PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
TOMO I
EL CONTEXTO Y LOS ANTECEDENTES

Bernardo Frontana de la Cruz

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Tomo I El Contexto y los antecedentes

CONTENIDO

Los Problemas y la Planeación
Los sistemas, sus Teorías, su Enfoque y su Ingeniería
El Método de Investigación y la Modelación
La Experimentación y la Simulación
Fundamentos de la Teoría de Conjuntos
Fundamentos del Análisis Combinatorio o Técnicas de Conteo
Elementos del Cálculo

Bernardo Frontana de la Cruz
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Ciencias Aplicadas
Invierno 2014

FRONTANA DE LA CRUZ, Bernardo. *Probabilidad y estadística. Tomo I. El contexto y los antecedentes.* México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2014, 256 p.

Probabilidad y estadística. Tomo I. El contexto y los antecedentes

Primera edición marzo de 2014

Facultad de Ingeniería
Avenida Universidad 3000 Ciudad Universitaria,
Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, D. F.

http://www.ingenieria.unam.mx/

Impreso y hecho en México

PREFACIO DE LA OBRA Y CONTENIDO DEL TOMO I

PREFACIO DE LA OBRA

El objetivo de la presente obra, dividida en varios tomos, es presentar con rigor matemático la teoría de la probabilidad sin presuponer que se tienen conocimientos previos de ésta y, con esta base, tópicos de la estadística descriptiva, inferencial y aplicada; utilizados en diferentes ramas de la ingeniería y de las ciencias; a la vez, desarrollar varios ejemplos para mostrar la potencialidad de sus aplicaciones.

Es cierto que existen muchos y muy buenos libros de probabilidad y estadística, por lo que es legítimo preguntarse *¿Por qué otro más?* Las respuestas a mi juicio relevantes a esta pregunta son las siguientes:

Mi programa sabático estableció, entre otras cosas, actualizarme en las ramas de la probabilidad y estadística y, para mí, la mejor forma de hacerlo fue iniciar la escritura de esta obra sobre estas ramas de las matemáticas.

Se dice que en la vida del ser humano hay que cumplir tres cosas fundamentales: tener un hijo, sembrar un árbol y escribir un libro. Con creces cumplí ampliamente la primera pues a manera de gratitud, reconocimiento y dedicación por la escritura de esta obra aún en proceso, por el amor que nos profesamos Emmita y yo procreamos cinco hijos: Bernardo Antonio, Alberto y Armando (gemelos), Emma mercedes y Sarita Claudia. Igualmente, ya cumplí con la segunda pues al nacimiento de cada hijo y algunos nietos sembré sendos árboles. Habiendo cumplido los dos primeros y me faltaba escribir un libro; por cierto pude darme cuenta de la dificultad que entraña.

Poner en orden mis notas acumuladas de estas asignaturas que he escrito a lo largo de los cursos que he impartido durante más de tres décadas en las Divisiones de Ciencias Básicas, Educación Continua y estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Las traducciones al español de algunos buenos libros de probabilidad y estadística, adolecen de la claridad semántica requerida para la comprensión cabal de los conceptos y sus teorías.

Más aún, ante la pregunta planteada arriba, algunas de las características distintivas que se pretenden en esta obra son las siguientes:

En el tomo I al que llamé ***el Contexto y los antecedentes*** **de la** ***PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA*** se esboza grosso modo el contexto en el que se utiliza la probabilidad y la estadística partiendo de la reflexión sobre los problemas y planeación, válida en lo personal, familiar e institucional; los sistemas, sus teorías, su enfoque y su ingeniería que demandan el trabajo colaborativo e interdisciplinario, entre otras cosas, para la formulación y búsqueda de estrategias decisionales que requieren imprescindiblemente de la teoría de la probabilidad; el método de investigación y la modelación necesarios la investigación aplicada y el desarrollo tecnológico que ineludiblemente requieren el uso de la probabilidad y de la estadística; este tomo termina con un breve repaso de los antecedentes matemáticos mínimos necesarios para aprender exitosamente la probabilidad y la estadística, tales son la teoría de conjuntos, el análisis combinatorio y el cálculo.

El rigor matemático con que se presentan los fundamentos matemáticos desde éste y los demás tomos de la obra, debe prevalecer en toda escuela formadora de ingenieros y demás profesionales que practiquen la estadística pues, como lo he dicho en varios foros *el nombre de ingeniero se adquiere con las ciencias básicas y el apellido con las ciencias de la ingeniería y la ingeniería aplicada*. Estoy convencido que no hay nada más práctico que una buena teoría y que la computadora, como se verá a lo largo de la obra, es un medio y no un fin.

Como desde hace tiempo les comento a mis alumnos, "es más importante conocer como bailan las pulgas que están dentro de las calculadoras y las computadoras, y no darles teclasos sin saber interpretar los resultados que arrojan; no es concebible dar teclasos y obtener probabilidades de 45.38 sin saber que estos absurdos resultados no existen".

El énfasis que pongo en las distribuciones muestrales de los estadísticos, como *eslabón que vincula a la probabilidad con la estadística* de donde deviene el nombre de estadística; es decir, mi abierta oposición a que en muchos libros calificados traten al principio la estadística descriptiva completamente desvinculada de un caso particular de las distribuciones muestrales y se designen a los estimadores de los parámetros de la población como "medidas" de tendencia central, de dispersión y así, de forma abiertamente "recetera".

En las librerías se encuentran libros de probabilidad y estadística para ingenieros, para científicos, para economistas, etc. dando la impresión de que los conceptos son diferentes cuando lo único que cambia son las aplicaciones; considero que lo más apropiado es titular los libros conforme se aplican la probabilidad y estadística a las ciencias; por ejemplo Bioestadística, Geoestadística, etc.

Por lo que toca al contenido, aspiro a que la obra sea de utilidad para alumnos de las licenciaturas en las que se curse la probabilidad y estadística y de posgrado, particularmente de las ciencias duras.

He pensado que la obra conste de cuatro tomos, al primero le llamé *El Contexto y los Antecedentes* y constituye el contenido del presente tomo; consta de siete capítulos, tiene como finalidad presentar el ámbito general donde se aplica la probabilidad y la estadística. Comienza con la reflexión metodológica de los problemas de donde se desprende mi definición de planeación como proceso de resolución de problemas; analiza el concepto de sistema y enfatiza el enfoque y la ingeniería de sistemas para declarar que la resolución de problemas requiere del trabajo interdisciplinario, se resume la metodología de la investigación subrayando la experimentación y la medición para el acopio sistemático de datos necesarios para el análisis estadístico; y trata someramente los antecedentes matemáticos de la teoría de conjuntos, análisis combinatorio o combinatoria y del cálculo; necesarios para facilitar el aprendizaje de los contenidos de probabilidad (capítulos 1 a 7).

El segundo tomo al que llamaré ***La Teoría de la Probabilidad*** está dedicado a los temas básicos que se tratan en los principales libros de licenciatura, consta de seis capítulos (8 a 13) que comprenden la teoría general de la probabilidad; las variables aleatorias y su distribuciones de probabilidad generalizadas; el álgebra de los valores esperados o esperanzas, las funciones generadoras de momentos y los momentos; los parámetros generales de las distribuciones; los modelos de distribuciones de las variables aleatorias discretas y lo modelos o densidades de probabilidad de las variables aleatorias continuas, para ambas clases de modelos se hace ver de manera novedosa que de hecho tratamos con familias de distribuciones cuyos miembros se caracterizan por sus parámetros particulares. A diferencia de otros libros, se hace ver que las distribuciones Chi-Cuadrada, t-Student y F-Fisher son funciones de densidad de probabilidad por lo que se estudian en este tomo. Considero que este tomo es fundamental para la cabal comprensión de los tomos restantes de la obra pues, como lo haremos ver, no se concibe el estudio de la Estadística sin un conocimiento cabal de la Probabilidad.

Al tercer tomo le llamaré **Estadística básica** (capítulos 14 a 19) porque contiene los principales temas básicos de la estadística que se estudian en los cursos de Probabilidad y de Estadística. Iniciará con el concepto de estadística y algunos tipos de muestreo comúnmente utilizados en las investigaciones estadísticas, pues la estadística trabaja con datos obtenidos de una o varias muestras de una o varias poblaciones cuyos parámetros se desean estimar. Particular atención se pone a los estadísticos, también llamados apropiadamente <u>estimadores</u> porque con ellos se estiman en la inferencia estadística los parámetros de la(s) población(es) bajo estudio, poniendo énfasis en sus distribuciones de probabilidad conocidas como las distribuciones muestrales; que son fundamentales porque constituyen el eslabón entre la probabilidad y la estadística. Se continúa con la presentación de la estadística descriptiva como medio para presentar de manera gráfica o esquemática los datos obtenidos de una muestra, incluyendo los estimados centrales, de dispersión de sesgo y aplanamiento, que son valores de los estimadores calculados con los datos de la muestra. La inferencia estadística que consiste en la estimación estadística de los parámetros de la población mediante los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis de estos parámetros se estudiarán en los capítulos 17 y 18. Este tercer tomo termina con la presentación y aplicación de la correlación, como medida de la potencia de asociación directa o inversa de dos variables y, dependiendo de si el coeficiente de correlación lo sugiere, se determinará la recta de regresión de dichas variables como modelo predictivo de su comportamiento.

Cabe destacar que, a lo largo de este tomo, particularmente en el Capítulo 1, se subrayan los términos de los conceptos que aluden a la probabilidad y la estadística; y en los posteriores se establecen las analogías conceptuales que existen entre la probabilidad, que se vieron en el tomo I, y la estadística, contenidas en el presente tomo.

Al cuarto tomo le llamaré ***Estadística aplicada*** (capítulos 20 a 26) y se dedica a ramas específicas de la ingeniería y de otras ciencias como son la regresión múltiple lineal y no lineal, series de tiempo, procesos estacionarios, diseño de experimentos, diseños factoriales, teoría de la confiabilidad, estadística Bayesiana, teoría de las decisiones

Es posible que escriba el quinto tomo que se enfocará a ***la estadística no paramétrica y al y control estadístico de la calidad.***

Los tomos podrán estudiarse como sigue: el primero puede considerarse relativamente independiente de los demás si lo que se desea es recordar la parte filosófica metodológica de la investigación y los antecedentes de la teoría de la probabilidad. Si ya se cuenta con dichos antecedentes, entonces el tomo dos es crucial para el estudio formal de la probabilidad en la licenciatura; en los que se basan los tomos restantes para los cursos particulares de estadística incluidos los de posgrado.

Ante todo le patentizo mi profundo agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México y, en particular, a mi Facultad de Ingeniería quienes; en mí persona, manifestaron palmariamente la libertad de cátedra, investigación y difusión de los conocimientos para el beneficio de nuestra sociedad mexicana; igualmente, los diferentes autores de los

libros o artículos de divulgación citados en las bibliografías de los diferentes tomos de la obra son los que merecen los créditos sobre la autoría, porque tomé de ellos algunas de sus ideas aunque con planteamientos personales porque mi propósito fue adecuar, profundizar, mejorar e innovar sus presentaciones; a mis alumnos de la asignatura de Probabilidad y Estadística e Inferencia Estadística y a profesores de la Académica de Probabilidad y estadística de la Facultad de Ingeniería; quienes me criticaron con con el espíritu crítico propositivo la forma y el contenido de los capítulos del tomos I y II.

De la misma forma los créditos a los autores señalados en la bibliografía y manifiesto anticipadamente mis agradecimientos a los lectores que me hagan llegar con el mismo espíritu sus críticas, observaciones y sugerencias al correo frontana@unam.mx .

Bernardo Frontana de la Cruz
Invierno de 2014

CONTENIDO DEL TOMO I

CAPÍTULO 1
LOS PROBLEMAS Y LA PLANEACIÓN

CAPÍTULO 2
LOS SISTEMAS, SUS TEORÍAS, SU ENFOQUE Y SU INGENIERÍA

CAPÍTULO 3
EL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN Y LA MODELACIÓN

CAPÍTULO 4
LA EXPERIMENTACIÓN Y LA SIMULACIÓN

CAPÍTULO 5
FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

CAPÍTULO 6
FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS COMBINATORIO O TÉCNICAS DE CONTEO

CAPÍTULO 7
ELEMENTOS DEL CÁLCULO

CAPÍTULO 1
LOS PROBLEMAS Y LA PLANEACIÓN

CAPÍTULO 1
LOS PROBLEMAS Y LA PLANEACIÓN

La resolución de los problemas
es la causa fundamental
del desarrollo de la humanidad.
Bernardo Frontana

El problema esencial de la
humanidad es el de la comunicación.
Arthur Koestler

1.1 Introducción

Los problemas constituyen la fuente de las actividades personales, profesionales, institucionales y sociales; y su resolución es la productora de los cambios, tanto de las personas como de las cosas; es decir, son las causas del desarrollo para las primeras y del crecimiento, reacomodo, transformación, invención o innovación para las segundas.

El ser humano en lo individual, en lo familiar, en lo social o en lo institucional pasa gran parte de su vida resolviendo problemas y tomando decisiones. Si no tuviera problemas no tendría aspiraciones y las cosas mantendrían un estado permanente, sin transformaciones ni cambios. Conviene pues, establecer el concepto de problema y el papel que juega en el proceso de planeación y de investigación.

El Diccionario de la Real Academia (2001) define un problema como un conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de un fin; a su vez, Elizondo (1980) comenta que la decisión es la definición de la acción a tomar a fin de obtener los objetivos deseados, luego entonces las decisiones son las pautas para la resolución de los problemas; más aún, conforme a Fuentes (1982) y Lara (1980) define un problema como un obstáculo o contradicción que existe entre una situación deseable por alcanzar o sea los objetivos perseguidos; y una situación real, incómoda y concreta que existe aquí y ahora como ilustra la figura 1.1.

De suyo, *la situación deseable implica un futuro, por ello es subjetiva* o cualitativa y la define *el sujeto* que tiene el problema, racionalmente con los rasgos *atrayentemente significativos*, en tanto que *la situación real es el objeto concreto* e *incómodo* y aparece mediante el *conocimiento* de los rasgos relevantes que manifiesta la problemática donde reside la parte de la realidad que desea elevar hacia el estado deseable mediante la resolución del problema.

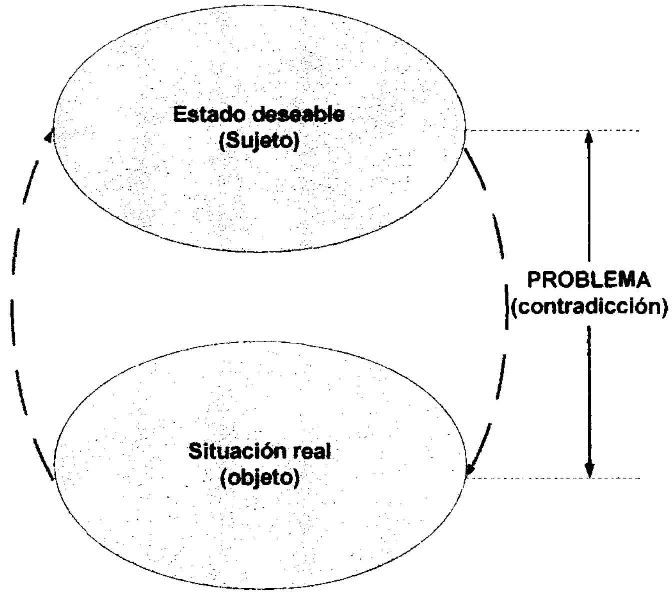


Figura 1.1 El concepto de problema

Con relación a la Figura 1.1, obsérvese que el problema, la contradicción o el obstáculo, puede solucionarse (acción o efecto de disolver o desatar la acción, eliminar) de dos formas como muestra la figura 1.2.

1. Bajando el plano del estado deseable al plano de la situación real, en cuyo caso dice que *el problema se disuelve, suprime o anula*. Se disolverá completamente cuando el estado deseable baja hasta empatar con la realidad; es decir, cuando eliminan los objetivos. Un ejemplo de este tipo ocurre cuando un alumno deserta definitivamente de la Facultad de Ingeniería pues, por sus razones, pierde su deseo original de ser ingeniero.
2. Elevando el plano de la realidad al de la situación deseable, en cuyo caso dice que *el problema resuelve* al decidir efectuar las acciones necesarias para eliminar los síntomas molestos u obstáculos. Observe que en este caso es necesario cambiar o transformar la realidad incómoda. Un ejemplo de este tipo es cuando el alumno cambia su situación real que le incomoda y, a toda costa, hace lo posible para llegar a ser ingeniero, a pesar de las adversidades.

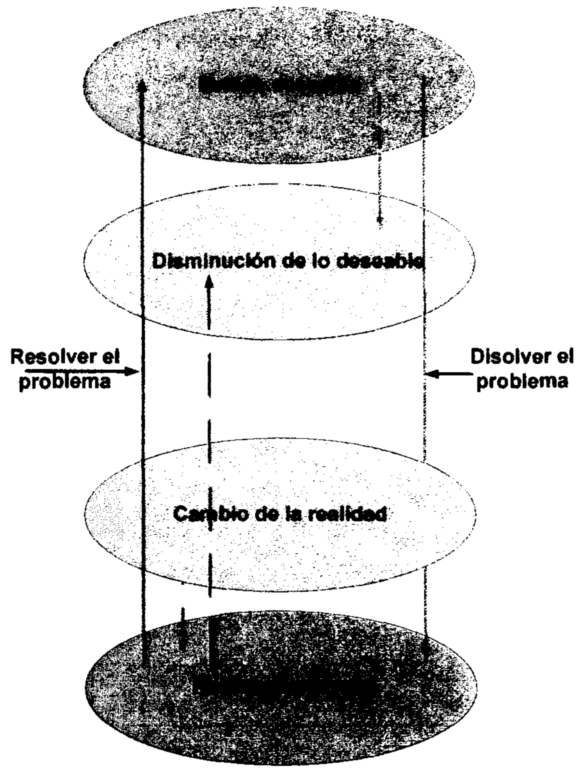


Figura 1.2 Las dos formas de solucionar el problema

Sugiero reflexionar sobre las actitudes que adoptan las personas que disuelven o resuelven problemas y derivar sus propias conclusiones.

Del milenario proverbio chino *"el cincuenta por ciento de la resolución de un problema consiste en su definición correcta"* se infiere la atención particular que debe tenerse en el planteamiento del problema, pues en él radica la posibilidad de su solución lo que implica; entre otras cosas, que el planteamiento sea acertado, inteligible y preciso; las definiciones que incluya deben implicar y reconocer la aplicación de operaciones o experimentos y debe explicitar las relaciones existentes entre las variables subyacentes.

Definido el problema por sus componentes esenciales: el estado deseable formulado por el sujeto que tiene el problema y el conocimiento de la situación de la realidad por transformar, que constituye el objeto; puede diseñarse conjuntamente con los afectados en la resolución del problema las estrategias y las acciones a tomar para resolver o mitigar el problema.

Las condiciones establecidas en el planteamiento deben aplicarse en la práctica de forma tal que siempre sea posible modificarlo conforme a los resultados experimentales y, las conclusiones teóricas derivadas deben estar en consonancia con los resultados obtenidos en las investigaciones teóricas o experimentales.

> *Toda resolución de un problema lleva implícita una decisión sobre una de al menos dos alternativas de acción las cuales, en teoría, son en número infinitas.*

El problema o cualquier dificultad que no puede resolverse automáticamente, se presentan cuando se encaran situaciones desconocidas o se tienen conocimientos específicos insuficientes; así, en el ejemplo del alumno que nos ocupa, llega a ser ingeniero cuando adquiere los conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para titularse y que lo facultan para ejercer la ingeniería.

Los problemas pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos; y su resolución implica la necesidad de hallar la respuesta a una situación indagada, encontrar los valores de ciertas incógnitas, descubrir algún proceso desconocido o prescribir la forma de intervenir en el comportamiento del proceso para cambiarlo, construir objetos o instrumentos, formular o reformular nuevos conceptos, inferir conclusiones, establecer demostraciones o determinar las explicaciones pertinentes; por ejemplo, nuestro alumno en comento, requiere, entre otras cosas, conocer los métodos para encontrar los valores de las variables de un sistema de ecuaciones algebraicas y los que determinan las funciones que resuelven una ecuación diferencial (problemas teóricos), los procesos termodinámicos de una caldera o una planta termoeléctrica para prescribir su comportamiento e intervenir en ellos (problemas prácticos); los sistemas de ecuaciones o las ecuaciones diferenciales que surgen del modelado de los fenómenos que representen los sistemas físicos.

> *Obsérvese que un problema es resoluble si el lapso de resolución es finito y corto, si la resolución no contiene cosas objetivamente imposibles; y si se dispone de los instrumentos metodológicos necesarios y adecuados para su verificación.*

Como todo en la vida, existen diversas corrientes en torno los problemas y su resolución, de las cuales destaco dos:

1. La que postula que *los problemas existen en la realidad*; por ejemplo, ante una situación de huelga de los trabajadores de limpia, los problemas no nada más se ven sino huelen; o bien, ante un paro del sistema de transporte de pasajeros, los problemas no solamente se sienten y si no se resienten (Churchman, 1979).

2. La que afirma que la realidad tiene situaciones problemáticas que son conjuntos desordenados, marañas o madejas de problemas o situaciones incómodas para los individuos o para la sociedad en su conjunto, que son aspectos diferentes a los problemas (ver figura 1.3); por lo que los problemas no existen en la realidad sino que *son conceptualizaciones* o ideas que deben definirse claramente para su resolución (Ackoff, 1973). En particular, ésta es la postura del autor.

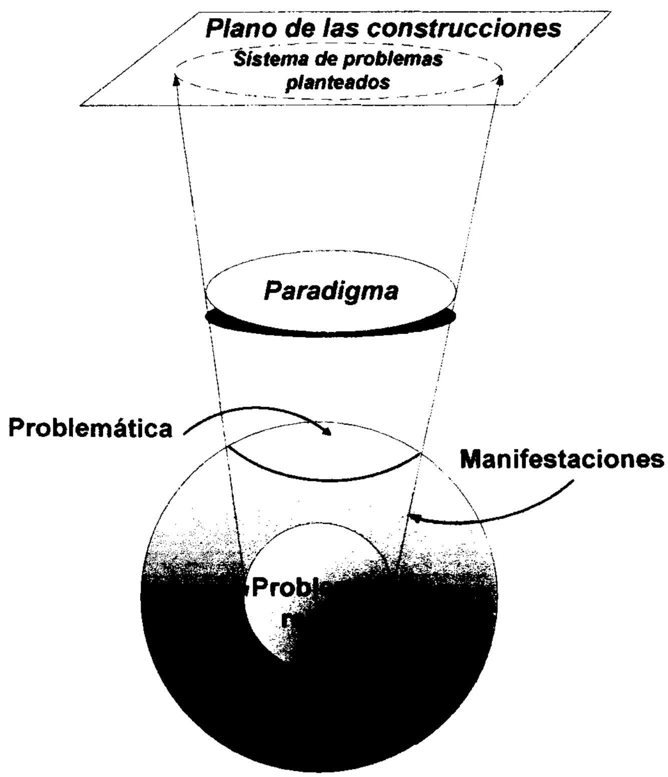


Figura 1.3 La problemática y la definición de los problemas

1.2 Clasificación de los problemas

Según Koestler (1998), a diferencia de los animales, en los que cada especie tiene un solo "lenguaje", el problema fundamental del ser humano es el de comunicación debido a los múltiples idiomas y dialectos que utiliza para relacionarse con sus semejantes y; conforme a Bunge (1976), todos los problemas humanos son de acción, de conocimiento, de estimación o de dicción (expresión oral o escrita) y los clasifica en *problemas sobre individuos y problemas sobre funciones.* A los primeros pertenecen los *problemas:*

Del quién: ¿Quién descubrió la penicilina?

Del dónde: ¿Dónde están los culpables del terrorismo en Morelia?

Del porqué: ¿Por qué los niveles de reprobación en los alumnos de primer ingreso son bajos en comparación con los de semestres posteriores?

De alternativas: Para un fenómeno aleatorio modelado por una distribución de probabilidad rectangular ¿Puede encontrarse la probabilidad de un evento por métodos geométricos?

A los *problemas sobre funciones*, pertenecen los problemas:

Del cómo: ¿Cómo se alterará el equilibrio ecológico en la siguiente década causado el aumento de los contaminantes de los automóviles en la Ciudad de México?

Del cuál: ¿Cuál es la temperatura en la cara no visible de la luna?

En particular, los problemas de investigación los clasifica en *Sustantivos y de estrategia.*

A los problemas sustantivos pertenecen los problemas:

Empíricos:

De observación, medición, fabricación y calibración de instrumentos.

Conceptuales:

De descripción como son la caracterización de individuos.

De ordenación que incluyen la clasificación de conjuntos.

De dilucidación que se definen para la interpretación de signos y afirmación de conceptos.

De deducción entre los cuales están los de cómputo.

De demostración de teoremas y comprobación de soluciones.

De explicación para dar razón de hechos y de generalizaciones empíricas con base en teorías.

De proyección que se formulan para la predicción de hechos.

De construcción que se establecen para la introducción o reconstrucción de conceptos, teorías, hipótesis o generalizaciones.

Por lo que toca a *los problemas de estrategia,* estos pueden ser:

Metodológicos:

Sobre convenciones, de técnicas, de disposición de experimentos y de teorías y problemas de examen de métodos.

Finalmente, los *problemas valorativos*: estimación de datos, de hipótesis y de teorías; y *problemas de técnicas y equipo material.*

Para definir problemas fecundos y resolubles es necesario tener en consideración las siguientes sugerencias:

Criticar las soluciones conocidas buscando en ellas sus puntos débiles.
Examinar la validez de soluciones conocidas aplicándolas a situaciones nuevas.
Generalizar problemas viejos probándolos con variables y/o ámbitos novedosos.
Indagar relaciones con problemas pertenecientes a campos diferentes.

1.3 El problema y la planeación

Con base en el concepto de problema ya definido propongo la siguiente definición, acaso novedosa y sencilla, del concepto de planeación:

> *La planeación es el proceso mediante el cual resuelven los problemas del sistema para el que planea.*

La planeación centralizada que efectuaban los directivos de las organizaciones, sin tomar en cuenta al personal, ya está en la tumba; mostró sus deficiencias desde hace décadas y sus fracasos estrepitosos como ocurrió en la URSS. Actualmente, hay evidencias que los mejores éxitos de la planeación obtienen mediante lo que aquí definimos como el *proceso de planeación flexible, adaptativa y participativa.* Es *flexible* en tanto que las prescripciones de la planeación no son normas ni reglas a seguir a pie juntillas, sino que constituye el hilo conductor para la acción; es *adaptativa* porque el sistema afectable para el que planea está inmerso en un supra sistema donde, además de las Fortalezas y las debilidades internas del sistema objeto de la planeación, existen amenazas y oportunidades no controlables por los planeadores; y *la participación* deviene de que los directivos de la organización planean, junto con su personal y los representantes del sistema afectable, de manera colaborativa, comprometida e interdisciplinaria abonando mediante sus propias experiencias y aprendizajes; al diseño e implementación de las estrategias, programas y proyectos a desarrollar. La resolución de problemas mediante la planeación requiere propiciar entre los participantes actitudes de ánimo, trabajo colaborativo y disposición para cambiar o coadyuvar al cambio del sistema afectable al estado deseable.

Con relación a la Figura 1.1, obsérvese que entre los estados real y deseable transcurre un periodo de tiempo (ver figura 1.4) pues, para resolver el problema, el estado deseable se alcanza en un tiempo futuro mientras la situación real sucede en el presente.

Con esta base, la figura 1.5 ilustra la conjunción ordenada de las estrategias, los programas y los proyectos que se construyen durante el proceso de la planeación, aludiendo la temporalidad del concepto de problema ya visto.

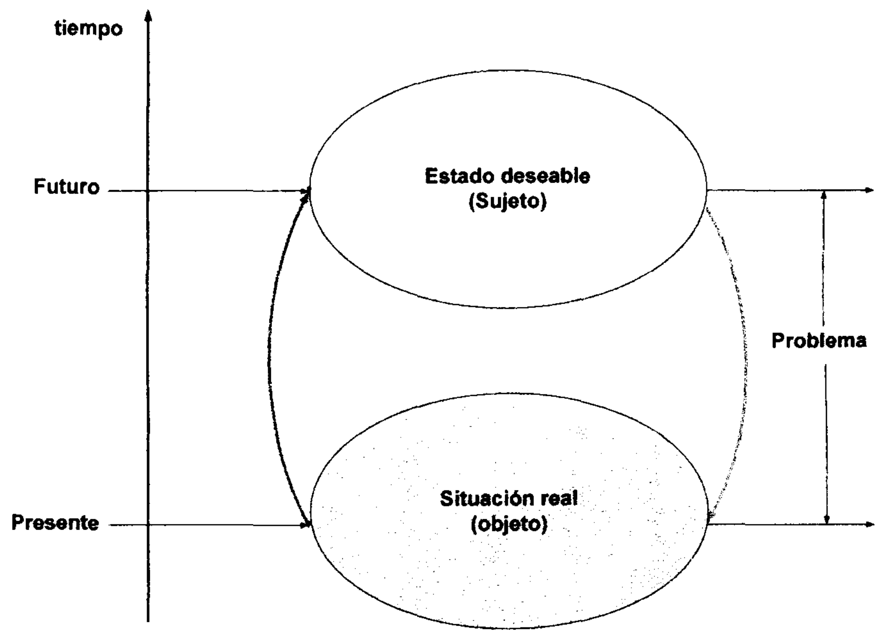


Figura 1.4 La temporalidad en el concepto de problema.

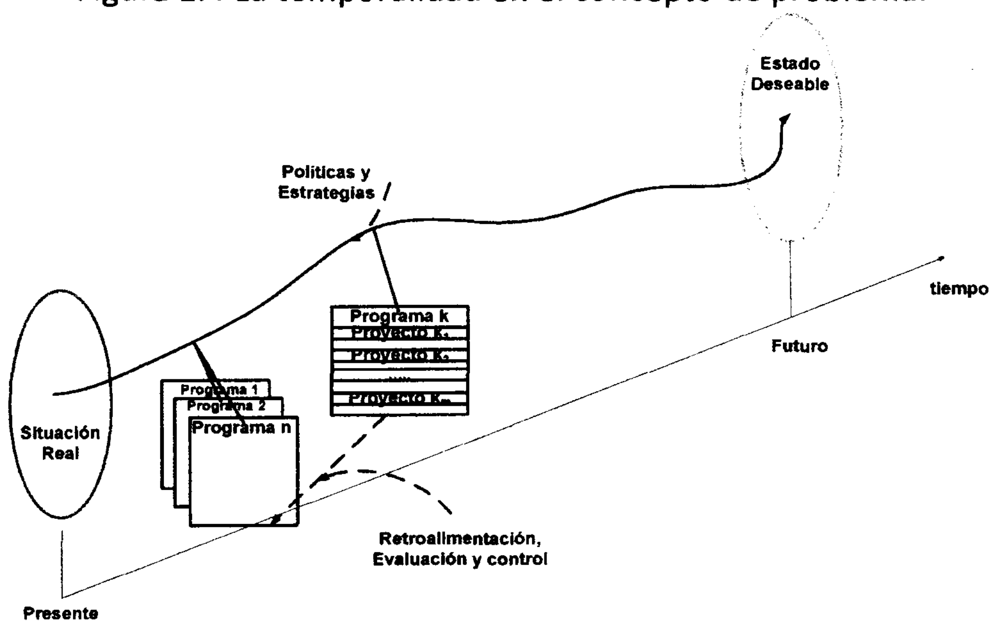


Figura 1.5 La planeación como proceso de solución de problemas

Las estrategias o los lineamientos técnicos generales, junto con las políticas o conjunto de reglas normativas y éticas, establecen el ancho del camino o los límites de libertad de los involucrados, y son las vías temporales y formales, por donde deben transitar los programas y proyectos a desarrollar para ir de la situación real a la deseable.

Su cumplimiento asegura las decisiones y las acciones razonadas con la pretensión de mejorar incrementalmente el sistema afectable en tiempos prescritos y, a la vez, en los diferentes subsistemas o entidades que integran el sistema por cambiar; por ejemplo en las diferentes entidades de la Facultad de Ingeniería: la Dirección, la Secretaría General, la Secretaría Administrativa, las Divisiones académicas, etc.

Las tácticas constituyen el conjunto de reglas que se ajustan en su ejecución a las estrategias.

Los programas, contienen los objetivos de mediano plazo que son las declaraciones de lo que hará en las diferentes entidades y contienen la exposición ordenada de los distintos proyectos de actividades y las condiciones a que han de sujetar.

Finalmente, los proyectos son los deseos que plasman en las metas por alcanzar en el corto plazo y contienen las acciones específicas importantes por realizar, con las notas y extensión de las circunstancias relevantes que deben ocurrir para el logro de sus metas.

Las visiones institucionales, los objetivos y las metas, son los estados futuros deseables por venir y aluden al largo, mediano y corto plazo, respectivamente; y se cumplirán mediante *los cambios de la realidad* que se realicen para alcanzar dichos estados.

Cuando las estrategias, los programas y los proyectos están claros y bien definidos; *la presupuestación* de los capitales humano, tecnológico y financiero puede establecerse de manera objetiva y racional, asignando prioridades cuando, como es común, hay escasez de recursos.

Así pues, la planeación es planeación es un proceso dinámico participativo e interdisciplinario que demanda *el control y la supervisión* de los avances propuestos en los proyectos, *la evaluación* periódica de los logros parciales a lo largo del proceso, la *retroalimentación* de las acciones desarrolladas y la prescripción de los *cambios*; conjuntamente con los involucrados y los miembros del sistema afectable.

1.4 Los componentes de los problemas sociotécnicos

Los componentes esenciales de los problemas que acaecen en los sistemas sociotécnicos, que son los de más alto grado de complejidad en los que está presente el ser humano, tales como el sistema de transporte urbano o el sistema educativo o el de abasto; en los cuales se suscitan los problemas sociales que demandan la planeación flexible, adaptativa y participativa se enumeran a continuación (Lara 1980).

1. La *base objetiva* es la parte de la realidad que incomoda al sujeto o entidad en la consecución de sus objetivos, la cual debe conocerse y conocer a los afectados.
2. *El sujeto*, individual o social, que tiene el problema, cuyos objetivos deben estar bien definidos y que contradicen la realidad. Cabe aclarar que el sujeto que sufre el problema generalmente es diferente del grupo planificador y de los funcionarios responsables de la decisión.
3. *Los objetivos del sujeto*, que deben jerarquizarse para clarificar y clasificar las acciones y su evolución.
4. *Terceros involucrados en el problema*. Una misma realidad puede afectar de manera distinta a otros sujetos que verían afectados por las diferentes decisiones sobre las alternativas de solución; su identificación es necesaria para saber si pueden ayudar o dificultar las soluciones propuestas según sus objetivos; por ejemplo, en la construcción de un sistema hidroeléctrico, existen poblaciones potencialmente inundables.
5. *Los objetivos de los terceros involucrados* deben definirse para conocer el impacto del problema, evaluar la magnitud de las fuerzas sociales de apoyo u oposición para evaluar las alternativas adecuadas a los intereses de los afectados.
6. *Existe un decisor responsable por la solución del problema*. En problemas pequeños el decisor es el sujeto del problema, mientras que en problemas sociotécnicos el decisor sobre la solución son los representantes de las instituciones.
7. *Existen al menos dos alternativas disponibles al decisor*. En todo caso, la gama debe ser mutuamente excluyente y colectivamente exhaustiva e incluye la de no actuar. Se deben considerar solamente cursos de acciones relevantes y factibles.
8. Para actuar, el decisor cuenta con *recursos existentes* tales como los energéticos que proveen energía para actuar; los recursos materiales o tecnológicos constituidos por los elementos constructivos con los que ac-

túa; los recursos humanos especializados o no para efectuar las acciones físicas y racionales; los recursos tecnológicos que son los conocimientos, procedimientos e instrumentos; los recursos financieros o sea el dinero para mercar otros recursos; los recursos políticos que constituyen la capacidad para organizar, movilizar y dirigir grupos mediante consenso o coerción.

9. *Existe un contexto o entorno social*, que es parte de una totalidad o macrosistema donde ubica el sistema afectable. La evaluación del contexto social, incluyendo las facetas política, social y cultural, ayuda a definir la viabilidad y el impacto de los cursos de acción.

Conviene señalar que, generalmente, los problemas sociales son dilemas, definidos éstos como la presencia de dos o más objetivos en conflicto, para cuya solución se requiere identificar la contradicción que existe entre los objetivos en conflicto, definir a los afectados por el dilema, conocer sus propios objetivos y jerarquizarlos. La solución a los dilemas se da por la negociación, la concertación o el compromiso.

Como indique al principio, los problemas forman la cantera de la actividad individual, institucional y social que producen el cambio, el crecimiento, el desarrollo y la transformación; de ahí la necesidad de reflexionar someramente sobre ellos al inicio de la obra sobre Probabilidad y estadística.

Para el caso de la investigación científica o aplicada, los problemas designan las dificultades que no pueden resolver automáticamente, requiere una actividad de investigación empírica-conceptual-empírica o sea un trabajo dialéctico objeto-sujeto-objeto y constituye el primer eslabón de la cadena problema-investigación-solución-implantación- verificación.

A lo largo del presente capítulo ha mencionado términos tales como *el sistema, el sistema afectable, el macrosistema, los sistemas sociotécnicos* y la planeación; para cuyos problemas las teorías, las metodologías y las técnicas de la Probabilidad y de la estadística que se verán en las siguientes obras son pertinentes. Ahora es conveniente intentar resolver algunos de los siguientes problemas ¿Qué es un sistema? ¿Cómo construye un sistema? ¿Cuáles son las particularidades del enfoque sistémico? ¿Cuál es el campo de acción de la ingeniería de sistemas? La solución a estos y otros problemas relacionados con los sistemas constituyen el contenido del siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2. LOS SISTEMAS, SUS TEORÍAS, SU ENFOQUE Y SU INGENIERÍA

CAPÍTULO 2
LOS SISTEMAS, SUS TEORÍAS, SU ENFOQUE Y SU INGENIERÍA

¿Los principios de los sistemas han sido tan obscuros
que ellos han evadido su detección?
Jay W. Forrester

Bajo el enfoque mecanicista el mundo es
una colección de objetos que interactúan y
las relaciones entre ellos son secundarias,
mientras que en el enfoque sistémico lo
que interesa al analista de sistemas son
las redes de relaciones yuxtapuestas en redes mayores.
Fritjof Capra

En el capítulo anterior se mencionaron términos relacionados con los sistemas, tales como *el sistema*, *el sistema afectable, el sistema sociotécnico, el macrosistema,* e igualmente se definió la planeación como un proceso que lleva al sistema objeto de la planeación de un estado real uno deseable. Es lógico entonces que discurramos en este capítulo acerca de los sistemas para contestar algunas de las preguntas planteadas en el capítulo anterior.

2.1 Una breve introducción sobre los sistemas

En la antigüedad, nuestros antepasados no comprendían los sistemas naturales ni sus fenómenos por lo que no podían controlarlos, los consideraban divinidades y se ajustaban a ellos y a su entorno que evolucionaba gradualmente; lo mismo sucedía con los sistemas sociales que no los percibían. Los griegos, por ejemplo Hesiodo (siglo VIII a. C.) Platón y Aristóteles (siglo IV a. C.), comenzaron a discernir y estudiar los sistemas refiriéndose a ellos en términos de sus partes y el todo.

El término **sistema** proviene del griego *σύστημα* que significa un conjunto de cosas que relacionadas entre sí contribuyen a determinado objetivo.

En la época de la sociedad industrial, los sistemas sociales se manifestaron en los procesos industriales; a la fecha, estos sistemas han aumentado inimaginablemente su complejidad y gracias al avance de la investigación en los campos de los sistemas naturales y sociales es posible comprender y ordenar sus estructuras, generar teorías, ampliar las perspectivas metodológicas para conocer, aunque de manera limitada, los sistemas naturales y sociales; lo que se refleja en la múltiple literatura se ha escrito hasta el presente.

Una forma apropiada de incursionar en los sistemas, su enfoque, su teoría y sus implicaciones es citando a Forrester (1980), pionero de la teoría de sistemas, quien se pregunta que si los sistemas son tan persuasivos ¿Porqué los conceptos y sus principios no aparecen más claramente en la literatura y en la educación? ¿Puede ser porque no se necesitan para comprenderlos en su naturaleza básica? O bien ¿Los principios de los sistemas han sido tan obscuros que ellos han evadido su detección? ¿O es que los sistemas no poseen una teoría general ni significado?

Al parecer, las barreras para comprender los sistemas se debe a la dificultad de identificar y expresar los principios universales que explican el éxito o la falla de los sistemas de los cuales formamos parte y no a la ausencia de conceptos generales; por ejemplo, la economía ha identificado interrelaciones básicas dentro del sistema industrial, la psicología ha prescrito algunas interacciones entre los sistemas humanos, la medicina ha avanzado por la profundidad en el conocimiento de los sistemas biológicos, las ciencias políticas han indagado los sistemas de poder gubernamentales e internacionales; pero, en lo general, las cuestiones de los sistemas sociales solamente se han expresado de forma verbal y cualitativa, y se considera que no es suficiente para expresar sus aspectos esenciales. Por su parte, en estos campos, la matemática ha venido incursionando lentamente para manejar sus realidades esenciales y complejas.

2.2 Los sistemas

Un sistema es un conjunto de dos o más de elementos interrelacionados de cualquier especie tales que la función de cada elemento del conjunto tienen un efecto en el comportamiento de todo el conjunto; ningún elemento tiene un efecto independiente en el conjunto y cada elemento es afectado por lo menos por algún otro; por lo cual, salvo para el análisis, no se puede descomponer el sistema en subsistemas independientes y los elementos son distinguibles por su número, su especie y sus relaciones entre ellos.

Las dos primeras características, llamadas *aditivas,* se obtienen por la suma de las características y el comportamiento de los elementos cuando pueden ser aislados; por ejemplo, el peso molecular, el peso atómico o el calor; en tanto que la tercera característica, llamada *constitutiva,* resulta de las relaciones especificas que se establecen dentro del sistema, originan características *nuevas que emergen* del sistema y difieren completamente de las de los elementos aislados; por ejemplo, las características químicas que no son explicables a partir de sus partes separadas. Las interacciones establecen cuáles elementos e están en la relación $\mathcal{R}$ de suerte que el comportamiento de un elemento e en $\mathcal{R}$ es diferente de su comportamiento en otra relación $\mathcal{R}'$.

Los elementos del sistema de nivel inferior, se llaman <u>subsistemas</u> y presentan características singulares, desarrollan funciones particulares para apoyar o recibir apoyo, muestran un comportamiento específico diferente a cualquier otro de los subsistemas del mismo nivel; por lo cual, desde la perspectiva estructural, un sistema es un todo divisible; pero desde la perspectiva funcional es indivisible pues ciertas propiedades esenciales se pierden al eliminar algunas de sus partes.

A su vez, en el nivel superior, cada sistema es parte o subsistema de otro mayor llamado *<u>supra sistema o macrosistema</u>,* tiene características intrínsecas distinguibles de los otros sistemas de su entorno y, en interrelación con ellos, cumple una función para contribuir al desempeño del macrosistema al que pertenece.

La analogía con el organismo que se verá más adelante en la Teoría General de los Sistemas (TGS) permite establecer que las organizaciones humanas son sistemas vivos y sus entidades o subsistemas también, puesto que están constituidos por seres humanos y otras cosas físicas. Algunos ejemplos de sistemas pueden darse atendiendo a una clasificación de las ciencias en *ciencias duras y ciencias blandas*, donde las primeras son las ciencias físicas o naturales y a las segundas corresponden las ciencias sociales y administrativas; de aquí que, en tales términos, *los sistemas pueden clasificarse en duros y blandos*

Ejemplos de sistemas duros son los sistemas vivos como los bosques, los sistemas tecnológicos tales como las computadoras, los sistemas de control electrónico y los automóviles; en tanto que algunos ejemplos de sistemas blandos son el sistema de transporte del Metro considerando a los operadores, controladores y usuarios; el sistema educativo del gobierno Federal; el propio gobierno federal; la Facultad de Ingeniería y la ciudad de México constituida entre otros, por los subsistemas de abasto, de justicia, de cultura, de agua potable, de comunicaciones, de salud, de turismo, de limpieza urbana, de educación y de seguridad pública; entre otros. Como se mencionó en el capítulo anterior, estos últimos son sistemas con el más alto grado de complejidad que incluyen gente y componentes físicos y se les llama *sistemas sociotécnicos*. Los teóricos de sistemas coinciden en que el concepto de sistema, aunque general, tiene aplicación en cualquier todo que consista de componentes interactuantes.

En los sistemas de cualquier clase, se aprovecha la sinergia según la cual la interacción de los componentes produce un efecto mayor y cualitativamente diferente al de la suma de los efectos individuales, de aquí que como reza un proverbio: un sistema es más que la suma de sus partes.

Como conjuntos de elementos interrelacionados, los sistemas operan conjuntamente para lograr un fin común; por ejemplo, junto con las personas un automóvil o un avión son sistemas constituidos de diferente especie que trabajan conjuntamente para proporcionarnos transportación; los circuitos electrónicos son sistemas de componentes interrelacionados que forman parte de macro sistemas como lo es un sistema de control electrónico; la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México es un sistema constituido de personas y cosas interactuantes con propósito de impartir la docencia, desarrollar investigación, difundir el conocimiento, asignar recursos y regular las actividades de las Divisiones y Departamentos Administrativos; en tanto que una familia es un sistema para vivir, prodigar amor entre sus miembros y facilitar el desarrollo armónico de sus miembros.

2.3 Construcción de los sistemas

Además de bella, la realidad es extremadamente compleja por lo que para estudiarla y conocerla recurrimos a los sistemas. Un sistema es una abstracción, una representación mental de los rasgos o aspectos esenciales y significativos de la parte de la realidad que se estudia para conocerla o afectarla.

Para la concepción y construcción del sistema se necesita un marco teórico o marco de referencia del campo de estudio llamado <u>paradigma</u> de representación, constituido por un sistema de conceptos básicos o una teoría que puede o no ser provisional.

Con el paradigma, a manera de lente como se ilustra en la figura 2.1 (Gelman, 1982), se observa la parte de la realidad que interesa estudiar; se concibe su representación; se elabora la construcción del objeto de estudio o el sistema (constructo); se plantea el problema de interés y se establecen el conjunto de modelos, métodos y de técnicas para resolverlo.

Por ejemplo, un problema económico de una región puede estudiarse bajo el paradigma de Keynes, el de Friedman o el de Marx; o bien, un problema de Mecánica puede plantearse a la luz de la Mecánica Newtoniana o la relativista de A. Einstein. Cabe aclarar que el sistema construido es el conjunto de categorías, conceptos e interrelaciones entre ellos que, a juicio del investigador, representa mentalmente los elementos y las interrelaciones de la realidad bajo estudio.

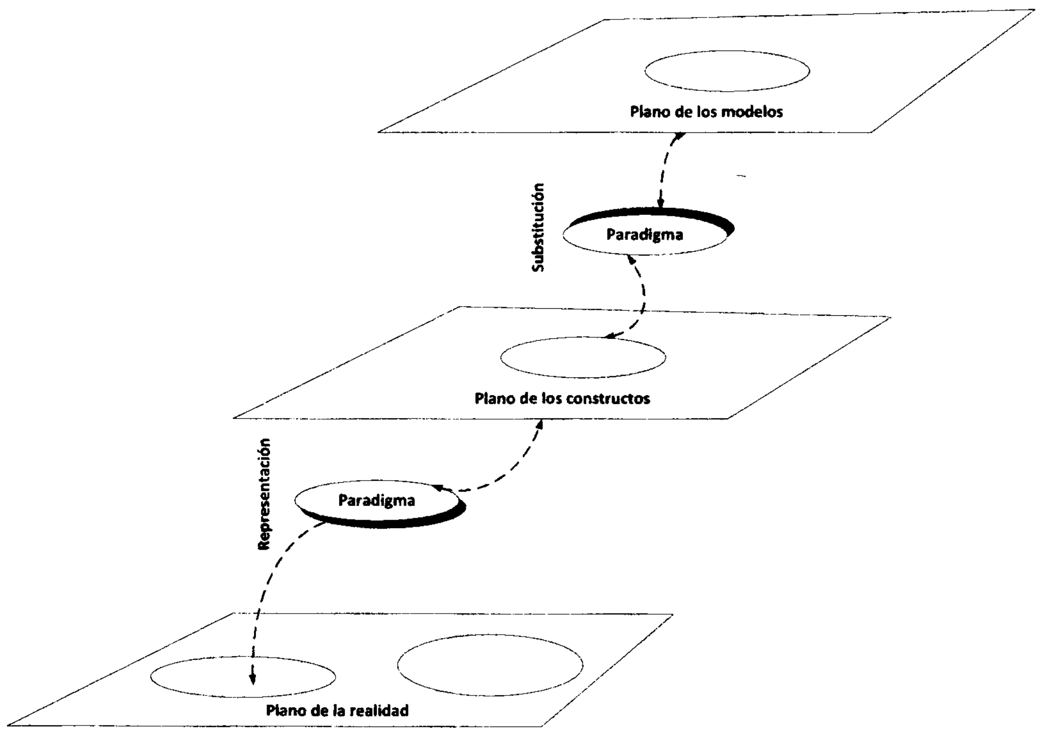


Figura 2.1 El papel de los paradigmas en la construcción del sistema objeto de estudio

Más aún, para estudiar y conocer los mecanismos que gobiernan al sistema, es necesario substituir el objeto de estudio por un modelo de algún tipo para lo cual se efectúa otra abstracción simbólica o no, de alto nivel, con base en el *paradigma de substitución* (ver figura 2.1); por ejemplo, en el problema económico regional citado arriba puede necesitarse la econometría basada en sistemas de ecuaciones diferenciales o un sistema de ecuaciones lineales; y para el diseño de la cortina de una presa puede construirse un modelo físico a escala como los realizados en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Cabe observar que las etapas de construcción y substitución no se desarrollan de manera directa o lineal puesto que tanto en la fase de construcción del sistema como en la de substitución es necesario el método de razonamiento dialéctico apoyado en los principios de los paradigmas; es decir, se necesita el diálogo, la argumentación y la reflexión del sujeto con la realidad que intenta conocer o afectar.

Elegido el paradigma de representación del campo al que pertenece el sistema bajo estudio, para su construcción se utilizan dos tipos de procedimientos complementarios entre sí, como se ilustra en la figura 2.2.

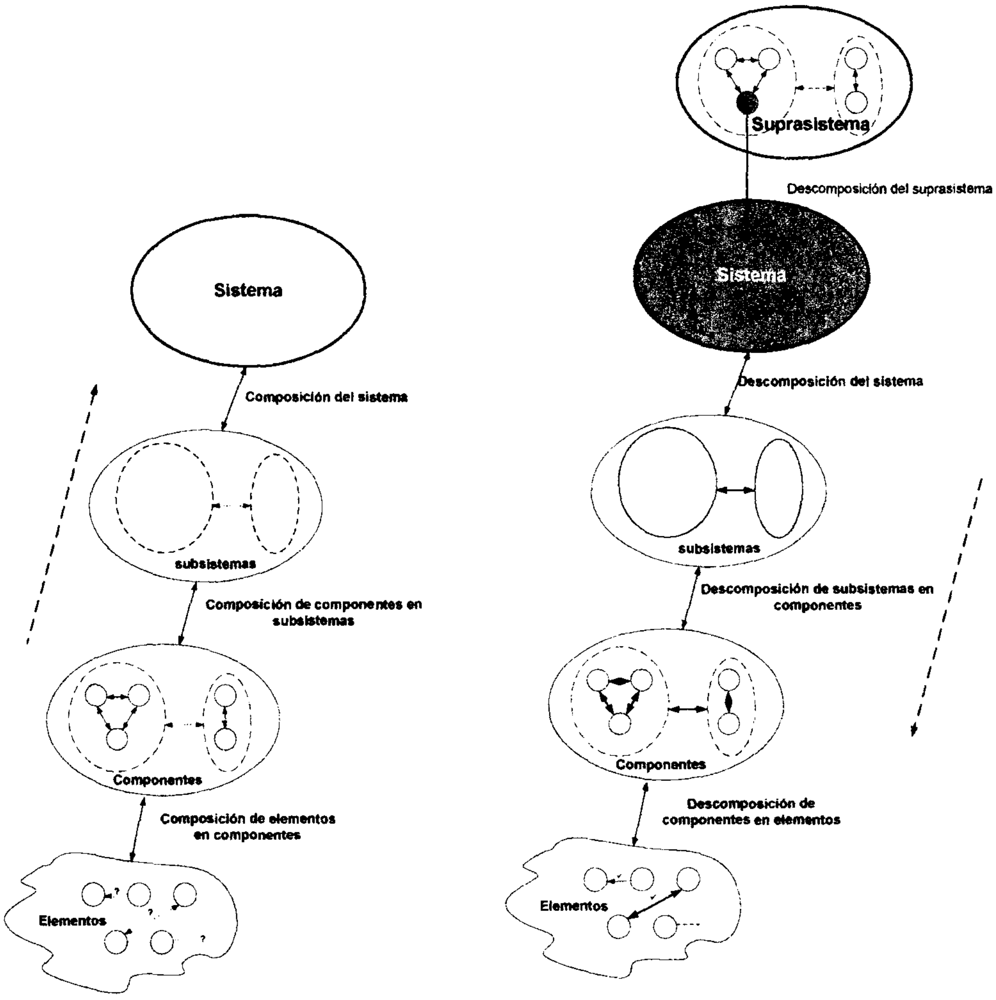


Figura 2.2. Procedimientos complementarios para la construcción de un sistema

El primero es el procedimiento por *composición o integración*, en el que la inducción es la clave porque va "armando" o "construyendo" el sistema a partir de sus elementos e interrelaciones esenciales hasta llegar al sistema o la totalidad. Este procedimiento tiene el inconveniente de no poder comprender cabalmente la función que tiene el sistema en el supra sistema o macrosistema al que pertenece, puesto que se construye a partir de la identificación y el estudio de sus elementos básicos y las interconexiones que los gobiernan según las leyes ya establecidas o provisionales, que sustentan la definición del tipo de relaciones que los vinculan mediante las propiedades del sistema establecidas en el paradigma.

Por otro lado, la construcción por *descomposición o desintegración* es el procedimiento inverso, deductivo e integral; se inicia con el macrosistema al que pertenece el sistema en estudio y las funciones que desempeña en él, se continúa con la construcción interna mediante la descomposición funcional que manifiestan las interrelaciones de sus subsistemas y aseguran el funcionamiento global de las relaciones del sistema, así como el papel que desempeña en el macrosistema.

Al percibir la realidad como una *red de relaciones*, el sistema construido resulta una *red interconectada de conceptos*, y el conocimiento como construcción se sustituye por la *red*.

2.4 El enfoque de los sistemas

Si bien es cierto que el enfoque de los sistemas se evidenció durante la Segunda Guerra Mundial por la necesidad de trabajar científica e interdisciplinariamente para resolver problemas complejos, y al manifestarse la existencia de analogías (relación de semejanza entre dos cosas distintas) e isomorfismos (correspondencia biunívoca entre dos estructuras matemáticas que conservan las operaciones) en el funcionamiento de sistemas automáticos; siguiendo a Capra (2006), el estudio de los sistemas vivos condujo desde los años treinta a los biólogos, psicólogos y ecólogos, *a una nueva forma de pensar en término de conectividad, contexto y relaciones; y los criterios clave del pensamiento sistémico se reforzaron por los descubrimientos revolucionarios de la física cuántica.*

> *La característica general del enfoque de sistemas consiste en visualizar al todo y analizar las interrelaciones de sus partes.*

Por ejemplo, los sistemas vivos y los sistemas sociotécnicos son totalidades integradas cuyas propiedades no pueden ser reducidas a las de sus partes más pequeñas. Sus propiedades esenciales, *emergentes* o *sistémicas* son las del conjunto y surgen de *las relaciones organizadoras y controladoras* entre las partes; por ello, las propiedades sistémicas quedan destruidas cuando el sistema se disecciona en elementos aislados.

La segunda característica del enfoque de sistemas es la habilidad para focalizar la atención alternativamente en distintos niveles sistémicos.

A diferencia del pensamiento mecanicista que considera que las funciones del sistema pueden analizarse en términos de sus componentes; el pensamiento sistémico afirma que los sistemas tales como un organismo, una escuela o una ciudad, solo se pueden comprender *cambiando el enfoque de las partes al todo por el de las partes a las relaciones*; ya que los componentes de un sistema son patrones dentro de una imbricada red de relaciones. También, las propiedades de los subsistemas solo pueden entenderse desde niveles superiores o en el contexto de un todo mayor; de aquí que *el pensamiento sistémico es un pensamiento contextual o un pensamiento medioambiental.* Los mismos conceptos son aplicables a los distintos niveles del sistema, con lo cual se adquieren importantes percepciones tales como el concepto de estrés aplicable a un organismo, al ser humano o a una organización. A cada nivel del sistema le corresponde un nivel de complejidad diferente, sus fenómenos poseen características distintas a las de los niveles superiores e inferiores y las propiedades sistémicas que surgen de un nivel específico son las propiedades emergentes ya enunciadas.

La tercera característica fundamental del pensamiento sistémico es la concepción de los sistemas como una red de relaciones yuxtapuestas.

La realidad, se visualiza como una red dinámica de acontecimientos interrelacionados, ninguna de las propiedades de ninguna parte de la red es fundamental sino que se derivan de las propiedades de las demás partes y la consistencia total de sus interrelaciones determina la estructura de toda la red, o sea, el sistema bajo estudio.

El nuevo paradigma implica que la epistemología, la comprensión del proceso de conocimiento, debe incluirse explícitamente en la descripción de los fenómenos ya que *"lo que observamos no es la naturaleza en sí* *misma, sino la naturaleza expuesta a nuestro método de observación"* (Capra 2006).

En suma, bajo el enfoque mecanicista el mundo es una colección de objetos que interactúan y las relaciones entre ellos son secundarias, mientras que en el enfoque sistémico los objetos en sí mismos, lo que interesa al analista de sistemas, son las redes de relaciones yuxtapuestas en redes mayores; las fronteras entre patrones discernibles (los elementos o subsistemas) son secundarias (ver figura 2.3).

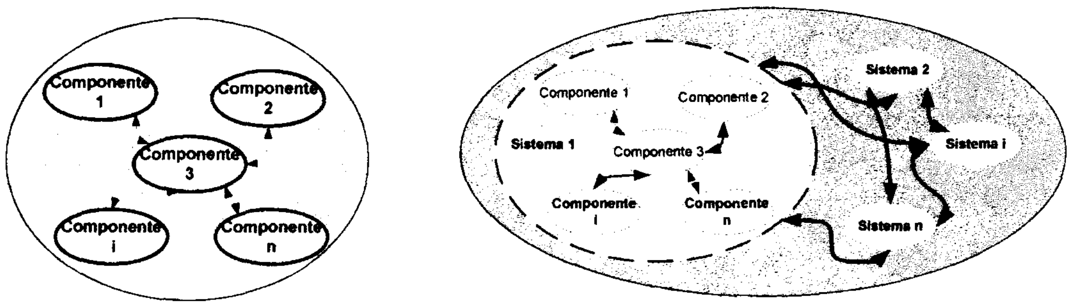


Figura 2.3 Enfoques mecanicista (componentes) y sistémico (relaciones)

Para el enfoque sistémico, la interdisciplinariedad es indispensable y se explica porque los fenómenos de la física ya no son más importantes que los de la biología, la psicología o la economía; solamente pertenecen a distintos niveles del sistema pero ninguno predomina sobre los otros; *el enfoque de sistemas es una visión totalizadora en términos de relaciones que se adopta explícitamente para el estudio y solución de problemas complejos*, tales como los sociotécnicos que ya se han mencionado; que acepta y comparte los puntos de vista de diferentes disciplinas.

El enfoque de sistemas ha mostrado su utilidad en la resolución de problemas complejos basados en los conceptos de sistemas, entre los cuáles se clasifican los sistemas sociotécnicos que involucran un gran número de variables humanas, económicas, sociológicas, tecnológicas y naturales; en los que no es posible la experimentación y cuyos problemas a menudo son los de organización, planificación, coordinación, programación, evaluación, control y decisión.

Como menciona Bunge (1980) cada profesional tiende a ver un solo aspecto de la sociedad, descuidando los demás y, cuando se habla de desarrollo, cada cual piensa en la expansión del sistema que más le interesa o conoce; y de esta lamentable visión estrecha profesional se origina un mosaico caótico de concepciones de la sociedad y su desarrollo formado por visiones parciales ninguna de las cuales permite comprender el problema global ni, con mayor razón, hacer algo por resolverlo. La sociedad humana no es un mero conjunto de individuos sino un sistema sociotécnico concreto analizable en cuatro subsistemas principales:

- El sistema biológico: Mantenido por las relaciones familiares y sociales.
- El sistema económico: mantenido por las relaciones de producción.
- El sistema cultural: mantenido por las relaciones de información.
- El sistema político: mantenido por las relaciones de poder.

Cada uno de estos sistemas interactúa fuertemente con los otros tres y ninguno se desarrolla independientemente de los demás y cada uno tiene componentes biológicos, económicos, culturales y políticos.

2.5 Teorías sobre los sistemas

2.5.1 La Teoría General de los Sistemas (TGS)

Aunque en adelante resumiremos el corpus teórico de la Teoría General de los Sistemas desarrollado por Bertalanffy (1968) llama la atención los comentario de Capra (2006) en cuanto a que cincuenta años antes de que Bertalanffy publicara su teoría general, Alexander Bogdanov había desarrollado su teoría de sistemas a la que llamó Tectología (del griego *tekton* que significa constructor), publicada entre 1912 y 1917; cuyo objetivo era esclarecer y generalizar los principios de organización de cualquier sistema: *"La tectología trata de las experiencias organizadoras, no de este o cualquier campo especializado, sino de todos ellos en conjunto"*. Esta formulación de los principios de organización universales operantes en los sistemas vivos o no, era la anticipación de la teoría de Bertalanffy, su forma organizadora era *la totalidad de conexiones entre elementos sistémicos,* hablaba de la estabilidad y desarrollo en términos de los mecanismos de formación y regulación; cuyos principios y filosofía eran meramente académicos.

Bertalanffy explica que como consecuencia de la evolución científica aparecieron de manera paralela, independiente y en campos muy distintos principios cognoscitivos generales, problemas y concepciones similares, que a diferencia del comportamiento de las partes cuando se estudian por separado, es necesario estudiar el orden que las unifica por su interacción dinámica para ampliar los esquemas conceptuales en aquellos campos donde no es posible la aplicación de la física; para los progresos de las ciencias biológicas, de la conducta y de las sociales. Tales generalidades hicieron posible la aparición de similaridades estructurales o isomorfismos en diferentes campos, por lo que existe correspondencia entre los principios que rigen el comportamiento de entidades que son intrínsecamente muy distintas.

Así como la probabilidad es una disciplina formal que estudia los eventos aleatorios en campos diversos de las ciencias como la física, la biología, la medicina, la genética, la administración, la actuaría y la economía; en forma análoga, la Teoría General de los Sistemas (TGS) es una ciencia general de la totalidad y aspira a ser una disciplina lógico-matemática, puramente formal en si misma pero aplicable a las varias ciencias empíricas; con objeto de formular y derivar los principios y las leyes que son válidos para los sistemas en general sin importar que sean físicos, biológicos o sociológicos, ni su género particular, ni los elementos y las fuerzas participantes.

Por ejemplo, los diferentes niveles de generalidad de la física van desde sistemas especiales como los que aplica el ingeniero en la construcción o en la fabricación de máquinas, pasando por las leyes de las disciplinas físicas como la óptica o la acústica; hasta los principios termodinámicos aplicables a sistemas de naturaleza intrínsecamente diferentes a los mecánicos, los calóricos o químicos.

La teoría de la complejidad desorganizada se basa en las leyes del azar, de la probabilidad, y en la segunda ley de la termodinámica; en tanto que la teoría de la complejidad organizada se apoya en conceptos sistémicos generales tales como el de organización, totalidad, direccionalidad, teleología, diferenciación, crecimiento, orden jerárquico, dominancia, control, retroalimentación, competencia y otros. Tal como sucede con los organismos vivos o los sistemas sociotécnicos, que siendo completamente ajenos a la física habitual, pueden estudiarse con la TGS al poder darles definiciones exactas y representarlas con modelos matemáticos.

Los instrumentos matemáticos en que se basa la TGS son los sistemas de ecuaciones diferenciales porque han probado su utilidad en bastas áreas de las ciencias físicas, económicas, biológicas y sociales. Como establece Bertalanffy, la función integradora de la TGS se basa en el isomorfismo de las leyes en diferentes campos; es decir, las uniformidades estructurales manifestadas por rastros isomorfos en los diferentes niveles o ámbitos. Por ejemplo, un caso sencillo que presenta es el de crecimiento con una sola clase de elementos lo que simplifica el sistema de ecuaciones a la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = f(y) = a_1 y + a_{11} y^2 + \cdots.$$

Si el crecimiento es proporcional al número de elementos presentes y no hay generación espontanea, entonces, considerando el primer elemento de la serie la solución es la ley exponencial $y = y_0 e^{a_1 t}$ donde y_0 es la condición inicial cuando $t = 0$. Como se muestra en la figura 2.4, si $a_1 > 0$, esta ley exponencial representa muchos fenómenos entre los cuales están el aumento de capital por interés compuesto, el crecimiento individual de ciertas bacterias y la ley de Malthus del crecimiento ilimitado cuando la tasa de natalidad es mayor que la de mortalidad.
Por el contrario, como se ilustra en la misma figura, cuando $a < 0$, esta ley exponencial representa, entre otros fenómenos, a la desintegración radiactiva, el exterminio de bacterias por veneno o la extinción de una población en la que la tasa de mortalidad es mayor que la de natalidad. Estas leyes simples también son aplicables a entidades sociales como las industrias, las escuelas, las ciudades, etc.; y prueban que la analogía organizacional es correcta.

