Integrales impropias

Pablo García y Colomé

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

INTEGRALES IMPROPIAS

"Ver un mundo en un grano de arena
Y un cielo en una flor silvestre
Prender el infinito en la palma de tu mano
Y la eternidad en sólo una hora".

William Blake

"¡El infinito! Ningún otro problema ha conmovido
tan profundamente el espíritu del hombre".

David Hilbert

"¡Ay vida, qué emoción vivirte!"

Pablo García y Colomé
PROFESOR DE CARRERA

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso del presente fascículo de matemáticas titulado *Integrales impropias*, elaborado por Pablo García y Colomé.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen al autor las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

INTEGRALES IMPROPIAS

ÍNDICE

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

INTEGRALES IMPROPIAS

PRÓLOGO

En el estudio del Cálculo, dos aspectos de fundamental importancia son la derivada y la integral, que han ocupado el pensamiento de innumerables seres humanos a lo largo de la historia de la humanidad. De ellos, la integral, entendida como la "antidiferencial", o bien, como el "área bajo la curva", ha constituido el cimiento donde se apoya un gran número de conocimientos y aplicaciones.

Dentro del campo de la integración, ocupan un lugar especial las integrales impropias, motivo del estudio de este documento, las que representan una valiosa herramienta cuando se tienen integrales definidas para las cuales uno o ambos límites de integración son el infinito.

Este trabajo pretende servir de apoyo en el estudio de estas integrales y contiene las principales definiciones y teoremas al respecto, incluyendo también ejercicios y ejemplos de aplicación.

Ojalá sea de utilidad para la comunidad académica de la Facultad de Ingeniería, en especial de quienes enseñan y estudian el Cálculo, y para todos aquéllos que deseen profundizar un poco en estas "mágicas" integrales.

El autor.

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

Un apoyo didáctico para la impartición y aprendizaje de las matemáticas en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

INTEGRALES IMPROPIAS

"... pero recordemos que estamos tratando con infinitos y con indivisibles, los cuales trascienden nuestro limitado entendimiento, los primeros por su gran magnitud, los segundos por su pequeñez. Pese a ello, el ser humano no puede abstenerse de analizarlos, aunque deba hacerlo de un modo indirecto ..."

Galileo Galilei (1654-1692)

INTRODUCCIÓN

Al estudiar integración se pedía que el intervalo cerrado [a,b] de la integral definida fuera finito y también que la función en estudio fuera continua en dicho intervalo.

Ahora en este tema se pretende estudiar un cierto tipo de integrales en las cuales uno o ambos límites de integración son infinitos o bien, cuando el integrando considera una función con un número finito de discontinuidades en el intervalo en cuestión. A las integrales que contemplan una o ambas de estas singularidades se les conoce como **integrales impropias** *y serán motivo del presente estudio.*

Para comenzar, es conveniente, a manera de ilustración, analizar brevemente las siguientes funciones en las que se desea saber si las "áreas bajo la curva", con sus correspondientes limitaciones, son finitas, es decir, si es posible adjudicarles un valor real en cada caso.

EJEMPLO 1.

i) Área limitada por el eje "x", la recta x = 2 y la curva: $y = \dfrac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}$

ii) Área limitada por los ejes "x" y "y", la recta x = 8 y la curva: $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

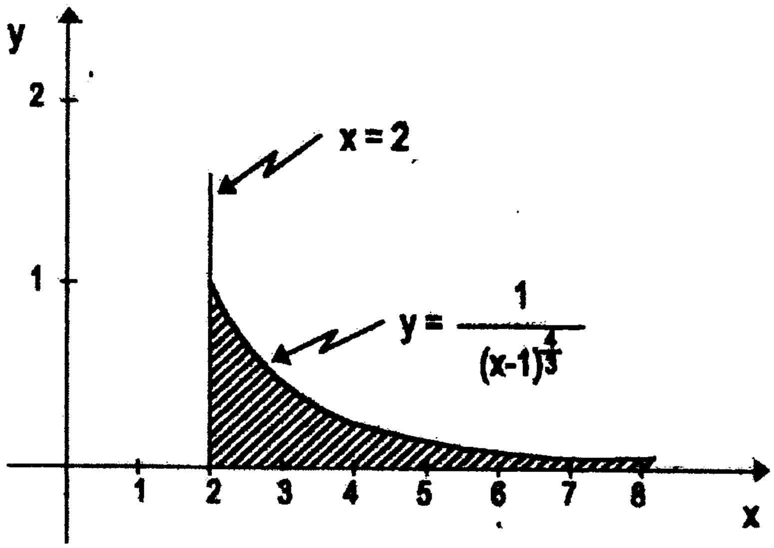

Figura 1

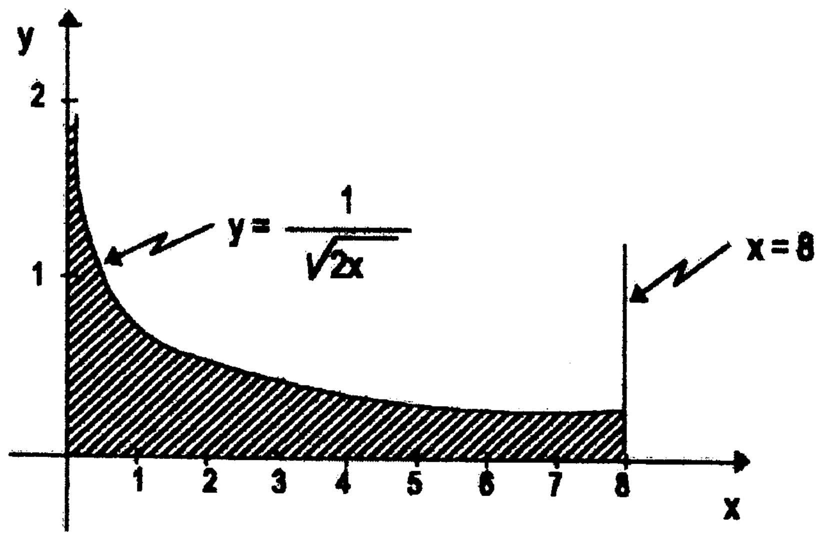

Figura 2

Solución. Como se observa en la Figura 1, para la primera función, su límite cuando la variable x tiende a infinito es igual a cero, esto es,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

por lo que el eje "x", es decir, la recta y = 0, es asíntota horizontal de la gráfica de la función. Y para la segunda función cuya gráfica se observa en la Figura 2, su límite cuando la variable tiende a cero "por la derecha" no existe, es decir, que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2x}} \to \infty$$

por lo que el eje "x", esto es, la recta y = 0, es asíntota horizontal de la gráfica de la función.
Ahora bien, si para calcular las "áreas infinitas" bajo las "curvas infinitas" se aplican los siguientes límites para la resolución de las integrales, se tiene entonces que, para el primer caso,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} dx = \lim_{N \to \infty} \int_2^{N} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

Si se resuelve la integral indefinida y se hace u = x - 1; du = dx, se llega a

$$\int \frac{du}{u^{\frac{4}{3}}} = \int u^{-\frac{4}{3}} du$$

$$\int \frac{du}{u^{\frac{4}{3}}} = \int u^{-\frac{4}{3}} du = \frac{u^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{u}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} + C$$

y, finalmente se puede escribir

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} dx = \lim_{N \to \infty} \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} \right]_2^N = \lim_{N \to \infty} \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{N-1}} + \frac{3}{\sqrt[3]{2-1}} \right) = 3$$

Por otro lado, para el segundo caso,

$$\int_0^{8} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \lim_{N \to 0} \int_N^{8} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx$$

se resuelve la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$$

para lo cual se hace u = 2x, entonces du = 2dx y se obtiene

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2} x \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{2x} + C$$

y finalmente se tiene que

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{2x}}dx = \lim_{N \to 0} \left[\sqrt{2x}\right]_N^8 = \lim_{N \to 0} \left[\sqrt{2(8)} - \sqrt{2N}\right] = 4$$

En ambos casos los límites existen y, de acuerdo con las siguientes definiciones, sus valores numéricos se asignan, respectivamente, a las "áreas infinitas" buscadas.

LÍMITES INFINITOS DE INTEGRACIÓN

DEFINICIÓN. i) Si f es una función continua en el intervalo [a, ∞), entonces se define la integral impropia

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_a^N f(x)\,dx \quad ; a \in \Re$$

ii) Si f es una función continua en el intervalo (-∞, b], entonces se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N \to -\infty} \int_N^{b} f(x)\,dx \quad ; b \in \Re$$

iii) Si f es una función continua en el intervalo (-∞, ∞), entonces se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx \quad ; c \in \Re$$

$$= \lim_{M \to -\infty} \int_M^c f(x)\,dx + \lim_{N \to \infty} \int_c^N f(x)\,dx$$

En cada caso, si el límite es finito, se dice que la integral impropia es convergente y que el límite es el valor de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral impropia es divergente. Esto significa *que en el tercer caso, la integral es divergente si una o ambas de las integrales del lado derecho es divergente o son divergentes.*

Cuando de trata de alguna aplicación de la integral definida y ésta es impropia, como en el caso de un área bajo la curva, si la integral es convergente, el valor del límite que la define será el valor finito del "área infinita". En caso de ser divergente, se considera que el área es infinita.

