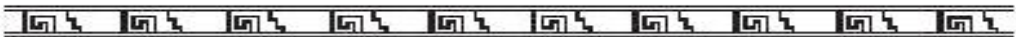


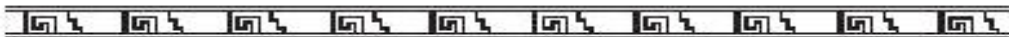
Antecedentes



verosímiles de la interpretación del radargrama. Por esta razón, se propone realizar este tipo de análisis para mejorar la interpretación de los radagramas estudiados.

El análisis que hicimos en este trabajo fue aplicado directamente a los datos crudos de GPR, utilizando una wavelet continua compleja con muy buena resolución en la periodicidad (Morlet). La cual nos permitió encontrar, por medio de dos algoritmos de función multicruzada, los periodos correspondientes a los diferentes estratos estudiados en el análisis de las trazas obtenidas en el caso del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada. Estos algoritmos son una extensión del teorema de Wiener-Khintchine para N señales (actualmente sólo es para dos). El algoritmo de función multicruzada de Fourier descrito en este trabajo, es propuesto como una nueva herramienta de procesamiento para los equipos de GPR que ya cuentan con la transformada de Fourier. Sería la primera vez que se aplican estos métodos en conjunto en un trabajo de investigación de arqueología.





Capítulo 2

Análisis de datos

Este capítulo es acerca de las mediciones y los métodos usados en este trabajo como son la transformada continua de wavelet, wavelet cruzado, wavelet de coherencia y la transformada inversa de wavelet.

Además se describen dos algoritmos nuevos llamados wavelet multicruzado (MCW) y función multicruzada de Fourier (FMC), la cual se basa en el teorema de Wiener-Khintchine (Khintchine, 1934).

2.1 Mediciones de GPR

Se hicieron seis mediciones ('Tun01'-'Tun06') con el GPR pulse EKKO IV de Sensors & Software (propiedad del IIMAS, UNAM y con apoyo del Dr. Román Álvarez Béjar) con antenas de 100 MHz y con una separación de 1 m (sistema biestático), cerca del túnel que se encuentra debajo del Templo de la Serpiente Emplumada en Teotihuacan (figuras 2.1-2.3).

'Tun01' se hizo justo enfrente de la entrada de la fosa vertical que comunica al túnel y con orientación de sur a norte (19°40'55.62" N Lat., 98°50'49.39" O Long.). 'Tun02' se hizo a la mitad de la distancia entre la fosa y el templo (19°40'55.49" N Lat., 98°50'48.89" O Long.). 'Tun03' se hizo a tres metros de 'Tun02' (19°40'55.44" N Lat., 98°50'48.75" O Long.; figura 2.5A), mientras que 'Tun04' se hizo a seis metros de 'Tun02' (19°40'55.40" N Lat., 98°50'48.63" O Long.). 'Tun03' y 'Tun04' se hicieron encima del túnel. 'Tun05' se hizo atrás de la plataforma adosada, a lo largo del callejón (19°40'55.02" N Lat., 98°50'47.56" O Long.). 'Tun06' se hizo en el mismo callejón que 'Tun05' pero un metro más cerca de la pirámide de la Serpiente Emplumada (19°40'55" N Lat., 98°50'47.50" O Long.; figura 2.6A). En total, fueron obtenidas 172 trazas para analizar. Varias cámaras se encontraron al final del túnel (figura 2.4). En la interpretación de los radargramas contamos con el apoyo del Dr. Román Álvarez Béjar del IIMAS, UNAM.



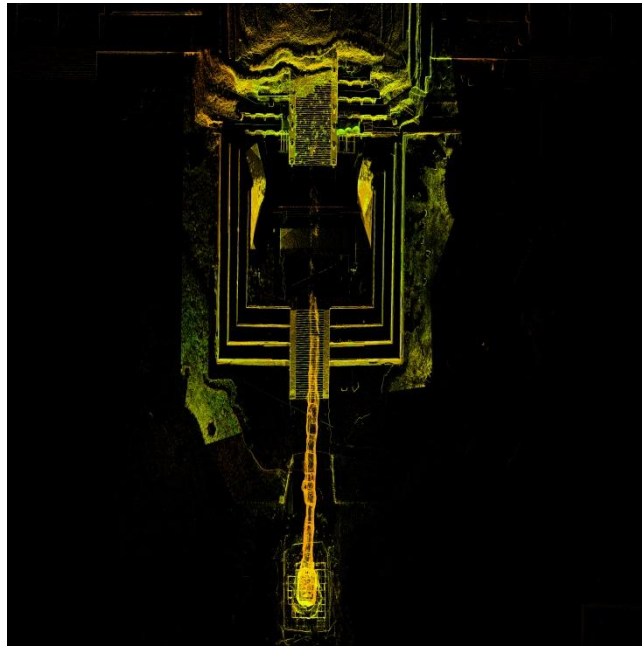
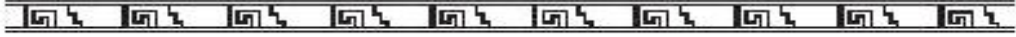


Fig. 2.1. Vista superior del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada.

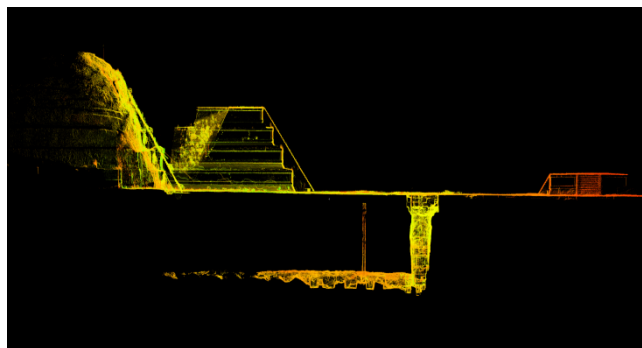
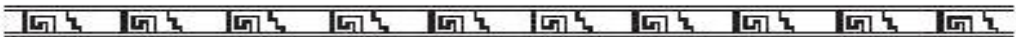


Fig. 2.2. Corte transversal del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada



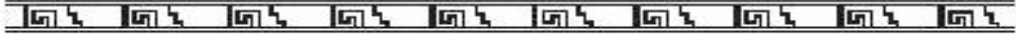
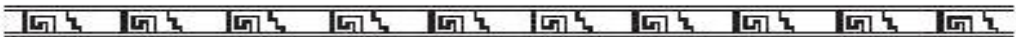


Fig. 2.3. Interior del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada.



Fig. 2.4. Interior de una de las cámaras al final del túnel.



Aplicación del radar de penetración en la zona arqueológica de Teotihuacan
Análisis de datos

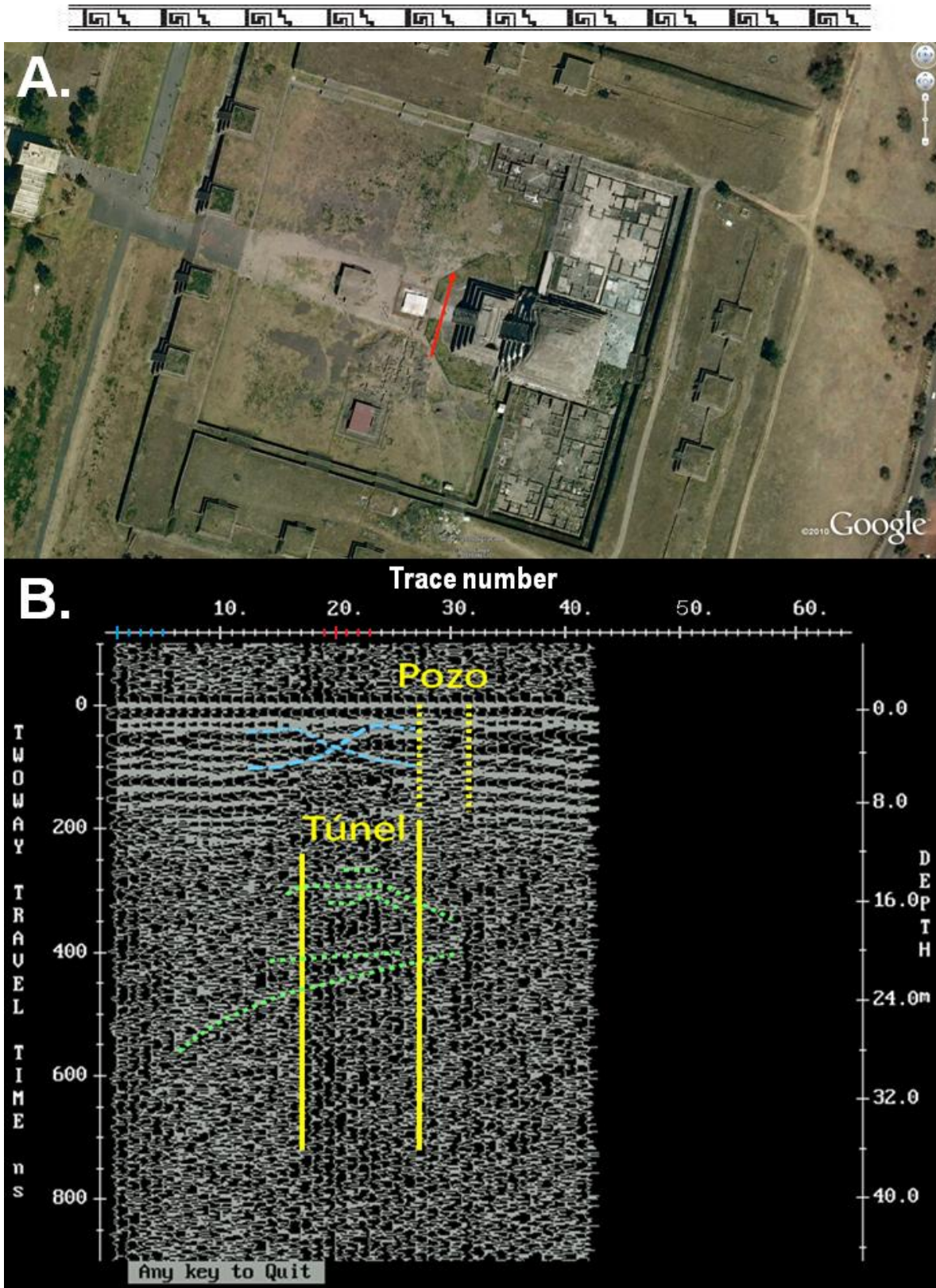


Fig. 2.5. Trazas de la medición 'Tun03'. (A) Ubicación. (B) Radargrama.

Aplicación del radar de penetración en la zona arqueológica de Teotihuacan
Análisis de datos

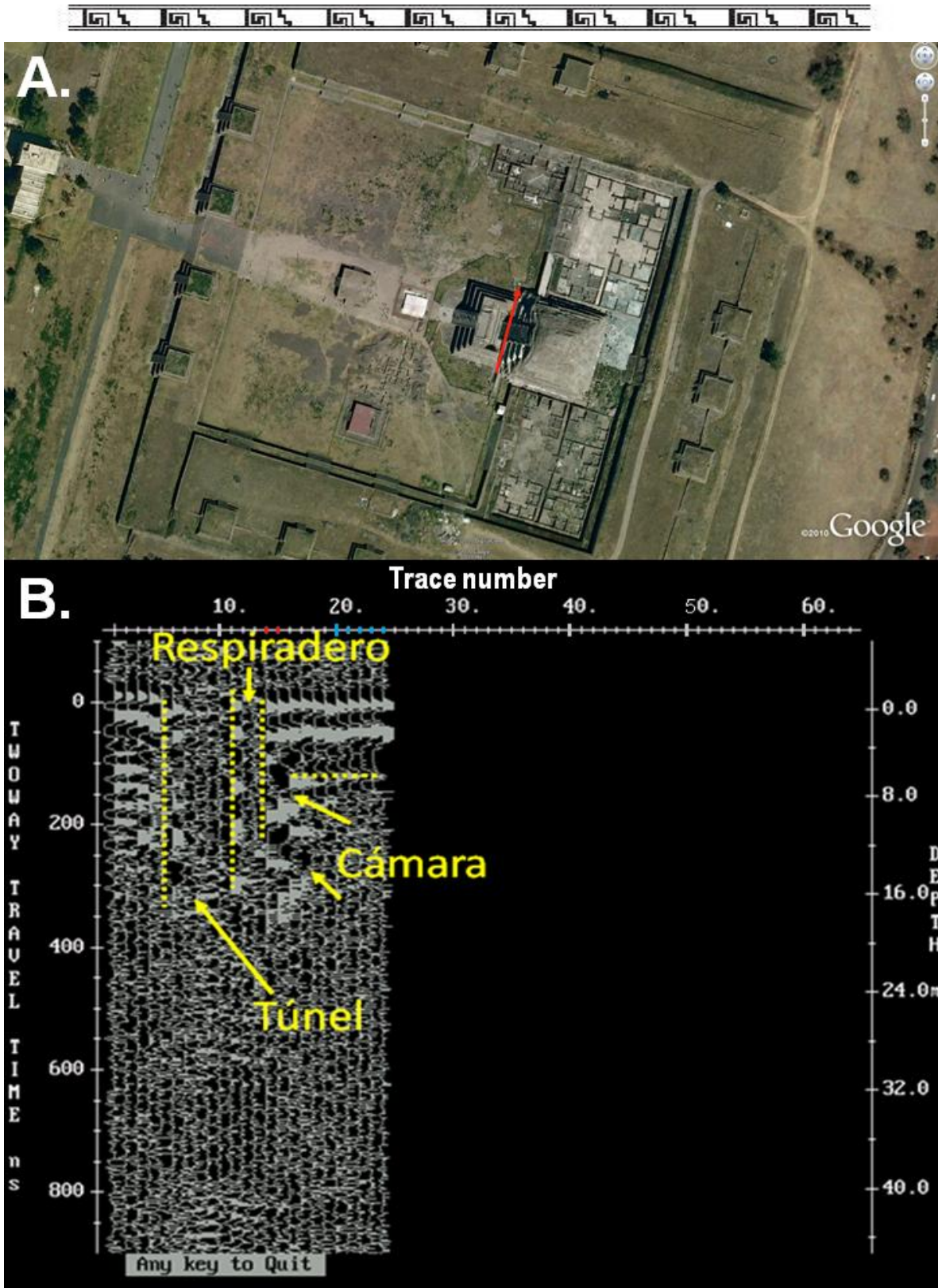
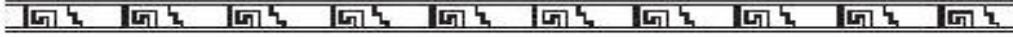


Fig. 2.6. Trazas de la medición 'Tun06'. (A) Ubicación. (B) Radargrama.



Del radargrama de la figura 2.5B, podemos decir que la fosa por donde se tiene acceso al túnel, es de unos catorce metros de profundidad y que el túnel tiene una longitud entre 100 y 120 metros. Además, podemos observar una zona de fractura resaltada por las líneas punteadas de color azul claro. En la figura 2.6B, podemos observar una cámara al final del túnel. Como se mencionó en la introducción, pudimos corroborar estas interpretaciones en el 2014 al finalizar la excavación: la longitud del túnel fue oficialmente de 102.43 metros y al final del túnel se encontraron tres cámaras. Así como una gran fractura que se encuentra antes de entrar a la última etapa del túnel.

Después de haber determinado el intervalo de las trazas de GPR dentro y fuera del túnel y de la cámara por medio de la interpretación de los radargramas de las mediciones ‘Tun03’ (cerca del túnel, compuesta por 42 trazas a lo largo de 82 m) y ‘Tun06’ (cerca de la cámara, compuesta por 24 trazas a lo largo de 24 m), ambos algoritmos de multicruzado descritos más adelante, fueron aplicados para determinar los periodos que caracterizan la matriz, arcilla y el relleno del túnel y la cámara. Las figuras 2.5B y 2.6B muestran las trazas que fueron analizadas: los números de traza correspondientes a las trazas dentro del túnel/cámara están resaltados en rojo, y los números de traza de aquellas que se encuentran fuera del túnel/cámara están resaltados en azul.

2.2 Transformada continua de wavelet (CWT)

La transformada continua de wavelet es útil para analizar la evolución de periodicidades en el dominio de tiempo-frecuencia. También tiene la capacidad de analizar señales intermitentes, no estacionarias o transitorias, como es el caso de una señal de GPR (Addison, 2002). Nosotros empleamos a la función Morlet como función madre porque da una mayor resolución en periodicidad/frecuencia.

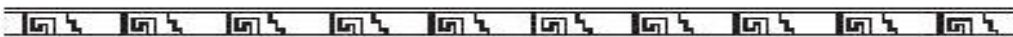
La wavelet Morlet consiste en una función exponencial compleja modulada por una wavelet gaussiana y se define como:

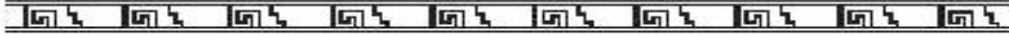
$$\psi(t, s) = e^{i\omega_0 t / s} e^{-t^2 / (2s^2)} \quad (2.1)$$

Donde t es el tiempo con $s = (\text{frecuencia})^{-1}$ como la escala de la wavelet y ω_0 es una frecuencia adimensional. Para nuestro análisis el número de onda $\omega_0 = 6$ para satisfacer la condición de admisibilidad (Farge, 1992).

La potencia de la wavelet se calcula como:

$$|W_n^X|^2 \quad (2.2)$$





Donde $|W_n^X|$ es la transformada de wavelet de una serie de tiempo X y n es el índice de tiempo (Torrence y Compo, 1998). La transformada continua de wavelet se define como:

$$W(s, \tau) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} X(n) \psi^* \left(\frac{n-\tau}{s} \right) dn \quad (2.3)$$

Donde τ es un parámetro de traslación y s de escala.

Para calcular la transformada de wavelet es necesario que la serie de tiempo sea de 2^n elementos. Si no es así, entonces se rellena con ceros y el cono de influencia (COI) es la región del espectro de wavelet fuera de la cual los efectos de borde se vuelven significativos (Torrence y Compo, 1998). En este trabajo las transformadas de wavelet tienen una resolución de 0.8 ns.

2.3 Reconstrucción por banda de una serie de tiempo

La serie de tiempo reconstruida es solamente la suma de la parte real de la transformada de wavelet sobre todas las escalas (Torrence y Compo, 1998). La descomposición de una señal puede obtenerse por medio de un filtro de tiempo-escala. Un filtro de tiempo-escala se define como:

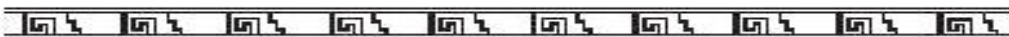
$$x_n = \frac{\delta_j \delta_t^{1/2}}{C_\delta \psi_0(0)} \sum_{j=0}^J \frac{\text{Re}\{W_n(s_j)\}}{s_j^{1/2}} \quad (2.4)$$

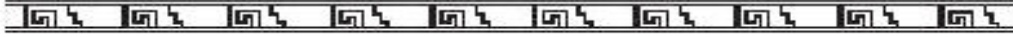
Donde δ_j es el factor de promediación de escala, C_δ es una constante ($\delta_j = 0.61$ y $C_\delta = 0.776$, para la wavelet de Morlet), $\psi_0(0)$ remueve la energía escalar y $s_j^{1/2}$ convierte a la transformada de wavelet en densidad de energía (Torrence y Compo, 1998).

Este tipo de filtrado puede hacerse simultáneamente en escala y tiempo al definir un valor de umbral de la potencia de wavelet. Este proceso de “eliminación de ruido” remueve cualquier región de baja amplitud de la transformada de wavelet, la cual probablemente es debida a ruido.

La ventaja que tiene esta técnica sobre otros métodos tradicionales de filtrado, es que remueve el ruido en todas las frecuencias y que puede ser empleada para aislar eventos únicos que tienen un espectro de potencia ancho o eventos múltiples que tienen frecuencia variable.

Como la transformada de wavelet es un filtro pasabanda con una función de respuesta conocida, es posible reconstruir la serie de tiempo ya sea usando deconvolución o el filtro inverso (Hudgins et al., 1993).