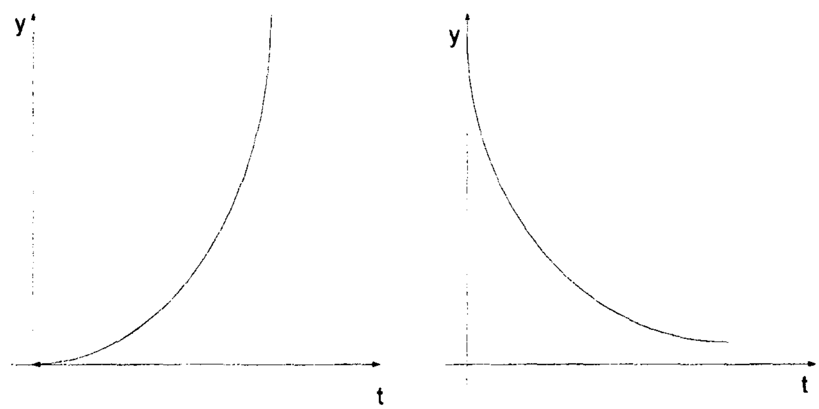


Figura 2.4 Curvas de crecimiento con $a_1 > 0$ y decrecimiento con $a_1 < 0$

2.5.2 Otras teorías sobre sistemas

Como lo anticipó Bertalanffy, la TGS basada en los sistemas de ecuaciones diferenciales para el estudio de los sistemas generales *"no es la única posible ni la más general"*. En efecto, en los años cuarenta se inicia el interés por los estudios interdisciplinares basados en los sistemas, con lo que se ha propiciado un cambio radicalmente distinto en la forma de analizar los problemas en las diferentes esferas de las ciencias; han surgido y se han desarrollado nuevas teorías como son la cibernética, la teoría de la información, la teoría de colas, la teoría de control y la de juegos; en tanto que en la aplicación práctica se tiene el análisis de sistemas, la ingeniería de sistemas y la investigación de operaciones; las cuáles se apoyan en el enfoque de sistemas y se describirán más adelante, lo que indudablemente es un nuevo paradigma de uso común en la actualidad.

2.5.2.1 La cibernética y los sistemas de control

La palabra cibernética proviene del griego *Κυβερνήτης* significa *arte de gobernar un navío* que en los tiempos antiguos designaba al timonel.

Norbert Wiener la tradujo al inglés como *cybernetics* y aparece por primera vez en su obra Cibernética o El Control y Comunicación en Animales y Máquinas (1948); desarrollada en colaboración con el Arturo Rosenblueth, William Ross Ashby y otros. Wiener estudió las implicaciones sociales de la cibernética al establecer analogías entre los sistemas automáticos como una máquina de vapor y las organizaciones humanas en su obra Cibernética y Sociedad (1950).

La cibernética se define como el estudio del control y comunicación en los sistemas complejos como son los organismos vivos, las máquinas, las organizaciones, los mecanismos para el autocontrol y la persecución de metas.

Se basa en los principios de retroalimentación o lazos causales en los procesos donde la información de salida del sistema que reporta su funcionamiento, se retransmite a la entrada del sistema para comparar, evaluar, controlar y corregir el comportamiento del sistema. En suma, la cibernética estudia los sistemas de control basados en la retroalimentación.

El concepto de *retroalimentación* en los sistemas ha emergido como una fuerte base para estructurar las observaciones de los sistemas sociales. La teoría de los sistemas se ha desarrollado lentamente para aplicarse a los sistemas eléctricos y mecánicos; sin embargo, los sistemas físicos son más simples que los sistemas biológicos y sociales y los principios de las interacciones dinámicas se han desarrollado y han mostrado su utilidad y sentido práctico en los sistemas humanos.

Con base en los principios de los sistemas es posible estructurar nuestras observaciones confusas acerca de los sistemas políticos y administrativos. Cuando una estructura y los principios que los gobiernan se han aceptado, puede entonces irse tan lejos para explicar las contradicciones, clarificar las ambigüedades y resolver controversias en las ciencias sociales. La estructura de los sistemas debe dar a la educación en cuestiones humanas el mismo ímpetu que las estructuras de las leyes físicas ha dado a la tecnología. Las ciencias sociales son fáciles de aprender si descansan en un cuerpo de principios generales de todos los sistemas, sean sistemas humanos o técnicos. En los conceptos de sistemas se tiene una cimentación para unificar las ciencias y las humanidades.

La figura 2.5 muestra la estructura básica de un sistema retroalimentado. El circuito de retroalimentación es una trayectoria cerrada que conecta en secuencia una decisión que controla la acción, el estado del sistema (estado o condición del sistema) y la información sobre el nivel del sistema y el retorno al punto de decisión.

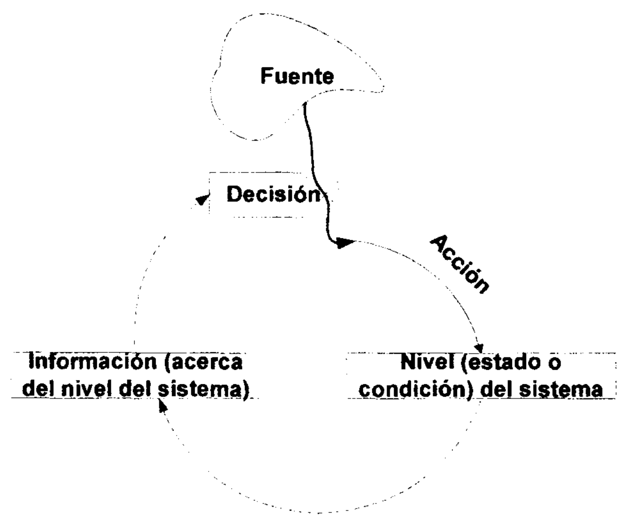


Figura 2.5 Circuito de retroalimentación

La información disponible como existe en el momento es la base para la decisión en curso que controla la acción de la secuencia. La acción altera el estado del sistema. El estado (el estado verdadero) del sistema es el generador de información en torno al sistema, pero la información en si misma puede ser retardada o errónea. La información es el estado aparente del sistema que puede ser diferente del verdadero estado. Está la información (estado aparente) no el estado verdadero, pero es la base para el proceso de decisión.

La estructura de un solo circuito de la figura anterior, es la forma más elemental de sistema retroalimentado porque hay muchos retardos adicionales y distorsiones que aparecen en la secuencia del circuito, como ocurre con los circuitos que se interconecten.

La estructura circular causa-efecto que se ilustra en la figura 2.6 ejemplifica el remplazo de bienes para mantener un estado de inventario en un almacén.

Otro ejemplo se tiene en un tanque de agua, la altura del agua, el estado del sistema, depende de la acumulación producida por el flujo pasado; pero el estado no está determinado por la rapidez del flujo de agua que se está añadiendo en el instante de tiempo presente. Una gran flujo en un tanque vació no implica un tanque lleno y ya lleno el tanque, este no se afecta si el flujo cesa completamente.

La información en sí misma es uno de los estados del sistema (estado aparente) que cambia y difiere del verdadero valor de la variable que presume representar. La información no está determinada por las verdaderas condiciones presentes, que no está disponible ni exacta ni instantáneamente, sino realmente por condiciones pasadas que son observadas, transmitidas, analizadas y resumidas. La discrepancia entre el verdadero estado del sistema y la información del estado que gobierna la decisión siempre existe. de manera práctica, es común que la información es suficientemente buena y no hay distinción entre los estados real y aparente.

Stafford Beer, pionero de la administración científica y filósofo de la teoría organizacional dedicada al estudio de los flujos de información que rodean un sistema y la forma en que es usada por el sistema para controlarse a sí mismo, definió a la cibernética como "la ciencia de la organización efectiva" tanto en sistemas animados como inanimados.

Para él. la cibernética es una ciencia interdisciplinar ligada a la física, a la administración organizacional, al estudio del cerebro y al de las computadoras; ha desempeñado un papel decisivo en la revolución tecnológica y se aplica con éxito al estudio de los fenómenos de *comunicación* y *control*, tanto en seres vivos y organizaciones como en máquinas; y también en diferentes áreas de profunda especialización tales como la teoría de la información, la teoría de la computación, los sistemas adaptativos, la inteligencia artificial, los sistemas expertos, la teoría del aprendizaje organizacional, la teoría de sistemas matemáticos, los sistemas de apoyo a las decisiones, la dinámica de sistemas, la investigación de operaciones, la simulación y la Ingeniería de Sistemas.

Un sistema de control está definido como un conjunto de componentes interrelacionados que pueden regular su propia conducta o la de otro sistema con el fin de lograr un funcionamiento predeterminado. Se clasifican en sistemas de bucle abierto y de bucle cerrado.

En los primeros solo actúa el proceso sobre la señal de entrada y da como resultado una señal de salida que no se compara con la entrada, nada asegura su estabilidad ante las perturbaciones y la precisión depende de la previa calibración del sistema. Por otro lado, en los sistemas de control de bucle cerrado la acción de control está en función de la señal de salida y se caracterizan por su complejidad; esta señal se compara con la entrada para afectarla a fin de controlar el sistema. Estos sistemas son más estables a las perturbaciones externas y variaciones internas. Dos ejemplos de sistemas de control de bucle cerrado con el calentador de agua que se utiliza en el hogar y el sistema de aire acondicionado de las oficinas.

Los elementos básicos de un sistema de control son:

- *La Señal de Entrada* que se aplica para que el sistema produzca la respuesta especificada.
- *La Señal de Salida* que es la respuesta del sistema que puede o no relacionarse con la respuesta que implica la entrada.
- *Las Retroalimentaciones* que corresponden a las relaciones secuenciales causa-efecto entre las variables del sistema; cuando el sistema produce un retorno se tiene retroalimentación negativa o si el sistema apoya la decisión inicial existe retroalimentación positiva.
- *La Variable de Control* que modifica la señal del elemento de control para lograr la respuesta deseada.
- *Los Sensores y Actuadores* son los receptores se generan las variaciones que se producen en las variables.
- *Las Variaciones Externas* son los factores no controlables que generan la acción de un cambio imprevisto que debe corregirse.
- *La Fuente de Energía* que abastece al sistema para generar las actividades programadas.

Los problemas de la ingeniería de sistemas de control se resuelven analizando las variables, las características y la retroalimentación del sistema; el diseño selecciona los componentes y crea el sistema material para ejecutar la tarea programada.

Para su estudio, se emplean modelos de diagramas de bloque y las gráficas de flujo de análisis, que son modelos icónicos que representan esquemáticamente la constitución estructural y funcional de los componentes y los procesos del sistema; las ecuaciones diferenciales y otras expresiones matemáticas son modelos matemáticos necesarios para encontrar las funciones, los valores de las variables de control y efectuar simulaciones del sistema.

2.5.2.1.1 Sistemas abiertos y cerrados

Los sistemas pueden clasificarse en abiertos y cerrados.

Los sistemas abiertos se caracterizan porque las salidas pueden responder a las entradas pero no influyen en las entradas.

Un sistema abierto no registra su funcionamiento; es decir, no tienen memoria, en ellos la acción pasada no controla las acciones futuras. Los sistemas abiertos no observan ni reaccionan a su propia operación. Un automóvil es un sistema abierto porque por sí mismo no se gobierna, no aprende por donde ha ido en el pasado ni tiene una meta donde ir en el fututo. Un reloj por sí mismo no observa su propia inexactitud ni se ajusta a si mismo porque es un sistema abierto.

Un sistema con retroalimentación, se le llama sistema cerrado y es influenciado por su comportamiento pasado.

Un sistema retroalimentado tiene una estructura en circuito cerrado que ofrece resultados de su acción pasada mediante el regreso de sus salidas para controlar su acción futura. Una clase de sistemas de retroalimentación, los de *retroalimentación negativa*, buscan una meta y responden como consecuencia de una falla para lograr la meta; a su vez, los sistemas de *retroalimentación positiva*, generan procesos de crecimiento donde las acciones construyen un resultado que genera aún mayor acción.

Los sistemas retroalimentados basan su acción futura en su acción previa. El sistema de calefacción de una oficina es controlado por un termostato, el elemento de control de la temperatura, que responde al calor previo producido por el sistema de acondicionamiento del ambiente. Puesto que el calor ya producido controla el calor por venir, éste representa un sistema de retroalimentación negativa. Un reloj y el dueño forman un sistema de retroalimentación negativa cuando el tiempo que marca el reloj es comparado con el tiempo correcto externo como una meta y es ajustado para eliminar los errores. Un motor con un gobernador, como el del laboratorio de termodinámica de la FI que tiene un gobernador de WATT, que es el sensor que detecta la velocidad del motor, la retransmite para que se ajuste y logre la velocidad especificada, es un sistema de retroalimentación negativa. Por otra parte, las bacterias se multiplican para producir más bacterias que incrementan la tasa a la cual nuevas bacterias son generadas. En este sistema de retroalimentación positiva, la tasa de crecimiento de las nuevas bacterias depende de las bacterias acumuladas en su crecimiento pasado. Del punto de vista del observador al definir el propósito del sistema, depende si el sistema se clasifica en un sistema abierto o retroalimentado porque no es intrínseco al ensamble particular de las partes. La manera en que el propósito del sistema es abierto o retroalimentado puede ilustrarse considerando un motor de gasolina bajo varios puntos de vista.

Si el motor opera sin gobernador no tiene metas de velocidad, es un sistema abierto en términos de la regulación de la velocidad. Cambiando la válvula reguladora cambia la velocidad pero ésta no tiene efecto sobre el regulador. Más aun, al cambiar la carga, cambiará la velocidad sin causar ajustes en el regulador.

Añadiendo un gobernador, se produce un sistema retroalimentado en términos de una meta de velocidad constante. Los cambios en la carga causan cambios en la velocidad que producen cambios compensatorios en los ajustes del regulador; porque el gobernador siempre intenta mantener la velocidad a la que se ha ajustado.

Si el motor es parte de una podadora y cambiamos la meta de operación de velocidad constante para cortar más rápido el pasto, ahora la podadora es un sistema abierto porque no importa ni reconoce que tanto ha cortado o donde debe cortar. Si añadimos a la persona de la podadora, nuevamente tenemos un sistema retroalimentado en términos de la meta de cortar una cantidad de césped particular. El operador y la podadora forman un sistema retroalimentado cerrado, buscan una meta, en lugar del sistema abierto que no tiene objetivo; porque la meta está en concordancia con el patrón de pasto ya cortado.

Un gran diseño puede implicar que los sistemas retroalimentados tengan muchos componentes donde cada uno puede en si mismo ser un sistema retroalimentado en términos de algún propósito subordinado. Debe reconocerse la jerarquía de los bucles de retroalimentación donde el más amplio propósito determina la visión del sistema pertinente.

En <u>la retroalimentación positiva que busca crecimiento</u>, la estructura del sistema determina las fuerzas para el crecimiento

En la estructura de los sistemas con <u>retroalimentación negativa</u> que buscan metas, se encuentran las causas de las fluctuaciones y la estabilidad del sistema.

2.5.2.1.2. Introducción a los sistemas dinámicos

Los resultados de los sistemas de retroalimentación negativa pueden ir desde logros suaves hacia la meta que busca el circuito hasta fluctuaciones fuertes en la búsqueda de la meta; mientras los circuitos positivos se ocupan del crecimiento o decrecimiento. Los acoplamientos no lineales pueden causar un desplazamiento de dominancia de un circuito a otro.

***Un sistema dinámico** se refiere a la variación en el tiempo de valores de algunas variables del sistema cuando cambia el tiempo.*

En ellos y con referencia a la figura 2.6, la curva B es típica de una clase de sistemas retroalimentados cuya variable se eleva a una tasa decreciente que se aproxima hacia un valor final en el tiempo, como sucede en el incremento de un número de empleados contratados al inicio de la operación de una fábrica hasta su estado estable o también puede representar la condición en que el agua de un depósito se aproxima a su estado máximo final. En ellos, el cambio a su valor final es más rápido al principio y se aproxima más lentamente cuando disminuyen las discrepancias entre el valor presente y el valor final.

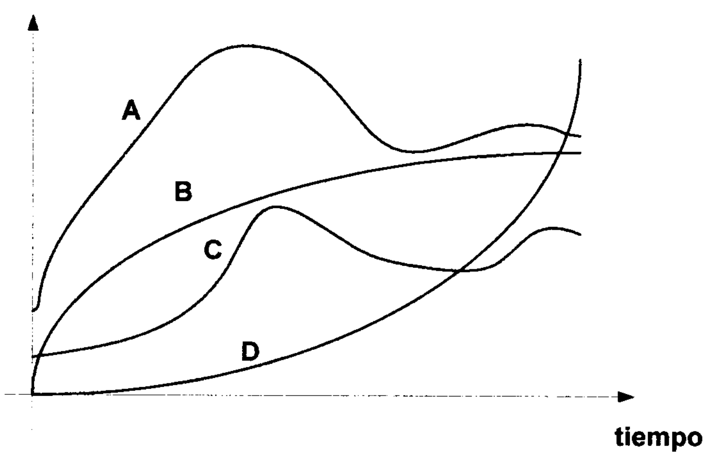


Figura 2.6 Comportamiento Dinámico

La curva A se aproxima de manera más complicada a su valor final, cuando el sistema sobrepasa el nivel especificado corrige hacia abajo para recobrar de excedente inicial y así se aproxima a la meta. Tal comportamiento puede resultar de un gran tiempo de retardo en el circuito de retroalimentación o de un esfuerzo bastante violento en corregir las discrepancias entre el estado aparente del sistema y la meta. Estas fluctuaciones pueden observarse en la velocidad inestable cuando un gobernador intenta controlar un motor, en la elevación y la caída de la producción industrial como sucede en los ciclos económicos, en las fluctuaciones de los precios de los bienes cuando la oferta y la demanda compiten entre sí, en un borracho cuando intenta poner la llave en la cerradura de la puerta, en un automovilista cuando se sale de su carril o en un bebé cuando intenta colocar los cubos en su lugar.

La curva D muestra el mismo incremento fraccional de la variable de crecimiento en cada intervalo de tiempo. Aquí, el valor vertical se duplica en cada unidad de tiempo; tal crecimiento exponencial ocurre en la división de las células, el crecimiento creciente de un producto donde el vendedor contrata más vendedores o en la cadena de reacción de una explosión atómica y en la multiplicación de los conejos.

La curva C muestra una sección de crecimiento exponencial seguida de una nivelación a la salida. Es una composición de la sección inicial de la curva D y de una sección posterior con características similares a las de la curva A (la sección posterior puede ser como la B que no se suaviza más allá del valor final). Tal conducta (sin saltos más allá del valor final) se observa en el crecimiento de un animal que al principio crece rápidamente y después lentamente en su aproximación a su talla final. Esta clase de crecimiento que da la forma de un balance continuo, puede representar una población de conejos que se eleva rápidamente hasta el punto donde la fuente de alimento es sobrepasada y no puede soportar más conejitos. Esta curva también se observa en la actividad nuclear de una planta nucleoeléctrica donde la tasa de fisión eleva el estado de operación y es moderada por el sistema de control. También representa el crecimiento temprano de un producto que se estanca porque la demanda del mercado se satisface bien porque se ha alcanzado la capacidad de producción o porque la calidad ha declinado.

2.5.2.2 La teoría de la información

Claude E. Shannon fue su principal pionero y los resultados de sus trabajos los plasmó en el artículo *Una teoría matemática de la* *comunicación* publicado en el *Bell System Technical Journal* en 1948; posteriormente, los trabajos de Shannon y Wiener llevaron al establecimiento de la *teoría estadística de la información*; que fue antecedente necesario para la teoría de la Comunicación.

Esta teoría es una rama de la teoría matemática de la probabilidad y la estadística que estudia la información y lo relacionado con ella como son la transmisión, los canales, la compresión de datos y la criptografía.

La información es una magnitud medible mediante una expresión isomorfa de la entropía negativa de la física y su teoría desarrolla los principios de trasmisión a partir de la idea de que los canales no son ideales, aunque se idealicen las no linealidades; para estudiar los métodos y la cantidad de transmisión de la información útil que se puede enviar a través de un canal.

Un *canal de comunicación o canal de datos* es el medio de transmisión del emisor al receptor por el que viajan las señales portadoras de la información.

Desde el punto de vista telemático se define por sus propiedades físicas: la naturaleza de la señal, la velocidad de transmisión, el ancho de banda, nivel de ruido que genera el proceso de transmisión, modo de inserción de emisores y receptores, etc. Por otra parte, los canales pueden ser personales en los que la comunicación es directa, voz a voz como el teléfono, o masivos de uno a varios como son los escritos radiales, televisivos e informáticos.

En telecomunicaciones, el *canal* tiene los siguientes significados:

- Una conexión entre los puntos de inicio y terminación de un circuito.
- Un camino único facilitado mediante un medio de transmisión que puede ser con separación física o eléctrica.
- Un camino para el transporte de señales eléctricas o electromagnéticas.
- En conjunción con una letra, número o código predeterminado, hace referencia a una radiofrecuencia específica.
- Porción de un medio de almacenamiento, tal como una pista o banda, que es accesible a una estación de lectura o escritura.
- En un sistema de comunicaciones, es la parte que conecta una fuente (generador) a un sumidero (receptor) de datos.

No todos los canales de transmisión sirven para todo tipo de señales; por ejemplo, la señal eléctrica se propaga bien por cables de cobre u oro, las señales luminosas se propagan satisfactoriamente por fibra óptica, en tanto que las señales electromagnéticas pueden propagarse por canales diferentes como son los cables, el vacío (satélites), la fibra óptica, la propia atmósfera, etc.; dependiendo de la frecuencia de las señales transmitidas.

La compresión de datos consiste en conservar la misma información de señales digitales codificada pero empleando la menor cantidad de espacio incluida en el procesamiento y/o la transmisión y/o almacenamiento de datos; y se utiliza para transmitir en menos bits la misma cantidad de información que ocuparía una gran resolución. Se basa en la búsqueda de repeticiones en series de datos y almacenar el dato solo junto al número de veces que se repite; por ejemplo, si en un archivo aparece una secuencia como BBBBBBBBB, que ocupa nueve bytes se almacena simplemente 9B que ocupa solo 2 bytes. La compresión correcta para la transmisión de los datos debe tomar en cuenta la Información redundante y la entropía correspondiente a la información original, la información repetitiva o predecible, la información irrelevante que se desprecia sin afectar el contenido del mensaje y la información básica que contiene el mensaje que se transmite para restituir la señal.

2.5.2.3 Criptografía

La palabra criptografía proviene del griego *κρύπτω krypto*, "oculto", y *γράφω graphos*, "escribir", *significa escritura oculta*.

Su historia es muy antigua y data de nuestros antepasados cuando enviaban señales de humo a los miembros de su comunidad, a los griegos se les atribuye los primeros sistemas criptográficos como el descrito por el historiador griego Polibio consistente de un sistema de sustitución posicional de letras en una tabla, y el método espartano de trasposición en el que sobre un cilindro se enrollaban los mensajes para cifrarlos y descifrarlos; a su vez, se sabe que los romanos usaron otro método de criptado conocido actualmente como César, en recuerdo a Julio César, quien supuestamente lo utilizó en sus campañas. En el siglo XV el italiano León Baptista Alberti inventó un novedoso sistema de sustitución poli alfabética; en el siglo XVI el francés Blaise de Vigenere publicó su tratado sobre *la escritura secreta* cuyo diseño de cifrado ha llegado a nuestros días; durante los siglos XVII a XIX, Selenus publicó su obra "Cryptomenytices et Cryptographiae" y hubo un notable interés de los monarcas por la criptografía; por ejemplo, durante el reinado de Felipe II, se utilizó un cifrado con un alfabeto de más de 500 símbolos que se consideraba inexpugnable, y se cuenta que María Estuardo, reina de Escocia, fue ejecutada por su prima Isabel I de Inglaterra al descubrirle un complot tras un criptoanálisis exitoso.

Al término de la Segunda Guerra Mundial, las investigaciones pioneras sobre teoría de la información de Claude Shannon generaron una sorprendente revolución de la criptografía teórica y práctica en la que destacan los sistemas que hacen posible la incursión de la criptografía en campos tales como el de la firma digital que asocia unívocamente a una persona, el emisor de un mensaje, un contenido imposible de negarlo.

La criptografía se define como el arte o ciencia de esconder o cifrar información mediante técnicas que intercambian los mensajes seguros por mensajes ocultos e ilegibles que sólo puedan ser descifrados y leídos por los receptores definidos; su finalidad consiste en garantizar el secreto en la comunicación entre el emisor y el receptor y asegurar la autenticidad del remitente, del receptor y del contenido del mensaje original enviado.

En la criptografía, el *texto en claro o texto plano* es la información original que desea protegerse; el *cifrado* es el proceso de conversión del texto plano en texto ilegible, llamado *texto cifrado* o *criptograma.* La aplicación del *algoritmo de cifrado* o *cifra* usa una *clave* que contiene la información secreta que adapta el *algoritmo de cifrado* para cada uso diferente. Por otro lado, el *descifrado* es el proceso inverso de recuperación del texto plano a partir del criptograma y la *clave, el protocolo criptográfico* define los detalles de uso de los *algoritmos* y las *claves;* y al conjunto de protocolos, algoritmos de cifrado, las relaciones de los procesos de gestión de las claves y de actuaciones de los usuarios, se le da el nombre de *criptosistema* con el cual trabaja el usuario final.

Desde la perspectiva científica, esta área de conocimiento se divide en *criptología*, que estudia las técnicas de cifrado, la criptografía y sus técnicas complementarias; y el *criptoanálisis*, que estudia los métodos para romper textos cifrados necesarios para recuperar la información original en ausencia de las claves.

2.5.2.4 La teoría de juegos

Al parecer, la teoría de juegos aparece por primera vez en una carta escrita por James Waldegrave en 1713, en la que proporciona una solución de estrategia para dos personas en un juego de cartas; posteriormente, en 1838, Antoine Augustin Cournot publica de *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* en la que presenta la solución de un problema de duopolio y; no obstante, como campo de estudio especial se considera que tal teoría se inició en 1928 con las publicaciones de John von Neumann cuyos resultados fueron ampliados más tarde en su libro de 1944, *The Theory of Games and Economic Behavior*, escrito junto con Oskar Morgenstern, que contiene un método para encontrar soluciones óptimas en juegos de suma cero de dos personas. Durante este período, el trabajo sobre teoría de juegos se centró en los juegos cooperativos donde se analizan las estrategias óptimas para grupos de individuos, asumiendo que pueden establecer acuerdos entre sí acerca de las estrategias más apropiadas.

Durante el periodo de los 50 John Nash definió una estrategia óptima para juegos de múltiples jugadores conocida como equilibrio de Nash, que permite el análisis de juegos no cooperativos además de los cooperativos; desarrolló los juegos de forma extensiva, el juego ficticio y los juegos repetitivos; y durante ese tiempo aparecieron las primeras aplicaciones de la teoría de juegos en la filosofía y las ciencias políticas. En 1967 John Harsanyi desarrolló los conceptos de la información completa y de los juegos bayesianos, durante la década de 1970 como resultado del trabajo de John Maynard Smith y su concepto estrategia estable evolutiva, la teoría de juegos se aplicó extensamente a la biología, en la conducta animal incluyendo el desarrollo de las especies por la selección natural; además, se introdujeron y analizaron los conceptos del equilibrio correlacionado, y del conocimiento común.

Un ejemplo muy conocido en la aplicación de la teoría de juegos a la vida real es el dilema del prisionero, popularizado por el matemático Albert W. Tucker, el cual tiene implicaciones para comprender la naturaleza de la cooperación humana. La teoría psicológica de juegos, que se arraiga en la escuela psicoanalítica del análisis transaccional, es muy distinta. Recientemente, en 2005, los teóricos de juegos Thomas Schilling y Robert Aumann ganaron el premio Nobel de Economía por sus trabajos en modelos dinámicos, la teoría de juegos evolutiva y del equilibrio.

La teoría de juegos estudia, con base en modelos matemáticos que utilizan la probabilidad, la estadística y la programación lineal; las estrategias óptimas, el comportamiento previsto y observado de los participantes, la competencia racional entre antagonistas para buscar maximizar las ganancias y minimizar las pérdidas de alguno de ellos.

En otras palabras, estudia la elección de la conducta óptima cuando los costos y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos. Es un área de la matemática aplicada de los sistemas que utiliza modelos para investigar las interacciones en estructuras formalizadas de incentivos, los llamados *juegos,* y desarrollar procesos de decisión. Al principio se utilizó como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, pero actualmente ha ampliado sus campos de aplicación en la política, la biología y la filosofía y ha atraído también la atención de los investigadores en informática, inteligencia artificial y cibernética.

Los juegos estudiados por esta teoría están definidos por modelos matemáticos sistémicos que consisten de un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos o estrategias disponible para ellos y la especificación de recompensas para cada combinación de estrategias y, según los métodos particulares que pueden aplicarse para resolverlos, clasifican en:

Juegos simétricos y asimétricos: En un juego simétrico las recompensas por jugar una estrategia particular dependen sólo de las estrategias que empleen los otros jugadores y no de quién las juegue; en cambio en los juegos asimétricos no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores, cada jugador tiene estrategias diferentes

Juegos de suma cero y de suma no cero: En los primeros un jugador se beneficia solamente a expensas de otros como sucede en el póker o el ajedrez porque se gana la cantidad que pierde el oponente; en cambio, en los juegos de suma no cero la ganancia de un jugador no necesariamente se corresponde con la pérdida de otro; por ejemplo, un contrato de negocios ganar-ganar involucra un desenlace de suma positiva, donde cada oponente termina en mejor posición al firmar el contrato.

Juegos cooperativos: Se caracterizan por un contrato que puede hacerse cumplir y justifica los contratos plausibles relacionados con la estabilidad. Tal es el caso de un contrato en el que la teoría de la negociación axiomática determina el monto de inversión conveniente para los jugadores, aún cuando no soslayen la justicia.

Simultáneos y secuenciales: En estos, los jugadores se mueven simultáneamente y desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores; mientras que en los juegos secuenciales o dinámicos, los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas y ninguno conoce las acciones del resto.

Juegos de información perfecta: Estos son un subconjunto de los juegos secuenciales en los que todos los jugadores conocen los movimientos que han efectuado previamente los demás jugadores. La mayoría de los juegos estudiados en la teoría son de información imperfecta.

2.6 Aplicaciones de la Teoría de Sistemas

2.6.1 Economía y Sociología

Los economistas han usado la teoría de juegos en el análisis de problemas tales como las subastas y los oligopolios, enfocados a la búsqueda de conjuntos de estrategias particulares. *En sociología*, dicha teoría se ha aplicado en el diseño de la formación de redes sociales, en los sistemas de votaciones y para estudiar el comportamiento de las poblaciones humanas donde se presupone racionalidad o una racionalidad acotada en los jugadores. Algunos investigadores consideran que el equilibrio de los juegos predice el comportamiento de las poblaciones humanas si se enfrentasen a situaciones análogas al juego estudiado; aunque sus supuestos no se mantienen siempre, tratan la teoría de juegos como una idealización razonable de la misma forma que los modelos usados por los físicos.

2.6.2 Biología

En Biología, la teoría de juegos se usó por primera vez para estudiar la evolución y la estabilidad de las proporciones de los sexos; en ella, las recompensas de los juegos se sustituyen por las adaptaciones y, recientemente, la teoría se ha enfocado en el equilibrio proporcionado por la estrategia evolutivamente estable que no presupone necesariamente selección natural en sentido biológico, pero incluye las evoluciones biológica y cultural y también modela el aprendizaje individual; más aún, para sus investigaciones, esta ciencia ha usado la teoría de juegos evolutiva, el concepto de estrategia evolutivamente estable, el análisis de juegos con señales y otros juegos de comunicación para explicar el surgimiento de la comunicación animal; por ejemplo, en el problema halcón-paloma o el problema de la gallina, para estudiar la conducta combativa y la territorialidad.

2.6.3 Informática y Lógica

Muchas teorías lógicas se basan en la semántica de juegos y los investigadores de informática han usado juegos para modelar programas que interactúan entre sí.

2.6.4 Ciencias Políticas

La investigación en ciencias políticas también ha usado resultados de la teoría de juegos en las explicaciones acerca de la teoría de la paz democrática, al considerarla como el debate público y abierto en la democracia que suministra información clara y confiable acerca de las intenciones de los gobiernos hacia otros estados; en donde se considera explícitamente la imposibilidad de conocer a los líderes no democráticos, sus intereses, los privilegios que otorgarán y las promesas que mantendrán. Bajo tales razonamientos surge la desconfianza, la falta de cooperación y el antagonismo cuando al menos uno de los participantes de una disputa no es demócrata.

2.6.5 Filosofía

Los trabajos de Quine publicados en 1960 y 1967, sirvieron de base a David Lewis (1969) para usar la teoría de juegos en el desarrollo del concepto filosófico de *"convención"*, que proporcionó el primer análisis del *"conocimiento común"* para emplearlo en el análisis de juegos de coordinación, y sugirió que el *"significado"* podía entenderse en términos de juegos de señales. Además, Leon Henkin, Paul Lorenzen y Jaakko Hintikka iniciaron una aproximación a la semántica de los lenguajes formales, los conceptos de verdad lógica, validez y similares; explicados con conceptos de teoría de juegos. Finalmente, en ética, algunos autores han continuado la idea de Thomas Hobbes, de derivar la moral del interés personal, resolviendo el conflicto aparente entre la moralidad y el interés personal para explicar por qué la cooperación es necesaria para el interés personal.

2.6.6 La teoría de decisiones

Posiblemente, la teoría de la decisión inició en 1670 año en que Blaise Pascal publicó en sus "*Pensamientos*" la investigación de las elecciones bajo incertidumbre basadas en el concepto de *esperanza o el valor* *esperado que* es el resultado de multiplicar los valores, positivos o negativos de las posibles alternativas de acción, por sus *probabilidades* asociadas que resultan de cada acción; la acción elegida deberá ser aquella que proporcione el mayor *valor esperado* de entre los calculados.

Posteriormente, Daniel Bernoulli publicó su *Exposición de una nueva Teoría sobre la Medida del Riesgo* en 1738, en la que proporciona el problema de un comerciante holandés que debe decidir si asegurar o no la carga que enviará en invierno de Ámsterdam a San Petersburgo, si se sabe que hay un 5% de posibilidad de perder la carga durante el viaje; para la resolución define la "función de utilidad" y calcula la "utilidad esperada" en lugar del valor monetario.

En el siglo XX el interés por este tema lo reinició Abraham Wald's en 1939 al proponer que *las pruebas de hipótesis estadísticas y la teoría de la estimación estadística, temas clásicos y centrales de la estadística*, podrían ser auxiliares del problema general de la decisión, e introduce muchos de los conceptos actuales de la moderna teoría de la decisión incluyendo *las funciones de pérdida, la función de riesgo, las reglas de decisión admisibles, las distribuciones a priori y a posteriori, la teoría bayesiana de la decisión* y proporciona algunas reglas para la toma de decisiones. La frase *teoría de decisiones* fue empleada por primera vez en el año 1950 por E. L. Lehmann.

El avance continuó con la *teoría de probabilidad subjetiva*, contenida en el trabajo de Frank Ramsey, Bruno de Finetti, Leonard Savage y otros, aplicada al ámbito de la teoría de la utilidad en situaciones donde se supone que la gente es racional y toma decisiones bajo riesgo; la teoría prospectiva de Daniel Kahneman y Amos Tversky dio origen a la economía del comportamiento que enfatiza las capacidades humanas en la toma de decisiones basada en *pérdidas y ganancias*, porque la gente es más sensible a los *cambios* en sus estados de utilidad y a la estimación subjetiva sesgada frecuentemente .

La Teoría de la Decisión estudia las elecciones racionales, basadas en situaciones inciertas y sus probabilidades y presenta al decisor sus posibles consecuencias; es un área interdisciplinaria relacionada con casi todos los expertos en ramas de las ciencias naturales, las sociales y la ingeniería.

Para su estudio, se divide en *la teoría de la decisión normativa* que considera las condiciones óptimas de decisión e investiga sus criterios racionales, las motivaciones humanas en diferentes situaciones, la axiomatización de la racionalidad dentro de la toma de decisiones y crea hipótesis ideales para ser probadas.

Por otro lado, *la teoría de la decisión prescriptiva* analiza las decisiones óptimas que pueden tomarse asumiendo que el decisor actúa racionalmente, tiene información completa, busca las herramientas, metodologías y software para ayudar a las personas a tomar mejores decisiones. Como los decisores no están en entornos óptimos, esta teoría describe la voluntad que tiene el tomador de decisiones antes de la elección, para predecir su comportamiento y comprobar que ocurre en la práctica.

Existen problemas de decisión de diferentes tipos entre los que destacan las decisiones bajo incertidumbre; decisiones con mercancías inconmensurables que no son medibles con una sola unidad; elecciones impredecibles; elecciones temporales que estudian del valor relativo que la gente asigna a dos o más bienes en diferentes momentos del tiempo; elecciones atemporales en el que interviene una serie de acciones en diferentes instantes de tiempo; y las decisiones complejas que estudian la dificultad de tomar decisiones debido a la *complejidad* de cálculo de las expectativas o a la complejidad de la propia organización que tiene que tomar las decisiones.

La presente obra, que se inicia con este Tomo I, presentará un capítulo dedicado a la teoría de decisiones y otro a la estimación Bayesiana.

2.6.7 Investigación de operaciones

Algunos historiadores consideran que la *Investigación de operaciones: IO,* inició en el siglo III a. de C. con el análisis y solución del bloqueo naval a Siracusa que Arquímedes propuso a los gobernantes de esa ciudad; otros sostienen que las características propias de la IO aparecen con F. W. Lanchester, en Inglaterra, justo antes de la primera guerra mundial, quien desarrolló modelos matemáticos de la potencia balística de las fuerzas enemigas para determinar el resultado de un encuentro militar, Tomás A. Edison también realizó estudios de guerra antisubmarina; sin embargo, estos estudios no tuvieron un impacto inmediato y se consideran ejemplos del empleo de científicos para determinar la decisión óptima en la guerra.

Otros historiadores consideran que la IO inició al comenzar la Segunda Guerra Mundial, con A.P. Rowe quien dirigió un grupo de investigadores militares para estudiar la técnica de radio-localización desarrollada por científicos civiles, para diseñar y utilizar óptimamente el radar y un nuevo sistema de alertamiento para la detección y medición de distancias y el análisis de las operaciones nocturnas; avances que se consideraron como el modelo de los estudios de IO posteriores.

En agosto de 1940, bajo la dirección de P. Blackett, se organizó un grupo de investigación de la Universidad de Manchester para estudiar el uso de un nuevo sistema antiaéreo controlado por radar; el grupo estaba integrado por fisiólogos, fisicomatemáticos, astrofísicos, oficiales del ejército, topógrafos, físicos y matemáticos y, al parecer, la formación de este grupo marcó el inicio de la IO. Al año siguiente este grupo participó en problemas de detección de barcos y submarinos mediante un radar aerotransportado, lo que propició que Blackett fuera nombrado Director de Investigación de Operación Naval del Almirantazgo Británico. Posteriormente, los miembros de su grupo formaron el Departamento de Investigación y Desarrollo de la Defensa Aérea y, posteriormente, el Grupo de IO del Ejército.

Estados Unidos inició sus trabajos de IO en la fuerza aérea del ejército y en la marina a pocos meses de participar en la guerra. Para el Día D, la invasión aliada de Normandía, la fuerza aérea ya contaba con bastantes grupos de investigación de operaciones, integrados cada uno con aproximadamente diez científicos; en la marina ocurrió lo mismo cuando, en 1942, Philip M. Morris, del Instituto Tecnológico de Massachusetts, dirigió un grupo para analizar, entre otros asuntos, los ataques marinos y aéreos contra los submarinos alemanes y las mejores estrategias de maniobrabilidad de los barcos para evadir aeroplanos enemigos.

El finalizar la segunda guerra mundial, mientras en el Reino Unido redujeron los presupuestos de defensa, liberaron a los científicos de la IO de la defensa y a solicitud de los directivos de las empresas ingresaron a la industria para reactivar la planta industrial devastada por la guerra; en tanto que en Estados Unidos se incrementó el presupuesto de la defensa y por tanto la mayoría de los expertos en la guerra permanecieron al servicio de la milicia para continuar los estudios de IO.

Una definición útil de la investigación de operaciones, que subyace en su historia descrita anteriormente es la propuesta por Ackoff (1968) quien considera que la IO es la aplicación del método científico por grupos interdisciplinarios en problemas que involucran el control de sistemas organizados, para proporcionar soluciones que sirvan mejor a los propósitos de las organizaciones como un todo.

Su orientación ejecutiva se deriva de la investigación sistemática y holística de las interrelaciones relevantes como se puso de manifiesto en la sección 2.4, necesarias para evaluar las acciones y políticas de cualquier parte de la organización.

El método de la IO es el correspondiente al método científico que se resumirá en el siguiente capítulo cuyas etapas son: la formulación del problema por resolver, la construcción del modelo que representa las interacciones de los componentes del sistema bajo estudio, la derivación de las soluciones, la verificación del modelo, la evaluación de la solución, la implementación y el mantenimiento de la solución. Debe considerarse de manera explícita la imposibilidad de la experimentación en los sistemas sociotécnicos que son los objetos de estudio de esta disciplina, ya que no son manipulables; hay que construir los modelos representativos del sistema en términos de sus interrelaciones y operaciones sobre las que se conduce la investigación.

En general, tales modelos adquieren la forma de sistemas de ecuaciones del tipo $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j)$ donde $\boldsymbol{U}$ representa la utilidad o el valor de la operación del sistema, $\boldsymbol{x}_i$ son las variables controlables, $\boldsymbol{y}_j$ son las variables no controlables que afectan al sistema, $\boldsymbol{f}$ es la interrelación de $\boldsymbol{U}$ con $\boldsymbol{x}_i$ y $\boldsymbol{y}_j$ y las igualdades pueden ser desigualdades que modelan las restricciones de los recursos.

Además de la milicia, las aplicaciones de IO son muy bastas como puede constatarse en las publicaciones dedicadas al beneficio de la humanidad, de Churchman y Ackoff, filósofos de la investigación de operaciones; o bien en la bibliografía que reporta el uso de su teoría, métodos y técnicas particulares para resolver problemas administrativos, organizacionales y de control que se presentan en los sistemas naturales y sociotécnicos, tales como los sistemas organizados, educacionales, sistemas físicos, económicos, de transporte, ecológicos, etc.

2.7 La ingeniería de sistemas

Aunque inciertos los orígenes, el término de *ingeniería de sistemas* se remonta a 1943 cuando en los laboratorios de la Bell Telephone se llamó Departamento de Ingeniería de Sistemas a la unión de los Departamentos de Ingeniería de Transmisión e Ingeniería de Conmutación, y aprovechó los recursos y apoyos de los programas de investigación para los diseños y expansiones de las redes telefónicas, cada vez más complejas. Arthur D. Hall, su Director y pionero comentó que *"la función de la Ingeniería de Sistemas tenía años de haberse practicado, pero su reconocimiento institucional como entidad organizativa propició mayor interés y recursos en la organización"*.

En el primer curso sobre Ingeniería de Sistemas impartido en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) en 1950, Arthur D. Hall estableció que *"la Ingeniería de Sistemas es una tecnología por la que el conocimiento de investigación se traslada a aplicaciones que satisfacen necesidades humanas mediante una secuencia de planes, proyectos y programas de proyectos"*. El marco metodológico para esta nueva ingeniería se sintetizaba en una matriz tridimensional de actividades: la dimensión temporal que establecía las fases características del trabajo de sistemas; la dimensión lógica secuencial de las actividades desde la definición del problema hasta la planificación de acciones; y la dimensión del conocimiento especializado de las diversas profesiones y disciplinas participantes, dejando explícita la interdisciplinariedad.

Frecuentemente, a la ingeniería de sistemas se le confunde con la ingeniería de sistemas computacionales; pero es muy diferente como se desprende de la definición de Hall y de otras muchas que se encuentran en la literatura; tales como: La *"Ingeniería de Sistemas es la aplicación de las ciencias matemáticas y físicas para desarrollar sistemas que utilicen económicamente los materiales y fuerzas de la naturaleza para el beneficio de la humanidad"* (IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms); o bien la *"Ingeniería de Sistemas es un conjunto de metodologías para la resolución de problemas mediante el análisis, diseño y gestión de sistemas"* (Hall, Wymore y McPherson); o también, la Ingeniería de Sistemas es el *"análisis y diseño de sistemas hombre-máquina, complejos y de gran tamaño"* (Wymore).

La ingeniería de sistemas tiene como objeto de estudio los sistemas sociotécnicos y la solución de sus problemas, con base en el uso de las ciencias, la investigación y el análisis de las relaciones entre las entidades heterogéneas constitutivas de los sistemas.

Una forma de visualizar el objeto de estudio de la ingeniería de sistemas considera la división artificial entre las ciencias físicas y naturales por un lado y las ciencias sociales y las humanidades por el otro. Como ya se anticipó, a las primeras suelen llamarse las ciencias duras mientras a las segundas las ciencias blandas. Vistas en conjunto, desde el punto de vista del autor, los objetos de estudio de la ingeniería de sistemas son los que están contenidos en el conjunto intersección de ambos conjuntos como se representan en la figura 2.7, de donde se desprende que si un profesional ha de detentar el *nombre de ingeniero* cuya profesión se define como la aplicación de las matemáticas, la física y la química para transformar la naturaleza en beneficio de la sociedad y , si *su apellido es de sistemas*, es necesario que:

- Utilice en su trabajo el enfoque de sistemas.
- Conozca a profundidad las ciencias básicas de la ingeniería.
- Conozca el método científico que se verá en el siguiente capítulo.
- Conozca los principios de las ciencias sociales tales como la sociología, la economía, la demografía, la filosofía, y el derecho; para que comprenda, entienda, se comunique, respete y contribuya colaborativamente en los grupos interdisciplinarios que encaran la resolución de los problemas sociotécnicos.

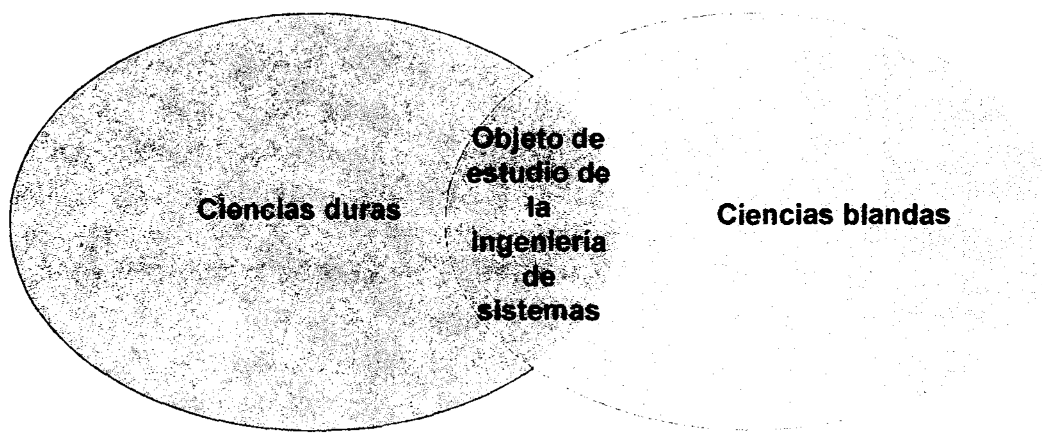


Figura 2.7 Objeto de estudio de la ingeniería de sistemas

Dependiendo de los problemas que encara el ingeniero de sistemas emplea, además del método científico, las teorías, metodologías y técnicas de la investigación de operaciones y, dependiendo del problema puede utilizar la teoría de decisiones, la teoría de la información, la teoría de juegos, la economía, la sociología, la psicología, la cibernética, la teoría de la información, el análisis de redes, y algunas otras consideraciones de la TGS que se necesitan para el estudio de los sistemas sociotécnicos que, como ya vimos, están constituidos por componentes heterogéneos tales como personas, valores monetarios y sociales, máquinas, edificios, recursos naturales, materiales, productos, medios de transporte y demás.

Además, por naturaleza, el ingeniero de sistemas es generalista no todólogo, similar a un médico general que si la enfermedad del paciente lo requiere obligadamente necesita trabajar con uno o más especialistas; el ingeniero de sistemas trabaja conjuntamente con profesionales de otras disciplinas cuando le solicitan diseños, desarrollos y propuestas de solución de problemas inmersos en los sistemas de transporte, sistemas de salud, sistemas vitales para las poblaciones como son los hidráulicos, de drenaje, de seguridad, de abastecimiento de alimentos, sistemas de emergencia, de protección civil y otros.

2.8 Ejemplos

Como ejemplos de la aplicación concreta de los enfoques, las conceptualizaciones, las metodologías, el desarrollo de resultados y recomendaciones a los decisores, de algunos temas descritos en este capítulo, se recomienda consultar los trabajos citados en la bibliografía de este Tomo I; que por su título se desprende que corresponden a problemas del campo de la ingeniería de sistemas: Prospectiva demográfica interregional y sus implicaciones en la educación básica, Efecto de la descentralización sobre la transportación interregional de pasajeros y el ahorro de energéticos, Modelado y Toma de decisiones en sistemas sociales, Evaluación de la Eficiencia de Sistemas Sociales: Aplicación al Sector Educativo, Prospectiva sobre las Necesidades de la Transportación Interregional de Pasajeros; y también las tesis: Estudio de la Demografía Interregional e Implicaciones en el Desarrollo Socioeconómico del País, Contribución al Estudio de la Piscicultura en México, Bases Conceptuales y Metodológicas para la Toma de Decisiones en Presencia de Criterios u objetivos Múltiples: el Caso de la Jerarquización de Objetivos en Instituciones Educativas Sujetas a Restricciones Presupuestales, Cuahuanahuac: un Acercamiento a las Condiciones Políticas y Socioeconómicas de una Cabecera de Provincia Tributaria en el Siglo XVI y Correlación de Medidas Instrumentales y Sensoriales para Optimizar una metodología para Medir la Textura en Tortillas.

CAPÍTULO 3
EL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN Y LA MODELACIÓN

CAPÍTULO 3
EL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN Y LA MODELACIÓN

Los vestigios de todas las civilizaciones antiguas y las actuales que están en los museos, son modelos de sus cosmovisiones, sus modos de vida, de sus divinidades; etc.

B. Frontana

3.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos analizado el concepto de problema y su aplicación a la planeación, así como los sistemas y sus enfoques necesarios para la resolución de problemas, sobre todo los problemas que demandan la integración de grupos de trabajo interdisciplinarios y requieren visualizarse sistémicamente. Como lo anticipamos en el capítulo anterior, en este capítulo presentaremos de manera somera el método de investigación y los modelos, porque son otros temas importantes no solamente en los que se aplican los métodos probabilistas y las técnicas estadísticas; sino en una amplia gama de problemas de investigación aplicada y desarrollo tecnológico e investigación básica; es decir, en todas las ramas científicas y tecnológicas.

3.2 El método de investigación

Para reflexionar sobre el método, es importante comenzar esta sección con dos citas paradójicamente opuestas mencionadas por Bunge (2003) en el resumen general y conclusiones de su libro en el que pueden verse bajo una perspectiva histórica los principales conceptos universales sobre el método de investigación comúnmente conocido como método científico:

> *El infeliz estudiante se ve inevitablemente forzado a echar mano de sus propios recursos para recoger al azar y por casualidad, de aquí o de allá, fragmentos desorganizados del método científico, así como fragmentos de métodos no científicos. Y cuando el estudiante se convierta en un investigador profesional, como no posee la educación y la instrucción necesarias, caminará torpemente en la obscuridad, siguiendo caminos costosos y cerrados y echando mano de cosas tan desconfiables como adivinanzas al azar, conjeturas arbitrarias, corazonadas subjetivas, intuición accidental, suerte pura, accidentes*

afortunados, pruebas no planeadas e inevitablemente erróneas. ¿Puede ser ésta metodología adecuada para hacer nuevos descubrimientos y lograr aplicaciones benéficas? Desde luego que no, pero ésta es toda la metodología que los exponentes de las antítesis recomiendan a los investigadores profesionales.

Revista Nature, 1987

Aunque parezca paradójico, la mayoría de las personas que se dedican a la investigación científica y que contribuyen al desarrollo y progreso de la disciplina que cultivan, no podrían formular con precisión su concepto de lo que es la ciencia, ni fijar los propósitos que persiguen, ni detallar los métodos que emplean en sus estudios, Ni justificar estos métodos.

A. Rosenblueth

El método deviene de las raíces griegas *meta* que significa fin y *odos* camino y significa *el camino para alcanzar el fin propuesto*, es la manera razonada de conducir el pensamiento para alcanzar un objetivo y, como se vio en el capítulo sobre los problemas, la forma metódica para resolverlos. El método nos conduce con seguridad al conocimiento por ser el procedimiento planeado que se sigue en la investigación para descubrir o comprobar las formas de existencia de los procesos inmersos en los sistemas y descubrir los mecanismos internos que los gobiernan, para desentrañar sus enlaces internos y esclarecer sus interacciones con otros procesos externos. Conforme a De Gortari (1983):

El método de investigación es una herramienta de trabajo necesaria para generalizar, profundizar y demostrar de forma racional y rigurosa los conocimientos novedosos de los sistemas naturales, sociales o sociotécnicos; y comprobarlos virtual o experimentalmente con las técnicas e instrumentos pertinentes; además, es un producto desarrollado por la conciencia porque amalgama las funciones lógicas y las operaciones complejas de mayor importancia, representa las consecuencias técnicas y eminentemente prácticas y es, o debiera ser, el trabajo más importante con que se inicia el trabajo de investigación.

El método se desarrolla por aproximaciones sucesivas y se prueba, aprueba, comprueba y afina durante el desarrollo de la investigación por lo que aplicado correctamente debe ser flexible, adaptativo y participativo, sobre todo si se trabaja en equipos interdisciplinarios; pues constituye el hilo conductor de las actividades que desarrollarán todos los participantes para la resolución del problema.

Asimismo, es la actividad previa de la investigación que demanda esfuerzo y rigor y se materializa en el *proyecto de las actividades a realizar* que incluye la metodología, los procedimientos y las técnicas para ejecutarlas; si se diseña y aplica con rigor, tino, destreza, inteligencia e imaginación; las actividades que se realicen y los resultados que se obtengan serán más confiables y precisos.

Aunque las características generales del método se mantienen en las aplicaciones particulares, *el método particular debe diseñarse para cada investigación porque fundamenta las técnicas experimentales a utilizar.* Conviene tener en mente que el método de investigación no es un recetario ni es de fácil aplicación, pues implica una compleja problemática que articula dialécticamente la teoría que sustenta el sujeto y la realidad concreta que pretende conocer objetivamente.

Conviene distinguir y aclarar la diferencia entre la metodología y el método, términos que suelen confundirse muy a menudo entre los propios investigadores. Como ya vimos, *el método* es el camino para alcanzar el fin propuesto; mientras *la metodología*, término muy controvertido, es la ciencia que estudia el método general del conocimiento y los métodos particulares: el de la química, el de la sociología, el de la física, etc. Por su claridad y sencillez, a continuación se resume el hilo conductor que postula Gutiérrez (1980) para cualquier investigación.

3.2.1 Los niveles del método

La articulación dialéctica ya citada anteriormente se da entre los niveles de la realidad del objeto por conocer y el de la racionalidad del sujeto que desea conocerlo (ver figura 1.1). El primero se refiere al uso de los sentidos en la observación del fenómeno y nos auxilia en el conocimiento sensible o representación mental que permanece como imagen de la realidad, es la veta para extraer la formulación de las hipótesis y efectuar la experimentación para probarlas; en tanto que el segundo nivel corresponde al racional en el cual el sujeto se ocupa del conocimiento verdadero mediante la definición de los problemas, la elaboración de los conceptos, la formulación de las hipótesis, la determinación de las expresiones conceptuales de los resultados y su inferencia. Cabe enfatizar que en las diferentes etapas de la investigación se usan dialécticamente los dos niveles, en unas predomina la razón y en otras la experimentación.

El raciocinio puede ser inductivo o deductivo, el primero consiste en razonar de lo particular a lo general y particularmente ha sido medio para el descubrimiento de las leyes de las ciencias experimentales observando el fenómeno particular; en tanto que el razonamiento por deducción va en sentido inverso de lo general a lo particular; se parte de una hipótesis general para inferir una proposición particular (ver figura 2.2).

3.2.2 La observación de hechos

Es toda percepción refinada de dos o más hechos con la intención de integrar un fenómeno determinado; percepción que es la toma de conciencia donde intervienen los sentidos, las facultades mentales y, no menos importante, el *paradigma* (Ver figura 2.1) o conjunto de conocimientos previos que son el trasfondo de los datos que se captan sensiblemente; percepción que es refinada por cuanto se realiza con atención e intención, objetividad, selectividad, actitud contemplativa; percepción que se programa conforme los objetivos que prescriben los hechos de interés ubicados en el plano de la realidad para clasificarlos, ordenarlos e interrelacionarlos con base en el paradigma o marco teórico utilizado; percepción que es intencional porque se centra en la clase particular de hechos que interesa relacionarlos y expresarlos en las hipótesis de trabajo que formula el investigador; percepción que coadyuva al esmero, orden, profundidad y selectividad. El proceso de observación constituye la toma de conciencia, la interpretación o expresión interna y la descripción o expresión externa oral o verbal de los datos recibidos.

Los fenómenos son los objetos y hechos observables tal como se le presentan al sujeto para percibirlos, describirlos, ordenarlos, y conectarlos para, posteriormente explicarlos, relacionarlos e integrarlos. Lo que aparece son los hechos cognoscitivos determinados porque:

> *Las observaciones del investigador se enfocan a los hechos que le interesa investigar y delimitan la frontera del fenómeno, el objeto de estudio* y el alcance de la investigación.

El modelo de la realidad construido en el plano de los constructos es el sistema resultante de la construcción conceptual llamado algunas veces *el constructo,* que se basa en los datos sensibles combinados por la creatividad del investigador.

3.2.3 Los problemas de investigación

En el capítulo 1 se comentó ampliamente el concepto de problema; sin embargo, conviene hacer otros comentarios complementarios.

La información recopilada con la observación de la realidad es la base para la formulación de los problemas, usualmente en términos de preguntas que se hace el investigador sobre el objeto en términos claros y precisos de sus dudas acerca de la realidad observada, que conducen al investigador a la búsqueda de respuestas que las aclaren.

El planteamiento de los problemas puede referirse a conceptos o principios universales que pertenecen al ámbito científico cuya finalidad es remover la frontera de conocimiento enfatizada en preguntas sobre lo universal: ¿Por qué se queman los transformadores? en vez de ¿Por qué se quema este transformador? o bien pueden dedicarse a la búsqueda de datos concretos que se encuentran a partir de métodos y principios científicos, aunque el resultado no sea un avance del conocimiento científico.

Conforme al proverbio chino que reza *el cincuenta por ciento de la solución de un problema está en el correcto planteamiento del problema,* es importante enfatizar la relevancia de las preguntas para motivar el trabajo y asegurar que los datos manejados sean *reales,* las preguntas deben plantearse con *claridad y precisión* con términos significativos conocidos para evitar ambigüedades y aclarar los datos, las incógnitas y las circunstancias en que ocurre el fenómeno. Tal claridad y precisión se refuerzan con *la sencillez* aislando y delimitando los aspectos relevantes del problema que interesa resolver, puesto que los resultados obtenidos permanecen en el nivel de abstracción que no coincide del todo con el nivel singular, concreto y rico de la realidad compleja.

Es de particular importancia aclarar con precisión las *relaciones entre las variables independientes* que se manejan, las incógnitas o *variables dependientes,* así como las *otras variables* y parámetros que pueden influir en el fenómeno; de manera semejante al planteamiento de una ecuación.

Las respuestas a los problemas planteados deben ser *verificables, contrastables, o comprobables* en el ámbito donde se plantearon ya sea en la realidad, mediante la experimentación tal como sucede cuando se prueba un nuevo fertilizante o insecticida en la agricultura; a través de la observación, como ocurre con los fenómenos de la astronomía o los yacimientos petroleros que solo pueden experimentarse mediante la simulación de la realidad; o bien con la razón, como ocurre en los problemas de la matemática o la lógica con las demostraciones de los teoremas o leyes mediante el análisis y la síntesis.

Siguiendo a Bunge (1976) conviene enfatizar que los problemas pueden clasificarse en problemas sobre individuos en términos del *quién*, del *dónde, del cuándo* y del *por qué,* y problemas sobre funciones del *cómo* y del *cuál.*

En particular, los problemas de investigación son de dos clases, los sustantivos sobre el objeto, tales como los de hallazgo de datos, caracterización de objetos experimentales, medición y calibración; y problemas conceptuales del sujeto como son los de descripción, de ordenación, de dilucidación, de deducción, de proyección y los problemas de construcción.

También se tienen los problemas de *estrategia* o procedimiento, los *metodológicos*, los de *técnicas*; los de *arbitrio de tácticas* para examinar problemas y los de *disposición de experimentos*.

Algunos ejemplos de problemas son: ¿Por qué se dilatan los metales? ¿Por qué las semillas generan árboles? ¿Por qué reprueban los alumnos de ciencias básicas? ¿Para qué sirve el conocimiento del átomo? ¿Por qué la temperatura afecta a un líquido? ¿Cuáles son las propiedades de los biocombustibles? ¿Cuántos biocombustibles existen? ¿Cómo se caracterizan las muestras de los yacimientos petroleros? ¿Cómo contaremos las partículas elementales de la materia? ¿Por qué conviene medir la aceleración de los sismos en gales?

Finalmente, conviene tener presente que los conceptos, las ideas y las imágenes son representaciones o expresiones abstractas del fenómeno que se presentan en el sujeto, en tanto que las palabras o términos son las representaciones externas codificadas de aquellos. El sujeto capta objetos externos, obtiene internamente las imágenes, ideas y conceptos y; posteriormente, las expresa mediante un lenguaje simbólico o gráfico.

3.2.4 Las hipótesis de investigación

Las hipótesis se establecen con base en la información obtenida en la etapa de observación de los hechos *y surgen por la intuición y creatividad del sujeto* al observar con detenimiento, perspicacia, e interés el objeto de estudio; son las respuestas provisionales a los problemas planteados y su importancia depende de la calidad de las respuestas enmarcadas en la problemática de la investigación porque pautan la trayectoria que seguirá el investigador, consisten en proposiciones de algo posible de donde emergen las consecuencias; son suposiciones que se establecen como base de la investigación para confirmar o negar su validez y se producen por la astucia, el ingenio y la creatividad del investigador; además, si éstas son claras y explícitas iluminarán las observaciones pautarán las técnicas e instrumentos de los experimentos necesarios para su comprobación. Las respuestas a los problemas planteados pueden ser completamente novedosas y originales o bien variantes de las respuestas conocidas con anterioridad; que explican de la mejor manera posible el problema planteado.

Para favorecer le creación, la perspicacia y la intuición del sujeto, es necesario favorecer *la calidad del ambiente* del investigador para que se esmere en la *observación* y amplíe su visión hacia cosas nuevas que previamente permanecían ocultas.

Así pues, las hipótesis pueden claramente definirse como las respuestas provisionales a los problemas; deben relacionar al menos a dos fenómenos que contienen las variables que se están manejando puesto que, en general, son un conjunto de relaciones entre dos o más fenómenos; requieren explicitar las variables controlables y las externas que están fuera de control para aislarlas y prever su posible influencia en el fenómeno; requieren coherencia con el paradigma utilizado en la investigación.

Otras condiciones que garantizan la calidad de las hipótesis son la *verificabilidad* para comprobar la descripción explicativa y relacional con los fenómenos que enuncia; su *cualitatividad y/o cuantitatividad* puesto que existen fenómenos no cuantificables tales como los educativos, sociológicos o psicológicos; y también constituyen la base para buscar y establecer los modelos a utilizar para simular la realidad; no menos importante en las hipótesis es su expresión *sencilla y clara* a fin de aclarar las interrelaciones para eliminar la información irrelevante que obscurece el trabajo. Si las hipótesis son claras y explícitas guían la comprobación.

Es necesario enfatizar que el ser humano con sus sentidos capta imágenes y con su inteligencia capta intuiciones, relaciones y significados conocidos como ideas que son pensamientos conectados con alguna imagen; por ello, las imágenes y las ideas son cosas diferentes pero forman un solo bloque de pensamiento. Los conocimientos previos, los contenidos inconscientes del sujeto, los intereses, las necesidades, la problemática que trata de resolver y otros factores más, además de la imagen, dan como resultado la idea cuyo contenido es una estructura de pensamiento, la intuición del investigador capta las relaciones y las estructuras de las imágenes con otras imágenes; que constituyen la función primordial de la inteligencia llamada entendimiento o razón. Esta estructura separada es el concepto.

Esto justifica la importancia de la generación de ideas a partir de las observaciones y experimentos realizados para encontrar las relaciones significativas entre los fenómenos para formular las hipótesis que aglutinan el conjunto de fenómenos que en la realidad están dispersos y fragmentados.

Los conceptos se elaboran con base en las ideas y los significados captados previamente. Ellos son rígidos y limitativos a manera de fotografías que petrifican la realidad y expresan solo un aspecto de la realidad sin captar su dinámica de cambio y contienen, por lo que cada concepto representa solamente un aspecto de la idea básica.

