



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA

APLICACIONES DE LA SUPERCONDUCTIVIDAD EN LA  
INGENIERÍA CIVIL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO CIVIL

PRESENTA:  
FRANCISCO ZÚÑIGA FRIAS

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA



DISTRITO FEDERAL, MÉXICO

ENERO, 2016

# Aplicaciones de la superconductividad en la Ingeniería Civil

por

Francisco Zúñiga Frias

Tesis presentada para obtener el título de

Ingeniero Civil

en la

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Distrito Federal, México. Enero, 2016

POR SU CARÍÑO Y LA PROFUNDA INFLUENCIA QUE HAN TENIDO EN MI, TANTO DE MANERA INTELECTUAL COMO EMOCIONAL, ESTE TRABAJO ESTÁ DEDICADO CON AFECTO Y GRATITUD A MIS PADRES, SARA Y FRANCISCO, A MI HERMANO RODRIGO Y A ALBA.

# Agradecimientos

A Manuel de Llano, mi maestro, quien intervino en mi formación siempre en la medida correcta, en el tiempo correcto y con la mejor disposición posible. Quien, además de todo, confió en mi y me enseñó lo difícil pero gratificante que es la investigación.

A los miembros del jurado, Dr. Manuel de Llano, M. en I. Agustín Demeneghi Colina, Ing. Erik Castañeda De Isla Puga, Dr. Frédéric Trillaud y M. en I. Rodrigo Takashi Sepúlveda Hirose por sus acertados comentarios y su apoyo casi incondicional.

A todos mis compañeros de trabajo, pero sobre todo a Israel Chávez porque sin él este trabajo no existiría y porque me enseñó más de lo que pudiera pedirle.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I El fenómeno de Superconductividad</b>	<b>4</b>
<b>1. Propiedades Básicas</b>	<b>5</b>
1.1. Resistencia Cero . . . . .	6
1.2. Efecto Meissner-Ochsenfeld . . . . .	7
1.3. Cuantización de flujo magnético . . . . .	8
1.4. Transición de fase superconductora . . . . .	9
1.5. Efecto isotópico . . . . .	12
1.6. Brecha de energía . . . . .	12
1.7. Efecto Josephson . . . . .	13
1.7.1. SQUID . . . . .	15
1.8. Tipos de superconductores . . . . .	16
<b>2. Preliminares teóricos</b>	<b>20</b>
2.1. Interacción electrón-fonón . . . . .	20
2.2. Pares de Cooper . . . . .	21
2.2.1. Formación . . . . .	22
<b>3. Deducción heurística de la brecha de energía de BCS</b>	<b>28</b>
3.1. Ecuación de la brecha de energía a $T = 0$ . . . . .	30
3.2. Ecuación de la brecha de energía a $T \geq 0$ . . . . .	37

<b>4. Superconductores de alta temperatura</b>	<b>43</b>
4.1. HTSC vía electrón-fonón . . . . .	44
4.2. HTSC en cupratos . . . . .	46
4.3. HTSC basada en hierro . . . . .	50
<b>II Aplicaciones de la Superconductividad en la Ingeniería Civil</b>	<b>53</b>
<b>5. Aplicaciones ambientales</b>	<b>55</b>
5.1. Separación magnética de contaminantes . . . . .	55
5.2. Sensores ambientales: Tecnología THz . . . . .	60
5.3. Mediciones geomagnéticas y sísmicas . . . . .	64
<b>6. Diagnóstico de estructuras</b>	<b>68</b>
6.1. Evaluación no destructiva con SQUIDS . . . . .	69
6.1.1. Inspección de Puentes . . . . .	69
6.1.2. Evaluación de compuestos con refuerzo de fibras poliméricas . . . . .	73
6.2. Sensores THz . . . . .	74
<b>7. Transporte</b>	<b>78</b>
7.1. Trenes de levitación magnética . . . . .	78
7.1.1. Chuo Shinkansen . . . . .	81
<b>8. Energía</b>	<b>86</b>
8.1. Cables superconductores . . . . .	87
8.2. Almacenamiento de energía magnética . . . . .	91
<b>9. Conclusión</b>	<b>95</b>
<b>A. Espacio recíproco</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>100</b>

# Aplicaciones de la superconductividad en la Ingeniería Civil

por

Francisco Zúñiga Frias

## Resumen

Este trabajo se presenta en dos partes. En la primera se trata el fenómeno mismo de la superconductividad y se basa en la teoría de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS). Se introducen las propiedades fundamentales de los superconductores y se deduce de forma heurística y original la ecuación de la brecha de energía de superconductividad. La intención es formular esta ecuación bien conocida y muy importante en esta rama de manera pedagógica. El proceso heurístico toma como premisa la formación de pares de electrones con espín y dirección opuestos, llamados pares de Cooper en su forma más general. Luego se propone un funcional de energía para el estado superconductor adecuadamente simetrizado en términos de las probabilidades de ocupación de los pares de Cooper. Éste, al minimizarse vía un método variacional, produce las conocidas ecuaciones de la brecha a  $T = 0$  K y  $T > 0$  K. Lo importante de esta deducción radica en el planteamiento y en la solución tanto del funcional de energía como de los pares de Cooper *sin* recurrir al uso de segunda cuantización, i.e., sin usar operadores de creación y aniquilación. Por último se estudia el panorama general de la teoría de superconductividad de alta temperatura, la cual no se describe con BCS.

En la segunda parte se presenta una revisión de las aplicaciones de la superconductividad más relevantes y actuales de la superconductividad en ingeniería civil. Éstas abarcan ámbitos tales como el ambiental, el diagnóstico estructural, transporte y energía.

# Introducción

La superconductividad ha sido un reto teórico, experimental y tecnológico desde hace más de un siglo de su descubrimiento [1]. La fascinación por este fenómeno radica en sus propiedades y en la dificultad de explicarlas. Éstas son, por ejemplo, resistencia eléctrica nula, diamagnetismo perfecto, etc., y se presentan al bajar de una temperatura muy baja (usando helio o nitrógeno líquidos) llamada temperatura crítica. Desde sus inicios, su estudio fue un ambicioso trabajo multidisciplinario con profundas implicaciones tanto en materia condensada como en ramas afines. En ciencia básica se han otorgado ocho premios Nobel<sup>1</sup> por superconductividad o temas relacionados. En tecnología, las aplicaciones son por sí mismas impresionantes tales como trenes de levitación magnética o aceleradores de partículas.

El desarrollo teórico fue tardado pero fundamental para lograr estos avances y, sin exagerar, éste fue guiado en algún punto de su historia por la existencia de una *brecha prohibida* (gap) en el espectro de energía. Así lo refleja una proposición de John Bardeen en 1950: “*If one could find the reason for the energy gap, one would very likely have the explanation of superconductivity*” [3]. En 1957 la teoría de John Bardeen, Leon Cooper y Robert Schrieffer (BCS)[4] fue la única teoría microscópica capaz de explicar la superconductividad convencional, deduciendo correctamente la forma de la brecha de energía.

La teoría se basó en dos principios: el primero, explicado por Leon Cooper, es la formación de pares de electrones o Pares de Cooper [5], los cuales siguen siendo el único elemento universalmente aceptado en todo tipo de superconductividad [6] y son, por eso, la premisa fundamental en este trabajo. El segundo, por parte de Robert Schrieffer, fue la formulación

---

<sup>1</sup>1913: H. K. Onnes; 1962: L. D. Landau; 1972: J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer; 1973: L. Esaki e I. Giaever; 1978: P. L. Kapitsa; 1987: J. G. Bednorz y K. A. Mller; 1996: D. M. Lee, D. D. Osheroff y R. C. Richardson; 2003: A. A. Abrikosov, V. L. Ginsburg y A. J. Leggett.



de una función de onda de muchos cuerpos en donde los electrones cerca de la superficie de Fermi forman pares de Cooper. El mecanismo de formación de pares de Cooper es un proceso de emisión y absorción de un fonón (bosón) entre electrones (fermiones) y se formaliza usando un método de *segunda cuantización*, el cual es complicado incluso a nivel introductorio.

Uno de los objetivos de esta tesis es presentar una deducción de la brecha de energía de BCS con base en la cantidad mínima de suposiciones teóricas o experimentales y de la manera más simple—i.e., sin usar segunda cuantización. Así pues, se presenta la teoría BCS en un lenguaje sencillo no disponible en áreas no específicas de materia condensada. La ingeniería civil, vista como una ciencia aplicada, se beneficia de esta perspectiva porque usa la teoría (sin estudiarla en principio) para sacar provecho de las propiedades macroscópicas y microscópicas.

La necesidad de hacer este tema interdisciplinario se enfatiza por el constante trabajo de crear nuevos superconductores a temperaturas cada vez más cercanas a la temperatura ambiente ( $\sim 300$  K). Después de la BCS y el surgimiento de los llamados superconductores de alta temperatura (HTSC, por sus siglas en inglés) [7], las teorías han tomado caminos disímiles y ninguna, en la actualidad, explica satisfactoriamente el fenómeno. El panorama experimental es similar en el sentido de que no existe una “receta teórica” para sintetizarlos y eso a su vez explica el descubrimiento por prueba y error de nuevos superconductores con cada vez mayores temperaturas críticas (ver fig.0-1). Por último, esto tiene repercusiones directas sobre la ingeniería porque una porción no despreciable de las aplicaciones se basa en HTSC. Con esto en mente, y a pesar de ello, la superconductividad representa el arquetipo de un cambio de paradigma, el cual, sin embargo, no está lejos de ser una realidad práctica.

En la primera parte de esta tesis se presentan los hechos experimentales relevantes tales como las propiedades y tipos de superconductores que se han descubierto a la fecha. Más adelante se da un resumen de las premisas teóricas básicas con el objetivo primordial de presentar una deducción autoconsistente y, dicho sea de paso, original de la brecha de energía de BCS. Posteriormente, tomando la teoría BCS como fundamento teórico se introduce concisamente el panorama teórico de los HTSC. En la segunda parte se presenta una revisión de las aplicaciones de la superconductividad en la ingeniería civil. Esto incluye las áreas de ingeniería ambiental, de materiales, de diagnóstico estructural, de transporte y de energía, entre otras.

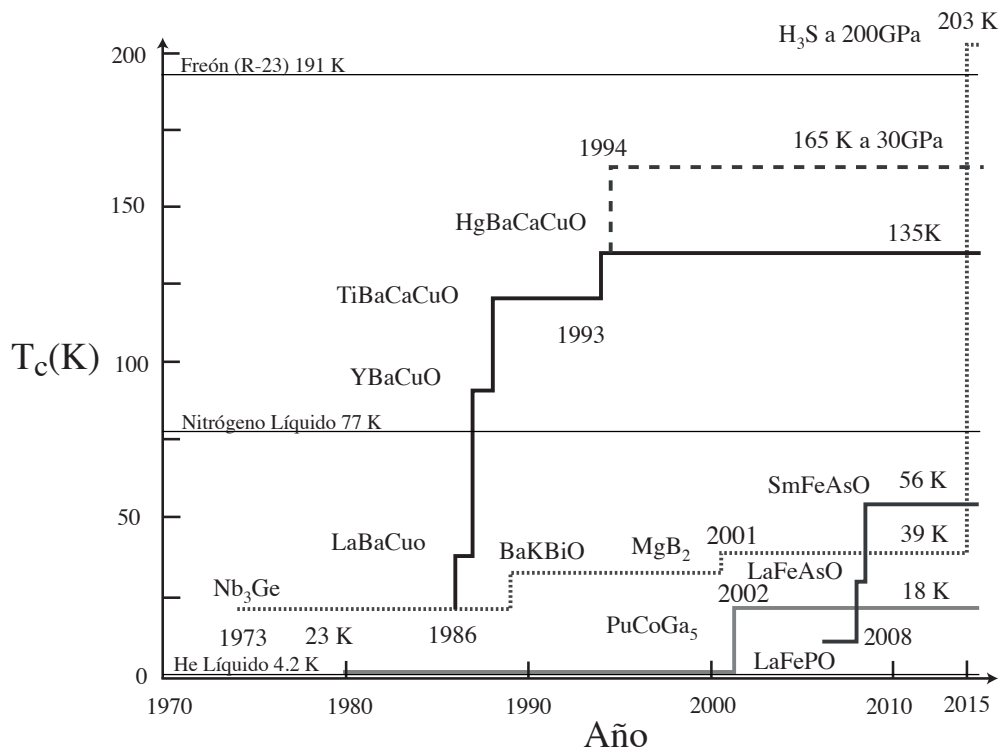


Figura 0-1: Gráfica  $T_c$  vs Año. Nota: 1 GPa  $\simeq$  9870 atm (adaptada y ampliada de [8]).

## Parte I

# El fenómeno de Superconductividad

# Capítulo 1

## Propiedades Básicas

La superconductividad (SC) es la ausencia de una resistencia eléctrica en ciertos materiales a temperaturas muy bajas (la mayoría cercanas a 0 K). Fue descubierta en 1911 en mercurio y hoy en día se conocen 30 elementos (ó 57 si se consideran altas presiones) además de muchos compuestos que presentan superconductividad. La temperatura por debajo de la cual un material presenta superconductividad se llama temperatura crítica ( $T_c$ ) y actualmente existen materiales cuya  $T_c$  es superior a la del nitrógeno líquido o incluso a la del freón (R-23 o trifluorometano  $CHF_3$  con  $T_{eb} = 191$  K).

La superconductividad es un fenómeno *cuántico* con efectos macroscópicos: por debajo de una temperatura crítica se forma un estado *coherente* de muchos pares de electrones y entonces el material presenta resistencia nula y diamagnetismo perfecto entre otros efectos observables. A escala macroscópica la superconductividad se explica como una transición de fase de segundo orden. Es decir, no hay un calor latente pero sí una singularidad en el calor específico electrónico. En esta transición de fase las propiedades termodinámicas y electromagnéticas del material cambian radicalmente. Las más sobresalientes y que caracterizan a un material superconductor son la resistencia nula, la expulsión de un campo magnético del interior de un material (llamado efecto Meissner-Ochsenfeld), el efecto Josephson, la cuantización del flujo de campo magnético y la aparición de brechas de energía. A continuación se presenta la fenomenología básica de los superconductores. Esto incluye tanto los fenómenos experimentales como las teorías fenomenológicas asociadas.

## 1.1. Resistencia Cero

Como consecuencia de sus experimentos en licuefacción de helio—que le valieron el premio Nobel de física—, Kamerlingh Onnes descubrió el fenómeno de superconductividad en mercurio en 1911 [1]. En una exhibición de genio y destreza experimental, midió un marcado decremento en la resistencia de mercurio (fig.1-1) y concluyó que a la temperatura del helio líquido “*la resistencia, dentro del rango de precisión experimental, se vuelve cero*”. Estos experimentos

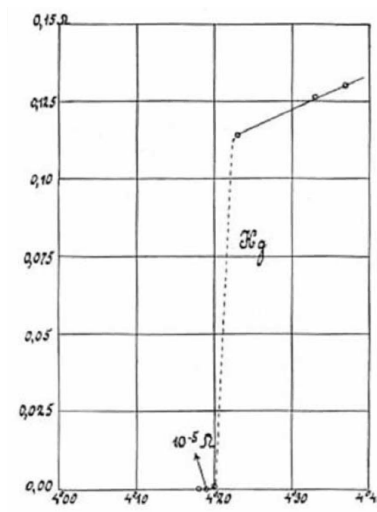


Figura 1-1: Datos de Kamerlingh Onnes [2] de la temperatura (K) contra resistencia (ohms) en mercurio. La transición superconductor ocurre a  $\sim 4.2$  K pasando de  $0.10 \Omega$  a menos de  $10^{-6} \Omega$  (incommensurable en esa fecha) en un intervalo del orden de  $0.01$  K.

resolvieron una de las incógnitas de ese tiempo en cuanto a lo que pasaría con la resistencia de un metal cuando su temperatura se aproximara al cero absoluto. Teóricamente había dos conjeturas, la primera afirmaba que al bajar la temperatura habría resistencia eléctrica cero y la segunda, propuesta por Lord Kelvin, que habría conductividad eléctrica cero [9]. Onnes resolvió el dilema y plasmó la primera conjetura como “supraconductividad”.

Hoy, la resistencia cero se aprecia mejor cuando se mide en experimentos con anillos superconductores como el mostrado en la fig.1-3. En estas circunstancias en cuanto haya una corriente se espera que tanto el cambio en la corriente como en el campo magnético sean nulos en al menos  $10^{10}$  años (ref.[10], p.2).

## 1.2. Efecto Meissner-Ochsenfeld

En 1933, Meissner y Ochsenfeld descubrieron el efecto Meissner-Ochsenfeld (diamagnetismo perfecto)[11] (fig. 1-2) que amplió el panorama del fenómeno de superconductividad. Con gran sorpresa encontraron que los superconductores no eran conductores perfectos y que por lo tanto el campo magnético en su interior era cero, i.e.,  $\mathbf{B} = 0$  y no solamente  $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0$  como en un conductor perfecto. Muy poco tiempo después, en 1934 Gorter y Casimir [12] plantearon un

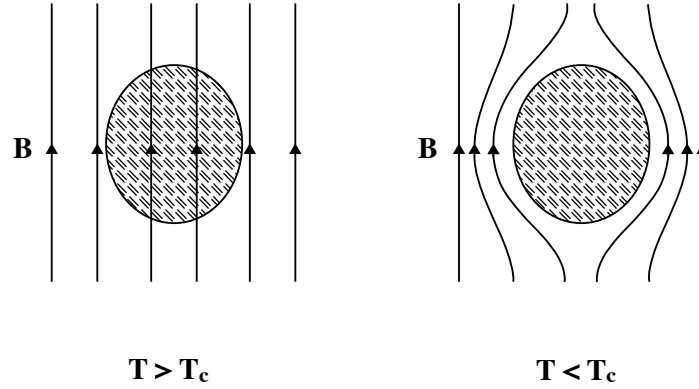


Figura 1-2: Efecto Meissner-Ochsenfeld [11]. Un superconductor en presencia de un campo magnético expulsa el campo de su interior y se le puede considerar perfectamente diamagnético.

modelo de superconductividad como dos fluidos, uno superconductor y uno normal. Este fue el primer paso en explicar la superconductividad como un fenómeno termodinámico.

En 1935, F. y H. London [13] explicaron el efecto Meissner-Ochsenfeld con su propia teoría fenomenológica. Para hacerlo formularon dos ecuaciones: en la primera aplicaron la segunda ley de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  a un conjunto de partículas con carga  $e$  y densidad  $n_s$ ; en la segunda, reformularon la ecuación de Maxwell-Faraday  $\frac{4\pi\lambda^2}{c}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . Esto es, respectivamente,

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^{*2}}{m^*} \mathbf{E} \quad (1-1)$$

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c} \nabla \times \mathbf{j}_s = -\mathbf{B} \quad (1-2)$$

donde  $\mathbf{j}_s$  es la densidad de corriente superconductor,  $n_s$  la densidad de electrones superconductores,  $\mathbf{E}$  el campo eléctrico,  $m^*$  y  $e^*$  son la masa y la carga del electrón equivalentes,

respectivamente. A partir de esto concluyeron que

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-z/\lambda_L} \quad (1-3)$$

donde  $\lambda_L$  es la llamada profundidad de penetración de London que depende de la temperatura y varía según el material. Esta ecuación implica que  $\mathbf{B} \simeq 0$  (es decir, diamagnetismo) a profundidades mayores a  $\lambda_L \simeq 500 \text{ \AA}$  y ha sido confirmada experimentalmente en muchas ocasiones. Ni el modelo de Gorter-Casimir ni las ecuaciones (1-1) y (1-2) son teorías fundamentales de la superconductividad, sin embargo reproducen de manera correcta muchas propiedades superconductoras y dan una intuición correcta del fenómeno.

### 1.3. Cuantización de flujo magnético

En 1948 Fritz London formuló su propia teoría microscópica (incorrecta) de superconductividad [14] en la que afirmó que una interacción de intercambio (que favoreciera el ferromagnetismo) era responsable de la superconductividad porque producía una “*atracción en el espacio de momento*”. Además, fue el primero en llamar a un superconductor un “*mecanismo cuántico puro de escala macroscópica*”. Esta última idea es probablemente una de las más relevantes en el desarrollo de la teoría microscópica de la superconductividad.

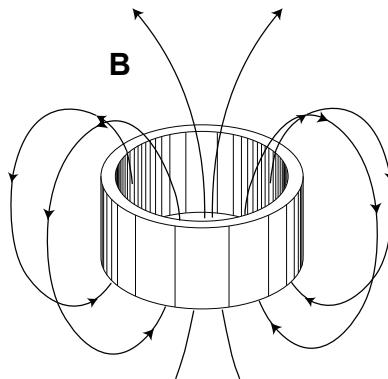


Figura 1-3: Cuantización del flujo magnético en un anillo superconductor. El anillo superconductor expulsa el campo magnético  $\mathbf{B}$  de su interior por efecto Meissner-Ochsenfeld. Si el campo magnético se quita, el anillo superconductor mantiene algunas de las líneas de campo.

En ese mismo trabajo predijo que la magnitud del flujo magnético dentro de un anillo superconductor es un múltiplo entero de un valor elemental  $\Phi_0$ , es decir, está *cuantizado*:

$$\Phi = n\Phi_0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-4)$$

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \simeq 2.067833758 \times 10^{-15} \text{Wb} \quad (1-5)$$

donde el flujo magnético  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$  es debido al campo magnético  $\mathbf{B}$  que pasa a través de la superficie  $\mathbf{S}$  encerrada por el anillo superconductor (fig.1-3). Esto ha sido probado experimentalmente [15; 16] y se sabe que esta unidad de flujo magnético es la misma para todos los superconductores.

## 1.4. Transición de fase superconductor

El siguiente hecho relevante para entender la superconductividad fue debida a Vitaly L. Ginzburg y Lev D. Landau. En 1950 construyeron una teoría fenomenológica (GL) [17] basada en la teoría de transiciones de fase de Landau. En ella se estableció la superconductividad como una transición de fase de segundo orden (con una singularidad en el calor específico, ver fig.1-4) y sentó las bases termodinámicas de los superconductores, ampliando y mejorando las teorías de Gorter-Casimir y de London.

La teoría de GL define el estado superconductor mediante un parámetro de orden complejo,

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi\mathbf{r}} = \sqrt{n_s(\mathbf{r})}e^{i\varphi\mathbf{r}}. \quad (1-6)$$

Éste, en la forma de una función de onda macroscópica tiene una fase y una amplitud —o coherencia macroscópica—; el gradiente de la primera es proporcional a la velocidad del superfluido<sup>1</sup>,  $v_s = \nabla\varphi$ , y el cuadrado de la segunda al número de electrones condensados en el superfluido,  $n_s = |\psi|^2$ . Su naturaleza macroscópica le permite ser altamente intuitiva y de fácil uso en términos experimentales. Además, es especialmente útil para solucionar problemas en los cuales la variación espacial de la densidad de electrones condensados es muy alta (por ejemplo, inhomogeneidad espacial en la transición de fase normal a superconductor) y es necesario un

---

<sup>1</sup>En la teoría de Ginzburg-Landau los electrones que contribuyen al estado superconductor se dice que forman un superfluido.



enfoque a escala macroscópica.

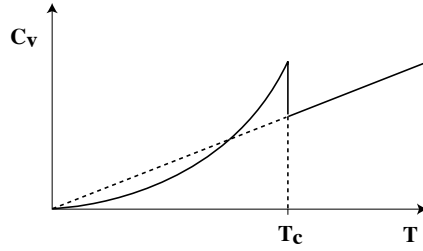


Figura 1-4: Calor específico en la transición superconductor. Éste tiene un incremento discontinuo en  $T_c$  y disminuye exponencialmente hacia  $T = 0$ . Ésta y otras evidencias indican la existencia de una brecha de energía en el espectro de energía electrónica por partícula.

Para formalizar este proceso, en primer lugar se propone la forma general de la energía libre de GL, es decir,

$$f_{GL} = f_L + f_{grad} + U_{mag}. \quad (1-7)$$

El primer término es un desarrollo en serie la densidad de energía libre en potencias de  $|\psi|^2$ , de la misma forma como se hace en la teoría de transiciones de fase de Landau (ver, por ejemplo [18; 19; 10]). En este caso  $\psi$  funciona como un parámetro que caracteriza a una transición de fase en el desarrollo

$$f_L = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \dots \quad (1-8)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes que determinan la fase según su signo: si  $\alpha > 0$ ,  $T > T_c$ ; si  $\alpha < 0$ ,  $T < T_c$  y  $\beta > 0$  siempre. La ecuación (1-8) toma esa forma porque depende analíticamente de  $|\psi|$  y asume su simetría (rotación por un factor de fase), además, esta analiticidad se extiende a la temperatura y esto se cumple si  $\alpha = \alpha_0(T - T_c)$ .

El segundo término en (1-7) es el término gradiente

$$f_{grad,0} = \frac{\hbar}{2m^*} |\nabla\psi|^2. \quad (1-9)$$

Este término, sin embargo, sólo sirve para superfluidos no cargados. Para un superfluido car-

gado, el término gradiente se debe escribir en términos invariantes de norma, es decir,

$$f_{grad} = \left| \frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 \quad (1-10)$$

el cual sustituye el gradiente simple por uno con invariancia de norma agregando  $\mathbf{A}$ , el llamado potencial vectorial electromagnético ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ).

Por último, el tercer término en (1-7) implica el acoplamiento con la energía del campo magnético  $h^2/8\pi$  y el superfluido. La densidad de energía de GL resulta después de desarrollarla en potencias de  $|\psi|^2$  y  $|\nabla\psi|^2$  y asumiendo que  $\psi$  varía lentamente en el espacio en

$$f = f_{n0} + (\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \dots) + \frac{1}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{h^2}{8\pi} \quad (1-11)$$

donde  $f_{n0}(T) = f_{n0}(0) - \frac{1}{2}\gamma T^2$  es un mínimo de referencia de la densidad de energía libre,  $\alpha$  y  $\beta > 0$  (para que tenga sentido físico) son coeficientes, como antes. Si  $\psi = 0$ , (1-11) se reduce a la energía libre de la fase normal,  $f_{n0} + h^2/8\pi$ . Si además se ignoran los campos y los gradientes, la diferencia en energía libre entre el estado superconductor y el normal es

$$f_s - f_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 \quad (1-12)$$

Como se mencionó antes, la función tiene una solución no trivial si  $\alpha < 0$  con un valor de  $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$ . Esta última tiene la forma funcional  $\alpha = \alpha_0(T - T_c)$  usual de una transición de segundo orden. Con esto en mente se llega a

$$f_s - f_n = \frac{-H_c^2}{8\pi} = \frac{-\alpha^2}{2\beta} \quad \text{si } \alpha < 0 \quad (SC) \quad (1-13)$$

donde  $H_c$  es el campo crítico (análogo a la temperatura crítica).

Por otro lado, una posible solución de la ecuación de onda es

$$\psi = \psi_0 e^{i\varphi}. \quad (1-14)$$

Su amplitud,  $\psi_0$ , corresponde a la densidad del superfluido o a la brecha superconductora y en cierta medida representa la robustez del estado superconductor.  $\varphi$  representa la fase del

superconductor y refleja el hecho de que la superconductividad es un estado con coherencia de fase (i.e., es un condensado). Así, cuando el material se enfría a  $T < T_c$  el superconductor “escoge” una fase arbitraria y la corriente en el superconductor se asocia con un gradiente en esa fase. A esto se le llama *ruptura espontánea de simetría*.

Esta teoría es correcta en el sentido termodinámico pero no explica la naturaleza microscópica de la función de onda. La magnitud del parámetro de orden fue después identificado con la brecha de energía de BCS por Gor’kov [45]. La teoría de GL ha sido verificada numerosas veces; por ejemplo, experimentalmente se comprobó la discontinuidad del calor específico a  $T_c$  [20] y en general es muy útil en la práctica experimental. La importancia de esta teoría fue crucial para la superconductividad y toda la física posterior. No tardó en establecerse como una teoría de campo medio útil en teorías aparentemente muy diferentes basadas en campos cuánticos, teoría de supercuerdas, entre otras.

## 1.5. Efecto isotópico

También en 1950 se descubrió el efecto isotópico [22; 23] en el cual se observó que la  $T_c$  variaba inversamente con la raíz cuadrada de la masa isotópica de un cristal, i.e.,

$$T_c \propto M^{-1/2}. \quad (1-15)$$

Este hecho fue fundamental para el desarrollo de la teoría BCS porque permitió inferir la interacción electrón-fonón implicada en la transición de fase superconductor y que llevó a la correcta formulación de los pares de Cooper.

## 1.6. Brecha de energía

En 1954, Corak *et al.* [20] descubrieron una variación exponencial (o singularidad) del calor específico electrónico cerca de  $T_c$  (fig.1-4). Esto confirmaba lo que la teoría de GL había predicho. Posteriormente, para 1956 las pruebas experimentales de la existencia de una brecha eran ineludibles [21]. Experimentalmente se encontró que la brecha prohibida de energía estaba centrada en el nivel de Fermi y que por lo tanto tenía la forma mostrada en la fig.1-5. Ésta fue

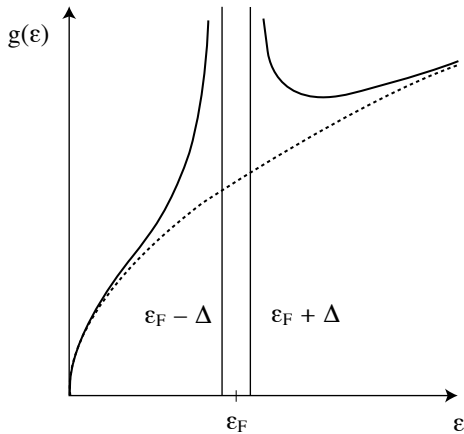


Figura 1-5: La brecha siempre se encuentra centrada en el nivel de Fermi,  $\epsilon_F$ . En un superconductor, por debajo de  $T_c$  la densidad de estados electrónicos  $g(\epsilon)$  es discontinua y se abre una brecha con valor  $2\Delta$  separando los estados ocupados y desocupados alrededor del nivel de Fermi.

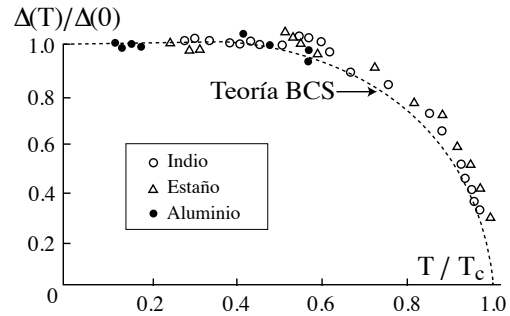


Figura 1-6: Brecha de energía contra temperatura. En la teoría BCS la forma de la brecha es una media campana. Ésta se ajusta muy bien a los datos experimentales para diferentes elementos superconductores.

la última evidencia que se necesitaba y que Bardeen había especulado desde 1950. Ese mismo año se formuló la teoría BCS y se publicó en 1957 donde demostraron que la brecha depende de la temperatura y es una relación universal para todos los superconductores convencionales (fig.1-6).

## 1.7. Efecto Josephson

El efecto Josephson, predicho teóricamente en 1962 por Brian Josephson [24] y observado por primera vez en 1963 por Anderson y Rowell [25; 26], es un fenómeno físico en el cual una corriente superconductor (super corriente) fluye una longitud indefinida sin un voltaje aplicado entre electrodos superconductores y que pasa través de un material aislante. A este arreglo de un material aislante entre superconductores se le conoce como unión de Josephson. Es la base de muchas aplicaciones interesantes de superconductividad tales como magnetómetros muy sensibles, la definición del volt en el SI, qubits en computación cuántica, entre otras. Este fenómeno prueba claramente los efectos cuánticos de escala macroscópica y en particular prueba

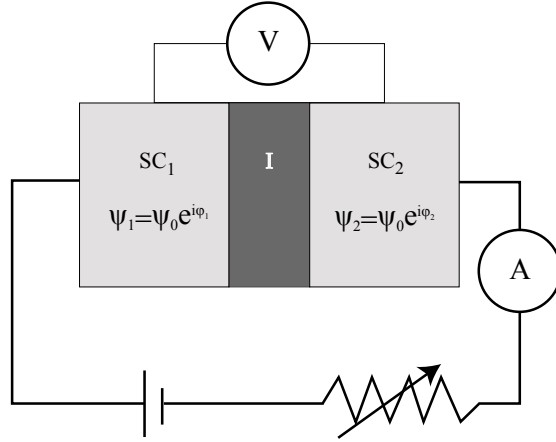


Figura 1-7: Junta Josephson

los efectos de coherencia de un superconductor.