Formalmente, la relación de Parseval para wavelets nos dice que si $x(t)$ pertenece a $L^2(\mathfrak{R})$, entonces:

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |W(s, \tau)|^2 \quad (2.5)$$

La transformada inversa de wavelet (para casi toda t) se define como:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(s, \tau) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) ds d\tau \quad (2.6)$$

Donde C_ψ es la constante de admisibilidad.

En este trabajo se usaron los programas de Torrence y Compo (1998) para la reconstrucción de las series de tiempo analizadas.

2.4 Wavelet cruzado

El wavelet cruzado se define como:

$$W^{XY} = W^X W^{Y*} \quad (2.7)$$

Donde X y Y representan dos trazas diferentes y $*$ es el conjugado de la transformada W^Y .

El wavelet cruzado indica dónde hay alta potencia en común y revela información sobre la relación de fase entre las dos señales: si la orientación de la flecha es hacia la derecha, las señales están en fase; si la orientación es a la izquierda, están en antifase. Si la flecha está orientada hacia abajo, la señal uno está adelantada 90° con respecto a la señal dos; y si la flecha está orientada hacia arriba, la señal uno está retrasada 90° con respecto a la señal dos.

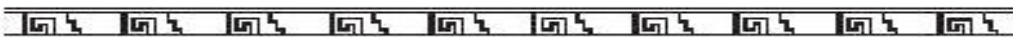
2.5 Wavelet de coherencia

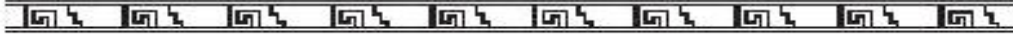
El wavelet de coherencia se puede definir como:

$$R_n^2 = \frac{|S(s^{-1}W_n^{XY}(s))|^2}{S(s^{-1}|W_n^X(s)|^2) \cdot S(s^{-1}|W_n^Y(s)|^2)} \quad (2.8)$$

Donde S es un operador que suaviza la ecuación y se define como $S(W) = S_{escala}(S_{tiempo}(W_n(s)))$.

Si analizamos la ecuación **2.8**, la definición de wavelet de coherencia se parece mucho al concepto de coeficiente de correlación. Es muy útil pensar en el wavelet de coherencia como un





coeficiente de correlación localizado en el espacio de tiempo-frecuencia. Este tipo de análisis indica el grado de similitud entre dos señales o trazas a la misma profundidad en este trabajo.

2.6 Wavelet global

El wavelet global se define como:

$$\bar{W}^2(s) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |W_n(s)|^2 \quad (2.9)$$

De acuerdo con la ecuación 2.9, el wavelet global es el promedio de los espectros de wavelet locales.

2.7 Algoritmos de la función multicruzada

2.7.1 Función multicruzada de Fourier (FMC)

A finales de los años veinte, Norbert Wiener introdujo el concepto de la función cruzada (Wiener, 1928), el cual permitió encontrar semejanzas y diferencias entre dos series de tiempo.

Con el desarrollo de nuevas tecnologías, actualmente se trabaja con equipos multicanales. Es por esto que en este trabajo proponemos un nuevo algoritmo, el cual se basa en el producto Hadamard para matrices $n \times m$ (Johnson, 1990) y es una extensión del teorema de Wiener-Khintchine (Khintchine, 1934). Este algoritmo pretende obtener la función cruzada de dos o más señales.

En el apéndice presentamos ejemplos en los cuales lo aplicamos, para que su significado sea mejor comprendido.

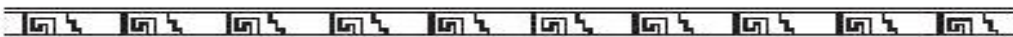
La función cruzada entre dos vectores complejos (Wiener, 1928) se define como:

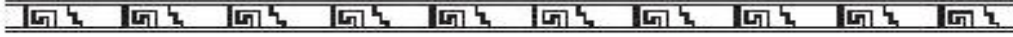
$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i) y^*(t_i - \tau) \quad (2.10)$$

Tenemos que:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{ift} df = \mathfrak{F}^{-1}\{G_x(f)\} \quad (2.11)$$

$$y^*(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_y^*(f') e^{-if'(t-\tau)} df' \quad (2.12)$$





El algoritmo que proponemos aplicar a las mediciones de GPR, consiste en la generalización del siguiente algoritmo aplicado a dos series de tiempo $X(t)$ e $Y(t-\tau)$:

$$R_{XY}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \quad (2.13)$$

Sustituyendo ecuaciones **2.11** y **2.12** en **2.13**, obtenemos:

$$\langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)e^{ift} G_y^*(f')e^{-if't} e^{if'\tau} dt df df' \quad (2.14)$$

Sabemos que:

$$\delta(f-f') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(f-f')} dt \quad (2.15)$$

Sustituyendo **(2.15)** en **(2.14)**:

$$\langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)G_y^*(f')e^{if'\tau} \delta(f-f')df' df \quad (2.16)$$

Donde $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-f')df' = 1$.

Por lo tanto, la ecuación **2.16** se convierte en:

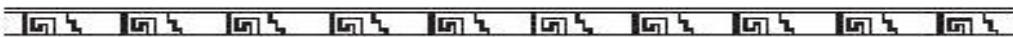
$$R_{XY}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)G_y^*(f')e^{if'\tau} df = \mathfrak{F}^{-1}\{G_x(f)G_y^*(f')\} \quad (2.17)$$

La ecuación **2.17** se conoce como el teorema de Wiener-Khintchine (Khintchine, 1934), para la condición $G_x(f)G_y^*(f')=1$.

La función multicruzada propuesta en este trabajo consiste en una generalización del Teorema de Wiener-Khintchine para N series de tiempo y se basa además en el producto Hadamard (Johnson, 1990). Este producto se define de la siguiente manera:

Si tenemos una matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ y otra $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$, el producto Hadamard de estas

matrices se calcula como:



Análisis de datos

$$B \overset{Had}{\otimes} C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \overset{Had}{\otimes} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} & b_{12}c_{12} \\ b_{21}c_{21} & b_{22}c_{22} \\ b_{31}c_{31} & b_{32}c_{32} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Es decir, obtenemos una matriz que consta del producto de elemento a elemento de B y C.

Si en vez de considerar las funciones $x(t)$ y $y(t-\tau)$, consideramos dos matrices $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t-\tau)$ en las que cada uno de sus elementos son funciones dependientes del tiempo:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t-\tau) = [y_1(t-\tau) \ y_2(t-\tau) \ \cdots \ y_m(t-\tau)]$$

Utilizando $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t-\tau)$, construimos las matrices $\mathcal{X}(t)$ y $\mathcal{Y}(t-\tau)$ con el propósito de usar las propiedades del producto Hadamard:

$$\mathcal{X}(t) = [X(t) \ X(t) \ \cdots \ X(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_1(t) & \cdots & x_1(t) \\ x_2(t) & x_2(t) & \cdots & x_2(t) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t) & x_n(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y(t-\tau) \\ Y(t-\tau) \\ \vdots \\ Y(t-\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t-\tau) & y_2(t-\tau) & \cdots & y_m(t-\tau) \\ y_1(t-\tau) & y_2(t-\tau) & \cdots & y_m(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(t-\tau) & y_2(t-\tau) & \cdots & y_m(t-\tau) \end{bmatrix}$$

Entonces la generalización de la función cruzada de Wiener puede escribirse para sistemas multicanales de la siguiente manera:

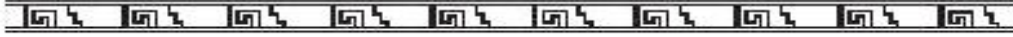
$$\mathcal{R}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{X}(t) \overset{Had}{\otimes} \mathcal{Y}^*(t-\tau) dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} x_1 y_1^* dt & \int_{t_1}^{t_2} x_1 y_2^* dt & \cdots & \int_{t_1}^{t_2} x_1 y_m^* dt \\ \int_{t_1}^{t_2} x_2 y_1^* dt & \int_{t_1}^{t_2} x_2 y_2^* dt & \cdots & \int_{t_1}^{t_2} x_2 y_m^* dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{t_1}^{t_2} x_n y_1^* dt & \int_{t_1}^{t_2} x_n y_2^* dt & \cdots & \int_{t_1}^{t_2} x_n y_m^* dt \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Aplicando la FT a (2.19) se obtiene:

$$\mathfrak{S}[\mathcal{R}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(\tau)] = \mathcal{G}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} =$$

Análisis de datos



$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_1 y_1^* dt \right) & \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_1 y_2^* dt \right) & \cdots & \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_1 y_m^* dt \right) \\ \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_2 y_1^* dt \right) & \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_2 y_2^* dt \right) & \cdots & \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_2 y_m^* dt \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_n y_1^* dt \right) & \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_n y_2^* dt \right) & \cdots & \mathfrak{F} \left(\int_{t_1}^{t_2} x_n y_m^* dt \right) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{x_1 y_1} & \mathcal{G}_{x_1 y_2} & \cdots & \mathcal{G}_{x_1 y_m} \\ \mathcal{G}_{x_2 y_1} & \mathcal{G}_{x_2 y_2} & \cdots & \mathcal{G}_{x_2 y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{x_n y_1} & \mathcal{G}_{x_n y_2} & \cdots & \mathcal{G}_{x_n y_m} \end{bmatrix} = \mathcal{G}' \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'' = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{x_1 y_1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathcal{G}_{x_2 y_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \mathcal{G}_{x_n y_m} \end{bmatrix} \overset{Had}{\otimes} \begin{bmatrix} 1 & \mathcal{G}_{x_1 y_2} & \cdots & \mathcal{G}_{x_1 y_m} \\ \mathcal{G}_{x_2 y_1} & 1 & \cdots & \mathcal{G}_{x_2 y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{x_n y_1} & \mathcal{G}_{x_n y_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Dadas n series de tiempo $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ con transformadas de Fourier $G_{x_1}, G_{x_2}, \dots, G_{x_n}$, respectivamente, el espectro cruzado múltiple al cuadrado G_{xy}^2 se define como el producto de la diagonal de la matriz \mathcal{G}' (**Track**(\mathcal{G}')):

$$G_{xy}^2 = \mathbf{Track}(\mathcal{G}') = \prod_{k=1}^n \mathcal{G}'_{x_k y_k} = \mathcal{G}'_{x_1 y_1} \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'_{x_2 y_2} \overset{Had}{\otimes} \dots \mathcal{G}'_{x_n y_n} \quad (2.21)$$

Finalmente, la función multicruzada de Fourier se define como:

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \mathfrak{S}^{-1} [G_{xy}] = \mathfrak{S}^{-1} \left[\mathcal{G}' \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'' \right] = \mathfrak{S}^{-1} \left[\mathcal{G}' \right] \overset{Had}{\otimes} \mathfrak{S}^{-1} \left[\mathcal{G}'' \right] \quad (2.22)$$

El espectro cruzado múltiple de Fourier G_{xy} puede escribirse como magnitud g y diferencia de fase ϕ de la siguiente manera:

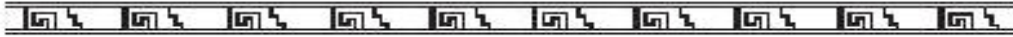
$$G_{xy} = g e^{i\phi} \quad (2.23)$$

Donde: $g = |G_{xy}| = \sqrt{\text{Re}\{G_{xy}\}^2 + \text{Im}\{G_{xy}\}^2}$ y $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{G_{xy}\}}{\text{Re}\{G_{xy}\}} \right)$.

Para el caso de tres series de tiempo, el multicruzado se obtiene al aplicar la función **Track** a \mathcal{G}' y después la \mathfrak{S}^{-1} (ecuación 2.20):



Análisis de datos



$$\mathcal{R}_{x_1 x_2 x_3} = \mathfrak{F}^{-1}[\mathbf{Track}(\mathcal{G}')] = \mathfrak{F}^{-1} \left[\mathcal{G}'_{x_1} \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'_{x_2} \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'_{x_3} \right] \quad (2.24)$$

Para el caso particular de que se tengan dos espectros, entonces se obtiene el teorema de Wiener-Khintchine.

La siguiente ecuación es la generalización del teorema de Wiener-Khintchine para N series de tiempo y es el algoritmo para calcular la función multicruzada mediante la transformada de Fourier:

$$\mathcal{R}_{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} = \mathfrak{F}^{-1}[\mathbf{Track}(\mathcal{G}')] = \mathfrak{F}^{-1} \left[\mathcal{G}'_{x_1} \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'_{x_2} \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'_{x_3} \overset{Had}{\otimes} \dots \overset{Had}{\otimes} \mathcal{G}'_{x_n} \right] \quad (2.25)$$

Ésta es la primera vez que se obtiene esta ecuación, siendo uno de los principales resultados obtenidos en la investigación doctoral.

En el siguiente diagrama de flujo (fig. 2.7) se representa el algoritmo de la ecuación 2.25:

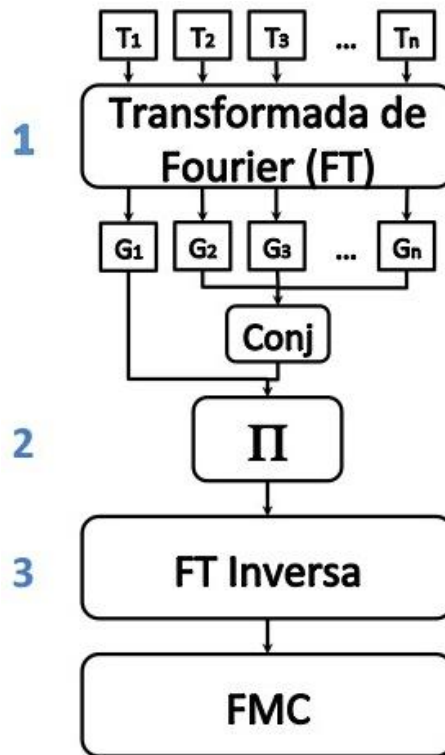
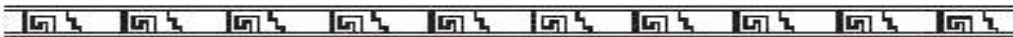
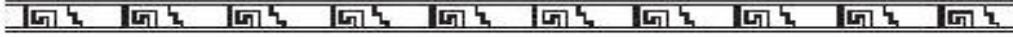


Fig. 2.7. Algoritmo FMC.



Análisis de datos



1. FT de las trazas para obtener espectros de frecuencia $\mathfrak{F}[T_k(t)] = G_k$.

2. Obtenemos el producto $G_1 \overset{Had}{\otimes} G_2^* \overset{Had}{\otimes} G_3^* \overset{Had}{\otimes} \dots \overset{Had}{\otimes} G_n^*$.

3. Obtenemos la transformada inversa de este resultado

$$R_{T_1, T_2, T_3, \dots, T_n} = \mathfrak{F}^{-1} \left[G_1 \overset{Had}{\otimes} G_2^* \overset{Had}{\otimes} G_3^* \overset{Had}{\otimes} \dots \overset{Had}{\otimes} G_n^* \right]. \text{ Éste es el algoritmo de FMC.}$$

2.7.2 Wavelet multicruzado (MCW)

Una ecuación para calcular la función multicruzada utilizando la transformada de wavelet es la siguiente (Soon et al., 2014):

$$W_{XYZ\dots n} = W^{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m} = \left\langle W_{F_i} \prod_{k=1}^m W_{G_k}^* \right\rangle \tag{2.26}$$

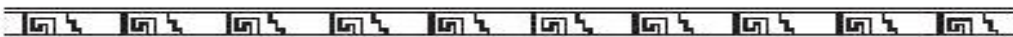
Donde $F(t)$ y $G(t)$ son matrices dentro de las cuales cada elemento representa una función dependiente en el tiempo, $\langle \rangle$ indica un promedio de las wavelets multicruzadas y Π una multiplicación.

El ángulo de fase de $W^{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m}$ describe la relación de fase entre las series X_1, X_2, X_3, \dots y X_m en el espacio de tiempo-frecuencia. Se estima la significancia estadística de la wavelet multicruzada por medio de los métodos Monte Carlo con ruido rojo para determinar el 5% de nivel de significancia (Torrence y Webster, 1999). Esta función mide la potencia común entre las series de tiempo.

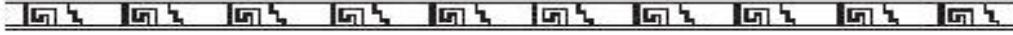
Hudgins et al. (1993) definieron el wavelet cruzado (ecuación 2.7). Sin embargo, la manera correcta de definir la multiplicación entre dos wavelets es usando el producto Hadamard porque W^X es una matriz $n \times m$:

$$W^{XY} = W^X \overset{Had}{\otimes} W^{Y^*} \tag{2.27}$$

Para el análisis de las series de tiempo X y Y , el wavelet cruzado se usa para medir la potencia común entre estas series de tiempo, tomando en cuenta la sincronización en fase, frecuencia y amplitud. La base matemática de este nuevo algoritmo de wavelet multicruzado (MCW) es una generalización de la función cruzada de Einstein (1914) y aquí será descrita original en el espacio de tiempo-frecuencia. En lugar de considerar las funciones X y Y , como en la ecuación 2.27, en este caso consideramos dos matrices $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ cuyos elementos son funciones dependientes del tiempo a su vez:



Análisis de datos



$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_m(t)]$$

A continuación escribimos las matrices $X(t)$ y $Y(t)$ empleando $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$, con el propósito de usar las propiedades del producto Hadamard:

$$X(t) = [X(t) \ X(t) \ \cdots \ X(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_1(t) & \cdots & x_1(t) \\ x_2(t) & x_2(t) & \cdots & x_2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t) & x_n(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y(t) \\ \vdots \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \end{bmatrix}$$

La generalización de la función cruzada de Einstein para sistemas multicanales es la siguiente:

$$\mathcal{R} = \langle X(t) \overset{Had}{\otimes} Y^*(t) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 y_1^* & x_1 y_2^* & \cdots & x_1 y_m^* \\ x_2 y_1^* & x_2 y_2^* & \cdots & x_2 y_m^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1^* & x_n y_2^* & \cdots & x_n y_m^* \end{bmatrix} \right\rangle \quad (2.28)$$

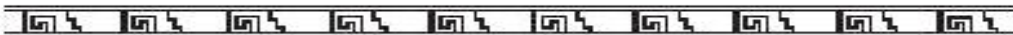
Aplicando la transformada de wavelet a la ecuación **2.28**, obtenemos el hiperespectro de wavelet (Ω):

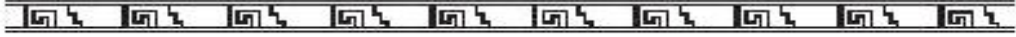
$$\Omega = \mathcal{W}[\mathcal{R}] = \mathcal{W} \left[\langle X(t) \overset{Had}{\otimes} Y^*(t) \rangle \right] = \left\langle \begin{bmatrix} W_{x_1 y_1} & W_{x_1 y_2} & \cdots & W_{x_1 y_m} \\ W_{x_2 y_1} & W_{x_2 y_2} & \cdots & W_{x_2 y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{x_n y_1} & W_{x_n y_2} & \cdots & W_{x_n y_m} \end{bmatrix} \right\rangle \quad (2.29)$$

Donde cada elemento $W_{x_i y_k}$ de Ω es un wavelet cruzado.