Debe ser claro que la realidad es mucho más compleja que el modelo que la substituye, por ello *el análisis* es una operación intelectual requerida para desmenuzar el fenómeno en sus elementos y relaciones que revelan su importancia y adecuación con el modelo, en tanto que *la síntesis* es el acto crucial e intelectual que le da unidad a los datos analíticos dispersos y fragmentados y, aunque conserva y utiliza los datos de una abstracción superior, capta su unificación y construye la estructura integradora.

En resumen, *el trabajo intelectual* del investigador abarca la intuición, el análisis, la síntesis, la definición, la conceptualización, el juicio, etc.; en tanto que *el trabajo empírico* que realiza el sujeto sobre el objeto abarca la observación, la experimentación, la medición, el control de las variables, la verificación, etc.

3.2.5 La comprobación, confirmación, contrastación o verificación de las Hipótesis

La comprobación de las hipótesis se basa en el control de las relaciones causa-efecto de las variables intervinientes y consiste en buscar las evidencias sobre la verdad de la hipótesis al corroborar su adecuación con la realidad que pretende explicar, proporciona el rigor y la certeza a los conocimientos del investigador y la garantía que los distingue de los dogmas o los mitos; es decir, es la comprobación que fundamenta la validez de la tesis provisional para elevarla al nivel de tesis fundamentada. Dependiendo del objeto de estudio, las confirmaciones de hipótesis pueden ser experimentales, observables o demostrables formalmente.

La confirmación experimental es el proceso que se utiliza en las ciencias físicas y consiste en aislar las variables independientes y controlables por el investigador, observar sus efectos en las variables dependientes y repetir el experimento en igualdad de condiciones a fin de garantizar el éxito y eliminar las dudas que emerjan durante este proceso. Por su parte, la verificación por observación es común en las ciencias donde no se pueden manipular los fenómenos y es imposible trabajar experimentalmente, tal como sucede con la astronomía o la sociología; a su vez, la fundamentación por raciocinio o prueba formal es el proceso que utiliza el investigador que trabaja con objetos mentales tales como los de la matemática o la lógica, que prueban sus teorías mediante razonamientos lógicos y demostraciones formales basadas en axiomas y teoremas.

Conviene señalar que estos tipos de confirmación no son excluyentes pues pueden tenerse confirmaciones experimentales de observación parcial y confirmaciones formales como ocurre en el estudio de los fenómenos de los yacimientos del subsuelo que utilizan muestras para experimentar con ellas y modelos de simulación de los estratos bajo estudio; pero, en cualquier caso, es necesario aplicar los procedimientos que le son propios a la disciplina a la que pertenece la investigación puesto que la experimentación y los fenómenos son diferentes; por ejemplo, la experimentación en la física tiene procedimientos y utiliza instrumentos diferentes a los de la psicología o la química.

Es altamente conveniente repetir el experimento variando algunos parámetros y efectuar experimentos en paralelo; por ejemplo, cuando se prueban las nuevas medicinas suele suministrarse placebos a un grupo de pacientes mientras a otros se les aplica la medicina bajo prueba a varios niveles de la droga, o bien si se desea probar la eficacia de una técnica de evaluación académica novedosa, ésta se aplica a ciertos grupos de alumnos mientras a otros se les aplica la técnica anterior.

Si se produce y reproduce el efecto esperado por la manipulación de las variables causales, se obtiene la comprobación de la hipótesis. Puede suceder que durante el proceso de fundamentación, en los experimentos se encuentre información valiosa, que no tenga conexión directa con el objetivo de la investigación en curso pero, que da origen *a hallazgos casuales* que no se buscaban, lo que se conoce como *serendipia* que significa hacer descubrimientos por accidente y sagacidad cuando se está buscando otra cosa (Pérez R. 2003).

3.2.6 La interpretación de resultados

Los resultados de la experimentación son datos que requieren reflexión, interpretación, explicación, análisis y síntesis para obtener conclusiones con respecto a las hipótesis. Entre los tipos de explicaciones se tienen:

- *La explicación deductiva*, se da generalmente en las matemáticas porque trata con relaciones lógicas necesarias que se captan entre dos o más elementos encontrados en el análisis intelectual del tema; por ejemplo, los teoremas están fundamentados en la argumentación deductiva con carácter universal.
- *La explicación probabilista*, es la más común en las ciencias sociales y en las ciencias de la naturaleza, en la que los datos recopilados conducen a conclusiones probables, más no aplicables en todos los casos del tipo estudiado.
- *La explicación genética* es la descripción del proceso que sigue el desarrollo de los seres vivientes.
- *La explicación teleológica* que se propone explicar el fenómeno estudiado en función de sus fines, objetivos o metas.

3.2.7 La validez de la verificación

La observación y la verificación son las operaciones más eficaces y singulares que garantizan la certeza de los casos singulares tratados, y su objetivo es demostrar si la hipótesis es adecuada a la realidad que pretende explicar.

La hipótesis verificada y corroborada con resultados positivos experimentalmente es una prueba favorable del modelo convalidado, temporal, revocable y creado por el investigador cuyo objetivo es explicar un fenómeno dado dentro de ciertos límites.

La experimentación con resultados positivos es una corroboración de que la hipótesis es un modelo que funciona bajo ciertos límites; entonces, es imposible postular el carácter universal del modelo en función de un número limitado de experimentos.

3.2.8 Leyes, teorías y modelos

Cuando la hipótesis ha sido verificada por la comprobación, se procede a la elaboración del procedimiento, el principio, la definición, la ley o la teoría que originó la investigación.

Suele suceder que los objetivos de la investigación científica sean el descubrimiento de las leyes que gobiernan los mecanismos internos del mundo, y difieren de las leyes morales o civiles porque aquellas son relaciones constantes entre los hechos, acontecimientos o sucesos que ocurren en la realidad en un momento y lugar determinado, captados por los sentidos y aparecen en la conciencia; y los resultados finales del pensamiento científico se expresan fundamentalmente en forma de leyes que comprenden simultáneamente el nivel empírico o sensible (el objeto) y el nivel racional o intelectual (el sujeto).

Por ello, el método científico consiste en armonizar y unificar de forma equilibrada los dos niveles en que funciona el conocimiento humano: el nivel real u objetivo y el nivel racional o subjetivo.

Todo inicia con la observación empírica de ciertos hechos que llaman la atención, despiertan la curiosidad y abren interrogantes al investigador; en seguida, el intelecto proporciona respuestas provisionales, hipótesis para ser corroboradas y; posteriormente, de nuevo en el plano empírico, se trata de corroborar lo vislumbrado en el plano intelectual. *El pensamiento científico consiste pues en conectar hechos, captar relaciones entre ellos y expresar esas constantes como teorías, leyes, modelos o paradigmas aplicables,* en forma general a los fenómenos de esa clase.

Una ley científica explica un fenómeno cuando su singularidad puede captarse dentro de la universalidad de aquella, la inteligencia encuentra en el fenómeno singular un significado más amplio que lo trasciende y cuando se percibe como un marco teórico o paradigma en el que se basan en forma análoga otros fenómenos singulares.

Funciona pues como un *modelo explicativo del fenómeno bajo estudio* tanto en lo referente al hecho real que se observa, como en la predicción de nuevos hechos de la misma especie.

A su vez, Una teoría es un conjunto sistematizado de definiciones, axiomas y postulados de leyes científicas que proporcionan un conocimiento más extenso de la parte de la realidad bajo estudio.

La figura 3.1 resume la metodología de la investigación, que es necesario tener siempre presente que es un proceso dialéctico y no un procedimiento algorítmico.

3.3 Uso de las técnicas estadísticas en la investigación

Además de los métodos y las técnicas propios de la disciplina a la que pertenece la investigación, no debe soslayarse el uso de las teorías, las metodologías y las técnicas estadísticas que deben utilizarse por la importancia que revisten en el manejo de los datos obtenidos para la comprobación de las hipótesis y, no menos importante, para la elaboración de modelos en lenguaje matemático que representan el comportamiento de los fenómenos. En los tomos posteriores al de la probabilidad que constituye el segundo tomo de este libro, analizaremos muchas técnicas estadísticas necesarias en la investigación, entre las que destacan la búsqueda de modelos lineales y no lineales utilizados para describir las interrelaciones entre variables independiente y dependiente, la generalización probabilista de las conclusiones obtenidas, más no categórica, sobre las características de los fenómenos pertenecientes a poblaciones, los análisis estadísticos de experimentos con diferentes tratamientos, las técnicas de la estadística no paramétrica; etc.

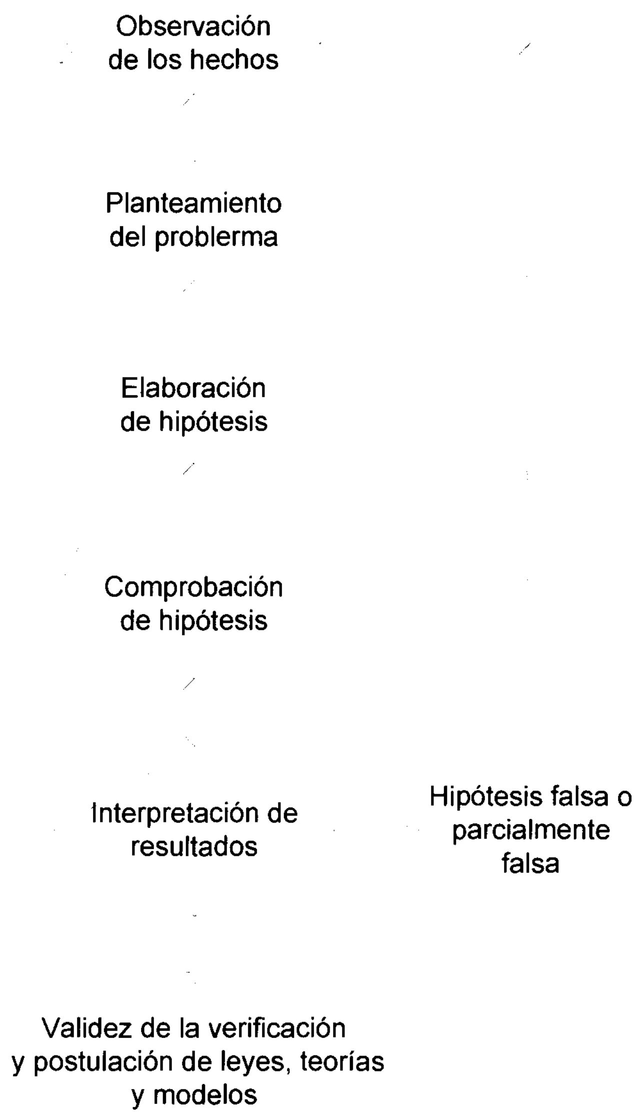


Figura 3.1 Modelo simplificado de la metodología de la investigación

3.4 Las técnicas

La técnica es una serie de operaciones ordenadas bien definidas y transmisibles que produce resultados previstos bien determinados y optimiza el uso de los instrumentos, materiales y procedimientos en determinadas etapas de un proceso de investigación; siempre se refieren a la acción e incluye necesariamente la experiencia previa.

Una técnica también se define como un conjunto de reglas que dirigen eficaz y eficientemente una actividad determinada, para resolver una dificultad o cumplir una función concreta.

Las técnicas pueden ser experimentales o racionales y, conforme a De Gortari (1983), son parte de los métodos pero no se confunden con ellos, no son exclusivas de los métodos sino independientes de ellos; es decir, los métodos incluyen técnicas, pero las técnicas no incluyen como parte integrante a ningún método, no existen métodos compuestos exclusivamente de técnicas, pueden incluir una o varias técnicas pero no agotan al método; ya que el método es un procedimiento lógico que ayuda a alcanzar los fines de la investigación, mientras las técnicas son medios auxiliares que solicita el método para su finalidad; por ejemplo, el método de los multiplicadores de Lagrange, que debe su nombre al matemático francés Joseph Louis Lagrange que presentó este trabajo a los 19 años, requiere de las técnicas de solución de sistemas de ecuaciones simultaneas; mientras que el método de mínimos cuadrados para ajustar una recta a un conjunto de puntos requiere de las técnicas de derivación y de solución de ecuaciones simultaneas.

3.5 Los instrumentos

Mientras el método es el camino que para llegar al objetivo de la investigación y las técnicas los conjuntos de reglas y procedimientos que determinan la relación de comunicación del sujeto y el objeto de la investigación:

Los instrumentos se derivan de las técnicas y son las herramientas o los medios de observación mediante los cuales se recolecta la información requerida por la investigación.

Son ejemplo de los instrumentos los modelos para la experimentación o simulación, el equipo e instrumental usado en los laboratorios científicos e industriales, las pruebas psicológicas, las entrevistas, los cuestionarios y los formularios de uso común en las investigaciones sociales y psicológicas. Así pues, los instrumentos utilizados en la investigación quedan especificados por su vínculo con el método, la técnica, los objetivos y el problema; todos los cuales establecen las características de las observaciones por efectuar.

En el diseño, elaboración y/o utilización de los instrumentos de observación se cometen errores que pueden surgir del investigador, del propio instrumento o, para el caso de las investigaciones sociales, del sujeto investigado. Por lo que toca a los del propio investigador, se sabe que la percepción humana es altamente selectiva, cada persona ve lo que quiere ver, oye lo que quiere oír y así; lo que puede conducir a obtener observaciones inconsistentes que pueden agravarse si no se cuenta con definiciones operacionales y precisas de la forma en que se observará; por ello, es indispensable que se elaboren y comuniquen las instrucciones precisas por escrito y verbales para orientar al observador sobre el proceso de levantamiento.

Como se mencionó anteriormente, los errores del propio instrumento se derivan de los desaciertos en que se incurre durante su elaboración, si son instrumentos mecánicos se evitan cuando se calibran y se recalibran al inicio y durante la observación; en cambio, si son instrumentos de las ciencias blandas, los errores se eliminan con las definiciones claras, operacionales, libres de ambigüedades, precisando las variables que se investigan y especificando en el instrumento los criterios e indicadores de la medición de tales variables. Su especificidad se deriva del objetivo y la forma en que se efectuará la observación la cual puede ser simple, no estructurada, no regulada o no controlada; o bien, sistemática, estructurada, regulada y controlada.

Por lo que toca a los errores del objeto investigado los errores se presentan porque no hay igualdad ni homogeneidad de circunstancias del entorno o del material que lo constituye, lo que conduce a errores en la medición; o bien debido a la variabilidad de los sujetos investigados, a la confusión en la comunicación respecto a lo que se les solicita, etc.

Así como es necesaria la calibración de los instrumentos de los laboratorios experimentales para garantizar la confiabilidad de los datos que se buscan, también es necesario que los instrumentos utilizados en las investigaciones sociales se calibren y se prueben antes de utilizarlos. Por la importancia que reviste para la investigación aplicada y desarrollo tecnológico propios de la ingeniería, en el siguiente capítulo profundizaremos en la experimentación, instrumentación y simulación.

3.6 Los modelos

3.6.1 Historia de los modelos

La historia de los modelos se remonta a la historia de las civilizaciones y se encuentran en los monumentos, en las pinturas rupestres, en las estelas escritas cuneiformemente o con jeroglíficos, en los papiros donde expresaron sus culturas; en fin, en los legados que nos dejaron nuestros antepasados y que se encuentran en los museos de todo el mundo. Por ejemplo, el hacha de Ötzi, momia datada en el año 3,300 a. de C. que se encontró en Italia en 1991, es un vestigio de la Edad de Bronce que siguió a las Edades de Piedra y Cobre; su nombre obedece al descubrimiento metalúrgico de la fabricación del bronce, de mayor dureza y durabilidad, que constituye la aleación más innovadora en la historia tecnológica de la humanidad utilizada para la construcción de herramientas, armas, vasijas y varios materiales para la construcción como mosaicos y placas ornamentales, cuyos modelos se encuentran en los museos.

La astronomía oriental china, considerada como la más antigua, modelaba la estructura del universo semejante a una fruta que colgaba de la estrella polar, para el año 2,357 a. de C. habían desarrollado el primer modelo de calendario solar que se tiene noticia, concebían la tierra y el cielo planos, separados 40.000 km con un radio terrestre de 30.000 km y un diámetro solar de 625 km.

El concepto de número como modelo surgió por la necesidad práctica de contar objetos en lugar de los dedos, los palos o las piedras; por ello, la palabra cálculo significa contar con piedras y las piedras que aparecen en el organismo humano se les llama cálculos. Aunque el modelo de la serie de números naturales era limitado, se tenía clara conciencia sobre la necesidad de ampliarla y es la primera etapa importante en el camino hacia la matemática moderna. Paralelamente a la ampliación de los números se desarrolló su modelo simbólico y otros modelos de numeración diferentes para cada civilización.

La información disponible sobre el *Antiguo Egipto* está basada en dos papiros matemáticos e inscripciones en piedra, encontrados en tumbas y templos lo que da pie a considerar la civilización *egipcia* como la primera que alcanzó un incipiente modelado matemático. Desarrollaron un sistema de numeración jeroglífico, en el que los números clave: 1, 10, 100,... se representaban con símbolos o modelos tales como palos, lazos y figuras humanas en distintas posiciones, etc.; crearon fracciones como divisores de la unidad de la forma $1/n$ y desarrollaron los primeros métodos de operaciones matemáticas aditivas para los números enteros y fracciones, resolvían ecuaciones de la forma $x + ax = b$ donde la incógnita x se denominaba "montón"; en geometría iniciaron el cálculo de áreas y volúmenes y en trigonometría aparecieron rudimentos básicos de triángulos semejantes.

Por otro lado, la información matemática sobre la civilización de *Mesopotamia* durante el periodo que abarca de 2,000 hasta el año 200 a. de C. es más cuantiosa, porque utilizaban modelos de escritura cuneiforme sobre tablillas de arcilla más resistentes a las inclemencias del tiempo. De los miles de tablillas conservadas a la fecha, 250 contienen problemas concretos y casos especiales. Utilizaron el sistema de numeración posicional sexagesimal, carente de cero, en el que un mismo símbolo o modelo representaba indistintamente varios números que se diferenciaban por el enunciado del problema; desarrollaron un sistema de notación fraccionario para aproximaciones en el que se basaron los nuevos algoritmos o lenguajes de simulación, como el algoritmo de Newton para la aproximación de raíces cuadradas; crearon el concepto de número inverso para simplificar notablemente la operación de la división; desarrollaron los primeros sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas; llegaron a la solución para ecuaciones de la forma $x^2 + px = q, p > 0, q > 0$ y también $ax^2 + bx = c$ mediante la simulación o el cambio de variable $t = ax$; y, en fin, su capacidad de abstracción fue tal que desarrollaron muchas de las ecuaciones diofánticas íntimamente ligadas con conceptos geométricos, terreno éste, en el que también superaron a la civilización egipcia, resolviendo los problemas de medidas de áreas del cuadrado y del círculo, y volúmenes de determinados cuerpos.

Cronológicamente, la *civilización china* es comparable a la egipcia y la mesopotámica; sin embargo, sus registros existentes son menos fiables. Posiblemente, las primeras obras matemática sean las "Horas Solares" y "La matemática de los nueve libros" que posiblemente se escribieron por el siglo XII a. de C. Los nueve libros consisten de pergaminos independientes con diferentes temas eminentemente prácticos y es un compendio de 246 problemas concretos en cuestiones sobre agricultura, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de triángulos rectángulos. Su sistema de numeración es decimal jeroglífico, las reglas de las operaciones son las habituales, con la singularidad que en la división de fracciones se exige la previa reducción a su común denominador; una contribución algebraica más importante es el perfeccionamiento alcanzado en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; para todos los sistemas se establece un método genérico de resolución muy similar al que hoy conocemos como método de Gauss, expresando incluso los coeficientes en forma matricial, transformándolos en ceros de manera escalonada.

Inventaron el "tablero de cálculo", artilugio consistente en una colección de palillos de bambú de dos colores (un color para expresar los números positivos y otro para los negativos) que puede considerarse una especie de ábaco primitivo. En la edad media, el desarrollo del álgebra en China culminó con el desarrollo del "método del elemento celeste" para encontrar raíces no sólo enteras sino también racionales e incluso aproximaciones decimales para modelos de la forma $Pn(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o;$ la suma de progresiones y los trabajos en la rama de la combinatoria que permitieron la construcción del modelo "espejo precioso" de manera similar al que hoy conocemos como triángulo de Tartaglia o Pascal.

Al igual que con la civilización china, *los registros matemáticos sobre la civilización de la india antigua* son muy escasos, pese a tener constancia del alto nivel cultural. Los primeros indicios matemáticos se estiman hacia los siglos VIII-VII a. de C. y se dedican a aplicaciones geométricas para la construcción de edificios religiosos, parece que desde tiempos remotos utilizaron un sistema de numeración posicional y decimal; durante los siglos V a XII contribuyeron a la evolución de las matemáticas predominantemente en las reglas aritméticas de cálculo, el uso correcto de los números negativos y la introducción del cero, llegando incluso a aceptar como números validos los irracionales; profundizaron en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, en las cuales las raíces negativas eran interpretadas como deudas; posiblemente, para resolver problemas astronómicos desarrollaron modelos de ecuaciones diofánticas y métodos de resolución, llegando incluso a plantear y resolver en el siglo XII la ecuación $x^2 = 1 + ay^2$ conocida como la ecuación de Pelt y se considera indiscutible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal y las reglas de cálculo.

Mucho antes que comenzara la Era Cristiana, la actividad intelectual de las civilizaciones desarrolladas en Egipto y Mesopotamia perdió su impulso pero a la vez, a lo largo del Mediterráneo, surgieron nuevas culturas, entre la que destaca la *cultura griega* al grado que las civilizaciones anteriores a la antigua Grecia se conocen como culturas prehelénicas.

Para los matemáticos de esta época agrupados en escuelas los problemas prácticos relacionados con las necesidades de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas continuaron jugando un gran papel; sin embargo, lo novedoso fue que estos problemas poco a poco se desprendieron en una rama independiente de las matemáticas que obtuvo la denominación de "logística". A la logística fueron atribuidas: las operaciones con números enteros, la extracción numérica de raíces, el cálculo con la ayuda de dispositivos auxiliares, el cálculo con fracciones, la resolución numérica de problemas modelados con ecuaciones de primero y segundo grados, problemas prácticos de cálculo y constructivos de la arquitectura, geometría, agrimensura, etc.

En la escuela de Pitágoras se advierte un proceso de recopilación de hechos matemáticos abstractos y la unión de ellos en verdaderos modelos o sistemas teóricos; por ejemplo, de la aritmética separó la teoría de números en una rama independiente como el conjunto de conocimientos matemáticos que se relacionan con las propiedades generales de las operaciones con números naturales; se introdujeron las proporciones aritmética, geométrica y armónica y sus correspondientes medias: la aritmética, la geométrica y la armónica; junto a la demostración geométrica del teorema de Pitágoras se encontró el de la serie ilimitada de las ternas de números que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$; en los trabajos geométricos abstractos y sistemáticos se introdujeron y perfeccionaron las investigaciones y los métodos de demostración geométrica rigurosa.

Con una historia de aproximadamente 3,000 años, la *civilización maya* habitó una vasta región ubicada en el territorio del sur-sureste de México, específicamente en los estados de Campeche, Chiapas, Quintana Roo, Tabasco y Yucatán y en otros territorios de Belice, Guatemala, Honduras y El Salvador; durante ese tiempo, se hablaron cientos de dialectos de los cuales actualmente existen cerca de 44 dialectos mayas diferentes. Hablar de los "antiguos mayas" es referirse a la historia de una de las culturas mesoamericanas precolombinas más importantes, con un legado científico y astronómico mundial. Obras de la talla del *Popol Vuh* y *Chilam Balam* ponen de manifiesto la riquísima cultura maya e ilustran su calidad literaria.

Al igual que otras civilizaciones mesoamericanas, *los mayas* utilizaban un sistema de numeración de base veinte (vigesimal) y otro de base cinco como se ilustra en la figura 3.2; alrededor del año 36 a. de C. crearon independientemente el concepto de cero y su uso como se conoce actualmente, aunque mucho antes los babilonios habían desarrollado un parámetro de sustitución-0- que sólo se utilizaba entre otros dígitos y que parece haberse usado siglos antes que en el viejo mundo; en sus inscripciones los modelos muestran su trabajo con sumas de cientos de millones y fechas tan extensas que tomaban varias líneas para representarlas; hicieron sorprendentes observaciones astronómicas extremadamente precisas, sus modelos diagramáticos de los movimientos de la luna y los planetas son iguales o superiores a los de cualquier otra civilización.

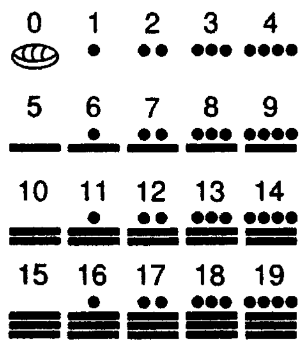


Figura 3.2 El modelo de los números mayas del 0 al 19.

Como otras civilizaciones mesoamericanas, la maya descubrió una medida exacta de la duración del año solar, mucho más exacta que la que usaba Europa con el calendario gregoriano; el calendario maya se basó en un año de duración exacta de 365 días.

3.6.2 Filosofía de los modelos

Como se vio en la sección anterior, la conceptualización y la construcción de los modelos son parte vital en la actividad intelectual de la humanidad desde que empezó a comprender y manipular su ambiente, estos modelos los ha usado para sustituir, representar y expresar objetos e ideas; ya sea para comunicar visualmente su cosmovisión del mundo como muestran las pinturas rupestres, las esculturas y las estelas idílicas, o bien para la representación de sistemas complejos con ecuaciones matemáticas de fenómenos físicos, para resolver problemas sociales o de ingeniería tales como los vuelos espaciales, y las cuestiones económicas, sociales y naturales; en otros términos, los avances y la historia de la ciencia, la tecnología y la ingeniería se reflejan apropiadamente en el progreso de la habilidad del hombre para desarrollar modelos y trabajar con ellos fenómenos naturales, acontecimientos sociales, ideas u objetos de su interés.

Generalmente, como vimos en las secciones anteriores, los investigadores establecen que dentro de sus actividades principales requeridas para resolver problemas están la construcción y uso de modelos, que constituyen una clase particular de instrumentos de investigación; si ellos fueran tan difíciles de construir y de controlar como sucede con la realidad que modelan no tendría sentido construirlos, cosa que no sucede, pues aunque limitados e imperfectos, se han usado exitosamente para describir, explicar y predecir fenómenos con resultados satisfactorios; y con los avances acelerados de la tecnología computacional ha propiciado su auge u aplicación. Los modelos más exitosos son hasta donde sea posible los más sencillos de construir y representan adecuadamente los elementos e interrelaciones relevantes.

Un modelo es un objeto real o mental construido mediante un proceso de abstracción de segundo orden a partir de la definición del constructo o modelo conceptual del sistema problema como se observa en la figura 2.1, representa de manera simplificada un sistema real o mental complejo que nos facilita comprender, cambiar, preservar, prever, similar y explicar su comportamiento.

Un modelo es el resultado concreto del proceso de abstracción y en sí mismo es una entidad representativa o sustitutiva de un objeto, sistema o idea que interesa al investigador y lo utiliza para auxiliarse en la comprensión, mejoramiento y explicación del sistema problema.

El modelo de un objeto puede ser una réplica exacta del objeto de diferente material y a diferente escala o bien puede ser una abstracción y sustitución de las propiedades relevantes del objeto estudiado; es claro que nunca coinciden con la riqueza de la compleja realidad porque son solamente sustitutos muy limitados de ella; por lo que siempre deben tenerse en consideración las dificultades que se presentan en el esclarecimiento, la separación y la búsqueda de las interrelaciones de los elementos esenciales y la precaución con otras variables imposibles de aislar, causantes del ruido en el análisis de los fenómenos.

Se dice que *el punto de vista crea el objeto*, por ello, la perspectiva desde donde se observan los elementos e interrelaciones de los sistemas dependen de los objetivos del estudio; por ejemplo, un sistema de transporte de pasajeros puede estudiarse con objetivos tales como disminuir el tiempo de traslado o mitigar la contaminación que produce, para los cuáles se producirán modelos diferentes.

Conforme Guasch (2005) un modelo es una substitución del sistema problema que se construye expresamente para imitar lo más cercano posible su comportamiento mediante la simulación, es una representación en pequeño de un sistema, generalmente en forma matemática de alguna realidad compleja, como el modelo de la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento; ya que los modelos deben representar la dinámica de interés del objeto bajo estudio.

Los modelos representan la estructura del sistema bajo estudio y contienen los elementos y las propiedades internas del sistema, sus interrelaciones y los factores del medio ambiente que hacen posible prever sus respuestas. La descripción de las características, la estructura interna y los factores contextuales de interés se conocen como modelo del sistema y el proceso de abstracción para obtenerlas se llama modelado del sistema.

3.7 Modelado o Modelación

La representación básica del sistema que debe usarse para el desarrollo del modelo es el llamado *modelo conceptual o constructo* discutido en el capítulo 2 (ver figura 2.1). Estos son diagramas que revelan nuestra concepción de las variables relevantes y sus interconexiones. Es necesario tener en cuenta que un sistema puede representarse de varias maneras que variarán por la complejidad y el detalle; es decir, en la mayoría de los estudios de sistemas resultarán modelos en diferentes versiones del mismo sistema y el que resulte más sencillo y eficiente será el mejor.

Bien se dice que el modelado es un arte ya que es el trabajo del investigador que involucra procesos mentales tales como la imaginación, la creatividad, la perspicacia y el ingenio para la construcción de los modelos, para lo cual no existe un manual puesto que de lo contrario se inhiben dichos procesos.

En Forrester (1961) puede verse el análisis de las diferencias significativas que existen entre la modelación en las ciencias físicas, las ciencias sociales y la ingeniería donde apunta que los investigadores han trabajado exitosamente en el modelado de los fenómenos naturales, mientras los investigadores sociales y los ingenieros se han esforzado en el modelado de sistemas determinados por el hombre; no obstante, considera que existe una gran brecha entre el modelado y la utilidad de los modelos de ingeniería y los de las ciencias sociales tanto en la cantidad como en la calidad, y la manera en que han sido usadas las herramientas necesarias para la construcción de estos modelos. Mientras en la ingeniería los modelos son explicativos porque sirven como auxilio en el diseño de nuevos sistemas o en el mejoramiento de los existentes, en las ciencias sociales y la economía los modelos actuales solo describen y explican los sistemas ya existentes.

Los modelos son representaciones de los sistemas reales, son abstracciones de ellos en las que el modelador debe decidir sobre los elementos e interrelaciones relevantes del sistema a incluir en el modelo, basados en los objetivos y las hipótesis de la investigación. El éxito del modelador depende de que tan bien pueda definir estos elementos significantes e interrelaciones entre ellos y de la sencillez en la representación fidedigna. Usualmente, cuando el investigador analiza y comprende mejor el problema sus modelos simples e iniciales lo llevan a modelos más complejos.

3.7.1 Principios de la modelación

Como se ha dicho, un modelo es una tarea intelectual en el que el modelador simplifica sensiblemente la realidad recogiendo de ella únicamente los aspectos de importancia y omitiendo los que no tienen relevancia para el objetivo de la investigación. Se modela para comprender y conocer mejor los sistemas complejos que son imposibles de conocer completamente. Los Principios de modelado son:

- Como se desprende de la figura 2.1, *la construcción del modelo influye profundamente en la manera de enfrentar el problema y en la forma de solución.*
- *Los modelos pueden representarse a diferentes niveles de detalle* y, mientras los analistas se suelen centrar en el qué, los diseñadores se enfocan en el cómo, de aquí la insistente necesidad de trabajar en equipos interdisciplinarios.
- *Los modelos físicos más fructíferos son aquellos que tienen vínculos más estrechos con la realidad.*

- ***Los sistemas complejos se abordan mejor en pasos sucesivos e incrementales mediante un pequeño conjunto de modelos cuasi independientes que puedan construirse y estudiarse por separado***, pero que están estrechamente interrelacionados.

Los patrones que pueden despertar la creatividad, estimular la imaginación y orientar la perspicacia son:

- Patrón I: Ocurre cuando la estructura del sistema es bastante simple y transparente para ser comprendido por inspección con la discusión fructífera entre los involucrados en y con el sistema problema.
- Patrón II: Se presenta en situaciones donde la estructura del sistema es relativamente aparente más no la forma de representarlo simbólicamente, en cuyo caso pueden buscarse similaridades estructurales del sistema problema con otro sistema cuya estructura sea conocida y usar la analogía en sí misma o un modelo simbólico de él como un modelo del sistema problema.
- Patrón III: Acontece cuando la estructura del sistema problema no es aparente pero puede extraerse analizando los datos disponibles o por acopio para describir el funcionamiento del sistema, y su análisis es suficiente para revelar la estructura del sistema. En este caso, el análisis genera hipótesis estructurales que requieren confirmarse con el uso de otros datos diferentes. Un ejemplo de este tipo puede verse en la investigación sobre la prospectiva del transporte de pasajeros en el país, en el cual fue necesario acopiar información de las llamadas telefónicas para descubrir la estructura de la red de transporte (Frontana, 1982)
- Patrón IV: Acaece cuando es imposible aislar los efectos de las variables individuales al analizar los datos de operación por lo cual es necesario recurrir a la experimentación para determinar las variables relevantes y sus efectos en la operación del sistema problema.
- *Patrón V*: Corresponde a las situaciones en las cuáles no es posible la obtención de datos con descriptivos suficiente y no se puede hacer la experimentación.

Un aspecto interesante en el modelado y la simulación es el conocimiento del estado de las variables del sistema que caracterizan los aspectos de interés del sistema estudiado, bien sea en varios instantes o en un periodo de tiempo establecido para el análisis. A estas variables se les llama variables de estado. En el ejemplo de la transportación de pasajeros éstas pueden ser el estado de cada uno de los autobuses ya sea ocupado o desocupado, según ciertos criterios de nivel y el número de pasajeros en cada estación.

> *El proceso de construcción del modelo es un proceso dialéctico en el que el primer paso incluye la construcción, análisis y discusión de resultados preliminares, y el tiempo que transcurre desde el establecimiento de los objetivos, la construcción del modelo y la producción de las primeras salidas; que debe ser tan corto como sea posible.*

Desde esta primera etapa es recomendable que se propicie la comunicación interdisciplinaria y con el cliente y los afectados en el problema, pues las discusiones que incluyen las salidas del modelo tienden a clarificar los asuntos y a promover sugerencias; igualmente, es imprescindible la disposición de los involucrados para exponer su ignorancia potencial del sistema y corregirlo tan pronto como sea posible y evitar, pasado el tiempo, la deficiente e inadecuada construcción el modelo que con seguridad causará más y profundos problemas que el que deseaba resolverse.

Los modelos complejos generalmente se construyen con modelos agregados, de hecho, los modelos de primer corte suministran el marco organizacional que guía la construcción de modelos más complejos; por ejemplo, un modelo sencillo de una sola cola sirve de base para incluir modelos de múltiples servidores.

CAPÍTULO 4
LA EXPERIMENTACIÓN Y LA SIMULACIÓN

CAPÍTULO 4
LA EXPERIMENTACIÓN Y LA SIMULACIÓN

Parar ser ingeniero es necesario embarrarse
Las manos de grasa y las botas de lodo,
pues en los inicios de la profesión no
hay ingenieros de cuello blanco.
Bernardo Frontana

4.1 Introducción

En el capítulo anterior discernimos sobre el método de investigación y se comentó que la experimentación forma parte de él tanto para la observación de los fenómenos y el acopio de datos como para probar las hipótesis que se plantea el investigador; igualmente comentamos la filosofía de los modelos y la modelación como preludio a la experimentación y la simulación. El objetivo de este capítulo es presentar algunas ideas básicas acerca de la experimentación y la planeación de la misma; la instrumentación como base de la medición incluyendo la terminología que se utiliza y las bases para construir los instrumentos de medición, su calibración y los patrones o estándares, las causas y los tipos de errores experimentales comprendiendo el estudio de la incertidumbre.

Especial atención se pone a los datos cuantitativos y cualitativos, a las escalas comúnmente utilizadas en las investigaciones de las ciencias duras y las ciencias blandas y a la simulación o experimentación virtual, enfatizando los tipos de modelos experimentales para hacer análisis estadísticos y el muestreo de la población de interés para su posterior inferencia sobre el los parámetros de la población. Aunque algunos conceptos que se presentan se utilizan en la instrumentación utilizada en las ciencias físicas, se verá que también son aplicables en las ciencias sociales.

4.2 La experimentación en la ingeniería

El conocimiento de la naturaleza y la sociedad es indispensable para transformar la primera en sistemas tecnológicos y la segunda para la producción de bienes y servicios necesarios para servir a la sociedad; dicho conocimiento se favorece mediante el método de investigación que se explicó en el capítulo anterior del cual, para los propósitos del presente capítulo, se necesita el conocimiento cabal de los principios teóricos del campo de estudio o el paradigma como garantía del éxito experimental para fundamentar los problemas, establecer las hipótesis y verificarlas mediante el trabajo experimental que se desarrolla en el laboratorio o directamente en la parte de la naturaleza o en la sociedad, según el caso, para observar y medir el comportamiento de los fenómenos bajo estudio, incluyendo el planteamiento y definición de las técnicas e instrumentos para la recolección, medición, codificación, validación y el análisis de la información proporcionada por los datos.

4.3 Planeación de los experimentos

La planeación del experimento es una parte inherente del método de investigación pues todo experimento responde a una necesidad y si tal necesidad existe, entonces el experimentador debe planearlo de forma flexible, adaptativa y participativa; aunque cabe la posibilidad de decidir no efectuarlo porque la información que busca la puede obtener de la bibliografía consultada, en un estudio analítico o bien en los resultados de experimentos realizados con anterioridad.

La planeación de los experimentos es necesaria para evitar el despilfarro de recursos y sorpresas desagradables cuando se descubre que los experimentos realizados eran innecesarios o fueron mal diseñados. Conforme a Holman (1971), el éxito consiste en contestar continuamente, antes y a lo largo del trabajo, preguntas en apariencias sencillas, elementales y hasta superfluas porque orientan la planeación del experimento; entre las que se deben formular, *antes* del trabajo experimental, se tienen:

- ¿Cuáles son las variables relevantes del fenómeno bajo estudio que se van a investigar?
- ¿Cuáles son los rangos necesarios para describir apropiadamente las variables relevantes del fenómeno bajo estudio?
- ¿Cuáles son las variables controlables en el experimento?
- ¿Qué tipo de control debe ejercerse durante el experimento?
- ¿Cuánto datos puntuales se deben tomar con los diferentes rangos de variación para asegurar una buena muestra de datos, considerando la exactitud del instrumento y otros factores?
- ¿Qué exactitud se requiere para cada instrumento a utilizar?

- Si se van a tomar mediciones dinámicas ¿Qué respuesta a la frecuencia debe tener el instrumento?
- ¿Existen instrumentos comercialmente disponibles o será necesario construir uno *ha doc* para el experimento?
- Si existe peligro en el experimento ¿Qué precauciones de seguridad deben tomarse?
- ¿Cuántos y cuáles son los recursos necesarios para efectuar el experimento?
- ¿Qué provisiones deben hacerse para el registro de los datos?

También es necesario *el control del experimento* durante su ejecución, preguntándose por ejemplo ¿Qué estoy buscando? ¿Lo que estoy midiendo realmente mide las respuestas a mis preguntas teóricas? ¿Qué me dice esta medición? ¿Necesito recalibrar el instrumento? etc.

Ejemplo 4.1. La necesidad del control es evidente en un experimento industrial donde las condiciones ambientales de temperatura, iluminación, suciedad y humedad son extremas y pueden afectar a los operadores de las máquinas ocasionando resultados de dudosa validez.

Si bien es cierto que en algunos experimentos los instrumentos registran o grafican automáticamente los datos y hay pocos errores, no debe soslayarse en la planeación el cuidado que debe ponerse en la recopilación y; en aquellos experimentos donde las observaciones son visuales y los datos se recaban en hojas de registro como es común en los experimentos de las ciencias sociales, se sugiere diseñar cuidadosamente estas hojas para que los datos sean legibles a los operadores que no tienen la experiencia en la investigación los capturen en la computadora que con facilidad. Adicionalmente, se recomienda usar bitácoras como buena práctica para anotar todas las ideas novedosas, las observaciones extrañas o particulares que surgen durante el trabajo experimental relacionadas con la teoría en la que se basa.

En la planeación de la experimentación, el investigador, al que le llamaremos en adelante indistintamente, experimentador, analista o profesional de las ciencias físicas o sociales; debe ser capaz de definir las variables e interrelaciones que va a investigar y el papel que jugará en el análisis la información que acopie, acercándose a la realidad mediante un "lente" diferente al paradigma pero basado en él, al que le llamaremos *instrumento de medición.*

La experimentación es el proceso mediante el cual se recaba información, datos, que representan los cambios de las variables e interrelaciones definidas para expresar el fenómeno estudiado mediante datos recabados con los instrumentos de medición.

Por lo anterior, es necesario que el investigador tenga nociones acerca de la medición, los instrumentos de medición que va a utilizar o a construir, sus principios de funcionamiento y de los métodos de instrumentación; para que esté consciente de las limitaciones de los instrumentos antes de aplicar las técnicas del análisis estadístico necesarias para manejar los datos experimentales.

4.4 La medición

La necesidad de medir es un referente en las actividades humanas ya que proporciona la información que nos permite, entre otras cosas, conocer, analizar, explicar y descubrir los mecanismos internos que gobiernan los fenómenos naturales y sociales, planificar los desarrollos de la investigación con mayor certeza y confiabilidad, conocer la variabilidad y las causas de los procesos, discernir con mayor precisión las oportunidades de mejora, conocer a fondo y mejorar los procesos industriales, sociales, administrativos o de otra índole; innovar e incluso inventar nuevos procesos, productos y servicios. Igualmente, nos auxilia en la toma de decisiones informadas de manera rigurosa y sistemática para evaluar, planificar, diseñar, prevenir, corregir, mantener, innovar e inventar las actividades que nos conducen al mejoramiento de los procesos.

Ejemplo 4.2 En el comercio se mide la cantidad de azúcar que se despacha al cliente y la cantidad de dinero que se cobra; el análisis sensorial necesita mediciones para estudiar productos que percibe el ser humano a través de los sentidos: el olfato para las fragancias, la vista para el color y el diseño de la ropa, el oído para el grado de satisfacción de los géneros musicales, el tacto para la dureza de los cortes de carne y el gusto para la textura de las tortillas; lo mismo sucede en los trabajos técnicos o científicos tales como los de ingeniería en donde interesar medir la intensidad de corriente eléctrica que pasa por un circuito, el esfuerzo y la deformación a la que se somete una estructura o la cantidad de fertilizantes con los cuáles se abona la parcela donde se cultiva el maíz; sin embargo, no sólo interesa contar con medidas sino también conocer su validez en las aplicaciones donde se usan.

En general, todo problema de investigación experimental conlleva de algún modo la tarea de medir con objeto de representar y describir de alguna forma las características y relaciones de las variables que intervienen en el fenómeno que se investiga, cuyos valores que asumen las variables definen el comportamiento de dicho fenómeno.

La medición es intrínsecamente comparativa, medir algo, en el caso más sencillo, significa determinar cuántas veces una cierta unidad o patrón de medida, cabe en el objeto a medir.

Ejemplo 4.3 Para medir la longitud de un objeto físico se coloca una regla o cinta graduada sobre él y se observa cuantas unidades contiene, centímetros o metros por ejemplo, el objeto en cuestión; es decir, se compara el objeto con la unidad patrón de medición para determinar cuántas unidades incluye.

En particular, la medición de variables cualitativas resulta, en esencia, un proceso similar al anterior pero con la dificultad de que las valoraciones de este tipo de variables no se pueden medir con escalas sencillas y no existen patrones de medida universalmente aceptados para su comparación.

Ejemplo 4.4 La medición de la temperatura de un gas puede expresarse en grados centígrados o Fahrenheit u otra unidad que tenga un equivalente fijo y constante con la que se utiliza; en cambio, para medir el grado de liderazgo de un dirigente no existe una unidad ni una escala universalmente aceptada por lo que el investigador se ve en la necesidad de elegir alguna escala de las que se han utilizado y probado en trabajos previos o bien construir una pertinente a sus necesidades; además, el grado de liderazgo no es una variable simple como temperatura, el peso o la longitud; sino una resultante compleja de una multitud de factores interrelacionados. Por esta razón, para medir un concepto complejo es necesario definir las dimensiones que integran la variable y encontrar los indicadores que la reflejen para construir las escalas apropiadas.

La medición es el proceso de asignación de símbolos, generalmente números, a los atributos de los objetos o sujetos de la realidad, de tal forma que los describa con claridad conforme a reglas definidas.

La validez de la medición en cualquier disciplina técnica, científica o social se basa en el cumplimiento de los principios de la teoría general de la medición y en particular en la teoría representacional de la medición que, similar a las matemáticas, inicia con la postulación de axiomas con los cuáles se demuestran teoremas y nuevas leyes. El fundamento de la teoría representacional postula que en toda medición se debe garantizar la adecuada representación de la propiedad real que se mide con los símbolos o números asignados. La representación de la medición de una propiedad o atributo del objeto será adecuada si es coherente con el concepto que se tiene sobre dicho atributo y es comúnmente aceptada por los expertos.

Así pues, la Medición es la acción de medir que genera datos, los cuales son conceptualizaciones y no están en la realidad, en ésta se encuentran los objetos susceptibles de medirse y *medir se define como la determinación de una cantidad o cualidad del objeto comparándola con otra que se tiene como referencia.* En sentido amplio, la medición se define como una función que asigna numerales a objetos o sucesos según ciertas reglas que dan lugar a los diferentes tipos de escalas de medición que se estudiarán más adelante.

El proceso de asignar un valor, una calificación o un dato a cada una las observaciones del fenómeno que se estudia, constituye el *proceso de medición* cuyo conocimiento e implicaciones son de suma importancia para el analista porque a cada *técnica estadística* le corresponden los datos medidos a un cierto nivel y, como la computadora desconoce los niveles de medición que subyacen en los datos que recibe, los procesará independientemente de los niveles; es decir, el analista debe seleccionar los datos que recopiló y que la computadora procesará conforme *la técnica estadística* particular a usar. Las escalas de medición se determinan por las reglas que definen la asignación de los valores apropiados y se diferencian en su exclusión y exhaustividad con base en las propiedades de ordenamiento y distancia establecidas en dichas reglas.

4.5 las mediciones cuantitativas y cualitativas

Para la mayoría de la gente, un número es un símbolo u objeto mental que denota una cantidad de cosas y sirve para efectuar las operaciones aritméticas; sin embargo, el número es mucho más que eso; por ejemplo, los números también se utilizan para designar el número nominal que tiene por núcleo un nombre; para representar la posición en una serie como sucede con los números ordinales; para representar un conjunto de valores que toma una magnitud entre dos límites dados de un intervalo o bien para designar una cantidad como los números cardinales.

Por lo anterior, es necesario identificar la diferencia entre *las mediciones cuantitativas y las cualitativas* que también pueden utilizar números con la salvedad que el tipo de número que se utilizará en los *análisis estadísticos* deviene de la selección de *los métodos estadísticos* a utilizar; las mediciones cuantitativas son los datos de las observaciones que se cuantifican, expresan cantidades y permiten las operaciones de medir y de contar.

Ejemplo 4.5 Si se mide el peso de una persona se utiliza alguna unidad de medida cardinal como el kg o lb; si interesa el número de nietos que tiene otra persona, se cuenta el número de nietos y se registra otra medida cardinal.

Sin embargo, existen situaciones en las que la medición cuantitativa de la característica que se observa no es procedente, lo que da lugar a *las mediciones cualitativas* para las cuáles primero se deben definir todas las categorías que constituyen la variable y, para facilitar los cálculos, se identifica y codifica cada categoría de la variable con un símbolo, letra o número y después se cuenta el número de objetos o sujetos que pertenece a cada categoría.

Ejemplo 4.6 Si en un experimento interesa conocer el sexo de una muestra de personas se utiliza un número nominal; para clasificar la edad de mayor a menor de dicha muestra se necesita una escala ordinal y si interesa conocer el tipo de música preferido de una muestra de melómanos, se trata de una cualidad que no se puede medir cuantitativamente sino solamente cualitativamente. Cabe observar que en estos casos *los números nominales solamente son sustitutos de las palabras* y, por consiguiente, no pueden utilizarse para realizar operaciones aritméticas como se haría con los números que representan el peso y el número de nietos.

Las características que deben satisfacer las *buenas* mediciones son:

- L*a pertinencia* al propósito que se busca.

- La *precisión* o sea el grado en que la medida obtenida refleja fielmente la magnitud que se requiere.
- *La definición operativa* o características de las unidades de la escala de medición.
- *Los errores permisibles* o tolerancia de la medición.
- *La oportunidad* que nos permite tomar decisiones pertinentes, bien sea para corregir o para corroborar la información para lograr el conocimiento profundo de los procesos.
- *La previsión* para tomar decisiones antes de que se produzca una anormalidad indeseable.
- *La confiabilidad* o probabilidad del buen funcionamiento de la medición y esperar con firmeza y seguridad que la medición sea correcta.
- *La economía* que alude a la proporcionalidad que debe existir con los costos incurridos entre la medición de una característica y los beneficios, y la relevancia de la decisión que se soporta con los datos obtenidos.
- *La eficacia* o el logro del objetivo y mayor efectividad de la medida.
- *La eficiencia* al menor costo.

4.6 Los indicadores como base de la medición y su clasificación

Los objetivos y las tareas de la experimentación que se propone el analista deben concretarse en los indicadores de la medición los cuales son expresiones concretas y medibles puesto que, como su nombre lo dice, sirven para indicar, para mostrar o señalar algo con indicios y señales; y deben expresar y representar cualitativa o cuantitativamente dichos objetivos y tareas. En general, los indicadores pueden ser números, hechos, opiniones, percepciones o medidas que señalan las condiciones o situaciones específicas.

La importancia de los indicadores estriba en que señalan la medición de los cambios de las situaciones a través del tiempo, ayudan a la observación y evaluación de los resultados de iniciativas, acciones o decisiones; y, no menos importante, son medios retroalimentadores que orientan a la consecución de mejores resultados.

Los indicadores suelen clasificarse según su uso en *cuantitativos* que se refieren directamente a medidas que se pueden cuantificar con números o cantidades como son las longitudes y las magnitudes; y *cualitativos* que aluden a cualidades o aspectos que no se pueden cuantificar directamente tales como opiniones, percepciones sensoriales o juicios de las personas. También se tienen los indicadores *directos* que permiten una medición directa de los valores de las variables del fenómeno y los *indirectos* porque no se puede medir directamente bajo la condición estudiada y son sustitutos de indicadores relativos al fenómeno que nos interesa.

4.6.1 La construcción de indicadores

Algunos criterios que permiten juzgar la construcción de buenos indicadores son:

La representación: que refleje adecuadamente la imagen de las variables del fenómeno bajo estudio, sus peculiaridades, los nexos de los procesos subyacentes; por lo tanto, según el caso, no es suficiente uno sólo de ellos para medir el fenómeno, sino un conjunto interrelacionado de ellos que abarque la cantidad de las magnitudes relevantes al fenómeno por medir.

La estabilidad: mantenida sin peligro de cambio durante el proceso de medición.

La comprensión: capacidad de ser inteligible, inclusivo y penetrante de lo que se desea indicar.

La mensurabilidad: capacidad de medir sistemáticamente lo que se pretende conocer:

El análisis: capacidad de captar aspectos cualitativos o cuantitativos de la parte de la realidad que se pretende medir.

La relevancia: expresión de la mejor forma posible lo que se pretende medir.

4.6.2 Las variables cuantitativas y cualitativas

Como ya vimos, para conocer un fenómeno es necesario apoyarse en una teoría o el paradigma que nos ayude a comprender la concatenación y sucesión de los hechos que queremos estudiar, constituye el marco teórico que nos auxilia en la definición de las variables y en la caracterización de los datos que necesitamos recoger e interpretar; en tanto que el análisis de los datos nos ayuda a confirmar o replantear la hipótesis propuesta.

Obsérvese que al medir las características del fenómeno bajo estudio se obtienen uno o varios números para cada observación, pero estos números o conjuntos de números varían de una a otra unidad de estudio, por lo que se les denota con variables o conjunto de variables.

Ejemplo 4.7 Se puede seleccionar X para denotar la variabilidad de los pesos de los alumnos pudiendo ser algunos de valores $56.5,\ 72.90\ o\ 65.32\ kg$; los diferentes números de nietos posibles se pueden representar con la variable Y cuyos valores pueden ser $0, 1, 5\ o\ 10$; mientras el tipo de música puede codificarse con la variable Z con 1 para el rock, 2 si se trata de la música instrumental, 3 si es género pop, 4 para la clásica y 5 para otro género diferente de los anteriores; pudiendo tenerse que 3 jóvenes prefieran 1, a 2 les guste 2, a 5 les aficione 3, a 0 el tipo 4 y 150 jóvenes prefieran el 5. Igualmente si a cada alumno se le mide su peso y el tipo de música preferida se tiene la pareja de variables (X, Z) pudiéndose tener para 2 alumnos$(76{,}4)\ y\ (71.5{,}3)$.

Las valoraciones que realizamos para las variables, permiten dividirlas en variables cuantitativas, que a su vez pueden ser continuas para el caso en el que el valor de la variable está comprendido dentro de un intervalo de números reales como los pesos, o discretas si el valor de la variable está limitado a ciertos números enteros dentro del intervalo como sucede con el número de nietos y cualitativas o de atributos como la música preferida por los jóvenes.

En particular, las variables *dicotómicas* son aquellas que sólo pueden asumir dos categorías o valores y son variables cualitativas como el *sexo:* masculino y femenino o el estado de funcionamiento de un *sistema hidráulico*: en operación o en reposo; se les puede asignar los valores 0 y 1 a cada categoría y se manejan como si fueran variables cuantitativas discretas.

4.7 El sistema generalizado de medición

Para el caso de las ciencias físicas o naturales, el sistema generalizado de medición puede considerarse en su forma más simple dividido en tres subsistemas:

El detector o *transductor* que captura y transforma la variable física en una señal física, eléctrica, que facilita la manipulación; el alma de este subsistema es el sensor que transforma una causa física en otro efecto físico.

El segundo subsistema se conoce como el sistema *acondicionador de la señal* que se encarga de modificar la señal bien sea amplificándola, filtrándola, atenuándola o de alguna otra forma, con objeto de prepararla como la señal de salida acondicionada que se envía al tercer subsistema.

El sistema terminal, cuya función es medir, indicar, grabar o controlar la variable medida en la escala de medición. Para el caso de las ciencias sociales, puede considerarse como primer subsistema al investigador o su ayudante que detecta y captura los datos con la escala de medición; el segundo sería el "acondicionador de la señal" constituido por el investigador que codifica, analiza e interpreta la información recopilada; y el sistema de salida sería el propio investigador que informa los resultados y/o los hallazgos encontrados.

Ejemplo 4.8 Un voltímetro consiste del subsistema medidor de bajos voltajes a bajas frecuencias que se construye con dos alambres y resistencias colocadas apropiadamente a las terminales, el segundo subsistema consiste de un amplificador y un filtro y el subsistema terminal es una carátula con una escala de Volts y una aguja o un registrador que opera en el rango de salida acoplado al amplificador.

4.7.1 Los instrumentos de medición

Un instrumento es el medio, la lente, para medir o recolectar datos y, en general, es cualquier recurso que utiliza el investigador frente a los fenómenos naturales o sociales para extraerles información: los datos.

En cada instrumento de medición se distinguen su forma y su contenido. La forma se refiere a la aproximación que se establece con la realidad y a los procedimientos que se utilizan para medir, en tanto que el contenido se define por la especificación de los datos que traducen las observaciones y se concreta en los indicadores que asignan los valores a las variables de los objetos que se observan. Si los instrumentos no son pertinentes inevitablemente recopilarán datos erróneos que no servirán para satisfacer los objetivos planteados, no se recopilarán los datos necesarios porque éstos serán inadecuados, falsos o distorsionados; asimismo, expresarán contenidos inapropiados al objeto observado; y no existirá una clara correspondencia entre la teoría que se sustenta y los hechos que se observan; es pues necesario que un instrumento de medición sea confiable y válido.

Así, *el instrumento de medición es la parte del método de investigación que sintetiza y materializa el trabajo preliminar de la observación y contiene la expresión que aporta el marco teórico para seleccionar las observaciones que corresponden a los indicadores y, por lo tanto, a las variables de los conceptos utilizados.*

4.7.2 Terminología de la instrumentación

A continuación se describe de manera somera la terminología comúnmente utilizada en la instrumentación ingenieril, que también debiera tener la instrumentación que se utiliza en las ciencias sociales.

La cualidad de legibilidad: la facilidad de la lectura del instrumento o de un sistema de instrumentación y se indica con la escala apropiada para medir los datos.

Ejemplo 4.9 Para medir de longitudes en el rango $0\,cm \leq X \leq 5\,cm$ se prefiere un instrumento con una escala de $0\,cm \leq m \leq 10\,cm$ a una de $0\,cm \leq m \leq 5cm$ porque pueden obtenerse mejores lecturas.

La última cuenta o el dígito menos significativo: la diferencia más pequeña entre dos indicaciones de la escala del instrumento. Tanto la *legibilidad* como *el dígito menos significativo* dependen de la longitud de la escala, el espacio de graduación, el tamaño del apuntador y los efectos de paralaje.

La exactitud: la desviación de la lectura de la entrada conocida y se expresa con el porcentaje de la escala completa.

Ejemplo 4.10 Un voltímetro con un rango de $100\ volts$ y una exactitud de 2% será exacta dentro de $\pm\ 2\ volts$ sobre el rango completo.

La precisión: indica la habilidad de reproducir una lectura para una precisión dada.

Ejemplo 4.11 Para distinguir entre la exactitud y precisión considérese la medición del voltaje anterior de $100\ volts$ con un mismo voltímetro en el que se tomaron cinco lecturas cuyos valores fueron $104, 103, 105, 103\ y\ 105$ $volts$. Con estos valores se observa que el instrumento tiene una exactitud de 5% ($5\ volts$) y una precisión de $\pm 1\%$ porque la desviación máxima de la lectura media de $104\ volts$ es solamente $1\ volt$. El voltímetro puede calibrarse para usarse en medidas de voltaje dentro de $\pm 1\ volt$. Este ejemplo muestra que la exactitud puede mejorarse calibrándolo hacia arriba pero no más allá de su precisión.

La sensibilidad: la razón del movimiento lineal del apuntador sobre el instrumento al cambio de la variable medida que causa este movimiento.

Ejemplo 4.12 Un voltímetro de $10\ volt$ puede tener una escala de longitud de $10\ cm$ cuya sensibilidad es de $1\ cm/volt$ considerando que la medición es lineal sobre toda la escala.

Histéresis: la diferencia en las lecturas de los valores de la cantidad medida y puede ser positiva o negativa, lo que puede deberse a causas magnéticas, térmicas, deformaciones elásticas o fricciones mecánicas de los mecanismos.

Toda investigación seria debe reportar la *confiabilidad y validez* de sus instrumentos de medición; la confiabilidad varía de 0 a 1 y la validez debe mencionar el método de validación utilizado y su interpretación, puesto que de lo contrario no se puede asegurar que el instrumento sea confiable. Si es posible arreglar el experimento para estudiar un mayor rango de condiciones sin demeritar la exactitud del instrumento, se amplía el *rango de validez* y aumentará la confianza que se tiene en la extrapolación de las conclusiones; esto es particularmente importante en experimentos preliminares para decidir los mejores cursos de acción posteriores.

Cuando aplicamos los resultados de un experimento a nuevas condiciones u otras unidades experimentales, se añade incertidumbre adicional a la ya medida por el error estándar, salvo si las unidades experimentales se eligen de una población homogénea mediante una técnica de muestreo apropiada y se establece un control riguroso de las condiciones del experimento.

En las primeras etapas del trabajo experimental es importante tener flexibilidad, buscar *la simplicidad* en los diseños y aplicar métodos sencillos para propiciar el surgimiento creativo de nuevas preguntas promisorias ya que los requerimientos de diseños eficientes y *la simplicidad* en el análisis se correlacionan satisfactoriamente; no obstante, puede suceder que arreglos experimentales bastante complicados sean ventajosos en cuyo caso el juicio y la experiencia del experimentador pueden decidir qué tanto avanzar o que tan pronto terminar.

En la actualidad, el uso de computadoras electrónicas para ayudar al análisis experimental resulta indispensable sobre todo en aquellas situaciones que requieren grandes cantidades de datos y se cuenta con programas adecuados para su tratamiento, cuyo tiempo de las corridas computacionales se reduce significativamente.

4.7.3 Pautas para la construcción de instrumentos de medición

Para diseñar o utilizar los instrumentos apropiados para el experimento y para el análisis de los datos que recopila el investigador; deben conocerse a profundidad los principios físicos o sociales del proceso que se investiga. Existen diversos tipos de instrumentos de medición, cada uno con características diferentes; sin embargo, el procedimiento general para seleccionarlos o construirlos es semejante y consiste de:

a) *listar las variables* que se pretenden medir u observar;
b) *revisar su definición conceptual* y comprender su significado, por ejemplo, comprender bien la motivación intrínseca y las dimensiones que la integran;
c) *revisar la definición operacional de las variables*, esto es, como se medirán;
d) *comparar* los instrumentos existentes que se han utilizado para medir las variables de interés;
e) revisar su *confiabilidad o la eficacia* en el número de veces que las mediciones han resultado exitosas;
f) *Verificar la validez* mediante los objetos o sujetos para los cuales su uso se ha reportado satisfactorio;
g) *facilidad y posibilidad de uso* en el contexto de la investigación. En cualquier caso, sólo deben seleccionarse instrumentos cuya confiabilidad y validez se haya confirmado con evidencias claras y precisas.

Para la medición existen cuatro tipos de variables ampliamente utilizadas: la nominal, la ordinal, la de intervalos y la variable de razones o proporciones las cuáles dan lugar a las cuatro escalas de medición utilizadas en los estudios estadísticos paramétricos y no paramétricos como se verá en los tomos posteriores; las cuáles necesitan codificarse para analizar cualitativa o cuantitativamente los datos de cada elemento y variable. Codificar los datos significa asignarles un código o un valor numérico que los represente; es decir, a las categorías de las variable se les pueden asignar valores numéricos que tienen un significado o bien utilizar letras, nombres o símbolos en lugar de números, tales como III, A, Z o FEM.

Ejemplo 4.13 Para la variable *sexo* con sus respectivas categorías, *masculino* y *femenino*, a cada categoría le asignaríamos un valor que podría ser *1* al *masculino* y *2* al femenino; con cuyo código se tendría Emmita = *2*, Bernardo = *1*, Sarita = *2*, Alberto = *1*.

Conviene señalar que existen situaciones donde las respuestas a una pregunta no pueden codificarse a priori por la dificultad de conocer sus categorías que podrían ser bastantes y resultaría difícil predecir con precisiones cuántas y cuáles serían; en cuyo caso la codificación se lleva a posteriori, después de conocer las respuestas de la pregunta.

Ejemplo 4.14 Si ante la crisis económica que nos aqueja se preguntara ¿Cuál es su opinión sobre el programa para fortalecer el empleo que recientemente dio a conocer el gobierno mexicano? no se conocen de antemano las posibles respuestas; aunque algunas veces se induce al encuestado a responder.

4.7.4 Calibración de los instrumentos

La calibración establece fidedignamente las lecturas conforme la exactitud del instrumento y asegura la validez de las mediciones.

La confiabilidad de las lecturas requiere que al iniciar el trabajo experimental se sigan los procedimientos de calibración de los instrumentos a utilizar que proporciona el fabricante y se establezca el procedimiento para la calibración global del sistema de instrumentación; o bien, que se comparen las lecturas del trabajo previo con unidades patrón o estándares primarios conocidos para garantizar la validez de dichas lecturas.

4.7.5 Los patrones o estándares

Lo métodos experimentales tienen técnicas, terminologías y estándares o medidas normativas de suma importancia para calibrar los sistemas de medición y evitar los errores inherentes a la recopilación de datos.

La comparación de las mediciones experimentales con bases consistentes y confiables, se hace con las unidades estándar de medida ya establecidas como sucede con la longitud, el peso, la temperatura y el tiempo; cuya responsabilidad de mantenerlas en condiciones estables recae en las oficinas normas y medidas de cada país o región.

Definidos los niveles de medición de cada variable y su codificación, es altamente recomendable aplicar una prueba piloto del instrumento de medición para calcular su confiabilidad y validez. Esta prueba se realiza con una pequeña muestra y con base en los resultados el instrumento de medición preliminar podrá modificarse o calibrarse y determinar sus indicadores de confiabilidad y validez para estar en condiciones de aplicarlo.

4.8 Los datos experimentales y su análisis

Podrán recabarse muchos datos sobre el fenómeno que se estudia, pero si no se toman los pertinentes y relevantes aunque las técnicas de análisis sean los adecuados para tomar decisiones sobre las hipótesis; la medición y los datos perderán su sentido. Las mediciones deben ser transparentes y entendibles para hacer uso de los datos y para las demás personas que los requieran.

Los datos que se obtienen en el proceso de medición, las medidas de las propiedades, deben representar los atributos de los objetos que se desean caracterizar y su manejo debe preservar las relaciones existentes entre esos objetos.

La definición de las medidas parte de la selección teórica de los objetos por medir, su identificación, la observación relevante y de la identificación de las relaciones empíricas establecidas entre las entidades reales con relación a los atributos de interés. La medición asigna un valor a cada objeto para caracterizar su atributo y debe establecerse la relación entre los valores que se corresponden con cada relación empírica; es indispensable que la medición definida no sea inconsistente con las relaciones observadas y efectuar las valoraciones subjetivas iniciales para mejorar la comprensión de la realidad y lograr la definición de medidas formales.