Para describir el efecto Josephson primero se debe recordar que un superconductor se puede describir con un parámetro de orden complejo,  $\psi = \psi_0 e^{i\varphi}$ . Su amplitud,  $\psi_0$ , como se mencionó en §1.4, se asocia con la brecha de energía  $\Delta$  y  $\varphi$  es la fase de coherencia del condensado superconductor. Además, la corriente se asocia a un gradiente de fases.

Una unión de Josephson consiste de dos superconductores ( $SC_1$  y  $SC_2$ ) con diferentes fases separados por un material aislante (I) (fig.1-7). Es sabido que la función de onda de un superconductor se extiende fuera del material. En este caso ambas funciones penetran la barrera no superconductora y por lo tanto se genera un gradiente de fases  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  y por lo tanto puede fluir una supercorriente. Esta supercorriente está dada por

$$I_s = I_c \sin(\delta\varphi), \quad (1-16)$$

donde  $I_c$  es la corriente crítica por arriba de la cual la unión de Josephson tiene resistencia (la cual es diferente y no se debe confundir con la corriente que destruye el estado superconductor). A esto se le llama efecto Josephson DC. En el régimen resistivo, cuando  $I > I_c$ , se le llama efecto Josephson AC porque la junta conduce una corriente oscilatoria con una frecuencia de Josephson AC  $\omega = 2\pi V/\Phi_0$ ; donde  $V$  es el voltaje a través de la junta y  $\Phi_0$  es el flujo cuántico

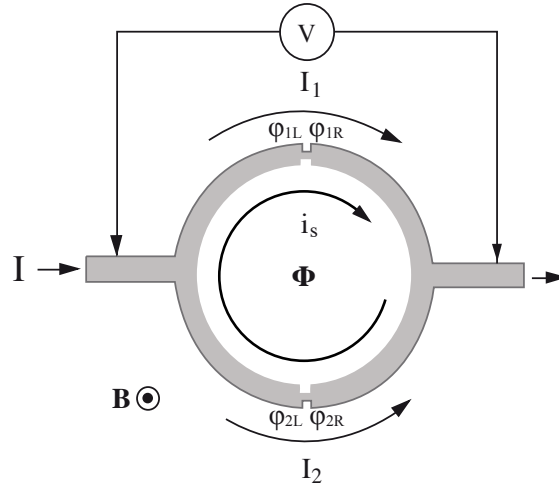


Figura 1-8: SQUID

magnético. La corriente en este régimen está dada por

$$I(t) = I_c \sin\left(\delta\varphi + \frac{2\pi V}{\Phi_0} t\right). \quad (1-17)$$

Por lo tanto una unión de Josephson puede convertir voltaje DC en corriente AC (y viceversa).

### 1.7.1. SQUID

El dispositivo superconductor de interferencia cuántica (SQUID, por sus siglas en inglés) combina los fenómenos físicos de efecto Josephson (§1.7) y de cuantización de flujo magnético (§1.3). Para formar un SQUID se requiere unir dos uniones de Josephson y formar un anillo como el mostrado en la fig.1-8. La corriente a través de cada unión depende de la diferencia de fases y la corriente total  $I$  es la suma de las corrientes en cada unión

$$I = I_1 \sin(\delta\varphi_1) + I_2 \sin(\delta\varphi_2) \quad (1-18)$$

donde  $\delta\varphi_1 = \varphi_{1L} - \varphi_{1R}$  y  $\delta\varphi_2 = \varphi_{2L} - \varphi_{2R}$  son los gradientes de las fases. Usando el principio de invariancia de norma

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \\
&= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
&= 2e/\hbar \oint (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} \\
&= 2e/\hbar(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) \\
&= 2\pi\Phi_0(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2).
\end{aligned} \tag{1-19}$$

Si, además, las uniones están balanceadas,  $I_1 = I_2 = I_c$ , se puede asumir que  $\delta\varphi_1 = \delta\varphi + \pi\Phi/\Phi_0$  y  $\delta\varphi_2 = \delta\varphi - \pi\Phi/\Phi_0$  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
I &= I_c \sin(\delta\varphi_1) + I_c \sin(\delta\varphi_2) \\
&= \underbrace{2I_c \sin(\delta\varphi)}_{\equiv I_0} \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)
\end{aligned} \tag{1-20}$$

De esta forma la corriente crítica se modula por un factor que depende del flujo neto a través del anillo

$$I_c(\Phi) = I_c(0) \left| \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \right| \tag{1-21}$$

donde  $I_c(0)$  es una constante que depende de las fases.

Un dispositivo SQUID se puede hacer de  $1 \text{ cm}^2$  de área y es posible, al menos en principio, medir campos magnéticos con una precisión por debajo de  $B \simeq 10^{-10} \text{ T}$ . También son particularmente buenos para medir cambios en un campo con esta misma precisión por el hecho de que se pueden contar los mínimos de la corriente crítica de un SQUID.

## 1.8. Tipos de superconductores

Hay una amplia variedad de materiales que exhibe superconductividad [29]. En primer lugar se tienen los superconductores convencionales<sup>2</sup> descritos por la teoría BCS. Éstos comprenden,

---

<sup>2</sup>Nota sobre la clasificación de superconductores. En esta tesis se usará la clasificación según la teoría que los explica mejor, es decir, convencionales (descritos por BCS) y no convencionales (no descritos por BCS). Sin

entre otros, a los superconductores elementales (i.e. elementos de la tabla periódica) donde más 50 elementos son superconductores (fig.1-9) y algunos superconductores compuestos (i.e. aleaciones binarias como el NbTi.). Por otro lado, se encuentran los superconductores no convencionales no descritos completamente por la teoría BCS como los conocidos cupratos, los basados en hierro, los orgánicos y los bismutatos. Las temperaturas críticas de muchos de estos se muestran en la tabla 1-1. Aunque usualmente los superconductores convencionales son superconductores de baja temperatura crítica, la máxima temperatura crítica registrada a la fecha ( $T_c = 203K$ ) corresponde al sulfuro de hidrógeno ( $H_3S$ ), el cual a presiones extremadamente altas ( $200 \text{ GPa} \simeq 1.97 \times 10^6 \text{ atm}$ ) presenta una fase metálica y es un superconductor convencional [33].

---

embargo, cuando se llegue a la segunda parte de la tesis, se usará también la clasificación según si su temperatura crítica es mayor o menor que la temperatura de licuefacción del nitrógeno líquido ( $T_{NL}$ ). Esto es, si  $T_c < T_{NL}$  serán superconductores de baja temperatura (LTSC, por sus siglas en inglés), o, en cambio, si  $T_c > T_{NL}$ , serán un superconductores de alta temperatura (HTSC, por sus siglas en inglés) [30].



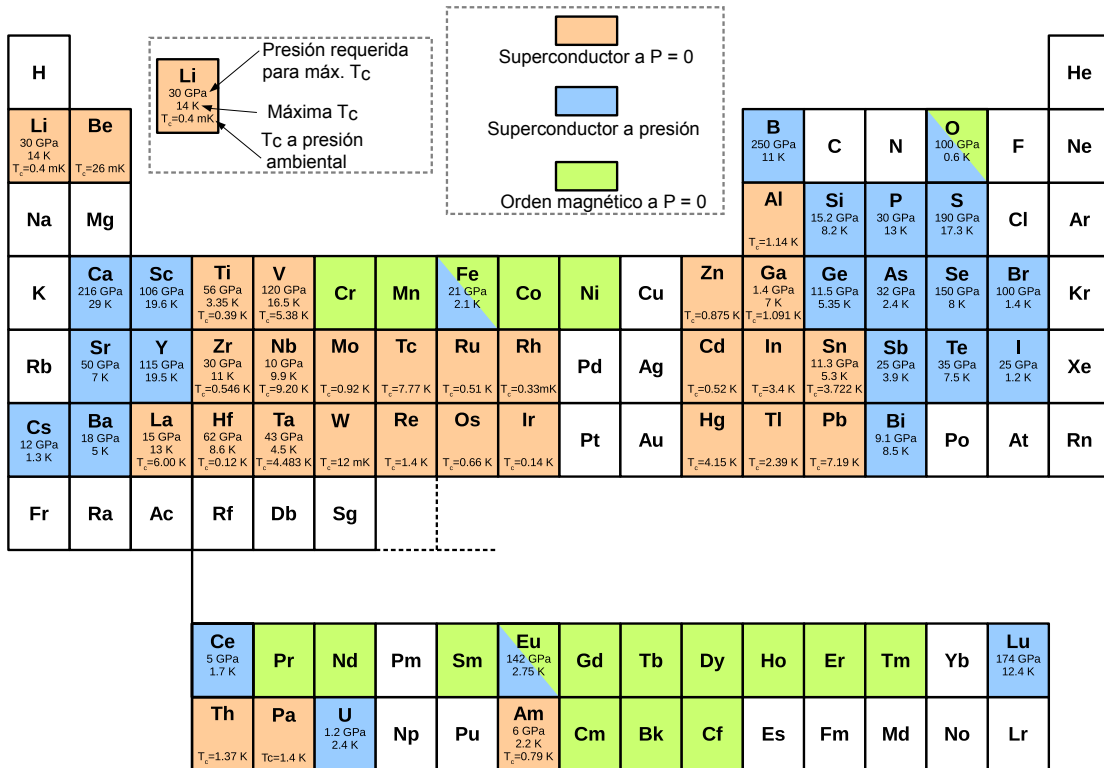


Figura 1-9: tabla periódica de los elementos mostrando los diferentes materiales superconductores[27].

Tipo	Material	$T_c(K)$	Material	$T_c(K)$
Aleaciones	$H_3S(200GPa)$	203	$V_3Ga$	16.5
	$H_2S(190GPa)$	190	$NbN$	16.0
	$Nb_3Ge$	23.0	$MoN$	12.0
	$Nb_3(Al_{0.8}Ge_{0.2})$	20.9	$La_3In$	10.4
	$Nb_3Sn$	18.05	$NbTi$	10
	$Nb_3Al$	17.5	$Ti_2Co$	3.44
	$V_3Si$	17.1	$UCo$	1.7
Cupratos	$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+x}$ (30Gpa)	164	$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	125
	$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$ (25Gpa)	155	$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	110
	$Hg_{0.8}Pb_{0.2}Ba_2Ca_2Cu_3O_x$	133	$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$	95
	$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$	133	$(La_{0.9}Ba_{0.1})_2CuO_{4-\delta}$ (1Gpa)	52
	$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$ (7Gpa)	131	$Ba_xLa_{5?x}Cu_5O_y$	35
Hierro	$SmFeAsO_{0.85}$	55	$La_{0.5}Y_{0.5}FeAsO_{0.6}$	43.1
	$GdFeAsO_{0.85}$	53.5	$SmFeAsO_{0.9}F_{0.1}$	43
	$NdFeAsO_{0.89}F_{0.11}$	52	$Al - 32522(CaAlOFeAs)$	30
	$PrFeAsO_{0.89}F_{0.11}$	52	$LaO_{0.9}F_{0.2}FeAs$	28.5
	$ErFeAsO_{1-x}$	45	$LaO_{0.89}F_{0.11}FeAs$	26
Orgánicos	$Rb_3C_{60}$	30.7	$K_2RbC_{60}$	21.5
	$(NH_3)_4Na_2CsC_{60}$	29.6	$K_3C_{60}$	18
	$(NH_3)K_3C_{60}$	28	$\kappa - (ET)_2Cu[N(CN)_2]Cl$ deut	13.1
	$K_2CsC_{60}$	24	$CaC_5$	11.5

Tabla 1-1:  $T_c$  de diferentes tipos de superconductores.[8][30][32]

## Capítulo 2

# Preliminares teóricos

La información fenomenológica generada en la primera mitad del siglo XX fundó bases muy fuertes sobre el comportamiento de los materiales superconductores. Cada uno de las propiedades mencionadas en el capítulo anterior involucró mucho trabajo experimental y teórico por parte de gente brillante. Esto puso de manifiesto lo siguiente: al bajar de una  $T_c$  en un material superconductor, la interacción microscópica entre los electrones y la red cristalina es fundamental para explicar las propiedades termodinámicas y electromagnéticas. Este hecho involucra un cambio de simetría con una disminución de entropía (o una transición de fase que implica mayor orden) y asociada una disminución de energía libre y un cambio en el calor específico electrónico. Toda esta información tomó un sentido coherente con la formalización de la interacción de los electrones y fonones (o modos cuantizados de vibración de la red cristalina).

### 2.1. Interacción electrón-fonón

Tanto las teorías fenomenológicas como el efecto isotópico y la singularidad en el calor específico electrónico apuntaban hacia una interacción electrón-fonón. De hecho, Frölich en 1950, antes del efecto isotópico ya había desarrollado las ideas de formación de pares de electrones. Para entender mejor las secciones siguientes, ver el Apéndice A.

Para visualizar la interacción electrón-fonón se puede usar un modelo simplificado. Dos electrones en un metal experimentan una fuerza de Coulomb repulsiva apantallada (reducida). Para formar un par de electrones debe existir una fuerza atractiva —que supere a la interacción de

Coulomb— la cual debe surgir entre los electrones y el sistema iónico (la red cristalina). Primero suponemos que la red cristalina conforma un fondo con carga positiva capaz de polarizarse (i.e., que aparezcan zonas cargadas en un medio previamente homogéneo debido a un cambio en el número de iones por unidad de volumen). Si en particular pensamos en un instante en que un electrón pasa por una región de la red cristalina, ésta se va a deformar porque el electrón atraerá a los iones más cercanos. Esto, a distancia, genera una nube de carga positiva neta alrededor del electrón, la cual en última instancia atrae a otro electrón.

Lo crucial de este modelo es que la velocidad del electrón cerca de la superficie de Fermi,  $v_F = \hbar k_F/m$ , es mucho mayor que la velocidad de los iones  $v_I = V_F m/M$ . Así, el tiempo en que tarda la red cristalina en polarizarse ( $\tau \simeq 2\pi/\omega_D \simeq 10^{-13}s$ ) es mucho mayor que el del electrón en pasar (el cual en un tiempo  $\tau$  ya se ha movido  $v_F\tau \simeq 1000\text{Å}$ ). Sin embargo, un segundo electrón pasando por la misma región puede disminuir su energía con la concentración de carga positiva *antes* de que la red cristalina se relaje nuevamente. Esto da como resultado la unión de los dos electrones en pares.

El modelo del potencial más simple que describe la interacción descrita anterior es

$$V(q, \omega) = \underbrace{\frac{4\pi e^2}{q^2 + \lambda^2}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\frac{4\pi e^2}{q^2 + \lambda^2} \left( \frac{\omega_q^2}{\omega^2 - \omega_q^2} \right)}_{\text{Int. electrón-fonón}} \quad (2-1)$$

donde  $q$  representa el vector de onda del fonón y  $\omega_q$  la frecuencia del fonón;  $\lambda$  es la distancia de apantallamiento. Este modelo tiene el siguiente problema: para que se atractivo el potencial se requiere que  $\omega < \omega_q \simeq \omega_D$  (donde  $\omega_D$  es la frecuencia máxima de Debye). Sin embargo, si  $\omega \rightarrow 0$ , entonces  $0 < V \rightarrow 0$ , es decir, el potencial siempre es repulsivo. Para esto se requiere mejorar el modelo y que siempre exista por pequeño que sea un potencial atractivo.

## 2.2. Pares de Cooper

En un modelo simple e ingenioso, Leon Cooper [5] mostró que debido a una interacción neta atractiva entre dos electrones en el mar de Fermi los electrones se unen en pares sin importar qué tan pequeña sea la interacción. El estado base, o mar de Fermi lleno, se mantiene sin interactuar y se vuelve inestable con respecto a la formación de dichos pares. Este problema se

traduce matemáticamente a resolver una ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos para dos partículas sobre el mar de Fermi formado por los electrones no apareados.

Por otro lado, fenomenológicamente se sabía que muchos superconductores diferían en su estructura metálica de formas muy diversas pero que dicha variabilidad no afectaba notoriamente sus propiedades en el estado superconductor. Este hecho permitió simplificar el modelo de interacción y despreciar los efectos debido a la estructura cristalina, reemplazando los potenciales periódicos de los iones por una caja de volumen constante. Con la simplificación anterior, un conjunto completo de estados del sistema de pares de electrones se pudo describir tomando funciones de los productos de ondas planas que satisfacían las condiciones periódicas de frontera de la caja con volumen constante. El procedimiento matemático usado por Cooper puede realizarse usando funciones antisimétricas o, equivalentemente, tomando electrones con espín opuesto. Además, en el trabajo de Cooper apareció una brecha prohibida de energía, la cual fue indicio de que la idea era correcta.

### 2.2.1. Formación

Más formalmente (ver [5; 10]), supongamos que se agregan dos electrones al mar de Fermi a  $T = 0$ . Las únicas interacciones serán pues entre los electrones del par (atractiva) y entre el par de electrones y el mar de Fermi vía el principio de exclusión de Pauli (repulsiva). Por otro lado, simplificamos el modelo de interacción ignorando los potenciales periódicos de los iones y suponiéndolo, en vez, como una caja de volumen constante.

Por lo anterior la función de onda de este par,  $\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , que satisfaga las condiciones periódicas de una caja se puede escribir como una suma de ondas planas

$$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_k g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2} \zeta \quad (2-2)$$

donde  $g_{\mathbf{k}}$  son los coeficientes del desarrollo y  $\zeta$  es la función de espín.

Para un sistema que suponemos invariante ante traslaciones, el apareamiento ( $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$ ) de estados de Bloch es el que minimiza la energía y el estado de menor energía tendrá momento total igual a cero. Entonces los electrones deberán tener momento de igual magnitud pero dirección opuesta. Esto es de vital importancia y por eso se reformulará para su mejor comprensión. La

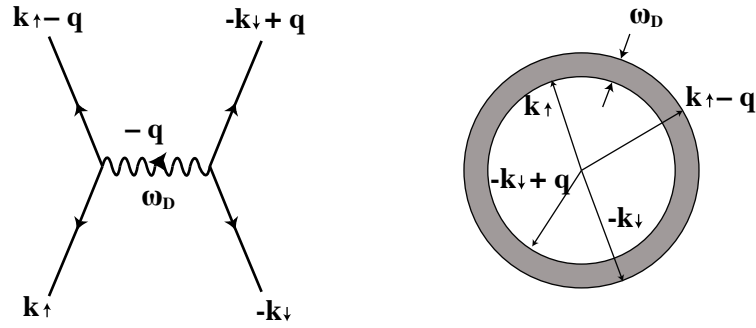


Figura 2-1: Dispersión de electrones por el intercambio de un fonón. De lado izquierdo, un diagrama de Feynman ilustra la dispersión de electrones por el intercambio de un fonón. De lado derecho, se puede ver que tal dispersión se mantiene dentro de un cascarón de grosor  $\omega_D$ .

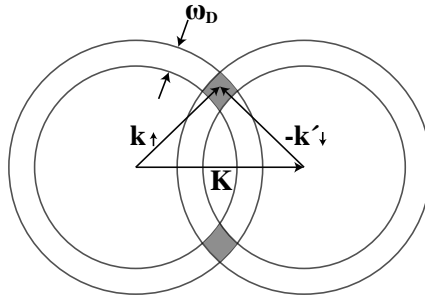


Figura 2-2: En caso de que  $\mathbf{K} \neq 0$ , el área de contacto se reduce.

interacción electrón-fonón es más fuerte para aquellos electrones con energía  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  alrededor del nivel de Fermi en el cascarón de grosor  $\omega_D$ . Esto se puede ver en la fig.2-1, ahí la dispersión de los electrones conserva el momento total  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_\uparrow + -\mathbf{k}_\downarrow = 0$ . En la figura, el área sombreada muestra la parte del espacio fase de la dispersión que corresponde a la atracción de electrones cuando  $\mathbf{K} = 0$ . En caso de que  $\mathbf{K} \neq 0$  el área de dispersión se reduce y por lo tanto la atracción también (fig.2-2). Por lo tanto el sistema siempre reducirá su energía si  $\mathbf{K} = 0$ . Esa será nuestra principal suposición, al igual que hizo Cooper.

Recordemos ahora que  $\zeta$  es nuestra función de espín en (2-2) y puede ser singlete (antisimétrica) o triplete (simétrica). Para tomar en cuenta la antisimetría de las funciones de onda fermiónicas,  $\psi_0$  se debe transformar en una suma de productos entre  $\cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))$  y la función singlete de espín antisimétrica  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$  con espines opuestos. O si se quiere tomar

la parte simétrica se transforma en una suma de productos entre  $\sin(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))$  y la función triplete de espín simétrica  $(\uparrow\uparrow, \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \downarrow\downarrow)$ .

El estado de par de los electrones debe estar asociado a uno estable del sistema y por lo tanto a un mínimo de la energía. Matemáticamente esto es claro para la función singlete asociada a una función coseno que depende de  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  y que consecuentemente maximiza la amplitud de probabilidad si los electrones están cerca, es decir, si se atraen.

$$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left[ \sum_{k > k_F} g_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) \right] \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad (2-3)$$

Asumiendo el hamiltoniano para los dos electrones con un potencial  $V(r_1, r_2)$

$$H = -\frac{\nabla_1^2}{2m} - \frac{\nabla_2^2}{2m} + V(r_1, r_2) \quad (2-4)$$

y usando la ecuación de Schrödinger

$$H\psi = E\psi \quad (2-5)$$

para esta última función de onda, se puede mostrar que los coeficientes de peso  $g_{\mathbf{k}}$  y los eigenvalores de la energía  $E$  se pueden determinar al resolver la siguiente igualdad

$$(E - 2\epsilon_{\mathbf{k}})g_{\mathbf{k}} = \sum_{k' > k_F} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'} \quad (2-6)$$

donde  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  son energías no perturbadas de ondas planas y  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  son los elementos de matriz del potencial de interacción

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \Omega^{-1} \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2-7)$$

donde  $\mathbf{r}$  es la distancia entre electrones y  $\Omega$  es el volumen de normalización. Este potencial caracteriza la fuerza del potencial para dispersar un par de electrones con momento  $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$  a un par con momento  $(\mathbf{k}' \uparrow, -\mathbf{k}' \downarrow)$ . Si existe un conjunto de  $g_{\mathbf{k}}$  que satisfaga la ecuación (2-6) con  $E < E_F$ , entonces existe un estado ligado.

Este problema no es trivial pues  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  involucra todos los elementos de matriz. Cooper introdujo una suposición que permite aproximar  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V$  para  $\mathbf{k}$  estados dentro del rango de energía  $\hbar\omega_D$  con centro en  $E_F$ . Y por otro lado el potencial será cero si  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  es superior a

$\hbar\omega_D$ , lo cual puesto simplemente es

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \text{si } -\hbar\omega_D < E_F < \hbar\omega_D \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2-8)$$

por esta razón el valor de  $g_{\mathbf{k}}$  en (2-6) es constante y por lo tanto

$$g_{\mathbf{k}} = V \frac{\sum g_{\mathbf{k}'}}{(2\epsilon_{\mathbf{k}} - E)}. \quad (2-9)$$

Con un poco de álgebra se llega a

$$\frac{1}{V} = \sum_{k' > k_F} (2\epsilon_{\mathbf{k}'} - E)^{-1}. \quad (2-10)$$

Si definimos  $\lambda \equiv VN(0)$  con  $N(0)$  la densidad de estados en el nivel de Fermi y cambiamos la suma por una integral con límites de  $E_F$  a  $E_F + \hbar\omega_D$

$$\frac{1}{N(0)} = \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{2\epsilon - E} = \frac{1}{2}N(0) \ln \frac{2E_F - E + 2\hbar\omega_D}{2E_F - E}. \quad (2-11)$$

Para el caso de acoplamiento débil  $\lambda \ll 1$  en donde la solución de la ecuación se puede escribir como

$$E \approx 2E_F - 2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V} \quad (2-12)$$

por lo tanto el estado ligado existe y tiene energía negativa con respecto al nivel de Fermi. Esto dice que en este rango, la energía atractiva es mayor que la energía cinética y no importa que tan chico sea  $V$ .<sup>1</sup>

El resultado anterior es directo y matemáticamente correcto, sin embargo no dice nada al respecto sobre la formación de los pares de electrones. El razonamiento es simple, el signo negativo del potencial surge de sumar una interacción apantallada positiva de Coulomb y una atracción negativa efectiva entre electrones debido al movimiento de los núcleos iónicos. Cuando la atracción entre electrones es mayor que la repulsión Coulombiana se obtiene el signo

---

<sup>1</sup>El hecho de que en  $V = 0$  no sea analítica y que por esto no se pueda expandir en potencias de  $V$  nos dice que no es posible tratarlo con teoría de perturbaciones.



negativo del potencial y por lo tanto se puede dar la superconductividad.

¿Cómo surge la interacción atractiva? La idea central es que los electrones en la red cristalina polarizan el medio al atraer los núcleos positivos de los iones como se vio en §2.1. Estos iones a su vez generan una carga positiva que atrae a un segundo electrón, de donde surge la atracción efectiva entre electrones. Si esta atracción es mayor que la repulsión apantallada de Coulomb, se da la superconductividad. La diferencia es que el potencial  $V$  visto aquí es una atracción neta.

Para describir correctamente la interacción de los electrones con la red cristalina en una teoría física es necesario considerar la frecuencia de las vibraciones características de la red cristalina. Puesto que la deformación de la red cristalina está muy relacionada con las características elásticas del material, es natural suponer que las vibraciones características del sólido son las mismas que las que la deforman. Las frecuencias de estas vibraciones, llamadas fonones, son del orden de las de los plasmas para la interacción de Coulomb. Por esta razón se puede suponer que la respuesta es casi inmediata. Si un electrón es dispersado de un momento  $\mathbf{k}$  a uno  $\mathbf{k}'$ , por conservación de momento, se emite un fonón cuyo momento es la diferencia de estos dos, es decir,  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  y la frecuencia característica es la del fonón. Con esto en mente se puede decir que la contribución del fonón a la función de apantallamiento es proporcional a  $(\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}^2})^{-1}$ . Si  $\omega < \omega_{\mathbf{q}}$  entonces  $(\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}^2})^{-1} < 0$  y por lo tanto el signo negativo contribuye a la atracción neta. Si, en cambio, se tiene lo contrario y la diferencia de energía de los electrones es mayor que  $\hbar\omega_D$ , entonces la interacción es repulsiva. Por lo anterior, el límite de energía, para el cual el elemento de matriz  $-V$  de Cooper es atractivo es del orden de la energía de Debye,  $\hbar\omega_D$ , que caracteriza el límite del espectro de fonones.

Los pares de Cooper son el primer elemento fundamental de la superconductividad. El segundo elemento, una función de onda coherente, tiene que ver con lo que el problema de Cooper no resuelve. Esto es, si es favorable el apareamiento de dos electrones en la presencia de un mar de Fermi sin interactuar ¿Por qué no se aparean todos los demás electrones y minimizan todavía más la energía?

La respuesta se encuentra en que el problema de Cooper es un modelo ideal a  $T = 0$  del estado normal (no superconductor). Por ello, muchas preguntas quedan al aire. Por ejemplo, a partir de los pares de Cooper no se puede deducir cómo alteran éstos la interacción de atracción

ni si participan todos los electrones del mar de Fermi. Por último no hay indicios de cómo incluir la temperatura crítica.

Prácticamente todas estas preguntas se respondieron implementando un estado coherente de pares de Cooper. Esto lo hizo R. Schrieffer suponiendo que debía ser válido para un material superconductor cuando  $T < T_c$ . Es decir, que sólo la superficie de Fermi sería inestable ante la creación de muchos pares y creó una función de onda que representaba dicho estado *coherente*. Esto ocurrió antes de formular precisamente la teoría BCS.

## Capítulo 3

# Deducción heurística de la brecha de energía de BCS

Teóricamente el fenómeno de superconductividad convencional permaneció incomprensible hasta 1957 cuando surgió la primera teoría microscópica de superconductividad, llamada BCS [4]. Ésta describió correctamente la resistencia nula, el efecto Meissner, el efecto isotópico y la brecha de energía.<sup>1</sup> La teoría fue confirmada en múltiples ocasiones para superconductores convencionales convirtiéndola en un hito científico del siglo XX.

La teoría original de BCS se creó en un formalismo de segunda cuantización y se basó en dos conceptos centrales: *i) Pares de Cooper* (CPs) [5] de electrones y *ii) una función de onda de muchos cuerpos* donde los electrones cerca de la superficie de Fermi forman pares de Cooper. Esto se hizo con el motivo de deducir una *brecha de energía* en el espectro electrónico. Los CPs (ver §2.2) se originan por una inestabilidad cerca de la superficie de Fermi debido a una interacción *atractiva* efectiva entre pares de electrones. Esta interacción es inducida por fonones (o modos cuantizados de vibración de la red cristalina) y abruma la interacción de Coulomb apantallada *repulsiva* entre dos electrones con la misma carga. El estado enlazado resultante de los dos electrones se forma incluso cuando la interacción es arbitrariamente débil, como lo mostró Cooper en 1956. Sin embargo, en un material superconductor la cantidad de pares de Cooper es macroscópica y además forman un estado coherente. Este razonamiento

---

<sup>1</sup>Una prueba rigurosa del efecto isotópico usando BCS fue dada por Yang [40]. También, una descripción a profundidad de las bases experimentales de la teoría BCS fue dada por Ginsberg [41].

llevó eventualmente a la correcta deducción de la brecha de energía  $2\Delta$  que se abre en el espectro electrónico a una temperatura  $T \leq T_c$ . El valor  $2\Delta$  corresponde entonces a la energía necesaria para romper un par de Cooper en dos electrones excitados. Es decir, el parámetro  $\Delta$  es proporcional al parámetro de orden visto en §1.4, que representa qué tan robusto es un superconductor.

La brecha de energía es pues una propiedad inherente de la superconductividad convencional y de la teoría BCS, por eso se ha convertido en una expresión emblemática en la abundante literatura. La brecha de energía atribuye una gran intuición física al fenómeno de superconductividad porque relaciona la idea no intuitiva de un enlace entre pares de electrones (que conlleva, a su vez, a propiedades termodinámicas como la  $T_c$ ) con la transición de fase superconductor asociada. La presencia de una brecha de energía fue sugerida como una posible descripción de la superconductividad varios años antes del artículo de BCS [42; 43]. El gap fue explicado hasta el surgimiento de la teoría BCS, con la cual se dio un límite superior riguroso al estado base de energía del Hamiltoniano asumido mediante el principio variacional de Rayleigh-Ritz. Dando así una representación muy acertada del espectro electrónico con una brecha de energía.

Una deducción matemáticamente rigurosa de la brecha de energía es altamente técnica y yace en el formalismo de segunda cuantización. Esto la hace poco apreciable en términos prácticos y pedagógicos. Existe una gran variedad de enfoques matemáticos desarrollados para ampliar y simplificar el significado de la brecha de energía. Por ejemplo, a finales de la década de 1950, Bogoliubov [44] desarrolló una manera elegante de expresar el espectro de excitaciones y Gor'kov [45] mostró que el gap de energía está relacionado al parámetro de orden de la teoría de superconductividad de Ginzburg-Landau [17] cerca de la  $T_c$ . Trabajos más recientes prueban propiedades matemáticas de la ecuación de la brecha tales como la unicidad [46], generalización [48; 49], y versiones extendidas de BCS [50]. También se han realizado algunas aproximaciones, e.g., tales como la hecha por Bruus y Flensberg [51], usando las funciones de Green, o la hecha por Fletcher [52] donde la función de partición se deduce aplicando técnicas de integración funcional.

