



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

LOCALIZACIÓN DE MÚLTIPLES FUGAS USANDO LA ONDA DE PRESIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JOSÉ ÁNGEL MUÑOZ VEGA

TUTORES
MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE, INSTITUTO DE INGENIERÍA
FLOR LIZETH TORRES ORTIZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. MARZO 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. ALVAREZ ICAZA LONGORIA LUIS A.
Secretario: DR. PÉREZ ALCÁZAR PABLO ROBERTO
1er. Vocal: DRA. VERDE RODARTE MARÍA CRISTINA
2do. Vocal: DRA. TORRES ORTIZ FLOR LIZETH
3er. Vocal: DRA. BEGOVICH MENDOZA OFELIA

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA - UNAM

TUTORES DE TESIS:

DRA. VERDE RODARTE MARÍA CRISTINA

FIRMA

DRA. TORRES ORTIZ FLOR LIZETH

FIRMA

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el constante impulso de mis tutoras. En especial, a la Dra. Cristina le agradezco su guía y valiosa experiencia brindadas durante el tiempo que trabajamos juntos. A la Dra. Lizeth, le agradezco su preciada ayuda y motivación. Agradezco a mis sinodales por el interés que tuvieron en revisar mi trabajo y por sus provechosos comentarios.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios.

Al equipo de la Dra. Verde por su apoyo y comentarios constructivos. A mis amigos de clases Sol, Erika, Pedro y Oriol. A mis amigos entrañables de toda la vida, Jadis, Erick, Isaac, Chío, Goga, Yaya, Ari, Yane, Sus, Cris, Lupe y Tavo, gracias por su amistad y palabras de apoyo. A mis amigos de la AMC: Arge, Luz, Lilí, Mau, Humberto y, en especial, a Carmen, quien sabe que la admiro y que le estaré eternamente agradecido por su cariño y confianza. Y al equipo de KD, gracias por enseñarme cómo quitarse el tedio del trabajo.

No puedo terminar si agradecer a mi familia, ustedes saben que nunca podría haber llegado hasta aquí sin su apoyo y cariño. Doy gracias al cielo por mandarme unos padres como ellos. A tí mamá, te agradezco todo el amor, el apoyo y los cuidados que siempre me has brindado; a ti papá, te agradezco los consejos, el soporte, el ejemplo y tus conocimientos. Gracias hermano por estar siempre a mi lado. Gracias Mini, Dany, Paty, Viri, Lupana, Efi y Sabi por confiar en mí.

Finalmente estoy agradecido por el ejemplo que me dejaron mi abuela y mi tío. Su coraje y convicción siempre me inspirarán. Es a ellos a quienes dedico este trabajo.

Índice general

Agradecimientos	2
Lista de figuras	6
Lista de tablas	10
1 Introducción	14
1.1 Justificación y motivación	14
1.2 Objetivo	16
1.2.1 Objetivos específicos	17
1.3 Estado del arte	17
1.4 Logros y contribución	18
2 Modelo de pequeña señal de un fluido en un ducto con fugas	19
2.1 Ecuaciones de movimiento y continuidad	19
2.2 Modelo entrada-salida del fluido con diversos componentes en el ducto	20
2.3 Propagación y reflexión de ondas de presión con fuga	23
2.3.1 Matriz de transferencia en función de las condiciones de frontera	26
2.4 Condiciones de frontera para crear cambio de flujo	27
3 Análisis de la respuesta transitoria de la onda de presión	28
3.1 Análisis del ducto sin fuga y sin fricción	28
3.2 Análisis del ducto con una fuga y sin fricción	30
3.3 Análisis del fluido con fricción mediante el modelo finito	34
3.3.1 Linealización con fuga	36

3.3.2	Modelo finito sin fuga y fricción cero	38
3.3.2.1	Comparación de los modelos con fricción cero y sin fuga	38
3.3.3	Modelo finito con fuga y fricción cero	40
3.3.3.1	Comparación de los modelos con fricción cero y con fuga	41
3.3.4	Análisis sin fuga y con fricción usando simulador	41
3.3.5	Análisis con fuga y con fricción usando simulador	42
3.4	Análisis con dos fugas y con fricción usando simulador	44
4	Estimación de múltiples fugas vía la Transformada Onduleta	45
4.1	Localizador de fallas múltiples	45
4.2	Transformada Onduleta	46
4.2.1	Detector de discontinuidades	47
4.3	Cálculo de los tiempos de las discontinuidades usando la Transformada Onduleta	50
4.3.1	Transformada onduleta aplicada a la onda de presión obtenida mediante la Transformada de Laplace	51
4.3.1.1	Comparación de la TO con <i>Haar</i> de la onda de presión en condiciones normales y con fuga	51
4.4	Resultados en Simulación	55
4.4.1	Comparación de la TO aplicada a la onda de presión sin fricción	55
4.4.2	Múltiples fugas	57
4.4.3	Escenario de una fuga	57
4.4.3.1	Primer Caso: fuga a la mitad de la tubería	57
4.4.3.2	Segundo Caso: fuga a un tercio de la tubería	57
4.4.4	Escenario de dos fugas	60
4.4.4.1	Primer Caso: dos fugas equidistantes	60
4.4.4.2	Segundo Caso: dos fugas no equidistantes	61
4.4.5	Escenario de tres fugas	61
4.4.5.1	Primer Caso: tres fugas equidistantes	63
4.4.5.2	Segundo Caso: tres fugas no equidistantes	63

5 Conclusiones	66
A Parámetros del ducto piloto	68
B El polinomio de Taylor	69
B.1 Expansión en serie de Taylor con <i>Mathematica</i> [®]	69
Referencias	71

Lista de Figuras

2.1	Configuración del ducto con una válvula en el extremo aguas abajo y conectado a un tanque de nivel constante.	20
2.2	Diagrama de bloques matricial del ducto con un tanque aguas arriba y una fuga en x	24
3.1	Respuesta de la presión en el extremo aguas abajo ante un bloqueo total del flujo en el ducto sin fuga.	30
3.2	Respuesta de la presión en el extremo L ante un bloqueo total del flujo en el ducto con una fuga en el punto l_1	33
3.3	Esquema de la discretización de la tubería con una fuga en la sección d	34
3.4	Comparación de las respuestas en el caso sin fricción.	39
3.5	Comparación de las respuestas en el caso con una fuga y sin fricción.	41
3.6	Presión en el extremo del ducto, con fricción, aguas arriba de la válvula, obtenida mediante simulación.	42
3.7	Efecto de la fricción en el tren de pulsos sin fugas.	43
3.8	Presión en el extremo del ducto con fricción y fuga obtenida mediante simulación.	43
3.9	Presión en el extremo del ducto con $f = 0.0309$ y dos fugas presentes en el ducto, obtenida mediante simulación.	44
4.1	Comparación de la onduleta con una discontinuidad. a) Las regiones en donde la contribución a la integral es positiva o negativa se encuentran marcadas. b) Acercamiento de la onduleta conforme atraviesa la discontinuidad. c) Gráfica de $\tilde{f}(a, t_0)$ con respecto a t_0 a una escala a dada.	49

4.2	Onduleta madre tipo <i>Haar</i>	50
4.3	a) evolución de la onda de presión en un ducto sin fricción y sin fugas, b) gráfica del valor absoluto de TO con una onduleta madre <i>Haar</i> y una escala $a = 1$ aplicada a la onda de presión con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq 1$, c) valor absoluto de TO con $a = 32$, d) valor absoluto de TO con $a = 64$, e) TO con $a = 128$, se indican los tiempos en que TO tiene un máximo local, f) gráfica del valor absoluto de TO para el conjunto de escalas $0 \leq a \leq 128$. El color indica la magnitud del valor $ \tilde{f}(a, t_0) $, correspondiendo las partes más claras de la gráfica los valores más grandes	52
4.4	Comparación de la onda de presión en el extremo aguas abajo obtenida mediante el concepto de matriz de transferencia y la Transformada Inversa de Laplace a) onda de presión $h_0(L, t)$, en condiciones normales, en el primer segundo después de presentarse la perturbación b) onda de presión $h_x(L, t)$, en presencia de una fuga de magnitud un cuarto del gasto nominal y ubicada a un cuarto de L de la válvula.	53
4.5	Comparación de TO aplicada a la onda de presión en condiciones normales y en presencia de fuga, a) onda de presión $h_0(L, t)$, en condiciones normales, con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2688$ [s] b) gráfica del valor absoluto de TO con una onduleta madre <i>Haar</i> y una escala $a = 64$ aplicada a $h_0(L, t)$ c) TO de la onda de presión sin fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$, d) onda de presión $h_x(L, t)$, en presencia de fuga 25% del gasto nominal en el intervalo de tiempo $(0, 0.2688)$ [s], e) gráfica del valor absoluto de TO con una escala $a = 64$ aplicada a $h_x(L, t)$, f) TO de la onda de presión en presencia de fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$	54
4.6	Comparación de la onda de presión en el extremo aguas abajo obtenida mediante el modelo finito con fricción cero, a) onda de presión $h_0(L, t)$, en condiciones normales, en el primer segundo después de presentarse la perturbación b) onda de presión $h_x(L, t)$, en presencia de una fuga de magnitud un cuarto del gasto nominal y ubicada a un cuarto de L de la válvula.	55

-
- 4.7 Comparación de TO aplicada a la onda de presión en condiciones normales y en presencia de fuga, a) onda de presión $h_0(L,t)$, obtenida mediante simulación, en condiciones normales, en el intervalo $(0, 0.2688)$ [s] b) gráfica del valor absoluto de TO con una onduleta madre *Haar* y una escala $a = 64$ aplicada a $h_0(L,t)$ c) TO de la onda de presión sin fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$, d) onda de presión $h_x(L,t)$, obtenida mediante simulación, en presencia de fuga 25% del gasto nominal en el intervalo $(0, 0.2688)$ [s], e) gráfica del valor absoluto de TO con una escala $a = 64$ aplicada a $h_x(L,t)$, f) TO de la onda de presión en presencia de fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$ 56
- 4.8 Presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada justo a la mitad, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida. 58
- 4.9 TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada justo a la mitad, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida. 58
- 4.10 Presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada a un tercio, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida. 59
- 4.11 TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada a 133.33 [m] de la válvula, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida. 59
- 4.12 Presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 66.67 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 133.33 [m]. 60

4.13	TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 66.67 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 133.33 [m].	61
4.14	Presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 60 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 160 [m].	62
4.15	TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 60 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 160 [m].	62
4.16	Presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 10% ubicada a 50; la segunda, con 20% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 30% ubicada a 150 [m] de la válvula.	63
4.17	TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 10% ubicada a 50; la segunda, con 20% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 30% ubicada a 150 [m] de la válvula.	64
4.18	Presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 30% ubicada a 40; la segunda, con 10% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 20% ubicada a 160 [m] de la válvula.	64
4.19	TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 30% ubicada a 40; la segunda, con 10% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 20% ubicada a 160 [m] de la válvula.	65

Lista de Tablas

4.1 Cálculo de las posiciones de las fugas en los tres escenarios. 65

A.1 Parámetros del ducto piloto 68

Simbología

α	Parámetro que depende de Z y B
β	Parámetro que depende de Z y B
Δt	Discretización de la distancia
Δx	Discretización del tiempo
γ	Parámetro de propagación de onda
λ	Parámetro de fuga
μ	Coefficiente de la ecuación diferencial ordinaria del flujo que depende de la fricción
σ	Secciones en los que se divide el ducto para la aproximación por diferencias finitas
A	Área transversal
a_1	Coefficiente de la ecuación diferencial ordinaria del flujo
a_2	Coefficiente de la ecuación diferencial ordinaria de la presión
B	Razón entre flujo y presión estacionarios en el punto de fuga
b	Velocidad de la onda de presión
D	Diámetro interior
d	Sección que contiene fuga

f	Coefficiente adimensional de fricción Darcy-Weisbach
g	Aceleración de la gravedad
H	Cabezal de presión
h	Desviación del cabezal de presión alrededor de H_0
H_0	Cabezal de presión en estado estacionario
h_x	Cabezal de presión en el extremo aguas abajo del ducto para una fuga en x
L	Longitud del ducto
l_i	Distancia entre la válvula y la fuga f_i
n	Orden del sistema en variables de estado
Q	Flujo
q	Desviación del cabezal de presión alrededor de Q_0
Q_0	Flujo medio en estado estacionario
s	Variable de Laplace
T	Periodo del tren de pulsos del cabezal de presión debido al cambio de flujo en la válvula
t	Tiempo
t_D	Tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse a lo largo de todo el ducto
t_V	Instante en que se produce el cambio de flujo en la válvula
t_{f_i}	Tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse del extremo final del ducto y la fuga f_i
u_1	Entrada del sistema. Presión aguas arriba del ducto como primera condición de frontera

u_2	Entrada del sistema. Flujo aguas abajo del ducto como segunda condición de frontera
x	Distancia
y	Variables de estado
Z	Impedancia característica del ducto
z	Variables de estado

Capítulo 1

Introducción

1.1 Justificación y motivación

En la actualidad los ductos son usados comúnmente para transportar cualquier tipo de fluido. El resultado son complejos sistemas de distribución compuestos por miles de kilómetros de tuberías, las cuales están constituidas por tubos individuales cortos unidos por bridas. Estas tuberías están expuestas a las condiciones cambiantes del clima y además, en el caso de estar bajo tierra, se encuentran bajo tensión constante. De manera que es frecuente que se produzcan fenómenos como las fugas en la red, en las conexiones y accesorios debido al envejecimiento de las tuberías, agujeros causados por la corrosión, aumentos imprevistos de presión, mantenimientos inadecuados o extracciones ilícitas, entre otros factores.

Estos fenómenos son responsables de una pérdida importante del fluido transportado, el cual a veces puede ser costoso de proporcionar o tratar; en consecuencia, los costos de bombeo y operación aumentan. Asimismo, la calidad del fluido corre el riesgo de degradarse al pasar por un ducto con filtraciones, debido a la entrada de agentes externos. Tratándose de sistemas de distribución de agua, los derrames pueden suponer un riesgo para los cimientos de las construcciones y pueden perjudicar las carreteras y caminos. De la misma manera, se desperdician productos químicos de tratamiento y energía en los procesos de tratamiento y distribución de agua. La Comisión Nacional del Agua (Conagua) de México, reporta que persisten mermas importantes por pérdida de agua en las redes de distribución entre el 30 y

50 por ciento debido, principalmente, a la edad de las tuberías, falta de control de la presión y mala calidad de los materiales empleados.

En redes de suministro de agua, se han realizado estudios para conocer, de forma precisa, cuál es el impacto de las fugas en la calidad del agua en términos de costos y energía (Colombo y Karney, 2002). No obstante, si el fluido contenido en los ductos es inflamable o tóxico, las fugas pueden ocasionar graves alteraciones al medio ambiente que comprometen la seguridad de las personas y provocan pérdidas humanas.

En diversos informes se han reportado fugas y fallas múltiples debido a tomas clandestinas o fenómenos naturales, como temblores y huracanes, y diversas actividades que impliquen excavación que dañan en múltiples puntos las redes. De modo que la presencia de fugas simultáneas es un caso bastante posible. Por consiguiente, numerosas tecnologías para la detección, directa o indirecta, de fugas se han desarrollado desde hace mucho tiempo, a partir del uso de diversos sensores y usando distintos principios físicos (Liu y Kleiner, 2013).

Por otro lado, la comunidad de Control Automático ha desarrollado una teoría general para el diagnóstico de fallas basada en un modelo matemático. El principio de detección e identificación de fallas en un proceso, *DIF*, es la comparación de su comportamiento en condiciones normales y de falla (Frank, 1990). En particular, la búsqueda de señales de excitación auxiliares que maximicen los efectos de las fallas sin dañar la operación del proceso es una inquietud de la comunidad de Seguridad de Procesos (IFAC-Safeprocess) y de la de diagnóstico (DX) de inteligencia artificial (Verde et al., 2013).

Los problemas principales de la localización exacta y automática de las fugas con métodos basados en la mecánica y mediciones del fluido son: el número reducido de sensores, la no detectabilidad de las fugas múltiples con modelos estáticos, las incertidumbres en los parámetros y la geometría de las redes.

Se han propuesto diversos localizadores de fugas usando técnicas de identificación de parámetros y teoría de observadores de sistemas dinámicos considerando como mediciones flujos y presiones del fluido (Billman y Isermann, 1987), (Torres, 2011). Este tipo de localizadores consideran flujo en estado permanente y reportan falsas alarmas en condiciones de fugas simultáneas. En particular, el valor erróneo de la posición está caracterizado por la relación de equivalencia de una fuga reportada en

Korbicz et al. (2004). Recientemente, Verde et al. (2014) obtuvieron una familia de modelos parametrizados para dos fugas equivalentes al escenario de una fuga, y esta familia es utilizada para identificar sus parámetros. Sin embargo, el procedimiento debe ejecutarse fuera de línea, lo cual provoca demora en el tiempo de la localización. Rojas y Verde (2014) abordan la problemática de fugas secuenciales, siendo ésta la propuesta reportada más cercana al caso de múltiples fugas simultáneas.

Así, la localización de múltiples fugas simultáneas en un ducto sin tomas laterales sigue siendo un problema abierto, el cual requiere buscar señales de excitación cuyos efectos transitorios permitan la localización de múltiples fugas. En este sentido, Jimenez y Verde (2012) propusieron diagnosticar la presencia de dos fugas usando como condiciones de frontera, en el modelo del fluido, funciones senoidales y un modelo discretizado de bajo orden. La implementación del método tuvo poco éxito, debido a la ausencia de instrumentos con anchos de bandas suficientemente grandes y al reducido orden del modelo dinámico utilizado.

Por otro lado, la comunidad de ingeniería civil argumenta que la onda de presión en el fluido es el medio ideal para localizar las fugas, dado que éstas son un fenómeno transitorio de mecánica de fluidos. El trabajo de Colombo et al. (2009) presenta un análisis muy completo del estado del arte de los métodos basados en fenómenos físicos del fluido, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia.

En el presente trabajo se busca detectar múltiples fugas mediante pruebas transitorias. Tales pruebas son de muy corta duración y solo necesitan mediciones de presión. En comparación con otras técnicas, las técnicas basadas en pruebas transitorias resultan baratas y pueden emplearse en momentos de baja demanda.

El fenómeno transitorio clave es la discontinuidad que provoca una fuga en la onda de presión junto con las señales de prueba adecuadas, (Bergant et al., 2003) y (Meniconi et al., 2011).

1.2 Objetivo

Localizar múltiples fugas en un ducto utilizando la información de la onda de presión causada por una discontinuidad en el flujo, asumiendo el estado estacionario después de haberse presentado las fugas, independientemente si éstas fueron o no simultáneas.

1.2.1 Objetivos específicos

- Derivar la expresión analítica de la onda de presión a partir de un modelo linealizado de dimensión infinita alrededor de un punto de equilibrio con una fuga presente y considerando como perturbación un cierre en la válvula aguas abajo.
- Interpretar el comportamiento de la onda de presión en condiciones de fuga.
- Extender la prueba propuesta por [Meniconi et al. \(2011\)](#) para ubicar las posiciones de múltiples fugas con una perturbación discontinua.
- Explotar las fortalezas de la transformada onduleta para identificar con mejor resolución (frecuencia/tiempo) los efectos de la fuga en la onda de presión y los tiempos asociados a éstos.

1.3 Estado del arte

[Colombo et al. \(2009\)](#) clasifica los métodos de detección de fugas basados en fenómenos transitorios mediante tres herramientas de análisis: el análisis inverso de la dinámica en estado transitorio, el análisis de la respuesta en frecuencia (FRA, por sus siglas en inglés) y el análisis directo. En el análisis transitorio inverso (ITA, por sus siglas en inglés) se utilizan técnicas de identificación de parámetros a partir de mediciones de flujos y presiones del fluido en estado transitorio para determinar parámetros desconocidos del modelo como una fuga.

Los dos trabajos de [Ferrante y Brunone \(2003a\)](#) y [Ferrante y Brunone \(2003b\)](#) son antecedentes importantes para el trabajo aquí presentado ya que analizan en frecuencia y con onduletas los efectos de la onda de presión en condiciones normales y de fuga. [Espinoza-Moreno y Begovich \(2014\)](#) presentaron resultados experimentales en un ducto de plástico, estimando la posición de la fuga vía la diferencia entre los tiempos de arribo a los extremos del ducto de la onda de presión provocada por la fuga y considerando además el efecto de la temperatura. Sin embargo, en general los trabajos basados en la onda de presión solamente reportan resultados para el caso de una fuga, y así, tanto el problema de múltiples fugas,

como la caracterización de las fugas que son identificables sigue siendo un reto en el monitoreo de ductos.

1.4 Logros y contribución

En este trabajo se presenta la expresión analítica, en el dominio de la frecuencia, de la onda de presión en condiciones de fuga, a partir de un modelo de dimensión infinita sin pérdidas. Por otro lado, se utiliza la propiedad de la velocidad de la onda de presión para justificar que el resultado reportado por [Meniconi et al. \(2011\)](#) puede ser usado para el caso de múltiples fugas. Esta prueba permite localizar fugas *a posteriori* del evento y no solamente durante el transitorio provocado por las fugas.

Con base en los resultados analíticos y aquellos obtenidos mediante simulación, se encontró que la información de mayor utilidad para encontrar fugas, se halla en el primer frente de onda de presión, después de haberse producido la perturbación. En dicho ciclo, se verificó que por cada fuga presente en el ducto, se manifiesta una discontinuidad en un instante de tiempo dependiente de la posición.

Capítulo 2

Modelo de pequeña señal de un fluido en un ducto con fugas

2.1 Ecuaciones de movimiento y continuidad

Las ecuaciones, tomadas de Chaudhry (2014), que describen la dinámica en estado transitorio del flujo unidimensional, con una distribución de velocidad uniforme, de un fluido incompresible, de densidad constante, en un conducto cerrado y con área transversal constante, están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + g \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} + \frac{fQ(x, t)|Q(x, t)|}{2DA^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde (x, t) representan la distancia en $[m]$ y el tiempo en $[s]$, g es la aceleración de la gravedad en $[\frac{m}{s^2}]$, b es la velocidad de la onda de presión en $[\frac{m}{s}]$, D es el diámetro interior del tubo de longitud L medido en $[m]$ y área transversal A medida en $[m^2]$, f es el coeficiente adimensional de fricción Darcy-Weisbach, $Q(x, t)$ es el flujo en $[\frac{m^3}{s}]$ y $H(x, t)$ representa la columna de presión medido en $[m]$ en el instante t y el punto x . El comportamiento dinámico del fluido se especifica al considerar las condiciones iniciales del gasto $Q(x, 0)$ y la presión $H(x, 0)$ para todo el tramo y las condiciones de frontera en los extremos. Además, cada fuga genera una discontinuidad en el

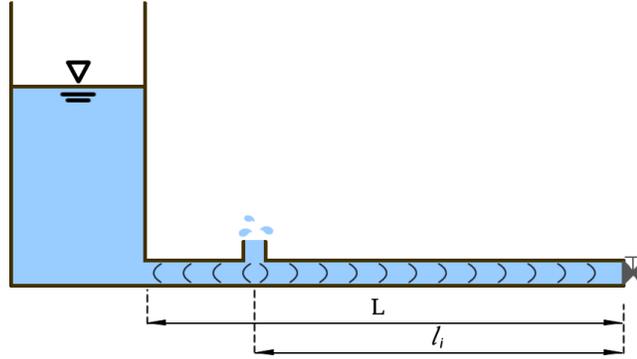


Figura 2.1: Configuración del ducto con una válvula en el extremo aguas abajo y conectado a un tanque de nivel constante.

modelo en la posición $L - l_i$ respectiva por lo que debe satisfacerse para todas las fugas

$$Q(L - l_i^-, t) = Q(L - l_i^+, t) + \lambda_i \sqrt{H(L - l_i, t)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

donde los superíndices $-$ y $+$ denotan una posición ϵ tendiendo a cero aguas arriba y aguas abajo del punto de fuga, respectivamente y λ_i es un parámetro que depende de la fuga. La Fig. 1 muestra la configuración del ducto considerada en este trabajo con condiciones de frontera la presión del tanque $H(0, t)$ y el flujo de salida $Q(L, t)$ gobernado por la válvula. Los parámetros del ducto considerados en el estudio caracterizan al ducto hidráulico piloto del laboratorio del Instituto de Ingeniería de la UNAM y se presentan en el Apéndice A.

2.2 Modelo entrada-salida del fluido con diversos componentes en el ducto

Con objeto de reproducir el fenómeno transitorio de la onda de presión lo más fielmente posible en condición de fuga, se propone analizar el comportamiento del fluido ante perturbaciones discontinuas con un modelo de dimensión infinita. Esto es posible en caso de considerar la versión lineal del sistema (2.1) en condición de fuga usando la interconexión de matrices de transferencia de acuerdo a la configuración

del ducto a modelar.

Si el gasto y la presión en una tubería recta varían con respecto a un punto de funcionamiento, se pueden describir las variables con un término constante y una variable variante alrededor de la constante

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= Q_0 + q(x, t) \\ H(x, t) &= H_0 + h(x, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Con respecto al punto de equilibrio (H_0, Q_0) se tiene el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales lineales

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA} \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + g \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} + \frac{fQ_0 q(x, t)}{DA^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Al transformar ambas ecuaciones al dominio de Laplace, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{gA}{b^2} s h(x, s) &= - \frac{dq(x, s)}{dx} \\ \left[\frac{1}{gA} s + \frac{fQ_0}{gDA^2} \right] q(x, s) &= - \frac{dh(x, s)}{dx} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde s denota la variable compleja de Laplace y $q(x, s)$, $h(x, s)$ denotan la Transformada de Laplace de $q(x, t)$ y $h(x, t)$, respectivamente. Al derivar (2.5) con respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{gA}{b^2} s \frac{dh(x, s)}{dx} &= - \frac{d^2 q(x, s)}{dx^2} \\ \left[\frac{g}{A} s + \frac{fgQ_0}{DA^2} \right] \frac{dq(x, s)}{dx} &= - \frac{d^2 h(x, s)}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Combinando (2.5) y (2.6)

$$\begin{aligned} \gamma^2(s) h(x, s) &= \frac{d^2 h(x, s)}{dx^2} \\ \gamma^2(s) q(x, s) &= \frac{d^2 q(x, s)}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

con el parámetro de propagación $\gamma^2(s) = \frac{1}{b^2}(s^2 + \frac{sfQ_0}{DA})$.

Las soluciones de (2.7) son de la forma

$$\begin{aligned} h(x, s) &= C_1 e^{-\gamma(s)x} + C_2 e^{\gamma(s)x} \\ q(x, s) &= C_3 e^{-\gamma(s)x} + C_4 e^{\gamma(s)x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes. Para determinar las constantes, se consideran las condiciones de frontera de forma general. En $x = 0$

$$h(0, s) = C_1 + C_2; \quad q(0, s) = C_3 + C_4 \quad (2.9)$$

y en $x = L$

$$h(L, s) = C_1 e^{-\gamma(s)L} + C_2 e^{\gamma(s)L}; \quad q(L, s) = C_3 e^{-\gamma(s)L} + C_4 e^{\gamma(s)L} \quad (2.10)$$

Combinando (2.9) y (2.10) se tiene

$$\begin{aligned} h(L, s) &= C_1 (e^{-\gamma(s)L} - e^{\gamma(s)L}) + h(0, s) e^{\gamma(s)L} \\ q(L, s) &= C_3 (e^{-\gamma(s)L} - e^{\gamma(s)L}) + q(0, s) e^{\gamma(s)L} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para determinar C_1 y C_3 es necesario encontrar una relación entre h y q , la cual se encuentra en (2.6) y se puede aprovechar al substituir (2.8) en ésta

$$\frac{gAs}{b^2} [C_1 e^{-\gamma(s)x} + C_2 e^{\gamma(s)x}] = \gamma(s) [C_3 e^{-\gamma(s)x} - C_4 e^{\gamma(s)x}] \quad (2.12)$$

Si $x = 0$

$$\frac{gAs}{b^2} [C_1 + C_2] = \gamma(s) [C_3 - C_4] \quad (2.13)$$

y $x = L$

$$\frac{gAs}{b^2} [C_1 e^{-\gamma(s)L} + C_2 e^{\gamma(s)L}] = \gamma(s) [C_3 e^{-\gamma(s)L} - C_4 e^{\gamma(s)L}] \quad (2.14)$$

Combinando (2.14) con (2.10) y (2.13) con (2.9) se encuentra que

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left(h(0, s) + \frac{b^2 \gamma(s)}{gAs} q(0, s) \right) \\ C_3 &= \frac{1}{2} \left(q(0, s) + \frac{gAs}{b^2 \gamma(s)} h(0, s) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} q(L, s) &= \frac{e^{\gamma(s)L} + e^{-\gamma(s)L}}{2} q(0, s) - \frac{1}{Z(s)} \frac{e^{\gamma(s)L} - e^{-\gamma(s)L}}{2} h(0, s) \\ h(L, s) &= -Z(s) \frac{e^{\gamma(s)L} - e^{-\gamma(s)L}}{2} h(0, s) + \frac{e^{\gamma(s)L} - e^{-\gamma(s)L}}{2} q(0, s) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $Z(s) = \frac{b}{gA} \sqrt{\frac{sDA + fQ_0}{sDA}}$ corresponde con la impedancia característica de la línea (Chaudhry, 2014). Usando la definición de seno y coseno hiperbólicos, la solución explícita, en forma matricial de (2.4), del sistema para cualquier punto espacial $x_2 \in [0, L]$ con respecto al punto $x_1 \in [0, L]$ tal que $x_2 > x_1$ se reduce a

$$\begin{bmatrix} q(x_2, s) \\ h(x_2, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(s)\Delta & -\frac{\sinh \gamma(s)\Delta}{Z} \\ -Z \sinh \gamma(s)\Delta & \cosh \gamma(s)\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(x_1, s) \\ h(x_1, s) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde $\Delta = x_2 - x_1$.

2.3 Propagación y reflexión de ondas de presión con fuga

De acuerdo con Chaudhry (2014), las componentes puntuales de una red de ductos alrededor de un punto de funcionamiento pueden ser descritas por medio de matrices de transferencia, las cuales vinculan flujos y presiones en ambos extremos del componente de acuerdo con el fenómeno hidráulico asociado. Por tanto, los vectores del flujo y presión a la izquierda y a la derecha de un componente \mathcal{C} , localizado en el punto x arbitrario de la red, están relacionados por medio de

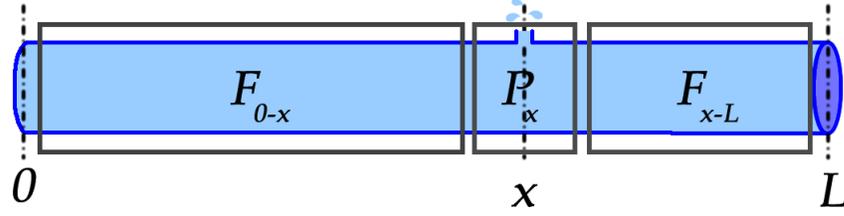


Figura 2.2: Diagrama de bloques matricial del ducto con un tanque aguas arriba y una fuga en x .

$$\begin{bmatrix} q(x^+, s) \\ h(x^+, s) \end{bmatrix} = M_C(x, s) \begin{bmatrix} q(x^-, s) \\ h(x^-, s) \end{bmatrix}$$

donde x^- y x^+ son los extremos del componente, y la matriz $M_C(x, s)$ depende del comportamiento que se considere. Esta descripción permite usar el álgebra de bloques matriciales para formar los modelos frecuenciales de una red de ductos.

Así, el esquema hidráulico de la Fig. 2.1 se puede asociar al diagrama de bloques matricial de la Fig. 2.2. En este diagrama las posiciones del ducto corresponden con el punto 0 para el extremo del ducto conectado al tanque, x para el punto de fuga, L para el extremo del ducto, y los tres bloques corresponden a las matrices de transferencia puntuales de cada componente que forman el sistema. Así,

- la matriz

$$F_{0-x} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(s)x & -\frac{\sinh \gamma(s)x}{Z} \\ -Z \sinh \gamma(s)x & \cosh \gamma(s)x \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

representa la transferencia del ducto de longitud x^- conectado al tanque en el punto 0, y a la fuga en el punto x^- y caracteriza el cuadripolo

$$\begin{bmatrix} q(x^-, s) \\ h(x^-, s) \end{bmatrix} = F_{0-x} \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(0, s) \end{bmatrix}$$

- la matriz

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & -B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

con $B = \frac{Q_{f0}}{2H_{f0}}$ corresponde con la transferencia antes y después de la fuga en el

punto espacial x con un gasto **estacionario** de la fuga Q_{f0} para una columna de presión H_{f0} , y caracteriza el cuadripolo

$$\begin{bmatrix} q(x^+, s) \\ h(x^+, s) \end{bmatrix} = P_x \begin{bmatrix} q(x^-, s) \\ h(x^-, s) \end{bmatrix}$$

• y la matriz

$$F_{x-L} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(s)(L-x) & -\frac{\sinh \gamma(s)(L-x)}{Z} \\ -Z \sinh \gamma(s)(L-x) & \cosh \gamma(s)(L-x) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

modela la transferencia del ducto de longitud $L-x$ conectado en el punto x^+ con la fuga, y caracteriza el cuadripolo

$$\begin{bmatrix} q(L, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = F_{x-L} \begin{bmatrix} q(x^+, s) \\ h(x^+, s) \end{bmatrix}$$

Finalmente, aplicando el álgebra de bloques se obtiene la matriz de transferencia general

$$M_{0-L} = F_{x-L} P_x F_{0-x} = \begin{bmatrix} M_{0-L}^{11} & M_{0-L}^{12} \\ M_{0-L}^{21} & M_{0-L}^{22} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

en donde se ha eliminado la dependencia de la variable s y del punto de fuga x por simplicidad y

$$\begin{aligned} M_{0-L}^{11} &= \cosh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \cosh \gamma(L-x) \\ M_{0-L}^{12} &= \frac{-\sinh \gamma L}{Z} - ZB \cosh \gamma x \cosh \gamma(L-x) \\ M_{0-L}^{21} &= -z \sinh \gamma L - Z^2 B \sinh \gamma x \sinh \gamma(L-x) \\ M_{0-L}^{22} &= \cosh \gamma L + ZB \sinh \gamma(L-x) \cosh \gamma x \end{aligned}$$

Por tanto, el modelo del ducto con una fuga en el punto x se reduce a la matriz de

transferencia

$$\begin{bmatrix} q(L, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = M_{0-L} \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(0, s) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

con condiciones de frontera arbitrarias.

2.3.1 Matriz de transferencia en función de las condiciones de frontera

La representación (2.22) es conveniente para trabajar con sistemas conectados en serie; sin embargo, es un arreglo no adecuado para la implementación en un sistema físico (Zecchin, 2009). Las formas causales que pueden implementarse son:

- la forma de impedancia

$$\begin{bmatrix} h(0, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = I(s) \begin{bmatrix} q(0, s) \\ q(L, s) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

- la forma de la admitancia

$$\begin{bmatrix} q(0, s) \\ -q(L, s) \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} h(0, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

- la primera forma híbrida

$$\begin{bmatrix} h(0, s) \\ q(L, s) \end{bmatrix} = Y(s) \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

- y la segunda forma híbrida

$$\begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = U(s) \begin{bmatrix} h(0, s) \\ -q(L, s) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

En el presente trabajo se emplea la forma (2.26), por lo que (2.22) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = U_{0-L} \begin{bmatrix} h(0, s) \\ -q(L, s) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
U_{0-L}^{11} &= \frac{1}{Z} \frac{\sinh \gamma L + B \cosh \gamma x \cosh \gamma(L-x)}{\cosh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \cosh \gamma(L-x)} \\
U_{0-L}^{12} &= -\frac{1}{\cosh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \cosh \gamma(L-x)} \\
U_{0-L}^{21} &= \frac{1}{\cosh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \cosh \gamma(L-x)} \\
U_{0-L}^{22} &= Z \frac{\sinh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \sinh \gamma(L-x)}{\cosh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \cosh \gamma(L-x)}
\end{aligned}$$

2.4 Condiciones de frontera para crear cambio de flujo

Una onda de presión se puede generar con diversas condiciones de frontera en (2.27), las cuales pueden verse como perturbaciones del modelo linealizado.

Por analogía con la condición de circuito abierto en las terminales de una línea de transmisión eléctrica, se supone en el análisis las condiciones de frontera $h(0, s) = 0$ y $q(L, s) = -\frac{Q_0}{s}$, aplicadas en el instante $t_V = 0$. Por tanto, substituyendo estas condiciones en (2.27), se obtiene la respuesta de la presión en el extremo aguas abajo del ducto gobernada por

$$h_x(L, s) = \frac{Q_0 Z \sinh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \sinh \gamma(L-x)}{s \cosh \gamma L + ZB \sinh \gamma x \cosh \gamma(L-x)} \quad (2.28)$$

para una fuga en x , donde $\gamma^2(s) = \frac{1}{b^2}(s^2 + \frac{sfQ_0}{DA})$ y $Z(s) = \frac{b}{gA} \sqrt{\frac{sDA + fQ_0}{sDA}}$. El obtener la transformada inversa de (2.28) no es directo para todos los valores posibles de $\gamma(s)$ y x . En general, se pueden transformar las funciones hiperbólicas en exponenciales y usar expansiones en el denominador de la función de transferencia para obtener la evolución de la presión en función del tiempo. En particular, como el efecto transitorio que se busca caracterizar es notoriamente más visible en el primer frente de la onda de presión, como se verá en las simulaciones del capítulo siguiente, será necesario utilizar aproximaciones de las funciones hiperbólicas y considerar la transformada inversa de (2.28) solamente en los primeros frentes de onda.

Capítulo 3

Análisis de la respuesta transitoria de la onda de presión

Considerando el esquema hidráulico de la Figura 2.1, en este capítulo se analiza el comportamiento de la onda de presión en el extremo del ducto aguas arriba de la válvula para cuatro escenarios distintos. En primera instancia se estudia el caso del ducto sin fricción, tanto en ausencia como en presencia de una fuga, a partir de la matriz de transferencia obtenida en el capítulo anterior. Posteriormente se analiza el estado transitorio de la presión, considerando pérdidas debidas a la fricción; en este caso se utiliza un modelo de dimensión finita aproximado de las ecuaciones linealizadas con y sin fuga, dado que no fue posible obtener la transformada inversa directamente a pesar de utilizar ciertas aproximaciones para el cálculo de la Transformada Inversa de Laplace.

3.1 Análisis del ducto sin fuga y sin fricción

En el caso de ausencia de fugas y sin fricción, $B = \frac{Q_{f0}}{2H_{f0}} = 0$, la ecuación (2.28) se reduce a la función

$$h_0(L, s) = \frac{Q_o Z}{s} \tanh \gamma L \quad (3.1)$$

con $Z = \frac{b}{gA}$ y $\gamma = \frac{s}{b}$. A continuación se describe un procedimiento para encontrar la transformada inversa de (3.1).

Procedimiento para transformar al dominio del tiempo la expresión de la onda de presión sin fuga (3.1)

1. Sustituir las funciones hiperbólicas por funciones exponenciales; es decir,

$$h_0(L, s) = \frac{Q_o Z}{s} \frac{e^{\gamma L} - e^{-\gamma L}}{e^{\gamma L} + e^{-\gamma L}} \quad (3.2)$$

2. Expresar el cociente como dos productos de funciones y factorizar los términos que contengan las exponenciales.

$$\begin{aligned} h_0(L, s) &= \frac{Q_o Z}{s} (e^{\gamma L} - e^{-\gamma L}) e^{-\gamma L} (1 + e^{-2\gamma L})^{-1} \\ &= \frac{Q_o Z}{s} (1 - e^{-2\gamma L}) \left(\frac{1}{1 + e^{-2\gamma L}} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

3. Describir la función del denominador mediante una expansión de MacLaurin como una suma de términos exponenciales con exponentes negativos; es decir, $\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \dots$, con $w = e^{-2\gamma L}$. Consultar Cheng (1959), pág. 372, para más detalles. Esto permite escribir

$$\begin{aligned} h_0(L, s) &= \frac{Q_o Z}{s} (1 - e^{-2\gamma L}) (1 - e^{-2\gamma L} + e^{-4\gamma L} - \dots) \\ &= \frac{Q_o Z}{s} [(1 - e^{-2\gamma L}) - (e^{-2\gamma L} - e^{-4\gamma L}) \\ &\quad + (e^{-4\gamma L} - e^{-6\gamma L}) - \dots] \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. Aplicar la Transformada Inversa de Laplace, usando la propiedad de traslación en el tiempo.

$$\begin{aligned} h_0(L, t) &= Q_o Z \left\{ \left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}\left(t - \frac{2L}{b}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\mathcal{U}\left(t - \frac{2L}{b}\right) - \mathcal{U}\left(t - \frac{4L}{b}\right) \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

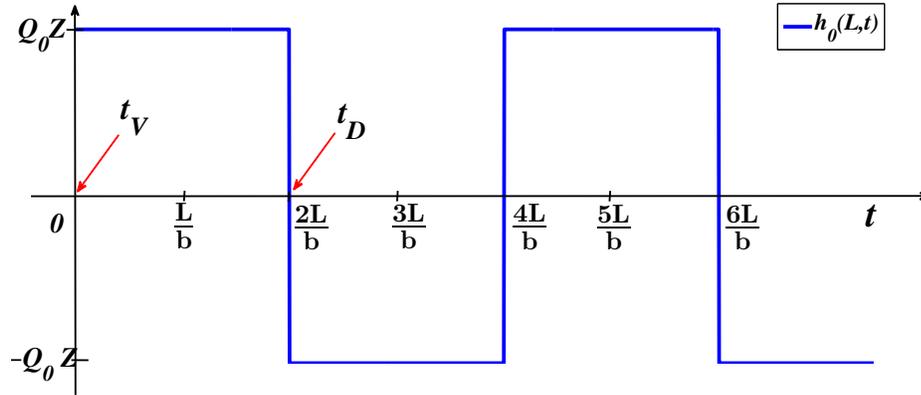


Figura 3.1: Respuesta de la presión en el extremo aguas abajo ante un bloqueo total del flujo en el ducto sin fuga.

La Figura 3.1 muestra la evolución de $h_0(L,t)$. Se observa que el efecto de la perturbación en el flujo se manifiesta inmediatamente como un tren de pulsos simétrico de periodo $T = \frac{4L}{b}$ función de la velocidad b y la longitud del ducto L .

La respuesta es oscilatoria debido a que no se consideraron los efectos de la fricción del ducto en el análisis y por lo tanto el tren de pulsos se mantiene. El instante t_V corresponde al momento en que se produce la perturbación en el flujo; esto es, cuando se cierra la válvula.

El ancho del pulso positivo $t_D = \frac{2L}{b} = \frac{T}{2}$ corresponde al tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse a lo largo de todo el ducto de longitud L . Así, entre mayor sea la longitud L mayor será el periodo del tiempo T .

3.2 Análisis del ducto con una fuga y sin fricción

Ante el escenario de una fuga en el punto $x \in (0, L)$ y $B \neq 0$, la evolución en el tiempo de la onda de presión se puede obtener usando el siguiente procedimiento.

Procedimiento para trasladar al dominio del tiempo la expresión de la onda de presión en condiciones de fuga (2.28)

1. Substituir las funciones hiperbólicas por funciones exponenciales.

$$h_x(L, s) = \frac{Q_o Z}{s} \frac{2(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L}) + ZB(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})(e^{\gamma(L-x)} - e^{-\gamma(L-x)})}{2(e^{\gamma L} + e^{-\gamma L}) + ZB(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})(e^{\gamma(L-x)} + e^{-\gamma(L-x)})} \quad (3.6)$$

2. Expresar el cociente como el producto de dos funciones.

$$\begin{aligned} h_x(L, s) &= \frac{Q_o Z}{s} \frac{(2 + ZB)e^{\gamma L} + (ZB - 2)e^{-\gamma L} - ZB(e^{-\gamma(L-2x)} + e^{\gamma(L-2x)})}{(2 + ZB)e^{\gamma L} + (2 - ZB)e^{-\gamma L} + ZB(e^{-\gamma(L-2x)} - e^{\gamma(L-2x)})} \\ &= \frac{Q_o Z}{s} \frac{1 - \frac{2-ZB}{2+ZB}e^{-2\gamma L} - \frac{ZB}{2+ZB}(e^{-2\gamma(L-x)} + e^{-2\gamma x})}{1 + \frac{2-ZB}{2+ZB}e^{-2\gamma L} + \frac{ZB}{2+ZB}(e^{-2\gamma(L-x)} - e^{-2\gamma x})} \\ &= \frac{Q_o Z}{s} [1 - \alpha e^{-2\gamma L} - \beta (e^{-2\gamma(L-x)} + e^{-2\gamma x})] \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{1 + \alpha e^{-2\gamma L} + \beta (e^{-2\gamma(L-x)} + e^{-2\gamma x})} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\alpha = \frac{2-ZB}{2+ZB}$ y $\beta = \frac{ZB}{2+ZB}$.

Debido a que el denominador de (3.7) es una suma de varios términos, es necesario hacer una expansión de éste. En particular, con la ayuda de *software* de cálculo simbólico (ver apéndice B) se tiene la expansión de orden 1 de la función $\frac{1}{1+\alpha i+\beta j-\beta k}$ con $i = e^{-2\gamma L}$, $j = e^{-2\gamma(L-x)}$ y $k = e^{-2\gamma x}$. Usando *Mathematica*[®]:

$$\frac{1}{1 + \alpha i + \beta j - \beta k} = 1 - \alpha i - \beta j + \beta k + 2\alpha\beta ij - 2\alpha\beta ik - 2\beta^2 jk + 6\alpha\beta^2 ijk + \dots \quad (3.8)$$

3. Substituir la expansión (3.8) en el denominador.

$$\begin{aligned}
 h_x(L, s) = \frac{Q_o Z}{s} & [1 - \alpha e^{-2\gamma L} - \beta (e^{-2\gamma(L-x)} + e^{-2\gamma x})] \\
 & \cdot (1 - \alpha e^{-2\gamma L} - \beta e^{-2\gamma(L-x)} + \beta e^{-2\gamma x} + 2\alpha\beta e^{-2\gamma(2L-x)} \\
 & - 2\alpha\beta e^{-2\gamma(L+x)} - 2\beta^2 e^{-2\gamma L} + 6\alpha\beta^2 e^{-4\gamma L} + \dots)
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. Aplicar la Transformada Inversa de Laplace a la serie

$$\begin{aligned}
 h_x(L, s) = \frac{Q_o Z}{s} & (1 - 2\alpha e^{-2\gamma L} + \alpha^2 e^{-4\gamma L} - 2\beta e^{-2\gamma(L-x)} - 2\alpha\beta e^{-2\gamma(L+x)} \\
 & + 4\alpha\beta e^{-2\gamma(2L-x)} + 2\alpha^2\beta e^{-2\gamma(L+x)} - 2\alpha^2\beta e^{-\gamma(L-2x)} - 2\beta^2 e^{-2\gamma L} \\
 & - \beta^2 e^{-4\gamma x} + \beta^2 e^{-4\gamma(L-x)} + 8\alpha\beta^2 e^{-4\gamma L} + 2\alpha\beta^2 e^{-2\gamma(L-2x)} \\
 & - 2\alpha\beta^2 e^{-2\gamma(3L-2x)} - 6\alpha^2\beta^2 e^{-6\gamma L} + 2\beta^3 e^{-2\gamma(L+x)} + 2\beta^3 e^{-2\gamma(2L-x)} \\
 & - 6\alpha\beta^3 e^{-2\gamma(2L+x)} - 6\alpha\beta^3 e^{-2\gamma(3L-x)} + \dots)
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Obteniendo

$$\begin{aligned}
 h_x(L, t) = Q_o Z & \left[\mathcal{U}(t) - 2(\alpha + \beta^2) \mathcal{U}\left(t - \frac{2L}{b}\right) + (\alpha^2 + 8\alpha\beta^2) \mathcal{U}\left(t - \frac{4L}{b}\right) \right. \\
 & - 2\beta \mathcal{U}\left(t - \frac{2(L-x)}{b}\right) - 2(\alpha\beta - \alpha^2\beta) \mathcal{U}\left(t - \frac{2(L+x)}{b}\right) \\
 & + 2(\beta^3 + 2\alpha\beta) \mathcal{U}\left(t - \frac{2(2L-x)}{b}\right) - 2\alpha^2\beta \mathcal{U}\left(t - \frac{L-2x}{b}\right) \\
 & - \beta^2 \mathcal{U}\left(t - \frac{4x}{b}\right) + \beta^2 \mathcal{U}\left(t - \frac{4(L-x)}{b}\right) \\
 & + 2\alpha\beta^2 \mathcal{U}\left(t - \frac{2(L-2x)}{b}\right) - 2\alpha\beta^2 \mathcal{U}\left(t - \frac{2(3L-2x)}{b}\right) \\
 & - 6\alpha^2\beta^2 \mathcal{U}\left(t - \frac{6L}{b}\right) + 2\beta^3 \mathcal{U}\left(t - \frac{2(L+x)}{b}\right) \\
 & + 2\beta^3 \mathcal{U}\left(t - \frac{2(2L-x)}{b}\right) - 6\alpha\beta^3 \mathcal{U}\left(t - \frac{2(2L+x)}{b}\right) \\
 & \left. - 6\alpha\beta^3 \mathcal{U}\left(t - \frac{2(3L-x)}{b}\right) + \dots \right]
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

En los dos procedimientos anteriores, se empleó la expansión de MacLaurin para expresar la función del denominador como una suma de potencias y poder aplicar la Transformada Inversa de Laplace. De manera que la suma de términos exponenciales da lugar a un tren de pulsos en el tiempo, como se puede apreciar en la Figura 3.2. Se muestra, con línea continua, el efecto de la perturbación en la presión $h_x(L, t)$ ante la presencia de la fuga y, con línea punteada, el efecto de la perturbación en la presión $h_0(L, t)$ en ausencia de ésta.

Las dos funciones tienen la misma frecuencia. Sin embargo, se observa que la presión $h_x(L, t)$ tiende a cero, a pesar de que los efectos de la fricción fueron despreciados. Este comportamiento se puede comprobar al aplicar el teorema de valor final a (3.6). Es decir, la fuga actúa como un elemento disipador, de manera que la onda de presión se desvanece en condición de fuga cuando el tiempo tiende a infinito.

Otra diferencia importante, es que se manifiesta una discontinuidad en el instante $t_{f_1} = 2l_1/b$ debido a la fuga f_1 localizada en l_1 . En otras palabras, el ancho de pulso t_{f_1} corresponde al tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse del extremo final del ducto y la fuga f_1 .

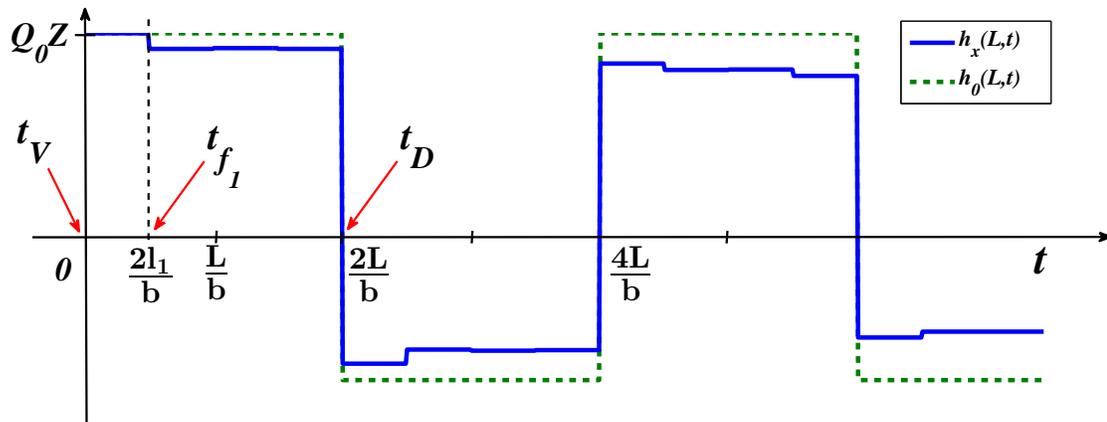


Figura 3.2: Respuesta de la presión en el extremo L ante un bloqueo total del flujo en el ducto con una fuga en el punto l_1 .

3.3 Análisis del fluido con fricción mediante el modelo finito

Hasta el momento no se ha podido encontrar la forma de aproximar el modelo (3.1) para el caso general con fricción $\gamma(s) = \frac{1}{b} \sqrt{s^2 + \frac{fQ_0s}{DA}}$, por lo que se propone utilizar un simulador del modelo (2.1) aproximado por diferencias finitas y linealizado alrededor de un punto de operación.

La aproximación de las derivadas parciales por diferencias finitas de primer orden está dada por (LeVeque, 1997)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} &\approx \frac{\Delta H_i(t)}{\Delta x_i} = \frac{H_i(t) - H_{i+1}(t)}{\Delta x_i} \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} &\approx \frac{\Delta Q_i(t)}{\Delta x_i} = \frac{Q_i(t) - Q_{i+1}(t)}{\Delta x_i} \\ \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} &\cong \frac{\partial H_i(t)}{\partial t} := \dot{H}_i \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} &\cong \frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} := \dot{Q}_i \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde i representa la sección espacial discretizada (Figura 3.3). La notación $H_i := H_i(t) \approx H(x,t)$ representa el cabezal de presión aguas arriba de la sección i y $Q_i := Q_i(t) \approx Q(x,t)$, el flujo en la sección i .

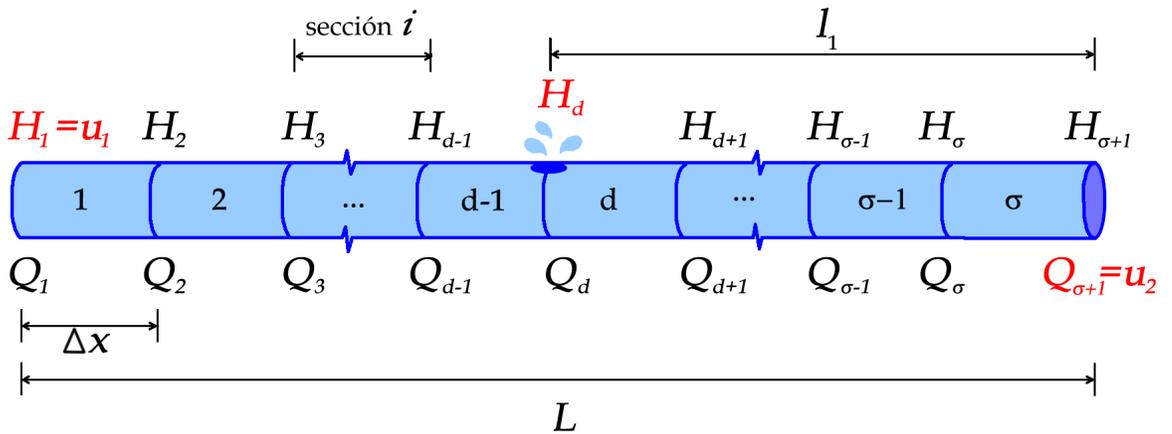


Figura 3.3: Esquema de la discretización de la tubería con una fuga en la sección d .

De manera que el resultado es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

para cada sección:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= a'_1 \left(\frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i} \right) + \mu Q_i |Q_i| \\ \dot{H}_{i+1} &= a'_2 \left(\frac{Q_i - Q_{i+1}}{\Delta x_i} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $a'_1 = -gA$, $a'_2 = -\frac{b^2}{gA}$ y $\mu = -\frac{f}{2DA}$. Para el caso de una discretización espacial uniforme $\Delta x_i = \Delta x$.

El conjunto de ecuaciones (3.13) es válido a lo largo de la tubería en $0 < x < L$ con $H(x, 0)$ y $Q(x, 0)$ como condiciones iniciales. Nótese que las funciones $H_1 = u_1$ y $Q_{\sigma+1} = u_2$ son usadas como condiciones de frontera para σ secciones. La discretización del ducto con una fuga presente en la sección d se muestra en la Figura 3.3. Así, el modelo de dimensión finita de (2.1) se expresa como

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \vdots \\ \dot{H}_d \\ \vdots \\ \dot{Q}_\sigma \\ \dot{H}_{\sigma+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(u_1 - H_2) + \mu Q_1^2 \\ a_2(Q_1 - Q_2) \\ \vdots \\ a_2(Q_{d-1} - Q_d - \lambda\sqrt{H_d}) \\ \vdots \\ a_1(H_\sigma - H_{\sigma+1}) + \mu Q_\sigma^2 \\ a_2(Q_\sigma - u_2) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

donde $a_1 = \frac{a'_1}{\Delta x}$, $a_2 = \frac{a'_2}{\Delta x}$ y el término $\lambda\sqrt{H_d}$ corresponde a las pérdidas de flujo debido a la fuga en la sección d . La ecuación de \dot{H}_d satisface así (2.2). Tomando como vector de estados

$$z = \begin{bmatrix} Q_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_d \\ \vdots \\ Q_\sigma \\ H_{\sigma+1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

el modelo del fluido con una fuga puede ser visto como un sistema de orden $n = 2\sigma$.

$$\dot{z} = f(z, u, \lambda) = \begin{bmatrix} a_1(u_1 - z_2) + \mu z_1^2 \\ a_2(z_1 - z_3) \\ \vdots \\ a_2(z_{d-1} - z_{d+1} - \lambda\sqrt{z_d}) \\ \vdots \\ a_1(z_{n-2} - z_n) + \mu z_{n-1}^2 \\ a_2(z_{n-1} - u_2) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A partir de este sistema, se procede a la linealización en un punto de equilibrio.

3.3.1 Linealización con fuga

El punto de equilibrio del sistema para una entrada $u = [u_1^*, u_2^*]^T$ y el parámetro λ de la fuga en la sección d , en términos de la presión en el punto de fuga z_d^* , es

$$\begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ z_3^* \\ z_4^* \\ \vdots \\ z_d^* \\ z_{d+1}^* \\ z_{d+2}^* \\ \vdots \\ z_{n-1}^* \\ z_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^* + \lambda\sqrt{z_d^*} \\ u_1^* + \frac{\mu}{a_1}(u_2^* + \lambda\sqrt{z_d^*})^2 \\ u_2^* + \lambda\sqrt{z_d^*} \\ u_1^* + \frac{2\mu}{a_1}(u_2^* + \lambda\sqrt{z_d^*})^2 \\ \vdots \\ \frac{[(4\lambda u_2^*) \pm \sqrt{(4\lambda u_2^*)^2 + 4(2\lambda^2 - \frac{a_1}{\mu})(-2u_2^{*2} - \frac{a_1}{\mu}u_1^*)}]^2}{4(2\lambda^2 - \frac{a_1}{\mu})^2} \\ u_2^* \\ \frac{\mu}{a_1}u_2^{*2} + z_d^* \\ \vdots \\ u_2^* \\ \frac{(\sigma-d+1)\mu}{a_1}u_2^{*2} + z_d^* \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

De manera que, la linealización de (3.16) alrededor de z^* y u^* resulta en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Oy + Pg \\ y &= z - z^* \quad g = u - u^* \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$O = \frac{\partial f(z, u)}{\partial z} \Big|_{z^*, u^*} = \begin{bmatrix} 2\mu z_1^* & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 2\mu z_3^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\mu z_{d-1}^* & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & -a_2 B_d & -a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 2\mu z_{d+1}^* & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\mu z_{n-1}^* & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\text{con } B_d = \frac{Q_d}{2z_d^*} = \frac{\lambda \sqrt{z_d^*}}{2z_d^*} \text{ y}$$

$$P = \frac{\partial f(z, u)}{\partial u} \Big|_{z^*, u^*} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la presión $h_x(L, x)$ en el extremo del ducto aguas arriba de la válvula corresponde al estado y_n del sistema linealizado

$$h_x(L, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} y = Ry \quad (3.21)$$

3.3.2 Modelo finito sin fuga y fricción cero

Para el caso del modelo del fluido en condiciones normales y sin fricción; es decir, (3.18) con $\mu = 0$ y $\lambda = 0$, el punto de equilibrio (3.17) se reduce a

$$\begin{bmatrix} z_1^{**} \\ z_2^{**} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{**} \\ z_n^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^* \\ u_1^* \\ \vdots \\ u_2^* \\ u_1^* \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

y el sistema linealizado sin considerar la fricción resulta en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= O'y + P'g \\ h_0(L, t) &= R'y \end{aligned} \quad (3.23)$$

con

$$O' = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad P' = P; \quad R' = R \quad (3.24)$$

3.3.2.1 Comparación de los modelos con fricción cero y sin fuga

Para validar que el modelo de dimensión finita tiene un comportamiento similar al de dimensión infinita con fricción cero, se obtuvo la respuesta de (3.23) en *Simulink*[®] con los valores de la Tabla A.1 del Apéndice A; a excepción de la fricción, la cual es despreciada al igual que el término B asociado a la fuga.

En la Figura 3.4 se comparan las formas de onda de las presiones obtenidas con (3.5), a partir de la Transformada Inversa de Laplace, en color azul; y con (3.23), a partir de la respuesta simulada para $n = 400$, en rojo, con entradas $u_1 = H_1 = 0$ [m] y $u_2 = Q_{\sigma+1} = -8.563 \times 10^{-4}$ [$\frac{m^3}{s}$] para $\sigma = 200$ secciones, resultando en una

discretización en el espacio de $\Delta x = 1 [m]$ y, de acuerdo con la condición de Courant $\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq b$, un tiempo de muestreo $\Delta t = 6.72 \times 10^{-4} [s]$. Se observa que las respuestas son iguales en frecuencia y en amplitud, con la diferencia de oscilaciones presentes en las discontinuidades en la respuesta obtenida mediante simulación debido al error de aproximación por diferencias finitas.

Si se comparan los resultados obtenidos en este trabajo con los reportados por Lee et al. (2014), que emplea el método de las características, se puede afirmar que para simular una onda de presión no sólo es necesario considerar un gran número de secciones en el ducto; sino que también, el tipo de aproximación para las derivadas espaciales es importante, dado que en el simulador de Lee no se observan las oscilaciones.

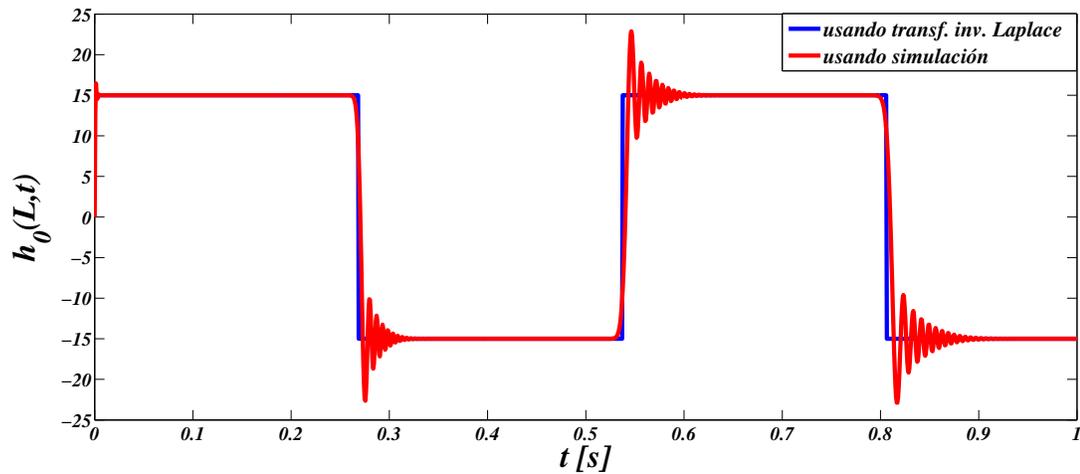


Figura 3.4: Comparación de las respuestas en el caso sin fricción.

3.3.3 Modelo finito con fuga y fricción cero

Ante el escenario de una fuga y despreciando nuevamente la fricción; es decir, (3.18) con $\mu = 0$ y $\lambda \neq 0$, el punto de equilibrio z^{**} del sistema (3.18) es

$$\begin{bmatrix} z_1^{**} \\ z_2^{**} \\ \vdots \\ z_d^{**} \\ z_{d+1}^{**} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{**} \\ z_n^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^* + \lambda\sqrt{u_1^*} \\ u_1^* \\ \vdots \\ u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_2^* \\ u_1^* \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

y el sistema linealizado sin fricción con una fuga en d resulta en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= O'y + P'g \\ h_0(L, t) &= R'y \end{aligned} \quad (3.26)$$

con

$$O' = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & -a_2 B_d & -a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \end{bmatrix}; P' = P; R' = R \quad (3.27)$$

3.3.3.1 Comparación de los modelos con fricción cero y con fuga

Para validar el modelo (3.18) en *Simulink*[®], se obtiene la respuesta de (3.11) con los valores de la Tabla A.1 del Apéndice A y la fricción nula.

La Figura 3.5 muestra la comparación de las ondas de presión obtenidas con (3.11), a partir de la Transformada Inversa de Laplace, en color azul; y con (3.26), a partir de la respuesta simulada para $n = 400$, en rojo; con entradas $u_1 = H_1 = 0$ [m] y $u_2 = Q_{\sigma+1} = -8.563 \times 10^{-4}$ [$\frac{m^3}{s}$] para $\sigma = 200$ secciones, resultando en una discretización en el espacio de $\Delta x = 1$ [m] y, de acuerdo con la condición de Courant $\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq b$, un tiempo de muestreo $\Delta t = 6.72 \times 10^{-4}$ [s]. Se fijó el valor de $B = 5.35 \times 10^{-6}$, correspondiente a un gasto $Q_{f_0} = 2.14 \times 10^{-4}$ [$\frac{m^3}{s}$] y un cabezal de presión de $H_{f_0} = 20$ [m] estacionarios de la fuga ubicada en $\frac{3}{4}$ de la longitud total del ducto. Se observa que el método de aproximación por diferencias finitas tiene errores apreciables después del primer frente de pulsos; sin embargo, es posible considerar sólo el primer ciclo del viaje de la onda de presión, es decir, en el intervalo $t_V \leq t \leq t_D$.

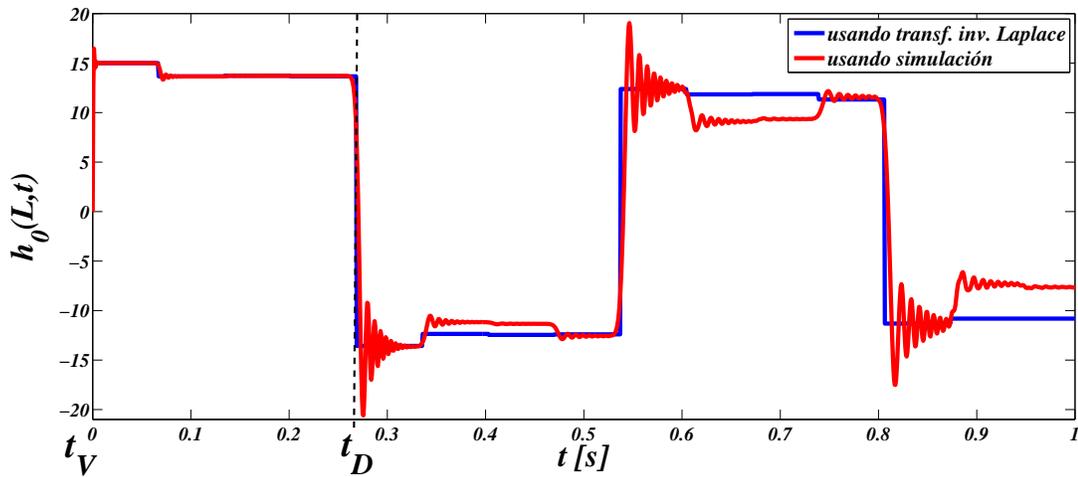


Figura 3.5: Comparación de las respuestas en el caso con una fuga y sin fricción.

3.3.4 Análisis sin fuga y con fricción usando simulador

Para estudiar el fenómeno de la onda de presión en un ducto con fricción mediante simulación, se obtiene la respuesta de (3.18) con los mismos parámetros de la Sección

3.3.2.1, ahora con $f = 0.0309$. Se observa en la Figura 3.6 que la amplitud de oscilación debido al cambio de flujo se atenúa ligeramente conforme pasa el tiempo hasta llegar a cero. La figura no muestra el tiempo en el que los efectos de la perturbación se disipan completamente; no obstante, en la simulación se observa que aproximadamente 900 ciclos después de cambiar el flujo en las condiciones de frontera, la perturbación desaparece.

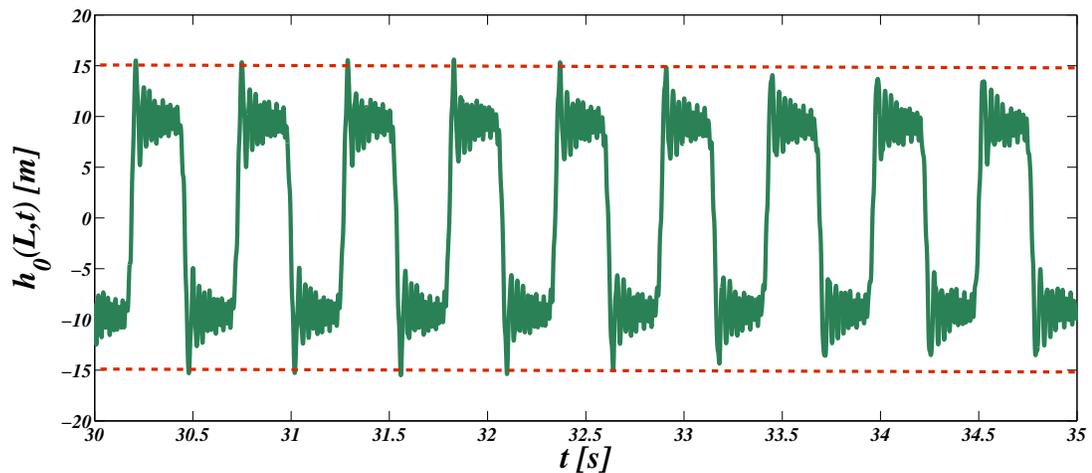


Figura 3.6: Presión en el extremo del ducto, con fricción, aguas arriba de la válvula, obtenida mediante simulación.

En el tren de la Figura 3.6, no se observan los efectos de la fricción en el frente de onda; sin embargo, se puede ver en la Figura 3.7 que los trenes tienen formas diferentes en función de la fricción; entre más grande el valor del coeficiente, mayor es la diferencia entre el valor de la presión al inicio y al final de cada pulso.

Cabe hacer notar que por el valor de fricción de $f = 0.0309$ de la tubería piloto, el efecto de la fricción es despreciable.

3.3.5 Análisis con fuga y con fricción usando simulador

Para estudiar el fenómeno de la onda de presión en un ducto con fricción y en presencia de fuga, se obtuvo la respuesta de (3.18) con los mismos parámetros de la Sección 3.3.3.1, con $f = 0.0309$ de la planta piloto. Por lo que $B = 5.36 \times 10^{-6}$ correspondiente con los valores de flujo y cabezal de la fuga estacionarios $Q_{f_0} = 2.14 \times$

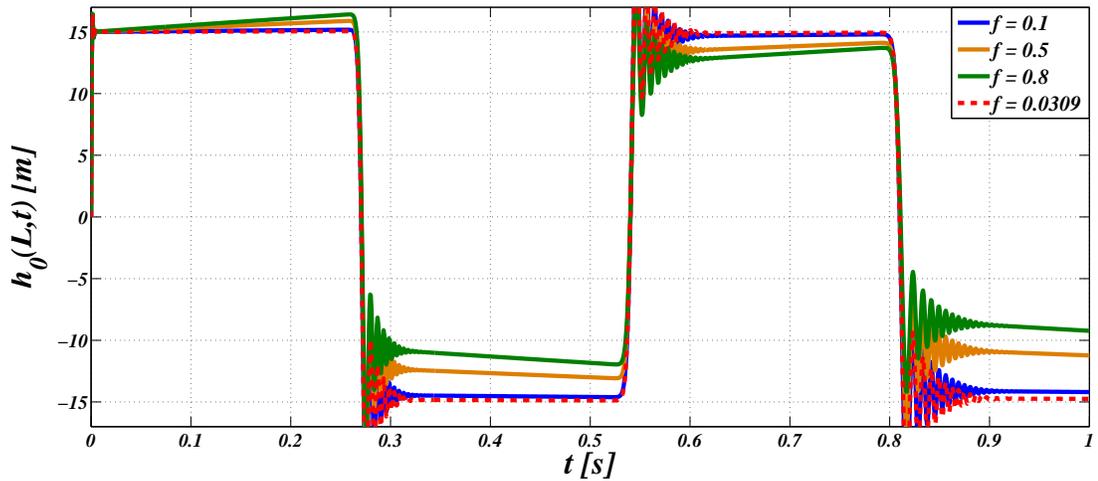


Figura 3.7: Efecto de la fricción en el tren de pulsos sin fugas.

$10^{-4} \left[\frac{m^3}{s} \right]$ y $H_{f_0} = 19.9784 [m]$, respectivamente. Se observa de la Figura 3.8 que la discontinuidad en los trenes y la amplitud de oscilación, debido al cambio de flujo, se atenúan más rápidamente conforme pasa el tiempo hasta llegar a cero. La evolución no muestra el tiempo en el que la perturbación se disipa completamente; pero, con la ayuda de la simulación, se observa que aproximadamente 90 ciclos después de cambiar el flujo en las condiciones de frontera, la perturbación desaparece.

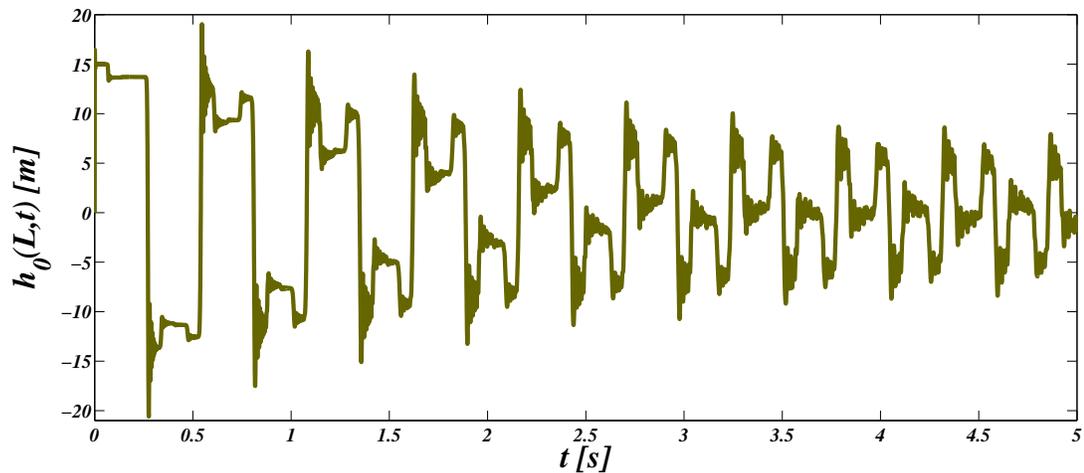


Figura 3.8: Presión en el extremo del ducto con fricción y fuga obtenida mediante simulación.

3.4 Análisis con dos fugas y con fricción usando simulador

Con la finalidad de conocer el efecto que tienen dos fugas presentes en el ducto en la onda de presión, se agregó otra fuga, ubicada exactamente en la mitad del ducto, con un gasto estacionario $Q_{f_2} = 1.28 \times 10^{-4} \left[\frac{m^3}{s} \right]$ y un cabezal de presión de $H_{f_0} = 19.9856 [m]$, correspondientes a un valor de $B_2 = 3.2157 \times 10^{-6}$ para una fricción $f = 00309$ de la planta piloto. La Figura 3.9 muestra el efecto de la segunda fuga en el instante t_{f_2} .

En conclusión la presencia de dos fugas se manifiesta en la onda de presión del fluido provocada por la perturbación del cierre de la válvula. Sin embargo, es necesario caracterizar la magnitud de la fuga y su posición en las discontinuidades provocadas en la onda de presión.

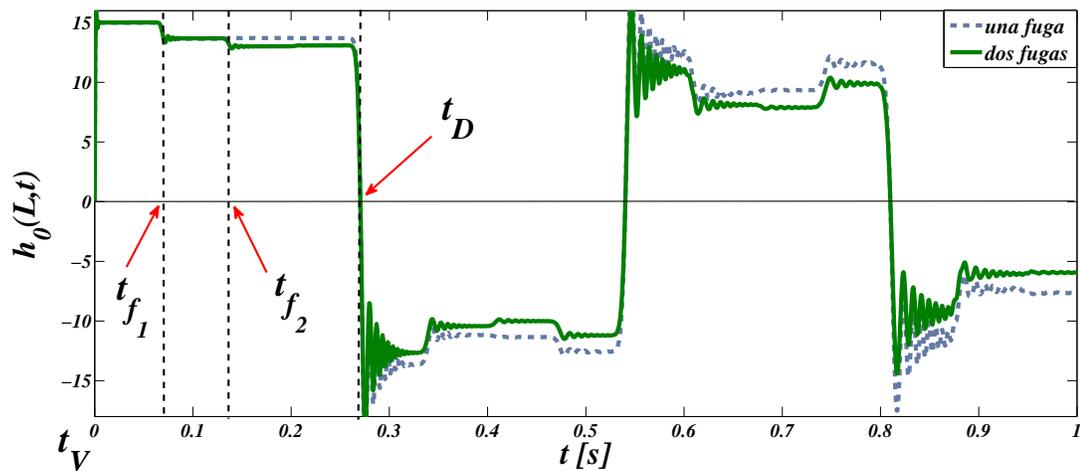


Figura 3.9: Presión en el extremo del ducto con $f = 0.0309$ y dos fugas presentes en el ducto, obtenida mediante simulación.

Capítulo 4

Estimación de múltiples fugas vía la Transformada Onduleta

Dado que la señal de presión en presencia de fugas presenta discontinuidades en instantes de tiempo relacionados con las posiciones de fuga vía la velocidad de onda, los coeficientes de la Transformada Onduleta pueden ser usados para determinar con errores pequeños los instantes de tiempo y por ende las posiciones de fuga.

A continuación, se dará una breve introducción a la Transformada Onduleta, seguida de una descripción de su utilidad para identificar discontinuidades abruptas. Al final se presenta un análisis usando la Transformada Onduleta para determinar los instantes en que se presentan discontinuidades, asociados a los tiempos de llegada de la onda de presión. En primera instancia, se aplica la Transformada Onduleta a la señal de la onda de presión obtenida mediante el concepto de matriz de transferencia. Por último, se analizan, con ayuda de la Transformada, señales de onda de presión usando datos simulados del ducto piloto en tres distintos escenarios con la finalidad de generar un procedimiento para localizar múltiples fugas.

4.1 Localizador de fallas múltiples

Suponiendo que la onda de presión de un fluido se propaga a una velocidad constante b a lo largo del ducto y considerando los tiempos de arribo de las ondas provocadas por las fugas y por el cierre de una válvula al final del ducto con longitud L , mostrados

en las Figuras 3.2 y 3.9, se puede establecer la siguiente relación

$$b = \frac{l_i}{t_{f_i} - t_V} = \frac{L}{t_D - t_V} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

donde l_i es la posición de la fuga, n es el número total de fugas, $t_D - t_V$ es el tiempo que tarda el frente de onda (provocado por el cierre de la válvula en el instante t_V) en propagarse y reflejarse a lo largo del ducto y $t_{f_i} - t_V$ corresponde al tiempo que tardan en propagarse las ondas generadas por las fugas.

Entonces, despejando las posiciones de fuga de (4.1), se tiene la siguiente relación que puede emplearse para su localización

$$l_i = \frac{t_{f_i} - t_V}{t_D - t_V} L \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

Esta relación es reportada para el caso de una fuga en [Meniconi et al. \(2011\)](#), pero la generalización al caso de n fugas no ha sido reportada anteriormente.

Debido a que el cálculo de las posiciones depende, en gran medida, de la exactitud con que se determina el tiempo de llegada de la onda de presión inducida por la fuga, se recomienda procesar digitalmente dicha onda. En particular, en este trabajo se emplea la Transformada Onduleta para identificar el tiempo exacto en que se presentan las singularidades.

4.2 Transformada Onduleta

La definición de la Transformada Onduleta (TO) vista como la convolución de dos señales, permite buscar la semejanza que hay entre una señal de interés y la función onduleta. Esta función onduleta tiene la propiedad de ser escalable en tiempo y frecuencia, lo que permite ajustar la resolución del grado de discontinuidad que se desea analizar ([Verde et al., 2013](#)).

La TO se define como:

$$\tilde{f}(a, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{a, t_0}(t) dt \quad (4.3)$$

donde $\Psi_{a,t_0}(\cdot)$ es un conjunto de funciones

$$\Psi_{a,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-t_0}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad t_0 \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

que dependen del *parámetro de dilatación* a , del *parámetro de traslación del tiempo* t_0 y de la función $\Psi(\cdot)$ llamada *onduleta madre*. En general, la *onduleta madre* debe cumplir con las propiedades de decaimiento rápido y promedio cero. Se observa de la ecuación (4.4) que cuando $|a| > 1$ se generan funciones dilatadas en el tiempo y en consecuencia la resolución frecuencial aumenta en el plano tiempo-frecuencia; por el contrario, para $|a| < 1$ ocurre lo contrario y las *onduletas* se comprimen. El parámetro de traslación t_0 es un corrimiento en el tiempo que caracteriza el primer momento de la función.

Por lo tanto, la TO cuantifica la coincidencia local de la función *onduleta* con la señal. Si la *onduleta* tiene una fuerte correlación con la forma de la señal a una escala y ubicación específicas, entonces se obtiene un valor grande de la Transformada. Si, por el contrario, la *onduleta* y la señal no se correlacionan, se obtiene un valor pequeño. Los valores de la Transformada pueden graficarse en un plano de dos dimensiones al calcular la TO en varios puntos de la señal (eje horizontal) y para varias escalas de la *onduleta* (eje vertical) hasta completar el plano. El resultado es una imagen del grado de correlación entre la *onduleta* y la señal, en diferentes escalas y posiciones (Addison, 2002).

4.2.1 Detector de discontinuidades

La TO es una herramienta matemática que permite identificar discontinuidades abruptas. La Figura 4.1 presenta un ejemplo simple de una discontinuidad, en donde una señal constante positiva, tiene una discontinuidad en un tiempo $t_0 = C$ que la lleva del valor $+1$ a -1 . A continuación se sigue de cerca una *onduleta* con la forma de la segunda derivada de la distribución Gaussiana de dilatación arbitraria a a medida que atraviesa la discontinuidad en dicha señal. Para ver de qué manera la *onduleta* permite identificar la discontinuidad, se sigue el efecto del parámetro t_0 en la TO para cada una de los corrimientos de la señal A , B , C , D y E , mostrados en la figura.

- Corrimiento A : En este escenario la onduleta se encuentra mucho antes de la discontinuidad y la integral (4.3) vale cero. Esto debido a la propiedad de promedio cero de la onduleta y a que la integral hasta A se convierte en la convolución de la onduleta con una constante resultando en un valor nulo.
- Corrimiento B : En este corrimiento la onduleta empieza a atravesar la discontinuidad. El lóbulo izquierdo de la onduleta produce una contribución negativa a la integral, mientras que el lóbulo derecho produce una contribución igual positiva; la parte central de la onduleta produce un valor positivo significativo para la integral en este corrimiento.
- Corrimiento C : Cuando la discontinuidad coincide con el centro de la onduleta, las mitades derecha e izquierda de la onduleta contribuyen con un valor cero en la integral, ya que por definición la onduleta tiene promedio cero las cuatro regiones de la onduleta
- Corrimiento D : A medida que la onduleta deja la discontinuidad, el lóbulo izquierdo contribuye con un valor negativo a la integral, el lóbulo derecho produce una contribución igual positiva, como pasa en el corrimiento B . Sin embargo, la parte central de la onduleta coincide con el valor constante negativo de la señal y por lo tanto la integral arroja un valor negativo significativo en este corrimiento.
- Corrimiento E : En corrimientos muy alejados de C , la onduleta y la señal se combinan para dar valores cercanos a cero de la integral.

Por lo tanto, a medida que la onduleta atraviesa la discontinuidad la integral primero retorna valores positivos y después negativos. Estos valores están ubicados en la vecindad de la discontinuidad, lo cual se ilustra en la Figura 4.1(c), en donde se encuentra la gráfica de la TO con respecto a t_0 . Se observa un cruce por cero en la discontinuidad. El ancho de esta onda es directamente proporcional al ancho de la onduleta.

Para el caso de una onduleta asimétrica, la gráfica de la TO con respecto a t_0 en cierta escala no presenta un cruce por cero sino un lóbulo simple de ancho proporcional a la escala. Si se trata de una onduleta *Haar*, Figura 4.2, el lóbulo

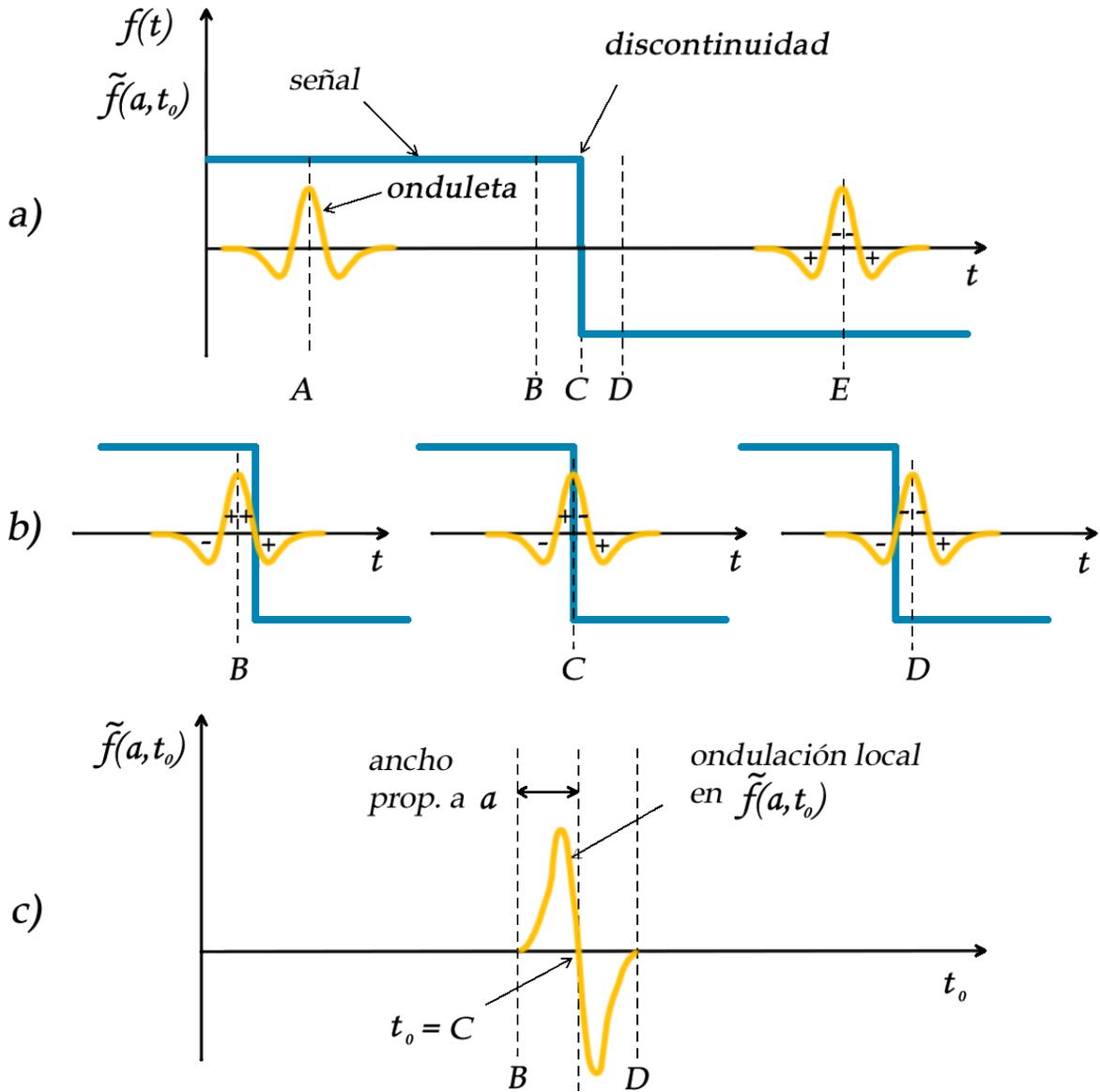


Figura 4.1: Comparación de la onduleta con una discontinuidad. a) Las regiones en donde la contribución a la integral es positiva o negativa se encuentran marcadas. b) Acercamiento de la onduleta conforme atraviesa la discontinuidad. c) Gráfica de $\tilde{f}(a, t_0)$ con respecto a t_0 a una escala a dada.

tendrá forma triangular, resultado de la convolución de dos pulsos cuadrados. Si la onduleta tiene la forma de la primera derivada de la función Gaussiana, entonces el lóbulo tendrá forma Gaussiana.

4.3 Cálculo de los tiempos de las discontinuidades usando la Transformada Onduleta

Como sugiere Ferrante et al. (2007), para el análisis de las singularidades producidas por la fugas en la onda de presión, la onduleta madre tipo *Haar*, mostrada en la Figura 4.2, puede ser usada debido a su similitud con la forma de las discontinuidades buscadas. En este caso, los valores de (4.3) en función del tiempo representan la diferencia de los valores medios de $f(t)$ sobre dos intervalos vecinos de longitud $\frac{|a|}{2}$ en el corrimiento t_0 .

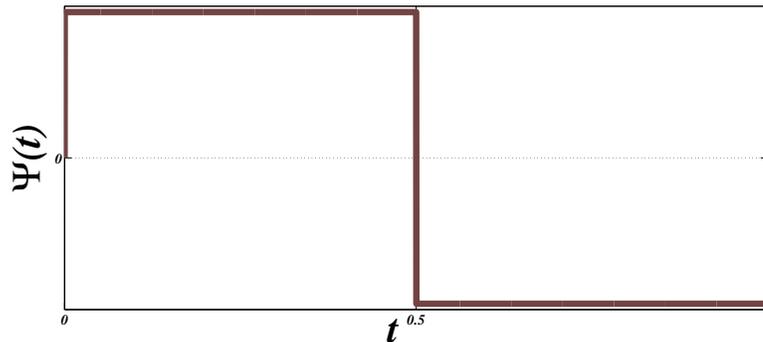


Figura 4.2: Onduleta madre tipo *Haar*

Retomando el frente de onda de presión del capítulo anterior, es posible determinar los tiempos asociados a la llegada de la onda de presión, y con éstos la ubicación de las fugas, con pequeños errores y de forma automática.

Para ello se analiza la gráfica de la TO, la cual se obtiene con la ayuda de la función `cwt(señal,escalas,'tipo onduleta')` proporcionada por el *Wavelet Toolbox*[®] de *RMatlab2014a*.

Idealmente se espera que la TO con la onduleta madre *Haar* para una escala a dada aplicada a una discontinuidad, tenga una forma triangular de ancho proporcional a a . Si la discontinuidad es descendente, como la onduleta, la forma

triangular de TO será positiva. Por otro lado, si la discontinuidad es ascendente, entonces la gráfica de la TO será negativa.

Ya que solo importa el grado de correlación entre la onduleta y la señal, en las siguientes gráficas se considera el **valor absoluto** del valor de la integral de la Transformada (4.3).

4.3.1 Transformada onduleta aplicada a la onda de presión obtenida mediante la Transformada de Laplace

Siguiendo el orden del capítulo anterior, primero se obtuvo la TO de la expresión (3.5) que describe el comportamiento de la presión aguas abajo del ducto en condiciones normales de operación al aplicar la perturbación, ver Figura 4.3 a). Los parámetros del ducto y el punto de funcionamiento son los mismos que se han usado en el análisis del capítulo anterior.

La Figura 4.3 f) muestra la gráfica del valor absoluto de la Transformada considerando un corrimiento entre $0 \leq t_0 \leq 1$ [s] y un factor de escala de $0 \leq a \leq 128$. Las partes más claras corresponden a valores de la TO más grandes, de acuerdo con la escala. De la Figura 4.3 a), se puede decir que se presentan cinco discontinuidades en la onda de presión en el primer segundo después de la perturbación. La primera discontinuidad se presenta evidentemente en $t_V = 0$ [s], que es el tiempo en el que se cierra la válvula. A simple vista, el periodo del tren de pulsos es de 0.55 [s] aproximadamente. Sin embargo, se sabe que el periodo del tren de pulsos de la onda de presión debido al cambio de flujo es $T = \frac{4L}{b}$ y $t_D = \frac{T}{2}$ corresponde al tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse a lo largo de todo el ducto; es decir, teóricamente $T = 0.5376$ [s] y $t_D = 0.2688$ [s]. De acuerdo con la Figura 4.3 e), los tiempos t_D y T obtenidos mediante TO, verifican los valores teóricos.

4.3.1.1 Comparación de la TO con *Haar* de la onda de presión en condiciones normales y con fuga

El siguiente caso a analizar es el caso de la onda de presión en el extremo aguas abajo del ducto sin fricción en presencia de una fuga de magnitud 25% del gasto nominal y ubicada a 50 [m] de la válvula, la cual se muestra en la Figura 4.4 b) a partir de

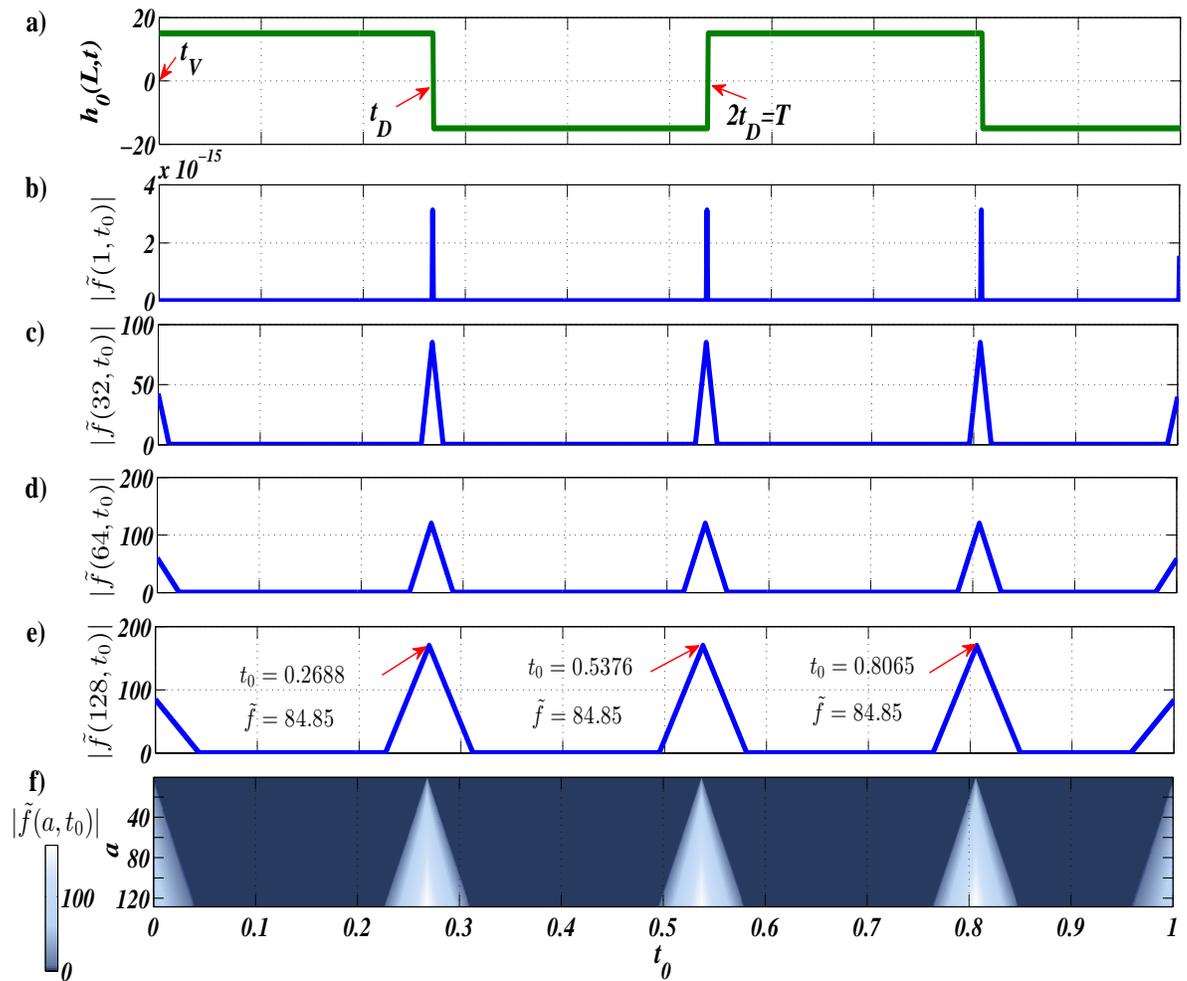


Figura 4.3: a) evolución de la onda de presión en un ducto sin fricción y sin fugas, b) gráfica del valor absoluto de TO con una onduleta madre *Haar* y una escala $a = 1$ aplicada a la onda de presión con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq 1$, c) valor absoluto de TO con $a = 32$, d) valor absoluto de TO con $a = 64$, e) TO con $a = 128$, se indican los tiempos en que TO tiene un máximo local, f) gráfica del valor absoluto de TO para el conjunto de escalas $0 \leq a \leq 128$. El color indica la magnitud del valor $|\tilde{f}(a, t_0)|$, correspondiendo las partes más claras de la gráfica los valores más grandes

la expresión (3.11) y usando los mismos parámetros de la sección anterior.

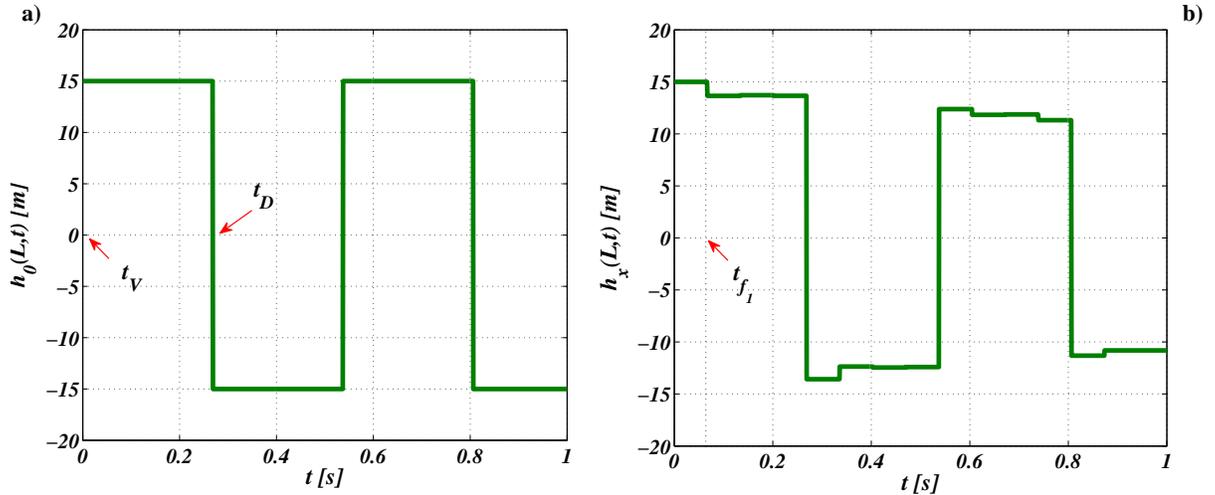


Figura 4.4: Comparación de la onda de presión en el extremo aguas abajo obtenida mediante el concepto de matriz de transferencia y la Transformada Inversa de Laplace a) onda de presión $h_0(L,t)$, en condiciones normales, en el primer segundo después de presentarse la perturbación b) onda de presión $h_x(L,t)$, en presencia de una fuga de magnitud un cuarto del gasto nominal y ubicada a un cuarto de L de la válvula.

Dado que se puede especificar el intervalo en el que se aplica la TO; es decir, el intervalo en el cual se compara la onduleta con la señal, se puede hacer un ajuste temporal con la ayuda del parámetro de traslación para examinar las partes de la señal de interés. En este caso, el intervalo $0 \leq t \leq t_D$.

Las gráficas a) y d) de la Figura 4.5 muestran un acercamiento de las presiones de la Figura 4.4 con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2688$ [s], mientras que c) y f) muestran la gráfica de la TO con escalas de $0 \leq a \leq 64$ de dichas señales. El efecto de la fuga en la onda de presión ocasiona la discontinuidad en t_{f_1} y es de menor tamaño en comparación con las discontinuidades en t_V y t_D ; no obstante, se advierte su efecto en la gráfica de la TO, Figura 4.5 f).

Conociendo los tiempos de llegada, es fácil determinar la ubicación de una fuga con la ayuda de (4.2) para $n = 1$. Por simple inspección visual, sin tomar en cuenta los resultados arrojados por la TO, t_{f_1} es aproximadamente 0.06 [s], $t_V = 0$ y $t_D = 0.55/2 = 0.275$, resultando en $l_1 \approx 43.64$ [m]. Por otro lado, el valor teórico de $t_{f_1} = \frac{2l_1}{b}$, para los parámetros usados y la fuga situada a 50 [m] de la válvula,

es 0.0672 [s], el cual se puede verificar con el valor proporcionado por la TO en la Figura 4.5 e), en donde se muestra la gráfica de la TO para la escala $a = 64$. Usando (4.2) se obtiene $l_1 = 50.13$ [m].

Por lo tanto, es importante conocer perfectamente los valores de t_{f_i} ya que de ello dependerá el error que se cometa al calcular la ubicación de la fuga l_i .

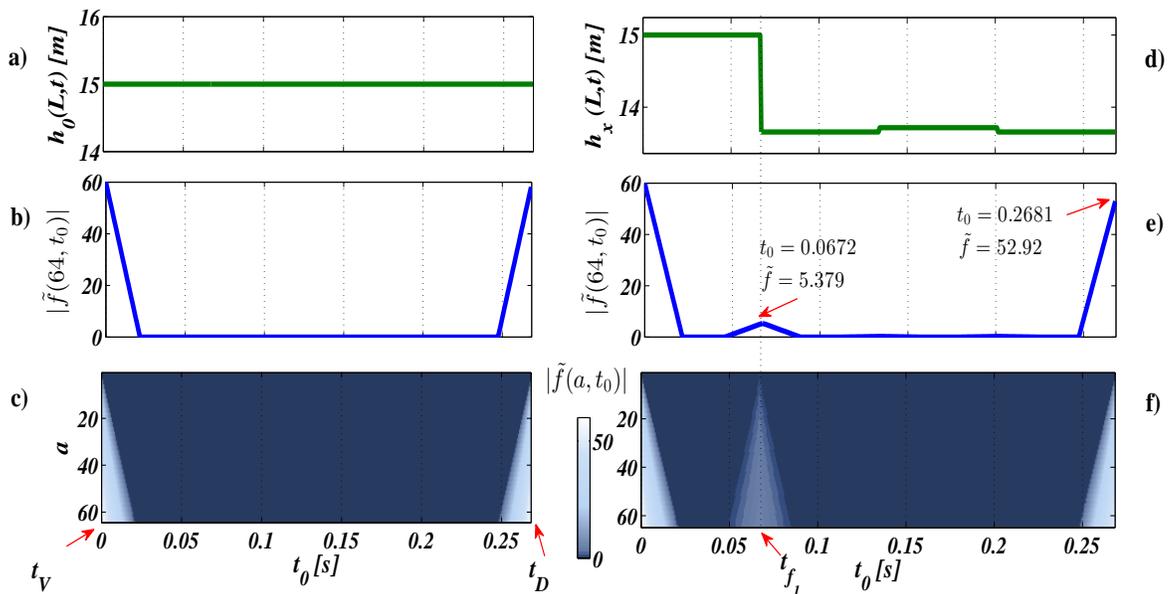


Figura 4.5: Comparación de TO aplicada a la onda de presión en condiciones normales y en presencia de fuga, a) onda de presión $h_0(L, t)$, en condiciones normales, con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2688$ [s] b) gráfica del valor absoluto de TO con una onduleta madre *Haar* y una escala $a = 64$ aplicada a $h_0(L, t)$ c) TO de la onda de presión sin fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$, d) onda de presión $h_x(L, t)$, en presencia de fuga 25% del gasto nominal en el intervalo de tiempo $(0, 0.2688)$ [s], e) gráfica del valor absoluto de TO con una escala $a = 64$ aplicada a $h_x(L, t)$, f) TO de la onda de presión en presencia de fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$.

4.4 Resultados en Simulación

4.4.1 Comparación de la TO aplicada a la onda de presión sin fricción

Toca el turno de estudiar el caso de las señales obtenidas mediante el modelo finito, con fricción cero, en situaciones normales y con fuga; esto es, las señales mostradas en las Figuras 4.6 a) y b) respectivamente.

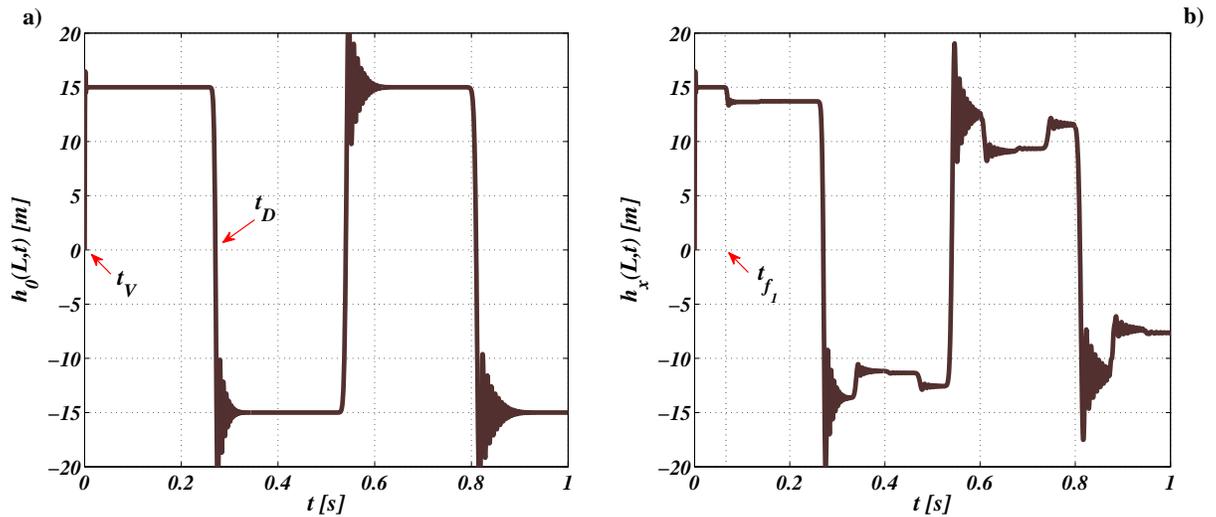


Figura 4.6: Comparación de la onda de presión en el extremo aguas abajo obtenida mediante el modelo finito con fricción cero, a) onda de presión $h_0(L, t)$, en condiciones normales, en el primer segundo después de presentarse la perturbación b) onda de presión $h_x(L, t)$, en presencia de una fuga de magnitud un cuarto del gasto nominal y ubicada a un cuarto de L de la válvula.

Las Figuras 4.7 a) y d) muestran un acercamiento de las presiones de la Figura 4.6 en el intervalo de tiempo $(0, 0.2688)$ [s], mientras que c) y f) muestran la gráfica de los resultados de aplicar la TO onduleta con escalas de $0 \leq a \leq 64$. Usando los valores de los tiempos de llegada t_{f_1} y t_D dados por la TO en las Figura 4.7 b) y e) en (4.2), se obtiene $l_1 = 50.63$ [m].

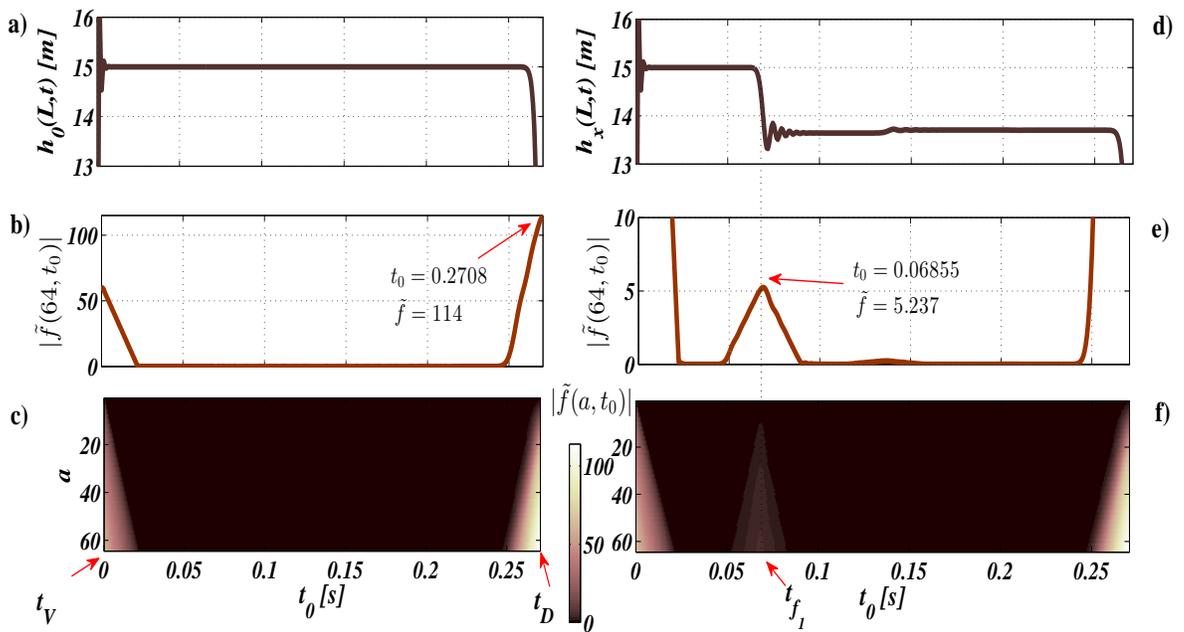


Figura 4.7: Comparación de TO aplicada a la onda de presión en condiciones normales y en presencia de fuga, a) onda de presión $h_0(L,t)$, obtenida mediante simulación, en condiciones normales, en el intervalo $(0,0.2688)$ [s] b) gráfica del valor absoluto de TO con una onduleta madre *Haar* y una escala $a = 64$ aplicada a $h_0(L,t)$ c) TO de la onda de presión sin fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$, d) onda de presión $h_x(L,t)$, obtenida mediante simulación, en presencia de fuga 25% del gasto nominal en el intervalo $(0,0.2688)$ [s], e) gráfica del valor absoluto de TO con una escala $a = 64$ aplicada a $h_x(L,t)$, f) TO de la onda de presión en presencia de fuga con escalas de $0 \leq a \leq 64$.

4.4.2 Múltiples fugas

Para extender la expresión propuesta de Meniconi et al. (2011) al caso de múltiples fugas, a partir de la onda de presión en el extremo aguas abajo, a continuación sólo se utilizan datos simulados del ducto piloto en tres distintos escenarios: una, dos y tres fugas, las cuales se encuentran presentes al momento de generar la onda de presión. Una vez que el fluido alcanzó el estado de equilibrio con las fugas presentes, se provocó un cambio en el flujo mediante el cierre instantáneo de la válvula y, para facilitar el análisis, se tomó el tiempo en que se cierra la válvula como $t_V = 0$; es decir, se hizo que $Q(L, 0) = 0$. Por lo son irrelevantes los tiempos en los que se presentaron las fugas.

4.4.3 Escenario de una fuga

En este escenario se realizaron simulaciones del fluido con una sola fuga ubicada en dos lugares: 1) justo a la mitad del ducto y 2) a un tercio de L a partir del tanque. Se obtuvieron las ondas de presión con los valores de la Tabla A.1 del Apéndice A; con entradas $u_1 = H_1 = 0$ [m] y $u_2 = Q_{\sigma+1} = -8.563 \times 10^{-4}$ [$\frac{m^3}{s}$] considerando $\sigma = 200$ secciones, resultando en una discretización en el espacio de $\Delta x = 1$ [m] y, de acuerdo con la condición de Courant $\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq b$, un tiempo de muestreo $\Delta t = 6.72 \times 10^{-4}$ [s]. Para cada caso se fijó Q_{f_0} al 5, 10, 20 y 30% del gasto nominal u_2 .

4.4.3.1 Primer Caso: fuga a la mitad de la tubería

La Figura 4.8 muestra la onda de presión para los cuatro valores de la magnitud de la fuga ubicada justo a la mitad del ducto; esto es, 100 [m]. Se observa que entre menor sea el gasto de la fuga, menor será la amplitud de la discontinuidad. Por su parte, la Figura 4.9 muestra la TO aplicada a dichas señales con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s]. Se observa que $t_{f_1} = 0.1364$ [s] y por lo tanto, utilizando (4.2) se obtiene $l_1 = 100.74$ [m].

4.4.3.2 Segundo Caso: fuga a un tercio de la tubería

La Figura 4.10 muestra la onda de presión para los cuatro valores de la magnitud de la fuga ubicada justo a un tercio del ducto a partir del tanque; esto es, a 133.33

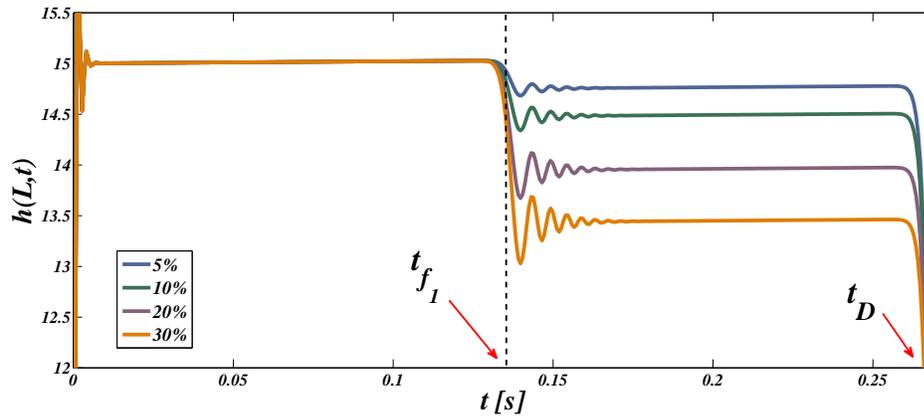


Figura 4.8: Presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada justo a la mitad, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida.

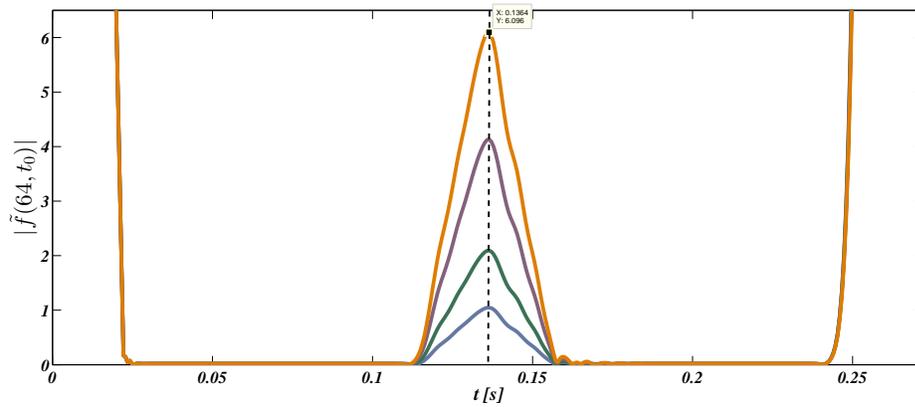


Figura 4.9: TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada justo a la mitad, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida.

[m] de la válvula. La Figura 4.11 muestra los resultados de aplicar la TO a dichas señales con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s]. Se observa que $t_{f_1} = 0.1808$ [s] y por lo tanto, usando (4.2), se obtiene $l_1 = 133.53$ [m]. Se aprecia también que la magnitud de la TO es proporcional al tamaño de la fuga; sin embargo el ancho de la forma triangular es el mismo.

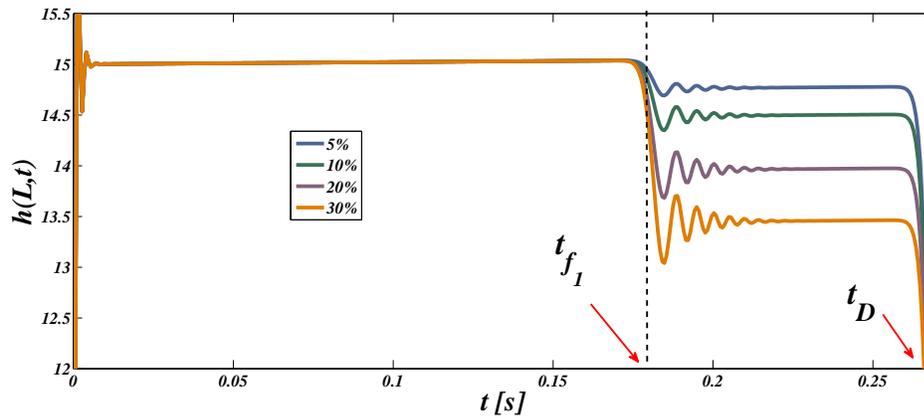


Figura 4.10: Presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada a un tercio, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida.

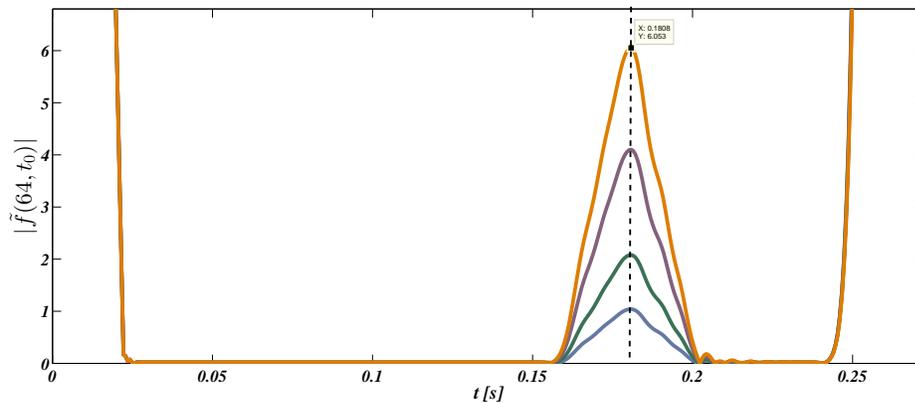


Figura 4.11: TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y una fuga situada a 133.33 [m] de la válvula, obtenida mediante simulación, con diferentes flujos de fuga, proporcionales al flujo de salida.

4.4.4 Escenario de dos fugas

En este escenario se realizaron dos simulaciones del fluido con dos fugas presentes en:

- posiciones equidistantes; la primera con 10% y la segunda, con 20% de la magnitud del flujo de salida.
- posiciones arbitrarias; la primera con 20% ubicada a 60 [m] de la válvula y la segunda, con 10% ubicada a 160 [m] de la válvula.

4.4.4.1 Primer Caso: dos fugas equidistantes

La Figura 4.12 muestra la onda de presión del fluido con dos fugas ubicadas de forma equidistante entre sí. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 66.67 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 133.33 [m]. La Figura 4.13 muestra la TO aplicada con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s]. Se nota que $t_{f_1} = 0.09207$ [s] y $t_{f_2} = 0.1808$ [s]. Por lo tanto, utilizando (4.2) para $i = 2$, resultan $l_1 = 67.99$ [m] y $l_2 = 133.53$ [m].

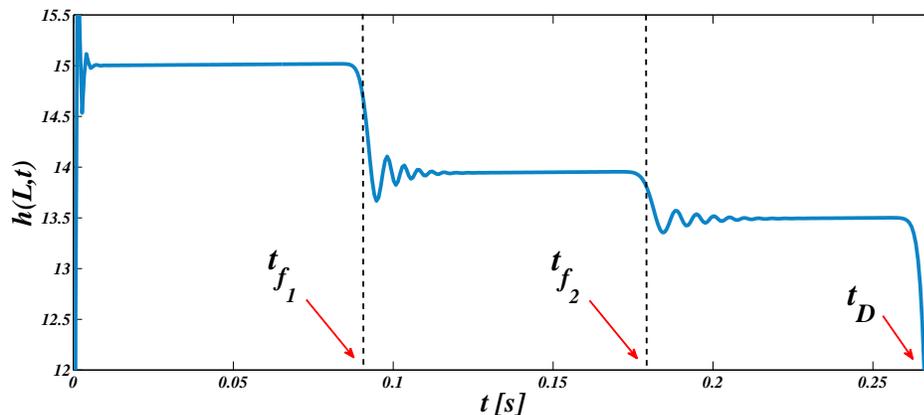


Figura 4.12: Presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 66.67 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 133.33 [m].

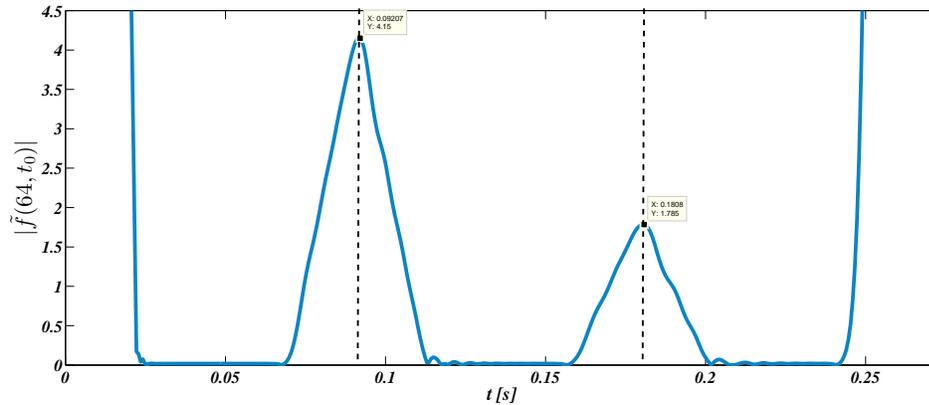


Figura 4.13: TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 66.67 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 133.33 [m].

4.4.4.2 Segundo Caso: dos fugas no equidistantes

La Figura 4.14 muestra la onda de presión del fluido con dos fugas presentes en posiciones arbitrarias. La primera del 20% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 60 [m] de la válvula; la segunda, del 10% y a 160 [m]. La Figura 4.15 muestra la TO aplicada con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s]. Se observa que $t_{f_1} = 0.08266$ [s] y $t_{f_2} = 0.2171$ [s]. Por lo tanto, usando (4.2) para $i = 2$, resulta $l_1 = 61.05$ [m] y $l_2 = 160.34$ [m].

4.4.5 Escenario de tres fugas

En este escenario se realizaron dos simulaciones del fluido con tres fugas presentes en:

- posiciones equidistantes; la primera con 10%, la segunda, con 20% y la tercera con 30% de la magnitud del flujo de salida.
- posiciones arbitrarias; la primera con 30% ubicada a 40; la segunda, con 10% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 20% ubicada a 160 [m] de la válvula.

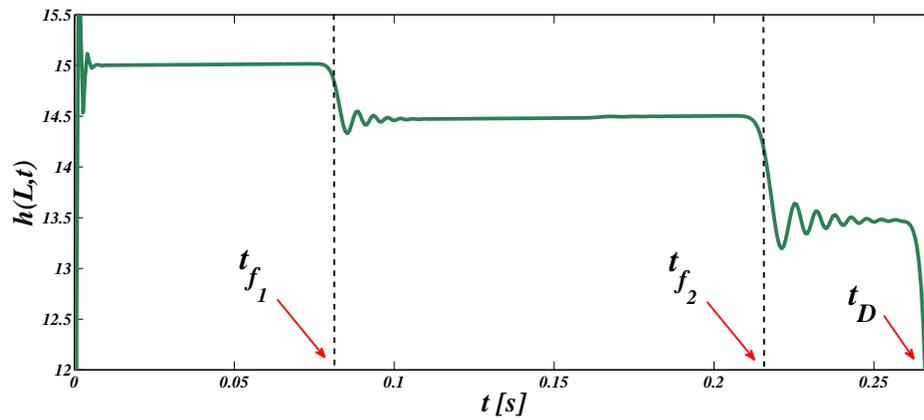


Figura 4.14: Presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 60 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 160 [m].

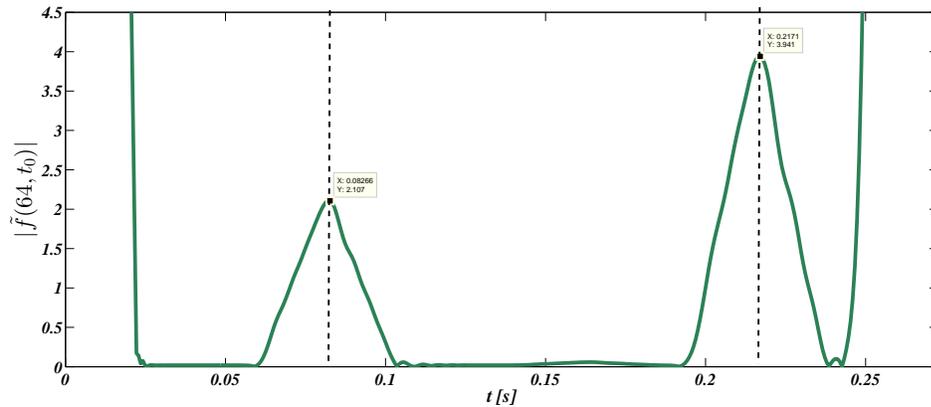


Figura 4.15: TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y con dos fugas presentes. La primera del 10% la magnitud del flujo de salida y ubicada a 60 [m] de la válvula; la segunda, del 20% y a 160 [m].

4.4.5.1 Primer Caso: tres fugas equidistantes

La Figura 4.16 muestra la onda de presión del fluido con dos fugas ubicadas de forma equidistante entre sí. La primera con 10% ubicada a 50 [m]; la segunda, con 20% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 30% ubicada a 150 [m] de la válvula. La Figura 4.17 muestra la TO aplicada con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s]. Se observa que $t_{f_1} = 0.06922$ [s], $t_{f_2} = 0.1371$ [s] y $t_{f_3} = 0.2036$ [s]. Por lo tanto, usando (4.2) para $i = 3$, resulta $l_1 = 51.12$ [m], $l_2 = 101.25$ [m] y $l_3 = 150.37$ [m].

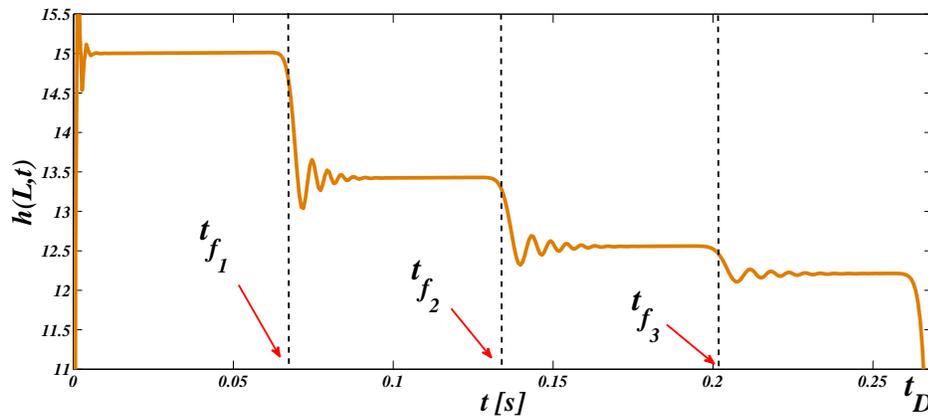


Figura 4.16: Presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 10% ubicada a 50; la segunda, con 20% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 30% ubicada a 150 [m] de la válvula.

4.4.5.2 Segundo Caso: tres fugas no equidistantes

La Figura 4.18 muestra la onda de presión del fluido con dos fugas ubicadas en posiciones arbitrarias. La primera con 30% ubicada a 40 [m]; la segunda, con 10% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 20% ubicada a 160 [m] de la válvula. La Figura 4.19 muestra la TO aplicada con un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s]. Se observa que $t_{f_1} = 0.05511$ [s], $t_{f_2} = 0.1364$ [s] y $t_{f_3} = 0.2171$ [s]. Por lo tanto, utilizando (4.2) para $i = 3$, se obtiene $l_1 = 40.70$ [m], $l_2 = 100.74$ [m] y $l_3 = 160.34$ [m].

La Tabla 4.1 muestra los resultados del cálculo de la posición de las fugas usando la TO en los tres escenarios. Se aprecia que el error de localización es muy pequeño.

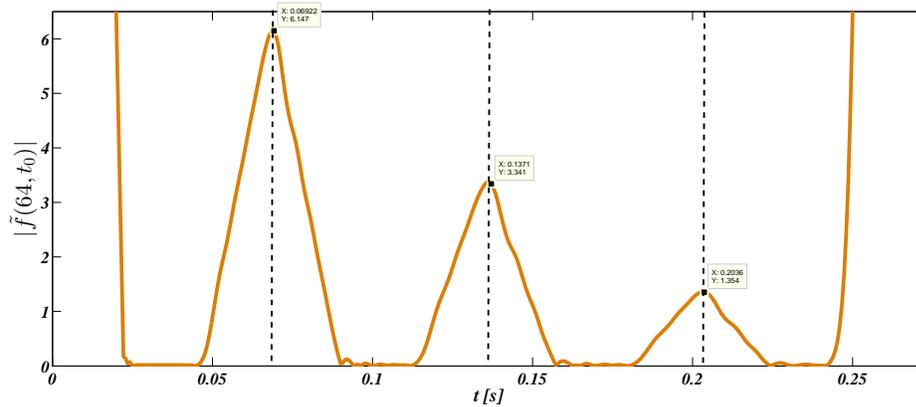


Figura 4.17: TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 10% ubicada a 50; la segunda, con 20% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 30% ubicada a 150 [m] de la válvula.

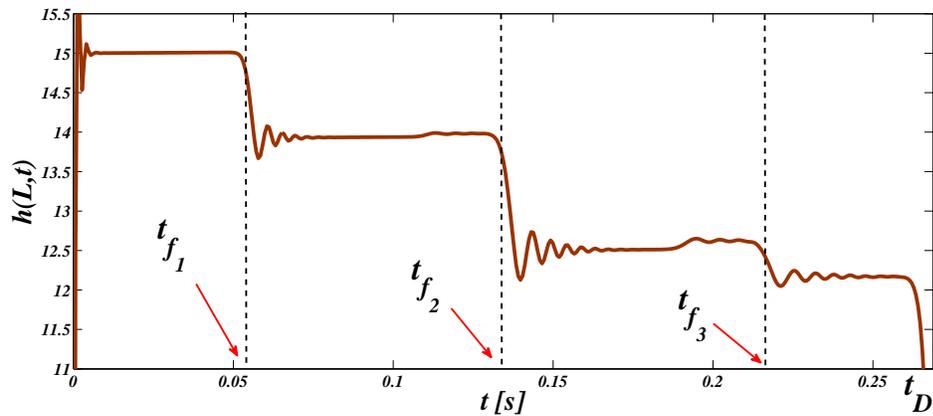


Figura 4.18: Presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 30% ubicada a 40; la segunda, con 10% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 20% ubicada a 160 [m] de la válvula.

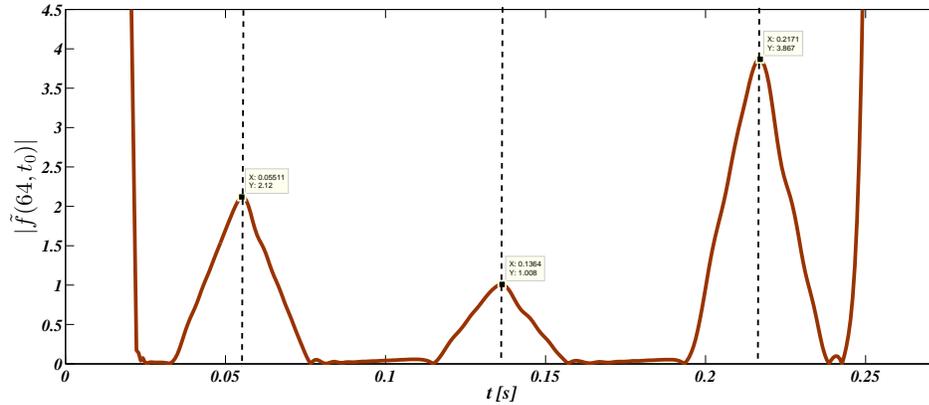


Figura 4.19: TO con un escalamiento de $a = 64$ y un corrimiento $0 \leq t_0 \leq t_D = 0.2708$ [s], aplicada a la presión en el extremo del ducto con fricción y tres fugas equidistante entre sí. La primera con 30% ubicada a 40; la segunda, con 10% ubicada a 100 [m] y la tercera, con 20% ubicada a 160 [m] de la válvula.

Tabla 4.1: Cálculo de las posiciones de las fugas en los tres escenarios.

<i>Escenario</i>	<i>Caso</i>	$l_{i_{\text{real}}}$ [m]	$l_{i_{\text{calculada}}}$ [m]	% error
(1) Una fuga	(a) fuga a la mitad	100	100.74	0.74
	(b) fuga a $\frac{1}{3}$ del tanque	133.33	133.53	0.15
(2) Dos fugas	(a) posiciones equidistantes	66.67	67.99	1.97
		133.33	133.53	0.15
	(b) posiciones arbitrarias	60	61.05	2.5
		160	160.34	0.21
(2) Tres fugas	(a) posiciones equidistantes	50	51.12	2.24
		100	101.25	1.25
		150	150.37	0.25
	(b) posiciones arbitrarias	40	40.7	1.75
		100	100.74	0.74
		160	160.34	0.21

Capítulo 5

Conclusiones

Es posible obtener la expresión analítica en el dominio del tiempo de la onda de presión en condiciones de una sola fuga, a partir del modelo linealizado de dimensión infinita, usando el concepto de matriz de transferencia. A partir de lo anterior, se puede obtener la expresión analítica, en el dominio de Laplace, para más fugas presentes; no obstante, convertir la expresión en el dominio del tiempo es poco factible de obtener, dado que ésta contendrá más términos hiperbólicos, tanto en el numerador como en el denominador en función del número de fugas.

El efecto de una perturbación discontinua en la onda de presión, en un ducto sin fricción y en condición normal, genera un tren de pulsos de periodo $\frac{4L}{b}$, en el instante en que se presenta dicha perturbación. El ancho del tren de pulsos, esto es $t_D - t_V$, corresponde al tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse a lo largo de todo el ducto. El tren se mantiene debido a que no se consideró la fricción en el análisis.

En condición de fuga en el punto l_i , el tren de pulsos resultante tiene la misma frecuencia que el nominal; sin embargo, presenta discontinuidades en el primer pulso en los instantes $t_{f_i} = \frac{2l_i}{b}$, los cuales corresponden al tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse del extremo final del ducto y la fuga f_i . Además, las fugas tienen el efecto de disipar los efectos de la perturbación cuando el tiempo tiende a infinito.

Con base en los resultados analíticos y aquellos obtenidos mediante simulación, se encuentra que la información de mayor utilidad para localizar fugas, se halla en

el primer frente de onda de presión, después de haberse producido la perturbación; esto es, en el intervalo $t_V \leq t \leq t_D$.

Se observa en los resultados obtenidos mediante simulación que el tren de pulsos presenta oscilaciones en las discontinuidades debido al método de aproximación de diferencias finitas de las derivadas parciales, por lo que se verifica que para simular una onda de presión no sólo es necesario considerar un gran número de secciones en el ducto, sino que también el tipo de aproximación para las derivadas espaciales es importante para un buen comportamiento dinámico.

Los errores obtenidos al calcular indirectamente la posición de las fugas son despreciables al usar la transformada onduleta para determinar los tiempos de llegada de la onda de presión. Por lo tanto, es posible implementar un método de localización de múltiples fugas en línea, tomando en cuenta que es necesario conocer bien la longitud del ducto y la velocidad de propagación de la onda, ya que son necesarios en la expresión (4.2).

A partir del estudio presentado, se sugiere localizar múltiples fugas, incluso simultáneas, con la ayuda de una señal transitoria generada en cualquier momento después de que el sistema hidráulico haya alcanzado el estado de equilibrio, debido a las fugas. En particular, para cada fuga f_i se presenta una discontinuidad, en el instante t_{f_i} , la cual se ve manifestada en el primer ciclo del transitorio de la onda de presión. Por tanto, la fórmula obtenida por Meniconi puede ser aplicada para cualquier número de fugas.

Como trabajo futuro, se desea buscar una señal auxiliar más adecuada a las condiciones de la planta piloto y determinar los valores de las magnitudes y posiciones de fugas que producen discontinuidades identificables en casos reales.

Apéndice A

Parámetros del ducto piloto

Los parámetros del ducto considerados en el estudio caracterizan al ducto hidráulico piloto del laboratorio del Instituto de Ingeniería-UNAM y se presentan en la Tabla A.1

Tabla A.1: Parámetros del ducto piloto

$L = 200 [m]$	$A = 0.0087[m^2]$	$b = 1488[\frac{m}{s}]$
$f = 0.0309$	$g = 9.81 [\frac{m}{s^2}]$	$D = 0.105[m]$

La estabilidad de un simulador numérico de un ducto se garantiza si se satisface la relación de Courant $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{b}$. Así, entre mayor sea el número de secciones en que se divide el ducto, mejor es el comportamiento del simulador basado en diferencias finitas. Además, para evitar que los picos de presión se atenúen, se recomienda usar un paso de integración Δt pequeño. Considerando los parámetros del ducto piloto se observó que el comportamiento dinámico del simulador no se alteraba sustancialmente para una discretización de más de 130 tramos. Por lo que se seleccionó el valor de Δt en el límite superior para la simulaciones, resultando $\Delta x = 1.54 [m]$.

Apéndice B

El polinomio de Taylor

Definición (Lubary, 2008): Sea f una función real de n variables con derivadas parciales hasta el orden k y sea $\mathbf{a} \in U$ subconjunto abierto de \mathfrak{R}^n , el *polinomio de Taylor* de grado k de f en \mathbf{a} está dado por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a})(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \dots (x_{i_k} - a_{i_k}) \end{aligned} \tag{B.1}$$

Si el polinomio está centrado en $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, se le denomina *polinomio de MacLaurin*.

B.1 Expansión en serie de Taylor con *Mathematica*[®]

Mathematica es un sistema de álgebra computacional de propósito general basado en re-escritura de términos (computación simbólica).

El comando que genera una expansión en serie de Taylor de f de orden n en el punto $x = x_0$ tiene la siguiente sintáxis (Wolfram, 2015):

`Series[f, {x, x0, n}]`

Mientras que

```
Series[f, {x, x0, nx}, {y, y0, ny}, {z, z0, nz}]
```

encuentra sucesivamente la expansión con respecto a x , después con y y por último con respecto a z de acuerdo con (B.1).

Por ejemplo, para la función

$$f(i, j, k) = \frac{1}{1 + \alpha i + \beta j - \beta k}$$

con α y β constantes, el comando que encuentra la expansión en serie Taylor de orden 1, alrededor de $\mathbf{0}$ es

```
Series[1/(1 + a*i + b*j - b*k), {i, 0, 1}, {j, 0, 1}, {k, 0, 1}]
```

cuyo resultado se presenta de la siguiente forma

$$((1 + bk + O[k]^2) + (-b - 2b^2k + O[k]^2)j + O[j]^2) + ((-a - 2(ab)k + O[k]^2) + (2ab + 6ab^2k + O[k]^2)j + O[j]^2)i + O[i]^2$$

donde $O[i]^2$ indican los términos de mayor orden para la variable i .

Ya que las expansiones en serie de Taylor tienen una representación especial en *Mathematica*, se utilizan las siguiente funciones para poder manipular el resultado arrojado por `Series[]`:

- `Normal[%]`: trunca los términos de mayor orden y convierte el último resultado en una expresión manipulable por *Mathematica*.
- `Expand[%]`: desarrolla y simplifica la última expresión, dejando como resultado una suma de términos.

De modo que el resultado

$$1 - ai - bj + 2abij + bk - 2abik - 2b^2jk + 6ab^2ijk$$

se obtiene mediante el comando

```
Expand[Normal[Series[f, {i, 0, 1}, {j, 0, 1}, {k, 0, 1}]]]
```

Referencias

- Addison, P. (2002). *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*. Institute of Physics Publishing.
- Bergant, A., Tijsseling, A., Vítkovský, J.P., Covas, D., Simpson, A.R., y Lambert, M.F. (2003). Further investigation of parameters affecting water hammer wave attenuation, shape and timing. part 2:case studies. *11th International Meeting of the Working Group on the Behaviour of Hydraulic Machinery Under Steady Oscillatory Conditions*.
- Billman, L. y Isermann, R. (1987). Leak detection methods for pipelines. *Automatica*, 23(3), 381–385.
- Chaudhry, H.M. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. Springer.
- Cheng, D.K. (1959). *Analysis of Linear Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Colombo, A.F. y Karney, B.W. (2002). Energy and costs of leaky pipes: Toward comprehensive picture. *Journal Of Water Resources Planning And Management*, 128, 441–450.
- Colombo, A.F., Lee, P., y Karney, B.W. (2009). A selective literature review of transient-based leak detection methods. *Journal of Hydro-environment Research*, 2, 212–227.
- Espinoza-Moreno, G. y Begovich, O. (2014). Effect of the temperature in negative pressure wave methods for real time leak location applied to plastic water pipelines.

- Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA*, 564–569.
- Ferrante, M. y Brunone, B. (2003a). Pipe system diagnosis and leak detection by unsteady-state tests: 1. Harmonic analysis. *Advances in Water Resources*, 26, 95–105.
- Ferrante, M. y Brunone, B. (2003b). Pipe system diagnosis and leak detection by unsteady-state tests: 2. Wavelet analysis. *Advances in Water Resources*, 26, 107–116.
- Ferrante, M., Brunone, B., y Meniconi, S. (2007). Wavelets for the analysis of transient pressure signals for leak detection. *Journal of hydraulic engineering*, 133(11), 1274–1282.
- Frank, P.M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey. *Automatica*, 26, 459–474.
- Jimenez, L. y Verde, C. (2012). Multi-fault discrimination with fault model and periodic. En *8th IFAC Symposium SAFEPROCESS*, 49–54. IFAC.
- Korbicz, J., Koscielny, J.M., Kowalczyk, Z., y Cholewa, W. (2004). *Fault Diagnosis. Models, Artificial Intelligence, Applications.*, capítulo Detecting and Locating Leaks in Transmission Pipelines, 821–864. Springer, Germany.
- Lee, P., Duan, H., Tuck, J., y Ghidaoui, M. (2014). Numerical and experimental study on the effect of signal bandwidth on pipe assessment using fluid transients. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, ISSN 0733-9429/04014074.
- LeVeque, R.J. (1997). *Finite Difference Methods for Differential Equations*. University of Washington.
- Liu, Z. y Kleiner, Y. (2013). State of the art review of inspection technologies for condition assessment of water pipes. *Journal of the International Measurement Confederation*, 46, 1–15.
- Lubary, J.A. (2008). *Cálculo para ingeniería informática*. Ediciones UPC.

- Meniconi, S., Brunone, B., Ferrante, M., y Massari, C. (2011). Transient tests for locating and sizing illegal branches in pipe systems. *Journal of Hydroinformatics*, 13, 334–345.
- Rojas, J.L. y Verde, C. (2014). Detección e identificación de fallas secuenciales. *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA*, 762–767.
- Torres, L. (2011). *Modèles et observateurs pour les systèmes d'écoulement sous pression. Extension aux systèmes chaotiques*. Ph.D. thesis, Universidad de Grenoble.
- Verde, C., Gentil, S., y Morales, R. (2013). *Monitoreo y Diagnóstico Automático de Fallas en sistemas dinámicos*. Trillas-UNAM.
- Verde, C., Molina, L., y Torres, L. (2014). Parameterized transient model of a pipeline for multiple leaks location. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 29, 177–185.
- Wolfram (2015). Series - wolfram language documentation. <http://reference.wolfram.com/language/ref/Series.html>. [Última visita: 29-Dic-2015].
- Zecchin, A.C. (2009). *Laplace-Domain Analysis of Fluid Line Networks with Applications to Time-Domain Simulation and System Identification*. Ph.D. thesis, University of Adelaide.