Usando las propiedades del producto Hadamard, Ω puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Omega = \Omega_{cruzado} \overset{Had}{\otimes} \Omega_{parcial}$$





Donde:

$$\Omega_{cruzado} = \left\langle \begin{bmatrix} W_{x_1 y_1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_{x_2 y_2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & W_{x_n y_m} \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\Omega_{parcial} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & W_{x_1 y_2} & \dots & W_{x_1 y_m} \\ W_{x_2 y_1} & 1 & \dots & W_{x_2 y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{x_n y_1} & W_{x_n y_2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

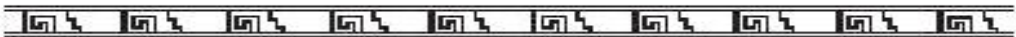
El espectro del multiwavelet cruzado (MCW) está definido por el producto de los elementos en la diagonal de $\Omega_{cruzado}$ (**Track**($\Omega_{cruzado}$)) :

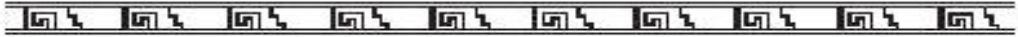
$$MCW = \mathbf{Track}(\Omega_{cruzado}) = \prod_{k=1}^n W_{x_k y_k} = W_{x_1 y_1} \overset{Had}{\otimes} W_{x_2 y_2} \overset{Had}{\otimes} \dots \overset{Had}{\otimes} W_{x_n y_n} \quad (2.30)$$

Este espectro puede escribirse como $W_n(s)$ y diferencia de fase $\phi_n(s)$:

$$MCW = W_n(s) e^{i\phi_n(s)} \quad (2.31)$$

Donde: $W_n = |W_n(s)| = \sqrt{\text{Re}\{W_n(s)\}^2 + \text{Im}\{W_n(s)\}^2}$ y $\phi_n(s) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}\{s^{-1}W_n(s)\}}{\text{Re}\{s^{-1}W_n(s)\}}\right)$.





En la figura 2.8 se muestra el diagrama de flujo de MCW:

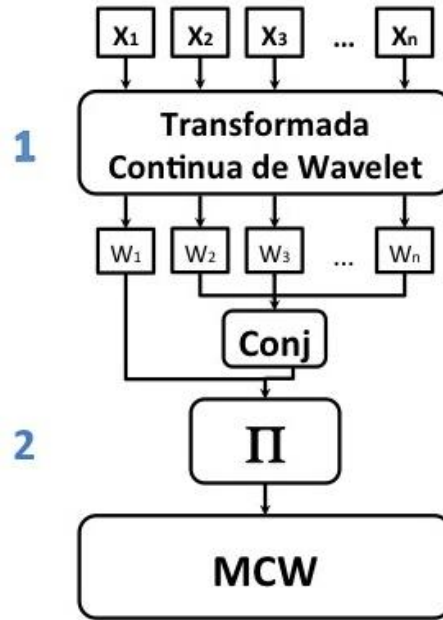
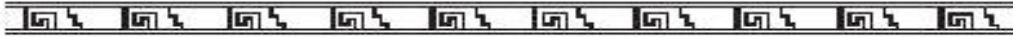


Fig. 2.8. Algoritmo MCW.

1. Obtenemos la CWT de las series de tiempo $CWT[X_k(t)] = W_k$.
2. Utilizando la función **Track**, se obtiene el MCW:

$$MCW = \mathbf{Track}(\Omega_{cruzado}) = \prod_{k=1}^n W_{x_k y_k} = W_{x_1 y_1} \overset{Had}{\otimes} W_{x_2 y_2} \overset{Had}{\otimes} \dots \overset{Had}{\otimes} W_{x_n y_n}$$





Capítulo 3

Resultados del análisis de datos

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos por medio del análisis wavelet. Por un lado, obtuvimos los periodos dominantes y las huellas espectrales correspondientes al túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada, a la cámara que se encuentra al final de éste y a la arcilla.

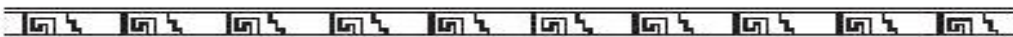
Por otro, aplicamos los algoritmos de MCW y FMC para analizar las trazas GPR de las mediciones ‘Tun03’ y ‘Tun06’. Los colores espectrales están en modo RGB: el rojo indica la potencia espectral más elevada y el azul la potencia espectral más baja. Para todas las gráficas contenidas en esta tesis, el panel izquierdo corresponde al wavelet global, el panel superior la serie de tiempo (traza) y el panel inferior a la fase instantánea, la cual nos dice que las trazas están en fase cuando su valor es cercano a cero. Los periodos y escalas (panel a la derecha del espectro de wavelet) están en ns.

3.1 Medición ‘Tun03’

Figuras 3.1-3.10 corresponden al análisis de los siguientes intervalos del túnel.

3.1.1 Espectros para una traza dentro y otra traza fuera del intervalo del túnel

En el siguiente ejemplo escogimos dos trazas que pertenecen a la medición ‘Tun03’. La primera traza se encuentra dentro del intervalo de trazas correspondiente al túnel.



Resultados

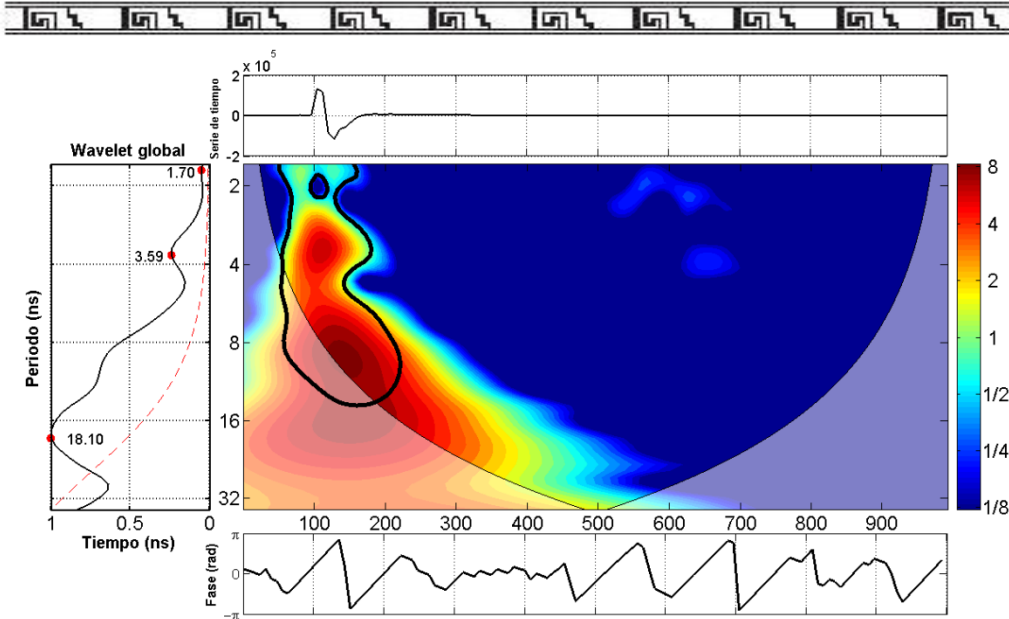


Fig. 3.1. Espectro wavelet de la traza 19 (dentro del túnel) de la medición 'Tun03'.

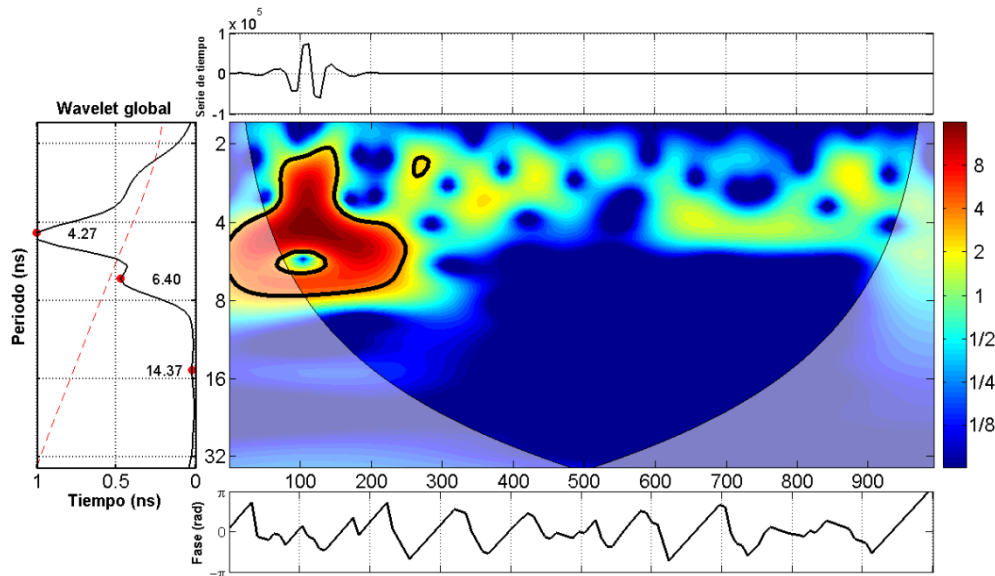
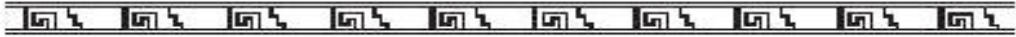


Fig. 3.2. Espectro wavelet filtrado (banda 2-5 ns) de la traza 19 ('Tun03').

Del espectro wavelet de esta traza (fig. 3.1) podemos observar varias periodicidades (zona de mayor potencia) en el wavelet global. Filtramos el espectro con la banda de 2-5 ns porque existe el mayor número de retrodispersiones entre los periodos de 1.70 y 3.59 ns. El periodo dominante fue de 4.27 ± 0.69 ns (fig. 3.2).

Resultados



A continuación analizamos una traza que se encuentra fuera del intervalo correspondiente al túnel.

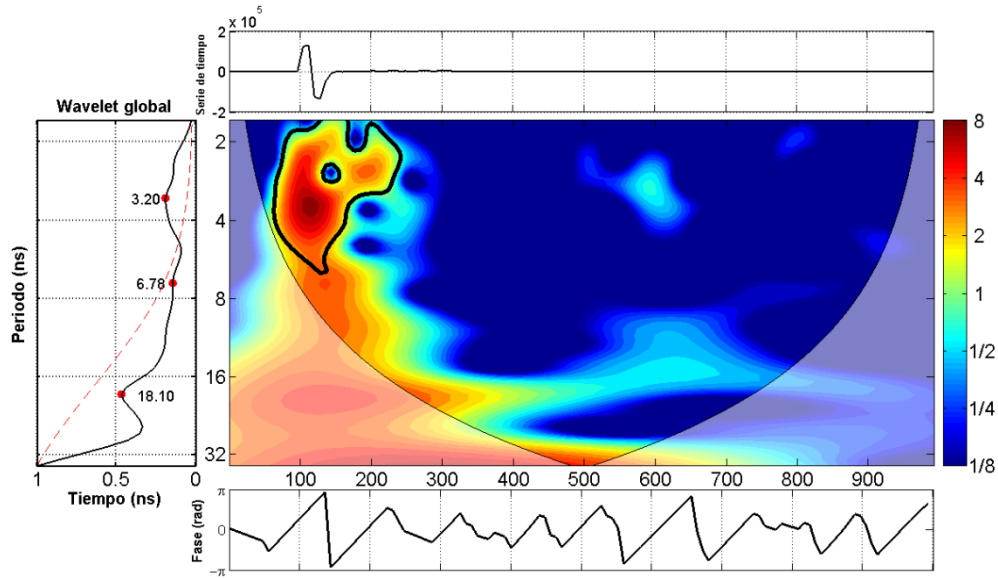


Fig. 3.3. Espectro wavelet de la traza 40 (fuera del túnel) de la medición ‘Tun03’.

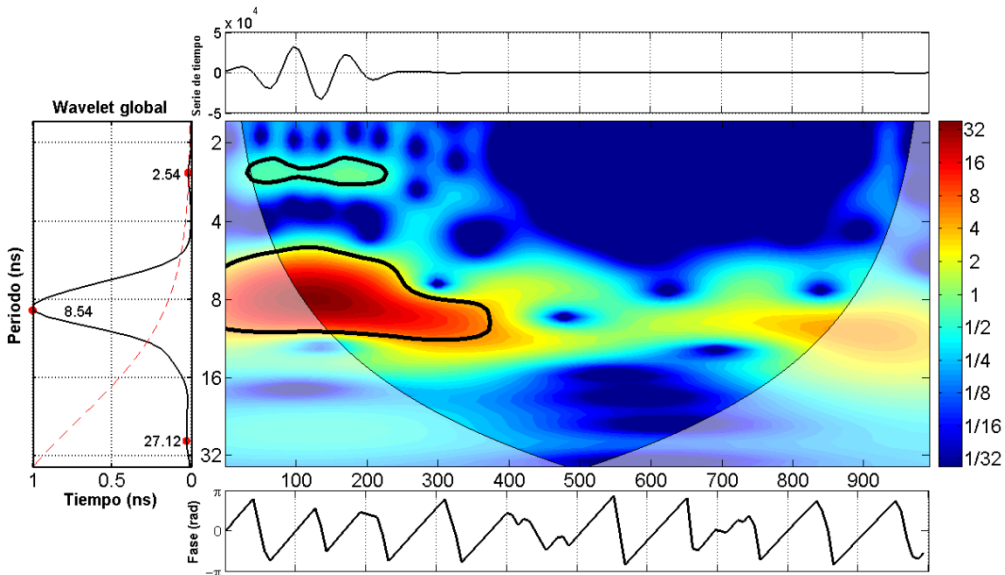
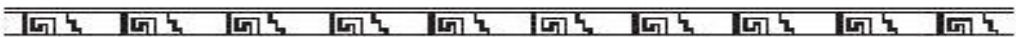
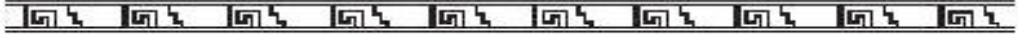


Fig. 3.4. Espectro wavelet filtrado (banda 6-10 ns) de la traza 40 (‘Tun03’).

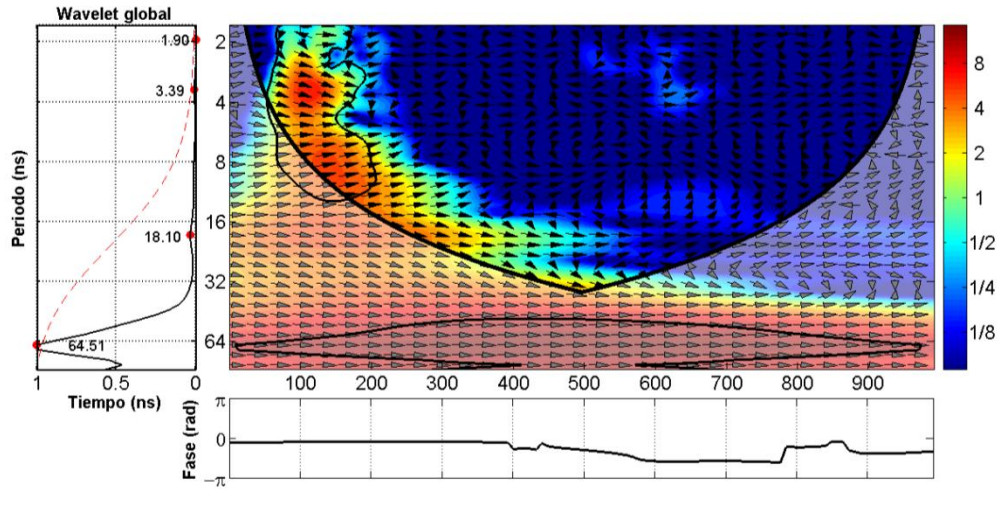
Del espectro wavelet de esta traza (fig. 3.3) podemos observar varias periodicidades en el wavelet global. Filtramos el espectro con la banda de 6-10 ns porque existe el mayor número de retrodispersiones (mayor potencia) cerca del periodo de 6.78 ns. El periodo dominante fue de 8.54 ± 1.58 ns (fig. 3.4).



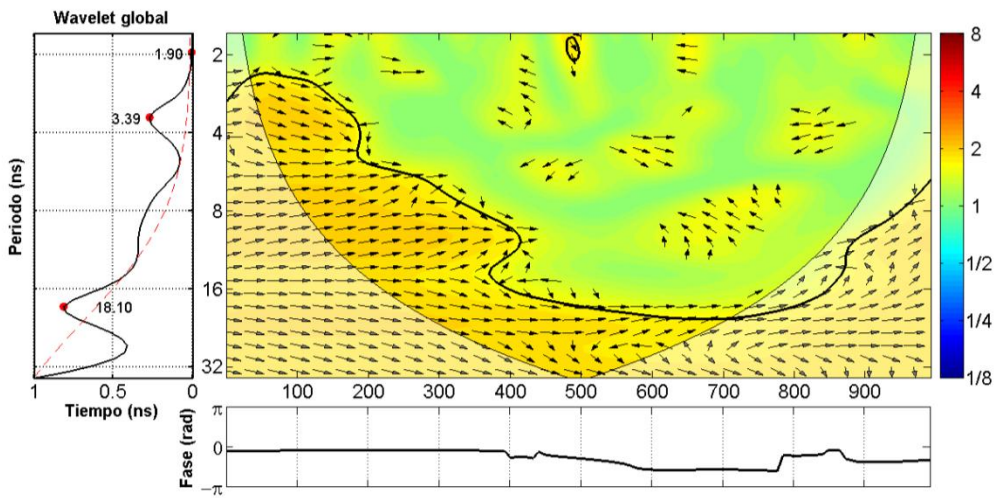
Resultados



Obtuvimos la transformada de la función de wavelet cruzada (XWT) entre las trazas 19 y 40 (fig. 3.5a); y la función de coherencia de la transformada de wavelet (WTC, fig. 3.5b).



a) XWT

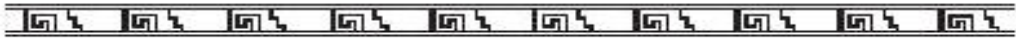


b) WTC

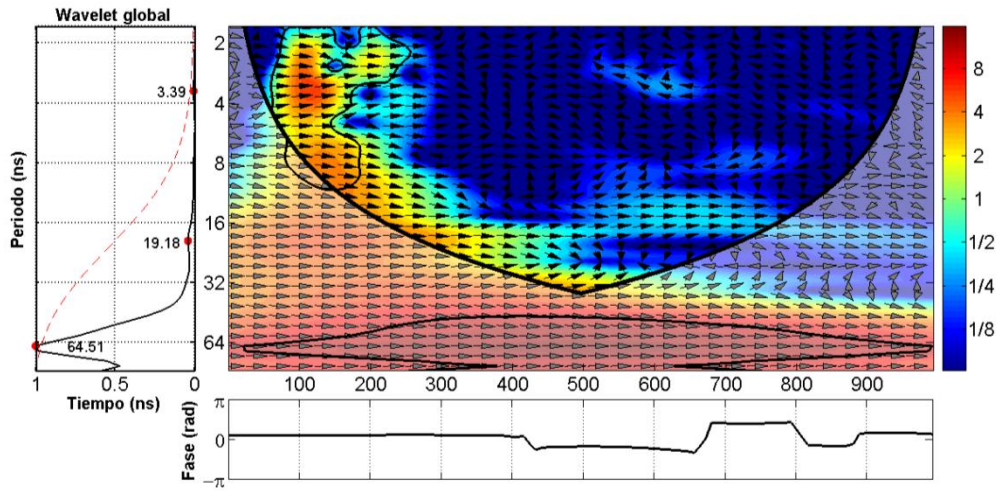
Fig. 3.5. XWT y WTC entre las trazas 19 y 40 de la medición 'Tun03'.



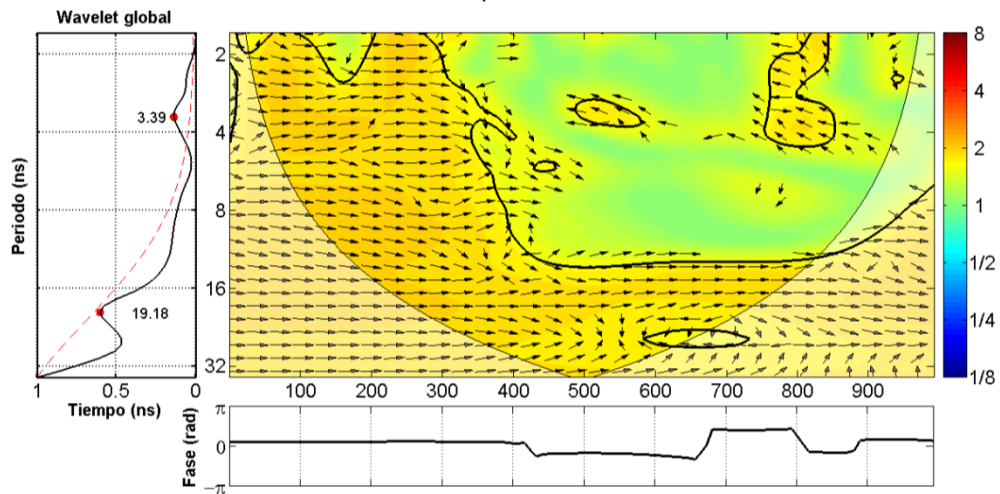
Resultados



Obtuvimos la XWT entre las trazas 40 y 41 (fuera del túnel, fig. 3.6a); y su WTC (fig. 3.6b).



a) XWT



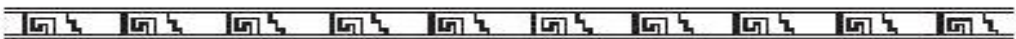
b) WTC

Fig. 3.6. XWT y WTC entre las trazas 40 y 41 de la medición 'Tun03'.

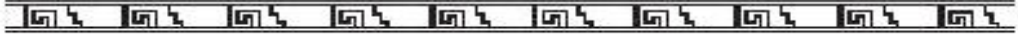
Comparando las figuras 3.5 y 3.6, inferimos que las trazas pertenecientes al mismo intervalo del túnel tienen mayor coherencia, así como una fase instantánea más cercana a cero a lo largo de las series de tiempo.

3.1.2 Espectros para trazas dentro y fuera del intervalo del túnel

Obtuvimos espectros de wavelet multicruzado para trazas dentro (trazas 21-23) y fuera del intervalo del túnel (trazas 4-5). En el análisis de MCW el periodo de 64.51 ns correspondió al primer impulso



Resultados



de la señal de GPR y el de 15.22 ns al segundo periodo dominante (fig. 3.7). El periodo dominante del espectro FMC fue de 9.05 ± 3.28 ns (fig. 3.8).

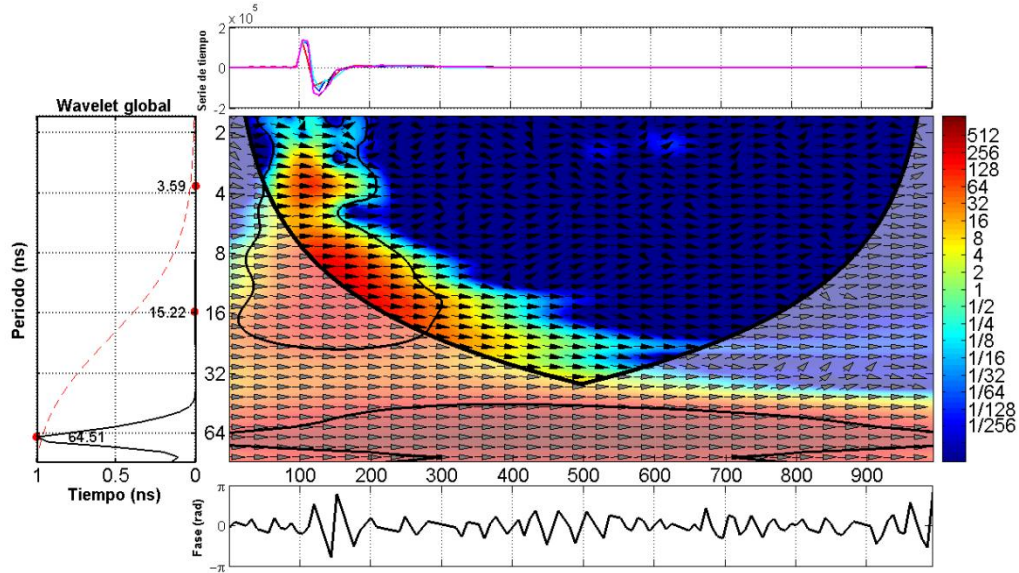


Fig. 3.7. Espectro MCW entre las trazas 19-21 (dentro del túnel) y las trazas 4-5 (fuera del túnel) de la medición 'Tun03'.

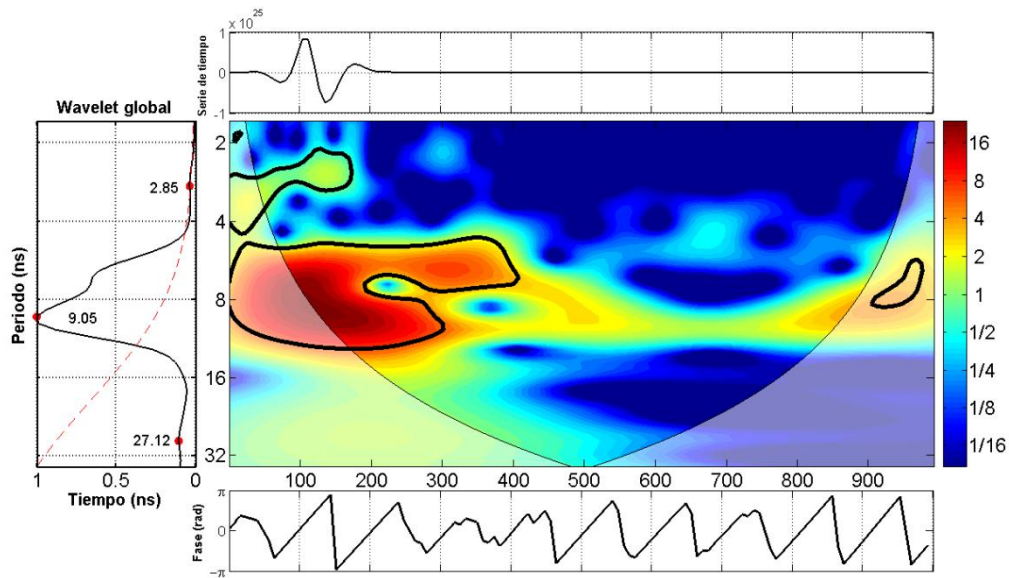
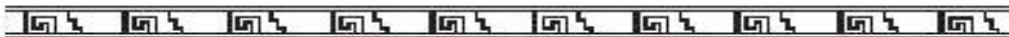


Fig. 3.8. Espectro FMC entre las trazas 19-21 (dentro del túnel) y las trazas 4-5 (fuera del túnel) de la medición 'Tun03'.



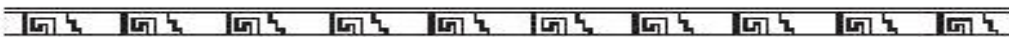
Resultados



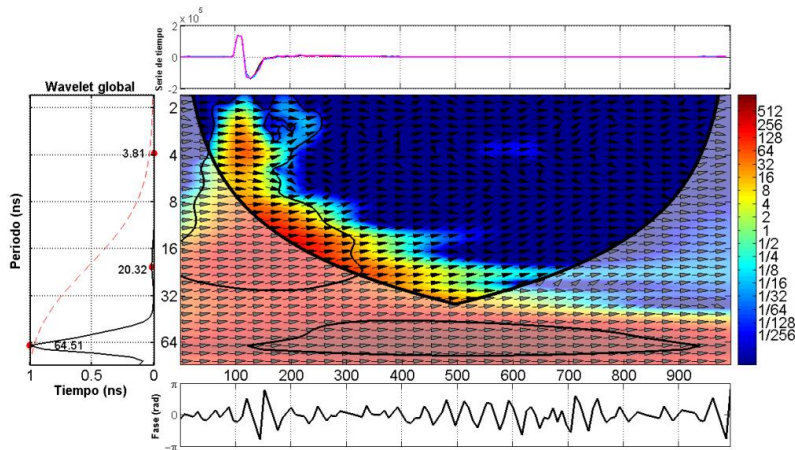
3.1.3 Espectros para trazas fuera del intervalo del túnel

Obtuvimos espectros de wavelet multicruzado para trazas fuera del intervalo del túnel (trazas 1-5). En el análisis de MCW el periodo de 64.51 ns correspondió al primer impulso de la señal de GPR y el de 20.32 ns al segundo periodo dominante (fig. 3.9a).

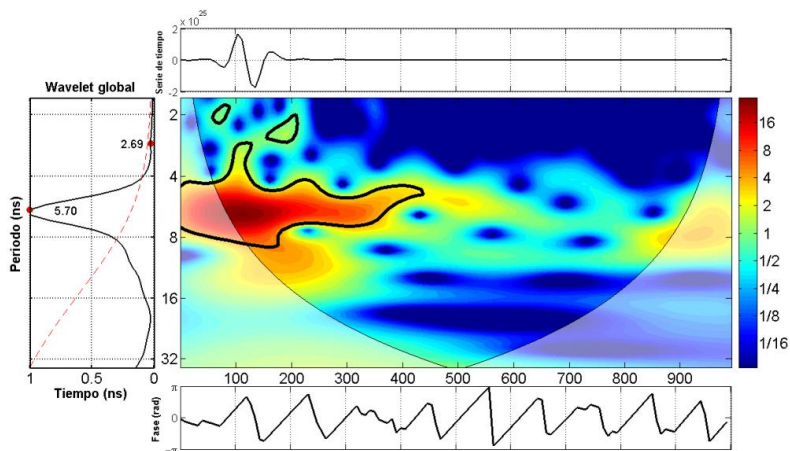
El espectro de FMC fue filtrado con una banda de 6-10 ns porque en este intervalo se observó un periodo dominante de 5.70 ns (fig. 3.9b). El periodo dominante del espectro filtrado de FMC fue de 7.18 ± 0.75 ns (fig. 3.9c). Este periodo es cercano al de 8.54 ± 1.58 ns obtenido para el caso de una sola traza fuera del túnel (fig. 3.4).



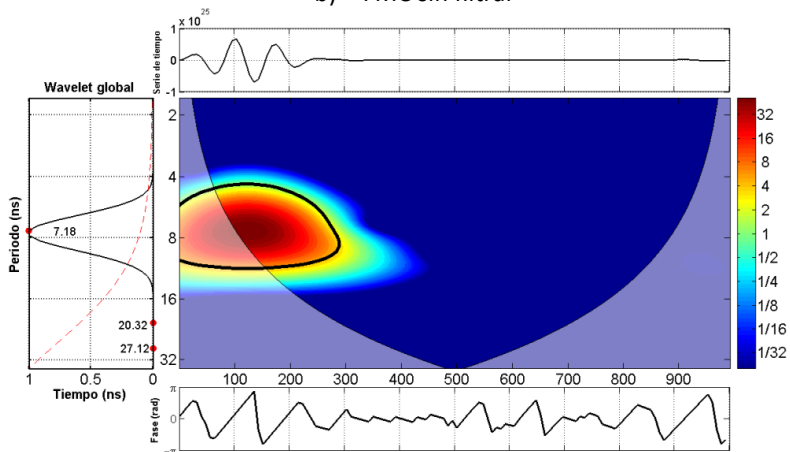
Resultados



a) MCW



b) FMC sin filtrar

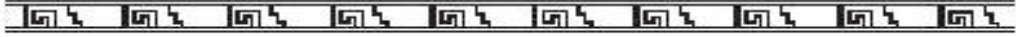


c) FMC filtrada (banda 6-10 ns)

Fig. 3.9. Espectro wavelet de la función multicruzada de las trazas 1-5 (fuera del túnel) de la medición 'Tun03'.



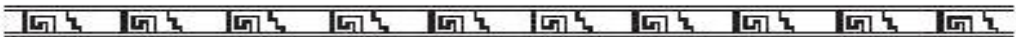
Resultados



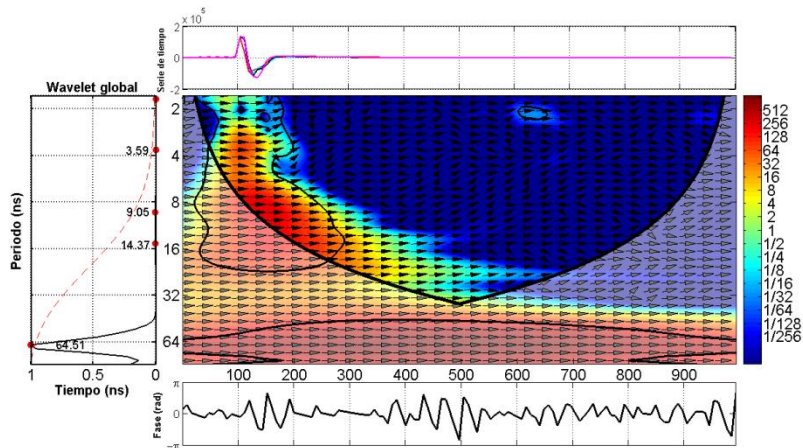
3.1.4 Espectros para trazas dentro del intervalo del túnel

Los datos de GPR dentro del intervalo del túnel fueron los de las trazas 19-23. En el análisis de MCW, el periodo de 64.51 ns correspondió al primer impulso de la señal de GPR y el de 14.37 ns al segundo periodo dominante (fig. 3.10a).

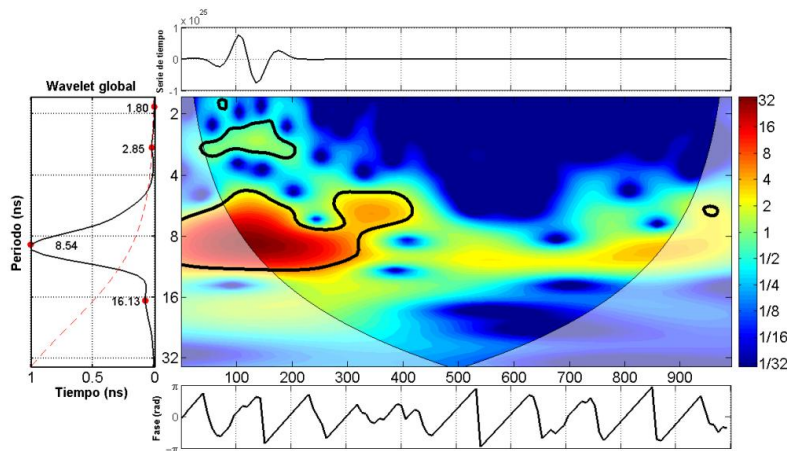
El espectro de FMC fue filtrado con una banda de 2-5 ns porque en este intervalo fueron observadas varias retrodispersiones entre los periodos de 1.80 y 2.85 ns (fig. 3.10b). El periodo dominante del espectro filtrado fue de 5.08 ± 1.08 ns (fig. 3.10c). Este periodo es cercano al de 4.27 ± 0.69 ns para el caso de una sola traza dentro del intervalo del túnel (fig. 3.2).



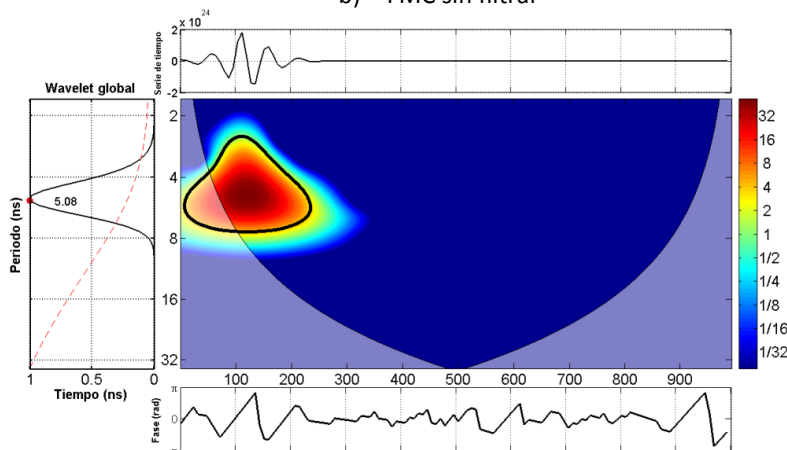
Resultados



a) MCW



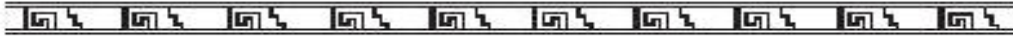
b) FMC sin filtrar



c) FMC filtrada (banda 2-5 ns)

Fig. 3.10. Espectro wavelet de la función cruzada de las trazas 19-23 (dentro del túnel) de la medición 'Tun03'.





3.2 Medición 'Tun06'

Figuras 3.11-3.20 corresponden a los siguientes intervalos de la cámara.

3.2.1 Espectros para una traza dentro y otra traza fuera del intervalo de la cámara

Escogimos dos trazas que pertenecen a la medición 'Tun06'. La primera traza se encuentra dentro del intervalo de trazas correspondiente a la cámara.

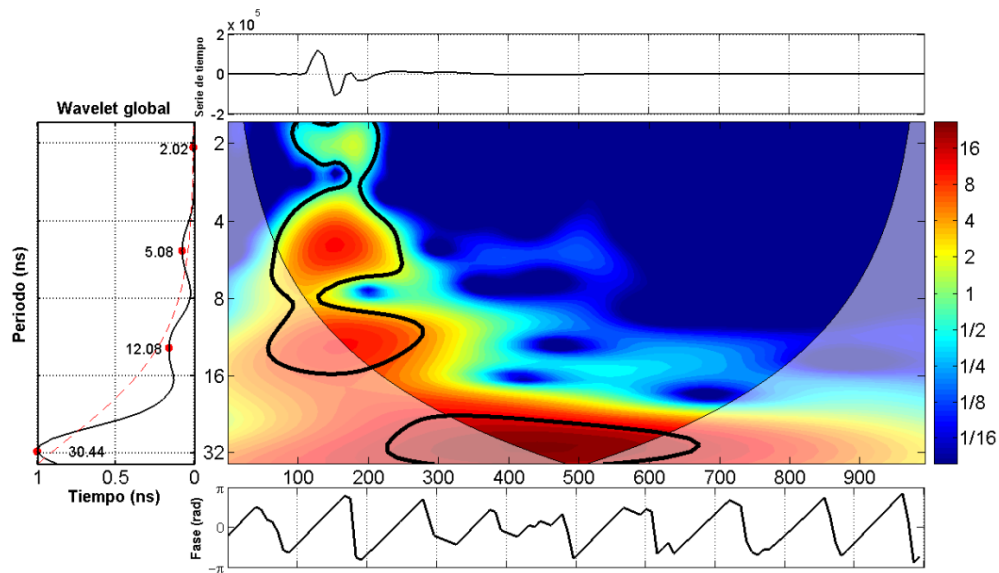


Fig. 3.11. Espectro wavelet de la traza 14 (dentro de la cámara) de la medición 'Tun06'.

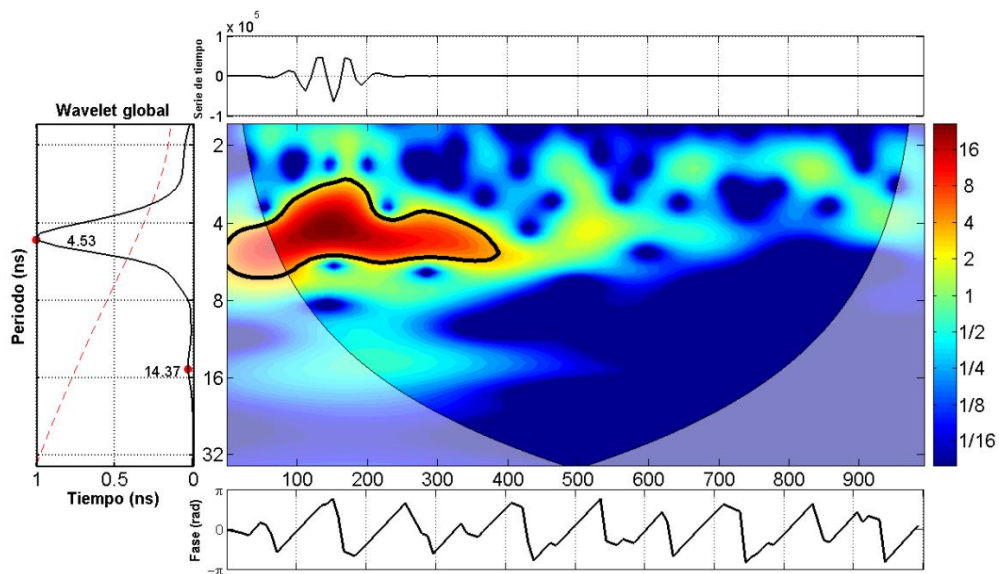
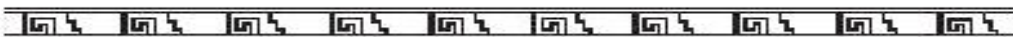
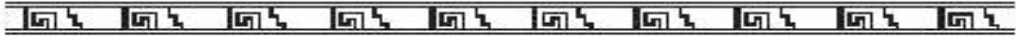


Fig. 3.12. Espectro wavelet filtrado (banda 2-5 ns) de la traza 14 ('Tun06').