Existen otros métodos alternativos de la deducción original para obtener la brecha de energía, por ejemplo el método de espín [53] usando matrices de Pauli y el método de campo molecular de la solución del hamiltoniano de BCS. Otro método es vía la ecuación de movi-

miento en el que se establecen las ecuaciones de movimiento de los operadores fermiónicos de creación o aniquilación. Esto lleva al estado base de BCS también encontrado en el método de espín. Aunque los métodos anteriores han ampliado el panorama teórico de la brecha de energía, ninguno lo hace de manera sencilla. Es más, algunos de estos métodos usan técnicas mucho más avanzadas.

El enfoque utilizado en esta tesis para deducir la ecuación de la brecha de energía es *heurística* y didáctica, en contraste con la deducción original de BCS y las citadas anteriormente. La premisa fundamental es la formación de CPs en su forma general. Esto facilita la construcción de un funcional de energía para el estado superconductor adecuadamente simetrizado con respecto a las probabilidades de ocupación de los CPs. Usando un método variacional se minimiza este funcional obteniendo la conocida ecuación de la brecha a  $T = 0$  K. Lo importante de esta deducción radica en formular tanto el funcional de energía como los CPs *sin* recurrir al uso de segunda cuantización, i.e., sin usar operadores de creación y aniquilación. Más adelante se deduce con argumentos heurísticos la ecuación de la brecha a temperatura finita y se resuelve con métodos matemáticos recientes.

### 3.1. Ecuación de la brecha de energía a $T = 0$

Como se mencionó anteriormente, la superconductividad ocurre como una transición de fase de segundo orden. Sin embargo, esta transición es de un tipo especial que ocurre en el espacio recíproco (o de momento)  $\mathbf{k}$ . Donde  $\mathbf{k}$  es el vector de onda asociado con el momento lineal  $\mathbf{p} \equiv \hbar\mathbf{k}$ . Cuando la condensación ocurre, la energía del material en su estado normal (i.e., sin interacciones) disminuye por una cantidad ínfima (del orden de  $10^{-7}eV$  por átomo de *Nb* [54] y de  $10^{-9}eV$  por átomo de *Al* [55]) y esta *minimización* de la energía conlleva a la fase superconductor. La disminución en la energía se cree que ocurre por la interacción neta atractiva entre pares de Cooper.

Una forma simple de modelar esta atracción neta atractiva es ocupando los estados individuales en *pares* de tal forma que si el estado de un electrón del par está ocupado, el estado del otro electrón también estará ocupado. Además, las transiciones entre pares deben ser posibles, lo que implica que todos los pares tengan el mismo momento total  $\hbar\mathbf{K}$ . El centro de masa total

del vector de onda  $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , donde  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  son los vectores de onda de cada electrón, se restringe a cero para que sea energéticamente conveniente (ver §2.2.1). Esto implica que sólo los electrones moviéndose en direcciones *opuestas* se atraen.

De manera formal, si  $\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  es el vector de onda *relativo* de dos electrones en un estado de par, entonces  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_\uparrow$  y  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_\downarrow$  asegurando que  $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{0}$ . El hecho de que el momento total  $\mathbf{K} = 0$ , es necesario para disminuir la energía del sistema, como se mostró en §2.2.1. En caso de que tuvieran una misma dirección o diferente magnitud pero con diferentes momentos,  $\mathbf{K} \neq 0$  y la dispersión entre electrones disminuye junto con la magnitud de la atracción. Por lo tanto, la configuración más favorable se cumple si los dos electrones tienen las mismas velocidades pero direcciones y espines opuestos. Esto se esquematiza en la fig.3.1.

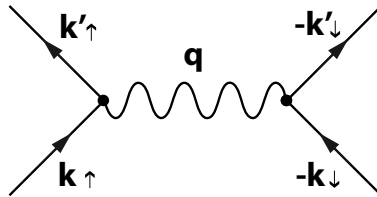


Figura 3-1: Diagrama de Feynman de la interacción de dos electrones en una red cristalina en vibración a través del intercambio de un fonón  $\mathbf{q}$ . Aquí  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$  son, respectivamente, los estados electrónicos con momento  $\hbar\mathbf{k}$  y  $\hbar\mathbf{k}' = \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{q}$ , antes y después del intercambio de un fonón con vector de onda  $\mathbf{q}$ .

Ahora se formaliza el modelo de interacción atractivo entre electrones. Esto se hace incluyendo en el gas de electrones una interacción electrón-electrón *repulsiva* de Coulomb que es aminorada por la interacción electrón-electrón fonónica atractiva, la cual resulta en una atracción neta requerida para la formación de pares de Cooper. Tales pares, como se mencionó anteriormente, son prácticamente universalmente reconocidos como *esenciales* para producir superconductividad. Este modelo de interacción es simplemente

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V & \text{si } E_F - \hbar\omega_D < \epsilon_{\mathbf{k}}, \epsilon_{\mathbf{k}'} < E_F + \hbar\omega_D \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (3-1)$$

Donde  $V \geq 0$ . En otras palabras, la interacción efectiva entre electrones cerca de la energía de Fermi  $E_F$  del gas en el intervalo  $-\hbar\omega_D < \epsilon_{\mathbf{k}}, \epsilon_{\mathbf{k}'} < \hbar\omega_D$  es netamente atractiva y, por eso, el signo negativo asociado a  $V \geq 0$ . Aquí  $\epsilon_{\mathbf{k}} \equiv \hbar^2 k^2 / 2m$  es la energía cinética por partícula y  $\hbar\omega_D$  es la máxima energía (de Debye) de un fonón absorbido o emitido por un electrón. Para evitar efectos de anisotropía el valor de  $V$  es un valor medio de la interacción real.

En el estado superconductor el número de pares de electrones es macroscópico (del orden de  $\sim 10^{23}$ ), lo que sugiere un enfoque estadístico. Como se mencionó al final de §2.2.1 es necesario formar un funcional que represente el estado coherente de los pares de Cooper. Primero debemos notar que el problema en vez de plantearse en términos de las partículas mismas, se debe hacer en términos de las probabilidades de ocupación de éstas. Esto es matemáticamente equivalente y contiene la misma cantidad de información porque las probabilidades de ocupación incluyen, entre otras cosas, la información de su interacción (según sean bosones o fermiones, en este caso los pares de Cooper son bosones).

Para plantearlo como un problema variacional designamos las *probabilidades de ocupación* como sigue. Sea  $v_{\mathbf{k}}^2$  la probabilidad de dos estados ocupados, caracterizados por  $\mathbf{k}$ . Entonces  $(1 - v_{\mathbf{k}}^2)$  es la probabilidad de aquellos desocupados. Esto permite a los pares de electrones cambiar de estado en estado y de esta forma que se modele la probabilidad de transición de  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ , que inicialmente sólo requiere que  $\mathbf{k}'$  esté ocupado y que  $\mathbf{k}$  esté necesariamente desocupado. Así, la probabilidad de transición  $v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{k}'}^2)$  es proporcional a la probabilidad de transición  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ ; mientras que la probabilidad de transición opuesta  $v_{\mathbf{k}'}^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2)$  es proporcional a la transición contraria  $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}$ .

Con el fin de formular un funcional de energía completo añadimos la energía cinética de los pares que es simplemente  $E_{cin} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2$ . Lo siguiente es mostrar que al minimizar la energía superconductor total,  $E_S$ , con respecto a las probabilidades de ocupación  $v_{\mathbf{k}}^2$  se obtiene de inmediato una ecuación de una brecha de energía a temperatura absoluta  $T = 0$  K para la interacción modelo (3-1). Esta energía neta superconductor del *estado base* será entonces

$$E_S = 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 - V \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'}' [v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{k}'}^2)v_{\mathbf{k}'}^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2)]^{1/2} \quad (3-2)$$

donde las sumas primadas indican una restricción en la suma tal que los momentos a sumar

sean los asociados a las energías dentro del intervalo definido por el modelo de interacción (3-1). El funcional de energía contiene toda la información necesaria para describir el mar de Fermi y los pares de Cooper cerca de la superficie de Fermi. Se minimiza porque a  $T = 0$ , como se vio anteriormente, la formación de pares es favorable.

El funcional (3-2) está escrito de tal forma que exista simetría perfecta entre las transiciones  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$  y  $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}$ . Esto es fácil de entender porque nuestro estado base se forma de un número igual de pares de electrones que de pares de huecos. Es decir, contempla una simetría perfecta entre ambos tipos de pares de Cooper. Esto también se puede entender pensando en el estado de BCS tanto como un condensado de electrones *encima* del mar lleno de Fermi, como un condensado de huecos *debajo* de un "mar vacío de huecos". Evidentemente, cuando  $V \rightarrow 0$ , la energía del sistema es simplemente la energía en el estado normal, sin interacciones,  $E_N$ . Más específicamente, se debe tener

$$E_S \xrightarrow{V \rightarrow 0} E_N = 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$$

con  $n_{\mathbf{k}} = \theta(|\mathbf{k}_F - \mathbf{k}|)$  a  $T = 0$  y  $\theta$  la función escalón de Heaviside. Ahora escojamos  $v_{\mathbf{k}}^2$  tal que  $E_S[v_{\mathbf{k}}^2]$  se minimice, pero sujeto a un número constante de electrones, i.e.,  $N = 2 \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 = \text{constante}$ .<sup>2</sup> Específicamente,

$$\frac{\delta}{\delta x_l} \left\{ E_S[x_{\mathbf{k}}] - 2\mu \sum_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}} \right\} = 0 \quad (3-3)$$

donde  $v_{\mathbf{k}}^2 \equiv x_{\mathbf{k}}$  simplifica la notación y  $\mu$  es un multiplicador de Lagrange. Además, se usa la siguiente definición de derivada funcional

$$\frac{\delta}{\delta v_{\mathbf{k}}^2} v_l^2 \equiv \delta_{kl}, \quad \delta_{kl} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} .$$

---

<sup>2</sup>El número de partículas,  $N$ , no es necesariamente constante porque en realidad se superponen el mar de Fermi y a éste se le suman pares de electrones. Esta incertidumbre entre número de partículas y fases es típico de estados coherentes. Se debe argumentar pues que el número de electrones involucrados,  $N$ , es macroscópico y del orden del tamaño del sistema completo. Por lo tanto la incertidumbre en  $N$ ,  $\Delta N$ , es del orden  $N^{1/2}$  y por lo tanto se puede despreciar al compararlo con  $N$ .



Si se sustituye (3-2) en (3-3) se llega a la condición de minimización

$$\frac{\delta}{\delta x_l} \left\{ 2 \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}} - V \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'}' [x_{\mathbf{k}}(1-x_{\mathbf{k}'})x_{\mathbf{k}'}(1-x_{\mathbf{k}})]^{1/2} - 2\mu \sum_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}} \right\} = 0.$$

Esto es, directamente,

$$\begin{aligned} 0 &= 2(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \\ &- \frac{1}{2}V \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'}' \left[ [x_{\mathbf{k}'}\delta_{\mathbf{k}l} + x_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}'l} - 2x_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}'}\delta_{\mathbf{k}l} - x_{\mathbf{k}}^2\delta_{\mathbf{k}'l} - x_{\mathbf{k}'}^2\delta_{\mathbf{k}l} \right. \\ &\left. - 2x_{\mathbf{k}'}x_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}'l} + 2x_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}}^2\delta_{\mathbf{k}l} + 2x_{\mathbf{k}}^2x_{\mathbf{k}'}\delta_{\mathbf{k}'l}] [x_{\mathbf{k}}(1-x_{\mathbf{k}'})x_{\mathbf{k}'}(1-x_{\mathbf{k}})]^{-1/2} \right]. \end{aligned}$$

Definiendo  $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} \equiv \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$  y simplificando lleva a

$$2\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}V \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'}' \left[ \left( \frac{[x_{\mathbf{k}}(1-x_{\mathbf{k}})]^{1/2}(1-2x_{\mathbf{k}'})}{[x_{\mathbf{k}'}(1-x_{\mathbf{k}'})]^{1/2}} \right) \delta_{\mathbf{k}'l} + \left( \frac{[x_{\mathbf{k}'}(1-x_{\mathbf{k}'})]^{1/2}(1-2x_{\mathbf{k}})}{[x_{\mathbf{k}}(1-x_{\mathbf{k}})]^{1/2}} \right) \delta_{\mathbf{k}l} \right] = 0.$$

Puesto que se trata de un proceso simétrico en  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$  y que éstos son índices mudos, la suma realmente es sobre un solo índice tal que

$$2\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} - V \sum_{\mathbf{k}}' \left[ \frac{[x_{\mathbf{k}}(1-x_{\mathbf{k}})]^{1/2}(1-2x_{\mathbf{k}'})}{[x_{\mathbf{k}'}(1-x_{\mathbf{k}'})]^{1/2}} \right] = 0$$

y regresando a la notación inicial  $v_{\mathbf{k}}^2$

$$2\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} - V \sum_{\mathbf{k}}' \left[ \frac{\sqrt{v_{\mathbf{k}}^2(1-v_{\mathbf{k}}^2)}(1-2v_{\mathbf{k}'}^2)}{[v_{\mathbf{k}'}^2(1-v_{\mathbf{k}'}^2)]^{1/2}} \right] = 0. \quad (3-4)$$

Definamos ahora la cantidad

$$V \sum_{\mathbf{k}}' \sqrt{v_{\mathbf{k}}^2(1-v_{\mathbf{k}}^2)} \equiv \Delta \geq 0 \quad (3-5)$$

que más tarde se verá claramente como el mínimo de las energías de excitación independiente

de  $\mathbf{k}$ , i.e., el gap de energía. Entonces (3-4) se puede reescribir como

$$2\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} = \Delta \frac{(1 - 2v_{\mathbf{k}}^2)}{[v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2)]^{1/2}}$$

o reacomodando

$$4\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2[v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2)] = \Delta^2(1 - 2v_{\mathbf{k}}^2)^2. \quad (3-6)$$

Notando que

$$\begin{aligned} (1 - 2v_{\mathbf{k}}^2)^2 &= [(1 - v_{\mathbf{k}}^2) - (v_{\mathbf{k}}^2)]^2 \\ &= [(1 - v_{\mathbf{k}}^2)^2 + (v_{\mathbf{k}}^2)^2 - 2(1 - v_{\mathbf{k}}^2)v_{\mathbf{k}}^2] \\ &= [(1 - v_{\mathbf{k}}^2) + v_{\mathbf{k}}^2]^2 - 4v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2) \end{aligned}$$

se llega a

$$[v_{\mathbf{k}}^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2)]^{1/2} = \frac{\Delta}{2\sqrt{(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)}}. \quad (3-7)$$

Por lo tanto, al sustituir (3-7) en (3-6) resulta en

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} \right] \quad (3-8)$$

que es una *función de distribución*, graficada en la fig.3-2.

De esta forma, al sustituir (3-7) en la definición previa (3-5) de  $\Delta$  se obtiene la ecuación *autoconsistente y no lineal*. de la brecha de energía de BCS a  $T = 0$

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta^2}}. \quad (3-9)$$

Sustituyendo la suma por una integral con un procedimiento tradicional y en vista de (3-1),

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} &\rightarrow \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\tilde{\epsilon} \frac{g(\tilde{\epsilon})}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} \\ &\simeq g(E_F) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\tilde{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} \end{aligned} \quad (3-10)$$

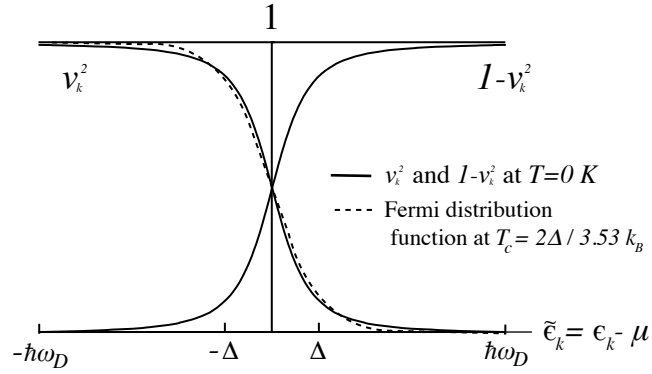


Figura 3-2: Funciones de distribución  $v_{\mathbf{k}}^2$  y  $1 - v_{\mathbf{k}}^2$  comparadas con la función de distribución de Fermi a  $T_c \equiv 2\Delta/3.53k_B$ . Esta última relación es equivalente a la relación universal de la brecha contra  $T_c$  de BCS.

siempre y cuando  $\hbar\omega_D \ll E_F$ , donde  $g(\tilde{\epsilon})$  es la densidad de estados electrónicos por espín individual.<sup>3</sup> Entonces, si se define la constante de acoplamiento de BCS como  $\lambda \equiv Vg(E_F) \geq 0$  se obtiene

$$\frac{1}{\lambda} \equiv \frac{1}{g(E_F)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\tilde{\epsilon}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + \Delta^2}} = \sinh^{-1} \left( \frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right) \quad (3-11)$$

que es nuestro **primer resultado principal**. Finalmente

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh(1/\lambda)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda} \quad (3-12)$$

de forma exacta y el último término sólo aplica para acoplamiento débil  $\lambda \ll 1$ , i.e.,  $g(E_F)V \ll 1$ . Este último resultado muestra que la función  $\Delta$  es independiente del vector de onda  $\mathbf{k}$  para  $T = 0K$ .

<sup>3</sup>La densidad de estados electrónicos se considera constante por el conocido hecho de que en un metal ésta es constante en 2D. En este caso la dimensionalidad de  $g(\tilde{\epsilon})$  es inicialmente 3, sin embargo, al condensarse los pares de Cooper en la superficie de Fermi,  $g(\tilde{\epsilon}) = g(E_F)$  se reduce a 2.

### 3.2. Ecuación de la brecha de energía a $T \geq 0$

La densidad de pares superconductores es máximo en el ideal  $T = 0$  y, como se mostró arriba, existe una brecha  $\Delta$  dependiente de la densidad de pares. Cuando se parte del estado superconductor ideal a  $T = 0$  la densidad de pares superconductores es máximo y decrece hasta llegar a cero en la  $T_c$ . La ecuación (3-11) contiene el parámetro de energía  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)}$  o la llamada energía de excitación de Bogoliubov [44]. Para ver que esta es la energía de un electrón no enlazado en un par se puede ver como sigue. Un electrón solo en el estado  $(\mathbf{k} \uparrow)$  por definición no tiene a su electrón correspondiente en el estado  $(-\mathbf{k} \downarrow)$ . Por esto, este electrón, con energía cinética  $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ , no puede unirse al condensado superconductor y se deduce que su energía debe ser mayor que la del electrón en el condensado. De esta forma el electrón no apareado tendrá una energía que es mayor por una cantidad  $E_k$ . La validez del argumento anterior se cumple para el dominio  $0 < \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} < \hbar\omega_D$ . Claramente  $E_{\mathbf{k}} > 0$  incluso cuando los electrones estén en la superficie de Fermi, i.e.,  $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} = 0$  (asumiendo según BCS que  $\mu = \mathbf{E}_{\mathbf{F}}$ ) y  $\Delta(T) > 0$ . Entonces, para una temperatura dada  $T$ , la brecha dependiente de la temperatura es la energía mínima necesaria para excitar a las partículas y  $\Delta \equiv \Delta(T = 0)$  es el máximo valor que puede tomar.

Como se mencionó arriba, al aumentar la temperatura decrece el número de pares de electrones y aumenta el número de electrones no apareados. Dado que cada electrón tiene una energía  $E_k$ , la probabilidad de una excitación está dada por la distribución de Fermi

$$f_k = (e^{\beta E_k} + 1)^{-1} \quad (3-13)$$

con  $\beta \equiv 1/k_B T$  y con  $k_B$  la constante Boltzmann. Así pues, llamemos a  $|00\rangle$  y  $|11\rangle$  las probabilidades de los estados en par a  $T = 0$  y llamemos a  $|01\rangle$  y  $|10\rangle$  las probabilidades de los estados de un electrón y un hueco (y viceversa) a  $T > 0$ . Si la probabilidad de que tanto  $|01\rangle$  como  $|10\rangle$  ocurran (i.e., que estos estados tengan la misma probabilidad de ser excitados) a  $T > 0$  entonces

$$\begin{aligned} 1 - 2f_k &\equiv 1 - 2/(e^{\beta E_k} + 1) \\ &= \frac{e^{\beta E_k} - 1}{e^{\beta E_k} + 1} \\ &\equiv \tanh(\beta E_k/2) \end{aligned} \quad (3-14)$$

donde en la primera línea se usó la definición de  $f_k$  y en la última una identidad trigonométrica. En el límite  $T \rightarrow 0$ , esta cantidad se aproxima a la unidad desde abajo, es decir,

$$\tanh(\beta E_k/2) = \tanh(E_k/2k_B T) \rightarrow 1 \quad (T \rightarrow 0) \quad (3-15)$$

Esto tiene una interpretación física directa: la función  $\tanh(\beta E_k/2)$  es la probabilidad de que un estado par ( $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$ ) se una al condensado. Es decir, se tiene absoluta certeza de que no habrá excitaciones (y de que todos los estados apareados estarán ocupados) a  $T = 0$  cuando la función de probabilidad sea unitaria, i.e., cuando  $\tanh(\beta E_k/2) = 1$ .

También es claro que si  $T \rightarrow T_c$  entonces  $\Delta(T) \rightarrow \Delta(T_c) \equiv 0$ , implicando que  $E_k \rightarrow \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}$  o que

$$f_k = (e^{E_k/k_B T} + 1)^{-1} \rightarrow (e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T_c} + 1)^{-1}.$$

Esto se puede entender como sigue. Supongamos que se empieza a  $T = 0$  donde el material superconductor se encuentra en un estado donde la condensación de electrones es completa (significando que todos los electrones participan en la formación del estado superconductor). En este punto, sin embargo, sólo el movimiento de pares cerca de la superficie de Fermi es apreciablemente afectada por la condensación. Cuando la temperatura es pequeña una fracción de los electrones en el condensado son excitados tal que los electrones en el material se separan en dos fracciones, una *normal* y otra *superconductora* (ver fig. 3-3). Si la temperatura sigue aumentando y alcanza la  $T_c$  el número de electrones superconductores tiende a cero y el sistema se convierte en uno completamente no superconductor, i.e., normal. En la  $T_c$  el estado superconductor desaparece y también lo hace la brecha de energía.

Usando (3-11) en combinación con (3-15), se le da un carácter probabilístico a la función de la brecha

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\tilde{\epsilon}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(T)}} [1 - 2f_k] \quad (3-16)$$

Por lo tanto, al sustituir (3-14) en (3-16) se tiene que

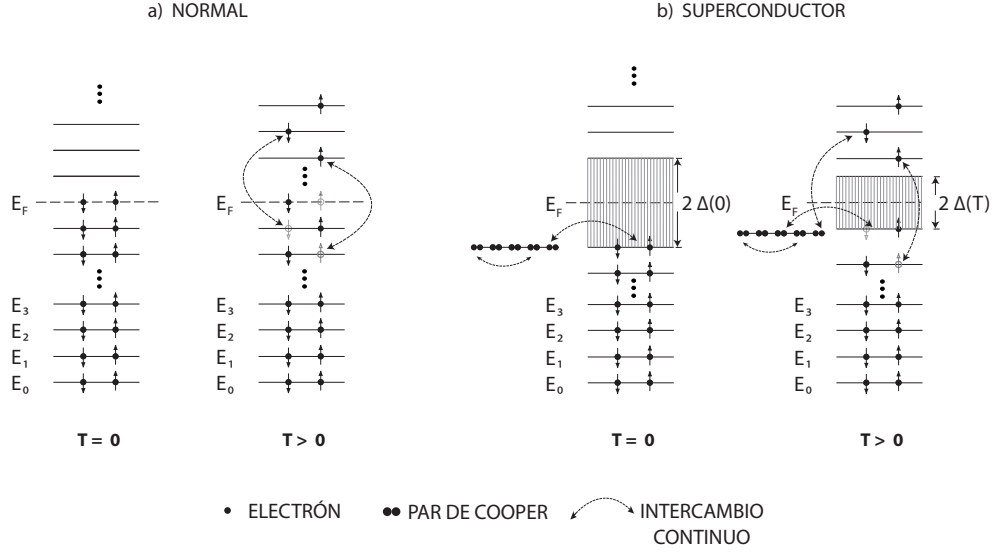


Figura 3-3: En **a)** se muestra la fase **normal** de electrones (fermiones) no interactuantes a temperatura absoluta  $T = 0$  K y  $T > 0$  K. La ocupación de estados en el gas de electrones obedece el principio de exclusión de Pauli de tal forma que dos electrones no pueden ocupar el mismo estado cuántico. En el cero absoluto, todos los electrones constituyen un *mar de Fermi* y ocupan los estados disponibles de menor energía. La superficie de ese mar se llama la *energía de Fermi*. A temperaturas mayores que cero algunos electrones existen por arriba de la energía de Fermi y se caracterizan por la distribución de Fermi (mostrada en (3-13)). En **b)** se muestra la fase **superconductora**. Dos cosas ocurren: la formación de pares de Cooper y la aparición de una brecha de energía  $\Delta(T)$ . La ocupación de estados en esta fase para un gas de electrones produce una brecha de energía del orden de  $2k_B T_c$  a  $T = 0$ . Conforme aumenta  $T$  desde cero, la brecha de energía disminuye hasta que alcanza una temperatura crítica  $T_c$  después de la cual la brecha desaparece y el material se hace no superconductor.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} &= \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\tilde{\epsilon}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta^2(T)}} [1 - 2f_k] \\
 &= \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\tilde{\epsilon}}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta^2(T)}} \tanh\left(\frac{\beta\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta^2(T)}}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{3-17}$$

que es nuestro **segundo resultado principal**.

Para realizar la integral en (3-17) se utilizaron métodos numéricos (ver fig.3-4), sin embargo se puede hacer un análisis en los límites  $T \rightarrow 0$  y  $T \rightarrow T_c$  para hacerlo más intuitivo. Por simplicidad, se divide en tres casos: i) si  $T = 0$ ; ii) si  $T = T_c$  y iii) si  $0 < T < T_c$ . Se

supondrá que es una función bien comportada, véase, por ejemplo, el trabajo de Odeh, [56], Billard y Fano [57] sobre la prueba de existencia y unicidad a  $T = 0$  y la de Vansevenant [58] a  $T > 0$ .

En el caso (i), es fácil comprobar que la ecuación (3-17) se convierte en (3-12) cuando  $T = 0$ , dando la misma ecuación  $\Delta$  de la brecha. En el caso (ii) cuando  $T = T_c$  la brecha desaparece exactamente, i.e.,  $\Delta(T_c) \equiv 0$ . Por lo tanto, se convierte en una ecuación implícita que puede resolverse analíticamente. El enfoque más conveniente es hacer un cambio de variable por una variable de integración adimensional  $z$ . También, considerando que  $|\tilde{\epsilon}|$  es simétrica con respecto al nivel de Fermi, entonces (3-17) se puede reescribir como

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} \tanh\left(\frac{\beta_c \tilde{\epsilon}}{2}\right) \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^Z \frac{dz}{z} \tanh z \\ &\simeq \ln\left(\frac{2e^\gamma \beta_c \hbar\omega_D}{\pi}\right). \end{aligned} \quad (3-19)$$

Aquí  $Z \equiv \hbar\omega_D/2k_B T_c$  donde  $\gamma \simeq 0.57721$  es la constante de Euler y  $\beta_c \equiv 1/k_B T_c$ . El límite  $Z$  se escogió puesto que la integral diverge cuando  $Z \rightarrow \infty$ . Esto permite evaluar la integral por partes [59]. Es fácil ver que, al menos para acoplamiento débil, i.e.  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$k_B T_c \equiv \beta_c^{-1} \simeq \frac{2e^\gamma}{\pi} \hbar\omega_D e^{-1/\lambda} \simeq 1.13 \hbar\omega_D e^{-1/\lambda}. \quad (3-20)$$

Al sustituir (3-12) en la última ecuación y acomodando términos se llega a la relación adimensional universal de BCS de la brecha en términos de  $T_c$

$$\frac{2\Delta}{k_B T_c} \simeq 3.53. \quad (3-21)$$

En el caso (iii), cuando  $0 < T < T_c$  la ecuación (3-17) puede aproximarse con un desarrollo de potencias de  $\Delta$  para los casos  $T \ll T_c$  y  $T_c - T \ll T_c$ . Primero notemos que la ecuación de la brecha (3-17) y (3-11) pueden reescribirse en la siguiente forma

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = 2 \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\tilde{\epsilon}}{E_{\mathbf{k}}} \left( \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + 1} \right)$$

implicando que

$$\Delta(T) \simeq \Delta(0) - (2\pi\Delta k_B T)^{1/2} e^{-\Delta/k_B T} \quad \text{si } T \ll T_c \quad (3-22)$$

por lo tanto

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \rightarrow 1 \quad \text{si } T \rightarrow 0$$

Para  $T \simeq T_c^-$ , la brecha será pequeña y uno puede aproximar la función  $\ln(T/T_c) \simeq T/T_c - 1$ .

Ahora, usando la identidad de las sumas en el formalismo de Matsubara [61]

$$T' \sum_n \frac{1}{\nu_n^2 + E_k^2} = \frac{1}{2E_k} \tanh \frac{\beta E_k}{2}$$

con  $\nu_n \equiv \pi T(2n + 1)$  en (3-17) tal que al expandir en potencias de  $\Delta(0)$  se obtiene

$$T' \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\nu_n)^2 + E_k^2} = \frac{7\zeta(3)}{16\pi T^2} g(E_F)$$

y

$$\ln \frac{T}{T_c} = -\frac{7}{8} \zeta(3) \left( \frac{\Delta(0)}{\pi k_B T} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\Delta(0)}{k_B T} \right)^4.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta(T) &\simeq k_B T_c \pi \left( \frac{8}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \\ &\simeq 3.06 k_B T_c \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \quad \text{si } T_c - T \ll T_c. \end{aligned} \quad (3-23)$$

Por lo tanto

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \simeq 1.74 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{si } T \rightarrow T_c. \quad (3-24)$$

Como se puede ver, en los límites la ecuación de la brecha es monótona decreciente en  $0 < T < T_c$ . Es claro también que  $\Delta(T)/\Delta(0)$  es una función suave de  $T/T_c$  que decrece monótonamente, se convierte en 1 cuando  $T = 0$ , y decrece suavemente hasta 0 cuando  $T = T_c$  como se puede ver en la figura (3-4).



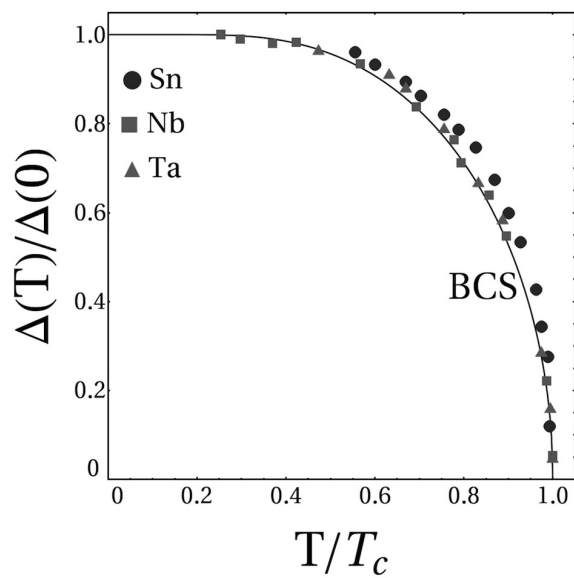


Figura 3-4: Dependencia de la temperatura de la brecha de energía de BCS. El ajuste de esta curva universal es muy bueno cuando se compara con datos experimentales para Sn, Nb y Ta como se puede ver en la figura (los datos experimentales fueron tomados de [60]).

