

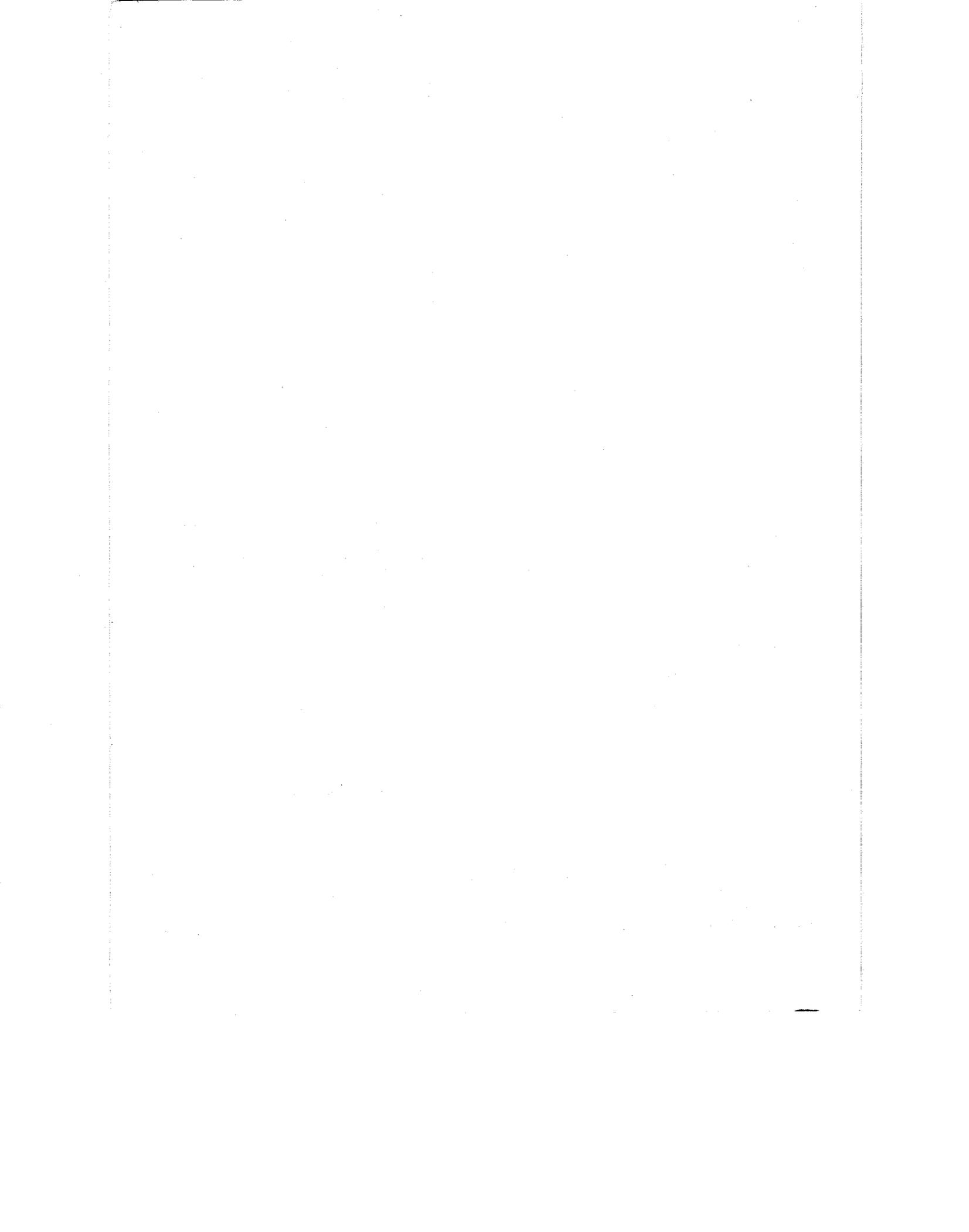
MECANICA 1

**FACULTAD DE INGENIERIA
UNAM**

IMPOS editores , S. A.

México

1982



Los profesores de la Facultad de Ingeniería que colaboraron en la elaboración de esta obra son:

Eliseo Cortés Salcedo
Abel Flores Ramírez
Angel Flores Rodríguez
Francisco Guerrero Lutteroth
Federico Liebig Frausto
Enrique Sanjurjo Borregón
Francisco Solares Alemán
Marco Antonio Tapia Lizárraga
Miguel Zurita Esquivel

La edición estuvo a cargo de:

IMPOS editores, S. A.
Insurgentes Sur No. 586-402
México 12, D. F.

Todos los derechos reservados:

© 1979, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

Ciudad Universitaria, D. F.

Primera edición, 1979
Segunda edición, 1980
Tercera edición, 1982

Impreso en México

PROLOGO A LA TERCERA EDICION

Debido a la aceptación que han tenido estos apuntes - por parte de profesores y alumnos surgió la necesidad de esta -- tercera edición en la cual, además de contener algunas correcciones adicionales a las realizadas en la segunda, se ha efectuado el cambio al Sistema Internacional de Unidades, con apego a la - Norma Oficial Mexicana aprobada por la Secretaría de Patrimonio y Fomento Industrial.

El contenido de estos apuntes es el mismo de las dos ediciones anteriores, y aún cuando no cubre en su totalidad los programas vigentes de las asignaturas que se imparten en el Departamento de Mecánica, sigue siendo un importante elemento de - apoyo didáctico para estos cursos.

Se agradece la colaboración de los profesores y alumnos que, con sus valiosas observaciones, hicieron posibles las - correcciones de esta tercera edición, permitiendo continuar el -- proceso de depuración de este material.

Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Departamento de Mecánica,
Junio de 1982.

PROLOGO A LA SEGUNDA EDICION

Desde su primera edición en 1979 hasta la fecha, los apuntes de Mecánica I constituyen un valioso material de apoyo didáctico, tanto para el profesorado que imparte las cátedras de Mecánica, como para los alumnos que requieren de textos que coincidan con el contenido de los programas de las materias correspondientes.

Este material lo elaboró un selecto grupo de profesores del Departamento de Mecánica, con apego al contenido y al orden del programa vigente en esa época. Debido a la reciente reestructuración académica de la Facultad de Ingeniería fueron ajustados los programas de las materias, por lo cual los apuntes ya no coinciden en su totalidad con el curso de Mecánica I, pero aún son de gran utilidad para los cuatro cursos que se imparten en este Departamento.

Como la primera edición se agotó, se hizo necesaria esta segunda impresión, en la cual se ha respetado todo el contenido original y sólo se le corrigieron los errores numéricos o de concepto detectados oportunamente por los profesores del propio Departamento, a quienes agradecemos sus indicaciones. Asimismo damos las gracias a los profesores que elaboraron la versión original que tan valioso servicio ha prestado a la enseñanza de la Mecánica en nuestra institución.

Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Departamento de Mecánica
Octubre de 1980.

Contenido

CAPITULO	1	FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CLASICA	
		Objetivos específicos de aprendizaje	1
		Introducción	7
	1.1	Contenido y postulados fundamentales de la Mecánica Clásica	9
	1.1.1	La Estática, la Cinemática y la Dinámica	9
	1.1.2	Modelos de cuerpo: punto masa, cuerpo rígido y cuerpo deformable	12
	1.1.3	Cantidades escalares y vectoriales: longitud, masa, tiempo y fuerza	13
	1.1.4	Leyes de Newton para el movimiento	15
	1.1.5	Sistemas de medida usuales	21
	1.2	Efectos externos en los cuerpos y las fuerzas que actúan en ellos	30
	1.2.1	Aceleraciones	30
	1.2.2	Aceleración nula	31
	1.2.3	Sistemas de fuerzas activas y reactivas	31
	1.2.4	Fuerzas a distancia y fuerzas por contacto	31

1.2.5	Fuerzas distribuidas discreta y continuamente	32
1.2.6	Fuerzas Externas e internas	33
1.2.7	Fricción en seco. Leyes de Coulomb Morin	36
1.3	Diagramas de cuerpo libre	44
1.3.1	Concepto de diagrama de cuerpo libre	44
1.3.2	Elementos de sujeción de la partícula	47
1.3.3	Fijación del cuerpo al sistema tierra	54

CAPITULO 2 TEORIA DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

	Objetivos específicos de aprendizaje	57
	Introducción	63
2.1	Postulados y teoremas básicos	65
2.1.1	Postulado de Stevinus o regla generalizada del paralelogramo	65
2.1.2	Principio de equilibrio	67
2.1.3	Teorema del deslizamiento	69
2.1.4	Composición y resolución de fuerzas	73
2.2	Momentos de una fuerza	81
2.2.1	Momento de una fuerza respecto a un punto	81
2.2.2	Cambio del centro de momentos	83

2.2.3	Condición necesaria y suficiente para que el momento de una fuerza con respecto a un punto sea nulo	85
2.2.4	Coordenadas vectoriales o plückerianas de una fuerza	88
2.2.5	Momento de una fuerza con respecto a un eje	91
2.2.6	Condición necesaria y suficiente para que el momento de una fuerza con respecto a un eje sea nulo	96
2.2.7	Caso trivial de momento de una fuerza con respecto a un eje	97
2.3	Sistemas de fuerzas	99
2.3.1	Coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas: resultante general y momento del sistema	99
2.3.2	Sistemas de fuerzas equivalentes	110
2.3.3	Condición necesaria y suficiente de equivalencia entre sistemas de fuerzas	110
2.3.4	Sistemas de fuerzas irreductibles	113
2.4	Reducción de los sistemas de fuerzas	123
2.4.1	Concepto de sistema resultante	123
2.4.2	Casos de reducción y sus condiciones necesarias y suficientes determinantes	125
2.4.3	Teorema de los momentos o de Varignon	134
2.4.4	Reducción canónica y eje central	138
2.4.5	Equilibrio. Isostaticidad e Hiperestaticidad	143

CAPITULO 3 CINEMATICA DE LA PARTICULA

	Objetivos específicos de aprendizaje	161
	Introducción	165
3.1	Movimiento del punto material	167
3.1.1	Posición, trayectoria, desplazamiento lineal, velocidad y aceleración del punto y Jerk	167
3.2	Movimiento de una recta	179
3.2.1	Desplazamiento angular	179
3.2.2	Velocidad y aceleración angulares	182
3.3	Casos particulares del movimiento del punto	186
3.3.1	Movimientos según trayectorias tridimensionales en coordenadas cartesianas	186
3.3.2	Movimientos según trayectorias bidimensionales (movimientos planos) en coordenadas cartesianas	192
3.3.3	Movimientos rectilíneos	201
3.4	Movimiento relativo	215
3.4.1	Posición, velocidad y aceleración absolutas	216
3.4.2	Posición, velocidad y aceleración relativas	217
3.4.3	Velocidad y aceleración de arrastre	219

CAPITULO 4 CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO

	Objetivos específicos de aprendizaje	227
	Introducción	229
4.1	Tipos de movimiento del cuerpo rígido	230
4.1.1	El movimiento del cuerpo rígido	230
4.1.2	Traslaciones plana y no plana, rectilínea y curvilínea	231
4.1.3	Rotaciones en torno de un eje y al rededor de un punto	232
4.1.4	Movimiento plano general	234
4.2	Ecuaciones para los movimientos planos del cuerpo rígido	236
4.2.1	Traslaciones rectilínea y curvilínea	237
4.2.2	Rotaciones concéntrica y excéntrica	238
4.2.3	Movimiento plano general	241
4.2.4	Centro instantáneo de rotación	243
4.2.5	Mecanismos de cuatro articulaciones	250

1

FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CLASICA

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE APRENDIZAJE

El alumno:

1. *Definirá la Mecánica.*
2. *Atendiendo a las características de la masa, de la velocidad - y de las dimensiones de los cuerpos, mencionará las diferen- - tes teorías de la Mecánica.*
3. *Definirá la Mecánica Clásica.*

4. Mencionará los estados de la materia en los que se aplica la teoría de la Mecánica Clásica.
5. Atendiendo a las causas y a los efectos que se observan en el fenómeno del movimiento, definirá cada una de las partes en que se divide la Mecánica Clásica de los cuerpos rígidos.
6. Emitirá ejemplos de fenómenos de cada una de las ramas de la Mecánica Clásica de los cuerpos rígidos.
7. Dado cualquier problema de movimiento, distinguirá la rama a la que pertenece.
8. Explicará el concepto de modelo.
9. Definirá los modelos de cuerpos sólidos utilizados en la Mecánica Clásica de los cuerpos rígidos.
10. Dado un problema de Mecánica Clásica de los sólidos rígidos, distinguirá el modelo de cuerpo a utilizar para su solución.
11. Formulará ejemplos donde se apliquen los modelos de punto masa y de cuerpo rígido.
12. Definirá las cantidades escalares y las vectoriales.
13. Enunciará los diferentes tipos de vectores que se emplean en la Mecánica Clásica.
14. Formulará ejemplos de las cantidades escalares y de las vectoriales.
15. Enunciará las tres Leyes de Newton que se refieren al movimiento.

16. Explicará en qué consiste el estado de reposo y el estado de movimiento rectilíneo uniforme, como casos particulares del movimiento.
17. Deducirá, a partir del enunciado de la Segunda Ley de Newton, la expresión matemática de ésta.
18. Demostrará, a partir de los supuestos de la Mecánica Newtoniana, la validez de considerar invariable la masa para el desarrollo de aquella.
19. Calculará, a partir de la expresión matemática de la Segunda Ley de Newton, cualquiera de los conceptos involucrados en ella.
20. Enunciará la Ley de la Gravitación Universal.
21. Planteará la expresión matemática de la Ley de la Gravitación Universal.
22. Calculará la fuerza de atracción que se genera entre dos partículas masa.
23. Definirá el peso de un cuerpo.
24. Deducirá, por asociación de los conceptos de la Segunda Ley de Newton y de la Ley de la Gravitación Universal, la aceleración de la gravedad terrestre.
25. Definirá la aceleración gravitatoria estándar.
26. Distinguirá la diferencia entre el peso absoluto y los pesos relativos de un cuerpo.
27. Calculará el peso de un cuerpo para cualquier localización en un campo gravitacional.

28. Definirá el concepto de unidad.
29. Definirá qué es unidad fundamental y qué es unidad derivada.
30. Definirá qué es un sistema de medida.
31. Dada la Segunda Ley de Newton, distinguirá la disyuntiva de tres patrones básicos dentro del conjunto de cuatro que ésta involucra.
32. Definirá los sistemas de medida más usuales, atendiendo a los conceptos que dan lugar a sus unidades fundamentales.
33. Determinará las variantes para cada uno de los sistemas de medida más comunes.
34. Explicará el concepto de expresión dimensional.
35. Definirá las unidades fundamentales para cada variante de los sistemas de medida.
36. Obtendrá, a partir de las unidades fundamentales correspondientes, cualquier unidad derivada.
37. Indicará el sistema de unidades al que pertenece una unidad cualquiera.
38. Establecerá la equivalencia, entre las unidades fundamentales de la misma especie, de los sistemas decimales y de los ingleses.
39. Transformará cualquier tipo de unidad de un sistema a otro.
40. Definirá el concepto de aceleración.
41. Explicará el significado de aceleración nula.

42. Definirá todos los tipos de fuerzas.
43. Ejemplificará cada tipo de fuerza.
44. Dado un fenómeno físico, distinguirá los distintos tipos de - fuerzas involucradas en él.
45. Describirá el fenómeno de la fricción.
46. Ejemplificará los casos en que la fricción sea favorable, y - aquellos en que no lo sea.
47. Enunciará los distintos tipos de fricción.
48. Mencionará las Leyes de Coulomb-Morin para fricción en seco.
49. Definirá la fuerza de fricción límite.
50. Definirá el coeficiente de fricción estático y el coeficiente de fricción cinético.
51. Definirá el ángulo de fricción y el ángulo de reposo.
52. Definirá el concepto de elemento de sujeción.
53. Conocidas las Leyes de Newton, definirá los sistemas de refe_{re}ncia en que son válidas.
54. Ejemplificará los distintos elementos de sujeción.
55. Definirá el concepto de apoyo.
56. Enumerará los tipos de apoyo más comunes.
57. Representará gráficamente los diferentes tipos de apoyo.

58. *Indicará las restricciones al movimiento que involucran los - distintos tipos de apoyo.*
59. *Definirá el concepto de diagrama de cuerpo libre.*
60. *Dibujará el diagrama de cuerpo libre de cualquier cuerpo.*

INTRODUCCION

Al igual que otras teorías científicas, la *Mecánica*, a través de un sistema de leyes relacionadas, permite explicar un campo específico del conocimiento. Esto presupone la existencia de un objeto de estudio, así como de una forma de abordarlo.

El campo del conocimiento que estudia la *Mecánica* es el estado de movimiento de los cuerpos sujetos a la acción de sistemas de fuerzas. Para lograr los propósitos de la teoría en dicho campo del conocimiento, se determinan leyes que establecen -- las relaciones causales que rigen los fenómenos observados en la naturaleza y que constituirían el objeto de estudio.

De esta forma, los objetos de estudio de la *Mecánica--Clásica* serían los cuerpos de dimensiones mucho mayores a la del átomo y que no posean velocidades cercanas a la de la luz, porque estas características son del ámbito de estudio de la *Mecánica -- Cuántica* y de la *Mecánica Relativista* respectivamente.

Por otra parte, mediante postulados teóricos y leyes--empíricas que fungen como premisas, se relacionan las leyes que se aplican en la Mecánica Clásica, con el fin de estructurar sus explicaciones y, a través de un sistema lógico-deductivo, se obtienen teoremas y explicaciones de los fenómenos mismos.

Los postulados teóricos, que concretamente son las *leyes de Newton*, constituyen una concepción del fenómeno tratado; - al verse el fenómeno a este nivel, los términos que se incluyen - no son explicados por ellos mismos, por lo que es necesario definir los conceptos que se involucran en las leyes para precisar su significado.

Por su parte, las leyes empíricas (como la de la fricción), vinculadas de manera lógica con las anteriores, se obtienen por generalización inductiva y permiten, conjuntamente con -- los postulados, explicar fenómenos que no incluyen dichos postulados.

Asimismo, las leyes de Newton inducen, por su mismo carácter formal, un sistema matemático que posibilita la obtención de los teoremas.

1.1. CONTENIDO Y POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA MECANICA CLASICA

La teoría que se expone en este curso es la de la Mecánica Clásica, misma que se fundamenta en las leyes de Newton para el movimiento. Esta teoría permite analizar, con resultados aceptables, todos los problemas que normalmente se tratan en Ingeniería.

Ahora bien, dado que el campo de conocimiento al que se aboca la Mecánica Clásica es muy extenso, conviene abordar el estudio de esta disciplina dividiéndolo según las abstracciones que puedan hacerse de los cuerpos que se analizan en ella. Así, tomando en consideración, por una parte, que el estado de la materia puede ser sólido, líquido o gaseoso y, por otra, que a los cuerpos — y particularmente a los sólidos — se les puede considerar como rígidos o como deformables, es posible dividir a la Mecánica Clásica en *Mecánica de sólidos rígidos*, *Mecánica de cuerpos deformables* y *Mecánica de fluidos*. Esta división se esquematiza en el diagrama 1.1 -1.

Por otra parte, atendiendo a las relaciones causa -- efecto que determinan el estado de movimiento de los cuerpos, en la Mecánica Clásica pueden identificarse las siguientes ramas:

1.1.1. LA ESTÁTICA, LA CINEMÁTICA Y LA DINÁMICA

Estática.— Trata del estudio de los cuerpos que se encuentran bajo la acción de las fuerzas, pero que permanecen en equilibrio.

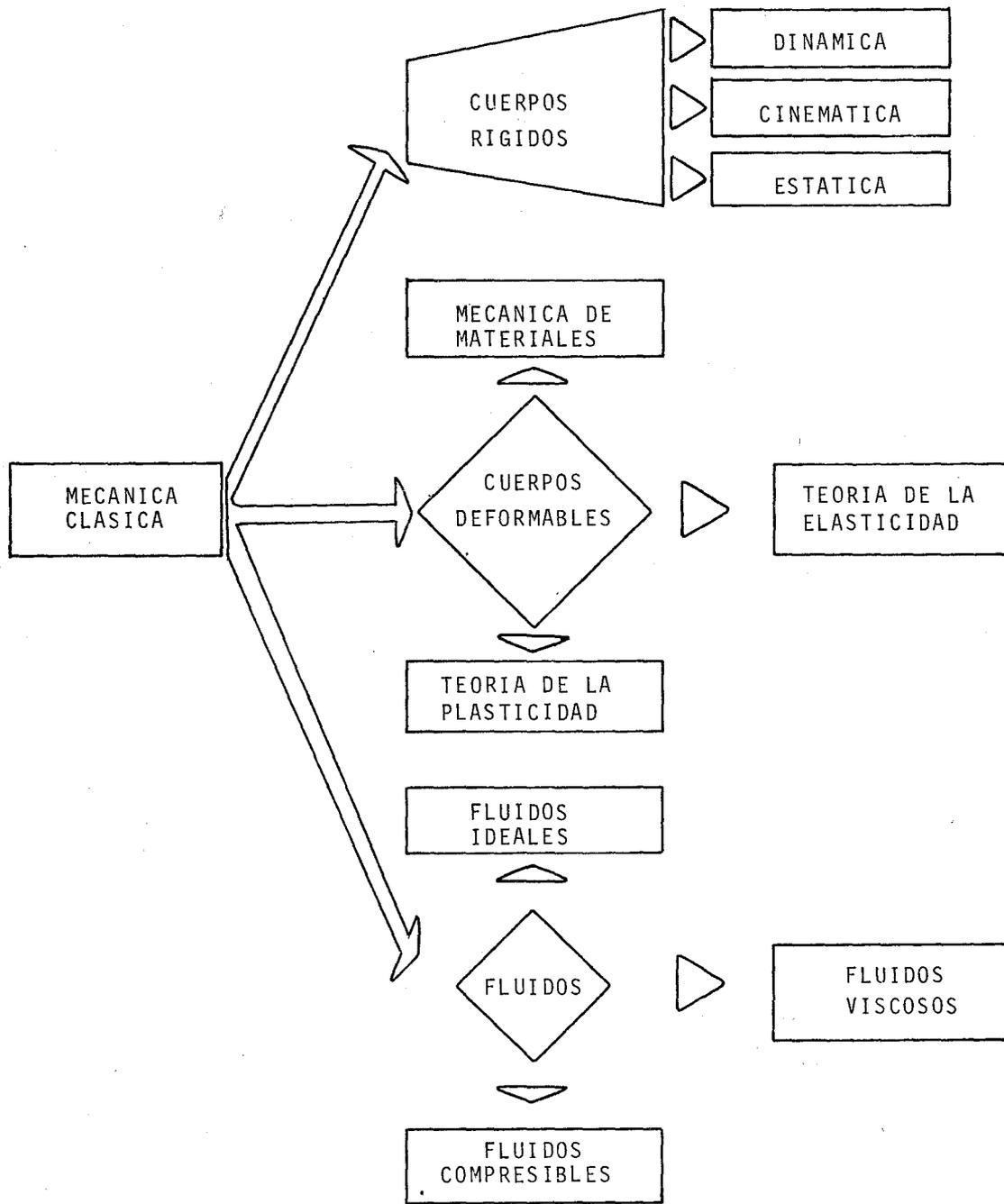


Diagrama 1.1-1.

Cinemática.- Estudia la geometría del movimiento, independientemente de las causas que lo producen.

Dinámica o Cinética.- Analiza el movimiento de los cuerpos, así como las fuerzas que lo producen.

Ejemplo: Clasifíquense, de acuerdo con la finalidad de cada una de las ramas de la Mecánica Clásica, la naturaleza de los siguientes problemas, estableciendo, así mismo, las razones correspondientes que lo justifican:

- i) Se intenta conocer la trayectoria de una nave espacial que habrá de alunizar.
- ii) Se requiere definir la potencia necesaria en los motores de un buque, para moverlo con cierta velocidad.
- iii) Se busca determinar las tensiones en los cables que sostienen un semáforo, destinado al control del tránsito en un cruce ro.

Solución:

- i) El problema es cinemático, ya que para resolverlo sólo se requiere describir el lugar geométrico de las posiciones de la nave, a condición de que alunice.
- ii) Este tema pertenece al campo de la Dinámica. En efecto, el enunciado del problema establece el análisis de los factores determinantes de cierta velocidad de la embarcación.

iii) El problema es de Estática, en virtud de la finalidad del semáforo — que implica necesariamente su estado de reposo — y del análisis de las tensiones en los cables que así lo mantienen.

1.1.2. MODELOS DE CUERPOS: PUNTO MASA, CUERPO RIGIDO-Y CUERPO DEFORMABLE

Para la aplicación de cualquier teoría, se requieren -- modelos que faciliten o simplifiquen la interpretación del comportamiento de un fenómeno, un sistema o una estructura; es decir, - que reflejen de algún modo su comportamiento. Así, con los modelos es posible comprender aquello que la teoría intenta explicar.

Ahora bien, los cuerpos reales están formados por un -- sistema discreto de partículas aparentemente unidas entre sí, pero en los que existe una gran cantidad de vacíos; sin embargo, es necesario adoptar ciertas simplificaciones que nos conduzcan a la obtención de modelos que nos permitan comprender y analizar los - conceptos que estudia la Mecánica.

Por ejemplo, una primera idealización consiste en suponer al cuerpo como un medio continuo y deformable. En una simplificación posterior puede considerársele como cuerpo rígido y, en otra etapa de abstracción, puede llegarse al concepto de partícula masa.

a).- *El cuerpo rígido.* Es un medio continuo que no --- acepta deformaciones, es decir, todas sus partículas se conservan a la misma distancia entre sí bajo cualquier condición. Si no se cumple esta característica, el cuerpo será deformable. (En realidad todos los cuerpos son deformables, de manera que el cuerpo rígido es sólo una idealiza--

ción de éstos).

b).- *Punto-masa o partícula material.* Es la representación de un cuerpo por medio de un punto al que se le asocia masa.

Las idealizaciones del cuerpo que se emplearán en este curso son la de punto-masa y la de cuerpo rígido. La primera cuando las dimensiones del cuerpo sean irrelevantes.

La idealización de cuerpo rígido se adopta si a tal cuerpo no puede considerársele como un punto, esto es, cuando sus dimensiones intervienen en el planteamiento que se analiza.

1.1.3. CANTIDADES ESCALARES Y VECTORIALES: LONGITUD, MASA, TIEMPO Y FUERZA

Para establecer la relación entre las acciones y los efectos que se producen en un cuerpo, es necesario precisar el significado y definir una medida cuantitativa de los conceptos básicos empleados en tal relación.

En el caso que nos ocupa, esto es, el fenómeno del movimiento, los conceptos básicos son la longitud, el tiempo, la masa y la fuerza.

Longitud.- Es el concepto utilizado para definir cuantitativamente la separación entre dos puntos.

Tiempo.- Es el concepto que permite establecer la secuencia de los eventos y que, en la Mecánica Newtoniana, es considerado como una cantidad absoluta: es decir, establece la noción de *cuando ocurre*.

Masa.- Es una medida de la inercia de los cuerpos, - entendiéndose por inercia la propiedad de la materia que mide la resistencia de modificar el estado de movimiento de dichos cuerpos.

Fuerza.- Es la acción de un cuerpo sobre otro, cuya tendencia es cambiar su estado de movimiento.

Las cantidades con las que se miden los conceptos definidos anteriormente son de dos clases: *escalares* y *vectoriales*.

Cantidades escalares son aquéllas que quedan definidas completamente al indicarse su magnitud. Ejemplos de algunas cantidades escalares en *Mécanica* son el tiempo, el volumen, la densidad, el trabajo y la masa.

Por su parte, las cantidades vectoriales son las que para definirse completamente requieren, además de su magnitud, la dirección en la que actúan; a su vez, la dirección implica considerar línea de acción y sentido. Por ejemplo fuerza, velocidad, aceleración.

En este curso las cantidades vectoriales, que siempre se les representará matemáticamente por medio de una terna ordenada de números reales, se clasificarán según las características de los conceptos a los que se asocian. Así, se distinguirán los siguientes:

- i) *Vector libre*. Representa a una magnitud de la que no interesa conocer su ubicación en el espacio. Consecuentemente sólo se expresará la terna ordenada a la que se aludió.
- ii) *Vector deslizante*. Identifica magnitudes de las que se requiere precisar el lugar geométrico en que se ubican (línea de acción). A estos vectores se les asocia otra expresión matemática que define a dicho lugar geométrico.
- iii) *Vector fijo*. Simboliza cantidades que, para definirse, además de magnitud, dirección y sentido se debe indicar el punto en que se aplica. Por lo tanto, a estos vectores debe asociárseles un punto del espacio.

1.1.4. LEYES DE NEWTON PARA EL MOVIMIENTO

Las leyes en que se basa el movimiento de la partícula las estableció formalmente Newton, y son producto de la observación y experimentación. Dichas leyes se enuncian a continuación.

Primera Ley de Newton. Toda partícula permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, en tanto no se le aplique una fuerza.

Esta ley, conocida también como de la inercia, establece que un cuerpo es incapaz de modificar por sí solo el estado de movimiento en que se encuentra, ya sea de movimiento nulo o de movimiento rectilíneo uniforme; este último es aquel en que la partícula se desplaza en línea recta con velocidad constante.

Segunda Ley de Newton. Al actuar una fuerza sobre una partícula, le produce una aceleración en la dirección de la fuerza de magnitud o módulo proporcional a ésta, e inversamente proporcional a la masa de la partícula; esto es:

$$a \sim F \quad \text{y} \quad a \sim \frac{1}{m}$$

Estas relaciones conducen a la siguiente:

$$a \sim \frac{F}{m}$$

Introduciendo una constante de proporcionalidad, se establece la ecuación

$$\vec{F} = K \, m\vec{a} \quad (1.1.4-1)$$

Esta ecuación es vectorial, ya que la dirección de \vec{a} debe ser la misma que la de \vec{F} . Es una ley cuantitativa donde la constante K se iguala a la unidad introduciendo un sistema de unidades apropiado. Por lo anterior, la ecuación queda:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

En un sentido más general, la segunda ley de Newton -- sostiene que el cambio en la cantidad de movimiento experimentado por un punto masa es directamente proporcional a la fuerza que obra en él; es decir:

$$\vec{F} = K \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \quad (1.1.4-2)$$

donde $m\vec{v}$ es la cantidad de movimiento de la partícula.

Además, si en esta expresión se acepta que la masa es constante, se tiene:

$$\bar{F} = K m \frac{d}{dt} (\bar{v})$$

Pero como $\frac{d}{dt} (\bar{v}) = \bar{a}$ resulta $\bar{F} = K m \bar{a}$, tal como se indicó anteriormente.

Tercera Ley de Newton. A toda acción corresponde una reacción de igual magnitud, colineal y de sentido contrario.

Esta ley, que establece que las fuerzas se presentan siempre en parejas, es básica para la comprensión de la forma como actúan las fuerzas, cualquiera que sea su procedencia.

Ley de Gravitación Universal. Además de las tres leyes anteriores, Newton estableció la ley que gobierna la atracción mutua entre los cuerpos, y cuyo enunciado es:

Dos partículas se atraen, una hacia la otra, con una fuerza de magnitud directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambas partículas.

Su expresión matemática es:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \bar{e}_r \quad (1.1.4-3)$$

donde \bar{F} representa la fuerza de atracción mutua entre las partículas; G es la constante conocida como Constante de Gravitación Universal, con valor de

$$6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$$

m_1 , m_2 son las masas de las partículas; r es la distancia entre ambas partículas, y \bar{e}_b representa el vector unitario cuya dirección es de una hacia otra partícula, como se muestra en la Figura 1.1.4-1.

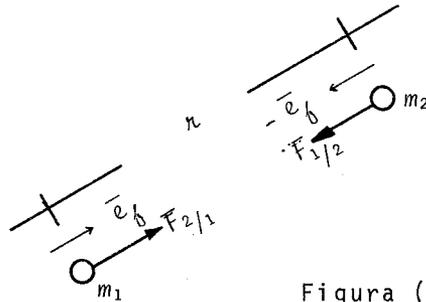


Figura (1.1.4-1)

La fuerza gravitacional existe entre cualquier pareja de cuerpos; en la superficie terrestre, la única fuerza gravitacional de significación es la debida a la atracción de la Tierra, misma que se conoce como "peso del cuerpo". Por ejemplo considérese que una esfera de, acero con diámetro de 25 cm es atraída -- por la Tierra con una fuerza de 8.18 Kg_f .

Si se tienen dos esferas en contacto, iguales a la anterior, la fuerza de atracción entre ambas es de: 0.00000000728 Kg_f . Se observa que esta fuerza es de orden despreciable si se compara con el peso de las esferas.

Debido a la variabilidad, tanto del radio de la Tierra como del efecto de la fuerza centrífuga producida por la rotación del planeta, el peso de los cuerpos se incrementa del ecuador hacia los polos; por ese motivo se define como *peso absoluto* de los cuerpos, el que registran al nivel del mar y a 45° de lati

tud norte; si el registro se realiza en otras condiciones, al peso se le define como *relativo*.

La aceleración que los cuerpos adquieren debido a su peso absoluto es conocida como aceleración estándar de la *gravedad*, la cual puede deducirse sustituyendo la expresión (1.1.4-3) en la (1.1.4-1) obteniéndose:

$$g_{\delta} = G \frac{M}{R^2} \quad (1.1.4-4)$$

donde M es la masa de la Tierra y R su radio medio.

En estas condiciones, la gravedad estándar (g_{δ}) adquiere el valor de:

$$g_{\delta} = 9.80665 \frac{m}{s^2} \doteq 9.81 \text{ m/s}^2$$

o

$$g_{\delta} = 32.1740 \frac{ft}{s^2} \doteq 32.2 \text{ ft/s}^2$$

Ahora bien, dentro de la convención adoptada, al peso absoluto de un cuerpo de masa m se le expresará como:

$$w_a = m g_{\delta} .$$

mientras que a su peso relativo le corresponderá la expresión:

$$w = m g$$

donde g es la aceleración relativa.

De estas dos expresiones se obtiene la siguiente:

$$m = \frac{w_a}{g_\delta} = \frac{w}{g}$$

la cual presupone la invariancia de la masa del cuerpo, en tanto ocurre un cambio en la magnitud del peso del mismo.

Ahora bien, si el cuerpo no se encuentra en la superficie, sino en un punto situado a una altura H , con una deducción idéntica se llega a la expresión que permite calcular la aceleración en ese punto. Tal expresión es:

$$a = \frac{GM}{(R + H)^2} \quad (1.1.4-5)$$

Si de la expresión (1.1.4-4) despejamos G y la sustituimos en la anterior, obtenemos:

$$a = \left(\frac{R}{R + H} \right)^2 g_\delta \quad (1.1.4-6)$$

Ejemplo: Dado que el radio promedio de la tierra es $R = 6371 \text{ km}$, obtenga la aceleración con que es atraído hacia el centro de la Tierra un cuerpo que se encuentra a 3185.5 km de altura sobre la superficie terrestre.

Solución:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{R}{R + H} \right)^2 g_\delta = \left(\frac{6371}{6371 + 3185.5} \right)^2 g = \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^2 g_\delta = \frac{4}{9} g_\delta = a = 4.36 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcule el peso del cuerpo citado en el ejemplo precedente, en aquella posición, si pesa $2 t_f$ en la superficie terrestre.

Solución:

$$W = mg_{\delta}; m = \frac{W}{g_{\delta}} = \frac{2 t_f}{g_{\delta}}$$

$$W_h = ma = m \cdot \left(\frac{4}{9} g_{\delta}\right) = \frac{2 t_f}{g_{\delta}} \times \frac{4}{9} g_{\delta} = \frac{8 t_f}{9}$$

$$W_h = 0.88889 t_f = 888.89 kg_f$$

1.1.5 SISTEMAS DE MEDIDA USUALES

Para que las cantidades de la misma especie se distingan entre sí, es necesario medirlas; esto requiere definir previamente el patrón que servirá de base y que se denominará *unidad*, - la cual es una medida de magnitud aceptada convencionalmente, -- misma que, por comparación, sirve para conocer el tamaño de otras magnitudes de la misma especie.

Existen dos tipos de unidades: las *fundamentales*, que se definen arbitrariamente, y las *derivadas*, que se obtienen a partir de las primeras mediante la aplicación de relaciones matemáticas preestablecidas.

Los conceptos básicos de la Mecánica se representan - por tres dimensiones primarias: *Longitud L*, *Tiempo T* y *Masa M* o *Fuerza F*, cada una de las cuales se encuentra asociada a su unidad. El conjunto formado por tres unidades básicas, *L, T, M*, o bien *L, T, F*, y por las unidades que de éstas se derivan, constituyen un sistema de unidades.

Dado que la fuerza y la masa no son unidades independientes, pues la expresión matemática de la segunda Ley de Newton ($\bar{F}=m \bar{a}$) establece una relación precisa entre ellas, resultan dos conjuntos de unidades fundamentales: los *gravitacionales*, que se basan en las unidades de longitud, tiempo y fuerza (ya que ésta se mide en términos de atracción gravitacional), y los *absolutos*, que en lugar de fuerza emplean la masa, que es una unidad cuyo valor es constante sea cual sea su posición en el espacio.

Los sistemas gravitacionales comúnmente empleados son el MKS o *métrico* y el FPS o *inglés*; por lo que se refiere a los sistemas absolutos, el más usado y recomendado internacionalmente es el MKS, aunque existe también el sistema CGS, que puede considerarse como un subsistema del MKS.

Conviene aclarar que las iniciales con que se designan los sistemas corresponden a las unidades fundamentales que de terminan al mismo.

Las unidades derivadas se indican en función de las unidades fundamentales de cada sistema, y también pueden enunciar se por medio de sus correspondientes expresiones dimensionales; así, partiendo de los símbolos dimensionales de la fórmula $F=m a$ (expresión escalar), con la masa en los sistemas gravitacionales queda representada por:

$$M = F L^{-1} T^2$$

Esta expresión indica que la unidad de masa es la de un cuerpo tal que al aplicársele una fuerza unitaria le produce una aceleración unitaria.

En función de la misma fórmula se deduce la expresión dimensional de la fuerza para los sistemas absolutos:

$$F = L M T^{-2}$$

misma que expresa que la unidad de fuerza es aquella que, aplicada a la unidad de masa, le produce una aceleración unitaria.

A manera de resumen de los principales sistemas de medida, se ha formado la Tabla No. 1, indicando en ella tanto las unidades fundamentales como algunas derivadas. Se han anotado -- también las expresiones dimensionales de cada unidad.

El sistema MKS absoluto es la base del llamado "Sistema Internacional de Unidades", conocido como SI, que se formó con siete unidades fundamentales y dos complementarias, las cuales se definen a continuación:

- El *metro* es la longitud igual a 1,650,763.73 longitudes de onda, en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de Kriptón-86 (11a CGPM 1960).
- El *kilogramo* es la masa del prototipo internacional del kilogramo (1a y 3a CGPM 1889 y 1901).
- El *segundo* es la duración de 9,192,631,770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio-133 (13a CGPM 1967).
- El *ampere* es la intensidad de una corriente constante que, mantenida en dos conductores (paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable, colocados a un metro de distancia entre sí, en el vacío), produciría entre ellos una fuerza igual a 2×10^{-7} Newton por metro de longitud (9a CGPM 1948).
- El *Kelvin* es la fracción $1/273.16$ de la temperatura-

SISTEMAS DE UNIDADES		UNIDADES FUNDAMENTALES			UNIDADES DERIVADAS						
Absolutos (Prácticos)	Unidades	Longitud	Masa	Segundo	Fuerza	Momento	Trabajo	Potencia	Velocidad	Acelerac.	
	Dimensiones	$L M^{\circ} T^{\circ}$	$L^{\circ} M T^{\circ}$	$L^{\circ} M^{\circ} T$	$L M T^{-2}$	$L^2 M T^{-2}$	$L^2 M T^{-2}$	$L^2 M T^{-3}$	$L M^{\circ} T^{-1}$	$L M^{\circ} T^{-2}$	
	Decimales	M K S	Metro m	Kilogramo masa kg	Segundo s	Newton $\frac{kg \cdot m}{s^2}$	Newton.m $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	Joule (Newton.m) $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	Watt (Joule/s) $\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$
		c g s	Centímetro cm	Gramo masa g	Segundo s	Dina $\frac{g_m \cdot cm}{s^2}$	Dina.cm $\frac{g \cdot cm^2}{s^2}$	Erg (Dina · cm) $\frac{g \cdot cm^2}{s^2}$	Erg/s $\frac{g \cdot cm^2}{s^3}$	$\frac{cm}{s}$	$\frac{cm}{s^2}$
	INGLES	F P S	Pie ft	Libra masa lb	Segundo s	Poundal $\frac{lb \cdot ft}{s^2}$	Poundal.pie $\frac{lb \cdot ft^2}{s^2}$	Poundal.pie $\frac{lb \cdot ft^2}{s^2}$	Poundal.pie/s $\frac{lb \cdot ft^2}{s^2}$	$\frac{ft}{s}$	$\frac{ft}{s^2}$
	Gravitacionales (Técnicos)	Unidades	Longitud	Fuerza	Tiempo	Masa	Momento	Trabajo	Potencia	Velocidad	Acelerac.
Dimensiones		$L F^{\circ} T^{\circ}$	$L^{\circ} F T^{\circ}$	$L^{\circ} F^{\circ} T$	$L^{-1} F T^2$	$L F T^{\circ}$	$L F T^{\circ}$	$L F T^{-1}$	$L F^{\circ} T^{-1}$	$L F^{\circ} T^{-2}$	
Decimales		M K S	Metro m	Kilogramo kg_f	Segundo s	Geokilo (U.T.M) $\frac{kg_f \cdot s^2}{m}$	$kg_f \cdot m$	Kilográmetro $kg_f \cdot m$	Kilográmetro/s $\frac{kg_f \cdot m}{s}$	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$
		c g s	Centímetro cm	Gramo g_f	Segundo s	Geogramo $\frac{g_f \cdot s^2}{cm}$	$g_f \cdot cm$	$g_f \cdot cm$	$\frac{g_f \cdot cm}{s}$	$\frac{cm}{s}$	$\frac{cm}{s^2}$
INGLES	F P S	Pie ft	Libra lb_f	Segundo s	Geolibra (Slug) $\frac{lb_f \cdot s^2}{ft}$	$lb_f \cdot ft$	$lb_f \cdot ft$	$\frac{lb_f \cdot ft}{s}$	$\frac{ft}{s}$	$\frac{ft}{s^2}$	

TABLA No. 1

termodinámica del punto triple del agua (13a CGPM -- 1967).

- La *candela* es la intensidad luminosa, en dirección perpendicular, de una superficie de 1/600.000 metro-cuadrado de un cuerpo negro, a la temperatura de congelación del platino bajo una presión de 101 325 Newton por metro cuadrado (13a CGPM 1967).

- El *mol* es la cantidad de substancia de un sistema -- que contiene tantas unidades elementales como átomos de carbono se encuentren en 0.012 Kg de carbono - 12. (14a CGPM-1971).

- El *radíán* es el ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta la circunferencia de este círculo un arco igual a la longitud del radio (11a CGPM 1960, ISO R-31-1).

- El *esterradián* es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, corta sobre la superficie de esta esfera un área igual a la de un cuadrado que tiene por lado el radio de la esfera -- (11a CGPM 1960, ISO R-31-1).

Para los sistemas restantes, las unidades fundamentales son las siguientes:

- *Pie* es la distancia, medida a 32°F, entre dos marcas de una regla de platino e iridio que se conserva en la Torre de Londres.

- *Libra masa* es la masa de un cilindro de platino e iridio que el Gobierno Británico mantiene en Londres.

- *Centímetro* es la centésima parte del metro.

- *Gramo masa* es la milésima parte de la masa del Kg patrón, e igual a la masa de un centímetro cúbico de agua destilada, a 4°C, a una atmósfera de presión.

- *Kilogramo fuerza* es el peso absoluto del Kg_m patrón; también se define como la magnitud de la fuerza que aplicada al Kg masa le produce una aceleración de 9.80665 m/s².

Libra fuerza es la fuerza que aplicada a la libra masa le produce una aceleración de 32.1740 ft/s²; también se define como el peso absoluto de la lb patrón.

- *Gramo fuerza* es el peso absoluto del gramo masa.

Las unidades derivadas se establecen expresando al concepto en función de las unidades fundamentales; por ejemplo, para expresar las unidades de fuerza en términos de los sistemas absolutos MKS, cgs y FPS, a partir de la expresión dimensional $F = LMT^{-2}$ se tiene:

Sistemas MKS: $Newton = kg \cdot m/s^2$

Sistema cgs: $dina = g \cdot cm/s^2$

y para el sistema inglés: $poundal = lb \cdot ft/s^2$, tam

bién llamado Geolibra.

Equivalencia de unidades. Conocida una cantidad, es posible expresarla en términos de las unidades de cualquier sistema, siempre y cuando sean de su misma especie; en esta forma, ambas cantidades resultarán equivalentes entre sí.

Las relaciones más usuales que permiten efectuar las equivalencias entre unidades de los sistemas métricos al de los ingleses se muestran en la Tabla No. 2, muestras que permiten establecer las equivalencias entre los sistemas MKS, absolutos y -- gravitacionales, así como entre los FPS absolutos y gravitacionales.

Ejemplo: Transformar 90 m/min a unidades del sistema cgs.

Solución:

El método que se usa es de sustitución y consiste en escribir en lugar de cada una de las unidades originales, la cantidad equivalente con las nuevas unidades; así, sabiendo que 1 m es equivalente a 100 cm, y 1 minuto es a 60 segundos, se escribirá:

$$90 \frac{m}{min} = 90 \frac{100 \text{ cm}}{60 \text{ s}} = 150 \frac{cm}{s}$$

Ejemplo: Transformar 90 m/min a ft/s.

Solución:

Empleando un procedimiento de eliminación y sabiendo que $\frac{1m}{3.281 \text{ ft}} = 1$ (equivalente física), la cantidad original se multiplicará por las equivalencias físicas unitarias

LONGITUD	TIEMPO	MASA	FUERZA
$\frac{m}{3.281 \text{ ft}}$	$\frac{h}{60 \text{ min}}$	$\frac{\text{Geokilo}}{9.81 \text{ Kg}}$	$\frac{\text{Kg}}{9.81 \text{ N}}$
$\frac{\text{in}}{2.54 \text{ cm}}$	$\frac{h}{3600 \text{ s}}$	$\frac{\text{geogramo}}{9.81 \text{ g}}$	$\frac{\text{Kg}_f}{2.205 \text{ lb}_f}$
$\frac{\text{ft}}{30.48 \text{ cm}}$	$\frac{\text{min}}{60 \text{ s}}$	$\frac{\text{slug}}{32.2 \text{ lb}}$	$\frac{\text{g}_f}{981 \text{ dyn}}$
$\frac{\text{Mi}}{5280 \text{ ft}}$		$\frac{\text{Kg}}{2.205 \text{ lb}}$	$\frac{\text{lb}_f}{453.6 \text{ g}}$
$\frac{\text{Mi}}{1609 \text{ m}}$			$\frac{\text{t}_f}{1000 \text{ Kg}_f}$

TABLA No. 2. Equivalencia de unidades

convenientes, usadas como cocientes, de modo que se eliminen las unidades originales y queden las que se buscan. Para el caso:

$$90 \frac{m}{min} = 90 \frac{m}{min} \left(\frac{3.281 ft}{m} \right) \left(\frac{min}{60 s} \right) = 4.92 ft/s$$

Ejemplo: Calcular la equivalencia entre Newton y dina.

Solución:

Recordando que Newton = Kg m/s²

y dina = g cm/s²

se tiene que: Newton = $\frac{1000 g \times 100 cm}{s^2} = 10^5 dyn$

Ejemplo: Transformar 500 Kg/cm² a lb/in²

Solución:

$$500 \frac{Kg}{cm^2} = x \frac{lb}{in^2}$$

Como:

$$1 in^2 = 2.54^2 cm^2$$

y

$$1 Kg = 2.205 lb$$

$$\text{entonces: } x = 500 \frac{2.205 lb}{cm^2} \cdot \frac{6.4516 cm^2}{lb} = 7112.89$$

$$\therefore 500 Kg/cm^2 = 7112.89 lb/in^2$$

Ejemplo: Transformar 35 m/s^2 a $\text{km/h}\cdot\text{s}$

Solución:

$$\begin{aligned} 35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\times \frac{1 \text{ Km}}{1000 \text{ m}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 35 \times 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}} \\ &= 126 \frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}} \end{aligned}$$

Ejemplo: Transformar $10 \text{ Newton}\cdot\text{m/s}$ a $\text{lb}_f\cdot\text{ft/h}$

Solución:

$$1 \text{ Kg}_f = 9.81 \text{ Newton} = 2.205 \text{ lb}_f$$

$$1 \text{ m} = 3.281 \text{ ft}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 10 \frac{\text{Newton}\cdot\text{m}}{\text{s}} &= 10 \text{ Newton} \times \frac{1 \text{ Kg}_f}{9.81 \text{ Newton}} \times \frac{2.205 \text{ lb}_f}{\text{Kg}_f} \times \text{m} \times \\ &\frac{3.281 \text{ ft}}{\text{m}} \times \frac{1}{\text{s}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 10 \times \frac{2.205 \times 3.281 \times 3600}{9.81} \frac{\text{lb}_f\cdot\text{ft}}{\text{h}} \\ &= 26,549.01 \text{ lb}_f\cdot\text{ft/h} \end{aligned}$$

1.2 EFECTOS EXTERNOS EN LOS CUERPOS Y LAS FUERZAS QUE ACTUAN EN ELLOS

1.2.1 ACELERACIONES

Cuando en un cuerpo actúa una fuerza se producen --- efectos que modifican el estado original del mismo, tanto en su -

forma (deformación), como en su estado de movimiento (aceleración). La *deformación* es un efecto interno y ocurre cuando se considera al cuerpo como no-rígido; la *aceleración* es el cambio en el estado de movimiento, y es un efecto externo que se presenta tanto en cuerpos rígidos como en cuerpos deformables.

Dado que en el presente curso sólo se consideran cuerpos rígidos, el único efecto que se analizará es la aceleración.

