

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



FACULTAD DE INGENIERÍA



DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA PARA OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL APLICADA AL CHASIS DE UN VEHÍCULO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO

PRESENTA:

ABRAHAM ALE SLEMAN REYNOSO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS

MÉXICO, D.F C.U. NOVIEMBRE 2015

Agradecimientos

Es difícil expresar el profundo agradecimiento que tengo hacia todas las personas que sin su apoyo nunca hubiera sido posible llegar al punto donde me encuentro hoy. Gracias a ellos ha sido posible realizar este trabajo que es la conclusión de un ciclo en mi vida. Se cierra una puerta pero se abren cientos.

A mis padres que les debo la vida. Gracias por su permanente esfuerzo y contribución a mi educación y bienestar.

A mi hermana por su compañía y apoyo incondicional para lograr mis metas.

A nuestra alma máter la Universidad Nacional Autónoma de México por brindarme la oportunidad de ver más allá del horizonte y por sembrar en mí la inquietud de siempre aprender más. También por los apoyos brindados por la UNAM-DGAPA para realizar esta investigación a través de los proyectos PAPIIT-IN113315 “Mecánica computacional y optimización como línea de investigación en el diseño mecánico” y PAPIME-PE104315 “Fortalecimiento del proceso enseñanza-aprendizaje del comportamiento mecánico de los materiales por medio de TIC”.

A mi director de tesis Dr. Fernando Velázquez y a los sinodales por ser mentores y modelos a seguir en esta carrera que apenas comienza y por compartirme sus conocimientos.

A mis amigos y compañeros de Fórmula SAE con los que pase los dos mejores años dentro de la facultad y que además de ofrecerme su confianza y amistad, me proporcionaron información valiosa para desarrollar el presente trabajo.

Índice

Introducción

Fórmula SAE y la escudería UNAM Motorsports

Objetivos del Trabajo

Motivación

Descripción de la Tesis

Capítulo 1- Requerimientos y especificaciones de diseño del vehículo Fórmula SAE

1.1-Introducción al caso de estudio (El chasis de marco espacial)

1.2-Requerimientos de reglamento

1.2- Restricciones de materiales en el mercado mexicano

1.3-Requerimientos funcionalidad

Capítulo 2- Diseño Óptimo Estructural y Método por Elementos Finitos (FEM) para Marcos Espaciales

2.1- Diseño óptimo estructural

2.2-Optimización Estructural Evolutiva (ESO)

2.2.1-Eliminación de material basada en el nivel de esfuerzo

2.2.2-Optimización estructural evolutiva para múltiples casos de carga

2.3- Método por elementos finitos para marcos espaciales

Capítulo 3- Diseño del programa de optimización

3.1- Análisis por elemento finito de un chasis tubular

3.1.1-Mallado del chasis

3.1.2-Análisis por elemento finito

3.2- Descripción del algoritmo de optimización

Capítulo 4- Resultados

Capítulo 5- Conclusiones

Tabla de figuras

Figura 1	Proceso de diseño
Figura 2	Ejemplo de “alternative Frame”
Figura 3	Chasis del UM-426 y sub-estructuras
Figura 4	Probeta para pruebas físicas para la segunda alternativa de “Base Line”
Figura 5	Ejemplo de correcta triangulación
Figura 6	Estabilidad geométrica del triángulo
Figura 7	Deformación torsional longitudinal
Figura 8	Flexión vertical
Figura 9	Flexión lateral
Figura 10	Deformación horizontal en rombo
Figura 11	Sistema de referencia propuesto por SAE
Figura 12	Casos de carga presentados en un vehículo FSAE
Figura 13	Condiciones de frontera para la rigidez torsional
Figura 14	Condiciones de frontera para cortante estático
Figura 15	Condiciones de frontera para “Bump”
Figura 16	Condiciones de frontera para curvado
Figura 17	Condiciones de frontera para aceleración
Figura 18	Puntos óptimos locales y globales
Figura 19	Diagrama de flujo de ESO simple
Figura 20	Grados de libertad de un elemento marco espacial
Figura 21	Cargas a las que puede estar sometido un elemento marco en tres dimensiones
Figura 22	Grados de libertad referenciados al sistema global
Figura 23	Cargas referenciados al sistema global
Figura 24	Distribución de esfuerzos de un elemento tipo marco espacial
Figura 25	Diagrama de flujo del algoritmo de optimización
Figura 26	Mallado del chasis del algoritmo de optimización
Figura 27	Gráfica de oscilación
Figura 28	Vista isométrica de la deformación de la rigidez torsional
Figura 29	Vista isométrica de la deformación del cortante estático
Figura 30	Vista lateral del modo de deformación del “Bump”
Figura 31	Deformación del curvado
Figura 32	Vista lateral de la deformación originada por la aceleración
Figura 33	Vista lateral de la deformación al frenado
Figura 34	Esfuerzos por elementos para todos los casos de carga
Figura 35	Gráfica del historial de reducción de volumen y masa contra estados permanentes
Figura 36	Esfuerzos por elementos para todos los casos de carga en la última iteración
Figura 37	Disminución de masa con estado permanente restringido (Estado Permanente 230)

Introducción

En el proceso de diseño de ingeniería (Figura 1) se sigue una serie de pasos para cumplir la función para la cual se está creando. Este proceso comienza con la recopilación de información de lo que el producto debe cumplir y bajo qué condiciones va a operar. Partiendo de esta información el ingeniero tiene la tarea de convertir o interpretar las necesidades a un lenguaje técnico, convirtiéndolas en especificaciones. Estas se pueden ver como los parámetros objetivos que el producto requiere cumplir. Posteriormente se plantean opciones o conceptos para resolver el problema de la mejor forma posible. Después de seleccionar un concepto, se pasa a la etapa de diseño de detalle en donde se ocupan la mayor cantidad de recursos en el análisis del producto. Para tener un diseño óptimo, muchas formas de análisis se tienen de considerar incluyendo: análisis financiero, de mercado, ambiental, de manufactura, de ensamble y estructural, entre otros. Esta etapa concluye con la generación de los planos de fabricación y de ensamble. Finalmente se concluye el proceso de diseño con una etapa de pruebas y refinamiento con la que se evalúa el desempeño el producto.

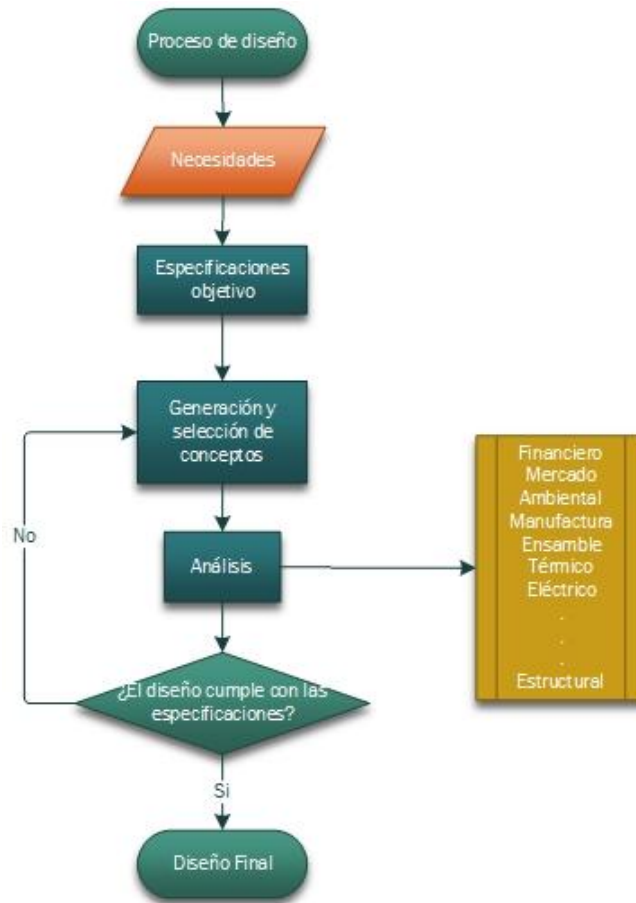


Fig.1-Proceso de diseño

Para que el proceso de diseño se lleve de la mejor manera posible, el ingeniero diseñador tiene la responsabilidad de tomar una gran cantidad de decisiones enfocadas en elegir la mejor de las soluciones. Esto depende fundamentalmente de la experiencia del diseñador el cual no tiene la capacidad suficiente para asegurar que la última propuesta de solución sea la óptima. Es por lo anterior que surgen herramientas que permiten tener soluciones a problemas de diseño lo más cercano posible al óptimo [1].

La presente tesis se centra en el desarrollo de una herramienta para la optimización estructural de un marco espacial, específicamente el chasis espacial tubular del proyecto “Fórmula SAE UNAM” de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. Sin embargo esta herramienta de optimización es compatible con cualquier estructura que se caracterice como marco espacial como se describe en el trabajo de tesis presentado.

Esta herramienta plantea dar solución a la selección los perfiles que integrarán la estructura por medio de optimización estructural evolutiva (ESO) con múltiples casos de carga, considerando todas las restricciones en las que la estructura debe de trabajar, desde disponibilidad de materiales a las condiciones de carga críticas en su utilización.

Fórmula SAE y la escudería UNAM Motorsports

Fórmula SAE es una competencia estudiantil organizada por la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE por sus siglas en inglés), que tiene como objetivo poner al límite los conocimientos de estudiantes de diferentes disciplinas de ingeniería. Cada universidad que participa en la competencia tiene la tarea de simular ser una firma de diseño a la cual se le ha encomendado la tarea de diseñar, construir, probar y demostrar un alto rendimiento de un automóvil de combustión interna o eléctrico tipo fórmula para el mercado de carreras no profesionales.

El diseño del vehículo requiere apearse a los lineamientos descritos en el reglamento que provee el comité organizador. En el caso del presente trabajo los lineamientos a cumplir se basarán en el reglamento del año 2015 [2]. Para futuras referencias se debe de consultar el reglamento vigente.

En este reglamento también se describen las pruebas con las que el vehículo será evaluado. Estas pruebas se dividen en tres eventos estáticos y cinco dinámicos. El total de puntos en la competencia es de 1000, de los cuales se concluye que no siempre gana el automóvil más veloz, ni el más potente, sino el que tenga mejor justificación en las decisiones de diseño enfocadas a tener un auto fiable, con buen desempeño dinámico y económicamente viable, es decir un vehículo integrado.

La escudería UNAM Motorsports es el equipo de la facultad de ingeniería de la UNAM. Este equipo ha competido consecutivamente durante seis años, y para la fecha de la realización de la presente tesis, se está fabricando el séptimo prototipo. El equipo está dividido en dos ramas principales, una de administración y otra de diseño. En la parte de diseño se divide el equipo en once sistemas con el objetivo de dividir el trabajo para alcanzar las metas de la competencia. Uno de estos sistemas es el de Chasis en donde se diseña la estructura que soporta todos los componentes pensando principalmente en la seguridad.

Objetivos del trabajo

Objetivo principal

Desarrollar una herramienta computacional de diseño estructural para el equipo de la Facultad de Ingeniería UNAM Motorsports, y para cualquier miembro de la comunidad universitaria que requiera la selección de los perfiles que integran una estructura tubular.

Objetivos Particulares

1. Diseñar e implementar un algoritmo de optimización evolutiva para la selección de perfiles de un chasis espacial tubular (marco espacial).
2. Minimizar el peso del chasis del prototipo fórmula SAE de la Facultad de ingeniería, por medio de Optimización Estructural Evolutiva, considerando todos los casos de carga a los que estará sometida.
3. Seleccionar perfiles para un chasis tubular que cumpla con el reglamento de fórmula SAE, con el rendimiento requerido y que estos perfiles se puedan conseguir en el mercado Mexicano.
4. Proveer al equipo Fórmula SAE de la FI-UNAM de una herramienta de diseño para crear estructuras óptimas para futuras competencias.

Motivación

Con el afán optimizar el diseño de cualquier dispositivo mecánico en específico una estructura caracterizada como un marco espacial, que está sometida a diferentes cargas estáticas y dinámicas como es el chasis de un vehículo de carreras, es necesario utilizar herramientas más potentes que la simple intuición del ingeniero diseñador. Es por lo anterior que los algoritmos de optimización son una herramienta de suma importancia para poder resolver problemas multiobjetivo enfocados al diseño con el menor costo de recursos posible. Sin embargo las herramientas comerciales no resuelven problemas específicos de diseño ni son tan versátiles con la adecuación a los materiales que podemos encontrar en el mercado Mexicano, en cambio al desarrollar una herramienta computacional propia se puede adecuar y manipular al 100% cualquier parámetro para facilitar el diseño conceptual que plantea la optimización estructural.

Por otro lado, haciendo una ponderación de los puntos que el prototipo de la UNAM ha obtenido a lo largo de seis temporadas y tomando en cuenta los recursos limitados con los que se cuentan, en comparación de otras universidades, se puede afirmar que lo que haría a la escudería UNAM Motorsports un equipo campeón es la innovación en todos los componentes que integran el vehículo para tener un mejor desempeño en la presentación de diseño y en las pruebas dinámicas. De esto se rescata que el avance que se debe de buscar es la optimización de cada componente para maximizar sus prestaciones y disminuir al máximo el peso..

Descripción de la Tesis

En el capítulo uno se presentan los requerimientos necesarios para el diseño del chasis. Estos son los casos de carga para el análisis del rendimiento estructural de un chasis espacial tubular, así como, la descripción de los materiales permitidos por el reglamento de la competencia y los

materiales disponibles en el mercado mexicano. El capítulo dos presenta el marco teórico con el que se realizó esta tesis, esto es la explicación del método por elementos finitos para marcos espaciales, así como la descripción detallada del método de optimización por reglas evolutivas para un múltiple caso de carga. En el capítulo tres se describe la metodología del desarrollo del programa de optimización con el software Wolfram Mathematica®, iniciando con la programación del análisis por elemento finito y después la implementación del algoritmo de optimización por reglas evolutivas. En el capítulo cuatro se describen los resultados del algoritmo de optimización para posteriormente verificar los resultados del estado de esfuerzos con software comercial de elemento finito, ésto en el capítulo cinco. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo así como el planteamiento de trabajo futuro para la escudería UNAM Motorsports que desarrollará el prototipo para futuras competencias.

Capítulo 1- Requerimientos y especificaciones para el diseño del chasis del vehículo Fórmula SAE

1.1-Introducción al caso de estudio: el bastidor espacial tubular del prototipo fórmula

Para el proyecto Fórmula SAE de la UNAM y para el presente trabajo el término chasis se usa como sinónimo de bastidor y no como el conjunto de suspensión, bastidor y dirección como en algunas referencias en inglés se refieren al término “chassis” [3].

Para tener una comprensión completa acerca del caso de estudio se recomienda revisar los documentos previos acerca del sistema de chasis como es la tesis del Ing. Ismael Ignacio Ayala Vargas titulada “Diseño y construcción de un chasis tubular para el proyecto Fórmula SAE UNAM” del 2011 [5]. En este trabajo se encuentra la explicación detallada del proyecto, así como definiciones, criterios de diseño y conceptos básicos sobre el caso de estudio. Otra referencia importante es la tesis del Ing. Moisés Mendoza Vázquez titulada “Diseño y análisis de la prueba para medir la rigidez torsional del chasis FSAE UM-524” del año 2015 [3]. En este trabajo se ahonda más en los conceptos del sistema de chasis para el proyecto y se recalca la importancia de la rigidez torsional en el comportamiento dinámico del automóvil, así como la validación del diseño mediante pruebas físicas.

Existen diferentes tipos de chasis, sin embargo por su bajo costo de producción, por la disponibilidad de materiales, facilidad de manufactura y por la relativa facilidad de análisis el proyecto Fórmula SAE de la UNAM ha elegido el chasis de marco espacial. Este tipo de chasis se caracteriza por el uso de una estructura tridimensional formada por elementos estructurales tipo viga conectados mediante nodos. El comportamiento mecánico de este tipo de estructuras se abordará con mayor detalle en el siguiente capítulo.

El sistema de chasis es el sistema clave para garantizar un buen funcionamiento del vehículo, esto por el hecho de que es el encargado de brindar seguridad al piloto, sostener todos los demás sistemas del automóvil de una forma segura, así como transmitir y soportar las cargas externas e internas que se generan al operar en una pista de carreras [3].

Las cargas internas son causadas por la masa del vehículo y pasajeros. Existen también cargas internas significativamente grandes producidas por la operación del tren motriz. En cambio las cargas externas se originan por el contacto del neumático con el suelo y se transfieren a través del mecanismo de la suspensión el cual mitiga la magnitud de las cargas gracias a sus componentes elásticos y de absorción de energía. También se considera como carga externa la reacción de la resistencia aerodinámica en la carrocería.

Para aproximarse a tener un diseño óptimo, el ingeniero debe de asegurar la correcta definición de las especificaciones del problema ya que con estas se eligen los criterios de diseño para modelar y evaluar un concepto. Esta lista de especificaciones puede verse como una base de datos en la que se define el entorno en donde el diseño existe y también restringe los materiales permitidos para producir el objeto [4].

En el caso de la presente tesis, para el algoritmo de optimización desarrollado y para fines de la competencia, donde los vehículos operan en lugares controlados, los requerimientos se basarán en los siguientes puntos:

- Requerimientos de reglamento
- Restricciones de materiales en el mercado mexicano
- Requerimientos de funcionalidad (Desempeño estructural)

1.2-Requerimientos de reglamento

Para motivos de la competencia la fabricación del chasis se debe apegar a dos opciones separadas de diseño. La primera llamada “Base Line” y la segunda es llamada “Alternative Frame”. Estas opciones de diseño dictan las características de los materiales a utilizar, así como los análisis, la validación a través de pruebas físicas y cómo se deben reportar los resultados para que el comité organizador acepte la propuesta de diseño planteada por cada equipo.

La opción de chasis alternativo permite a los equipos tener mayor flexibilidad en las decisiones de diseño, ya que en esta opción no se restringen los materiales a utilizar. Sin embargo, se debe de demostrar el cumplimiento de una serie de casos de carga que simulan situaciones de accidente, es decir: volcadura, impacto frontal, impacto lateral y cargas sobre los puntos de sujeción del cinturón de seguridad. Un ejemplo de chasis alternativo se muestra en la figura 2, que es un chasis fabricado con tubos de fibra de carbono unidos mediante juntas de aluminio.



Figura 2-Ejemplo de Alternative Frame [17]

A partir del año 2015, el comité organizador amplió las opciones de diseño para la opción de “Base Line” ya que ahora es posible utilizar tubos de menor espesor de pared siempre y cuando se cumplan una serie de requerimientos y restricciones [2]. Para motivos del algoritmo de optimización se utilizará esta opción de diseño ya que permite tener un campo de búsqueda mayor y así seleccionar de forma adecuada los perfiles para la construcción del chasis cumpliendo el objetivo principal, que es la disminución de peso sin comprometer el rendimiento estructural del chasis.

Los requerimientos y las propiedades del material permitido se enlistan en la Tabla 1 y el espesor de pared de cada sub-estructura es mostrado en la Tabla 2, así como la descripción de cada sub-

estructura es mostrada en la Figura 3. Esta opción no requiere ni la verificación de ningún caso de carga ni la validación con pruebas físicas [2].

Tabla1. Material y sus propiedades [2]

Tipo de material	Tubo redondo, de acero dúctil o aleación con un mínimo de .1% de carbóno
Rigidez	Módulo de Young (E)=200 [GPa] Límite elástico (Sy)=305 [MPa] Resistencia a la rotura (Su)= 365 [MPa]
Resistencia de uniones soldadas	Límite elástico (Sy)=180 [MPa] Resistencia a la rotura (Su)= 300 [MPa]
Para esta opción cualquier tubo menor a 1[in]x 1.1938[mm] será ignorado	

Tabla 2. Mínimo espesor de pared permitido [2]

Aplicación (Figura 3)	Espesor de pared mínimo
Barras antivuelco	Diámetro exterior de 1[in] con espesor de 2.4[mm]
Soportes de las barras antivuelco, estructura lateral de impactos (Estructura primaria).	Diámetro exterior de 1[in] con espesor de 1.65[mm]
Diámetros y espesor de pared de la estructura secundaria	Diámetro exterior de 1[in] con espesor de 1.20[mm]

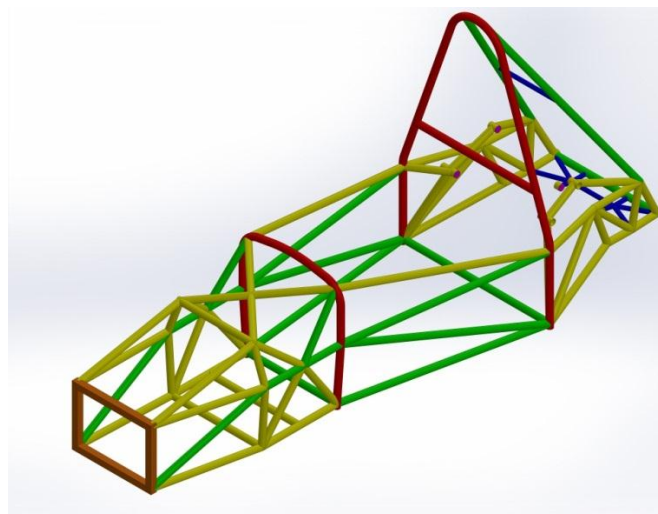


Figura 3-Chasis del UM-426 (En rojo las barras anti-vuelco, en verde la estructura primaria, en amarillo la estructura secundaria)

1.2.1 Tubos y materiales alternativos

Para las siguientes dos opciones dentro de la categoría de “Base line” se requiere mostrar una equivalencia de los requerimientos mínimos de la Tabla 2. Estos requerimientos son el esfuerzo de fluencia, el esfuerzo último y la resistencia al pandeo. La resistencia al pandeo es medida con el módulo de pandeo que está definido como $E*I$; Donde E es el módulo elástico e I es el momento de inercia o segundo momento de área de la sección del perfil de cada elemento [2].

La siguiente opción en la selección tubos con menor espesor de pared se muestra en la Tabla 3 y no se requieren de pruebas físicas para su implementación, solamente se requiere reportar la equivalencia con los requerimientos de la Tabla 2.

Tabla 3. Espesor de pared mínimo sin validación

Material y Aplicación	Espesor de pared mínimo
Barras anti-vuelco	2.0[mm] (.079[in])
Estructura primaria	1.2[mm] (.047[in])

Por último, en la Tabla 4 se muestra la opción donde se encuentran los menores espesores de pared posibles. Para esta opción se requieren hacer pruebas físicas del comportamiento del ensamble (Figura 4), como se describe más adelante, para así demostrar una equivalencia con la opción original. Cabe mencionar que las pruebas físicas también servirían como parámetros de la resistencia de las uniones soldadas y con esto se pueden hacer análisis más completos en el diseño de detalle.

Tabla 4. Espesor de pared mínimo permitido para equipos que satisfagan las pruebas físicas

Material y Aplicación	Espesor de pared mínimo
Barras anti-vuelco	1.6[mm] (.065[in])
Estructura primaria	.9[mm] (.035[in])

Ningún tubo debe de tener espesor de pared menor a la tabla anterior para ser considerado como elemento estructural.

1.2.2 Pruebas físicas

Como se mencionó con anterioridad, si un equipo elige utilizar la geometría de tubo alternativa requiere demostrar una equivalencia mediante pruebas físicas. Estas pruebas tienen el objetivo de medir la resistencia de las uniones y demostrar la calidad de la soldadura ya que en las uniones es donde se encuentran los concentradores de esfuerzo y por lo tanto son los puntos donde falla la estructura.

Las probetas se construyen en un patrón en “H”, con dos tubos paralelos de 203[mm] separados por 38[mm], medidos desde el centro del tubo. El tubo de unión debe de ser el de espesor de pared menor, siendo perpendicular a los tubos paralelos y encontrándose a 50[mm] de la parte más baja y 50[mm] de la parte más alta de estos. La probeta se muestra en la Figura 4.

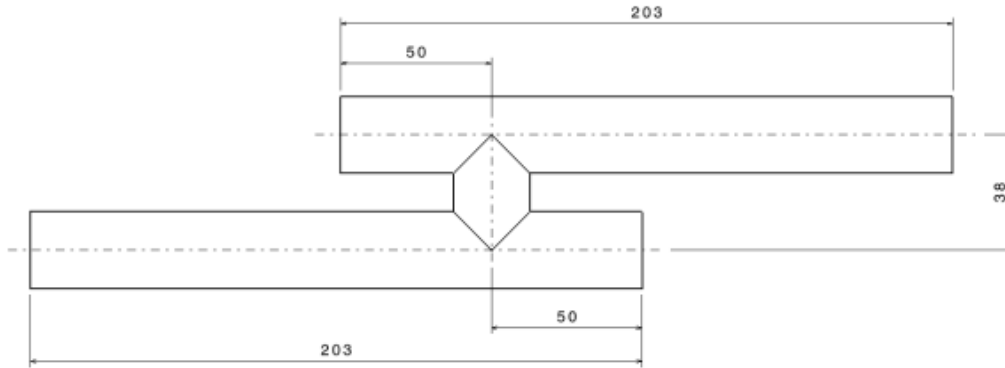


Figura 4-Probeta para pruebas físicas para la segunda alternativa de "Base Line" donde el tubo de unión que se encuentra en posición transversal es el de menor espesor

Los requerimientos de las pruebas físicas son los siguientes [2]:

- Se deben de fabricar con el mismo acero con el que se fabricara el chasis
- Para cualquier configuración alternativa que se utilice en el vehículo requiere hacer una prueba para la versión alternativa y otra para la original. Se deben de comparar los resultados de ambas pruebas para mostrar equivalencia.
- Dos ejemplos de cada tipo unión se requieren fabricar y probar. Dos para la versión original y dos para la versión alternativa.
- El tubo más delgado es el tubo horizontal.
- Los equipos deben de modificar las terminales de cada probeta para montarlas en la máquina de pruebas. Las modificaciones tienen que ser las mismas en todas las pruebas.
- De los ensayos a tracción se requieren las gráficas de fuerza vs desplazamiento para cada prueba y se requieren reportar adecuadamente según las especificaciones del reglamento.
- Se satisfacen los requerimientos estructurales si la carga mínima de la prueba es por lo menos 95% de la prueba original.

1.3-Restricciones de materiales en el mercado mexicano

Como es sabido en el mercado mexicano hay muchos proveedores de acero en todas sus presentaciones. En el caso de perfiles tubulares se manejan dos estandarizaciones: tubo por cédula o tubo por calibre. Estos tubos son fabricados con una variedad muy grande de materiales, desde acero dulce o de bajo contenido de carbón hasta aceros aleados o materiales no ferrosos. Como se mencionó con anterioridad, los materiales permitidos para la aplicación son el acero de bajo contenido de carbono como es el A36. Sin embargo es recomendable utilizar un acero de mejores propiedades mecánicas como es la aleación de Cromo-Molibdeno (Cromoli) 4130, que sin duda es más costosa y de poca disponibilidad.

El tubo por cédula es la relación que existe entre el espesor y el diámetro del tubo, y es una medida de la resistencia del tubo. El tubo por calibre está referenciado al espesor de pared, entre más alto sea el calibre menor espesor de pared tendrá. Generalmente el tubo en cédula es fabricado por medio de extrusión por lo que no presenta una costilla de soldadura, lo que implica mayor resistencia, como el tubo por calibre que puede o no tener costilla.

Al hacer una investigación de algunos proveedores mexicanos se llegó a la siguiente librería de perfiles que entran dentro de las restricciones del reglamento vistas en el apartado anterior

Tabla 5. Perfiles compatibles con las restricciones del reglamento

Sub-estructura	Alternativa de diseño	Especificación	Espesor de pared [mm]
Barras anti-vuelco	Base Line	Calibre 13 de 1"	2.41
		Calibre 12 de 1"	2.77
		Cédula 40 de ¾"	2.87
	Alternativa 1	Cédula 10 de ¾"	2.11
		Calibre 14 de 1 ¼"	2.11
Alternativa 2	Calibre 16 de 1 ¼"	1.65	
Estructura primaria	Base Line	Calibre 16 de 1"	1.65
		Calibre 15 de 1"	1.83
	Alternativa 1	Calibre 18 de 1 ¼"	1.24
		Calibre 18 de 1 ½"	1.24
	Alternativa 2	Calibre 20 de 1 ¼"	.899
		Calibre 20 de 1 ½"	.899
Estructura secundaria	Base Line	Calibre 18 de 1"	1.24
	Alternativa 1	Calibre 14 de 7/8"	2.11

1.4- Requerimientos de funcionalidad (Desempeño estructural)

Como su nombre lo dice, una estructura espacial tubular, como es el chasis del prototipo fórmula, está formada por el ensamble de diferentes perfiles acomodados en el espacio. Este ensamble puede ser una única estructura soldada o una combinación de elementos soldados, elementos unidos por pernos y estructuras hechas de materiales compuestos [1].

En el caso donde se tienen elementos unidos de forma permanente, éstos os soportan cargas laterales y momentos flectores relativamente pequeños. Es por lo anterior que se busca que el chasis tenga una correcta triangulación en sus nodos como se muestra en la Figura 5 [2]. Esto con el objetivo de aplicar las cargas directamente en el nodo y así hacer que los elementos soporten fuerzas axiales en su mayoría [3]. La correcta triangulación también es un requerimiento de reglamento.

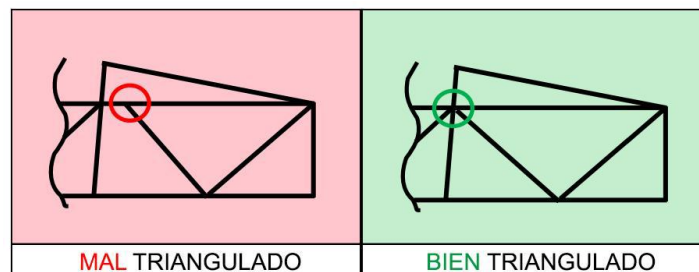


Figura 5-Ejemplo de la correcta triangulación [2]

Esto por el hecho de que el triángulo es el único polígono que no tiende a deformarse cuando se le aplica una fuerza. Cualquier otra forma geométrica no será estable hasta que no se triángule.

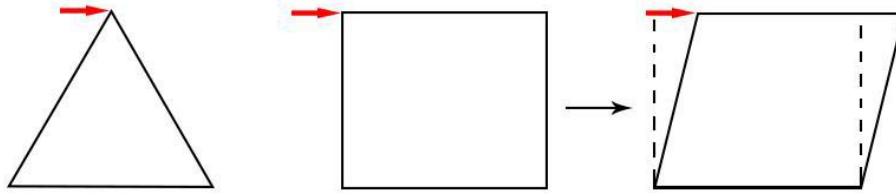


Figura 6-Estabilidad geométrica del triángulo [5]

Como se mencionó con anterioridad, el chasis tiene la función brindar un soporte para todos los componentes del vehículo, transmitir y soportar las cargas externas e internas y la más importante brindar un habitáculo seguro para el conductor. Para su diseño se deben de comprender cómo va a tender a deformarse el chasis ante los casos de carga que se pueden presentar en una pista de carreras. Los principales modos de deformación que se presentan son los siguientes [6].

1.4.1 Torsión Longitudinal

Este tipo de deformación es el resultado de la aplicación de una fuerza en uno o dos neumáticos opuestos. El chasis puede ser pensado como un resorte torsional que en sus extremos actúan las cargas de la suspensión. De la rigidez de este resorte torsional dependerá el control de la transferencia de peso y por consiguiente la maniobrabilidad del automóvil [6].

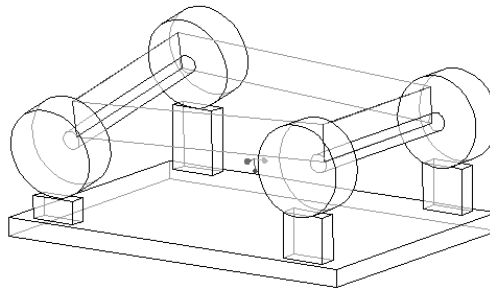


Figura 7-Deformación torsional Longitudinal [6]

1.4.2 Flexión vertical

En este caso el chasis actúa como una viga simplemente apoyada y las cuatro ruedas son los apoyos. El peso del motor, el conductor y los demás componentes tienden a flexionar el chasis. La magnitud de la deformación depende de las aceleraciones verticales que experimente el vehículo durante su funcionamiento y traslado [7].

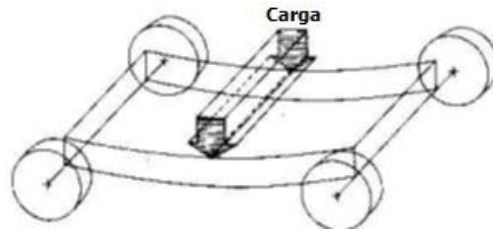


Figura 8-Flexión vertical [7]

1.4.3 Flexión lateral

La flexión lateral ocurre por las fuerzas laterales causadas por el curvado. Estas fuerzas actúan a lo largo del vehículo y tienden a flexionarlo como se muestra en la Figura 9. Al igual que la flexión vertical la magnitud de las fuerzas depende de las aceleraciones laterales que experimenta el vehículo [7].

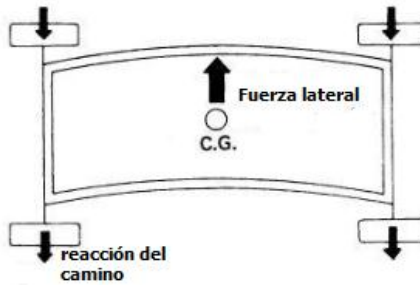


Figura 9-Flexión lateral [7]

1.4.4 Deformación horizontal en rombo

Esta deformación ocurre cuando una fuerza actúa hacia atrás y otra actúa hacia adelante en esquinas opuestas del vehículo. Estas fuerzas tienden a deformar el chasis en forma de rombo. La mayoría de las referencias nos dicen que si el chasis es suficientemente rígido a torsión y a flexión vertical también será suficientemente rígido ante esta deformación [7].



Figura 10-Deformación horizontal en rombo [7]

1.4.5 Estimación de la carga

Para tener un diseño óptimo se estima la magnitud de las fuerzas que experimenta el chasis en todas sus condiciones de funcionamiento. Para esto se realizó un análisis de las aceleraciones medidas por el sistema de telemetría y adquisición de datos a bordo en los prototipos de los años 2014 y 2015 de la escudería UNAM Motorsports. A partir de este análisis se obtuvo que las aceleraciones máximas que experimenta el vehículo son de: 3.5G en dirección vertical, 1.5G de aceleración lateral y 1.5G en desaceleración al frenado.

Ahora para estimar la carga en cada caso se tomará la masa del prototipo del 2015 que es de 217 kilogramos repartidos como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 6- Masas que integran el prototipo fórmula

Componente	Masa [kg]
Conductor	80
Motor	52
Chasis	35
Diferencial	10
Llantas, suspensión y dirección	20
Otros (tanque, radiador, líneas de frenos, etc)	20
Total	217

Para aplicar las fuerzas de cada caso de carga se aplicará la segunda ley de Newton con el objetivo de transformar las cargas dinámicas, causadas por la aceleración, en cargas estáticas. Éstas serán aplicadas en los nodos de la estructura de diferente forma según el caso.

1.4.6 Casos de carga y condiciones de frontera para el Análisis por elementos finitos

Para fines de la aplicación de condiciones de frontera que se describen a continuación se tiene el siguiente sistema de referencia que es el propuesto por el reglamento de la competencia.

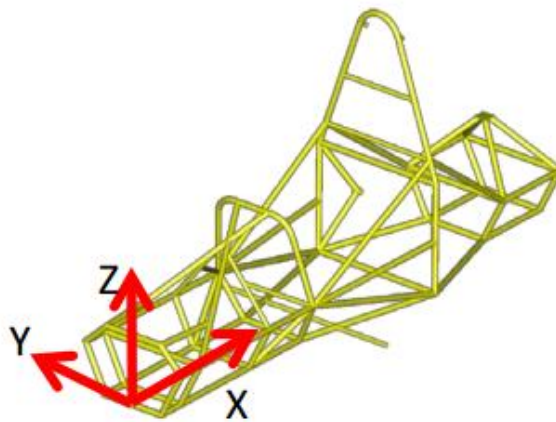


Figura 11-Sistema de referencia propuesto por FSAE [2]

De los modos de deformación se derivan los casos de carga que se aplicarán en el elemento finito. Según la referencia [7] los modos de deformación se producen por los siguientes casos de carga que se muestran en la siguiente figura (Figura 13).

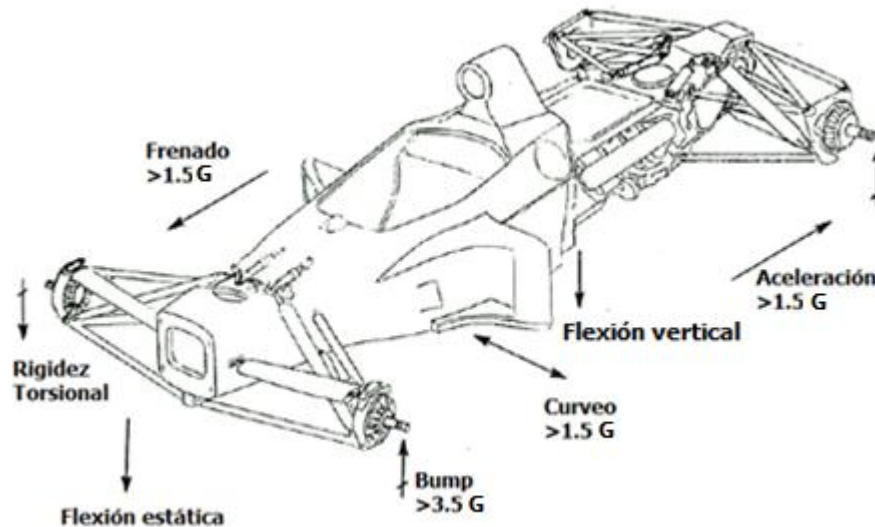


Figura 12-Casos de carga presentados en un vehículo FSAE [7]

Para la torsión longitudinal:

Rigidez torsional

La prueba para medir la rigidez torsional de un chasis consiste en simular lo que sucede cuando un vehículo sube una banqueta con una sola rueda [9]. Entonces las condiciones de frontera para hacer el análisis por elemento finito es el siguiente:

- Fuerza aplicada: 1400[N] divididos en dos nodos de la parte inferior de la suspensión delantera.
- Restricción de desplazamientos, permitiendo rotaciones, de los nodos de la suspensión trasera y delantera izquierda.

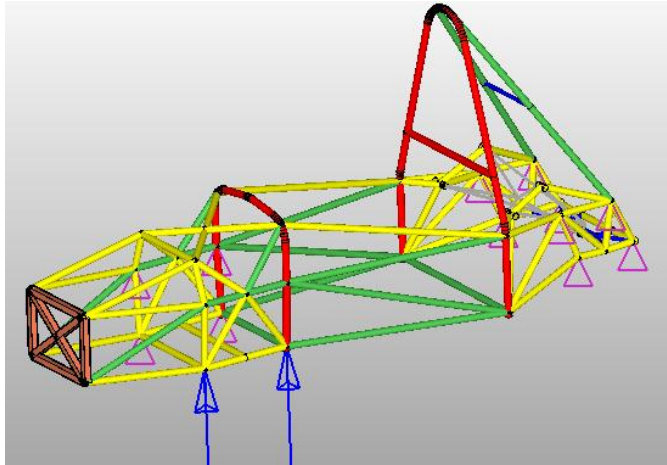


Figura 13- Condiciones de frontera para la rigidez torsional (En azul son las fuerzas y en violeta las restricciones)

Para la flexión vertical:

Cortante estático

En este caso el chasis se comporta como una viga en cantiléver. El objetivo es que soporte su propio peso en flexión, y así sea suficientemente rígido para el caso de impacto y que no se presenten deformaciones que puedan herir las piernas del conductor. También es importante para controlar la transferencia de carga longitudinal en situaciones de aceleración y frenado. Las condiciones de frontera son las siguientes:

- Fuerza aplicada:
 - 1540[N] que corresponden al peso del vehículo aplicado en los dos nodos inferiores del frente del vehículo denominado “front Bulckhad”.
 - 588.6[N] que corresponden al peso del motor aplicados en su centro de gravedad.
- Restricción de desplazamientos, permitiendo rotaciones de los nodos de la suspensión trasera.

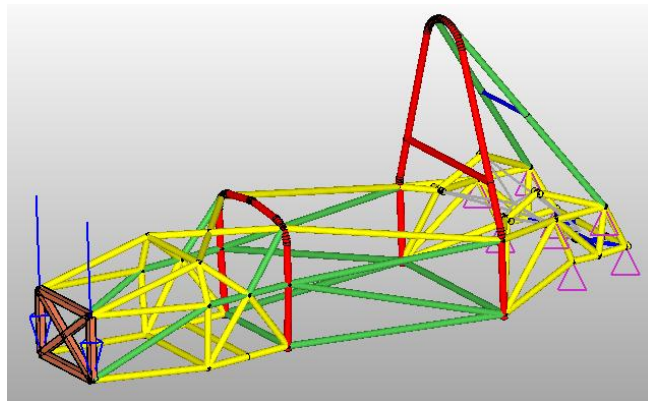


Figura 14-condiciones de frontera para cortante estático (En azul son las fuerzas y en violeta las restricciones)

Para el Rebote o “Bump”

En este caso el chasis es asumido como una viga simplemente apoyada. Este caso de carga se presenta cuando el vehículo es transportado o de deja caer de una altura poco significativa. Las condiciones de frontera son las siguientes:

- Fuerza aplicada:
 - 5390[N] que corresponden a la masa del vehículo acelerada 3.5G en dirección vertical, repartido entre el número de nodos donde no se tengan restricciones, en total 30.
 - 1785 [N] de la aceleración del motor aplicado en su centro de gravedad.
- Restricción de desplazamientos, permitiendo rotaciones de todos los nodos de la suspensión.

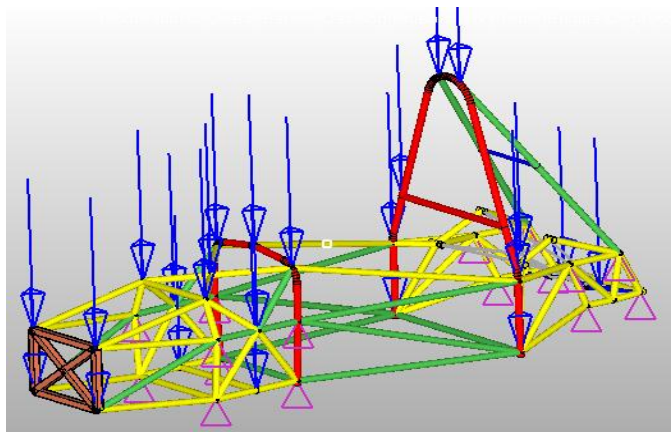


Figura 15-Condiciones de frontera para “Bump” (En azul son las fuerzas y en violeta las restricciones)

Para la Flexión Horizontal:

Curveo

Como se mencionó con anterioridad, la flexión vertical se presenta en caso de curveo. Aquí el chasis se puede ver como una viga simplemente apoyada, pero a diferencia del caso de rebote las cargas se presentan en dirección horizontal. En este caso de carga se aplican las condiciones para la flexión horizontal a la derecha y a la izquierda. Las condiciones de frontera son las siguientes:

- Fuerza aplicada:
 - 2307 [N] que corresponden a la masa del vehículo acelerada en dirección horizontal dividido entre el número de nodos donde no se tengan restricciones, en total 30
 - 765 [N] de la aceleración del motor aplicada en el centro de gravedad del mismo.
- Restricción de desplazamientos, permitiendo rotaciones de todos los nodos de la suspensión.

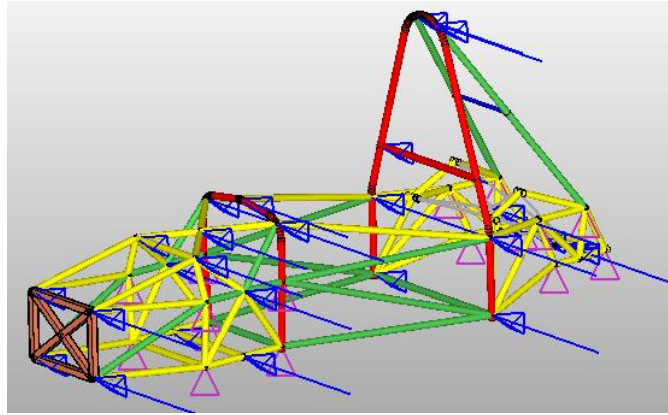


Figura 16-condiciones de frontera para el caso de curvuo (En azul son las fuerzas y en violeta las restricciones)

Otras consideraciones:

Frenado y Aceleración

Por el hecho de que la utilización del vehículo está pensada para tener un alto rendimiento en aceleración y frenado es necesario incluir en el análisis estos casos de carga con el objetivo de que la estructura sea lo suficientemente rígida. Las condiciones de frontera para ambos casos son iguales pero de signo contrario y son las siguientes:

- Fuerza aplicada:
 - 2307 [N] que corresponden a la masa del vehículo acelerada en dirección longitudinal dividido entre el número de nodos que no tengan restricciones
 - 765 [N] de la aceleración del motor aplicada en el centro de gravedad del mismo.
- Restricción de desplazamientos, permitiendo rotaciones de todos los nodos de la suspensión.

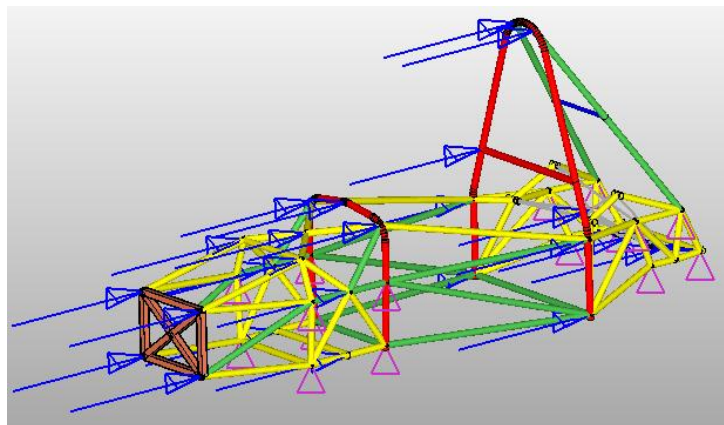


Figura 17-Condicionde s de frontera para la aceleración (En azul son las fuerzas y en violeta las restricciones)

Capítulo 2. Diseño óptimo estructural y método por elementos finitos para marcos espaciales

2.1- Diseño óptimo estructural

El concepto de optimización tiene innumerables áreas de aplicación, sin importar cuál sea ésta, todas coinciden en una misma idea que es mejorar mediante algún procedimiento la solución encontrada para algún problema específico bien definido [9].

En el caso de ingeniería las primeras aplicaciones fueron enfocadas a la optimización estructural, cuyo objetivo es maximizar el rendimiento o "performance" de una estructura o de un componente estructural en términos de eficiencia de material al transferir la carga aplicada [10].

El desempeño o "performance" de una estructura óptima dependerá y estará limitado por las consideraciones de uso y el método de optimización empleado. Es por esto que se hace notar la importancia de una formulación correcta del problema de diseño. Un problema incompleto o mal formulado arrojará un diseño alejado del óptimo o mínimo global, es decir, un óptimo o mínimo local (Figura 18) [11].

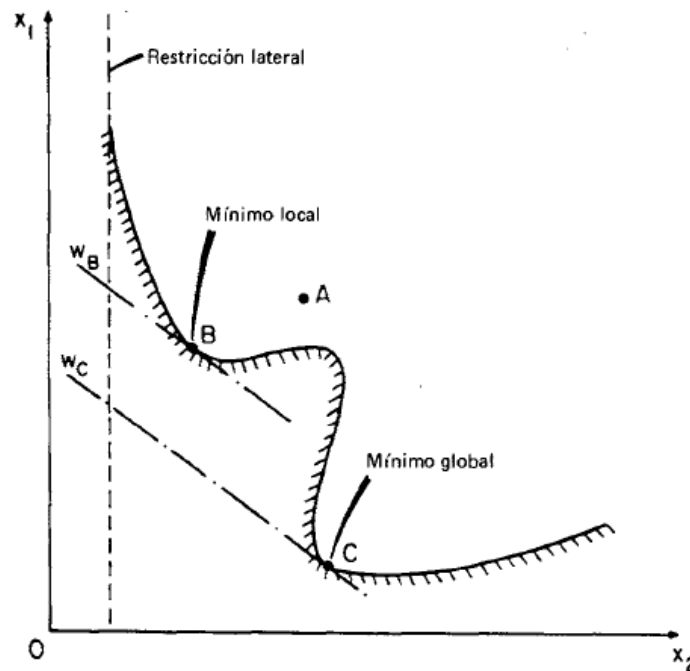


Figura 18-Puntos óptimos locales y globales [11]

La formulación de un problema de diseño óptimo se resume en el siguiente proceso [9]:

1. Hacer una descripción detallada del problema que permita identificar los factores externos e internos por los que se verá afectado el diseño. Esto es reunir

información del área de estudio donde se encuentra el proyecto, como pueden ser: propiedades de los materiales, requerimientos de desempeño, limitaciones y costos.

2. Definir las variables de diseño. Se denominan así a todas las magnitudes que pueden variar para alcanzar el óptimo. Estas variables pueden ser el tamaño de los elementos, parámetros de propiedades físicas o mecánicas u otros aspectos cuantificables del diseño. El espacio de diseño se define como el conjunto completo de variables de diseño.

El tamaño de cada elemento es la variable de diseño más simple y puede representar el área de una sección de una barra, el momento de inercia de un elemento a flexión, el grosor de una placa, etc [11].

3. Identificar la función objetivo. Es aquella función que se busque minimizar (o maximizar). Representa la propiedad más importante de un diseño como es el costo o el peso. Sin embargo, esta función puede considerar más de una variable o pueden existir más de una función objetivo.
4. Identificar las restricciones. Son limitaciones que el diseño debe de satisfacer para considerarse válido. Las restricciones en la optimización estructural son generalmente, desplazamientos, deformaciones o esfuerzos, sin embargo, puede ser cualquier variable que limite el problema.
5. Elegir un método de optimización. Cada método de optimización es diferente dependiendo del tipo de optimización que se dese. Éste dependerá de la o las variables de diseño, de la o las funciones objetivo y de las restricciones del problema.

Para dar solución a problemas multi-variable y multi-objetivo se requiere de una combinación de métodos. Estos métodos pueden clasificarse en dos categorías:

- (i) Métodos analíticos o basados en Gradientes.- Son los que utilizan conceptos matemáticos del cálculo y métodos variaciones para encontrar el máximo o el mínimo de una función objetivo. Generalmente sólo se pueden aplicar para una condición de carga.
- (ii) Métodos numéricos o Heurísticos.- Estos generan óptimos automáticamente a partir de un procedimiento iterativo. Estos métodos se basan en la programación matemática y el criterio de optimalidad para encontrar un diseño óptimo.

En la actualidad se reconocen tres tipos de optimización estructural:

- Tamaño o paramétrica
- Forma
- Topológica

Para el caso de estudio se utiliza una optimización de forma o paramétrica que es donde se cambian las propiedades de los elementos que constituyen el medio de análisis como el área.

2.2-Optimización Estructural Evolutiva (ESO)

La optimización evolutiva estructural, ESO por sus siglas en inglés del acrónimo “Evolutionary Structural Optimization”, fue introducida por los autores Xie y Steven en 1992 con el objetivo de resolver una gran cantidad de problemas de diseño estructural de una forma fácil y efectiva. Este método se basa en el simple concepto de remover o agregar de una forma paulatina, ineficiente material a una estructura.

Este método de optimización es uno de los más robustos ya que conjunta algunos de los métodos analíticos y numéricos previos a su aparición. Algunos de los métodos que abarca son: el método de programación matemática, los métodos de homogenización y el criterio de optimalidad, entre otros. También es pertinente señalar que gracias a su fácil e intuitiva programación es fácil de empatar con el Método por Elementos Finitos (FEM) para tener un criterio de optimización fiable en cada iteración.

2.2.1-Eliminación de material basado en el nivel de esfuerzo

Cuando una estructura está próxima a la falla es porque se encuentra en un nivel alto de esfuerzo y de manera contraria un signo de ineficiente utilización de material es cuando se encuentra un nivel bajo de esfuerzo. Idealmente los esfuerzos dentro de una estructura deben de estar cerca de un mismo nivel y este debe de ser cercano a un esfuerzo límite que generalmente está dado por un factor de seguridad. Para ESO el concepto que determina que tan alejado se encuentra el nivel de esfuerzo de cada elemento con respecto del esfuerzo límite, se denomina criterio de rechazo (RR). Para que un elemento de la estructura se considere dentro del criterio de optimización la relación del valor límite y el valor medido debe ser menor a este criterio de rechazo.

Para el caso de la eliminación de material basada en el nivel de esfuerzo se debe comparar cuál es el nivel de esfuerzo en cada elemento de la estructura inicial, para así determinar qué elemento requiere eliminación o adición de material. Para determinar el esfuerzo de cada elemento se utiliza la metodología descrita por el Análisis por Elemento Finito (FEA) que se explicará más adelante. Para materiales isotrópicos es usual utilizar el criterio de fluencia de Von Mises que para el caso de esfuerzo plano está definido por:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Donde σ_x y σ_y son los esfuerzos normales en dirección “x” y “y” respectivamente y τ_{xy} es el esfuerzo cortante.

Ahora es necesario un valor de esfuerzo límite para comparar el esfuerzo de cada elemento y así hacer la eliminación o adición de material. Este valor límite puede ser el promedio del nivel esfuerzo de toda la estructura para lograr una homogenización del comportamiento mecánico. Generalmente este esfuerzo límite lo establece un factor de seguridad del esfuerzo de fluencia del material para garantizar que la estructura trabaje en el rango elástico.

$$\sigma_{lim} = \frac{\sigma_y}{FS}$$

Donde σ_y es el esfuerzo de fluencia del material y FS es el factor de seguridad que depende de las condiciones de utilización y carga. Para una correcta elección del factor de seguridad se recomienda revisar la referencia [12]:

En este proceso de optimización requiere la definición de dos esfuerzos de referencia. El primero es un porcentaje por debajo del esfuerzo límite y el segundo un porcentaje por encima de este. Los porcentajes en términos del algoritmo son conocidos como: Tasa Evolutiva de Adición (**TEA**) y Tasa Evolutiva de Rechazo (**TER**).

$$\sigma_{ref1} = TEA * \sigma_{lim} \quad \text{y} \quad \sigma_{ref2} = TER * \sigma_{lim}$$

Los esfuerzos de referencia son los valores de frontera del algoritmo de optimización. Estos valores definen el rango en el que los esfuerzos de cada elemento se tienen que encontrar. Cuando el esfuerzo de un elemento este por encima o por debajo de los valores de referencia se agrega o se elimina material según sea el caso. Para la *i*-ésima iteración se compara el esfuerzo de cada elemento con los esfuerzos de referencia para determinar si se agrega o se elimina material. Las reglas para la adición o rechazo de material son las siguientes:

Si $\sigma_e < \sigma_{ref1}$ implica rechazo de material

Si $\sigma_e > \sigma_{ref2}$ implica adición de material

Cuando ninguna de las dos reglas se cumple se dice que se ha alcanzado un Estado Permanente (**SS**), el cual indica que se llegó a un óptimo local. En este punto se deben de robustecer las reglas, es decir, variar las tasas evolutivas para que converjan hacia el valor límite. Esto es por medio de los Factores Evolutivos de Rechazo (**FER**) y de Adición (**FEA**) que define el usuario y muestra que tan rápido o lento se hacen los cambios en las tasas evolutivas. El aumento o el rechazo de material lo dictan las restricciones del problema y las variables de optimización pero es recomendable hacer variaciones pequeñas.

$$TER = TER(1 + FER)$$

$$TEA = TEA(1 - FEA)$$

Una vez que se modificaron las tasas es necesario recalcular los esfuerzos de referencia y se determina qué elementos cumplen las nuevas reglas hasta otro estado permanente. La solución óptima es cuando se alcanza el estado permanente donde no se pueden cambiar las referencias.

El proceso de Optimización Estructural Evolutiva se ejemplifica en el siguiente diagrama de flujo (Figura 19). Donde se tiene el área como variable de diseño; un área mínima y máxima como restricción y el nivel de esfuerzo es el criterio de optimización. También se introducen los criterios de paro por número de estados permanentes permisibles.

Posteriormente se describirá este método aplicado al caso de estudio y se profundizará en los conceptos y principios de funcionamiento necesario para llegar al óptimo de una estructura caracterizada como marco espacial con múltiples casos de carga.

Donde **TEA** y **TER** son las tasas evolutivas de adición y de rechazo; **FEA** y **FER** son los factores evolutivos de adición y de rechazo; σ_{Ref1} y σ_{Ref2} son los esfuerzos de referencia; **ContSS** es el contador de estados permanentes y **NSSLim** es el límite de estados permanentes; $\sigma|e|$ es el esfuerzo del elemento y **A|e|** es el área del elemento. También en el diagrama de flujo se agrega el concepto de tasa de rechazo (**TR**) y tasa de Adición (**TA**), que se utilizan para dar los incrementos o decrementos de área en cada iteración. Su utilización depende de las variables de diseño ya que en ciertos problemas estas variables pueden ser valores discretos.

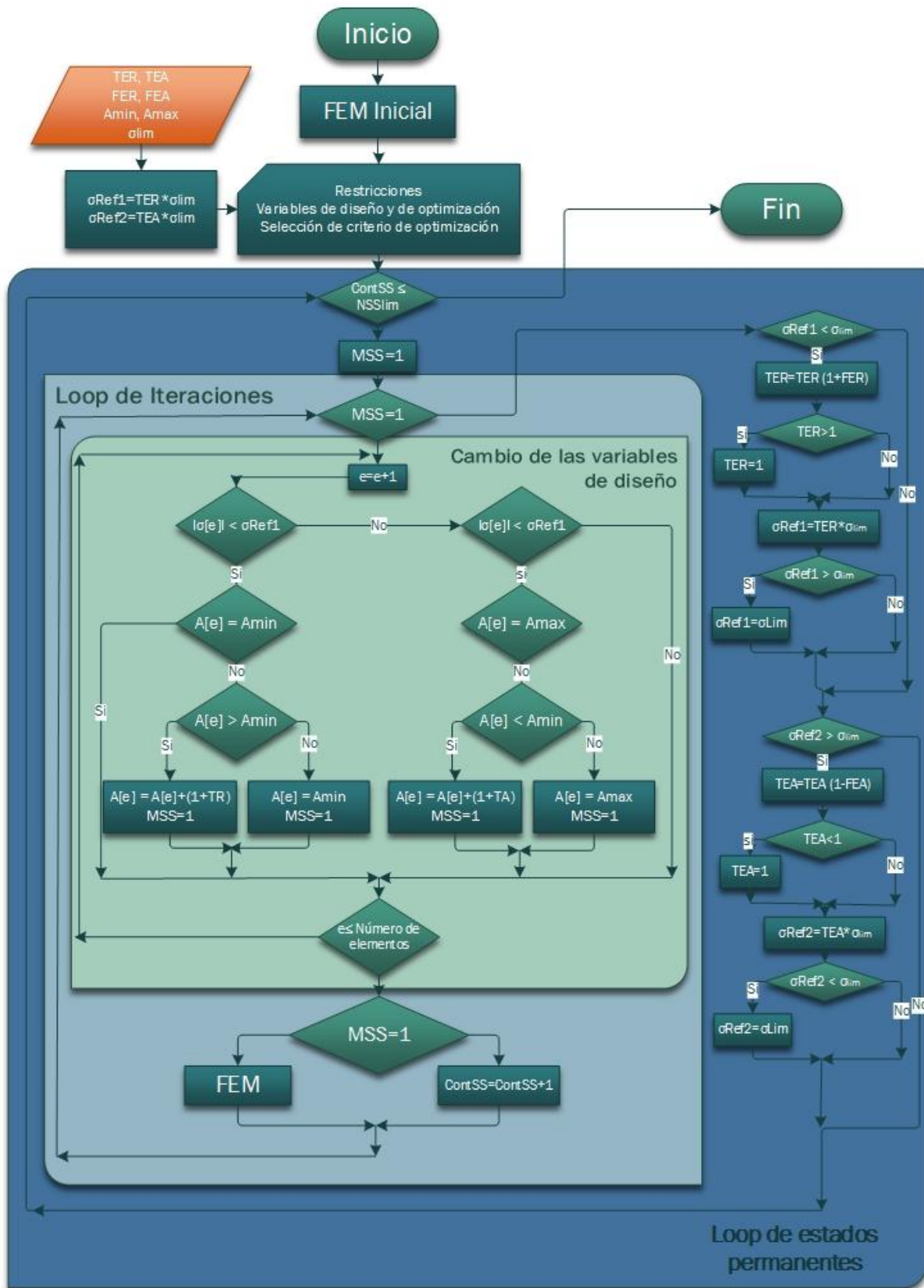


Figura 19-Diagrama de flujo de ESO simple utilizando el área como variable de diseño

2.2.2-Optimización Estructural Evolutiva para múltiples casos de carga

Para aplicaciones prácticas la mayoría de las estructuras están sujetas durante su utilización a diferentes casos de carga o son soportadas de diferente forma. Por ejemplo, una bicicleta está sometida a un número fijo de cargas cuando el ciclista está frenando, pero la magnitud y dirección de estas fuerzas serán totalmente diferentes cuando se esté acelerando o se descienda en una pendiente. Es por lo anterior que se requiere que el diseño del cuadro de la bicicleta considere todas las condiciones de su utilización ya que de lo contrario la formulación del problema de diseño sería errónea y por consiguiente alejada de un óptimo [4].

Para el proceso de optimización evolutiva no significa un gasto excesivo de recursos ya que todos los casos de carga se analizan por medio de FEM el cual en la mayoría de los casos considera una malla fija lo que implica una única matriz de rigidez. Sin embargo es necesario hacer algunas consideraciones para adecuar la condición de múltiples casos de carga con ESO.

Después de hacer el análisis por elemento finito, una distribución de esfuerzos se obtiene para cada caso de carga. El método dice que se debe de comparar el esfuerzo de cada elemento de cada caso de carga con los esfuerzos de referencia. Entonces la eliminación de material se puede hacer sólo si se satisface la regla de eliminación para todos los casos de carga, esto en el lenguaje de programación es visto como un **AND** lógico. Y se adiciona material si en algún caso de carga se satisface la regla, esto en lenguaje de programación se expresa como un **OR** lógico. Es decir que para la aplicación de la optimización evolutiva para múltiples casos de carga es más fácil adicionar material que eliminarlo [13].

Un posible problema que se puede presentar en la implementación de un múltiple caso de carga en el método ESO, es que para una iteración se disminuya material en algún elemento porque se satisface la condición de eliminación; sin embargo, en la siguiente iteración se satisface la condición de adición de material, en el mismo elemento que se cambió la iteración anterior, y así sucesivamente. Es decir que se aumenta y se disminuye material en un elemento en cada iteración. A esto se le llama estado de oscilación el cual no permite alcanzar el nuevo estado permanente.

La oscilación en el método ESO es el resultado de que para un problema de múltiples casos de carga no siempre se alcanzan óptimos globales para todos los casos, pero sí se alcanza la mejor aproximación para todos los casos.

2.3-Análisis por Elementos Finitos (FEA)

El análisis por elementos finitos es un método numérico para obtener la solución aproximada a ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales provenientes de cualquier fenómeno físico. Este método es especialmente poderoso cuando los problemas son restringidos por condiciones de frontera definidas sobre geometrías complejas.

La secuencia de este método implica los siguientes aspectos [14][15]:

1. Discretización del medio continuo, que consiste en dividir el dominio solución en un número finito de elementos. Los elementos finitos están conectados entre sí mediante un número finito de puntos denominados nodos. La solución aproximada de un elemento se da en los nodos y para conocer lo que pasa dentro del elemento finito se requiere de interpolación. Esta interpolación depende del orden de las ecuaciones elementales que definen el comportamiento de los elementos con los que se caracteriza el dominio.
2. Mediante el uso de métodos varacionales, usualmente el método de Galerking, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema se transforman a ecuaciones lineales que gobiernan de forma aislada a todos los elementos finitos, dando lugar a la formación de la matriz de rigidez elemental.
3. Las matrices de los elementos se ensamblan para obtener una matriz de rigidez global. Esta matriz de rigidez se denomina como " K_G ".
4. Con el uso de las condiciones de frontera esenciales (CFE) o condiciones de frontera de Dirichlet, que representan los desplazamientos conocidos. Se reduce la matriz de rigidez para que el sistema de ecuaciones sea compatible determinado.
5. Con las condiciones de frontera naturales (CFN) o condiciones de frontera de Neumann, que representan las cargas, se determina los valores puntuales de las incógnitas al resolver el sistema de ecuaciones lineales representadas de forma matricial de la siguiente forma:

$$K_G \cdot d = r_\beta + r_q$$

Donde K_G es la matriz de rigidez ya reducida, d es el vector de desplazamientos desconocidos, r_β es el vector de cargas y momentos externos y r_q es el vector de cargas y momentos distribuidos.

6. Una vez conocidos los desplazamientos se calcula por medio de derivadas y principios de medio continuo las deformaciones y los esfuerzos. A esto se le conoce como post-proceso.

2.4 Método por elementos finitos para marcos espaciales en tres dimensiones

Muchas estructuras en aplicaciones prácticas están conformadas por elementos largos de sección transversal relativamente pequeña en comparación con las dimensiones de la estructura. Éstas se pueden clasificar dependiendo del tipo de unión de sus elementos. Esto se debe a que el tipo de unión es el responsable de las reacciones que presentan, y por lo tanto, de los grados de libertad de los elementos.

Los tipos de estructura que se encuentran en la clasificación anterior son armaduras y marcos. Las armaduras tienen pernos como uniones que permiten la rotación por lo que sólo están restringidos los desplazamientos. Esto causa que los elementos solamente estén sometidos a cargas axiales.

Las estructuras que están conformadas por uniones rígidas se denominan marcos y están compuestas por elementos tipo viga interconectados de nodo a nodo. Este tipo de elementos tiene restricciones en desplazamientos y rotaciones por lo que presentan seis grados de libertad por nodo. Para un elemento marco espacial de dos nodos se tienen doce grados de libertad como se muestra en la siguiente figura.

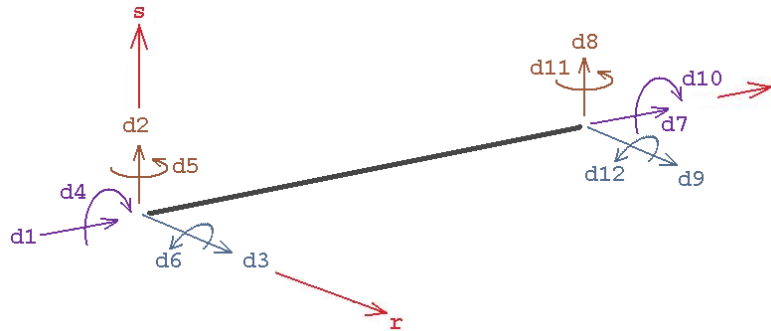


Figura 20-Grados de libertad de un elemento de marco espacial [14]

Donde d_1, d_2, d_3 son los desplazamientos del nodo uno, d_4, d_5, d_6 son las rotaciones del nodo uno, d_7, d_8, d_9 son los desplazamientos del nodo dos y d_{10}, d_{11}, d_{12} son las rotaciones del nodo dos.

Las cargas sobre el elemento y las propiedades de sección transversal son descritas en términos del sistema de referencia local r - s - t . El eje " t " corre a lo largo del centroide del elemento. Los ejes " r " y " s " son los ejes donde se encuentra el máximo y el mínimo momento de inercia respectivamente. El sistema de referencia local r - s - t no es de mano derecha.

Para establecer los tres ejes coordenados no es suficiente conocer las coordenadas de inicio y fin del elemento. El método más sencillo para posicionar los ejes coordenados locales es llamado "método de los tres nodos". Los nodos uno y dos definen el inicio y fin del elemento, así como los grados de libertad. El tercer nodo sirve para definir el plano r - t . La metodología para posicionar el sistema local es la siguiente:

1. Se establece el eje local " t " creando un vector que va del nodo 1 al nodo 2.
2. Se establece un vector que va del nodo 1 al nodo 3. El eje " s " se define con el producto cruz de los dos vectores unitarios en dirección a los dos vectores creados.
3. Finalmente el eje local " r " se determina al tomar el producto cruz de los vectores unitarios en la dirección " t " y " s ".

La decisión del tercer nodo es completamente arbitraria y puede ser cualquier punto del modelo. Sin embargo, se debe de tener cuidado al definir sistemas de referencia para secciones no simétricas ya que la mala posición de los elementos arrojará resultados erróneos. Algunos autores y los programas de Elemento Finito definen el tercer nodo hacia el mayor momento de inercia.

Los fenómenos que experimenta un elemento tipo marco incluyen fuerzas axiales y efectos de flexión debido a cargas y momentos en los planos r - t y s - t . Además, los elementos incluyen efectos de torsión debido a la flexión y a momentos alrededor del eje " t " [16]. Sin embargo, se puede demostrar que los efectos de torsión debido a la flexión son mínimos en comparación de la torsión debida a momentos alrededor del eje " t ", por lo que en la práctica se desprecian. También se pueden presentar cargas distribuidas en cada uno de los ejes. El tipo de fenómenos que puede presentar un elemento marco se muestra en la siguiente figura [14]:

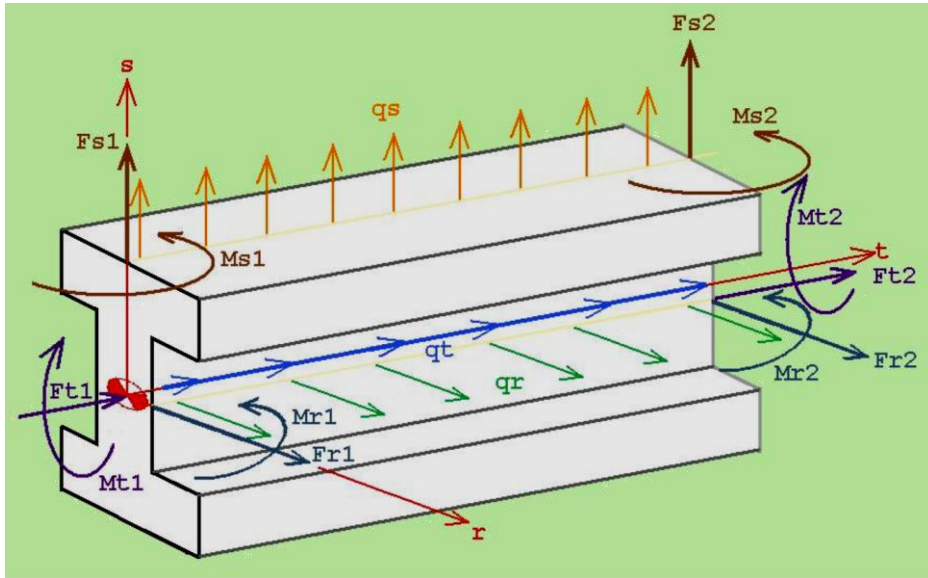


Figura 21-Cargas a las que puede estar sometido un elemento marco en tres dimensiones [14]

Para determinar el comportamiento total en cada elemento se aplica el principio de superposición de la contribución de cada fenómeno. Para el caso de esfuerzos axiales se suma el valor absoluto de los esfuerzos de tracción-compresión, el esfuerzo máximo debido a la flexión alrededor del eje "r" y el esfuerzo máximo debido a la flexión alrededor del eje "s". Y para esfuerzos cortantes sólo se toma la contribución de la torsión alrededor del eje "t".

Los grados de libertad afectados por cada fenómeno, así como las ecuaciones de interpolación para calcular la distribución de desplazamientos lineales y angulares se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 7- Grados de libertad y ecuaciones de interpolación para un elemento marco espacial

Fenómeno	Grados de libertad	Ecuación
Tracción-Compresión	1 y 7	$u(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t}{L} & \frac{t}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_7 \end{bmatrix}$
Flexión alrededor del eje "r"	2, 6, 8 y 12	$v(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3t^2}{L^2} + \frac{2t}{L^3} & t - \frac{2t^2}{L} + \frac{t^3}{L^3} & \frac{3t^2}{L^2} - \frac{2t^3}{L^3} & -\frac{t^2}{L} + \frac{t^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_6 \\ d_8 \\ d_{12} \end{bmatrix}$
Flexión alrededor del eje "s"	3, 5, 9 y 11	$w(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3t^2}{L^2} + \frac{2t}{L^3} & -\left(t - \frac{2t^2}{L} + \frac{t^3}{L^3}\right) & \frac{3t^2}{L^2} - \frac{2t^3}{L^3} & -\left(-\frac{t^2}{L} + \frac{t^3}{L^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_6 \\ d_8 \\ d_{12} \end{bmatrix}$
Torsión alrededor del eje "t"	4 y 10	$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \frac{L-t}{L} & \frac{t}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_{10} \end{bmatrix}$

Nota: La diferencia de signo entre los esfuerzos por flexión se debe a que el sistema r-s-t no es de mano derecha

Siendo " u ", " v ", " w " y " φ " los desplazamientos en los ejes " t ", " r ", " s " y el desplazamiento angular alrededor de " t ", respectivamente. La variable " t " es cualquier punto sobre el eje longitudinal del elemento y " L " es la longitud del elemento. Las ecuaciones de la tabla anterior son el resultado de la linealización por el método de Galerking de las ecuaciones elementales de cada fenómeno [14].

Al superponer la deformación axial, la flexión en los planos $r-t$ y $s-t$ y los efectos de distorsión angular generados por la torsión se puede calcular la energía total de deformación de la siguiente forma [16]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^L EI_r \left(\frac{d^2v}{dt^2} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^L EI_s \left(\frac{d^2w}{dt^2} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dt$$

Que se puede expresar de forma matricial como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{d^2v}{dt^2} & \frac{d^2w}{dt^2} & \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{d^2v}{dt^2} \\ \frac{d^2w}{dt^2} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} dt$$

Utilizando las ecuaciones de interpolación para calcular la distribución de desplazamientos lineales y angulares, las derivadas requeridas pueden ser escritas como:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{d^2v}{dt^2} \\ \frac{d^2w}{dt^2} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12t}{L^3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{6}{L^2} + \frac{12t}{L^3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{12} \end{pmatrix} = B^T d$$

Por lo tanto la energía de deformación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$U = \frac{1}{2} d^T \int_0^L BCB^T dt d = \frac{1}{2} d^T K d$$

Donde la matriz de Rigidez es:

$$K = \int_0^L BCB^T dt$$

Haciendo las multiplicaciones de las matrices e integrando se obtiene la siguiente matriz de rigidez para un elemento tipo marco en coordenadas locales:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_s}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_s}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{4EI_s}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{2EI_s}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_r}{L} & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_r}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} & 0 & \frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_s}{L^3} & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_s}{L^3} & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{2EI_s}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{4EI_s}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_r}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_r}{L} \end{pmatrix}$$

De manera similar se obtiene el vector de cargas nodales que es la superposición de las cargas distribuidas q_s sobre cada elemento y las cargas externas en los nodos q_r . Quedando el vector de cargas de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_q^T = \left(\frac{q_t L}{2} \quad \frac{q_s L}{2} \quad \frac{q_r L}{2} \quad 0 \quad -\frac{q_r L^2}{12} \quad \frac{q_s L^2}{12} \quad \frac{q_t L}{2} \quad \frac{q_s L}{2} \quad \frac{q_r L}{2} \quad 0 \quad \frac{q_r L^2}{12} \quad -\frac{q_s L^2}{12} \right)$$

Por lo que la ecuación del elemento finito para un elemento marco en el espacio, en coordenadas locales, queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{K}_{\text{local}} \cdot \mathbf{d}_{\text{local}} = \mathbf{r}_{\text{local}}$$

Ahora bien, como una estructura tipo marco está compuesta por varios elementos, es necesario describir el comportamiento con respecto a un marco de referencia global que esté fijo en el espacio. Este sistema de referencia está dado por los ejes \mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z} . En las siguientes imágenes se muestran los grados de libertad y las cargas referenciadas a este marco de referencia global.

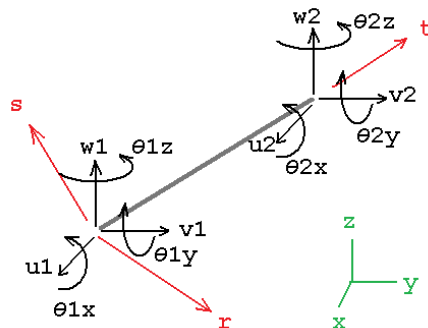


Figura 22-Grados de libertad referenciados al sistema de referencia global [14]

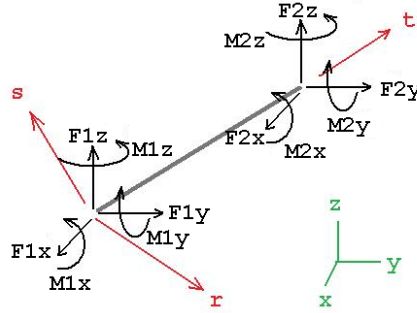


Figura 23-Cargas referenciadas al sistema de referencia global [14]

Entonces para transformar del sistema local al sistema global se utiliza una matriz de transformación o de rotación T . Definida por los vectores unitarios de cada uno de los ejes s - r - t , siendo estos vectores unitarios los cosenos directores de los ángulos de rotación del sistema local con respecto del marco de referencia global:

$$\mathbf{n}_t = (\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$$

$$\mathbf{n}_r = (\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$$

$$\mathbf{n}_s = (\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$$

Por lo que la matriz de rotación se puede expresar de la siguiente forma:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_t & \beta_t & \gamma_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_t & \beta_t & \gamma_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_r & \beta_r & \gamma_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_s & \beta_s & \gamma_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_t & \beta_t & \gamma_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_r & \beta_r & \gamma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_s & \beta_s & \gamma_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_t & \beta_t & \gamma_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{pmatrix}$$

Entonces la ecuación del elemento finito se expresa en términos del sistema global como:

$$\mathbf{K}_{\text{global}} \cdot \mathbf{d}_{\text{global}} = \mathbf{r}_{\text{global}}$$

Donde:

$$\mathbf{K}_{\text{global}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{\text{local}} \mathbf{T} \quad \gamma \quad \mathbf{d}_{\text{global}} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}_{\text{local}}$$

$$\mathbf{d}_{\text{global}}^T = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{w}_1 \quad \theta_{1x} \quad \theta_{1y} \quad \theta_{1z} \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{w}_2 \quad \theta_{2x} \quad \theta_{2y} \quad \theta_{2z})$$

Para calcular el campo de esfuerzos de cada fenómeno se deriva el campo de desplazamientos dando resultado a las deformaciones lineales y angulares. Posteriormente se aplica la Ley de Hooke generalizada con lo que se tienen las siguientes ecuaciones:

Tabla 8- Ecuaciones para el cálculo de esfuerzos

Fenómeno	Esfuerzo
Tracción-Compresión	$\sigma_{tc} = E * \frac{du}{dt}$
Flexión alrededor del eje "r"	$\sigma_{fr} = E * s * \frac{d^2v}{dt^2}$
Flexión alrededor del eje "s"	$\sigma_{fs} = E * r * \frac{d^2w}{dt^2}$
Torsión alrededor del eje "t"	$\tau = G * \rho * \frac{d\phi}{dt}$

Donde "E" es el módulo de elasticidad o módulo de Young, "s" y "r" es la distancia en dirección "s" y "r" medida desde el eje neutro. Para tener el esfuerzo máximo se evalúa en las fibras más alejadas del eje neutro. "G" es el módulo de rigidez a corte y "ρ" es la distancia radial al eje "r". En el caso de perfiles circulares "ρ" es igual a $\sqrt{r^2 + s^2}$. En el caso de perfiles no circulares, el valor $\sqrt{r^2 + s^2}$ genera una aproximación burda del valor de esfuerzo cortante. En realidad la torsión en perfiles no circulares debe de atenderse desde un enfoque bidimensional.

Una representación simple de la distribución de esfuerzos en un elemento tipo marco se aprecia en la siguiente figura [14]:

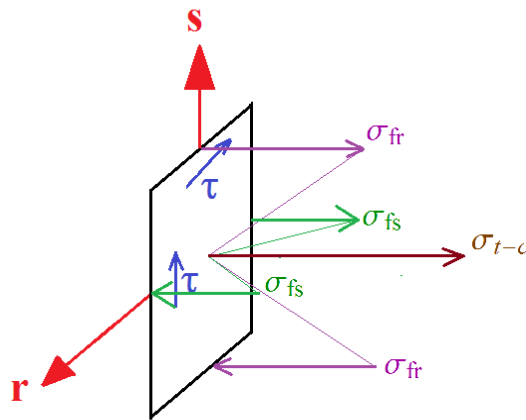


Figura 24-Distribución de esfuerzos de un elemento tipo marco en el espacio

Capítulo 3- Desarrollo del algoritmo de optimización para el caso de estudio

Este capítulo detalla el algoritmo de optimización estructural evolutivo desarrollado para el chasis del prototipo fórmula de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Sin embargo este algoritmo es aplicable para estructuras caracterizadas como marcos espaciales que estén compuestas por sub-estructuras donde se tengan más de un caso de carga y que se busque una compatibilidad de las variables de diseño con los perfiles que se pueden encontrar en el mercado.

3.1-Definición del problema de optimización

Como se mencionó en el capítulo 2, un problema de diseño óptimo requiere de una formulación correcta del entorno donde existirá el diseño, así como la definición de las variables de diseño, la función objetivo y las restricciones. Esto para que el método de optimización tenga los elementos necesarios para convergir al óptimo.

Para el caso de estudio que es el chasis del prototipo fórmula de la Facultad de Ingeniería el entorno donde existirá el diseño es la competencia de fórmula SAE, que prueba al vehículo en las condiciones de una pista de carreras, y por lo tanto el chasis como elemento estructural estará sometido a cargas internas y externas generadas por la inercia al acelerar, frenar y maniobrar. Estas condiciones de utilización derivan en los casos de carga mencionados en el capítulo uno como requerimientos de funcionalidad.

Como variables de diseño se tienen los materiales y espesores de pared de los tubos que permite el reglamento de la competencia. Sin embargo, para obtener las variables de diseño, se deben empear los requerimientos de la competencia con perfiles disponibles en el mercado mexicano ya que de lo contrario el óptimo sería imposible de fabricar.

Como se tiene una cantidad finita de perfiles en los que se puede variar cada sub-estructura, es necesario ordenar las variables de diseño de tal forma que en cada iteración se den cambios paulatinos. Es por esto que al analizar el comportamiento de los elementos de un marco espacial se observa que la flexión en los planos $r-t$ y $s-t$ son los fenómenos con mayor impacto en los esfuerzos que sufre la estructura. Entonces se deben de ordenar las propiedades en las que puede variar cada elemento de menor a mayor momento de inercia.

La función objetivo para el caso de estudio es la disminución de peso de la estructura sin comprometer su rigidez. El algoritmo de optimización empezará al hacer el análisis por elemento finito de la estructura más rígida posible, esto es con los perfiles de mayor momento de inercia, e irá variando las propiedades de los elementos al tomar perfiles menos rígidas y, por lo tanto, más ligeros, pero siempre por debajo de las restricciones de esfuerzo límite que depende del material utilizado y de un factor de seguridad puesto por el usuario que depende del tipo de carga.

A manera de resumen se muestran en la siguiente tabla los requerimientos de materiales y los diferentes perfiles que puede tomar cada sub-estructura.

Tabla 9- Perfiles utilizados como variables de diseño

Requerimientos materiales		Tubo redondo, de acero ductil o aleación con un mínimo de .1% de carbón	
		Módulo de Young (E)=200 [GPa] Límite elástico (Sy)=305 [MPa] Resistencia a la rotura (Su)= 365 [MPa]	
Sub-estructura	Alternativa de diseño	Nombre	Espesor de pared [mm]
Barras anti-vuelco	Línea Base	Calibre 13 de 1"	2.41
		Calibre 12 de 1"	2.77
		Cédula 40 de ¾"	2.87
	Alternativa 1	Cédula 10 de ¾"	2.11
		Calibre 14 de 1 ¼"	2.11
		Calibre 16 de 1 ¼"	1.65
Estructura primaria	Línea Base	Calibre 16 de 1"	1.65
	Alternativa 2	Calibre 15 de 1"	1.83
	Alternativa 1	Calibre 18 de 1 ¼"	1.24
		Calibre 18 de 1 ½"	1.24
	Alternativa 2	Calibre 20 de 1 ¼"	.899
		Calibre 20 de 1 ½"	.899
Estructura secundaria	Línea Base	Calibre 18 de 1"	1.24
	Alternativa 1	Calibre 14 de 7/8"	2.11
Bulkhead	Línea Base	Calibre 14 PTR de 1"	2.11
Base de diferencial	Línea Base	Calibre 18 de 5/8"	1.24
Motor	Línea Base	Barra sólida de 2"	--

3.2-Desarrollo del algoritmo

Para la presente tesis se consideran dos aspectos para la solución del problema de optimización. Estos aspectos son el análisis por elementos finitos ya que con éste se calculan los esfuerzos de Von Mises de cada elemento de la estructura para tener un criterio de optimización y el proceso de optimización estructural por reglas evolutivas con el que se varían los perfiles de los elementos de la estructura para alcanzar la función objetivo de la disminución de peso.

El proceso de optimización inicia haciendo el análisis por elemento finito de una estructura inicial con las propiedades que la hagan lo más rígida posible. En esta etapa se calculan los esfuerzos de Von Mises para cada caso de carga de cada elemento en la estructura y se muestran cuáles son los esfuerzos máximos dentro de la misma. El estado de esfuerzos inicial sirve para tener un valor de comparación con los esfuerzos de referencia iniciales dentro del ciclo de optimización.

Posteriormente se elimina o se agrega material a los elementos que estén por fuera del rango de los esfuerzos de referencia hasta que se llegue a un estado permanente u óptimo local, es decir que los esfuerzos de la estructura estén dentro del intervalo marcado por los valores de referencia superior e inferior.

Después de cada estado permanente los esfuerzos de referencia inferior y superior se acercan al esfuerzo límite en incrementos o decrementos pequeños y se recalcula el estado de esfuerzos de la estructura para todos los casos de carga. Al igual que la comparación inicial se agrega o se elimina material en los elementos por fuera de los límites y así sucesivamente en cada estado permanente hasta que los esfuerzos de referencia sean iguales al esfuerzo límite.

Posteriormente se explicará a detalle cada etapa del proceso de optimización y este se resume en el siguiente diagrama de flujo que puede ser interpretado para cualquier lenguaje de programación.

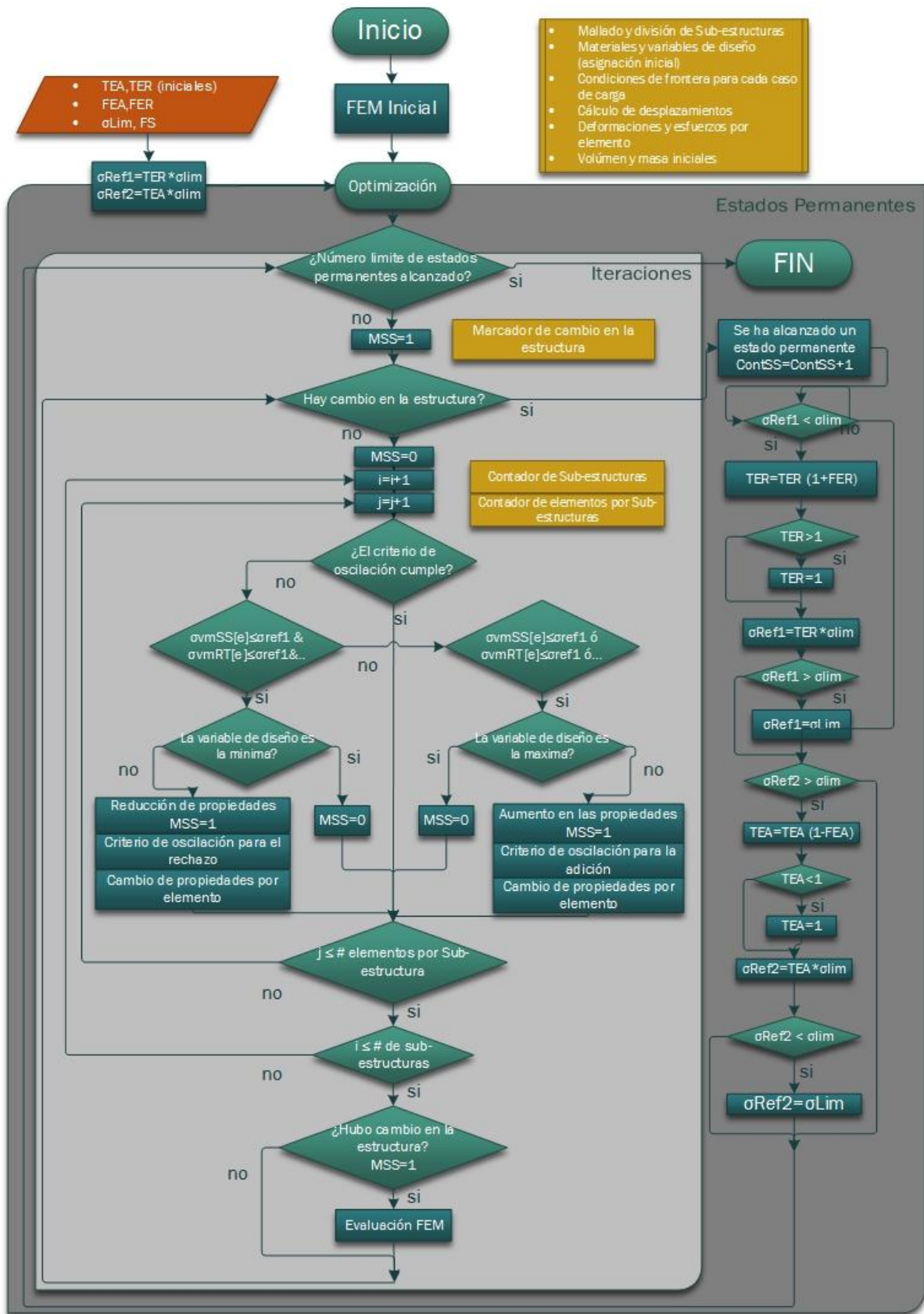


Figura 25-Diagrama de flujo del algoritmo de optimización

3.2.1- FEM Inicial

El Análisis por Elementos Finitos (FEA) conlleva una metodología establecida como se vio en el capítulo dos. Para el caso de estudio el proceso se divide en el mallado y la división por sub-estructuras, la asignación de propiedades iniciales, la asignación de condiciones de frontera esenciales y naturales y el cálculo de esfuerzos a partir del campo de desplazamientos nodales.

Mallado y división de sub-estructuras

El mallado es donde el objeto en estudio se divide en un número finito de elementos. Para el caso de un Marco espacial, estos elementos son de una dimensión y se definen a través de los nodos y de las direcciones del mayor y menor momento de inercia para definir los ejes locales r y s .

El algoritmo de optimización requiere que se ingresen los nodos y se indique de donde a donde irá un elemento, es decir los nodos por elementos. También se requiere del nodo auxiliar para definir los ejes locales donde se encontrará el mayor y el menor momento de inercia. Para el caso de perfiles circulares no importa en donde se encuentren los ejes locales ya que son simétricos.

También es necesario asignar los seis grados de libertad por nodo. Este proceso se hace automáticamente por medio de los nodos y los nodos por elementos. A esta lista de grados de libertad se denomina como conectividad.

El mallado del prototipo se muestra en la siguiente imagen en donde en azul se muestran los nodos y en negro se muestran los elementos.

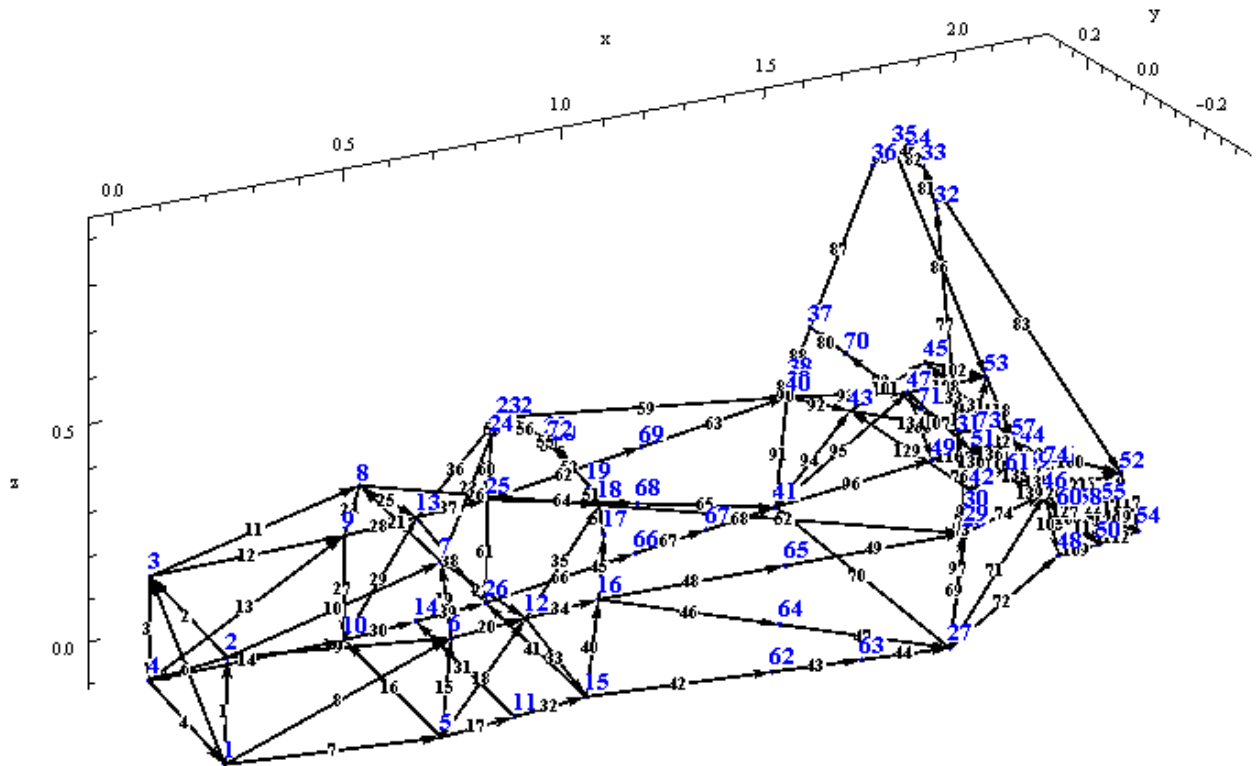


Figura 26-Mallado del chasis del algoritmo de optimización

Como se mencionó con anterioridad, por las restricciones del reglamento de la competencia, no todos los elementos varían en los mismos perfiles, es por esto que se requiere dividir la estructura en sub-estructuras y también para distinguir los elementos que funcionan como miembros estructurales rígidos como es el caso del motor. La división de elementos por sub-estructuras se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 10-Elementos por sub-estructuras

Sub-estructura	Elementos
Barras anti-vuelco	40, 45, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 69, 73, 75, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91
Estructura primaria	8, 13, 20, 28, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 83, 86, 119, 121, 123
Estructura secundaria	7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 38, 39, 52, 59, 71, 72, 74, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 115, 117, 118
Bulkhead	1, 2, 3, 4, 5, 6
Base de diferencial	113, 116, 120, 122, 124, 125, 126, 127, 128
Motor	129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139

Para los elementos por sub-estructuras se tiene una lista denominada “Elementos” que en cada una de sus seis posiciones se tiene otra lista con los elementos de cada sub-estructura

$$\text{Elementos} = \{\text{RH, PR, SE, Bulkhead, BaseDif, Motor}\}$$

Esta lista servirá para la distinción de las variables de diseño que tomará cada sub-estructura.

Asignación de propiedades mecánicas y geométricas

Cada elemento requiere de la asignación de las propiedades mecánicas y geométricas para hacer el cálculo de la matriz de rigidez elemental y una vez que se ensamblan estas matrices para obtener la matriz de rigidez global (K_g).

Entre las propiedades mecánicas que se necesitan están el módulo de elasticidad o módulo de Young (E_y) y el módulo de rigidez a corte (G), que puede ser sustituido por el coeficiente de Poisson (ν). Para hacer el cálculo de la masa de la estructura también se requiere la densidad del material (ρ).

Para este caso los materiales no serán variables de diseño, sin embargo depende del problema, de la disponibilidad de materiales, así como de la capacidad de unión de los mismos para que se consideren como variables de diseño, es decir que cada elemento de la estructura pueda tomar diferentes materiales. En este caso los dos materiales que se utilizan son el Acero A36 y un material denominado como “rígido” que simula el motor que se utiliza como un miembro estructural. Las propiedades de estos se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 11-Materiales y propiedades mecánicas

Material	Módulo de elasticidad [GPa]	Módulo de Rigidez a corte [GPa]	Esfuerzo de fluencia (σ_y) [MPa]	Densidad [kg/m ³]
Acero	200	79.3	240	7800
Rígido	2000	793	2400	0

Las propiedades de sección de cada perfil incluyen los momentos de inercia en dirección r y s (I_r e I_s), el área de la sección transversal (A), el momento de inercia polar (J) y la distancia del plano neutro a la fibra más alejada del perfil (y), que equivale a ser la mitad del diámetro exterior.

A continuación se muestra una tabla con las propiedades geométricas de cada variable de diseño.

Tabla 12-Propiedades geométricas de las variables de diseño

Sub-estructura	Opción de diseño	Nombre del perfil	Diámetro exterior [mm]	Espesor de pared [mm]	Momento de inercia [mm ⁴]	J Cortante [mm ⁴]	Área [mm ²]
Barras anti-vuelco	Alternativa 2	Cal16(1 1/4")	31.75	1.65	1.7723E-08	3.5447E-08	0.00015603
	Alternativa 1	Ced10(3/4)	26.67	2.11	1.2366E-08	2.4732E-08	0.0001628
	Línea Base	Cal13(1")	25.4	2.41	1.1626E-08	2.3253E-08	0.00017406
	Alternativa 1	Cal14(1 1/4")	31.75	2.11	2.1686E-08	4.3371E-08	0.00019648
	Línea Base	Cal12(1")	25.4	2.77	1.2795E-08	2.5591E-08	0.00019693
	Línea Base	Ced40(3/4)	26.67	2.87	1.5415E-08	3.083E-08	0.00021459
Estructura primaria	Línea Base	Cal16(1")	25.4	1.65	8.7222E-09	1.7444E-08	0.00012311
	Línea Base	Cal15(1")	25.4	1.83	9.4667E-09	1.8933E-08	0.00013551
	Alternativa 1	Cal18(1 1/4")	31.75	1.24	1.3852E-08	2.7705E-08	0.00011885
	Alternativa 2	Cal20(1 1/4")	31.75	0.89	1.028E-08	2.056E-08	8.6285E-05
	Alternativa 2	Cal18(1 1/2")	38.1	1.24	2.4414E-08	4.8828E-08	0.00014359
	Alternativa 2	Cal20(1 1/2")	38.1	0.89	1.8017E-08	3.6034E-08	0.00010404
Estructura secundaria	Línea Base	Cal18(1")	25.4	1.24	6.8852E-09	1.377E-08	9.4117E-05
	Alternativa 1	Cal14(7/8")	22.22	2.11	6.8129E-09	1.3626E-08	0.0001333

En este caso las sub-estructuras del Bulkhead, la base de diferencial y el motor no cambian de propiedades por lo que no se consideran variables de diseño.

Como se mencionó con anterioridad, las propiedades requieren de estar ordenadas de menor a mayor inercia y separadas por sub-estructuras. Es por esta razón que se crean seis listas de inercias (I_r e I_s), seis de áreas (A), seis de momento polar de inercia (J) y seis distancia del plano neutro (y) El orden de estas listas debe de ser el mismo, es decir que la posición uno de cualquier lista debe de coincidir con el mismo perfil. Un ejemplo de estas listas se muestra a continuación para la sub-estructura de las barras anti-vuelco:

$$\text{InerciasRH} = \{1.1626x10^{-8}, 1.2365x10^{-8}, 1.2795x10^{-8}, 1.5414x10^{-8}, 1.772x10^{-8}, 2.168x10^{-8}\}$$

$$\text{AreasRH} = \{0.0001740627, 0.000162, 0.000196931, 0.00021454, 0.000156, 0.0001964764\}$$

$$\text{JRH} = \{2.32525x10^{-8}, 2.47315x10^{-8}, 2.55906x10^{-8}, 3.08299x10^{-8}, 3.5446x10^{-8}, 4.337x10^{-8}\}$$

$$yRH = \{0.0127, 0.013335, 0.0127, 0.013335, 0.015875, 0.015875\}$$

Posteriormente estas listas se agrupan en listas que integren todas las propiedades por sub-estructura como se muestra a continuación:

$$\text{PRH} = \{\text{InerciasRH}, \text{JRH}, \text{AreasRH}, yRH\}$$

$$\text{PPR} = \{\text{InerciasPR}, \text{JPR}, \text{AreasPR}, yPR\}$$

$$\text{PSE} = \{\text{InerciasSE}, \text{JSE}, \text{AreasSE}, ySE\}$$

$$\text{P58} = \{I58, J58, A58, y58\}$$

$$\text{PPTR} = \{IPTR, JPTR, APTR, yPTR\}$$

$$\text{PRigid} = \{\text{InerciasRigid}, \text{JRigid}, \text{AreasRigid}, yRigid\}$$

Finalmente las listas de propiedades por sub-estructuras se agrupan en una lista que integre todas las propiedades

$$\text{Propiedades} = \{\text{PRH}, \text{PPR}, \text{PSE}, \text{P58}, \text{PPTR}, \text{PRigid}\}$$

Se hace notar que la lista de propiedades tiene el mismo orden que la lista denominada "Elementos" que contiene los elementos por sub-estructura. Esto para que se puedan variar los perfiles que puede tomar cada sub-estructura por medio del manejo de índices dentro del ciclo de optimización.

Aplicación de condiciones de frontera

Ya que el elemento finito es un método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales se requieren de condiciones de frontera para linealizar y resolver las ecuaciones que gobiernan el problema.

Existen dos tipos de condiciones de frontera: Las condiciones de frontera esenciales, que son restricciones a los grados de libertad de algún nodo y las condiciones de frontera naturales que son cargas o momentos que afectan la estructura.

Como el problema de optimización planteado en esta tesis es para mejorar el diseño conceptual del chasis del prototipo fórmula, las condiciones de frontera no son cien por ciento las condiciones que se presentarán en pista ya que se requeriría la utilización de instrumentos de medición como galgas extensiométricas cuando el vehículo se encuentre en movimiento. Sin embargo las

restricciones de desplazamientos y las cargas ayudan a conocer cómo se comportará la estructura ante cargas similares. A continuación se muestra a manera de resumen las condiciones de frontera para cada caso de carga y se indica en qué nodos se aplican dichas condiciones de frontera

Tabla 13- Resumen de condiciones de frontera y nodos de aplicación

Caso de carga	Restricciones		Cargas	
	Descripción	Nodos	Descripción	Nodos
Rigidez torsional	Puntos de la suspensión trasera y los puntos de una suspensión delantera.	Suspensión trasera derecha={46, 48,52,54} Suspensión trasera derecha={47,49,53,57} Suspensión delantera derecha={9,10,25,26} Suspensión delantera Izquierda={5,6,15,16}	Carga de 1400[N] en dirección "z" aplicada en los puntos inferiores de la suspensión delantera. Mismas condiciones para ambos lados del chasis	Caso1={5,15} Caso2={10,26}
Cortante estático	Puntos de la suspensión trasera	{46, 48,52,54} {47,49,53,57}	Carga de 1540[N] del peso del vehículo en dirección "z" simulando una viga en cantiléver aplicados en los nodos inferiores del Bulkhead. Peso del motor de 588[N] aplicada en su centro de gravedad	{1,4}
Bump	Todos los puntos de la suspensión	{46, 48,52,54} {47,49,53,57} {9,10,25,26} {5,6,15,16}	Carga de 1540[N] del peso del vehículo en dirección "z" aplicada en los nodos donde no se tengan restricciones. Inercia del motor aplicada en su centro de gravedad	Nodos de aplicación={1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 18, 72, 23, 63, 667, 27, 41, 31, 37, 70, 71, 33, 35, 50, 51, 55, 56, 28, 40, 54} Nodo del motor={73}
Curveo	Todos los puntos de la suspensión	{46, 48,52,54} {47,49,53,57} {9,10,25,26} {5,6,15,16}	Carga de 1540[N] del peso del vehículo en dirección "y" aplicada en los nodos donde no se tengan restricciones. Inercia del motor aplicada en su centro de gravedad	
Aceleración	Todos los puntos de la suspensión	{46, 48,52,54} {47,49,53,57} {9,10,25,26} {5,6,15,16}	Carga de 1540[N] del peso del vehículo en dirección "x" aplicada en los nodos donde no se tengan restricciones. Inercia del motor aplicada en su centro de gravedad	
Frenado	Todos los puntos de la suspensión	{46, 48,52,54} {47,49,53,57} {9,10,25,26} {5,6,15,16}	Carga de 1540[N] del peso del vehículo en dirección "-x" aplicada en los nodos donde no se tengan restricciones. Inercia del motor aplicada en su centro de gravedad	

Calculo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos

Los desplazamientos y rotaciones de cada nodo se calculan a partir de la matriz reducida y las condiciones de frontera naturales. Para el chasis del prototipo fórmula se tiene una matriz de rigidez reducida de 3202 por 3202 elementos, esto cuando se restringen los desplazamientos de los 16 nodos que integran la suspensión. Es decir un sistema de 3202 incógnitas con 3202 ecuaciones que corresponden a los grados de libertad que no han sido restringidos. He aquí la importancia del método para la solución de problemas complejos.

La solución total nodal del sistema: $\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{d} = \mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}_q$ arroja una distribución de desplazamientos axiales ($\mathbf{u}(\mathbf{t})$), una distribución de desplazamientos por flexión en el eje "s" ($\mathbf{v}(\mathbf{t})$), una distribución de desplazamientos por flexión en el eje "r" ($\mathbf{w}(\mathbf{t})$), y la distribución de rotación a lo largo del eje axial "t" ($\mathbf{y}(\mathbf{t})$). Todas en función del eje longitudinal de cada elemento.

Posteriormente al cálculo de desplazamientos y rotaciones es necesario calcular las deformaciones de cada elemento para que al aplicar la ley de Hook se calculen los esfuerzos axiales (σ_{tc}), los esfuerzos por flexión en los planos s-t y r-t (σ_{st} y σ_{rt}), y los esfuerzos debido a la torsión (τ).

Como en este caso se utiliza como criterio de optimización el nivel de esfuerzos, es necesario calcular el esfuerzo de Von Mises para comparar con los esfuerzos de referencia. Ya que los esfuerzos por flexión tienen mayor impacto en los esfuerzos axiales, se calcula un esfuerzo máximo o esfuerzo "worst" que es la suma del valor absoluto de los esfuerzos por tracción-compresión y los esfuerzos por flexión.

$$\sigma_{worst} = |\sigma_{tc}| + |\sigma_{st}| + |\sigma_{rt}|$$

Este esfuerzo en la realidad no se presenta pero agrega un factor de seguridad adicional para el cálculo de los esfuerzos de la estructura.

La magnitud de los esfuerzos de torsión generados por la flexión son casi despreciables en comparación con el esfuerzo por torsión a lo largo del eje longitudinal del elemento. Es por este motivo que se desprecian. Entonces al tener sólo un esfuerzo axial (σ_{worst}) y un esfuerzo cortante debido a la torsión (τ), el esfuerzo de Von Mises para cada elemento queda definido por la siguiente expresión:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{worst}^2 + 3\tau^2}$$

Este esfuerzo de Von Mises se calcula para cada uno de los elementos en cada caso de carga para posteriormente compararlo con los esfuerzos de referencia dentro del ciclo de optimización.

3.2.2- Optimización Estructural Evolutiva (ESO)

Una vez que se evalúa la estructura inicial y se obtienen los esfuerzos de Von Mises de cada elemento se inicia el ciclo de optimización. Este comienza con una comparación de los esfuerzos obtenidos de cada elemento con los esfuerzos de referencia iniciales.

Los esfuerzos de referencia iniciales se calculan a través de la tasa evolutiva de rechazo (**TER**) y la tasa evolutiva de adición (**TEA**). En este caso la **TER** inicial es igual a **.05** y la **TEA** es igual a **2**, que equivalen al **5%** y al **200%** del valor límite. Estos valores se tomaron para que el algoritmo de optimización comience con cambios muy lentos o nulos en los primeros estados permanentes ya que casi ningún esfuerzo está por encima del esfuerzo de referencia dos. Como se verá más adelante la convergencia de las tasas evolutivas se dará muy rápido al inicio y después se estabilizará hasta que los esfuerzos de referencia no puedan variar dado que son iguales.

Como se vio en el capítulo dos, los esfuerzos de referencia inferior y superior se calculan de la siguiente manera:

$$\sigma_{ref1} = TEA * \sigma_{lim} \quad \text{y} \quad \sigma_{ref2} = TER * \sigma_{lim}$$

Para calcular el esfuerzo límite se parte de las propiedades del material a utilizar que para este caso es el acero A36 que tiene un esfuerzo de fluencia de 240[MPa] y se manejará un factor de seguridad de 1.5 por cargas dinámicas. Por lo tanto el esfuerzo límite queda como:

$$\sigma_{lim} = \frac{\sigma_y}{FS} = 160 [MPa]$$

El algoritmo de optimización tiene como objetivo que ningún elemento presente un esfuerzo mayor a este valor límite.

Para hacer la eliminación de material de cada elemento el ciclo de optimización comienza al comparar si el esfuerzo de Von Mises de cada caso de carga del elemento analizado es menor al esfuerzo de referencia uno o inferior, en caso de que para todos los casos de carga se cumpla esta regla se requiere la eliminación de material. Sin embargo, el algoritmo debe de identificar si la variable de diseño en la que se encuentra el elemento es la mínima posible, de ser verdadero esto no se hace ninguna modificación; en caso contrario se disminuye a un perfil menos rígido.

En caso de que el esfuerzo del elemento este por encima del esfuerzo de referencia uno se compara si el esfuerzo de Von Mises de cada caso de carga es mayor o igual al esfuerzo de referencia dos o superior, en el caso de que para algún caso de carga se cumpla esta regla se requiere agregar material. Sin embargo si la propiedad en la que se encuentra el elemento es la más rígida posible no se hace ningún cambio; en caso contrario se cambian las propiedades a las de un perfil más rígido.

Este proceso se hace elemento por elemento hasta que no se haga ningún cambio en la estructura con lo que se ha alcanzado un estado permanente. Sin embargo por el tipo de problema es posible que se aumenten las propiedades de un elemento en una iteración y se disminuyan en la siguiente con lo que el algoritmo entra en un estado de oscilación infinito. Este estado de oscilación se muestra en la siguiente gráfica donde se tiene en eje de las ordenadas el volumen de la estructura y en el eje de las abscisas las iteraciones del proceso de optimización.

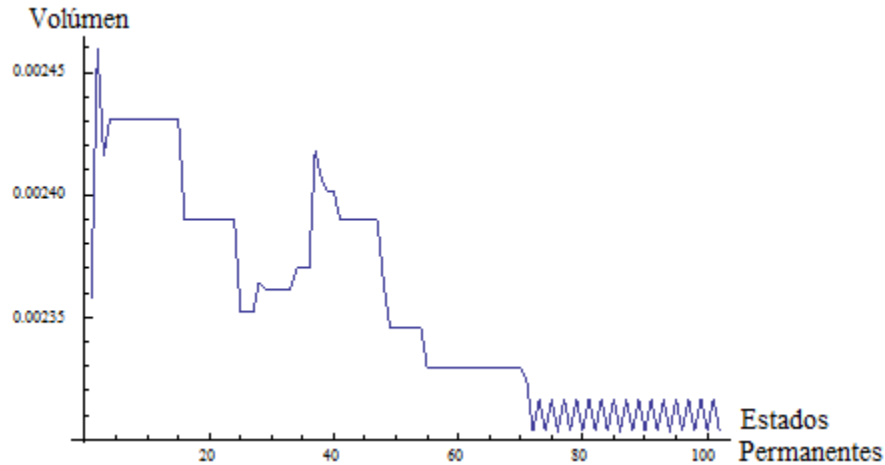


Figura 27-Gráfica de oscilación

Para salir del estado de oscilación es necesario saber cuál ha sido el cambio del elemento en la iteración pasada y en la anterior a esta, siempre y cuando no se haya alcanzado un estado permanente. Esto se hace con una lista donde se guarde el historial de cambio de cada elemento. Esta lista se debe de limpiar en cada estado permanente para no alterar la evolución de la estructura y la propiedad final al salir de la oscilación debe de ser la más rígida posible.

Ya que se alcanzó un estado permanente es necesario robustecer las reglas, es decir variar las referencias. Este proceso se hace con los factores evolutivos de rechazo y de adición. Es recomendable que estos factores sean pequeños para que las tasas evolutivas y por lo tanto las referencias varíen de forma lenta. Esto implica que se hagan cambios paulatinos en la estructura en cada iteración y no se cambien todos los elementos en una misma iteración.

Los factores evolutivos de adición y de rechazo se utilizaron de .01. Las tasas evolutivas y los esfuerzos de referencia se calculan de la siguiente manera como se vio en el capítulo dos:

Tasas evolutivas:

$$TER = TER(1 + FER)$$

$$TEA = TEA(1 - FEA)$$

Esfuerzos de referencia:

$$\sigma_{ref1} = TEA * \sigma_{lim}$$

$$\sigma_{ref2} = TER * \sigma_{lim}$$

Una vez que se re-calcularon las referencias se ingresa de nuevo al ciclo de optimización hasta un nuevo estado permanente.

Los criterios de paro del algoritmo son dos. Si se ha alcanzado un número determinado de estados permanentes seguidos o si las tasas evolutivas ya no pueden cambiar porque son igual a uno, y por lo tanto las referencias han alcanzado el esfuerzo límite. Este criterio de parto también puede ser un porcentaje del volumen inicial, sin embargo como en este problema las variables de diseño son valores discretos relativamente limitados no es necesaria esta restricción.

Capítulo 4- Resultados de la Optimización

En este capítulo se muestran los resultados de la optimización estructural evolutiva para el caso de estudio. También se realiza una verificación del estado de esfuerzos de la estructura inicial con el software comercial de Hyperworks, para así tener certeza que los resultados del elemento finito programado son una buena aproximación a la realidad. Posteriormente se muestra cómo es la evolución de la estructura para llegar al óptimo, donde se tiene el volumen como función objetivo.

4.1-FEM Inicial

Para el caso de estudio que es el chasis de un vehículo de carreras, se tienen modos de deformación que derivan en los casos de carga presentados en el capítulo uno. Estos casos de carga son la rigidez torsional, cortante estático, “bump” o rebote, curvado de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, aceleración y frenado.

El criterio de optimización es el nivel de esfuerzos para garantizar que la estructura siempre trabaje en el rango elástico y no se presente la falla de la misma ante la utilización normal del vehículo. Es por lo anterior que en el análisis por elemento finito se busca el nivel de esfuerzo de cada elemento de la estructura. Para hacer la verificación del estado de esfuerzos se utiliza una herramienta comercial de elemento finito con el mismo tipo de elementos que los elementos del FEM programado. De los resultados del software comercial se requiere comparará el esfuerzo máximo con el resultado del FEM programado para obtener un porcentaje de error y así verificar que los resultados son aceptables. Se realizó la comparación para verificar los resultados, sin embargo la única forma de tener certeza del valor es haciendo pruebas físicas.

Para calcular el porcentaje de error se tomará el valor del esfuerzo obtenido con el software comercial como el valor real y el porcentaje de error se calcula con la siguiente expresión:

$$\%EE = \left| \frac{\sigma_{vm_real} - \sigma_{vm_calculado}}{\sigma_{vm_calculado}} \right| \times 100$$

A continuación se muestran los resultados del FEM Inicial para cada caso de carga donde se tienen las condiciones de frontera descritas con anterioridad y los perfiles de los elementos son los siguientes, que hacen a la estructura la más rígida posible.

Tabla 14-Perfiles por sub-estructuras del FEM inicial

Sub-estructura	Nombre del Perfil
Barras anti-vuelco	Calibre 14 de 1 ¼”
Estructura Primaria	Calibre 18 de 1 ½”
Estructura Secundaria	Calibre 14 de 7/8”
Bulkhead	Calibre 14 de 1” (Tubo cuadrado)
Base de diferencial	Calibre 18 de 5/8”
Motor	Barra sólida de 2”

4.1.1-Rigidez Torsional

Para el caso de la rigidez torsional que mide el comportamiento mecánico de la estructura simulando un resorte torsional a lo largo del vehículo, donde este resorte conecta las suspensiones delantera y trasera.

Para vehículos de carreras el comportamiento aceptable de rigidez torsional es por lo menos cuatro veces la rigidez al vuelco de la suspensión. Generalmente para prototipos de fórmula SAE se tiene una rigidez de la suspensión de $500 \left[\frac{N \cdot m}{^\circ} \right]$ [3]. Para esta estructura se calculó por medio del algoritmo una Rigidez torsional de $3633.29 \left[\frac{N \cdot m}{^\circ} \right]$ lo que implica que es 7.2 veces más rígida.

A lo largo de la evolución de la estructura el valor de la rigidez torsional disminuye a medida que disminuye la masa. El valor final es de $2673.14 \left[\frac{N \cdot m}{^\circ} \right]$ el cual es 5.27 veces la rigidez de la suspensión lo cual es un valor aceptable para el comportamiento dinámico del vehículo [3]. En la siguiente figura se muestra cómo se desplaza el chasis ante las condiciones de carga de la rigidez torsional. En negro se muestra la estructura original y en rojo la estructura deformada con un factor de escala de 1000.

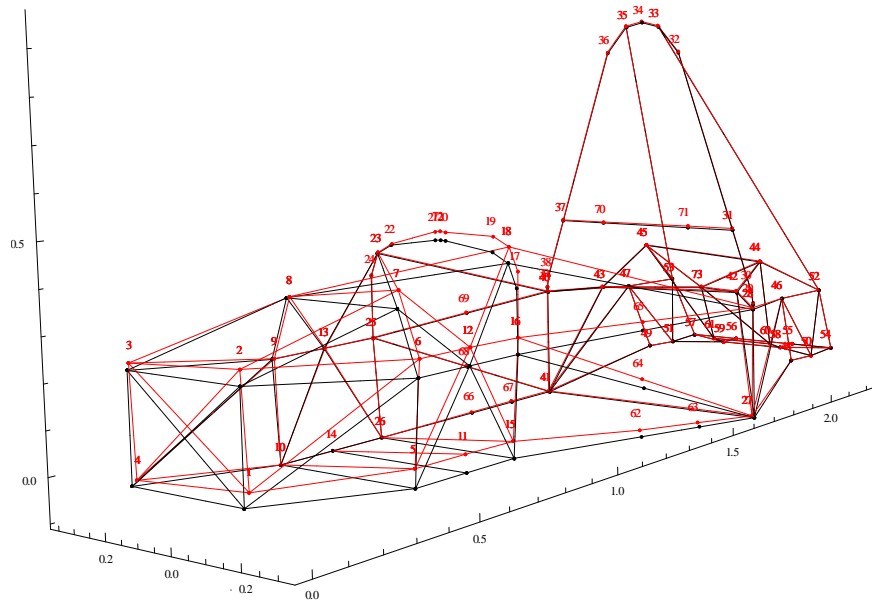


Figura 28-Vista isométrica de la deformación de al rigidez torsional

Por medio del FEM realizado con el software comercial se encontró que el esfuerzo máximo es de **65.14[MPa]** y el resultado del FEM programado arroja un resultado de **67.97 [MPa]**. Esto implica que la desviación del FEM programado es de **4.17 %**.

4.1.2-Cortante estático

El cortante estático mide la rigidez a la flexión del chasis simulando que éste es una viga en cantiléver. Para este caso no hay un valor objetivo como en el caso de la rigidez torsional, sin embargo al aplicar esta condición de carga el algoritmo de optimización rigidizará la estructura para que el nivel de esfuerzos presentados sea aceptable y el chasis no falle por su propio peso ni por el peso de los componentes que están atados a él. En la siguiente imagen se muestra el

desplazamiento del chasis ante la condición de carga de cortante estático. En negro se muestra la estructura original y en rojo la estructura deformada con un factor de escala de 1000.

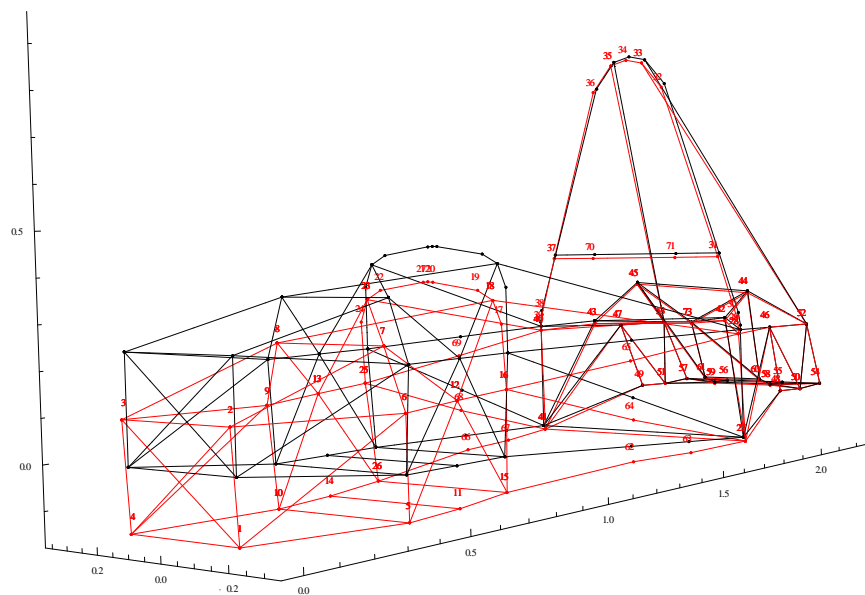


Figura 29-Vista isométrica de la deformación del cortante estático

En este caso el resultado del FEM realizado con el software comercial es de **98.56[MPa]**, y el resultado del FEM programado es de **102.49 [MPa]** con lo que se tiene una desviación de **3.99%**.

4.1.3 Rebote o “Bump”

El “Bump” mide la flexión estática vertical considerando al chasis como una viga simplemente apoyada en los puntos de la suspensión. La carga que recibe es el equivalente a que el vehículo se despegue del piso y caiga con una aceleración de 3.5G. Los desplazamientos de este caso de carga se muestran en la siguiente figura. En negro se muestra la estructura original y en rojo la estructura deformada con un factor de escala de 500.

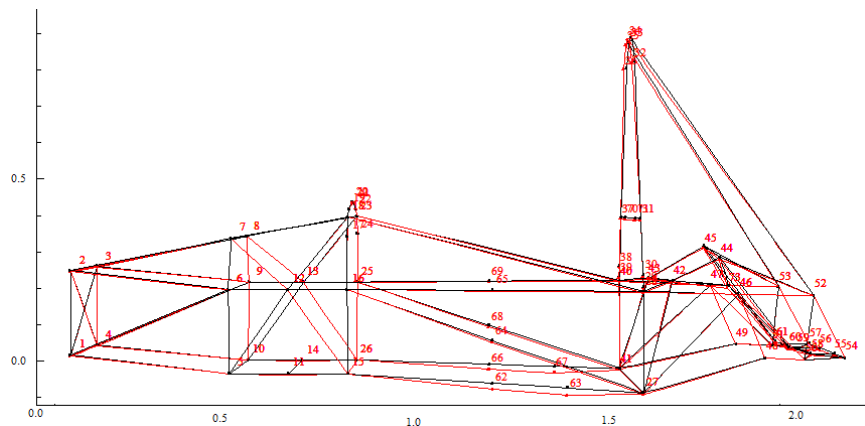


Figura 30-Vista lateral del modo de deformación del “Bump”

En este caso el resultado del FEM realizado con el software comercial es de **94.65 [MPa]**, y el resultado del FEM programado es de **101.26 [MPa]** con lo que se tiene una desviación de **6.97 %**.

4.1.4 Curveo de izquierda a derecha y de derecha a izquierda

Como uno de los requerimientos principales de un vehículo de carreras es la alta maniobrabilidad, el curveo presenta una condición de carga donde el chasis se deforma a flexión horizontal. En este caso de carga se generan hasta 1.5G de aceleración lateral. Los desplazamientos originados por el curveo se muestra en la siguiente imagen. En negro se muestra la estructura original y en rojo la estructura deformada con un factor de escala de 500.

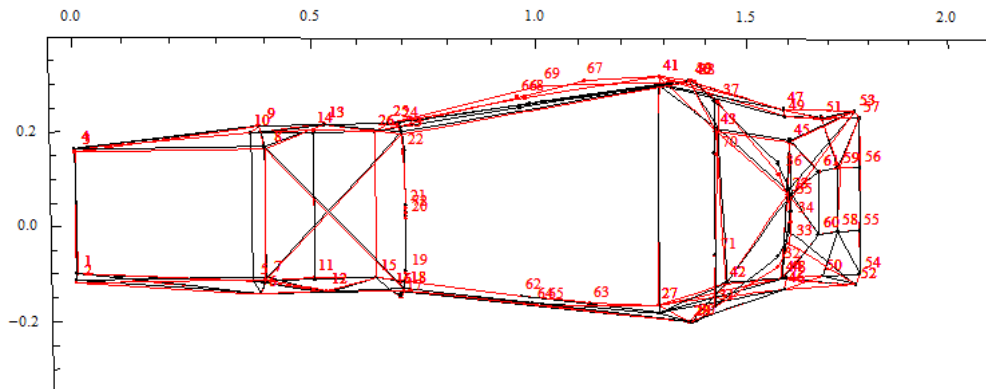


Figura 31-Deformación del curveo

En este caso el resultado del FEM realizado con el software comercial es de **223.65 [MPa]**, y el resultado del FEM programado es de **236.25[MPa]** con lo que se tiene una desviación de **5.63%**.

4.1.5 Aceleración

La condición de carga de aceleración se presenta en la utilización normal del vehículo y se requiere garantizar que el chasis no presenta deformaciones considerables ante las cargas inerciales generadas por 1.5G de aceleración. Los desplazamientos originados por la aceleración se muestran en la siguiente imagen. En negro se muestra la estructura original y en rojo la estructura deformada con un factor de escala de 500.

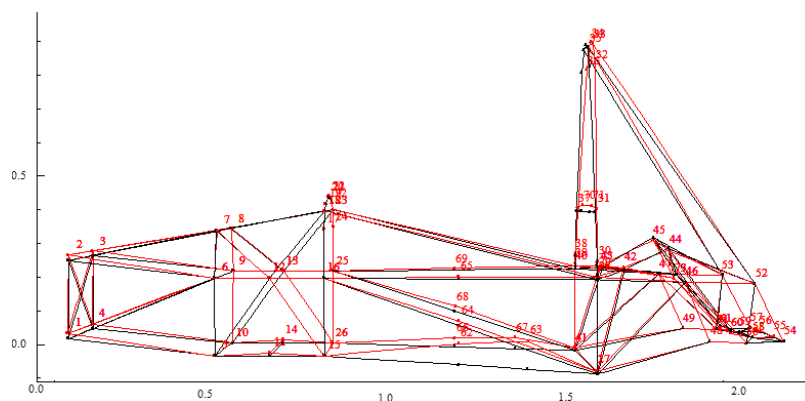


Figura 32-Vista lateral de la deformación originada por la aceleración

En este caso el resultado del FEM realizado con el software comercial es de **39.87 [MPa]**, y el resultado del FEM programado es de **43.71 [MPa]** con lo que se tiene una desviación de **9.61%**.