## Capítulo 4

# Superconductores de alta temperatura

La teoría BCS junto con la teoría GL son las bases conceptuales para entender la superconductividad convencional. Sin embargo, por mucho tiempo se especuló equivocadamente un límite superior de  $T_c = 30K$  dado por BCS y que, en consecuencia, la superconductividad se encontraba completamente descrita. Con el descubrimiento en 1986 de superconductividad de alta temperatura (HTSC) en óxidos de cobre LaBaCuO [7] se rompió este esquema conceptual y se convirtió en uno de los eventos científicos más importantes del siglo XX. Después de este evento, se descubrieron ocho familias de superconductores, en su momento llamados de alta temperatura, i.e.,  $T_c > 23K$  (la temperatura crítica más alta antes de 1986) [62].<sup>1</sup> Al día de hoy, existen superconductores de tan alta  $T_c$  que se pueden enfriar con nitrógeno líquido (NL) o freón (ver fig.0-1). Puesto que el NL es barato de producir y que la tendencia de los precios de los HTSC es a la baja [63] se tienen altas expectativas de ellos.

Las diferentes familias de materiales HTSC se caracterizan por tener estructuras más complejas que las de los superconductores elementales. En particular, y a diferencia de algunos SC convencionales, en los HTSC se encuentran subestructuras (en capas, por ejemplo) del material en donde se presenta la superconductividad. Las familias mencionadas se clasifican según dichas porciones del material que superconduce: óxidos de cobre ( $\text{CuO}_2$ , 1986), óxidos de bis-

---

<sup>1</sup>Hoy en día los superconductores HTSC se definen según si su  $T_c > T_{NL}$

muto ( $\text{BiO}_3$ , 1988), fulerenos ( $\text{C}_{60}$ , 1991), boro-carburos ( $\text{B}_2\text{C}$ , 1994), cloronitruros de hafnio ( $\text{HfNCl}$ , 1998), boruros de magnesio ( $\text{MgB}_2$ , 2001), metales bajo presión (Ca, 2006) y arseniuros/seleniuros de hierro (2008). De estas familias de superconductores, seis de ellas se sabe que ocurren por una interacción electrón-fonón; en los restantes (cupratos y los basados en hierro) el mecanismo de formación de pares de Cooper se encuentra en discusión pero hay mucha especulación en que puede ser distinta al de BCS. Los boruros de magnesio ( $\text{MgB}_2$  con  $T_c = 39\text{K}$ ) y los metales a presión ( $\text{H}_3\text{S}$  con  $T_c = 203\text{K}$ ) pueden explicarse, parcialmente, con la teoría BCS (y la teoría de Eliashberg, su extensión, porque su mecanismo de apareamiento es electrón-fonón) y son ejemplos de materiales con una  $T_c$  muy alta. La receta de BCS para generar materiales con altas temperaturas críticas es: una combinación de fonones de alta frecuencia (elementos ligeros como hidrogeno), acoplamiento electrón-fonón fuerte y una alta densidad de estados [33].

Como se puede apreciar, después de la BCS, el panorama de la superconductividad se encuentra en un punto lejano a su descripción completa. No obstante, el trabajo teórico y experimental ha sido excepcional y los avances logrados han sido muy atinados en explicarlos mejor. La familia que más recursos intelectuales ha recibido son los cupratos y muchas teorías han sido formuladas. Aunque muy buenas muchas de ellas, ninguna tiene un apoyo universal experimental (a diferencia de la BCS que sí lo tiene en SC convencional). Por otro lado, el caso de la SC basada en hierro, descubierta apenas en 2008, tiene un panorama similar en el cual no se puede predecir cómo crear dichos materiales [64]. Como se mencionó antes, muchos de estos superconductores se describen por una interacción electrón-fonón. Este capítulo, por simplicidad se dividirá en aquellas teorías con una interacción electrón-fonón, aquellas que describan los cupratos y otra de los basados en hierro.

## 4.1. HTSC vía electrón-fonón

La teoría BCS fue modificada y ampliada en la década de 1960 por Eliashberg [48], Nambu [65], Morel y Anderson [66] y Schrieffer [67] para añadir una interacción dinámica electrón-fonón. Es decir, agregaron un efecto temporal a la interacción electrón-fonón, con la cual la superconductividad describía correctamente muchos superconductores para los cuales la BCS no era precisa.

Estos avances siguen siendo fundamentales para describir muchos superconductores y remarcaron la importancia de la interacción electrón-fonón en el surgimiento del estado superconductor por sí mismo. El concepto de pares de Cooper ahora se puede interpretar, como en §2.1, como un efecto retardado de la interacción y por la cual es posible explicar en principio (porque dado este retraso, la interacción fonónica puede superar a la de Coulomb). Específicamente, la teoría de Eliashberg permite calcular propiedades de superconductores con interacción fuerte como el Pb o el Nb. Así, por ejemplo la relación universal de todos los superconductores vista en la ecuación (3-21) donde  $2\Delta/k_B T_c \simeq 3.53$ , se modifica según la teoría de Eliashberg para plomo, dando un valor de 4.5, el cual es mucho más cercano a los datos experimentales.

El enfoque de la teoría de Eliashberg, sin embargo, sigue siendo hacia superconductores convencionales y aunque existe evidencia de que puede relacionarse con superconductores no convencionales, no es claro cómo esto afecta el estado superconductor en sí. Este es el caso de los superconductores hechos de perovskita, con óxidos de bismuto como BaKBiO, el cual se considera distinto de los cupratos y por lo tanto entra en la superconductividad mediada por electrón-fonón. Sin embargo, esta interacción es tan pequeña que no se entiende bien en qué medida participa en la formación del estado superconductor [68].

### **Crossover BCS-BOSE**

Una de las teorías más interesantes en superconductividad se desarrolló desde el año 1957 por Schafroth, Blatt y Butler [69] quienes especularon que la superconductividad surgía de un condensado de Bose-Einstein (BEC, por sus siglas en inglés) de pares de electrones. A diferencia de BCS, en la cual los pares de electrones forman un condensado pero no son bosones estrictamente. Ahora se sabe que tanto la BCS como un condensado de Bose-Einstein son los casos límite de la teoría llamada crossover BCS-Bose. Ésta conecta ambos casos de manera continua y por un lado se obtiene el límite BCS con apareamientos en el espacio de momento, mientras que en el otro extremo, de pares localizados, o el límite BEC.

### **GBEC**

En el mismo sentido que la teoría de crossover surgieron modelos binarios de bosones y fermiones en los que se incluían pares de electrones y electrones no apareados. Hoy en día,

existen también modelos ternarios en los que se añaden, además, pares de huecos. La teoría GBEC, o generalización del condensado de Bose-Einstein [70; 71; 72; 73], propone los pares de huecos y electrones como bosones estrictos (a diferencia de BCS). La GBEC es una descripción más general porque incluye la teoría BCS y al crossover BCS-Bose. En ese sentido se confirma el condensado de BCS como una forma particular de BEC solamente si existe una simetría perfecta de pares (i.e., un número igual de pares de huecos que de electrones) para cualquier tamaño de acoplamiento. Esto es correcto en el sentido de que GBEC obtiene tanto la ecuación de la brecha para toda temperatura y para todo acoplamiento (no sólo acoplamiento débil como en BCS) y el límite superior de la energía de condensación (o diferencia de energía libre entre las fases normal y superconductora).

La teoría GBEC tiene la cualidad de predecir una  $T_c$  mucho más altas que otras teorías e incluso SC a temperatura ambiente (300 K) manteniendo una dinámica electrón-fonón. Esta teoría incluye seis teorías estadísticas de superconductividad conocidas. Su desarrollo es actual y ha dado buenos resultados en superconductores de acoplamiento fuerte (Nb, por ejemplo) y es posible extenderla a superconductores con simetrías de onda-d (a diferencia de la SC convencional con onda-s o simetría esférica), como los cupratos o los basados en hierro.

## 4.2. HTSC en cupratos

Los superconductores basados en óxidos de cobre son compuestos cerámicos generalmente aislantes en el estado normal. Este tipo de materiales presentan una complejidad visible en su diagrama de fases (fig.4-1), el cual es abrumador al compararse con las dos fases de un superconductor convencional. Las teorías actuales apuntan hacia esa complejidad también. En BCS, debido a la interacción electrón-fonón se fuerza la unión de electrones en pares y esto ocurre sin ningún momento angular (o sea que los electrones en un par de Cooper no tienen una rotación relativa). Esto es diferente en los cupratos, en estos sí se presenta un momento angular y se le llama superconductividad tipo d (cambia de signo al rotar  $90^\circ$ ) definido por la simetría de la brecha.

La estructura general de los cupratos consiste de capas intercaladas de aislantes y óxidos de cobre. Los portadores de carga (pares de Cooper) se localizan en un número  $n=1,2,3,\dots$  de capas

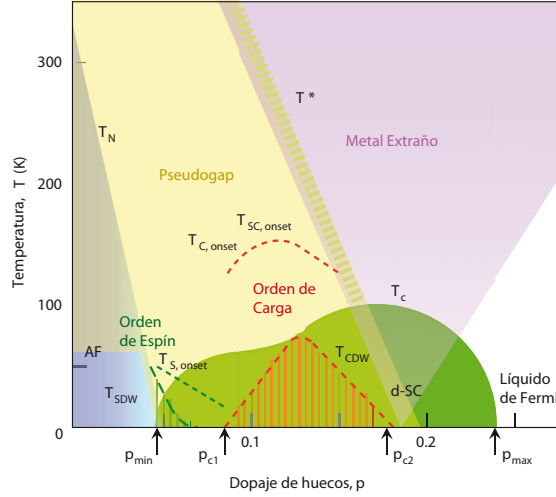


Figura 4-1: Diagrama de fases de un superconductor cuprato. Temperatura contra nivel de dopaje de huecos en los óxidos de cobre. El subíndice “onset” marca la temperatura a la cual el orden precursor o las fluctuaciones se vuelven aparentes.  $T_{S,onset}$ ,  $T_{C,onset}$  y  $T_{SC,onset}$  se refieren a las temperaturas en que inician las fluctuaciones de espín, de carga y superconductoras, respectivamente.  $T^*$  indica la temperatura del crossover al régimen donde ocurre el pseudogap. AF indica la región de antiferromagnetismo, mientras que d-SC, muestra la región de superconductividad de onda-d, establecidas a la temperatura de Néel,  $T_N$  y crítica,  $T_C$ , respectivamente. La región rayada en la parte inferior al centro representa la presencia del orden de carga completamente desarrollado situado en  $T_{CDW}$ , mientras que la región rayada a la izquierda es análoga para el orden de la densidad de espín, situada en  $T_{SDW}$ . Las flechas indican los puntos críticos cuánticos (transición de fase a  $T = 0$ ) para superconductividad y orden de carga [8].

de óxidos de cobre  $\text{CuO}_2$  unidas por capas intermedias de Ca (fig.4-2 y fig.4-3); al conjunto de capas de  $(\text{CuO}_2/\text{Ca})_{n-1}\text{CuO}_2$  se le llama bloque activo. Además, intercalados con estos bloques activos, se tienen bloques de retención de carga compuestos de  $\text{EO}/(\text{AO}_x)_m/\text{EO}$ , donde  $\text{AO}_x$  es un óxido con  $A = \text{Bi, Pb, Tl, Hg, Au, Cu, Ca, B, Al, Ga}$  y  $E = \text{Ba, Sr}$  [74]. La fórmula química general de estos materiales es  $A_m E_2 \text{Ca}_{n-1} \text{Cu}_n \text{O}_{2n+m+2+y}$ , abreviada  $A\text{-}m2(n-1)n$ .

Muchas teorías afirman haber resuelto el problema de los cupratos, sin embargo, esto no tiene sustento universal experimental. Por ejemplo, el llamado *pseudogap* (pseudo-brecha) es un enigma para la mayoría de las teorías. El pseudogap es la fase electrónica (ver fig.4-1) que existe a una temperatura  $T > T_c$  y se manifiesta en muchas mediciones experimentales (NMR, resistividad, fotoemisión, STM, entre otros). La historia se repite: en vez de necesitar una expli-

cación para el gap, ahora se debe explicar un pseudogap, esencial para describir correctamente la superconductividad.

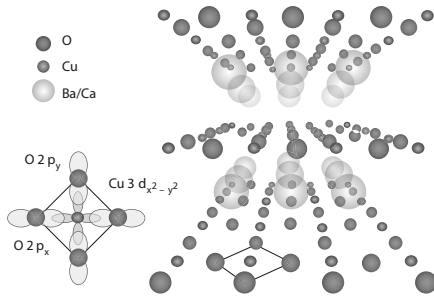


Figura 4-2: Estructura en capas superconductoras y aislantes alternadas. La estructura electrónica es en general una hibridación de un hueco  $3d_{x^2-y^2}$  en los sitios del cobre con orbitales de oxígeno coordinados en los planos  $2p_x$  y  $2p_y$  [8].

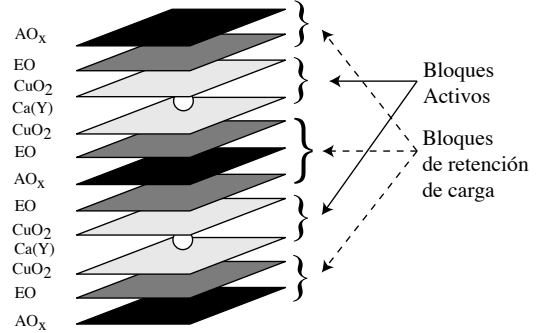


Figura 4-3: La estructura de los óxidos de cobre es en general:  $A_m E_2 Ca_{n-1} Cu_n O_{2n+m+2+y}$  para  $m=1$ .  $AO_x$  es un óxido arbitrario con  $A=Bi, Pb, Tl, Hg, Au, Cu, Ca, B, Al, Ga$ .  $EO$  es una monocapa de algún elemento alcalinotérreo,  $E=Ba, Sr$ . [74].

## Resumen de teorías

- *Banda de valencia resonante*. Phil Anderson (premio Nobel) propuso esta teoría en 1987 muy poco tiempo después del descubrimiento de los cupratos [84]. En ella se menciona que el mecanismo de la superconductividad es predominantemente electrónico y magnético aunque puede haber interacciones débiles fonónicas. Fue el primero en plantear un mecanismo de apareamiento de electrones *repulsivo* para cupratos (en vez de atractivo como en BCS).
- *Extensiones de BCS*. Como se mencionó arriba, existen modelos como el GBEC, que generalizan la teoría BCS para explicar estos materiales. Este tipo de teorías implican que los cupratos no son completamente diferentes de los convencionales. Para describirlos hace falta encontrar un parámetro de orden diferente a BCS (o Eliashberg) que los describa correctamente.

- *Fluctuaciones superconductoras.* Esta teoría [83] supone que en los cupratos el apareamiento ocurre a una temperatura mucho mayor que la temperatura en la que se da la coherencia de fase de los pares de Cooper. Esto es muy diferente a BCS en donde la formación de pares y el condensado de pares ocurre a la misma temperatura. La discrepancia en temperaturas en el caso de los cupratos se justifica dado que la densidad del superfluido es muy baja y a que la dimensionalidad de los cupratos es 2D (o cuasi 2D). Esto, sin embargo, no explica en principio porque ocurre el apareamiento.
  
- *Criticalidad cuántica.* Esto ha sido desarrollado por Subir Sachdev [81] y se refiere a una transición de fase de segundo orden a  $T = 0K$  y, por lo tanto, debida a un parámetro de orden no térmico. En la imagen del diagrama de fases fig.4-1, éste parámetro es el dopaje de huecos. En el caso de los cupratos, se dice que la superconductividad resulta cuando una fase no superconductora (por ejemplo, magnética) desaparece por medio de dopaje o presión. Esta idea ha sido complementada con modelos usando teoría de cuerdas [82].
  
- R. Laughlin *et al.* [77] proponen desde el año 2000 una explicación basándose en la densidad de la onda-d. En 2014, R. Laughlin (premio Nobel) propuso calcular el diagrama de fases completo a partir de un enfoque *Hartree-Fock* [78].
  
- Chandra Varma propuso un orden llamado *loop-current* [79] en donde se enfatiza un orden orbital que no rompe la simetría traslacional. Esto ha sido corroborado por dispersión de neutrones.
  
- Patrick Lee, tiene la teoría llamada de *apareamiento ampereano* [80], en la cual se explica la fase del pseudogap y otros aspectos experimentales. Según Lee, el pseudogap es un estado de apareamiento donde los electrones se encuentran del mismo lado de la superficie de Fermi (y no en lados contrarios como en BCS). Aquí el pseudogap es un tipo de superconductor *sin* coherencia de fase donde los pares de Cooper tienen un momento neto diferente de cero y pertenecen a una clase general llamada onda de densidad de pares.
  
- Uno de los descubrimientos más importantes en los cupratos es la observación de correlaciones de corto alcance de la *onda de densidad de carga* (CDW) [75] por arriba y por



abajo de  $T_c$  en muchos cupratos. Muchos investigadores como Emery y Kivelson [76] y Subir Sachdev especulan que esto puede ser la respuesta al pseudogap aunque a la fecha todavía no es consistente con la fenomenología. Kivelson *et al.*, por otro lado, estudian un orden nemático (filamentos que mantienen un orden direccional mas no uno posicional) que es una onda de densidad de carga análoga a un cristal líquido nemático. En ese mismo sentido, se tiene el estudio de franjas ( o “stripes”) que son *ondas de densidad de espín y carga* (SDW y CDW).

### 4.3. HTSC basada en hierro

En 2006, Hosono *et al.* descubrieron la superconductividad basada en hierro (FeSC) en el material LaOFeP [85] y en 2008 descubrieron superconductividad de alta temperatura ( $T = 26K$ ) en LaOFeAs [32]. Este hecho removió, nuevamente, viejas creencias sobre qué tipos de materiales podían ser o no superconductores y mostró que la superconductividad puede ser un fenómeno más común. Los avances experimentales previos realizados principalmente en cupratos permitieron que la HTSC basada en hierro se desarrollara rápidamente. Si bien ahora se sabe que los HTSC basados en hierro tienen muchas similitudes con los cupratos, también difieren drásticamente de ellos en algunos aspectos de principio [86].

Al igual que los cupratos, los superconductores basados en hierro tienen un diagrama de fases muy complejo (ver fig.4-4). Sin embargo, a diferencia de los cupratos la FeSC no presenta la fase de pseudogap y no se encuentran tan fuertemente correlacionados como los cupratos. Por otro lado los FeSC son materiales multibanda y la mayoría de los compuestos tienen cinco superficies de Fermi que cruzan el nivel de Fermi.

#### Resumen de teorías

Actualmente no se conocen bien los mecanismos de formación de pares de Cooper y por lo tanto no se sabe bien la simetría que tiene el parámetro de orden (brecha). En general, se pueden tener cuatro tipos de simetría [88] (fig.4-5). Muchos investigadores creen que la simetría correcta es  $s^{+-}$  en la mayoría de los FeSCs. La prueba experimental que mejor sustenta esto es dispersión de neutrones. Esto implica que la brecha tiene signos contrarios en una zona

de huecos y en otra asociada de electrones, sin embargo, las otras simetrías no han quedado descartadas.

- *Apareamiento por fluctuaciones de espín.* Como se mencionó arriba, muchos investigadores creen que la simetría de la mayoría de los FeSC es  $s^{+-}$ . Esto se justifica porque en el digrama de fases (fig.4-4) la fase magnética (o SDW) se encuentra muy cercana a la superconductora y puede ser un precursor de la superconductividad.
- *Apareamiento por anidamiento de la superficie de Fermi.* El anidamiento de superficies de Fermi ocurre cuando segmentos largos de una superficie de Fermi se pueden conectar con otro segmento a través de un vector  $\mathbf{k}$ . Esto es indicativo de una fase magnética y se puede asociar también con SDW [89].
- *Criticalidad cuántica.* Al igual que en los cupratos las intersecciones a  $T = 0K$  en el diagrama de fases se pueden explicar con una teoría de transiciones de fase cuánticas. Esto explicaría, en parte, la fase nemática en el diagrama de fases.
- *Electrón-fonón.* Las teorías electrón-fonón como GBEC, pueden describir este fenómeno si se encuentran los parámetros adecuados. Puesto que, en estas teorías se puede trabajar con multibandas, se debe preguntar bajo qué simetría estas teorías pueden ser aplicables.

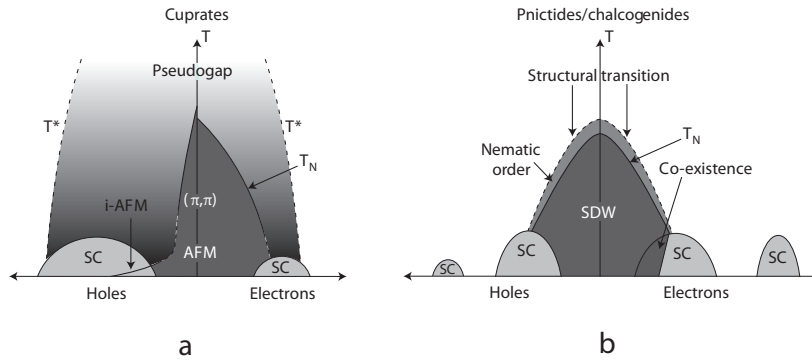


Figura 4-4: Diagrama de fases de cupratos y superconductores basados en hierro. La superconductividad en sistemas basados en hierro puede iniciarse no sólo por dopaje de huecos, sino también mediante presión o sustituyendo un elemento isovalente del grupo del nitrógeno por otro. De las fases mostradas, la fase nemática ( $T > T_N$ ) es de las más debatidas hoy en día. Algunos superconductores con dopajes altos de huecos son  $\text{KFe}_2\text{As}_2$  y  $\text{AFe}_2\text{As}_2$  (con  $A = \text{K}, \text{Rb}, \text{Cs}$ ) para el dopaje con electrones [87].

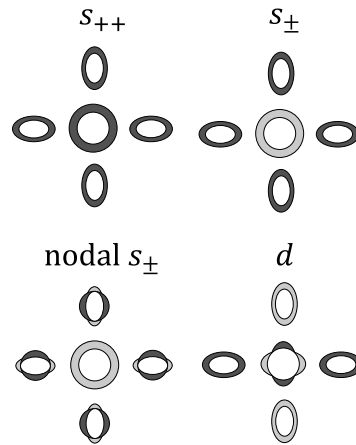


Figura 4-5: Simetrías en FeSC [88].

Parte II

Aplicaciones de la  
Superconductividad en la Ingeniería  
Civil

La dificultad teórica que implica la superconductividad representa la forma contraintuitiva en que a veces actúa la naturaleza. Eso se refleja en propiedades sorprendentes y que no se pueden explicar del todo bien. Desde 1911 en que se descubrió, la superconductividad aparece como una promesa de fantásticas aplicaciones y soluciones a problemas desafiantes.

Hoy, la mayoría de las aplicaciones se encuentran en formas excéntricas a la ingeniería civil (por ejemplo, en investigación básica o en áreas comerciales o de desarrollo tecnológico como potencia eléctrica y medicina). Grandes proyectos científicos (como aceleradores de partículas) han visto en esta tecnología beneficios por su capacidad de crear fuertes campos magnéticos que de otra forma serían muy costosos. De igual forma, las aplicaciones más exitosas se encuentran en otras áreas de ingeniería: imagenología de resonancia magnética, magnetómetros en laboratorios, filtros en telecomunicaciones, cables de instalaciones eléctricas, escudos magnéticos, motores, generadores, limitadores de corriente de falla, etc. [90]. Esto se ha extendido, a paso lento, a encontrar otras aplicaciones en áreas como la Ingeniería Civil.

Los avances tanto teóricos como de síntesis y fabricación permiten que la superconductividad esté en un punto ideal para ampliarse. Las áreas de posibles aplicaciones son tan diversas que abarcan casi todas las áreas de la Ingeniería Civil tales como medio ambiente, transporte, purificación de agua, energía, sismología, instalaciones eléctricas, imagenología, diagnóstico de estructuras, etc. A continuación se presenta una revisión de varias de estas tecnologías con aplicaciones actuales, o posibles en un futuro cercano, en la Ingeniería Civil.

## Capítulo 5

# Aplicaciones ambientales

La preservación del ambiente y la mejora en la calidad de vida de los seres humanos simboliza un objetivo particular de la ingeniería civil. No es, sin embargo, un interés aislado y lo comparte con prácticamente todas las áreas del conocimiento. El ambiente es un sistema dinámico y altamente caótico, por ello, conseguir dicha preservación resulta cada vez una labor más compleja y difícil conseguir. De hecho, la labor se complica todavía más porque el ingeniero debe ponderar entre impactos ambientales y los beneficios a una población.

La ingeniería civil participa en este ámbito proporcionando soluciones a grande o pequeña escala y como tal es una pieza importante en estos problemas. Para lograrlo, genera tanto el conocimiento como la tecnología necesarios minimizando costos y mejorando la calidad de vida de una población. La superconductividad es una herramienta versátil con muchas aplicaciones ambientales aplicables *desde* la ingeniería civil. Este capítulo se enfoca en dichas aplicaciones, de las cuales algunas se basan en superconductores de alta temperatura descubiertos apenas en 1986 [7]. No es sorprendente, por lo tanto, que muchas de estas aplicaciones se encuentren en etapa de desarrollo e investigación [92].

### 5.1. Separación magnética de contaminantes

El uso de superconductores en el tratamiento de agua se basa en un proceso de separación magnética. Este proceso separa materiales sólidos suspendidos usando campos magnéticos. Desde 1976, la separación magnética ha sido probada para separar óxidos de hierro en arci-

llas (caolinitas) [93]. Pero también se puede hacer en materiales con baja respuesta a campos magnéticos (de baja susceptibilidad magnética<sup>1</sup>) agregando un adsorbente ferromagnético (alta susceptibilidad magnética) [94; 95]. Este proceso también ha sido usado en tratamiento de aguas contaminadas con químicos o antibióticos.

La fuerza electromagnética que ejerce un campo externo magnético en una muestra de material magnético obedece la siguiente relación [91]

$$\mathbf{F}_M = \int_V d^3r \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r [\mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5-1)$$

Donde  $\mathbf{j}_f$  es una densidad de corriente dentro del material magnético,  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  es la magnetización,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r})$  es el campo magnético exterior y  $\mu$  es la permeabilidad del medio. Si la variación con respecto a la posición del campo magnético y de la magnetización es despreciable, se puede dar una aproximación razonable

$$\mathbf{F}_M = \frac{V\Delta\chi}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (5-2)$$

donde  $F_M$  es la fuerza magnética,  $V$  es el volumen de la partícula,  $\Delta\chi$  la diferencia de susceptibilidades entre el medio y el sólido y  $\mathbf{B}$  el campo magnético. O, en el caso que  $\chi_{sólido} \approx \Delta\chi$ , es decir, que la susceptibilidad del sólido sea mucho mayor que la del medio (por ejemplo, la susceptibilidad del óxido de hierro  $\chi_{FeO} = 720 \times 10^{-5}$  y la del agua  $\chi_{H_2O} = -0.91 \times 10^{-5}$ ), entonces

$$\mathbf{F}_M \approx \frac{V\chi_{sólido}}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = V(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (5-3)$$

donde  $\mathbf{M} = \chi/\mu_0\mathbf{B}$ . Esta ecuación especifica cómo actúa la fuerza magnética en un material y su magnitud depende de la susceptibilidad del material. De acuerdo a su susceptibilidad magnética los materiales pueden clasificarse en diamagnéticos, paramagnéticos o ferromagnéticos (fig.5-1).

Para separar un sólido suspendido aumentando la fuerza magnética es necesario aumentar el volumen ( $V$ ), la magnetización ( $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ ) o el gradiente del campo magnético ( $\nabla\mathbf{H}$ ). Un

---

<sup>1</sup>La susceptibilidad magnética,  $\chi$ , es una constante de proporcionalidad que relaciona la magnetización  $\mathbf{M}$  de un material en presencia de un campo magnético  $\mathbf{H}$ :  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ .  $\chi$  puede tomar valores positivos o negativos. Es positiva en materiales magnéticos permanentes como los ferromagnéticos, ferrimagnéticos o antiferromagnéticos y en materiales magnéticos no permanentes como los paramagnéticos; es negativa en materiales diamagnéticos. La susceptibilidad no siempre es una constante, existen materiales para los cuales la magnetización no sigue una relación lineal. En esos casos, se debe sustituir por una función  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  que describa al material.

material ferromagnético tendrá, en general, una alta magnetización incluso cuando el campo magnético sea bajo. Los materiales paramagnéticos y diamagnéticos tendrán una baja magnetización que aumenta si aumenta el campo magnético y la  $F_M$  será lo suficientemente fuerte sólo si el campo magnético es muy fuerte. Los imanes superconductores pueden generar campos muy fuertes capaces de separar estos materiales, pero no a la velocidad industrial requerida normalmente.

Para lograr una separación rápida sin importar el tipo de material se agregan materiales ferromagnéticos que puedan ser adsorbidos por el sólido. En conjunto con los fuertes campos magnéticos muchos tipos de materiales orgánicos o incluso iones pueden separarse selectivamente.

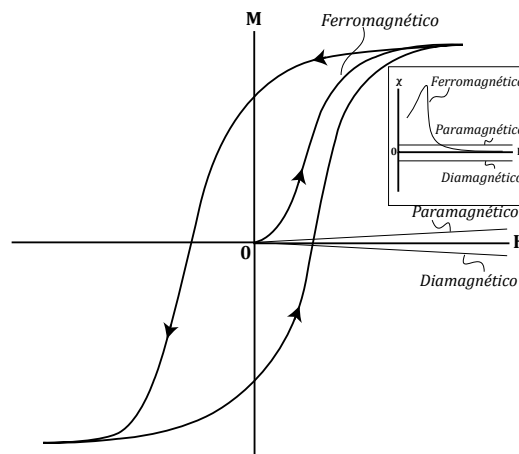


Figura 5-1: Representación de la magnetización contra el campo magnético y de la variación de la susceptibilidad contra el campo magnético. Los materiales diamagnéticos tienen una susceptibilidad magnética negativa ( $\chi < 0$ ) y repelen un campo magnético externo (algunos materiales son: mercurio, oro, plata, cobre, zinc, cuarzo, feldespatos, dolomitas, etc.). Los paramagnéticos ( $\chi > 0$ ) experimentan magnetización en presencia de un campo magnético (algunos materiales son:  $O_2$ , platino, tierras raras, sales del grupo del hierro, metales alcalinos, ilmenita, hematita, pirrotita, etc.). Los materiales ferromagnéticos presentan alto paramagnetismo ( $\chi > 0$ ) y la variación de la magnetización con respecto al campo magnético es no lineal (algunos materiales son: hierro, cobalto, níquel y magnetita) además de presentar histéresis.



## Separación magnética con superconductores

El proceso de separación magnética se vuelve práctico con el uso de superconductores porque éstos producen un fuerte campo magnético ( $> 1T$ ) en un espacio amplio y usando relativamente poca energía. La eficiencia del proceso mejora si se incrementa el gradiente del campo, lo cual se logra poniendo materiales ferromagnéticos en contacto con el campo (llamados “filtros magnéticos”, ver fig.5-3). Estos filtros, en su vecindad, distorsionan el campo y aumentan el gradiente del mismo. La ventaja es que pueden tener geometrías variadas y su fabricación es simple, tales como cuadrículas de  $1mm \times 1mm$  que pueden servir para filtrar sólidos suspendidos de hasta  $1\mu m$ ; además, las obstrucciones en estos filtros son mínimas y la disminución en la presión es prácticamente despreciable. Es por esto que el flujo de agua y la separación de contaminantes puede procesarse a altas velocidades.

En comparación con otros sistemas de aguas residuales (por ejemplo, lodos activados), y considerando el tipo de sólidos por separar, este sistema puede tener rendimientos muy altos y reducir los costos de instalación, operación y mantenimiento [96]. Por su pequeño tamaño es versátil y puede usarse de manera independiente o implementarse a sistemas nuevos o viejos. Por ejemplo, si se incorpora a un sistema de lodos activados en funcionamiento, el exceso de lodo residual puede separarse con separación magnética y hacer más eficiente el proceso.

Algunas aplicaciones prácticas *ya probadas* de los sistemas de separación magnética usando superconductores son: tratamiento de aguas de una planta de papel [96]; purificación de agua de río [97]; separación de cobre de aguas residuales [102]; remoción de arsénico en aguas geotérmicas [98]; separación de lixiviados [100]; recuperación de cantidades muy pequeñas de uranio de cobre mineral [101].

## Tratamiento de agua en una fábrica de papel

Un estudio muestra el funcionamiento de un sistema de tratamiento de agua en una fábrica de papel [96]. Éste fue diseñado para tener una capacidad de 2000 ton/día y se compara su desempeño contra un sistema de lodos activados. Los autores agregaron adsorbentes ferromagnéticos a la pulpa orgánica y a las tintas contenidas en el papel con el fin de medir la Demanda bioquímica de oxígeno (DBO) después del tratamiento de agua. Después de la

separación, los valores de DBO obtenidos fueron menores a 40 ppm.<sup>2</sup>

El sistema consiste de un tanque de mezclado (donde se agrega el adsorbente ferromagnético), un tanque de sedimentación y un imán superconductor hecho de NbTi (ver fig.5-2). El principio es simple: se forma una aglutinación de partículas de magnetita y de partículas orgánicas (polímeros y tintas) en el tanque de mezclado; posteriormente se separan las aglutinaciones primero por un proceso de sedimentación y luego por uno magnético. En el primero, la sedimentación reduce el número de partículas magnéticas que después entrarán al subsistema de separación magnética. Ahí, el solenoide superconductor separa las aglutinaciones por medio de una fuerza magnética y un filtro magnético que incrementa el gradiente del campo (ver fig.5-3). El agua limpia ya purificada se recolecta y lo restante se reúne en un tanque de lodo residual junto con el residuo sedimentado del tanque de sedimentación. El sistema fue diseñado para reciclar el agua de ser necesario y con filtros fácilmente desmontables para su mantenimiento (limpiado).

Los autores mencionan que el costo aproximado, en 2006, fue de aproximadamente 900 mil USD comparado contra 5.5-9 millones USD del costo usual de un sistema de lodos activados (en Japón). Además, el costo de operación fue de 1.17 USD por tonelada de agua procesada incluyendo gastos de personal (contra 2.25 USD de los lodos activados). Es decir, comparado con un sistema convencional de lodos activados, el costo inicial es de aproximadamente una sexta parte y el costo de operación es de la mitad.

En conclusión, los sistemas de separación magnética con superconductores son una herramienta con muchas aplicaciones prácticas, de tamaño pequeño y de bajo costo. Como se mostró arriba con casos ya probados, estas aplicaciones pueden funcionar por sí mismas o adaptarse a sistemas ya instalados. El problema de los contaminantes y en particular la contaminación del agua se acentúa con el rápido crecimiento de zonas urbanizadas. Esto puede implicar, además, la disminución de agua potable. Este tipo de sistemas ofrecen una solución eficiente al tratamiento de agua residual industrial, a la purificación de agua y recuperación de sólidos suspendidos tanto en países desarrollados como en países en desarrollo.

---

<sup>2</sup>La Norma Oficial Mexicana NOM-003-SEMARNAT-1997 de reuso de aguas residuales exige como límite máximo por contacto directo con el público una DBO de 20ppm y por contacto indirecto una DBO de 30ppm. Este valor de DBO no es suficiente para su reuso en zonas urbanas por lo que se podría incorporar un sistema compuesto, posiblemente con carbón activado o algún otro tipo de purificación de bajo costo.

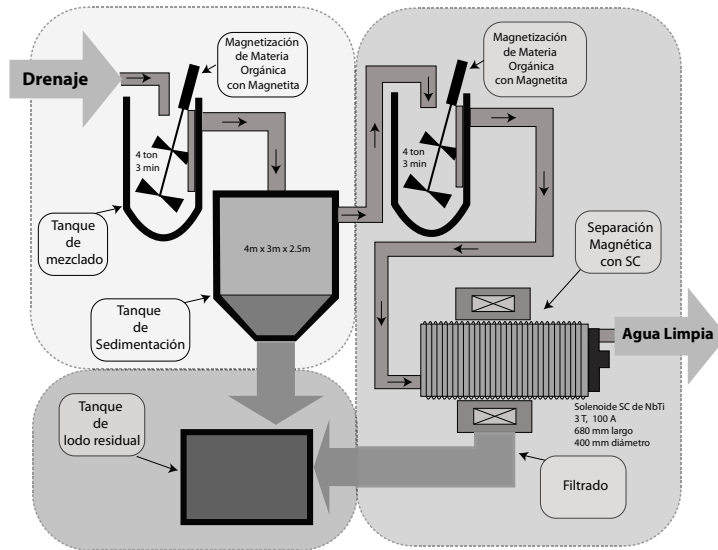


Figura 5-2: Esquema del sistema de separación magnética con superconductores de tratamiento de agua residual de una fábrica de papel. El sistema es pequeño con no más de  $6m \times 6m$  de superficie; el agua tratada tiene una  $DBO < 40ppm$ ; y puede procesar hasta  $2000L/dia$

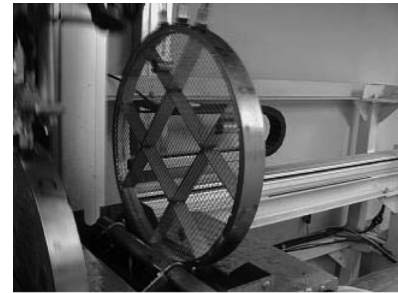


Figura 5-3: Filtro magnético hecho de un material ferromagnético. Su función es crear un gradiente del campo magnético generado por el imán superconductor para aumentar la fuerza ejercida sobre los sólidos suspendidos.

## 5.2. Sensores ambientales: Tecnología THz

Al abordar problemas ambientales en ingeniería, es primordial detectar contaminantes disueltos o fuera del alcance visual. Para esto se requieren sensores con una amplia sensibilidad tanto a sustancias orgánicas como inorgánicas. Los emisores y detectores que operan en la porción de terahertz (THz) en el espectro electromagnético son una nueva herramienta de alta precisión con aplicaciones de detección de sustancias químicas y biológicas. La radiación de THz se encuentra entre ondas milimétricas (100 GHz) y el infrarrojo lejano (10 THz) –la afamada brecha THz–(fig.5-4). Esta región del espectro electromagnético se distingue por una alta sensibilidad a líquidos polares, materiales no conductores y una respuesta espectroscópica a muchos materiales. Un problema de la radiación THz es la dificultad de crear emisores y detectores sensibles a esas frecuencias. Desde los años 60s hasta finales de los 90s, el desarrollo de estos dispositivos se mantuvo estancado. Sin embargo, últimamente, con el avance de HTSCs, el panorama ha cambiado favorablemente (aunque las dificultades tecnológicas persisten [103]). Los HTSCs, debido a propiedades intrínsecas, facilitan la fabricación de tecnología THz. Dado el

poco tiempo de desarrollo de ambas tecnologías, las aplicaciones aunque con mayor sensibilidad que la de sus predecesores semiconductores, tienen una eficiencia energética baja. En esta sección se presenta una introducción de su funcionamiento y se discuten las posibles aplicaciones ambientales de la tecnología THz con el uso de superconductores.

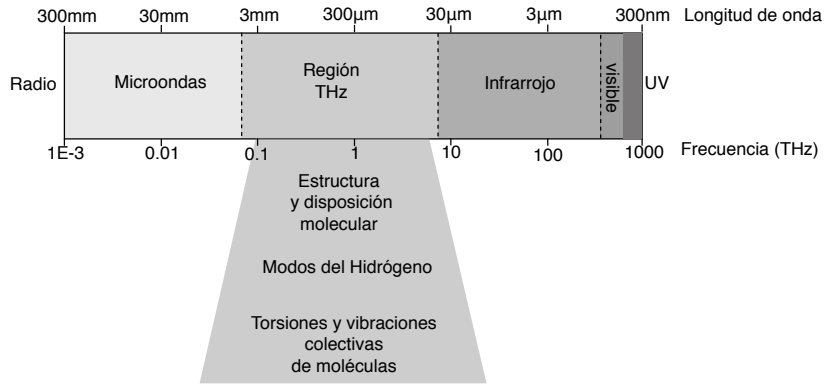


Figura 5-4: Porción del espectro electromagnético con frecuencias entre 100GHz y 10 THz. La longitud de onda a esta escala es del orden de las vibraciones intramoleculares e intermoleculares.

## Funcionamiento

La fabricación de emisores coherentes de radiación THz se basa en la estructura por capas de los HTSCs y en aprovechar el efecto Josephson (§1.7). Como se mencionó anteriormente, una unión de Josephson transforma un voltaje DC en una corriente AC y viceversa. La potencia de salida y el desempeño general de una unión de Josephson disminuye si el voltaje aumenta mucho. Esto se soluciona agregando más uniones de Josephson en serie y la potencia disponible aumenta con el número de uniones. Además si las uniones oscilan en fase pueden formar una fuente de radiación coherente (algo similar a un láser). Es aquí donde se explotan las características de los HTSCs y en particular de los cupratos.

La estructura de los superconductores cupratos consiste de capas superconductoras de  $CuO_2$  alternadas con capas aislantes. En algunos superconductores las capas de  $CuO_2$  se acoplan débilmente de tal forma que el material se comporta como un conjunto de uniones de Josephson en serie (fig.5-5). Esta característica de los cupratos es justamente lo que se busca en los emisores THz.

Para fabricar un emisor THz a partir de un cuprato se requiere diseñar una “mesa”. Ésta

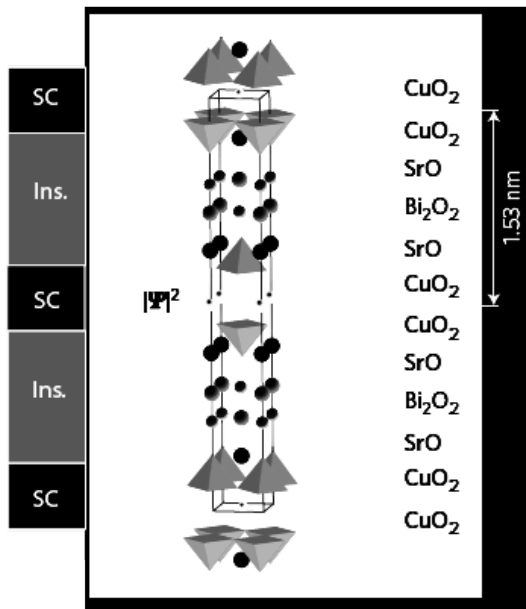


Figura 5-5: Estructura del superconductor  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$  (BSCCO) usado para la fabricación de emisores THz. La estructura en capas superconductoras y aislantes alternadas permite al material mismo ser una colección de uniones de Josephson en serie.[104]

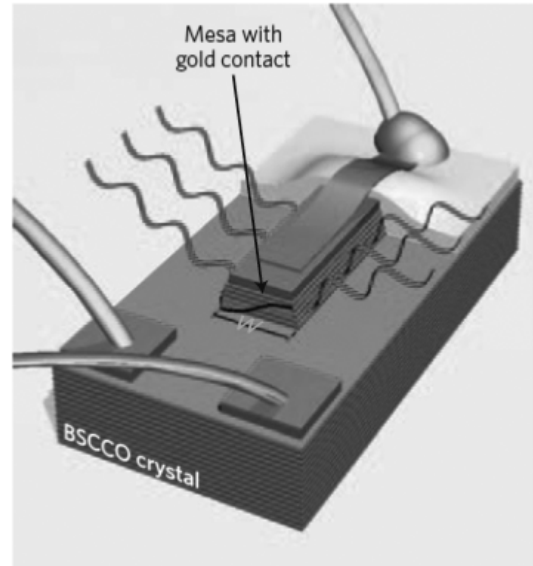


Figura 5-6: Emisor THz hecho de BSCCO. Una 'mesa' es una cavidad resonante hecha de un solo cristal de BSCCO. Sus dimensiones se restringen por el ancho  $w$ . El dispositivo emite radiación THz por los lados con una frecuencia que depende del ancho  $w$  y del voltaje aplicado. Las dimensiones aproximadas de una mesa son de 1-2 micrones de alto (aproximadamente 1000 juntas de Josephson), 40-100 micrones de ancho y varios cientos de micrones en longitud. [104]

se crea con fotolitografía a partir de un solo bloque de cristal superconductor. La mesa, que queda en la parte superior del cristal, se comporta como una cavidad resonante tal que un número de longitudes de onda múltiplo de  $\lambda/2$  (con  $\lambda$  la longitud de onda) de radiación quepa en el ancho  $w$  del dispositivo (fig.5-6). La menor condición de resonancia se cumple cuando la frecuencia AC de Josephson es igual a la frecuencia del modo de la cavidad,  $\omega_D = \pi c_0/nw$ , donde  $c_0/n$  es la velocidad de propagación del modo en el medio y  $n$  es el índice de refracción. Dado un ancho  $w$ , la condición de resonancia se cumple para un valor específico de voltaje en cada unión de Josephson,  $V_j = c_0\Phi_0/2wn$ . Así, para juntas de Josephson en serie, el voltaje se escala proporcionalmente al número de uniones ( $N$ ), i.e.,  $V = NV_j$ . Si un voltaje se aplica en dirección vertical, la radiación THz se emite por los lados de las uniones de Josephson. Hay

dispositivos fabricados con emisiones a frecuencias entre 250 GHz y 1 THz. La frecuencia de emisión puede calibrarse de acuerdo al ancho, al voltaje (variando el número de uniones de Josephson que oscilan coherentemente) o a la forma de la mesa.

## Aplicaciones

Las aplicaciones más destacadas para abordar problemas ambientales son:

- *Sensores de sustancias químicas y biológicas.* La tecnología THz puede detectar sustancias peligrosas o contaminantes porque la absorción y emisión electromagnética de éstas es mayoritariamente en THz (esto es, las vibraciones intermoleculares e intramoleculares emiten precisamente en esa porción). Cada sustancia tiene un patrón espectral a esas frecuencias y la detección de sustancias implica también su identificación. Nuevos detectores de sustancias químicas y biológicas han sido reportados en [105; 106]. Por otro lado, también sirve para obtener información espacial, sobretodo en sistemas inhomogéneos, tales como aquellos que incluyen alto contenido biológico [105].
- *Detectores de sustancias no metálicas.* La sensibilidad de los dispositivos THz permite la detección con alta precisión de materiales no metálicos sólidos enterrados. En particular se ha estudiado la detección de materiales explosivos y minas no metálicas dando resultados positivos [107]. En este estudio se encontró que un dispositivo THz puede identificar minas enterradas a 20 cm de profundidad con alta precisión en condiciones adversas (arena húmeda).

La tecnología THz es una opción tecnológica en la detección no invasiva de contaminantes químicos, biológicos y sólidos no metálicos. Su precisión y sensibilidad en la porción de THz con el uso de materiales superconductores es inmejorable actualmente. Muchas aplicaciones han probado su eficiencia en la detección de materiales peligrosos, en la detección de materia residual y en la mejora de procesos industriales. Esta tecnología, sin embargo, todavía no se encuentra a un nivel de aplicación práctica por los altos costos de manufactura y su desempeño lento en comparación con tecnologías bien desarrolladas. Esta tecnología es prometedora en muchas áreas y su investigación y divulgación será de gran importancia en un futuro cercano.

### 5.3. Mediciones geomagnéticas y sísmicas

Aunque no es una idea nueva, el estudio cuantitativo de fenómenos geofísicos Tierra-atmósfera como sistemas complejos tiene relativamente poco tiempo. Esto se explica por varias razones: por la incapacidad de procesar cantidades muy grandes de información; por limitaciones tecnológicas para realizar mediciones precisas; y por falta de teorías con poder predictivo. Este problema se extiende al área de ingeniería civil en donde se requieren mediciones y predicciones confiables de fenómenos naturales (tales como sismos, condiciones atmosféricas, etc.). Un problema abierto y fundamental en el entendimiento de la Tierra es la relación entre los campos geomagnéticos y los accidentes naturales. Por ejemplo, existen muchos estudios recientes que relacionan una huella geomagnética o cambios atmosféricos (variaciones en la temperatura, en la humedad o en la densidad electrónica) *previos* a sismos fuertes ( $M > 5$ ). [108; 109; 110; 111; 112] Esto, por supuesto, no quiere decir que se pueda predecir un sismo, sino que ahora existe tecnología, con precisión sin precedentes, capaz de relacionar eventos previos con el sismo *–a posteriori–*.

La relación dinámica entre las capas internas de la tierra y la atmósfera –en particular la ionósfera– puede ser tan sutil que la mayoría de los magnetómetros convencionales no la puedan detectar. Algunos estudios muestran la capacidad de magnetómetros superconductores o SQUIDS (Superconducting Quantum Interference Device) para medir la interacción de la Tierra y su ionósfera a través de ondas P. En estos estudios se infiere una relación entre dicha interacción con espectros rojos [113] o la huella magnética pre-sísmica [114; 115]. Los SQUIDS pueden medir también otros fenómenos terrestres como los modos resonantes de la Tierra (de Schumann) [116; 117] o perturbaciones en satélites o dispositivos electrónicos en la Tierra debido a tormentas magnéticas ocasionadas por erupciones solares muy fuertes [118].

Existen varios problemas para realizar estas mediciones. Puesto que los campos magnéticos medidos por los dispositivos superconductores pueden ser muy pequeños, es de esperarse que cualquier evento (como un automóvil pasando) pueda interferir en las mediciones. También, como es una medición indirecta de fenómenos complejos, discernir la información relevante puede ser un reto. Éstos, sin embargo, son también retos comunes de las áreas ambientales y no son particulares de esta tecnología.

## Investigación previa y posterior a un sismo

En esta sección se hace énfasis en algunos estudios realizados en el laboratorio subterráneo de bajo ruido, LSBB (Laboratoire Souterraine à Bas Bruit), ubicado en una antigua instalación subterránea de lanzamiento de misiles nucleares al sur de Francia.[113; 115] El LSBB se encuentra a 500m de profundidad y tiene un aislamiento electromagnético contra explosiones nucleares. Esto le garantiza un ambiente electromagnético y sísmico controlado de muy bajo ruido ( $< 2fT/Hz^{-1/2}$  sobre  $40Hz$ ) además de encontrarse lejos de ciudades, industria o tráfico de autos. Bajo estas condiciones poco convencionales se estudió el campo magnético terrestre y otros efectos atmosféricos usando SQUIDS triaxiales. Tal vez el estudio más notable es el registro de los cambios magnéticos en la ionósfera debidos al gran sismo de Sichuan-Wenchuan en China.

El sistema elocuentemente llamado [SQUID]<sup>2</sup>, por (Superconducting Quantum Interference Device) con (Shielding Qualified for Ionosphere Detection), funciona de manera peculiar: estudia señales electromagnéticas relacionadas con movimientos de la corteza terrestre (estudios previos sin superconductores se encuentran en [119; 120]). Dado un sismo, existen dos caminos para detectar su huella electromagnética. La primera forma se debe a que las ondas P generadas por el sismo inducen vibraciones en el terreno de roca sedimentaria del LSBB. Estas vibraciones generan perturbaciones electromagnéticas ya sea debido a un gradiente de presión del fluido en el volumen mismo de la onda sísmica o bien porque la onda sísmica cruza una interfase en la que cambian las propiedades eléctricas o sísmicas. Estas alteraciones electromagnéticas pueden ser detectadas por [SQUID]<sup>2</sup>. La segunda forma de detectar la huella sísmica implica que cada movimiento de la capa superficial de la Tierra induce vibraciones en la columna de aire sobre ella. La energía de acoplamiento entre la corteza y la atmósfera, aunque débil, es suficiente para alterar la ionósfera. Estas perturbaciones son detectadas por [SQUID]<sup>2</sup> como señales magnéticas.

El fundamento teórico del primer caso es que una excitación sísmica superficial puede inducir una señal electromagnética –y viceversa– que se puede modelar con el acoplamiento de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones elastodinámicas de un medio poroso saturado con algún fluido [121]. En el segundo caso, se debe a que la mesopausa (la capa a 90 km que separa la mesósfera de la termósfera) es la capa más fría de la atmósfera con una temperatura de 90K.



Esto provoca que las moléculas termalizadas y las partículas cargadas emitan una señal sólo si una excitación colectiva externa las desplaza. Tal es el caso de las ondas P generadas por un sismo, las cuales tardan 300 segundos en llegar a la mesopausa. Estas ondas hacen que la mesopausa se excite y entre en un modo resonante con un periodo de 60 a 90 segundos. Por lo tanto, la longitud de la onda electromagnética es muy grande (más grande que la mayoría de los eventos geográficos) y lleva a concluir que cualquier magnetómetro, sea cual sea la fuente del sismo, es de campo cercano. Es por esto que el grupo radicado en Francia afirma haber detectado un sismo originado en China.

En 2008 registraron la huella geomagnética previa al sismo Sichuan-Wenchuan de magnitud  $M_w=8.1$ . En este caso se detectó una resonancia de la mesopausa con un periodo de 74 segundos desde una hora antes del sismo. Además, cerca del epicentro se detectaron modificaciones en la atmósfera coincidentes con “saltos” en las mediciones magnéticas de [SQUID]<sup>2</sup> sesenta, treinta y diez minutos antes del sismo (fig.5-7).

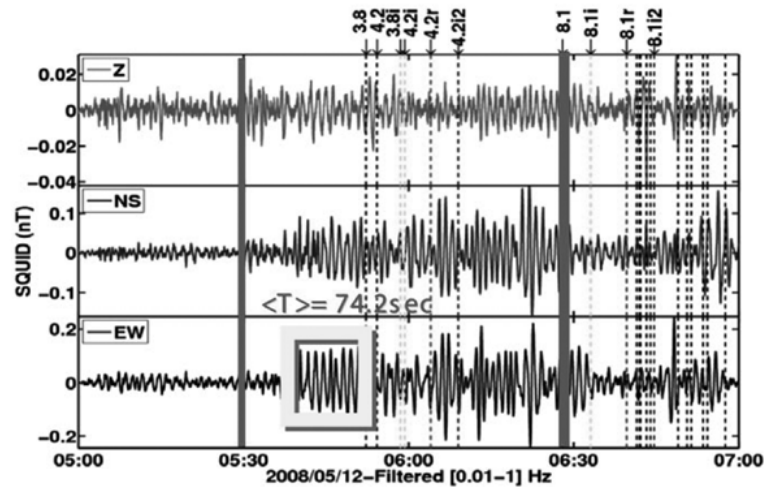


Figura 5-7: Componentes magnéticos filtrados de [SQUID]<sup>2</sup> reportados una hora antes del sismo de Sichuan-Wenchuan. El lapso de una hora previa al sismo se muestra entre dos líneas verticales de 5:30 a 6:30. El recuadro muestra un régimen de excitaciones con un periodo promedio de 74.2 segundos (acuñado al modo resonante de la mesopausa). Las líneas verticales discontinuas son sismos que ocurrieron en el periodo de medición y el número superior es la magnitud del sismo con la siguiente convención: sin índice: tiempo cero  $t_0$ ; índice i:  $t_0 + 300s$  (llegada de onda P a mesopausa); índice r:  $t_r$ , tiempo de llegada de onda P al LSBB; índice i2:  $t_r + 300s$  (llegada de onda P a la vertical del LSBB). A las 6:30 ocurre el sismo y 300s después las señales magnéticas disminuyen.

## Aplicaciones

Las aplicaciones de esta tecnología se encuentran muy poco desarrolladas. Aquí se presenta esta información con la intención de divulgar sus potenciales aplicaciones. Las condiciones poco usuales del sistema [SQUID]<sup>2</sup> no permiten a esta tecnología ser aplicable directamente a la ingeniería civil sin tener un costo excesivo. Sin embargo, el estudio de los fenómenos Tierra-atmósfera con magnetómetros avanzados y nuevos modelos ha mostrado ser una herramienta válida para comprenderlos mejor. La mayor ventaja de estos dispositivos es su sensibilidad. Ésta, como se vio arriba, hace de cualquier sensor del tipo uno de campo cercano sin importar qué tan lejos ocurra el sismo o el evento atmosférico. Para aprovecharla en un futuro, sin recurrir a condiciones tan estrictas como las del LSBB, será necesaria la implementación de sistemas en red de detectores. De hecho, para que esta idea tenga éxito, es necesario un esfuerzo global en el que se extienda la red actual de magnetómetros superconductores (actualmente sólo existe el LSBB y otro en la estación espacial Sudafricana). Esto se debe realizar agregando sensores de nueva generación, desarrollar programas de procesamiento de información y un sistema que correlacione los datos entre estaciones. Claramente un esfuerzo multidisciplinario es necesario y en tal caso sus beneficios son de gran escala. En caso de probarse útil esta tecnología, por medio de investigación aplicada, entonces será responsabilidad de las ingenierías su difusión y aplicación para monitorear e incluso prever sismos.

Por último, este tipo de laboratorios, aunque muy particulares, pueden construirse en sitios donde el ruido sea muy reducido. Su aplicación es plausible en México si se encuentran sitios adecuados, profundos como minas o sitios remotos que cumplan con los requisitos de ruido. La inversión en un centro de investigación puede resultar de trabajo conjunto entre universidades y gobierno.

## Capítulo 6

# Diagnóstico de estructuras

Actualmente, el diseño y mantenimiento estructural se regula según altos estándares de calidad y desempeño que hace medio siglo no existían. El crecimiento urbano y poblacional, así como la construcción de edificaciones cada vez más grandes, en ambientes cada vez más complicados aumenta el uso y el desgaste de las estructuras. Esto condiciona a los ingenieros civiles no sólo a desarrollar diseños innovadores sino también a mejorar el seguimiento preciso del comportamiento de estructuras bajo condiciones de carga extremas o en condiciones poco favorables. Debido a esto, un área de mucho auge en los últimos años es el diagnóstico de estructuras mediante el uso de sensores. La observación precisa del comportamiento es fundamental para mejorar diseños posteriores y para optimizar los métodos de mantenimiento que una estructura requiera en particular.

El número de métodos utilizados para el diagnóstico de estructuras es abrumador. Existen sensores para todo tipo de medición requerida; los hay piezoeléctricos, de microondas, superconductores, acústicos, de ultrasonido, de láser, de fibra óptica, de radar, entre otros [122]. El aumento en el número y tipo de sensores se ha dado por una demanda exacerbada por la industria y la investigación. Esta proliferación ha implicado el aumento de sensibilidad y la disminución de precios al mismo tiempo. Así pues, el uso de sistemas micro-electrónicos con sensibilidad sin precedente está al alcance del ingeniero civil.

El sensor perfecto es inexistente, como tal, se debe seleccionar el sensor correcto para el uso correcto. En este capítulo se muestran diferentes aplicaciones de sensores superconductores en diferentes (a veces muy diferentes) áreas de diagnóstico estructural. Se enfoca en la detección

particular de grietas, corrosión e identificación de materiales.

## 6.1. Evaluación no destructiva con SQUIDS

Los magnetómetros superconductores, como se vio arriba, son probablemente los más sensibles ante perturbaciones de un campo magnético. Debido a esto y a su amplio rango dinámico son capaces de detectar alteraciones magnéticas producidas por anomalías estructurales ubicadas en la superficie o dentro de un elemento estructural. Esto se puede hacer en situaciones de alto o bajo ruido magnético. El estudio de defectos en materiales y estructuras con el uso de SQUIDS se remonta a la década de 1980 [123; 124], sin embargo, todavía en la actualidad existe una barrera psicológica probablemente debida al uso de criogenia y una especulación exagerada de los costos. Con el uso de HTSCs enfriados con nitrógeno líquido, los sistemas superconductores tienen costos competitivos aunque siguen teniendo inconvenientes de manejo. Por esta razón los sensores basados en SQUIDS deben usarse en situaciones en que otros sensores no puedan cubrir los requisitos de precisión requerida.

Su uso reciente en estructuras metálicas es muy variado. Se ha probado en la detección de grietas muy pequeñas y profundas (a 40mm o más) en las paredes (hechas de tres capas de aluminio) de aviones [126; 127] así como en el análisis de calidad en llantas de aviones [128]. Más recientemente, se usó para mapear superficies curvas debido a la incorporación de un sistema con cancelación de ruido de fondo que permite cambios de orientación del dispositivo [129]. También se ha usado para detectar pequeñas inclusiones de tantalio en placas de niobio para la construcción de cavidades superconductoras en aceleradores de partículas [126]. En otro estudio, la incorporación de un sistema de evaluación no destructiva en un robot probó ser efectiva en la evaluación de defectos en placas de acero [130]. Su uso en infraestructura civil tampoco es nueva y se ha usado en plataformas petroleras, en inspección de ductos y puentes como se verá más abajo.

### 6.1.1. Inspección de Puentes

La inspección del acero pretensado en puentes de concreto se realiza usualmente con una técnica llamada “fuga de flujo magnético” (MFL, por sus siglas en inglés). Esta técnica funciona

magnetizando longitudinalmente el material (en este caso el acero pretensado) y midiendo las “fugas” magnéticas debido a anomalías como corrosión, grietas o inclusiones de materiales ajenos. El principio de esta técnica es que las anomalías en un elemento metálico incrementan el llamado campo de *desmagnetización*. Éste corresponde al campo dentro del volumen del material y se suele llamar así porque apunta en la dirección opuesta de la magnetización. Cuando existen anomalías, se distorsiona la guía del flujo de alta permeabilidad y como consecuencia afecta la magnetización local y por lo tanto hay un aumento en el campo de desmagnetización (fig.6-2). La detección de las distorsiones del campo normal (i.e., el campo de desmagnetización) se realiza con SQUIDS. La aplicación y efectividad de esta técnica con magnetómetros SQUID se probó por primera vez en estructuras de acero sumergidas en plataformas petroleras [125].

En el caso de puentes, su uso es amplio aunque no con superconductores sino con sensores de efecto Hall. En un estudio realizado en Alemania por Krause *et al.* [131] se comparó la respuesta de un sistema superconductor contra magnetómetros comerciales y contra un sensor de efecto Hall (fig.6-1). El diseño del sensor incluyó un arreglo de SQUIDS (y de los otros sensores) con un yugo magnético que excitaba el material. Posteriormente se analizaron los datos y se corroboró la existencia de los daños abriendo el tablero del puente ( fig.6-3).

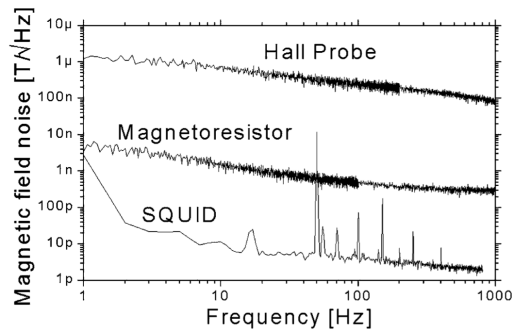


Figura 6-1: Medición de ruido magnético de un SQUID, un sensor magnetoresistivo (Philips KMZ 51, 41 mV/IT) y una prueba de Hall (Siemens KSY 44, 0.26 mV/IT) usados en la inspección de un puente[131]

El campo de desmagnetización no sólo se genera por defectos, también se debe a la disposición de estribos en el concreto. Éstos se ubican cerca de la superficie del concreto (aproximadamente a 5 cm a diferencia del acero pretensado que se encuentra a 15-20 cm) y generan distorsiones en el campo que los sensores detectan fácilmente. Se debe, por lo tanto, analizar

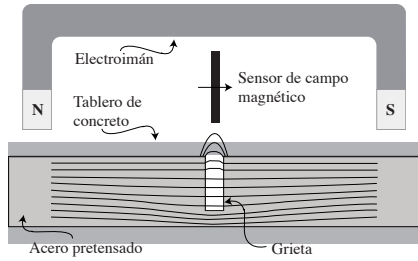


Figura 6-2: Esquema del sistema para detectar grietas en el acero de un puente. Un electroimán magnetiza el elemento longitudinalmente y un sensor magnético detecta la distorsión del campo generada por la grieta. Adaptado de [131].

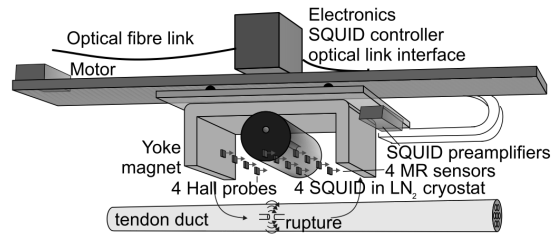


Figura 6-3: Esquema del dispositivo con tres diferentes tipos de sensores magnéticos: 4 sensores de efecto Hall, 4 magnetómetros SQUID y 4 magnetómetros comerciales [131].

las señales y descartar cuáles provienen de estribos y cuáles de anomalías estructurales. En el estudio por Krause *et al.* se desarrollaron dos métodos de análisis de señales con el fin de separar ambos tipos de señales. En el primero se hizo un ajuste de las señales típicas de los estribos, éste se restó al de las mediciones. En el segundo método se compararon las señales del campo remanentes después de cambiar la dirección de la magnetización de los estribos. Un análisis de correlación posterior (comparando con valores de señales de grietas ideales) resultó en las amplitudes de las anomalías en el acero (ver fig.6-4).

Los magnetómetros SQUID hechos de HTSCs no mostraron una degradación en el desempeño incluso cuando la intensidad del campo era máxima (15mT). Su arreglo lineal, transversal al campo generado por el yugo magnético (ver fig.6-3), permitió medir los campos de desmagnetización durante la magnetización del acero y los campos remanentes una vez terminada la excitación magnética. El sistema electrónico, junto con un contador de cuantos de flujo, desarrolló un rango dinámico de  $195dB/\sqrt{Hz}$ . Con esto en mente se hicieron las mediciones en la fig.6-4-b. El procedimiento de las mediciones es como sigue. En primer lugar se detectaron los tensores enterrados con el uso de un radar de penetración terrestre de 1 GHz. Una vez localizados los tensores, se realizaron los escaneos magnéticos con los tres diferentes tipos de magnetómetros. La apertura subsecuente del tablero del puente confirmó dicha medición (fig.6-5).

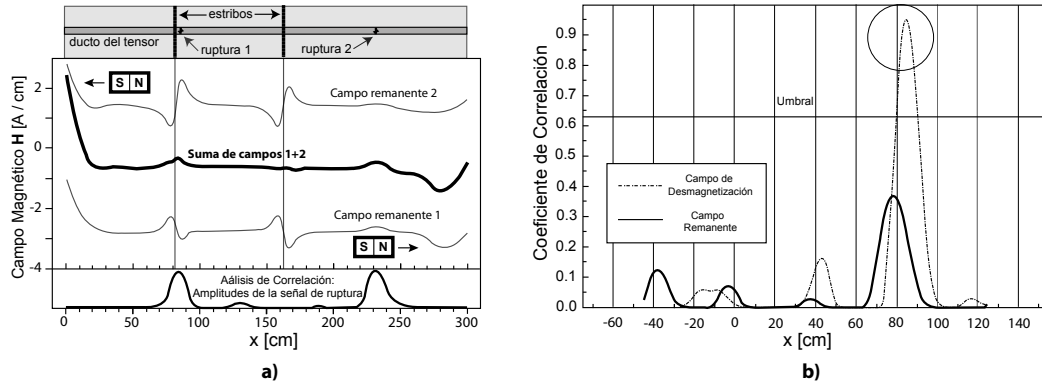


Figura 6-4: Filtrado de señales. **a)** Los campos remanentes medidos (1 y 2) con una polarización de magnetización inversa en los estribos fueron primero corregidos por las señales de los estribos y luego sumadas (curva del centro). Un análisis de correlación contra una señal de una grieta ideal resulta en la amplitud de la señal de una ruptura (curva de abajo). **b)** Coeficiente de correlación del campo de desmagnetización y del campo remanente medido en una localización específica de un puente según mediciones de un SQUID. Las señales fueron ajustadas y corregidas como en a). Por arriba del umbral marcado, las señales no se correlacionan con los estribos. El círculo indica una grieta en el acero en  $x \approx 82 \pm 5\text{cm}$  (posteriormente verificada abriendo el tablero del puente) [131].

Este estudio muestra una aplicación altamente sensible a la detección de defectos en el acero de un puente de concreto. El dispositivo superconductor en comparación con otros métodos de medición magnética muestra pocas señales de ruido y con los costos actuales del nitrógeno líquido puede ser una alternativa competitiva en la evaluación de estructuras de concreto armado.

Se pueden distinguir, por otro lado, algunas deficiencias del dispositivo; por ejemplo, la instalación del sistema electrónico y el desarrollo de programas para el análisis de señales es mucho más elaborado e implica más tiempo para su correcto funcionamiento. Aunque esto sea una dificultad inherente, no son problemas difíciles de solucionar ni de reducir sus costos. Como se mencionó anteriormente, éste no es un sensor perfecto y presenta dificultades y mejoras como cualquier tecnología. Dicho esto, un sensor SQUID, por su inmejorable sensibilidad, puede utilizarse para realizar observaciones periódicas del acero en estructuras de concreto (no necesariamente puentes, por supuesto).

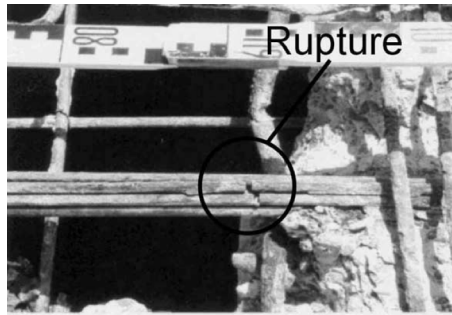


Figura 6-5: Tras abrir el tablero del puente, se verificó la existencia de una ruptura en el acero pretensado medido con un magnetómetro SQUID [131].

### 6.1.2. Evaluación de compuestos con refuerzo de fibras poliméricas

A mediados de la década de 1980 se implementó y desarrolló el uso de materiales compuestos reforzados con fibras poliméricas (RFP) para su uso en el refuerzo de estructuras de concreto dañadas o deterioradas [133]. En general, existen dos formas de realizar el refuerzo. El primer método consiste de laminados prefabricados hechos de un polímero termoendurecido reforzado con fibra de carbono o fibra de vidrio. Estos laminados se adhieren posteriormente a la superficie de concreto con una resina epóxica. El segundo método consiste de telas tejidas con fibras poliméricas secas, las cuales se saturan y adhieren al concreto con un polímero termoendurecido. Una vez instalados los materiales RFP, su desempeño se ve afectado directamente por su integridad (i.e., inversamente por la cantidad de huecos, imperfecciones, separación de láminas o curado imperfecto). Por eso, es de vital importancia mantener su integridad estructural y evaluarlas con métodos no destructivos.

En esta sección se hace énfasis en las técnicas no destructivas desarrolladas (o en pleno desarrollo) con SQUIDS. Éstos tienen la ventaja de generar mapeos tridimensionales del volumen del material con gran precisión. Por ejemplo, se han usado SQUIDS de HTSCs para medir el deterioro en paneles compuestos de RFPs debido a cargas transversales concentradas. El deterioro se correlaciona con la magnitud y la fase del campo magnético [134]. Otro estudio detectó grietas internas (a más de 20mm) en compuestos de RFPs y en paneles con múltiples capas [135].

En 2005 Hatta et al [136] probaron tres diferentes técnicas de evaluación no destructiva (Emisión acústica (EA), Interferometría del patrón electrónico de manchas (ESPI por sus siglas



en inglés) y gradiómetros SQUIDS) en el deterioro de paneles de Carbono-Carbono (C/C). Esto se realizó con el fin de evaluar nuevas técnicas que pudieran sustituir la poca sensibilidad, bajo esas circunstancias, de técnicas anteriores como ultrasonido y rayos-X. En este trabajo concluyen que la técnica ESPI es efectiva sólo en el caso de compuestos C/C de 2-D para detectar separaciones, micro grietas y sus extensiones inestables y separación de láminas. Por otro lado la medición con SQUIDS demostró claramente una tensión en la fibras debido a una fractura en C/C en 2-D, mientras que en los paneles C/C en 3-D encontró un modo de fractura sin falla de fibras. Además, el mapeo con SQUIDS fue útil para detectar fallas locales en las fibras que no fueron detectadas ni por microscopía ni por otros métodos no destructivos. En la fig.6-6 se muestra un esquema del gradiómetro superconductor utilizado por Hatta *et al.*

El principio por el que se pueden detectar los defectos en los paneles de carbono es muy simple. Se hace pasar una corriente de baja frecuencia por la muestra de tal forma que la variación del campo con respecto al tiempo sea despreciable. Además, como los paneles son láminas delgadas ( $z \ll x, y$ ), la densidad de flujo magnético (B) es mucho menor en la dirección vertical (z). Con esto en mente, y usando la ecuación de Ampère-Maxwell, se llega a un modelo simple, i.e.,

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial B}{\partial x} \simeq I_x \quad (6-1)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial B}{\partial y} \simeq I_y \quad (6-2)$$

donde  $I_{x,y}$  y  $\mu$  son la densidad de corriente y la permeabilidad magnética, respectivamente en la dirección  $x$  e  $y$ . En el experimento se inyectó una corriente eléctrica uniforme en la muestra, por esto, las perturbaciones en la corriente se debieron a defectos en las láminas de C/C.

## 6.2. Sensores THz

El funcionamiento de los sensores THz se mostró en el capítulo pasado (§5.2). Ahí se recaló la importancia de los superconductores en su fabricación y la importancia de la brecha THz por sus peculiares propiedades. Entre otras, se puede destacar que es una radiación intrínsecamente segura, no destructiva y altamente sensitiva. La seguridad, sin embargo, no es

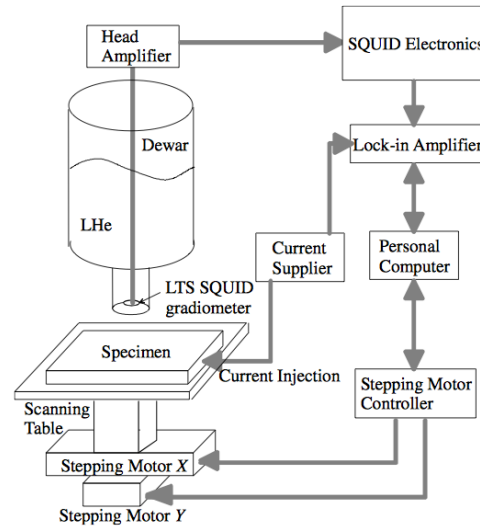


Figura 6-6: Evaluación no destructiva con el uso de un gradiómetro superconductor [136].

una característica exclusiva de esta porción del espectro electromagnético, también son seguras las ondas de radio, las interferométricas y las milimétricas. Todos estos sistemas de radar también sirven para la evaluación no destructiva de estructuras y cada uno destaca en alguna labor en particular. En general, el monitoreo con radares tiene varias desventajas: no pueden penetrar cualquier material (e.g., conductores); a menores frecuencias (y mayor profundidad de penetración) hay menor resolución; el procesamiento e interpretación de señales puede ser complicado y caro; y los niveles de radiación permitidos están fuertemente regulados por el gobierno (limitando la profundidad de penetración a su vez). Los sensores THz pues, tienen la ventaja de ser mucho más sensibles pero muchos materiales atenúan rápidamente las ondas en THz y por eso tienen poca profundidad de penetración.

La sensibilidad de los radares en THz, aunque sobresaliente, se restringe a capas cercanas a la superficie ( $< 20mm$ ) y, por lo tanto, sólo a la detección de inclusiones, corrosión, oxidación y deterioro del material bajo capas superficiales (como pintura, capas aislantes, etc.). Algunos ejemplos de sus utilidades se presentan a continuación.

### DetECCIÓN DE CORROSIÓN

Una demostración de la sensibilidad de sensores THz a la corrosión bajo una capa aislante térmica se presentó en un estudio realizado por la NASA en el Space Shuttle [132] (fig.6-7)

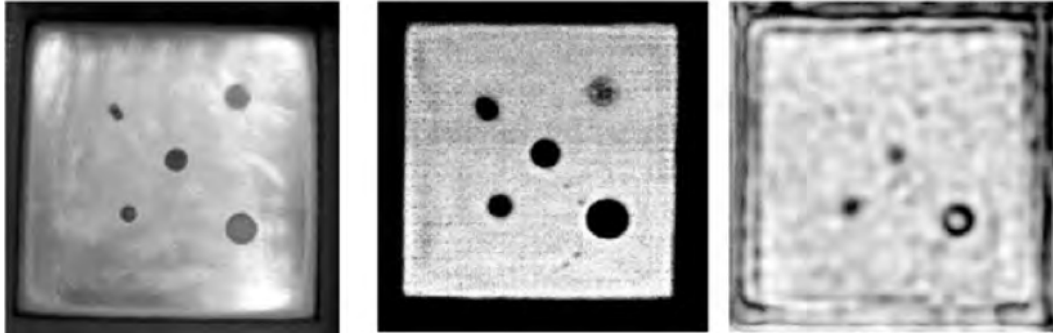


Figura 6-7: Detección de corrosión en un sustrato metálico. A la izquierda se ve la corrosión sobre la placa metálica. En el centro, la imagen generada con un dispositivo THz sin cubrirse. A la derecha, la imagen en THz de la placa cubierta por una capa de 24.5mm del material aislante.[132]

### Integridad y caracterización de polímeros

En [137] se presentan las siguientes aplicaciones de sensores THz en la evaluación no destructiva de estructuras compuestas con RFPs:

- Inspección de la integridad de adhesivos tales como soldaduras termoplásticas, selladores, burbujas de aire o separación de láminas.
- Caracterización de polímeros: índice de refracción, coeficiente de absorción, grosor o temperatura de transición vítrea de un polímero.
- Inspección de calidad de plásticos: distribución y orientación de las fibras en compuestos RFP o defectos en materiales compuestos.

### Evaluación de estructuras de concreto

El concreto y la madera son materiales adecuados para ser estudiados con radiación THz porque muestran una alta transmitancia en este rango de frecuencias. Por esta razón es fácil detectar vacíos, grietas o agua difundida en el interior de la estructura [139]. También es útil en la detección de inclusiones de cloro, responsable de la corrosión del acero de refuerzo en concreto armado [140].

Oyama *et al.* [139] muestran en un estudio realizado en bloques de concreto que en el límite inferior de la porción THz ( $\approx .1\text{THz}$ ) es posible visualizar grietas y defectos al agregarles

agua. Para lograrlo aprovechan que las ondas THz son transparentes ante muchos materiales no polares y en cambio son absorbidas por el agua. Una imagen clara de los defectos en concreto se obtiene agregando agua a los bloques, la cual se difunde por las grietas y defectos y se vuelven visibles en THz. También se puede estudiar la calidad de la adhesión de azulejos (o cualquier material cerámico) sobre concreto sin recurrir al calentamiento de las muestras (ver fig.6-8). Es fácil distinguir tanto las grietas en concreto como las fallas de los adhesivos. Ambas pruebas pueden realizarse con diferentes métodos; en el caso de grietas en concreto se pueden visualizar con rayos X, de neutrones y rayos gamma. La ventaja de usar THz es que comparado con rayos X tiene mejor resolución y a diferencia de los rayos de neutrones y los rayos gamma (que logran buena resolución), la radiación THz es inofensiva.

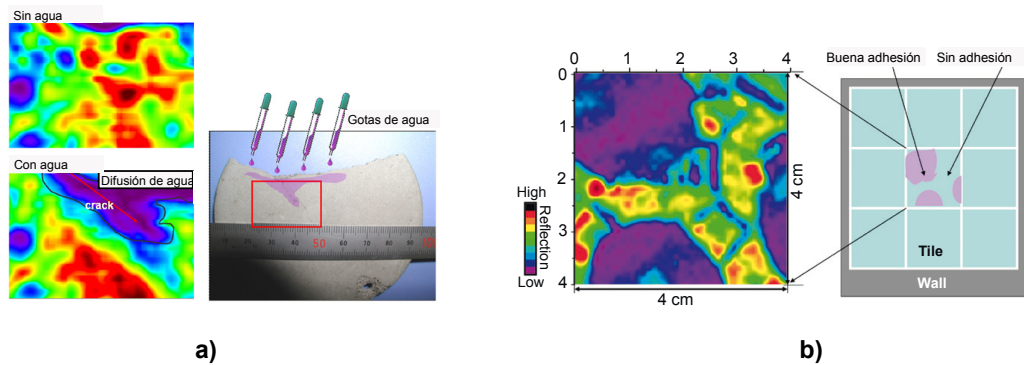


Figura 6-8: Imágenes THz de **a)** la difusión de agua en grietas en un bloque de concreto y **b)** defectos de la adhesión de azulejos sobre concreto [139].

# Capítulo 7

## Transporte

### 7.1. Trenes de levitación magnética

Los trenes de levitación magnética (maglev) son la aplicación más representativa de esta tesis. Por un lado, los trenes son emblemáticos de la ingeniería. En Europa y Asia han mostrado un beneficio a escala social, económica y técnica: en esencia, son el único sistema de transporte terrestre que garantiza sostenibilidad, seguridad, equidad y eficiencia. Por otro lado, los maglevs propulsados y suspendidos con superconductores (maglevSC) son una de las aplicaciones de la superconductividad más desarrolladas y mejor aceptadas por el público en general. Son, además, totalmente transdisciplinarios entre investigación básica, desarrollo tecnológico e infraestructura civil. Esto ha dotado a los maglevSC de la innovación necesaria para ser competitivos contra transporte aéreo en distancias medias (ver fig.7-1).

En general un sistema maglev se puede definir como un método de propulsión y levitación magnética sin el uso de motores o ruedas tradicionales. La levitación de un maglev es usualmente del orden de centímetros sobre una guía magnética, con lo que reduce las vibraciones, anula cualquier fricción con las vías y por ello es más silencioso. Consecuentemente no depende de la tracción permitiendo que su aceleración y velocidad —hasta 603 km/h— sea mejor y que su desgaste sea menor que sus contrapartes con ruedas. Los trenes maglevSC logran esta levitación con imanes superconductores y no es raro, pues, que su infraestructura sea completamente diferente a los ferrocarriles tradicionales y que por eso constituyan estrictamente un modo de transporte nuevo. El término maglev es por esa razón más amplio e implica por sí mismo no

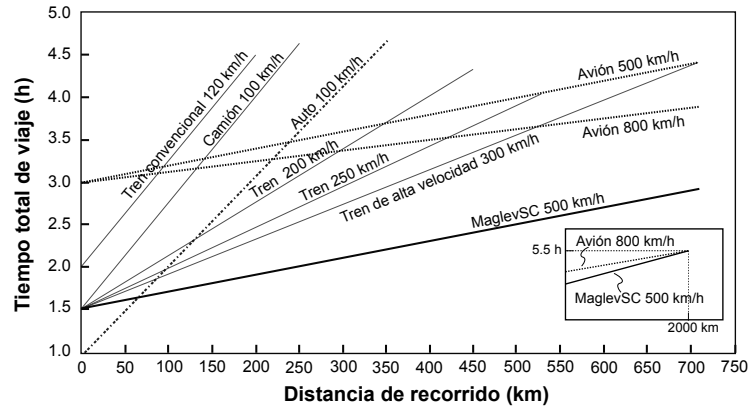


Figura 7-1: Tiempo total de viaje contra distancia recorrida de diferentes modos de transporte. Por debajo de 2000 km un sistema maglevSC ofrece un tiempo total de viaje más corto que un avión (imagen adaptada de [143]).

sólo a los vehículos sino también al sistema de vías de levitación y propulsión del vehículo.

Los ferrocarriles, a diferencia de los maglevSC, son un sistema altamente evolucionado en el sentido de que el diseño, la manufactura y la intermodalidad se han hecho óptimos con el tiempo. Los estándares de operación, manufactura y mantenimiento hacen en última instancia de los ferrocarriles un modo económico y seguro. Así pues, la complejidad del desarrollo tecnológico ferroviario se atenúa por procesos de industrialización altamente desarrollados. Hoy en día, el diseño y desarrollo de un tren lleva solamente de tres a cuatro años [145]. Esto es altamente contrastante con el tiempo de desarrollo que ha requerido el maglevSC (50 años para que sea comercialmente aprobado) y es por esto que tiene una gran desventaja en el mercado. Por otro lado, tanto los trenes de alta velocidad (TAV) como los maglevs tienen una gran ventaja contra otros modos de transporte: en tramos medios son más económicos, más rápidos y más cómodos que un avión o un automóvil.

Dicho esto, los trenes maglev son una alternativa altamente competitiva en un futuro cercano para afrontar las demandas de tiempo, el número de pasajeros, el control de emisiones y la comodidad en general. El desarrollo en áreas de investigación y tecnología es muy amplio y abarca áreas de infraestructura civil, nuevos modelos dinámicos y estructurales, innovación en motores lineales, superconductividad e imanes permanentes, entre otras. Como se mencionó arriba, el hecho de que sea un modo de transporte nuevo implica desventajas evidentes contra tecnologías que llevan siglos desarrollándose. El auge de cualquier nueva tecnología se explica por la canti-

Parámetro	Maglev	Tren de alta velocidad
Máx. vel.	603 km/h	574km/h
Máx. vel. (operacional)	420-505 km/h	300-350 km/h
Aceleración	Aumenta con la velocidad	—
Clima	Menos fallas y retrasos	Más fallas y retrasos
Inversión	12-178 M USD/km	6-76 M USD/km
Oper. y Mant.	Bajos/sin reemplazo de pzs.	Bajos/con reemplazos
Consumo de energía	—	Menor que maglev
Seguridad	Muy alta: Sin descarrilamientos	Alta
Peso	Ligero y cargas distribuidas	Pesado y cargas concentradas
Curvatura	Radio de 30 m	Radio de 150 m
Vibración	Muy baja	Aumenta con la velocidad
Ruido	60-65 dB	70-85 dB
Intermodalidad	Poca	Excelente
Imagen pública	Excelente	Excelente

Tabla 7-1: Comparación de un sistema maglev contra un sistema de trenes de alta velocidad tradicional [146; 147; 142].

Parámetro	Maglev HTSC	Maglev LTSC
Fecha de inicio	1990	1966
Altura de levitación	20-50mm	100mm
Precisión de vía	Baja	Alta
Control de levitación	Ninguno	Poco
Refrigerante	Nitrógeno líquido	Helio Líquido
Vel. mín para levitar	0 km/h	150 km/h
Dificultad tecnológica	Muy baja	Alta
Costo	Bajo	Alto
Velocidad	Predicción > 600km/h	600km/h
Países representantes	Alemania, Brasil y China	Japón

Tabla 7-2: Comparación entre maglev HTSC y maglev LTSC [92].

dad de ventajas que aporta. En la tabla 7-1 se muestra una comparación entre maglev y trenes de alta velocidad (TAV). Algunas de las desventajas son temporales; por ejemplo, el Centro de Transporte de Shanghai afirma que aunque el costo total del proyecto de construcción del SMT (Shanghai Maglev Train) fue muy elevado ( $1.5 \times 10^9$  USD), fue aproximadamente la mitad de lo que hubiera costado un sistema tradicional nuevo [148].

Los maglevSC se clasifican según los superconductores que usen, i.e., superconductores de alta temperatura (HTSC) enfriados con nitrógeno líquido o superconductores de baja temperatura (LTSC, por sus siglas en inglés) enfriados con helio líquido. El mayor desarrollo de maglevSC se ha hecho en Japón con LTSC y en Alemania, Brasil y China con HTSC. En la tabla 7-2 se muestra una comparación entre estos dos tipos.

### 7.1.1. Chuo Shinkansen

El tren L0 es el vehículo experimental sobre vías más rápido del mundo con un récord de velocidad de 603 km/h en un ambiente controlado. Éste es un tipo de maglevSC que usa LTSC desarrollado por la compañía Japan Railways Group (JR). Fue construido como un prototipo del futuro tren llamado Chuo Shinkansen, cuyo objetivo es el de reducir el tiempo de recorrido del tramo de 515 km entre Tokyo y Osaka y atraer más pasajeros de transporte aéreo a transporte terrestre. Una vez construido, el Chuo Shinkansen completaría este recorrido en aproximadamente una hora, mejorando el tiempo de 2.5 horas del actual TAV (llamado Tokaido Shinkansen con una velocidad máxima de operación de 270 km/h).

La construcción del Chuo Shinkansen se ha debido a una labor de investigación por más de 50 años (ver tabla 7-3). Hoy en día, este medio de transporte se encuentra completamente desarrollado y listo para su uso práctico. De hecho, a los 15 años de pruebas continuas esta tecnología ha probado ser muy segura y confiable. En la línea de pruebas de Yamanashi, los trenes maglevSC han viajado una distancia acumulada de más de 880 000 km y lo han probado más de 140 000 pasajeros [92].

### Funcionamiento

Para lograr la levitación y propulsión de un maglevSC el tren es equipado con imanes superconductores a ambos lados del bogie del tren (fig.7-2). En cada criostato hay 4 bobinas



1962	JNR inicia investigación de sistema de propulsión lineal y levitación
1970	Completan instalaciones básicas de maglevSC
1972	Vehículo experimental con MSL logra levitación con éxito Vehículo experimental con MIL logra levitación con éxito Prueba de cicloconvertidor a altas velocidades (500 km/h)
1975	Vehículo experimental (ML-100A) con MSL levita sin contacto alguno Selección de maglevSC con MSL
1977	Apertura de vía de pruebas de maglevSC de 7km en Miyazaki Inicio de pruebas del vehículo ML-500
1978	Se alcanza velocidad de 347 km/h con maglev
1979	Prueba en túnel Prueba con refrigerador de helio líquido abordo Se alcanza velocidad de 517 km/h con maglev (récord)
1980	Inicio de pruebas del vehículo MLU001
1982	Comienzan pruebas con pasajeros
1983	Velocidad máxima de 400 km/h con un solo vagón Velocidad máxima de 352 km/h con tres vagones
1987	Privatización y división de JNR e inauguración de JR (empresa privada) 400 km/h con dos vagones y con pasajeros
1989	Nueva vía doble de prueba en la prefectura de Yamanashi de 18.4 km La nueva vía incluye curvas, pendientes y túneles
1997	Inicio de pruebas del vehículo experimental MLX-01 MLX-01: Velocidad máxima de 531 km/h (récord) con pasajeros MLX-01: Velocidad máxima de 550 km/h (récord) sin pasajeros
1999	MLX-01: Velocidad máxima de 552 km/h (récord) con pasajeros y cinco vagones
2003	MLX-01: Velocidad máxima de 581 km/h (récord) con pasajeros y tres vagones Prueba con dos trenes en direcciones opuestas y velocidad relativa de 1026 km/h
2011	El gobierno japonés aprueba la construcción del tramo Tokyo-Nagoya (286 km) para ser operado con trenes maglevSC
2012	Inicio de pruebas del vehículo experimental L0
2014	Inicia construcción del tramo Tokyo-Nagoya
2015	L0: Velocidad máxima de 590 km/h (récord) con pasajeros y siete vagones L0: Velocidad máxima de 603 km/h (récord) con pasajeros y siete vagones
2027	Inicio de operación Chuo Shinkansen en el tramo Tokyo-Nagoya
2045	Inicio de operación Chuo Shinkansen en el tramo Tokyo-Osaka Costo total $9 \times 10^9$ JPY

Tabla 7-3: Cronología del desarrollo del maglevSC en Japón[149; 92]. JNR= Japanese National Railways; MSL=Motor Sincrónico Lineal; MIL=Motor de Inducción Lineal; JR=Japan Railways Group.

superconductoras hechas de niobio-titanio (Nb-Ti), un superconductor con una temperatura crítica de  $\sim 10$  K. Cada imán superconductor puede producir un campo magnético de 5.5 T y sus dimensiones son de 5.4 m de largo 1.17 m de alto y pesa 1400 kg. La fuerza que genera es suficiente para levitar el tren 10 cm, que sea estable y que produzca menos vibraciones.

Este tren usa levitación electrodinámica (EDS, por sus siglas en inglés) a diferencia de los maglevs no superconductores que usan levitación electromagnética (EMS, como el Transrapid alemán). La EDS implica la exposición de un material conductor ante campos magnéticos variables en el tiempo. En este caso, el movimiento relativo de los imanes superconductores abordo del tren representan tales campos magnéticos variables y en las vías (a los costados) se tiene el material conductor. Esto es, en principio, levitación por la ley de inducción de Faraday y específicamente por la ley de Lenz

$$\xi = -\frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (7-1)$$

Ésta especifica, a modo de la tercera ley de Newton, que si una corriente fluye, su dirección siempre será opuesta al cambio que la produjo y por eso el signo contrario del voltaje inducido ( $\xi$ ) con respecto a la variación del flujo ( $\partial\phi/\partial t$ ).

Los sistemas EDS y EMS tienen ventajas y desventajas cuyas consecuencias se pueden apreciar en la tabla 7-1. Una desventaja de un sistema EDS es evidente por (7-1). La variación en el campo  $\partial\phi/\partial t$  depende directamente de la velocidad del tren, por esta razón, si la velocidad es menor a 150 km/h, la variación en el flujo no será suficiente para producir la levitación. En consecuencia, el tren debe estar equipado para avanzar sobre vías con ruedas antes de levitar y por lo tanto, toda la instalación debe tener una “doble infraestructura”, una de levitación y una de vías. En última instancia, esto incrementa el costo total. Estas desventajas tienen su contraparte positiva porque un sistema EDS es inherentemente estable comparado con uno EMS (y más estable que uno de vías tradicional). Los sistemas EMS funcionan por medio de atracción electromagnética con electroimanes tradicionales, los cuales son inestables *per se* según el teorema de Earnshaw. En cambio, los sistemas EDS, que funcionan por medio de *repulsión*, no se ven afectados en principio por esa misma inestabilidad. Así, un tren con EDS, regresa siempre a su punto de equilibrio por un balance de fuerzas repulsivas hacia arriba (ley de Lenz entre el imánSC y las vías) y otra hacia abajo (la gravedad).

En la fig.7-2 se muestra como se pueden adaptar HTSC en lugar o al mismo tiempo que un

refrigerante de helio líquido. Esta implementación y/o el cambio de imanes de Nb-Ti por algún HTSC puede reducir eventualmente el costo de operación, disminuir el uso de energía y evitar el uso de ruedas. Por otro lado los trenes maglevSC aprovechan la generación de energía por medio de un sistema de inducción electromagnética. En el piso de las vías se instalan circuitos alimentados de corriente alterna, éstos tienen formas cerradas y generan por Ley de Faraday un campo magnético dinámico. Cuando pasa un tren, unas bobinas instaladas abordo generan una corriente que alimenta el equipo abordo del tren (fig.7-4).

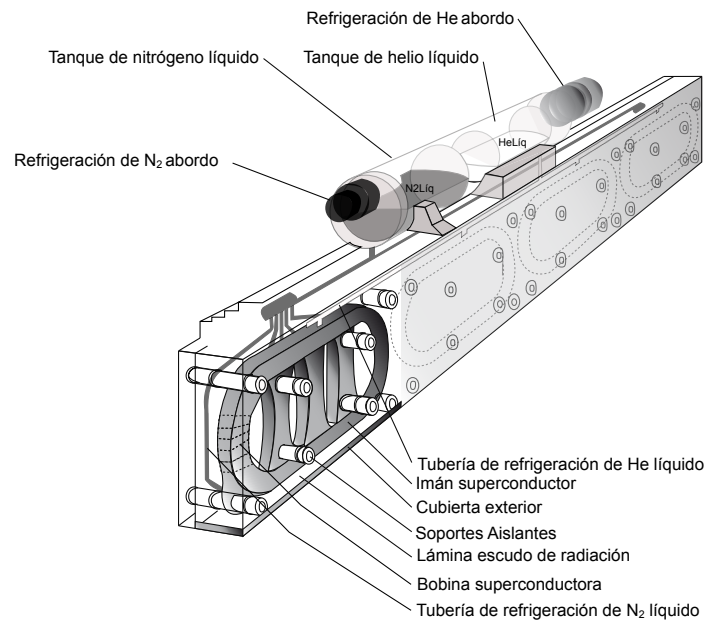


Figura 7-2: Imán superconductor abordo de un tren maglevSC.

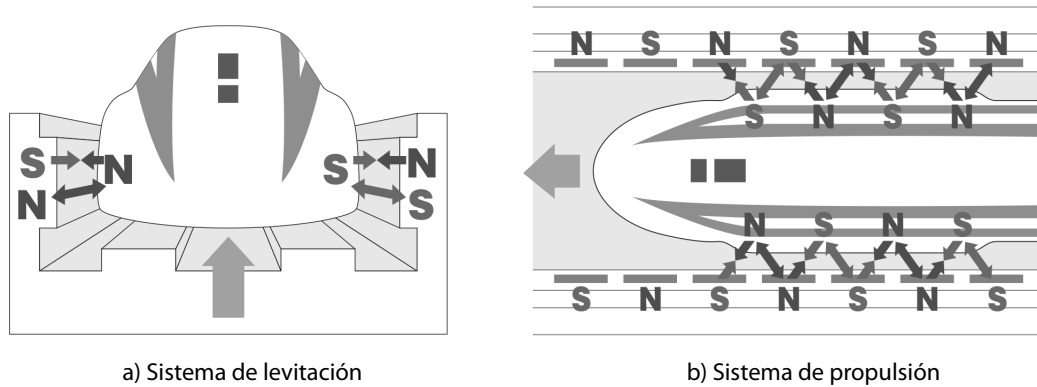


Figura 7-3: Principio del maglevSC Chuo Shikansen. **a)** A los lados se instalan bobinas de levitación y guía. Los imanes superconductores se encuentran a los costados del tren. Cuando éste pasa, una corriente eléctrica pasa por las bobinas y genera dos fuerzas, una repulsiva y otra atractiva. **b)** Al inducir una corriente en las bobinas del piso se produce un campo magnético que impulsa al tren hacia adelante. La disposición de los imanes (N-S) en el piso atraen (S-N) y repelen (N-S) a los imanes en el tren [144].

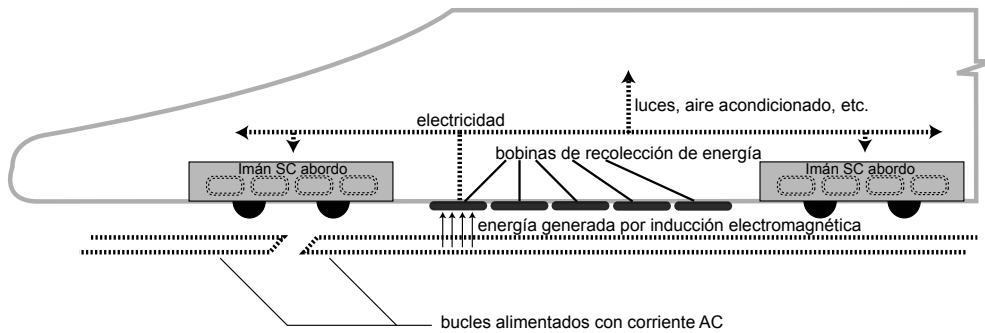


Figura 7-4: Fuente de energía de un maglevSC. Los maglevSC no usan pantógrafos, en vez de éstos tienen un sistema que permite la recolección de energía por medio de inducción electromagnética. Con esta electricidad se da energía al equipo a bordo. La energía se genera por medio de bobinas ubicadas en la parte inferior del tren cuando éstas entran en contacto con un campo magnético dinámico creado por bucles o circuitos alimentados con corriente alterna ubicados en el piso de las vías.

## Capítulo 8

# Energía

*¿Cómo podemos usar la ciencia y la tecnología más recientes para prepararnos contra un futuro hambriento de energía eléctrica y al mismo tiempo limitar nuestro impacto en el planeta?*

La Waterloo Global Science Initiative (WGSi) planteó esta pregunta como el problema fundamental de energía para el 2030. La tendencia es mundial y se enfoca, a grandes rasgos, en energía, reducción de contaminantes y abastecimiento y tratamiento de agua. México no es la excepción en estos ámbitos. El Colegio de Ingenieros Civiles de México, la Facultad de Ingeniería o instituciones como el Centro Mario Molina (CMM) como puentes “de soluciones prácticas entre la ciencia y las políticas públicas en materia de energía y medio ambiente para promover el desarrollo sustentable y un desarrollo económico vigoroso” apuntan en esa misma dirección.

La energía es uno de los pocos temas a nivel mundial en el cual se involucran las áreas científicas, técnicas, políticas, económicas y sociales. Su impacto es a nivel global y sus repercusiones a futuro hacen que su estudio sea inexorable. Además, la mayoría de los países tiene como prioridad atender las emisiones de gases de efecto invernadero y, por ello, hay una fuerte tendencia hacia fuentes renovables. Esto en particular ha determinado un aumento en la demanda y oferta de energía eléctrica en el mundo.

Un problema actual es que las fuentes de energía residen, en general, a largas distancias de las zonas de consumo resultando en pérdidas de energía y costos excesivos. Por otro lado, las fuentes renovables incurren en problemas de almacenamiento de energía que las hacen poco eficientes. El consumo de energía se extiende a las áreas de transporte y de la industria de la

información. El primero implica el uso de motores eléctricos más eficientes así como la creciente demanda de una red eléctrica para automóviles eléctricos. En el caso de la industria de la información, la demanda de energía por centros computacionales es excesiva. En estos casos particulares se requiere de planes de gran escala con la participación activa de tomadores de decisiones y la sociedad en general.

Las aplicaciones más interesantes incluyen motores superconductores de 36 MW [154], 4 MW [155] y 1 MW con eficiencias de hasta 98 % [156]; la creación de computadoras superconductoras [157; 158; 159], cables superconductores y almacenamiento de energía magnética. Claramente estas aplicaciones son relevantes para la sociedad a gran escala y como tal la participación del ingeniero civil es importante. Éste debe asimilar las tecnologías e influir en la toma de decisiones y la planeación de tales proyectos. En este capítulo se revisan los cables superconductores y el almacenamiento de energía eléctrica.

## 8.1. Cables superconductores

Los cables superconductores son una tecnología reciente y con aplicaciones prácticas en un futuro cercano con la capacidad de cambiar por completo el panorama de la transmisión de energía eléctrica. Hoy en día, la centralización de la generación de energía eléctrica —en grandes proyectos hidroeléctricos, termoeléctricos, etc.— implica que las distancias de transmisión sean del orden de cientos de km. A grandes distancias, un cable de transmisión no superconductor tiene pérdidas debidas a procesos físicos inherentes (también llamadas técnicas) e inevitables. Es aquí donde los superconductores tienen una ventaja notable en desempeño y en costos.

En México, esta tecnología se encuentra en pleno desarrollo y muy pocas aplicaciones se pueden encontrar ya en uso. Desde 2005, la compañía Condumex fue la primera en usar esta tecnología a nivel comercial basándose en tecnología desarrollada por la American Superconductor Corporation (AMSC). Probablemente el caso más representativo sea el del Centro de Investigación y Desarrollo Carso (CIDECA), una empresa de Condumex, que fue el primero en diseñar e instalar un cable trifásico superconductor en una subestación de la CFE, Querétaro. El Instituto de Ingeniería de la UNAM participa también en el desarrollo de cables superconductores y además tiene un convenio con CIDECA.

Los gastos por pérdidas de energía son uno de los principales motivos por los que esta tecnología u otras, como redes inteligentes, pueden tener éxito. En la actualidad, según la Comisión Federal de Electricidad (CFE) en México se tienen pérdidas (técnicas y no técnicas) en la red eléctrica de al menos 13.5 % (en 2015) las cuales equivalen a casi 43 mil millones de pesos. En otros países como EUA o Alemania, las pérdidas son aproximadamente del 6 % o 4 %, respectivamente [150]. Por otro lado, las fallas en líneas de transmisión aérea se ven afectadas por rayos en casi un 50 % de las veces, lo que provoca interrupciones en el suministro de energía eléctrica (y posibles colapsos de la red) [152]. A pesar de estos inconvenientes, el número de proyectos con capacidades sin precedente aumenta de manera proporcional a las demandas de la población (la cual también aumenta). Por ejemplo, en China se tiene proyectada la construcción de 35 fuentes de gran potencia y con capacidad de transmisión de 217 GW con corriente directa de alto voltaje (HVDC, por sus siglas en inglés) para 2020. El caso de los recursos renovables no es diferente y aumenta cada año [151; 153].

Las pérdidas técnicas en un conductor normal son bien conocidas [161] y se pueden clasificar en tres: pérdidas del conductor, pérdidas inducidas por la cubierta o por tuberías, y pérdidas dieléctricas. Las *pérdidas del conductor* son directamente proporcionales a la resistencia del conductor según el efecto Joule:  $W_c = R_c I^2$  donde  $W_c$  y  $R_c$  son las pérdidas y la resistencia asociadas al material conductor e  $I$  es la corriente que pasa por él. Las *pérdidas inducidas por la cubierta y tuberías* se deben a campos magnéticos alternantes dentro y alrededor de la cubierta metálica del cable y son  $\propto I^2$ . Por último, las *pérdidas dieléctricas* se deben a defectos del aislamiento del cable y se cuantifican según  $W_d = \omega C U_0^2 \tan \delta$ , donde  $C$  es la capacitancia por unidad de longitud,  $U_0$  es la media cuadrática del voltaje y  $\tan \delta$  es el factor de pérdida del material aislante.

En principio, los cables superconductores tienen la obvia ventaja contra cables convencionales en que presentan mucho menores pérdidas durante la transmisión de energía y al ser subterráneos no sufren de impactos por rayos (pero sí de corrosión, etc.). Las pérdidas inducidas (por la cubierta, tubería o dieléctricas) son iguales en un cable superconductor que en un cable normal. La diferencia esencial es que los superconductores no presentan pérdidas por resistencia pero, en cambio, tienen pérdidas debidas a fugas térmicas del sistema de refrigeración y pérdidas hidráulicas por el flujo del refrigerante líquido (nitrógeno líquido o NL). Éstas son,

respectivamente [162],

$$W_{ft} = \frac{2\pi\lambda\Delta T}{\ln(D_{ext}/D_{int})} \quad (8-1)$$

$$W_{hid} = \frac{\dot{m}\Delta p}{\gamma LN}. \quad (8-2)$$

$\Delta T$  es la diferencia de temperaturas entre el ambiente (300K) y el NL (77K),  $\lambda$  es la conductividad térmica del material aislante y  $D_{ext}(int)$  es el diámetro externo (interno) del aislante.  $\dot{m}$  es el flujo de masa y  $\Delta p$  la diferencia de presiones.

En un estudio realizado por Oestergraad *et al.* [162] se evaluaron las pérdidas de energía en cables superconductores y se compararon con cables de alta tensión usuales (fig.8-1). En el estudio se midió el desempeño de ambos tipos de cables en diferentes condiciones, por ejemplo, variando las distancias y la duración. Concluyen que en casos en que se cubren largas distancias, como parques eólicos mar adentro, las conexiones con cables HTSC reducen las pérdidas en más de 40 %. Sin embargo, a distancias cortas su eficiencia es menor.

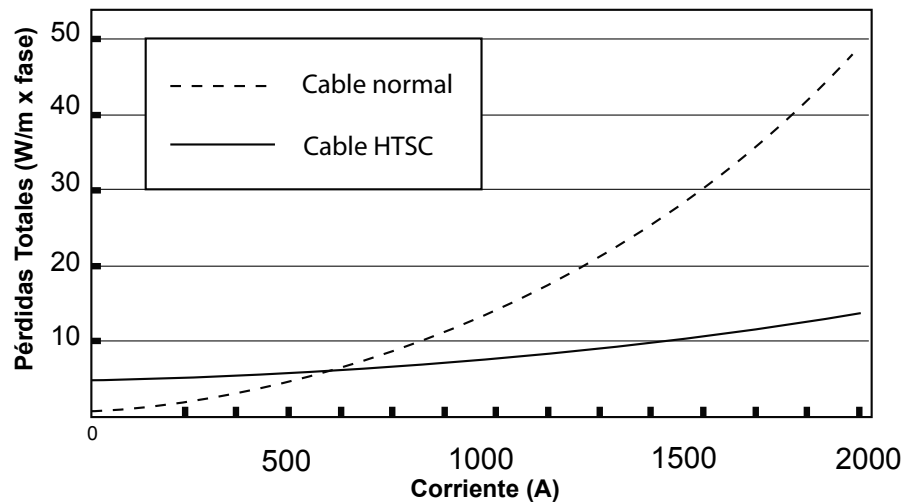


Figura 8-1: Pérdidas totales contra corriente en cables normales y superconductores. A corrientes muy altas, los cables de HTSC mantienen las pérdidas muy bajas. A corrientes pequeñas, las pérdidas en los cables HTSC se deben al sistema de nitrógeno líquido [162].

Los cables superconductores se usan en varias partes del mundo, la mayoría de ellos se



basan en LTSC (en particular NbTi)<sup>1</sup>, aunque el aumento de cables HTSC es inminente. Un ejemplo que esclarece la diferencia física entre cables de cobre y de NbTi (LTSC) es el posible futuro cambio de cables de cobre por cables de NbTi de las líneas de transmisión entre la planta generadora y el acelerador de partículas LHC en Suiza (fig.8-2).

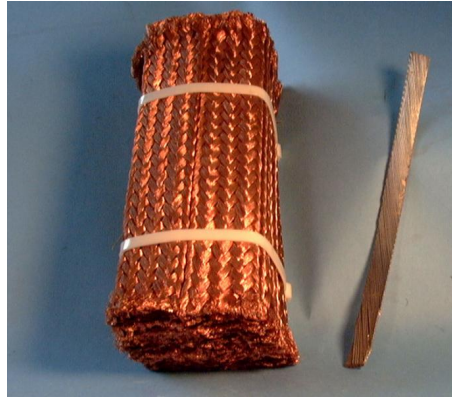


Figura 8-2: El cable de cobre a la izquierda con dimensiones de 11 cm de alto, 8 cm de ancho y 28 cm de largo puede conducir una corriente de 12,500 A a temperatura ambiente. El cable de NbTi a la derecha en el estado superconductor, con una  $T_c = 1.9K$ , conduce la misma corriente (Imagen: CERN).

### Proyecto Ampacity

Este proyecto fue terminado en 2014 y consistió de la integración de un cable superconductor de 1km de longitud a la red eléctrica de Essen (y la sustitución de uno normal con menor capacidad). El cable superconductor de BSCCO (HTSC), es el más largo instalado en el mundo, es trifásico concéntrico y fue diseñado para trabajar a 10 kV con una capacidad de transmisión de 40 MW (fig.8-3 y fig.8-4). Con un diámetro de 15cm es diez veces más pequeño que un cable de cobre con capacidad equivalente y no requirió de una gran inversión de excavación. Por otro lado, simplificó el esquema de la red eléctrica reduciendo el número de transformadores en un 40%. A los 180 días de operación Frank Merschel, el ingeniero director del proyecto, dijo que “el cable del proyecto AmpaCity ha tenido un desempeño del 100% de confiabilidad”.

Los cables superconductores son una opción a cables de alta tensión con aplicaciones proba-

---

<sup>1</sup>La mayoría de los cables actuales se basan en NbTi porque es dúctil, característica que muy pocos materiales superconductores tienen. Por ejemplo, los cables de Nb<sub>3</sub>Sn tienen un campo magnético crítico mayor pero son frágiles. Lo mismo pasa con cables de cupratos como el hecho de BSCCO o YBCO

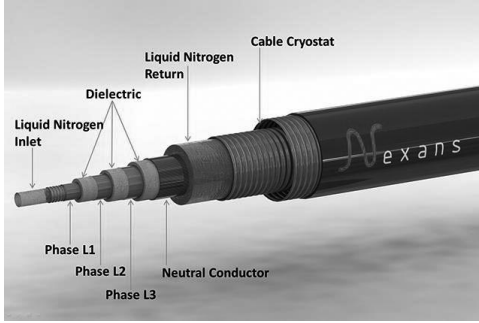


Figura 8-3: Cable HTSC diseñado por la compañía Nexans en Alemania.



Figura 8-4: Cable HTSC.

das. Su bajo nivel de pérdidas y la constante disminución de precios y el aumento de la eficiencia en sistemas de refrigeración de NL pueden hacerla una aplicación rentable. Hay mucha investigación y desarrollo realizándose en cables superconductores. En particular, el desarrollo de cables hechos de HTSC ha incrementado por el interés de varios países en actualizar sus redes eléctricas. Esto, sin embargo, no los hace una tecnología completamente desarrollada. Aun con el desarrollo por más de 50 años, aunque sean más eficientes, siguen siendo más costosos.

Los principales retos tecnológicos son: trabajar a temperaturas más altas (i.e. mejorar el calor específico y que sean más estables ante fugas de calor usando HTSC); controlar cambios de temperatura (evitando cambios en la corriente crítica); eliminar movimientos de los cables (que implican aumentos de  $T$  de hasta de 3 K) y evitar el llamado “quenching” (o que el superconductor se vuelva resistivo). Los avances en materiales con  $T_c$  más elevadas, así como los avances en criogenia o la tecnología de conversión entre AC-DC es necesaria para que sea una tecnología bien desarrollada. Sus perspectivas son alentadoras como una opción a futuro que cumpla con los requerimientos ambientales, de eficiencia, capacidad y costos.

## 8.2. Almacenamiento de energía magnética

El almacenamiento de energía eléctrica es el proceso de convertir energía eléctrica en otra forma que se pueda almacenar (por medios mecánicos, químicos, magnéticos, etc.) con el fin de reutilizarla como energía eléctrica cuando se necesite. Este proceso permite que se almacene la energía sobrante en tiempos de baja demanda y se reutilice en tiempos de alta demanda [163]. Las aplicaciones de esta tecnología incluye fuentes de energía estacionaria (plantas eléctricas),

dispositivos portátiles o vehículos.

La dificultad de almacenar energía a gran escala ha obligado a las plantas generadoras a suministrar energía en un estricto balance con la demanda —es decir, se genera lo que se consume—. Esto implica una menor calidad del servicio a un mayor costo de suministro y el problema empeora por el incremento de la industria de energía renovable. La cual es complicado implementar en redes eléctricas porque es variable, poco predecible y por eso incurre en fallas de la red. Los sistemas de almacenamiento de energía sirven para solucionar estos problemas y hacer más eficiente el suministro de energía renovable. Sin embargo, ninguno de los sistemas cumple con los requisitos que la red eléctrica exige: un almacenamiento que responda rápido y que sea de larga duración.

Los sistemas de almacenamiento de energía más conocidos son las baterías, el bombeo de agua, aire comprimido, celdas de combustible, almacenamiento con superconductores, flywheels, capacitores/supercapacitores y energía térmica. En esta sección se aborda el almacenamiento de energía eléctrica en forma magnética a través de superconductores. Éstos son los más eficientes ( $> 97\%$ ) pero son de corta duración. Por esto último, se hace énfasis en la combinación de sistemas, tales como combustibles de hidrógeno junto con superconductores.

### Almacenamiento de energía magnética superconductora (SMES)

Un sistema SMES es prometedor porque aporta altas eficiencias ( $> 97\%$ ), una respuesta muy rápida ( $ms$ ) y una alta energía de salida (MW). Existen SMES con capacidad de producir salidas del orden de MW en milisegundos, lo cual es útil en la estabilización de sistemas y control de frecuencia [164] y por lo tanto en generadores por viento [165]. Un SMES se compone de tres partes: un sistema criogénico, un imán superconductor y un convertidor (fig.8-5).

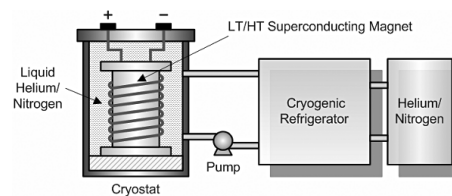


Figura 8-5: Componentes de un dispositivo SMES [166]

El funcionamiento de un SMES consiste de almacenar la energía eléctrica en un campo

magnético generado por un solenoide superconductor. Su desempeño se puede ver comparado con otros sistemas en la fig.8-6 y en la fig.8-7 obtenidas de [163]. Como se puede ver en estas tablas una forma eficiente de cubrir las exigencias de la red eléctrica (y otros dispositivos) puede ser la combinación de SMES con celdas de hidrógeno, las cuales tienen una densidad de energía mucho mayor (una cuarta parte de la gasolina) son amigables con el ambiente, son modulares al igual que los SMES y en conjunto es compacto [167]. Esto se puede lograr con SMES hechos de HTSC como MgB<sub>2</sub>, BSCCO o REBCO, los cuales se encuentran en pleno desarrollo.

Comparison of technical characteristics of EES systems.

Systems	Power rating and discharge time		Storage duration		Capital cost		
	Power rating	Discharge time	Self discharge per day	Suitable storage duration	\$/kW	\$/kWh	¢/kWh-Per cycle
PHS	100–5000 MW	1–24 h+	Very small	Hours–months	600–2000	5–100	0.1–1.4
CAES	5–300 MW	1–24 h+	Small	Hours–months	400–800	2–50	2–4
Lead-acid	0–20 MW	Seconds–hours	0.1–0.3%	Minutes–days	300–600	200–400	20–100
NiCd	0–40 MW	Seconds–hours	0.2–0.6%	Minutes–days	500–1500	800–1500	20–100
NaS	50 kW–8 MW	Seconds–hours	~20%	Seconds–hours	1000–3000	300–500	8–20
ZEBRA	0–300 kW	Seconds–hours	~15%	Seconds–hours	150–300	100–200	5–10
Li-ion	0–100 kW	Minutes–hours	0.1–0.3%	Minutes–days	1200–4000	600–2500	15–100
Fuel cells	0–50 MW	Seconds–24 h+	Almost zero	Hours–months	10,000+		6000–20,000
Metal-Air	0–10 kW	Seconds–24 h+	Very small	Hours–months	100–250	10–60	
VRB	30 kW–3 MW	Seconds–10 h	Small	Hours–months	600–1500	150–1000	5–80
ZnBr	50 kW–2 MW	Seconds–10 h	Small	Hours–months	700–2500	150–1000	5–80
PSB	1–15 MW	Seconds–10 h	Small	Hours–months	700–2500	150–1000	5–80
Solar fuel	0–10 MW	1–24 h+	Almost zero	Hours–months	–	–	–
SMES	100 kW–100 MW	Milliseconds–8 s	10–15%	Minutes–hours	200–300	1000–10,000	
Flywheel	0–250 kW	Milliseconds–15 min	100%	Seconds–minutes	250–350	1000–5000	3–25
Capacitor	0–50 kW	Milliseconds–60 min	40%	Seconds–hours	200–400	500–1000	
Super-capacitor	0–300 kW	Milliseconds–60 min	20–40%	Seconds–hours	100–300	300–2000	2–20
AL-TES	0–5 MW	1–8 h	0.5%	Minutes–days		20–50	
CES	100 kW–300 MW	1–8 h	0.5–1.0%	Minutes–days	200–300	3–30	2–4
HT-TES	0–60 MW	1–24 h+	0.05–1.0%	Minutes–months		30–60	

PHS = Pump Hydro Storage; CAES = Compressed Air Storage; VRB = Vanadium Redox Battery; PSB = Polysulphide Bromide Battery; SMES = Superconducting Magnetic Energy Storage; AL(HT)-TES = Aquiferous Low (High)-Temperature Thermal Energy Storage; CES = Cryogenic Energy Storage.

Figura 8-6: Comparación de sistemas de almacenamiento de energía [163].

Los SMES son una de las tecnologías más prometedoras en cuanto a almacenamiento de energía eléctrica. Su eficiencia se puede ver en sistemas de baja o alta energía. Sin embargo, el tiempo de almacenamiento en el que son eficientes es muy bajo y por lo tanto una de las mejores opciones es su acoplamiento con otros sistemas. Por ejemplo, a bajas energías se puede acoplar con baterías y a altas energías con un sistema de combustible de hidrógeno.

Comparison of technical characteristics of EES systems.

Systems	Energy and power density				Life time and cycle life		Influence on environment	
	Wh/kg	W/kg	Wh/L	W/L	Life time (years)	Cycle life (cycles)	Influence	Description
PHS	0.5–1.5		0.5–1.5		40–60		Negative	Destruction of trees and green land for building the reservoirs
CAES	30–60		3–6	0.5–2.0	20–40		Negative	Emissions from combustion of natural gas
Lead-acid	30–50	75–300	50–80	10–400	5–15	500–1000	Negative	Toxic remains
NiCd	50–75	150–300	60–150		10–20	2000–2500		
NaS	150–240	150–230	150–250		10–15	2500		
ZEBRA	100–120	150–200	150–180	220–300	10–14	2500+		
Li-ion	75–200	150–315	200–500		5–15	1000–10,000+		
Fuel cell	800–10,000	500+	500–3000	500+	5–15	1000+	Negative	Remains and/or combustion of fossil fuel
Metal-Air	150–3000		500–10,000			100–300	Small	Little amount of remains
VRB	10–30		16–33		5–10	12,000+	Negative	Toxic remains
ZnBr	30–50		30–60		5–10	2000+		
PSB	–	–	–	–	10–15			
Solar fuel	800–100,000		500–10,000		–	–	Benign	Usage and storage of solar energy
SMES	0.5–5	500–2000	0.2–2.5	1000–4000	20+	100,000+	Negative	Strong magnetic fields
Flywheel	10–30	400–1500	20–80	1000–2000	~15	20,000+	Almost none	
Capacitor Super-	0.05–5	~100,000	2–10 capacitor	100,000+ 2.5–15	~5 500–5000	50,000+ 10–30	Small	Little amount of remains 100,000+
20+		100,000+	Small	Little amount of remains				
AL-TES	80–120		80–120		10–20		Small	
CES	150–250	10–30	120–200		20–40		Positive	Removing contaminates during air liquefaction (Charge)
HT-TES	80–200		120–500		5–15		Small	

PHS = Pump Hydro Storage; CAES = Compressed Air Storage; VRB = Vanadium Redox Battery; PSB = Polysulphide Bromide Battery; SMES = Superconducting Magnetic Energy Storage; AL(HT)-TES = Aquiferous Low (High)-Temperature Thermal Energy Storage; CES = Cryogenic Energy Storage.

Figura 8-7: Comparación de sistemas de almacenamiento de energía [163].

El éxito de un sistema de almacenamiento de energía eléctrica, en la actualidad, depende de su acoplamiento con otros sistemas. Su estudio es intenso en la actualidad y es posible que den una solución sin repercusiones ambientales a los problemas de suministro de energías renovables.

## Capítulo 9

# Conclusión

Esta tesis muestra la versatilidad del fenómeno de superconductividad en áreas aparentemente disímiles como la física de materia condensada y la ingeniería civil. Se enfatiza, pues, que el fenómeno *per se* no es exclusivo de un área de conocimiento y que, más bien, es transdisciplinario. En este fenómeno al menos convergen las áreas de física teórica, física experimental y de ciencia aplicada. Esto es una tendencia normal en ciencia y no es raro que se extienda posteriormente a otras áreas.

Con lo anterior en mente se presentó la teoría de superconductividad convencional de forma comprensible para un estudiante de ingeniería sin experiencia en la teoría BCS o superconductividad en general. Para lograr este objetivo se redujo el problema de la superconductividad convencional a la deducción de una brecha de energía en el espectro de energía. La deducción misma es heurística, pero también es original en el sentido de que no usó un formalismo pero sí la cantidad mínima de información. El trabajo realizado da resultados correctos como se vio al compararlos con datos experimentales.

En cuanto a teoría, la importancia de deducir la brecha resultó históricamente la mejor opción y probablemente la más fácil para abordar el problema. Hoy en día, las teorías sobre cupratos tratan de explicar un caso análogo: el pseudogap. Este trabajo enfatizó la importancia de dichos parámetros porque, entre otras cosas, esclarecen las relaciones microscópicas con las macroscópicas; relaciona la robustez de los pares de Cooper y cómo esto lleva en última instancia a la temperatura crítica. Esto incluye principios de simetría tan fundamentales que se pueden relacionar con otras áreas fundamentales como teoría cuántica de campos, teoría de cuerdas o

partículas elementales. Un cambio de simetría explica, por ejemplo, cómo pasar de un estado superconductor más ordenado al normal con más entropía. Es decir, la brecha de energía vista como un parámetro de orden explica la transición entre fases que se distinguen por un orden de complejidad distinto.

En la primera parte se abordó casi con exclusividad la parte microscópica de las teorías que explican el fenómeno en sí. La contraparte macroscópica, sólo mostrada aquí superficialmente, surge como consecuencia de la teoría microscópica y es la más utilizada en cuanto a modelado de muestras o diseño de dispositivos. Esto abarca todo un tratado por sí mismo y se debe reconocer su importancia a la hora de trabajar de forma práctica con superconductores. Esto incluye, entre otros, modelado con elemento finito, métodos numéricos y programas de multifísica.

En la segunda parte se presentó una revisión de aplicaciones de superconductividad en ingeniería civil. Las aplicaciones fueron seleccionadas por su potencial de aplicación o, de manera equivalente, por su capacidad de resolver problemas actuales en la ingeniería civil; también se puede entender como su capacidad de sustitución de tecnología actual, reducción de costos a futuro, mejoramiento de la precisión o redefinición de paradigmas tecnológicos. El objetivo fue, en resumen, el de comunicar esta información puesto que difícilmente se presenta en los planes de estudio de licenciatura o posgrados de ingeniería civil.

La revisión aquí mostrada no es completa en ningún sentido. El repertorio es mucho más extenso y la literatura incluye muchos otros aspectos. Por ejemplo, no se trata el tema de construcción de túneles diseñados para uso de superconductores en aceleradores de partículas. Tampoco se incluyó un análisis prospectivo de los costos ni de las tendencias tecnológicas de la superconductividad. Quedaron fuera los temas de generación de energía eléctrica con motores superconductores, o su uso en tecnología espacial. El objetivo, queda claro, no era cubrir en extenso todas las aplicaciones; en vez, se trató de mostrar con aplicaciones probadas la factibilidad de la superconductividad en la ingeniería civil.

La superconductividad es una tecnología que sigue en desarrollo, aun así su incorporación a infraestructura civil —como transporte masivo, generación y transmisión de energía, tratamiento de agua y disminución de emisiones de  $\text{CO}_2$ — es la representación misma de un cambio de pensamiento.

# Apéndice A

## Espacio recíproco

En materia condensada el espacio de momento es un formalismo que aprovecha la repetición periódica de los átomos en una red cristalina 3D. En vez de asociar cada electrón con una posición  $\mathbf{r}$  uno asocia cada electrón con un *vector de onda* (o de momento)  $\mathbf{k}$ , el cual no es precisamente igual que el momento  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$  en mecánica clásica.

Más formalmente, en primer lugar usamos la relación de de Broglie de mecánica cuántica para el momento

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{A-1}$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck dividida entre  $2\pi$  y  $\mathbf{k}$  es el llamado vector de onda asociado a una función de onda. De aquí se deduce de inmediato que la energía cinética en el espacio recíproco es

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \mathbf{p}^2/2m = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m \tag{A-2}$$

En nuestro caso la función de onda debe describir la periodicidad de una red cristalina. Para ello usamos el siguiente teorema.

**Teorema de Bloch.** Consideremos una red cristalina periódica en una dimensión. Sea  $V(x)$  el potencial con la misma periodicidad de la red cristalina

$$V(x + y) = V(x) \tag{A-3}$$

donde  $y$  es cualquier traslación múltiplo del parámetro de red  $a$  (distancia entre átomos), o sea



$y = na$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . La ecuación de Schrödinger,  $H\psi_E = E\psi_E$ , para un electrón es

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)}_{H=E_{cin}+E_{pot}} \psi_E(x) = \underbrace{E}_{\text{Eigenvalor}} \psi_E(x) \quad (\text{A-4})$$

Claramente, la función de onda  $\psi_E(x+y)$  también es solución de la ecuación (A-4). Queremos demostrar que

$$\psi_E(x+y) = e^{iky} \psi_E(x). \quad (\text{A-5})$$

Para demostrarlo notemos que  $\psi_E(x+y)$  y  $\psi_E(x)$  son linealmente dependientes y sólo difieren por un coeficiente  $c(y)$ , i.e.,

$$\psi_E(x+y) = c(y)\psi_E(x). \quad (\text{A-6})$$

Usando dos veces (A-6) tenemos que

$$\psi(x+y+z) = c(y+z)\psi(x) \quad (\text{A-7})$$

y

$$\psi(x+y+z) = c(y)\psi(x+z) = c(y)c(z)\psi(x) \quad (\text{A-8})$$

por lo tanto

$$c(y+z)\psi(x) = c(y)c(z)\psi(x). \quad (\text{A-9})$$

Como el valor de  $\psi(x)$  es arbitrario

$$c(y+z) = c(y)c(z) \quad (\text{A-10})$$

el cual es un funcional exponencial clásico, i.e.,

$$e^{(y+z)} = e^y e^z \quad (\text{A-11})$$

y por lo tanto

$$c(y) = e^{\lambda y}. \quad (\text{A-12})$$

con  $\lambda$  una constante. Sustituyendo en (A-6),

$$\psi_E(x + y) = e^{\lambda y} \psi_E(x) \quad (\text{A-13})$$

y como la función  $\psi(x)$  debe ser finita para toda  $x$ , se tiene que  $\lambda$  debe ser imaginaria para que la función exponencial no diverja y entonces

$$\lambda = ik \quad (\text{A-14})$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto

$$\psi_E(x + y) = e^{iky} \psi_E(x) \quad \square \quad (\text{A-15})$$

Un corolario evidente del teorema de Bloch es que  $|\psi_E(x + y)|^2 = |\psi(x)|^2$ , por lo tanto la función de distribución de probabilidad  $P(x) = |\psi(x)|^2 = P(x + y)$ . Esto se debe a la periodicidad y a que la función exponencial  $e^{iky}$  tiene norma unitaria. Es claro también que  $e^{iky} = e^{ik(y+2\pi m)}$  por su periodicidad. Se puede tomar un período de  $2\pi$  de  $-\pi$  a  $\pi$  y según (A-5)  $e^{ikna}$ , en general se puede asumir una restricción para  $k$

$$-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a} \quad (\text{A-16})$$

llamada frontera de Brillouin.

Si se deja variar  $k$ , se obtiene el espacio recíproco (así llamado porque tiene unidades  $[\text{L}]^{-1}$ ). Esto se puede extrapolar a 1, 2 y 3 dimensiones, en cuyos casos siempre el espacio generado será el recíproco de los espacios coordenados en 1,2 y 3 dimensiones espaciales.

En forma vectorial esto se generaliza como

$$\psi_E(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \psi_E(\mathbf{r}) \quad (\text{A-17})$$

donde, por ejemplo,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  en 3D.

# Bibliografía

- [1] H.K. Onnes, “Further experiments with liquid helium. C. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures etc. IV. The resistance of pure mercury at helium temperatures” Proc. K. Ned. Akad. Wet. **13**, 1274 (1911).
- [2] H.K Onnes, Phys. Lab. Univ. Leiden. Suppl. **29** (1911).
- [3] Una breve historia de la superconductividad por parte de Charles Slichter se encuentra en “Superconductivity: Moments of Discovery”, sección de la página web del American Institute of Physics, <https://www.aip.org/history/mod/superconductivity/01.html> (visitado en Octubre 2015)
- [4] J. Bardeen, L. N. Cooper, y J. R. Schrieffer, “Theory of superconductivity”, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [5] L.N. Cooper, “Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas”, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
- [6] M. de Llano y J.F. Annett, “Generalized Cooper pairing in superconductors”, Int. J. Mod. Phys. B **29**, 3657 (2007).
- [7] K.A. Müller y J.G. Bednorz, “The discovery of a class of high-temperature superconductors”, Science **237**, 1133 (1987).
- [8] B. Keimer, S.A. Kivelson, M.R. Norman, S. Uchida y J. Zaanen, “From quantum matter to high-temperature superconductivity in copper oxides”, Nature **518**, 179 (2015).
- [9] D. van Delft y P. Kes, “The discovery of superconductivity”, Physics Today **63**, 38 (2010).

- [10] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, (McGraw-Hill International Editions, Nueva York, 1996).
- [11] A.M. Forrest, “Meissner and Ochsenfeld revisited”, *Eur. J. Phys.* **4**, 117 (1983).
- [12] C.J. Gorter y H.B.G Casimir, “On supraconductivity”, *Physica* **1**, 306 (1934).
- [13] F. London y H. London, “The electromagnetic equations of the supraconductor”, *Proc. Roy. Soc. A* **149**, 71 (1935).
- [14] F. London, “On the problem of the molecular theory of superconductivity”, *Phys. Rev.* **74**, 562 (1948).
- [15] B.S.Deaver y W.M.Fairbank, “Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders”, *Phys.Rev.Lett.* **7**, 43 (1961).
- [16] R.Doll y M.Näbauer, “Experimental proff of magnetic flux quantization in asuperconducting ring”, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 51(1961).
- [17] V.L. Ginzburg y L.D. Landau, “On the theory of superconductivity” en *Collected papers of L.D. Landau*, editado por D. Ter Haar (Pergamon Press, Nueva York, 1965), p. 546.
- [18] L.D. Landau y E.M Lifshitz, *Statistical Physics. Part 1*, 3a ed., (Pergamon Press, Nueva York, 1980), p. 446.
- [19] H.B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, 2a ed., (John Wiley & Sons, Nueva York, 1985), p. 265.
- [20] W.S. Corak, B.B. Goodman, C.B. Satterthwaite y A. Wexler, “Exponential temperature dependence of the electronic specific heat of superconducting vanadium”, *Phys. Rev.* **96**, 1442 (1954).
- [21] W.S. Corak, B.B. Goodman, C.B. Satterthwaite y A. Wexler, *Phys. Rev.* **102**, 656 (1956); W.S. Corak y C.B. Satterthwaite, *ibid* 662 (1956); R.E. Glover y M. Tinkham, *ibid* 104, 844 (1956); M. Tinkham, *ibid* 845 (1956).
- [22] E. Maxwell, “Isotope effect in the superconductivity of mercury”, *Phys. Rev.* **78**, 477 (1950).

- [23] B. Serin, C.A. Reynolds, y L.B. Nesbitt, “Superconductivity of isotopes of mercury”, Phys. Rev. **78**, 813-814 (1950).
- [24] B.D. Josephson, “Possible new effects in superconductive tunnelling”, Physics Letters **1**, 251 (1962).
- [25] P.W. Anderson y J.M. Rowell, “Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect”, Phys. Rev. Lett **10**, 230 (1963).
- [26] B.D. Josephson, “The discovery of tunnelling supercurrents”, Rev. Mod. Phys. **46** (2): 251-254 (1974).
- [27] J.J. Hamlin “Superconductivity in the metallic elements at high pressures”, Physica C **514**, 59-76 (2015).
- [28] T.P. Sheahen, *Introduction to High-Temperature Superconductivity*, (Kluwer Academic Pub., New York, 2002) Part II, p. 137.
- [29] Ver, e.g., invitado editorial J.E. Hirsch, M.B. Maple and F. Marsiglio, “Superconducting materials classes: Introduction and overview”, Physica C, **514**, 1-8 (2015) donde se proponen 32 clases de materiales superconductores agrupados bajo tres categorías: “convencionales”, “posiblemente convencionales” y “no convencionales”.
- [30] C.P. Poole, Jr., H.A. Farach, R.J. Creswick, and R. Prozorov, *Superconductivity*, 2a ed., (Academic Press, Londres, 2007) p. 61.
- [31] M.K. Wu *et al.* “Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure”, Phys. Rev. Lett. **58**, 908-910 (1987).
- [32] Y. Kamihara, T. Watanebe, M. Hirano, H. Hosono (2008) “Iron-based layered superconductor  $La[O_{1-x}F_x]FeAs$  with  $T_c = 26K$ ”, J. Am. Chem. Soc. **130**, 3296 (2008).
- [33] A.P. Drozdov, M.I. Erements, I.A. Troyan, V. Ksenofontov y S. I. Shylin ” Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system,” Nature **525**, 73 (2015).
- [34] J.M. Goodkind, “Applications of Superconductivity”, Am. J. Phys. **39**, 9-23 (1971).

- [35] R.W. Henry, “Superconducting microelectronics”, Phys. Teacher **22**, 74-79 (1984).
- [36] T.R. Schneider, S.J. Dale, y S.M. Wolf, “Energy applications of superconductivity”, AIP Conf. Proc. **219**, 635-645 (1991).
- [37] A.D. Smith y M. Tinkham, “Superconductivity demonstration”, Am. J. Phys. **48**, 940 (1980).
- [38] T. Van Duzer, “Superconductor Electronics and Power Applications”, Proc. IEEE **100**, 2993-2995 (2012).
- [39] P.C.W. Chu, “High-Temperature Superconductors”, Sci. Am. **273**, 162 (1995).
- [40] Y. Yang, “Rigorous proof of isotope effect by Bardeen-Cooper-Schrieffer theory”, J. Math. Phys. **44**, 2009 (2003)
- [41] D.M. Ginsberg, “Experimental Foundations of the BCS Theory of Superconductivity”, Am. J. Phys. **30**, 433 (1962).
- [42] J.G. Daunt and K. Mendelssohn, “An Experiment on the Mechanism of Superconductivity”, Proc. Roy. Soc. Lond A **185**, 225-239 (1946).
- [43] J. Bardeen, “Theory of superconductivity”, in *Handbuch der Physik*, edited by S. Flugge (Springer-Verlag, Berlin, 1956), p. 274.
- [44] N.N. Bogoliubov, “On a new method in the theory of superconductivity”, Il Nuovo Cimento **7**, 794-805 (1958).
- [45] L.P. Gor’kov, “Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity”, JETP **9**, 1364-1367 (1959).
- [46] J. Bryce McLeod y Y. Yang, “The uniqueness and approximation of a positive solution of the Bardeen, Cooper and Schrieffer gap equation”, J. Math. Phys. **41**, 6007 (2000) y refs. incluidas.
- [47] D.M. van der Walt, R.M. Quick, y M. de Llano, “Analytic solution of the Bardeen, Cooper, and Schrieffer gap equation in one, two, and three dimensions”, J. Math. Phys. **34**, 3980 (1993).

- [48] G.M. Eliashberg, “Interactions between electrons and lattice vibrations in a superconductor”, JETP **11**, 696-702 (1960).
- [49] G. P. Malik, “Generalized BCS equations: Applications” , Int. J. Mod. Phys. B **24**, 3701-3712 (2010).
- [50] H. Suhl, B.T. Matthias, y L.R. Walker, “Bardeen-Cooper-Schrieffer theory of superconductivity in the case of overlapping bands”, Phys. Rev. Lett. **3**, 552-553 (1959).
- [51] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics an Introduction*, (Oxford University Press, New York, 2004), pp. 331-333.
- [52] G. Fletcher, “Functional Integrals and the BCS theory of superconductivity”, Am. J. Phys. **58**, 50-53 (1990).
- [53] C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, 2nd. ed. (John Wiley & Sons, New York 1987) pp. 157-168.
- [54] J.F. Annett, *Superconductivity, superfluids and condensates*, (Oxford University Press, Oxford 2004) p. 71.
- [55] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*, 6th. ed., (John Wile & Sons, New York 1986) p. 327.
- [56] F. Odeh, “An existence theorem for the BCS integral equation, IBM J. Res. Develop. **8**, 187-188 (1964).
- [57] P. Billard y G. Fano, “An existence proof for the gap equation in the superconductivity theory”, Comm. Math. Phys. **10**, 274-279 (1968).
- [58] A. Vansevenant, “The gap equation in the superconductivity theory”, Physica D **17**, 339-344 (1985).
- [59] A.L. Fetter y J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover Publications, New York, 2003) p. 447.
- [60] F.J. Blatt, *Modern Physics* (McGraw-Hill, New York, 1992) p. 298.

- [61] O. Espinosa. “On the evaluation of Matsubara sums”, *Math. Comp.* **79**, 1709-1725 (2010).
- [62] S-i., Uchida, *High temperature superconductivity*, primera edición, (Springer, Japón, 2015) p.1.
- [63] J. Mulholland, T.P. Sheahen y B. McConnell, “Analysis of future prices and markets for high temperature superconductors”, reporte del Oak Ridge National Laboratory obtenido de la página web: <http://web.ornl.gov/sci/htsc/pubs.html#htsannual>
- [64] H. Hosono, *et al.*, “Exploration of new superconductors and functional materials, and fabrication of superconducting tapes and wires of iron pnictides”, *Sci. Technol. Adv. Mater.* **16**, 033503 (2015).
- [65] Y. Nambu, “Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity”, *Phys. Rev.* **117**, 648 (1960).
- [66] P. Morel y P.W. Anderson, “Calculation of the Superconducting State Parameters with Retarded Electron-Phonon Interaction”, *Phys. Rev.* **125**, 1263 (1962).
- [67] J.R. Schrieffer, D.J. Scalapino y J.W. Wilkins, “Effective Tunneling Density of States in Superconductors”, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 336 (1963).
- [68] K. Holczer, O. Klein y G. Grüner, “Observation of the conductivity coherence peak in superconducting Pb”, *Solid State Commun.* **78**, 875 (1991).
- [69] M. R. Schafroth, S. T. Butler y J. M. Blatt, “Quasichemical equilibrium approach to superconductivity”, *Helv. Phys. Acta* **30**, 93 (1957).
- [70] V.V. Tolmachev, “Superconducting BoseEinstein condensates of Cooper pairs interacting with electrons”, *Phys. Lett. A* **266**, 400 (2000).
- [71] M. de Llano and V.V. Tolmachev, “Multiple phases in a new statistical bosonfermion model of superconductivity”, *Physica A* **317**, 546 (2003).
- [72] S.K. Adhikari, M. de Llano, F.J. Sevilla, M.A. Solís, and J.J. Valencia, “The BCS-Bose crossover theory”, *Physica C* **453**, 37 (2007).



- [73] M. Grether, M. de Llano, and V.V. Tolmachev, “A generalized BEC picture of superconductors”, *Int. J. Quant. Chem.* **112**, 3018 (2012).
- [74] A.V. Narlikar (Ed.), *Frontiers in superconducting materials*, primera edición, (Springer-Verlag, Berlín, 2005) p. 8.
- [75] Y. I. Latyshev, O. Laborde, P. Monceau, y S. Klaumnzer, “Aharonov-Bohm effect on charge density wave (CDW) moving through columnar defects in NbSe<sub>3</sub>”. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 919 (1997).
- [76] V. J. Emery, S.A. Kivelson y J.M. Tranquada, “Stripe phases in high-temperature superconductors”, *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **96**, 8814 (1999).
- [77] S. Chakravarty, R.B. Laughlin, D.K. Morr y C. Nayak, “Hidden order in the cuprates”, *Phys. Rev. B* **63**, 094503 (2000).
- [78] R. B. Laughlin, “Hartree-Fock computation of the high-T<sub>c</sub> cuprate phase diagram”, *Phys. Rev. B* **89**, 035134 (2014).
- [79] C.M. Varma, “Non-Fermi-liquid states and pairing instability of a general model of copper oxide metals”, *Phys. Rev. B* **55**, 14554 (1997).
- [80] P.A. Lee, “Amperean Pairing and the Pseudogap Phase of Cuprate Superconductors”, *Phys. Rev. X* **4**, 031017 (2014).
- [81] S. Sachdev y B. Keimer, “Quantum criticality”, *Physics Today* **64**, 29 (2011).
- [82] S. Sachdev, “Strange and stringy”, *Sci. Am.* **308**, 44 (2013).
- [83] V. J. Emery y S.A. Kivelson, “Importance of phase fluctuations in superconductors with small superfluid density”, *Nature* **374**, 434 (1994).
- [84] P.W. Anderson “The resonating valence bond state in La<sub>2</sub>CuO<sub>4</sub> and superconductivity”, *Science* **235**, 1196 (1987).
- [85] Y. Kamihara, H. Hiramatsu, M. Hirano, R. Kawamura, H. Yanagi, T. Kamiya y H. Hosono, “Iron-Based Layered Superconductor: LaOFeP”, *J. AM. CHEM. SOC.* **128**, 10012 (2006)

- [86] A. Chubukov y P.J. Hirschfeld, “Iron-based superconductors, seven years later”, *Physics Today* **68**, 46 (2015).
- [87] D.N. Basov y A.V. Chubukov, “Manifesto for a higher Tc”, *Nature Physics* **7**, 272 (2011).
- [88] P.J. Hirschfeld, M.M. Korshunov y I.I. Mazin, “Gap symmetry and structure of Fe-based superconductors”, *Rep. Prog. Phys.* **74**, 124508 (2011).
- [89] Sunagawa *et al.*, “Characteristic two-dimensional Fermi surface topology of high-Tc iron-based superconductors”, *Scientific Reports* **4**, 2 (2013).
- [90] S.S. Kalsi, *Applications of High Temperature Superconductors to Electric Power Equipment*, (John Wiley & Sons, New Jersey, 2011).
- [91] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, (Cambridge University Press, New York, 2012) p. 437.
- [92] S. Nishijima *et al.* “Superconductivity and the environment: a Roadmap”, *Supercond. Sci. Technol.* **26**, 113001 (2013).
- [93] J. Iannicelli, “High extraction magnetic filtration of kaolin clay”, *Clays Clay Min.* **24**, 64 (1976).
- [94] J. Svoboda, T. Fujita “Recent developments in magnetic methods of material separation”, *Materials Engineering* **16**, 785 (2003).
- [95] C. Tsouris, D.W. DePaoli, J.T. Shor, M.S.-C. Hu, T.-Y. Ying “Electrocoagulation for magnetic seeding of colloidal particles”, *A: Physicochem. Eng. Aspects* **177**, 223 (2001).
- [96] S. Nishijima y Shin-ichi Takeda, “Superconducting high gradient magnetic separation for purification of wastewater from paper factory”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, **16**, 1142 (2006).
- [97] Y. Morita, H. Isogami, M. Yumoto, “Development of superconducting magnetic separation water treatment systems: Application to river purification.” *J. Cryo. Super. Soc. Japan***46**, 641 (2011).

- [98] H. Okada, K. Mitsuhashi, Y. Kudo, H. Nakazawa, E. Fujiwara, T. Ohara y A. Chiba, Trans. Inst. Electr. Eng. Japan B **125** 701 (2005). (En japonés)
- [99] T. Oka, H. Kanayama, S. Fukui, J. Ogawa, T. Sato, M. Ooizumi, T. Terasawa, Y. Itoh y R. Yabuno, “Application of HTS bulk magnet system to the magnetic separation techniques for water purification”, Physica C **468**, 2128 (2008).
- [100] T. Watanabe, “Harmless magnetic separation of leachate”, J. Cryo. Super. Soc. Japan **37**, 328 (2002). (En japonés)
- [101] N.P.H. Padmanabhan, T. Sreenivas, “Process parametric study for the recovery of very-fine size uranium values on super-conducting high gradient magnetic separator”, Advanced Powder Technology **22** , 131 (2011).
- [102] W. Wu , C. Wu , P.K.A. Hong y C. Lin, “Capture of metallic copper by high gradient magnetic separation system”, Environmental Technology **32**, 1427 (2011).
- [103] C. M. Armstrong, “The truth about terahertz”, en la sección Spectrum del IEEE en la página web: <http://spectrum.ieee.org/aerospace/military/the-truth-about-terahertz> (Visitada en Septiembre de 2015)
- [104] U. Welp, K. Kadowaki y R. Kleiner, “Superconducting emitters of THz radiation”, Nature Photonics **7**, 702 (2013).
- [105] M. Walther, B.M. Fischer, A. Ortner, A. Bitzer, A. Thoman, H. Helm, “Chemical sensing and imaging with pulsed terahertz radiation”, Anal. Bioanal. Chem. **397**, 1009 (2010).
- [106] A.C. Samuels *et al.*, “Environmental sensing of chemical and biological warfare agents in the THz region”, Int. J. High Speed Electron. Syst. *12*, 479 (2002).
- [107] R. Osiander, J.A. Miragliotta, Z. Jiang, J. Xu, Xi-C. Zhang, “Mine field detection and identification using terahertz spectroscopic imaging”, Proc. SPIE **5070**, 1 (2003).
- [108] Pulinets *et al.*, “Thermal, atmospheric and ionospheric anomalies around the time of the Colima M7.8 earthquake of 21 January 2003”, An. Geoph., European Geosciences Union (EGU), **24**, 835 (2006)

- [109] Pulinets *et al.*, “Atmosphere awakening prior to Abruzzo, Italy, M6.3 Earthquake of April 6, 2009 revealed by joined satellite and ground observations”, EGU General Assembly **12** 12869 (2010)
- [110] D. Ouzounov *et al.*, “Atmosphere-ionosphere response to the M 9 Tohoku earthquake revealed by multi- instrument space-borne and ground observations: Preliminary results”, Earthq Sci **24**, 557 (2011)
- [111] T. Orihara, M. Kamogawa, T. Nagao, S. Uyeda, “Pre-seismic anomalous telluric current signals observed in Kozu-shima Island, Japan”, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **109**, 19125 (2012)
- [112] T. Nagao, Y. Orihara, M. Kamogawa, “Precursory phenomena possibly related to the 2011 M9.0 off the Pacific coast of Tohoku earthquake”, J. Disaster Res. **9**, 303 (2014);
- [113] G. Waysand *et al.*, “Azimuthal Analysis of [SQUID]<sup>2</sup> Signals for Mesopause and Sprites Excitations”, i-DUST 2010, 02004 (2011).
- [114] S. Gaffet *et al.*, “Simultaneous seismic and magnetic measurements in the Low-Noise Underground Laboratory (LSBB) of Rustrel, France, during the 2001 January 26 Indian earthquake”, Geophys. J. Int. **155**, 981 (2003).
- [115] G. Waysand *et al.*, “Seismo-ionosphere detection by underground SQUID in low-noise environment in LSBB Rustrel, France”, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **47**, 12705 (2009).
- [116] J. Marfaing *et al.*, “About the worldwide magnetic background noise in the millihertz frequency range”, Europhys. Lett. **88**, 19002 (2009).
- [117] E. Pozzo di Borgo *et al.*, “Minimal global magnetic millihertz fluctuation level determined from mid-latitude underground observations”, Europhys. Lett. **97**, 49001 (2012).
- [118] E.S. Babayev, “Some results of investigations on the space weather influence on functioning of several engineering-technical and communication systems and human health”, Astronom. Astrophys. Trans. **22**, 861 (2003).
- [119] Y. Fujinawa y K. Takahashi, “Electromagnetic radiations associated with major earthquakes”, Phys. Earth planet. Inter. **105**, 249(1998).

- [120] S. Garambois y M. Dietrich, “Seismoelectric wave conversions in porous media: field measurements and transfer function analysis”, *Geo- physics* **66**, 1417 (2001).
- [121] S. Pride, “Governing equations for the coupled electro-magnetics and acoustics of porous media”, *Phys. Rev. B.* **50**, 678(1994).
- [122] M. L. Wang, J. P. Lynch y H. Sohn (editores) *Sensor Technologies for Civil Infrastructures. Volume 1: Sensing Hardware and Data Collection Methods for Performance Assessment*, 1a ed., (Woodhead Publishing, Elsevier, Reino Unido, 2014); *ibid Sensor Technologies for Civil Infrastructures. Volume 2: Applications in Structural Health Monitoring* , (Woodhead Publishing, Elsevier, Reino Unido, 2014).
- [123] H. Weinstock, “A review of SQUID magnetometry applied to nondestructive evaluation”, *IEEE Trans. Magnetics* *27*, 3231 (1991).
- [124] *SQUID Sensors: Fundamentals, Fabrication and Applications*, editado por H. Weinstock, (Kluwer, Dordrecht, 1996) p. 599.
- [125] R.J.P. Bain, G.B. Donaldson, S. Evanson, G. Hayward, in: H.D. Hahlbohm, H. Lübbig (Eds.), *SQUID85, Proc. 3rd International Conference on Superconducting Quantum Devices*, deGruyter, Berlin, 1985, pp. 841846.
- [126] H.-J. Krause, M.v. Kreutzbruck, “Recent developments in SQUID NDE”, *Physica C* **368**, 70 (2002).
- [127] M.v. Kreutzbruck, K. Allweins, H.-J. Krause, S. Gärtner y W. Wolf, “Defect detection of thick aircraft samples using HTS SQUID magnetometer”, *Physica C* **368**, 85 (2002).
- [128] R. Hohmann, D. Lomparski, H.-J. Krause, M.v. Kreutzbruck y W. Becker, “Aircraft wheel testing with remote eddy current technique using a SQUID magnetometer”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **11**, 1279 (2001).
- [129] S. Keenan, E.J. Romans y G.B. Donaldson, “HTS SQUID NDE of Curved Surfaces Using Background Field Cancellation Techniques”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **17**, 784 (2007).

- [130] Y. Hatsukate *et al.*, “Robot-Based NDE System Using 3D-Mobile HTS-SQUID”, IEEE Trans. Appl. Supercond. **19**, 796 (2009).
- [131] H.-J. Krause *et al.*, “SQUID array for magnetic inspection of prestressed concrete bridges”, Physica C **368**, 91 (2002).
- [132] E.I. Madaras *et al.*, “Application of terahertz radiation to the detection of corrosion under the shuttles thermal protection system”, Review of Quantitative Nondestructive Evaluation **27**, 421 (2008).
- [133] V.M. Karbhari y L.S. Lee (Ed.) *Service Life Estimation and Extension of Civil Engineering Structures*, 1a ed., (Woodhead Publishing, Elsevier, Reino Unido, 2010).
- [134] A. Ruosi, M. Valentino, V. Lopresto, G. Caprino, “Magnetic response of damaged carbon fibre reinforced plastics measured by a HTS-SQUID magnetometer”, Composite Structures **56**, 141 (2002).
- [135] Y. Hatsukade *et al.*, “Detection of deep-lying defects in carbon fiber composites using SQUID-NDE system cooled by a cryocooler”, Physica C **412**, 1484 (2004).
- [136] H. Hatta *et al.*, “Damage detection of C/C composites using ESPI and SQUID techniques”, Composites Science and Technology **65**, 1098 (2005).
- [137] C. Jansen *et al.*, “Terahertz imaging: applications and perspectives”, Appl. Opt. **49**, 48 (2010).
- [138] T. Yasui, T. Yasuda, K-i. Sawanaka y T. Araki, “Terahertz paintmeter for noncontact monitoring of thickness and drying progress in paint film”, Appl. Opt. **44**, 6848 (2005).
- [139] Y. Oyama , L. Zhen, T. Tanabe y M. Kagaya, “Sub-terahertz imaging of defects in building blocks”, NDT&E International **42**, 28 (2009).
- [140] S.R. Tripathi, “Measurement of chloride ion concentration in concrete structures using terahertz time domain spectroscopy (THz-TDS)”, Corrosion Science **62**,5 (2012).
- [141] K. Kawase, T. Shibuya, S. Hayashi, K. Suizu, “THz imaging techniques for nondestructive inspections”, C. R. Physique **11**,510 (2010).

- [142] “Maglev line gets green light”, visitado en la página web de The Japan Times, <http://www.japantimes.co.jp/news/2014/10/17/business/corporate-business/tokyo-nagoya-maglev-line-go-government-tells-jr-tokai/#.VjFn2-lqed> (visitado en octubre de 2015)
- [143] L. Yan, Eng.Sci. **28** (2000).
- [144] Central Japan Railway Company, “Annual report 2010” (2010).
- [145] Claudia Wessner, “Designing for their needs: Passenger Trains for today and tomorrow in Europe, Japan, and North America.”, en *Modern trains and splendid stations*, editado por M. Thorne, (Merrel publishers limited, Londres, 2001).
- [146] H-W. Lee , K-C. Kim y J. Lee, “Review of Maglev Train Technologies ”, IEEE Trans. Mag. **42** 1917 (2006).
- [147] V.R. Vuchic y J.M. Casello, “An Evaluation of Maglev Technology and Its Comparison With High Speed Rail”, Transportation Quarterly, **56**, 33 (2002).
- [148] Consultado en la sección “Shanghai Maglev” en la página web: [www.maglev.net/Shanghai-maglev](http://www.maglev.net/Shanghai-maglev) (Visitado en octubre de 2015).
- [149] M. Taniguchi, “The Japanese magnetic levitation trains”, Built Environment **19**, 234 (1993).
- [150] Consultado en la sección “Electric power transmission and distribution losses (% of output)” en la página web: <http://data.worldbank.org/indicator/EG.ELC.LOSS.ZS> (Visitado en octubre de 2015)
- [151] United Nations: Department of Social and Economic Affairs: Statistics Division, *The 2012 Energy Statistics Yearbook*, (United Nations, 2012).
- [152] CFE, *Informe de fallas, estadísticas y trabajos relevantes en líneas de transmisión*, (CFE, México, 2013)

- [153] Consultado en la sección “Renewable Energy” en la página web de la International Energy Agency: <http://www.iea.org/aboutus/faqs/renewableenergy/> (Visitado en octubre de 2015).
- [154] B. Gamble, G. Snitchler y T. Macdonald, “Full power test of a 36.5 MW HTS propulsion motor”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **21**, 1083 (2011).
- [155] W. Nick, J. Grundmann y J. Fraunhofer, “Test results from Siemens low-speed, high-torque HTS machine and description of further steps towards commercialisation of HTS machines ”, *PhysicaC* **482**, 105 (2012).
- [156] K. Umemoto *et al.*, “Development of 1MW-class HTS motor for podded ship propulsion system”, *J. Phys.: Conf. Ser.* 234032060 (2010)
- [157] M.H. Volkmann, *et al.*, “Implementation of energy efficient single flux quantum digital circuits with sub-aJbit operation”, *Supercond. Sci Technol.* **26**, 015002 (2013).
- [158] J. Ren y V. Semenov, “Progress with physically and logically reversible superconducting digital circuits”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **21**, 780 (2011).
- [159] I. Vernik *et al.*, “Magnetic Josephson junctions with superconducting interlayer for cryogenic memory”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **23**, 1701208 (2013).
- [160] W.V. Hassenzahl *et al.*, “2009 Programon Technology Innovation: A Superconducting DC Cable” (EPRI, California, 2009) p1020458.
- [161] “Calculation of the continuous current rating of cables (100 % load factor)”, *IEC Standard*, **287** (1982).
- [162] J. Oestergaard, J. Okholm, K. Lomholt, O. Toennesen, “Energy losses of superconducting power transmission cables in the grid”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **11**, 2375 (2001).
- [163] H.Chen, *et al.*, “Progress in electrical energy storage system: A critical review”, *Prog. Nat. Sci.* **19**, 291 (2009).
- [164] A-R. Kim, G.-H. Kim, S. Heo, M. Park, I.-K. Yu y H-M. Kim, “SMES application for frequency control during islanded microgrid operation”, *Physica C* **484**, 282 (2013).



- [165] J. Shi , Y.J. Tang, L. Ren, J.D. Li y S.J. Chen, “Application of SMES in wind farm to improve voltage stability”, *Physica C* **468**, 2100 (2008).
- [166] M.G. Molina, “Dynamic Modelling and Control Design of Advanced Energy Storage for Power System Applications”, en *Dynamic Modelling*, editado por A.V. Brito (Intech, 2010). Disponible en: <http://www.intechopen.com/books/dynamic-modelling/dynamic-modelling-and-control-design-of-advanced-energy-storage-for-power-system-applications>
- [167] H. Hirabayashi, Y. Makida, S. Nomura y T. Shintomi, “Feasibility of Hydrogen Cooled Superconducting Magnets”, *IEEE Trans. App. Supercond* **16**, 1435 (2006).