La aceleración es la variación que un cuerpo experimenta en su velocidad.

1.2.2. ACELERACION NULA

Si una partícula material se encuentra en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme no existe cambio en la velocidad y, por ende, la aceleración de tal partícula es nula. De esta manera, y conforme a la Segunda Ley de Newton, la resultante de las fuerzas que concurren en la partícula en cuestión es igual a cero; consecuentemente, las fuerzas se encuentran en equilibrio.

1.2.3. SISTEMAS DE FUERZAS ACTIVAS Y REACTIVAS

Las fuerzas que tienden a modificar los estados mecánicos de los cuerpos (aceleraciones y deformaciones), reciben el nombre de *fuerzas activas*. Las fuerzas que se oponen al cambio de ese estado, o a conservarlo, se denominan *reactivas*.

1.2.4. FUERZAS A DISTANCIA Y FUERZAS POR CONTACTO

Fuerzas a distancia son las acciones que se dan entre

los cuerpos cuyas superficies no están en contacto. Sobre este particular, en la Ley de la Gravitación Universal se contemplan fuerzas a distancia entre los cuerpos, por la sola presencia de éstos en el universo; un ejemplo sería el peso de los cuerpos. -- Otros ejemplos de fuerzas a distancia serían las fuerzas eléctricas y las fuerzas magnéticas.

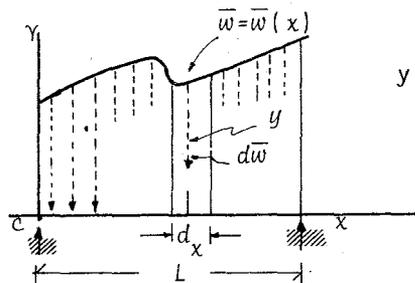
Las fuerzas por contacto se originan por las interacciones que ocurren entre los cuerpos al entrar en contacto sus superficies, tal como su nombre lo expresa.

1.2.5. FUERZAS DISTRIBUIDAS DISCRETA Y CONTINUAMENTE

En la naturaleza todas las fuerzas se encuentran distribuidas en áreas o en superficies grandes o pequeñas; sin embargo, en la práctica de la ingeniería se ha considerado conveniente adoptar la siguiente clasificación:

i) *Fuerza concentrada en un punto.* Es la que actúa en áreas de pequeña magnitud, o sea, de dimensiones mínimas en comparación con las dimensiones de un cuerpo, de tal manera que, para facilitar el cálculo, se le considera aplicada en un punto.

ii) *Fuerzas distribuidas por unidad de longitud.* En ocasiones, el enfoque de un problema obliga a considerar la acción de las fuerzas en un cuerpo como cargas distribuidas por unidad de longitud, pudiendo ser tal distribución de acuerdo a cualquier ley. Ejemplo:



$$d\bar{w} = \bar{w}(x) dx$$

$$\bar{w} = \int_{x_1=0}^{x_2=L} \bar{w}(x) dx$$

en donde $\bar{w} = \bar{w}(x)$ es la variación de la carga distribuida por unidad de longitud; \bar{W} es la fuerza total equivalente a esa distribución, e identificada por el área bajo la curva $\bar{w} = \bar{w}(x)$, aplicada en el centro de la gravedad del área.

iii) Fuerzas distribuidas por unidad de área.

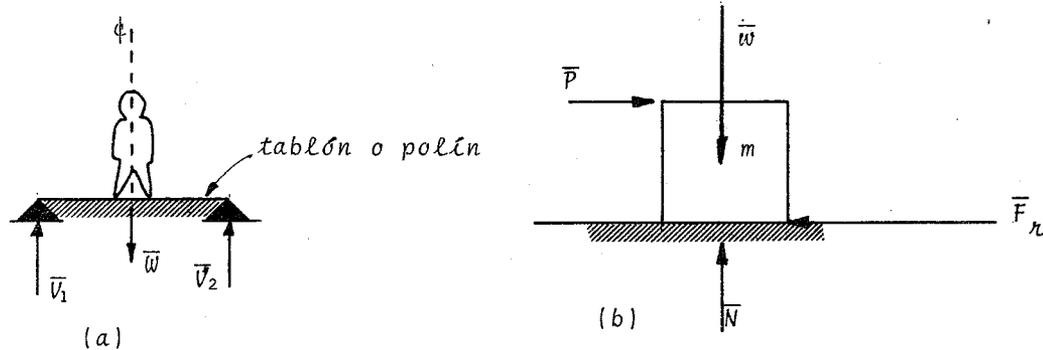
1.2.6. FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS

Las fuerzas originadas por los cuerpos que no forman parte del sistema que se esté considerando, pero que actúan en él, reciben el nombre de *fuerzas externas*.

Las interacciones entre los cuerpos que forman parte del sistema que se analiza se llaman *fuerzas internas*.

Como ejemplos de cada una de las fuerzas definidas podemos presentar los siguientes casos:

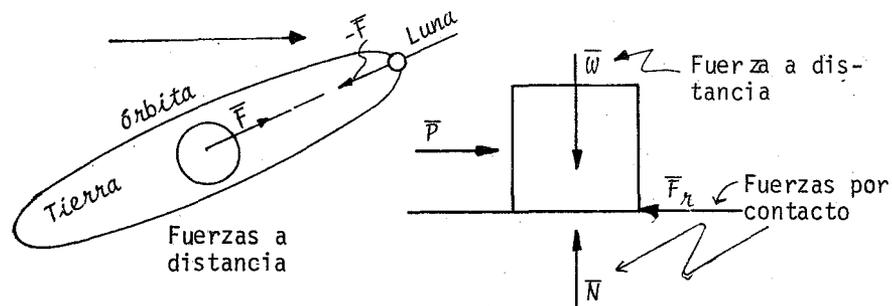
i) Fuerzas activas y reactivas



a) \bar{W} = peso de un hombre fuerza activa
 \bar{V}_1 y \bar{V}_2 = reacciones fuerzas reactivas

- | | | |
|---|---|-------------------|
| (b) \bar{W} = peso de un bloque de masa conocida m | } | fuerzas activas |
| \bar{P} = fuerza horizontal que tien de a desplazar al bloque | | |
| \bar{N} = fuerza normal | } | fuerzas reactivas |
| \bar{F}_r = fuerza de fricción (tan--gencial) | | |

ii) Fuerzas a distancia y fuerzas por contacto



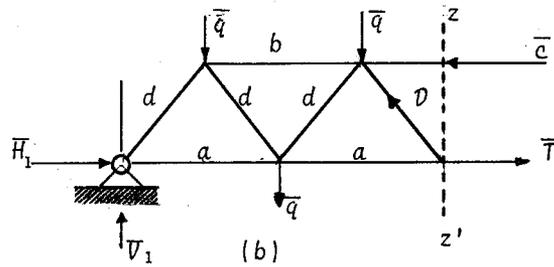
iii) Fuerzas concentradas. Se tuvieron que emplear antes, como se ve en los incisos anteriores; además, se pueden mostrar los siguientes casos:



\bar{P} = carga que soporta una columna - de madera, acero o concreto reforzado o simple

\bar{W} = peso propio de la columna

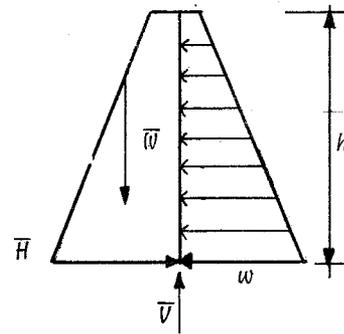
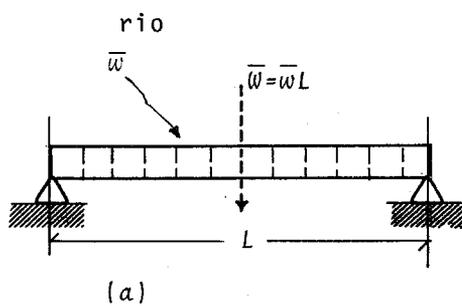
La fuerza $\bar{P}+\bar{W}$ se considera concentrada en un punto de la columna.



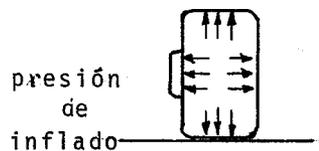
Todas las fuerzas indicadas en la --
 figura (b) son concentradas.

iv) Fuerzas distribuidas por unidad de longitud. Ejemplos:

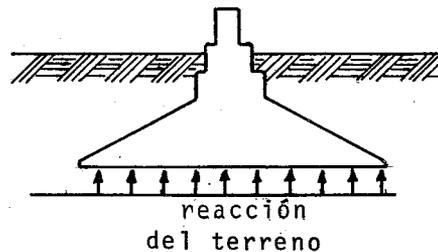
a) Peso propio de una viga



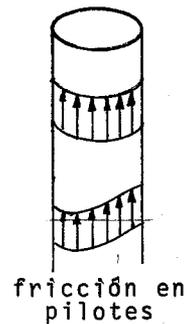
v) Fuerzas distribuidas por unidad de área. Ejemplos:
 la presión a la que se inflan los neumáticos en el sistema inglés usual $28 \text{ lb}_f/\text{in}^2 = 1.97 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$, las que ejerce el terreno en una zapata de cimentación y las fuerzas tangenciales en torno a la superficie de un pilote de fricción en contacto con el terreno.



presión
de
inflado

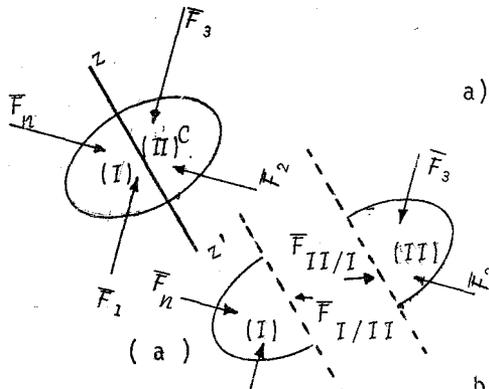


reacción
del terreno

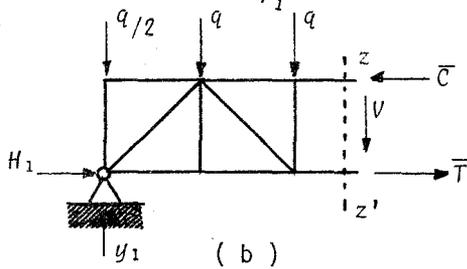


fricción en
pilotes

vi) Fuerzas externas e internas. Ejemplos:

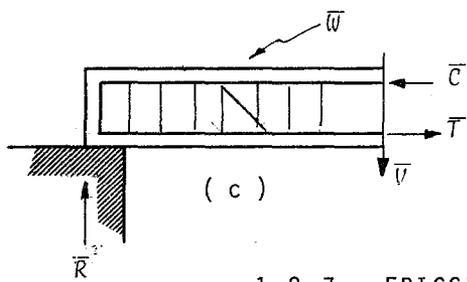


a) Al cortar C mediante un plano según la traza $z'z$, $\bar{F}_{I/II} = \bar{F}_{II/I}$ (fuerzas internas ejercidas por una parte del cuerpo - sobre la otra parte del mismo cuerpo)
 \bar{F}_i (fuerzas externas $i=1,2,3,\dots,n$)



b) \bar{C} y \bar{T} son fuerzas externas a la porción de la armadura considerada, pero internas a toda ella

c) \bar{T} = fuerza de tensión
 \bar{C} = fuerza de compresión
 \bar{V} = fuerza cortante
 } Fuerzas internas de la viga completa



\bar{C} , \bar{T} , y \bar{V} se denominan *elementos mecánicos*

\bar{W} , \bar{R} = fuerzas externas

1.2.7. FRICCIÓN EN SECO. LEYES DE COULOMB MORIN

Quando dos cuerpos están en contacto es necesario a plicar una fuerza para ponerlos en movimiento relativo. Este -- hecho indica la existencia de una oposición al deslizamiento de uno sobre el otro; es decir, se generan fuerzas tangenciales entre las superficies de contacto. Estas fuerzas son conocidas -- como *fuerzas de fricción*.

En los problemas ingenieriles las fuerzas de fricción pueden ser favorables o desfavorables.

Se considera que el efecto es favorable en el caso de las balatas de los frenos de vehículos, y en los pilotes de fricción en los que es necesaria la presencia de esas fuerzas tangenciales a fin de transmitir la carga de un edificio al terreno. En los pavimentos o superficies de rodamiento se considera necesaria la rugosidad de los mismos a efecto de que los vehículos, y aún personas, no resbalen al desplazarse por ellas. Otro ejemplo podría ser el de las vías de ferrocarril, en donde las locomotoras llevan depósitos de arena fina que vierten en los rieles para aumentar la fricción y así frenar con seguridad.

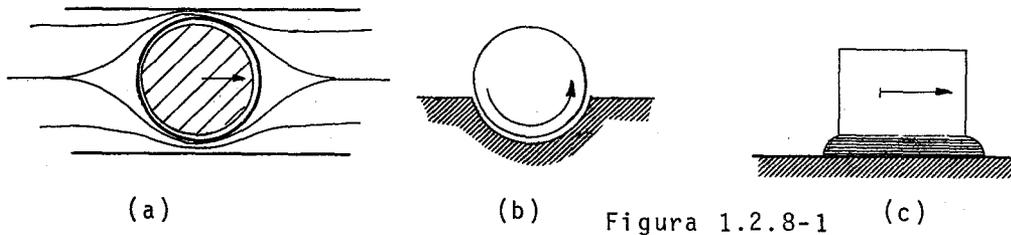
Tiene efecto negativo el rozamiento entre partes de motores o de piezas móviles de cualquier tipo de máquina o mecanismo, en bandas transportadoras y en general en todos los casos en que se emplean lubricantes y dispositivos mecánicos como baleros o chumaceras, toda vez que haya que tener presente que la fricción es un efecto que se opone al movimiento. Un ejemplo importante de señalar es el paso o transporte de fluidos por tuberías o canales, en donde tal efecto de fricción ocasiona pérdidas por la oposición ya mencionada. Esta dificultad lleva a proyectar y construir tuberías con aceros y técnicas muy especializadas. En todos los vehículos se prevé el efecto de rozamiento del viento o del agua, según el caso; de ahí las estructuras aerodinámicas o hidrodinámicas que existen en automóviles, barcos, cohetes y aviones.

Existen diferentes tipos de resistencia por fricción:

- a) *Fricción en seco.* Este fenómeno ocurre cuando las superficies sin lubricar de los cuerpos es--

tán en contacto, bajo una condición de deslizamiento o de tendencia a deslizarse una sobre otra.

b) *Fricción fluida o viscosa.* Cuando un sólido o un fluido se mueven en un fluido, o bien en contacto con un fluido (figura 1.2.8-1), la resistencia -- que se presenta a este movimiento se le denomina fricción viscosa. Esta fricción depende generalmente de las superficies en contacto y de la velocidad relativa entre dichas superficies.



Estos apuntes se limitan al estudio de la fricción en seco, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que estén en contacto con superficies rugosas sin lubricación.

Para entender mejor las leyes de la fricción en seco, conviene efectuar el siguiente experimento. Se coloca un cuerpo de peso \bar{w} sobre una superficie horizontal (Figura 1.2.8-2); las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso \bar{w} y la reacción de la superficie; como el peso no tiene componente horizontal, la reacción de la superficie será vertical y se indicará con \bar{N} (Figura 1.2.8-2(a)). Se aplica una fuerza horizontal \bar{P} al cuerpo en cuestión; si \bar{P} es pequeña, el cuerpo no se moverá; esto implica que existe otra fuerza horizontal que equilibra a \bar{P} . Esta otra fuerza es la fricción estática \bar{F} , la cual es la resultante de un gran número de fuerzas que actúan sobre toda la su-

perficie de contacto entre el cuerpo y el plano. La naturaleza de esas fuerzas no se conoce exactamente, pero en general se supone que son debidas a las irregularidades entre ambas superficies (Figura 1.2.8-3). Si incrementamos la fuerza \bar{P} , también se incrementa la fricción \bar{F} , siempre oponiéndose a \bar{P} , hasta que alcanza un cierto valor máximo \bar{F}' (Figura 1.2.8-1 (c)).

Si después de alcanzar su valor máximo \bar{F}' , seguimos incrementando \bar{P} , la fuerza de fricción no podrá equilibrarla y el cuerpo comenzará a deslizarse. Al iniciar el movimiento, la fuerza de fricción disminuye de su valor máximo \bar{F}' a un valor \bar{F} . Esto sucede debido a que cuando está en movimiento, existe una menor interpenetración de las irregularidades de ambas superficies en contacto. Una vez iniciado el movimiento, el cuerpo se desliza e incrementa su velocidad, mientras que la fuerza de fricción \bar{F}_d , llamada *fuerza de fricción dinámica o cinética*, permanece aproximadamente constante.

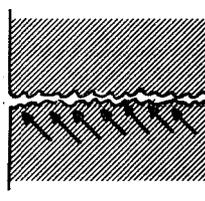
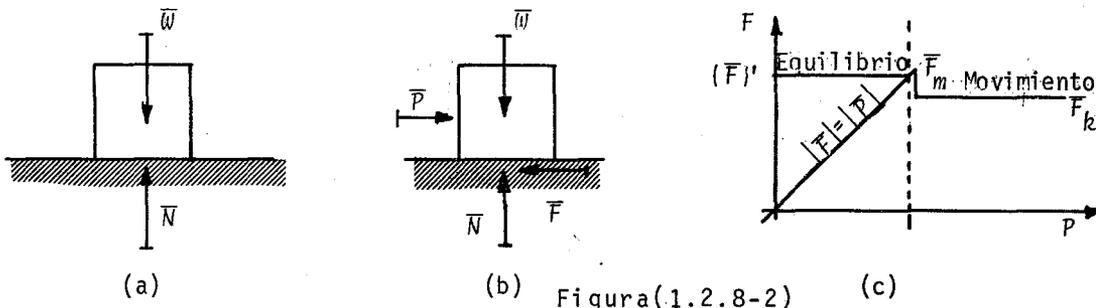


Figura (1.2.8-3)

Basado en la evidencia experimental, Coulomb y Morin establecieron las siguientes leyes:

(1) El valor máximo de la fuerza de fricción estática F' es directamente proporcional a la fuerza normal entre las superficies en contacto.

$$|F'| = \mu |N|$$

en donde la constante de proporcionalidad μ se conoce como el -- coeficiente de fricción estática. Análogamente se puede establecer que:

$$|F_d| = \mu_d |N|$$

donde a μ_d es el coeficiente de fricción dinámica.

(2) La fuerza de fricción es independiente de la -- magnitud de la superficie de contacto, pero depende de la rugosidad de éstas.

(3) La fuerza de fricción dinámica no depende de la velocidad relativa de ambas superficies de contacto.

Es importante hacer notar que, si bien estas leyes -- son exactas para las condiciones en que se realizaron las pruebas, dichas leyes han de modificarse para condiciones distintas. Por ejemplo, se ha comprobado que el coeficiente de fricción estática es mayor para presiones menores a $52 \text{ g}_f/\text{cm}^2$; para presiones -- muy grandes el coeficiente aumenta también. Por otra parte, se -- ha comprobado que para rapidezces de deslizamiento mayores a -- 3 m/s el coeficiente de fricción dinámica disminuye con la -- rapidez.

En la Tabla 3 se proporcionan algunos coeficientes de fricción estática; los coeficientes de fricción dinámica serán aproximadamente del 75% de aquellos.

Metal sobre metal	0.15-0.60
Metal sobre madera	0.20-0.60
Metal sobre piedra	0.30-0.70
Metal sobre cuero	0.30-0.60
Madera sobre madera	0.25-0.50
Madera sobre cuero	0.25-0.50
Piedra sobre piedra	0.40-0.70
Tierra sobre tierra	0.20-1.00
Caucho sobre concreto	0.60-0.90

Tabla 3. Valores aproximados del coeficiente de fricción estática para superficies secas.

En conclusión, son cuatro diferentes situaciones las que se presentan cuando un cuerpo rígido está en contacto con una superficie horizontal:

1.- Las fuerzas que actúan en el cuerpo son normales a la superficie de contacto. Esto implica que no tienden a moverlo y, por ende, no existe fuerza de fricción (Figura 1.2.8-4 (a)).

2.- La fuerza aplicada al cuerpo tiende a ponerlo en movimiento sobre la superficie de contacto, pero no es lo suficientemente grande para que tal movimiento se inicie. En esta situación se desarrolla una fuerza de fricción, la cual contrarresta los efectos de la componente horizontal de \bar{P} , permaneciendo el cuerpo en equilibrio. Aunque existe una fuerza de --

fricción, no es la máxima, así que la expresión $F' = \mu N$ no es aplicable para encontrar su valor (Figura 1.2.8-4 (b)).

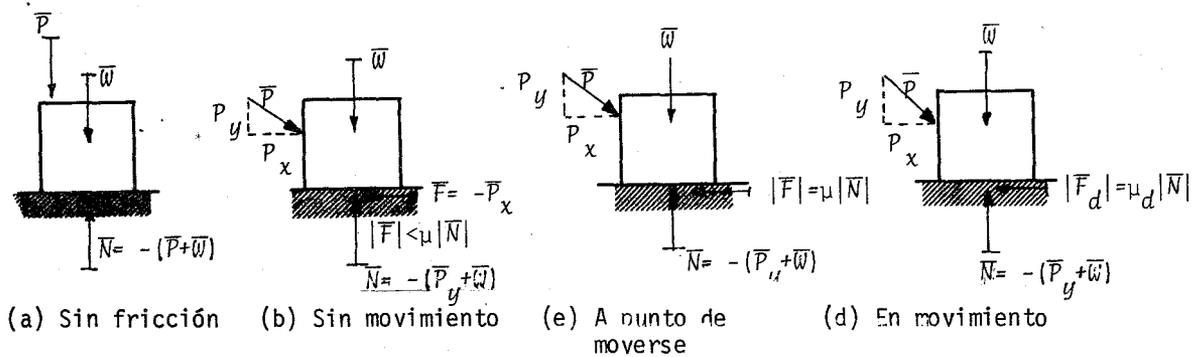


Figura (1.2.8-4)

3.- La fuerza aplicada es tal que el cuerpo está en equilibrio pero a punto de moverse. La fuerza de fricción estática alcanza su valor máximo F' y junto con la fuerza normal \bar{N} equilibrará la fuerza aplicada. En estas circunstancias puede usarse la expresión $|F'| = \mu |\bar{N}|$. Es conveniente hacer notar que la fuerza de fricción siempre se opone al movimiento (Figura 1.2.8-4 (c)).

4.- El cuerpo se encuentra en movimiento por efecto de las fuerzas aplicadas. Si bien el cuerpo ya no está en equilibrio, puede aplicarse la ecuación $|F_d| = \mu_d |\bar{N}|$ para obtener el valor de la fuerza de fricción dinámica, en donde F_d se opone al movimiento (Figura 1.2.8-4 (d)).

En algunas ocasiones conviene reemplazar la fuerza normal y la de fricción por su resultante \bar{R} . Considerando nuevamente el cuerpo sobre la superficie plana, se puede estudiar a la fricción a través de la fuerza resistente \bar{R} .

Si no existe componente horizontal de la fuerza aplicada, la resultante \bar{R} se reduce a la fuerza normal \bar{N} (Figura - -

1.2.8-5 (a)). Pero si la fuerza aplicada \bar{P} tiene componente horizontal \bar{P}_x , la cual tiende a mover el cuerpo, \bar{R} tendrá un componente horizontal \bar{F} y por consiguiente formará cierto ángulo ϕ con la vertical (figura 1.2.8-5 (b)). Al incrementarse el valor de \bar{P}_x , la fuerza de fricción \bar{F} aumentará, y el ángulo formado -- por \bar{R} y \bar{N} también aumentará hasta que alcance su valor máximo -- (Figura 1.2.8-5 (c)); a este valor del ángulo se le llama *ángulo de fricción estática*, y se indica por ϕ_e . De la figura 1.2.8-5 (c) se deduce lo siguiente:

$$\tan \phi_e = \frac{\bar{F}'}{\bar{N}} = \frac{\mu \bar{N}}{\bar{N}}$$

$$\tan \phi_e = \mu$$

Al iniciarse el movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción disminuye a \bar{F}_d , en la misma forma que el ángulo de -- fricción disminuye a ϕ_d ; en estas condiciones se le denomina *ángulo de fricción dinámica* (Figura 1.2.8-5 (d)). Análogamente se establece:

$$\tan \phi_d = \frac{\bar{F}_d}{\bar{N}} = \frac{M_d \bar{N}}{\bar{N}}$$

$$\tan \phi_d = M_d$$

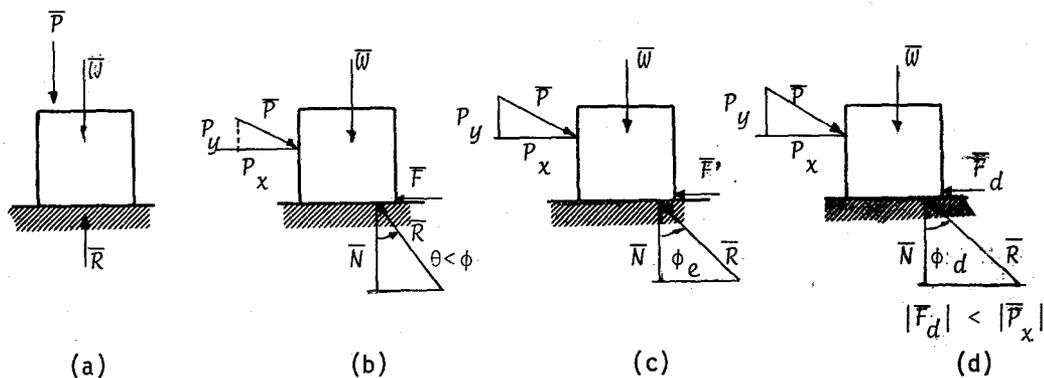


Figura (1.2.8-5)

Consideremos ahora el caso de un cuerpo rígido sobre un plano (Figura 1.2.8-6). Si el plano está horizontal (Figura 1.2.8-6 (a)), la fuerza \bar{R} ejercida por el plano sobre el cuerpo es vertical y equilibra el peso \bar{w} . Al inclinar el plano de modo que se forme un ángulo pequeño, $\theta < \phi$, se genera una componente de \bar{R} que resulta tangencial a la superficie de contacto, misma que equilibra a la componente tangencial del peso del cuerpo (Figura 1.2.8-6 (b)). Si incrementamos el ángulo θ hasta alcanzar un valor ϕ_e tal que el movimiento esté a punto de iniciarse, es decir que la componente tangencial de \bar{R} llegue a su valor máximo, el plano inclinado formará con la horizontal un ángulo θ llamado *ángulo de reposo*. Como se puede observar en la figura 1.2.8-6 (c), el ángulo de reposo es igual al ángulo de fricción estática ϕ_e . Si se sigue incrementando el ángulo θ , el movimiento se inicia y la fuerza \bar{R} ya no es vertical, es decir, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están desbalanceadas (Figura 1.2.8-6(d)).

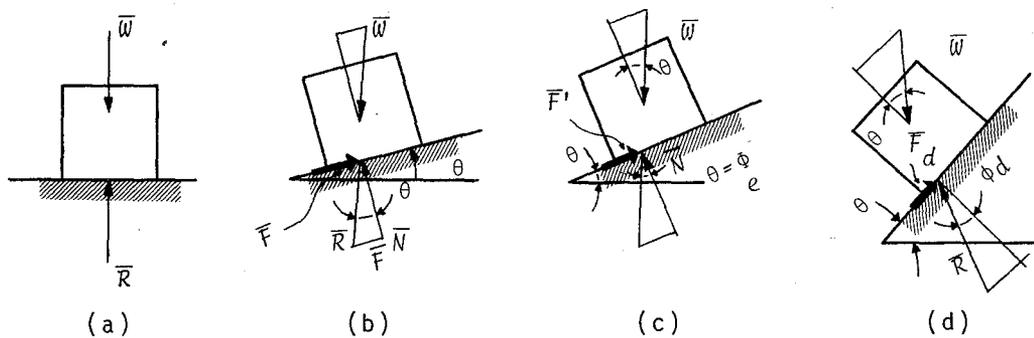


Figura 1.2.8-6

1.3 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

1.3.1. CONCEPTO DE DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

El *diagrama de cuerpo libre* es una representación gráfica del objeto en estudio, en la cual se indican sus características geométricas así como todos los efectos externos que en él actúan.

Es importante no perder de vista que el diagrama de cuerpo libre constituye una simplificación del problema que se plantea y, conforme a lo expuesto anteriormente, esta representación deberá concordar con los principios teóricos.

La secuela que se prescribe para la obtención del diagrama de cuerpo libre es la siguiente:

- a) Se dibuja el contorno del cuerpo, separado de cualquier otro, y se indican sus dimensiones principales.
- b) Se anotan todas las acciones externas (fuerzas y momentos) que obran sobre el cuerpo, representando las por medio de segmentos dirigidos.

Estas acciones pueden ser las que se indican explícitamente[†] y/o las que representan acciones de otros cuerpos que interactúan sobre el que se analiza.

En el caso específico del efecto atribuible al peso propio, éste se representará mediante una fuerza aplicada en el centro de gravedad del cuerpo, -

† Cuando hablamos de las fuerzas indicadas explícitamente, nos referimos a aquellas sollicitaciones que eventualmente se presentan en algunos problemas, - pero se omite la información de quién las produce.

toda vez que en este punto es posible suponer concentrado el peso del cuerpo.

En todos los casos deberán indicarse la dirección, la magnitud y el sentido de las fuerzas y los momentos que actúan sobre el cuerpo; y en el caso de las fuerzas también su punto de aplicación.

- c) Se indicarán las fuerzas externas desconocidas, -- que generalmente son las reacciones, señalando sus componentes ortogonales por su magnitud y por su dirección.

Con respecto a la representación del cuerpo, es fácil observar que en ella está implícita la idealización del cuerpo rígido y/o del punto masa (un ejemplo de esta última sería la -- que se refiere a su peso propio).

La representación de acciones externas, tal como se prescribe, sería consecuencia, por una parte, de la aplicación de las leyes del movimiento y, por la otra, del hecho de que las fuerzas y los momentos son magnitudes de carácter vectorial.

En relación a la aplicación de las leyes del movimiento como medio para representar efectos externos, no está por demás recapacitar sobre la siguiente cuestión: al sustituir por fuerzas los cuerpos separados del que se analiza, se está aplicando la Tercera Ley de Newton, en tanto que al representar el peso del cuerpo por una fuerza concentrada, se aplica la ley de la Gravitación Universal. Asimismo, al indicar las fuerzas desconocidas, específicamente las reacciones, es necesario tener presentes la Segunda y la Tercera Leyes de Newton.

Para fijar ideas, hagamos, a manera de ejemplo ilustrativo, el diagrama de cuerpo libre de la barra del dispositivo en equilibrio que se muestra en la figura 1.3.1-1.

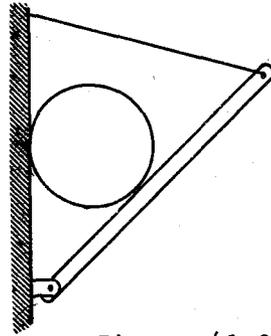


Figura (1.3.1-1)

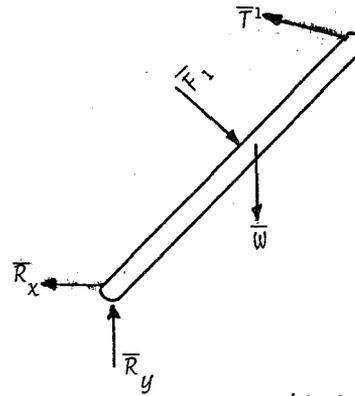


Figura (1.3.1-2)

El diagrama de cuerpo libre de la barra que se deriva de la aplicación del proceso antes expuesto, se observa en la figura 1.3.1-2. En ésta, la barra se presenta separada de los demás cuerpos, que son sustituidos por los efectos que producen; así, \bar{T}_1 y \bar{F}_1 representan las acciones de la cuerda y de la esfera respectivamente, en tanto que el peso de la barra, que obedece a la atracción de la Tierra, se simboliza por \bar{w} . Por su parte, el efecto del perno inferior, del que se desconoce la dirección en que actúa, se representa por dos componentes normales entre sí \bar{R}_x y \bar{R}_y .

1.3.2. ELEMENTOS DE SUJECION DE LA PARTICULA

El significado que se dará en este apartado al concepto de *sujeción* de la partícula material, será el de impedimento para su movimiento con respecto a un sistema de referencia dado; es decir, por elemento de sujeción deberán entenderse aquellas restricciones impuestas a la partícula material, a fin de evitar su desplazamiento relativo al sistema de referencia.

Ahora bien, si se tienen presentes las leyes del movimiento, se colige que si una partícula es solicitada por efectos externos (fuerzas o sistemas de fuerzas activas), cualquier alteración en el cambio del movimiento originado por tales sollicitaciones implica el de la ocurrencia de un sistema reactivo. - Esto es, a un cuerpo (en este caso idealizado como un punto masa) se le sujeta por medio de un sistema reactivo, proporcionado generalmente por la interacción de otros cuerpos, de manera especial por la de los apoyos.

Con el fin de plantear de un modo más formal las ideas antes esbozadas, a continuación se establece cuál es el significado atribuible a un marco de referencia, así como las consecuencias que de éste se derivan. Posteriormente se analizarán las restricciones que, con relación a un marco específico, son impuestas por los apoyos.

Marco de Referencia. Si se desea dar una definición exacta del marco de referencia resulta conveniente indicar antes la necesidad intuitiva de establecerlo; para ello consideremos - el siguiente ejemplo: sea un cuerpo fijado a una plataforma que posee un movimiento constante a lo largo de una línea recta, si un observador viajara en dicha plataforma no vería moverse al cuerpo; más aún, si el viajero estuviese impedido de ver el paisaje (es decir, no dispusiera de otros puntos de referencia) sería incapaz de percatarse siquiera del movimiento de la plataforma. En cambio, si consideramos que un segundo observador estuviera inmóvil y fuera de la plataforma, éste vería moverse a dicho cuerpo. Así, en este ejemplo, decir que el cuerpo está sujeto, significaría que no se mueve con respecto a un marco fijo a la plataforma, en tanto que el movimiento se hará con referencia al sistema fijo fuera del objeto móvil. De lo anterior se infiere que el movimiento y, por ende, el concepto de sujeción, sólo tendrán un significado preciso cuando se establezcan con relación a un marco de referencia.

Para efectos del subsiguiente desarrollo de un marco de referencia, diremos que lo conforma una sucesión de puntos -- con respecto a las cuales se ubica la posición que en un instante dado[†] tiene cualquier punto del espacio.

Un poco de reflexión nos permitirá concluir que, conforme a una concepción meramente geométrica, para precisar la posición del cualquier punto en el espacio de manera inequívoca es necesario establecer, por lo menos, cuatro puntos de referencia -- no coplanos.

Ahora bien, si observamos que por los cuatro puntos de referencia que hemos planteado es posible hacer pasar tres -- segmentos dirigidos que concurren en uno de ellos, se colige que una forma alternativa para ubicar un punto del espacio de tres dimensiones, es referirlo por medio de tres distancias medidas a lo largo de los segmentos dirigidos, del punto de intersección -- al punto en cuestión, y atribuyendo a estas distancias un signo, -- según el sentido de los segmentos dirigidos.

En estas condiciones, a un punto del espacio se le caracterizará por una terna ordenada de números reales, y a cada terna de números reales debe corresponder, en nuestro sistema de referencia, uno y sólo un punto del espacio.

De esta forma, si se tiene presente el concepto matemático de vector, esto es, de una enjada de números, se infiere que a los puntos referidos en el sistema les corresponde un vec-

† En el presente desarrollo el parámetro tiempo se excluye de la discusión, pues por el momento carece de significado; sin embargo, al abordar el estudio de la cinemática su inclusión es determinante.

tor (que será un vector de posición). Así, el sistema de referencia establecido nos define un espacio vectorial, en E^3 , dado por tres vectores base, que serán las direcciones de los segmentos dirigidos, y por el vector $\bar{0}$ dado como el punto de intersección de los ejes.

Por otra parte, si a lo expuesto anteriormente añadimos que las fuerzas se pueden representar por segmentos dirigidos (dado por un punto inicial y un punto final), se concluye que a tal representación, meramente geométrica, le puede corresponder una expresión vectorial (dada por la diferencia de los vectores de posición del punto final y el punto inicial del segmento dirigido que las representa). En tal virtud, podemos afirmar que un sistema de referencia, además de ubicar la posición de un punto cualquiera en el espacio en un instante determinado, permite dar a las fuerzas (también a las aceleraciones, aplicando la segunda ley de Newton) una expresión vectorial.

Sólo por abundar cabe mencionar que un sistema de referencia proporciona los elementos necesarios para dar una expresión matemática a las leyes del movimiento. Más aún, las leyes de Newton tienen implícito un sistema de referencia en el que son válidas; a tales sistemas de referencia se les denomina *sistemas inerciales*. Específicamente, en este sistema las expresiones de las leyes de Newton son como las que se vieron anteriormente.

Recordando el ejemplo del cuerpo fijado a la plataforma, puede verse que tanto en un sistema de referencia fijo a la plataforma (donde el cuerpo se desplaza sólo si le son impuestas estas fuerzas), como en el sistema fijo fuera de la plataforma (donde el cuerpo no varía su estado de movimiento rectilíneo uniforme en ausencia de fuerzas), se cumplen las leyes de Newton y, por ende, que son sistemas inerciales. En general se

dice que un sistema es inercial si está inmóvil o posee un movimiento rectilíneo uniforme.

Cabe señalar que en los desarrollos subsecuentes habrá ocasiones en que se empleen marcos de referencia móviles que no necesariamente serán inerciales; sin embargo, también en estos casos se considerará otro que esté fijo, con respecto al cual se establecerá el movimiento del primero. Al marco de referencia inercial fijo, que siempre se incluye, por convención se le denomina *Sistema Tierra*.

Una vez que se ha establecido un sistema de referencia, con las consecuencias que se derivan de su inclusión, es posible abordar el problema inicialmente planteado, esto es, el de la sujeción de la partícula. En efecto, dado que un punto en el espacio se ubica por medio de tres distancias referidas a tres ejes (y que para los propósitos del curso, en lo sucesivo se considerará a un Sistema Tierra), una partícula está sujeta si sus distancias con respecto al sistema establecido permanecen invariables en todo momento.

Ahora bien, si sobre la partícula material actúa un sistema de fuerzas (sistema activo) se infiere, en concordancia con lo aseverado y con las leyes del movimiento, que para que la partícula esté sujeta debe actuar sobre ella un sistema reactivo[†] que se puede descomponer según las tres direcciones en que se restringe el movimiento.

† Los elementos que constituyen el sistema reactivo (fuerzas y momentos), los identificaremos como elementos de sujeción. Por lo demás, de lo expresado sobre descomposición de las fuerzas reactivas, no se hace mayor insistencia ya que este concepto se tratará en el siguiente capítulo.

A continuación, atenderemos a la forma en que se introducen los elementos de sujeción, es decir, cómo se proporciona un sistema reactivo por medio de la intersección de otros --- cuerpos, y específicamente por los apoyos.

Comencemos por definir el apoyo como un cuerpo (o elemento), mediante el cual se transmiten las acciones a otro o al propio Sistema Tierra; a su vez, y de acuerdo con la Tercera Ley de Newton, los apoyos serán los que transmitan el cuerpo que sustenta las reacciones del sistema tierra, o de otro cuerpo soportante. Ahora bien, ya que los apoyos restringen o impiden el movimiento del cuerpo que soportan, es posible concluir, conforme a las leyes de movimiento, que las reacciones que introducen estos apoyos están relacionados de manera directa con las restricciones que imponen al movimiento.

En efecto, si consideramos a un Sistema Tierra, establecido por medio de tres ejes ortogonales x , y , z (como se indica en la figura 1.3.2-1), y además simbolizamos a los desplazamientos lineales, según estas tres direcciones, por e_x , e_y , e_z , mientras que a los desplazamientos angulares alrededor de estos ejes de referencia los representamos por θ_x , θ_y , θ_z , y a los efectos reactivos asociados a estos desplazamientos por F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z , es posible establecer las siguientes relaciones:

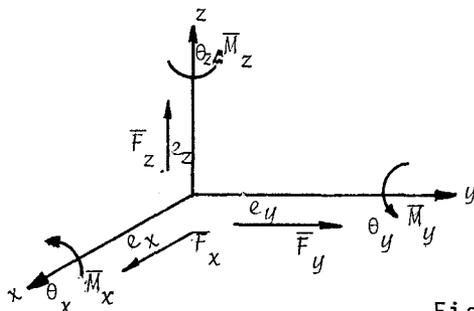


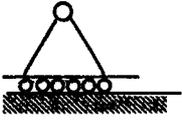
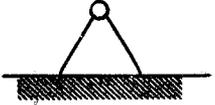
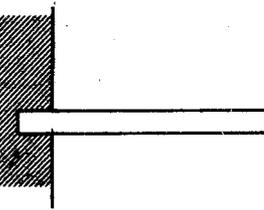
Figura (1.3.2-1)

Si se imponen restricciones a los desplazamientos, de tal manera que $e_x=0$, $e_y=0$, ..., $\theta_z=0$, éstas implican la existencia

de efectos reactivos $\bar{F}_x \neq 0, \bar{F}_y \neq 0, \dots, \bar{M}_z \neq 0$. A su vez, la relación inversa se cumple; ésto es, si no hay restricciones al movimiento, entonces $e_x \neq 0, e_y \neq 0, \dots, \theta_z \neq 0$, lo que implica que -- los efectos reactivos $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \dots, \bar{M}_z$ sean nulos. Las relaciones anteriores se sintetizan en el siguiente cuadro:

Si: Desplazamiento	Entonces: Reacción	Si: Desplazamiento	Entonces: Reacción
$e_x = 0$	$\bar{F}_x \neq 0$	$e_x \neq 0$	$\bar{F}_x = 0$
$e_y = 0$	$\bar{F}_y \neq 0$	$e_y \neq 0$	$\bar{F}_y = 0$
$e_z = 0$	$\bar{F}_z \neq 0$	$e_z \neq 0$	$\bar{F}_z = 0$
$\theta_x = 0$	$\bar{M}_x \neq 0$	$\theta_x \neq 0$	$\bar{M}_x = 0$
$\theta_y = 0$	$\bar{M}_y \neq 0$	$\theta_y \neq 0$	$\bar{M}_y = 0$
$\theta_z = 0$	$\bar{M}_z \neq 0$	$\theta_z \neq 0$	$\bar{M}_z = 0$

Para ejemplificar lo anterior, a continuación se presenta los apoyos comúnmente usados en el sistema de referencia - de dos dimensiones, indicando para cada caso las restricciones y reacciones que inducen.

NOMBRE	REPRESENTACION GRAFICA	MOVIMIENTOS PERMISIBLES	RESTRICCIONES	SISTEMA REACTIVO
Apoyo libre		Desplazamiento en una sola dirección, o el giro, - $e_x \neq 0, e_y = 0, -$ $\theta_z \neq 0.$	Impide el movimiento en una sola dirección $F_x = 0,$ $F_y \neq 0, M_z = 0.$	Una fuerza.
Articulación o apoyo fijo		Únicamente el giro $e_x = 0$ $e_y = 0, \theta_z \neq 0.$	No hay desplazamiento $F_x \neq 0$ $F_y \neq 0, M_z = 0.$	Dos fuerzas.
Empotramiento		Ninguno $e_x = 0, e_y = 0$ $\theta_z = 0$	No hay giro ni desplazamiento $F_x \neq 0, F_y \neq 0, -$ $M_z \neq 0.$	Dos fuerzas y un momento o par de fuerzas

1.3.3. FIJACION DEL CUERPO AL SISTEMA TIERRA

Los cuerpos rígidos se fijan al Sistema Tierra, o a otro cuerpo, por medio de los apoyos.

- a).- Sujeción de cuerpos con tendencia a moverse en el espacio. El cuerpo estará fijo cuando no tenga posibilidad de girar o desplazarse en ninguna dirección; esta condición únicamente la cumple el empotramiento. Cualquier otro apoyo requiere el concurso de otros apoyos para cumplir las condiciones de sujeción. En general,-

es condición necesaria, pero no suficiente, el-
que existan como mínimo 6 elementos de sujeción.
Los elementos de sujeción no deberán quedar en-
planos paralelos, pues el cuerpo sólo estaría -
parcialmente fijo. Los ejes de los elementos-
no deberán interceptar a una línea, pues el ---
cuerpo podría girar teniéndola como eje.

b).- *Sujeción de cuerpos con tendencia a moverse en-
un plano.* Esta condición de movimiento se da
en los cuerpos que soportan sistemas de fuerzas
coplanares. Para lograr fijar un cuerpo en el-
plano, es necesario evitar su desplazamiento en
dos direcciones (no paralelas), así como evitar
su giro. Esta condición únicamente se cumple -
con el empotramiento, o con la combinación de -
articulaciones y apoyos libres.

2

TEORIA DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE APRENDIZAJE:

El alumno:

1. *Enunciará el Postulado de Stevinus.*
2. *Planteará la expresión vectorial correspondiente al Postulado de Stevinus.*
3. *Enunciará, a partir de la 3a. Ley de Newton, el Principio de Equilibrio.*
4. *Demostrará, utilizando el Postulado de Stevinus y el Principio de Equilibrio, el Teorema de Deslizamiento.*
5. *Definirá el concepto de vector equipolente de una fuerza.*

6. Expresará vectorialmente una fuerza, dadas en cualquier forma su magnitud y dirección.
7. Calculará la fuerza que produzca los mismos efectos que un conjunto dado de fuerzas concurrentes.
8. Dada una fuerza, deducirá el número máximo de componentes independientes en que pueda resolverse.
9. Calculará las componentes de una fuerza dada.
10. Definirá el concepto de momento de una fuerza con respecto a un punto.
11. Definirá las características vectoriales del momento de una fuerza con respecto a un punto.
12. Deducirá la expresión vectorial que permita calcular el momento de una fuerza con respecto a un punto, a partir de las características vectoriales de dicho momento.
13. Deducirá la ecuación vectorial del soporte de una fuerza, a partir de la expresión vectorial del momento de ésta con respecto a un punto.
14. Dados un punto y una fuerza, calculará el momento de ésta con respecto a dicho punto.
15. A partir del momento de una fuerza con respecto al origen del sistema de referencia, calculará el momento de la fuerza con respecto a cualquier punto.
16. A partir de la expresión vectorial del momento de una fuerza con respecto a un punto, deducirá la condición necesaria y suficiente para que dicho momento sea nulo.
17. Dada una fuerza y un punto contenidos en un plano paralelo a cualquiera de los coordenados, calculará escalarmente el

momento de ésta con respecto al citado punto.

18. Definirá el concepto de coordenadas vectoriales o Plückerianas de una fuerza.
19. Comprobará la relación biunívoca entre una fuerza y sus - - coordenadas vectoriales.
20. Obtendrá las coordenadas vectoriales de una fuerza dada.
21. Calculará la posición de una fuerza, dadas sus coordenadas vectoriales.
22. Definirá el concepto de momento de una fuerza con respecto a un eje.
23. Planteará la expresión que permita calcular el momento de - una fuerza con respecto a un eje.
24. Calculará el momento de una fuerza con respecto a un eje dado.
25. Demostrará que el momento de una fuerza con respecto a un - punto es igual a la suma vectorial de los momentos de la - fuerza con respecto a tres ejes paralelos a los coordenados y que pasan por tal punto.
26. Deducirá la condición necesaria y suficiente para que el momento de una fuerza con respecto a un eje sea nulo.
27. Dada una fuerza paralela a uno de los ejes de un sistema catesiano de referencia, calculará el momento de ella con respecto a ejes paralelos a los coordenados.
28. Definirá las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas.
29. Calculará las coordenadas vectoriales de un sistema de fueru

zas dado.

30. Definirá el concepto de sistemas de fuerzas equivalentes.
31. Deducirá la condición necesaria y suficiente de equivalencia entre sistemas de fuerzas.
32. Demostrará si dos o más sistemas de fuerzas son equivalentes entre sí.
33. Definirá el concepto de sistema de fuerzas irreductible.
34. Planteará los sistemas de fuerzas irreductibles.
35. Obtendrá las coordenadas vectoriales de cada sistema irreductible.
36. Explicará las características vectoriales y las propiedades de un par de fuerzas.
37. A partir de las coordenadas vectoriales de un sistema irreductible, calculará el producto escalar de ellas.
38. Demostrará que un sistema formado por un par y fuerza coplanos es equivalente a la misma fuerza trasladada.
39. Dada una fuerza y un punto, calculará el par de transporte necesario para trasladarla al soporte paralelo a ella, y que contenga al punto.
40. Definirá el concepto de sistema resultante.
41. Explicará las diferentes configuraciones de los sistemas de fuerzas.
42. Atendiendo a la configuración de un sistema de fuerzas, ubicará el marco de referencia adecuado para el cálculo de sus coordenadas vectoriales.

43. Distinguirá los diferentes casos de reducción de los sistemas de fuerzas.
44. A partir de las coordenadas vectoriales, para los distintos casos de reducción de los sistemas de fuerzas, deducirá las condiciones necesarias y suficientes de reducción para cada uno de ellos.
45. Determinará a qué caso de reducción pertenece un sistema de fuerzas dado.
46. Deducirá el teorema de Varignon a partir de un sistema de fuerzas reductible a una fuerza.
47. Dado un sistema de fuerzas reductible a una fuerza, calculará las características vectoriales de ésta.
48. Dado un sistema de fuerzas cuyo equivalente más simple sea un par de fuerzas, calculará las características vectoriales de dicho par.
49. Deducirá la constancia de la proyección del momento del sistema, valuado con respecto a cualquier punto, en dirección de la resultante general.
50. Deducirá la ecuación vectorial del eje central.
51. Explicará los casos en que es válido el concepto de eje central.
52. Calculará el motor de un sistema de fuerzas reductible a una fuerza y un par no coplanos.
53. A partir de las condiciones de reducción al equilibrio para sistemas de fuerzas, planteará las ecuaciones escalares de solución.
54. Definirá el grado de hiperestaticidad.

55. Calculará el grado de hiperestaticidad de un problema de equilibrio dado.
56. Resolverá problemas isostáticos.

INTRODUCCION

En el primer tema de estos apuntes se ha visto que el campo de estudio de la Mecánica es el movimiento de los cuerpos y que la causa de este movimiento son las fuerzas que actúan en ellos. En el presente tema se estudiarán los sistemas de fuerzas como tales y en forma aislada, es decir, desligando la causa (*fuerza*) del efecto (*movimiento*).

Se pretende en este tema, implementar un sistema matemático que, basado en principios y teoremas acordes con los postulados básicos tratados en el primer tema, nos permitan el análisis de los sistemas de fuerzas.

En última instancia el objeto del capítulo es poder causar los mismos efectos externos que causa un sistema de fuer-

zas complejo, con otro sistema de fuerzas más simple que el original.

Es importante hacer notar que el reposo está considerado como un caso de movimiento; sin embargo, al ser éste nulo su estudio como tal no tiene sentido, siendo por lo tanto, producto de análisis únicamente las condiciones que producen el estado de reposo, esto es, los sistemas de fuerzas que están en equilibrio; de ahí la importancia de este tipo de sistemas que también se estudiarán dentro del presente tema.

2.1 POSTULADOS Y TEOREMAS BASICOS

2.1.1 POSTULADO DE STEVINUS O REGLA GENERALIZADA DEL PARALELOGRAMO

Stevinus (Stevin) fué el primero en establecer que las fuerzas pueden sumarse de dos en dos uniéndolas en sus orígenes y formando un paralelogramo cuya diagonal, que pasa por el origen, representa la acción conjunta de ambas fuerzas, como se muestra en la figura 2.1.1-1.

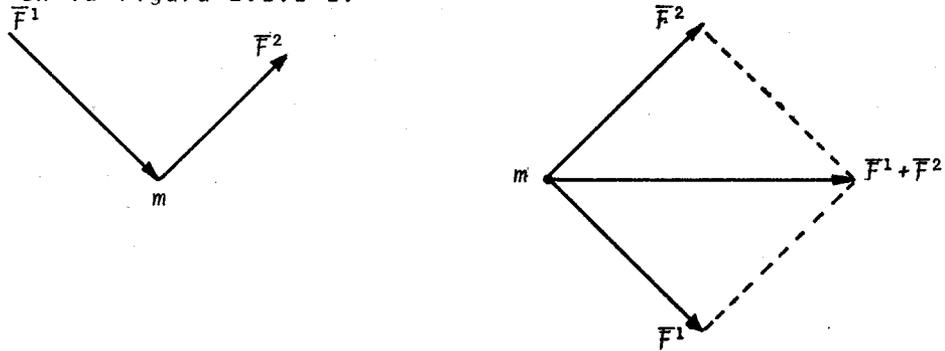


Figura 2.1.1-1

Evidentemente se llega al mismo resultado si se sitúa la segunda fuerza en el extremo final de la primera, uniendo el extremo inicial de la primera con el extremo final de la segunda, con ese sentido, como se muestra en la figura 2.1.1-2. A este procedimiento se le conoce como *Regla del Triángulo de Fuerzas*.

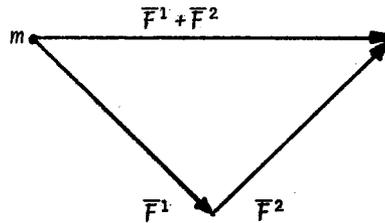


Figura 2.1.1-2

La generalización de la regla del paralelogramo de fuerzas dió origen al *Postulado de Stevinus*, que expresa:

Todo sistema de fuerzas que actúa en un punto masa puede sustituirse, sin que se modifiquen los efectos externos sobre éste, por una sola fuerza igual a la suma vectorial de todas las que forman el sistema, llamada Fuerza Resultante, que está aplicada en dicho punto masa.

Para el sistema de fuerzas coplanarias que se muestra en la figura 2.1.1-3, se tiene:

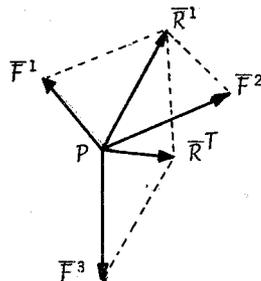


Figura 2.1.1-3

$$\begin{aligned} \overline{F^1} + \overline{F^2} &= \overline{R^1} \\ \overline{F^1} + \overline{F^2} + \overline{F^3} &= \overline{R^1} + \overline{F^3} = \overline{R^T} \end{aligned}$$

En forma general se establece:

$$\overline{F^1} + \overline{F^2} + \overline{F^3} + \dots + \overline{F^n} = \overline{R}$$

o sea:

$$\sum_{i=1}^n \overline{F^i} = \overline{R} \quad (2.1.1-1)$$

Este postulado encuentra fundamento en la Segunda Ley de Newton. En efecto, la acción aislada de cada una de las fuerzas de un sistema, sobre el punto P de masa m de la figura 2.1.1-4, produce al mismo aceleraciones parciales. Así:

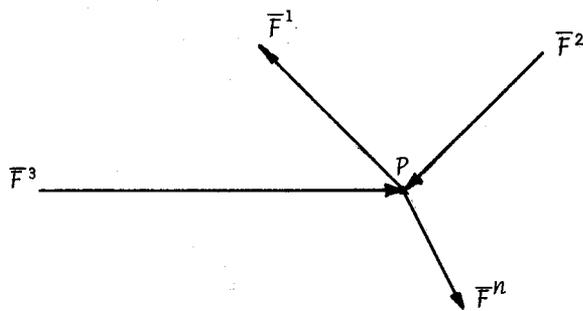


Figura 2.1.1-4

$$\overline{F^1} = m \overline{a_1}$$

$$\overline{F^2} = m \overline{a_2}$$

$$\overline{F^3} = m \overline{a_3}$$

.....

$$\overline{F^n} = m \overline{a_n}$$

Como la masa de la partícula es constante,

$$\sum_{i=1}^n \overline{F^i} = m \sum_{i=1}^n \overline{a_i}$$

o sea, que la suma vectorial de todas las fuerzas del sistema, - la *resultante*, produce al punto masa una aceleración idéntica a la suma vectorial de las aceleraciones de cada fuerza, lo que pone de manifiesto que tal fuerza resultante no modifica los efectos externos sobre la partícula.

2.1.2 PRINCIPIO DE EQUILIBRIO

Establece que dos fuerzas están en equilibrio cuando - su suma vectorial es nula, bajo la condición de que dichas fuerzas sean de igual magnitud, colineales y de sentido contrario --

(directamente opuestas).

Sea la partícula P de masa m , mostrada en la figura 2.1.2-1, en la que

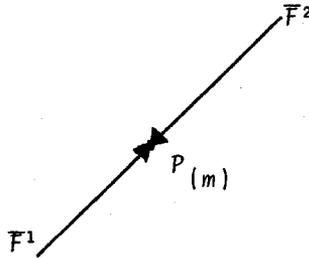


Figura 2.1.2-1

$$\begin{aligned} \bar{F}^1 &= -\bar{F}^2 \\ \therefore \sum_{i=1}^n \bar{F}^i &= \bar{R} = \bar{F}^1 + \bar{F}^2 = \bar{F}^1 + (-\bar{F}^1) = 0 \end{aligned}$$

Evidentemente \bar{F}^1 y \bar{F}^2 constituyen un sistema de fuerzas en equilibrio. Por otra parte, de acuerdo con la segunda Ley de Newton se establece:

$$\bar{R} = m\bar{a} ; m \neq 0$$

Como $\bar{R} = 0$ y $m \neq 0$, necesariamente $\bar{a} = 0$, lo cual significa que la partícula material no ha sufrido aceleración alguna, que es lo que caracteriza al equilibrio.

Se puede afirmar que todo sistema de fuerzas concurrentes está en equilibrio cuando la suma vectorial de las fuerzas que lo constituyen es nula, es decir, cuando se cumple:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}^i = 0 \quad (2.1.2-1)$$

Como corolario puede establecerse que:

Los efectos externos causados por un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido o una partícula material no se altera, si al sistema original se le adiciona o se le resta

un sistema de fuerzas en equilibrio.

Finalmente, de acuerdo con la Tercera Ley del Movimiento y la de la Gravitación Universal, de Newton, las acciones entre los cuerpos se presentan en parejas, por lo que puede proponerse:

Las acciones mutuas entre los cuerpos, entre porciones de los cuerpos, o entre los cuerpos y sus apoyos, constituyen sistemas de fuerzas en equilibrio.

2.1.3 TEOREMA DE DESLIZAMIENTO

En Mecánica del cuerpo rígido no es necesario restringir la acción de una fuerza a un punto determinado de su línea de acción, ya que los efectos externos causados por la fuerza al cuerpo son independientes del punto de aplicación, siempre que éste se encuentre en el soporte de ella. Esta proposición contiene al Teorema de Deslizamiento.

Considérese el cuerpo rígido de la figura 2.1.3-1 sobre el que actúa una fuerza en el punto P de su línea de acción L .

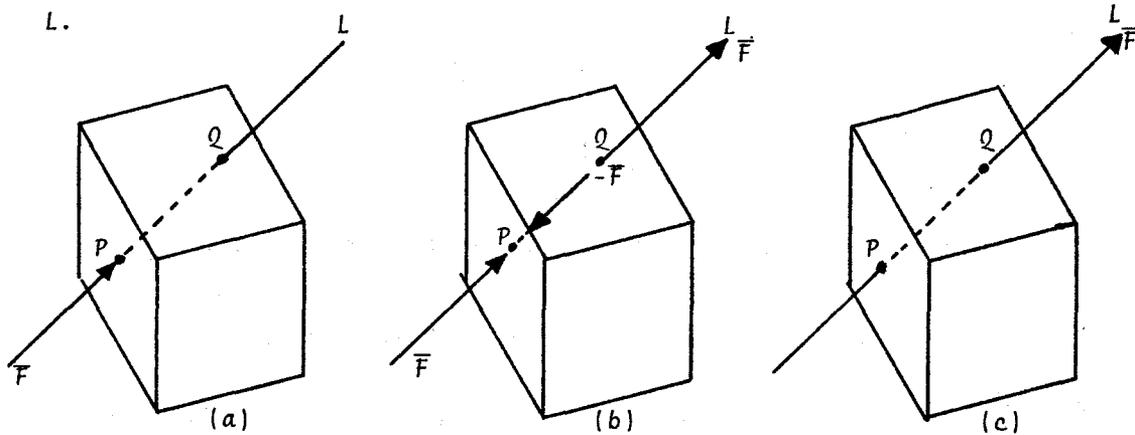


Figura 2.1.3-1

Los efectos externos en el cuerpo no se modifican si se agregan dos fuerzas de igual magnitud que la primera, constituyendo un sistema en equilibrio contenido en la misma línea de acción, actuando en Q , como se indica en (b). Tampoco se alteran dichos efectos externos si se restan, del sistema de 3 fuerzas, la fuerza original y la que se opone directamente a ésta, pues ambas constituyen un sistema de fuerzas en equilibrio. De este modo sólo queda una fuerza, idéntica a la original, pero actuando en otro punto de la misma línea de acción.

Lo anterior pone de manifiesto el hecho de que una fuerza puede trasladarse en su línea de acción, sin que se alteren los efectos externos sobre el cuerpo en el que actúa, con lo cual se verifica el Teorema de Deslizamiento. Por la misma circunstancia, se le conoce como *Principio de Transmisibilidad*. Así pues, a una fuerza se le puede tratar como vector deslizante, para cuya determinación es necesario y suficiente especificar a su magnitud, dirección y línea de acción.

El vector aplicado en el punto Q del cuerpo rígido de la figura 2.1.3-1 es equivalente al vector aplicado en P , y representa a la fuerza. Se puede expresar:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \vec{e}_f \quad (2.1.3-1)$$

dónde:

\vec{F} es el vector equipolente de la fuerza.

$|\vec{F}|$ es la magnitud o módulo de la fuerza. También puede indicarse por F (sin testas).

\vec{e}_f es un vector unitario en la dirección de la fuerza.

El vector equipolente de una fuerza es el vector libre representativo de ésta.

A los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados X , Y y Z se les denomina generalmente i , j y k ,

respectivamente.

Ahora bien, la dirección de una fuerza cualquiera, en función de su vector unitario asociado, puede obtenerse como sigue:

a) Se conocen las coordenadas de dos puntos de la línea de acción de la fuerza.

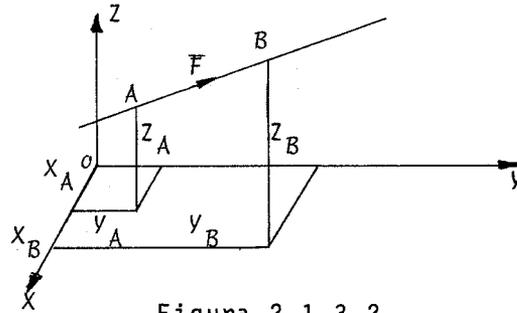


Figura 2.1.3-2

$$\vec{e}_f = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} \quad (2.1.3-2)$$

$$\overline{AB} = (x_B i + y_B j + z_B k) - (x_A i + y_A j + z_A k)$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A) i + (y_B - y_A) j + (z_B - z_A) k$$

$$\vec{e}_f = \frac{(x_B - x_A) i + (y_B - y_A) j + (z_B - z_A) k}{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}} \quad (2.1.3-3)$$

b) Se conocen los ángulos, usualmente denominados α , β y γ que la fuerza forma con los ejes coordenados X, Y y Z, respectivamente, como se muestra en la figura 2.1.3-3.

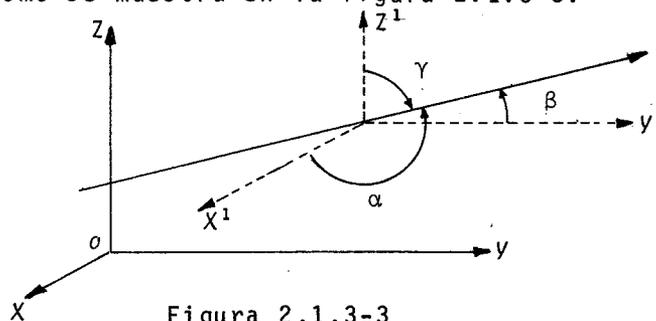


Figura 2.1.3-3

Así:

$$\vec{e}_f = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$$

y tomando como base la expresión (2.1.3-3), se tiene:

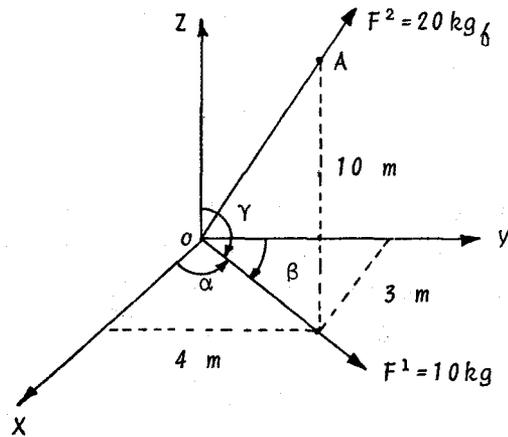
$$\cos \alpha = \frac{x_B - x_A}{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y_B - y_A}{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_B - z_A}{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}}$$

A los cosenos de los ángulos α , β y γ se les denomina cosenos directores.

Ejemplo. Determine los vectores equipolentes de las fuerzas mostradas en la siguiente figura:



Solución:

Para la fuerza \vec{F}^1 se pueden identificar fácilmente los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5}, \cos\gamma = 0 \text{ puesto que } \gamma = 90^\circ$$

Por lo tanto $\vec{F}^1 = |\vec{F}^1| (\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k})$

y el vector equipolente de \vec{F}^1 será:

$$\vec{F}^1 = 10 \left(\frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j} + 0 \vec{k} \right) = 6\vec{i} + 8\vec{j} \text{ [kg}_f\text{]}$$

Para \vec{F}^2 tenemos que el vector equipolente de la fuerza lo podemos determinar en base al segmento dirigido \vec{OA} de la forma

$$\vec{F}^2 = |\vec{F}^2| \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}$$

$$\vec{OA} = (3, 4, 10) - (0, 0, 0) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{9+16+100} = \sqrt{125} \text{ [m]}$$

$$\vec{F}^2 = 20 \left(\frac{3\vec{i}+4\vec{j}+10\vec{k}}{\sqrt{125}} \right) = 5,366\vec{i} + 7,155\vec{j} + 17,888\vec{k} \text{ [kg}_f\text{]}$$

2.1.4 COMPOSICION Y RESOLUCION DE FUERZAS

En Mecánica se requiere frecuentemente sustituir un conjunto de fuerzas que actúan en un cuerpo rígido o en un punto material por una sola, llamada *fuerza resultante*, que produce los mismos efectos externos que el conjunto; a este proceso se le denomina *composición de fuerzas*.

En los sistemas de fuerzas concurrentes en el plano, la resultante puede obtenerse gráficamente, de manera simple,

por aplicación sucesiva de la regla del paralelogramo de fuer- - zas; sin embargo, para sistemas concurrentes en el espacio la so- - lución gráfica no es tan simple, siendo más ventajoso el método analítico, según la expresión 2.1.1-1.

También se presentan casos en los que se requiere sus- - tituir una fuerza por dos o más, llamadas fuerzas componentes, - que produzcan los mismos efectos externos que aquella; este pro- - ceso recibe el nombre de *resolución* (o *descomposición*) de una - fuerza. El problema más común consiste en resolver o descompo- - ner una fuerza en sus componentes ortogonales, es decir, en fuer- - zas que estén contenidas en los ejes de un marco cartesiano de - referencia.

A las componentes de una fuerza suele interpretárseles como las proyecciones de la fuerza, en ciertas direcciones aso- - ciadas a sus respectivos vectores unitarios. Así, las componen- - tes ortogonales o cartesianas de la fuerza \vec{F} , de la figura son:

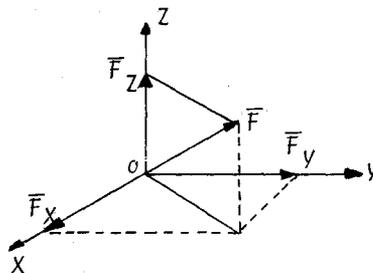


Figura 2.1.4-1

En este caso los vectores unitarios son \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} .

Por lo tanto, de acuerdo con la expresión 2.1.3-1 se - establece:

$$\vec{F}_x = |\vec{F}_x| \vec{i} ; \vec{F}_y = |\vec{F}_y| \vec{j} ; \vec{F}_z = |\vec{F}_z| \vec{k}$$

$$y \quad \vec{F} = |\vec{F}_x| \vec{i} + |\vec{F}_y| \vec{j} + |\vec{F}_z| \vec{k} \quad (2.1.4-1)$$

o bien:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Los cosenos directores, a partir de la expresión - - -
2.1.4-1, resultan:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|} = l; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|} = m; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}|} = n$$

en donde:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

también se expresa:

$$\vec{F} = |\vec{F}| (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) = |\vec{F}| (l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$$

En caso de que se desee obtener las componentes de una fuerza en cualesquiera direcciones, como por ejemplo, \vec{OA} , \vec{OB} y \vec{OC} de la figura 2.1.4-2, se procederá de manera semejante al caso anterior, teniendo en cuenta que las componentes estarán asociadas a los vectores unitarios \vec{e}_{OA} , \vec{e}_{OB} y \vec{e}_{OC} , en las direcciones \vec{OA} , \vec{OB} y \vec{OC} , respectivamente.

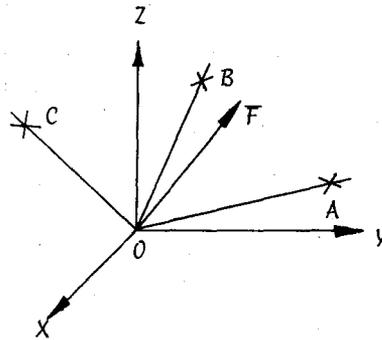


Figura 2.1.4-2

Así:

$$\bar{F} = F_{\overline{OA}} + F_{\overline{OB}} + F_{\overline{OC}}$$

En términos generales:

$$\bar{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$F_{\overline{OA}} = F_{\overline{OA}} \bar{e}_{\overline{OA}}$$

$$F_{\overline{OB}} = F_{\overline{OB}} \bar{e}_{\overline{OB}}$$

$$F_{\overline{OC}} = F_{\overline{OC}} \bar{e}_{\overline{OC}}$$

y los vectores \bar{e} tendrán componentes en las direcciones i , j y k ; por lo que:

$$F_{\overline{OA}} = F_{\overline{OA}} \left[(\bar{e}_{\overline{OA}} \cdot i) i + (\bar{e}_{\overline{OA}} \cdot j) j + (\bar{e}_{\overline{OA}} \cdot k) k \right]$$

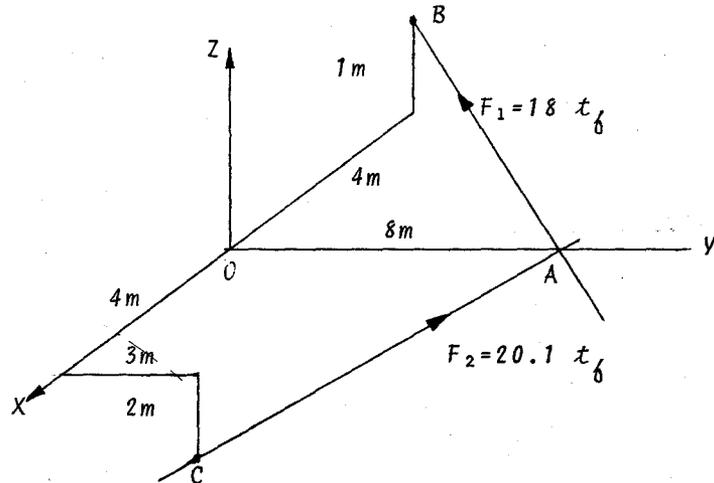
$$F_{\overline{OB}} = F_{\overline{OB}} \left[(\bar{e}_{\overline{OB}} \cdot i) i + (\bar{e}_{\overline{OB}} \cdot j) j + (\bar{e}_{\overline{OB}} \cdot k) k \right]$$

$$F_{\overline{OC}} = F_{\overline{OC}} \left[(\bar{e}_{\overline{OC}} \cdot i) i + (\bar{e}_{\overline{OC}} \cdot j) j + (\bar{e}_{\overline{OC}} \cdot k) k \right]$$

En donde: $F_{\overline{OA}}$, $F_{\overline{OB}}$ y $F_{\overline{OC}}$ son las componentes de \bar{F} según las direcciones \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC} , respectivamente, que se calcularon al efectuar la suma $F_{\overline{OA}} + F_{\overline{OB}} + F_{\overline{OC}} = \bar{F}$, en la que, por igualdad entre vectores, se obtienen 3 ecuaciones simultáneas con 3 incógnitas: $F_{\overline{OA}}$, $F_{\overline{OB}}$ y $F_{\overline{OC}}$.

Del proceso anterior puede concluirse que el número máximo de ecuaciones que es posible obtener es tres; por lo tanto, tres será el número máximo de componentes independientes en que puede resolverse una fuerza en el espacio de 3 dimensiones.

Ejemplo. Determine la fuerza resultante del sistema -
mostrado en la figura .



Solución:

Los vectores unitarios en las direcciones de las fuer-
zas, son:

$$\bar{e}_{\delta_1} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{(-4i+0j+k)-(0i+8j+0k)}{|\overline{AB}|} = \frac{-4i-8j+k}{\sqrt{(-4)^2+(-8)^2+1^2}} = \frac{1}{9}(-4i-8j+k)$$

$$\bar{e}_{\delta_2} = \frac{\overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{(0i+8j+0k)-(4i+3j-2k)}{|\overline{CA}|} = \frac{-4i+5j+2k}{\sqrt{(-4)^2+5^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{45}}(-4i+5j+2k)$$

Los vectores equipolentes resultan:

$$\bar{F}_1 = |\bar{F}_1| \bar{e}_{\delta_1} = 18 \left[\frac{1}{9} (-4i-8j+k) \right] = -8i-16j+2k \left[t_{\delta} \right]$$

$$\bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \bar{e}_{\delta_2} = 20.1 \left[\frac{1}{\sqrt{45}} (-4i+5j+2k) \right] = -12i+15j+6k \left[t_{\delta} \right]$$

La fuerza resultante es la suma vectorial de las fuer--

zas que constituyen el sistema; así:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n F_i = (-8i-16j+2k) + (-12i+15j+0k) = -20i-j+8k \quad [t_f]$$

Para que la fuerza resultante quede completamente definida es necesario precisar su magnitud, dirección y posición:

a) Magnitud :

$$|\bar{R}| = \sqrt{(-20)^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{400+1+64} = \sqrt{465} = 21.56 \quad [t_f]$$

b) Dirección :

$$\cos \alpha = \frac{-20}{21.56} = -0.9276; \quad \cos \beta = \frac{-1}{21.56} = -0.0464;$$

$$\cos \gamma = \frac{8}{21.56} = 0.3711$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0.9276^2 + 0.0464^2 + 0.3711^2 = 0.8604 + 0.0021 +$$

$$0.1377 \approx 1.000$$

c) Posición: la del punto $A(0, 8, 0)$ $[m]$

Ejemplo. Una fuerza de 100 kg_f de magnitud forma ángulos de 60° , 45° y 120° con los ejes X, Y y Z, respectivamente. Resolver dicha fuerza en sus componentes cartesianas.

Solución:

De la expresión 2.1.4-3 se deduce que las componentes solicitadas son:

$$\bar{F}_x = |\bar{F}| \cos \alpha \hat{i} = 100 \cos 60^\circ \hat{i} = (100 \times 0.5) \hat{i} = 50 \hat{i} \quad [\text{Kg}_f]$$

$$\bar{F}_y = |\bar{F}| \cos \beta \hat{j} = 100 \cos 45^\circ \hat{j} = (100 \times 0.707) \hat{j} = 70.7 \hat{j} \quad [\text{Kg}_f]$$

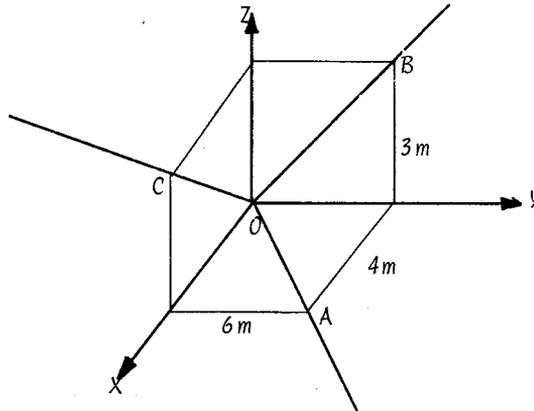
$$\bar{F}_z = |\bar{F}| \cos \gamma \hat{k} = 100 \cos 120^\circ \hat{k} = 100(-0.5) \hat{k} = -50 \hat{k} \quad [\text{Kg}_f]$$

Ejemplo. Comprobar que las componentes ortogonales del problema anterior, corresponden a una fuerza de 100 de magnitud

Solución:

$$\begin{aligned} |\bar{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{50^2 + 70.7^2 + (-50)^2} = \\ &= \sqrt{2500 + 5000 + 2500} = \sqrt{10000} = 100 \quad \text{Kg}_f \end{aligned}$$

Ejemplo. Descomponer la fuerza $\bar{F} = 21.16\hat{i} + 30.11\hat{j} + 23.18\hat{k}$ $[\text{Kg}_f]$ en las direcciones \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC} de la figura.



Solución:

$$\overline{F}_{\overline{OA}} + \overline{F}_{\overline{OB}} + \overline{F}_{\overline{OC}} = \overline{F}$$

$F_{\overline{OA}}\overline{e}_{\overline{OA}} + F_{\overline{OB}}\overline{e}_{\overline{OB}} + F_{\overline{OC}}\overline{e}_{\overline{OC}} = \overline{F}$; donde $F_{\overline{OA}}$, $F_{\overline{OB}}$ y $F_{\overline{OC}}$ son las proyecciones de las fuerzas buscadas en \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC} :

$$\overline{e}_{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{|\overline{OA}|} = \frac{1}{\sqrt{52}} (4i+6j-0k) = 0.554i + 0.832j + 0k$$

$$\overline{e}_{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{|\overline{OB}|} = \frac{1}{\sqrt{45}} (0i+6j+3k) = 0i + 0.894j + 0.447k$$

$$\overline{e}_{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|} = \frac{1}{\sqrt{25}} (4i+0j+3k) = 0.8i + 0j + 0.6k$$

$$\overline{F}_{\overline{OA}} = F_{\overline{OA}} 0.554i + F_{\overline{OA}} 0.832j + 0k$$

$$\overline{F}_{\overline{OB}} = (0)i + F_{\overline{OB}} 0.894j + F_{\overline{OB}} 0.447k$$

$$\overline{F}_{\overline{OC}} = F_{\overline{OC}} 0.8i + 0j + F_{\overline{OC}} 0.6k$$

$$\begin{aligned} \overline{F} = & (0.554 F_{\overline{OA}} + 0.8 F_{\overline{OC}})i + (0.832 F_{\overline{OA}} + 0.894 F_{\overline{OB}})j + \\ & +(0.447 F_{\overline{OB}} + 0.6 F_{\overline{OC}})k \end{aligned}$$

En donde:

$$\left. \begin{aligned} 0.554 F_{\overline{OA}} + 0.8 F_{\overline{OC}} &= 21.16 \\ 0.832 F_{\overline{OA}} + 0.894 F_{\overline{OB}} &= 30.11 \\ 0.447 F_{\overline{OB}} + 0.6 F_{\overline{OC}} &= 23.18 \end{aligned} \right\} \text{(A)}$$

Siendo la solución del sistema de ecuaciones (A) la si

guiente:

$$F_{OA} = 9.31 \text{ Kg}_f$$

$$F_{OB} = 25 \text{ Kg}_f$$

$$F_{OC} = 20 \text{ Kg}_f$$

2.2 MOMENTOS DE UNA FUERZA

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido, le provoca una translación, en la misma dirección de ella, en la que la aceleración es directamente proporcional a tal acción, de acuerdo al contenido de la 2a. Ley de Newton; sin embargo, también puede inducirle rotaciones en torno a puntos o a ejes del espacio. En ocasiones sólo se manifiesta el último de los efectos mencionados, y se conviene en que a la tendencia a girar que experimentan los cuerpos por la presencia de fuerzas, se le define como *momento de una fuerza* respecto a puntos o a ejes cualesquiera.

2.2.1 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO

Sea C un cuerpo rígido, y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el cual se encuentra aplicada una fuerza $\vec{F} = iF_x + jF_y + kF_z$

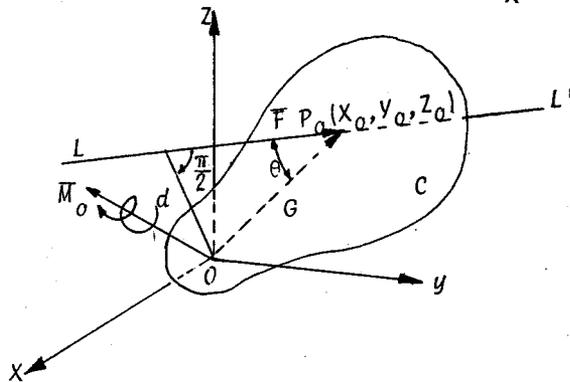


Figura 2.2.1-1

Consideremos que el origen del marco cartesiano de referencia lo ubicamos en un punto cualquiera del espacio o del cuerpo en cuestión, tal como se muestra en la figura 2.2.1-1. En esta situación, definimos como momento de la fuerza \vec{F} con respecto al punto O , denominado centro de momentos, al vector:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_O \times \vec{F} \quad (2.2.1-1)$$

en donde:

\vec{M}_O representa la tendencia de rotación denominada momento. El subíndice señala el punto considerado como centro de momentos,

\vec{r}_O es el vector de posición del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, mismo que define al segmento dirigido \overrightarrow{OP}_0 .

El vector momento \vec{M}_O se considera fijo en el centro de momentos, y mide convencionalmente la tendencia al giro que experimenta el cuerpo C en torno al punto "O"; su magnitud es el producto ordinario del tamaño de la fuerza por su distancia "d" al centro de momentos:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{F}| |\vec{r}_O| \text{ sen } \theta = Fd,$$

pues

$$|\vec{r}_O| \text{ sen } \theta = d$$

$$M_O = |\vec{M}_O| = Fd \quad (2.2.1-2)$$

La tendencia al giro positivo puede establecerse a partir de los productos vectoriales de los vectores unitarios i , j y k , así: $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$; considerándose negativas las operaciones inversas. Resulta lo mismo considerar la

convención de rotación positiva, la contraria a la de las manecillas de un reloj.

La dirección del vector momento se determina por medio de sus cosenos directores. Conviene hacer notar que:

$$\overline{M}_0 \cdot \overline{F} = 0$$

y el vector momento es perpendicular al plano que forman el soporte o línea de acción $\overline{L'L}$ de la fuerza y el centro de momentos, pues un punto y una recta definen a tal lugar geométrico.

Recordando la condición de paralelismo, sea $P(X, Y, Z)$ un punto cualquiera del segmento dirigido $\overline{L'L}$; $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ un punto conocido de la línea de acción de \overline{F} ; \overline{F} un vector libre deslizante de magnitud y dirección también conocidos y que, como se ha visto, llamamos vector equipolente de la fuerza; así:

$$\overline{P_0P} \parallel \overline{F}$$

Entonces $(\overline{\pi} - \overline{\pi}_0) \times \overline{F} = 0$, y esta expresión corresponde a la ecuación vectorial de una recta. Desarrollando la anterior expresión:

$$\overline{\pi} \times \overline{F} = \overline{\pi}_0 \times \overline{F} = \overline{M}_0$$

$$\overline{\pi} \times \overline{F} = \overline{M}_0$$

que confirma, por otra parte, el principio de transmisibilidad de las fuerzas.

2.2.2 CAMBIO DEL CENTRO DE MOMENTOS

Para facilitar la comprensión de esta parte del estudio del momento de una fuerza con respecto a un punto Q cualquiera del espacio, omitimos el diagrama del cuerpo rígido, conside-

rando que $P_0(x, y, z)$ es un punto de tal cuerpo y que $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ puede no serlo; en tales circunstancias:

$$\overline{M}_Q = \overline{QP}_0 \times \overline{F} \quad (2.2.2-1)$$

pero:

$$\overline{QP}_0 = \overline{r}_0 - \overline{r}_Q$$

Sustituyendo:

$$\overline{M}_Q = (\overline{r}_0 - \overline{r}_Q) \times \overline{F} = \overline{r}_0 \times \overline{F} - \overline{r}_Q \times \overline{F}$$

y:

$$\overline{M}_Q = \overline{M}_0 - \overline{r}_Q \times \overline{F} \quad (2.2.2-2)$$

expresión que nos permite calcular el momento de la fuerza \overline{F} con respecto a cualquier punto del espacio.

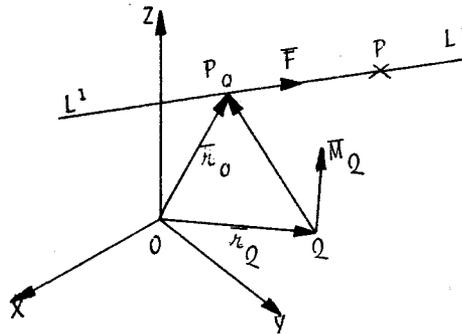


Figura 2.2.2-1

2.2.3 CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE EL MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO SEA NULO

Teorema. La condición necesaria y suficiente para que el momento de una fuerza \vec{F} respecto a un punto sea nulo, es que tal centro de momentos pertenezca al soporte de la fuerza.

Demostración. Sea $P(X, Y, Z)$ un punto de $\overline{L'L}$ como muestra la figura 2.2.2-1, entonces:

$$\vec{M}_P = 0$$

pues:

$$\vec{F} \neq 0$$

Como \vec{r} es el vector de posición de P , de la expresión 2.2.2-2:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{F}$$

pero: $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$, en consecuencia:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{M}_O = 0$$

Otra forma de demostrarlo, partiendo de la figura - - 2.2.2-1, es lo siguiente:

$$\vec{M}_P = \overline{PP}_0 \times \vec{F} = 0$$

pero:

$$\vec{F} \neq 0 \text{ y } \overline{PP}_0 \neq 0$$

Como $P(X, Y, Z)$ y $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ son puntos del soporte de la fuera

za, la expresión anterior se verifica sí y sólo si $\overline{PP_0} \parallel \overline{F}$; y como el producto vectorial de cursores paralelos es nulo, necesariamente:

$$\overline{M}_P = 0$$

Consideremos ahora el caso particular del momento de una fuerza respecto a un punto en el plano, tal como se muestra en la figura 2.2.3-1.

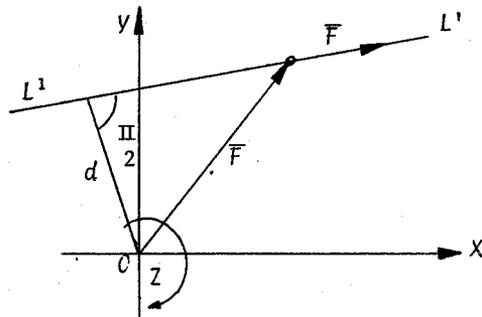


Figura 2.2.3-1

La expresión que mide la tendencia al giro que un cuerpo o una partícula material experimenta en torno al origen del sistema cartesiano, por la presencia de una fuerza, es la misma:

$$\begin{aligned} \overline{M}_O &= \overline{r} \times \overline{F} \\ &= (iX + jY) \times (iF_x + jF_y) \end{aligned}$$

$$y \quad \overline{M}_O = (XF_y - YF_x) k$$

Así:

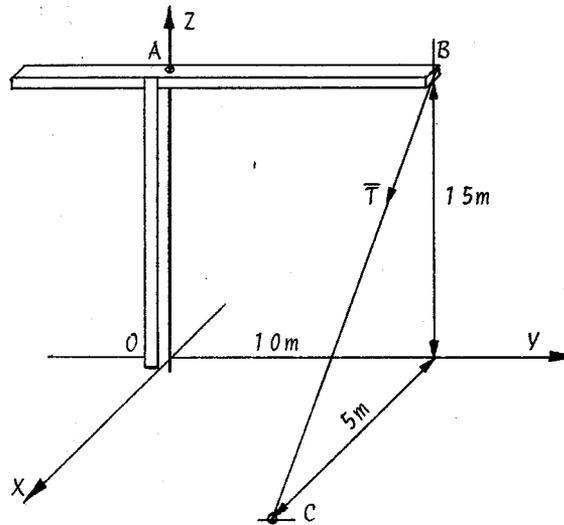
$$M_O = (XF_y - YF_x)$$

En fin:

$$M_0 = Fd$$

expresión que nos proporciona la magnitud del momento de la fuerza respecto al origen.

Ejemplo. Encuentre el momento producido por la fuerza mostrada en la siguiente figura con respecto al punto O y al punto A , donde $|\bar{T}| = 10 \text{ t}_f$



Solución:

Procederemos a encontrar el vector equipolente de la fuerza \bar{T} , para lo cual encontramos las coordenadas de los puntos, B y C

$$B(0, 10, 15) , C(5, 10, 0) \quad [m]$$

El vector unitario en dirección de \bar{T} será \bar{e}_T :

$$\bar{e}_T = \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{5i - 15k}{\sqrt{5^2 + 15^2}} = 0.316i - 0.949k$$

$$\bar{T} = |\bar{T}| \bar{e}_T = 3.16i - 9.49k \quad [t_f]$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 10 & 15 \\ 3.16 & 0 & -9.49 \end{vmatrix} = -94.90i + 47.40j - 31.60k \quad [t_f \cdot m]$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_B \times \vec{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 10 & 0 \\ 3.16 & 0 & -9.49 \end{vmatrix} = -94.90i - 31.60k \quad [t_f \cdot m]$$

2.2.4 COORDENADAS VECTORIALES O PLÜCKERIANAS DE UNA FUERZA

Sea $F \neq 0$ una fuerza cuya línea de acción es $L'L$; $P(X, Y, Z)$, un punto de soporte, y \vec{r} el vector de posición de ese punto de $L'L$. En esta situación, como:

$$\vec{F} \neq 0,$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{y}$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{F} = 0,$$

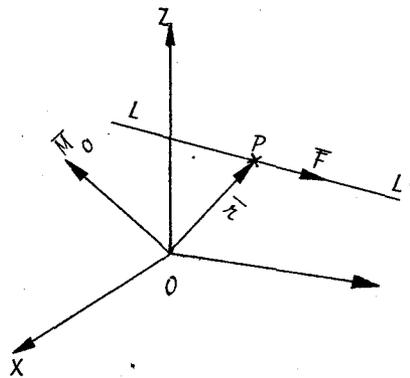


Figura 2.2.4-1

a la pareja de valores (\vec{F}, \vec{M}_O) se le define como las coordenadas vectoriales o Plückerianas de una fuerza. Recíprocamente, dados el vector libre \vec{F} y el vector fijo \vec{M}_O , de tal manera que $\vec{M}_O \cdot \vec{F} = 0$, a esta pareja de vectores corresponde una fuerza de magnitud $F = |\vec{F}|$, de dirección la propia del vector \vec{F} y de línea.

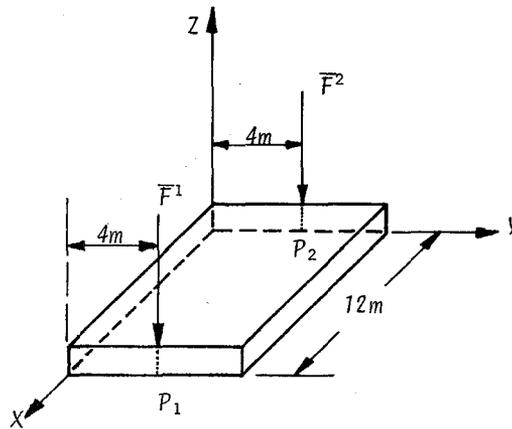
de acción $\bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O$. Esto es, existe correspondencia biunívoca entre el conjunto de fuerzas y el conjunto de parejas de vectores como las indicadas, que puede anotarse:

$$(\bar{F}, \bar{M}_O), \bar{F} \neq 0 \quad \text{y} \quad \bar{M}_O \cdot \bar{F} = 0$$

y que permite la identificación analítica de una fuerza cualquiera. Este es un recurso que será muy útil en el tratamiento de sistemas de fuerzas.

Ejemplo. Encuentre las coordenadas vectoriales de las fuerzas indicadas en la siguiente figura.

$$|\bar{F}^1| = |\bar{F}^2| = 400 \text{ kg}_f$$



Solución:

$$\bar{M}_O^1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}^1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} = -1600i + 4800j + 0k \quad [\text{kg}_f \cdot \text{m}]$$

$$\bar{M}_O^2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} = -1600i + 0j + 0k \quad [\text{kg}_f \cdot \text{m}]$$

Las coordenadas vectoriales de \vec{F}^1 son:

$$(-400k, -1600i + 4800j)$$

y de \vec{F}^2 son:

$$(-400k, -1600i)$$

Ejemplo. Dadas las coordenadas vectoriales de las siguientes fuerzas, encuentre un punto de sus líneas de acción:

$$\vec{F}^1 \equiv (30i - 40j + 50k), (200i - 150j - 240k)$$

$$\vec{F}^2 \equiv (50i + 70j - 100k), (-300i - 200j - 290k)$$

(Fuerzas en t_g , longitudes en m).

Solución:

Para \vec{F}^1 tenemos:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}^1 = (\vec{M}_O)_1 \text{ si tomamos a } \vec{r}_1 = xi + yj + zk$$

$$(\vec{M}_O)_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 30 & -40 & 50 \end{vmatrix} = (50y + 40z)i - (50x - 30z)j + (-40x - 30y)k = 200i - 150j - 240k$$

o sea que:

$$50y + 40z = 200; -50x + 30z = -150; -40x - 30y = -240$$

de donde:

$$y = 4, z = 0, x = 3 \quad P_1(3, 4, 0)$$

Para \bar{F}^2 tenemos que si $\bar{\pi}_2 = x'i + y'j + z'k$

$$\bar{\pi}_2 \times \bar{F}^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ 50 & 70 & -100 \end{vmatrix} = (-100y' - 70z')i - (-100x' - 50z')j + (70x' - 50y')k$$

$$(-100y' - 70z')i + (100x' + 50z')j + (70x' - 50y')k = -300i - 200j - 290k$$

$$-100y' - 70z' = -300 ; 100x' + 50z' = -200 ; 70x' - 50y' = -290$$

$$z' = \frac{100y' - 300}{-70} ; z' = \frac{-100x' - 200}{50}$$

$$\frac{100y' - 300}{70} = \frac{100x' + 200}{-50} = \frac{z' - 0}{1}$$

$$\frac{(y' - 3)}{7/10} = \frac{(x' + 2)}{-1/2} = \frac{z' - 0}{1}$$

la cual es una línea recta que pasa por el punto $P_2(-2, 3, 0)$ y tiene números directores $[7/10; -1/2; 1]$

2.2.5 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE

Sea una fuerza \bar{F} cuya línea de acción $\overline{L'L}$ se cruza en el espacio con la recta $\overline{E'E}$, tal como muestra la figura 2.2.5-1.

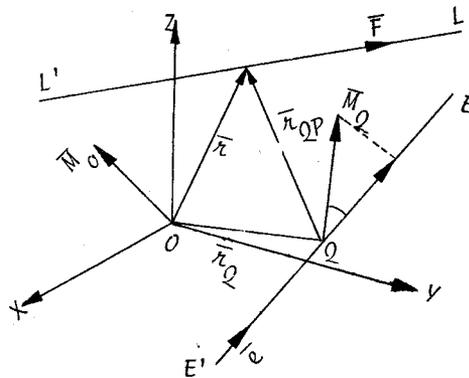


Figura 2.2.5-1

Definición.- Momento de la fuerza \bar{F} , respecto al eje $\bar{E'E}$, es la proyección ortogonal en éste del momento de la fuerza respecto a un punto Q cualquiera del mismo, es decir:

$$M_{E'E} = \text{Proy}_{E'E} \bar{M}_Q$$

De la expresión 2.2.2-2

$$\bar{M}_Q = \bar{M}_O - \bar{r}_Q \times \bar{F}$$

como la dirección de $\bar{E'E}$ está dada por el vector unitario \bar{e} , - - aquella expresión puede escribirse, en términos de vectores:

$$M_{E'E} = \bar{M}_Q \cdot \bar{e} \quad (2.2.5-1)$$

en su forma escalar, o

$$\bar{M}_{E'E} = (\bar{M}_Q \cdot \bar{e}) \cdot \bar{e} \quad (2.2.5-2)$$

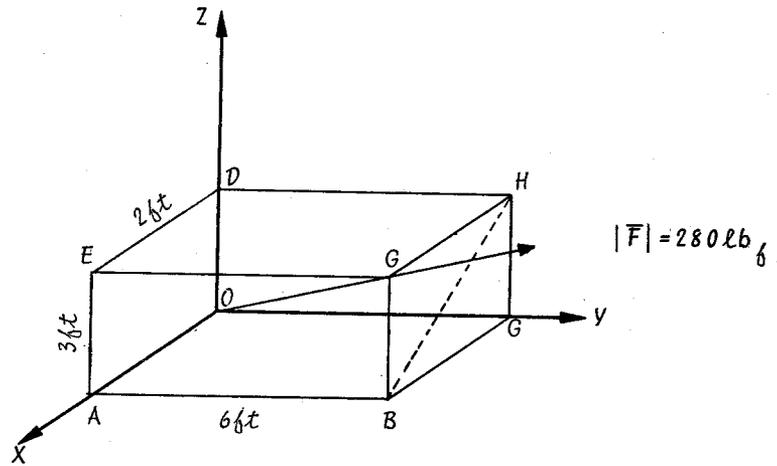
que corresponde a la vectorial respectiva.

De la observación de la figura 2.2.5-1, obtenido o determinado el valor \bar{M}_O , momento de la fuerza con respecto al origen. Se pueden calcular los momentos con respecto a los ejes - coordenados, así:

$$M_{X'X} = \bar{M}_O \cdot \bar{i}, \quad M_{Y'Y} = \bar{M}_O \cdot \bar{j} \quad \text{y} \quad M_{Z'Z} = \bar{M}_O \cdot \bar{k}$$

aplicando la expresión 2.2.5-1.

Ejemplo. Calcule el momento de la fuerza de 280 lb_f de magnitud que se indica en la figura con respecto a los ejes coordenados y con respecto a la línea que pasa por B y H.



Solución:

Coordenadas de $G(2, 6, 3)$ $[\text{ft}]$

Vector unitario:

$$\vec{e}_f = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{1}{7} (2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k})$$

Vector equipolente de F :

$$\vec{F} = 40(2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}) \quad [\text{lb}_f]$$

Momento con respecto al origen $\bar{M}_O = 0$; pues $O(0,0,0)$ es un punto de la línea de acción de \bar{F} .

en consecuencia:

$$M_{X'X} = M_{Y'Y} = M_{Z'Z} = 0$$

Momento con respecto a \bar{BH} :

$$M_{\bar{BH}} = \bar{M}_B \cdot \bar{e}_{BH} = \bar{M}_H \cdot \bar{e}_{BH}$$

Coordenadas de $B(2,6,0)$ $\begin{bmatrix} 6t \\ \end{bmatrix}$
 $H(0,6,3)$ $\begin{bmatrix} 6t \\ \end{bmatrix}$

y

$$\bar{e}_{BH} = \frac{-2i+0+3k}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}} (-2i+3k)$$

$$\bar{M}_B = (-2i-6j) \times (2i+6j+3k) (40) = (-18i+6j-12k+12k) (40)$$

$$\bar{M}_B = 40(-18i+6j), [lb_f \cdot 6t]$$

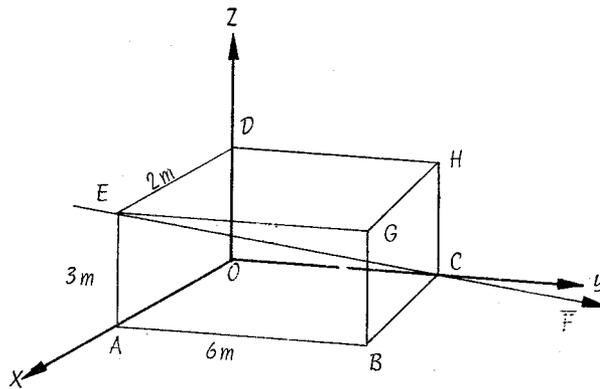
y

$$M_{\bar{BH}} = 40(-18i+6j) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} (-2i+3k) = \frac{40}{\sqrt{13}} 36 = 399.384$$

en fin

$$M_{\bar{BH}} = 399.384 \text{ lb}_f \cdot 6t$$

Ejemplo. Calcule el momento de la fuerza de 140 kg_f de magnitud indicada en la figura, con respecto a las aristas \bar{DH} y \bar{DA} respectivamente.



Solución:

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas de } E(2, 0, 3) & \quad [m] \\ C(0, 6, 0) & \quad [m] \\ D(0, 0, 3) & \quad [m] \end{aligned}$$

$$\bar{e}_f = \frac{-2i+6j-3k}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{1}{7} (-2i+6j-3k)$$

Vector equipolente de la fuerza:

$$\bar{F} = \bar{e}_f |\bar{F}| = \frac{140}{7} (-2i+6j-3k) \text{ y } \bar{F} = 20(-2i+6j-3k) [kg_f]$$

El momento con respecto a \overline{DH} y \overline{DA} , se anota:

$$M_{\overline{DA}} = \bar{M}_O \cdot i \quad M_{\overline{DH}} = \bar{M}_O \cdot j = \bar{M}_H \cdot j$$

$$\bar{M}_O = \bar{r}_E \times \bar{F} = \bar{r}_C \times \bar{F}; \quad \bar{M}_O = 6j \times (-2i+6j-3k) (20)$$

$$\bar{M}_O = 20(-18i+12k) [kg_f \cdot m]$$

y

$$M_{\overline{OA}} = 20(-18i + 12k) \cdot i = -360 \text{ kg}_f \cdot \text{m}$$

$$M_{\overline{OA}} = -360 \text{ kg}_f \cdot \text{m}$$

$$\overline{M}_D = (\overline{r}_C - \overline{r}_D) \times \overline{F} = (6j - 3k) \times (-2i + 6j - 3k)(20)$$

$$\overline{M}_D = 20(-18i + 12k + 6j + 18i) = 20(6j + 12k) \text{ (kg}_f \cdot \text{m)}$$

y

$$M_{\overline{DH}} = 20(6j + 12k) \cdot j = 120 \text{ kg}_f \cdot \text{m}$$

$$M_{\overline{DH}} = +120 \text{ kg}_f \cdot \text{m}$$

2.2.6 CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE EL MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE SEA NULO

Teorema. La condición necesaria y suficiente para que el momento de una fuerza respecto a un eje sea nulo, es que el soporte de esa fuerza y el eje sean coplanares.

Demostración. Sea una fuerza \overline{F} cuya línea de acción es coplanar con un eje cualquiera $\overline{E'E}$, como se ilustra en la figura 2.2.6-1. Puesto que:

$$\overline{M}_Q = \overline{QP} \times \overline{F}$$

es un vector normal al plano definido por el soporte de la fuerza y el centro de momentos contenido en el eje; así:

$$\overline{M}_Q = \overline{KN}$$

Como $\overline{E'E}$ está en el mismo plano:

$$\overline{KN} \cdot \overline{e} = 0$$

ésto es: $\bar{M}_Q \cdot \bar{e} = 0$,

o sea que:

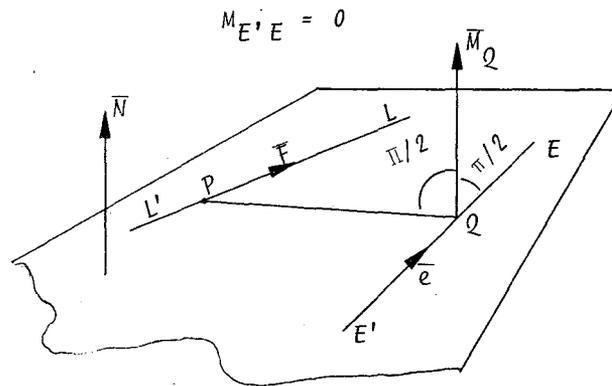


Figura 2.2.6-1

Esta situación ocurre en los casos en que la línea de acción de una fuerza y los ejes son paralelos entre sí o se intersectan con ella, ya que invariablemente definirán planos que los contengan y, de esta manera, tendrá momento nulo con respecto a tales ejes.

2.2.7 CASO TRIVIAL DE MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE

Consideremos a la fuerza \vec{F} , de la figura 2.2.7-1 de línea de acción $L'L$, tal que $\vec{F} \neq 0$. Los momentos de la fuerza con respecto a cada uno de los ejes coordenados serán:

$$M_{X'X} = \bar{M}_O \cdot \bar{i}, \quad M_{Y'Y} = \bar{M}_O \cdot \bar{j} \quad \text{y} \quad M_{Z'Z} = \bar{M}_O \cdot \bar{k}$$

expresiones escalares que podemos escribir así:

$$M_{X'X} = YF_z - ZF_y, \quad M_{Y'Y} = ZF_x - XF_z \quad \text{y} \quad M_{Z'Z} = XF_y - YF_x$$

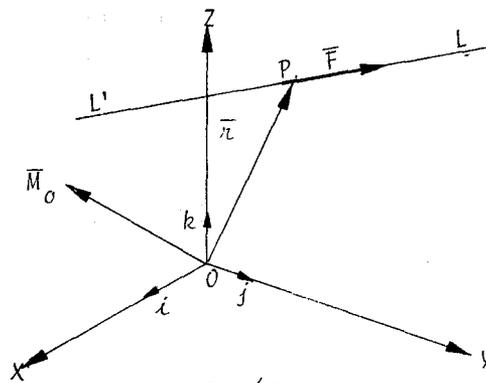


Figura 2.2.7-1

y que son consecuencia del desarrollo del determinante $\bar{r} \times \bar{F}$ en -- donde: $\bar{r} = iX + jY + kZ$ y $\bar{F} = iF_x + jF_y + kF_z$ corresponden al -- vector de posición de un punto de la línea de acción de la fuerza y al vector equipolente de la fuerza dados en su forma trinómica, respectivamente; resultado cuya comprensión es obvia si to -- manos en cuenta la figura 2.2.7-2, que contempla la descomposi -- ción de la fuerza dada según los ejes de referencia, así como -- los teoremas expuestos con anterioridad; en fin:

$$M_{x',x} = yF_z - zF_y$$

$$M_{y',y} = zF_x - xF_z$$

$$M_{z',z} = xF_y - yF_x$$

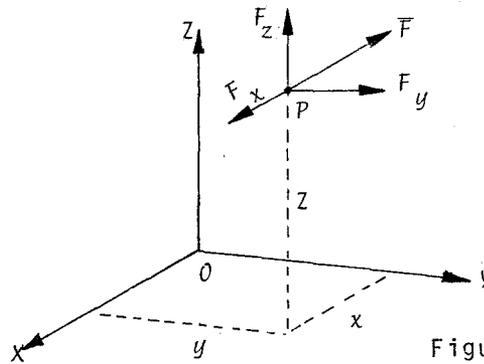


Figura 2.2.7-2

expresiones de las que se concluye que el momento de una fuerza con respecto a un eje será igual a la magnitud de la fuerza por la distancia de ésta al eje (la perpendicular común al eje y la

línea de acción de la fuerza) siempre y cuando la fuerza y el eje sean perpendiculares.

2.3 SISTEMAS DE FUERZAS

2.3.1 COORDENADAS VECTORIALES DEL SISTEMA DE FUERZAS: RESULTANTE GENERAL Y MOMENTO DEL SISTEMA

Si se considera a un conjunto o sistema de fuerzas actuando sobre una partícula masa, un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos y/o partículas, dicho sistema de fuerza producirá un efecto que tenderá a modificar el estado de movimiento de los cuerpos en que actúa.

A la capacidad de un sistema de fuerzas para producir tal efecto que será de cambio del estado de movimiento lineal y angular, se le podrá representar por un vector equipolente (un vector libre), asociado a una sola fuerza y por un vector fijo en el origen, que se asocia a un momento único.

En efecto, con apoyo en los postulados discutidos en lo que antecede, a los vectores equipolentes de las fuerzas (ésto es, a los vectores libres con que se les representa) se les puede sustituir por uno solo que representa a una fuerza capaz de producir el mismo efecto. A este vector, se le denominará *resultante general* del sistema, y estará dado por:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i \quad (2.3.1-1)$$

Por su parte, la tendencia al giro con respecto al origen, se le puede obtener por la superposición de las tendencias producidas por cada una de las fuerzas del sistema. Así, la capacidad del sistema de fuerzas para producir esta tendencia al giro se le representará por un vector fijo en el origen, que denominaremos *momento del sistema* y que será igual a la suma de los

los vectores momento con respecto al origen de cada fuerza que conforman a dicho sistema; ésto es:

$$\bar{M}_O^R = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O^i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}^i \quad (2.3.1-2)$$

De lo anterior se desprende que, de una manera análoga al caso de una sola fuerza, a un sistema de fuerzas se le puede asociar una pareja de vectores (\bar{R}, \bar{M}_O^R) , denominada *coordenadas vectoriales o Plückerianas del sistema*, que caracterizan a dicho sistema:

$$(\bar{R}, \bar{M}_O^R) = \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}^i, \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}^i \right)$$

Ahora bien, si en las expresiones 2.3.1-1 y 2.3.1-2 que definen a las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas se tienen presentes las leyes asociativa y distributiva de la suma vectorial, se tiene que:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = \sum_{i=1}^k \bar{F}^i + \sum_{i=k+1}^l \bar{F}^i + \dots + \sum_{i=m+1}^n \bar{F}^i$$

y

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O^i = \sum_{i=1}^k \bar{M}_O^i + \sum_{i=k+1}^l \bar{M}_O^i + \dots + \sum_{i=m+1}^n \bar{M}_O^i$$

expresiones en las que si hacemos a:

$$\sum_{i=1}^k \bar{F}^i = \bar{R}^i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k \bar{M}_O^i = \bar{M}_O^R$$

conduce a:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^h \bar{R}^i$$

y

$$\vec{M}_0^R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0^i$$

en las que, si a su vez se supone que \vec{r}^i y \vec{M}_0^i son las coordenadas vectoriales de subsistemas en que se puede descomponer al sistema de fuerzas, se infiere que la suma de éstas es igual a las coordenadas del sistema. Esta interpretación se esquematiza en la figura 2.3.1-1.

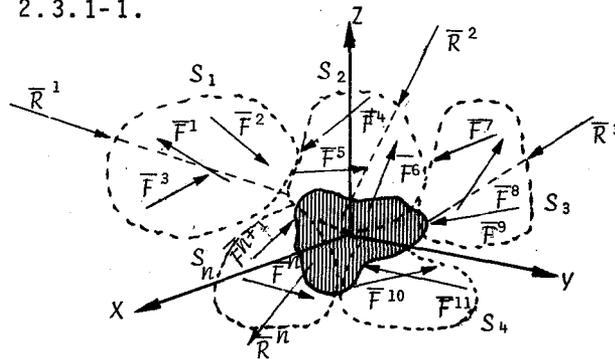


Figura 2.3.1-1

Por otra parte, es importante destacar que, contrariamente al caso de una sola fuerza, en el que sus coordenadas cumplen la condición de que $\vec{F} \cdot \vec{M}_0 = 0$ por ser \vec{F} y $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ perpendiculares, el valor de $\vec{R} \cdot \vec{M}_0^R$ no es necesariamente igual a cero para las coordenadas de un sistema de fuerzas.

Analicemos ahora cómo se pueden clasificar a los sistemas de fuerzas en el espacio según la forma en que se presentan.

Los sistemas de fuerzas en el espacio pueden ser concurrentes, paralelos, coplanares o sistemas generales de fuerzas. Cabe hacer notar que en esta clasificación se agotan todos los casos posibles (es exhaustiva) pero en ella, un sistema puede caer en más de una de las clasificaciones (no es excluyente), por lo que de tal clasificación se puede obtener otra de carácter particular, en la que podría incluirse a los sistemas colineales, concurrentes en el plano, etc.

Así, por sistemas de fuerzas concurrentes se designa a aquellos en el que las líneas de los soportes de todas las fuerzas, se intersectan en un solo punto del espacio; tal como se muestra en la figura 2.3.1-2.

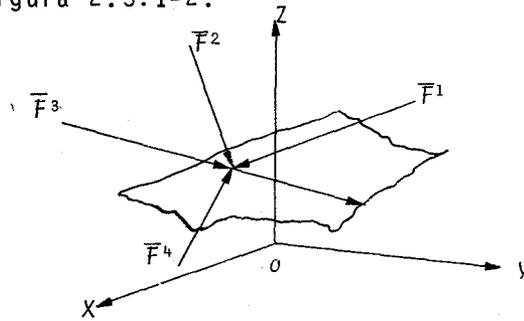


Figura 2.3.1-2

Bajo la clasificación de sistemas de fuerzas paralelas incluimos a aquellas en las que los soportes de todas las fuerzas tienen las mismas direcciones, aún cuando las fuerzas puedan tener diferentes sentidos; así las fuerzas en estos sistemas ni se cortan, ni se cruzan. En la figura 2.3.1-3 se muestra una representación de estos sistemas, y es de observarse que no necesariamente todas ellas pueden quedar en un solo plano, por lo que un caso particular en esta clasificación sería cuando además de ser paralelas también fueran coplanares.

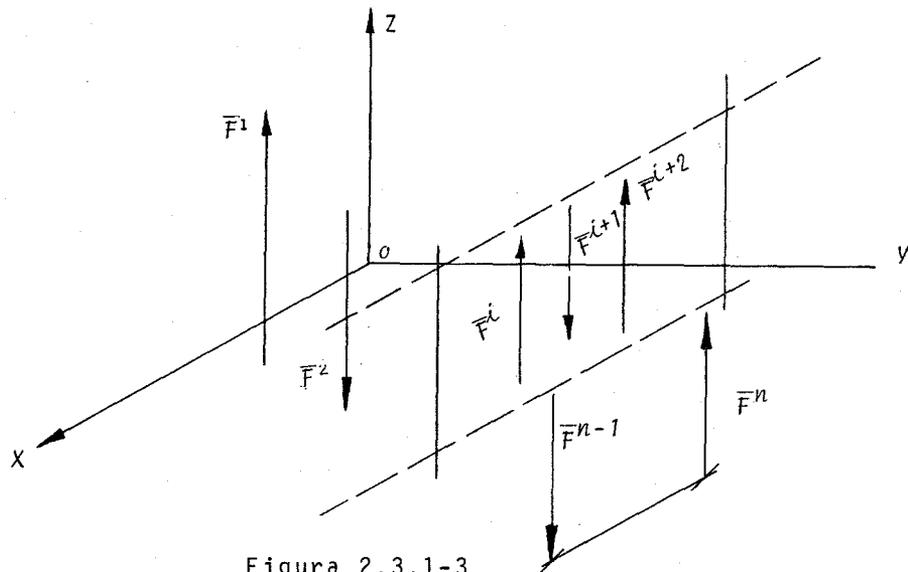


Figura 2.3.1-3

De estas dos clasificaciones se deriva, como un caso particular, el de las fuerzas colineales, en el que se clasifican a las fuerzas concurrentes a la vez que paralelas

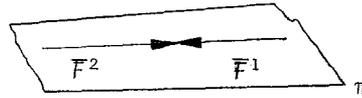


Figura 2.3.1-4

Los sistemas de fuerzas coplanares son aquellos en que todas las fuerzas del sistema quedan contenidas en un solo plano; ésto es, los soportes de las fuerzas definen a un plano; casos particulares de éste serán los sistemas paralelos en el plano, así como los concurrentes en el plano. Véase figura 2.3.1-5

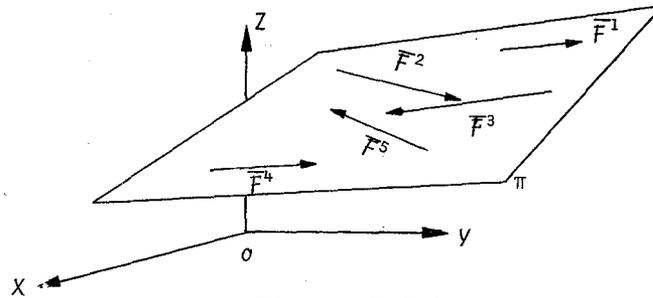


Figura 2.3.1-5

Por último bajo la clasificación de sistemas generales de fuerzas, se incluirán a aquellos en el que no todas las fuerzas son paralelas, concurrentes ó coplanares; así, un ejemplo particular de un sistema incluido en esta clasificación es el de dos fuerzas que se cruzan en el espacio. Véase figura 2.3.1-6.

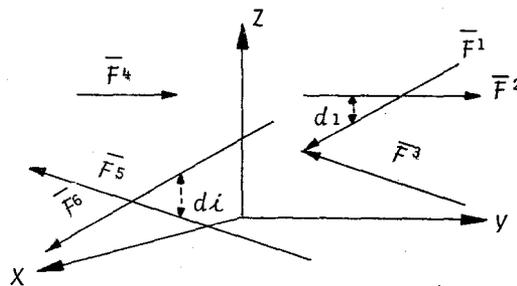


Figura 2.3.1-6

Una vez establecida esta clasificación, analicemos las siguientes proposiciones, que podrían ser de utilidad práctica.

- a) Si un sistema de fuerzas en el espacio es concurrente en un punto, siempre se cumple la relación:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R = 0.$$

En efecto, como se muestra en la figura, existe un vector de posición común a todas las fuerzas:

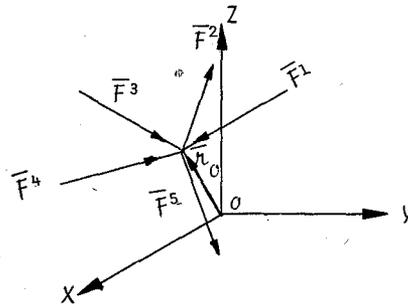


Figura 2.3.1-7

de donde:

$$\bar{M}_O^R = \bar{r}_O \times \bar{F}^1 + \bar{r}_O \times \bar{F}^2 + \dots + \bar{r}_O \times \bar{F}^n$$

que por la propiedad asociativa:

$$\bar{M}_O^R = \sum_{i=1}^n \bar{r}_O \times (\bar{F}^1 + \bar{F}^2 + \dots + \bar{F}^n) = \bar{r}_O \times \sum_{i=1}^n (\bar{F}^1 + \bar{F}^2 + \bar{F}^3 + \dots + \bar{F}^n)$$

pero cómo

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}^1 + \bar{F}^2 + \dots + \bar{F}^n) = \bar{R}$$

se tiene que:

$$\vec{M}_0^R = \vec{\pi}_0 \times \vec{R} \quad \text{y} \quad \vec{M}_0^R \cdot \vec{R} = (\vec{\pi}_0 \times \vec{R}) \cdot \vec{R}$$

y por lo tanto $\vec{M}_0^R \cdot \vec{R} = 0$, toda vez que $\vec{M}_0^R = \vec{\pi}_0 \times \vec{R}$ es perpendicular a \vec{R} (por la definición de producto vectorial).

b) Si el sistema de fuerzas está constituido por fuerzas paralelas, se cumple que:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_0^R = 0$$

En efecto, por condición de paralelismo de $F^1 = K_1 F^2 = \dots = K_n F^n =$ se puede escribir que:

$$F^1 = F^1 \vec{e}, \quad F^2 = F^2 \vec{e} \quad \dots \quad F^n = F^n \vec{e}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n F^i \vec{e} = F^1 \vec{e} + F^2 \vec{e} + \dots + F^n \vec{e} =$$

$$(F^1 + F^2 + \dots + F^n) \vec{e}$$

si hacemos:

$$(F^1 + F^2 + \dots + F^n) = R$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n F^i \vec{e} = \left(\sum_{i=1}^n F^i \right) \vec{e} = R \vec{e}$$

Por su parte:

$$\vec{M}_0^R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0^i = \sum_{i=1}^n \vec{\pi}_i \times F^i = \sum_{i=1}^n (\vec{\pi}_i \times \vec{e}) (F^i) =$$

$$= (\vec{\pi}_1 \times \vec{e}) (F^1) + \dots + (\vec{\pi}_n \times \vec{e}) (F^n)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_O^R &= (F^1)\bar{r}_1 \times \bar{e} + (F^2)\bar{r}_2 \times \bar{e} + \dots + (F^n)\bar{r}_n \times \bar{e} = \\ &= \left[(F^1)\bar{r}_1 + (F^2)\bar{r}_2 + \dots + (F^n)\bar{r}_n \right] \times \bar{e} \end{aligned}$$

lo que conduce a:

$$\begin{aligned} \bar{M}_O^R \cdot \bar{R} &= \left[(F^1)\bar{r}_1 + (F^2)\bar{r}_2 + \dots + (F^n)\bar{r}_n \times \bar{e} \right] \cdot (R) \cdot \bar{e} \\ &= \left[(F^1)(R)\bar{r}_1 + (F^2)(R)\bar{r}_2 + \dots + (F^n)(R)\bar{r}_n \right] \times \bar{e} \cdot \bar{e} \end{aligned}$$

de donde:

$$\bar{M}_O^R \cdot \bar{R} = 0$$

toda vez que, el vector obtenido del producto de la suma de los vectores de posición por el vector \bar{e} da un vector perpendicular a \bar{e} , esto es:

$$\left[(F^1)(R)\bar{r}_1 + (F^2)(R)\bar{r}_2 + \dots + (F^n)(R)\bar{r}_n \right] \times \bar{e} \perp \bar{e}$$

- c) Dado un sistema de fuerzas coplanares, y el origen del marco de referencia en el mismo plano, entonces se cumple que:

$$\bar{M}_O^R \cdot \bar{R} = 0$$

En efecto, si todas las fuerzas que constituyen el sistema están en el plano, la resultante general del sistema estará en dicho plano, así mismo, si el origen es un punto del plano, los vectores de posición estarán también en el plano; tal como se indica en la figura 2.3.1-8.

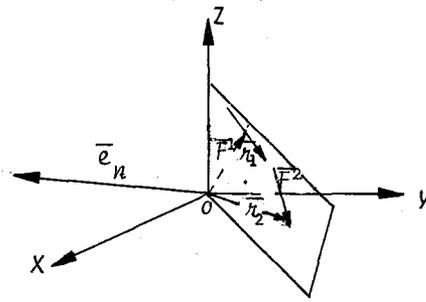


Figura 2.3.1-8

En estas condiciones, los momentos de cada una de las fuerzas con respecto al origen serán vectores perpendiculares al plano; toda vez que los productos $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$ son vectores perpendiculares tanto a \vec{r}_i como a \vec{F}_i ; - también la suma de estos vectores darán un vector -- perpendicular al plano, de donde resulta que \vec{M}_O^R y \vec{R} son perpendiculares y por tanto se cumple que:

$$\vec{M}_O^R \cdot \vec{R} = 0$$

Si ahora consideramos el caso más general en que las -- fuerzas sean coplanares, pero en el que el centro de momentos es -- tá fuera del plano, la relación $\vec{R} \cdot \vec{M}^R = 0$ también se cumple.

En efecto, si se toma un punto O' en el plano, los vec-- tores de posición $\vec{r}_{O'i}$ de cada una de las fuerzas puede expresarse como; $\vec{r}_{O'i} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_{O'i}$ esto es, la suma del vector de posición -- que va del punto O' a uno del soporte de la recta y del vector -- que va del origen O del sistema de referencia al punto O' del -- plano, como se muestra en la figura 2.3.1-9.

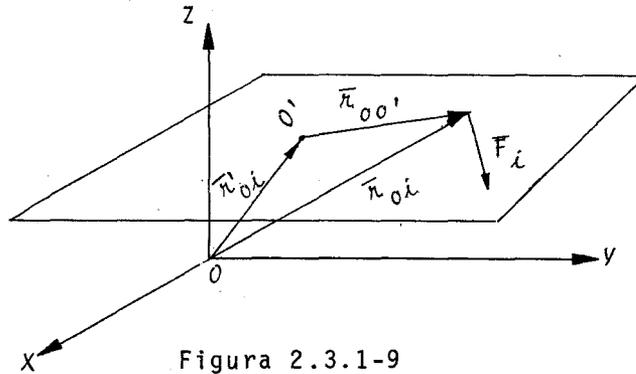


Figura 2.3.1-9

En estas condiciones, dado a que

$$\bar{M}_0^R = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0^i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}^i$$

Empleando la relación anterior así, como el hecho de que $\bar{r}_{00'}$, es común a todas las fuerzas, la expresión del momento se transforma en:

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}^i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{00'} \times \bar{F}^i + \sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}^i \\ &= \bar{r}_{00'} \times \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}^i \right) + \sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}^i = \bar{r}_{00'} \times \bar{R} + \sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}^i \end{aligned}$$

y en la que

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = \bar{F}^1 + \dots + \bar{F}^n$$

que sustituyendo en la expresión $\bar{M}_0^R \cdot \bar{R}$ conduce a

$$\bar{M}_0^R \cdot \bar{R} = (\bar{r}_{00'} \times \bar{R}) \cdot \bar{R} + \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}^i \right) \cdot \bar{R} = 0$$

toda vez que el vector $\bar{r}_{00'} \times \bar{R}$ es perpendicular al vector \bar{R} , y - que:

$$\left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}^i \right) \cdot \bar{R} = 0$$

ya que coincide con el caso en que se consideró al sistema de - fuerzas coplanares con el centro de momentos en el mismo plano.

Ejemplo. Calcular las coordenadas vectoriales del sistema formado por las fuerzas \bar{F}^A , \bar{F}^B , \bar{F}^C , y \bar{F}^D

$$\bar{F}^A = 40i + 30j \text{ [Kg}_f\text{]} \quad A(2, 0, 0) \text{ [m]}$$

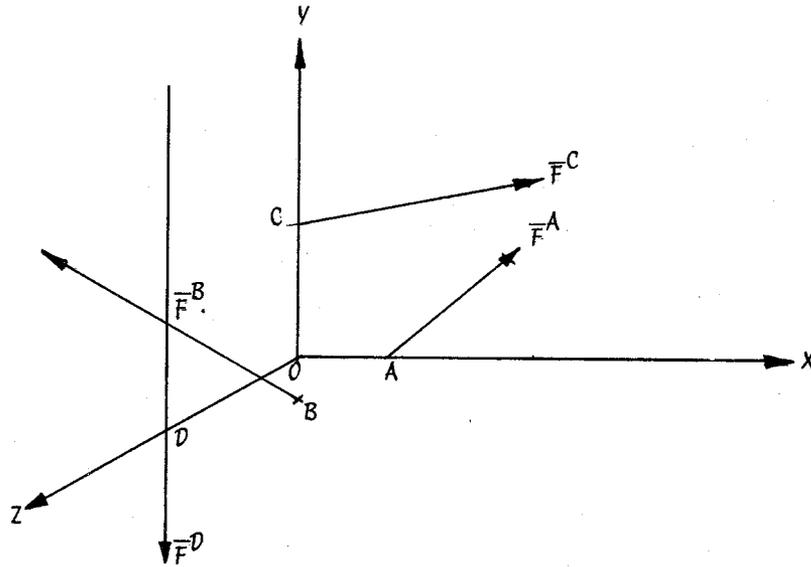
$$\bar{F}^B = -80i + 30j - 20k \text{ [Kg}_f\text{]} \quad B(3, 1, 4) \text{ [m]}$$

$$\vec{F}^C = 30\hat{i} - 10\hat{j} - 50\hat{k} \quad [\text{Kg}_f]$$

$$C(0, 3, 0) \quad [\text{m}]$$

$$\vec{F}^D = -200\hat{j} \quad [\text{Kg}_f]$$

$$D(0, 0, 3.5) \quad [\text{m}]$$



Solución:

La resultante del sistema es el vector \vec{R} .

$$\vec{R} = \vec{F}^A + \vec{F}^B + \vec{F}^C + \vec{F}^D$$

$$\vec{R} = -10\hat{i} - 150\hat{j} - 70\hat{k} \quad [\text{Kg}_f]$$

El vector momento con respecto al origen es:

$$\vec{M}_O^R = \sum_{i=1}^D (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) = 410\hat{i} - 260\hat{j} + 140\hat{k} \quad [\text{Kg}_f \cdot \text{m}]$$

Las coordenadas vectoriales del sistema son:

$$(\vec{R}, \vec{M}_O^R) = (-10\hat{i} - 150\hat{j} - 70\hat{k}, 410\hat{i} - 260\hat{j} + 140\hat{k})$$

2.3.2 SISTEMAS DE FUERZAS EQUIVALENTES

En el inciso anterior, al definir las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas, se estableció que estas caracterizan a dichos sistemas de una manera similar a como las coordenadas vectoriales de una sola fuerza caracterizan a ésta. Sin embargo, existe una diferencia radical; así mientras que las coordenadas vectoriales de una fuerza establecen una relación biunívoca, las de un sistema de fuerzas no.

Así, una fuerza produce un efecto único sobre el cuerpo en que actúa, quedando asociada solamente a unas coordenadas vectoriales que producen ese mismo efecto, es decir, a cada fuerza corresponden unas y sólo unas coordenadas vectoriales y viceversa.

En el caso de un sistema de fuerzas, si bien éste produce un efecto único, existen muchos sistemas capaces de producir el mismo efecto; por lo tanto, mientras que a un sistema de fuerzas se le asocia sólo unas coordenadas vectoriales (\bar{R}, \bar{M}_O^R) , a tales coordenadas es posible asociarle muchos sistemas de fuerzas.

En el párrafo anterior hemos dicho que existen muchos sistemas capaces de producir los mismos efectos externos sobre un cuerpo; a tales sistemas de fuerzas se les denomina equivalentes.

2.3.3 CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE DE EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS DE FUERZAS.

En la forma que se estableció la equivalencia entre sistemas de fuerzas, quedó implícito que, la condición necesaria y suficiente para ello es que, las coordenadas de los sistemas de fuerzas sean iguales; esto es:

$$(\bar{R}, \bar{M}_O^R)_I = (\bar{R}, \bar{M}_O^R)_{II}$$

Ahora bien, si se recapacita, por una parte, que dos sistemas son equivalentes si producen los mismos efectos externos, y por la otra, que conforme a los postulados de la Estática, los efectos no se alteran si se introducen o eliminan subsistemas en equilibrio (principio del equilibrio), así como que algunos subsistemas (concurrentes) pueden ser substituidos por una sola fuerza resultante, una forma alternativa para definir a los sistemas equivalentes es: como aquellos en los que se puede transformar uno a otro, sin alterar los efectos externos, por medio de operaciones elementales que cumplan con los postulados de la Estática.

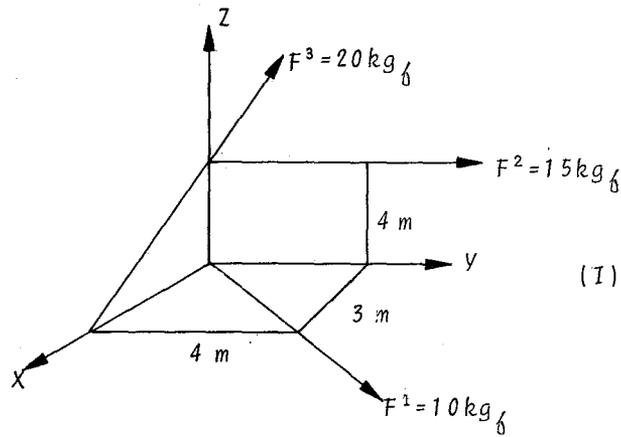
Así, la condición necesaria y suficiente para que los sistemas sean equivalentes implica:

Que si dos sistemas poseen las mismas coordenadas vectoriales, a partir de uno se puede llegar a otro, a su vez, si lo anterior es posible, ambos sistemas deberán tener iguales coordenadas vectoriales.

En los siguientes incisos se analizará con mayor detalle cómo se puede efectuar la transformación de un sistema a otro, bajo las condiciones ya especificadas, lo que nos permitirá encontrar sistemas más simples que el de partida.

Ejemplo. Determine si son o no equivalentes el sistema de fuerzas (I) mostrado en la figura y el (II) formado por las fuerzas $\vec{F}^A = 15i + 13j - 20k$ $[Kg]$ y $\vec{F}^B = -21i + 10j + 36k$ $[Kg]$ si la primera pasa por el origen y la segunda por el punto $P_B(0, 4, 0)$ $[m]$, más el par $\vec{m} = -204i - 48j - 84k$ $Kg \cdot m$

(Nota: El vector par \vec{m} es en vector momento de una pareja de fuerzas iguales, paralelas no colineales y directamente opuestas que, como se verá más adelante, es un vector libre).



Solución:

Calculemos las coordenadas vectoriales de ambos sistemas:

Para el sistema I:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 & \vec{M}_O^R &= \vec{M}_O^1 + \vec{M}_O^2 + \vec{M}_O^3 \\ \vec{F}^1 &= 6\vec{i} + 8\vec{j} & \vec{M}_O^1 &= 0 \\ \vec{F}^2 &= \quad \quad 15\vec{j} & \vec{M}_O^2 &= -60\vec{i} \\ \vec{F}^3 &= -12\vec{i} \quad \quad + 16\vec{k} & \vec{M}_O^3 &= \quad \quad -48\vec{j} \\ \hline \vec{R} &= -6\vec{i} + 23\vec{j} + 16\vec{k} \quad [\text{Kg}_f] & \vec{M}_O^R &= -60\vec{i} - 48\vec{j} \quad [\text{Kg}_f \cdot \text{m}] \end{aligned}$$

y para el sistema II:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_A + \vec{F}_B & \vec{M}_O^R &= \vec{M}_O^A + \vec{M}_O^B + \vec{m} \\ \vec{F}_A &= 15\vec{i} + 13\vec{j} - 20\vec{k} & \vec{M}_O^A &= 0 \\ \vec{F}_B &= -21\vec{i} + 10\vec{j} + 36\vec{k} & \vec{M}_O^B &= 144\vec{i} + 84\vec{k} \\ \hline \vec{R} &= -6\vec{i} + 23\vec{j} + 16\vec{k} \quad [\text{Kg}_f] & \vec{m} &= -204\vec{i} - 48\vec{j} - 84\vec{k} \\ & & \vec{M}_O^R &= -60\vec{i} - 48\vec{j} \quad [\text{Kg}_f \cdot \text{m}] \end{aligned}$$

ya que las coordenadas de los sistemas I y II:

$$I = (-6i + 23j + 16k, -60i - 48j)$$

$$II = (-6i + 23j + 16k, -60i - 48j)$$

son iguales, los sistemas son equivalentes.

2.3.4 SISTEMAS DE FUERZAS IRREDUCTIBLES

Al comparar dos sistemas de fuerzas equivalentes, quizá podamos decir que uno es más simple que otro, así por ejemplo, si recordamos el principio de Stevinus, un sistema formado por una sola fuerza puede sustituir a otro formado por varias; obviamente, el sistema de una sola fuerza es más sencillo que el de varias componentes; esto nos lleva a la idea de encontrar sistemas más simples que alguno dado con objeto de poder causar los mismos efectos externos de manera más sencilla.

Ahora bien, existen sistemas de fuerzas que no se pueden simplificar o reducir más y a éstos se les llama *sistemas irreductibles*, siendo tales: una fuerza, un par, y una fuerza y un par no coplanos.

Una fuerza puede considerarse como un sistema constituido por un solo elemento y en este caso las coordenadas vectoriales del sistema son las mismas que las coordenadas vectoriales de la fuerza, por lo tanto, siempre se cumplirá que $\vec{r} \cdot \vec{M}_O^R = 0$, o sea que cualquier sistema que pueda sustituirse por un sistema de una sola fuerza deberá cumplir la condición anterior. En el siguiente capítulo se analizará en detalle la posibilidad de esta sustitución.

Par de Fuerzas

Es el nombre con que se designa a un sistema constituido únicamente por dos fuerzas no colineales \vec{F}^1 y \vec{F}^2 , tales que -

tienen por soporte dos rectas paralelas separadas una distancia d y que además tienen magnitudes iguales, pero sentidos opuestos.

Este sistema es coplanar, esto es, queda contenido en un plano definido por las rectas de sus soportes y al cual se le denomina *plano del par* (Figura 2.3.4-1).

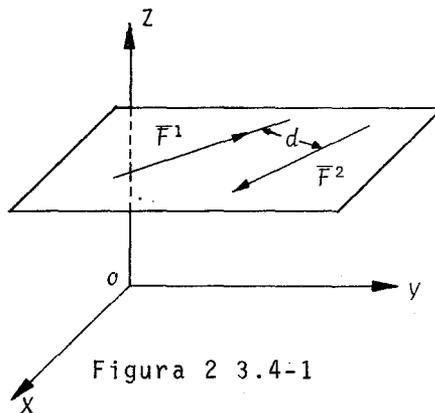


Figura 2 3.4-1

Las coordenadas vectoriales del sistema serán:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = \bar{F}^1 + \bar{F}^2 = 0$$

$$\bar{M}_O^R = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}^i = \bar{r}_1 \times \bar{F}^1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}^2 = \bar{m}$$

Así, en concordancia con lo discutido en relación a las coordenadas vectoriales, y dado que las de un par de fuerzas - - siempre son $(0, \bar{m})$, los efectos que muestra un cuerpo que le son atribuibles al par serán exclusivamente de una tendencia al giro.

Ahora bien, si se tiene presente que $\bar{F}^1 = -\bar{F}^2$ la expresión del momento puede escribirse de la forma siguiente:

$$\bar{M}_O^R = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{F}; \quad |\bar{M}_O^R| = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1| |\bar{F}| \text{sen} \angle (\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{F})$$

como:

$$|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| \operatorname{sen} \phi (\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{F}) = d$$

$$|\bar{M}_O^R| = |\bar{m}| = d \cdot |\bar{F}|$$

siendo d la distancia entre los soportes como se muestra en la figura 2.3.4-2.

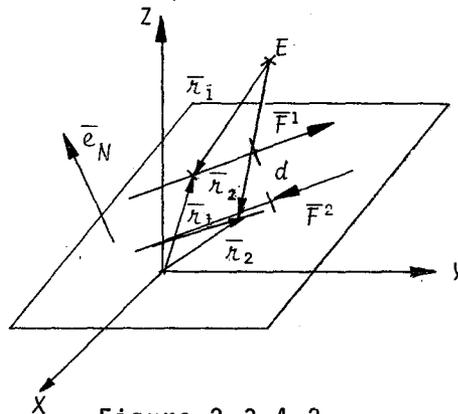


Figura 2.3.4-2

Así, el vector \bar{m} por ser perpendicular a dos vectores \bar{F}_1 y \bar{F}_2 contenidos en un plano, el plano del par, tendrá por dirección la normal a este plano \bar{e}_N , mientras que la magnitud del momento será:

$$|\bar{m}| = d \cdot |\bar{F}|$$

Por otra parte, si se observa que aún cambiando el centro de momentos, por ejemplo, al punto E , la expresión del vector es invariable, pues $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = (\bar{r}_2^1 - \bar{r}_1^1)$, se concluye que el momento de un par es independiente del centro de momentos.

Consecuentemente, este momento se representará por un vector con las siguientes características:

i) Magnitud: $|\bar{m}| = d \cdot |\bar{F}|$

donde d se denomina brazo del par

- ii) Dirección: \bar{e}_n , la de la normal al plano del par
- iii) Sentido: de acuerdo al avance del tornillo de rosca derecha (+ ó -).
- iv) El punto de aplicación puede ser cualquiera, por lo que se le considera como un *vector libre*.

De estas características se concluye que un par de - - fuerzas se puede hacer equivalente a otro si se cumple que:

- i) al variar la magnitud de las fuerzas, la distancia entre ellas se varía de manera que el módulo del par no varíe, esto es: $|\bar{d}||\bar{F}| = |\bar{d}^1||\bar{F}^1| = |\bar{m}|$
- ii) se le traslade a planos paralelos.
- iii) se le haga girar en el mismo plano

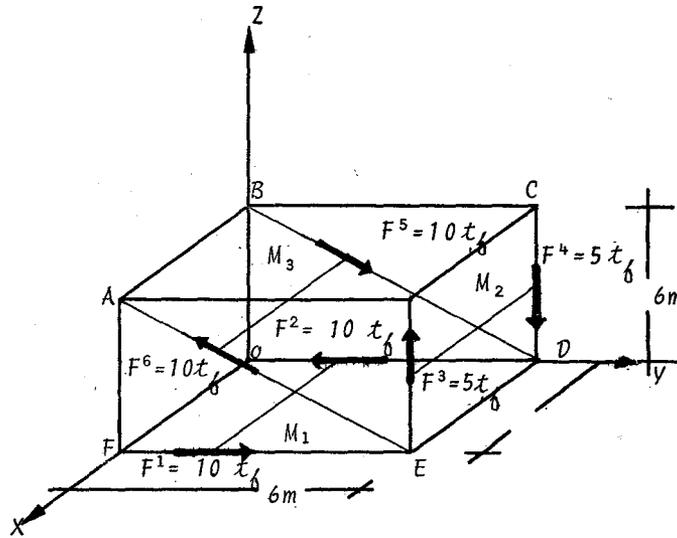
Las tres posibilidades anteriores pueden tenerse en - forma aislada o bien simultáneamente. Por otra parte, puesto - que los momentos de los pares de fuerzas son representados por - vectores libres, pueden sumarse vectorialmente sin importar el - plano en que actúan, así como también a un par de fuerzas se le puede hacer equivalente a una suma de pares diferentes pero que proporcionen el mismo vector esto es:

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i$$

Ejemplo. Determine un solo par que sea equivalente al sistema de pares de la figura.

Solución:

- a) Determinemos los vectores momento de cada uno de - los 3 pares para sumarlos y encontrar el par equival



lente.

$$\bar{m} = \sum |m^i| \bar{e}_i$$

$$|\bar{m}_1| = 10T \times 5m = 50 t_f \cdot m; \bar{e}_1 = k$$

$$\bar{m}_1 = 50k \quad [t_f \cdot m]$$

$$\bar{m}_2 = |\bar{m}_2| \bar{e}_2$$

$$|\bar{m}_2| = 5t_f \times 5m = 25 t_f \cdot m; \bar{e}_2 = -j$$

$$\bar{m}_2 = -25j \quad [t_f \cdot m]$$

$$\bar{m}_3 = |\bar{m}_3| \bar{e}_3$$

$$|\bar{m}_3| = 10t_f \times 5m = 50 t_f \cdot m$$

Como la dirección del momento del par es normal al plano de éste, determinemos la dirección mediante el producto vectorial de 2 de sus trazas. Por ejemplo:

$$\bar{e}_3 = \frac{\overline{AB} \times \overline{AE}}{|\overline{AB} \times \overline{AE}|}$$

$$\overline{AB} = -5i$$

$$\overline{AE} = 0i + 6j - 6k$$

$$\overline{AB} \times \overline{AE} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -30j - 30k$$

$$\bar{e}_3 = \frac{-30j - 30k}{\sqrt{30^2 + 30^2}} = -0.707j - 0.707k$$

Así

$$\bar{m}_3 = -35.36j - 35.36k$$

Finalmente

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 = 50k - 25j - 35.36j - 35.36k$$

$$\bar{m} = -60.36j + 14.64k \quad [t_f \cdot m]$$

b) A idéntico resultado se llega calculando las coordenadas vectoriales del sistema:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = 0$$

$$\bar{M}_O^R = \bar{m} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O^i$$

$$\bar{M}_O^1 = 50k$$

$$\bar{M}_0^2 = 0$$

$$\bar{M}_0^3 = 30i - 25j$$

$$\bar{M}_0^4 = -30i$$

$$\bar{M}_0^5 = -42.43i$$

$$\bar{M}_0^6 = +42.43i - 35.36j - 35.36k$$

$$\bar{M}_0^R = 0i - 60.36j + 14.64k = \bar{m}$$

Fuerza y Par no coplanos

Existen sistemas de fuerzas cuyas coordenadas vectoriales no cumplen con la relación $\bar{R} \cdot \bar{M}_0^R = 0$ y a este tipo de sistemas no se les puede hacer equivalentes con una sola fuerza o con un par de fuerzas sino con ambos simultáneamente y con la particularidad de que no sean coplanos. La reducción de este tipo de sistemas se estudiará en el siguiente capítulo.

Par de transporte

Como se ha visto anteriormente, las fuerzas no quedan totalmente representadas por un vector libre sino que la posición de su soporte es fija y por lo tanto se manejan como vectores deslizantes esto trae como consecuencia que al cambiar de posición la línea de acción de una fuerza, cambian los efectos externos que produce y obviamente también cambian sus coordenadas vectoriales. Sin embargo, es posible hacer esta traslación siempre y cuando se mantengan las mismas coordenadas vectoriales

y ésto se logra mediante la adición de un par de transporte tal - como se discute a continuación:

Supongamos una fuerza \vec{F} con línea de acción L que pasa por el punto P como se muestra en la figura 2.3.4-3 (a).

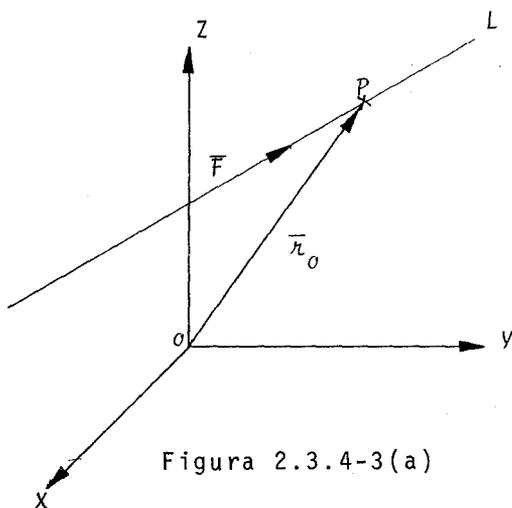


Figura 2.3.4-3(a)

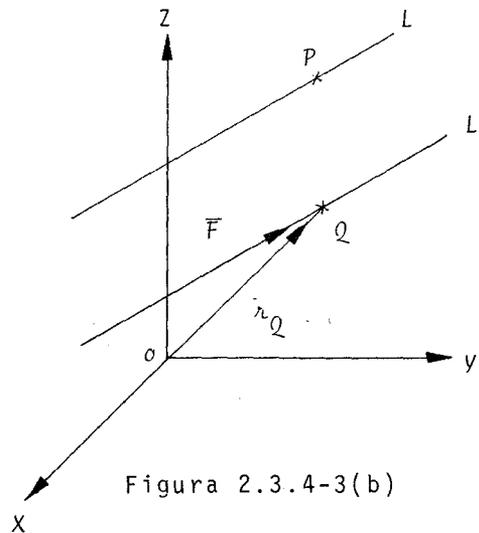


Figura 2.3.4-3(b)

En tales condiciones las coordenadas vectoriales del sistema (SI) serán iguales a las de la fuerza, es decir:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{F} \\ \vec{M}_o^R &= \vec{M}_o^F = \vec{r}_o \times \vec{F}\end{aligned}$$

Ahora consideremos otro sistema (SII), formado por la misma fuerza, pero aplicada en el punto Q (figura 2.3.4-3 (b)). Las coordenadas vectoriales de este sistema serán:

$$\begin{aligned}\vec{r}^1 &= \vec{F} \\ \vec{M}_o^R &= \vec{r}_Q \times \vec{F}\end{aligned}$$

que serán diferentes al primer caso siempre y cuando Q no pertenezca a L .

Si observamos las coordenadas de los dos sistemas --- $(\vec{F}, \vec{r}_o \times \vec{F})$ y $(\vec{F}, \vec{r}_Q \times \vec{F})$ vemos que únicamente difieren en el mo

mento, o sea que agregando o quitando un momento o par de $\bar{\kappa}_Q \times F$ podemos hacerlo igual a $\bar{\kappa}_O \times F$, a este par que agregamos se le denomina par de transporte (\bar{m}_T) y su valor será:

$$\bar{\kappa}_O \times F = \bar{\kappa}_Q \times F + \bar{m}_T$$

$$\bar{m}_T = (\bar{\kappa}_O - \bar{\kappa}_Q) \times F$$

$$\bar{m}_T = \overline{QP} \times F$$

Lo anterior se puede visualizar si al sistema original (cuando la fuerza pasa por el punto P) le agregamos un sistema en equilibrio en el punto Q, como se indica en la figura 2.3.4-4.

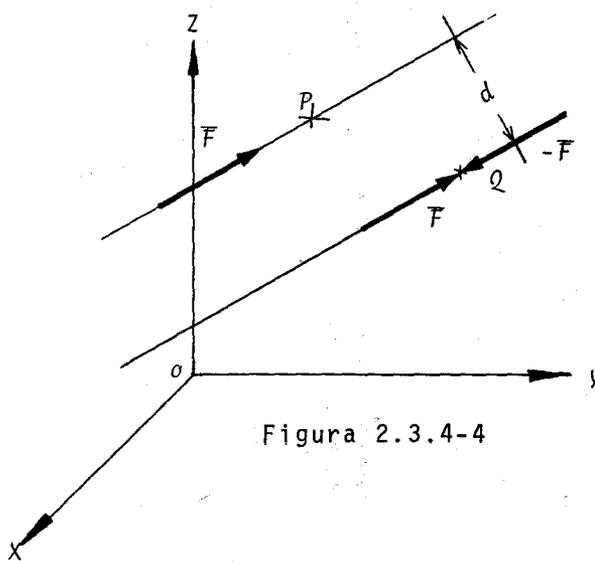


Figura 2.3.4-4

Al agregar un sistema en equilibrio las coordenadas vectoriales no se altera; sin embargo, este nuevo sistema se puede interpretar como el formado por un par de magnitud $d \cdot |F|$ más una fuerza F aplicada en el punto Q que resulta ser la fuerza original trasladada al punto Q más el par de transporte $\overline{QP} \times F$.

Si ahora consideramos como sistema inicial el constituido por la fuerza F aplicada en el punto Q y el par \bar{m}_T , podríamos tener otro sistema equivalente con éste constituido únicamente

te por una fuerza \bar{F} pero aplicada en el punto P; en otras palabras, un sistema de una fuerza y un par actuando en el mismo plano ($\bar{F} \cdot \bar{m}_T = 0$) siempre se puede hacer equivalente con un sistema de una sola fuerza.

Ejemplo. Determine el par de transporte que se origina al trasladar la fuerza $\bar{F} = 4i - 3j + 2k$ $[kg_f]$ aplicada en el punto $P(2, 1, 3)$ $[m]$ al punto $Q(4, 3, 1)$ $[m]$.

Solución:

a) Determinemos las coordenadas vectoriales del sistema cuando \bar{F} se encuentra aplicada en el punto P.

$$\bar{R} = 4i - 3j + 2k \quad [kg_f]$$

$$\bar{M}_O^R = \bar{M}_O^F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 11i + 8j - 10k \quad [kg_f \cdot m]$$

Al aplicar la fuerza en el punto Q tenemos:

$$\bar{R} = 4i - 3j + 2k \quad [kg_f]$$

$$\bar{M}_Q^R = \bar{M}_Q^F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 9i - 4j - 24k \quad [kg_f \cdot m]$$

Para que el momento inicial sea igual al segundo será necesario agregar un par de transporte \bar{m}_T :

$$\therefore 11i + 8j - 10k = 9i - 4j - 24k + \bar{m}_T$$

$$\bar{m}_T = (11i + 8j - 10k) - (9i - 4j - 24k)$$

$$\bar{M} = 2i + 12j + 14k \quad [\text{kg}_f \cdot \text{m}]$$

b) El par de transporte también se puede valuar directamente mediante el producto vectorial $\overline{QP} \times \bar{F}$

$$\overline{QP} = -2i - 2j + 2k \quad [\text{m}]$$

$$\bar{M} = \overline{QP} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 12j + 14k \quad [\text{kg}_f \cdot \text{m}]$$

2.4 REDUCCION DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

2.4.1 CONCEPTO DE SISTEMA RESULTANTE

El estado mecánico de un cuerpo rígido, sobre el que actúa un sistema de fuerzas $\bar{F}^i (i=1, 2, \dots, n)$, queda completamente definido por las sumas vectoriales de fuerzas y de momentos con respecto a un punto cualquiera. Si dicho punto es el origen de un marco de referencia, el estado mecánico del cuerpo rígido quedará definido por medio de las coordenadas vectoriales o Plückerianas del sistema, (\bar{R}, \bar{M}_O^R) , como se vió en el capítulo anterior.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i$$

$$\bar{M}_O^R = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O^i = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}^i)$$

Conviene aclarar que si el sistema de fuerzas contiene fuerzas continuamente distribuidas, las sumatorias se transforman en integrales, por lo que las expresiones vectoriales anteriores son de carácter general. Si además del sistema de fuerzas se presenta pares de fuerzas o momentos, las expresiones son:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i$$

$$\bar{M}_0^R = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0^i + \sum_{j=1}^m \bar{m}_j = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}^i) + \sum_{j=1}^m \bar{m}_j$$

En términos generales es posible afirmar que cualquier sistema de fuerzas que actúe sobre un cuerpo rígido puede reemplazarse por un sistema más simple, constituido por una fuerza \bar{R} y un momento \bar{M}_0^R en el origen, llamado sistema resultante, el cual produce en el cuerpo los mismos efectos externos que en el sistema original.

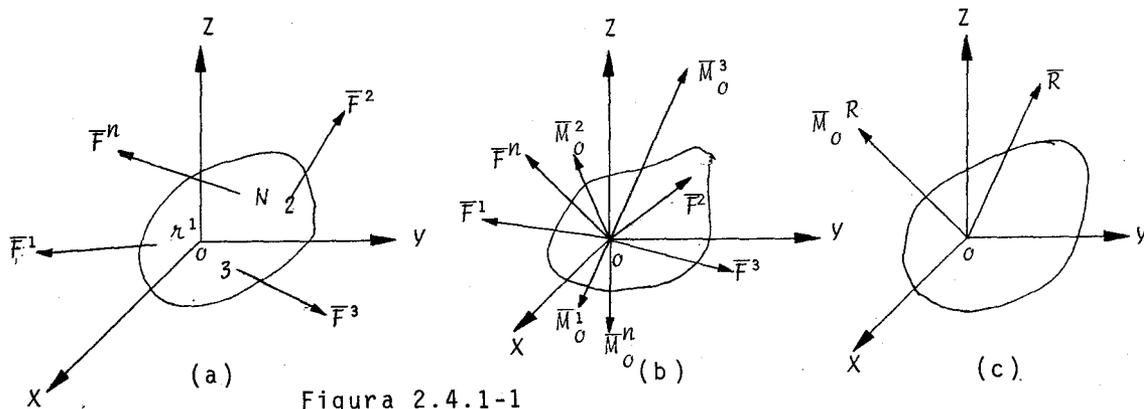


Figura 2.4.1-1

Respecto a la figura 2.4.1-1 (a), en el inciso anterior se precisó que una fuerza, como la \bar{F}^1 , puede trasladarse del punto 1 al punto 0 (origen del marco de referencia) si se adiciona a dicha fuerza un momento, tal como el $\bar{M}_0^1 := \bar{r}_1 \times \bar{F}^1$. Repitiendo el procedimiento con cada fuerza del sistema se obtiene el mostrado en la figura 2.4.1-1 (b), formado por fuerzas y mo--

mentos (pares de fuerzas) actuando en O , que pueden sumarse vectorialmente por separado y reemplazarse por la fuerza resultante \bar{R} y el momento del par resultante \bar{M}_O^R , respectivamente, como se muestra en figura 2.4.1-1 (c). A este sistema puede llamarse *sistema resultante*.

2.4.2 CASOS DE REDUCCION Y SUS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DETERMINANTES

A la sustitución de un sistema de fuerzas por el sistema equivalente más simple se le conoce como *reducción del sistema de fuerzas*.

Analizando las características de un sistema de fuerzas por medio de sus coordenadas vectoriales, es posible determinar cuál es el sistema más simple equivalente a él, pudiendo presentarse los casos que a continuación se mencionan:

I.- El sistema se reduce a un par de fuerzas si y sólo si:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O^R \neq 0$$

II.- Un sistema de fuerzas se reduce a una sola fuerza si y solamente si:

$$\bar{R} \neq 0; \quad \bar{R} \cdot \bar{M}_O^R = 0$$

donde \bar{R} y \bar{M}_O^R son perpendiculares.

III.- El sistema se reduce a una fuerza y un par no coplanos (motor o wrench), si y sólo si:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R \neq 0$$

lo que equivale a afirmar que \bar{R} y \bar{M}_0^R existen y no son ortogonales.

IV. Un sistema de fuerzas se reduce al equilibrio cuando y solo cuando:

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_0^R = 0$$

I.- *Reducción a un par de fuerzas.*- Para que un sistema de fuerzas se reduzca a un par debe ocurrir, necesariamente, que $\bar{R} = 0$; es decir:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = 0$$

Ahora bien, todo par de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido, provoca en éste una tendencia al giro, por lo que debe cumplirse.

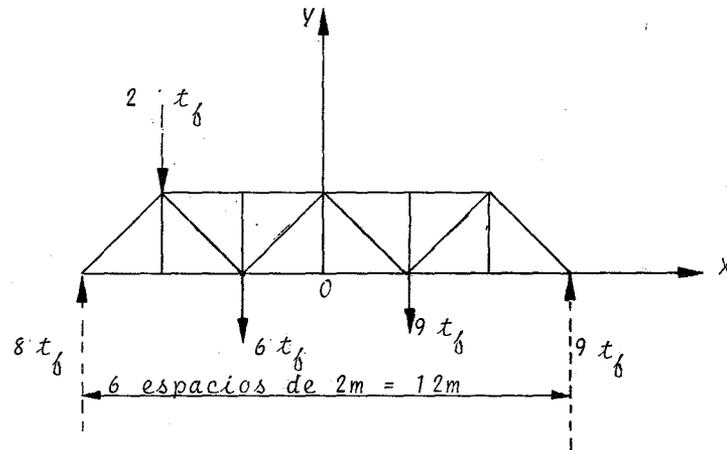
$$\bar{M}_0^R = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}^i) + \sum_{j=1}^m \bar{m}_j \neq 0$$

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas dado se reduzca a un par de fuerzas es:

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_0^R \neq 0$$

Finalmente, conviene aclarar que el momento del sistema es un vector libre y, por lo tanto, no es necesario obtener su posición.

Ejemplo. Determine el sistema equivalente más simple, del sistema de fuerzas actuando sobre la armadura de la figura.



Solución:

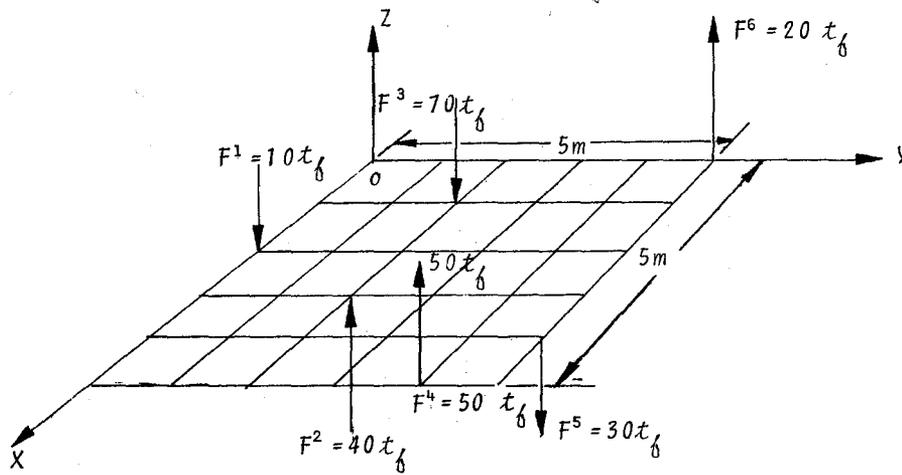
De acuerdo con el marco de referencia asociado, las -- coordenadas vectoriales resultan:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = (8-2-6-9+9)\mathbf{j} = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_0^R &= \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = -6i \times 8j + (-4i) \times (-2j) - (2i) \times (-6j) + 2i \times (-9j) + 6i \times 9j = \\ &= (-48+8+12-18+54)k = 8k \quad [t_f \cdot m] \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema de fuerzas propuesto se reduce a un par de fuerzas, de $8 t_f \cdot m$ de módulo perpendicular al plano de la figura y sentido positivo (dextrógiro).

Ejemplo: Reducir el sistema de fuerzas mostrado, a su forma más simple.



Solución:

El sistema de fuerzas se identificará analíticamente, - por sus coordenadas vectoriales.

a) Fuerza resultante

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = (-10+40-70+50-30+20)k = 0$$

b) Momento resultante

$$\begin{aligned} \bar{M}_O^R = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O^i &= \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}^i) = 2i \times (-10k) + (3i+2j) \times 40k + (i+2j) \times (-70k) + \\ &+ (5i+4j) \times 50k + (4i+5j) \times (-30k) + 5j \times 20k \end{aligned}$$

$$\bar{M}_O^R = 20j + (-120j + 80i) + (70j - 140i) + (-250j + 200i) + (120j - 150i) + 100i$$

$$\bar{M}_O^R = 90i - 160j \quad [t_\delta \cdot m]$$

Por los resultados, el sistema de fuerzas se reduce a un par de fuerzas, de módulo $[90^2 + 160^2]^{1/2} = 183,58 \text{ t}\cdot\text{m}$

II. Reducción de un sistema a una fuerza: Esto implica que $\bar{R} \neq 0$, es decir:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n F^i \neq 0$$

Para el caso particular en que el momento del sistema con respecto al origen sea nulo, las coordenadas vectoriales de dicho sistema son:

$$(\bar{R}, 0)$$

que corresponden a las coordenadas vectoriales de una fuerza. -- Por lo tanto, la condición $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0^R = 0$ indica que el sistema de fuerza se reduce a una sola fuerza (\bar{R}) que pasa por el origen.

Ahora bien, en el inciso anterior se estudió que-- una fuerza se puede trasladar a una nueva línea de acción si se incorpora un par (momento) en el plano de la fuerza, por lo que los vectores \bar{R} y \bar{M}_0^R resultan perpendiculares.

En ambos casos el producto escalar de los vectores del sistema fuerza par es nulo, de donde se concluye que la condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas se reduzca a una sola fuerza es:

$$\bar{R} \neq 0; \quad \bar{R} \cdot \bar{M}_0^R = 0$$

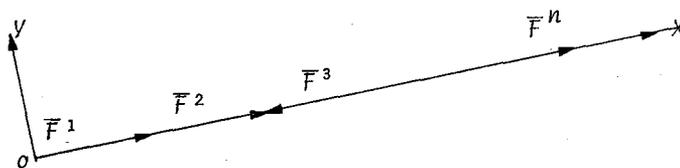
Para los sistemas de fuerzas colineales la posición de la fuerza resultante es la de la línea de acción común, y para los concurrentes la del punto de concurrencia; lo que equivale a decir que su posición está predeterminada. En cambio, para los sistemas generales la posición de la fuerza resultante debe obtenerse mediante la ecuación:

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O^R$$

Ejemplo. Demostrar que el resultante de un sistema de fuerzas colineales es una sola fuerza.

Solución:

Considérese un sistema \bar{F}^i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) como el que esquemáticamente se representa en la figura:



Haciendo coincidir la línea de acción de las fuerzas con un eje (el X, por ejemplo) de un marco cartesiano de referencia, se tiene que:

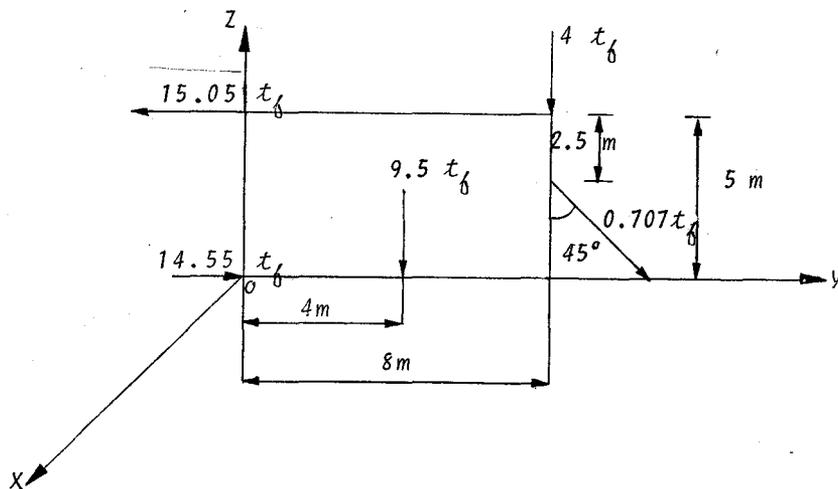
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i$$

Se ha considerado que $\bar{R} \neq 0$, pues de lo contrario no tendría sentido la demostración. En función del marco de referencia asociado, los vectores de posición de todas las fuerzas del sistema son nulos, o son paralelos a la línea de acción y por lo tanto:

$$\bar{M}_O^R = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times F^i) = 0$$

Lo anterior significa que el sistema se reduce a una sola fuerza al cumplirse la condición $\bar{R} \neq 0$ y $R \cdot \bar{M}_O^R = 0$. La posición de dicha fuerza es la del eje X.

Ejemplo. Reducir el sistema de fuerzas mostrado en la figura, a su forma más simple.



Solución:

Primeramente se identificará al sistema de fuerzas, por sus coordenadas vectoriales.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = (-15.05 + 14.55 + 0.707 \operatorname{sen} 45^\circ)j + (-9.5 - 40.707 \cos 45^\circ)k =$$

$$= -14k \quad t_6$$

$$\therefore R \neq 0$$

$$\bar{M}_0^R = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = 5k \times (-15.05j) + 2.5k \times (0.707 \operatorname{sen} 45^\circ j) + 4j \times (-9.5k) + 8j \times$$

$$(-4k) + 8j \times (-0.707 \cos 45^\circ k) = 75.25i - 1.25i - 38i - 32i - 4i = 0$$

$$\therefore \bar{M}_0^R = 0$$

El producto escalar $\bar{R} \cdot \bar{M}_0^R$ resulta obviamente nulo, por lo que se concluye que el sistema se reduce en una sola fuerza de las siguientes características:

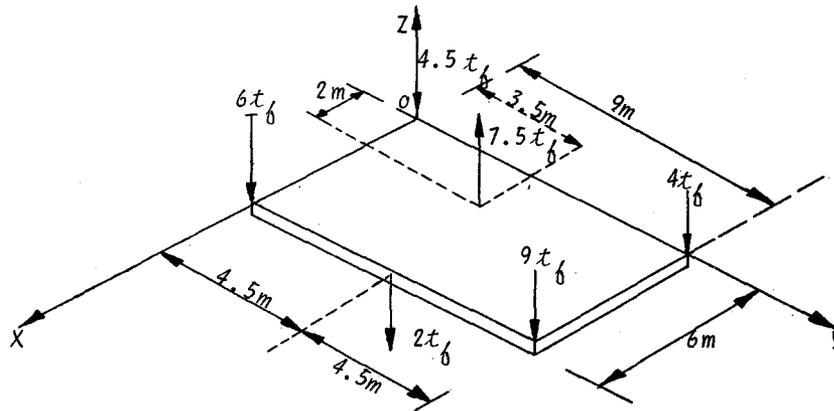
a) Magnitud

$$R = |\bar{R}| = 14 \quad t_6$$

b) Dirección: Paralela al eje Z; números directores -- $[0, 0, 1]$.

c) Posición: El origen del sistema coordenado, pues debe verificarse que $\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_0^R$, o sea $\bar{r} \times \bar{R} = 0 \therefore \bar{r} = 0$

Ejemplo. Reducir el sistema de fuerzas actuando en la placa rígida de la figura, a la forma más simple que produzca idénticos efectos externos.



Solución:

Se obtendrán las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas paralelas mostrado, de la siguiente forma:

$$\bar{R} = (-6 - 4.5 - 2 + 7.5 - 9 - 4)k = -18k \quad t_b \quad \therefore R \neq 0$$

Por lo que respecta al momento del sistema, con respecto a 0:

$$\begin{aligned} \bar{M}_O^R &= 6i \times (-6k) + (6i + 4.5j) \times (-2k) + (2i + 3.5j) \times 7.5k + (6i + 9j) \times (-9k) + 9j \times (-4k) \\ &= 36j + 12j - 9i - 15j + 26.25i + 54j - 81i - 36i = -99.75i + 87j \quad t_b \cdot m \end{aligned}$$

El producto escalar $\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R$ resulta:

$$(-18k) \cdot (-99.75i + 87j) = 0$$

Por los resultados, se puede establecer que el sistema más simple que puede substituir al propuesto, sin alterar los efectos externos sobre la placa rígida, es el formado por una sola fuerza, cuyas características son:

a) Magnitud: 18 t_f

b) Dirección: Paralela al eje Z y dirigida hacia abajo

c) Posición: La dada por la ecuación vectorial $\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O^R$

$$\bar{r} \times \bar{R} = (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \times (-18\bar{k}) = -99.75\bar{i} + 87\bar{j}$$

$$+18x\bar{j} - 18y\bar{i} = -99.75\bar{i} + 87\bar{j}$$

Se puede establecer:

$$-18y = -99.75 \quad \therefore y = 99.75/18 = 5.54 \text{ m}$$

$$18x = 87 \quad \therefore x = 87/18 = 4.83 \text{ m}$$

Por lo que la posición de \bar{R} será $4.83, 5.54, 0$ [m]

2.4.3 TEOREMA DE LOS MOMENTOS O DE VARIGNON

Este teorema, también conocido como el principio de los momentos, establece que el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos, respecto a dicho punto, de sus componentes.

Al hablar de componentes de una fuerza, nos referimos a sistemas de fuerzas concurrentes; sin embargo el teorema es aplicable a cualquier sistema de fuerzas reductible a una sola fuerza.

Considérese un sistema de fuerzas \bar{F}^i ($i=1, 2, \dots, n$), como el de la figura 2.4.3-1.

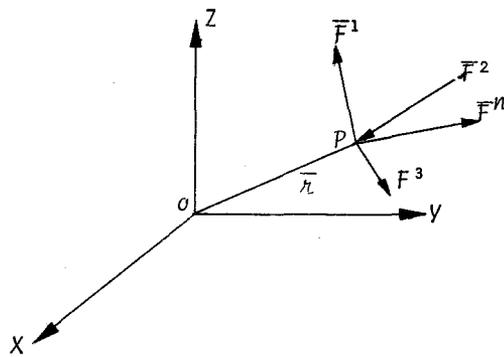


Figura 2.4.3-1

Dicho sistema de fuerzas puede sustituirse por una sola, llamada fuerza resultante, igual a la suma vectorial de las fuerzas del sistema, si y sólo si $\bar{R} \neq 0$ y $\bar{R} \cdot \bar{M}_0^R = 0$; por lo tanto:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i$$

Ahora bien, el momento de dicha fuerza resultante, respecto al origen del marco de referencia, es:

$$\bar{M}_0^R = \bar{r} \times \bar{R}$$

Por otra parte, la suma de los momentos de cada una de las fuerzas del sistema, también respecto a O, resulta:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_0^i = \bar{r} \times \bar{F}^1 + \bar{r} \times \bar{F}^2 + \bar{r} \times \bar{F}^3 + \dots + \bar{r} \times \bar{F}^n$$

Utilizando la propiedad distributiva de los productos vectoriales, la última ecuación puede expresarse:

$$\bar{M}_O^R = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O^i = \bar{r} \times (\bar{F}^1 + \bar{F}^2 + \bar{F}^3 + \dots + \bar{F}^n)$$

Pero

$$\bar{F}^1 + \bar{F}^2 + \bar{F}^3 + \dots + \bar{F}^n = \bar{R}$$

$$\bar{M}_O^R = \bar{r} \times \bar{R}$$

Habiéndose comprobado el teorema de Varignon, en cuanto a momentos de fuerzas respecto a un punto, la misma comprobación se puede lograr considerando los momentos de las fuerzas respecto a un eje. En efecto, para el mismo sistema de fuerzas se establece, un término de su resultante:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_{E'E}^i = \left[\left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}^i \right) \cdot \bar{e} \right] \bar{e}$$

y considerando a cada una de las fuerzas del sistema:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_{EE'}^i = \left[(\bar{r} \times \bar{F}^1 + \bar{r} \times \bar{F}^2 + \bar{r} \times \bar{F}^3 \dots + \bar{r} \times \bar{F}^n) \cdot \bar{e} \right] \bar{e}$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_{EE'}^i = \left[\bar{r} \times (\bar{F}^1 + \bar{F}^2 + \bar{F}^3 + \dots + \bar{F}^n) \cdot \bar{e} \right] \bar{e}$$

y finalmente:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_{EE'}^i = (\bar{r} \times \bar{R} \cdot \bar{e}) \bar{e} = \bar{M}_{E'E}^R$$

III. Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema motor o Wrench. Todo sistema de fuerzas F^i ($i=1,2,3,\dots,n$) que tenga coordenadas vectoriales diferentes de cero, y cuyo producto escalar también resulte distinto a cero ($\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_O^R \neq 0$; $\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R \neq 0$), puede reducirse a un sistema motor o Wrench, que es un sistema constituido por una fuerza y un par actuando en la misma dirección que ésta.

En la figura 2.4.3-2 se explica lo anteriormente ex-

puesto.

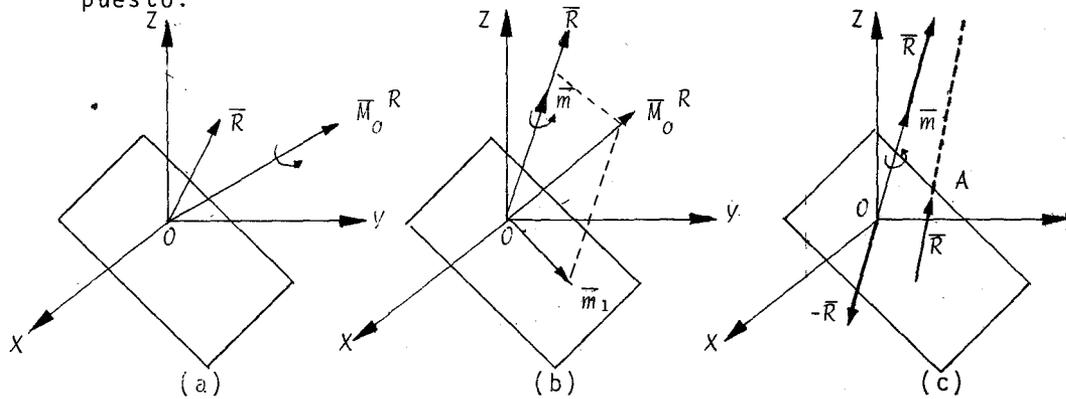


Figura 2.4.3-2

Considérese como resultante de un sistema de fuerzas al sistema fuerza-par mostrado en (a), donde los vectores \bar{R} y \bar{M}_O^R son diferentes de cero y no son perpendiculares entre sí; el vector \bar{M}_O^R es libre, por lo que puede considerarse en O . En (b) de la figura anterior, el momento (par) \bar{M}_O^R se resuelve en dos componentes: una en la misma dirección de \bar{R} y la otra en dirección perpendicular a dicho vector, tales componentes son \bar{m} y \bar{m}^1 , respectivamente. El vector momento \bar{m}^1 puede sustituirse por un par de fuerzas de magnitud \bar{R} , y que serán de igual dirección a \bar{R} (recuérdese que el vector momento es normal al plano del par) como se muestra en (c). Puede observarse que hay dos fuerzas \bar{R} en la línea de acción que pasa por O , las cuales están en equilibrio, por esta razón, se pueden eliminar del sistema sin que se mo-

difiquen los efectos externos sobre el cuerpo en que actúa tal sistema. Finalmente, puesto que \bar{m} es un vector libre, se le puede trasladar a la nueva línea de acción de \bar{R} que pasa por A, por lo que se concluye que el sistema resultante es un sistema motor, como se muestra en la figura 2.4.3-3.

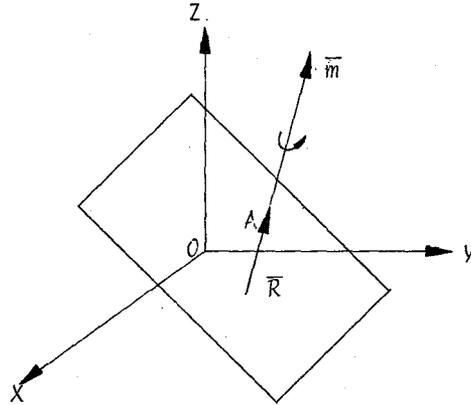


Figura 2.4.3-3

2.4.4 REDUCCION CANONICA Y EJE CENTRAL

De lo expuesto anteriormente es posible concluir que - cuando un sistema de fuerzas tiene coordenadas vectoriales tales que $\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R \neq 0$, sus sistemas equivalentes son una fuerza y un par no coplanos, donde el valor de dicho par dependerá de la posición de la fuerza.

Ahora bien, se define como *eje central* del sistema a una línea tal que, si colocamos sobre ella a la fuerza resultante, el par no coplano tomará su valor mínimo.

Por ser un sistema equivalente, la resultante de las fuerzas no se debe de alterar lo único que podemos hacer es -- trasladar la fuerza para que no se altere su vector equipolente- y, al trasladarla, generamos un par perpendicular a ella, el --

cual deberá anular la componente del par original que se encuentre en su misma dirección.

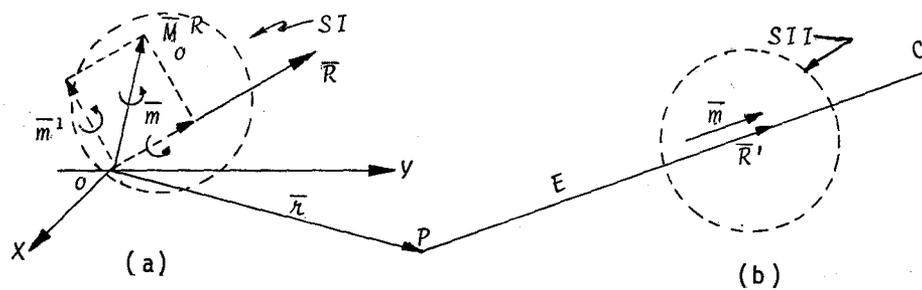


Figura 2.4.4-1

Consideremos el sistema original SI (\bar{R} ; M_o^R), al cual vamos a transformar en uno equivalente SII, de tal manera que esté asociado al par mínimo.

Si suponemos que el origen del sistema original se encuentra como se muestra en la figura 2.4.4-1(a), y descomponemos M_o^R en dos pares, uno \bar{m} paralelo a la fuerza y otro \bar{m}^1 perpendicular, es posible trasladar la fuerza a un punto P, de tal suerte que el par de transporte anule a \bar{m}^1 y, en esa forma, se obtiene SII. Por ser equivalente SI y SII, sus coordenadas vectoriales son iguales:

$$\bar{R}' = \bar{R} \quad (2.4.4-1)$$

$$\bar{h} \times \bar{R}' + \bar{m} = M_o^R \quad (2.4.4-2)$$

Además, como \bar{m} es la proyección de M_o^R sobre \bar{R} , tenemos:

$$\bar{m} = (M_o^R \cdot \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}) \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \quad (2.4.4-3)$$

Sustituyendo 2.4.4-1 y 2.4.4-3 en 2.4.4-2 obtenemos:

$$\bar{r} \times \bar{r} + \left(\frac{\bar{M}_O^R \cdot \bar{r}}{|\bar{r}|^2} \right) \bar{r} = \bar{M}_O^R$$

$$\bar{r} \times \bar{r} = \bar{M}_O^R - \left(\frac{\bar{M}_O^R \cdot \bar{r}}{|\bar{r}|^2} \right) \bar{r} \quad (2.4.4-4)$$

La expresión 2.4.4.-4 es la ecuación del eje central, y al sistema mostrado en SII, fuerza-par mínimo, se le conoce como sistema motor o Wrench.

A la reducción efectuada se le denomina *canónica*, y de ella resulta:

i) una fuerza de

a) Magnitud: $R = |\bar{r}|$

b) Dirección: $\bar{e}_R = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$

c) Posición: el eje central y

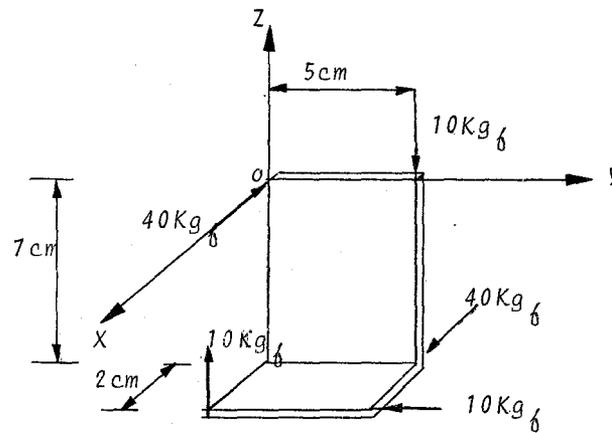
ii) un par mínimo de

a) Magnitud: $|\bar{m}| = \frac{|\bar{M}_O^R \cdot \bar{r}|}{|\bar{r}|}$

b) Dirección: $\bar{e}_m = \bar{e}_R$; sí $\bar{M}_O^R \cdot \bar{r} > 0$

o bien $\bar{e}_m = -\bar{e}_R$; sí $\bar{M}_O^R \cdot \bar{r} < 0$

Ejemplo. Reducir el sistema de fuerzas mostrado en la figura, al sistema más simple que le sea equivalente.



Solución:

De acuerdo con el marco de referencia asociado, las -- coordenadas vectoriales del sistema son:

a) Fuerza resultante

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = -40\bar{i} + 10\bar{k} - 10\bar{k} + 40\bar{i} - 10\bar{j} = -10\bar{j} \quad [\text{Kg}_f]$$

b) Momento resultante

$$\bar{M}_o^R = 2\bar{i} \times 10\bar{k} + (2\bar{i} - 7\bar{k}) \times (-10\bar{j}) + (5\bar{j} - 7\bar{k}) \times 40\bar{i} + 5\bar{j} \times (-10\bar{k})$$

$$\bar{M}_o^R = -20\bar{j} + (-20\bar{k} - 70\bar{i}) + (-200\bar{k} - 280\bar{j}) - 50\bar{i} = -120\bar{i} - 300\bar{j} - 220\bar{k} \quad [\text{kg}_f \cdot \text{m}]$$

Como $\bar{R} \neq 0$ y $\bar{M}_O^R \neq 0$, se verificará si ambos vectores son ortogonales ó no

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R = (-10j) \cdot (-120i - 300j - 220k) = 3000 \neq 0$$

Por los resultados, el sistema más simple al que se puede reducir el propuesto, es un sistema motor.

Determinemos un punto del eje central cuya ecuación es:

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O^R - \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$$

$$|\bar{R}| = 10 \text{ Kg} ; \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{3000}{10 \times 10} (-10j) = -300j \quad [\text{kg}_f \cdot \text{cm}]$$

$$\bar{M}_O^R - 300j = -120i - 220k \quad [\text{kg}_f \cdot \text{cm}]$$

$$\bar{r} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 10z i + 0j + (-10x)k = -120i - 220k$$

De donde

$$10z = -120$$

$$z = -12 \text{ cm}$$

$$-10x = -220$$

$$x = 22 \text{ cm}$$

Un punto del eje central es $P(22, 0, -12)$ [cm]

Finalmente el sistema motor estará constituido por una fuerza $\bar{R} = 10j$ que pasa por un punto del eje central $P(22, 0, -12)$ más un par paralelo a \bar{R} de vector par

$$\frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = -300j \quad [\text{kg} \cdot \text{cm}]$$

2.4.5 EQUILIBRIO. ISOSTATICIDAD E HIPERESTATICIDAD

Como ya se mencionó, para que un cuerpo rígido esté en equilibrio los efectos externos que le producen las fuerzas aplicadas sobre él son nulos; por lo tanto, las aceleraciones, tanto lineal como angular, deben de ser nulas. Como la fuerza resultante y el momento resultante son proporcionales a las aceleraciones, tendremos que éstos también son nulos.

De lo anterior se concluye que un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio cuando el sistema mínimo equivalente al sistema de fuerzas que actúa sobre él sea nulo; o sea que

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = 0 \quad (2.4.5-1)$$

$$\bar{M}_R^O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}^i + \sum_{j=1}^m \bar{m}_j = 0 \quad (2.4.5-2)$$

De las ecuaciones anteriores se desprende que, para que exista el equilibrio, tanto la suma vectorial de las fuerzas

como la de los momentos producidos por ellas con respecto a cualquier punto del espacio, además de los pares, deben de ser nulos.

Así pues, sólo dos ecuaciones vectoriales independientes se pueden plantear al abordar problemas de un cuerpo rígido en equilibrio.

Planteamiento escalar

De las dos ecuaciones vectoriales 2.4.5-1 y 2.4.5-2 podemos obtener, en general, seis ecuaciones escalares:

$$\begin{array}{ll}
 \sum_{i=1}^n (F_x)^i = 0 & \sum_{i=1}^n (M_{x'x})^i = 0 \\
 \sum_{i=1}^n (F_y)^i = 0 & \sum_{i=1}^n (M_{y'y})^i = 0 \\
 \sum_{i=1}^n (F_z)^i = 0 & \sum_{i=1}^n (M_{z'z})^i = 0 \quad (2.4.5-3)
 \end{array}$$

Obsérvese que es seis el número máximo de cantidades escalares desconocidas que pueden resolverse con las ecuaciones 2.4.5-3, pues aunque se efectúe la suma de momentos con respecto a otro punto, y encontremos otras 3 ecs., el número máximo de ecuaciones independientes será siempre seis.

Así pues, el número de incógnitas (escalares) que se pueden resolver, depende del número de ecuaciones escalares que podamos plantear, y este último depende del sistema de fuerzas de que se trate.

Analizaremos algunos casos particulares de sistemas de fuerzas.

Caso I. Sistema de fuerzas concurrentes

Este sistema se puede reducir a una fuerza que pase por el punto de concurrencia. Para que el sistema esté en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que dicha resultante sea nula, lo cual se logra si se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n (F_x)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (F_y)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (F_z)^i = 0 \quad (2.4.5-4)$$

Otra terna de ecuaciones con las que se plantea el equilibrio sería la de las sumas de los momentos producidos por las fuerzas con respecto a tres ejes ortogonales entre sí.

Salvo casos especiales, generalmente resulta más fácil el planteamiento de las ecuaciones 2.4.5-4.

De lo anterior se concluye que para resolver un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio el número de ecuaciones escalares independientes entre sí es tres.

Si el sistema es concurrente y coplanar se elimina una y sus componentes se reducen a dos y, por ende, el número de ecuaciones escalares independientes entre sí es de dos.

Caso II. Sistema de fuerzas coplanares

Un sistema de fuerzas coplanares no concurrentes ni paralelas está en equilibrio cuando se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n (F_x)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (F_y)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (M_{z,z})^i = 0 \quad (2.4.5-5)$$

ya que, para ser coplanares, tienen únicamente dos componentes - ortogonales las cuales se resuelven con las dos primeras ecuaciones. Recordando que la condición necesaria y suficiente para -- que una fuerza no produzca momento con respecto a un eje es que éste y la fuerza sean coplanares, resulta que el sistema de fuerzas no produce momentos con respecto a cualquier eje contenido - en el plano de las mismas, o sea, que produce momentos únicamente con respecto a un eje perpendicular al plano de las fuerzas. Por tal motivo sólo puede aplicarse una ecuación de momento respecto a un eje. En cambio, sí los produce respecto a cualquier-punto del plano.

En resumen, para un sistema de fuerzas coplanares no concurrentes ni paralelas hay tres ecuaciones escalares de equilibrio.

Otro grupo de ecuaciones independientes de equilibrio para un sistema coplanar es el siguiente:

$$\sum_{i=1}^n (F_X)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (M_A)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (M_B)^i = 0 \quad (2.4.5-6)$$

donde el eje X está contenido en el plano de las fuerzas, y la línea que une a los puntos A y B no es perpendicular a dicho eje.

Un tercer grupo de ecuaciones podría ser el siguiente:

$$\sum_{i=1}^n (M_A)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (M_B)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (M_C)^i = 0 \quad (2.4.5-7)$$

donde los puntos A, B y C están en el plano de las fuerzas, pero no deben ser colineales.

Caso III. Sistema de fuerzas paralelas.

En este caso, como en los anteriores, se pueden plantear tres ecuaciones independientes que son:

$$\sum_{i=1}^n (F_z)^i = 0 \quad \sum_{i=1}^n (M_{x,x})^i = 0 \quad \sum_{i=1}^n (M_{y,y})^i = 0 \quad (2.4.5-8)$$

donde al eje Z se le hace coincidir con la dirección de las fuerzas.

Así pues, con la primera ecuación se garantiza que la fuerza resultante es nula, y con las otras dos que el par resultante es nulo, ya que al ser las fuerzas paralelas al eje de las Z, no producen momentos con respecto a dicho eje; de ahí que sólo se plantean las ecuaciones con respecto a los otros dos.

Si el sistema, además de ser paralelo, es coplanar, se elimina una ecuación de momentos y sólo se podrán plantear dos:

$$\sum_{i=1}^n (F_z)^i = 0 \quad \sum_{i=1}^n (M_{x,x})^i = 0 \quad (2.4.5-9)$$

En forma análoga a la anterior se elimina la ecuación $\sum_{i=1}^n (M_{x,x})^i = 0$ cuando el sistema de fuerzas es colineal, quedando como única ecuación:

$$\sum_{i=1}^n (F_z)^i = 0 \quad (2.4.5-10)$$

Solución a los problemas de equilibrio.

En general, existen dos formas de resolver los problemas.

mas de cuerpos en equilibrio; en ambas se procede a dibujar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos en cuestión, y luego -- puede optarse por plantear las ecuaciones vectoriales de equilibrio, de las cuales se obtiene un grupo de ecuaciones escalares, misma que proporcionan la solución del problema; otra opción es la de plantear directamente las ecuaciones escalares.

Casos especiales del equilibrio.

Existen dos casos diferentes de cuerpos en equilibrio que se presentan con frecuencia, mismos que se analizarán por separado.

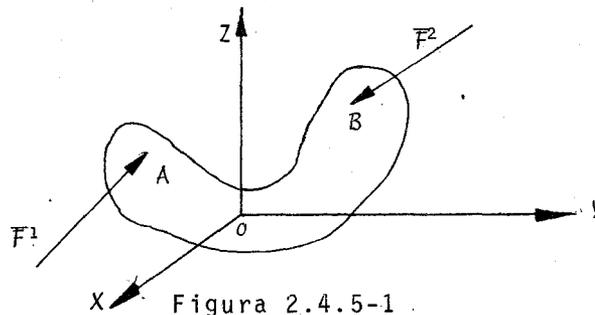


Figura 2.4.5-1

Caso A. Cuerpo sometidos a dos fuerzas.

Cuando un cuerpo rígido en equilibrio se encuentra sometido a la acción de dos fuerzas únicas, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F})^i = 0 \quad ; \quad \vec{F}^1 + \vec{F}^2 = 0 \quad \vec{F}^2 = -\vec{F}^1 \quad (2.4.5-11)$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{M}_O)^i = 0 \quad ; \quad \vec{r}_A \times \vec{F}^1 + (\vec{r}_A + \vec{AB}) \times \vec{F}^2 = 0$$

$$\vec{r}_A \times \vec{F}^1 + \vec{r}_A \times (-\vec{F}^1) + \vec{AB} \times (-\vec{F}^1) = 0$$

$$\therefore \overline{AB} \times \overline{F}^1 = 0$$

(2.4.5-12)

La ecuación 2.4.5-11 indica que las fuerzas son iguales en magnitud y dirección pero de sentido contrario, y la ecuación 2.4.5-12, que $\overline{AB} \times \overline{F}^1$ son paralelos; como \overline{F}^1 pasa por A y \overline{F}^2 por B, resulta que tanto \overline{F}^1 como \overline{F}^2 coinciden con la línea \overline{AB} , - ésto es, \overline{F}^1 y \overline{F}^2 son colineales.

En armaduras y en otras estructuras es muy común tratar con barras articuladas en sus extremos, y cuyo peso es despreciable. Véase la figura 2.4.5-2.

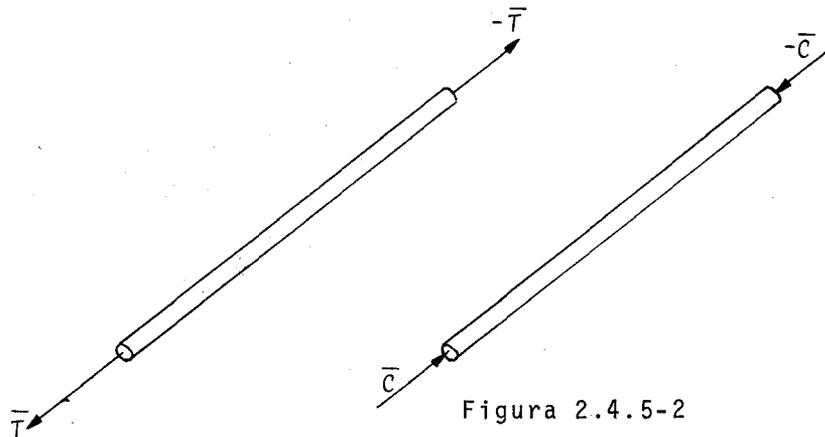


Figura 2.4.5-2

Estos elementos son cuerpos sometidos a dos fuerzas colineales con el eje de los mismos, de igual magnitud y de sentido contrario.

Como se observa en la figura 2.4.5-2, estas fuerzas sólo pueden estar a compresión (c) o a tensión (T).

Caso B. Cuerpo sometido a tres fuerzas.

Cuando un cuerpo está sometido a tres fuerzas y permanece en equilibrio, las fuerzas deben ser coplanares y paralelas o coplanares y concurrentes en un punto.

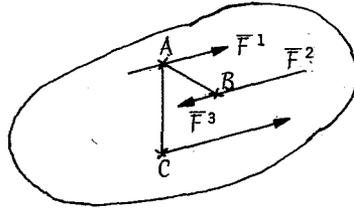


Figura 2.4.5-3

Consideremos la primera alternativa. Para demostrar que son coplanares efectuamos la suma de los momentos con respecto a un punto A sobre F^1 $\sum_{i=1}^n (M_A)^i = \overline{AB} \times \overline{F}^2 + \overline{AC} \times \overline{F}^3 = 0$; ecuación que nos indica que el plano formado por A y \overline{F}^2 es el mismo que -- forman A y \overline{F}^3 ; y como A es un punto cualquiera sobre \overline{F}^1 esto implica que \overline{F}^1 , \overline{F}^2 y \overline{F}^3 son coplanares.

En caso de no intersectarse dos de ellas que sean paralelas es obvio, por $\sum_{i=1}^n \overline{F}^i = 0$, que deben de ser paralelas las tres. (Figura 2.4.5-3)

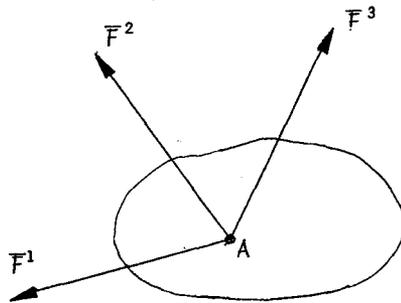


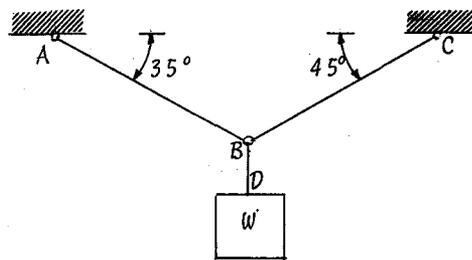
Figura 2.4.5-4

En la segunda alternativa, cuando dos de ellas se intersectan, sus líneas de acción formarán un plano. Si efectuamos la suma de fuerzas perpendiculares a dicho plano y el resultado se iguala a cero, concluimos que la tercera está contenida en el mencionado plano, por lo que las tres fuerzas son coplanares.

Al sumar los momentos con respecto al punto de intersección de las dos primeras (A) y la igualamos a cero (por equilibrio), se deduce que \bar{F}^3 pasa por A. Esto es, las fuerzas son concurrentes, lo que demuestra la segunda alternativa.

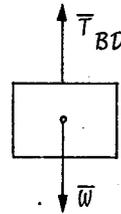
Las propiedades de estos casos particulares son de utilidad en la solución de diversos problemas.

Ejemplo. Encuentre las tensiones en los cables de la figura si $w = 10 \text{ t}$



Solución:

Procederemos a dibujar los diagramas de cuerpo libre - D. C. L. de w .

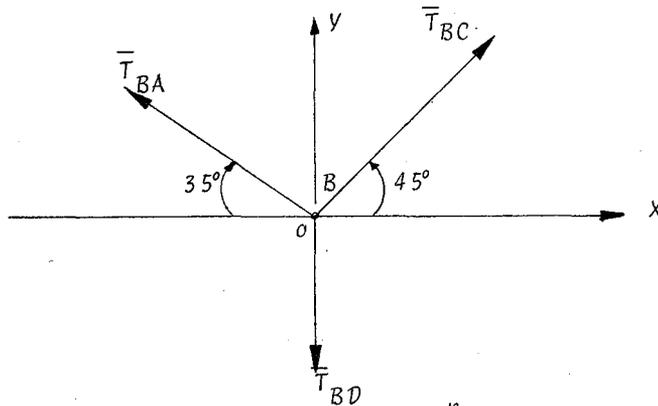


En la figura tenemos el diagrama de cuerpo libre de w , el cual está sujeto a un sistema de fuerzas--

colineal por lo cual podemos plantear una sola ecuación de equilibrio que es

$$T_{BD} - W = 0 \quad T_{BD} = 10 \text{ t}_f \quad (1)$$

Enseguida dibujaremos un D. C. L. del nodo B, en donde podemos observar que el sistema de fuerzas es coplanar concurrente, por lo cual podemos plantear dos ecuaciones escalares independientes que son.



$$\sum_{i=1}^n (F_x)^i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (F_y)^i = 0$$

$$T_{BC} \cos 45^\circ - T_{BA} \cos 35^\circ = 0; \quad T_{BC} \sin 45^\circ + T_{BA} \sin 35^\circ - T_{BD} = 0$$

$$(0.7071) T_{BC} - (0.8192) T_{BA} = 0; \quad (0.7071) T_{BC} + (0.5736) T_{BA} = 10 \quad (3)$$

$$T_{BC} = 1.16 T_{BA} \quad (2)$$

Sustituyendo 2 en 3 obtenemos

$$(0.7071) (1.16 T_{BA}) + 0.5736 T_{BA} = 10$$

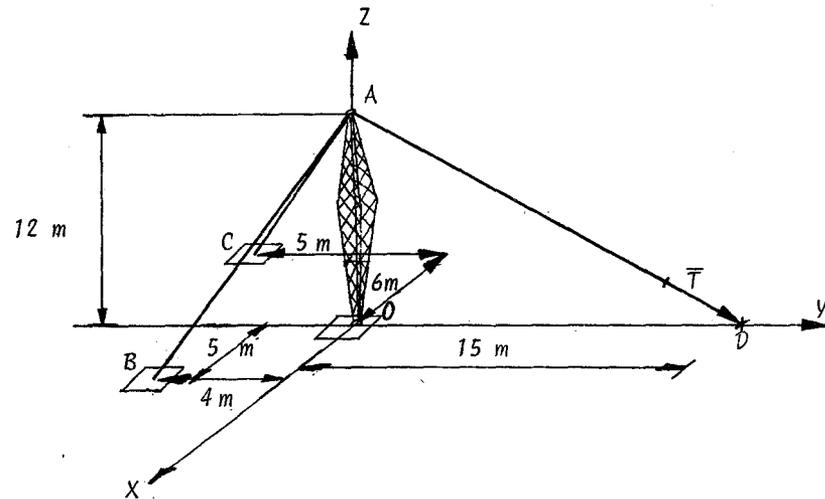
$$1.3932 T_{BA} = 10$$

$$T_{BA} = 7.1744 t_f$$

Utilizando este resultado en 2 obtenemos

$$T_{BC} = 8.3223 t_f$$

Ejemplo. En el proceso de erección de un tanque metálico elevado, se utiliza una pluma como la mostrada en la figura y la tensión T del cable AD llega a valer hasta $23.5 t_f$. Para este valor $|T|$, obtenga las tensiones en los cables AB y BC y la compresión en la pluma OA .

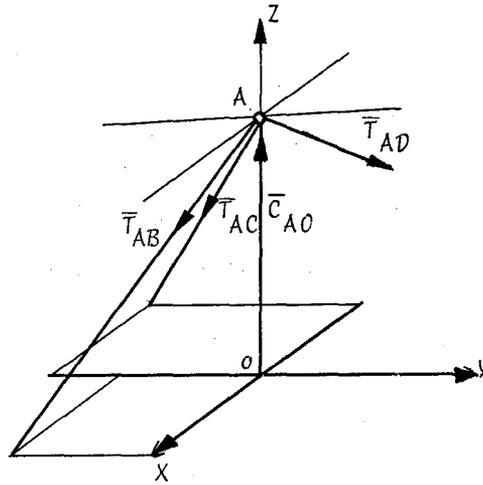


Solución:

Procederemos a dibujar un diagrama de cuerpo libre del nodo A. Tenemos 3 incógnitas escalares, y como el sistema es concurrente en el espacio, podremos plantear tres ecuaciones escalares de proyección, o bien, una -

ecuación vectorial de suma de fuerzas.

Obtendremos los vectores equipolentes de las fuerzas.



$$\bar{T}_{AD} = |\bar{T}| \frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|} = \frac{23.5}{19.21} (15j - 12k)$$

$$\bar{T}_{AD} = 18.35j - 14.68k$$

$$\bar{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{14.32} (-6i - 5j - 12k) = -(0.419 T_{AC})i - (0.349 T_{AC})j - (0.838 T_{AC})k$$

$$\bar{T}_{AB} = \frac{T_{AB}}{13.60} (5i - 4j - 12k) = (0.368 T_{AB})i - (0.294 T_{AB})j - (0.882 T_{AB})k$$

$$\bar{c}_{OA} = (c_{OA})k$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}^i = (0.368T_{AB} - 0.419T_{AC})i + (18.35 - 0.294T_{AB} - 0.349T_{AC})j +$$

$$+ (-14.68 - 0.838T_{AC} - 0.882T_{AB} + C_{OA})k = 0$$

$$0.368 T_{AB} - 0.419 T_{AC} + (0) C_{OA} = 0$$

$$-0.294 T_{AB} - 0.349 T_{AC} + (0) C_{OA} = -18.35$$

$$-0.882 T_{AB} - 0.838 T_{AC} + C_{OA} = 14.68$$

Resolviendo el sistema (A) obtenemos

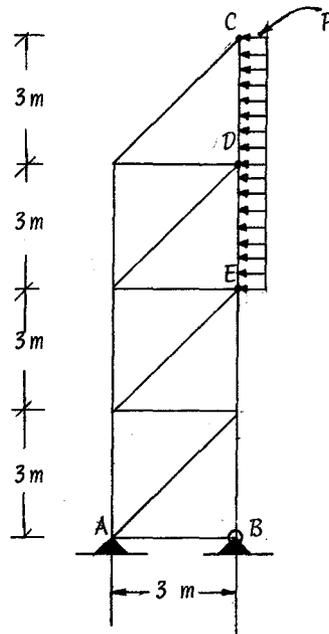
$$T_{AB} = 30.5568 t_f$$

$$T_{AC} = 26.8375 t_f$$

$$C_{OA} = 64.1209 t_f$$

Ejemplo. En la figura se ilustra una estructura, la cual soporta un anuncio que tiene una carga de $p = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}$ debida al viento, y ésta es transmitida a la estructura, en los nodos C, D y E, en la siguiente proporción 3/16, 10/16, 3/16 de la carga total, respectivamente.

Encuentre el valor de las reacciones en los apoyos A y B.



Solución:

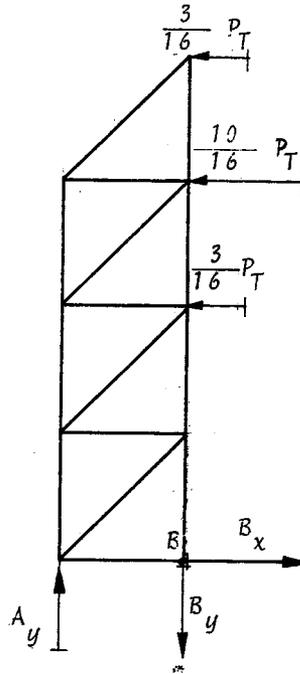
Como el sistema es coplanar no concurrente ni paralelo podemos plantear 3 ecuaciones escalares independientes, y como tenemos 3 incógnitas A_y , B_x , y B_y , el sistema tiene solución.

Para el diagrama de cuerpo libre de la estructura tomaremos la siguiente terna de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n (F_x)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (M_B)^i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (F_y)^i = 0$$

pues con la primera ecuación encontraremos directamente B_x , con la segunda A_y y con la última B_y , en la siguiente forma:

Primero encontraremos la carga total P_T .



$$P_T = 6p = 3600 \text{ Kg}_f$$

$$\sum_{i=1}^n (F_x)^i = B_x - \frac{3}{16} P_T - \frac{10}{16} P_T - \frac{3}{16} P_T = 0$$

$$B_x = 3600 \text{ Kg}_f$$

$$\sum_{i=1}^n (M_B)^i = 3A_y - 6 \times \frac{3}{16} P_T - 9 \times \frac{10}{16} P_T - 12 \times \frac{3}{16} P_T = 0$$

$$3A_y - \left(\frac{18+90+36}{16} \right) 3600 = 0$$

$$A_y = 10800 \text{ Kg}$$

$$\sum_{i=1}^n (F_y)^i = A_y - B_y = 0$$

$$B_y = 10800 \text{ Kg}_f$$

Ejemplo. Encuentre la fuerza P que debe de ejercer el obrero de 90 Kg_f de la figura, sobre la cuerda, para sostenerse en equilibrio.



Solución:

Si hacemos un diagrama de cuerpo libre de A, obtenemos la siguiente figura, donde w es el peso del obrero. Tomando

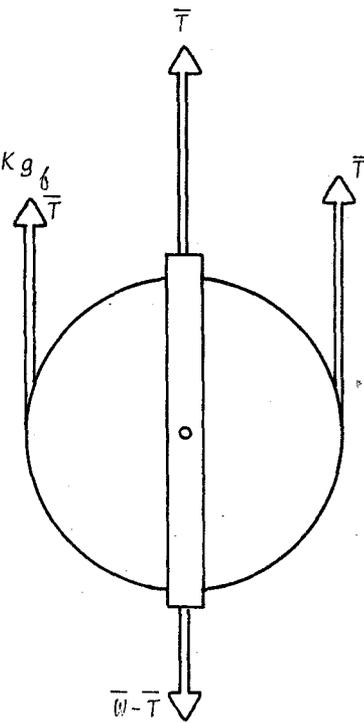
$$\sum_{i=1}^n (F_y)^i = 0$$

tenemos que

$$3T - W + T = 0$$

$$4T = W$$

$$T = 22.50 \text{ Kg}$$



Isostaticidad e hiperestaticidad.

Como se habia especificado anteriormente, el número -- de ecuaciones escalares que se pueden plantear de un cuerpo en -- equilibrio, es igual al número de cantidades escalares desconocidas que podemos encontrar.

Se dice que un problema es estáticamente determinado, o *isostático*, cuando el número de ecuaciones escalares que se -- pueden plantear de las consideraciones de Estática, es igual al número de incógnitas escalares del problema. En el caso que el número de incógnitas sea mayor que el de ecuaciones, se dice que

el problema es estáticamente indeterminado, o *hiperestático*. Se denomina grado de hiperestaticidad a la diferencia entre el número de incógnitas y el de ecuaciones; por ejemplo, si tenemos 5 incógnitas y tres ecuaciones posibles, como en la figura 2.4.5-5.

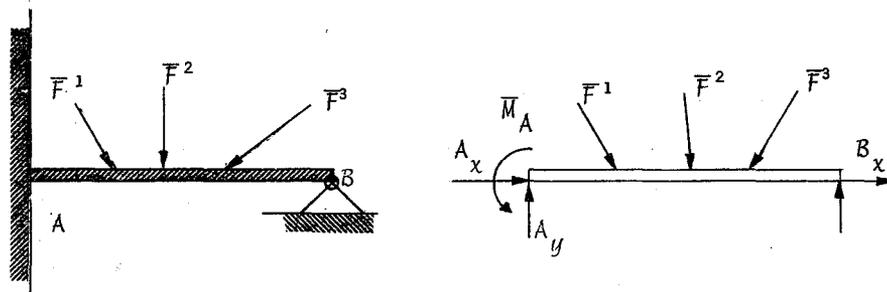


Figura 2.4.5-5

de la cual pueden plantearse tres ecuaciones independientes de Estática:

$$\sum_{i=1}^n F_x^i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^n F_y^i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^n M_A^i = 0,$$

y cinco incógnitas:

$$A_x, A_y, M_A, B_x \text{ y } B_y,$$

el grado de hiperestaticidad es de dos.

El hecho que el problema sea hiperestático no implica que carezca de solución, sino que se necesitan ecuaciones adicionales para resolverlo, y éstas, en general, se obtienen tomando en cuenta las deformaciones; pero este tema es de la competencia de Resistencia de Materiales o de Análisis Estructural.

3

CINEMATICA DE LA PARTICULA

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE APRENDIZAJE

El alumno:

1. *Definirá los conceptos de trayectoria, posición y desplazamiento lineales.*
2. *Definirá los conceptos de velocidad y rapidez lineales, medias e instantáneas.*
3. *Definirá el concepto de aceleración lineal, media e instantánea.*
4. *Definirá el concepto de Jerk.*

5. Planteará las expresiones vectoriales de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración lineales.
6. Demostrará que la velocidad lineal instantánea es tangente a la trayectoria.
7. Planteará las expresiones escalares de la trayectoria y de la rapidez lineales.
8. Definirá qué es el plano osculador.
9. Obtendrá en términos de los vectores unitarios del plano osculador, la expresión vectorial de la aceleración lineal instantánea.
10. Enunciará el teorema de Huyghens.
11. Explicará las componentes del teorema de Huyghens.
12. Resolverá problemas del movimiento de un punto a partir de las variables de la trayectoria.
13. Definirá los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.
14. Planteará las expresiones vectoriales de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.
15. Deducirá la relación entre los conceptos lineales y angulares de velocidad y aceleración.
16. Atendiendo a las relaciones entre velocidad y aceleración lineales y angulares, resolverá problemas del movimiento de un punto.
17. Planteará las expresiones vectoriales de la posición, velocidad y aceleración lineales de un punto en coordenadas carte

sianas tridimensionales.

18. Resolverá problemas de movimiento tridimensional de una partícula.
19. Planteará las expresiones vectoriales para la posición, velocidad y aceleración lineales de un punto con trayectoria plana en coordenadas cartesianas.
20. Deducirá las características cinemáticas para los casos particulares de movimientos circulares y tiro parabólico.
21. Resolverá problemas de movimiento plano de una partícula
22. Planteará las expresiones escalares para la posición, velocidad y aceleración de un punto en movimiento rectilíneo.
23. Dibujará las gráficas de posición, velocidad y aceleración contra tiempo de un punto en movimiento rectilíneo.
24. Deducirá las características cinemáticas para los casos particulares de movimientos rectilíneos, incluyendo el armónico simple.
25. Resolverá problemas de movimiento rectilíneo de una partícula.
26. Definirá los conceptos de posición, velocidad y aceleración absolutas.
27. Obtendrá las expresiones vectoriales para la posición, la velocidad y la aceleración absolutas en términos de un marco de referencia móvil.
28. Definirá los conceptos de posición, velocidad y aceleración relativas.

29. Identificará los términos de posición, velocidad y aceleración relativas en las expresiones generales de movimiento relativo.
30. Definirá las componentes de velocidad y aceleración de arrastre.
31. Identificará los términos de velocidad y aceleración de - - - arrastre en las expresiones generales del movimiento relativo.
32. Definirá el concepto de aceleración de Coriolis.
33. Identificará el término de aceleración de Coriolis en las - - expresiones generales de movimiento relativo.
34. Resolverá problemas de movimiento relativo.

INTRODUCCION

Al observar los temas precedentes desarrollados en - estos apuntes, advertimos que en el No. 2 se han estudiado los - sistemas de fuerzas en forma aislada, es decir, no como la causa - del movimiento. Así, en el presente tema analizaremos la geome- - tría del movimiento de una partícula, también en forma aislada, o - sea, sin relacionar las causas (fuerzas) con el efecto (movimien- - to). En cursos posteriores se analizará la relación fuerza-movi- - miento, ya dentro del ámbito de la *Dinámica*.

El análisis de la geometría del movimiento de una par- - tícula implica el conocimiento de sus características cinemáti- - cas, tales como: posición, velocidad y aceleración ; por lo tan- - to, si pretendiéramos expresar el objetivo fundamental del tema, - éste consistiría en *conocer la posición, la velocidad y la acele- - ración en una partícula, en cualquier tiempo*. Una vez que estos - conceptos se han planteado matemáticamente, podemos afirmar que - conocemos la Cinemática de dicha partícula.

Además de la Cinemática de la partícula, dentro del - - tema 3 se plantea y analiza el movimiento de un segmento de rec- - ta, con el objeto de establecer antecedentes indispensables para

el estudio de la Cinemática del cuerpo rígido, y contar con un -
patrón de comparación angular para expresar las características -
cinemáticas en ciertos tipos de movimiento.

3.1 MOVIMIENTO DEL PUNTO MATERIAL

Al iniciar el curso definimos a la *Cinemática* como -- aquella rama de la *Mecánica Clásica* que estudia el movimiento de la partícula material, sin tomar en cuenta las causas que generen dicho movimiento. Simplificando la definición, tal estudio se -- orienta al análisis de la geometría del movimiento, omitiendo el -- de las acciones que lo produzcan.

En rigor, nos interesa conocer conceptos tales como la posición, la velocidad, la aceleración, y el lugar geométrico que describen los móviles en el tiempo y otros.

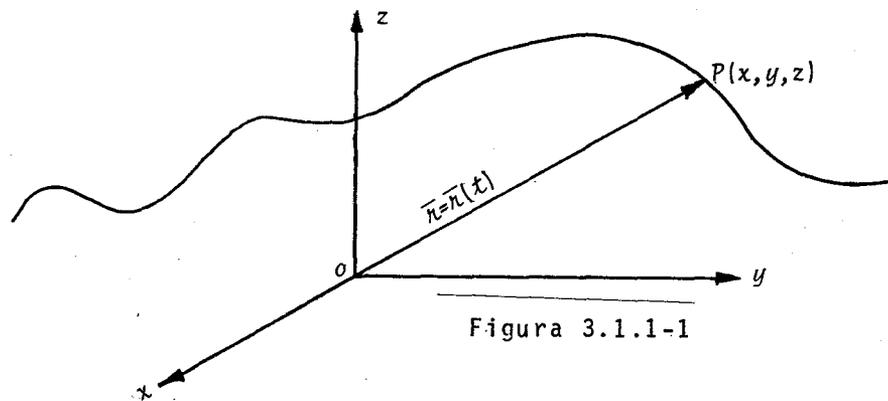
3.1.1 POSICION, TRAYECTORIA, DESPLAZAMIENTO LINEAL, VELOCIDAD Y ACELERACION DEL PUNTO Y JERK

Un punto se mueve cuando observamos que su posición -- cambia en el transcurso del tiempo, con respecto a un marco de -- referencia fijo.

El movimiento del punto P , mostrado en la figura 3.1.1 -1, está definido por la función

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

que es una función vectorial, en donde t es una variable escalar, que nos proporciona la *posición* del punto móvil.



Al lugar geométrico de todos los puntos por donde pasa el móvil, al transcurrir el tiempo, lo definimos como *trayectoria*.

Sean P_1 y P_2 dos posiciones sucesivas de P sobre su trayectoria, y t_1 y t_2 sus tiempos correspondientes, tal como muestra la figura 3.1.1-2

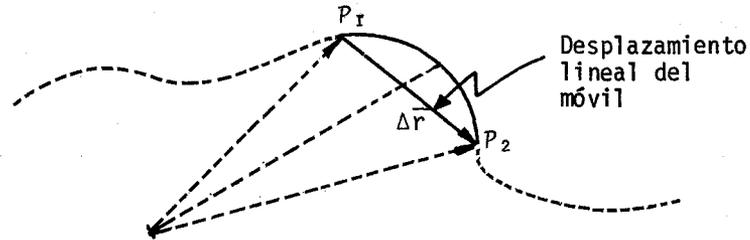


Figura 3.1.1-2

Al vector $\overline{\Delta r} = \overline{r}(t_2) - \overline{r}(t_1)$ se le define como *desplazamiento lineal del móvil* en el intervalo $[t_1, t_2]$. Una apreciación media que nos permite determinar tal desplazamiento en el tiempo es

$$\overline{v}_m = \frac{\overline{r}(t_2) - \overline{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Esta expresión define a la *velocidad media del móvil* en el intervalo considerado. Si t es un valor del tiempo, tal que $t_1 \leq t \leq t_2$, la velocidad media es

$$\overline{v}_m = \frac{\overline{r}(t) - \overline{r}(t_1)}{t - t_1} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$$

y este vector será tanto más aproximado a la velocidad del punto en cada instante, cuanto más se aproxime a cero el denominador. Y en el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, tendremos la velocidad instantánea \overline{v} .

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt} \quad (3.1.1-1)$$

o bien

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$$

La ecuación (3.1.1-1) define a la *velocidad instantánea* del punto móvil en el tiempo t .

Hemos trabajado con la función $\vec{r} = \vec{r}(t)$, que definimos como *ley vectorial del movimiento*. Sin embargo, es evidente que el punto móvil ha descrito la trayectoria c en su recorrido en el tiempo; por lo tanto, escribimos $S = S(t)$, función que corresponde a la *ley escalar del movimiento*, véase figura 3.1.1-3

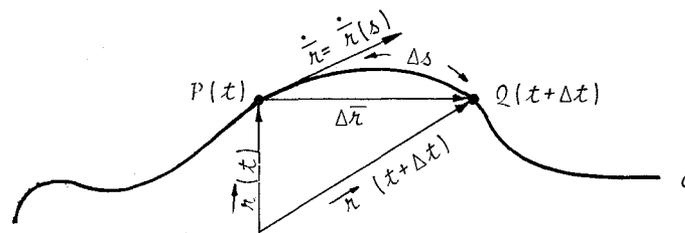


Figura 3.1.1-3

Debe tenerse presente que la ley vectorial del movimiento determina la posición del móvil para cada instante en términos del vector de posición del punto, en tanto que la ley escalar del movimiento nos proporciona su posición en función de la distancia recorrida por el punto móvil en su trayectoria.

En tales circunstancias, si:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{y} \quad s = s(t)$$

también

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

y finalmente

$$\vec{r} = \vec{r} [s(t)]$$

Así, para las dos posiciones sucesivas $P(t)$ y $Q(t+\Delta t)$ dibujamos la figura 3.1.1-4.

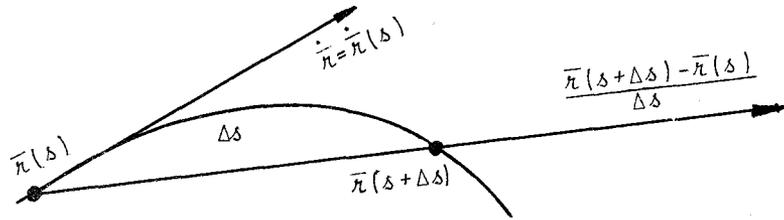


Figura 3.1.1-4

Como $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(s)$ es una representación natural de una curva regular c , la derivada de tal función

$$\frac{d\bar{\kappa}}{ds} = \dot{\bar{\kappa}}(s)$$

define la dirección de la tangente a c en el punto $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(s)$. Al operar con el límite

$$\dot{\bar{\kappa}}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{\kappa}(s + \Delta s) - \bar{\kappa}(s)}{\Delta s}$$

observamos en la figura 3.1.1-4 que el cociente $\frac{\bar{\kappa}(s+\Delta s) - \bar{\kappa}(s)}{\Delta s}$ representa a una secante de c , y el vector $\dot{\bar{\kappa}}(s)$ tiene como módulo a la unidad, luego

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\kappa}(s)|}{|\Delta s|} = 1$$

o bien que

$$\left| \frac{d\bar{\kappa}}{ds} \right| = |\dot{\bar{\kappa}}(s)| = 1$$

Definimos como *vector tangente unitario* a

$$\bar{e}_t = \dot{\bar{r}}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

En virtud de que el vector velocidad del punto móvil es tangente a la curva c en el punto $\bar{r}(s)$, el vector tangente unitario \bar{e}_t para tal punto tiene la misma dirección en el intervalo de tiempo considerado. Al multiplicar y dividir la expresión (3.1.1-1) por ds , se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{d\bar{r}}{dt} \\ &= \frac{ds}{dt} \frac{d\bar{r}}{ds} \\ &= \frac{ds}{dt} \bar{e}_t \end{aligned}$$

y puede obtenerse a la vez la *rapidez* del punto móvil

$$v = |\bar{v}| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \quad \text{pues} \quad |\bar{e}_t| = 1$$

Finalmente, la expresión de la velocidad será

$$\bar{v} = v \bar{e}_t \quad (3.1.1-2)$$

En forma análoga a como la velocidad nos mide el cambio de la posición de un punto, la *aceleración* nos permite determinar el cambio instantáneo de la velocidad en el tiempo; así:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} (v \bar{e}_t) = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

o sea

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}(t)$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión (3.1.1-2)

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{e}_t + (v \frac{d\bar{e}_t}{dt}) \quad (3.1.1-3)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término del segundo miembro de la igualdad por ds

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{e}_t + (v \frac{ds}{dt} \frac{d\bar{e}_t}{ds}) \quad (3.1.1-4)$$

pero

$$\frac{ds}{dt} = v$$

Además, $\bar{e}_t \cdot \bar{e}_t = 1$. Al derivar este producto escalar con respecto a s , se puede demostrar que $\bar{e}_t \cdot \frac{d\bar{e}_t}{ds} = 0$, y, por lo tanto, -

En esta situación, definimos

$$\frac{d\bar{e}_t}{ds} = K \bar{e}_n$$

en donde K es el módulo del vector curvatura correspondiente a la expresión vectorial anterior. Esa misma expresión la podemos expresar como sigue:

$$\bar{K} = \frac{d\bar{e}_t}{ds} = \ddot{\kappa} (s)$$

o bien

$$\bar{K} = \bar{K}(s)$$

Toda vez que \bar{e}_t es una función vectorial unitaria,-

entonces, $\frac{d\bar{e}_t}{ds}$ es ortogonal a \bar{e}_t ; por lo tanto, $\frac{d\bar{e}_t}{ds}$ es paralelo al plano normal que pasa por el punto considerado y normal a la tangente a la curva c en tal punto y de dirección \bar{e}_t . En rigor, la curvatura es siempre positiva, ya que es independiente de la orientación de la curva definida por el sentido de recorrido del punto móvil.

El recíproco de la curvatura es el *radio de curvatura* R . Este concepto se expresa

$$R = \frac{1}{K}$$

y

$$|\bar{K}| = K = \left| \frac{d\bar{e}_t}{ds} \right|$$

pues $|\bar{e}_n| = 1$; siendo \bar{e}_n un *vector normal unitario* perpendicular al vector tangente unitario \bar{e}_t . En fin, a la curvatura se le puede interpretar como el valor del cambio de la dirección de la tangente con respecto a la longitud del arco. Así

$$K = \left| \frac{d\bar{e}_t}{ds} \right| = \frac{1}{R}$$

Llevando los valores obtenidos para la curvatura y para el radio de curvatura a la expresión (3.1.1-4), queda

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{e}_t + \frac{v^2}{R} \bar{e}_n \quad (\text{Teorema de Huyghens}) \quad (3.1.1-5)$$

igualdad que podemos interpretar así:

- i) \bar{a} aceleración total del punto móvil
- ii) $\bar{a}_t = \frac{dv}{dt} \bar{e}_t$ componente tangencial de la aceleración del punto móvil, que mide-

el cambio instantáneo de la rapidez del punto

$$\text{iii) } \bar{a}_n = \frac{v^2}{R} \bar{e}_n$$

componente normal de la aceleración, y mide el cambio instantáneo en la dirección de la velocidad del punto móvil

El teorema de *Huyghens* incluye, en su interpretación, a las dos componentes de la aceleración citada

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$$

En función de las expresiones (3.1.1-2) y (3.1.1-5) determinamos los valores de las componentes \bar{a}_t y \bar{a}_n . Así:

$$\bar{a} \cdot \bar{v} = v \frac{dv}{d\bar{x}} \quad \text{pues} \quad \bar{e}_n \cdot \bar{e}_t = 0$$

Despejando

$$\frac{dv}{d\bar{x}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{v}$$

y

$$\bar{a}_t = \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{v} \bar{e}_t \quad (3.1.1-6)$$

Efectuando

$$\bar{a} \times \bar{v} = \frac{v^3}{R} \bar{e}_n \times \bar{e}_t = \frac{v^3}{R} \bar{e}_b \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{siendo } \bar{e}_b \text{ el vector} \\ \text{binormal, o sea,} \\ \text{normal a } \bar{e}_n \text{ y a } \\ \bar{e}_t \end{array} \right.$$

$$|\bar{a} \times \bar{v}| = \frac{v^3}{R}$$

pues

$$|\bar{e}_b| = 1$$

Queda

$$\frac{v^2}{R} = \left| \frac{\bar{a} \times \bar{v}}{v} \right|$$

y

$$\bar{a}_n = \left| \frac{\bar{a} \times \bar{v}}{v} \right| \bar{e}_n \quad (3.1.1-7)$$

De la expresión escalar anterior se obtiene el valor del radio de curvatura

$$R = \frac{v^3}{\left| \bar{a} \times \bar{v} \right|} \quad (3.1.1-8)$$

Plano osculador

Sean $P_0 (x_0, y_0, z_0)$, $P (x, y, z)$ y $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ las posiciones por donde pasa una partícula móvil en el transcurso del tiempo y \bar{r}_0 , \bar{r} y \bar{r}_1 los vectores de posición de tales puntos. Ahora bien, si $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$, $\bar{r} = \bar{r}(t)$ y $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(t)$, en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, queda definido el plano tangente π (osculador), pues tal lugar geométrico queda determinado por los tres puntos citados que pertenecen a la trayectoria del punto móvil, como se muestra en la figura 3.1.1-5

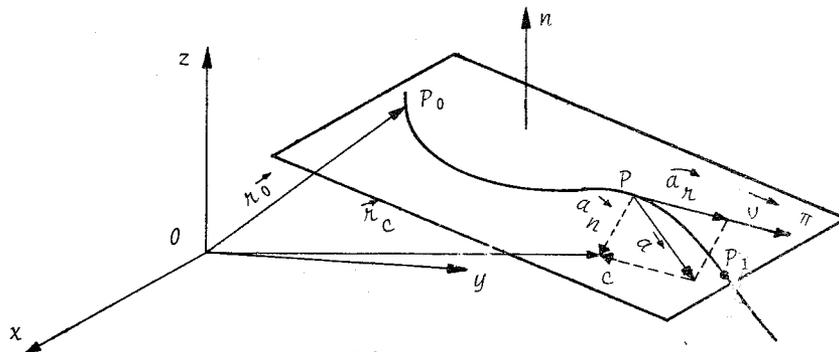


Figura 3.1.1-5

En rigor, la partícula describe una trayectoria curvilínea plana en el espacio, contenida en el plano π , en el intervalo considerado para $t = t$. La velocidad de $P(x, y, z)$ es tangente a la trayectoria $\bar{v} = v\bar{e}_t$, siendo la expresión de la aceleración del punto $\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$. A la vez, puede obtenerse el radio de curvatura (CP) para ese instante en tal punto.

No se recomienda aplicar, o tratar de definir, el plano-tangente al movimiento en el espacio de tres dimensiones; conviene utilizar otros procedimientos, como el uso de las funciones de las variables de trayectorias.

Jerk. La tercera derivada del desplazamiento, o desalojamiento, con respecto al tiempo, $\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = \bar{j}$, es una función que ha tomado decisiva importancia en la ingeniería moderna, debido a la invención de máquinas de funcionamiento complejo; así, tal concepto se usa, por ejemplo, en el estudio de las operaciones de las válvulas de admisión y escape de los motores de vehículos autopropulsados o automotrices, así como en otros donde se requieren variaciones de la función aceleración. Por lo tanto, \bar{j} representa el cambio de la aceleración con relación al tiempo, y se interpreta como el cambio, respecto al tiempo, de la magnitud de una fuerza o de la resultante de un sistema de fuerzas que provocan tal aceleración como efecto externo. De acuerdo con el contenido del segundo postulado de la Mecánica Clásica, $\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}$ alcanza valores considerables como efecto de impacto en las máquinas. Tal concepto recibe diversas denominaciones, como son segunda aceleración, pulso y la ya citada de *Jerk*.

Posición, velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas.

Sea $P(x, y, z)$ un punto móvil de vector de posición $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (figura 3.1.1-6). En estas circunstancias, la ley vectorial del movimiento es

$$\bar{r} = xi + yj + zk$$

en donde necesariamente $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$.

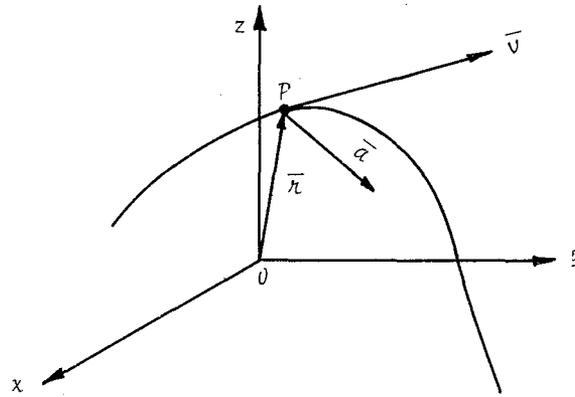


Figura 3.1.1-6

Al derivar $\bar{r}(t)$ con respecto al tiempo obtenemos \bar{v} , velocidad del punto móvil: $\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$ en virtud de que $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}(t)$. También $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$, $\dot{z} = \dot{z}(t)$. Derivando por segunda vez $\bar{r} = \bar{r}(t)$ determinamos la aceleración del punto $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}(t) = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}$, expresión que contiene implícitamente a las componentes tangencial y normal de la aceleración. Es evidente que las anteriores funciones de la variable escalar tiempo son funciones definidas, continuas y derivables de punto; en tal virtud, el proceso inverso a las operaciones de derivación efectuadas, esto es, las integraciones sucesivas a partir de la expresión de la aceleración, nos remiten a las etapas precedentes y, finalmente a la expresión original o de partida. Ambos procesos son muy usuales en los problemas del movimiento de la partícula material.

Ejemplo: Un punto se mueve en el primer cuadrante a lo largo de la curva $x = \frac{1}{3}y^3$. Si la proyección del movimiento del punto sobre el eje y es tal que $y = \frac{1}{4}t^2$, donde t es el tiempo y se mide en segundos, determine: la rapidez, el módulo de

la aceleración, y el radio de curvatura de la trayectoria cuando $t = 3 \text{ seg}$. Considere que las posiciones se estiman en metros.

Solución:

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Por los datos del problema

$$x = \frac{1}{3} (y)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} t^2 \right)^3 = \frac{1}{192} t^6, \quad y = \frac{1}{4} t^2$$

Así:

$$\bar{r} = \frac{1}{192} t^6 \hat{i} + \frac{1}{4} t^2 \hat{j}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{32} t^5 \hat{i} + \frac{1}{2} t \hat{j}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{5}{32} t^4 \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j}$$

Para $t = 3 \text{ seg}$

$$\bar{r} = 3.8\hat{i} + 2.25\hat{j} \left[\text{m} \right]$$

$$\bar{v} = 7.59\hat{i} + 1.5\hat{j} \left[\text{m/s} \right]$$

$$\bar{a} = 12.66\hat{i} + 0.5\hat{j} \left[\text{m/s}^2 \right]$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{12.66^2 + 0.5^2} = 12.67 \text{ m/s}^2$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{7.59^2 + 1.5^2} = 7.74 \text{ m/s}$$

$$\text{como } R = \frac{v^3}{|\bar{a} \times \bar{v}|}, \quad \bar{a} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 12.66 & 0.5 & 0 \\ 7.59 & 1.5 & 0 \end{vmatrix} = 15.195\hat{k}$$

$$\text{de donde } R = \frac{463.68}{15.195} = 30.52 \text{ m}$$

Ejemplo: La aceleración de una partícula está dada por la ecuación $\bar{a} = \bar{M} t$ donde \bar{M} es un vector constante y t es el tiempo. Determine la ley vectorial del movimiento de la partícula.

Solución:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \int \bar{v} dt \\ \bar{v} &= \int \bar{a} dt \\ &= \int \bar{M} t dt \\ &= \frac{1}{2} \bar{M} t^2 + \bar{C}\end{aligned}$$

en donde \bar{C} es un vector constante de integración.

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \int \bar{v} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \bar{M} t^2 + \bar{C} \right) dt \\ &= \frac{1}{6} \bar{M} t^3 + \bar{C} t + \bar{C}_1\end{aligned}$$

siendo \bar{C}_1 la constante de integración. Así

$$\bar{r} = \frac{1}{6} \bar{M} t^3 + \bar{C} t + \bar{C}_1$$

3.2 MOVIMIENTO DE UNA RECTA

3.2.1 DESPLAZAMIENTO ANGULAR

Para precisar algunos conceptos básicos relativos al movimiento angular, conviene abordar el problema por medio de una idea intuitiva; con tal propósito, consideremos el siguiente ejemplo:

Si a una partícula la hacemos girar alrededor de un eje, describirá círculos, ésto es posible visualizarlo si pensamos en una honda en la que el proyectil se le sujeta por medio de una cuerda y se le dan vueltas.

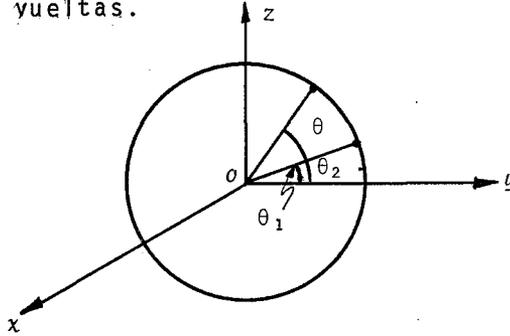


Figura 3.2.1-1

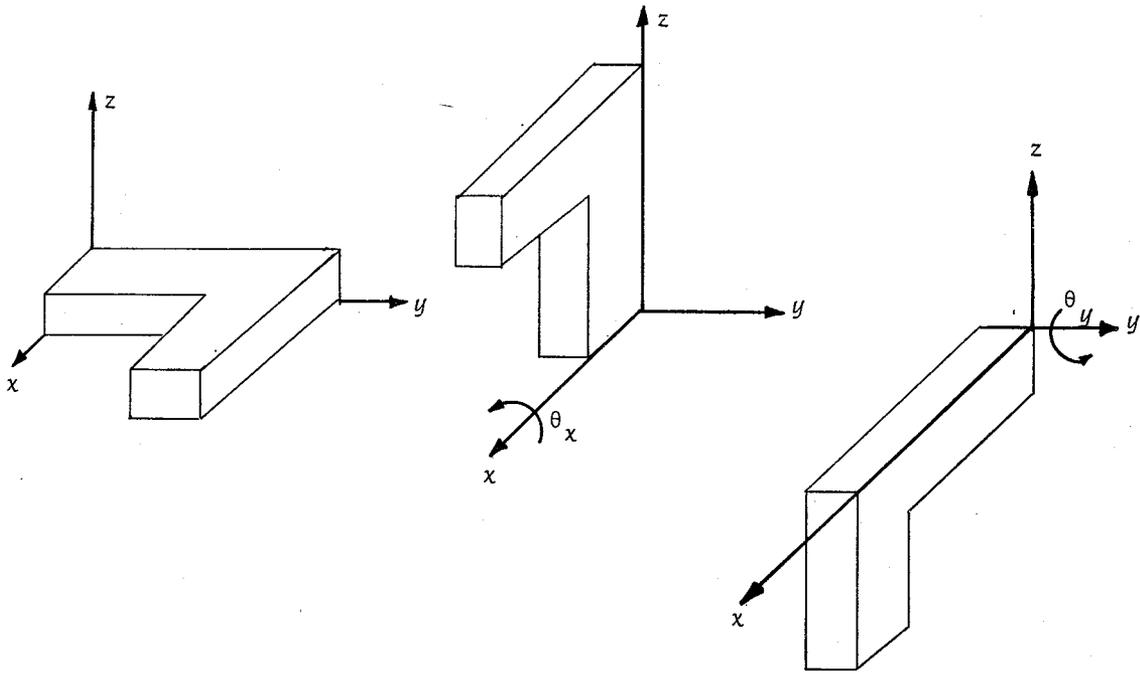
En estas condiciones es fácil captar que si introducimos un sistema de ejes (figura 3.2.1-1), a la partícula se le ubicará con sólo conocer el ángulo θ que describe con respecto a la posición inicial, toda vez que el radio de la circunferencia en que se mueve permanece constante. Así, el ángulo será una función de parámetro t ; esto es $\theta = \theta(t)$.

Cabe señalar que a la diferencia entre dos posiciones consecutivas la llamaremos *desplazamiento angular*.

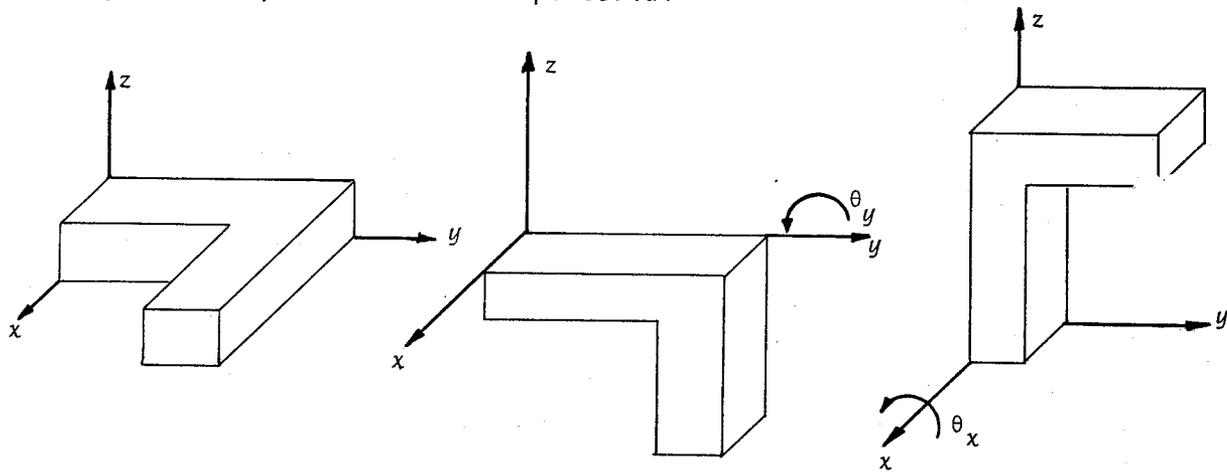
Antes de definir *velocidad angular*, es importante tener presente que tanto los ángulos como los desplazamientos angulares que hemos descrito, pese a que requieren dirección, no son vectores; más aún, si tratamos de componer los giros en un plano diferente, la superposición de estos (suma) no sería conmutativa y, por ende, el conjunto de los ángulos no podría constituir un campo vectorial.

Para mejor comprensión atiéndase al siguiente ejemplo:

Si a un cuerpo como el que se muestra en la figura lo hacemos girar un ángulo θ alrededor del eje x , y luego un ángulo θ y alrededor del eje y , su posición será:



En cambio; si alteramos el orden en que se efectuaron los giros, la posición del cuerpo sería:



Sobre este particular se hará mención en otros incisos - de este capítulo, en los que se especifica bajo qué condiciones - es posible considerar a los giros como cantidades vectoriales.

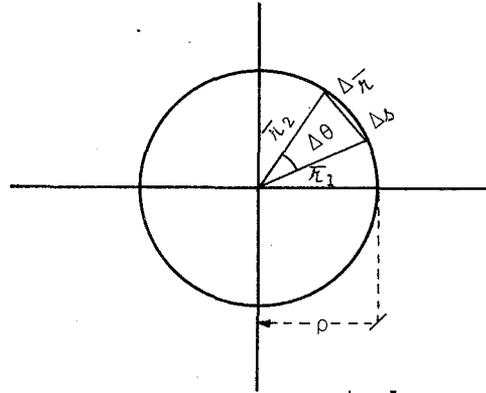
3.2.2 VELOCIDAD Y ACELERACION ANGULARES

Ahora bien, volviendo al problema de la partícula que se mueve en la circunferencia, deducimos que si deseamos obtener su velocidad en un instante t , aplicando los resultados obtenidos - con anterioridad, se tiene

$$\vec{v} = \left| \frac{d\vec{\kappa}}{dt} \right| \vec{e}_t = |\vec{v}| \vec{e}_t$$

en donde \vec{e}_t es un vector tangente a la trayectoria, en este caso a la circunferencia, y $\left| \frac{d\vec{\kappa}}{dt} \right|$ la rapidez de la partícula.

Para el cálculo del módulo de la velocidad podemos auxiliarnos de la siguiente figura:



en donde

$$|\vec{\kappa}_1| = |\vec{\kappa}_2| = \rho$$

de lo que obtenemos

$$\Delta s = \rho \Delta \theta$$

Por otra parte, como $\Delta\vec{\kappa}$ es suficientemente pequeño, el tamaño del vector se aproxima a Δs , de donde se puede escribir

$$|\Delta\vec{\kappa}| = \Delta s = \rho \Delta \theta$$

Al dividir esta expresión entre Δt y tomando límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$ - se tiene:

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \rho \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

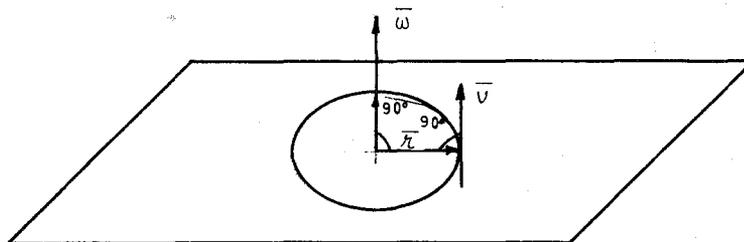
Al límite de $\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$, que es un escalar, le llamamos *rapidez angular* y lo denotamos así $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = |\omega| = \dot{\theta}$

Sustituyendo este resultado en la expresión de la velocidad, se tiene que $\bar{v} = \rho |\omega| \bar{e}_t$

Ahora bien, si se toma en cuenta que el vector velocidad es, por una parte, tangente a la trayectoria y, por la otra, perpendicular al vector de posición (perpendicular al radio de la circunferencia en el punto dado), se puede expresar la velocidad en función de dos vectores, como se indica a continuación

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

En esta expresión resulta que el vector $\bar{\omega}$, al que denominaremos *vector velocidad angular*, también es perpendicular tanto a \bar{r} como a \bar{v} , toda vez que \bar{r} y \bar{v} están en un plano. Véase la siguiente figura



Por otra parte, si de esta expresión se toma el módulo del vector, se tiene

$$|\bar{v}| = |\bar{\omega}| |\bar{r}| \text{sen } 90^\circ = |\bar{\omega}| |\bar{r}|$$

Pero, dado que $|\bar{r}| = \rho$, resulta $|\bar{v}| = |\bar{\omega}| \rho$, lo cual coincide con el resultado obtenido anteriormente.

Así, el vector velocidad angular será $\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{e}_b$ en donde--

\bar{e}_b es el vector normal al plano en que gira la partícula, y coincide con el eje de rotación.

En la expresión anterior se empleó la notación original-adoptada por Newton, que consiste en colocar un punto sobre el símbolo θ para indicar la primera derivada con respecto al tiempo. Cuando se coloquen dos puntos sobre el símbolo de una variable, significará que representa a la segunda derivada de tal variable, también con relación al tiempo.

A la magnitud o módulo de la velocidad angular se le denomina *rapidez angular instantánea* o, simplemente, *rapidez angular*.

Conviene advertir que las dimensiones con las que se expresa la velocidad y la rapidez angulares de los sistemas absolutos y gravitacionales, respectivamente son:

$$\left[L^0 \quad M^0 \quad T^{-1} \right] \quad \text{y} \quad \left[L^0 \quad F^0 \quad T^{-1} \right]$$

Las unidades son: seg^{-1} , min^{-1} , hr^{-1} o bien rad/seg , rad/min , rad/hr ; también es usual medir dichos conceptos cinemáticos en términos de "revoluciones" por unidad de tiempo: rps , rpm , rph , etc., en donde $1 \text{ rev} = 1 \text{ r} = 2\pi$

A su vez, la aceleración de la partícula será

$$\bar{a} = \frac{d|\bar{v}|}{dt} \bar{e}_t + \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{R} \bar{e}_n$$

en donde la derivada del módulo de la velocidad, sustituyendo el resultado obtenido, será:

$$\frac{d|\bar{v}|}{dt} = \frac{d \rho |\bar{\omega}|}{dt} = \frac{\rho d|\bar{\omega}|}{dt} = \frac{\rho d^2\theta}{dt^2} = \rho \ddot{\theta}$$

Como ya se dijo antes, la segunda derivada de θ , con respecto al tiempo, se representa por $\ddot{\theta}$.

Llevando este resultado a la expresión anterior, y sustituyendo el valor de $\bar{v} \cdot \bar{v}$ en función de la velocidad angular, resulta:

$$\bar{a} = \rho \ddot{\theta} \bar{e}_t + \frac{\rho^2 \omega^2}{R} \bar{e}_n = \rho \ddot{\theta} \bar{e}_t + \rho \omega^2 \bar{e}_n$$

toda vez que $R = \rho$ para el movimiento circular.

Mediante un razonamiento análogo al efectuado para el caso de la velocidad, a la aceleración tangencial la expresaremos en función de dos vectores, tal como se indica a continuación:

$$\bar{a}_t = \rho \ddot{\theta} \bar{e}_t = \bar{\alpha} \times \bar{r}$$

en donde $\bar{\alpha}$ es el vector *aceleración angular* y resulta igual a:

$$\bar{\alpha} = \ddot{\theta} \bar{e}_n$$

Por su parte, la aceleración normal la representaremos por medio de:

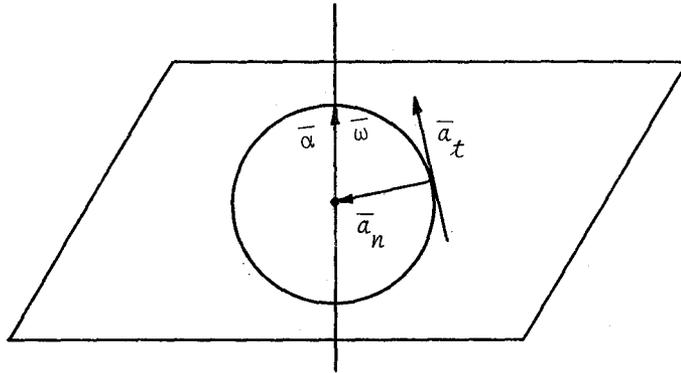
$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v}$$

pero

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

en donde

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$



De donde resulta que

$$\bar{a} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{r}]$$

Las dimensiones de esta última expresión, correspondiente al cociente resultante de la variación de la rapidez angular entre la del tiempo, son:

$$[L^0, M^0, T^{-2}] \quad \text{y} \quad [L^0, F^0, T^{-2}]$$

en los sistemas de unidades absolutos y gravitacionales, respectivamente. Es usual el empleo de las siguientes unidades: seg^{-2} , min^{-2} , rad/min^2 , etc.

3.3 CASOS PARTICULARES DEL MOVIMIENTO DEL PUNTO

Las expresiones que determinan las características cinemáticas (posición, velocidad y aceleración) del movimiento de una partícula, mismas que se trataron en el capítulo anterior, pueden generar otras según el tipo de movimiento que se estudie y el sistema de referencia que se adopte. Es obvio que las expresiones particulares de cada movimiento se obtendrán a partir de las generales y, por lo tanto, no son independientes de éstas.

3.3.1 MOVIMIENTOS SEGUN TRAYECTORIAS TRIDIMENSIONALES EN COORDENADAS CARTESIANAS

El sistema de coordenadas cartesianas fijas es el más usado en la solución de problemas de ingeniería.

Este sistema tiene como vectores unitarios base a: i, j, k , los cuales, en este caso, son constantes tanto en magnitud como en dirección; así pues, la ley vectorial del movimiento de la partícula queda expresada por su vector de posición en la siguiente forma:

$$\bar{r} = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad (3.3.1-1)$$

Si derivamos la ecuación con respecto al tiempo, obtenemos los vectores velocidad y aceleración.

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k} \quad (3.3.1-2)$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k} \quad (3.3.1-3)$$

Una vez conocida la ley de variación del vector posición, por derivaciones sucesivas obtenemos la velocidad y aceleración. Inversamente, si se conoce la aceleración del punto en cualquier instante, por integraciones sucesivas se obtiene la velocidad y el vector posición, utilizando las condiciones especiales del movimiento para la determinación de las constantes de integración.

En algunos problemas la aceleración no está en función del tiempo, sino en función de la velocidad o el desplazamiento; tal es el caso del amortiguador viscoso y el del resorte elástico, que trataremos a continuación.

La aceleración en función de la velocidad tiene las siguientes condiciones iniciales para:

$$t=0, \quad \bar{v}=\bar{v}_0, \quad \bar{r}=0$$

$$\bar{a} = f(\bar{v})$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = f(\bar{v})$$

$$\frac{d\bar{v}}{f(\bar{v})} = dt$$

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} \frac{d\bar{v}}{f(\bar{v})} = \int_0^t dt \quad (3.3.1-4)$$

Con la ecuación (3.3.1-4) encontramos la velocidad en función del tiempo:

$$\bar{v} = \bar{f}_1(t)$$

$$\int_0^{\bar{x}} d\bar{x} = \int_0^t \bar{f}(t) dt \quad (3.3.1-5)$$

La aceleración en función del desplazamiento es:

$$\bar{a} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (3.3.1-6)$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \bar{v}$$

$$\frac{d\bar{v} \cdot \bar{v}}{d\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} \bar{v} \cdot d\bar{v} = \int_0^{\bar{x}} \bar{f}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.3.1-7)$$

y con la ecuación (3.3.1-7) obtenemos:

$$\bar{v} = \bar{f}_1(\bar{x})$$

$$\int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\bar{f}_1(\bar{x})} = \int_0^t dt \quad (3.3.1-8)$$

y con la ecuación (3.3.1-8) obtenemos

$$\bar{x} = \bar{f}_2(t) \quad (3.3.1-9)$$

si sustituimos (3.3.1-9) en (3.3.1-7) y (3.3.1-6), obtenemos los valores de velocidad y aceleración en función del tiempo.

Ejemplo: La posición de una partícula está expresada mediante la función

$$\bar{x} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

en donde

$$x(t) = 5 + 6t^2$$

$$y(t) = 10t + 5$$

$$z(t) = 13$$

en las que x, y, z están en metros y t en segundos.

a) Determine la velocidad, la aceleración tangencial, la aceleración normal y el radio de curvatura de la trayectoria cuando $t = 3$ s

b) Determine el desplazamiento lineal de la partícula en el intervalo de $t = 0$ a $t_1 = 1$ s.

Solución:

$$\text{a) } \bar{r} = (5 + 6t^2)\mathbf{i} + (10t + 5)\mathbf{j} + 13\mathbf{k} \quad [\text{m}]$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = 12t\mathbf{i} + 10\mathbf{j} \quad [\text{m/s}]$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = 12\mathbf{i} \quad [\text{m/s}^2]$$

para $t = 3$ s:

$$\bar{r} = 59\mathbf{i} + 35\mathbf{j} + 13\mathbf{k} \quad [\text{m}]$$

$$\bar{v} = 36\mathbf{i} + 10\mathbf{j} \quad [\text{m/s}]$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{36^2 + 100} = 37.36 \text{ m/s}$$

$$\bar{a} = 12\mathbf{i} \quad [\text{m/seg}^2]$$

$$a_t = \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} \mathbf{e}_t$$

$$\frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{432}{37.36} = 11.58$$

$$\bar{e}_t = \frac{36i}{37.36} + \frac{10}{37.36} j$$

$$\bar{a}_t = 11.14i + 3.09j \left[m/s^2 \right]$$

$$\bar{a}_n = \bar{a} - \bar{a}_t$$

$$\bar{a}_n = 12i - (11.14i + 3.09j)$$

$$\bar{a}_n = 0.86i - 3.09j \left[m/s^2 \right]$$

$$R = \frac{|\bar{v}|^3}{|\bar{a} \times \bar{v}|}$$

$$|\bar{a} \times \bar{v}| = 120$$

$$R = \frac{52\,145.95}{120}$$

$$R = 434.55 \text{ m}$$

b) $\bar{r}_{t=1} = 11i + 15j + 13k \left[m \right]$

$$\bar{r}_{t=0} = 5i + 5j + 13k \left[m \right]$$

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}_{t=1} - \bar{r}_{t=0} = 6i + 10j + 0k \left[m \right]$$

Ejemplo: La aceleración de una partícula se encuentra - -
determinada en todo tiempo por la ecuación:

$$\bar{a} = 18i + (5t-2)j + k \left[m/s^2 \right]$$

si cuando $t=1$ s:

$$\bar{v} = 7i + 2j + 0k \left[m/s^2 \right]$$

y

$$\bar{x} = 0$$

determine en qué instante la abscisa del móvil es 500 m.

Solución:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \int \bar{a} dt \\ &= \int [18i + (5t-2)j + k] dt \\ &= 18ti + \left(\frac{5}{2}t^2 - 2t\right)j + tk + \bar{c}\end{aligned}$$

$$\text{para } t = 1 \text{ s: } \quad \bar{v} = 7i + 2j$$

$$\text{luego } 7i + 2j = 18(1)i + \left[\frac{5}{2}(1)^2 - 2(1)\right]j + (1)k + \bar{c}$$

$$\text{por lo que } \quad \bar{c} = -11i + 1.5j - k$$

$$\begin{aligned}\bar{v} &= (18t - 11)i + \left(\frac{5}{2}t^2 - 2t + 1.5\right)j + (t - 1)k \\ \bar{x} &= \int \bar{v} dt = (9t^2 - 11t)i + \left(\frac{5}{6}t^3 - t^2 + 1.5t\right)j + \left(\frac{t^2}{2} - t\right)k + \bar{c}_1\end{aligned}$$

$$\text{para } t = 1 \text{ s: } \quad \bar{x} = 0$$

$$\text{luego } 0 = -2i + \left(\frac{5}{6} - \frac{6}{6} + \frac{9}{6}\right)j + \left(\frac{1}{2} - 1\right)k + \bar{c}_1$$

$$\bar{c}_1 = +2i - \frac{4}{3}j + \frac{1}{2}k$$

$$\bar{x} = (9t^2 - 11t + 2)i + \left(\frac{5}{6}t^3 - t^2 + 1.5t - \frac{4}{3}\right)j + \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right)k \text{ [m]}$$

$$\text{Si } x = 500 \text{ m}$$

$$9t^2 - 11t + 2 = 500$$

$$9t^2 - 11t - 498 = 0$$

$$t_1 = 8.07 \text{ s}$$

$$t_2 = -6.85 \text{ s}$$

El tiempo buscado es $t \approx 8.07 \text{ s}$, pues si suponemos que el movimiento se inicia cuando $t=0$, los tiempos negativos - carecen de sentido.

3.3.2 MOVIMIENTOS SEGUN TRAYECTORIAS BIDIMENSIONALES (MOVIMIENTOS PLANOS) EN COORDENADAS CARTESIANAS

Tiro Parabólico

Uno de los casos más interesantes de los movimientos coplanares es el lanzamiento de un proyectil que inicia su movimiento con una velocidad inicial \bar{v}_0 formando un ángulo θ_0 con la horizontal (como se ilustra en la figura 3.3.2-1) y durante todo el movimiento tiene una aceleración constante que es la de la gravedad terrestre.

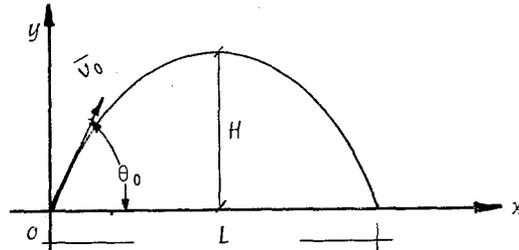


Figura 3.3.2-1

Para facilitar el ejemplo escogeremos como origen de coordenadas el punto de lanzamiento. Dado que, la única aceleración impuesta al proyectil es la de la gravedad, tenemos que:

$$\bar{a} = -g\mathbf{j} \quad (3.3.2-1)$$

(en donde g = aceleración de la gravedad = 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2) -
Las condiciones iniciales del movimiento son para $t=0$

$$\bar{v}_0 = (v_0 \cos \theta_0)\mathbf{i} + (v_0 \sin \theta_0)\mathbf{j} \quad (3.3.2-2)$$

$$\bar{r} = 0$$

Procederemos a integrar la ecuación (3.3.2-1) para obtener la velocidad y el vector posición del proyectil en cualquier instante

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}}{dt} &= -gj \\ d\bar{v} &= (-gdt)j \\ \bar{v} &= \int (-gdt)j \\ \bar{v} &= -gtj + \bar{C}_1\end{aligned}\quad (3.3.2-3)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.3.2-3) la ecuación (3.3.2-2) para obtener la constante:

$$\begin{aligned}(v_0 \cos \theta_0)i + (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)j &= -g(0)j + \bar{C}_1 \\ \bar{C}_1 &= (v_0 \cos \theta_0)i + (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)j \\ \bar{v} &= (v_0 \cos \theta_0)i + (v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt)j\end{aligned}\quad (3.3.2-4)$$

Integrando nuevamente obtenemos \bar{x} :

$$\bar{x} = [(v_0 \cos \theta_0)t]i + [(v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2]j + \bar{C}_2$$

Sustituyendo las condiciones iniciales obtenemos \bar{C}_2 :

$$\begin{aligned}0 &= [0]i + [0]j + \bar{C}_2 \quad \cdot \quad \bar{C}_2 = 0 \\ \bar{x} &= [(v_0 \cos \theta_0)t]i + [(v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2]j\end{aligned}\quad (3.3.2-5)$$

En esta forma, con las ecuaciones (3.3.2-1), (3.3.2-4) y (3.3.2-5) quedan definidas las características del movimiento en cualquier instante.

De la ecuación (3.3.2-5) obtenemos las expresiones paramétricas de la trayectoria del proyectil, y eliminando el parámetro tiempo obtenemos la ecuación de la trayectoria:

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t$$

$$\therefore t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore y = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0) \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{x^2}{(v_0 \cos \theta_0)^2} \right)$$

$$y = x \tan \theta_0 - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad (3.3.2-6)$$

Como se observa, la ecuación (3.3.2-6) es la de una parábola con eje focal paralelo al eje y y que se abre hacia abajo.

El alcance máximo L y la altura máxima H (véase la figura 3.3.2-1) se calculan del siguiente modo:

El alcance máximo L se tiene cuando la componente vertical del vector de posición de la partícula (ecuación (3.3.2-5)) vale cero, ésto es:

$$v_0 \operatorname{sen} \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t(v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - \frac{1}{2}gt) = 0$$

De donde

$$t_0 = 0$$

y

$$v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - \frac{1}{2}gt_L = 0$$

luego

$$t_L = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g}$$

Es decir que para $t_0 = 0$ y $t_L = 2v_0 \operatorname{sen} \theta_0 / g$; $y = 0$ cuando $t_0 = 0$ se encuentra en el origen y cuando $t_L = 2v_0 \operatorname{sen} \theta_0 / g$ se encuentra en el punto de alcance máximo y éste lo calculamos con la componente

horizontal de la ecuación (3.3.2-5)

$$L = (v_0 \cos \theta_0) \left(\frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g} \right)$$

$$L = \frac{2v_0^2 \cos \theta_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g}$$

$$L = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$

(3.3.2-7)

Ya que la curva es una parábola, por simetría, para $y=H$, $x=L/2$, lo que se puede demostrar derivando (3.3.2-6) e igualándola a cero, con lo que obtenemos

$$x = \frac{L}{2} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{2g}$$

sustituyendo en (3.3.2-6)

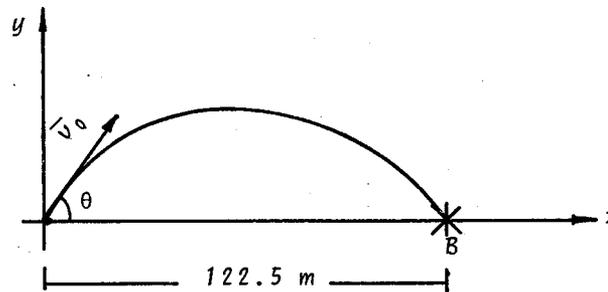
$$H = \frac{v_0^2}{2g} \left(2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 \frac{\operatorname{sen} \theta_0}{\cos \theta_0} \right) - \frac{g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2 \theta_0}$$

$$(4 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0) \frac{1}{4g^2}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} (2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 - \operatorname{sen}^2 \theta_0) = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \theta_0$$

$$\therefore H = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \theta_0$$

Ejemplo: Encuentre el ángulo θ con que debe de lanzarse un proyectil, para dar en el blanco B de la figura indicada, sabiendo que la velocidad inicial es de 49 m/s. Diga cuál sería el ángulo con el que obtendríamos un alcance máximo.



Solución:

De la ecuación (3.3.2-7) tenemos

$$L = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

$$\frac{(49)^2}{9.81} \operatorname{sen} 2\theta = 122.5$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 0.500$$

luego

$$2\theta_1 = 30^\circ \quad 2\theta_2 = 150^\circ$$

entonces

$$\theta_1 = 15^\circ \quad \text{y} \quad \theta_2 = 75^\circ$$

$$\text{Como } L = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

el valor máximo de L depende del seno del ángulo, y como el valor máximo del seno es 1, tenemos que:

$$\operatorname{sen} 2\theta_m = 1$$

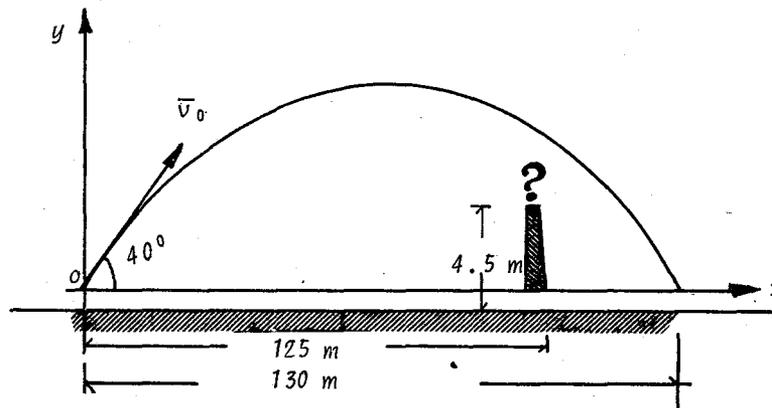
$$2\theta_m = 90^\circ$$

$$\theta_m = 45^\circ$$

$$L_m = \frac{v_0^2}{g} = 245 \text{ m}$$

Ejemplo: Un jugador de beisbol batea una pelota a una altura de 0.85 m, y con un ángulo de 40° . Si su alcance horizontal es de 130 m, y a 125 m se encuentra la barda del campo de beisbol, --

la cual es de 4.5 m de altura, ¿logró conectar un home run? (Ver figura)



Solución:

Primero escogemos nuestro sistema de referencia en el punto de partida de la pelota, para poder aplicar las expresiones deducidas anteriormente. Con la expresión (3.3.2-7) calculamos v_0 en la siguiente forma;

$$v_0^2 = \frac{L g}{\text{sen } 2\theta} = \frac{130 (9.81)}{\text{sen } 2(40^\circ)} = 1293.65$$

$$v_0 = 35.97 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De la ecuación (3.3.2-6) de la trayectoria obtenemos la ordenada cuando la abscisa vale 125 m y es

$$y = (125) \tan 40^\circ - \frac{(9.81) (125)^2}{2 (35.97) (\cos 40^\circ)^2} = 3.96 \text{ m} > 3.65$$

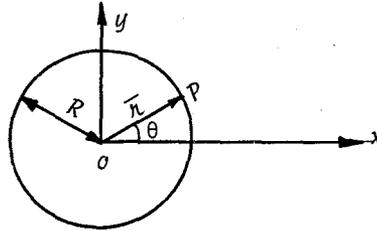
Sí logro conectar un home run, pasando a 31 cm por arriba de la barda de la pelota.

Movimiento Circular

Se denomina así al movimiento descrito por una partícula

que se desplaza siguiendo una trayectoria circular.

Sea la partícula P, cuya trayectoria se encuentra contenida en el plano xoy como se muestra en la figura



La posición de P quedará determinada mediante el vector - de posición

$$\vec{r} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} \quad (3.3.2-8)$$

derivando \vec{r} para obtener la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-R \sin \theta \frac{d\theta}{dt}) \hat{i} + (R \cos \theta \frac{d\theta}{dt}) \hat{j} \quad (3.3.2-9)$$

Podemos identificar a θ mediante una función vectorial - $\bar{\theta}(t)$, misma que tendrá una dirección normal al plano del movimiento. A la derivación de $\bar{\theta}$ con respecto al tiempo se le llama velocidad angular $\bar{\omega} = \frac{d\bar{\theta}}{dt}$, y tendrá la misma dirección que $\bar{\theta}$; siendo en este caso $\bar{\omega} = \omega \hat{k}$

$$\vec{v} = -R\omega \sin \theta \hat{i} + R\omega \cos \theta \hat{j} \quad (3.3.2-10)$$

Calculemos el módulo de \vec{v} :

$$|\vec{v}| = \sqrt{R^2 \omega^2 \sin^2 \theta + R^2 \omega^2 \cos^2 \theta} = \omega R \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

luego

$$|\vec{v}| = \omega R \quad (3.3.2-11)$$

Con la ecuación (3.3.2-11) obtenemos, desde el punto de-

vista vectorial, la rapidez tangencial en función de la rapidez angular:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Puesto que

$$|\bar{v}| = |\bar{\omega}| |\bar{r}| \operatorname{sen} \angle (\bar{\omega}, \bar{r})$$

y

$$|\bar{r}| = R \quad \text{y} \quad \angle (\bar{\omega}, \bar{r}) = 90^\circ$$

$$|\bar{v}| = \omega R$$

Para obtener la aceleración de P derivaremos la ecuación (3.3.2-10)

$$\bar{a} = -R(\omega \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \operatorname{sen} \theta) i + R(-\omega \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \cos \theta) j \quad (3.3.2-12)$$

A la variación de $\bar{\omega}$, con respecto al tiempo, se le denomina *aceleración angular* $\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ y también tendrá una dirección normal al plano del movimiento.

$$\bar{a} = -R(\omega^2 \cos \theta + \alpha \operatorname{sen} \theta) i + R(-\omega^2 \operatorname{sen} \theta + \alpha \cos \theta) j$$

que puede escribirse de la siguiente forma:

$$\bar{a} = -R\omega^2 (\cos \theta i + \operatorname{sen} \theta j) - R\alpha (\operatorname{sen} \theta i - \cos \theta j)$$

donde $(\cos \theta i + \operatorname{sen} \theta j)$ es un vector unitario cuya dirección es la misma de \bar{r} , pero con sentido contrario a éste, es decir, normal a la tangente de la trayectoria en ese instante, siendo el primer término del segundo miembro de la ecuación la componente normal de la aceleración

$$\bar{a}_n = -\omega^2 R (\cos \theta i + \operatorname{sen} \theta j) = \omega^2 R \bar{e}_n$$

$$|\bar{a}_n| = \omega^2 R$$

El segundo término deberá ser la componente tangencial - de la aceleración y, como el vector $-(\text{sen}\theta\hat{i} - \text{cos}\theta\hat{j})$ es unitario podemos escribir

$$\bar{a}_t = -\alpha R(\text{sen}\theta\hat{i} - \text{cos}\theta\hat{j}) = \alpha R\bar{e}_t$$

$$|\bar{a}_t| = \alpha R$$

Calculemos el módulo de \bar{a} :

$$\bar{a} = (-\alpha R \text{sen}\theta - R\omega^2 \text{cos}\theta)\hat{i} + (\alpha R \text{cos}\theta - R\omega^2 \text{sen}\theta)\hat{j}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\bar{a}| &= \left[\alpha^2 R^2 (\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta) + R^2 \omega^4 (\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta) \right]^{1/2} \\ &= \left[R^2 (\alpha^2 + \omega^4) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$|\bar{a}| = R\omega^2 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^4}}$$

Ejemplo: Un punto se mueve sobre una trayectoria circular de radio de 0.5 m de acuerdo con la ley - $\omega = (3t^3 + 4t - 3) \left[\text{s}^{-1} \right]$. Si $\theta = 8$ cuando $t = 2 \text{ s}$ - - - determine:

- ¿Cuántas vueltas dará entre $t = 4$ y $t = 10 \text{ s}$?
- ¿Cuál es el módulo de la aceleración tangencial, normal y rapidez de la partícula cuando $t = 3 \text{ s}$?

Solución:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^3 + 4t - 3) = 9t^2 + 4 \left[\text{s}^{-2} \right]$$

$$\theta = \int \omega dt = \int (3t^3 + 4t - 3) dt = \frac{3}{4} t^4 + 2t^2 - 3t + C$$

para $t=2$; $\theta=8$

$$8 = \frac{3}{4} (2)^4 + 2(2)^2 - 3(2) + C$$

luego

$$C = -6$$

$$\theta = \frac{3}{4} t^4 + 2t^2 - 3t - 6$$

a) Para $t=4$, $\theta_4 = 192 + 32 - 12 - 6 = 206 \text{ rad}$

Para $t=10$, $\theta_{10} = 7500 + 200 - 30 - 6 = 7664 \text{ rad}$

$$\Delta\theta = \theta_{10} - \theta_4 = 7458 ; \frac{7458}{2\pi} = 1.186.98 \text{ vueltas}$$

b) Para $t=3 \text{ s}$

$$\alpha = 85 \text{ s}^{-2}$$

$$\omega = 90 \text{ s}^{-1}$$

$$v = \omega R = 90 \text{ s}^{-1} \times 0.5 \text{ m} , \quad v = 45 \text{ m/s}$$

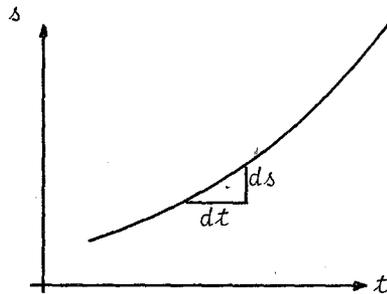
$$a_n = \omega^2 R = 90^2 (0.5) , \quad a_n = 4050 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = \alpha R = 85 (0.5) , \quad a_t = 42.5 \text{ m/s}^2$$

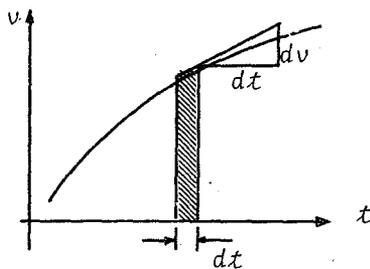
3.3.3 MOVIMIENTOS RECTILINEOS

Son aquellos en los que la trayectoria del móvil es una línea recta. Generalmente dicha trayectoria se hace coincidir con uno de los ejes coordenados de referencia, lo que motiva que estos movimientos puedan ser tratados escalarmente.

En algunos casos es ilustrativo tratar el problema gráficamente, y resolverlo por integración gráfica (área bajo la curva) de alguna de las curvas, mismas que se dibujan a continuación

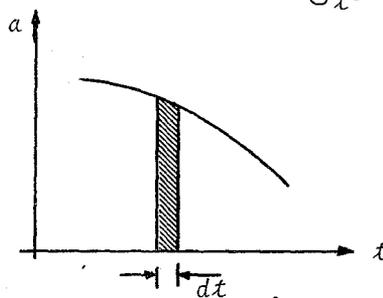


$$v = \text{pendiente de la curva} = \frac{ds}{dt}$$



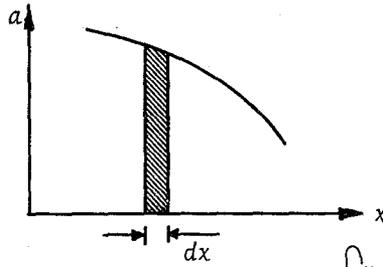
$$a = \text{pendiente de la curva} = \frac{dv}{dt}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \text{área bajo la curva} = \int_{t^1}^{t^2} v dt$$



$$\Delta v = \text{área bajo la curva} = \int_{t^1}^{t^2} a dt$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$



$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \text{área bajo la curva} = \int_{x_1}^{x_2} a dx$$

Movimiento rectilíneo uniforme

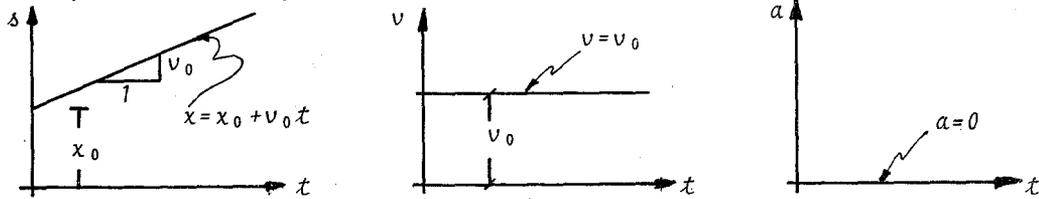
Es aquel movimiento cuya trayectoria es una línea recta - y tiene una velocidad constante. Por tener velocidad constante - su aceleración es nula, y consecuentemente, su desplazamiento se rá en general:

$$v = cte = v_0 \quad (3.3.3.-1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0, \quad x = v_0 t + C; \quad \text{si para } t=0 \quad x=x_0$$

$$\therefore x = x_0 + v_0 t \quad (3.3.3-2)$$

Su representación gráfica será:



Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Se define así al movimiento cuya trayectoria es una línea recta y su aceleración es constante.

Deduciremos sus características cinemáticas considerando que para

$$t=0, \quad x=x_0, \quad v=v_0$$

y como

$$a = \text{constante}$$

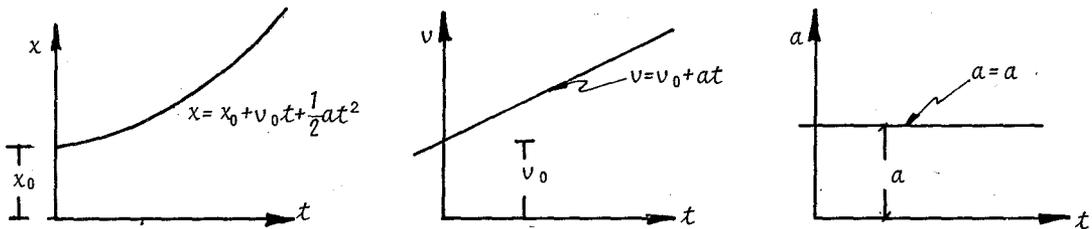
$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow v = v_0 + at \quad (3.3.3-3)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (3.3.3-4)$$

Eliminando el parámetro tiempo en las ecuaciones (3.3.3-3) y - - (3.3.3-4) obtenemos

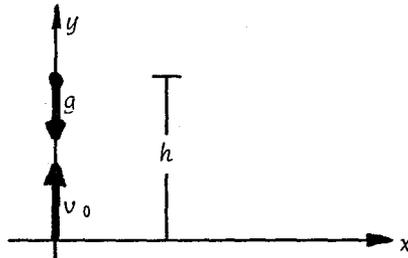
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (3.3.3-5)$$

La interpretación gráfica de este movimiento es:



Tiro vertical

Es el movimiento que describe una partícula cuya velocidad inicial es de sentido contrario a la aceleración de la gravedad, siendo ésta la aceleración de la partícula en cualquier instante.



$$a = -g$$

Integremos para encontrar la velocidad de la partícula

$$v = \int a dt = -gt + C$$

para

$$t=0, \quad v=v_0$$

luego

$$C=v_0$$

$$v=v_0-gt$$

Integrando nuevamente obtendremos el desplazamiento:

$$y = \int v dt = \int (v_0 - gt) dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C_1$$

para

$$t=0, \quad y=0$$

luego

$$C_1=0$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

La altura máxima h que alcanza la partícula es:

en $h, v=0$

luego

$$v_0 - gt = 0$$

y

$$t = \frac{v_0}{g} = \text{tiempo de altura máxima}$$

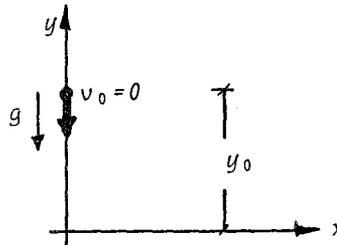
y para

$$t = \frac{v_0}{g} \quad , \quad h = v_0 \left(\frac{v_0}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Caída libre

Cuando una partícula se deja caer y se encuentra sujeta únicamente a la aceleración de la gravedad, al movimiento rectilíneo que describe se le llama *caída libre*.



$$a = -g$$

Integrando para determinar v :

$$v = \int g dt = -gt + C$$

para

$$t=0 \quad , \quad v=0$$

luego

$$C=0$$

$$v = -gt$$

Para obtener la distancia recorrida integraremos v :

$$y = \int v dt = - \int g t dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1$$

para

$$t=0, \quad y=y_0$$

luego

$$C_1 = y_0$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Ejemplo: Un automovilista viaja a 60 km/h cuando observa un semáforo situado 300 m delante de él que cambia al rojo. Si el semáforo permanece en rojo durante 20 seg y el automovilista desea pasarlo sin llegar a detenerse en el momento de aparecer el verde, halle:

- a) La aceleración uniforme que requiere el coche.
- b) La velocidad del vehículo cuando pasa el semáforo.

Solución:

$$\text{Como } a = \text{cte}, \quad v = v_0 + at$$

y

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

El auto debe recorrer 300 m en 20 s entonces

$$300 = \frac{1}{2} a (20)^2 + \frac{60}{3.6} (20) + 0 \quad \left(60 \frac{\text{km}}{\text{hr}} = \frac{60}{3.6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$a = \frac{300 - \frac{1200}{3.6}}{200} = -0.1666 \text{ m/s}^2$$

$$v = -0.1666(20) + \frac{60}{3.6} = 13.34 \text{ m/s}$$

Ejemplo: Se suelta una piedra desde un globo que está subiendo a una velocidad de 24 ft/s; si la piedra llega a la tierra en 10.3 s, encuentre

a) La altura a la cual se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.

b) La velocidad del choque de la piedra con la superficie terrestre.

Solución:

La aceleración de la piedra es constante e igual a la aceleración de la gravedad g . Entonces

$$a = -g, \quad v = \int -g dt = -gt + v_0$$

$$h = \int v dt, \quad h = \left| -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \right|$$

a) Si la piedra tarda 10.3 s en llegar a la tierra:

$$h = \left| -\frac{1}{2} 32.2 (10.3)^2 + 24 (10.3) \right|$$

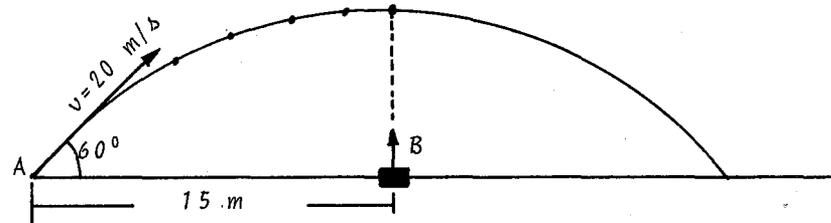
$$h = 1460.85 \text{ ft}$$

b) $v = -32.2(10.3) + 24$

$$v = -307.66 \text{ ft/s}$$

Ejemplo: Se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil al mismo tiempo que se lanza otro con un movimiento de tiro parabólico, desde los

puntos B y A respectivamente, como se muestra en la figura. Determine la velocidad con que debe lanzarse el proyectil de B para que choquen ambos proyectiles.



Solución:

Para el tiro parabólico, tomando el eje x horizontal y el eje y vertical, tenemos:

$$\bar{a} = -g\mathbf{j}$$

$$\bar{v} = -gt\mathbf{j} + 20\cos 60^\circ\mathbf{i} + 20\sin 60^\circ\mathbf{j}$$

$$\bar{v} = 10\mathbf{i} + (17.32 - gt)\mathbf{j}$$

$$\bar{r} = 10t\mathbf{i} + \left(17.32t - \frac{1}{2}9.81t^2\right)\mathbf{j}$$

Si $x = 15\text{m}$; $t = 1.5\text{ s}$; luego

$$y = 17.32(1.5) - \frac{9.81}{2}(1.5)^2 = 14.94\text{ m}$$

En el tiro vertical se tiene:

$$\bar{a} = -g\mathbf{j}$$

$$\bar{v} = (v_0 - gt)\mathbf{j}$$

$$\bar{r} = y\mathbf{j} = \left(v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}$$

$$\text{Si } h=y= 14.94 \text{ m } \text{ y } t=1.5 \text{ s}$$

$$14.94 = -\frac{9.81}{2}(1.5)^2 + v_0(1.5)$$

$$v_0 = 17.32 \text{ m/s}$$

Ejemplo. Desde una torre de 100 ft de altura se dejan caer dos bolas, la segunda 0.5 s después de la primera. ¿A qué distancia de la superficie de la tierra se encontrará la segunda bola cuando la primera llegue al suelo?

Solución:

Para la primera bola

$$a = -g$$

$$v = \int a dt = -gt$$

$$h = \int v dt = -\frac{1}{2}gt^2 + 100$$

Para

$$h=0$$

$$0 = -\frac{1}{2}(32.2)(t)^2 + 100$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{100}{16.1}} = 2.49 \text{ s}$$

Para la segunda piedra

$$t = 2.49 - 0.5 = 1.99 \text{ s}$$

$$h = -\frac{1}{2}(32.2)(1.99)^2 + 100$$

$$h = 36.24 \text{ ft}$$

Movimiento armónico simple

Es el movimiento rectilíneo de un punto cuya aceleración lineal es proporcional a la posición del punto móvil, respecto a un punto fijo de la trayectoria, y se encuentra dirigida hacia - dicho punto fijo. La ecuación de dicho movimiento es:

$$\bar{a} = -k^2 \bar{\rho}$$

Como se trata de un movimiento rectilíneo \bar{a} y $\bar{\rho}$ coinciden con la trayectoria, por lo que la ecuación vectorial anterior - puede tratarse algebraicamente como sigue

$$a = -K^2 x$$

como

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -K^2 x$$

pudiéndose escribir

$$dx \frac{d^2 x}{dt^2} = -K^2 x dx$$

o sea

$$\left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dt \right) = -K^2 x dx$$

Integrando la ecuación anterior (integral de la forma - - $\int u du$) se tiene:

$$\int \frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dt \right) = -K^2 \int x dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2} K^2 x^2 + C$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = v^2 = -K^2 x^2 + C$$

Cuando $x=0$, $v=v_0$ y por ende: $C=v_0^2$

entonces

$$v^2 = -K^2 x^2 + v_0^2$$

y por lo tanto

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 - K^2 x^2}$$

De la expresión anterior

$$\begin{aligned} \pm \int \frac{dx}{(v_0^2 - K^2 x^2)^{1/2}} &= \int dt \\ \pm \frac{1}{K} \int \frac{K dx}{[v_0^2 - (Kx)^2]^{1/2}} &= t + C_1 \\ \pm \frac{1}{K} \text{ang sen } \frac{Kx}{v_0} &= t + C_1 \end{aligned}$$

Puesto que para $t=0$, $x=0$: $C_1=0$ la expresión queda:

$$\pm Kt = \text{ang sen } \frac{Kt}{v_0}$$

$$\text{sen}(Kt) = \pm \frac{Kx}{v_0}$$

de donde

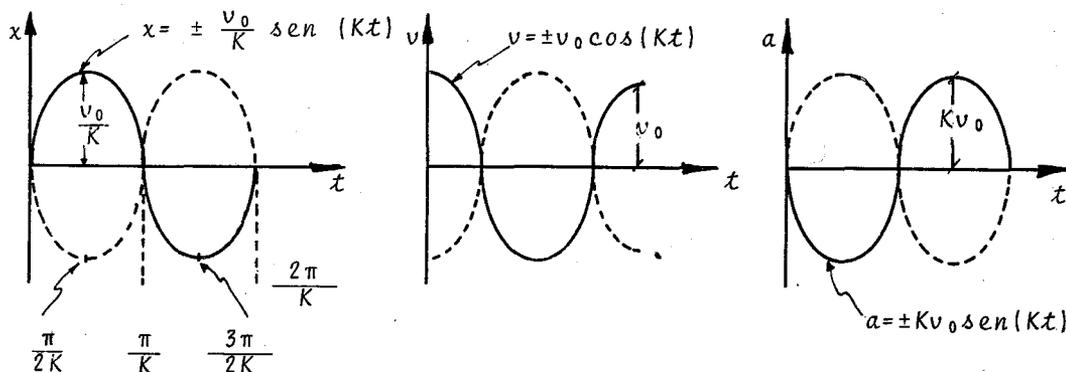
$$x = \pm \frac{v_0}{K} \text{sen } Kt$$

Si sustituimos el valor de x en las expresiones de la velocidad y de la aceleración, éstas quedarían como sigue:

$$v = \pm \cos(Kt) v_0$$

$$a = \pm \text{sen}(Kt) K v_0$$

Al relacionar las gráficas de la posición, de la velocidad y de la aceleración, con el tiempo del movimiento armónico simple, resultan las senoidales siguientes:



De las gráficas se colige que el movimiento armónico simple se efectúa por ciclos y oscilaciones que se repiten sucesivamente.

Amplitud. Es la longitud de la mitad de la trayectoria del punto móvil. En la gráfica posición-tiempo se observa que la amplitud se expresa así

$$h = \left| \frac{v_0}{K} \right|$$

es decir, la amplitud es igual al valor absoluto de la máxima posición del punto.

Periodo. Es el tiempo en que el punto móvil realiza una oscilación o ciclo. Por tanto

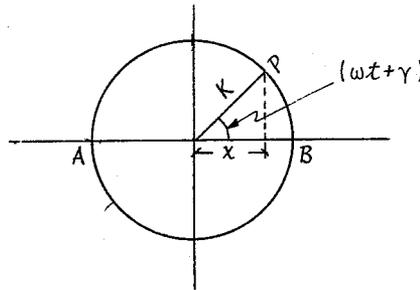
$$T = \frac{2\pi}{K}$$

Frecuencia. Es el número de oscilaciones o ciclos que

efectúa el punto en movimiento en la unidad de tiempo; es decir, su valor es igual al recíproco del período

$$\delta = \frac{1}{T} = \frac{K}{2\pi}$$

Ejemplo. El desplazamiento x del movimiento armónico simple que tendría la proyección de la partícula P en el diámetro AB de la figura está dado por la función $x = K \cos(\omega t + \gamma)$



Si cuando $\omega = 5\pi \text{ [s}^{-1}\text{]}$
 $x = 0$, $\dot{x} = -10\pi \text{ [s}^{-1}\text{]}$ y $t = 0$,
 determine la amplitud K y el ángulo γ (el menor positivo)

Solución:

$$\text{Para } x = 0 ; 0 = K \cos [5\pi(0) + \gamma]$$

$$0 = K \cos \gamma \quad (1)$$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} [K \cos(\omega t + \gamma)] = -K \text{sen}(\omega t + \gamma) \omega$$

$$\text{Para } \dot{x} = -10\pi$$

$$-10\pi = -K \text{sen} [5\pi(0) + \gamma] 5\pi$$

$$-10\pi = -K \text{sen} \gamma 5\pi$$

$$-2 = -K \text{sen} \gamma \quad (2)$$

De la ecuación (1)

$$\cos \gamma = 0$$

luego

$$\gamma = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

De la ecuación (2)

$$-2 = -K \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

luego

$$K = 2$$

3.4 MOVIMIENTO RELATIVO

Para la solución de algunos problemas relativos al movimiento de una partícula, es conveniente analizar dicha partícula *con respecto* a otra partícula también móvil (que usualmente se hace coincidir con el origen de un marco de referencia móvil), en un marco de referencia considerado fijo. En esta sección se estudia el movimiento de tales partículas, al cual se le denomina *movimiento relativo*.

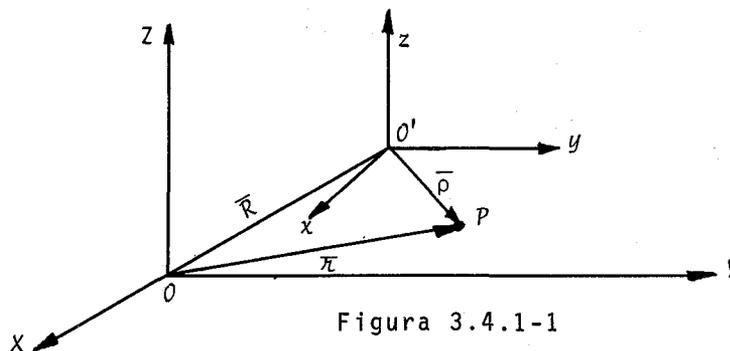
Inicialmente se estudia aquel caso en que el marco de referencia móvil sólo se traslada (es decir, no se desorienta durante el movimiento), lo que implica que los vectores unitarios asociados a los ejes coordenados son constantes. Después se analiza el movimiento de la partícula cuando el sistema coordinado móvil gira, para el que los vectores unitarios han de considerarse variables, ya que cambian de dirección al transcurrir el tiempo.

Para ambos casos se obtienen las expresiones que definen

los conceptos cinemáticos, absolutos y relativos, referidos ya sea a un marco de referencia fijo o a uno móvil, según sea el caso.

3.4.1 POSICION, VELOCIDAD Y ACELERACION ABSOLUTAS

Considérense una partícula P y una O' , en movimiento, y ésta última coincidiendo con un marco de referencia que se traslada, como se muestra en la figura 3.4.1-1



De acuerdo con la figura 3.4.1-1, la posición absoluta de la partícula P , referida al marco de referencia fijo XYZ , queda expresada por la siguiente ecuación cinemática

$$\bar{r} = \bar{R} + \bar{\rho} \quad (3.4.1-1)$$

A partir de la expresión anterior se obtienen la velocidad y la aceleración absolutas por derivaciones sucesivas, de la siguiente forma:

$$\dot{\bar{v}} = \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} + \dot{\bar{\rho}} \quad (3.4.1-2)$$

$$\ddot{\bar{a}} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \ddot{\bar{\rho}} \quad (3.4.1-3)$$

En las ecuaciones (3.4.1-2) y (3.4.1-3) se ha empleado la notación de Newton para indicar la primera y segunda derivada con respecto a la variable que es el tiempo.

3.4.2 POSICION, VELOCIDAD Y ACELERACION RELATIVAS

Los conceptos cinemáticos relativos de una partícula en movimiento son aquellos que se refieren a la otra partícula móvil que en la figura anterior es a la vez el origen de un sistema- - coordinado móvil de referencia.

Así, la posición relativa, con respecto al punto móvil O' , de la partícula P es $\bar{\rho}$, que algunos autores suelen designar como $\bar{\kappa}_{P/O'}$ (posición de P con respecto a O') o bien $\bar{\rho}_{P/O'}$ (vector desplazamiento de P hacia O'). Entonces la ecuación (3.4.1-1) expresa lo siguiente: *la posición absoluta \bar{r} de la partícula P es igual a la posición absoluta \bar{R} del punto móvil O' , más la posición relativa de P con respecto a O' . Nótese que los conceptos absolutos están referidos al marco fijo, en tanto que los relativos lo están al sistema coordinado móvil.*

De forma similar, la velocidad relativa de la partícula P cuyo movimiento se analiza, está representada por el término $\dot{\bar{\rho}}$ de la ecuación (3.4.1-2) que expresa: *la velocidad absoluta $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$ de una partícula que se mueve con respecto a otro punto móvil es igual a la velocidad absoluta $\dot{\bar{R}}$ de tal punto, más la velocidad relativa $\dot{\bar{\rho}}$ de P con respecto a O' (que también puede escribirse como $\dot{\bar{\kappa}}_{P/O'}$ o bien $\dot{\bar{\rho}}_{P/O'}$).*

Finalmente, la ecuación (3.4.1-3) expresa que la *aceleración absoluta $\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}$ de una partícula en movimiento referido a otra, es igual a la aceleración absoluta de ésta $\ddot{\bar{R}}$, más la aceleración relativa $\ddot{\bar{\rho}}$ de P con respecto a O' , según la figura anterior.*

A continuación se estudia el caso de una partícula que se mueve con respecto a un sistema animado de movimiento de rotación, lo cual implica que tal sistema gira con velocidad angular $\bar{\omega}$. Para este caso se establecerán los conceptos cinemáticos absolutos y relativos y los correspondientes a velocidad y aceleración de arrastre, así como el de aceleración de Coriolis. Obsérvese la figura 3.4.1-2

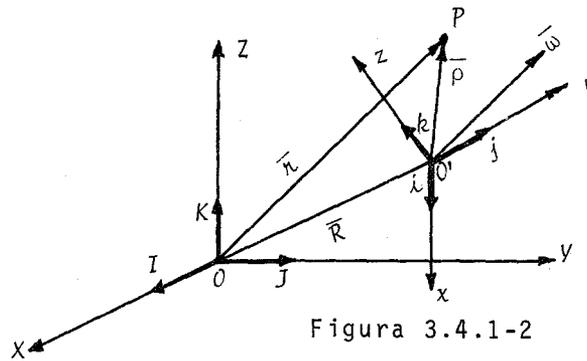


Figura 3.4.1-2

En la figura 3.4.1-2 se tiene que:

- P es la partícula móvil en estudio,
- O' es un punto, también móvil, con respecto al cual se mueve la partícula P , y con el que coincide el origen del sistema coordenado móvil,
- x, y, z es el sistema coordenado móvil al que corresponde una velocidad angular $\bar{\omega}$,
- \bar{R} es el vector de posición del punto móvil O' , con respecto al origen del marco fijo de referencia,
- \bar{r} y $\bar{\rho}$ son los vectores de posición de la partícula P en movimiento, con relación a los sistemas coordenados fijo y móvil, respectivamente,
- X, Y, Z es el marco de referencia considerado fijo con origen en O ,
- i, j, k son los vectores unitarios asociados a los ejes coordenados x, y, z , respectivamente y
- I, J, K son los vectores unitarios asociados a los ejes coordenados X, Y, Z , respectivamente.

3.4.3 VELOCIDAD Y ACELERACION DE ARRASTRE

De la misma forma como se estableció la ecuación (3.4.1-1) se puede establecer que

$$\bar{r} = \bar{R} + \bar{\rho}$$

pero

$$\bar{\rho} = ix + jy + kz,$$

por lo que

$$\bar{r} = \bar{R} + ix + jy + kz \quad (3.4.2-1)$$

Derivando la expresión anterior respecto al tiempo, se obtiene la ecuación cinemática de la velocidad, de la siguiente forma

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} + \frac{d}{dt}(ix + jy + kz)$$

En este caso los vectores unitarios i, j y k han de considerarse variables pues cambian de dirección, en virtud de que el sistema coordinado al que están asociados gira con velocidad angular $\bar{\omega}$. Por lo tanto, empleando la notación Newtoniana, se tiene:

$$\frac{d}{dt}(ix + jy + kz) = \dot{i}x + i\dot{x} + \dot{j}y + j\dot{y} + \dot{k}z + k\dot{z}$$

Así que

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} + \dot{i}x + i\dot{x} + \dot{j}y + j\dot{y} + \dot{k}z + k\dot{z}$$

Ahora bien, de acuerdo con la fórmula de Poisson, la primera derivada de un vector variable respecto al tiempo es igual al producto vectorial de la velocidad angular por el propio vector variable. Es decir:

$$\frac{di}{dt} = \dot{i} = \bar{\omega} \times i \quad ; \quad \frac{dj}{dt} = \dot{j} = \bar{\omega} \times j \quad ; \quad \dot{k} = \bar{\omega} \times k$$

Por lo anterior

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times (\rho_x + j\rho_y + k\rho_z) + (\rho_x \dot{i} + j\rho_y \dot{j} + k\rho_z \dot{k})$$

Como

$$\bar{\rho} = \rho_x i + \rho_y j + \rho_z k$$

$$\bar{\omega} \times (\rho_x i + \rho_y j + \rho_z k) = \bar{\omega} \times \bar{\rho}$$

Por otro lado, si

$$\dot{\bar{\rho}} = \rho_x \dot{i} + j\rho_y \dot{j} + k\rho_z \dot{k}$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}} \quad (3.4.2-2)$$

La ecuación (3.4.2-2) es la expresión cinemática de la velocidad en la cual:

$\dot{\bar{v}} = \dot{\bar{r}}$ es la velocidad absoluta de la partícula P en movimiento,

$\dot{\bar{\rho}}$ es la velocidad relativa de la partícula móvil con respecto al origen del sistema coordenado móvil O' ,

$\dot{\bar{R}}$ es la velocidad absoluta del origen del sistema móvil de referencia, y es así mismo la velocidad de traslación de tal sistema,

$\bar{\omega} \times \bar{\rho}$ es la velocidad absoluta impuesta al sistema móvil por su rotación con respecto al marco fijo,

$\dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}$ es lo que se conoce como *velocidad de arrastre*.

Aceleración de Coriolis

La ecuación cinemática de la aceleración se obtiene por la segunda derivada de \bar{r} con respecto al tiempo, como sigue:

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \ddot{\bar{\rho}}$$

Agrupando

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}} + \ddot{\bar{\rho}}$$

de donde se obtiene:

$$\ddot{\bar{a}} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}} + \ddot{\bar{\rho}} \quad (3.4.2-3)$$

en que:

$\ddot{\bar{r}}$ es la aceleración absoluta de la partícula P en movimiento,

$\ddot{\bar{\rho}}$ es la aceleración relativa de P , con respecto al origen O' , del sistema móvil de referencia,

$\ddot{\bar{R}}$ es la aceleración absoluta del origen del sistema de referencia del sistema móvil,

$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}$ es la aceleración tangencial debida a la aceleración angular del sistema móvil,

$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$ es la aceleración normal debida a la aceleración angular del sistema móvil de referencia,

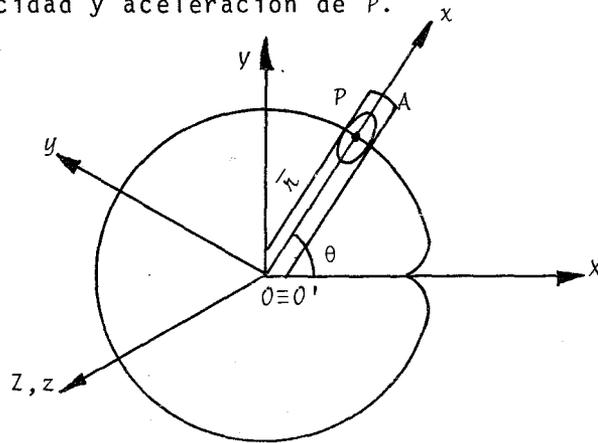
$2\bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}}$ es la aceleración de Coriolis debida a la interacción de la velocidad angular del sistema coordenado móvil y la velocidad relativa de la partícula P en movimiento y

$\ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$ es una suma de vectores que se le conoce como aceleración de arrastre.

Ejemplo. Una partícula P se mueve en la ranura de la barra OA y a lo largo de la curva, en el plano xy , descrita por:

$$r = a - b \cos \theta, \quad \theta = \frac{1}{2} ct^2$$

a, b y c , son constantes y $a > b$. Determine la velocidad y aceleración de P.



$$\bar{R} = 0$$

$t = \text{tiempo}$

$$\dot{\bar{R}} = 0$$

$$\ddot{\bar{R}} = 0$$

$$\bar{\omega} = \dot{\theta} k$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ct^2 \right) k$$

$$\bar{\omega} = ctk$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d}{dt} (ct)k$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\alpha}} = ck$$

$$\bar{\rho} = \bar{r} = (a - b \cos \theta) \mathbf{i}$$

$$\dot{\bar{\rho}} = (b \sin \theta \frac{d\theta}{dt}) \mathbf{i}$$

$$\dot{\bar{\rho}} = bct \sin \theta \mathbf{i}$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = \frac{d}{dt} (bct \sin \theta) \mathbf{i} = [bc \sin \theta + bct \frac{d}{dt} (\sin \theta)] \mathbf{i}$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = (bc \sin \theta + bct \cos \theta ct) \mathbf{i}$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = (bc \sin \theta + bc^2 t^2 \cos \theta) \mathbf{i}$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}}$$

$$\bar{v} = 0 + ctk \times (a - b \cos \theta) \mathbf{i} + bct \sin \theta \mathbf{i}$$

$$ctk \times (a - b \cos \theta) \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & ct \\ (a - b \cos \theta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = ct(a - b \cos \theta) \mathbf{j}$$

$$\bar{v} = bct \sin \theta \mathbf{i} + ct(a - b \cos \theta) \mathbf{j}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}) + \ddot{\bar{\rho}} + 2\dot{\bar{\omega}} \times \dot{\bar{\rho}}$$

$$\bar{a} = 0 + ck \times (a - b \cos \theta) \mathbf{i} + ctk \times [ctk \times (a - b \cos \theta) \mathbf{i}] +$$

$$(bc \sin \theta + bc^2 t^2 \cos \theta) \mathbf{i} + 2 [ctk \times (bct \sin \theta) \mathbf{i}]$$

como $ctk \times (a-b\cos\theta)_i = ct (a-b\cos\theta)_j$

y $ctk \times ct(a-b\cos\theta)_j = -c^2 t^2 (a-b\cos\theta)_i$

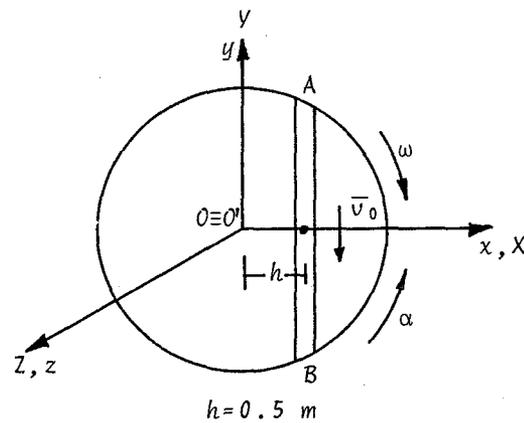
$\therefore \bar{a} = 0 + c(a-b\cos\theta)_j - c^2 t^2 (a-b\cos\theta)_i +$

$(bc\sin\theta + bc^2 t^2 \cos\theta)_i + 2 [c^2 t^2 b \sin\theta]_j$

$\bar{a} = [-c^2 t^2 (a-b\cos\theta) + bc\sin\theta + bc^2 t^2 \cos\theta]_i +$

$[c(a-b\cos\theta) + 2 bc^2 t^2 \sin\theta]_j$

Ejemplo. Una partícula P se mueve con una velocidad relativa constante $v_0 = 25\text{m/s}$ de A a B en la ranura AB de un disco que está girando. En el instante que muestra la figura, la partícula está en la parte media de la ranura y el disco está girando con una velocidad angular $\omega = 20\text{ s}^{-1}$ y una aceleración angular $\alpha = 5\text{ s}^{-2}$ como se indica en la figura. Determine la velocidad y aceleración de P .



$\bar{R} = 0$

$\dot{\bar{R}} = 0$

$\ddot{\bar{R}} = 0$

$\bar{\omega} = -20k$

$$\bar{\alpha} = 5k$$

$$\bar{\rho} = 0.5i \quad , \quad \dot{\bar{v}} = -25j \quad , \quad \ddot{\bar{\rho}} = 0$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \dot{\bar{v}}$$

$$\dot{\bar{r}} = 0 + (-20k \times 0.5i) + (-25j) \quad ; \quad \bar{\omega} \times \bar{\rho} = -10j$$

$$\dot{\bar{r}} = (-10 - 25)j = -35j \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \ddot{\bar{\rho}} + 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{v}}$$

$$\bar{a} = 0 + 2.5j + (-200)i + 0 + 2[-500i]$$

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} = 2.5j \quad ; \quad \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = -200i$$

$$\bar{\omega} \times \dot{\bar{v}} = -500i$$

$$\bar{a} = -1200i + 2.5j \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

4

CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE APRENDIZAJE

El alumno:

1. Describirá el movimiento de un cuerpo rígido en términos de un marco de referencia fijo y otro móvil ligado sólidamente a tal cuerpo.
2. Obtendrá las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración del cuerpo rígido, a partir de las expresiones generales del movimiento relativo.
3. Deducirá la condición del movimiento de traslación de un cuerpo rígido.

4. Explicará los diferentes tipos de traslación de un cuerpo rígido.
5. Planteará la condición del movimiento de rotación de un cuerpo rígido en torno de un eje.
6. Planteará la condición del movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto.
7. Deducirá la condición necesaria y suficiente para considerar el movimiento de un cuerpo rígido como plano general.
8. A partir de las ecuaciones generales de movimiento del cuerpo rígido, deducirá las correspondientes para los casos de traslación plana.
9. Resolverá problemas de traslación del cuerpo rígido.
10. A partir de las ecuaciones generales de movimiento del cuerpo rígido, deducirá las correspondientes para los casos de rotación plana.
11. Resolverá problemas de rotación plana.
12. Resolverá problemas de movimiento plano general, utilizando las expresiones generales de movimiento del cuerpo rígido.
13. Definirá los conceptos de centros instantáneos de rotación y de aceleración nula.
14. Resolverá problemas de movimiento plano general, utilizando el concepto de centro instantáneo de rotación.
15. Resolverá problemas de mecanismos de cuatro articulaciones.

INTRODUCCION

En el último inciso del capítulo anterior se estudió el movimiento relativo de partículas. La cinemática del cuerpo rígido estudia el movimiento de tal modelo de sólido, independientemente de las causas que lo determinan. Trata los conceptos cinemáticos angulares y lineales de posición y desplazamiento, velocidad y aceleración de los sistemas indeformables de partículas materiales.

En el primer inciso de este capítulo se describe el movimiento del cuerpo rígido utilizando un marco de referencia fijo y otro móvil ligado sólidamente al cuerpo. Se definen también las condiciones de los movimientos, y se distinguen sus diferentes tipos.

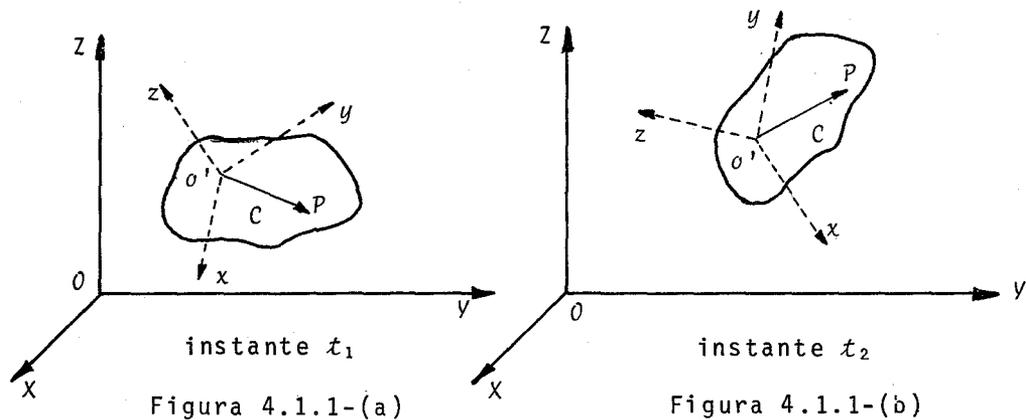
En el inciso segundo se deducen las expresiones cinemáticas que caracterizan a los tipos de movimiento del cuerpo rígido, y se proponen algunos ejemplos de aplicación.

4.1 TIPOS DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RIGIDO

4.1.1 EL MOVIMIENTO DEL CUERPO RIGIDO

El caso general del movimiento del cuerpo rígido se estudia considerando un marco de referencia fijo XYZ , y otro móvil xyz cuyo origen puede estar o no en dicho cuerpo, pero que siempre estará sólidamente ligado a él.

Si se analiza el movimiento general del cuerpo rígido, para dos instantes t_1 y t_2 , éste sufre desplazamientos lineal y angular, como se muestra a continuación:



Se distinguen los siguientes tipos de movimiento para el cuerpo rígido:

- Traslación.- Plana y no plana; rectilínea o curvilínea.
- Rotación en torno a un eje.- Concéntrica y excéntrica.
- Rotación alrededor de un punto.- Concéntrica y excéntrica.
- Movimiento plano general.

A continuación se tratan por separado los casos particulares del movimiento del cuerpo rígido, de acuerdo con las consideraciones anteriores y observando en las figuras 4.1.1-(a) y (b) - que el segmento dirigido \vec{OP} , de magnitud constante, cambia de posición y dirección al transcurrir el tiempo.

4.1.2 TRASLACIONES PLANA Y NO PLANA, RECTILÍNEA Y CURVILÍNEA

El movimiento de traslación se caracteriza porque todo -- segmento dirigido del cuerpo (tal como el \vec{OP} de las figuras -- 4.1.1-(a) y (b) conserva su dirección durante el movimiento; todas las partículas de dicho cuerpo describen trayectorias paralelas.

La traslación, cuando ocurre en un plano, recibe el nombre de *traslación plana*, y las trayectorias descritas por sus partículas pueden ser *rectilíneas* o *curvilíneas*.

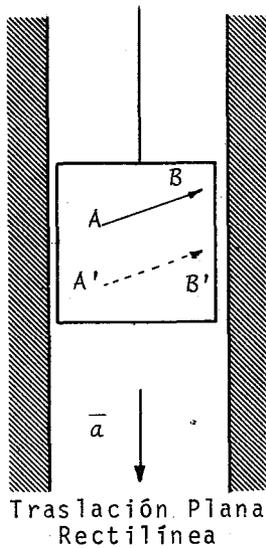
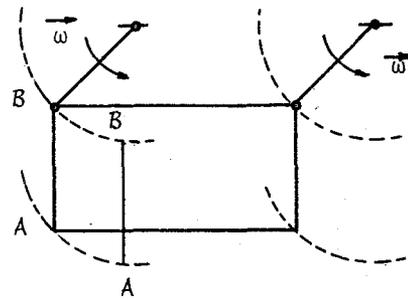


Figura 4.1.2-(a)



Traslación Plana Curvilínea

Figura 4.1.2-(b)

El movimiento de traslación puede presentarse en el espacio tridimensional, denominándose *traslación no plana*. Este se ilustra a continuación:

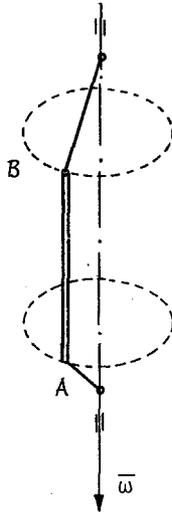


Figura 4.1.2-2

Quando un cuerpo está animado de un movimiento de traslación, su estudio se reduce al análisis de un punto cualquiera de dicho cuerpo, ya que sus características cinemáticas son las mismas para todas las demás partículas.

4.1.3 ROTACIONES EN TORNO DE UN EJE Y ALREDEDOR DE UN PUNTO

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido en torno de un eje se caracteriza porque todo punto del cuerpo conserva constante su distancia con respecto al eje, al transcurrir el tiempo.

Si el eje con respecto al cual se estudia el movimiento del cuerpo rígido pertenece a éste, los puntos contenidos en dicho eje, denominado *eje de rotación*, permanecen fijos; todos los demás puntos del cuerpo describen trayectorias circunferenciales contenidas en planos perpendiculares a dicho eje. Cuando el eje de rotación contiene al centro de gravedad del cuerpo, a este movimiento se le denomina de *rotación concéntrica*, en torno de un eje.

También se presenta el movimiento de *rotación excéntrica*, que corresponde al caso para el cual el eje de rotación queda fuera del centro de gravedad del sólido.

Figura 4.1.3-1 (a)

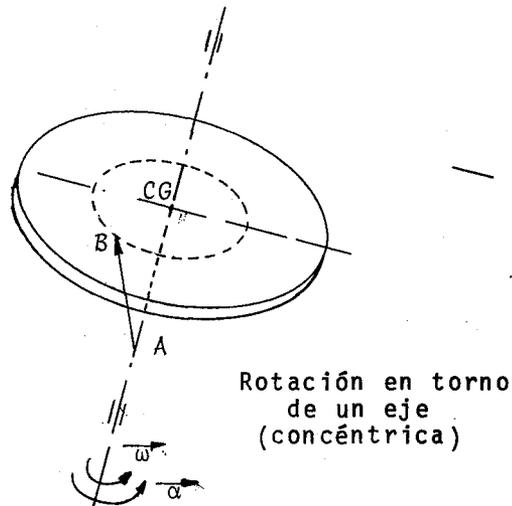
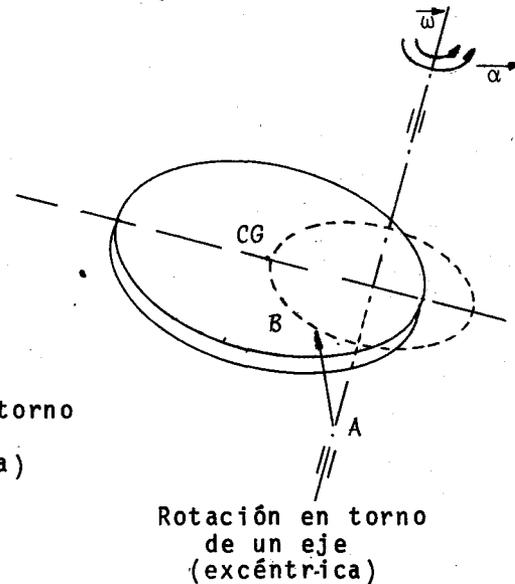


Figura 4.1.3-1 (b)

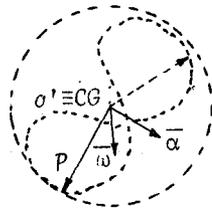


El movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto se caracteriza porque la distancia de un punto cualquiera de dicho cuerpo, con respecto al punto fijo de giro, es constante al transcurrir el tiempo.

Cuando el punto con respecto al cual gira el cuerpo contiene el centro de gravedad, se dice que el movimiento de rotación es *concéntrico*. Consecuentemente, la *rotación excéntrica* con respecto a un punto se presenta cuando éste no corresponde al centro de gravedad del cuerpo.

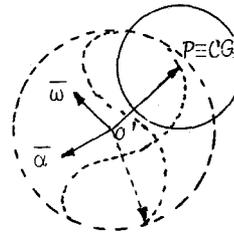
A continuación se ilustra el movimiento de un cuerpo alrededor de un punto.

Figura 4.1.3-2 (a)



Concéntrica

Figura 4.1.3-2 (b)

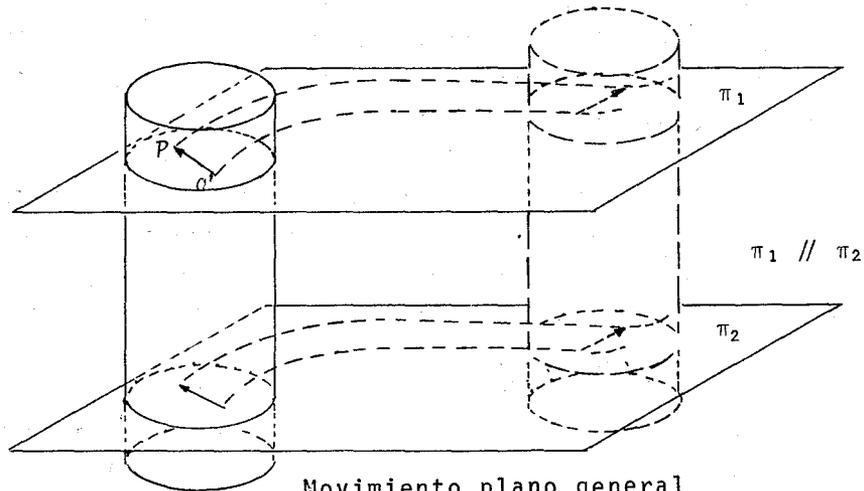


Excéntrica

4.1.4 MOVIMIENTO PLANO GENERAL.

Este tipo de movimiento se caracteriza porque las trayectorias de todos los puntos de un cuerpo rígido son paralelas a un plano determinado; por ello, su estudio se puede llevar a cabo -- analizando una sección del cuerpo paralela a dicho plano, ya que todos los puntos contenidos en una recta normal a ese plano tienen idénticas características cinemáticas.

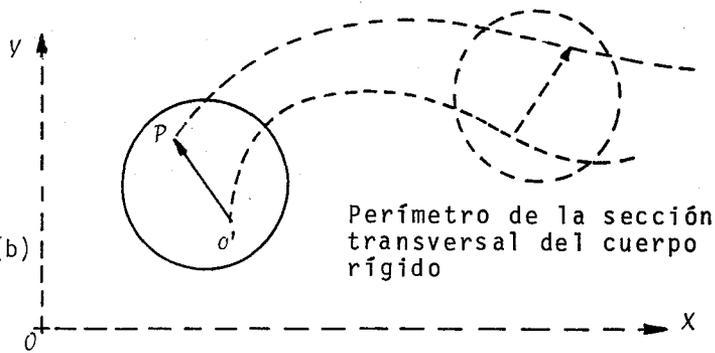
En las figuras siguientes se ilustra el movimiento plano-general:



Movimiento plano general

Figura 4.1.4-1 (a)

Figura 4.1.4-1 (b)



Ahora bien, el movimiento plano general puede analizarse como la superposición de dos tipos de movimiento: traslación plana, y de rotación en torno de un eje perpendicular al plano del movimiento. Lo anterior se puede apreciar en la siguiente figura, considerando como plano del movimiento el XY:

Figura 4.1.4-2 (a)

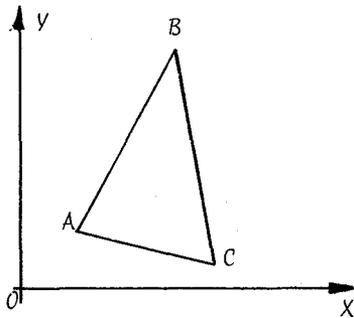
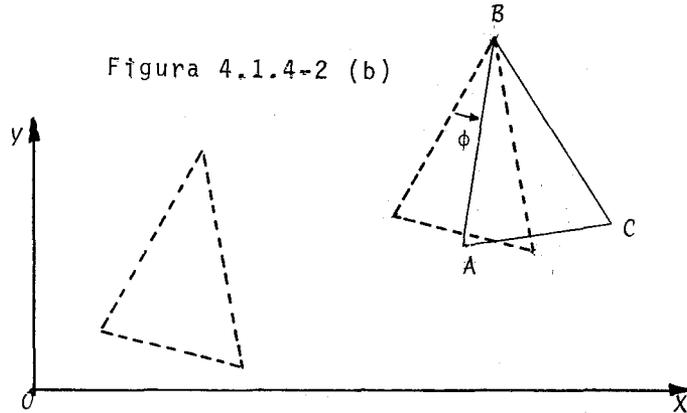
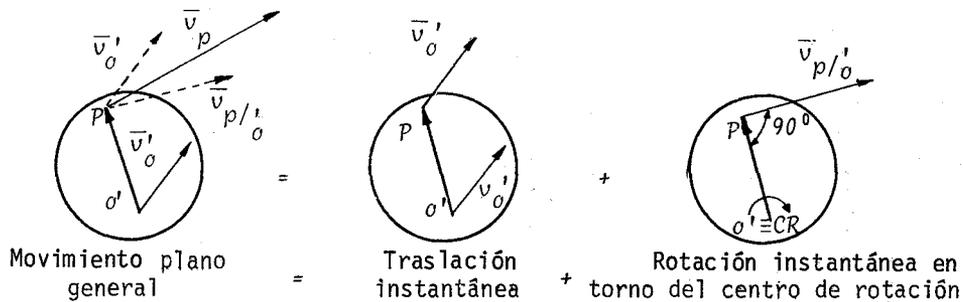


Figura 4.1.4-2 (b)



A la intersección del eje de rotación con el plano del movimiento se le denomina *centro de rotación* (CR). La siguiente figura aclara aún más el concepto de superposición:

Figura 4.1.4-3



4.2 ECUACIONES PARA LOS MOVIMIENTOS PLANOS DEL CUERPO RIGIDO.

Analicemos el movimiento del cuerpo rígido, en relación a un marco fijo de referencia, y a través de un sistema móvil que se mueva exactamente igual que el cuerpo en estudio, condición que implica que el vector $\bar{\rho}$ de cualquier punto del cuerpo (figura 4.2-1) sea constante.

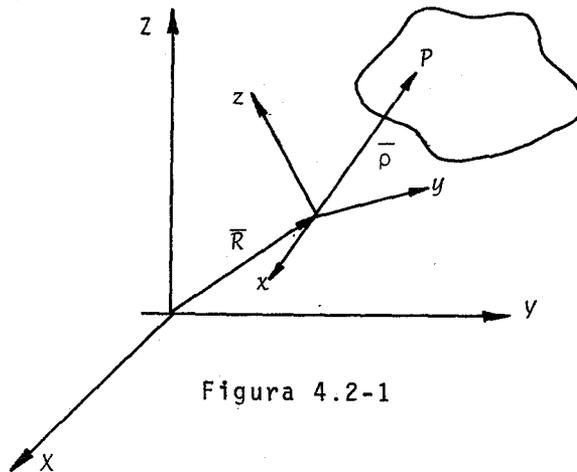


Figura 4.2-1

Las ecuaciones que nos permiten determinar las características cinemáticas de un punto, relacionadas a un sistema fijo, y a través de un sistema móvil de referencia, se han estudiado en el capítulo de movimiento relativo y son:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{R} + \bar{\rho} \\ \bar{v} &= \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}} \\ \bar{a} &= \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \ddot{\bar{\rho}} + 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}}\end{aligned}\quad (4.2-1)$$

Ahora bien, si $\bar{\rho}$ es constante, se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{R} + \bar{\rho} \\ \bar{v} &= \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} \\ \bar{a} &= \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})\end{aligned}\quad (4.2-2)$$

Las ecuaciones anteriores (4.2-2) constituyen las ecuaciones generales que nos permiten conocer las características cinemáticas de cualquier punto de un cuerpo rígido.

4.2.1 TRASLACIONES RECTILÍNEA Y CURVILÍNEA

Tomando en cuenta que la traslación de un cuerpo se caracteriza por la constancia en la orientación de cualquier segmento dirigido determinado por dos puntos cualesquiera del cuerpo, y -- debido a que el sistema móvil de referencia se mueve de la misma manera que el cuerpo, se tiene que $\bar{\omega} = 0$ y las ecuaciones generales de la cinemática del cuerpo rígido (4.2-2) se simplifican -- a la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{R} + \bar{p} \\ \bar{v} &= \dot{\bar{R}} \\ \bar{a} &= \ddot{\bar{R}}\end{aligned}\tag{4.2.1-1}$$

Al observar las ecuaciones anteriores, se concluye que -- tanto la velocidad como la aceleración de cualquier punto del -- cuerpo son las mismas que la velocidad y aceleración del origen -- del sistema móvil de referencia, es decir, que, en un cuerpo que se mueve con movimiento de traslación, rectilínea o curvilínea, -- todas las características cinemáticas de sus puntos, a excepción -- obvia de su posición, son iguales.

Ejemplo. Las componentes de la aceleración en cualquier instante de los puntos P, Q y R de un cuerpo rígido que se traslada, son:

$$\begin{aligned}\bar{a}_P &= 4 \hat{i} \left[m/s^2 \right] && \text{según el eje } x \\ \bar{a}_Q &= 10 \hat{j} \left[m/s^2 \right] && \text{según el eje } y \\ \bar{a}_R &= 0 && \text{según el eje } z\end{aligned}$$

En cierto momento la rapidez del cuerpo alcanza 210 m/seg, de suerte que en ese instante, para los puntos en cuestión:

$$\bar{v}_P = 60 \, i \left[\frac{m}{s} \right] \quad \text{según el eje } x$$

$$\bar{v}_Q = 90 \, j \left[\frac{m}{s} \right] \quad \text{según el eje } y$$

$$\bar{v}_R > 0 \quad \text{según el eje } z$$

Determine la velocidad del cuerpo 4 seg después del instante que corresponde a estos datos.

Solución:

La aceleración del cuerpo será constante e igual en cualquier punto del cuerpo, por lo tanto:

$$\bar{a} = 4i + 10j + 0k$$

$$\bar{v} = \int a dt = 4ti + 10tj + \bar{c}$$

$$\text{Para } t=0, \quad \bar{v} = \bar{v}_0, \quad \text{luego } \bar{c} = \bar{v}_0$$

$$\bar{v}_0 = 60i + 90j + zk \quad ; \quad |\bar{v}_0| = 210 \Rightarrow 210 = \sqrt{60^2 + 90^2 + z^2}$$

$$z = 180$$

$$\text{Así: } \bar{v} = 4ti + 10tj + (60i + 90j + 180k)$$

$$\bar{v} = (4t + 60) i + (10t + 90) j + 180k$$

$$\text{Para } t = 4: \quad \bar{v} = 76i + 130j + 180k \left[\frac{m}{s} \right]$$

4.2.2 ROTACIONES CONCENTRICA Y EXCENTRICA

Un cuerpo tendrá un movimiento de rotación concéntrica cuando el centro de rotación del movimiento coincida con el centro de gravedad del cuerpo, en caso contrario, la rotación será excéntrica.

Consideremos un cuerpo C con movimiento de rotación en tor

no al punto O' como se muestra en la figura 4.2.2-1 (a)

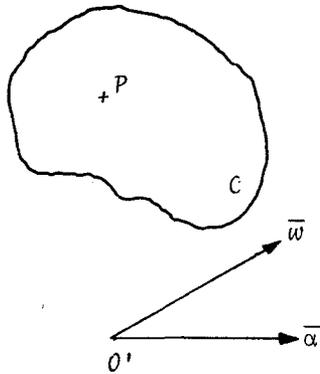


Figura 4.2.2-1 (a)

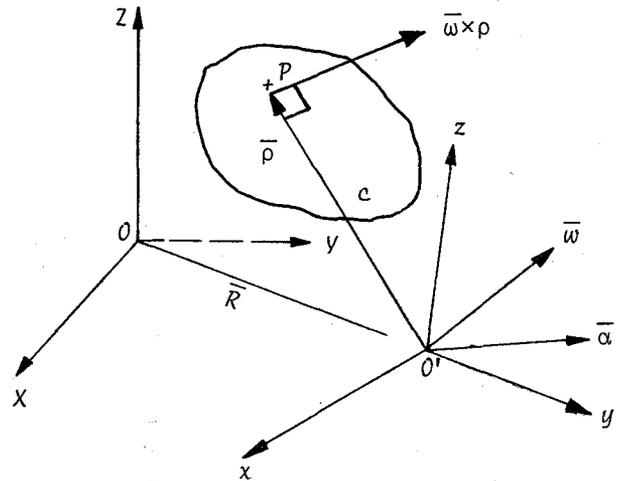


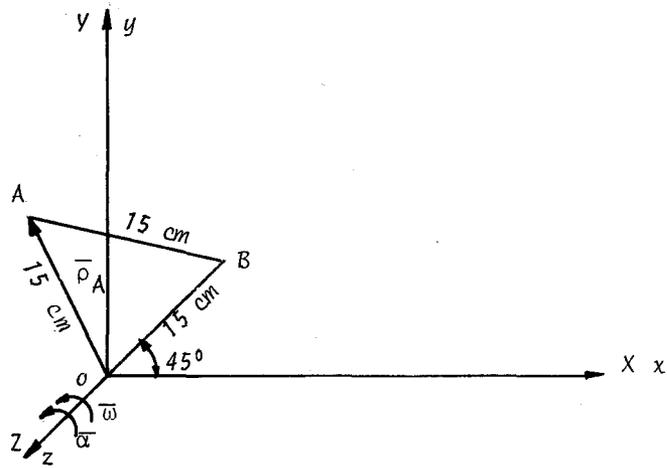
Figura 4.2.2-1 (b)

Situando los orígenes de los sistemas de referencia en el centro de rotación O' como se muestra en la figura 4.2.2-1 (b), $\ddot{\bar{R}} = \ddot{\bar{R}} = 0$ y las ecuaciones generales de la cinemática del cuerpo rígido (4.2.2) quedarán de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \bar{\omega} \times \bar{\rho} \\ \bar{a} &= \bar{\alpha} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) \end{aligned} \right\} (4.2.2-1)$$

Siendo indistinta su utilización para movimientos de rotación concéntrica o excéntrica.

Ejemplo. La placa triangular de la figura gira en el plano xoy en torno del punto O , con una rapidez angular $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$ y una aceleración angular $\alpha = 2 \text{ s}^{-2}$ en el mismo sentido que ω . Determine la velocidad y aceleración del punto A.



Solución:

Haciendo coincidir el origen de ambos sistemas en el centro de rotación

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_A \quad ; \quad \bar{\omega} = 6k \quad , \quad \bar{\rho}_A = -15 \cos 75^\circ i + 15 \sin 75^\circ j$$

$$\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ -3.88 & 14.49 & 0 \end{vmatrix} = -86.94i - 23.28j$$

$$\bar{v}_A = -86.94i - 23.28j \quad [\text{cm/s}]$$

$$\bar{a}_A = \bar{\alpha} \times \bar{\rho}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A)$$

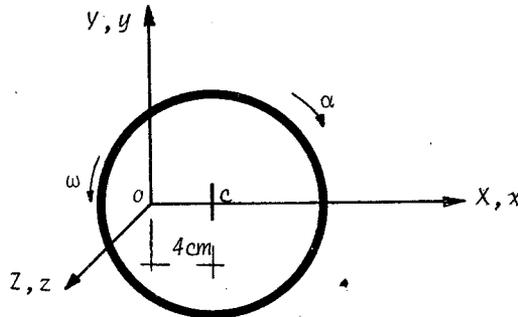
$$\bar{\alpha} = 2k \quad , \quad \bar{\alpha} \times \bar{\rho}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -3.88 & 14.49 & 0 \end{vmatrix} = -28.98i - 7.76j$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ -86.94 & -23.28 & 0 \end{vmatrix} = 139.68i - 521.64j$$

$$\bar{a}_A = -28.98i - 7.76j + 139.68i - 521.64j$$

$$\bar{a}_A = 110.70i - 529.40j \quad [cm/s^2]$$

Ejemplo. Un disco gira excéntricamente en el plano xoy - en torno al punto O con una rapidez angular $\omega = 8 \text{ seg}^{-1}$ y una aceleración angular de módulo 3 seg^{-2} , como se muestra en la figura. Calcule la velocidad y la aceleración de su centro C .



Solución:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_C = 8k \times 4i = 32j \quad [cm/s]$$

$$\bar{a}_C = \bar{\alpha} \times \bar{\rho}_C + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C)$$

$$\bar{\alpha} \times \bar{\rho}_C = -3k \times 4i = -12j$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) = 8k \times 32j = -256i$$

$$\bar{a}_C = -256i - 12j \quad [cm/s^2]$$

4.2.3 MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Teniendo en cuenta que el movimiento plano de un cuerpo se puede descomponer en un movimiento de traslación simple más un movimiento de rotación en torno a un punto llamado *punto base*, - podemos efectuar en forma separada y en cualquier orden ambos movimientos. Así, consideremos un cuerpo C (figura 4.2.3-1) que se mueve con movimiento plano.

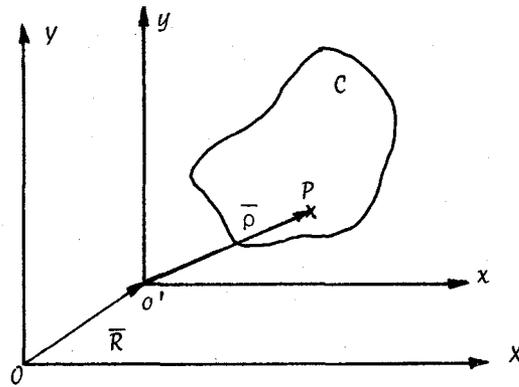


Figura 4.2.3-1

Analizando las características cinemáticas del punto P -- del cuerpo tenemos:

- a) Un movimiento de P debido a la traslación del cuerpo C, caracterizado por el movimiento de traslación de -- O'

$$\bar{r}_P = \bar{R} + \bar{\rho}$$

$$\bar{v}_{P/T} = \dot{\bar{R}} \quad \text{Velocidad de P debida a traslación.}$$

$$\bar{a}_{P/T} = \ddot{\bar{R}} \quad \text{Aceleración de P debida a traslación.}$$

- b) Un movimiento de P debido a la rotación del cuerpo C, en torno del punto O', punto base.

$$\bar{v}_{P/R} = \bar{\omega} \times \bar{\rho} \quad \text{Velocidad de P debida a rotación.}$$

$$\bar{a}_{P/R} = \bar{\alpha} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) \quad \text{Aceleración de P debida a rotación.}$$

Es decir, que se tiene un movimiento debido a traslación -- y otro debido a rotación en torno a un punto, que al efectuarse -- conjuntamente caracterizan el movimiento plano general del cuer-- po.

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \bar{v} \text{ traslación} + \bar{v} \text{ rotación} \\ \bar{a} &= \bar{a} \text{ traslación} + \bar{a} \text{ rotación}\end{aligned}$$

4.2.4 CENTRO INSTANTANEO DE ROTACION

Supongamos un cuerpo con movimiento plano como el de la figura 4.2.4-1 (a), en el cual se muestran las velocidades de dos puntos cualesquiera del cuerpo.

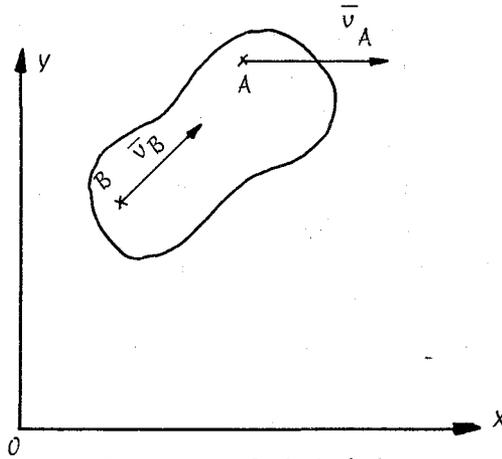


Figura 4.2.4-1 (a)

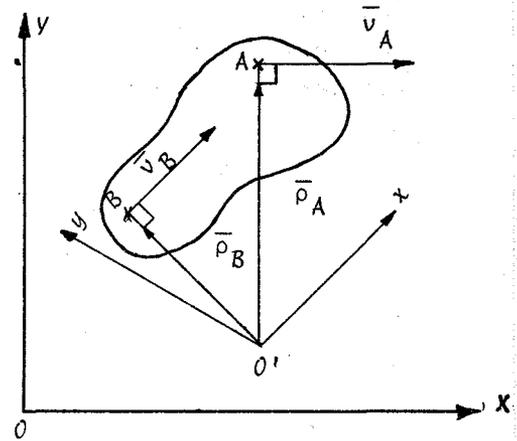


Figura 4.2.4-1 (b)

Si trazamos perpendiculares a los vectores velocidad \bar{v}_A y \bar{v}_B por los dos puntos A y B, éstas se cortarán en un punto en el cual situamos el origen del sistema móvil de referencia (figura 4.2.4-1 (b)). Así:

$$\bar{v}_A = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_A$$

$$\bar{v}_B = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_B$$

Como $\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A \parallel \bar{v}_A$, entonces $\dot{\bar{R}} \parallel \bar{v}_A$

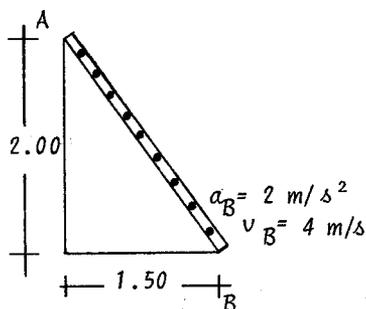
Por otro lado $\bar{\omega} \times \bar{\rho}_B \parallel \bar{v}_B$, luego $\dot{\bar{R}} \parallel \bar{v}_B$

Como $\dot{\vec{R}}$ no puede ser al mismo tiempo paralelo a \vec{v}_A y \vec{v}_B , necesariamente $\dot{\vec{R}} = 0$

Esto es, que en el instante de la configuración existe un punto (en donde hemos situado el origen del sistema móvil) - que no tiene velocidad ($\dot{\vec{R}} = 0$) llamado *centro instantáneo de rotación* o *centro instantáneo de velocidad nula*.

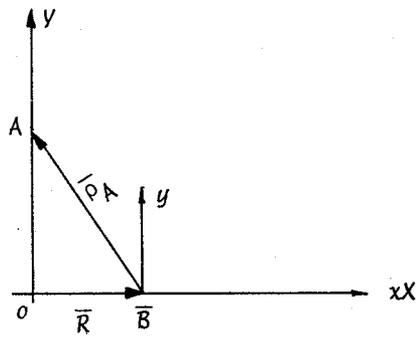
El centro instantáneo de rotación será de utilidad al hacerlo coincidir con el punto base al que se aludió en el movimiento plano general, pues en estas condiciones no existe velocidad debida a traslación, y la velocidad de cualquier punto del cuerpo será únicamente la debida a rotación en torno al centro instantáneo de rotación.

Ejemplo. La escalera AB se resbala, y en un instante determinado la velocidad y aceleración del punto B son las mostradas en la figura. Determine las propias del punto A, así como la velocidad y aceleración angulares de la escalera.



Solución:

Situando los sistemas de referencia de la siguiente forma tenemos:



$$\vec{v}_A = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{p}_A$$

$$\dot{\vec{R}} = 4 \hat{i}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

$$\vec{p}_A = -1.5 \hat{i} + 2 \hat{j}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{p}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -1.5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \omega \hat{i} - 1.5 \omega \hat{j}$$

Como $\vec{v}_A = v_{Aj}$

$$v_{Aj} = 4 \hat{i} + (-2 \omega \hat{i} - 1.5 \omega \hat{j})$$

$$v_{Aj} = (4 - 2 \omega) \hat{i} - 1.5 \omega \hat{j}$$

luego $4 - 2 \omega = 0$, $\omega = 2$, $\vec{\omega} = 2 \hat{k} \left[\text{s}^{-1} \right]$

$$\vec{v}_A = -3 \hat{j} \left[\text{m/s} \right]$$

$$\vec{a}_A = \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha} \times \vec{p}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_A)$$

$$\ddot{\vec{R}} = 2 \hat{i}$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{p}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1.5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \alpha \hat{i} - 1.5 \alpha \hat{j}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A = -4 \hat{i} - 3 \hat{j}$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \hat{i} - 8 \hat{j}$$

$$\bar{a}_A = 2 \hat{i} + (-2 \alpha \hat{i} - 1.5 \alpha \hat{j}) + 6 \hat{i} - 8 \hat{j}$$

$$\bar{a}_A = (-2 \alpha + 8) \hat{i} + (-1.5 \alpha - 8) \hat{j}$$

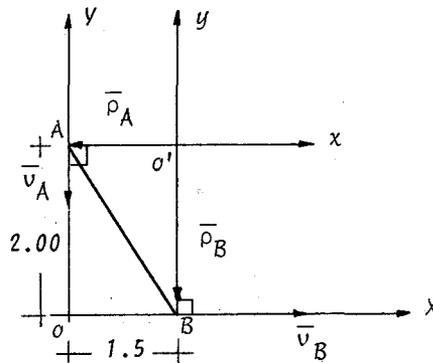
Como $\bar{a}_A = a_{Aj}$; $-2 \alpha + 8 = 0$ de donde --

$$\bar{\alpha} = 4 \hat{k} \left[s^{-2} \right] \text{ y } \bar{a}_A = -14 \hat{j} \left[m/s^2 \right]$$

Ejemplo. Determine la velocidad lineal del punto A y la velocidad angular de la escalera del problema anterior utilizando el concepto de centro instantáneo de rotación.

Solución:

Trazando perpendiculares a las velocidades \bar{v}_A y \bar{v}_B por los puntos A y B localizamos el centro instantáneo de rotación.



$$\bar{v}_B = 4i = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_B$$

$$\omega = \omega k$$

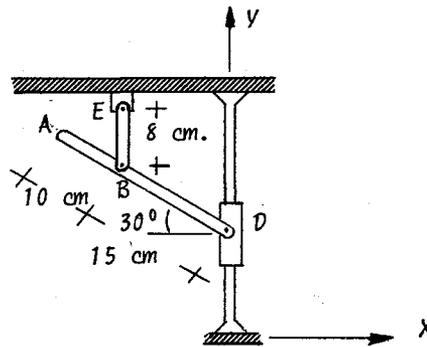
$$\bar{\rho}_B = -2j$$

$$4i = \omega k \times (-2j) \quad \therefore \bar{\omega} = 2k \left[\text{s}^{-1} \right]$$

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_A = 2k \times (-1.5i) = -3j \left[\text{m/s} \right]$$

Resultados que coinciden con los obtenidos en el ejemplo anterior.

Ejemplo. La corredera D del dispositivo de la figura - tiene una velocidad de 20 cm/s hacia arriba, - determine la velocidad de los puntos A y B así como la velocidad angular de la barra AD .



Solución:

Situando el origen del sistema móvil en el punto D , se tiene:

$$\bar{v}_B = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega}_{AD} \times \bar{\rho}_B$$

$$\dot{\bar{R}} = 20j$$

$$\bar{\omega}_{AD} \times \bar{\rho}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_{AD} \\ -13 & 7.5 & 0 \end{vmatrix} = -7.5 \omega_{AD} i - 13 \omega_{AD} j$$

$$\therefore \bar{v}_B = 20j + (-7.5 \omega_{AD} i - 13 \omega_{AD} j)$$

$$\bar{v}_B = 7.5 \omega_{AD} i + (20 - 13 \omega_{AD}) j \quad (1)$$

Para analizar el movimiento de la barra EB, coloquemos el origen del sistema móvil en el punto E:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_{EB} \times \bar{\rho}'_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_{EB} \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 8 \omega_{EB} i \quad (2)$$

Como B es un sólo punto (1) = (2)

$$8 \omega_{EB} i = -7.5 \omega_{AD} i + (20 - 13 \omega_{AD}) j$$

$$20 - 13 \omega_{AD} = 0 \Rightarrow \omega_{AD} = 1.54 \quad ; \quad \bar{\omega}_{AD} = 1.54 k \left[s^{-1} \right]$$

$$8 \omega_{EB} = -7.5 (1.54) \quad ; \quad \omega_{EB} = -1.44 \quad ; \quad \bar{\omega}_{EB} = -1.44 k \left[s^{-1} \right]$$

$$\bar{v}_B = (-1.44 k) \times (-8j) = -11.52 i \left[m/s \right]$$

$$\bar{v}_A = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega}_{AD} \times \bar{\rho}_A$$

$$\dot{\bar{R}} = 20j$$

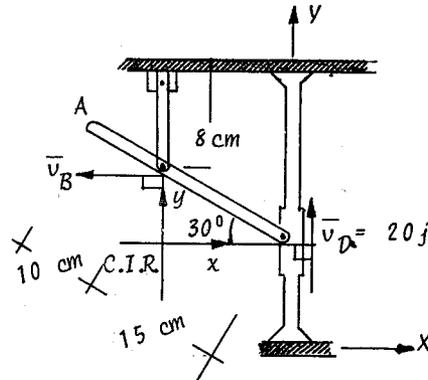
$$\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1.54 \\ -21.65 & 12.50 & 0 \end{vmatrix} = -19.25 i - 33.34 j$$

$$\bar{v}_A = -19.15 i - 13.34 j \left[m/s \right]$$

Resolvamos el problema utilizando el centro instantáneo de rotación.

Solución:

Colocando el origen del sistema móvil en el Centro Instantáneo de Rotación se tiene:



$$\vec{v}_D = \vec{\omega}_{AD} \times \vec{p}_D$$

$$\vec{\omega}_{AD} \times \vec{p}_D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_{AD} \\ 13 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 13 \omega_{AD} j$$

Como $\vec{v}_D = 20j$

$$20j = 13 \omega_{AD} j$$

$$\vec{\omega}_{AD} = 1.54 k \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AD} \times \vec{p}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1.54 \\ 0 & 7.5 & 0 \end{vmatrix} = -11.52 i \text{ [m/s]}$$

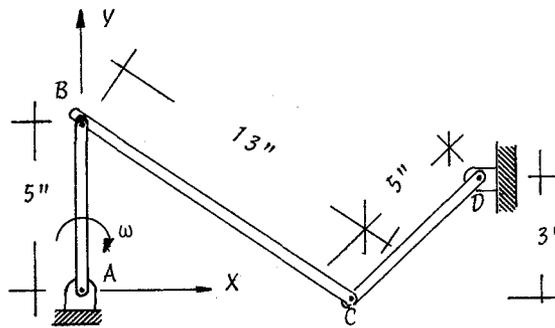
$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{AD} \times \vec{p}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1.54 \\ -8.66 & 12.5 & 0 \end{vmatrix} = -19.25 i - 13.34 j \text{ [m/s]}$$

4.2.5 MECANISMOS DE CUATRO ARTICULACIONES

Como su nombre lo indica, son dispositivos constituidos por 3 elementos, generalmente barras, que se encuentran articuladas en todos sus extremos, teniendo, por lo tanto, cada elemento un movimiento que depende de los demás.

El estudio de las características de estos dispositivos - lo haremos en base al desarrollo expuesto para movimientos planos en general.

Ejemplo. La barra AB del mecanismo tiene una velocidad angular de 8 s^{-1} con el sentido que se muestra en la figura. Determine las velocidades angulares de las barras BC y CD así como la velocidad lineal del punto C.



Solución:

Para la barra AB situemos el origen del sistema móvil en el punto A :

$$\bar{v}_B = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega}_{AB} \times \bar{\rho}_B ; \dot{\bar{R}} = 0 ; \bar{\omega}_{AB} = -8k ; \bar{\rho}_B = 5j$$

$$\bar{v}_B = 0 + (-8k \times 5j) = 40i \quad [in/s]$$

Localizando el origen del sistema móvil ahora en el punto B para la barra BC:

$$\bar{v}_C = \dot{\bar{r}} + \bar{\omega}_{BC} \times \bar{\rho}_C$$

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v}_B = 40i \quad ; \quad \bar{\rho}_C = 12i - 5j \quad ; \quad \bar{\omega}_{BC} = \omega_{BC}k$$

$$\bar{\omega}_{BC} \times \bar{\rho}_C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ 12 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \omega_{BC}i + 12 \omega_{BC}j$$

$$\therefore \bar{v}_C = (40 + 5 \omega_{BC})i + 12 \omega_{BC}j \quad (1)$$

Para la barra CD, con el origen del sistema móvil en D, -
tenemos:

$$\bar{v}_C = \dot{\bar{r}} + \bar{\omega}_{CD} \times \bar{\rho}_C$$

$$\dot{\bar{r}} = 0 \quad ; \quad \bar{\omega}_{CD} = \omega_{CD}k \quad ; \quad \bar{\rho}_C = -4i - 3j$$

$$\bar{\omega}_{CD} \times \bar{\rho}_C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_{CD} \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \omega_{CD}i - 4 \omega_{CD}j$$

$$\bar{v}_C = 3 \omega_{CD}i - 4 \omega_{CD}j \quad (2)$$

Como C es un solo punto (1) = (2)

$$(40 + 5 \omega_{BC})i + 12 \omega_{BC}j = 3 \omega_{CD}i - 4 \omega_{CD}j$$

$$40 + 5 \omega_{BC} = 3 \omega_{CD}$$

$$-4 \omega_{CD} = 12 \omega_{BC}$$

$$\omega_{BC} = -\frac{1}{3} \omega_{CD}$$

$$5 \left(-\frac{1}{3} \omega_{CD} \right) = 3 \omega_{CD}$$

$$40 = \frac{14}{3} \omega_{CD} \quad ; \quad \omega_{CD} = 8.57 \quad ; \quad \overline{\omega_{CD}} = 8.57k \left[s^{-1} \right]$$

$$\omega_{BC} = -\frac{1}{3} 8.57 = -2.86 \quad ; \quad \overline{\omega_{BC}} = -2.86k \left[s^{-1} \right]$$

$$\overline{v}_C = 3 (8.57) i - 4 (8.57) j$$

$$\overline{v}_C = 25.71i - 34.28j \left[\text{in/s} \right]$$

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA 30 DE
JUNIO DE 1982, EN LOS TALLERES DE MINAL IMPRESOS
SOS, S.A. PUEBLA 49, COL. ROMA, MEXICO 7, D.F.

LA EDICION CONSTA DE 2,000 EJEMPLARES
Y SOBANTES PARA REPOSICION.