El análisis de los datos implica identificar, ordenar y medir la variación de las variables dependientes e independientes. Las medidas hacen posible registrar los valores de las variaciones y representan con mayor o menor precisión y detalle los conceptos teóricos de interés.

Los datos registrados se clasificarse en cualitativos y cuantitativos. Los primeros no pueden medirse cuantitativamente pero si nominarlos, ordenarlos y clasificarlos según sus cualidades, sus atributos y las propiedades categóricas que identifican los objetos de estudio; además, representan sus diferencias en tipos o clases e indican la presencia o ausencia de las propiedades que se excluyen mutuamente. Algunas de estas propiedades cualitativas, además de nombrarse, deben ordenarse en alguna escala.

Ejemplo 4.15 El sexo no tiene cantidad, no se puede decir cuánto sexo tiene una persona, sino solamente tiene calidad que se nombra con *masculino* o *femenino*.

Ejemplo 4.16 El sexo no tiene orden. Las posibles respuestas a la pregunta ¿sabes escuchar? pueden dar origen a una serie, tal como, (5) totalmente cierto (4) cierto (3) puede ser, (2) falso y (1) totalmente falso; cuyos números entre paréntesis se han asignado arbitrariamente; igual sucede con el nivel de satisfacción o de gusto de alguna cosa.

Por otro lado, los datos cuantitativos si pueden medirse puntualmente y en ellos se asocian claramente las diferencias de grado que existen entre los objetos y la cantidad que contienen; estas variables representan valores relativos o de grado y son las apropiadas para las mediciones que involucran cantidades o magnitudes.

Ejemplo 4.17 El tiempo que dura la jornada laboral, la demanda de trabajo a un puesto determinado, el nivel de glucosa que tiene un diabético y la presión ocular; son variables cuantitativas.

Ejemplo 4.18 La entidad por medir es la manzana, el atributo peculiar que se desea determinar es su acidez; además, una relación empírica por estudiar es si realmente las manzanas de Chihuahua son ácidas, otra relación empírica es: las manzanas de Chihuahua son más ácidas que las de Puebla; si a la manzana X se le asigna un valor de acidez de 5, para la relación de orden más acida se puede asignar la relación $>$; si se verifica que las manzanas de Chihuahua X son más ácidas que las de Puebla Y, según la idea aceptada de acidez, entonces se comprueba que el valor de acidez de X, 5 en nuestro caso, es mayor ($>$) que el asignado a Y, que debe ser menor que 5, por ejemplo 4 o 3.

4.9 Causas y tipos de errores experimentales

En la práctica es imposible lograr mediciones perfectas pues siempre se tiene un grado de error por razones tales como la precisión del instrumento de medición, la homogeneidad de los objetos de medición, las condiciones físicas de los sujetos que hacen las mediciones, etc.; por ello, una tarea del investigador y el propósito de las técnicas estadísticas es tratar de minimizar el grado de error conocido como *error estadístico e*.

> *La medición de cualquier fenómeno se conceptualiza con la expresión:*
>
> $$m = r + e \qquad (4.1)$$
>
> *Donde m representa el valor medido, r el valor real y e el error estadístico.*

Idealmente, si no hubiera error estadístico e sería cero y el valor medido y el real serían iguales:

$$m = r + 0 \therefore m = r \qquad (4.2)$$

Tal situación representa el ideal de las mediciones experimentales, pero mientras mayor es el error estadístico el valor de la observación, el dato, se alejará más del valor real; por ello siempre es conveniente por todos los medios reducir el error estadístico lo más posible.

Ejemplo 4.19 Si el glucómetro utilizado para medir el nivel de azúcar de un paciente tiene un grado de error considerable, el nivel de glucosa medido será muy diferente del real que tiene ese paciente, por lo que el diagnóstico y la prescripción del médico pueden llevarlo a consecuencias graves de salud.

En los datos que se recopilan de los experimentos siempre coexisten errores de naturaleza aleatoria causados por la heterogeneidad del material utilizado, los componentes de los sistemas de instrumentación y medición, el medio ambiente o el experimentador mismo a pesar del cuidado extremo que ponga en el trabajo experimental; por eso es necesario analizar los datos para determinar los errores, la precisión, la validez y la confiablidad general de los datos experimentales.

El experimentador siempre debe conocer la validez de los datos; por ejemplo, un ingeniero electrónico que construyó un amplificador especifica su operación si conoce la exactitud con la cual hizo las mediciones de voltaje, corriente, distorsión y otras variables. Los datos incorrectos debidos a errores obvios deben descartarse inmediatamente, no obstante, de todos los datos puntuales recabados necesita saber cuáles son los malos; no se pueden descartar aquellos que en apariencia son incorrectos porque no se ajustan a las expectativas, a menos que se observe algo obviamente malo. Si tales datos puntuales caen fuera del rango de las desviaciones aleatorias normales esperadas, entonces hay razón para descartarlos confiadamente con base en la técnica estadística del análisis de datos consistente. La eliminación de dichos datos debe ser consistente y no depender de las consideraciones subjetivas del experimentador o del sesgo basado en lo que *tiene que ser.*

Con los datos de una sola muestra algunas incertidumbres no pueden descubrirse como sucede con los datos de muchas muestras que se obtienen cuando se efectúan bastantes experimentos, de forma tal que la confiabilidad de los resultados puede asegurarse con técnicas estadísticas pero; en este último caso, el costo puede ser prohibitivo y el experimentador se conformará con datos de una sola muestra si está preparado para extraer de ella la máxima cantidad de información como sea posible. Un ejemplo de un experimento de una sola muestra es la medición de la temperatura con un solo termómetro de mercurio en el conjunto de observaciones que se efectúan; por el contrario, se tendrá un experimento de varias muestras si se utilizan dos o más termómetros de temperatura para el mismo conjunto de observaciones y el número de observaciones determinará el éxito de este experimento de acuerdo con los principios estadísticos.

Si se comete un error experimental durante el experimento y el experimentador sabe qué error fue, debe corregirlo para eliminarlo. Los errores reales en los datos experimentales acarrean incertidumbre y se ocasionan por factores vagos u obscuros. El experimentador debe determinar la magnitud de la incertidumbre y prever el procedimiento consistente para especificar la incertidumbre en forma analítica. *La incertidumbre experimental puede definirse razonablemente como la magnitud del error* que varía según las circunstancias en las que se realiza el experimento; por ello, en muchos casos se prefiere hablar de la incertidumbre experimental en vez del error experimental porque en la realidad la magnitud de un error siempre es incierta.

El primer tipo de error que puede causar incertidumbre en la medición experimental es el de los sistemas de instrumentación o el de los aparatos construidos porque pueden ocasionar *errores grandes* al grado de invalidar los datos, estos errores deben eliminarse por el experimentador. El segundo tipo de error se conoce como *error sistemático* y se presenta con magnitudes constantes que causan lecturas repetidas porque el error es constante y se ocasiona por alguna causa desconocida; este error sistemático se elimina mediante la aleatorización y puede comprobarse si los estimadores estadísticos son similares en las comparaciones de los tratamientos.

Por ejemplo, al comparar dos procesos industriales ligeramente diferentes sobre la misma maquinaria, M y T, en el cual M siempre se usa en la mañana y T en la tarde; con los resultados del experimento no se pueden separar las diferencias de cambios sistemáticos entre los procesos que pueden obedecer al funcionamiento de la maquinaria o de los operadores de los turnos diferentes. La dificultad no se resuelve calculando la significación estadística que puede interpretarse como que la diferencia de medias de los procesos M y el T es improbable que sea puramente aleatoria; pero no puede determinar cuál de las posibles explicaciones de la diferencia es la correcta. El trabajo experimental previo, el conocimiento general del proceso o las mediciones complementarias de las variables relevantes como temperatura y humedad, pueden sugerir que las diferencias entre las condiciones matutina y vespertina son grandes.

Cuando se han eliminado los errores fuertes y los sistemáticos, la diferencia entre el valor medido y el valor real del experimento se conoce como *el error aleatorio* y se caracteriza porque las variaciones erráticas que se originan en los componentes, en los dispositivos físicos o en las personas que intervienen en el experimento no muestran un patrón reproducible. Estos errores aleatorios usualmente siguen una distribución de probabilidad normal cuyas magnitudes probables se pueden medir con *el error estándar*.

El valor del error estándar conocido como la precisión del instrumento depende de:

a) la variabilidad intrínseca de los materiales experimentales;
b) la exactitud del trabajo experimental;
c) el número de unidades experimentales;
d) el número de observaciones repetidas por unidad experimental;
e) el método de análisis si este no es totalmente eficiente y
f) el diseño del experimento.

En resumen, la precisión se mejora cuando se disminuye sensiblemente el error estándar para derivar conclusiones convincentes.

El experimentador pude usar métodos teóricos para estimar la magnitud de los errores fijos; por ejemplo, si un termómetro de columna de mercurio se utiliza para medir la temperatura de un flujo de petróleo crudo que fluye en un ducto, parte del termómetro estará expuesto al ambiente circundante cuya temperatura es diferente de la temperatura del crudo y la lectura que se lee en el termómetro no será la temperatura real del crudo y no habrá mucha diferencia entre las lecturas que se tomen; siempre habrá un error resultante por las condiciones de transferencia de calor del crudo al termómetro y la magnitud de este error fijo se puede calcular teóricamente con base en las propiedades térmicas conocidas del vidrio del termómetro y del crudo.

4.9.1 Análisis del error con base en el sentido común

El sentido común, en este caso, significa examinar los datos experimentales y los resultados para detectar y eliminar los errores fijos. En algunos casos la medición de las variables primarias son las variables independientes que se combinan en una función para calcular el resultado de una variable de interés o variable dependiente; e interesa conocer la incertidumbre del resultado final causada por las incertidumbres de las mediciones primarias. Una primera regla que se usa comúnmente consiste en considerar que el error en el resultado es igual al máximo error contenido en alguna de las variables usadas para calcular el resultado; otra regla de sentido común consiste en incluir los errores de las variables dependientes en la función y calcular el máximo error en el resultado final.

Ejemplo 4.20 Si la medición de la resistencia y la corriente de un circuito están en el rango $R = 100 \pm 2\ \Omega$ y $I = 10 \pm 0.2\ amp$, según la ley de Ohm el *valor nominal* del voltaje es $V = R \times I = 100 \times 10 = 1\,000\ Volts$; ahora bien, tomando en consideración las variaciones posibles de la corriente y la resistencia se tiene $V_{máx} = (100 + 2)(10 + 0.2) = 1\,040.4\ Volts$ y $V_{mín} = (100 - 2)(10 - 0.2) = 960.4\ Volts$, con lo que la incertidumbre del Voltaje estará dentro del intervalo $-3.96\% \leq \%incertudumbre \leq +4.04\%$.

Estos cálculos son útiles para inspeccionar los datos experimentales y determinar que errores pueden resultar en un cálculo final. Conviene señalar que si los resultados de un experimento parecen estar en error por más de las cantidades indicadas en los cálculos, entonces el experimentador debe examinar los datos acuciosamente y, en particular, buscar los errores fijos de los instrumentos que puedan eliminarse aplicando correcciones teóricas o empíricas.

4.10 Análisis de la incertidumbre

Este análisis requiere especificar cuidadosamente las incertidumbres de las mediciones experimentales primarias; por ejemplo, la medida de una temperatura puede expresarse como $t = 70°C \pm 1\ °C$, donde $\pm$ significa la incertidumbre y establece con precisión el grado de exactitud dentro del cual ha sido hecha la medición; sin embargo, en si misma ésta especificación es incierta porque el experimentador duda de la exactitud de su medición.

Supóngase que se hace un conjunto de mediciones para calcular algún resultado deseado del experimento y la incertidumbre de cada medición puede expresarse con la misma disparidad, si el resultado R es una función de n variables independientes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ o sea $R = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$,

i_R es la incertidumbre de resultado; $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ son las incertidumbres de las variables independientes y si las incertidumbres de las variables independientes todas tienen la misma disparidad entonces la incertidumbre del resultado calculado basado en las incertidumbres de las mediciones primarias es:

$$i_R = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} i_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_{12}} i_2\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_3} i_3\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n} i_n\right)^2\right]^{1/2}$$

Si aplicamos esta expresión al voltaje medido anteriormente mediante la corriente y la resistencia, la incertidumbre esperada será 2.83% en vez de 4.04%.

Obsérvese que la propagación de la incertidumbre dada por la expresión depende de los cuadrados de las incertidumbres de las variables independientes, lo que significa que si la incertidumbre de una variable es significativamente mayor que la de las otras, está predominará y las más pequeñas bien pueden desecharse; por ejemplo, para el caso que nos ocupa la incertidumbre global es del orden de $\sqrt{2^2 + 0.2^2} = 2.01$. La importancia de esta consideración de las incertidumbres relativas obedece a que se gana muy poco cuando se intenta reducir las pequeñas incertidumbres, porque el cuadrado de la propagación de la más grande es la que predomina y cualquier mejora del experimento global se logra mejorando la instrumentación o las técnicas experimentales vinculadas con las grandes incertidumbres. Al subestimar la incertidumbre se ocasiona inseguridad en tanto que si se sobreestima puede llevar a descartar resultados importantes, a perder efectos reales o a la adquisición de instrumentos costosos.

En suma, un buen análisis de incertidumbre conduce al investigador a seleccionar métodos alternativos de medición y a mejorar la exactitud global de una medición vigilando las variables críticas del proceso de medición.

4.11 Escalas de medición

La necesidad de medir es evidente en las actividades humanas, por ejemplo, en el comercio se mide la cantidad de azúcar que se despacha al cliente y la cantidad de dinero que se cobra; lo mismo sucede en los trabajos técnicos o científicos; sin embargo, no sólo interesa contar con medidas sino también saber si son válidas en las aplicaciones donde se usan. Ya vimos que *la medición se define como el proceso de asignación de símbolos, generalmente números, a algún o algunos atributos de los objetos de estudio de tal forma que los describa conforme a reglas definidas con claridad.* La validez de la medición en cualquier disciplina técnica o científica tiene su apoyo en el cumplimiento de los principios de la teoría general de la medición y, en particular, en la teoría representacional de la medición, que es similar a las matemáticas porque inicia con la postulación de axiomas con los cuáles se demuestran los teoremas y las leyes. El fundamento de esta teoría representacional postula que en toda medición se debe garantizar la representación de la propiedad real medida con los símbolos o números asignados. La representación de la medición de una propiedad o atributo del objeto será adecuada si es coherente con el concepto que sobre dicho atributo comúnmente es aceptada por los expertos.

Ejemplo 4.21 Al evaluar a los atletas de alto rendimiento podemos asignar el valor cero, o algún otro, al mínimo rendimiento y otro valor de 10, 60 o 100 puntos al mayor rendimiento, según sea más práctico; los valores extremos señalan los límites o extremos de la escala, los puntos frontera; entre los cuales se asignan los rendimientos intermedios de los atletas para construir una escala que mida la variable rendimiento atlético por medio de los indicadores concretos de las actividades desarrolladas por los atletas; tales como el esfuerzo físico, los lugares que ocupen en las competencias en las que participan, los trabajos extra acondicionamiento y así. Cabe observar que los elementos de evaluación y el peso difieren entre los jueces.

Todos los instrumentos utilizados para medir aspectos cualitativos o cuantitativos necesitan una escala de referencia la cual es una sucesión ordenada de valores distintos de una misma cualidad, como sucede con la escala de colores o de dureza; o bien, una graduación que se utiliza en diversos instrumentos para medir una magnitud; así pues, una escala es un conjunto de valores ordenados en un continuo que contiene puntos frontera: un punto inicial y otro final.

Para que una escala contenga información objetiva se requiere que sea confiable, que sea internamente consistente: que los mismos objetos siempre se valoren de la misma forma; y que sean válidos: que realmente mida lo que afirma medir.

El éxito en el análisis, la síntesis y la comparación de los datos con los aspectos teóricos de los objetos bajo estudio, deviene de la medición certera de las observaciones de dicho objeto; por ello es necesario conocer el proceso de medición y las consideraciones que deben tomarse en cuenta en el trabajo estadístico con base en las técnicas estadísticas que se utilizan; porque estos dependen de la naturaleza de los datos a los que se aplican y de la naturaleza de las preguntas que se diseñan durante la planeación de la investigación. El analista selecciona el nivel de medición, que constituye la información básica de los datos de las variables analizadas según las técnicas estadísticas que aplicará; es decir, con la técnica estadística se determinan los datos a recopilar y no con los datos se elige la técnica estadística pertinente.

Cuando el analista hace observaciones de alguna clase emplea algún esquema para asignarle un dato al objeto que observa, comúnmente conocido como *codificación*, pues los objetos no son los datos sino los registros numéricos o simbólicos. Como los objetos de observación tienen varias características o atributos distinguibles, el analista debe tener claridad en el esquema de medición para retener solamente aquellas características que son relevantes a los objetivos que se pretenden lograr; por ejemplo, una manzana tiene textura, color, sabor y olor, y tal vez el sabor sea del interés del investigador porque su objetivo está centrado en la acidez.

Debe tenerse en cuenta que cualquier esquema de medición válido requiere de reglas para asignar las observaciones a los datos de forma tal que sean mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas; esto es, que a cada objeto se le pueda asignar uno y solo un valor distinto y que todos los valores posibles que cubran el rango de estudio.

> *El proceso de asignar un valor o una calificación, un dato, a cada una las observaciones del fenómeno que se estudia, constituye el proceso de medición, cuyo nivel se determina por las reglas que definen la asignación de un valor apropiado.*

Los diferentes niveles se diferencian en su exclusión y exhaustividad con base en las propiedades de ordenamiento y distancia inherentes a dichas reglas; el conocimiento e implicaciones de dicho proceso son de gran importancia para el analista porque, conviene reiterar, cada conjunto de datos medidos a un cierto nivel guarda correspondencia con una técnica estadística y como la computadora desconoce los niveles de medición que subyacen en los números que recibe, procesará estos números con independencia de los niveles; a su vez, el analista determinó la técnica particular a usar que será válida para los datos que recopiló y que la computadora procesará.

Los datos que se obtienen en el proceso de medición, las medidas de las propiedades, deben representar los atributos de los objetos que se desean caracterizar y su manejo debe preservar las relaciones existentes entre esas medidas. La definición de las medidas parte de la selección teórica de las entidades por medir, su identificación, la observación relevante e identificación de las relaciones empíricas que se pueden establecer entre las entidades reales con relación al atributo de interés; las cuales pueden ser comparaciones simples que establecen un orden o relaciones de otros tipos en cuyo caso se dice que el dominio es un sistema de relaciones empíricas. La medición asigna un valor a cada objeto para caracterizar su atributo y se debe establecer qué relación entre valores se corresponde con cada relación empírica. Asimismo, es indispensable que la medición definida no sea inconsistente con las relaciones observadas y tomar en cuenta que los atributos o las relaciones empíricas no siempre son claras; más aún, no hay un consenso sobre ellas por lo que es necesario analizar valoraciones subjetivas iniciales para mejorar la comprensión de la realidad y lograr la definición de medidas formales.

Cuando se mide se asignan símbolos, generalmente numéricos, a los objetos de interés según un conjunto de reglas predeterminadas para representar los diferentes niveles de información: nominal, ordinal o cardinal y, dependiendo del tipo de número a utilizar, se tiene el tipo de operaciones aritméticas que pueden efectuarse legalmente; lo que determina el tipo de escala que se debe utilizar.

Es usual asociar el término medición a situaciones, o funciones, en que a cada observación se le asigna un dato numérico o no numérico que representa la magnitud o cualidad de alguna propiedad cuantitativa o cualitativa. Supongamos, en general, un conjunto de objetos con alguna cantidad o grado de cierta propiedad que contienen todos ellos, tal como motivación, enfermedad, longitud, inteligencia o peso; en principio podemos asignar un número $r(o)$ a cualquier objeto o, que representa la posición para la cantidad que o tiene realmente de aquella característica.

Idealmente, sería deseable determinar directamente este número $r(o)$ mediante la medición numérica del objeto $m(o)$, es decir, que $m(o) = r(o)$ pero como usualmente no es posible lo que se hace es idear un procedimiento para aparear cada objeto con un número $m(o)$ que se llama su *medición numérica* y que constituye el dato. El procedimiento de medición que se use constituye una regla funcional que prescribe como darle a un objeto o su valor $m(o)$ y que varios valores $m(o)$ reflejen los diferentes valores $r(o)$ de los diferentes grados de la propiedad. Una regla de medición no tiene sentido si da números inconexos con las cantidades de alguna propiedad que poseen los objetos. Aún cuando nunca se pueda determinar directamente los valores $r(o)$ exactamente, es deseable encontrar números $m(o)$ que al menos estén relacionados con los $r(o)$ de manera sistemática que sean tales que la información acerca de las magnitudes reales esté contenida verdaderamente en dichas mediciones.

Los procedimientos de medición difieren en la información que proporcionan las mediciones acerca de las verdaderas magnitudes. Algunas formas de medición nos permiten hacer proposiciones fuertes sobre las diferencias o proporciones que las magnitudes verdaderas deben tener; y acerca de las diferencias reales en cantidades proporcionales de alguna propiedad que poseen los diferentes objetos. Por otro lado, algunas operaciones con los datos permiten solamente hacer inferencias suaves sobre las verdaderas magnitudes de los números medidos.

Supóngase que tenemos un procedimiento o regla de medición para asignar un número $m(o_1)$ a cada objeto observable o y definamos las siguientes proposiciones:

a) $m(o_1) \sim m(o_2)$ solo si $r(o_1) \sim r(o_2)$
b) $m(o_1) \neq m(o_2)$ solo si $r(o_1) \neq r(o_2)$
c) $m(o_1) > m(o_2)$ solo si $r(o_1) > r(o_2)$
d) $r(o) = x$ si y solo si $m(o) = ax + b$, donde $a > 0$
e) $r(o) = x$ si y solo si $m(o) = ax$, donde $a > 0$

Con estas proposiciones se establece la clasificación de Steven (1946) de las escalas de medición que corresponden a los niveles nominal, ordinal, intervalos y de razones o proporciones, usadas comúnmente por los analistas de la estadística; además, existen otras tipologías que a la fecha continúan debatiéndose.

4.11.1 Escalas de medidas cualitativas

La medición de las variables cualitativas se efectúa mediante las escalas nominales u ordinales.

4.11.1.1 Escalas de Medición a nivel nominal, de categorías o clases

Hay muchas áreas de las ciencias en la cuáles solamente se pueden agrupar las observaciones de una variable en clases, distinguiendo a cada una con un símbolo distintivo, un nombre o un número.

Este procedimiento de medición necesita de una *regla de correspondencia* para clasificar las observaciones en clases en las que un conjunto contiene las características que se consideran cualitativamente iguales o en otros conjuntos diferentes si dichas características son cualitativamente diferentes en el aspecto establecido por la regla de correspondencia. Cada observación debe pertenecer a una y solo una clase o conjunto, siendo ellas mutuamente exclusivas y colectivamente exhaustivas.

*Definición 1.- La variable X está medida en una escala nominal, si la única relación que se establece entre las modalidades es la relación de semejanza; esto es, si se satisface las proposiciones **a)** y **b)**, ya que puede decirse que una modalidad es igual o diferente a otra pero no existe ninguna otra prelación. Las diversas modalidades sólo pueden ser nombradas (nominadas) o enumeradas sin un orden preestablecido.*

Esta escala es semejante a una lista de las diferentes características que puede adoptar la variable, sin ningún otro tipo de orden o relación y entre estos valores no existe ninguna jerarquía ni se puede trazar ningún ordenamiento; no obstante, a la enunciación explícita de todas las posibilidades se considera como una escala pues, de algún modo, es útil para medir el comportamiento de la variable.

Nótese que estas mediciones son funciones con dominio en el conjunto de observaciones individuales y rango en el conjunto de las clases equivalentes o sea en la escala nominal. *Estas escalas también se conocen como escalas de categorías o de clases* y proporcionan la frecuencia de ocurrencias en cada clase o categoría de los objetos observados en términos de la variable que se estudia y, por lo tanto, *los números de estas escalas no representan un orden o dirección* y los grupos de los objetos son mutuamente excluyentes en clases exhaustivamente separadas; los que están en una clase particular son equivalentes con respecto a algún atributo particular. Ninguna de las categorías tiene mayor jerarquía que la otra y únicamente reflejan diferencias en la variable.

Este es el nivel de medición más bajo o primitivo, porque no hace ninguna suposición sobre los valores que se les asignan a las observaciones, *cada valor corresponde a una categoría distinta -de aquí el nombre de medición categorial-* y el valor en sí mismo sólo sirve como una etiqueta o un nombre *-de aquí el nombre de medición nominal-* para la categoría; adicionalmente, tampoco se hace ninguna suposición de ordenamiento o distancia entre las categorías. Debe observarse que los números asignados a las categorías nominales, se usan solamente como símbolos que la computadora registra fácilmente, no tienen propiedades cuantitativas y solamente son etiquetas identificadoras cuyos valores pueden denominarse enumerativos, de atributos o datos categóricos. *Las únicas relaciones matemáticas de las escalas nominales para las mediciones son las de igualdad y equivalencia.*

Las operaciones aritméticas básicas que se efectúan con los elementos del conjunto de los números naturales, no pueden ser transferidas a estas categorías que se codifican numéricamente porque no tienen ningún sentido. Por lo tanto, los datos que se recaban con esta escala no deben usarse en métodos estadísticos que consideran ordenamientos o distancias numéricas entre las categorías.

Cuando las variables nominales incluyen dos categorías se llaman variables dicotómicas y si incluyen más de dos se llaman variables categóricas.

Ejemplo 4.22 Algunos ejemplos de variables que se miden con la escala nominal son el sexo –masculino, femenino-; la religión -católica, cristiana, judía, protestante, musulmana, otras-; la nacionalidad – mexicana, francesa, italiana, argentina, canadiense, otras-; el tipo de enfermedad -diabetes, colitis, cáncer, psiquiatría, paludismo, otras-; las enfermedades psiquiátricas -esquizofrenia, maniacodepresiva, bipolaridad, otras-; las clases de inversiones -públicas, privadas-; los tipos de inversión - fijas, variables-; las inversiones financieras - riesgo alto, riesgo moderado, riesgo bajo-; la afiliación a los partidos políticos -PRI, PAN, PRD, PNA, PT, MORENA, ninguna-; el lenguaje de programación de un software -COBOL, BASIC, FORTRAN, C, JAVA, otros-; el cereal cultivado en un ejido -trigo, maíz, arroz, centeno, etc.-; el municipio de nacimiento de una persona -Juchitán, Tehuacán, Teotihuacán, Tepozotlán, Tultitlán; etc.-; el tipo de escuelas al que asisten nuestros hijos -pública, privada- ; la clasificación de la basura -orgánica, inorgánica-; la agrupación de los seres vivientes según la taxonomía biológica -filas, géneros, especies, otros-; la carrera elegida por un estudiante - ingeniería, filosofía, pedagogía, derecho, medicina, otra-; el canal de televisión preferido-2,4,5,7,9,11,13,otro-.

Cabe observar en estos ejemplos de variables nominales que el sexo, las clases de inversiones, los tipos de inversión, el tipo de escuela a las que se asisten nuestros hijos y la clasificación de la basura son variables nominales dicotómicas, en tanto que las demás son variables nominales categóricas; además, dentro de una categoría de la variable es posible tener subcategorías para las que se construyen otras escalas que deben ser del mismo tipo, tal como sucede con las clases y los tipos de inversión o la enfermedad psiquiátrica y sus tipos; pero lo más importante a destacar es que para trabajar con estos datos, *los números que asigna el analista a las categorías de la variable solamente representan las etiquetas de las categorías o las clases y no implican cantidades del atributo o la característica ni se pueden efectuar operaciones con ellos*; ya que si para la nacionalidad asignamos 1 a la mexicana, 2 a la francesa, 3 a la italiana y 4 a la nacionalidad argentina, por las operaciones aritméticas sabemos que $1 + 2 = 3$ pero llevada esta operación elemental a los datos nominales se obtendrán aberraciones que no tienen sentido, puesto que un mexicano más un francés no implica un italiano; o bien si PRI es 1, PAN es 2, PRD es 3 y PT es 4 ¿acaso puede decirse que PAN+PAN = PT o que PT - PRI =PRD? En resumen, con los números en esta escala no se puede efectuar ninguna de las operaciones aritméticas elementales.

4.11.1.2 Escalas ordinales

Las escalas ordinales presentan un nivel superior de precisión de la medida pues las categorías de las variables *pueden ordenarse y clasificarse respecto a* *la percepción de la cantidad del atributo que tiene la cualidad estudiada.* Cada subclase se compara con otra en términos de una relación de mayor que (>) o menor que (<) y cuando es posible ordenar o clasificar todas las categorías de la variable conforme a algún criterio o regla de correspondencia, entonces se obtiene la medición al nivel ordinal.

Ejemplo 4.23 Teóricamente, los niveles de satisfacción de los consumidores con productos nuevos son diferentes y en número infinito, pero como no hay forma de determinarlos con precisión se utiliza una escala ordinal; tampoco existe una medida en términos absolutos de la cantidad precisa de satisfacción que le causa al consumidor o bien del amor que se tiene a la esposa; además, el investigador desconoce la diferencia exacta entre los puntos de la escala de satisfacción o de amor.

El carácter cualitativo de las escalas ordinales se encuentra comúnmente en las ciencias económicas y sociales y los números no tienen ningún significado físico más allá de representar con un número más grande la respuesta más favorable porque la distancia entre dos puntos no tiene consecuencias y sólo es importante el orden o rango de los números. Los números utilizados en estas escalas no tienen carácter cuantitativo e indican solamente posiciones relativas en series ordenadas, y distinguen los diferentes valores de la variable jerarquizándolos de acuerdo a un rango que indica la existencia de una gradación entre uno y otro valor de la variable; sin embargo, la distancia entre un valor y otro no está definida; es decir, tales escalas nos esclarecen solamente el rango que las distintas posiciones guardan entre sí.

> *Definición 2.- La variable X está medida en la escala ordinal si, además de poder enumerar las distintas categorías de la variable y aplicar las proposiciones de igualdad y equivalencia, es posible aplicar la proposición de orden entre las categorías; es decir, si se satisfacen las proposiciones **a) b)** y **c)** y no tienen sentido las operaciones aritméticas.*

El uso de valores numéricos para simbolizar a las categorías no implica que alguna otra propiedad del conjunto de los números naturales pueda usarse para establecer interrelaciones de las variables de este nivel; en sí mismas, las mediciones pueden ser conjuntos de números tales como (1, 2, 3,...) (10, 20, 30,...) (100, 200, 300, ...) u otros símbolos que tengan un orden convencional tales como (a, b, c,...) o (I,I I, III,...); pero, en cualquier caso, la asignación de números o símbolos sirve solamente para ordenar a los objetos e indican cual tiene más de algo. En suma, aunque los números establecidos por las mediciones ordinales pueden manipularse aritméticamente, la respuesta de la manipulación no debe interpretarse como una proposición a cerca de las verdaderas magnitudes de los objetos, ni de las verdaderas cantidades de una propiedad.

Obsérvese que las proposiciones **a)**, **b)** y **c)** son ciertas para cada par de objetos o_1 y o_2 y con ellas puede decirse que si dos mediciones son equivalentes, diferentes o desiguales, las magnitudes reales también lo son y si una medición es mayor que otra, entonces la magnitud real de tal medición excede a la otra. Cualquier procedimiento de medición para el que las proposiciones **a)**, **b)** y **c)** son ciertas, constituye un ejemplo de escala a nivel ordinal.

Ejemplo 4.24 Para un grupo de clases equivalentes en las que se comparan pesos, alturas o durezas de materiales, se tienen relaciones típicas que pueden expresarse con el símbolo $>$ (mayor que) o $<$ (menor que) de las que pueden derivarse escalas particulares para especificar: pesa más que, es más alto que, es más difícil o es más duro que; cuyo significado especfíico depende de la naturaleza de la relación que define la escala.

Si en el grupo de clases equivalentes, se mantiene la relación $>$ o $<$ para algunos pares de clases se obtiene una escala parcialmente ordenada y, si la relación se mantiene para todos los pares de clases, de donde surge un rango ordenado completo para todas las clases, se obtiene una escala ordinal completa.

Las escalas ordinales son de un nivel de medición inmediatamente superior al de las escalas nominales en las que las categorías difieren entre si y unas categorías de la variable son mayores que o menores que otras, pues se trata de reglas de correspondencia tales como *más que, mayor que, antes de, después de, etc*. Conviene subrayar que los números no representan una cantidad pero si un orden, una posición en una serie ordenada sin que se pueda cuantificar la diferencia existente entre las posiciones sucesivas en la escala, por lo cual se habla del primero, el segundo, el tercero, el cuarto, etc.; y las etiquetas, los símbolos o los números de las categorías **sí** indican jerarquía.

Ejemplo 4.25 En Estados Unidos, la variable prestigio ocupacional se ha medido con diferentes escalas que ordenan a las profesiones según su prestigio, una de ellas es (98) ingeniero químico, (88) científico de ciencias naturales, (60) actor, (50) operador de estaciones eléctricas de potencia, (15) otros; los números entre paréntesis indican los valores de la escala. Aquí 98 tiene más prestigio que 88, 88 más que 60, y así sucesivamente; cabe observar que los números (símbolos de las categorías) definen posiciones y las categorías no están ubicadas a intervalos iguales (no existen intervalos comunes ni importan las distancias); igualmente, no puede decirse que entre un actor (60) y un operador de estaciones eléctricas de potencia (50) existe la misma distancia en prestigio que entre un ingeniero químico (98) y un científico de ciencias naturales (88); aunque en ambos casos la distancia es 10 esto es aparente porque no es una distancia real.

Ejemplo 4.26 La posición jerárquica del personal de una industria puede establecerse como: Presidente (100), Vicepresidente (90), Director general (80) Gerente de área (70) Subgerente (60) Superintendente (50) Jefe de área (40) Empleado (30) vigilante (20) e Intendente (10). En este caso, el presidente (100) es más que el vicepresidente (90), éste más que el director general (80) y así sucesivamente; pero no puede precisarse en cada caso cuanto más, aquí se tiene una escala ordinal en la cual el Presidente > Vicepresidente > Director general > Gerente de área > Subgerente y así. Al igual que con los datos nominales, tampoco se pueden utilizar las operaciones aritméticas básicas pues es absurdo y no tiene sentido decir que 30 (empleado) + 40 (Jefe) = 70 (Jefe de área), ni que 100 (presidente) - 50 (Superintendente) = 50 (Superintendente); tales supuestos son ridículos.

Ejemplo 4.27 Para una variable que mide el grado de escolaridad es cierto que una persona con 5 años de instrucción escolar ha recibido más que la de 3 años y menos que quien posee 6; no obstante, no es válido afirmar que la diferencia entre quien tiene 5 años de instrucción y quien ha recibido 3 es igual a la diferencia de quienes han recibido 14 y 12 años de educación formal. Por tanto, como no se pueden determinar las equivalencias entre las distancias que separan un valor de otro, esta escala es de categoría ordinal.

Ejemplo 4.28 Se necesitan construir escalas ordinales para medir las variables de grado de satisfacción de un bien o un servicio, calidad de atención de los servidores públicos, clasificación de clases sociales por niveles socioeconómicos donde cada categoría tiene una única posición relativa a las otras esto es, es menor en valor que algunas otras categorías y mayor que otras a menos que suceda ser la menor o la mayor. En este último caso, conocemos que la clase media es mayor que la clase baja y que la clase alta es mayor que la clase media, automáticamente decimos que la clase alta es mayor en orden que la clase baja y no sabemos que tanto menor es la clase media con relación a la clase superior, lo único que sabemos es que es menor pero no conocemos la distancia.

Ejemplo 4.29 Si a un mineral se le asigna un número que represente mayor dureza que otro, entonces podemos decir que el primer mineral tiene más dureza que el segundo y esto es todo lo que puede decirse acerca del grado de dureza que contiene cada uno de los materiales. Si por este procedimiento encontramos dos materiales en los que $\mathrm{m}(\mathrm{o}_1) = 3$ y $\mathrm{m}(\mathrm{o}_2) = 2$, es perfectamente cierto que $2 - 1 = 1$; pero no tenemos todas las bases para decir que $\mathrm{r}(\mathrm{o}_1) - \mathrm{r}(\mathrm{o}_2) = 1$. La escala de la dureza de los minerales es una escala ordinal.

Ejemplo 4.30 En odontología puede categorizarse a la variable higiene bucal como excelente, buena, mediana o pobre y pueden asignarse los números 4, 3, 2 ó 1 a esas categorías, respectivamente; pero es inapropiado y absurdo decir que las bocas con una excelente higiene oral son cuatro veces más limpias que las registradas como higiene pobre; solamente se aprecia cualitativamente que si los sujetos fueron categorizados correctamente, personas con un excelente estado (4) tienen bocas más limpias que los de buen estado (3) y así sucesivamente.

Los ejemplos citados ponen de manifiesto que las proposiciones asociadas con datos que se registran mediante las escalas nominal u ordinal son mucho más débiles no requieren mediciones fuertes y generalmente son los que se utilizan en las pruebas estadísticas no paramétricas; como las que se aplican a las escalas cuantitativas.

4.11.2 Escalas de medidas cuantitativas

Las observaciones cuantitativas utilizan las escalas de intervalos y las escalas de razones o proporciones (ambas métricas) proporcionan los niveles de mediciones científicas más altos, utilizan números cardinales con los cuáles se pueden realizar todas las operaciones aritméticas, proporcionan funciones que aparean objetos con números que permiten hacer proposiciones más fuertes en torno a las verdaderas magnitudes de las mediciones numéricas. *Su característica básica consiste en que las diferencias entre dos puntos adyacentes de cualquier parte de la escala son iguales y la única distinción real y significativa entre las escalas de intervalo y las de razón es que las primeras tienen un origen de referencia o punto cero arbitrario, mientras que en las escalas de razones el punto referencial de las escalas o el cero es absoluto*; es decir, estas escalas se distinguen por la posición que se le asigna al cero.

4.11.2.1 Escalas de intervalos

En estas escalas se establece un orden y además informa que la diferencia existente entre un valor y otro consecutivo en orden es siempre la misma. Las escalas de intervalos iguales, además de poseer la equivalencia de

> *Definición 3.- Se dice que la variable X está medida en una escala de intervalos si, además de las proposiciones **a)** a **c)** anteriores, también satisface la proposición **d)**; es posible realizar asignaciones numéricas a las diferencias formales entre las distintas categorías de la variable, lo que permite establecer una unidad empírica de medida; es posible contar cuántas veces está contenida dicha unidad de medida en la distancia entre dos categorías y; además, el punto de referencia de la escala o el cero se asigna arbitrariamente mediante una definición acordada pero no representa la ausencia completa del atributo que se mide.*

categorías y el ordenamiento interno entre ellas, como en el caso de las ordinales, se caracterizan porque la distancia entre sus intervalos está claramente determinada y son iguales entre sí; además del orden o jerarquía entre categorías se establecen intervalos iguales en la medición. Las distancias entre categorías son las mismas a lo largo de toda la escala y el intervalo constante es la unidad de medida. *En la escala de intervalos el cero se asigna arbitrariamente y no representa la ausencia completa del atributo*

La proposición **d)** establece que el número medido m(o) es una función lineal de la verdadera magnitud x.

Ejemplo 4.31 Un examen se diseñó para resolver 15 ejercicios matemáticos de igual dificultad. Si Irene resolvió los 15, Araceli resolvió 10 y Marco Antonio 5; para el número de ejercicios resueltos cabe la clasificación: Excelente, Buena y Regular, cabe el ordenamiento: Excelente > Buena > Regular y, lo más importante, la distancia entre Irene y Araceli es igual a la que existe entre Araceli y Marco Antonio, pero no puede asegurarse la proporcionalidad.

Ejemplo 4.32 Como muestra de que el punto de referencia de estas escalas es arbitrario se tiene: el año cero no significa que no existe tiempo antes de ese año, también cero grados centígrados no significa que no hay temperatura en ese punto; la diferencia entre los kilómetro 10 y 20 es igual a la diferencia entre el kilómetro 100 y 110; 23 de abril de 2001 – 23 de abril de 1980 = 21 años con independencia del año origen; 30 grados longitud Este – 20 grados longitud Oeste = 10 grados con independencia del meridiano origen de referencia; la cantidad de tiempo existente entre los años 2000 y 2009 es la misma que 1990 y 1999. Cabe observar que el origen de referencia o el cero en estas escalas es arbitrario, no es real, se asigna arbitrariamente a una categoría el valor de cero a partir de la cual se construye la escala.

Ejemplo 4.33 El ejemplo clásico de las escalas de intervalos es el de las escalas termométricas más familiares Celsius para la que el punto de congelación del agua es 0°C y Fahrenheit para la que el punto de congelación del agua es 32°F; ambas tienen un punto cero arbitrario de referencia pero ese cero no indica una cantidad de cero temperatura o ausencia de la misma ya que se pueden medir temperaturas debajo del origen de referencia de estas escalas; por lo tanto no puede afirmarse que un valor cualquiera situado en un intervalo de la escala es un múltiplo de cualquier otro punto de la escala; así, si un día se registran 28°C, no puede decirse que sea dos veces más caluroso que uno de 14°C porque conforme a la expresión $°F = \frac{9}{5}°C + 32$, proposición **d)**, sabemos que 80°F equivalen a 26.7°C, que 40°F corresponden a 4.4°C y $4.4 \times 2°C \neq 26.7°C$. Aunque 80°F son, desde luego, dos veces 40°F, no se puede afirmar que el calor de 80°F sea dos veces el calor de 40°F porque usando diferentes escalas, el calor no es dos veces mayor.

Ejemplo 4.34 Sean las correspondientes temperaturas, tanto en Celsius como Fahrenheit, para las siguientes ciudades.

Ciudad	**Temperatura** °C	**Temperatura** °F
A	0	32
B	10	50
C	40	104

Fijemos el cero y la unidad de medida en dos columnas de mercurio y a continuación observamos la temperatura en las tres ciudades medida en dichas escalas. Si la observación de A en la escala Celsius es 0 significa que el mercurio se ha estabilizado en la marca 0 para esa escala, si la observación en B es 10 significa que el mercurio se ha estabilizado 10 unidades más adelante en dicha escala, y lo mismo para la ciudad C. Aunque $C = 4 \times B$ lo que realmente podemos afirmar es que la distancia de C-A es 4 veces la distancia B-A; es decir, $C - A = 4 \times (B - A)$ permanece invariante ante un cambio de origen y de unidad de medida, como sería la temperatura en grados Fahrenheit; ya que: $104 - 32 = 4 \times (50 - 32)$ y sin embargo $C < 4 \times B$. Esto verifica el cumplimiento de la proposición **d)** que es una propiedad de las escalas de intervalos: la transformación afín $Y = aX + b$ de una variable en una escala de intervalos da lugar a una nueva variable medida en otra escala de intervalos; así, como ya se vio para las escalas de temperaturas $°F = \frac{9}{5}°\mathrm{C} + 32$.

Este nivel de medición por intervalos tiene la propiedad de que las distancias entre las categorías se definen en términos de unidades fijas e iguales, tal como las escalas en °C o °F que miden las temperaturas en términos de grados donde un grado implica la misma cantidad de calor sin importar que tal cantidad esté en la parte baja o alta de la escala; así, la diferencia entre 30°F y 31°F es la misma que la diferencia entre 80°F y 81°F. Consecuentemente, la medición al nivel de intervalo permite estudiar diferencias entre cosas pero *no sus magnitudes proporcionales*; por lo cual, para el ejemplo del termómetro, es incorrecto decir que 80°F es el doble del calor que está presente a 40°F.

En las investigaciones sociales, usualmente es difícil encontrar o definir variables medidas a nivel de intervalos, por ello un gran número de técnicas estadísticas no paramétricas están diseñadas para datos nominales y ordinales; es necesario tener en mente que las técnicas estadísticas desarrolladas para un nivel de medición determinado pueden usarse con variables de niveles más altos, pero nunca con variables medidas a niveles menores; por ejemplo, la mediana es aplicable al nivel de medición ordinal pero puede ser usada legítimamente en escalas de intervalo o de proporciones; sin embargo, no puede aplicarse a variables medidas a nivel nominal.

Más aún, a pesar de que muchos investigadores de las ciencias sociales reprueban el uso de las mediciones con escalas de intervalos por no ser adecuadas en algunos estudios del comportamiento humano, otros las utilizan porque se aproximan a ese nivel y suelen tratarlas como tales para aplicarlas a las diferencias entre las medidas numéricas, e interpretar los resultados como proposiciones acerca de las magnitudes de las propiedades básicas. No obstante, lo importante es la interpretación de los resultados numéricos relacionados con la proposición teórica cuantitativa acerca de la propiedad mostrada por el objeto, lo cual no es posible para números en escalas ordinales. Si bien podemos hacer operaciones aritméticas sobre cualquier conjunto de números, los resultados de estas operaciones no necesariamente son proposiciones ciertas de cantidades de alguna propiedad que contienen los objetos.

4.11.2.2 Escalas de razones o proporciones

Si una medición reúne los requisitos de una escala de intervalos y además tiene un punto de origen real, entonces la medición corresponde a una escala de proporciones; estas escalas de proporciones y las de intervalo son realmente cuantitativas.

*Definición 4.- Diremos que X está medida en una escala de razones o proporciones si, además de las proposiciones anteriores **a)** a **e)**, es posible realizar de forma natural asignaciones numéricas a las distintas modalidades. Ello supone la existencia de un cero intrínseco a la magnitud que estamos midiendo y una unidad empírica de medida de este modo; las asignaciones numéricas de las diferencias tendrán todas las relaciones matemáticas aparejadas con los números reales.*

Para tales escalas, las razones de mediciones numéricas -propiedad **e)**- son razones directas de las magnitudes de los objetos. Conviene insistir que *el cero es el número de referencia para toda la escala que representa la ausencia del atributo medido* e indica que en este punto de la escala no existe ninguna cantidad del atributo que se pretende medir.

Ejemplo 4.35 Cuando la medida del saldo de una tarjeta bancaria es cero significa que no hay adeudos pendientes; si una balanza marca cero no se está midiendo nada; las alturas y los pesos de las personas o los valores de las resistencias de los circuitos eléctricos se definen sobre una escala de proporciones, ya que realmente tiene origen o puntos cero de referencia sin importar la unidad de medición.

Ejemplo 4.36 El punto cero está inherentemente definido en el fenómeno observado por el esquema de medición; así, si se miden distancias físicas, la distancia cero se define de manera natural por la ausencia de cualquier distancia entre dos objetos al margen de las unidades que se utilicen (pies, metros o cualquier otra) Esta propiedad importante del punto cero, conocido como origen de la escala, permite que se puedan hacer comparaciones de proporciones o de distancias por lo que se satisfacen las propiedades **a)** a **e)** establecidas arriba.

Las escalas de razones representan la forma superior de medida, dado que poseen las ventajas de todas las escalas inferiores, las discutidas arriba más un punto cero absoluto y con sus valores pueden efectuarse todas las operaciones matemáticas.

Ejemplo 4.37 Algunos ejemplos de las variables físicas de razones son el volumen de un cuarto de refrigeración, la velocidad de transmisión de una polea, el tiempo de exposición a la televisión de un infante, el número de hijos de una familia, el valor de las ventas de un producto y el ingreso total de un negocio. Obsérvese que peso cero significa que no hay peso, si una persona tiene 90 kg de peso es válido decir que tiene el doble de otra con 45 kg o el triple de alguna otra con 30 kg. Note que estas proposiciones no son válidas para la temperatura de los objetos, pues si el primer objeto tiene una temperatura que da una lectura de 10°C y el segundo objeto da 20°C, no podemos necesariamente decir que el segundo tiene el doble de temperatura que el primero. Solamente cuando la escala es de razón se pueden aplicar directamente las operaciones matemáticas a las mediciones mismas y los resultados pueden ser reinterpretados como proposiciones acerca de las magnitudes de los objetos.

Ejemplo 4.38 Imaginemos 4 ciudades situadas sobre una línea recta

Ciudades	Puntos Km. M	Puntos Km. B
B	-60	0
M	0	60
S	40	100
C	80	140

Con relación a M, observe que la distancia entre M y C es el doble que la distancia entre M y S; sin embargo, el punto kilométrico C no es el doble que el punto kilométrico S, de hecho, al realizar un cambio de origen, las distancias siguen siendo el doble pero la razón entre los puntos no es 2; por lo cual debemos distinguir entre la escala original y la escala en que están medidas las diferencias, en ésta última las proporciones sí tienen un pleno sentido. Esto nos conduce a la última escala, la más rica de todas.

Ejemplo 4.39 Las escalas de razones o proporciones son las utilizadas comúnmente en las ciencias físicas y particularmente en la ingeniería, con ellas se miden las variables de longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, niveles de aceleración sísmica y otras variables del mundo físico. Difícilmente, las variables que se postulan en las ciencias sociales son medidas con escalas de razones, pues casi no existen casos en que estas variables puedan definirse con la exactitud y precisión necesarias.

Cabe observar que, según el propósito de medición, algunas variables pueden medirse en más de un nivel; por ejemplo, la variable antigüedad académica puede medirse en una escala de razón con categorías de días o años, o bien en una escala ordinal: bastante, regular o poca.

Puede ser que una ordenación de objetos sobre algunas bases es lo mejor que el analista pueda hacer, en cuyo caso son útiles las técnicas diseñadas específicamente para datos ordinales. Aún cuando la medición sea solamente nominal, pueden aplicarse métodos estadísticos apropiados; sin embargo, en la mayoría de las situaciones donde se hacen mediciones numéricas, pero las suposiciones del nivel de intervalo son difíciles de justificar, el usuario de los métodos estadísticos debe comprender las limitaciones impuestas por el dispositivo de medición (no por el analista); el cambio de objetos a números puede ser fácil, pero regresar de los números a las propiedades del objeto no.

Cuanto más sofisticada es una escala, se pueden hacer más operaciones o transformaciones sobre los valores obtenidos sin quebrantar su validez de representación.

Es muy importante conocer e indicar el nivel de medición de todas las variables y categorías de la investigación porque dependiendo del nivel se selecciona uno u otro tipo de análisis estadístico; por ejemplo, la prueba estadística para analizar la correlación dos variables de intervalo es muy distinta a la prueba para correlacionar dos variables ordinales. Así, es necesario tener claridad en las variables relacionadas, sus categorías y niveles de medición. La mayor parte de los métodos estadísticos paramétricos que se presentarán en los tomos posteriores, como son la construcción de intervalos de confianza, las pruebas de hipótesis y el ajuste de ecuaciones son aplicables a todas aquellas observaciones que se encuentran definidas por lo menos sobre una escala de intervalos.

Es importante entender los diferentes tipos de escalas de medida por dos razones, en primer lugar, el investigador debe identificar la escala de medida de cada variable estudiada para asegurar que no utilice datos no métricos como si lo fueran; en segundo lugar, las escalas de medición son cruciales porque determinan la técnica más conveniente para los datos, consideración hecha tanto para las variables dependientes como las independientes. Para utilizar e interpretar apropiadamente los resultados de los métodos estadísticos paramétricos en el análisis de la información cuantitativa se requiere que los datos se midan al menos en la escala de intervalos.

Una regla importante para los investigadores consiste en procurar que al hacer una medición ésta se realice en el nivel de medición más elevado posible si la investigación lo permite; primero, porque da lugar a una mayor variedad de posibilidades al momento de realizar los análisis estadísticos y, segundo, porque de ser necesario, una medición realizada en un nivel superior puede transformarse en una medición a un nivel inferior; en cambio no es posible hacer la misma operación en la dirección contraria.

Cuando nos referimos a las variables, mencionamos que estas pueden ser continuas o discretas, de la misma manera las escalas pueden ser continuas o discretas. Son discretas porque los valores que puede asumir en un intervalo son limitados, exactos y guardan correspondencia con los números naturales; en cambio, en las escalas continuas los valores que pueden existir en un intervalo particular son infinitos y guardan correspondencia con los números reales.

Ejemplo 4.40 Para el caso de medir el número de hijos, cada uno representa una unidad de conteo por lo que la escala es discreta ya que no puede tener valores intermedios como 0.5 hijos; por otro lado puede decirse que una persona pesa 56 kg, 56. 8 kg que pesa 56.8765493 kg, entre 56.8 kg y 56.9 kg existe un número infinito de valores que pueden hacer mucho más exacta la medición; es decir, que en una escala continua la medición es una aproximación pero se caracteriza porque la unidad de medida permanece invariable a lo largo de toda la escala, así se use el gramo o el kg.

Los ejemplos citados ponen de manifiesto que las proposiciones asociadas con datos que se extraen de las escalas cualitativas nominales u ordinales son mucho más débiles y generalmente se utilizan en los métodos estadísticos no paramétricos, que las proposiciones de las escalas cuantitativas de intervalo o de razones cuyos datos se aplican en los métodos estadísticos paramétricos.

4.12 Los Modelos y la simulación

En el capítulo anterior vimos los modelos desde el punto de vista filosófico metodológico, ahora los veremos desde la perspectiva práctica de la simulación.

Un modelo es un substituto o representación de un objeto o un sistema real. Puede ser de muchas formas y servir para múltiples propósitos.

Estamos familiarizados con los modelos físicos de los laboratorios de la FI-UNAM que substituyen objetos reales, las casas de muñecas, las muñecas y los cohechitos de los bebés son modelos de propósitos visuales y didácticos, una maqueta arquitectónica es un modelo que asiste en la visualización del espacio, los planos residenciales de ingeniería eléctrica son modelos que comunican la disposición espacial de los componentes eléctricos de una residencia; sin embargo, los modelos abstractos son más comunes en la investigación científica y el desarrollo tecnológico. Cualquier conjunto de reglas y e interrelaciones que describen algo es modelo de una cosa. En este sentido, todos nuestros pensamientos dependen de los modelos.

Nuestro proceso mental usa conceptos que manipulamos en nuevos arreglos, los conceptos no están en el sistema real que los representan, los conceptos mentales son abstracciones basadas en nuestra experiencia que ha sido filtrada y modificada por nuestras percepciones individuales y los procesos de organización para producir nuestros modelos mentales que representan el mundo alrededor de nosotros. Un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema es más específico que nuestros modelos mentales pero no necesariamente tan exactos.

Todos los modelos mentales, matemáticos o descriptivos representan la realidad con diferentes grados de fidelidad, pero nunca con la fidelidad completa.

Forrester postula las siguientes reglas para los modelos abstractos:

Modelos abstractos: Los modelos matemáticos de simulación pertenecen a la amplia clase de modelos abstractos los cuales incluyen imágenes mentales, descripciones literarias, reglas de conducta para los juegos, el dominó por ejemplo, y códigos legales o morales.

La utilidad de un modelo de simulación matemática debe juzgarse en comparación con la imagen mental u otro modelo abstracto que pueda ser usado en su lugar.

La validez del modelo es de importancia relativa.

Soluciones de la simulación. La conducta dinámica de un sistema social solo puede representarse por modelos que sean no lineales y tan complejos que las soluciones matemáticas analíticas son prácticamente imposibles, en cambio para los sistemas físicos solamente el proceso de simulación paso a paso mediante soluciones numéricas es posible.

Sistema cerrado: el sistema retroalimentado como sistema cerrado, es un concepto. Su conducta dinámica emerge *dentro* de su estructura interna. Cualquier interacción que es esencial para la conducta que se investiga debe incluirse *dentro* de la frontera del sistema.

Decisiones: cualquier decisión se hace dentro del circuito de retroalimentación y ella controla la acción que altera los estados del sistema que influye en la decisión. Un proceso de decisión puede ser parte de más de un circuito de retroalimentación.

Circuito de retroalimentación: es el elemento estructural básico del sistema cuyo comportamiento dinámico es generado por la retroalimentación, en sistemas complejos son ensambles de circuitos de retroalimentación interactuantes. Un circuito de retroalimentación consiste de dos tipos de variables diferentes: los niveles (estados) y las tasas (acciones); excepto las constantes, estos dos tipos de variables bastan para representar un circuito de retroalimentación.

Los estados: integran o acumulan los resultados de la acción en un sistema, las variables de estado no pueden cambiar instantáneamente. Los estados crean la continuidad del sistema entre periodos de tiempo.

Los estados solamente son cambiados por *las tasas* y una variable de estado es afectada por el cambio debido a las variables tasa, que alteran el valor del estado previo. El valor inicial del estado es llevado hacia adelante desde el periodo previo, alterado por las tasas que fluyen sobre el periodo de tiempo de interés. El valor presente de una variable de estado puede calcularse sin el valor anterior o presente de las otras variables de estado.

Las unidades de medida de las variables no distinguen entre un estado y una tasa. La identificación debe reconocer la diferencia entre una variable creada por integración y otra que es una política establecida en el sistema.

Las tasas no son medibles instantáneamente: ninguna tasa de flujo puede ser medida excepto como un promedio sobre un periodo de tiempo. *Ninguna tasa puede, en principio, controlar otra tasa* sin una variable de estado interviniente.

Las tasas dependen solamente de los estados y las constantes: el valor de una variable tasa depende solamente de constantes y/o de valores presentes de las variables de estado. Ninguna variable tasa depende directamente de otra variable tasa. Las ecuaciones tasa son proposiciones de política y de forma algebraica simple; ellas no involucran el tiempo, el intervalo de solución, ni dependen de sus valores pasados.

Las variables de estado y las variables tasa deben alternarse: cualquier trayectoria a través de las trayectorias del sistema encuentra alternadas variables de estado y variables tasa.

Los estados describen las condiciones del sistema: solamente los valores de las variables de estado son necesarias para describir completamente las condiciones de sistema. Las variables tasa no son necesarias porque ellas pueden ser calculadas desde los niveles o estados del sistema.

Meta, observación, discrepancia y acción: una ecuación de política o tasa reconoce una meta global hacia la cual interesa arribar el punto de decisión; compara la meta con las condiciones aparentes del sistema para detectar una discrepancia que la usa para modificar y guiar la acción.

4.13 Los componentes de los modelos para la simulación

Al inicio de las tareas de simulación se deben comprender y definir las secciones o bloques estructurales que integran la construcción del modelo. Aun cuando matemática o físicamente un modelo puede ser muy complicado, su estructura básica es muy simple, como se vio en la sección de los modelos matemáticos. Los modelos consisten en algunas combinaciones de los siguientes elementos.

Los componentes o elementos constitutivos: son las partes constitutivas de interés que cuando se interrelacionan conjuntamente forman el sistema; por ejemplo en la Cd de México, las componentes pueden ser el sistema educativo, el de salud, de transporte, de justicia, de cultura, de abastecimiento de bienes, etc. Vale recordar que un sistema se define como un grupo o conjunto de objetos unidos con algunas formas de interacción o interdependencia regular para efectuar una función específica.

Las variables: para la modelación y subsecuente simulación se distinguen las endógenas que están dentro del sistema por causas internas, nos referimos a ellas como *las variables de estado del sistema* para señalar las condiciones o el estado dentro del sistema; *las variables de salida o variables dependientes* para indicar que son liberadas por el sistema; y *las variables exógenas* conocidas como las variables de entrada al sistema producidas por causas externas y se les llama variables independientes del sistema.

Los parámetros o constantes: son cantidades para la cuáles durante la simulación el operador del modelo puede asignarles valores arbitrarios invariantes, que pueden asumir solamente valores que la forma de una función hace posible; por ejemplo, en el modelo $z = f(x_i, y_i) = ax_i - by_i^2$; 2, a y b son constantes o parámetros. Conviene señalar que mediante el análisis estadístico es posible determinar los valores de estos parámetros a partir de los datos de funcionamiento del sistema y es lo que se conoce como la calibración del modelo. Si los datos son de la población que interesa estudiar, los valores de tendencia central, de dispersión o de sesgo son estimadores de los parámetros de ella y se estiman con los datos de la muestra. La función esclarece la interrelación que se supone hay entre z, x_i y y_i; por ejemplo, si para X que es una variable aleatoria que se distribuye conforme a una distribución exponencial, $f(x) = \lambda e^{\lambda x}$ entonces λ es el parámetro y x es la variable.

Las relaciones funcionales: describen la estructura de las relaciones que existen entre las variables y los parámetros de manera tal que reflejan el comportamiento de los componentes y las salidas del sistema, se representan con f en nuestro caso. Estas funciones u operaciones características pueden ser deterministas o *aleatorias* dependiendo de la naturaleza de las variables. Las primeras son identidades o definiciones que relacionan las variables y parámetros cuando las salidas del proceso se determinan únicamente por las entradas específicas; en tanto que las *relaciones estocásticas* son aquellas en las que el proceso se caracteriza por tener una salida incierta para cada entrada dada. Ambos tipos de funciones toman forma de ecuaciones matemáticas que relacionan las variables endógenas, las de estado y las variables exógenas. Usualmente estas relaciones solamente pueden ser hipótesis o inferencias del análisis estadístico.

Las restricciones: son las limitaciones que se ponen a los valores de las variables o a la forma que los recursos se gastarán o asignarán y pueden ser impuestas por el investigador, por la naturaleza del sistema o por su entorno; por ejemplo, los máximos y mínimos capitales disponibles en un negocio, mínimos recursos naturales disponibles o máximos recursos humanos. La mayoría de las especificaciones de un sistema constituyen restricciones auto impuestas; por ejemplo, uno no puede ir más allá de los recursos disponibles, el diseñador no debe violar de las leyes de la naturaleza del sistema, otras restricciones son puestas por el analista para sujetar o controlar los cambios y, si es necesario, durante la simulación para relajarlas o endurecerlas.

Las funciones de criterio: son las proposiciones explícitas de objetivos y metas y los señalamientos de su evaluación. Ackoff y Sasieni (1968) anotan dos tipos de objetivos: retentivos y adquisitivos. Las primeros son aquellos que trabajan para mantener o preservar cualquier tipo de recursos que intentan rastrear como el tiempo o la energía, o establecer estados deseables tales como el confort, la seguridad y el empleo; por otro lado, los objetivos adquisitivos conciernen a la adquisición de recursos como son los beneficios, el personal y los clientes, u obtener estados: compartir el mercado, disuadir posición, etc.; que busca la organización.

Las proposiciones de criterios: son especificaciones sin ambigüedades de las metas y objetivos con los cuáles se medirá la decisión, estas proposiciones de criterio son críticamente importantes porque tienen influencia sobre el diseño y la manipulación del modelo, y una proposición errónea de criterio llevará a conclusiones erróneas. Estas funciones criterio son una parte constitutiva del modelo y su simulación se guiada por los intentos para optimizar o satisfacer los criterios establecidos.

4.14 Las funciones de los modelos de simulación

Las funciones de un modelo para simulación son usualmente la descripción, la demostración, la comparación y la explicación.

Su construcción suministra una forma sistemática, explícita y eficiente para que los investigadores, los expertos y los tomadores de decisiones enfoquen su perspicacia, intuición y juicio para lograr sus objetivos. Como se vio en el capítulo 1, con base en el paradigma el modelo es un medio efectivo de comunicación y ayuda a la razón y al pensamiento. Tal modelo será *descriptivo* si no contiene todas las variables controladas para comprender el fenómeno estudiado; por el contrario, si contiene todas las variables controladas es un *modelo explicativo* en cuyo caso predice y/o cambia las conductas características esenciales; en cambio los modelos descriptivos no son útiles para el diseño debido a que son incompletos. Conforme a Shannon (1975) las principales funciones de los modelos se resumen a continuación.

- *ayuda al pensamiento porque son medios auxiliares para organizar, clasificar y sistematizar los conceptos nebulosos y las inconsistencias,* si se construye apropiadamente, el modelo nos fuerza a organizar, evaluar, clarificar y examinar la validez de nuestros pensamientos; a diferencia de los actos para representar nuestras verbalizaciones y pensamientos en formas diferentes que frecuentemente descartan nuestras inconsistencias y ambigüedades.

- *Ayuda en la comunicación*: una figura dice más que mil palabras; las maquetas, los dibujos, los esquemas, los planos de los diseños eléctricos, estructurales, arquitectónicos, los sistemas de ecuaciones matemáticas, etc.; todos ellos son modelos que ayudan a la comunicación. Cuando las ideas son complejas o se refieren a un campo de estudio desconocido, el mismo lenguaje natural también es ambiguo; por lo que, concebido apropiadamente, un modelo es un instrumento más eficiente y efectivo de comunicación que ayuda a eliminar las ambigüedades cuya ventaja sobre las descripciones verbales es su representación concisa, precisa y maciza de situaciones o problemas para hacer más comprensible la estructura completa del sistema problema y, al mismo tiempo, revela las interrelaciones relevantes causa-efecto. No en vano los estudiantes de ingeniería estudian en sus primeros semestres dibujo o análisis gráfico y matemáticas, debido a que son lenguaje gráficos y matemáticos que modelan los fenómenos naturales de estudio común en el ejercicio de la profesión.
- *Predice las características del funcionamiento de la entidad modelada* sean éstos modelos de la realidad o bien modelos abstractos matemáticos. Es insensato construir con la sola experiencia una cortina de una presa o un sistema de control para determinar su comportamiento, lo sensato es primero construir sus modelos para imitarlos mediante la simulación y así analizar las respuestas factibles ante diferentes situaciones, predecir su comportamiento y posteriormente construirlos.
- *Es un medio experimental de entrenamiento, capacitación e instrucción para las personas que se enfrentarán a situaciones novedosas desconocidas o conocidas parcialmente*; tal como sucede con los modelos existentes en los laboratorios de Física de la Facultad de Ingeniería o con las cabinas físicas para enseñar a

comandar un avión o para indagar las causas y efectos de las plantas nucleares; o bien los juegos de negocio para adiestrar a los ejecutivos a tomar decisiones.

- *La simulación, la experimentación controlada y repetible de la realidad virtual bajo estudio representada por dicho modelo en situaciones donde la experimentación directa es costosa, impráctica, imposible o inmoral*; así, en el ejemplo de la planta nuclear no experimentamos directamente con la planta nuclear construida para conocer su comportamiento, lo que hacemos es trabajar con varios modelos de diseño, recopilar los datos bajo pruebas y modelos diferentes y analizarlos para selección la óptima, eficiente y confiable. Así pues, la simulación directa con los sistemas modelados, permite la repetitividad del experimento bajo condiciones controladas y consiste en variar los parámetros y las variables intervinientes de interés, mantener otros constantes y observar los resultados; tal como sucede en el laboratorio de termodinámica cuando un líquido se mantiene a presión constante, variamos la temperatura y registramos los volúmenes.

Por otro lado, para la mayoría de los ingenieros de sistemas cuyos objetos de estudio son sociotécnicos que, además de complejos son difíciles de manipular, como sucede en los estudios de transporte urbano o interregional; es indispensable la construcción del modelo del sistema y la experimentación vía la simulación de los factores, las variables reales e interrelaciones, como también ocurre con los de simulación de yacimientos petroleros. Otra ventaja adicional de la simulación con modelos de sistemas complejos es que se aprende más acerca de sus mecanismos internos de lo que se puede aprender en el sistema real porque el experimentador tiene bajo su control la estructura del modelo, el control de las variables, la medición de los resultados de las políticas de operación y la facilidad de variación de los parámetros.

4.15 Tipos de modelos

Existen varios ejemplos característicos, similares y ejemplares de los modelos que sustituyen el sistema de interés y que se construyen para la simulación según los objetivos que persigue el investigador sobre el objeto problema de interés, los cuáles se describen brevemente en esta sección.

Los modelos físico o icónicos, cuyo nombre deviene de ícono que se define como un signo que mantiene una relación de semejanza con el objeto representado, se caracterizan porque en algún sentido su aspecto es semejante al sistema real que se estudia y, en ellos, las propiedades relevantes de las cosas se representan por las cosas mismas pero en tamaño diferente.

Es decir, son imágenes con un cambio de escala; por ejemplo, los modelos icónicos del sol, los planetas, el universo, los grandes edificios o sistemas hidroeléctricos se escalan hacia abajo a diferencia de los modelos icónicos del átomo, las células o las moléculas que se escalan hacia arriba. Estos modelos son generalmente específicos, concretos y difíciles de manipular en experimentos concretos. Otros ejemplo de modelos icónicos son las maquetas de las casas que construyen los estudiantes de arquitectura, los circuitos electrónicos o de control que desarrollan los estudiantes de ingeniería, los que se construyen para el canal de viento del Instituto de Ingeniería de la UNAM, los que se usan en los laboratorios de la NASA; las aerolíneas también han usado modelos a escala completa para propósitos de entrenamiento; único en su tipo en México la Escuela Nacional de Música de la UNAM implementó un Laboratorio de Entrenamiento Auditivo Interactivo para ayudar a los alumnos a desarrollar este sentido, adicional a las materias de formación básica como solfeo, entrenamiento auditivo, análisis y armonía, según lo señaló Graciela Martínez (en Pérez 2008).

A su vez, *los modelos físicos icónicos pueden ser estáticos* tales como las maquetas de complejos industriales o habitacionales que ayudan a visualizar las interrelaciones espaciales o *dinámicos* como lo es una planta piloto que estudia los procesos aeróbicos o químicos antes de escalarla para la producción completa, los modelos a escala de un avión o una estructura novedosa que se someten a pruebas aerodinámicas en el túnel de viento, para analizar los esfuerzos y su estabilidad dinámica. Ambos también se usan para demostraciones o en la experimentación indirecta.

<u>Los modelos analógicos</u> son aquellos en los que las propiedades del sistema real que se estudia se representan por otras propiedades substitutivas que se comportan de manera similar, se usan para resolver el problema en el estado sustituido y re transformar la solución a las propiedades originales.

Estos modelos usan un conjunto de variables para representar al de las propiedades originales y generalmente son menos específicos y menos concretos pero a cambio son más fáciles de usar que los modelos icónicos. Las curvas de nivel de un mapa son análogas de las elevaciones, los mapas de riesgo sísmico y los de suelo característico de la ciudad de México son análogos de las regiones de peligro sísmico y de las zonas de los tipos de suelo, respectivamente; otros ejemplos de modelos analógicos son las computadoras eléctricas analógicas en las que la corriente que fluye a través de una red es análoga al flujo continuo de un bien, al agua en un sistema hidráulico, a la sangre en el torrente sanguíneo de un ser humano, al flujo de tráfico en la ciudad o en un sistema carretero.

<u>Los modelos esquemáticos y los modelos gráficos</u> son otros tipos de modelos analógicos en los que los símbolos y líneas usadas en los diagramas pueden presentar las cadenas formales de autoridad y los flujos relevantes de comunicación existentes entre los miembros de una organización; las cartas de flujo de procesos en las que varias ocurrencias.

Otras ejemplos reales representados con estos modelos son las operaciones, los retardos, las inspecciones, el almacenamiento, etc.; que se utilizan ampliamente en los estudios de ingeniería industrial; los diagramas, los planos y las plantillas que se usan en la edificación, el control, la electrónica, la instrumentación y la administración, entro otros; todos ellos son modelos analógicos esquemáticos. Las gráficas usan analogías de magnitudes geométricas para representar una ancha variedad de variables y sus interrelaciones entre ellas, como el tiempo, la edad, la distancia y las tasas de crecimiento con la gran ventaja que pueden predecir cambios de una variable cuando la otra u otras son modificadas y se usan para simular problemas de programación lineal y de juegos, por citar solo dos.

Como su nombre lo dice, los modelos matemáticos o simbólicos son aquellos en los que símbolos tales como letras, números y otros símbolos matemáticos o lógicos representan las variables y las interrelaciones del sistema estudiado; son los modelos generales y más abstractos que benefician la representación y su uso en el modelado y, al mismo tiempo, son los modelos más fáciles de utilizar en la simulación computacional.

Estos modelos simbólicos toman la forma de expresiones matemáticas, usualmente ecuaciones y desigualdades, que reflejan la estructura que se estudia; así, en la investigación de operaciones la estructura básica de sus modelos es muy simple: $U = f(x_i, y_j)$ donde U representa la utilidad o el valor de operación del sistema, x_i son las variables que pueden controlarse, y_j son las variables que no se pueden controlar pero afectan la utilidad y f es la interrelación entre la utilidad y las variables. Estos modelos son siempre una idealización abstracta de segundo nivel del problema, en el que la simplificación es necesaria por lo que se debe tener cuidado para asegurar la representación válida fidedigna del problema con las variables relevantes.

La ingeniería es una de las profesiones que utiliza comúnmente estos modelos para efectuar simulaciones y debido al auge de la computadora ha venido utilizando con mayor intensidad y profundidad dichos modelos porque expresan las características y las interrelaciones relevantes del fenómeno bajo estudio a través del lenguaje matemático tal como una sencilla ecuación, un sistema de ecuaciones ordinarias o en derivadas parciales; aunque no siempre es posible crear los modelos matemáticos en un sentido estrecho y restringido. Al estudiar los sistemas físicos comúnmente se pueden definir los objetivos, especificar restricciones y discernir su diseño conforme las leyes de la matemática y de la física y las relaciones esenciales deben descubrirse y representarse matemáticamente; en contraste, los problemas sobre contaminación prevención del crimen, o cuidado de la salud, involucran objetivos difíciles, conflictos y elecciones determinadas por factores sociales o políticos difíciles de modelar matemáticamente; por lo que comúnmente se establecen modelos cualitativos y cuantitativos para utilizarse en la simulación de los fenómenos sociales y físicos, respectivamente.

4.16 Clasificación de los modelos para la simulación

Existen muchas formas de clasificar los modelos generales y los de uso particular que se utilizan en la simulación, una de ellas es la propuesta por Shannon (1875) que se describe más adelante.

En estos modelos interactúa el ser humano y la computadora a cuyas simulaciones comúnmente se les llaman juegos. Puesto que los procesos de decisión son difíciles de modelar, en los juegos de administración el analista interactúa con la salida de la computadora que simula los otros procesos del sistema, y las decisiones sobre la información recibida se retroalimentan a la computadora como nuevas entradas del sistema problema. Más aún, pueden tenerse simulaciones completamente computarizadas en las que el investigador permanece quieto hasta que visualiza los resultados del trabajo encomendado a la computadora.

4.16.1 Modelos Analógicos Vs Modelos digitales

Además de los simuladores de vuelo o de control de pantas eléctricas, los primeros son sistemas físicos generalmente formados por elementos eléctricos, electrónicos y mecánicos con cuyas disposiciones variables las corrientes eléctricas simulan los flujos físicos tales como de agua y sanguíneos; no obstante, debido a los avances computacionales, los modelos matemáticos de las computadoras son los apropiados para la simulación digital del fenómeno modelado y para su correcto funcionamiento es fundamental la representación del conocimiento del sistema para la interpretación unívoca de los resultados. Con estos modelos simbólicos matemáticos se representa la dinámica de cualquier sistema en un entorno de simulación digital. Estos modelos mapean o sustituyen las relaciones existentes entre las propiedades físicas del sistema en las correspondientes estructuras matemáticas, y como uno de los objetivos del modelado es la sencillez, es deseable simplificar los sistemas matemáticos utilizados en la representación de las características implicadas en las dinámicas que se deseen analizar.

4.16 .2 modelos estáticos Vs modelos dinámicos

Conforme las características y los objetivos de la simulación, los modelos también pueden clasificarse en modelos estáticos Vs modelos dinámicos, donde en los primeros los resultados pueden verse como fotografías y se construyen para sistemas en estado estable que no evoluciona con al tiempo; en cambio en los segundos el tiempo es una variable imprescindible que participa en el modelo como parte sustantiva y su transcurso permite visualizar como una película la evolución de las demás variables implicadas; por ejemplo, el modelo dinámico de la evolución de un sistema simplificado que representa el principio general de la cinética y fue aplicado en problemas demográficos, de cinética de los procesos celulares y la teoría de las competencias dentro del organismo es:

$$\frac{dQ_1}{dt} = f_1(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$$
$$\frac{dQ_2}{dt} = f_2(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$$
$$\frac{dQ_3}{dt} = f_3(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dQ_n}{dt} = f_n(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$$

Donde Q_i representa alguna cantidad de elementos $p_1(i = 1,2,3, \dots n)$.

4.16 .3 Modelos deterministas Vs. Modelos estocásticos

En los primeros, su nuevo estado queda completamente determinado a partir de su estado previo y sus entradas, o sea, ofrece un único conjunto de valores de salida para un conjunto de entradas conocidas; por otra parte, los modelos estocásticos utilizan en su elaboración *variables aleatorias* para formalizar las dinámicas de interés de sistema y en la fase de simulación, además de generar un vector de salida (conjunto ordenado de números), los resultados se usan para estimar valores de las variables que caracterizan su comportamiento; en este caso se aplica la teoría de la probabilidad a los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria como ocurre en los arribos de aviones, las magnitudes de los sismos, la llegada de pasajeros a una estación del Metro, el estado de los inventarios, etc.

4.16.4 Modelos Continuos Vs. Modelos Discretos

Los modelos continuos se caracterizan por representar la evolución de las variables de interés de forma continua y suelen utilizar ecuaciones diferenciales ordinarias si se considera solamente la evolución de una propiedad respecto al tiempo, o bien ecuaciones diferenciales en derivadas parciales si se considera la evolución respecto al espacio y al tiempo; por ejemplo, la temperatura en una habitación, el nivel de agua en una presa en un sistema hidroeléctrico o el flujo continuo de los autobuses en un tramo de carretera; por su parte, los modelos discretos se caracterizan por representar la evolución de las variables de interés en puntos específicos. La adopción de un modelo discreto o continuo depende del objetivo del sistema experimental pues es posible describir un sistema discreto mediante un continuo; por ejemplo, si interesa evaluar el flujo de vehículos (variable discreta) para estudiar el control de los semáforos (variable continua).

4.16 .5 Modelos Orientados Vs Modelos combinados

Sistemas orientados a eventos discretos difieren de los sistemas discretos en que las propiedades de interés del sistema cambian en una secuencia de instantes de tiempo y permanecen constantes el resto del tiempo, se comportan como un patrón aleatorio. Los sistemas combinados consisten de subsistemas cuyas dinámicas responden a características discretas y continuas.

4.17 La Simulación

Conforme el diccionario, simular es fingir, es obtener sin la realidad su esencia, es representar algo fingiendo o imitando lo que no es; y un simulador es el sistema que imita el comportamiento de un sistema en determinadas condiciones preestablecidas.

En esencia, cada modelo o representación de una cosa es una forma de simulación, con la diferencia de que mientras los modelos representan la realidad, la simulación imita su funcionamiento.

Los modelos son medios y la simulación es el fin, es el juego ordenado y sistemático que se hace con ellos. Se simula con los modelos: no hay otra forma de hacerla.

Conforme a Shannon (1975) el concepto de simulación es muy simple e intuitivamente atractivo porque permite experimentar al investigador, jugar de manera racional y lúdica con modelos de sistemas en los que es imposible o impráctico de otra forma. Por ello, considero que la educación integral de los estudiantes de ingeniería debiera incluir los aspectos esenciales de estos métodos y los demás tópicos que se han descrito en los capítulos anteriores para usar y sintetizar con propiedad, sistematicidad y destreza los resultados de sus estudios teóricos y prácticos.

La simulación es la experimentación, sea ésta física, virtual o mental, y constituye el instrumento que utiliza como medio el modelo para captar los datos más relevantes que analizan los investigadores.

La destreza de las técnicas de simulación se obtiene solamente a través de la experiencia al comprender cabalmente el matiz de las consideraciones teóricas básicas, la filosofía y los objetivos de los problemas. Para la simulación, el modelado se apoya en el campo teórico que practica el investigador y en las matemáticas, así como en las ciencia de la computación; pero *tanto el modelado, como la simulación y la experimentación se apoyan fundamentalmente en los procesos creativos, intuitivos e imaginativos propios del ser humano* y, como a la fecha estos procesos no se han comprendido cabalmente, vale decir que la simulación y su modelado se practican artística y científicamente con pocas reglas firmes y entornos fijos; en otros términos, no existen reglas precisas ni firmes contornos estrechos para los problemas del modelado y la simulación y; puesto que las herramientas potentes dependen mucho del arte, la simulación puede proporcionar muy buenos o muy malos resultados, pueden aclarar o despistar, dependiendo de cómo se diseñe y como se use. Por lo tanto importante que el tomador de decisiones que usará los resultados esté consiente de la implicación de las hipótesis que se hacen, las fortalezas, las debilidades y tome ventaja de cualquier técnica cuantitativa.

La simulación consiste en realizar experimentos sobre el modelo del sistema de tal modo que los resultados generados por el simulador permitan prever con cierta exactitud los que se obtendrían realizando el mismo experimento, de ser posible, con el sistema real.

La complejidad inherente y manifiesta de la sociedad y sus sistemas sociotécnicos hace que su conocimiento y administración sean cada vez más difíciles. Como se vio en el capítulo dos, tal complejidad deriva de la interrelación de los múltiples subsistemas de las organizaciones y de los sistemas externos con los que interactúa. Si bien la complejidad siempre ha existido, ahora se tiene claridad y respeto de su importancia por la dificultad que entraña y reconocemos que el cambio de un aspecto de un sistema puede producir cambios más fuertes o crear la necesidad de cambios en otras partes del sistema; ahora sabemos que la ciencia del *análisis de los sistemas y la ingeniería de sistemas* ha evolucionado para auxiliar a los investigadores, ingenieros y administradores en el estudio y comprensión de la ramificación de tales cambios; también ahora sabemos con el advenimiento de las computadora y su explosivo desarrollo tecnológico su potencia, capacidad de memoria y velocidad de los cálculos; la computadora se ha convertido en una herramienta indispensable y útil para la simulación a fin de analizar el diseño y la operación de sistemas sociotécnicos y procesos complejos.

Para la simulación, un evento se define como una acción instantánea que puede o no cambiar el estado del sistema, sus elementos más importantes son:

- *Las actividades:* las tareas y acciones que tienen lugar en el sistema.
- *Las entidades*: el conjunto de objetos que constituyen o fluyen por el sistema y pueden ser temporales o permanentes, también incluyen los recursos.
- *Las entidades temporales:* los objetos que llegan, se procesan y salen del sistema, como las piezas y los documentos.
- *Los atributos:* son entidades con características diferentes tales como precio, prioridad, estado o tamaño.
- *Los recursos o entidades permanentes:* son los medios gracias a los cuáles se pueden ejecutar las actividades y definen quien o que ejecuta la actividad, se clasifican en capacidad, velocidad, tiempo de espera, tiempo de procesamiento, el transporte o las personas.

Para la simulación, el modelado es un método explícito e intelectual con propósitos experimentales que busca describir el comportamiento del sistema, construir hipótesis y teorías fundamentadas en el comportamiento observado para predecir los efectos que se producirán por los cambios en el sistema o en sus métodos de operación. Bajo esta definición, la simulación no se restringe a los experimentos con la computadora.

4.17.1 Los entornos de simulación

Un entorno del proceso de simulación debe poseer funciones potentes y flexibles para representar de forma elegante y sencilla la complejidad de los sistemas reales, para permitir modelar los elementos físicos relevantes de interés tales el flujo de agua y la altura del vaso en la presa, así como sus restricciones y las reglas de gestión y planificación.

Los entornos de simulación o módulos, ofrecen la generación de números aleatorios de las variables aleatorias que corresponden a ciertas funciones de probabilidad, la gestión automática de los proyectos y escenarios, el tiempo de simulación, las rutinas de tratamiento de los eventos que determinan el comportamiento de sistema, los métodos de diseño experimental y la generación de informes del comportamiento del sistema simulado.

Todas estas funciones redundan en una reducción apreciable del tiempo necesario para la simulación. El mantenimiento de un modelo de simulación se simplifica apreciablemente cuando se programa en un entorno especializado de simulación.

Es necesario que este entorno permita mecanismos de programación equivalentes a los lenguajes de alto nivel y el control de los flujos de la simulación. Aun cuando puede usarse cualquier lenguaje, existe una serie de características inherentes tanto a los proyectos de simulación, como a la propia evolución de los sistemas a simular que aconsejan el uso de herramientas específicas del campo de la simulación.

Las herramientas de simulación suelen contener funciones específicas para detectar errores como la aparición de bloqueos cuando se presentan divergencias. La mayoría de estas herramientas tienen interfaces gráficas de programación amigable, contienen módulos de animación y se diferencian por sus funciones y métodos de modelado.

Conforme a Guasch (2005), además del costo, facilidad de uso y calidad de las demostraciones, se necesitan otros criterios para evaluar las herramientas de simulación que se muestran en la figura 4.1, que den respuesta a las siguientes preguntas: Facilidad: ¿Cuál es el esfuerzo necesario para emplear la herramienta? Confiablidad: ¿Es robusta la herramienta? Eficiencia: ¿Es eficiente la herramienta? Funcionalidad: ¿Tiene la herramienta las funciones requeridas? Mantenimiento: ¿Es fácil modificar el programa? y Portabilidad: ¿Es fácil transportar el programa desarrollado?

Figura 4.1 Criterios de evaluación de las herramientas de simulación

Es claro que el cumplimiento de estos y otros criterios no garantiza el éxito del modelo ni de la simulación, puesto que esto reside en los conocimientos, la experiencia y la creatividad del personal que las utiliza.

4.18 El proceso de simulación

Puesto que la simulación generalmente se usa para investigar las propiedades de los sistemas reales, se distinguen las siguientes etapas del proceso, que se muestran en la figura 4.2.

a) *La definición del sistema*: determinación de las fronteras y las medidas de efectividad que se utilizarán en la definición del sistema bajo estudio.
b) *La formulación del modelo*: abstracción de sistema real a un diagrama de flujo lógico.
c) *Preparación de datos*: necesarios para el modelo y su reducción a una forma adecuada.

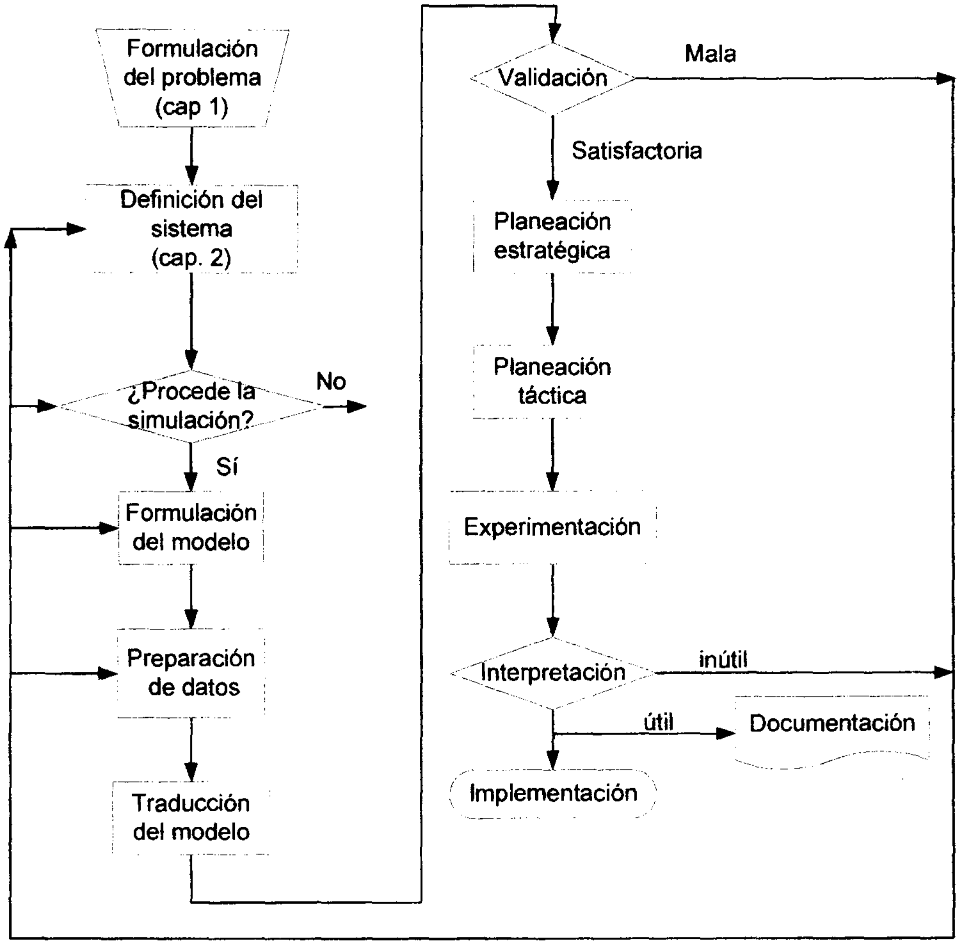


Figura 4.2 El proceso generalizado de simulación

d) *Traducción del modelo*: descripción en un lenguaje aceptable para la computadora.
e) *Validación:* incremento a un nivel de confianza aceptable de la inferencia del modelo correcto al sistema del mundo real.
f) *Planeación estratégica:* diseño de un experimento que generará la información deseada.
g) *Planeación táctica:* determinación de como se ejecutará cada corrida en el diseño experimental.
h) *Experimentación:* ejecución de la simulación para generar los datos deseados y efectuar el análisis de sensibilidad.
i) *Interpretación*: sacar inferencias de los datos generados por la simulación.

j) *Implementación:* usar el modelo y/o los resultados.

k) *Documentación*: registrar las actividades del proyecto y sus resultados, documentar el modelo y su uso.

En particular, la figura 4.3 ilustra el proceso de simulación para los diseños estadísticos de experimentos que analizaremos en el tomo cuatro de la presente obra, que corresponde a los métodos y las técnicas de estadística aplicada.

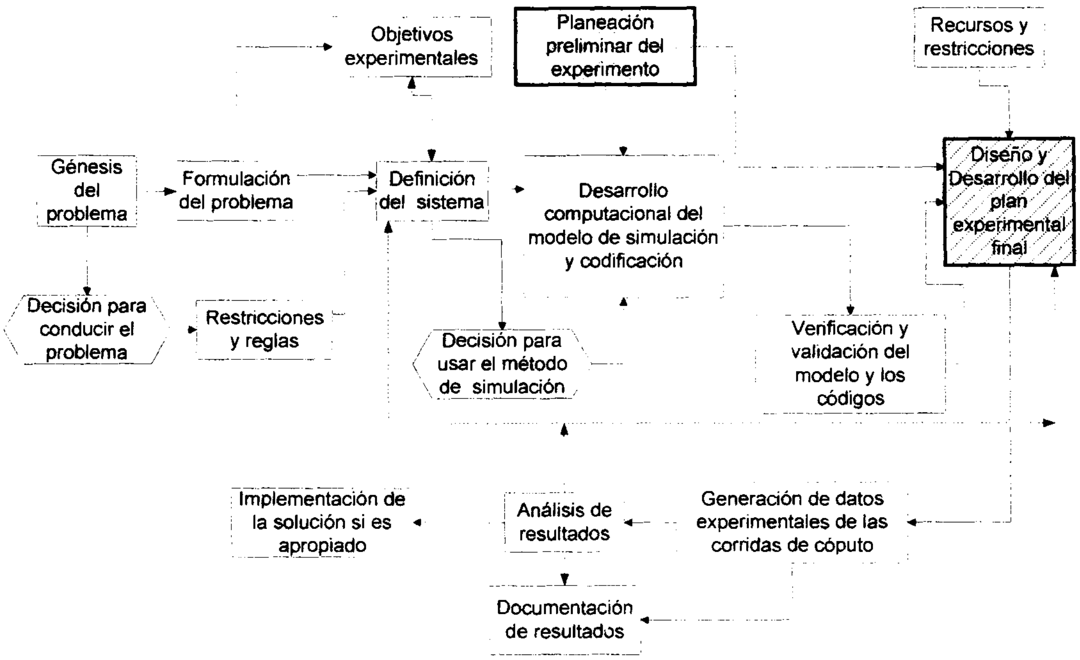


Figura 4.3 El proceso de simulación para los diseños estadísticos de experimentos

4.19 la simulación Monte-Carlo

Aunque algunos de los conceptos de esta sección se verán en el tomo de la teoría de la probabilidad, se juzga necesario comentar brevemente el muestro Monte-Carlo como un ejemplo de simulación para los sistemas que involucran componentes probabilistas o estocásticas, aunque también se utiliza en problemas completamente deterministas que no pueden resolverse analíticamente. En esta técnica los datos o experiencias artificiales se obtienen usando algún generador de números aleatorios y la distribución de probabilidad acumulada de donde se saca la muestra que, generalmente, se basa en una distribución empírica de los datos registrados de una muestra de experimentos realizados o de una distribución teórica conocida que modela aceptablemente al fenómeno de interés. Los números aleatorios se utilizan para generar una secuencia de valores que reflejaran la experiencia esperada que deberá reproducirse por la distribución de probabilidad de la cual se está muestreando.

Para sacar una muestra aleatoria artificial de una población descrita por alguna función de probabilidad, se procede como sigue:

a. Dibujar o tabular los datos de interés como una función de distribución acumulativa.
b. Elegir un número aleatorio entre $[0,1]$ con un generador de estos números o con una tabla de número aleatorios.
c. Proyecte horizontalmente el punto p sobre el eje y correspondiente a este número aleatorio hasta intersectar a la curva acumulada.
d. Proyecte hacia abajo este punto intersectado hacia el eje x.
e. Anote el valor de x, que será considerado como el valor de la muestra.
f. Repetir los pasos b) a e) tantas veces como valores de la variable aleatoria desee generar, manteniendo la pista de la secuencia en que fueron sacados.

Ejemplo 4.41 Supongamos una ventanilla de atención al público de una agencia de la CFE en la que en cualquier periodo de 10 min se presentan los clientes para solicitar algún servicio, con la distribución de probabilidad asignada que se muestra en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Distribuciones de probabilidad y probabilidad acumulada

Número de clientes	Probabilidad	Probabilidad acumulada
0	0.40	0.40
1	0.25	0.65
2	0.20	0.85
3	0.15	1.0

Estamos interesados en generar experiencia artificial para cinco periodos de tiempo.

Conforme el procedimiento descrito arriba, primero dibujamos la distribución acumulada que se muestra en la figura 4.4 a).

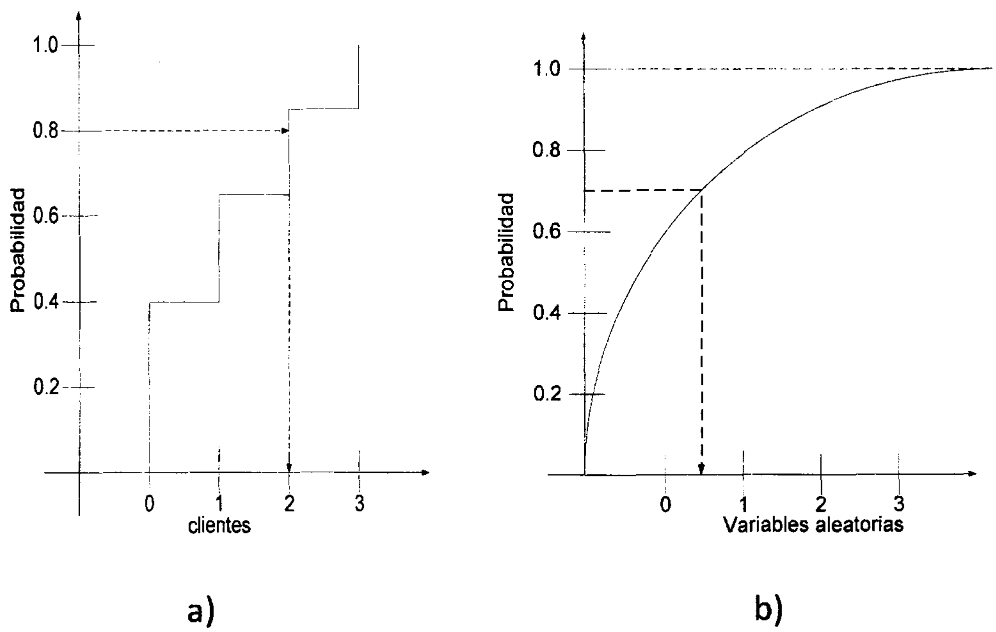


Figura 4.4 Distribución acumulada a) discreta y empírica (b) Monte-Carlo Continua

A continuación, de la tabla 1 de números aleatorios del apéndice I, sacamos cinco números de dos dígitos y colocamos un punto decimal al principio de cada uno que van a representar las probabilidades para cada periodo de tiempo. Cada una de ellas se utiliza en la figura 4.4 a) para generar el número de clientes que arriban a la ventanilla durante un periodo particular, dando por resultado la tabla 4.2, por ejemplo, para una "probabilidad" de 0.09 se obtiene de la gráfica a) 0 clientes.

Tabla 4.2 Muestra Monte-Carlo

Periodo de tiempo	Número aleatorio "probabilidad"	Número de clientes
1	0.10	0
2	0.58	1
3	0.92	3
4	**0.80**	**2 (ver gráfica)**
5	0.42	1

Si los números aleatorios siguen una distribución uniforme en el que cada número tiene la misma probabilidad de ser seleccionado, entonces cada número de los datos de interés saldrá con la misma frecuencia relativa en este proceso virtual. De esta forma hemos generado una experiencia virtual de número de clientes que llegan a la ventanilla durante cada periodo de diez minutos que es típico de lo que hemos experimentado en el mundo real.

El ejemplo anterior corresponde a un fenómeno discreto y para un fenómeno continuo el proceso es idéntico salvo que la función acumulada es una función continua como se ilustra en la figura 4.4 b) y no una función escalón como la 4.4 a). Más aún, como es común encontrar en la naturaleza fenómenos cuyas variables se distribuyen conforme una distribución normal que veremos en el tomo II, se tienen tablas de números aleatorios normales estándar $\sim N(0,1)$, de la distribución normal estandarizada con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$, que aparece en la tabla 2 del Apéndice I

CAPÍTULO 5
FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

CAPÍTULO 5
FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

*Se entiende por **conjunto***
a la agrupación en un todo
de objetos bien diferenciados
de nuestra intuición o nuestra mente.
Georg Cantor

5.1 Introducción

En los cuatro capítulos anteriores nos hemos dedicado a describir y analizar a grandes rangos algunos conceptos, campos y metodologías y métodos que configuran el contexto en el que se aplica la probabilidad y la estadística; estos son los problemas, los sistemas, la metodología de la investigación, la experimentación y la simulación. Diríase que estos temas no tiene nada que ver con la probabilidad y la estadística, no obstante, para mí son de mayor relevancia tanto para los ingenieros como para los investigadores de todas las disciplinas aunado a la escases de la bibliografía que tratan los temas contextuales de los capítulos anteriores. A partir de este capítulo hasta el final del último Tomo de la Obra, trabajaremos con las matemáticas aplicadas a la probabilidad y la estadística.

Este y los dos capítulos siguientes con los que concluye el Tomo I de la Obra estarán dedicados a repasar los antecedentes matemáticos fundamentales que se utilizan en la teoría de la probabilidad; por ejemplo, como veremos en el Tomo II, en la teoría de la probabilidad debemos asignar o calcular probabilidades a los eventos de los fenómenos aleatorios bajo estudio, sea éste discreto o continuo. Matemáticamente hablando, para este último caso los eventos se calculan utilizando el cálculo integral y todos los eventos se representan con conjuntos; por lo que en este capítulo analizaremos sus tópicos fundamentales para tenerlos presentes en el estudio de la probabilidad.

Los objetivos de este capítulo son reconocer los conceptos, las notaciones y las operaciones fundamentales de la teoría de los conjuntos, y aplicarlos con eventos que se estudian en la teoría de la probabilidad por medio de algunos ejercicios.

5.2 Historia de la teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que data de finales del siglo XIX y estudia una clase de entidades llamadas *conjuntos*. El precursor de esta teoría fue el matemático ruso, alemán Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845-1918) a partir de sus reflexiones sobre las series trigonométricas de Fourier. Su propósito era proporcionar un método para lidiar con asuntos relativos al infinito, concepto que al considerarlo sin significado fue rechazado por matemáticos tales como Pitágoras, Gauss y Kronecker. Cantor partió de la convicción platónica de que era posible empaquetar una colección de objetos, considerarla como una sola entidad y, al parecer, aceptando implícitamente los tres supuestos siguientes:

a. *Un conjunto es una reunión de objetos, llamados los elementos de ese conjunto que cumplen con cierta propiedad y que, por tanto, queda definido por tal propiedad.*
b. *Un conjunto es una sola entidad matemática, de modo que puede a su vez ser contenido por otro conjunto.*
c. *Dos conjuntos que tengan los mismos elementos son iguales. Así, puede decirse que un conjunto está determinado por sus elementos.*

Con estos supuestos, Cantor desarrolló su teoría que en aquel entonces parecía satisfactoria; no obstante, su sistema era tan permisivo que dio lugar a resultados contradictorios. Gottlob Frege, creó un sistema más robusto para fundamentar adecuadamente la teoría de conjuntos que Bertrand Russell la descubrió en la llamada *paradoja de Russell.* A principios del siglo XX, el matemático alemán Ernst Zermelo sustentó la teoría de conjuntos sobre una base aceptable que eliminaba la *Paradoja de Russell* y sus ideas fueron precisadas posteriormente por Thor Alf Skolem y Abraham Fraenkel quienes dieron origen a la primera teoría axiomática de los conjuntos conocida como la teoría de Zermelo-Fraenkel; más adelante, otra teoría de conjuntos que evitaba las paradojas de la teoría de Cantor fue desarrollada por los autores a cuyo nombre se debe la actual teoría de conjuntos: Von Neumann-Bernays-Gödel.

5.3 Conjuntos, elementos de los conjuntos y tipos de conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos bien definidos, cuya correcta y precisa definición nos permite discernir si un objeto pertenece o no al conjunto bajo estudio; es práctica común simbolizarlos con letras mayúsculas, griegas o Españolas tales como $A, F, \Pi, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ó $\mathbb{U}$.

Los conjuntos son a su teoría como los sucesos o eventos son a la teoría de la probabilidad, por lo cual nos referiremos a ellos indistintamente.

A los objetos del conjunto se les llama elementos o miembros del conjunto.

Precisando que el término objeto no se interpreta en el sentido literal, puesto que ellos pueden ser los posibles resultados observables de un experimento aleatorio de un fenómeno, de un suceso o aún todas las posibilidades lógicas de las formas en que algo puede suceder; es decir, *los elementos de un conjunto son representaciones de los objetos reales*, como los tornillos defectuosos, la intensidad de los sismos, los nombres de los miembros de una familia, los números o las letras. Dependiendo del contexto en el que estemos trabajando se tienen varias alternativas para denotar a los elementos del conjunto pero si como dijimos los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, por ejemplo B, a sus elementos se denotan con las minúsculas correspondientes, o sea b_i.

El símbolo ∈ corresponde al de pertenencia; así $b \in B$ significa que b es un miembro, elemento o punto que pertenece a B. Como es de esperarse, el símbolo ∉ significa la no pertenencia al conjunto bajo estudio.

Ejemplo 5.1. Si se tira una corcholata, descartando la especulación de que caiga parada; el conjunto de los posibles resultados lo denotamos con A, a a_1 el resultado *cae corcho* y a_2 al otro resultado *cae lata*; con lo cual $A = \{a_1, a_2\} = \{corcho, lata\}$; *que se conoce como la representación exhaustiva de un conjunto,* en este caso de A.

Obsérvese que a los elementos de un conjunto se les delimita entre llaves. En la teoría de la probabilidad los subconjuntos son eventos.

Es muy útil la representación de los conjuntos mediante los conocidos diagramas de Venn, que se ilustran en la figura 5.1.

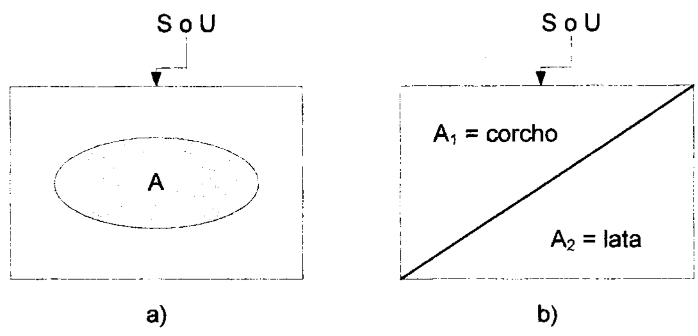


Figura 5.1. a) Diagrama de Venn y b) Representación del ejemplo 1 en un diagrama de Venn

Ejemplo 5.2 Liste los elementos de cada uno de los siguientes eventos:

a) El conjunto de enteros que se encuentran entre uno y cincuenta, y que son divisibles por ocho. R: $A = \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$.
b) El conjunto $B = \{x | x^2 + 4x - 5 = 0\}$.
R: $B = \{1, -5\}$, porque son las raíces de la ecuación.
c) El conjunto de resultados que se obtienen al lanzar una moneda hasta que aparece un sol (s) o tres águilas (a).
R: $C = \{s, as, aas, aaa\}$.
d) el conjunto $D = \{x | 2x - 4 \geq 0 \; y \; x < 1\}$
R: El conjunto $D = \Phi$, porque no existen elementos que satisfagan la regla.

Con referencia a los incisos b) y d) obsérvese *la otra forma matemática de representar a los conjuntos es mediante expresiones matemáticas*.

Ejemplo 5.3 El espacio muestral que se ilustra en la figura 5.2 consta de los puntos que se encuentran en el primer cuadrante, dentro de un círculo de radio igual a tres; sin considerar los de la frontera, se expresa matemáticamente como

$$\mathbb{S} = \{x, y | x^2 + y^2 < 9, x > 0, y > 0\}$$

Si se consideran los puntos frontera se tiene

$$\mathbb{S} = \{x, y | x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$

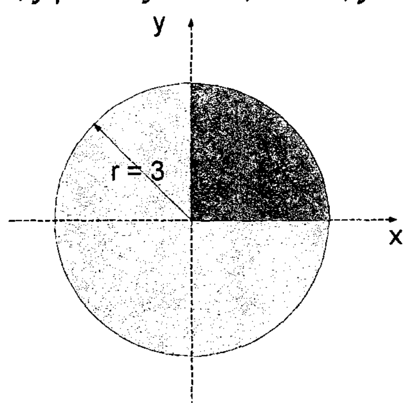


Figura 5. 2 El conjunto del primer cuadrante

5.4 Cuantificadores

Los cuantificadores indican *cuantos* elementos de un conjunto dado cumplen con cierta propiedad. Tales cuantificadores son:

- *El cuantificador universal, representado por* $\forall$, se emplea para afirmar que *todos* los elementos de un conjunto D cumplen con determinada propiedad $p(x)$ y se escribe $\forall x \in D\ p(x)$.
- El *cuantificador existencial,* representado por $\exists$, se utiliza para indicar que al menos un elemento de un conjunto D cumple con una propiedad $p(x)$ y se escribe $\exists x \in D\ p(x)$, mientras el símbolo $\nexists$ es el cuantificador no existencial.

5.5 Conjuntos universal, vacío y subconjuntos

El conjunto universal se representa con $\mathbb{U}$, en la teoría de la probabilidad se conoce como el Espacio Muestral y se denota con S, *es el que contiene a todos sus elementos bien definidos, todos los posibles resultados de un experimento o todas las posibilidades lógicas.*

Se usa como marco de referencia para seleccionar de él colecciones de sus elementos a las que se llaman *subconjuntos* (ver figura 5.1). Como los subconjuntos son conjuntos, entonces se sigue la mima notación para representarlos; es decir, las letras mayúsculas españolas o griegas.

A es un subconjunto de $\mathbb{F}$, si para $\forall x \in A$ también $x \in \mathbb{F}$, cuya notación matemática es $A \subseteq \mathbb{F}$, en cambio, si todos los elementos de A son elementos de $\mathbb{F}$ y al menos un elemento de $\mathbb{F}$ no está en A, entonces A es un subconjunto propio de $\mathbb{F}$ simbolizándose como $A \subset \mathbb{F}$.

Cabe señalar que si $A \subseteq \mathbb{F}$ no se excluye que $A = \mathbb{F}$ *y significa que dos conjuntos son iguales si ellos contienen los mismos elementos.*

Ejemplo 5.4 ¿Cuáles de los siguientes eventos son iguales?

a) $A = \{1{,}3\}$
b) $B = \{x|x\ es\ un\ número\ de\ un\ dado\}$
c) $C = \{x|x^2 - 4x + 3 = 0\}$
d) $D = \{x|x\ es\ el\ número\ de\ águilas\ \ al\ lanzar\ seis\ monedas\}$

R: $A = C$ Puesto que las raíces de la ecuación C son 1 y 3, y $B \neq D$ ya que no son sucesos equiparables puesto que el cero cabe en D pero no en B.

Ejemplo 5.5 Si se tira una moneda, los posibles resultados son $s_1 = águila$ y $s_2 = sol.$ el conjunto universal o espacio muestral es $\mathbb{U} = \{águila, sol\} = \{s_1, s_2\} = \mathbb{S}$.

Al conjunto que no contiene elementos en el contexto de estudio se define como el conjunto vacío o conjunto nulo y se denota con Φ. Todo conjunto es subconjunto del conjunto universal en estudio y el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, o sea $\Phi \subseteq A \subseteq \mathbb{U}$. El ejemplo 3 d) es un caso del conjunto vacío.

Ejemplo 5.6 Con relación al ejemplo 5.1 $A = \{corcho, lata\}$ $a_1 = corcho\ y\ a_2 = lata$ son los posibles resultados del experimento. En este ejemplo A es el conjunto universal y se denota con $\mathbb{U}$, mientras que desde la teoría de la probabilidad se le conoce como espacio muestral y se le denota con $\mathbb{S}$; por ello $\mathbb{U} = \mathbb{S} = A$.

Ejemplo 5.7 En el ejercicio anterior Φ, $B = \{corcho\}$, $C = \{lata\}$ y $\mathbb{U}$ son todos los posibles subconjuntos de $\mathbb{U}$; cabe observar que con los dos elementos de $\mathbb{U}$, se tienen $2^2 = 4$ subconjuntos; pues un conjunto es subconjunto de sí mismo.

En general, un conjunto con *n* elementos contiene 2^n subconjuntos dos de los cuales son Φ y $\mathbb{U}$.

Ejemplo 5.8 En el ejemplo de la moneda $\mathbb{U} = \{águila, sol\} = \{s_1, s_2\}$ se tienen $2^2 = 4$ subconjuntos, eventos o sucesos. Observe que, en el contexto del lanzamiento de la moneda, el elemento *corcho* no existe en $\mathbb{S}$ en cuyo caso esΦ.

Ejemplo 5.9 Si se tira un dado no cargado, el conjunto universal o el espacio muestral de los posibles resultados es $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5,6\} = \{x|x \in \mathbb{N} = conjunto\ de\ los\ números\ naturales, 1 \leq x \leq 6\}$ y tiene $2^6 = 64$ subconjuntos o miembros de la familia $\mathcal{F}$ de $\mathbb{S}$ incluyendo a $\mathbb{U}$ ó $\mathbb{S}$ y Φ.

Ejemplo 5.10 Si el conjunto universal es el de las vocales $\mathbb{U} = \{a, e, i, o, u\}$, se tienen $2^5 = 32$ subconjuntos o eventos o miembros de la familia: $\mathcal{F} = [\Phi, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{o\}, \{u\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{a, o\}, \{a, u\}, \{e, i\}, \{e, o\},$

$$\{e, u\}, \{i, o\}, \{i, u\}, \{o, u\}, \{a, e, i\}, \{a, e, o\}, \{a, e, u\}, \{a, i, o\}, \{a, i, u\}, \{a, o, u\},$$
$$\{e, i, o\}, \{e, i, u\}, \{e, o, u\}, \{i, o, u\}, \{a, e, i, o\}, \{a, e, i, u\}, \{e, i, o, u\}, \{a, i, o, u\},$$
$$\{a, e, o, u\}, \mathbb{S}]$$

Ejemplo 5.11 Para cada uno de los espacios muestrales de los siguientes experimentos se tienen las representaciones anotadas.

a) Una sonda espacial medirá la temperatura en grado Kelvin, 20 Km arriba de la superficie de un planeta a las 14 hr el próximo lunes. $\mathbb{S} = \{s|0 \leq s < \infty, s \in \mathbb{R}\}$.
b) El número de los 50 estudiantes del grupo de Probabilidad que aprobarán al final del semestre. $\mathbb{S} = \{s|0 \leq s \leq 50, s \in \mathbb{N}\}$.
c) En una encuesta sobre empleo a 1,000 personas se les pedirá que contesten SÍ o NO a la pregunta ¿Está usted empleado? y solamente el número de respuesta NO será registrada. $\mathbb{S} = \{s|0 \leq s \leq 1{,}000, s \in \mathbb{N}\} = \{s_i|0 \leq i \leq 1.000, i \in \mathbb{N}\}$.
d) Un ingeniero geofísico desea determinar la reserva de gas natural en un área particular. El volumen será dado en metros cúbicos (m^3).
$\mathbb{S} = \{v|0 \leq v \leq v_{máx}, v_{máx} = volumen\ máximo\ posible\ (m^3)\}$

5.6 Conjuntos Ordenados y Conjuntos Numéricos

Un conjunto con elementos o puntos de una sola dimensión es ordenado si se establece un criterio que permita conocer, para cada elemento cual le antecede y cuál le precede.

Ejemplo 5.12 El conjunto de mis hijos por edades de mayor a menor es $A = \{Bernardo, Alberto, Armando, Emma, Sarita\}$. Además, el inciso a) del ejemplo 5.2, es un conjunto ordenado de menor a mayor.

El conjunto de los números naturales $(\mathbb{N})$ *consiste de los números que se utilizan para contar:* $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ o sea es el de los números enteros positivos.

El conjunto de los números enteros $(\mathbb{Z})$ *es aquel cuyos elementos son los enteros positivos, los negativos y el cero:* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$. Obsérvese que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

El conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$ *que tienen como elementos a los números fraccionarios* $p \div q$, *con* $p, q \in \mathbb{Z}$ *y* $q \neq 0$.

En tanto que *el conjunto de los irracionales* $(\mathbb{I})$ *es el conjunto de números que no son racionales,* o sea que no pueden escribirse como el cociente de dos enteros. A este último pertenecen los números π, e y todos aquellos cuyo número de decimales aperiódicos es infinito.

Con todos estos conjuntos podemos definir al *conjunto de los números reales* $(\mathbb{R})$ *como el formado por la unión de los racionales y los irracionales:* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. (" $\cup$ " se verá más adelante).

Dos son los importantes en la probabilidad, el conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$) que se utiliza en los fenómenos aleatorios discretos y el de los reales ($\mathbb{R}$) para analizar los fenómenos aleatorios continuos.

5.7 Clases o familias de conjuntos y particiones de conjuntos

Al conjunto $\mathcal{F}$ formado de todos los posibles subconjuntos del espacio muestral o conjunto universal incluyendo a $\mathbb{U}$(ó $\mathbb{S}$) y Φ se llama clase o familia de conjuntos de $\mathbb{S}$, y es la base para la definición de probabilidad. A la familia de un conjunto C también suele llamarse conjunto potencia de C y denotarse como $\mathcal{P}(C)$.

Ejemplo 5.13 El ejemplo 5.10 muestra la familia o clase del conjunto de las vocales. Como otro ejemplo más supongamos un experimento consiste en anotar si, con relación al dólar, la cotización del peso para mañana será $\mathrm{a = mayor, b = igual\ o\ c = menor}$ que hace exactamente una semana. Como $\mathrm{n} = 3$ la familia tiene $2^3 = 8$ eventos, sucesos o subconjuntos que son

$$\mathcal{A} = \{\Phi, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{a, b}\}, \{\mathrm{a, c}\}, \{\mathrm{b, c}\}, \{\mathrm{a, b, c}\}\}.$$

Se llama partición de un conjunto A a una subdivisión de A en subconjuntos no vacios que no tienen elementos en común y cuya unión es A, o sea a la familia de subconjuntos de A, tales que cada $a \in A$ pertenece a un único subconjunto o miembro de la familia al que se le llama célula.

Ejemplo 5.14 En el ejemplo 5.9 $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $\mathcal{B} = [\{1,5,6\}, \{2\}, \{3,4\}]$ constituye una partición de $\mathbb{U}$ en tres células, pero $\mathcal{C} = [\{1,2,3\}, \{2,4,5\}, \{6\}]$ y $\mathcal{D} = [\{1,3\}, \{2,4\}, \{6\}]$ no son particiones de $\mathbb{U}$ porque en $\mathcal{C}$ el 2 está repetido y en $\mathcal{D}$ no está incluido el 5.

Las particiones establecen una serie de conjuntos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos y para el caso del conjunto universal, o espacio muestral se dice que $A_i, i = 1,2,3, \dots k$ establecen una partición de orden k si la unión de ellos constituye el conjunto universal.

5.8 Conjuntos finitos o discretos e infinitos o continuos

Los objetos de estudio de la probabilidad son los fenómenos aleatorios que se clasifican en discretos y continuos, por lo que para su estudio correcto se necesita de los conjuntos finitos e infinitos que dependen de las propiedades de sus elementos.

Los conjuntos finitos y contables, son aquellos cuyos elementos establecen una relación biunívoca con los números naturales; en la teoría de la probabilidad estos conjuntos representan a los fenómenos aleatorios discretos y se llaman eventos o sucesos discretos.

Ejemplo 5.15 En un estudio de calidad industrial, se saca una muestra de diez automóviles para probar el sistema de enfriamiento en cuyo caso el número de automóviles que pueden resultar defectuosos es $D = \{0,1,2,3,\ldots 10\}$.

Un conjunto es infinito contable si sus elementos pueden ordenarse en una sucesión y cada elemento puede ponerse en correspondencia con el conjunto de los números naturales.

Un conjunto es infinito incontable si sus elementos pertenecen al conjunto de los números reales.

Este conjunto es especialmente importante en la probabilidad para la modelación de los fenómenos aleatorios continuos en los cuales el número de elementos es infinito por lo que se llaman *conjuntos, eventos o sucesos continuos*.

Ejemplo 5.16 Los ejemplos 5.1 y 5.2 son casos de conjuntos discretos, en particular, en el ejemplo 2 d) se tiene el conjunto vacío Φ.

a) $P = \{p|p = x^2, x \in \mathbb{N}\} = \{1,4,9,16,\ldots\}$ es un conjunto es infinito contable y un subconjunto de este conjunto es $D = \{1,4,9\} = \{p|p = x^2, 1 \leq x \leq 9, x \in N\}$ o bien $T = \{1,4\} = \{p|p = x^2, 1 \leq x < 9, x \in N\}$. Obsérvese que en estos casos los puntos frontera *SÍ* importan.

b) $Q = \{q|2 \leq q \leq 3, q \in \mathbb{R}\}$ es infinito e incontable o evento continuo y, en virtud de que el número de puntos de Q es infinito bien puede considerarse que $Q = G = \{g|2 < g < 3, g \in \mathbb{R}\}$.

Observe que, a diferencia de los conjuntos discretos, en el caso de los conjuntos continuos *los puntos frontera NO importan*.

En el ejemplo 11, a) y d) son conjuntos o espacios muestrales infinitos o continuos en tanto que b) y c) son conjuntos o espacios muestrales finitos o discretos; todos los cuales están representados matemáticamente y no exhaustivamente.

Ejemplo 5.17 Si estamos interesados en el diseño de la cortina de una presa para un sistema hidroeléctrico por construirse, y se decidió que la altura de la cortina es de 120 m; entonces, el tirante, que es la distancia desde la base de la cortina hasta la altura que puede alcanzar el agua tiene, como posibilidades, un conjunto universal infinito de valores que van, conforme la teoría de conjuntos:

$\mathrm{U} = \{0.000001\ldots, 0.00001\ldots, 0.0001, \ldots\}$, que por ser impráctico de representar se utiliza la notación $\mathbb{S} = \{s | s \in \mathbb{R},\ 0 \leq s < 120\}$. Obsérvese que en este caso el número de elementos del conjunto universal o del espacio muestral es infinito como también lo son cualquiera de sus subconjuntos o eventos, tales como $A = \{x|10 \leq x < 100\}$ o $B = \{x|30 < x < 50\}$.

5.9 Intervalos

En la probabilidad también es común tratar con eventos que se expresan como conjuntos restringidos o acotados y pueden ser abiertos o cerrados.

Si se observa con detenimiento, los intervalos también son conjuntos, en muchas ocasiones los sucesos o eventos que acaecen en la realidad se representan con intervalos discretos, que son conjuntos finitos, o continuos, que son conjuntos infinitos de su espacio muestral o conjunto universal sobre el eje de los números reales. Entonces, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, se definen los siguientes intervalos que se ilustran en la figura 5.3.

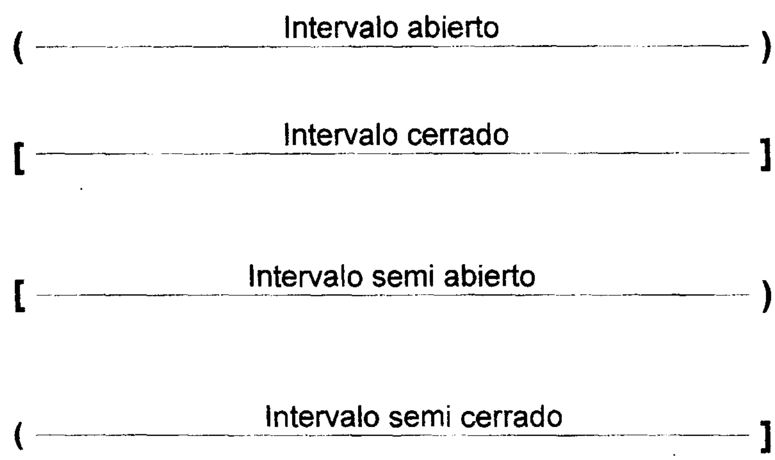


Figura 5.3 Representación de los intervalos

Un intervalo es abierto si no se consideran sus puntos frontera, se denota como (a, b) y se expresa por

$$A = (a, b) = \{x|a < x < b\}.$$

Un intervalo es cerrado si se consideran sus puntos frontera, se denota como $[a,b]$ y se representa por medio de:

$$A = [a,b] = \{x|a \leq x \leq b\}.$$

Un intervalo es semiabierto por la derecha si no se considera su punto frontera de la derecha, se denota como $[a,b)$ y se define por:

$$A = [a,b) = \{x|a \leq x < b\}.$$

Un intervalo es semiabierto por la izquierda si no se considera su punto frontera de la izquierda, se denota como $(a,b]$ y se define por:

$$A = (a,b] = \{x|a < x \leq b\}.$$

Los Intervalos infinitos son aquellos que no están acotados por ninguno o por alguno de sus lados:

$$(a,\infty) = \{x|x > a\};$$
$$[a,\infty) = \{x|x \geq a\};$$
$$(-\infty,a] = \{x|x \leq a\};$$
$$(-\infty,a) = \{x|x < a\}$$

Ejemplo 5.18 Un automovilista es detenido por conducir erráticamente y le miden el contenido de alcohol en la sangre cuyo límite es 0.10. El espacio muestral y el evento $A = \{El\ nivel\ excede\ el\ límite\ legal\}$ son

$$\mathbb{S} = \{s|0 \leq s \leq 0.10, s \in \mathbb{R}\} \text{ y } A = \{a|a > 0.10\}$$

5.10 Las operaciones con conjuntos

La unión de los conjuntos A y B, que se simboliza con ∪ y se ilustra en la figura 5.4 a), es un nuevo conjunto C constituido por todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos; y se expresa como:

$$C = A \cup B = \{x|x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó a ambos}\};$$

Expresión que puede generalizarse para más de dos conjuntos.

La intersección de los conjuntos A y B, cuyo símbolo es ∩ y se muestra en la figura 5.4 b), es un nuevo conjunto C en el que sus elementos pertenecen tanto como A como a B, cuya expresión matemática es

$$C = A \cap B = \{x|x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Al igual que con la unión, la intersección puede generalizarse para más de dos conjuntos.

Si la intersección de los conjuntos A y B es igual al conjunto vacío $A \cap B = \Phi$, entonces A y B son conjuntos disjuntos o mutuamente excluyentes. En general, si $\forall A_i \subset U \; para \; i = 1,2,3,..,k$, se tiene que $A_i \cap A_j = \Phi$, $j = 1,2,3,..,k$ y $\forall A_i \neq A_j$ entonces los conjuntos A_i son disjuntos o mutuamente excluyentes.

Más aún, si $A \cap B = \Phi$ y la unión de los conjuntos A y B forman el conjunto universal U ($ó \; \mathbb{S}$) entonces se dice que A y B son colectivamente exhaustivos $A \cup B = U$. En general, si $\forall A_i \subset U, i = 1,2,3,..,k$; se tiene que $A_i \neq A_j, j = 1,2,3,..,k$, se cumple $A_i \cap A_j = \Phi$ y $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k = U$; entonces los conjuntos A_i son colectivamente exhaustivos.

El conjunto complemento o complemento de A, que se denota como $\bar{A}$ o A' y se muestra en la figura 5.4 c); es un nuevo conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal U que no están en el conjunto A y se expresa como:

$$\bar{A} = A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$

Obsérvese que $A \cup A' = U$ y $A \cap A' = \Phi$.

La diferencia entre los conjuntos A y B, que se simboliza como $A - B$ y se ilustra en la figura 5.4 d) es un nuevo conjunto C que contiene los elementos de A que no son miembros de B, se representa por

$$C = A - B = \{x | x \in A \; y \; x \notin B\}.$$

Cabe observar que $A - B = A \cap \bar{B} \neq B - A = B \cap \bar{A}$.

El conjunto producto de A y B, representado por $A \times B$ e ilustrado en la figura 5.5, es el nuevo conjunto formado por todas las posibles <u>parejas ordenadas (a, b)</u> que asocia a cada elemento de A todos los de B:

$$C = A \times B = \{(a, b) | a \in A \; y \; b \in B\}.$$

El número total de parejas posibles es el número de elementos de A veces el número de elementos de B; es decir, si A tiene *n* elementos y B tiene *m*, entonces $A \times B$ tendrá $n \times m$ elementos. Debe insistirse en que *en el conjunto producto importa el orden.*

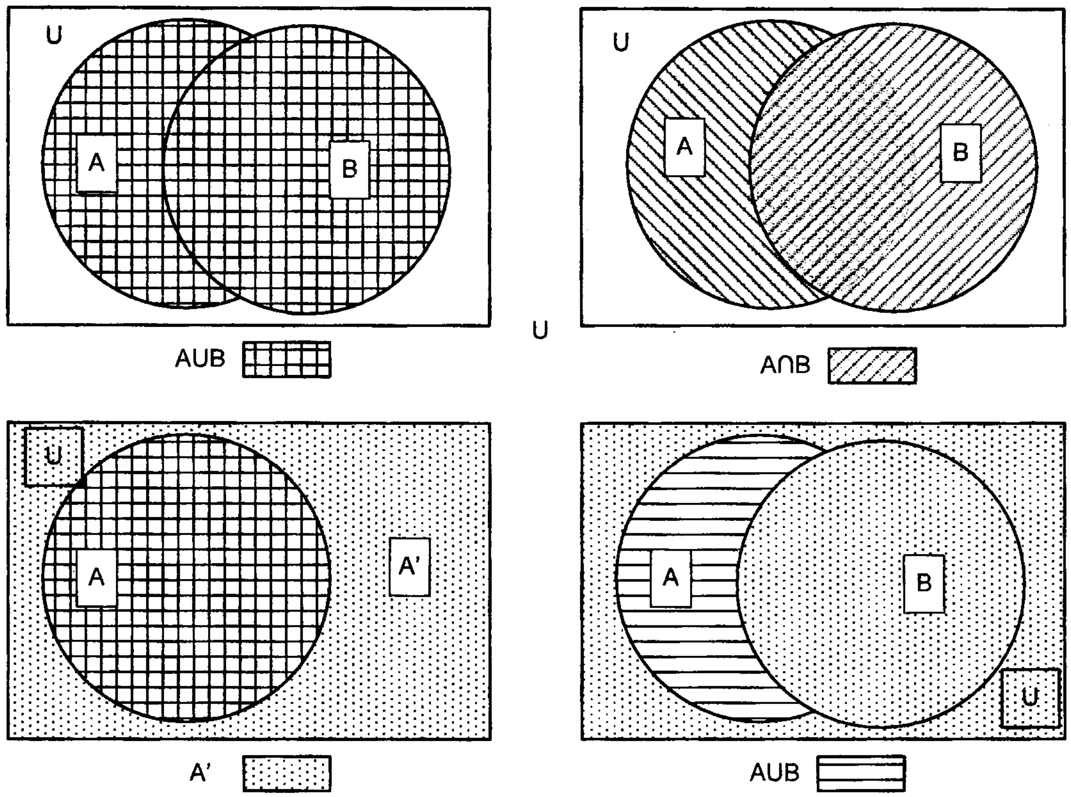


Figura 5.4 Diagramas de Venn que ilustran las operaciones básicas de los conjunto

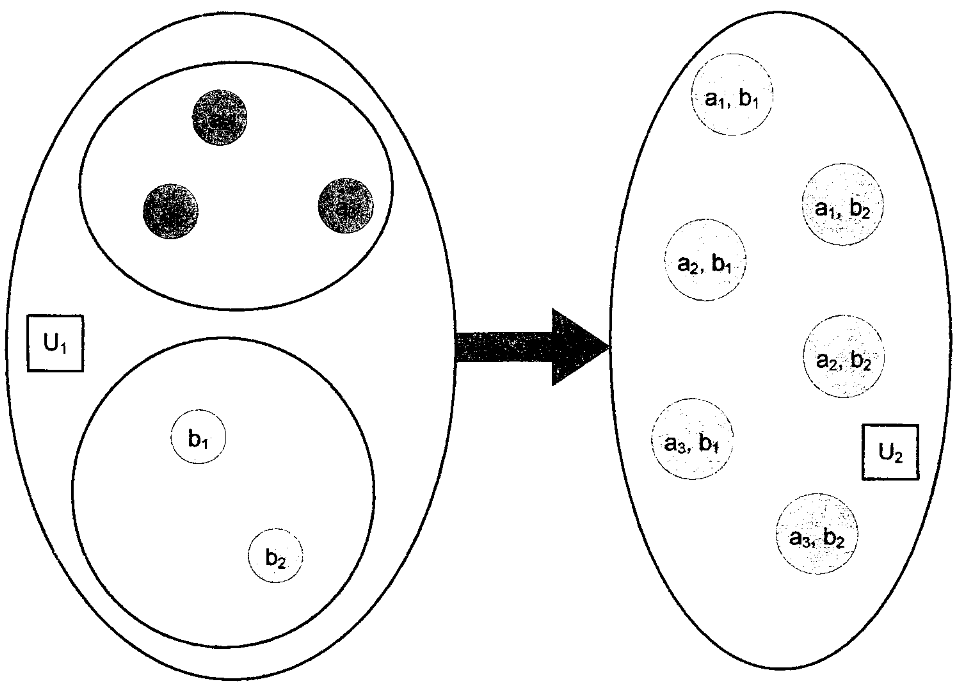


Figura 5.5. Diagrama de Venn que ilustra el conjunto producto A X B

Ejemplo 5.19 Con referencia a la figura 5.5, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2\}$

$$\Rightarrow C = A \times B = \{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2, a_3b_1, a_3b_2\}$$

Como debe haber orden:

$$C \neq D = B \times A = \{b_1a_1, b_1a_2, b_1a_3, b_2a_1, b_2a_2, b_2a_3\}$$

Obsérvese que los elementos o puntos del conjunto producto $A \times B$ son parejas ordenadas formadas con los elementos de A y los de B; por extensión, para $D = A \times B \times C$ sus elementos serán ternas, y para $H = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ cada uno de sus elementos son aneadas o vectores constituidos por miembros de los conjuntos A_i; tales como:

$$H = \{a_{11}a_{21}a_{31} \ldots a_{n1},\ a_{11}a_{21}a_{31} \ldots a_{n2},\ a_{11}a_{21}a_{31} \ldots a_{n3}, \ldots\}$$

Ejemplo 5.20 Ilustremos el conjunto producto para el caso de tres conjuntos referido a las condiciones de operación de tres trascabos al final de seis meses de trabajo. Para cada uno puede darse el caso de que se mantenga o no en operación.

Sean los trascabos A, B y C cuyos elementos para las condiciones establecidas son: $A = \{a, \bar{a}\}, B = \{b, \bar{b}\}\ y\ C = \{c, \bar{c}\} \Rightarrow$

$$A \times B \times C =$$
$$\{(a,b,c),(a,b,\bar{c})(a,\bar{b},c),(a,\bar{b},\bar{c}),(\bar{a},b,c),(\bar{a},b,\bar{c})(\bar{a},\bar{b},c),(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\}$$

Ejemplo 5.21 Si $A = \{1,2,3,4,5,6\}\ y\ B = \{1,2\}$ el conjunto producto tiene 12 elementos:

$$A \times B =$$
$$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2),(6,1),(6,2)\}$$

En cambio $B \times A$ también tiene doce elementos pero es diferente a $A \times B$ como se muestra a continuación:

$$B \times A =$$
$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1.5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}.$$

En general, el conjunto producto no es conmutativo: $A \times B \neq B \times A$.

De los dos ejemplos anteriores se hace ver que los miembros de un conjunto pueden tener más de un elemento cada uno e incluso pueden ser diferentes en número y, más aún, de diferentes clases o universos.

Ejemplo 5.22 Al tirar simultáneamente un dado y una corcholata, se pueden tener los siguientes resultados $A = \{1,2,3,4,5,6\})$ y $B = \{b_1, b_2\} = \{corcho, lata\} = \{c, l\}$ respectivamente, cuyo conjunto producto consta de doce elementos y se representa en la figura 5.6:

$$A \times B =$$

$$\{(1,c),(1,l),(2,c),(2,l),(3,c),(3,l),(4,c),(4,l),(5,c),(5,l),(6,c),(6,l)\}$$

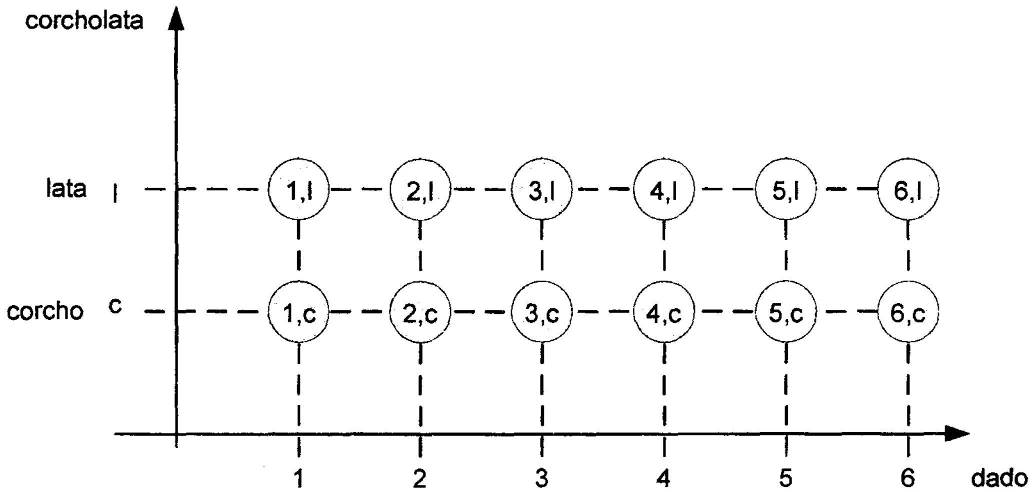


Figura 5.6 Representación del conjunto producto del dado y la corcholata

Ejemplo 5.23 Entre las 9:00 y 9:30 pm un mecánico checará la alineación de la luz de los faros de dos automóviles. Para cada automóvil el resultado se registrará como sigue:

l = {Ambas luces están alineadas}
i = {Solamente la luz izquierda está fuera de alineación}
d = {Solamente la luz derecha está fuera de alineación}
f = {Ambas luces están desalineadas}

Puesto que los dos automóviles pueden tener ninguna o ambas fallas, hay $4^2 = 16$ elementos en el espacio muestral que es:

$$\mathbb{S} = \{(ll),(li),(ld),(lf),(il),(ii),(if),(id),(dl),(di),(dd),(df),(fl),(fi),(fd),(ff)\},$$

Y los sucesos A, B y C que se describen a continuación son

$A = \{El\ primer\ auto\ tiene\ ambas\ luces\ fuera\ de\ alineación\}$
$= \{(fl),(fi),(fd),(ff)\}$
$B = \{la\ luz\ izquierda\ está\ fuera\ de\ alineación\ en\ ambos\ autos\}$
$= \{(ii)\}$
$C = \{Exactamente\ uno\ de\ los\ autos\ tiene\ ambas\ luces\ alineadas\}$
$= \{(li),(ld),(lf),(il),(dl),(fl)\}$

Por claridad vea que se han omitido las comas dentro de cada miembro de estos conjuntos que constan de dos componentes.

Ejemplo 5.24 A los alumnos del jardín de niños de mis nietos se les revisará uno a uno para verificar si han sido vacunados contra la poliomielitis (v) o no (n). La revisión continuará hasta que un niño no haya sido vacunado o cinco de ellos se hayan revisado; lo que ocurra primero. El conjunto que describe este experimento es:

$$\mathbb{S} = \{v, nv, nnv, nnnv, nnnnv, nnnnn\}.$$

Donde se observa que cada elemento consta de diferente número de componentes.

Ejemplo 5.25 Un experimento consiste en lanzar los dados verde y rojo y registrar los números que aparecen. Si x es el resultado del dado verde y y es el del dado rojo; el espacio muestral $\mathbb{S}$ se muestra a continuación.

a) De manera exhaustiva (x, y):

$$\mathbb{S} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

b) Utilizando la forma matemática:

$$\mathbb{S} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, x = 1,2, \ldots, 5,6;\ y = 1,2, \ldots, 5,6\}$$

Ejemplo 5.26 Para el espacio muestral del ejercicio anterior:

a) los elementos correspondientes al evento A, de que la suma sea mayor que ocho son:
$A = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

b) los elementos del evento B de que ocurra un dos en cualquiera de los dados, son:
$B = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$

c) los elementos del evento C de que se produzca un número mayor que cuatro en el dado verde son:
$C = (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

d) los elementos que corresponden al evento $A \cap C$son:
$$D = A \cap C = \{(5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

e) los elementos que corresponden al evento $A \cap B$ son:
$$A \cap B = \Phi$$

f) los elementos que corresponden al evento $B \cap C$ son:
$$E = B \cap C = \{(5,2), (6,2)\}$$

g) Un diagrama de Venn para ilustrar las intersecciones y las uniones de A, B y C se muestra en la figura 5.7.

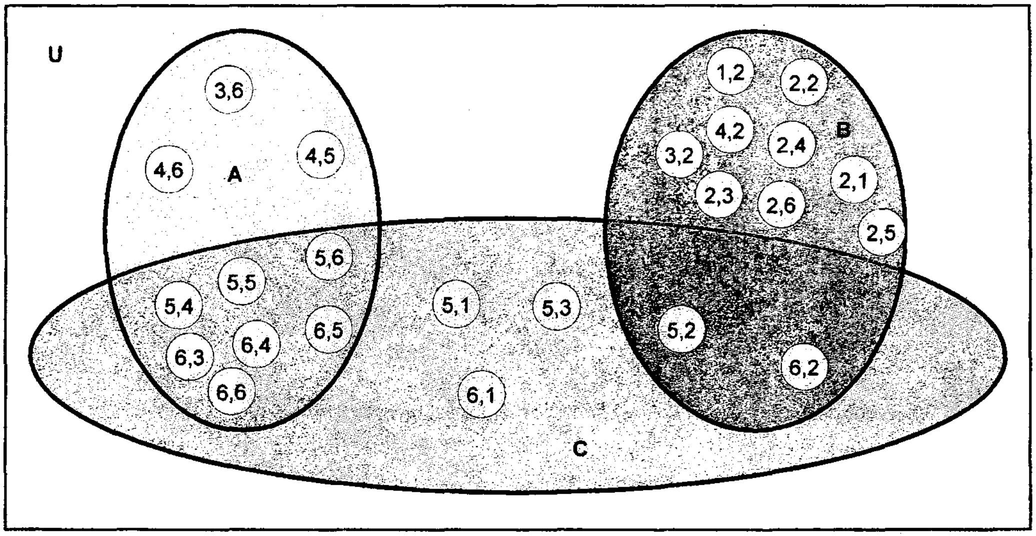


Figura 5.7 El diagrama de Venn del ejercicio 5.24 g)

5.11 Álgebra de conjuntos

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera y $\mathbb{U}$ el conjunto universal tal que $A \subseteq \mathbb{U}, B \subseteq \mathbb{U}$ y $C \subseteq \mathbb{U}$, entonces, las operaciones anteriores satisfacen, entre otras, las leyes o identidades de su álgebra que se muestran en la tabla 1.

La intersección de dos conjuntos es un subconjunto de su unión $C = A \cap B \subseteq A \cup B$. Cabe observar que $A \cap \Phi = \Phi$ y $A \cap S = A$ lo que indica que la intersección es igual al más pequeño de los conjuntos.

Ejemplo 5.27 Con relación al ejemplo 5.23,

$$C = A \cup B = \{(fl), (fi), (fd), (ff), (ii)\}$$
$$D = A \cap B = \Phi$$
$$E = \overline{A \cup B} = \mathbb{S} - A \cup B = \{(ll), (li), (ld), (lf), (il), (if), (id), (if), (dl), (di), (dd), (df)\}$$

Ejemplo 5.28 Un experimento consiste en lanzar un dado y después una moneda, la cual se lanzará una vez si el número que aparece en el dado es par o dos veces si el número que aparece en el dado es impar. Utilizando la notación *4s* para significar que el dado cae cuatro y la moneda cae sol, y *3sa* para designar el resultado que el dado cae tres seguido de sol y águila en la moneda; el diagrama de árbol de la figura 5.8 muestra los elementos del espacio muestral $\mathbb{S}$.

TABLA 5.1 LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS		
Idempotencia	$D \cup D = D$	$E \cap E = E$
Asociativas	$F \cup (G \cup H) = (F \cup G) \cup H$	$F \cap (G \cap H) = (F \cap G) \cap H$
Distributivas	$I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap (I \cup K)$	$I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (I \cap K)$
Conmutativas	$L \cup M = M \cup L$	$L \cap M = M \cap L$
Identidad	$N \cup \Phi = N$ $\Phi \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$	$N \cap \Phi = \Phi$ $\Phi \cap \mathbb{U} = \Phi$
Complemento	$P \cup \overline{P} = \mathbb{U}$	$P \cap \overline{P} = \Phi$
de De Morgan Propiedad de involución	$(Q \cup R)' = Q' \cap R'$ $(A')' = A$	$(Q \cap R)' = Q' \cup R'$ $\overline{\mathbb{U}} = \Phi, \quad \Phi' = \mathbb{U}$
	$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$	$A \subseteq B \Leftrightarrow = A$
	$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$	$\subseteq A \subseteq A \cup B$
	$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \Phi$	$A \cap B = \Phi \Leftrightarrow B - A = B$
	$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$	$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$
	$C - (B - A) = (A \cap C) \cup (C - B)$	$(B - A) \cap C = (B \cap C) - A = B \cap (C - A)$
	$(B - A) \cup C = (B \cup C) - (A - C)$	
	$A - A = \Phi$	$\Phi - A = \Phi$
	$\mathrm{A} - \Phi = A$	$A - B = A \cap B'$
	$(B - a)' = A \cup B'$	$\mathbb{U} - A = A'$
	$A - \mathbb{U} = \Phi$	

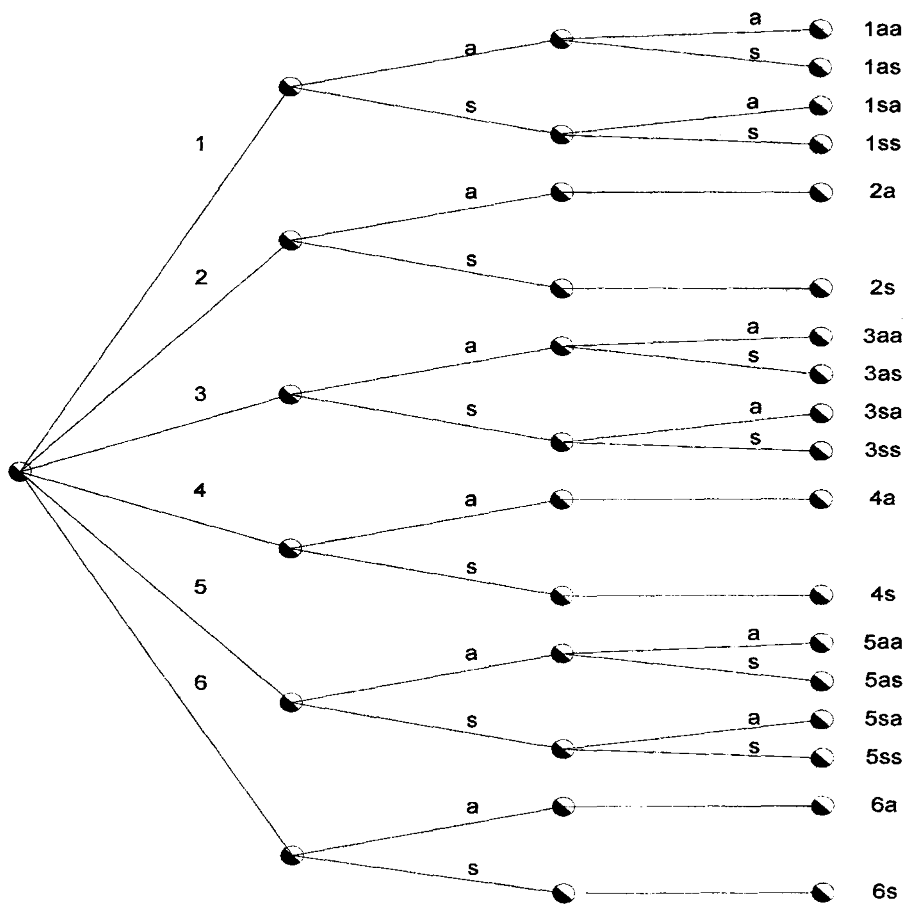


Figura 5.8 El diagrama de árbol del ejercicio 5.28

Ejemplo 5.29 Se eligen dos miembros de un jurado de entre cuatro posibles para que actúen en el juicio de un homicidio. Usando la notación a_1a_3 para denotar el suceso simple de que se elijan los candidatos uno y tres, el espacio muestral es

$$\mathbb{S} = \{a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4\}$$

Observe que el número de elementos del espacio muestral es igual a las combinaciones de los cuatro miembros posibles tomados de dos en dos: $\binom{4}{2} = 6$ (ver capítulo 6). Se deja al lector determinar $\mathbb{S}$ utilizando un diagrama de árbol.

Ejemplo 5.30 Se eligen al azar cuatro estudiantes de un grupo de probabilidad y se les clasifica por sexo masculino *(m)* o femenino *(f)*, el espacio muestral de los posibles resultados es:

$$\mathbb{S}_1 = \{(mmmm), (mmmf), (mmfm), (mfmm), (fmmm), (mmff),$$
$$(mfmf)(mffm)(fmmf), (fmfm), (ffmm), (mfff), (fmff), (ffmf),$$

$$(fffm),(ffff)\}.$$

El número de elementos de $\mathbb{S}_1$ es $2^4 = 16$ secuencias (ver capítulo 6) y un segundo espacio muestral $\mathbb{S}_2$ en el que los elementos representan el número de hombres seleccionados es $\mathbb{S}_2 = \{0,1,2,3,4\}$, puesto que se pide el número de hombres seleccionados.

Cabe observar que, para un mismo fenómeno se tienen diferentes conjuntos según el enfoque se desee utilizar, como se desprende del ejemplo anterior.

Ejemplo 5.31 Un experimento consiste en preguntar a tres mujeres seleccionadas al azar si cocinan con aceite de olivo, los elementos del espacio muestral $\mathbb{S}$ de los posibles resultados, son:

$$\mathbb{S} = \{sss, ssn, sns, nss, snn, nsn, nns, nnn\}$$

Con la letra s para *sí* y la n para *no*, el número de elementos de $\mathbb{S}$ es $2^3 = 8$ (ver capítulo 6). Los elementos de $\mathbb{S}$ que corresponden al suceso E de que cuando menos dos de las mujeres utilicen el aceite de olivo es:

$$E = \{\, sss, ssn, sns, nss\};$$

Finalmente, el evento que tiene como elementos los puntos $\{sss, nss, ssn, nsn\}$ es:

$$F = \{la\ segunda\ mujer\ entrevistada\ \ utiliza\ el\ detergente\ X\}.$$

Ejemplo 5.32 Los currícula de dos aspirantes varones a un puesto académico en la Facultad de ingeniería se colocan en el mismo archivo que los currícula de dos aspirantes mujeres. Quedan vacantes dos puestos y, el primero, para ayudante de profesor, se ocupa eligiendo a uno de los cuatro solicitantes en forma aleatoria. El segundo puesto, a nivel de técnico académico se ocupa después con uno de los tres solicitantes restante. Utilizando la notación m_2f_1, por ejemplo, para denotar el evento simple de que el primer puesto sea ocupado por el segundo solicitante masculino y que el segundo puesto sea ocupado por la primer solicitante femenino,

a) El número de sucesos posibles es 4 x 3 = 12 (ver capítulo 6) y ellos son:

$$\mathbb{S} = \begin{Bmatrix} m_1m_2, m_1f_1, m_1f_2, m_2m_1, m_2f_1, \\ m_2f_2, f_1f_2, f_1m_1, f_1m_2, f_2f_1, f_2m_1, f_2m_2 \end{Bmatrix}.$$

b) Los elementos de $\mathbb{S}$ que corresponden a que el puesto de técnico académico lo ocupe un solicitante masculino son:

$$A = \{m_1m_2, m_2m_1, f_1m_1, f_1m_2, f_2m_1, f_2m_2\}.$$

c) Los elementos de $\mathbb{S}$ que corresponden a que exactamente uno de los dos puestos sea ocupado por un solicitante masculino son: $B = \{m_1f_1, m_1f_2, m_2f_1, m_2f_2, f_1m_1, f_1m_2, f_2m_1, f_2m_2\}$.

d) Los elementos de $\mathbb{S}$ que corresponden al evento C de que ningún puestos haya sido ocupado por un solicitante masculino son

$$C = \{f_1f_2, f_2f_1\}.$$

e) Los elementos de $\mathbb{S}$ que corresponden al evento $D = A \cap B$ se encuentran a partir de b) y c) y son:

$$D = A \cap B = \{f_1m_1, f_1m_2, f_2m_1, f_2m_2\},$$

f) Los elementos de $\mathbb{S}$ que corresponden al evento $E = A \cup C$ se encuentran con base en b) y d) y ellos son:

$$E = A \cup C = \{m_1m_2, m_2m_1, f_1m_1, f_1m_2, f_2m_1, f_2m_2, f_1f_2, f_2f_1\}.$$

g) El diagrama de Venn para ilustrar las intersecciones y las uniones de A, B y C aparece en la figura 5.9.

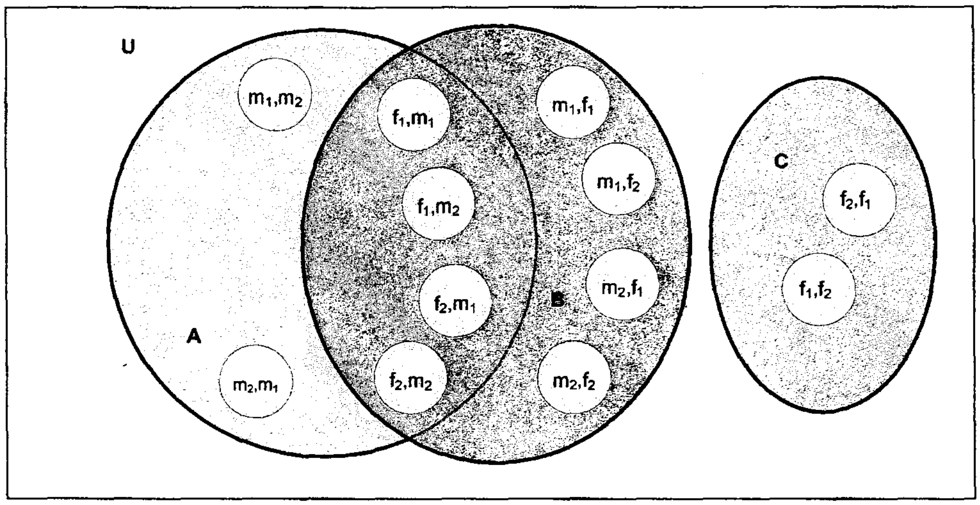


Figura 5.9 El diagrama de Venn del ejercicio 5.32 g)

Ejemplo 5.33 Un inversionista mexicano decide invertir en bienes raíces en los estados Veracruz (*V*), Nuevo León (*N*), Chihuahua (*C*) y Michoacán (*M*) para la construcción de hoteles (*h*), moteles (*m*) y condominios (*c*); los cuales se ubican ya sea en la playa (*p*) o en lugares de recreo en el bosque (*b*). Utilizando la notación *Cmp*, por ejemplo, para señalar el evento simple de que el inversionista elija a los Chihuahua para construir un motel en la playa; el diagrama de árbol para mostrar los veinticuatro elementos del espacio muestral se muestra en la figura 5.10 en el que se observa que el espacio muestral consta de 4 X 3 x 2 = 24 eventos posibles.

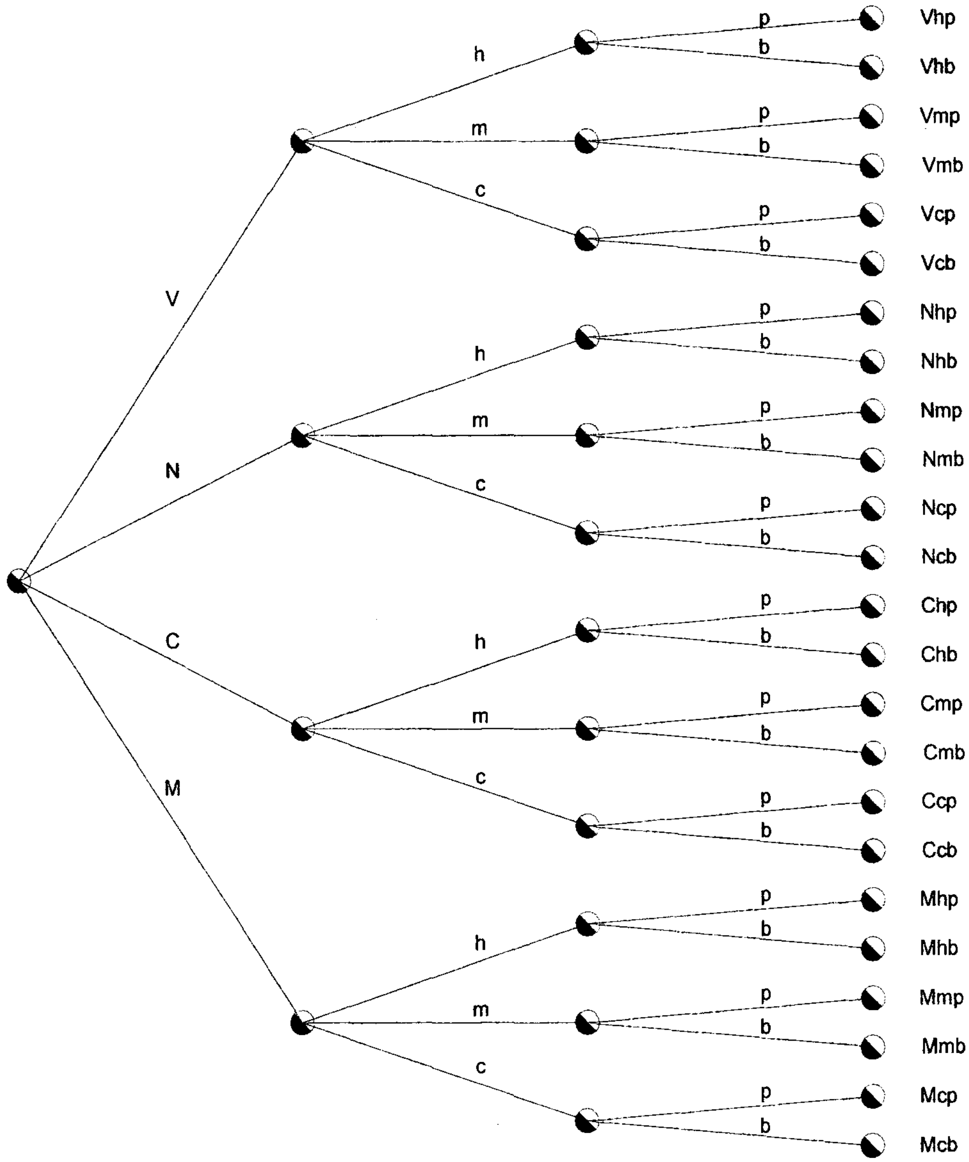


Figura 5.10 El diagrama de árbol del ejercicio 5.33

Ejemplo 5.34 El diagrama de Venn de la figura 5.11 ilustra las posibles uniones e intersecciones de los siguientes eventos relativos al espacio muestral $\mathbb{S}$ que está formado por todos los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM:

O: Estudiantes de octavo semestre.

G: Estudiantes de ingeniería Geológica.

M: Estudiantes mujeres.

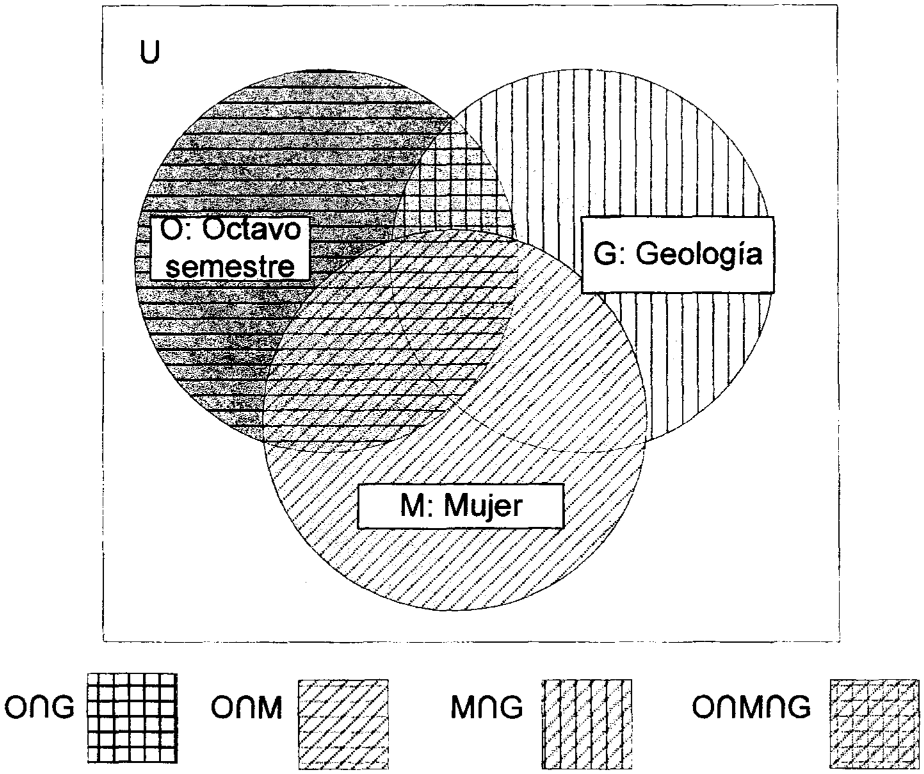


Figura 5. 11 El diagrama de Venn del ejercicio 5.34

Ejemplo 5.35 Para $\mathbb{S} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, A = \{0,2,4,6,8\}, B = \{1,3,5,7,9\}, C = \{2,3,4,5\}\ y\ D = \{1,6,7\}$ se tienen los elementos de los conjuntos que corresponden a los siguientes sucesos:

a) $A \cup C = \{0.2.3.4.5.6\}$

b) $A \cap B = \emptyset$

c) $\bar{C} = C' = \{0,1,6,7,8,9\}$

d) Para $(\bar{C} \cap D) \cup B, se\ tiene$:

$\bar{C} \cap D = \{1,6,7\} \Rightarrow (\bar{C} \cap D) \cup B = \{1,3,5,6,7,9\}$

e) $(\overline{S \cap C})$. $Como\ S \cap C = \{2,3,4,5\} \Rightarrow (\overline{S \cap C}) = \{0,1,6,7,8,9\}$

f) $A \cap C \cap \bar{D}$. $Como\ \bar{D} = \{0,2,3,4,5,8,9\}\ y\ C \cap \bar{D} = \{2,3,4,5\}$

$\Rightarrow A \cap C \cap \bar{D} = \{2,4\}$

Ejemplo 5.36. Para el espacio muestral
$\mathbb{S} = \{cobre, sodio, nitrógeno, potasio, uranio, oxígeno, zinc\}$ y los eventos $A = \{cobre, sodio, zinc\}, B\{sodio, nitrógeno, potasio\}$ $y\ C = \{oxígeno\}$, se tienen los elementos de los conjuntos que corresponden a los siguientes sucesos:

a) $\bar{A} = \{nitrógeno, potasio, uranio, oxígeno\}$.

b) $A \cup C = \{cobre, sodio, oxígeno, zinc\}$.

c) Para calcular $(A \cap \bar{B}) \cup C$, $se\ calculan$:

$\bar{B} = \{\,cobre, uranio, oxígeno, zinc\}$ y $A \cap \bar{B} = \{cobre, zinc\}$
$\Rightarrow (A \cap \bar{B}) \cup C = \{cobre, oxígeno, zinc\}$.

d) Para calcular $\bar{B} \cap \bar{C}$:
$\bar{C} = \{cobre, sodio, nitrógeno, potasio, uranio, zinc\}$
$\Rightarrow \bar{B} \cap \bar{C} = \{cobre, uranio, zinc\}$,

e) Para calcular $A \cap B \cap C, se\ tiene\ que$:
$A \cap B = \{sodio\} \Rightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$,

f) Para determinar $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C)$:
$$(\bar{A} \cup \bar{B}) = \begin{Bmatrix} cobre, potasio, uranio, oxígeno, \\ zinc, nitrógeno \end{Bmatrix},$$
$(\bar{A} \cap C) = \{oxígeno\}$
$\Rightarrow (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C) = \{oxígeno\}$

g) $(A \cap \bar{B}) \cup \bar{C} = \{cobre, sodio, nitrógeno, potasio, uranio, zinc\}$

Ejemplo 5.37 Si $\mathbb{S} = \{x|0 < x < 12\}, M = \{x|1 < x < 9\}\ y\ N = \{x|0 < x < 5\}$ entonces se tiene:

a. $M \cup N = \{x|0 < x < 9\}$
b. $M \cap N = \{x|1 < x < 5\}$
c. Para calcular $\bar{M} \cap \bar{N}$, se tiene
$\bar{M} = \{x|1 \geq x \geq 9\}\ y\ \bar{N} = \{x|0 \geq x \geq 5\}$
$\Rightarrow \bar{M} \cap \bar{N} = \{x|9 \leq x < 12\}$

Ejemplo 5.38 En la figura 5.12 para los eventos *A, B* y *C* relacionados con el espacio muestral $\mathbb{S}$ se muestran los diagramas de Venn donde se representan los sucesos $\overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}\ y\ (A \cap C) \cup B$.

Ejemplo 5.39 ¿Cuáles de los siguientes pares de eventos son mutuamente excluyentes?

a) Un golfista tiene la menor calificación en una ronda de 18 hoyos, de un torneo de 72 hoyos y pierde el torneo.

R: Como sí son posibles, no son mutuamente excluyentes.

b) Un jugador de póquer obtiene una flor (todas sus cartas son de la misma figura) y tres de una misma clase en una mano de 5 cartas.

R: Como no son posibles, si son mutuamente excluyentes.

c) Una madre da a luz a una niña y a un conjunto de hermanas gemelas el mismo día.

R: Sí son posibles, por ello no son mutuamente excluyentes.

d) Un jugador de ajedrez pierde el último juego y gana el torneo.

R: Sí son mutuamente excluyentes porque no son posibles.

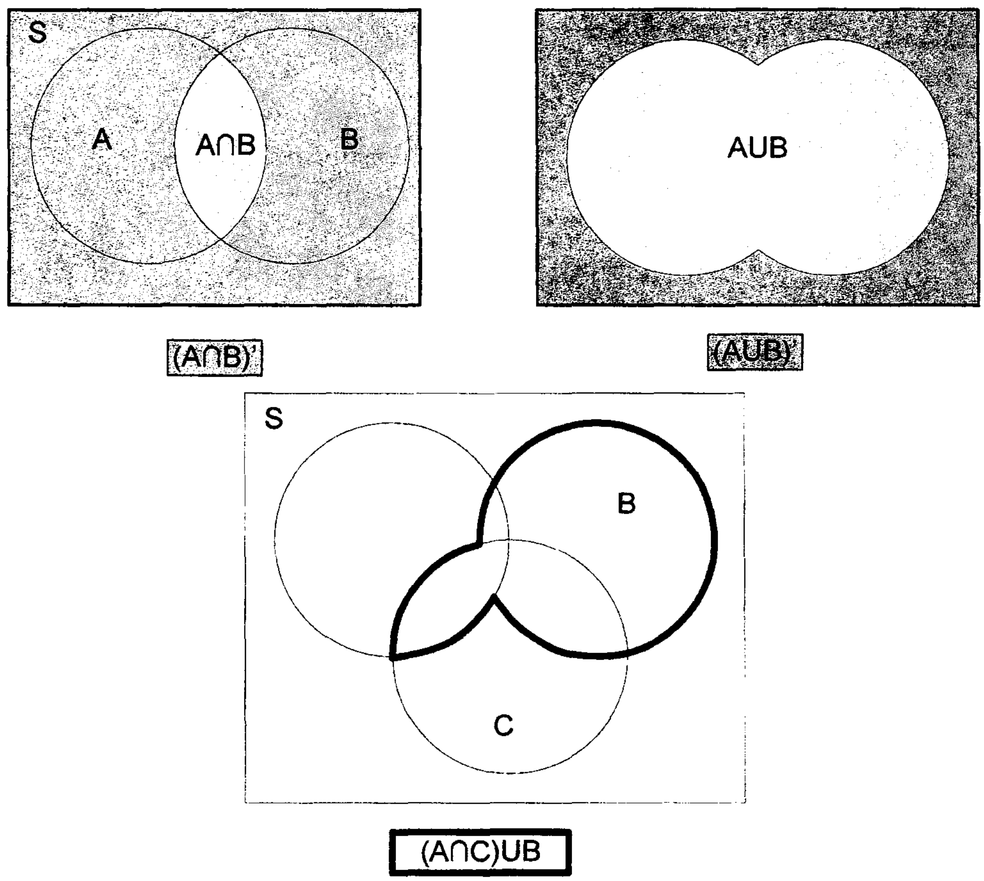


Figura 5. 12 Los diagramas de Venn del ejercicio 5.38

Ejemplo 5.40 Suponga que una familia sale de vacaciones en su casa rodante y les pueden ocurrir los sucesos:

$M = \{tienen\ problemas\ mecánicos\}$,

$T = \{les\ levantan\ una\ infracción\ por\ violar\ el\ Reglamento\}$

$V = \{llegan\ a\ un\ campamento\ y\ ya\ no\ hay\ lugar\}$

Con referencia al diagrama de Venn de la figura 5.13, plantee en palabras los eventos que están representados en las regiones indicadas abajo.

a) Región 5:

R: $A = \{La\ familia\ tiene\ solamente\ problemas\ mecánicos\}$

b) Región 3:

$R: B = \{La\ familia\ es\ multada\ y\ no\ encontrará\ lugar\ en\ el\ campamento, pero\ no\ tendrá\ problemas\ mecánicos\}$

c) Regiones 1 y 2 juntas:

R: $C = \{La\ familia\ sufre\ problemas\ mecánicos\ y\ arribará\ al\ campamento\ donde\ no\ hay\ lugar\}$

d) Regiones 4 y 7 juntas:

R: $D = \{La\ familia\ es\ multada\ pero\ llega\ a\ un\ campamento\ donde\ hay\ lugar\}$

e) Regiones 3, 6, 7 y 8 juntas:
R: $E = \{La\ familia\ no\ tendrá\ problemas\ mecánicos\}$

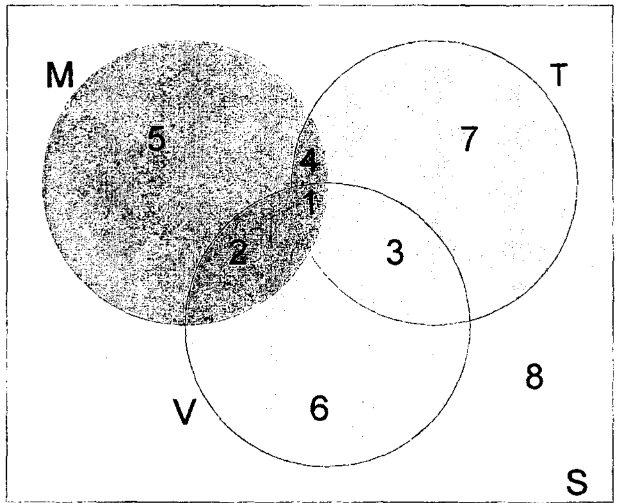


Figura 5.13. El diagrama de Venn del ejercicio 5.40

Ejemplo 5.41 Con referencia al ejercicio anterior, liste las regiones que representan los siguientes eventos:

a) $F = \{La\ familia\ no\ tiene\ problemas\ mecánicos\ y\ no\ comete\ violaciones\ al\ Reglamento, pero\ encuentra\ un\ campamento\ en\ donde\ no\ hay\ lugar\}$
R: Región 6.

b) $G = La\ familia\ experimenta\ tanto\ problemas\ mecánicos\ Como\ problemas\ para\ localizar\ un\ campamento\ desocupado; pero\ no\ comete\ violaciones\ al\ Reglamento\}$
R: Región 2.

c) $H = \{La\ familia\ tiene\ problemas\ mecánicos\ o\ encuentra\ un\ campamento\ ocupado, pero\ no\ viola\ el\ Reglamento\ de\ Tránsito\}$
R: Regiones 2, 5 y 6.

d) $I = \{La\ familia\ \ llega\ a\ un\ campamento\ en\ donde\ si\ hay\ lugar\}$
R: Regiones 4, 5, 7 y 8.

CAPÍTULO 6
FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS COMBINATORIO O TÉCNICAS DE CONTEO

CAPÍTULO 6
FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS COMBINATORIO O TÉCNICAS DE CONTEO

Podemos demostrar que cada una de las diez mil millones de neuronas del cerebro humano tiene una posibilidad de establecer conexiones expresadas por la unidad seguida por ¡veintiocho ceros! Si una sola neurona tiene un potencial de semejante magnitud, mal podemos imaginar lo que es capaz de hacer todo el cerebro. ¡Lo que esto significa es que, si se puede escribir, el número total de combinaciones posibles en el cerebro estaría representado por un 1 seguido de 10.5 millones de kilómetros de ceros!

Petr Kouzmich Anojín

6. 1 Introducción

En algunas ocasiones, los eventos o conjuntos son difíciles de enumerar o explicitar, para evitarlo se utilizan las técnicas de conteo que nos permiten conocer *el número* de sus puntos elementales. Los antecedentes matemáticos que comenzaron en Bagdad alrededor del año 800, aunque no demasiado claros, tuvieron una poderosa influencia proveniente de la India cuyo temprano desarrollo del sistema decimal y de la numeración revistieron gran importancia. Allí comenzó un período de progreso matemático con el trabajo de al-Jwarizmi y la traducción de los textos griegos. Harun al-Rashid, quinto califa de la dinastía Abasida comenzó su reinado en 786, promovió la investigación científica y las primeras traducciones de textos griegos al árabe, como los *Elementos* de Euclides por al-Hajjaj. El séptimo califa, Abd Allah al-Mamun, alentó la búsqueda del conocimiento científico aún más que su padre al-Rashid estableciendo en Bagdad una institución de investigación y traducción: la Casa de la Sabiduría (*Bayt al-Hikma*) donde trabajaron al-Kindi, los tres hermanos Banu Musa y el famoso traductor Hunayn ibn Ishaq; en la Casa tradujeron las obras de Euclides, Diofanto, Menelao, Arquímedes, Tolomeo, Apolonio, Diocles, Teodosio entre otros clásicos de la ciencia griega; las cuales fueron hechas por científicos y no por expertos en lenguas ignorantes de las matemáticas.

Uno de los avances más significativos llevados a cabo por los matemáticos del Islam, sin duda, de los más trascendentes en toda la historia de la ciencia matemática se originó en esa época con los trabajos de Abu Yafar Mohamed ibn Musa al-Jwarizmi: *el álgebra*, cuya nueva idea representaba un apartamiento revolucionario del enfoque geométrico de los griegos. *El álgebra* era una teoría unificadora que permitió que los números racionales, los irracionales, las magnitudes geométricas, etc.; fuesen tratados como *objetos algebraicos*. *El álgebra* abrió caminos de desarrollo matemático hasta entonces desconocidos y los sucesores de al-Jwarizmi emprendieron una aplicación sistemática de la aritmética al álgebra, del álgebra a la aritmética, de ambas a la trigonometría, del álgebra a la teoría de números euclidiana, del álgebra a la geometría y de la geometría al álgebra; lo que permitió la creación del álgebra polinomial, *el análisis combinatorio*, el análisis numérico, la solución numérica de ecuaciones, la nueva teoría elemental de números y la construcción geométrica de ecuaciones.

La combinatoria o análisis combinatorio es una rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de colecciones finitas de objetos que satisfacen unos criterios especificados y se ocupa, en particular, del recuento de los objetos de las colecciones (combinatoria enumerativa).

Uno de los más destacados estudiosos de la combinatoria de los últimos tiempos es Gian-Carlo Rota cuyas contribuciones han ayudado a formalizar el tema desde la década de 1960,y el prolífico matemático Paul Erdós estudió cómo contar objetos y formalizó el campo de la enumeración.

En algunos problemas de probabilidad de variables aleatorias discretas se necesitan las técnicas de conteo del análisis combinatorio. Para un espacio muestral que contiene eventos equiprobables, el cálculo de probabilidades necesita el número total de eventos elementales y el número de elementos que califican en una clase particular de eventos. La clave para resolver este tipo de problemas de probabilidad es preguntándonos ¿De cuántas maneras diferentes puede ocurrir este evento? En algunos casos es posible listar el número de eventos elementales que están en la clase del evento en cuestión, pero es mucho más frecuente y práctico usar un principio que nos proporciona el análisis combinatorio para encontrar este número.

En otros términos, en estos problemas los listados pueden ser útiles para calcular las probabilidades, pero si el número de eventos elementales es muy grande, la lista es impráctica o imposible de detallarla y los principios de conteo que analizaremos en este capítulo son mucho más eficientes y sirven de base para calcular probabilidades cuando el número de eventos elementales es finito y se muestrea sin reemplazo. Distinguiremos las secuencias ordenadas de las permutaciones y las combinaciones.

6.2 Secuencias de eventos o Eventos secuenciales

En muchos problemas, un evento elemental puede ser un conjunto de resultados de una serie o secuencia de observaciones. Un ensayo de algún experimento simple puede dar por resultado uno de los k eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos $\{A_1, A_2, \ldots . A_k\} = \{A_i$ para $i = 1 \ldots . k\}$; si el experimento se repite n veces se obtiene una secuencia de eventos: el resultado del primer ensayo, el resultado del segundo ensayo hasta el resultado del ensayo n; y el resultado de la serie de ensayos puede ser la secuencia $(A_3, A_n, \ldots . A_4)$ lo que significa que el evento A_3 ocurrió primero, después el A_n y así hasta el A_4.

El lugar da el orden del ensayo en el que ocurrió el evento y el símbolo de ese lugar muestra el evento que ocurrió para aquel ensayo.

Ejemplo 6.1 El experimento consiste en registrar, en rachas de seis, la nacionalidad de los turistas que llegan al aeropuerto de la Ciudad de México una secuencia puede ser:

$$A_1 = \{francesa, alemana, alemana, inglesa, japonesa, chilena\}$$

Ejemplo 6.2 La puntualidad al salón de los primeros cinco alumnos pueden ser las secuencias:

$$A_5 = \{Juan, Pedro, Inés, Antonio, Lupita\}$$
$$A_6 = \{Juan, Pedro, Armando, Lupita, Antonio\}.$$

La idea de secuencia también se aplica a una serie de experimentos simples diferentes, donde el lugar en la secuencia corresponde al experimento particular que se desarrolló.

Ejemplo 6.3 En el ejemplo 6.1, nos interesan los experimentos simples nacionalidad, sexo, edad, lugar donde residirá en durante su estancia en México y días de permanencia para cada turista pudiéndose tener los siguientes eventos:

$$A_3 = \{francesa, femenino, 25, Toluca, 15\}$$
$$A_4 = \{Turca, masculino, 47, Puebla, 30\}.$$

Ejemplo 6.4 En el estudio de la puntualidad al salón, si nos interesa el nombre, el apellido, su status académico: regular o irregular y su promedio, una secuencia posible es $A_{10} = \{Juan, Pérez, regular, 8.5\}$ donde la posición describe el experimento particular y el símbolo al evento observado.

Obsérvese que las secuencias son conjuntos ordenados que pueden estar formados por:
$duplas = \{A_1, A_2\}$.
$tripletas = \{A_1, A_2, A_3\}$.
$cuartetas = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *o*
$eneadas = \{A_1, A_2, \ldots . A_n\}$
Para los cuales $\{A_1, A_2\} \neq \{A_2, A_1\}, \{A_1, A_2, A_3\} \neq \{A_1, A_3, A_2\}$; porque son *conjuntos ordenados.*

6.2.1 El principio del producto para pares ordenados

Si los eventos elementales son duplas y su primer elemento pertenece a $A_{1=}\{a_1^1,\ a_1^2, a_1^3, \ldots, a_1^n\}$ con n elementos en tanto que su segundo elemento a $A_{2=}\{a_2^1,\ a_2^2, a_2^3, \ldots, a_2^m\}$ con m elementos; entonces el número de duplas que se pueden tener es $n \times m$ que son:

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1^1, a_2^1), (a_1^1, a_2^2), (a_1^1, a_2^3), \ldots, (a_1^n, a_2^m)\}.$$

6.2.2 Factorial de un número

El factorial del número n se define como la multiplicación de los n enteros descendientes desde n hasta 1 y se denota por $n!$.

$$n! = n\,(n-1)(n-2) \ldots . (3)(2)(1).$$

Más aún, por definición $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$

Ejemplo 6.5 El factorial de 3 es $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ y el de 5 es $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

6.2.3 Principios sobre secuencias

Cabe reiterar que cada posible secuencia es un evento elemental si pensamos en la serie completa de ensayos como el experimento. Cada experimento tiene como resultado una y solo una secuencia. Estos experimentos que producen secuencias como resultados son de mucha importancia en el análisis estadístico de experimentos y requieren de los principios de conteo para encontrar las diferentes secuencias que puede producir la serie de ensayos de que consta el experimento.

A continuación supondremos para los principios que una serie de n ensayos se lleva a cabo y que para cada uno puede ocurrir cualquiera de k eventos o sucesos.

Principio 1. *Si uno cualquiera de k eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos puede ocurrir para cada uno de n ensayos, entonces hay k^n secuencias diferentes que pueden resultar de la serie de ensayos que constituyen el experimento.*

Ejemplo 6.6 Si se tira una corcholata los posibles resultados son $C{:}\ corcho\ ó\ L{:}\ Lata\ con\ k = 2$, $k = (C, L)$. Si se tira la corcholata una vez se tendrá 2^1 posibles secuencias de un elemento $\mathbb{S}_1 = \{C, L\}$; si se tira dos veces se tendrán $2^2 = 4$ posibles secuencias resultantes $\mathbb{S}_2 = \{CC, CL, LC\ y\ LL\}$; para tres tiradas se tendrán $2^3 = 8$ posibles secuencias resultantes $\mathbb{S}_3 = \{CCC,\ CCL,\ CLC,\ CLL,\ LCC,\ LCL,\ LLC,\ LLL\}$; para cinco tiradas el número total de posibles secuencias con cinco elementos cada una será $2^5 = 32$.

Principio 2. *Puede suceder que el número de eventos posibles del primer ensayo de un experimento sea diferente al del segundo ensayo y, a su vez, éstos sean diferentes de los del tercer ensayo o, en otros términos, que el número de eventos o sucesos posibles de los ensayos sean diferentes; en cuyo caso $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq \cdots \neq k_n$ donde k_i son los números de distintos sucesos que pueden ocurrir sobre los ensayos $1,2,3 \dots n$ de un experimento; por tal motivo el número de diferentes secuencias de n eventos que pueden ocurrir es $k_1 \times k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$.*

Ejemplo 6.7 Si en el primer ensayo se tira un dado cuyos eventos posibles son $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y en el segundo una corcholata $\{C, L\}$, el número de diferentes secuencias posibles de resultados que pueden obtenerse es de $(6)(2) = 12$ *y ellas son*

$$\mathbb{S}_5 = \{1C, 1L, 2C, 2L, 3C, 3L, 4C, 4L, 5C, 5L, 6C, 6L\}.$$

Cabe observar que el principio 2 es un caso especial del principio 1 porque si el mismo número k de eventos puede ocurrir en cualquier ensayo y el experimento consta de n ensayos, entonces el número total de secuencias que puede ocurrir en el experimento completo es

$$k \times k \times k \times \ldots \times k = k^n$$

6.3 Principios sobre Permutaciones

Principio 3. *El número de formas diferentes en que n objetos distintos pueden acomodarse ordenadamente es* $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3 \times 2 \times 1.$

Aquí el orden es importante, o sea $(x,y) \neq (y,x)$ y no existe (x,x) lo que indica que la repetición no es válida.

Ejemplo 6.8 Una urna contiene los nombres de los tres candidatos Armando (A), Bernardo (B) y Carolina (C) los cuáles se pueden ordenar en $3! = 6$ secuencias diferentes

$$\mathbb{S}_6 = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}.$$

Estos arreglos ordenados se llaman permutaciones así que n objetos tienen $n!$ permutaciones, y se denotan como

$$nPn = P_n^n = P_n = n!$$

Ejemplo 6.9 Cinco libros de un estante se pueden ordenar colocando en el primer lugar a cualquiera de ellos; ocupado el primer lugar, el segundo lo puede ocupar cualquiera de los cuatro libros restantes, el tercer lugar lo ocupará cualquiera de los tres que quedan y así; entonces las secuencias posibles de ordenación son:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

En el caso de que en los n objetos algunos sean k veces iguales entonces el número de permutaciones será $P_n = \frac{n!}{k!}$.

Ejemplo 6.10 Para el caso de los libros si hay dos rojos, entonces $k = 2$ y $P_2^5 = \frac{5!}{2!} = 60$ son los posibles arreglos secuenciales diferentes.

Ejemplo 6.11 Si el salón de clase cuenta con 45 bancos para 45 alumnos inscritos en el curso de Probabilidad y Estadística, el número de secuencias en que pueden acomodarse ordenadamente a los alumnos, que corresponden al espacio muestral, es

$$45! = 1.196 \times 10^{56}.$$

Principio 4. *El número de maneras de seleccionar y ordenar r objetos no repetidos de un grupo de n objetos, es $p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$.*

Este principio satisface las condiciones: $(x,y) \neq (y,x)$ y (x,x) no existe porque no se permite la repetición.

En efecto,

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 6.12 Si se cuenta con los elementos a, b y c, el número de secuencias ordenadas de dos elementos sin repetición es $p_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$; las cuales son:

$$\mathbb{S}_8 = \{ab, ac, bc, ba, ca, cb\}.$$

Ejemplo 6.13 Para el caso de los libros, si sólo hay tres lugares, el primero lo puede ocupar cualquiera de los cinco, el segundo cualquiera de los cuatros restantes y el tercero cualquiera de los tres sobrantes:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5x4x3x2!}{(5-3)!} = 60.$$

Ejemplo 6.14 Si en el ejemplo del salón de clases no hay suficientes bancos, digamos 40 para sentar a los 45 alumnos, entonces el número de ordenaciones posibles es

$$p_{40}^{45}\frac{45!}{(45-40)!}=9.968\times 10^{53}$$

Como se observa son cantidades estratosféricas.

Ejemplo 6.15 Si en una lotería se venden 30 boletos, el número de permutaciones para obtener los tres primeros lugares es

$$P_3^{30}=\frac{30!}{(30-3)!}=24\,360$$

Que corresponden a las diferentes posibilidades de asignar los tres primeros lugares a las personas que compraron su billete.

Ejemplo 6.16 Con relación al ejemplo anterior, el número de secuencias en que una determinada persona aparezca en primer lugar es igual al número de posibles selecciones para el segundo y tercer lugar descontando el primero $P_2^{29}=\frac{29!}{27!}=812$. Igualmente, habrá 812 secuencias para que la persona en cuestión esté colocada en el segundo o tercer lugar; por lo tanto, el número de secuencias posibles para que la persona esté en el primero, segundo o tercer lugar es $3\times 812\ =\ 2{,}436$.

Principio 5. *Para n elementos de un conjunto tomados de r en r bajo las condiciones en que $(x,y)\ \neq\ (y,x)$ y (x,x) si existe, entonces se tiene que $OR_r^n=n^r$ es el número de ordenaciones con repetición.*

Ejemplo 6.17 Para el ejemplo de la urna que contiene los elementos a, b y c las formas de seleccionar y ordenar dos de los tres elementos que pueden repetirse es:

$$N_{\mathbb{S}_9}=3^2=9\ \Rightarrow \mathbb{S}_9=\{aa,ab,ba,bb,ac,ca,cb,bc,cc\}.$$

Las permutaciones circulares se presentan cuando se acomodan los objetos en forma circular o perimetral; por ejemplo, los miembros de un Consejo Directivo en una mesa circular o los árboles que se plantarán alrededor de un jardín, si los objetos en cuestión pueden girar al unísono se tendrá la misma permutación como sucede si los cuatro jugadores de dominó cambian una posición en el mismo sentido en cuyo caso no se tiene una nueva permutación; cosa que no sucede cuando se cambian cruzadamente.

Principio 6. El número de permutaciones de *n* objetos arreglados de manera circular es $(n-1)!$.

Ejemplo 6.18 En el juego de dominó de cuatro personas, el número de permutaciones circulares es

$$(4-1)! = 6.$$

6.4 Principios sobre Combinaciones

En algunas ocasiones, en los problemas de probabilidad interesa únicamente el número de secuencias o *combinaciones* en que r objetos pueden seleccionarse de un conjunto de n, sin importar el orden de los eventos, El principio 4 determina el número de maneras de seleccionar r objetos de n y ordenarlos y el principio 3 el número de posibles ordenamientos. Una combinación de estos dos principios nos conduce al establecimiento del principio siguiente.

Principio 7. *El número total de seleccionar las posibles combinaciones r elementos tomados de n objetos, sin que importe el orden, es:*

$$C_r^n = \binom{n}{r} = nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

***Condiciones:** (x, y) = (y, x) o sea que no importa el orden y (x, x) no existe es decir, no se permite la repetición.*

Ejemplo 6.19 Un experimento consiste en seleccionar dos peces de una pecera que contiene tres de diferente especie marcados con $p, q\ y\ r$. El número de ensayos posibles es

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3$$

Los cuales son: $\{pq, pr, qr\}$.

Este principio puede interpretarse como el número total de maneras de dividir un conjunto de n objetos en dos subconjuntos con r y $(n-r)$ objetos, porque la determinación del primer subconjunto de r objetos determina unívocamente el segundo subconjunto de $(n-r)$ objetos, que consiste de los objetos restantes después de que el primer subconjunto ha sido seleccionado. Cabe observar que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Relación conocida como ***el principio de Pascal.***

Ejemplo 6.20 Aplicando el principio de Pascal en el ejemplo anterior:

a) $\binom{n}{r} = C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = C_{3-2}^3 = \frac{3!}{(3-1)!1!} = C_{2-1}^{3-1} + C_2^{3-1} = C_1^2 + C_2^2 = 2 + 1 = 3.$

b) Suponga que $\binom{99}{5} = a \; y \binom{99}{4} = b$, conforme al principio de Pascal podemos expresar $\binom{100}{95}$ en función de *a* y *b:*

$$\binom{100}{95} = \binom{100}{5}, \binom{100}{95} = \binom{99}{94} + \binom{99}{95} = \binom{99}{5} + \binom{99}{4}$$
$$= a + b$$

6.5 El Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal aparece en la figura 6.1 y se forma por las combinaciones $\binom{n}{r}$ $donde\; r \leq n$, n inicia en 0 y cada renglón se obtiene sumando los elementos contiguos superiores.

Ejemplo 6.21 Con base en el triángulo de Pascal:

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15; \; \binom{5}{2} = 10 = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Figura 6.1 El Triángulo de Pascal

Por renglones, el triángulo de Pascal da los coeficientes de la expansión del binomio de Newton elevado a la n_{esima} potencia.

Ejemplo 6.22

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

Esta última es una expresión muy útil para la distribución binomial de probabilidades.

Ejemplo 6.23 Si en la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería se tienen 40 profesores de carrera, todos ellos candidatos a funcionarios, el Jefe de la División tiene la posibilidad de elegir a uno de los $\binom{40}{7} = \frac{40!}{(40-7)!7!} = 18,643,560$ equipos de 7 funcionarios.

Principio 8. *El número total de maneras de dividir un conjunto de n objetos en k subconjuntos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos de n_1, $n_2, n_3, \dots, n_{k-1}$ y n_k objetos para los cuáles se cumple $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{k-1} + n_k = n$, es*

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\dots n_K!}$$

Éste principio es una generalización del *Principio 4* en que el conjunto de n objetos puede dividirse en k subconjuntos donde $k \geq 2$

Ejemplo 6.24 En el ejemplo de los funcionarios de la FI, de los 40 candidatos el número de equipos con 2 secretarios y 5 Coordinadores; es decir, el número de combinaciones posibles es con $n = 40, n_1 = 2, n_2 = 5$ y $n_3 = 33$ es

$$\frac{40!}{2!\,5!\,33!} = 3{,}262{,}623$$

Ejemplo 6.25 Un juego de póker consta de un mazo de 52 cartas bien barajadas para evitar el sesgo y, para garantizarlo, a cada jugador se le reparten al azar cinco cartas o una *mano*. Conforme al principio 7, el número de manos diferentes que se pueden tener es:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47!\,5!} = 2{,}598{,}960$$

Ya que no importa el orden en que salgan las cartas. Esta cantidad corresponde al número de elementos del espacio muestral en el que cada uno consta de una secuencia de cinco cartas.

6.6 Ejemplos

Es necesario enfatizar que en los siguientes ejemplos, los resultados corresponden al número de elementos del espacio muestral en estudio y los elementos de dichos espacios son secuencias.

Ejemplo 6.26 Las puertas de los automóviles se fabrican en cinco etapas, la primera es la de limpiado de la lámina y hay tres estaciones para hacer este trabajo, la segunda etapa es la de prensado y la armadora cuenta con dos líneas, la tercera etapa corresponde a la de cortado y puede hacerse en cuatro líneas diferentes; posteriormente, las puertas pasan por el proceso de pintado para lo cual se cuenta con tres líneas y, finalmente, las puertas terminan en la etapa de pulido y encerado para lo cual se tienen 5 líneas. Conforme al principio 2, el proceso de la fabricación de las puertas automotrices puede hacerse de:

$$3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 360 \text{ formas diferentes}$$

Ejemplo 6.27 Un inspector visita seis de las máquinas del proceso anterior durante el día y, con el fin de impedir a los operadores sepan a qué horas los inspeccionará, varía el orden de las visitas. Conforme al principio 3, el inspector puede seguir:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ rutas diferentes.}$$

Ejemplo 6.28 Un circuito electrónico puede fallar en quince puntos diferentes. Conforme al principio 7, la falla en tres de ellos puede suceder de:

$\binom{15}{3} = 455$ formas siendo por ejemplo tres de ellas $(1,6,12), (4,13,15) y\ (1,5,9)$.

Ejemplo 6.29 Si hay doce maneras en las que un artículo manufacturado puede tener un pequeño defecto y diez en las cuales puede tener un defecto mayor, conforme a los principios 2 y 5 un defecto menor y uno mayor puede ocurrir de:

$$\binom{12}{1}\binom{10}{1} = 12 \times 10 = 120$$

maneras y dos defectos menores y dos mayores de

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2} = 66 \times 45 = 2{,}970.$$

Ejemplo 6.30 Con las letras $a, b, c, d, e\ y\ f$ ¿Cuántas palabras clave de cuatro letras se pueden formas si

a) ninguna letra puede repetirse?
   Conforme al principio 2: $N_{\mathbb{S}} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.
b) cualquier letra se puede repetir cualquier número de veces?
   Conforme al principio 1, se tienen $N_{\mathbb{S}} = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1{,}296$ palabras clave.

Ejemplo 6.31 Un experimentador desea estudiar el efecto de la temperatura y el tiempo de calentamiento para conocer la calidad de un alimento. Se propone probar tres temperaturas y cinco periodos de tiempo. El número de ensayos que necesita correr el experimentador para probar cada temperatura con cada periodo de tiempo es, por el principio 2 también conocido como la ley de la multiplicación:

$$N_{\mathbb{S}} = 3 \times 5 = 15.$$

Ejemplo 6.32 Un biólogo que estudia el proceso interno de la temperatura de los peces desea probar en un tanque dividido por la mitad, tres temperaturas calientes en una de las mitades y dos temperaturas frías en la otra; entonces requiere, por la ley de la multiplicación:

$$N_{\mathbb{S}} = 3 \times 2 = 6 \text{ pares de ajustes de temperatura.}$$

Ejemplo 6.33 Un agrónomo desea estudiar la generación de tres variedades diferentes de maíz en cuatro surcos espaciados. Para el experimento requiere $N_{\mathbb{S}} = 3 \times 4 = 12$ parcelas si cada combinación variedad-espaciamiento se prueba sobre una sola parcela (por la ley de la multiplicación). Si cada combinación se prueba repetidamente sobre cuatro parcelas, se requieren:

$$N_{\mathbb{S}} = 12 \times 4 = 48 \text{ parcelas.}$$

Ejemplo 6.34 ¿Cuántas corridas o ensayos se necesitan para determinar las condiciones óptimas de operación de una planta de aguas residuales si el diseño del experimento necesita dos tiempos de reciclado, dos velocidades de ventilación y dos cantidades de fango a remover? Por la ley de la multiplicación de requieren:

$$N_{\mathbb{S}} = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ ensayos.}$$

Si el experimento completo necesita replicarse, se necesitan

$$8 \times 2 = 16 \text{ corridas.}$$

Ejemplo 6.35 Con referencia al ejercicio anterior, el Director de la planta considera que no son tres sino nueve las variables involucradas que pueden influir la calidad del agua residual. Si cada variable es probada a dos niveles, por el principio 1 con $k = 2 \, y \, n = 9$ el número de corridas necesarias si cada conjunto de condiciones es probado una sola vez es:

$$N_{\mathbb{S}} = 2^9 = 512.$$

Ejemplo 6.36 Con ayuda de una calculadora puede verificarse que:

a) $P_3^{10} = 720$, $b)$ $5! = 120$ y $c)$ $\binom{13}{3}\binom{13}{10} = 34{,}320$.

Ejemplo 6.37 En el torneo interfacultades de futbol, los primeros cuatro lugares pueden terminar de:

$$P_4^9 = 9 \text{ X } 8 \text{ X } 7 \text{ X } 6 = 3.024 \text{ (Principio 4).}$$

Ejemplo 6.38 Como estímulo, un psicólogo puede usar una campana (c), una luz (l) o un Shock eléctrico (s),

a) Si se aplican los tres estímulos una sola vez, el número de formas ordenadas en que pueden aplicarse es, $N_{\mathbb{S}} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \implies S = \{cls, csl, lcs, lsc, scl, slc\}$ (principio 3).

b) Si solamente se aplican dos estímulos, conforme al principio 7, se tiene $N_{\mathbb{S}} = \binom{3}{2} = 3\ secuencias\ que\ son\ N = \{cl, cs, ls\}$.

Ejemplo 6.39

a) Si hay diez sillas en una fila y ocho personas van a ser sentadas, como el orden está implicado, el número de eventos posibles es:
$P_8^{10} = 1{,}814{,}400$ (principio 4).

b) Si un examen consta de diez preguntas y se necesitan contestar ocho de ellas para aprobarlo, como no hay ningún orden implicado utilizamos el principio 7 y las posibles secuencias que pueden tenerse para elegir las preguntas a contestar es:
$C_8^{10} = 45$ (principio 7).

c) El número de sucesos con las primeras dos sillas vacías es igual al del inciso a) en el que las dos últimas queden vacías, que también puede resolverse evocando los principios 7 y 3, en cuyo caso:
$N_{\mathbb{S}} = C_8^{10} \times 8! = 1{,}814{,}400.$

d) Con relación al inciso b), el número de secuencias en que se omiten las dos primeras preguntas según el principio 3 es
$N_{\mathbb{S}} = 8! = 40{,}320.$

Ejemplo 6.40 Si en la expansión de $(a+b)^n$,$a = b = 1$ el número de combinaciones para $r = 1,2,3,\ldots,n$ es $2^n - 1$. En efecto,

$$(A+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$$
$$si\ a = b = 1 \Rightarrow$$
$$(1+1)^n = 2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{r} + \cdots + \binom{n}{n}$$
$$= 1 + N_c \Rightarrow N_c = 2^n - 1.$$

Ejemplo 6.41 Un banco permite a una persona tener solo una cuenta de ahorros con un seguro de un millón de pesos; sin embargo, una familia numerosa puede tener cuentas individuales y cuentas a nombre de uno, dos, tres y más miembros. ¿Cuántas cuentas son posibles para una familia de dos? ¿De tres? ¿De cinco? ¿De n miembros?

Con base en el ejercicio anterior, para familias con diferente número de miembros se pueden tener $N_1 = 1, N_2 = 3, N_3 = 7, N_5 = 31, N_n = 2^n - 1$ cuentas; por ejemplo, para una familia con un hijo se tiene $n = 3$, $h = esposo, m = esposa\ e\ i = hijo$ y y las cuentas posibles son $S = \{h, m, i, hm, hi, m, i, hmi\}$.

Ejemplo 6.42 Una lámpara de siete circuitos tiene tres focos de 70 W que pueden encenderse una, dos o las tres a la vez y un foco grande que puede encenderse a 100, 200 o 300 W. El número de opciones de iluminación diferentes que se tienen según el ejercicio 6.37 $N_{\mathbb{S}} = 2^3 - 1$ para los focos pequeños + 3 para el foco grande = 10 las cuáles son

$$\mathbb{S} = \{1,2,3,12,13,23,123,100,200,300\}.$$

Ejemplo 6.43 Demuestre que el número de maneras de colocar N bolas en n cajas con $N_1 en\ la\ caja\ 1, N_2\ en\ la\ caja\ 2, N_3 en\ la\ 3 \ldots N_n\ en\ la\ n\ es$

$$\frac{N!}{N_1!\,N_2!\,N_3!\ldots N_n!}$$

Como los órdenes no están implicados aplicando los principios 7 y 2 tenemos

$$\binom{N}{N_1} \times \binom{N-N_1}{N_2} \times \binom{N-N_1-N_2}{N_3} \times \ldots \times \binom{N_n}{N_n} = \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!\ldots N_n!}.$$

Ejemplo 6.44 Se trata de encontrar los espacios muestrales uniformes para el problema de colocar dos partículas (k) en tres cajas (n). Conforme las consideraciones de las partículas Maxwell-Boltzmann (MB), Fermi-Dirac (FD) y Bose-Einstein (BE).

Para MB hay orden y repetición por lo que se aplica el principio 5,

$$N_{\mathbb{S}} = 3^2 = 9 \Rightarrow \mathbb{S} = \{11,12,21,22,13,31,23,32,33\};$$

$$donde\ 13 = \begin{Bmatrix} partícula\ 1\ en\ caja\ 1\ y \\ la\ partícula\ 2\ en\ la\ 3 \end{Bmatrix}$$

$y\ 31 = \{partícula\ 1\ en\ caja\ 3\ y\ la\ 2\ en\ la\ caja 1\}$.

$Observe\ \ que\ 13 \neq 31.$

Para FD no importa el orden y conforme al principio 7 con $n = cajas\ (3)$ y $r = partículas\ (2) \Rightarrow N_{\mathbb{S}} = \binom{n}{r} = \binom{3}{2} = 3\ donde$

$$\mathbb{S} = \{12,13,23\}.$$

Para BE tampoco hay orden pero considera $n = fronteras\ entre\ las\ cajas$ y $r = partículas$, entonces

$$N_{\$} = \binom{n}{r} = \binom{4}{2} = 6.$$

Ejemplo 6.45 Con el uso de una calculadora puede verificarse que

a) 9! = 9 x 8 x 7 x...x 3 x2 x1 = 362, 880.

b) 10! = 10 x 9! = 10 x 362880 = 3, 628, 800.

c) 11! = 11 x 10! = 11x 3.628800 = 39, 916, 800.

d) $\frac{16!}{14!} = \frac{16\times 15\times 14!}{14!} = 16 \times 15 = 240.$

e) $\frac{14!}{11!} = \frac{14\times 13\times 12\times 11!}{11!} = 14 \times 13 \times 12 = 2.184.$

f) $\frac{8!}{10!} = \frac{8!}{10\times 9\times 8!} = \frac{1}{10\times 9} = 0{,}0111.$

g) $\frac{10!}{13!} = \frac{10!}{13\times 12\times 11\times 10!} = \frac{1}{13\times 12\times 11} = 0{,}0006.$

Ejemplo 6.46 Simplificar

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\times n!}{n!} = n + 1.$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{(n-2)!} = n \times (n-1).$

c) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{(n-1)!}{(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)!} = \frac{1!}{(n+2)\times(n+1)\times n}.$

d) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!} = \frac{(n-r+1)\times(n-r)\times(n-r-1)!}{(n-r-1)!} = (n-r+1) \times$
$(n-r).$

Ejemplo 6.47

a) ¿Cuántas placas para automóvil pueden hacerse si cada placa consta de dos letras diferentes seguidas de tres dígitos diferentes?
Por la principio de la multiplicación, considerando el alfabeto español de 28 letras se pueden tener
$N_p = 28 \times 27 \times 10 \times 9 \times 8 = 544{,}320$ placas diferentes.

b) ¿Si el primer dígito no puede ser cero? Por la principio de la multiplicación se pueden tener

$$N_p = 28 \times 27 \times 9 \times 9 \times 8 = 489.888 \text{ placas diferentes.}$$

Ejemplo 6.48 Si de A a B hay seis caminos y de B a C hay cuatro como se muestra en la figura 6.2

a) ¿De cuantas maneras se puede ir de A a C pasando por B?

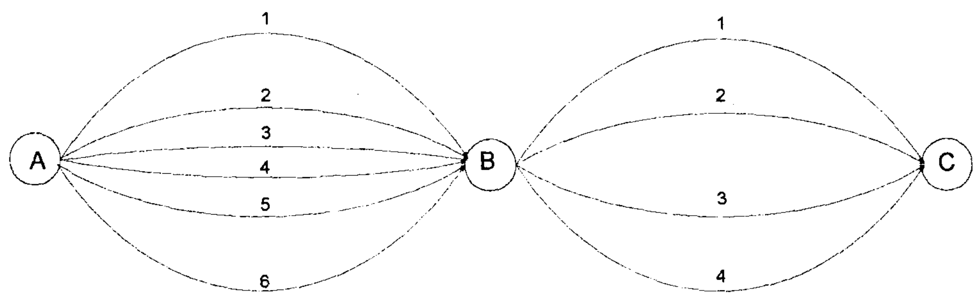


Figura 6.2 Ilustración de las formas en que se puede ir de A a C

De la figura 6.2 y Conforme a al principio fundamental del conteo, se puede ir por:

$$N_c = 6 \times 4 = 24 \text{ rutas diferentes.}$$

b) ¿De cuantas maneras se puede hacer el viaje redondo pasando por B?

$$N_c = 6 \times 4 \times 4 \times 6 = 576 \text{ rutas diferentes.}$$

c) ¿De cuantas maneras se puede hacer el viaje redondo sin usar el mismo camino más de una vez?

$$N_c = 6 \times 4 \times 3 \times 5 = 360 \text{ rutas diferentes.}$$

Ejemplo 6.49 Encontrar el número de maneras en que seis personas pueden acomodarse en un *plátano* de las playas de Acapulco, si tres saben manejarla pero solo uno puede conducirla. Puede haber uno de tres conductores y los demás se pueden acomodarse en el *plátano*.

$$N_a = 3 \times 5! = 360$$

Ejemplo 6.50

a) Encontrar el número de maneras en que cinco personas pueden sentarse en una fila de cinco butacas. La primera persona se puede sentar en cualquiera de las cinco sillas, la segunda en cualquiera de las cuatro restantes, y así sucesivamente, entonces:

$N = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ (Principio 3).

b) En una fila de diez butacas. Por el razonamiento anterior:

$$N = 10! = 3{,}628{,}800.$$

c) Con respecto a a), si dos de ellas insisten en sentarse juntas. Las dos personas juntas pueden sentarse de 2 maneras, en 4 posiciones diferentes y las restantes tres de 3!, entonces

$N = 2 \times 4 \times 3! = 48$ (principios 2 y 3).

Ejemplo 6.51 Para el caso anterior si se sientan alrededor de una mesa circular (principio 6).

a) La primera persona se sienta en cualquier butaca y las cuatro en las sillas restantes; entonces $N = (5-1)! = 4! = 24$.

b) $N = (10-1)! = 362{,}880$.

c) $N = 2 \times (4-1)! = 12$.

Ejemplo 6.52

a) Hallar el número de palabras de cuatro letras que se pueden formar con la palabra $ALBERTO$. De las 7 palabras permutamos 4; entonces

$$N = P_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = 840.$$

b) ¿Cuáles de ellas contienen sólo consonantes? Permutamos las cuatro consonantes (LBRT) de la palabra $N = 4! = 24$ y ellas son

$$Q = \{LBRT, LRBT, LBTR, LTBR, LRTB, LTRB, TLBR, TBLR, TLRB, TRLB, TRBL, TBRL, RTBL, RTLB, RLTB, RBTL, RBLT, RLBT, BRLT, BRTL, BLRT, BLTR, BTLR, BTRL\}.$$

c) ¿Cuántas empiezan y terminan con consonante? $N = 4$ (selección de la primera letra que debe ser consonante) X 3 (selección de la última letra que debe ser consonante) X 5 (selección de la segunda letra) X 4 (selección de la tercera letra) = 240.

d) ¿Cuántas empiezan con vocal? $N = 3$ (selección de la primera vocal) X 6 X 5 X 4 (selección de las letras restantes) = 360.

e) ¿Cuántas contienen la letra L? $N = 4$ (formas de colocar la L) X p_3^6 (formas de arreglar 3 de las seis letras restantes) = 4 X 120 = 480.

f) ¿Cuántas empiezan con T y terminan en vocal? N = 1 (la T) X 3 (la terminación en A, E u O) X 5 X 4 (para las letras intermedias) = 60.

g) ¿Cuántas empiezan con T y contienen a la B? N =1 (la T) X 3 (formas de colocar a la B) X p_2^5 (formas de arreglar 2 de las cinco letras restantes) = 3 X 20 = 60.

h) ¿Cuántas contienen las tres vocales? N = P_3^4 (posiciones de las tres vocales) $\times P_1^5$ (posiciones de la letra restante $= 24 \times 5 = 120$.

Ejemplo 6.53 ¿Cuántas señales diferentes se pueden formar con ocho banderas diferentes colocadas en un asta vertical si cuatro son rojas, dos ámbar y dos verde? En este caso necesitamos conocer, mediante el principio 7, la manera que se pueden colocar ordenadamente las banderas que pueden repetirse, entonces:

$$N = \frac{8!}{4! \times 2! \times 2!} = 420.$$

Ejemplo 6.54 Hallar el número de permutaciones que se pueden formar con cada una de las palabras

a) BARRERA. Se trata de letras repetidas con $n = 7, n_R = 3$ y $n_A = 2$, $\Rightarrow N = \frac{7!}{3! \times 2!} = 720$

b) SATÉLITES. Se trata de letras repetidas con $n = 9, n_s = 2$ y $n_T = 2, n_E = 2$, $\Rightarrow N = \frac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = 45.360.$

c) PROPOSICIÓN. Se trata de letras repetidas con $n = 11, n_p = 2$, $n_O = 3$ y $n_I = 2$, $\Rightarrow N = \frac{11!}{3! \times 2! \times 2!} = 1{,}663{,}200.$

d) IMPROPIO. Se trata de letras repetidas con $n = 8, n_I = 2$ y $n_P = 2, n_O = 2$, $\Rightarrow N = \frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5{,}040.$

Ejemplo 6.55

a) Hallar el número de maneras en que cuatro niños y cuatro niñas se pueden sentar en un fila si los hombres y las mujeres deben quedar alternados. $N = 2$ (hombre o mujer primero) X 4! (para los niños) x 4! (para las niñas) = $2 \times 4!^2 = 1{,}152$.

b) Hallar el número de maneras si se sientan alternadamente y uno de los niños se sienta siempre junto a una niña determinada. N = 2 (hombre o mujer primero) X 7 (lugares restantes) X 3! (para los niños) x 3! (para las niñas) = $2 \times 7 \times 3!^2 = 504$.

c) Hallar el número de maneras si se sientan alternadamente pero los dos niños mencionados no quedan en sillas adyacentes. $N = 1.152 - 504 = 648$.

Ejemplo 6.56 Resuelva el ejercicio anterior si se sientan en una mesa circular.

a) N = 4! (niños o niñas) X (4-1)! (niñas o niños) = $4! \times 3! = 144$.

b) N = 2 (hombre o mujer primero) X 3! (para los niños) x 3! (para las niñas) = $2 \times 3!^2 = 72$.

c) N= 144-72 =72.

Ejemplo 6.57 Una urna contiene diez bolas. Hallar el número de sucesos ordenadas

a) de tamaño tres con sustitución. N= 10 X 10 X 10 = 1,000.

b) De tamaño tres sin sustitución. $N = P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$

c) De tamaño cuatro con sustitución. $N = 10^4 = 10.000$

d) De tamaño cinco sin sustitución. $N = P_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30.240$

Ejemplo 6.58 Hallar el número de secuencias en que se pueden colocar en un estante cinco libros grandes, cuatro medianos y tres pequeños de modo que los libros de igual tamaño queden juntos.

$$N = (los\ libros\ grandes) \times 4!\,(los\ medianos) \times 3!\,(los\ pequeños) \times 3!\,(los\ lotes) = 103{,}680.$$

Ejemplo 6.59 Considere todos los enteros positivos de tres dígitos diferentes,

a) ¿Cuántos son mayores que 700? La diferencia implica que no hay repetición, los enteros positivos son 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9; para los mayores que 700 se debe tener cuando menos al 7 como dígito de las centenas mientras que para las decenas y las unidades cualesquiera de los demás; por ello $N = 3 \times 9 \times 8 = 216.$

b) ¿Cuántos son impares? La respuesta implica que la terminación debe ser 1, 3, 5, 7 y 9 o sea, las posibilidades en las unidades son 5, en las centenas hay 8 (el 0 no cabe) lo mismo que en las decenas, entonces $N = 8 \times 8 \times 5 = 320.$

c) ¿Cuántos son pares? Para que sean pares el dígito de las unidades debe ser 2,4,6 u 8, con lo cual las posibilidades en las unidades son 4, en las centenas hay 8 (el 0 no puede estar) lo mismo que en las decenas; además si el número termina en 0 se tienen 9 para las centenas y 8 para las decenas, con lo cual $N = 8X8X4 + 9X8X1 = 256 + 72 = 328.$

d) ¿Cuántos son divisibles por cinco? En este caso, las terminaciones del número pueden ser 0 y 5; o sea 2 posibilidades para las unidades, 9 para las centenas si la unidad es 0 u 8 si es 5 y, en ambos casos, 8 para las decenas con lo cual $N = 9X8X1 + 8X8X1 = 72 + 64 = 136.$

Ejemplo 6.60

a) Hallar el número de permutaciones diferentes que se pueden formar con todas las letras de la palabra *CÁMARA*. Como que hay tres *A* repetidas ⇨ $N = \frac{6!}{3!} = 120.$

b) ¿Cuántas de ellas principian y terminan con *A*? Permutamos las 4 letras restantes, ya que la inicial y la final están fijas ⇨ $N = 4! = 24.$

c) ¿Cuántas tienen 3 A juntas?

$$N = 4\begin{pmatrix} posibilidades\ de\ acomadar\ a \\ los\ bloques\ de\ 3\ A \end{pmatrix} \times 3!\,(permutaciones\ de\ C, M.R) = 24.$$

d) ¿Cuántas empiezan con A y terminan con M?

$$\frac{4!\,(los\ arreglos\ de\ las\ 4\ letras\ restantes)}{2!\,(las\ 2\ A\ restantes\ repetidas)} = 12.$$

Ejemplo 6.61 Con una calculadora, pueden verificarse las siguientes combinaciones binomiales:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = 10,$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = 35, \qquad \binom{14}{2}\frac{14!}{(14-2)!\,2!} = 91,$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\,4!} = 15,$$

$$\binom{20}{17} = \frac{20!}{(20-17)!\,17!} = 1{,}140$$

$$\binom{18}{16} = \frac{18!}{(18-16)!\,16!} = 153, \qquad \binom{9}{3,5,1} = \frac{9!}{3!\,5!\,1!} = 50,$$

$$\binom{7}{3,2,2,0} = 210, \qquad \binom{6}{2,2,1,1,0} = 180.$$

Ejemplo 6.62 Comprobar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

l.q.q.d

Ejemplo 6.63 Comprobar que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots \pm \binom{n}{n} = 0.$

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots \pm \binom{n}{n}$$

l.q.q.d

Ejemplo 6.64 Hallar el término del desarrollo de $(2x^2 - \frac{1}{2}y^3)^8$ que contiene x^8.

Para que el exponente de $x$sea 8, el término es:

$$\binom{8}{4}(2x^2)^4(-\frac{1}{2}y^3)^4 = 70x^8y^{12}.$$

Ejemplo 6.65 Hallar el término del desarrollo de $(3xy^2 - z^2)^7$ que contiene y^6.El término buscado es:

$$\binom{7}{3}(3xy^2)^3(-z^2)^4 = 945x^3y^6z^8$$

Ejemplo 6.66 Una clase consta de nueve hombres y tres mujeres

a) ¿De cuantas maneras el profesor puede escoger un comité de cuatro alumnos? Como no hay orden implicado:

$$N = \binom{9+3}{4} = 495.$$

b) ¿Cuántos comités contarán por lo menos con una mujer?

$$N = \binom{3}{1}\binom{9}{3} + \binom{3}{2}\binom{9}{2} + \binom{3}{3}\binom{9}{1} = \binom{12}{4} - \binom{9}{4} = 3 \times 84 + 3 \times 36 + 1 \times 9 = 495 - 126 = 369.$$

c) ¿Cuantos tendrán una mujer exactamente?

$$N = \binom{3}{1}\binom{9}{3} = 252.$$

Ejemplo 6.67 Un matrimonio tiene once amigos de confianza

a) ¿De cuantas maneras puede invitar a cinco de ellos a comer?

$$N = \binom{11}{5} = 462.$$

b) ¿De cuantas maneras si dos son casados y no asiste el uno sin el otro?

$N =$

$Invitaciones\ con\ la\ pereja + Invitaciones\ \mathrm{sin}\ la\ pareja =$

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 84 + 126.$$

c) ¿De cuantas maneras, si dos de ellos no la llevan bien y no asisten juntos?

$$N = Invitaciones\ \text{sin}\ ninguno + Invitacionescon\ uno\ de\ e$$
$$= \binom{9}{5} + \binom{2}{1}\binom{9}{4} = \binom{11}{5} - \binom{9}{3} = 378.$$

Ejemplo 6.68 Hay diez puntos $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ en un plano y en una misma línea no hay tres.

a) ¿Cuántas líneas forman los puntos?

$$N = No\ de\ combinaciones\ de\ dos\ de\ los\ 10 puntos$$
$$= \binom{10}{2} = 45.$$

b) ¿Cuantas líneas no pasan por $A, o\ B$?

$$N = No\ de\ combinaciones\ de\ dos\ puntos\ de\ los\ 8\ restantes = \binom{8}{2}$$
$$= 28.$$

c) ¿Cuántos triángulos determinan los puntos?

$$N = No\ de\ combinaciones\ de\ tres\ puntos\ de\ los\ 10 = \binom{10}{3}$$

d) ¿Cuántos de estos triángulos se forman con el punto A?

$$N = A\ es\ fijo \Rightarrow$$
$$No\ de\ combinaciones\ de\ 2\ puntos\ de\ los\ 9\ restantes\ \binom{9}{2}$$

e) ¿Cuántos de estos triángulos se forman con el lado AB?

$$N = Número\ de\ puntos\ restantes = 8;\ ellos\ son\ Q$$
$$= \{ABC, ABD, ABE, ABF, ABG, ABH, ABI\ Y\ ABJ\}.$$

Ejemplo 6.69 De un examen de trece preguntas, un estudiante tiene contestar diez.

a) ¿Cuántas maneras tiene de resolver el examen? $N = \binom{13}{10} = 286.$

b) ¿Cuántas maneras tiene de seleccionar las preguntas si las dos primeras son obligatorias? $N: 13 - 2 = 11\ preguntas\ a\ seleccionar\ 8 = \binom{11}{8} = 165.$

c) ¿Cuántas, si una de las dos primeras es obligatoria?

$$N = \binom{2}{1}\binom{11}{9} = 110.$$

d) ¿Cuántas, si tiene que contestar exactamente tres de las cinco primeras? $N = \binom{5}{3}\binom{8}{7} = 80.$

e) ¿Cuántas, si tiene que contestar por lo menos tres de las cinco primeras? $= \binom{5}{3}\binom{8}{7} + \binom{5}{4}\binom{8}{6} + \binom{5}{5}\binom{8}{5} = 10 \times 8 + 5 \times 28 + 1 \times 56 = 80 + 140 + 56 = 276.$

Ejemplo 6.70 El alfabeto español tiene veintiocho letras de las cuales cinco son vocales.

a) ¿Cuántas palabras de cinco letras con tres consonantes y dos vocales diferentes se pueden formar?
N = No. de selecciones de 2 de 5 vocales x No. de selecciones de 3 de 23 consonantes x No de permutaciones de las 5 letras
$$= \binom{5}{2} \times \binom{23}{3} \times 5! = 2{,}125{,}200.$$

b) ¿Cuántas de éstas contienen la letra b?
$$N = No.\,de\ selecciones\ de\ 2\ de\ 5\ vocales \times No.\,de\ selecciones\ de\ 2\ de$$
$$= 22\ consonantes\ restantes \times No.\,permutaciones\ de\ las\ 5\ letras$$
$$= \binom{5}{2} \times \binom{22}{2} \times 5! = 277{,}200.$$

c) ¿Cuántas de éstas contienen la letra b y la letra c? $N = No.\,de\ selecciones\ de\ 2\ de\ 5\ vocales \times No.\,de\ selecciones\ de\ 1\ de\ 21 consonantes\ restantes \times No.\,permutaciones\ de\ las\ 5\ letras\ = \binom{5}{2} \times \binom{21}{1} \times 5! = 25{,}200.$

d) ¿Cuántas de éstas empiezan con la letra b y contienen la letra c?
$N = No.\,de\ selecciones\ de\ 2\ de\ 5\ vocales\ \times No.\,de\ selecciones\ de\ 1\ de\ 21\ \ consonantes\ restantes$
$$No.\ permutaciones\ de\ las\ 4\ letras\ posibles = \binom{5}{2} \times \binom{21}{1} \times 4! = 5.040$$

e) ¿Cuántas de éstas empiezan con la letra *b* y terminan con la letra *c*?

$N = No. de\ selecciones\ de\ 2\ de\ 5\ vocales$
$21\ consonantes\ restantes \times\ No.\ permutaciones\ de\ las$
$$3\ letras\ posibles = \binom{5}{2} \times \binom{21}{1} \times 3! = 1{,}260.$$

f) ¿Cuántas de éstas contienen las letras *a* y *b*?

$N = No. de\ selecciones\ de\ 1\ de\ las\ 4\ vocales\ restantes \times$
$No. deselecciones\ de\ 2de\ 22\ consonantes\ restantes \times$
$No. permutaciones\ de\ las\ 5\ letras\ posibles$
$$= \binom{4}{1} \times \binom{22}{2} \times 5! = 110{,}880.$$

g) ¿Cuántas de éstas empiezan con la letra *a* y contienen la letra *b*?

$N = No. de\ selecciones\ de\ 1\ de\ 4\ vocales$
$No. de\ seleccionesde\ 2\ de\ 22\ consonantes\ restantes$
$\times\ No. permutaciones\ de\ las\ 4\ letras\ posibles$
$$= \binom{4}{1} \times \binom{22}{2} \times 4! = 22{,}176$$

h) ¿Cuántas de éstas empiezan con la letra *b* y contienen la letra *a*?

$N = No. de\ selecciones\ de\ 1\ de\ 4\ vocales \times$
$No. de\ selecciones\ de\ 2\ de22\ consonantes\ restan$
$\times\ No. permutaciones\ de\ las4\ letras\ posibles$
$$= \binom{4}{1} \times \binom{22}{2} \times 4! = 22{,}176.$$

i) ¿Cuántas de éstas empiezan con la letra *a* y terminan con la letra *b*?

$N = No. de\ selecciones\ de\ 1\ de\ las\ 4\ vocales\ restantes$
$X\ No. de\ selecciones\ de\ 2\ de\ las\ 22\ vocales\ restantes$
$\times\ No\ permutaciones\ delas\ 3\ letras\ posibles$
$$= \binom{4}{1} \times \binom{22}{2} \times 3! = 5.554$$

j) ¿Cuántas de éstas contienen las letras *a*, *b* y *c*?

$N = No\ de\ selecciones\ de\ 1\ de\ 4\ vocales$
$\times\ No\ de\ selecciones\ de\ 1de\ 21\ consonantes\ restantes$
$\times\ No\ permutaciones\ de\ las\ 5\ letras$
$$= \binom{4}{1} \times \binom{21}{1} \times 5! = 10{,}080.$$

Ejemplo 6.71 ¿De cuántas maneras se pueden repartir nueve juguetes por igual entre tres niños?

$$N = \binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \frac{9!}{6! \times 3!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{3!}{0! \times 3!} = \frac{9!}{3! \times 3! \times 3!}$$
$$= 1{,}680$$

Ejemplo 6.72 ¿De cuántas maneras pueden dividirse por igual nueve estudiantes en tres equipos?

$$N = \frac{\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3}}{3!} = \binom{8}{2} \times \binom{5}{2} = \frac{1.680}{6} = 280.$$

Ejemplo 5.73 ¿De cuántas maneras se pueden dividir diez estudiantes en tres equipos, uno de cuatro estudiantes y los otros de tres?

$$N = \frac{\binom{10}{4} \times \binom{6}{3} \times \binom{6}{3}}{2!} = \frac{\frac{10!}{4! \times 3! \times 3!}}{2!} = \binom{10}{4} \times \binom{5}{2} = 2{,}100.$$

Ejemplo 6.73 Hay doce bolas en una urna. ¿De cuántas maneras se pueden sacar tres bolas de la urna, cuatro veces sucesivamente, todas sin sustitución?

$$N = \binom{12}{3} \times \binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \frac{12!}{3! \times 3! \times 3! \times 3!} = 369{,}600.$$

Ejemplo 6.74 ¿De cuantas maneras se puede repartir un club de doce miembros en tres comités de cinco, cuatro y tres miembros respectivamente?

$$N = \binom{12}{5} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{3} = \frac{12!}{5! \times 4! \times 3!} = 27{,}720.$$

Ejemplo 6.75 ¿De cuántas maneras se pueden repartir n estudiantes en dos equipos que contengan un estudiante por lo menos?

$$N = 2^{n-1} - 1$$

Ejemplo 6.76 ¿De cuantas maneras se pueden repartir 14 hombres en seis comités en los que dos sean de tres y los restantes de dos?

$$N = \frac{\binom{14}{3} \times \binom{11}{3} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{2! \times 4!} = \frac{\frac{14!}{3! \times 3! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!}}{2! \times 4!}$$
$$= 3{,}153{,}150.$$

Ejemplo 6.77 A los acompañantes de los ingenieros inscritos a la Conferencia Nacional de Ingeniería, se les ofrecen seis paseos turísticos en cada uno de los tres días de la Conferencia. ¿De cuántas formas puede arreglar un acompañante uno de estos paseos? Por el principio de la multiplicación:

$N = 6 \times 3 = 18$ formas diferentes.

Ejemplo 6.78 En una investigación médica se clasifican a los pacientes conforme a su tipo de sangre, en ocho formas: $AB^+, AB^-, A^+, A^-, B^+, B^-, O^+$ u O^- y según su presión arterial que puede ser $alta, normal\ o\ baja$. Encuentre el número de formas en que pueden clasificarse los pacientes. Por el principio de la multiplicación:

$N = 8 \times 3 = 24$ formas diferentes.

Ejemplo 6.79 Un experimento consiste en lanzar un dado y después elegir, sin repetición, una letra del alfabeto ¿Cuántos son los posibles sucesos o elementos del espacio muestral? Por el principio de la multiplicación:

$N = 6 \times 28 = 168$ posibles resultados.

Ejemplo 6.80 Un determinado zapato tiene cinco estilos diferentes y cada estilo está disponibles en cuatro colores ¿Cuántos lugares deben tenerse en el aparador de la tienda para exhibir todos los estilos y colores? Por el principio de la multiplicación:

$N = 5 \times 4 = 20$ lugares disponibles.

Ejemplo 6.81 A los estudiantes de la Facultad de Ingeniería se les clasifica por sexo y por semestre en el que están inscritos. ¿Cuántas son las posibles clasificaciones? Por el principio de la multiplicación:

$N = 2 \times 9 = 18$ lugares disponibles.

Ejemplo 6.82 Un estudiante regular que cursará el cuarto semestre de la carrera de ingeniería en computación en la Facultad de Ingeniería decide cursar las correspondientes al quinto, de las cuales tres de ellas se ofrecen en diez horarios que no se traslapan entre sí, la asignatura de Probabilidad y Estadística se ofrece en veinte horarios de los cuales dos se traslapan con cada uno de las tres primeras y tres con la asignatura de Ética Profesional que se ofrece en quince horarios de los

cuáles dos se traslapan con cada una de las tres primeras asignaturas. ¿De cuántas maneras puede arreglar su horario sin traslape?
Por el principio de la multiplicación:

$N = 10 \times 10 \times 10 \times (20 - 6 - 3) \times (15 - 6) = 99{,}000$ horarios sin traslape.

Ejemplo 6.83 Un constructor de una zona residencial ofrece a los posibles compradores cuatro diseños, tres diferentes sistemas de alumbrado, una cochera cerrada o abierta y patio o jardín. ¿Cuántas son las posibles elecciones para el comprador? Por el principio de la multiplicación:

$N = 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ elecciones disponibles.

Ejemplo 6.84 Una medicina para el asma se puede comprar con cinco fabricantes distintos en presentación líquida, en tabletas o en cápsulas, y en dosis moderada o alta. ¿De cuántas formas diferentes puede un médico recetar la medicina a un paciente con esta enfermedad? Por el principio de la multiplicación:

$N = 5 \times 3 \times 2 = 30$ posibles recetas.

Ejemplo 6.85 En un estudio sobre consumo de combustible, se prueba cada uno de tres automóviles utilizando cinco marcas de diferente gasolina en siete lugares diferentes. Si se utilizan dos conductores para el estudio y las corridas de prueba se llevan a cabo una vez bajo cada uno de los diferentes conjuntos de condiciones ¿Cuántas corridas de prueba se necesitan? Por el principio de la multiplicación se necesitan:

$N = 3 \times 5 \times 7 \times 2 = 210$ corridas.

Ejemplo 6.86 ¿De cuántas maneras diferentes es posible contestar un examen de nueve preguntas cuyas respuestas pueden ser verdadero o falso?

$$N = 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^9 = 512.$$

Ejemplo 6.87 Si un examen de opción múltiple consta de cinco preguntas con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta;

a) ¿de cuántas formas diferentes puede un estudiante asignar una respuesta a cada pregunta?

$N = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1{,}024$ asignaciones.

b) ¿de cuántas formas diferentes puede el estudiante asignar una respuesta a cada pregunta y tener todas las respuestas equivocadas?

$$N = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \text{ asignaciones posibles.}$$

Ejemplo 6.88

a) ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden hacer con las letras de la palabra *columna*?

$$N = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5{,}040.$$

b) ¿cuántas de estas permutaciones comienzan con la letra *m*?

$$N = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720 \text{ permutaciones con la letra } m \text{ al principio.}$$

Ejemplo 6.89 El testigo de un accidente cuyo causante se dio a la fuga le informó a la policía que el número de placas tenía las letras RLH seguidas de tres dígitos, el primero de los cuáles era un cinco. Si el testigo un pudo recordar los dos últimos dígitos, pero aseguro que eran diferentes, encuentre el número máximo de registros que la policía tendrá que revisar.

$$N = (10 - 1) \times 8 = 72 = 720 \text{ registros por revisar.}$$

Ejemplo 6.90

a) ¿De cuántas maneras se pueden formar seis personas para subirse a un autobús?

$$N = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720.$$

b) Si tres personas insisten en seguir cada una de ellas a las otras ¿de cuántas maneras es posible acomodarlas?

$$N = 3!\,(las\ que\ están\ juntas) \times 3!\,(las\ restantes) \times 4(posiciones) = 144.$$

c) Si en un determinado conjunto de dos personas, cada una de ellas se niega a seguir a la otra ¿de cuántas formas es posible acomodarlas?

$$N = (6-1)!\,(las\ que\ se\ permutan) \times 4(posiciones) = 480.$$

Ejemplo 6.91 ¿Cuántas formas existen para elegir tres candidatos para ocupar tres vacantes en una compañía constructora, de ocho recién graduados?

$$N = \binom{8}{3} = 56$$

Ejemplo 6.92 En un estudio llevado a cabo en la Facultad de Medicina de la UNAM, se concluyó que si se siguen siete principios simples de salud es posible extender la vida de un hombre en once años y de una mujer en siete. Dichas principios son: no fumar, hacer ejercicio con regularidad, beber alcohol con moderación, dormir entre siete y ocho horas diarias, mantener un peso apropiado y desayunar y no tomar alimento entre comidas. ¿De cuántas formas puede una persona adoptar cinco de estos principios

a) si la persona viola en la actualidad las siete principios?

$$N = \binom{7}{5} = 21.$$

b) si la persona nunca bebe y toma siempre su desayuno?

$$N = \binom{5}{2} = 10.$$

Ejemplo 6.93 De un grupo de cuatro hombres y cinco mujeres. ¿Cuántos comités es posible formar con tres miembros

a) sin restricciones?

$$N = \binom{9}{3} = 84.$$

b) con un hombre y dos mujeres?

$$N = \binom{4}{1}\binom{5}{2} = 4 \times 10 = 40.$$

c) Con dos hombres y una mujer, si un hombre específico debe ser parte del comité?

$$N = \binom{3}{1}\binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15.$$

Ejemplo 6.94 De cuatro manzanas rojas, cinco verdes y seis amarillas ¿cuántas selecciones de nueve manzanas son posibles si se deben incluir tres de cada color?

$$N = \binom{4}{3}\binom{5}{3}\binom{6}{3} = 4 \times 10 = 40.$$

Ejemplo 6.95 Un envío de doce aparatos de televisión contiene tres defectuosos ¿de cuántas formas puede el administrador de un hotel adquirir cinco aparatos y recibir cuando menos dos de los defectuosos?

$$N = \binom{3}{2}\binom{9}{3} + \binom{3}{3}\binom{9}{2} = 3 \times 84 + 1 \times 36 = 288.$$

Ejemplo 6.96 ¿Cuántas formas existen para elegir tres candidatos para ocupar tres vacantes en una compañía constructora, de ocho recién graduados?

$$N = \binom{8}{3} = 56.$$

Ejemplo 6.97 Un envío de doce aparatos de televisión contiene tres defectuosos ¿de cuántas formas puede el administrador de un hotel adquirir cinco aparatos y recibir cuando menos dos de los defectuosos?

$$N = \binom{3}{2}\binom{9}{3} + \binom{3}{3}\binom{9}{2} = 3 \times 84 + 1 \times 36 = 288.$$

CAPÍTULO 7
ELEMENTOS DEL CÁLCULO

CAPÍTULO 7
ELEMENTOS DEL CÁLCULO

7.1 Introducción

La teoría de probabilidad está enfocada al estudio de los fenómenos continuos y discretos modelados por funciones continuas y discretas y, cuando se desea calcular la probabilidad de algunos eventos, es necesario operar sobre dichas funciones con apoyo en los conocimientos de la matemática continua y la matemática discreta; por lo cual, el propósito del presente capítulo es repasar los conceptos fundamentales de estas ramas de las matemáticas.

El cálculo deviene de la geometría griega y en la probabilidad se utiliza para modelar y estudiar los fenómenos aleatorios continuos. Se reporta que Demócrito calculó el volumen de pirámides y conos considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitesimal; Eudoxo y Arquímedes utilizaron el llamado *método de agotamiento* para encontrar el área de un círculo mediante el uso de polígonos inscritos; sin embargo, las dificultades para trabajar con números irracionales y las paradojas de Zenón de Elea impidieron formular una teoría sistemática del cálculo. Durante el siglo XVII Francesco Cavalieri y Evangelista Torricelli ampliaron el uso de los infinitesimales, Descartes y Pierre de Fermat utilizaron el álgebra para encontrar áreas y tangentes (integración y diferenciación en términos modernos); Fermat e Isaac Barrow consideraron que ambos cálculos estaban relacionados e Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz demostraron que son inversos, lo que se conoce actualmente como el teorema fundamental del cálculo. El descubrimiento de Newton (hacia 1660) fue anterior al de Leibniz (hacia 1670), pero el retraso en su publicación a la fecha provoca disputas sobre quién fue el primero; a pesar de todo, se terminó por adoptar la notación de Leibniz.

A partir del siglo XVIII aumentó sensiblemente el número de aplicaciones del cálculo pero el uso impreciso de las cantidades infinitas e infinitesimales, así como la intuición geométrica, causaban todavía confusión y controversia sobre sus fundamentos. Uno de sus críticos más notables fue el filósofo George Berkeley. Para el siglo XIX los matemáticos sustituyeron esas vaguedades por fundamentos sólidos basados en cantidades finitas, así, Bernhard Bolzano y Agustín Cauchy definieron con precisión los límites y las derivadas; Cauchy y Bernhard Riemman hicieron lo propio con las integrales, y Julius Dedekind y Karl Weierstrass con los números reales. Por ejemplo, se supo que las funciones diferenciables son continuas y que las funciones continuas son integrables, aunque los recíprocos son falsos. En el siglo XX, el análisis no convencional, legitimó el uso de los infinitesimales. Al mismo tiempo, la aparición de las computadoras ha incrementado las aplicaciones del cálculo.

7.2 Variables continuas y discretas

La matemática continua, particularmente el cálculo cuyo concepto central es el de límite, es indispensable en la teoría de la probabilidad para el estudio de los fenómenos aleatorios continuos que se modelan con *variables y funciones continuas* cuyos valores pertenecen al conjunto de los números reales$\mathbb{R}$; por ejemplo, el tiempo entre arribos de dos aviones al aeropuerto de la Cd de México, el frio que azota al Edo. de Durango durante un día de invierno, el volumen de lluvia que cae en durante un semana de julio en el Zócalo de la Ciudad de México. Como en el cálculo son válidos los conceptos de proximidad y límite las representaciones gráficas de estas funciones son trazos continuos y suaves.

Se dice que x es una *variable continua* si el rango de valores de x abarca al conjunto de los números reales o a cualquier subconjunto de éste; que se expresa matemáticamente como:

> $a, b \in \mathbb{R}\, y\, a \leq x \leq b$, *Y el rango de x es el conjunto de todos los números reales que están comprendidos en el intervalo [a, b]; x será continua sobre el conjunto de los reales, si lo es para todos los posibles subconjuntos de ellos.*

Como consecuencia del sorprendente avance de la computación y la comunicación, en las últimas décadas ha resurgido con mayor ímpetu el estudio de las matemáticas discretas que basa su desarrollo en los conjuntos contables discretos finitos o infinitos numerables o sea en conjuntos numerables cuyo entorno son los números enteros, y en las correspondientes *variables discretas* o digitales con cuya base, para el caso de la teoría de la probabilidad, se estudian los fenómenos discretos tales como los procesos digitales, la clasificación de salida de los productos de un proceso en aceptables o no aceptables, el número de imperfecciones en los rollos de fibra óptica de 100 m, conceptos las teorías de la computación, la comunicación, la información y la simulación entre otros; cuyos elementos pueden contarse uno por uno separadamente.

En las matemáticas discretas sus elementos de trabajo son los números enteros $\mathbb{Z}$ = {..., -3,-2,-1, 0, 1, 2,...} y no existen los límites por la izquierda o por la derecha, así, la aproximación al número n en las matemáticas discretas es $n-1$ ó $n+1$.

Se dice que x es una variable discreta si el rango de valores de x abarca el conjunto de los números enteros o cualquier subconjunto de éste, la cual matemáticamente se expresa como:

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \leq x \leq b$, el rango de x es el conjunto de todos los números enteros que están comprendidos en el intervalo [a, b]; x será discreta sobre el conjunto de los enteros si lo es para todos los posibles subconjuntos de los enteros.

Cabe recordar que $a < x \leq b, a \leq x < b$ y $a < x < b$ son conjuntos diferentes para la variable discreta porque no incluyen a alguno o ningún punto de la frontera del conjunto.

7.3 Relaciones y funciones vistas desde la teoría de conjuntos

El conjunto producto de A y B es el conjunto $C = A \times B = \{(a,b) | a \in A \, y \, b \in B\}$, o sea el conjunto ordenado formado por todas las posibles parejas ordenadas (a, b) que asocia a cada elemento de A todos los de B.

El número total de parejas posibles es el número de elementos de A veces el número de elementos de B, ver figura 7.1. Si A tiene n elementos y B tiene m, entonces A × B tendrá $n \times m$ elementos.

La relación $\mathcal{R}$ del conjunto A al conjunto B: $A \overrightarrow{\mathcal{R}} B$, liga a los elementos de A y B mediante una proposición o una regla de correspondencia $\mathcal{C}$ que puede ser falsa o verdadera para los elementos del conjunto producto $A \times B \; \forall (a,b) \in A \times B$; cuyo dominio $\mathcal{D}$ corresponde a los primeros elementos del conjunto co-ordenado $A \times B$, o sea los elementos de A; y su *recorrido, rango o imagen* $\mathcal{R}$ es el conjunto de los segundos elementos co-ordenados, o sea los elementos de B.

Su notación es:

$$\mathcal{R} = \{(a,b)|a \in A, b \in B; \mathcal{P}(a,b)\}$$

Donde $\mathcal{C}(\text{a}, \text{b})$ representa la regla de correspondencia falsa o verdadera para las parejas ordenadas $(\text{a}, \text{b}) \in \text{A} \times \text{B}$, ver figura 7.1.

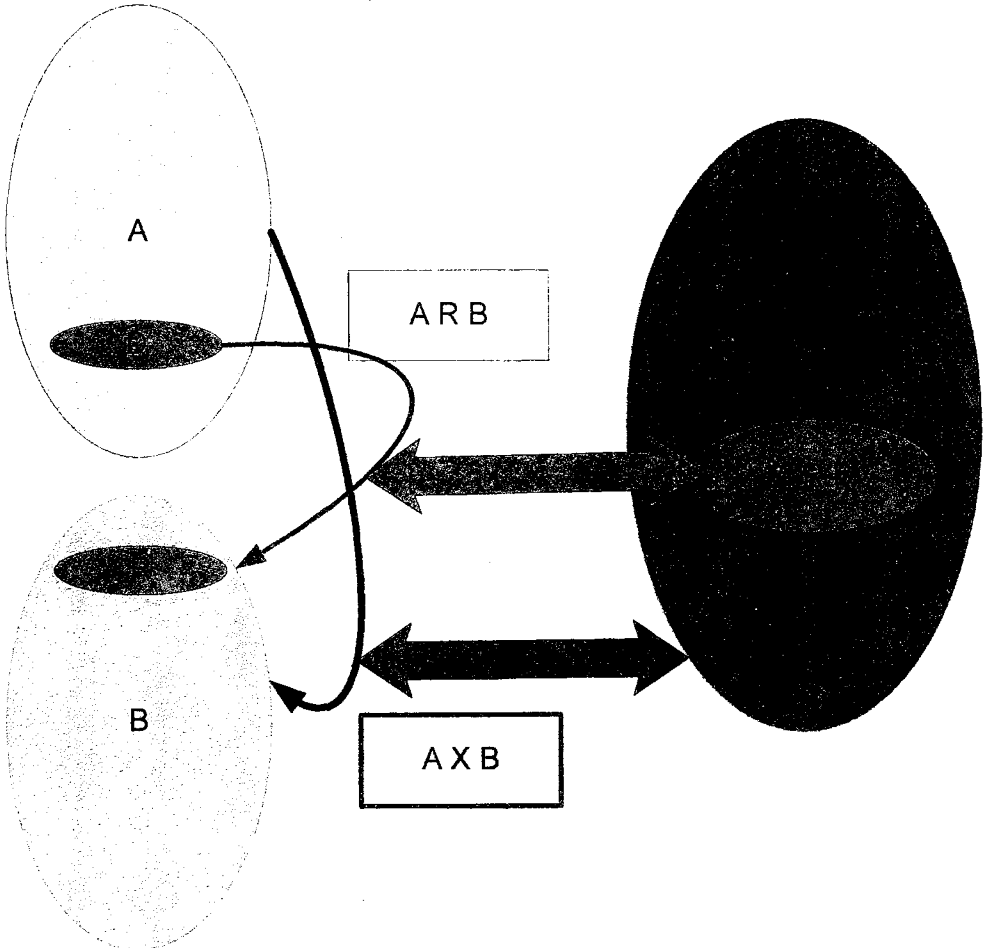


Figura 7.1 Representación del Conjunto Producto $A \times B$ de la Relación y de la relación $A \mathcal{R} B$

Se pueden tener las siguientes relaciones mostradas en figura 7.2:

Relación Multiforme: Si cada elemento de A se relaciona con uno o varios elementos de B.

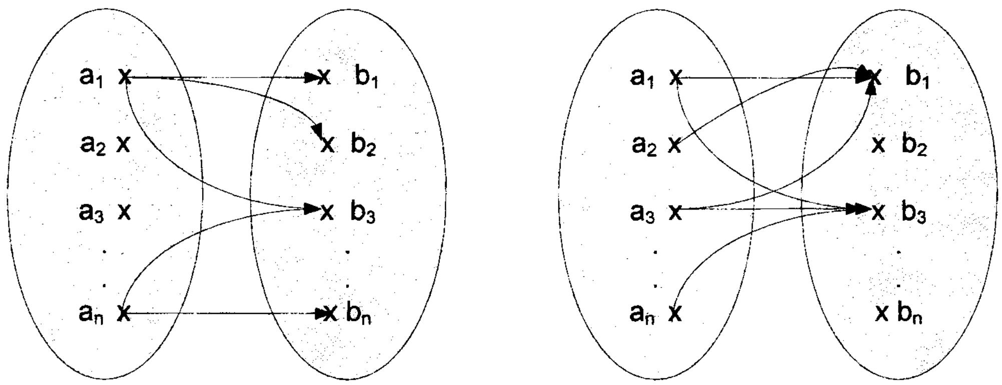
Relación Uniforme o unívoca: Si uno o varios elementos de A se asocian con un solo elemento de B.

Relación biunívoca o uno a uno: Si cada elemento de A se relaciona con uno y solo uno de B.

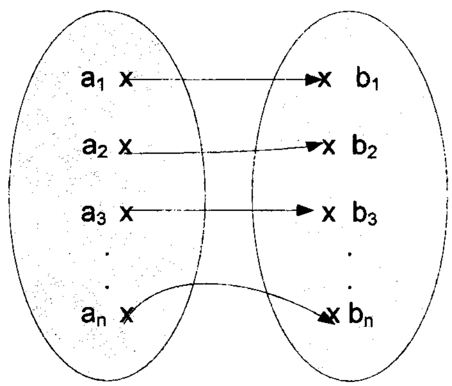
Ejemplo 7.1 Para $A \subseteq \mathbb{R}\, y\, B \subseteq \mathbb{R}$ se tienen, entre otras, las siguientes relaciones continuas:

$\mathcal{R}_1 = \{(a,b)|a \in A, b \in B, \mathcal{C}: a = b\} = \{(-\infty,-\infty), \dots (+\infty,+\infty)\}$,
Cuyo dominio es:
$\mathcal{D} = \{(-\infty,+\infty)\}$ Y el rango es $\mathcal{R} = \{(-\infty,+\infty)\}$.

$\mathcal{R}_2 = \{(a,b)|a \in A, b \in B, \mathcal{C}: a^2 + b^2 = 4\} = \{(-\infty,+\infty)\}$
Cuyo dominio es $\mathcal{D} = \{a|a \in A, -2 \leq a \leq +2\}$
Y rango es: $\mathcal{R} = \{(b|b \in B, -2 \leq b \leq +2\}$.



a) Relación Multiforme (uno a muchos) **b) Relación Unívoca (muchos a uno)**



c) Relación Biunívoca (uno a uno)

Figura 7.2 Tipos de Relaciones

Ejemplo 7.2 Para los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}\, y\, B = \{2, 3, 4\}$ se tienen, entre otras, las relaciones discretas o finitas:

$\mathcal{R}_1 = \{(a,b)|a \in A, b \in B, \mathcal{C}: a = b\} = \{(2,2),(3,3)\}$
Cuyo dominio es $\mathcal{D} = \{2,3\}$ y rango es $\mathcal{R} = \{2,3\}$
$\mathcal{R}_2 = \{(a,b)|a \in A, b \in B, \mathcal{C}: a + b = 4\} = \{(1,3),(2,2)\}$
Para la cual $\mathcal{D} = \{1,2\}$ y $\mathcal{R} = \{2,3\}$
$\mathcal{R}_3 = \{(a,b)|a \in A, b \in B, \mathcal{C}: a > b\} = \{(3,2)\}$.
Donde $\mathcal{D} = \{3\}$ y $\mathcal{R} = \{2\}$.

Ejemplo 7.3 La relación tiene por representación gráfica al conjunto producto definido por la regla de correspondencia, en los que los ejes coordenados tienen como abscisa a los primeros elementos y como ordenada a los segundos elementos de conjunto producto, como se ilustra en las figuras 7.3 y 7.4.

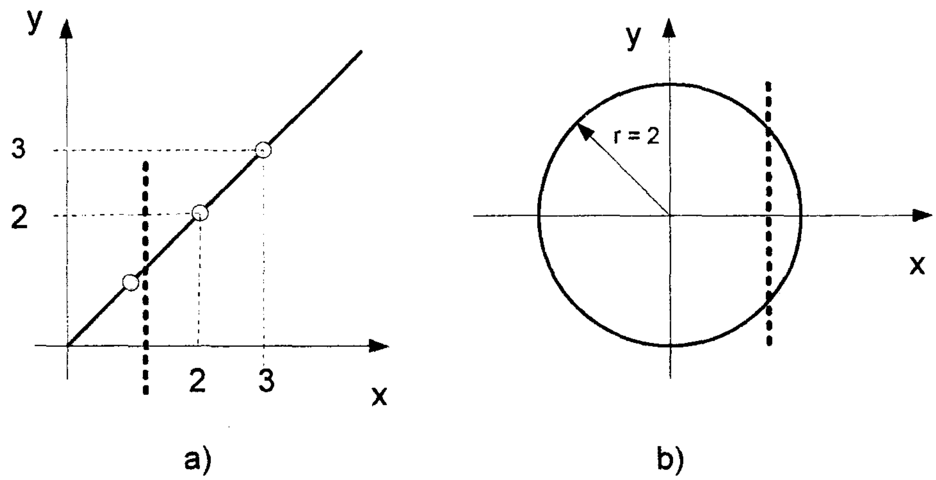


Figura 7.3 Representación de Relaciones Continuas $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$: Identidad y Circular del ejemplo 7.1

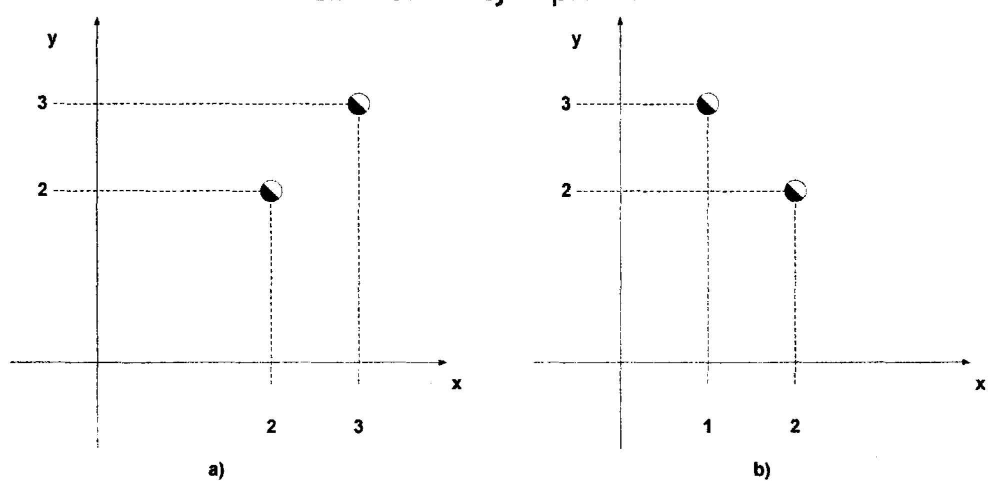


Figura 7.4 Representación de las Relaciones Discretas $\mathcal{R}_1$y $\mathcal{R}_2$ del ejemplo 7.2

En términos de la teoría de conjuntos y de las relaciones, ***una función*** *es cualquier relación unívoca (muchos a uno) o biunívoca (uno a uno)*

Su expresión matemática para la regla de correspondencia puede darse de dos formas: $f: A \to B$ ó $A \xrightarrow{f} B$; o bien la función puede expresarse:

Por comprensión: $f = \{(x, y) | x \in A, y = f(x)\}$

Por extensión: $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$

Por conjuntos: $f = \{(x, y) = f(x) | \mathcal{C} = proposición\}$

Para que la terna (A, B, f) sea función $A \xrightarrow{f} B$ para cada $a \in A$ del dominio $\mathcal{D}$ tiene que existir uno y solo un elemento de B que la regla $\mathcal{P}$ asocie al elemento de A denotándose por $f(a)$ y constituye la imagen en el codominio de la función f, donde el conjunto de las imágenes $\mathcal{R}$ se le llama el conjunto recorrido, rango o imagen de la función. Para que exista la función, ningún elemento de A debe quedarse sin su asociado en B y además éste debe ser único. La condición geométrica para que una relación sea función es que al trazar una recta vertical paralela al eje Y ésta corte a la función en un solo punto. Como se observa en la figura 7.4, la relación identidad es función en tanto la circular no lo es.

Una función es una clase especial de las relaciones, conocida como relación funcional, en la que a cada miembro del conjunto dominio le corresponde uno y solo un miembro del conjunto rango; es decir, cada miembro de A está apareado un solo miembro de B.

En la definición no hay límite en cuanto al número de veces que un elemento *b* del rango pueda aparecer en las parejas. Igualmente, el que la función se defina a partir de $A \times B$ no implica que ésta exista para $B \times A$, porque este último puede ser una relación no funcional. Como se observa en la figura 7.5.

Una función es un subconjunto de $A \times B$ o sea un conjunto de pares ordenados caracterizado por la regla de correspondencia entre A y B. En matemáticas es común que tanto al conjunto como a la regla se les llame función e involucre números.

Desde la perspectiva de la teoría de conjuntos, de manera general y sin tener limitación alguna para la naturaleza de los elementos de los conjuntos, comúnmente utilizada en la probabilidad, una función está constituida por su *conjunto dominio*, su *conjunto codominio*, figura 7.6, y por su *regla de correspondencia o proposición* $\mathcal{C}$ que debe satisfacer las siguientes condiciones: a) a todo elemento del dominio se le puede asociar uno del codominio, b) ningún elemento del dominio puede quedarse sin su asociado del codominio y c) ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

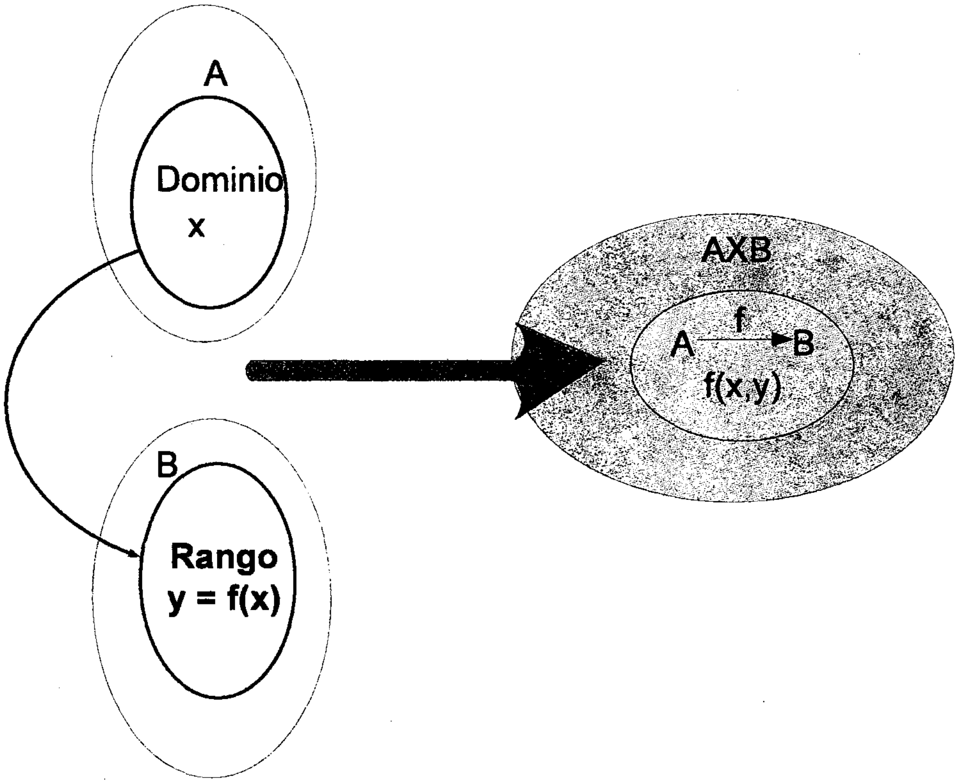


Figura 7.5 Representación de la función $y = f(x)$

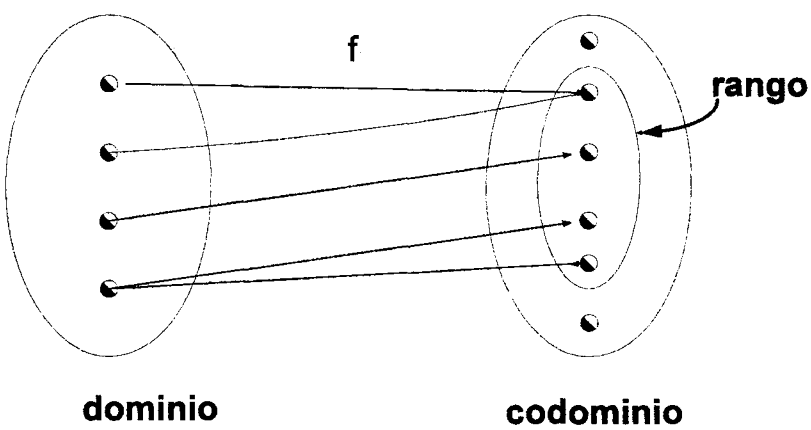


Figura 7.6 La visión de una función desde los conjuntos

En la probabilidad y estadística el uso de las matemáticas y las variables representan magnitudes que se encuentran en la medición de los fenómenos bajo estudio y las relaciones se representan mediante relaciones matemáticas como reglas específicas. La predicción científica se basa en las relaciones establecidas como válidas para las variables que intervienen pues cuando se tiene la regla de las interrelaciones precisas, para un valor de x en el dominio se observará un valor de y preciso, El principal éxito de la ciencia está en la descripción de las interrelaciones como relaciones matemáticas.

Como ya se indicó, una variable es un símbolo que se utiliza en las expresiones matemáticas para representar generalizaciones o denotar a cualquier elemento de un conjunto especificado y siempre puede reemplazarse por este elemento. A dicho conjunto se le llama el rango de la variable. Si x es la variable de alguna expresión matemática, entonces x puede sustituirse por un elemento del conjunto rango, mientras las constantes se mantienen fijas en las expresiones matemáticas y puede reemplazarse solamente por un número.

Las variables que nos interesan representan conjuntos de números o del rango y x especifica su sustitución por un elemento cualquiera del rango. En una gráfica, el eje x es el conjunto rango de la variable x. Las variables son la base de la notación usada en las funciones, así para x y y con sus rangos especificados, una relación entre las variables es un subconjunto de las posibles parejas (x, y) y, si esta relación es una función, entonces se simboliza por $y = f(x)$ ó $y = \emptyset(x)$ donde f o $\emptyset$ establecen las proposiciones o reglas de correspondencia C de cada posible valor de x con un valor de y. El símbolo $f(x)$ por si mismo no representa una función sino solamente indica la existencia de la proposición precisa.

El concepto tradicional de función establece que una función es una relación de dos o más variables y una de ellas, conocida como variable dependiente (y), está en correspondencia con uno y solo un valor para los diferentes valores que pueden adquirir las demás variables, conocidas como variables independientes $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = \vec{x})$; entonces se dice que la variable dependiente es una función de las variables independientes y se denota como $y = f\ (\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = \vec{x})$.

f representa la regla de correspondencia que define la relación funcional o la asociación determinada que existe de y con x o $\vec{x}$. Para el caso que nos ocupa:

Si tanto y como $\vec{x}$ pertenecen al campo de los números reales, se dice que se tiene una función real de variable vectorial.

Porque, en efecto, el argumento de la función es un vector de reales. Cuando se tiene una sola variable independiente se llama *función real de variable real.* Así, para el caso de tres variables: $w = f(x, y)$ su dominio es un conjunto de pares de números (x, y) mientras que para el caso de cuatro variables: $w = f(x, y, z)$ su dominio será la tripleta (x, y, z)

Otra clase de funciones, llamada *función conjunto,* es aquella que en el dominio se tiene un conjunto de conjuntos y en el rango números.

7.4 Funciones continuas, seccionalmente continuas y discretas

Por lo que toca a las funciones se distinguen las *continuas, discontinuas o seccionalmente continuas y discretas* y, como se verá posteriormente, el objeto de la probabilidad es el estudio de los fenómenos aleatorios continuos y discretos, cuyos modelos matemáticos corresponden a *las funciones continuas y discretas,* respectivamente; definidas en diferentes intervalos del dominio de la función.

Una función es continua si la regla de correspondencia es una sola ecuación para los valores de sus dominio, e intuitivamente de manera gráfica su trayectoria no presenta cortes, ni subintervalos vacíos o saltos bruscos en ningún punto de su dominio, tal como sucede en el caso de la relación identidad representada en la figura 7.1, cuya regla de correspondencia es $y = x$.

Formalmente se dice que una función es continua en un intervalo si

a) Existe la función en cualquier punto del dominio: $f(a)$;

b) existe el límite de la función en dichos puntos: $\lim_{x \to a} f(x)$ y

c) si ambos son iguales: $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

En estas funciones su regla de correspondencia es única y válida para el intervalo de análisis, es continua sobre todos los posibles intervalos de los números reales y su dominio incluye a los números reales; en otros términos:

> *Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo de números $a \leq x \leq b$ entonces todos y cada uno de los números comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ también están comprendidos en el rango de valores de y.*

Para cada x en el intervalo, algún número particular de y se encuentra por la regla de correspondencia de la función si la función es continua en el intervalo. Matemáticamente, una función continua f es una función matemática cuyo dominio y su rango están contenidos en $\mathbb{R}$, es decir:

$$f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathcal{D} = Dominio\ de\ f = \{a \in A | (a,b) \in \mathbb{R}, para\ al\ menos\ una\ b \in B\}$$
$$\mathcal{R} = Rango\ de\ f = \{b \in B | (a,b) \in \mathbb{R}, para\ al\ menos\ una\ \ a \in A\}$$

Si el dominio de una función es un intervalo de la recta real la función se denominará real o continua -ver figura 7.7-.

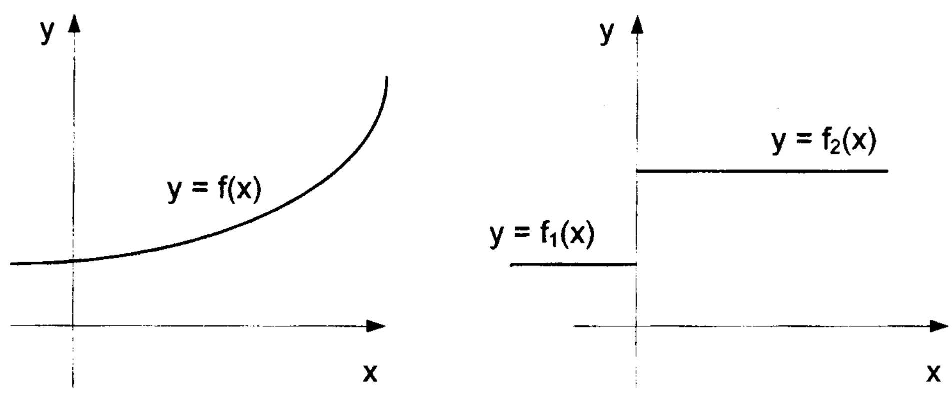
Por su parte, *las funciones seccionalmente continuas o escalonadas*, son las no continuas que presentan anomalías de huecos, escalonamientos o cortes, y tienen como regla de correspondencia diferentes ecuaciones para vincular a las variables x y y, en diferentes valores del dominio de la función -ver figuras 7.7 y 7.9-.

La función $y = f(x)$ *es discreta* en el intervalo de números $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \leq x \leq b$, entonces todos y cada uno de los números comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ deben estar comprendidos en el rango de valores de y. Para cada x en el intervalo, algún número particular de y también puede encontrarse por la regla de correspondencia de la función si la función es discreta en el intervalo, ver figura 7.8.

Una función discreta f es una función matemática cuyo dominio y codominio están contenidos en $\mathbb{Z}$, es decir, es una función:

$$f: \mathcal{D} \subseteq\rightarrow \mathbb{Z}\ \mathcal{D}' \subseteq \mathbb{Z}$$

El dominio de estas funciones es un conjunto discreto (es decir, finito o numerable), y por tratarse de una función donde un elemento del dominio no puede estar asociado a más de uno del codominio su conjunto imagen también . Ejemplos de estas funciones discretas son las sucesiones.



a) Función continua   b) Función discontinua

Figura 7.7 Funciones continua y seccionalmente continua

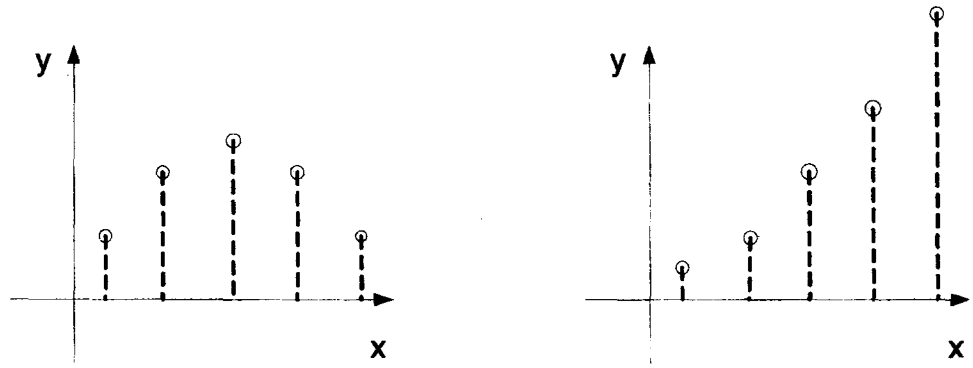
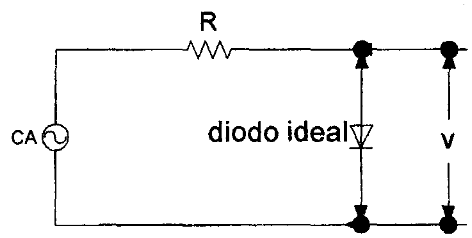


Figura 7.8 Funciones discretas

Ejemplo 7.4 *La función discontinu*a de la figura 7.9, representa el voltaje en un diodo ideal.

$$v = \begin{cases} 0 & para\, 0 \le t \le \pi \\ 50sen(t) & para\, \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$



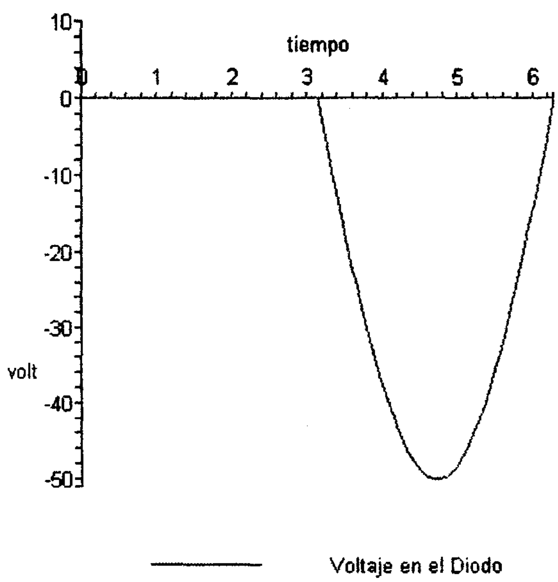


Figura 7.9. Una función discontinua

Ejemplo 7.5 *La función continua* de la figura 7.10 representa el factor de amplificación del sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 7.11, dado por la expresión:

$$f\left(\frac{\omega}{p}\right) = 2\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + 0.10\left(\frac{\omega}{p}\right)^2} - 1;$$

$para\ una\ masa\ m = 1 \times 10^6$ g; una constante de los resortes
$\mathrm{k} = 1 \times 10^9$, un coeficiente de amrtiguamiento crítico
$\mathrm{c_c} = 2\sqrt{\mathrm{k} \times \mathrm{m}} = 0.1581, constante\ de\ amortiguamiento\ del\ sistema$
$c = 1 \times 10^7\ y\ un\ factor\ de\ amortiguamiento$
$\dfrac{c}{c_c} = 0.0250, con\ el\ cual\ 4 \times (\dfrac{c}{c_c})^2 = 0.10;$
$que\ es\ el\ coeficiente\ que\ aparece\ en\ la\ ecuación.$

Ejemplo 7.6 Finalmente, la función discreta de la figura 7.12 ilustra la distribución de probabilidades del arribo de automóviles que pasan por una caseta de cobro por las noches, dada por la ecuación de la distribución de Poisson:

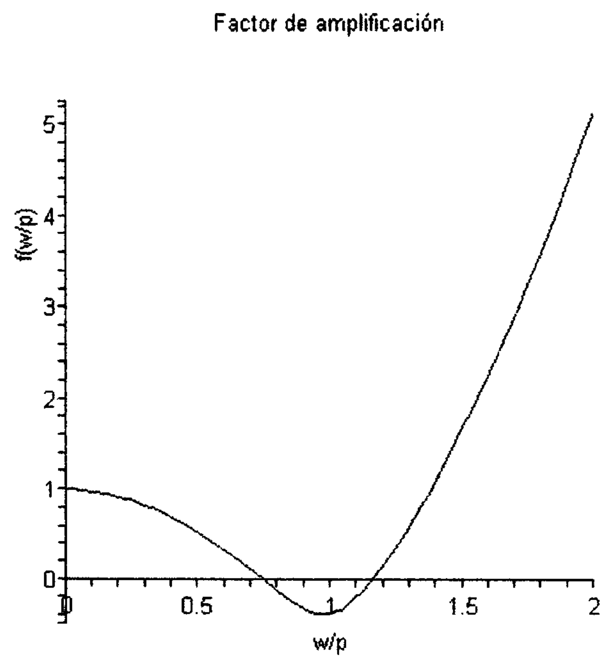
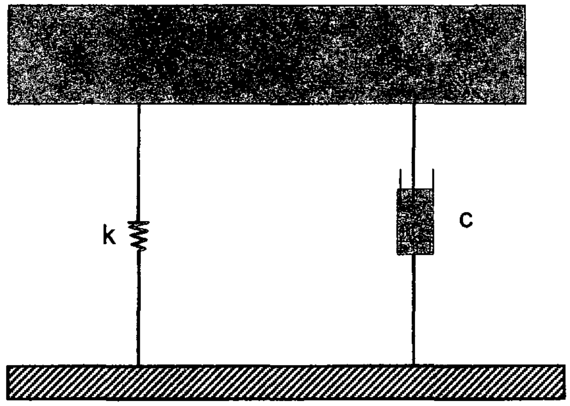


Figura 7.10 Ejemplo de una función continua



Sistema con amortiguamiento viscoso y excitación armónica

Figura 7.11 Sistema con amortiguamiento

$$p(x;\lambda t) = P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Estamos interesados en el número de arribos en ese punto durante un periodo de tiempo de 1min, para una tasa media de $\lambda = 600/hora$ con lo cual $\lambda t = 600 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{60}\right) = 2$ puesto que las unidades de λ y t deben ser compatibles.

Por lo tanto la aplicación de la expresión anterior para nuestro ejemplo queda como:

$$p(x;2) = P(X = x) = \frac{(2)^x e^{-2}}{x!} para\ x = 0,1,2,3,\ldots$$

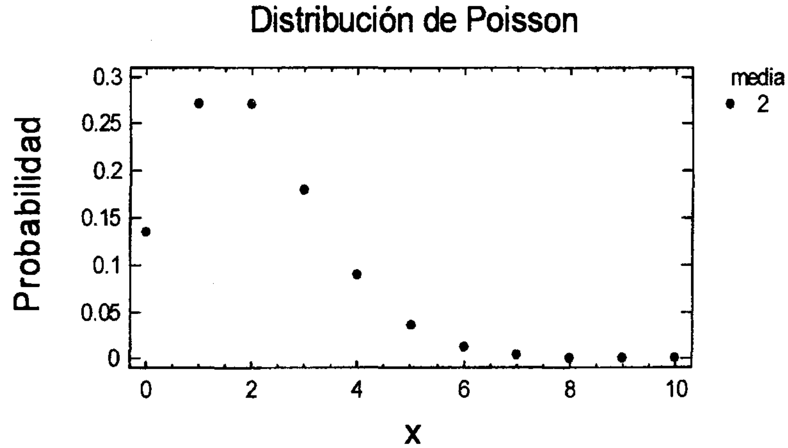


Figura 7.12 Ejemplo de una función discreta: la distribución de Poisson

Cabe observar que X no tiene límite superior pero, como se observa en la figura, las probabilidades de Poisson convergen rápidamente a cero cuando X aumenta.

Ejemplo 7.7 Son funciones continuas

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \ para\ a \le x \le b \\ 0\ para\ otros\ casos \end{cases}$;
- $y = A\,\mathrm{sen}(x)$;
- $y = A\ sen\ (kx) + Bcos\ (kx)$

Vale recordar que dentro de las funciones matemáticas tenemos a las explícitas, implícitas, paramétricas, algebraicas, polinomiales, racionales, irracionales, trascendentes, periódicas, circulares directas, hiperbólicas, trigonométricas; por mencionar algunas.

7.5 Composición de funciones

Dentro del álgebra de las funciones, conviene recordar *la composición de funciones* o *funciones compuestas* cuya representación se muestra en la figura 7.13, que se define como sigue:

> Dadas f y g con sus dominios D_f y D_g, la composición de f con g, denotada por $f \circ g$, es: $[f \circ g]\,(x) = f(g(x))$ es una función cuyo dominio está integrado por todos los elementos x que pertenecen al dominio D_g para los cuales $\mathrm{g(x)}$ pertenece al dominio D_f; es decir: $Df \circ g = \{x|x \in D_g; \mathrm{g(x)} \in D_f$.

Obsérvese que si g tiene su dominio en C y su rango en D y f tiene su dominio en D y su rango en E; entonces, $f \circ g$ tendrá su dominio en C y su rango en E.

Ejemplo 7.8 Para las funciones
$f = \{(10,3), (30,2), (2,5), (5,5)\}\ y\ g = \{(3,9), (2,1), (1,4), (5,4)\}$

Se tiene $f \circ g = \{(10, 9), (30, 1), (2,4), (5,4)\}\ y\ g \circ f = \emptyset$, de donde se desprende la no conmutatividad de la composición de funciones.

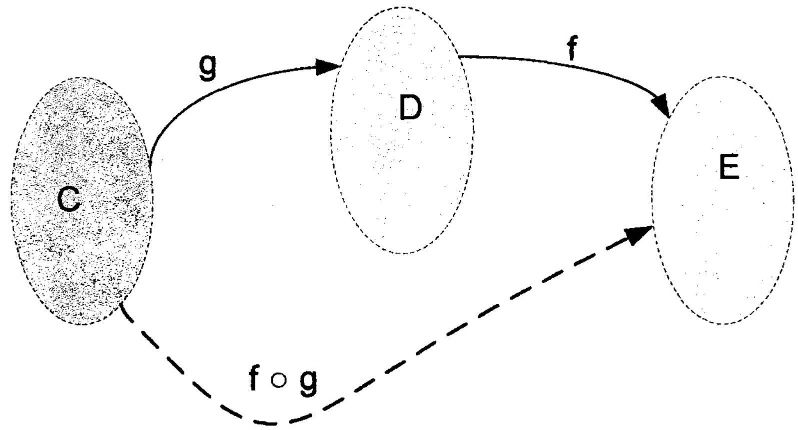


Figura 7.13 Composición de las Funciones f y g

7.6 Cálculo Diferencial

El cálculo diferencial estudia los incrementos infinitesimales en las variables. Sean x y y dos variables relacionadas por la ecuación $y = f(x)$, en donde la función f expresa la dependencia del valor de y con los valores de x; por ejemplo, x puede ser tiempo y y la distancia recorrida por un objeto en movimiento en el tiempo x. Un pequeño incremento h en x da un valor de x_0 a $x_0 + h$ *que* produce un incremento k en la y que pasa de $y_0 = f(x_0)$ a $y_0 + k = f(x_0 + h)$, por lo que $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. El cociente k/h representa el incremento medio de la y cuando x varía de x_0 a $x_0 + h$. La gráfica de la función $y = f(x)$ es una curva en el plano $X - Y$ y k/h es la pendiente de la recta AB entre los puntos $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_0 + h, y_0 + k)$ en esta curva; esto se muestra en la figura 7.14, en donde $h = AC$ y $k = CB$, así es que k/h es la tangente del ángulo BAC.

La derivada de una función en un punto se define como el límite del cociente de incremento que experimenta dicha función entre el incremento de la variable independiente, cuando este último incremento tiende a cero:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

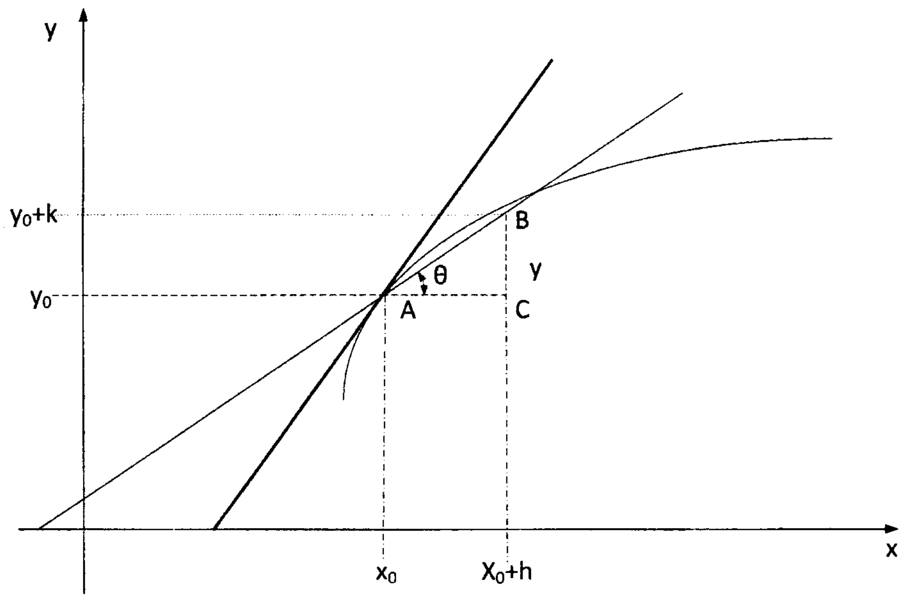


Figura 7.14 La pendiente de la recta AB y la pendiente en A

En lo general, existen varias formas para denotar a la derivada:

$\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx}f(x)$ *que corresponde a la notación de Leibniz*;
$D_x y$ *ó* $D_x f(x)$ *que es la notación de Cauchy*; y
$\dot{y}$ *ó* $f(\dot{x})$ *que es la notación de Newton*; y
y' *ó* $f'(x)$ *que es la notación de Lagrange.*

Conviene destacar la notación de Cauchy porque la derivada representa un operador que se aplica a la función $f(x)$ *y la transforma en una nueva función* $f'(x)$; *es decir*:

$$f(x) \xrightarrow{Dx} f'(x)$$

El valor de la derivada en un punto es el valor que se obtiene de la función derivada al evaluarla en dicho punto: $f'(a)$.

Ejemplo7.9 La derivada de la función $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ es

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = x$$

Si $D_{f(x)} = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$ entonces $D_{f(x)} = D_{f'(x)}$ por ser una función polinomial y $f(1) = \frac{3}{2,}$; en tanto $f'(1) = 1$.

La interpretación de la derivada es la pendiente de la recta tangente a la línea en el punto donde se evalúa la derivada, como puede verse en la figura 7.14. Más aún, si la función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto; pero lo contrario puede no ocurrir, es decir puede ser continua pero no derivable.

Puesto que la derivada de una función *f(x)* es una nueva función *f'(x)*, entonces, si es continua en un intervalo abierto (a, b) y derivable (si existe la derivada en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) más si no existe en un punto del intervalo se dice que no es derivable. Si aplicamos nuevamente el operador derivada, obtenemos la segunda derivada y así podemos seguirla derivando para obtener las derivadas de orden superior o la enésima derivada que se denota como sigue:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} = D_x^n y = D_x^n f(x) = \frac{d}{dx}\{f^{n-1}(x)\}$$
$$= \lim_{\Delta \mathrm{x} \to \infty} \frac{f^{n-1}(x + \Delta \mathrm{x}) - f^{n-1}(x)}{\Delta x}$$

Vale recordar que se tienen tablas que proporcionan las fórmulas para determinar las derivadas de funciones tales como las algebraicas, las circulares directas e inversas, implícitas, compuestas, paramétricas, entre otras; o bien aplicaciones de calculadoras o computadoras que las calculan directamente.

7.7 Máximos y Mínimos

Una de las principales aplicaciones de las derivadas es la determinación las razones de variación y de los puntos máximos y mínimos de la función. Para este último caso se puede aplicar el criterio de la primera derivada según el cual para $y = f(x)$ se calcula la primera derivada $y' = f'(x)$, se obtienen los valores críticos de x que son aquellos que anulan o hacen discontinuos a la función derivada y se investiga el cambio de signo de esta función para cada uno de sus valores críticos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ obtenidos, si el signo cambia de $+$ o $-$, se trata de un máximo relativo y si cambia de $-$a $+$, se tendrá un mínimo relativo. Los puntos críticos que no cumplen esta regla pueden ser puntos de inflexión.

El criterio aplicable para la determinación de los máximos y mínimos es el de la segunda derivada o la derivada de orden dos, para el cual

> *Si $y = f(x)$ es derivable en x_0 ; entonces*
> $y' = f'(x_0) = 0$ *y* $f''(x) < 0 \implies y = f(x)$ *Tiene un máximo relativo en x_0.*
> *En tanto que si $f''(x) > 0$ entonces la función tiene un mínimo en el punto x_0.*

Ejemplo 7.10 Para la función:

$$y = 4x^2 + 2x - 10, se\ tiene\quad y' = 8x + 2.$$

$Si\ 8x + 2 = 0\ se\ obtiene\ x_0 = -\frac{1}{4}$, como único valor crítico.

Obsérvese que para $x < -\frac{1}{4} \implies y' < 0\ y\ para\ x > -\frac{1}{4} \implies y' > 0$ por lo que al cambiar y' de – a + la función y tiene un valor crítico en el punto $x_0 = -\frac{1}{4}$ que corresponde a un mínimo relativo que vale:

$y_0 = 4(-\frac{1}{4})^2 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 10 = -\frac{41}{4}$. El punto mínimo relativos es entonces

$$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{41}{4}\right)$$

Si aplicamos el criterio de la segunda derivada $f''(x) = D^2 f'(x) = 8 > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $x_0 = -\frac{1}{4}$ como era de esperarse.

7.8 Cálculo Integral

El cálculo integral se basa en el proceso inverso de la derivación, llamado integración. Dada una función *f*, se busca otra función *F* tal que su derivada es $F' = f$; Fes la integral, primitiva o antiderivada de f, lo que se escribe $F(x) = \int f(x)dx$ o simplemente $F = \int f\, dx$ (esta notación se explica más adelante). Las tablas de integración se pueden utilizar para la derivación y al revés, así como la derivada de x^2 es $2x$, la integral de $2x$ es x^2. Si F es la integral de f, la forma más general de la integral de f es $F + c$, donde c es una constante cualquiera llamada *constante de integración*, debido a que la derivada de una constante es 0 por lo que $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$. Por ejemplo $\int 2x^2 dx = 4x + c$.

Las reglas básicas de integración de funciones compuestas son similares a las de la derivación. La integración suele ser más difícil que la derivación, pero muchas de las funciones más comunes se pueden integrar utilizando éstas y otras reglas que parecen en la tabla del apéndice I.

Una aplicación bien conocida de la integración es el cálculo de áreas, que es uso cotidiano en el cálculo de probabilidades de variables aleatorias continuas. Sea A el área de la región comprendida entre la curva de la función $y = f(x)$, el eje x y entre el intervalo $a \leq x \leq b$ como se muestra en la figura 7.15.

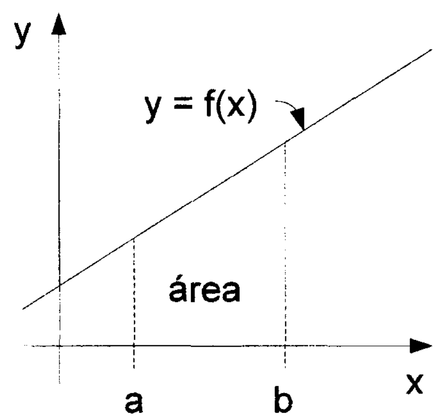


Figura 7.15 Interpretación geométrica de la integral definida: el área bajo la curva

Para simplificar, $f(x) \geq 0$ entre a y b. Para cada $x \geq a$, sea $L(x)$ el área de la región a la izquierda de x, así es que hay que hallar $A = L(b)$. Si h constituye una pequeña variación en la x, la región por debajo de la curva entre x y $x + h$ es aproximadamente un rectángulo de altura $f(x)$ y anchura h, véase figura 7.16 para $0 \leq x \leq 4$; el correspondiente incremento $k = L(x + h) - L(x)$ es por tanto, aproximadamente igual a $f(x)h$ por lo que k/h es aproximadamente $f(x)$.

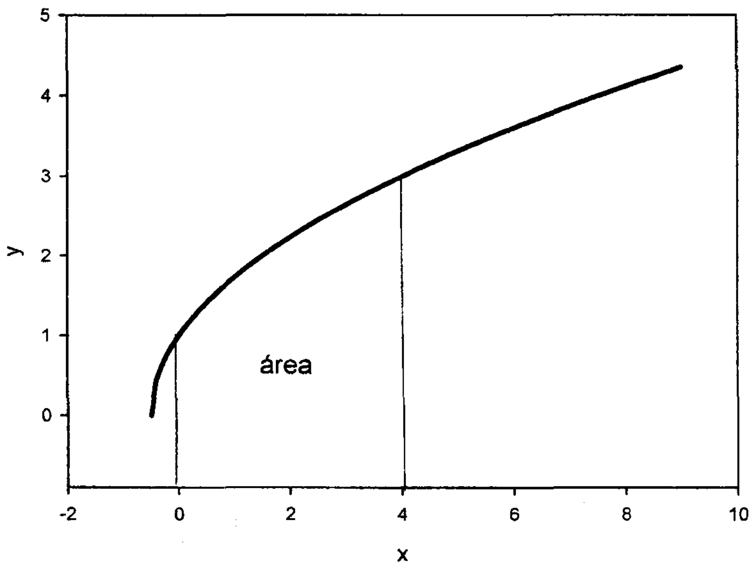
Cuando $h \to 0$ estas aproximaciones tienden hacia los valores exactos, así es que $k/h \to f(x)$ y por tanto $L'(x) = f(x)$, es decir, L es la integral de f. Si se conoce una integral F de f entonces $L = F + c$ para cierta constante c. Se sabe que $L(a) = 0$ pues el área a la izquierda de x

es cero si $x = a$, con lo que $c = -F(a)$ y por tanto $L(x) = F(x) - F(a)$ para todas las $x \geq a$.

El área buscada $A = L(b) = F(b) - F(a)$, *se escribe*

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Figura 7.16 Área bajo la curva y = $(2x + 1)^{0.5}$



Este es el teorema fundamental del cálculo, que se cumple siempre que f sea continua entre a y b y se tenga en cuenta que el área de las regiones por debajo del eje x es negativa, pues $f(x) < 0$. (Continuidad significa que $f(x) \to f(x_0)$ si $x \to x_0$, de manera que f es una curva sin ninguna interrupción). El teorema fundamental del cálculo establece que si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en dicho intervalo, entonces $G(x) = F(x) + C$ será antiderivada de $f(x)$en el intervalo [a, b] si $F(x)$ la es también de $f(x)$ en el mismo intervalo.

Ejemplo 7.11 Evaluar $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$
Utilizando la regla de sustitución se tiene $u = 2x + 1 \Longrightarrow dx = du/2$
Para encontrar lo nuevos límites de integración tenemos que si $x = 0 \Longrightarrow u = 1$ y cuando $x = 4 \Longrightarrow u = 9$ $\therefore$
$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{26}{3}$

Cabe observar que el área es una integral definida de f que es un número, mientras que la integral indefinida $\int f(x)dx$ es una función $F(x)$ (en realidad, una familia de funciones $F(x) + c$). El símbolo $\int$ representa la suma de las áreas $f(x)dx$ de un número infinito de rectángulos de altura $f(x)$ y anchura infinitesimal dx; o mejor dicho, el límite de la suma de un número finito de rectángulos cuando sus anchuras tienden hacia 0.

Ejemplo 7.12 para la función

$f(x) = \begin{cases} 10\, para & -4 \leq x \leq 4 \\ 0 \;\; para\; otros\; casos \end{cases}$ Su integral es

$$\int_{-4}^{4} 10dx = [10x]\,_{-4}^{\;4} = 10 \times 4 - (-10 \times 4) = 80$$

Que es igual al área del rectángulo que se muestra en la figura 7.17.

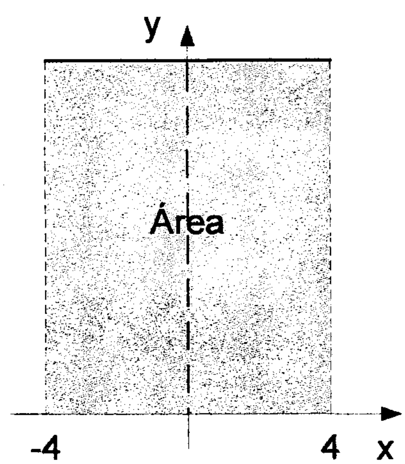


Figura 7.17 Cálculo del área mediante la integral definida

Ejemplo 7.13 Los tiempos de espera en las cajas de los supermercados, en los bancos o de las llamadas telefónicas se modelan con funciones de densidad de probabilidad exponenciales. Determinemos la forma general de este modelo.

Es claro que para $t < 0\; f(t) = 0$ puesto que no se puede responder una llamada telefónica antes de que se haga; a su vez, si $t \geq 0\; f(t) = Ce^{-ct}$ que es la forma exponencial, teniéndose:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \; para & t < 0 \\ Ce^{-ct}\, para & t \geq 0 \end{cases}$$

Pero toda función de densidad de probabilidad debe cumplir, entre otras, la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

Teniendo para nuestro caso:

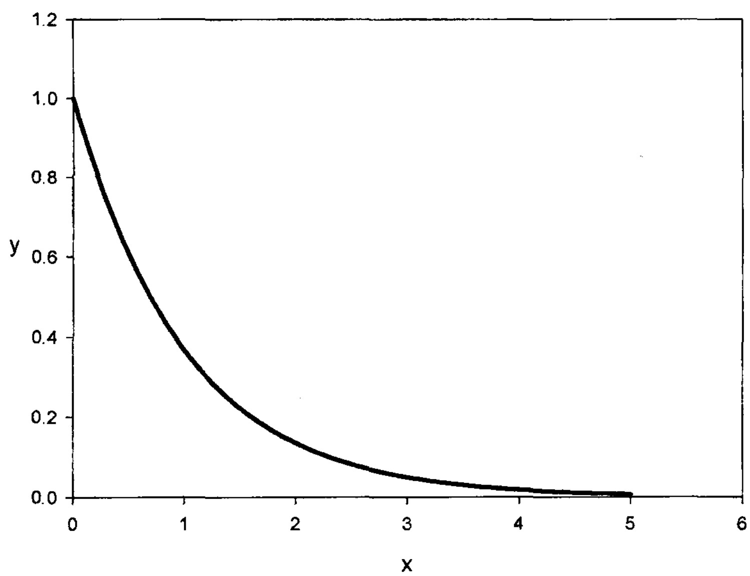
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)dt = \int_{0}^{\infty} Ce^{-ct}dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} Ce^{-ct}dt = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{C}{c}e^{-ct}\right)_{0}^{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{C}{c}(1 - e^{-cx}) = \frac{C}{c} = 1$$

Por consiguiente: $C = c$ y el modelo exponencial de la función de densidad es:

$f(t) = \begin{cases} 0 \; para \quad t < 0 \\ ce^{-ct} \; para \; t \geq 0 \end{cases}$ Que se presenta en la figura 7.18 para $c = 1$.

Figura 7.18 Función de densidad exponencial y = e^{-x}



Ejemplo 7.14 Al calcular la derivada de la función $F_1(x) = x^2$ se tiene $F'(x) = 2x = f(x)$, obteniéndose una nueva función $f(x)$ de x, a $F(x)$ se llama <u>una</u> ***antiderivada de*** $f(x)$ ***no*** <u>la</u> ***antiderivada de*** $f(x)$.

Al considerar un intervalo $[a,b]$, se dice entonces que $F(x)$ es *una* antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)\, para\, toda\, x \in [a,b]$. En efecto es *una* antiderivada porque también lo son $F_2(x) = x^2 - e^{-2.5}, F_1(x) = x^2 + \sqrt[3]{63}$ y en general $G(x) = F(x) + c$ son antiderivadas de $f(x)$ ya que $e^{-2.5}$, $\sqrt[3]{63}\ y\ c$ son constantes cuyas derivadas valen 0.

Desde el punto de vista de los límites, para la función $y = f(x)$ en el intervalo [a, b] la integral definida desde el extremo inferior a hasta el superior b es $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \Sigma_{i=1}^n\ f(\xi_i)\Delta_i x$ donde a es el límite inferior, b es el límite superior, $f(x)$ es el integrando y $\int \circ\, dx$ es el símbolo de integración que siempre contiene el de diferenciación dx; que puede verse como otro operador que se aplica sobre el integrando generalizado $\circ$. Por su parte ξ_i son los valores seleccionados para establecer la partición en la suma de Riemman y || Δ || es la norma de la partición, como se representa en la figura 7.18.

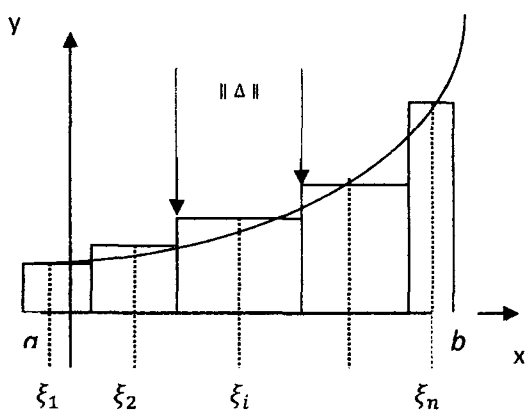


Figura 7.18 Suma de Riemman

7.9 Ecuaciones diferenciales

En general una ecuación integro-diferencial es aquella que en algunos de sus miembros tienen integrales y derivadas, en particular, las ecuaciones diferenciales son las expresiones que contienen en algunos de sus miembros a las variables y a las derivadas; en su forma más sencilla, la expresión $\frac{dy}{dx} = f(x)$ es una ecuación diferencial. Para resolverla la expresamos en su forma diferencial equivalente $dy = f(x)dx$, cuyas soluciones se obtienen a partir de la operación *integración indefinida, integración o antiderivación*; es decir, aplicando a $f(x)$ el operador $\int \circ$

dx, en el cual como ya anticipamos $\int$ es el símbolo de integración que siempre se acompaña con el de diferencial dx para significar que x es la variable de integración; y ∘ es el integrando generalizado que para nuestro caso es $f(x)$.

Aplicando el operador al integrando $f(x)$ tenemos la solución buscada de la ecuación diferencial:
$y = \int f(x)dx = F(x) + c$ = integral indefinida de $f(x)$ =Antiderivada de $f(x)$.

Ejemplo 7.15 la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = ky$ modela, entre otros fenómenos, a los de crecimiento o decrecimiento. Su solución es $dy = kydt$; separando las variables $\frac{dy}{y} = kdt$ y aplicando el operador integración a ambos lados de la ecuación obtenemos $\int \frac{1}{y} dy = \int kdt$.
Resolviendo las integrales con las antiderivadas correspondientes se tiene
$Ly + c_1 = kt + c_2 \Rightarrow Ly = kt + c_3 \Longrightarrow y = e^{kt+C_3} = e^{kt}e^{c_3}$;
La solución final es $y = ce^{kt}$

Ejemplo 7.16 Obsérvese que, como se anticipó, la solución de una ecuación diferencial es una función, en este caso de t, por lo que se le llama la solución general de la ecuación diferencial, que corresponde a la forma analítica de ***la familia de soluciones.***

A las constantes del modelo se les conoce como parámetros y *las soluciones particulares* de la ecuación diferencial; la determinación de los valores de los parámetros, se obtienen dependiendo del fenómeno bajo estudio y definiendo si el paradigma y los datos experimentales corresponden grosso modo al modelo matemático de la solución.

Se llama *calibración del modelo* a la búsqueda de los valores particulares, y se obtiene sustituyendo en la ecuación datos experimentales para encontrar tantas ecuaciones como constantes se tengan en la ecuación y entonces resolver el sistema de ecuaciones.

7.10 Cálculo de varias variables

Para el caso de las funciones vectoriales, las que tienen dos o más variables independientes, las derivadas y las integrales son generalizaciones para caso de las funciones de una sola variable; así para $z = f(x,y)$ se pueden tener las derivadas de z con respecto a cada una de las variables x y y de ahí el nombre de derivadas parciales las cuáles se definen como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f_x(x,y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f_y(x,y)$$

Cabe observar que la derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto a x se efectúa derivando con respecto a x manteniendo a y constante y, a la inversa, la derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto a y se efectúa derivando con respecto a y manteniendo a x constante.

Ejemplo 7.17 Para $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ calculemos $f_x(2{,}1)$ y $f_x(2{,}1)$.

Para calcular la derivada parcial respecto a x mantenemos a y constante y derivamos respecto a x a la manera usual.

$$f_x(2{,}1) = |3x^2 + 2xy^3|_{(2,1)} = 16$$

De manera similar para calcular la derivada parcial respecto a y mantenemos a x constante y derivamos respecto a y a la manera usual.

$$f_y(2{,}1) = |3x^2y^2 + 4y|_{(2,1)} = 8$$

Ejemplo 7.18 Determine los puntos críticos máximos, mínimos o puntos silla de la función representada en la figura 7.19 cuya ecuación es:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Primero localizamos los puntos críticos derivando parcialmente respecto de x y y, igualándolas a cero y resolviendo el sistema.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \therefore x^3 - y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \therefore y^3 - x = 0 \qquad (2)$$

Despejando y de (1) y sustituyéndola en (2):

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

Cuyas raíces son $x = 0,1,-1$ y los correspondientes puntos críticos son $(0,0)(1,1)(-1,-1)$.

Calculamos las segundas derivadas parciales:

$$f_{xx} = 12x^2; \; f_{xy} = -4; \; f_{yy} = 12y^2$$

Generalizando del criterio de máximos y mínimos de funciones de una variable, se define:

$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$ Con el cual:

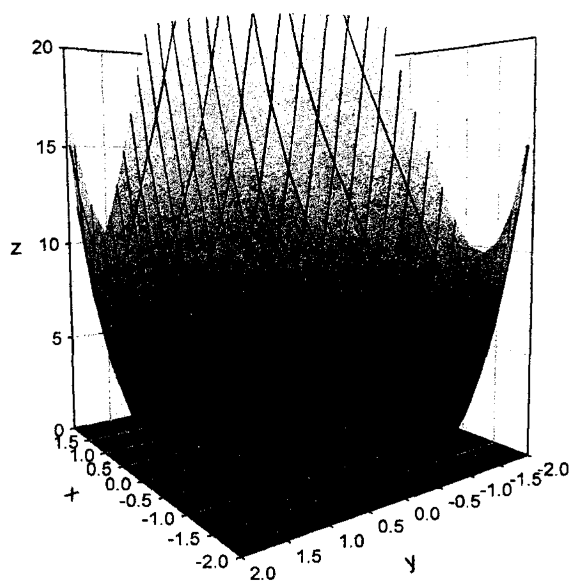
1) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0 \therefore f(a,b)$ *es un mínimo local.*
2) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0 \therefore f(a,b)$ *es un máximo local.*
3) Si $D < 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0 \therefore f(a,b)$ *es un punto silla.*

Para nuestro caso, con los puntos críticos tenemos, ver figura 7.19.

$D(0,0) = -16 < 0 \therefore$ *es un punto silla.* $D(1,1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1,1) = 12 > 0 \therefore f(1,1) = -1$ *es un mínimo local.*

$D(-1,-1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0 \therefore f(-1,-1) = -1$ *es un mínimo local.*

Figura 7.19 gráfica de la Función $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$



De manera similar, a estas funciones también se les puede calcular integrales parciales o integrales múltiples. Así, si $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ son las derivadas parciales de $z = f(x,y)$ con respecto a x y y, respectivamente; entonces, las integrales parciales respecto a estas variables son:

Integral parcial respecto a x:

$$\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f_x(x,y)dx = f(x,y)|_{g_1(y)}^{g_2(y)} = f(g_2(y),y) - f(g_1(y),y)$$

Integral parcial respecto a y:

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y)dy = f(x,y)|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(g_2(x),x) - f(g_1(x),x)$$

La integral total respecto a x y y se obtiene mediante la integral iterada o la integral de una integral, conocida como *integral múltiple* en la que los límites interiores de integración pueden ser funciones de la variable exterior; pero los límites exteriores de integración deben ser constantes con lo cual se obtiene en la primera integración una función integrable de la variable exterior que al integrarse y sustituir sus límites da por resultado un valor numérico.

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_{x,y}(x,y)dydx = \int_a^b (f_y(x,y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)})dx$$
$$= \int_a^b (f_x(g_2(x),x) - f_x(g_1(x),x)dx = N$$

O bien:

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f_{x,y}(x,y)dxdy = \int_c^d (f_x(x,y)\Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)})dy$$
$$= \int_c^d (f_y(g_2(y),y) - f_y(g_1(y),y)dy = N$$

Debe observarse que no importa cuál sea la variable interna o externa de integración, el valor debe ser el mismo.

En las aplicaciones de las integrales múltiples, nos interesa calcular las áreas de las regiones cerradas, planas irregulares en el plano x- y y los volúmenes bajo las superficies que para <u>la teoría de la probabilidad</u> constituyen <u>probabilidades de eventos</u>.

Para el primer caso, si R está definida por las fronteras $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde en el intervalo $[a,b]$ $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son continuas e integrables; entonces:

$$\acute{A}rea\ de\ R = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx$$

Por el contrario, si R está definida por las fronteras $c \leq y \leq d$ y $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$, donde en el intervalo $[c,d]$ $g_1(y)$ y $g_2(y)$ son continuas e integrables; entonces:

$$\acute{A}rea\ de\ R = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dxdy$$

Considerando estas regiones, podemos definir la integral doble de $z = f(x,y)$ sobre R como:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i y_i)\Delta A_i$$

Y al volumen de una región solida bajo la superficie $z = f(x,y)$ donde $f(x,y) \geq 0$ para $\forall\ (x,y) \in R$:

Volumen bajo la superficie $z = f(x,y)$ $dentro\ de\ R$:
$V = \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dA$

Ejemplo 7.19 Calcular la integral

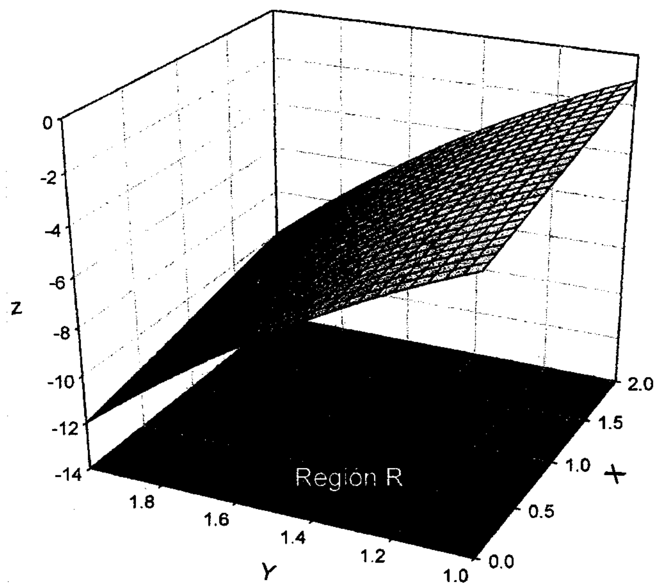
$\iint_R (x - 3y^2)dA$ Donde $R = \{(x,y)|0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ Cuya gráfica de la función $z = f(x,y) = x - 3y^2$ aparece en la figura 7.20.

Aplicando el teorema de Fubini según el cual si f es continua en la región $R = \{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ se tiene:

$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)dydx = \int_0^2 (xy-y^3)|_{y=1}^{y=2}\, dx =$$
$$\int_0^2 (x-7)\,dx = \left|\frac{x^2}{2}-7x\right|_{x=0}^{x=2} = -12$$

Cabe señalar que este valor corresponde al volumen del sólido comprendido debajo de la superficie $= f(x,y) = x-3y^2$ hasta su proyección sobre el plano $x-y$.

Figura 7.20 Gráfica de la función z = x-3y²



Resolviendo el ejercicio integrando primero respecto a x y después respecto a y se tiene.

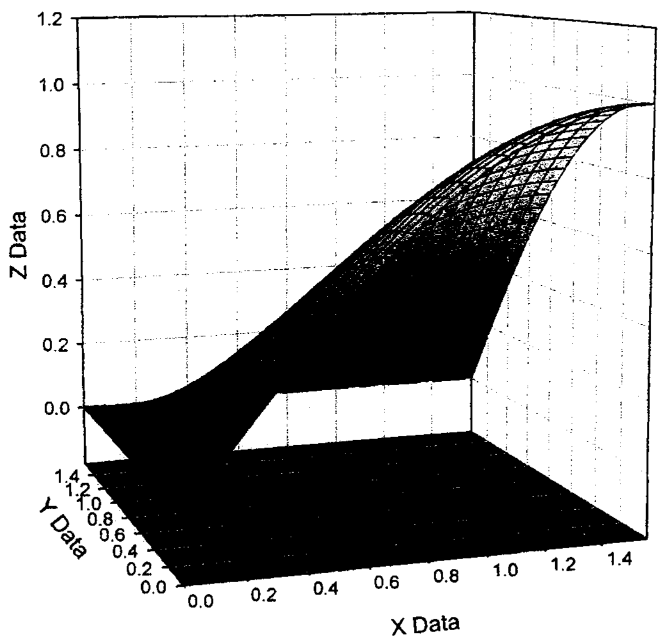
$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)dxdy = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}-3xy^2\right)|_{x=0}^{x=2}\, dy\} =$$
$$\int_1^2 (2-6y^2)\,dy = |2y-2y^3|_{y=1}^{y=2} = -12$$

Ejemplo 7.20 Calcular el volumen bajo la superficie cuya función es $z = f(x,y) = senx\ cosy$ comprendido debajo de la superficie y arriba de $R = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$, Que se muestra en la figura 7.21. Como:

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx\int_c^d h(y)dy\ \ donde\ R = [a,b]\times[c,d] \Longrightarrow$$
$$\iint_R senx\ cosydA = \int_0^{\pi/2} senxdx\int_o^{\pi/2} cosydy$$

$$= -cosx\Big|_0^{\pi/2} seny\Big|_0^{\pi/2} = 1 \times 1 = 1$$

Figura 7.21 gráfica de la función z = sen(X)cos(Y)



APÉNDICE DEL TOMO I

tabla I.1 Números aleatorios

3118	4711	8431	6757	4187	5504	9347
1644	9055	2802	3660	2590	2230	4618
8205	5216	8391	8040	2370	7268	2137
8258	8065	7396	1082	1871	8470	7915
9941	9297	3944	6558	5930	8523	2081
9735	2451	5460	4394	2323	6068	6086
5219	3374	8373	5374	6171	7784	3053
1467	7136	2929	1640	8847	7695	3217
5223	2710	8840	8732	9761	5945	6992
1157	1555	1471	5755	9873	9260	9980
6142	7370	5706	9373	6421	6575	7221
1148	2209	2470	5204	5289	1993	6957
7780	8344	3696	2908	2157	3737	7672
6850	2972	6176	6950	5630	8733	6367
2501	2540	6627	5624	4010	8890	1430
9188	8334	6010	1919	4883	1021	3292
6044	9389	8919	2449	5497	9217	6561
2721	3605	9728	3003	6622	4170	1670
4455	1235	8079	7224	5838	9249	1658
5955	1764	8032	7462	6442	9004	5047
3862	5655	8628	6911	5300	5841	3421
2881	6827	8549	3986	6942	7295	3393
5220	7439	7946	7241	2199	9721	5528
8665	4745	3919	4296	8891	2534	8455
8512	3325	9069	8407	9874	2952	1736
2218	4834	2220	3558	6906	6238	2042
1466	7832	2023	2202	1901	1937	7158
6793	9936	9170	2823	6026	8147	3746
9597	8809	4587	7266	8671	2157	9570
9341	2709	6695	9614	4136	9028	5668
3622	8718	3999	9276	1662	8747	7172
8805	1256	9587	4477	7449	9976	9234
1971	3350	6681	6894	5112	5494	5925
1418	1233	4249	2321	4194	6732	6916
1466	7727	3220	4292	4818	6926	9156
6996	8418	8094	4267	1578	7267	2068
2361	5539	8182	7254	7173	6025	1126
5957	3969	7079	4317	4950	7278	1013

Tabla I.2 Números aleatorios normales con $media\ \mu_X = 0\ y\ desviación\ estandar\ \sigma_x = 1$

-1.226	-0.453	0.806	0.850	1.488	-1.790	0.335
-0.030	0.245	-0.403	0.134	1.898	0.600	-0.546
-0.486	-1.570	-0.888	1.928	-0.593	-0.878	-1.124
-0.431	-0.303	-2.075	-0.150	-0.153	-0.008	-0.871
-0.991	-0.903	-0.530	-1.139	-0.991	-1.312	0.395
-0.285	-0.539	-1.691	-0.018	0.066	-0.263	0.561
1.812	-0.217	0.965	0.096	1.079	0.700	0.144
0.823	-0.993	0.084	-0.799	-2.463	0.591	-0.257
-1.189	0.553	-0.560	0.136	-0.485	0.333	1.457
0.626	1.253	0.924	0.145	-1.405	-1.055	-1.038
0.182	0.671	-0.751	0.229	-0.198	-0.106	0.390
-0.982	0.616	-0.548	-0.086	1.148	0.597	-0.378
-1.537	-0.414	1.085	-1.229	-0.282	-0.055	2.146
1.241	0.802	0.147	-0.530	0.867	0.164	-0.477
0.494	-0.527	0.372	-1.340	-0.189	0.628	1.051
-0.476	0.367	-0.944	2.219	-0.890	-2.195	0.006
-0.724	-1.111	0.690	1.569	1.042	-1.540	0.492
-2.056	-1.023	-0.184	-0.676	-1.201	-2.133	-0.012
0.603	1.712	1.356	2.242	0.637	-1.254	-0.899
1.213	-0.095	-0.941	0.680	0.178	0.660	0.459
0.405	-0.914	-1.447	-1.098	0.341	-0.474	-0.356
0.858	1.122	-0.466	0.288	-0.621	2.266	0.837
1.032	-1.128	-0.720	0.863	1.213	0.547	0.220
-0.887	-0.520	0.053	-0.499	2.463	-0.944	0.535
-0.078	0.301	-1.361	-0.858	0.482	1.693	-1.599
-1.311	0.218	-1.375	1.561	-0.360	-0.152	1.746
-0.777	-0.912	0.321	-0.785	-0.658	1.331	0.480
-1.241	0.364	-1.732	-0.927	0.852	2.063	0.680
-0.337	0.860	-0.698	-0.080	1.995	-1.368	0.387
-0.870	-0.427	-1.334	1.917	1.477	-1.830	0.454
-0.700	-0.790	-0.519	-1.089	-0.333	-0.791	1.127
-3.842	-1.352	0.174	0.435	-0.043	0.384	0.482
-1.442	0.440	-1.501	-0.514	-0.340	0.693	1.400
-1.341	0.231	-0.905	-0.536	2.339	0.448	-1.764
1.933	0.004	2.247	-0.263	1.599	-0.520	-1.099
-1.297	-0.763	0.466	-1.724	-1.056	0.024	-0.815
-0.784	0.775	-1.366	-0.773	-0.726	-0.235	-0.789
-0.141	-0.812	0.034	1.923	0.662	-0.718	-1.313
-0.433	-0.470	0.024	-0.081	0.982	-0.201	0.100
-0.057	-0.803	0.064	-0.268	-0.499	0.362	-1.405

Tabla I.3 Fórmulas Álgebráicas y trigonométricas*

ÁLGEBRA

OPERACIONES ARITMÉTICAS

$a(b+c) = ab + ac$ $\qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ $\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

EXPONENTES Y RADICALES

$x^m x^n = x^{m+n}$ $\qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$(x^m)^n = x^{mn}$ $\qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$(xy)^n = x^n y^n$ $\qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ $\qquad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ $\qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ESPECIALES

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

TEOREMA DEL BINOMIO

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}$

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

Si $a > 0$, entonces

$|x| = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$

$|x| < a$ significa que $-a < x < a$

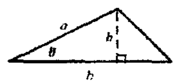
$|x| > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$

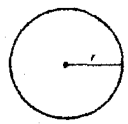
GEOMETRÍA

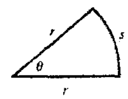
FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas del área, A, circunferencia, C y volumen, V:

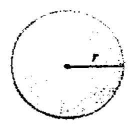
Triángulo	Círculo	Sector de círculo
$A = \frac{1}{2}bh$	$A = \pi r^2$	$A = \frac{1}{2}r^2\theta$
$= \frac{1}{2}ab$ sen θ	$C = 2\pi r$	$s = r\theta$ (θ en radianes)

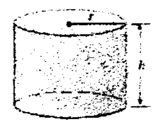


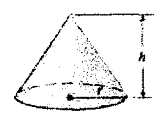




Esfera	Cilindro	Cono
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$A = 4\pi r^2$		







FÓRMULAS DE LA DISTANCIA Y DEL PUNTO MEDIO

Distancia de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

RECTAS

Pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ cuya pendiente es m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma simplificada de la ecuación de la recta cuya pendiente es m y cuya ordenada al origen es b:

$$y = mx + b$$

CÍRCULOS

Ecuación del círculo con centro en (h, k) y radio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

*Tomada de Stewart J. (1999)

Tabla I.4 Fórmulas de integración.

TABLA DE INTEGRALES

FORMAS BÁSICAS

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
2. $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C,\quad n \neq -1$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int e^u\,du = e^u + C$
5. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$
6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
20. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a^2+u^2}, a>0$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$
22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$
23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$
24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$
25. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$
26. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$
27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$
28. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$
29. $\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a^2-u^2}, a>0$

30. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
31. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
32. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$
33. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
34. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
35. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$
36. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$
37. $\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
38. $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{u^2-a^2}$, $a>0$

39. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$
40. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$
41. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$
42. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$
43. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$
44. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$
45. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$
46. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

FORMAS QUE CONTIENEN

*Tomada de Stewart J. (1999)

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS DEL TOMO I

Bibliografía y referencias del tomo I

Capítulo 1

Ackoff R. (1973) *The Design of social Research*, Chicago, USA.

Ackoff R. (1974) *Beyond problem solving*, General Systems, Vol. XIX, USA.

Ackoff R. (1981) *El arte de resolver problemas*, Limusa, México.

Bunge M. (1976) *El Método Científico*, 5ª Edición, Ariel, Barcelona.

Churchman C. (1979) *El enfoque de sistemas*, Diana, México.

Diccionario (2001) *Diccionario de la Real Academia Española*, Madrid.

Elizondo J. (1980) *Algunos enfoque de planeación*, Instituto de Ingeniería, UNAM, No 431, México.

Frontana B, (1987) *Apuntes del curso Metodología de la Investigación*, DEPFI, UNAM.

Fuentes A. (1982) *Conceptos de problema y solución*, Instituto Mexicano de Planeación y Operación de Sistemas (IMPOS), Boletín No 68, México.

Koestler A (1998) *En busca de lo absoluto*, 2ª edición, Kairós, Barcelona.

Lara F. (1980) *Apuntes del curso Método Científico*, DEPFI, UNAM.

Capítulo 2

Ackoff R. (1981) *EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS*, las fábulas de Ackoff, Editorial Limusa, México.

Ackoff R. y Sasieni M. (1968) *Fundamental of Operations Research*, Wiley International Edition, USA.

Beer S. (1982) *DECISIÓN Y CONTROL, El Significado de la Investigación de Operaciones y la Administración Cibernética*, Fondo de Cultura Económica, México.

Bertalanffy L. (1976) *Teoría General de los Sistemas*, Fondo de Cultura Económica, México.

Bruner (1960) *the process in Education*, Harvard University Press, USA.

Capra F. (2006) *La trama de la vida, una nueva perspectiva de los sistemas vivos*, 6ª Edición, ANAGRAMA, Barcelona.

Checkland P (1981) *SYSTEMS THINKING, SYSTEMS PRACTICE*, John Wiley & Sons Ltd. Great Britain.

Forrester J. (1980) *PRINCIPLES OF SYSTEMS, 2a Edition*, MIT Press/Wright-Allen Series in Systems Dynamics, USA.

Forrester J. (1980) *Principles of Systems, Text and Workbook chapters 1 through 10*, MIT Press, Second Preliminary edition Ninth printing, USA.

Frontana B. y Rivera R. (1986) *Prospectiva demográfica interregional y sus implicaciones en la educación básica*, IV Reunión Nacional sobre la investigación demográfica en México, Mesa IV: Población, trabajo y desarrollo, Colegio de México y Sociedad Mexicana de Demografía, México.

Frontana B. (1986) *Efecto de la descentralización sobre la transportación interregional de pasajeros y el ahorro de energéticos*, XV Congreso Panamericano de Carreteras, México, D F.

Frontana B. y López A. (1983) *Modelado y Toma de decisiones en sistemas sociales,* Conferencia Mundial de sistemas, resúmenes extendidos, XXI 1-2, Caracas.

Frontana B. y Uribe N. (1985). *Prospectiva sobre las Necesidades de la Transportación Interregional de Pasajeros; 2ª y 3ª Etapas*, Vol. I, elaborado para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, proyecto 2533 y 4501, Instituto de Ingeniería UNAM, 239 pp.

García C. (1990) *Bases Conceptuales y Metodológicas para la Toma de Decisiones en Presencia de Criterios u objetivos Múltiples: el Caso de la Jerarquización de Objetivos en Instituciones Educativas Sujetas a Restricciones Presupuestales*, tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería: Investigación de Operaciones, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería UNAM.

Heisenberg W (1971) *Physics and Beyond*, Harper &Row, Nueva York

http://www.daedalus.es/inteligencia-de-negocio/sistemas-complejos/ciencia-de-sistemas/el-enfoque-sistemico/

http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia

López A. y Frontana B. (1983) *Evaluación de la Eficiencia de Sistemas Sociales: Aplicación del Sector Educativo,* Academia Nacional de Ingeniería, A C, Vol. 2, No. 3, pp. 203-232 México, D. F.

López P. y Sterpone O (1990) *Cuahuanahuac, un Acercamiento a las Condiciones Políticas y Socioeconómicas de una Cabecera de Provincia Tributaria en el Siglo XVI*, tesis para obtener el título de Licenciado en Arqueología, Escuela Nacional de Antropología e Historia, México.

Rivera R. (1986) *Estudio de la Demografía Interregional e Implicaciones en el Desarrollo Socioeconómico del País*, tesis para obtener el título de Actuario, Facultad de Ciencias UNAM.

Toxtli O. (1988) *Contribución al Estudio de la Piscicultura en México,* tesis para obtener el título de Licenciado en Economía, Facultad de Economía, UNAM.

Uribe N. (1987), *Estudio sobre la Transportación Interregional de Pasajeros en el País,* tesis para obtener el título de Ingeniero Mecánico Electricista, Facultad de Ingeniería UNAM.

Vázquez R. (1990) *Correlación de Medidas Instrumentales y Sensoriales para Optimizar una metodología para Medir la Textura en Tortillas,* tesis para obtener el título de Licenciada en Ingeniería Agroindustrial, Universidad Autónoma Chapingo.

Capítulo 3

Arias G. (1984) *Introducción a la técnica de investigación en ciencias de la administración y del comportamiento*, Trillas 3ª Edición, México.

Ackoff R. and Sasieni M. (1968) *Fundamentals of Operations Research*, John Wiley &Sons, Inc, New York.

Blalock H. (1969) *THEORY CONSTRUCTION from Verbal to Mathematical Formulation,* Methods of Social Science Series, Prentice-Hall, Inc., USA.

Bruner (1960) *The process in Education*, Harvard University Press, USA.

Bunge M. (1976) *El Método Científico*, 5ª Edición, Ariel, Barcelona.

Capra F. (2006) *La trama de la vida, una nueva perspectiva de los sistemas vivos*, 6ª Edición, ANAGRAMA, Barcelona.

Centeno A. (1981) *Metodologías y Técnicas de la Investigación*, Cambio Editorial, 2ª Ed. México.

De Gortari E. (1983) *Metodología General y Métodos Especiales*, Océano, México.

Dubbing R. (1969) *Theory building*, THE FREE PRESS, New York, Collier Macmillan Co, USA.

Forrester J. (1961) *Industrial Dynamics*, Massachusetts Institute of technology press, USA.

Forrester J. (1980) *Principles of Systems*, Text and Workbook chapters 1 through 10, MIT Press, Second Preliminary edition Ninth printing, USA.

Frontana B. y Uribe N. (1985). *Prospectiva sobre las Necesidades de la Transportación Interregional de Pasajeros*; 2a y 3a Etapas, Vol. I, elaborado para la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, proyecto 2533 y 4501, Instituto de Ingeniería UNAM, 239 pp.

Garza M. (1994) *Manual de Técnicas de Investigación para estudiante de Ciencias Sociales*, El Colegio de México, 5a Ed., México.

Guasch A. et-al, (2005) *MODELADO Y SIMULACIÓN: Aplicación a procesos logísticos de fabricación y servicios*, Alfaomega, México.

Gutiérrez (1980) *Introducción al MÉTOCO CIENTÍFICO*, ESFINGE, México

http://es.wikipedia.org/wiki/Astronom%C3%ADa_china, consultado en mayo 2008.

http://www.google.com.mx/search?sourceid=navclient&hl=es&ie=UTF-8&rlz=1T4SUNA_es-MX219&q=historia+delas+matem%c3%a1ticas, consultado en mayo 2008.

http://almez.pntic.mec.es/~agos0000/, consultado en mayo 2008.

http://es.wikipedia.org/wiki/Cultura_maya#Matem.C3.A1ticas, consultado en mayo 2008.

Munich L. y Ángeles E. (2005*) Métodos y Técnicas de Investigación*, Trillas, 2ª Edición, México.

Pérez R. (2003) *¿EXISTE EL MÉTODO CIENTÍFICO?* 3ª Edición, Fondo de Cultura Económica, la ciencia para todos/161, México.

Pérez I (2008*) Ayuda al desarrollo de habilidades auditivas*, Gaceta UNAM, Número 4,067.

Pineda E. B. et-al (1994) Metodología de la investigación, Organización Panamericana de la Salud, 2º Edición, Washington D.C.

Pritsker A. (1979) *Modeling and Analysis Using Q-Gert Networks*, John Wiley & Sons, New York.

Raluy A, *Diccionario Porrúa de la Lengua Española*, Editorial Porrúa, México.

Shannon R (1975) *SYSTEMS SIMULATION the art and science*, Prentice-Hall, USA.

Zeigler B. (1976) *Theory of Modeling and Simulation*, John Wiley & Inc., USA.

Capítulo 4

Bhattacharyya G. & Johnson A. (1977) *Statistical concepts and Methods*, John Wiley & Sons, Inc. USA.

C:\Documents and Settings\bfc\Mis documentos\Teoría de medición.mht Teoría de la medición (Luis Fernández Sanz, 30-11-1998), consultado en C:\Documents and Settings\bfc\Mis documentos\Estadística-Monografias_com. mht

Canavos G. (1988) *Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y Métodos*, McGraw-Hill, México.

Cox D. (1958) *PLANNING OF EXPERIMENTS*, John Wiley & Sons, Inc. USA

Franco, L., Olmedo, E. y Valderas, J.M. *Sobre las diferentes escalas de medida*, Dpto. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla.

Holman J.P., (1971) *EXPERIMENTAL METHODS FOR ENGINEERS*, McGraw-Hill Inc., International Student Edition, USA.

http://www.monografias.com/trabajos15/valoracion/valoracion.shtml#TEORICA

http://www.google.com/search?q=cache:http://www.fceco.uner.edu.ar/cpn/catedras/matem1/estadistic/e03cm.doc, MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS APLICADOS AL TRATAMIENTO DE VARIABLES CUALITATIVAS, Germán Edgardo CAMPRUBI – María Silvia MORIÑIGO, Universidad Nacional del Nordeste – Universidad de Buenos Aires, gcamprubi@fai.unne.edu.ar – mariasilviamori@yahoo.com.ar

http://encolombia.com/odontologia/foc/foc20302-evaluacion.htm, REVISTA DE ODONTOLOGIA, *La evaluación de la información científica: una tarea urgente de la comunidad odontológica colombiana*, Antonio Francisco Frías Mier, Sonia Delgado de Valencia, Carmen Alicia.

Lapin L. (1983) *PROBABILITY AND STATISTICS FOR MODERN ENGINEERING*, Brooks/Cole Engineering Division Monterey California USA.

Mendenhall W. Schaeffer R. & Wackerly D. (1981) *Mathematical Statistics with Applications*, Second Edition, DUXBURY PRESS, PWS PUBLISHERS, USA.

Nie N., Haidal U. et al (1970) *STATISTICAL PACKAGE FOR SOCIAL SCIENCE*, Second Edition, Mc Graw-Hill BOOK COMPANY, USA.

Stevens S (1946) *On the Theory of Scales of Measurement*, Science, 103, 677-680. USA.

Diccionario de la lengua Española, Real Academia Española, 22ª edición, España 2001.

Winkler R. & Hays W. (1975), *Statistics, PROBABILITY, INFERENCE, AND DECISION*, HOLT, RINEHART AND WINSTON, second Edition, USA.

Capítulo 5

Andrade A, et-al (1994) *Cálculo Diferencial e Integral*, FI, UNAM-LIMUSA, México.

Bhattacharyya G t Johnson R (1977), *Statistical, Concepts and Methods*, John Wiley &Sons, USA.

http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_conjuntos, consultada en junio de 2008.

http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_axiom%C3%A1tica_de_conjuntos#Introducci.C3.B3n, consultada en junio de 2008.

Lipschutz S. (1971) *Probabilidad*, Serie SCHAUM, Libros McGraw-Hill de México, S. A. De C. V. México.

Walpole R y Myers R. (1986) *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*, Interamericana, México.

Winkler R y Hays W (1971) *Statistics, Probability, Inference, and decision*, Holt, Rinehart and Winston, 2a edition, USA.

Capítulo 6

Bhattacharyya G. Johnson R (1977) *Statistical, Concepts and Methods,* John Wiley &Sons, USA.

Boas M, (1983) *Mathematical methods in the physical science*, 2nd Edition, John Wiley USA.

Devore J. (1998, 2005) *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*, 4ª y 6ª Ediciones, Thomson Editores, México.

Lipschutz S. (1971) *Probabilidad*, serie Schaums, McGraw Hill Latinoamericana, México.

Meyer Paul L. (1986) *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, Addison-Wesley Iberoamericana, USA.

Miller I. Freund J. Johnson R. (1988) *Probabilidad y Estadística para ingenieros*, 4ª Edición, Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México.

Walpole R. Myers R. (1985) *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 3rd Edition, MACMILLAN PUBLISHING COMPANY, USA.

Winkler R. and Hays W. (1975) *Statistics PROBABILITY, INFERENCE, AND DECISION*, 2nd Edition, Holt, Rinehart and Winston, USA.

Capítulo 7

Andrade A, et-al (1994) *Cálculo Diferencial e Integral*, FI, UNAM-LIMUSA, México.

Larson R Hostetler R y Edwards B (2002) *Cálculo*, 8a Edición, McGraw-Hill Interamericana Editores, México

http://cuentame.inegi.gob.mx/poblacion/habitantes.aspx?tema=P

http://es.wikipedia.org/wiki/Portada

http://es.encarta.msn.com/encyclopedia_761568582/C%C3%A1lculo.html

O'Neil P. (2003) *ADVANCED ENGINEEERING MATHEMATICS*, 5th Edition, THOMSON BROOKS/COLE, USA.

Pita R.C. (1995) *Cálculo vectorial*, 1ª Edición, PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S. A., México.

Stewart J. (1999) *Cálculo conceptos y contextos*, International Thomson Editores, S. A. de C. V. México.

Probabilidad y estadística. Tomo I. El contexto y los antecedentes, editado por la Facultad de Ingeniería. Se terminó de imprimir el 16 de junio de 2014 en el Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Av. Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C. U., Delegación Coyoacán, México, D. F., Código Postal 04510. Se imprimió en offset a una tinta interiores y forros. El tiraje consta de 80 ejemplares, impresos en papel bond de 75 gramos y forros en couché de 300 gramos, con un tamaño final de 21.5x28.0 cm.

Secretaría de Servicios Académicos

Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería