TRANSFORMACIONES LINEALES

Fascículo

Leda Speziale San Vicente

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

TRANSFORMACIONES LINEALES
Fascículo

Leda Speziale San Vicente

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

SPEZIALE San Vicente, Leda. *Transformaciones lineales. Fascículo*. México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2010, 86 p.

Transformaciones lineales. Fascículo

Edición preliminar, 2007.
Primera edición, 2010.
ISBN 978-970-32-4490-4

Impreso y hecho en México.

Índice

Prólogo

Este fascículo cubre los contenidos del tema Transformaciones Lineales del programa vigente de la asignatura Álgebra Lineal. Está dirigido principalmente a los estudiantes, con la intención de que su lectura permita la comprensión de la teoría a través de un gran número de ejemplos desarrollados con todo detalle. El lenguaje empleado es sencillo y coloquial, sin perder la formalidad matemática, con la intención de que sea accesible a los lectores.

En la primera sección se presentan, de manera breve y concisa, los conceptos antecedentes necesarios para la comprensión del tema que trata el fascículo.

Deseo agradecer a la Facultad de Ingeniería y a sus autoridades el apoyo brindado para la escritura de este trabajo. También agradezco a los físicos Juan Velázquez Torres y Sergio Roberto Arzamendi Pérez, responsables de la coordinación de la asignatura, por sus valiosos comentarios a las diferentes versiones del manuscrito. De manera muy especial quiero expresar mi profundo agradecimiento a la ingeniera Cecilia Teresa Carmona Téllez por su dedicación y conocimientos manifestados en la transcripción a la computadora de todo el material manuscrito.

Por último, segura de que a pesar del cuidado y empeño puesto en este trabajo, éste puede contener errores involuntarios; suplico a los lectores me envíen el señalamiento de ellos, así como todos sus comentarios y sugerencias para el mejoramiento de la obra.

Leda Speziale San Vicente

leda@cancun.fi-a.unam.mx
Cubículo D–6
Matemáticas Aplicadas, DCB
Facultad de Ingeniería. UNAM

Marzo de 2010

I Conceptos preliminares

Matriz

En matemáticas, una *matriz* es un arreglo de números en renglones y columnas completas.

La *transpuesta* de una matriz A de m renglones y n columnas es otra matriz A^T cuyos renglones son las columnas de A y cuyas columnas son los renglones de A, en consecuencia tiene n renglones y m columnas.

Si el número de renglones es igual al número de columnas, la matriz es *cuadrada*.

Se llama *diagonal principal* de una matriz cuadrada al conjunto de elementos para los cuales el número del renglón donde están colocados es el mismo que el número de la columna. *Diagonal secundaria* es el conjunto de elementos colocados en lo que *sería* la otra diagonal del cuadrado.

Ejemplo: Para la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow$ Diagonal Principal $\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow$ Diagonal secundaria

Una matriz cuadrada en la cual todos los elementos fuera de su diagonal principal son *ceros,* recibe el nombre de *matriz diagonal.*

La matriz que tiene en su diagonal principal números *uno* y fuera de dicha diagonal *ceros,* se llama matriz *identidad.*

La matriz *inversa* de una matriz B es la matriz B^{-1} que premultiplicada o posmultiplicada por B da como producto la identidad.

Ejemplo: La matriz $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ es la inversa de $B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, ya que

$$B^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B\,B^{-1}$$

Existen tres *transformaciones elementales* sobre los renglones de una matriz y ellas son:

- intercambiar dos renglones,
- sustituir un renglón por otro cuyos elementos son el producto de un número *diferente* de cero por los respectivos elementos del renglón original,

- sustituir un renglón por otro cuyos elementos son la suma de los del original más el producto de un número por el correspondiente elemento de otro renglón.

Ejemplo de la última: Para $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, considerando el primer y tercer renglón, el *nuevo* tercer renglón tiene por elementos: $(-5)+3(1)=-2$; $-1+3(-2)=-7$ y $3+3(1)=6$ y la matriz resulta $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dos matrices F, G son *semejantes* o *equivalentes* si una de ellas se obtiene efectuando un número *finito* de transformaciones elementales a la otra.

Ejemplo: $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = G$

G es semejante o equivalente de F.

Forma canónica escalonada de una matriz A es otra matriz, semejante de A en la que el primer elemento diferente de cero de cada renglón es *uno* y además, arriba y debajo de ese *uno* sólo hay *ceros*.

Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 6 & -8 \\ 2 & -4 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = D.$$ La matriz D es la forma canónica escalonada de C.

Determinante

El *determinante* de una matriz cuadrada es un *número* que resulta de realizar *ciertas* operaciones con los elementos de la matriz .

Si la matriz tiene sólo un renglón y una columna, tiene únicamente un elemento y su determinante es igual a ese *único* elemento.

Ejemplo: Si $A = [-5]$, entonces $\det A = -5$.

Cuando la matriz tiene dos renglones y dos columnas, su determinante (de orden dos) es igual a la resta del producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo: Para $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (2)(-1) = 6 + 2 = 8$

Para un elemento del determinante, su *menor* es el nuevo determinante que resulta de eliminar el renglón y la columna a los que pertenece el elemento.

Ejemplo: En $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, el elemento a_{12} está en el primer renglón y en la segunda columna (en este ejemplo es el número -1), tiene por *menor* a $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$ $= 0 - 20 = -20$. El menor de a_{33} es: $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4$.

El *cofactor* de un elemento es igual a su *menor* multiplicado por $(-1)^{\alpha}$ donde α es la suma del número del renglón más el número de la columna en los que está el elemento.

Ejemplo: En $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$,

el cofactor del elemento a_{12} es: $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(-20) = 20$,

el cofactor del elemento a_{33} es: $C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (+1)(-4) = -4$

En general, un determinante puede obtenerse por el método llamado *desarrollo por cofactores* respecto a una línea (renglón o columna) del determinante. Con este método el determinante es igual a la suma de los productos de cada uno de los elementos de una línea por su cofactor.

Ejemplo: El desarrollo por cofactores respecto a la primera columna de $\det A$ resulta:

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} =$$

$$= 2\left[(-1)^2\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & -3\end{vmatrix}\right] + 0\left[(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}\right] + 5\left[(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right] =$$

$$= 2(+1)(-6) + 0(-1)(0) + 5(+1)(-2) = -12 + 0 - 10 = -22.$$

El valor del determinante es *único* y puede obtenerse haciendo el desarrollo respecto a cualesquiera de sus líneas.

Operación binaria

Operación binaria definida en un conjunto es una *regla* que se aplica a una pareja ordenada de elementos de ese conjunto.

Ejemplo: La operación ♣ definida en el conjunto A es: la suma del cuadrado del primer elemento más el triple del segundo elemento.
Con símbolos se expresa así: $\forall\, a, b \in A$, $a ♣ b = a^2 + 3b$.

Propiedades de una operación binaria: Si $\forall\, a, b \in B$, $(a \bigstar b) \in B$, $\bigstar$ tiene la propiedad de *cerradura,* también suele decirse que el conjunto B es cerrado respecto a $\bigstar$.
Si $\forall\, a, b \in B$, $a \bigstar b = b \bigstar a$, $\bigstar$ es *conmutativa.*
$\bigstar$ es *asociativa* si $\forall\, a, b, c \in B$, $a \bigstar (b \bigstar c) = (a \bigstar b) \bigstar c$.
$\bigstar$ tiene *elemento idéntico* si existe un elemento $e \in B$ tal que $\forall\, a \in B$,
$a \bigstar e = e \bigstar a = a$; el idéntico es el mismo para *todos* los elementos del conjunto.
$\bigstar$ tiene *elementos inversos* si $\forall\, a \in B$, existe $\hat{a} \in B$ tal que $a \bigstar \hat{a} = e$.
$\bigstar$ es *distributiva* sobre otra operación ⅄ definida en el mismo conjunto, si $\forall\, a, b, c \in B$, $a \bigstar (b ⅄ c) = (a \bigstar b) ⅄ (a \bigstar c) = (b ⅄ c) \bigstar a = (b \bigstar a) ⅄ (c \bigstar a)$.

Sistema algebraico

Un conjunto en el que están definidas una o dos operaciones binarias recibe el nombre de *sistema algebraico.* Si el conjunto es A y la operación ✪, el sistema se representa con (A, ✪). Si el conjunto es B y las operaciones ⊙ y ◈, el sistema es (B, ⊙, ◈).

Estructura algebraica

La *estructura* de un sistema depende del número de operaciones y de las propiedades que ellas tengan en el conjunto.

Grupo es la estructura de un sistema con una sola operación y tal que tenga las propiedades de : *cerradura*, *asociatividad* , *existencia de idéntico* y *existencia de inversos*. Si además, la operación es *conmutativa*, el grupo es *abeliano* o *conmutativo*.

Campo es la estructura de un sistema de dos operaciones (B, ⊙, ◈) tal que (B, ⊙) tenga estructura de grupo abeliano con *e* como idéntico y además, la segunda operación ◈ sea asociativa, conmutativa, tenga idéntico (llamada la *unidad* del campo), tenga los inversos de todos los elementos de B *diferentes* del elemento *e* (idéntico respecto a la primera operación), y ◈ sea distributiva sobre ⊙.
A esta estructura también suele llamársele *cuerpo*.

Espacio Vectorial sobre un Campo

Un espacio vectorial es un conjunto V acompañado de un sistema algebraico (K , + , ·) con estructura de campo. El conjunto llamado espacio vectorial sobre el campo, debe ser tal que:

- en él esté definida una operación + llamada *adición* que forme con el conjunto un sistema algebraico (V , +) con estructura de *grupo abeliano*.

- esté definida un regla (seudo-operación) llamada *multiplicación por un escalar*, aplicable a dos elementos: el primero perteneciente al campo K y el segundo al espacio V, tal que el resultado sea un elemento del espacio V, y que además satisfaga las siguientes condiciones:

  $\forall\ \alpha,\beta \in$ K y $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in$ V
  - $(\alpha+\beta)\,\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$
  - $\alpha\,(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$
  - $\alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\,\bar{u}$
  - si 1 es la unidad de K entonces $1\bar{v} = \bar{v}$

En otras palabras, *espacio vectorial* es un conjunto en el que se satisfacen *diez* condiciones: cinco respecto a la estructura de grupo abeliano con la adición y las otras cinco que involucran la multiplicación por un escalar.
Si el campo es de los números reales, suele decirse que se trata de un *espacio real*; hablar de un *espacio complejo* indica que está definido en el campo de los números complejos.

Vector y escalar

Se llama *vector*, a todo elemento de un espacio vectorial.
Escalar es todo elemento del campo .

Ejemplo : El conjunto P_{3C} de los polinomios de grado menor o igual a tres, con coeficientes complejos es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, y respecto a las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales en los polinomios. Por lo que, $(3 - i)\, x^3 + 2\, x^2 - 4\, i\, x + (1 + 7i)$ es un vector del mencionado espacio, y los números reales, por ejemplo, 5 , 6 , -1 son escalares.

El elemento idéntico respecto a la adición en todo espacio recibe el nombre de *vector nulo o vector cero.*

Isomorfismo entre espacios vectoriales

Isomorfismo entre dos espacios V y W sobre el mismo campo K, es una función f cuyo dominio es V y cuyo codominio es W: $f : V \to W$. Además, f debe ser *biyectiva* y

tal que $\forall\ \bar{u},\ \bar{v} \in V$ y $\forall\ \alpha \in K$ $$\begin{cases} f(\bar{u} +_V \bar{v}) = f(\bar{u}) +_W f(\bar{v}) \\ f(\alpha \cdot \bar{u}) \quad = \alpha \cdot f(\bar{u}) \end{cases}$$

donde $+_V$ es la adición en V; $+_W$ la adición en W; el punto de la izquierda en la segunda igualdad, la multiplicación por un escalar en V y el punto de la derecha la multiplicación por un escalar en W.

Si existe un isomorfismo entre dos espacios, se dice que éstos son *isomorfos* entre sí.

Subespacio

Un subconjunto de un espacio vectorial V sobre un campo, tal que, respecto al mismo campo y a las mismas adición y multiplicación por un escalar del espacio, es por sí mismo un espacio, se dice que es un subespacio del espacio V.

En otras palabras, *subespacio* de V es un subconjunto de V que cumple las diez condiciones de espacio, respecto a los *escalares, la adición y la multiplicación por escalar* del espacio V.

Ejemplo : $A = \{\ ax^2 + 3bx + a+b \ \mid\ a, b \in C\ \}$, subconjunto de P_{3C} , satisface las diez condiciones de espacio para el campo de los reales , la adición y multiplicación por escalar usuales en los polinomios. Por lo tanto A es un subespacio de P_{3C} .

El subconjunto de un espacio que contiene sólo al vector nulo, es un subespacio que recibe el nombre de *espacio nulo.*

Combinación lineal

Una combinación lineal de *n* vectores es una *suma* de *n* sumandos, donde cada sumando está formado por uno de los vectores multiplicado por un escalar, pero ninguno de los *n* vectores está en más de un sumando.

Ejemplo : Una combinación lineal de los vectores

$\overline{a} = x^2 + 2$; $\overline{b} = -x + 5$; $\overline{c} = 3x^2 + 2x - 1$ es :

$$3\overline{a} - \overline{b} + 4\overline{c} = (3x^2+6)+(x-5)+(12x^2+8x-4) = 15x^2+9x-3$$

otra combinación de los mismos vectores es: $0\overline{a} + 7\overline{b} + 0\overline{c} = 7\overline{b} = -7x + 35$

otra más es : $-2\overline{a} + 5\overline{b} = -2x^2 - 5x + 21$

Dependencia lineal

Un vector depende linealmente de otros, si él puede expresarse como una combinación lineal de esos otros.

Como ejemplo, el vector $15x^2 + 9x - 3$ del ejemplo anterior, depende linealmente de los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$.

El vector nulo, siempre puede expresarse como combinación lineal de otros vectores,

ya que : $\overline{0} = 0\overline{v_1} + 0\overline{v_2} + \cdots + 0\overline{v_n}$

Por lo que , el vector nulo *siempre* es linealmente dependiente de otros vectores.

Conjunto Linealmente Dependiente

Un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* si *al menos* uno de sus elementos puede expresarse como combinación lineal de los otros.
Todo conjunto que contiene al vector nulo es linealmente dependiente.

En particular, si el conjunto *sólo* contiene al vector nulo, se considera linealmente dependiente.

Conjunto Linealmente Independiente

Un conjunto de vectores es *linealmente independiente* si *ninguno* de sus vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros del conjunto. Es decir, es independiente si no es dependiente.

En particular, si el conjunto tiene sólo un elemento y él es un vector diferente del vector cero o nulo, dicho conjunto se considera linealmente independiente .

Un método para determinar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente, consiste en plantear la llamada *ecuación de dependencia lineal* del conjunto, que para el conjunto $\{ \overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n} \}$ es: $\alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \cdots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{0}$. Si dicha ecuación tiene como *única* solución la trivial, es decir $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, entonces el conjunto es linealmente independiente. En caso contrario es dependiente.

Conjunto Generador

Un conjunto G es generador de un espacio V, si G es un subconjunto de V y además, *todo* elemento de V puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de G.

Ejemplo: El conjunto $G = \{ x^2 + 2 , -x^2 , 7 \}$ es generador del espacio $T = \{ ax^2 + b \mid a , b \in R \}$ sobre R, ya que, además de que G es un subconjunto de T, $\forall a , b \in R$, siempre existen α_1 , α_2 y $\alpha_3 \in R$ tales que:

$$\alpha_1 (x^2 + 2) + \alpha_2 (-x^2) + \alpha_3 (7) = a x^2 + b$$

Para determinar las alfas, se debe resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 \qquad &= a \text{ --------- } (1) \\ 2\alpha_1 \qquad + 7\alpha_3 &= b \text{ --------- } (2) \end{aligned}$$

Restando de (2) la ecuación (1) multiplicada por dos , se obtiene $7\alpha_3 + 2 \alpha_2 = b - 2a$

$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} (b - 2a - 7\alpha_3)$; de (1) $\alpha_1 = a + \alpha_2$

El sistema es compatible, aunque indeterminado, ya que para cada valor real de α_3 se obtiene un α_2 y, por ende un α_1.

Sin embargo, G no es generador del espacio $P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R \}$, pues si $b \neq 0$, *no* existen alfas tales que $\alpha_1 (x^2 + 2) + \alpha_2 (-x^2) + \alpha_3 (7) = ax^2 + bx + c$.

Base de un Espacio

Se llama *base* de un espacio V, a un conjunto de vectores que sea generador de V y además, linealmente independiente.

Ejemplo: Una base del espacio $P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R \}$, es el conjunto $\{ x^2 , x , 1 \}$. Otra base del mismo espacio es : $\{ x^2 + x + 1 , -x + 7 , -2x^2 + x - 3 \}$

En particular, el *espacio nulo* no tiene base. Pero, salvo dicho espacio, todos los demás tienen una infinidad de bases.

Todas las bases de un mismo espacio tienen el mismo número de elementos, es decir, tienen la misma cardinalidad.

Vector de coordenadas

Al conjunto ordenado de escalares que, multiplicados respectivamente por los elementos de una base B de un espacio W forman una combinación lineal que es igual a un vector $\overline{u} \in W$, se le llama *vector de coordenadas de $\overline{u}$ respecto a la base B,* y se expresa como $(\overline{u})_B$.

Ejemplo: $B = \{ x^2 + 1 , -2x , x + 3 \}$ es una base del espacio

$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a , b , c \in R\}$. El vector de coordenadas de $\overline{p} = 2x^2 + 7x - 7 \in P_2$

respecto a la base B es: $(\overline{p})_B = (2, -5, -3)$ ya que

$2(x^2 + 1) - 5(-2x) - 3(x + 3) = 2x^2 + 2 + 10x - 3x - 9 = 2x^2 + 7x - 7 = \overline{p}$.

Dimensión de un Espacio

La *dimensión* de un espacio V es el *número* de elementos (cardinalidad) de cualquiera de sus bases. Se expresa con el símbolo dim V.

Ejemplo: La dimensión del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales es tres, lo que se expresa con $\dim P_2 = 3$.

En particular, la dimensión del *espacio nulo* (que no tiene bases) se considera, por definición, igual al *número* cero, esto es $\dim \{ \overline{0} \} = 0$.

II Transformaciones

Función, en matemáticas, es una *regla* (secuencia de acciones) que se aplica a un elemento de un conjunto llamado *dominio de la función*, con la que se obtiene uno y sólo un elemento de un conjunto al que se llama *codominio de la función.*

Si a la función la representamos con f, al dominio con A y al codominio con B, lo anterior se expresa en forma simbólica con :

$f : A \rightarrow B$ que se lee : f es una función de A en B.

Al elemento de B que se obtiene al aplicar la regla f a un elemento x de A, se llama *imagen de x bajo la función f*, esta imagen se representa con $f(x)$.

La palabra transformación, en general significa cambio. Pero, en matemáticas una *transformación* es una función cuyos dominio y codominio son espacios vectoriales y por ende sus elementos son vectores. Por esto, se dice que una transformación es una función entre vectores.

Una transformación está perfectamente definida si se conoce de ella su dominio, codominio y regla de correspondencia.

Ejemplo 1.II
Un ejemplo de transformación es $T : R^2 \rightarrow P_2$, donde R^2 es el espacio real de todas las parejas de números reales, P_2 el de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes complejos y la regla de T se define con :

$$T(a, b) = (a + bi)x^2 + 3ai\,x + (b + 2i).$$

Respecto a esta transformación, la imagen de una pareja de reales, como (2 , -1) , es :

$$T(2, -1) = (2 - i)x^2 + 6i\,x + (-1 + 2i)$$

y la de (0 , 3) es : $T(0, 3) = 3i\,x^2 + 3 + 2i$

◇

Al conjunto de las imágenes de todos los elementos del dominio, que siempre es un subconjunto del codominio, se llama *recorrido* de la transformación y se representa con T (V) si T es el nombre de la transformación y V el de su dominio, esto es $T : V \rightarrow W$.

Núcleo de una transformación es el conjunto de vectores del dominio cuya imagen es el *vector cero* del codominio. El núcleo de T se representa con N (T) .

Al núcleo, suele llamársele *kernel*, que es la palabra núcleo en alemán, y al recorrido *imagen de la transformación;* debido a esto, N (T) también se representa con Ker T y T (V) con Im T .