INTEGRANDOS INFINITOS

DEFINICIÓN. *i) Si f es una función continua en el intervalo [a, b) y tiende a infinito en "b", cuando x tiende a b "por la izquierda", lo que se manifiesta al haber una asíntota vertical en x = b, entonces se define la integral impropia*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N \to b^-} \int_a^N f(x)\,dx \;; \quad a, b \in \Re$$

ii) Si f es una función continua en el intervalo (a, b] y tiende a infinito en "a" cuando x tiende al valor a por la derecha, lo que se manifiesta al haber una asíntota vertical en x = a, entonces se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N \to a^+} \int_N^b f(x); \quad a, b \in \Re$$

iii) Si f es una función continua en el intervalo [a, b], excepto en algún valor c∈(a, b), en el cual f tiende a infinito cuando x tiende a "c", por la presencia de una asíntota vertical en "c", entonces se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \;; a, b \in \Re$$

$$= \lim_{M \to c^-} \int_a^M f(x)\,dx + \lim_{N \to c^+} \int_N^b f(x)\,dx$$

Aquí también se da la convergencia si el límite existe, o la divergencia si no existe. Y para el caso (iii), con un límite que no exista, la integral impropia es divergente.

***EJEMPLO 2**. Investigar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias*

$$i)\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^2} \qquad)\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Solución. *i) La función del integrando es continua en el intervalo $[0,\infty)$. Luego*

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}\frac{dx}{(1+x)^2}$$

Ahora se resuelve la integral indefinida

$$\int\frac{dx}{(1+x)^2}$$

y para ello se hace $u=1+x$ de donde $du=dx$ y entonces

$$\int\frac{du}{u^2}=\int u^{-2}\,du=\frac{u^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{1+x}+C$$

y finalmente

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^N=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{1+N}+\frac{1}{1+0}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{1+N}+1\right)=1$$

por lo tanto la integral impropia es convergente y su valor es uno.

ii) La función del integrando es continua en el intervalo $(-\infty, 0]$. Luego

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{N\to-\infty}\int_N^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

se resuelve la integral indefinida

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

y se hace $u=1-x$, de donde $du=-dx$, luego

$$-\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

y finalmente

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{N\to-\infty} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_N^0 = \lim_{N\to-\infty} \left[-2\sqrt{1-0} + 2\sqrt{1-N}\right] \to +\infty$$

por lo que la integral impropia es divergente.

EJEMPLO 3. *Investigar la convergencia o divergencia de la integral impropia y graficar la función del integrando.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{x^2+2}\,dx$$

Solución. La gráfica de la función del integrando es la siguiente:

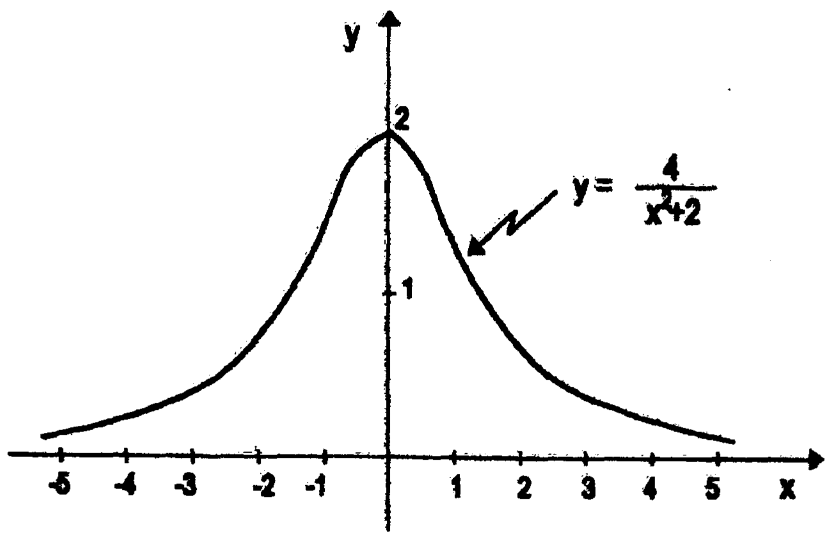

Figura 3

Como se observa en la gráfica, esta integral impropia se puede descomponer como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{x^2+2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{4}{x^2+2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{4}{x^2+2}\,dx$$

$$= \lim_{M \to -\infty} \int_M^0 \frac{4}{x^2 + 2} dx + \lim_{N \to \infty} \int_0^N \frac{4}{x^2 + 2} dx$$

se resuelve la integral indefinida

$$\int \frac{4}{x^2 + 2} dx$$

y, mediante el cambio de variable, se tiene que:

$$u^2 = x^2 ; u = x ; du = dx ; a^2 = 2 ; a = \sqrt{2}$$

$$4 \int \frac{du}{u^2 + a^2} = 4 \cdot \frac{1}{a} \text{angtan } \frac{u}{a} + C = \frac{4}{\sqrt{2}} \text{angtan } \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{x^2 + 2} dx = \lim_{M \to -\infty} \left[\frac{4}{\sqrt{2}} \text{angtan } \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_M^0 + \lim_{N \to \infty} \left[\frac{4}{\sqrt{2}} \text{angtan } \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^N$$

$$= \lim_{M \to -\infty} \left[\frac{4}{\sqrt{2}} \text{angtan } (0) - \frac{4}{\sqrt{2}} \text{angtan } \frac{M}{\sqrt{2}} \right] + \lim_{N \to \infty} \left[\frac{4}{\sqrt{2}} \text{angtan } \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} \text{angtan } (0) \right]$$

$$= 0 - \frac{4}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{4}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right) - 0 = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\pi$$

por lo tanto la integral impropia es convergente y su valor es el así obtenido.

EJEMPLO 4*. Investigar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:*

$$i) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \qquad ii) \int_0^4 \frac{dx}{(4 - x)^{\frac{2}{3}}}$$

Solución. *i) Aquí la función del integrando no es continua en $x = 0$, luego, de acuerdo con lo establecido*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{N \to 0^+} \int_N^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

se resuelve la integral definida y

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3\,x^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

de donde

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{N \to 0^+} \left[\frac{3\,x^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_N^1 = \lim_{N \to 0^+} \left[\frac{3\,(1)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3\,N^{\frac{2}{3}}}{2}\right] = \frac{3}{2}$$

por lo tanto la integral impropia es convergente y su valor es 3 / 2.

ii) En este caso la función del integrando no es continua en x = 4, por lo que la integral se expresa como

$$\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{N \to 4} \int_0^N \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}$$

se resuelve la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}$$

se hace u = 4 – x; por lo que du = - dx y entonces

$$-\int \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}} = -\int u^{-\frac{2}{3}}\,du = -\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{u} + C = -3\sqrt[3]{4-x} + C$$

de donde

$$\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{N \to 4} \left[-3\sqrt[3]{4-x}\right]_0^N = \lim_{N \to 4} \left(-3\sqrt[3]{4-N} + 3\sqrt[3]{4-0}\right) = 3\sqrt[3]{4}$$

y entonces la integral impropia es convergente y tiene como valor el así obtenido.

EJEMPLO 5. *Analizar la convergencia o divergencia de la siguiente integral impropia y graficar la función del integrando.*

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

Solución. La gráfica de la función integrando se muestra en la siguiente figura:

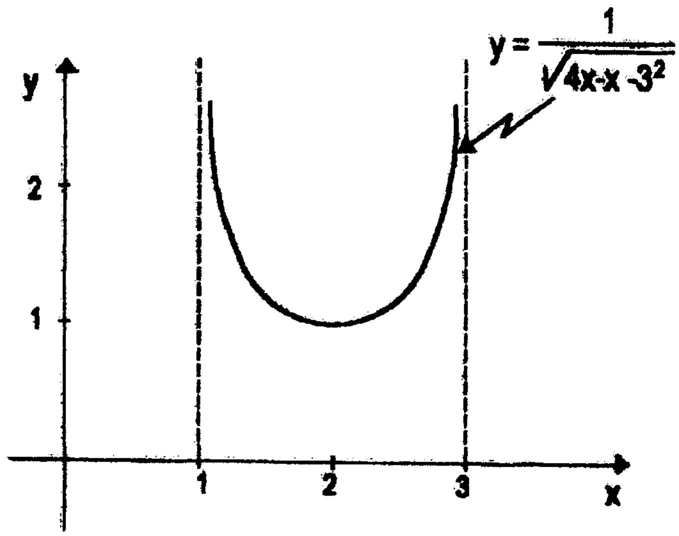

Figura 4

Como se ve en la figura, el dominio de la función del integrando es el intervalo de valores reales $x\varepsilon(1,3)$ *por lo que no es continua en* $x = 1$ *y en* $x = 3$*, y, de acuerdo con la definición ya tratada, se puede escribir que:*

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

$$= \lim_{M \to 1} \int_M^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} + \lim_{N \to 3} \int_2^N \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

se resuelve la integral indefinida de la siguiente manera:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 4x + 3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 4x + 4 - 4 + 3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

con el cambio de variable

$$u^2 = (x-2)^2 \,;\, u = x-2 \,;\, du = dx \,;\, a^2 = 1 \,;\, a = 1$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ang \ \text{sen} \ \frac{u}{a} + C = ang \ \text{sen} \ (x-2) + C$$

v finalmente se llega a

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \lim_{M \to 1} \left[ang \ \text{sen} \ (x-2)\right]_M^2 + \lim_{N \to 3} \left[ang \ \text{sen} \ (x-2)\right]_2^N$$

$$= ang \ \text{sen}\,(2-2) - ang \ \text{sen}\,(M-2) + ang \ \text{sen}\,(N-2) - ang \ \text{sen}\,(2-2) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

luego la integral impropia es convergente y su valor es π.