4.1.6 Frenado

En este caso de carga al igual que el caso de aceleración, el chasis debe de ser suficientemente rígido para garantizar la integridad estructural ante las cargas inerciales generadas por el frenado. Los desplazamientos originados por el frenado se muestran en la siguiente imagen. En negro se muestra la estructura original y en rojo la estructura deformada con un factor de escala de 500.

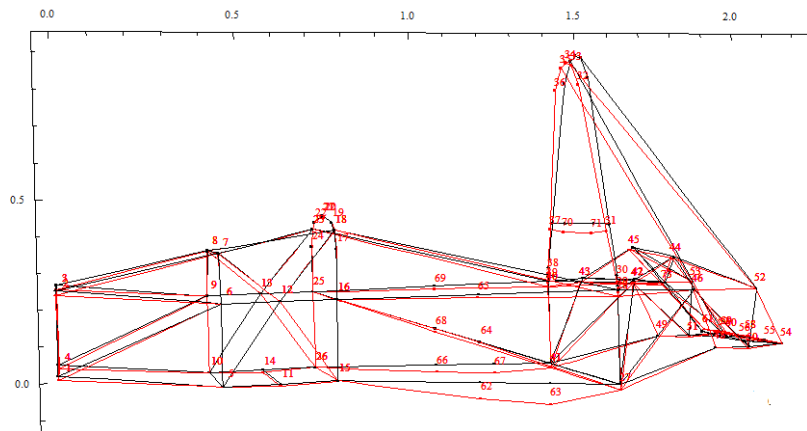


Figura 293-Vista lateral de la deformación al frenado

En este caso el resultado del FEM realizado con el software comercial es de **52.25[MPa]**, y el resultado del FEM programado es de **56.47 [MPa]** con lo que se tiene una desviación de **8.08%**.

4.2 Resultados del FEM Inicial

A manera de resumen se muestra en la siguiente tabla el resultado de los esfuerzos, expresados en Mega Pascales, por sub-estructura obtenidos a partir del FEM Inicial.

Tabla 15-Esfuerzos por sub-estructuras

Caso de carga	Barras anti-vuelco	Estructura Primaria	Estructura Secundaria	Bulkhead	Base de diferencial
Rigidez torsional	55.28	67.97	33.51	9.78	63.41
Cortante estático	102.49	100.85	61.17	32.76	20.60
Bump	15.88	101.26	33.33	6.07	28.23
Curveo ID	59.29	236.25	117.78	5.94	54.31
Curveo DI	59.29	236.25	117.78	5.94	5.431
Aceleración	6.32	43.71	10.99	1.45	10.33
Frenado	7.06	56.47	63.94	1.61	53.40

A continuación se muestran los esfuerzos máximos en Mega Pascales del FEM programado para el algoritmo de optimización comparados con el resultado obtenido del software comercial. También se muestran los porcentajes de desviación.

Tabla 16-Comparación de los esfuerzos del software comercial y el FEM programado

Caso de carga	FEM programado	FEM con software	Porcentaje de error
Rigidez torsional	67.97	65.24	4.17%
Cortante estático	102.49	98.56	3.99%
Bump	101.26	94.65	6.97%
Curveo ID	236.25	223.65	5.63%
Cueveo DI	236.25	223.65	5.63%
Aceleración	43.71	39.87	9.61%
Frenado	56.47	52.25	8.08%

De las tablas anteriores se ve que los esfuerzos de la estructura están por debajo del esfuerzo de fluencia del acero, sin embargo para algunos casos de carga el nivel de esfuerzos está casi en el límite como es el caso del curveo. En este caso los esfuerzos son tan grandes ya que la inercia del piloto en los puntos del cinturón de seguridad genera que los elementos de la estructura lateral de impactos trabajen 100% a flexión ya que se le aplica lateralmente una carga equivalente a la masa del piloto acelerado 1.5G.

De los resultados del Software comercial Hyperworks® se puede ver que los esfuerzos calculados por el FEM programado no sobrepasan el 10% de desviación. Esto indica que el valor de desplazamiento, deformación y esfuerzo es un valor aceptable sin que se pueda saber cuál es el valor verdadero ya que para obtener un valor verdadero se requiere la validación mediante pruebas físicas.

Por el nivel de esfuerzos de toda la estructura se puede concluir que el problema es buen candidato para optimización ya que se pueden aumentar los esfuerzos para algunos casos de carga hasta un nivel razonable que se mantenga por debajo de un esfuerzo límite definido por un factor de seguridad de 1.5 el cual equivale a 160 [MPa]. Esto se puede ver en la siguiente gráfica donde se muestran los esfuerzos de cada elemento para todos los casos de carga y el esfuerzo correspondiente del factor de seguridad.

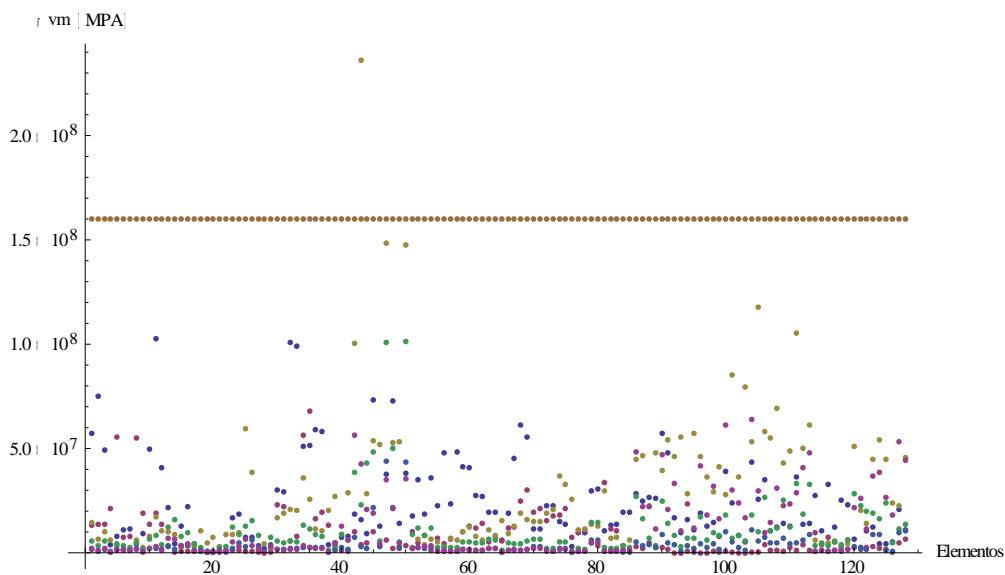


Figura 34-Esfuerzos por elementos para todos los casos de carga (Cada caso de carga tiene un color diferente)

4.2.1 Volumen y masa inicial

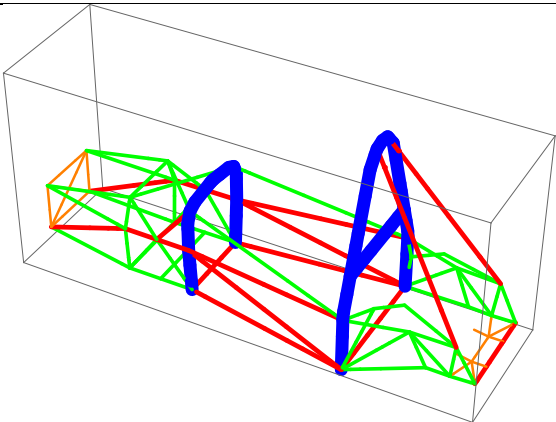
El volumen de la estructura se calcula a partir del área transversal de los elementos de la estructura y de la longitud de los mismos. Este cálculo también es aproximado ya que no se consideran factores de manufactura como el abocardado de los tubos para que empaten unos con otros ni el peso de la soldadura. El volumen inicial es multiplicado por la densidad del acero para determinar la masa de la estructura. Para los perfiles iniciales se tiene una masa de **38.77** kilogramos. Este valor al ser verificado con un software de CAD, que arroja una masa de **36.52** kilogramos, entonces hay una disminución de **2.24** kilogramos, que equivale al **5.8%**. Esta diferencia corresponde a los abocardados necesarios para que empaten los tubos y la estructura se pueda fabricar.

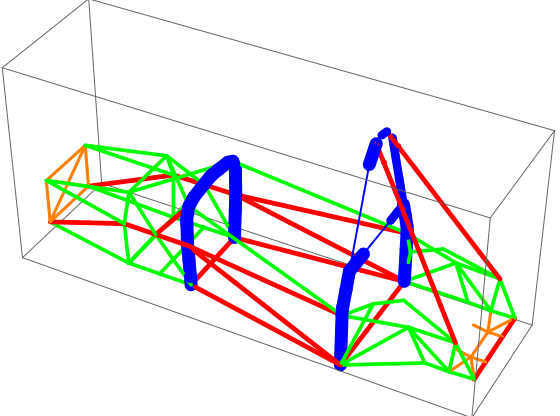
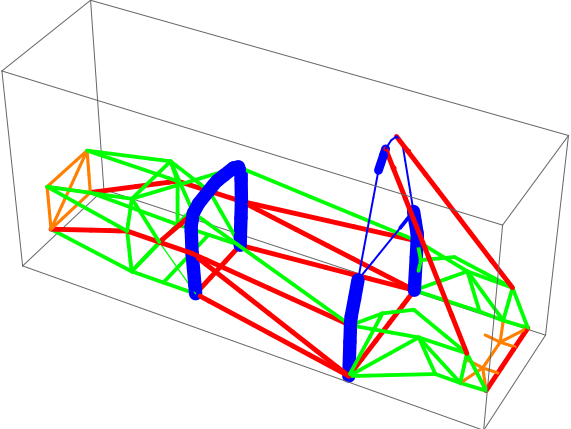
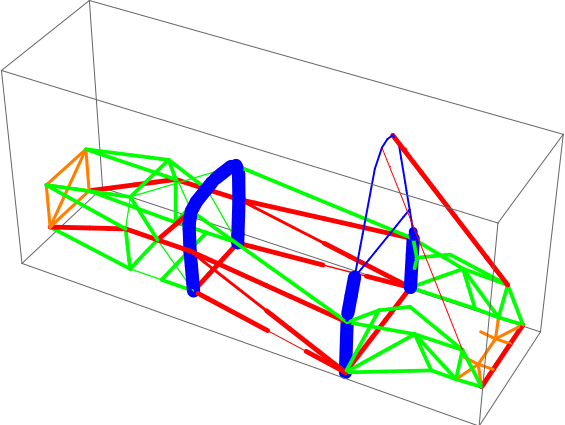
4.3 Evolución de la estructura

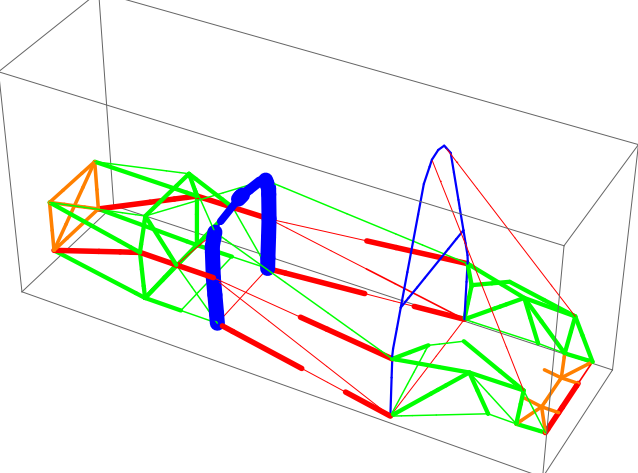
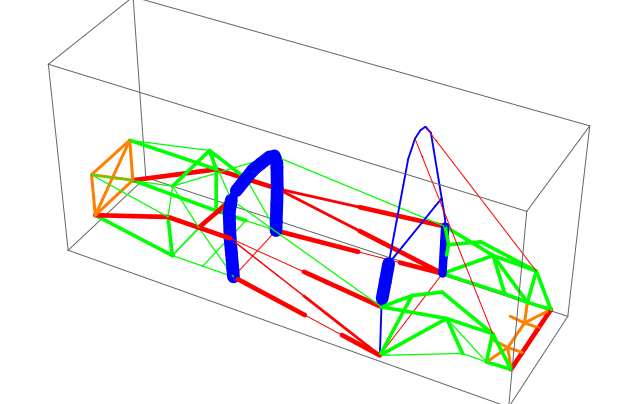
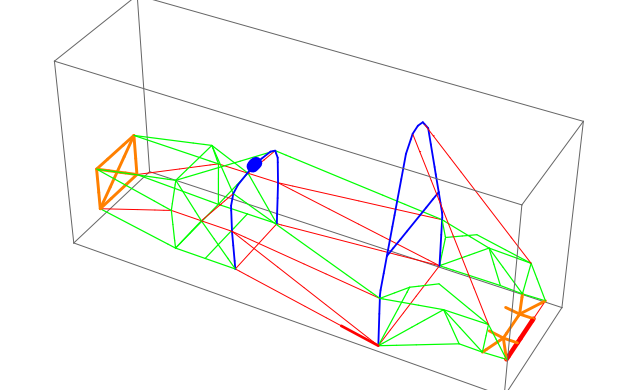
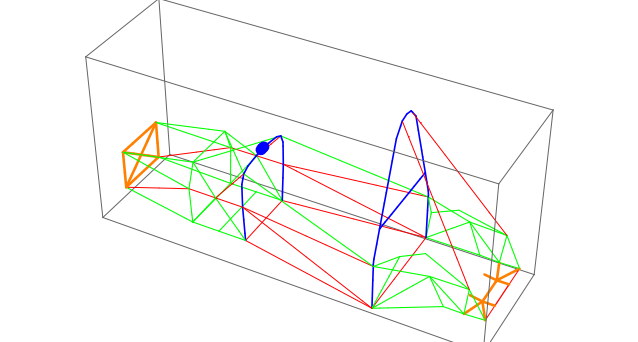
Como se mencionó en el capítulo anterior, el proceso de optimización inicia con una tasa de rechazo de 5% y una tasa de adición de 200%. Con estos valores la estructura evolucionará al principio muy rápido ya que la mayoría de los esfuerzos están dentro del intervalo marcado por las referencias. A medida que las tasas evolutivas se acerquen al valor límite, los cambios en la estructura serán más lentos.

En las siguientes figuras se muestra el historial evolutivo de los diferentes estados permanentes u óptimos locales. En cada una de las imágenes se muestran las tasas de rechazo y adición y la masa de la estructura. La estructura óptima se muestra en la última imagen. En esta se ha alcanzado una estabilización de las tasas de rechazo.

Tabla 17-Historial de evolución

Imagen de perfiles	Estado permanente	TER	TEA	Masa [kg]
	1	200%	5%	38.5532

	10	182%	5.4%	38.3515
	60	110%	8.9%	37.7476
	150	100%	22.02%	35.2182

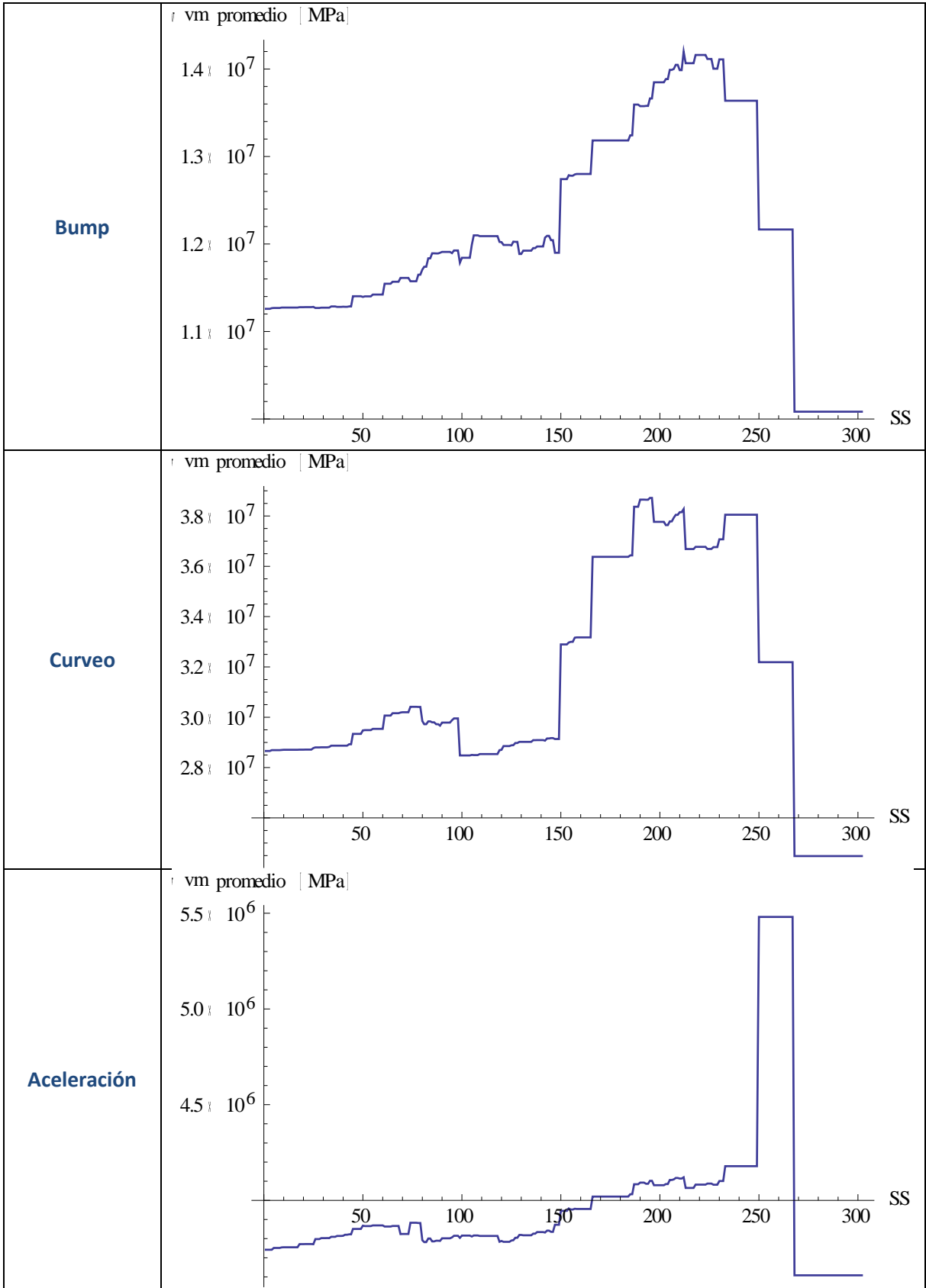
	200	100%	36.21%	34.9203
	250	100	59.56%	31.556
	269	100%	71.96%	31.3941
	302	100%	99.93%	31.3905

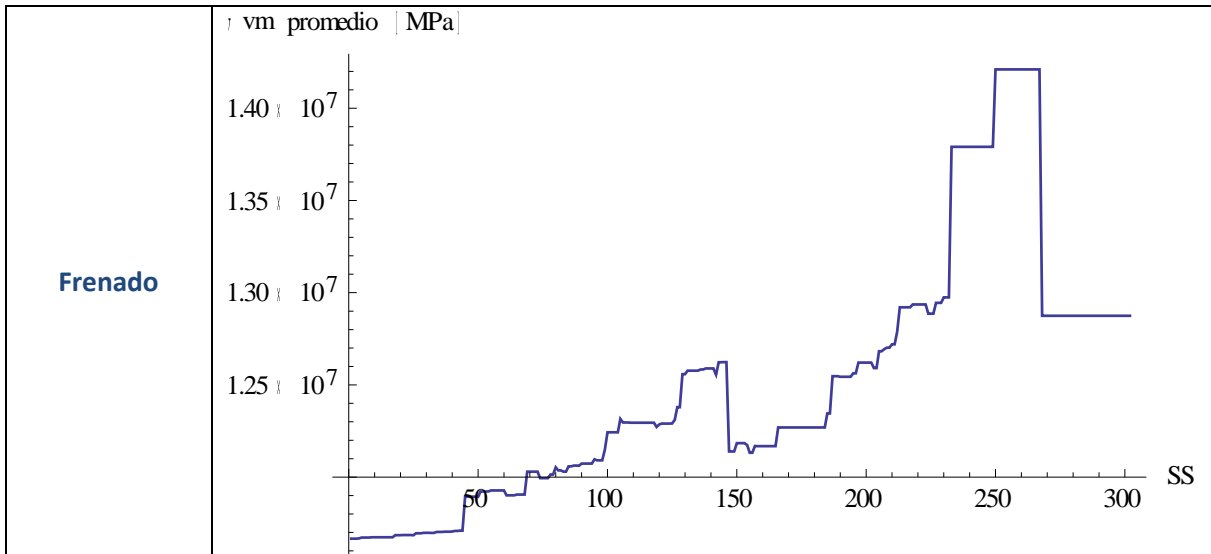
A medida de que avanza la evolución de la estructura se elimina material de las áreas menos esforzadas que son los elementos de la barra anti-vuelco principal y los elementos superiores de la nariz. Posteriormente se elimina material de la estructura lateral de impactos y de la barra anti-vuelco frontal. Se observa que la disminución de material es más lenta en la parte trasera del chasis. Esto se debe a que la mayoría de las condiciones de frontera esenciales o restricciones de desplazamientos se encuentran en los puntos de la suspensión lo que provoca que se presenten los mayores esfuerzos en estas áreas.

El historial evolutivo del esfuerzo promedio de cada caso de carga se muestra en la siguiente tabla. Donde se distingue que a medida que avanza la evolución de la estructura el esfuerzo promedio se hace cada vez más grande esto nos dice que la estructura está homogenizando el nivel de esfuerzos.

Tabla 18-Esfuerzo máximo y promedio para cada caso de carga (Donde SS son los estados permanentes por sus siglas en inglés)

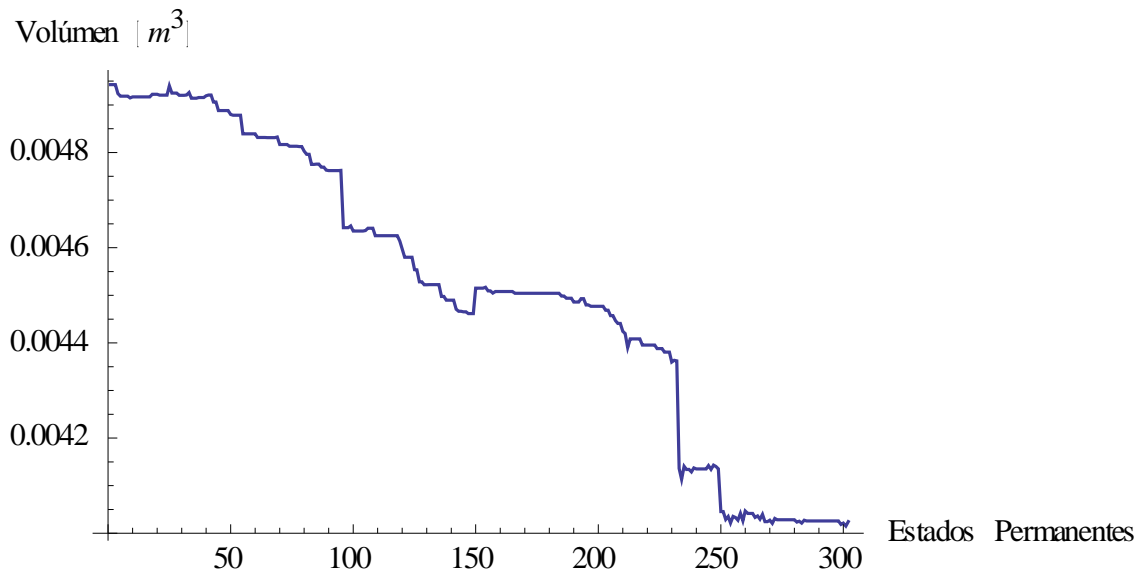
Caso de carga	Gráfica de esfuerzo promedio vs estados permanentes
<p>Rigidez torsional</p>	
<p>Cortante estático</p>	





A medida que evoluciona la estructura hacia el óptimo se ve un claro unmento en los esfuerzos, esto se debe a que el material de los elementos se reduce hasta que el nivel de esfuerzos de la estructura este por debajo del valor límite. Es aquí donde se ve la homogenización de los esfuerzos a lo largo de la evolución.

El historial de reducción de volumen y de masa se muestra en la siguiente figura donde se grafica en el eje de las ordenadas la masa y el volumen; en el eje de las abscisas son los estados permanentes de la optimización.



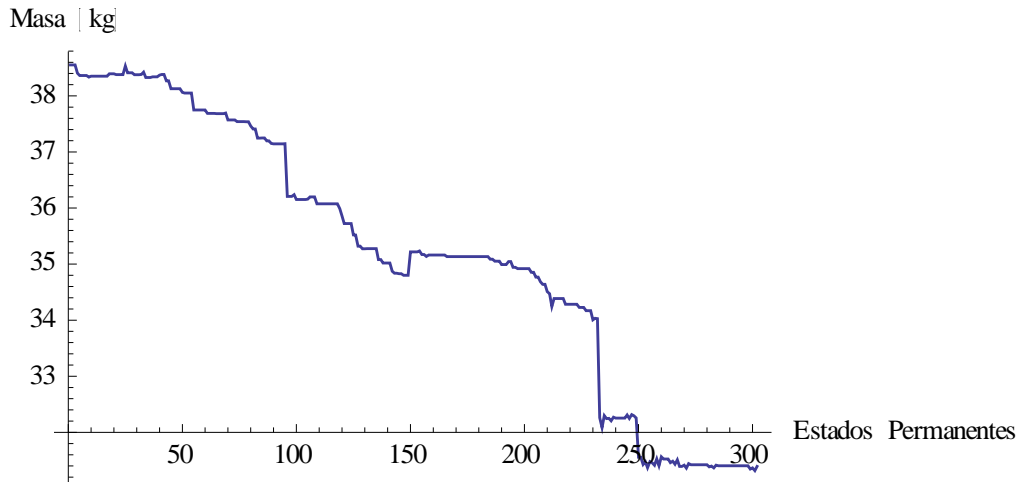


Figura 35-Gráfica del historial de reducción de volumen y masa contra estados permanentes

El volumen final de la estructura es de **31.39** kilogramos. Este volumen implica una disminución de **19.04 %** del volumen de la estructura inicial. Con esto se concluye que el objetivo de la optimización se alcanzó de manera satisfactoria. Con base en el diseño del chasis del año 2015, que es menos robusto que la estructura inicial con una masa de **35.14** kilogramos, se tiene una disminución de **10.67%**. Esta disminución de volumen y su implicación en peso conlleva una mejora en el rendimiento del vehículo sin sacrificar la rigidez necesaria para garantizar la función del chasis.

La comparación de los esfuerzos máximos del diseño inicial con el diseño óptimo se muestra en la siguiente tabla donde se puede ver que los esfuerzos de la estructura óptima están todos por debajo del factor de seguridad. También esto se puede apreciar en la siguiente gráfica (Figura 37), donde se muestran los esfuerzos de cada elemento para todos los casos de carga y el esfuerzo correspondiente del factor de seguridad.

Tabla 19-Comparación de los esfuerzos máximos del FEM Inicial con el diseño óptimo

Caso de carga	FEM programado	FEM con software	Porcentaje de disminución o aumento
Rigidez torsional	67.97	66.3614	2.36%
Cortante estático	102.499	115.834	-13.01%
Bump	101.26	101.887	-0.61%
Curveo ID	236.251	154.154	34.74%
Cueveo DI	236.251	154.154	34.74%
Aceleración	43.7132	48.2152	-9.45%
Frenado	56.4772	69.9934	-10.29%

De la tabla anterior los porcentajes de disminución se muestran positivos y los de aumento negativos. Aquí también se puede ver la homogenización de los esfuerzos. Pero para tener una referencia más gráfica se muestra en la siguiente figura el nivel de esfuerzos de cada elemento finito para cada caso de carga

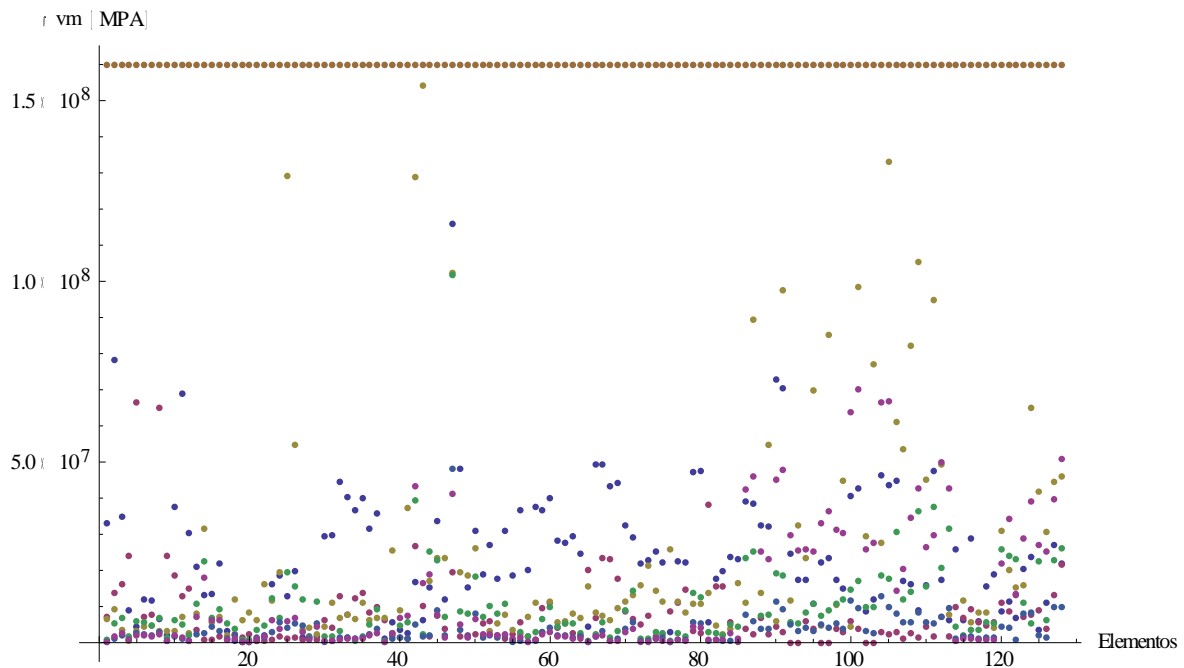


Figura 36- Esfuerzos por elementos para todos los casos de carga en la última iteración (Cada caso de carga tiene un color diferente)

Como se puede notar en la tabla 17 y en la figura 36, se requirieron de treientos dos estados permanentes para llegar al óptimo. De los resultados de la optimización se puede ver una caída en el nivel de esfuerzos de la estructura lo cual implica que para tener un resultado confiable se requiere descartar los últimos estados permanentes. Si se restringen los estados permanentes a doscientos treinta el resultado es el siguiente:

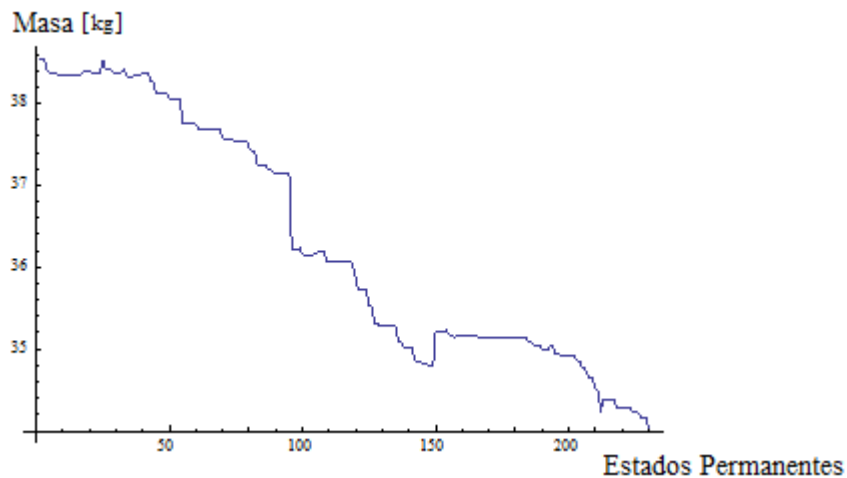


Figura 37-Disminución de masa con estado permanente restringido

La masa para este estado permanente es de **34.03** kilogramos la cual implica una disminución de **12.22%** del peso de la estructura. Este resultado es más conservador y agrega un factor de seguridad mayor. Sin embargo estos resultados requieren de mayores análisis para poder tener un

diseño final ya que la optimización estructural plantea una mejora en un concepto pero siempre se requiere del diseño de detalle para obtener un diseño final. Al comparar la disminución de peso de la estructura de este estado permanente con el chasis del año 2015 se tiene una disminución de **3.15%** equivalentes a la reducción de **2.11** kilogramos que puede no ser demasiado pero para vehículos de competencia es un valor aceptable.

Los perfiles finales de la estructura se muestran en la siguiente tabla:

Sub-estructura		Perfiles en la iteración 230	Perfiles en la última iteración
Barras anti-vuelco	Barra anti-vuelco principal	Calibre 14 de 1 ¼"	Cal12(1")
	Barra anti-vuelco frontal	Calibre 13 de 1"	Cal12(1")
Estructuras primarias	Soportes de barras anti-vuelco	Calibre 18 de 1 ½"	Calibre 16 de 1"
	Base de barras anti-vuelco	Calibre 16 de 1"	Calibre 16 de 1"
	Estructura lateral contra impactos	Calibre 20 de 1 ½"	Calibre 16 de 1"
	Jacking point	Calibre 18 de 1 ½"	Calibre 16 de 1"
Estructura secundaria	Nariz	Calibre 14 de 7/8"	Calibre 18 de 1"
	Elemento superior de la estructura lateral contra impactos	Calibre 18 de 1"	Calibre 18 de 1"
	Caja del motor	Calibre 18 de 1"	Calibre 18 de 1"
	Soportes de motor	Calibre 18 de 1"	Calibre 18 de 1"

Tabla 20- Perfiles finales en el estado permanente 230 y en el último estado permanente

Capítulo 5-Conclusiones

En este trabajo se presentó una metodología para encontrar la solución del problema de diseño de la selección adecuada de los perfiles que integran el chasis del prototipo fórmula SAE de la UNAM. Ésta se basó en la integración de la metodología descrita por la optimización estructural evolutiva (ESO) y el Análisis por Elementos Finitos para variar los perfiles de la estructura de una forma paulatina. Esto permitió generar un diseño óptimo con el objetivo de reducir el peso del chasis considerando todas las restricciones del problema.

Se eligió la Optimización Estructural Evolutiva como método de optimización ya que es muy fácil de programar y se acopla muy bien al Elemento Finito para tener un criterio de optimización confiable. En este caso el criterio está basado en el nivel de esfuerzos de la estructura, sin embargo es relativamente fácil cambiar la programación para que el criterio sean desplazamientos, deformaciones o incluso frecuencias naturales de la estructura.

Para lograr un diseño óptimo se requirió estudiar a detalle el problema y sus restricciones. Partiendo de los requerimientos del entorno donde existirá el diseño que es la competencia de Fórmula SAE. En esta se restringen los materiales y los espesores de pared de los perfiles que se pueden utilizar en cada sub-estructura que integra el chasis. Estas restricciones se adecuaron a los perfiles comerciales que se encuentran en el mercado mexicano ya que de lo contrario la estructura óptima sería imposible de fabricar. Esto último limitó la evolución de la estructura ya que el espacio solución está limitado por estos perfiles. El ideal sería poder variar el espesor de los tubos que integran el chasis de forma continua, es decir que se pueda tomar cualquier espesor de pared en un rango establecido y que del resultado de la optimización se fabriquen los tubos necesarios sin la restricción de los materiales existentes en el mercado.

También fue de suma importancia la investigación de las condiciones de utilización del vehículo ya que de éstas se derivan las condiciones de carga analizadas por el FEM, para así garantizar que la estructura cumpla con su función de sostener todos los componentes de una forma segura, transmitir y soportar las cargas externas e internas y de brindar un habitáculo seguro para el conductor.

Una vez que definido el problema de optimización se realizó la programación del algoritmo de optimización por reglas evolutivas. Como se mencionó, el algoritmo utiliza el nivel de esfuerzos de Von Mises de cada elemento que integra la estructura y realiza la eliminación de material al seleccionar un perfil con menores propiedades geométricas cuando el nivel de esfuerzos del elemento esté por debajo de un esfuerzo límite definido por un factor de seguridad de las propiedades del material.

La selección de perfiles final implica la utilización de ocho perfiles diferentes más los perfiles que no fueron variables de diseño, en total son diez perfiles distintos. Para el equipo de la Facultad de Ingeniería representa una mejor selección dado que se tiene una homogenización de los esfuerzos de la estructura como se puede ver en la figura 36. También cabe resaltar que para prototipos anteriores solamente se utilizaron cinco perfiles distintos los cuales se seleccionaron de tal forma que cumplieran el reglamento sin tener certeza que la elección de estos sea la más conveniente en términos de eficiencia estructural.

El objetivo de la optimización se alcanzó al disminuir la masa de la estructura en 19% con respecto a la estructura inicial. De la masa calculada se tiene que tomar en cuenta que no se consideran muchos aspectos que también afectan este cálculo. Estos aspectos son el material de aporte del

proceso de soldadura de la estructura y la eliminación de material para realizar los abocardados necesarios para que los tubos empaten.

La disminución representa aproximadamente el 8% del peso del vehículo lo cual implica un mejoramiento en las prestaciones de aceleración, frenado, maniobrabilidad y eficiencia de combustible que presenta el prototipo fórmula y que son evaluadas puntualmente en la competencia.

Como objetivo secundario del proceso de optimización se tiene la homogenización de esfuerzos que la estructura presenta ante todos los casos de carga. Esto genera un notable beneficio ya que la falla de la estructura se presentará cuando una parte de esta se encuentre sumamente esforzada mientras que otras regiones se encuentren sin sentir esfuerzos.

La optimización estructural al ser una herramienta para el mejoramiento de un concepto. Es por esto que se requiere de análisis más detallados para entender el comportamiento real de la estructura y así poder tener un diseño final.

Trabajo Futuro

Una vez que se tiene una selección justificada de los perfiles que integran la estructura del chasis es necesario hacer el diseño de detalle. En este se deben de incluir análisis más extensos que los requeridos por el algoritmo de optimización con condiciones de frontera más cercanas a la realidad. De esto se resalta la importancia de la simulación dinámica en pista "Lap-time-simulation".

Por poner ejemplos de los análisis que se deben de hacer para el sistema de chasis se mencionan los siguientes:

- **Análisis estáticos con mallado en dos o tres dimensiones** para determinar los concentradores de esfuerzos en las uniones y así poder atenuarlos.
- **Análisis de Impacto** con el objetivo de garantizar la seguridad del piloto ante cualquier circunstancia.
- **Análisis en frecuencia** para determinar los modos de vibración y así determinar si bajo las condiciones de utilización el chasis entra en amplificación de fuerzas o si se tiene un amortiguamiento estructural para el confort o si las uniones por soldadura fallarán por fatiga.

Posteriormente a los análisis se debe determinar el comportamiento real de la estructura, esto es la validación. Actualmente se hace la prueba física para medir la Rigidez Torsional del chasis pero no es suficiente, se deben de hacer pruebas de uniones para determinar la resistencia de la soldadura, pruebas de impactos, e idealmente instrumentar el chasis con galgas extensiométricas para obtener las condiciones de frontera reales y así retroalimentar los análisis.

En el caso de optimización se requiere hacer optimización de geometrías o triangulaciones. Esto se podría hacer con optimización topológica si se considera al chasis como un cascarón y se aplican las condiciones de carga de cada componente que se ata al chasis. De la forma resultante se podría aplicar la selección de perfiles para tener una completa justificación de un chasis espacial tubular con el mejor desempeño posible y a una fracción del costo de un monocasco.

Para el equipo completo se requieren de grandes pasos para competir con los recursos que cuentan otras universidades. Estos recursos son desde la disponibilidad de materiales hasta las instalaciones para fabricar sistemas integrados como los monocascos de materiales compuestos. Sin embargo la competencia apremia más el desarrollo y la inventiva que la disponibilidad de recursos. Es por esto que la recomendación es no seguir los pasos de los demás equipos, si bien son un buen ejemplo a seguir por los triunfos que han logrado, debemos darles pelea y derrotarlos haciendo el prototipo de la Facultad de Ingeniería un vehículo integrado en el que se piensen todos los detalles que lo integran sin perder de vista el objetivo de la competencia que es un máximo desempeño en pista al menor costo de producción posible.

Referencias

- [1] Velázquez-Villegas, S.-G. (2006). Diseño óptimo evolutivo. *INGENIERÍA Investigación y Tecnología VII*, 139-150.
- [2] Formula SAE, R. (2015). *2015 Formula SAE Rules*. Retrieved from SAE International: http://students.sae.org/cds/formulaseries/rules/2015-16_fsae_rules.pdf
- [3] Várgaz, M. M. (2015). *Diseño y análisis de la prueba para medir la rigidez torsional del chasis FSAE UM-524*.
- [4] Xie, Y. X. (1997). *Evolutionary Structural Optimization*. Australia: Springer.
- [5] Vargas, I. I. (2011). *Diseño y construcción de un chasis tubular para el proyecto "Fórmula SAE UNAM"*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [6] Riley, W. B. (2002-01-3300). *Design, Analysis and Testing of a Formula SAE Car Chassis*. SAE International.
- [7] Singh, R. P. (2010). *Structural performance analysis of Formula SAE car*. *Jurnal Mekanikal No.31*, 46-31.
- [8] Genta, G. (2009). *The automotive chassis*. Springer.
- [9] Osorio, F. L. (2011). *Optimización Estructural Evolutiva: Desarrollo de una Aplicación de Cómputo para el Diseño Óptimo de Elementos Bajo Esfuerzo Plano*. Ciudad Universitaria D.F: UNAM F.I.
- [10] Lang, Q.Q. (2006). *Performance Based Optimizatio*
- [11] Gallagher, R. (1985). *Diseño Estructural Óptimo - Una Reseña*. Revista internacional de métodos numéricos para el cálculo y diseño en Ingeniería.
- [12] Norton (2001). *Diseño de elementos de máquinas*
- [13] Y.M Xie, V. Y. (2006). *3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization*. Springer-Verlag.
- [14] Villegaz, F. V. (2014). *Notas de Análisis por Elementos Finitos*.
- [15] Instituto de Ingeniería UNAM. *Notas de Elemento finito*
- [16] M. A Bhatti. *Fundamental Finit Element Analysis and Applications*. Wiley
- [17] *Racecar Engineering*, Formula Student 2013. www.racecar-engineering.com