En el ejemplo 1.II, el recorrido es el subconjunto de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes complejos, donde el coeficiente del término de primer grado es un imaginario puro (complejo con parte real nula) y el término independiente es un complejo cuya parte imaginaria siempre es dos.

El vector cero de los polinomios tiene todos sus coeficientes nulos. En el ejemplo no existe alguna pareja (a , b) que tenga por imagen al vector cero del codominio, ya que el término independiente siempre tiene parte imaginaria dos, por lo que el núcleo es, en este ejemplo, el conjunto vacío, esto es : $N(T) = \phi$.

Ejemplo 2.II

Para la transformación $T_1 : R^3 \rightarrow P_2$, donde R^3 es el espacio real de las ternas de números reales , P_2 el espacio real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, y tal que $T(a, b, c) = (a+b)x^2 + (2a+2b)x + b - c$,

el recorrido es : $T_1(R^3) = \{mx^2 + 2mx + n \mid m,\ n \in R\}$, ya que, en la imagen de la terna (a , b , c) el coeficiente de x es el doble del de x^2.

Por otra parte, debido a que $a + b = 0$ implica que $b = -a$, y que $b - c = 0$ implica $c = b$,

el núcleo es : $N(T_1) = \{(a, b, c) \mid b = -a, c = b, a, b, c \in R\} = \{(a, -a, -a) \mid a \in R\}$.

◇

Ejemplo 3.II

Para $S : M_2 \rightarrow R^3$, donde M_2 representa el espacio real de las matrices cuadradas de orden dos con elementos reales, R^3 el de las ternas de números reales, con regla :

$$S\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a+b, c-d, a+b+2),$$ el recorrido es : $S(M_2) = \{(x, y, x+2) \mid x, y \in R\}$

y el núcleo $N(S) = \phi$, ya que si $a + b$ es cero, entonces $a + b + 2$ es dos y ninguna matriz del dominio tiene como imagen al vector cero de R^3, que es la terna (0 , 0 , 0) .

◇

Ejemplo 4.II

Para $H: C^2 \rightarrow D_2$, donde C^2 es el espacio real de las parejas de números complejos y D_2 el de las matrices diagonales de orden dos , y cuya regla está definida con :

$$H(a,b) = \begin{bmatrix} a+\bar{a} & 0 \\ 0 & 2a - b + 2\bar{a} - \bar{b} \end{bmatrix}$$; si a los complejos a y b los expresamos con: $m + ni$

y $r + si$, respectivamente, la regla de H queda : $H(m+ni\ ,\ r+si) = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 4m - 2r \end{bmatrix}$,

ya que la suma de un complejo más su conjugado es igual al doble de la parte real.

El recorrido es : $H(C^2) = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \middle| \ x, y \in R \right\} = D_2$

y el núcleo es: $N(H) = \left\{ (fi\ ,\ gi) \middle| \ f, g \in R \right\}$, que puede expresarse también como:

$$N(H) = \left\{ \left(c\, e^{\frac{2j+1}{2}\pi i}\ ,\ d\, e^{\frac{2k+1}{2}\pi i} \right) \middle| \ c, d \in \text{a los reales no negativos};\ j, k \in Z \right\}.$$

Debido a que en la regla sólo intervienen las partes reales de las parejas de complejos, resulta que el núcleo está formado por todas las parejas de imaginarios puros, los cuales en su expresión exponencial, tienen como exponente de **e** a un número impar entre dos multiplicado por πi .

◇

En los ejemplos presentados, el recorrido y el núcleo pueden obtenerse por simple observación, pero en general no es tan directa esta obtención. Posteriormente se verán otros ejemplos y los procedimientos convenientes para la determinación del núcleo y el recorrido de una transformación.

En las aplicaciones, las transformaciones más frecuentes son las llamadas *transformaciones lineales*.

Una transformación $T: V \rightarrow W$ es lineal si: $\begin{cases} T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \\ T(\alpha \bar{u}) = \alpha\ T(\bar{u}) \end{cases}$

$\alpha\ \bar{u}$ es el producto del vector $\bar{u}$ por un escalar en el espacio V, por lo que α pertenece al campo de V; $\alpha\ T(\bar{u})$ es el producto del vector $T(\bar{u})$ por un escalar en el espacio W, por lo que α debe pertenecer al campo de W. Esto significa que para que se cumpla la segunda condición, el campo sobre el que está definido el dominio debe ser el mismo campo sobre el que se define el codominio.

Una transformación $S : C^2 \rightarrow R^2$, donde C^2 es el espacio *complejo* de las parejas de números complejos y R^2 es el espacio *real* de las parejas de números reales, *no* es lineal independientemente de su regla de correspondencia.

Ejemplo 5.II
Para $H : C^2 \rightarrow R^2$, donde C^2 es el espacio *real* de las parejas de números complejos, es necesario conocer su regla de correspondencia para saber si satisface las condiciones de la definición de linealidad.

Así, si $H(a+bi\ ,\ c+di) = (a-b+2c\ ,\ c+d)$

$$\forall\ \bar{u} = (a+bi\ ,\ c+di)\ ,\ \ \bar{v} = (e+fi\ ,\ g+hi) \in C^2$$

$\bar{u} + \bar{v} = ((a+e)+(b+f)i\ ,\ (c+g)+(d+h)i\ )$ con lo que

$H(\bar{u} + \bar{v}) = ((a+e)-(b+f)+2(c+g)\ ,\ (c+g)+(d+h))$, por otro lado,

$$H(\bar{u})+H(\bar{v}) = (a-b+2c\ ,\ c+d) + (e-f+2g\ ,\ g+h) =$$

$$= ((a+e)-(b+f)+2(c+g)\ ,\ (c+g)+(d+h)) = H(\bar{u} + \bar{v})$$

Además, $\alpha\ (\bar{u}\ ) = (\alpha(a+bi)\ ,\ \alpha(c+di)) = (\alpha a+\alpha bi\ ,\alpha c+\alpha di)$

$$H(\alpha\bar{u}) = (\alpha a - \alpha b + 2\alpha c\ ,\ \alpha c+\alpha d) = \alpha\ (a-b+2c\ ,\ c+d) = \alpha\ H(\bar{u}\ ),$$

con lo que concluimos que H es una transformación lineal.

◈

Ejemplo 6.II
Para $G : C^2 \rightarrow R^2$, donde C^2 es el espacio real de las parejas de complejos y R^2 el de las parejas de reales, tal que

$G(a+bi\ ,\ c+di) = (a+c\ ,\ b+d^2)$, si $\bar{u} = (a+bi\ ,c+di)$ y $\bar{v} = (e+fi\ ,g+hi)$

se tiene que: $\bar{u} + \bar{v} = (a+e+(b+f)i\ ,\ c+g+(d+h)i\ )$

$$G(\bar{u} + \bar{v}) = (\ a+e+c+g\ ,\ (b+f)+(d+h)^2\ )$$

Por otra parte, $G(\bar{u})+G(\bar{v}) = (a+c\ ,\ b+d^2) + (e+g\ ,\ f+h^2)$

$= (a + c + e + g \ , \ b + f + d^2 + h^2)$

$G(\bar{u} + \bar{v})$ *no* es igual a $G(\bar{u}) + G(\bar{v})$, debido a que $(d+h)^2 \neq d^2 + h^2$; ya que $(d+h)^2 = d^2 + 2dh + h^2$, por lo tanto G no es lineal.

◇

Ejemplo 7.II

En la transformación $Q: R^3 \rightarrow P_2$ donde P_2 es el espacio real de los polinomios de grado menor o igual a dos, y $Q(a, b, c) = ax^2 + bcx - a$;

si $\bar{u} = (a, b, c)$; $\bar{v} = (d, e, f)$, entonces $\bar{u} + \bar{v} = (a+d \ , \ b+e \ , \ c+f)$

$$
\begin{aligned}
Q(\bar{u} + \bar{v}) &= Q\ (a+d \ , \ b+e \ , \ c+f) \\
&= (a+d)x^2 + (b+e)(c+f)x - (a+d) \\
&= (a+d)x^2 + (bc + bf + ec + ef)x - (a+d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(\bar{u}) + Q(\bar{v}) &= ax^2 + bcx - a + dx^2 + efx - d = \\
&= (a+d)x^2 + (bc + ef)x - (a+d)
\end{aligned}
$$

Debido a que, $bc + bf + ec + ef$ es diferente de $bc + ef$, coeficientes de x en $Q(\bar{u} + \bar{v})$ y en $Q(\bar{u}) + Q(\bar{v})$, respectivamente, $Q(\bar{u} + \bar{v}) \neq Q(\bar{u}) + Q(\bar{v})$ y la transformación Q no es lineal..

◇

De manera intuitiva, podemos decir que la regla correspondiente a una transformación *lineal* sólo puede incluir combinaciones lineales de los elementos *libres* contenidos en el elemento genérico del dominio.

En la transformación *lineal* del ejemplo 5.II, $H: C^2 \rightarrow R^2$, donde $C^2 = \{ (a+bi , c+di) \mid a,b,c,d \in R\}$ y cuya regla es $H(a+bi , c+di) = (a-b+2c , c+d)$, tanto el primer elemento de la imagen: a-b+2c, como el segundo: c+d , son combinaciones lineales de los elementos a, b, c y d.

Sin embargo, en la transformación de 6.II, $G: C^2 \rightarrow R^2$ que no es lineal, el segundo elemento de la imagen: $b + d^2$, no es una combinación lineal de a, b, c y d debido al exponente dos en d.

En 7.II, $Q: R^3 \rightarrow P_2$, que tampoco es lineal, la imagen dada por la regla tiene en el coeficiente de x al producto de las segunda y tercera componentes de la terna (a , b , c) que no es una combinación lineal de esas componentes.

Ejemplo 8.II

Puede verse que en una transformación $F : R^2 \rightarrow P_2$, donde $F(a, b) = (a + 2)x^2 + (2a + b)x - b$, el coeficiente de x^2: $a + 2$, no es combinación lineal de a y de b, por lo que la transformación no es lineal.

◇

Ejemplo 9.II

En $K : C^2 \rightarrow M_{2D}$ entre los espacios complejos $C^2 = \{ (z, w) \mid z, w \in C \}$ y el de matrices diagonales $M_{2D} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in C \right\}$, tal que $K(z, w) = \begin{bmatrix} 2z + w & 0 \\ 0 & z - 3w \end{bmatrix}$, puede verse que es lineal ya que, además de que tanto dominio como codominio están definidos sobre el mismo campo (el de los complejos), los elementos de la imagen: $2z + w$, $z - 3w$ y los dos nulos, son combinaciones lineales de z y w.

◇

Si $\bar{u}$, $\bar{v}$ son dos vectores del núcleo de una transformación lineal T de V en W,

$T(\bar{u}) = \bar{0}_W$, $T(\bar{v}) = \bar{0}_W$ y, por la linealidad de T,

$T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = T(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{0}_W + \bar{0}_W = \bar{0}_W$; es decir, $\bar{u} + \bar{v} \in N(T)$. También por la linealidad $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u}) = \alpha\bar{0}_W = \bar{0}_W$, o sea, $\alpha\bar{u} \in N(T)$ con lo que se ha demostrado que el núcleo no sólo es un subconjunto del dominio, sino que es un subespacio de él. De manera semejante puede demostrarse que el recorrido es un subespacio del codominio. Así, podemos hablar de dimensión, tanto del recorrido, como del núcleo; a estas dimensiones suele dárseles nombre: a la del núcleo se llama *nulidad* de la transformación y a la del recorrido *rango* de la transformación. Además, puede demostrarse* que la dimensión del dominio es igual a la suma de la del núcleo más la del recorrido. Esto es:

Si $T : V \rightarrow W$ es lineal, entonces $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V)$
$= \text{nulidad de } T + \text{rango de } T$

---

* Álgebra Lineal de Claudio Pita Ruiz, McGraw Hill, 1991 pp. 295 y 296

Toda base de un espacio es un conjunto generador por lo que, todo elemento del espacio puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de una base. Así, todo elemento del dominio de una transformación lineal puede expresarse como combinación lineal de los elementos de una base del dominio. Debido a las condiciones de linealidad, la imagen de *ese* cualquier elemento es la *misma* combinación lineal, pero de las *imágenes* de los elementos de esa base. Con esto, un generador del recorrido de una transformación lineal es el conjunto de las imágenes de los elementos de una base del dominio.

La conclusión anterior puede expresarse en forma simbólica:

si $T : V \rightarrow W$ es lineal y $B = \{ \overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n} \}$ es una base de V, entonces el conjunto $G = \{ T(\overline{b_1}), T(\overline{b_2}), \ldots, T(\overline{b_n}) \}$ es generador de $T(V)$.

Con esto, para obtener $T(V)$ basta con obtener el conjunto $L(G)$ generado por G.

Para determinar el núcleo de una transformación lineal, se resuelve el sistema homogéneo que resulta de igualar a cero cada elemento de la imagen en la regla de correspondencia.

Ejemplo 10.II

$B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ es una base de R^3, dominio de la transformación lineal $T : R^3 \rightarrow P_2$ tal que, $T(a, b, c) = (a - 2b)x^2 + (b + c)x + (a + 2c)$.

Las imágenes de los elementos de B son:

$T(1, 0, 0) = x^2 + 1$, $T(0, 1, 0) = -2x^2 + x$, $T(0, 0, 1) = x + 2$,

así el conjunto $G = \{ x^2 + 1, -2x^2 + x, x + 2 \}$ es un generador de $T(R^3)$, o lo que es lo mismo, el conjunto generado por G es el recorrido $T(R^3)$: $L(G) = T(R^3)$.

Para obtener el espacio generado por G planteamos la ecuación

$$\alpha (x^2 + 1) + \beta (-2x^2 + x) + \gamma (x + 2) = ax^2 + bx + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

que es equivalente al sistema $\begin{cases} \alpha - 2\beta & = a \\ \quad\ \beta + \gamma & = b \\ \alpha \quad + 2\gamma & = c \end{cases}$; con él, determinamos la relación que debe existir entre a , b , c para que sea compatible, es decir, para que existan α , β y γ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 1 & 0 & 2 & | & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 2 & 2 & | & c-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & | & c-a-2b \end{bmatrix}$$

Para que existan los valores de α , β , γ que satisfagan la ecuación (e) es necesario que $c - a - 2b = 0$, esto es, $c = a + 2b$, por lo tanto $T(R^3) = \{ ax^2 + bx + a + 2b \mid a, b \in R \}$

Otra forma de determinar L(G) es usando el isomorfismo f tal que aplicado a un elemento de P_2 se obtiene el vector de coordenadas (terna de reales) respecto a la base $\{x^2, x, 1\}$;

para los elementos del conjunto G se tiene: $\begin{cases} f(x^2+1) = (1,0,1) \\ f(-2x^2+x) = (-2,1,0) \\ f(x+2) = (0,1,2) \end{cases}$

Ahora, formamos una matriz A cuyos renglones son las ternas obtenidas y determinamos el espacio renglón de la matriz A, el cual es isomorfo de L(G) y, por ende de $T(R^3)$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Esta *forma canónica escalonada* de la matriz A nos permite conocer la forma del espacio $L(A_r)$ como una combinación de los renglones primero y segundo, con lo que $L(A_r) = \{ (a, b, a+2b) \mid a, b \in R \}$. Para conocer el recorrido $T(R^3)$, al elemento genérico de $L(A_r)$ le aplicamos el isomorfismo inverso de f y llegamos a $T(R^3) = \{ ax^2 + bx + a + 2b \mid a, b \in R \}$; la dimensión de $T(R^3)$ es dos.

El núcleo se determina resolviendo el sistema $\begin{cases} a - 2b = 0 \text{ ...... (1)} \\ b + c = 0 \text{ ...... (2)} \\ a + 2c = 0 \text{ ...... (3)} \end{cases}$

De la ecuación (1) $a = 2b$, y de la (2) $c = -b$ que satisfacen también a la ecuación (3) por lo que el núcleo es $N(T) = \{ (a, b, c) \mid a = 2b, c = -b, b \in R \}$ que puede expresarse en diferentes formas : $\{ (2b, b, -b) \mid b \in R \} = \{ (-2c, -c, c) \mid c \in R \}$, o bien en la forma :

$N(T) = \{ (a, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}) \mid a \in R \}$; $\dim N(T) = 1$; $\dim R^3 = 3$ y se cumple:

$\dim R^3 = \dim N(T) + \dim T(R^3) = 1 + 2$

◇

Ejemplo 11.II

Para la transformación lineal $H : C^2 \rightarrow R^3$ entre los espacios reales C^2 y R^3, cuya regla de correspondencia es: $H (a + bi , c + di) = (a - b + 2c , 2b + c + d , 2a + 5c + d)$, una base del dominio C^2 es : $\{ (1 , 0) , (i , 0) , (0 , 1) , (0 , i) \}$ y las imágenes de los

elementos de ella resultan : $\begin{cases} H(1,0)=(1,0,2) \\ H(i,0)=(-1,2,0) \\ H(0,1)=(2,1,5) \\ H(0,i)=(0,1,1) \end{cases}$. Así, un conjunto generador del

recorrido $H (C^2)$ es: $G = \{ (1 , 0 , 2) , (-1 , 2 , 0) , (2 , 1 , 5) , (0 , 1 , 1) \}$, cuyos elementos los colocamos como renglones de una matriz A, la que llevamos a su forma canónica escalonada, esto es :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, ya que $L (A_r) = L (G) = H (C^2)$, queda

$H(C^2) = \{ (a , b , 2a + b) \mid a , b \in R \}$ y $\dim H (C^2) = 2$

Para obtener el núcleo N (H) resolvemos el sistema $\begin{cases} a - b + 2c \quad = 0 \\ \quad 2b + c + d = 0 \\ 2a \quad + 5c + d = 0 \end{cases}$ en forma

matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

del primer renglón tenemos

$a - b + 2c = 0 \Rightarrow b = a + 2c$; del segundo renglón $2b + c + d = 0 \Rightarrow d = -2b - c = -2a - 5c$

con lo que el núcleo es: $N (H) = \{ (a + (a + 2c)i , c + (-2a - 5c)i) \mid a , c \in R \}$ y

$\dim N(H) = 2$. La dimensión del dominio, espacio real de las parejas de complejos es cuatro y podemos comprobar que: $\dim C^2 = \dim N (H) + \dim H (C^2)$.

◇

Ejemplo 12.II

Si G : $M_{2C} \rightarrow P_{2C}$ es la transformación lineal donde $M_{2C} = \left\{ \begin{bmatrix} m & n \\ r & s \end{bmatrix} \middle| \, m, n, r, s \in C \right\}$;

$P_{2C} = \{ ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in C \}$; y la regla de correspondencia de G está dada por :

$$G \begin{bmatrix} m & n \\ r & s \end{bmatrix} = (2m - n + s)\, x^2 + (3m - n + r)\, x + (-n - 2r + 3s)$$

Para la determinación del recorrido G (M_{2C}) consideramos la base natural B de M_{2C} ,

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, obtenemos la imagen de cada elemento :

$$G\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2x^2 + 3x \; ; \; G\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -x^2 - x - 1 \; ; \; G\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = x - 2 \; ; \; G\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = x^2 + 3$$

Si usamos el isomorfismo $f : P_{2C} \rightarrow C^3$ tal que $f(\overline{p}) = (\overline{p})_D$, vector de coordenadas de $\overline{p}$ respecto a la base D, donde D es la base natural de P_{2C}: $D = \{ x^2, x, 1 \}$; a los vectores isomorfos de las imágenes anteriores los consideramos renglones de la matriz A y de ella determinamos su espacio renglón, éste es isomorfo del recorrido de G.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{ el espacio renglón de A es}$$

$L(A_r) = \{ (a, b, 3a - 2b) \mid a, b \in C \} \Rightarrow G(M_{2C}) = \{ ax^2 + bx + 3a - 2b \mid a, b \in C \}$

Para la obtención del núcleo, resolvemos el sistema $\begin{cases} 2m - n \quad + s = 0 \\ 3m - n + r \quad = 0 \\ \quad - n - 2r + 3s = 0 \end{cases}$, el cual

expresado matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ de la ecuación representada por el primer renglón: $\frac{1}{2}s = -m + \frac{1}{2}n$, o sea $s = -2m + n$; del segundo renglón $2r = -n + 3s$, de donde $r = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}s = -3m + n$ $\therefore$ el núcleo es :

$$N(G) = \left\{ \begin{bmatrix} m & n \\ -3m+n & -2m+n \end{bmatrix} \middle| \, m, n \in C \right\}$$; expresado en términos de las variables r y s

el núcleo es: $$N(G) = \left\{ \begin{bmatrix} -r+s & -2r+3s \\ r & s \end{bmatrix} \middle| \, r, s \in C \right\};$$ dim N(G) =2 .

Aquí también puede comprobarse que: dim M_{2C} = 4 = dim N (G) + dim G (M_{2C}) = 2 + 2.

◈

III Representación matricial de una transformación lineal

Si una transformación $T : V \to W$ es *lineal* existe una matriz, a la que se llama *asociada a la transformación*, tal que, si se posmultiplica por el vector de coordenadas respecto a la base natural de V, de un elemento de V, el producto que se obtiene es el vector de coordenadas de la imagen del elemento de V bajo T, respecto a la base natural de W.

Podemos representar con símbolos lo anterior, expresando a la matriz asociada a T con M (T), a las bases naturales de V y W con A y B, respectivamente. Así tenemos :

$$\forall\ \bar{v} \in V: \qquad M(T)\,[\ \bar{v}\ ]_A = [\ T(\bar{v})\ ]_B\ ,$$

donde $[\ \bar{v}\ ]_A$ es el vector de coordenadas de $\bar{v}$ respecto a la base A, y $[\ T(\bar{v})\ ]_B$ es el vector de coordenadas de la imagen de $\bar{v}$ bajo T respecto a la base B.

Ya que el vector $[\ \bar{v}\ ]_A$ es una eneada de escalares (si $\dim V = n$), puede considerarse como una matriz columna cuyo número de renglones es igual a la dimensión del dominio, es decir, como una matriz de orden $n\times 1$. De manera semejante $[\ T\ (\bar{v})\ ]_B$ puede considerarse como una matriz de orden $m\times 1$ donde m es la dimensión del codominio W , de aquí que, la matriz asociada a T debe ser de orden $m\times n$.

Ejemplo 1.III

Para la transformación lineal $H : C^2 \to R^2$, con $H(a + bi\ , c + di) = (a - b + 2c\ \ ,\ c + d)$ la dimensión del dominio, espacio real C^2, es cuatro y la del codominio es dos, así M (H),

de orden 2×4, es $M(H) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. La base natural de C^2 sobre R es

$A = \{ (1\ ,0)\ ,(i\ ,0)\ ,(0\ ,1)\ ,(0\ ,i) \}$; el vector de coordenadas de $(a + bi\ , c + di)$ respecto

a la base A es $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, con lo que $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b+2c \\ c+d \end{bmatrix}$ que es el vector de

coordenadas de la imagen, respecto a la base natural de R^2, $B = \{ (1\ ,0)\ ,(0\ ,1) \}$.

◈

Ejemplo 2.III

Para $S : C^2 \rightarrow P_{2C}$ donde dominio y codominio son espacios complejos, y la regla de S es : $S(z, w) = iz\,x^2 + ((1-i)z + 4w)x + (3z - 2iw)$. La matriz M (S) asociada a la transformación lineal S resulta $M(S) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1-i & 4 \\ 3 & -2i \end{bmatrix}$

◈

Si las bases $A = \{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_n \}$ y $B = \{ \bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_m \}$, no son las bases naturales del dominio y codominio respectivamente, sino bases cualesquiera de esos espacios, se tiene

$\left[\bar{a}_1\right]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\left[\bar{a}_2\right]_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; ... ; $\left[\bar{a}_n\right]_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con lo que, al posmultiplicar la matriz asociada a la transformación referida a las bases A y B, por $\left[\bar{a}_1\right]_A$, el producto obtenido (que es $\left[T(\bar{a}_1)\right]_B$), corresponde a la primera columna de la matriz. De manera semejante, al posmultiplicar por una matriz columna cuyo único elemento diferente de cero es un uno en el segundo renglón (esto es $\left[\bar{a}_2\right]_A$) el producto (que es $\left[T(\bar{a}_2)\right]_B$) corresponde a la segunda columna de la matriz asociada. Generalizando : la matriz asociada a una transformación T referida a las bases A y B del dominio y codominio de T, respectivamente, que representaremos con $M_B^A(T)$, tiene por columnas a los vectores de coordenadas respecto a B, de las imágenes de los elementos de la base A.

Ejemplo 3.III

La transformación lineal $T : R^3 \rightarrow M_2$, donde $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}$ y con regla de correspondencia dada por $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x - y & y + 3z \\ -2y + z & x + y + z \end{bmatrix}$ tiene como matriz asociada a $M(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Pero, si se consideran las bases A = { (1 , 1 , 1) , (0 , 1 , -1) , (-1 , 0 , 1) } de R^3 , y

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de M_2 ; para la obtención de $M_B^A(T)$, se tiene que las coordenadas respecto a la base B, de todo elemento $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ del espacio M_2 son α, β, γ, δ tales que: $\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

esta ecuación equivale al sistema que, en forma matricial puede expresarse como

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 0 & -1 & c \\ 1 & 1 & -1 & 0 & d \end{array}\right]$ y para obtener su solución se escalona y se llega a la matriz del

sistema equivalente : $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -a-c+d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2a+b+c-d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a+b-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3a+b+c-2d \end{array}\right]$ con lo que el vector de coordenadas

del elemento genérico de M_2 , respecto a la base B, es: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -a-c+d \\ 2a+b+c-d \\ a+b-d \\ 3a+b+c-2d \end{bmatrix}$.

El vector de coordenadas de una matriz respecto a la base B debe expresarse $\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right]_B$;

sin embargo, por simplificación de la escritura lo expresaremos aquí con $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_B$.

Por otra parte, la imagen de cada uno de los elementos de la base A es :

$$T(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \;;\; T(0,1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \;\text{ y }\; T(-1,0,1) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Además, el vector de coordenadas de cada una de las imágenes anteriores, respecto a B es :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix} \;;\; \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.\ \text{Así que :}$$

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

◈

Ejemplo 4.III

La transformación lineal $K : C^3 \rightarrow P_3$ donde P_3 es el espacio complejo de los polinomios de grado menor o igual a tres (grado menor que cuatro) con coeficientes complejos, tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$K(a,b,c) = (ia + (2-i)b - c)x^3 + (2a + ic)x^2 + bx + (1-i)a - b + (3+2i)c$$

Su matriz asociada es $M(K) = \begin{bmatrix} i & 2-i & -1 \\ 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-i & -1 & 3+2i \end{bmatrix}$.

Si $A = \{(1,0,0), (-2,i,1), (0,1+i,0)\}$ es base de C^3, $B = \{x^3, x^2-x, x, x^2+1\}$ es base de P_3; para determinar la matriz asociada a K, referida a las bases A y B, necesitamos las coordenadas del elemento genérico de P_3, respecto a B, es decir,

$(mx^3 + nx^2 + rx + s)_B$, para ello escalonamos la matriz $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 1 & n \\ 0 & -1 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right]$ y tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 & n-s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & n+r-s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right]$$, con lo que $(\,mx^3+nx^2+rx+s\,)_B = \begin{bmatrix} m \\ n-s \\ n+r-s \\ s \end{bmatrix}$; además,

$$K(1,0,0) \quad = ix^3 + 2x^2 + 1\text{-}i$$

$$K(-2,i,1) \quad = (-2i + 2i - i^2 - 1)x^3 + (-4+i)x^2 + ix + (-2 + 2i - i + 3 + 2i)$$
$$= 0x^3 + (-4+i)x^2 + ix + (1+3i)$$

$$K(0,1+i,0) = (2-i)(1+i)x^3 + 0x^2 + (1+i)x + (1+i)(-1)$$
$$= (3+i)x^3 + 0x^2 + (1+i)x + (-1-i)$$

Las coordenadas de estas imágenes respecto a la base B son:

$$\left[K(1,0,0)\right]_B = \left[ix^3 + 2x^2 + 1\text{-}i\right]_B = \begin{bmatrix} i \\ 1+i \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$$\left[K(-2,i,1)\right]_B = \left[0x^3 + (-4+i)x^2 + ix + (1+3i)\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5-2i \\ -5-i \\ 1+3i \end{bmatrix}$$

$$\left[K(0,1+i,0)\right]_B = \left[(3+i)x^3 + 0x^2 + (1+i)x + (\text{-}1\text{-}i)\right]_B = \begin{bmatrix} 3+i \\ 1+i \\ 2+2i \\ -1-i \end{bmatrix}$$

Con lo que la matriz $M_B^A(K) = \begin{bmatrix} i & 0 & 3+i \\ 1+i & -5-2i & 1+i \\ 1+i & -5-i & 2+2i \\ 1-i & 1+3i & -1-i \end{bmatrix}$

◈

Ejemplo 5.III

La transformación lineal L entre los espacios complejos de las parejas de complejos C^2 y las matrices triangulares superiores de orden dos M_{TS}, tiene la siguiente regla de correspondencia :

$$L(z, w) = \begin{bmatrix} iz-2w & (1+i)z+3iw \\ 0 & 2z+(1-2i)w \end{bmatrix}$$, cuya matriz asociada (referida a las bases naturales)

es : $M(L) = \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1+i & 3i \\ 2 & 1-2i \end{bmatrix}$. Pero si la base de C^2 es $A = \{ (1, 1-i), (-2i, 1+3i) \}$ y la

de M_{TS} es la natural $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, las coordenadas de $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

(elemento genérico de M_{TS}) respecto a la base B son : (a , b , c); además,

$L(\bar{a}_1) = L(1, 1\text{-}i) = \begin{bmatrix} -2+3i & 4+4i \\ 0 & 1-3i \end{bmatrix}$ y $L(\bar{a}_2) = L(-2i, 1+3i) = \begin{bmatrix} -6i & -7+i \\ 0 & 7-3i \end{bmatrix}$, con

lo que resulta $M_B^A(L) = \begin{bmatrix} -2+3i & -6i \\ 4+4i & -7+i \\ 1-3i & 7-3i \end{bmatrix}$. Con esta matriz es posible obtener la imagen

de un vector $\bar{v}$ cuyas coordenadas respecto a A son 2i y (-2 + i), esto es $\left[\bar{v}\right]_A = \begin{bmatrix} 2i \\ -2+i \end{bmatrix}$

$$M_B^A(L)\left[\bar{v}\right]_A = \begin{bmatrix} -2+3i & -6i \\ 4+4i & -7+i \\ 1-3i & 7-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i \\ -2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8i \\ 5-i \\ -5+15i \end{bmatrix} = \left[L(\bar{v})\right]_B$$, así

$L(\bar{v}) = 8i\,\bar{b}_1 + (5\text{-}i)\,\bar{b}_2 + (-5+15i)\,\bar{b}_3 = \begin{bmatrix} 8i & 5-i \\ 0 & -5+15i \end{bmatrix}$. Para obtener el vector $\bar{v}$, se

multiplican sus coordenadas por los correspondientes elementos de la base A, esto es

$\bar{v} = 2i\,\bar{a}_1 + (-2+i)\,\bar{a}_2 = (2i, 2i+2) + (4i+2, -5-5i) = (2+6i, -3-3i)$

$L(2+6i, -3-3i) = \begin{bmatrix} 8i & 5-i \\ 0 & -5+15i \end{bmatrix}$

◇

A una matriz asociada a una transformación lineal, suele llamársele *representación matricial* de la transformación. También suele decirse la *transformación representada* por tal matriz.

A cada pareja de bases (una del dominio y otra del codominio), corresponde una representación matricial. Así, puede obtenerse una infinidad de representaciones matriciales de una transformación lineal. Además, conocida una de esas representaciones y las bases de referencia, es posible conocer la regla de la transformación.

Ejemplo 6.III

La representación matricial $M_B^A(F)$ de una transformación lineal $F : R^2 \rightarrow P_2$ donde $A = \{(1, -1), (2, 1)\}$ es una base de R^2 y $B = \{x^2, x+1, -2\}$ es una base de P_2, es

$M_B^A(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; en ésta, la columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ es el vector de coordenadas, respecto a la base

B, de la imagen del vector $\overline{a_1} = (1, -1)$, es decir $[F(1, -1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, así que:

$F(1, -1) = 1(x^2) + 2(x+1) + 0(-2) = x^2 + 2x + 2$; de manera semejante

$F(2, 1) = 1(x^2) - 1(x+1) + 3(-2) = x^2 - x - 7$.

Por otro lado, todo elemento (a, b) de R^2 puede expresarse como $\alpha(1, -1) + \beta(2, 1)$, esto es: $(a,b) = (\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta)$, es decir $\begin{matrix} a = \alpha + 2\beta \\ b = -\alpha + \beta \end{matrix}$; por lo que $\beta = \dfrac{a+b}{3}$ y $\alpha = \dfrac{a-2b}{3}$.

Además, por la linealidad de F,

$$F(a, b) = \frac{a-2b}{3}F(1, -1) + \frac{a+b}{3}F(2, 1) = \frac{a-2b}{3}(x^2+2x+2) + \frac{a+b}{3}(x^2-x-7) =$$

$$= \left[\left(\frac{a-2b}{3} + \frac{a+b}{3}\right)x^2 + \left(\frac{2a-4b}{3} - \frac{a+b}{3}\right)x + \left(\frac{2a-4b}{3} - \frac{7a+7b}{3}\right)\right]$$

con lo que la regla que define a F es:

$$F(a,b) = \frac{2a-b}{3}x^2 + \frac{a-5b}{3}x + \frac{-5a-11b}{3}$$

◇

Ejemplo 7.III

De la transformación lineal $J: C^2 \to M_{2D}$, una de sus representaciones matriciales es :

$$M_D^B(J) = \begin{bmatrix} 1-i & 4+2i \\ 2+4i & 2-i \end{bmatrix}, \text{ donde } B = \{(1+i, -i), (-1, 2+i)\} \text{ es base de } C^2$$

y $D = \left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1+i \end{bmatrix} \right\}$ es base de M_{2D}. La primer columna de $M_D^B(J)$ es el vector de coordenadas respecto a D de la imagen de (1+i , -i) bajo la transformación J, por lo tanto, la imagen es: $J(1+i, -i) = (1-i)\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2+4i)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i & 0 \\ 0 & -5-3i \end{bmatrix}$.

De manera semejante $J(\bar{b}_2) = J(-1, 2+i) = (4+2i)\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2-i)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i & 0 \\ 0 & 3+5i \end{bmatrix}$

Si α y β son las coordenadas de (z , w) respecto a B, es decir, $(z, w) = \alpha(\bar{b}_1) + \beta(\bar{b}_2)$ entonces, por linealidad, $J(z, w) = \alpha\, J(\bar{b}_1) + \beta\, J(\bar{b}_2)$

Para conocer la regla que define a J, es necesario expresar a α y β en términos de *z* y de *w* esto es , $(z, w) = \alpha(1+i, -i) + \beta(-1, 2+i) \Rightarrow \begin{cases} z = (1+i)\alpha - \beta & \text{------ (1)} \\ w = -i\alpha + (2+i)\beta & \text{----- (2)} \end{cases}$

de (1) $\beta = (1+i)\alpha - z$ ----- (3), sustituyendo en (2) $w = -i\alpha + (2+i)[(1+i)\alpha - z]$, de donde resulta $\alpha = \dfrac{(2+i)z+w}{1+2i} = (\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i)\,z + (\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i)\,w$, sustituyendo en (3) llegamos a: $\beta = (\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i)\,z + (\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i)\,w$, con lo que la regla queda : $J(z, w) =$

$$= [(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}i)\,z + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}i)\,w]\begin{bmatrix} 3+5i & 0 \\ 0 & -5-3i \end{bmatrix} + [(\tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5}i)\,z + (\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{5}i)\,w]\begin{bmatrix} 3i & 0 \\ 0 & 3+5i \end{bmatrix}$$

$$J(z . w) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} (24+17i)z + (16+8i)w & 0 \\ 0 & (-28+16i)z + (3+19i)w \end{bmatrix}$$

◈

IV Álgebra de transformaciones

Dos transformaciones S y T, son iguales si para todo elemento del dominio, la imagen de ese elemento, bajo la transformación S, es la misma que la imagen bajo la transformación T. Esto implica que el dominio y el codominio de ambas sean respectivamente iguales. Simbólicamente puede expresarse esta igualdad de la manera siguiente:

Para $S: A \rightarrow B$ y $T: C \rightarrow D$

$S = T$ si: $A = C$; $B = D$ y $\forall\ \bar{v} \in A$, $S(\bar{v}) = T(\bar{v})$.

Ejemplo 1.IV

Si $S: R^2 \rightarrow R^3$ y $T: R^2 \rightarrow P_2$, $S \neq T$ independientemente de la regla que defina a cada transformación, debido a que R^3 (codominio de S) es diferente de P_2 (codominio de T).

◈

Ejemplo 2.IV

Si $H: P_2 \rightarrow R^2$, está definida con la regla $H(ax^2 + bx + c) = (a\text{-}2b\text{+}c\text{-}a,\ 2a\text{+}b\text{-}b)$

y $G: P_2 \rightarrow R^2$ tal que, $G(ax^2 + bx + c) = (2a + c - 2(a+b),\ 2(a+b) - 2b)$

$H = G$, ya que, además de tener dominio y codominio respectivamente iguales,

$\forall\ ax^2 + bx + c$, su imagen bajo H es la misma pareja de reales que su imagen bajo G.

Así, $H(2x^2 - x + 3) = (5, 4)$ y $G(2x^2 - x + 3) = (5, 4)$.

◈

También es posible sumar dos transformaciones siempre y cuando su dominio y codominio sean respectivamente iguales. Así, si S y T son transformaciones cuyo dominio es V y cuyo codominio es W, se define la transformación suma $(S + T): V \rightarrow W$ tal que $\forall\ \bar{v} \in V$, la imagen de $\vec{v}$ bajo $(S + T)$ es igual a la suma de la imagen de $\bar{v}$ bajo S más la imagen de $\bar{v}$ bajo T, esto es $(S + T)(\bar{v}) = S(\bar{v}) + T(\bar{v})$; esta igualdad relaciona elementos de W que, por ser vectores, pueden sumarse.

Además, se define la transformación producto de un escalar α por una transformación S, como $(\alpha S): V \rightarrow W$ tal que $\forall\ \alpha \in K$, $\forall\ \bar{v} \in V$, $(\alpha S)(\bar{v}) = \alpha\ S(\bar{v})$.

Tanto la suma de dos transformaciones lineales como el producto de una por un escalar, son transformaciones también lineales.

Con lo anterior puede demostrarse* que el conjunto de todas las transformaciones lineales con dominio V y codominio W, es un espacio vectorial sobre el campo de V y W.

El espacio anterior, que representaremos con L (V, W), es isomorfo del de las matrices de orden m x n, si dim V = n y dim W = m. Con esto, la matriz asociada a S + T referida a las bases A de V y B de W es igual a la suma de las matrices asociadas, respectivamente, a S y a T, referidas a las mismas bases, es decir

$M_B^A(S+T) = M_B^A(S) + M_B^A(T)$ y también $M_B^A(\alpha S) = \alpha\ M_B^A(S)$

Otra operación que se efectúa entre funciones y, por ende, entre transformaciones, es la composición (que en el caso de funciones, se conoce también como *función de función*).

La composición de S y T (en ese orden) se denota con $S \circ T$ y se define como la transformación S aplicada a la imagen de un elemento del dominio de T bajo esta transformación. Esto implica que no siempre puede efectuarse; se requiere que la primera transformación tenga por dominio el codominio de la segunda, así, si T : V $\rightarrow$ W ; S debe tener a W por dominio, o sea, S : W $\rightarrow$ U, donde U no tiene restricción. Resulta entonces que $(S \circ T) : V \rightarrow U$ y es tal que $\forall\ \bar{v} \in V,\ (S \circ T)(\bar{v}) = S\left[T(\bar{v})\right]$.

Ejemplo 3.IV

Para J : $R^2 \rightarrow P_2$ tal que J(a, b) = $2ax^2 + (a+b)x - b$, y para K: $R^3 \rightarrow R^2$ tal que K(m, n, r) = (r, m+n), $J \circ K$: $R^3 \rightarrow P_2$ y su regla es tal que, K aplicada a la terna (m, n, r) resulta la pareja (r, m+n) y al aplicarle a esta pareja la regla de J se obtiene el polinomio: $2rx^2 + (r + m + n)x - (m + n)$, así para la terna (3, -2, 4) la imagen bajo K es (4, 1) y la imagen de esta pareja bajo J es el polinomio $8x^2 + 5x - 1$, que es la imagen de la terna (3, -2, 4) bajo la transformación ($J \circ K$).

◇

* Apuntes de Álgebra Lineal de Solar-Speziale, Limusa, pág 725.

Si S y T son lineales, la transformación $S \circ T$ también es lineal y puede obtenerse una matriz que la represente, que esté referida a una base A de V y a una base B de U, $M_B^A(S \circ T)$. Si C es una base de W, entonces $M_C^A(T)$ es una matriz que representa a T (asociada a T) referida a las bases A y C; además $M_B^C(S)$ representa a S y está referida a las bases C de W y B de U.

De manera informal puede decirse que la composición de transformaciones bajo el isomorfismo es *equivalente* a la multiplicación de matrices asociadas, es decir:

$$M_B^A(S \circ T) = M_B^C(S)\, M_C^A(T)$$

Ejemplo 4.IV

La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ está asociada a la transformación D: $R^2 \rightarrow P_2$ tal que

$$D(a,b) = (2a + b)x^2 + (3a - b)x + (a - 2b).$$

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ está asociada a la transformación F: $P_2 \rightarrow M_{TS}$ tal que

$$F(mx^2 + nx + r) = \begin{bmatrix} m - n + 3r & n - 3r \\ 0 & m + 2r \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz asociada a la transformación $F \circ D : R^2 \rightarrow M_{TS}$ es

$$M(F \circ D) = M(F)\, M(D) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

con lo que la regla que define a $F \circ D$ es: $(F \circ D)(a,b) = \begin{bmatrix} 2a - 4b & 5b \\ 0 & 4a - 3b \end{bmatrix}$.

◇

Ejemplo 5.IV

La transformación H: $R^3 \to M_2$ tal que H(a, b, c) = $\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+c & a-2c \end{bmatrix}$ tiene como matriz asociada referida a la base A = $\{$ (1, 2, 0) , (1, 0, 0) , (0, -1, 1) $\}$ de R^3 y a la base B = $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ de M_2; la que tiene por columnas, los vectores de coordenadas respecto a B, de las imágenes de los elementos de la base A.

Debido a que $\forall \overline{m} \in M_2$; $(\overline{m})_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ tal que $\overline{m} = \alpha \overline{b}_1 + \beta \overline{b}_2 + \gamma \overline{b}_3 + \delta \overline{b}_4$; resulta:

$$\begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} d \\ -2d+e \\ f \\ d-f+g \end{bmatrix} \text{con esto: } [H(1,2,0)]_B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[H(1,0,0)]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[H(0,-1,1)]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

y $\quad M_B^A(H) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

De manera semejante, puede obtenerse que para J: $R^2 \to R^3$ tal que

J(a, b) = (a+b, 3a, -2b), la matriz asociada referida a las bases D = $\{(1,1), (-1, 2)\}$ de R^2

y A de R^3 es: $M_A^D(J)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

La matriz asociada a $H \circ J : R^2 \to M_2$ referida a las bases D de R^2 y B de M_2 es:

$$M_B^D(H \circ J) = M_B^A(H)M_A^D(J) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -9 & -3 \\ 0 & -3 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, $\forall (x,y) \in R^2$; $(x,y)_D = \begin{bmatrix} \lambda \\ \tau \end{bmatrix}$ tal que $(x,y) = \lambda(1,1) + \tau(-1,2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda - \tau = x \\ \lambda + 2\tau = y \end{array}\right\} \Rightarrow \ \tau = \frac{y-x}{3} \ ; \ \lambda = \frac{2x+y}{3} \ ; \ \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -9 & -3 \\ 0 & -3 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2x+y}{3} \\ \frac{y-x}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+y \\ -5x-4y \\ x-y \\ 4x+7y \end{bmatrix}$$, éste es el

vector de coordenadas, respecto a la base B, de la imagen de (x,y) bajo la transformación $H \circ J$, por lo que:

$$(H \circ J)(x,y) = (4x+y)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + (-5x-4y)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (x,-y)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (4x+7y)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la regla que define a $H \circ J$ es: $(H \circ J)(x,y) = \begin{bmatrix} 4x+y & 3x-2y \\ x-y & x+5y \end{bmatrix}$

◈

Otra operación que puede realizarse en una transformación T: V $\to$ W es la que deshace el efecto de la transformación, lo que equivale a obtener el elemento del dominio cuya imagen es conocida, o sea, aplicar a la imagen (que pertenece al codominio de la transformación T original) una transformación T^{-1}, llamada *inversa* de T (que tiene a W por dominio y a V como codominio). Para que esto sea posible es necesario que la imagen a la que se le aplica la inversa sea imagen *de un solo* elemento del dominio.

Ejemplo 6.IV

Si T: $R^3 \to R^2$ es tal que T (a, b, c) = (2a+b, a) , la pareja (4, 1) es imagen de una terna donde el primer elemento es 1 y el segundo 2, pero el tercer elemento puede tener cualquier valor por lo que, *no existe* una transformación (función entre vectores) que aplicada al vector $(4, 1) \in R^2$, dé como imagen *un solo vector* de R^3. En general si la imagen de una terna bajo T es la pareja (m, n), la terna tiene a n como primer elemento, a (m-2n) como segundo; pero, el tercero puede ser cualquier número real. Por lo tanto, T : $R^3 \to R^2$ tal que T (a, b, c) = (2a+b, a) no tiene inversa.

◊

Con lo anterior, podemos decir que si la transformación no es *uno a uno* no tiene inversa. Así, para que una transformación lineal tenga inversa, es necesario que su núcleo tenga sólo un elemento; pero, ya que en toda transformación lineal el núcleo es un subespacio del dominio, contiene al vector *cero* y para que exista la inversa, el núcleo debe ser *el espacio nulo* del dominio. Esto es, para que T: $V \to W$ tenga inversa es necesario que: N(T) = $\{\bar{0}_V\}$.
Además, el recorrido de T debe ser todo el codominio (T *suprayectiva*) para que sea factible que la inversa T^{-1} lo tenga como dominio. Con esto resulta que la dimensión de V debe ser igual a la dimensión de W.

Resumiendo, si T: $V \to W$ es tal que: N(T) = $\{\bar{0}_V\}$ y dim V = dim W, entonces existe T^{-1}.

Una transformación que satisface las condiciones anteriores, tiene como representación matricial una *matriz cuadrada no singular* (independientemente de las bases a las que esté referida dicha matriz asociada).

Ejemplo 7.IV

La transformación lineal H: $R^2 \to M_D$ tal que H (a, b) = $\begin{bmatrix} 2a+b & 0 \\ 0 & 5a+3b \end{bmatrix}$ tiene como matriz asociada M(H) = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ que es cuadrada no singular cuya inversa es $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ y por lo tanto la transformación inversa es H^{-1}: $M_D \to R^2$ tal que

$H^{-1}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ = (3m-n, -5m+2n).

◊

Pueden plantearse ecuaciones de transformaciones en las que intervengan las cuatro operaciones estudiadas (adición, multiplicación por un escalar, composición e inversión de transformaciones).

Ejemplo 8.IV

Si T, S y Y son transformaciones lineales donde

$T : R^2 \rightarrow P_2$ tal que $T(a, b) = 2ax^2 + (a+b)x + (a+3b)$;

$S : P_2 \rightarrow R^2$ tal que $S(mx^2 + nx + r) = (n-r, m-n)$ y $Y = 3S + (S \circ T) \circ Y$ ....(1)

Se desea conocer: dominio, codominio y regla que define a la transformación Y, que satisfaga a la ecuación (1).

Por simplificación de la escritura, en este ejemplo, llamaremos a la matriz asociada con el mismo nombre que la transformación a la que representa, pero con un índice M, es decir, a M(Y) la representaremos con Y_M, a M(S) con S_M y a M(T) con T_M.

Así, la ecuación (1) entre transformaciones se puede expresar como la ecuación matricial:

$$Y_M = 3S_M + (S_M T_M)\, Y_M \text{ .... (2)}$$

que resulta de aplicar el isomorfismo entre transformaciones lineales y sus respectivas matrices asociadas; donde $S_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$; $T_M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$; con lo que, Y_M debe ser de orden 2x3.

De (2) *despejamos*, en caso de ser posible, la matriz Y_M, a la que en el primer miembro de (2) la podemos representar como el producto $I\,Y_M$ donde I es la matriz identidad de orden dos; con esto se tiene:

$$I\,Y_M - (S_M T_M)\, Y_M = 3S_M \text{ ; con } 3S_M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\, I - S_M T_M \,]\, Y_M = 3S_M \Rightarrow Y_M = [\, I - S_M T_M \,]^{-1}\, 3S_M$$

$$S_M T_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \text{I} - S_M T_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}[\text{I} - S_M T_M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ con esto } [\text{I} - S_M T_M]^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -6 & 12 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

$S \circ T$ es una transformación de R^2 en R^2; $(S \circ T) \circ Y$, para poderse sumar con 3S, debe tener dominio P_2 y codominio R^2, por lo que Y es una transformación de P_2 en R^2 con matriz asociada Y_M, con lo que $Y(ax^2 + bx + c) = (-\frac{3}{2}a + 3b - \frac{3}{2}c,\ \frac{3}{4}a - \frac{3}{4}c)$.

◇

Ejemplo 9.IV

Para conocer la transformación lineal X (dominio, codominio y regla que la define) que satisface la ecuación entre transformaciones lineales sobre el campo de los complejos:

$$A + A \circ B = A \circ X \text{ ....(e)}$$

donde $A : C^2 \rightarrow P_2$ tal que $A(a, b) = [(1+i)a + b]x^2 + ibx + 2a + (1 - 3i)b$

$B : C^2 \rightarrow C^2$ tal que $B(a, b) = [3ia - b,\ a + (1-i)b]$

resulta $A \circ B : C^2 \rightarrow P_2$.

Utilizando el isomorfismo entre las transformaciones lineales y sus correspondientes matrices asociadas (que representaremos con el mismo nombre de la transformación y con un índice M), obtenemos la ecuación matricial $A_M + A_M B_M = A_M X_M$;

$$\text{donde} \quad A_M = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix} ; \; B_M = \begin{bmatrix} 3i & -1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$A_M B_M = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3i & -1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3i & -2i \\ i & 1+i \\ 1+3i & -4-4i \end{bmatrix}$$

$$A_M + A_M B_M = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2+3i & -2i \\ i & 1+i \\ 1+3i & -4-4i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4i & 1-2i \\ i & 1+2i \\ 3+3i & -3-7i \end{bmatrix}.$$

La matriz X_M, si existe, debe ser de orden 2x2, ya que $A_M X_M$ debe ser del mismo orden que A_M y que $A_M B_M$. Además, A_M al no ser cuadrada, es singular (no tiene inversa). Para obtener los elementos de X_M, debemos resolver el sistema de seis ecuaciones con cuatro incógnitas (los elementos de X_M) que se obtiene de:

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4i & 1-2i \\ i & 1+2i \\ 3+3i & -3-7i \end{bmatrix}$$

Este sistema de seis ecuaciones está formado por dos *subsistemas* de tres ecuaciones con dos incógnitas cada uno (x, z en el primero; y, w en el segundo) que tienen los coeficientes de las incógnitas respectivamente iguales.

El primero de estos subsistemas es:
$$\begin{cases} (1+i)x + z = -1 + 4i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ iz = i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ 2x+(1-3i)z = 3 + 3i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

De (2), z = 1 y sustituyendo en (1), $x = \dfrac{-2+4i}{1+i} = \dfrac{2+6i}{2} = 1+3i$

estos valores de z , x satisfacen también la ecuación (3)
$2(1+3i) + (1-3i)(1) = 3 + 3i$; con lo que el sistema es compatible determinado.

El segundo subsistema es:
$$\begin{cases} (1+i)y + w = 1 - 2i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \\ iw = 1 + 2i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5) \\ 2y+(1-3i)w = -3 -7i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6) \end{cases}$$

En él, de (5), w = 2-i y sustituyendo en (4), $y = \dfrac{1-2i-2+i}{1+i} = \dfrac{(-1-i)(1-i)}{2} = \dfrac{-1+i^2}{2} = -1$

estos valores de y, w satisfacen también la ecuación (6)

$2(-1) + (1-3i)(2-i) = -2+2-3-i-6i = -3-7i$, y es también compatible determinado.

Con lo que la matriz X_M es: $\begin{bmatrix} 1+3i & -1 \\ 1 & 2-i \end{bmatrix}$. Por otro lado, la suma de dos transformaciones (la A y la $A \circ B$) tiene respectivamente iguales su dominio y codominio, con los de los sumandos, por lo que $A \circ X : C^2 \rightarrow P_2$, con lo que la transformación X es de C^2 en C^2, tal que X(a, b) = [(1+3i)a – b , a + (2-i)b].

◇

V Efectos geométricos de las transformaciones

El espacio R^2 (conjunto de parejas ordenadas de números reales) corresponde al conjunto de vectores geométricos del plano; cada pareja de números reales es el vector *de posición* del punto cuyas coordenadas son los números de la pareja. Así, el elemento $(3, -2) \in R^2$ es el vector geométrico $\overline{OP}$ (vector de posición del punto P cuya abscisa es 3 y cuya ordenada es -2).
De manera semejante, el espacio R^3 (conjunto de ternas ordenadas de números reales) es el conjunto de vectores geométricos (segmentos dirigidos) del espacio donde cada terna representa el vector de posición del punto cuyas coordenadas cartesianas corresponden, respectivamente, a los elementos de la terna.
Algunos conjuntos de elementos de estos espacios (R^2 y R^3) representan a un lugar geométrico (punto, línea, figura, superficie, cuerpo, etc.) y si se aplica una transformación lineal de R^3 en R^2; de R^3 en R^3 o de R^2 en R^2, el vector o el conjunto de vectores *sufre* un cambio geométrico. Aquí trataremos algunos de esos efectos geométricos que producen las transformaciones lineales.

Suele llamarse *homotecia* a una transformación que agranda o reduce el *tamaño* (módulo o norma) de cada vector.

Ejemplo 1.V
Al aplicar la homotecia $H: R^2 \to R^2$ tal que $H(x, y) = (\frac{1}{2}x\ ,\ \frac{1}{2}y)$, la imagen de cada vector tiene un módulo que es la mitad del módulo del vector al que se le aplicó H. Esto es $H(6, 8) = (3, 4)$; el módulo de (3, 4) es $|(3, 4)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ que es la mitad del módulo de (6, 8): $|(6, 8)| = \sqrt{36 + 64} = 10$.

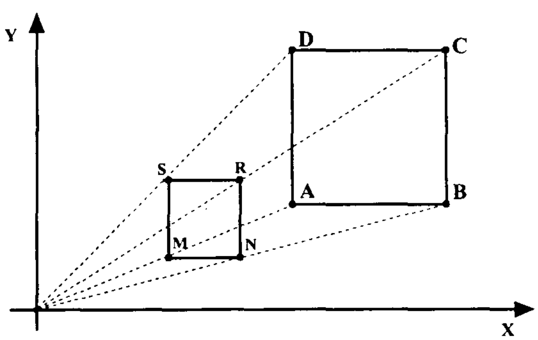

Figura 1

Si los vértices de un cuadrado son los puntos A, B, C, D, cuyos vectores de posición son, respectivamente, los vectores de R^2: (5, 2) , (8, 2) , (8, 5) y (5, 5), sus imágenes bajo H son, respectivamente, los vectores de posición de los puntos M, N, R, S, cuyas coordenadas se obtienen con:

$$H(5, 2) = (\tfrac{5}{2}, 1)$$
$$H(8, 2) = (4, 1)$$
$$H(8, 5) = (4, \tfrac{5}{2})$$
$$H(5, 5) = (\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{2}).$$

Como puede apreciarse en la figura 1, estas imágenes corresponden a los vértices de un cuadrado cuyo lado mide la mitad del lado del cuadrado original.

◇

En general si la regla de la transformación es H(x, y) = (kx, ky), se dice que es una homotecia de orden k; si $0 < k < 1$, la homotecia reduce el tamaño; si $k > 1$ el efecto de la homotecia es agrandar los vectores de posición de los puntos (vectores de R^2) con lo que se agrandan las figuras que contienen a los puntos.

Ejemplo 2.V

Si a los vértices E(1, 1), F(4, 2), G(2, 4) de un triángulo (vectores de R^2) les aplicamos la homotecia de orden tres, H_1: $R^2 \to R^2$ tal que $H_1(x, y) = (3x, 3y)$, el triángulo que tiene por vértices J, K, L (imágenes, respectivamente, bajo H_1 de E, F, G)

$H_1(1, 1) = (3, 3)$; $H_1(4, 2) = (12, 6)$ y $H_1(2, 4) = (6, 12)$; tiene, los lados homólogos a los del triángulo EFG, de triple tamaño.

◇

La matriz asociada a una homotecia de orden k de R^2 en R^2 es $M(H) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

La homotecia es una composición de las transformaciones contracción o expansión horizontal cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y la contracción o expansión vertical cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, así que $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

Otro de los efectos geométricos en R^2 ocasionados por una transformación es la *reflexión* sobre el eje X:

$R_X : R^2 \to R^2$ tal que $R_X(x, y) = (x, -y)$ cuya matriz asociada es $M(R_X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Esta transformación cambia al vector (x, y) en su simétrico respecto al eje X.

Ejemplo 3.V

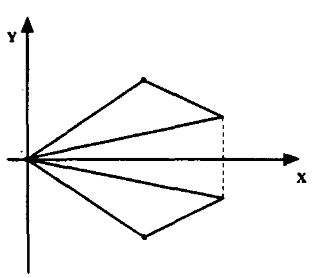

Figura 2

La imagen del vector (3, 2) bajo R_X es:

$$R_X(3, 2) = (3, -2)$$

Si un triángulo tiene por vértices a (0, 0), (3, 2) y (5, 1); su imagen, como puede verse en la figura 2, bajo R_X tiene por vértices a (0, 0), (3, -2) y (5, -1).

◇

La reflexión sobre el eje Y es $R_Y: R^2 \to R^2$ tal que $R_Y(x, y) = (-x, y)$, representada por la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La composición $R_X \circ R_Y: R^2 \to R^2$ tiene por matriz asociada al producto de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, esto es: $M(R_X \circ R_Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; así que la regla correspondiente es: $(R_X \circ R_Y)(x, y) = (-x, -y)$ cuyo efecto geométrico es una reflexión (simetría) respecto al origen.

Las dos composiciones anteriores (homotecia de orden k, y reflexión respecto al origen) son dos casos particulares en los cuales hay conmutatividad , pero, en general, la composición no es conmutativa, tal como se vio en la sección anterior y como se comprobará en próximos ejemplos.

La reflexión no sólo es respecto a los ejes coordenados o al origen, también puede ser respecto a una recta como la que tiene ecuación $y = x$ u otra cualquiera del plano.
La reflexión respecto a $y = x$ se produce con la transformación $T : R^2 \to R^2$ tal que $T(x, y) = (y, x)$ cuya matriz representativa es: $M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 4.V

Si a los vértices A(4, 2); B(6, 1) y C(7, 4) del triángulo ABC se les aplica la reflexión $R_Y(x, y) = (-x, y)$ y luego la $T(x, y) = (y, x)$, es decir, aplicamos la composición $T \circ R_Y$ cuya matriz asociada es: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; se obtiene el triángulo DEF (figura 3) donde

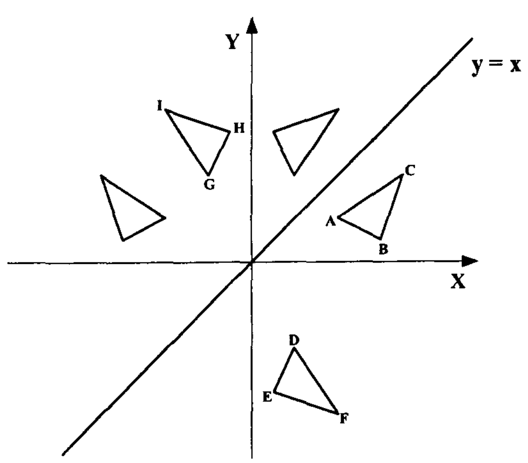

Figura 3

$$D = (T \circ R_Y)(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$E = (T \circ R_Y)(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$F = (T \circ R_Y)(C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, si se les aplica primero la transformación T (reflexión respecto a y = x) y luego R_Y, es decir, la composición $R_Y \circ T$ cuya matriz es:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, se obtiene el triángulo GHI (figura 3), donde

$$G = (R_Y \circ T)(A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$H = (R_Y \circ T)(B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$I = (R_Y \circ T)(C) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

El triángulo EFD está en una posición distinta de la del triángulo GHI (como puede apreciarse en la figura 3) debido a la no conmutatividad de la composición, esto es, ya que $T \circ R_Y \neq R_Y \circ T$.