EJEMPLO 6*. Determinar el área de la región limitada por la gráfica de la curva dada, el eje de las abscisas y los valores correspondientes al intervalo* $x \varepsilon [2, \infty)$.

$$i)\ y = \frac{1}{x-1} \qquad\qquad ii)\ y = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Solución. *i) Se grafica la curva con el área requerida y*

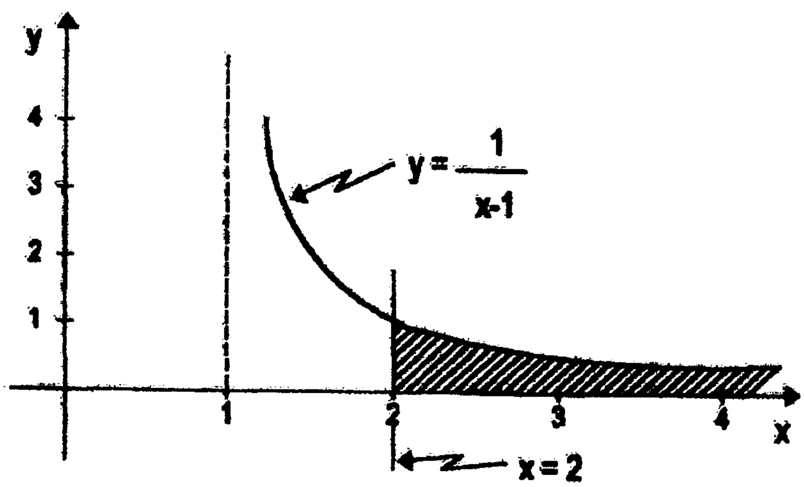

Figura 5

Para calcular el área se utiliza la integral impropia

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x-1} = \lim_{N \to \infty} \int_{2}^{N} \frac{dx}{x-1}$$

se resuelve primero la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{x-1}$$

y para ello se hace $u = x - 1$, de donde $du = dx$ y queda entonces:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x-1| + C$$

y finalmente

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x-1} = \lim_{N \to \infty} \left[\ln|x-1|\right]_{2}^{N} = \lim_{N \to \infty} \left[\ln|N-1| - \ln|2-1|\right] = \lim_{N \to \infty} \ln|N-1| \to +\infty$$

como no existe el límite, la integral impropia es divergente y el área es "infinita".

ii) Se grafica la curva, se señala el área requerida y se tiene, como se observa en la Figura 6, una curva semejante a la del caso anterior, por lo que se procederá igual.

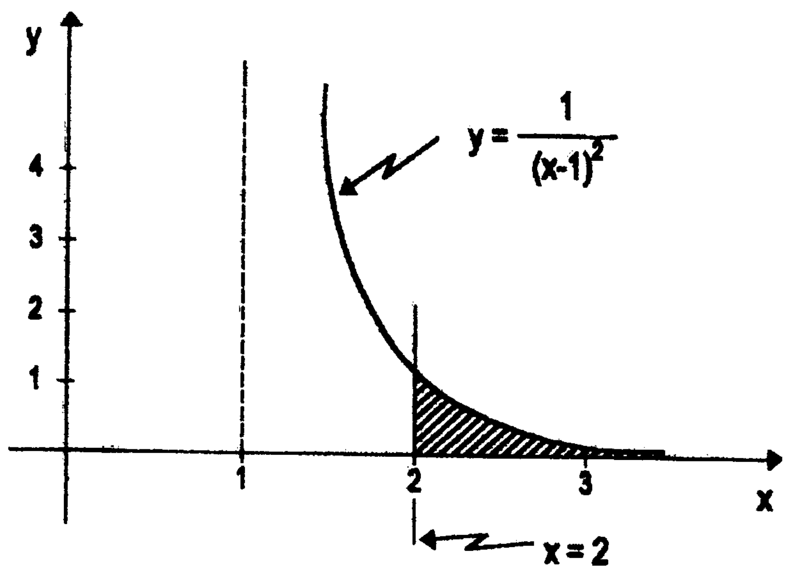

Figura 6

Para calcular el área, se utiliza la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{N \to \infty} \int_2^{N} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

se resuelve la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

como en el ejemplo anterior, mediante el cambio de variable u = x – 1 y du = dx, y se llega a

$$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x-1} + C$$

y al aplicar la definición de integral impropia se obtiene

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{N \to \infty}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^N = \lim_{N \to \infty}\left(-\frac{1}{N-1} + \frac{1}{2-1}\right) = \lim_{N \to \infty}\left(-\frac{1}{N-1} + 1\right) = 1$$

Como se observa, la integral impropia es convergente, luego el área es finita y su valor es igual a 1.

En este ejemplo es interesante apreciar como a pesar de que las dos gráficas tienen la misma forma general para $x \geq 2$, de acuerdo con el concepto de integral definida, se le asigna un área a la región bajo la curva en (ii), lo que no resulta para la superficie bajo la curva en (i).

También cabe destacar que si la región considerada bajo la curva y = 1 / x-1 se gira alrededor del eje "x", entonces, por la definición de volúmenes de sólidos de revolución, se genera un volumen que equivale a la integral impropia

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

cuyo valor, de acuerdo a lo calculado en el inciso (ii) del ejemplo anterior, es igual a π x 1, o bien, a π. Esto muestra el curioso y extraño hecho de que un "área infinita" genera un volumen finito.

EJEMPLO 7*. Asignar, de ser posible, un área a la superficie bajo la curva de ecuación $y = e^{\frac{x}{2}}$, sobre el eje de las abscisas y a la izquierda de la recta x = 2:*

Solución. La gráfica de la región limitada por la curva, la recta y = 0 y el intervalo (-∞, 2] está dada por

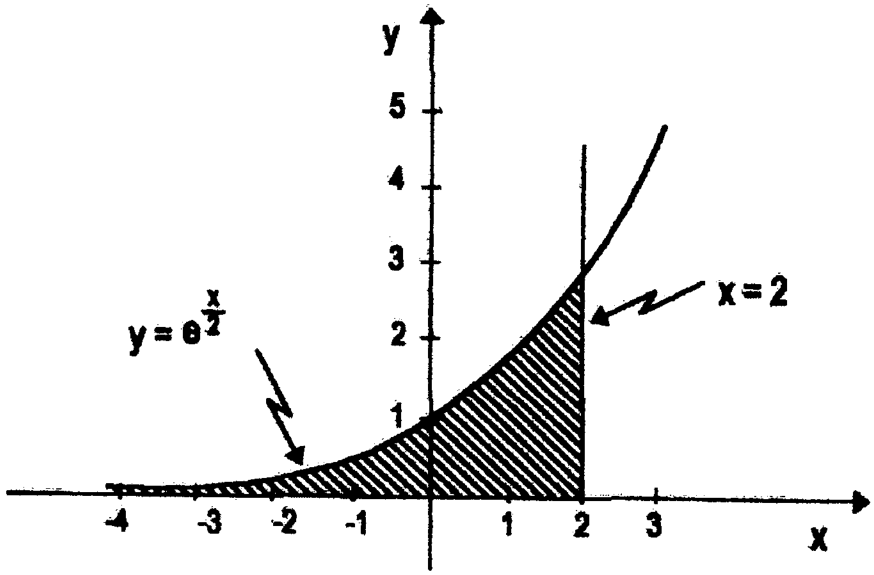

Figura 7

El área requerida se obtiene, de acuerdo con lo establecido, mediante la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{2} e^{\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{N \to -\infty} \int_{N}^{2} e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Como es usual, se resuelve la integral indefinida

$$\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

mediante el cambio de variable: u = x / 2, se tiene que du = dx / 2 y entonces

$$2\int e^{u}\,du = 2e^{u} + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C$$

y finalmente

$$\int_{-\infty}^{2} e^{\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{N \to -\infty} \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_{N}^{2} = \lim_{N \to -\infty} \left(2e - 2e^{\frac{N}{2}} \right) = 2e$$

luego la integral impropia es convergente, el área es finita y tiene como valor 2e.

***EJEMPLO 8**. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:*

$$i)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\ x dx \qquad ii)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \qquad iii)\int_a^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad iv)\int_0^1 x \ln\ x dx$$

Solución. *i) La función secante no es continua en $x = \pi / 2$, por lo que la correspondiente integral impropia se expresa como*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\ x\ dx = \lim_{N \to \frac{\pi}{2}} \int_0^N \sec\ x\ dx$$

La solución de la integral indefinida, por fórmula, es

$$\int \sec\ x\ dx = \ln|\sec\ x + \tan\ x| + C$$

por lo que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\ x dx = \lim_{N \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\ln|\sec\ x + \tan x|\right]_0^N = \lim_{N \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\ln|\sec\ N + \tan N| - \ln|\sec\ 0 + \tan 0|\right)$$

$$= \ln\left|\sec\ \frac{\pi}{2} + \tan\ \frac{\pi}{2}\right| \to +\infty$$

y la integral impropia es divergente.

ii) Aquí la función del integrando es continua en todos los reales pero al ser infinito los límites de la integral, entonces ésta se expresa mediante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{M \to -\infty} \int_M^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \lim_{N \to \infty} \int_0^N \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

primero se resuelve la integral indefinida de la siguiente manera

$$\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} \cdot \frac{e^{x}}{e^{x}} = \int \frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}:$$

y, con el cambio de variable: $u^{2} = e^{2x}; u = e^{x}; du = e^{x}dx; a^{2} = 1; a = 1$

$$\int \frac{du}{u^{2}+a^{2}} = \frac{1}{a} angtan \frac{u}{a} + C = angtan \frac{e^{x}}{a} + C$$

y en consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} = \lim_{M \to -\infty} \left[angtan \quad e^{x} \right]_{M}^{0} + \lim_{N \to \infty} \left[angtan \quad .e^{x} \right]_{0}^{N}$$

$$= \lim_{M \to -\infty} \left(angtan \; e^{0} - angtan \; e^{M} \right) + \lim_{N \to \infty} \left(angtan \; e^{N} - angtan \; e^{0} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

y la integral impropia es convergente y su valor es $\pi / 2$.

iii) En este caso, la función integrando no es continua en x = a y además el límite superior de la integral es infinito, por lo que se puede escribir:

$$\int_{a}^{\infty} \frac{xdx}{(x^{2}-a^{2})^{\frac{1}{2}}} = \lim_{M \to a} \int_{M}^{a+b} \frac{xdx}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}} + \lim_{N \to \infty} \int_{a+b}^{N} \frac{xdx}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}; b > a$$

Ahora se resuelve la integral indefinida

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}$$

para lo cual se hace: $u = x^{2} - a^{2}; du = 2xdx$

y entonces

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^{2}-a^{2}} + C$$

finalmente

$$\int_{a}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}} = \lim_{M \to a} \left[\sqrt{x^{2}-a^{2}} \right]_{M}^{a+b} + \lim_{N \to \infty} \left[\sqrt{x^{2}-a^{2}} \right]_{a+b}^{N}$$

$$= \lim_{M \to a} \left[\sqrt{(a+b)^{2}-a^{2}} - \sqrt{M^{2}-a^{2}} \right] + \lim_{N \to \infty} \left[\sqrt{N^{2}-a^{2}} - \sqrt{(a+b)^{2}-a^{2}} \right]$$

$$= \sqrt{2ab+b^{2}} - 0 + \infty - \sqrt{2ab+b^{2}} = +\infty$$

y la integral impropia es divergente.

iv) Como se sabe, la función lnx no está definida en x = 0, luego la integral impropia se expresa como:

$$\int_{0}^{1} x \ln x \, dx = \lim_{N \to 0} \int_{N}^{1} x \ln x \, dx$$

como en los otros casos, se resuelve la integral indefinida

$$\int x \ln x \, dx$$

para ello, se aplica el método de integración "por partes" y se tiene que

$$u = \ln x ; du = \frac{dx}{x} ; dv = x \, dx ; v = \frac{x^{2}}{2}$$

de donde

$$\int x \ln x dx = \frac{x^{2}}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^{2}}{2} \ln x - \frac{x^{2}}{4} + C$$

luego

$$\int_{0}^{1} x \ln x dx = \lim_{N \to 0} \left[\frac{x^{2}}{2} \ln x - \frac{x^{2}}{4} \right]_{N}^{1} = \lim_{N \to 0} \left[\frac{1}{2} \ln (1) - \frac{1}{4} - \frac{N^{2}}{2} \ln N + \frac{N^{2}}{4} \right]$$

$$= -\frac{1}{4} - \lim_{N \to 0} \frac{N^{2}}{2} \ln N$$

si se aplica la Regla de L´Hopital para calcular este límite se tiene:

$$\lim_{N \to 0} \frac{\ln N}{\frac{2}{N^2}} = \lim_{N \to 0} \frac{\frac{1}{N}}{-\frac{4}{N^3}} = \lim_{N \to 0}\left(-\frac{N^2}{4}\right) = 0$$

por lo que

$$\int_0^1 x \ln x dx = -\frac{1}{4}$$

y la integral impropia es convergente con $-1/4$ como valor.

EJEMPLO 9*. Analizar la convergencia o divergencia de la integral impropia*

$$\int_0^{\infty} \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2} dx$$

Solución. La función del integrando no es continua en $x = 0$ y $x = 1$, y el límite superior de la integral es infinito por lo que esta integral impropia se puede expresar como:

$$\int_0^{\infty} \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2} dx = \lim_{L \to 0^+} \int_L^{\frac{1}{2}} \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2} dx + \lim_{M \to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{M} \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2} dx +$$

$$+ \lim_{N \to 1^+} \int_N^{2} \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2} dx + \lim_{P \to \infty} \int_2^{P} \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2} dx$$

se resuelve ahora la integral indefinida

$$\int \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2} dx$$

con el cambio de variable

$$u = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x-1};\ du = \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2}dx$$

de donde

$$\int du = u + C = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x-1} + C$$

y finalmente

$$\int_0^{\infty} \frac{-1-3x}{4x^{\frac{3}{4}}(x-1)^2}dx = \lim_{L \to 0^+}\left[\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x-1}\right]_L^{\frac{1}{2}} + \lim_{M \to 1^-}\left[\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{M} + \lim_{N \to 1^+}\left[\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x-1}\right]_N^{2} + \lim_{P \to \infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x-1}\right]_2^{P}$$

$$= \lim_{L \to 0}\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{L^{\frac{1}{4}}}{L-1}\right] + \lim_{M \to 1^-}\left[\frac{M^{\frac{1}{4}}}{M-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right] + \lim_{N \to 1^+}\left[2^{\frac{1}{4}} - \frac{N^{\frac{1}{4}}}{N-1}\right] + \lim_{P \to \infty}\left[\frac{P^{\frac{1}{4}}}{P-1} - 2^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + \infty + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{4}} - \infty + 0 - 2^{\frac{1}{4}} \rightarrow \infty$$

y la integral impropia es divergente.

EJEMPLO 10. *Determinar para qué valores de "n" la siguiente integral impropia es convergente y para cuáles divergente.*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}dx$$

Solución. Si n = 1

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N \to \infty} \int_1^{N} \frac{dx}{x} = \lim_{N \to \infty} \left[\ln|x|\right]_1^N \rightarrow \infty \Rightarrow \textit{divergente}$$

Al resolver la integral indefinida se tiene que

$$\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

de donde

$$\int_1^N \frac{dx}{x^n} = \frac{N^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}$$

$$n > 1 \Rightarrow -n+1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} N^{-n+1} = 0 \quad y \quad \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\right) = \frac{1}{n-1}$$

$$n < 1 \Rightarrow -n+1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} N^{-n+1} = \infty \quad y \quad \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\right) \to \infty$$

por lo tanto la integral impropia dada es divergente si n ≤ 1 y cuando n>1, es convergente y su valor es 1 / n-1.

TEOREMA. CRITERIO DE DOMINACIÓN PARA LA CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS.

Sean f(x) y g(x) funciones valuadas positivamente, integrables en cualquier intervalo finito [a, b], tales que f domina a g cuando b→∞, es decir, $g(x) \leq f(x) \quad para\ toda \quad x > a$

$$entonces \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad converge \qquad si \quad \int_a^\infty f(x)dx \quad converge$$

Prueba. Sea $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ *y* $\lim_{b\to\infty} F(b) = A$ *lo que quiere decir que la integral impropia* $\int_a^b f(x)dx$ *es convergente y su valor es A.*

Considérese ahora la integral definida $G(b) = \int_a^b g(x)dx$ *; si f domina a g cuando b→∞ entonces, por propiedades de la integral definida se puede escribir*

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \;;\; b > a$$

Se pretende probar que el límite de G(b), cuando b→∞, existe. La función G(b) representa el área bajo la curva g(x), sobre el eje x, y de x = a a x = b. Como G(b) es creciente en b, pueden acontecer dos cosas:

i) G(b) se hace infinita si b→∞

ii) G(b) tiene límite finito si b→∞

Veamos por qué (i) no es verdadera. De acuerdo con lo ya establecida, el área bajo la curva g(x) siempre es menor que el área bajo la curva f(x), cuyo valor finito ya se estableció como A, cuando b→∞. Luego el límite de G(b), cuando b→∞, es un valor finito B. Por lo que se puede escribir entonces que

$$B = \lim_{b \to \infty} G(b) = \int_a^\infty g(x)\,dx \le \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} F(b) = A$$

Y así se comprueba que la integral impropia $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *es convergente y finaliza la prueba.*

TEOREMA. CRITERIO DE DOMINACIÓN PARA LA DIVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS

Sean f(x) y g(x) funciones valuadas positivamente, integrables en cualquier intervalo finito [a, b], tales que f domina a g cuando b→∞, es decir, $g(x) \le f(x) \quad para\ toda \quad x > a$

$$entonces \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad diverge \qquad si \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad diverge$$

La prueba de este teorema es semejante a la del anterior.

Estos dos teoremas también son aplicables a las integrales impropias con integrandos infinitos.

Estos criterios son útiles sobre todo cuando solamente se requiere saber si la integral impropia es convergente o divergente o bien, cuando el proceso de integración es muy complicado o imposible con los métodos tradicionales.

***EJEMPLO 11**. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.*

$$i)\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}\quad ii)\int_1^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx\quad iii)\int_1^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\quad iv)\int_{-\infty}^{1}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{7}{2}}}dx$$

Solución. *i) En el primer ejercicio es evidente que en el intervalo $x\in[1,\infty)$ se cumple que*

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)}<\frac{1}{x^2}$$

Además

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}x^{-2}dx=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^N=-\frac{1}{\infty}+1=1$$

resultado que manifiesta la convergencia. Por lo tanto, la integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ *es convergente y su valor es menor que 1.*

ii) Aquí resulta evidente que para el intervalo $x\in[1,\infty)$ se cumple que

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}>\frac{x}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Además

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{N\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^N\to+\infty$$

resultado que hace ver la divergencia y por lo tanto, finalmente se tiene que la integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$ *es divergente.*

iii) En esta integral impropia, la función del integrando no es continua en $x=1$: Por otro lado, para valores de x comprendidos en el intervalo $x\varepsilon(1,\infty)$, se cumple que

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}<\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Además

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{N \to 1^+} \int_N^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{N \to 1^+} \left[2\sqrt{x-1}\right]_N^2 = 2$$

luego es convergente y por consiguiente, la integral impropia $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ *es convergente y su valor es menor que 2. Para calcular este valor, se aplica el método de sustitución trigonométrica para resolver la integral indefinida y se llega a:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

de donde

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{N \to 1}\left[-\ln\left|x - \sqrt{x^2-1}\right|\right]_N^2 = -\ln(2-\sqrt{3}) \approx 1.32$$

iv) En esta integral impropia la función del integrando no es continua en x = 0. Y el mayor valor que puede tomar - cosx es "-1", por lo que es factible escribir que

$$\frac{1-\cos x}{x^{\frac{7}{2}}} \le \frac{2}{x^{\frac{7}{2}}} \ldots\ldots \; para \; \ldots x > 0$$

Además

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{2}{x^{\frac{7}{2}}} dx = \lim_{N \to -\infty}\left[-\frac{4}{5x^{\frac{5}{2}}}\right]_N^1 = -\frac{4}{5}$$

por lo que es convergente, y entonces la integral impropia $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^{\frac{7}{2}}} dx$ *es convergente*

TEOREMA. CRITERIO DEL LÍMITE DEL COCIENTE

Sean f(x) y g(x) funciones valuadas positivamente e integrables en cualquier intervalo finito [a, b]. Luego

$i)$ *Si* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L; \quad 0 < L < \infty$ *, entonces las dos integrales impropias* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *y* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *convergen o las dos divergen.*

ii) Si L = 0 y además se cumple que $\int_a^{\infty} g(x)dx$ *converge*

entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *converge*

iii) Si L = ∞ *y además se cumple que* $\int_a^{\infty} g(x)dx$ *diverge*

entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *diverge*

Prueba de (i). Por hipótesis se tiene que $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L; \quad 0 < L < \infty$ *. Luego, de acuerdo con la definición de límite cuando la variable tiende a infinito, es factible escribir lo siguiente:*

Dado un valor $\varepsilon > 0$ *tan pequeño como se desee, existe un número "M" tal que*

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon \qquad \textit{siempre} \qquad \textit{que} \quad x \geq M$$

de aquí se tiene que , para valores de "x" mayores o iguales a M,

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

$$(L-\varepsilon)g(x) < f(x) < (L+\varepsilon)g(x)$$

entonces, por propiedades de la integral definida

$$(L - \varepsilon) \int_M^b g(x)dx < \int_M^b f(x)dx < (L + \varepsilon) \int_M^b g(x)dx$$

Si se toma en cuenta esto y el hecho evidente de que $L - \varepsilon > 0$*, entonces se puede concluir lo siguiente:*

Si la integral impropia $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *converge, entonces, por el lado derecho de la desigualdad,*

$\lim\limits_{b\to\infty} \int_M^b f(x)dx$ *existe* *y por lo tanto la integral impropia* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *es convegente*

- Si la integral impropia $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *diverge, entonces, por el lado izquierdo de la desigualdad,*

$\lim\limits_{b\to\infty} \int_M^b f(x)dx = \infty$ $(no\ existe)$ *y por lo tanto, la integral*

impropia $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *es divergente*

Para una mejor comprensión de este teorema, cabe expresar que

si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *, f(x) crece más rápido que g(x) cuando x* $\to \infty$ *(iii)*

si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *, f(x) crece más lento que g(x) cuando x* $\to \infty$ *(ii)*

si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ *, f(x) y g(x) crecen a la misma razón.* *(i)*

Este teorema también es aplicable a integrales impropias con integrandos infinitos.

***EJEMPLO 12**. Mostrar que la integral impropia dada es convergente en (i) y divergente en (ii):*

$$i)\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x+2} \qquad ii)\ \int_2^{\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{x^6+9}}\,dx$$

Solución. *i) Como ya se vió, la integral impropia*

$\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ *es convergente (n = 3>1) y las funciones*

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + x + 2} \quad y \quad g(x) = \frac{1}{x^3}$$

son positivas en el intervalo [1, ∞). Se calcula el límite del cociente y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{x^3 + x + 2}}{\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 + x + 2} = 1 > 0$$

por lo tanto la integral impropia en estudio es convergente.

ii) Como ya se vió, la integral impropia

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ *es divergente (n = 1) y las funciones*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^6 + 9}} \quad y \quad g(x) = \frac{1}{x} \text{ son}$$

positivas en el intervalo [2, ∞). Se calcula el límite del cociente y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^6 + 9}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4x}{\sqrt{x^6 + 9}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^3 - 4x}{x^3}}{\dfrac{\sqrt{x^6 + 9}}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{9}{x^6}}} = 1 > 0$$

por lo tanto la integral impropia en cuestión es divergente.

TEOREMA. CRITERIO DEL PRODUCTO POR x^n

Sea f(x) una función integrable para cualquier intervalo finito [a, b] y considérese el límite

$$\lim_{x \to \infty} x^n f(x) = L$$

Entonces

$i) \displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *es convergente si* $n > 1$ *y* $L \varepsilon \Re$

$$ii)\ \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$ es divergente si $n \leq 1$ y $L \, \varepsilon \, \Re - \{0\}$ o $\rightarrow \infty$

Prueba. Sea por hipótesis $\lim_{x \to \infty} x^n f(x) = L$. *Luego, por la definición de límite, existe un valor* $\varepsilon > 0$ *y tan pequeño como se desee y un número* M *tales que:*

$$\left| x^n f(x) - L \right| < \varepsilon \quad siempre \quad que \quad x \geq M$$

Entonces, para $x \geq M$

$$-\varepsilon < x^n f(x) - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < x^n f(x) < L + \varepsilon$$

$$\frac{L - \varepsilon}{x^n} < f(x) < \frac{L + \varepsilon}{x^n}$$

y, por propiedades de la integral definida

$$(L - \varepsilon) \int_M^b \frac{dx}{x^n} < \int_M^b f(x)\,dx < (L + \varepsilon) \int_M^b \frac{dx}{x^n}$$

si $n > 1$, $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$ *converge y, para cualquier valor real de* L, $\lim_{b \to \infty} \int_M^b f(x)\,dx$ *existe y por lo tanto, la integral impropia* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *converge*

Si $n \leq 1$, $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$ *diverge y, para cualquier valor real de* L $(\neq 0)$ o ∞, $\lim_{b \to \infty} \int_M^b f(x)\,dx$ *no existe y por lo tanto, la integral impropia* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *diverge*

EJEMPLO 13. *Determinar si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes:*

$$i)\ \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{2x^4+10} \qquad\qquad ii)\ \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+2}}$$

Solución. *i) Si se toma* x^2 $con\ n = 2 > 1$ *se tiene que:*

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{x^2}{2x^4+10} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{2x^4+10} = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{2x^4+10}$ *es convergente.*

ii) Si se toma $x^1 = x$ $con\ n = 1$ *se tiene que:*

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2+2}} = 1$$

y por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x+2}}$ *es divergente.*

TEOREMA. CONVERGENCIA ABSOLUTA

Sea una función f(x) integrable en cualquier intervalo finito [a, b]. Si la integral $\displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ *es convergente, entonces la integral impropia* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *también es convergente y se dice que es absolutamente convergente. Si la integral impropia anterior converge, pero la integral del valor absoluto es divergente, entonces la integral impropia de la función f(x) se dice condicionalmente convergente (La prueba se omite por no considerarse de relevancia).*

EJEMPLO 14. *Determinar la convergencia o divergencia de la integral impropia*

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^3}\,dx$$

Solución. Como se observa, la función integrando es de signo variable. Al respecto, se puede escribir que

$$\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| \Rightarrow \int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^3}\right|dx \leq \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$$

y, como ya se vio, la integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$ *es convergente (n = 3 > 1) y su valor es 1 / n – 1 = 1 / 2. Por lo tanto, la integral impropia* $\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^3}\right|dx$ *es convergente y, de acuerdo al teorema anterior, la integral impropia en estudio es convergente o absolutamente convergente.*

APLICACIONES

A continuación se presentarán ejemplos que ilustran la aplicación de este importante concepto en las matemáticas y en otros campos de la ciencia.

Ejemplo 15. *Un joven invitó a un amigo que estudia Ingeniería a un parque a correr. Mientras se aprestaban al principio de la pista, le comentó que ésta era circular y lo retó a calcular su longitud sin utilizar la conocida fórmula del perímetro que es* $2\pi r$*. Y el único dato que le dio es el radio del eje de la pista, que era de 318.31 m. ¿Qué hizo el estudiante de ingeniería?*

Solución. El amigo aceptó el el desafío, sacó su cuaderno y su calculadora de la mochila, realizó un dibujo como el de la figura e hizo lo siguiente:

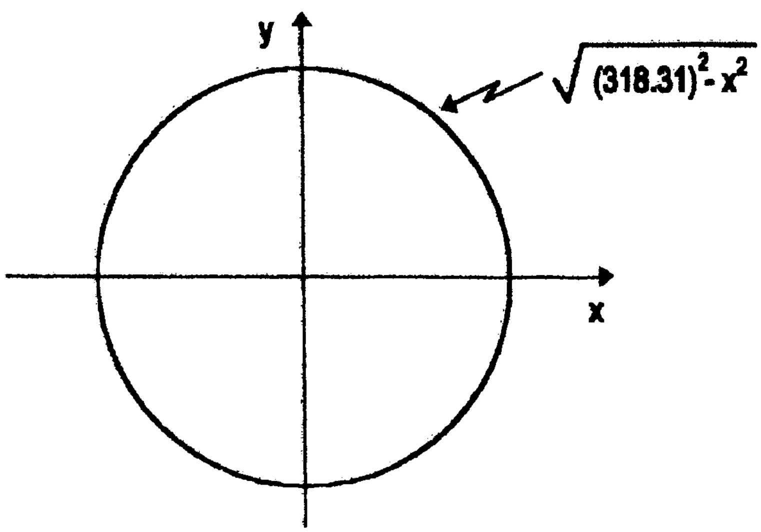

Figura 8

Planteó la ecuación de la circunferencia de la pista como $y = \sqrt{(318.31)^2 - x^2}$ *y decidió utilizar, para calcular el perímetro de la pista, la expresión que sirve para determinar la longitud de arco, para lo cual obtuvo la derivada y llegó a la integral definida correspondiente, todo esto, como sigue:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(318.31)^2 - x^2}}; \quad L = 4\int_0^{318.31} \sqrt{1 + \frac{x^2}{(318.31)^2 - x^2}}\, dx$$

Se percató de que se trataba de una integral impropia ya que la función del integrando no es continua en el valor $x = 318.31$. *Luego la simplificó y expresó como*

$$L = 4\int_0^{318.31} \frac{318.31}{\sqrt{(318.31)^2 - x^2}} dx = 1273.24 \cdot \lim_{N \to 318.31} \int_0^N \frac{dx}{\sqrt{(318.31)^2 - x^2}}$$

y, para calcularla, resolvió primero la integral indefinida, a partir del método de sustitución trigonométrica, de la siguiente manera:

$$u^2 = x^2;\ u = x;\ du = dx;\ a^2 = (318.31)^2;\ a = 318.31$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ang\ \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C = ang\ \operatorname{sen} \frac{x}{318.31} + C$$

de donde, finalmente obtuvo, que la longitud de la pista era de

$$L = 1273.24 \lim_{N \to 318.31} \left[ang\ \operatorname{sen} \frac{x}{318.31} \right]_0^N = 1273.24 \cdot \frac{\pi}{2} = 2{,}000\ m = 2\,km$$

El amigo que lanzó el desafío tomó la calculadora, multiplicó $2 \times \pi \times 318.31$ *y obtuvo 2,000 m = 2 km.*

Al ver el resultado escuchó a su amigo que, al comenzar a correr dijo: "y se trata de una integral impropia convergente".

EJEMPLO 16*. La parte central del jardín de un museo, cuya construcción ha sido encargada a un ingeniero, tiene un prado lleno de flores cuyo perímetro tiene la forma de una curva hipocicloide casi perfecta. ¿Cómo calculará este perímetro para poder comprar la longitud exacta de cerca?*

Solución. El ingeniero sabe que la distancia entre los "picos" opuestos es de 16 m por lo que la ecuación de esta curva es

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$$

y la gráfica de este perímetro es la siguiente

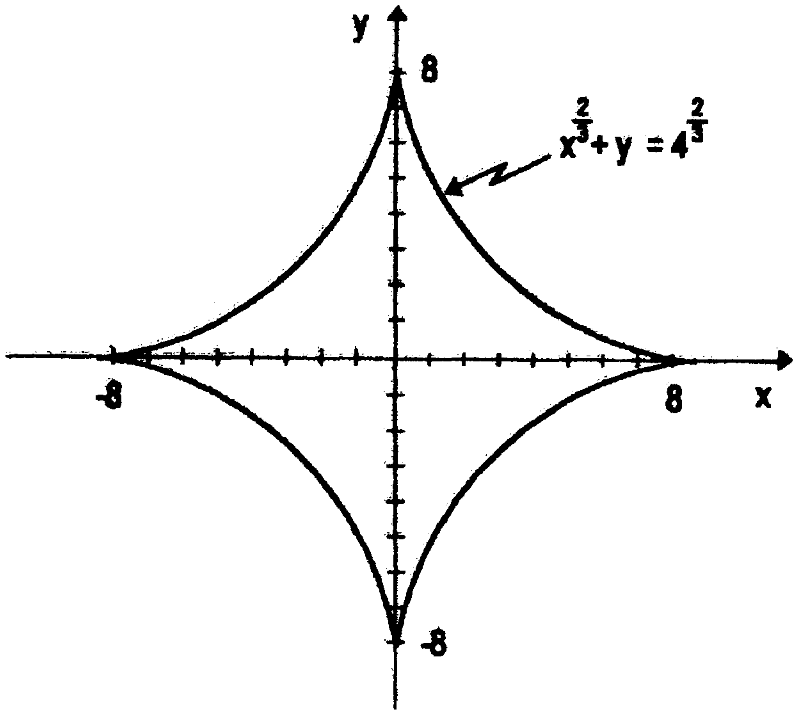

Figura 9

El ingeniero acude a sus apuntes de Cálculo que guarda celosamente, calcula la derivada y aplica la fórmula para la longitud de arco, con lo que llega a:

$$y = \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{-x^{\frac{1}{3}}}$$

$$L = 4\int_0^8 \sqrt{1 + \frac{4 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = 4\int_0^8 \sqrt{\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = 8\int_0^8 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Se da cuenta de que se trata de una integral impropia ya que la función del integrando no es continua en x = 0, luego expresa la integral y la resuelve de la siguiente manera:

$$L = \int_0^8 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{N \to 0} 8 \int_N^8 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = 8 \lim_{N \to 0} \left[\frac{3\, x^{\frac{2}{3}}}{2} \right]_N^8 = \frac{8 \cdot 3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2} = 48$$

Por lo que necesita 48 m de cerca. Recordó, lo que le dio mucho gusto, que se trataba de una integral impropia convergente dada la existencia del límite.

EJEMPLO 17. Un estudiante A le mostró a un estudiante B que el volumen de la "trompeta de Gabriel" - sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje x la superficie limitada por la curva y = 1 / x y el eje x, para el intervalo x ε [1, ∞)- era de π unidades cúbicas y le preguntó que si tuviera que pintar su superficie exterior, ¿cuántos litros de pintura necesitaría, si consideraba las referencias en metros?

- *i)* ¿Cómo obtuvo el estudiante A el volumen?
- *ii)* ¿Qué hizo el estudiante B para determinar la cantidad de pintura requerida?

Solución. La figura que representa a la "trompeta de Gabriel" es la siguiente:

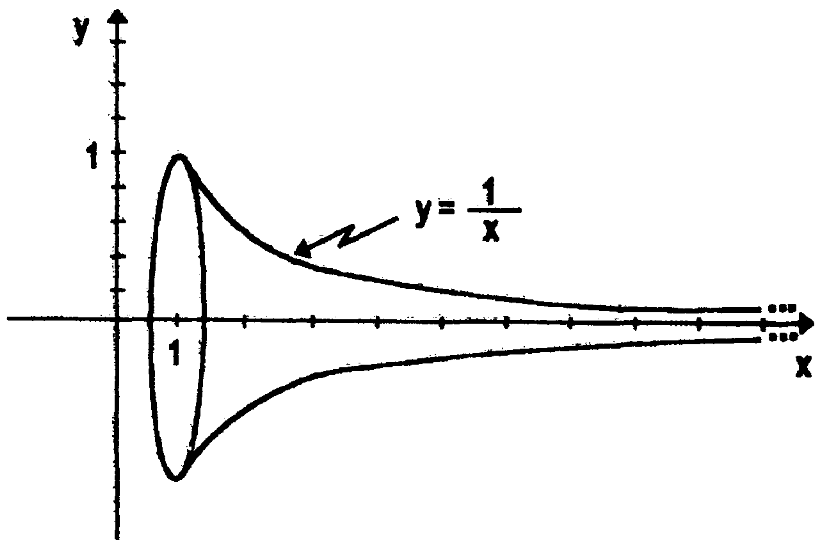

Figura 10

i) Para obtener el volumen, A consideró la expresión para calcular el volumen de un sólido de revolución, el cual, en este caso, se genera al girar, alrededor del eje x, la superficie limitada por la curva de ecuación y = 1 / x, el eje x, la recta x = 1 y el intervalo [1, ∞). Y por la no limitación a la derecha de x = 1, la trató como integral impropia yesto lo realizó de la siguiente manera:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{N \to \infty} \int_1^{N} \frac{dx}{x^2} = \pi \lim_{N \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^N = \pi u^3$$

ii) El estudiante B utilizó la fórmula para determinar el área de una superficie de revolución que está dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

de donde la expresión para la superficie, en su caso, quedó como:

$$S = \int_1^{\infty} 2\pi \left(\frac{1}{x} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx$$

Como es sabido, para $n \leq 1$ *en* $\frac{1}{x^n}$, *la integral impropia* $\int_1^{\infty} \frac{2\pi}{x}\,dx$ *es divergente. Luego, por el Criterio*

de Dominación para la Divergencia en Integrales Impropias, se tiene que, como

$$\frac{2\pi}{x} \leq \frac{2\pi}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \quad \text{para toda } x > 1$$

entonces la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{2\pi}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx$ *es divergente y la superficie "infinita".*

Y dado este resultado, el estudiante B le dijo al estudiante A que se requería un número infinito de litros de pintura. Los dos comentaron lo extraño que resultaba el hecho de que "una superficie infinita contuviera un volumen finito". Y después de tratar de explicarse esto, acabaron concluyendo que todo se debía a la definición matemática de la integral impropia, así como de su existencia a través de la existencia de un límite.

EJEMPLO 18. *Si un módulo espacial tiene una masa de 5,000 kg, calcular el trabajo realizado para elevarlo hasta una altura de 1,250 km. También determinar el trabajo requerido para propulsarlo hasta una distancia infinita de la Tierra. La masa de la Tierra es de* 6×10^{24} *kg y su radio es de* 6.4×10^{6} *m.*

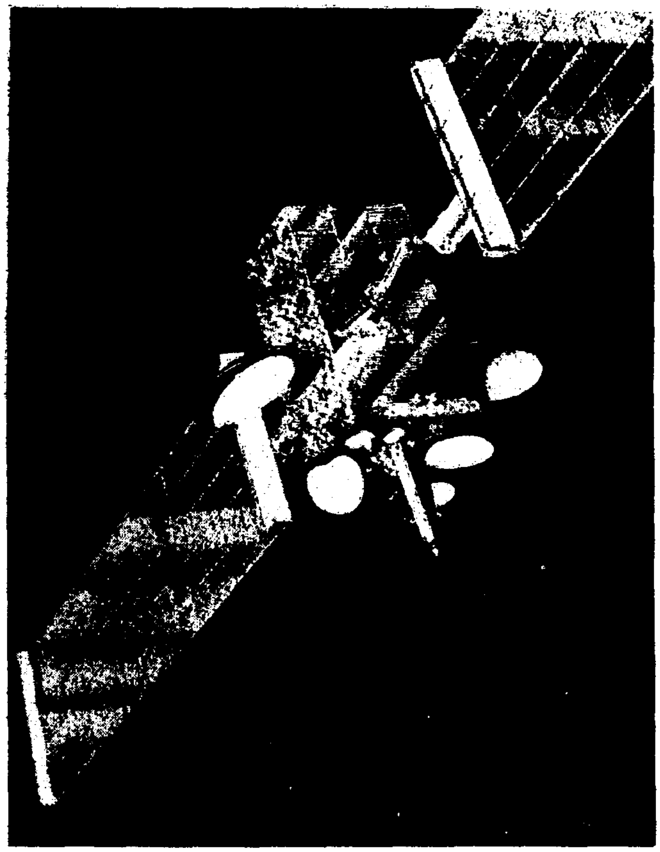

Figura 11

Solución. El trabajo realizado en contra de la gravedad está dado por la fórmula de la gravitación universal

$$F = k\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad donde \;\; k = 6.67\,x10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

Como el trabajo realizado por una fuerza que varía de manera continua y en la misma dirección recta en la que actúa sobre un objeto para moverlo, está dada por

$$W = \int_a^b F\,(x)\,dx$$

para el problema del módulo espacial, el trabajo efectuado para elevar la masa a una altura de 1,250 km sobre la superficie de la Tierra, se determina como:

$$W = \int_{6.4x10^6}^{7.65x10^6} k\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = \left(6.67x10^{-11}\right)\left(6x10^{24}\right)(5000)\int_{6.4x10^6}^{7.65x10^6}\frac{dr}{r^2} = 200.1x10^{16}\left[-\frac{1}{r}\right]_{6.4x10^6}^{7.65x10^6}$$

$$= 200.1x10^{16}\left(-\frac{1}{7.65x10^6}+\frac{1}{6.4x10^6}\right) = 200.1x10^{16}\,x0.025531\,x10^{-6} = 510.875\,x10^8\,joules$$

Para calcular el trabajo requerido para propulsar el módulo hasta una distancia infinita de la Tierra, se sustituye, en la integral anterior el límite superior de integración por ∞, lo que la convierte en una integral impropia. Así

$$W = \int_{6.4x10^6}^{\infty} k\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = \lim_{N\to\infty}\int_{6.4x10^6}^{N} k\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = 200.1x10^{16}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{r}\right]_{6.4x10^6}^{N}$$

$$= 200.1x10^{16}\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{N}+\frac{1}{6.4x10^6}\right) = 200.1x10^{16}\left(\frac{1}{6.4x10^6}\right) = 3{,}126.563 \ \textit{joules}$$

EJEMPLO 19. *La confiabilidad de un producto es la probabilidad de que no necesite ninguna reparación en "t" años. Esta confiabilidad se denota con R(t). Para elaborar una garantía, el fabricante debe conocer el tiempo medio de servicio de un producto antes de su primera reparación, y este tiempo medio está dado por la integral impropia*

$$t_m = \int_0^{\infty}(-t)R'(t)\,dt$$

Para muchos productos de alta calidad, R(t) tiene la forma: $R(t) = e^{-kt}$, donde k es una constante positiva. Encontrar una expresión de dicho tiempo medio en términos de la constante k.
Solución. Como se observa, el problema consiste en resolver la integral impropia, pero antes habrá que construir el integrando. Así

$$R'(t) = -ke^{-kt} \Rightarrow (-t)R'(t) = kte^{-kt}$$

de donde, la integral impropia queda como:

$$t_m = k\int_0^{\infty} t\,e^{-kt}\,dt = k\lim_{N\to\infty}\int_0^{N} t\,e^{-kt}\,dt$$

Ahora se resuelve "por partes" la integral indefinida y

$$u = t;\ du = dt; \qquad dv = e^{-kt} \quad v = -\frac{e^{-kt}}{k}$$

$$\Rightarrow \int te^{-kt}dt = -\frac{t}{ke^{kt}}+\frac{1}{k}\int e^{-kt}dt = -\frac{t}{ke^{kt}}-\frac{e^{-kt}}{k^2}+C = \frac{-kt-1}{k^2e^{kt}}+C$$

luego se tiene que

$$t_m = k \cdot \lim_{N \to \infty} \left[\frac{-kt-1}{k^2 e^{kt}} \right]_0^N = \lim_{N \to \infty} \left[\frac{-kt-1}{ke^{kt}} \right]_0^N = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{-kN-1}{ke^{kN}} - \frac{-k(0)-1}{ke^{k(0)}} \right)$$

Si se aplica la Regla de L'Hopital al límite del primer sumando se tiene

$$\lim_{N \to \infty} \frac{-kN-1}{ke^{kN}} = \lim_{N \to \infty} \frac{-k}{k^2 e^{kN}} = \frac{-k}{\infty} = 0$$

y finalmente se llega a que el tiempo medio en términos de "k" equivale a

$$t_m = \frac{1}{k}$$

resultado que además manifiesta la convergencia de la integral impropia.

EJEMPLO 20. *Se tiene una varilla uniforme que ocupa toda la parte positiva del eje x ($x \geq 0$) y que tiene una densidad lineal de ρ = 4 kg / m. Determinar la fuerza de gravedad que ejerce la varilla sobre una masa puntual de m = 1 kg, situada en el punto de coordenadas (-2m, 0).*

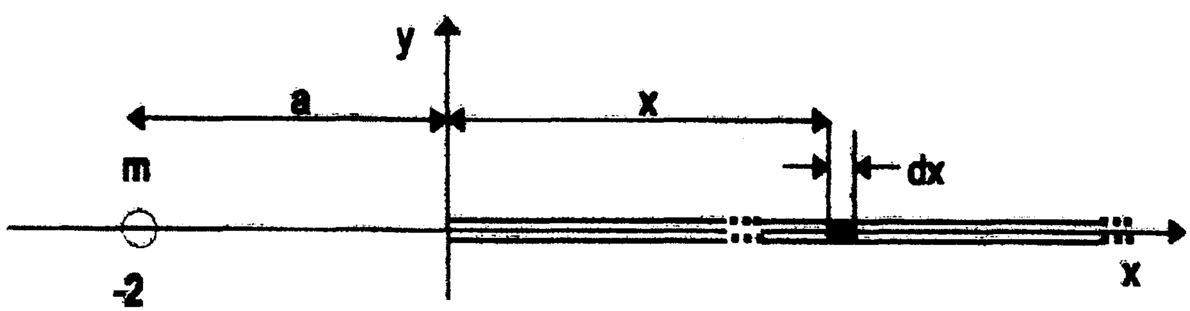

Figura 12

Solución. Para calcular esta fuerza de gravedad se utiliza la ley de la gravitación universal, considerando que un segmento de varilla de longitud dx tiene una masa equivalente a ρdx.

$$\rho = 4 \frac{kg}{m}; \quad m = 1\,kg; \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

si se aplica la expresión de esta ley y se trabaja con una integral impropia por la no definición del extremo derecho de la varilla, se tiene que

$$F = \int_0^{\infty} G \, \frac{m \, \rho \, dx}{(x + a)^2} = G \, .m \, \rho \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x + a)^2}$$

$$F = 6.67 \, x10^{-11} \, x1x4 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x + 2)^2} = 26.68 \, x10^{-11} \lim_{N \to \infty} \int_0^{N} \frac{dx}{(x + 2)^2}$$

se resuelve ahora la integral indefinida $\int \frac{dx}{(x + 2)^2}$ *para lo cual se realiza el siguiente cambio de variable*

$$u = x + 2; \; du = dx; \quad \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x + 2} + C$$

luego

$$F = 26.68 \, x10^{-11} \lim_{N \to \infty} \left[-\frac{1}{x + 2} \right]_0^N = 26.68 \, x10^{-11} \left(\frac{1}{2} \right) = 13.34 \, x10^{-11} \text{ newtons}$$

y la integral impropia es convergente.

EJEMPLO 21. *Dos electrones se repelen con una fuerza (newtons) que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (metros) que los separa. Supóngase que uno de los electrones está fijo. Calcular el trabajo realizado cuando el otro se mueve desde una distancia de 3 cm del primero, hasta el infinito, sobre una línea recta. La carga del un electrón es de* $q_e = 1.6x10^{-19}$ *coulombs*

Solución. Se grafica lo expresado en un sistema coordenado, se tiene la siguiente figura:

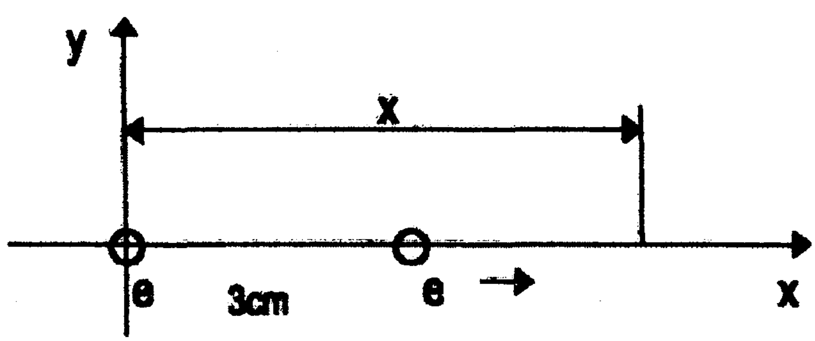

Figura 13

Mediante la Ley de Coulomb y considerando una integral impropia, se resuelve este problema como sigue:

$$k = 9x10^{9}\frac{N \cdot m^{2}}{c^{2}}; \qquad r = x$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}; \qquad W = \int_{0.03}^{\infty} k\frac{q_1 q_2}{x^2}dx = 9x10^{9}x(1.6x10^{-19}.)^2\int_{0.03}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$$

$$W = 23.04x10^{-29}\lim_{N\to\infty}\int_{0.03}^{N}\frac{dx}{x^2} = 23.04x10^{-29}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{0.03}^{N} = 23.04x10^{-29}\left(\frac{1}{0.03}\right) = 768x10^{-29}\,joules$$

y la integral impropia es convergente.

EJEMPLO 22. *Supóngase una viga infinitamente larga cuyo eje, en su posición original, antes de flexar, coincide con el eje de las abscisas en su totalidad. Esta viga se apoya en un cimiento elástico y es flexada por la acción de una fuerza concentrada "P". Considérese el eje de las ordenadas a través del punto "O" en el que se aplica la fuerza con sentido positivo hacia abajo. Entonces, al flexar, el eje de la viga tendrá la ecuación siguiente:*

$$y = \frac{P\alpha}{2k}e^{-\alpha|x|}(\cos\ \alpha x + \text{sen}\ \alpha x)$$

donde "α" y "k" son constantes. Calcular la energía potencial de la deformación elástica mediante la fórmula

$$W = Ec\int_{0}^{\infty}(y'')^2 dx; \quad E\ y\ c, \text{constantes}$$

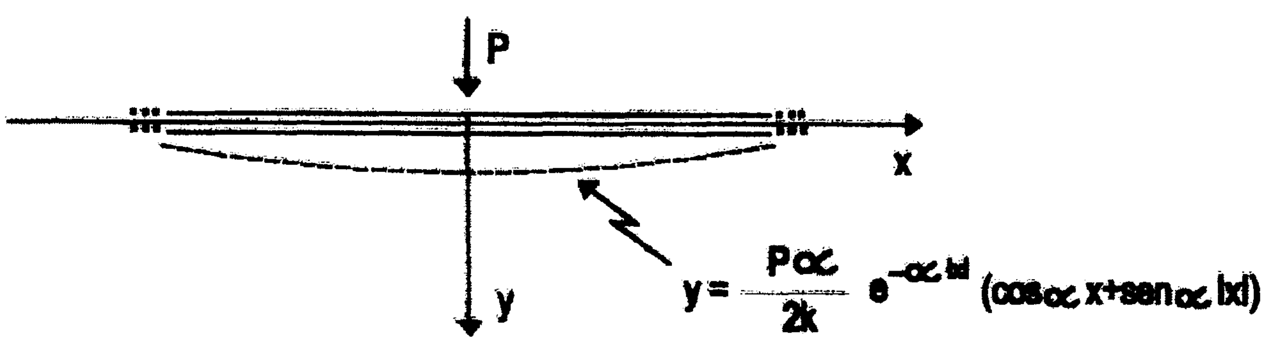

Figura 14

Solución: Para resolver este problema se encuentra primero la segunda derivada y después se aplica la expresión dada, la que, como se observa, involucra una integral impropia. Así

$$y' = \frac{P\alpha}{2k}\left[e^{-\alpha x}(-\alpha \operatorname{sen} \alpha x + \alpha \cos \alpha x) - \alpha e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \operatorname{sen} \alpha x)\right]$$

$$y'' = \frac{P\alpha^3}{k} e^{-\alpha x}(\operatorname{sen} \alpha x - \cos \alpha x)$$

$$W = \frac{P^2\alpha^6 Ec}{k^2}\int_0^{\infty} e^{-2\alpha x}(\operatorname{sen} \alpha x - \cos \alpha x)^2\,dx = \frac{P^2\alpha^6 Ec}{k^2}\int_0^{\infty} e^{-2\alpha x}(1 - \operatorname{sen} 2\alpha x)dx$$

$$W = \frac{P^2\alpha^6 Ec}{k^2}\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}(e^{-2\alpha x} - e^{-2\alpha x}\operatorname{sen} 2\alpha x)\,dx$$

El primer sumando de la integral indefinida es de resolución inmediata y en el segundo se aplica la integración "por partes", con lo que se llega a:

$$W = \frac{P^2\alpha^6 Ec}{k^2}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2\alpha e^{2\alpha x}} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha x}{4\alpha e^{2\alpha x}} + \frac{\cos 2\alpha x}{4\alpha e^{2\alpha x}}\right]_0^N = \frac{P^2\alpha^5 Ec}{4k^2}$$

y, dado el resultado, la integral impropia es convergente.

INTEGRALES IMPROPIAS EN INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

El concepto de integral impropia se puede aplicar a las integrales múltiples, sean éstas dobles o triples, que son las que tienen aplicaciones en ingeniería. Aquí se tratará solamente el caso de integrales dobles impropias. Se trata de integrales donde puede ocurrir que uno o todos los límites de integración sean infinitos o bien, que la función integrando se haga infinito para uno o más valores de los intervalos de las variables. Para estas integrales también se tiene que, si al aplicar los límites correspondientes, éstos existen, se dice que la integral doble impropia es convergente y si no existen, se dice que es divergente. Para ilustrar esto, considérense los siguientes ejemplos:

***EJEMPLO 23**. Evaluar la doble integral impropia*

$$\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\frac{y}{(1+y^2)^2}\,dy\,dx$$

Solución. Se procede como en el Cálculo con una variable y de acuerdo con la teoría de resolución de integrales dobles, y

$$\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\frac{y}{(1+y^2)^2}dydx = \int_0^{\infty}\lim_{N\to\infty}\int_x^{N}\frac{y}{(1+y^2)^2}dydx = \int_0^{\infty}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2(1+y^2)}\right]_x^{N}dx$$

$$= \int_0^{\infty}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2(1+N^2)}+\frac{1}{2(1+x^2)}\right]dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{2(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[angtanx\right]_0^N = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[angtanN - angtan\ 0\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

y se dice que la integral doble impropia es convergente.

EJEMPLO 24. *Calcular el volumen del sólido en el primer octante, que está limitado por los planos coordenados y por la superficie de ecuación*

$$z = \frac{1}{(2+4x+6y)^4}$$

Solución. La región en este caso es infinta y está dada por

$$R = \{(x,y) \mid 0 \le x < \infty \quad y \quad 0 \le y < \infty;\ x, y \in \Re\}$$

y la doble integral impropia, así como su solución, están dadas por:

$$V = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+4x+6y)^4}dydx = \int_0^{\infty}\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}\frac{1}{(2+4x+6y)^4}dydx$$

$$= \int_0^{\infty}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{18(2+4x+6y)^3}\right]_0^{N}dx = \int_0^{\infty}\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{18(2+4x+6N)^3}+\frac{1}{18(2+4x)^3}\right]dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{18(2+4x)^3}dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^{N}\frac{1}{18(2+4x)^3}dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{144(2+4x)^2}\right]_0^{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{144(2+4N)^2}+\frac{1}{144(2)^2}\right] = \frac{1}{144(2)^2} = \frac{1}{576}$$

que es el valor del volumen pedido y la integral doble impropia es convergente.

BIBLIOGRAFÍA

BOYCE DI PRIMA
CÁLCULO
CECSA
PRIMERA EDICIÓN, 1994

EDWARDS Y PENNEY
CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
PRENTICE HALL
SEGUNDA EDICIÓN, 1987

LARSON, HOSTETLER, EDWARDS
CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY
D.C. HEATH AND COMPANY
FIFTH EDITION, 1994

LEITHOLD
THE CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY
HARPER AND ROW PUBLISHERS
FOURTH EDITION, 1981

MIZRAHI AND SULLIVAN
CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY
WADSWORTH PUBLISHING COMPANY
1982

PINZÓN ALVARO
CÁLCULO I Y II
HARLA
1977

SHERMAN K. STEIN
CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
MC GRAW HILL
TERCERA EDICIÓN, 1982

STEWART JAMES
CÁLCULO
THOMSON EDITORES
TERCERA EDICIÓN, 1998

SWOKOWSKI, OLINICK, PENCE
CALCULUS
PWS PUBLISHING COMPANY. BOSTON
SIXTH EDITION, 1994

THOMAS / FINNEY
CÁLCULO, UNA VARIABLE
ADDISON-WESLEY-LONGMAN
NOVENA EDICIÓN, 1998

ZILL DENNIS G.
CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA
GRUPO EDITORIAL IBEROAMÉRICA
1987

Esta obra se terminó de imprimir
en agosto de 2008
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 150 ejemplares impresos en offset
con papel bond de 75 gramos, de 28 × 21.5 cm.

Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería