UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MAESTRÍA EN INGENIERÍA

DETERMINACIÓN DE ESTRUCTURAS DE PLAZOS DE LA TASA DE INTERÉS.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

(OPTIMACIÓN FINANCIERA)

P R E S E N T A

PAOLA ALEJANDRA PAVÓN MORENO

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Francisco Venegas Martínez

Ciudad Universitaria Noviembre 2006

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, que son mi vida:

Papito: gracias por ser como eres, estaba en deuda contigo.

Mamá: porque sé que siempre estás conmigo cuidándome.

Julio e Isabel: hermanitos saben que los adoro.

Abuelita Bertha: porque tus sabios consejos me han servido mucho.

Abuelito Julio: gracias por darme un padre excepcional.

Isabel y Luisa: mis tías preferidas gracias por estar siempre conmigo.

Eduardo: gracias por todo lo bueno y lo malo que hemos compartido.

A mis amigos:

Laura, Roberto, Adriana, Diana. C., Diana. V., Leonardo, Arminda, Didier, Estebán, Jean Paul, Sergio, Vladimir.

A mi jurado:

Gracias por haber contribuido a la realización de este trabajo.

A todas las personas que han contribuido en mi desarrollo académico, en especial:

Dr. Venegas: gracias por todo el apoyo.

Dr. Fuentes Maya: gracias por sus regaños.

Jaime Vázquez: tus enseñanzas siempre me acompañan.

Un agradecimiento para:

Adriana: gracias por tu tiempo y por ser una excelente amiga.

Ambrosio: tú sabes que sin tí la tesis no hubiera podido ser.

UNAM: por la formación y por el apoyo económico.

Por las personas que me faltó mencionar.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Cualquier sistema financiero del mundo requiere de la valuación de precios para poder operar. Para llevar a cabo esto, es necesario la profesionalización de este sistema de tal manera que genere precios de manera confiable y que reflejen a su vez las condiciones reales del mercado. Estas condiciones, prevalecientes en los mercados, engloban una serie de diversos factores que generan los precios, en particular la estructura de plazos.

La estructura de tasas -ó curva de tasas- es el punto de partida para la valuación de cualquier instrumento. Dependiendo del tipo de instrumento que se valuará se utilizará una o más curvas en la obtención del precio de mercado. De igual manera, la estructura de tasas es la relación entre el rendimiento de los títulos cupón cero y su vencimiento, esto se da cuando la única diferencia de entre éstos es su vencimiento. Las importantes implicaciones de la estructura de plazos sobre aspectos en la política monetaria, en la valuación de instrumentos financieros de renta fija, en los instrumentos derivados -como los Swaps- así como el establecimiento de estrategias de gestión de carteras de renta fija es lo que hace de este un tema de investigación clásico en finanzas. Ya que a través de ésta, se puede determinar los precios prevalecientes en un sistema financiero.

La correcta valuación de un instrumento financiero depende entre otros factores, de la exactitud del valor presente que se obtendrá a través de los flujos de efectivo. Para esto, es necesario conocer los factores de descuentos, obtenidos mediante una curva de precios. Esto es se ajustará una curva de rendimientos a las cotizaciones actuales. El hecho de ajustar una curva a las distintas cotizaciones que se dieron a lo largo del día impedirá que la curva generada sea consistente con los puntos del mercado, ya que de cierta manera está ajustando promedios de dichas cotizaciones. Sin embargo nada asegura que la curva cumpla con los criterios financieros tales como ausencia de tasas forward negativas.

Los mercados de renta fija han experimentado un gran crecimiento en las últimas tres décadas. Cerca de dos terceras partes del valor de mercado, de todos los títulos en los mercados de capitales, son de renta fija. En particular los bonos cupón cero son de gran utilidad para obtener la estructura de plazos.

En la literatura de modelos de tasas de interés se encuentran los llamados modelos de un factor. Son llamados así porque tratan toda la estructura de plazos para cualquier vencimiento como una función de una única variable de estado, la cual es la tasa corta de interés. Estos modelos pueden ser extendidos a los llamados modelos multifcactores, en los cuales la estructura de plazos para cualquier vencimiento es una función de varias variables de control.

En general los modelos de tasas de interés se pueden clasificar en modelos de equilibrio y modelos de no equilibrio -o no arbitraje. Por un lado los modelos de equilibrio tienen las características de que la dinámica de la tasa corta es proporcionada de manera exógena y la tasa forward, así como el precio del bono, son determinados en forma endógena. Adicionalmente estos modelos tienen la ventaja de que la estructura de plazos obtenida, no se ajusta a una anterior. Por el otro los modelos de no arbitraje son caracterizados por el trabajo de Ho-Lee, el cual desarrolló el enfoque de no arbitraje para modelos de la estructura de plazos, en el sentido de que la estructura de plazos pueda ajustarse a una estructura inicial (la cual es observable). Dentro de este mismo enfoque otros autores trabajan exógenamente la dinámica de la tasa forward instantánea y obtienen de manera endógena la tasa corta, el precio de los bonos y así como la estructura de plazos.

El objetivo de este trabajo es recopilar los modelos de tasas más importantes y representativos de ambas metodologías. Se presentan los aspectos fundamentales para la valuación de instrumentos de renta fija, así como los conceptos de tasa forward y tasa corta los cuales son muy importantes en la determinación de modelos de estructura de plazos. Se mostrará que la estructura de plazos puede ser obtenida a partir de la tasa corta, razón por la cual se supone que la tasa corta es guiada por un proceso de difusión y se obtiene una ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden que debe seguir el precio de un bono cupón cero, Capítulo 1.

Una vez hecho lo anterior, capítulo 2, se determinará analíticamente la estructura de plazos cuando la dinámica de la tasa corta es conducida por el modelo de Merton, Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross, bajo un escenario de equilibrio general.

Adicionalmente, Capítulo 3, se presentaran modelos de no arbitraje, los cuales son Hoo-Lee, Hull-White, Heath-Jarrow-Morton y Nelson-Siegel. Es importante mencionar que en los modelos de Hoo-Lee y Hull-hite se supone una dinámica estocástica de la tasa corta y a partir de ésta se determina endógenamente la estructura de plazos. Mientras que en los modelos de Heath-Jarro-Morton y Nelson-Siegel el comportamiento de la tasa forward se considera exógeno y a partir de ella se determina endógenamente tanto la tasa corta como la estructura de plazos

Finalmente se presentarán las ventajas y desventajas, de los modelos bajo el enfoque de equilibrio y no equilibrio. Así mismo se comentan teorías que pudieran dar las bases para el desarrollo que posibles extensiones del presente trabajo. Las cuales harán que los modelos presentados se apeguen a la realidad y sean de mayor utilidad, para los participantes del mercado.

CAPÍTULO 1
MARCO TEÓRICO

1.1 Introducción

Cualquier persona ha tenido la experiencia en la vida diaria con alguna promesa de pago, es decir, ha pedido -o ha prestado- algo en algún momento de su vida. Algunas veces se pide prestada -se presta- una cantidad inicial S_0 en un tiempo t y se promete pagar -ó que le pagarán al prestamista- en una fecha futura T esta cantidad S_0 más algo adicional por ejemplo I, es decir, en la fecha T se pagará la cantidad $S_0 + I$, donde casi siempre la cantidad adicional I es un porcentaje del monto inicial S_0, por lo que se tiene que el pago prometido será:

$$S_0 + rS_0 \ ,$$

lo cual es equivalente a

$$S_0(1 + r).$$

Este porcentaje adicional r se podría pensar como el pago por el servicio del uso de dinero ajeno al cual se le conoce como crédito. Las personas piden prestado porque necesitan dinero para llevar a cabo sus planes -en lugar de ir al banco lo cual podría ser más caro-. Por el contrario, las personas prestan dinero porque tienen un excedente y desean hacer algo productivo con él. Paralelamente, una empresa podría necesitar -ó tener un excedente- de fondos para realizar proyectos los cuales incrementarían su capacidad productiva y de esta forma lograr un crecimiento de dichas empresas para poder sobrevivir en un mundo cada vez más dinámico y agresivo. Es decir, para poder crecer necesitarán fondos pero tal vez ahora no los tengan por lo que recurrirán al crédito, o invitarán a nuevos socios. Para hacer lo anterior las empresas básicamente tienen dos opciones las cuales son: emitir acciones y emitir deuda. El optar por la primera opción implica una pérdida en el poder de la toma de decisiones de la empresa, si se toma la segunda alternativa la forma más común es a través de pagarés -bonos-, es decir, hoy piden prestado una cantidad B_0 y en un futuro pagarán una cantidad B_T -valor nominal-. Por lo anterior, se podría pensar que las empresas venden -emiten- un pagaré -bono- a la cantidad B_0 el día de hoy y en el futuro se comprometen a pagar la cantidad B_T, es decir, existe un flujo de efectivo hoy que se deberá de entregar al vendedor del pagaré y un flujo de efectivo B_T que se entregarán al comprador del pagaré. Las empresas llevan a cabo este tipo de mecanismo para crecer y así lograr un mejor desempeño.

1.2 Instrumentos de renta fija

Una primera clasificación parsimoniosa de los instrumentos financieros está dada por instrumentos de renta fija e instrumentos de renta variable [1]. La característica fundamental de los instrumentos de renta fija es que los flujos de efectivo que genera este tipo de instrumentos están predeterminados como son los CETES -Certificados de la Tesorería-, bonos de empresas, etc. Mientras que en los instrumentos de renta variable no están predeterminados los flujos de efectivo como son las acciones.

El bono es uno de los principales instrumentos de renta fija, el cual es una promesa de pago a futuro impersonalizada entre dos partes en la que una parte se compromete a pagar ciertos flujos de efectivo durante un lapso de tiempo a la contraparte que hace el préstamo. La parte que tiene la obligación de realizar pagos futuros se le conoce como el emisor del bono y la parte que recibe dichos pagos se le conoce como comprador o tenedor del bono. Al periodo de tiempo que dura este contrato se le denomina vencimiento del bono, y a la cantidad prestada estipulada en el bono que se deberá pagar en el vencimiento del bono se le conoce como valor nominal. Finalmente, si el bono paga flujos de efectivo antes de la fecha de vencimiento a estos flujos se les conoce como cupones, y a las fechas en que ocurren estos pagos de cupones se les conoce como fecha de pago o corte de cupón. Como un bono es una relación contractual que existe entre el emisor y el tenedor del bono durante el vencimiento de éste, el tenedor del bono tendrá motivos suficientes para preocuparse de que la posición financiera de la empresa emisora pueda cambiar en forma importante pues de ella depende la capacidad de la empresa para responder a sus obligaciones. Un tenedor del bono puede exigir a la empresa emisora un requirimiento mínimo de razón circulante, es decir, los tenedores de los bonos nesesitarán estar informados acerca de la evolución de la empresa y esto lo pueden hacer vía los estados financieros.

Los contratos de bonos se pueden dividir en:

(1) Contratos que restringen la emisión de nueva deuda,
(2) Contratos que imponen restricciones sobre el pago de dividendos,
(3) Contratos que imponen restricciones sobre fusiones,
(4) Contratos que imponen restricciones sobre las disposiciones de los activos de una empresa.

[1] Para un análisis más detallado de la clasificación de los diferentes tipos de bonos consultar Van Horne [14].

Estas restricciones son hechas para evitar que la empresa emisora aumente el grado de riesgo de la deuda en circulación. Por ejemplo, se podría emitir nueva deuda con derecho superior o igual sobre los activos de la empresa, o los bonos que restringen el pago de dividendos son obligaciones principalmente hechas para evitar casos extremos donde los accionistas voten para pagarse a sí mismos un dividendo liquidador que dejará a los tenedores de los bonos con una empresa vacía.

Por lo anterior, existe una clasificación parsimoniosa de los bonos la cual a continuación se comentará:

(a) Bonos garantizados ó hipotecarios.- en este tipo de bonos existe un bien físico como garantía. Se clasifican de acuerdo a prioridad de derechos, al derecho a emitir valores adicionales y al alcance del gravamen.
(b) Bonos no garantizados.- en este tipo de bonos no existe un bien como garantía. Se clasifican en bonos a largo plazo, bonos a largo plazo subordinados, bonos a corto plazo, bonos sobre ingresos, bonos a tasa flotante, bonos comerciales y bonos no comerciales.

Los bonos pueden o no pagar flujos de efectivo intermedios a la fecha de vencimiento, cuando no pagan cupones y solo pagan el valor nominal en la fecha de vencimiento se les conoce como bonos cupón cero o simplemente ceros. Cuando un bono paga cupón se le conoce como bono cuponado o bono con cupón.

1.2.1 Elementos de un bono

Debido a que un instrumento financiero queda totalmente caracterizado por sus flujos de efectivo y el tiempo en que estos ocurren, en consecuencia se tienen todos los elementos para valuarlo. Los elementos de un bono son:

(1) Valor nominal, es el valor que se promete pagar en la fecha en que vence el bono,
(2) fecha de vencimiento, es la fecha en que se deberá pagar el valor nominal -ó vida del bono-,
(3) fecha de emision, fecha en que se emite el bono,
(4) fecha de colocación, es la fecha en que se puso a la venta el bono,
(5) tasa cupón, es la tasa de rendimiento que se paga periodicamente sobre el valor nominal -la cual se puede ver como el pago de intereses del bono-, por lo que si un bono es cupon cero entoces su tasa cupón deberá ser cero,
(6) cupón, es la cantidad en unidades monetarias que se paga periodicamente, la cual se calcula como la tasa cupón por el valor nominal.

Con los elementos anteriores quedan totalmente caracterizados los flujos de efectivo de un bono, y como consecuencia queda caracterizado totalmente un bono, y de esta forma se puede hablar de la valuación de un bono.

1.3 Valuación de Bonos

Una vez que se conocen los elementos de un bono, se conocen los flujos de efectivo que éste pagará, así como las fechas en que ocurrirán estos flujos, y para determinar el precio del bono solo bastará saber la tasa de descuento de dichos flujos. Para ello se calculará el precio de un bono cuponado, se denotarán a VN como el valor nominal del bono, T el vencimiento del bono, C_i el cupón que se pagará en $i < T$ con $i = 1, ..., T$. Si y es el rendimiento al vencimiento del bono (también conocido como yield to maturity o simplemente yield), entonces el precio del bono $B(t,T)$ estará dado por el valor presente de sus flujos de efectivo, es decir:

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1+y)^{i-t}} + \frac{VN}{(1+y)^{T-t}} \ .$$

Alternativamente, si el rendimiento al vencimiento tiene composición continua entonces el precio del bono estaría dado por

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-y(i-t)} + VNe^{-y(T-t)} \ .$$

Para cualquier bono, se puede reportar el precio de mercado ó, dados los flujos de efectivo, el rendimiento único -rendimiento al vencimiento-. De esta forma si se reporta el precio de mercado entonces el rendimiento al vencimiento -y- se puede calcular como la tasa de descuento que iguala los flujos de efectivo al valor de mercado del bono.

De las expresiones anteriores es importante destacar que debido a que los pagos del bono son conocidos de antemano, el valor del bono $B(t,T)$ fluctúa debido a los cambios en las tasas de interés, creando con ello un pérdida potencial. También se observa que existe una relación inversa entre la tasa y el precio de un bono, es decir, si las tasas aumentan entonces el precio del bono disminuirá y viceversa.

1.3.1 Curva de rendimientos al vencimiento (curva yield)

Como se comentó anteriormente, la valuación de un bono depende del rendimiento al vencimiento -yield-, ó si se tiene el precio de mercado del bono entonces el rendimiento al vencimiento -y- se puede calcular como la tasa de descuento que iguala los flujos de efectivo al valor de mercado del bono, es decir, para cualquier bono se puede reportar el precio de mercado, o dados los flujos de efectivo del bono, su rendimiento único. Sin embargo, la verdadera cuestión estriba en averiguar si el rendimiento se puede relacionar a las condiciones prevalecientes del mercado.

El rendimiento al vencimiento de cualquier bono está fuertemente limitado a las condiciones generales de los mercados de renta fija. Todos los rendimientos al vencimiento tienden a moverse juntos en este mercado. No obstante, todos los rendimientos al vencimiento de los bonos no son exactamente los mismos. La variación de los rendimientos al vencimiento es explicada en parte por las calificaciones crediticias de los bonos, es decir, los bonos con mayor calificación crediticia serán más caros que los de menor calificación. Con todo, la calificación crediticia no explica totalmente las variaciones observadas. Otro factor que explica parcialmente las diferencias en los rendimientos al vencimiento es el tiempo al vencimiento, es decir, los bonos con mayor vencimiento tendrán mayor rendimiento al vencimiento.

De esta forma surge un concepto importante el cual es llamado la curva de rendimiento al vencimiento -ó curva yield- la cual es la relación funcional entre el rendimiento al vencimiento y el plazo del vencimiento del bono. Cuando se está analizando un bono en particular es útil determinar su rendimiento y fecha de vencimiento, y colocarlos como un punto de la curva de rendimientos al vencimiento para bonos de su misma clasificación de riesgo. Esto dará una indicación general de que tan bien está valuado el bono respecto a todo el mercado. Si el punto del bono que se está analizando se encuentra lejos de la curva deberá existir probablemente una explicación de su desviación, relacionada a situaciones especiales tales como nuevas noticias que pudieran afectar la solvencia del emisor.

La estructura intertemporal de las tasas de interés representa la relación, en un punto dado en el tiempo, entre el plazo al vencimiento y el rendimiento al vencimiento del bono dentro de un nivel de riesgo dado. La representación tradicional de la estructura intertemporal está basada en bonos de rendimiento a la par, esto es utilizando el rendimiento al vencimiento de bonos con un cupón cercano a su vencimiento. La ventaja de este método es que los bonos relacionados, denominados on the run -emitidos recientemente- son muy líquidos y sus precios reflejan acertadamente las condiciones del mercado. Sin embargo, este método ignora la información contenida en otros bonos que se encuentran en circulación. Algunos enfoques intentan ajustar la curva de rendimientos a través de los rendimientos de todas las emisiones vigentes.

1.4 La estructura de plazos

La curva yield es útil, pero debido a que es algo arbitraria no proporciona una explicación completamente satisfactoria de las diferenciales de los rendimientos al vencimiento. No obstante, el ajuste de una curva utilizando bonos con diferentes cupones es insatisfactorio. El problema es que los rendimientos observados no representan los rendimientos futuros a menos que todos, los cupones puedan ser reinvertidos a la misma tasa, lo cual es muy poco probable. Es por lo anterior que se requiere de otra teoría, y esta sección se encarga de proporcionarla y se conoce como la estructura de plazos. La teoría presentada en esta sección deja de lado las ideas del rendimiento al vencimiento para enfocarse en el concepto puro de tasa de interés, es decir, se basa en la observación de que en general la tasa de interés depende de la longitud del periodo de tiempo en que el dinero es prestado.

Se define la tasa spot -o tasa de interés de contado- a T años como la tasa de interés de una inversión efectuada en un periodo de tiempo que empieza en t y termina en T años, donde el interés y el principal serán pagados en T, a la cual se le denotará como $R(t,T)$. Es importante hacer notar que bajo este enfoque de la tasa spot no existen flujos de efectivo entre t y T y los únicos flujos ocurren en t y T. De esta forma si se tiene un bono cupón cero con valor nonimal VN y fecha de vencimiento en T entonces su precio estará dado por

$$B(t,T) = \frac{VN}{(1+R(t,T))^{T-t}} \ ,$$

y si la composición de la tasa es en tiempo continuo entonces el precio del bono está dado por:

$$B(t,T) = VNe^{-R(t,T)(T-t)} \ .$$

Es importante destacar que el flujo de efectivo del bono al vencimiento T es VN, es decir,

$$B(T,T) = VN,$$

de donde se tiene que $R(T,T) = 0$.

Note que en este caso el rendimiento al vencimiento está bien definido, dado que corresponde al vencimiento compuesto en el periodo T sobre el bono y en este caso para este bono cupón cero se tendrá que su rendimiento al vencimiento en un plazo T es la tasa spot. En contraste, un bono con cupones tiene muchos flujos de efectivo previos al vencimiento y puede ser descompuesto en una serie de bonos cupón cero donde el cupón al tiempo i puede ser visto como el valor nominal de un bono cupón cero con vencimiento en esta fecha. El valor nominal más el último cupón es el valor nominal de un bono cupón cero con vencimiento en T. De esta forma el precio del bono está dado por

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1+R(t,i))^{i-t}} + \frac{VN}{(1+R(t,T))^{T-t}} \ , \tag{1.1}$$

donde $R(t,i)$ son las tasas spot que integran la estructura de plazos en el tiempo i, con $i = 1, 2, ..., T$. Es importante mencionar que la estructura de plazos también es conocida como la curva cero o curva spot, y ésta representa las tasas spot graficadas contra el tiempo.

Si la composición de las tasas de interés son en tiempo continuo entonces el precio de un bono cuponado está dado por

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-R(t,i)(i-t)} + VN e^{-R(t,T)(T-t)} \ . \tag{1.2}$$

Una curva cupón cero -ó estructura de plazos- es, teóricamente, más precisa que la curva usual de rendimientos al vencimiento. La primera representa un conjunto de precios primitivos, a partir de los cuales puede ser derivado el valor de los instrumentos de renta fija -en particular los bonos-. Desafortunadamente, los mercados activos para los bonos cupón cero -denominados tambien strips- existen solo en los Estados Unidos y Francia, y son relativamente recientes. Por lo tanto, la curva de la tasa spot generalmente se estima a partir de los bonos en circulación con un cupón en proceso de pago, utilizando la ecuación (2.1) ó (2.2) según sea el caso.

En la práctica, normalmente las tasas spot -ó tasa cupón cero- no se pueden observar directamente, lo que se puede observar son los bonos que pagan cupón. Un punto importante es el como se puede extraer la curva de rendimiento cupón cero a partir de los precios de las obligaciones con cupón, es por ello que la siguiente sección aborda un método para tal objetivo.

1.4.1 Método bootstrap

La forma obvia de determinar una curva de tasas spot es encontrando los precios de una serie de bonos cupón cero con varias fechas de vencimiento. Lamentablemente el conjunto disponible de bonos cupón cero es típicamente muy pequeño, y además, hasta hace poco no existían bonos cupón con vencimientos de largo plazo. Por lo que no es siempre práctico determinar el conjunto completo de tasas spot de esta forma. Sin embargo, la existencia de un bono cupón cero no es necesaria para el concepto de tasas spot, no se requieren tales datos para determinar el valor de las tasas spot.

La curva de tasas spot puede ser determinada de los precios de los bonos cuponados comenzando con bonos de vencimientos cortos y trabajando hacia adelante con bonos de vencimientos mayores.

Se ilustrará el proceso para la composición de un año bajo el supuesto de que los cupones se pagan una vez al año. Primero, se determinará $R(t,1)$ por observación directa de la tasa de interés de un año. Después, se considerará un bono a dos años. Se supondrá que el bono tiene precio $B(t,2)$ el cual hace pagos de cupón de montos C_1 y C_2 al final del año 1 y 2 respectivamente, y con valor nominal de VN. El precio de debe ser igual al valor presente de los flujos de efectivo, es decir:

$$B(t,2) = \frac{C_1}{(1+R(t,1))} + \frac{C_2 + VN}{(1+R(t,2))^2} \ ,$$

como la tasa spot al primer año $(R(t,1))$ ya es conocida, entonces se puede resolver la ecuación anterior para la tasa spot al segundo año, es decir, para $R(t,2)$. Trabajando de esta forma hacia delante, lo siguiente es considerar un bono a tres años, cuatro años,..., T años y así, se puede determinar las tasas spot $R(t,3)$, $R(t,4)$,..., $R(t,T)$ paso a paso. Cabe mencionar que bajo este método se tendrán las tasas spot de acuerdo a los vencimientos de los bonos disponibles por lo que no se tendrán tasas spot fuera de estos periodos de vencimiento [2]. Es por ello, que es necesario contar con modelos que puedan proporcionar la tasa spot a un vencimiento específico por lo que en las siguientes capítulos abordarán estos modelos.

1.5 Tasa forward

La tasa spot a T años es la tasa de interés de una inversión efectuada para un periodo de tiempo que empieza hoy (t) y que finaliza al cabo de T años. Muchas veces, se está interesado en conocer las tasas de interés intermedias entre una tasa spot a T_1 años y una tasa spot a T_2 años con $T_2 > T_1$. Este tipo de información lo contiene de forma implícita la estructura de plazos y a partir de esto surge el concepto de tasa forward, la cual se puede definir como la tasa de interés que se encuentra implícitamente entre las tasas spot actuales para periodos futuros de tiempo. A continuación, se ilustra el cálculo de una tasa forward, para ello considere las tasas spot a T_1 y a T_2 años denotadas por $R(t,T_1)$ y $R(t,T_2)$ respectivamente. De esta forma una inversión de 1 unidad monetaria invertida a un plazo de T_2 años se puede ver como una inversión a un periodo de T_1 años y al final de T_1 años reinvertir a la tasa futura a $T_2 - T_1$ prevaleciente dentro de T_1. Por lo que bajo argumentos de arbitraje se podría esperar que ambas alternativas de inversión brinden el mismo monto en T_2, es decir,

$$(1 + R(t,T_2))^{T_2 - t} = (1 + R(t,T_1))^{T_1 - t}(1 + f(t,T_1,T_2))^{T_2 - T_1}, \tag{1.3}$$

[2] Este método puede ser consultado en Hull [5].

donde $f(t, T_1, T_2)$ es la tasa que se observa en t, para una inversión que comienza en T_1 y finaliza en T_2, a la cual se le conoce como la tasa forward de T_1 a T_2, observada en t. Por lo que la expresión de la tasa forward bajo composición discreta está dada por:

$$f(t, T_1, T_2) = \left[\frac{(1 + R(t, T_2)^{T_2 - t}}{(1 + R(t, T_1)^{T_1 - t}} \right]^{\frac{1}{T_2 - T_1}} - 1 \ . \tag{1.4}$$

Análogamente, si la composición de las tasas spot es continua la tasa forward puede ser obtenida a través de la ecuación

$$e^{R(t,T_2)(T_2 - t)} = e^{R(t,T_1)(T_1 - t)} e^{f(t,T_1,T_2)(T_2 - T_1)} \ ,$$

y la tasa forward para la composición continua está dada por

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t)}{T_2 - T_1} \ . \tag{1.5}$$

De las expresiones para la tasa forward proporcionadas en (2.4) y (2.5) y usando el hecho de que $R(t, t) = 0$, se observa que la tasa forward $f(t, t, T)$ es la tasa spot $R(t, T)$. La tasa de interés forward también mide la pendiente de la estructura de plazos ya que de (2.3) si se supone que $t = 0$, $T_1 = 1$ y $T_2 = 2$ y después de simplificar y eliminar los términos cruzados se tiene que:

$$f(t, 1, 2) \approx R(t, 2) + (R(t, 2) - R(t, 1)) \ ,$$

está por arriba de $R(t, 1)$ y $f(t, 1, 2)$ estará por encima de $R(t, 2)$, proporcionando una guía sobre la tendencia de los movimientos futuros de las tasas de interés. Cuando la composición es continua por la ecuación (2.5) la observación de que la tasa forward mide la pendiente de la estructura de plazos es más directa y además, se observa que si la estructura es ascendente $R(t, 1) < R(t, 2)$ entonces la tasa forward $f(t, 1, 2,)$ estará por encima de $R(t, 2)$. De esta forma, cuando la estructura de plazos es plana -tanto para composición continua como discreta- la curva spot es idéntica a la curva de rendimiento a la par y a la curva forward. En general, las curvas difieren. En particular, en el caso de una estructura de plazos con desplazamientos ascendentes la curva de rendimiento al vencimiento está por debajo de la curva spot mientras que la curva forward está por encima. Por el contrario, con una estructura de plazos con desplazamientos descendentes la curva de rendimiento al vencimiento está por encima de la curva de tasas spot, la cual a su vez está por arriba de la curva de tasas forward.

Es importante destacar que existe una gran número de tasas forwards asociadas a una curva spot. De hecho, si existen n periodos, entonces existen n tasas spot -incluyendo R(t,t) la cual se define como cero-; y de esta estructura de plazos existen $\frac{n(n+1)}{2}$ tasas forward -incluyendo las tasas spot básicas-. Sin embargo, todas estas tasas forward son derivadas de las n tasas spot subyacentes.

La curva de rendimientos al vencimiento -curva yield- puede ser observada, al menos aproximadamente, buscando una serie de cotizaciones de bonos en las publicaciones financieras. La curva casi nunca es plana, pero usualmente tiene una pendiente creciente conforme los vencimientos se incrementan. La tasa spot tiene características similares. Típicamente, también la pendiente se incrementa rápidamente en vencimientos cortos y continua incrementándose la pendiente pero gradualmente conforme los vencimientos se alargan. Además, se observa que la curva spot tiene variaciones cada día, por lo que resulta natural preguntarse si existe una explicación simple para esta forma típica de la estructura de plazos.

Existen tres explicaciones estándar o teorías de la estructura de plazos, cada una de las cuales proporciona algún significado importante. A continuación se esbozarán brevemente estas tres teorías [3] :

(1) La más sencilla es la conocida como la teoría de las expectativas la cual sostiene que las tasas spot a largo plazo deben reflejar las tasas de interés a corto plazo futuras esperadas. De manera más precisa argumenta que una tasa forward correspondiente a cierto periodo es igual a la tasa spot futura esperada para este periodo.
(2) La segunda teoría, conocida como la teoría de segmentación de mercados, conjetura que no es necesario que haya relación alguna entre las tasas spot a corto y largo plazo. Bajo esta teoría, diferentes instituciones invertirán en obligaciones de diferentes vencimientos sin posibilidad de cambio en el vencimiento deseado para la inversión. La tasa de interés a corto plazo se determinará por la oferta y demanda en el mercado de obligaciones a corto plazo, la tasa de interés a mediano plazo se determina por la oferta y demanda del mercado de obligaciones a mediano plazo, y así sucesivamente.
(3) Finalmente, la teoría que resulta en cierta forma más atractiva es la conocida como la teoría de la preferencia por la liquidez. En ella se argumenta que las tasas forward deben ser siempre más altas que las tasas spot esperadas en el futuro.

El supuesto básico subyacente de la teoría de la preferencia por la liquidez es que los inversionistas prefieren conservar su liquidez e invertir sus fondos durante periodos cortos de tiempo. Los prestatarios, por otro lado, normalmente prefieren endeudarse a tasas de interés fijas y periodos largos. Si las tasas de interés ofrecidas por los bancos y otros intermediarios financieros fueran tales que la tasa forward fuera igual a la tasa spot esperada en el futuro, las tasas de interés a largo plazo, se igualarían a la media de las tasas de interés a corto plazo esperadas en el

[3] Ver Russell [13].

futuro. Con la ausencia de incentivos para cambiar de proceder, los inversionistas tenderían a depositar sus fondos durante periodos cortos y los prestatarios tenderían a endeudarse a periodos largos. Los intermediarios financieros podrían, en ese caso, financiar cantidades importantes de préstamos a largo plazo a tasa fija con depósitos a corto plazo. Lo cual implicaría sin embargo, un excesivo riesgo de tasa de interés. En la práctica, para emparejar a depositantes con prestatarios y eliminar así, el riesgo de tasa de interés, los intermediarios financieros aumentarán la tasa de interés a largo plazo con respecto a las tasas de interés a corto plazo esperadas en el futuro. De esta forma, se reducirá la demanda de préstamos a largo plazo de tasa fija y se estimulará a los inversionistas a depositar sus fondos durante largos periodos de tiempo. La teoría de la preferencia por la liquidez lleva a una situación en la que las tasas forward son más altas que las tasas spot esperadas en el futuro. Es también consecuente con la observación empírica acerca de que las curvas de rendimientos tienden a tener pendientes positivas más a menudo que pendientes negativas.

Es importante resaltar que la tasa spot $R(t,T)$ puede ser modelada como una inversión realizada de 1 unidad monetaria, la cual será reinvertida cada periodo de tiempo a la tasa forward $f(t,t+k,t+k+1)$ es decir,

$$(1+R(t,T))^{T-t} = (1+f(t,t,t+1))\,(1+f(t,t+1,t+2))\ldots(1+f(t,T-1,T)) \ ,$$

pero $f(t,t,t+1) = R(t,1)$, por lo que

$$(1+R(t,T))^{T-t} = (1+R(t,1))\,(1+f(t,t+1,t+2))\ldots(1+f(t,T-1,T)) \ , \tag{1.6}$$

por lo que la tasa spot para el periodo T se puede escribir como un promedio geométrico de las tasas spot y forward.

En el caso continuo

$$e^{R(t,T)(T-t)} = e^{R(t,1)}e^{f(t,t+1,t+2)}e^{f(t,t+2,t+3)}\ldots e^{f(t,T-1,T)} \ , \tag{1.7}$$

de donde se obtiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[R(t,1) + \sum_{i=2}^{T-t} f(t,t+i-1,t+i)\right] \ ,$$

es decir, en el caso continuo la tasa spot a T años es un promedio aritmético de la tasa spot y las tasas forward. Sin embargo debido a que $f(t,t,k) = R(t,k)$, se tiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[f(t,t,t+1) + \sum_{i=2}^{T-t} f(t,t+i-1,t+i)\right] \ ,$$

de donde se observa que la tasa spot a T años es un promedio geómetrico de las tasas forward por periodo. De lo anterior, es importante mencionar que la estructura de plazos puede ser generada a través de las tasas forward espaciadas un periodo de tiempo, es decir, por $f(t,t,t+1)$, $f(t,t+1,t+2)$, $f(t,t+2,t+3)$,...,$f(t,T-1,T)$, por lo que si se conocen estas tasas entonces la estructura de plazos puede ser obtenida como un promedio geométrico o aritmético -geométrico para composición discreta y aritmético para composición continua-. Entonces las tasas forward espaciadas por un periodo de tiempo $f(t,t+k,t+k+1)$ son muy importantes, ya que a partir de ellas se determina la estructura de plazos, como lo muestra la siguiente expresión -razón por la cual la siguiente sección trata acerca de ellas-.

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[f(t,t,t+1) + \sum_{i=2}^{T-t} f(t,t+i-1,t+i)\right] . \qquad (1.8)$$

Se observa que la tasa spot a T años es un promedio aritmético de las tasas forward por periodo. De lo anterior, es importante mencionar que la estructura de plazos puede ser generada a través de las tasas forward espaciadas un periodo de tiempo, es decir, por:

$$f(t,t,t+1), f(t,t+1,t+2), f(t,t+2,t+3), ..., f(t,T-1,T).$$

Por lo tanto, si se conocen estas tasas entonces la estructura de plazos puede ser obtenida como un promedio geométrico o aritmético -geométrico para composición discreta y aritmético para composición continua-. Cabe mencionar que las tasas forward espaciadas por un periodo de tiempo $f(t,t+k,t+k+1)$ son muy importantes para la estructura de plazos, razón por la cual la siguiente sección trata acerca de ellas.

1.6 Tasa corta

Las tasas cortas[4] son las tasas forward espaciadas solo un periodo de tiempo.

La tasa corta al tiempo k de acuerdo con esto está dada por:

$$r_k = f(t,t+k,t+k+1),$$

que es la tasa forward de k a $k+1$.

Note que $R(t,1) = f(t,t,t+1) = f(t,t+0,t+0+1) = r_0$.

Como se comentó anteriormente las tasas cortas pueden ser consideradas fundamentales, así como las tasas spot, ya que para un conjunto completo de tasas

[4] Según Luemberger [8].

cortas se puede especificar totalmente una estructura de plazos. Es decir, de acuerdo a (2.6) y (2.7) se tiene que

$$(1+R(t,T))^{T-t} = (1+R(t,1))\,(1+r_1)\,(1+r_2)\ldots(1+r_{T-1}))\,.$$

En el caso continuo

$$e^{R(t,T)(T-t)} = e^{R(t,1)}e^{r_1}e^{r_2}\ldots e^{r_{T-1}}\ , \tag{1.9}$$

es decir, la estructura de plazos se puede obtener en el caso discreto como un promedio geométrico de las tasas cortas. En el caso continuo la estructura de plazos se puede obtener como un promedio aritmético de las tasas cortas a partir de (2.9), es decir:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\sum_{i=0}^{T-1} r_i\ .$$

Si se particiona el intervalo $[t,T]$ en subintervalos de longitud ΔT (cuya longitud podría ser $\Delta T = \frac{1}{n}$) se tiene

$$e^{R(t,T)(T-t)} = e^{f(t,t,t+\Delta T)\Delta T}e^{f(t,t+\Delta T,t+2\Delta t)\Delta T}\ldots e^{f(t,t+(n-1)\Delta T,t+n\Delta t)\Delta T}\ ,$$

de donde

$$\begin{aligned} R(t,T) =& \frac{1}{T-t}\sum_{i=0}^{n-1} f(t,t+i\Delta T,t+(i+1)\Delta T)\Delta T \\ =& \frac{1}{T-t}\sum_{i=0}^{n-1} r_{i\Delta T}\Delta T \end{aligned}\ ,$$

tomando el límite cuando $n \to \infty$ (como $\Delta T = \frac{1}{n}$, entonces $\Delta T \to 0$), se tiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s \mathrm{d}s\ . \tag{1.10}$$

Se observa que bajo composición continua y al suponer que los periodos de longitud ΔT son cercanos a cero, la estructura de plazos se puede ver como el promedio aritmético de las tasas cortas, que en este caso de composición continua resulta ser la integral de las tasas cortas. Este hecho indica que la tasa corta es fundamental para el cálculo de la estructura de plazos, ya que a partir de ellas se puede generar la estructura de plazos. Por lo que en lo subsecuente se tomará como punto de partida para determinar la estructura de plazos a la tasa corta, a través de especificar la dinámica seguida por la tasa corta, y de esta forma se encontrará la estructura de plazos.

Adicionalmente, se encontrará una relación entre el precio del bono y la tasa forward, para ello considere

$$e^{R(t,T)(T-t)}e^{f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} = e^{R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t)} \ ,$$

de donde se obtiene que

$$R(t,T)(T-t) + f(t,T,T+\Delta T)\Delta T = R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t) \ ,$$

y así,

$$f(t,T,T+\Delta T) = \frac{R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t) - R(t,T)(T-t)}{\Delta T} \ , \tag{1.11}$$

pero

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ ,$$

entonces

$$R(t,T)(T-t) = -\ln(B(t,T)).$$

Análogamente,

$$R(t,T+\Delta T)(T+\Delta T-t) = -\ln(B(t,T+\Delta T)) \ ,$$

por lo que al sustituir lo anterior en (1.11) se tiene que

$$\begin{aligned} f(t,T,T+\Delta T) &= \frac{-\ln(B(t,T+\Delta T)) + \ln(B(t,T))}{\Delta T} \\ &= -\frac{\ln(B(t,T+\Delta T)) - \ln(B(t,T))}{\Delta T} \end{aligned} \ .$$

Al tomar el límite cuando $\Delta T \to 0$ se obtiene lo que se conoce como la tasa forward instantánea la cual será denotada por $f(t,T)$, es decir

$$\begin{aligned} f(t,T) &= \lim_{\Delta T \to 0} f(t,T,T+\Delta T) \\ &= -\lim_{\Delta T \to 0} \frac{\ln(B(t,T+\Delta T)) - \ln(B(t,T))}{\Delta T} \\ &= -\frac{\partial \ln(B(t,T))}{\partial T} \end{aligned} \ .$$

Por lo tanto la tasa forward instantánea está dada por la derivada del logaritmo natural del precio de un bono cupón cero, es decir:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln(B(t,T))}{\partial T} \ . \tag{1.12}$$

La estructura de plazos es importante ya que a través de ella se pueden valuar instrumentos de renta fija. Se comentó que el método Bootstrap es una herramienta útil para obtener la estructura de plazos. Sin embargo, para obtener una estructura de plazos completa se necesitarían tener bonos de cualquier vencimiento, situación que en la práctica parece poco fácil de tener. La tasa corta especifica totalmente la estructura de plazos es por ello que existen metodologías basadas en el estudio de la dinámica de la tasa corta -la cual se proporciona exógenamente- y a partir de ésta se obtiene en la estructura de plazos, en la siguiente sección se tratará con estas metodologías.

1.7 Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero

El precio de un bono cupón cero bajo composición continua está dado por:

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ , \tag{1.13}$$

donde $R(t,T)$ es la estructura de plazos. A continuación, se proporciona una metodología ampliamente conocida basada en la tasa corta la cual establece una dinámica estocástica de la tasa corta a través del siguiente proceso de Itô:

$$\mathrm{d}r_t = \mu(t,r_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,r_t)\mathrm{d}W_t \ , \tag{1.14}$$

donde $\mathrm{d}W_t$ es un movimiento Browniano, μ y σ son funciones conocidas, la cual será una especificación exógena. De esta forma, debido a (1.10) la estructura depende de la tasa corta, pero la tasa corta es estocástica, entonces debido a que la tasa corta es estocástica y por la relación entre la estructura de plazos y la tasa corta establecida en (1.10) se tiene que el precio de un bono cupón cero por (1.13) en términos de la tasa corta está dado como sigue [5]:

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \ . \tag{1.15}$$

Enseguida, se determinará una ecuación diferencial parcial que servirá para encontrar el precio de un bono cupón cero, donde la dinámica de la tasa corta está dada por (1.14). Para ello note que el precio de un bono es una función de la estructura de plazos, y debido a la relación existente entre la estructura de plazos y la tasa corta dada por (1.10), el precio de un bono es una función de la tasa corta, el tiempo en que está siendo valuado y el plazo, es decir, $B(r_t,t,T)$. Se considerará un portafolio formado por dos bonos con vencimientos diferentes cuyos precios están dados por $B_1(r_t,t,T_1)$ y $B_2(r_t,t,T_2)$ para un vencimiento en

[5] Una exposición amplia puede ser encontrada en Duffie [2].

T_1 y T_2 respectivamente. Entonces el valor de un portafolio conformado por estos dos bonos está dado por:

$$\Pi_t = w_1 B_1 + w_2 B_2 \ ,$$

donde w_1 y w_2 son las cantidades del bono 1 y 2 en el portafolio respectivamente.

Entonces el cambio en el portafolio debido únicamente a fluctuaciones propias del mercado y no al rebalanceo del portafolio está dado por

$$\mathrm{d}\Pi_t = w_1 \mathrm{d}B_1 + w_2 \mathrm{d}B_2 \ , \tag{1.16}$$

donde la dinámica del precio de un bono cupón cero depende de la dinámica de la tasa corta dada en (1.14).

Por el lema de Itô [6] se tiene que

$$\mathrm{d}B_i = \left[\frac{\partial B_i}{\partial t} + \mu(r_t,t)\frac{\partial B_i}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 B_i}{\partial r_t^2}\right]\mathrm{d}t + \sigma(r_t,t)\frac{\partial B_i}{\partial r_t}\mathrm{d}W_t \qquad i = 1,2 \ ,$$

si

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{\frac{\partial B_i}{\partial t} + \mu(r_t,t)\frac{\partial B_i}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 B_i}{\partial r_t^2}}{B_1} \qquad i = 1,2 \\ \sigma_i &= \frac{\partial B_i}{\partial r_t}\frac{1}{B_i}\sigma(r_t,t) \quad i = 1,2 \end{aligned} \ . \tag{1.17}$$

Al sustituir lo anterior en (1.16):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi_t =& w_1\left[\mu_1 \mathrm{d}t B_1 + \sigma_1 B_1\right] + w_2\left[\mu_2 \mathrm{d}t B_2 + \sigma_2 B_2\right] \\ =& \left[w_1\mu_1 B_1 + w_2\mu_2 B_2\right]\mathrm{d}t + \left[w_1\sigma_1 B_1 + w_2\sigma_2 B_2\right]\mathrm{d}W_t \end{aligned} \ , \tag{1.18}$$

para administrar el riesgo se eligen:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\sigma_2}{B_1(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ w_2 &= -\frac{\sigma_1}{B_2(\sigma_2 - \sigma_1)} \end{aligned} \ . \tag{1.19}$$

Al sustituir lo anterior en (1.18) se obtiene lo siguiente

$$\mathrm{d}\Pi_t = \frac{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\mathrm{d}t \ , \tag{1.20}$$

y el valor del portafolio bajo la elección de w_1 y w_2 proporcionados en (1.19) es:

$$\begin{aligned} \Pi_t =& w_1 B_1 + w_2 B_2 = \frac{\sigma_2}{B_1(\sigma_2 - \sigma_1)}B_1 - \frac{\sigma_1}{B_2(\sigma_2 - \sigma_1)}B_2 \\ =& \frac{B_1 B_2 \sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1) - B_1 B_2 \sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1)}{B_1 B_2(\sigma_2 - \sigma_1)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = 1 \end{aligned} \ .$$

[6] Para consultar sobre cálculo estocástico, en particular el lema de Itô, ver Karatzas [7].

De esta forma, bajo la elección de w_1 y w_2 dados por (1.19) se tiene que el portafolio $\Pi_t = 1$ es libre de riesgo, por lo que si se deposita la cantidad de 1 unidad monetaria en una cuenta bancaria -la cual es libre de riesgo- se tiene que el portafolio Π_t^r el cual consiste en depositar 1 unidad monetaria en una cuenta bancaria, y si el rendimiento libre de riesgo es r, entonces el cambio de la cuenta bancaria en el tiempo dt está dado por

$$\mathrm{d}\Pi_t^r = r\mathrm{d}t \ . \tag{1.21}$$

Como el portafolio obtenido por (1.19) es libre de riesgo se tiene que (1.20) y (1.21) deben ser iguales o de otra forma habrá oportunidades de arbitraje. Al igualar (1.20) y (1.21) se tiene que

$$r\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Pi_t^r = \mathrm{d}\Pi_t = \frac{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\mathrm{d}t \ ,$$

es decir

$$\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1 = r(\sigma_2 - \sigma_1) \ ,$$

de donde

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}.$$

Como los cocientes anteriores dependen de B_i y este precio a su vez depende del plazo T_i, y como ambos cocientes son iguales para todo valor del plazo T_i se deduce que estos cocientes son independientes del plazo T_i ya que esta igualdad es la misma para cualquier valor de T_i. Cabe mencionar que es la única variable en estos cocientes. Entonces los cocientes anteriores solo dependen de r_t y t, es decir, son funciones de estas variables por lo que

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda(r_t, t) \ , \tag{1.22}$$

y a la cantidad $\lambda(r_t, t)$ se le conoce como el premio al riesgo de mercado estandarizado por la volatilidad. Por (1.17) la expresión anterior es equivalente a

$$\lambda(r_t, t) = \frac{\frac{\frac{\partial B_i}{\partial t} + \mu(r_t,t)\frac{\partial B_i}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 B_i}{\partial r_t^2}}{B_1} - r}{\frac{\partial B_i}{\partial r_t}\frac{1}{B_i}\sigma(r_t, t)} \ , \quad i = 1, 2$$

Como los cocientes en (1.22) no dependen del plazo entonces en la expresión anterior se puede omitir el subíndice del bono, lo cual indica que no importa cual bono sea, pues el premio de riesgo del mercado no depende de un bono en particular, por lo que

$$\lambda(r_t, t) = \frac{\frac{\frac{\partial B}{\partial t} + \mu(r_t,t)\frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}}{B} - r}{\frac{\partial B}{\partial r_t}\frac{1}{B}\sigma(r_t, t)} \ .$$

La expresión anterior es equivalente a

$$\lambda(r_t, t) = \frac{\frac{\frac{\partial B}{\partial t} + \mu(r_t,t)\frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - rB}{B}}{\frac{\partial B}{\partial r_t}\frac{1}{B}\sigma(r_t, t),} \ ,$$

y así,

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mu(r_t, t)\frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - rB = \frac{\partial B}{\partial r_t}\sigma(r_t, t)\lambda(r_t, t) \ ,$$

por lo que

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t}\left[\mu(r_t, t) - \sigma(r_t, t)\lambda(r_t, t)\right] + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - rB = 0 \ . \tag{1.23}$$

Pero

$$\lambda(r_t, t) = \mu_i - r \ \sigma_i \ ,$$

y al suponer neutralidad al riesgo se tiene que

$$\mu_i = r \ ,$$

lo que implica que

$$\lambda(r_t, t) = 0 \ .$$

Al sustituir lo anterior en (1.23) se tiene que

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t}\mu(r_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - rB = 0 \ , \tag{1.24}$$

y como el precio de un bono al vencimiento es el valor nominal (en este caso se hizó la suposición de que el bono pagaba 1 unidad monetaria al vencimiento), se tiene que

$$B(T, T) = 1 \ , \tag{1.25}$$

la cual es la condición de frontera a la ecuación diferencial (1.24). De esta forma la ecuación diferencial parcial representada por (1.24) fue obtenida bajo argumentos de equilibrio general contemplando el comportamiento de los agentes, por lo que bajo una dinamica exógena dada por (1.14) de la tasa corta cualquier bono cupón cero debe satisfacer la ecuación diferencial parcial obtenida en (1.24) cuya condición de frontera está dada por (1.25). Una vez obtenido el precio del bono se puede obtener la estructura de plazos a partir de la relación dada por (1.10). En los subsecuentes capítulos se presentarán modelos específicos para la dinámica de la tasa corta dada por (1.14) con el fin de obtener el precio del bono y de esta forma la estructura de plazos para una dinámica de la tasa corta específica.

CAPÍTULO 2
MODELOS DE EQUILIBRIO (MODELOS DE ARBITRAJE)

2.1 Modelo de Merton

Se presenta un modelo básico sobre el comportamiento de la tasa spot. A través de este modelo se obtiene el precio de un bono a un plazo dado, como solución de la ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden dada por (1.24). Una vez obtenido el precio del bono se calculará la estructura de plazos -curva de rendimientos-.

El modelo de Merton [11] es uno de los modelos llamados de equilibrio general debido al uso de condiciones de arbitraje en la determinación de la ecuación diferencial que conduce a calcular el precio del bono [7].

La dinámica del modelo presenta tanto una tendencia como volatilidad de la tasa spot constante.
La dinámica de la tasa spot del modelo de Merton tiene la siguiente forma

$$\mathrm{d}r_t = b\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ , \qquad \mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}\left(0, \mathrm{d}t\right) \ , \tag{2.1.1}$$

donde b, $\sigma > 0$ son constantes conocidas, y r_t es la tasa spot. Note que debido a que $\mathrm{d}W_t$ es un movimiento Browniano, entonces se sigue que

$$\mathrm{d}r_t \sim \mathcal{N}\left(b\mathrm{d}t, \sigma^2 \mathrm{d}t\right) \ .$$

2.1.1 Enfoque de ecuaciones diferenciales

De acuerdo (1.26) la ecuación diferencial para un bono cupón cero con valor nominal de una unidad monetaria, cuya dinámica de la tasa spot está dada por (2.1.1) es

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} b + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \sigma^2 - r_t B = 0 \ , \tag{2.1.2}$$

[7] En su artículo "Theory of rational option pricing", en la nota 45 propuso un modelo para explicar la dinámica de la tasa corta.

cuya solución final está dada por

$$B(T,T) = 1 \ .$$

Debido a que la ecuación diferencial parcial parabólica anterior no presenta derivadas parciales cruzadas entonces se propone como un posible candidato para ser solución a una ecuación de la forma

$$B(t,T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \ .$$

Pero como la condición final de la ecuacion diferencial establece que $B(T,T) = 1$, para satisfacer dicha condición se tendrá que:

$$A(T,T) = D(T,T) = 0 \ .$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right] \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -BD \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= BD^2 \end{aligned} \ .$$

Al sustituir lo anterior en (2.1.2)

$$B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right] - BDb + \frac{1}{2} BD^2\sigma^2 - r_t B = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} - Db + \frac{1}{2} D^2\sigma^2 - r_t = 0 \ ,$$

se obtiene que

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} - Db + \frac{1}{2} D^2\sigma^2\right) - \left(\frac{\partial D}{\partial t} + 1\right) r_t = 0 \ .$$

La expresión anterior es válida para cualquier valor de la tasa spot r_t, por lo que para que la ecuación anterior sea cierta se impondrá que

$$\frac{\partial D}{\partial t} + 1 = 0 \ , \qquad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - Db + \frac{1}{2} D^2\sigma^2 = 0 \ , \qquad (2.1.4)$$

De esta forma el problema original que consistía en resolver una ecuación diferencial parabólica se reduce en resolver un sistema de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden lineales en t. Al resolver (2.1.3) se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -1 \ ,$$

$$\mathrm{d}D = -\mathrm{d}t \ ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \mathrm{d}u &= - \int_{T}^{t} \mathrm{d}u \\ &= - (t - T) \\ &= T - t \end{aligned} \ ,$$

pero $D(T,T) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} T - t &= \int_{0}^{D(t,T)} \mathrm{d}u \\ &= D(t,T) \end{aligned} \ ,$$

y así, se obtiene que

$$D(t,T) = T - t \ . \tag{2.1.5}$$

Al sustituir (2.1.5) en (2.1.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= Db - \frac{1}{2} D^2 \sigma^2 \\ &= (T - t)b - \frac{1}{2}(T - t)^2 \sigma^2 \end{aligned} \ ,$$

por lo que

$$\mathrm{d}A = \left[(T - t)b - \frac{1}{2}(T - t)^2 \sigma^2 \right] \mathrm{d}t \ ,$$

$$\int_{A(T,T)}^{A(t,T)} \mathrm{d}u = \int_{T}^{t} \left[(T - u)b - \frac{1}{2}(T - u)^2 \sigma^2 \right] \mathrm{d}u \ ,$$

de donde se obtiene que

$$A(t,T) - A(T,T) = \int_{T}^{t} (T - u)b\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{T}^{t} (T - u)^2 \mathrm{d}u \ ,$$

pero $A(T,T) = 0$,

$$\begin{aligned} A(t,T) &= b\int_T^t (T-u)\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\sigma^2\int_T^t (T-u)^2\mathrm{d}u \\ &= b\left[-\frac{(T-u)^2}{2}\right]_T^t - \frac{1}{2}\sigma^2\left[-\frac{(T-u)^3}{3}\right]_T^t \\ &= \frac{-b}{2}\left[(T-t)^2 - (T-T)^2\right] + \frac{1}{6}\sigma^2\left[(T-t)^3 - (T-T)^3\right] \end{aligned} ,$$

por lo que

$$A(t,T) = -\frac{b}{2}(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 \ , \tag{2.1.6}$$

y así, el precio del bono está dado por:

$$B(t,T) = e^{-\frac{b}{2}(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 - r_t(T-t)} \ . \tag{2.1.7}$$

2.1.2 Enfoque Probabilista

A continuación se calculará el precio de un bono cupón cero con valor nominal de una unidad monetaria, bajo un enfoque probabilista el cual está basado en calcular el siguiente valor esperado:

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \ ,$$

donde r_s es la tasa corta, y $\mathcal{F}_t$ es la información al tiempo t.

El precio del bono puede ser calculado a través de la ecuación anterior ya que la estructura de plazos puede ser definida como el promedio de la tasa spot en el intervalo de tiempo $[t,T]$, es decir si $R(t,T)$ es la tasa de interés en t a un plazo T entonces:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s\mathrm{d}s \ ,$$

y así

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \mathrm{E}\left[e^{-R(t,T)(T-t)} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathrm{E}\left[e^{-\left[\frac{1}{T-t}\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right](T-t)} \mid \mathcal{F}_t\right] \end{aligned} ,$$

lo cua1 es equivalente a

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \ .$$

Debido a que el cálculo del precio del bono bajo este enfoque requiere calcular un valor esperado, en el cual interviene la tasa spot, se determinará la distribución de probabilidad de la tasa spot, y debido a que la dinámica de la tasa corta está dada por

$$\mathrm{d}r_t = b\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ ,$$

se tiene que

$$\int_0^t \mathrm{d}r_u = \int_0^t b\mathrm{d}u + \sigma \int_0^t \mathrm{d}W_u \ ,$$

de donde

$$r_t - r_0 = b(t-0) + \sigma(W_t - W_o) \ ,$$

y así, se obtiene que

$$r_t = r_0 + bt + \sigma W_t, \quad W_t \sim \mathcal{N}(0,t) \ . \tag{2.1.9}$$

De la igualdad anterior se obtiene que $r_t \mid r_0$ tiene una distribución normal, se calculará su media y varianza para conocer la distribución completa de $r_t \mid r_0$. La esperanza y varianza condicional de (2.1.9) están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[r_t \mid r_0\right] =& r_0 + bt \\ \mathrm{Var}\left[r_t \mid r_0\right] =& \sigma^2 t \end{aligned} \ ,$$

por lo que

$$r_t \mid r_0 \sim \mathcal{N}\left(r_0 + bt, \sigma^2 t\right) \ .$$

Lo anterior fue para determinar la distribución de probabilidad de $r_t \mid r_0$. De la misma forma se puede calcular la distribución de $r_s \mid r_t$, con $s > t$, es decir,

$$\mathrm{d}r_s = b\mathrm{d}s + \sigma \mathrm{d}W_s \ ,$$

si $s > t$ se tiene que

$$\int_t^s \mathrm{d}r_u = \int_t^s b\mathrm{d}u + \sigma \int_t^s \mathrm{d}W_u \ ,$$

de donde

$$r_s - r_t = b(s-t) + \sigma(W_s - W_t) \ ,$$

y así, si $s > t$ se obtiene que

$$r_s = r_t + b(s-t) + \sigma(W_s - W_t), \quad W_s - W_t \sim \mathcal{N}\left(0, s-t\right) \ . \tag{2.1.10}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[r_s \mid r_t\right] =& r_t + b(s-t) \\ \mathrm{Var}\left[r_s \mid r_t\right] =& \sigma^2(s-t) \end{aligned} \ . \tag{2.1.11}$$

Entonces por (2.1.10) se tiene que $r_s \mid r_t$ tiene una distribución normal con parámetros dados por (2.1.11), es decir

$$r_s \mid r_t \sim \mathcal{N}\left(r_t + b(s-t), \sigma^2(s-t)\right) \quad s > t \ . \tag{2.1.12}$$

Sea

$$I(t,T) = \int_t^T r_s \mathrm{d}s \ ,$$

entonces por (2.1.10) se sigue que $I(t,T)$ tiene una distribución normal.

Por otro lado, si X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2, entonces su función generadora de momentos está dada por

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = e^{t\mathrm{E}[X] + \frac{t^2}{2}\mathrm{Var}[X]} \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R} \ . \tag{2.1.13}$$

Es importante hacer notar, que debido a que $I(t,T)$ tiene una distribución normal y como el precio del bono bajo este enfoque está dado por

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-I(t,T)} \mid \mathcal{F}_t\right] \ ,$$

se tiene que el precio del bono es la función generadora de momentos de la variable aleatoria $I(t,T)$ valuada en $t=-1$, es decir

$$B(t,T) = M_{I(t,T)}(-1) \ .$$

Debido a que $I(t,T)$ se distribuye normal, al sustituir (2.1.13) en la expresión anterior se tiene que el precio del bono en términos de la función generadora de momentos de $I(t,T)$ queda determinado por

$$B(t,T) = e^{-\mathrm{E}[I(t,T)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}[I(t,T)]} \ . \tag{2.1.14}$$

De lo anterior se concluye que para determinar el precio del bono únicamente es necesario calcular la esperanza y varianza de $I(t,T)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{E}\left[\int_t^T r_s \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_t^T \left[r_t + b(s-t) + \sigma(W_s - W_t)\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_t^T r_t \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] + b\mathrm{E}\left[\int_t^T (s-t)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&+ \sigma\mathrm{E}\left[\int_t^T (W_s - W_t)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_t^T r_t \mathrm{d}s + b\int_t^T (s-t)\mathrm{d}s \\
&+ \sigma \int_t^T \mathrm{E}\left[(W_s - W_t) \mid \mathcal{F}_t\right] \mathrm{d}s \\
&= r_t(T-t) + \frac{b}{2}(T-t)^2 + \sigma \int_t^T \mathrm{E}\left[(W_s - W_t) \mid \mathcal{F}_t\right] \mathrm{d}s
\end{aligned} \ ,$$

pero como $W_s - W_t$ se distribuye $\mathcal{N}(0, s-t)$, entonces

$$\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] = r_t(T-t) + \frac{b}{2}(T-t)^2 + \sigma \int_t^T 0\mathrm{d}s \ ,$$

por lo tanto

$$\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] = r_t(T-t) + \frac{b}{2}(T-t)^2 \ . \tag{2.1.15}$$

Al calcular la varianza se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{Var}\left[\int_t^T r_s \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[r_t + b(s-t) + \sigma(W_s - W_t)\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[r_t + b(s-t)\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&+ \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T (W_s - W_t)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T (W_s - W_t)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T W_s \mathrm{d}s - \int_t^T W_t \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T W_s \mathrm{d}s - W_t(T-t) \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} \ .$$

Por otro lado al integrar por partes a $\int_t^T W_s \mathrm{d}s$, con

$$u = W_s \quad \text{y} \quad \mathrm{d}v = 1 \qquad \text{lo que implica que} \quad \mathrm{d}u = dW_s \quad v = s$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_t^T W_s \mathrm{d}s &= W_s s \mid_t^T - \int_t^T s \mathrm{d}W_s \\
&= W_T T - W_t t - \int_t^T s \mathrm{d}W_s
\end{aligned} \ ,$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[\int_t^T W_s \mathrm{d}s - W_t(T-t) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[W_T T - W_t t - \int_t^T s \mathrm{d}W_s - W_t(T-t) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[W_T T - W_t T - \int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \mathrm{Var}\left[T(W_T - W_t) - \int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 \left\{ \mathrm{Var}\left[T(W_T - W_t) \mid \mathcal{F}_t\right] + \mathrm{Var}\left[\int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \right. \\
&\quad \left. - 2\mathrm{Cov}\left[T(W_T - W_t), \int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \right\} \\
&= \sigma^2 \left\{ T^2 \mathrm{Var}\left[(W_T - W_t) \mid \mathcal{F}_t\right] + \mathrm{Var}\left[\int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \right. \\
&\quad \left. - 2T\mathrm{Cov}\left[(W_T - W_t), \int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \right\}
\end{aligned},
$$

pero

$$
W_T - W_t = \int_t^T \mathrm{d}W_s \ ,
$$

por lo que al sustituir la ecuación anterior en la varianza de $I(t,T)$, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] =& \sigma^2 \left\{ T^2 \mathrm{Var}\left[(W_T - W_t) \mid \mathcal{F}_t\right] + \mathrm{Var}\left[\int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \right. \\
& \left. - 2T\mathrm{Cov}\left[\int_t^T \mathrm{d}W_s, \int_t^T s \mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] \right\}
\end{aligned},
$$

y como

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left[\int_t^T g(s) \mathrm{d}W_s, \int_t^T f(s) \mathrm{d}W_s\right] &= \int_t^T g(s) f(s) \mathrm{d}s \\
\mathrm{Var}\left[\int_t^T g(s) \mathrm{d}W_s\right] &= \int_t^T g^2(s) \mathrm{d}s
\end{aligned},
$$

por lo que

$$\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right]=\sigma^2\left\{T^2\mathrm{Var}\left[(W_T-W_t)\mid\mathcal{F}_t\right]+\int_t^T s^2\mathrm{d}s-2T\int_t^T s\mathrm{d}s\right\},$$

pero $W_T - W_t \sim \mathcal{N}(0, T-t)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right]&=\sigma^2\left\{T^2(T-t)+\frac{1}{3}(T^3-t^3)-2T\frac{1}{2}(T^2-t^2)\right\}\\&=\sigma^2\left\{T^3-tT^2+\frac{1}{3}(T^3-t^3)-(T^3-Tt^2)\right\}\\&=\sigma^2\left\{\frac{3T^3-3T^2t+T^3-t^3-3T^3+3Tt^2}{3}\right\}\\&=\sigma^2\left\{\frac{T^3-3T^2t+3Tt^2-t^3}{3}\right\}\end{aligned},$$

por lo tanto:

$$\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right]=\frac{\sigma^2}{3}(T-t)^3. \tag{2.1.16}$$

Al sustituir (2.1.15) y (2.1.16) en (2.1.14) el precio del bono queda determinado por

$$\begin{aligned}B(t,T)&=e^{-\mathrm{E}[I(t,T)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}[I(t,T)]}\\&=e^{-r_t(T-t)-\frac{b}{2}(T-t)^2+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{3}(T-t)^3}\end{aligned},$$

por lo tanto el precio del bono es

$$B(t,T)=e^{-\frac{b}{2}(T-t)^2+\frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3-r_t(T-t)},$$

el cual es el mismo que fue obtenido bajo el enfoque de ecuaciones diferenciales.

2.1.3 Curva de rendimientos (Estructura de Plazos)

Enseguida, se determinará la curva de rendimientos, también llamada estructura de plazos de la tasa de interés, a partir del precio de un bono cupón cero, que en este caso es el precio de un bono cupón cero bajo la dinámica de la tasa corta del modelo de Merton.

Para calcular la estructura de plazos se supondrá que $R(t,T)$ es la tasa de interés de t a T, por lo que el precio de un bono cupón cero está dado por

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ ,$$

por lo que

$$\begin{aligned} R(t,T) &= -\frac{ln\left[B(t,T)\right]}{T-t} \\ &= -\frac{ln\left[e^{A(t,T)-r_t D(t,T)}\right]}{T-t} \ , \\ &= \frac{r_t D(t,T) - A(t,T)}{T-t} \end{aligned}$$

pero por (2.1.5) y (2.1.6) se tiene que

$$R(t,T) = \frac{r_t(T-t) + \frac{b}{2}(T-t)^2 - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3}{T-t} \ ,$$

y así

$$R(t,T) = r_t + \frac{b}{2}(T-t) - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^2 \ . \qquad (2.1.17)$$

Note que la estructura de plazos en el modelo de Merton -la cual está dada por (2.1.17)- es una función cuadrática en el plazo T, por lo que es una función creciente en algún intervalo de T y decreciente para el complemento del intervalo. Para conocer las propiedades de $R(t,T)$ se calcularán sus puntos críticos, así como se verá la concavidad de $R(t,T)$:

$$\frac{\partial R}{\partial T} = \frac{b}{2} - \frac{1}{3}\sigma^2(T-t) = 0 \ ,$$

de donde se obtiene que la estructura de plazos tiene un punto crítico en

$$T^* = t + \frac{3}{2}\frac{b}{\sigma^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial T^2} = -\frac{1}{3}\sigma^2 < 0 \ ,$$

por lo que $R(t, T)$ es cóncava y alcanza su máximo en T^*.

El ánalisis anterior muestra que la estructura de plazos es creciente hasta T^*, y después decrece, por lo que puede llegar a tomar valores negativos lo cual se puede observar en la dinámica de la tasa corta, ya que $\mathrm{d}r_t \sim \mathcal{N}\left[b\mathrm{d}t, \sigma\mathrm{d}t\right]$.

De lo anterior se puede concluir que el principal inconveniente de este modelo es que la estructura de plazos puede llegar a tomar valores negativos, además el suponer que la tendencia de la tasa corta es constante no se observa en la práctica. Se observa que la tasa corta presenta reversión a la media hacia un valor constante de largo plazo, es por ello que se presentará el siguiente modelo -Modelo de Vasicek- que contempla el hecho de la reversión a la media de la tasa corta.

2.2 Modelo de Vasicek

En la práctica se observa que las tasas de interés no crecen indefinidamente, sino que se observa que presentan reversión de la media a un valor constante, lo cual es una propiedad deseable en el análisis de la dinámica de las tasas de interés.

Es por ello que se presenta un modelo donde la dinámica de la tasa corta presenta reversión a la media, este modelo es conocido como el modelo de Vasicek [15]. Cabe destacar que este modelo es muy útil debido a sus propiedades para valuar productos derivados de tasas de interés. El modelo de Vasicek tiene la siguiente forma

$$\mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ , \tag{2.2.1}$$

donde: a, b y $\sigma > 0$ son cantidades constantes conocidas, y $\mathrm{d}W_t$ es un movimiento Browniano estándar.

2.2.1 Enfoque de ecuaciones diferenciales

En esta sección bajo el supuesto de que la tasa corta sigue la dinámica descrita en (2.2.1), se calculará el precio de un bono cupón cero mediante el enfoque de ecuaciones diferenciales, el cual consiste en obtener el precio del bono a través de la ecuación diferencial (1.24) obtenida en el capítulo 1. Por lo que la ecuación diferencial que debe cumplir el precio de un bono cupón cero cuya dinámica de la tasa corta está dada por (2.2.1) es:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + a(b - r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}\sigma^2 - r_t B = 0 \ , \tag{2.2.2}$$

con condición final:

$$B(T, T) = 1 \ .$$

De lo anterior se puede notar que la ecuación diferencial parabólica anterior no presenta derivadas parciales cruzadas -como en el modelo de Merton-, por lo que se propone como solución a una ecuación de la forma:

$$B(t, T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \ ,$$

y como la solución final establece que $B(T, T) = 1$, entonces se tiene que

$$A(T, T) = D(T, T) = 0 \ . \tag{2.2.3}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right] \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -BD \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= BD^2 \end{aligned} \ ,$$

al sustituir las derivadas anteriores en la ecuación diferencial se tiene que

$$B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right] - BDa(b - r_t) + \frac{1}{2}BD^2\sigma^2 - r_t B = 0 \ ,$$

y así,

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} - Da(b - r_t) + \frac{1}{2}D^2\sigma^2 - r_t = 0 \ ,$$

de donde se obtiene:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD\right) - r_t\left(\frac{\partial D}{\partial t} - aD + 1\right) = 0 \ .$$

Debido a que la expresión anterior es válida para todo valor de la tasa corta, entonces se impondrán las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD &= 0 \\ \frac{\partial D}{\partial t} - aD + 1 &= 0 \end{aligned} \ ,$$

y así, de las expresiones anteriores se sigue que

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + abD \ , \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1 \ . \tag{2.2.5}$$

De esta forma se ha transformado el problema original que consistía en resolver una ecuación diferencial parabólica, en resolver un sistema de ecuaciones lineales en t. Por lo que al resolver (2.2.5) se tiene que

$$D(t,T) = D(T,T)e^{a(t-T)} - e^{a(t-T)}\int_T^t e^{-a(s-T)}\mathrm{d}s \ ,$$

pero como $D(T,T) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
D(t,T) &= -e^{a(t-T)}\int_T^t e^{-a(s-T)}\mathrm{d}s \\
&= -e^{a(t-T)}e^{aT}\int_T^t e^{-as}\mathrm{d}s \\
&= -e^{at}\left[-\frac{1}{a}e^{-as}\right]_T^t \qquad\qquad , \\
&= \frac{1}{a}e^{at}\left[e^{-as}\right]_T^t \\
&= \frac{1}{a}e^{at}\left[e^{-at} - e^{-aT}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[1 - e^{-aT+at)}\right]
\end{aligned}$$

y de este modo se llega a que

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \ . \tag{2.2.6}$$

Al sustituir la expresión anterior en (2.2.4) se tiene que

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2\left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right]^2 + ab\left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right] \ ,$$

por lo que

$$\int_{A(T,T)}^{A(t,T)} \mathrm{d}u = \int_T^t \left[b\left(1 - e^{-a(T-s)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left(1 - e^{-a(T-s)}\right)^2\right]\mathrm{d}s \ ,$$

pero $A(T,T)=0$, entonces

$$\int_0^{A(t,T)} \mathrm{d}u = \int_T^t \left[b\left(1-e^{-a(T-s)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left(1-e^{-a(T-s)}\right)^2 \right] \mathrm{d}s \ ,$$

y así, se obtiene

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= \int_T^t \left[b\left(1-e^{-a(T-s)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left(1-e^{-a(T-s)}\right)^2 \right] \mathrm{d}s \\
&= b\int_T^t \mathrm{d}s - b\int_T^t e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\int_T^t \left(1-e^{-a(T-s)}\right)^2 \mathrm{d}s \\
&= b(t-T) - b\left[\frac{1}{a}e^{-a(T-s)}\right]_T^t - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\int_T^t \left[1-2e^{-a(T-s)}+e^{-2a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\
&= b(t-T) - \frac{b}{a}\left[e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-T)}\right] \\
&- \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left\{(t-T) - 2\left[\frac{1}{a}e^{-a(T-s)}\right]_T^t + \frac{1}{2a}\left[e^{-2a(T-s)}\right]_T^t\right\} \\
&= b(t-T) - \frac{b}{a}\left[e^{-a(T-t)} - 1\right] \\
&- \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left\{(t-T) - \frac{2}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right] + \frac{1}{2a}\left[e^{-2a(T-t)}-1\right]\right\} \\
&= b(t-T) + b\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right] \\
&- \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left\{(t-T) + 2\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right] + \frac{1}{2a}\left[e^{-2a(T-t)}-1\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Al sustituir (2.2.6) se tiene que

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= b(t-T) + bD - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left\{(t-T) + 2D + \frac{1}{2a}\left[e^{-2a(T-t)}-1\right]\right\} \\
&= b(t-T) + bD - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}(t-T) - \frac{\sigma^2}{a^2}D - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[e^{-2a(T-t)}-1\right]
\end{aligned} ,$$

completando el cuadrado

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= (t-T)\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + bD - \frac{\sigma^2}{a^2}D \\
&- \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[1-e^{-a(T-t)}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right] \\
&= (t-T)\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + bD - \frac{\sigma^2}{a^2}D \\
&- \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]
\end{aligned} .$$

Al sustituir (2.2.6) lo anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= (t-T)\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + bD - \frac{\sigma^2}{a^2}D - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}D \\
&= (t-T)\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + bD - \frac{\sigma^2}{a^2}D + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}D - \frac{\sigma^2}{4a}D^2 \\
&= (t-T)\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + bD - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}D - \frac{\sigma^2 D^2}{4a} \\
&= (t-T)\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] - \frac{\sigma^2 D^2}{4a} \\
&= [(t-T)+D]\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] - \frac{\sigma^2 D^2}{4a} \\
&= [(t-T)+D]\left[\frac{a^2 b}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] - \frac{\sigma^2 D^2}{4a}
\end{aligned} ,$$

por lo tanto:

$$A(t,T) = \frac{1}{a^2}\left[D - T + t\right]\left[a^2 b - \frac{1}{2}\sigma^2\right] - \frac{\sigma^2 D^2}{4a} \ . \qquad (2.2.7).$$

Al sustituir (2.2.6) y (2.2.7) en

$$B(t,T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \ ,$$

el precio del bono está dado por

$$B(t,T) = e^{\frac{1}{a^2}[D(t,T)-T+t]\left[a^2 b - \frac{1}{2}\sigma^2\right] - \frac{\sigma^2 D^2(t,T)}{4a} - r_t D(t,T)} \ ,$$

con

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \ .$$

2.2.2 Enfoque Probabilista

A continuación, se presenta un enfoque alternativo al de ecuaciones diferenciales para calcular el precio de un bono cupón cero, el cual consiste en obtener el siguiente valor esperado

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \ ,$$

con r_s es la tasa corta, y $\mathcal{F}_t$ es la información al tiempo t. La dinámica de la tasa corta está dada por

$$\mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ .$$

Antes de calcular el precio del bono se obtendrá la distribución de probabilidad de la tasa corta, para después usarla en el cálculo del precio. Para ello considere el proceso X_t, el cual está dado por

$$X_t = r_t - b \ ,$$

lo cual lleva a

$$r_t = X_t + b \ , \tag{2.2.8}$$

entonces

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}r_t \ ,$$

y así,

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ .$$

Utilizando (2.2.8) se tiene que

$$\mathrm{d}X_t = a(b - X_t - b)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t = -aX_t\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \ . \tag{2.2.9}$$

Se puede notar que el modelo de Vasicek se reescribió como un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck mediante la transformación $X_t = r_t - b$.

Sea Y_t un proceso definido por

$$Y_t = X_t e^{at} \ , \tag{2.2.10}$$

por lo que

$$\mathrm{d}Y_t = e^{at}\mathrm{d}X_t + ae^{at}X_t\mathrm{d}t \ .$$

Al sustituir (2.2.9) en la expresión anterior se tiene que

$$\mathrm{d}Y_t = e^{at}\left[-aX_t\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right] + ae^{at}X_t\mathrm{d}t = e^{at}\sigma \mathrm{d}W_t \ .$$

Si $s > t$, se tiene que

$$Y_s - Y_t = \int_t^s \mathrm{d}Y_u = \int_t^s \sigma e^{au}\mathrm{d}W_u \ ,$$

de donde

$$Y_s = Y_t + \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \ ,$$

es decir, Y_s depende de $\int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u$. Al sustituir (2.2.10) en la expresión anterior se tiene que

$$X_s e^{as} = X_t e^{at} + \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \ ,$$

de lo anterior se obtiene que

$$X_s = e^{-as} X_t e^{at} + e^{-as} \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \ .$$

Y al sustituir (2.2.8) en la expresión anterior se tiene que

$$r_s - b = e^{-as} \left[r_t - b \right] e^{at} + e^{-as} \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \ ,$$

de donde

$$r_s = b + \left[r_t - b \right] e^{-a(s-t)} + e^{-as} \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \ ,$$

es decir

$$r_s = r_t e^{-a(s-t)} + b \left[1 - e^{-a(s-t)} \right] + e^{-as} \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \ . \tag{2.2.11}$$

Como $\mathrm{d}W_u \sim \mathcal{N}\left[0, \mathrm{d}u\right]$, entonces r_s se distribuye normal, y para calcular los parámetros de la distribución de probabilidad de r_s, enseguida se calcula el valor esperado y varianza de r_s.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathrm{E}\left[r_t e^{-a(s-t)} + b \left[1 - e^{-a(s-t)} \right] + e^{-as} \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= r_t e^{-a(s-t)} + b \left[1 - e^{-a(s-t)} \right] + e^{-as} \sigma \int_t^s e^{au} \mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t \right] \quad , \\ &= r_t e^{-a(s-t)} + b \left[1 - e^{-a(s-t)} \right] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right] = r_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right] \ . \tag{2.2.12}$$

Note que si $s \to \infty$, entonces

$$\mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right] \to b \ .$$

Al calcular la varianza

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{Var}\left[r_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right] + e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{Var}\left[e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\mathrm{Var}\left[\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} \quad ,$$

pero

$$\mathrm{var}\left[\int_t^T g(s)\mathrm{d}W_s\right] = \int_t^T g^2(s)\mathrm{d}s \ ,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sigma^2 e^{-2as}\mathrm{Var}\left[\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\int_t^s e^{2au}\mathrm{d}u \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\left[\frac{1}{2a}e^{2au}\right]_t^s \\
&= \sigma^2 e^{-2as}\frac{1}{2a}\left[e^{2as} - e^{2at}\right] \\
&= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2as}e^{2at}}{2a}
\end{aligned} \quad ,$$

por lo tanto

$$\mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right] = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2a(s-t)}}{2a} \ . \tag{2.2.13}$$

Por lo que

$$r_s \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right], \mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \ ,$$

donde $\mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right]$ y $\mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right]$ están dadas por (2.2.12) y (2.2.13) respectivamente.

Sea

$$I(t,T) = \int_t^T r_s \mathrm{d}s \ ,$$

con r_s definida en (2.2.11). Debido a que

$$r_s \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathrm{E}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right], \mathrm{Var}\left[r_s \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \ ,$$

entonces

$$I(t,T) \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right], \mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \ .$$

Recordando que la función generadora de momentos de una variable aleatoria X que se distribuye normal está dada por

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = e^{t\mathrm{E}[X] + \frac{t^2}{2}\mathrm{Var}[X]} \quad \forall \ \ t \in \mathrm{I\!R} \ ,$$

se tiene que el precio del bono cupón cero está dado por la función generadora de momentos de $I(t,T)$ valuada en $t=-1$, es decir

$$B(t,T) = M_{I(t,T)}(-1) \ ,$$

pero como $I(t,T)$ se distribuye normal, entonces se tiene que el precio del bono en términos de la función generadora de momentos de $I(t,T)$ queda determinado por

$$B(t,T) = e^{-\mathrm{E}[I(t,T)\ |\ \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}[I(t,T)\ |\ \mathcal{F}_t]}\ , \tag{2.2.14}$$

es decir, de la expresión anterior se concluye que para calcular el precio del bono solo basta calcular $\mathrm{E}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right]$ y $\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right]$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{E}\left[\int_t^T r_s \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_t^T \left[r_t e^{-a(s-t)} + b\left[1 - e^{-a(s-t)}\right]\right.\right. \\
&\left.\left. +\ e^{-as}\sigma \int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u\right] \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_t^T r_t e^{-a(s-t)}\mathrm{d}s + b\int_t^T \mathrm{d}s - b\int_t^T e^{-a(s-t)}\mathrm{d}s \\
&+ e^{-as}\sigma\int_t^T\int_t^s e^{au}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right]\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{a}r_t\left[e^{-a(s-t)}\right]_t^T + b(T-t) + \frac{b}{a}\left[e^{-a(s-t)}\right]_t^T + 0 \\
&= -\frac{r_t}{a}\left[e^{-a(T-t)} - e^{-a(t-t)}\right] + b(T-t) \\
&+ \frac{b}{a}\left[e^{-a(T-t)} - e^{-a(t-t)}\right] \\
&= -\frac{r_t}{a}\left[e^{-a(T-t)} - 1\right] + b(T-t) + \frac{b}{a}\left[e^{-a(T-t)} - 1\right] \\
&= b(T-t) + r_t\left[\frac{(1-e^{-a(T-t)})}{a}\right] - b\left[\frac{(1-e^{-a(T-t)})}{a}\right] \\
&= b(T-t) + [r_t - b]\left[\frac{(1-e^{-a(T-t)})}{a}\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{E}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right] = b(T-t) + [r_t - b]\left[\frac{(1-e^{-a(T-t)})}{a}\right]\ . \tag{2.2.15}$$

Al calcular la varianza:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{Var}\left[\int_t^T r_s \mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\\
&= \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[r_t e^{-a(s-t)} + b\left[1-e^{-a(s-t)}\right]\right.\right.\\
&\left.\left.+\ e^{-as}\sigma\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u\right]\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\\
&= \mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[e^{-as}\sigma\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u\right]\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\\
&= \sigma^2\mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[\int_t^s e^{-as}e^{au}\mathrm{d}W_u\right]\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\\
&= \sigma^2\mathrm{Var}\left[\int_t^T \left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u\right]\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} .
$$

Sea

$$
u(s) = \int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u \ ,
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T)\mid\mathcal{F}_t\right] &= \sigma^2\mathrm{Var}\left[\int_t^T u(s)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\\
&= \sigma^2\left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right] - \mathrm{E}^2\left[\int_t^T u(s)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\right]\\
&= \sigma^2\left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right]\right.\\
&\left.-\ \mathrm{E}^2\left[\int_t^T\left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u\right]\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]\right]\\
&= \sigma^2\left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right]\right.\\
&\left.-\ \left[\int_t^T\left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right]\right]\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right]^2\right]
\end{aligned} ,
$$

pero,

$$
\mathrm{d}W_u \sim \mathcal{N}[0, \mathrm{d}u] \ ,
$$

por lo que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sigma^2\left[\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right] - \left(\int_t^T 0\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right)^2\right] \\
&= \sigma^2\mathrm{E}\left[\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2\mathrm{E}\left[\int_t^T \int_t^T u(s)u(k)\mathrm{d}s\mathrm{d}k \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \sigma^2\mathrm{E}\left[2\int_t^T \int_t^s u(s)u(k)\mathrm{d}k\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= 2\sigma^2\int_t^T \left(\int_t^s \mathrm{E}\left[u(s)u(k) \mid \mathcal{F}_t\right]\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}s
\end{aligned} .
$$

Debido a que la región de integración es un cuadrado comprendido en los ejes s y k, lo que nos permite dividir la región en 2 partes. Se trabajará con la región que se encuentra por debajo de la recta $k = s$, la cual está representada por la desigualdad $k < s$, por lo que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[u(s)u(k) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathrm{E}\left[\int_t^s e^{-a(s-u)}\mathrm{d}W_u \int_t^k e^{-a(k-u)}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{-as}\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u e^{-ak}\int_t^k e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-a(s+k)}\mathrm{E}\left[\int_t^s e^{au}\mathrm{d}W_u \int_t^k e^{au}\mathrm{d}W_u \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} ,
$$

pero debido a que

$$
\mathrm{E}\left[\int_t^T H(s)\mathrm{d}W_s \int_t^T G(s)\mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_t^T H(s)G(s)\mathrm{d}s \ ,
$$

se llega a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[u(s)u(k) \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{-a(s+k)}\int_t^k e^{2au}\mathrm{d}u \\
&= e^{-a(s+k)}\left[\frac{e^{2ak}-e^{2at}}{2a}\right] \\
&= \frac{e^{-as}e^{ak}-e^{2at}e^{-as}e^{-ak}}{2a} \ ,
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] &= 2\sigma^2 \int_t^T \left(\int_t^s \frac{e^{-as}e^{ak} - e^{2at}e^{-as}e^{-ak}}{2a}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}s \\
&= 2\sigma^2 \int_t^T \left[\frac{e^{-as}}{2a}\int_t^s e^{ak}\mathrm{d}k - e^{2at}e^{-as}\int_t^s e^{-ak}\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}s \\
&= \frac{2\sigma^2}{2a}\int_t^T \left[e^{-as}\frac{(e^{as}-e^{at})}{a} + e^{2at}e^{-as}\frac{(e^{-as}-e^{-at})}{a}\right]\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sigma^2}{a}\int_t^T \left[\frac{1-e^{-a(s-t)}}{a} + e^{2at}e^{-as}\frac{(e^{-as}-e^{-at})}{a}\right]\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^T \left[1-e^{-a(s-t)} + e^{2at}e^{-2as} - e^{-as}e^{-at}\right]\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t) - \left(\frac{-1}{a}\right)\left[e^{-a(s-t)}\right]_t^T + e^{2at}\left(\frac{-1}{2a}\right)\left[e^{-2as}\right]_t^T \\
&\quad -e^{-at}\left(\frac{-1}{a}\right)\left[e^{-as}\right]_t^T\Bigg] \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t) + \frac{1}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right] + e^{2at}\frac{-1}{2a}\left[e^{-2aT}-e^{-2at}\right] \quad . \\
&\quad +\frac{1}{a}e^{-at}\left[e^{-aT}-e^{-at}\right]\Bigg] \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t) + \frac{1}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right] - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1) \\
&\quad +\frac{1}{a}e^{at}(e^{-aT}-e^{-at})\Bigg] \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\Bigg[(T-t) + \frac{1}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right] - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1) \\
&\quad +\frac{1}{a}(e^{-a(T-t)}-1)\Bigg] \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) + \frac{2}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right] - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\operatorname{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)}-1)\right]. \tag{2.2.16}
$$

Si:

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \ ,$$

y por (2.2.15) y (2.2.16), se tiene que:

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{E}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}\left[I(t,T) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= -\left[b(T-t) + [r_t - b]\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)} - 1)\right] \\
&= - b(T-t) - (r_t - b)D + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2D - \frac{1}{2a}(e^{-2a(T-t)} - 1)\right] \\
&= - b(T-t) - r_t D + bD + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{a^2}D - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[e^{-2a(T-t)} - 1\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[e^{-2a(T-t)} - 2e^{-a(T-t)} + 1 - 1 - 1 + 2e^{-a(T-t)}\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}\frac{1}{a^2}\left[1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}\right] - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\left[-2 + 2e^{-a(T-t)}\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}\frac{1}{a^2}\left[1 - e^{-a(T-t)}\right]^2 + \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^2}2\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right] \\
&=(T-t)\left[-b + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right] - rD - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}D \\
&=(t-T)\left(b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) + D\left[b - \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD \\
&=(t-T)\left(b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) + D\left[b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right] - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD \\
&=(t-T+D)\left(b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{a^2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD \\
&=\frac{1}{a^2}(D-t-T)\left(a^2 b - \frac{1}{a}\sigma^2\right) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2 - rD
\end{aligned}$$

Por lo que el precio del bono está dado por:

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= e^{-\mathrm{E}[I(t,T)\ \mid\ \mathcal{F}_t]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}[I(t,T)\ \mid\ \mathcal{F}_t]} \\
&= e^{\left[\frac{1}{a^2}(D+t-T)\left(a^2b-\frac{1}{a}\sigma^2\right)-\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a}D^2-rD\right]} \quad ,
\end{aligned}
$$

el cual coincide plenamente con el precio calculado bajo el enfoque de ecuaciones diferenciales.

2.2.3 Curva de rendimientos (Estructura de Plazos)

Se determinará la curva de rendimientos, tambien llamada estructura de plazos de la tasa de interés, a partir del precio de un bono cupón cero, que en este caso es el precio de un bono cupón cero bajo la dinámica de la tasa corta del modelo de Vasicek.

Para calcular la estructura de plazos se supondrá que $R(t,T)$ es la tasa de interés de t a T, por lo que el precio de un bono cupón cero está dado por

$$
B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \quad ,
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
R(t,T) &= -\frac{ln\left[B(t,T)\right]}{T-t} \\
&= -\frac{ln\left[e^{A(t,T)-r_tD(t,T)}\right]}{T-t} \quad , \\
&= \frac{r_tD(t,T)-A(t,T)}{T-t}
\end{aligned}
$$

pero por (2.2.6) y (2.2.7) se tiene que

$$
R(t,T) = r_t\frac{\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}}{T-t} - \frac{\frac{1}{a^2}\left[D-T+t\right]\left[a^2b-\frac{1}{2}\sigma^2\right]-\frac{\sigma^2D^2}{4a}}{T-t} \quad ,
$$

con

$$
D(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \quad .
$$

2.3 Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

El modelo de Vasicek es muy útil por sus propiedades. Sin embargo puede generar tasas de interés negativas para algunos valores de los párametros debido a que en este modelo se supone una distribución de probabilidad normal. Es por ello que una alternativa al modelo de Vasicek es el modelo Cox-Ingersoll-Ross [1]. En este modelo la tasa corta evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t \ ,$$

donde a,b y $\sigma > 0$ son constantes conocidas y $\mathrm{d}W_t$ es un movimiento Browniano estándar.

La ecuación anterior implica que la tasa corta tiene una distribución chi-cuadrada no central, lo cual implica que la tasa corta no puede tomar valores negativos, situación que corrige el problema de los modelos de Merton y Vasicek.

2.3.1 Enfoque de Ecuaciones Diferenciales

Enseguida, se calculará el precio de un bono cupón cero bajo el supuesto de que la tasa corta sigue la dinámica propuesta por CIR, por lo que el precio de este bono debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial dada por (1.24)

$$\frac{\partial B}{\partial t} + a(b - r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}\left[\sigma\sqrt{r_t}\right]^2 - r_t B = 0 \ ,$$

con

$$B(T,T) = 1 \ .$$

Debido a que la ecuación diferencial parabólica anterior no presenta derivadas parciales cruzadas se propone como candidato a solución a

$$B(t,T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \ ,$$

y como la condición final establece que $B(T,T) = 1$, entonces para respetar dicha condición se impondrán las siguientes condiciones finales para $A(t,T)$ y $D(t,T)$

$$A(T,T) = D(T,T) = 0 \ .$$

Al calcular las derivadas se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial t} &= B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t\frac{\partial D}{\partial t}\right] \\
\frac{\partial B}{\partial r_t} &= -BD \\
\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= BD^2
\end{aligned} \quad ,$$

al sustituir en la ecuación diferencial las expresiones anteriores se tiene que

$$B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t\frac{\partial D}{\partial t}\right] - BDa(b-r_t) + \frac{1}{2}BD^2\sigma^2 r_t - r_t B = 0 \ ,$$

y así,

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t\frac{\partial D}{\partial t} - abD + ar_tD + \frac{1}{2}D^2\sigma^2 r_t - r_t = 0 \ ,$$

de donde se obtiene:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} - abD\right) - r_t\left(\frac{\partial D}{\partial t} - aD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + 1\right) = 0 \ .$$

La expresión anterior es válida para todo valor de la tasa corta, por lo que para mantener la igualdad se impondrán las siguientes condiciones

$$\frac{\partial A}{\partial t} - abD = 0 \ , \tag{2.3.1}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} - aD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + 1 = 0 \ . \tag{2.3.2}$$

De esta forma el problema original de resolver una ecuación diferencial parabólica se ha reducido a resolver un sistema de euaciones lineales en t, por lo que al resolver (2.3.2), se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t} &= aD + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - 1\\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{2}{\sigma^2}aD + D^2 - \frac{2}{\sigma^2}\right] \ ,\\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left[D^2 + \frac{2a}{\sigma^2}D - \frac{2}{\sigma^2}\right]\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Note que el término entre paréntesis de la última igualdad de la expresión anterior puede expresarse como un producto de binomios, es decir

$$\begin{aligned}D^2 + \frac{2a}{\sigma^2}D - \frac{2}{\sigma^2} &= (D-x_1)(D+x_2)\\ &= D^2 + Dx_2 - Dx_1 - x_1x_2 \ ,\\ &= D^2 + D(x_2 - x_1) - x_1x_2\end{aligned}$$

por lo que esta igualdad se debe mantener término a término, lo que origina que

$$x_1 x_2 = \frac{2}{\sigma^2} \ , \tag{2.3.4}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{2a}{\sigma^2} \ , \tag{2.3.5}$$

por lo que de (2.3.5) se obtiene que

$$x_2 = x_1 + \frac{2a}{\sigma^2} \ . \tag{2.3.6}$$

Al sustituir la expresión anterior en (2.3.4) se tiene que

$$\frac{2}{\sigma^2} = x_1 x_2 = x_1 \left[x_1 + \frac{2a}{\sigma^2} \right] = x_1^2 + \frac{2a}{\sigma^2} x_1 \ ,$$

por lo que

$$x_1^2 + \frac{2a}{\sigma^2} x_1 - \frac{2}{\sigma^2} = 0 \ ,$$

de donde la solución a este polinomio está dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-\frac{2a}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{\sigma^2}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)}}{2} \\ &= \frac{-\frac{2a}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{\sigma^4} + \frac{8\sigma^2}{\sigma^4}}}{2} \\ &= \frac{-\frac{2a}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{4}{\sigma^4}\left(a^2 + 2\sigma^2\right)}}{2} \\ &= \frac{-\frac{2a}{\sigma^2} \pm \frac{2}{\sigma^2}\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{2} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{2} \right] \end{aligned} \qquad ,$$

por lo tanto

$$x_1 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \ , \tag{2.3.7}$$

y al sustituir (2.3.7) en (2.3.6) se tiene que x_2 está dada por

$$x_2 = \frac{2a}{\sigma^2} + \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \ ,$$

por lo que

$$x_2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \ . \tag{2.3.8}$$

De acuerdo a (2.3.7) y (2.3.8) se observa que existen 4 posibles soluciones las cuales son:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \ x_2^{(1)} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \\ x_1^{(2)} &= \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \ x_2^{(2)} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \\ x_1^{(3)} &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \ x_2^{(3)} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \\ x_1^{(4)} &= \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \ x_2^{(4)} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \end{aligned} \ .$$

Al sustituir estas posibles soluciones en (2.3.4) y (2.3.5) las únicas que satisfacen estas ecuaciones son $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ y $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$. Además, se puede notar de (2.3.4) que

$$x_1 x_2 = 2\sigma^2 > 0 \ ,$$

es decir, x_1 y x_2 deben tener el mismo signo, condición que satisfacen $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ y $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$. Por el momento, al referirse de la solución de x_1 y x_2 se pensará en $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ y $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$, y más adelante se encontrará otra restricción, la cual servirá para determinar una única solución de x_1 y x_2.

De acuerdo a (2.3.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{\sigma^2}{2}\left[D^2 + \frac{2a}{\sigma^2}D - \frac{2}{\sigma^2}\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left[(D - x_1)(D + x_2)\right] \end{aligned} \ ,$$

con x_1 y x_2 especificadas por (2.3.7) y (2.3.8) respectivamente.

Así, de la ecuación anterior se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}D}{(D - x_1)(D + x_2)} = \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{d}t \ ,$$

por lo que

$$\int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}u}{(u - x_1)(u + x_2)} = \int_T^t \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\sigma^2 (T - t) \ ,$$

pero como $D(T,T) = 0$ se obtiene

$$\int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}u}{(u - x_1)(u + x_2)} = -\frac{1}{2}\sigma^2(T - t) \ . \tag{2.3.9}$$

Para resolver la integral anterior se utilizará el método de fracciones parciales, por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(D - x_1)(D + x_2)} &= \frac{A}{D - x_1} + \frac{B}{D + x_2} \\
&= \frac{A(D + x_2) + B(D - x_1)}{(D - x_1)(D + x_2)} \\
&= \frac{AD + Ax_2 + BD - Bx_1}{(D - x_1)(D + x_2)} \\
&= \frac{(A + B)D + (Ax_2 - Bx_1)}{(D - x_1)(D + x_2)}
\end{aligned} \ .$$

Debido a que la igualdad anterior se cumple término a término se tiene que

$$A + B = 0 \ , \tag{2.3.10}$$

$$Ax_2 - Bx_1 = 1 \ , \tag{2.3.11}$$

de (2.3.10) se tiene que

$$A = -B \ ,$$

al sustituir lo anterior en (2.3.11) se tiene que

$$1 = Ax_2 - (-A)x_1 = A(x_2 + x_1) \ ,$$

por lo que

$$A = \frac{1}{x_2 + x_1} \quad , B = -\frac{1}{x_2 + x_1} \ , \tag{2.3.12}$$

y así, se obtiene de (2.3.9) que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) &= \int_0^{D(t,T)} \frac{\mathrm{d}u}{(u-x_1)(u+x_2)} \\
&= \int_0^{D(t,T)} \left[\frac{A}{u-x_1} + \frac{B}{u+x_2}\right] \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{D(t,T)} \left[\frac{\frac{1}{x_2+x_1}}{u-x_1} - \frac{\frac{1}{x_2+x_1}}{u+x_2}\right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x_2+x_1}\int_0^{D(t,T)} \left[\frac{1}{u-x_1} - \frac{1}{u+x_2}\right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x_2+x_1}\left\{\ln(|u-x_1|) - \ln(|u+x_2|)\right\}_0^{D(t,T)} \\
&= \frac{1}{x_2+x_1}\Big\{\ln(|D(t,T)-x_1|) - \ln(|x_1|) \\
&\quad - (\ln(|D(t,T)+x_2|) - \ln(|x_2|))\Big\}
\end{aligned} .$$

Para quitar el valor absoluto de la expresión anterior se supondrá que

$$x_1 - D(t,T) > 0 \ . \tag{2.3.13}$$

Note que

$$D(T,T) = 0 \ ,$$

y como la restricción anterior se supondrá valida $\forall \ t_i \in [t,T]$ se tiene que

$$0 < x_1 - D(T,T) = x_1 - 0 = x_1 \ ,$$

por lo que $x_1 > 0$ y como se comentó anteriormente por (2.3.4) se tiene que x_1 y x_2 deben tener el mismo signo, y como se acaba de probar que $x_1 > 0$, entonces se tiene que $x_2 > 0$. Note que las únicas soluciones -entre $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ y $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$- son $x_1^{(1)}$ y $x_2^{(1)}$, por lo que la única solución que puede satisfacer (2.3.4), (2.3.5) y (2.3.13) simultáneamente es $x_1^{(1)}$ y $x_2^{(1)}$ por lo que ahora se tendrá que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2} \\
x_2 &= \frac{a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2}
\end{aligned} .$$

De lo anterior se sigue que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) &= \frac{1}{x_2+x_1}\Bigg\{\ln(x_1-D(t,T))-\ln(x_1) \\
&\quad -(\ln(D(t,T)+x_2)-\ln(x_2))\Bigg\} \\
&= \frac{1}{x_2+x_1}\left\{\ln\left[\frac{x_1-D(t,T)}{x_1}\right]-\ln\left[\frac{D(t,T)+x_2}{x_2}\right]\right\}\ , \\
&= \frac{1}{x_2+x_1}\left\{\ln\left[1-\frac{D(t,T)}{x_1}\right]-\ln\left[\frac{D(t,T)}{x_2}+1\right]\right\} \\
&= \frac{1}{x_2+x_1}\ln\left[\frac{1-\frac{D(t,T)}{x_1}}{1+\frac{D(t,T)}{x_2}}\right]
\end{aligned}
$$

y así, se tiene que

$$
e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} = \frac{1-\frac{D(t,T)}{x_1}}{1+\frac{D(t,T)}{x_2}}\ ,
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\left[1+\frac{D(t,T)}{x_2}\right]e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} &= 1-\frac{D(t,T)}{x_1} \\
x_1x_2\left[1+\frac{D(t,T)}{x_2}\right]e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} &= x_1x_2\left[1-\frac{D(t,T)}{x_1}\right] \\
\left[x_1x_2+x_1D(t,T)\right]e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} &= x_1x_2-x_2D(t,T)
\end{aligned}
$$

$$
x_2D(t,T)+x_1D(t,T)e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} = x_1x_2-x_1x_2e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}
$$

$$
D(t,T)\left[x_2+x_1e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}\right] = x_1x_2\left[1-e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}\right]\ ,
$$

por lo que

$$
D(t,T) = \frac{x_1x_2\left[1-e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}\right]}{x_2+x_1e^{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}}\ ,
$$

multiplicando y dividiendo la expresión anterior por $e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}$ se tiene que

$$
D(t,T) = \frac{x_1x_2\left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}-1\right]}{x_2e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]}+x_1}\ ,
$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} D(t,T) &= \frac{x_1 x_2 \left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} - 1\right]}{x_2 e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} + x_1 + x_2 - x_2} \\ &= \frac{x_1 x_2 \left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} - 1\right]}{x_2 \left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} - 1\right] + (x_1+x_2)} \end{aligned} . \tag{2.3.14}$$

Se checará que $D(t,T)$ cumpla las condiciones impuestas en (2.3.13), es decir

$$D(T,T) = \frac{x_1 x_2 \left[e^0 - 1\right]}{x_2 \left[e^0 - 1\right] + (x_1 + x_2)} = \frac{0}{x_1 + x_2} = 0 \ ,$$

ahora se verificará que $x_1 - D(t,T) > 0$ lo que es análogo a probar que

$$x_1 > D(t,T) \ .$$

Por (2.3.14) se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 &> \frac{x_1 x_2 \left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} - 1\right]}{x_2 \left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} - 1\right] + (x_1+x_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 \left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} - 1\right]}{x_2 e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} + x_1 .} \end{aligned} .$$

Debido a que $x_1, x_2 > 0$ y $e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} > 0$, se tiene que el denominador de la desigualdad anterior es positivo, por lo que la desigualdad anterior es equivalente a

$$x_1^2 + x_1 x_2 e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} > x_1 x_2 \left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} - 1\right] \ ,$$

de donde

$$x_1^2 > -x_1 x_2 e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} \ ,$$

es decir,

$$x_1^2 + x_1 x_2 e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} > 0 \ .$$

Note que $x_1, x_2, e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} > 0$ por lo que la expresión anterior es cierta. De esta forma se ha logrado probar que si

$$x_1 - D(t,T) > 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_1 x_2 e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-t)\right]} > 0 \ ,$$

de donde la implicación es siempre válida, por lo que el suponer $x_1 - D(t,T) > 0$ conduce a una afirmación lógica, entonces de esta forma se logró demostrar que $x_1 - D(t,T) > 0$. Por lo tanto $D(t,T)$ dada por (2.3.14) satisface la condición impuesta en (2.3.13)

Enseguida, se encontrará $A(t,T)$ para determinar el precio del bono, para ello se sustituye (2.3.14) en (2.3.1) de donde se obtiene que

$$\frac{\partial A}{\partial t} = abD(t,T) \ ,$$

de donde

$$\mathrm{d}A = abD(t,T)\mathrm{d}t$$

$$\int_T^t \mathrm{d}A = \int_T^t abD(s,T)\mathrm{d}s$$

$$A(t,T) - A(T,T) = ab\int_T^t D(s,T)\mathrm{d}s \ ,$$

pero $A(T,T) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} A(t,T) &= ab\int_T^t D(s,T)\mathrm{d}s \\ &= ab\int_T^t \left[\frac{x_1 x_2\left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-s)\right]} - 1\right]}{x_2\left[e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-s)\right]} - 1\right] + (x_1+x_2)}\right]\mathrm{d}s \end{aligned} \ .$$

Para resolver la integral anterior se propone el siguiente cambio de variable, sea

$$v_s = e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-s)\right]} - 1 \ ,$$

si y solo si

$$-e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-s)\right]} = -(1+v_s) \ ,$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v_s &= -\frac{1}{2}\sigma^2\left(x_1+x_2\right)e^{\left[\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(T-s)\right]}\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2\left(x_1+x_2\right)(1+v_s)\mathrm{d}s \end{aligned} \ ,$$

por lo que

$$\mathrm{d}s = \frac{-\mathrm{d}v_s}{\frac{1}{2}\sigma^2\left(x_1+x_2\right)\left(1+v_s\right)} \ .$$

Al aplicar este cambio de variable se tiene que

$$\begin{aligned} A(t,T) &= ab\int_0^{v_t}\frac{x_1x_2v_s}{x_2v_s+(x_1+x_2)}\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(1+v_s)}\right)\mathrm{d}v_s \\ &= abx_1x_2\int_0^{v_t}\frac{v_s}{x_2v_s+(x_1+x_2)}\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)(1+v_s)}\right)\mathrm{d}v_s \\ &= \frac{-abx_1x_2}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)}\int_0^{v_t}\frac{v_s}{x_2v_s+(x_1+x_2)}\frac{1}{(1+v_s)}\mathrm{d}v_s \\ &= \frac{-abx_1x_2}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)}\int_0^{v_t}\frac{v_s}{\left[x_2v_s+(x_1+x_2)\right](1+v_s)}\mathrm{d}v_s \\ &= \frac{-abx_1}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)}\int_0^{v_t}\frac{v_s}{\left[v_s+\frac{x_1+x_2}{x_2}\right](v_s+1)}\mathrm{d}v_s \end{aligned} \ . \quad (2.3.15)$$

Para resolver la integral de la expresión anterior sea

$$\alpha = \frac{x_1+x_2}{x_2}, \quad \gamma = 1 \ ,$$

entonces

$$\int_0^{v_t}\frac{v_s}{\left[v_s+\frac{x_1+x_2}{x_2}\right][v_s+1]}\mathrm{d}v_s = \int_0^{v_t}\frac{v_s}{[v_s+\alpha][v_s+\gamma]}\mathrm{d}v_s \ , \quad (2.3.16)$$

para encontrar la solución a esta integral se ocupa el método de fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{v_s}{[v_s+\alpha][v_s+\gamma]} &= \frac{A}{v_s+\alpha}+\frac{B}{v_s+\gamma} = \frac{Av_s+A\gamma+Bv_s+B\alpha}{[v_s+\alpha][v_s+\gamma]} \\ &= \frac{[A+B]v_s+[A\gamma+B\alpha]}{[v_s+\alpha][v_s+\gamma]} \end{aligned} \ ,$$

por lo que

$$A+B=1 \ , \quad (2.3.17)$$

$$A\gamma+B\alpha=0 \ , \quad (2.3.18)$$

al despejar A de (2.3.17) se tiene que

$$A = 1-B \ ,$$

al sustituir lo anterior en (2.3.18) se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= [1-B]\,\gamma + B\alpha \\ &= \gamma - B\gamma + B\alpha \\ &= \gamma + B\,[\alpha-\gamma] \end{aligned} \quad ,$$

por lo que

$$B = \frac{-\gamma}{\alpha-\gamma} \tag{2.3.19}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 - \left(\frac{-\gamma}{\alpha-\gamma}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\right) \quad , \\ &= \frac{\alpha-\gamma+\gamma}{\alpha-\gamma} \end{aligned}$$

y así,

$$A = \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} \ . \tag{2.3.20}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^{v_t} \frac{v_s}{[v_s+\alpha]\,[v_s+\gamma]} \mathrm{d}v_s &= \int_0^{v_t} \left[\frac{A}{v_s+\alpha} + \frac{B}{v_s+\gamma}\right] \mathrm{d}v_s \\ &= A \int_0^{v_t} \frac{1}{v_s+\alpha} \mathrm{d}v_s + B \int_0^{v_t} \frac{1}{v_s+\gamma} \mathrm{d}v_s \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} \int_0^{v_t} \frac{1}{v_s+\alpha} \mathrm{d}v_s - \frac{\gamma}{\alpha-\gamma} \int_0^{v_t} \frac{1}{v_s+\gamma} \mathrm{d}v_s \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} \Big\{ \ln\left(|v_s+\alpha|\right) \Big\}_0^{v_t} - \frac{\gamma}{\alpha-\gamma} \Big\{ \ln\left(|v_s+\gamma|\right) \Big\}_0^{v_t} \quad , \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} \Big\{ \ln\left(|v_t+\alpha|\right) - \ln\left(|\alpha|\right) \Big\} \\ &- \frac{\gamma}{\alpha-\gamma} \Big\{ \ln\left(|v_t+\gamma|\right) - \ln\left(|\gamma|\right) \Big\} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{v_t} \frac{v_s}{[v_s+\alpha]\,[v_s+\gamma]} \mathrm{d}v_s = \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} \Big\{ \ln\left(|v_t+\alpha|\right) - \ln\left(|\alpha|\right) \Big\} \\ - \frac{\gamma}{\alpha-\gamma} \Big\{ \ln\left(|v_t+\gamma|\right) - \ln\left(|\gamma|\right) \Big\} \end{aligned} \ . \tag{2.3.21}$$

Note que

$$v_t = e^{\left[(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]} - 1 \ ,$$

por (2.3.7) y (2.3.8) se tiene que

$$x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2} > 0 \ ,$$

como

$$\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) > 0 \ ,$$

entonces

$$e^{\left[(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]} > 1 \ ,$$

por lo que

$$v_t = e^{\left[(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]} - 1 > 0 \ \ \forall \ t \ .$$

De esta forma se puede quitar el valor absoluto de (2.3.21) y se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{v_t} \frac{v_s}{[v_s+\alpha]\,[v_s+\gamma]} \mathrm{d}v_s &= \frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\left\{\ln(v_t+\alpha) - \ln(\alpha)\right\} \\
&\quad - \frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left\{\ln(v_t+\gamma) - \ln(\gamma)\right\} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\left\{\ln\left(\frac{v_t+\alpha}{\alpha}\right)\right\} - \frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left\{\ln\left(\frac{v_t+\gamma}{\gamma}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\alpha-\gamma}\left\{\alpha\ln\left(\frac{v_t+\alpha}{\alpha}\right) - \gamma\ln\left(\frac{v_t+\gamma}{\gamma}\right)\right\}
\end{aligned} \ ,$$

pero

$$\alpha = \frac{x_1+x_2}{x_2}, \quad \gamma = 1 \ ,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{v_t} \frac{v_s}{[v_s+\alpha]\,[v_s+\gamma]} \mathrm{d}v_s &= \frac{1}{\frac{x_1+x_2}{x_2} - 1}\left\{\frac{x_1+x_2}{x_2}\ln\left(\frac{v_t+\frac{x_1+x_2}{x_2}}{\frac{x_1+x_2}{x_2}}\right) - \ln(v_t+1)\right\} \\
&= \frac{x_2}{x_1}\left\{\frac{x_1+x_2}{x_2}\ln\left(\frac{v_t+\frac{x_1+x_2}{x_2}}{\frac{x_1+x_2}{x_2}}\right) - \ln(v_t+1)\right\}
\end{aligned}$$

por lo que al sustituir la expresión anterior en (2.3.15) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= \frac{-abx_1}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)}\frac{x_2}{x_1}\left\{\frac{x_1+x_2}{x_2}\ln\left(\frac{v_t+\frac{x_1+x_2}{x_2}}{\frac{x_1+x_2}{x_2}}\right)-\ln(v_t+1)\right\}\\
&= \frac{abx_1}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)}\frac{x_2}{x_1}\left\{\ln(v_t+1)-\frac{x_1+x_2}{x_2}\ln\left(\frac{v_t+\frac{x_1+x_2}{x_2}}{\frac{x_1+x_2}{x_2}}\right)\right\}\\
&= \frac{abx_2}{\frac{1}{2}\sigma^2(x_1+x_2)}\left\{\ln(v_t+1)-\frac{x_1+x_2}{x_2}\ln\left(\frac{v_t+\frac{x_1+x_2}{x_2}}{\frac{x_1+x_2}{x_2}}\right)\right\}\\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\left\{\frac{x_2}{x_1+x_2}\ln(v_t+1)-\ln\left(\frac{x_2v_t+x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)\right\} \qquad ,\\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\left\{\ln(v_t+1)^{\frac{x_2}{x_1+x_2}}-\ln\left(\frac{x_2v_t+x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)\right\}\\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left\{\frac{(v_t+1)^{\frac{x_2}{x_1+x_2}}}{\left(\frac{x_2v_t+x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)}\right\}\\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left\{\frac{(x_1+x_2)(v_t+1)^{\frac{x_2}{x_1+x_2}}}{(x_2v_t+x_1+x_2)}\right\}
\end{aligned}
$$

pero

$$
v_t = e^{\left[(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}-1 \ ,
$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left\{\frac{(x_1+x_2)\left(e^{(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)^{\frac{x_2}{x_1+x_2}}}{x_2\left(e^{(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}-1\right)+x_1+x_2}\right\}\\
&= \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left\{\frac{(x_1+x_2)e^{\left[x_2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}}{\left(x_2\left(e^{\left[(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}-1\right)+x_1+x_2\right)}\right\} \ .\\
&= \ln\left\{\frac{(x_1+x_2)e^{\left[x_2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}}{\left(x_2\left(e^{\left[(x_1+x_2)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}-1\right)+x_1+x_2\right)}\right\}^{\frac{2ab}{\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

Por (2.3.7) y (2.3.8) se tiene que:

$$A(t,T) = \ln\left\{ \frac{(\frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2})e^{\left[(\frac{a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2})\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}}{\left((\frac{a+\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2})\left(e^{\left[(\frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2})\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}-1\right)+(\frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}}{\sigma^2})\right)} \right\}^{\frac{2ab}{\sigma^2}} .$$

Por lo tanto:

$$A(t,T) = \ln\left\{ \frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}e^{\left[(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2})\frac{1}{2}(T-t)\right]}}{\left((a+\sqrt{a^2+2\sigma^2})\left(e^{\left[(2\sqrt{a^2+2\sigma^2})\frac{1}{2}(T-t)\right]}-1\right)+2\sqrt{a^2+2\sigma^2}\right)} \right\}^{\frac{2ab}{\sigma^2}} . \tag{2.3.22}$$

Nuevamente al sustituir (2.3.7) y (2.3.8) en (2.3.14) se tiene que:

$$D(t,T) = \frac{2\left[e^{\left[\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)\right]}-1\right]}{(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2})\left[e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)}-1\right]+2\sqrt{a^2+2\sigma^2}} , \tag{2.3.23}$$

de esta forma el precio del bono está dado por:

$$B(t,T) = e^{A(t,T)-r_t D(t,T)} ,$$

con $A(t,T)$ y $D(t,T)$ dadas por (2.3.22) y (2.3.23) respectivamente.

2.3.2 Curva de rendimientos (Estructura de plazos)

A continuación, se determinará la estructura de plazos para el modelo CIR. Para ello se supondrá que $R(t,T)$ es la tasa de interés comprendida entre el tiempo t y el plazo T. De acuerdo a esta notación el precio de un bono cupón cero deberá estar dado por:

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} ,$$

de donde se obtiene:

$$
\begin{aligned}
R(t,T) &= \frac{-\ln(B(t,T))}{T-t} \\
&= \frac{-\ln(e^{A(t,T)-r_t D(t,T)})}{T-t} \quad , \\
&= \frac{r_t D(t,T) - A(t,T)}{T-t}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la estructura de plazos está dada por:

$$
R(t,T) = \frac{r_t D(t,T) - A(t,T)}{T-t} \quad .
$$

Al sustituir (2.3.22) y (2.3.23) en la ecuación anterior se tiene que:

$$
\begin{aligned}
R(t,T) = r_t &\frac{\frac{2\left[e^{\left[\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)\right]}-1\right]}{(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2})\left[e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)}-1\right]+2\sqrt{a^2+2\sigma^2}}}{T-t} \\
&- \frac{\ln\left\{\frac{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}\,e^{\left[(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2})\frac{1}{2}(T-t)\right]}}{\left((a+\sqrt{a^2+2\sigma^2})\left(e^{\left[(2\sqrt{a^2+2\sigma^2})\frac{1}{2}(T-t)\right]}-1\right)+2\sqrt{a^2+2\sigma^2}\right)}\right\}^{\frac{2ab}{\sigma^2}}}{T-t} .
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO 3

MODELOS DE NO EQUILIBRIO (MODELOS DE NO ARBITRAJE)

En el capítulo anterior se presentaron tres modelos para la determinación de la estructura de plazos, estos modelos son conocidos como modelos de equilibrio o modelos de arbitraje, esto es debido a que se utilizaron argumentos de arbitraje y de comportamiento de los agentes para derivar una ecuación diferencial que debe de satisfacer el precio de un bono en ausencia de oportunidades de arbitraje. Una vez dada la especificación exógena de la dinámica de la tasa corta, se determinaba el precio del bono resolviendo la ecuación diferencial resultante. Para finalmente una vez determinado el precio del bono se obtenía la estructura de plazos.

En este capítulo se presenta una metodología alterna a la de los modelos de equilibrio, la cual consiste en suponer que se conoce la tasa corta actual, los valores de mercado en un instante anterior al presente -los cuales son precios de bonos y niveles de tasas- y además se cuenta con la estructura de plazos de un instante anterior al presente. Esta metodología calibra el modelo con información pasada -dada en precios de bonos y niveles de tasas- de tal forma que los precios teóricos -proporcionados con el modelo- coincidan con los precios de mercado del instante anterior. Es importante mencionar que al momento de llevar a cabo la calibración del modelo con los precios anteriores -es decir, el implicar los precios- se pierde la esencia del equilibrio general, ya que al hacer esto se deja de contemplar el comportamiento de los agentes y como consecuencia se pierden los argumentos de arbitraje al valuar el precio de un bono. Esto es debido a que en la calibración del modelo no se considera el comportamiento de los agentes. Es por ello que este tipo de modelo se conoce como de no equilibrio o no arbitraje.

3.1 Modelo de Ho-Lee

El modelo de Ho-Lee [4] es uno de los modelos más sencillos de los modelos de no equilibrio. La especificación exógena de la tasa corta es parecida a la del modelo de Merton solo que el término de tendencia depende del tiempo, es decir,

$$\mathrm{d}r_t = h_t dt + \sigma \mathrm{d}W_t \ ,$$

donde, dW_t es el movimiento Browniano estándar, $\sigma > 0$ es una constante y h_t es una función del tiempo. Es importante mencionar que h_t es el mecanismo mediante el cual será calibrado con la información -en forma de precios y niveles de tasas- en un instante anterior al presente, para hacer que los precios teóricos sean consistentes con los precios de mercado del pasado. Enseguida, se calculará el precio del bono bajo el enfoque de equilibrio general, el cual consiste en calcular el precio del bono como aquella función que satisface la ecuación diferencial parcial obtenida en (1.24) es decir,

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} h_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}\sigma^2 - r_t B = 0 \ ,$$

con la condición final: $B(t, T) = 1$.

Debido a que esta ecuación diferencial no presenta derivadas parciales cruzadas, se propone como candidato a solución a:

$$B(t, T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \ , \tag{3.1.1}$$

como la condición de frontera establece que $B(t, T) = 1$, entonces se impondrá la condición de que

$$A(t, T) = D(t, T) = 0 \ .$$

Al calcular las derivadas parciales se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial t} &= B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right] \\
\frac{\partial B}{\partial r_t} &= -BD \qquad\qquad\qquad . \\
\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= BD^2,
\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones diferenciales se obtiene que:

$$B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right] - BDh_t + \frac{1}{2}BD^2\sigma^2 - r_t B = 0 \ ,$$

y así,

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} - Dh_t + \frac{1}{2}D^2\sigma^2 - r_t = 0 \ ,$$

de donde se obtiene:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} - Dh_t + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2\right) - r_t\left(\frac{\partial D}{\partial t} + 1\right) = 0 \ .$$

La expresión anterior es válida para todo valor de la tasa corta, por lo que para mantener la igualdad se impondrán las siguientes condiciones

$$\frac{\partial A}{\partial t} - Dh_t + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 = 0 \ , \tag{3.1.2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + 1 = 0 \ , \tag{3.1.3}$$

al resolver (3.1.3) se tiene que:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -1$$

$$\int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \mathrm{d}u = -\int_T^t \mathrm{d}t$$

$$D(t,T) - D(T,T) = -(t-T) \ ,$$

pero como $D(T,T) = 0$ se obtiene

$$D(t,T) = T - t \ . \tag{3.1.4}$$

Al sustituir en (3.1.2) se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - (T-t)h_t + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)^2 = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (T-t)h_t - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)^2 = 0$$

$$\int_{A(T,T)}^{A(t,T)} \mathrm{d}u = \int_T^t h_s(T-s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_T^t (T-s)^2 \mathrm{d}s \ ,$$

por lo que:

$$A(t,T) - A(T,T) = -\int_t^T h_s(T-s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T (T-s)^2 \mathrm{d}s \ ,$$

pero $A(T,T) = 0$

$$A(t,T) = -\int_t^T h_s(T-s)\mathrm{d}s + \frac{1}{6}\sigma^2 (T-t)^3 \ . \tag{3.1.5}$$

La integral en la expresión anterior depende de h_t, pero dicha función no es conocida, por lo que se tratará de relacionar a h_t con el precio del bono, por lo que de acuerdo a (3.1.1) y (3.1.5) se obtiene que:

$$\ln B(t,T) = A(t,T) - r_t(T-t) \ ,$$

$$A(t,T) = \ln B(t,T) + r_t(T-t) \ ,$$

por lo que al sustituir lo anterior en (3.1.5) se tiene que:

$$\ln B(t,T) + r_t(T-t) = -\int_t^T h_s(T-s)\mathrm{d}s + \frac{1}{6}\sigma^2(T-s)^3$$

$$\int_t^T h_s(T-s)\mathrm{d}s = -\ln B(t,T) - r_t(T-t) + \frac{1}{6}\sigma^2(T-s)^3 \ .$$

La ecuación anterior presenta dos funciones desconocidas: $B(t,T)$ y h_t, pero como se hizo la suposición de que se conocen los precios de los bonos y niveles de tasas del pasado, se supondrá un instante de tiempo anterior a t el cual se representará como $t=0$.

Al sustituir $t=0$ en la ecuación anterior se tiene que:

$$\int_0^T h_s^0(T-s)\mathrm{d}s = -\ln B(0,T) - r_0T + \frac{1}{6}\sigma^2T^3 \ , \tag{3.1.6}$$

es decir, se encontrará una función h_s que se calibre con la información pasada -precio de un bono B(0,t)-, la cual será denotada por h_s^0, donde el superíndice denota que la función se calibra con los precios de mercado. Así, los precios teóricos serán consistentes con los precios de mercado. Sin embargo, el realizar la calibración da lugar a la pérdida de la esencia del equilibrio general al no tomar en cuenta el comportamiento de los agentes. Para resolver la ecuación integral anterior se derivará de ambos lados ocupando la regla de Leibnitz, obteniendo que el lado izquierdo de (3.1.6)da como resultado:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^T h_s^0(T-s)\mathrm{d}s &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left[h_s^0(T-s)\right]\mathrm{d}s + h_T^0(T-T)\frac{\partial T}{\partial T} \\ &\quad - h_0^0(T-0)\frac{\partial 0}{\partial T} \\ &= \int_0^T h_s^0\frac{\partial(T-s)}{\partial t}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^T h_s^0\mathrm{d}s\end{aligned} \quad . \tag{3.1.7}$$

Al derivar el lado derecho de (3.1.6) respecto a T:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) - r_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 \ , \tag{3.1.8}$$

por lo que al sustituir (3.1.7) y (3.1.8) en (3.1.6) se tiene que:

$$\int_0^T h_s^0 \mathrm{d}s = -\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) - r_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 \ .$$

Al derivar nuevamente con repecto a T se obtiene:

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial T} h_s^0 \mathrm{d}s + h_T^0 \frac{\partial T}{\partial T} - h_0^0 \frac{\partial 0}{\partial T} = -\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln B(0,t) + \sigma^2 T \ ,$$

es decir,

$$h_T^0 = -\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln B(0,t) + \sigma^2 T \ .$$

Note que para encontrar h_T^0 no se ocupa el hecho de que T era el vencimiento del bono, es decir, no existe ninguna restricción sobre T, por lo que la ecuación anterior es válida para todo valor de T, así, sin pérdida de generalidad se puede escribir que:

$$h_t^0 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,t) + \sigma^2 t \ . \tag{3.1.9}$$

De esta forma, se ha encontrado a la función h_t^0 la cual sirve para calibrar los precios de mercado con los precios téoricos. Finalmente para encontrar el precio del bono teórico que sea consistente con los precios de mercado basta sustituir h_t^0 en (3.1.5), ya que h_t^0 es la función que hace esto posible debido a su forma de calcularla, por lo que:

$$A(t,T) = -\int_t^T h_t^0 (T-s)\mathrm{d}s + \frac{1}{6}\sigma^2 (T-t)^3 \ . \tag{3.1.10}$$

Al calcular la integral de la expresión anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_t^T h_t^0(T-s)\mathrm{d}s &= \int_t^T \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)+\sigma^2 s\right](T-s)\mathrm{d}s \\
&= \int_t^T \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)\right](T-s)\mathrm{d}s + \int_t^T \sigma^2 s(T-s)\mathrm{d}s \\
&= -T\int_t^T \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)\right]\mathrm{d}s + \int_t^T s\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)\right]\mathrm{d}s \\
&+ \sigma^2\left[T\int_t^T s\mathrm{d}s - \int_t^T s^2\mathrm{d}s\right] \\
&= -T\left[-\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,s)\right]_t^T + \int_t^T s\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)\right]\mathrm{d}s \\
&+ \sigma^2\left[T\left(\frac{s^2}{2}\right)_t^T - \left(\frac{s^3}{3}\right)_t^T\right] \\
&= -T\left[\frac{\partial}{\partial T}\ln B(0,T) - \frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t)\right] \\
&+ \int_t^T s\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)\right]\mathrm{d}s \\
&+ \sigma^2\left[\left(\frac{T^3}{2}\right) - \left(\frac{Tt^2}{2}\right) - \left(\frac{T^3}{3}\right) - \left(\frac{t^3}{3}\right)\right]
\end{aligned} ,$$

por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_t^T h_t^0(T-s)\mathrm{d}s &= -T\left[\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,T) - \frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t)\right] \\
&+ \int_t^T s\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)\right]\mathrm{d}s \\
&+ \frac{\sigma^2}{6}\left[T^3 - Tt^2 + 2t^3\right]
\end{aligned} . \tag{3.1.11}$$

Por otro lado, al resolver por partes la integral de la expresión anterior se propone a:

$$u = s, \quad \mathrm{d}v = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s) ,$$

y se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_t^T s\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,s)\right]\mathrm{d}s &= \left[s\frac{\partial}{\partial s}\ln B(0,s)\right]_t^T - \int_t^T \frac{\partial}{\partial s}\ln B(0,s)\mathrm{d}s \\
&= \left[T\frac{\partial}{\partial T}\ln B(0,T)\right] - \left[t\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t)\right] - \left[\ln B(0,s)\right]_t^T \\
&= \left[T\frac{\partial}{\partial T}\ln B(0,T)\right] - \left[t\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t)\right] \\
&- \left[\ln B(0,T) - \ln B(0,T)\right].
\end{aligned}$$

Al sustituir lo anterior en (3.1.11) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_t^T h_t^0(T-s)\mathrm{d}s &= -T\left[\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,T) - \frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t)\right] \\
&+ T\frac{\partial}{\partial T}\ln B(0,T) - t\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) \\
&- \left[\ln B(0,T) - \ln B(0,T)\right] + \frac{\sigma^2}{6}\left[T^3 - Tt^2 + 2t^3\right] \\
&= (T-t)\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) - \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] + \frac{\sigma^2}{6}\left[T^3 - Tt^2 + 2t^3\right]
\end{aligned}.$$

Por lo que al sustituir lo anterior en (3.1.10) se tiene que:

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= -(T-t)\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) + \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - \frac{\sigma^2}{6}\left[T^3 - Tt^2 + 2t^3\right] \\
&+ \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 \\
&= \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - (T-t)\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) + \frac{\sigma^2}{6}\left[6Tt^2 - 3t^3 - 3T^2 t\right] \\
&= \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - (T-t)\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) - \frac{\sigma^2}{6}(3t)\left[-2Tt + t^2 + T^2\right]
\end{aligned},$$

por lo tanto:

$$A(t,T) = \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - (T-t)\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) - \frac{\sigma^2}{6}(3t)\left[-2Tt + t^2 + T^2\right] \ . \tag{3.1.12}$$

Por lo que al sustituir (3.1.4) y (3.1.12) en (3.1.1) se obtiene que el precio del bono está dado por:

$$B(t,T) = e^{A(t,T) - r_t(T-t)} \ , \tag{3.1.13}$$

con $A(t,T)$ definida en (3.1.12).

3.1.1 Curva de rendimientos (Estructura de plazos)

Se determinará la estructura de plazos para el modelo de Ho-Lee. Para ello se supondrá que $R(t,T)$ es la tasa de interés comprendida entre el tiempo t y el plazo T. De acuerdo a esta notación el precio de un bono cupón cero deberá estar dado por:

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ , \tag{3.1.14}$$

por (3.1.13) y (3.1.14) se tiene que:

$$e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} = e^{-R(t,T)(T-t)} \ ,$$

$$A(t,T) - r_t(T-t) = -R(t,T)(T-t) \ ,$$

por lo que:

$$R(t,T) = \frac{r_t D(t,T) - A(t,T)}{T-t} \ .$$

Al sustituir (3.1.4) y (3.1.12) en la expresión anterior se tiene que la estructura de plazos está dada por:

$$R(t,T) = r_t + \frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) - \frac{1}{(T-t)}\ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] + \frac{\sigma^2}{2}t(T-t) \ .$$

3.2 Modelo de Hull-White

Debido a que en la práctica se observa que las tasas de interés no crecen indefinidamente, sino que presentan reversión a la media a algún valor constante de largo plazo, es por ello que en esta sección se presenta una versión del modelo de Vasicek en la que el parámetro de largo plazo -velocidad de reversión a la media- de la tasa corta depende del tiempo hasta el vencimiento. Este parámetro se calibrará de tal manera que los precios teóricos de los bonos reportados por el modelo sean consistentes con los precios de mercado -del instante anterior-.

La especificación exógena de la tasa corta propuesta por Hull-White [5] está dada por

$$\mathrm{d}r_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma \mathrm{d}W_t \ ,$$

donde r_t es la tasa corta, $a, \sigma > 0$ constantes, b_t función de t y $\mathrm{d}W_t$ es un movimiento Browniano estándar.

A continuación, se calculará el precio del bono bajo el enfoque de equilibrio general, el cual consiste en calcular el precio del bono, como solución a la ecuación diferencial obtenida en (1.24), es decir

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} a(b_t - r_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}\sigma^2 - r_t B = 0 \ ,$$

con la condición final de que el bono en la fecha de vencimiento (T) paga una unidad monetaria, es decir

$$B(t,T) = 1 \ .$$

Como la ecuación diferencial anterior no presenta derivadas parciales cruzadas, se propone como solución a

$$B(t,T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} \ , \tag{3.2.1}$$

debido a que la condición final establece que $B(T,T) = 1$, entonces se tiene que

$$A(T,T) = D(T,T) = 0 \ .$$

Al calcular las derivadas parciales de la ecuación diferencial se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} &= B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t\frac{\partial D}{\partial t}\right]\\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -BD \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= BD^2\end{aligned} \quad ,$$

sustituyendo lo anterior en la ecuación diferencial anterior se tiene que

$$B\left[\frac{\partial A}{\partial t} - r_t\frac{\partial D}{\partial t}\right] - BDa(b_t - r_t) + \frac{1}{2}BD^2\sigma^2 - r_tB = 0 \ ,$$

lo que implica que

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t\frac{\partial D}{\partial t} - Da(b_t - r_t) + \frac{1}{2}D^2\sigma^2 - r_t = 0 \ ,$$

y así, se obtiene que

$$\frac{\partial A}{\partial t} - Dab_t + \frac{1}{2}D^2\sigma^2 - r_t\left[\frac{\partial D}{\partial t} - Da + 1\right] = 0 \ .$$

Como la ecuación anterior es válida para todo valor de r_t y t, se impondrán las siguientes condiciones para que la igualdad anterior se mantenga

$$\frac{\partial A}{\partial t} - Dab_t + \frac{1}{2}D^2\sigma^2 = 0 \ , \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} - Da + 1 = 0 \ . \tag{3.2.3}$$

De esta forma el problema original de resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden se transformó en resolver un sistema de 2 ecuaciones diferenciales lineales en t, por lo que al resolver (3.2.3) se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial t} = Da - 1 \ ,$$

de donde la solución a la ecuación diferencial anterior está dada por

$$D(t,T) = D(T,T)e^{a(t-T)} - e^{a(t-T)} \int_T^t e^{-a(s-T)} \mathrm{d}s \ ,$$

pero $D(T,T) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} D(t,T) &= -e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} \mathrm{d}s \\ &= -e^{-a(T-t)} \left[\frac{e^{a(T-s)}}{-a} \right]_T^t \\ &= -e^{-a(T-t)} \left[\frac{e^{a(T-t)} - 1}{-a} \right] \end{aligned} \ ,$$

por lo tanto

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \ . \tag{3.2.4}$$

Al sustituir (3.2.4) en (3.2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= Dab_t - \frac{1}{2} D^2 \sigma^2 \\ &= \left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] ab_t - \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right]^2 \sigma^2 \\ &= b_t \left[1 - e^{-a(T-t)} \right] - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} \right] \end{aligned} \ ,$$

y así, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_T^t \frac{\partial A}{\partial s} \mathrm{d}s &= A(t,T) - A(T,T) \\ &= \int_T^t \left[b_s \left[1 - e^{-a(T-s)} \right] - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[1 - 2e^{-a(T-s)} + e^{-2a(T-s)} \right] \right] \mathrm{d}s \end{aligned} \ ,$$

pero $A(T,T)=0$, por lo que

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= \int_T^t b_s \left[1-e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[\int_T^t \mathrm{d}s - 2\int_T^t e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s + \int_T^t e^{-2a(T-s)}\mathrm{d}s\right] \\
&= -\int_t^T b_s \left[1-e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[(t-T) - 2\left[\frac{e^{-a(T-s)}}{a}\right]_T^t + \frac{1}{2a}\left[e^{-2a(T-s)}\right]_T^t\right] \\
&= -\int_t^T b_s \left[1-e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[(t-T) - \frac{2}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right] + \frac{1}{2a}\left[e^{-2a(T-t)}-1\right]\right] \\
&= -\int_t^T b_s \left[1-e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[(T-t) + \frac{2}{a}\left[e^{-a(T-t)}-1\right] - \frac{1}{2a}\left[e^{-2a(T-t)}-1\right]\right]
\end{aligned} ,
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= -\int_t^T b_s \left[1-e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[(T-t) + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right] .
\end{aligned} \tag{3.2.5}
$$

De la expresión anterior se puede notar que para obtener $A(t,T)$, se requiere resolver una integral, la cual depende del parámetro de largo plazo -reversión a la media- y es una función del tiempo. Pero el parámetro de reversión a la media -b_t- no es conocido, razón por la que se tratará de estimarlo a tráves de calibrar a b_t con los precios de mercado. Cabe mencionar que a tráves de b_t no se toma en cuenta el comportamiento de los agentes lo que implica que se pierde la esencia del equilibrio general. Es por ello que a este tipo de modelos se les llama modelos de no arbitraje.

Por lo que de acuerdo a (3.2.1) se tiene que

$$\ln(B(t,T)) = A(t,T) - r_t D(t,T) \ ,$$

y así,

$$A(t,T) = \ln(B(t,T)) + r_t D(t,T) \ , \tag{3.2.6}$$

por lo que al sustituir (3.2.6) en (3.2.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\ln(B(t,T)) + r_t D(t,T) = &- \int_t^T b_s \left[1 - e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s \\ &+ \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[(T-t) + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right]\end{aligned} \ ,$$

pero por (3.2.4)

$$\begin{aligned}\ln(B(t,T)) + r_t \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} = &- \int_t^T b_s \left[1 - e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s \\ &+ \frac{\sigma^2}{2a^2}\left\{(T-t) + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} \right. \\ &\left. - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right\}\end{aligned} \ .$$

La ecuación anterior presenta dos funciones desconocidas las cuales son $B(t,T)$ y b_t, pero al igual que en el modelo de Ho-Lee se supondrá que se conocen los precios de bonos y niveles de tasas de un instante anterior, por lo que se supondrá que se tiene información de valores de mercado en $t = 0$, es decir, se conocen $B(0,T)$ y $R(0,T)$ y a tráves de estos valores se calibrará el modelo de tal forma que el parámetro b_t servirá para que el modelo sea consistente con los valores de mercado en $t = 0$. Para hacer esto posible se denotará al parámetro b_t que hace consistente al modelo con la información disponible en $t = 0$ como $b_t^{(0)}$, de esta forma mediante $b_t^{(0)}$ se calibrará al modelo, por lo que al sustituir $t = 0$ en la ecuación anterior se tiene que

$$\begin{aligned}&- \int_0^T b_s^{(0)} \left[1 - e^{-a(T-s)}\right] \mathrm{d}s + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[T + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{3}{2a}\right] \\ &= r_0 \frac{1-e^{-aT}}{a} + \ln(B(0,T))\end{aligned} \ , \tag{3.2.7}$$

De esta forma se encontrará la función $b_s^{(0)}$ que se calibre con la información pasada, la cual está representada por el precio del bono en $t = 0$, -$B(0,T)$-, donde el supraíndice de $b_s^{(0)}$ denota el momento en donde se calibrará el modelo, y así los precios teóricos serán consistentes con los precios de mercado en $t = 0$.

Para resolver la ecuación integral anterior se derivará de ambos lados ocupando la regla de Leibnitz, obteniendo que el lado izquierdo da como resultado:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial T}\left[-\int_0^T b_s^{(0)}\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[T+\frac{2}{a}e^{-aT}-\frac{1}{2a}e^{-2aT}-\frac{3}{2a}\right]\right]\\
&=-\left(\int_0^T b_s^{(0)}\frac{\partial}{\partial T}\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s+b_T^{(0)}\left[1-e^{-a(T-T)}\right]\frac{\partial T}{\partial T}\right.\\
&\quad\left.-\,b_0^{(0)}\left[1-e^{-a(T-0)}\right]\frac{\partial 0}{\partial T}\right)+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-2e^{-aT}+e^{-2aT}\right]\\
&=-\int_0^T ab_s^{(0)}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-2e^{-aT}+e^{-2aT}\right]
\end{aligned}\quad , \tag{3.2.8}$$

al derivar el lado derecho de (3.2.7) respecto a T se tiene

$$r_o e^{-aT}+\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))\ . \tag{3.2.9}$$

Al sustituir (3.2.8) y (3.2.9) en dicho resultado se tiene que

$$-a\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-2e^{-aT}+e^{-2aT}\right]=r_o e^{-aT}+\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))\ ,$$

es decir

$$\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s=\frac{\sigma^2}{2a^3}\left[1-2e^{-aT}+e^{-2aT}\right]-\frac{1}{a}r_o e^{-aT}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))\ . \tag{3.2.10}$$

Al derivar nuevamente el lado izquierdo de (3.2.10) respecto de T se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s &= \int_0^T b_s^{(0)}\frac{\partial}{\partial T}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s+b_T^{(0)}e^{-a(T-T)}\frac{\partial T}{\partial T}\\
&\quad-b_0^{(0)}e^{-a(T-0)}\frac{\partial 0}{\partial T}\\
&=-a\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s+b_T^{(0)}
\end{aligned}\quad , \tag{3.2.11}$$

al derivar el lado derecho de (3.2.10) se tiene que

$$\frac{\sigma^2}{2a^3}\left[2ae^{-aT}-2ae^{-2aT}\right]+r_oe^{-aT}-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln(B(0,T)) \ , \tag{3.2.12}$$

por lo que de (3.2.11) y (3.2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} -a\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s+b_T^{(0)}=&\frac{\sigma^2}{2a^3}\left[2ae^{-aT}-2ae^{-2aT}\right]+r_oe^{-aT} \\ &-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln(B(0,T)) \end{aligned} ,$$

es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s=&\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln(B(0,T))-\frac{r_0}{a}e^{-aT}+\frac{1}{a}b_T^{(0)} \\ &-\frac{\sigma^2}{a^3}\left[e^{-aT}-e^{-2aT}\right] \end{aligned} . \tag{3.2.13}$$

De esta forma b_T^0 puede ser encontrada al igualar (3.2.10) y (3.2.13), es decir

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{2a^3}\left[1-2e^{-aT}+e^{-2aT}\right]-\frac{1}{a}r_oe^{-aT}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) \\ &=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln(B(0,T))-\frac{r_0}{a}e^{-aT}+\frac{1}{a}b_T^{(0)}-\frac{\sigma^2}{a^3}\left[e^{-aT}-e^{-2aT}\right] \end{aligned} ,$$

por lo que

$$\begin{aligned} b_T^{(0)}=&\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-2e^{-aT}+e^{-2aT}\right]-r_oe^{-aT}-\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln(B(0,T)) \\ &+r_0e^{-aT}+\frac{\sigma^2}{a^2}\left[e^{-aT}-e^{-2aT}\right] \\ =&\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-2e^{-aT}+e^{-2aT}+2e^{-aT}-2e^{-2aT}\right]-\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) \\ &-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln(B(0,T)), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$b_T^{(0)}=-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln(B(0,T))-\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-e^{-2aT}\right] \ .$$

Note que para encontrar a $b_T^{(0)}$ no influyó el hecho de que T fuera el vencimiento del bono, por lo que sin pérdida de generalidad la ecuación anterior es válida para todo valor de t, por lo que

$$b_t^{(0)} = -\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln(B(0,t)) - \frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-e^{-2at}\right] \ . \tag{3.2.14}$$

De esta forma se ha encontrado la forma funcional de $b_t^{(0)}$, mediante la cual los precios teóricos de los bonos reportados por el modelo serán consistentes con los precios de mercado en $t=0$.

Finalmente, para encontrar el precio del bono teórico basta sustituir (3.2.14) en (3.2.5), por lo que

$$\begin{aligned} A(t,T) = &-\int_t^T b_s^{(0)}\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\ &+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[(T-t)+\frac{2}{a}e^{-a(T-t)}-\frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)}-\frac{3}{2a}\right] \end{aligned} \ . \tag{3.2.15}$$

Al resolver la integral de la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
&-\int_t^T b_s^{(0)}\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\
=&-\int_t^T\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s)) - \frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\right. \\
&\left.+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1-e^{-2as}\right]\right)\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\
=&\frac{1}{a}\int_t^T\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\
&+\int_t^T\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\
&-\frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T\left[1-e^{-2as}\right]\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\
=&\frac{1}{a}\int_t^T\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s - \frac{1}{a}\int_t^T\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\right)e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s \\
&+\int_t^T\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s - \int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s \\
&-\frac{\sigma^2}{2a^2}\left[\int_t^T\mathrm{d}s - \int_t^T e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s - \int_t^T e^{-2as}\mathrm{d}s + \int_t^T e^{-2as}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s\right]
\end{aligned} \ . \tag{3.2.16}$$

De la ecuación anterior se tiene que:

$$\int_t^T \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s = \left[\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\right]_t^T = \frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) - \frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) \; . \tag{3.2.17}$$

Resolviendo por partes la siguiente integral

$$\int_t^T \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\right)e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s \; ,$$

con

$$\begin{array}{rlrl} \mathrm{d}V = & \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s)) & U = & e^{-a(T-s)} \\ V = & \frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s)) & \mathrm{d}U = & ae^{-a(T-s)}\mathrm{d}s \end{array} \quad ,$$

por lo que

$$\begin{aligned} & \int_t^T \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\right)e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s \\ = & \left[e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\right]_t^T - a\int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s \\ = & \frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) - e^{-a(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) - a\int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s \end{aligned} \quad . \tag{3.2.18}$$

Al sustituir (3.2.17) y (3.2.18) en (3.2.16) se tiene que

$$\begin{aligned} & -\int_t^T b_s^{(0)}\left[1 - e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s \\ = & \frac{1}{a}\int_t^T \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s - \frac{1}{a}\int_t^T \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln(B(0,s))\right)e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s \\ & + \int_t^T \frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s - \int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s \\ & - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[\int_t^T \mathrm{d}s - \int_t^T e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s - \int_t^T e^{-2as}\mathrm{d}s + \int_t^T e^{-2as}e^{-a(T-s)}\mathrm{d}s\right] \end{aligned} \quad ,$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_t^T b_s^{(0)}\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))-\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\right]\\
&-\frac{1}{a}\biggl(\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))-e^{-a(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\\
&-a\int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s\biggr)+\int_t^T\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s\ \ ,\\
&-\int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s\\
&-\frac{\sigma^2}{2a^2}\biggl((T-t)-\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]-\left[\frac{e^{-2aT}-e^{-2at}}{-2a}\right]\\
&+\left[\frac{e^{-a(T+t)}-e^{-2aT)}}{a}\right]\biggr)
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
&-\int_t^T b_s^{(0)}\left[1-e^{-a(T-s)}\right]\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))-\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\right]\\
&-\frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T))-e^{-a(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\right)+\int_t^T\frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s\ \ .\\
&-\frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t)-\left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]-\left[\frac{e^{-2aT}-e^{-2at}}{-2a}\right]\right)\\
&-\frac{\sigma^2}{2a^2}\left(\left[\frac{e^{-a(T+t)}-e^{-2aT)}}{a}\right]\right)
\end{aligned}
$$

Al sustituir lo anterior en (3.2.15) se tiene que

$$\begin{aligned}
A(t,T) =& \frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) - \frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\right] \\
&- \frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) - e^{-a(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\right) \\
&+ \int_t^T \frac{\partial}{\partial s}\ln(B(0,s))\mathrm{d}s \\
&- \frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t) - \left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right] - \left[\frac{e^{-2aT}-e^{-2at}}{-2a}\right]\right. \\
&+ \left.\left[\frac{e^{-a(T+t)}-e^{-2aT)}}{a}\right]\right) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left((T-t) + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)}\right. \\
&- \left.\frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right)
\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}
A(t,T) = & \frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) - \frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\right] \\
&- \frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(0,T)) - e^{-a(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t))\right) + \ln(B(0,T)) \\
&- \ln(B(0,t)) - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-a(T-t)} + \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{1}{2a}e^{-2at}\right. \\
&+ \left.\frac{e^{-a(T+t)}-e^{-2aT}}{a} - \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} + \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} + \frac{3}{2a}\right)
\end{aligned},$$

de este modo

$$\begin{aligned}
A(t,T) =& -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) + \frac{1}{a}e^{-a(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) + \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] \\
&- \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}e^{-a(T-t)} + \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2at}\right. \\
&- \left.\frac{1}{2a}e^{-2aT} + \frac{1}{a}e^{-a(T+t)}\right) \\
&- \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - \left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) \\
&- \frac{\sigma^2}{2a^2}\frac{1}{2a}\left[\left(1-2e^{-a(T-t)}+e^{-2a(T-t)}\right) - e^{-2at} - e^{-2aT} + 2e^{-a(T+t)}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - \left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) \\
&- \frac{\sigma^2}{4a^3}\left[\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2 - e^{-2at}\left[1+e^{-2aT}e^{2at}-2e^{-a(T+t)}e^{2at}\right]\right] \\
&= \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - \left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) \\
&- \frac{\sigma^2}{4a^3}\left[\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2 - e^{-2at}\left[1-2e^{-aT}e^{-at}e^{2at}+e^{-2a(T-t)}\right]\right] \\
&= \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - \left[\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right]\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) \\
&- \frac{\sigma^2}{4a}\left[\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)^2 - e^{-2at}\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)^2\right]
\end{aligned}.
$$

Por (3.2.4)

$$
A(t,T) = \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - D(t,T)\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) - \frac{\sigma^2}{4a}\left[D^2(t,T) - e^{-2at}D^2(t,T)\right],
$$

por lo tanto

$$
A(t,T) = \ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - D(t,T)\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) - \frac{\sigma^2}{4a}D^2(t,T)\left[1-e^{-2at}\right]. \quad (3.2.19)
$$

Al sustituir (3.2.4) y (3.2.19) en (3.2.1) se tiene que el precio del bono está dado por

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \exp\left(A(t,T) - r_t D(t,T)\right) \\
&= \exp\left(\ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - D(t,T)\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) - \frac{\sigma^2}{4a}D^2(t,T)\left[1-e^{-2at}\right]\right) \\
&\times \exp\left(-r_t D(t,T)\right),
\end{aligned}
$$

con

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \ .$$

3.2.1 Curva de rendimientos (Estructura de Plazos)

Enseguida, se determinará la estructura de plazos para el modelo de Hull-White. Para ello se define a $R(t,T)$ como la tasa de interés entre t y T, entonces el precio de un bono cupón cero con valor nominal de una unidad monetaria está dado por

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ .$$

Al utilizar (3.2.1) y la ecuación anterior se tiene que

$$e^{A(t,T) - r_t D(t,T)} = e^{-R(t,T)(T-t)} \ ,$$

lo cual implica que

$$A(t,T) - r_t D(t,T) = -R(t,T)(T-t) \ ,$$

es decir

$$R(t,T) = \frac{r_t D(t,T)}{T-t} - \frac{A(t,T)}{T-t} \ ,$$

por lo que de acuerdo a (3.2.19) se tiene que la estructura de plazos está dada por

$$\begin{aligned} R(t,T) =& \frac{1}{T-t} r_t D(t,T) - \frac{1}{T-t}\left(\ln\left[\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right] - D(t,T)\frac{\partial}{\partial t}\ln(B(0,t)) \right. \\ & \left. - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t,T)\left[1 - e^{-2at}\right] \right) \end{aligned} \ ,$$

con

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \ .$$

3.3 Modelo de Heath-Jarrow-Morton (HJM)

En los modelos anteriores se daba una especificación exógena de la tasa corta a través de una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}r_t = \mu(r_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(r_t, t)\mathrm{d}W_t \ ,$$

endógenamente se calcula el precio del bono y después se obtiene la estructura de plazos. En estos tipos de modelos la tasa forward se obtiene endógenamente a través de la relación

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln(B(t,T))}{\partial T} \ ,$$

donde $f(t,T)$ es la tasa forward instantánea. En el capítulo 2 se mostraron modelos de equilibrio general, en el capítulo 3 los modelos presentados hasta ahora - Ho-Lee, Hull-White - la especificación de la tasa corta era exógena y h_t y b_t se determinaban endógenamente. Ahora en la metodología presentada en el modelo de Heath-Jarrow-Morton [3] se especificará exógenamente la dinámica de la tasa forward $f(t,T)$, y la tasa corta r_t puede obtenerse endógenamente de tal forma que sea congruente con la dinámica exógena de la tasa forward. Es importante mencionar que en las metodologías anteriores el precio del bono era calculado como

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \ ,$$

ahora el precio del bono será calculado mediante

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s} \ . \tag{3.3.1}$$

3.3.1 Dinámica de la tasa Forward

La especificación exógena de la tasa forward está dada por la siguiente ecuación

$$\mathrm{d}f(t,T) = \alpha(t,T)\mathrm{d}t + \beta(t,T)\mathrm{d}W_t, \quad \mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t) \ .$$

Note que la tendencia $\alpha(t,T)$ solo depende de t y del plazo T, no del nivel actual de la tasa forward $f(t,T)$, como en los modelos anteriores donde la especificación de la tasa era exógena y cuya tendencia dependía del nivel de la tasa corta en el tiempo t, es decir

$$\mathrm{d}r_t = \mu(r_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(r_t, t)\mathrm{d}W_t \ .$$

3.3.2 Determinación endógena de la tasa corta

A continuación, se determinará endógenamente la dinámica de la tasa corta a partir de la especificación exógena de la tasa forward, para ello note que

$$\mathrm{d}f = \alpha(t,T)\mathrm{d}t + \beta(t,T)\mathrm{d}W_t \ ,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathrm{d}f(s,T) &= \int_0^t \alpha(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s,T)\mathrm{d}W_s \\ f(t,T) - f(0,T) &= \int_0^t \alpha(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s,T)\mathrm{d}W_s \end{aligned} \ ,$$

lo cual es equivalente a

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s,T)\mathrm{d}W_s \ . \tag{3.3.2}$$

Debido a que la tasa corta se define como

$$r_t = f(t,t) \ ,$$

es decir, la tasa corta es la tasa forward en un instante. Por lo que de lo anterior y por (3.3.2) se tiene que

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s,t)\mathrm{d}W_s \ . \tag{3.3.3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[r_t \mid \mathcal{F}_0\right] &= \mathrm{E}\left[f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s,t)\mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_0\right] \\ &= \mathrm{E}\left[f(0,t) \mid \mathcal{F}_0\right] + \mathrm{E}\left[\int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s \mid \mathcal{F}_0\right] + \int_0^t \beta(s,t)\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_0\right] \end{aligned} \ ,$$

debido a que $f(0,t)$ y $\int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s$ dada la información al tiempo $t = 0$ son constantes. Además $\mathrm{d}W_s \sim \mathcal{N}(0,\mathrm{d}s)$, se tiene que

$$\mathrm{E}\left[r_t \mid \mathcal{F}_0\right] = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s \ ,$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[r_t \mid \mathcal{F}_0\right] &= \mathrm{Var}\left[f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s,t)\mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_0\right] \\ &= \mathrm{Var}\left[\int_0^t \beta(s,t)\mathrm{d}W_s \mid \mathcal{F}_0\right] \\ &= \int_0^t \beta^2(s,t)\mathrm{d}s\end{aligned} .$$

Al diferenciar totalmente (3.3.3) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r_t &= \frac{\partial f(0,t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\left(\int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s\right)}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\left(\int_0^t \beta(s,t)\mathrm{d}W_s\right)}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial f(0,t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\left(\int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s\right)}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\left(\int_0^t \beta(s,t)\frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right)}{\partial t}\mathrm{d}t\end{aligned} ,$$

al aplicar la regla de Leibnitz se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r_t =& \frac{\partial f(0,t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \left[\int_0^t \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t}\mathrm{d}s + \alpha(t,t)\frac{\partial t}{\partial t} - \alpha(0,t)\frac{\partial 0}{\partial t}\right]\mathrm{d}t \\ &+ \left[\int_0^t \frac{\partial \beta(s,t)}{\partial t}\frac{\mathrm{d}w_S}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s + \beta(t,t)\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} - \beta(0,t)\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}0}\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t \\ =& \frac{\partial f(0,t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \left[\int_0^t \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t}\mathrm{d}s + \alpha(t,t)\right]\mathrm{d}t \\ &+ \left[\int_0^t \frac{\partial \beta(s,t)}{\partial t}\mathrm{d}w_s + \beta(t,t)\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t \\ =& \left[\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t}\mathrm{d}s + \alpha(t,t) + \int_0^t \frac{\partial \beta(s,t)}{\partial t}\mathrm{d}w_s\right]\mathrm{d}t + \beta(t,t)\mathrm{d}W_t\end{aligned} ,$$

por lo que ésta es la nueva dinámica de la tasa corta congruente con la especificación exógena de la tasa forward.

Se calculará el cambio en el precio -d$B(t,T)$- con el lema de Itô, para ello se define

$$I_t = I(t,T) = -\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s \ , \tag{3.3.4}$$

por lo que

$$\mathrm{d}I_t = -\mathrm{d}\left(\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s\right) = -\frac{\partial \int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s}{\partial t}\mathrm{d}t = \frac{\partial \int_T^t f(t,s)\mathrm{d}s}{\partial t}\mathrm{d}t \ ,$$

al aplicar la regla de Leibnitz a la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I_t &= \left[\int_T^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s + f(t,t)\frac{\partial t}{\partial t} - f(t,T)\frac{\partial T}{\partial t}\right]\mathrm{d}t \\ &= \left[\int_T^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s + f(t,t)\right]\mathrm{d}t \\ &= -\left[\int_t^T \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s + f(t,t)\mathrm{d}t \end{aligned} \quad ,$$

pero

$$\mathrm{d}f(t,s) = \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad r_t = f(t,t) \ ,$$

por lo que

$$\mathrm{d}I(t,T) = -\int_t^T \mathrm{d}f(t,s)\mathrm{d}s + r_t\mathrm{d}t \ .$$

Al sustituir $\mathrm{d}f(t,s)$ en la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I(t,T) &= -\int_t^T \left[\alpha(t,s)\mathrm{d}t + \beta(t,s)\mathrm{d}W_t\right]\mathrm{d}s + r_t\mathrm{d}t \\ &= -\int_t^T \alpha(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s - \int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}W_t\mathrm{d}s + r_t\mathrm{d}t \\ &= \left[r_t - \int_t^T \alpha(t,s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t - \left[\int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}W_t \end{aligned} \quad ,$$

sea

$$U = r_t - \int_t^T \alpha(t,s)\mathrm{d}s \ , \tag{3.3.5}$$

y

$$V = -\int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}s \ , \tag{3.3.6}$$

por lo que

$$\mathrm{d}I(t,T) = U\,\mathrm{d}t + V\,\mathrm{d}W_t \ . \tag{3.3.7}$$

Debido a que el precio del bono está dado por

$$B(t,T) = e^{I(t,T)} \ ,$$

con $I(t,T)$ dada por (3.3.4), entonces se calculará $\mathrm{d}B(t,T)$ con el lema de Itô por lo que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B(t,T) &= \mathrm{d}e^{I(t,T)} \\ &= \left[\frac{\partial e^{I(t,T)}}{\partial t} + \frac{\partial e^{I(t,T)}}{\partial I_t} U + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e^{I(t,T)}}{\partial I_t^2} V^2\right] \mathrm{d}t + \frac{\partial e^{I(t,T)}}{\partial I_t} V \,\mathrm{d}W_t \ , \\ &= \left[e^{I(t,T)} U + \frac{1}{2} e^{I(t,T)} V^2\right] \mathrm{d}t + e^{I(t,T)} V \,\mathrm{d}W_t \end{aligned}$$

pero $B = e^I$ por lo que

$$\mathrm{d}B(t,T) = \left[U + \frac{1}{2}V^2\right] B\,\mathrm{d}t + V B\,\mathrm{d}W_t \ , \tag{3.3.8}$$

por (3.3.5) y (3.3.6)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B(t,T) = &\left[r_t - \int_t^T \alpha(t,s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left(-\int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}s\right)^2\right] B\,\mathrm{d}t \\ &- \left(\int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}s\right) B\,\mathrm{d}W_t \end{aligned} \ . \tag{3.3.9}$$

El siguiente paso es formar un portafolio con w_1 unidades de un bono con precio B_1 y vencimiento en T_1 y w_2 unidades de un bono con precio B_2 y vencimiento en T_2, es decir

$$\pi_t = w_1 B_1 + w_2 B_2 \ ,$$

de donde el cambio del portafolio debido a fluctuaciones propias del mercado y no al rebalanceo del portafolio en un instante de tiempo $\mathrm{d}t$ está dado por

$$\mathrm{d}\pi_t = w_1 \mathrm{d}B_1 + w_2 \mathrm{d}B_2 \ .$$

Al sustituir (3.3.8) en $\mathrm{d}\pi_t$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\pi_t =& w_1 \left[\left(U_1 + \frac{1}{2}V_1^2\right) B_1 \mathrm{d}t + V_1 B_1 \mathrm{d}W_t\right] \\ &+ w_2 \left[\left(U_2 + \frac{1}{2}V_2^2\right) B_2 \mathrm{d}t + V_2 B_2 \mathrm{d}W_t\right] \\ =& \left[w_1\left(U_1 + \frac{1}{2}V_1^2\right) B_1 + w_2\left(U_2 + \frac{1}{2}V_2^2\right) B_2\right] \mathrm{d}t \\ &+ \left[w_1 V_1 B_1 + w_2 V_2 B_2\right] \mathrm{d}W_t \end{aligned} \ . \tag{3.3.10}$$

En la expresión anterior, la fuente de riesgo está representada por el segundo término el cual contiene a $\mathrm{d}W_t$, por lo que para administrar este riesgo se seleccionarán a w_1 y w_2 de tal forma que anulen este riesgo. Para que esto suceda se tiene que:

$$w_1 V_1 B_1 + w_2 V_2 B_2 = 0 \ .$$

Se puede notar que existe una infinidad de posibles soluciones de la ecuación anterior para w_i, pero se seleccionará aquella que tal que $w_1 = 1$. A partir de esta selección se encontrará a w_2, por lo que si $w_1 = 1$, la expresión anterior se transforma en

$$V_1 B_1 + w_2 V_2 B_2 = 0 \ ,$$

de donde se obtiene

$$w_2 = -\frac{V_1 B_1}{V_2 B_2} \ .$$

Por lo que si se eligen a w_1 y a w_2 como

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \\ w_2 &= -\frac{V_1 B_1}{V_2 B_2} \ , \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

se elimina el riesgo mercado del portafolio.

Al sustituir (3.3.11) en (3.3.10) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\pi_t &= \left[\left(U_1 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) B_1 - \frac{V_1 B_1}{V_2 B_2} \left(U_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \right) B_2 \right] \mathrm{d}t \\ &\quad + \left[V_1 B_1 - \frac{V_1 B_1}{V_2 B_2} V_2 B_2 \right] \mathrm{d}W_t \qquad , \\ &= \left[U_1 + \frac{1}{2} V_1^2 - \frac{V_1}{V_2} \left(U_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \right) \right] B_1 \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

es decir, bajo la selección de w_1 y w_2 dadas en (3.3.11) el portafolio π_t es libre de riesgo.

Por otro lado, si se supone que existe un mercado de crédito, donde la tasa a la que se presta y se pide prestado es la misma y es libre de riesgo, la cual será denotada por r_t, y se invierte $w_1 = 1$ y $w_2 = -\frac{V_1 B_1}{V_2 B_2}$ unidades monetarias en un banco a la tasa r_t, se obtiene el portafolio

$$\pi_t^B = \left[B_1 - \frac{V_1 B_1}{V_2 B_2} B_2 \right] = B_1 - \frac{V_1}{V_2} B_1 \ ,$$

por lo que el cambio en π_t^B debido unicamente a fluctuaciones propias del mercado y no al rebalanceo del portafolio está dado por

$$\mathrm{d}\pi_t^B = \left[B_1 - \frac{V_1}{V_2}B_1\right] r\mathrm{d}t \ . \tag{3.3.13}$$

Al emplear argumentos de arbitraje se tiene que

$$\mathrm{d}\pi_t = \mathrm{d}\pi_t^B \ ,$$

y al sustituir (3.3.12) y (3.3.13) en la expresión anterior se tiene que

$$\begin{gathered}\left[U_1 + \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{V_1}{V_2}\left(U_2 + \frac{1}{2}V_2^2\right)\right] B_1\mathrm{d}t = \left[B_1 - \frac{V_1}{V_2}B_1\right] r\mathrm{d}t \\ U_1 + \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{V_1}{V_2}\left(U_2 + \frac{1}{2}V_2^2\right) = r - r\frac{V_1}{V_2}\end{gathered} \ ,$$

$$U_1 + \frac{1}{2}V_1^2 - r = \frac{V_1}{V_2}\left(U_2 + \frac{1}{2}V_2^2\right) - r\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_2}\left[\frac{U_2 + \frac{1}{2}V_2^2 - r}{V_2}\right]$$

por lo tanto

$$\frac{U_1 + \frac{1}{2}V_1^2 - r}{V_1} = \frac{U_2 + \frac{1}{2}V_2^2 - r}{V_2} \ .$$

Debido a (3.3.5) y (3.3.6) se puede notar que U_i, V_i dependen de t y T_i, $i = 1, 2$ por lo que la ecuación anterior depende únicamente del plazo de los bonos (T_i). Como esta igualdad es válida para todo valor de T_i, entonces los cocientes de la igualdad como son los mismos, no dependen del plazo, por lo que sin pérdida de generalidad se tiene que

$$\frac{U + \frac{1}{2}V^2 - r}{V} = \lambda(r_t, t) \ .$$

Note que en la expresión anterior $\lambda(r_t, t)$ no es observable, sin embargo se podría pensar como una prima de riesgo. Entonces aprovechando lo anterior, se supondrá el caso más simple el cual es

$$\lambda(r_t, t) = 0 \ ,$$

es decir, se supondrá neutralidad al riesgo, por lo que se obtiene que

$$0 = \lambda(r_t, t) = \frac{U + \frac{1}{2}V^2 - r}{V} \ ,$$

de donde se llega a que

$$U + \frac{1}{2}V^2 - r = 0 \ ,$$

es decir, la ecuación anterior está indicando que en un mundo neutral al riesgo α y β están relacionadas.

Sustituyendo (3.3.5) y (3.3.6) se tiene que

$$r_t - \int_t^T \alpha(t,s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left(-\int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}s\right)^2 - r_t = 0 \ ,$$

$$\int_t^T \alpha(t,s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}s\right)^2 \ ,$$

derivando de ambos lados

$$\alpha(t,T) = \beta(t,T)\int_t^T \beta(t,s)\mathrm{d}s \ , \tag{3.3.14}$$

es decir, bajo valuación neutral al riesgo $\alpha(t,T)$ y $\beta(t,T)$ no se pueden dar arbitrariamente, pero al dar la forma funcional de $\alpha(t,T)$ ó $\beta(t,T)$ se obtiene $\beta(t,T)$ ó $\alpha(t,T)$.

Ejemplo

Sea $\beta(t,T) = \sigma$, entonces por (3.3.14) se tiene que

$$\alpha(t,T) = \sigma\int_t^T \sigma\mathrm{d}s = \sigma(T-t) \ ,$$

por lo que la dinámica de la tasa corta está dada por

$$\mathrm{d}f(t,T) = \sigma^2(T-t) + \sigma\mathrm{d}W_t \ .$$

De lo anterior es importante hacer notar para evitar confusiones que σ es la volatilidad de la tasa forward ($f(t,T)$, la cual puede ser estimada por

$$f(t,T) = -\frac{\partial\ln(B(t,T))}{\partial T} \ ,$$

por lo que de esta forma el precio del bono estaría dado por

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s} \ .$$

Para determinar el precio del bono primero se calculará $f(t,T)$ usando (3.3.2) por lo que

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s,T)\mathrm{d}W_s \\ &= f(0,T) + \int_0^t \sigma(T-s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma \mathrm{d}W_s \\ &= f(0,T) - \sigma^2 \frac{(T-s)^2}{2}|_0^t + \sigma(W_t - W_0) \\ &= f(0,T) - \frac{\sigma^2}{2}\left[(T-t)^2 - (T-0)^2\right] + \sigma W_t \\ &= f(0,T) - \frac{\sigma^2}{2}\left[T^2 - 2Tt + t^2 - T^2\right] + \sigma W_t \\ &= f(0,T) + \sigma^2\left[Tt - \frac{t^2}{2}\right] + \sigma W_t \end{aligned} ,$$

y así,

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 t\left[T - \frac{t}{2}\right] + \sigma W_t \ ,$$

entonces

$$\begin{aligned} -\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s &= -\int_t^T \left[f(0,s) + \sigma^2 t\left[s - \frac{t}{2}\right] + \sigma W_t\right]\mathrm{d}s \\ &= -\int_t^T f(0,s)\mathrm{d}s - \sigma^2 t\int_t^T \left[s - \frac{t}{2}\right]\mathrm{d}s - \sigma W_t \int_t^T \mathrm{d}s \\ &= -\left[\int_t^0 f(0,s)\mathrm{d}s + \int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right] - \sigma^2 t\left[\frac{s^2}{2}|_t^T - \frac{t}{2}s|_t^T\right] \\ &\quad - \sigma W_t(T-t) \\ &= -\left[\int_t^0 f(0,s)\mathrm{d}s + \int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right] - \frac{\sigma^2}{2}t\left[T^2 - t^2 - tT + t^2\right] \\ &\quad - \sigma W_t(T-t) \end{aligned} ,$$

de este modo se obtiene

$$\begin{aligned} -\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s = &-\left[\int_t^0 f(0,s)\mathrm{d}s + \int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right] - \frac{\sigma^2}{2}tT\left[T-t\right] \\ &- \sigma W_t(T-t) \end{aligned} ,$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \exp\left[-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s\right] \\
&= \exp\Bigg[-\left(\int_t^0 f(0,s)\mathrm{d}s + \int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right) - \frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] \\
&\quad - \sigma W_t(T-t)\Bigg] \\
&= \exp\Bigg[\int_0^t f(0,s)\mathrm{d}s - \int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s - \frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] \\
&\quad - \sigma W_t(T-t)\Bigg] \\
&= \frac{\exp\left[-\int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right]}{\exp\left[-\int_0^t f(0,s)\mathrm{d}s\right]}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] - \sigma W_t(T-t)\right]
\end{aligned} ,
$$

como

$$B(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s\right] ,$$

entonces

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] - \sigma W_t(T-t)\right] ,$$

pero

$$W_t \sim \mathcal{N}(0,t) ,$$

por lo que si $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces

$$W_t = \epsilon\sqrt{t} ,$$

y de esta forma se tiene que

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] - \sigma(T-t)\epsilon\sqrt{t}\right] . \tag{3.3.15}$$

Cabe hacer notar que a diferencia de Hull-White aquí no se calibró el modelo, pero se puede interpretar que la calibración viene dada por la ecuación (3.3.14), es decir, el modelo se calibra al dar exógenamente a $\beta(t,T)$ -$\alpha(t,T)$- y determinar endógenamente a $\alpha(t,T)$ -$\beta(t,T)$-. Finalmente, note que para calcular el precio del bono se requiere un vector de precios o una curva de rendimientos inicial -ya que se requiere a $B(0,T)$ y $B(0,t)$- y esto puede ser a tráves de Vasicek, CIR o algún otro modelo, pero se recomienda tomar los precios de mercado.

3.3.3 Curva de rendimientos (Estructura de plazos)

Enseguida, se determinará la estructura de plazos para el modelo de Heath-Jarrow-Morton. Para ello se supondrá que $R(t,T)$ es la tasa de interés comprendida entre el tiempo t y el plazo T. De acuerdo a esta notación el precio de un bono cupón cero deberá estar dado por:

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ , \tag{3.3.16}$$

por (3.3.15) y (3.1.16) se tiene que:

$$\frac{B(0,T)}{B(0,t)} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] - \sigma(T-t)\epsilon\sqrt{t}\right] = e^{-R(t,T)(T-t)} \ ,$$

por lo que:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] - \sigma(T-t)\epsilon\sqrt{t}\right]\right) \ ,$$

lo cual es equivalente a

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[-\ln\left(\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right) + \frac{\sigma^2}{2}tT\,[T-t] + \sigma(T-t)\epsilon\sqrt{t}\right]$$

con $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$.

De la expresión anterior se puede notar que la estructura de plazos no es una función determinista como en los modelos anteriores, en el modelo de Heath-Jarrow-Morton de esta última ecuación se aprecia que la estructura depende de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno. Es por esta razón que la estructura de plazos en este modelo puede ser obtenida bajo simulaciones.

3.4 Modelo Nelson y Siegel

El modelo de Nelson y Siegel [12] está interesado en estudiar la tasa forward, en lugar de la dinámica de la tasa corta. Este modelo se desliga de los argumentos de equilibrio general, ya que no ocupa argumentos de arbitraje para determinar la estructura de plazos, en lugar de ello se basa en el supuesto de que la estructura de plazos es la solución de una ecuación diferencial de segundo orden, razón por la cual este modelo proporciona un método de estimación paramétrico de la estructura de plazos.

Bajo esta metodología se ignora el comportamiento de los agentes en un mercado y se supone que la tasa forward es solución de la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - \beta_0 b = 0 \ , \tag{3.4.1}$$

cuyas soluciones de frontera están dadas por

$$x(T) = A, \quad \dot{x}(T) = B, \quad t < T.$$

Es importante destacar que el suponer que la tasa forward satisface esta ecuación diferencial da la posibilidad de encontrar una amplia gama de curvas que sean solución, razón por la cual se dará una técnica para encontrar los parámetros a, b y β_0 que mejor ajusten a la estructura de plazos observada.

A continuación se encontrará la solución a (3.4.1), para ello primero se encontrará la solución a la ecuación homogénea, es decir

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0 \ . \tag{3.4.2}$$

Sea e^{mt} una solución de la ecuación homogénea asociada a (3.4.1), al sustituir esta solución en (3.4.2) se tiene que

$$e^{mt}\left(m^2 + am + b\right) = 0 \ ,$$

debido a que $e^{mt} \neq 0$ se tiene que

$$m^2 + am + b = 0 \ .$$

De esta forma la solución del polinomio característico está dada por

$$m_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \ ,$$

es decir, se han encontrado dos soluciones particulares de la ecuación homogénea, y así, la solución general para la ecuación homogénea está dada por la combinación líneal de estas dos soluciones,

$$x_c(t) = \beta_1 e^{m_1(t-T)} + \beta_2 e^{m_2(t-T)} \ . \tag{3.4.3}$$

Enseguida, se calculará una solución particular para la ecuación no homogénea dada por (3.4.1), para ello se propone como candidato a solución a

$$x_p(t) = \alpha + \gamma(t - T) \ .$$

Al sustituir la solución propuesta anteriormente en (3.4.1) se tiene que

$$0 = a\gamma + b\left(\alpha + \gamma(t - T)\right) - \beta_0 b = (a\gamma + b\alpha - \beta_0 b) + \gamma(t - T) \ ,$$

por lo que se tiene

$$a\gamma + b\alpha - \beta_0 b = 0 \ ,$$

$$\gamma(t - T) = 0 \ .$$

Debido a las condiciones de frontera de (3.4.1) se tiene que $t < T$ por lo que $t \neq 0$, entonces para que la ecuación anterior sea cierta se tiene que

$$\gamma = 0, \quad \alpha = \beta_0 \ ,$$

y así, la solución particular de (3.4.1) está dada por

$$x_p(t) = \beta_0 \ .$$

Finalmente, la solución general de (3.4.1) está dada por la solución general de la homogénea asociada más la particular, es decir

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{m_1(t-T)} + \beta_2 e^{m_2(t-T)} \ ,$$

con

$$m_i = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad i = 1, 2 \ .$$

Si

$$m_1 = \frac{1}{\tau_1} \quad m_2 = \frac{1}{\tau_2} \ ;$$

por lo tanto la tasa instantánea forward, $f(t,T)$, de plazo T al tiempo de referencia t, está dada por:

$$f(t,T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{(T-t)}{\tau_1}} + \beta_2 e^{-\frac{(T-t)}{\tau_2}} \ . \tag{3.4.4}$$

Note que para que la tasa forward tome valores reales se debe además imponer la condición de que

$$a^2 - 4b > 0 \ , \tag{3.4.5}$$

y las condiciones de frontera llevan a que

$$\begin{aligned} A &= f(T,T) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ B &= f'(T,T) = \frac{\beta_1}{\tau_1} + \frac{\beta_2}{\tau_2} \end{aligned} \ . \tag{3.4.6}$$

De lo anterior se puede notar que la tasa forward dada en (3.4.4) debe satisfacer (3.4.6), sin embargo existen una infinidad de soluciones para β_0, β_1 y β_2 que satisfacen las condiciones de frontera dadas en (3.4.6). Además, para que existan soluciones reales se debe cumplir con (3.4.5), es decir, la solución anterior es poco práctica para trabajar, razón por la que se modificará la ecuación diferencial que debe satisfacer la tasa forward (3.4.1) por una que sea más tratable.

Para conseguir que la tasa forward sea analíticamente más tratable se modificará la ecuación diferencial (3.4.1), de tal manera que solo se tenga una sola raíz real en el polinomio característico de esta ecuación diferencial. Note que para obtener una sola raíz real en el polinomio característico debe ocurrir que

$$0 = (m-a)^2 = m^2 - 2a + a^2 \ ,$$

entonces la ecuación diferencial de segundo orden de donde surge este polinomio está dada por

$$\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + a^2 x(t) - \beta_0 a^2 = 0 \ , \tag{3.4.7}$$

cuyas soluciones de frontera están dadas por

$$x(T) = A, \quad \dot{x}(T) = B, \quad t < T \ .$$

Se encontrará la solución a (3.4.7), para ello primero se calculará la solución a la ecuación homogénea de (3.4.7), es decir

$$\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + a^2 x(t) = 0 \; . \tag{3.4.8}$$

Sea e^{mt} una solución de la ecuación homogénea asociada a (3.4.7), al sustituir esta solución en (3.4.8) se tiene que

$$e^{mt}\left(m^2 - 2am + a^2\right) = 0 \; ,$$

debido a que $e^{mt} \neq 0$ se tiene que

$$0 = m^2 - 2am + a^2 = (m-a)^2 \; ,$$

cuya solución al polinomio característico de (3.4.7) está dada por

$$m = a \; ,$$

por lo que una solución de (3.4.8) está dada por

$$x_1(t) = e^{a(t-T)} \; . \tag{3.4.9}$$

Note que para encontrar la solución general de (3.4.8) se requieren 2 soluciones particulares linealmente independientes, sin embargo solo se ha encontrado una, razón por la cual se propone como una segunda solución a (3.4.8) a

$$x_2(t) = u(t)x_1(t) = u(t)e^{a(t-T)} \; .$$

Para encontrar a $u(t)$ se sustituye a $x_2(t)$ en (3.4.8).

Al calcular las derivadas se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2(t) &= \dot{u}(t)e^{a(t-T)} + au(t)e^{a(t-T)} \\
\ddot{x}_2(t) &= \ddot{u}(t)e^{a(t-T)} + a\dot{u}(t)e^{a(t-T)} + a^2u(t)e^{a(t-T)} + a\dot{u}(t)e^{a(t-T)} \\
\ddot{x}_2(t) &= \ddot{u}(t)e^{a(t-T)} + 2a\dot{u}(t)e^{a(t-T)} + a^2u(t)e^{a(t-T)}
\end{aligned} \; ,$$

al sustituir en (3.4.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
0 =& \left[\ddot{u}(t) + 2a\dot{u}(t) + a^2u(t) - 2a\dot{u}(t) - 2a^2u(t) + a^2u(t)\right]e^{a(t-T)} \\
=& \ddot{u}(t)e^{a(t-T)}
\end{aligned} \; .$$

Note que $e^{a(t-T)} > 0$, entonces $\ddot{u}(t) = 0$, por lo que

$$u(t) = \alpha + \gamma(t - T) \ ,$$

y así,

$$x_2(t) = [\alpha + \gamma(t - T)]\, e^{a(t-T)} \ .$$

Por lo que la solución general a (3.4.8) está dada por la combinación lineal de x_1 y x_2, es decir

$$x_c(t) = \beta_1 e^{a(t-T)} + \beta_2 [\alpha + \gamma(t - T)]\, e^{a(t-T)} \ . \tag{3.4.10}$$

Para determinar la solución general a (3.4.7) se requiere tener una solución particular de (3.4.8), por lo que se propone como un candidato a solución a

$$x_p(t) = \theta + \phi(t - T) \ ,$$

al sustituir la solución propuesta en (3.4.7) se obtiene que

$$0 = -2a\phi + a^2 [\theta + \phi(t - T)] - \beta_0 a^2 = (-2a\phi + a^2\theta - \beta_0 a^2) + a^2\phi(t - T) \ ,$$

por lo que

$$\begin{aligned} 0 &= -2a\phi + a^2\theta - \beta_0 a^2 \\ 0 &= a^2\phi(t - T) \end{aligned} \ .$$

Pero $t < T$ por lo que para que la ecuación anterior sea cierta tiene que pasar que $\phi = 0$, entonces se tiene que

$$\theta = \beta_0 \ ,$$

y así

$$x_p(t) = \beta_0 \ ,$$

finalmente, la solución general de (3.4.7) está dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{a(t-T)} + \beta_2 [\alpha + \gamma(t - T)]\, e^{a(t-T)} \ , \tag{3.4.11}$$

cuyas condiciones de frontera establecen que

$$\begin{aligned} A = x(T) &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2\alpha \\ B = \dot{x}(t) &= \beta_1 a + \beta_2 a\alpha + \beta_2\gamma \end{aligned} \ . \tag{3.4.12}$$

Para hacer más tratable la solución anterior se impodrá que $\alpha = 0$ y $\gamma = -a$, de esta forma se obtiene que

$$\begin{aligned} A &= \beta_0 + \beta_1 \\ B &= \dot{x}(t) = \beta_1 a - a\beta_2 \end{aligned} ,$$

y así, la tasa forward instantánea está dada por

$$f(t,T) = \beta_0 + \beta_1 e^{a(t-T)} + \beta_2 \gamma (t-T) e^{a(t-T)} = \beta_0 + \beta_1 e^{a(t-T)} - \beta_2 a(t-T)e^{a(t-T)},$$

sea $\tau = \frac{1}{a}$, entonces

$$f(t,T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{T-t}{\tau}} + \beta_2 \left[\frac{T-t}{\tau}\right] e^{-\frac{T-t}{\tau}} \ . \qquad (3.4.13)$$

Por lo tanto, la tasa forward dada por (3.4.4) es la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden cuando las raíces del polinomio característico son distintas, y la tasa forward dada por (3.4.13) es la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden cuando las raíces del polinomio característico son reales e iguales.

3.4.1 Curva de rendimientos (Estructura de Plazos) para el caso de raíces distintas.

En esta sección se determinará la curva de rendimientos para el caso de raíces distintas, a partir de la tasa forward dada por (3.4.4).

Se sabe que la relación entre la tasa forward y la estructura de plazos está dada por

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds \ ,$$

entonces de (3.4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t,s)ds = &\int_t^T \left[\beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{s-t}{\tau_1}} + \beta_2 e^{-\frac{s-t}{\tau_2}}\right] ds \\ =&\beta_0(T-t) - \tau_1\beta_1 e^{-\frac{s-t}{\tau_1}}|_t^T - \tau_2\beta_2 e^{-\frac{s-t}{\tau_2}}|_t^T \\ =&\beta_0(T-t) - \tau_1\beta_1\left[e^{-\frac{T-t}{\tau_1}} - 1\right] - \tau_2\beta_2\left[e^{-\frac{T-t}{\tau_2}} - 1\right] \end{aligned} ,$$

y así,

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds = \beta_0 - \tau_1\beta_1 \frac{e^{-\frac{T-t}{\tau_1}} - 1}{T-t} - \tau_2\beta_2 \frac{e^{-\frac{T-t}{\tau_2}} - 1}{T-t} \ .$$

Por lo tanto la curva de rendimientos o estructura de plazos está dada por

$$R(t,T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{T-t}{\tau_1}}}{\frac{T-t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{1 - e^{-\frac{T-t}{\tau_2}}}{\frac{T-t}{\tau_2}} \ .$$

3.4.2 Curva de rendimientos (Estructura de Plazos) para el caso de raíces reales e iguales.

Se determinará la curva de rendimientos para el caso de raices reales e iguales a partir de la tasa forward la cual está dada por (3.4.13).

Análogamente, como en el caso de raíces reales y distintas, se tiene que la estructura de plazos está dada por

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t,s) ds \ ,$$

entonces de (3.4.13) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t,s)ds = & \int_t^T \left[\beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{s-t}{\tau}} + \beta_2 \left[\frac{s-t}{\tau} \right] e^{-\frac{s-t}{\tau}} \right] ds \\ = & \beta_0 (T-t) - \tau \beta_1 e^{-\frac{s-t}{\tau}} |_t^T + \beta_2 \int_t^T \left(\frac{s-t}{\tau} \right) e^{-\frac{s-t}{\tau}} \mathrm{d}s \\ = & \beta_0 (T-t) - \tau \beta_1 \left[e^{-\frac{T-t}{\tau}} - 1 \right] + \beta_2 \int_t^T \left(\frac{s-t}{\tau} \right) e^{-\frac{s-t}{\tau}} \mathrm{d}s \end{aligned} \quad . \tag{3.4.14}$$

Para calcular la integral del tercer sumando del lado derecho de la última igualdad en la expresión anterior, se tiene que si $u = \frac{s-t}{\tau}$, entonces $\mathrm{d}u = \frac{1}{\tau}\mathrm{d}s$, por lo que

$$\begin{aligned} \int_t^T \left(\frac{s-t}{\tau} \right) e^{-\frac{s-t}{\tau}} \mathrm{d}s = & \int_0^{\frac{T-t}{\tau}} u e^{-u} \tau \mathrm{d}u \\ = & \tau \int_0^{\frac{T-t}{\tau}} u e^{-u} \mathrm{d}u \end{aligned} \ .$$

Al integrar por partes la expresión anterior con

$$\mathrm{d}f = e^{-u} \quad , \quad g = u \ ,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\int_t^T \left(\frac{s-t}{\tau}\right) e^{-\frac{s-t}{\tau}} \mathrm{d}s =& \tau \int_0^{\frac{T-t}{\tau}} ue^{-u}\mathrm{d}u \\ =& \tau\left[-ue^{-u} - \int -e^{-u}\mathrm{d}u\right]_0^{\frac{T-t}{\tau}} \\ =& \tau\left[-ue^{-u} - e^{-u}\right]_0^{\frac{T-t}{\tau}} \\ =& -\tau\left[\frac{T-t}{\tau}e^{-\frac{T-t}{\tau}} + e^{-\frac{T-t}{\tau}} - 1\right]\end{aligned} \quad ,$$

y al sustituir lo anterior en (3.4.14) se tiene que

$$\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s = \beta_0(T-t) - \tau\beta_1\left[e^{-\frac{T-t}{\tau}} - 1\right] - \beta_2\tau\left[\frac{T-t}{\tau}e^{-\frac{T-t}{\tau}} + e^{-\frac{T-t}{\tau}} - 1\right] \ .$$

Por lo tanto la estructura de plazos está dada por

$$\begin{aligned}R(t,T) =& \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds \\ =& \beta_0 + \beta_1\frac{1-e^{-\frac{T-t}{\tau}}}{\frac{T-t}{\tau}} - \beta_2 e^{-\frac{T-t}{\tau}} + \beta_2\frac{1-e^{-\frac{T-t}{\tau}}}{\frac{T-t}{\tau}} \quad . \\ =& \beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\frac{1-e^{-\frac{T-t}{\tau}}}{\frac{T-t}{\tau}} - \beta_2 e^{-\frac{T-t}{\tau}}\end{aligned}$$

CONCLUSIONES

En los últimos años la ingeniería financiera ha experimentado profundas transformaciones, sustentadas en la tecnología de la información y en el desarrollo de modelos en tiempo real, facilitando así la toma de decisiones en el sector financiero. El proceso de estas transformaciones causan cambios extremos en la toma de decisiones de los participantes del mercado, razón por la cual resulta necesario tener un sistema eficaz para obtener los precios de los diferentes instrumentos negociados.

La teoría financiera expresa que el precio de un activo financiero es el valor presente de sus flujos de efectivo, por lo que resulta importante conocer la tasa de interés a la que será descontado el instrumento. La estructura de plazos -ó tasa spot- se define como la tasa de interés de una inversión efectuada en un periodo de tiempo que empieza en t y termina en T años, donde el interés y el principal serán pagados en T. En los instrumentos de renta fija los bonos cupón cero son esenciales porque a partir de ellos se puede obtener el precio de instrumentos de renta fija con flujos de efectivo intermedios, como en el caso de los bonos cuponados. La tasa corta es fundamental ya que a partir de ésta se determina la estructura de plazos.

En un escenario de equilibrio a través de la especificación endógena de la dinámica de la tasa corta, se obtiene una ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden que debe satisfacer un bono cupón cero, y a partir de este precio se deriva la estructura de plazos.

El modelo de Merton resulta inadecuado para modelar la estructura de plazos ya que puede llegar a tomar valores negativos. La esperanza y varianza de la tasa corta crece sin límite al transcurrir el tiempo, la curva de rendimientos y tasa forward decrecen indefinidamente conforme el tiempo transcurre, además el suponer que la tendencia de la tasa corta es constante no se observa en la práctica. En la práctica, se observa que las tasas de interés no crecen indefinidamente, pero presentan reversión de la media a un valor constante, lo cual es una propiedad deseable en el análisis de la dinámica de las tasas de interés. Dicha característica de interés la presenta el modelo de Vasicek, donde la dinámica de la tasa corta presenta reversión a la media. Cabe destacar que este modelo es muy útil debido a sus propiedades para valuar productos derivados de tasas de interés. Sin embargo, pese a esta gran virtud la principal limitante de este modelo es que la distribución de la tasa corta es normal, entonces la estructura de plazos podría tener pendiente negativa e incluso tomar valores negativos. Para subsanar el problema del modelo de Vasicek se presentó el modelo CIR, el cual no permite tasas negativas. Sin embargo existe el inconveniente de que el ajuste puede ser insatisfactorio.

Como se comentó los modelos de equilibrio podrían tener el inconveniente de no ajustar la curva de rendimientos observada con la teórica. Es por esta razón que los modelos de no equilibrio tratan de ajustar la curva teórica con la observada.

El modelo de Ho-Lee es una extensión del modelo de Merton, al hacer dependiente del tiempo el parámetro de tendencia. Pero, la crítica más común del modelo de Ho-Lee es que da muy poca flexibilidad para escoger la volatilidad. Se hace el supuesto de que todas las tasas spot y las tasas forward tienen la misma desviación estándar. Además, el proceso de difusión no tiene reversión a la media. Pero la limitación más importante y las más común señalada es que se necesita suponer un cierto nivel de tasas forward, el cual se cree es aún más difícil de predecir que la estructura intertemporal actual de las tasas de interés. Para subsanar el problema de reversión a la media del modelo de Ho-Lee, Hull-White desarrollaron un modelo el cual es una extensión del modelo de Vasicek, cuya aportación radica en hacer dependiente del tiempo el parámetro de largo plazo. En el modelo de Hull-White se proporcionó la aproximación de la pendiente de la estructura intertemporal de tasas o la curva inicial de las tasas forward instantáneas. Se debe suponer la curva inicial de las tasas forward instantáneas para poder obtener la estructura intertemporal de tasas. Por lo tanto, sino se hace una estimación correcta de cuales serán las tasas forward en un futuro, se afectaría de manera importante la forma de la estructura intertemporal de tasas, producida por este modelo. Se considera que el modelo de Hull-White es un modelo teóricamente bien fundamentado pero su falla radica en definir claramente una expresión de cómo evolucionarán las tasas forward a través del tiempo reduciendo de esta forma lo práctico del modelo. Esto es, el modelo de Hoo-Lee y Hull-White derivan la estructura de plazos a través de la ecuación diferencial (1.24), es decir, bajo un marco de equilibrio. Sin embargo el rompimiento del equilibrio de estos modelos es cuando se hace la calibración de los modelos a través de los parámetros de tendencias.

El modelo de Heath-Jarrow-Morton supone una especificación exógena de la tasa forward y partir de ésta se obtiene la tasa corta y la estructura de plazos. Para implementar este modelo es necesario hacer uso de simulación. Una de las limitaciones de este modelo es que éste involucra la tasa forward instantánea la cual no es observable en el mercado. Además, no es fácil calibrar los precios de instrumentos comercializados activamente. Similarmente el modelo de Nelson-Siegel supone una especificación exógena de la tasa forward y a partir de ésta se determina endógenamente tanto la tasa corta como la estructura de plazos. Sin embargo, este modelo está basado en la premisa de que existe un conjunto de ecuaciones diferenciales que generan la curva de rendimiento típicamente encontradas en los mercados. Suponiendo que la teoría de las expectativas se mantiene, se puede suponer que las tasas forward que están siendo estimadas, serán las soluciones a estas ecuaciones. En otras palabras, la pendiente de la estructura de plazos en diferentes puntos a través del tiempo provee las tasas forward instantáneas implícitas en el modelo. La limitación más importante de éste modelo es que casi nunca se ajusta a las observaciones del mercado. De hecho usualmente no se ajusta a las observaciones de mercado de corto plazo.

Como conclusión general en el desarrollo de este trabajo se presentaron dos metodologías para obtener la estructura de plazos -curva de rendimientos-, el enfoque de equilibrio general y el de no equilibrio. Se comentaron las principales ventajas y desventajas de los modelos desarrollados en cada enfoque. Sin embargo, el común denominador de ambos enfoques es la modelación del factor de riesgo de las dinámicas de las tasas a través del movimiento Browniano. Cabe mencionar que el movimiento Browniano únicamente captura pequeñas fluctuaciones del mercado dejando a un lado los movimientos extremos en las variables macroeconómicas que afectan a las tasas de interés, así como la imprecisión de los parámetros ya que ambas metodologías suponen dados y conocidos éstos. Esta situación conlleva a que el modelo es poco realista, por lo que posibles extensiones del presente trabajo podrían ser:la modelación de la dinámica de la tasa corta ó forward a través de procesos de difusión con saltos incorporando la teoría de los valores extremos, con el objetivo de subsanar el problema de las fluctuaciones modeladas en el movimiento Browniano.

La teoría financiera actual se basa en la hipótesis de mercados eficientes, la cual supone que todos los inversionistas reaccionan inmediatamente a la información que se les presenta, de tal forma que el futuro no está relacionado con el pasado ó el presente. Sin embargo, la mayoría de los agentes normalmente esperan que la información que recibieron se confirme y no reaccionan hasta que se establezca una tendencia clara. Esta asimilación retardada de información es lo que causa que los rendimientos financieros se modelen a través de una caminata aleatoria sesgada, es decir, que constituyan una serie de tiempo fractal. El movimiento Browniano al ser el límite de una caminata aleatoria puede ser extendido a un concepto llamado movimiento Browniano fraccionado para capturar estas observaciones, de esta forma se podrían construir modelos de difusión para la tasa corta que contemplen el movimiento Browniano fraccionado.

La mayoría de los fenómenos que encontramos cada día son imprecisos, es decir, tienen implícito un cierto grado de imprecisión en la descripción de su naturaleza. La lógica difusa es conocida también como lógica borrosa, es una teoría basada en reglas que tolera imprecisiones e incluso las aprovecha para resolver problemas que antes no tenían solución. Las metodologías revisadas anteriormente se hicieron bajo el supuesto de que se conocían los parámetros que conducían las dinámicas de las tasas cortas ó forward, siendo que en la práctica se estiman vía métodos estadísticos. Como es bien sabido la estabilidad de los parámetros estimados a través de inferencia estadística dependerá de la muestra obtenida, en particular, de las condiciones actuales del mercado. Como consecuencia de lo anterior existe una imprecisión en la obtención del valor exacto de los parámetros, surgiendo la necesidad de adaptar las metodologías mediante la lógica difusa.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Cox, J., Ingersoll E., Ross, S.,(1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* , 53(2), 385-407.

[2] Duffie, D., (2001). Dynamic asset pricing theory, Princeton University Press, Princeton.

[3] Heath, D., Jarrow, R., Morton, A.,(1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica* , 60(1), 77-105.

[4] Ho, T., Lee, S., (1986). Term structure movements and pricing interests rate contingent claims. *Journal of Finance* , 41(5), 1129-1142.

[5] Hull, J; White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies* , 3(4), 573-592.

[6] Hull, J., (2000). Options, futures, and other derivative securities, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

[7] Karatzas, I., Shreve, Steven E.,(1996). Brownian motion and stochastic calculus, Springer Verlang, New York.

[8] Luenberger, D., 1998). Investment science, Oxford University Press, New York.

[9] Merton, R., (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41(5), 867-887.

[10] Merton, R., (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance* , 29(2), 449-470.

[11] Merton, R., (1973). Theory of rational option pricing. *Bell journal of economics and management science*, 4(1), 141-183.

[12] Nelson, C., Siegel, A., (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business* , 60(4), 473-489.

[13] Russell, S., (1992). Understanding the term structure of interes rates: the expectations theory. *Federal reserve Bank of St. Louis Review* , 36-51.

[14] Van Horne, J.,(1984). Financial Market rates and flows, Prentice Hall, Englewood cliffs, New Jersey.

[15] Vasicek, O., (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* , 5(3), 177-188.

[16] Smith, A.,(2000). Paul Wilmott on quantitative finance, John Wiley and Sons, Chichester.