Resultados



Del espectro wavelet de esta traza (fig. 3.11) podemos observar varias periodicidades en el wavelet global. Para este caso filtramos el espectro con la banda de 2-5 ns, ya que entre los periodos de 2.02 y 5.08 ns existe el mayor número de retrodispersiones de mayor potencia. El periodo dominante fue de 4.53 ± 0.69 ns (fig. 3.12).

A continuación analizamos una traza que se encuentra fuera del intervalo correspondiente a la cámara.

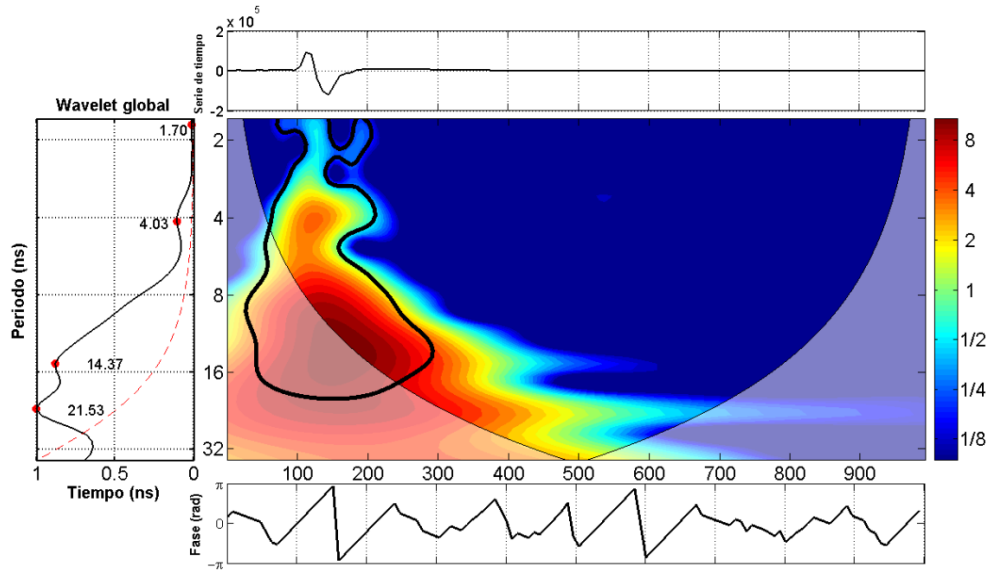


Fig. 3.13. Espectro wavelet de la traza 22 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.

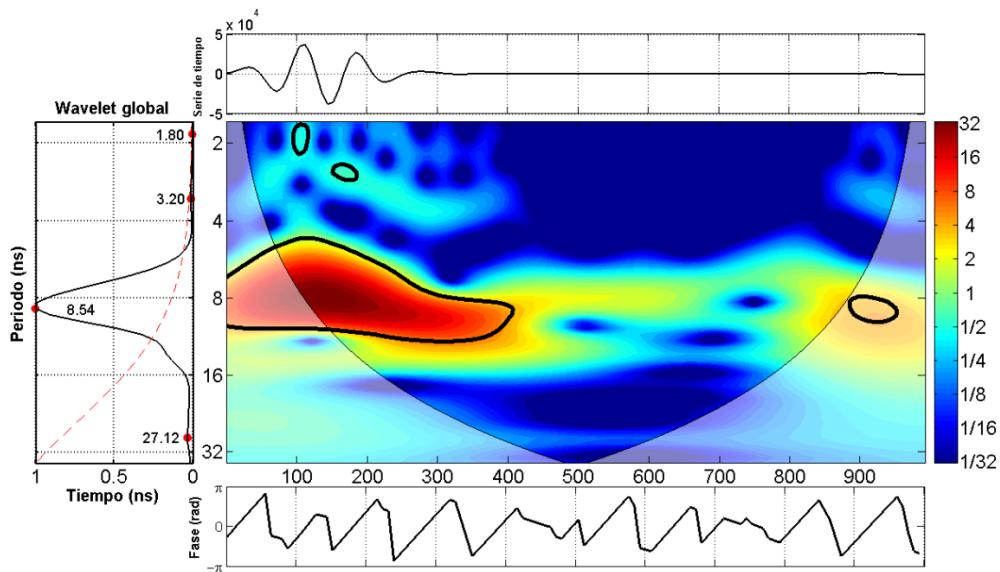
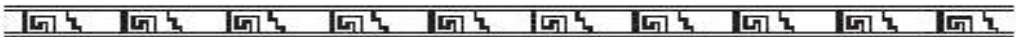
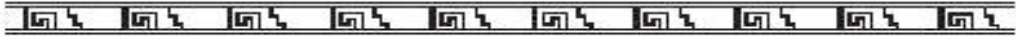


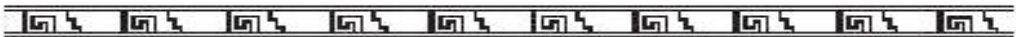
Fig. 3.14. Espectro wavelet filtrado (banda 6-10 ns) de la traza 22 ('Tun06').



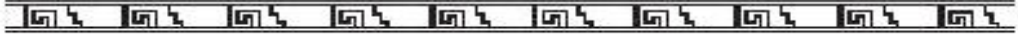
Resultados



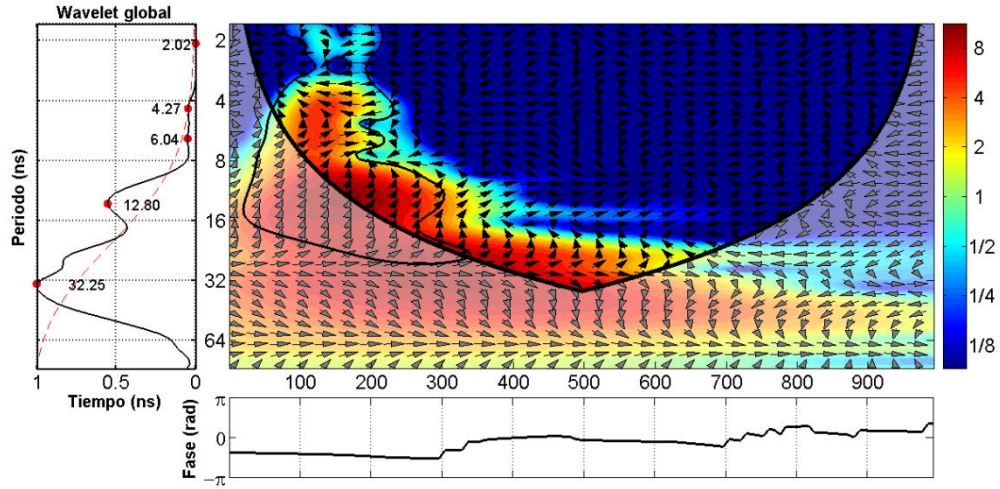
Del espectro wavelet de esta traza (fig. 3.13) podemos observar varias periodicidades en el wavelet global. Para este caso filtramos el espectro con la banda de 6-10 ns, ya que entre los periodos de 4.03 y 8 ns existe el mayor número de retrodispersiones y de mayor potencia. El periodo dominante fue de 8.54 ± 1.41 ns (fig. 3.14).



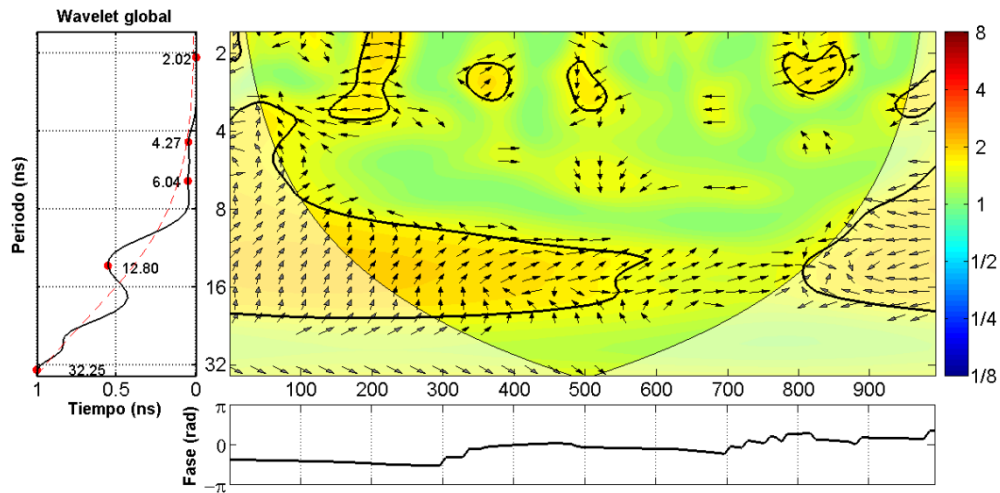
Resultados



Obtuvimos la XWT entre las trazas 14 y 22 (fig. 3.15a); y su WTC (fig. 3.15b).



a) XWT

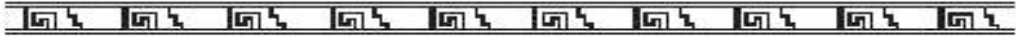


b) WTC

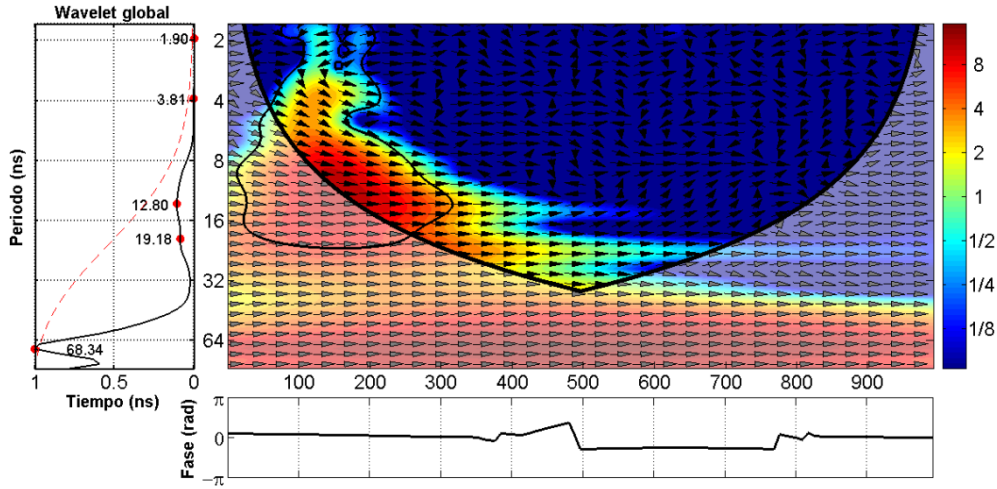
Fig. 3.15. XWT y WTC entre las trazas 14 y 22 de la medición 'Tun06'.



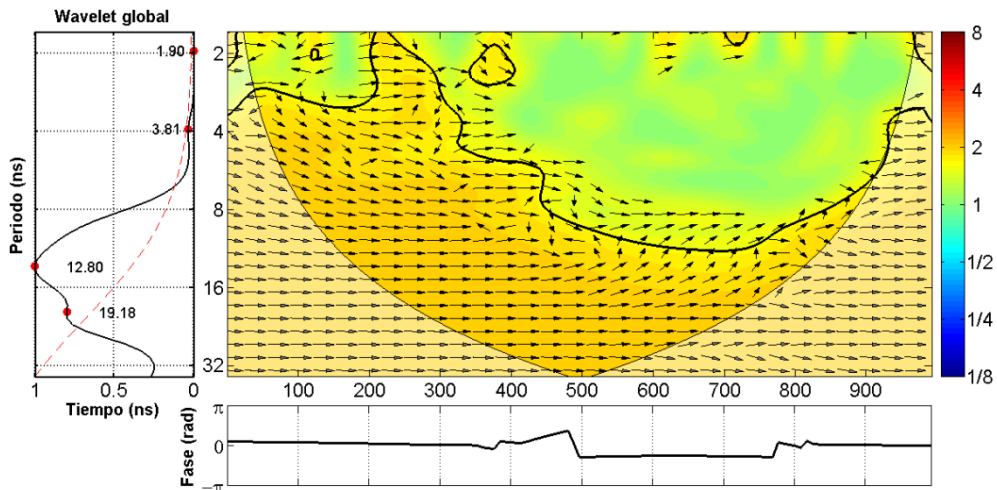
Resultados



Obtuvimos la XWT entre las trazas 22 y 23 (fuera de la cámara, fig. 3.16a); y su WTC (fig. 3.16b).



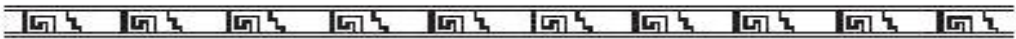
a) XWT



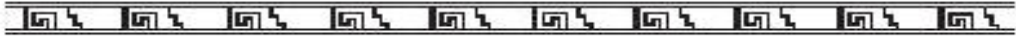
b) WTC

Fig. 3.16. XWT y WTC entre las trazas 22 y 23 de la medición 'Tun06'.

Al comparar las figuras 3.15 y 3.16 inferimos de nuevo que las trazas pertenecientes al mismo intervalo tienen mayor coherencia y una fase instantánea más cercana a cero.



Resultados



3.2.2 Espectros para trazas dentro y fuera del intervalo de la cámara

Obtuvimos espectros de wavelet multicruzado a partir de trazas dentro (trazas 14 y 15) y fuera del intervalo de la cámara (trazas 20-22).

Los periodos dominantes de los espectros de MCW y FMC fueron 11.40 ± 0.73 ns (fig. 3.17) y 10.16 ± 1.24 ns (fig. 3.18), respectivamente.

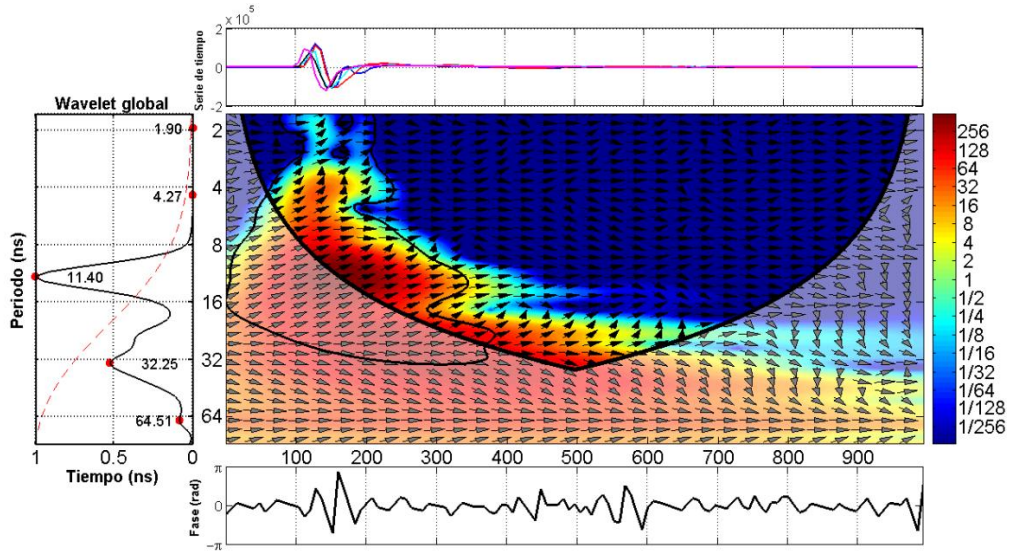


Fig. 3.17. Espectro MCW entre las trazas 14-15 (dentro de la cámara) y las trazas 20-22 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.

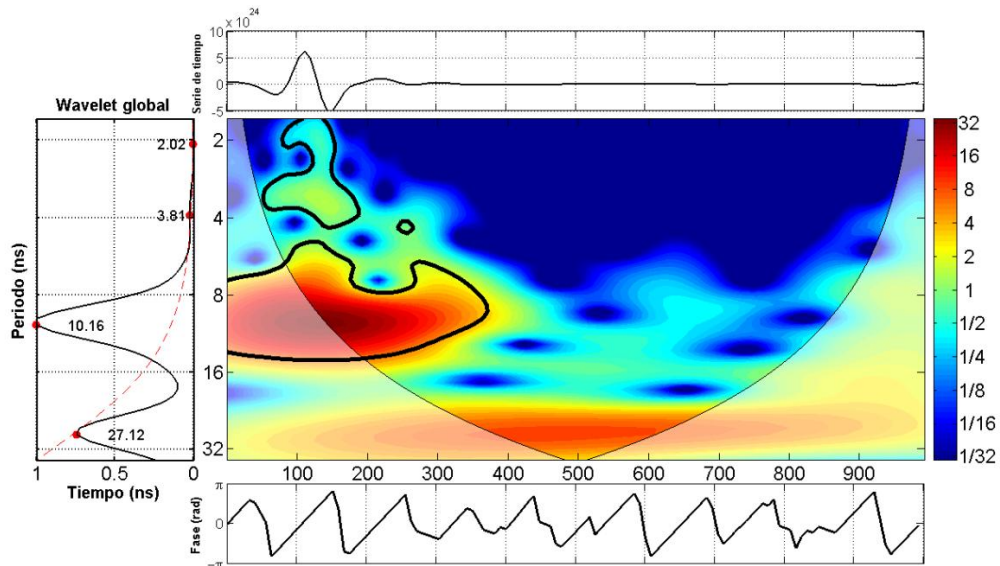
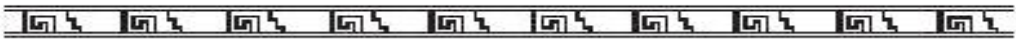
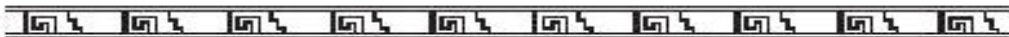


Fig. 3.18. Espectro FMC entre las trazas 14-15 (dentro de la cámara) y las trazas 20-22 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.



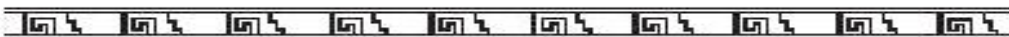
Resultados



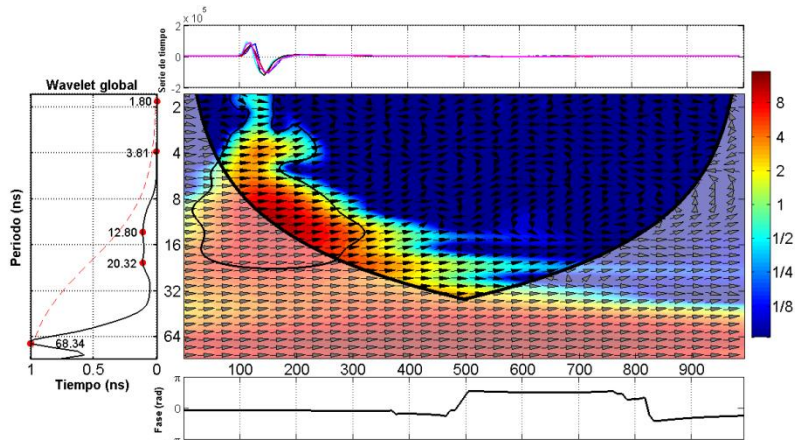
3.2.3 Espectros para trazas fuera del intervalo de la cámara

Datos de GPR fuera del intervalo de la cámara son aquellos de las trazas 20-24. En el análisis MCW el periodo de 68.34 ns correspondió al primer impulso de la señal de GPR y el de 20.32 ± 0.68 ns al segundo periodo dominante (fig. 3.19a).

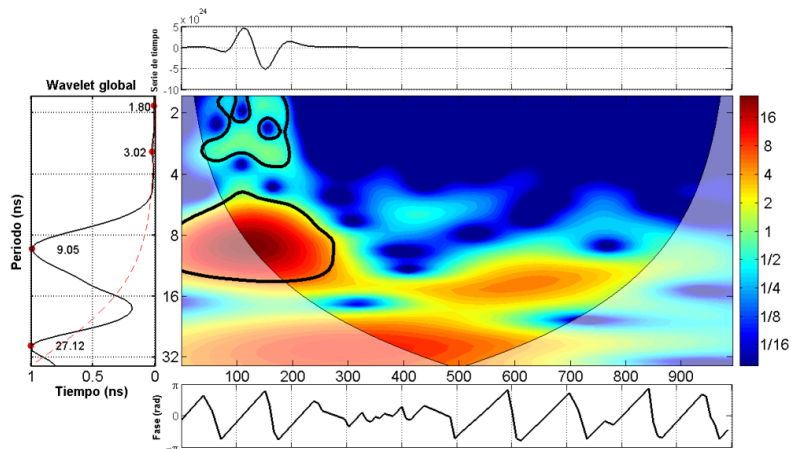
El espectro FMC fue filtrado con una banda de 6-10 ns porque en este intervalo se observó un periodo dominante de 9.05 ns (fig. 3.19b). El periodo dominante del espectro FMC filtrado fue de 8.06 ± 1.10 ns (fig. 3.19c). Este periodo es cercano al de 8.54 ± 1.41 ns que se obtuvo para el caso de una sola traza fuera de la cámara (fig. 3.14).



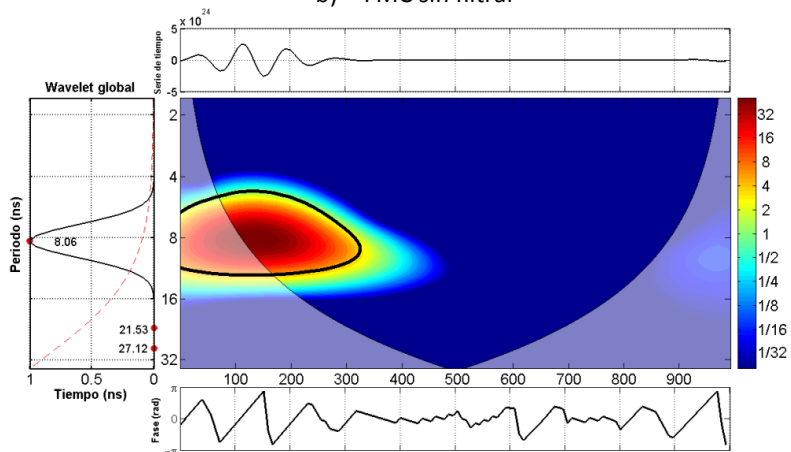
Resultados



a) MCW



b) FMC sin filtrar

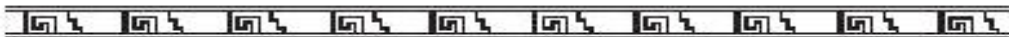


c) FMC filtrada (banda 6-10 ns)

Fig. 3.19. Espectro wavelet de la función cruzada de las trazas 20-24 (fuera de la cámara) de la medición 'Tun06'.



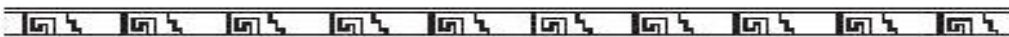
Resultados



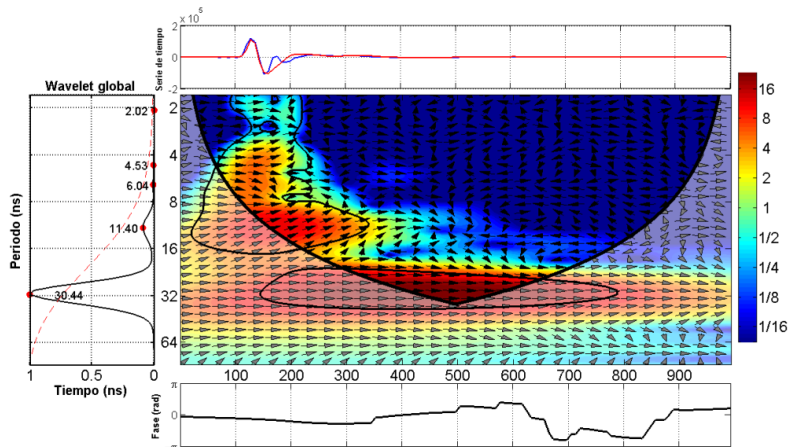
3.2.4 Espectros para trazas dentro del intervalo de la cámara

Datos de GPR dentro del intervalo de la cámara fueron los de las trazas 14 y 15. En el análisis de MCW el periodo de 30.44 ns correspondió al primer impulso de la señal de GPR y el de 11.40 ± 0.40 ns al segundo periodo dominante (fig. 3.20a).

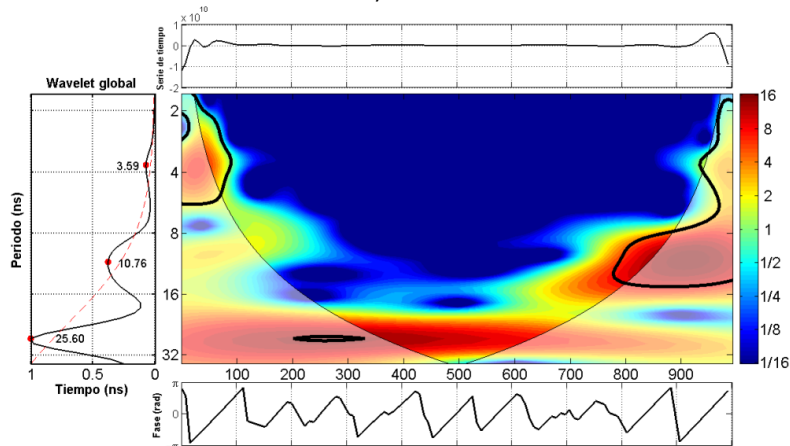
El espectro FMC fue filtrado con una banda de 2-5 ns porque en este intervalo se observó un periodo de alta potencia de 3.59 ns (fig. 3.20b). El periodo dominante del espectro FMC filtrado fue de 4.27 ± 0.85 ns (fig. 3.20c). Este periodo es cercano al de 4.53 ± 0.69 ns que se obtuvo para el caso de una sola traza dentro de la cámara (fig. 3.12).



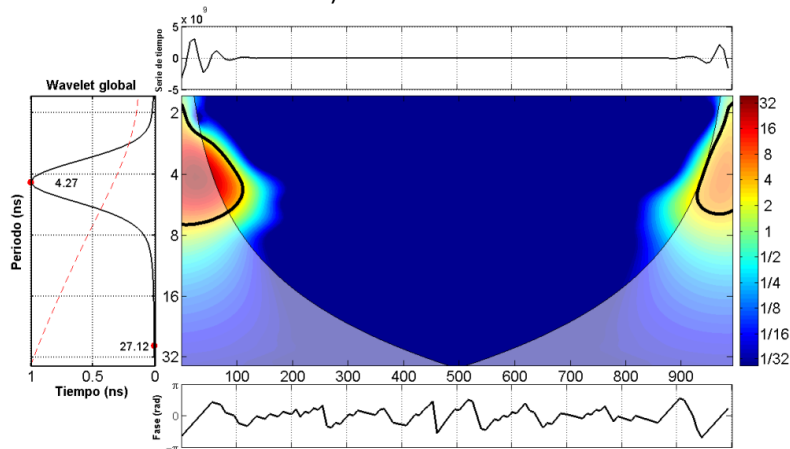
Resultados



a) MCW



b) FMC sin filtrar

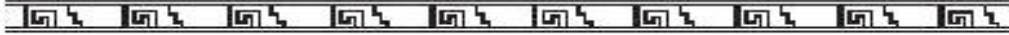


c) FMC filtrada (banda 2-5 ns)

Fig. 3.20. Espectro wavelet de la función cruzada de las trazas 14 y 15 de la medición 'Tun06' (dentro de la cámara).



Resultados



Los periodos de tres intervalos —trazas dentro y fuera del túnel/cámara, fuera del túnel/cámara y dentro del túnel/cámara— analizados con los algoritmos de MCW y FMC filtrado, están resumidos en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Valores de los periodos (ns) obtenidos de los estratos analizados con los algoritmos MCW y FMC filtrado.

Medición GPR	Algoritmo	Intervalos			
		Dentro y fuera del túnel/cámara	Fuera del túnel/cámara	Dentro del túnel	Dentro de la cámara
Tun03	MCW	15.22	20.32	14.37	NA
	FMC	9.05±3.28	NA	NA	NA
	FMC filtrado	NA	7.18±0.75	5.08±1.08	NA
Tun06	MCW	11.40±0.73	20.32±0.68	NA	11.40±0.40
	FMC	10.16±1.24	NA	NA	NA
	FMC filtrado	NA	8.06±1.10	NA	4.27±0.85

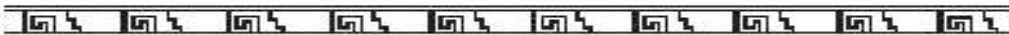
NA, no aplicable.

Si la velocidad de propagación de la matriz fue de $0.05 \frac{m}{ns}$ y utilizando los valores de tiempo (eje de las abscisas) de los periodos que se observan después del primer impulso, obtuvimos los valores de profundidad. Para las figuras 3.1 y 3.2, correspondientes a la medición ‘Tun03’; figuras 3.11 y 3.12, correspondientes a la medición ‘Tun06’, obtuvimos los siguientes valores de profundidad:

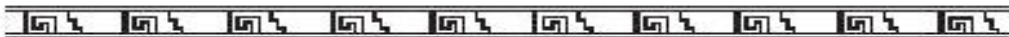
Tabla 3.2. Periodos (ns) y profundidad (m) para el intervalo dentro de túnel/cámara, usando CWT.

Medición GPR	Algoritmo	Dentro del túnel/cámara	Profundidad
Tun03	CWT	3.59	10
	CWT filtrada	4.27	12.4
Tun06	CWT	5.08	12.8
	CWT filtrada	4.53	12.4

El valor promedio de profundidad fue de 11.9 m



Resultados



Para las figuras 3.7 y 3.8, correspondientes a la medición ‘Tun03’; figuras 3.17 y 3.18, correspondientes a la medición ‘Tun06’, los valores de profundidad fueron:

Tabla 3.3. Periodos (ns) y profundidad (m) para el intervalo dentro y fuera de túnel/cámara, usando MCW y FMC.

Medición GPR	Algoritmo	Dentro y fuera de túnel/cámara	Profundidad
Tun03	MCW	15.22	12.4
	FMC	9.05	12.4
Tun06	MCW	11.40	12.8
	FMC	10.16	12.4

El valor promedio de profundidad fue de 12.5 m.

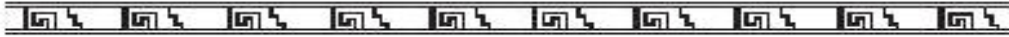
Para las figuras 3.10a y 3.10c, correspondientes a la medición ‘Tun03’; figuras 3.20a y 3.20c, correspondientes a la medición ‘Tun06’, obtuvimos los siguientes valores de profundidad:

Tabla 3.4. Periodos (ns) y profundidad (m) para el intervalo dentro de túnel/cámara, usando MCW y FMC.

Medición GPR	Algoritmo	Dentro del túnel/cámara	Profundidad
Tun03	MCW	14.37	12.4
	FMC filtrada	5.08	12.4
Tun06	MCW	11.40	12.4
	FMC filtrada	4.27	9.2

El valor promedio de profundidad fue de 11.6 m.





Discusión y conclusiones

Dos algoritmos de multicruzado, MCW y FMC, fueron desarrollados en este trabajo para analizar datos de GPR y determinar la huella espectral correspondiente a los diferentes estratos subterráneos del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada.

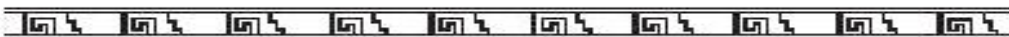
Las recientes excavaciones arqueológicas del túnel debajo del Templo de la Serpiente Emplumada, donde se confirman las estimaciones obtenidas por la metodología instrumental desarrollada en este trabajo doctoral y del procesamiento de datos de GPR, como es la profundidad, longitud y las cámaras del túnel, han probado la verosimilitud de los algoritmos desarrollados para sistemas multicanales. Estos algoritmos utilizan el producto de Hadamard (Johnson, 1990), el cual puede ser utilizado en el procesamiento de imágenes, telecomunicaciones, medicina, exploración geofísica, espacial, entre otros.

El algoritmo FMC es una generalización de la formulación de la función cruzada propuesta por Wiener (1928) y el MCW es la generalización de la función cruzada de Einstein (1914). Estos algoritmos han sido descritos aquí por primera vez y aplicados a un sistema de exploración eléctrica como es el GPR.

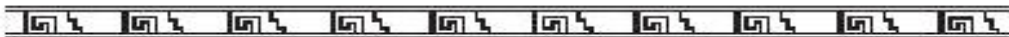
Para aplicar la metodología desarrollada en otras áreas es necesario realizar una calibración en el medio donde se realizarán las mediciones, siguiendo los siguientes pasos:

- a) Se debe de encontrar en un medio controlado las huellas espectrales y correlacionar los resultados con la finalidad de planificar el experimento en medios no explorados.
- b) Las huellas espectrales representan la reacción del medio ante la propagación de las ondas electromagnéticas, estos valores son únicos y pueden ser utilizados como patrones para la localización en señales de 1D, 2D o 3D.
- c) La optimización de algoritmos en la búsqueda de patrones aceleran la localización y la verosimilitud de los resultados.

La metodología de utilizar tres intervalos diferentes —trazas de GPR dentro y fuera del túnel/cámara, fuera del túnel/cámara y dentro del túnel/cámara— con los algoritmos de MCW y FMC, permitió determinar los periodos correspondientes al relleno del túnel y de la cámara, así como el de la arcilla y la matriz.



Discusión y conclusiones



El periodo del relleno del túnel obtenido por medio del análisis de MCW (14.37 ns) refleja el compuesto mixto de tepetate y arcilla contenido en este estrato, ya que su valor es cercano al periodo de la matriz (15.22 ns). Analizado de la misma manera, los periodos del relleno de la cámara (11.40 ± 0.40 ns) y el de la matriz (11.40 ± 0.73 ns) fueron casi idénticos, así como los periodos de la arcilla para ‘Tun03’ (20.32 ns) y ‘Tun06’ (20.32 ± 0.68 ns).

El análisis de FMC del túnel obtuvo un periodo (5.08 ± 1.08 ns) cercano al de la cámara (4.27 ± 0.85 ns), sugiriendo que tanto el túnel como la cámara fueron rellenos con materiales muy similares. Los periodos del relleno del túnel y de la cámara obtenidos por análisis de FMC fueron muy parecidos a los obtenidos para una sola traza (4.27 ± 0.69 y 4.53 ± 0.69 ns, respectivamente).

Usando el mismo algoritmo, los periodos de la arcilla fueron también muy parecidos para ‘Tun03’ (7.18 ± 0.75 ns) y ‘Tun06’ (8.06 ± 1.10 ns), así como para aquellos de la matriz para ‘Tun03’ (9.05 ± 3.28 ns) y ‘Tun06’ (10.16 ± 1.24 ns). Los periodos correspondientes a la arcilla obtenidos por análisis de FMC también fueron muy similares a los obtenidos para una sola traza (8.54 ± 1.58 para ‘Tun03’ y 8.54 ± 1.41 para ‘Tun06’).

El valor promedio total de la profundidad fue de 12 m, el cual es cercano a la profundidad estimada del túnel de 12-14 m.

Idi y Kamarudin (2012), Ni et al. (2010), Jeng et al. (2009) y Baili et al. (2006) usan la transformada de wavelet para el análisis de multirresolución en imágenes de radargrama. En contraste, en este trabajo doctoral se han utilizado los datos crudos de GPR para caracterizar estratos en lugar de utilizar imágenes de radargrama. El ruido puede ser filtrado por medio de la reconstrucción de series de tiempo de dos o más trazas, las cuales pueden ser comparadas al utilizar los dos algoritmos de multicruzado (FMC y MCW).

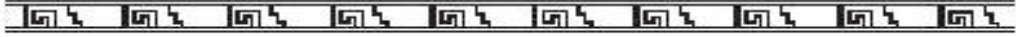
El uso de ambos algoritmos permite un análisis más detallado de los estratos del subsuelo, ya que las similitudes entre los periodos correspondientes al relleno del túnel y de la cámara no podrían haberse determinado sólo a través de un solo algoritmo.

Nuestros resultados no implican que deba descartarse la interpretación de radargramas, porque nuestros algoritmos no se usan para detectar, sino para caracterizar los estratos de interés que han sido identificados por análisis de radargramas.

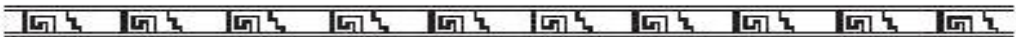
Este análisis de wavelet multicruzado puede ser utilizado en la caracterización de los estratos de interés y la planificación de las excavaciones arqueológicas o en diferentes laboratorios en los que es necesario realizar un análisis de sistemas multicanales.

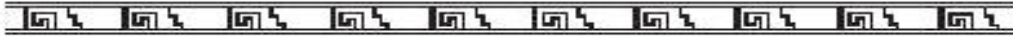


Discusión y conclusiones



La aplicación exitosa de estos algoritmos de multicruzado en datos arqueológicos de GPR sugiere que su uso puede extenderse hacia diferentes áreas de exploración geofísica, espacial, médica y en otras áreas de la ciencia y tecnología.





Apéndice

Algoritmo y ejemplos de la función multicruzada

El algoritmo desarrollado para la función cruzada de tres series de tiempo usando Matlab, es el siguiente:

A.1 Función multicruzada sin retardo

```
NFFT = 1024; %Número de puntos de las señales.
t = 0:0.01:2*pi; %Eje de tiempo.
phi1 = 0; %Ángulo de fase de la señal uno.
phi2 = pi/4; %Ángulo de fase de la señal dos.
phi3 = (3/4)*pi; %Ángulo de fase de la señal tres.
S1 = sin(t-phi1); %Señal uno.
S2 = sin(t-phi2); %Señal dos.
S3 = sin(t-phi3); %Señal tres.
Gx = fft(S1); %Espectro Fourier de la señal uno.
Gy = fft(S2); %Espectro Fourier de la señal dos.
Gz = fft(S3); %Espectro Fourier de la señal tres.

%Cálculo de la función multicruzada de Gx, Gy y Gz (sin retardo).
Rxyz = ifft(Gx.*conj(Gy).*conj(Gz));
```

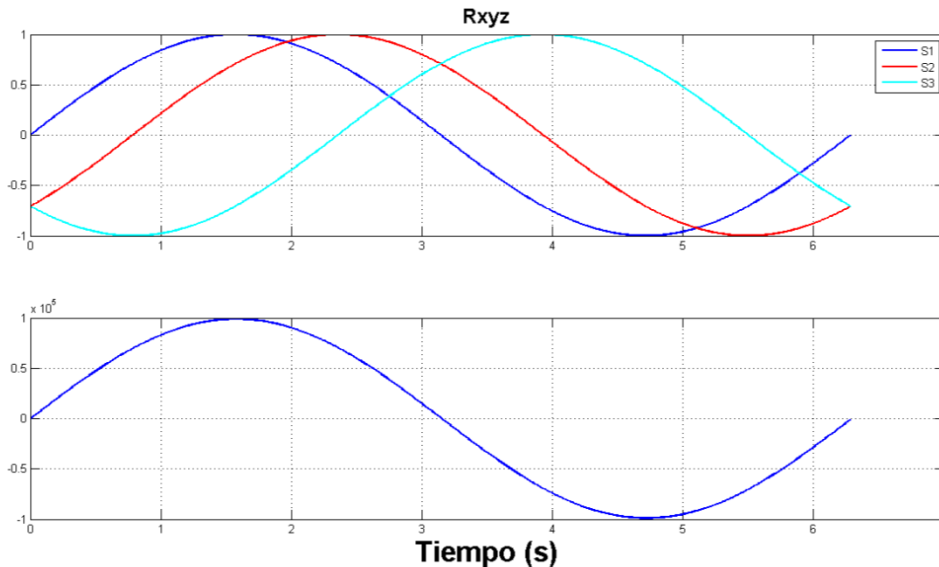
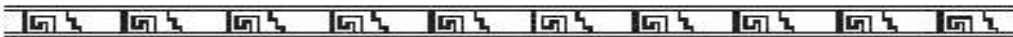
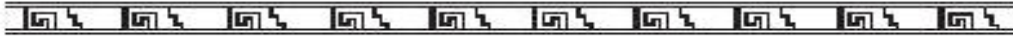


Fig. A.1. Función cruzada sin retardo Rxyz de S1, S2 y S3.





A.2 Función multicruzada con retardo

Si añadimos un retardo a las señales S2 y S3, obtenemos el siguiente algoritmo:

```
N = length(S1); %Longitud de la señal uno.
%Programa que calcula la función multicruzada con retardo.
fourier_mult2(N,Gx,Gy,Gz)
%Función multicruzada (aplicando la transformada inversa de Fourier).
Rxyz2 = ifft(y);
function y = fourier_mult2(N,Gx,Gy,Gz)
y = zeros(1,N);
for m = 1:N+1
    for n = 1:N-m+1
        y(m) = y(m) + Gx(n).*conj(Gy(n+m-1));
        fourier_mult3(N,m,n,Gx,Gy,Gz);
    end
end

function y = fourier_mult3(N,m,n,Gx,Gy,Gz)
y = zeros(1,N);
for o = 1:N-n+1
    y(m) = y(m) + Gx(n).*conj(Gy(n+m-1)).*conj(Gz(o+n-1));
end
```

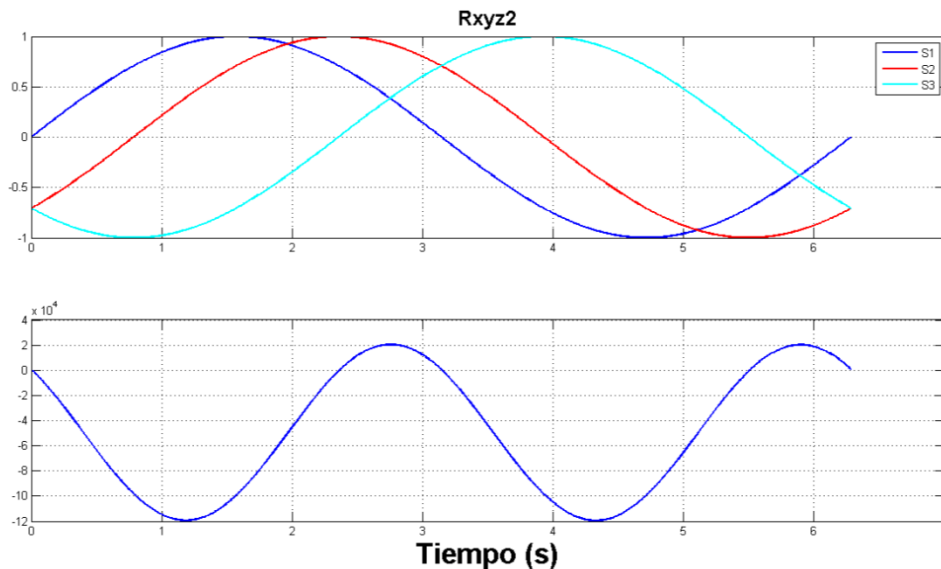
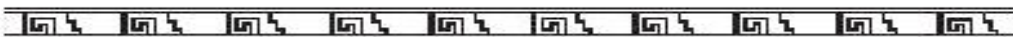


Fig. A.2. Función cruzada con retardo Rxyz2 de S1, S2 y S3.

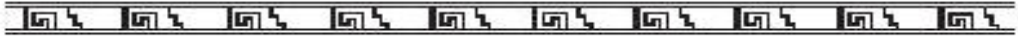
Ejemplos usando la definición de función multicruzada sin retardo

Queremos obtener la función multicruzada de las siguientes series de tiempo:

$$X = \sin 30t, \quad Y = \sin 30t + \sin 60t \quad \text{y} \quad Z = \sin 10t + \sin 30t + \sin 60t.$$



Apéndice



Basándonos en la definición de la función multicruzada para la transformada de Fourier (FMC) y wavelet multicruzado (MCW), obtuvimos los siguientes espectros:

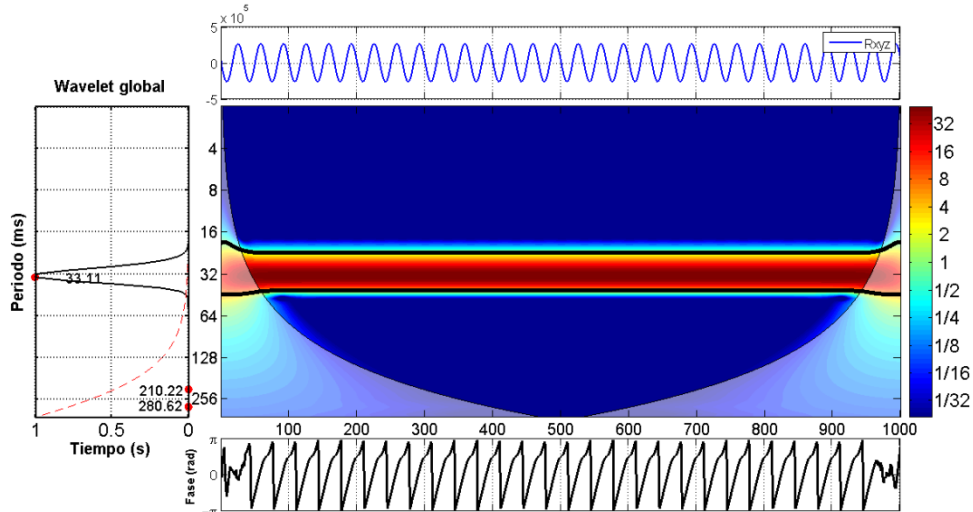


Fig. A.3. Función cruzada Rxyz de X, Y y Z, usando FMC.

En la figura A.3 podemos identificar el periodo igual a 33.11 ms, el cual corresponde a la frecuencia de 30 Hz. Sabemos que $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{30Hz} = 0.33s$. Éste es el periodo común entre las tres series.

Obtuvimos el siguiente espectro por medio del análisis MCW:

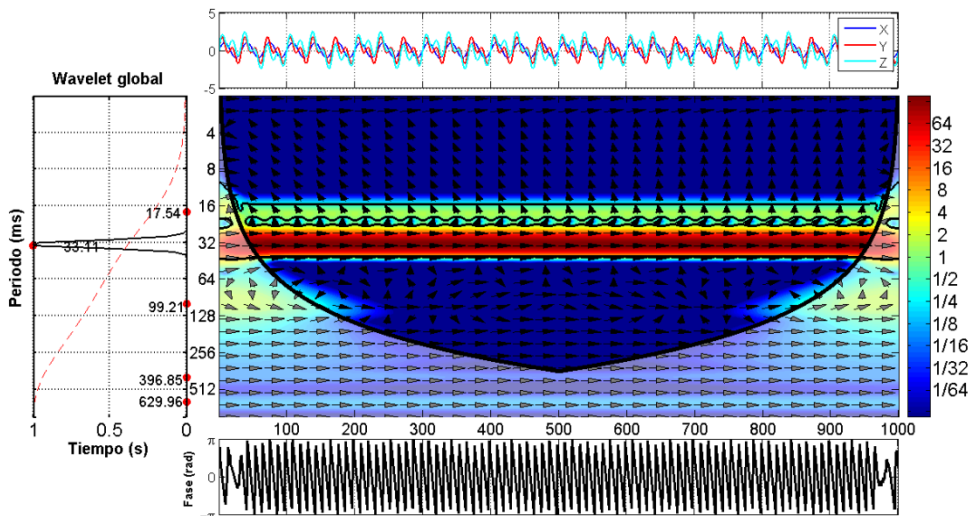
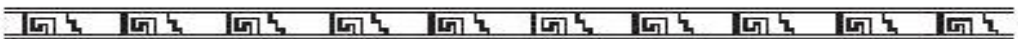
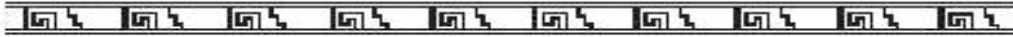


Fig. A.4. Función cruzada de X, Y y Z, usando MCW.



Apéndice



Para este caso (fig. A.4) podemos identificar nuevamente al periodo de 33.11 ms como el periodo común entre las series de tiempo.

A continuación mostramos las funciones multicruzadas para las mismas series de tiempo, pero en esta ocasión les añadimos ruido blanco.

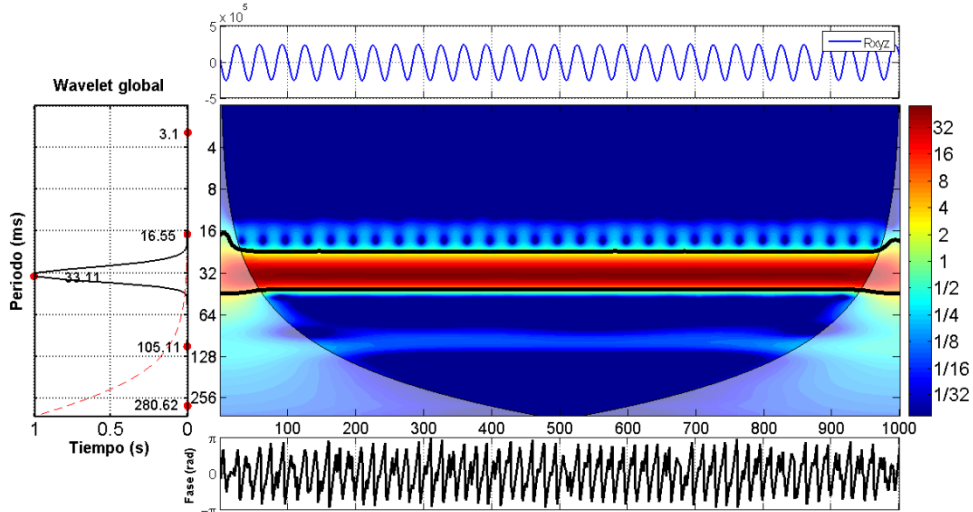


Fig. A.5. Función cruzada Rxyz de X, Y y Z con ruido, usando FMC.

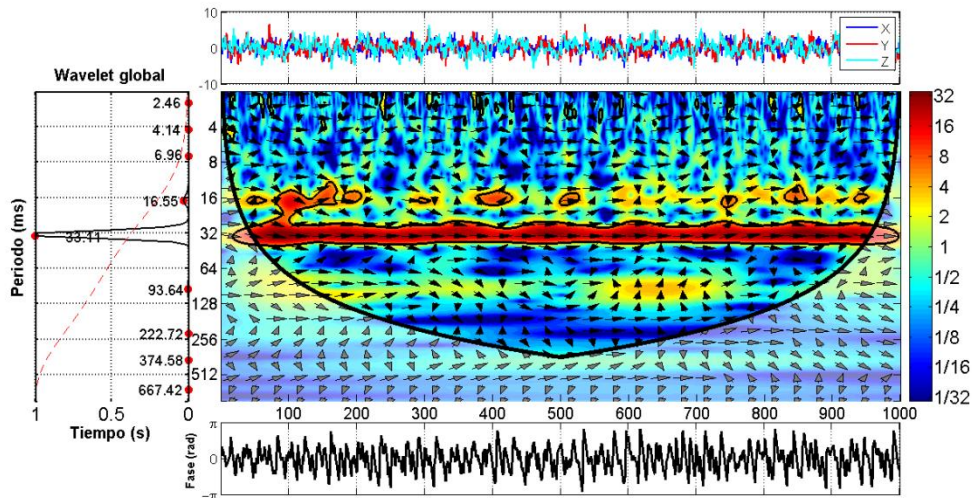
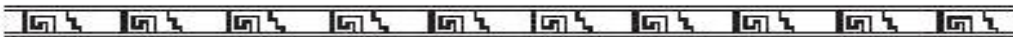
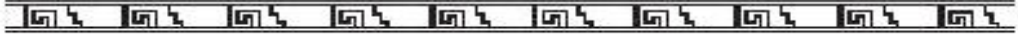


Fig. A.6. Función cruzada de X, Y y Z con ruido, usando MCW.

En ambos casos (figuras A.5 y A.6) podemos identificar el periodo común entre las series de 33.11 ms.



Apéndice



En el siguiente ejemplo, obtuvimos la función multicruzada de las siguientes series de tiempo: $X = \sin 30t$, $Y = \sin 60t$ y $Z = \sin 10t$.

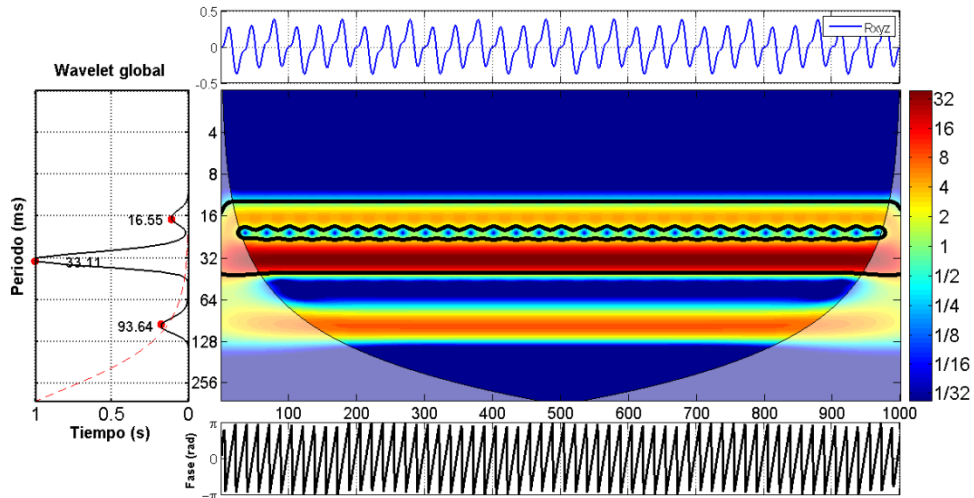


Fig. A.7. Función cruzada Rxyz de X, Y y Z, usando FMC.

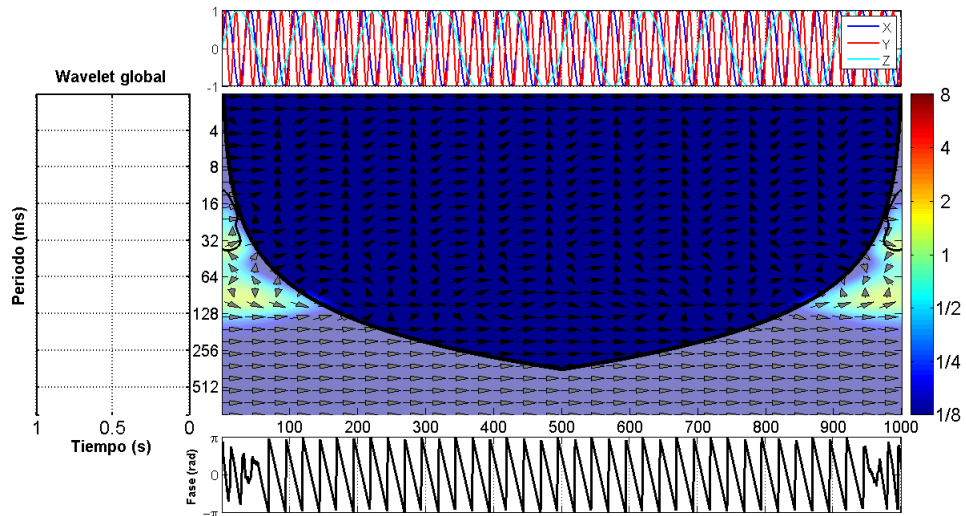
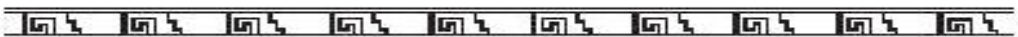
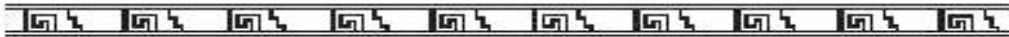


Fig. A.8. Función cruzada de X, Y y Z, usando MCW.

Para el caso de la función cruzada con wavelet multicruzado (fig. A.8), podemos ver que no identificamos ningún periodo común entre las series. Lo cual es correcto, ya que las series tienen diferentes frecuencias. Para el análisis con FMC se obtuvieron las tres frecuencias —16.55, 33.11 y 93.64 ms correspondientes a 10, 30 y 60 Hz, respectivamente— lo cual es incorrecto. Por lo tanto, para el análisis de señales con diferentes frecuencias es mejor el análisis con MCW.



Apéndice



Añadiendo nuevamente ruido a las señales, obtuvimos:

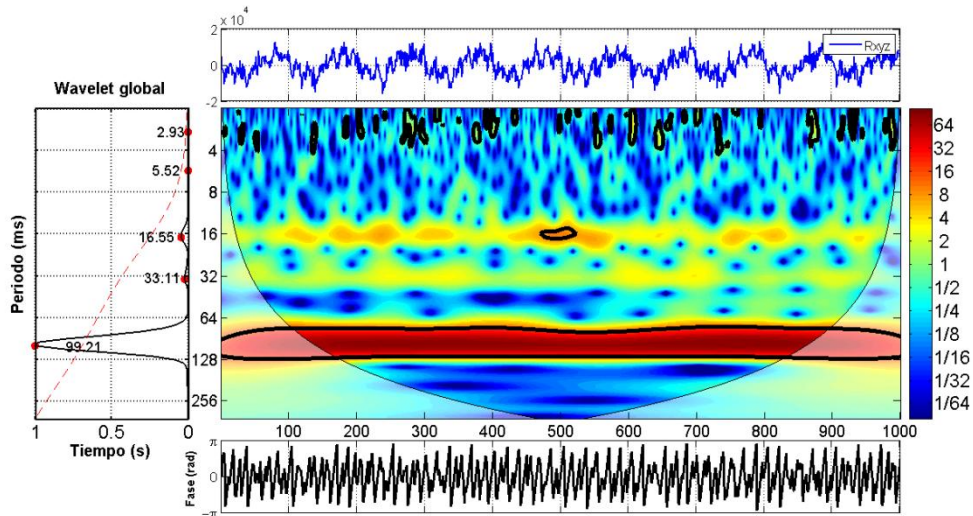


Fig. A.9. Función cruzada Rxyz de X, Y y Z con ruido, usando FMC.

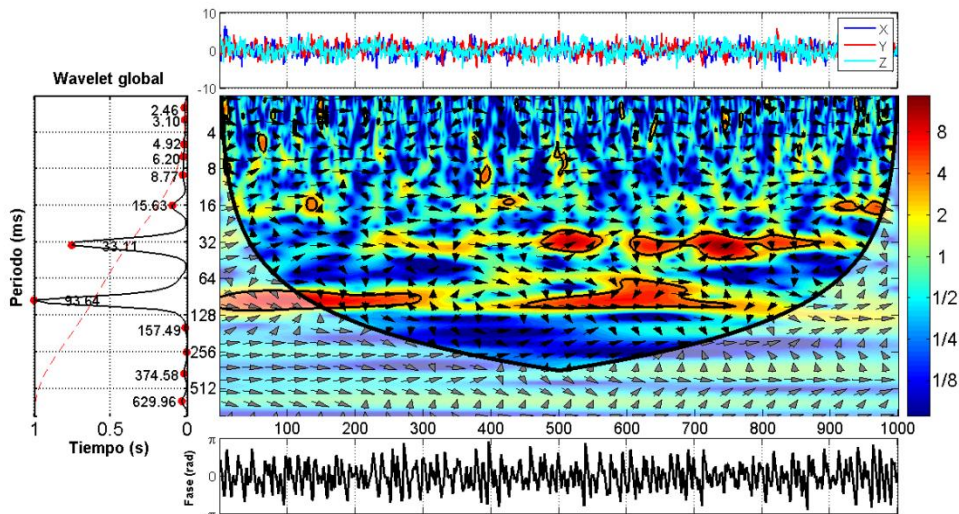
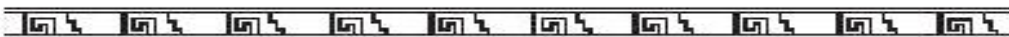
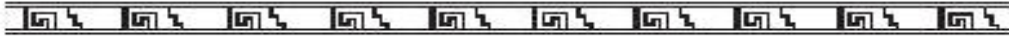


Fig. A.10. Función cruzada de X, Y y Z con ruido, usando MCW.

Para este caso (figuras A.9 y A.10) no obtuvimos un resultado tan concluyente como el del ejemplo sin ruido, ya que podemos observar varios periodos.





Conclusiones

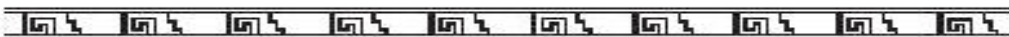
En este trabajo presentamos dos algoritmos de la función multicruzada de series de tiempo. FMC basado en la definición del teorema de Wiener-Khintchine (Wiener, 1928; Khintchine, 1934) y MCW en el wavelet cruzado (Torrence y Compo, 1998).

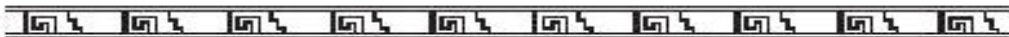
En la actualidad se utilizan cada vez más equipos multicanales y es por esto que en vez de comparar las señales analizadas por pares, se comparan dos o más por medio de este algoritmo. Creemos que es muy importante el algoritmo de FMC ya que el análisis de Fourier es un método que se ha estudiado exhaustivamente y con mucha dedicación en el procesamiento de señales. Ya se ha realizado un análisis con MCW en la actividad solar (Soon et al., 2014).

Presentamos dos casos en los que aplicamos este algoritmo: para series de tiempo con una frecuencia en común y para series que no tienen una frecuencia en común. Del análisis de los resultados, podemos concluir que los dos algoritmos nos permiten identificar el periodo que tienen en común las series. Para el primer caso (señales sin ruido), el periodo que se identificó fue el de 33.11 ms, tanto por análisis con FMC como con MCW.

Aplicamos ruido a las series de tiempo, los mejores resultados fueron obtenidos para series de tiempo con una frecuencia en común (figuras A.5 y A.6) para los dos análisis de FMC y MCW. Sin embargo, para series de tiempo con frecuencias diferentes, los resultados no fueron los mejores ya que se observaron varios periodos (figuras A.9 y A.10). El mejor resultado fue obtenido por medio de análisis de MCW para series de tiempo originales (figura A.8), en el que no se encontró ningún periodo en común.

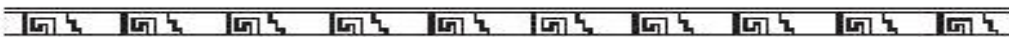
El análisis multicruzado de wavelet puede ser una herramienta muy útil que permita encontrar información compartida entre dos o más series de tiempo. En este trabajo de doctorado se demostró la utilidad de este método en la caracterización de señales que atraviesan medios diferentes, como son las ondas electromagnéticas de GPR.



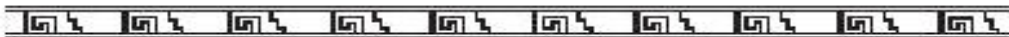


Referencias

- Addison, P.S., 2002. *The illustrated wavelet transform handbook*. Institute of Physics Publishing, London.
- Annan, A.P., 1999. "Practical processing of GPR data." Sens. Softw. Inc Proceeding Second Gov. Workshop Ground Penetrating Radar Mississauga Can.
- Arzate, J.A., Flores, L., Chávez, R.E., Barba, L., Manzanilla, L., 1990. "Magnetic prospecting for tunnels and caves in Teotihuacan, Mexico", in: *Investigations in Geophysics 5. Geotechnical and Environmental Geophysics*. Society of Exploration Geophysicists. Tulsa, Oklahoma., pp. 155–162.
- Baili, J., Lahouar, S., Hergli, M., Amimi, A., Besbes, K., 2006. "Application of the discrete wavelet transform to denoise GPR signals." Presented at the Proceedings from the Second International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP), Marrakech, Morocco, p. 11.
- Barba, L., Lazos, L., Ortiz, A., Link, K., López, L., 1997. "La arquitectura sagrada y sus dioses. Estudio geofísico y químico de la Casa de las Águilas, Tenochtitlan, México." *Rev. Arqueol. Esp.* 44–53.
- Basile, V., Carozzo, M.T., Negri, S., Nuzzo, L., Quarta, T., Villani, A.V., 2000. "A ground-penetrating radar survey for archaeological investigations in an urban area (Lecce, Italy)." *J. Appl. Geophys.* 44, 15–32.
- Beres, M., Huggenberger, P., Green, A.G., Horstmeyer, H., 1999. "Using two- and three-dimensional georadar methods to characterize glaciofluvial architecture." *Sediment. Geol.* 129, 1–24.
- Bevan, B.W., 1977. *Ground-penetrating radar at Valley Forge*. Geophys. Surv. Syst. North Salem N. H.
- Bevan, B.W., Kenyon, J.L., 1975. "Ground-penetrating radar for historical archaeology." *MASCA Newsl.* 11, 2–7.
- Birkenfeld, S., 2010. "Automatic detection of reflexion hyperbolas in gpr data with neural networks." Presented at the World Automation Congress (WAC), pp. 1–6.
- Centeno-Salas, F., Flores-García, W., Gutiérrez-Calderón, R., Carreón-Freyre, D., 2014. "Multiresolution analysis based on Mallat pyramidal algorithm applied to GPR data." Presented at the 15th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR), pp. 647–650.



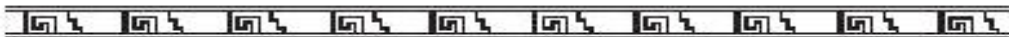
Referencias



- Chávez, R.E., Cámara, M.E., Tejero, A., Barba, L., Manzanilla, L., 2001. "Site characterization by geophysical methods in The Archaeological Zone of Teotihuacan, Mexico." *J. Archaeol. Sci.* 28, 1265–1276.
- Clark, A., 1990. *Seeing Beneath the Soil*. B.T. Batsford, London.
- Conyers, L.B., 2013. *Ground-penetrating radar for archaeology*. AltaMira Press.
- Conyers, L.B., Ernenwein, E.G., Bedal, L.A., 2002. "Ground penetrating radar (GPR) mapping as a method for planning excavation strategies, Petra, Jordan." *Rep. Soc. Am. Archaeol.* 7.
- Conyers, L.B., Goodman, D., 1997. *Ground-penetrating Radar: An Introduction for Archaeologists*. AltaMira Press, Walnut Creek.
- Davis, J.L., Annan, A.P., 1989. "Ground-Penetrating Radar for High-Resolution Mapping of Soil and Rock Stratigraphy." *Geophys. Prospect.* 37, 531–551.
- Einstein, A., 1914. "Méthode pour la détermination de valeurs statistiques d'observations concernant des grandeurs soumises à des fluctuations irrégulières." *Arch Sci Phys Nat* 37, 254–256.
- Elizondo, M.A., Chávez, R.E., Cámara, M.E., Tejero, A., 2012. "Application of the Wigner–Ville distribution to interpret ground –penetrating radar anomalies." *Geofís Intl* 51, 121–127.
- Farge, M., 1992. "Wavelet Transforms and Their Applications to Turbulence." *Annu. Rev. Fluid Mech.* 24, 395–457.
- Fischer, S.C., Stewart, R.R., Jol, H.M., 1994. "Processing ground penetrating radar data." *Proceedings of the Fifth International Conference on Ground Penetrating Radar*. Waterloo Centre for Groundwater Research. Waterloo, Canada., pp. 661–676.
- Fisher, E., McMechan, G.A., Annan, A.P., 1992. "Acquisition and processing of wide-aperture ground-penetrating radar data." *Geophysics* 57, 495–504.
- Gamio, M., 1922. *Introducción: síntesis y conclusiones de la obra "La población del valle de Teotihuacan"*. Dirección de Talleres Gráficos.
- Gater, J., Gaffney, C., 2003. *Revealing the buried past: geophysics for archaeologists*. Tempus Stroud UK.
- Goodman, D., 1996. "Comparison of GPR time slices and archaeological excavations." *Department of Geoscience and Technology*. Tohoku University, Sendai, Japan., pp. 77–78.
- Goodman, D., 1994. "Ground-Penetrating Radar Simulation in Engineering and Archaeology." *Geophysics* 59, 224–232.



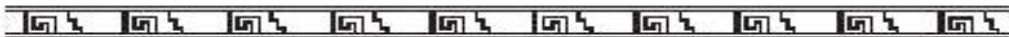
Referencias



- Goodman, D., Nishimura, Y., Hongo, H., Okita, M., 1998. "GPR amplitude rendering in archaeology." Proceedings of the Seventh International Conference on Ground Penetrating Radar. University of Radar Systems and Remote Sensing Laboratory, University of Kansas. Lawrence, Kansas, USA., pp. 91–92.
- Goodman, D., Nishimura, Y., Rogers, J.D., 1995. "GPR time slices in archaeological prospection." *Archaeol. Prospect.* 2, 85–89.
- Grasmueck, M., 1994. "Application of seismic processing techniques to discontinuity mapping with ground-penetrating radar in crystalline rock of the Gotthard massif, Switzerland." Presented at the Fifth International Conference on Ground Penetrating Radar.
- Heinz, J., Aigner, T., 2003. "Three-dimensional GPR analysis of various Quaternary gravel-bed braided river deposits (southwestern Germany)." *Geol. Soc. Lond. Spec. Publ.* 211, 99–110.
- Hubbard, B.B., 1997. "The world according to wavelets." *Math. Intell.* 19, 59.
- Hudgins, L., Friehe, C., Mayer, M., 1993. "Wavelet Transforms and Atmospheric-Turbulence." *Phys. Rev. Lett.* 71, 3279–3282.
- Idi, B.Y., Kamarudin, M.N., 2012. "Interpretation of ground penetrating radar image using digital wavelet transform." *AJAPS* 5, 174–182.
- INAH, 2008. *Teotihuacan: ciudad de los dioses*. Instituto Nacional de Antropología e Historia.
- Jeng, Y., Lin, C.-H., Li, Y.-W., Chen, C.-S., Huang, H.-H., 2009. "Application of multiresolution analysis in removing ground-penetrating radar noise." *CSPG CSEG CWLS Conv.* 416–419.
- Johnson, C.R., 1990. *Matrix theory and applications*. American Mathematical Soc.
- Kenyon, J.L., 1977. "Ground-penetrating radar and its application to a historical archaeological site." *Hist. Archaeol.* 48–55.
- Khintchine, A., 1934. "Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse." *Math. Ann.* 109, 604–615.
- Kraus, J.D., 1950. *Antennas*. McGraw-Hill.
- Kvamme, K.L., 2003. "Geophysical surveys as landscape archaeology." *Am. Antiq.* 68, 435–457.
- LaFleche, P.T., Todoschuck, J.P., Jensen, O.G., Judge, A.S., 1991. "Analysis of ground-probing radar data: predictive deconvolution." *Can. Geotech. J.* 28, 134–139.
- Leckebusch, J., 2003. "Ground-penetrating radar: a modern three-dimensional prospection method." *Archaeol. Prospect.* 10, 213–240.



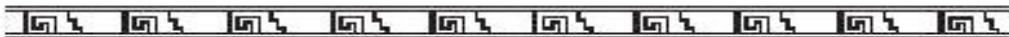
Referencias



- Leckebusch, J., Peikert, R., 2001. "Investigating the true resolution and three-dimensional capabilities of ground-penetrating radar data in archaeological surveys: measurements in a sand box." *Archaeol. Prospect.* 8, 29–40.
- Legates, D.R., Jr, D.F.L., Ii, J.T.V.S., Velasco-Herrera, V.M., 2013. "Using wavelet analysis to examine bark microrelief." *Trees* 28, 413–425.
- Majjala, P., 1992. "Application of some seismic data processing methods to ground penetrating radar data." Presented at the Geological Survey of Finland. Special Paper 16, pp. 103–110.
- Malagodi, S., Orlando, L., Piro, S., 1996. "Approaches to increase resolution of radar signal." Department of Geoscience and Technology. Tohoku University, Sendai, Japan. pp. 283–288.
- Marukawa, Y., Kamei, H., 1999. "Estimation of the systematic error of three-component geomagnetic data using the ABIC minimization method." *Archaeol. Prospect.* 6, 135–145.
- Meyer, Y., 1992. *Wavelets and Operators*. 1992. Camb. Univ. Camb. Transl. DH Salinger.
- Milligan, R., Atkin, A., 1993. "The use of Ground-Probing Radar within a digital environment on archaeological sites." *Comput. Past CAA92 Comput. Appl. Quant. Methods Archaeol.* Aarhus Univ. Press Aarhus 21–32.
- Neves, F.A., Roulston, M.S., Miller, J.A., 1996. "Source signature deconvolution of ground penetrating radar data." *Proceedings of the Sixth International Conference on Ground Penetrating Radar.* Department of Geoscience and Technology. Tohoku University, Sendai, Japan. pp. 573–578.
- Ni, S.-H., Huang, Y.-H., Lo, K.-F., Lin, D.-C., 2010. "Buried pipe detection by ground penetrating radar using the discrete wavelet transform." *Comput. Geotech.* 37, 440–448.
- Nishimura, Y., Goodman, D., 1993. "A ground-radar view of Japanese burial mounds." *Antiquity* 67, 349–354.
- Olhoft, G.R., 1981. "Electrical properties of rocks." *Phys. Prop. Rocks Miner.* 2, 257–297.
- Pan, G.W., 2003. *Wavelets in electromagnetics and device modeling*. John Wiley & Sons.
- Piro, S., Mauriello, P., Cammarano, F., 2000. "Quantitative integration of geophysical methods for archaeological prospection." *Archaeol. Prospect.* 7, 203–213.
- Recinos, A., 1947. *Popol Vuh: las antiguas historias del Quiché traducidas del texto original, con una introducción y notas por Adrián Recinos*. Fondo de cultura económica (Impr. Gráfica panamericana).



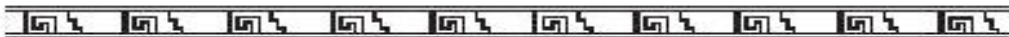
Referencias



- Rees, H.V., Glover, J.M., 1992. "Digital enhancement of ground probing radar data." *Ground Penetrating Radar Geo Surv Can Pap.* 90, 187–192.
- Reynolds, J.M., 2011. *An Introduction to Applied and Environmental Geophysics*. John Wiley & Sons.
- Rojansky, V.B., 1971. *Electromagnetic fields and Waves*. Courier Dover Publications.
- Salman, R., Schultze, T., Willms, I., 2008. "UWB material characterisation and object recognition with applications in fire and security." Presented at the IEEE International Conference on Ultra-Wideband, 2008. ICUWB 2008, pp. 203–206.
- Savvaidis, A., Tsokas, G., Liritzis, Y., Apostolou, M., 1999. "The location and mapping of ancient ruins on the castle of Lefkas (Greece) by resistivity and GPR methods." *Archaeol. Prospect.* 6, 63–73.
- Sheets, P.D., Loker, W.M., Spetzler, H.A., Ware, R.W., 1985. "Geophysical exploration for ancient Maya housing at Ceren, El Salvador." *Natl. Geogr. Res. Rep.* 20, 645–656.
- Shih, S., Doolittle, J., 1984. "Using Radar to Investigate Organic Soil Thickness in the Florida Everglades." *Soil Sci. Soc. Am. J.* 48, 651–656.
- Simard, P., Gloaguen, G.E., Ruggeri, P., Dubreuil, C., Giroux, B., 2011. "Multiple-scale Porosity Simulation Using Wavelet Decomposition of GPR Tomographic Data." Presented at the 2011 SEG Annual Meeting, Society of Exploration Geophysicists.
- Soon, W., Velasco Herrera, V.M., Selvaraj, K., Traversi, R., Usoskin, I., Chen, C.-T.A., Lou, J.-Y., Kao, S.-J., Carter, R.M., Pipin, V., others, 2014. "A review of Holocene solar-linked climatic variation on centennial to millennial timescales: Physical processes, interpretative frameworks and a new multiple cross-wavelet transform algorithm." *Earth-Sci. Rev.* 134, 1–15.
- Standard Guide for Using the Surface Ground Penetrating Radar Method for Subsurface Investigation, ASTM D6432-11. <http://www.astm.org/Standards/D6432.htm>
- Sternberg, B.K., McGill, J.W., 1995. "Archaeology studies in southern Arizona using ground penetrating radar." *J. Appl. Geophys.* 33, 209–225.
- Tesfamariam, G. T., Dilip, M., 2014. "Application of advanced background subtraction techniques for the detection of buried plastic landmines." *Int J Emerg Technol Adv Eng* 4, 318–323.
- Todoeschuck, J.P., Lafleche, P.T., Jensen, O.G., Judge, A.S., Pilon, J.A., 1992. "Deconvolution of ground probing radar data." *Ground Penetrating Radar Geol. Surv. Can.* 227–230.
- Torrence, C., Compo, G.P., 1998. "A Practical Guide to Wavelet Analysis." *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 79, 61–78.



Referencias



- Torrence, C., Webster, P.J., 1999. "Interdecadal changes in the ENSO-monsoon system." *J. Clim.* 12, 2679–2690.
- Turner, G., Scientific, C., others, 1992. "Propagation deconvolution." Geological Survey of Finland. Special Paper 16, Rovaniemi, Finland.
- Tzanis, A., 2013. "Detection and extraction of orientation-and-scale-dependent information from two-dimensional GPR data with tuneable directional wavelet filters." *J. Appl. Geophys.* 89, 48–67.
- Van Dam, R.L., Schlager, W., 2000. "Identifying causes of ground-penetrating radar reflections using time-domain reflectometry and sedimentological analyses." *Sedimentology* 47, 435–449.
- Van Dam, R.L., van den Berg, E.H., van Heteren, S., Kasse, C., Kenter, J. a. M., Groen, K., 2002. "Influence of organic matter in soils on radar-wave reflection: Sedimentological implications." *J. Sediment. Res.* 72, 341–352.
- Velasco Herrera, V.M., Pérez-Peraza, J., Juárez Zúñiga, A., 2014. "Application of the Multiple Cross Wavelet in the Synchronization of the Solar Activity." Presented at the 40th COSPAR Scientific Assembly.
- Vickers, R., Dolphin, L.T., Johnson, D., 1976. "Archaeological investigations at Chaco Canyon using subsurface radar." *Remote Sens. Exp. Cult. Resour. Stud. Rep. Chaco Cent. US Natl. Park Serv. US Dep. Inter. Univ. N. M. Albuq. N. M.*
- Von Hippel, A.R., 1954. *Dielectrics and waves*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Wensink, W.A., 1993. "Dielectric-Properties of Wet Soils in the Frequency-Range 1-3000 Mhz." *Geophys. Prospect.* 41, 671–696.
- Wiener, N., 1928. "The spectrum of an arbitrary function." *Proc. Lond. Math. Soc.* 2, 483–496.
- Yilmaz, O., 2001. *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion and Interpretation of Seismic Data (Vols. 1 & 2)*. Soc. Explor. Geophys.
- Young, R.A., Jingsheng, S., 1994. "Recognition and removal of subsurface scattering in GPR data." *Proceedings of the Fifth International Conference on Ground Penetrating Radar*. Waterloo Centre for Groundwater Research. Waterloo, Canada.