◇

Si la transformación es $D_X : R^2 \to R^2$ cuya regla es $D_X(x, y) = (x + ky,\ y)$ con matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, produce sobre el vector de R^2 un efecto de deslizamiento horizontal (en sentido del eje X).

De manera semejante, la transformación representada por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, produce un deslizamiento vertical (en sentido del eje Y).

En los dos casos anteriores si k > 0, el deslizamiento es en el sentido positivo del eje y si k < 0, en el sentido negativo.

Ejemplo 5.V

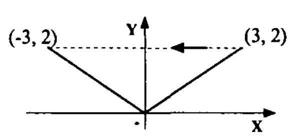

Figura 4

La imagen de (3, 2) bajo la transformación $D_X(x, y) = (x-3y, y)$ es $D_X(3, 2) = (-3, 2)$, el vector (3, 2) se deslizó seis unidades en el sentido negativo del eje X como puede verse en la figura 4. Aquí, *casualmente* la imagen (–3, 2) coincide con la imagen de (3, 2) respecto a la reflexión en Y.

La imagen de (3, 2) bajo $D_Y(x, y) = (x, 2x+y)$ es $D_Y(3, 2) = (3, 8)$; el vector se deslizó seis unidades en el sentido positivo del eje Y, como puede verse en la figura 5.

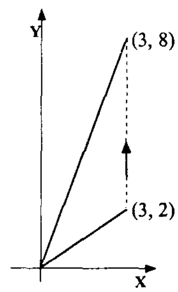

Figura 5

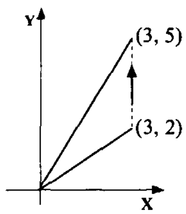

Figura 6

Si aplicamos la transformación $D_{Y1}(x, y) = (x, x+y)$ al vector (3, 2), resulta $D_{Y1}(3, 2) = (3, 5)$. El vector se desliza aquí tres unidades en sentido positivo del eje Y, como puede verse en la figura 6.

◇

Ejemplo 6.V
Si a los vértices de un cuadrado unitario, uno de cuyos vértices es el origen, les aplicamos $D_X(x, y) = (x-2y, y)$, las imágenes de sus vértices resultan:

$D_X(0, 0) = (0, 0)$
$D_X(1, 0) = (1, 0)$
$D_X(1, 1) = (-1, 1)$
$D_X(0, 1) = (-2, 1)$

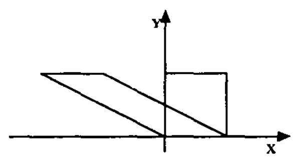

Figura 7

Si les aplicamos la transformación $D_Y(x, y) = (x, 2x+y)$, las imágenes son:

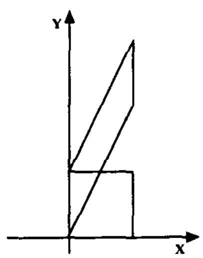

Figura 8

$D_Y\ (0, 0) = (0, 0)$
$D_Y\ (1, 0) = (1, 2)$
$D_Y\ (1, 1) = (1, 3)$
$D_Y\ (0, 1) = (0, 1)$

Si les aplicamos la transformación $D_Y \circ D_X$ cuya matriz es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$ se obtiene:

$$(D_Y \circ D_X)(0, 0) = (0,0)$$

$$(D_Y \circ D_X)(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(D_Y \circ D_X)(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(D_Y \circ D_X)(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

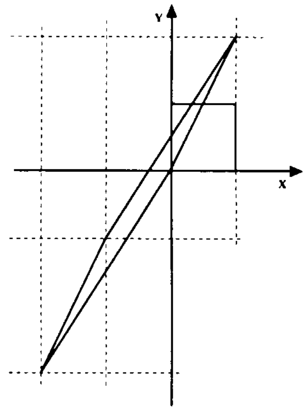

Figura 9

Como se aprecia en la figura 9.

◇

Ejemplo 7.V

Apliquemos a la circunferencia con centro en C(3, 2) y radio dos, primero un deslizamiento vertical D_Y y después una reflexión R_Y respecto al eje Y, es decir, a los puntos de la circunferencia les aplicaremos la composición $R_Y \circ D_Y$. La reflexión R_Y está representada por la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y el deslizamiento D_Y por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; por lo que, la composición $R_Y \circ D_Y$ tiene la representación matricial $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

La circunferencia, cuya ecuación cartesiana es $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, contiene a los puntos D(1, 2); E(2, 2-$\sqrt{3}$); F(3, 0); G(4, 2-$\sqrt{3}$); H(5, 2); I(4, 2+$\sqrt{3}$); J(3, 4) y K(2, 2+$\sqrt{3}$).

La imagen de cada uno de estos puntos, respecto a la transformación $R_Y \circ D_Y$, se obtiene posmultiplicando la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ por el vector de coordenadas del punto, esto es: la imagen de D es L, cuyas coordenadas son:

$$L = (R_Y \circ D_Y)(D) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

de manera semejante

$$M = (R_Y \circ D_Y)(E) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$N = (R_Y \circ D_Y)(F) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$O = (R_Y \circ D_Y)(G) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = (R_Y \circ D_Y)(H) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$Q = (R_Y \circ D_Y)(I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$R = (R_Y \circ D_Y)(J) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = (R_Y \circ D_Y)(K) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

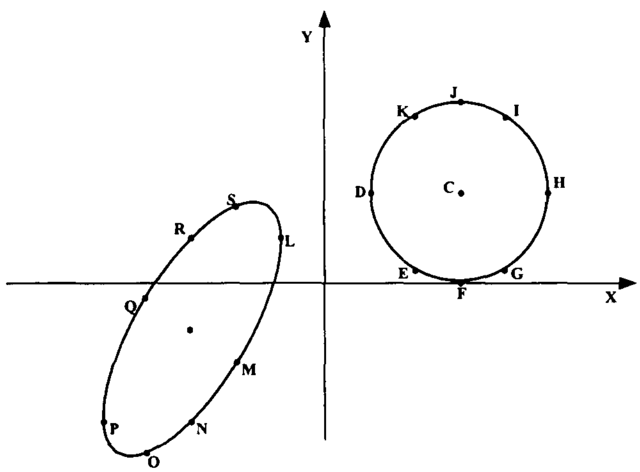

Figura 10

Como puede apreciarse en la figura 10, la circunferencia se transformó, por efecto de la transformación lineal $R_Y \circ D_Y$, en una elipse con centro en la imagen de C, esto es:

$$(R_Y \circ D_Y)(C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

◇

Analicemos ahora, cuál transformación lineal debe aplicársele al vector (x, y) para que el efecto de esa transformación sea un giro de un ángulo α alrededor del origen.

El vector (x, y) puede expresarse como (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) donde {(1, 0), (0, 1)} es la base canónica de R^2.

Si giramos (1, 0) un ángulo α (figura 11), se obtiene el vector ($\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$) y si giramos ese mismo ángulo α el vector (0, 1) se obtiene el vector ($-\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$). Es decir: G(1, 0) =($\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$) y G(0, 1) = ($-\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$);

por la linealidad de G,

$$\begin{aligned} G[x(1,0)+y(0,1)] &= xG(1,0)+yG(0,1) \\ &= x(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) + y(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) \end{aligned}$$

con lo que, la regla que define a G es:

G(x, y) = ($x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha$, $x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$) y su matriz asociada (llamada matriz de rotación) es:

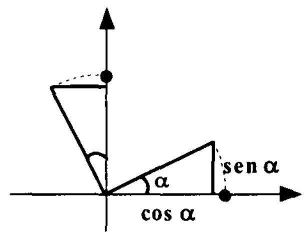

Figura 11

$$M(G) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8.V

Si los vértices del triángulo DEF en el plano XY tienen las coordenadas (3, 1), (4, 3) y (2, $\frac{5}{2}$), al girar, cada uno de los vectores de posición, 60° alrededor del origen (vector nulo de R^2) se llega a los vértices JKL del triángulo girado como se observa en la figura 12, donde las coordenadas de estos vértices son, respectivamente, las imágenes de D, E, F bajo

la transformación G, esto es: $J = G(D) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.634 \\ 3.098 \end{bmatrix}$

$$K = G(E) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2\sqrt{3}+\frac{3}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.598 \\ 4.964 \end{bmatrix}$$

$$L = G(F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{5\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3}+\frac{5}{4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.165 \\ 2.982 \end{bmatrix}$$

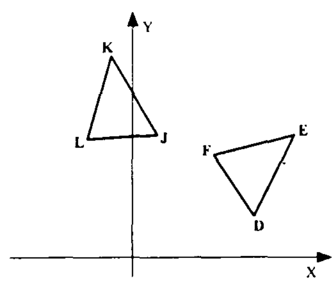

Figura 12

Las coordenadas de los vértices J, K, L del triángulo girado, con aproximación a una cifra decimal son: J(0.6, 3.1); K(-0.6, 5); L(-1.2, 3)

◇

Puede componerse la rotación con otras transformaciones, como pueden ser la homotecia reductiva y si esa composición vuelve a aplicarse varias veces, se obtiene un efecto de *espiral,* como puede apreciarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.V

Al cuadrado cuyos vértices son: A(8, 1); B(10, 1); C(10, 3) y D(8, 3) le aplicamos ($R \circ H$)

donde R es la rotación de 45° representada por $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ y H es una homotecia reductiva representada por $\begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$. La matriz que representa a $R \circ H$ es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4\sqrt{2} & -0.4\sqrt{2} \\ 0.4\sqrt{2} & 0.4\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las imágenes de A, B, C, D bajo la transformación $R \circ H$ son, respectivamente:

$$E = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \approx (3.96\ ,\ 5.09)$$

$$F = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} \approx (5.09\ ,\ 6.23)$$

$$G = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} \approx (3.96\ ,\ 7.36)$$

$$H = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} \approx (2.83\ ,\ 6.23)$$

Si se vuelve a aplicar $R \circ H$, las imágenes son:

$$I = 0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}0.4\sqrt{2}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \left(0.4\sqrt{2}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 0.32\begin{bmatrix} -2 \\ 16 \end{bmatrix} \approx (-0.64\ ,\ 5.12)$$

$$J = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \left(0.4\sqrt{2}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} = 0.32\begin{bmatrix} -2 \\ 20 \end{bmatrix} \approx (-0.64\ ,\ 6.40)$$

$$K = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \left(0.4\sqrt{2}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = 0.32 \begin{bmatrix} -6 \\ 20 \end{bmatrix} \approx (-1.92 , 6.40)$$

$$L = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \left(0.4\sqrt{2}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} = 0.32 \begin{bmatrix} -6 \\ 16 \end{bmatrix} \approx (-1.92 , 5.12)$$

Si continuamos, obtenemos:

$$M = \left(0.4\sqrt{2}\right)^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 16 \end{bmatrix} = 0.181 \begin{bmatrix} -18 \\ 14 \end{bmatrix} \approx (-3.26 , 2.53)$$

$$N = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.181 \begin{bmatrix} -22 \\ 18 \end{bmatrix} \approx (-3.98 ,\ 3.26)$$

$$O = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.181 \begin{bmatrix} -26 \\ 14 \end{bmatrix} \approx (-4.71 ,\ 2.53)$$

$$P = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.181 \begin{bmatrix} -22 \\ 10 \end{bmatrix} \approx (-3.98 ,\ 1.81)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$M_1 = \left(0.4\sqrt{2}\right)^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 128 \\ 16 \end{bmatrix} = 0.006 \begin{bmatrix} 112 \\ 144 \end{bmatrix} \approx (0.68 , 0.86)$$

$$N_1 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.006 \begin{bmatrix} 144 \\ 126 \end{bmatrix} \approx (0.86 , 1.06)$$

$$O_1 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.006 \begin{bmatrix} 112 \\ 208 \end{bmatrix} \approx (0.68 , 1.25)$$

$$P_1 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.006 \begin{bmatrix} 80 \\ 176 \end{bmatrix} \approx (0.48 , 1.06)$$

Y por último obtenemos:

$$Q_1 = \left(0.4\sqrt{2}\right)^{10}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}112\\ 144\end{bmatrix} = 0.003\begin{bmatrix}-32\\ 256\end{bmatrix} \approx (-0.10\,,\,0.77)$$

$$R_1 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.003\begin{bmatrix}-32\\ 320\end{bmatrix} \approx (0.10\,,\,0.96)$$

$$S_1 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.003\begin{bmatrix}-96\\ 320\end{bmatrix} \approx (-0.29\,,\,0.96)$$

$$T_1 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = 0.003\begin{bmatrix}-96\\ 256\end{bmatrix} \approx (-0.29\,,\,0.77)$$

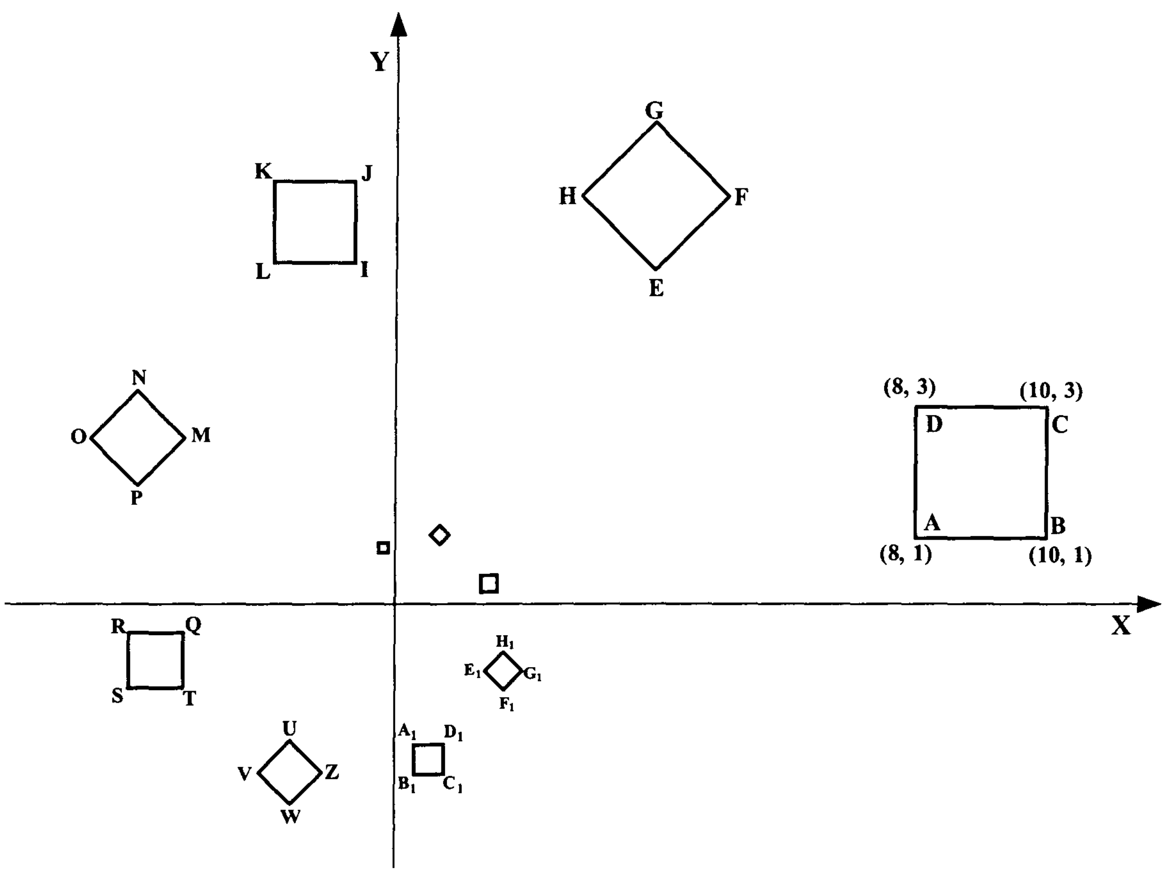

Figura 13

VI Vectores característicos

Si en una transformación el dominio y el codominio son el mismo espacio, entonces la transformación es un *operador* en ese espacio.

Ejemplo 1.VI
La imagen de un vector respecto de un operador es un vector del mismo espacio. La imagen de $(2, 3) \in R^2$ bajo el operador $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(a, b) = (3a+b, a-b)$, es : $T(2, 3) = (6+3, 2-3) = (9, -1) \in R^2$.
También $T(-1, 0) = (-3, -1) \in R^2$ y $T(1, -2) = (1, 3) \in R^2$

◇

Un operador puede ser lineal si cumple las condiciones de linealidad.

Cuando el operador es lineal, puede asociársele una matriz, que en este caso siempre resulta cuadrada.

En toda transformación lineal, la imagen del vector cero (o vector nulo) del dominio, es igual al vector cero del codominio, debido a que si $T: V \to W$ es lineal, entonces $\forall\ \bar{v} \in V$, $\forall \alpha \in K$, se cumple que $T(\alpha\bar{v}) = \alpha\ T(\bar{v})$, al considerar $\alpha = 0$, $\alpha\bar{v} = \bar{0}_V$ y $\alpha\, T(\bar{v}) = \bar{0}_W$ con lo que resulta $T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$.

Se llama *vector característico* de un operador lineal $T: V \to V$ a todo vector $\bar{v}$ de V diferente del vector nulo, que tenga su imagen bajo T proporcional a él, es decir $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$, con $\bar{v} \neq \bar{0}_V$. A la constante de proporcionalidad λ se le llama *valor característico* asociado o correspondiente al vector característico $\bar{v}$. Se excluye el vector nulo debido a que su imagen es proporcional a él, independientemente del operador, por lo que no es característico de algún operador en especial.

Ejemplo 2.VI
Si el operador lineal $S: R^3 \to R^3$ es tal que $S(a, b, c) = (a+3b, 2b+6c, b+3c)$, la imagen del vector $(9, -3, 1) \in R^3$ bajo el operador S, es: $S(9, -3, 1) = (0, 0, 0)$ que puede expresarse como $0(9, -3, 1)$, por lo tanto, $S(9, -3, 1) = 0(9, -3, 1)$, con lo que $(9, -3, 1)$ es un vector característico de S cuyo valor característico asociado es cero.

La imagen de $(3, 4, 2)$ es $S(3, 4, 2) = (15, 20, 10) = 5(3, 4, 2)$, es decir $(3, 4, 2)$ es otro vector característico de S cuyo valor asociado es cinco. Puede comprobarse que la imagen de $(-6, -8, -4)$ es $(-30, -40, -20) = 5(-6, -8, -4)$, es decir, otro vector característico de S asociado al mismo valor 5 es $(-6, -8, -4)$. Sin embargo, no todo vector de R^3 tiene su imagen respecto a S proporcional a él, así $S(1, 1, 1) = (4, 8, 4)$ que no puede expresarse como $\lambda(1, 1, 1)$.

◇

Como ya se dijo, el vector cero no es un vector característico; sin embargo, el valor cero sí puede ser un valor característico, como se vio en el ejemplo 2.VI y como se verá en líneas abajo, con el operador *Cero*.

Los vectores y valores característicos de un operador lineal, también se conocen como vectores y valores propios, o bien como eigen vectores y eigen valores (nombre que en idioma alemán significa propio), también como autovectores y autovalores.

Ejemplo 3.VI

En el espacio real de funciones reales de variable real derivables, la función exponencial e^{3x} es un vector característico del operador derivada, el valor asociado a ese vector es el tres. En general dicho operador tiene una infinidad de vectores característicos: todas las funciones de la forma be^{ax} con a, $b \in R$ y $b \neq 0$, cada uno de estos vectores está asociado al valor a.

◇

Ejemplo 4.VI

Para el operador identidad $I: V \rightarrow V$ tal que $\forall\, \bar{v} \in V$, $I(\bar{v}) = \bar{v}$, todo elemento del espacio V diferente del vector nulo, es vector característico del operador I asociado al valor uno.

◇

Ejemplo 5.VI

En el operador Cero, tal que $\forall\, \bar{v} \in V$, $O(\bar{v}) = \bar{0}$, todo vector , excluyendo al nulo, es característico asociado al valor cero.

◇

Puede demostrarse* que un conjunto cuyos elementos son vectores propios asociados a valores propios diferentes, es un conjunto linealmente independiente. Sin embargo, no todo conjunto de vectores característicos linealmente independiente, tiene por elementos vectores asociados a valores característicos diferentes.

Si $\bar{u}$, $\bar{v}$ es una pareja cualquiera de vectores característicos asociados al mismo valor λ, de un operador lineal $T: V \rightarrow V$, entonces por linealidad

$$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v} = \lambda\,(\bar{u}+\bar{v})$$

La suma, diferente del vector nulo, de dos vectores característicos $\bar{u}$, $\bar{v}$, también es vector característico asociado al mismo valor λ .

* Apuntes de Álgebra Lineal. Solar-Speziale pp. 767 y 768.

Además, $\forall\ \alpha \in$ K (campo de V) y $\alpha\ \neq 0$, $T(\alpha\bar{v}) = \alpha\ T(\bar{v}) = \alpha(\lambda\bar{v}) = \lambda(\alpha\bar{v})$, es decir, $\forall \alpha \neq 0$, $\alpha\bar{v}$ es vector característico del operador T asociado al valor λ.

El conjunto de vectores propios asociados a un valor λ, no contiene al vector nulo, ya que éste no es vector característico (por definición), pero si al mencionado conjunto le agregamos el vector cero, resulta ser un subespacio del espacio donde opera la transformación. A este subespacio se llama *espacio característico asociado al valor* λ y lo representamos con E (λ), que leemos "E de λ".

Si el operador es lineal y opera en un espacio de dimensión finita, para cada una de las bases del espacio, existe una matriz cuadrada que lo representa. Si a esa matriz M_B^B (T) la simbolizamos con A, se tiene que

$\forall\ \bar{v} \in V$, $A[\bar{v}]_B = [\ T(\bar{v})]_B$. Pero si $\bar{v}$ es un vector característico de T asociado a λ,

entonces, $A(\bar{v})_B = \lambda\ (\bar{v})_B \Rightarrow A(\bar{v})_B - \lambda\ (\bar{v})_B = \bar{0}$ --------- (a)

Si n es la dimensión del espacio V, el vector de coordenadas de $\bar{v}$ es un vector columna de n renglones. Ese vector $(\bar{v})_B$ puede expresarse como el producto de la matriz identidad de orden n por él mismo, esto es, $(\bar{v})_B = I(\bar{v})_B$ y al sustituirlo en la ecuación (a) se obtiene $A(\bar{v})_B - \lambda\ I(\bar{v})_B = \bar{0} \Rightarrow (A - \lambda I)\ \bar{v}_B = \bar{0}$, ésta es la forma matricial de un sistema homogéneo, cuya incógnita es $\bar{v}_B$, y del cual la matriz de coeficientes es $A - \lambda I$.

Este sistema es indeterminado si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero. Ser indeterminado significa que tiene soluciones diferentes del vector nulo, condición indispensable para que existan vectores característicos.

El desarrollo del determinante nos lleva a un polinomio de grado n en la variable λ, que suele llamarse *polinomio característico de T*, también se acostumbra llamarlo polinomio característico de la matriz A (por ser ella la que representa al operador). Al igualar a cero ese polinomio, se obtiene una ecuación (ecuación característica) con n soluciones las cuales, si pertenecen al campo del espacio, son los valores característicos de T (o de A).

Para cada uno de los valores se tiene un sistema homogéneo indeterminado, cuya solución general es el elemento genérico del conjunto de vectores característicos asociados a ese valor de λ.

Ejemplo 6.VI

Del operador $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(a, b) = (a + 3b, 2a + 2b)$ su matriz asociada

(referida a la base canónica) es : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, por lo tanto $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$;

determinante que al desarrollarlo se obtiene: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6$; el polinomio característico resulta $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ y la ecuación característica : $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, cuyas soluciones son : $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$

Para $\lambda_1 = -1$ se tiene el sistema: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow$ 2a + 3b = 0 ; b = $-\frac{2}{3}$a, así que, el espacio característico asociado al valor -1 es: E (-1) = { (a , $-\frac{2}{3}$a) | a ∈ R }

Para $\lambda_2 = 4$ la expresión matricial del sistema queda : $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow$ -a + b = 0

con lo que E (4) = { (a , a) | a ∈ R }.

◈

Ejemplo 7.VI

Del operador S en el espacio complejo C^2 tal que S (z , w) = (z – 5w , 2z + 3w) , su matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 10$; la ecuación resulta : $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$

Para $\lambda_1 = 2 + 3i$, debe resolverse el sistema: $\begin{bmatrix} -1-3i & -5 \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \bar{0}$, al escalonar la matriz resulta $\begin{bmatrix} -1-3i & -5 \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1-3i \\ -1-3i & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1-3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2z + (1-3i)\,w = 0;$

$$w = -\frac{2}{1-3i}z = -\frac{2(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}z = -\frac{1+3i}{5}z$$

$\therefore$ E (2 + 3i) = { $(z, (-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i)\,z)$ | $z \in C$ }

Para $\lambda_2 = 2 - 3i$; $\begin{bmatrix} -1+3i & -5 \\ 2 & 1+3i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1+3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 2z + (1+3i)w = 0; w = $-\frac{2}{1+3i}$ z , lo que implica que w = $-\frac{1-3i}{5}$z , por lo tanto: E (2 – 3i) = {(z , $(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i)$ z) | z ∈ C }.

◈

Ejemplo 8.VI

El operador D en el espacio real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, tal que $D(ax^2 + bx + c) = (a + c)x^2 + (b + 2c)x + (-2b + c)$, tiene la

matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; al desarrollar el determinante de la matriz $A - \lambda I$ e

igualarlo a cero, se tiene la ecuación característica $(1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 4] = 0$, esto es :

$(1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 5] = 0$, cuyas soluciones son : $\lambda_1 = 1$; $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$.

La ecuación característica tiene una solución real y dos soluciones complejas, debido a que el campo del espacio es real, el operador D tiene únicamente un valor característico, aunque la dimensión del espacio en el que opera es tres.

Para $\lambda_1 = 1$, el sistema queda $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2c = 0 \\ -2b = 0 \end{cases}$; y el valor de a puede

ser cualquiera, con lo que $E(1) = \{ ax^2 \mid a \in R \}$, además $\dim E(1) = 1$.

◇

Ejemplo 9.VI

El operador $F : R^3 \rightarrow R^3$ tal que $F(x, y, z) = (x, -2x + y + 2z, -3x + z)$, tiene

como matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, la ecuación característica es $(1-\lambda)^3 = 0$, cuyas

soluciones son $\lambda_{1,2,3} = 1$. En este caso, a diferencia del operador D del ejemplo anterior, el operador F tiene tres valores característicos, pero iguales, o bien un valor de multiplicidad tres.

Para $\lambda = 1$, el sistema es $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{0}$; de la segunda ecuación $x = z$; de la tercera $x = 0$, en virtud de que en ninguna ecuación aparece y, esto significa que dicha componente no tiene restricción alguna, es decir, puede tomar cualquier valor real, con lo que $E(1) = \{ (0, y, 0) \mid y \in R \}$ y la dimensión de E(1) es igual a uno.

◇

Ejemplo 10.VI

En el espacio real M_{2T} de las matrices triangulares inferiores de orden dos,

$M_{2T} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \mid a,b,c \in R \right\}$, actúa el operador G : $M_{2T} \to M_{2T}$ del cual la regla que lo define es: $G\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-2b+c & 0 \\ -2b & a+7b-c \end{bmatrix}$. La matriz asociada a G resulta entonces:

M(G) = $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. La ecuación característica de G (o de la matriz que lo representa) es el desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$ igualado a cero, es decir :

$$(-1-\lambda)(7-\lambda)(-\lambda) - 2 - 2(-1-\lambda) + 2(-\lambda) = (-1-\lambda)(7-\lambda)(-\lambda) - 2 + 2 + 2\lambda - 2\lambda = 0,$$

esto es, $(-1-\lambda)(7-\lambda)(-\lambda) = 0$ cuyas soluciones son: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 7$ y $\lambda_3 = -1$.

Para $\lambda_1 = 0$, el espacio característico tiene como elemento genérico, a la solución general del sistema $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; escalonando la matriz de coeficientes queda:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Del segundo renglón $b = 0$, y del primero $-a-2b+c = 0$, con $b = 0$, que implica $a = c$. El espacio asociado al valor cero es, por lo tanto:

$$E(0) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \mid a \in R \right\}.$$

Para $\lambda_2 = 7$, la matriz de coeficientes del sistema es: $\begin{bmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ y al escalonarla tenemos: $\begin{bmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Del primer renglón $a = c$ y del segundo $-2b = 7c \Rightarrow b = -\frac{7}{2}a$, con lo que el espacio asociado es:

$$E(7) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & -\frac{7}{2}a \end{bmatrix} \mid a \in R \right\}.$$

Para $\lambda_3 = -1$: $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Del segundo renglón $c = 2b$; del primero $a + 8b - 2b = 0 \Rightarrow a = -6b$. Con lo que $E(-1) = \left\{ \begin{bmatrix} -6b & 0 \\ 2b & b \end{bmatrix} \mid b \in R \right\}$.

◇

Cuando los valores propios no son repetidos, o sea, son de multiplicidad *uno*, el espacio propio asociado a cada uno de ellos es siempre de dimensión *uno*. Pero, si el valor tiene multiplicidad mayor que uno (como en el ejemplo 9.VI), el espacio asociado a ese valor puede tener dimensión uno (como en el ejemplo mencionado) o mayor. El valor máximo que puede tener la dimensión del espacio es igual al grado de multiplicidad del valor repetido.

Ejemplo 11.VI

En el espacio real P_2 de polinomios de grado menor que tres con coeficientes reales, el operador H : $P_2 \to P_2$ tal que, $H(ax^2 + bx + c) = (-b + 2c)x^2 + (-a - 2c)x + (a - b + c)$, se representa con la matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; su ecuación propia es el desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ igualado a cero, o sea:

$(-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + 2 + 2 - 2(-\lambda) - 2(-\lambda) - (1-\lambda) = 0$; que simplificada resulta:
$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$. De esta ecuación sus posibles raíces racionales son: ± 1 y ± 3; tiene una raíz positiva, pues en la ecuación sólo hay un cambio de signo; haciendo una división sintética obtenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & & 3 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

una solución es $\lambda_1 = 3$, las otras dos soluciones son las raíces del polinomio $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ que es un trinomio cuadrado perfecto, correspondiente a $(\lambda + 1)^2$ por lo que, las otras dos soluciones son iguales e iguales a -1, esto es $\lambda_{2,3} = -1$. Un valor característico de H es $\lambda_2 = -1$, de multiplicidad dos. Para obtener el espacio propio asociado a -1 escalonamos la matriz

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ del primer renglón tenemos: $a - b + 2c = 0 \Rightarrow a = b - 2c$

y el espacio es: $E(-1) = \{(b - 2c)x^2 + bx + c \mid b, c \in R\}$ cuya dimensión es:
$\dim E(-1) = 2$. Una base de este espacio es $B = \{x^2 + x, -2x^2 + 1\}$.

Para $\lambda_1 = 3$; $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; del segundo renglón c = –b y del primero a = b + 2c = –b.

Así que, $E(3) = \{-bx^2 + bx - b \mid b \in R\} = \{ax^2 - ax + a \mid a \in R\}$ cuya dimensión es: dim E(3) = 1.

◈

Ejemplo 12.VI

En el espacio real $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \mid a,b,c \in R \right\}$ el operador $K : M_2 \to M_2$ tal que $K \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-2c \\ a-2c & a+b+c \end{bmatrix}$ tiene como matriz asociada: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; la ecuación característica es: $(1-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0$, cuyas soluciones son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -2$.

Para $\lambda = 1$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ del segundo renglón $c = 0$, del primero a=3c=0; pero, b puede tomar cualquier valor por lo que: $E(1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid b \in R \right\}$ y aunque el valor $\lambda = 1$ es de multiplicidad 2, el espacio asociado tiene dimensión uno.

Para $\lambda = -2$; $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $3b + c = 0 \Rightarrow c = -3b$; $a = 0$ con lo que

$$E(-2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -3b \\ -3b & b \end{bmatrix} \mid b \in R \right\}$$

◈

VII Matrices similares y diagonalización

Dos matrices A y B son similares si existe una matriz C no singular tal que, si una de las similares se premultiplica por la inversa de C y se posmultiplica por C, se obtiene la otra similar. Esto con símbolos es: A y B son similares si $\exists C$ tal que $C^{-1} A\ C = B$.

Por otra parte, en un espacio vectorial, la matriz de transición de una base D a otra base F, M_F^D, es tal que si se posmultiplica por el vector de coordenadas de cualquier elemento del espacio respecto a la base D, el producto es el vector de coordenadas, del mismo elemento del espacio, respecto a la base F, esto es: Si D y F son bases de un espacio V; $\forall\ \bar{v} \in V$, $M_F^D(\bar{v})_D = (\bar{v})_F$. Esta matriz de transición es *no singular*, debido a que $(M_F^D)^{-1}(M_F^D)(\bar{v})_D = (\bar{v})_D = (M_F^D)^{-1}(\bar{v})_F$, lo que significa que la matriz M_D^F, de transición de la base F a la D (que siempre existe), es la inversa de M_F^D.

Si A es la matriz asociada a un operador $T : V \rightarrow V$, referida a una cierta base D de V, y B es la matriz asociada a T, pero referida a la base F de V, entonces

$A(\bar{v})_D = [\,T(\bar{v})]_D$ .... (1) y

$B(\bar{v})_F = [\,T(\bar{v})]_F$ .... (2), para todo elemento $\bar{v}$ del espacio V.

Pero, $(\bar{v})_D = M_D^F(\bar{v})_F$, que sustituido en (1), nos lleva a:

$A M_D^F(\bar{v})_F = [\,T(\bar{v})]_D$ .... (3).

Ahora, premultiplicando por M_F^D (que es la inversa de M_D^F) resulta:

$(M_D^F)^{-1} A (M_D^F)(\bar{v})_F = (M_D^F)^{-1}[T(\bar{v})]_D$ donde, el segundo miembro, $M_F^D[T(\bar{v})]_D$ es igual a: $[\,T(\bar{v})]_F$ por lo que queda $(M_D^F)^{-1} A (M_D^F)(\bar{v})_F = [T(\bar{v})]_F$, o sea, $B(\bar{v})_F = [\,T(\bar{v})]_F$, es decir, $B = (M_D^F)^{-1} A\ \ M_D^F$. Con esto, hemos demostrado que dos matrices asociadas al mismo operador, referidas a distintas bases, son similares entre sí. De manera semejante, puede verse que si dos matrices son similares, representan al mismo operador.

Dos matrices similares tienen el mismo determinante, ya que:

$$\det B = \det\ C^{-1} A\ C = \det C^{-1}\ \det A\ \det C = \frac{1}{\det C}\ \det C\ \det A = \det A.$$

A la matriz identidad la podemos expresar como $I = C^{-1} I\ C$ y con ello, para A y B similares:

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= C^{-1} B\ C\ -\ \lambda\ C^{-1} I\ C \\ &= C^{-1}\ [\ B\ C\ -\ \lambda I\ C\ ] \\ &= C^{-1}\ [\ B\ -\ \lambda I\ ]\ C. \end{aligned}$$

Así que, $A - \lambda I$ y $B - \lambda I$ son similares, por lo tanto, tienen el mismo determinante, es decir, dos matrices similares tienen la misma ecuación característica y, en consecuencia, los mismos valores y vectores propios.

Las matrices con igual número de renglones y de columnas, se dice que son *cuadradas* , de éstas son *diagonales* las que tienen nulos todos los elementos fuera de la diagonal principal (ésta está formada por los elementos colocados en lo que sería la diagonal del cuadrado que va de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo). Ejemplos de matrices diagonales son :

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -2+i \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Las operaciones con matrices se simplifican de manera considerable si las matrices son diagonales.

Ejemplo 1.VII

El producto de las matrices diagonales A y B, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$ es la matriz P, también diagonal, tal que

$$P = \begin{bmatrix} 3(-\frac{1}{9}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Además, la inversa de A, que es también diagonal, tiene en su diagonal principal los recíprocos de los elementos no nulos de A, esto es :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

◇

En general, para invertir una matriz diagonal, basta con obtener los recíprocos de los elementos de su diagonal principal y con ellos formar la diagonal principal de la matriz inversa. De esta manera, es inmediato ver que una matriz, como la B del ejemplo 1.VII, es *singular* (no tiene inversa), debido a que un elemento de su diagonal principal es cero y no existe el recíproco (inverso multiplicativo) de cero.

En la sección IV se mencionó que el espacio *L (V, W)*, de todas las trasformaciones que tienen, respectivamente iguales el dominio de dimensión *n* y el codominio de dimensión *m*, es isomorfo del de las matrices de orden *m x n* que representan a las transformaciones. En el caso de un operador, la matriz que lo representa es siempre cuadrada y las operaciones entre operadores, se simplifican, si las matrices son diagonales.

A la teoría y el proceso que lleva a la obtención de una matriz diagonal que represente a un operador lineal, se le conoce como *diagonalización*.

En la mayoría de los casos, la matriz, representante de un operador, más fácil de obtener es la referida a la base canónica del espacio en el que actúa el operador (la llamada matriz asociada); pero, ésta no es, en general, diagonal.

Si existe una base B del espacio W de dimensión n, formada por n vectores característicos de un operador T, la matriz asociada a T referida a esa base, debe ser tal que al posmultiplicarla por el vector de coordenadas respecto a B de cualquier elemento del espacio W, el producto es el vector de coordenadas respecto a B de la imagen del elemento bajo el operador T. Con símbolos lo anterior es:

$$\forall \bar{v} \in W \; ; \; M_B^B(\bar{v})_B = [\,T(\bar{v})]_B$$

Como esto es para todo elemento de W, si elegimos al primer elemento $\bar{b}_1$ de B, cuyo vector de coordenadas respecto a la base B es: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, tenemos $M_B^B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [\lambda_1 \bar{b}_1]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

donde λ_1 es el valor asociado al vector $\bar{b}_1$.

En general, al posmultiplicar una matriz de $n \times n$ por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ de $n \times 1$, el producto es la primera columna de la matriz. Al posmultiplicarla por $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, el producto es la segunda columna; así se obtienen todas las columnas hasta la última (enésima) al posmultiplicarla por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para la matriz M_B^B su primer columna es: $M_B^B(\bar{b}_1)_B$.

El vector de coordenadas respecto a la base *B*, de su segundo elemento es $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, por lo que

la segunda columna de M_B^B resulta: $M_B^B\left(\overline{b}_2\right)_B = M_B^B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\lambda_2 \overline{b}_2\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

La conclusión de lo anterior es que las columnas de M_B^B son: $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; ... ; $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, es decir, M_B^B es una matriz diagonal que tiene en su diagonal principal a los valores propios asociados, respectivamente, a los vectores propios que forman la base *B*.

De manera semejante se puede comprobar que si la matriz M_D^D, asociada a un operador S : V $\rightarrow$ V, referida a una base *D* de V, es diagonal, entonces la base *D* está formada por vectores característicos de S y los elementos de la diagonal principal de M_D^D son los valores característicos asociados, respectivamente, a los elementos de la base *D*.

Ejemplo 2.VII

Si $M_D^D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a un operador S : V $\rightarrow$ V referida a la base $D = \{\overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3, \overline{d}_4\}$ del espacio V; entonces:

$M_D^D(\overline{d}_1)_D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[S(\overline{d}_1)\right]_D$; $S(\overline{d}_1) = 3\overline{d}_1 + 0 + 0 + 0 = 3\overline{d}_1$, o sea

$\overline{d}_1$ es vector característico de S asociado al valor 3.

$$M_D^D(\overline{d}_2)_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [S(\overline{d}_2)]_D \Rightarrow S(\overline{d}_2) = 3\overline{d}_2$$; el vector $\overline{d}_2$ es otro vector característico de S asociado al mismo valor 3. De manera semejante puede verse que $\overline{d}_3$ es vector característico de S asociado al valor 4, y que $\overline{d}_4$ es también vector característico de S, pero asociado al valor 2.

◇

Un operador de *W* en *W* se puede representar por una matriz *diagonal* si y sólo si existe una base de *W* cuyos elementos son vectores característicos del operador; la matriz está referida a dicha base.

Ejemplo 3.VII

La matriz asociada al operador (del ejemplo 3.VI) T : $R^2 \rightarrow R^2$ tal que

T(a, b) = (a + 3b , 2a + 2b), referida a la base canónica de R^2, A = {(1, 0) , (0, 1)} es

M(T) = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, cuyos valores característicos: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$, tienen los espacios asociados: E(−1) = {(a, $-\frac{2}{3}$a) | a ∈ R} y E(4) = {(a, a) | a ∈ R}.

El vector $\overline{b}_1 = (3, -2) \in$ E(−1) es característico de T asociado al valor −1 ; y $\overline{b}_2 = (1, 1)$ es característico de T asociado al valor 4. Una base de R^2 es B = {(3, −2) , (1, 1)}; la matriz $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, asociada a T y referida a la base B, es una matriz diagonal. El primer elemento de la base B, el vector $\overline{b}_1$ es: $\overline{b}_1 = (3, -2)$, expresado como combinación lineal de los elementos de A es: $3\overline{a}_1 - 2\overline{a}_2$ y el segundo $\overline{b}_2 = (1, 1) = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$.

De la definición de matriz de transición de la base B a la base A de R^2 resulta:

$M_A^B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, cuyas columnas son los vectores $\overline{b}_1$ y $\overline{b}_2$. La inversa de M_A^B es:

$$\left(M_A^B\right)^{-1} = M_B^A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Las matrices M(T) y M_B^B(T) son similares como puede comprobarse premultiplicando a M(T) por M_B^A (que es $\left(M_A^B\right)^{-1}$) y posmultiplicándola por M_A^B:

$$M_B^A \text{ M(T)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$M_B^A \text{ M(T) } M_A^B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = M_B^B\text{(T)}$$

◇

Se comprueba, para este ejemplo, que dos matrices representantes de un operador, son similares. Además, que el operador es diagonalizable (puede representarse con una matriz diagonal) si existe una base del espacio donde actúa el operador, cuyos elementos son vectores propios de éste.

Todo operador lineal en un espacio de dimensión *n,* con *n* valores propios diferentes, es diagonalizable.

A un operador F (como el del ejemplo 9.VI), con valores propios repetidos (de multiplicidad mayor que uno) cuyo espacio asociado tiene dimensión menor que el grado de multiplicidad, no es posible asociarle una matriz diagonal, pues no existe una base de su dominio formada por vectores propios. En el ejemplo mencionado, la dimensión de R^3 es tres, pero dos o más vectores propios de F son linealmente dependientes, ya que pertenecen a un espacio asociado que es de dimensión uno, por lo que no puede formarse una base de R^3 con tres vectores linealmente independientes que sean propios del operador F.

Tampoco es posible diagonalizar un operador D como el del ejemplo 8.VI, que actúa en un espacio real de dimensión tres, pero que su ecuación característica tiene sólo *una* solución real y dos complejas, por lo que el operador sólo tiene un valor propio (no repetido) y no existen tres vectores propios del operador D, linealmente independientes, en consecuencia no hay una base del espacio donde actúa, formada por vectores propios del operador D.

Ejemplo 4.VII

La matriz asociada al operador J : $R^3 \to R^3$ con regla de correspondencia:

$J(x, y, z) = (3x-z\ ,\ y-z\ ,\ 2y + 3z)$ es $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, con ecuación característica:

$(3-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 5] = 0$, cuyas soluciones son: $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 2 + i$; $\lambda_3 = 2 - i$.

El operador J sólo tiene un valor propio, ya que R^3 es un espacio real y λ_2, $\lambda_3 \notin R$.

Para $\lambda_1 = 3$ la matriz de coeficientes del sistema $[A-\lambda I]\bar{v} = \bar{0}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = z = 0;\ \forall\, x$$

$\therefore$ $E(3) = \{(x, 0, 0) \mid x \in R\}$ con dim $E(3) = 1$. No existe una base de R^3 cuyos elementos sean vectores propios de J. Por lo tanto, J no es diagonalizable.

◇

Ejemplo 5.VII

El operador K : $C^3 \to C^3$ donde C^3 es el espacio complejo de las ternas de números complejos, tiene como regla que lo define a $K(x, y, z) = (3x - z\ ,\ y - z\ ,\ 2y + 3z)$, la matriz asociada a K es $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, que tiene la ecuación característica $(3-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 5] = 0$ cuya soluciones son: $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 2 + i$; $\lambda_3 = 2 - i$. Las tres soluciones pertenecen al campo de C^3 así que, K tiene tres valores característicos diferentes y por lo tanto es diagonalizable.

La única diferencia de este operador K con el J del ejemplo anterior, es el campo del espacio en el que actúan.

K es diagonalizable, una de las matrices diagonales de K es: $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$. Ahora, debemos saber a cual base de C^3 está referida. Para ello obtenemos los espacios asociados.

Para $\lambda_1 = 3$ se tiene $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Así que, E(3)= $\{(x, 0, 0) \mid x \in C\}$;

un vector de este espacio es $\bar{v}_1 = (i , 0 , 0)$.

Para $\lambda_2 = 2 + i$, $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ 0 & -1-i & -1 \\ 0 & 2 & 1-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1-i \\ 0 & -1-i & -1 \end{bmatrix}$.

Para anular el elemento *–1–i* del tercer renglón, a partir del elemento *2* del segundo renglón, debemos multiplicar por $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i = \frac{1+i}{2}$ el segundo renglón y agregarlo al tercer renglón; $(1-i)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2})i = 1$. Con lo que, se llega a $\begin{bmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

del segundo renglón $y = \frac{-1+i}{2}z = (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z$; del primer renglón $x = \frac{1}{1-i}z = \frac{1+i}{2}z =$

$= (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z$ por lo tanto E(2+i) = $\{((\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z \, , \, (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z \, , \, z) \mid z \in C\}$. Un vector de este espacio es $\bar{v}_2 = (1+i , -1+i , 2)$.

Para $\lambda_3 = 2 - i$; $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & -1 \\ 0 & -1+i & -1 \\ 0 & 2 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1+i & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; del primer renglón

$x = \frac{1}{1+i}z = \frac{1-i}{2}z = (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)z$; del segundo: $y = \frac{-1-i}{2}z = (-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)z$ con lo que:

E(2–i) = $\{((\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)z \, , \, (-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)z \, , \, z) \mid z \in C\}$; un vector de este espacio es :

$\bar{v}_3 = (\ 1-i\ ,\ -1-i\ ,\ 2)$. Con lo anterior, una base de C^3 a la que está referida la matriz D asociada a K, es: B = { (i, 0, 0) , (1+i , −1+i , 2) , (1−i , −1−i , 2) }.

La matriz A asociada a K, está referida a la base canónica de C^3 que es: { (1, 0, 0) , (0, 1, 0) , (0, 0, 1) }. Las coordenadas de $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$, respecto a la base canónica son, respectivamente, las columnas de una matriz $P = \begin{bmatrix} i & 1+i & 1-i \\ 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ que suele llamarse *diagonalizadora* o *diagonalizante* de la matriz A y es tal que $P^{-1} A P = D$.

$$A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1+i & 1-i \\ 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i & 1+3i & 1-3i \\ 0 & -3+i & -3-i \\ 0 & 4+2i & 4-2i \end{bmatrix}.$$

A P puede expresarse como IAP. Si a la matriz ampliada [P | IAP] , le aplicamos transformaciones elementales que lleven a la matriz P de la parte izquierda a convertirse en la identidad I, la parte derecha se convierte en $P^{-1} A P$, es decir, en la diagonal D.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} i & 1+i & 1-i & 3i & 1+3i & 1-3i \\ 0 & -1+i & -1-i & 0 & -3+i & -3-i \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4+2i & 4-2i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -1-i & 3 & 3-i & -3-i \\ 0 & 1 & i & 0 & 2+i & 1+2i \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2+i & 2-i \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -1-i & 3 & 3-i & -3-i \\ 0 & 1 & i & 0 & 2+i & 1+2i \\ 0 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 1-3i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & 0 & 3 & 3-i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2-i \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2-i \end{array}\right]$$

; ya que, $P^{-1} A P = D$, las matrices A y D son similares por lo que representan al mismo operador K.

◇

Ejemplo 6.VII

El operador H del ejemplo 11.VI, H: $P_2 \to P_2$ tal que

$H(ax^2 + bx + c) = (-b + 2c)\,x^2 + (-a - 2c)x + (a - b + c)$ cuya matriz asociada (referida a la base $C = \{ x^2, x, 1\}$), es $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, tiene como valores propios a: $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ y sus espacios asociados son: $E(3) = \{ ax^2 - ax + a \mid a \in R \}$;

$E(-1) = \{ ax^2 + (a+2c)x + c \mid a,c \in R \}$. Un vector $\bar{v}_1 = x^2 - x + 1 \in E(3)$; otro vector $\bar{v}_2 = x^2 + x \in E(-1)$ y un tercer vector propio que pertenece a $E(-1)$, linealmente independiente de $\bar{v}_2$, es $\bar{v}_3 = 2x + 1$. Una base B de P_2 formada por vectores propios de H puede ser: $B = \{ x^2 - x + 1,\ x^2 + x,\ 2x + 1 \}$. Una matriz P diagonalizadora de A, tiene por columnas a los vectores de coordenadas de los elementos de la base B, respecto a la base C:

$$(x^2 - x + 1)_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\quad (x^2 + x)_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\quad (2x+1)_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \text{esto es } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = IAP.$$

Ahora formamos la matriz ampliada [P | IAP] y transformamos la parte izquierda en I, la parte derecha se transforma en $P^{-1} A P$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Resulta $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D_B^B(H)$ matriz diagonal asociada al operador H y referida a la base B. Si se considera otra base de P_2 formada por vectores propios de H, como F = { $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$ }, donde $\overline{f}_1 = -2x^2 + 1 \in E(-1)$; $\overline{f}_2 = -x^2 + x - 1 \in E(3)$ y $\overline{f}_3 = -x^2 + x + 1 \in E(-1)$; la matriz diagonalizadora es:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \; A\,P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[P_1 \mid IA\,P_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -9 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]; \; P_1^{-1}A\,P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Que es otra matriz diagonal asociada al operador H, ésta referida a la base F. Los valores característicos que forman la diagonal son los asociados, respectivamente, a $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$ y $\overline{f}_3$.

◇

Ejemplo 7.VII

En el espacio real $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in R \right\}$, el operador $L : M_2 \rightarrow M_2$ tal que

$L \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a+b-c & 3b+c \\ 0 & 2b+2c \end{bmatrix}$, tiene como matriz asociada (referida a la base natural de $M_2 : C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$) la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; la ecuación característica

$|A - \lambda I| = 0$ es: $(4-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-2] = 0$; que implica $(4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$, cuyas soluciones son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 1$.

La matriz B asociada a L, referida a la base G = $\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right\}$ tiene por columnas los vectores de coordenadas de las respectivas imágenes de los elementos de G, es decir, la primera columna es [L($\overline{g}_1$)]$_G$; la segunda [L($\overline{g}_2$)]$_G$ y la tercera [L($\overline{g}_3$)]$_G$. Para obtener estos vectores de coordenadas es conveniente determinar la expresión de dichas coordenadas para el elemento genérico $\begin{bmatrix}a & b\\0 & c\end{bmatrix}$ del espacio M_2. Estas coordenadas α,β,γ son tales que: $\begin{bmatrix}a & b\\0 & c\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ lo cual nos lleva al sistema :

$$\left\{\begin{array}{llll} a = \alpha & & -\gamma & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ b = 2\alpha & +\beta & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\ c = \alpha & +\beta & +2\gamma & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\end{array}\right.$$

De (1) $\gamma = \alpha - a$ ….. (4), sustituyendo en (3) tenemos $c = \alpha+\beta+2\alpha - 2a$ que implica $2a + c = 3\alpha + \beta$ …… (5). De (2) $\beta = b - 2\alpha$ ….. (6), al sustituir en (5) $2a + c = 3\alpha + b - 2\alpha$, con lo que $\alpha = 2a - b + c$, esto llevado a (6) da $\beta = b - 4a + 2b - 2c = -4a + 3b - 2c$, sustituyendo la expresión de α en (4) resulta

$\gamma = 2a - b + c - a = a - b + c$. Así tenemos $\begin{bmatrix}a & b\\0 & c\end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix}2a-b+c\\-4a+3b-2c\\a-b+c\end{bmatrix}$ con lo que:

$$\left(L\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\right)_G = \begin{bmatrix}5 & 7\\0 & 6\end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix}9\\-11\\4\end{bmatrix}$$

$$\left(L\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right)_G = \begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 4\end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$$

$$\left(L\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)_G = \begin{bmatrix}-6 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix}-10\\ 22\\ -4\end{bmatrix}$$

La matriz B asociada al operador L, referida a la base G es: $M_G^G\text{(L)} = \text{B} = \begin{bmatrix}9 & 0 & -10\\ -11 & 4 & 22\\ 4 & 0 & -4\end{bmatrix}$

su ecuación característica: | B – λ I | = 0, se obtiene al igualar a cero el desarrollo del

determinante $\begin{vmatrix}9-\lambda & 0 & -10\\ -11 & 4-\lambda & 22\\ 4 & 0 & -4-\lambda\end{vmatrix} = (4-\lambda)\,[(9-\lambda)(-4-\lambda)+40]$. Así que:

$(4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$. Con esto comprobamos que dos matrices (la A y la B) asociadas al mismo operador lineal, tienen la misma ecuación característica y, por ende, los mismos valores característicos. Para este ejemplo $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 1$.

Para $\lambda_3 = 1$, el espacio asociado correspondiente es el conjunto solución del sistema homogéneo [B – λ I] $(\bar{v})_G = \bar{0}$, esto es $\begin{bmatrix}8 & 0 & -10\\ -11 & 3 & 22\\ 4 & 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2a-b+c\\ -4a+3b-2c\\ a-b+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$;

escalonando la matriz de coeficientes: $\begin{bmatrix}8 & 0 & -10\\ -11 & 3 & 22\\ 4 & 0 & -5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{4}\\ 0 & 3 & \frac{33}{4}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{4}\\ 0 & 1 & \frac{11}{4}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$;

esto equivale al sistema

$$\begin{cases}(2a-b+c) - \frac{5}{4}(a-b+c) = 0\\ (-4a+3b-2c) + \frac{11}{4}(a-b+c) = 0\end{cases}$$

$$2a - b + c - \tfrac{5}{4}a + \tfrac{5}{4}b - \tfrac{5}{4}c = 0 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{3}{4}a + \tfrac{1}{4}b - \tfrac{1}{4}c = 0$$

$$-4a + 3b - 2c + \tfrac{11}{4}a - \tfrac{11}{4}b + \tfrac{11}{4}c = 0 \quad\Rightarrow\quad -\tfrac{5}{4}a + \tfrac{1}{4}b + \tfrac{3}{4}c = 0$$

De la primera ecuación $c = 3a + b$; multiplicando la segunda por cuatro y sustituyendo la expresión de c, resulta: $-5a + b + 9a + 3b = 0$ lo que implica que $b = -a$. Por lo tanto,

$$\text{E(1)} = \left\{\begin{bmatrix}a & -a\\ 0 & 2a\end{bmatrix} \,\middle|\, a \in R\right\}.$$

Para $\lambda = 4$, $[\,B - \lambda I\,]\ (\bar{v})_G = 0$, resulta: $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ -11 & 0 & 22 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a-b+c \\ -4a+3b-2c \\ a-b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Al escalonar la matriz de coeficientes tenemos:

$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ -11 & 0 & 22 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; el primer renglón representa la ecuación $(2a - b + c) - 2(a - b + c) = 0$; $2a - b + c - 2a + 2b - 2c = 0$ lo que implica $b - c = 0$; $c = b$; al *no* intervenir a cuando se simplifica la ecuación, significa que la igualdad se satisface *para todo* valor de a. Con esto, el espacio asociado al valor cuatro es:

$$E(4) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}.$$

El valor propio *4* es repetido, de multiplicidad dos y su espacio asociado E(4) tiene dimensión dos, por lo tanto existe una base F de M_2 formada por vectores propios:

$\bar{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in E(4)$; $\bar{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in E(4)$ y $\bar{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in E(1)$.

El operador L es diagonalizable. También se dice que la matriz B que lo representa es diagonalizable y una matriz P, diagonalizadora de B, tiene por columnas a los vectores de coordenadas de $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ y $\bar{f}_3$, respecto a la base G, que es a la que está referida B.

$(\bar{f}_1)_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $(\bar{f}_2)_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $(\bar{f}_3)_G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix}$

P es entonces: $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $D = P^{-1}\, B\, P$

$$\text{BP} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -10 \\ -11 & 4 & 22 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -16 & 4 & -11 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[\,\text{P} \mid \text{IBP}\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 5 & 8 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -11 & -16 & 4 & -11 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Con esto,} \quad M_F^F(\text{L}) = \text{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si la base de vectores propios es: $\text{F}_1 = \{\bar{f}_2, \bar{f}_3 \text{ y } \bar{f}_1\}$, la matriz diagonalizadora queda

$$\text{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & -11 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \text{P}_1^{-1}\text{B}\,\text{P}_1 = \text{D}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

◈

Como puede comprobarse con el ejemplo anterior, resulta mucho más laborioso el proceso de diagonalización cuando la matriz que representa a un operador lineal no está referida a la base *natural* o *canónica*. Sin embargo, se presenta el ejemplo 7.VII para precisar la teoría general de este proceso.

VIII Formas Cuádricas

Se llama *cuádrica* o *cuadrática,* a toda ecuación de segundo grado. Ésta puede ser de una o más incógnitas; si es de tres incógnitas su forma general se expresa como:

$$Ax^2 + Bxv + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

La parte correspondiente a los términos de segundo grado, esto es $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2$, suele llamarse *forma cuádrica.* Si se considera la terna de incógnitas (x, y, z) como un vector $\bar{v}$ de R^3, que a la vez lo representamos como una matriz columna $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, la forma cuádrica puede expresarse en forma matricial como: $\bar{v}^T M \bar{v}$ donde M generalmente es una matriz simétrica.

Ejemplo 1.VIII
La forma cuádrica $3x^2 + 4xy + y^2 - 6xz + 5yz - 2z^2$ puede representarse en forma matricial, donde la matriz M debe tener en su diagonal principal, los coeficientes de x^2, y^2, z^2, respectivamente. Los elementos m_{12} y m_{21} deben ser dos números que sumados sean cuatro (coeficiente del término xy); m_{13} y m_{31} números cuya suma sea -6 (coeficiente de xz), y los elementos m_{23} y m_{32}, números que tengan por suma a cinco. Esta matriz *pudiera ser :* $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$. Pero, la matriz más conveniente (por razones que expondremos más adelante) es una matriz *simétrica*, esto es, $m_{12} = m_{21}$ igual a la mitad del coeficiente de xy, que en este ejemplo es cuatro; $m_{13} = m_{31}$ igual a la mitad del coeficiente de xz; $m_{23} = m_{32}$ igual a la mitad del coeficiente de yz. Así, la matriz más conveniente es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix} \text{ con lo que se tiene, } \bar{v}^T A \bar{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_{1x3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}_{3x3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3x1}$$

El producto $A\bar{v}$ resulta: $\begin{bmatrix} 3x+2y-3z \\ 2x+y+\frac{5}{2}z \\ -3x+\frac{5}{2}y-2z \end{bmatrix}_{3x1}$ y premultiplicado por $\bar{v}^T$ resulta

$$\begin{aligned}\bar{v}^T A\bar{v} &= x(3x+2y-3z)+y(2x+y+\tfrac{5}{2}z)+z(-3x+\tfrac{5}{2}y-2z) \\ &= 3x^2+2xy-3xz+2xy+y^2+\tfrac{5}{2}yz-3xz+\tfrac{5}{2}yz-2z^2 \\ &= 3x^2+4xy+y^2-6xz+5yz-2z^2\end{aligned}$$ que es la forma cuádrica original.

◇

No sólo la forma cuádrica, sino toda ecuación de segundo grado completa, puede expresarse en forma matricial, al considerar el conjunto de n variables que intervienen en ella como un vector de R^n, para cualquier valor finito de n. En ese caso, la matriz de la forma cuádrica es una matriz cuadrada de orden n.

Ejemplo 2.VIII

La ecuación de segundo grado con dos incógnitas $-2x^2+8xy-y^2+3x-5y+4=0$ puede expresarse en forma matricial con: $\bar{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2x1}$; $A=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$; $B=\begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}_{1x2}$; $C=\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}_{1x1}$. Así, la ecuación de segundo grado es $\bar{u}^T A\bar{u} + B\bar{u} + \mathrm{C} = \mathrm{O}$, donde O es la matriz nula de orden uno; con esto tenemos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} -2x+4y & 4x-y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3x-5y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix};$$

$[-2x^2+4xy+4xy-y^2]+[3x-5y]+[4]=[0]$; al escribir, de cada una de las matrices de orden *uno por uno*, a ambos lados del signo igual, sólo su *único elemento,* sin encerrarlo entre paréntesis, resulta la ecuación de segundo grado: $-2x^2+8xy-y^2+3x-5y+4=0$.

◇

La ecuación de un lugar geométrico (línea, figura, superficie, etcétera) es la representación analítica de dicho lugar geométrico.

Las curvas planas llamadas cónicas (circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas) se representan analíticamente en coordenadas cartesianas, con una cuádrica de dos incógnitas. La identificación, tanto del tipo de cónica, como de las características principales de ella, es prácticamente inmediata si el eje o ejes de la cónica son paralelos a los cartesianos y, en ese caso, la ecuación (representación analítica) no tiene término en *xy*, que se conoce como *mixto* o *cruzado*. Esto equivale a que la matriz correspondiente a la expresión matricial de la forma cuádrica sea diagonal.

Si la ecuación de la cónica tiene término cruzado, para la identificación es conveniente, desde el punto de vista geométrico, hacer una rotación de ejes para lograr que en el nuevo sistema el eje o ejes de la cónica sean paralelos a los coordenados. Desde el punto de vista algebraico, se necesita un cambio de variable de tal manera que en la expresión matricial de la forma cuádrica se tenga una matriz diagonal.

La conveniencia de usar una matriz *simétrica* en la expresión de la *forma cuádrica*, es debida a que "*una matriz real simétrica siempre es diagonalizable*" ♣.

Además, el cambio de la variable $\overline{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a la $\overline{w}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, debe ser de manera que $\overline{v}=P\overline{w}$, con esto $\overline{v}^{\,T}=\left(P\overline{w}\right)^T=\overline{w}^{\,T}P^T$ y así, al sustituir en la forma cuádrica $\overline{v}^{\,T}A\,\overline{v}$ resulta: $\overline{w}^{\,T}P^T\mathrm{A}\,\mathrm{P}\,\overline{w}$. La matriz A es similar a una diagonal D si existe una matriz P tal que: D $=P^{-1}AP$. Por lo que, para que P sea diagonalizadora de A debe ser *ortogonal:* $P^{-1}=P^T$; por lo tanto P debe tener las propiedades de toda matriz ortogonal, esto es: los vectores geométricos de R^n que forman sus columnas, deben ser unitarios (tener módulo igual a uno); además, el *producto punto o escalar* de dos cualesquiera de ellos debe ser cero (deben ser ortogonales), y el determinante de la matriz debe valer uno. La ortogonalidad, respecto al producto punto, entre los vectores *siempre* puede obtenerse con los vectores propios de una matriz simétrica, asociados a valores propios diferentes.

♣ Álgebra Lineal. Una introducción moderna. Autor: David Poole. Editorial Thomson. 2003. Pág. 389

Con el cambio de variable anterior, una ecuación cuádrica en forma matricial $\overline{v}^{\,T} A \overline{v} + B\overline{v} + C = O$ se convierte en $\overline{w}^T D\overline{w} + BP\overline{w} + C = O$.

Ejemplo 3.VIII

Para identificar la cónica cuya ecuación es $-x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0$ .... (1); primero obtenemos la expresión matricial de su forma cuádrica: $[x \quad y]\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;

luego, diagonalizamos la matriz A = $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, para ello obtenemos su ecuación característica: $|\, A - \lambda I \,| = 0$, es decir $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -2$.

Para $\lambda_1 = 3$: $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ E(3) $= \{(x, -2x) \mid x \in R\}$

Para $\lambda_2 = -2$: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ E(−2) $= \{(2y, y) \mid y \in R\}$.

Con esto, $\overline{v}_1 = (1,-2) \in E(3)$; $\overline{v}_2 = (2, 1) \in E(-2)$. El producto punto $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2$ es igual a cero, es decir $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ son ortogonales. Para que P, la diagonalizadora de A, sea ortogonal, sus columnas deben ser los vectores unitarios de $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$.

$|\overline{v}_1| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$; $\quad |\overline{v}_2| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $\quad$ con lo que $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ y

$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$; la nueva variable, el vector $\overline{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ es tal que $\overline{v} = P\overline{w}$, y con él

la nueva ecuación de la cónica en forma matricial : $\overline{v}^T A\overline{v} + B\overline{v} = \overline{w}^T P^T A\, P\,\overline{w} + BP\overline{w} = 0$

$\overline{w}^T D\,\overline{w} + BP\,\overline{w} = 0$, resulta:

$$[x_1 \quad y_1]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [2 \quad 4]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$[x_1 \quad y_1]\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = [0]$$

$[x_1 \quad y_1]\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}+\left[-\frac{6}{\sqrt{5}}x_1+\frac{8}{\sqrt{5}}y_1\right]=[0]$; ésta corresponde a la ecuación

$3x_1^{\,2}-2y_1^{\,2}-\frac{6}{\sqrt{5}}x_1+\frac{8}{\sqrt{5}}y_1=0$, que no tiene término mixto.

Para la identificación se completan trinomios cuadrados perfectos:

$$3\,(x_1^{\,2}-\tfrac{2}{\sqrt{5}}x_1+\tfrac{1}{5})-2(y_1^{\,2}-\tfrac{4}{\sqrt{5}}y_1+\tfrac{4}{5})=\tfrac{3}{5}-\tfrac{8}{5}=-1 \;\Rightarrow\; -\frac{(x_1-\frac{1}{\sqrt{5}})^2}{\frac{1}{3}}+\frac{(y_1-\frac{2}{\sqrt{5}})^2}{\frac{1}{2}}=1.$$

La cónica representada por la ecuación (1) es una hipérbola cuyo centro, en el sistema girado, tiene las coordenadas : $C(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$; las de sus vértices son: $V_1(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{1}{2}})$ y $V_2(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{1}{2}})$ y el eje que contiene a los focos es paralelo al eje Y_1, del cual un vector es (0, 1). Ya que, en este sistema $\overline{w}$ es tal que $\overline{v}=P\,\overline{w}$; para obtener las respectivas coordenadas de centro y vértices en el sistema original, así como la dirección del eje focal, deben premultiplicarse por P las obtenidas en el sistema X_1Y_1. Así, para el centro $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{5}\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow$ C(1, 0) ; para el vértice V_1, cuyas coordenadas en el sistema girado son aproximadamente (0.447, 1.601), en el sistema original son:

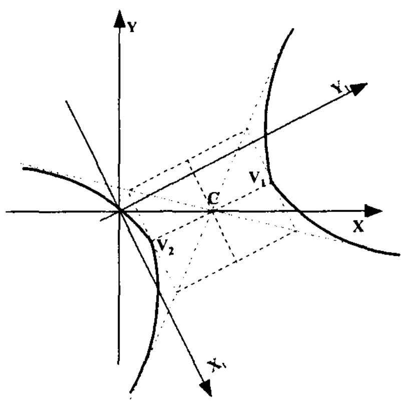

Figura 1

$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.447\\ 1.601\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.631\\ 0.316\end{bmatrix}$; las de V_2:

$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.447\\ 0.187\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.367\\ -0.316\end{bmatrix}$; el eje focal es paralelo al vector: $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.894\\ 0.447\end{bmatrix}$ a su vez paralelo al vector $\overline{v}_2=(2,1)$, característico de A, que usamos como segunda columna (correspondiente a la segunda coordenada) en la diagonalizadora P. La hipérbola y los dos sistemas pueden verse en la figura 1.

◇

Ejemplo 4.VIII

Ahora identificaremos la cónica de ecuación: $x^2-2xy+y^2+2x-6y+3=0$ …..(1); cuya representación matricial es: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+[3]=[0]$.

La matriz A tiene la ecuación característica: $|\,A-\lambda I\,|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1-1=0$,

lo que implica que: $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=2$.

Para $\lambda_1=0$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ x = y con lo que E(0) = {(x, x) | x $\in R$ } y $\bar{v}_1=(1,1)\in$ E(0).

Para $\lambda_2=2$: $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ y = –x por lo que E(2) = {(x, –x) | x $\in R$ } y $\bar{v}_2=(-1,1)\in$ E(2). Entonces la matriz P, diagonalizadora de A, resulta: $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$;

$P^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Al cambiar el vector $\bar{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ por $\bar{w}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ donde $\bar{v}=P\bar{w}$, la forma cuádrica queda: $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} P^T A P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} P^T\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y la expresión matricial de la ecuación (1) en el nuevo sistema es:

$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ + [3] = [0] ; que es igual a: $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{bmatrix}$ + [3] = [0], que efectuando los productos y escribiendo sólo el único elemento de las matrices de *1 x 1*, corresponde a: $2y_1^{\,2}-\frac{4}{\sqrt{2}}x_1-\frac{8}{\sqrt{2}}y_1+3=0$. Al racionalizar denominadores tenemos:

$2y_1^2 - 2\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}y_1 + 3 = 0$; y completando el trinomio cuadrado perfecto correspondiente a *y* resulta: $2(y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 2) = 2\sqrt{2}x_1 - 3 + 4$;

$2(y_1 - \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}(x_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}) \therefore (y_1 - \sqrt{2})^2 = \sqrt{2}(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{4})$. Esta ecuación representa en el sistema X_1Y_1 una parábola con vértice en $V(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2})$, que aproximadamente es V(−0.353 , 1,414); con eje paralelo a X_1 y que abre en el sentido positivo de dicho eje. En el sistema original el eje es paralelo al vector $\bar{v}_1$, primera columna de P, correspondiente a la primera coordenada; las coordenadas del vértice son:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow V(-\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{4}).$$

Los dos sistemas y la parábola pueden verse en la figura 2.

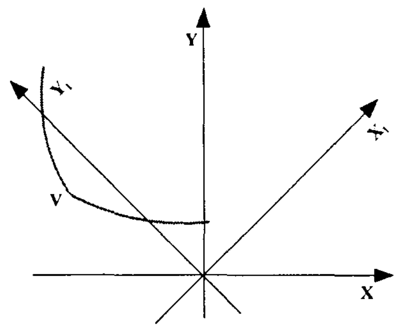

Figura 2

◇

Las superficies se representan analíticamente en coordenadas cartesianas con una ecuación de tres incógnitas, si dicha ecuación es de segundo grado la superficie recibe el nombre de cuádrica o cuadrática, éstas son: elipsoides, paraboloides, hiperboloides, de diferentes tipos y también algunos cilindros y algunos conos.

De manera semejante a lo que sucede con las curvas cónicas, las superficies cuádricas tienen ecuación sin término mixto cuando sus ejes son paralelos a los coordenados y, en estos casos, conocida la ecuación la identificación de la superficie es prácticamente inmediata. Por ello, si la ecuación tiene términos cruzados, para la identificación de la superficie representada por ella, conviene, geométricamente hacer una rotación de ejes para la eliminación de *cada uno* de los términos mixtos, de los que puede haber *hasta tres* y, en ese caso, el proceso resulta muy laborioso. Sin embargo, en el aspecto algebraico, sólo es necesario expresar matricialmente la ecuación y diagonalizar ortogonalmente la matriz correspondiente a la *forma cuádrica*. La matriz diagonalizadora *ortogonal* siempre es posible obtenerla si la matriz es simétrica.

Ejemplo 5.VIII

La ecuación $2xy + y^2 + 4xz + 2yz + 3x + z - \frac{1}{4} = 0$ ... (a), representa, de manera analítica, a una superficie de la que deseamos su nombre y características.

La expresión matricial de la ecuación (a) es:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \text{.... (b).}$$

Para diagonalizar la matriz A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ obtenemos su ecuación característica, con ella los valores propios y un vector asociado a cada uno de ellos.

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4 - 4 + 4\lambda + \lambda + \lambda = 0$; al simplificar llegamos a: $-\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$ con lo que obtenemos $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$.

Para $\lambda_1 = 0$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

De la ecuación correspondiente al segundo renglón: $y + 2z = 0$; $y = -2z$. Del primer renglón $z = -x - y = -x + 2z \therefore z = x$. Con esto E(0) = $\{(x, -2x, x) \mid x \in R\}$.

El vector $\bar{v}_1 = (1, -2, 1) \in$ E(0).

Para $\lambda_2 = -2$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Del segundo renglón, $y = 0$; y del primero

$z=-x$, así que, E(–2) = {(x, 0, –x) | $x \in$ R}; $\bar{v}_2$ = (1, 0, –1) $\in$ E(–2).

Para $\lambda_3 = 3$: $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Del segundo renglón $y = z$; sustituyendo en el primero $x = z$ $\therefore$ E(3) = {(x, x, x) | $x \in$ R}; $\bar{v}_3$ = (1, 1, 1) $\in$ E(3).

La matriz P diagonalizadora ortogonal, tiene por columnas a los vectores unitarios de $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$, esto es: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$; $P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Con el cambio de variable $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathrm{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ la ecuación (b) se convierte en:

$$[x_1 \quad y_1 \quad z_1]\; P^T A P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [3 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - [\tfrac{1}{4}] = [0];$$

$[x_1 \quad y_1 \quad z_1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [\frac{4}{\sqrt{6}} \; \frac{2}{\sqrt{2}} \; \frac{4}{\sqrt{3}}] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - [\frac{1}{4}] = [0]$; que es la representación matricial de la ecuación: $-2y_1^{\,2} + 3z_1^{\,2} + \frac{2\sqrt{6}}{3}x_1 + \sqrt{2}y_1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}z_1 - \frac{1}{4} = 0$.

Completando trinomios cuadrados perfectos, se tiene:

$$-2(y_1-\tfrac{\sqrt{2}}{4})^2+3(z_1+\tfrac{2\sqrt{3}}{9})^2=-\tfrac{2\sqrt{6}}{3}x_1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{4}{9}=-\tfrac{2\sqrt{6}}{3}x_1+\tfrac{4}{9};$$

$$\frac{(y_1-\frac{\sqrt{2}}{4})^2}{3}-\frac{(z_1+\frac{2\sqrt{3}}{9})^2}{2}=\tfrac{\sqrt{6}}{9}(x_1-\tfrac{\sqrt{6}}{9}).$$

Esta ecuación representa analíticamente a un paraboloide hiperbólico con vértice (*punto silla*) en el punto cuyas coordenadas son:

$(\frac{\sqrt{6}}{9},\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{2\sqrt{3}}{9})$ y cuyo eje es paralelo al eje X_1.

En el sistema original XYZ (al que corresponde la ecuación (a)), el vértice tiene por coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{9} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{9} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{36} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{13}{36} \end{bmatrix}.$$

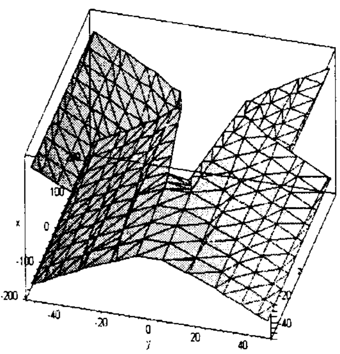

Figura 3

En el sistema XYZ: C($\frac{5}{36}$, $-\frac{4}{9}$, $-\frac{13}{36}$) y el eje es paralelo al vector $\bar{v}_1=(1,\ -2,\ 1)$.

Una representación gráfica aproximada de la superficie puede verse en la figura 3.

◈

Ejemplo 6.VIII

La representación matricial $\bar{v}^T A\bar{v}+B\bar{v}+C=O$ de la ecuación:

$x^2-8xy+7y^2+16xz+8yz+z^2+7x+5y+5z+9=0$ …….. (1), resulta:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica $|A-\lambda\,\mathrm{I}|=0$ de la matriz A es:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 8 \\ -4 & 7-\lambda & 4 \\ 8 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(7-\lambda)-128-128-64(7-\lambda)-16(1-\lambda)-16(1-\lambda)=$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 64) - 256 - 32(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729 = 0$$

Para obtener las soluciones de esta ecuación efectuamos una división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & -81 & 729 \\ 9 & & 9 & 0 & -729 \\ \hline & 1 & 0 & -81 & \boxed{0} \end{array}$$

La ecuación reducida es $\lambda^2 - 81 = 0$ cuyas soluciones son 9 y −9, con lo que los valores característicos resultan $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$; $\lambda_3 = -9$.

Para $\lambda = 9$: $\begin{bmatrix} -8 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \\ 8 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; del primer renglón $z = x + \frac{1}{2}y$

$\therefore$ E(9) = $\{(x,\ y,\ x + \frac{1}{2}y) \mid x,\ y \in R\}$.

Si $\bar{v}_1 = (1,\ 2,\ 2) \in$ E(9), para que la diagonalizadora P sea ortogonal, el vector $\bar{v}_2 = (a,\ b,\ a + \frac{1}{2}b) \in$ E(9) debe ser ortogonal a $\bar{v}_1$, esto es:

$(1\ ,\ 2,\ 2)\cdot(a,\ b,\ a + \frac{1}{2}b) = a + 2b + 2a + b = 0$, con lo que $b = \dfrac{-3a}{3} = -a$, si $a = 2$, entonces $b = -2$ y $\bar{v}_2 = (2, -2, 1)$.

Para $\lambda = -9$: $\begin{bmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 16 & 4 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 36 & 18 \\ 0 & 36 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; del segundo renglón

$z = -2y$; del primero $z = x - 4y = -2y \quad \therefore \quad x = 2y$.

Así E(−9) = $\{(2y, y, -2y) \mid y \in R\}$.

Podemos comprobar que todo vector de E(−9) es ortogonal a todo vector de E(9), esto es, $(2y, y, -2y)\cdot(a, b, a + \frac{1}{2}b) = 2ay + by - 2ay - by \equiv 0$, es decir, se anula para todo valor de *a*, *b*, *y*. Con $y = 1$, $\bar{v}_3 = (2,\ 1,\ -2)$ es ortogonal tanto a $\bar{v}_1$ como a $\bar{v}_2$. El módulo de cada uno de estos tres vectores es *tres*, con lo que la matriz ortogonal P, diagonalizadora de A, es: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = P^T = P^{-1}$.

Esta matriz resultó ser *involutoria* ($P = P^{-1}$, o bien, $P^2 = I$).

$$P^T A\, P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Además, $BP = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{3} & \frac{9}{3} & \frac{9}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Con el cambio de variable, la ecuación (1) resulta:

$9x_1^2 + 9y_1^2 - 9z_1^2 + 9x_1 + 3y_1 + 3z_1 + 9 = 0$,

$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 + x_1 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}z_1 + 1 = 0$, que puede escribirse:

$-(x_1 + \frac{1}{2})^2 - (y_1 + \frac{1}{6})^2 + (z_1 - \frac{1}{6})^2 = \frac{3}{4}$, o bien,

$-\dfrac{(x_1 + \frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}} - \dfrac{(y_1 + \frac{1}{6})^2}{\frac{3}{4}} + \dfrac{(z_1 - \frac{1}{6})^2}{\frac{3}{4}} = 1$. Esta ecuación representa un hiperboloide circular de dos mantos que en el sistema $X_1Y_1Z_1$ tiene su eje paralelo a Z_1, el centro con coordenadas $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ y los vértices $V_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $V_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

En el sistema original las coordenadas del centro son: $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Las de V_1: $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.411 \\ 0.122 \\ -1.077 \end{bmatrix}$

$$\text{y las de } V_2 : \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.744 \\ -0.455 \\ 0.077 \end{bmatrix}.$$

El eje del hiperboloide es paralelo al vector $\bar{v}_3 = (2, 1, -2)$.

Una representación gráfica aproximada de la superficie puede verse en la figura 4.

◇

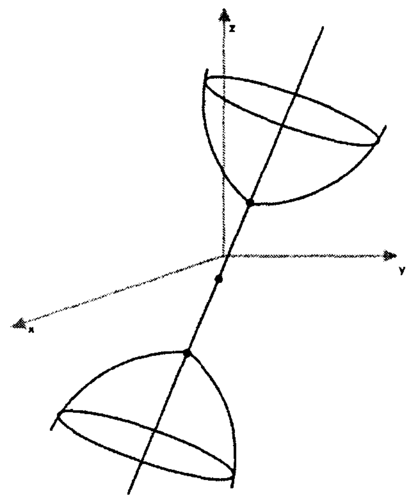

Figura 4

Esta obra se terminó de imprimir
en mayo de 2010 en el
Departamento de Publicaciones
Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares impresos en offset
con papel bond de 75 gramos, de 28 × 21.5 cm.

Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería